C 8/10

ELEMENTOS DE GEOMETRIA VECTORIAL

por

D. José Pizá Xatart

Profesor numerario de Mecánica General y Aplicada en la Escuela de Peritos Industriales y de Ingenieros de Industrias Textiles de Tarrasa

Lit. J. MORA - Aragón, 217 - BARCELONA

ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA VECTORIAL

por

D. José Pizá Xatart

Profesor numerario de Mecánica General y Aplicada en la Escuela de Peritos Industriales y de Ingenieros de Industrias Textiles de Tarrasa

Elementos de Geometria Vectorial

CAPITULO I

MAGNITUDES ESCALARES Y DIRIGIDAS .- VECTORES

1 .- Dentro del concepto o definición general que comprende todas las magnitudes ("todo cuanto es capaz de aumento o disminución"), en el terreno de la técnica y del cálculo solo interesa considerar las que tienen el carácter de medibles. Son éstas, las magnitudes de las cuales es posible definir la igualdad y la suma, y, en su consecuencia, la proporcionalidad.

Podemos citar entre las magnitudes medibles: la duración de un fenómeno, el calor almacenado por un cuerpo, la altura de un edificio, la velocidad de un móvil, etc. Entre las no medibles: la bondad, el odio, la intensidad de un dolor, etc.

2 .- En la categoría de las magnitudes medibles interesa considerar dos grandes grupos: el de las lineales o escalares y el de las complejas o vectoriales. Su diferencia primordial consiste en que mientras de las primeras (longitudes, duración de los fenómenos, cantidades de calor almacenadas, etc.) solo se tiene en cuenta el valor, tamaño o

dimensión, de las segundas es preciso considerar también la dirección en que actúan

Teniendo esto en cuenta, no podrán ser las mismas las formas de expresión y de representación de unas y otras magnitudes. Las escalares podrán ser expresadas por un solo número, abstracto ó concreto (0,82 ; 32 cm^3 ; 20 segundos). Podrán igualmente ser representadas mediante un segmento o abcisa tomado sobre una recta o eje de referencia. De ahí que se las llame también magnitudes lineales.

En cambio, a las magnitudes dotadas de dirección no es posible expresarlas mediante un solo número ni representarlas debidamente por medio de segmentos tomados sobre un solo eje. Son necesarios por lo menos dos de aquellos o dos de éstos, y por tal motivo reciben el nombre de complejas.

La forma de representación más empleada para las magnitudes dirigidas es la que está fundada en el empleo de "vectores" de los que seguidamente pasamos a ocuparnos. Ello justifica la denominación de vectoriales que se dá corrientemente a tales magnitudes.

3.- Vectores.- Su representación y designación.

Vector es todo segmento de recta AB (fig. 1) de dirección, sentido y longitud determinados. Sus extremos guardan, pues, un orden de prelación. El primero de dichos puntos es el origen y el segundo el extremo o vértice del vector.

los tres elementos indicados (dirección, sentido y magnitud) son los esenciales de un vector. En muchos casos lo son también la posición en el plano o en el espacio, de su eje, soporte o recta base y la de su punto de aplicación.

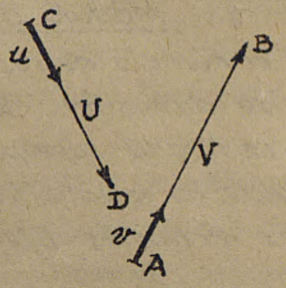


Fig. 1

La designación verbal de un vector puede hacerse enunciando las dos letras correspondientes al origen y al extremo, por este orden, por ejemplo: "Vector AB". Se hace también a veces empleando una sola letra, v.g.: "Vector V".

4.- Para la designación escrita de los vectores existe una gran diversidad de sistemas; muchos de ellos están basados en el empleo de tipos especiales de imprenta. Para nuestro objeto utilizaremos indistintamente dos de los mas usados y que bastan para las necesidades corrientes de la técnica:

Consiste el primero en encerrar las dos letras que designan el vector dentro de un paréntesis, ej.: vector (AB). El segundo estriba en superponer, a la letra o letras características del vector, una pequeña flecha que las abarque; así por ej.: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{V}$; $(\overrightarrow{v_1+v_2})$. En ciertos casos de extremada sencillez, puede prescindirse de tales requisitos escribiendo, por ejemplo: $F_1+F_2=R$, igualdad en la cual, por la significación de las letras, se sabe ya que se trata de vectores sin necesidad de emplear signos especiales.

5.- <u>Módulo o magnitud escalar</u> de un vector es el número de sus unidades, independientemente de su dirección. Se representa por simple supresión de la flecha superpuesta al símbolo del vector, o encerrando la letra o letras correspondientes, entre dos barras verticales. Ejemplo: V ; $|AB|$

6.- Llámase <u>versor</u> a un vector de módulo unidad cuya dirección y sentido concuerdan con los de otro vector de diferente magnitud. Así, en la figura 1 vemos representado sobre el vector (AB) el versor (v). Debe entenderse que cada eje o soporte vectorial tiene su versor propio, constituyendo éstos una clase o tipo de "coeficientes" que comunican caracter vectorial a las cantidades por las cuales son multiplicados. Entendiéndolo así podrá escribirse :

$$(AB) = \vec{V} = V.\vec{v} = |AB|\vec{v} \quad ; \quad (CD) = \vec{U} = |CD|\vec{u}$$

7.- Los vectores tienen un amplísimo campo de aplicación en todas las Ciencias Físicas, constituyendo un valioso instrumento de cálculo.

La longitud de cada vector debe ser proporcional, a escala, a la magnitud que represente. Además, entre las propiedades físicas de la magnitud representada, y las condiciones o características geométricas del vector utilizado, tiene que haber la debida correspondencia. De aquí la necesidad de utilizar diferentes clases de vectores, de las cuales trataremos a continuación.

8.- Vectores axiales.- Todo vector sujeto a mantenerse sobre una recta, como ocurre habitualmente en el caso de las fuerzas, recibe el nombre de vector axial.

En general, los vectores axiales pueden desplazarse a lo largo de su eje o línea de acción sin que varíen sus efectos. Cuando ocurre así, el vector es deslizante; cuando, por el contrario, está sujeto a permanecer ligado a un punto, como ocurre con el vector correspondiente al peso de un cuerpo, el cual está aplicado siempre a su centro de gravedad, se llamará entonces vector fijo.

9.- Se dice que dos vectores axiales deslizantes son iguales cuando, perteneciendo a un mismo eje, tienen la misma longitud y su sentido es el mismo. Se dirá que son opuestos cuando siendo coaxiales y de igual longitud tienen sentido contrario.

Dos vectores axiales son equipolentes cuando siendo iguales en magnitud, dirección y sentido, sus ejes no son uno mismo, sino paralelos.

En la fig. 2 los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales; los $\vec{a}$ y $\vec{A}$, y, $\vec{b}$ y $\vec{A}$, son equipolentes; los $\vec{a}$ y $\vec{c}$, opuestos.

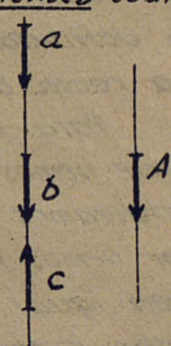


Fig. 2

La igualdad y la equipolencia se indican mediante el mismo signo $\vec{a}=\vec{b}$; $\vec{a}=\vec{A}$. No existe en ello motivo de confusión ya que la "igualdad" debe ser considerada como un caso particular de la "equipolencia". En general, tratándose de vectores, se ha de entender que el signo de igualdad (=) es signo de equipolencia ya que ésta es la que habitualmente interviene en los problemas vectoriales.

10.- Un vector es <u>inverso</u> de otro cuando siendo coaxial con él tiene por magnitud el valor recíproco de la magnitud del primero. Así, el inverso de:

$$\vec{V}=V.\vec{v}$$

será:

$$\vec{W}=\frac{1}{V}\cdot\vec{v}$$

representando $\vec{v}$ el versor correspondiente al eje considerado.

11.- <u>Vectores libres</u>.- Una categoría especial de vectores, de escaso interés "físico", pero de gran aplicación como auxiliares del cálculo, es la de <u>vectores libres</u>.

Son vectores de magnitud, dirección y sentido definidos, pero que no están vinculados a ninguna recta base.

Para éstos, el concepto de "igualdad" difiere del que hemos definido al tratar de los axiales. Consideramos aquí <u>iguales</u> a los que en el caso anterior hemos llamado <u>equipolentes</u>, o sea a los que tienen igual magnitud y sentido y direcciones paralelas, independientemente del lugar que ocupen en el espacio.

Los vectores libres pueden, en consecuencia, ser considerados como unos vectores axiales a quienes se hubiera otorgado la facultad de trasladarse de un lugar a otro, con la sola y única condición de que lo hicieran paralelamente a sí mismos.

12 .- <u>Vectores giratorios</u> .- En el estudio de las corrientes alternativas y de otras magnitudes senoidales, como en el movimiento armónico, se utiliza este tipo de vectores. Se les supone animados de un movimiento de rotación alrededor de un eje normal a su dirección, de modo que su extremo describa circunferencias cuyo centro sea el origen del vector. La proyección de éste sobre una recta fija, es una función senoidal del tiempo. Como consecuencia de ello puede considerarse al vector como representación simplificada de dicha función senoidal, con positiva ventaja para los cálculos.

CAPITULO II

SUMA Y RESTA DE VECTORES

13.- El concepto general de suma aplicado a las magnitudes vectoriales puede ser enunciado diciendo: "Sumar dos magnitudes vectoriales es buscar otra magnitud, homogénea con ellas, cuyas efectos sean iguales a los de las primeras actuando conjuntamente".

Las reglas que deben ser aplicadas varían según se trate de uno o de otro tipo de vectores, a saber:

14.- Suma de vectores coaxiales.- "La suma de varios vectores sujetos a mantenerse sobre una misma recta (fig. 3), es otro vector coaxial cuya magnitud sea la suma algébrica de las de todos ellos y cuyo sentido concuerde con el de los de mayor suma parcial". Así, por ejemplo:

$$(MN) + (PS) + (QT) = (MN + QT) - (SP)$$

o bien:

$$|MN|\vec{v} - |SP|\vec{v} + |QT|\vec{v} = |MN + QT - SP|\vec{v}$$

siendo $\vec{v}$ el versor propio del eje.

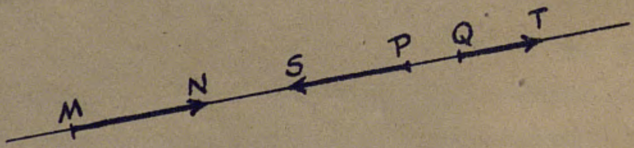


Fig. 3

15.- <u>Suma de vectores libres</u> (*).- La suma de vectores libres es una operación geométrica. En ella influyen la <u>dirección</u> y el <u>sentido</u> de los vectores componentes pero no el lugar donde se encuentren éstos. Siendo libres, pueden en efecto ser trasladados al punto que convenga.

La regla es, por definición, la siguiente: "Para sumar dos vectores libres $\vec{a}$; $\vec{b}$ (fig. 4) tómese a partir de un punto cualquiera M del espacio un vector igual al primero. Por su extremo A trácese otro (AB) igual y paralelo al segundo. El vector $\vec{r}$ que se obtiene uniendo el origen M del primero con el extremo del segundo, es la <u>suma vectorial</u> o <u>geométrica</u> de ambos vectores".

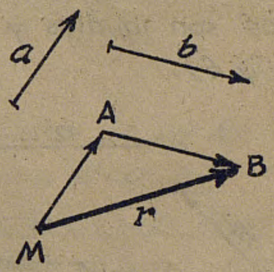


Fig. 4

Fácilmente se comprende que la regla anterior puede hacerse extensiva a la suma de varios vectores (fig. 5). Para ello: "Constrúyase a partir de un punto M una linea poligonal ABCD cuyos

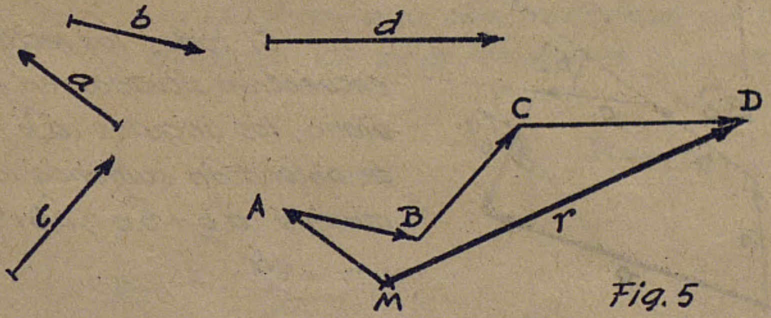


Fig. 5

(*) Aplicable también al caso de vectores axiales concurrentes lados sean iguales y paralelos sucesiva y respectivamente a los vectores libres cuya suma buscamos. El vector (MD) que une el origen con el extremo de la línea quebrada así obtenida, es la suma geométrica buscada". *El resultado es independiente del orden seguido en la composición.*

Regla del paralelogramo: *En el caso de ser dos los vectores es de uso muy corriente la conocida regla del paralelogramo, que puede enunciarse como sigue*: "El vector resultante de otros dos es, en magnitud y dirección igual a la diagonal del paralelogramo cuyos lados son iguales y paralelos a los vectores propuestos" *(fig. 6)*.

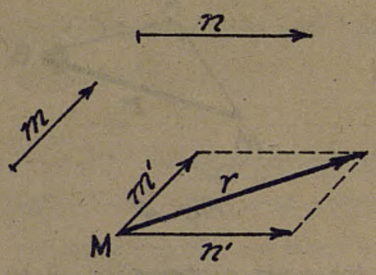


Fig. 6

16.- Magnitud de la resultante.- En el caso general y suponiendo conocidos los ángulos que forma cada uno de los vectores con los demás, podrá aplicarse la siguiente fórmula (figs 5 y 7)

$$(1)\quad R^2 = a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+2ab.\cos(\widehat{a,b})+ +2ac.\cos(\widehat{a,c})+\ldots+2bc.\cos(\widehat{b,c})+\ldots$$

Si todos los vectores se encuentran situados en un mismo plano, los ángulos $\widehat{a,c}$; $\widehat{a,d}$; etc. se obtendrán sumando los intermedios $\widehat{a,b}+\widehat{b,c}$; $\widehat{a,b}+\widehat{b,c}+\widehat{b,d}$ ...., etc.

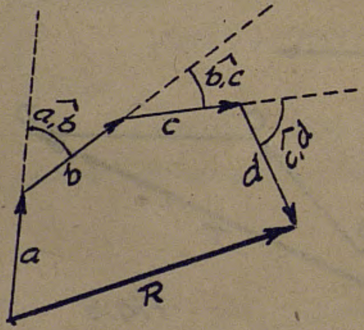


Fig. 7

17.- En el caso particular correspondiente a sólo dos vectores (fig. 4) la fórmula para obtener la magnitud de la resultante sería:

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2a.b.\cos(\widehat{a,b}),$$

ó bien,

$$(2) \quad \boxed{R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2a.b.\cos\theta}},$$ fórmula de uso muy frecuente.

En ella θ es el ángulo de los dos vectores considerados concurrentes o sea en la posición de $\vec{m}'$ y $\vec{n}'$ (fig. 6).

18.- Los casos de mayor simplicidad en las fórmulas y de más frecuente aplicación son el de tres vectores y el de dos vectores, cuyas direcciones sean perpendiculares entre sí. El primer caso supone, desde luego, la condición de no poder estar los tres vectores en un mismo plano. La composición de éstos como vectores concurrentes en un punto M, da lugar al trazado de una resultante MN que es la diagonal principal de un paralelepípedo rectángulo (fig. 8-A). El segundo caso dá lugar a la construcción de un rectángulo cuya diagonal OR es la resultante buscada (fig. 8-B).

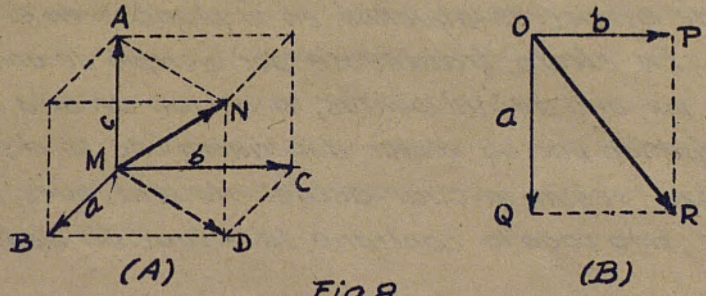


Fig. 8

Las fórmulas (1) y (2) quedan convertidas respectivamente, en:

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ „ y „ } R^2 = a^2 + b^2$$

ó bien:

$$(3) \quad \boxed{R = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad y$$

$$(4) \quad \boxed{R = \sqrt{a^2+b^2}}$$

19.- Suma de vectores axiales concurrentes en un punto.- Por razones que se entenderán al estudiar la teoría de momentos, la composición o suma de vectores axiales concurrentes en un punto puede realizarse aplicando los mismos procedimientos que se utilizan para la suma de vectores libres, pudiendo considerarse, por tanto, aquí reproducidos.

Esta es una de las causas determinantes de la preponderancia de dichos procedimientos en todas las aplicaciones gráficas de suma o diferencia vectorial según veremos en el curso de este estudio.

20.- Suma de vectores axiales no concurrentes en un punto .- El concepto de suma aplicado a este tipo de vectores, sugiere inmediatamente la idea de que en el resultado de ella ha de influir la situación de los ejes de aquellos en el plano o en el espacio. En efecto, tratándose por ejemplo de un cuerpo sujeto por uno de sus puntos, la acción de una fuerza representada por un vector dependerá de la distancia o "brazo" según la cual actúe. No será, pues, indiferente, sino todo lo contrario, la situación de la resultante como vector que ha de producir una acción equivalente a la de los vectores componentes.

Para resolver el caso puede dividirse la cuestión en dos partes. La primera consistirá en buscar nó el vector resultante propiamente dicho, sinó un vector equipolente con él, siguiendo las indicaciones dadas en el nº 15. La segunda, en determinar la posición que este vector libre ha de tener para que, conservándose equipolente, o sea igual y paralelo a sí mismo, su acción sea equivalente a la de los componentes axiales actuando conjuntamente.

Para resolver esta segunda parte de la cuestión es necesario introducir en los cálculos la noción de momento vectorial de la que trataremos mas adelante.

21.- Suma de vectores giratorios.- Refiriéndonos sólo al caso mas frecuente de tratarse de vectores coincidentes en un punto y dotados, además, de iguales velocidades de rotación, diremos que su composición puede efectuarse ajustándose a las reglas del nº 15 relativas a los vectores libres.

22.- Resta o diferencia de vectores.- Esta operación puede reducirse a los mismos casos y reglas que la suma, si partimos de la siguiente definición: "Restar un vector $\vec{s}$ (sustraendo) de otro $\vec{m}$ (minuendo) es hallar un tercer vector $\vec{d}$ (diferencia) que sumado con el primero reproduzca el segundo u otro equivalente".

Si escribimos: $\vec{s}+\vec{d}=\vec{m}$, y añadimos a los dos miembros de esta igualdad el vector (-s) opuesto al s, obtendremos:

$$\vec{s}+(-\vec{s})+\vec{d}=\vec{m}+(-\vec{s}) \quad \text{, o bien}$$

$$\vec{d}=\vec{m}+(-\vec{s})$$

De esta última igualdad deducimos la siguiente.

<u>Regla</u>: "La diferencia de dos vectores es el vector que resulta de sumar al minuendo otro vector igual y opuesto al sustraendo".

Como puede apreciarse esta regla no ofrece dificultad. Las figuras 9 y 10 ilustran su aplicación a dos casos de vectores libres o concurrentes, y el lector podrá extenderla a otros casos que juzgue de interés.

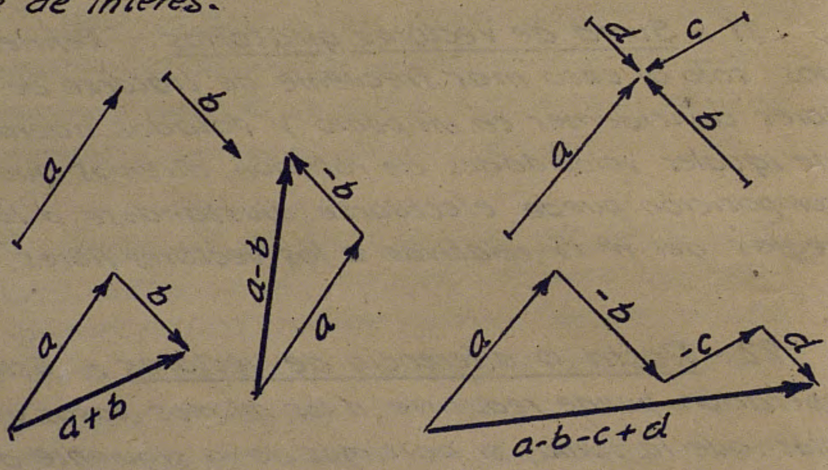


Fig 9

Fig. 10

CAPITULO III

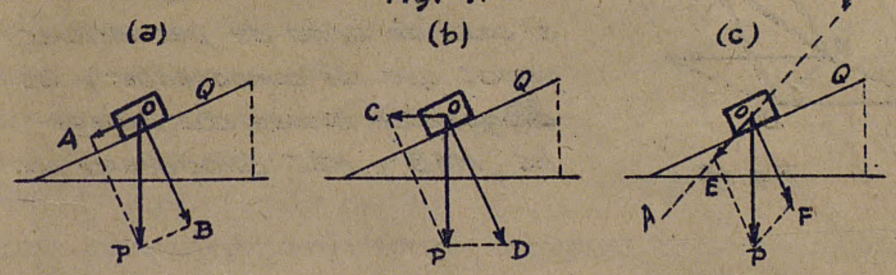
- DESCOMPOSICIÓN DE VECTORES -
- PRODUCTO DE VECTORES -

23 .- La composición o suma vectorial tiene habitualmente por objeto simplificar el estudio de una cuestión limitando el número de los vectores que en ella intervienen. En otras ocasiones conviene, por el contrario, substituir algún vector por otros varios que le sean equivalentes y cuyas acciones puedan ser estudiadas por separado. Los nuevos vectores han de ser tales que mediante composición vectorial den una resultante igual o equivalente al vector primitivo.

De ahí que a la operación citada se la dé el nombre de descomposición vectorial, operación, las más de las veces, hipotética o ficticia dependiente exclusivamente del criterio ó conveniencia del calculista.

Así, por ejemplo, el vector (OP) que representa el peso de un cuerpo colocado sobre un plano Q inclinado (figura 11) puede sufrir un número ilimitado de "descomposiciones" diversas. La figura nos representa tres de ellas: Según (a) el vector (OP) sería

Fig. 11



sustituido por uno perpendicular y otro paralelo al plano Q; según (b) las componentes serían la una perpendicular al plano Q y la otra paralela a la base y según (c) una sería perpendicular al plano y la otra de dirección A-B cualquiera. En todas ellas evidentemente el vector (OP) es la resultante vectorial de las componentes elegidas.

24.- Descomposición de un vector en otros dos o en otros tres concurrentes con él.- Las reglas del paralelogramo y del paralelepípedo (nos 15 al 18) y las fórmulas (1) al (4) son de aplicación para este tipo de problemas. Según sean las condiciones impuestas el problema puede resultar, determinado, indeterminado o imposible.

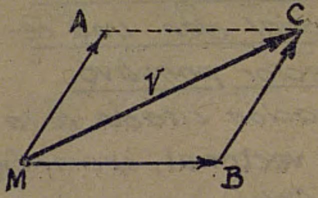


Fig. 12

Examinado el polígono formado para la composición de dos vectores (fig. 12), vemos que dos lados adyacentes (MB, BC) y la diagonal, constituyen un triángulo en el cual el sentido de los vectores componentes marca una dirección de recorrido inversa a la que señala la resultante.

De la misma manera si se examina (fig. 13) en el paralelepípedo P la "línea quebrada de composición" MABC correspondiente al caso de suma de tres vectores, vemos que las componentes y las diagonales forman dos triángulos, MAB y MBC, coincidentes por

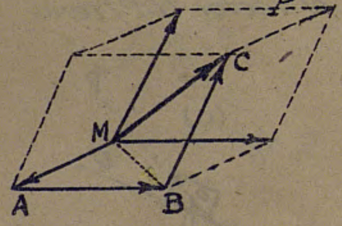


Fig. 13

uno de sus lados (MB) y en los cuales se cumple igualmente la condición antes enunciada en relación con el sentido o dirección de recorrido de las flechas

Pasemos ahora a considerar algunos de los casos de descomposición mas frecuentes e interesantes en el terreno de las aplicaciones:

a) <u>Descomposición de un vector en otros dos de direcciones conocidas.</u> Las direcciones dadas tienen que hallarse en un mismo plano con el vector; en el caso que así no ocurra el problema propuesto no tiene solución.

Si coincide cada una de las direcciones con el plano de las otras dos, o sea que las tres estén en un mismo plano, el problema es determinado. Para resolverlo basta trazar por cada uno de los extremos del vector a descomponer, rectas paralelas a las dos direcciones dadas (fig. 14). Del paralelógramo así obtenido se deducirán, a escala, las magnitudes de las componentes (MB y MA)

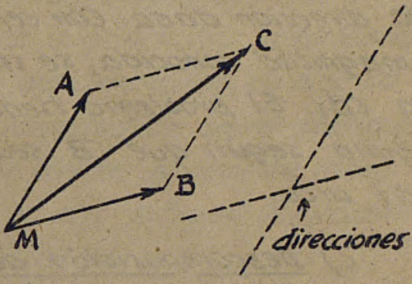


Fig. 14

Mediante dos paralelas únicas MB y CB (fig. 15) a las direcciones dadas, trazadas una por cada extremo, queda asimismo formado un triángulo de vectores, MBC, del que hemos ya hablado (nos 15 y 17) Los sentidos de MB y BC concordantes entre sí están, siguiendo el perímetro del triángulo, en oposición con

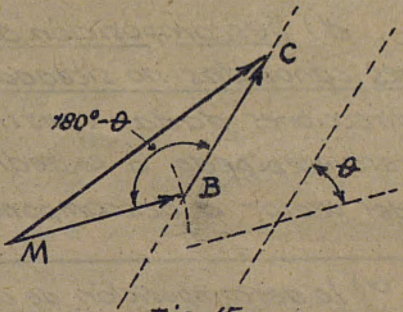


Fig. 15

el de MC. La determinación gráfica del valor de las dos componentes podrá realizarse mediante aplicación de las fórmulas:

$$(5) \qquad \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,\overline{MB} \times \overline{BC}\,\cos\theta$$

$$y \qquad (6) \qquad \frac{\overline{MC}}{\operatorname{sen}(180-\theta)} = \frac{\overline{MB}}{\operatorname{sen} C} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} M}$$

conocidas por Trigonometría.

b) Descomposición de un vector en otros dos de los cuales se conoce la dirección de uno y la magnitud del otro. (fig. 15). Por el punto C se trazará CB paralelo a la dirección dada. Con centro en M y radio igual a la magnitud conocida, se trazará un arco hasta encontrar a CB. El problema tiene dos soluciones, una o ninguna según que CB sea secante, tangente o exterior al arco.

c) Descomposición de un vector en otros dos de magnitudes dadas. El problema se reduce a la construcción de un triángulo cuyos tres lados son conocidos. Puede tener también dos soluciones, una o ninguna según sean las magnitudes de dichos lados.

d) Descomposición de un vector en tres de direcciones conocidas no situadas en un plano (*).- Las tres direcciones dadas constituyen las tres aristas de un paralelepípedo ó exaedro. Si por los dos extremos del vector a descomponer MN (fig. 16) trazamos rec-

---

(*) La descomposición de un vector en otros tres concurrentes con él y situados en un mismo plano es problema indeterminado. El caso de vectores axiales "no concurrentes" y situados en un plano se estudia mas adelante. (nº 47)

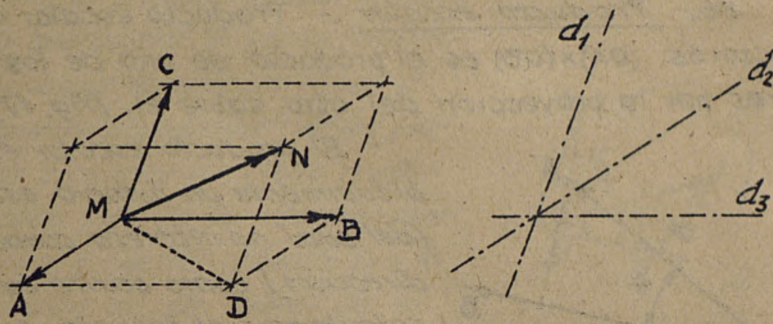


Fig. 16

tas paralelas a tales direcciones quedará trazado el paralelepípedo y delimitados por consiguiente los valores de las componentes. Los triángulos MAD; DMB y DMN proporcionarán un número de relaciones algebraicas suficientes para el cálculo de los valores desconocidos, en este caso y en otros semejantes. La longitud de cada arista (ND p.e.) queda limitada entre el vértice N desde el cual se traza y el plano AMB que forman en el otro extremo del vector las aristas no paralelas a la citada.

25.- Multiplicación de vectores.

La multiplicación de vectores es una operación compleja que podría ser tratada con gran amplitud si nuestro objeto fuera desarrollar completamente las diversas modalidades del cálculo vectorial. Para las necesidades de las presentes lecciones de Mecánica General será suficiente el conocimiento de las dos siguientes formas en que puede presentarse el producto de vectores: Producto escalar, y
Producto vectorial

26.- <u>Producto escalar</u> .- Producto escalar de dos vectores $(OA)\times(OB)$ es el producto de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él. (fig. 17)

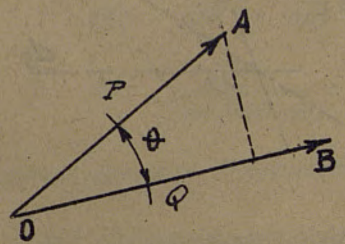


Fig. 17

El producto escalar es habitualmente un número escalar (del cual no interesa conocer la dirección) como ocurre cuando calculamos el trabajo de una fuerza actuando a lo largo de un trayecto determinado. Su representación habitual es la que más arriba hemos empleado o bien $\vec{P}\times\vec{Q}$.

Según se ve en la figura su valor es:

$$(OA)\times(OB) = |OB|\cdot|OA|\cos\theta \tag{7}$$

27.- <u>Principales propiedades del producto escalar.</u>

1ª). El producto escalar puede ser positivo o negativo según que $\cos\theta$ sea > ó < que cero ó, dicho en otros términos, según que θ no llegue a, o exceda de, 90°.

2ª). Si los dos vectores tienen la misma dirección el producto "escalar" es igual al producto algebraico (por ser $\cos\theta = 1$). Si los dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es igual a cero (por ser $\cos 90° = 0$).

3ª) El resultado de un producto escalar no varía si se altera el orden de los factores (porque, en efecto, $P.Q\cos\theta = Q.P\cos\theta$).

4ª) El producto escalar de un vector cualquiera $\vec{s}$ por la resultante de varios vectores, es igual a la "suma algebraica" de los productos escalares de dicho vector por cada uno de los vectores componentes (Fig. 18) (puesto que la proyección de Or sobre Os es igual a la "suma algebraica" de las de Ob y de br (igual a Oa) sobre el mismo eje).

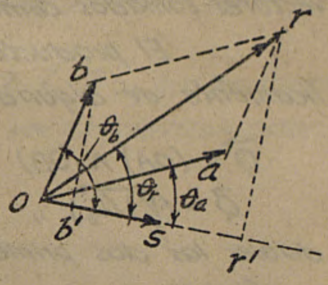


Fig. 18

28.- Producto vectorial.- El producto vectorial de dos vectores, (OA) y (OB) es otro vector, de dirección perpendicular al plano de ambos, cuya magnitud es igual al producto de las de los dos factores, por el seno del ángulo comprendido entre ambos, medido éste de multiplicando a multiplicador en dirección trigonométrica positiva (ver fig. 19). Tiene el caracter de vector libre.

(8) $\quad Q = V_1 \cdot V_2 \cdot \text{sen}\,\theta$

El sentido del vector-producto $\vec{Q}$ es el que corresponde a la posición de un observador que colocado según OC viera que OA para alcanzar OB había de girar contrariamente a las agujas de un reloj.

El producto vectorial se designa también algunas veces con el nombre de bivector. Numéricamente es equivalente al

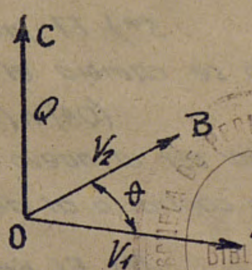


Fig. 19

area del paralelogramo que puede formarse sobre ambos vectores tomados como lados.

El producto vectorial puede representarse simbólicamente de alguna de las formas siguientes:

$$\vec{Q} = (OA) \wedge (OB) \quad ; \quad \vec{T} = \vec{P} \wedge \vec{S} \quad ; \quad \vec{Q} = [\vec{V_1}, \vec{V_2}]$$

$\vec{Q} = \overrightarrow{(V_1)(V_2)}$ „ y otras, siendo las más recomendables las dos primeras porque ofrecen menos lugar a confusión.

Un importante ejemplo de productos vectoriales lo constituyen los momentos de vectores que estudiaremos mas adelante.

29 .- Principales propiedades del producto vectorial.-

Recordando nuevamente la fórmula:

$$Q = V_1 \cdot V_2 \operatorname{sen} \theta \qquad (8)$$

y consultando la figura 19, deducimos las siguientes propiedades:

1ª) Dos vectores de igual dirección tienen un producto vectorial nulo (por ser nulo el factor sen θ)

2ª) El producto vectorial de dos vectores es máximo cuando estos tienen direcciones perpendiculares (por ser máximo el factor sen $\theta = 1$)

3ª) El producto vectorial cambia de signo cuando se cambia el orden de los factores. Así:

$$(OA) \wedge (OB) = -(OB) \wedge (OA)$$

(por ser el nuevo ángulo $\theta_1 = 360° - \theta$ cuyo seno es de signo contrario al de θ).

4ª) El producto vectorial de un vector por la suma geométrica de otros, es igual a la "suma geométrica" de los productos vectoriales del primero por cada uno de los vectores sumandos

En efecto (fig. 20): Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$... los vectores sumandos, $\vec{r}$ su resultante y $\vec{s}$ el vector multiplicador. Tomando el punto O como origen de los vectores o sea trasladándolos todos a dicho punto (con lo cual los productos $\vec{a}\wedge\vec{s}$, $\vec{b}\wedge\vec{s}$, $\vec{c}\wedge\vec{s}$,... no sufren alteración por no haber variado los ángulos de los vectores con $\vec{s}$) cada uno de los productos será un nuevo vector: Q_a, Q_b, Q_c... de dirección perpendicular al plano determinado por $\vec{s}$ y cada uno de los sumandos.

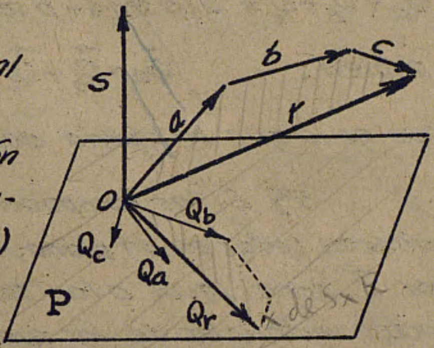


Fig. 20

Todos estos vectores-productos se encontrarán en un mismo plano P, perpendicular a $\vec{S}$ y pasando por su origen. Asimismo sobre el plano P se situará el vector-producto Q_r correspondiente a la resultante $\vec{r}$.

Los valores numéricos respectivos de dichos productos son:

$$Q_a = S . a \operatorname{sen} \alpha$$
$$Q_b = S . b \operatorname{sen} \beta$$
$$Q_c = S . c \operatorname{sen} \gamma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_r = S . r \operatorname{sen} \rho$$

Siendo $a \operatorname{sen} \alpha$, $b \operatorname{sen} \beta$, $c \operatorname{sen} \gamma$... los valores de las proyecciones de los vectores sobre el plano P, y $r.\operatorname{sen}\rho$ la proyección, sobre el mismo, de la resultante y aplicando un conocido teorema(*), podremos escribir:

$$a \operatorname{sen}\alpha + b \operatorname{sen}\beta + c \operatorname{sen}\gamma \equiv r \operatorname{sen}\rho$$

y por tanto:

$$Q_a + Q_b + Q_c = S(a \operatorname{sen}\alpha + b \operatorname{sen}\beta + c \operatorname{sen}\gamma) = S\, r \operatorname{sen}\rho$$

o bien: $$\vec{Q}_a + \vec{Q}_b + \vec{Q}_c = \vec{Q}_r$$

que es lo que se quería demostrar.

5ª) Si las componentes del caso anterior se hallasen todas en un plano, el producto vectorial de $\vec{S}$ por $\vec{r}$ sería igual a la "suma algebraica" de los productos vectoriales de los sumandos

---

(*) "La proyección sobre un plano de la resultante de varios vectores es igual a la suma geométrica de las de los componentes" (véase nº 30).

CAPITULO IV

– PROYECCIONES –

30.- *Proyección sobre un plano de una suma geométrica de vectores*.- Sea (fig. 21) OABCD una linea poligonal o cadena de vectores en el espacio y sea (OD) su resultante. La proyección de cada uno de los vértices de la primera sobre un plano P determina la formación en el mismo del contorno poligonal cerrado O'A'B'C'D'O' cada uno de cuyos lados es la proyección de uno de los vectores de la cadena y cuya linea de cierre O'D' es la proyección de OD. En consecuencia, y en virtud del caracter de generalidad que puede darse a la figura adjunta, podemos deducir el siguiente principio:

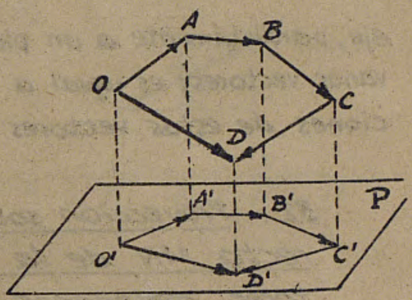


Fig. 21

"La proyección de la resultante o suma geométrica de varios vectores sobre un plano, es igual a la suma geométrica de las de los vectores componentes."

31.- *Proyección sobre un eje, paralelamente a un plano, P, de la suma geométrica de varios vectores*.- Si, paralelamente a un plano P (fig. 22) hacemos pasar otros planos por los diferentes vértices de la linea poligonal OABCD, cada uno de ellos de-

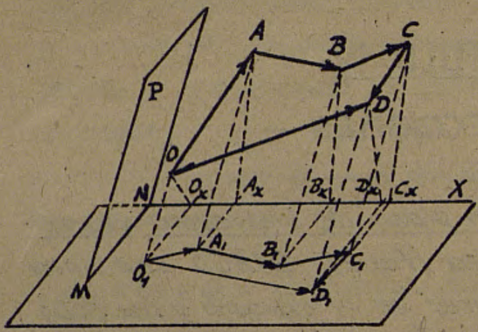


Fig. 22

terminará sobre el eje dado NX, puntos (O_x, A_x, B_x...) que serán las proyecciones, sobre el mismo, de aquellos vértices. Y puesto que en la figura se cumple la igualdad:

$$O_xD_x = O_xA_x + A_xB_x + B_xC_x + C_xD_x$$

podemos deducir, que:

"La proyección sobre un eje, paralelamente a un plano, de la suma geométrica de varios vectores, es igual a la suma algebraica de las proyecciones de estos vectores sobre el mismo eje"

32.- <u>Proyección sobre un eje paralelamente a una recta MN de la suma geométrica de varios vectores coplanarios.</u>- La propia figura 22 ilustra un caso particular del anterior principio, en el que la línea poligonal de vectores ($O_1A_1B_1C_1D_1$) se halla toda ella en un plano y se proyecta sobre un eje del mismo. Claro es, que para ella se ha de seguir cumpliendo el mismo principio, como demuestra también el examen de la figura, y podremos enunciar dicho principio del siguiente modo:

"La proyección, paralelamente a una recta dada MN, de la suma geométrica de varios vectores coplanarios sobre un eje del mismo plano es igual a la suma algebraica, de las proyecciones sobre el mismo eje de los vectores componentes"

NOTA .- Los principios enunciados tienen caracter general y pueden ser aplicados lo mismo en el caso de proyecciones ortogonales que en el de las oblicuas. Las primeras, sin embargo, son las casi exclusivamente utilizadas y en lo sucesivo solamente a ellas nos referiremos, salvo indicación en contrario.

33.- Valor de las proyecciones ortogonales de un vector sobre uno, dos o tres ejes.- El simple examen de la figura 23 nos indica que el valor de la proyección de un vector (OA) sobre un eje XX' es igual al producto de la magnitud del primero por el coseno del ángulo que forma con dicho eje. Tendremos pues:

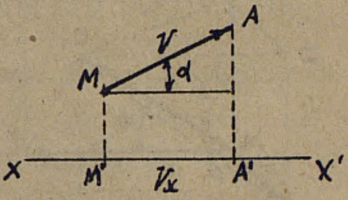


Fig 23

(9) $$\boxed{M'A' = V_x = |V| . \cos\alpha}$$

Análogamente y conforme demuestra la adjunta figura 24, podremos escribir, para el caso de dos ejes rectangulares:

$$\left.\begin{array}{l} M'A' = V_x = |V| . \cos\alpha \\ M''A'' = V_y = |V| . \cos\beta \end{array}\right\} (10)$$

La inclinación del vector (OA) con relación al eje X nos la da el angulo α, cuya tangente vale:

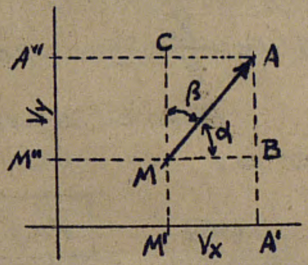


Fig. 24

(11) $$\boxed{\text{tang.}\,\alpha = \frac{V_y}{V_x}}$$

El valor de V, será:

(12) $$\boxed{V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}}$$

La figura 25 ilustra el caso en que el vector (MC) se proyecta sobre tres ejes MX; MY; MZ. Teniendo en cuenta que cada uno de los triángulos MFC; MAC y MGC, es rectángulo, siendo rectos los ángulos en F en A y en G respectivamente, podremos escribir:

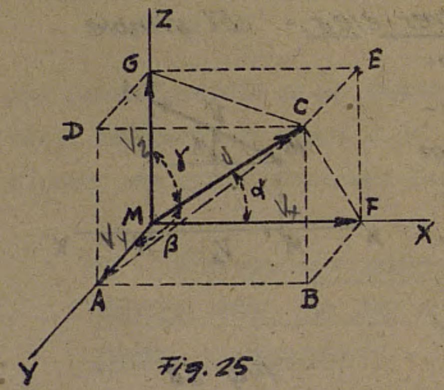


Fig. 25

$$\left.\begin{array}{l} MF = V_x = MC.\cos\alpha \\ MA = V_y = MC.\cos\beta \\ MG = V_z = MC.\cos\gamma \end{array}\right\} \quad (13)$$

Los tres ángulos α, β y γ determinan la posición de MC con relación a los tres ejes. Ellos y sus cosenos reciben el apelativo de <u>directores</u>.

Los <u>cosenos directores</u> cumplen la condición (caso de ejes rectangulares):

(14) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Sus valores respectivos son:

$$\cos\alpha=\frac{V_x}{V} \;;\quad \cos\beta=\frac{V_y}{V} \;;\quad \cos\gamma=\frac{V_z}{V} \qquad (15)$$

El valor del vector en función de sus componentes, es:

(16) $$\boxed{V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}}$$

34.- <u>Expresión analítica de la resultante de varios vectores situados en un plano</u>.- En virtud del principio expuesto en el nº 32, la resultante de varios vectores tendrá por proyección sobre el eje de las X un vector $\vec{R}_x$ igual a la suma algebraica de las proyecciones de los vectores componentes, sobre el mismo eje. De idéntica forma su proyección sobre el eje de las Y cumplirá igual condición. Podremos por consiguiente escribir (fig. 26):

$$(17) \quad \begin{aligned} R_x &= a_x + b_x + \dots + k_x = \Sigma X \\ R_y &= a_y + b_y + \dots + k_y = \Sigma Y \end{aligned}$$

y de acuerdo con la fórmula (12) del nº 33:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{o bien} \quad \boxed{R = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2}} \quad (18)$$

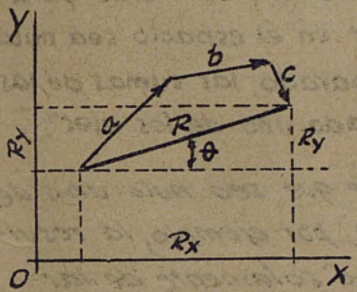


Fig. 26

y su ángulo director θ con relación a OX, de acuerdo con (11) y según indica la fig. 26

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\Sigma Y}{\Sigma X}} \quad (19)$$

fórmulas de muy frecuente uso.

35.- Expresión analítica del valor de la resultante de varios vectores no situados en un mismo plano

Por analogía con lo dicho al tratar de la resultante de varios vectores coplanarios (nº 34) y en virtud de principios análogos a los allí aplicados, podemos escribir:

$$(20) \quad \begin{aligned} R_x &= a_x + b_x + c_x + \dots = \Sigma X \\ R_y &= a_y + b_y + c_y + \dots = \Sigma Y \\ R_z &= a_z + b_z + c_z + \dots = \Sigma Z \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \text{o bien} \quad \boxed{R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}} \quad (21)$$

y $$\boxed{\cos\alpha = \frac{\Sigma X}{R} \; ; \; \cos\beta = \frac{\Sigma Y}{R} \; ; \; \cos\gamma = \frac{\Sigma Z}{R}} \quad (22)$$

36 .- Condiciones necesarias para que la resultante de varios vectores sea nula .- La fórmula (21) nos indica que para que el valor de R sea nulo han de serlo todos y cada uno de los sumandos del radicando. Por ser todos ellos, como cuadrados, cantidades positivas, no se pueden anular una con otra y será preciso que se cumplan las condiciones:

$$(23) \qquad \Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma Z = 0$$

Luego: "La condición necesaria y suficiente para que la resultante de varios vectores en el espacio sea nula, es que sean nulas, cada una por separado, las sumas de las proyecciones de los vectores sobre cada uno de los ejes".

OBSERVACIÓN : En el supuesto de que sea nula una de las sumas de proyecciones, $\Sigma Z=0$, por ejemplo, la resultante tendrá un valor que dependerá solamente de las proyecciones sobre OX y sobre OY. Será pues una recta situada en el plano XOY.

Si fueran dos las sumas de proyecciones nulas, la $\Sigma Z=0$ y la $\Sigma Y=0$, por ejemplo, la resultante se confundiría con el eje de las X.

37.- Representación en proyección diédrica del triedro que forman los tres ejes ortogonales de proyección

Para facilitar el estudio de algunos problemas de composición o descomposición vectorial puede utilizarse con ventaja el procedimiento de representación en dos proyecciones a que estamos ya habituados por la práctica del dibujo industrial.

Para ello dispondremos las cosas en forma que el plano XOZ coincida con el plano del dibujo, el eje OX constituya la "Linea de Tierra" y el plano horizontal XOY quede abatido sobre la superficie del dibujo. En consecuencia el plano YOZ constituirá un plano de perfil y los ejes OY y OZ, perpendiculares respectivamente al plano vertical y al plano horizontal, quedarán en prolongación uno de otro.

Con este procedimiento cada punto o recta del espacio quedará representado por sus dos proyecciones, pero en caso necesario podrán hacerse visibles también las proyecciones sobre el plano YOZ; mediante un sencillo abatimiento.

Propongámonos, por ejemplo, estudiar las características de un vector cuyos extremos tienen por coordenadas A (3;5;8) y B (7;2;5) (fig. 27)

x y z La representación del vector (AB) queda establecida por sus dos proyecciones a'b' ab que corresponden a los planos XOZ e YOX respectivamente. La proyección sobre el plano ZOY puede verse abatiendo este plano (en posición de perfil) alrededor del eje OZ. Se obtiene con ello la proyección a"b".

Las proyecciones sobre los ejes se observan también fácilmente en la figura. Son las siguientes:

$(AB)_x = 4$
$(AB)_y = -3$
$(AB)_z = -3$

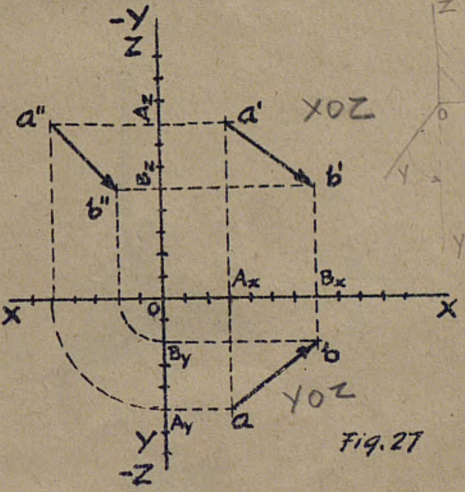


Fig. 27

Estas pueden deducirse también de los valores de las coordenadas:

$$(AB)_x = x_b - x_a = 4$$
$$(AB)_y = y_b - y_a = -3$$
$$(AB)_z = z_b - z_a = -3$$

La magnitud del vector es [nº 33 (15) y (16)]:

$$|AB| = \sqrt{(AB)_x^2 + (AB)_y^2 + (AB)_z^2} = \sqrt{16+9+9} = 5{,}831$$

y sus cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5{,}831} = 0{,}686 \; ; \; \cos\beta = \frac{-3}{5{,}831} = -0{,}515 \; ; \; \cos\gamma = \frac{-3}{5{,}831} = -0{,}515$$

CAPITULO V

— MOMENTOS LINEALES —

—COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE VECTORES AXIALES —

37.- Momento lineal de un vector con relación a un punto O (fig. 28).- Llámase así al producto vectorial (véase nº 28) del vector (AB) por la distancia $(\overline{AO})$, al punto dado, de uno cualquiera de los puntos de su soporte o recta base.

Se define también diciendo que es el producto de la magnitud del vector por la distancia del punto a la recta soporte de aquél.

Según la primera definición:

$M_o(AB) = (AB) \wedge (AO)$ „ (24), o sea:

$|M_o| = |AB| \times |AO| \times \operatorname{sen}\alpha$ „ (25), o lo que es lo mismo:

$|M_o| = |AB| \times |OC|$ „ (26), que traduce algebraicamente el contenido de la definición segunda.

Examinando la figura, fácilmente se vé que como multiplicador podría tomarse en vez de (AO) cualquier otro segmento rectilíneo comprendido entre O y un punto cualquiera de la recta AB.

En efecto, los productos $(AO)\operatorname{sen}\alpha$; $(A'O)\operatorname{sen}\alpha'$ $(A''O)\operatorname{sen}\alpha''$, etc. son todos iguales a $|OC|$ y pueden ser introducidos en la fór-

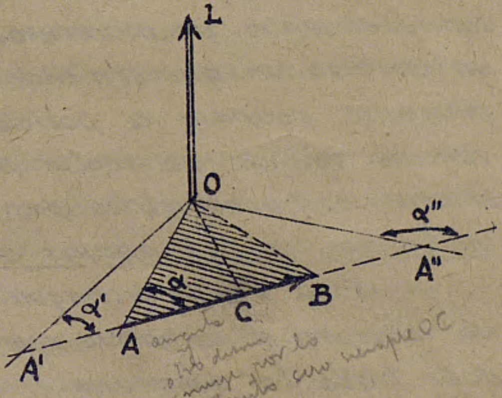


Fig. 28

mula (25) indistintamente.

Al punto O se le dá el nombre de centro de momentos y la perpendicular OC es el llamado brazo de palanca o, simplemente, brazo del vector.

Para expresar abreviadamente un momento vectorial determinado, se emplea habitualmente la notación: $M_0\vec{P}$ que significa "momento lineal del vector P respecto al centro O". La correspondiente al momento de un vector (AB) respecto a un punto T sería $M_T(AB)$

38.- Vector o "eje" representativo de un momento

Hemos definido al momento lineal de un vector como un "producto vectorial": Debemos, no obstante hacer observar que, contrariamente a lo que se indicó en el número 28, en relación con los productos vectoriales en general, el vector representativo de este producto [vector (OL) · (fig. 28)] es un vector fijo, cuyo origen coincide con el centro de momentos. La longitud de este vector-momento es proporcional al valor numérico del momento considerado, su dirección es normal al plano determinado por la recta base del primitivo vector y el centro de momentos. Su sentido es tal que un observador que teniendo sus pies en el centro de momentos ocupase la posición del vector-momento, vería el sentido del vector primitivo (AB) dirigido en el sentido trigonométrico positivo o sea contrario al movimiento de las agujas de un reloj.

Para mejor distinguir los vectores-momento de los corrientes es costumbre representarlos mediante un doble trazo, tal como está el (OL) en la figura 28.

<u>OBSERVACION</u>: El concepto matemático de "momento lineal" que acabamos de exponer, es la traducción al lenguaje del cálculo de la realidad física que se presenta a menudo cuando las acciones o efectos de un vector dependen de su distancia a un punto dado. Así, por ejemplo, en el caso de fuerzas actuando sobre un cuerpo sujeto por uno de sus puntos, la acción depende no tan sólo de las magnitudes de aquéllas, sino también de sus distancias al punto citado.

39.- <u>Algunas propiedades de los momentos lineales.-</u>

1ª El momento lineal de un vector es numéricamente igual al doble del área del triángulo ABO (fig. 28) obtenido uniendo el punto O con los dos extremos del vector.

2ª El momento lineal de un vector con relación a un punto cualquiera de su propia recta base, es nulo, por serlo su brazo de palanca. por ser cero OC la distancia.

3ª El concepto de momento lineal sólo tiene aplicación al caso de los vectores axiales (deslizantes o fijos); no se aplica a los vectores libres ya que, no conservando éstos una posición fija, no puede ser constante o definida su distancia a un centro dado.

4ª Los momentos respecto a un punto O de dos vectores deslizantes iguales y opuestos, son, a su vez, iguales y opuestos. Los momentos de varios vectores coplanarios son co-axiales. Los momentos de dos o más vectores equipolentes (nº 9) situados a igual distancia del centro de momentos, son iguales, pero no coaxiales.

40.- <u>Cambio del centro de momentos</u>.- El momento de un vector (AB) respecto a un centro O_1 es igual a la suma geométrica, L_2, del momento L de este vector con relación a un centro dado O y del momento L_1 respecto a O_1 de otro vector equipolente con (AB) construido sobre el punto O.

Dicho en otros términos, puede expresarse esta propiedad diciendo: conocido el momento de un vector con relación a un centro O puede hallarse su momento respecto a otro centro O_1 añadiéndole geométricamente el que tendría respecto a O_1 el primitivo vector situado en O.

Puede demostrarse la anterior proposición del siguiente modo (fig. 29):

Supongamos el plano del dibujo colocado en posición perpendicular a la dirección del vector (AB), y a éste representado por el punto rodeado por un pequeño círculo y dispuesto en sentido de abajo a arriba. Sean $\underline{\underline{O}}$ y $\underline{\underline{O_1}}$ las proyecciones de O y O_1 sobre dicho plano. Tales proyecciones gozan de la propiedad de corresponderles iguales momentos por igualdad de bases y alturas (fig. 30) de los "triángulos equivalentes" (nº 39-1ª)

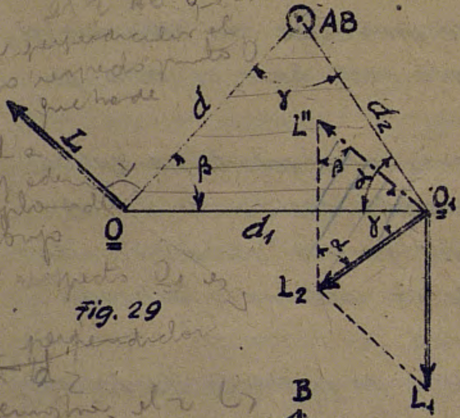


Fig. 29

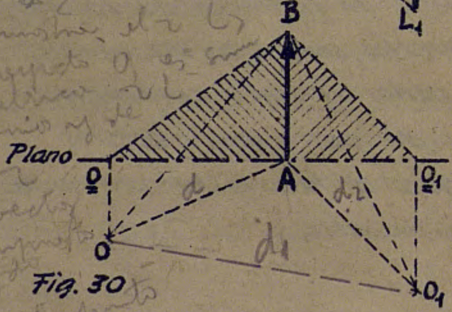


Fig. 30

El momento de (AB) respecto a $\underline{\underline{O}}$ (fig. 29) se presentará en verdadera magnitud según L ya que su dirección ha de ser perpendicular al plano $AB\underline{\underline{O}}$; el momento del mismo vector respecto a $\underline{\underline{O_1}}$ será L_2 también en magnitud verdadera, y el de otro vector equipolente del (AB), situado en $\underline{\underline{O}}$, respecto a O_1 sería L_1 por iguales razones.

Si por los extremos de $\underline{\underline{O_1}}L_2$ trazamos paralelas a los otros dos vectores-momentos quedará formado un triángulo $\underline{\underline{O_1}}L_2L''$ que por perpendicularidad mutua de sus lados respectivos será semejante del triángulo $A\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{O_1}}$. Sus lados homólogos serán, pues, proporcionales y podremos escribir:

$$\frac{\underline{\underline{O_1}}L''}{d} = \frac{L_2L''}{d_1} = \frac{\underline{\underline{O_1}}L_2}{d_2} = |AB|$$

y puesto que:

$$\underline{\underline{O_1}}L_2 = |AB| \times d_2 = M_{O_1}(AB) \qquad (27)$$

la última razón tendrá por valor: $\dfrac{|AB|d_2}{d_2} = |AB|$, y

siendo las otras dos iguales a ella, podremos deducir:

$$\frac{\underline{\underline{O_1}}L''}{d} = |AB| \quad ; \quad \underline{\underline{O_1}}L'' = |AB|d = M_O(AB)$$

$$\frac{L^2L''}{d_1} = |AB| \quad ; \quad L_2L'' = |AB|d_1 = \underline{\underline{O_1}}L_1 = M_{O_1}(AB)_o$$

y puesto que en el triángulo $\underline{\underline{O_1}}L_2L''$, $\underline{\underline{O_1}}L_2$ es la suma geométrica o resultante de $\underline{\underline{O_1}}L''$ y de $L_2L'' = \underline{\underline{O_1}}L_1$, obtenemos (fórmula (27)):

$$\overrightarrow{M_{O_1}(AB)} = \overrightarrow{M_O(AB)} + \overrightarrow{M_{O_1}(AB)_o}$$ „ igualdad que

demuestra el teorema enunciado.

41.- <u>Determinación de la posición de los vectores por sus momentos lineales</u>.- Conocidos el sentido, la dirección y la magnitud de un vector "deslizante" puede calcularse la posición de su <u>eje o recta base</u> si se conoce el valor de su momento lineal con relación a un punto O del plano ó del espacio.

La determinación del <u>punto de aplicación</u> de un vector "fijo" exige el conocimiento de los momentos correspondientes a dos vectores concurrentes en el mismo.

Por su interés práctico vamos a examinar la cuestión en detalle aclarándola con dos ejemplos teóricos.

a) <u>Caso de un vector V deslizante</u>.- Suponemos conocidos: la magnitud de V; su dirección y su sentido; la posición en el espacio de un punto O; y el momento de V respecto al mismo, elementos que se hallan representados en la fig. 31. La magnitud, dirección y sentido de $\vec{V}$ están representados por otro vector (AB) "equipolente" con él. El $\overrightarrow{M_0V}$ lo está por el vector momento (OL).

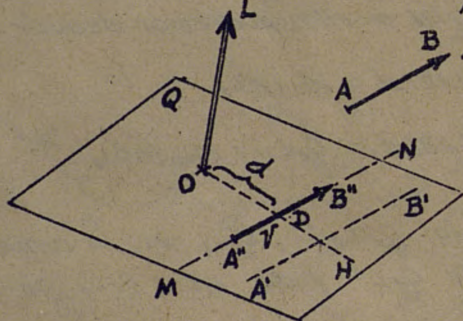


Fig. 31

Trazaremos por <u>O</u> un plano Q perpendicular a (OL) el cual ha de contener al vector buscado (véase n°38) y será, por consiguiente, paralelo al equipolente (AB). Sobre él trazaremos la recta A'B' paralela a la dirección de (AB).

Con arreglo a la definición de momento, ha de verificarse la igualdad:

$|OL| = |AB| \times d$, en la que <u>d</u> es el brazo de palanca del vector buscado. Deducimos de ella que:

$$|d| = \frac{|OL|}{|AB|}$$

, y teniendo que ser la dirección de este brazo $\vec{d}$ perpendicular a la dirección de $\vec{V}$, bastará trazar desde O una recta OH perpendicular a A'B' y tomar sobre ella la distancia d para que tengamos determinado un punto D del vector buscado. Podremos ya, en consecuencia trazar la línea base MN de este mismo vector y sobre ella situar en un punto cualquiera el vector "deslizante" $\vec{V}$.

b) Caso de vector fijo.- El anterior procedimiento que nos ha permitido situar sobre el plano Q el eje del vector, deja indeterminado su punto de aplicación.

Cuando interese conocer la posición de este punto será necesario modificar convenientemente el procedimiento. La modificación puede consistir en repetir el mismo cálculo o construcción bajo el supuesto de que el vector ha variado su dirección en un cierto ángulo sin abandonar el plano Q. Es claro que entonces (fig. 32) tendremos una nueva línea de referencia C'D', un nuevo momento (OL_2), una nueva distancia $d_2 = \frac{|OL_2|}{|AB|}$, y por consiguiente una nueva línea base ST.

El punto de aplicación del vector ha de pertenecer al eje MN o al ST indistintamente según que sea una ú otra la dirección adoptada. Como sea que el único punto común a ambas Líneas-base es el punto P, éste será el punto de aplicación buscado.

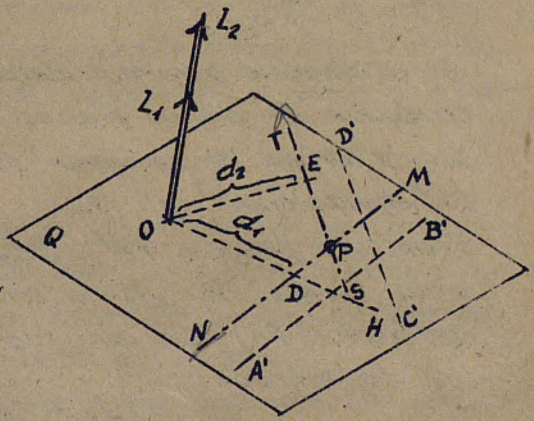


Fig. 32

Si el vector fijo cuyo punto de aplicación P buscamos, cambiase de dirección saliéndose del plano Q (fig. 32) el vector momento (OL_2) correspondiente a esta 2ª posición dejaría de ser coaxial con el (OL_1). Habría un nuevo plano, Q', (que no representamos en la figura), perpendicular a OL_2 por el punto O, el cual contendría a este punto y al P. Como sea que a estos puntos también los contiene el plano Q, uno y otro punto se habrían de encontrar en la intersección de los dos planos. El punto en que esta intersección encontrara a una de las dos rectas base del vector sería el punto P buscado.

Igual razonamiento podrá aplicarse en el caso de concurrir en el punto de aplicación buscado P dos vectores (PA) y (PB) cuyos momentos respecto a un centro O sean conocidos.

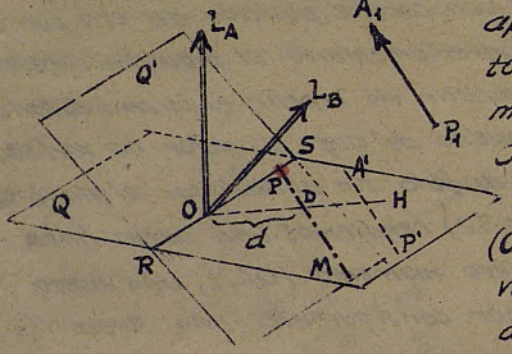


Fig 33

Sean, por ejemplo, (OL_A) y (OL_B) (fig. 33) los vectores-momentos mencionados. Tracemos por su origen O los dos planos Q y Q' respectivamente perpendiculares a ellos y sea RS la intersección de dichos planos. El punto P, común a ambos planos se ha de encontrar sobre ella. Sea (P_1A_1) un vector "equipolente" del (PA); si sobre el plano Q le trazamos una paralela P'A' y desde O una perpendicular OH a la misma, esta última será la dirección del <u>brazo</u> del vector (PA). La longitud $\underline{d}$ de este brazo nos la dá la relación: $|d| = \frac{|OL_A|}{|P_1A_1|}$, y siendo conocidos ambos términos del quebrado lo será el valor de d.

Conocida por medio de este brazo la posición de uno de los puntos D de la recta base MD correspondiente al vector PA podrá dicha recta ser trazada. Su intersección P con RS determina el punto de aplicación buscado.

42.- Principio fundamental de la teoría de momentos.-

El momento de la resultante de un sistema de vectores con relación a un punto, es, por definición, la suma geométrica de los momentos de los vectores componentes con relación al mismo punto.

Al tratar de la suma o composición de vectores se definió la resultante de los vectores axiales precisamente con esta condición: con la de que su "acción" o "momento" fuera equivalente a la de los vectores axiales componentes actuando conjuntamente. Si estas acciones o "momentos" no fueran equivalentes conjuntamente al de la resultante dejaría de cumplir ésta la condición básica que sirvió para definirla. Debemos pues admitir el enunciado como principio que no necesita demostración, siendo por el contrario de necesidad concretar el modo de hallar dicha resultante.

43.- Determinación de la resultante de varios vectores axiales.- Esta cuestión quedó pendiente de solución al ser planteada en el nº 20 por no haberse tratado allí todavía de momentos de vectores.

Podemos ahora dejar mejor aclarados los conceptos allí vertidos.

El problema consiste en hallar la magnitud, la dirección, el sentido y la posición de un vector que sea equivalente a dos o mas vectores axiales.

De acuerdo con lo que allí se dijo la resolución del problema debe realizarse en dos etapas:

1ª) Encontrar, mediante composición de vectores libres, un vector que sea equipolente con la resultante buscada.

2ª) Hallar la situación de la resultante de acuerdo con la marcha expuesta en el nº 41 y aplicando el principio fundamental de los momentos (nº 42)

Sean, por ejemplo, tres vectores axiales $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ (fig. 34) cuya resultante queremos determinar. Empezaremos buscando su suma geométrica (fig 34-2) como si se tratara de vectores libres. El vector $\vec{S}$ hallado es un vector libre equipolente con la resultante R.

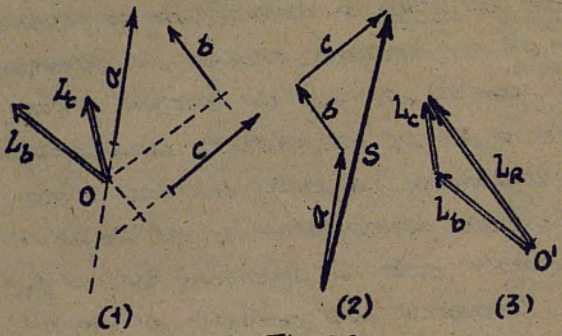


Fig. 34

Si ahora tomamos momentos de los tres vectores axiales respecto a un punto O (que para mayor simplicidad procuraremos se encuentre sobre uno de ellos) resultarán dos vectores-momentos L_b y L_c concurrentes en O, ya que es igual a cero el momento correspondiente al vector $\vec{a}$. Dichos vectores-momento pueden ser divergentes, puesto que los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ pueden no estar en el mismo plano con el punto O. Por composición vectorial (fig 34-3) podrá hallarse el vector momento resultante L_R.

Conocido L_R podrá trazarse por su origen O un plano perpendicular a su dirección (fig.35); podrá trazarse, perpendicular a S la dirección OH del brazo de palanca, y después, tomar sobre ella la distancia d que resulte de dividir $|OL_R|$ por $|S|$ tal como vimos en el nº 41. Por el punto D así determinado pasará la recta base o eje de la resultante buscada.

Si la dirección de S no puede coincidir con el plano perpendicular a L_R citado, la resultante única que buscamos no existe.

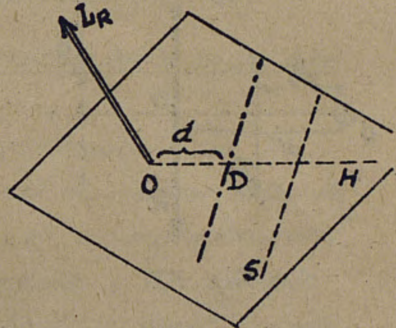


Fig. 35

44.- Determinación de la resultante de varios vectores axiales.- Casos particulares.

1º Los vectores componentes se encuentran todos en un mismo plano.- (fig.36).

Los vectores-momento referidos a un punto O del plano serán coaxiales. Su eje común será perpendicular al plano de los vectores proyectándose todos sus puntos sobre O. Si $\vec{S}$ es la suma geométrica "equipolente" de la resultante R, la dirección del brazo de palanca OH será perpendicular a ella. La distancia d será en valor absoluto:

$$|d| = \frac{|\Sigma M_0 v|}{|S|}$$

y con ella quedará determinado sobre OH un punto D que pertenece a R o a su recta base.

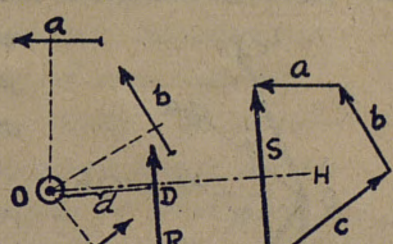


Fig. 36

2º Los vectores componentes tienen direcciones paralelas.

En este caso, los vectores momentos serán coaxiales o coplanarios según que los vectores primitivos estén en un mismo plano y en él se halle el centro de momentos O, o que no ocurran así las cosas.

En el primer supuesto nos hallamos en las condiciones del caso anterior pero todavía mas simples como se comprueba en la adjunta figura 37. La distancia $\underline{d}$ se calculará escribiendo

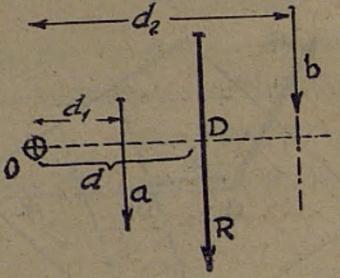


Fig. 37

$$|d| = \frac{|a \times d_1 + b \times d_2|}{|a+b|}$$

y el valor de R será igual a $a+b$.

El eje de momentos situado en O, perpendicularmente al plano de la figura, estará dirigido de arriba a abajo, circunstancia que se indica por la crucecita del interior del circulo cuyo centro es O.

En el segundo supuesto, o sea que los vectores y el centro de momentos no estén todos en un mismo plano, la fig. 38 nos indica la disposición radial de los diversos vectores-momento todos los cuales se encuentran en un plano que pasa por O y es perpendicular a la dirección común de $\vec{a}$, de $\vec{b}$ y de $\vec{c}$.

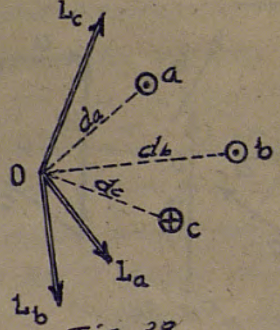


Fig. 38

La determinación de la resultante en este caso exigiría: 1º) La determinación de L_R mediante composición vectorial de L_a, L_b y L_c ; 2º) El trazar por O una perpendicular a la dirección L_R sobre la cual se ha de encontrar el pié o proyección del vector R, de dirección perpendicular al plano del dibujo; 3º) El cálculo de la distancia d a que se encuentra, de O, el pié de R antes mencionado. Siendo $a+b-c$ el valor de la resultante, la distancia d valdrá:

$$|d| = \frac{|L_R|}{|a+b-c|}$$

en cuya fórmula $|a+b-c|$ es una "suma" aritmética.

3º Los vectores componentes concurren todos en un punto M.-

La resultante tiene que pasar también por M. En efecto: considerando a M centro de momentos, todos los vectores componentes tendrán, respecto a él, un momento nulo. También será nulo, pues, el de la resultante y no siéndolo ésta como vector habrá de serlo su brazo, es decir que élla tendrá que pasar por M.

Deducimos de lo dicho una importante consecuencia: En el caso de que varios vectores axiales concurran en un punto, resulta innecesaria la aplicación del principio fundamental de los momentos.

Para la determinación de la magnitud, dirección y sentido de la resultante podrá, en este caso, aplicarse el procedimiento del polígono de fuerzas ya estudiado al tratar de la composición de vectores libres. El vector resultante así determinado será equipolente con el que buscamos y, puesto que conocemos un punto M de su recta-base (punto de concurrencia de los vectores componentes), queda el problema solucionado.

EXAMEN

45.- Procedimiento simplificado para la determinación de la resultante.- Método del polígono funicular.-

Persigue este método el evitar la aplicación del teorema de los momentos en el caso de vectores co-planarios no concurrentes (nº 44 - 1º). Consta de dos partes, a saber:

1ª) Trazado del polígono o cadena de vectores para hallar el vector equipolente de la resultante.

2ª) Substitución del primitivo sistema de vectores por otro equivalente formado por solo dos vectores concurrentes. Por el punto de concurrencia de éstos tiene que pasar la resultante general (nº 44 - 3º)

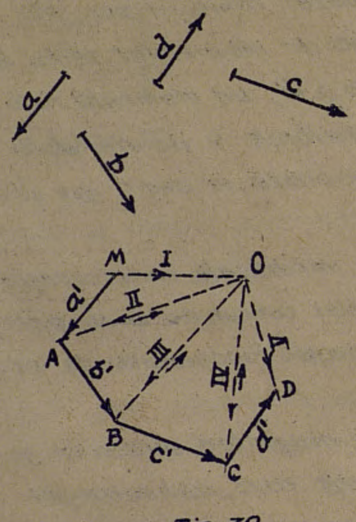


Fig. 39

Sean (fig. 39) cuatro vectores axiales a ; b ; c ; d , y sea a'b'c'd' un polígono de vectores libres equipolentes con ellos. El vector MD, no trazado en la figura, sería la resultante de éstos, el cual vector es equipolente con la resultante buscada.

Para hallar la posición de esta última, o, en otros términos, la de su eje, soporte o línea de acción, procederemos como sigue:

Uniremos por medio de segmentos rectilíneos llamados "radios vectores", los vértices MABCD del polígono vectorial con un punto O del plano, tomado arbitrariamente, al que llamaremos "polo". Supondremos descompuesto cada vector a' b' c' ... en dos (I, II ; II, III ; III, IV ; ... etc.) según las direcciones de los "radios" que van a sus extremos y que constituirán otros tantos vectores libres concurrentes en O. Los triángulos OMA ; OAB ; OBC ;

OCD darán las magnitudes correspondientes a tales vectores y podemos observar el detalle de que todos los radios, excepto el primero y el último, representan simultáneamente dos componentes iguales y opuestas. (fig. 39)

Ahora bien, si trasladáramos (fig. 40) a un punto de cada uno de los primitivos vectores axiales sus dos componentes así encontradas, y consideráramos a tales vectores sustituidos por ellas, el conjunto de estas componentes equivaldría al primitivo sistema (nº 44-3º)

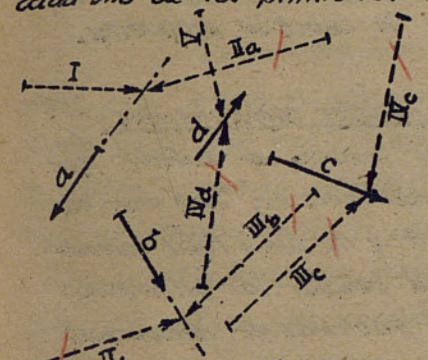


Fig. 40

Pero si tenemos en cuenta que, como antes hemos hecho observar, las componentes II_a y II_b ; III_b y III_c ; etc. son iguales y opuestas, podrán ser eliminadas dos a dos si se consigue situarlas de modo que se hallen sobre una misma recta. Conseguiremos con ello que se anulen todas las componentes con la excepción de las dos extremas I y V. Estas constituirán un sistema de dos vectores equivalente al primitivo. La resultante de uno y otro sistemas será una misma y, de acuerdo con lo visto en 44-3º, habrá de pasar por el punto de concurrencia de dichas dos componentes extremas, con lo cual el problema se reducirá a encontrar este punto.

Tomemos de nuevo, pues, el grupo de vectores axiales a, b, c, d (fig. 41) y

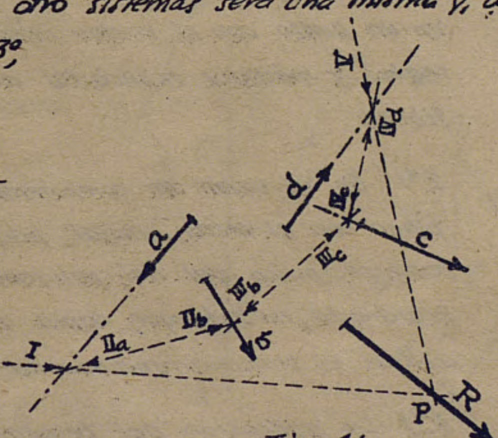


Fig. 41

5°) prolongación de I' y de III' hasta su encuentro en P.

Examinando la figura vemos que en el polígono vectorial OABC el vector (AC) queda descompuesto por el lado izquierdo en los dos vectores I y III mientras que por el lado derecho lo está en los dos $\vec{a}_1$ y $\vec{b}_1$ con la particularidad de que el vértice O de la izquierda está elegido arbitrariamente mientras que el de la derecha es un punto fijo y determinado. La recta o radio vector II que une los dos vértices citados del polígono vectorial recibe el nombre de <u>línea de cierre</u> y ofrece la particularidad de que es siempre paralela a la que en el polígono funicular une los puntos de encuentro M y N de las prolongaciones de las componentes I' y III' con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. La correspondencia entre los elementos citados de uno y de otro polígono permite la determinación de valores en los problemas de descomposición, según ejemplos que vamos a exponer:

<u>1er PROBLEMA</u>.— <u>Dado un vector primitivo (A'C'), los dos puntos de paso H, J de las componentes y la dirección de una de ellas (b) hallar las restantes características de las componentes.</u>

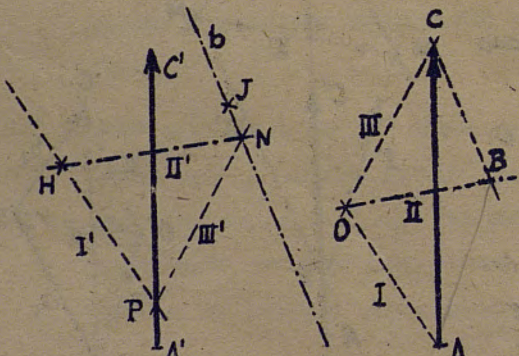


Fig. 43

Escogeremos arbitrariamente un polo O (fig. 43) y lo uniremos con A y con C formando los radios vectores I y III. Trazaremos por H una paralela a I hasta encontrar a A'C' en P. Desde este punto trazaremos una paralela a III que encontrará en N a la línea-base de $\vec{b}$. Uniendo H con N tendremos trazado la recta II' y conocida su dirección podemos determinar en el polígono de vectores el punto B, mediante el cual quedan conocidas las dos componentes AB y BC

El problema anterior podría ser resuelto aplicando algunos de los métodos anteriormente explicados fundados en el principio de los momentos:

1º) Consideremos (fig. 44) conocidos los mismos datos del enunciado anterior: vector A'C', puntos H y J y dirección b. Tomando momentos respecto a H se ha de cumplir la relación:

$$M_H(A'C') = M_H(b) + M_H(a)$$

cuyos tres momentos son coaxiales por ser coplanarios los vectores respectivos. Además, por ser H punto de paso de (a) el momento $M_H(a)$ es nulo. Resulta, pues, que:

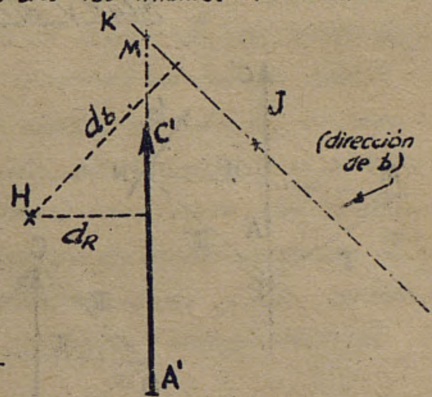


Fig. 44

$$M_H(A'C') = M_H(b), \text{ o bien } A'C' \times d_R = b \times d_b$$

de cuya última igualdad despejaremos el valor de b en función de cantidades conocidas. Conocidos b y A'C' en magnitud y dirección podemos fácilmente calcular a también en magnitud y dirección mediante el triángulo de vectores.

2º) Si prolongamos A'C' hasta encontrar en M a JK, recta base de $\vec{b}$, y si tomamos momentos con relación a M resultará:

$$M_M(A'C') = M_M(b) + M_M(a)$$

pero los momentos de (A'C') y de (b) son nulos por pertenecer

M a sus respectivas rectas-base. Se deduce de ello que el vector $\vec{a}$ debe pasar también por M o sea que tendrá la dirección HM. Conocidas las direcciones componentes y la magnitud y dirección del vector resultante el problema puede darse por resuelto.

2º PROBLEMA.- Dado el vector (A'C') y el punto de paso N, magnitud y dirección de uno de los componentes $\vec{b}$, hallar el punto de paso, magnitud y dirección del otro vector $\vec{a}$ (fig. 45)

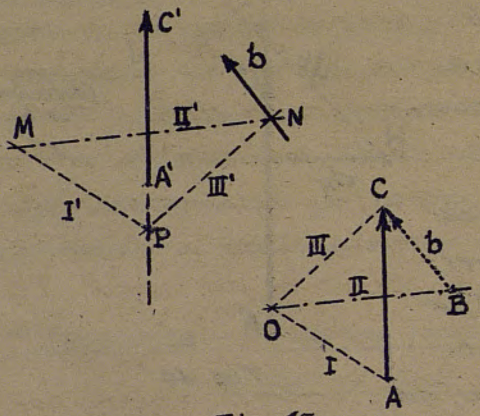


Fig. 45

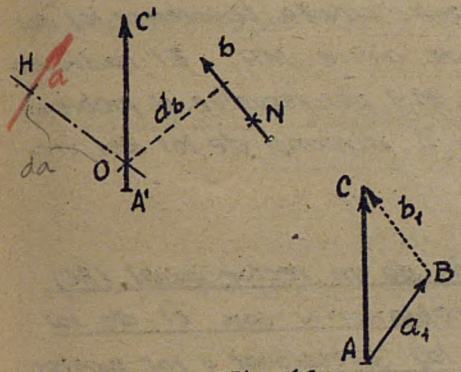
Construiremos el "polígono" vectorial ACB en el cual el segmento AB (no trazado) será equipolente del vector $\vec{a}$. Tomando un polo arbitrario O trazaremos I y III así como también la recta de cierre OB. Si, pues, desde el punto N trazamos una paralela a III hasta encontrar en P a la recta base de A'C' y desde el mismo N otra paralela II' a la línea de cierre BO, bastará que desde P tracemos una paralela a I para que en su intersección con II' nos deje señalado el punto M de paso de la componente a. Su magnitud, dirección y sentido son los de su equipolente (AB)

Para resolver el mismo problema sin recurrir al método del polígono funicular, (véase fig. 46) trazaremos en primer lugar el triángulo de vectores ACB que nos permitirá conocer la magnitud, dirección y sentido de $\vec{a}_1$, vector equipolente de $\vec{a}$. Tomando sobre A'C' un centro de momentos O se habrá de verificar que:

$$M_o(b) + M_o(a) = M_o(A'C') = 0 \;\; \text{ó bien,} \;\; M_o(b) = -M_o(a)$$

de donde resulta:

$|b \times d_b| = |a \times d_a|$, de cuya igualdad podemos deducir:



$$d_a = \frac{|b \times d_b|}{|a|}$$ " que

Fig. 46

es la distancia a que se halla el vector $\vec{a}$ del punto O, y teniendo en cuenta que la dirección de $\vec{a} = \vec{a}_1$ es conocida, bastará tomar a partir de O una recta OH perpendicular a la dirección de $\vec{a}_1$ para sobre ella tomar una distancia igual a d_a, a fin de que el punto de paso M del vector componente $\vec{a}$ quede determinado.

3er PROBLEMA.- *Descomponer un vector en otros dos paralelos que pasen por dos puntos M y N situados en su plano.* (fig. 47)

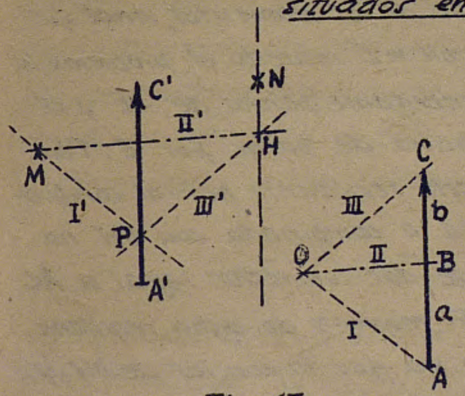


Fig. 47

Sea A'C' el vector y M y N los dos puntos de paso. En el polígono vectorial, que trazaremos como de costumbre, hemos de determinar la posición de B para conocer los valores de las componentes, aunque no ignoramos que este punto se ha de hallar sobre la misma recta AC. Será suficiente, pues, que podamos trazar la linea II o sea OB para que el problema quede resuelto.

Por el punto M trazaremos una paralela a I hasta encontrar en P a la linea base de (A'C') y por N una paralela a A'C' que marcará la dirección o recta base de b. Trazando ahora desde P una paralela a III hasta encontrar en H a la recta base antes citada, tendremos los dos puntos terminales de la linea de cierre MH. El radio vector II trazado paralelamente a MH nos resuelve el problema al señalar sobre (AC) el punto B divisorio de los dos vectores componentes.

4° PROBLEMA.- <u>Descomposición de un vector axial (AC) en otros tres coplanarios con él de los que se conocen las direcciones y los puntos de paso H, J y K (fig. 48)</u>

Sea AC el vector primitivo, H, J y K los puntos de paso y HD, JE y KE las direcciones de los tres vectores componentes buscados.

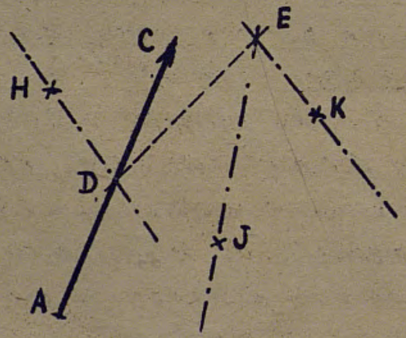


Fig. 48

Examinando la adjunta figura y en virtud del principio de los momentos, vemos que una vez resuelto el problema, la resultante parcial de JE y KE habrá de pasar por E. Pero esta resultante parcial compuesta o combinada con DH ha de dar un vector igual a AC. El momento de dicha resultante respecto a D tendrá que ser nulo ya que lo son los de DH y de AC respecto al mismo punto. Su dirección o linea-base tendrá pues que pasar por D, y puesto que antes hemos dicho que también debía pasar por E resulta que su línea base será DE.

El problema ahora queda reducido a dos problemas ya tratados: 1º) descomponer AC en dos vectores según DH y DE; 2º) descomponer la componente DE en otras dos según las direcciones concurrentes EJ y EK.

5º PROBLEMA.- Un vector $\vec{V}$ de dirección vertical se ha de descomponer en otros tres de direcciones paralelas a la suya cuyos puntos de paso A, B, C, son conocidos. Calcular las magnitudes respectivas. (fig. 49).

Tomando el punto O como centro de momentos, el teorema o principio fundamental nos permite escribir:

$L_A + L_B + L_C = 0$, por ser cero el momento de $\vec{V}$ respecto a O. La composición de los tres vectores momento daría un triángulo cerrado (por ser su resultante nula) cuyos tres ángulos serían los suplementos de $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$ y $\widehat{BOA}$. Esto nos permitiría aplicar la relación conocida de Trigonometría;

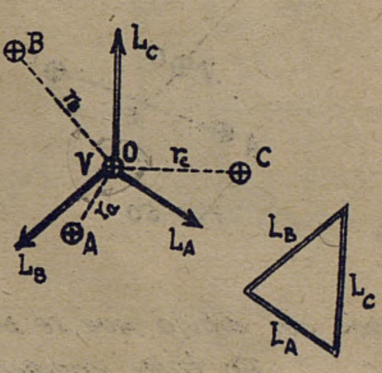


Fig. 49

$$\frac{L_A}{\operatorname{sen} \widehat{BOC}} = \frac{L_B}{\operatorname{sen} \widehat{AOC}} = \frac{L_C}{\operatorname{sen} \widehat{BOA}}$$

y puesto que los ángulos son conocidos, sus senos serán valores numéricos k_1 k_2 k_3 y podremos escribir:

$$\frac{|A| \times r_A}{K_1} = \frac{|B| \times r_B}{K_2} = \frac{|C| \times r_C}{K_3}$$

expresión equivalente a dos ecuaciones entre las incógnitas A, B y C, que con la tercera: $A+B+C = V$, formarán un sistema de tres que permitirá determinar los valores de aquellas, y por tanto las magnitudes de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

Este problema tiene otra solución fundada en las propiedades de los vectores coplanarios, la que exponemos a continuación:

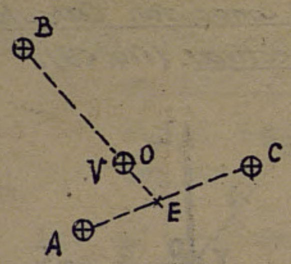


Fig. 50

Situados los vectores en posición perpendicular al plano del dibujo (fig. 50) cada dos de ellos determinan un plano perpendicular al mismo, cuyas proyecciones en la figura serán rectas AC, BO, etc. El plano que se proyecta según BO encontrará al AC según una recta también perpendicular al plano del dibujo que se proyectará en E.

En tales condiciones, podemos realizar la descomposición de $\vec{V}$ en dos tiempos, del siguiente modo:

1°) descomposición de $\vec{V}$ en dos vectores coplanarios y paralelos con él según las rectas base que se proyectan en B y en E;

2°) descomposición del vector E en otros dos coplanarios y paralelos con él cuyas rectas-base se proyectan en A y en C.

Este método resulta, como puede comprobarse, más rápido e igualmente exacto que el anterior.

CAPITULO VI

-MOMENTOS CON RELACIÓN A UN EJE.- PARES DE VECTORES--

48.- Momento de un vector respecto a un eje (fig. 51).

El momento de un vector (AB) respecto a un eje OZ, es el momento de la proyección A'B' de dicho vector sobre un plano perpendicular al eje, tomado con relación al punto O en que el eje pasa a través del plano.

Se representa por un vector OL', superpuesto al eje, de longitud proporcional al doble del área del triángulo A'B'O y de sentido conveniente para que un observador que ocupe su posición vea girar al vector A'B' en sentido contrario a las agujas de un reloj.

El momento axial, es, como vimos que sucedía con los lineales, independiente del origen del vector AB sobre su recta base.

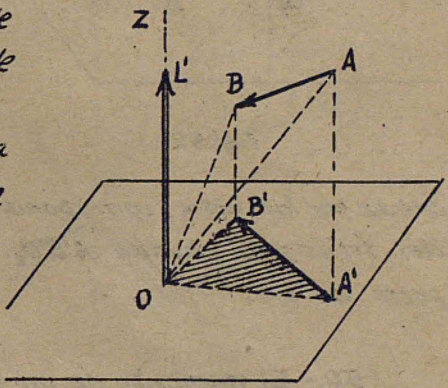


Fig. 51

49.- Propiedad fundamental.- Los momentos lineales de un vector con relación a los distintos puntos de un eje tienen igual proyección sobre este eje.

El momento de un vector respecto a un eje, es igual a la proyección sobre él del momento lineal del vector con relación a un punto cualquiera del eje.

La figura 52 representa conjuntamente el momento axial OL' y dos momentos lineales del vector (AB) referidos

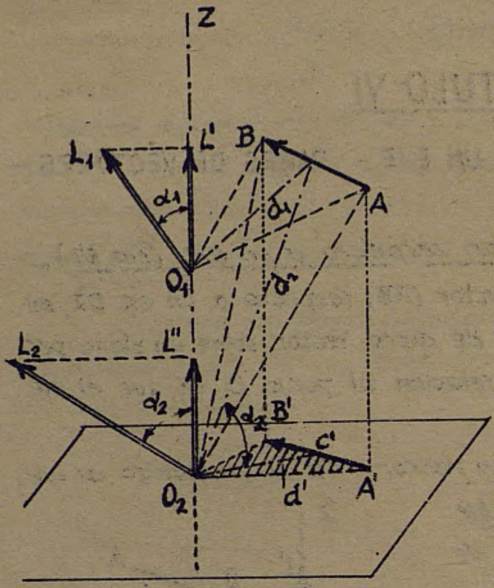


Fig. 52

a dos puntos, O_1 y O_2, del eje.
Estos últimos, representados por los vectores O_1L_1 y O_2L_2 aumentan de valor a medida que el centro de momentos se va alejando, pero aumenta también la abertura del ángulo α que forman con el eje.
Sus proyecciones sobre el eje:

$$L' = L_1 . \cos \alpha_1$$
$$L'' = L_2 \cos \alpha_2$$

son iguales puesto que, según sabemos, L_1 y L_2 son numéricamente iguales al doble del área de sus triángulos ABO respectivos y el producto de estas áreas por los $\cos \alpha$ correspondientes es siempre igual al area del triángulo rayado $A'B'O_2$, que representa el momento respecto al eje.

50.- El momento de un vector con relación a un eje es nulo si el vector y el eje están en un mismo plano

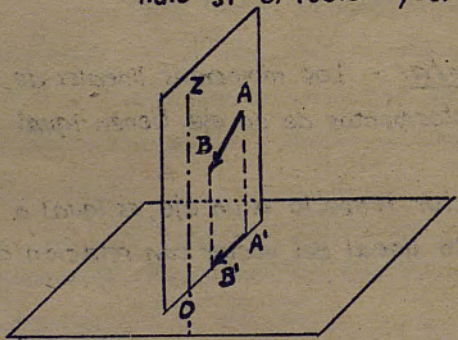


Fig. 53

En efecto (fig. 53) la proyección del vector sobre el plano perpendicular al eje pasará por O, ó quedará reducida a un punto (caso de ser el vector paralelo al eje).
En ambos casos su momento es nulo.

51.- El momento respecto a un eje cualquiera, de la resultante de un sistema de vectores, concurrentes en un punto, es igual a la suma algebraica de los momentos de los vectores componentes respecto al mismo eje.

En efecto, si tomamos momentos lineales de cada uno de cada uno de los vectores M, N, R (fig. 54) y de su resultante R respecto a un punto cualquiera del eje, del O por ej., obtendremos varios vectores-momento, L_P L_M L_N, cuya resultante será precisamente el vector-momento L_R correspondiente a la resultante de vectores AR (nº 42).

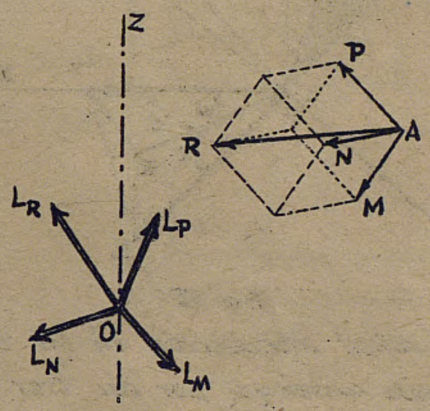


Fig. 54

Pero, en virtud del teorema de las proyecciones, sabemos que la proyección de L_R sobre OZ será la suma algebraica de las proyecciones de L_P, L_M y L_N sobre el mismo eje. Queda, por consiguiente, demostrada la propiedad antes enunciada.

52.- Haciendo aplicación de este teorema conjuntamente con los conceptos estudiados en los números 48 y 49 quedan sumamente simplificadas la expresión y la representación de los momentos de los vectores en el espacio. Las figuras 55 y 56 son una prueba de ello: en la primera suponemos referida la posición de un vector a 3 ejes coordenados; en la segunda el vector está sustituido por sus tres componentes según dichos ejes. Expliquemos con algún detalle el contenido de cada una de ellas.

53.- Sean (fig. 55) AB un vector en el espacio y A'B' su proyección sobre el plano ZOY. El momento lineal de (AB) respecto al origen de coordenadas O es el vector OL perpendicular al plano ABO. Este vector, divergente con los ejes

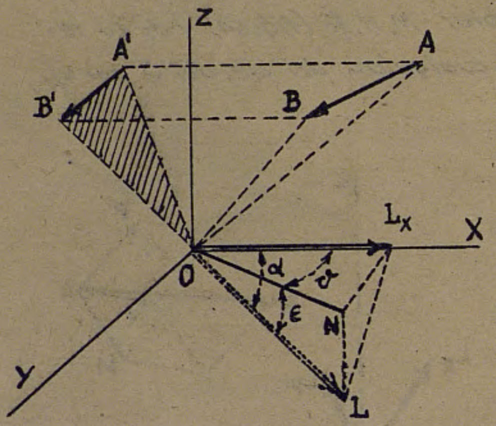


Fig. 55

OX, OY, OZ, puede ser proyectado sobre cada uno de ellas. Una de estas proyecciones sería:

$$\boxed{L_x = L \cos\alpha} \qquad (28)$$

las otras dos (no dibujadas) serían:

$$\boxed{L_y = L \cos\beta}$$

$$\boxed{L_z = L \cos\gamma}$$

El vector L, divergente y de difícil introducción en los cálculos podrá ser substituido cuando convenga por sus tres componentes citadas, con manifiesta ventaja para cuantas composiciones de momentos hayan de ser efectuadas.

La componente L_x que, según vimos, (nº 49) es el "momento de (AB) según el eje OX", es igual (por definición, nº 48) al momento de A'B' respecto al punto O en que el eje OX atraviesa al plano ZOY.

En la figura podemos observar tambien que la proyección de OL sobre el plano horizontal es $ON = L \cos\varepsilon$ y que la de ON sobre el eje OX es L_x, o sea:

$$L_x = \overline{ON} \cos\vartheta \ ;$$

Multiplicando estas dos últimas igualdades miembro a miembro resulta:

$$\overline{ON} \times L_x = L \cos \epsilon . \overline{ON} \cos \vartheta \text{ ,, ó bien ,, } L_x = L \cos\epsilon \cos\vartheta,$$

de lo que deducimos que:

$$\boxed{\cos \alpha = \cos \epsilon . \cos \vartheta} \qquad (29)$$

54.- Sean ahora (fig 56) X, Y, Z las tres componentes de un vector según tres ejes coordenados. Aplicando los conocimientos citados en el nº 52, deducimos:

1º) Los momentos de X respecto a OX, de Y respecto a OY y de Z respecto a OZ, son nulos (nº 50).

2º) El momento del vector resultante respecto al eje OX será la suma "algebraica" de los momentos de Y y de Z respecto al mismo, y valdrá:

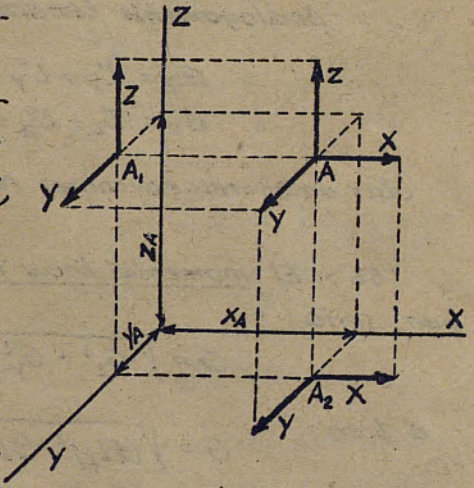


Fig. 56

$$L_x = Yz_A - Zy_A \qquad (30)$$

3º) Análogamente tendremos:

$$L_y = Zx_A - Xz_A \quad \text{,,} \quad L_z = Xy_A - Yx_A \qquad (30)$$

4º) El momento de la resultante valdrá:

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \qquad (31)$$, y sus cosenos directores podrán calcularse por las fórmulas:

$$\cos \alpha = \frac{L_x}{L} \; ; \quad \cos \beta = \frac{L_y}{L} \; ; \quad \cos \gamma = \frac{L_z}{L} \qquad (32)$$

55.- Composición de los momentos de varios vectores con relación a los tres ejes de coordenadas.-

Llamando G_x al vector-momento resultante con relación al eje de las X y L'_x, L''_x, L'''_x ... a los vectores-momentos de los vectores componentes, con relación al mismo eje, se verifica (nº 51):

$$G_x = L'_x + L''_x + L'''_x + \dots = \Sigma L_x$$

Análogamente tendríamos:

$$G_y = L'_y + L''_y + L'''_y + \dots = \Sigma L_y$$
$$G_z = L'_z + L''_z + L'''_z + \dots = \Sigma L_z \qquad (33)$$

(Las anteriores expresiones representan sumas algebraicas)

56.- El momento lineal resultante respecto al origen sería:

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} \qquad (34)$$

o bien:

$$G = \sqrt{(\Sigma L_x)^2 + (\Sigma L_y)^2 + (\Sigma L_z)^2} \qquad (35)$$

57.- Par de vectores.-

Recibe el nombre de "par de vectores" un grupo de dos vectores, iguales, paralelos y de signo contrario. No se considera "par" al formado por dos vectores directamente opuestos.

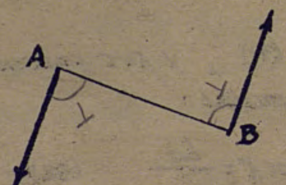


Fig. 57

A la distancia que separa las dos fuerzas se la denomina "brazo del par". Esta distancia debe tomarse según una perpendicular a ambos vectores.

58.- Momento o "eje" de un par.- Llámase así al momento lineal resultante de los momentos de los vectores que forman el par, respecto a un punto cualquiera del espacio.

Este momento es independiente del centro de momentos elegido, o sea, dicho en otros términos, que el tal momento es igual con relación a cada uno de los puntos del espacio.

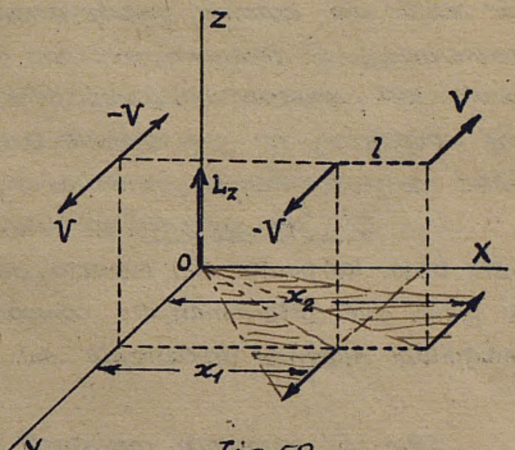


Fig. 68

Dispongamos, en efecto, tres ejes coordenados (fig. 58) de modo que uno de los planos YOX y uno de los ejes OY queden paralelos a los vectores que integran el par. Tomemos ahora el momento de éste respecto a O y para ello apliquemos el criterio o método explicado en el n° 53 o sea: busquemos los momentos según cada uno de los ejes, mediante las proyecciones de los vectores sobre los planos normales a aquellos. Así: para los momentos respecto al eje OX hemos de emplear las proyecciones sobre ZOY; para los respecto a OY, las proyecciones sobre XOZ, etc.

El examen de la fig. nos dice: 1°) El momento con relación a OY será nulo por ser nulas las proyecciones de V y -V sobre XOZ; 2°) El momento con relación a OX lo será también porque las proyecciones de V y -V sobre el plano correspondiente son directamente opuestas; 3°) Los momentos respecto al eje OZ serán iguales a $+Vx_2$ y $-Vx_1$ cuya suma será $V(x_2 - x_1)$, dirigida según OZ y representada por el vector-momento L_z, pudiendo escribirse:

$$M_o\,(V-V) = L_x = V.l\,,$$

puesto que $(x_2 - x_1) = l$

Teniendo en cuenta que lo que hemos dicho para el punto O puede ser repetido para otro cualquiera de los puntos del espacio, queda comprobado el principio antes enunciado. El momento del par es igual para todos los puntos del universo, en todos ellos tiene dirección y magnitud constantes, es un ejemplo o caso físico de vector libre como los hemos definido en el nº 11.

El "eje del par" es, pues, un vector momento igual para todos los puntos del espacio, de dirección perpendicular al plano que determinan los componentes del par y cuya magnitud depende únicamente del producto $|V| \times |l|$.

59.- El momento resultante de un número cualquiera de pares es independiente del centro de momentos.

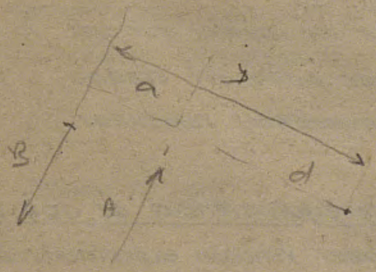
En efecto, estando representado, según acabamos de indicar, cada uno de dichos momentos por un vector con las propiedades y características de los vectores libres, en su composición o suma geométrica no puede influir el lugar del espacio donde aquella se realice.

60.- Consecuencias prácticas relativas a los pares de vectores.

1ª) Un par está caracterizado por su eje, siendo éste representación simplificada del par, suficiente para apreciar sus efectos. (Puesto que tales efectos dependen de la acción que denominamos "momento" y el eje es la expresión de este momento)

2ª) El efecto de un par es independiente de la posición de su eje en el espacio. En otros términos, podemos desplazar el eje de un lugar a otro sin que con ello se modifiquen los efectos del par. (Puesto que tal desplazamiento equivaldría unicamente a un cambio de centro de momentos).

3ª) Dos o más pares cuyos ejes sean iguales producirán efectos equivalentes. (Siendo iguales los ejes serán iguales los productos $V_1 . l_1 = V_2 . l_2 = V_3 . l_3$, de los que se deduce la igualdad de sus respectivos "momentos" o acciones en relación con todos los puntos del espacio. (nº 58)



M° A = A d
M° B = B D = Bd + Ba

D = d+a

M° A + M° B = Ad − Bd − Ba = −Aa

CAPITULO VII

— EQUIVALENCIA Y COMPOSICION DE SISTEMAS VECTORIALES —

61.- Sistema vectorial o sistema de vectores es un conjunto de estos elementos que actúan simultaneamente y cuyos efectos se superponen.

62.- Dos sistemas se dicen equivalentes cuando tienen la misma suma geométrica y el mismo momento resultante con relación a un punto determinado.

Así, por ejemplo, serán equivalentes varias fuerzas concurrentes y su resultante (puesto que, siendo la misma su suma geométrica son nulos sus momentos respecto al punto de aplicación). También lo serán dos "pares" cuyos ejes sean iguales ya que por ser iguales sus ejes, lo son sus momentos respecto a cualquier punto del espacio, y por ser "pares", sus respectivas sumas geométricas son nulas.

63.- Condiciones de equivalencia de dos sistemas.-

Estas condiciones vendrán expresadas por las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= \Sigma X' \\ \Sigma Y &= \Sigma Y' \\ \Sigma Z &= \Sigma Z' \end{aligned}\right\} \quad (36) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} \Sigma L_x &= \Sigma L'_x \\ \Sigma L_y &= \Sigma L'_y \\ \Sigma L_z &= \Sigma L'_z \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

que en términos verbales significan:

1°) Con referencia a los vectores, que las sumas de las componentes del 1er sistema respecto a cada uno de los ejes (de las X, de las Y y de las Z) han de ser iguales respectivamente a las correspondientes sumas del 2° sistema

2°) Con referencia a los momentos, que igual condición de igualdad tiene que existir entre las sumas de las proyecciones, sobre cada eje, de los momentos de las componentes del 1er sistema y de las del 2° sistema.

64.- Si dos sistemas de vectores tienen igual momento resultante con relación a un punto O, lo tienen también igual respecto a otro punto cualquiera O_1.

En consecuencia, la equivalencia entre dos sistemas puede quedar demostrada sea cual sea el centro de momentos elegido.

Sean P, P', P''... y Q, Q', Q''... (fig. 59) dos sistemas de vectores cuyas sumas geométricas respectivas son iguales y cuyas sumas de momentos respecto a O también lo son. Representándolas por ΣP y ΣQ y por $\Sigma M_o P$ y $\Sigma M_o Q$ respectivamente tendremos:

$$\Sigma P = \Sigma Q \quad (38a) \quad ; \quad \Sigma M_o P = \Sigma M_o Q \quad (38b)$$

y se trata de demostrar que, de igual modo,

$$\Sigma M_{O_1} P = \Sigma M_{O_1} Q \quad (39)$$

para los momentos referidos al punto O_1.

Introduciremos, a este efecto, en la figura un nuevo sistema p; p'; p''... etc. cuyos vectores sean iguales y direc-

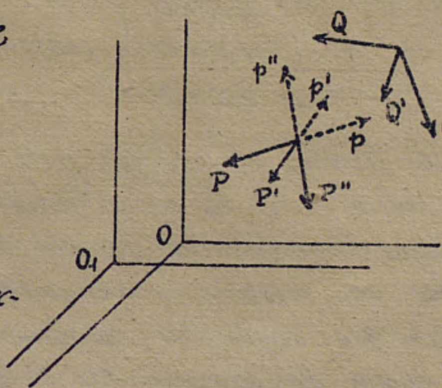


Fig. 59

tamente opuestos a los del primero. Tendremos entonces:

$$\Sigma P = -\Sigma p \quad (40) \;,\; \Sigma M_o P = -\Sigma M_o p \quad (41)$$

y $\qquad \Sigma M_{o_1} P = -\Sigma M_{o_1} p \quad (42).$

De (40) y (38a) deducimos: $\Sigma Q + \Sigma p = 0$, o sea que el conjunto del 2° y 3er sistema tiene una suma geométrica nula. Siendo ello así, su momento es constante para cualquier punto que se considere (n° 40) y podremos escribir:

$$\Sigma M_o Q + \Sigma M_o p = \Sigma M_{o_1} Q + \Sigma M_{o_1} p = \text{constante} \;,\; (43)$$

o bien (43; 41 y 42):

$$\Sigma M_o Q - \Sigma M_o P = \Sigma M_{o_1} Q - \Sigma M_{o_1} P \;,\; \quad (44)$$

pero, según (38b) el primer miembro de (44) es igual a cero, por consiguiente también lo será el 2° miembro, o bien:

$$\Sigma M_{o_1} Q = \Sigma M_{o_1} P \;,\; \text{ como queríamos demostrar}$$

65.- <u>Condiciones de nulidad de un sistema</u>.-

Todo sistema en el cual son nulas las seis cantidades:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma Z = 0 \end{array}\right\} (45) \qquad \left.\begin{array}{l} \Sigma L_x = 0 \\ \Sigma L_y = 0 \\ \Sigma L_z = 0 \end{array}\right\} (46)$$

es un sistema de efectos nulos. Efectivamente: en virtud de los valores (45) la suma geométrica de sus vectores es nula. Como consecuencia de ello, el momento del sistema es igual con relación a cualquier centro que se considere, y puesto que según las relaciones (46) es nulo con relación al origen de coordenadas, lo será también para los demás puntos del espacio.

Si los vectores del sistema correspondieran ó representaran fuerzas mecánicas sería éste un caso de equilibrio perfecto entre ellas. Las condiciones arriba expresadas serían en tal caso las llamadas "condiciones generales de equilibrio" del sistema.

66.- Consecuencias derivadas de las condiciones de equivalencia. (nº 63).

1ª) Un vector y un par no pueden ser equivalentes ya que en el primero una o varias de las tres primeras componentes $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$, son distintas de cero, mientras que en el par son nulas. En cuanto a las tres últimas ΣL_x, ΣL_y, ΣL_z, el vector puede tenerlas nulas para un determinado centro, mientras que el par ha de tener por lo menos una diferente de cero.

2ª) Todos los "pares" que tienen ejes equipolentes son equivalentes. Porque en ellos las tres primeras componentes son nulas, y respecto a las tres últimas ΣL_x; ΣL_y; ΣL_z se cumplen las condiciones (37) del nº 63.

Esta propiedad indica la posibilidad de sustituir un par de brazo pequeño y vectores grandes por otro de condiciones alternas. Puede también cambiarse la dirección de los vectores; lo único que no puede variar es la dirección y el sentido del "eje del par".

3ª) Dos vectores equipolentes P y P' no situados sobre la misma recta pasan a ser equivalentes si se añade a uno de ellos un par cuyo momento sea igual al del otro vector con relación a un punto cualquiera del primero. (fig. 60). En efecto: siendo los dos vectores equipolentes cumplen ya las tres condiciones (36) del nº 63. El momento del primer vector respecto a uno de sus puntos, es cero; si le añadimos un par, $\vec{L}$, cuyo momento iguale al del segundo vector, quedarán cumplidas las otras tres condiciones (37) del mismo nº. 63.

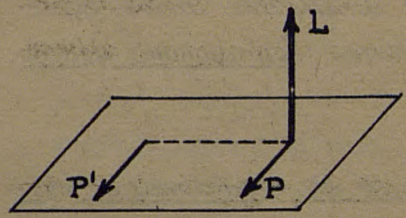


Fig. 60

Sacamos del principio anterior una importante consecuencia:

"Un vector puede ser trasladado paralelamente a sí mismo con la condición de que se le añada un par cuyo plano sea el de las dos posiciones del vector (u otro plano paralelo) y cuyo momento sea el producto del vector por la distancia entre las dos posiciones".

67.- Diversos casos de equivalencias.-

1.- La resultante geométrica de varios vectores concurrentes en un punto, es equivalente al sistema formado por éstos. (Por ser iguales sus sumas geométricas y nulos sus momentos respecto al punto de concurrencia).

2.- Un sistema cualquiera de pares es equivalente a un par único cuyo eje sea la resultante de los ejes componentes. (Por cumplirse evidentemente las 6 condiciones del nº 63).

3.- Si hay solo dos o solo tres pares componentes, el eje del par resultante es la diagonal del paralelogramo o del paralelepipedo formados con los ejes componentes.

68.- Un sistema de vectores es, en general, equivalente a un vector único y un par único (fig. 61)

Cada uno de los vectores puede ser trasladado a O paralelamente a sí mismo (nº 66) mediante la adición de un par cuyo momento estará representado por un eje-vector de valor conveniente (no indicados en la fig.)

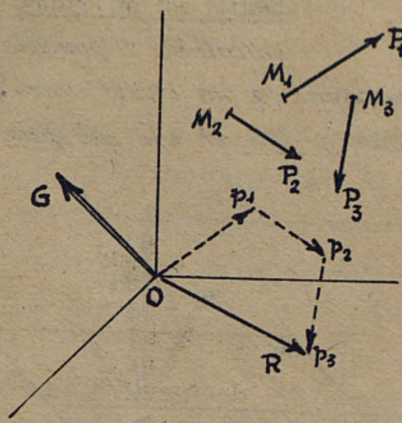


Fig. 61

Transportados allí todos los vectores darán, por composición un vector resultante OR. Igual ocurrirá con los ejes que compondrán el eje OG. Por tanto, reducido el sistema a un solo vector y a un solo par, queda justificado el principio enunciado.

69.- Caso particular: Si el vector OR y el eje OG son perpendiculares entre sí, el sistema admite una resultante única. (fig. 62)

En efecto, basta substituir el eje OG por un par (S-S) uno de cuyos vectores sea igual y directamente opuesto al vector $\vec{R}$. Substituido $\vec{G}$ y neutralizado R con (-S), queda solamente el vector S que es equivalente al sistema dado.

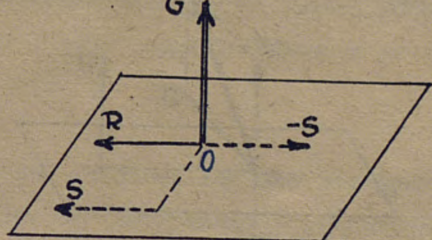


Fig. 62

70.- Un sistema de vectores, cuando no es reducible a un vector o a un par únicos, es equivalente a dos vectores no situados en un mismo plano.

Admitido el principio del nº 68, de que un sistema es equivalente a un vector único y a un par único, sean R el vector y OG el eje del par (fig. 63). Tracemos por O un plano perpendicular a OG y supongamos situado en él, un par (S-S) que sustituya al eje OG. La composición de OR con (-S) daría una resultante R' y quedaría el sistema reducido a los vectores S y R'.

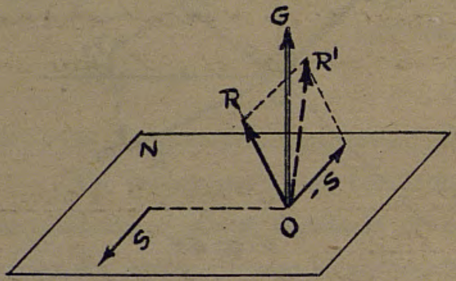


Fig. 63

Generalmente el vector R y el R' estarán fuera del plano N; por consiguiente los dos vectores a que queda reducido el sistema se cruzarán en el espacio y no estarán sobre ningún plano común.

71.- Recíprocamente: Dos vectores que se cruzan en el espacio equivalen a un sistema formado por un vector y un par únicos.

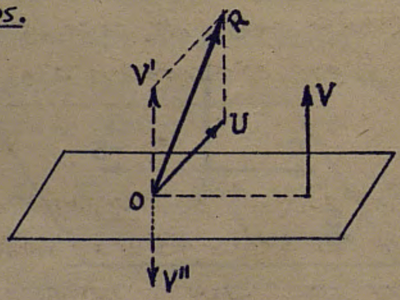


Fig. 64

Demostrado este principio en el nº 68, con caracter de generalidad para todos los sistemas, claro está que se cumplirá en el caso del sistema que forman los dos vectores que se cruzan. Debemos, sin embargo, destacar esta propiedad, por las frecuentes referencias que a ella se hacen al estudiar las acciones de las fuerzas sobre las estructuras en Mecánica Aplicada

Una demostración directa de este principio la dâ la fig. 64. Sean U y V los dos vectores que se cruzan en el espacio; si por el origen de uno de ellos, U, trazamos dos vectores iguales y opuestos V' y V'' el primero de los cuales sea equipolente al $\vec{V}$, y si componemos U con V', el sistema habrá quedado convertido en el vector resultante R y el par $(V; V'')$ ya que los vectores U y V' han quedado sustituidos por R.

72.- <u>Casos prácticos en que un sistema de vectores es equivalente a cero.-</u>

Las condiciones generales de nulidad de un sistema son las señaladas con los números (45) y (46) en el nº 65. Podemos deducir de ellas las siguientes consecuencias:

1ª) Para que un sistema compuesto de un vector y de un par sea equivalente a cero, es preciso que separadamente sean nulos el vector y el eje del par.

2ª) Para que lo sea un sistema formado por dos vectores es necesario y suficiente que estos sean iguales y de sentido contrario y que pertenezcan a la misma recta base.

3ª) Para que sea nulo un sistema de tres vectores concurrentes en un punto es necesario y suficiente que cada uno de ellos sea igual y opuesto a la resultante de los otros dos.

4ª) Para que lo sea un sistema formado por dos pares, es necesario y suficiente que los ejes de dichos pares sean iguales y paralelos y que tengan sentidos contrarios.

INDICE