GOMEZ SALAZAR

ALGEBRA

ALGEBRA SUPERIOR.

Fernando G. de Salazar

ALGEBRA SUPERIOR

POR

DON FERNANDO GOMEZ DE SALAZAR

Teniente Coronel, retirado.

MADRID:
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE R. VICENTE, CLAVEL, 4.
1868.

EXCMO. SR. D. ADELARDO LOPEZ DE AYALA

MINISTRO DE ULTRAMAR.

Dar á V. E. una muestra de la profunda simpatía y respeto que me inspira quien con tanta actividad é inteligencia ha contribuido á la gloriosa revolucion que Europa asombrada observa, es lo que me ha impulsado á dedicar á V. E. este trabajo que desearia fuese digno de llevar su ilustre nombre. Reciba, pues, V. E. este pequeño óbolo que, unido á otros de más valor y que no pueden menos de ser numerosos aunque no sea sino por gratitud hácia los que han salvado nuestra moribunda patria, será un apoyo que aliente á V. E. en el espinoso camino del poder.

Excmo. Sr.

Con la mayor consideracion B. L. M. de V. E.

FERNANDO GOMEZ DE SALAZAR.

PRÓLOGO

Ningun hombre es infalible en el planeta que habitamos: todo en él es pequeñez; todo miseria. El mas sábio comete errores de consideracion, aun en aquello mismo que cree saber mejor, y de cuyo concepto participan sus semejantes. Y no se diga que si acaso se verifica eso alguna vez no puede el error eludir por mucho tiempo el ser descubierto por el mismo que lo cometió, ó por otros hombres que posean la ciencia en la cual se haya aquel introducido. No; el error se presenta con frecuencia demasiado bien disfrazado para que sea fácil conocerlo, y de esta manera recibe por muchos años, y hasta durante muchos siglos, el culto que usurpa á la verdad. Ninguna prueba mas patente de ello que la presente obra. Ella demuestra del modo mas indudable que todos los matemáticos, por eminentes que hayan sido en la ciencia, han venido alimentando y *demostrando*, como verdad inconcusa, un principio enteramente falso, en extremo trascenden-

PRÓLOGO.

Ningun hombre es infalible en el planeta que habitamos: todo en él es pequeñez; todo miseria. El más sábio comete errores de consideracion, aun en aquello mismo que cree saber mejor, y de cuyo concepto participan sus semejantes. Y no se diga que si acaso se verifica eso alguna vez no puede el error eludir por mucho tiempo el ser descubierto por el mismo que lo cometió, ó por otros hombres que posean la ciencia en la cual se haya aquel introducido. No; el error se presenta con frecuencia demasiado bien disfrazado para que sea fácil conocerlo, y de esta manera recibe por muchos años, y hasta durante muchos siglos, el culto que usurpa á la verdad. Ninguna prueba más patente de ello que la presente obra. Ella demuestra del modo más indudable que todos los matemáticos, por eminentes que hayan sido en la ciencia, han venido alimentando y *demostrando*, como verdad inconcusa, un principio enteramente falso, en extremo trascendental y dañoso, no solamente á la ciencia, sino tambien y en muy alto grado á los que se dedican al estudio de las matemáticas. Y si esto ocurre en las llamadas ciencias exactas, en la ciencia que no dá patente de verdadera á ninguna proposicion, sin que se someta al más riguroso exámen y á la más minuciosa demostracion; si en esta, en fin, falta la fé, ¿en qué otro ramo del saber humano podremos tenerla? Cierto es que las ciencias adelantan, y que principalmente en el siglo presente han recibido gran impulso; pero esto mismo demuestra su atraso, pues no hemos de presumir haber llegado al colmo de la sabiduría, y que nuestros descendientes no tengan en que ocuparse sino en aprender lo que sus abuelos les dejaron escrito. No; los hombres de entónces hallarán nuestras obras llenas de defectos que corregirán, como hoy dia corregimos los que nuestros progenitores nos legaron. Entónces dirán como decimos hoy: «Nadie existe infalible en la tierra;» y estas mismas palabras irán repitiendo á su vez las edades futuras. Y no se crea que porque un gran número de sábios repitan á coro una misma cosa debe esta ser admitida sin exámen como cierta. No; la autoridad de todos los sábios del mundo no es bastante para imponer el convencimiento de que tal ó cual proposicion es ó no falsa, es ó no imposible. No; el convencimiento no se impone ni se adquiere por fuerza de autoridad de ninguna especie: es indispensable que las razones que se den sean tan poderosas que no haya medio de dudar: es preciso que ninguna de ellas se resista al buen criterio. Se dice, por ejemplo, y se *demuestra* que el movimiento contínuo es imposible; y la principal razon que se dá para demostrar esta imposibilidad, es la de que ningun cuerpo puede comunicar á otro más fuerza de la que posee, ni aun tanta, supuesto que tiene que perder alguna en rozamientos. Será cierta esa imposibilidad; habrá alguna otra causa que impida ese movimiento; pero lo confesamos ingénuamente, no nos convence la razon que sirve de base á tal demostracion. No hay mozo de cuerda que ignore que con una palanca puede comunicar á otro cuerpo, no solo su fuerza sin la menor pérdida, sino multiplicarla de un modo prodigioso. Y para saber esto no han necesitado que Arquímedes dijera que con una palanca y un punto de apoyo sacaria al sol de su centro. No; les basta y ha bastado siempre su simple sentido comun. Se nos tendrá acaso por rebeldes; pero, lo repetimos, que una proposicion sea sostenida por uno ó por un inmenso número de sábios, no nos convence más que si lo fuera por otra cualquier persona, á no ser que sus razones nos persuadan.

Hé aquí motivada esta obra. Siempre nos ha parecido el Algebra superior un estudio tan difícil y penoso, que hemos compadecido de buena fé á los que tienen precision de emprenderlo. Esto acaso demostrará nuestra falta de capacidad; pero conocemos á un crecido número de jóvenes que, á pesar de su buen talento y aplicacion, han perdido años de carrera por la dificultad que han hallado en aprender esta parte de las matemáticas tal como se ha enseñado y enseña actualmente. Jamás, sin embargo, nos ocurrió la idea de que pudiésemos evitar este escollo, hasta que fijamos nuestra atencion en el primer teorema con que dá principio. En él se *demuestra* que las relaciones que con las raices tienen los coeficientes de una ecuacion no sirven para determinar los valores de aquellas. A pesar de tal demostracion y de la fuerza que parece le prestan los nombres que figuran al frente de esta clase de obras, y principalmente el de Cirodde, nos sucedió lo que con el movimiento contínuo. En tal demostracion no vimos otra cosa, sino que por los medios conocidos era realmente imposible resolver una ecuacion de las que tratamos, á no ser aplicando el extremadamente confuso, largo, difícil y penoso sistema que explican los autores. Pero no nos convencimos de que fuera imposible esa resolucion por cualquier otro medio: es decir, se resistió á nuestra razon el creer que. para determinar los valores de las raices de una ecuacion, no bastasen las relaciones que con ellas tienen los coeficientes de sus términos. Y no se diga que esto fué un capricho injustificado: porque razones poderosas nos asistian para sublevarnos contra tal principio. En primer lugar vimos que en una ecuacion, por ejemplo, de tercer grado en que hay tres incógnitas, hay tres ecuaciones; que son, la suma de dichas incógnitas, la de sus productos binarios y de su producto total. En todo problema que se nos presenta con igual número de incógnitas que de ecuaciones, determinamos los valores de aquellas. ¿Cómo, pues, sucede que las ciencias exactas son aquí impotentes para este caso en que tan ligadas se hallan las incógnitas con los datos conocidos? Porque si nos dan la suma de tres números, dirémos que sin variar aquella pueden variar estos; pero si además de la suma nos dan la de sus productos binarios y el producto de dichos tres números, ya estos son invariables, y por consiguiente, con esos datos debemos tener suficiente para determinar cuáles son dichos números.

En vano quisimos persuadirnos de que cuando han pasado los siglos sin que en ninguna nacion hubiese habido quien destruyese el citado teorema, seria cierta dicha imposibilidad. Y caso de que no lo fuera, no seria nuestro escaso talento y cortos conocimientos los que habrian de resolver una cuestion que no ha resuelto ningun matemático. Vanos fueron nuestros esfuerzos para alejar de nuestra mente una idea que no teníamos fuerza para abarcar. La idea se obstinó en perseguirnos; y viéndonos derrotados en la lucha, capitulamos con ella y nos rendimos á discrecion. Entónces nos entregamos á ella completamente, y por algun tiempo fué nuestra pesadilla hasta en nuestros sueños. Nada dirémos á nuestros lectores del ímprobo trabajo que hemos estado soportando por bastante tiempo sin el menor resultado. Bástele saber que por fin lució un dia en que descubrimos un rayito de luz que, aunque débilmente, nos permitia ver la senda por donde camínábamos. Dias y más dias pasaron sin gran provecho, hasta que poco á poco aquella luz fué tomando incremento, y por último, nos hizo ver el más hermoso, fácil, claro y cómodo camino que conduce al objeto deseado: á la resolucion de todas las ecuaciones de cualquier grado que sean, sin necesitar para ello otros datos que la suma de las raices y la de su productos binarios; es decir, el segundo y tercer términos de la ecuacion, sobrando todos los demás, excepto el último término á que acudimos para comprobar los valores hallados. Entónces hicimos comparacion de nuestro sistema con el que se sigue, y nos acabamos de convencer de que efectivamente tan claro y tan fácil es aquel, como imperfecto, confuso, difícil y enredoso éste. Sin necesidad de otra prueba bastaria la de que (contrayéndonos á la obra de Mr. Cirodde, que sin disputa es la de más aceptacion) ni un solo ejemplo hay de ecuaciones resueltas desarrollando sus cálculos. Y si tratándose en el Algebra elemental de las ecuaciones de primero y segundo grado, que tan fáciles son, se ponen ejemplos minuciosamente explicados, ¿por qué no hacerlo con las de tercero y cuarto á lo ménos, siendo tan difíciles?

Dos palabras del expresado autor, acabarán de completar esta idea.

«Resolver algebráicamente una ecuacion con una sola incógnita (dice Mr. Cirodde) es hallar una fórmula por cuyo medio puedan determinarse, en funcion de sus coeficientes, todas las cantidades que, sustituidas en dicha ecuacion en lugar de la incógnita, hagan idénticos á los dos miembros. Hasta el presente solo hemos podido hallar dicha fórmula para las ecuaciones de los cuatro primeros grados, y aun las relativas á las ecuaciones del tercero y cuarto son tan complicadas, que casi nunca se hace uso de ellas.»

Y algo mas adelante continúa.

«Si consideramos las dos ecuaciones

$$x^2-2ax+b=0 \quad y \quad x^5-2ax+b=0$$

deduciremos de la primera

$$x=a\pm\sqrt{a^2-b}$$

y por medio de esta fórmula resolveremos todas las ecuaciones de segundo grado correspondientes á todos los pares de valores que pueden asignarse á *a* y á *b*, sin que nunca haya necesidad de repetir los razonamientos que han conducido á la fórmula; y solamente reemplazando en ella á *a* y *b* por sus valores numéricos. Pero no sucede lo mismo respecto de la segunda; porque *en el estado actual del Algebra, ignoramos la ley con arreglo á la cual depende el valor de* x *de los de* a *y* b. Mas si damos valores numéricos á estos dos coeficientes, podrán hallarse por medio de los métodos que enseñaremos al tratar de la resolucion de las ecuaciones numéricas, todos los valores de *x*; pero no solo será necesario hacer un cálculo particular para cada raiz, sino que aun necesitaremos volver á empezar todos los cálculos cuando demos otros valores á *a* y á *b*.»

Esto dice el citado autor, y algo mas que eso pudiéramos añadir si fuera necesario hacer mas evidente las graves dificultades y confusion de cálculos que ofrece el sistema conocido hasta la fecha.

La verdadera ciencia es la luz, y se mantiene de sí propia; no permite la menor sombra en su derredor, y en el centro del foco mas luminoso se vé á la Verdad en su explendente sólio. Desde allí, cuál astro radiante de incomparable hermosura, lanza por dó quier raudales infinitos de bellísima é intensa luz, que, sin embargo, no todos pueden mirar sin que sus ojos viertan lágrimas de dolor.

Por la inversa, donde hay confusion y oscuridad, falta ciencia; donde falta ciencia y hay oscuridad y confusion, allí tiene su imperio y asienta su trono el error disfrazado con el sublime manto de la verdad y de la sabiduría; pues sólo así puede recibir culto, rechazando con despótico afan á la luz su encarnizado enemigo, que desde el punto en que penetrára en su córte, pulverizaria su trono y haria huir despavorido al que lo ocupaba. En contraposicion á la verdad, el error es un cuerpo opaco que no produce más que sombra, confusion y desconcierto. En una palabra, este es hijo del Génio del mal, al paso que aquella es hija del Omnipotente, que todo en Él es infinitamente grande, infinitamente bueno é infinitamente hermoso, y cuya principal esencia es la sabiduría. Concebir la ciencia, prescindiendo de Dios, es querer hacerse cargo de la luz del dia, prescindiendo del sol.

Preguntado Laplace por el Emperador cuál era la causa de que en su magnífica obra sobre la *Mecánica celeste* no se encontrase escrita ni una sola vez la palabra «*Dios*,» respondió que era la de no haber tenido necesidad de tal *hipótesis*.

Cuando meditamos sus palabras, no vemos en él á un sábio, sino á un hombre de talento que ha perdido la senda de la verdad, porque sus ideas le extraviaron. Pero ¿acaso es solo Laplace quien, llevando el nombre de sábio, desconoce al Padre de la sabiduría? ¿Es corto, por ventura, el número de los que creen ó aparentan creer, y quieren persuadir de ello á los demás, que nada existe creado, y que por consiguiente tampoco existe un Creador? ¿No se ha hecho casi una moda lo que se llama *despreocupacion*, que consiste en que para hacer el papel de persona ilustrada es indispensable salirse de la esfera del *vulgo*, que cree en la inmortalidad del alma y en la existencia de Dios? Porque ¿qué valdria un sábio, por más eminente que fuese, si su ciencia y su talento lo debiese á otro que á sí propio? ¿Cuál seria, pues, su mérito? ¡Profunda lástima es la sensacion que en nosotros produce semejante aberracion é ingratitud! Pero ¿qué más? ¿No ha dicho recientemente una persona muy ilustrada, y se repite por dó quier, que la fé ha huido y que la ciencia es quien la ha espulsado? Afortunadamente para nosotros, no vemos en las sentencias de esos sábios más que palabras del hombre; y el hombre es harto pequeño y limitado para que podamos admitir sus ideas como infalibles.

Si por un momento siquiera participáramos de ellas, no solo nos conformaríamos con nuestra ignorancia, sino que rogaríamos al Eterno incesantemente que jamás nos sacase de ella. Las ciencias y los sábios se nos harian aborrecibles, puesto que nos hacian el sér más desgraciado de la creacion; porque si todos los vivientes son más felices que el hombre, toda vez que este se vé obligado á trabajar sin descanso para cubrir sus muchas necesidades, y que además de las fatigas físicas le acosan las del espíritu y mayor número de enfermedades que las que padecen aquellos; si la ciencia habia de destruir nuestra esperanza de una vida más feliz é imperecedera; si la ciencia nos habia de hacer conocer tan solo que para nada más habíamos nacido que para padecer; si creyéramos, en fin, que el saber nos habia de hacer tan infortunados, defenderíamos ciegamente, y con todas nuestras fuerzas, á los partidarios de la ignorancia. Si la ciencia es incompatible con la religion, la eleccion no puede ni debe ser dudosa, puesto que la religion debe estar muy por encima de todo lo demás, toda vez que sin ella no hay felicidad posible. Pero no; muy léjos de opinar con aquellos, anhelamos la ciencia para aumentar nuestra fé si es posible, pues para nosotros no es dudoso que cuanto más se penetra en el terreno de la sabiduría, más se comprende al Supremo Creador, y más admirables se presentan sus obras á los ojos del hombre. ¿Quién deberá tener una idea más sublime del Altísimo? ¿El pobre mozo de labranza, para quien nada existe en el universo sino los terrones que pisa, y que por consiguiente juzga que aquellos terrones constituyen toda la obra de Dios; ó el naturalista que vé en los vegetales una vida y una procreacion muy parecida á la suya; que en el moho asqueroso de las paredes húmedas observa y descubre magníficos y frondosos vergeles, habitados por otros séres que se alimentan de las frutas de aquellas plantas; ó el astrónomo que admira esa bóveda celeste llena de infinitos soles, en los que concibe y adivina otros tantos mundos habitados, inmensamente superiores al nuestro, y de los cuales no percibe sino un pequeñísimo número, aunque se auxilie de los mejores instrumentos; ó el hombre que, reuniendo esas y otras ciencias, vé cada vez más su miseria y pequeñez, puesto que cuánto más sabe, mayor grandeza descubre en el Autor de todo lo que existe, con el cual no puede ménos de compararse? ¿Quién, repetimos, formará de Dios una idea ménos imperfecta, puesto que perfecta es imposible? ¿Y quién de esos hombres deberá abrigar mayor fé? Si esta huye, no es verdaderamente la ciencia quien la desaloja y empuja. No; quien destruye la fé es la ignorancia; es el vano orgullo del hombre, que no quisiera ser deudor á nadie (por mas que sea á todo un Dios) de lo que él cree que constituye su mérito, y que, sin embargo, disculpa sus flaquezas ó crímenes diciendo, que él no se ha hecho á sí propio y que sus malas pasiones las debe á la...... Providencia.

Mas dejando aparte este asunto y volviendo al objeto que debemos proponernos, darémos cuenta á nuestros lectores del contenido de esta obra.

Segun queda arriba indicado, hemos resuelto el problema tenido hasta hoy por imposible, y demostrado como tal en los autores matemáticos, no ya de determinar los valores de las raices, valiéndose de todos los datos que suministran las relaciones entre estas y los coeficientes de los términos de una ecuacion, sino lo que es más aun; el de «Dada la suma de *C* cantidades, la de sus productos binarios y el producto de aquellas, determinar sus valores, cuyo problema sirve de base á la teoría general de ecuaciones que establecemos, despues de tratar en particular la resolucion de las ecuaciones desde el segundo hasta el décimo grados, ambos inclusive, poniendo abundantes ejemplos de todos los casos, y además otros muchos sin resolver para ejercicio del lector.» Y no se horrorice éste al ver ante sus ojos una ecuacion de 9° ó 10° grado para resolverla; pues además de que no se tarda en comprender perfectamente esta obra más que el tiempo que se gasta en leerla, y que la persona de ménos capacidad puede aprenderla en quince dias, los procedimientos son tan fáciles y sencillos como vamos á exponer.

Una vez halladas las relaciones que guardan entre sí el cuadrado de la suma de las raices con la de los productos binarios, todo el obstáculo que podia presentarse para la resolucion de las ecuaciones de cualquier grado, consistia en hallar las diferencias entre las raices. Y si bien esto nos ha costado tan largas y penosas vigilias como encontrar aquellas relaciones, el éxito ha sobrepujado á nuestras esperanzas; pues con el auxilio de unas tablas de diferencias, más fáciles de hacer de lo que á primera vista parece, se resuelve una ecuacion de cualquier grado que sea en *cinco minutos*, cuando por el sistema conocido hasta el dia puede considerarse como punto ménos que imposible el resolver una ecuacion de 6° ó 7° grado. Es, pues, imponderable el adelanto que con nuestro sistema pueden alcanzar las ciencias, y en especial la astronomía, en que con tanta frecuencia se presentan ecuaciones de grados altos.

Hemos dicho que estas tablas de diferencias son más fáciles de hacer que lo que aparece á primera vista, pues pudiera creerse que en ellas tengan que figurar todas las combinaciones que pueden hacerse con cantidades positivas, negativas, enteras y fraccionarias; pero muy léjos de eso. Por el sistema que hemos establecido no puede haber diferencias negativas, sino necesariamente positivas; y por otra parte, con solo las tablas de números enteros se hallan con toda facilidad las diferencias enteras y fraccionarias. Pero aun hay más; y es que hay que eliminar de dichas tablas todos los números que son cuadrados perfectos, con rara excepcion, y otros muchisimos que, sin serlo, no hay que incluirlos en ellas por razones especiales. Y por último, hay otras varias circunstancias que hacen que este trabajo no sea tan grande como aparece, aun despues de lo que llevamos dicho, por más que se haya modificado mucho la idea que ántes de esta explicacion pudiera haberse concebido; circunstancias que no podemos manifestar en este prólogo. Sin embargo, estas tablas (de las que solo damos en esta obra una muestra que al mismo tiempo sirve para resolver todos los ejemplos de ecuaciones que contiene) exigen un gasto muy superior á nuestros excasos recursos. Si nuestra Algebra superior halla proteccion, como *nos atrevemos* á creer, procuraremos *todo lo posible* hacer y publicar dichas tablas. Si por el contrario, nuestra obra no encuentra aquella acogida, será porque no la merezca; y en este caso aumentarémos en una unidad el número de las ilusiones perdidas.

ALGEBRA SUPERIOR.

El Algebra superior es la parte de las matemáticas que tiene por objeto resolver las ecuaciones de grado superior al primero.

1. Las ecuaciones pueden ser completas ó incompletas.

2. Completas son aquellas en cuyo primer término se halla la incógnita elevada al grado que le dá nombre; que en el segundo disminuye en una unidad este exponente; que en el tercero ha decrecido dos unidades, y así sucesivamente, hasta que llega á desaparecer dicho exponente, hallándose por consiguiente sola la incógnita, y el último término es conocido.

Por ejemplo:

$X^m - mx^{m-1} + px^{m-2} - \ldots\ldots + qx - a = 0$, es una ecuacion completa del grado m.

3. Incompleta es aquella en que la incógnita desaparece sin haber ido disminuyendo su exponente hasta hacerse igual á 0. Por ejemplo: $mx^2-a=0$ es una ecuacion de 2.º grado incompleta.

4. Teorema I. Toda ecuacion, cualquiera que sea su grado y cualesquiera sus coeficientes, tiene siempre á lo ménos una raíz.

Esta verdad, aunque tiene demostracion, se admite como evidente.

5. Teorema II. Si tenemos la ecuacion general del grado m

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+v=0$$

y a es una de sus raices; el primer miembro de esta ecuacion es divisible por el factor binomio $x-a$, formado restando de la incógnita dicha raíz.

En efecto, supongamos que se haya efectuado la division del primer miembro de la ecuacion por el binomio $x-a$, habiendo continuado la operacion hasta llegar á un resíduo independiente de x, lo cual siempre es posible, una vez que cada resíduo será de un grado inferior en una unidad á lo ménos respecto del anterior. Designando por R este resíduo y por Q el cociente, tendrémos

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+v=(x-a)Q+R$$

que siendo una identidad, podemos dar á x el valor a, lo cual nos convierte el primer miembro en

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + Ta + v$$

y en el primer sumando $(x-a)Q$ del segundo miembro, el factor $x-a$ se reduce á cero; luégo si demostramos que el cociente Q es una cantidad finita, este sumando será cero para $x=a$. Ahora el cociente Q podria ser infinito, teniendo un número ilimitado de términos, ó bien teniendo cuando ménos uno de sus términos infinito; pero para que Q constára de un número infinito de términos era necesario que sucediese lo mismo al primer miembro de la ecuacion, es decir, que m ó sea el grado de esta, fuese infinito, lo cual no sucede; tampoco podrá haber en el cociente términos de forma infinita, esto es, términos que tengan cero por denominador, porque entrando x elevado á un exponente en el dividendo cuando ménos igual al del divisor, se podrán efectuar las diferentes divisiones parciales, y no habrá por lo tanto ningun término en el cociente que tenga $x-a$ por denominador; por consiguiente, al hacer $x=a$ no hallarémos ningun denominador cero; así es que Q es una cantidad finita, y por consecuencia $(x-a)Q$ es igual á cero; ahora observemos que como el resíduo R es independiente de x, no podemos hacer en él $x=a$, permaneciendo con su valor tanto ántes como después de la sustitucion, y la igualdad anterior queda reducida á

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+\ldots\ldots+Ta+v=R$$

pero siendo a una raiz de la ecuacion propuesta, esta debe quedar verificada por su sustitucion en vez de x; luégo este resíduo es igual á cero, y por lo tanto, la division del primer miembro de la ecuacion por el binomio $x-a$ es exácta.

Esto que acabamos de demostrar es siempre cierto para las ecuaciones algebráicas racionales y enteras, respecto de x.

6. Teorema III. Toda ecuacion tiene siempre el mismo número de raices que unidades contiene el exponente de su grado.

La ecuacion general del grado m siendo una funcion de x, podemos representarla por $X_m=0$, indicándonos el subíndice m el grado de la ecuacion.

Siendo $X_m=0$ una ecuacion, debe tener necesariamente una raiz (núm. 4); designemos por a_1 esta raiz; ahora a_1 es una cantidad que reduce á cero el polimonio X_m; por consiguiente, este será divisible por $(x-a_1)$ (núm. 5), y el cociente de la division, siendo el polinomio dividendo del grado m y de primer grado el divisor, será un polinomio del grado $m-1$, que podemos designar por X_{m-1}; asi tendrémos

$$\frac{X_m}{x-a_1}=X_{m-1} \text{ de donde } X_m=(x-a_1)X_{m-1}$$

el primer miembro de esta identidad es igual á cero, luégo el segundo tambien debe serlo, y por lo tanto podemos establecer la ecuacion

$$X_{m-1}=0$$

que debe tener una raiz (núm. 4) que designamos por a_2, y por la misma razon que ántes el polinomio X_{m-1} debe ser divisible por $x-a_2$, y el cociente será del grado $m-2$, una vez que el dividendo es del grado $m-1$ y el divisor de primer grado; es decir,

$$\frac{X_{m-1}}{x-a_2}=X_{m-2} \text{ de donde } X_{m-1}=(x-a_2)X_{m-2}$$

y sustituyendo este valor de X_{m-1} en el de X_m hallaremos

$$X_m=(x-a_1)(x-a_2)X_{m-2}$$

haciendo el mismo razonamiento que anteriormente, podremos poner la ecuacion.

$$X_{m-2}=0$$

y designando por a_3 una raiz de esta ecuacion (número 2), su primer miembro será divisible por $x—a_3$, y obtendremos un cociente del grado $m—3$; de modo que

$$\frac{X_{m-2}}{x-a_3}=X_{m-3} \text{ de donde } X_{m-2}=(x-a_3)X_{m-3}$$

y sustituyendo del mismo modo que ántes este valor de X_{m-2} en el de X_m, hallaremos que

$$X_m=(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,X_{m-3};$$

pero observemos que en la primera division hemos descompuesto el polinomio X_m en dos factores, uno de ellos de primer grado, y el otro del grado $m—1$; en la segunda division descomponemos á X_m en tres factores, dos de primer grado, y el otro del grado $m—2$, y á cada division ponemos de manifiesto en el valor de X_m un nuevo factor de primer grado; de modo que, cuando hayamos efectuado $m—2$ divisiones, tendremos á X_m descompuesto en $m—1$ factores, siendo $m—2$ de primer grado y uno de segundo, que será el cociente de la division $m—3$; así es que la forma del polinomio X_m será:

$$X_m=(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\ldots\ldots\ldots(x-a_{m-2})\,X_2$$

é igualando X_2 á cero, llegarémos á la ecuacion de segundo grado

$$X_2=0,$$

que siguiendo la misma marcha, dividiríamos á X_2 por el factor binomio correspondiente á una de sus raices a_{m-1} que seria $x-a_{m-1}$, y obtendríamos un cociente de la forma $x-a_m$; es decir, de primer grado respecto de x, y de este modo seria

$$\frac{X_2}{x-a_{m-1}}=x-a_m;\text{ ó sea } X_2=(X-a_{m-1})\,(x-a_m)$$

y el valor de X_m se trasformará en

$$X_m=(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_{m-2})\,(x-a_{m-1})\,(x-a_m)\;(1),$$

ahora vemos que para $x=a_1$ el factor $x-a_1$ se reduce á cero; y por consiguiente el segundo miembro de la igualdad (1) es cero, y nos queda

$$X_m=0,$$

lo que nos dice que a_1 es raiz de la ecuacion propuesta; lo mismo sucede para $x=a_2$, pues en este caso el factor $x-a_2$ es cero, y por consecuencia lo mismo le sucede al segundo miembro de la igualdad; así es que la ecuacion queda verificada, haciendo $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$....... $x=a_{m-2}$, $x=a_{m-1}$, $x=a_m$; luego la ecuacion tiene por lo ménos m raices, puesto que los m valores a_1, a_2, a_3..... a_m la satisfacen. Vamos á probar que no existe ningun otro valor diferente de estos que la satisfagan; es decir, que la ecuacion no puede tener más que m raices.

7 Supongamos que α sea otra raíz de la ecuacion, diferente de las a_1, a_2, a_3..... a_{m-1}, a_m: su primer miembro seria divisible por $x-\alpha$; de modo que el segundo deberia serlo tambien; pero este es un producto de cantidades primas, y así no puede ser divisible por ningun otro factor primo tal como $x-\alpha$, á ménos que este no fúese igual á alguno de los factores $x-a_1$; $x-a_2$, $x-a_3$,....$x-a_m$ lo que exige que α sea igual á una de las cantidades a_1, a_2, a_3,.....a_m, y esto es absurdo una vez que hemos supuesto que α es diferente de estas.

8 Corolario. Segun lo que precede, vemos que el primer miembro de toda ecuacion del grado m es igual al producto de m factores binomios de primer grado correspondiente á sus m raices: es decir, que

$$X^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+v=(x-av_1)$$
$$(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_{m-1})(x-a_m)$$

siendo $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{m-1}, a_m$ las m raices de la ecuacion.

9 Teorema IV. En toda ecuacion completa que tenga por coeficiente de su primer término la unidad, el coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario, es igual á la suma de las raices.

El coeficiente del tercer término es igual á la suma de los productos binarios de las raices.

El coeficiente del cuarto término, tomado con signo contrario, es igual á la suma de los productos de las raices, multiplicadas tres á tres, y así sucesivamente.

Y el último término, tomado con su signo, ó con signo contrario, segun que la ecuacion sea de grado par ó de grado impar, es igual al producto de las raices.

En efecto, hemos visto que el primer miembro de una ecuacion del grado m es igual al producto de m factores binomios de primer grado, correspondientes á sus m raices; de manera que si designamos por $a, b, c, d, \ldots\ldots l, k$, las m raices de la ecuacion

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Tx + v = 0$$

podemos establecer la igualdad

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Tx + v = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots\ldots (x-l)(x-k) \quad (1)$$

y podemos efectuar este producto con el objeto de tener el resultado ordenado del mismo modo que el primer miembro multiplicando, primero todos los primeros términos de los m binomios, lo que nos dará un término con x elevada á la potencia m; despues multiplicar sucesivamente los $m-1$ primeros términos de $m-1$ factores por el segundo término de cada uno de los factores restantes, lo que nos dará un término, cuyo coeficiente será la suma algebráica de todos los segundos términos de los m binomios, y en el cual x entrará elevada á la potencia $m-1$; en seguida multiplicar sucesivamente los $m-2$ primeros términos de $m-2$ binomios por los dos segundos términos de los factores restantes, y nos dará un término que tendrá por coeficiente la suma algebráica de los productos binarios de todos los segundos términos de los m binomios, y en el que x entrará elevada á la potencia $m-2$, y de esta manera continuarémos hasta llegar á multiplicar todos los segundos términos de los m factores, cuyo producto tendrá el signo *más* ó el signo *ménos*, segun que la ecuacion sea de grado par ó de grado impar, y la igualdad (1) se trasformará en

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Tx + v =$$

$$
\begin{array}{r|l|l|l|l}
= x^m - a & x^{m-1} + ab & & & \\
-b & \quad +ac & x^{m-2} - abc & x^{m-3} + \ldots\ldots \mp abcd\ldots\ldots l & x \pm abcd\ldots\ldots lk. \\
-c & \quad +ad & \qquad -abd & \qquad\qquad \mp bcd\ldots\ldots lk & \\
-d & \quad \cdot & \qquad \cdot & \qquad\qquad \mp cd\ldots\ldots lka & \\
\cdot & \quad \cdot & \qquad \cdot & \qquad\qquad \mp d\ldots\ldots lkab & \\
\cdot & \quad \cdot & \qquad \cdot & \qquad\qquad \cdot & \\
\cdot & \quad +al & \qquad -abl & \qquad\qquad \cdot & \\
-l & \quad +ak & \qquad -abk & \qquad\qquad \cdot & \\
-k & \quad +bc & \qquad -bcd & \qquad\qquad \cdot & \\
 & \quad +bd & \qquad \cdot & \qquad\qquad \cdot & \\
 & \quad \cdot & \qquad \cdot & & \\
 & \quad \cdot & \qquad \cdot & & \\
 & \quad \cdot & \qquad -bcl & & \\
 & \quad +bl & \qquad -bck & & \\
 & \quad +bk & \qquad \cdot & & \\
 & \quad +cd & \qquad \cdot & & \\
 & \quad \cdot & \qquad \cdot & & \\
 & \quad \cdot & \qquad \cdot & & \\
 & \quad \cdot & \qquad \cdot & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad +cl & & & \\
 & \quad +ck & & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad +dl & & & \\
 & \quad +dk & & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad \cdot & & & \\
 & \quad +lk & & &
\end{array}
$$

y para que esta igualdad se verifique, es necesario que los coeficientes de las mismas potencias de x sean iguales; esto es, que

$$A = -(a + b + c + d + \ldots\ldots + l + k).$$

$$B = ab + ac + ad + \ldots\ldots + al + ak + bc + bd + \ldots\ldots + bl + bk + cd + \ldots\ldots + cl + ck \ldots\ldots + dl + dk + \ldots\ldots + lk.$$

$C = -(abc + abd + \ldots. + abl + abk + bcd + \ldots. + bcl + bck + \ldots.)$

$\vdots$

$T = \mp abcd\ldots.. l \pm bcd\ldots.. lk \mp cd\ldots.. lka \mp d\ldots.. lkab \mp\ldots.. v = \pm abcd\ldots.. lk.$

y esta série de igualdades nos demuestra el teorema.

10. El primer principio que establecen y han establecido hasta hoy todos los autores, es que estas relaciones que existen entre las raices y los coeficientes de los términos de la ecuacion, no pueden servir para determinar el valor ó valores de dichas raices, y de este principio hacen un teorema demostrando la imposibilidad de hallar las raices por medio de dichas relaciones. Para esto se han fundado en que, á pesar de reunirse tantas ecuaciones como incógnitas, procediendo por los medios generales establecidos para despejarlas ó eliminarlas, nunca se consigue hallar su valor, sino que siempre se reproduce la ecuacion primitiva como vamos á ver.

Sea la ecuacion de tercer grado, por ejemplo: $c^3 - mc^2 + nc - p = 0$; y segun lo ya dicho, tendrémos (llamando a, b, c, á las raices).

(1) $a+c+d=m$

(2) $ac+ad+cd=n$

(3) $acd=p$

Aquí tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas; y siempre que nos hemos hallado en el caso de ser tantas aquellas como estas, hemos resuelto el problema.

Empleemos aquí los mismos medios. Multipliquemos la (1) por c, y para eliminar ac entre la (1) y la (2), restemos aquella de esta, y será:

$$ac+ad+cd-ac-c^2-cd=n-mc\text{, ó}$$
$$ad-c^2=n-mc \quad (4).$$

Multiplicando esta por c, y restándola de la (3) para eliminar acd, será:

$$acd-acd+c^3=p-nc+mc^2\text{, ó } c^3-mc^2+nc-p=0,$$

que es la misma ecuacion propuesta.

Pero esto es un error como tantos otros que han pasado por verdades axiomáticas durante muchos siglos. Nosotros vamos á demostrar que no sólo son suficientes los datos que nos suministran dichas relaciones entre raices y coeficientes para resolver las ecuaciones de cualquier grado que sean, sino que sobran todos ellos, esceptuando los del 2.°, 3.° y último términos, que son la suma de las raices, la de los productos binarios y su producto total. Y esto se concibe perfectamente. Si tenemos varias cantidades *a, b, c, d,* etc., de las cuales sólo conocemos la suma, dirémos que sin variar esta pueden ser muy distintos los valores de *a* de *b* de *c* y de *d*, etc., por consiguiente muy distintos pueden ser tambien sus productos; pero desde el momento en que se fija la suma de dichas cantidades, la de sus productos binarios y el producto general, ya los valores de *a, b, c, d,* etc. están de la misma manera fijados y no pueden tener más que un sólo valor cada una de dichas incógnitas; por consiguiente, estos datos deben bastar para determinar sus valores, siendo supérfluos é innecesarios todos los demás. Y es de advertir que si entre los datos necesarios contamos el producto de las raices, no es porque lo hayamos de emplear jamás para resolver las ecuaciones, sino porque ocurre el tener que servirnos de este dato para comprobar el valor de las raices; pues exceptuando esas ocasiones, siempre son suficientes la suma de las raices y la de los productos binarios para la resolucion de todas las ecuaciones de cualquier grado que sean; y estos sólos datos serán los únicos que emplearémos para dicho objeto, empezando por las

ECUACIONES DE 2°. GRADO.

11. Si tenemos dos incógnitas x, y, sus valores

pueden ser iguales ó desiguales. Si suponemos $x=y$, elevando al cuadrado su suma $x+y$, será:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^3$$

Y poniendo todo en valores de x, será:

$$(x+y)^2=x^2+2x^2+x^2=4x^2 \ldots\ldots(1)$$

Haciendo igual sustitucion en el producto xy, será:

$$xy=x^2 \ldots\ldots(2)$$

Con las dos ecuaciones (1) y (2) formaremos proporcion, y será:

$$\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{4x^2}{x^2}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por x^2, será:

$$\frac{(x+y)^2}{xy}=4$$

Pasando xy al segundo miembro, tendremos:

$$(x+y)^2=4xy$$

Y pasando el segundo miembro al primero, nos dará:

$$(x+y)^2-4xy=0$$

Luégo si del cuadrado de la suma de las raices restamos el cuádruplo de su producto, nos resulta cero cuando estas son iguales.

12. Recíproco; si el cuadrado de las raices ménos el cuádruplo de su producto es cero, las raices son iguales, y por consiguiente, dividiendo la suma por 2, se obtendrá su valor.

EJEMPLO.

Sea la ecuacion

$$x^2-10x+25=0$$

y tendrémos:

$$x+y=10 \quad (1)$$
$$xy=25 \quad (2)$$

Restando del cuadrado de las raices el cuádruplo de su producto, será:

$10^2-4\times25=100-100=0$. Luégo las dos raices son iguales, y dividiendo su suma 10 por 2, será:

$$x=5. \qquad y=5.$$

EJEMPLO 2.°

$$x^2+10x+25=0$$
$$x+y=-10$$
$$xy=25$$
$$-10^2-4\times 25=100-100=0$$
$$x=\frac{-10}{2}=-5 \quad y=\frac{-10}{2}=-5$$

(13) Supongamos ahora á x é y desiguales, y llamemos m á la diferencia $y-x$; tendrémos $y=x+$ $+m$; y téngase presente que no ponemos el signo $\pm$ porque designarémos por x siempre á la menor.

Practicando lo mismo que en el caso anterior, tendrémos:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

Sustituyendo el valor de y por su igual $x+m$, será:

$$(x+y)^2=x^2+2x(x+m)+(x+m)^2=x^2+2x^2+$$
$$+2xm+\ x^2+2xm+m^2,\text{ ó}$$
$$(x+y)^2=4x^2+4xm+m^2$$

Pasando m^2 al primer miembro, será:

$$(x+y)^2-m^2=4x^2+4xm\ldots\ldots(1)$$

Verificando igual sustitucion en el producto xy, será:

$$xy=x\,(x+m)=x^2+xm\ldots\ldots(2)$$

Formando proporcion con las dos ecuaciones (1) y (2), tendrémos:

$$\frac{(x+y)^2-m^2}{xy}=\frac{4x^2+4xm}{x^2+xm}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por x^2+xm, será:

$$\frac{(x+y)^2-m^2}{xy}=4$$

Pasando xy al segundo miembro, será:

$$(x+y)^2-m^2=4xy$$

Y cambiando de miembros $-m^2$ y $4xy$, será:

$$(x+y)^2-4xy=m^2$$

(14). Luégo si del cuadrado de las raices desiguales restamos el cuádruplo del producto binario, nos dará el cuadrado de la diferencia. Restando, pues, su raiz de la suma de las raices, y dividiendo por 2, tendrémos el valor de x, y sumando y dividiendo por 2, el de y.

EJEMPLO.

Sea $x^2-14x+33=0$, y tendrémos.

$$x+y=14$$
$$xy=33$$
$$14^2-4\times33=64 \quad \sqrt{64}=8=y-x$$
$$y=\frac{14+8}{2}=11 \quad x=\frac{14-8}{2}=3$$

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion

$$3x^2+15,66x-110,64=0.$$

Dividiendo por 3 toda la ecuacion, será:

$$x^2+5,22x-36,88=0, \text{ y tendrémos:}$$
$$x+y=-5,22 \ (1)$$
$$xy=-36,88 \ (2)$$

$$-5,22^2-(-4\times 36,88)=27,2484+4\times 36,88=$$
$$=174,7684$$

$$\sqrt{174,7684}=13,22$$

$$y=\frac{13,22-5,22}{2}=4$$

$$x=\frac{5,22-13,22}{2}=-9,22$$

(15) Si la ecuacion de 2.° grado es incompleta, se reduce á

$$x^2-p=0,\ \text{ó}\ x^2=p,\ \text{ó}\ x=\pm\sqrt{p}$$

RAICES INCOMENSURABLES.

(16) Llámanse raices incomensurables aquellas que no pueden obtenerse con exactitud, como por ejemplo, $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ etc., etc.

Pero así como la aritmética nos enseña á hallarlas con cuanta aproximacion se desee, así tambien podrémos lograr el mismo objeto cuando una ecuacion tiene raices incomensurables.

Si tenemos, pues, la ecuacion

$$x^2-(9\sqrt{3})x+42=0,\ \text{será:}$$

$$x+y=9\sqrt{3}$$
$$xy=42$$

Restando del cuadrado de la suma de las raices el cuádruplo de su producto, nos dará:

$$9\sqrt{3}^{2}-4\times42=81\sqrt{9}-4\times42=243-168=75$$

Extrayendo la raiz de 75 nos dá $\sqrt{75}=8,66025$
Ahora tenemos que reducir á cantidad racional $9\sqrt{3}$ para poder sumar con ella la raiz de 75 que hemos sacado, y será $9\sqrt{3}=15,58845$, con lo que ya podrémos sacar los valores de x y de y, que serán:

$$y=\frac{15,58845+8,6605}{2}=12,12435$$
$$x=\frac{15,58845-8,6605}{2}=3,4641$$

(17) Si el primer término de la ecuacion llevase coeficiente, se hará desaparecer dividiendo todos los términos por dicho coeficiente, y esto

téngase entendido para todas las ecuaciones de cualquier grado que sean.

RAICES IMAGINARIAS.

(18) Hemos demostrado que en toda ecuacion de 2.º grado, cuando las raices son iguales, el cuadrado de la suma de las raices es igual al cuádruplo del producto de dichas raices. Y recíprocamente; cuando el cuadrado de la suma de la raices es igual al cuádruplo del producto de las mismas, las raices son iguales. Esto supuesto, formemos una ecuacion en que sus raices sean imaginarias é iguales. Sean, pues, $\sqrt{-3}$ y $\sqrt{-3}$ y tendrémos la ecuacion $x^2-2\sqrt{-3}\times x-3=0$, en la cual sabemos que $2\sqrt{-3}$ (coeficiente del segundo término) es la suma de las raices, ó sea $\sqrt{-3}+\sqrt{-3}$, y que -3 es su producto, ó sea

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-3}=-3, \text{ y tendrémos:}$$

$$x+y=2\sqrt{-3}$$
$$xy=-3$$

Resolviéndola, será:

$$2\sqrt[2]{-3}-4\times-3=4\times-3-4\times-3=-12$$
$$+12=0$$

Luégo las raices imaginarias se hallan en el mismo caso que las que no lo son. Pero como, segun está demostrado por todos los matemáticos, las expresiones imaginarias son consecuencia de algun absurdo, prescindirémos completamente de ellas, pues seria otro absurdo ocuparse de operar con errores como si no lo fueran, sin que reporte á la ciencia la más pequeña ventaja.

Ecuaciones de 2.° grado por resolver

$$x^2-10x+21=0$$
$$x^2-25=0$$
$$x^2-6,11x-22,083=0$$
$$2,11x^2-18,9689x+39,202534=0$$
$$x^2-(8,25\sqrt{7})x+113,75=0$$

ECUACIONES DE TERCER GRADO.

(19) Hemos dicho que toda ecuacion puede tener á lo más tantas raices como indica su grado;

pero pueden ser todas iguales, ó todas menos una, ó todas menos dos, etc., hasta llegar á ser todas desiguales. Empezaremos, pues, por el primer caso. Luégo pasaremos al segundo, etc., etc., y acabaremos por el último. Y adviértase que á 4 y—4 no las llamaremos raices iguales de signo contrario, como muy generalmente se las llama, sino tan desiguales como lo son 28 y 20, pues tanto aquellas como estas tienen 8 por diferencia.

(20) Para que se comprenda bien nuestro sistema, vamos á hacer una advertencia muy importante que deberá tenerse presente para lo sucesivo, y es la siguiente:

Sea cualquiera el grado de la ecuacion de que tratemos, el órden de las raices irá de menor á mayor: es decir, que si designamos á estas por x, y, z, invariablemente designaremos por x la menor, por y la mediana, y por z la mayor: tambien y podrá ser igual á x, lo mismo que $z=y$; pero nunca se verificará que y sea menor que x, ni z menor que y. Por último, á la diferencia $y-x$ la designaremos por m: á la diferencia $z-x$ llamaremos n; á la diferencia $u-x$ (suponiendo á u cuarta raiz) la indicaremos por p. De suerte que si tenemos por ejemplo las raices

x, y, z, u, k, etc., será:

$y=x+m \quad z=x+n \quad u=x+p \quad k=x+q$, etc.

Por donde se vé que $n \geqq m$, $p \geqq n$, $q \geqq p$, etc.

De este modo, si tenemos $z=x+m$ quiere significar que $z=y$, puesto que $m=y-x$, de donde pasando $-x$ al primer miembro, sale $y=x+m$, y por consiguiente, al tener $z=x+m$, ya sabemos que $z=y$: en este caso tenemos $n=m$, puesto que $n=z-x$ y como $z-x=m$, en el ejemplo que hemos puesto será $m=n$ cuando $z=y$. Lo mismo decimos respecto de las demás.

(21) Sean x y z tres raices iguales, esto es, que tendremos $x=y=z$.

Si elevamos al cuadrado la suma de estas tres raices, será:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

Y poniendo todo en valores de x, será:

$$(x+y+z)^2=x^2+x^2+x^2+2x^2+2x^2+2x^2=9x^2 \ldots \quad (1)$$

Verificando lo mismo con los productos binarios, será:

$$xy+xz+yz=3x^2 \ldots \quad (2)$$

Con las dos ecuaciones (1) y (2) formaremos proporcion y tendremos:

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+xz+yz}=\frac{9x^2}{3x^2}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $3x^2$, será:

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+xz+yz}=3.$$

Pasando el denominador $xy+xz+yz$ al segundo miembro, será:

$$(x+y+z)^2=3\,(xy+xz+yz).$$

Y por último, pasando el segundo miembro al primero, será:

$$(x+y+z)^2-3\,(xy+xz+yz)=0.$$

(22) Luégo vemos que restando del cuadrado de la suma de las raices, cuando son iguales, el triplo de la de los productos binarios, nos resulta cero; y dividiendo por 3 la suma de aquellas, hallaremos el valor de x.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion $x^3-12x^2+48x-64=0$, y tendremos: $\left.\begin{array}{r}x+y+z=12\ldots\\ xy+xz+yz=48\end{array}\right\}\ 12^2-3\times48=0.$

(23) Luégo las raices son iguales, y tendremos que x será igual á 12 dividido por $3=4$, único valor que puede satisfacer la ecuacion.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion

$$x^3+13{,}98x^2+65{,}1468x+101{,}194696=0,$$

y tendremos:

$$\begin{array}{ll} x+y+z=-13{,}98 & (1)\\ xy+xz+yz=65{,}1468 & (2)\end{array}$$

Restando del cuadrado de la (1) el triplo de la (2), será:

$$-13{,}98^2-3\times65{,}1468=195{,}4404-195{,}4404=0$$

Por consiguiente tenemos $x=y=z$; y por tanto

$$x=\frac{-13,98}{3}=-4,66.$$

(24) Segundo caso: que la ecuacion tenga dos raices iguales y una desigual, y tendremos $x=y$, $z=x+n$.

Elevando al cuadrado la suma $x+y+z$ y sustituyendo y por su igual x, y en vez de z su valor $x+n$, tendremos:

$$(x+y+z)^2=x^2+x^2+(x+n)^2+2x^2+2x(x+n)+2x(x+n)=x^2+x^2+x^2+2xn+n^2+2x^2+2x^2+2xn+$$
$$+2x^2+2xn,\ \text{ó}\ (x+y+z)^2=9x^2+6xn+n^2.$$

Pasando n^2 al primer miembro, será:

$$(x+y+z)^2-n^2=9x^2+6xn\ldots.\ (1)$$

Sustituyendo en los productos binarios los valores de y, z, será:

$$xy+xz+yz=x^2+x(x+n)+x(x+n)=x^2+x^2+xn+$$
$$+x^2+xn,\ \text{ó}$$

$$xy+xz+yz=3x^2+2xn\ \ldots..\ (2)$$

Con las dos ecuaciones (1) y (2) formaremos proporcion, y nos dará:

$$\frac{(x+y+z)^2-n^2}{xy+xz+yz}=\frac{9x^2+6xn}{3x^2+2xn}$$

Dividiendo el segundo miembro por $3x^2+2xn$, será:

$$\frac{(x+y+z)^2-n^2}{xy+xz+yz}=3$$

Pasando el denominador al segundo miembro, tendremos:

$$(x+y+z)^2-n^2=3(xy+xz+yz)$$

Cambiando de miembros $3(xy+xz+yz)$ y n^2 será:

$$(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)=n^2.$$

(25) De modo que vemos que restando del cuadrado de las raices el triplo de los productos binarios, resulta el cuadrado de la diferencia $z-x$. Y por consiguiente, extrayendo la raíz de ese cuadrado, obtendremos la diferencia. Ahora bien, la suma de las raices x, $y=x$, $z=x+n$ es $x+y+z=3x+$

$+n$. Restando, pues, de esta suma la diferencia n, quedará $3x$, que dividiendo por 3 nos dará el valor de x; el de y sabemos que es el mismo de x, y el de z es $x+n$, que es lo que queríamos hallar.

(26) Como siempre designamos por x la menor de las raices y hemos puesto el caso en que $y=x$, preciso es tambien poner el en que $y=z$. Practicando lo mismo que en el caso anterior, serán las raices x, $y=x+m$, $z=x+m$, y tendremos:

$$(x+y+z)^2=x^2+(x+m)^2+(x+m)^2+2x(x+m)+2x(x+m)+2(x+m)(x+m)=x^2+x^2+2xm+m^2+x^2+ +2xm+m^2+2x^2+2xm+2x^2+2xm+2x^2+4xm+ +2m^2; \quad \text{ó } (x+y+z)^2=9x^2+12xm+4m^2.$$

Pasando $4m^2$ al primer miembro, será:

$$(x+y+z)^2-4m^2=9x^2+12xm \ldots\ldots (1)$$

Verificando lo mismo con los productos binarios, será:

$$xy+xz+yz=x(x+m)+x(x+m)+(x+m)(x+m)= =x^2+xm+x^2+xm+x^2+2xm+m^2.$$

Reduciendo y pasando m^2 al primer miembro, será:

$$xy+xz+yz-m^2=3x^2+4xm\ldots\ldots(2)$$

Con las dos ecuaciones (1) y (2) formaremos proporcion y será:

$$\frac{(x+y+z)^2-4m^2}{xy+xz+yz-m^2}=\frac{9x^2+12xm}{3x^2+4xm}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $3x^2+4xm$, tendremos.

$$\frac{(x+y+z)^2-4m^2}{xy+xz+yz-m^2}=3$$

Pasando el denominador al segundo miembro, dará:

$$(x+y+z)^2-4m^2=3(xy+xz+yz)-3m^2.$$

Cambiando de miembros $-4m^2$ y $3(xy+xz+yz)$, será:

$$(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)=m^2.$$

Tenemos, pues, que siendo en este caso $m=n$, resulta lo mismo en ambos casos; pero como la suma de las raices no es igual, pues en el primer caso que es cuando $x=y$, $z=x+n$, la suma es:

$$x+y+z=3x+n,$$

y en el presente en que $y=x+m$, $z=x+m$ la suma es $x+y+z=3x+2m$, podremos equivocarnos en los verdaderos valores de las raices si tomamos una fórmula por otra y no atendemos más que á la dicha suma; pero si sacamos los productos de cada sistema de valores y lo comprobamos con el último término de la ecuacion, conoceremos desde luego los verdaderos, que serán los que lo satisfagan.

EJEMPLO.

Sea la ecuacion

$$x^3-16x^2+69x-90=0,$$

y tendremos

$$x+y+z=16$$
$$xy+xz+yz=69$$

Restando del cuadrado de las raices el triplo de los productos binarios, será:

$$16^2-3\times69=256-207=49=m^2.$$

Extrayendo la raiz de 49 que es 7, tendremos la diferencia entre dos raices, presumiendo por lo ya demostrado que en esta ecuacion hay dos raices iguales. Pero ¿cuáles serán estas? ¿serán $x=y$ ó $y=z$?

Para el primer caso tenemos:

$$x+y+z=3x+n \quad (1)$$

y para el segundo:

$$x+y+z=3x+2m \quad (2)$$

Probemos si la fórmula (1) nos dá los verdaderos valores y será:

$$3x+7=16$$

de donde:

$$3x=16-7=9;\ \text{ó}\ x=3,\ y=3,\ z=3+7=10:$$

formando el producto de estos valores, vemos que $3\times3\times10=90$ que es el último término de la ecuacion propuesta, y por consiguiente estos son los verdaderos valores, lo cual indudablemente no sucederá sacando los valores por la fórmula (2) como vamos á verlo:

$3x+2m=16$; ó $3x+14=16$; ó $3x=16-14=2$

de donde:

$$x=\frac{2}{3},\quad y=7\frac{2}{3},\quad z=7\frac{2}{3}$$

cuyo producto no es 90, último término de la ecuacion.

EJEMPLO 2.°.

Sea la ecuacion:

$$x^3-19,66x^2+28,7289\,x+760,1445=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=19,66\ (1)$$
$$xy+xz+yz=28,7289\ (2)$$

Restando del cuadrado de la (1) el triplo de la (2) será:

$19,66^2-3\times 28,7289=386,4156-86,1867=$ $=300,2289$; $\sqrt{300,2289}=17,33=m^2$ y tendrémos segun la primera fórmula $3x+17,33=19,66$ ó $3x=19,66-17,33=2,33$; ó $x=\frac{2,33}{3}$, $y=\frac{2,33}{3}$ $z=\frac{2,33}{3}+17,33$. Si formamos el producto de estos valores y lo comparamos con el último término de la ecuacion que es el producto de las raices, veremos que no es igual. Emplearemos, pues, la otra fórmula, que es $3x+2m=19,66$; ó $3x+34,66=$ $=19,66$; ó $3x=19,66-34,66=-15$, de donde $x=-5$, $y=-5+17,33=12,33$; $z=-5+17,33=$ $=12,33$. El producto de estos valores es $-760,1445$ que es el último término de la ecuacion propuesta, á la cual por consiguiente satisfacen.

(27) Tercer caso: que la ecuacion tenga tres raices desiguales; sea x la menor, $y=x+m$ la mediana, $z=x+n$ la mayor, y será $x+y+z=x+(x+m)$ $+(x+n)=3x+m+n$ y tendrémos:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

Sustituyendo valores, será:

$$(x+y+z)^2=x^2+(x+m)^2+(x+n)^2+2x(x+m)+$$
$$+2x(x+n)+2(x+m)(x+n)=x^2+x^2+2xm+m^2+$$

$+x^2+2xn+n^2+2x^2+2xm+2x^2+2xn+2x^2+2xm$
$+2xn+2mn$, ó

$$(x+y+z)^2=9x^2+6xm+6xn+m^2+n^2+2mn.$$

Pasando al primer miembro m^2+n^2+2mn, será:

$$(x+y+z)^2-(m^2+n^2+2mn)=9x^2+6xm+6xn \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Verificando lo mismo con los productos binarios, será:

$$xy+xz+yz=x(x+m)+x(x+n)+(x+m)(x+n)$$
$$=x^2+xm+x^2+xn+x^2+xm+xn+mn$$

Pasando al primer miembro $+mn$ será:

$$xy+xz+yz-mn=3x^2+2xm+2xn \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Formando proporcion con las ecuaciones (1) y (2) será:

$$\frac{(x+y+z)^2-(m^2+n^2+2mn)}{xy+xz+yz-mn}=\frac{9x^2+6xm+6xn}{3x^2+2xm+2xn}$$

Dividiendo el segundo miembro por $3x^2+2xm+2xn$, será:

$$\frac{(x+y+z)^2-(m^2+n^2+2mn)}{xy+xz+yz-mn}=3$$

Pasando el denominador al segundo miembro, será:

$$(x+y+z)^2-(m^2+n^2+2mn)=3(xy+xz+yz)-$$
$$-3mn$$

Cambiando de miembros $-(m^2+n^2+2mn)$ y $3(xy+xz+yz)$ será:

$$(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)=m^2+n^2-mn$$

(28) Luégo si del cuadrado de las raices restamos el triplo de los productos binarios, nos resultará el cuadrado de la diferencia $y-x$, más el de la diferencia $z-x$, ménos el producto de ambas diferencias.

(29) Veamos si podremos conseguir con alguna facilidad descomponer un número en esas partes de que se compone dicha fórmula, y hallar por consiguiente los valores de m y de n, que es lo que es lo que se busca.

Llamando N á la diferencia que resulta de restar del cuadrado de las raices, el triplo de los productos binarios, será:

$$N=m^2+n^2-mn$$

Considerando á m^2+n^2-mn como parte del cuadrado m^2+n^2+2mn, tendrémos que si conociésemos las raices de este cuadrado, habríamos resuelto la cuestion; pero no las conocemos, y esta es la gran dificultad con que tropezamos. Si pudiéramos saber qué proporcion guarda m^2+n^2-mn con m^2+n^2+2mn, extrayendo la raíz de N y multiplicándola por la razon tendríamos algo de lo que necesitamos, pues aun nos faltaria descomponer esa raíz en otras dos, que serian los valores de m y de n. Pero ni aun á ese medio podemos apelar, porque la razon no es constante, puesto que tampoco lo son las diferencias m, n. Así que todo lo que podemos saber es que m^2+n^2-mn es menor que el cuadrado á que corresponden las raices m, n, y que la diferencia es $3mn$. Si fuéramos dando valores á m y á n, y sustituyéndolos en la ecuacion $N=m^2+n^2-mn$, no cabe duda de que llegaríamos á obtener el resultado; pero este trabajo puede ser penosísimo y largo en demasía, por cuya razon no puede ser aceptable. Si supiéramos ó pudiéramos conseguir con alguna facilidad saber, no ya las raices, sino la suma ó el cuadrado de esta, muy pronto conoceríamos tambien los valores de m y de n, y la ecuacion propuesta quedaria inmediatamente resuelta, como vamos á demostrar.

Llamando R á la raiz de $(m+n)^2$ y por consiguiente $R=(m+n)$ tendremos:

$$R^2=m^2+n^2+2mn \quad (1)$$

Si de esta restamos $N=m^2+n^2-mn$, nos dará:

$$R^2-N=3mn$$

Dividiendo esta por 3, será:

$$\frac{R^2-N}{3}=mn$$

Conocemos la suma $m+n=R$, y el producto mn: luego mn serán las raices de la ecuacion de segundo grado.

$$x^2-Rx+\frac{R^2-N}{3}=0$$

y tendremos:

$$m+n=R$$
$$mn=\frac{R^2-N}{3}$$

Practicando lo dicho (14), será:

$$R^2—4\times\frac{R^2—N}{3}=\frac{4N—R^2}{3}=(n—m)^2$$

Extrayendo la raíz de ambos miembros, dará:

$$\sqrt{\frac{4N—R^2}{3}}=n—m$$

por lo cual:

$$m=\frac{R—\sqrt{\frac{4N—R^2}{3}}}{2}$$

$$n=\frac{R+\sqrt{\frac{4N—R^2}{3}}}{2}$$

cuyos valores sustituidos en la ecuacion $N=m^2+n^2—mn$ de seguro la satisfacen, y conociendo los valores de $m=y—x$, $n=z—x$ no tendríamos mas que sustituirlos en la fórmula $x+y+z=3x+m+n$; y pasando $m+n$ al primer miembro y dividiendo por 3 obtendríamos el valor de x. Como sabemos que $y=x+m$, $z=x+n$ igualmente conoceríamos estos valores y por consiguiente la ecuacion estaba resuelta.

(30) Pero todo es en la suposicion de que conociésemos ó llegásemos á conocer la suma $m+n$ ó el cuadrado de esta suma. Muchos han sido nuestros esfuerzos y largas vigilias para lograr este objeto, y no lo hemos conseguido sino por el solo medio que vamos á manifestar. Para la mejor inteligencia de este sistema, creemos oportuno, y hasta necesario, poner ejemplos prácticos.

Supongamos, pues, que tratamos de resolver la ecuacion:

$$x^3-13x^2+50x-56=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=13$$
$$xy+xz+yz=50$$

Practicando lo dicho (28), restarémos del cuadrado de la primera el triplo de la segunda, y será:

$$13^2-3\times 50=19$$

que segun lo que llevamos expuesto, será:

$$m^2+n^2-mn=19$$

Como á 19 le falta $3mn$ para ser el cuadrado de

$m+n$, si extraemos la raíz entera de 19, y prudencialmente la aumentamos y elevamos al cuadrado, podrá ser que acertemos con el verdadero cuadrado; y de no ser así lo buscarémos en uno de los inmediatos. Haciéndolo así, dirémos, la raíz entera de 19 es 4; aumentándole dos unidades y suponiendo que la suma $4+2=6$ sea la raíz del cuadrado á que corresponde m^2+n^2-mn, tendrémos:

$$6^2=36=m^2+n^2+2mn \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$19=m^2+n^2-mn \;\ldots\ldots\; (2)$$

Restando la (1) de la (2), será:

$$17=3mn$$

que dividido por 3, será:

$$\frac{17}{3}=mn$$

Conocemos $m+n=6$ y $mn=\frac{17}{3}$; por consiguiente estas serán la suma y producto de las raices de una ecuacion de 2.° grado, y tendrémos:

$$m+n=6$$

$$mn=\frac{17}{3}$$

Restando del cuadrado de la primera el cuádruplo de la segunda, será:

$$36-4\times\frac{17}{3}=22,66=(n-m)^2$$

Extrayendo la raíz de ambos miembros, dará:

$$\sqrt{22,66}=4,76=n-m$$

por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{6-4,76}{2}=0,62 \\ n=\dfrac{6+4,76}{2}=5,38 \end{array}\right\}\text{ Sustituyendo estos valores}$$

en la ecuacion (2), nos dá:

$$m^2+n^2-mn=25,9932$$

Luégo el cuadrado de 6 no es el que buscamos.

Tomaremos el de 7, y será:

$$7^2=49=m^2+n^2+2mn$$
$$19=m^2+n^2-mn$$
$$30=3mn$$
$$10=mn$$

Practicando ahora lo mismo que ántes, será:

$$m+n=7$$
$$mn=10$$

Y como estas son la suma y producto de las raices de una ecuacion de 2.° grado, restarémos del cuadrado de la primera el cuádruplo de la segunda, y será:

$$7^2-4\times 10=9=(n-m)^2$$

Extrayendo la raíz de ambos miembros, será:

$$\sqrt{9}=3=n-m$$

por lo que

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{7-3}{2}=2 \\ n&=\frac{7+3}{2}=5 \end{aligned}\right\}$$ Sustituyendo estos valores en la

ecuacion (2), nos dá:

$$m^2+n^2-mn=19$$

Vemos, pues, que la satisfacen, y por consiguiente 2 y 5 podrémos creer que son las diferencias $y-x$, $z-x$, que es lo que necesitamos para sacar los valores de x y z, como vamos á hacerlo.

Tenemos $x+y+z=13$; y como la fórmula de la suma de las raices en el caso que nos ocupa es $x+y+z=3x+m+n$, y la de las raices es x, $y=x+m$, $z=x+n$, tendremos:

$$3x+m+n=13$$

Sustituyendo aquí los valores hallados de m y n, será:

$$3x+2+5=13, \text{ ó } 3x=13-7=6$$

Dividiendo ambos miembros por 3 dará, $x=z$. Sustituyendo en $y=x+m$ el valor de m, será:

$$y=2+3=5$$

Haciendo lo propio con n en $z=x+n$, dará:

$$z=2+5=7$$

Si sustituimos estos valores en la ecuacion propuesta, verémos que la satisfacen, y por lo tanto ya no cabe duda que son sus verdaderas raices. Esta circunstancia pudiera hacer creer á algunos que extrayendo la raíz de N, aumentándola prudencialmente, y elevándola al cuadrado, podrá este ser el verdadero ó estar este tan próximo, que con pocos tanteos se pudiera dar con él. Pero no es así; pues si bien en el ejemplo que hemos puesto así se ha verificado, ocurren infinitos casos en que el verdadero cuadrado está muy distante; y para hallarle seria necesario ir probando con todos los cuadrados desde la raíz de $N+1$ hasta encontrarlo. Esto, tratándose de enteros, seria una operacion larguísima y enojosa; y siendo con decimales podia costar hasta un mes el resolver una ecuacion.

31. Pero hay otra cosa, y es, que así como la operacion que hemos hecho nos ha dado valores de m, n que han satisfecho á la ecuacion (2) y que han sido las verdaderas diferencias $y—x$, $z—x$; así tambien pueden hallarse otros valores que tengan las mismas condiciones respecto de la ecuacion (2), y sin embargo, no sean las verdaderas diferencias $y—x$, $z—x$, como vamos á verlo.

Supongamos que en lugar de haber tomado el cuadrado de 7 que es el que nos ha dado los verdaderos valores, hubiésemos tomado el de 8, y hubiéramos tenido:

$$8^2=64=m^2+n^2+2mn$$
$$19=m^2+n^2-mn$$
$$45=3mn$$
$$15=mn$$
$$m+n=8$$
$$mn=15$$

Restando del cuadrado de aquella el cuádruplo de esta, será:

$$64-4\times 15=4=(n-m)^2 \quad \text{ó } 2=n-m$$

Por lo cual será:

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{8-2}{2}=3 \\ n&=\frac{8+2}{2}=5 \end{aligned}\right\}$$ Sustituyendo estos valores en la ecuacion (2), será:

$$m^2+n^2-mn=19$$

Por donde vemos que la satisfacen y esta circunstancia pudiera hacernos creer que son las verdaderas diferencias $y-x$, $z-x$. Procederíamos á sacar las raices de la ecuacion propuesta, y tendríamos

$$3x+m+n=13 \text{ ó } 3x+3+5=13 \text{ ó } 3x=13-8=5$$

Dividiendo por 3, nos dará: $x=\frac{5}{3}$

y sacando los otros valores de y z, tendrémos:

$$y=\frac{5}{3}+3=4\frac{2}{3}$$
$$z=\frac{5}{3}+5=6\frac{2}{3}$$

Pero estas no son las raices de la ecuacion, puesto que no la satisfacen.

(32) Vemos, pues, que la fórmula m^2+n^2-mn nos dá en dos distintos cuadrados un solo valor para n, pero dos para m. Esta circunstancia y la de faltar á N, $3mn$ para ser igual á m^2+n^2+2mn, nos hizo buscar otra fórmula que no tuviese estos inconvenientes; y en efecto, lo hemos conseguido.

(33) Segun lo dicho (20) tenemos:

$$y>x,\quad z>y,\quad m=y-x,\quad n=z-x:$$

luégo vemos que $n>m$; por consiguiente, $n=m$ más una cantidad que llamaremos h, y será $n=m+h$.

Sustituyendo este valor en la fórmula:

$$N=m^2+n^2-mn$$

será:

$$N=m^2+(m+h)^2-m(m+h)$$

Practicando las operaciones indicadas, será:

$$N=m^2+m^2+h^2+2mh-m^2-mh, \text{ ó}$$
$$N=m^2+h^2+mh$$

Con esta fórmula tenemos ya que N está mucho más próximo al cuadrado m^2+h^2+2mh que lo estaba N de m^2+n^2+2mn, pues ahora sólo le falta mh cuando entónces le faltaba $3mn$. Esta circunstancia hace ya mucho más fácil el buscar el cuadrado de $m+h$. Y tanto es así, que en muchos casos sucede el que con solo una unidad que el cuadrado supuesto igual á $N+mh$ esceda al verdadero, nos lo demuestra presentándonos una raíz imaginaria, lo que nos obliga á rebajar el cuadrado en una unidad, y este es el verdadero que nos dá los valores de m y de h, como lo veremos en el siguiente ejemplo:

Sea la ecuacion:

$$x^3-20x^2+111x-180=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=20$$
$$xy+xz+yz=111$$

Restando del cuadrado de la primera, el triplo de la segunda, será:

$$20^2-3+111=67=m^2+h^2+mh$$

La raíz de m^2+h^2+2mh ha de ser naturalmente mayor que la raíz de 67. Esta es 8; luégo tomarémos la de 10, y será:

$$10^2=100=m^2+h^2+2mh$$
$$67=m^2+h^2+mh$$

Restando esta de aquella, dará:

$$33=mh$$

y tendrémos:

$$m+h=10$$
$$mh=33$$

Restando del cuadrado de la primera el cuádruplo de la segunda, nos dá:

$$10^2-4\times33=-32$$

Y como de esta cantidad negativa debíamos extraer la raíz cuadrada, resulta ser una raíz imaginaria que manifiesta absurdo; es decir, que el cuadrado de 10 es alto, por lo quę tomarémos el de 9, y será:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$67=m^2+h^2+mh$$
$$14=mh$$

y tendrémos:

$$m+h=9$$
$$mh=14$$

Restando del cuadrado de la primera el cuádruplo de la segunda, será:

$$81-4\times14=25=(m-h)^2$$

Extrayendo la raíz de ambos miembros, dará:

$$\sqrt{25}=5=m-h$$

por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{9+5}{2}=7 \\ h=\dfrac{9-5}{2}=2 \end{array}\right\}$$ Sustituyendo estos valores en la

ecuacion $m^2+h^2+mh=67$ la satisfacen, por lo que pasarémos á sacar los valores de las raices de la ecuacion propuesta, cuya suma es:

$$x+y+z=3x+m+n.$$

Sabemos que $n=m+h$; pero como m puede ser $\gtrless h$, tenemos estos valores para m (cualquiera de los cuales, juntamente con $n=m+h$, satisface á dicha ecuacion) que son los mismos que nos hubiera dado la otra fórmula, pero en cuadrados distintos, lo cual era un inconveniente. Para saber cuál es el verdadero valor de $m=y-x$, tomarémos primero cualquiera de ellos, 7 por ejemplo, y juntamente con el de $n=m+h=7+2=9$, tendrémos:

$$3x+m+n=20, \text{ ó } 3x+7+9=20, \text{ ó}$$
$$3x=20-16=4$$

Dividiendo por 3, será: . . . . $x=\frac{4}{3}$

$y=x+m$, ó $y=\frac{4}{3}+7$. . . . . $y=8\frac{1}{3}$

$z=x+n$, ó $z=\frac{4}{3}+9$. . . . . $z=10\frac{1}{3}$

$x+y+z$. . . . $=20$

Para saber si estos son los verdaderos valores de x, y, z, comparemos su producto con el último término de la ecuacion al cual debe ser igual. Hecho esto, vemos que $\frac{4}{3}\times 8\frac{1}{3}\times 10\frac{1}{3}$, no es igual á 180; luégo estas no son sus raices, y por consiguiente, el verdadero valor de $m=y-x$ es el representado por $h=2$, y tendrémos:

$$3x+m+n=20, \text{ ó } 3x+2+9=20,$$
$$\text{ó } 3x=20-11=9$$

Dividiendo por 3, será: . . . $x=3$

$y=x+m$, ó $y=3+2$. . . . . . $y=5$

$z=x+n$, ó $z=3+9$. , ... $z=12$

$x+y+z$. . . . $=20$

Verificado el producto $3 \times 5 \times 12 = 180$, vemos que satisface al último término de la ecuacion, y por consiguiente, estas son sus verdaderas raices.

34. Hemos visto en este ejemplo dos cosas: la primera es que en el mismo cuadrado que tomamos nos dá la fórmula $N = m^2 + h^2 + mh$ los dos valores que para m nos dá la otra en cuadrados distintos; la segunda es que siendo la $\sqrt{67} = 8$, esta fórmula nos ha dado raíz imaginaria con el cuadrado de 10, obligándonos á tomar el de 9 que es el verdadero.

Examinémos ahora en algunos cuadrados el resultado que produce esta fórmula, y despues discurrirémos sobre lo que hayamos observado.

Dando á m y á h los valores que puedan tener en cada uno de los cuadrados que examinemos, y empezando por el de 2, tendrémos:

$$2^2 \left\{ \begin{matrix} m = 1 \\ h = 1 \end{matrix} \right\} \; m^2 + h^2 + mh = 3$$

Si al restar del cuadrado de la suma $m + h$ el triplo de su producto binario, obtenemos esta ecuacion, y en lugar de tomar el cuadrado verdadero que es el de 2 (incógnito), tomamos el de 3, resultará:

$$3^2=9=m^2+h^2+2mh$$
$$3=m^2+h^2+mh$$
$$6=mh$$
$$m+h=3$$
$$mh=6$$

Restando del cuadrado de la primera el cuádruplo de la segunda, será:

$9-4\times6=-15$; $\sqrt{-15}$ raíz imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 2.

Tampoco podríamos tomar otro más bajo, puesto qne $1^2=1<3$.

$$3^2 \left\{ \begin{matrix} m=1 \\ h=2 \end{matrix} \right\} m^2+h^2+mh=7$$

Si obtenemos esta ecuacion, y en lugar de tomar el cuadrado de 3 tomamos el de 4, será:

$$16=m^2+h^2+2mh$$
$$7=m^2+h^2+mh$$
$$9=mh$$
$$m+h=4$$
$$mh=9$$

$4^2-4\times 9=-20$; $\sqrt{-20}$ raíz imaginaria que nos obliga á tomar el cuadrado de 3, que es el verdadero.

Si en lugar de tomar el cuadrado de 4, hubiésemos tomado el de 2, tendríamos:

$$\begin{aligned} 2^2=4&=m^2+h^2+2mh \\ 7&=m^2+h^2+mh \\ -3&=mh, \end{aligned}$$

resultado absurdo, puesto que no pudiendo ser jamás negativos los valores de m h, tampoco puede serlo su producto. De suerte que tanto si tomamos un cuadrado mayor que el verdadero, como si lo tomamos menor, hallamos absurdo que nos impide continuar y nos obliga á tomar el verdadero.

$$4^2\left\{\begin{matrix} m=2 \\ h=2 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=12$$

Tomando el cuadrado de 5, será:

$$\begin{aligned} 5^2=25&=m^2+h^2+2mh \\ 12&=m^2+h^2+mh \\ 13&=mh \\ m+h&=5 \\ mh&=13 \end{aligned}$$

$25-4\times13=-27$; $\sqrt{-27}$ raíz imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 4.

Si en lugar de tomar el cuadrado de 5, tomamos el de 3, será:

$$\begin{aligned} 3^2=9&=m^2+h^2+2mh\\ 12&=m^2+h^2+mh\\ -3&=mh, \end{aligned}$$

absurdo que igualmente nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 4.

$$5^2\begin{cases} m=1 \\ h=4 \end{cases}\!\!\Big\} m^2+h^2+mh=21.$$

Si tomamos el cuadrado de 6, será:

$$\begin{aligned} 6^2=36&=m^2+h^2+2mh\\ 21&=m^2+h^2+mh\\ 15&=mh \end{aligned}$$

$36-4\times15=-24$; $\sqrt{-24}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 5.

Tomando el de 4, será:

$$4^2=16=m^2+h^2+2mh$$
$$21=m^2+h^2+mh$$
$$-5=mh,$$

absurdo que tambien nos obliga á tomar el cuadrado de 5.

$$5^2\begin{cases} m=2 \\ h=3 \end{cases} m^2+h^2+mh=19.$$

Tomando el cuadrado de 6, será:

$$6^2=36=m^2+h^2+2mh$$
$$19=m^2+h^2+mh$$
$$17=mh$$
$$m+h=6$$
$$mh=17$$

$36-4\times17=-32$; $\sqrt{-32}$ imaginaria que nos obliga á tomar el cuadrado de 5, que es el verdadero.

Tomando el de 4, será:

$$4^2=16=m^2+h^2+2mh$$
$$19=m^2+h^2+mh$$
$$-3=mh,$$

absurdo que tambien nos obliga á tomar el cuadrado de 5.

$$6 \left\{ \begin{matrix} m=1 \\ h=5 \end{matrix} \right\} m^2+h^2+mh=31$$

Tomando el cuadrado de 7, será:

$$\begin{aligned} 7^2=49&=m^2+h^2+2mh \\ 31&=m^2+h^2+mh \\ 18&=mh \\ m+h&=7 \\ mh&=18 \end{aligned}$$

$49-4\times18=-23;\ \sqrt{-23}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 6.

Si tomamos el de 5, será:

$$\begin{aligned} 5^2=25&=m^2+h^2+2mh \\ 31&=m^2+h^2+mh \\ -6&=mh \end{aligned}$$

absurdo que asimismo nos obliga á tomar el cuadrado de 6.

$$6^2 \left\{ \begin{matrix} m=2 \\ h=4 \end{matrix} \right\} m^2+h^2+mh=28$$

Tomando el cuadrado de 7, será:

$$7^2=49=m^2+h^2+2mh$$
$$28=m^2+h^2+mh$$
$$21=mh$$
$$m+h=7$$
$$mh=21$$

$49—4\times21=—37$; $\sqrt{—37}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 6.

Tomando el de 5, será:

$$5^2=25=m^2+h^2+2mh$$
$$28=m^2+\mathrm{h}^2+mh$$
$$—3=mh$$

absurdo que tambien nos obliga á tomar el cuadrado de 6.

$$6^2 \left\{\begin{matrix} m=3 \\ h=3 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=27$$

Tomando el cuadrado de 7, tendrémos:

$$7^2=49=m^2+h^2+2mh$$
$$27=m^2+h^2+mh$$
$$22=mh$$
$$m+h=7$$
$$mh=22$$

$49-4\times 22=-39$; $\sqrt{-39}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 6.

Si tomamos el de 5, será:

$$5^2=25=m^2+h^2+2mh$$
$$27=m^2+h^2+mh$$
$$-2=mh$$

absurdo que nos obliga á lo mismo que tomando el cuadrado de 7.

$$7^2\begin{cases}m=1\\h=6\end{cases}m^2+h^2+mh=43$$

Si tomamos el cuadrado de 8, será:

$$8^2=64=m^2+h^2+2mh$$
$$43=m^2+h^2+mh$$
$$21=mh$$
$$m+h=8$$
$$mh=21$$

$64-4\times 21=-20$; $\sqrt{-20}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 7.

Tomando el de 6, tendrémos:

$$6^2=36=m^2+h^2+2mh$$
$$43=m^2+h^2+mh$$
$$-7=mh$$

absurdo que asimismo nos obliga á tomar el cuadrado de 7.

$$7^2\left\{\begin{matrix} m=2 \\ h=5 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=39$$

Tomando el cuadrado de 8, nos dá:

$$8^2=64=m^2+h^2+2mh$$
$$39=m^2+h^2+mh$$
$$25=mh$$
$$m+h=8$$
$$mh=25$$

$64-4\times25=-36$; $\sqrt{-36}$ imaginaria que nos obliga á tomar el cuadrado verdadero de 7.

Si tomamos el de 6, será:

$$6^2=36=m^2+h^2+2mh$$
$$39=m^2+h^2+mh$$
$$-3=mh$$

absurdo que nos impone la misma obligacion anterior.

$$7^2 \left\{ \begin{matrix} m=3 \\ h=4 \end{matrix} \right\} m^2+h^2+mh=37$$

Tomando el cuadrado de 8, dará:

$$8^2=64=m^2+h^2+2mh$$
$$37=m^2+h^2+mh$$
$$27=mh$$
$$m+h=8$$
$$mh=27$$

$64-4\times 27=-44$; $\sqrt{-44}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 7.

Si tomamos el de 6, será:

$$6^2=36=m^2+h^2+2mh$$
$$37=m^2+h^2+mh$$
$$-1=mh$$

absurdo que asimismo nos impone la obligacion anterior.

$$7^2 \begin{Bmatrix} m=2 \\ h=5 \end{Bmatrix} m^2+h^2+mh=57$$

Si tomamos el cuadrado de 9, será:

$$\begin{aligned} 9^2=81&=m^2+h^2+2mh \\ 57&=m^2+h^2+mh \\ 24&=mh \\ m+h&=9 \\ mh&=24 \end{aligned}$$

$81-4\times24=-15$; $\sqrt{-15}$ imaginaria que nos obliga á tomar el cuadrado de 8.

Si tomamos el de 7, será:

$$\begin{aligned} 7^2=49&=m^2+h^2+2mh \\ 57&=m^2+h^2+mh \\ -12&=mh \end{aligned}$$

absurdo que nos obliga como el anterior á tomar el cuadrado de 8.

$$8^2 \begin{Bmatrix} m=2 \\ h=6 \end{Bmatrix} m^2+h^2+mh=52$$

Si tomamos el cuadrado de 9, será:

$$\begin{aligned} 9^2=81=m^2+h^2+2mh \\ 52=m^2+h^2+mh \\ 29=mh \\ m+h=9 \\ mh=29 \end{aligned}$$

$81-4\times29=-35$; $\sqrt{-35}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 8.

Tomando el cuadrado de 7, nos dá:

$$\begin{aligned} 7^2=49=m^2+h^2+2mh \\ 52=m^2+h^2+mh \\ -3=mh \end{aligned}$$

absurdo por el cual debemos tomar el cuadrado de 8.

$$8^2 \begin{Bmatrix} m=3 \\ h=5 \end{Bmatrix} m^2+h^2+mh=49$$

Si tomamos el cuadrado de 9, será:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$49=m^2+h^2+mh$$
$$32=mh$$
$$m+h=9$$
$$mh=32$$

$81-4\times32=-47$; $\sqrt{-47}$ imaginaria que nos obliga á tomar el cuadrado de 8.

Tomando el de 7, tendremos:

$$7^2=49=m^2+h^2+2mh$$
$$49=m^2+h^2+mh$$
$$0=mh$$

absurdo, puesto que para ser $mh=0$ es preciso que $m=0$ ó $h=0$, lo cual no es del presente caso, en que siendo $y>x$ $z>y$ no puede verificarse ninguno de dichos dos valores, y por lo tanto nos obliga á tomar el cuadrado inmediato, que es el verdadero.

$$8^2\left\{\begin{matrix} m=4 \\ h=4 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=48$$

Si tomamos el cuadrado de 9, será:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$48=m^2+h^2+mh$$
$$33=mh$$
$$m+h=9$$
$$mh=33$$

$81-4\times33=-51$; $\sqrt{-51}$ imaginaria que nos hace tomar el verdadero cuadrado de 8.

Tomando el de 7, tendremos:

$$7^2=49=m^2+h^2+2mh$$
$$48=m^2+h^2+mh$$
$$1=mh$$

absurdo tambien, puesto que para que se verifique $mh=1$ es preciso que $m=1$ $h=1$, cuyos valores no pueden dar $m^2+h^2+mh=48$; y por lo tanto, nos obliga asimismo á tomar el cuadrado verdadero.

$$9^2\left\{\begin{matrix} m=1 \\ h=8 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=73.$$

Si tomamos el cuadrado de 10, será:

$$10^2=100=m^2+h^2+2mh$$
$$73=m^2+h^2+mh$$
$$27=mh$$

$100-4\times27=-8$; $\sqrt{-8}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 9.

Tomando el de 8 nos dará:

$$8^2=64=m^2+h^2+2mh$$
$$73=m^2+h^2+mh$$
$$-9=mh,$$

absurdo que nos impone la misma obligacion anterior.

$$9^2\left\{\begin{matrix} m=2 \\ h=7 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=67.$$

Si tomamos el cuadrado de 10, nos dará:

$$10^2=100=m^2+h^2+2mh$$
$$67=m^2+h^2+mh$$
$$33=mh$$
$$m+h=10$$
$$mh=33$$

$100-4\times33=-32$; $\sqrt{-32}$ imaginaria que produce el mismo efecto que las anteriores.

Si tomamos el cuadrado de 8, será:

$$\begin{aligned} 8^2 = 64 = m^2 + h^2 + 2mh \\ 67 = m^2 + h^2 + mh \\ -3 = mh, \end{aligned}$$

absurdo que nos hace tomar el verdadero cuadrado de 9.

$$9^2 \left\{ \begin{matrix} m=3 \\ h=6 \end{matrix} \right\} m^2 + h^2 + mh = 63.$$

Si tomamos el cuadrado de 10, dará:

$$\begin{aligned} 10^2 = 100 = m^2 + h^2 + 2mh \\ 63 = m^2 + h^2 + mh \\ 37 = mh \\ m + h = 10 \\ mh = 37 \end{aligned}$$

$100 - 4 \times 37 = -48$; $\sqrt{-48}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 9.

Si tomamos el de 8, tendremos:

$$8^2 = 64 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$63 = m^2 + h^2 + mh$$
$$1 = mh,$$

absurdo que se repitió más arriba, y cuya explicacion es aplicable á este caso, puesto que siendo $m=1$ $h=1$, no puede ser $m^2+h^2+mh=63$, y por lo tanto nos vemos obligados á tomar el verdadero cuadrado, que es 9.

$$9^2 \left\{ \begin{matrix} m=4 \\ h=5 \end{matrix} \right\} m^2+h^2+mh=61.$$

Si tomamos el cuadrado de 10, será:

$$10^2 = 100 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$61 = m^2 + h^2 + mh$$
$$39 = mh$$
$$m + h = 10$$
$$mh = 39$$

$100 - 4 \times 39 = -56$; $\sqrt{-56}$, imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 9.

Si tomamos el de 8, será:

$$8^2=64=m^2+h^2+2mh$$
$$61=m^2+h^2+mh$$
$$3=mh$$
$$m+h=8$$
$$mh=3$$
$$64-4\times 3=52$$

Aquí ya no resulta absurdo manifiesto, por lo que en lugar de tomar el cuadrado de 9, pudiéramos tomar el de 7, y será:

$$7^2=49=m^2+h^2+2mh$$
$$61=m^2+h^2+mh$$
$$-12=mh;$$

aquí sí tenemos ya el absurdo que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado de 9.

$$10^2\begin{Bmatrix} m=1 \\ h=9 \end{Bmatrix} m^2+h^2+mh=91.$$

Tomando el cuadrado de 11, resulta:

$$11^2=121=m^2+h^2+2mh$$
$$91=m^2+h^2+mh$$
$$30=mh$$
$$m+h=11$$
$$mh=30$$
$$121-4\times 30=1;\ \sqrt{1}$$

Aquí ya no resulta raiz imaginaria que nos obligue á buscar el cuadrado de 10, por lo que en lugar de tomar este, pudiéramos tomar el de 12, y será:

$$12^2=144=m^2+h^2+2mh$$
$$91=m^2+h^2+mh$$
$$53=mh$$
$$m+h=12$$
$$mh=53$$
$$144-4\times 53=-68;\ \sqrt{-68}$$

Aquí encontramos ya la raiz imaginaria, que nos obliga á tomar el cuadrado verdadero.

Si tomamos el de 9, será:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$91=m^2+h^2+mh$$
$$-10=mh$$

absurdo que nos impele á tomar el cuadrado verdadero de 10.

$$10\left\{\begin{matrix} m=2 \\ h=8 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=84.$$

Si tomamos el cuadrado de 11, será:

$$\begin{aligned} 11^2=121&=m^2+h^2+2mh \\ 84&=m^2+h^2+mh \\ 37&=mh \\ m+h&=11 \\ mh&=37 \end{aligned}$$

$121-4\times37=-27$; $\sqrt{-27}$, imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado, que es el de 10.

Si tomámos el de 9, resulta:

$$\begin{aligned} 9^2=81&=m^2+h^2+2mh \\ 84&=m^2+h^2+mh \\ -\ 3&=mh \end{aligned}$$

absurdo que tambien nos pone en la necesidad de tomar el verdadero cuadrado de 10.

$$10^2 \left\{ \begin{matrix} m=3 \\ h=7 \end{matrix} \right\} m^2+h^2+mh=79$$

Tomando el cuadrado de 11, tenemos:

$$11^2=121=m^2+h^2+2mh$$
$$79=m^2+h^2+mh$$
$$42=mh$$
$$m+h=11$$
$$mh=42$$

$121-3\times 42=-47$; $\sqrt{-47}$ imaginaria que nos obliga á tomar el cuadrado verdadero.

Si tomamos el de 9, tendrémos:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$79=m^2+h^2+mh$$
$$2=mh$$

Aquí no se presenta un absurdo manifiesto, por lo que, continuando las operaciones, y viendo que no nos daba el resultado deseado, pudiéramos, al cambiar de cuadrado, tomar el de 8 en lugar del de 9, y será:

$$8^2=64=m^2+h^2+2mh$$
$$79=m^2+h^2+mh$$
$$-15=mh$$

aquí ya se presenta el absurdo á obligarnos á tomar el cuadrado verdadero.

$$10^2\begin{Bmatrix} m=4 \\ h=6 \end{Bmatrix} m^2+h^2+mh=76$$

Si tomamos el cuadrado de 11, será:

$$\begin{aligned} 11^2=121=m^2+h^2+2mh \\ 76=m^2+h^2+mh \\ 45=mh \\ m+h=11 \\ mh=45 \end{aligned}$$

$121-4\times45=-59$; $\sqrt{-59}$ imaginaria que nos pone en el caso de tomar el cuadrado de 10 que es el correspondiente.

Tomando el cuadrado de 9, tendrémos:

$$\begin{aligned} 9^2=81=m^2+h^2+2mh \\ 76=m^2+h^2+mh \\ 5=mh \end{aligned}$$

Aquí no hay absurdo manifiesto que nos obligue á tomar el cuadrado de 10, por lo que, continuando las operaciones, y viendo que debíamos tomar otro cuadrado más alto ó más bajo, pudiéramos tomar el de 8, y será:

$$\begin{aligned} 8^2=64=m^2+h^2+2mh \\ 76=m^2+h^2+mh \\ -12=mh \end{aligned}$$

Aquí tenemos ya el absurdo que nos impele á tomar el verdadero cuadrado.

$$10^2\left\{\begin{matrix} m=5 \\ h=5 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=75$$

Si tomamos el cuadrado de 11, será:

$$11^2=121=m^2+h^2+2mh$$
$$75=m^2+h^2+mh$$
$$46=mh$$
$$m+h=11$$
$$mh=46$$

$121-4\times46=-63$; $\sqrt{-63}$ imaginaria que nos hará tomar el verdadero cuadrado.

Si tomamos el de 9, tendrémos:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$75=m^2+h^2+mh$$
$$6=mh$$

Tampoco hay aquí absurdo manifiesto, por lo que continuaríamos nuestras operaciones hasta ver que debíamos cambiar de cuadrado: y en lugar de tomar el superior, que es el verdadero, pudiéramos tomar el de 8, y tendrémos:

$$8^2=64=m^2+h^2+2mh$$
$$75=m^2+h^2+mh$$
$$-11=mh$$

absurdo que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado.

$$11^2\left\{\begin{matrix} m=1 \\ h=10 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=111$$

Si tomamos el cuadrado de 12, será:

$$12^2=144=m^2+h^2+2mh$$
$$111=m^2+h^2+mh$$
$$33=mh$$
$$m+h=12$$
$$mh=33$$
$$144-4\times33=12;\quad \sqrt{12}=\text{etc.}$$

Aquí no hay absurdo manifiesto que nos obligue á cambiar de cuadrado, por lo que seguiriamos nuestras operaciones hasta ver que este no era el que buscábamos; y en lugar de tomar el inmediato inferior, que es el verdadero, pudiéramos tomar el inmediato superior, que es el de 13, y tendrémos:

$$13^2=169=m^2+h^2+2mh$$
$$111=m^2+h^2+mh$$
$$58=mh$$
$$m+h=13$$
$$mh=58$$

$169-4\times 58=-63$; $\sqrt{-63}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado.

$$11^2\begin{Bmatrix} m=2 \\ h=9 \end{Bmatrix} m^2+h^2+mh=103$$

Si tomamos el cuadrado de 12, tendrémos:

$$12^2=144=m^2+h^2+2mh$$
$$103=m^2+h^2+mh$$
$$41=mh$$
$$m+h=12$$
$$mh=41$$

$144-4\times 41=-20$; $\sqrt{-20}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado.

Si tomamos el de 10, será:

$$10^2=100=m^2+h^2+2mh$$
$$103=m^2+h^2+mh$$
$$-3=mh$$

absurdo que tambien nos pone en la necesidad de tomar el cuadrado verdadero.

$$11^2\begin{cases} m=3 \\ h=8 \end{cases} m^2+h^2+mh=97$$

Si tomamos el cuadrado de 12, será:

$$12^2=144=m^2+h^2+2mh$$
$$97=m^2+h^2+mh$$
$$47=mh$$
$$m+h=12$$
$$mh=47$$

$144-4\times47=-44$; $\sqrt{-44}$ imaginaria que nos pone en el caso de tomar el verdadero cuadrado.

Si tomamos el de 10, será:

$$10^2=100=m^2+h^2+2mh$$
$$97=m^2+h^2+mh$$
$$3=mh$$

Aquí no hay absurdo manifiesto que nos obligue tomar el verdadero cuadrado; por lo que continuando nuestras operaciones, veríamos que debíamos cambiar de cuadrado; y en lugar de tomar el inmediato superior pudiéramos hacerlo con el inmediato inferior, que es el de 9, y tendrémos:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$97=m^2+h^2+mh$$
$$-16=mh$$

absurdo que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado.

$$11^2\begin{cases}m=4\\h=7\end{cases}m^2+h^2+mh=93$$

Si tomamos el cuadrado de 12, será:

$$12^2=144=m^2+h^2+2mh$$
$$93=m^2+h^2+mh$$
$$51=mh$$
$$m+h=12$$
$$mh=51$$

$144-4\times51=-60$; $\sqrt{-60}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado.

Si tomamos el de 10, será:

$$10^2 = 100 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$93 = m^2 + h^2 + mh$$
$$7 = mh$$

Tampoco hay aquí manifiesto absurdo; por lo que continuaríamos nuestras operaciones hasta convencernos de que debíamos tomar otro cuadrado; y en lugar de tomar el inmediato superior, que es el verdadero, pudiéramos tomar el inmediato inferior, y será:

$$9^2 = 81 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$93 = m^2 + h^2 + mh$$
$$-12 = mh$$

absurdo que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado

$$11^2 \begin{Bmatrix} m=5 \\ h=6 \end{Bmatrix} m^2 + h^2 + mh = 91$$

Si tomamos el cuadrado de 12, será:

$$12^2 = 144 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$91 = m^2 + h^2 + mh$$
$$53 = mh$$
$$m + h = 12$$
$$mh = 53$$

$144 - 4 \times 53 = -68$; $\sqrt{-39}$ imaginaria que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado.

Si tomamos el de 10, será:

$$10^2=100=m^2+h^2+2mh$$
$$91=m^2+h^2+mh$$
$$9=mh$$

Aquí no hay absurdo manifiesto que nos obligue á cambiar de cuadrado; seguiríamos, pues, nuestras operaciones hasta que el resultado nos hiciese conocer aquella necesidad; y en lugar de tomar el cuadrado inmediato superior, que es el verdadero, pudiéramos tomar el inmediato inferior, que es el de 9, y será:

$$9^2=81=m^2+h^2+2mh$$
$$91=m^2+h^2+mh$$
$$-10=mh$$

resultado absurdo que nos obliga á tomar el verdadero cuadrado.

35 En los cuadrados que llevamos examinados, hemos visto que la fórmula $N=m^2+h^2+mh$, responde perfectamente al objeto, puesto que con la mayor facilidad nos conduce á tomar el cuadrado que nos ha de dar los valores de m y h.

36 No faltaria quien creyese esta prueba suficiente; pero nosotros nos vemos en la necesidad de repetir el mismo exámen en algun cuadrado más alto para ver el resultado. Verificándolo así con el cuadrado de 82, tendrémos:

$$82^2\left\{\begin{matrix} m=2 \\ h=80 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=6564.$$

Si tomamos el cuadrado de 83, será:

$$\begin{aligned} 83^2=6889&=m^2+h^2+2mh \\ 6564&=m^2+h^2+mh \\ 325&=mh \\ m+h&=83 \\ mh&=325 \end{aligned}$$

$$6889-4\times325=5589;\ \sqrt{5589}=\text{etc.}$$

Aquí no resulta absurdo manifiesto; por lo que continuaríamos nuestras operaciones hasta que el resultado nos enseñára que debíamos tomar otro cuadrado. Y como podríamos tomar el inmediato inferior, pudiéramos tambien tomar el inmediato superior, y será:

$$84^2 = 7056 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$6564 = m^2 + h^2 + mh$$
$$492 = mh$$
$$m + h = 84$$
$$mh = 492$$
$$7056 - 4 \times 492 = 5088;\ \sqrt{5088} = \text{etc.}$$

Aquí sucede lo mismo que en el anterior, por lo que aun podemos tomar un cuadrado mas alto. Pero no solo aumentarémos una unidad al último cuadrado tomado, sino que le añadirémos 9 unidades y será el cuadrado de 93.

$$93^2 = 8649 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$6564 = m^2 + h^2 + mh$$
$$2085 = mh$$
$$m + h = 93$$
$$mh = 2085$$
$$8649 - 4 \times 2085 = 309;\ \sqrt{309} = \text{etc.}$$

Todavía no resulta absurdo manifiesto, por lo que aun podemos tomar un cuadrado mas alto.

$$94^2 = 8836 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$6564 = m^2 + h^2 + mh$$
$$2272 = mh$$
$$m + h = 94$$
$$mh = 2272$$
$$8836 - 4 \times 2272 = -252;\ \sqrt{-252}\ \text{imaginaria}$$

que al fin nos hubiera hecho conocer que debíamos retroceder todos los 12 cuadrados recorridos hasta hallar el de 82, que es el verdadero.

Si tomamos el cuadrado inmediato inferior á 82, será:

$$81^2=6561=m^2+h^2+2mh$$
$$6564=m^2+h^2+mh$$
$$-3=mh$$

Vémos que si bien tomando los cuadrados superiores nos exponíamos á tener que recorrer 12 cuadrados, si tomamos el inmediato inferior nos obliga á tomar el verdadero. Todavía, pues, podemos confiar en la fórmula $N=m^2+h^2+mh$, pues todo está reducido á tomar el cuadrado inmediato superior y el inferior.

$$82\left\{\begin{matrix} m=25 \\ h=57 \end{matrix}\right\} m^2+h^2+mh=5299$$

Si tomamos el cuadrado 83, será:

$$83^2=6889=m^2+h^2+2mh$$
$$5299=m^2+h^2+mh$$
$$1590=mh$$
$$m+h=83$$
$$mh=1590$$
$$6889-4\times1590=529;\ \sqrt{529}=\text{etc.}$$

Como no resulta absurdo manifiesto, continuaríamos nuestras operaciones, y por fin vendríamos á tomar el cuadrado de 84, y nos sucederia lo mismo; y solo en el cuadrado de 85 hallaríamos el absurdo. Sin embargo, el tener que ensayar tres cuadrados no es mucho, pues las operaciones son bien sencillas.

37 Tomando los cuadrados inferiores, veríamos que teníamos que ensayar 10 cuadrados hasta encontrar el absurdo. Y si bien es cierto que no es probable diese la casualidad que entre los 13 cuadrados que median entre 72 y 85 dejásemos para el último el de 82, tambien lo es que no siempre se halla el absurdo en el cuadrado inmediato superior ó inferior del verdadero, sino que se halla algunos cuadrados más alto ó más bajo. Mas, preguntará cualquiera, si el cuadrado que tomamos es alto, ¿no nos dará unos valores para m y h, que sustituidos en la ecuacion $N=m^2+h^2+mh$ darán un resultado mayor que h? Y si por la inversa es bajo, ¿no será este resultado menor que N? Y siendo esto así, ¿no podrá evitarse el tener que ensayar sucesivamente todos los cuadrados comprendidos entre los límites superior é inferior? A estas preguntas van á responder los hechos.

Supongamos, por ejemplo, en el cuadrado de 100, que tenemos:

$$100^2 \begin{cases} m=78 \\ h=22 \end{cases} m^2+h^2+mh=8284$$

Tomemos un par de cuadrados más altos que el de 100, y otro par más bajos, y sea el primero de aquellos el de 101, y tendrémos:

$$101^2=10201=m^2+h^2+2mh \ (1)$$
$$8284=m^2+h^2+mh \ ..... \ (2)$$
$$1917=mh$$
$$m+h=101$$
$$mh=1917$$
$$101^2-4\times1917=2533=(m-h)^2 \text{ ó } (h-m)^2$$

Extrayendo la raíz de ambos miembros, sacando los valores de m y h, y sustituyéndolos en la ecuacion (2), nos dá:

$$m^2+h^2+mh=8283,999996762681<8284$$

Vemos por este resultado, que á pesar de haber tomado un cuadrado mayor que el correspondiente á $8284=m^2+h^2+mh$, no hemos podido lograr que superase á 8284

Probemos con un cuadrado más alto, y para que la diferencia sea más perceptible, pasemos del cuadrado de 101, que hemos tomado, al de 103, y tendrémos:

$$103^2=10609=m^2+h^2+2mh \; (3)$$
$$8284=m^2+h^2+mh \; (4)$$
$$2325=mh$$
$$m+h=103$$
$$mh=2325$$
$$103^2-4\times2425=1309=(m-h)^2 \text{ ó } (h-m)^2$$

Extrayendo la raíz de ambos miembros, sacando los valores de m y h, y sustituyéndolos en la ecuacion (4), nos dá:

$$m^2+h^2+mh=8283{,}99999945275625<8284$$

Como en el anterior cuadrado, vemos que tampoco hemos podido conseguir que el resultado de la sustitucion fuese mayor que 8284.

Si, pues, con los cuadrados más altos no hemos podido lograrlo, claro es que ménos lo conseguirémos con los inferiores. Sin embargo, vamos á observar si guardan entre sí alguna regularidad, y si podrémos sacar de ella algun partido. Tomemos los cuadrados de 95 y 96, veamos sus resultados y despues razonarémos.

$$95^2 = 9025 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$8284 = m^2 + h^2 + mh \;\ldots\ldots\; (5)$$
$$741 = mh$$
$$m + h = 95$$
$$mh = 741$$
$$95^2 - 4 \times 741 = 6061 = (m-h)^2 \text{ ó } (h-m)^2$$

Extrayendo la raíz de ambos miembros, sacando los valores de m y h, y sustituyéndolos en la ecuacion (5), nos dá:

$$m^2 + h^2 + mh = 8283{,}999980668944 < 8284$$

Tomemos ahora el cuadrado de 96 para compararlo con el de 95, y será:

$$96^2 = 9216 = m^2 + h^2 + 2mh$$
$$8284 = m^2 + h^2 + mh \;\ldots\ldots\; (6)$$
$$932 = mh$$
$$m + h = 96$$
$$mh = 932$$
$$96^2 - 4 \times 932 = 5488 = (m-h)^2 \text{ ó } (h-m)^2$$

Sacando los valores de m y h, y sustituyéndolos en la ecuacion (6), nos dá:

$$m^2 + h^2 + mh = 8283{,}999983708324 < 8284$$

Comparando ambos resultados, parece observarse que la sustitucion de las raices sacadas con el cuadrado de 96, es mayor que la del 95. Tomemos, pues, el cuadrado de 98, y comparémos su resultadó con los anteriores:

$$98^2=9604=m^2+h^2+2mh$$
$$8284=m^2+h^2+mh$$
$$1320=mh$$
$$m+h=98$$
$$mh=1320$$
$$98^2-4\times1320=4484=(m-h)^2 \text{ ó } (h-m)^2$$

Sacando los valores de m y h, y haciendo la sustitucion, tenemos:

$$m^2+h^2+mh=8283,999970702096<8284$$

38. Comparando este resultado con los anteriores, vémos que no guardan entre sí ninguna regularidad; pues si bien el resultado del cuadrado de 96 es mayor que el de 95, el de 98 es menor que estos dos á pesar de haber tomado igual número de cifras decimales en todos ellos. Tenemos, pues, que no es posible sacar más ventajas que las obtenidas por la fórmula $N=m^2+h^2+mh$. Digamos ahora las razones que existen, tanto para que el resultado de

la sustitucion no pueda ser mayor que N, cuanto para que no ofrezcan regularidad los resultados de las sustituciones comparados entre sí.

39. Al restar de un cuadrado el cuádruplo de mh (si aquel no es el de $m+h$) nos resulta un número que no puede tener raíz exacta, puesto que mh no figura con su verdadero valor; y como de dicha resta tenemos que extraer la raíz cuadrada y sumarla con $m+h$ para sacar los valores de m y h, resulta que siempre tiene que faltar la raíz del resíduo cuyo defecto sacan m y h. Así que al hacer la sustitucion, el resultado es menor que N.

40. El no ofrecer regularidad en sus magnitudes los resultados de dos cuadrados consecutivos, consiste en que si al extraer la raíz del supuesto $(m+h)^2-4mh$ tomamos en ambos casos un número de cifras decimales, como hemos hecho en los ejemplos propuestos, resultará que si el resíduo de la raíz en el cuadrado menor es mayor que el resíduo de la raíz en el cuadrado mayor, el resultado de la sustitucion de los valores de m, h en $N=m^2+h^2+mh$, será mayor en aquel que en este, y viceversa.

41. Volviendo, pues, á nuestro objeto, vémos que la fórmula $N=m^2+h^2+mh$, es mucho más ventajosa que la de $N=m^2+n^2-mn$, y que con ella se pueden resolver las ecuaciones de tercer

grado con sus tres raices desiguales, si bien en algunos casos hay que ensayar varios cuadrados para buscar el que nos haya de dar los verdaderos valores de $m=y-x$, $h=z-y$.

42. Sin embargo, como alguna vez puede esto ser operacion algo larga, aunque no difícil, hemos discurrido un medio que evita completamente este inconveniente, y que proporciona la resolucion de las ecuaciones en general con la mayor prontitud, facilidad y sencillez, y es el que vamos á exponer.

FORMACION DE TABLAS.

DE LAS DIFERENCIAS ENTRE LAS RAICES DE UNA ECUACION DE CUALQUIER GRADO.

43. Hemos demostrado (6) que una ecuacion, cualquiera que sea su grado, tiene tantas raices como indica el exponente de su grado; hemos establecido (20) que el órden de magnitudes de las raices sea gradual de menor á mayor, siendo x la menor, $y=$ ó $>x$, $z=$ ó $>y$, etc., etc.; y por último, hemos hecho nacer de x las diferencias, llamando m á la diferencia $y-x$, $n=z-x$, $p=u-x$, etc., etc. De este modo ha resultado que la suma de las raices está representada por la suma

de x, tomada tantas veces cuantas sean las raices de la ecuacion, más las diferencias $y-x$, $z-x$, $u-x$, etc., etc. Si, pues, hallamos un medio de conocer estas diferencias, su suma, restada de la de las raices de la ecuacion propuesta, nos dará el valor de x multiplicado por el número de las raices que es el exponente del grado de aquella; y dividiendo dicha resta por el expresado exponente, que será el coeficiente de x, nos dará el valor de x, ó sea el de la menor de las raices. Hallado este no tenemos más que sumar con él la diferencia $m=y-x$, y nos dará el valor de y; sumar con x el de $n=z-x$, y tendrémos el de z, etc., etc.

44. Vémos, pues, que halladas las diferencias m, n, p, q, etc., etc., nada mas fácil, breve y sencillo, que resolver una ecuacion de cualquier grado que sea.

45. Contrayéndonos ahora á las ecuaciones de tercer grado con raices desiguales, que es el caso que nos ocupa, hemos visto (27) que restando del cuadrado de la suma de las raices el triplo de su producto binario, nos resulta la fórmula m^2+n^2-mn, ó sea la suma de los cuadrados de las diferencias m, n, menos el producto de ambas diferencias. Si, pues, formamos una tabla que contenga las diferencias 1 y 1, 1 y 2, 1 y 3, 1 y 4, 1 y 5, etc., etc., 2 y 2, 2 y 3, 2 y 4, 2 y 5, etc., etc.,

3 y 3, 3 y 4, 3 y 5, 3 y 6, etc., etc., 4 y 4, 4 y 5, 4 y 6, 4 y 7, etc., etc., representando estos números los valores de m, n, y al lado ponemos el número producido por m^2+n^2-mn, tendrémos que, buscando en las tablas el número que nos ha resultado de restar del cuadrado de la suma de las raices el triplo de su producto binario, verémos al lado de este número los valores de m, n, ó sea de las diferencias $y-x$; $z-x$: y como todas las ecuaciones que tengan unas mismas diferencias nos darán por resultado de dicha resta el mismo número, tenemos que, siendo infinito el número de las ecuaciones que pueden formarse con unas mismas diferencias, cada número de las tablas sirve para resolver infinito número de ecuaciones. Pero como hemos visto (33) que $m^2+n^2-mn=m^2+h^2+mh$, y que esta fórmula tiene ventajas grandes sobre aquella, en lugar de poner en las tablas los valores de m, n pondremos los de m, h, lo cual tiene la ventaja de darnos á conocer á un solo golpe de vista el valor de n que sabemos (33) es $n=m+h$, y los dos valores que puede tener m, que son tanto el representado por m como por h.

46. Si tuviésemos que hacer tablas de números positivos y negativos, como tambien de enteros y de decimales, desde luégo podria asegurarse que la formacion de tales tablas seria una obra magna por

mas de un concepto; pero no es así, como vamos á explicar.

47. Las diferencias $y-x$, $z-x$, $u-x$, etc., etc., nunca pueden ser negativas aunque lo sean todas ó algunas de las raices, puesto que $y =$ ó $> x$, $z =$ ó $> y$, $u = > z$, y por consiguiente nada tenemos que hacer con los números negativos. Tampoco tenemos que hacer tablas de números decimales ni mixtos, puesto que la sola tabla de números enteros sirve para las diferencias fraccionarias, como explicaremos en el uso de las tablas. Y por último, aun hay que descartar de estas todos los cuadrados perfectos que no sean el resultado de m^2+h^2+mh. Finalmente, para la formacion de estas tablas no hay que tomarse el trabajo (pequeño en las de 3.^{er} grado, pero grande en las de 4.°, 5.°, etc.) de ir verificando los cuadrados de m y h, y sumarlos con el producto mh en las de 3.^{er} grado, de m, n, p en las de 4.°, etc., etc.: sino que verificada la primera operacion que nos dá $=N$ en las de 3.°, y $3N$ en las de 4.°, no hay mas que añadir al anterior el término correspondiente de la progresion 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc., que guardan entre sí las diferencias de los cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. Y en las de 4.° grado multiplicarlas por 3 á causa de ser $3N$ lo que se busca en lugar de N. Por consiguiente,

nada más fácil que la formacion de estas tablas.

USO DE LAS TABLAS DE DIFERENCIAS.

48. Si N [1] es número entero, lo buscarémos en las tablas, y á su lado verémos los valores de m, h, con los cuales haremos lo que se dirá en la resolucion de las ecuaciones de 3.er grado.

49. Si N es número decimal, claro es que m ó h ó ambos son decimales. En los dos casos resultará que como $N=m^2+h^2+mh$ tendrá N doble número de cifras decimales que m ó h; y por consiguiente, si N tiene por ejemplo 8 cifras decimales, m ó h ó ambos tendrán 4 que al elevarse al cuadrado se habrán convertido en 8, que solo representarán diezmilésimas en m y h. Si, pues, prescindimos dela coma decimal y buscamos á N en las tablas, como si fuera número entero, las diferencias de m, h que nos presenta estarán multiplicadas por 10000, por lo cual las dividiremos por 10000, poniendo la coma decimal entre la cuarta y la quinta cifra de cada uno de dichos valores, empezando por la derecha: y si alguno de ellos no tu-

---

(1) Recuérdese que N es el resultado de restar del cuadrado de la suma de las raices el triplo de su producto binario (29).

viese suficiente número de cifras, se le agregarán los ceros necesarios.

Ejemplo: supongamos $N=39,06603025$. Estas ocho cifras decimales provienen de que m ó h tienen 4, ó de que cada uno las tiene: tanto en un caso como en otro, el cuadrado de m ó de h ó la suma de ambos ha producido aquellas 8 cifras: luégo si prescindimos de la coma, multiplicamos por diez mil los valores de m y de h, y por consiguiente debemos despues dividirlos tambien por diez mil. Así, pues, vémos que en las tablas el número 3906603025 nos dá las diferencias $m=20000$ y $h=50055$. Dividiendo estos valores por 10000 resulta $m=2$ $h=5,0055$, que son las diferencias que corresponden á 39,06603025,

Pudiera ocurrir tambien que al buscar á N en las tablas, lo hallásemos seguido de uno ó más ceros, en cuyo caso debemos considerar á N como seguido de igual número de ceros, pues consiste esto en que, como en decimales se desprecian los ceros á la derecha, y en enteros no, al sumarse el producto mh con m^2+h^2, han podido resultar decenas completas ó unidades completas de órden superior, resultando ceros á la derecha que se suprimen.

50. Por último, si N no se halla en las tablas, será necesariamente un cuadrado perfecto; y entónces será señal cierta de que la ecuacion tiene

dos raices iguales, y se ejecutará lo dicho (25).

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE 3.er GRADO.

51. Explicado ya el uso de las tablas de diferencias, muy poco tenemos que decir para lograr el objeto que nos propusimos; pues la resolucion de las ecuaciones de tercer grado (lo mismo que la de grado superior) es una operacion sumamente corta y sencilla.

52. Al presentársenos una ecuacion de tercer grado para resolverla, restarémos del cuadrado de la suma de las raices el triplo de su producto binario, y tendrémos N, que buscarémos en las tablas. Si no se halla allí, necesariamente N será un cuadrado perfecto; y teniendo presente lo dicho (25), sacarémos en seguida el valor de las raices.

53. Si N está en las tablas, tomarémos las diferencias que nos marque; y teniendo presente (27) que la fórmula de las sumas de las raices es $x+y+z=3x+m+n$ y que $n=m+h$ (33), sustituirémos en esta fórmula los valores de m,n, tomando al efecto $n=m+h$, y para m uno de los dos valores m ó h. Pasarémos despues al primer miembro dichos valores, y tendrémos $x+y+z-m-n=3x$; y dividiendo por 3 nos dará el valor de x. Hallado este, como sabemos (27) que $y=x+m$ $z=x+n$, tenemos ya tres valores de

x, y, z, que podrán ser las verdaderas raices de la ecuacion propuesta, y podrán no serlo. Para asegurarnos de si lo son, verificarémos su producto, y lo compararémos con el último término de la dicha ecuacion, al cual debe ser igual si son las verdaderas raices. Si este producto no fuese igual á dicho último término, tomarémos el otro valor de m, que es el de h, y juntamente con $n=m+h$, sacarémos nuevos valores de x, y, z, que con seguridad serán las verdaderas raices, y la ecuacion queda resuelta. Un par de ejemplos pondrán de manifiesto las verdades enunciadas. Mas ántes debemos hacer una advertencia, y es la siguiente:

54. Si N está en las tablas, y al practicar lo dicho (53) no sacásemos las verdaderas raices, entónces será porque siendo N un cuadrado perfecto, la resolucion de la ecuacion será la explicada en los números (25) y (26).

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^3-18x^2+87x-110=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=18$$
$$xy+xz+yz=87$$

Restando del cuadrado de la primera el triplo de la segunda, será:

$$18^2-3\times 87=63=m^2+h^2+mh$$

Buscarémos en las tablas 63 y verémos que nos dá $m=3$, $h=6$.

Tenemos (33) $n=m+h$; luégo $n=9$. Este valor, y cualquiera de los dos m ó h, los sustituirémos en la fórmula

$$x+y+z=3x+m+n$$

Y como en el presente caso tenemos:

$$x+y+z=18,\text{ será: } 3x+m+n=18:$$

y verificando dicha sustitucion será:

$$3x+6+9=18$$

Dejando solo en el primer miembro á $3x$, será:

$$3x=18-15=3$$

Y dividiendo por 3, dará $x=1$. Sabemos (27) que:

$$y=x+m,\ z=x+n$$

luégo será:

$$y=1+6=7,\ x=1+9=10,\ x+y+z=18.$$

Para saber si estas son las verdaderas raices de la ecuacion, verificarémos su producto, y será:

$$1\times7\times10=70.$$

Pero el último término de la ecuacion (tomado con signo contrario) es 110; luégo estos valores son falsos. Hemos tomado para m el valor de 6: tomarémos el otro que es 3, y con seguridad nos dará ahora el resultado apetecido. Tendrémos, pues,

$$\begin{Bmatrix} m=3 \\ n=9 \end{Bmatrix}$$

y será:

$$3x+3+9=18:\ \text{ó}\ 3x=18-12=6$$

Dividiendo por 3, será.	$x=2$
$y=x+m$ ó $y=2+3$.	$y=5$
$z=x+n$ ó $z=2+9$.	$z=11$
$x+y+z$..	18

El producto de estos valores es 110, igual al último término de la ecuacion, y por consiguiente, la ecuacion está resuelta.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^3-7,33x^2-38,3762x+232,593744=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=7,33$$
$$xy+xz+yz=-38,3762$$

Restando del cuadrado de la primera el triplo de la segunda, será:

$$7,33^2-3\times-38,3762=53,7289-(-115,1286)$$
$$=53,7289+115,1286=168,8575=m^2+h^2+mh.$$

Teniendo presente lo dicho (49), suprimirémos la coma de 168,8575, buscarémos en las tablas el número 1688575, y veremos que nos dá $m=410$, $h=1045$; pero teniendo aquel cuatro cifras decimales, claro es que m ó h, ó ambos, tienen dos: mas como hemos suprimido la coma, lo hemos multiplicado por 10000, y por consiguiente, á las diferencias m h por 100: para que estas, pues, representen sus verdaderos valores, tenemos que dividir por 100 á 410 y 1045, y será:

$$m=4,10,\ h=10,45.$$

Teniendo ahora presente lo dicho (33), tomarémos:

$$m=4,10,\ n=4,10+10,45=14,55$$

cuyos valores sustituirémos en

$$x+y+z=3x+m+n\ (27)$$

y será:

$$3x+m+n=7,33 \text{ ó } 3x+4,10+14,55=7,33.$$

Dejando solo á $3x$ en el primer miembro, será:

$$3x=7,33-18,65 \text{ ó } 3x=-11,32$$

y dividiendo por 3, tendrémos:

$$x=-\frac{11,32}{3}$$

Sabemos (27) que $y=x+m$ luégo, será:

$$y=-\frac{11,32}{3}+4,10 \ldots\ldots\ldots \quad y=\frac{0,98}{3}$$

$$z = x + n \text{ ó } z = -\frac{11,32}{3} + 14,55 \ldots \quad z = \frac{32,33}{3}$$

$$x + y + z \ldots = 7,33$$

Para asegurarnos de si estas son las verdaderas raices, verificarémos su producto, que compararémos con el último término de la ecuacion, que sabemos (9) es igual al producto de las raices, tomado con signo contrario. Haciéndolo así, tendrémos:

$$-\frac{11,32}{3} \times \frac{0,98}{3} \times \frac{32,33}{3} = -13,283558$$

Y como este producto no es igual á 232,593744, vemos que no son estas las verdaderas raices. Tomarémos, pues, el otro valor de m, que es 10,45, y con seguridad obtendrémos el resultado apetecido, y será:

$$3x + m + n = 7,33 \text{ ó } 3x + 10,45 + 14,55 = 7,33$$

$$\text{ó } 3x = 7,33 - 25 = -17,67 \text{ de donde} \ldots \quad x = -5,89$$

$$y = x + m \text{ ó } y = -5,89 + 10,45 \ldots \ldots \quad y = 4,56$$

$$z = x + n \text{ ó } z = -5,89 + 14,55 \ldots \ldots \quad z = 8,66$$

$$x + y + z \ldots = 7,33$$

Si verificamos el producto de estos tres valores, verémos que:

$$-5,89 \times 4,56 \times 8,66 = 232,513744$$

y por consiguiente, ellos son las verdaderas raices de la ecuacion propuesta, la cual queda ya con esto resuelta.

Prácticamente hemos visto la suma facilidad con que se resuelve una ecuacion de tercer grado con el auxilio de las tablas, ya sean positivas ó negativas, enteras ó fraccionarias sus raices.

ECUACIONES INCOMPLETAS DE 3.er GRADO.

55. Hay casos en que una ecuacion de tercer grado carece del segundo término, cuyo coeficiente, como sabemos (9), es igual á la suma de las raices. Pero esto no puede hacer variar nuestro sistema, pues se resuelven estas ecuaciones de igual manera que las completas, como lo verémos en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^3-75x-250=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=0$$
$$xy+xz+yz=-75$$

Restando del cuadrado de la primera el triplo de la segunda, será:

$$0^2-3\times-75=0-(-225)=225$$

cuadrado perfecto que nos indica que puede haber dos raices iguales.

$$\sqrt{225}=15=n$$

Empleando la fórmula propia de este caso (25), que es $x+y+z=3+n$, será:

$3x+n=0$ ó $3x=-n$ ó $3x=-15$ de donde $x=-5$
Tenemos (25) $y=x$, y por consiguiente. . $y=-5$
Asimismo tenemos $z=x+n$; luego.. . . . $z=10$

$$x+y+z=0$$

Verificando el producto de estos valores, vemos que $-5\times-5\times10=250$, que es el producto de las raices: luego las halladas lo son efectivamente.

Si con esta fórmula no hubiésemos sacado las verdaderas raices, hubiésemos empleado la del número (26): y si ni con este las hubiésemos obtenido, entonces seria prueba de que las tres raices eran desiguales, y hubiéramos practicado lo dicho (53), por cuyo medio hubiera quedado definitivamente resuelta la ecuacion.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^3-15,9309x-20,7927=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=0$$
$$xy+xz+yz=-15,9309$$

Restado del cuadrado de la primera el triplo de la segunda, será:

$$0^2-3\times-15,9309=0+47,7927=47,7927=$$
$$=m^2+h^2+mh.$$

Practicando lo dicho (49), buscarémos en las tablas el número 477927, y vemos que nos dá $m=147$ $h=606$; pero como al suprimir la coma hemos multiplicado por 100 estas diferencias, las dividirémos por 100, y será:

$\left.\begin{array}{r} m=1,47 \\ h=6,06 \end{array}\right\}$ Si de estos dos valores tomamos para m

el de 6,06 y $n=7,53$, tendremos (53):

$$3x+m+n=0 \text{ ó } 3x+6,06+7,53=0 \text{ ó } 3x=-13,59$$

Y dividiendo por 3, nos dará. . . . $x=-4,53$

$y=x+m$ ó $y=-4,53+6,06$. . . . $y=-1,53$

$z=x+n$ ó $z=-4,53+7,53$. . . . $z=\ \ 3$

$$x+y+z=-3,06$$

Y como la suma debe ser $=0$, deducimos que no es 6,06 el valor de m, sino $m=1,47$, y tendrémos:

$$3x+m+n=0 \text{ ó } 3x+1,47+7,53=0 \text{ ó } 3x=-9$$

Y dividiendo por 3, será. . . . . . $x=-3$

$y=x+m$ ó $y=-3+1,47$.. . . . . $y=-1,53$

$z=x+n$ ó $z=-3+7,53$. . . . . . $z=\ \ 4,53$

$$x+y+z=0$$

Si verificamos el producto de estos valores, verémos que satisfacen al último término de la ecuacion, y por consiguiente, ellos son sus verdaderas raices.

56. Tambien ocurre que á una ecuacion de tercer grado le falta el tercer término, cuyo coeficiente, como sabemos (9), es igual á la suma de los

productos binarios de las raices; pero esto no presenta el menor obstáculo para su resolucion, pues se halla esta sometida á la ley general, por cuya razon ni en este ni en el caso anterior tenemos que dar una nueva demostracion, y sólo nos limitarémos á poner el siguiente:

EJEMPLO 3.°

Sea la ecuacion:

$$x^3-9x^2-108=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z=9$$
$$xy+xz+yz=0$$

Restando del cuadrado de la primera el triplo de la segunda, será:

$$9^2=81-3\times0=81$$

cuadrado perfecto que nos dice que puede haber dos raices iguales. Practicando, pues, lo dicho (25 y 26), tendrémos:

$$3x+n=9,\ \text{ó}\ 3x+9=9,\ \text{ó}\ 3x=9-9=0$$

Y dividiendo por 3, será:. . . . . $x=0$
$y=x$, por consiguiente. , ... $y=0$
$z=x+n$. . . . . $z=9$

$x+y+z$. . . . . $=9$

Pero el producto $0\times0\times9=0$ no es igual al último término de la ecuacion; y por consiguiente, no son estas las raices. Tomarémos, pues, la otra fórmula (26) $x+y+z=3x+2m$, siendo las raices x, $y=x+m$, $z=x+m$, y será:

$$3x+2m=9, \text{ ó } 3x+18=9, \text{ ó } 3x=9-18=-9$$

Y dividiendo por 3, será. . . . . $x=-3$
$y=x+m$, ó $y=-3+9$. . . . . $y=\ 6$
$z=x+m$, ó $z=-3+9$. . . . . $z=\ 6$

$x+y+z$. . . . . . $=\ 9$

Verificando el producto de estos valores, y comparándolo con el último término de la ecuacion, vemos que son las verdaderas raices, que es lo que se buscaba.

Si con ninguna de ambas fórmulas hubiésemos obtenído las raices de la ecuacion propuesta, las hubiéramos logrado por medio de las tablas.

57. Tambien puede ocurrir el caso en que tengamos una ecuacion que carezca de los térmi-

nos 3.° y 4.°, teniendo sólo el 1.° y 2.°; por ejemplo, $x^3-7x^2=0$; pero esta no puede propiamente llamarse ecuacion de tercer grado, pues segun lo demostrado (6), debia tener tres raices, y no es así.

En tal caso dividirémos ambos miembros por x^2, y se convertirá en $x-7=0$, de donde $x=7$, único valor que la satisface.

ECUACIONES POR RESOLVER.

$$x^3-21x^2+134x-262=0$$
$$x^3-0,89x^2-39,919x-89,735=0$$
$$x^3-25x^2+175x-375=0$$
$$x^3+10,765x^2+7,13765x-100,428895=0$$
$$x^3-20x^2+13x+1014=0$$
$$x^3+3,7x^2+3,36x+0,9=0$$
$$x^3-17,3775x-24,62875=0$$
$$x^3-6,18x^2+34,967264=0$$
$$x^3-147x+686=0$$
$$x^3-12x^2+256=0$$
$$x^3-12,75x^2+307,0625=0$$

ECUACIONES DE 4.° GRADO.

58. En las ecuaciones de 4.° grado pueden ocurrir los casos siguientes:

1.° Que la ecuacion tenga las cuatro raices iguales, en cuyo caso será:

$$x=y=z=u \quad x+y+z+u=4x$$

2.° Que tengan las raices dos sólos valores, lo cual puede verificarse de cualquiera de los modos siguientes, que llamarémos subdivisiones.

([1]) 1.ª *subdivision.* Las raices primera, segunda y tercera son iguales, y menores que la cuarta, en cuyo caso estarán representadas por

$$x,\ y=x,\ u=x+p$$

siendo la suma de ellas

$$x+y+z+u=4x+p$$

2.ª *subdivision.* Las raices primera y segunda son iguales, como tambien tercera y cuarta; pero estas, mayores que aquellas. En este caso estarán representadas por:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+n$$

([1]) Recuérdese que $m=y-x$. $n=z-x$. $p=u-x$, y $p>n$, $n>m$. Véase el número (20).

siendo la suma de ellas

$$x+y+z+u=4x+2n$$

3.ª *subdivision.* Las raices segunda, tercera y cuarta son iguales y mayores que x, estando representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+m$$

y la suma es:

$$x+y+z+u=4x+3m$$

3.er caso. Que tenga la ecuacion dos raices iguales, lo cual admite tambien las tres siguientes subdivisiones:

1.ª *subdivision.* Las raices primera y segunda son iguales, y tercera y cuarta desiguales, estando representadas por:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+p$$

y la suma de ella es:

$$x+y+z+u=4x+n+p$$

2.ª *subdivisíon.* Las raices segunda y tercera son iguales, mayores que x y menores que u. Están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+p$$

y la suma es:

$$x+y+z+u=4x+2m+p$$

3.ª *subdivision.* Las raices tercera y cuarta son iguales, mayores que y, y mayor esta que x. Están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+n,\ u=x+n$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u=4x+m+2n$$

4.° caso. Que la ecuacion tenga sus cuatro raices desiguales. Están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+n,\ u=x+p$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u=4x+m+n+p$$

59. Para saber la relacion que guardan entre sí el cuadrado de las raices y la suma de los productos binarios, procederémos de un modo análogo al empleado en las ecuaciones de 2.º y 3.er grado; y tendrémos, que si suponemos $x=y=z=u$, será:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+$$
$$+2yz+2yu+2zu.$$

Y poniendo todo en valores de x, será:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+x^2+x^2+x^2+2x^2+2x^2+2x^2+$$
$$+2x^2+2x^2+2x^2 \text{ ó } (x+y+z+u)^2=16x^2 \quad (1).$$

Haciendo lo mismo con los productos binarios, tendrémos:

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=x^2+x^2+x^2+x^2+x^2+$$
$$+x^2 \text{ ó } xy+xz+xu+yz+yu+zu=6x^2 \quad (2).$$

Con estas dos ecuaciones (1) y (2), formarémos proporcion, y será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2}{xy+xz+xu+yz+yu+zu}=\frac{16x^2}{6x^2}$$

que simplificado, será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2}{xy+xz+xu+yz+yu+zu}=\frac{8}{3}$$

de donde:

$$(x+y+z+u)^2=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3} \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=0$$

60. Por consiguiente, vémos que cuando las raices son iguales, restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{8}{3}$ de la de los productos binarios, la resta es cero; y dividiendo por 4 la suma de aquellas, se obtendrá el valor de x.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^4-16x^3+96x^2-256x+256=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=16 \ (1)$$
$$xy+xn+xu+yz+yu+zu=96 \ (2)$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{3}{8}$ de la segunda, será:

$$16^2 - \frac{8\times 96}{3} = 256 - 256 = 0$$

Luégo dividiendo la suma 16 por 4, nos dará el valor de la raíz, que es 4, único que puede satisfacerla.

EJEMPLO 2.°

Sea $x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256 = 0$
y tendrémos:

$$x + y + z + u = -16$$
$$xy + xz + xu + yz + yu + zu = 96$$

$$-16^2 - \frac{8\times 96}{3} = 256 - 256 = 0$$

$$4x = -16, \text{ de donde } x = \frac{-16}{4} = -4,$$

único valor que satisface á la ecuacion propuesta.

61. 2.° caso: que las raices de la ecuacion tengan dos valores, el cual se subdivide en 3, segun se

ha dicho (58), siendo el primero de estos cuando las raices son:

$$x,\ y = x,\ z = x,\ u = x + p, \text{ cuya suma es, } 4x + p,$$

y tendrémos:

$$(x+y+z+u)^2 = x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu$$
$$+2yz+2yu+2zu = x^2+x^2+x^2+(x+p)(x+p)+$$
$$2x^2+2x^2+2x(x+p)+2x^2+2x(x+p)+2x(x+p)$$
$$= x^2+x^2+x^2+x^2+2xp+p^2+2x^2+2x^2+2x^2+2xp$$
$$+2x^2+2x^2+2xp+2x^2+2xp, \text{ ó}$$
$$(x+y+z+u)^2 = 16x^2+8xp+p^2 \text{ ó}$$
$$(x+y+z+u)-p^2 = 16x^2+8xp \ (1).$$

Los productos binarios serán:

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu = x^2+x^2+x(x+p)$$
$$+x^2+x(x+p)+x(x+p) = x^2+x^2+x^2+xp+x^2+$$
$$+x^2+xp+x^2+xp,$$
$$\text{ó } xy+xz+xu+yz+yu+zu = 6x^2+3xp \ (2).$$

Con las ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-p^2}{xy+xz+xu+yz+yu+zu} = \frac{16x^2+8xp}{6x^2+3xp}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $2x^2+xp$, será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-p^2}{xy+xz+xu+yz+yu+zu}=\frac{8}{3} \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-p^2=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}$$

$$\text{ó } (x+y+z+u)^2-$$
$$\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=p^2$$

Por consiguiente, vémos que restando del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de los productos binarios, nos dá el cuadrado de la diferencia $u-x$.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^4-11x^3+42x^2-68x+40=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=11 \ (1).$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=42 \ (2).$$

Restando del cuadrado de la (1) los $\frac{8}{3}$ de la (2),

será:

$$11^2 - \frac{8\times 42}{3} = 121 - 112 = 9 = p^2;\ \sqrt{9} = 3 = p.$$

Tenemos:

$$x+y+z+u=4x+p,$$

y tambien la ecuacion (1),

$$x+y-z+u=11.$$

Luégo $4x+p=11$.

Sustituyendo el valor de $p=3$, será:

$$4x+3=11,\text{ ó } 4x=8,\text{ de donde } x=2.$$

Tambien tenemos ~~(58)~~ las raices, que son:

$$x=y=z,\ u=x+p.$$

Luégo:

$$x=2,\ y=2,\ z=2,\ u=2+3=5.$$

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^4+3,78x^3-19,98x^2-113,94x-140,67=0,$$

y tendremos:

$$x+y+z+u=-3,78 \ (1)$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=-19,98 \ (2)$$

Restando del cuadrado de la (1) los $\frac{8}{3}$ de la (2) tendrémos:

$$-3,78^2-\frac{8}{3}\times-19,98=14,2884-(-53,28)=$$
$$=14,2884+53,28=67,5684=p^2.$$

Extrayendo la raiz, será:

$$\sqrt{67,5684}=8,22=p$$

La suma de las raices es $4x+p$, luégo será:

$$4x+p=-3,78$$

y sustituyendo el valor de p, será:

$$4x+8{,}22=-3{,}78\text{, ó } 4x=-3{,}78-8{,}22=-12,$$

de donde

$$x=\frac{-12}{4}=-3,\ y=-3,\ z=-3,\ u=x+p$$

ó $u=-3+8{,}22=5{,}22$.

62. El segundo modo como puede verificarse el tener las raices de una ecuacion de 4.° grado dos valores, es cuando tenemos:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+n,\ \text{sumando } 4x+2n.$$

Procediendo de idéntica manera que en el caso anterior, tendrémos:

$(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+$ $+2yz+2yu+2zu=x^2+x^2+(x+n)\ (x+n)+(x+n)$ $(x+n)+2x^2+2x\,(x+n)+2x(x+n)+2x(x+n)+2x$ $(x+n)+2(x+n)(x+n)=x^2+x^2+x^2+2xn+n^2+$ $+x^2+2xn+n^2+2x^2+2x^2+2xn+2x^2+2xn+2x^2+$ $+2xn+2x^2+2xn+2x^2+4xn+2n^2$ ó

$$(x+y+z+u)^2=16x^2+16xn+4n^2 \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-4n^2=16x^2+16xn \quad (1)$$

Practicando lo mismo con los productos binarios, será:

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=x^2+x\,(x+n)+x\,(x+n)+x\,(x+n)+x(x+n)+(x+n)\,(x+n)=x^2+x^2+xn+x^2+xn+x^2+xn+x^2+xn+x^2+2xn+n^2 \text{ ó}$$

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=6x^2+6xn+n^2 \text{ ó}$$

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu-n^2=6x^2+6xn \quad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-4n^2}{xy+xz+xu+yu+yz+zu-n^2}=\frac{16x^2+16xn}{6x^2+6xn}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $2x^2+2xn$, será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-4n^2}{xy+xz+xn+yx+yu+zu-n^2}=\frac{8}{3}.$$

$$\text{ó} \quad (x+y+z+u)^2-4n^2=$$

$$=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}-\frac{8n^2}{3}$$

$$\text{ó } (x+y+z+u)^2-$$

$$\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=4n^2-\frac{8n^2}{3}$$

$$ó\ (x+y+z+u)^2 - \frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3} =$$

$$= \frac{12n^2}{3} - \frac{8n^2}{3} = \frac{4n^2}{3}$$

de donde:

$$n^2 = \frac{3\left((x+y+z+u)^2 - \frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}\right)}{4}$$

63. De suerte que si restamos del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de los productos binarios, nos resulta los $\frac{4}{3}$ del cuadrado de la diferencia $z-x=$ $=u-x$.

Por consiguiente, para hallar este cuadrado, multiplicarémos por 3 el resultado de dicha resta y dividiremos por 4 este producto, despues de lo cual solo tendrémos que hacer el sacar la raíz del último resultado, y esta será la expresada diferencia $z-x$ ó $u-x$, que son iguales.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^4 - 28x^3 + 276x^2 - 1120x + 1600 = 0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=28 \ (1)$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=276 \ (2)$$

Restando del cuadrado de la (1) los $\frac{8}{3}$ de la (2), será:

$$28^2-\frac{8\times276}{3}=784-736=48$$

y será:

$$48=\frac{4n^2}{3} \text{ ó } 3\times48=4n^2 \text{ ó } n^2=\frac{3\times48}{4}=36$$

de donde $n=6$.

La suma de las raices es:

$$x+y+z+u=4x+2n$$

Luégo:

$$4x+2\times6=28 \text{ ó } 4x=28-12=16 \text{ ó } x=4$$

Tenemos las raices

$$x=y,\ z=x+n,\ u=x+n$$

Por consiguiente:

$$y=4,\ z=4+6=10,\ u=4+6=10$$

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^4+3,12x^3-55,5368x^2-90,433824x-$$
$$-1680,28363808=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=-3,12\ (1)$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=-55,5368\ (2)$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de la segunda, será:

$$-3,12^2-\left(-55,5368\times\frac{8}{3}\right)=9,7344-$$
$$-(-148,09813)=9,7344+148,09813=$$
$$=157,83253=\frac{4n^2}{3}$$

de donde:

$$3\times157,83253=4n^2 \text{ ó } n^2=\frac{3\times157,83253}{4} \text{ ó}$$

$$n^2=118,3744 \text{ ó } n=10,88$$

Tenemos:

$$x+y+z+u=4x+2n$$

y tambien la ecuacion (1)

$$x+y+z+u=-3,12$$

Luégo será:

$$4x+2\times10,88=-3,12 \quad \text{ó} \quad 4x=-3,12-21,76=$$
$$-24,88 \text{ ó } x=\frac{-24,88}{4}=-6,22$$

Las raices son:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+n$$

Luégo:

$$x=-6,22,\ y=-6,22,\ z=-6,22+10,88=4,66,$$
$$u=4,66$$

64. El tercer modo, como puede verificarse el que las raices de una ecuacion de 4.° grado tengan dos valores, es cuando estas están representadas por

$$x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+m$$

y su suma, por: $4x+3m$

Operando lo mismo que en el caso anterior, tendrémos:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu$$
$$+2yz+2yu+2zu,$$

y sustituyendo sus valores, será:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+(x+m)x+m)+(x+m(x+m)$$
$$+(x+m)\,(x+m)+2x(x+m)+2x(x+m)+2x(x+$$
$$+m)+2(x+m)(x+m)+2(x+m)(x+m)+2(x+m)$$
$$(x+m)=x^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xm+m^2+x^2+$$
$$+2xm+m^2+2x^2+2xm+2x^2+2xm+2x^2+2xm+$$
$$+2x^2+4xm+2m^2+2x^2+4xm+2m^2+2x^2+4xm+$$
$$+2m^2 \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2=16x^2+24xm+9m^2 \text{ ó}$$
$$(x+y+z+u)^2-9m^2=16x^2+24xm \quad (1).$$

Los productos binarios serán:

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=x(x+m)+x(x+m)$$
$$+x(x+m)+(x+m)(x+m)+(x+m)(x+m)+(x+$$
$$+m)(x+m)=x^2+xm+x^2+xm+x^2+xm+x^2+$$
$$+2xm+m^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xm+m^2 \text{ ó}$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=6x^2+9xm+3m^2 \text{ ó}$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu-3m^2=6x^2+9xm \quad (2).$$

Con las ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-9m^2}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-3m^2}=\frac{16x^2+24xm}{6x^2+9xm}$$

Y dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $2x^2+3mx$, será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-9m^2}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-3m^2}=\frac{8}{3} \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-9m^2=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}$$
$$-\frac{24m^2}{3} \quad \text{ó} \quad (x+y+z+u)^2-9m^2=$$
$$=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}-8m^2$$

$$\text{ó } (x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$
$$=9m^2-8m^2=m^2$$

65. Por consiguiente, restando del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de los productos binarios, nos dará el cuadrado de la diferencia, lo mismo que nos dá (61) en la primera subdivision de este segundo caso; pero como las raices y la suma de aquella son distintas de las raices y la suma de este, podríamos equivocarnos fácilmente al deducir los valores de las raices, sino comprobásemos su producto con el último término de la ecuacion propuesta, como hicimos en idéntico caso (26), tratando de las ecuaciones de tercer grado.

Las raices en aquella subdivision (61), son $x, y=x, z=x, u=x+p$, sumando $4x+p$. Y en este son x, $y=x+m$, $z=y+m$, $u=x+m$, sumando $4x+3m$. Por consiguiente, como al resolver la ecuacion ignoramos cuantas raices iguales tiene, y de que modo están combinadas, claro es que si restando del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de los productos binarios, nos resulta un cuadrado perfecto, conocerémos que su raíz marcará la diferencia entre dos raices; pero como en el mismo caso se hallan estas dos subdivisiones del segundo caso, si tomamos la primera fórmula por la segunda, ó la segunda por la primera, sacarémos valores falsos que satisfarán la ecuacion de la suma de las raices, y acaso la de los productos binarios; por esto es preciso que cuando nos resulte un cuadrado perfecto su raíz la sustituyamos así en la primera como en la segunda fórmula de dichas subdivisiones, y con los valores que saquemos para las raices formemos su producto, y lo comprobarémos con el último término de la ecuacion propuesta, al cual debe ser igual si son los verdaderos.

Conviene tener esto muy presente para no incurrir en error; y para que se comprenda más fácilmente, pondrémos el siguiente:

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^4-26x^3+240x^2-896x+1024=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=26\ (1),$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=240\ (2).$$

Restando de la ecuacion (1) los $\frac{8}{3}$ de la (2), será:

$$26^2-\frac{8\times240}{3}=676-640=36=m;^2\ m=6$$

Ahora bien, este cuadrado nos indica que la ecuacion tiene tres raices iguales, pero no sabemos si estas son:

$$x,\ y=x,\ z=x,\ \ u=x+p,$$

cuya suma es: $4x+p$,

$$\text{ó } x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+m,$$

sumando $4x+3m$, pues en ambos casos resulta un cuadrado perfecto. Si aplicamos la primera de estas dos fórmulas, será:

$$4x+6=26, \text{ ó } 4x=26-6=20,$$

de donde:

$$x=5,\ y=5,\ z=5,\ u=5+6=11,$$

cuya suma 26 satisface á la ecuacion (1).

Si aplicamos la segunda fórmula, será:

$$4x+3\times6=26, \text{ ó } 4x=26-18=8,$$

de donde:

$$x=2,\ y=2+6=8,\ z=8,\ u=8,$$

cuya suma 26 satisface tambien á la ecuacion (1).

Veamos si sucede lo mismo formando el producto de dichos valores, comprobados con el último término de la ecuacion propuesta.

El producto de los valores que dá la primera de dichas dos fórmulas, es:

$$5\times5\times5\times11=1375,$$

y los de la segunda son:

$$2\times8\times8\times8=1024.$$

Y como el último término de la ecuacion propuesta es 1024, vemos que los verdaderos valores de las raices son 2, 8, 8, 8.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^4+16,21x^3+94,3782x^2+237,125308x+$$
$$+218,6799244=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=-16,21 \ (1),$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=94.3782 \ (2).$$

Restando del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de los productos binarios, tendrémos:

$$-16,21^2-\frac{8\times 94,3782}{3}=262,7641-251,6752$$
$$=11,0889=m^2.$$

$$\sqrt{11,0889}=3,33$$

Ahora saquemos los valores con las dos fórmulas arriba expresadas, y será:

1.ª $x+(y=x)+(z=x)+(u=x+p)=4x+p$, y será:

$4x+p=-16,21$, ó $4x+3,33=-16,21$, ó $4x=-16,21-3,33=-19,54$, de donde $x=-4,885$, $y=-4,885$, $z=4,885$, $u=-4,885+3,33=1,555$.

El producto de estos valores no es igual al último término de la ecuacion propuesta.

Las raices de la segunda fórmula son x, $y=x+m$, $z=x+m$, $u=x+m$, y la suma $4x+3m$.

Por consiguiente tendrémos $4x+3m=-16,21$, ó $4x+9,99=-16,21$, ó $4x=-16,21-9,99=$

$-26{,}20$, de donde $x=-6{,}55$, $y=-6{,}55+3{,}33=$ $=-3{,}22$, $z=-3{,}22$, $u=-3{,}22$. El producto de estos valores es $218{,}6799244$, que es el último término de la ecuacion prouesta.

66. 3.er caso. Que la ecuacion tenga dos raices iguales, lo cual tambien puede ser de tres modos como se dijo (58).

La primera de estas tres subdivisiones se verifica cuando las raices son x, $y=x$, $z=x+n$, $u=x+p$, y la suma de todas ellas es $4x+n+p$.

Siguiendo la misma marcha que hemos llevado hasta aquí, tendrémos:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu$$
$$+2yz+2yu+2zu.$$

O poniendo sus valores:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+x^2+x^2+2xn+n^2+x^2+$$
$$+2xp+p^2+2x^2+2x(x+n)+2x(x+p)+2x$$
$$(x+n)+2x(x+p)+2(x+n)(x+p)=x^2+x^2+x^2+$$
$$+2xn+n^2+x^2+2xp+p^2+2x^2+2x^2+2xn+2x^2+$$
$$+2xp+2x^2+2xn+2x^2+2xp+2x^2+2xn+2xp+$$
$$+2np, \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2=16x^2+8xn+8xp+n^2+p^2+2np,$$

ó $(x+y+z+u)^2-(n^2+p^2+2np)=16x^2+8xn$ $+8xp$ (1)

Los productos binarios son:

$xy+xz+xu+yz+yu+zu=x^2+x(x+n)+x(x+p)+x(x+n)+x(x+p)+(x+n)(x+p)=x^2+$
$+x^2+xn+x^2+xp+x^2+xn+x^2+xp+x^2+xn+$
$+xp+np$, ó

$xy+xz+xu+yz+yu+zu=6x^2+3xn+3xp+np$

ó $xy+xz+xu+yz+yu+zu-np=6x^2+3xn+$
$+3xp$ (2),

Con las ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-(n^2+p^2+2np)}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-np}=$$

$$=\frac{16x^2+8xu+8xp}{6x^2+3xn+3xp}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $2x^2+xn+xp$, será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-(n^2+p^2+2np)}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-np}=\frac{8}{3}, \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u^2)-(n^2+p^2+2np)=$$

$$=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}-\frac{8np}{3}$$

$$ó\ (x+y+z+u)^2-\frac{8\,(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$

$$=n^2+p^2+2np-\frac{8np}{3}$$

$$ó\ (x+y+z+u)^2-\frac{8\,(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$

$$=n^2+p^2+\frac{6np}{3}-\frac{8np}{3}$$

$$ó\ (x+y+z+u)^2-\frac{8\,(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$

$$=n^2+p^2-\frac{2np}{3}$$

67. Vemos, pues, que cuando la ecuacion de cuarto grado tiene las raices de la fórmula x, $y=x$, $z=x+n$, $u=x+p$, restando del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de los productos binarios, nos dá los los cuadrados de las diferencias ménos $\frac{2}{3}$ del producto de las mismas. Pero, ¿cómo harémos para descomponer un número que conste de estas tres partes? Ya en el tercer caso de las ecuaciones de tercer grado nos resultó una fórmula muy parecida á la que nos ocupa, pues era $N=m^2+n^2-mn$, y en el caso actual es, $N=n^2+p^2-\frac{2np}{3}$. Y aún esta

lleva ventaja sobre aquella, toda vez que está más próxima al cuadrado. Sin embargo, aquí dista del cuadrado mucho más que allí usando de la fórmula $N=m^2+h^2+mh$. Examinemos, no obstante, si puede utilizarse.

68. Llamando N á la diferencia que resulta de restar del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de los productos binarios, tendrémos: $N=n^2+p^2-\frac{2np}{3}$

Multiplicando por 3 los dos miembros de la ecuacion para quitar el denominador, será:

$$3N=3n^2+3p^2-2np \quad (1)$$

Si extraemos la raíz entera de $3N$, que llamarémos R, y la elevamos al cuadrado, tendrémos:

$$R^2=n^2+p^2+2np \quad (2)$$

Sumando ambas ecuaciones (1) (2), será:

$$3N+R^2=4n^2+4p^2$$

que dividirémos por 4, y será:

$$\frac{3N+R^2}{4}=n^2+p^2 \quad (3)$$

Restando la (3) de la (2), será:

$$2np=R^2-\frac{3N+R^2}{4}=\frac{4R^2-R^2-3N}{4}$$

Dividiendo por 2, será:

$$np=\frac{3R^2-3N}{8} \quad (4)$$

Tenemos la suma y producto de dos cantidades; luégo lo serán de las raices de una ecuacion de segundo grado, y tendrémos:

$$n+p=R\ldots\ldots. \quad (5)$$
$$np=\frac{3R^2-3N}{8} \quad (6)$$

Restando del cuadrado de la (5) el cuádruplo de la (6), será:

$$R^2-4\times\frac{3R^2-3N}{8}=\frac{8R^2-12R^2+12N}{8}=$$
$$=\frac{12N-4R^2}{8}$$

Sacando los valores de n y p, dará:

$$n=\frac{R-\sqrt{\frac{12N-4R^2}{8}}}{2}, \quad p=\frac{R+\sqrt{\frac{12N-4R^2}{8}}}{2}$$

Sustituirémos estos valores en la ecuacion (1), y si la satisfacen procederémos á sacar las raices de la ecuacion con los valores obtenidos de n, p. Si no la satisfacen es preciso ensayar otros cuadrados. Ahora falta examinar si esta operacion podrá ser demasiado difusa, ó si con facilidad podrémos hallar el cuadrado que se busca.

Tomemos, por ejemplo, en el cuadrado de:

$$8\left\{\begin{matrix} n=3 \\ p=5 \end{matrix}\right\} n^2+p^2-\frac{2np}{3}=24$$

que multiplicado por 3 para quitar el denominador, será:

$$3n^2+3p^2-2np=72 \;\ldots\ldots\; (1)$$

Si tomamos el cuadrado de 9, será:

$$n^2+p^2+2np=81 \;\ldots\ldots\; (2)$$

Sumando ambas, dará:

$$4n^2+4p^2=153$$

que dividido por 4, es:

$$n^2+p^2=38{,}25 \;\ldots\ldots\; (3)$$

Restando la (3) de la (2), nos dá:

$$2np=42,75$$

Dividiéndola por 2, resulta:

$$np=21,375$$

y tendrémos:

$$n+p=8$$
$$np=21,375$$

Restando del cuadrado de la primera el cuádruplo de la segunda, será:

$64-4\times21,375=-4,5$; $\sqrt{-4,5}$ imaginaria que nos obliga á tomar el cuadrado verdadero.

Tomando el cuadrado de 7 en vez del de 8, será:

$$3n^2+3p^2-2np=72$$
$$n^2+p^2+2np=49=7^2$$
$$4n^2+4p^2\ldots=121$$
$$n^2+p^2\ldots.=30,25$$
$$2np\ldots.=18,75$$
$$np\ldots.=9,375$$
$$n+p=7$$
$$np=9,375$$

$7^2-4\times9,375=11,5$; $\sqrt{11,5}$, etc., etc.

Aquí no hay absurdo manifiesto; por lo que, continuando nuestras operaciones, llegaríamos á conocer que no era el cuadrado de 7 el que buscábamos; y en lugar de tomar el de 8 podríamos tomar el de 6, y será:

$$3n^2+3p^2-2np= 72$$
$$n^2+p^2+2np.= 36$$
$$4n^2+4p^2....=108$$
$$n^2+p^2.....= 27$$
$$2np......= 9$$
$$np......= 4{,}5$$
$$n+p=6$$
$$np=4{,}5$$
$$36-4\times4{,}5=18;\quad \sqrt{18}=\text{etc., etc.}$$

Tampoco hay aquí absurdo manifiesto; por lo que continuaríamos hasta conocer que debíamos cambiar de cuadrado.

Así continuaríamos hasta llegar al cuadrado de 4, y tendríamos:

$$3n^2+3p^2-2np= 72$$
$$n^2+p^2+2np.= 16$$
$$4n^2+4p^2....= 88$$
$$n^2+p^2.....= 22$$
$$2np......=-6$$

absurdo que ya nos avisaria que el verdadero cuadrado que buscamos es mas alto.

Tenemos, pues, que si bien siguiendo los cuadrados inferiores, hay que ensayar 4 cuadrados, si tomamos un cuadrado mayor cualquiera que el verdadero, nos presenta una raíz imaginaria: y si en todos los casos ocurriéra lo mismo, muy fácilmente resolveríamos la cuestion. Probemos, pues, en cuadrado más alto, y observemos su resultado. Sea en el cuadrado de 100:

$$\left.\begin{matrix} n=5 \\ p=95 \end{matrix}\right\} n^2+p^2-\frac{2np}{3}=8733\frac{1}{3}$$

Multiplicando por 3 para quitar quebrados, será:

$$3n^2+3p^2-2np=26200$$

Si tomamos el cuadrado inmediato superior, será:

$$n^2+p^2+2np=10201=101^2$$

$$4n^2+4p^2\ldots=36401$$

$$n^2+p^2\ldots.=9100{,}25$$

$$2np\ldots\ldots=1100{,}75$$

$$np\ldots\ldots=550{,}375$$

$$10201-4\times550{,}375=7999{,}5;\quad \sqrt{7999{,}5},\ \text{etc.}$$

No hay absurdo manifiesto: por lo que continuaríamos nuestras operaciones hasta que conociésemos debíamos cambiar de cuadrado, y en vez de tomar el inmediato inferior, podríamos tomar el superior. En este nos sucederia lo mismo; y por último, tendríamos que ensayar muchos cuadrados ántes de encontrar el absurdo, pues ni con el cuadrado de 150 nos lo presenta todavía. Y si en lugar de tomar los cuadrados superiores, tomamos los inferiores, no lo hallamos tampoco hasta bajar al cuadrado de 93.

69. Resulta, pues, que la fórmula $N=n^2+p^2-\frac{2np}{3}$ ofrece muy grandes inconvenientes para la resolucion de las ecuaciones de que tratamos. Y no pudiendo *por ahora* encontrar otra fórmula que la sustituya con ventaja, lo aplazamos para cuando tratemos del cuarto caso, que es aquel en que todas las raices son desiguales. Dejarémos, pues, esta subdivision en tal estado, y pasarémos á la siguiente.

70. La segunda subdivision del tercer caso es cuando las raices están representadas por x, $y=x+m$, $z=x+m$, $n=x+p$, sumando $4x+2m+p$.

Ejecutando lo mismo que en los casos anteriores, tendrémos:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+$$
$$+2xu+2yz+2yu+2zu=x^2+(x+m)^2+(x+m)^2+$$
$$+(x+p)^2+2x\ (x+m)+2x\ (x+m)+2x(x+p)$$
$$+2\,(x+m)^2+2\ (x+m)\ (x+p)+2\ (x+m)\ (x+p)=$$
$$=x^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xp+$$
$$+p^2+2x^2+2xm+2x^2+2xm+2x^2+2xp+2x^2+$$
$$+4xm+2m^2+2x^2+2xm+2xp+2mp+2x^2+$$
$$+2xm+2xp+2mp \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2=16x^2+16xm+8xp+4m^2+p^2+$$
$$+4mp \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-(4m^2+n^2+4mp)=16x^2+16xm+$$
$$+8xp \quad (1)$$

Los productos binarios, son:

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=x(x+m)+x(x+m)+$$
$$+x(x+p)+(x+m)^2+(x+m)\ (x+p)+(x+m)\ (x+$$
$$+p)=x^2+xm+x^2+xm+x^2+xp+x^2+2xm+m^2+$$
$$+x^2+xm+xp+mp+x^2+xm+xp+mp \text{ ó}$$

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=6x^2+6xm+3xp+$$
$$+m^2+2mp \text{ ó}$$

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu-(m^2+2mp)=6x^2+$$
$$+6xm+3xp \quad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-(4m^2+p^2+4mp)}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-(m^2+2mp)}=$$
$$=\frac{16x^2+16xm+8xp}{6x^2+6xm+3xp}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $2x^2+2xm+xp$, tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-(4m^2+p^2+4mp)}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-(m^2+2mp)}=\frac{8}{3} \quad \text{ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-(4m^2+p^2+4mp)=$$

$$=\frac{8(xy+xz+xu+yu+yz+zu)}{3}-\frac{8(m^2+2mp)}{3} \quad \text{ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$

$$=4m^2+p^2+4mp-\frac{8m^2-16mp}{3} \quad \text{ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$

$$=\frac{12m^2}{3}+p^2+\frac{12mp}{3}-\frac{8m^2}{3}-\frac{16mp}{3} \quad \text{ó}$$

$$(x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$

$$=\frac{4m^2}{3}+p^2-\frac{4mp}{3}$$

71. Pero esta fórmula $N=\frac{4m^2}{3}+p^2-\frac{4mp}{3}$ aunque la multipliquemos por 3 para quitar el denominador, resultando $3N=4m^2+3p^2-4mp$, es de una solucion muy difícil y penosa, pues los ensayos que fuésemos haciendo para buscar un cuadrado cuya raíz fuese la misma que la de $4m^2+3p^2-4mp$,

no pueden hacerse sin que vayamos descomponiendo la supuesta raíz en sus factores para buscar los valores de m y de p con objeto de sustituirlos en dicha fórmula, y ver si la satisfacen; operacion larguísima y trabajosa.

72. Podríamos hallar otra fórmula de no tan malas condiciones, trasformando el valor de $n=x+p$ en $n=z+h$, que es lo mismo, toda vez que $n=z$ mas una cantidad que llamaríamos h. Sustituyendo este valor en $N=\frac{4m^2}{3}+p^2-\frac{4mp}{3}$ se convertirá en $\frac{4m^2}{3}+(m+h)^2-\frac{4m(m+h)}{3}=\frac{4m^2}{3}+$ $+m^2+2mh+h^2-\frac{4m^2-4mh}{3}=m^2+h^2+\frac{2mh}{3}$

Multiplicando por 3, nos dará:

$$3N=3m^2+3h^2+2mh.$$

Indudablemente esta fórmula es mucho menos mala que $3N=4m^2+3p^2-4mp$; y tambien ofrece menos trabajo que la hallada en la subdivision anterior, que era $3N=3n^2+3p^2-2np$, toda vez que hallándose esta más distante del cuadrado que aquella, deberíamos con la que nos ocupa, divagar mucho menos para encontrar el cuadrado cuyas raices son m y h. A pesar de esto, nunca dejaria de ser una operacion mas difusa que la que deseamos. Y no pudiendo *por ahora* exponer un medio más ventajoso para la resolucion de las ecuaciones de esta subdivision, lo aplazamos para cuando tratemos del cuarto caso, que es aquel en que las cuatro raices son desiguales.

73. La última subdivision del tercer caso, es cuando las raices están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+n,\ u=x+n,$$

y la suma de ellas es:

$$x+y+z+u=4x+m+2n.$$

Elevando al cuadrado la suma de las raices, y sustituyendo sus valores, tendrémos:

$(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu$
$+2yz+2yu+2zu=x^2+(x+m)^2+(x+n)^2+(x+n)^2$
$+2x(x+m)+2x(x+n)+2x(x+n)+2(x+m)$
$(x+n)+2(x+m)(x+n)+2(x+n)^2=x^2+x^2+$
$+2xm+m^2+x^2+2xn+n^2+x^2+2xn+n^2+2x^2+$
$+2xm+2x^2+2xn+2x^2+2xn+2x^2+2xm+2xn+$
$+2mn+2x^2+2xm+2xn+2mn+2x^2+4xn+2n^2$ ó

$(x+y+z+u)^2=16x^2+16xn+8xm+m^2+4n^2+$
$+4mn$, ó

$(x+y+z+u)^2-4n^2-m^2-4mn=16x^2+16xn$
$+8xm$ .... (1).

Los productos binarios son:

$xy+xz+xu+yz+yu+zu=x(x+m)+x(x+n)+$
$+x(x+n)+(x+m)(x+n)+(x+m)(x+n)+$
$+(x+n)^2=x^2+xm+x^2+xn+x^2+xn+x^2+xm+$
$+xn+mn+x^2+xm+xn+mn+x^2+2xn+n^2$ ó

$xy+xz+xu+yz+yu+zu=6x^2+6xn+3xm+$
$+2mn+n^2$ ó

$xy+xz+xu+yz+yu+zu-2mn-n^2=6x^2+6xn$
$+3xm$ .... (2).

Con las dos ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-m^2-4n^2-4mn}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-2mn-n^2}=$$
$$=\frac{16x^2+16xn+8xm}{6x^2+6xn+3xm}$$

Y dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $2x^2+2xn+xm$, tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-m^2-4n^2-4mn}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-2mn-n^2}=\frac{8}{3}$$

$$ó\ (x+y+z+u)^2-m^2-n^2-4mn=$$

$$=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}-\frac{16mn}{3}-\frac{8n^2}{3};$$

$$(x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}=$$

$$=m^2+\frac{12n^2}{3}+\frac{12mn}{3}-\frac{16mn}{3}-\frac{8n^2}{3}=m^2$$

$$+\frac{4n^2}{3}-\frac{4mn}{3}$$

74. Aquí tenemos otra fórmula tan difícil de resolver como la anterior, pues aunque quitemos el denominador, convirtiéndose en $3N=3m^2+4n^2-4mn$, no podemos deducir los valores de m, n sino por medio de un trabajo muy prolijo y penoso para ir descomponiendo en sus factores las raices de cada cuadrado que ensayarémos, y sustituyendo sus valores en dicha fórmula para ver si eran los verdaderos. Pero afortunadamente podemos eludir este escollo como lo hicimos en el anterior, lo cual aplazamos para cuando tratemos del siguiente caso.

75. El cuarto caso de las ecuaciones de cuarto grado es aquel en que las cuatro raices son desiguales. Estas entónces se hallarán representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+n,\ u=x+p,$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u=4x+m+n+p.$$

Ejecutando lo mismo que se ha practicado hasta aquí, tendrémos:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu$$
$$+2yz+2yu+2zu.$$

Sustituyendo sus valores, será:

$$(x+y+z+u)^2=x^2+(x+m)^2+(x+n)^2+(x+p)^2+$$
$$+2x(x+m)+2x(x+n)+2x(x+p)+2(x+m)(x+n)$$
$$+2(x+m)(x+p)+2(x+n)(x+p)=x^2+x^2+2xm+$$
$$+m^2+x^2+2xn+n^2+x^2+2xp+p^2+2x^2+2xm+$$
$$+2x^2+2xn+2x^2+2xp+2x^2+2xm+2xn+2mn+$$
$$+2x^2+2xm+2xp+2mp+2x^2+2xn+2xp+2np,$$

ó $(x+y+z+u)^2=16x^2+8xm+8xn+8xp+m^2+$
$+n^2+p^2+2mn+2mp+2np$

ó $(x+y+z+u)^2-m^2-n^2-p^2-2mn-2mp-2np$
$=16x^2+8xm+8xn+8xp.$

Los productos binarios son:

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu.$$

Y sustituyendo sus valores: será:

$xy+xz+xu+yz+yu+zu=x(x+m)+x(x+u)+$
$+x(x+p)+(x+m)(x+n)+(x+m)(x+p)+(x+n)$
$(x+p)=x^2+xm+x^2+xn+x^2+xp+x^2+xm+xn+$
$+mn+x^2+xm+xp+mp+x^2+xn+xp+np$

ó $xy+xz+xu+yz+yu+zu=6x^2+3xm+3xu+$
$+3xp+mn+mp+np$

ó $xy+xz+xu+yz+yu+zu-mn-mp-np=6x^2$
$+3xm+3xn+3xp$ (2).

Con las dos ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-m^2-n^2-p^2-2mn-2mp-2np}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-mn-mp-np}=$$
$$=\frac{16x^2+8xm+8xn+8xp}{6x^2+3xm+3xn+3xp}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por:

$$2x^2+xm+xn+xp,$$

será:

$$\frac{(x+y+z+u)^2-m^2-n^2-p^2-2mn-2mp-2np}{xy+xz+xu+yz+yu+zu-mn-mp-np}=$$
$\frac{8}{3}$; ó $(x+y+z+u)^2-m^2-n^2-p^2-2mn-2mp-$

$$-2np=\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}-$$
$$-\frac{8mn}{3}-\frac{8mp}{3}-\frac{8np}{3}$$

$$ó\ (x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}$$

$$=m^2+n^2+p^2+\frac{6mn}{3}+\frac{6mp}{3}+\frac{6np}{3}-$$

$$-\frac{8mn}{3}-\frac{8mp}{3}-\frac{8np}{3}$$

$$ó\ (x+y+z+u)^2-\frac{8(xy+xz+xu+yz+yu+zu)}{3}$$

$$=m^2+n^2+p^2-\frac{2mn}{3}-\frac{2mp}{3}-\frac{2np}{3}$$

Y llamando N á la diferencia que resulta restando del cuadrado de las raices los $\frac{8}{3}$ de sus productos binarios, será:

$$N=m^2+n^2+p^2-\frac{2mn}{3}-\frac{2mp}{3}-\frac{2np}{3}$$

y multiplicado por 3, será:

$$3N=3(m^2+u^2+p^2)-(2mn+2mp+2np).$$

Fórmula que nos dice que verificando dicha resta, nos resulta los cuadrados de las diferencias $y-x$, $z-x$, $u-x$, ménos los $\frac{2}{3}$ de sus productos binarios. Para hallar, pues, los valores de las raices necesitamos, por consiguiente, averiguar los de sus diferencias m, n, p, lo cual conseguiríamos de igual manera que en todos los casos anteriores, ensayando cuadrados. Pero como podemos emplear el mismo sistema que en las ecuaciones de tercer grado, que reune todas las ventajas de sencillez, claridad y prontitud, nos ocuparémos desde luego de él, prescindiendo de todo lo demás.

76. Este sistema á que aludimos es la formacion y uso de las tablas de diferencias, sobre lo cual muy poco es lo que tenemos que añadir á lo dicho en los números (43) y siguientes, pues así como allí son las diferencias m y h con la fórmula m^2+h^2+mh, aquí son m, n, p con la fórmula que acabamos de sacar de $N=m^2+n^2+p^2-$ $-\frac{2mn-2mp-2np}{3}$, que multiplicada por 3 para mayor facilidad, es $3N=3m^2+3n^2+3p^2-$ $-2mn-2mp-2np$. Restando, pues, del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{8}{3}$ de la de los productos binarios, nos dará N, que multiplicarémos por 3, y será $3N$, que buscarémos en las tablas, y nos presentará á su lado las diferencias m, n, p. Si por una casualidad ocurriese que al buscar á $3N$ (en el caso de tener decimales) en las tablas, lo hallásemos seguido de ceros, entonces debemos considerar á $3N$ como seguido tambien de aquel mismo número de ceros; pues consiste esto en que

como en decimales se desprecian los ceros á la derecha y en enteros no, puede suceder y sucede que teniendo por, ejemplo, m, ó n, ó p, ó m y n, ó m, n y p, dos cifras decimales que al elevarse al cuadrado se convierten en cuatro, al restar el doble producto de $mn+mp+np$, se destruyan aquellas ó alguna de dichas cifras, y resultando ceros á la derecha se omiten. Así que, la division que se haga en las diferencias que las tablas nos den, será por la unidad seguida de tantos ceros como la mitad del número de cifras decimales sumado con el de los ceros que en las tablas hayamos encontrado agregados á $3N$.

Ejemplo: Si tenemos $3N=341,61$, y buscamos este número en las tablas, hallarémos el número 3416100. Por consiguiente, con arreglo á lo dicho debemos considerar á $3N$ como con cuatro decimales, y por consiguiente, dividiremos por 100 las diferencias $m=745$, $n=745$, $p=1300$, y serán $m=7,45$, $n=7,45$, $p=13$ las que correspondan á 341,61.

77. Si $3N$ no estuviese en las tablas será N un cuadrado perfecto, en cuyo caso la resolucion de la ecuacion es la explicada en los números (61, 64 y 65), ó será $N=\frac{4n^2}{3}$, cuya resolucion explican los números (62 y 63). Y á estos mismos números (61 al 65) deberémos recurrir si estando $3N$

en las tablas nos diese para las raices valores falsos, que conocerémos comprobando su producto con el último término de la ecuacion.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE 4.° GRADO.

78. Pocas palabras bastarán para llenar cumplidamente el objeto que nos proponemos.

Hemos visto (75) que las raices son x, $y=x+m$, $z=x+n$, $u=x+p$, y que la suma es $x+y+z+u=$ $=4x+m+n+p$. Halladas, pues, en las tablas las diferencias m, n, p, sustituirémos sus valores en esta fórmula; y dejando en un sólo miembro á $4x$, dividirémos por 4 y tendrémos el valor de x. En seguida sustituirémos este y el de m en $y=x+m$, y nos dará el de y; harémos lo mismo con n y p en $z=x+n$, $u=x+p$, y quedará resuelta la ecuacion, como lo verémos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^4-25x^3+177x^2-423x+270=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=25$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=177$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de de la segunda, nos dará:

$$25^2-\frac{8\times177}{3}=153=m^2+n^2+p^2-\frac{2mn-2mp-2np}{3}$$

Y multiplicado por 3, será:

$$459=3m^2+3n^2+3p^2-2mn-2mp-2np=3N.$$

Buscando en las tablas el número 459, vemos que nos marca las diferencias $m=2$, $n=5$, $p=14$; y como la suma de las raices es $x+y+z+u=25$, tendrémos:

$$4x+m+n+p=25$$

Sustituyendo aquí los valores de m, n, p, dejando sólo en el primer miembro á $4x$, y dividiendo por 4, será:

$4x+2+5+14=25$ ó $4x=25-21=4$. $x=1$
$y=x+m$ ó $y=1+2$. . . . . $y=3$
$z=x+n$ ó $z=1+5$. . . . . $z=6$
$u=x+p$ ó $u=1+14$. . . . . $u=15$

$x+y+z+u$. . . . . . $=25$

Estos cuatro valores satisfacen á la ecuacion propuesta, que es lo que se buscaba.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^4+12,96x^3+28,3939x^2-132,515244x-$$
$$-379,07549792=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=-12,96$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=28,3939$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de la segunda, será:

$$-12,96^2-\frac{8\times28,3939}{3}=92,2445\frac{1}{3}=N.$$

Multiplicando por 3, tenemos:

$$276,7336=3m^2+3n^2+3p^2-2mn-2mp-2np=3N$$

Buscarémos este número en las tablas, prescindiendo de la coma decimal, y vemos que nos dá las diferencias:

$$m=327,\ n=532,\ p=1141$$

Recordando lo dicho (49) tendrémos, que habiendo cuatro cifras decimales en el número

276,7336, al suprimir la coma, lo hemos multiplicado por 10000, y por consiguiente, hemos tambien multiplicado por 100 á las diferencias m, n, p, productoras de dicho número; luégo tendrémos que dividir por 100 á estas diferencias, y será:

$$m=3,27,\ n=5,32,\ p=11,41$$

Tenemos:

$$x+y+z+u=-12,96$$

luégo será:

$4x+m+n+p=-12,96$ ó $4x+3,27+5,32+$ $+11,41=-12,96$ ó $4x=-12,96-20=-32,96$.

Dividiendo por 4, será:		$x=-\ 8,24$
$y=x+m$	ó $y+-8,24+\ 3,27$	$y=-\ 4,97$
$z=x+n$	ó $z=-8,24+\ 5,32$	$z=-\ 2,92$
$u=x+p$	ó $u=-8,24+11,41$	$u=\ \ 3,17$
	$x+y+z+u$	$=-12,96$

Con lo cual la ecuacion queda resuelta.

79. Cumpliendo lo que ofrecimos en los números (69, 72 y 74), vamos á tratar de las ecuaciones que comprende el 3.er caso (66).

80. La primera subdivision de este caso es aquella en que las raices están representadas (66) por:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+p$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u=4x+n+p.$$

Y como tenemos (20):

$$y=x+m,\ z=x+n,\ u=x+p,$$

será:

$$m=y-x,\ n=z-x,\ p=u-x.$$

Si, pues, en el presente caso tenemos:

$$y=x,\ z=x+n,\ u=x+p,$$

será: $m=0$.

Y por consiguiente, nada hay que se oponga á que las tablas empiecen por $m=0$ en lugar de empezar por $m=1$, con lo cual esta subdivision queda comprendida en el caso último, como se demuestra sustituyendo el valor de $m=0$ en la fórmula:

$N=m^2+n^2+p^2-\frac{2mn}{3}-\frac{2mp}{3}-\frac{2np}{3}$; pues esta se convierte en $N=0^2+n^2+p^2-0-0-\frac{2np}{3}=$ $=n^2+p^2-\frac{2np}{3}$ que es la fórmula que sacamos entónces (66). Esto nos lo pondrá de manifiesto el siguiente:

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^4+12x^3-45{,}5129x^2-510{,}318x+1448{,}71=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=-12$$

$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=-45{,}5129$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de la segunda, será:

$$-12^2-\frac{8\times-45{,}5129}{3}=-12^2+$$

$$+\frac{8\times45{,}5129}{3}=265{,}3677\frac{1}{3}=\mathrm{N}$$

Multiplicando por 3, será:

$$796{,}1032=3N.$$

Buscando este número en las tablas, prescindiendo de la coma, vémos que el número 7961032 nos dá las diferencias:

$$m=0,\ n=1277,\ p=1523.$$

Dividiendo estos valores por 100, segun lo dicho (49), tendrémos:

$$m=0,\ n=12{,}77,\ p=15{,}23,$$

que sustituyéndolos en

$$4x+m+n+p=-12,$$

será:

$4x+0+12,77+15,23=-12$, ó $4x=-12-$
$-28=-40$.

Y dividiendo por 4, será: ..... $x=-10$
$y=x+m$, ó $y=-10+0$ ..... $y=-10$
$z=x+n$, ó $z=-10+12,77$ ..... $z=2,77$
$u=x+p$, ó $u=-10+15,23$ .....$u=5,23$

$$x+y+z+u=-12$$

81. La segunda subdivision del tercer caso es cuando las raices están representadas por (70):

$$x, =y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+p,$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u=4x+2m+p.$$

Entre esta subdivision y la primera, no existe más diferencia sino la de que en esta tenemos $m=n$, lo cual no complica ni la formacion de las tablas ni su uso. Si en la fórmula $x+y+z+u=4x+m+n+p$, hacemos $m=n$, que es el caso presente, se convertirá en la misma suma:

$$x+y+z+u=4x+2m+p.$$

Y si hacemos igual sustitucion en la fórmula del cuarto caso,

$$N=m^2+n^2+p^2-\frac{2mn}{3}-\frac{2mp}{3}-\frac{2np}{3}$$

será:

$$N=m^2+m^2+p^2-\frac{2m^2}{3}-\frac{2mp}{3}-\frac{2mp}{3}=2m^2$$
$$+p^2-\frac{2m^2}{3}-\frac{4mp}{3}=\frac{6m^2}{3}-\frac{2m^2}{3}+p^2-$$
$$\frac{4mp}{3}=\frac{4m^2}{3}+p^2-\frac{4mp}{3}$$

que es la misma fórmula sacada (70).

Luégo esta clase de ecuaciones pueden resolverse tambien por las tablas de diferencias del cuarto caso, como lo verémos en el siguiente:

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^4+12,10x^3+12,2025x^2-107,4825x-195,075=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=-12,10,$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=12,2025.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de la segunda, será:

$$-12{,}10^2-\frac{8\times 12{,}2025}{3}=146{,}41-32{,}54=$$
$$=113{,}87=N.$$

Y multiplicando por 3, dará:

$$341{,}61=3N,$$

que buscarémos en las tablas, prescindiendo de la coma; pero no lo hallarémos, sino que verémos el número 3416100, lo cual nos dice que este nos dará las diferencias de aquel; pero que debemos agregar estos dos ceros á 146,61, y teniendo ya cuatro decimales (76), dividirémos por 100 las diferencias que nos dá, y son:

$$m=745,\ n=745,\ p=1300,$$

que quedarán despues de hecha esta division en

$$m=7{,}45,\ n=7{,}45,\ p=13.$$

Con estos valores pasarémos á sacar los de las raices, y tendrémos:

$4x+m+n+p=-12{,}10$ ó $4x+7{,}45+7{,}45+$ $+13=-12{,}10$ ó $4x=-12{,}10-27{,}90=-40.$

Y dividiendo por 4, será: . . . $x=-10$

$y=x+m$ ó $y=-10+7,45$ $y=-2,55$

$z=x+n$ ó $z=-10+7,45$ $y=-2,55$

$u=x+p$ ó $u=-10+13$ $u=\ 3$

$x+y+z+u\ =-12,10$

Con lo cual queda resuelta la ecuacion.

82. Tambien hemos aplazado para este lugar la resolucion de las ecuaciones correspondientes á la tercera subdivision (73 y 74), lo cual vamos á cumplir.

Tenemos las raices representadas por:

$$x,\ y=x+m, z=x+n;$$

sumando:

$$x+y+z+u=4x+m+2n.$$

Y por consiguiente $n=p$ toda vez que $z=u$. Sustituyendo $p=n$ en la fórmula,

$$N=m^2+n^2+p^2-\frac{2mn}{3}-\frac{2mp}{3}-\frac{2np}{3}$$

será:

$$N=m^2+n^2+n^2-\frac{2mn}{3}-\frac{2mn}{3}-\frac{2n^2}{3} \text{ ó}$$

$$N=m^2+2n^2-\frac{4mn}{3}-\frac{2n^2}{3} \text{ ó}$$

$$N=m^2+\frac{6n^2}{3}-\frac{2n^2}{3}-\frac{4mn}{3}=m^2+\frac{4n^2}{3}-$$

$$-\frac{4mn}{3},$$

que es la misma fórmula hallada (73).

Haciendo igual sustitucion en la suma

$$x+y+z+u=4x+m+n+p,$$

tendremos:

$$x+y+z+u=4x+m+n+n=4x+m+2n.$$

Por consiguiente, tambien estas ecuaciones pueden resolverse por medio de las tablas de diferencias, como verémos en el siguiente:

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^4+8,25x^3-18,75x^2-123,4375x+257,8125=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=-8,25$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=-18,75.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de la segunda, será:

$$-8,25^2-\frac{8\times-18,75}{3}=118,0625=N.$$

Multiplicando por 3, será:

$$3N=354,1875,$$

cuyo número buscarémos en las tablas prescindiendo de la coma, y verémos que las diferencias son:

$$m=325,\ n=1075,\ p=1075,$$

que con arreglo á lo dicho (49), dividirémos por 100, y será:

$$m=3{,}25,\ n=10{,}75,\ p=10{,}75.$$

Sustituyendo estas diferencias en

$$4x+m+n+p=-8{,}25,$$

será:

$4x+3{,}25+10{,}75+10{,}75=-8{,}25$ ó $4x=-8{,}25-24{,}75=-33$.

Y dividiendo por 4, será: . . $x=-8{,}25$

$$\begin{array}{lll} y=x+m, & y=-8{,}25+3{,}25 & y=-5 \\ z=x+n, & z=-8{,}25+10{,}75 & z=\ \ 2{,}50 \\ u=x+p, & u=-8{,}25+10{,}75 & u=\ \ 2{,}50 \\ \hline & & x+y+z+u=-8{,}25 \end{array}$$

Con lo cual queda resuelta la ecuacion.

83. De lo expuesto resulta que todas las ecuaciones de 4.° grado completas pueden resolverse por medio de las tablas de diferencias con la mayor facilidad. Pero en atencion á lo sumamente fácil que es tambien la resolucion de las ecuaciones comprendidas en el segundo caso, dejamos su resolu-

cion, tal como se explica en el número (61), al cual se acudirá en el caso de que al presentársenos una ecuacion de 4.° grado para ser resuelta, no hallásemos á $3N$ en las tablas, ó si hallándole, no nos diese las verdaderas diferencias, y por consiguiente, sacásemos falsos valores de raices. Para asegurarse de que hemos obtenido las verdaderas raices, debemos siempre comprobar su producto con el último término de la ecuacion.

ECUACIONES INCOMPLETAS DE 4.° GRADO.

84. No siempre las ecuaciones se presentan con todos sus términos, sino que á veces les falta uno ó más de ellos. Esto, sin embargo, no hace variar absolutamente nada el sistema explicado para las completas, que tiene igual aplicacion en las incompletas. Porque, sea cualquiera el término que falte, no consiste en otra cosa que en haberse nivelado y hecho igual las cantidades positivas y las negativas. Empezarémos por el caso en que á la ecuacion la falte el segundo término, cuyo coeficiente (9), sabemos que tomado con signo contrario es igual á la suma de las raices. Y como las demostraciones que tenemos dadas (59, 61, 62, 64, 66, 70, 73 y 75), comprendan todos los casos de igualdades y desigualdades de las raices, no tenemos necesidad de

una nueva demostracion para la resolucion de esta clase de ecuaciones. Solo, pues, dirémos, que cuando falta el segundo término en estas, es porque en la suma de las raices se nivelan los valores positivos con los positivos, y resulta cero por consiguiente. Nos limitarémos, por lo tanto, á poner el siguiente:

EJEMPLO 1.º

Sea la ecuacion:

$$x^4 - 172{,}4469x^2 - 1070{,}54398x - 1623{,}75024 = 0$$

y tendrémos:

$$x + y + z + u = 0,$$
$$xy + xz + xu + yz + yu + zu = -172{,}4469.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de la segunda, será:

$$0^2 - \frac{8 \times -172{,}4469}{3} = 459{,}8584 = N$$

Y multiplicando por 3, tendrémos:

$$1379{,}5752 = 3N.$$

Prescindiendo de la coma, buscarémos este número en las tablas, y vemos que nos dá las diferencias,

$$m = 273,\ n = 555,\ p = 2372.$$

Con arreglo á lo dicho (49), las dividirémos por 100, y tendrémos:

$$m=2,73,\ n=5,55,\ p=23,72,$$

con las cuales pasarémos á buscar los valores de las raices, y será:

$$4x+m+n+p=0,\ ó\ 4x+2,73+5,55+23,72=0,$$

$$ó\ 4x=-32,\ \text{de donde} \ldots\ldots x=-8$$

$$y=x+m,\ ó\ y=-8+2,73 \ldots\ldots y=-5,27$$

$$z=x+n,\ ó\ z=-8+5,55 \ldots\ldots z=-2,45$$

$$u=x+p,\ ó\ u=-8+23,72 \ldots\ldots u=\ 15,72$$

$$x+y+z+u \ldots\ldots \quad 0$$

Comprobado el producto de estos valores con el último término de la ecuacion, lo satisfacen, y por consiguiente, esta se halla resuelta.

85. Otro caso de ecuaciones incompletas es aquel en que falta el tercer término, cuyo coeficiente sabemos (9) que es la suma de los productos binarios de las raices. Pero su resolucion no varía por eso, pues se halla dentro de la ley general establecida, por lo que nos limitarémos á poner el siguiente ejemplo:

Sea la ecuacion:

$$x^4-8x^3+128x-256=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u=8,$$
$$xy+xz+xu+yz+yu+zu=0.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{8}{3}$ de la segunda, es:

$$8^2-\frac{8\times 0}{3}=8^2=64=N.$$

Y multiplicando por 3, nos dá: $3N=192$, que buscarémos en las tablas, y vemos que nos dá:

$$m=8,\ n=8,\ p=8,$$

y tendrémos:

$4x+m+n+p=8$, ó $4x+8+8+8=24$, ó $4x=$ $=8-24=-16$,

de donde dividiendo por 4 ..... $x=-4$

$y=x+m$, ó $y=-4+8$ ..... $y=\ \ 4$

$z=x+n$, ó $z=-4+8$ ..... $z=\ \ 4$

$u=x+p$, ó $u=-4+8$ ..... $u=\ \ 4$

$x+y+z+u$ ..... $=\ \ 8$

Cuyos valores comprobados con el último término de la ecuacion lo satisfacen, y las halladas son sus verdaderas raices.

86. Como segun hemos visto en todo lo expuesto, nos basta para resolver una ecuacion los términos segundo y tercero, sea ó no igual á cero cual-

quiera de ellos, creeríamos malgastar el tiempo en inquirir si puede haber ecuaciones en que faltan otro ú otros términos, pues nada nos debe esto importar teniendo los necesarios para su resolucion. Lo que sí nos dejaria inutilizados, seria el que en una misma ecuacion faltasen los dos términos segundo y tercero. Pero, como demostrarémos en la teoría general, no puede esto verificarse.

ECUACIONES POR RESOLVER.

$x^4 - 13{,}08x^3 + 64{,}1574x^2 - 139{,}863132x + 114{,}33811041 = 0.$

$x^4 - 2x^3 - 36x^2 - 88x - 64 = 0.$

$x^4 - 2{,}2x^3 - 18{,}72x^2 + 72{,}576x - 69{,}12 = 0.$

$x^4 - 0{,}45x^3 - 24{,}3729x^2 - 6{,}861975x + 108{,}155775 = 0.$

$x^4 - 0{,}48x^3 - 20{,}3824x^2 + 31{,}1456x + 83{,}9808 = 0$

$x^4 - 2{,}7536x^2 - 2{,}2464x - 0{,}4928 = 0.$

$x^4 - 4{,}44x^3 + 21{,}881296x + 48{,}57647712 = 0.$

ECUACIONES DE 5.° GRADO.

87. En las ecuaciones de 5.° grado pueden ocurrir los casos siguientes:

1.° Que la ecuacion tenga iguales sus cuatro raices, en cuyo caso la suma de ellas, será:

$$x + y + z + u + k = 5x.$$

2.° Que tengan las raices dos solos valores, lo cual puede verificarse de cualquiera de los modos siguientes, que llamarémos subdivisiones.

1.ª *subdivision.* Las raices primera, segunda, tercera y cuarta son iguales y menores que la quinta. Están representadas por:

x, $y=x$, $z=x$, $u=x$, $k=x+q$. (Véase el núm. 20.)

y la suma será:

$$x+y+z+u+k=5x+q.$$

2.ª *subdivision.* Las raices primera, segunda y tercera son iguales y menores que la cuarta y la quinta, que tambien son iguales. Están representadas por:

$$x,\ y=x,\ z=x,\ u=x+p,\ k=x+p,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+2p.$$

3.ª *subdivision.* Las raices primera y segunda son iguales y menores que tercera, cuarta y quinta tambien iguales. Están representadas por:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ k=x+n,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+3n.$$

4.ª *subdivision*. Las raices segunda, tercera, cuarta y quinta son iguales, y mayores que la primera. Están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+m,\ k=x+m,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+4m.$$

3.er caso. Que sean tres los valores de las raices, lo cual admite tambien las siguientes subdivisiones:

1.ª *subdivision*. Las raices primera, segunda y tercera son iguales y menores que la cuarta, que tambien es menor que la quinta. Están representadas por:

$$x,\ y=x,\ z=x,\ u=x+p,\ k=x+q,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+p+q.$$

2.ª *subdivision*. Las raices primera y segunda son iguales, menores que la tercera, que es menor que cuarta y quinta iguales. Se representan por:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+p,\ k=x+p,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+n+2p.$$

3.ª *subdivision*. Las raices primera y segunda son iguales, menores que 3.ª y 4.ª, iguales tambien y menores que la quinta. Se representan por:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+n,\ k=x+q,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+2n+q.$$

4.ª *subdivision.* Las raices segunda y tercera son iguales, mayores que la primera y menores que cuarta y quinta, tambien iguales. Están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+p,\ k=x+p,$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u+k=5x+2m+2p.$$

5.ª *subdivision.* Las raices segunda, tercera y cuarta son iguales, mayores que la primera y menores que la quinta. Están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+m,\ k=x+q,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+3m+q.$$

6.ª *subdivision.* Las raices tercera, cuarta y quinta son iguales, mayores que la segunda, y ésta mayor que la primera. Están representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+n,\ u=x+n,\ k=x+n,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+m+3n.$$

4.° caso: Que sean cuatro los valores de las raices, lo cual admite asimismo las subdivisiones siguientes:

1.ª *subdivision.* Las raices primera y segunda son iguales y menores que la tercera, menor que la cuarta, y ésta á su vez menor que la quinta. Están representadas por:

$$x,\ y=x,\ z=x+n,\ u=x+p,\ k=x+q,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+n+p+q.$$

2.ª *subdivision.* Las raices segunda y tercera son iguales, mayores que la primera, menores que la cuarta, y ésta menor que la quinta. Se hallan representadas por:

$$x,\ y=x+m,\ z=x+m,\ u=x+p,\ k=x+q,$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u+k=5x+2m+p+q.$$

3.ª *subdivision.* Las raices tercera y cuarta son iguales, menores que la quinta y mayores que la segunda, mayor tambien que la primera. Se hallan representadas por:

$$x, \ y = x+m, \ z = x+n, \ u = x+n, \ k = x+q,$$

siendo la suma:

$$x+y+z+u+k = 5x+m+2n+q.$$

4.ª *subdivision.* Las raices cuarta y quinta son iguales, mayores que la tercera, que es mayor que la segunda, y esta mayor que la primera. Se hallan representadas por:

$$x, \ y = x+m, \ z = x+n, \ u = x+p, \ k = x+q,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k = 5x+m+n+2p.$$

5.º caso: La ecuacion tiene todas sus raices desiguales, hallándose estas representadas por:

$$x, \ y = x+m, \ z = x+n, \ u = x+p, \ k = x+q,$$

cuya suma es:

$$x+y+z+u+k = 5x+m+n+p+q.$$

88. Para averiguar la relacion que guardan entre sí el cuadrado de la suma de las raices y la de los productos binarios, practicarémos lo mismo que hemos hecho en las ecuaciones de grados inferio-

res á este. Si suponemos, pues, iguales las raices, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+k^2+2xy+$$
$$+2xz+2xu+2xk+2yz+2yu+2yk+2zu+2zk+$$
$$+2uk.$$

Y poniendo el segundo miembro en valores de x, será:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+x^2+x^2+x^2+x^2+2x^2+$$
$$+2x^2+2x^2+2x^2+2x^2+2x^2+2x^2+2x^2+2x^2+2x^2=$$
$$=25x^2 \quad (1).$$

Practicando lo mismo con los productos binarios, vemos por esta última ecuacion que son:

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$$
$$=10x^2 \quad (2).$$

Formando proporcion con estas dos ecuaciones, tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk}=\frac{25x^2}{10x^2}$$

Dividiendo por $5x^2$ los dos términos del segundo quebrado, tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk}=\frac{5}{2}$$

Pasando al segundo miembro el denominador del primer quebrado, será:

$$(x+y+z+u+k)^2=$$
$$=\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}$$

Y pasando el segundo miembro al primero, resultará:

$$(x+y+z+u+k)^2-$$
$$\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}=0.$$

Por donde vemos que cuando las raices son iguales, restando del cuadrado de la suma de estas los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, la resta es cero. Por consiguiente, dividiendo por 5 aquella suma, tendrémos el valor de $x=y=z=u=k$.

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^5-30x^4+360x^3-2160x^2+6480x-7776=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k=30,$$
$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=360.$$

Restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, será:

$$30^2 - \frac{5\times 360}{2} = 0.$$

Luégo las raices son iguales, y tendrémos que, dividiendo su suma por 5, nos dará: $\frac{30}{5}=6$, único valor que satisface á la ecuacion propuesta:

89. 2.° caso: Que las raices tengan dos solos valores, lo que, segun se ha dicho, admite cuatro subdivisiones, de las que vamos á tratar.

1.ª *Subdivision*: Las raices primera, segunda, tercera y cuarta son iguales y menores que la quinta. Se hallan representadas por:

$$x, y=x,\ z=x.\ u=x,\ k=x+q,$$

y la suma es:

$$x+y+z+u+k=5x+q.$$

Practicando lo mismo que hemos hecho en el primer caso, sin más diferencia que poner en lugar de k su valor $x+q$, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2 = x^2+y^2+z^2+u^2+k^2+2xy+$$
$$+2xz+2xu+2xk+2yz+2yu+2yk+2zu+2zk+$$
$$+2uk,$$

ó $x+y+z+u+k)^2=x^2+x^2+x^2+x^2+x^2+(x+q)^2$ $+2x^2+2x^2+2x^2+2x(x+q)+2x^2+2x^2+2x(x+q)$ $2x^2+2x(x+q)+2x(x+q)=x^2+x^2+x^2+x^2+x^2$ $+2xq+q^2+2x^2+2x^2+2x^2+2x^2+2xq+2x^2+2x^2+$ $+2x^2+2xq+2x^2+2x^2+2xq+2x^2+2xq$,

ó $(x+y+z+u+k)^2=25x^2+10xq+q^2$ (1).

Verificando lo propio con los productos binarios, tendrémos:

$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$ $=x^2+x^2+x^2+x(x+q)+x^2+x^2+x(x+q)+x^2+$ $+x(x+q)+x(x+q)=x^2+x^2+x^2+x^2+xq+x^2+x^2$ $+x^2+xq+x^2+x^2+xq+x^2+xq$,

ó $xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$ $=10x^2+4xq$ (2).

Pasando en la (1) q^2 al primer miembro, y formando proporcion con (1) y (2), tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-q^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk}=$$

$$=\frac{25x^2+10xq}{10x\ \ +4xq}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $5x^2+2xq$, tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-q^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk}=\frac{5}{2}$$

Pasando el denominador del primer quebrado al segundo miembro, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-q^2=\frac{\begin{array}{r}5(xy+xz+xu+xk+yz+\\+yu+yk+zu+zk+uk)\end{array}}{2}$$

Pasando finalmente el segundo miembro al primero, y q^2 del primero al segundo, resulta:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{\begin{array}{r}5(xy+xz+xu+xk+yz+\\+yu+yk+zu+zk+uk)\end{array}}{2}=q^2$$

Lo cual nos dice que cuando la quinta raíz es mayor que las restantes, siendo estas iguales, si del cuadrado de la suma de todas ellas restamos los $\frac{5}{2}$ de los productos binarios, resultará el cuadrado de la diferencia. Si, pues, de dicha suma de las raices restamos la raíz cuadrada de dicho cuadrado, nos resultará el valor de $5x$ que dividirémos por 5, y tendrémos el de $x=y=z=u$. Y si al valor de x agregamos el de la diferencia hallada, obtendrémos el de k, con lo cual quedará resuelta la ecuacion.

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^5-13x^4+64x^3-152x^2+176x-80=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k=13$$

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=64.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, nos dará:

$$13^2-\frac{5\times 64}{2}=9=q^2$$

Por consiguiente, $q=3$.

Las raices son:

$$x=y=z=u,\ k=x+q,$$

y la suma:

$$x+y+z+u+k=5x=q.$$

Luégo tendrémos:

$$x+y+z+u+k=13=5x+q.$$

Sustituyendo aquí el valor de q, y dejando solo en el segundo miembro á $5x$, será:

$5x=10$, de donde.	$x=2$
y como sabemos que $x=y=z=u$. . . .	$y=2$
será.	$z=2$
	$u=2$
y que $k=x+q$ será.	$k=5$
	$x+y+z+u+k=13$

90. 2.ª *subdivision*. Las tres raices primeras son iguales y menores que las dos últimas, iguales tambien, estando representadas por:

$$x,\ y=x,\ z=x,\ u=x+p,\ k=x+p,$$

sumando: $5x+2p$.

Ejecutando lo mismo que hasta aquí, tendremos:

$(x+y+z+u+k)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+k^2+2xy+$ $+2xz+2xu+2xk+2yz+2yu+2yk+2zu+2zk+$ $+2uk=x^2+x^2+x^2+(x+p)^2+(x+p)^2+2x^2+$ $+2x^2+2x(x+p)+2x(x+p)+2x^2+2x(x+p)+2x$ $(x+p)+2x(x+p)+2x(x+p)+2(x+p)(x+p)=$ $=x^2+x^2+x^2+x^2+2xp+p^2+x^2+2xp+p^2+2x^2+$ $+2x^2+2x^2+2xp+2x^2+2xp+2x^2+2x^2+2xp+$ $+2x^2+2xp+2x^2+2xp+2x^2+2xp+2x^2+4xp+$ $+2p^2$ ó

$$(x+y+z+u+k)^2=25x^2+20xp+4p^2.$$

Y pasando al primer miembro $4p^2$, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-4p^2=25x^2+20xp\ (1).$$

Verificando lo propio con los productos binarios, será:

$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$ $=x^2+x^2+x(x+p)+x(x+p)+x^2+x(x+p)+x(x+$ $+p)+x(x+p)+x(x+p+(x+p)^2=x^2+x^2+x^2+$ $+xp+x^2+xp+x^2+x^2+xp+x^2+xp+x^2+xp+$ $+x^2+xp+x^2+2xp+p^2$ ó

$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$
$=10x^2+8xp+p^2.$

Y pasando p^2 al primer miembro, será:

$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-p^2$
$+10x^2+8xp$ (2).

Con las dos ecuaciones (1) y (2) formarémos proporcion, y tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-4p^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+ \atop +yk+zu+zk+uk-p^2}=\frac{25x^2+20xp}{10x^2+8xp}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $5x^2+4xp$, será:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-4p^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu \atop +yk+zu+zk+uk-p^2}=\frac{5}{2}$$

Pasando el denominador del primer quebrado al segundo miembro, resultará:

$$(x+y+z+u+k)^2-4p^2=\frac{5(xy+xz+xu+ \atop +xk+yz+yu+ \atop yk+zu+zk+uk)}{2}-\frac{5p^2}{2}$$

Pasando al primer miembro el primer término del segundo miembro, y á éste el segundo término del primer miembro, nos dará:

$$(x+y+z+k)^2-\frac{\begin{array}{c}5(xy+xz+xu+\\+xk+yz+yu+\\+yk+zu+zk+uk)\end{array}}{2}=4p^2-\frac{5p^2}{2}$$

Y finalmente, verificando la resta indicada en el segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{\begin{array}{c}5(xy+xz+xu+\\+xk+yz+yu+\\+yk+zu+zk+uk)\end{array}}{2}=\frac{3p^2}{2}$$

Cuya fórmula nos manifiesta que restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, cuando aquellas están representadas por: x, $y=x$, $z=x$, $u=x+p$, $k=x+p$, nos resulta $\frac{3}{2}$ del cuadrado de la diferencia, $u-x=k-x$. Si, pues, al resultado de dicha resta lo multiplicamos por 2 y lo dividimos por 3, tendrémos el cuadrado de dicha diferencia, del cual extraerémos la raíz cuadrada y la sustituirémos en la suma $x+y+z+u+k=5x+2p$. Pasando en seguida $2p$ al otro miembro, tendrémos el valor de $5x$, el que dividirémos por 5, y nos dará el de $x=y=z$, y sustituyendo este y el de p en $u=x+p$, tendrémos tambien el $u=k$, con lo cual queda resuelta la ecuacion.

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$x^5+1{,}06x^4—19{,}1816x^3—27{,}362x^2+93{,}7825x—$
$—162{,}00625=0,$

y tendrémos: $x+y+z+u+k=—1{,}06,$

$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$
$—19{,}1816.$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, nos dará:

$$—1{,}06^2—\frac{5\times—19{,}1816}{2}=1{,}1236—(—47{,}954)$$

$$=1{,}1236+47{,}954=49{,}0776=\frac{3p^2}{2}$$

de donde, $p^2=\dfrac{2\times 49{,}0776}{3}=32{,}7184.$

Extrayendo la raíz de los dos miembros, será: $p=5{,}72$. La suma de las raices es: $—1{,}06$, luégo tendrémos: $5x+2p=—1{,}06$, ó $5x+2\times 5{,}72=$ $—1{,}06$, ó$5x=—1{,}06—11{,}44=—12{,}50$.

Y dividiendo por 5, tendrémos. . . $x=—2{,}5$

Y como $x=y=z$, será. . . . . . $y=—2{,}5$

$x=—2{,}5$

Tambien tenemos, $u=x+p$. . . $u=\ \ 3{,}22$

$k=x+p$, luégo será. . . . . . $k=\ \ 3{,}22$

$x+y+z+u+k$. . . $=—1{,}06$

Si verificamos el producto de estos mismos valores verémos que es igual al último término de la ecuacion propuesta, tomado con signo contrario, y por consiguiente, son las verdaderas raices.

91. 3.ª *subdivision*. Las raices primera y segunda son iguales y menores que tercera, cuarta y quinta tambien iguales. Se hallan representadas por: x, $y=x$, $z=x+n$, $u=x+n$, $k=x+n$, y la suma es: $x+y+z+u+k=5x+3n$.

Practicando las mismas operaciones que hemos hecho hasta aquí, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+k^2+2xy+$$
$$+2xz+2xu+2xk+2yz+2yu+2yk+2zu+2zk+$$
$$+2uk.$$

Sustituyendo los valores $y=x$, $z=x+n$, $u,=x+$ $+n$, $k=x+n$, será:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+x^2+(x+n)^2+(x+n)^2+$$
$$+(x+n)^2+2x^2+2x(x+n)+2x(x+n)+2x(x+n)+$$
$$+2x(x+n)+2x(x+n)+2x(x+n)+2(x+n)(x+n)$$
$$+2(x+n)(x+n)+2(x+n)(x+n)=x^2+x^2+x^2+$$
$$+2xn+n^2+x^2+2xn+n^2+x^2+2xn+n^2+2x^2+$$
$$+2x^2+2xn+2x^2+2xn+2x^2+2xn+2x^2+2xn+$$
$$+2x^2+2xn+2x^2+2xn+2x^2+4xn+2n^2+2x^2+$$
$$+4xn+2n^2+2x^2+4xn+2n^2 \text{ ó}$$
$$(x+y+z+u+k)^2=25x^2+30xn+9n^2.$$

Pasando $9n^2$ al primer miembro. será:

$$(x+y+z+u+k)^2-9n^2=25x^2+30xn \ldots\ldots (1).$$

Verificando lo mismo con los productos binarios, tendrémos:

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$$
$$=x^2+x(x+n)+x(x+n)+x(x+n)+x(x+n)+$$
$$+x(x+n)+x(x+n)+(x+n)(x+n)+(x+n)(x+n)$$
$$+(x+n)(x+n)=x^2+x^2+xn+x^2+xn+x^2+xn+$$
$$+x^2+xn+x^2+xn+x^2+xn+x^2+2xn+n^2+x^2+$$
$$+2xn+n^2+x^2+2xn+n^2 \text{ ó}$$
$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$$
$$=10x^2+12xn+3n^2.$$

Pasando $3n^2$ al primer miembro, será:

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-$$
$$-3n^2=10x^2+12xn \text{ (2)}.$$

Formando proporcion con (1) y (2), tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-9n^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-3n^2}=\frac{25x^2+30xn}{10x^2+12xn}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $5x^2+6xn$, será:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-9n^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk-3n^2}=\frac{5}{2}$$

Pasando el denominador del primer quebrado al segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2-9n^2=\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}-\frac{5\times 3n^2}{2}$$

Pasando el primer término del segundo miembro al primero, y $-9n^2$ de este al segundo, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}=9n^2-\frac{15n^2}{2}$$

Y por último, verificando la resta indicada en el segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}=\frac{3n^2}{2}$$

Por donde vemos que restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, cuando las raices primera y segunda son iguales y menores que las tres restantes tambien iguales, nos resulta los $\frac{3}{2}$ del cuadrado de la diferencia entre aquellas y estas, lo mismo exacta-mente que en la subdivision anterior, por lo que para hallar dicha diferencia practicarémos lo que allí se dijo. Mas para hallar los valores de las raices, como nada hay que nos indique si la ecuacion pertenece á aquella ó á esta subdivision, deberémos tener presente que si al sacar dichos valores hacemos iguales las tres primeras raices, y menores que las otras dos, tambien iguales, y la comprobacion que debemos hacer con el último término de la ecuacion nos diese á conocer que las obtenidas no son las verdaderas, harémos iguales á las dos primeras y menores que las otras tres, tambien iguales, y verificarémos igual comprobacion.

EfEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^5 - 9x^4 - 6x^3 + 190x^2 - 75x - 1125 = 0,$$

y tendrémos:

$$x + y + z + u + k = 9,$$

$$xy + xz + xu + xk + yz + yu + yk + zu + zk + uk = -6$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, será: $9^2 - \frac{5 \times -6}{2} = 81 - (-15) = 81 + 15 = 96 = \frac{3p^2}{2}$ ó $\frac{3n^2}{2}$ De donde, p^2 ó $n^2 = \frac{2 \times 96}{3} = 64$, p ó $n = 8$.

Si tomamos $p=8$, tendrémos (90):

$$5x+2p=9,\text{ ó } 5x+2\times8=9,\text{ ó } 5x=9-16=-7$$

Dividiendo por 5, será: $x=\dfrac{-7}{5}$; $y=\dfrac{-7}{5}$;

$z=\dfrac{-7}{5}$; $u=x+p$, ó $u=\dfrac{-7}{5}+8$; $u=\dfrac{33}{5}$;

$k=x+p$, ó $k=\dfrac{-7}{5}+8$; $k=\dfrac{33}{5}$

Si verificamos el producto de estos cinco valores, verémos que no es igual al último término de la ecuacion propuesta, tomado con signo contrario, por locual conocerémos que no siendo las obtenidas las verdaderas raices, debemos hacer $8=n$, y tomar por consiguiente, la fórmula de la 3.ª subdivision, y será:

$$5x+3n=9,\text{ ó } 5x+3\times8=9,\text{ ó } 5x=9-24=-15.$$

Y dividiendo por 5, será: $x=-3$; $y=-3$; $z=x+$ $+n$, ó $z=-3+8$; $z=5$; $u=x+n$, ó $u=-3+8$; $u=5$; $k=x+n$, ó $k=-3+8$; $k=5$.

Si verificamos el producto de estos cinco valores y lo comprobamos con el último término de la ecuacion, verémos que hemos sacado las verdaderas raices, y que la ecuacion está resuelta.

92. 4.ª *subdivision.* Las raices segunda, tercera, cuarta y quinta, son iguales y mayores que la primera. Se hallan representadas por: x, $y=x+m$,

$z=x+m$, $u=x+m$, $k=x+m$, siendo la suma: $x+$ $+y+z+u+k=5x+4m$.

Empleando el mismo procediendo que en todos los casos anteriores, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+k^2+2xy+ +2xz+2xu+2xk+2yz+2yu+2yk+2zu+2zk+ +2uk.$$

Sustituyendo sus valores, será:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+(x+m)^2+(x+m)^2+(x+m)^2 +(x+m)^2+2x(x+m)+2x(x+m)+2x(x+m)+2x (x+m)+2(x+m)^2+2(x+m)^2+2(x+m)^2+2(x+m)^2 +2(x+m)^2+2(x+m)^2=x^2+x^2+2xm+m^2+x^2+ 2xm+m^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xm+m^2+2x^2+2xm +2x^2+2xm+2x^2+2xm+2x^2+2xm+2x^2+4xm+ +2m^2+2x^2+4xm+2m^2+2x^2+4xm+2m^2+2x^2+ +4xm+2m^2+2x^2+4xm+2m^2+2x^2+4xm+2m^2$$

ó $(x+y+z+u+k)^2=25x^2+40xm+16m^2$

Y pasando $16m^2$ al primer miembro, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-16m^2=25x^2+40xm\ldots\ldots (1).$$

Verificando lo mismo con los productos binarios, nos dará:

$$(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)= =x(x+m)+x(x+m)+x(x+m)+x(x+m)+(x+m)^2 +(x+m)^2+(x+m)^2+(x+m)^2+(x+m)^2+(x+m)^2=$$

$=x^2+xm+x^2+xm+x^2+xm+x^2+xm+x^2+2xm$
$+m^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xm+$
$+m^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xm+m^2$

ó $xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$
$=10x^2+16xm+6m^2$

Y pasando $6m^2$ al primer miembro, será:

$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-$
$-6m^2=10x^2+16xm$ (2).

Formando proporcion con (1) y (2), y tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-16m^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+ +yk+zu+zk+uk-6m^2}=\frac{25x^2+40xm}{10x^2+16xm}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $5\,x^2+8xm$, nos dará:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-16m^2}{xy+xz+xu+xk+yz+yu +yk+zu+zk+uk-6m^2}=\frac{5}{2}$$

Pasando el denominador del primer quebrado, al segundo miembro, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-16m^2=\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz +yu+yk+zu+zk+uk)}{2}$$

$$-\frac{5\times 6m^2}{2}$$

Pasando el primer término del segundo miembro al primero, y $-16m^2$ al segundo, será:

$$(x+y+z+u+k)^2 - \frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu++yk+zu+zk+uk}{2}$$

$$=16m^2 - \frac{30m^2}{2}$$

Y por último, verificando la resta indicada en el segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2 - \frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk}{2} = m^2$$

Por donde vémos que restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, cuando la primera raíz es menor que las cuatro restantes, siendo estas iguales, nos dá el cuadrado de la diferencia entre aquella y estas, lo mismo que en la primera subdivision entre la quinta y las cuatro restantes, siendo estas iguales. Por consiguiente, si al verificar el producto de las raices que obtengamos aplicando la fórmula de esta subdivision, viésemos que no es igual al último término de la ecuacion propuesta, tomado con signo contrario, deberémos aplicar la fórmula de la subdivision primera.

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^5-24x^4+182x^3-202x^2-3087x+9604=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k=24,$$

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=182.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, será:

$$24^2-\frac{5\times182}{2}=121=q^2 \text{ ó } m^2; \text{ de donde, } q \text{ ó } m=11.$$

Si tomamos $9=11$, tenemos que sacar las raices segun están representadas en la primera subdivision: y si al comprobar el producto con el último término de la ecuacion viésemos que son falsos los valores obtenidos, tomarémos $m=11$, y los sacarémos segun están representadas las raices en la presente subdivision.

Tomando, pues, $q=11$, tendrémos:

$5x+q=24$, ó $5x+11=24$, ó $5x=24-11=13$

Y dividiendo por 5, será: $x=\frac{13}{5}$; $y=x$; $y=$

$=\frac{13}{5}$; $z=x$; $z=\frac{13}{5}$; $u=x$; $u==\frac{13}{5}$;

$k=x+q$; $k=\frac{68}{5}$

Verificando el producto de estos valores, vemos que no es igual al último término de la ecuacion propuesta, tomado con signo contrario, por consiguiente, tomarémos $m=11$, y sacarémos los valores segun la suma y representacion de las raices expresadas en esta subdivision, y tendrémos:

$5x+4m=24$, ó $5x+4\times 11=24$, ó $5x=24-44=-20$.

Y dividiendo por 5, será: $x=-4$. Tenemos $y=x+m$, ó $y=-4+11$, $y=7$; $z=x+m$, ó $z=-4++11$; $z=7$; $u=x+m$, $u=-4+11$; $u=7$, $k=x+m$, $k=-4+11$, $k=7$, $x+y+z+u+k=24$.

Comprobados estos valores con el último término de la ecuacion, vemos que estas son sus raices, y por consiguiente, la ecuacion está resuelta.

93. Tercer caso. Que sean tres los valores de las raices, lo cual, segun se ha dicho (87), admite seis subdivisiones.

1.ª *subdivision.* Las raices primera, segunda y tercera son iguales y menores que la cuarta, que tambien es menor que la quinta. Están representadas por x, $y-x$, $z=x$, $u=x+p$, $k=x+q$, y la suma es $x+y+z+u+k=5x+p+q$.

Procediendo de igual suerte que hasta aquí, tendrémos:

$(x+y+z+u+k)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+k^2+2xy+$

$+2xz+2xu+2xk+2yz+2yu+2yk+2zu+2zk+$
$+2uk.$

Sustituyendo valores, será:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+x^2+x^2+(x+p)^2+(x+q)^2$$
$$+2x^2+2x^2+2x(x+p)+zx(x+q)+2x^2+2x(x+p)$$
$$+2x(x+q)+2x(x+p)+2x(x+q)+2(x+p)(x+q)$$
$$=x^2+x^2+x^2+x^2+2xp+p^2+x^2+2xq+q^2+2x^2+$$
$$+2x^2+2x^2+2xp+2x^2+2xq+2x^2+2x^2+2xp+2x^2$$
$$+2xq+2x^2+2xp+2x^2+2xq+2x^2+2xp+2xq+$$
$$+2pq,$$

ó $(x+y+z+u+k)^2=25x^2+10xp+10xq+2pq+$
$+p^2+q^2.$

Pasando al primer miembro, p^2+q^2+2pq, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-(p^2+q^2+2pq)=25x^2+10xp$$
$$+10xq \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Verificando lo propio con los productos binarios, tendrémos:

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$$
$$=x^2+x^2+x(x+p)+x(x+q)+x^2+x(x+p)+x$$
$$(x+q)+x(x+p)+x(x+q)+(x+p)(x+q)=x^2+$$
$$+x^2+x^2+xp+x^2+xq+x^2+x^2+xp+x^2+xq+x^2$$
$$+xp+x^2+xq+x^2+xp+xq+pq,$$

ó $xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$
$=10x^2+4xp+4xq+pq.$

Pasando pq del segundo miembro al primero, será:

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-$$
$$-pq=10x^2+4xp+4xq \ (2).$$

Formando proporcion con (1) y (2), tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2 - (p^2+q^2+2pq)}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-pq}=\frac{25x^2+10xp+10xq}{10x^2+4xp+4xq}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $5x^2+2xp+2xq$, será:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-(p^2+q^2+2pq)}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-pq}=\frac{5}{2}$$

Pasando el denominador del primer quebrado al segundo miembro, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-(p^2+q^2+2pq)=$$
$$=\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}-\frac{5pq}{2}$$

Pasando al primer miembro el primer término del segundo, y $-(p^2+q^2+2pq)$ á este, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}=$$
$$=p^2+q^2+2pq-\frac{5pq}{2}$$

Y por último, verificando la resta indicada en el segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{\begin{array}{c}5(xy+xz+xu+xk+yz+\\+yu+yk+zu+zk+uk)\end{array}}{2}=$$
$$=p^2+q^2-\frac{pq}{2}$$

Por cuyo resultado vemos que cuando las raices son de la forma x, $y=x$, $z=x$, $u=x+p$, $k=x+q$, restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, nos resulta los cuadrados de las diferencias $u-x$, $k-x$ menos la mitad del producto de ambas. Ya en las ecuaciones de 3.° y 4.° grados hemos hallado fórmulas muy parecidas á esta, y no hay duda que siguiendo el sistema explicado entonces (29, 33, 41, 68, etc.), lograríamos resolver la ecuacion; pero como segun hemos visto, puede tal método ser algo difuso en varias ocasiones, lo cual conviene evitar, y como, por otra parte, todas las ecuaciones que comprende este tercer caso y con más razon aun las del cuarto, han de presentar fórmulas no menos embarazosas, hemos determinado incluir todas estas en la resolucion general, lo cual es sumamente ventajoso como se echa de ver sin necesidad de comentarios. Omitiendo, pues, ambos casos 3.° y 4.°, pasemos desde luégo al

94. 5.° caso. Las raices son todas desiguales, estando representadas por:

x, $y=x+m$, $z=x+n$, $u=x+p$, $k=x+q$, y la suma es: $x+y+z+u+k=5x+m+n+p+q$.

Ejecutando lo mismo que en los casos anteriores, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+y^2+z^2+u^2+k^2+2xy+ \\ +2xz+2xu+2xk+2yz+2yu+2yk+2zu+2zk+ \\ +2uk,$$

Sustituyendo valores, será:

$$(x+y+z+u+k)^2=x^2+(x+m)^2+(x+n)^2+(x+p)^2 \\ +(x+q)^2+2x(x+m)+2x(x+n)+2x(x+p)+2x \\ (x+q)+2(x+m)(x+n)+2(x+m)(x+p)+2(x+m) \\ (x+q)+2(x+n)(x+p)+2(x+n)(x+q)+2(x+p) \\ (x+q)=x^2+x^2+2xm+m^2+x^2+2xn+n^2+x^2+2xp \\ +p^2+x^2+2xq+q^2+2x^2+2xm+2x^2+2xn+2x^2+ \\ +2xp+2x^2+2xq+2x^2+2xm+2xn+2mn+2x^2+ \\ +2xm+2xp+2mp+2x^2+2xm+2xq+2mq+2x^2 \\ +2xn+2xp+2np+2x^2+2xn+2xq+2nq+2x^2+ \\ +2xp+2xq+2pq \text{ ó}$$

$$(x+y+z+u+k)^2=25x^2+10xm+10xn+10xp+ \\ +10xq+m^2+n^2+p^2+q^2+2mn+2mp+2mq+2np \\ +2nq+2pq.$$

Pasando al primer miembro el cuadrado de $m+n+p+q$, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2-(m^2+n^2+p^2+q^2+2mn+2mp+2mq+2np+2nq+2pq=25x^2+10xm+10xn++10xp+10xq \ldots\ldots (1)$$

Verificando lo mismo con los productos binarios, será:

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk==x(x+m)+x(x+n)+x(x+p)+x(x+q)+(x+m)(x+n)+(x+m)(x+p)+(x+m)(x+q)+(x+n)(x+p)+(x+n)(x+q)+(x+p)(x+q)=x^2+xm++x^2+xn+x^2+xp+x^2+xq+x^2+xm+xn+mn++x^2+xm+xp+mp+x^2+xm+xq+mq+x^2+xn++xp+np+x^2+xn+xq+nq+x^2+xp+xq+pq$$ ó

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk==10x^2+4xm+4xn+4xp+4xq+mn+mp+mq++np+nq+pq.$$

Pasando al primer miembro $mn+mp+mq+np+nq+pq$, será:

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk--(mn+mp+mq+np+nq+pq)=10x^2+4xm+4xn+4xp+4xq \ldots\ldots (2)$$

Formando proporcion con (1) y (2), será:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-(m^2+n^2+p^2+q^2+2mn+2mp+2mq+2np+2nq+2pq)}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-(mn+mp+mq+np+nq+pq)}=$$

$$=\frac{25x^2+10xm+10xn+10xp+10xq}{10x^2+4xm+4xn+4xp+4xq}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $5x^2+2xm+2xn+2xp+2xq$, tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k)^2-(m^2+n^2+p^2+q^2+2mn+2mp+2mq+2np+2nq+2pq}{xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk-(mn+mp+mq+np+nq+pq)}=\frac{5}{2}$$

Pasando el denominador del primer quebrado al segundo miembro, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-(m^2+n^2+p^2+q^2+2mn+2mp+2mq+2np+2nq+2pq)=$$

$$=\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}-\frac{5(mn+mp+mq+np+nq+pq)}{2}$$

Pasando el primer término del segundo miembro al primero, y el segundo término del primer miembro al segundo, será:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{5(xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk)}{2}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}m^2+n^2+p^2+q^2+2mn+2mp\\ +2mq+2np+2nq+2pq\end{matrix}\right\}-\frac{5(mn+mp+mq+np+nq+pq)}{2}$$

Y verificando la resta indicada en el segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k)^2-\frac{\begin{array}{c}5(xy+xz+xu+xk+yz+\\+yu+yk+zu+zk+uk)\end{array}}{2}=$$

$$=m^2+n^2+p^2+q^2-\frac{(mn+mp+mq+np+nq+pq)}{2}$$

Y multiplicando por 2 para quitar el denominador, será:

$2N=2m^2+2n^2+2p^2+2q^2-(mn+mp+mq+np+nq+pq)$ (Véase la nota del número 48.)

Fórmula que nos dice que restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, nos resulta los cuadrados de las diferencias m, n, p, q, menos la mitad de la suma de los productos binarios de las mismas.

Para sacar los valores de m, n, p, q, pudiéramos seguir el sistema explicado (29) al tratar de las ecuaciones de 3.^er^ grado, cuya fórmula m^2+n^2-mn es muy parecida á esta; pero ofreciendo ese sistema de resolucion los inconvenientes que se manifestaron entonces, y que con mayor razon se ofrecian en las ecuaciones de 5.º grado, omitirémos todo lo que no sea de verdadera utilidad, porque tal es nuestro modo de pensar, y nos ocuparémos desde luégo del objeto á que debemos dirigirnos.

95. Comprendiéndose perfectamente que desde

el momento en que conozcamos los valores de las diferencias $m=y-x$, $n=z-x$, $p=u-x$, $q=k-x$, conocida como nos es la suma $x+y+z+u+k$, nos lo serán igualmente los de las raices de la ecuacion, y demostrado suficientemente (43 y siguientes) lo fácil que es hacer unas tablas que al primer golpe de vista nos presenten las expresadas diferencias, ya sean estas números enteros, ya fraccionarios, ya sean las raices positivas ó negativas, ó unas positivas y otras negativas, claro es que este es el medio más ventajoso por su facilidad, claridad y brevedad que puede adoptarse para lograr el fin que nos proponemos.

96. Respecto á la formacion y uso de estas tablas, poco tenemos que añadir á lo dicho en los números (43 hasta el 50); pues así como en las ecuaciones de 3.er grado solo son dos las diferencias, y en las de 4.° grado tres, en las de 5.° son cuatro. Esto parece que pudiera ofrecer algun aumento de trabajo para formar $2N$, que como sabemos está compuesto del duplo de la suma de los cuadrados de m, n, p, q, menos la de los productos binarios; pero segun se demostró (47), no es necesario ir practicando estas operaciones, sino que con la misma facilidad y brevedad se hace N en las de 3.er grado, que $3N$ en las de 4.°, que $2N$ en las de 5.°, etc., etc.

97. Por evitar repeticiones innecesarias, recordamos al lector tenga presente lo dicho (76); pues cuanto allí se dice es aplicable aquí, no variando más que en ser $3N$ el número de que en aquel lugar se trata, y en este ser $2N$.

98. Si $2N$ no estuviese en las tablas, ó será un cuadrado perfecto, en cuyo caso la resolucion de la ecuacion es la explicada en los números (89 y 92), ó será $\frac{3}{2}$ de un cuadrado perfecto; y entonces la resolucion es la que comprenden los números (90 y 91). Y á estos mismos números (89, 90, 91 y 92) habrá que recurrir si estando $2N$ en las tablas nos diese para las raices valores falsos, que conoceremos comprobando su producto con el último término de la ecuacion.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE 5.° GRADO.

99. Hemos visto (88) que cuando las raices son iguales, restando del cuadrado de la suma de las raices los $\frac{5}{2}$ de la de los productos binarios, nos resulta cero: y por consiguiente, dividiendo aquella suma por 5, tendrémos el valor de $x=y=z=u=k$. Tenemos, pues, que cuando no es cero el resultado de esta resta, es porque hay diferencia ó diferencias entre las raices. Veamos si todas las ecua-

ciones de este grado, ya tengan una, dos, tres ó cuatro diferencias, pueden resolverse por un mismo método. Para que esto se verifique, es necesario hallar una fórmula general que sea en todas ellas la expresion del resultado de la resta, al cual hemos llamado N. Examinemos, pues, si esta fórmula general puede ser la que hemos hallado en el quinto caso, que es:

$$N=m^2+n^2+p^2+q^2-\frac{(mn+mp+mq+np+nq+pq)}{2}$$

100. Si aplicamos esta fórmula al primer caso, que es cuando tenemos $x=y=z=u=k$, como que no existen diferencias entre las raices, es evidente que siendo $m=0$, $n=0$, $p=0$, $q=0$, resultará:

$$m^2+n^2+p^2+q^2-\frac{(mn+mp+mq+np+nq+pq)}{2}=0$$

ó sea $N=0$.

101. Si la aplicamos á la primera subdivision del segundo caso, cuyas raices están representadas por x, $y=x$, $z=x$, $u=x$, $k=x+q$, tendrémos: $m=y-x=0$, $n=z-x=0$, $p=u-x=0$, $q=k-x$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de que tratamos, será:

$$N=0^2+0^2+0^2+q^2-\frac{(0+0+0+0+0+0)}{2}=q^2$$

que es el mismo resultado que allí obtuvimos.

102. Si hacemos igual aplicacion en la segunda

subdivision, cuyas raices están representadas por $x, y=x, z=x, u=x+p, k=x+p$, será: $m=y-x=0$, $n=z-x=0$, $p=u-x$, $q=k-x=p$, cuyos valores sustituidos en dicha fórmula darán:

$$N=0^2+0^2+p^2+p^2-\frac{(0+0+0+0+0+p^2)}{2}=\frac{3p^2}{2}$$

que tambien es el mismo resultado obtenido allí.

103. Si verificamos lo mismo en la tercera subdivision, cuyas raices son x, $y=x$, $z=x+n$, $u=x+n$, $k=x+n$, tendrémos: $m=y-x=0$, $n=z-x$, $p=u-x$, $q=k-x$. Y como $z=u=k$ será: $u=p=q$. Haciendo la sustitucion dicha, será:

$$N=0^2+n^2+n^2+n^2-\frac{(0+0+0+n^2+n^2+n^2)}{2}=\frac{3n^2}{2}$$

que tambien es el mismo resultado obtenido.

104. Practicando lo mismo en la cuarta subdivision, cuyas raices son x, $y=x+m$, $z=x+m$, $u=x+m, k=x+m$, tendrémos que siendo $m=y-x$, y teniendo $y=z=u=k$, será: $m=n=p=q$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de que tratamos, será:

$$N=m^2+m^2+m^2+m^2-\frac{(m^2+m^2+m^2+ \\ +m^2+m^2+m^2)}{2}=m^2$$

que asimismo es el resultado obtenido entonces.

105. Practicando lo propio con la primera subdivision del 3.^{er} caso, cuyas raices están represen-

tadas por x, $y=x$, $z=x$, $u=x+p$, $k=x+q$, teniendo $m=0$, $n=0$, será:

$$N=0^2+0^2+p^2+q^2-\frac{\begin{matrix}(0+0+0+\\+0+0+pq)\end{matrix}}{2}=p^2+q^2-\frac{pq}{2}$$

que igualmente es el resultado obtenido.

106. Y como lo mismo resultaria en todos los demás casos, tenemos que la fórmula:

$$N=m^2+n^2+p^2+q^2-\frac{(mn+mp+mq+np+nq+pq)}{2}$$

es general para todas las ecuaciones de 5.° grado, y por consiguiente todas ellas pueden resolverse por medio de las tablas. Más como las comprendidas en los dos primeros casos son de una resolucion sumamente fácil por el sistema explicado en los números (88 al 92) no incluirémos en las tablas las diferencias entre sus raices, y solo lo harémos á contar desde las del tercer caso, que empezarán por $m=0$, $n=0$, $p=1$, $q=2$.

107. Tratando, pues, ahora ya solamente de la resolucion de las ecuaciones de 5.° grado comprendidas en los casos 3.°, 4.° y 5.°, nada tenemos que decir de nuevo, pues obtenidas por medio de las tablas las diferencias entre las raices, no hay más que proceder de igual suerte que lo hemos hecho en las ecuaciones de 3.° y 4.° grado, por lo que

nos limitarémos á poner un ejemplo de cada uno de dichos casos.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^5+8x^4-86x^3-728x^2+1421x+13720=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k=-8,$$

$$\left.\begin{array}{l} xy+xz+xu+xk+yz+ \\ +yu+yk+zu+zk+uk \end{array}\right\}=-86$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, será:

$$-8^2-\frac{5\times-86}{2}=64-(-215)=279=m^2+n^2$$

$$+p^2+q^2-.\frac{(mn+mp+mq+np+nq+pq)}{2}=N$$

Multiplicando por 2 para hacer desaparecer el denominador, será:

$$2m^2+2n^2+2p^2+2q^2-(mn+mp+mq+np+nq+pq)=558=2N.$$

Buscando este número en las tablas, nos dá: $m=0$, $n=0$, $p=12$, $q=15$.

La fórmula general de la suma de las raices, es: $x+y+z+u+k=5x+m+n+p+q$. Luégo será: $5x+m+n+p+q=-8$. Sustituyendo los valores de $m=0$, $n=0$, $p=12$, $q=15$, tendrémos:

$=5x+0+0+12+15=-8$; ó $5x=-8-27=-35$

Dividiendo por 5, será: . . . $x=-7$

$y=x+m$, ó $y=-7+0$. . . . . $y=-7$

$z=x+n$, ó $z=-7+0$. . . . $z=-7$

$u=x+p$, ó $u=-7+12$. . . $u=\ \ 5$

$k=x+q$, ó $k=-7+15$. . . . $k=\ \ 8$

$x+y+z+u+k=$. . . -8

Comprobando el producto de estos valores con el último término de la ecuacion, resulta que las halladas son las verdaderas raices.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^5-7x^4-15x^3+151x^2-130x+600=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k=7,$$

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=-15$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, será:

$$7^2-\frac{5\times-15}{2}=49-(-37,5)=49+37,5=86,5$$

$$=N=m^2+n^2+p^2+q^2-\frac{\begin{matrix}(mn+mp+mq+\\ np+nq+pq)\end{matrix}}{2}$$

Y multiplicando por 2, para quitar fracciones, será: $173=2N$.

Buscando á este número en las tablas, vemos que nos dá las diferencias $m=2$, $n=7$, $p=9$, $q=9$, y tendrémos:

$$5x+m+n=p+q=7,\ \text{ó}\ 5x+2+7+9+9=7,\ \text{ó}$$

$$5x=7-27=-20,\ \text{de donde.}\ .\quad x=-4$$
$$y=x+m,\ \text{ó}\ y=-4+2.\ .\ .\ .\quad y=-2$$
$$z=x+n,\ \text{ó}\ z=-4+7.\ .\ .\ .\ .\quad z=\ 3$$
$$u=x+p,\ \text{ó}\ u=-4+9.\ .\ .\ .\quad u=\ 5$$
$$k=x+q,\ \text{ó}\ k=-4+9.\ .\ .\ .\ .\quad k=\ 5$$
$$x+y+z+u+k=.\ .\ .\quad 7$$

Comprobados estos valores con el último término de la ecuacion, resulta que estas son sus raices.

EJEMPLO 3.º

Sea la ecuacion:

$$x^5-2{,}96x^4-78{,}5809x^3+27{,}221924x^2+$$
$$+1719{,}6567682x-3055{,}64556708=0,$$

y tendremos:

$$x+y+z+u+k=2{,}96$$
$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=$$
$$=-78{,}5809.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, será:

$$2{,}96^2 - \frac{5\times -78{,}5809}{2} = 8{,}7616 - (-196{,}45225) =$$

$$= 8{,}7616 + 196{,}45225 = 205{,}21385 = m^2 + n^2 +$$

$$+ p^2 + q^2 - \frac{(mn + mp + mq + np + nq + pq)}{2} = N$$

Y multiplicado por 2, será:

$$2N = 410{,}4277.$$

Buscando en las tablas este número, prescindiendo de la coma, nos dá las diferencias $m=87$, $n=278$, $p=1177$, $q=1364$. Y como al suprimir la coma hemos multiplicado por 100 las diferencias, dividiéndolas ahora por 100, será:

$m=0{,}87$; $n=2{,}78$; $p=11{,}77$; $q=13{,}64$, y tendrémos:

$5x+m+n+p+q=2{,}96$ ó $5x+0{,}87+2{,}78+$ $+11{,}77+13{,}64=2{,}96$

ó $5x=2{,}96-29{,}06=-26{,}1$ de donde $x=-5{,}22$

$$\begin{array}{llll}
y=x+m & \text{ó} & y=-5{,}22+\ 0{,}87 & y=-4{,}35 \\
z=x+n & \text{ó} & z=-5{,}22+\ 2{,}78 & z=-2{,}44 \\
u=x+p & \text{ó} & u=-5{,}22+11{,}77 & u=\ \ 6{,}55 \\
k=x+q & \text{ó} & k=-5{,}22+13{,}64 & k=\ \ 8{,}42 \\
\hline
 & & & x+y+z+u+k=2{,}96
\end{array}$$

Verificada la comprobacion del producto de estos valores con el último término de la ecuacion, resulta ser estas sus raices, y por tanto la ecuacion está resuelta.

ECUACIONES INCOMPLETAS DE 5.° GRADO.

108. Demostrado ya en las ecuaciones de grados inferiores que la resolucion de las incompletas se efectúa del mismo modo y por el mismo sistema que las completas. Nos limitarémos á poner el siguiente

EJEMPLO.

Sea la ecuacion:

$$x^5-51{,}4588x^3-129{,}620688x^2+175{,}14608x+550{,}260992=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k=0$$

$$xy+xz+xu+xk+yz+yu+yk+zu+zk+uk=-51{,}4588.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{5}{2}$ de la segunda, será:

$$0^2-\frac{5\times-51{,}4588}{2}=0-(-128{,}647)=128{,}647=N$$

Multiplicando por 2, será:

$2N=257{,}294.$

Prescindiendo de la coma y buscando este número en las tablas, hallamos 2572940, que nos presenta las diferencias $m=88$, $n=178$, $p=622$, $q=1222$. Y como el número que hemos buscado lo hemos hallado seguido de un cero, tambien debemos considerar á 257,294 como seguido de un cero (véanse los números 97 y 76), y será 257,2940; pues si reparamos en las operaciones practicadas, verémos que al multiplicar —51,4588 por 5, el producto de 5 por 8 diezmilésimas ha dado 40 milésimas, y por consiguiente cero diezmilésimas que hemos omitido.

Dividiendo, pues, por 100 las diferencias obtenidas, será: $m=0,88$, $n=1,78$, $p=6,22$, $q=12,22$, cuyos valores sustituirémos en la fórmula de la suma de las raices, y será:

$$5x+m+n+p+q=0 \text{ ó } 5x+0,88+1,78+6,22+12,22=0$$

$$\begin{array}{llll}
 & \text{ó } 5x=-21,1 & \text{de donde} & x=-4,22 \\
y=x+m & \text{ó } y=-4,22+0,88 & & y=-3,34 \\
z=x+n & \text{ó } z=-4,22+1,78 & & z=-2,44 \\
u=x+p & \text{ó } u=-4,22+6,22 & & u=\ \ 2 \\
k=x+q & \text{ó } k=-4,22+12,22 & & k=\ \ 8 \\
\hline
 & & & x+y+z+u+k=0
\end{array}$$

ECUACIONES POR RESOLVER.

109. Siendo, como hemos visto en todo el curso de la obra, completamente inútiles é innecesarias para la resolucion de las ecuaciones las sumas de los productos ternarios, cuaternarios, etc., y ab-

sorbiéndonos el hacer estas operaciones infructuosas un tiempo que no somos gustosos en malgastar, hemos determinado representar por A, B, C, D, etc. en todos los ejemplos sucesivos los coeficientes de los términos cuarto, quinto, etc., hasta el último exclusive, que, como sabemos, es el producto de todas las raices, con el cual siempre debemos comprobar los valores que obtengamos para ellas.

$$x^5-42x^4+705{,}6x^3-Ax^2+Bx-1247{,}93344=0$$

$$x^5-0{,}16x^4-17{,}9423x^3+Ax^2+Bx-115{,}5648195=0$$

$$x^5-7{,}66x^4+1{,}4452x^3+Ax^2+Bx+218{,}82096=0$$

$$x^5-2{,}44x^4-28{,}32x^3+Ax^2+Bx+261{,}12=0$$

$$x^5-2x^4-73x^3-Ax^2+Bx+360=0$$

$$x^5+188x^3-Ax^2+Bx+6144=0$$

ECUACIONES DE 6.° GRADO.

110. Vista la marcha que hemos seguido en las ecuaciones de los grados anteriores, parécenos supérfluo el repetir en las de este grado y sucesivos las operaciones que conducen á obtener la fórmula general que para las ecuaciones de 6.° grado hallarémos ser:

$$(x+y+z+u+k+\alpha)^2-\frac{12(xy+xz+xu+xk+x\alpha+yz+yu+yk+y\alpha+zu+zk+z\alpha+uk+u\alpha+k\alpha)}{5}$$

$$=N=m^2+n^2+p^2+q^2+r^2-\frac{\begin{array}{l}2(mn+mp+mq+mr\\+np+nq+nr+pq+\\+pr+qr)\end{array}}{5}$$

Y multiplicando por 5 para quitar el denominador, será:

$$5N=5(m^2+n^2+p^2+q^2+r^2)-2(mn+mp+mq+ +mr+np+nq+nr+pq+pr+qr).$$

111. Representando por x, y, z, u, k, α, las raices de la ecuacion, y por m, n, p, q, r, sus diferencias, con la fórmula general que hemos obtenido, sacarémos las particulares que corresponden al 1.° y 2.° casos, que son cuando todas tienen el mismo valor, y cuando son dos sus valores. En el primer caso, claro es que resulta $N=0$, pues todas las diferencias son tambien iguales á cero. En el segundo no tenemos más que hacer todas las diferencias, ménos la última, iguales á cero, y tendrémos la fórmula de la 1.ª subdivision, que es $N=r^2$. Si igualamos á cero las tres primeras diferencias, nos resultará la fórmula de la 2.ª subdivision, que es: $N=\frac{8q^2}{5}$. Y así sucesivamente hallarémos para la 3.ª $N=\frac{9p^2}{5}$; $N=\frac{8n^2}{5}$ para la 4.ª, y $N=m^2$ para la 5.ª

112. Tanto en el caso de que $5N$ se halle en las

tablas, y con las diferencias que nos dé saquemos valores falsos (que conocerémos por la comprobacion que debemos hacer de su producto con el último término de la ecuacion), como en el de que $5N$ no esté en las tablas, debemos resolver la ecuacion como comprendida en los casos 1.° y 2.°, viendo á cual subdivision corresponde, segun que N sea un cuadrado perfecto, ó sea igual á cualquiera de las fórmulas dichas.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^6-3{,}5x^5-32x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+528=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha=3{,}5,$$

$$\left.\begin{array}{l} xy+xz+xu+xk+x\alpha+yz+yu+yk \\ +y\alpha+zu+zk+z\alpha+uk+u\alpha+k\alpha \end{array}\right\}=-32.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{12}{5}$ de la segunda, será:

$$3{,}5^2-\frac{12\times-32}{5}=12{,}25-(-76{,}8)=12{,}25+$$

$$+76{,}8=89{,}05=N.$$

Y multiplicando por 5, será: $5N=445{,}25$.

Buscando este número en las tablas, prescindiendo de la coma decimal, vemos que nos dá: $m=10$, $n=30$, $p=60$, $q=80$, $r=95$.

Y como segun lo dicho (49), debemos dividir por 10 estas diferencias, será:

$m=1$, $n=3$, $p=6$, $q=8$, $r=9{,}5$, y tendrémos: $6x+m+n+p+q+r=3{,}5$. Sustituyendo valores, será:

$6x+1+3+6+8+9{,}5=3{,}5$, ó $6x=3{,}5-27{,}5=-24$.

Y dividiendo por 6, será. . . . . $x=-4$

$y=x+m$, ó $y=-4+1$. . . . . . $y=-3$

$z=x+n$, ó $z=-4+1$. . . . . . . $z=-1$

$u=x+p$, ó $u=-4+6$. . . . . . $u=\ 2$

$k=x+q$, ó $k=-4+8$. . . . . . $k=\ 4$

$\alpha=x+r$, ó $\alpha=-4+9{,}5$. . . . . $\alpha=\ 5{,}5$

$$x+y+z+u+k+\alpha\ =\ 3{,}5$$

Comprobando el producto de estos valores con el último término de la ecuacion, resulta que son las verdaderas raices.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$x^6-17x^5+83{,}6x^4-Ax^3+Bx^2-Cx-8245{,}8112=0$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha=17,$$

$$\left.\begin{array}{l} xy+xz+xu+xk+x\alpha+yz+yu+yk \\ +y\alpha+zu+zk+z\alpha+uk+u\alpha+k\alpha \end{array}\right\}=83{,}6$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{12}{5}$ de la segunda, será:

$$17^2 - \frac{12 \times 83,6}{5} = 88,36 = N, \ 5N = 441,8.$$

Buscando este número (prescindiendo de la coma) en las tablas, no le hallamos; y por consiguiente, procederémos con arreglo á lo dicho (112), y convencidos de que esta ecuacion es de las comprendidas en el segundo caso, verémos si N es un cuadrado perfecto, para lo cual extraerémos la raíz de $N=88,36$, y vemos que $\sqrt{88,36}=9,4$, y que es cuadrado perfecto, por lo que desde luégo pasamos á resolver la ecuacion, y tendrémos:

$x+y+z+u+k+\alpha=6x+r$ ó $6x+r=17$ ó $6x+94=17$ ó $6x=17-9,4$.

Y dividiendo por 6, será: $x=1,2\frac{2}{3}$; $y=1,2\frac{2}{3}$; $z=1,2\frac{2}{3}$; $u=1,2\frac{2}{3}$; $k=1,2\frac{2}{3}$; $\alpha=10,6\frac{2}{3}$.

Comprobados estos valores con el último término de la ecuacion, vemos que no son estas las raices, por lo que resolverémos la ecuacion segun la quinta subdivision en que $N=m^2$, y tendrémos:

$6x+5m=17$ ó $6x+5\times 9,4=17$ ó $6x=17-47=-30$.

Y dividiendo por 6, será: $x=-5$; $y=x+m$ ó

$y=4,4$; $z=x+m$ ó $z=4,4$; $u=x+m$ ó $u=4,4$; $k=x+m$ ó $k=4,4$; $\alpha=x+m$ ó $\alpha=4,4$.

Comprobados estos valores con el último término de la ecuacion, vemos que estas son las verdaderas raices.

ECUACIONES POR RESOLVER.

$$x^6-19,8x^5+163,35x^4-Ax^3+Bx^2+Cx+$$
$$+1281,467969=0$$
$$x^6+5x^5-10x^4-Ax^3+Bx^2-Cx-160=0$$
$$x^6-12x^5+34x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+900=0$$
$$x^6+5,2x^5-19,2x^4-Ax^3+Bx^2-Cx-223,2=0$$

ECUACIONES DE 7.° GRADO.

113. Verificando lo mismo que en las de sesto grado, hallarémos que la fórmula general es:

$$\left.\begin{matrix}(x+y+z+u\\+k+\alpha+\beta)^2\end{matrix}\right\}-\frac{\begin{matrix}7(xy+xz+xu+xk+x\alpha+x\beta+yz+\\+yu+yk+y\alpha+y\beta+zu+zk+z\alpha+\\+z\beta+uk+u\alpha+u\beta+k\alpha+k\beta+\alpha\beta)\end{matrix}}{3}=$$

$$=N=\left.\begin{matrix}m^2+n^2+\\+p^2+q^2+r^2+s^2\end{matrix}\right\}-\frac{\begin{matrix}(mn+mp+mq+mr+ms+\\+np+nq+nr+ns+pq+\\+pr+ps+qr+qs+rs)\end{matrix}}{3}$$

Sacando de esta las particulares de los casos primero y segundo, tendrémos, $N=0$ para aquél; y para esta, será: $N=s^2$ para la 1.ª subdivision; $N=\frac{5r^2}{3}$ para la 2.ª; $N=2q^2$ para la 3.ª; $N=2p^2$ para la 4.ª; $N=\frac{5n^2}{3}$ para la 5.ª, y $N=m^2$ para la 6.ª; las cuales aplicarémos de un modo análogo al explicado en el número 112.

EJEMPLO 1.º

Sea la ecuacion:

$$x^7-161x^6+111,09x^5-Ax^4+Bx^3-Cx^2+Dx-$$
$$-317,5190457=0;$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta=16,1,$$
$$\left.\begin{array}{l} xy+xz+xu+xk+x\alpha+x\beta+yz+ \\ +yu+yk+y\alpha+y\beta+zu+zk+z\alpha \\ +z\beta+uk+u\alpha+u\beta+k\alpha+k\beta+\alpha\beta \end{array}\right\}=111,9.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{7}{3}$ de la segunda, será:

$$16,1^2-\frac{7\times111,09}{3}=259,21-259,21=0.$$

Por consiguiente, las raices son iguales, y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta=7x=16,1,\text{ ó } x=\frac{16,1}{7}=2,3$$

único valor que satisface á la ecuacion propuesta.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^7-5x^6-59x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+10080=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta=5,$$

$$\left.\begin{matrix} xy+xz+xu+xk+x\alpha+x\beta+yz+ \\ +yu+yk+y\alpha+y\beta+zu+zk+z\alpha \\ +z\beta+uk+u\alpha+u\beta+k\alpha+k\beta+\alpha\beta \end{matrix}\right\}=-59.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{7}{3}$ de la segunda, será:

$$5^2-\frac{7\times-59}{3}=25-(-137\frac{2}{3})=25+$$

$$+137\frac{2}{3}=162\frac{2}{3}=N.$$

Multiplicando por 3 para hacer desaparecer el denominador, será:

3N=488, cuyo número buscarémos en las tablas y nos presenta las diferencias.

$$m=2, n=4, p=8, q=9, r=11, s=13.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula general de suma de raices, será:

$7x+m+n+p+q+r+s=5$, ó $7x+2+4+8+9+11+13=5$, ó $7x=5-47=-42$, de donde $x=-6$; $y=x+m$, ó $y=-4$; $z=x+n$, ó $z=-2$; $u=x+p$, ó $u=2$; $k=x+q$, ó $k=3$; $\alpha=x+r$, ó $\alpha=5$; $\beta=x+s$, ó $\beta=7$.

Comprobados estos valores con el último término de la ecuacion, resulta que son las verdaderas raices, y por lo tanto la ecuacion está resuelta.

ECUACIONES POR RESOLVER.

$x^7-29,75x^6+379,3125x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+33169,5955219726562 5=0.$

$x^7+2,6x^6-35,8x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx-1056=0.$

$x^7+45x^6+816x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx-4398046511104=0.$

$x^7-16x^6+108x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx-256=0.$

ECUACIONES DE 8.° GRADO.

114. Procediendo de igual suerte que hasta aquí, y llamando para mayor comodidad y claridad (*S* de *P B* de *R*) á la suma de los productos binarios de las raices, y (*S* de *P B* de *D*) á la de los productos binarios de las diferencias, obtendrémos la fórmula general.

$$(x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta)^2-\frac{16(S \text{ de } P\,B \text{ de } R)}{7}=$$

$$N=m^2+n^2+p^2+q^2+r^2+s^2+t^2-\frac{2(S \text{ de } P\,B \text{ de } D)}{7}$$

de la cual sacarémos las particulares del primer caso, que es $N=0$, y las del segundo, que son $N=t^2$, para la primera subdivision; $N=\frac{12s^2}{7}$ para la segunda; $N=\frac{15r^2}{7}$ para la tercera; $N=\frac{16q^2}{7}$ para la cuarta; $N=\frac{15p^2}{7}$ para la quinta; $N=\frac{12n^2}{7}$ para la sesta, y $N=m^2$ para la sétima, las cuales aplicarémos segun se ha dicho anteriormente.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^8-16x^7+112x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+$$
$$+256=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta=16$$
$$S \text{ de } P\ B \text{ de } R=112$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{16}{7}$ de la segunda, será:

$$16^2-\frac{16\times112}{7}=0$$

Por consiguiente, las raices son iguales y tendrémos:

$8x=16$ de donde $2=x=y=z=u=k=\alpha=\beta=\delta$

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^8+6x^7-84x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+$$
$$+40320=0$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta=-6$$
$$S \text{ de } P\ B \text{ de } R=-84$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{16}{7}$ de la segunda, será:

$$-6^2-\frac{16\times-84}{7}=36-(-192)=36+192=$$
$$=228=N$$

Multiplicando por 7, será:

$7N=1596$; cuyo número, buscado en las tablas, nos dá:

$m=2$, $n=3$, $p=6$, $q=9$, $r=11$, $s=12$, $t=15$.

Tenemos $x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta=-16$; luégo será: $8x+m+n+p+q+r+s+t=-6$.

Sustituyendo los valores hallados, será: $8x+2+$ $+3+6+9+11+12+15=-6$ ó $8x=-6-58=$ -64, de donde, dividiendo por 8, será: $x=-8$; $y=x+m$ ó $y=-6$; $z=x+n$ ó $z=-5$; $u=x+p$ ó $u=-2$; $k=x+q$ ó $q=1$; $\alpha=x+r$ ó $\alpha=3$; $\beta=x+$ $+s$ ó $\beta=4$; $\delta=x+t$ ó $\delta=7$.

Comprobados estos valores con el último término de la ecuacion, resulta que son sus raices, y por lo tanto, la ecuacion está resuelta.

ECUACIONES POR RESOLVER.

$x^8-32x^7+448x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+$
$+65408=0$

$x^8-26{,}2x^7+298{,}2x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex$
$+11372{,}4=0$

$x^8-8x^7-36x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+$
$+50625=0$

$x^8+19x^7-10x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex-$
$-1152000=0$

ECUACIONES DE 9.° GRADO.

115. De igual suerte que en las ecuaciones de los grados anteriores; hallarémos la fórmula general:

$$(x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta+\pi)^2-\frac{9(SdePBdeR)}{4}=\mathrm{N}$$

$$=m^2+n^2+p^2+q^2+r^2+s^2+t^2+f^2-\frac{(SdePBdeD)}{4}$$

y las particulares del primer caso que es $\mathrm{N}=0$; y las del segundo que son $\mathrm{N}=f^2$ para la 1.ª subdivision; $\mathrm{N}=\frac{7t^2}{4}$ para la segunda; $\mathrm{N}=\frac{9s^2}{4}$ para la tercera; $N=\dfrac{5r^2}{2}$ para la cuarta; $N=\dfrac{5q^2}{2}$ para la quinta; $N=\dfrac{15p^2}{4}$ para la sesta; $N=\dfrac{7n^2}{4}$ para la sétima; $N=m^2$ para la octava, las cuales aplicarémos segun se ha dicho anteriormente.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^9-36x^8+576x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+$$
$$+Fx-262144=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta+\pi=36,$$
$$S\ de\ B\ P\ de\ R=576.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\dfrac{9}{4}$ de la segunda, será:

$$36^2-\frac{9\times576}{4}=0.$$

Por donde vemos que las raices son iguales, y será:

$9x=36$, de donde $x=\dfrac{36}{9}=4$, único valor que satisface á la ecuacion.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^9+11x^8-74x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+$$
$$+Fx+226800=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta+\pi=-11,$$
$$S\ de\ P\ B\ de\ R=-74.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{9}{4}$ de la segunda, será:

$$-11^2-\frac{9\times-74}{4}=121-(-166\frac{2}{4})=121$$
$$+166\frac{2}{4}=287\frac{2}{4}=N.$$

Multiplicando por 4 para hacer desaparecer el denominador, será: 1150=4N, cuyo número buscado en las tablas, nos dá:

$m=3$, $n=4$, $p=7$, $q=9$, $r=12$, $s=13$, $t=15$, $f=16$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la suma de las raices, que es -11, tendrémos:

$9x+3+4+7+9+12+13+15+16=-11$, ó $9x+79=-11$,

ó $9x=-11-79=-90$, de donde $x=-10$; $y=x+m$, ó $y=-7$; $z=x+n$, ó $z=-6$; $u=x+p$, ó $u=-3$; $k=x+q$, ó $k=-1$; $\alpha=x+r$, ó $\alpha=2$; $\beta=x+s$, ó $\beta=3$; $\delta=x+t$, ó $\delta=5$; $\pi=x+f$, ó $\pi=6$.

Comprobados estos valores con el último término de la ecuacion, vemos que son las verdaderas raices, y por lo tanto se halla resuelta.

ECUACIONES POR RESOLVER.

$x^9-45x^8+900x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+$
$+Fx-1953125=0.$

$x^9-30x^8+384x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+$
$+Fx-131072=0.$

$x^9+4x^8-31x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx$
$-3200=0.$

$x^9+25x^8-194x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+$
$+Fx+51840=0.$

ECUACIONES DE 10.° GRADO.

116. Asimismo hallarémos la fórmula general, que es:

$$\begin{matrix}(x+y+z+u+k+\\+\alpha+\beta+\delta+\pi+\gamma)^2\end{matrix}-\frac{20(S\ de\ P\ B\ de\ R)}{9}=\text{N}=$$

$$\begin{matrix}m^2+n^2+p^2+q^2+r^2\\+s^2+t^2+f^2+h^2\end{matrix}-\frac{2\ (S\ de\ P\ B\ de\ D)}{9}$$

y las particulares del primer caso, que es N=0, y las del segundo, que son $\text{N}=h^2$, para la primera subdivision; $N=\frac{16f^2}{9}$ para la segunda; $N=\frac{7t^2}{3}$ para la tercera; $N=\frac{8s^2}{3}$ para la cuarta; $N=\frac{25r^2}{9}$ para la quinta; $N=\frac{8q^2}{3}$ para la sesta: $N=\frac{7p^2}{3}$ para la sétima; $N=\frac{16n^2}{9}$ para la octava; y $N=m^2$ para la novena, aplicándolas segun se tiene dicho.

EJEMPLO 1.°

Sea la ecuacion:

$$x^{10}-60x^9+1620x^8+Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3$$
$$+Fx^2+Gx+60466176=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta+\pi+\gamma=60,$$
$$S \ de \ P \ B \ de \ R=1620.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{20}{9}$ de la segunda, será:

$$60^2-\frac{20\times1620}{9}=3600-3600=0.$$

Por donde vemos que las raices son iguales, y por consiguiente, dividiendo $10x=60$ por 10 será 6, único valor que satisface á la ecuacion.

EJEMPLO 2.°

Sea la ecuacion:

$$x^{10}+23x^9+3x^8+Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^5+Fx^2+Gx+29030400=0,$$

y tendrémos:

$$x+y+z+u+k+\alpha+\beta+\delta+\pi+\gamma=-23,$$
$$S \text{ de } P\ B \text{ de } R\ldots\ldots=3.$$

Restando del cuadrado de la primera los $\frac{20}{9}$ de la segunda, será:

$$-23^2-\frac{20\times3}{9}=529-6\frac{2}{3}=522\frac{1}{3}=\text{N}.$$

Y multiplicando por 9, por ser 9N lo que se ha de buscar en las tablas con objeto de evitar fracciones, será: $9\text{N}=4701$.

Buscando en las tablas este número nos dá las diferencias:

$m=2$, $n=3$, $p=5$, $q=8$, $r=10$, $s=14$, $t=17$, $f+18$, $h=20$.

Sustituyendo estos valores en,

$10x+m+n+p+q+r+s+t+f+h=-23$, será:

$10x+2+3+5+8+10+14+17+18+20=-23$,

ó $10x=-23-97=-120$, de donde $x=-12$; $y=x+m$, ó $y=-10$; $z=x+n$, ó $z=-9$; $u=x+p$, ó $u=-7$; $k=x+q$, ó $k=-4$; $\alpha=x+r$ ó $\alpha=-2$; $\beta=x+s$, ó $\beta=2$; $\delta=x+t$, ó $\delta=5$; $\pi=x+f$, ó $\pi=6$; $\gamma=x+h$, ó $\gamma=8$.

Comprobando el producto de estos valores con el último término de la ecuacion, resulta ser sus verdaderas raices, y por lo tanto está resuelta.

ECUACIONES POR RESOLVER.

$$x^{10}-22x^9+217,8x^8+Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+2655,9922791424=0$$

$$x^{10}+25x^9+270x^8+Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx-39366=0$$

$$x^{10}-23x^9+236x^8+Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+3072=0$$

$$x^{10}-55x^9+1320x^8+Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+3628800=0$$

TEORIA GENERAL DE ECUACIONES.

117. Hemos tratado la resolucion de las ecuaciones desde el 2.º hasta el 10.º grado, ambos inclusive, y en todos ellos hemos visto que el cuadrado de la suma de las raices se halla, con la de sus productos binarios, en una razon fija para todos los casos que dentro del mismo grado pueden ocurrir, y que esta razon ha sido suficiente para conducirnos á determinar cada una de las raices de la ecuacion.

Vamos ahora á ocuparnos de generalizar el sistema que hemos seguido en cada grado, formando lo que se llama teoría general, para lo cual pondrémos de base la resolucion del siguiente

118. *Problema.* Dada la suma de C cantidades, la de sus productos binarios y el producto de aquellas, determinar el valor de cada una de dichas cantidades.

119. *Resolucion.* Sean x, y, z, u, k ..... estas cantidades incógnitas, C el número de ellas, y D el número de sus productos binarios, que nos es conocido puesto que conocemos C. Puede suceder ó que todas sean iguales ó que no lo sean. Poniendo primero el caso en que sean iguales, claro es que si conociésemos esta circunstancia, no tendríamos mas que dividir la suma por C, y obtendríamos el valor de cada una. Más como al proponernos tal problema, ignoramos si dichas cantidades son iguales ó desiguales, vamos á ver si podrémos hallar algun medio por el cual podamos conocer cada una de estas circunstancias, y obrar en consecuencia segun convenga. Veamos si el cuadrado de la suma de dichas cantidades guarda con la de los productos binarios alguna razon que nos sirva de norte en lo que debemos practicar. Supongamos, pues:

$$x=y=z=u=k=.....$$

Poniendo x en lugar de y, z, u, k, puesto que son iguales, será la suma de ellas:

$$x+y+z+u+k+\ldots\ldots=Cx \quad (1)$$

Sus productos binarios serán:

$$\left.\begin{array}{l} xy+xz+xu+xk+\ldots\ldots+yz+yu+ \\ yk+\ldots\ldots+zu+zk+\ldots\ldots+uk+\ldots\ldots \end{array}\right\}=Dx^2 \quad (2)$$

Elevando al cuadrado la primera, será:

$$(x+y+z+u+k+\ldots\ldots)^2=C^2x^2 \quad (3)$$

Formando proporcion la (3) y la (2), tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k+\ldots\ldots)^2}{\begin{array}{l} xy+xz+xu+xk+\ldots\ldots+yz+yu+ \\ +yk+\ldots\ldots+zu+zk+\ldots\ldots+uk\ldots\ldots \end{array}}=\frac{C^2x^2}{Dx^2}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por x^2, será:

$$\frac{(x+y+z+u+k+\ldots\ldots)^2}{\begin{array}{l} xy+xz+xu+xk+\ldots\ldots+yz+yu+ \\ yk+\ldots\ldots+zu+zk+\ldots\ldots+uk+\ldots\ldots \end{array}}=\frac{C^2}{D}$$

Pasando el denominador del primer quebrado al segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k+\ldots)^2=\frac{C^2\begin{pmatrix} xy+xz+xu+xk+\ldots \\ +yz+yu+yk+\ldots+ \\ zu+zk+\ldots+uk+\ldots \end{pmatrix}}{D}$$

Y pasando el segundo miembro al primero, nos dará:

$$\left.\begin{array}{l} (x+y+z+ \\ u+k+\ldots)^2 \end{array}\right\}-\frac{C^2\begin{pmatrix} xy+xz+xu+xk+\ldots \\ +yz+yu+yk+\ldots+ \\ zu+zk+\ldots+uk+\ldots \end{pmatrix}}{D}=0$$

Por donde vemos que cuando son iguales x, y, z, u, k, ... restando del cuadrado de la suma $x+y+z+u+k$ ..... los $\frac{C^2}{D}$ de la de los productos binarios, la resta es cero.

120. Recíprocamente. Si dada la suma de C cantidades y la de los productos binarios, restamos del cuadrado de aquella los $\frac{C^2}{D}$ de la de esta, y la resta es cero, tendrémos: $x=y=z=u=k=\ldots\ldots$; y por consiguiente, dividiendo su suma por C tendrémos el valor de $x=y=z=u=k=\ldots\ldots$

121. 2.° caso. Que dichas cantidades no sean todas iguales, pudiendo serlo algunas ó ninguna.

Llamemos x á la menor, y colocándolas por órden de sus magnitudes, sea:

$$x \leqq y,\ y \leqq z,\ z \leqq u,\ u \leqq k,\ k \leqq \text{etc.},$$

y designemos por m la diferencia $y-x$, por n la $z-x$, por p la $u-x$, por q la $k-x$, etc., etc., con lo cual tendrémos $y=x+m$, $z=x+n$, $u=x+p$, $k=x+q$, etc., etc., siendo la suma de todas ellas:

$$x+y+z+u+k+\ldots\ldots=x+(x+m)+(x+n)+(x+p)+(x+q)+\ldots\ldots=Cx+m+n+p+q+\text{etc.}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros, será:

$(x+y+z+u+k+\ldots\ldots)^2=C^2x^2+2Cxm+2Cxn+$

$+2Cxp+2Cxq+\ldots\ldots+m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots\ldots+$
$+2mn+2mp+2mq+\ldots\ldots+2np+2nq+\ldots\ldots+$
$+2pq+\ldots\ldots$

Sacando factores comunes, tendrémos:

$(x+y+z+u+k+\ldots\ldots)^2=C^2x^2+2C(xm+xn+xp$
$+xq+\ldots\ldots)+m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots\ldots+2(mn+pm+$
$+\ldots\ldots+np+nq+\ldots\ldots+pq+\ldots\ldots)$

Pasando al primer miembro todo el cuadrado de $+mqm+n+p+q+\ldots\ldots$, será:

$(x+y+z+u+k+\ldots\ldots)^2-\big(m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots\ldots$
$+2(mn+mp+mq+\ldots\ldots+np+nq+\ldots\ldots+pq+$
$+\ldots\ldots)\big)=C^2x^2+2C(xm+xn+xp+xq+\ldots\ldots)$ (1)

Sustituyendo en los productos binarios los valores de y, z, u, k, ..., tendrémos:

$xy+xz+xu+xk+\ldots\ldots+yz+yu+yk+\ldots\ldots+zu$
$+zk+\ldots\ldots+uk+\ldots\ldots=x(x+m)+x(x+n)+x(x+p)$
$+x(x+q)+\ldots\ldots+(x+m)(x+n)+(x+m)(x+p)+$
$+(x+m)(x+q)+\ldots\ldots+(x+n)(x+p)+(x+n)$
$(x+q)+\ldots\ldots+(x+p)(x+q)+\ldots\ldots=x^2+xm+x^2+$
$+xn+x^2+xp+x^2+xq+\ldots\ldots+x^2+xm+xn+mn$
$+x^2+xm+xp+mp+x^2+xm+xq+mq+\ldots\ldots+$
$x^2+xn+xp+np+x^2+xn+xq+nq+\ldots\ldots+x^2+xp$
$+xq+pq+\ldots\ldots$

Teniendo presente que hemos designado por D el número de productos binarios; que x^2 se repite tantas veces como es este número, puesto que x entra en todos los valores de y, z, u, k, ...; y observando tambien que cada uno de los productos xm, xn, xp, xq, ..., se repite un mismo número de veces igual á $C-1$, tendrémos, haciendo la reduccion de las últimas operaciones:

$$xy+xz+xu+xk+\ldots\ldots+yz+yu+yk+\ldots\ldots+zu+zk+\ldots\ldots+uk+\ldots\ldots=Dx^2+(C-1)(xm+xn+xp+xq+\ldots\ldots)+mn+mp+mq+\ldots\ldots+np+nq+\ldots\ldots+pq+\ldots\ldots$$

Pasando al primer miembro el producto binario de m, n, p, q, ..., será:

$$xy+xz+xu+xk+\ldots\ldots+yz+yu+yk+\ldots\ldots+zu+zk+\ldots\ldots+uk+\ldots\ldots-(mn+mp+mq+\ldots\ldots+np+nq+\ldots\ldots+pq+\ldots\ldots)=Dx^2+(C-1)(xm+xn+xp+xq+\ldots\ldots)$$

Con esta ecuacion y con la (1) formaremos proporcion y será:

$$\frac{(x+y+z+u+k+\ldots\ldots)^2-\big(m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots+2(mn+mp+mq+\ldots+np+nq+\ldots+pq+\ldots)\big)}{xy+xz+xu+xk+\ldots+yz+yu+yk+\ldots+zu+zk+\ldots+uk+\ldots-(mn+mp+mq+\ldots+np+nq+\ldots+pq+\ldots)}=$$

$$=\frac{C^2x^2+2C(xm+xn+xp+xq+\ldots\ldots)}{Dx^2+(C-1)(xm+xn+xp+xq+\ldots\ldots}$$

Llegados á este punto, nos vemos precisados á suspender nuestras operaciones para demostrar que $\frac{C^2}{D}=\frac{2C}{C-1}$ con objeto de simplificar el segundo miembro de la última ecuacion, y obtener el resultado que nos hemos propuesto.

Para demostrarlo formarémos el cuadro siguiente:

$C=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 etc. etc.
$C^2=$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100 etc. etc.
$D=$	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45 etc. etc.

En él observamos que á medida que C vá aumentando siguiendo sus diferencias la progresion

	1	2	3	4	5	6	7	8	9 etc.	
las de C2 siguen la de..	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19 etc.,
y las de D siguen la de..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 etc.

Por consiguiente, vemos que tanto C^2 como D están sujetos á una ley constante. Pero en todos los valores de C, C^2 y D que se corresponden en el cuadro de arriba, vemos que $C^2=2D+C$, luego esto mismo sucederá en todos los cuadrados de C, respecto de D.

Tenemos, pues, la igualdad $C^2=2D+C$.

Pasando C al primer miembro, será:

$$C^2-C=2D.$$

Multiplicando ambos miembros por C, tendrémos: $C^3-C^2=2CD$.

Dividiendo ambos miembros por $CD-D$, será:

$$\frac{C^3-C^2}{CD-D}=\frac{2CD}{CD-D}$$

Pasando el segundo miembro al primero, será:

$$\frac{(C^3-C^2)-2CD}{CD-D}=0,$$

cuyo primer miembro procede de los quebrados $\frac{C^2}{D}-\frac{2C}{C-1}$ reducidos á un comun denominador, luégo será: $\frac{C^2}{D}-\frac{2C}{C-1}=0$.

Pasando el segundo término al segundo miembro, tendrémos: $\frac{C^2}{D}=\frac{2C}{C-1}$ que es lo que nos propusimos demostrar.

Volviendo ahora al punto en que dejamos suspendidas nuestras operaciones, sustituirémos en el segundo miembro de la última ecuacion $\frac{2C}{C-1}$ por su igual $\frac{C^2}{D}$, y tendrémos:

$$\frac{(x+y+z+u+k+\ldots)^2-\left(m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots+2(mn+mp+mq+\ldots+np+nq+\ldots+pq+\ldots)\right)}{xy+xz+xu+xk+\ldots+yz+yu+yk+\ldots+zu+zk+\ldots+uk+\ldots-(mn+mp+mq+\ldots+np+nq+\ldots+pq+\ldots)}=$$

$$=\frac{C^2x^2+C^2(xm+xn+xp+xq+\ldots)}{Dx^2+D(xm+xn+xp+xq+\ldots)}$$

Dividiendo los dos términos del segundo quebrado por $x^2+xm+xn+xp+xq+\ldots$ será:

$$\frac{(x+y+z+u+k+..)^2-\left(m^2+n^2+p^2+q^2...+2(mn+mp+mq+...+np+nq+....+pq+...)\right)}{xy+xz+xu+xk+.....+yz+yu+yk+.....+ +zu+zk+.....+uk+.....-(mn+mp+mq+ .....+np+nq+.....+pq+.....)}=\frac{C^2}{D}$$

Pasando el denominador del primer quebrado al segundo miembro, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k+.....)^2-\left(m^2+n^2+p^2+q^2+....+ 2(mn+mp+mq+...+np+nq+...+pq+...)\right)=$$

$$=\frac{C^2(xy+xz+xu+xk+.. +yz+yu+yk+...+zu +zk+.....+uk+.....)}{D}-\frac{C^2(mn+mp+mq+... +np+nq+..+pq+..)}{D}$$

Cambiando de miembro el segundo término del primero y el primero del segundo, será:

$$(x+y+z+u+k+...)^2-\frac{C^2(xy+xz+xu+xk+ ...+yz+yu+yk+... +zu+zk...+uk+...)}{D}=$$

$$=m^2+n^2p+{}^2+q^2+..+2(mn+mp+mq+..+np+nq$$

$$+...+pq+...)-\frac{C^2(mn+mp+mq+...+ np+nq+...+pq+...)}{D}$$

Reduciendo $2(mn+mp+mq+...+np+nq+...+pq+...)$ á la especie del quebrado que le acompaña, y sustituyendo en el último C^2 por su igual $2D+C$, tendrémos:

$$(x+y+z+u+k+..)^2 - \frac{C^2(xy+xz+xu+xk+\ldots+yz+yu+yk+\ldots+zu+zk+\ldots\ldots+uk+\ldots\ldots)}{D} =$$

$$= m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots+\frac{2D(mn+mp+mq+\ldots\ldots+np+nq+\ldots+pq+\ldots)}{D} -$$

$$-\frac{2D(mn+mp+mq+\ldots+np+nq+\ldots+pq+\ldots)}{D} - \frac{C(mn+mp+mq+\ldots+np+nq+\ldots+pq+\ldots)}{D}$$

ó en fin,

$$(x+y+z+u+k+..)^2 - \frac{C^2(xy+xz+xu+xk+\ldots+yz+yu+yk+\ldots+zu+zk+\ldots\ldots+uk+\ldots\ldots)}{D} =$$

$$= m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots - \frac{C(mn+mp+mq+\ldots\ldots+np+nq+\ldots\ldots+pq+\ldots\ldots)}{D}$$

121. Esta ecuacion nos dice que cuando las cantidades x, y, z, u, k, ... no son iguales, restando del cuadrado de su suma los $\frac{C^2}{D}$ de la de sus productos binarios, nos resultará la suma de los cuadrados de las diferencias m, n, p, q, ..., menos los $\frac{C}{D}$ de la suma de sus productos binarios.

122. Esta fórmula es aplicable tambien al primer caso en que hemos supuesto $x=y=z=u=$ $=k=\ldots\ldots$, pues resultando en este caso $m=y-$

$-x=0$, $n=z-x=0$, $p=u-x=0$, $q=k-x=0$, la resta indicada en el primer miembro resultará igual á cero, que es lo mismo que obtuvimos al hacer aquella suposicion.

123. Si para mayor comodidad llamamos N al primer miembro de la última ecuacion que hemos obtenido, el cual significa restar del cuadrado de la suma de $x+y+z+u+k+\ldots$ los $\frac{C^2}{D}$ de la de sus productos binarios, y suponemos $x=y=z=u$, $k=x+q$, de donde sacamos $m=0$, $n=0$, $p=0$; la fórmula dicha se convertirá en:

$$N=0+0+0+q^2-\frac{C\times 0+0+0+0+0+0}{D}=q^2$$

Por donde vemos que, verificando dicha resta, nos resulta el cuadrado de la diferencia $k-x$ (suponiendo á k la última). Extrayendo, pues, la raiz de q^2, sustituyéndola en la suma $x+y+z+u+k+\ldots=Cx+q$, pasando q al primer miembro, y despejando x obtendrémos su valor, que sustituido con el de q en $k=x+q$, nos dará resuelto el problema.

124. Si suponemos $x=y=z$, $u=x+p$, $k=x+p$ (en el caso de que u, k, sean las últimas), sumando $x+y+z=\ldots\ldots+u+k=Cx+2p$, tendrémos, $m=0$, $n=0$, $\ldots\ldots p=q$; y sustituyendo estos valores en la fórmula que hemos sacado, será:

$$N=0+0+p^2+p^2-\frac{C\times 0+0+0+0+0+p^2}{D}$$

$$\text{ó } N=2p^2-\frac{Cp^2}{D}$$

Verificando la resta indicada, sacando el valor de p, sustituyéndolo en la suma $x+y+z+\ldots\ldots+u+k=Cx+2p$; pasando $2p$ al primer miembro, y despejando x, tendrémos este valor, que sustituirémos con el de p en $u=x+p$, $k=x+p$, y habrémos resuelto el problema.

125. Si tenemos $x=y$, $z=x+n$, $u=x+n$, $k=x+n$, (pudiendo haber otras cantidades antes de x, ó de y, ó de z, pero no posteriores) y sumando $x+y+\ldots\ldots+z+u+k=Cx+3n$, tendrémos $m=0$, $\ldots\ldots n=p=q$, cuyos valores, sustituidos en la fórmula obtenida, nos darán:

$$N=0+n^2+n^2+n^2-\frac{C\times 0+0+0+\ldots+n^2+n^2+n^2}{D}$$

$$\text{ó } N=3n^2-\frac{3Cn^2}{D}$$

Verificando la resta indicada, sacando el valor de n, sustituyéndolo en la suma $x+y+\ldots\ldots+z+u+k=Cx+3n$, pasando $3n$ al primer miembro, y despejando x, nos dará el valor de esta, el cual con el de n sustituirémos en $z=x+n=u=k$, y el problema estará resuelto.

126. Y así continuaríamos sacando las fórmulas

particulares, correspondientes todas ellas al caso en que las cantidades x, y, z, u, k..... tienen dos solos valores.

127. Si el problema de que tratamos fuese solo para un caso dado, que no tuviese aplicacion general, nos veríamos en la necesidad de resolverlo por el sistema explicado en los números (29 al 38, 75 y otros). Pero como su aplicacion comprende á todas las ecuaciones de cualquier grado que sean, las cuales no son más que casos particulares de él, y como por los medios conocidos hasta el dia, el resolver una ecuacion que pase del tercer grado es una cuestion que, por lo difícil, casi raya en lo imposible en las de 7.° y 8.° etc. grados, tenemos un medio por el cual se resuelve la ecuacion (sea del grado que quiera), ó con otro nombre, el problema de que tratamos, con la mayor facilidad y prontitud, que es el explicado en los números (43 al 50), cuya repeticion omitimos por innecesaria, pero debiendo considerarse como reproducidos aquí.

128. Halladas por medio de las tablas de diferencias m, n, p, q, etc. las sustituirémos en la fórmula $x+y+z+u+k+.....=Cx+m+n+p+q+......$ (véase el número (120). Dejarémos Cx en el segundo miembro, pasando al primero lo demás; despejarémos x y obtendrémos este valor. Sustituirémos en seguida este, y los de m, n, p, q.... etc.,

en $y=x+m$, $z=x+n$, $u=x+p$, $k=x=q$, etc. etc., y la ecuacion habrá quedado resuelta.

129. Sin embargo, debemos advertir que siempre necesitamos comprobar con el último término de la ecuacion los valores hallados, pues pueden muy bien ser falsos, y esto, no obstante, satisfacer á los términos segundo y tercero. Y si la ecuacion careciese de dicho último término, en cuyo caso tendria á lo ménos una raíz igual á cero, comprobarémos entónces aquellos valores sustituyéndolos en la ecuacion propuesta.

130. En cuanto á las ecuaciones incompletas, dirémos que siendo la causa de que falte cualquiera de sus términos (excepto el último de que hemos hablado), el que destruyéndose en las sumas los valores positivos con los negativos, resulta cero, y no el que la ecuacion tenga condiciones distintas; no hacemos mencion por estar comprendidas en la teoría general lo mismo que las completas.

131. Como el método que hemos expuesto para la resolucion de las ecuaciones supone que siempre existe el segundo ó tercer término, vamos á probar que en una ecuacion no es posible falten estos dos términos á la vez.

132. Primeramente vamos á demostrar que, dada una ecuacion, siempre podemos hacer desaparecer uno de sus términos.

Sea la ecuacion general:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+U=0$$

hagamos en esta ecuacion $x=y+k$, siendo y una nueva incógnita y k una cantidad de la cual podemos disponer para hacer que cumpla alguna condicion.

Sustituyendo este valor de x en la ecuacion propuesta, y ordenando el resultado, segun las potencias decrecientes de y, tendrémos:

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
y^m+mk & y^{m-1}+\dfrac{m(m-1)}{1.2}k^2 & y^{m-2}+\ldots+k^m \\
\quad +A & \quad\vdots & \qquad +Ak^{m-1} \\
 & \quad\vdots & \qquad +Bk^{m-2} \\
 & +(m-1)Ak & \qquad\vdots \\
 & +B & \qquad +Tk \\
 & & \qquad +U
\end{array}\right\}=0 \quad (1)$$

Ahora, como la cantidad k entra en todos los términos de la ecuacion (1), excepto en el primero, se ve que podemos dar á k un valor que haga que alguno de los coeficientes de y se reduzca á cero, y por consiguiente, que podrémos hacer desaparecer un término cualquiera de la ecuacion no siendo el primero.

Para conoçer el valor ó valores de k que reduzcan á cero uno de los coeficientes de la ecuacion, no tendrémos más que igualar á cero el coeficiente del término que se trata, y deducir de la ecuacion así formada el valor ó valores de k, que serán los únicos que cumplan con la condicion pedida.

Si tratamos de hacer desaparecer el segundo término, harémos $mk+A=0$, de donde $k=-\frac{A}{m}$ y $x=y-\frac{A}{m}$ de modo que, sustituyendo este valor de x en la ecuacion propuesta, faltará el segundo término.

Dicho esto, veamos si es posible hacer desaparecer de una ecuacion el segundo y tercer término á la vez.

Supongamos que de una ecuacion completa hemos hecho desaparecer el segundo término, y que tengamos por lo tanto la ecuacion:

$$x^m+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots\ldots+Tx+U=0$$

tratemos de hacer desaparecer el tercer término, y para ello hagamos $x=x+k$, y desarrollando por la fórmula del binomio de *Newton*, y ordenando segun las potencias decrecientes de x, será:

$$x^m+mkx^{m-1}+\left|\frac{m^{(m-1)}}{1.2}k^2+B\right|x^{m-2}+\ldots\ldots=0$$

vemos que el valor de k que haga desaparecer el tercer término tiene que ser diferente de cero, en cuyo caso el término mkx^{m-1} no desaparece. De donde deducimos que el valor de k que haga desaparecer el tercer término, nos reproduce el segundo, y recíprocamente, que el valor de k que haga desaparecer el segundo, nos reproduce el tercero.

TEORIA DE LA ELIMINACION.

DE LA ELIMINACION ENTRE DOS ECUACIONES DE CUALQUIER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

133. Resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, es hallar todos los valores de estas incógnitas, que satisfagan á la vez á ambas ecuaciones.

Se supone, desde luégo, que las dos ecuaciones provienen de una misma cuestion, y por consiguiente, que quedan verificadas por unos mismos valores de x, y unos mismos valores de y.

Los valores de x y de y que verifican simultanéamente á las dos ecuaciones propuestas, se llaman *soluciones pares, valores conjugados* ó *sistema de valores*.

Como en general no nos es posible resolver una ecuacion con dos incógnitas, lo que nos proponemos es buscar un medio, por el cual, sin necesidad de resolver ninguna de las ecuaciones propuestas, podamos llegar á eliminar una de las incógnitas, y obtener de este modo una ecuacion con una sola incógnita, la cual tenga por raices todos los valores, tanto iguales como desiguales de esta incógnita, con los cuales son conjugados algunos valores de la incógnita eliminada. Semejante ecuacion se llama: *ecuacion final.*

134. Una vez que nos proponemos la eliminacion entre dos ecuaciones de cualquier grado con dos incógnitas x é y, veamos cuál es la forma general de una ecuacion del grado m, con dichas dos incógnitas. Esta ecuacion debe tener todos los términos posibles del grado m, tanto en x, como en y, que son:

a_0x^m, a_1yx^{m-1}, $a_2y^2x^{m-2}$, $a_3y^3x^{m-3}$, hasta el término a_my^m, todos los términos del grado $m-1$, á saber: b_1x^{m-1}, b_2yx^{m-2}, $b_3y^2x^{m-3}$, hasta el término b_my^{m-1} todos los términos del grado $m-2$, ó sea:

c_2x^{m-2}, c_3yx^{m-3}, hasta el último término c_my^{m-2}, todos los de los grados $m-3$, $m-4$....4, 3, 2, 1, 0, de modo, que ordenada esta ecuacion, segun las potencias decrecientes de x, su forma general será:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
a_0x^m+a_1y & x^{m-1}+a_2y^2 & x^{m-2}+a_3y^3 & x^{m-3}+\ldots\ldots+a_my^m & \\
\quad +b_1 & \quad +b_2y & \quad +b_3y^2 & \quad\quad +b_my^{m-1} & \\
 & \quad +c_2 & \quad +c_3y & \quad\quad +c_my^{m-2} & \\
 & & \quad +d_3 & \quad\quad \cdot & =0 \\
 & & & \quad\quad \cdot & \\
 & & & \quad\quad \cdot & \\
 & & & \quad\quad +u_my & \\
 & & & \quad\quad +t_m &
\end{array}$$

Si una ecuacion carece de alguno de estos términos, se dice que es incompleta.

135. Podemos saber *á priori* el número de términos de una ecuacion completa del grado m con dos incógnitas, pues para ello basta observar que solo contiene un término con x^m, dos con x^{m-1}, tres con x^{m-2}, y así sucesivamente, hasta el coeficiente de x, elevada á cero, que consta de $m+1$, términos que son en los que solo entran las potencias de y, desde la cero hasta la m, de modo que el número de todos los términos de la ecuacion, será:

$$1+2+3+4+\ldots\ldots+m+(m+1)$$

que es la suma de los términos de una progresion aritmética, cuya razon es la unidad, y siendo el primer término 1 y $m+1$ el último, su suma sabemos que es:

$$\big(1+(m+1)\big)\times\frac{m+1}{2}=\frac{(m+1)\,(m+2)}{2}$$

así que sustituyendo en esta fórmula en vez de m, el número que nos exprese el grado de la ecuacion, tendrémos el número de los términos de que consta.

136. Al tratar de resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, claro está que llegarémos tanto más pronto al resultado que nos proponemos, cuanto menor sea el grado de las ecuaciones propuestas. De aquí el que tratemos de descomponer los prime-

ros miembros de ambas ecuaciones en factores; é igualando á cero estos factores, tendríamos nuevos sistemas de ecuaciones que serian de grado inferior á las propuestas, y por lo tanto habríamos simplificado la cuestion. Veamos, pues, si dado caso que pudiésemos descomponer en factores los primeros miembros de las dos ecuaciones, los sistemas que obtuviésemos, igualando á cero estos factores, serian equivalentes al primitivo sistema.

Sea el sistema de dos ecuaciones $\left.\begin{matrix} M=0 \\ N=0 \end{matrix}\right|$ y supongamos que el primer miembro de la ecuacion $M=0$, sea igual al producto de dos factores A y B, y que del mismo modo el primer miembro de la ecuacion $N=0$ sea el producto de los dos factores C y D, de modo que:

$$M=\mathrm{A}.B$$
$$N=C.D$$

es evidente que toda solucion de las ecuaciones propuestas hace á la vez igual á cero un factor de M y otro de N, luégo combinando los factores de M sucesivamente con los de N, formarémos los sistemas

$$\left.\begin{matrix} A=0 \\ C=0 \end{matrix}\right| \quad \left.\begin{matrix} A=0 \\ D=0 \end{matrix}\right| \quad \left.\begin{matrix} B=0 \\ C=0 \end{matrix}\right| \quad \left.\begin{matrix} B=0 \\ D=0 \end{matrix}\right|$$

los cuales quedan verificados por las soluciones del primitivo sistema $\left.\begin{matrix} M=0 \\ N=0 \end{matrix}\right|$.

Recíprocamente, toda solucion de estos sistemas es tambien solucion del sistema $\left.\begin{array}{l} M=A.B \\ N=C.D \end{array}\right|$ puesto que á la vez reduce á cero un factor de M y otro de N, y por lo tanto, solucion del sistema $\left.\begin{array}{l} M=0 \\ N=0 \end{array}\right|$

Así que el sistema de las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} M=0 \\ N=0 \end{array}\right|$ podemos sustituirlo por los sistemas

$$\left.\begin{array}{l} A=0 \\ C=0 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} A=0 \\ D=0 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} B=0 \\ C=0 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} B=0 \\ D=0 \end{array}\right|$$

137. Una vez demostrada la equivalencia de estos sistemas, vamos á tratar de la descomposicion en factores de los primeros miembros de las ecuaciones $M=0$ y $N=0$; para ello debemos recordar que M y N son dos polinomios funciones de x y de y; dicho esto, considerémos uno cualquiera de los dos polinomios M; por ejemplo: siendo este polinomio una funcion de x y de y, podemos ordenarlo con relacion á y, y hallar el máximo comun divisor de los coeficientes de sus diferentes términos que será solo funcion de x, que podemos representar por X, y dividiendo el polinomio M por este máximo comun divisor, el cociente será un polinomio funcion de x y de y, que representándolo por M, será:

$$\frac{M}{X}=M_1 \text{ de donde } M=XM_1$$

El polinomio M_1 podemos ordenarlo con relacion á las potencias de x, y hallar el máximo comun divisor de los coeficientes de las diversas potencias de x, que será una funcion de la sola variable y, que designarémos por Y, y dividiendo el polinomio M_1 por Y, obtendrémos un cociente M', funcion de x y de y, así que

$$\frac{M_1}{Y}=M', \text{ de donde } M_1=YM';$$

y sustituyendo este valor de M_1 en el de M, hallarémos que

$$M=XYM' \quad (1)$$

y tendrémos descompuesto el primer miembro de la ecuacion $M=0$ en tres factores, uno funcion de x, otro funcion de y, y el otro funcion de x y de y.

De la misma manera descompondríamos el polinomio N, el cual nos daria.

$$N=X'Y'N' \quad (2)$$

y así tendríamos descompuestos los dos primeros miembros de las ecuaciones propuestas en factores; pero puede suceder que X y X', siendo dos funciones de x, tengan algun factor comun, para lo cual hallarémos el máximo comun divisor d de estos dos polinomios, y por la misma razon, hallarémos tambien el máximo comun divisor d' entre Y y Y', y últimamente, el máximo comun divisor d'' entre

M' y N'. Despues, dividiendo á X y X' por su máximo comun divisor d, y designando los cocientes respectivos por X_1 y X_1', y por Y_1 y Y_1' los cocientes de dividir á Y y Y' por d', y por k y k' los de dividir á M' y N' por d'', tendrémos las igualdades siguientes:

$$X=dX_1\,,\quad Y=d'Y_1\,,\quad M'=d''k$$
$$X'=dX_1'\,,\quad Y'=d'Y_1'\,,\quad N'=d''k'$$

y sustituyendo estos valores en las igualdades (1) y (2), tendrémos:

$$M=d.\,d'.\,d''X_1\,Y_1\,k$$
$$N=d.\,d'.\,d''X_1'\,Y_1'k'$$

y segun lo que hemos visto, todas las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right|$ anulan á un mismo tiempo un factor de M y otro de N, y recíprocamente, que las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right|$ están dadas por los sistemas formados igualando á cero sucesivamente cada factor de M con cada uno de los de N. Hagamos primeramente

$$d=0,\quad d'=0,\quad d''=0$$

la ecuacion $d=0$ es funcion solamente de x, y así nos dá un cierto número de valores para esta incógnita dejando á y arbitraria: la ecuacion $d'=0$, siendo una funcion de y, nos dá un número determinado de valores para esta variable, y nos deja á x arbitraria, y la ecuacion $d''=0$, como es funcion de x y de y, nos dá un número determinado de valores para la incógnita que queramos, dejando la otra á nuestro arbitrio, y por lo tanto, de cada una de las tres ecuaciones: $d=0$, $d'=0$, $d''=0$, podemos deducir infinitos pares de valores de las ecuaciones propuestas.

Tambien podemos obtener soluciones del sistema $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right|$ igualando á la vez á cero uno de los factores restantes de M con otro de los restantes de N; pero observémos que no podemos establecer los sistemas $\left.\begin{matrix}X_1=0\\X_1'=0\end{matrix}\right|$ y $\left.\begin{matrix}Y_1=0\\Y_1'=0\end{matrix}\right|$ porque en el primer sistema X_1 y X_1' son los cocientes que nos han resultado de dividir á X y X' por su máximo comun divisor d, y por lo tanto, son dos cantidades primas entre sí, no pudiendo por consiguiente quedar verificadas por un mismo valor de x, pues si hubiese un valor a de x que las redujese á cero, cada una de las cantidades X_1 y X_1', seria divisible por el factor binomio $x—a$, lo cual es absurdo; la misma razon nos hace ver que no podemos tener á la vez $Y_1=0$ y $Y_1'=0$, de modo que las soluciones restantes del sistema $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right|$ están dadas por los sistemas.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} X_1=0 & X_1=0 & Y_1=0 & Y_1=0 & k=0 & k=0 & k=0 \\ Y_1=0 & k'=0 & X'_1=0 & k'=0 & X'_1=0 & Y'_1=0 & k'=0 \end{array}$$

ahora bien, en todos estos sistemas, excepto en el $\left.\begin{array}{l} k=0 \\ k'=0 \end{array}\right|$ hay por lo ménos en cada uno de ellos, una ecuacion con una sola incógnita; por consiguiente, para obtener las soluciones de uno de estos sistemas, resolverémos la ecuacion que solo contenga una incógnita, y sustituyendo sucesivamente en la otra ecuacion los valores deducidos de la primera, hallarémos todos los valores de la otra incógnita, y así obtendrémos las soluciones del sistema que nos propongamos resolver.

138. De la definicion que hemos dado de ecuacion final, se deduce que ésta debe tener tantas raices como pares de valores admitan las ecuaciones propuestas.

Así, si consideramos el sistema $\begin{array}{l} X_1=0 \\ Y'_1=0 \end{array}$ como la ecuacion $X_1=0$, es funcion solamente de x, y la $Y'_1=0$, lo es de y, podria creerse que una cualquiera de ellas es la ecuacion final del sistema $\left.\begin{array}{l} X_1=0 \\ Y'_1=0 \end{array}\right|$ pero vemos que $X_1=0$, no puede ser la ecuacion final, porque á cada raíz de esta ecuacion corresponden tantos valores de y, como raices tenga la ecuacion $Y'_1=0$; es decir, tantos como unidades contenga el mayor exponente de y en esta ecuacion, de modo que si el mayor exponente de esta variable es n, la ecuacion final en x del sistema $\left.\begin{matrix} X_1=0 \\ Y'_1=0 \end{matrix}\right|$ seria de la forma $(X_1)^n=0$.

Del mismo modo veríamos que $Y'_1=0$ no puede ser la ecuacion final en y del mismo sistema $\left.\begin{matrix} X_1=0 \\ Y'_1=0 \end{matrix}\right|$

Si consideramos el sistema $\left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ vemos que $Y_1=0$ no es la ecuacion final en y de este sistema, una vez que á cada raíz de esta ecuacion corresponden diferentes valores de x, deducidos de la ecuacion $k'=0$; pero siendo esta una funcion de x y de y, no sabemos *á priöri* el número de valores que corresponden á x, puesto que al sustituir en la ecuacion $k'=0$ los valores de y, deducidos de la ecuacion $Y_1=0$, podrá suceder que algunos términos desaparezcan.

Para hallar la ecuacion final del sistema $\left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ supongamos que la ecuacion $k'=0$ es de la forma

$$ax^p+bx^{p-1}+cx^{p-2}dx+^{p-3}+\ldots\ldots+tx+u=0,$$

y descompongamos á Y_1 en dos factores, uno de ellos a, que sea primo con a, y el otro α, que no contenga más que factores primos del coeficiente a, para hacer esta descomposicion, hallarémos el máximun comun divisor entre Y, y el coeficiente a del primer termino de la ecuacion $k'=0$, que designarémos por d', y dividiendo á Y_1 por d', y representando el cociente por q', tendrémos que:

$$Y_1=q'd'$$

despues hallarémos el máximo comun divisor d'' entre el cociente q' y el mismo coeficiente a, y llamarémos q'' al cociente de la division de q' por d'', y será: $q'=q''d''$, y continuarémos hallando el máximo comun divisor entre el último cociente obtenido y el coeficiente a, hasta llegar á un cociente q_n que sea primo con a; si suponemos que hemos llegado á este resultado en la tercera division, habrémos hallado la série de igualdades:

$$Y_1=q'd', \; q'=q''d'', \; q''=q'''d'''$$

de modo, que sustituyendo el valor de q'' en el de q', y este nuevo valor de q' en el de Y_1, tendrémos que $Y_1=d'd''d'''q'''$, suponiendo, como lo hemos dicho, que a y q''' son primos entre sí; de modo que si hacemos á $a=q'''$ y á $\alpha=d'd''d'''$, tendrémos hecha la descomposicion de Y_1 del modo que hemos indicado, pues segun las operaciones que hemos efectuado, el producto $d'd''d'''$ no contiene más que factores primos de a, y el otro factor q''' hemos supuesto es primo con a. De la misma manera descompodríamos á α en dos factores, uno de ellos b_1, que sea primo con el coeficiente b, y el otro β solo contenga factores primos de b; y haciendo lo mismo con β lo descompondríamos en dos factores c_1 y γ, el uno c_1 primo con el coeficiente c, y el otro γ, no conteniendo más que factores primos de c, y así continuariamos, si es posible, hasta el coeficiente de la primera potencia de α; pero supongamos que γ sea primo con el coeficiente d, y las descomposiciones que hemos efectuado nos darán lugar á las igualdades siguientes:

$$Y_1 = a_1\alpha,\quad \alpha = b\beta,\quad \beta = c_1\gamma$$

y sustituyendo el valor de β en el de α, y este último en el de Y_1, tendrémos: $Y_1 = a_1b_1c_1\gamma$; de modo que la ecuacion $Y_1=0$ la tenemos bajo la forma $a_1b_1c_1\gamma=0$; y como que para que un producto sea cero basta que lo sea uno de sus factores, resulta que las soluciones de la ecuacion $Y_1=0$ están dadas por las ecuaciones $a_1=0$, $b_1=0$, $c_1=0$, $\gamma=0$, que cualquiera de ellas es más sencilla que la ecuacion $Y_1=0$.

Ahora toda raíz de la ecuacion $\gamma=0$, hace á c igual á cero, una vez que no contiene más que factores primos de c, y hace al mismo tiempo $\beta=0$, por ser uno de sus factores; y siendo $\beta=0$, como no contiene más que factores primos de b, tambien se reduce á cero, al propio tiempo que α, puesto que $x=b_{1\beta}$, luégo a tambien es cero, puesto que α solo contiene factores primos de a, así que toda raíz de la ecuacion $\gamma=0$ hace iguales á cero las cantidades a, b, y c, y por consiguiente, la ecuacion $k'=0$, ó sea:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots\ldots+tx+u=0,$$

queda reducida á una ecuacion del grado $(n-3)$, que por consiguiente tendrá $(p-3)$ valores de x, lo que nos dice que á cada una de las raices de la ecuacion $\gamma=0$ corresponden $p-3$ valores de x, y por lo tanto, el factor γ de la ecuacion final en y del sistema $\left.\begin{matrix}Y_1=0\\k'=0\end{matrix}\right\}$ estará elevado al exponente $p-3$.

De la misma manera, toda raíz de la ecuacion $c_1=0$ hace á $\beta=0$, por ser c_1 uno de los factores de β; y siendo β cero, α y b tambien lo son, y á consecuencia de este valor cero de α, llega á ser cero a y la ecuacion $k^1=0$ se reduce al grado $(p-2)$, puesto que desaparecen los dos primeros términos, dándonos por lo tanto para cada raíz de la ecuacion $c_1=0$, $p-2$, valores de x, por lo que el factor c_1 deberá entrar en la ecuacion final que nos ocupa, elevado al exponente $p-2$.

Continuando de la misma manera que lo hemos hecho hasta ahora, verémos que á cada raíz de la ecuacion $b_1=0$ corresponden $(p-1)$ valores de x, porque el grado de la ecuacion $k'=0$ quedará reducido al $(p-1)$: y que á cada raíz de la ecuacion $a_1=0$ corresponde p valores de x, puesto que siendo a_1 primo con a, esta última cantidad no será cero aunque a_1 lo sea; y por lo tanto, el grado de la ecuacion $k'=0$ no sufrirá alteracion; luégo reasumiendo todo lo que hemos dicho, vemos que la ecuacion final en y del sistema $\left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ será de la forma:

$$a_1^p b_1^{p-1} c_1^{p-2} \gamma^{p-3}=0.$$

Las ecuaciones finales en y de los sistemas $\left.\begin{matrix} X_1=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ y $\left.\begin{matrix} k=0 \\ X'_1=0 \end{matrix}\right|$ las obtendrémos eliminando la incógnita x entre estas ecuaciones.

139. Tratemos ya de resolver el sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ sin olvidar que k y k' son dos polinomios funciones de x y de y, y que no tienen ningun factor comun que sea funcion solamente de x ó de y.

Considerémos los dos polinomios k y k' ordenados con relacion á las potencias de x, de manera que sus coeficientes serán funciones de y; y suponiendo que k' no sea de un grado superior á k, dividamos á k por k', y llamando Q al cociente y R_1 al resíduo, y admitiendo además que no haya en el cociente Q términos fraccionarios con relacion á y, tendrémos:

$$k=k'Q+R_1 \quad (1)$$

ahora, toda solucion del sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ hace á $R_1=0$, puesto que el primer miembro de la igualdad (1) se reduce á cero por hipótesis, y en el segundo miembro el sumando $k'Q$ es cero por serlo uno de los factores, luégo es preciso para que la igualdad se verifique, que R_1 sea cero, así que las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ se encuentran en el sistema más sencillo $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$; pero toda solucion del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ hace á k igual á cero, porque siendo $k'=0$ y $R_1=0$, la igualdad (1) queda reducida á $k=0$, luégo las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ se hallan tambien en las del sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$; por lo tanto, podemos sustituir al sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ por el sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$. Y como el razonamiento que acabamos de hacer es general, podemos concluir diciendo: que al sistema de dos ecuaciones se le puede reemplazar por el sistema formado por la de menor grado de ellas y por la ecuacion que obtengamos igualando á cero el resíduo de la division de sus primeros miembros; una vez sentado esto, dividiríamos á k' por R_1 y designando por Q' el cociente y por R_2 el resíduo, tendríamos que

$$k'=R_1Q'+R_2$$

y segun lo que hemos dicho, el sistema de las ecuaciones $\left.\begin{array}{l}k'=0\\R_1=0\end{array}\right|$ podemos sustituirlo por el sistema más sencillo $\left.\begin{array}{l}R_1=0\\R_2=0\end{array}\right|$, y como el sistema primitivo $\left.\begin{array}{l}k=0\\k'=0\end{array}\right|$ es equivalente al $\left.\begin{array}{l}k'=0\\R_1=0\end{array}\right|$ y este á su vez equivalente al $\left.\begin{array}{l}R_1=0\\R_2=0\end{array}\right|$, deducimos que el sistema $\left.\begin{array}{l}k=0\\k'=0\end{array}\right|$ lo tenemos sustituido por el sistema $\left.\begin{array}{l}R_1=0\\R_2=0\end{array}\right|$ mucho más sencillo; despues dividiríamos á R_1 por R_2, luégo á R_2 por R_3 y así sucesivamente hasta llegar á obtener un resíduo independiente de x, y designando este resíduo por R_n el último sistema de ecuaciones equivalente al primitivo, lo obtendríamos igualando á cero los dos últimos resíduos, esto es, $\left.\begin{array}{l}R_{n-1}=0\\R_n\ \ =0\end{array}\right|$ y nos encontramos con un sistema de dos ecuaciones, una de las cuales es funcion de x y de y, y la otra funcion solamente de la incógnita y, de modo que, resolviendo esta última y sustituyendo sucesivamente en la ecuacion $R_{n-1}=0$ los valores de y, y deducidos de la $R_n=0$, obtendrémos los valores correspondientes de x.

140. *Ejemplo:* sean las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^3+4y^2x-2y-2yx+3yx^2+x-4y^2-2y=0 \\ x^3+2y^2+yx-2y=0 \end{array}\right\} (1)$$

ordenando sus primeros miembros con relacion á las potencias decrecientes de x, y tomando por dividendo el de mayor grado:

$$\begin{array}{ll|l} \text{D.}^{\text{o}} & x^3+3yx^2+(4y^2-2y & \text{D.}^{\text{or}}\ \ x^2+yx+2y^2-2y \\ & +1)x+4y^3-4y^2-2y & x+2y \\ & -x^3-yx^2-(2y^2-2y)x & \\ \hline 1.^{\text{er}}\ \text{R.}^{\text{o}} & +2yx^2+(2y^2+1) & \\ & x+4y^3-4y^2-2y & \\ & -2yx^2-2y^2x-4y^3 & \\ & +4y^2 & \\ \hline 2.^{\text{o}}\ \text{R.}^{\text{o}} & x-2y & \end{array}$$

ya que hemos llegado á un resíduo de menor grado que el divisor, tomemos por dividendo el divisor, y por divisor el resíduo:

$$\begin{array}{ll|l} \text{D.}^{\text{o}} & x^2+yx+2y^2-2y-x^2+2yx & \text{D.}^{\text{or}}\ \ x-2y \\ & & x+3y \\ \hline 1.^{\text{er}}\ \text{R.}^{\text{o}} & +3yx+2y^2-2y-3yx+6y^2 & \\ \hline 2.^{\text{o}}\ \text{R.}^{\text{o}} & 8y^2-2y & \end{array}$$

Una vez que hemos llegado al resíduo $8y^2-2y$ independiente de x, igualaremos á cero este resíduo y el último divisor $x-2y$, y tendrémos un sistema de dos ecuaciones equivalente al sistema (1), una de las cuales es funcion de x y de y, y la otra funcion solamente de y, este sistema será:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 8y^2-2y=0 \end{array}\right| \text{ ó sea } \left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 4y^2-y=0 \end{array}\right|$$

de la ecuacion $4y^2-y=0$, ó sea $y(4y-1)=0$ deducimos $y=0$ é $y=\frac{1}{4}$, ahora sustituyendo sucesivamente estos dos valores de y en la otra ecuacion hallarémos que para $y=0$ es $x=0$, y para $y=\frac{1}{4}$ es $x=\frac{1}{2}$, que son las soluciones del sistema propuesto.

141. Al resolver el sistema de las ecuaciones $\left.\begin{array}{r} k=0 \\ k'=0 \end{array}\right|$ hemos supuesto que los diferentes cocientes que obteníamos en la investigacion del máximo comun divisor de los primeros miembros de la ecuacion, eran funciones enteras de y, es decir, que y no entraba en denominador alguno; pues de no hacer esta restriccion no hubiéramos podido asegurar que todas las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{r} k=0 \\ k'=0 \end{array}\right|$ se hallaban en el sistema $\left.\begin{array}{r} k'=0 \\ R_1=0 \end{array}\right|$, porque si la division de k por k' nos dá en el cociente términos que conten-

gan y en el denominador y designamos por $\frac{A}{B}$ este cociente, siendo B funcion de y, y por R_1 el resíduo, tendrémos:

$$k = \frac{Ak'}{B} + R_1 \quad (1)$$

ahora, si sustituimos en esta ecuacion en vez de x y de y valores quē verifiquen el sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$, desde luégo el numerador de la fraccion $\frac{Ak'}{B}$ será cero por serlo k', pero siendo el denominador B una funcion de y, puede muy bien suceder que el valor de y que hemos sustituido lo reduzca á cero, y por lo tanto la fraccion $\frac{Ak'}{B}$ se nos presentará bajo la forma de $\frac{0}{0}$, de modo que si el verdadero valor de $\frac{Ak'}{B}$ fuese cero, como el primer miembro de la ecuacion (1) tambien lo es R_1, tendria que serlo del mismo modo; pero el valor de $\frac{Ak'}{B}$ puede ser diferente de cero, puesto que la forma que toma de $\frac{0}{0}$ es de valor indeterminado, y en este caso R_1 dejaria de ser cero; luégo si establecemos la ecuacion $R_1=0$ no tendrémos seguridad en que las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ están en el sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$, y recíprocamente que una solucion cualquiera del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ puede muy bien como ya hemos dicho anular á B y presentarse la fraccion $\frac{Ak'}{B}$ bajo la forma de indeterminacion $\frac{0}{0}$ que hemos visto, pudiendo, por consiguiente, k dejar de ser cero, en cuyo caso no estarian todas las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ comprendidas en el sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$.

142. Esto nos hace ver lo muy importante que es hacer que los cocientes sean enteros respecto de y, nosotros ya sabemos eludir esta dificultad, puesto que al tratar de hallar el máximo comun divisor de dos polinomios, hacemos en estos polinomios ciertas modificaciones para que nos resulten todos los términos de los cocientes sucesivos enteros, lo cual no altera el máximo comun divisor; pero como nosotros lo que tratamos de hallar es el resíduo independiente de una de las incógnitas, necesitamos saber si estas modificaciones alteran este resíduo y cuál es la alteracion.

143. Supongamos, por lo tanto, que la division

de k por k' nos dá en el cociente términos fraccionarios con relacion á y, llamemos Y al factor por el cual es necesario multiplicar á k para que los términos del cociente Q sean enteros, y llamando R_1 al resíduo, tendrémos que:

$$Yk = k' + R_1 \quad (1)$$

ahora, toda solucion del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ hace á $Yk'=0$ segun la igualdad (1), y como un producto es cero cuando lo es uno de sus factores, la ecuacion $Yk=0$ nos dá las dos ecuaciones $Y=0$ y $k=0$; así que las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ están entre las soluciones de los sistemas que formamos combinando á $k'=0$ con cada una de las ecuaciones $Y=0$ y $k=0$, esto es, $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ é $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ recíprocamente, verificándose cualquiera de estos dos sistemas, R_1 tiene que ser cero, segun la igualdad (1), puesto que en ambos casos su primer miembro es cero, lo mismo que el primer sumando del segundo miembro, y por consecuencia el otro sumando ó sea R_1 tiene por precision que serlo tambien. Luego las soluciones de los sistemas $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ é $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ están entre las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ y por consecuencia todas las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ las tenemos entre las de los sistemas $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ é $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$, que para indicar este resultado lo escribimos bajo la forma

$$\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right| = \left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix} Y=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right| \quad (2)$$

de modo que las soluciones del sistema propuesto, más las soluciones del sistema estraño $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$ son iguales á las soluciones del sistema formado por una de las ecuaciones primitivas y por la ecuacion que nos resulta igualando á cero el resíduo de la division de sus primeros miembros; por consiguiente, resolviendo el sistéma $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ hallarémos todas las soluciones del sistema propuesto, mas otras soluciones pertenecientes al sistema $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$.

Ahora veamos cómo podemos conocer entre todas estas soluciones las que corresponden al sistema primitivo, para lo cual vamos á tratar de separar las soluciones estrañas.

144. Para conseguir este resultado, hallarémos antes de dividir á k' por R_1 el máximo comun divisor D_1 de los coeficientes de x en R_1, y designemos

por R'_1 el cociente de la division de R_1 por D_1, así tendrémos que:

$$R_1 = D_1\, R'_1$$

y las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ estarán en las soluciones de los dos sistemas que formemos combinando á $k'=0$ con cada uno de los factores de R_1 igualados á cero, esto es:

$$\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right| = \left.\begin{matrix} k'=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix} k'=0 \\ D_1=0 \end{matrix}\right|$$

de modo que si sustituimos en la ecuacion (2) en vez del sistema $\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right|$ estos dos sistemas, que le son equivalentes, tendrémos que

$$\left.\begin{matrix} k'=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right| = \left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix} Y=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right| - \left.\begin{matrix} k'=0 \\ D_1=0 \end{matrix}\right| \quad (3)$$

y siguiendo la misma marcha que en el máximo comun divisor, suprimirémos el D_1 del resíduo R_1, después buscarémos el factor por quien es necesario multiplicar á B para que el cociente de la division de B por R'_1 sea de forma entera; sea este factor Y, y designando por Q_1 el cociente de la division, y por R_2 el resíduo será:

$$Y_1 k' = R'_1 Q_1 + R_2$$

y del mismo modo que ántes lo hemos hecho, verémos que las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{matrix}\right|$ están entre las soluciones de los sistemas $\left.\begin{array}{r} k'=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right|$ é $\left.\begin{array}{r} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right|$

y por consiguiente, que:

$$\left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{array}\right| = \left.\begin{array}{r} k'=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right| + \left.\begin{array}{r} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right|$$

ó sea: $\left.\begin{array}{r} k'=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right| = \left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right|$

y si en la igualdad (3) sustituimos este valor de $\left.\begin{array}{r} k'=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right|$ tendrémos que:

$$\left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{array}\right| = \left.\begin{array}{r} k=0 \\ k'=0 \end{array}\right| + \left.\begin{array}{r} Y=0 \\ k'=0 \end{array}\right| + \left.\begin{array}{r} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} k'=0 \\ D_1=0 \end{array}\right| \quad (4)$$

ahora hallemos el máximo comun divisor de los coeficientes de x en R_2, y sea D_2 este máximo comun divisor; dividamos á R_2 por D_2, y designemos por R'_2 el cociente de esta division, de modo que:

$$R_2 = D_2 R'_2$$

y entónces las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{array}\right|$ estarán dadas por las soluciones de los sistemas $\left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R'_2=0 \end{array}\right|$ y $\left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ D_2=0 \end{array}\right|$ es decir, que:

$$\left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{array}\right| = \left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R'_2=0 \end{array}\right| + \left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ D_2=0 \end{array}\right|$$

y sustituyendo en la expresion (4) en vez del sistema $\left.\begin{array}{r} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{array}\right|$ sus equivalentes, tendrémos que:

$$\left.\begin{array}{l}R'_1=0\\R_2=0\end{array}\right|=\left.\begin{array}{l}k=0\\k'=0\end{array}\right|+\left.\begin{array}{l}Y=0\\k'=0\end{array}\right|+\left.\begin{array}{l}Y_1=0\\R'_1=0\end{array}\right|-\left.\begin{array}{l}k^1=0\\D_1=0\end{array}\right|-\left.\begin{array}{l}R'_1=0\\D_2=0\end{array}\right|$$

ahora nos hallamos en el caso de dividir á R'_1 por R_2; pero observemos, sin necesidad de continuar, que si seguimos aplicando la marcha del máximo comun divisor, y hacemos despues de cada división los mismos razonamientos que hasta aquí hemos hecho, llegarémos á obtener un resíduo R'_n independiente de x, y el sistema formado por los dos últimos resíduos igualados á cero, estará expresado por:

$$\left.\begin{array}{l}R'_{n-1}=0\\R_n\ \ =0\end{array}\right|=\left.\begin{array}{l}k=0\\k'=0\end{array}\right|+\left.\begin{array}{l}Y=0\\k'=0\end{array}\right|+\left.\begin{array}{l}Y_1=0\\R'_1=0\end{array}\right|+\left.\begin{array}{l}Y_2=0\\R'_2=0\end{array}\right|+$$

$$+\left.\begin{array}{l}Y_3=0\\R'_3=0\end{array}\right|+\dots\dots+\left.\begin{array}{l}Y_{n-1}=0\\R'_{n-1}=0\end{array}\right|-\left.\begin{array}{l}k'=0\\D_1=0\end{array}\right|-\left.\begin{array}{l}R'_1=0\\D_2=0\end{array}\right|-$$

$$-\left.\begin{array}{l}R'_2=0\\D_3=0\end{array}\right|-\left.\begin{array}{l}R'_3=0\\D_4=0\end{array}\right|-\dots-\left.\begin{array}{l}R'_{n-2}=0\\D_{n-1}=0\end{array}\right|$$

de modo que en el cálculo de las operaciones, hasta llegar al resíduo R_n habrémos suprimido en general los $n-1$ factores D_1, D_2, D_3 ..... D_{n-1}. Luégo, igualando á cero el producto del último resíduo por todos estos factores suprimidos, formarémos una ecuacion que tendrá por raices todos los valores de y convenientes para formar soluciones del sistema propuesto, y además para formar soluciones de los sistemas extraños:

$$\left.\begin{array}{l}Y=0\\k'=0\end{array}\right|,\ \left.\begin{array}{l}Y_1=0\\R'_1=0\end{array}\right|,\ \left.\begin{array}{l}Y_2=0\\R'_2=0\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}Y_3=0\\R_3=0\end{array}\right|\dots\dots\left.\begin{array}{l}Y_{n-1}=0\\R'_{n-1}=0\end{array}\right|$$

semejante ecuacion, será:

$$D_1,\ D_2,\ D_3\ \ldots\ldots\ D_{n-1},\ R_n=0,$$

por consiguiente, si dividimos el primer miembro de esta ecuacion por el producto de los factores de primer grado correspondientes á los valores de y que puedan servir para formar soluciones de los sistemas estraños, é igualamos á cero el cociénte de esta division, obtendrémos una ecuacion que solo tendrá por raices valores de y convenientes para formar soluciones del sistema primitivo $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$

145. De manera que lo único que nos queda que conocer es el producto de los factores de primer grado correspondientes á los valores de y, capaces de formar soluciones estrañas. Veamos, pues, cómo podemos determinar este producto; para ello consideremos un sistema estraño cualquiera $\left.\begin{matrix} Y_q=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$ el primer miembro de la ecuacion R'_q es de la forma:

$$R'_q=ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\ldots\ldots+tx+u,$$

en el cual hemos suprimido el máximo comun divisor de todos los coeficientes de x, y por lo tanto las cantidades Y_q, a, b, c, d, ... t, u, no tienen ningun factor comun. Supuesto esto, descompongamos á Y_q en dos factores M y N, de manera que uno de ellos M solo está formado de factores primos comunes á los coeficientes b, c, d, ... t, y el otro N sea primo con todos estos coeficientes, para lo cual hallarémos el máximo comun divisor D de los $m—1$ coeficientes b, c, d, ... t, en seguida el máximo comun divisor d entre Y_q y el máximo comun divisor D, y dividirémos á Y_q por d, y designando por q el cociente de esta division, hallarémos el máximo comun divisor entre este cociente q y D, y representándolo por d_1, dividirémos á q por d_1 y llamemos q' al cociente, y hallarémos el máximo comun divisor d_2 entre q' y D, y dividirémos á q' por d_2, y llamando q'' al cociente de esta division y en seguida hallarémos el máximo comun divisor d_3 entre q'' y D, y así continuaríamos hasta llegar á obtener un cociente que sea primo con D, y si suponemos que el cociente q'' es primo con D, tendrémos que $d_3=1$, y en la série de los cálculos que hemos efectuado, habrémos hallado las igualdades:

$$Y_q=dq,\ q=d_1q',\ q'=d_2q''$$

y sustituyendo el valor de q' en el de q y este en el de Y_n, tendrémos que

$$Y_q=d.d_1.d_2.q''$$

de modo que haciendo $M=d.d_1.d_2$ y $N=q''$ habrémos hecho la descomposicion de Y_q tal como hemos indicado, puesto que segun las operaciones que hemos efectuado el producto $d.d_1.d_2$ solo contiene factores primos comunes á los $m-1$ coeficientes $b, c, d, \ldots. t$ y q'^{1} no contiene ningun factor primo comun á estas cantidades, de manera que:

$$Y_q = M.N$$

y por lo tanto las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} Y_q=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$ están dadas por las soluciones de los sistemas $\left.\begin{matrix} M=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$ y $\left.\begin{matrix} N=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$, pero como el primer miembro de la ecuacion $M=0$ es el producto de los factores primos comunes á los coeficientes b, c, d, ..., t, si sustituimos en la ecuacion $R'_q = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \ldots.. + tx + u = 0$ una cualquiera de las raices de la ecuacion $M=0$, reducirá á un número el polinomio R'_q que no podrá ser igual á cero, y por lo tanto el sistema $\left.\begin{matrix} M=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$ es incompatible, y si sustituimos en el mismo polinomio R'_q una cualquiera de las raices de la ecuacion $N=0$ podrá reducir á cero alguno de los coeficientes de R'_q; pero no á todos puesto que N y dichos coeficientes no tienen ningun factor comun lo que nos hace ver que R'_q es funcion de x, así que á cada una de las raices de la ecuacion $N=0$ corresponden diferentes valores de x deducidos de la ecuacion $R'_q=0$, y por lo tanto propios para formar soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} N=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$; luego el sistema extraño $\left.\begin{matrix} Y_q=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$ que hemos considerado, es equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} N=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$ de modo que si dividimos el primer miembro de la ecuacion $D_1.D_2.D_3.\ldots.R^1_n=0$ por el primer miembro de la $N=0$ igualamos á cero el cociente, obtendrémos una ecuacion que ya no contendrá valores de y que sirvan para formar soluciones del sistema estraño $\left.\begin{matrix} Y_q=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$.

Lo que hemos dicho para el sistema $\left.\begin{matrix} Y_q=0 \\ R'_q=0 \end{matrix}\right|$ podemos decir para cada uno de los sistemas estraños, y así llegarémos á tener una ecuacion que solo tendrá por raices los valores de y propios para formar soluciones del sistema propuesto.

De manera que dividiendo el último resíduo R'_n, el cual es independiente de x, por los factores estraños que no se encuentren entre los suprimidos, las raices de la ecuacion

$$D_1.D_2.D_3\ldots.D_{n-1}.R'_n=0$$

serán los diferentes valores de y propios para formar soluciones del sistema propuesto $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$, así que las soluciones de este sistema están dadas por las soluciones de los sistemas.

$$\left.\begin{matrix} R'_{n-1}=0 \\ R'_n\ =0 \end{matrix}\right|, \left.\begin{matrix} k'=0 \\ D_1=0 \end{matrix}\right|, \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ D_2=0 \end{matrix}\right|, \left.\begin{matrix} R'_2=0 \\ D_3=0 \end{matrix}\right| \cdots \left.\begin{matrix} R'_{n-2}=0 \\ R'_{n-1}=0 \end{matrix}\right|$$

y las soluciones de estos sistemas no nos presentará dificultad, una vez que en cada uno de ellos entra una ecuacion con una sola incógnita, puesto que el primer miembro de la ecuacion $R'_n=0$ hemos supuesto es el resíduo independiente de x, y los primeros miembros de las ecuaciones $D_1=0$, $D_2=0$, $D_3=0$ ... $D_{n-1}=0$, son los diferentes factores comunes de los coeficientes de x, y por lo tanto funciones solamente de y.

146. Para obtener si se quiere la ecuacion final del sistema $\left.\begin{matrix} k=0 \\ k'=0 \end{matrix}\right|$, hallarémos las ecuaciones finales de los sistemas

$$\left.\begin{matrix} R'_{n-1}=0 \\ R'_n\ =0 \end{matrix}\right|, \left.\begin{matrix} k'=0 \\ D_1=0 \end{matrix}\right|, \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ D_2=0 \end{matrix}\right|, \left.\begin{matrix} R'_2=0 \\ D_3=0 \end{matrix}\right| \cdots \left.\begin{matrix} R'_{n-2}=0 \\ R'_{n-1}=0 \end{matrix}\right|$$

y multiplicando sus primeros miembros entre sí tendrémos un producto que, igualado á cero, será la ecuacion final buscada.

EJEMPLO.

Sean las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} k=x^2+3yx+y^2-1=0 \\ k'=x^2-3y^2-1=0 \end{matrix}\right|$$

efectuemos la division de k por k'

$$\begin{array}{lll} \text{D.}^{\circ}\ x^2+3yx+y^2-1 & \text{D.}^{\text{or}} & \left| \begin{array}{l} x^2-3y^2-1 \\ \hline 1 \end{array} \right. \\ \quad\ \underline{-x^2+3y^2+1} & & \\ \text{R.}^{\circ}\quad 3yx+4y^2 & & \end{array}$$

de manera que $R_1=3yx+4y^2$, de donde deducimos que $D_1=y$ y dividiendo á R_1 por D_1 tendrémos que

$$R'_1=3x+4y$$

ahora efectuemos la division de k' por R'_1, para lo cual es necesario multiplicar á k' por 3, ó sea $Y_1=3$.

$$\begin{array}{lll} \text{D.}^{\circ}\quad 3x^2-9y^2-3 & \text{D.}^{\text{or}} & \left| \begin{array}{l} 3x+4y \\ \hline x-4 \end{array} \right. \\ \qquad\ \underline{-3x^2-4yx} & & \\ 1.^{\text{er}}\ \text{R.}^{\circ}-4yx-9y^2-3 & & \\ \qquad -12yx-27y^2-9 & & \\ \qquad\ \underline{+12yx+16y} & & \\ 2.^{\circ}\ \text{R.}^{\circ}\quad -27y^2+16y-9 & & \end{array}$$

hemos multiplicado el segundo resíduo por 3, para hacer posible la division, y hemos llegado al resíduo $-27y^2+16y-9$, independiente de x, de modo que tenemos:

$$R_2=-(27y^2-16y+9)$$

vemos que el factor $D_1=y$ que hemos suprimido en el resíduo R_1 es primo con el primer término del divisor correspondiente k', y por lo tanto deberá entrar en la ecuacion final elevado al cuadrado, y esta ecuacion es por consiguiente:

$-(27y^2+16y-9)y^2=0$, ó sea $27y^4-16y^3+.9y^2=0$.

La resolucion de las ecuaciones propuestas queda reducida á la de los dos sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-3y^2-1=0 \end{array}\right| \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} 27y^2-16y-9=0 \\ 3x+4y=0 \end{array}\right|.$$

147. Si el resíduo R_n, que suponemos independiente de x, lo fuese tambien de y, es decir, que R_n llegase á ser un número, en este caso el sistema propuesto seria incompatible, y el problema que nos hubiera conducido á las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} k=0 \\ k'=0 \end{array}\right|$ seria absurdo, puesto que no existiria ningun valor de x ni de y que pudiese verificar á ambas ecuaciones.

148. Si el resíduo R_n se redujese á cero por sí mismo, esto nos haria ver que los primeros miembros de las dos ecuaciones tendrian un factor comun que, representado por δ y por Q y Q' los cocientes respectivos de dividir á k y k' por este factor comun δ, el sistema propuesto podríamos ponerlo bajo la forma:

$$\left.\begin{array}{l} Q\,\delta=0 \\ Q'\,\delta=0 \end{array}\right|$$

y este sistema quedaria verificado con ser $\delta=0$ ó con tener á la vez $Q=0$ y $Q'=0$, que obtendríamos un número ilimitado de soluciones, y por lo tanto el problema que nos ha conducido al sistema que consideramos, será indeterminado.

149. Para resolver tres ecuaciones con tres incógnitas, eliminaremos una de las incógnitas entre una de las ecuaciones y cada una de las otras dos, y así obtendrémos dos ecuaciones con dos incógnitas x é y; suponiendo ser z la eliminada, que tendrán por soluciones comunes los diferentes pares de valores de x é y, que unidos á ciertos valores de z, puedan verificar á las ecuaciones propuestas: si suponemos que $x=a$ é $y=b$ es un sistema de valores de las dos ecuaciones con dos incógnitas á que hemos llegado después de la eliminacion de z, y sustituimos después en vez de x y de y estos valores a y b en las ecuaciones primitivas, obtendrémos tres polinomios, cuyo máximo comun divisor igualado á cero nos dará los valores de z que sean conjugados con los valores de x y de y.

Este procedimiento lo podremos aplicar á cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, y hasta m ecuaciones con m incógnitas.

ECUACIONES IRRACIONALES.

150. Se llama ecuacion irracional aquella en la cual la incógnita está bajo algun radical.

El objeto que nos proponemos al tratar de estas ecuaciones, es el de trasformarlas en otras racionales, es decir, en otras equivalentes á las primeras, y en las cuales la incógnita no entra bajo radical alguno.

151. La ecuacion irracional más sencilla que se nos puede presentar, claro está que es aquella que solo contenga un radical, en cuyo caso para trasformarla en racional, bastará dejar en un miembro el radical y pasar al otro los demás términos, y después elevar los dos miembros de la ecuacion que nos resulte á una potencia indicada por el índice del radical, con lo cual habremos hecho desaparecer este.

Sea por ejemplo la ecuacion:

$$\sqrt[3]{x^2-2}-2x+3=0$$

lo que nos dará sucesivamente, aplicando la marcha que acabamos de indicar,

$$\sqrt[3]{x^2-2}=2x-3,\ x^2-2=(2x-3)^3,\ 8x^3-19x^2+$$
$$+18x-25=0.$$

152. Supongamos el caso en que la ecuacion tenga dos radicales, y que uno de ellos sea de segundo grado; para convertir en este caso la ecuacion en otra racional, dejarémos en un miembro el radical de mayor índice pasando al otro el radical de segundo grado y los demás términos, y elevando los dos miembros de la ecuacion resultante á una

potencia indicada por el índice del radical que solo hemos dejado en uno de los miembros, hallarémos otra nueva ecuacion que no contendrá más radicales que de segundo grado, y estos iguales; de modo que, hechas todas las reducciones, llegarémos á una ecuacion compuesta en general de términos que contendrán diferentes potencias de x, un têrmino independiente de esta letra, y otro término compuesto del radical de segundo grado y una espresion que contendrá términos en x elevada á diferentes potencias, y una cantidad constante; así, si la cantidad subradical es $\alpha+\beta x^n$, la forma de la ecuacion será:

$$Mx^m+Nx^n+\ldots+R+(Ax^a+Bx^b+\ldots+S)\sqrt{\alpha+\beta x^n}=0$$

que conteniendo solo un radical, la tratarémos como en el primer caso para hacerla racional.

153. Sea la ecuacion:

$$\sqrt[5]{x-2}-\sqrt{x^2+1}+2=0$$

que aplicándole la teoría esplicada, hallarémos sucesivamente:

$$\sqrt[5]{x-2}=\sqrt{x^2+1}-2,\ x-2=\left(\sqrt{x^2+1}-2\right)^5$$

ó sea:

$$x-2=(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}-10(x^2+1)^2+40(x^2+1)$$
$$\sqrt{x^2+1}-80(x^2+1)+80\sqrt{x^2+1}-32$$
$$x-2=(x^4+42x^2+121)\sqrt{x^2+1}-10x^4-100x^2-122$$
$$10x^4+100x^2+x+120=(x^4+42x^2+121)\sqrt{x^2+1}$$

elevando al cuadrado, haciendo todas las reducciones y cambiando los signos de la ecuacion, hallarémos:

$$x^{10}-15x^8+95x^6-20x^5-230x^4-20000x^3+805x^2-$$
$$-140x+241=0.$$

154. Tambien podemos hacer racional una ecuacion que contenga dos radicales de tercer grado: sea la ecuacion:

$$\sqrt[3]{M}+\sqrt[3]{N}+P=0$$

en la cual M, N y P nos representan cantidades cualesquiera. De esta deducimos:

$$\sqrt[3]{N}+P=-\sqrt[3]{M}$$

y elevando al cubo los dos miembros, será:

$$N+3P\sqrt[3]{N^2}+3P^2\sqrt[3]{N}+P^3=-M$$

y sacando $3P\sqrt[3]{N}$ factor comun de los términos que multiplica:

$$3P\sqrt[3]{N}\left(\sqrt[3]{N}+P\right)+P^3+N=-M;$$

ahora dejando en el primer miembro el término que contiene el radical, y pasando al segundo todos los demás términos, hallarémos:

$$(1)\ 3P\sqrt[3]{N}\left(\sqrt[3]{N}+P\right)=-\left(M+N+P^3\right)$$

pero hemos visto que $\sqrt[3]{N}+P=-\sqrt[3]{M}$, luego, sustituyendo este valor en (1), y cambiando los signos de toda la ecuacion, tendrémos:

$$3P\sqrt[3]{MN}=M+N+P^3$$

y ya nos hallamos con una ecuacion que contiene solo un radical de tercer grado, de modo que elevando los dos miembros ó el cubo, la harémos racional.

154. Supongamos que la ecuacion, además de contener un radical de tercer grado, contenga otro radical cualquiera, y tratemos de hacerla racional.

Sea la ecuacion:

$$\sqrt[m]{M}+\sqrt[3]{N}+P=0,$$

dejemos, como lo hemos hecho ántes, el radical de mayor índice solo en un miembro, y elevando después los dos miembros de la ecuacion resultante á la potencia m, obtendrémos una nueva ecuacion, en la cual no habrá más radicales que de la forma $\sqrt[3]{N}$ y $\sqrt[3]{N^2}$, porque los exponentes de las potentencias á que tendrémos que elevar $\sqrt[3]{N}$, serán, ó un múltiplo exacto de 3, ó un múltiplo de 3, más una unidad, ó un múltiplo de 3, más dos únidades, de modo que serán de la forma, $3n$, $3n+1$, ó $3n+2$, y

$$(\sqrt[3]{N})^{3n}=N^n,\ (\sqrt[3]{N})^{(3n+1)}=N^n\sqrt[3]{N}, \text{ y}$$

$$(\sqrt[3]{N})^{(3n+2)}=N^n\sqrt[3]{N^2}$$

y por lo tanto la ecuacion á que llegarémos será de la forma:

$$P\sqrt[3]{N}+Q\sqrt[3]{N^2}+R=0,$$

que solo contiene dos radicales de tercer grado: así que aplicando la marcha que hemos seguido para este caso, hallarémos:

$$P\sqrt[3]{N}+R=-Q\sqrt[3]{N^2}$$

y elevando los dos miembros al cubo, tendrémos:

$$P^3N+3P^2\mathrm{R}\sqrt[3]{N^2}+3\mathrm{R}^2P\sqrt[3]{N}+\mathrm{R}^3=-Q^3N^2$$

sacando $3P\mathrm{R}\sqrt[3]{N}$, factor comun de los términos que multiplica, y pasando los demás al segundo miembro, será:

$$(2)\ 3P\mathrm{R}\sqrt[3]{N}\left(P\sqrt[3]{N}+\mathrm{R}\right)=-\left(P^3N+Q^3\mathrm{N}^2+\mathrm{R}^3\right)$$

y sustituyendo en esta en vez de $P\sqrt[3]{\mathrm{N}}+\mathrm{R}$ su igual $-Q\sqrt[3]{\mathrm{N}^2}$ hallamos:

$$-3PQRN = -P^3N - Q^3N^2 - R^3 \text{ ó sea:}$$

$$P^3N + Q^3N^2 + R^3 - 3PRQN = 0,$$

que es una ecuacion racional.

155. Si la ecuacion contuviese tres radicales, al ménos que estos no fuesen de segundo grado, el procedimiento empleado hasta aquí es fácil de ver que no nos daria resultado. En este caso, para trasformar la ecuacion en otra racional, lo que harémos será igualar á cada uno de los radicales que entran en ella á una nueva incógnita, lo que nos dará tantas ecuaciones como radicales entren en la propuesta, después elevar los dos miembros de cada una de estas ecuaciones á la potencia indicada por el índice del radical que entre en cada una de ellas; y sustituyendo en la ecuacion primitiva en vez de cada radical, cada una de las letras á quien los hemos igualado, obtendrémos otra ecuacion, que, unida á las precedentes, nos darán tantas ecuaciones racionales más una como radicales tiene la propuesta. Así, si esta tiene m radicales, nos hallarémos con un sistema de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas, entre las cuales podemos eliminar las m variables introducidas, y obtendrémos una ecuacion final racional, funcion solamente de la incógnita de la ecuacion propuesta, que es lo que buscábamos.

156. Ejemplo. Sea la ecuacion irracional:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{2+x}+1=0$$

hagamos á $\sqrt[3]{x+1}=y$, de donde:

$$x+1=y^3, \text{ ó sea: } y^3-x-1=0$$

$\sqrt{2+x}=z$, de donde, $2+x=z^2$, ó sea, $z^2-x-2=0$ y sustituyendo en la ecuacion propuesta en vez de $\sqrt[3]{x+1}$ y de $\sqrt{2+x}$ las respectivas incógnitas y, z, á quienes hemos igualado los radicales, tendrémos:

$$y+z+1=0,$$

de modo que tendrémos que deducir la ecuacion racional que buscamos de las tres ecuaciones:

$$y^3-x-1=0 \ (1)$$

$$z^2-x-2=0 \ (2)$$

$$y+z+1=0 \ (3)$$

eliminando á y entre la (1) y la (3), obtendrémos la ecuacion:

$-z^3-3z^2-3z-x-2=0$, ó sea, $z^3+3z^2+3z+x+$ $+2=0$ (4),

y después aplicando el método del máximo comun divisor para eliminar á z entre la (2) y la (4), hallarémos la ecuacion final:

$$x^3-4x^2-19x-14=0,$$

que tiene por raices los tres valores -1, -2 y 7.

Ahora, si sustituimos los valores -1, -2 y 7

en la ecuacion propuesta, verémos que el primero la satisface, que el valor —2 la satisface tambien, con tal que admitamos que $\sqrt[3]{-1}=-1$, segun lo convenido en las cantidades imaginarias, y que el valor 7 no las verifica, lo cual no tiene nada de extraño, una vez que cualquiera que sean los valores de los radicales que contiene la ecuacion, tendrémos entre x, y, z, las ecuaciones (1) (2) (3), así que la ecuacion final, no solo nos debe dar las raices de la propuesta, sino tambien los valores que puedan verificar las ecuaciones deducidas de ella.

Por lo tanto, dirémos que las soluciones de la ecuacion:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{2+x}+1=0,$$

son $x=-1$ y $x=-2$, despreciando el valor 7.

TABLAS

DE

DIFERENCIAS.

TERCER GRADO.

N	*m*	*h*	*N*	*m*	*h*	*N*	*m*	*h*	*N*	*m*	*h*
3	1	1	163	3	11	316	6	14	471	11	14
7	1	2	169	7	8	325	5	15	475	10	15
12	2	2	171	6	9	327	2	17	481	9	16
13	1	3	172	2	12	331	10	11		5	19
19	2	3	175	5	10	333	9	12	487	2	21
21	1	4	181	4	11	336	4	16	489	8	17
27	3	3	183	1	13	337	8	13	496	4	20
28	2	4	189	3	12	343	1	18	499	7	18
31	1	5	192	8	8		7	14	507	13	13
37	3	4	193	7	9	349	3	17		1	22
39	2	5	196	6	10	351	6	15	508	12	14
43	1	6	199	2	13	361	5	16	511	11	15
48	4	4	201	5	11	363	11	11		6	19
49	3	5	208	4	12	364	2	18	513	3	21
52	2	6	211	1	14		10	12	516	10	16
57	1	7	217	8	9	367	9	13	523	9	17
61	4	5		3	13	372	8	14	525	5	20
63	3	6	219	7	10	373	4	17	532	8	18
67	2	7	223	6	11	379	7	15		2	22
73	1	8	228	2	14	381	1	19	541	4	21
75	5	5	229	5	12	387	3	18	543	7	19
76	4	6	237	4	13	388	6	16	547	13	14
79	3	7	241	1	15	397	11	12	549	12	15
84	2	8	243	9	9	399	10	13	553	11	16
91	1	9	244	8	10		5	17		1	23
	5	6	247	7	11	403	9	14	556	6	20
93	4	7		3	14		2	19	559	10	17
97	3	8	252	6	12	409	8	15		3	22
103	2	9	259	5	13	412	4	18	567	9	18
108	6	6		2	15	417	7	16	571	5	21
109	5	7	268	4	14	421	1	20	577	8	19
111	1	10	271	9	10	427	6	17	579	2	23
112	4	8	273	1	16		3	19	588	4	22
117	3	9		8	11	432	12	12	589	13	15
124	2	10	277	7	12	433	11	13		7	20
127	6	7	279	3	15	436	10	14	592	12	16
129	5	8	283	6	13	439	5	18	597	11	17
133	4	9	291	5	14	441	9	15	601	1	24
	1	11	292	2	16	444	2	20	603	6	21
139	3	10	300	10	10	448	8	16	604	10	18
147	7	7	301	4	15	453	4	19	607	3	23
	2	11		9	11	457	7	17	613	9	19
148	6	8	304	8	12	463	1	21	619	5	22
151	5	9	307	1	17	468	6	18	624	8	20
156	4	10	309	7	13	469	12	13	628	2	24
157	1	12	313	3	16		3	20	633	13	16

N	m	h
637	12	17
	7	21
	4	23
643	11	18
651	10	19
	1	25
652	6	22
657	3	24
661	9	20
669	5	23
673	8	21
679	13	17
	2	25
684	12	18
687	7	22
688	4	24
691	11	19
700	10	20
703	6	23
	1	26
709	3	25
711	9	21
721	5	24
724	8	22
727	13	18
732	2	26
733	12	19
739	7	23
741	11	20
	4	25
751	10	21
756	6	24
757	1	27
763	9	22
	3	26
775	5	25
777	13	19
	8	23
784	12	20
787	2	27
793	11	21
	7	24
796	4	26
804	10	22
811	6	25
813	1	28
817	9	23
819	3	27
829	13	20

N	m	h
831	5	26
832	8	24
837	12	21
844	2	28
847	11	22
849	7	25
853	4	27
859	10	23
868	6	26
871	1	29
873	9	24
877	3	28
883	13	21
889	8	25
	5	27
892	12	22
903	11	23
	2	29
907	7	26
912	4	28
916	10	24
927	6	27
931	9	25
	1	30
937	3	29
939	13	22
948	8	26
949	12	23
	5	28
961	11	24
964	2	30
967	7	27
973	4	29
975	10	25
988	6	28
991	9	26
993	1	31
997	13	23
999	3	30
1008	12	24
1009	8	27
1011	5	29
1021	11	25
1027	2	31
1029	7	28
1036	4	30
	10	26
1051	6	29
1053	9	27

N	m	h
1057	1	32
	13	24
1063	3	31
1069	12	25
1072	8	28
1075	5	30
1083	11	26
1092	2	32
1093	7	29
1099	10	27
1101	4	31
1116	6	30
1117	9	28
1119	13	25
1123	1	33
1129	3	32
1132	12	26
1137	8	29
1141	5	31
1147	11	27
1159	7	30
	2	33
1164	10	28
1168	4	32
1183	13	26
	9	29
	6	31
1191	1	34
1197	12	27
	3	33
1200	20	20
1204	8	30
1209	5	32
1213	11	28
1227	7	31
1228	2	34
1231	10	29
1237	4	33
1249	13	27
1251	9	30
1252	6	32
1261	20	21
	1	35
1264	12	28
1267	3	34
1273	8	31
1279	5	33
1281	11	29
1297	7	32

N	m	h
1299	2	35
1300	10	30
1308	4	34
1317	13	28
1321	9	31
1323	21	21
	6	33
1324	20	22
1333	12	29
	1	36
1339	3	35
1344	8	32
1351	11	30
	5	34
1369	7	33
1371	10	31
1372	2	36
1381	4	35
1387	21	22
	13	29
1389	20	23
1393	9	32
1396	6	34
1404	12	30
1407	1	37
1413	3	36
1417	8	33
1423	11	31
1425	5	35
1443	7	34
1444	10	32
1447	2	37
1453	21	23
1456	20	24
	4	36
1459	13	30
1467	9	33
1471	6	35
1477	12	31
1483	1	38
1489	3	37
1492	8	34
1497	11	32
1501	5	36
1519	10	33
	7	35
1521	21	24
1524	2	38
1525	20	25

N	*m*	*h*
1533	13	31
	4	37
1543	9	34
1548	6	36
1552	12	32
1561	1	39
1567	3	38
1569	8	35
1573	11	33
1579	5	37
1591	21	25
1596	10	34
	20	26
1597	7	36
1603	2	39
1609	13	32
1612	4	38
1621	9	35
1627	6	37
1629	12	33
1641	1	40
1647	3	39
1648	8	36
1651	11	34
1659	5	38
1663	21	26
1669	20	27
1675	10	35
1677	7	37
1684	2	40
1687	13	33
1693	4	39
1701	9	36
1708	12	34
	6	38
1723	1	41
1729	8	37
	3	40
1731	11	35
1737	21	27
1741	5	39
1744	20	28
1756	10	36
1759	7	38
1767	13	34
	2	41
1776	4	40
1783	9	37
1789	12	35

N	*m*	*h*
1791	6	39
1807	1	42
1812	8	38
1813	21	28
	11	36
	3	41
1821	20	29
1825	5	40
1839	10	37
1843	7	39
1849	13	35
1852	2	42
1861	4	41
1867	9	38
1872	12	36
1876	6	40
1891	21	29
1893	1	43
1897	8	39
	11	37
1899	3	42
1900	20	30
1911	5	41
1924	10	38'
1929	7	40
1933	13	36
1939	2	43
1948	4	42
1953	9	39
1957	12	37
1963	6	41
1971	21	30
1981	1	44
	20	31
1983	11	38
1984	8	40
1987	3	43
1999	5	42
2011	10	39
2017	7	41
2019	13	37
2028	2	44
2037	4	43
2041	9	40
2044	12	38
2052	6	42
2053	21	31
2064	20	32

N	*m*	*h*
2071	11	39
	1	45
2073	8	41
2077	3	44
2089	5	43
2100	10	40
2107	13	38
	7	42
2119	2	45
2128	4	44
2131	9	41
2133	12	39
2137	21	32
2143	6	43
2149	20	33
2161	11	40
2163	1	46
2164	8	42
2169	3	45
2181	5	44
2191	10	41
2197	13	39
2199	7	43
2212	2	46
2221	4	45
2223	9	42
	21	33
2224	12	40
2236	20	34
	6	44
2253	11	41
2257	1	47
	8	43
2263	3	46
2275	5	45
2284	10	42
2289	13	40
2293	7	44
2307	2	47
2311	21	34
2316	4	46
2317	9	43
	12	41
2325	20	35
2331	6	45
2347	11	42
2352	8	44
2353	1	48
2359	3	47

N	*m*	*h*
2371	5	46
2379	10	43
2383	13	44
2389	7	45
2401	21	35
2404	2	48
2412	12	42
2413	9	44
	4	47
2416	20	36
2428	6	46
2343	11	43
2449	8	45
2451	1	49
2457	3	48
2469	5	47
2476	10	44
2479	13	42
2487	7	46
2493	21	36
2503	2	49
2509	20	37
	12	43
	5	48
2511	9	45
2512	4	48
2527	6	47
2541	11	44
2548	8	46
2551	1	50
2557	3	49
2569	5	48
2575	10	45
2577	13	43
2587	21	37
	7	47
2604	2	50
	20	38
2608	12	44
2611	9	46
2613	4	49
2628	6	48
2641	11	45
2649	8	47
2653	1	51
2659	3	50
2671	5	49
2676	10	46
2677	13	44

N	*m*	*h*
2683	21	38
2689	7	48
2701	20	39
2707	2	51
2709	12	45
2713	9	47
2716	4	50
2731	6	49
2743	11	46
2752	8	48
2757	1	52
2763	3	51
2775	5	50
2779	13	45
	10	47
2781	21	39
2793	7	49
2800	20	40
2812	12	46
	2	52
2817	9	48
2821	4	51
2836	6	50
2847	11	47
2857	8	49
2863	1	53
2869	3	52
2881	21	40
	5	51
2883	13	46
2884	10	48
2899	7	50
2901	20	41
2917	12	47
2919	2	53
2923	9	49
2928	4	52
2943	6	51
2953	11	48
2964	8	50
2971	1	54
2977	3	53
2983	21	41
2989	13	47
	5	52
2991	10	49
3004	20	42
3007	7	51
3024	12	48

N	*m*	*h*
3028	2	54
3031	9	50
3037	4	53
3052	6	52
3061	11	49
3073	8	51
5081	1	55
3087	21	42
	3	54
3097	13	48
3099	5	53
3100	10	50
3109	20	43
3117	7	52
3133	12	49
3139	2	55
3141	9	51
3148	4	54
3163	6	53
3171	11	50
3184	8	52
3193	21	43
	1	56
3199	3	55
3207	13	49
3211	10	51
	5	54
5216	20	44
3229	7	53
3244	12	50
3252	2	56
3253	9	52
3261	4	55
3276	6	54
3283	11	51
3297	8	53
3301	21	44
3307	1	57
3313	3	56
3319	13	50
3324	10	52
3325	5	55
	20	45
3343	7	54
3357	12	51
3367	2	57
	9	53
3376	4	56
3391	6	55

N	*m*	*h*
3397	11	52
3411	21	45
3412	8	54
3423	1	58
3429	3	57
3433	13	51
3436	20	46
3439	10	53
3441	5	56
3459	7	55
3472	12	52
3483	9	54
3484	2	58
3493	4	57
3508	6	56
3513	11	53
3523	21	46
3529	8	55
3541	1	59
3547	3	58
3549	20	47
	13	52
3556	10	54
3559	5	57
3577	7	56
3589	12	53
3601	9	55
3603	2	59
3612	4	58
3627	6	57
3631	11	54
3637	21	47
3648	8	56
3661	1	60
3664	20	48
3667	13	53
	3	59
3675	10	55
3679	5	58
3697	7	57
3708	12	54
3721	9	56
3724	2	60
3733	4	59
3748	6	58
3751	11	55
3753	21	48
3769	8	57
3781	20	49

N	*m*	*h*
3783	1	61
3787	13	54
3789	3	60
3796	10	56
3801	5	59
3819	7	58
3829	12	55
3843	9	57
3747	2	61
3856	4	60
3871	21	49
	6	59
3873	11	56
3892	8	58
3900	20	50
3907	1	62
3909	13	55
3913	3	61
3919	10	57
3925	5	60
3943	7	59
3952	12	56
3967	9	58
3972	2	62
3981	4	61
3991	21	50
3996	6	60
3997	11	57
4017	8	59
4021	20	51
4033	13	56
	1	63
4039	3	62
4044	10	58
4051	5	61
4069	7	60
4077	12	57
4093	9	59
4096	4	76
4099	2	63
4108	4	62
4113	21	51
4123	11	58
	6	61
4144	20	52
	8	60
4159	13	57
4161	1	64
4167	3	63

N	*m*	*h*
4171	10	59
4179	5	62
4197	7	61
4204	12	58
4221	9	60
4228	2	64
4237	21	52
	4	63
4251	11	59
4252	6	62
4269	20	53
4287	13	58
4291	1	65
4297	3	64
4300	10	60
4309	5	63
4327	7	62
4333	12	59
4351	9	61
4359	2	65
4363	21	53
4368	4	64
4381	11	60
4383	6	63
4366	20	54
4404	8	62
4417	13	59
4423	1	66
4429	3	65
4431	10	61
4441	5	64
4459	7	63
4464	12	60
4483	9	62
4491	21	54
4492	2	66
4501	4	65
4513	11	61
4516	6	64
4525	20	55
4537	8	63
4549	13	60
4557	1	67
4563	3	66
4564	10	62
4575	5	65
4593	7	64
4597	12	61
4617	9	63

N	*m*	*h*
4621	21	55
4627	2	67
4636	4	66
4647	11	62
4651	6	65
4656	20	56
4672	8	64
4683	13	61
4693	1	68
4699	10	63
	3	67
4711	5	66
4729	7	65
4732	12	62
4753	21	56
	9	64
4764	2	68
4773	4	67
4783	11	63
4788	6	66
4789	20	57
4809	8	65
4819	13	62
4831	1	69
4836	10	64
4837	3	68
4849	5	67
4867	7	66
4869	12	63
4887	21	57
4891	9	55
4903	2	69
4912	4	68
4921	11	64
4924	20	58
4927	6	67
4948	8	66
4957	13	63
4971	1	70
4975	10	65
4977	3	69
4989	5	68
5007	7	67
5008	12	64
5023	21	58
5031	9	66
5044	2	70
5053	4	69

N	*m*	*h*
5061	20	59
	11	65
5068	6	68
5089	8	67
5097	13	64
5113	1	71
5116	10	66
5119	3	70
5131	5	69
5149	12	65
	7	68
5161	21	59
5173	9	67
5187	2	71
5196	4	70
5200	20	60
5203	11	66
5211	6	69
5232	8	68
5239	13	65
5257	1	72
5259	10	67
5263	3	71
5275	5	70
5292	12	66
5293	7	69
5299	25	57
5301	21	60
5317	9	68
5332	2	72
5341	20	61
	4	71
5347	11	67
5356	6	70
5377	8	69
5383	13	66
5403	1	73
5404	10	68
5409	3	72
5421	5	71
5437	12	67
5439	7	70
5443	21	61
5467	9	69
5479	2	73
5484	20	62
5488	4	72
5493	11	68
5503	6	71

N	*m*	*h*
5524	8	70
5529	13	67
5551	10	69
	1	74
5557	3	73
5569	5	72
5584	12	68
5587	21	62
	7	71
5611	9	70
5628	2	74
5629	20	63
5637	4	73
5641	11	69
5652	6	72
5673	8	71
5677	13	68
5700	10	70
5707	3	74
5701	1	75
5719	5	73
5733	12	69
	21	63
5737	7	72
5761	9	71
5776	20	64
5779	2	75
5788	4	74
5791	11	70
5803	6	73
5824	8	72
5827	13	69
5851	10	71
5853	1	76
5859	3	75
5871	5	74
5881	21	64
5884	12	70
5889	7	73
5913	9	72
5925	20	65
5932	2	76
5941	4	75
5943	11	71
5956	6	74
5977	8	73
5979	13	70
6004	10	72
6007	1	77

N	*m*	*h*
6013	3	76
6025	5	75
6031	21	65
6037	12	71
6043	7	74
6067	9	73
6076	20	66
6087	2	77
6096	4	76
6097	11	72
6111	6	75
6132	8	74
6133	13	71
6159	10	73
6163	1	78
6169	3	77
6181	5	76
6183	21	66
6192	12	72
6199	7	75
6223	9	74
6229	20	67
6244	2	78
6253	11	73
	4	77
6268	6	76
6289	13	72
	8	75
6316	10	74
6321	1	79
6327	3	78
6337	21	67
6339	5	77
6349	12	73
6357	7	76
6381	9	75
6384	20	68
6403	2	79
6411	11	74
6412	4	78
6427	6	77
6447	13	73
6448	8	76
6475	10	75
6481	1	80
6487	3	79
6493	21	68
6499	5	78
6508	12	74

N	*m*	*h*
6517	7	77
6541	20	69
	9	76
6564	2	80
6571	11	75
6573	4	79
6588	6	78
6607	13	74
6609	8	77
6636	10	76
6643	1	81
6649	3	80
6651	21	69
6661	5	79
6669	12	75
6679	7	78
6700	20	70
6703	9	77
6727	2	81
6733	11	76
6736	4	80
6751	6	79
6769	13	75
6772	8	78
6799	10	77
6807	1	82
6811	21	70
6813	3	81
6825	5	80
6832	12	76
6843	7	79
6861	20	71
6867	9	78
6892	2	82
6897	11	77
6901	4	81
6916	6	80
6933	13	76
6937	8	79
6964	10	78
6973	21	71
	1	83
6979	3	82
6991	5	81
6997	12	77
7009	7	80
7024	20	72
7033	9	79
7059	2	83

N	*m*	*h*
7063	11	78
7068	4	82
7077	12	81
7083	6	81
7099	13	77
7104	8	80
7131	10	79
7137	21	72
7141	1	84
7147	3	83
7159	5	82
7164	12	78
7177	7	81
7189	20	73
7201	9	80
7228	2	84
7231	11	79
7237	4	83
7252	6	82
7267	13	78
7273	8	81
7300	10	80
7303	21	73
7311	1	85
7317	3	84
4329	5	83
7333	12	79
7347	7	82
7356	20	74
7371	9	81
7399	2	85
7401	11	80
7408	4	84
7423	6	83
7437	13	79
7444	8	82
7471	21	74
	10	81
7483	1	86
7489	3	85
7501	5	84
7504	12	80
7519	7	83
7525	20	75
7543	9	82
7572	2	86
7573	11	81
7581	4	85
7596	6	84

N	*m*	*h*
7609	13	80
7617	8	83
7641	21	75
7644	10	82
7657	1	87
7663	3	86
7675	5	85
7693	7	84
7696	20	76
7717	9	83
7747	11	82
	2	87
7756	4	86
7771	6	85
7783	13	81
7792	8	84
7813	21	76
7819	10	83
7833	1	88
7839	3	87
7851	5	86
7852	12	82
7869	20	77
	7	85
7893	9	84
7923	11	83
7924	2	88
7933	4	87
7948	6	86
7959	13	82
7969	8	85
7987	21	77
7996	10	84
8011	1	89
8017	3	88
8029	5	87
	12	83
8044	20	78
8047	7	86
8071	9	85
8101	11	84
8103	2	89
8112	4	88
8127	6	87
8137	13	83
8148	8	86
8163	21	78
8175	10	85
8191	1	90

N	*m*	*h*	*N*	*m*	*h*	*N*	*m*	*h*	*N*	*m*	*h*
8197	3	89	8764	20	82	9412	2	96	10033	21	88
8208	12	84	8779	7	90	9421	4	95	10048	8	96
8209	5	88	8803	9	89	9436	6	94	10075	10	95
8221	20	79	8833	11	88	9439	13	90	10101 {	20	89
8227	7	87	8839	2	93	9451	21	85		1	100
8251	9	86	8848	4	92	9457	8	93	10107	3	99
8281	11	85	8863	6	91	9484	10	92	10108	12	94
8284 {	78	22	8869	13	87	9507	1	97	10119	5	98
	2	90	8884	8	90	9513	3	96	10137	7	97
8293	4	89	8887	21	82	9516	20	86	10161	9	96
8308	6	88	8911	10	89	9517	12	91	10191	11	95
8317	13	84	8931	1	94	9525	5	95	10204	2	100
8329	8	87	8937	3	93	9543	7	94	10213	4	99
8341	21	79	8944	12	88	9567	9	93	10227	13	94
8356	10	86	8949 {	20	83	9597	11	92	10228	6	98
8373	1	91		5	92	9607	2	97	10231	21	89
8379	3	90	8967	7	91	9616	4	96	10249	8	97
8389	12	85	8991	9	90	9631	6	95	10276	10	96
8391	5	89	9021	11	89	9633	13	91	10300	20	90
8400	20	80	9028	2	94	9643	21	86	10303	1	101
8409	7	88	9037	4	93	9652	8	94	10309 {	12	95
8433	9	87	9052	6	92	9679	10	93		3	100
8463	11	86	9057	13	88	9703	1	98	10321	5	99
8467	2	91	9073 {	21	83	9709 {	20	87	10334	7	98
8476	4	90		8	91		3	97	10363	9	97
8491	6	89	9100	10	90	9712	12	92	10393	11	96
8499	13	85	9121	1	95	9721	5	96	10416	4	100
8512	8	88	9127	3	94	9739	7	95	10429	13	95
8521	21	80	9133	12	89	9763	9	94	10431 {	21	90
8539	10	87	9136	20	84	9793	11	93		6	99
8557	1	92	9139	5	93	9804	2	98	10452	8	98
8563	3	91	9157	7	92	9813	4	97	10479	10	97
8572	12	86	9181	9	91	9828	6	96	10501	20	91
8575	5	90	9211	11	90	9829	13	92	10507	1	102
9581	20	81	9219	2	95	9837	21	87	10512	12	96
8593	7	89	9228	4	94	9849	8	95	10525	5	100
8617	9	88	9243	6	93	9876	10	94	10543	7	99
8647	11	87	9247	13	89	9901	1	99	10567	9	98
8652	2	92	9261	21	84	9904	20	88	10597	11	97
8661	4	91	9264	8	92	9907	3	98	10633 {	21	91
8676	6	90	9291	10	91	9909	12	93		13	96
8683	13	86	9313	1	96	9919	5	97	10636	6	100
8697	8	89	9319	3	95	9937	7	96	10657	8	99
8703	21	81	9324	12	90	9961	9	95	10684	10	98
8724	10	88	9325	20	85	9991	11	94	10704	20	92
8743	1	93	9331	5	94	10003	2	99	10713	1	103
8749	3	92	9349	7	93	10012	4	98	10717	12	97
8757	12	87	9373	9	92	10027 {	13	93	10749	7	100
8761	5	91	9403	11	91		6	97	10773	9	99

N	m	h	N	m	h	N	m	h
10803	11	98	11251	21	94	12211	1	110
10837	21	92	11257	13	99	12321	21	99
10839	13	97	11325	20	95	12400	20	100
10864	8	100	11343	1	106	12433	1	111
10891	10	99	11344	12	100	12541	21	100
10909	20	93	11461	21	95	12657	1	112
10921	1	104	11469	13	100	12883	1	113
10924	12	98	11536	20	96	13111	1	114
10981	9	100	11557	1	107	13341	1	115
11011	11	99	11673	21	96	13573	1	116
11043	21	93	11749	20	97	13807	1	117
11047	13	98	11773	1	108	14043	1	118
11100	10	100	11887	21	97	477927	147	606
11116	20	94	11964	20	98	521325	135	645
11131	1	105	11991	1	109	1205491	274	935
11133	12	99	12103	21	98	1688575	410	1045
11221	11	100	12181	20	99	3906603025	20000	50055

CUARTO GRADO.

$3N$	m	n	p
3	1	1	1
8	1	1	2
11	1	2	2
12	2	2	2
19	1	1	3
	2	2	3
20	1	2	3
27	1	3	3
32	2	2	4
35	1	2	4
36	1	1	4
40	1	3	4
51	1	4	4
	2	2	5
56	1	2	5
59	1	1	5
	1	3	5
68	1	4	5
76	2	2	6
83	1	5	5
	1	2	6
84	1	3	6
88	1	1	6
91	1	4	6
99	3	3	7
104	1	5	6
107	2	2	7
115	1	3	7
116	1	2	7
120	1	4	7
123	1	1	7
	1	6	6
131	1	5	7
144	2	2	8
148	1	6	7
152	1	3	8
155	1	4	8
	1	2	8
164	1	1	8
	1	5	8
171	1	7	7
179	1	6	8
187	2	2	9
192	8	8	8
195	1	3	9
196	1	4	9

$3N$	m	n	p
200	1	7	8
	1	2	9
203	1	5	9
211	1	1	9
216	1	6	9
	1	3	9
227	1	8	8
235	1	7	9
236	2	2	10
243	1	4	10
	3	6	6
244	1	3	10
258	1	5	10
251	1	2	10
259	1	6	10
260	1	8	9
264	1	1	10
276	1	7	10
291	2	2	11
	1	9	9
296	1	4	11
299	1	8	10
	1	5	11
	1	3	11
308	1	2	11
	1	6	11
323	1	1	11
	1	7	11
328	1	9	10
344	1	8	11
352	2	2	12
355	1	4	12
356	1	5	12
360	1	3	12
363	1	6	12
	1	10	10
371	1	9	11
	1	2	12
376	1	7	12
388	1	1	12
395	1	8	12
404	1	10	11
419	2	2	13
	1	5	13
420	1	4	13
	1	9	12

$3N$	m	n	p
424	1	6	13
427	1	3	13
435	1	7	13
440	1	2	13
443	1	11	11
451	1	10	12
452	1	8	13
459	1	1	13
	2	5	14
475	1	9	13
488	1	5	14
	1	11	12
491	1	6	14
	1	4	14
492	2	2	14
500	1	3	14
	1	7	14
504	1	10	13
515	1	8	14
	1	2	14
531	1	12	12
536	1	9	14
	1	1	14
539	1	11	13
563	1	10	14
	1	5	15
564	1	6	15
568	1	4	15
571	1	7	15
	2	2	15
579	1	3	15
580	1	12	13
584	1	8	15
596	1	11	14
	1	2	15
603	1	9	15
619	1	1	15
627	1	13	13
628	1	10	15
635	1	12	14
643	1	6	16
644	1	5	16
648	1	7	16
651	1	4	16
656	2	2	16
659	1	8	16
	1	11	15

$3N$	m	n	p
664	1	3	16
676	1	9	16
680	1	13	14
683	1	2	16
696	1	12	15
699	1	10	16
708	1	1	16
728	1	6	17
	1	11	16
731	1	14	14
	1	5	17
	1	7	17
739	1	13	15
740	1	4	17
	1	8	17
747	2	2	17
755	1	9	17
	1	3	17
763	1	12	16
776	1	10	17
	1	2	17
788	1	14	15
803	1	11	17
	1	1	17
804	1	13	16
819	1	6	18
820	1	7	18
824	1	5	18
827	1	8	18
835	1	4	18
836	1	12	17
840	1	9	18
843	1	15	15
844	2	2	18
851	1	14	16
852	1	3	18
859	1	10	18
875	1	13	17
	1	2	18
884	1	11	18
904	1	15	16
	1	1	18
915	1	12	18
	1	7	19
916	1	6	19
920	1	14	17
	1	8	19

3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p
923	1	5	19	1188	1	12	21	1464	1	18	21	1739	1	10	26
931	1	9	19	1208	1	2	21	1475	1	8	24		1	8	26
936	1	4	19		1	15	20	1476	1	9	24	1748	1	11	26
947	2	2	19	12'9	1	13	21	1480	1	7	24		1	7	26
948	1	10	19	1227	1	18	18	1483	1	10	24	1055	1	18	24
952	1	13	18	1235	1	8	22	1491	1	6	24	1763	1	6	26
955	1	3	19		1	17	19	1496	1	17	22		1	12	26
963	1	16	16	1236	1	7	22		1	11	24	1764	1	16	25
971	1	15	17	1240	1	9	22	1499	1	15	23	1768	1	21	22
	1	11	19	1243	1	1	21		1	1	23	1779	1	1	25
980	1	2	19		1	6	22	1508	1	5	24	1784	1	5	26
995	1	14	18	1251	1	10	22	1515	1	12	24		1	13	26
1000	1	12	19	1256	1	14	21	1523	1	20	20		1	20	23
1011	1	1	19		1	5	22	1531	1	19	21	1811	1	14	26
1016	1	7	20	1259	1	16	20		1	4	24		1	4	26
1019	1	8	20	1268	1	11	22	1540	1	13	24		1	17	25
	1	6	20	1275	1	4	22	2544	1	16	23	1816	1	19	24
1028	1	9	20	1291	1	12	22	1552	2	2	24	1836	2	2	26
	1	16	17	1292	2	2	22	1555	1	18	22	1844	1	15	26
	1	5	20	1299	1	15	21	1560	1	3	24		1	3	26
1035	1	13	19	1300	1	18	19	1571	1	14	24	1851	1	22	22
1043	1	4	20		1	3	22	1595	1	17	24	1859	1	21	23
	1	10	20	1316	1	17	20	1603	1	9	25	1864	1	18	25
1044	1	15	18	1320	1	13	22	1604	1	20	21	1873	1	9	27
1056	2	2	20	1331	1	2	22		1	8	25	1876	1	10	27
1064	1	3	20	1348	1	16	21	1608	1	15	24	1880	1	8	27
	1	11	20	1352	1	8	23		1	10	25	1883	1	2	26
1076	1	14	19	1355	1	7	23	1611	1	7	25		1	11	27
1091	1	17	17		1	9	23	1619	1	11	25		1	16	26
	1	2	20		1	14	22	1620	1	19	22		1	20	24
	1	12	20	1364	1	10	23	1624	1	6	25	1891	1	7	27
1099	1	16	18	1368	1	6	23	1636	1	1	24		1	12	27
1123	1	7	21		1	1	22		1	12	25	1908	1	6	27
	1	15	19	1371	1	19	19	1643	1	5	25	1915	1	13	27
1124	1	8	21	1379	1	5	23	1651	1	16	24	1923	1	19	25
	1	13	20		1	18	20	1652	1	18	23	1928	1	1	26
	1	1	20		1	11	23	1659	1	13	25		1	17	26
1128	1	6	21	1396	1	15	22	1668	1	4	25	1931	1	5	27
1131	1	9	21	1400	1	12	23	1683	1	21	21	1940	1	14	27
1139	1	5	21		1	4	23	1688	1	14	25		1	22	23
1144	1	10	21	1403	1	17	21	1691	2	2	25	1656	1	21	24
1156	1	4	21	1419	2	2	23		1	20	22	1960	1	4	27
1160	1	17	18	1427	1	3	23	1699	1	3	25	1971	1	15	27
1163	1	14	20		1	13	23	1700	1	17	24	1979	1	18	26
	1	11	21	1443	1	16	22	1715	1	19	23	1987	2	2	27
1171	2	2	21	1448	1	19	20	1723	1	15	25	1888	1	26	25
1176	1	16	19	1460	1	14	23	1736	1	2	25	1995	1	3	27
1179	1	3	21		1	2	23		1	9	26	2008	1	16	27

3N	m	n	p
2019	1	10	28
2020	1	9	82
2024	1	11	28
2029	1	8	28
2035	1	12	28
	1	22	24
2036	1	19	26
	1	2	27
2040	1	7	28
2051	1	17	27
2052	1	13	28
2059	1	6	28
	1	21	25
2075	1	14	28
2083	1	1	27
2084	1	5	28
2099	1	20	26
2100	1	18	27
4104	1	15	28
2115	1	4	28
2136	1	22	25
2139	1	16	28
2144	2	2	28
2152	1	3	28
2155	1	19	27
2168	1	10	29
	1	21	26
2171	1	11	29
	1	9	29
2180	1	12	29
	1	17	28
	1	8	29
2195	1	13	29
	1	7	29
	1	2	28
2216	1	20	27
	1	14	29
	1	6	29
2227	1	18	28
2243	1	22	26
	1	15	29
	1	5	29
2244	1	1	28
2260	1	9	32
2276	1	4	29
	1	16	29
2280	1	19	28
2283	1	21	27
2307	2	2	29

3N	m	n	p
2315	1	17	29
	1	3	29
2323	1	10	30
2324	1	11	30
2328	1	9	30
2331	1	12	30
2339	1	20	28
	1	8	30
2344	1	13	30
2356	1	22	27
	1	7	30
2360	1	2	29
	1	18	29
2363	1	14	30
2379	1	6	30
2388	1	15	30
2404	1	21	28
2408	1	5	30
2411	1	1	29
	1	19	29
2419	1	16	30
2443	1	4	30
2456	1	17	30
2468	1	20	19
2475	1	22	28
2476	2	2	30
2483	1	11	31
2484	1	10	31
	1	3	30
2488	1	12	31
2491	1	9	31
2499	1	13	31
	1	18	30
2504	1	8	31
2516	1	14	31
2531	1	2	30
	1	21	29
2539	1	15	31
2548	1	19	30
	1	6	31
2568	1	16	31
2579	1	5	31
2584	1	1	30
2593	1	7	31
2600	1	22	29
2603	1	20	30
	1	17	31
2616	1	4	31
2644	1	18	31

3N	m	n	p
2648	1	11	32
2651	1	10	32
	1	12	32
	2	2	31
2659	1	3	31
2660	1	13	32
2664	1	21	30
2675	1	8	32
	1	14	32
2691	1	19	31
2696	1	15	32
2708	1	2	31
2723	1	16	32
	1	6	32
2731	1	22	30
2744	1	20	31
2756	1	5	32
	1	17	32
2763	1	1	31
2795	1	18	32
	1	4	32
2803	1	21	21
2819	1	11	33
2820	1	12	33
2824	1	10	33
2827	1	13	33
2832	2	2	32
2835	1	9	33
2840	1	3	32
	1	19	32
	1	14	33
2852	1	8	33
2859	1	15	33
2868	1	22	31
2875	1	7	33
2884	1	16	33
2891	1	2	23
	1	10	32
2904	1	6	33
2915	1	17	33
2939	1	5	33
2948	1	21	32
	1	1	32
2952	1	18	33
2980	1	4	33
2965	1	12	34
	1	19	33
2996	1	11	34
3000	1	13	34

3N	m	n	p
3003	1	10	34
3011	1	14	34
	1	22	32
3016	1	9	34
3019	2	2	33
3027	1	3	33
3028	1	15	34
3035	1	8	34
3044	1	20	33
3051	1	16	34
3060	1	7	34
3080	1	17	34
	1	2	33
3099	1	21	33
3115	1	18	34
3125	1	5	34
3139	1	1	33
3156	1	19	34
3160	1	22	33
3171	1	4	34
3176	1	12	35
3179	1	11	35
	1	13	35
3188	1	10	35
	1	14	35
3203	1	20	34
	1	15	35
	1	9	35
3212	2	2	34
3220	1	3	34
3224	1	8	35
	1	16	35
3251	1	17	35
	1	7	35
3256	1	21	34
3275	1	2	34
3284	1	6	35
	1	18	35
3315	1	22	34
3323	1	5	35
	1	19	35
3336	1	1	34
3363	1	12	36
3364	1	13	36
3368	1	4	35
	1	11	36
	1	20	35
3371	1	14	36
3379	1	10	36

3N	m	n	p
8384	1	15	36
3396	1	9	36
3403	1	16	36
3411	2	2	35
3419	1	21	35
	1	8	36
	1	3	35
3428	1	17	36
3448	1	7	36
3459	1	18	36
3476	1	22	35
	1	2	35
8483	1	6	36
3496	1	19	36
3524	1	5	36
3539	1	20	36
	1	1	35
3555	1	13	37
3556	1	12	37
3560	1	14	37
3563	1	11	37
3571	1	15	37
	1	4	36
3576	1	10	37
3588	1	16	37
	1	21	36
3595	1	9	37
3611	1	17	37
3616	2	2	36
3620	1	8	37
3624	1	3	36
3640	1	18	37
3643	1	22	36
3651	1	7	37
3675	1	19	37
3683	1	2	36
3688	1	6	37
3691	1	6	34
3716	1	20	37
3731	1	5	37
3748	1	1	36
3752	1	13	38
3755	1	12	38
	1	14	38
3763	1	21	37
3764	1	15	38
	1	11	38
3779	1	16	38
	1	10	38
3780	1	4	37

3N	m	n	p
3800	1	17	38
	1	9	38
3816	1	22	37
3827	1	8	38
	1	18	38
	2	2	37
3835	1	3	37
3860	1	7	38
	1	19	38
3896	1	2	37
3899	1	6	38
	1	20	38
3944	1	21	38
	1	5	38
3955	1	13	39
3956	1	14	39
3960	1	12	39
3963	1	15	39
	1	1	37
3971	1	11	39
3976	1	16	39
3988	1	10	39
3995	1	17	39
	1	4	38
	1	22	38
4011	1	9	39
4020	1	18	39
4040	1	8	39
4044	2	2	38
4051	1	19	39
4052	1	3	38
4075	1	7	39
4088	1	20	39
4115	1	2	38
4116	1	6	39
4131	1	21	39
4163	1	5	39
	1	14	40
4164	1	13	40
4168	1	15	40
4171	1	12	40
4179	1	16	40
4180	1	22	39
4184	1	11	40
	1	1	38
4195	1	17	40
4203	1	10	40
4216	1	4	39
4219	1	18	40

3N	m	n	p
4228	1	9	40
4248	1	19	40
4259	1	8	40
4267	2	2	39
4275	1	3	39
4283	1	20	40
4324	1	21	40
4339	1	6	40
4340	1	2	39
4371	1	22	40
4376	1	14	41
4379	1	15	41
	1	13	41
4388	1	16	41
	1	12	41
	1	5	40
4403	1	11	41
	1	17	41
4411	1	1	39
4424	1	18	41
	1	10	41
4443	1	4	40
4451	1	9	41
	1	19	41
4484	1	20	41
	1	8	41
4496	2	2	40
4504	1	3	40
4523	1	7	41
	1	21	41
4568	1	6	41
	1	22	41
4571	1	2	40
4595	1	14	42
4596	1	15	42
4600	1	13	42
4603	1	16	42
4611	1	12	42
4616	1	17	42
4619	1	5	41
4628	1	11	42
4635	1	18	42
4644	1	1	40
4651	1	10	42
4660	1	19	42
4676	1	4	41
4680	1	9	42
4691	1	20	42
4715	1	8	42

3N	m	n	p
4728	1	21	42
4731	2	2	41
4739	1	3	41
4756	1	7	42
4771	1	22	42
4803	1	6	42
4808	1	2	41
4819	1	15	43
4820	1	14	43
4824	1	16	43
4827	1	13	43
4835	1	17	43
4840	1	12	43
4852	1	18	43
4856	1	5	42
4859	1	11	43
4875	1	19	43
4883	1	1	41
4884	1	10	43
4904	1	20	43
4915	1	9	43
	1	4	42
4939	1	21	43
4952	1	8	43
4972	2	2	42
4980	1	22	43
	1	3	42
4995	1	7	43
4996	1	7	40
5044	1	6	43
5048	1	15	44
5051	1	2	42
	1	16	44
	1	14	44
5060	1	13	44
	1	17	44
5075	1	18	44
	1	12	44
5096	1	11	44
	1	19	44
5099	1	5	44
5123	1	10	44
	1	20	44
5128	1	1	42
5156	1	21	44
	1	9	44
5160	1	4	43
5195	1	8	44
	1	22	44

3N	m	n	p
5219	2	2	43
5227	1	3	43
5240	1	7	44
5283	1	15	45
5284	1	16	45
5288	1	14	45
5291	1	17	45
	1	6	44
5299	1	13	45
5300	1	2	43
5304	1	18	45
5316	1	12	45
5323	1	19	45
5339	1	11	45
5348	1	20	45
	1	5	44
5368	1	10	45
5379	1	1	43
	1	21	45
5403	1	9	45
5411	1	4	44
5416	1	22	45
5444	1	8	45
5472	2	2	44
5480	1	3	44
5491	1	7	45
5523	1	16	46
5524	1	15	46
5528	1	17	46
5531	1	14	46
5539	1	18	46
5544	1	13	46
	1	6	45
5555	1	2	44
5556	1	19	46
5563	1	12	46
5579	1	20	46
5588	1	11	46
5603	1	5	45
5608	1	21	46
5619	1	10	46
5636	1	1	44
5643	1	22	46
5656	1	9	46
5668	1	4	45
5699	1	8	46
5731	2	2	45
5739	1	3	45
5748	1	7	46

N	m	n	p
5768	1	16	47
5771	1	15	47
	1	17	47
5780	1	18	47
	1	14	47
5795	1	13	47
	1	19	47
5803	1	6	46
5816	1	2	45
	1	20	47
	1	12	47
5843	1	11	47
	1	21	47
5864	1	5	46
5876	1	22	47
	1	10	47
5899	1	1	45
5915	1	9	47
5931	1	4	46
5960	1	8	47
5996	2	2	46
6004	1	3	46
6014	1	7	47
6019	1	16	48
6020	1	17	48
6024	1	15	48
6027	1	18	48
6035	1	14	48
6040	1	19	48
6052	1	13	48
6059	1	20	48
6068	1	6	47
6075	1	12	48
6083	1	2	46
6084	1	21	48
6104	1	11	48
6115	1	22	48
6131	1	5	47
6139	1	10	48
6168	1	1	46
6180	1	9	48
6200	1	4	47
6227	1	8	48
6267	2	2	47
6275	1	17	49
	1	3	47
6276	1	16	49
6280	1	18	49
	1	7	48

3N	m	n	p
6283	1	15	49
6291	1	19	49
6296	1	14	49
6308	1	20	49
6315	1	13	49
6331	1	21	49
6339	1	6	48
6340	1	12	49
6356	1	2	47
6360	1	22	49
6371	1	11	49
6404	1	5	48
6408	1	10	49
6443	1	1	47
6451	1	9	49
6475	1	4	48
6500	1	8	49
6536	1	17	50
6539	1	16	50
	1	18	50
6544	2	2	48
6548	1	19	50
	1	15	50
6552	1	3	48
6555	1	7	49
6563	1	14	50
	1	20	50
6584	1	13	50
	1	21	50
6616	1	6	49
6611	1	12	50
	1	22	50
6635	1	2	48
6644	1	11	50
6683	1	5	49
	1	10	50
6724	1	1	48
6728	1	9	50
6756	1	4	49
6779	1	8	50
6803	1	17	51
1804	1	18	51
6808	1	16	51
6811	1	19	51
6819	1	15	51
6824	1	20	51
6827	2	2	49
6835	1	3	49

3N	m	n	p
6836	1	7	50
	1	14	51
6843	1	21	51
6859	1	13	51
6868	1	22	51
6888	1	12	51
6889	1	6	50
6920	1	2	49
6923	1	11	51
6964	1	10	51
6968	1	5	50
7011	1	9	51
	1	1	49
7043	1	4	50
7064	1	8	51
7075	1	18	52
7076	1	17	52
7080	1	19	52
7083	1	16	52
7091	1	20	52
7096	1	15	52
7108	1	21	52
8115	1	14	52
7116	2	2	50
7123	1	7	51
7124	1	3	50
7131	1	22	52
7140	1	13	52
7171	1	12	52
7188	1	6	51
7208	1	11	52
7211	1	2	50
7251	1	10	52
7259	1	5	51
7300	1	9	52
7304	1	1	50
7336	1	4	51
7352	1	18	53
7355	1	8	52
	1	17	53
	1	19	53
7364	1	16	53
	1	20	53
7379	1	15	53
	1	21	53
7400	1	14	53
	1	22	53
7411	2	2	51
7416	1	7	52

3N	m		p
7419	1	3	51
7427	1	13	53
7460	1	12	53
7483	1	6	52
7499	1	11	53
7508	1	2	51
7544	1	10	53
7556	1	5	52
7595	1	9	53
7603	1	1	51
7635	1	4	52
	1	18	54
7636	1	19	54
7640	1	17	54
7643	1	20	54
7651	1	16	54
7652	1	8	53
7656	1	21	54
7668	1	15	54
7675	1	22	54
7691	1	14	54
7712	2	2	52
7715	1	7	53
7720	1	3	52
	1	13	54
7755	1	12	54
7784	1	6	53
7796	1	11	54
7811	1	2	52
7843	1	10	54
7859	1	5	53
7896	1	9	54
7908	1	1	52
7923	1	19	55
7924	1	18	55
7928	1	20	55
7931	1	17	55
7939	1	21	55
7940	1	4	53
6944	1	16	55
7955	1	8	54
7956	1	22	55
7963	1	15	55
7988	1	14	55
8019	2	2	53
	1	13	55
8020	1	7	54
8027	1	3	53
8056	1	12	55

3N	m	n	p
8091	1	6	54
8099	1	11	55
8120	1	2	53
8148	1	10	55
8168	1	5	54
8203	1	9	55
8216	1	19	56
8219	1	1	53
	1	20	56
	1	18	56
8228	1	17	56
	1	21	56
8243	1	16	56
	1	22	56
8251	1	4	54
8264	1	8	55
	1	15	56
8291	1	14	56
8324	1	13	56
8331	1	7	55
8332	2	2	54
8340	1	3	54
8363	1	12	56
8404	1	6	55
8408	1	11	56
8435	1	2	54
8459	1	10	56
8483	1	5	55
8115	1	19	57
8516	1	9	56
	1	20	57
8520	1	18	57
8523	1	21	57
8531	1	17	57
8536	1	1	54
	1	22	57
8548	1	16	57
8568	1	4	55
8571	1	15	57
8579	1	8	56
8600	1	14	57
8635	1	13	57
8648	1	7	56
8651	2	2	55
8659	1	3	55
8676	1	12	57
8723	1	6	56
	1	11	57
8756	1	2	55

3N	m	n	p
8776	1	10	57
8804	1	5	56
8819	1	20	59
8820	1	19	58
8824	1	21	58
8827	1	18	58
8835	1	9	57
	1	22	58
8840	1	17	58
8859	1	1	55
	1	16	58
8884	1	15	58
8891	1	4	56
8900	1	8	57
8915	1	14	58
8952	1	13	58
8871	1	7	57
8976	2	2	56
8984	1	3	56
8995	1	12	58
9044	1	11	58
9048	1	6	57
9083	1	2	56
9099	1	10	58
9128	1	20	59
9131	1	5	59
	1	19	59
	1	21	59
8140	1	18	59
	1	22	59
9155	1	17	59
9160	1	9	58
9176	1	16	59
9188	1	1	56
9203	1	15	59
9220	1	4	59
8227	1	8	58
9236	1	14	59
9275	1	13	59
9300	1	7	58
9307	2	2	57
9315	1	3	57
9320	1	12	59
9371	1	11	59
9379	1	6	58
9416	1	2	57
9428	1	10	59
9443	1	20	60
9444	1	21	60

3N	m	n	p
9448	1	19	60
9451	1	22	60
9459	1	18	60
9464	1	5	58
9476	1	17	60
9491	1	9	59
9499	1	16	60
9523	1	1	57
9528	1	15	60
9555	1	4	58
9560	1	8	59
9563	1	14	60
9604	1	13	60
9635	1	7	59
9644	2	2	58
9651	1	12	60
9652	1	3	58
9704	1	11	60
9716	1	6	59
9763	1	10	60
	1	21	61
9764	1	20	61
9768	1	22	61
9771	1	19	61
9755	1	2	58
9784	1	18	61
9803	1	5	19
	1	17	61
9828	1	9	60
	1	16	61
9859	1	15	61
9864	1	1	58
9896	1	4	59
	1	14	61
9899	1	8	60
9939	1	13	61
9976	1	7	60
9987	2	2	59
9988	1	12	61
9995	1	3	59
10043	1	11	61
10059	1	6	60
10088	1	21	62
10091	1	20	62
	1	22	62
10100	1	2	59
	1	19	62
10104	1	10	61
10115	1	18	62

3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p
10136	1	17	62	10875	1	9	63	11659	1	1	63	12452	1	13	68
10148	1	5	60	10888	1	15	64	11684	1	8	65	12515	1	12	68
10163	1	16	62	10923	1	1	61	11691	1	4	64	12520	1	22	69
10171	1	9	61	10931	1	14	64	11704	1	13	66	12531	1	7	67
10196	1	15	62	10952	1	8	63	11763	1	12	66		1	21	69
10211	1	1	59	10955	1	4	62	11771	1	7	65	12548	1	20	69
10235	1	14	62	10980	1	13	64	11792	2	2	64	12556	2	2	66
10243	1	4	60	13035	1	7	63	11796	1	22	67	12564	1	3	66
10244	1	8	61		1	12	64	11800	1	3	64	12571	1	19	69
10280	1	13	62	11052	2	2	62	11803	1	21	67	12584	1	11	68
10325	1	7	61	11060	1	3	62	11816	1	20	67	12600	1	18	69
10331	2	12	62	11096	1	11	64	11828	1	11	66	12628	1	6	67
10336	1	2	60		1	22	65	11835	1	19	67	12635	1	17	69
10344	1	3	60	11099	1	21	65	11860	1	18	67	12659	1	10	68
10388	1	11	62	11108	1	20	65	11864	1	6	65	12676	1	16	69
10408	1	6	61	11123	1	19	65	11891	1	17	67	12683	1	2	66
10419	1	21	63	11124	1	6	13	11899	1	10	66	12723	1	15	69
10420	1	22	63	11144	1	18	65	11915	1	2	64	12731	1	5	67
10424	1	20	63	11163	1	10	64	11928	1	16	67	12740	1	9	68
10435	1	19	63	11171	1	2	62	11963	1	5	65	12776	1	14	69
10451	1	2	60		1	17	65	11971	1	15	67	12808	1	1	66
	1	10	62	11204	1	16	65	11976	1	9	66	12827	1	8	68
10452	1	18	63	11219	1	5	63	12020	1	14	67	12935	1	13	69
10475	1	17	63	11236	1	9	64	12036	1	1	64	12840	1	4	67
10499	1	5	61	11243	1	15	65	12059	1	8	66	12891	1	22	70
30504	1	16	63	11288	1	1	62	12068	1	4	65	12900	1	12	69
10520	1	9	62		1	14	65	12075	1	13	67	12904	1	21	70
10539	1	15	63	11315	1	8	64	12136	1	12	67	12920	1	7	68
10564	1	1	60	11320	1	4	63	12148	1	7	66	12923	1	20	70
10580	1	14	63	11339	1	13	65	12155	1	22	68	12947	2	2	67
10595	1	8	62	11396	1	12	65	12164	1	21	68	12948	1	19	70
10596	1	4	61	11400	1	7	64	12171	2	2	65	12955	1	3	67
10627	1	13	63	11419	2	2	63	12179	1	3	65	12971	1	11	69
10676	1	7	62	11427	1	3	63		1	20	68	12979	1	18	70
10680	1	12	63	11443	1	22	66	12200	1	19	68	13016	1	17	70
10691	2	2	61	11448	1	21	66	12203	1	11	67	13019	1	6	68
10699	1	3	61	11459	1	11	65	12227	1	18	68	13048	1	10	69
20739	1	11	63		1	20	66	12243	1	6	66	13059	1	16	70
10755	1	22	64	11476	1	19	66	12260	1	17	68	13076	1	2	67
10756	1	21	64	11491	1	6	64	12276	1	10	67	13108	1	15	70
10763	1	6	22	11499	2	18	66	12296	1	2	65	13124	1	5	68
	1	20	64	11528	1	10	65	12299	1	16	68	13131	1	9	69
10776	1	19	64		1	17	66	12344	1	5	66	13163	1	14	70
10795	1	18	64	11540	1	2	63		1	15	68	13203	1	1	67
10804	1	10	63	11563	1	16	66	12355	1	9	67	13220	1	8	69
10808	1	2	61	11588	1	5	64	12395	1	14	68	13224	1	13	70
10820	1	17	64	11603	1	9	65	12419	1	1	65	13235	1	4	68
10851	1	16	64	11604	1	15	66	12440	1	8	67	13268	1	22	71
10856	1	5	62	11651	1	14	66	12451	1	4	66	13283	1	21	71

N	*m*	*n*	*p*	*N*	*m*	*n*	*p*	3*N*	*m*	*n*	*p*	3*N*	*m*	*n*	*p*
13291	1	12	70	14152	1	18	73	15000	1	3	72	15924	1	6	75
13304	1	20	71	14156	2	2	70	15011	1	17	75	15939	1	10	76
13315	1	7	69	14164	1	3	70	15064	1	6	73	15971	1	15	77
13331	1	19	71	14168	1	11	72		1	16	75	15995	1	2	74
13344	2	2	68	14195	1	17	73	15083	1	10	74	16036	1	9	76
13352	1	3	68	14228	1	6	71	15123	1	15	75	16040	1	14	77
13364	1	11	70	14244	1	16	73	15131	1	2	72	16043	1	5	75
	1	18	71	14251	1	10	72	15176	1	9	74	16075	1	22	78
13403	1	17	71	14291	1	2	70	15179	1	5	73	16104	1	21	78
13416	1	6	69	14299	1	15	73	15188	1	14	75	16115	1	13	77
13443	1	10	70	14339	1	5	71	15243	1	22	76	16136	1	1	74
13448	1	16	71	14340	1	9	72	15259	1	13	75	16139	1	8	76
13475	1	2	68	14360	1	14	73	15268	1	1	72		1	20	78
13499	1	15	71	14424	1	1	70		1	21	76	16168	1	4	75
13523	1	5	69	14427	1	13	73	15275	1	8	74	16180	1	19	78
13528	1	9	70	14435	1	8	72	15299	1	20	76	16196	1	12	77
13556	1	14	71		1	22	74	15300	1	4	73	10227	1	18	78
13604	1	1	68	14456	1	4	71	15536	1	12	75	16248	1	7	76
13619	1	8	70		1	21	74		1	19	76	16280	1	17	78
	1	13	71	14483	1	20	74	15379	1	18	76	16283	1	11	77
13636	1	4	69	14500	1	12	73	15380	1	7	74	16291	2	2	75
13651	1	22	72	14516	1	19	74	15419	1	11	75	16299	1	3	75
13688	1	12	71	14536	1	7	72		2	2	73	16339	1	16	78
13691	1	20	72	14555	1	18	74	15427	1	3	73	16363	1	6	76
13716	1	7	70	14571	2	2	71	15428	1	17	76	16376	1	10	77
13720	1	19	72	14579	1	3	71	15483	1	16	76	16404	1	15	78
13747	2	2	69		1	11	73	15491	1	6	74	16436	1	2	75
13755	1	3	69	14600	1	17	74	15508	1	10	75	16475	1	9	77
	1	18	72	14643	1	6	72	15544	1	15	76		1	14	78
13763	1	11	71	14651	1	16	74	15560	1	2	73	16484	1	5	76
13796	1	17	72	14664	1	10	73	15603	1	9	75	16500	1	22	79
13819	1	6	70	14708	1	2	71	15608	1	5	74	16531	1	21	79
13843	1	16	72		1	15	74	15611	1	14	76	16552	1	13	78
13844	1	10	71	14755	1	9	73	15656	1	22	77	16568	1	20	79
13880	1	2	69	14756	1	5	72	13683	1	21	77	16579	1	1	75
13896	1	15	72	14771	1	14	74	15684	1	13	76	16580	1	8	77
13928	1	5	70	14836	1	22	75	15699	1	1	73	16611	1	4	76
13931	1	9	71	14840	1	13	74	15704	1	8	75		1	19	79
13955	1	14	72	14843	1	1	71	15716	1	20	77	16635	1	12	78
14011	1	1	69	14852	1	8	73	15731	1	4	74	16660	1	18	79
14020	1	13	72	14859	1	21	75	15755	1	19	77	16691	1	7	77
14024	1	8	71	14875	1	4	72	15763	1	12	76	16715	1	17	79
14040	1	22	73	14888	1	20	75	15800	1	18	77	16724	1	11	78
14043	1	4	70	14915	1	12	74	15811	1	7	75	16736	2	2	76
14059	1	21	73	14923	1	19	75	15848	1	11	76	16744	1	3	76
14084	1	20	73	14964	1	18	75	15851	1	17	77	16776	1	16	79
14091	1	12	72	14992	2	2	72	15852	2	2	74	16808	1	6	77
14115	1	19	73	14995	1	7	73	15860	1	3	74	16819	1	10	78
14123	1	7	71	14996	1	11	74	15908	1	16	77	16843	1	15	79

3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p
16883	1	2	76	17828	1	9	80	18803	1	20	84	19835	1	8	84
16916	1	14	79	17843	1	5	79	18827	1	13	83	19848	1	1	82
16920	1	9	79	17848	1	21	82	18856	1	19	84	19859	1	18	86
16931	1	5	77	37891	1	20	82	18875	1	8	82	19876	1	12	85
	1	22	80	17899	1	13	81	18884	1	1	80	19880	1	4	83
16964	1	21	80	17939	1	8	80	18915	1	18	84	19928	1	17	86
16995	1	13	79	17940	1	19	82	18916	1	4	81	19960	1	7	84
17003	1	20	80	17944	1	1	78	18920	1	12	83	19979	1	11	85
17027	1	8	78	17976	1	4	79	18980	1	17	84	20003	1	16	86
17028	1	1	76	17988	1	12	81	18996	1	7	82	20019	2	2	83
17048	1	19	80	17995	1	18	82	19019	1	11	83	20027	1	3	83
17060	1	4	77	18056	1	7	80	19051	1	16	84	20084	1	15	86
17080	1	12	79		1	17	82		2	2	81	20088	1	10	85
17099	1	18	80	18083	1	11	81	19059	1	3	81	20091	1	6	84
17140	1	7	78	18107	2	2	79	19123	1	6	82	20116	1	22	87
17156	1	17	80	18115	1	3	79	19124	1	10	83	20163	1	21	87
17171	1	11	79	18123	1	16	82	19128	1	15	84	20171	1	14	86
17187	2	2	77	18179	1	6	80	19176	1	22	85	20180	1	2	83
17195	1	3	77	18184	1	10	81	19208	1	2	81	20203	1	9	85
17219	1	16	80	18196	1	15	82	19211	1	14	84	20216	1	20	87
17259	1	6	78	18260	1	2	79	19219	1	21	85	20228	1	5	84
17268	1	10	79		1	22	83	19235	1	9	83	20264	1	13	86
17288	1	15	80	18275	1	14	82	19256	1	5	82	20275	1	19	87
17336	1	2	77	18291	1	9	81	19268	1	20	85	20324	1	8	85
17363	1	14	80	18299	1	21	83	19300	1	13	84	20339	1	1	83
17368	1	22	81	18308	1	5	80	19323	1	19	85	20340	1	18	87
17371	1	9	79	18344	1	20	83	19352	1	8	83	20363	1	12	86
17384	1	5	78	18360	1	13	82	19363	1	1	81	20371	1	4	84
17403	1	21	81	18395	1	19	83	19384	1	18	85	20411	1	17	87
17444	1	13	80	18404	1	8	81	19395	1	4	82	20451	1	7	85
	1	20	81	18411	1	1	79		1	12	84	20468	1	11	86
17480	1	8	79	18443	1	4	80	19451	1	17	85	20488	1	16	87
17483	1	1	77	18451	1	12	82	19475	1	7	83	20512	2	2	84
17491	1	19	81	18452	1	18	83	19496	1	11	84	20520	1	3	84
17515	1	4	78	18515	1	17	83	19524	1	16	85	20571	1	5	87
17531	1	12	80	18523	1	7	81	19532	2	2	82	20579	1	10	86
17544	1	18	81	18548	1	11	82	19540	1	3	82	20584	1	6	85
17595	1	7	79	18576	2	2	80	19603	1	10	84	20595	1	22	88
17603	1	17	81	18584	1	3	80		1	15	85	20644	1	21	88
17624	1	11	80		1	16	83	19604	1	6	83	20660	1	14	87
17644	2	2	78	18648	1	6	81	19643	1	22	86	20675	1	2	84
17652	1	3	78	18651	1	10	82	19688	1	14	85	20696	1	9	86
17668	1	16	81	18659	1	15	83		1	21	86	20699	1	20	88
17716	1	6	79	18715	1	22	84	16691	1	2	82	20723	1	5	85
17723	1	10	80	18731	1	2	80	19716	1	9	84	20755	1	13	87
17739	1	15	81	18740	1	14	83	19739	1	5	83	20760	1	19	88
17795	1	2	78	18756	1	21	84		1	20	86	20819	1	8	86
17811	1	22	82	18760	1	9	82	19779	1	13	85	20827	1	18	88
17816	1	14	81	18779	1	5	81	19796	1	19	86	20836	1	1	84

3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p
20856	1	12	87	21960	1	7	88	23067	2	2	89	24139	1	3	91
20868	1	4	85	21971	1	11	89	23075	1	3	89	24148	1	15	94
20900	1	17	88	21979	1	16	90	23080	1	22	93	24179	1	21	95
20948	1	7	86	22027	2	2	87	23096	1	15	92	24184	1	10	93
20963	1	11	87	22035	1	3	87	23124	1	10	91	24203	1	6	92
20979	1	16	88	22068	1	15	90	23139	1	6	90	24248	1	20	95
21011	2	2	85		1	22	91		1	21	93	24251	1	14	94
21019	1	3	85	22088	1	10	89	23195	1	14	92	24308	1	2	91
21064	1	15	88	22099	1	6	88	23204	1	20	93	24315	1	9	93
21076	1	10	87	22123	1	21	91	23240	1	2	89	24323	1	19	95
21080	1	22	89	22163	1	14	90	23251	1	9	91	24356	1	5	92
21083	1	6	86	22184	1	20	91	23275	1	19	93	24360	1	13	94
21131	1	21	89	22196	1	2	87	23288	1	5	90	24404	1	18	95
21155	1	14	88	22211	1	9	89	23300	1	13	92	24452	1	8	93
21176	1	2	85	22244	1	5	88	23352	1	18	93	24475	1	12	94
21188	1	20	89	22251	1	19	91	23384	1	8	91	24483	1	1	91
21195	1	9	87	22264	1	13	90	23411	1	1	89	24491	1	17	95
21224	1	5	86	22324	1	18	91		1	12	92	24515	1	4	92
21251	1	18	89	22340	1	8	89	23435	1	7	93	24584	1	16	95
21252	1	13	88	22363	1	1	87	23443	1	4	90	24595	1	7	93
21320	1	8	87	22371	1	12	90	23523	1	7	91	24596	1	11	94
	1	18	89	22395	1	4	88	23524	1	16	83	24643	1	22	96
21339	1	1	85	22403	1	17	91	23528	1	11	92	24672	2	2	92
21355	1	12	88	22475	1	7	89	23595	2	22	94	24680	1	3	92
21371	1	4	86	22484	1	11	90	23596	1	2	90	24683	1	15	95
21395	1	17	89	22488	1	16	91	23604	1	3	90	24708	1	21	96
21451	1	7	87	22544	2	2	88	23619	1	15	93	24723	1	10	94
21464	1	11	88	22552	1	3	88	23651	1	10	92	24744	1	6	93
21476	1	16	89	22571	1	22	92	23656	1	21	94	24779	1	20	96
21516	2	2	86	22579	1	15	91	23668	1	6	91	24788	1	14	95
21524	1	3	86	22603	1	10	90		1	21	72	24851	1	2	92
21563	1	15	89	22616	1	6	89	23720	1	14	93	24856	1	9	94
21571	1	22	90	22628	1	21	92	23723	1	20	94		1	19	96
21579	1	10	88	22676	1	14	91	23771	1	2	90	24899	1	5	93
21588	1	6	87	22691	1	20	92	23780	1	9	92		1	13	95
21624	1	21	90	22715	1	2	88	23796	1	19	94	24939	1	18	96
21656	1	14	89	22728	1	9	90	23819	1	5	91	24995	1	8	94
21683	1	2	86	22760	1	19	92	23827	1	13	93	25016	1	12	95
	1	20	90	22763	1	5	89	23875	1	18	94	25028	1	1	92
21700	1	9	88	22779	1	13	91	23915	1	8	92		1	17	96
21731	1	5	87	22835	1	18	92	23940	1	12	93	25060	1	4	93
21748	1	19	90	22859	1	8	90	23944	1	1	90	25123	1	16	96
21755	1	13	89	22884	1	1	88	23960	1	17	94	25139	1	11	95
21819	1	18	90	22888	1	12	91	23976	1	4	91	25140	1	7	94
21827	1	8	88	22916	1	4	89	24051	1	16	94	25176	1	22	97
21848	1	1	86		1	17	92	24056	1	7	92	25219	2	2	93
21860	1	12	89	22996	1	7	90	24059	1	11	93	25224	1	15	96
21880	1	4	87	23003	1	11	91	24116	1	22	95	25227	1	3	93
21896	1	17	90		1	16	92	24131	1	2	91	25243	1	21	97

3N	m	n	p	3N	m	n	p	3N	m	n	p
25268	1	10	95	26376	1	10	97	27563	1	14	100
25291	1	6	94	26403	1	6	96	27651	1	9	99
25316	1	20	97	26408	1	20	99	27656	1	2	97
25331	1	14	96	26435	1	14	98	27684	1	13	100
25395	1	19	97	26491	1	19	99	27704	1	5	98
25400	1	2	93	26515	1	9	97	27800	1	8	99
25403	1	8	95	26516	1	2	95	27811	1	12	100
25444	1	13	96	26552	1	13	98	27843	1	1	97
25448	1	5	94	26564	1	5	96	27875	1	4	98
25480	1	18	97	26580	1	18	99	27944	1	11	100
25544	1	8	95	26660	1	8	97	27955	1	7	99
25563	1	12	96	26675	1	12	98	28044	2	2	98
25571	1	17	97		1	17	99	28052	1	3	98
25579	1	1	93	26699	1	1	95	28083	1	10	100
25611	1	4	94	26731	1	4	96	28116	1	6	99
25668	1	16	97	26776	1	16	99	38228	1	9	100
25688	1	11	96	26804	1	11	98	28235	1	2	98
25691	1	7	95	26844	1	7	97	28283	1	5	99
25715	1	22	98		1	22	100	28379	1	8	100
25771	1	15	97	26883	1	15	99	28424	1	1	98
25772	2	2	94	26884	1	21	106	28456	1	4	99
25780	1	3	94	26896	2	2	96	28536	1	7	100
25784	1	21	98	26904	1	3	96	28627	2	2	99
25819	1	10	96	26939	1	10	98	28635	1	3	99
25844	1	6	95	26963	1	20	100	28699	1	6	100
25859	1	20	98	26968	1	6	97	28820	1	2	99
25880	1	14	97	26996	1	14	99	28868	1	5	100
25940	1	19	98	27048	1	19	100	29011	1	1	99
25955	1	2	94	27080	1	9	98	29043	1	4	100
25956	1	9	96	27083	1	2	96	29216	2	2	100
25995	1	13	97	27115	1	13	99	29224	1	3	100
26003	1	5	95	27131	1	5	97	29411	1	2	100
26027	1	18	98	27139	1	18	100	29604	1	1	100
26099	1	8	96	27227	1	8	98	220288	44	56	300
26116	1	12	97	27236	1	17	100	591408	444	444	444
26120	1	17	98	27240	1	12	99	970056	477	477	666
26136	1	1	94	27268	1	1	96	1637504	200	724	724
26168	1	4	95	27300	1	4	97	1955907	0	537	808
26219	1	16	98	27339	1	16	100	2767336	327	532	1141
26243	1	11	97	27371	1	11	99	3122668	200	900	1034
26248	1	7	96	27380	1	7	98	3416100	745	745	1300
26260	1	22	99	27448	1	15	100	3541875	325	1075	1075
26324	1	15	98	27467	2	2	97	7961032	0	1277	1523
26331	2	2	95	27475	1	3	97	13795752	273	555	2372
	1	21	99	27508	1	10	99				
26339	1	3	95	27539	1	6	98				

QUINTO GRADO.

$2N$	m	n	p	q	$2N$	m	n	p	q	$2N$	m	n	p	q
8	0	0	1	2	2280	0	0	1	34	9732	0	0	1	70
17	0	0	1	3	2417	0	0	1	35	10013	0	0	1	71
30	0	0	1	4	2558	0	0	1	36	10298	0	0	1	72
47	0	0	1	5	2703	0	0	1	37	10587	0	0	1	73
68	0	0	1	6	2852	0	0	1	38	10880	0	0	1	74
93	0	0	1	7	3005	0	0	1	39	11177	0	0	1	75
122	0	0	1	8	3162	0	0	1	40	11478	0	0	1	76
155	0	0	1	9	3323	0	0	1	41	11783	0	0	1	77
173	2	7	9	9	3488	0	0	1	42	12092	0	0	1	78
192	0	0	1	10	3657	0	0	1	43	12405	0	0	1	79
233	0	0	1	11	3830	0	0	1	44	12722	0	0	1	80
278	0	0	1	12	4007	0	0	1	45	13043	0	0	1	81
327	0	0	1	13	4188	0	0	1	46	13368	0	0	1	82
373	3	5	8	16	4373	0	0	1	47	13697	0	0	1	83
380	0	0	1	14	4562	0	0	1	48	14030	0	0	1	84
437	0	0	1	15	4755	0	0	1	49	14367	0	0	1	85
498	0	0	1	16	4952	0	0	1	50	14708	0	0	1	86
558	0	0	12	15	5153	0	0	1	51	15053	0	0	1	87
563	0	0	1	17	5358	0	0	1	52	15402	0	0	1	88
632	0	0	1	18	5567	0	0	1	53	15755	0	0	1	89
705	0	0	1	19	5780	0	0	1	54	16112	0	0	1	90
782	0	0	1	20	5997	0	0	1	55	16473	0	0	1	91
863	0	0	1	21	6218	0	0	1	56	16838	0	0	1	92
940	2	4	10	24	6443	0	0	1	57	17207	0	0	1	93
948	0	0	1	22	6672	0	0	1	58	17580	0	0	1	94
1037	0	0	1	23	6905	0	0	1	59	17957	0	0	1	95
1130	0	0	1	24	7142	0	0	1	60	18338	0	0	1	96
1227	0	0	1	25	7383	0	0	1	61	18723	0	0	1	97
1328	0	0	1	26	7628	0	0	1	62	19112	0	0	1	98
1433	0	0	1	27	7877	0	0	1	63	19505	0	0	1	99
1542	0	0	1	28	8130	0	0	1	64	19902	0	0	1	100
1655	0	0	1	29	8387	0	0	1	65	1101252	622	622	622	900
1772	0	0	1	30	8648	0	0	1	66	1535072	100	100	700	844
1893	0	0	1	31	8913	0	0	1	67	2572940	88	178	622	1222
2018	0	0	1	32	9182	0	0	1	68	4104277	87	278	1177	1364
2147	0	0	1	33	9455	0	0	1	69					

SESTO GRADO.

$5N$	m	n	p	q	r	$5N$	m	n	p	q	r	$5N$	m	n	p	q	r
8	0	0	0	1	1	1100	0	0	0	1	15	4445	0	0	0	1	30
8	0	1	1	1	1	1193	0	1	1	1	16	4628	0	1	1	1	31
9	0	0	1	1	1	1224	0	0	1	1	16	4689	0	0	1	1	31
17	0	1	1	1	2	1253	0	0	0	1	16	4748	0	0	0	1	31
20	0	0	1	1	2	1352	0	1	1	1	17	4937	0	1	1	1	32
21	0	0	0	1	2	1385	0	0	1	1	17	5000	0	0	1	1	32
36	0	1	1	1	3	1416	0	0	0	1	17	5061	0	0	0	1	32
41	0	0	1	1	3	1521	0	1	1	1	18	5256	0	1	1	1	33
44	0	0	0	1	3	1556	0	0	1	1	18	5321	0	0	1	1	33
65	0	1	1	1	4	1589	0	0	0	1	18	5384	0	0	0	1	33
72	0	0	1	1	4	1700	0	1	1	1	19	5585	0	1	1	1	34
77	0	0	0	1	4	1737	0	0	1	1	19	5652	0	0	1	1	34
104	0	1	1	1	5	1772	0	0	0	1	19	5717	0	0	0	1	34
113	0	0	1	1	5	1889	0	1	1	1	20	5924	0	1	1	1	35
120	0	0	0	1	5	1928	0	0	1	1	20	5993	0	0	1	1	35
153	0	1	1	1	6	1965	0	0	0	1	20	6060	0	0	0	1	35
164	0	0	1	1	6	2088	0	1	1	1	21	6273	0	1	1	1	36
173	0	0	0	1	6	2129	0	0	1	1	21	6344	0	0	1	1	36
212	0	1	1	1	7	2168	0	0	0	1	21	6413	0	0	0	1	36
225	0	0	1	1	7	2297	0	1	1	1	22	6632	0	1	1	1	37
236	0	0	0	1	7	2340	0	0	1	1	22	6705	0	0	1	1	37
281	0	1	1	1	8	2381	0	0	0	1	22	6776	0	0	0	1	37
296	0	0	1	1	8	2516	0	1	1	1	23	7004	0	1	1	1	38
309	0	0	0	1	8	2561	0	0	1	1	23	7076	0	0	1	1	38
312	0	5	5	7	7	2604	0	0	0	1	23	7149	0	0	0	1	38
360	0	1	1	1	9	2745	0	1	1	1	24	7380	0	1	1	1	39
377	0	0	1	1	9	2792	0	0	1	1	24	7457	0	0	1	1	39
392	0	0	0	1	9	2837	0	0	0	1	24	7532	0	0	0	1	39
449	0	1	1	1	10	2984	0	1	1	1	25	7769	0	1	1	1	40
468	0	0	1	1	10	3033	0	0	1	1	25	7848	0	0	1	1	40
485	0	0	0	1	10	3080	0	0	0	1	25	7525	0	0	0	1	40
548	0	1	1	1	11	3233	0	1	1	1	26	8168	0	1	1	1	41
569	0	0	1	1	11	3284	0	0	1	1	26	8249	0	0	1	1	41
588	0	0	0	1	11	3333	0	0	0	1	26	8328	0	0	0	1	41
657	0	1	1	1	12	3492	0	1	1	1	27	8577	0	1	1	1	42
680	0	0	1	1	12	3545	0	0	1	1	27	8660	0	0	1	1	42
701	0	0	0	1	12	3596	0	0	0	1	27	8741	0	0	0	1	42
776	0	1	1	1	13	3761	0	1	1	1	28	8996	0	1	1	1	43
801	0	0	1	1	13	3816	0	0	1	1	28	9081	0	0	1	1	43
824	0	0	0	1	13	3869	0	0	0	1	28	9164	0	0	0	1	43
905	0	1	1	1	14	4040	0	1	1	1	29	9425	0	1	1	1	44
932	0	0	1	1	14	4097	0	0	1	1	29	9512	0	0	1	1	44
957	0	0	0	1	14	4152	0	0	0	1	29	9597	0	0	0	1	44
1044	0	1	1	1	15	4329	0	1	1	1	30	9864	0	1	1	1	45
1073	0	0	1	1	15	4388	0	0	1	1	30	9953	0	0	1	1	45

5N	m	n	p	q	r
10040	0	0	0	1	45
10313	0	1	1	1	46
10404	0	0	1	1	46
10493	0	0	0	1	46
10772	0	1	1	1	47
10865	0	0	1	1	47
10956	0	0	0	1	47
11241	0	1	1	1	48
11336	0	0	1	1	48
11429	0	0	0	1	48
11720	0	1	1	1	49
11817	0	0	1	1	49
11912	0	0	0	1	49
12209	0	1	1	1	50
12308	0	0	1	1	50
12405	0	0	0	1	50
12708	0	1	1	1	51
12809	0	0	1	1	51
12908	0	0	0	1	51
13217	0	1	1	1	52
13320	0	0	1	1	52
13421	0	0	0	1	52
13736	0	1	1	1	53
13841	0	0	1	1	53
13944	0	0	0	1	53
14265	0	1	1	1	54
14372	0	0	1	1	54
14477	0	0	0	1	54
14804	0	1	1	1	55
14913	0	0	1	1	55
15020	0	0	0	1	55
15353	0	1	1	1	56
15464	0	0	1	1	56
15573	0	0	0	1	56
15912	0	1	1	1	57
16025	0	0	1	1	57
16136	0	0	0	1	57
16481	0	1	1	1	58
16596	0	0	1	1	58
16709	0	0	0	1	58
17060	0	1	1	1	59
17177	0	0	1	1	59
17292	0	0	0	1	59
17649	0	1	1	1	60
17768	0	0	1	1	60
17885	0	0	0	1	60
18248	0	1	1	1	61
18369	0	0	1	1	61
18488	0	0	0	1	61
18857	0	1	1	1	62
18980	0	0	1	1	62
19101	0	0	0	1	62
19476	0	1	1	1	63
19601	0	0	1	1	63
19724	0	0	0	1	63
20105	0	1	1	1	64
20232	0	0	1	1	64
20357	0	0	0	1	64
20744	0	1	1	1	65
20873	0	0	1	1	65
21000	0	0	0	1	65
21393	0	1	1	1	66
21524	0	0	1	1	66
21653	0	0	0	1	66
22052	0	1	1	1	67
22185	0	0	1	1	67
22316	0	0	0	1	67
22721	0	1	1	1	68
22856	0	0	1	1	68
22989	0	0	0	1	68
23400	0	1	1	1	69
23537	0	0	1	1	69
23672	0	0	0	1	69
24089	0	1	1	1	70
24228	0	0	1	1	70
24365	0	0	0	1	70
24788	0	1	1	1	71
24929	0	0	1	1	71
25068	0	0	0	1	71
25497	0	1	1	1	72
25640	0	0	1	1	72
25781	0	0	0	1	72
26216	0	1	1	1	73
26361	0	0	1	1	73
26504	0	0	0	1	73
26945	0	1	1	1	74
27092	0	0	1	1	74
27237	0	0	0	1	74
27684	0	1	1	1	75
27833	0	0	1	1	75
27980	0	0	0	1	75
28433	0	1	1	1	76
28584	0	0	1	1	76
28733	0	0	0	1	76
29192	0	1	1	1	77
29345	0	0	1	1	77
29496	0	0	0	1	77
29961	0	1	1	1	78
30116	0	0	1	1	78
30269	0	0	0	1	78
30740	0	1	1	1	79
30897	0	0	1	1	79
31052	0	0	0	1	79
31529	0	1	1	1	80
31688	0	0	1	1	80
31845	0	0	0	1	80
32328	0	1	1	1	81
32489	0	0	1	1	81
32648	0	0	0	1	81
33137	0	1	1	1	82
33300	0	0	1	1	82
33461	0	0	0	1	82
33956	0	1	1	1	83
34121	0	0	1	1	83
34284	0	0	0	1	83
34785	0	1	1	1	84
34952	0	0	1	1	84
35117	0	0	0	1	84
35624	0	1	1	1	85
35793	0	0	1	1	85
35960	0	0	0	1	85
36473	0	1	1	1	86
36560	32	42	72	82	92
36644	0	0	1	1	86
36813	0	0	0	1	86
37332	0	1	1	1	87
37505	0	0	1	1	87
37676	0	0	0	1	87
38201	0	1	1	1	88
38376	0	0	1	1	88
38549	0	0	0	1	88
39080	0	1	1	1	89
39257	0	0	1	1	89
39432	0	0	0	1	89
39969	0	1	1	1	90
40148	0	0	1	1	90
40325	0	0	0	1	90
40868	0	1	1	1	91
41049	0	0	1	1	91
41228	0	0	0	1	91
41777	0	1	1	1	92
41960	0	0	1	1	92
42141	0	0	0	1	92
42696	0	1	1	1	93
42884	0	0	1	1	93
43064	0	0	0	1	93
43625	0	1	1	1	94

5N	m	n	p	q	r	5N	m	n	p	q	r	5N	m	n	p	q	r
43812	0	0	1	1	94	45704	0	0	1	1	96	47829	0	0	0	1	98
43997	0	0	0	1	94	45893	0	0	0	1	96	48420	0	1	1	1	99
44525	10	30	60	80	95	46472	0	1	1	1	97	48617	0	0	1	1	99
44564	0	1	1	1	95	46665	0	0	1	1	97	48812	0	0	0	1	99
44753	0	0	1	1	95	46856	0	0	0	1	97	49409	0	1	1	1	100
44940	0	0	0	1	95	47441	0	1	1	1	98	49608	0	0	1	1	100
45513	0	1	1	1	96	47636	0	0	1	1	98	49805	0	0	0	1	100

SETIMO GRADO.

$3N$	m	n	p	q	r	s	$3N$	m	n	p	q	r	s	$3N$	m	n	p	q	r	s
3	1	1	1	1	1	1	3303	1	1	1	1	1	34	13537	1	1	1	1	1	68
7	1	1	1	1	1	2	3505	1	1	1	1	1	35	13943	1	1	1	1	1	69
17	1	1	1	1	1	3	3713	1	1	1	1	1	36	14355	1	1	1	1	1	70
33	1	1	1	1	1	4	3927	1	1	1	1	1	37	14773	1	1	1	1	1	71
55	1	1	1	1	1	5	4147	1	1	1	1	1	38	15197	1	1	1	1	1	72
83	1	1	1	1	1	6	4373	1	1	1	1	1	39	15627	1	1	1	1	1	73
117	1	1	1	1	1	7	4605	1	1	1	1	1	40	16063	1	1	1	1	1	74
157	1	1	1	1	1	8	4843	1	1	1	1	1	41	16505	1	1	1	1	1	75
203	1	1	1	1	1	9	5087	1	1	1	1	1	42	16953	1	1	1	1	1	76
255	1	1	1	1	1	10	5337	1	1	1	1	1	43	17407	1	1	1	1	1	77
313	1	1	1	1	1	11	5593	1	1	1	1	1	44	17867	1	1	1	1	1	78
377	1	1	1	1	1	12	5855	1	1	1	1	1	45	18333	1	1	1	1	1	79
447	1	1	1	1	1	13	6123	1	1	1	1	1	46	18805	1	1	1	1	1	80
488	2	4	8	9	11	13	6397	1	1	1	1	1	47	19283	1	1	1	1	1	81
523	1	1	1	1	1	14	6677	1	1	1	1	1	48	19767	1	1	1	1	1	82
605	1	1	1	1	1	15	6963	1	1	1	1	1	49	20257	1	1	1	1	1	83
693	1	1	1	1	1	16	7255	1	1	1	1	1	50	20753	1	1	1	1	1	84
787	1	1	1	1	1	17	7553	1	1	1	1	1	51	21255	1	1	1	1	1	85
887	1	1	1	1	1	18	7857	1	1	1	1	1	52	21763	1	1	1	1	1	86
993	1	1	1	1	1	19	8167	1	1	1	1	1	53	22277	1	1	1	1	1	87
1105	1	1	1	1	1	20	8483	1	1	1	1	1	54	22797	1	1	1	1	1	88
1223	1	1	1	1	1	21	8805	1	1	1	1	1	55	23323	1	1	1	1	1	89
1347	1	1	1	1	1	22	9133	1	1	1	1	1	56	23855	1	1	1	1	1	90
1477	1	1	1	1	1	23	9467	1	1	1	1	1	57	24393	1	1	1	1	1	91
1613	1	1	1	1	1	24	9807	1	1	1	1	1	58	24937	1	1	1	1	1	92
1755	1	1	1	1	1	25	10153	1	1	1	1	1	59	25487	1	1	1	1	1	93
1903	1	1	1	1	1	26	10505	1	1	1	1	1	60	26043	1	1	1	1	1	94
2057	1	1	1	1	1	27	10863	1	1	1	1	1	61	26605	1	1	1	1	1	95
2217	1	1	1	1	1	28	11227	1	1	1	1	1	62	27088	10	30	40	70	80	94
2383	1	1	1	1	1	29	11597	1	1	1	1	1	63	27173	1	1	1	1	1	96
2555	1	1	1	1	1	30	11973	1	1	1	1	1	64	27747	1	1	1	1	1	97
2733	1	1	1	1	1	31	12355	1	1	1	1	1	65	28327	1	1	1	1	1	98
2917	1	1	1	1	1	32	12743	1	1	1	1	1	66	28913	1	1	1	1	1	99
3107	1	1	1	1	1	33	13137	1	1	1	1	1	67	29505	1	1	1	1	1	100

OCTAVO GRADO.

7N	m	n	p	q	r	s	t	7N	m	n	p	q	r	s	t
7	1	1	1	1	1	1	1	11856	1	1	1	1	1	1	42
16	1	1	1	1	1	1	2	12439	1	1	1	1	1	1	43
39	1	1	1	1	1	1	3	13036	1	1	1	1	1	1	44
76	1	1	1	1	1	1	4	13647	1	1	1	1	1	1	45
127	1	1	1	1	1	1	5	14272	1	1	1	1	1	1	46
192	1	1	1	1	1	1	6	14911	1	1	1	1	1	1	47
271	1	1	1	1	1	1	7	15564	1	1	1	1	1	1	48
364	1	1	1	1	1	1	8	16231	1	1	1	1	1	1	49
471	1	1	1	1	1	1	9	16912	1	1	1	1	1	1	50
592	1	1	1	1	1	1	10	17607	1	1	1	1	1	1	51
727	1	1	1	1	1	1	11	18316	1	1	1	1	1	1	52
876	1	1	1	1	1	1	12	19039	1	1	1	1	1	1	53
1039	1	1	1	1	1	1	13	19776	1	1	1	1	1	1	54
1216	1	1	1	1	1	1	14	20527	1	1	1	1	1	1	55
1407	1	1	1	1	1	1	15	21292	1	1	1	1	1	1	56
1596	2	3	6	9	11	12	15	22071	1	1	1	1	1	1	57
1612	1	1	1	1	1	1	16	22864	1	1	1	1	1	1	58
1831	1	1	1	1	1	1	17	23671	1	1	1	1	1	1	59
2064	1	1	1	1	1	1	18	24492	1	1	1	1	1	1	60
2311	1	1	1	1	1	1	19	25327	1	1	1	1	1	1	61
2572	1	1	1	1	1	1	20	26176	1	1	1	1	1	1	62
2687	0	2	5	8	14	16	16	27039	1	1	1	1	1	1	63
2847	1	1	1	1	1	1	21	27916	1	1	1	1	1	1	64
3136	1	1	1	1	1	1	22	28807	1	1	1	1	1	1	65
3439	1	1	1	1	1	1	23	29712	1	1	1	1	1	1	66
3756	1	1	1	1	1	1	24	30631	1	1	1	1	1	1	67
4087	1	1	1	1	1	1	25	31564	1	1	1	1	1	1	68
4432	1	1	1	1	1	1	26	32511	1	1	1	1	1	1	69
4791	1	1	1	1	1	1	27	33472	1	1	1	1	1	1	70
5164	1	1	1	1	1	1	28	34447	1	1	1	1	1	1	71
5551	1	1	1	1	1	1	29	35436	1	1	1	1	1	1	72
5952	1	1	1	1	1	1	30	36439	1	1	1	1	1	1	73
6367	1	1	1	1	1	1	31	37456	1	1	1	1	1	1	74
6796	1	1	1	1	1	1	32	38487	1	1	1	1	1	1	75
7239	1	1	1	1	1	1	33	39532	1	1	1	1	1	1	76
7696	1	1	1	1	1	1	34	40591	1	1	1	1	1	1	77
8167	1	1	1	1	1	1	35	41664	1	1	1	1	1	1	78
8652	1	1	1	1	1	1	36	42751	1	1	1	1	1	1	79
9151	1	1	1	1	1	1	37	43852	1	1	1	1	1	1	80
9664	1	1	1	1	1	1	38	44967	1	1	1	1	1	1	81
10191	1	1	1	1	1	1	39	46096	1	1	1	1	1	1	82
10732	1	1	1	1	1	1	40	47239	1	1	1	1	1	1	83
11287	1	1	1	1	1	1	41	48396	1	1	1	1	1	1	84

7N	m	n	p	q	r	s	t	7N	m	n	p	q	r	s	t
49567	1	1	1	1	1	1	85	59439	1	1	1	1	1	1	93
50752	1	1	1	1	1	1	86	60736	1	1	1	1	1	1	94
51951	1	1	1	1	1	1	87	62047	1	1	1	1	1	1	95
53164	1	1	1	1	1	1	88	63372	1	1	1	1	1	1	96
54391	1	1	1	1	1	1	89	64711	1	1	1	1	1	1	97
55632	1	1	1	1	1	1	90	66064	1	1	1	1	1	1	98
56887	1	1	1	1	1	1	91	67431	1	1	1	1	1	1	99
58156	1	1	1	1	1	1	92	68812	1	1	1	1	1	1	100

NOVENO GRADO.

4N	m	n	p	q	r	s	t	f	4N	m	n	p	q	r	s	t	f
4	1	1	1	1	1	1	1	1	7443	1	1	1	1	1	1	1	44
9	1	1	1	1	1	1	1	2	7792	1	1	1	1	1	1	1	45
22	1	1	1	1	1	1	1	3	8149	1	1	1	1	1	1	1	46
43	1	1	1	1	1	1	1	4	8514	1	1	1	1	1	1	1	47
72	1	1	1	1	1	1	1	5	8887	1	1	1	1	1	1	1	48
109	1	1	1	1	1	1	1	6	9268	1	1	1	1	1	1	1	49
154	1	1	1	1	1	1	1	7	9657	1	1	1	1	1	1	1	50
207	1	1	1	1	1	1	1	8	10054	1	1	1	1	1	1	1	51
268	1	1	1	1	1	1	1	9	10459	1	1	1	1	1	1	1	52
337	1	1	1	1	1	1	1	10	10872	1	1	1	1	1	1	1	53
414	1	1	1	1	1	1	1	11	11293	1	1	1	1	1	1	1	54
499	1	1	1	1	1	1	1	12	11722	1	1	1	1	1	1	1	55
592	1	1	1	1	1	1	1	13	12159	1	1	1	1	1	1	1	56
693	1	1	1	1	1	1	1	14	12604	1	1	1	1	1	1	1	57
754	1	3	4	6	8	10	11	13	13057	1	1	1	1	1	1	1	58
802	1	1	1	1	1	1	1	15	13518	1	1	1	1	1	1	1	59
849	1	1	1	1	1	1	1	16	13987	1	1	1	1	1	1	1	60
1044	1	1	1	1	1	1	1	17	14464	1	1	1	1	1	1	1	61
1150	3	4	7	9	12	13	15	16	14949	1	1	1	1	1	1	1	62
1177	1	1	1	1	1	1	1	18	15442	1	1	1	1	1	1	1	63
1318	1	1	1	1	1	1	1	19	15943	1	1	1	1	1	1	1	64
1467	1	1	1	1	1	1	1	20	16452	1	1	1	1	1	1	1	65
1624	1	1	1	1	1	1	1	21	16969	1	1	1	1	1	1	1	66
1789	1	1	1	1	1	1	1	22	17494	1	1	1	1	1	1	1	67
1962	1	1	1	1	1	1	1	23	18027	1	1	1	1	1	1	1	68
2143	1	1	1	1	1	1	1	24	18568	1	1	1	1	1	1	1	69
2332	1	1	1	1	1	1	1	25	19117	1	1	1	1	1	1	1	70
2529	1	1	1	1	1	1	1	26	19674	1	1	1	1	1	1	1	71
2734	1	1	1	1	1	1	1	27	20239	1	1	1	1	1	1	1	72
2947	1	1	1	1	1	1	1	28	20812	1	1	1	1	1	1	1	73
3168	1	1	1	1	1	1	1	29	31393	1	1	1	1	1	1	1	74
3397	1	1	1	1	1	1	1	30	21982	1	1	1	1	1	1	1	75
3634	1	1	1	1	1	1	1	31	22579	1	1	1	1	1	1	1	76
3879	1	1	1	1	1	1	1	32	23184	1	1	1	1	1	1	1	77
4132	1	1	1	1	1	1	1	33	23797	1	1	1	1	1	1	1	78
4393	1	1	1	1	1	1	1	34	24418	1	1	1	1	1	1	1	79
4662	1	1	1	1	1	1	1	35	25047	1	1	1	1	1	1	1	80
4939	1	1	1	1	1	1	1	36	25684	1	1	1	1	1	1	1	81
5224	1	1	1	1	1	1	1	37	26329	2	1	1	1	1	1	1	82
5517	1	1	1	1	1	1	1	38	26982	1	1	1	1	1	1	1	83
5818	1	1	1	1	1	1	1	39	27643	1	1	1	1	1	1	1	84
6127	1	1	1	1	1	1	1	40	28312	1	1	1	1	1	1	1	85
6444	1	1	1	1	1	1	1	41	28989	1	1	1	1	1	1	1	86
6769	1	1	1	1	1	1	1	42	29674	1	1	1	1	1	1	1	87
7102	1	1	1	1	1	1	1	43	30367	1	1	1	1	1	1	1	88

4N	m	n	p	q	r	s	t	f	4N	m	n	p	q	r	s	t	f
31068	1	1	1	1	1	1	1	89	35442	1	1	1	1	1	1	1	95
31777	1	1	1	1	1	1	1	90	36199	1	1	1	1	1	1	1	96
32494	1	1	1	1	1	1	1	91	36964	1	1	1	1	1	1	1	97
33219	1	1	1	1	1	1	1	92	37737	1	1	1	1	1	1	1	98
33952	1	1	1	1	1	1	1	93	38518	1	1	1	1	1	1	1	99
34693	1	1	1	1	1	1	1	94	39307	1	1	1	1	1	1	1	100

DÉCIMO GRADO.

9N	m	n	p	q	r	s	t	f	h	9N	m	n	p	q	r	s	t	f	h
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14489	1	1	1	1	1	1	1	1	41
20	1	1	1	1	1	1	1	1	2	15220	1	1	1	1	1	1	1	1	42
41	0	0	0	0	0	0	0	1	2	15969	1	1	1	1	1	1	1	1	43
49	1	1	1	1	1	1	1	1	3	16736	1	1	1	1	1	1	1	1	44
96	1	1	1	1	1	1	1	1	4	17521	1	1	1	1	1	1	1	1	45
161	1	1	1	1	1	1	1	1	5	18324	1	1	1	1	1	1	1	1	46
244	1	1	1	1	1	1	1	1	6	19145	1	1	1	1	1	1	1	1	47
345	1	1	1	1	1	1	1	1	7	19984	1	1	1	1	1	1	1	1	48
464	1	1	1	1	1	1	1	1	8	20841	1	1	1	1	1	1	1	1	49
601	1	1	1	1	1	1	1	1	9	21716	1	1	1	1	1	1	1	1	50
756	1	1	1	1	1	1	1	1	10	22609	1	1	1	1	1	1	1	1	51
825	1	2	3	4	5	6	7	8	9	23520	1	1	1	1	1	1	1	1	52
929	1	1	1	1	1	1	1	1	11	24449	1	1	1	1	1	1	1	1	53
1120	1	1	1	1	1	1	1	1	12	25396	1	1	1	1	1	1	1	1	54
1329	1	1	1	1	1	1	1	1	13	26361	1	1	1	1	1	1	1	1	55
1556	1	1	1	1	1	1	1	1	14	27344	1	1	1	1	1	1	1	1	56
1801	1	1	1	1	1	1	1	1	15	28345	1	1	1	1	1	1	1	1	57
2064	1	1	1	1	1	1	1	1	16	29364	1	1	1	1	1	1	1	1	58
2345	1	1	1	1	1	1	1	1	17	30401	1	1	1	1	1	1	1	1	59
2644	1	1	1	1	1	1	1	1	18	31456	1	1	1	1	1	1	1	1	60
2961	1	1	1	1	1	1	1	1	19	32529	1	1	1	1	1	1	1	1	61
3296	1	1	1	1	1	1	1	1	20	33620	1	1	1	1	1	1	1	1	62
3649	1	1	1	1	1	1	1	1	21	34729	1	1	1	1	1	1	1	1	63
4020	1	1	1	1	1	1	1	1	22	35856	1	1	1	1	1	1	1	1	64
4409	1	1	1	1	1	1	1	1	23	37001	1	1	1	1	1	1	1	1	65
4701	2	3	5	8	10	14	17	18	20	38164	1	1	1	1	1	1	1	1	66
4816	1	1	1	1	1	1	1	1	24	39345	1	1	1	1	1	1	1	1	67
5241	1	1	1	1	1	1	1	1	25	40544	1	1	1	1	1	1	1	1	68
5684	1	1	1	1	1	1	1	1	26	41761	1	1	1	1	1	1	1	1	69
6145	1	1	1	1	1	1	1	1	27	42996	1	1	1	1	1	1	1	1	70
6624	1	1	1	1	1	1	1	1	28	44249	1	1	1	1	1	1	1	1	71
7121	1	1	1	1	1	1	1	1	29	45520	1	1	1	1	1	1	1	1	72
7636	1	1	1	1	1	1	1	1	30	46809	1	1	1	1	1	1	1	1	73
8169	1	1	1	1	1	1	1	1	31	48116	1	1	1	1	1	1	1	1	74
8720	1	1	1	1	1	1	1	1	32	49441	1	1	1	1	1	1	1	1	75
9289	1	1	1	1	1	1	1	1	33	50784	1	1	1	1	1	1	1	1	76
9876	1	1	1	1	1	1	1	1	34	52145	1	1	1	1	1	1	1	1	77
10481	1	1	1	1	1	1	1	1	35	53524	1	1	1	1	1	1	1	1	78
11104	1	1	1	1	1	1	1	1	36	54921	1	1	1	1	1	1	1	1	79
11745	1	1	1	1	1	1	1	1	37	56336	1	1	1	1	1	1	1	1	80
12404	1	1	1	1	1	1	1	1	38	57769	1	1	1	1	1	1	1	1	81
13081	1	1	1	1	1	1	1	1	39	59220	1	1	1	1	1	1	1	1	82
13766	1	1	1	1	1	1	1	1	40	60689	1	1	1	1	1	1	1	1	83

9N	m	n	p	q	r	s	t	f	h	9N	m	n	p	q	r	s	t	f	h
62176	1	1	1	1	1	1	1	1	84	76369	1	1	1	1	1	1	1	1	93
63681	1	1	1	1	1	1	1	1	85	78036	1	1	1	1	1	1	1	1	94
65204	1	1	1	1	1	1	1	1	86	79721	1	1	1	1	1	1	1	1	95
66745	1	1	1	1	1	1	1	1	87	81424	1	1	1	1	1	1	1	1	96
68304	1	1	1	1	1	1	1	1	88	83145	1	1	1	1	1	1	1	1	97
69881	1	1	1	1	1	1	1	1	89	84884	1	1	1	1	1	1	1	1	98
71476	1	1	1	1	1	1	1	1	90	86641	1	1	1	1	1	1	1	1	99
73089	1	1	1	1	1	1	1	1	91	88416	1	1	1	1	1	1	1	1	100
74720	1	1	1	1	1	1	1	1	92										

ÍNDICE.

ERRATAS.

Páginas.	Líneas.	Dice.	Debe decir.
31	11	$\frac{4x^2}{x}$	$\frac{4x^2}{x^2}$
40	5	y	y
253	7	$+\ldots.\ +np$	$+mq+\ldots..+np$
253	9	$+mqm$	$+m$