COMPENDIO MATEMÀTICO

PARA EL USO

DE LAS REALES ESCUELAS GRATUITAS,

ESTABLECIDAS

POR LA REAL SOCIEDAD ECONOMICA

DE AMIGOS DEL PAIS

DE LA

CIUDAD DE MURCIA

POR

DON LUIS SANTIAGO BADO,

DE LA MISMA SOCIEDAD, Y DIRECTOR PRINCIPAL DE MATEMATICAS EN LAS REFERIDAS ESCUELAS.

TOMO PRIMERO.

MURCIA:

En la Imprenta de la VIUDA de Felipe Teruél:
Año MDCCXCIII.

Arithmeticam si quis aufert, omnes artes auferuntur, et nullae manent, et omnes in totum peribunt.

Plat. in leg. ap.

A LA REAL SOCIEDAD
DE AMIGOS DEL PAIS
DE LA
CIUDAD DE MURCIA.

SEÑORES:

Si fuera solo el decoro, merito, y autoridad de este respetable cuerpo, el unico punto de vista, que à la mia se ofrece, nunca hubiera podido salvar la barrera que oponia

nia à mis designios el conocimiento propio de mi gran limitacion; pero yo miro reunido estrechamente à V. SS. aquel dulce amor que no se desdeña aun de la mas pequeña oblacion, si está marcada con el sello de un verdadero zelo, por nuestro Rey, y Patria; y este tierno, y delicioso objeto, es el que ha dirigido unicamente mis pasos, y alentado mi desconfianza á ratificar hoy à V. SS. aquel con que yo he procurado darme á conocer, desde que se dignaron admitirme por uno de sus individuos, honrandome con el cargo de Director de las Salas destinadas à la enseñanza de los Elementos Matemáticos, que dicen precisa relacion con las Artes, y principalmente con la Arquitectura, que por un efecto de su verdadero zelo Patriotico estableció esta Real Sociedad gratuitamente.

Yo me confieso como un debil resorte, colocado en esta grande maquina; pero

me

me lisongeo , de contribuir en la situacion que me cabe , con mi corto impulso , à hacer efectivos los utiles movimientos á que conspira su digno establecimiento.

Quisiera que mi suficiencia fuera tan grande , como mi voluntad , y zelo , para llenar por mi solo , el vasto plan sobre que V. SS. han tirado sus prudentes , y acertadas lineas ; pero me veo reducido à solo usar del corto numero de conocimientos , que puede franquear una aplicacion , aunque continuada à quien no ha salido jamas de los estrechos limites que le prescribió su cuna.

Sobre estas incontextables verdades , me atrevo à presentar á V. SS. este ligero Compendio Matemático , mas con el deseo de facilitar su instruccion à los alumnos de las Escuelas gratuitas , que con el de preciarme de Autor ; yo nada he hecho mas que acomodar estos elementos , al sistema

que

que he podido formar con la continua observacion sobre la aplicacion, y disposicion de los discipulos que freqüentan las referidas escuelas.

Dignense, pues, V. SS. de admitir este corto tributo de mi buen deseo, y agradecimiento, que es todo el honor á que aspira el menor de sus individuos

Q. B. S. M.

Luis Santiago Bado.

IN-

INTRODUCCION.

Todo quanto nos rodea en este vasto campo del mundo, es extenso, y à toda cosa que es extensa, damos el nombre de *cuerpo*, y el de *cantidad* à la extension que lo constituye.

Los instrumentos destinados para percebir estos cuerpos, son nuestros sentidos, los que en el mismo instante en que han sido chocados de ellos, transmiten sus sensaciones con asombrosa ligereza á nuestra alma, que seguidamente forma la idea de la *cantidad*, y esta cantidad que asi aprendemos es el objeto de lo que llamamos Matematica.

Aunque nuestra alma es espiritual, no puede adquirir ideas del espiritu por el enlace, y estrecha union que tiene á nuestro cuerpo, y asi quando se ofrece à nuestra imaginacion un espiritu como un Angel, nos lo figuramos como un gallardo joven, en quien procuramos reunir toda la belleza imaginable, y asi nos figuramos siempre corporeo lo que es realmente espiritual.

Quan-

Quando la Matemática se ciñe á considerar la cantidad en quanto extensa, sin atender á ninguna de las otras propiedades que caracterizan los cuerpos, se llama *Matemática pura*, à distincion de *la mixta.*

Quando una cantidad se considera en sí sin division alguna, se llama *cantidad continua*, pero quando la consideramos capaz de dividirse infinitamente, de manera, que no nos figuremos parte alguna por pequeña que sea, que no podamos aun dividirla en otras mas diminutas, se llama *cantidad discreta.*

De estos dos diferentes modos de considerar la cantidad, nacen las dos ciencias que forman la Matemática pura, tales son la Arismetica, y Geometria, ésta exâmina las propiedades de la cantidad en quanto continua, y aquella en quanto discreta, juntando, separando, aumentando, disminuyendo, y comparando unas cantidades con otras.

Quando se considera la cantidad en orden à las demas propiedades se forman las otras ciencias Fisico-matemáticas; y como qualquiera de estas, tiene por ob-

objeto á dicha cantidad, supone desde luego quanto la Arismetica, y Geometria; y usa de estas dos ciencias primitivas, para indagar la conexîon ó relacion que tiene con las demas propiedades, asi nacen la Dinamica, Hidrodinamica, Estatica, Hidrostatica, Optica, Dioptrica &c.

Nosotros, pues, consideraremos la cantidad en quanto discreta, y continua, y aunque este plan es bastante reducido, respecto el que ofrece á la consideracion, la idea de las otras matemáticas mixtas; con todo, el que aplicase sus talentos al conocimiento de estas dos principales ciencias, se pondrá en estado de entender con facilidad, aquellas que fundan sobre estas, todas sus proposiciones.

Trataremos, pues, en este tomo I. del calculo numerico segun requiere el buen orden, en el que he procurado guardar toda la sencillez posible, acomodandome al metodo que la experiencia me ha hecho conocer mas ventajoso para la inteligencia de los Jovenes; reservandome para el II. dar unas ligeras nociones de Algebra que precederán á la Geometria.

Yo quisiera hacer conocer à todos, que la Arismetica es de un uso estenso, y muy preciso al hombre, y que no hay uno que no haya de valerse á cada paso casi involuntariamente del calculo numerico.

Un hombre que se ha acostumbrado al idioma matemático, excede sin comparacion á todos los demas en la facilidad, y fuerza de sus expresiones, y razonamientos, pero esta es una verdad tan clara, que no puede herir sin una sensacion dolorosa, los organos del que no ha salido todavia de la obscuridad que le rodea, y ofusca.

Pero si este es mi modo de pensar quando no me ciño á determinada clase de personas, ¿quáles deberian ser mis expresiones al dirigirme à los Artistas que á proporcion de la facultad que exercen, les son de estrecha obligacion estos conocimientos? Un Alarife, por exemplo, que ignora absolutamente aun los principios indispensables de Arismetica, y Geometria, ¿qué espera edificar sino su propia ruina? ¿pero qué diremos

de

de los que aun no conocen las letras del Abecedario, y se revisten con el de peritos Arquitectos, atreviendose á emprender obras que piden toda la atencion aun de los mas instruidos? estos verdaderamente son hombres que se deberian conocer, y tachar como perjudiciales al bien comun, respecto á los gravisimos perjuicios que ocasionan y que está acreditando la experiencia diariamente.

¿Quién podria persuadirse que despues de haber tenido la felicidad de que se estableciesen en esta Ciudad las escuelas gratuitas por la Real Sociedad, no tan solo no habian de concurrir á adquirir la instruccion de que carecian muchos de ellos, sino que menospreciando un bien tan particular, habian de procurar por todos los medios posibles apartar de ellas á todos aquellos que bien aconsejados ivan á ponerse en estado de ser unos Profesores utiles á la Patria? pues ello es que asi se ha verificado, entre tanto que diferentes Jovenes de todas clases acuden á ilustrarse en unas ciencias tan utiles, y deleytables.

Pues,

Pues, seguid enhorabuena cultivando vuestros talentos, con la aplicacion, para poder algun dia agradecer á vuestra Patria unos tan singulares beneficios, cogiendo en recompensa el honor que negará á los ingratos, y desconocidos á quienes quando intentasen optarle dirá por boca de Ovidio

Ad possessa venis, preceptaque gaudia serus

Spes tua lenta fuit, quod petis alter habet.

ELE-

ELEMENTOS DE ARISMÉTICA.

NOCIONES PRELIMINARES.

1 Arismetica es ciencia que tiene por objeto la cantidad discreta, ó separable, cuyas partes son los numeros.

2 Cantidad, ó magnitud es todo aquello que tiene partes, y puede aumentarse, ó disminuirse.

3 Unidad es el abstracto por quien se dice uno; es pues la unidad, raiz, y principio del numero.

4 Numero, es la union de dos ó mas unidades.

5 Numero *abstracto*, es el que no denomina especie.

6 Numero *concreto*, es el que la denomina.

7 Numero *par*, es el que puede dividirse en dos partes iguales.

8 Numero *impar* es el que no puede tener tal division.

9 *Medida de un numero*, es aquel que repetido dos, ó mas veces llega á formar otro; llamase tambien *parte aliquota*, y el numero medido *multiplice*.

10 Un numero que mide á dos, ó mas numeros, se llama *comun medida*, y los numeros asi medidos *conmensurables entresí*.

11 Entre las varias medidas que pueden tener dos ó mas numeros, el mayor que les mide se llama su *mayor comun medida*.

12 Numeros primeros son aquellos cuya unica medida es la unidad.

Nu-

13 Numeros compuestos son los que á mas de la unidad tienen otra medida.

De las Cifras que usa la Arismetica.

14 Todas las cifras que forman el calculo numerico son...0.... 1......2....3.......4.........5.......6.......7......8........9.....
cero, uno, dos, tres, quatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve,

El valor de estas cifras, caracteres, ó guarismos (que todo es uno) es el *natural*, que tienen por el mismo órden, en que están colocados: asi el primer lugar fuera del cero, vale uno, el segundo dos, el tercero tres, &c.

El cero no vale nada, y solo sirve para dar valor á otros guarismos.

De la Numeracion.

15 Quando dos, ò mas guarismos, componen una cantidad, el de la derecha del que escribe, vale unidades: el segundo decenas; el tercero centenas &c. de manera que cada guarismo ácia la izquierda, vale diez veces mas que su inmediato, cuyo *valor se llama local*: asi 11, vale once, esto es, una decena, y una unidad: 326 vale trescientos veinte y seis; esto es, tres centenas, dos decenas, y seis unidades.

16 El cero sirve para expresar una ó mas decenas como 10, 20, 30, 100, 1000 &c. esto es, diez unidades, veinte, treinta, ciento, mil &c. ó lo que es lo mismo una decena, dos, tres, diez, ciento &c.

17 Quando se halla un cero entre dos guarismos como 304, se lee trescientos quatro, pronunciando solamente los guarismos que tienen valor: 3004, se lee tres mil quatro, pronunciando solamente los millares, y uni-

unidades, y pasando en silencio las centenas, y decenas, cuyo lugar ocupan los ceros: 800603, se lee ochocientos mil, seiscientos tres, por lo mismo que acabamos de insinuar.

18 Para leer una cantidad compuesta de mayor numero de cifras; se separarán de tres en tres, principiando de la derecha á la izquierda: estas separaciones dexarán dividida la cantidad en clases, y dignidades, de manera que cada clase constará de tres guarismos, y cada dignidad de seis: al primer guarismo de la segunda dignidad, pongasele debaxo 1; al primero de la tercera 2; al de la quarta 3; y asi prosiguiendo por el mismo orden hasta el fin: principiese á leer por la izquierda, y en donde se halle distincion de clase, se pronunciará millar, y en donde la unidad, ó qualquiera de los guarismos que se pusieron debaxo de las dignidades, se dirá cuento, bicuento, tricuento &c. segun vamos á manifestar.

Supongamos que se necesita leer la cantidad siguiente.

Dignidad de bicuento.							Dignidad de cuento.						Dignidad de unidades.					
	Clase de bicuento.			Clase de millar de Cuento.			Clase de Cuento.			Clase de millar de unidades.			Clase de unidades.		
....	Unidad.	Centena.	Decena.	Unidad.	Centena.	Decena.	Unidad.	Centena.	Decena.	Unidad.	Centena.	Decena.	Unidad.
	3,	7	8	3,	4	5	3,	9	4	3,	4	2	6
	2						1						

Dis-

Distingamos toda la cantidad, como se ve desde la derecha á la izquierda, diciendo, unidad, decena, centena, y poniendo alli este señal (,) sigamos hasta el fin, donde nos queda solo un guarismo, que vale unidades de bicuento: en seguida escribamos debaxo de las unidades de cada dignidad, excepto la primera, el exponente que le corresponde, y principiemos á leer la cantidad, que guardando el metodo que expresamos, consistirá en *tres bicuentos, setecientos ochenta y tres mil, quatrocientos cincuenta y tres cuentos, novecientos quarenta y tres mil quatrocientos veinte y seis.*

De las quatro Operaciones fundamentales de la Arismetica.

SUMAR.

19 Sumar *es juntar muchas cantidades en una, para saber el valor de todas ellas.*

Para sumar, deben ser todas las cantidades de una misma especie, porque mal se podrían reducir á una suma 3 hombres, 6 reales, y 8 libras: esto supuesto, escribanse todas las cantidades unas debaxo de otras, de manera, que unidades, correspondan á unidades, decenas á decenas &c. y tirando una linea por debaxo se sumarán todas las unidades, y si la suma no pasase de 9, se escribirá debaxo de las unidades; si llegase á 10, ó alguno de sus multiplices, se escribirá o, y la decena ó decenas se llevarán á la columna inmediata de las decenas; ultimamente, si la suma pasase de 10, 20, 30, &c. se escribirá el exceso debaxo, en el lugar correspondiente, y la decena ó decenas se llevarán como antes á la partida siguiente, continuese por el mismo orden hasta concluir

cluir, y la cantidad que resulte debaxo de la linea será la suma total.

Pongamos por exemplo que se necesita sumar las cantidades siguientes.

78683
48752
93044
220479

Dispuestas las cantidades segun se manifiestan, digo, 3 y 2, son 5, y 4 son 9, que escribo debaxo de las unidades porque no llegan á 10, paso á las decenas y digo, 8 y 5 son 13, y 4 son 17, por lo que pongo las 7 decenas debaxo, y porque las 10 restantes valen una centena, la junto á la siguiente columna, y digo, 6 y una que llevo son 7, y 7 son 14 centenas; anoto las 4 debaxo de ella, y porque las 10 restantes valen un millar, lo junto á la partida siguiente diciendo 8, y 1 que llevo son 9, y 8 son 17, y 3 son 20 millares, que por valer juntamente dos decenas de millar, escribo, 0, debaxo, y las sumo con la ultima columna diciendo, 7 y 2 que llevo son 9, y 4 son 13, y 9 son 22, que por ultimo escribo como se vé.

Por esta operacion, hallamos debaxo de la linea la cantidad 220479 que sin duda es igual á todas las propuestas, pues se ha formado de todas las unidades, de todas las decenas, centenas &c.

20 Para expresar una suma de dos ó mas cantidades, usan los Matematicos de este signo $+$ que quiere decir *mas*: asi $3+4+7$ significa que se han de sumar las tres cantidades 3, 4, 7, y para manifestar efectuada esta suma, usan de este $=$ que quiere decir *igual á*: Y asi escriben $3+4+7=14$.

Res-

RESTAR.

21 Restar, *es entre dos cantidades desiguales hallar la diferencia.*

Para restar una cantidad de otra, 1° disponganse las cantidades de manera, que la mayor esté sobre la menor, correspondiendo unidades á unidades, decenas á decenas &c. 2° principiese por la derecha quitando el numero de abaxo del de arriba; si hubiese diferencia escribase debaxo, y si no pongase cero, procediendo en lo demas segun vamos á manifestar.

Supongamos que de 300426 se ha de restar 123235

Las cantidades se llaman.	Minuendo........300426
	Substraendo....123235
	Diferencia.......177191

Principio por la derecha quitando 5 de 6, y su diferencia 1 la escribo debaxo; paso á las decenas, y como el guarismo substraendo es mayor que el minuendo, tomo una centena de la columna siguiente, y como una centena vale diez decenas, las junto al 2, cuya cantidad 12, me hace ya posible la substraccion, y digo, quitando 3 de 12 restan 9 que escribo debaxo; paso á las centenas, y quitando 2 de 3 (pues el 4 se disminuyó) hallo 1 por diferencia que escribo en su lugar: voy á los millares, y como el guarismo minuendo es 0, paso al siguiente para sacar una decena de millar, mas como tambien es cero, tomo del 3 siguiente una centena de millar, de la que dexando en el 0 inmediato 9 decenas de millar, paso la decena restante al 0 que le sigue, con lo que puedo hacer yá la substraccion, y digo, quitando 3 de 10 restan 7 que escribo debaxo: quitando 2 de 9

res-

restan 7, y quitando finalmente 1 de 2 resta 1, cuyas diferencias escritas debaxo, dan la de 177191 por total diferencia entre las cantidades propuestas.

22 En el exemplo actual se ven comprehendidos los casos que pueden ocurrir en el restar, que son, ò bien quando los guarismos del minuendo son menores, que los del substraendo, ó quando en el minuendo, se hallan uno ó mas ceros, en cuyo caso, se practica lo que acabamos de manifestar.

23 Para expresar una substraccion usan los Matematicos de este signo —, que quiere decir *menos*, asi para decir que 4 se han de restar de 8 se escribe 8—4; y se lee 8 menos 4, y para hacer efectiva esta operacion, la figuran asi 8—4=4.

Prueba del Sumar, y Restar.

20 La prueba del sumar, es restar, y la del restar sumar. Supongamos que habiendo practicado la siguiente suma, queremos averiguar si está bien executada.

368
432
543
892
2235
210

Principio por la izquierda, sumando del mismo modo que por la derecha, y digo 3 y 4 son 7, y 5 son 12 y 8 son 20, á 22 van 2 que escribo debaxo: junto este 2, con el 3 que sigue en la suma, y hacen 23: sumo ahora; 6 y 3 son 9 y 4 son 13 y 9 son 22 á 23 va 1 que escribo debaxo: junto este 1 con el 5 de la suma, y hacen 15; y sumo ultimamente 8 y 2 son

10 y 3 son 13 y 2 son 15, que restados de 15, no resta nada, de lo que infiero está bien hecha la operacion.

La razon de esto es muy clara, porque las diferencias que se encuentran, son unicamente las decenas, centenas, millares &c. que al sumar se agregan de unas columnas á otras, y como al hacer esta prueba, se va restituyendo á cada columna lo que se le quitó, es preciso que si la operacion está bien hecha venga *cero* al quociente.

25 La prueba del restar, nace de la misma definicion (21): porque si á la cantidad menor se le añade lo que le falta para ser la mayor, ó lo que es lo mismo, la diferencia que hay entre ambas, la suma será igual á la mayor: por exemplo:

Si habiendo restado de...............	3642
La Cantidad..................................	2451
La sumamos con la diferencia.	1191
Dará la misma cantidad...........	3642

En una palabra, *si la diferencia se suma con el substraendo, la suma será forzosamente el minuendo.*

MULTIPLICAR.

26 Multiplicar *es tomar tantas veces una cantidad, como unidades hay en otra*: y es lo mismo que sumar una misma cantidad, un cierto numero de veces; y asi se dice con razon, que el multiplicar *es un sumar abreviado*: si sumamos seguidamente el 4 quatro veces, la suma 16, será la misma que si multiplicamos el 4 por 4 pues tambien dá 16.

27 Para multiplicar una cantidad por otra, es indispensable encomendar á la memoria, el valor de las nue-

nueve cifras ó guarismos, multiplicados entre si, como expresa la siguiente Tabla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Si se nos ofrece multiplicar 5 por 6, buscaremos en lo superior de la tabla, uno de estos numeros, por exemplo el 6, y en la columna primera de la izquierda el 5, y siguiendo derechamente ácia el lado opuesto, hasta confrontar con el 6 de arriba, hallaremos 30, que es cabalmente el producto de 5 por 6.

Multiplicar un numero de muchos guarismo, por otro de solo uno.

28 Para executar esta operacion 1° escribase el numero mayor, y debaxo de sus unidades escribase el menor. 2° tirese una linea por debaxo, y principiese multiplicando las unidades de la cantidad de arriba, por el numero de abaxo: si el producto

no excediese de 9, se escribirá debaxo de dichas unidades, si valiese decena ó decenas, se pondrá o al producto, si decenas y unidades, se anotarán éstas, y las decenas se guardarán para unirlas con el siguiente producto: 3° se multiplicará despues la segunda cifra, ó guarismo de la cantidad, de arriba, por el de abaxo, y á su producto se agregará la decena ó decenas del primer producto si las huvo, y se escribirá en seguida: si compusiese decenas justas se escribirá o como antes, y procediendo en los demas guarismos como hemos prevenido, se tendrá debaxo de la linea el producto.

Supongamos que se haya de multiplicar 32768. por 8

Las cantidades se llaman.	Multiplicando...	32768
	Multiplicador............	8
	Producto.........	262144

Dispuestas las cantidades como se vé, multiplico 8 por 8, y del producto 64 que resulta escribo 4 que son las unidades que hay mas de las 60, que valen 6 decenas, y reservo para el siguiente producto.

Paso al segundo guarismo, y digo 6 por 8 son 48, esto es decenas, y 6 que reservé del producto de las unidades son 54: escribo 4 y de las 50 formo 5 centenas, que guardo para el siguiente producto: sigo por el mismo orden hasta concluir la cantidad, y hallo debaxo de la linea 262144 que es el producto de 32768 por 8.

Mul-

Multiplicar un numero de muchos guarismos, por otro que tambien lo sea.

29 Quando las cantidades que se huviesen de multiplicar, constasen de muchos guarismos 1° se multiplicarán todos los guarismos del multiplicando, por cada uno de los del multiplicador, y sus productos se escribirán debaxo de la linea, en un lugar correspondiente, al guarismo multiplicador: 2° se sumarán estos productos parciales, y la suma dará el producto total.

Supongamos que se haya de multiplicar 65843 por 364.

Las cantidades se llaman.

Multiplicando. . .	65843
Multiplicador. . .	364
Productos parciales.	263372
	395058
	197529
Producto total.	23966852

Principio primero multiplicando por 4, que son las unidades, y su producto lo escribo debaxo, desde el lugar de las unidades; multiplico despues por las decenas 6, y su producto lo escribo desde el lugar de las decenas; multiplico ultimamente por 3 que son las centenas del multiplicador, y su producto lo anoto desde el lugar de las centenas: sumo los tres productos, y me resulta debaxo de la linea el producto total 23966852.

30 Si reflexîonamos lo que se practica en la operacion del multiplicar, se entenderá facilmente la ra-

razon fundamental de colocar los productos abanzados á la izquierda, segun se van formando, porque multiplicando una cantidad, qualquiera; por unidades, el producto será forzosamente unidades, lo mismo que multiplicandola por decenas, ó centenas, el producto deberá ser igualmente decenas ó centenas, luego será indispensable escribir tales productos uno, dos, ó tres lugares abanzados á la izquierda, segun lo esté el numero multiplicador.

31 Si entre los guarismos del multiplicador huviese algunos ceros, se hará la multiplicacion solamente por dichos guarismos, escribiendo los productos en el lugar correspondiente.

Si por exemplo tuviesemos que multiplicar 23245 por 2006.

```
   23245
    2006
  ------
  139470
46490
--------
46629470
```

Multiplicaría primero todo el multiplicando por 6, despues multiplicaría por 2, y su producto lo escribiría tres lugares mas ácia la izquierda, y sumando estos productos tendría debaxo de la linea el producto total.

La razon es, porque la multiplicacion por los ceros solo huviera hecho que el producto por el 2 huviera pasado al lugar de los millares que es el quarto.

32 Si á la derecha del multiplicando, y multiplicador, ó en uno de ellos solamente huviese alguno, ó al-

algunos ceros, se hará la multiplicacion como si no los huviese, y á su producto se añadirán tantos ceros, como se quitaron antes; por exemplo:

$$\begin{array}{r} 3700 \\ 400 \\ \hline 1480000 \\ \hline \end{array}$$

Está, pues, resuelta la qüestion, con multiplicar 37 por 4, y al producto 148, añadir los quatro ceros; la razon es, porque á mas de que la multiplicacion de los ceros, no produce nada, solo huviera hecho pasar el 8 al lugar de las decenas de millar, que desde luego se le dió.

33 Quando el multiplicador es 10, 100, 1000, &c. no hay mas que añadir al multiplicando tantos ceros como hay en el multiplicador, y se tendrá el producto.

Si se han de multiplicar 756 por 100; será el producto 75600; y es claro, porque multiplicar por 1, no aumenta en manera alguna el producto, pues es tomar el multiplicando una sola vez (26), luego con hacer que las unidades del multiplicando pasen á valer centenas, que es lo que unicamente huviera hecho la multiplicacion de los ceros, está resuelta la qüestion.

34 En toda multiplicacion *el producto, contiene tantas veces al multiplicando como el multiplicador á la unidad*, y esto nace de la difinicion dada (26), porque si por exemplo multiplicamos 4 por 3, no hay duda que en 12, que es el producto, estará contenido el 4, 3 veces que son las unidades que contiene el 3.

35 De la misma definicion se sigue que si dos cantidades las multiplicamos por una tercera, los produc-

tos,

tos, se contendrán uno á otro, como los multiplicandos; esto es, si 2 y 8 se multiplican por un tercero 4, los productos 8 y 32, se contendrán uno á otro, como los multiplicandos 2 y 8; quiero decir, que asi como 32 contiene 4 veces al 8, asi 8 contiene 4 veces à 2.

36 Prevenimos de paso que en toda multiplicacion, el multiplicando, y multiplicacor, se llaman tambien *los factores del producto.*

37 Para expresar una multiplicacion se valen los Matematicos de éste signo $\times$ de manera que 3×8, quiere decir que 3 se ha de multiplicar por 8; y se lee 3 *multiplicado por* 8: quando la multiplicacion se hace efectiva se escribe asi $3\times8=24$; y se lee 3 multiplicado por 8, es igual á 24. Tambien quando el multiplicando y multiplicador, ó uno de ellos, tienen varios guarismos, ya estén ó no, separados por algunos signos, es practica escribirlos dentro de un parentesis, ó bien correr una line sobre cada una; para escribir la multiplicacion de $3+4+6$ por $2+5$ se escribe asi $(3+4+6)\times(2+5)$ ó lo que es lo mismo $\overline{3+4+6}\times\overline{2+5}$

Aplicacion del Multiplicar.

Sirve entre otras cosas la multiplicacion 1.° para hallar el valor de muchas unidades, conocido el de una; por exemplo, si yo sé que una fanega de trigo vale 32 reales, y quiero indagar que me costarán 16 fanegas; multiplicaré 32 por 16, y el producto expresará los reales que valen las 16 fanegas vendidas à 32 cada una. 2° Para convertir un numero de especie mayor, en otra menor, como pesos á reales, reales á maravedises; dias á horas, horas á minutos &c. si queremos averiguar quantos maravedises valen 124 reales estará hecho

con

con multiplicar 124 por 34 maravedises que son los que componen un real.

Si se ofreciere averiguar los minutos que tienen 8 dias, 6 horas, y un quarto: multiplicaria 8 por 24 que son las horas que tiene el dia natural, y á su producto 192 horas, juntaria las 6, y la suma 198 la multiplicaría por 60, numero de minutos que forman una hora, y añadiendo à su producto 11880, 15 minutos que vale un quarto de hora, la suma 11895 serian todos los minutos que se buscaban.

PARTIR.

39 Partir ó dividir es buscar las veces que un numero contiene á otro: el numero que se divide se llama *dividendo*, aquel por quien se divide se llama *divisor*, y el que resulta de esta operacion, *quociente*, y vale tanto como restar un numero de otro un cierto numero de veces, por lo que se dice que el partir es un restar abreviado, y asi lo mismo es partir 12 por 4, que restar el 4 tres veces del 12.

Partir un numero de muchos guarismos por otro de solo uno.

40 Para executar esta operacion 1° escribase el dividendo à la izquierda del divisor, separandolos con una linea que corra por debaxo de éste.

2.° Principiese por la izquierda del dividendo, y vease quantas veces cave el divisor en el primer guarismo del dividendo, ó en los dos, en caso de que el primero del dividendo sea menor que el divisor, y escribase debaxo de éste el numero que resultare.

3.° Multipliquese éste por el divisor, y su producducto escribase debaxo de la parte que se tomó en el dividendo, y restese escribiendo el residuo en su lugar correspondiente.

4.° Baxese el guarismo siguiente del dividendo al lado del residuo para seguir la operacion, y si no huviese residuo, y el guarismo baxado, no pudiese dividirse por el divisor, se pondrá *cero* al quociente, y se baxará otro guarismo del dividendo, que junto con el anterior hará ya la division posible; sigase por el mismo orden hasta que no haya mas guarismos en el dividendo, y se tendrá debaxo del divisor el numero buscado.

Supongamos que se hayan de dividir 9282 por 3.

Dividendo	9282	3 . . Divisor
	9	3094...Quociente
	028	
	27	
	012	
	12	
	00	

Escritas las cantidades segun se manifiestan 1.° veo que la primera cifra ó guarismo del dividendo es mayor que el divisor, y que éste cave 3 veces en aquella, escribo desde luego 3 debaxo del divisor. 2.° Multiplico este quociente por el divisor, y su producto 9, lo escribo debaxo del dividendo, restoló y me da o al residuo. 3.° Baxo en seguida el guarismo inmediato 2, y como no hay residuo á quien juntarlo, y es menor que el divisor, escribo o al quociente, y baxo al lado del 2, el 8 del dividendo, con lo que tengo ya 28 para dividir entre 3, y digo, 3 en 28 cave 9 veces, escribo 9 al cociente, y multiplicandolo por el divisor, tengo el producto 27 que escribo debaxo del dividendendo, restolo, y me queda 1. por residuo.

Al lado de éste, baxo el guarismo 2 del dividendo, con lo que tengo, que dividir por ultimo, 12 entre 3, y digo, 3 en 12 cave 4 veces, escribo 4 al quociente, y despues de multiplicado por el divisor su producto 12 lo escribo debaxo del 12 dividendo, y hecha la resta no me queda nada, con lo que tengo concluida la operacion, y digo que dividiendo 9282 por 3, el quociente es 3094.

Partir un numero de muchos guarismos por otro semejante.

41 El metodo para esta operacion es del todo semejante al que acabamos de dar, y solo tenemos que advertir por regla general. 1.° Que despues de escritas las cantidades, se han de tomar á la izquierda del dividendo, tantos guarismos, por lo menos, como tenga el divisor, ó una mas, si la primera del divisor fuere mayor, que la primera del dividendo.

2.° Que para hallar el quociente, no se buscará quantas veces cave el divisor en el dividendo, sino es quantas veces cave el primer guarismo del divisor, en el primero del dividendo, ó en los dos primeros, y esto ultimo será siempre que el primer guarismo del dividendo fuese menor, que el primero del divisor.

3.° Que el quociente, que resulta por este calculo, debe disminuirse de una, ó mas unidades, á proporcion de que el segundo guarismo divisor, sea mayor que el primero, porque á no practicarlo asi, el producto del divisor, por el quociente será mayor que el dividendo parcial, de que debe restarse.

Vamos á declarar lo dicho, suponiendo que se nos ofrezca dividir 9324 por 36.

932.4	36
72	259
212	
180	
0324	
324	
000	

Despues de escritas las cantidades como antes, separo con un punto dos guarismos del dividendo, porque el primero de éste es mayor que el primero del divisor: y en vez de decir 36 quantas veces cave en 93, digo ¿3, que es el primer guarismo del divisor quantas veces cave en 9? veo que realmente cave 3 veces, pero como el segundo guarismo del divisor, es mucho mayor que el primero, tengo que rebaxar de una unidad el quociente 3, porque de lo contrario, multiplicado este quociente por el divisor 36, el producto sería mucho mayor que el dividendo parcial 93; pongo pues, 2, al quociente: multiplico en seguida este por el divisor, y el producto 72 lo escribo debaxo de 93, restolo, y me dá por residuo 21.

Al lado de 21, baxo el siguiente 2 del dividendo que señalo con un punto para escusar equivocaciones, y tengo por nuevo dividendo 212: tampoco diré ahora 36 quantas veces cave en 212, sino quantas veces cave 3 en 21, y aunque efectivamente cave 7 veces, pongo 5 al quociente por la misma razon que tuve para poner 2 en el quociente anterior: multiplico en seguida el divisor 36 por el

quo-

quociente, 5 y su producto 180. lo escribo debaxo de 212, restolo, y ten go por residuo 32.

Al lado de 32, baxo el ultimo guarismo 4 del dividendo, y tengo que dividir 324 por 36, veo quantas veces cave 3 en 32, y aunque verdaderamente cave 10 veces, me contento con escribir 9 al quociente: multiplico 9 por 36, y su producto 324 lo escribo debaxo de 324, y hecha la substraccion, no queda ningun residuo, y tengo concluida la operacion, de la que resulta que habiendo dividido 9324 por 36 ha salido por quociente la cantidad 259.

42 Se echa de ver desde luego, que puede abreviarse la operacion de partir, si en vez de escribir los productos del divisor por el quociente debaxo del dividendo parcial, restamos de este los productos al paso que los formamos.

43 Si en el progreso de la division sucediese que baxado el guarismo del dividendo al lado del residuo, no pudiese dividirse por el divisor, se pondrá o al quociente, y se baxará otro guarismo del dividendo.

44 Si en el dividendo, y divisor huviese alguno, ó algunos ceros á la derecha, se quitarán en una, y otra cantidad quantos tuviese la que menos, y despues se practicará la division: por exemplo, si huviese que dividir 2400 por 600, está reducido á dividir 24 por 6: esto se funda en que 6 está contenido en 24, las mismas veces que 600 en 2400.

45 Siendo ésta una regla general, se infiere de ella que *si dos qualesquiera cantidades, se dividen por otra tercera, los quocientes hallados, se contendrán uno á otro como los dividendos*: esto es claro, porque como se ha visto, dividiendo 2400, y 600 por 100 resultan los quocientes 24 y 6 que se contienen igual numero de veces.

46 Tambien se infiere de aqui, que la unidad, no al-

te-

tera las cantidades que divide, pues toda cantidad cave una vez en si misma, y de aqui nace que para dividir una cantidad por 10, 100, ó por 1000 &c. basta separar de la derecha de la cantidad propuesta tantos *guarismos como ceros tuviese la unidad*, quedando por enteros los de la izquierda, y los separados á la derecha por residuo.

47 Quando se huviese de dividir un numero menor por otro mayor, está hecho con escribir el menor sobre el mayor con una linea intermedia, asi el quociente de 2 dividido por 3 es $\frac{2}{3}$.

48 De aqui se deduce lo que debe practicarse quando hecha una division, viene algun residuo, como si dividimos 14 por 5, que á mas del quociente 2, queda el residuo 4 que por lo que acabamos de decir escribiremos $\frac{4}{5}$.

49 En toda divisision *el dividendo contiene al divisor como el quociente á la unidad*, y si el quociente se multiplica por el divisor, el producto será igual al dividendo, todo nace de la definicion de esta regla.

50 Para expresar que una cantidad se ha de dividir por otra, suelen algunos escribir asi 8 : 4, y quiere decir que 8 se ha de dividir por 4, pero nosotros conformandonos con los principios sentados, escribiremos el divisor debaxo del dividendo con una linea intermedia asi $\frac{8}{4}$; y para hacer efectiva esta division, pondremos en seguida el quociente precedido del signo de igualdad, como $\frac{8}{4}=2$.

Pero hay muchos casos, en que el divisor es mayor que el dividendo, y entonces nos contentaremos con solo indicar la division como acabamos de insinuar (47); de cuyas cantidades, y su valor trataremos muy en breve.

Prue-

Prueba del Multiplicar, y Partir.

51 La prueba del multiplicar, es partir, y la del partir, multiplicar: en la primera, *si el producto se divide por el multiplicando, el quociente será el multiplicador*, y al contrario; y en la segunda, *resultará el dividendo, si el quociente se multiplica por el divisor.*

Si por exemplo habiendo multiplicado 14 por 12 resultó el producto 168, en dividiendo esta cantidad por 12, vendrá 14 al quociente, que fue el multiplicando, y si se divide por 14 saldrá al quociente 13, que fué el multiplicador.

52 Tambien si habiendo dividido 165 por 3, se quiere exâminar, si el quociente 55 es el verdadero, se multiplicará el divisor 3 por el quociente 55, y el producto 165 que sirvió de dividendo: manifestará que la operacion está bien hecha.

Aplicacion del Partir.

53 El partir ó dividir se aplica en los casos en que dado un total valor de qualquiera especie, y su numero, se solicita saber el precio de cada parte; por exemplo: si 100 reales se han expendido en 5 jornaleros, y se desea saber á como se ha pagado cada uno, se tendrá el intento, con dividir 100 por 5, y el quociente 20, manifetsará que cada jornalero percibió 20 reales.

Tambien se aplica la division para convertir una cantidad de menor especie en la mayor á que se refiere, como maravedises á reales, reales á pesos, minutos á horas, horas á dias, estos á meses, &c. dividiendo siempre el numero de la menor especie, por aquel que forma la especie inmediata

ma-

mayor, á que ha de convertirse: Si quiero reducir á reales 4284 maravedises dividiré esta cantidad por 34, numero de maravedises que forma el real, y el quociente 126 será el numero de reales.

De los Quebrados.

54 *Numero quebrado, ó fraccion*, es el que expresa una ó muchas partes de la unidad, ó de una cosa, qualquiera que esta sea.

55 Si consideramos un real como compuesto de 34 maravedises no hay duda que de estos 34, podremos tomar á nuestro arbitrio 3, 4, 10, 15, &c. y que para manifestar estas partes, y de lo que son, es indispensable valerse de dos numeros

56 De aqui resulta llamar *Numerador*, al numero que indica las partes que se toman, y *Denominador*, al que expresa el numero de partes en que se concibe dividida la tal cosa, y ambos numeros exprimen la cantidad que llamamos fraccion ó quebrado.

57 El numerador se escribe encima del denominador, con una raita intermedia como $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, &c. y ambos se llaman tambien *los terminos del quebrado.*

58 De lo dicho hasta aqui, se infiere que para leer un quebrado se ha de nombrar primero el numerador, y despues el denominador, con la advertencia que en pasando este de 10 se añade la palabra avos. Expliquemos de una vez, quanto hay que decir en orden á escribir, y leer un quebrado para lo que damos la siguiente tabla.

PARA TOMAR.	SE ESCRIBE	SE LEE.
1 parte de 2.	$\frac{1}{2}$	medio.
2 partes de 3.	$\frac{2}{3}$	dos tercios.
3 partes de 4.	$\frac{3}{4}$	tres quartos.
4 partes de 5.	$\frac{4}{5}$	quatro quintos.
5 partes de 6.	$\frac{5}{6}$	cinco sextos.
6 partes de 7.	$\frac{6}{7}$	seis septimos.
7 partes de 8.	$\frac{7}{8}$	siete octavos.
8 partes de 9.	$\frac{8}{9}$	ocho novenos.
9 partes de 10.	$\frac{9}{10}$	nueve decimos.
11 partes de 15.	$\frac{11}{15}$	once quince avos.
16 partes de 25.	$\frac{16}{25}$	diez y seis veinte y cinco avos &c.

59 De lo dicho (55) se infiere que si considerando una cosa ó unidad dividida en un determinado numero de partes, se toman todas ellas, se tomará sin duda toda la unidad y entonces ya no será quebrado; por eso se dice::

60 *Quebrado impropio* es aquel cuyo numerador es igual ó mayor que su denominador, porque si es igual como $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c. siempre su valor será 1: y si mayor, como $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c. valdrá mas que la unidad, pues se tomarán mas partes que ella tiene en el denominador.

61 Qualquiera quebrado indica la division del numerador por el denominador (47) y dicho quebrado es el quociente: asi $\frac{4}{5}$ expresa la division de 4 por 5, y el quociente es $\frac{4}{5}$: si suponemos que 4 pesos se han de dividir entre 5 personas; deberá cada una percibir $\frac{4}{5}$ de peso, ó lo que es lo mismo la quinta parte de quatro pesos.

mi-

62 En qualquier quebrado se pueden aumentar sus terminos, sin que altere su valor: los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{60}{120}$, &c. son todos iguales, porque los terminos del primero se han multiplicado sucesivamente por 2 (25), y lo mismo huviera sucedido si se huviesen multiplicado por otro qualquiera numero.

63 Por el contrario, pueden tambien disminuirse los terminos de un quebrado, sin mudar éste su valor: asi $\frac{108}{144}$, $\frac{27}{36}$; $\frac{9}{12}$, $\frac{3}{4}$, son todos quebrados iguales, porque dividiendo los terminos del primero $\frac{108}{144}$ por 4 se ha reducido á $\frac{27}{36}$ y éste se ha reducido á $\frac{9}{12}$ y ultimamente á $\frac{3}{4}$ dividiendo sucesivamente sus terminos por 3 todo consta de lo dicho. (45)

64 De aqui venimos á inferir, que un quebrado no es mayor que otro, porque sus terminos sean mayores, sino porque su numerador contenga mas partes de su denominador, asi hemos visto que $\frac{1}{2}$, es igual á $\frac{60}{120}$, no obstante ser los terminos de este 60 veces mayores que los de aquel, y con todo $\frac{60}{120}$ es una parte menor que $\frac{3}{4}$, porque el numerador 60 es justamente la mitad de su denominador 120, y el numerador de $\frac{3}{4}$ es la mitad, y una parte mas de su denominador, esto es, tres partes de quatro, con que de aqui sacaremos que::

65 Si dos quebrados tuviesen un mismo ó igual denominador, aquel será mayor; cuyo numerador lo fuese, por lo que $\frac{5}{7}$ es mayor que $\frac{4}{7}$ y $\frac{7}{9}$ mayor que $\frac{5}{9}$ &c.

66 Tambien por el contrario, si los numeradores son unos mismos, será mayor aquel quebrado cuyo denominador fuese menor; asi entre los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, &c. el mayor de todos es $\frac{2}{3}$.

Reducir Quebrados.

67 La reducion de quebrados es de seis maneras.
1 Reducir los enteros à quebrados.
2 Reducir los quebrados á enteros.
3 Reducir los quebrados á un denominador determinado, sin que mude de valor.
4 Reducir los quebrados á su mas simple expresion.
5 Reducir los quebrados á un comun denominador.
6 Reducir los quebrados compuestos á simples.

De todas estas reduciones la segunda, tercera, y quarta, son particulares, y las demas generales, como vamos à manifestar en seguida.

Reducir enteros á quebrados.

68 Esta reducion se practica, multiplicando el entero ó enteros por el denominador que se le quiera dar, cuyo producto será el numerador; asi 1 reducido á tercios será $\frac{1\times3}{3}=\frac{3}{3}$: 5 reducidos á sextos será $\frac{5\times6}{6}=\frac{30}{6}$ donde se vé que esto solamente es una figuracion, pues $\frac{3}{3}=1$, y $\frac{30}{6}=5$.

Tambien se expresan los enteros en forma de quebrado generalmente poniendoles por denominador la unidad, como $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{10}{1}$ &c.

Pero si á los enteros acompañase algun quebrado, y se quisiese reducirlos á la especie de este, se multiplicarán los enteros por el denominador del quebrado, y á su producto se añadirá el numerador, y toda esta suma será el numerador del denominador del nuevo quebrado; asi $3+\frac{2}{5}$, se re-

 du-

duce á $\frac{3\times5+2}{5}=\frac{17}{5}$; $18+\frac{5}{7}$ se reduce á $\frac{18\times7+5}{7}$ $=\frac{131}{7}$

Reducir los Quebrados á Enteros.

69 Este caso es particular, y solo puede practicarse quando el numerador es mayor que el denominador; y consiste en efectuar la operacion que indica (61) asi $\frac{6}{3}=2$, $\frac{12}{3}=4$, $\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}$ &c.

Reducir los Quebrados á un denominador determinado sin que mude de valor.

70 Este caso es tambien particular, pues no siempre puede verificarse la reduccion, porque si la division que se practica, no forma un quociente exacto, la reduccion es imposible, si se ofrece dar á $\frac{3}{4}$ un denominador 12, está hecho con multiplicar el numerador por el denominador propuesto, y el producto dividirlo por el denominador del quebrado, cuyo quociente será el numerador del denominador pedido; esto es $\frac{3\times12}{4}=\frac{36}{4}=\frac{9}{12}$: pero si quisieramos dar á $\frac{3}{5}$ un denominador 8, seria imposible, porque $\frac{3\times8}{5}$ $=\frac{24}{5}$, cuyo quociente es $4+\frac{4}{5}$ bien que puede siempre expresarse asi $\frac{\frac{3}{5}\times8}{8}=\frac{\frac{24}{5}}{8}=\frac{4+\frac{4}{5}}{8}$

No obstante, quando se nos ofrece valuar un que-

quebrado determinada su especie, nos valemos generalmente de este metodo, que no admite excepcion; si quisieremos averiguar que libras valen $\frac{3}{5}$ de arroba, multiplicariamos 25, que son las libras que vale la @ por 3, y el producto 75 lo dividiriamos por 5, y el quociente 15 expresaria las ℔s que valen los $\frac{3}{5}$.

Reducir los Quebrados á su mas simple expresion.

71 Hay muchos casos en que es muy conveniente, reducir los quebrados á los menores terminos posibles, pero no siempre puede lograrse esta util reduccion, porque::

Quando los terminos del quebrado, ó uno de ellos, es numero primero (12) es imposible reducirlos, pero::

Quando son numeros compuestos (13) se reducen dividiendo ambos terminos por 5, 4, 3, ó 2 (45) en cuyo caso el quebrado queda reducido sin alterar su valor: pero para no empeñarse en reducciones inutiles se debe observar que:::

Si los terminos del quebrado acabasen en 0, pueden dividirse por 10 (44 y 45) como $\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$; si en 5 pueden dividirse por 5, como $\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$; tambien si sumando los guarismos de uno, y otro termino separadamente fuese la suma 3 ó algun multiplice suyo como 9, 18 24, 27, &c. pueden dividirse por 3, como $\frac{12}{63}=\frac{4}{21}$; $\frac{153}{34}=\frac{51}{78}$; $\frac{18}{24}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ &c. y ultimamente si acabasen en numero par, podrán dividirse por 2, como $\frac{52}{74}=\frac{26}{3}$.

Pero el modo mas expedito de reducir los quebrados á su mas simple expresion, es dividir sus terminos por la mayor comun medida (11) que tuvievieren, mas como no en todos los quebrados son sus terminos conmensurables entre si (10), daremos regla, que nos manifieste los que lo fueren, ó no, y la mayor comun medida que los debe reducir.

Hallar la maxîma comun medida entre dos qualesquiera cantidades.

72 Dividase el numero mayor por el menor, y si quedase residuo, sigase la division, haciendo dividendo el que fue divisor en la anterior, y divisor, el residuo, hasta que la resta sea, ó bien la unidad, ó bien cero: si lo primero, será señal segura de que las cantidades, son inconmensurables entre sí, y no tienen reduccion; si lo segundo, indicará que el ultimo divisor es la mayor comun medida de las cantidades propuestas.

Supongamos que se nos ofrece hallar la mayor comun medida entre 1920, y 2880.

1.° Divido ambas cantidades por 10, esto es, borro en una, y otra el cero (46) y quedan 192 y 288. 2.° Divido 288 por 192 y hallo el quociente 1, y el residuo 96: 3.° Divido 192 (divisor anterior) por 96, y encuentro 0 al residuo, y éste me dá á conocer que 96 es la maxîma comun medida de 192 y 288: 4.° Divido una y otra cantidad por 96 y sale 2 por quociente de la primera, y 3 de la segunda: luego si estas cantidades formasen los terminos de un quebrado asi $\frac{192}{288}$, le tendriamos reducido á $\frac{2}{3}$ sin haber alterado su valor (45) y este es el metodo de reducir los quebrados á su minima expresion.

Para manifestar que 96 es la mayor comun medida de dichas dos cantidades, basta solo observar

var que dividiendo justamente 96 á 192 por 2; debe dividir asimismo á 288 por 3; porque $288 = 192 + 96$.

Reducir los Quebrados á un comun denominador.

73 Esta operacion está hecha, con multiplicar los terminos de cada quebrado por el denominador, ó denominadores de los otros, por exemplo. Para reducir $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$ á un mismo denominador será $3\times7=21$, nuevo numerador de $\frac{3}{5}$: $5\times7=35$ denominador comun: Del mismo modo $4\times5=20$ nuevo numerador de $\frac{4}{7}$: $7\times5=35$, luego los quebrados $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$ se han reducido á $\frac{21}{35}$, y $\frac{20}{35}$.

Si los quebrados fuesen mas de dos como $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$ sacariamos sus equivalentes diciendo $1\times5\times7=35$ nuevo numerador de $\frac{1}{3}$: despues $3\times5\times7=105$ denominador comun que nos escusaremos volver á repetir: asimismo $2\times3\times7=42$ nuevo numerador de $\frac{2}{5}$, y ultimamente $4\times5\times3=60$ nuevo numerador de $\frac{4}{7}$, con lo que tendriamos $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7} = \frac{35}{105}, \frac{42}{105}, \frac{60}{105}$.

Reducir los Quebrados compuestos á simples.

74 Quebrados compuestos son aquellos que se miran como parte ó partes de otro quebrado, y van seguidos de la preposicion *de*, como $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{7}$ &c.

Es sencillisima la operacion que los reduce á simples, pues consiste solo en multiplicar numeradores por numeradores, y denominadores por denomiminadores, asi $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ es un quebrado compuesto, y quiere decir que de $\frac{3}{5}$ de una cosa, se han de tomar $\frac{2}{3}$, cuyo valor se exprime asi $\frac{2\times3}{3\times5}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$, lo mismo se practica aun quando sean mas de dos los quebrados, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}=\frac{1\times3\times4}{2\times4\times5}=\frac{12}{40}$.

Sumar Quebrados.

75 Si los quebrados tienen iguales denominadores, se sumarán los numeradores, y á esta suma se dará el denominador de los quebrados; asi la suma de $\frac{3}{14}+\frac{5}{14}+\frac{9}{14}$ será $\frac{3+5+9}{14}=\frac{17}{14}=1+\frac{3}{14}$.

Pero si no fueren iguales los denominadores, se les dará uno que les sea comun (73) y se procederá como acabamos de manifestar.

Si con los quebrados huviese algunos enteros, se sumarán los quebrados, y si la suma valiese algun entero, se juntará con los de su clase, y ésta suma con el quebrado que quedase será la que se solicita; por exemplo la suma de $8+\frac{3}{4}$, $+5+\frac{2}{3}$, será $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}=1+\frac{5}{12}$, y por lo mismo $8+5+1+\frac{5}{12}=14+\frac{5}{12}$.

Restar Quebrados.

76 Si los quebrados tuviesen iguales denominadores, se restará el numerador del uno, del numerador del otro, y á la diferencia se le dará el denominador comun; si de $\frac{7}{8}$, queremos restar $\frac{3}{8}$ será $7-3=4$, y toda la diferencia $\frac{4}{8}$ ó $\frac{1}{2}$.

Pe-

Pero si los denominadores no son iguales, se les dará un comun denominador, y se procederá como antes; si de $\frac{3}{4}$ se han de restar $\frac{2}{5}$ será $\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$.

Si de 6 se han de restar $3+\frac{2}{3}$ sacaremos una unidad de 6, que reduciremos á tercios (68) con lo que daremos á la operacion la forma siguiente $5+\frac{3}{3}-3+\frac{2}{3}$ cuya diferencia es $2+\frac{1}{3}$.

Si de $4+\frac{3}{4}$ se huvieren de restar $3+\frac{2}{5}$ restaré primero $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$, y en seguida 3 de 4 asi $\frac{3}{4}-\frac{2}{5},=\frac{15}{20}-\frac{8}{20};=\frac{7}{20}$; y $4-3=1$, y toda la diferencia $1+\frac{7}{20}$.

Pero si el quebrado substraendo, fuese mayor que el minuendo, sacaremos en este caso, una unidad del entero que le acompaña, y le reduciremos á la especie de su quebrado, asi, si de $6+\frac{3}{7}$ hemos de restar $3+\frac{2}{3}$ reduciremos los quebrados á $\frac{9}{21}$, y $\frac{14}{21}$; pero como $\frac{9}{21}$ es menor que $\frac{14}{21}$ sacaremos una unidad de 6, que reducida al quebrado $\frac{9}{21}$ será $\frac{1\times21+9}{21}=\frac{30}{21}$; y la operacion se habrá transformado en restar $3+\frac{14}{21}$ de $5+\frac{30}{21}$, con lo que se hace posible la substraccion, y será $\frac{30}{21}-\frac{14}{21}=\frac{16}{21}$; y restando 3 de 5 tendremos por total diferencia $2+\frac{16}{21}$.

Multiplicar Quebrados.

77 La multiplicacion de quebrados se reduce á multiplicar numeradores por numeradores, y denominadores por denominadores, cuyos productos formarán el nuevo quebrado; como si se han de multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{4}$ se reduce á $\frac{2\times3}{3\times4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, y esto es general.

Si

Si ocurriese multiplicar quebrados por entero solo, se le dará á éste la forma de quebrado (68), y se executará como acabamos de decir $3 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ ó en otra expresion equivalente $\frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ como antes.

Pero si se huviesen de multiplicar enteros, y quebrados, por enteros, y quebrados, se convertirán aquellos á la especie de estos, y se hará despues la multiplicacion: $3 + \frac{2}{5} \times 4 + \frac{3}{4}$ se reduce á $\frac{3 \times 5 + 2}{5} \times \frac{4 \times 4 + 3}{4} = \frac{17}{5} \times \frac{19}{4} = \frac{17 \times 19}{5 \times 4} = \frac{323}{20} = 16 + \frac{3}{20}$.

En la multiplicacion de quebrados, ocurre á los principiantes la dificultad de por qué el producto es menor que qualquiera de los multiplicados como en $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, cuyo producto es $\frac{1}{2}$, pero esto es facil de entender por lo que diximos (26), pues multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$ es tomar el multiplicando $\frac{3}{4}$ dos tercios de una vez.

Partir Quebrados.

78 Para dividir un quebrado por otro, inviertanse los terminos del divisor, y multipliquense despues los quebrados, cuyo producto será el quociente; para dividir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ invertiré el divisor asi $\frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{12}{10} = 1 + \frac{1}{5}$.

Si tuvieramos que dividir enteros por quebrados dariamos á los enteros la forma de quebrado, y pro-

procederiamos como antes, por tanto 8 divididos por $\frac{1}{3}$, se reduce á $\frac{8\times 3}{1\times 1}=\frac{24}{1}$

Si la division fuese de enteros, y quebrados por enteros, y quebrados se resuelve del mismo modo despues de reducidos los enteros á la especie de su quebrado; $3+\frac{2}{5}$ divididos por $2+\frac{3}{4}$ se reduce á $\frac{3\times 5+2}{5}$ dividido por $\frac{2\times 4+3}{4}=\frac{17}{5}$ dividido por $\frac{11}{4}=\frac{17\times 4}{5\times 11}=\frac{68}{55}=1+\frac{13}{55}$.

Tambien ocurre á los principiantes alguna dificultad en la division de quebrados, viendo que el quociente resulta mayor que el dividendo; pero como (39) el quociente ha de expresar las veces que el dividendo contiene al divisor, ó está contenido éste en aquel, es consiguiente que el quociente sea tanto mayor que el dividendo, quanto este es mayor que el divisor.

De los Numeros Denominados.

79 Numeros denominados, que tambien se llaman complexos, son los que baxo de la especie mayor abrazan otras menores, procedentes de la division de una parte de las mayores, como 1 arroba, 6 libras, 8 onzas; 1 año, 3 meses, 8 dias &c.

Para la practica de las operaciones de denominados, conviene tener presente que:::

Respecto al Tiempo.

Un año comum.	Meses.	Dias.	Horas.	Minutos.	Segundos.	Terceros.
Tiene	12	365	8760	$525600'$	$31536000''$	$1892160000'''$
Un mes comun.		30	720	$43200'$	$2592000''$	$15552000'''$
Un dia.			24	$1440'$	$86400''$	$5184000'''$
Una Hora				$60'$	$3600''$	$216000'''$
Un minuto.					$60''$	$3600'''$
Un segundo.						$60'''$

Respecto al Peso.

	Arrobas	Libras.	Marcos.	Onzas.	Adarmes.	Granos.
Un Quintal tiene.	4	100	200	1600	25600	921600
Una arroba..........		25	50	400	6400	230400
Una libra...............			2	16	256	9216
Un Marco..........................				8	128	4568
Una onza.................................					16	576
Un adarme..						36

Respecto á las Medidas.

	Pies.	Pulgad.s	Lineas.	Puntos.
Una vara tiene	3	36	432	5184
Un Pie.............		12	144	1728
Una Pulgada.................			12	144
Una Linea.........................				12

Respecto á las Monedas.

	Doblones de oro.	Pesos fuertes.	Reales.	Maraved.s
El doblon de á 8. nuevo tiene.	4	16	320	10880
El doblon de oro.......		4	80	2720
El peso fuerte...............			20	680
El real.........................				34

Facil es enterarse de los numeros que forman estas tablas: si queremos ver en la primera todas las di-

divisiones de tiempo que componen un año desde los meses hasta los minutos terceros, lo hallaremos en la parte superior de ella; para saber los minutos primeros que tiene un dia, observaremos la linea transversal correspondiente al dia y en la division de los minutos hallaremos 86400, y tantos diremos que tiene un dia.

Lo mismo practicaremos para saber los adarmes que componen una arroba; pues siguiendo la linea de la arroba hallaremos frente á los adarmes 6400, y tantos serán los que vale la arroba, esto entendido pasemos á:::

Sumar Denominados.

80 El metodo para sumar denominados es casi del todo semejante al de sumar numeros abstractos, pues asi como alli de las unidades se forman decenas, de decenas, centenas &c. asi aqui de especies inferiores se hacen mayores, como de adarmes, onzas, de onzas libras, de libras, arrobas &c.

Esto supuesto para sumar 1.º escribanse unas cantidades debaxo de otras, principiando desde la izquierda por las mayores, y cuidando corresponda cada especie con su semejante.

2.º Empiecese á sumar por las unidades inferiores, y quando lleguen á formar una, ó mas de las superiores inmediatas se reservarán para agregarlas á estas, escribiendo solo el exceso, si lo huviese; supongamos que se han de sumar::-

24 @	12 ℔.s	9 onz.s	12 adarm.s
32	8	9	7
8	4	12	9
65	0	15	12

Dispuestas las cantidades por el orden que aparece, ce, saco la suma 28 de los adarmes, de los que quitando 16 que valen una onza, restan 12 que escribo debaxo; agrego esta onza á la columna inmediata, cuya suma me dá 31 onzas, de las que sacando 16 que valen una libra, me restan 15 que escribo debaxo en su lugar correspondiente: junto esta libra á las inmediatas, y hallo 25 libras que valen una arroba justa, por lo que escribo cero debaxo, y la arroba la sumo con las de su especie inmediata, y hallo 65 que escritas debaxo forman con las demas 65 arrobas, 15 onzas, y 12 adarmes.

Restar Denominados.

90 La unica dificultad que puede ocurrir en esta operacion, es quando el numero minuendo es en parte menor que el substraendo, pero valiendonos en tal caso de un metodo analogo, al que dimos (21), esto es, reduciendo una unidad de especie inmediata mayor en las de su proxîma menor, resolveremos la qüestion con igual facilidad:

Demos por exẽplo que de...	12 varas	1 pie y	2 pulg.
Se han de restar	8	2	9
	3	1	5

Principio por la derecha, y especie menor, que son pulgadas, y como en el minuendo, no hay mas que 2 pulgadas, tomo el pie inmediato y lo reduzco á pulgadas, que con las 2 hacen 14; resto 9 de 14, y escribo la diferencia 5 en su lugar: paso á los pies, y como no hay ninguno por lo que acabamos de practicar, tomo una vara de las inmediatas, y convertida en 3 pies, resto 2 de 3, y escribo debaxo la diferencia 1; resto ultimamente 8 de 11, y puesta debaxo su diferencia 3, hallo que la total

con

consiste en 3 varas, 1 pie, y 5 pulgadas.

Quando las qüestiones son semejantes á la que acabamos de proponer, conviene señalar con un punto aquella cantidad que se disminuye, para que sirva de aviso al tiempo de restar.

Multiplicar Denominados.

91 Como hasta aqui solo hemos tratado de la multiplicacion de los numeros en abstracto (5) no nos hemos detenido en tomar indistintamente por multiplicando ó multiplicador, qualquiera de los factores, porque en realidad lo mismo tiene multiplicar 3 por 4, que 4 por 3, quando estos no denominan especie; pero si huviese de multiplicar 3 ℔ por 4 reales cada una, el objeto de la qüestion, que es indagar á quantos reales ascenderia el valor de las 3 ℔, me obligaria á considerar precisamente los 4 reales como un multiplicando, que debe tomarse tantas veces como unidades vale el 3, sin atender que estas unidades sean, ó no, arrobas; en una palabra: *quando los numeros denominan especie, debe tomarse por multiplicando aquella cantidad, cuya especie deseamos encontrar en el producto, considerando el multiplicador como un numero abstracto, que solo determina el numero de veces que ha de repetirse el multiplicando.*

92 Facil es de percebir, que toda multiplicacion de denominados puede reducirse á una mera multiplicacion de quebrados, despues de reducidos el multiplicando y multiplicador á su minima expresion, y dandoles por denominador el numero que exprese las veces que la especie mayor de cada uno, contiene á su menor; asi, si queremos multiplicar 6 ℔,

12 $℔.^s$ por 4 pesos 8 reales haremos primero la reduccion asi:

6 @ × 25 $℔.^s$ = 150 $℔.^s$ + 12 $℔.^s$ = 162 $℔.^s$

4 $pe.^s$ × 15 $r.^s$ = 60 $r.^s$ + 8 $r.^s$ = 68 $r.^s$

Despues veré que la arroba contiene á la libra 25 veces, luego por lo dicho será 25 el denominador de 162 $℔.^s$ asi $\frac{162}{25}$

Por la misma razon será 15 el denominador de 68 reales, pues el peso contiene 15 veces al real, y tendré $\frac{68}{15}$.

Está pues reducida la qüestion á $\frac{68 \times 162}{15 \times 25} = \frac{11016}{375}$ que vale 9 pesos 5 $r.^s$ 21 $mar.^s$ + $\frac{57}{75}$ que por valer mas de medio maravedi lo despreciaremos añadiendo un maravedi á 21.

93 Pero se pueden multiplicar los numeros denominados con total independencia de los quebrados, cuya operacion consiste 1.° en reducir ambas cantidades á su menor expresion.

2.° Multiplicar una por otra dichas cantidades.

3.° Dividir este producto por el numero de veces que la especie mayor del multiplicador contiene á su menor, cuyo quociente será el valor que se busca en especie inferior, que se convertirá en la mayor si se quiere.

Supongamos se pregunta qué importarán 13 @ 12 $℔.^s$ 13 $on.^s$ costando la @ 9 $pe.^s$ 8 $r.^s$ 22 $m.^s$

13 @.	12 $℔.^s$	13 $on.^s$
9 $p.^s$	8 $r.^s$	22
129....	6.....	1

Re-

Reduccion.

$$13\ @ \times \overset{\text{℔.}^s}{25} = \overset{\text{℔.}^s}{325} + \overset{\text{℔.}^s}{12} = \overset{\text{℔.}^s}{337} \times \overset{\text{on.}^s}{16} = \overset{\text{on.}^s}{5392} + \overset{\text{on.}^s}{13} = \overset{\text{on.}^s}{5405}$$

$$9\ \text{pe.}^s \times \overset{\text{r.}^s}{15} = \overset{\text{r.}^s}{135} + \overset{\text{r.}^s}{8} = \overset{\text{r.}^s}{143} \times \overset{\text{m.}^s}{34} = \overset{\text{m.}^s}{4862} + \overset{\text{m.}^s}{22} = \overset{\text{m.}^s}{4884}.$$

Resolucion.

$$\overset{\text{m.}^s}{4884} \times 5405 = \frac{26398020}{400} = 65995; \text{y } \frac{\overset{\text{m.}^s}{65995}}{510} = \overset{\text{pe.}^s}{129} + \frac{205}{510}$$ cuyo quebrado vale 6 rs. y 1 mars.

94 Aunque ya dexamos dicho en su debido lugar como deben leerse las cantidades afectas de los signos, lo repetiremos en ésta operacion para evitar dudas: La reduccion primera se lee asi: 13 arrobas *multiplicadas por* 25 libras, *son iguales á* 325 libras, *mas* 12 libras, *iguales á* 337 libras, *multiplicadas por* 16 onzas *iguales á* 5392, onzas, *mas* 13 onzas *iguale á* 5405 onzas.

La segunda reduccion se lee::: 9 pesos *multiplicados por* 15 reales *son iguales á* 135 reales, *mas* 8 reales *iguales á* 143 rs. *multiplicados por* 34 mars. *iguales á* 4862 mars. *mas* 22 mars. *iguales á* 4884 mars.

Ultimamente, la resolucion se lee... 4884 mars. *multiplicados por* 5405 *son iguales á* 26398020 mars. *divididos por* 400 *iguales á* 6595 mars. y *divididos por* 510 *iguales á* 129 pesos 6 rs. y 1 mar.

En efecto, vemos que 1.° hecha la reduccion del multiplicando y multiplicador, resultan 4884 mars. y 5405 onzas.

2.º Multiplicando 4884 mars. por 5405 (sin atender á que este num. expresa onzas, sino solamente el num. de veces que debe repetirse el de los mars.) producen 26398020 mars.

3.º Dividiendo este producto por 400, num. de veces que la especie mayor del multiplicador contiene á su menor, esto es, quantas veces la arroba contiene á la onza, da por quociente 6995 mars. valor total, en su menor expresion, la que se convierte en pesos dividiendo por 510 mars. que vale 19 pesos, y despues el residuo por 34 mars. que vale 6 reales y 1 maravedi.

95 En ninguna cosa ofrece este metodo dificultad sino en percebir la razon de porque despues de multiplicadas una por otra ambas cantidades, se ha de dividir el producto por el num. de veces que la especie mayor del multiplicador contiene á su menor; pero se entenderá facilmente considerando, que:::

Habiendo de multiplicar en el exemplo presente 13 @ 12 ℔.s 13 onzas por 9 pesos 8 rs. y 22 mars. se supone que esta ultima cantidad es el precio á que debe pagarse cada arroba, y que quando despues de reducidas ambas cantidades, multiplicamos la una por la otra, tomamos todo el precio de la arroba, como si fuese solo de la onza, quiero decir, multiplicamos dichas cantidades, como si cada onza valiese 4884 mars.; pero por lo supuesto 4884 mars. es el precio de la arroba, luego el producto saldrá tanto mayor del verdadero quanto la arroba es mayor que la onza, esto es, 400 veces, luego para hallar el que se solicita, deberemos disminuir el producto 400 veces; es decir, deberemos generalmente dividir el producto por el numero de veces que la especie mayor del multiplicador contiene á su menor.

96 Debe tenerse presente, que si la multiplicacion fue-

se

se de medidas de longitud, se ha de multiplicar por sí mismo el numero de veces que la medida mayor contenga á la menor, cuyo producto servirá de divisor: pongamos por exemplo, que se han de multiplicar 5 varas, 1 pie, 6 pulgadas, por 3 varas, 2 pies 3 pulgadas.

5 va.^{s} . . . 1 pie. . . . 6 pulg.^{s}
3. . . . . . . 2. 3

20 . . . . . . 1 . . . . . . 10. . . 6 li.^{s}

va.^{s} pi.^{s} pi.^{s} pie pi.^{s} pu.^{s} pu.^{s} pul.^{s}

Reducción $\begin{cases} 5\times 3 = 15 + 1 = 16 \times 12 = 192 + 6 = 198 \text{ pulg.} \\ 3\times 3 = 9 + 2 = 11 \times 12 = 132 + 3 = 135 \text{ pulg.} \end{cases}$

Resolucion $\{ 198 \times 135 = 26730$ pulg.^{s} Dividendo.

pu.^{s} pu.^{s}
$36\times 36 = 1296$ Divisor: Ultimam.^{te} $\frac{26730}{1296} = 20$ va.^{s} 1 pie, 10 pulgadas, y 6 lineas.

Partir Denominados.

97 La operacion que acabamos de practicar de la multiplicacion de denominados, nos subministra metodo para quanto tenemos que practicar, en orden á la division, pues en procediendo de un modo opuesto lograremos el intento, y asi despues de reducidos dividendo, y divisor á su menor expresion, se dividirá el uno por el otro, y su quociente se multiplicará por el numero de veces que la especie mayor del divisor contiene á la menor, y su producto se-

será el valor que se solicita: por exemplo 4 @ 6 ℔.s 13 onzas han costado 22 pesos 14 rs. 28 mars. y se solicita saber qué vale la @.

Reduccion. $\begin{cases} 22\times 15=330+14=344\times 34=11696+28=11724. \\ 4\times 25=100+\ 6=106\times 16=\ 1696+13=\ 1709. \end{cases}$

Resolucion. $\left\{ \dfrac{11724}{1709}=\left(6+\dfrac{1470}{1709}\right)\times 400=2744=5 \text{ pesos } 5 \text{ rs.} +24^{\text{m.s}} + \dfrac{104}{1709}. \right.$

1.º Reduzco el interés á su minima expresion, esto es, á maravedises, y da 11724 mars. practico lo mismo con la especie, y resulta 1709 onzas.

2.º Divido 11724 mars. por 1709, y me da $6+\dfrac{1470}{1709}$ por valor de la onza.

3.º Multiplico este quociente por el numero de veces que la especie mayor del divisor contiene á su menor, esto es, por 400, y me da un producto 2744 mars. que valen 5 pies, 5 rs. 24 mars. y una fraccion despreciable, como todo consta del exemplo.

98 Si ocurriese caso en que el divisor no fuese sino de un termino, esto es, no tuviese especies inferiores, no es necesario practicar la reduccion, y lo haremos segun en el siguiente exemplo.

23 fanegas de trigo han costado 144 pesos, 12 rs. y 24 mars. preguntase á como ha costado la fanega?

Divido 144 por 23, y salen al quociente 6 pesos, y otros 6 por residuo, que reducidos á rs. son 90, y sumados con los 12 que vienen en la qüestion hacen 102 rs. Divido 102 por 23, y hallo 4 rs. y mas un residuo 10 que reduzco á mars. y me dan 340 mars.

que

que sumados con los 24 de la qüestion hacen 364. Divido ultimamente esta cantidad por 23, y salen 15 mars. al quociente, y una fraccion $\frac{19}{23}$, con lo que digo que costó la fanega 6 pesos, 4 rs. y 15 mars. $+\frac{19}{23}$, ó despreciando este quebrado 6 pesos, 4 rs. y 16 mars.

De la Arismetica Decimal.

99 La Arismetica decimal es la que usa en el calculo sus operaciones por fracciones decimales, esto es, *que su denominador es 10, ó alguna de sus potencias como* 100, 1000, &c.

100 Dicese cantidad decimal, á una ó mas partes de la unidad, dividida en diez partes iguales como $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{9}{10}$: y se leen una decima, dos decimas, quatro decimas, nueve decimas; pero como estas cantidades decimales, proceden siempre en una proporcion decupla, pueden practicarse por ellas comodamente como veremos muy en breve, las mismas operaciones que con los enteros.

101 Toda unidad respecto de *las decimales*, se debe considerar $=\frac{10}{10}$, de lo que se infiere que $\frac{1}{10}$, es diez veces menor que $\frac{10}{10}$, ó la unidad.

Si cada parte de estas se considera dividida en otras diez, será cada una de ellas diez veces menor que $\frac{10}{10}$, ó la unidad, por lo que su denominador será 100, como $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, &c. y se leen una centesima, dos centesimas &c.

Si cada centesima se considera dividida en otras diez partes, resultará que cada una de estas será mil veces menor que $\frac{10}{10}$, ó la unidad; y asi su denominador será 1000, como $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$, &c. y se leerán una milesima, dos milesimas, &c.

Facil es de percebir que si se siguen subdividiendo por el mismo orden las nuevas unidades decima-

les

les, resultarán cada vez cantidades diez veces menores, como diez milesimas, cien milesimas, millonesimas, y que segun esto, y lo dicho $\frac{1}{10}$ vale $\frac{10}{100}$; $\frac{1}{100}$ $\frac{10}{1000}$; $\frac{1}{1000}$ $\frac{10}{10000}$ &c.

102 Toda cantidad decimal tiene por denominador la unidad auxîliada de tantos ceros, como tiene guarismos el numerador, de lo que resulta que pueden escribirse las decimales como enteros, sin denominador, ni la confusion de exponentes con que muchos quieren distinguirlas; asi en vez de $\frac{2}{10}$ se esrcibe solo, 2; en lugar de $\frac{13}{100}$ se pone solamente, 13, pues segun lo que acabamos de decir salta á la vista el denominador de una decimal qualquiera.

103 A toda cantidad decimal debe preceder indispensablemente una coma, que sirve para separarla de las unidades principales; como si por exemplo se *huviesen de expresar* $2 + \frac{3}{10}$, *se escribiria solamente* 2, 3: y en caso de que no huviese unidades se escribirá cero en su lugar: asi para expresar $\frac{6}{10}$ solamente escribiremos 0, 6; y asi en los demas casos.

104 Si la cantidad decimal que se intenta exprimir fuese solo de centesimas se escribirá asi 0, 02 que vale dos centesimas; si de milesimas asi 0,007 que vale siete milesimas, quiero decir, que despues de escritas las unidades, y la coma que las distingue, se deben escribir antes tantos ceros, quantas clases de decimales faltan á la cantidad, porque si en vez de escribir 0, 02, escribieramos 0, 2, hariamos en este ultimo caso que el 2 valiese diez veces mas (15) pues expresaria $\frac{2}{10}$, en vez de $\frac{2}{100}$; por lo tanto, tres milesimas se deben escribir 0,003, y no 0,3 &c.

105 Por lo que hemos dicho poco ha, se dexa conocer prontamente, que la proporcion de estas partes decimales es la misma que la de los enteros, y asi imaginando las unidades como un punto, del que fluyen á una y otra parte los enteros, y decimales

se

se observan aquellos creciendo en igual grado, que disminuyen estas conforme van distando de dichas unidades.

Esto es claro, pues

Centena de mill.	*Decena de mill.*	*Millar......*	*Centena......*	*Decena......*	*Unidad......*	*Decima......*	*Centesima.....*	*Milesima.....*	*Diezmilesima..*	*Cienmilesima..*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100000,	10000,	1000,	100,	10,	1,	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$

Desde la unidad á la izquierda crecen por multiplicacion de 10, y á la derecha se disminuyen por la division del mismo, y asi la decena es diez veces mayor que la unidad, á la manera que la decima es diez veces menor que la misma unidad; tambien el millar es diez veces mayor que la centena, y mil veces mayor que la unidad, del mismo modo que la milesima es diez veces menor que la centesima, y mil veces menor que la unidad &c.

106 Como la coma es el signo que separa las unidades de las decimales, es facil de percebir que su colocacion es inalterable; porque si atendiendo al exemplo que acabamos de proponer en unas y otras cantidades respecto de su valor, mudamos la coma un lugar mas abanzado á la izquierda, sería lo mismo que si dividiesemos por 10, ó disminuyesemos 10 veces la cantidad propuesta, pues las unidades pasarian á decenas, las decenas á unidades &c. y si por el contrario las mudasemos un lugar mas á la derecha, corresponderia á multiplicar por 10, toda la cantidad, ó aumentarla 10 veces, pues las decimas valdrian unidades, las unidades, decenas, &c.

107 A toda cantidad decimal no se le altera el valor, aunque á su continuacion se le añadan ó quiten quantos ceros se quiera, porque como (102) la cantidad $0,92000 = \frac{92000}{100000}$, podremos dividir sus terminos por un tercero 100, sin que mude de valor (45) esto se reduce á quitarle tres ceros (46) luego quedará $\frac{92000}{100000} = \frac{92}{100} = 0,92$, lo contrario sucede en la multiplicacion.

108 Qualquiera cantidad decimal puede leerse por sus partes, ó por su todo, por exemplo: esta cantidad 36,4568 puede leerse asi; treinta y seis unidades, quatro decimas, cinco centesimas, seis milesimas, y ocho diez milesimas partes de la unidad, ó bien mas brevemente por su todo, como regularmente se lee una cantidad diciendo treinta y seis unidades, quatro mil quinientas sesenta y ocho diez milesimas.

Esto se funda en que segun acabamos de decir $0,4568 = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{8}{10000}$; pero por lo dicho (107) $\frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{8}{10000} = \frac{4000}{10000} + \frac{500}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{8}{10000}$ luego tambien (75) $= \frac{4568}{10000} = 0,4568$.

109 Quando tratamos de los quebrados comunes, dimos el metodo de dar á un quebrado un denominador determinado, sin que mude de valor (70) y ahora le reproducimos con mas generalidad respecto á las decimales, pues siendo el denominador 10, ó alguna de sus potencias como 100, 1000, &c. se aproxîman tanto á la verdad como se desea: si por exemplo queremos dar á $\frac{5}{9}$ un denominador 100000,

será $\frac{5}{9} \times 100000 = \frac{500000}{9} = \frac{55555}{100000} = \frac{5}{9}$ con

menos de una cien milesima parte de la unidad de diferencia, y he aqui el modo de::::

Convertir los quebrados comunes en decimales.

110 Todo está reducido en multiplicar el numerador del quebrado por 10 decimas, 100 centesimas, 1000 milesimas &c. segun *á donde se quisiere llevar la aproxîmacion*, y el producto dividirlo por el denominador, cuyo quociente serán las decimales equivalentes: si quiero convertir este quebrado $\frac{5}{8}$ en decimales, llevando su aproxîmacion hasta las milesimas, será pues la operacion $\frac{5\times0,1000}{8}$ $=\frac{0,5000}{8}=0,625$ que es cavalmente igual á $\frac{5}{8}$.

111 Si en alguna de estas operaciones, no viniese completo el numero de decimales á que se llevó la aproxîmacion, esto es, si el numero de guarismos en el quociente, no fuese igual al numero de ceros de que consta el dividendo, completese el quociente á su izquierda con los ceros que basten á hacerle igual:

Por exemplo $\frac{3}{50}$ reducidos á milesimas será $\frac{3\times0,1000}{50}$ cuya division da por quociente 60, que por no constar de mas de dos guarismos expresa centesimas, pero por lo supuesto la aproxîmacion es á las milesimas, luego 60 deberán ser milesimas, luego (104) se deberá escribir 0, 060, ó lo que es lo mismo 0,06.

De las operaciones Arismeticas por decimales.

SUMAR.

112 Las operaciones con cantidades decimales se practican puntualmente como si fuesen enteros, y asi para sumar decimales::

1.° Escribanse los enteros si los huviese, segun lo dexamos insinuado, y á su continuacion las decimales, cuidando escribir decimas baxo de decimas &c.

2.° Principiese sumando por la derecha por el metodo de los enteros, pero en llegando á escribir la suma de la columna de las decimas pongase inmediatamente la coma, que ha de distinguir las partes decimas de los enteros.

Supongamos que se han de sumar::

0,100
38,234
4,360
21,064
63,758

La suma de las milesimas es 8; la de las centesimas 15, esto es, una decima (19) y 5 centesimas: la de las decimas con la una que formaron las centesimas es 7; separando ahora con una coma las decimales 758, y siguiendo la suma de los enteros salen 63, y toda la suma 63,758.

Restar.

113 La practica de esta regla es igualmente de todo punto como la de los enteros, y solo puede haber alguna dificultad en los principiantes, quando las decimales son de distinto grado.

Supongamos que de 896,32, se han de restar 236,4892

896,32
236,4892
659,8308

Dispuestas las cantidades en orden, hallamos que la la cantidad decimal en el minuendo, se compone solamente de decimas y centesimas, y en el substraendo pasa hasta las diez milesimas; pero supuesto lo dicho (107) añadiremos al minuendo dos ceros, y se habrá completado el numero de decimales, con lo que podrá practicarse ya la operacion; en efecto hallamos segun se ve en el exemplo, que restando 236,4892 de 896,32, resulta la diferencia de 659,8308.

Multiplicar.

114 Para multiplicar cantidades decimales, se debe tener presente, que despues de practicada la multiplicacion como si fuesen enteros, se han de separar de la derecha del producto tantos guarismos quantas decimales huviere en el multiplicando, y multiplicador, y lo que restase á la izquierda serán enteros; como si se huviesen de multiplicar 6,32 por 4,46

$$\begin{array}{r} 6{,}32 \\ 4{,}46 \\ \hline 3792 \\ 2528 \\ 2528 \\ \hline 28{,}1872 \\ \hline \end{array}$$

Hecha la multiplicacion como si no huviera coma da el producto 281872, del que separando á la derecha quatro guarismos por ser quatro las decimales que hay en el multiplicando, y multiplicador, restan á la izquierda 28, y toda la cantidad verdadera 28,1872.

Esto se funda, en que como el multiplicando 6,32 es cien veces menor que 632, y 4,46 cien veces me-

nor

nor que 446, hecha la multiplicacion como si no huviese coma, el producto es diez mil veces mayor de lo que debiera, luego separando á la derecha quatro guarismos, que es el valor de centesimas, multiplicadas por centesimas será 28,1872 el verdadero producto: toda esta doctrina es clara, pues $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$ y por lo mismo $\frac{632}{100} \times \frac{446}{100} = \frac{281872}{10000}$ que por lo dicho (46) $= 28,1872$.

115 Si despues de executada la multiplicacion, no huviese en el producto tantos guarismos como decimales en el multiplicando, y multiplicador, se completará este numero con ceros á la izquierda del producto; si por exemplo, se multiplican::

$$\begin{array}{r} 0,17 \\ 0,5 \\ \hline 0,85 \\ \hline \end{array}$$

En vez de escribir 0,85 como se vé, escribiremos 0,085, pues multiplicando centesimas por decimas, el producto debe ser milesimas; pero 0,85 expresan centesimas luego (104) se habia de escribir 0,085 colocando un cero en lugar de las decimas.

116 De lo que diximos (106) se deduce, que para multiplicar una cantidad decimal por 10, por 100, ó por 1000 &c. basta mudar la coma uno, dos, tres ó mas lugares á la derecha, asi 0,384 multiplicado por 10 = 3,84, multiplicado por 100 = 38,4, multiplicado por 1000 = 384, y multiplicado aun si se quiere por 10000 = 3840, y asi de los demas.

PARTIR.

117 Aunque la particion ó division de cantidades decimales, se practica de todo punto como la de los enteros, se debe observar::

1.° Que si las decimales del dividendo, y divisor no fuesen de un mismo grado, ó lo que es lo mismo, no constasen de igual numero de guarismos, se completará de ceros la que fuese menor (107) y se practicará la division como si no huviese coma entre los enteros y decimales.

2.° Que si despues de hallado el quociente quedase algun residuo, se le añadirán á este tantos ceros como el num. de decimales á que quisiere aproxîmarse, y siguiendo la division como antes, se escribirá este nuevo quociente en seguida del primero, despues de haberlo separado con la coma.

3.° Que si despues de practicada la ultima division, el residuo que quedase pasase de la mitad del divisor, se aumentará una unidad el ultimo guarismo de las decimales, y se despreciará el residuo.

Por exemplo se han de dividir 82,178 por 12,15.

82,178	12,150
	6,763
09,278000	
0 77300	
044000	
07550	

Despues de completado el numero de decimales en el divisor, practicaremos la division como si no huviese coma, de cuya operacion resulta un quociente 6, y un residuo 9278.

Añadamos á este residuo tres ceros (para llevar su aproxîmacion hasta las milesimas) y prosiguiendo la division sacaremos 763 por quociente de las partes decimas, que separadas del primer quociente con la coma serán 6,763.

Todo se ve claro en el exemplo, y solo resta advertir que en toda division de decimales, debe tenerse muy presente lo que dexamos dicho (111) respecto á las decimales del quociente. Pa-

Para entender con fundamento las observaciones que hemos dado de esta regla, conviene reflexîonar en el caso actual, que completado el numero de decimales en el divisor, y borrada la coma en éste, y en el dividendo, equivale el uno á 82178 milesimas, y el otro á 12150 milesimas, respecto á que los enteros de ambas cantidades, valen millares de milesimas, y como 82178, contiene á 12150, de un mismo modo, ya sean unidades ó milesimas, se sigue evidentemente que el quociente siempre será el mismo.

Por lo que mira al residuo 1.° 9278, aunque verdaderamente se le aumenta mil veces por adicion de los tres ceros, queda esto compensado con escribir el quociente en un lugar que valga mil veces menos, esto es, como decimales, luego tambien es el verdadero.

Ultimamente por lo tocante al ultimo residuo hemos dicho (y lo insinuamos en la particion de los denominados (98) que quando pasase de la mitad del divisor, se aumente una unidad al ultimo guarismo del quociente despreciando dicho residuo, y este procedimiento se funda en que, si se desprecia el residuo sin añadir la unidad, se pierde mas que se aprovecha añadiendola en efecto; luego saldrá mas exâcta la operacion por este medio.

Pero con todo, nos es preciso advertir, que esto debe practicarse segun lo exîjan las circunstancias del caso; porque si esta doctrina se aplica á una serie de operaciones, cuyas cantidades tengan relacion entre sí, ó cuyos resultados se huviesen de traer á una suma, facil es de percebir, que entonces esta nueva cantidad saldria aumentada en todas aquellas partes que la unidad excediese á cada residuo.

118 Para dividir una cantidad compuesta de enteros y decimales, por otro de solo enteros, se borrará

en

la primera la coma, y se hará la division, de cuyo quociente se separarán tantas decimales quantas huviese en el dividendo, como si se han de dividir 8,644 por 4, será el quociente (borrada la coma del dividendo) 2161 = 2,161 despues de separadas las decimales; todo nace de lo dicho.

119 Vuelvo á repetir lo que dexamos insinuado respecto á la division de decimales, esto es, que las del quociente deben ser siempre de la misma clase que las del dividendo, asi 0,512 divididos por 8 = 0,064, y *no* á 0,64.

120 Para dividir una decimal por 10, 100 &c. bastará mudar la coma ácia la izquierda, añadiendo uno, dos, ó mas ceros entre ésta y las decimales; asi 0,384 divididas por 10 = 0,0384; por 100 = 0,00384 &c. sobre lo que nos dimos á entender al principio (106).

Convertir qualquiera decimal de especie mayor á enteros y decimales de inferior, y al contrario.

121 Esto propiamente es lo mismo que diximos hablando de los quebrados comunes, y asi si queremos convertir por exemplo 0,7 de arroba en partes decimales de libra, lo conseguiremos con multiplicarlas por 25, numero de libras de que se forma la arroba, y separando las decimales del producto 175, queda 17,5 por valor de las libras equivalentes á 0, 7 de arroba; esto es claro, porque 0,7 de arroba es lo mismo que $\frac{7}{10}$, que segun lo que diximos

(70) es $\frac{7 \times 25}{10} = \frac{175}{10} = 17 + \frac{5}{10}, = 17,5.$

122 Si por el contrario queremos expresar una cantidad decimal de especie menor en otra mayor, se reducirá á dividir dicha decimal, por el numero de veces que la especie menor á que se refiere la decimal, está contenida en la mayor que quiere convertirse, y el quociente manifestará las decimales á que equivale: para convertir, por exemplo, 0,875 de libra en decimales de arroba; divido 0,875 por 25, y sale por quociente 35, esto es, 0,035 de arroba, (119) y es evidente, pues 0,035 de arroba, es

$$\frac{35 \times 25}{1000} = \frac{875}{1000} = 0{,}875 \text{ de libra.}$$

Aplicacion de las decimas.

123 Si se atiende con una poca reflexîon á lo que dexamos dicho en orden á las decimales, vendremos á inferir se pueden resolver por ellas quantas operaciones se ofrecieren.

Si queremos averiguar la suma de $8 + \frac{3}{4}$ y $5 + \frac{2}{3}$ convertiremos los quebrados en decimales (110), y serán $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 0{,}1000}{4} =, 0{,}750 : \frac{2}{3} = \frac{2 \times 0{,}1000}{3} =, 0{,}666$ escribo ahora las cantidades 8,750; 5,666, y hecha la suma encuentro $14{,}416 = 14 + \frac{5}{12}$ que hallamos antes por las fracciones comunes (75); si suponemos que esta suma es de reales valuaremos la decimal, 416, y hallaremos que vale 14 mars. los mismos que valen $\frac{5}{12}$.

124 Tambien quando restamos $3 + \frac{2}{3}$ de $6 + \frac{3}{7}$ tuvimos que sacar una unidad del minuendo 6, convertirla en su quebrado, y darles despues un comun denominador (76) pero nada de esto hay que hacer

por

por decimales; pues el quebrado $\frac{3}{7}$ reducido á decimales es $\frac{3\times 0,1000}{7} = ,0,428$; y el quebrado $\frac{2}{3}, = \frac{2\times 0,1000}{3} = 0,666$, con esto escribo los enteros correspondientes, y la qüestion se ha reducido á restar 3,666 de 6,428, cuya operacion da la diferencia $2,762 = 2 + \frac{16}{21}$ como antes. Si estas cantidades son de reales, hallaremos que 762 valen 25 mars. lo mismo que $\frac{16}{21}$.

125 Si queremos averiguar quanto valen 6 @ 12 ℔.s vendidas á 4 pesos 8 rs.: consideraremos que 12 ℔.s son lo mismo que $\frac{12}{25}$ y 8 rs. lo mismo que $\frac{8}{15}$: convertidos estos quebrados en decimales resultan,5333 de peso $= \frac{8}{15}$; y, 480 de arroba $= \frac{12}{25}$; cuyas cantidades juntas á sus respectivos enteros dan 6,480, y 4,5333.

Multiplico pues, 4,5333 por 6,48, y me producen 29 pesos, y la decimal 37578: multiplico asimismo esta decimal por 15, y su producto me da 5 rs. y 6367; multiplico finalmente esta decimal por 34, y saco 21 mars. ó mas bien 22, pues la decimal, 6478 que viene por residuo vale mas de medio maravedi, con lo que digo que 6 @ 12 ℔.s vendidas á 4 pesos y 8 rs. importan 29 pesos, 5 rs. y 22 mars. los mismos puntualmente que hallamos en los numeros denominados.

126 Supongamos ahora por el contrario que se han gastado 29 pesos, 5 rs. y 22 mars. en 6 @ y 12 ℔.s de cierta especie, y queremos averiguar exactamente á como se pagó la arroba.

1.° Reducidos los rs. á mars. y juntos con los 22 forman el quebrado $\frac{192}{510}$, y las 12 libras éste $\frac{12}{25}$.

2.° Convertido el primero á decimales, y añadiendole sus correspondientes enteros resulta 29,375;

practicando lo mismo con el segundo, sale 6,48.

3.° Dividiendo 29,375 por 6,480, da por quociente 4 pesos y 5333 que valen justamente 8 rs.

127 Si queremos saber qué valdrán, 078 de @ habiendo costado la @ á 25 rs. multiplicaremos, 078 por 25, y separando de su producto 195 las decimales, tendremos 1 real, y 95, las que multiplicadas por 34 dan 32 mars.

128 Procediendo del mismo modo, se valuará qualquiera decimal de otra unidad, sea la que fuere; por exemplo, 0,009 de vara, quantos pies, pulgadas y lineas valen? ya que la vara se compone de 3 pies, será 0,009×3 = ,027, esto es, 0,027 de pie, que no llega con mucho á valer un pie; ya que el pie se compone tambien de 12 pulgadas será 0,027×12 = 0,324 de pulgada: por la misma razon, ya que la pulgada se forma de 12 lineas, será 0,324×12 = 3,888, y pues la linea consta asimismo de 12 puntos, será, 888×12 = 10,656, ó mas bien 11, despreciando la decimal: asi diremos que 0,009 de vara valen 3 lineas, y 11 puntos.

De las potencias de los numeros, y extraccion de sus raices.

129 Potencia de un numero, se llama en general el producto que forma el tal numero por su reiterada multiplicacion, y la de sus productos; cuya operacion se llama tambien elevar un numero, ó cantidad á 1.ª 2.ª 3.ª 4.ª &c. potencia.

130 Llamase *primera potencia* la que resulta de la unidad tomada un cierto numero de veces, y asi se dice propiamente que todo numero está en primera potencia: 2 está en primera potencia, porque 2 = 1+1, ó á 1×2; tambien 6 = 1+1+1+1+1+1, ó

á

á 1×6, y asi se entiende de todos los demás: de aqui se sigue que:::

131 *Segunda potencia* es la que se forma de una cantidad qualquiera multiplicada por sí misma, pues como toda cantidad, tiene en sí la primera multiplicacion por la unidad, que es su primera potencia; si dicha cantidad se multiplica por sí, el producto será forzosamente su segunda potencia; asi 2 está en primera potencia porque $2 = 1\times2$, pero 4 está en segunda, porque á mas de $1\times2 = 2$ se ha multiplicado otra vez por 2; asi $1\times2 = 2\times2 = 4$; por lo mismo se llama:::

132 *Tercera potencia* la que resulta de una cantidad multiplicada por sí misma, y este producto multiplicado otra vez por la dicha cantidad; esto es, una cantidad, cuya segunda potencia se ha multiplicado otra vez por ella misma; asi, 8 es tercera potencia de 2, porque $1\times2 = 2$ primera potencia $2\times2 = 4$ segunda potencia $4\times2 = 8$ tercera, luego de aqui podremos concluir que generalmente:::

133 Toda cantidad que ha sido producida de la reiterada multiplicacion de un numero por sí mismo, y por sus propios productos, estará elevada á una potencia tal qual sea *el numero de veces*, que dicho numero se ha multiplicado por sí, mas la primera multiplicacion por la unidad, cuyo numero se llama el exponente.

Del numero quadrado.

134 Numero quadrado, cuyo exponente es 2, es aquel que se halla elevado á la segunda potencia, ó lo que es lo propio, el que resulta de la multiplicacion de un numero por sí mismo: 4, 9, 16, &c. son numeros quadrados, porque resultan de $2\times2 = 4$: de $3\times3 = 9$, de $4\times4 = 16$ &c.

135 Raiz quadrada se llama aquel numero que se ha multiplicado por sí; como 2 que es raiz quadrada de 4; 3 de 9, 4 de 16 &c.

136 Desde luego se vé á una sencilla reflexîon, que es muy facil elevar un numero á su segunda potencia; pero no lo es tanto baxar de ella á su raiz, excepto quando el quadrado tiene solo dos guarismos, pues entonces su raiz está comprehendida en los numeros naturales desde 1 hasta 9, porque siendo 9 el mayor de ellos, su quadrado que es 81 no tiene mas de dos cifras, esto es, decenas, y unidades, y asi se ve que los quadrados de las

Raices 1......2......3......4......5......6......7......8......9
Son.......1......4......9....16....25....36...49....64....81.

137 Observemos ahora que entre las raices de 1 y 4 que son 1 y 2, no hay ningun guarismo, pero entre dichos quadrados 1 y 4, se cuentan 2 y 3, luego forzosamente las raices de 2 y 3, estarán entre 1 y 2; luego serán 1 y un quebrado, del que no se puede señalar valor justo, tal que multiplicado con su entero por sí mismo forme el numero de quien se supone raiz, aunque sí puede aproxîmarse al infinito como veremos en breve.

138 A estos numeros se llaman irracionales ó inconmensurables, porque no hay raiz exacta que les mida, ó forme.

De la formacion del Quadrado, y extraccion de su raiz.

139 Aunque segun hemos dicho no se necesita de otra cosa para formar el quadrado, que multiplicar un numero por sí mismo, procederemos, no obstante á su formacion, de un modo que nos cerciore de las partes que le forman, y facilite el medio de venir á su raiz; propongamonos, pues, elevar al quadrado

el

el num. 99, y para ello separemos sus decenas, y unidades por medio del signo +

$$\begin{array}{r} 90+9 \\ 90+9 \\ \hline \end{array}$$

Quadrado de unidades..................	81
Producto de decenas por unidades.......	810
Producto de unidades por decenas.......	810
Quadrado de decenas...................	8100
Quadrado total.........................	9801

Esta multiplicacion no dexa rastro de duda en orden á la formacion del quadrado, pues escritos los productos parciales como van saliendo, y echa luego la suma, resulta el quadrado total que en el caso actual es 9801, y se ha formado de 81 quadrado de las unidades 9, mas de dos veces 810 producto de las decenas 90 por las unidades 9, y de estas por aquellas; mas 8100 quadrado de las decenas 90.

140 De esto se infiere que todo quadrado consta de dichas partes, que se reducen á tres, á saber:

1.º Del quadrado de las unidades: 2.º del duplo producto de decenas por unidades: 3.º del quadrado de las decenas.

141 Ya que el *numero 99* se halla elevado á su quadrado 9801, nos valdremos de él mismo, para manifestar el metodo de volver á su raiz.

Como tambien el numero 99, es el mayor de los que se forman de decenas y unidades, y su quadrado 9801 consta de quatro guarismos, se debe inferir igualmente que todo numero que conste de solo quatro guarismos, no tendrá mas de dos en su raiz, y por la misma razon, el que se forme de dos, no podrá corresponderle sino uno en la raiz, *como acabamos de ver* (136).

142 Esto supuesto, para extraer la raiz quadrada de una cantidad qualquiera:

1.º

1. Separense de dos en dos sus guarismos, principiando desde la derecha á la izquierda, en cuya parte es indiferente quede uno ó dos guarismos.

2.° Saquese la raiz quadrada de la ultima separacion de la izquierda; y escribase á la derecha de la cantidad propuesta, separandola con una linea que corra por debaxo; multipliquese por sí misma, y su quadrado escribase debaxo de dicha ultima separacion, de la que se restará dicho quadrado, escribiendo debaxo qualquiera diferencia.

3.° Al lado de esta diferencia, baxense los dos siguientes guarismos, y separese con una coma el guarismo de las unidades, y lo que quedase á la izquierda, dividase por el duplo de la raiz hallada, cuyo divisor se escribirá debaxo del que se hizo dividendo, y *el quociente se anotará en la raiz al mismo tiempo que al lado del divisor.*

4.° Multipliquese esta nueva y ultima cantidad, por el mismo quociente que acaba de encontrarse, y el producto restese de la misma dicha cantidad, y *sigase de este modo.*

Saquemos ya la raiz del quadrado 9801, aplicando á su operacion quanto acabamos de decir.

$$\begin{array}{r|l} 98{,}01 & \underline{99} \\ \underline{81} & \\ 170{,}1 & \\ \underline{189} & \\ 000 & \end{array}$$

1.° Separo dicha cantidad de dos en dos guarismos, y queda á una parte, 01, y á otra 98, de lo que infiero que ha de tener dos guarismos la raiz (136).

2.° Busco la raiz de 98 que es 9, cuyo guarismo, mo, que son las decenas de la raiz, lo escribo á la derecha del quadrado, separandolo con una linea; quadro este guarismo, y su quadrado lo escribo debaxo de 98, y restando uno de otro sale la diferencia 17.

3.° Al lado de 17 baxo 01, y separando el guarismo de las unidades 1 con una coma, queda á la izquierda 170, de cuya cantidad voy á sacar el otro guarismo que me falta en la raiz; para esto, duplico el 9 que hallé primero, y el producto 18 lo escribo debaxo de 170: divido esta cantidad por 18, y el quociente 9 lo escribo á la raiz, igualmente que al lado del divisor 18.

4.° Multiplico la nueva cantidad 189 por el 9 ultimamente hallado, y su producto lo resto de 1701, y como no sale diferencia, digo, que 99 es la raiz justa de 9801.

143 Es muy del caso advertir, que aunque en las divisiones que ocurren en la extraccion de raices cupiese el divisor mas de 9 veces en el dividendo, no por eso se hará mayor el quociente.

144 Paremonos un poco á reflexîonar esta operacion para manifestar sus fundamentos.

Supuesto que la raiz ha de constar forzosamente de decenas y unidades (136) la primera cifra que se busca serán las decenas de la tal raiz, y como el quadrado de decenas son centenas, es evidente que el quadrado de quien se han de sacar estas decenas, no estará en las dos cifras de la derecha 01, y sí en las dos que restan á la izquierda 98, por cuya razon los separo con la coma.

Aunque la cantidad propuesta constase de mas de quatro guarismos, y por consiguiente tuviese mas de dos á su raiz, no por eso dexariamos de aplicar el mismo razonamiento, para separar de dos en dos sus guarismos, pues toda cantidad puede y convie-

ne

ne considerarse, como compuesta de decenas y unidades, y asi aunque la raiz de una cantidad fuese por exemplo 3485, podría considerarla como formada de 348 decenas, mas 5 unidades.

Como en la parte 98 que separamos por quadrado de las decenas, no solo están las centenas que forman dicho quadrado, si tambien las procedentes del duplo, producto de decenas por unidades; y las decenas 9 de la raiz son raiz justa del quadrado mayor que hay en 98, por esta razon quadramos dichas decenas para restarlas del quadrado supuesto 98, de cuya operacion salen 17 centenas por residuo.

Al lado de este residuo 17 baxamos los dos guarismos 01, y componen la cantidad 2701 que consta de dos partes del quadrado, esto es, del duplo, producto de decenas por unidades, y del quadrado de las unidades; pero como para sacar las unidades de la raiz, basta dividir el duplo, producto de decenas por unidades, por el duplo de las decenas (51) por esta razon separamos con una coma las unidades 1, como quadrado de ellas, y queda el duplo, producto de decenas por unidades 170, que se divide por 18, duplo de las decenas de la raiz.

Como en la cantidad 170 pueden hallarse no solo el duplo de decenas por unidades, sino tambien las decenas procedentes del quadrado de las unidades, y por esta causa salir el quociente mayor de lo que debe, escribimos el divisor 18, duplo de las decenas debaxo del dividendo 170, y á su lado el 9 hallado por unidades de la raiz, para hacer la siguiente comprobacion que se reduce á multiplicar la nueva cantidad 189, por el mismo 9, y restarla de 1701.

Esto se funda en que como la cantidad 189 se compone del duplo de las decenas 18, y de las unidadades 9, si multiplicamos estas por aquellas resultará una cantidad que constará forzosamente del quadrado de las unidades mas del duplo de las decenas multiplicadas por las unidades; y como la cantidad 1701 se forma de iguales partes, no hay duda que si ambas cantidades resultan del todo iguales, no dexa duda que la raiz hallada es la verdadera, y que la cantidad propuesta es un quadrado perfecto.

145 Con todo hay casos en que despues de echa esta comprobacion, se halla algun residuo, el que si fuere menor que el duplo de la raiz hallada mas la unidad, será señal cierta de que dicha raiz es la verdadera, y que el quadrado propuesto es irracional, en cuyo caso la raiz hallada será la que se busca en enteros, correspondiente al mayor quadrado comprehendido en el propuesto, y el residuo formará un quebrado, cuyo numerador será dicho residuo, y el denominador el duplo de toda la raiz mas la unidad, que será raiz incompleta de la parte restante del numero propuesto.

146 Estas raices, como ya diximos, (137) por mas que se multipliquen de qualquier manera, nunca pueden formar ó igualar el quadrado, pero pueden aproxîmarse infinitamente á él, de suerte que discrepen del verdadero quanto menos se quiera.

Supongamos pues, que se solicita sacar la raiz quadrada de 67577.

```
6,75,77 | 259
          ------
 4
-----
 27,5
 45
---------
 507,7
 509
-----------
 496
```

1.° Divido la cantidad de dos en dos guarismos, y busco la raiz de la parte ultima de la izquierda 6, que es 2, cuya cifra escribo al lado de dicha cantidad como se ve.

2.° Quadro 2, y su producto 4 lo escribo debaxo de 6, hago la substraccion, y sale 2 por diferencia.

3.° Al lado de 2 baxo 75, y forma 275, que por lo dicho le separo las unidades 5, y queda en 27, que divido por 4, duplo de la raiz hallada 2, despues de escrito debaxo del dividendo 27, hallo, pues, 5 al quociente por segunda cifra de la raiz que escribo á continuacion de la primera, é igualmente al lado del divisor 4, de lo que resulta la nueva cantidad 45.

4.° Multiplico esta cantidad por el mismo 5, y al tiempo que sale su producto lo resto de la cantidad 275, y hallo 50 por residuo.

5.° Al lado de esta resta baxo 77, y forma la nueva cantidad 5077, de la que separo las unidades 7, y queda 507 que divido por 50, duplo de las decenas 25 que escribió debaxo del dividendo 507. Esta division da 9 por quociente, y es la tercera y ultima cifra de la raiz (141) correspondiente á las unidades; escribola en su lugar, y al lado del divisor 50, y sale la cantidad 509.

6.° Multiplico finalmente esta cantidad por 9, y su producto restado de 5077 da el residuo 496.

147 Por lo que hemos insinuado poco ha debemos inferir 1.° que 259 es la raiz del mayor quadrado, contenido en 67577.

2.° Que este numero es irracional, y que para hallar un numero que multiplicado por sí mismo se le aproxime quanto sea posible, es necesario practicar con el residuo lo siguiente, por medio de las decimales, que servirá como de regla general para otro caso qualquiera. Aña-

Añadase al residuo un numero de ceros duplo de las decimales á que quiera aproxîmarse, esto es, si á las decimas dos, si á las centesimas quatro, si á las milesimas seis, y siguiendo extrayendo la raiz de esta nueva cantidad, se escribirán sus guarismos como fueren saliendo á continuacion de los enteros, separandolos con la coma segun está prevenido.

Asi en el caso presente queriendo aproxîmar su raiz hasta las milesimas, añado al residuo 496 seis ceros por duplo de las milesimas, y tendré que extraer la raiz de 496000000.

4960,0,00,00	259,955
5189	
28990,0	
51985	
2997500	
519905	
397975	

Tomo los dos ceros proxîmos á 496, y separo el uno de ellos por quadrado de unidades, y me queda á la izquierda 4960; duplico 259 como decenas de la raiz, y su producto 518 lo escribo debaxo: divido 4960 por 518, y hallo por quociente 9 que escribo á la raiz, despues de haber separado con la coma 259, y tambien al lado del divisor 518, sigo la operacion como antes, y hallo que la raiz aproxîmada de 67577 es 259,955 con diferencia de menos de una milesima parte de la unidad.

En efecto si se quadra esta raiz, se verá que su producto 67576,602025, discrepa del verdadero menos de la mitad de una milesima parte.

Ex-

Extraer la raiz quadrada de un quebrado.

148 Si los terminos del quebrado fuesen quadrados, no hay mas que extraer las raices de ambos, y ponerlas en forma de quebrado. Asi la raiz quadrada de $\frac{4}{16}$ es $\frac{2}{4}$; la de $\frac{9}{25}$ es $\frac{3}{5}$; la de $\frac{4}{9}$, es $\frac{2}{3}$ &c.

149 Si de los terminos del quebrado fuese quadrado el denominador solamente se sacará la raiz aproxîmada del numerador, cuyo denominador, será la raiz justa del denominador; asi la raiz quadrada de $\frac{7}{16}$ se reduce á sacar la raiz de 7000000 que es 2,645, y la de 16 que es 4, y toda es $\frac{2,645}{4}$ con diferencia de menos de una milesima parte.

150 Por el contrario, si solo el numerador fuere quadrado se extraerá la raiz del numerador, y la del denominador aproxîmada, con lo que se tendrá la raiz que se solicita; si por exemplo se pidiese la raiz quadrada de $\frac{4}{18}$ sacariamos la raiz de 4 que es 2, y sacando por aproxîmacion la de 18 hallariamos 4,242, y toda la raiz pedida $\frac{2}{4,242}$; por el mismo medio hallariamos que la de $\frac{9}{13}$ es $\frac{3}{3,605}$.

151 Si ni el numerador, ni denominador fuesen quadrados, se multiplicarán ambos por un tercero (35) que lo será el mismo denominador, de lo que resultará un quebrado que tendrá su denominador quadrado, en cuyo caso se procederá como antes á la extraccion de raiz: asi, si se pide la raiz de $\frac{5}{7}$, multiplico sus terminos 5 y 7 por el mismo 7, de lo que resulta $\frac{35}{49}$; extraigo la raiz de 35, y hallo que es

5,916,

5,916, saco tambien la de 49 que es 7, y tengo que

toda la raiz de $\frac{5}{7}$ es $\frac{5,916}{7}$.

152 Si se ofreciere sacar la raiz de enteros y quebrados, se reducirán los enteros á la especie de su quebrado, y echo esto se procederá como antes; por exemplo, se pide la raiz de $7\frac{3}{5}$ reducido es $\frac{38}{5}$, y como ninguno de sus terminos es quadrado, se multiplicarán por 5 de lo que resultará $\frac{190}{25}$, y sacando

la raiz de ambos, será $\frac{13,784}{5}$ la raiz quadrada de

$7\frac{3}{5}$ para dar á esta operacion toda la sencillez de que es susceptible, se reducirá á solas decimales la raiz aproxîmada, dividiendo esta por el denominador: asi la raiz de $\frac{5}{7}$ que segun hemos visto es

$\frac{5,916}{7}$, se reduce á 0,845 dividiendo 5,916 por 7:

y la de $7\frac{3}{5}$ á 2,756 dividiendo 13,784 por 5.

153 Pero debemos advertir, en orden á esta operacion, que quando de los terminos del quebrado, es quadrado el numerador, y se saca la raiz aproxîmada del denominador como hemos visto poco ha (150) entonces para reducir la raiz, á sola la expresion de decimales, es menester considerar dicha raiz como un quebrado que debe convertirse en decimales (110) por cuyo medio se tendrán las que se solicitan; esto supuesto, si habiendo hallado que

la raiz de $\frac{4}{18}$ es $\frac{2}{4,242}$ quiero expresar esta raiz en

solas decimales dividiré 2000000 por 4,242, y el quociente 0,471 será la raiz equivalente; por lo mis-

mo

mo la de $\frac{9}{13}$ que es $\frac{3}{3,605}$ se convierte en 0,832, dividiendo 3000000 por 3,605.

154 Ultimamente, si quando se huviese de sacar la raiz de entero y quebrado, se quiere resolver por solo decimales, se convertirá en estas el quebrado, y despues de haberle agregado el entero, se añadirá á las decimales un numero de ceros tal, que con dichas decimales, sea duplo de aquellas á que se quisiere aproxîmar: por exemplo, si queremos extraer la raiz de 6 $\frac{3}{5}$ con diferencia de menos de una milesima parte, reduciré $\frac{3}{5}$ á milesimas, y será con los enteros 6,600, y añadiendole tres ceros á continuacion de las decimales, á fin de igualar el duplo de la aproxîmacion, tendré 6,6000000, de cuya cantidad, sacando la raiz, hallo que es 2,569.

Del Numero Cubo.

155 *Numero cubo* (cuyo exponente es, 3) *es el producto de un quadrado multiplicado por su raiz, ó el que es tres veces factor*, esto es, que se halla elevado á la 3.ª potencia; asi 8 es numero cubo de 2, porque procede de $2\times2=4\times2=8$

156 *Raiz cubica se llama todo numero que forma el cubo*, cuya potencia se dice la 3.ª porque resulta de la multiplicacion del quadrado que es la 2.ª por la raiz que es la 1.ª Asi 2 está elevado á su tercera potencia 8, porque $1\times2=2$; primera potencia $2\times2=4$, segunda; $4\times2=8$ tercera, y cubo de 2 que es su raiz.

157 Para elevar un numero al cubo está á la vista, no hay otra cosa que hacer sino es multiplicar dicho

nu-

numero por su quadrado; pero para extraer su raiz, no es tan simple la operacion, á no ser que el cubo propuesto tenga solo tres guarismos, porque en tal caso, su raiz se hallará forzosamente en los numeros naturales desde 1 hasta 9; pues siendo 9 el mayor de ellos, su cubo 729 no tiene mas de tres cifras, y asi se manifiesta que los cubos de las raices

....	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Son..	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

158 Luego siempre que una cantidad no tenga mas de tres guarismos, su raiz será en enteros, uno de dichos nueve guarismos; digo en enteros, porque habrá muchos que tendrán su raiz en enteros y quebrados; asi 1, es cubo de 1, porque $1\times1\times1=1$, y 1 es su raiz: 8 es cubo de 2, y 2 es su raiz; pero 1 y 8 son cubos de 1 y 2, y entre estas raices no hay guarismo alguno, siendo asi que entre sus cubos 1 y 8, se hallan 2, 3, 4, 5, 6, 7, de cuyos cubos irracionales han de estar las raices forzosamente entre las de los extremos 1 y 8, esto es, entre 1 y 2; luego la raiz cubica de qualquiera de dichos cubos intermedios, será 1, y un quebrado, porque dicha raiz ha de ser mayor de 1, y menor de 2.

De la formacion del Cubo, y extraccion de su raiz.

159 Sim embargo de que ya sabemos que para elevar un numero qualquiera al cubo, no hay mas que multiplicarle por su quadrado, usaremos aqui de un metodo analogo, al que dimos en la formacion del quadrado, para poner á la vista las partes de que se forma.

Cu-

Cubemos pues este numero 43, que segun lo insinuado, será asi:

$$\begin{array}{r} 40+3 \\ \times\, 40+3 \\ \hline 9 \\ 120 \\ 120 \\ 1600 \\ \hline 1600+120+120+9=1849 \\ \hline \end{array}$$

Ya que el cubo de un numero, es el producto de su quadrado por su raiz, deberemos multiplicar las partes 1600 + 120 + 120 + 9 por las de la raiz 40 + 3, por lo que será su disposicion la siguiente.

$$\begin{array}{lrr}
 & 1600+120+120+9= & 1849 \\
 & 40+3 & \times 43 \\ \hline
 & 27 & 5547 \\
\textit{Productos por las unidades.} & 360 & 7396 \\
 & 360 & \\
 & 4800 & \\
 & 360 & \\
\textit{Productos por las decenas.} & 4800 & \\
 & 4800 & \\
 & 64000 & \\ \hline
\textit{Producto total, y cubo}\ldots\ldots & 79507 = & 79507 \\ \hline
\end{array}$$

Ya que el quadrado de un numero se compone del quadrado de las unidades, del duplo, producto de decenas por unidades, y del quadrado de las decenas, inferiremos, que pues el cubo, es el producto de estas partes por la raiz, se forma por conseqüencia:

1.°

1.º Del quadrado 9 de las unidades 3, multiplicado por ellas mismas, de lo que resulta *el cubo de las unidades* 27.

2º De dos veces 120 (producto de decenas por unidades) multiplicado por las unidades 3, que da dos veces 360 que son *las decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades.*

3.º De 1600, quadrado de las decenas, multiplicado por las 3 unidades que da 4800, y es *el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.*

4.º Del quadrado 9 de las unidades multiplicado por 40, de lo que resulta 360, que es *el quadrado de las unidades, multiplicado por las decenas.*

5.º De dos veces 120 (producto de las decenas por las unidades) multiplicado por 40, que da dos veces 4800, *producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.*

6.º De 1600, quadrado de las decenas, multiplicado por las mismas decenas, lo que da 64000, *cubo de las decenas.*

160 Si sumamos ahora todas estas partes sacaremos por regla general, que *un cubo qualquiera* consta:::

1.º *Del cubo de las decenas.*

2.º *De tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.*

3.º *De tres veces el quadrado de las unidades multiplicado por las decenas.*

4.º *Del cubo de las unidades.*

161 Esto supuesto para extraer la raiz cubica de una cantidad qualquiera.

1.º Separense de tres en tres guarismos, todos los que componen la cantidad, principiando de la derecha á la izquierda, cuya ultima separacion es indiferente, conste de uno solamente.

2.º Saquese la raiz cubica de la ultima separacion de la izquierda, y escribase á la derecha de la cantidad, cubese esta primer cifra de la raiz, que serán las decenas de ella, y escrito su producto debaxo de la parte que se extrajo la raiz, restese una de otra cantidad, notando la diferencia.

3.° *Al lado de esta, baxese la separacion siguiente*, y separense de la nueva cantidad las dos cifras primeras de la derecha, y lo que quedase á la izquierda *dividase por el triplo* del quadrado de la raiz hallada, y despues de haber escrito este divisor, debaxo del dividendo se pondrá el quociente á la raiz, en seguida de la primera cifra.

4° Cubiquese toda la raiz hallada, y el cubo restese de la cantidad principal en la parte correspondiente, notando su diferencia como es costumbre.

5.° Al lado de esta diferencia se baxarán del mismo modo que antes, los tres guarismos siguientes, separando igualmente los dos primeros de la derecha, *despues se quadrará toda la raiz*, y su triplo se escribirá por divisor debaxo de la cantidad separada á la izquierda, y se procederá en todo lo demás como antes.

Propongamos ya, extraer la raiz cubica de 79507.

79,507 | 43
64
———
155,07
48
———
795 07
———
00000

Divido primeramente la cantidad propuesta de tres en tres guarismos, y queda á la izquierda 79, y á la derecha 507, de lo que infiero que su raiz ha de constar de dos guarismos.

2.° Saco la raiz cubica de 79 que es 4, escribo-

la

la al lado de la cantidad propuesta, y estas son las decenas de la raiz, cubico estas decenas, y su cubo 64 lo escribo debaxo de la parte 79, resto una de otra cantidad, y me quedan 15.

3.° Al lado de 15 baxo la otra parte 507, y se forma la nueva cantidad 15507, de la que separo á la derecha 07; quadro ahora las 4 decenas halladas, y su quadrado 16 lo triplico, cuyo producto 48 escribo debaxo de 155, como divisor, executo la division de 155 por 48, y su quociente 3, que son las unidades de la raiz, lo escribo al lado de 4.

4.° Cubico toda la raiz 43, y su cubo lo resto de la cantidad propuesta, y como hallo justamente la misma, infiero que 43 es la raiz cabal de 79507.

162 Observemos sobre esta operacion, para inteligenciarnos en el fundamento de ella.

Como toda raiz generalmente se debe considerar como compuesta de decenas y unidades, debe inferirse que la primera cifra de la raiz que ha de sacarse, serán precisamente las decenas, y como el cubo de estas, vale millares, no estará por consiguiente en las unidades, decenas, y centenas, y asi separo á la derecha estas tres primeras cifras, y quedan á la izquierda 79.

Si aun quedasen á la izquierda mas de tres cifras ó guarismos, aplicaria el mismo razonamiento, semejante al que dimos en la raiz quadrada, y seguiria separando de tres en tres toda la cantidad.

Atendiendo á que en 79 no solo están los millares que forman el cubo de las decenas, sino es tambien los procedentes de la cantidad separada á la derecha, me valgo de cubicar la raiz que he sacado de 79, y su cubo 64 escribirlo debaxo para sacar la diferencia de uno á otro, que es 15.

Al lado de esta, escribo los otros tres guarismos separados, y se forma la nueva cantidad 15507, que

cons-

consta de las tres partes restantes que constituyen el cubo, á saber: *tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades, mas tres veces el quadrado de las unidades, multiplicado por las decenas, mas el cubo de las unidades.*

De aqui infiero, que si divido la parte que comprehende tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades, por el triplo del quadrado de las decenas halladas, el quociente deberán ser las unidades, y he aqui la causa, de separar primero las dos cifras de la derecha, que supongo por valor de tres veces el quadrado de las unidades, multiplicado por las decenas, y por cubo de las unidades; partes que nada hacen al caso, para encontrar las unidades, por lo que efectuo la division de 155 por 48, y hallo el quociente 3, que son ciertamente las dichas unidades.

Poco tiene que entender, que si la cantidad constase de mas guarismos, seguiriamos aplicando progresivamente la misma explicacion; teniendo en consideracion, quanto dexamos dicho en todo el numero 144, por lo respectivo á la raiz.

Despues de haber concluido la operacion, solo resta comprobar la raiz hallada para asegurarse si es la verdadera, y esto se logra cubicando dicha raiz, y restando su producto de todo el cubo propuesto, como puntualmente executamos en el exemplo actual, en el que hemos visto que 43 es raiz completa de 79507.

163 Quando el numero propuesto es irracional no puede, como ya diximos (138) hallarsele raiz exacta, pero sí, tan aproxîmada como quiera el calculador; para esto, el medio mas socorrido, es el de las decimales, que se reduce á escribir á continuacion de la cantidad propuesta, un numero de ceros, triplo de aquel que tengan las decimales á que quiera llevarse

se la aproxîmacion, quiero decir, si dicha aproxîmacion ha de ser á las decimas, se escribirán tres ceros á continuacion de la cantidad, si á las centesimas, seis, si á las milesimas nueve &c. guardando en todo lo demas la regla y metodo prefixado.

Supongamos que se quiere sacar la raiz cubica de 983, escribiré pues por lo dicho para sacar tres decimales á la raiz, asi:

983,000,000,000 | 9,943
729
2540,00
243
970299
0127010,00
29403
9821077 84
0008922160,00
2964108
9829972848 07
000002715 193

En efecto, siguiendo el metodo dado, hallo que la raiz cubica aproxîmada de 983000000000, es 9943, pero como la que se solicita es la de...... 983,000000000, su raiz será 9,943 separando á la derecha el tercio del numero de ceros con que se aumentó el cubo propuesto 983.

Extraer la raiz cubica de un quebrado.

164 Quando los terminos del quebrado, son cubos racionales, es claro que nada hay que hacer sino es extraer la raiz del numerador y denominador, asi

la

la raiz de $\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{2}$; la de $\frac{8}{64}$ es $\frac{2}{4}$; la de $\frac{27}{125}$ es $\frac{3}{5}$ &c.

Si de los terminos del quebrado, fuere solamente cubo racional uno de ellos, por exemplo el denominador, se sacará la raiz aproxîmada del numerador, y sacando la del denominador, será este nuevo quebrado la raiz que se solicita; por tanto la raiz cubica de $\frac{9}{27}$ es $\frac{2,08}{3}$: por el contrario si el cubo racional estuviese por numerador como $\frac{8}{9}$, su raiz seria $\frac{2}{2,08}$.

Pero si ni el numerador ni denominador fuesen cubos, se multiplicarán ambos terminos por el mismo denominador, de lo que resultará un quebrado que tendrá ya quadrado su denominador, y volviendo á multiplicar dichos dos terminos por el mismo denominador, se habrá formado un quebrado de igual valor al propuesto, cuyo denominador será un cubo perfecto; saquese entonces la raiz aproxîmada del numerador, y esta será numerador de la raiz justa del denominador; si por exemplo se quiere sacar la raiz cubica de $\frac{4}{9}$, se multiplicará 4 por 9, y 9 por 9, y los productos 36, y 81, formarán el nuevo quebrado $\frac{36}{81}$ que tendrá ya su denominador quadrado: volviendo á multiplicar los terminos 36 y 81 por el primitivo denominador 9, resultarán las nuevas cantidades 324 y 729, que escritas en la forma correspondiente darán el quebrado $\frac{324}{729}$, que aun es igual (62) al propuesto $\frac{4}{9}$, y tiene el denominador 729 cubo perfecto: saquese ahora la raiz aproxîmada de 324 que es 6,868, y la de 729 que es 9, y se hallará que la raiz cubica de $\frac{4}{9}$ es $\frac{6,868}{9}$

con

con diferencia de menos de una milesima parte de la unidad.

165 Para sacar la raiz cubica de enteros y quebrados, se practicará lo que dexamos dicho, despues de haberlos convertido á la especie de su quebrado, ó bien si se quiere se convertirá el quebrado en decimales, y despues de completar con ellas un numero de ceros, tal que sea triplo de la decimal á que se huviere de llevar la aproxîmacion, y haber juntado á dichas decimales los enteros, se extraerá la raiz de toda la cantidad, segun acabamos de enseñar.

166 Si ya aproxîmadas las raices, se quieren reducir solamente á decimales, se logrará con dividir la raiz aproxîmada por el denominador de ella, asi en el caso anterior la raiz $\frac{6{,}868}{9}$ se reduce á 0,763 dividiendo 6,868 por 9, finalmente se puede aplicar á este punto lo que dexamos dicho en la raiz quadrada.

167 Es comun entre los Matematicos anteponer este signo $\sqrt{}$ á la cantidad que no tiene raiz cabal, escribiendo en medio de dicho signo el numero que expresa el grado de la potencia á que dicha cantidad se halla elevada, cuyo numero se llama *exponente de la raiz*; asi $\sqrt[2]{8}$ quiere decir la raiz quadrada de 8. $\sqrt[3]{12}$ quiere decir raiz cubica de 12; pero comunmente se suprime el exponente quando se refiere á la segunda potencia; asi $\sqrt{24}$ es lo mismo que $\sqrt[2]{24}$.

168 Igualmente se usa de dicho signo, para indicar

la

la raiz que debe sacarse de una cantidad racional, ó conmensurable, en cuyo caso equivale dicha expresion á la raiz que se busca; asi $\sqrt{16} = 4$; y lo mismo es escribir 4, que $\sqrt{16}$.

169 Tambien se indican de otro modo las raices de qualquiera cantidad, sin el signo radical, escribiendo un poco mas arriba, y á la derecha de la cantidad un quebrado, cuyo numerador sea la unidad, y el denominador el exponente de la potencia; asi lo mismo es $\sqrt{8}$, que $8^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[3]{12}$, que $12^{\frac{1}{3}}$.

Este modo de expresar las raices, se funda, en que segun previene el Algebra por regla general, para sacar una raiz qualquiera de una cantidad simple; se divide el exponente de la cantidad, por el exponente de la raiz, y como el exponente de toda cantidad numerica es la unidad (130) de ai es que la expresion $8^{\frac{1}{2}}$ es lo mismo que $\sqrt{8}$.

Aplicacion de los signos algebraicos, á las operaciones numericas.

170 Aunque quando tratamos de las quatro operaciones numericas indicamos respectivamente á cada una el signo con que las expresan los Matematicos, diremos aqui con mas individualidad el uso y aplicacion de dichos signos, de que habremos de hechar mano muy en breve.

171 Toda cantidad á que precede el signo $+$ se llama positiva, y aquella á quien precede el signo $-$ negativa.

172 Estas cantidades se destruyen una á otra, quanto es posible, y asi, si tenemos de una parte esta cantidad positiva $+8$, y de otra esta -4, diremos que la negativa 4 destruye quatro unidades de la

posi-

positiva 8; por lo que $+8$ quedará reducido á $+4$.

Para expresar este resultado, se usa del signo $=$, y asi escribiremos $+8-4=4$.

De aqui se infiere que si la cantidad negativa es igual á la positiva, el resultado es cero: asi $+8-8=0$.

En el exemplo anterior $+8-4$; la negativa 4, destruye 4 unidades positivas de $+8$; y $+8$ destruye las 4 negativas, por lo que el residuo es $=+4$.

173 Aunque las cantidades negativas, se toman contrariamente que las positivas, no por eso dexan de ser tan verdaderas como estas: su diferencia solo estriva, en que se toman en sentido contrario; una deuda es una cantidad verdadera, y positiva; pero tomada con respeto al haber que uno posee, es cantidad negativa, y destruye la positiva del haber, quanto vale la negativa de la deuda: el que camina de la derecha á la izquierda, y toma esta accion por cantidad positiva, si anda alguna distancia de la izquierda á la derecha, será esta accion como contraria á la primera, una cantidad negativa, aunque mirada ella en sí, sin relacion á la otra, sea realmente positiva.

SUMAR.

174 Quando las cantidades que se han de sumar están afectas de signos semejantes, esto es, que todos son positivos, ó todos negativos, se suman las cantidades, y á la suma total se le pone el signo de que van afectas; asi la suma de $+3+8+4$ es $+15$; y la de $-18-4-9$ es -31.

Quando las cantidades van afectas de signos contrarios, se suman todas las positivas, y las negativas separadamente, y despues se restan, poniendo á la diferencia el signo de la suma mayor que se formó:

mó: asi para sumar $+8-4+6+18-3+2-4$ sacaremos primero la suma de las positivas.................

$$+8+6+18+2=+34$$

luego la de las negativas $-4-3-4=--11$

y sale por diferencia.. $+23$

que es la suma de todas las cantidades propuestas.

175 A poco que se reflexîone, se vé que este modo de obrar, tiene su demostracion y fundamento en la misma definicion del sumar, y quando las cantidades son todas positivas, ó todas negativas el resultado es la verdadera suma total de dichas cantidades, porque para el caso, lo mismo es que se sumen cantidades que se posean, como cantidades que no existan, ó se deban.

Por lo mismo es bien patente, que quando las unas son positivas, y las otras negativas, se destruyen mutuamente quanto es posible (172) y la suma en este caso no puede ser en realidad, sino una resta, la que precisamente deberá llevar el signo de la cantidad mayor.

RESTAR.

176 Para restar, se tendrá por regla general escribir el substraendo despues del minuendo; pero con signo contrario al que lleva en la qüestion, y sumadas asi las cantidades la suma será la resta verdadera.

Supongamos que de $+18$ se han de restar $+9$; la operacion será $+18-9=9$.

Esto es evidente, porque si teniendo uno 18 reales le quitan 9, precisamente le disminuyen 9 reales de su haber, y asi quitar la positiva $+9$ de la positiva $+18$, es verdaderamente disminuir ésta, quanto vale aquella, luego indispensablemente será $+18-9=9$.

Pe-

Pero si en vez de quitarle la cantidad positiva $+9$ le quitan una deuda, ó cantidad negativa -9 que deberia satisfacer de dichos 18 reales; es claro que le aumentan su caudal tanto quanto importa la deuda que ya no debe satisfacer; luego si de $+18$ se han de restar -9 será $+18+9=27$.

177 Tambien, si debiendo uno 18 reales le quitan la deuda de 9, es lo mismo que si le dieran 9 reales para pagar la mitad de la deuda 18, ó disminuirle ésta, quanto monta aquella, y asi será de -18 restar $+9$, cuyo residuo es -9.

178 Si uno que tiene 9 reales debe pagar otros 9, no hay duda que el caudal de este hombre es 0, ó nada, y en tal caso su haber es $+9-9=0$; pero si teniendo solamente los 9 reales debe pagar 18, su haber es menor que nada, tanto quanto la deuda excede á su caudal, de manera que su haber en tal caso es $+9-18=-9$: en una palabra, restar una cantidad positiva es negarla, y al contrario, restar una negativa es afirmarla, que es decir quitar *menos* es lo mismo que aumentar *mas*; y quitar *mas*, és aumentar menos.

Multiplicar.

179 Para multiplicar es regla general dar al producto el signo $+$ siempre que los factores llevan signos semejantes, pero se le dá el signo $-$ quando son diferentes dichos signos; es decir: $+\times+$ y $-\times-=+$ pero $+\times-$ ó $-\times+=-$.

Esto no admite duda, porque en quanto á lo primero si uno tiene 38 reales, y los aumenta positivamente quatro veces, que es multiplicarlos por 4; vendrá á tener positivamente 4 veces 38 reales ó 152; luego es preciso que $+\times+=+$.

Igualmente el que debe 38 reales tiene esta cantidad

dad negativamente, luego si se toma 38, quatro veces tambien negativamente, será lo mismo que si á este hombre se le quitára 4 veces dicha deuda; pues tomar una deuda en sentido contrario, que es negativamente, es quitar dicha deuda, y quitar una deuda, es aumentar caudal luego $- \times - = +$.

Tambien $+38 \times -4 = -152$; y debe ser asi, porque si uno tiene de caudal 38 reales, y debe 4 veces 38 reales, no hay duda que su haber se habria convertido en 4 veces menos 38; esto es, en -152; luego multiplicar la cantidad positiva 38 por la negativa 4, es tomar 38 quatro veces en sentido contrario, esto es, disminuir el 38, 4 veces; luego el producto será -152.

De la misma manera $-38 \times +4 = -152$; porque multiplicar la cantidad negativa 38 por la positiva 4; es tomar tantas veces positivamente la negativa 38, esto es, aumentar 4 veces la deuda: si uno debe 38 reales á 4 sugetos, su haber será ciertamente 4 deudas de 38 reales, esto es, 4 cantidades negativas -38, cuya suma es -152.

PARTIR.

180 Para la particion valen de todo punto las reglas de la multiplicacion, y asi: $+$ dividido por $+$, y $-$ por $-$ el quociente es $+$; pero $+$ dividido por $-$, y $-$ por $+$ el quociente es $-$

Asi $\dfrac{+152}{+4} = +38$; y $\dfrac{-152}{-4} = +38$, y esto es claro, porque en el primer caso segun lo que diximos (39) el quociente 38 debe ser, como en efecto lo es, una cantidad positiva, que exprese las veces que la positiva $+152$ contiene á la positiva $+4$; á

mas

mas de que debiendo resultar de la multiplicacion del quociente por el divisor, precisamente el dividendo, no podría verificarse, á no ser el quociente positivo; y asi es que $+38 \times +4 = +152$.

Lo mismo decimos en el segundo caso, pues el quociente $+38$ afirma las veces que la cantidad negativa -152 contiene á la negativa -4; y tambien porque debe ser el quociente tal, que multiplicado por el divisor dé por producto el dividendo, y asi $+38 \times -4 = -152$.

Quando los signos son contrarios debe ser negativo el quociente; pues la cantidad positiva $+152$ no puede contener á negativa -4 sino negativamente, esto es, -38; y asi debe ser para que -38×-4 resulte $= +152$.

Tambien -152 dividido por $+4$ da el quociente negativo -38; pues una cantidad negativa, no puede de ninguna manera contener á una positiva, sino es negativamente, y asi el quociente -38, expresa que la cantidad negativa -152 contiene negativamente á la positiva $+4$; 38 veces, y por tanto $-38 \times +4 = -152$.

Advertimos para concluir que quando se usa en el calculo de estos signos, si la primera cantidad es positiva, no se escribe el signo $+$ y asi lo mismo es $+8$ en principio de cantidad que 8.

De las Razones.

181 Razon, en general, es el cotejo, ó comparacion que se hace de dos cantidades de una misma especie.

182 De estas dos cantidades comparadas, la que se compara se llama *antecedente*, y aquella á quien se compara *conseqüente*.

183 Esta comparacion puede hacerse con uno de dos objetos; el primero para indagar quanto la una canti-

tidad es mayor que la otra, como 4 y 6, cuya diferencia es 2; y el segundo para saber quanto una cantidad contiene á la otra, como 6 á 4, ó está contenida en ella como 4 en 6.

En el primer caso se llama *razon arismetica*, y en el segundo *geometrica*: la primera se expresa con un punto entre las dos cantidades; y la segunda con dos; asi la razon arismetica de 4 á 6, se escribe asi, 4. 6; y la geometrica asi, 4: 6.

184 Quando las dos cantidades que se comparan son iguales como 4 y 4, se llama *razon de igualdad*; y si desiguales como 4 y 6, *razon de desigualdad*.

185 Si la comparacion se hace de una cantidad menor á otra mayor como 4 á 6 se llama *razon de menor desigualdad*; y si de una mayor á otra menor se dice *razon de mayor desigualdad* como 6. 4.

En el caso primero se llama la razon *ascendente*, y en el segundo *descendente*; el resultado que sale despues de echa la operacion con ambas cantidades, es *el exponente de la razon*.

186 Quando la razon es arismetica, su exponente se halla restando la cantidad menor de la mayor, como en la de 4. 6, cuya diferencia es 2; y en la geometrica, dividiendo por regla general el antecedente por el conseqüente, de lo que resulta que la razon geometrica es siempre un quebrado propio, ó impropio, á medida que la razon es ascendente, ó descendente: asi en la razon 4:6 su exponente es $\frac{4}{6}$; y en la de 6: 4 es $\frac{6}{4}$, cuyos dos numeros se llaman *los terminos de la razon*.

187 Es facil percebir que si en qualquiera razon arismetica se añade el exponente al termino menor resultarán ambos terminos iguales, asi en la razon de 4. 6, cuyo exponente es 2, si este se añade al menor termino 4, resultará la razon de igualdad 6. 6, y lo mismo se verificará en la razon geometrica si

se

se multiplica el termino menor por su exponente, como en la de 6: 4, pues multiplicando el termino 4 por el exponente $\frac{6}{4}$ produce la razon de igualdad 6: 6, ó bien si la razon es de menor desigualdad como la de 4: 6, cuyo exponente es $\frac{4}{6}$ partiendo el antecedente 4, ó multiplicando el conseqüente 6 por dicho exponente $\frac{4}{6}$.

188 Si los terminos se comparan siempre de un modo constante, quiero decir, si en dos ó mas razones se cotejan ó comparan los menores á los mayores, ó estos á aquellos, entonces, se dice que las razones *son directas*; pero quando en una razon se compara el menor al mayor, y en otra el mayor al menor, se llama *indirecta* ó *inversa*; las razones 3: 6; 4: 8 son directas la una respecto de la otra; pero son inversas 3: 6; 8: 4, porque en la primera se compara la menor á la mayor, y en la segunda la mayor á la menor.

Lo mismo decimos quando tomamos en sentido contrario una razon geometrica qualquiera, asi es inversa la razon 3: 7: de la de 7: 3, y ésta de aquella.

189 Llamase razon dupla, tripla, quadrupla &c. quando el antecedente es dos, tres, quatro veces &c. mayor que su conseqüente como 6: 3, 12 : 4, 24: 6 &c. y al contrario se dice razon subdupla, subtripla, subquadrupla, quando el antecedente es dos, tres, quatro veces menor que su conseqüente como 2 : 4, 3 : 9, 4: 16 &c.

190 Tambien se dice que una razon *es dupla*, *tripla*, ó *quadrupla* de otra, quando el exponente de la una, contiene dos, tres, ó quatro veces, al exponente de la otra, asi la razon de 24 : 6 es dupla de la de 6 : 3, porque el exponente 4 de la primera es duplo del exponente 2 de la segunda.

191 Llamase en general *razon compuesta*, la que resul-

sulta multiplicando los antecedentes de dos ó mas razones, y tambien los conseqüentes; si hay las tres razones 2 : 3, 4 : 7, 5 : 9, los productos $2 \times 4 \times 5 = 40$, y $3 \times 7 \times 9 = 189$, forman la razon compuesta de manera que 40: 189, es la razon compuesta de las tres razones expresadas.

192 Razon duplicada, triplicada, quadruplicada &c. llamamos á la razon compuesta que se forma de dos, tres, quatro razones iguales; asi la razon compuesta 8 : 72 que resulta de las dos iguales 2 : 6, 4 : 12, se llama duplicada; la que se compone de las tres razones iguales 2 : 4, 5 : 10, 7 : 14, que es 70 : 560 se llama triplicada &c.

De las Proporciones.

193 Se entiende por proporcion, la comparacion que se hace de dos razones iguales, y de aqui nace que toda proporcion ha de constar de dos antecedentes, y dos conseqüentes, que se llaman *los terminos homologos de la proporcion.*

194 El signo de esta comparacion son quatro puntos asi :: que separan las dos razones quando son geometricas; y dos asi : quando son arismeticas.

195 La proporcion es arismetica, ó geometrica, segun son las razones que la forman, asi las dos razones 3.6 : 4.7 componen una proporcion arismetica; pero estas 2:8:: 3:12, hacen una proporcion geometrica.

196 La proporcion generalmente se divide en *discreta y continua*: *proporcion discreta* es quando son distintos los quatro terminos de la proporcion como 3:12 :: 4 : 16 que se llaman proporcionales; y el primero y ultimo 3 y 16 extremos, y el segundo y tercero medios.

197 *Proporcion continua*, es quando el conseqüente de

de la primera razon, es igual al antecedente de la segunda, como 2:4 : : 4:8, en cuyo caso, se suprime dicho antecedente poniendo antes de escribir la proporcion este signo ∺ si es geometrica como ∺ 2: 4: 8, y este ÷ si es arismetica como ÷ 3. 7. 11, y sirve para prevenir al leer dichas proporciones, debe repetirse el conseqüente de la primera razon.

En ambos casos, el segundo termino se llama *medio proporcional* arismetico, ó geometrico segun fuere la proporcion.

De la proporcion arismetica.

198 En toda proporcion arismetica discreta, la suma de los extremos, es igual á la suma de los medios, y si la proporcion es continua la suma de los extremos es dupla del termino medio.

1.° Para probarlo, tomemos la proporcion discreta 5. 2: 7. 4; en la que $5 - 2 = 7 - 4$, y añadiendo á cada una de estas cantidades, la suma de los conseqüentes $2 + 4$, resultarán $5 - 2 + 2 + 4 = 7 - 4 + 2 + 4$ que por lo dicho (174) se reduce á $5 + 4 = 7 + 2$ suma de los extremos y medios.

2° Si la proporcion es continua como ÷ 5. 8. 11 será $5 + 11 = 2 \times 8$, porque $11 - 8 = 8 - 5$; y añadiendo á una y otra cantidad la suma de los antecedentes $5 + 8$, resulta $11 - 8 + 5 + 8 = 8 - 5 + 5 + 8$; que se reduce á $11 + 5 = 8 + 8$, ó lo que es lo mismo á 8×2, que es el duplo del termino medio.

199 De la propiedad que acabamos de demostrar en dicha proporcion arismetica, se infiere que si se dan tres terminos de una proporcion discreta como 5. 2: 7. x figurando el valor del quarto por la letra x, se hallará éste sumando los medios, y restando el extremo conocido; esto es, $2 + 7 - 5 = x$; luego $x = 4$, y tenemos toda la proporcion 5. 2: 7. 4, y es asi, pues

$5+4$, que son los extremos $=2+7$, que son los medios.

Lo mismo sucede quando el termino desconocido es uno de los medios; como si en la misma proporcion, se desconoce el termino 7, asi $5.2:x.4$ será $5+4=2+x$, y $x=5+4-2$; luego $x=7$ termino medio desconocido.

200 Quando la proporcion es continua, y falta el termino medio, como $\div 5.x.11$; se halla sumando los extremos, y partiendo la suma por 2; asi $\frac{5+11}{2}=x$, y por tanto $x=8$, y toda la proporcion $\div 5.8.11$.

Si falta un extremo como $\div 5.8.x$ se tendrá duplicando el termino medio, y restando de él el extremo conocido; asi $\div 8\times 2-5=x$, y por tanto $x=11$.

De la Proporcion Geometrica.

201 A mas de las definiciones que hemos dado de las proporciones, hay otras que nacen de la varia disposicion que se da á los terminos de la proporcion geometrica.

202 Quando en una proporcion geometrica, comparamos el antecedente de la primera razon á su conseqüente, como el antecedente de la segunda razon á su conseqüente, se llama *proporcion directa*, esto es, el 1.° al 2.° como el 3.° al 4.° asi $8:2::12:3$.

203 Pero quando siendo una proporcion directa, comparamos el primero al tercero, como el segundo al quarto, entonces se llama *alterna*, y este modo de comparar, *alternando*, asi teniendo la directa $8:2::12:3$, será *alternando* $8:12::2:3$.

204 Quando en una proporcion directa como $8:2::12:3$ se compara el segundo termino al primero, co-

como el quarto al tercero asi $2 : 8 :: 3 : 12$, se llama comparar *invirtiendo.*

205 Si teniendo una proporcion directa $8 : 2 :: 12 : 3$, comparamos la suma del antecedente y conseqüente, al antecedente ó conseqüente de la primera razon, como la suma del antecedente y conseqüente, al antecedente ó conseqüente de la segunda razon, se llama comparar *componiendo*; y será respecto de la proporcion que hemos dado $8 + 2 : 8 :: 12 + 3 : 12$, ó tambien $8 + 2 : 2 :: 12 + 3 : 3$.

206 Pero quando siendo una proporcion directa, se compara la diferencia del antecedente y conseqüente al mismo antecedente, ò conseqüente de la primera razon, como la diferencia del antecedente y conseqüente, al mismo antecedente ó conseqüente de la segunda, se llama comparar *dividiendo* asi, si $8 : 2 :: 12 : 3$, saldrá la division de proporcion $8 - 2 : 2 :: 12 - 3 : 3$, ó tambien $8 - 2 : 8 :: 12 - 3 : 12$.

207 Ultimamente, si teniendo una proporcion directa, se compara el antecedente ó conseqüente á la diferencia del mismo antecedente y conseqüente de la primera razon, como el antecedente ó conseqüente, á la diferencia del antecedente y conseqüente de la segunda se llama comparar *convirtiendo*; por tanto, si $8 : 2 :: 12 : 3$, resultará la conversion de proporcion $8 : 8 - 2 :: 12 : 12 - 3$ ó tambien $2 : 8 - 2 :: 3 : 12 - 3$.

208 Toda esta varia disposicion de terminos, y las que aun pueden hacerse de quatro cantidades en proporcion geometrica, nacen de la propiedad fundamental de dicha proporcion, que consiste en que *el producto de los extremos es igual al producto de los medios*: asi en la proporcion anterior (lo mismo es qualquiera otra) $8 : 2 :: 12 : 3$, tenemos que los extremos $8 \times 3 = 2 \times 12$ que son los medios; porque (186) $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$ que son los exponentes, si se multi-

pli-

plican por el producto de 2×3 (35) resultará...

$$\frac{8\times2\times3}{2}=\frac{12\times2\times3}{3}$$ que se reduce á $8\times3=12\times2$.

209 De aqui se infiere 1.º que lo mismo es tomar el producto de los extremos que el de los medios ; 2.º que en la proporcion continua el producto de los extremos es igual al quadrado del termino medio, porque siendo la proporcion ÷ 8 : 4 : 2 la misma que 8 : 4 :: 4 : 2 (197) es claro que por lo dicho $8\times2=4\times4$: 3.º que conociendo tres terminos qualesquiera de una proporcion, se hallará el quarto facilmente, porque si en la proporcion 3 : 12 :: 5 : x nos falta el quarto termino que figuramos por x, le encontraremos multiplicando el tercer termino por el segundo, y dividiendo el producto por el primero; esto es, multiplicando los medios, y dividiendo por el extremo conocido asi $\frac{12\times5}{3}=x$; y $x=20$, y toda la proporcion 3 : 12 :: 5 : 20.

Si faltase uno de los medios, como en 3 : x :: 5 : 20; multiplicariamos el primer termino por el quarto, y el producto lo dividiriamos por el tercero, esto es, multiplicariamos los extremos, y dividiriamos por el medio conocido, asi.....

$\frac{3\times20}{5}=x$; y $x=12$: y toda la proporcion 3 : 12 :: 5 : 20.

210 4.º Que siempre que se hallen dos cantidades iguales, si las resolvemos en sus factores, podremos formar de ellos una proporcion, por exemplo : Si hay dos cantidad 60 y 60, y las resolvemos en los factores, ó medidas 10×6; 2×30; 5×12; 3×20; 4×15; podremos formar todas las proporciones siguien-

guientes. 10:2::30: 6
5:2::30:12
5:3::20:12
3:4::15:20. . . . . Cuyo metodo se fixa en disponer cada *quatro factores*, de manera que *los dos de la primera operacion formen los extremos, y los de la segunda los medios*; y asi se ve que los primeros factores 10 y 6, ocupan los extremos de la primera proporcion; y los segundos 2 y 30, los medios, y siguiendo tomando los factores de la segunda operacion 2 y 30 como primeros, y los de la tercera 5 y 12 como segundos, van saliendo todas las demas proporciones.

211 Como es propiedad caracteristica de toda proporcion geometrica, que *el producto de los extremos, sea igual al producto de los medios*, salta á la vista, que aquellas cantidades que no tengan dicha propiedad, no estarán en proporcion, y asi, si vemos que en quatro cantidades como 3 : 6, 4 : 12, 3×12 no es igual á 6×4; dichas cantidades no están en proporcion, y en efecto es asi, porque $\frac{3}{6}$ no es igual á $\frac{4}{12}$ (64).

212 De aqui se infiere que si tenemos quatro cantidades en proporcion, podremos variar la colocacion de sus terminos, siempre que subsista igual el producto de los extremos y medios, y asi de la proporcion directa . . . . 4 : 12 : : 6 : 18 podremos sacar la alterna. . . . . 4 : 6 : : 12 : 18
y la inversa . . . . 12 : 4 : : 18 : 6
y de esta la alt.ª . . . . . 12 : 18 : : 4 : 6
y de esta la inv.ª . . . . . 18 : 12 : : 6 : 4
y de esta la alt.ª . . . . . . 18 : 6 : : 12 : 4
y de esta la inv.ª . . . . . . 6 : 18 : : 4 : 12
y ultimamente la alt.ª . . 6 : 4 : : 18 : 12.

Porque en todas ellas se verifica que el producto de los extremos es igual al de los medios.

213 *De esta posibilidad de permutar los terminos de* una proporcion, inferiremos que pueden ó dividirse, ó multiplicarse los antecedentes, ó los conseqüentes por un numero qualquiera, sin que falte dicha proporcion; asi si tenemos $4:6::8:12$ podremos decir 1.° que $4:\frac{6}{3}::8:\frac{12}{3}$ porque la proporcion $4:6::8:12$ es la misma que $4:8::6:12$, y como por lo dicho (45) $6:12::\frac{6}{3}:\frac{12}{3}$ se sigue tambien por la igualdad de razones que $4:8::\frac{6}{3}:\frac{12}{3}$ y alternando $4:\frac{6}{3}::8:\frac{12}{3}$.

214 Tambien si $4:6::8:12$ podremos decir por la misma razon que $\frac{4}{2}:6::\frac{8}{2}:12$; porque la proporcion $4:6::8:12$ es la misma que $4:8::6:12$; y como por lo dicho (45) $4:8::\frac{4}{2}:\frac{8}{2}$, se sigue que $\frac{4}{2}:\frac{8}{2}::6:12$, y alternando $\frac{4}{2}:6::\frac{8}{2}:12$.

2.° Si $4:6::8:12$; será tambien $4\times3:6::8\times3:12$; ó tambien $4:6\times5::8:12\times5$ porque 1.° Si $4:6::8:12$, será alternado $4:8::6:12$ pero es constante segun lo que dexamos dicho (35) que $4\times3:8\times3::4:8$, luego $4\times3:8\times3::6:12$, y alternando $4\times3:6::8\times3:12$.

215 De la misma manera $4:6\times5::8:12\times5$ porque 2.° si $4:6::8:12$, alternando será $4:8::6:12$, pero (35) $6:12::6\times5:12\times5$, luego tambien $4:8::6\times5:12\times5$, y alternando $4:6\times5::8:12\times5$.

216 Reflexîonando un poco sobre todo esto, podemos concluir, que siendo $4:8::4\times3:8\times3::6\times5:12\times5::\frac{4}{2}:\frac{8}{2}::\frac{6}{3}:\frac{12}{3}$, es evidente que siempre que haya quatro cantidades en proporcion, subsiste la misma, ya *se multipliquen ó dividan los antecedentes por una tercera cantidad, y los conseqüentes por otra.*

217 Quando quatro cantidades están en proporcion, si se suman los antecedentes, y los conseqüentes, resultará una razon igual á qualquiera de las dos propuestas: Si por exemplo $4:8::6:12$ tendremos que $4+6:8+12::4:8$ ó $::6:12$ porque $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,

lo

lo mismo que $\frac{4+6}{8+12} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$; y como la igualdad de las razones pende de la de los exponentes, se sigue que la razon de $4+6 : 8+12$ es la misma que la de $4 : 8$, ó que la de $6 : 12$, pues el exponente de todas es $\frac{1}{2}$.

218 De aqui se infiere, que si huviese muchas razones iguales, la suma de todos los antecedentes, es á la suma de los conseqüentes, como un antecedente es á su conseqüente: y tambien que *si huviese muchas proporciones iguales, la suma de todos los antecedentes de las primeras razones, será á la de los consiguientes de estas mismas, como la suma de los antecedentes de las segundas razones, á la de los consiguientes de estas mismas*: esto es, si

$$2 : 6 :: 5 : 15$$
$$3 : 9 :: 7 : 21$$
$$4 : 12 :: 8 : 24$$

Será $2+3+4 : 6+9+12 :: 5+7+8 : 15+21+24$; porque (217) $2+3+4 : 6+9+12 :: 2:6$; y tambien $5+7+8 : 15+21+24 :: 5 : 15$, pero la razon $5 : 15$ es la misma que $2 : 6$, luego $2+3+4 : 6+9+12 :: 5+7+8 : 15+21+24$.

219 Asimismo *quando quatro cantidades están en proporcion, si se restan los antecedentes y los conseqüentes, resultará una razon igual á las dos propuestas*: si hay la proporcion $18 : 6 :: 12 : 4$, tendremos que $18-12 : 6-4 :: 18 : 6$, ó como $12 : 4$; esto es evidente, porque el exponente de la razon $18-12 : 6-4$ es $\frac{18-12}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$; y el de $18 : 6$ que es $\frac{18}{6}$; ó tambien la de $12 : 4$ que es $\frac{12}{4} = 3$.

220 Luego podemos inferir de aqui que *si huviese muchas razones iguales, la diferencia de los antecedentes*

dentes, es á la diferencia de los conseqüentes, como un antecedente es á su conseqüente.

221 De lo que acabamos de decir (217 y 219) salta á la vista que *en qualquiera proporcion, la suma de los antecedentes es á la suma de los conseqüentes, como la diferencia de aquellos á la diferencia de estos*; porque si en la proporcion 18 : 6 :: 12 : 4 tenemos que 18 + 12 : 6 + 4 :: 12 : 4; y 18—12 : 6—4 :: 12 : 4, no hay duda que quitando la razon 12 : 4 que es comun á entrambas proporciones, podremos decir que 18 + 12 : 6 + 4 :: 18 — 12 : 6 — 4, y si alternamos esta proporcion, sacaremos que 18 + 12 : 18—12 :: 6 + 4 : 6 — 4, de lo que inferimos tambien que en qualquiera proporcion *la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los conseqüentes á su diferencia.*

222 Del mismo principio nace que en qualquier proporcion, *la suma de los dos primeros terminos, es á la suma de los dos ultimos, como la diferencia de los dos primeros, á la diferencia de los dos ultimos*; esto es muy claro, porque si en la proporcion 18 : 6 :: 12 :4 alternamos 18 : 12 :: 6 : 4 podremos sacar 18 + 6 : 12 + 4 :: 18—6 : 12—4, y si por ultimo alternamos esta misma proporcion saldrá 18+6 : 18—6 :: 12+4 : 12—4, con lo que probamos que en qualquiera proporcion *la suma de los dos primeros terminos es á su diferencia, como la suma de los dos ultimos á su diferencia.*

223 Si quatro cantidades están en proporcion asi 18:6 :: 12 : 4 lo estarán tambien componiendo 18+6 : 18 :: 12 + 4 : 12, ó tambien 18 + 6 : 6 :: 12+4 : 4 porque alternando la primera proporcion 18 : 12 :: 6 : 4 tendremos que 18+6 : 12+4 :: 18 : 12, ó como 6:4, luego si alternamos esta proporcion saldrá 18+6 : 18 :: 12+4 : 12 que es la suma del antecedente y conseqüente al mismo antecedente, y tambien 18+6 : 6

::

:: 12 + 4 : 4 que es la suma del antecedente y conseqüente al mismo conseqüente.

Esto es muy facil de entender, pues en uno y otro caso el antecedente 18 + 6 vale una tercera parte mas que el antecedente 18 en la primera razon, del mismo modo que el antecedente 12 + 4 vale una tercera parte mas en la segunda que el antecedente 12, y está claro, que si las razones son iguales despues de echa la composicion es porque ya lo eran antes.

224 Lo mismo diremos quando esta comparacion se haga *por division*, ó *conversion* de razones, porque 1.° siendo 18 : 6 :: 12 : 4, será alternando 18 : 12 :: 6 : 4, pero por lo probado (218) 18—6 : 12—4 :: 18 : 12, ó :: 6 : 4, luego alternando 18—6 : 18 :: 12—4 : 12, ó tambien 18—6 : 6 :: 12—4 : 4 que es la division.

2.° Si segun acabamos de ver 18—6 : 18 :: 12—4 : 12, y 18—6 : 6 :: 12—4 : 4 tambien invirtiendo será 18 : 18—6 :: 12 : 12—4, y 6 : 18—6 :: 4 : 12—4, que es la conversion.

Ya se ve aqui tambien que por division nada se altera la proporcion primitiva, pues en una y otra razon, los antecedentes 18—6, y 12—4, se disminuyen una tercera parte igualmente, lo que nada altera una razon.

225 Quando dos proporciones se multiplican, ó bien se dividen entre sí, esto es, antecedentes por antecedentes, y conseqüentes por conseqüentes, que es lo que se llama *multiplicar ó dividir ordenadamente*, las quatro cantidades que resultan están en proporcion; asi, si se multiplican las dos proporciones siguientes:

	3 : 6 :: 4 : 8
	2 : 10 :: 3 : 15
resultará la proporcion.................	6 : 60 :: 12 : 120

y si se dividen las mismas saldrá esta otra $\frac{3}{2} : \frac{6}{10} :: \frac{4}{3} : \frac{8}{15} = 1\frac{1}{2} : \frac{6}{10} :: 1\frac{1}{3} : \frac{8}{15}$, cuyos productos de extremos y medios en ambos casos son iguales.

226 De aqui se sigue, que si una proporcion se multiplica por sí misma, los terminos de la proporcion que resulte, serán los quadrados de los terminos de la que se multiplicó, y estos mismos terminos serán sus raices; luego los quadrados, y todo genero de potestades de qualesquiera cantidades en proporcion, estarán en proporcion del mismo modo que sus raices respectivas.

227 Ultimamente, si ocurriese multiplicar dos ó mas proporciones ordenadamente, y el conseqüente de la primera razon en la una, fuese igual al antecedente de la primera razon en la otra, y asi succesivamente podrán borrarse todos los terminos comunes, expresando la razon equivalente á todas las primeras, con el antecedente de la primera, y el conseqüente de la ultima.

Supongamos que se huviesen de multiplicar las siguientes proporciones.... $2 : 6 :: 3 : 9$

$6 : 8 :: 12 : 16$

$8 : 4 :: 10 : 50$

sacariamos............. $2 : 4 :: 3\times12\times10 : 9\times16\times5$. la misma que huvieramos sacado aun quando huviesemos multiplicado $2\times6\times8 : 6\times8\times4$, porque (35) esto al fin no sería otra cosa que multiplicar las dos cantidades 2 y 4 por 6×8, y esto ya hemos visto no altera la continencia de una cantidad á otra.

De la Regla de tres.

228 La regla de tres se reduce á *completar una pro-*

por-

porcion geometrica, *conocidos tres terminos de ella*, cuya doctrina dexamos ya establecida.

229 En toda regla de tres generalmente concurren dos causas, y dos efectos que siempre guardan entre sí perfecta correspondencia, de manera que en la misma razon que se ha una causa con otra, en la misma se han los efectos. La regla de tres se divide en directa é inversa, simple, y compuesta.

De la Regla de tres simple directa.

230 La regla de tres se llama *simple* quando los tres terminos que se dan, vienen sencillamente sin circunstancias agregadas, que son esenciales á dichos terminos; y se llama *directa* quando creciendo ó menguando el 3.° respecto del 1.° crece ó mengua tambien el 4.° respecto del 2.° hagamos mas perceptible esta regla.

5 *hombres* han consumido *en* 3 *dias* 60 *libras de pan*; y necesitamos saber qué libras consumirán 14 *hombres* en el mismo tiempo, y con iguales circunstancias.

Aqui debemos observar primero, que respecto á que el tiempo es el mismo en uno y otro caso, no debe hacerse aprecio del tiempo que señala la qüestion, y esto debe tenerse muy presente; 2.° que los tres terminos conocidos 5 *hombres* y 14 *hombres* son las causas, y el otro termino 60 *libras* es el un efecto. 3.° Que alterandose la una causa que son los 14 *hombres* respecto de los 5 *hombres*, tambien deberá alterarse el efecto que ignoramos del pan que han de consumir, respecto á las 60 *libras* de dicha especie que se nos dan conocidas: 4.° Que debiendo alterarse los efectos en igual razon que las causas; el numero de las libras que buscamos, tendrá la mis-

misma razon al numero de las libras 60, que el numero 14 de hombres al numero de hombres 5.

Luego sobre estos conocimientos podremos ya establecer la proporcion de este modo; 5 *hombres* son á 14 *hombres*; como 60 *libras* á las que deben consumir los 14 *hombres*, cuyo numero incognito llamaremos x; esto es, en propios terminos.

$$\overset{h}{5} : \overset{h}{14} :: \overset{l}{60} : \overset{l}{x}.$$

Multiplico pues (208) el tercer termino 60 por el segundo 14, y dividiendo por el primero 5 hallo 168 numero de libras que deberán consumirse, y que coloco por valor de x en el quarto termino: asi. . . .

$$\overset{h}{5} : \overset{h}{14} :: \overset{l}{60} : \overset{l}{168}$$

Como los terminos de una razon geometrica forman un quebrado (186) le reduciremos á menores terminos siempre que fuese posible, con lo que se simplificará la operacion: en la qüestion presente tenemos

$$\overset{h}{5} : \overset{h}{14} :: \overset{l}{60} : x$$

y aunque los terminos de la primera razon no tienen comun medida, nos valdremos de alternar la proporcion asi:

$$\overset{h}{5} : 60 :: \overset{h}{14} : x$$

con lo que tendremos la primera razon $= \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$, y la qüestion reducida á sola una multiplicacion asi:

$$\overset{h}{1} : \overset{h}{12} :: \overset{l}{14} : \overset{l}{x}.$$

que expresada segun dexamos explicado (208, 3°) se reduce á $\frac{12 \times 14}{1} = x$; y $x = 168$.

Si queremos exâminar la operacion se reduce ce á que $168 \times 1 = 12 \times 14$, esto es, á multiplicar los extremos, y los medios, y ver si son iguales los productos (207).

De lo que acabamos de practicar se infiere que en estas operaciones es indiferente poner el 3.° termino en lugar del 2.° ó este en lugar de aquel, *siempre que la causa correspondiente al efecto conocido ocupe el* 1.°

De la Regla de tres simple inversa.

231 En la regla de tres inversa se echa de ver generalmente que *creciendo el* 3.° *termino respecto del* 1.° *el* 4.° *mengua respecto del* 2.° ó al contrario, *menguando el* 3.° *respecto del* 1.° *el* 4.° *crece respecto del* 2.° hagamos aplicacion de esta doctrina.

Si 40 *hombres hacen una obra en* 18 *dias ¿en quantos la harán* 15? *estos terminos escritos segun se han dado son:*

$$\overset{h}{40} : \overset{d}{18} \,.\, \overset{h}{15} \,.\, \overset{d}{x}.$$

que son dos causas y un efecto; distingamolas, pues, é inferamos que *habiendo de hacer la obra misma con menos hombres, se habrán de aumentar los dias, en la misma razon que se disminuyen los hombres*; es por tanto la qüestion inversa, pues menguando el termino 3.° respecto del 1.° se ve que el 4.° ha de crecer respecto del 2.°

Ordenemos pues los terminos, reduciendo á directa la qüestion; para lo que cuidaremos siempre *que la causa, cuyo efecto se ignora, ocupe el primer lugar de la proporcion*; quiero decir, sea el antecedente de la primera razon; y asi será:

$$\overset{h}{15} : \overset{h}{40} :: \overset{d}{18} : x$$

en cuya disposicion, buscando el 4.° termino (208) va-

valor de x sale 48, numero de los dias que deberán gastarse, cuya operacion se expresa asi $\frac{18 \times 40}{15} = x$; y $x = 48$.

Si la operacion está exacta, esto es, si........

$$\begin{array}{ccccccc} b & & b & & d & & d \\ 15 & : & 40 & :: & 18 & : & 48 \end{array}$$

no hay duda que $48 \times 15 = 18 \times 40$, y en efecto lo es.

Acabemos de manifestar esta regla con otro exemplo.

Valiendo el Trigo á 54 rs. la fanega: se dan 18 onzas por 24 mars.: si valiese á 60 rs. ¿quantas onzas se darian por el mismo precio?

Para resolver esta qüestion, debemos en quanto á lo primero separar los 24 mars., pues nada suponen respecto á que este precio no se ha de alterar; 2.° Distinguir las causas y los efectos, en lo que observaremos que si el trigo cuesta mas caro, no se podrá dar igual numero de onzas por el mismo precio, y por lo tanto, se habrá de disminuir el numero de onzas, en la misma razon que se aumenta el valor del trigo; de lo que resulta que la qüestion es inversa, cuyos terminos son $\overset{r.^s}{54} : \overset{on.^s}{18} \,\dot{:}\, \overset{r.^s}{60} : \overset{on.^s}{x}$. en que se verifica que creciendo el termino 3.° respecto del 1.° el 4.° mengua respecto del 2.°

Pero reduzcamos á directa la qüestion, colocando la causa relativa al termino incognito en el primer lugar asi:

$$\begin{array}{ccccccc} r.^s & & r.^s & & on^s & & on^s \\ 60 & : & 54 & :: & 18 & : & x. \end{array}$$

en cuya comparacion buscando el 4.° termino sale $\frac{18 \times 54}{60} = x$; y $x = 16 + \frac{1}{5}$ ó convirtiendolo á deci-

ma-

males 16,2 numero de onzas que deberán darse por los 24 mars.

Concluimos con advertir, que quando se dan los terminos de la qüestion se cuide de escribirlos de manera que el 1.° y 3.° sean de una misma especie, lo mismo que el 2.° y 4.° incognito, y asi escrita, observar por lo que dexamos dicho á qué clase pertenece.

De la regla de tres compuesta.

232 La regla de tres compuesta es aquella que á mas de las causas y efectos que constituyen las dos razones principales, concurren algunas circunstancias, ya con las causas, ó ya con los efectos que forman mayor numero de razones; por lo que es menester hacer razones compuestas de las razones simples, (191) cuya operacion reduce la qüestion á una regla de tres simple. Veamos un exemplo.

8 hombres trabajando 7 horas por dia, han echo en 9 dias un pavimento de 16 varas de largo : : 12 hombres trabajando 10 horas por dia ¿ quántas varas harán en 14 dias?

Distingamos las causas, efectos, y sus circunstancias: no tiene duda que los hombres son la causa de que la obra se haga, y que esta es el efecto; con que tenemos de una parte 8 *hombres por primera causa*, *y* 16 *varas de obra por su efecto*: asimismo tenemos de otra 12 *hombres por segunda causa*, *y* x *varas por su respectivo efecto* que se ignora: á mas de esto, para que los 8 hombres, que son la primera causa produzcan el efecto 16 varas, tienen *la circunstancia* de trabajar 9 *dias á* 7 *horas* cada uno, cuyos terminos son antecedentes de otras tantas razones, que completan como conseqüentes los terminosminos 14 *dias*, y 10 *horas*, *circunstancias* con que han de trabajar los 12 hombres: esto supuesto dispongamos la qüestion:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{es} & \text{s} & \text{s} & & \text{s} & & \text{es} & \text{s} & \text{s} & & \text{s} \\ \text{h.} & \text{ho.} & \text{d.} & & \text{va.} & & \text{h.} & \text{ho.} & \text{d.} & & \text{va.} \\ 8 & 7 & 9 & : & 16 & :: & 12 & 10 & 14 & : & x. \end{array}$$

observemos ahora, que trabajar 8 hombres 7 horas es lo mismo que si trabajasen 7 veces 8 hombres una hora; esto es 56; y que tanto vale que trabajen 56 hombres 9 dias á una hora por dia, como 9 veces 56 hombres, ó 504 hombres en una hora: por la misma razon sacaremos que 12 hombres trabajando 10 horas por dia vale tanto como 120 hombres en una hora; y lo mismo que trabajen 120 hombres 14 dias una hora, que 14 veces 120, ó 1680 hombres en una hora; luego toda la qüestion propuesta, la habremos reducido á estos terminos:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{es} & & \text{s} & & \text{es} & & \text{s} \\ \text{ho.} & & \text{va.} & & \text{ho.} & & \text{va.} \\ 504 & : & 16 & :: & 1680 & : & x \end{array}$$

, ó comparando las causas, y efectos, que es alternando:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{es} & & \text{s} & & \text{s} & & \\ \text{ho.} & & \text{ho.} & & \text{va.} & & \text{v.} \\ 504 & : & 1680 & :: & 16 & : & x, \end{array}$$

ó finalmente (186) reduciendo la primera razon

$3 : 10 :: 16 : x = 53\frac{1}{3}$, ó 53,333, pues $\frac{16 \times 10}{3} = x$, y $x = 53\frac{1}{3}$, numero de las varas que harán los 12 hombres segun las circunstancias señaladas.

Ya se vé que la multiplicacion de los terminos

$$\begin{array}{ccccccc} \text{es} & \text{s} & \text{s} & & \text{es} & \text{s} & \text{s} \\ \text{h.} & \text{ho.} & \text{d.} & & \text{h.} & \text{ho.} & \text{d.} \\ 8 & 7 & 9, & \text{y la de} & 12 & 10 & 14 \end{array}$$

es lo mismo que la que huvieramos echo para sacar la razon com-

es es s
ho. ho. ho.
compuesta de las siguientes razones 8 : 12, 7 :
s s s
ho. d. d.
10, 9 : 14, que seria multiplicando los antecedentes 8 × 7 × 9, y los conseqüentes 12 × 10 × 14; y que por semejante medio queda la qüestion reducida segun hemos insinuado á una regla de proporcion simple.

Supongamos ahora que *trabajando 15 hombres 12 dias á 4 horas por dia, han echo un pozo de 20 palmos de largo, 14 de ancho, y 16 de profundo* : : y *se pregunta quantos hombres serán menester para que en 7 dias trabajando á 5 horas por dia, hagan otro pozo de igual figura, cuya longitud sea de 22 palmos, 13 de ancho, y 18 de profundidad.*

Distingamos primeramente las causas, circunstancias, y efectos : los 15 *hombres son la primera causa*; el efecto de esta, es *el pozo*, cuyas dimensiones son 20, 14, y 16 : *la otra segunda causa son x* hombres, y su correspondiente efecto *es otro pozo*, cuyas dimensiones son 22, 13, y 18 : á mas de esto para que los 15 hombres que son la primera causa obren el efecto *hay la circunstancia de hacerse en* 12 *dias á* 4 *horas de trabajo*; y para la segunda causa, que son *x* hombres tenemos *la circunstancia de 7 dias á 5 horas de trabajo.*

Compongamos pues los terminos de la qüestion, multiplicando los 15 hombres por su circunstancia, esto es, por 12 dias, y el producto por 4; porque 15 hombres trabajando 12 dias, es lo mismo que 12 veces 15 hombres en un dia, esto es, como 180 hombres, pero como estos 180 hombres han de trabajar solo 4 horas al dia cada uno, será lo propio que si trabajáran 4 veces 180 hombres, en una hora, esto es, como 720 hombres, cuyo termino es exactamente la primera causa simplificada.

El efecto que esta causa obra, consta de tres dimensiones ó factores 20, 14, 16, dos de los quales 20 y 14, determinan los lados de la boca, que multiplicados entre sí 20×14 dan 280, por los palmos que ocupa toda su extension, y se llama area ó superficie, cuyo producto multiplicado por el otro factor 16, que es su profundidad, da 4480, numero de palmos cubicos * de tierra que deben extraer, á lo que se llama *la solidez del pozo*; asi tenemos el efecto reducido á 4480 palmos que con su causa respectiva forma la razon siguiente:

s   s
ho.   p.
720 :   4480.

La segunda causa es x hombres, que multiplica-
h d
dos por su circunstancia 7 dias dan $x \times 7$ en un dia; pero como este numero de hombres han de trabajar
es s s
h. d. ho.
á 5 horas por dia, será lo mismo que $x \times 7 \times 5$ en
h.s
una hora, esto es, como $x \times 35$.

El efecto que ha de producir esta causa consta de otras tres dimensiones que son 22, 13, y 18, que multiplicadas entre sí, segun lo que dexamos dicho, dará el producto 5148 palmos por solidez del segun-

* Por cubo se entiende una figura de seis lados perfectamente quadrados, tal es un dado, y asi una pulgada, un pie, palmo, vara, &c. que tenga igual figura á la del dado, se llama pulgada cubica, pie cubico, palmo, vara &c. cubica, segun enseñáremos en la Geometría.

gundo pozo, y asi resulta esta segunda razon $x \times 35$: 5148, que es decir juntando la primera razon, 720 hombres: han echo 4480 palmos de obra :: qunátos hombres serán menester: para hacer 5148?

Reflexîonando un poco, se vé que el termino que nos falta que conocer es x hombres, cuya circunstancia 35 tenemos ya compuesta; tambien se echa de ver que la razon de las causas pende de la de los efectos (229), luego arreglando la qüestion por los

pa.^s

terminos conocidos, diremos el efecto 4480 : á la causa 720 :: el efecto 5148 : á la causa que ignora-

p.^s h.^s p.^s h.^s

mos, esto es, 4480 : 720 :: 5148 : x ó tambien reduciendo $56 : 9 :: 5148 : x = \frac{5148 \times 9}{56}$; y $x =$ $827 \frac{5}{14}$ ó 827,357, que divididos (118) por la cir-

ho.^es

cunstancia conocida 35, dan $23 + \frac{313}{490}$, esto es, 23,638 jornales.

Practicando con atencion quanto llevamos dicho, no hay mas dificultad para resolver una qüestion inversa como acabamos de ver por complicada que sea, que una compuesta directa, y ésta que una simple.

Regla de Compañia.

233 Quando dos ó mas personas juntan ciertas cantidades para comerciar por algun tiempo determinado, al fin del qual deben prorratearse, ó las utiles ganancias, ó las perjudiciales quiebras, se llama *compañia*: dando este nombre á la regla de proporcion

cion que determina la parte que cabe á cada uno.

Quando el tiempo por el qual se fixa la compañia es igual, ó uno mismo para todos, se llama *Regla de compañia sin tiempo*, pero quando los tiempos son desiguales, esto es, que uno entra su interés al fondo por 9 meses, otro por un año &c. se llama *Regla de compañia con tiempo.*

Practiquemos primero aquella, segun requiere el buen orden, y digamos por *regla general* que en la compañia sin tiempo *la suma de las cantidades puestas* es á *la suma total de la ganancia ó perdida*, como *cada cantidad particular*, es *á la ganancia ó perdida que le corresponde*; lo que ajustadamente es lo mismo que dexamos enseñado (217).

Supongamos que *tres personas han echo compañia, cuyo fondo se ha establecido asi, el 1.° puso 120 pesos; el 2.° 360, y el 3.° 486: al fin del tiempo por el qual fixaron dicha compañia reconocieron la ganancia de 658 pesos y 12 reales* que debia distribuirse, en la razon de sus capitales.

Haciendo uso de lo prebenido, estableceremos las proporciones siguientes: 966, *suma de las cantidades puestas* es á 658 pesos + 12 reales, ó 9882 reales, *suma de la ganancia total*, como *cada cantidad particular* 120, 360, 486, es á la *parte que le corresponde*, esto es:

la suma de las puestas .	*la suma total de la ganancia* ::	*las puestas particulares.* .	*la ganancia particular.*
		120. . . .	:1227,578.10
966 . . . . . :	658+12=9882 ::	360. . . .	:3682,733.2°
		486. . . .	:4971,689.3°
		966	:9882,000

Atendamos á que siendo *iguales las razones*, de las puestas, á las ganancias, *la suma de los antecedentes*

es

es á la *de los conseqüentes* como *un antecedente á su conseqüente*, lüego 966 : 9882 :: 120 : 1227,578 &c.

Propongamos ahora otro exemplo correspondiente á la Regla de compañia con tiempo.

3 hicieron compañia, el 1.° puso 490 reales por ocho meses; el 2.° 564 por 14 meses, y el 3.° 634 por 11 meses; la ganancia fue de 4668 reales, que deben distribuirse á proporcion del interés particular de cada uno.

Para resolverla traeremos á la memoria lo que dexamos dicho en la regla de tres compuesta, quiero decir, reduciremos la qüestion como si fuera *sin tiempo*, atendiendo que lo mismo es para el 1.° tener en fondo 490 pesos por 8 meses, que 8 veces 490 por un mes, ó 3920; de la misma manera 564 del 2.° por 14 meses, valen tanto como 7896 en un mes, que es el producto de 564 × 14; y que por igual motivo, lo mismo es para el 3.° 634 por 11 meses, que 6974 en un mes, producto de 634×11.

Sobre esta verdad constante, nada tenemos que prevenir de nuevo sobre lo dicho en orden á la regla de tres sin tiempo; y asi resolveremos la qüestion presente como la pasada: por tanto la repetiremos asi:

3 hicieron compañia, el 1.° puso 3920 reales, el 2.° 7896, y el 3.° 6974, ganaron 4668 reales, y se busca ¿qué parte cabe á cada uno?

Sumo las cantidades puestas 3920, 7896, 6974, y con la suma 18790, establezco la proporcion siguiente.

La suma de las puestas.	*La suma total ó ganan.ª*	::	*Las puestas particulares*	.	*La ganancia particular.*
			3920 r.s	:	973, 85 r.s
18790 r.s	4668 r.s	::	7896	:	1961, 60
			6974	:	1732, 55
			18790		4668 00

La suma de estas ganancias particulares compone exactamente la ganancia total, lo que prueba con evidencia está bien executada la operacion.

Aun quando propongamos otro exemplo de mas complicacion, se reducirá á los mismos terminos con igual facilidad.

3 *hicieron compañia el 1.° puso 312 pesos por 12 meses, pero á los 8 sacó 16 pesos, el 2.° puso 420 pesos por 15 meses, y á los 7 añadió 34 pesos, el 3.° puso 536 pesos por 19 meses, pero le fue indispensable á los 10 meses, sacar 64 pesos, mas despues de cumplidos los 14 volvió á entrar en fondo 100 pesos mas, ganaron 224 pesos, en cuyo caso, se desea saber lo que cada qual debe llevar.*

Consideremos desde luego que el 1.° tuvo en fondo los 312 pesos 8 meses, ó 2496 pesos un mes; asi mismo, restando 16 pesos que sacó de los 312 que puso, le quedaron en fondo 296, que tuvo desde el tiempo que sacó, hasta completar los 12 meses porque puso: esto es 4 meses; con que multiplicando los 296 por 4, tendremos 1184; y juntando esta cantidad con la anterior 2496, resultará la de 3680 pesos, por integro fondo del 1.° por un mes.

El 2.° tuvo 420 pesos 7 meses, sin añadir ni quitar, ó 2940 pesos por un mes, pero como á los 7 meses añadió 34 pesos por el tiempo que restaba, sacamos que desde 7 meses hasta 15, esto es, 8 meses tuvo $420 + 34 = 754$ pesos, ó 6032 pesos por un mes, cuya cantidad sumada 2940, da 8972 por fondo completo del 2.°

El 3.° tuvo 536 pesos el tiempo de 10 meses ó 5360 por un mes, y habiendo sacado de su capital 64 pesos, le quedaron en fondo 472, por 4 meses ó 1888 por un mes; á los 14 meses volvió á aumentar el fondo 100 pesos, hasta concluir el tiempo, esto es, hasta los 19 meses, con que sacamos que tuvo

en

en fondo por estos 5 meses $1888 + 100 = 1988$ pesos ó 9940 pesos por un mes.

De todo lo practicado hasta aqui, sacamos que la qüestion se ha reducido á una regla de compañia sin tiempo, qual es:

3 hicieron compañia, el 1.º puso 3680 pesos, el 2.º 8972 pesos, el 3.º 9940 pesos, ganaron 224 pesos; pidese la parte de cada uno: Diremos pues.

La suma de. las puestas.		*la suma total de la gananc.*		*Las puestas. particulares.*		*La ganancia particular.*
				3680	:	36,488 del 1.º
22592	:	224	::	8972	:	88,957 del 2.º
				9940	:	98,555 del 3.º
				22592		224,000

Donde hallamos que la suma de las ganancias particulares, compone exâctamente, la ganancia total.

De la falsa Posicion.

234 Dicese regla de falsa posicion aquella en que para hallar el numero verdadero que satisface la qüestion, nos valemos de otro numero que suponemos con iguales circunstancias al que se pide; pero como hay casos en que es necesario valerse de dos suposiciones, se divide esta regla *en simple*, *y compuesta*, *ó doble.*

La suposicion simple, se funda en que *la suma de las cantidades del numero supuesto, es á la suma de las cantidades del numero verdadero, como el numero supuesto es á el numero verdadero*: apliquemos, pues, esta doctrina, y sea la qüestion::

Una fuente que tiene un estanque de cabida de 48.600 *pies cubicos de agua, y fluye por* 3 *caños desiguales; de los quales el* 1.º *arroja en* 1 *hora* 1830 *pies cubicos;*

el 2.º 864, y el 3.º 456, y se necesita saber en quanto tiempo llenarán el estanque los tres juntos.

Supongamos que llenarian en 4 horas, y veamos si esto es cierto: multipliquemos 1830 pies cubicos que fluye en una hora el primer caño, por las 4 horas supuestas, y tendremos 7320 pies cubicos; multipliquemos asimismo por 4, los 864 que arroja el 2.º y hallaremos 3456 pies cubicos: practiquemos finalmente lo mismo con los 456 que corren por el 3.º y sacaremos 1824 pies cubicos; sumemos ahora las tres cantidades $7320 + 3456 + 1824$, y la suma 12600, nos asegura que la suposicion que hicimos de las 4 horas es falsa; pero no obstante apliquemos la proporcion indicada asi: 12600 *suma de las cantidades del numero supuesto de horas*, es á 48600, *suma de las cantidades del numero verdadero de horas, como el numero supuesto de horas* 4, *es á el numero verdadero de horas* x; esto es:

12600 pies : 48600 pies : : 4 horas : x horas, ó lo que es lo mismo reduciendo::

$$7 \text{ pies} : 27 \text{ pies} :: 4 \text{ horas} : x \text{ horas} = \frac{4 \times 27}{7}$$

y $x = 15 + \frac{3}{7}$:

luego los tres caños llenarán el estanque en $15 + \frac{3}{7}$ horas: veamos si es verdad.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pies cub.}^{\text{s}} \text{ del 1.º ca.º} .1830 \\ \text{Idem del 2.º} \ldots\ldots\ldots 864 \\ \text{Idem del 3.º} \ldots\ldots\ldots 456 \end{array}\right\} \times 15 + \tfrac{3}{7} = \left\{\begin{array}{r} 28234{,}286..1.º \\ 13330{,}286..2.º \\ 7035{,}428..3.º \end{array}\right.$$

Suma. 48600,000

en efecto sumando los pies cubicos correspondientes á cada caño, que debe fluir en las $15 \frac{3}{7}$ horas, resulta igual á la cabida del estanque.

Si reflexionamos con una poca atencion lo que aca-

acabamos de practicar, echaremos de ver que esto no es mas que la aplicacion de lo que dexamos dicho (217) porque las cantidades falsas 7320 3456; 1824 se deben considerar como antecedentes de las verdaderas 28234, 286; 13330, 286; 7035, 428; que son sus conseqüentes, y vemos que 7320 + 3456 + 1824: .28234,286 + 13330,286 + 7035,428::7320:28234,286; ó :: 4 : $15\frac{3}{7}$ = 15,428.

235 *La falsa posicion compuesta ó doble*, se llama aquella, en que segun hemos dicho, entran dos numeros supuestos falsamente para hallar el que buscamos; para resolverla se debe proceder asi::

Supongase un numero qualquiera como si fuera el verdadero, y vease si satisface á la qüestion, ó si el resultado es mayor ó menor que el que se solicita, á cuya cantidad llamaremos error; si este es por exceso escribase á continuacion del numero supuesto que lo produce con el signo +, y si por defecto con el signo —.

Supongase otro numero distinto del 1.°, y practiquese lo mismo que con el anterior, y vease si los excesos ó errores son semejantes ó desemejantes, esto es, si están ambos con el signo + ó con el —, ó solamente uno de ellos.

Si son semejantes establezcase esta proporcion, *la diferencia de los errores* es á *la diferencia de los numeros supuestos*, como *uno de los errores* es á *un quarto proporcional.*

Si son desemejantes, se dispondrá asi: *la suma de los errores* es á *la diferencia de los numeros supuestos*, como *uno de los errores* es á *un quarto proporcional.*

Si el error que entramos en comparacion es por exceso, *le restaremos del numero supuesto correspondiente al error*, ó bien *le sumaremos si fuese por defecto*, cuyo resultado será el numero que se solicita. Veamos un exemplo.

3 piedras de molino han molido en un dia 91 fanegas de trigo: la 2.ª molió 12 fanegas mas que la 1.ª y la 3.ª tanto como la 2.ª + 15, preguntase qué numero de fanegas molieron cada una.

Supongamos que la 1.ª molió 20, luego la 2.ª moleria 20+12, esto es, 32; y la 3.ª 20+12+15=47; juntas estas tres cantidades 20+32+47 dan la suma 99, pero debian ser 91, luego hay por error + 8.

Supongamos otra vez que la 1.ª molió 18, luego la 2.ª 18 + 12 = 30; y la 3.ª 18 + 12 + 15 = 45; sumadas las tres cantidades 18+30+45 dan 93; pero debian ser 91; luego hay por error + 2; con que segun lo dicho tenemos por::::::::::

$$\left.\begin{array}{l}1.^a \text{ suposicion } 20+8\\ 2.^a \text{ suposicion } 18+2\end{array}\right\}\text{ errores semejantes.}$$

Diferencias. . . . 2 6

luego por lo que diximos poco ha estableceremos esta proporcion, *la diferencia 6 de los errores* es á *la diferencia 2 de las cantidades supuestas*, como *el error 8 al error que debe restarse de la suposicion correspondiente*; es decir.

$$6 : 2 :: 8 : \frac{8\times 2}{6} = 2+\tfrac{2}{3} \text{ error en que exce-}$$

de la suposicion 20 al numero verdadero, y que por lo tanto debe restarse de dicho 20, luego la 1.ª piedra molió $20-2+\frac{2}{3}$; esto es, $17+\frac{1}{3}$ fanegas; la 2.ª $17+\frac{1}{3}+12$, esto es, $29+\frac{1}{3}$: y la 3.ª $17+\frac{1}{3}+12+15$, esto es, $44+\frac{1}{3}$; y en efecto es asi, pues $17+\frac{1}{3}+29+\frac{1}{3}+44+\frac{1}{3}=91$, numero de fanegas que molieron las tres piedras.

Repitamos esta qüestion, valiendonos de diferentes suposiciones.

Supongamos pues que la 1.ª piedra molió 24 fanegas, luego la 2.ª moleria 24 + 12, ó 36, y la 3.ª

24

$24+12+15$ ó 51; sumadas estas tres partidas dan 111 fanegas, pero como debian ser 91 erramos por exceso en $+20$.

Supongamos otra vez que la 1.ª piedra molió 13 fanegas, luego la 2.ª moleria $13+15$ ó 25, y la 3.ª $13+12+15$, ó 40; cuyas cantidades á una suma son 78, y como debian ser 91 hay un error por defecto -13, luego tenemos por:::

1.ª Suposicion 24 $+20$ error por exceso } desemejantes
2.ª Suposicion 13 -13 error por defecto }

Dif. de las sup.s 11 33, suma de los errores.

Digamos ahora *la suma de los errores* 33 es á *la diferencia* 11 *de las cantidades supuestas*, como *uno de los errores* 13, *al que le corresponde*; esto es:

$$33 : 11 :: 13 : \frac{13\times11}{33} = 4 + \frac{11}{33} \text{ ó } \frac{1}{3},$$

añadase este quarto proporcional á la suposicion 13 correspondiente al error que hemos entrado en comparacion, y la suma $17+\frac{11}{33}=\frac{1}{3}$ será el numero verdadero como antes.

Aligacion.

236 La regla de aligacion, se reduce á hallar el precio, ó peso medio á que deberá venderse, ó pesará la mezcla de dos, tres, ó mas especies, cuyos precios, pesos, y cantidades sean conocidas; ó bien hallar la cantidad de las cosas que deben mezclarse con proporcion al precio conocido.

Supongamos primeramente que *un Platero necesita mezclar* 8 *onzas de plata de á* 20 *reales*, *con* 9 *de á* 16, *y* 6 *de á* 22 *reales*, *y quiere saber á como deberá*

dar

dar la onza de este mixto, dispongase la qüestion asi:

	onzas.	precios.	productos.	
	9 ×	16 =	144	
	6 ×	22 =	132	
	8 ×	20 =	160	
Suma de las cantidades.	23		436	Suma de los productos.

Habiendo multiplicado cada numero de onzas, por su respectivo precio, se sumarán las onzas, y tambien los productos de sus valores, y se establecerá esta proporcion; *la suma de las onzas* es á *la de sus valores respectivos* como *una onza del mixto al valor* que le pertenece: esto es::

$$23 : 436 :: 1 : \frac{436 \times 1}{23} = 18 \tfrac{22}{23}$$

Cuyo precio medio multiplicado por el numero de onzas que entran en el mixto, debe producir igual valor, que la suma de los precios particulares, y en efecto $18 + \frac{22}{23} \times 23 = 436$.

Un Campanero quiere saber quanto pesará la pulgada cubica del mixto que ha de hacer con 36 *pulgadas cubicas de cobre, de peso cada una de* $5\frac{1}{2}$ *onzas, y de* 9 *de estaño de peso de* 4 *onzas cada una; la qüestion dispuesta es:*

$$\begin{array}{rcl} 36 \times 5\frac{1}{2} & = & 198 \\ 9 \times 4 & = & 36 \\ \hline 45 & & 234 \end{array}$$

y ordenando la proporcion sale $5\frac{1}{5}$ onzas peso de la pulgada del mixto; y es asi porque $5\frac{1}{5} \times 45 = 234$ que sale de la proporcion::

$$45 : 234 :: 1 : 5 + \tfrac{1}{5}$$

en que el producto de los extremos $45 \times 5 + \frac{1}{5} = 234 \times 1$.

Su-

Supongamos ahora que *el mismo Artifice tiene una pulgada cubica de bronce, que pesa 5 onzas, y quiere saber que porcion mezclará de cobre y estaño, pesando cada pulgada cubica de cobre* $5\frac{1}{2}$, *y cada una de estaño 4, para que la pulgada del mixto pese lo mismo que la pulgada de bronce. Disponganse las cantidades asi*:

$$\text{Peso medio } 5 \left\{ \begin{array}{lll} 5\frac{1}{2} & \text{——} & 1 \text{ Diferencias} \\ 4 & \text{——} & \frac{1}{2} \text{ Diferencias} \end{array} \right.$$

y tomando alternadamente las diferencias del peso medio al peso de cada metal, ellas darán la proporcion en que deban mezclarse: en el caso actual, del peso medio 5 al peso 4 del estaño va 1, que escribo frente de $5\frac{1}{2}$ peso del cobre: veo tambien la diferencia $\frac{1}{2}$ de $5\frac{1}{2}$ á 5, y la escribo frente de 4, peso del estaño, y digo, que deberá mezclar 1 pulgada de cobre, y $\frac{1}{2}$ de estaño, es decir, que estos metales deben mezclarse en la razon de $1 : \frac{1}{2}$.

Salta á la vista, que las cantidades que resultan de estas operaciones, no responden precisamente, sino á manifestar la razon en que deben mezclarse, por lo que hallada esta razon, se aumentarán sus terminos (214) quanto se quiera, pues sacaremos que las cantidades halladas dan

$$1 : \tfrac{1}{2} :: 22 : 11, \text{ó} :: 44 : 22, \text{ó} :: 220 : 110 \ \&c.$$

Un Cosechero tiene trigo de 42 reales, de 50, y 54 reales la fanega, y quiere saber en que proporcion los mezclará para poder vender la fanega á 48 reales.

Dispondremos la qüestion asi::

$$48 \left\{ \begin{array}{lllll} 42 \times & 5 + 2 & = & 294 \\ 50 \times & 6 & = & 300 \\ 53 \times & 6 & = & 318 \end{array} \right.$$

Suma de las diferencias..... 19 — 912 Suma de los productos.

Escritas las cantidades segun se manifiesta, tomamaremos la diferencia de los precios de cada especie, á la del precio medio, *cuidando siempre de comparar una cantidad mayor, y otra menor con el precio medio*, y de hacer las aplicaciones correspondientes.

En el caso presente, tomando por terminos primeros de comparacion 42 y 53, diremos de 42 á 48, van 6, que escribiremos frente de 53; de 48 á 53 van 5, que escribiremos frente de 42; volveremos á comparar 42 y 50 al mismo 48, y la diferencia 2 del 50, la escribiremos en seguida del 5, y la otra 6 del 42 frente al 50, y diremos que mezclando 7 fanegas de trigo de 42 reales, 6 del de 50 y 53, se podrá vender al precio medio 48; para probarlo, bastará ver que $7 + 6 + 6 = 19 \times 48$ precio medio, $=$ 912, importe de 42 fanegas á 7 reales, y 50, y 53 á 6.

Un Texedor tiene que fabricar una tela de seda, que importe la de cada vara 14 reales, pero esta tela la ha de texer con seda de quatro valores distintos, tales, que si se hiciera la tela de la primera seda, valdria la vara 10 reales, si de la segunda 12, si de la tercera 17, y si de la quarta 22: el Texedor tiene de esta ultima 12 onzas, se necesita, pues, saber las onzas que deberá poner de las otras tres clases ó valores.

Demos á la qüestion la colocacion siguiente:

$$14\left\{\begin{array}{l} 22 \ldots\ldots\ldots 4 \\ 17 \ldots\ldots\ldots 2 \\ 12 \ldots\ldots\ldots 3 \\ 10 \ldots\ldots\ldots 8 \end{array}\right.$$

por cuyas diferencias tomadas alternadamente segun el orden que se manifiesta, se halla que de la seda de 22 reales debe poner 4 onzas, de la de 12, 3; de la de 10, 8; y de la de 17, 2; pero como de la de 22 tiene 12 onzas, estableceremos esta proporcion:

4:

$$4 : 12 :: \begin{cases} 2 : 6 \\ 3 : 9 \\ 8 : 24 \end{cases}$$

y diremos que para poner 12 onzas de la de 22 reales debe mezclar 9 de la de 12; 24 de la de 10; y 6 de la de 17; para probarlo atenderemos á que $4 + 2 + 3 + 8$, ó lo que es lo mismo $12 + 6 + 9 + 24 \times 14 = 714$ reales, producto de 12 onzas por 22 reales; de 6 por 17; de 9 por 12; y de 24 por 10.

Supongamos ahora, *que este Texedor ha fabricado una tela, de la que cada vara tiene de Seda* 14 *reales, y toda la de la pieza ha importado* 714 *reales habiendo puesto en ella, Seda de quatro valores diferentes, pero de tal condicion que si de cada clase de Seda, se huviese fabricado una pieza semejante á la propuesta, huviera importado la Seda de cada vara de la primera* 10 *reales; la de la segunda* 12; *la de la tercera* 17; *y la de la quarta* 22; *y se necesita saber quanto valdrá la Seda que de cada clase ha entrado en la tela: dispongamos la qüestion*: asi

$$14 \begin{cases} 22 \ldots\ldots 4 \\ 17 \ldots\ldots 2 \\ 12 \ldots\ldots 3 \\ 10 \ldots\ldots 8 \end{cases}$$

y hecha la alternacion de los valores respectivos, con el valor de la Seda de cada vara, sumaremos sus diferencias, con cuya suma arreglaremos la siguiente proporcion.

La suma de las diferencias 17, es al valor total 714 de la Seda de la pieza, como cada diferencia 4 &c. es á la que le corresponde: esto es:

$$17 : 714 :: \left\{ \begin{array}{l} 4 : \dfrac{4 \times 714}{17} = 168 \text{ de la de } 22 \\ 2 : \dfrac{2 \times 714}{17} = 84 \text{ de la de } 17 \\ 3 : \dfrac{3 \times 714}{17} = 126 \text{ de la de } 12 \\ 8 : \dfrac{8 \times 714}{17} = 336 \text{ de la de } 8 \end{array} \right.$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad 714 \qquad\qquad\qquad}$$

lo que se comprueba con que la suma de los valores correspondientes á cada clase de Seda, es igual justamente al valor total de la Seda que entró en toda la tela.

De las Progresiones Arismeticas.

237 Quando una proporcion arismetica continua se continúa á mas numero de terminos, conservando en todos una misma diferencia que es la razon, se llama *progresion arismetica*, y como cada termino de ella se compone del que le antecede mas la razon, se infiere que cada termino es mayor del que le precede quantas unidades tiene la razon; asi continuando la proporcion continua $\div$ 2. 4. 6; sacaremos la siguiente progresion, cuya razon ó diferencia es 2, escribiendo antes el signo $\div$ por lo qual será . . . . .:

$$\div\, 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ \&c.$$

La que haciendo uso de lo que dexamos explicado podremos expresar asi. . . . . .:

$$\div\, 2.2+(2\times1).2+(2\times2).2+(2\times3).2+(2\times4).2+(2\times5).$$
$$2+(2\times6).2+(2\times7)\ \&c.$$

Don-

Donde se ve claramente que *cada termino se compone del primero, mas la razon multiplicada por el numero de terminos que le preceden*, porque el ultimo termino $2+(2\times7)=16$, se forma del primer termino 2, mas la razon 2 multiplicada por 7, numero de terminos que hay antes de él.

238 Si la progresion se principia por una razon de menor desigualdad, será ascendente, pero si por una de mayor desigualdad será descendente, y en este caso se continuará desde o con signos negativos, como se ve en la progresion siguiente:

$$\div\ 8.\ 6.\ 4.\ 2.\ 0.\ -2.\ -4.\ -6.\ -8.\ -10.\ \&c.$$

que segun lo dicho podemos representar asi........

$$\div\ 8.8-2.8-(2\times2).8-(2\times3).8-(2\times4).8-(2\times5)\&c.$$

de lo que se infiere claramente que en la progresion descendente *cada termino es el primero menos la razon multiplicada por el numero de terminos que le preceden*, asi el termino $8-(2\times5)=-2$, se compone del primero 8 menos la razon 2 multiplicada por 5, numero de los terminos que hay antes.

239 De lo que acabamos de decir resulta que *si las progresiones principiasen desde o qualquier termino de la ascendente se compondrá de la razon multiplicada por el numero de terminos que huviese antes del propuesto*, y por el contrario, siendo descendente, se compondrá *del numero de terminos que le preceden, multiplicado por la razon tomando esta cantidad negativamente.*

240 Como toda progresion es, segun hemos sentado, una proporcion continuada, podremos inferir que en qualquiera progresion arismetica se hallarán las propiedades que en las proporciones (198), y asi podremos establecer que *en qualquiera progresion arismetica, la suma de cada dos terminos igualmente apartados de los extremos serán iguales, y si la progresion fuese de terminos impares, serán iguales al duplo del termino medio* (ibi). Q En

En la progresion $\div 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ 18.$ &c. que consta de nueve terminos la suma de los extremos $2 + 18 = 4 + 16; = 6 + 14; = 8 + 12$, y ultimamente $= 10 \times 2$ en donde se verifica todo lo propuesto.

241 De esto mismo debemos inferir tambien que *en qualquiera progresion arismetica, si multiplicamos la suma de los extremos, por la mitad del numero de los terminos, ó bien el numero de los terminos por la mitad de la suma, hallaremos la de todos los terminos que forman la progresion*; por exemplo en la antecedente la suma de los extremos $2 + 18 \times \frac{9}{2}$ que es la mitad del numero de los terminos, ó la mitad de la suma $\frac{2+18}{2} \times 9$ numero de los terminos da por resultado 90 suma de toda la progresion.

Si se nos ofreciera averiguar qual seria el termino 9.° de la progresion anterior $\div 2.\ 4.\ 6.$ &c. lo resolveriamos facilmente trayendo á la memoria lo que hemos dicho poco ha (237) porque el 9.° termino se deberá componer del primero 2 mas la razon, multiplicada por 8 numero de los terminos que hay antes, quiero decir de $2 + (2 \times 8) = 18$ que es cabalmente el numero noveno.

242 Del mismo principio que acabamos de citar nace el metodo para intercalar quantos medios se quiera entre dos terminos dados, de suerte que todos formen una progresion: si entre 2 y 18, se nos ofreciera interponer 7 medios, atenderemos primero á que si conociesemos la razon en que deben excederse los terminos, tendriamos echa toda la operacion; pero la razon la hallaremos por la expresion siguiente $\frac{18-2}{8} = 2$, esto es, *restando el primero del ulti-*

mo,

mo, y la resta dividirla por el numero de terminos que deben precederle.

243 Si el primer termino fuese o, no por eso seria mayor la dificultad, y asi, si se nos pidiera que entre o y 1, intercalasemos 7 medios arismeticos expresariamos la operacion asi $\frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$ cuya fraccion sería la razon, y asi escribiriamos......:

$\div 0.\ 0+\frac{1}{8}.\ 0+\frac{2}{8}.\ 0+\frac{3}{8}.\ 0+\frac{4}{8}.\ 0+\frac{5}{8}.\ 0+\frac{6}{8}.0+\frac{7}{8}.1.$

De las Progresiones Geometricas.

244 Si una proporcion geometrica continua, se sigue á mas de tres terminos, de manera, que qualquiera tres de ellos, subsistan en la misma proporcion continua, esta serie de terminos se llama *progresion geometrica*, que escribieremos siempre con el signo $\div\!\!\div$; en esta atencion diremos que $\div\!\!\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64: 128 &c. es una progresion geometrica, porque $\div\!\!\div$ 2: 4 : 8 es una proporcion continua, como 16 : 32 : 64.

245 Si la razon sobre que se establece la progresion es de menor desigualdad, dicha progresion será ascendente, pero será descendente, si fuere de mayor desigualdad: en el primer caso, van creciendo los terminos por la multiplicacion de la razon, y en el segundo, disminuyendo por division de la misma; en una palabra, la progresion descendente, no es otra cosa que la ascendente tomada al contrario.

La progresion $\div\!\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384: se funda sobre la razon de menor desigualdad 3 : 6, multiplicando seguidamente el conseqüente por 2, numero de veces que 3 cave en 6 : todo lo manifiesta la siguiente analisis, valiendonos de los signos

$\div\!\!\div$ 3 : 3x2 : 3x2x2 : 3x2x2x2 : 3x2x2x2x2 : 3x2x2x2x2x2 : 3x2x2x2x2x2x2 &c. Si

Si fixamos un poco la atencion, inferiré de aqui 1.° que como esta es una regla general para la formacion de las progresiones ascendentes, cada termino *se compone del primero, multiplicado por la razon tantas veces, quantos terminos le preceden*, asi se ve que 48 que es el termino 5.°, cuya analisis es $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, se compone de 3 multiplicado 4 veces por la razon 2.

2.° Que en toda progresion geometrica el tercer termino es el primero multiplicado por el quadrado de la razon (134), el quarto es el primero multiplicado por el cubo de dicha razon (155), y en general un termino qualquiera de una progresion, es el primero, multiplicado por la razon elevada á una potencia (129) del grado que indica el numero de terminos que le preceden.

3.° Que si queremos escribir una progresion por un metodo analogo al que usa el Algebra, bastará escribir por 2.° termino el 1.° con la razon indicada como factor, y todos los demas escribiendo el 1.° y á su lado la razon, y un poco mas arriba el numero que exprese el grado de la potencia á que debe elevarse la razon que ha de multiplicarse por el primer termino, cuyo numero asi puesto, se llama el exponente de la potencia, es decir que para expresar, por exemplo, la progresion que acabamos de indicar, lo podremos hacer asi . . . . .:

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 \text{ \&c. ó}$$

$$\div 3 : 3\times2^1 : 3\times2^2 : 3\times2^3 : 3\times2^4 : 3\times2^5 : 3\times2^6 : 3\times2^7 \text{ \&c.}$$

cuyas expresiones, equivalen á las mismas que hemos manifestado en la analisis; asi el termino $3\times2.^5$ indica que el primer termino 3 se ha de multiplicar por la razon elevada á la quinta potencia para produducir el 6.º termino; y esto mismo es lo que dexamos demostrado, pues el termino $3\times2\times2\times2\times2\times2$, en nada se diferencia de 3×2^5 y de 96.

246 De la reflexion que sobre esto hemos echo, sacamos facilmente el metodo de valuar un qualquiera termino de una progresion: si queremos saber qual es el valor del 7.º termino 3×2^6 de una progresion que principia $\div\!\!\div\, 3 : 3\times2 : 3\times2.^2$ multiplicaremos el primer termino 3 por la razon 2 levantada á la sexta potencia, esto es, $3\times64=192$, cuyo valor es el termino pedido.

Esto se funda en que el 7.º termino 3×2^6 se compone del primero multiplicado por la razon levantada á una potencia señalada por el numero de terminos que le preceden, esto es, de 3×2^6.

247 Del mismo principio se deduce lo que deberemos practicar para intercalar dos ó mas medios entre dos extremos dados, porque si por exemplo, se nos ofrecerá intercalar dos medios geometricos entre 24, y 192, atenderiamos á que 192, se compone de 24, multiplicado por la razon levantada á la tercera potencia, luego dividiendo 192 por 24, y sacando la raiz cubica del quociente, tendremos conocida la razon, con la que formaremos los dos terminos pedidos; en efecto la operacion indicada $\sqrt[3]{\frac{192}{24}}=2$, nos manifiesta que 2 es la razon, y que los dos medios pedidos son 48, y 96 que dan la progresion $\div\!\!\div\, 24 : 48 : 96 : 192$.

Ninguna otra dificultad hallariamos aun quando fuesen muchos mas los medios que se huviesen de intercalar, si solo la de sacar una raiz de una potencia muy elevada, respecto á que solo hemos enseñado extraerlas de la 2ª y 3ª, pero en breve daremos el modo de sacar con suma facilidad una raiz de una potencia qualquiera.

248

248 De lo que acabamos de decir resulta, por regla general, que para intercalar entre dos extremos dados un numero determinado de medios, *se dividirá el mayor por el menor, y del quociente se sacará una raiz del grado que indique el numero de terminos que haya de haber antes del ultimo.* Si entre o y 1 quisiesemos intercalar 6 medios geometricos, se reduciria á hacer efectiva esta expresion $\sqrt[7]{\frac{1}{0}}$ cuya raiz septima manifestaria la razon que sería una fraccion, que multiplicada seis veces succesivamente se aproxîmaria con mucho á la unidad.

Esto que en realidad, no es otra cosa que sacar una raiz pedida de la unidad, pone á la vista, que dados dos terminos por mas pequeños que sean, se les puede intercalar quantos medios geometricos se quieran.

249 Quando se nos ofreciese averiguar la suma de todos los terminos de una progresion geometrica qualquiera, deberemos *multiplicar el ultimo termino por la razon, y restando el primer termino del producto, dividir la diferencia por la razon disminuida de la unidad*, ó lo que es lo mismo, *restar el primer termino del ultimo, la diferencia dividirla por la razon disminuida de la unidad, y al quociente añadir dicho ultimo termino.*

Como se ignora el valor de la suma, podemos representarlo por esta letra S, que suponemos vale *Suma*, y suponiendo tambien que el primer termino de una progresion es 3, el ultimo 96, y la razon ó exponente 2, diremos segun las reglas acabadas de insinuar, que la suma de una tal progresion la indicaremos bien por esta formula $S = \frac{(96 \times 2) - 3}{2 - 1}$

ó lo que vale lo mismo $S = \frac{96 - 3}{2 - 1} + 96$ de lo que resulta que $S = 189$.

Supongamos se quiere averiguar la suma de la progresion ∺ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458, y tendremos que por lo dicho será la formula $S = \frac{(1458 \times 3) - 2}{3 - 1}$ y haciendo efectiva la operacion saldrá $S = 2186$.

Probaremos esto facilisimamente echando mano de los signos segun dexamos enseñado, porque si expresamos con ellos la suma de la propuesta progresion será:::::::::::

la $S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458$, y si multiplicamos por el exponente, ó razon 3 asi la cantidad S, como la de todos los terminos de la progresion, saldrá::::::::

$3S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 4374$, y si de esta restamos la primera, resultará por diferencia $2S = 4374 - 2$, y como esta cantidad $4374 - 2$ es igual á 2 S, ó *dos sumas*, y solo buscamos una, deberemos dividir $4374 - 2$ por 2, con lo que tendremos que $S = \frac{4374 - 2}{2}$ ó lo que es lo mismo.....

$\frac{(1458 \times 3) - 2}{3 - 1}$ que es la formula expresada $= 2186$.

Para que nada le quede que dudar de esta operacion á quien solicitamos instruir, expresamos en seguida toda la operacion, asi.............

$$3S = 6+18+54+162+486+1458+4374$$
$$-S = -2-6-18-54-162-486-1458$$

Resta $2\,S = 4374-2$, esto es $\frac{4374-2}{2} = S$; y $S=2186$.

250 Si la progresion cuya suma quisiesemos averiguar, fuese descendente, consideraremos que en una progresion de esta naturaleza continuada al infinito, llegará su ultimo termino á ser infinitamente pequeño, ó de ningun valor, y haciendo su primer termino, el ultimo, esto es, tomandola contrariamente, tendremos una progresion ascendente, cuyo primer termino será nulo.

Supongamos que á esta progresion $16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64}$ &c. se le van añadiendo terminos eternamente por division del exponente 4, cuyo numero deberá ser infinito, y se solicita hallar la suma de todos ellos: en este supuesto, el termino que imaginemos menor, al infinito, se desvanecerá enteramente, ó será una cantidad infinitamente pequeña, que expresaremos asi $\frac{1}{\infty}$, y tomandola contrariamente, imaginaremos que $\frac{1}{\infty}$, es el primer termino, y 16 el ultimo, luego $S = \frac{(16\times 4)-\frac{1}{\infty}}{4-1}$ ó lo que es lo mismo

$$\frac{16-\frac{1}{\infty}}{4-1}+16,$$ de lo que sacamos que la suma de dicha progresion es igual á $21+\frac{1}{3}$.

251 Si esta formula ó expresion la cotejamos ahora, con la progresion descendente propuesta, veremos clarisimamente, que el primer termino 16, se ha multiplicado por el exponente 4, de cuyo producto hemos restado el termino infinito $\frac{1}{\infty}$, que por ser nulo, dexa intacto dicho producto, y que este se

ha

ha dividido por el mismo exponente rebaxada la unidad, luego sacamos por regla general, que para hallar la suma de una progresion descendente qualquiera que sea, *se ha de multiplicar el primer termino por el exponente, y el producto dividirlo por el mismo exponente disminuido de la unidad*, ó lo que es lo mismo, *dividir el primer termino, por el exponente asi disminuido, y al quociente añadir el mismo termino primero.*

De los Logaritmos.

252 Los *logaritmos son unos numeros, que forman una progresion arismetica, y corresponde cada uno, á otro de una progresion geometrica, de igual numero de terminos.*

253 Son infinitos los logaritmos que pueden corresponder á un mismo termino de una progresion geometrica, pero para satisfacer al objeto que nos hemos propuesto, basta decir, que entre quantos sistemas de logaritmos se han establecido, el mas expedito y util, es el que aqui expresamos, y se reduce á una progresion arismetica natural, cuyo primer termino es cero, que corresponde á otra progresion geometrica de igual numero de terminos, que principia desde la unidad, y sus terminos se van aumentando en razon decupla; tales son las dos siguientes:

$$\div\!\div 1:10:100:1000:10000:100000:1000000:10000000 \text{ \&c.}$$
$$\div 0.1.2.3.4.5.6.7. \text{ \&c.}$$

254 Si atendemos con una poca reflexion, al orden y correspondencia que guardan estas dos progresiones entre sí, echaremos de ver, que cada termino de la arismetica, se puede considerar como un ex-

ponente, que indica el grado de la potencia á que se halla elevado el termino de la geometrica de quien es logaritmo: en efecto 2 es logaritmo de 100, pero 100 es el quadrado de 10, y el exponente de esta potencia es 2; asimismo 4 es logaritmo de 10000, pero este termino es cabalmente la quarta potencia de 10, cuyo exponente es tambien 4, y como 10 es la primera potencia (130) su exponente ó logaritmo es sola la unidad, correspondiendo por lo mismo á esta el cero, por logaritmo.

255 De esta disposicion resulta, que el logaritmo de cada termino, expresa quanto éste dista de la unidad, y que si se multiplican qualquiera dos terminos de la progresion geometrica, y al mismo tiempo se suman sus logaritmos, esta suma será logaritmo del producto de los dos terminos multiplicados: si multiplicamos v. g. 10×1000, y sumamos sus logaritmos $1+3$, hallaremos que la suma 4 es logaritmo del producto 10000.

256 Aun quando fuesen mas de dos los terminos que se huviesen de multiplicar, no por eso dejaria de corresponder la suma de sus logaritmos al producto de los terminos multiplicados; si por exemplo, tomamos $10 \times 100 \times 1000$, y al mismo tiempo sumamos $1+2+3$, que son sus logaritmos, la suma 6 será el logaritmo del producto 1000000 de los terminos multiplicados.

257 Con igual facilidad dividiremos tambien un termino por otro, por medio de sus logaritmos, ó exponentes, procediendo de un modo contrario, es decir, restando el logaritmo del divisor, del logaritmo del dividendo, cuya diferencia será el logaritmo del quociente: si queremos dividir 1000 por 10, restaremos 1, logaritmo del divisor 10, de 3 logaritmo del dividendo 1000, y la diferencia 2 será el logaritmo de 100, que con efecto es el verdadero quociente. Co-

258 Como ya hemos visto que las sumas y restas de los terminos de la progresion arismetica, equivalen á las multiplicaciones, y divisiones de los terminos correspondientes en la geometrica, salta á la vista, que el duplo, el triplo &c. de un numero ó termino de la progresion arismetica, será precisamente logaritmo de un termino quadrado, cubo &c. en la geometrica, y asi debe ser, respecto lo que dexamos dicho (253) en efecto 2, duplo del logaritmo de 10, que es 1, es logaritmo de 100, quadrado de 10, si lo triplicamos, el triplo 3 será logaritmo de 1000, cubo de 10 &c. lo mismo hallaremos sumando el logaritmo de 10, con el logaritmo de 100, cuya suma 3 es el logaritmo del cubo 1000; luego generalmente para elevar un termino de la progresion geometrica al grado de potencia que se quiera, basta *multiplicar su exponente ó logaritmo, por el numero que indica el grado de la potencia, cuyo producto será el logaritmo del termino elevado á la potencia pedida*: asi para elevar 100 á la tercera potencia, multiplico su exponente 2 por 3, y su producto 6 que corresponde al termino 1000000 expresa que esta es la tercera potencia de 100.

259 Por el contrario, si se nos ofreciese extraer la raiz quadrada de 100, tomaremos la mitad de su logaritmo 2, y el logaritmo 1, indicará que el termino 10 de quien es logaritmo es la raiz quadrada que se busca; en general para extraer una qualquier raiz de una cantidad, basta solo *dividir su logaritmo por el exponente de la raiz, y el quociente será el logaritmo de la raiz que se busca*; para extraer v. g. la raiz quarta de 10000, divido su logaritmo 4 por 4, exponente de la raiz, y hallo que el quociente 1 es logaritmo de 10, de lo que infiero que 10 es la raiz quarta de la cantidad propuesta.

Supongamos ahora que las dos progresiones son de-

decendentes, principiando desde 1, y o como antes, asi::::

$$\div\div 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} : \frac{1}{100000} : \frac{1}{1000000} : \frac{1}{10000000} \text{ \&c.}$$

$$\div 0.—1.—2.—3.—4.—5.—6.—7. \text{ \&c.}$$

260 En esta disposicion se echa de ver que el logaritmo de un qualquiera termino de la progresion geometrica descendente, es una cantidad negativa, y debe ser asi precisamente, porque siendo cada termino de la progresion un quebrado, que es una cantidad menor que la unidad, el logaritmo de cada termino, será forzosamente menor que 0, pues 0, es el logaritmo de la unidad; asi el logaritmo de $\frac{1}{1000}$ es—3, y como en la multiplicacion de quebrados (77) el producto debe ser menor que ambos factores, de consiguiente el logaritmo del multiplicador, disminuye el logaritmo del multiplicando á quien se junta, esto es, para hallar el producto de $\frac{1}{100}$ por $\frac{1}{10000}$, sumaremos (174) el logaritmo —2 con el logaritmo—4, y el logaritmo—6 que es menor que—4 es el que corresponde al producto $\frac{1}{1000000}$ cantidad menor que $\frac{1}{10000}$ y mucho mas que $\frac{1}{100}$.

261 De quanto aqui llevamos dicho, se infiere claramente que los logaritmos proporcionan suma facilidad en el calculo; pero como el uso de estas progresiones aun quando se continuasen infinitamente seria muy limitado, pues solo tendriamos logaritmos de las potencias de la raiz, que aqui es 10, cuyo termino se llama generalmente *base logaritmica*, y no de ninguna de las cantidades intermedias 2,3,4,5,6,7,8,9 que se cuentan entre 1 y 10, ni las que se hallan entre 10 y 100, 100 y 1000 &c. por esto pues, fue indispensable para dar á los logaritmos toda la extension y utilidad posible, intercalar entre tales terminos un numero de medios geometricos crecidisimo, de manera que entre ellos viniesen

á

á contarse los numeros naturales 2,3,4, &c. y aunque no exâctos, por lo menos aproximados de tal suerte, que su diferencia fuese enteramente despreciable, practicando lo mismo entre los terminos o y 1, 1 y 2 &c. de la *progresion arismetica*, para que á cada nuevo termino geometrico, correspondiese su debido logaritmo.

262 El mayor trabajo de los calculadores, que emprendieron esta penosisima obra, consistió en hallar los medios geometricos entre 1 y 10, y sus logaritmos, como asimismo los de los numeros primeros (12); pues con el auxilio de estos, fueron extendiendo las tablas con arreglo á lo que diximos poco ha, porque conocidos dichos logaritmos, hallaron el de 12, sumando los de sus factores 2 y 6 (255), y todos los demas que corresponden á los numeros compuestos.

263 Como los medios geometricos de productos no quadrados, no podian de manera alguna ser una raiz quadrada exâcta, ni tampoco sacarse un medio arismetico justo en numeros enteros de una suma impar, fue indispensable echar mano del admirable artificio de las *decimales*, con cuyo auxîlio se sacaron medios sumamente aproxîmados, de manera que no siendo puramente los verdaderos, se pudiesen tomar como tales sin error sensible, y aun sirvieron dichas decimales para aumentar todos los terminos de la progresion geometrica y sus logaritmos (107) circunstancia, que facilitó mas y mas la aproxîmacion, de manera que en vez de buscar los medios geometricos entre 1 y 10 &c. y los arismeticos entre o y 1 &c. se propusieron buscarlos entre 1,0000000000, y 10,0000000000 &c. en la progresion geometrica, y entre 0,0000000000 y 1,0000000000, en la arismetica, baxo de cuyo sistema, establecieron las tablas logaritmicas, reduciendo despues de esta operacion

los

los quebrados decimales á solas siete cifras.

264 Falta por ultimo declarar 1.° que hallandose entre 0,0000000 y 1,0000000, todos los logaritmos de los terminos intercalados entre 1 y 10, ó entre 1,0000000, y 10,0000000, el logaritmo de qualquiera de estos terminos, será una cantidad fraccionaria decimal, cuya primer cifra será 0, y un quebrado decimal, separado de dicha cifra con una coma (103); asi el logaritmo de qualquiera termino que se halle entre 1 y 10, v. g. 9, es 0,954242, por la misma razon, el logaritmo de un termino que se halle entre 10, y 100, ó entre 10,0000000, y 100,0000000, estará precisamente entre 1 y 2, ó entre 1,0000000, y 2,0000000, y por lo tanto será 1, y un quebrado decimal, de manera que el logaritmo de 99. que es el mayor termino que se halla antes de 100, es 1, 995635: 2° que el numero que está á la izquierda del logaritmo separado con la coma, se llama la *caracteristica*, y el quebrado decimal de la derecha su *mantisa*: en el logaritmo 0,954242, 0, es la caracteristica y 954242, la mantisa: 3.° que la caracteristica generalmente tiene siempre tantas unidades menos una, quantos guarismos el numero á que pertenece, y asi, visto un numero se sabe la caracteristica de su logaritmo, y vista la caracteristica, se sabe igualmente de quantas cifras se compone el numero correspondiente.

265 Hallados finalmente todos los medios proporcionales, segun hemos declarado, formaron las tablas, colocandolos en dos columnas; en la primera de la izquierda, los terminos de la progresion geometrica, y en la segunda de la derecha, los terminos de la arismetica, que son sus logaritmos, para cuya inteligencia, y practica trasladamos aqui las dos tablas siguientes.

Nu.s

Nu.^{s}	Logaritmos.	Nu.^{s}	Logaritmos.	Nu.^{s}	Logaritmos.	Nu.^{s}	Logaritmos.
1	0,0000000	41	1,6127839	81	1,9084850	121	2,0827854
2	0,3010300	42	1,6232493	82	1,9138138	122	2,0863598
3	0,4771212	43	1,6334685	83	1,9190781	123	2,0899051
4	0,6020600	44	1,6434527	84	1,9242793	124	2,0934217
5	0,6989700	45	1,6532125	85	1,9294189	125	2,0969100
6	0,7781512	46	1,6627578	86	1,9344984	126	2,1003705
7	0,8450980	47	1,6720979	87	1,9395192	127	2,1038037
8	0,9030900	48	1,6812412	88	1,9444827	128	2,1072100
9	0,9542425	49	1,6901961	89	1,9493900	129	2,1105897
10	0,0000000	50	1,6989700	90	1,9542425	130	2,1139433
11	1,0413927	51	1,7075702	91	1,9590414	131	2,1172713
12	1,0791812	52	1,7160033	92	1,9637878	132	2,1205739
13	1,1139433	53	1,7242759	93	1,9684829	133	2,1238516
14	1,1461280	54	1,7323938	94	1,9731278	134	2,1271048
15	1,1760913	55	1,7403627	95	1,9777236	135	2,1303338
16	1,2041200	56	1,7481880	96	1,9822712	136	2,1335389
17	1,2304489	57	1,7558748	97	1,9867717	137	2,1367206
18	1,2552725	58	1,7634280	98	1,9912261	138	2,1398791
19	1,2787536	59	1,7708520	99	1,9956352	139	2,1430148
20	1,3010300	60	1,7781512	100	2,0000000	140	2,1461280
21	1,3222193	61	1,7853298	101	2,0043214	141	2,1492191
22	1,3424227	62	1,7923917	102	2,0086002	142	2,1522883
23	1,3617278	63	1,7993405	103	2,0128372	143	2,1553360
24	1,3802112	64	1,8061800	104	2,0170333	144	2,1583625
25	1,3979400	65	1,8129133	105	2,0211893	145	2,1613680
26	1,4149733	66	1,8195439	106	2,0253059	146	2,1643528
27	1,4313638	67	1,8260748	107	2,0293838	147	2,1673173
28	1,4471580	68	1,8325089	108	2,0334238	148	2,1702617
29	1,4623980	69	1,8388491	109	2,0374265	149	2,1731863
30	1,4771212	70	1,8450980	110	2 0413927	150	2,1760913
31	1 4913617	71	1,8512583	111	2,0453230	151	2,1789769
32	1,5051500	72	1.8573325	112	2,0492180	152	2,1818436
33	1,5185139	73	1,8633229	113	2,0530784	153	2,1846914
34	1,5314789	74	1,8692317	114	2,0569048	154	2,1875207
35	1,5440680	75	1,8750613	115	2,0606978	155	2,1903317
36	1,5563025	76	1,8808136	116	2,0644580	156	2,1931246
37	1,5682017	77	1,8864907	117	2,0681859	157	2,1958996
38	1,5797836	78	1,8920946	118	2,0718820	158	2,1986571
39	1,5910646	79	1,8976271	119	2,0755470	159	2,2013971
40	1,6020600	80	1,9030900	120	2,0755470	160	2,2041200

Nu.s	Logaritmos.	Nu.s	Logaritmos.	Nu.s	Logaritmos.	Nu.	Logaritmos.
161	2,2068259	201	2,3031961	241	2,3820170	281	2,4487063
162	2,2095150	202	2,3053514	242	2,3838154	282	2,4502491
163	2,2121876	203	2,3074960	243	2,3856063	283	2,4517864
164	2,2148438	204	2,3096302	244	2,3873898	284	2,4533183
165	2,2174839	205	2,3117539	245	2,3891661	285	2,4548449
166	2,2201081	206	2,3138672	246	2,3909351	286	2,4563660
167	2,2227165	207	2,3159703	247	2,3926969	287	2,4578819
168	2,2253093	208	2,3180633	248	2,3944517	288	2,4593925
169	2,2278867	209	2,3201463	249	2,3961993	289	2,4608978
170	2,2304489	210	2,3222193	250	2,3979400	290	2,4623980
171	2,2329961	211	2,3242824	251	2,3996737	291	2,4636930
172	2,2355284	212	2,3263359	252	2,4014005	292	2,4653828
173	2,2380461	213	2,3283796	253	2,4031205	293	2,4668676
174	2,2405492	214	2,3304138	254	2,4048337	294	2,4683473
175	2,2430380	215	2,3324385	255	2,4065402	295	2,4698220
176	2,2455127	216	2,3344537	256	2,4082400	296	2,4712917
177	2,2479733	217	2,3364597	257	2,4099331	297	2,4727564
178	2,2504200	218	2,3384565	258	2,4116197	298	2,4742163
179	2,2528530	219	2,3404441	259	2,4132998	299	2,4756712
180	2,2552725	220	2,3424227	260	2,4149733	300	2,4771212
181	2,2576786	221	2,3443923	261	2,4166405	301	2,4771212
182	2,2600714	222	2,3463530	262	2,4183013	302	2,4785665
183	2,2624511	223	2,3483049	263	2,4199557	303	2,4814426
184	2,2648178	224	2,3502480	264	2,4216039	304	2,4828736
185	2,2671717	225	2,3521825	265	2,4232459	305	2,4842998
186	2,2695129	226	2,3541084	266	2,4238816	306	2,4857214
187	2,2717416	227	2,3560259	267	2,4265113	307	2,4871384
188	2,2741578	228	2,3579348	298	2,4281348	308	2,4885507
189	2,2764618	229	2,3598355	269	2,4297523	309	2,4899585
190	2,2787536	230	2,3617278	270	2,4213638	310	2,4913617
191	2,2810334	231	2,3636120	271	2,4329693	311	2,4927604
192	2,2833012	232	2,3654880	272	2,4345689	312	2,4941546
193	2,2855573	233	2,3673559	273	2,4361626	313	2,4955443
194	2,2878017	234	2,3692159	274	2,4377506	314	2,4969296
195	2,2900346	235	2,3710679	275	2,4393327	315	2,4983105
196	2,2922561	236	2,3729120	276	2,4409091	316	2,4996871
197	2,2944662	237	2,3747483	277	2,4424798	317	2,5010593
198	2,2966652	238	2,3765770	278	2,4440448	318	2,5024271
199	2,2988531	239	2,3783979	279	2,4456042	319	2,5037907
200	2,3010300	240	2,3802112	280	2,4471580	320	2,5051500

Uso de los Logaritmos.

266 Aunque las tablas logaritmicas están formadas sobre un sistema tan particular, y ventajoso, para la mayor expedicion del calculo, se ofrecen con freqüencia muchos casos particulares, cuya dificultad embarazaria la operacion, no pudiendo evacuarla á pesar de quantos conocimientos dexamos insinuados.

Supongamos 1.° *que necesitamos saber el logaritmo de un numero mayor que el mayor á que se extienden las tablas, por exemplo el de* 3746823.

Regla general 1.° *separense de éste ú otro qualquier numero que fuese, tantos guarismos de la izquierda, quanto sea necesario para que tal cantidad separada se halle comprehendida en las tablas.*

2°. *Tomese su logaritmo, y restese de su inmediato mayor, multipliquese la diferencia por las cifras separadas á la derecha de la propuesta cantidad, considerandolas como decimales, y del producto separense á la derecha las cifras correspondientes segun dexamos enseñado* (114) *y la cantidad de la derecha, sumese con el logaritmo ya encontrado.*

3.° *Añadase á la caracteristica de este logaritmo, tantas unidades quantas basten à hacerla de una unidad menos, que el numero de guarismos que forman el numero propuesto, y se tendrá el logaritmo pedido.*

Apliquemos, pues esta doctrina al caso ya propuesto: Separo 1° del numero 3746823 la cantidad 3746, y busco su logaritmo en las tablas, y hallo 3,5735678.

2.º El logaritmo de 3746	.3,5735678
Lo resto del de 3747	.3,5736837
La Diferencia	..0001159
La multiplico por las cifras separadas. . . .	.0,823
Cuyo producto es.	.953,857
Y sumado con el logaritmo.	.3,5735678
Resulta el logaritmo.	.3,5736631

Y dandole la caracteristica 6, esto es, añadiendo tres unidades á la caracteristica 3 del logaritmo 1º sale 6,5736631 ó mas bien 6, 5736632 segun lo enseñado en las decimales (117.)

Para entender con fundamento la razon de añadir las unidades á la caracteristica del logaritmo primero, basta considerar que habiendo separado con la coma en el numero propuesto 3746823 la cantidad 823, es lo mismo que (46) si le huviesemos dividido por 1000, de lo que se infiere claramente que el logaritmo 3,5735678, lo es de un numero mil veces menor que 3746823; de consiguiente la cantidad hallada por producto 953,857 ó 954, despreciando las decimales, es la mantisa correspondiente á, 823; luego sumando dicha cantidad con 3,5736837 logaritmo de 3746, resultará precisamente 3,5736632 que es logaritmo de 3746,823, pero este numero es mil veces menor que 3746823 segun acabamos de manifestar, luego deberemos hacer mil veces mayor el logaritmo 3,5736632, lo que se logra con añadir el logaritmo de 1000, que es 3, á la caracteristica del logaritmo hallado, de lo que resulta el logaritmo verdadero 6,5736632, cuya caracteristica tiene tantas unidades (264,3.º) menos una, como guarismos el numero propuesto.

267 Pero la operacion seria mucho mas sencilla, si los guarismos separados á la derecha del numero pro-

pues-

puesto fuesen ceros, pues en tal caso, con añadir á la caracteristica del logaritmo correspondiente al numero separado á la izquierda, tantas unidades quantos ceros se separaron, se tendrá concluida ó absuelta la qüestion: todo nace de lo dicho.

268 2.° Si ocurriese *hallar el numero correspondiente á un logaritmo dado que excediese los limites de las Tablas* se observará la siguiente.

Regla general: La caracteristica del logaritmo dado se disminuirá de sus unidades, hasta que sea menor que el mayor logaritmo de las tablas, despues se buscará su numero respectivo en ellas, y añadiendole tantos ceros como unidadas se huviese disminuido la caracterista, se tendrá el numero que se solicita.

Supongamos se necesita saber el numero á que pertenece el logaritmo. 5,9999566

Del logaritmo. 5,9999566

Resto. . . . . 2.

Y el logaritmo residuo. 3,9999566

Corresponde en las tablas cabalmente á 9999; pero como habiendo disminuido la caracteristica del logaritmo propuesto, dos unidades, es lo mismo que si huviesemos dividido su numero respectivo por 100 segun lo dicho (257); el numero buscado 9999 será sin duda 100 veces menor de lo que debe, luego añadiendole dos ceros, será 999900 el numero que se solicita pues se ha echo ya 100 veces mayor de lo que era.

269 Propongamonos ahora *hallar el logaritmo de un entero y quebrado, esto es, de un numero intermedio entre los enteros que se hallan en las tablas*: por exemplo el logaritmo de $3 + \frac{8}{15}$ ó de 3,533, que es menor de 4, y mayor de 3.

Busquese el logaritmo de 3533 como si fuesen en-

enteros, y quitando de su caracteristica tantas unidades como decimales tiene la cantidad, el residuo será el logaritmo buscado. Asi el logaritmo de 3533 es 3,7429607
Restando. 3

Sale por residuo. 0,7429607

logaritmo de 3,533; y es claro, porque si 3,7429607 es logaritmo de 3533, que es 1000 veces mayor que 3,533, de consiguiente el logaritmo de esta cantidad, deberá ser 100 veces menor que el de 3533, y tal es el logaritmo 0,7429607.

270 Por el contrario, si se nos ofreciese *buscar el numero á que pertenece un logaritmo intermedio á los de las tablas* como 1,2844307 se añadirán á la caracteristica de dicho logaritmo las unidades que se quisiere, y hallado el numero á que correspondiese en las tablas, se separarán de su derecha tantos guarismos quantas unidades se huviesen añadido á la caracteristica, con lo que se tendrá el numero entero, y decimales que se solicita:
asi al logaritmo dado 1,2844307
añadiendole dos unidades. 2,

resulta el logaritmo. . . . . 3,2844307, que corresponde al numero 1925, y separando de él dos guarismos por las 2 unidades añadidas sale el numero 19,25 que es efectivamente el que se busca; todo nace de lo dicho.

271 Si se nos ofreciese *hallar el logaritmo de un numero inferior al menor de las tablas* como $\frac{5}{6}$ se tendrá presente lo que dexamos insinuado (257) en orden á la division de un termino por otro, pero como en esta, y las demas cantidades semejantes, el dividendo es menor que el divisor, se procederá de este modo; del logaritmo del denominador se resta-

tará el logaritmo del numerador, y dandole á su diferencia ó residuo el signo — se tendrá el logaritmo que se busca:

asi el logaritmo de 6 es 0,7781512
Restando de este el de 5 que es. . . 0,6989700

Sale la diferencia. 0,0791812

de lo que resulta, que el logaritmo de $\frac{5}{6}$ es. . . —0,0791812, esto es, un logaritmo negativo.

Lo mismo se practica convirtiendo el quebrado en decimales, porque $\frac{5}{6}=0,8333$, y como esta cantidad es lo mismo que $\frac{8333}{10000}$ resulta la misma operacion.

272 Si por el contrario *tuviesemos que buscar el numero á quien corresponde un logaritmo menor que los de las tablas*, haremos lo que hemos enseñado para hallar el numero de un logaritmo intermedio (270); supongamos se desea saber á qué numero corresponde el logaritmo 0,2552725, que en efecto es menor que qualquiera de los de las tablas, y está entre los logaritmos de 1 y 2.

Busquese este logaritmo, añadiendole 2 unidades á su caracteristica, que será 2,2552725, el qual corresponde precisamente al numero 180, luego (270) el logaritmo 0,2552725 pertenece al numero 1,80 con muy corta diferencia.

Estas son las dificultades que suelen ocurrir en la practica de los logaritmos, pues el buscar los logaritmos de los numeros que se hallan en las tablas, ni al contrario, claro es que no ofrece la menor dificultad.

Del complemento Arismetico.

273 El complemento arismetico, que tambien se llama logaritmico, es unicamente la diferencia entre

un logaritmo qualquiera, y 10,0000000; para hallarlo no se necesita otra cosa que restar todas las cifras del logaritmo separadamente, principiando desde la izquierda, de 9 solamente, y el ultimo guarísmo de 10, y la diferencia es el complemento; asi al logaritmo 6,5711364 se le halla su complemento, diciendo de 6 á 9 van 3; de 5 á 9 van 4; de 7 á 9 van 2 &c. y llegando al 4, de 4 á 10 van 6, de lo que sale 3,4288636 complemento del logaritmo propuesto.

Este complemento arismetico es un maravilloso artificio, por medio del qual calculando por logaritmos, no se practica otra regla que la del sumar, pero como su uso es para otro plan distinto del que aqui nos proponemos, tengo por suficiente este ligero conocimiento, no obstante de que puede aplicarse tambien á algunas operaciones logaritmicas, como las que vamos á tratar ultimamente.

Aplicacion de los Logaritmos á algunas operaciones arismeticas.

274 La doctrina y fundamento de quanto vamos á tratar aqui, queda sentado en los parrafos 253 y siguientes; asi nada haremos ahora mas que contraerlo á casos determinados.

Supongamos se necesita multiplicar 416 por 24, la operacion se reduce á sumar los logaritmos de los factores, y la suma será el logaritmo del producto (255)

asi el logaritmo de 416 2,619093
sumado con el de. . 24 1,380211

da por suma el logaritmo. . . . . . . 3,999304, que es el logaritmo del producto 9984 que huviera resultado por la multiplicacion. Si

275 Si por el contrario se nos ofreciese partir una cantidad por otra, (257) restaremos el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, y el logaritmo residuo, dará el numero quociente: Si por exemplo, tuvieramos que dividir 10816 por 338, la operacion se efectuaria asi......

Del logaritmo de 10816. 4,0340666
resto el de. 338. 2,5289167

y sale el logaritmo del quociente. . . 1,5051499

que corresponde al numero 32, con diferencia de menos de una decimal de septima orden, y en efecto 32 es el verdadero quociente.

276 Si ocurriese hallar un medio geometrico proporcional entre qualesquiera dos numeros, estará echo con tomar la mitad de la suma de los dos logaritmos de ambas cantidades, cuya mitad será el logaritmo del medio proporcional.

Sean por exemplo 27 y 2187 los numeros entre quienes se haya de poner un medio proporcional geometrico sumaremos pues......

El logaritmo de 2187. 3,3398488
Con el logaritmo de . . 27 1,4313638

Y de la suma. 4,7712126
Tomando la mitad. 2,3856063

es el logaritmo buscado que corresponde cabalmente al numero 243; y en efecto ∺ 27:243:2187 forman una proporcion geometrica continua, porque $27 \times 2187 = 243^2$.

277 Propongamonos ahora intercalar dos medios geometricos entre 24 y 192: la operacion se reduce á esta sencilla practica......

Del logaritmo de . . . . 192. . . . 2,2833012
Resto el logaritmo. . . de 24. . . . 1,3802112

Y de la diferencia. 0,9030900
Saco la tercera parte 0,3010300

cuyo logaritmo corresponde al numero 2 que es la razon, (247) y los terminos ÷ 24:48:96:192, si esta proporcion, que es la misma que enseñamos en el numero aqui citado, se coteja con el metodo alli establecido, se verá claramente de quanto auxîlio son los logaritmos.

278 Si tuviesemos que dar un tercero proporcional á dos numeros qualesquiera, el logaritmo del primero lo restaremos del duplo del segundo, y la diferencia será el logaritmo del tercero proporcional; si los numeros dados son 96, 224 tendremos que el

logaritmo de 224 es.	2,3502480
del duplo.	4,7004960
restando el logaritmo de 96	1,9822712
resulta la diferencia.	2,7182248

cuyo logaritmo corresponde á 522,333, que es tercero proporcional á los dos numeros dados asi ÷96 : 224 : 522,333.

279 Si el que se huviese de hallar fuese un quarto proporcional, se sumarán los logaritmos del segundo y tercero, y de esta suma se restará el primero, cuya diferencia será el logaritmo del quarto termino proporcional; si los terminos fuesen 12:36: 134 procederíamos de este modo:

El logaritmo de . . .	134. . . .	2,1271048
Sumado con el de . . .	36. . . .	1,5563025
Suma de ambos.		3,6834073
y restando el logaritmo de 12 . . .		1,0791812
sale por diferencia		2,6042261

logaritmo de 402 que es el quarto proporcional buscado, y asi los quatro terminos proporcionales son 12 : 36 :: 134 : 402.

280 Para la formacion de las potencias, y extraccion de sus raices, son de un uso admirable las tablas lo-

ga-

garitmicas segun dexamos manifestado en el parrafo 258, porque si queremos elevar un numero qualquiera á una potencia señalada, practicaremos de todo punto lo que alli, para elevar 100 á la 3.ª potencia.

Supongamos se nos ofrece elevar esta cantidad 4 á la sexta potencia; buscaremos desde luego el logaritmo de 4 que es 0, 6020600 lo multiplicaremos por 6 que es el exponente de la potencia señalada, y hallaremos 3,6123600, cuyo logaritmo pertenece al numero 4096 que con efecto es la sexta potencia de 4.

281 Por el contrario diximos (259) lo que se debia practicar para extraer la raiz quarta de 10000 ó qualquiera de las potencias de 10, y lo mismo se deberá practicar para hallar la de otra cantidad sea la que fuere.

Por exemplo si se nos pidiese la raiz sexta de 4096 dividiriamos el logaritmo 3,6123600 por el exponente 6 de la raiz, y el quociente hallado 0,6020600 daria el numero 4 que es la raiz pedida.

282 Por lo mismo, la raiz decima de 1024 es 2, pues el logaritmo de 1024 que es 3,0102999 dividido por 10 da el logaritmo 0,3010299 que es el 2 con diferencia de menos de una decimal de septima orden.

283 Si se huviese de sacar la raiz quarta de 6587 con diferencia de menos de una milesima tomaremos el logaritmo de 6587 3,8186877, le dividiremos por 4 cuyo quociente es, 0,9546719, y como este logaritmo es uno de los intermedios (270) le buscaremos en las tablas con una caracteristica de 4 unidades asi 4,9546719, y hallamos corresponde al numero 90090 del que separando por decimales quatro guarismos de la derecha sale 9,0090 ó 9,009 por raiz aproxîmada de la cantidad propuesta.

F I N.

INDICE
de lo contenido en este Tomo.

Nociones preliminares. . . . . pag. 1
Cifras de que usa la Arismetica. 2
Numeracion. .idem
De las quatro reglas fundamentales. Sumar. 4
Restar 6
Prueba del sumar, y restar. 7
Multiplicar. 8
Multiplicar un numero de muchos guarismos, por otro de solo uno. 9
Multiplicar un numero de muchos guarismos por otro que tambien lo sea. 11
Aplicacion del multiplicar. 14
Partir ó dividir. 15
Partir un numero de muchos guarismos por otro que tambien lo sea. . . . . .idem
Prueba del multiplicar, y partir. 21
Aplicacion del partir. . . . . .idem
De los quebrados. 22
Reducir quebrados. 25
Reducir los quebrados á enteros. 26
Reducir los quebrados á un denominador determinado sin que mude de valor. . . . . .idem
Reducir los quebrados á su mas simple expresion. .27
Hallar la maxima comun medida entre dos qualesquiera cantidades. 28
Reducir los quebrados á un comun denominador. . . .29
Reducir los quebrados compuestos á simples. . . .idem
Sumar quebrados. 30
Restar quebrados. . . . . .idem
Multiplicar quebrados. 31
Partir quebrados. 32

De

De los numeros denominados 33
Sumar 37
Restar 38
Multiplicar 39
Partir 43
De la arismetica decimal 45
Sumar 49
Restar 50
Multiplicar 51
Partir 52
Aplicacion de las decimales 56
De las potencias de los numeros 58
Del numero quadrado 59
De la formacion del quadrado, y extraccion de su raiz 60
Extraer la raiz quadrada de un quebrado 68
Del numero cubo 70
De la formacion del cubo, y extraccion de su raiz . 71
Extraer la raiz cubica de un quebrado 77
Aplicacion de los signos algebraicos á las operaciones numericas 80
Sumar 81
Restar 82
Multiplicar 83
Partir 84
De las Razones 85
De las Proporciones 88
De la proporcion arismetica 89
De la proporcion geometrica 90
De la regla de tres 98
De la regla de tres simple directa 99
De la regla de tres simple inversa 101
De la regla de tres compuesta 103
Regla de compañia 107
De la Regla de falsa posicion 111
Aligacion 115

De

De las progresiones arismeticas. 120
De las progresiones geometricas. 123
De los logaritmos. 129
Uso de los logaritmo. .135
Del complemento arismetico. 139
Aplicacion de los logaritmos á algunas operaciones arismeticas. 140

ER.

ERRATAS.

		dice	*lease*
Pag. . 9. . lin. . 19....		*guarismo*.....	guarismos...
pag. . 14. . lin. . 20....		*una*..............	uno............
pag. . 17. . lin. . 16....		*ó una*..........	ó uno..........
En la misma , y sig...		*la primera*..	el primero..
en dicha lin. . 17....		*la primera*..	el primero.
pag. . 18. lin. . . 3....		932.4..........	93.2.4.........
pag. . 21. lin. . 12		13.................	12..............
pag. . 24. lin. . . 5....		(25).............	(35)............
pag. . 42. lin. . . 8....		6995...........	65995.........
Idem. . . . lin. . 11....		19...............	129.............
pag. . 44. lin. . 16....		pies.............	pesos...........
pag. . 45. lin. . 24....		diez.............	cien ....
pag. . 97. lin. . 13....		(218)..........	(219)..........
pag. . 100. lin. . 10....		(208)..........	(209)..........

cuya correccion se hará en donde se halle dicha cita.

pag. . 101. lin .. 3....		(207)..........	(208)..........
pag. . . 115. lin. . 5....		13+15.......	13+12.......
pag. . 117. . lin. 22...		(214)...........	(215)..........

BADO
COMP
MAT.