

FERNANDY
Y GARDI

MATEMATICAS

GEOMETRIA

BIBLIOT. UNIV.

EST. 35.

TABLA 5^a

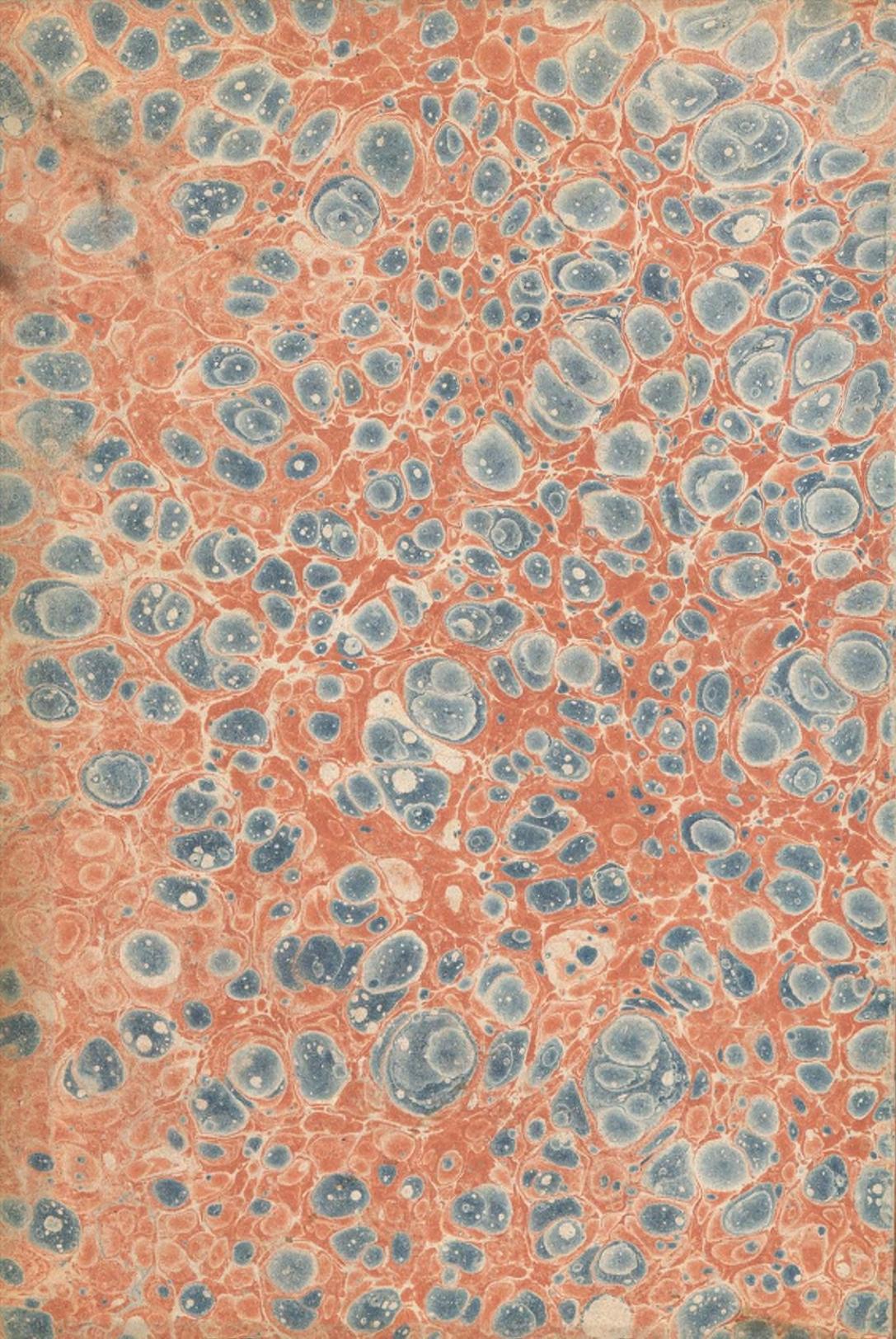
Nº 10.

LA7
305

5607
L. J. ...

IV

[Blank white label]



567

(By 1847)

35-5^a-n^o 16.

247-305

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

DON JOAQUÍN MARÍA FERNÁNDEZ Y CARDIN,
 Catedrático de dicha asignatura en el Instituto de San Isidro,
 agregado á la Universidad Central.

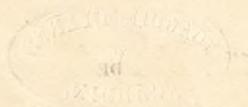
Joaquín M. Fernández y Cardin



IMPRESA DE D. ALEJANDRO GOMEZ FUENTENEYRO,
 calle de la Colegiata, núm. 6.



ELEMENTOS



MATEMÁTICAS

100

Es propiedad del autor.
 Todos los ejemplares llevarán un sello
 que acredite su legitimidad.
 Catedrático de dicha asignatura en el Instituto de San Isidro,
 dependiente de la Universidad Central.

Reservados los derechos



IMPRESA DE D. ALEJANDRO GOMEZ FUENTEARRABO,
 calle de la Colofonia, núm. 2



5607

(Jul 1847)

INTRODUCCION

GEOMETRÍA

Y

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.



2007
1/12/07

ГЕОМЕТРИЯ

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.



GEOMETRIA.

INTRODUCCION.

DEFINICIONES.

1. De las diferentes propiedades de los cuerpos solo considera la Geometría su *extension*, ó sea el espacio limitado que ocupan, y su *forma* ó *figura*; de modo que todo cuerpo será para nosotros un *espacio penetrable, divisible y figurado*.

La extension de un cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud y profundidad* ó *grueso*. La reunion de estas tres dimensiones se llama CUERPO GEOMÉTRICO.

Se llama SUPERFICIE el limite de los cuerpos. La superficie no tiene mas que dos dimensiones: *longitud y latitud*.

El limite de las superficies se llama LÍNEA. La línea tiene una sola dimension: *longitud*.

Llámanse PUNTO el limite de la línea. El punto no tiene ninguna dimension.

2. Del mismo modo que damos el nombre de *extension* de un cuerpo á su magnitud, se llama tambien *extension* de una superficie ó de una línea su magnitud respectiva.

De manera que hay tres especies de extension: de los cuerpos, de las superficies y de las líneas. Estas tres clases de extension, que por la *abstraccion* (*) podemos

(*) Se llama así una operacion del entendimiento; por medio de la cual consideramos separadas cosas que no puedan estarlo en realidad.

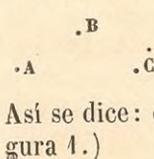


considerar separadas, constituyen la *cantidad continua*.

GEOMETRÍA es, pues, la ciencia que trata de la extensión ó de la cantidad continua.

Del punto.

Fig. 1.



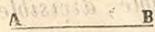
3. Aunque el punto matemático no tiene extensión, le figuramos como el punto de la escritura comun; y cuando son varios, para distinguirlos se señalan con letras (*).

Así se dice: el punto A, el punto B, el punto C, etc. (Figura 1.)

De las líneas.

Las líneas se dividen en RECTAS y CURVAS.

Fig. 2.



1. LÍNEA RECTA es la distancia mas corta entre dos puntos, como AB (fig. 2).

Corolario. La distancia entre dos puntos se mide por una recta.

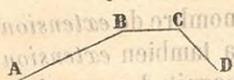
Postulado. Por dos puntos puede pasar una recta, pero nada mas que una.

Corol. 1.º Dos puntos determinan la posicion de una recta.

Corol. 2.º Dos rectas que tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su longitud.

Corol. 3.º La interseccion de dos rectas es un punto.

Fig. 3.



Se suele llamar línea QUEBRADA ó POLIGONAL la combinacion de dos ó mas rectas, que prolongadas no forman una sola recta, como ABCD (figura 3).

De la manera que hay tres especies de extensiones, de las superficies y de las líneas. Estas tres clases de extension, que por la extensión () poseen

(*) Generalmente se emplean letras mayúsculas para señalar los puntos, las líneas y los cuerpos. Empleamos letras minúsculas cuando con una letra sola se quiere expresar una línea recta, quebrada ó curva, y en pocos mas casos.

Fig. 4. LÍNEA CURVA es aquella en que no se puede tomar una parte, por pequeña que sea, recta, como AB (fig. 4).

A la combinación de la línea recta con la curva se le da el nombre de línea *mista*.

Fig. 5. 5. Problema. Hallar la comun medida de dos rectas limitadas, AB y MN (fig. 5), si la tienen, y la relacion que existe entre ellas.

Este problema se resuelve de una manera análoga á la empleada en la determinacion del máximo común divisor de dos números.

Se coloca la línea menor MN sobre la mayor AB todas las veces que se pueda; y como han sido tres, se tendrá

$$AB = 3MN + CB \quad [a].$$

El resto CB se coloca sobre la menor MN todas las veces posibles; y como son dos veces resulta

$$MN = 2CB + PN \quad [b].$$

El nuevo resto PN se coloca sobre el anterior CB las veces que se pueda; y siendo estas cuatro exactamente, se tiene al fin

$$CB = 4PN.$$

Ahora, sustituyendo este valor de CB en la igualdad [b], resulta

$$MN = 2 \times 4PN + PN = 9PN.$$

Sustituyendo este valor de MN y el de CB en la igualdad [a], se halla

$$AB = 3 \times 9PN + 4PN = 31PN.$$

Luego la medida comun de las dos rectas dadas es PN, y la relacion entre ellas será

$$\frac{AB}{MN} = \frac{31PN}{9PN} = \frac{31}{9}.$$

Handwritten notes on the right side of the page:
CB = 4PN
MN = 9PN
AB = 31PN
MN = 2CB + PN

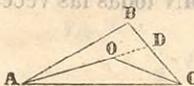
Se llaman *rectas*, y en general cantidades **COMMENSURABLES** las que, como las anteriores, tienen una medida común, é **INCOMMENSURABLES** las que no la tienen (*).

Observacion. Se puede hallar la relacion aproximada de dos rectas incommensurables, procediendo como en el problema anterior y despreciando el último residuo, cuando sea suficientemente pequeño para la aproximacion que se desea obtener.

6. Llámase **MEDIDA** ó **VALOR NUMÉRICO** de una línea, y en general de una cantidad cualquiera, la razon de esta con otra cantidad de la misma naturaleza, tomada por unidad.

Coról. Para medir una recta se determina (como acaba de verse) su relacion exacta ó aproximada con la unidad de medida.

Fig. 6.



7. Teorema. Si desde un punto A á otro C (fig. 6) se traza una línea recta AC y dos ó mas quebradas ABC y AOC, compuesta cada una de dos rectas, la línea quebrada ABC, que mas se separa de la recta AC, es la mayor (**).

Prolongando la AO hasta que encuentre en D á la BC se tendrá (4)

$$AB + BD > AD,$$

(*) A primera vista parece que no pueden darse líneas y en general cantidades incommensurables; porque si dos rectas, p. e., no contienen un número exacto de metros, contendrán un número exacto de decímetros, centímetros ó milímetros, etc. No obstante, si se reflexiona un poco mas, desaparecerá el error: si se supone que un hilo, que no pueda extenderse mas ni menos, se rompe en dos partes arbitrarias, se comprende bien lo difícil que sería que cada una de estas partes contuviese un número exacto de metros, de decímetros, centímetros ni aun de milímetros (porque existe un número infinito de unidades intermedias á estas); y por consiguiente lo difícil que también sería que tales partes fuesen commensurables. (V. núm. 432.)

(**) Los teoremas, corolarios y problemas deben enunciarse omitiendo las letras que en ellos se intercalan, con el objeto de evitar la aplicacion de la proposicion á la figura correspondiente. Así el teorema del texto se enuncia de este modo: Si desde un punto á otro se traza una línea recta y dos ó mas quebradas, compuesta cada una, etc.

y agregando DC á los dos miembros

$$AB + BD + DC > AD + DC,$$

ó $AB + BC > AD + DC$ [a].

Por igual razon se tiene

$$OD + DC > OC,$$

y sumando AO con los dos miembros

$$AO + OD + DC > AO + OC,$$

ó $AD + DC > AO + OC$ [b].

Pero segun la desigualdad [a] $AB + BC$ es mayor que $AD + DC$; y conforme á la [b] $AD + DC$ es mayor que $AO + OC$; luego con mas razon $AB + BC$ será mayor que $AO + OC$, ó lo que es lo mismo la línea $ABC > AOC$.

De las superficies.

Las superficies se dividen en PLANAS y CURVAS.

s. Se llama PLANO ó SUPERFICIE PLANA aquella con la cual una recta, aplicada en un sentido cualquiera, coincide en todos sus puntos.

— **Corol.** Si una recta pasa por dos puntos de un plano, coincide con él en toda su extension.

Se suele llamar SUPERFICIE QUEBRADA ó POLIÉDRICA la combinacion de dos ó mas superficies planas, que prolongadas no forman un solo plano.

SUPERFICIE CURVA es aquella en que no se puede tomar una parte plana por pequeña que sea.

— **Llámase SUPERFICIE MIXTA á la combinacion de la superficie plana con la curva.**

Del circulo.

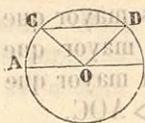
1. De todas las líneas curvas la mas sencilla, y única cuyas propiedades se consideran en la Geometría elemental, es la circunferencia de circulo.

Se llama **CIRCUNFERENCIA** á una curva plana, cerrada, cuyos puntos distan igualmente de uno interior llamado **CENTRO**.

CÍRCULO es la superficie plana comprendida por la circunferencia.

Observacion. Con frecuencia se suele llamar círculo á la circunferencia; pero el sentido en que se habla da á conocer si se trata de la línea curva ó de la superficie que comprende.

Fig. 7.



Llámanse **RADIO** á toda recta que desde el centro va á terminar en la circunferencia, como OA, OB, OC, etc. (fig. 7).

Corol. Los radios de un mismo círculo son iguales.

10. Se llama **CUERDA** á toda línea que une dos puntos de la circunferencia, como

AB ó CD.

DIÁMETRO es toda cuerda que pasa por el centro, como AB.

Corol. 1.º El diámetro es duplo del radio.

Corol. 2.º Los diámetros de un mismo círculo son iguales.

Llámanse **ARCO** á una porcion cualquiera de la circunferencia, como AC.

De los teoremas recíprocos.

11. Se ha dicho (Aritm., intr.) que la reciprocidad de los teoremas era muy frecuente en la Geometría; mas es evidente que de la verdad de un teorema directo no se infiere la del recíproco correspondiente, por lo tanto estos como aquellos deben ser demostrados.

Hay, sin embargo, ciertos recíprocos que se demuestran de una manera análoga, y cuyas demostraciones pueden por lo tanto omitirse, deduciendo al efecto una regla general, que será de sumo interés en lo sucesivo.

Ocupémonos de la deducción de esta regla, sirviéndonos para ello del siguiente

Ejemplo (*).

Teorema directo. *En todo círculo trazado en un plano:*

1.º *Un punto cualquiera de la circunferencia dista del centro una cantidad igual al radio.*

2.º *Un punto cualquiera interior á la circunferencia dista del centro una cantidad menor que el radio.*

3.º *Un punto cualquiera exterior á la circunferencia dista del centro una cantidad mayor que el radio.*

La verdad de la primera parte de este teorema está fundada en la definición de la circunferencia, y la de las otras dos es una consecuencia necesaria de la primera.

Teorema recíproco. *En todo círculo trazado en un plano:*

1.º *Un punto cualquiera, que dista del centro una cantidad igual al radio, está situado en la circunferencia.*

2.º *Un punto cualquiera, que dista del centro una cantidad menor que el radio, está situado dentro de la circunferencia.*

3.º *Un punto cualquiera, que dista del centro una cantidad mayor que el radio, está situado fuera de la circunferencia.*

Demostracion. 1.º Si el punto que dista del centro una cantidad igual al radio no estuviese en la circunferencia, estaria dentro ó fuera de ella: si estuviese dentro, distaria del centro una cantidad menor que el radio, conforme á la segunda parte del teorema directo, lo que es contrario á la hipótesis: si estuviese fuera, distaria del centro una cantidad mayor que el radio, segun la tercera parte del teorema directo, lo que tambien es contrario á la hipóte-

(*). Este ejemplo es el mismo que emplea *Vincent*, y no puede elegirse otro mas sencillo.

sis: luego dicho punto no puede estar dentro ni fuera de la circunferencia; luego se hallará en esta.

Luego *si un punto cualquiera dista del centro una cantidad igual al radio está situado en la circunferencia.*

Lo mismo se demuestran la segunda y tercera parte del teorema recíproco.

La fuerza de la precedente demostracion estriba en que un punto, que se encuentra en un plano donde está trazada una circunferencia, se halla necesariamente en esta, dentro ó fuera, y en que cualquiera de estos supuestos produce una consecuencia distinta respecto á la distancia al centro.

Pudiendo emplearse un racionio análogo en la demostracion de los teoremas recíprocos, cuyos directos reunan iguales condiciones, se infiere que

12. *Siempre que en una proposicion ó serie de proposiciones se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo sugeto, y cada una produzca una conclusion distinta, las proposiciones reciprocas son ciertas.*

Division de la Geometría.

13. La Geometría se divide en *plana* y *del espacio*.

La GEOMETRÍA PLANA trata de las figuras cuyos puntos estan todos en un mismo plano.

La GEOMETRÍA DEL ESPACIO se ocupa de las figuras cuyos puntos no estan todos en el mismo plano.

Esta division se funda en la diferencia que hay entre la extensión de la línea recta, que es un punto, y la extensión de la línea curva, que es una línea. La línea recta se divide en dos partes, en la que está dentro del círculo, y en la que está fuera del círculo. La línea curva se divide en dos partes, en la que está dentro del círculo, y en la que está fuera del círculo. La línea curva que está dentro del círculo se llama arco, y la que está fuera del círculo se llama segmento exterior.

La línea recta que está dentro del círculo se llama cuerda, y la que está fuera del círculo se llama tangente. La línea curva que está dentro del círculo se llama arco, y la que está fuera del círculo se llama segmento exterior. La línea curva que está dentro del círculo se llama arco, y la que está fuera del círculo se llama segmento exterior.

GEOMETRIA PLANA.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Líneas rectas en sus diferentes posiciones.

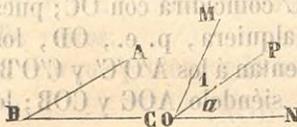
ARTÍCULO PRIMERO.

De los ángulos.

1.º Se llama **ÁNGULO** la mayor ó menor inclinacion de dos rectas que concurren en un punto. Las líneas que le forman se llaman **lados**, y **vértice** el punto de concurrencia.

Fig. 8. ABC (fig. 8) es un ángulo, cuyos lados son AB y BC, y el vértice el punto B.

Un ángulo se nombra por tres letras, como acaba de verse, expresando siempre en el medio la del vértice. Tambien se puede nombrar, cuando está solo, por la letra del vértice; así se dice el ángulo en B; y cuando en un mismo punto se reúnen varios vértices, por una letra ó número colocados en el interior; así se puede decir el ángulo a , el ángulo 4, en vez de PON y MOP.



Corol. *Un ángulo no varía de valor aunque varíe la longitud de sus lados.*

Los ángulos se suman, se restan, y se multiplican ó dividen por un número abstracto.

Así $MOP + PON = MON$, $MOP = MON - PON$; y MON puede ser duplo de MOP , y éste mitad de aquel.

Se da el nombre de BISECTRIZ de un ángulo á la recta que le divide en dos partes iguales. OP es la bisectriz del ángulo MON .

15. *Se llaman ÁNGULOS ADYACENTES los que teniendo un lado y el vértice comun, tienen los otros dos lados en línea recta.*

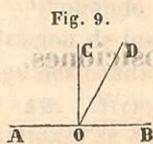


Fig. 9.

AOD y DOB (fig. 9) son adyacentes, lo mismo que AOC y COB .

Llámanse ÁNGULO RECTO á cada uno de los dos adyacentes é iguales que una recta forma con otra, y oblicuo al que es mayor ó menor que el recto. AOC y COB son ángulos rectos, y AOD y DOB oblicuos.

16. Teorema 1.º *Los ángulos rectos son iguales aunque no sean adyacentes.*

Fig. 10.

Sean rectos los ángulos AOC y $A'O'C'$ (figs. 9 y 10); vamos á demostrar que son iguales.

Superponiendo (*) la fig. 10 sobre la 9, $A'B'$ de modo que $A'B'$ coincida con AB y el punto O' caiga sobre O , la recta $O'C'$ coincidirá con OC ; pues si $O'C'$ tomase otra dirección cualquiera, p. e., OD , los ángulos AOD y DOB , que representan á los $A'O'C'$ y $C'O'B'$ no podrían ser iguales entre sí, siéndolo AOC y COB ; lo

(*) La superposición es el medio mas comunmente empleado en la Geometría para demostrar la igualdad de las figuras. Al efecto se admite como evidente, porque lo es, que *dos figuras que superpuestas coinciden en todas sus partes son iguales, y recíprocamente, que dos figuras iguales se pueden superponer de modo que coincidan.*

Tambien se admite que con la superposición no se altera la magnitud de las figuras.

que es contra la hipótesis. Luego los dos lados del ángulo A'O'C' coinciden con los de AOC; luego dichos ángulos son iguales.

17. *Se llama* **ÁNGULO AGUDO** *el oblicuo menor que uno recto, y* **OBTUSO** *el oblicuo mayor que el recto. BOD es agudo y AOD obtuso (fig. 9).*

18. *Se llaman* **ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS** *aquellos que sumados forman un recto, y* **SUPLEMENTARIOS** *los que forman dos rectos.*

Corol. *Dos ángulos que tienen el mismo complemento ó complementos iguales, ó el mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales.*

Porque agregándoles el complemento en un caso, y el suplemento en otro, dan una misma suma.

19. **Teorema 2.º** *Los ángulos adyacentes valen juntos dos rectos, ó son suplementarios.*

Sean los ángulos adyacentes AOD y DOB (fig. 9).

Trazando por O una recta OC, que forme dos ángulos rectos, se observará que los dados AOD y DOB suman tanto como los rectos AOC y COB, luego valen tanto como estos dos rectos: así llamando R á un ángulo recto,

$$AOD + DOB = 2R.$$

Corol. 1.º *Si un ángulo es recto, su adyacente lo será también; y si un ángulo es oblicuo, su adyacente lo es del mismo modo.*

Corol. 2.º *Un ángulo cualquiera AOD vale menos que dos rectos.*

Porque prolongando uno de sus lados AO, se tiene

$$AOD + DOB = 2R;$$

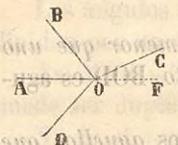
luego

$$AOD < 2R.$$

Corol. 3.º *Los ángulos AOC + COD + DOB, que se pueden formar en un punto O de una recta y á un lado de esta, valen juntos dos rectos.*

Porque la suma de estos ángulos es igual á la de dos adyacentes cualesquiera AOD y DOB.

Corol. 4.º *Todos los ángulos AOB + BOC + COD + DOA (fig. 11) que se pueden formar al rededor de un punto O, valen juntos cuatro rectos.*



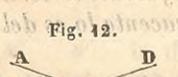
Porque prolongando uno de los lados AO de estos ángulos en el sentido AF (*), la suma de todos ellos equivale á la de los que pueden formarse en el punto O sobre la recta AF y debajo de la misma: pero los que pueden formarse en O sobre AF valen dos rectos (corol. 3.º), y los que pueden formarse debajo otros dos; luego todos los que se pueden formar al rededor de O valen cuatro rectos.

Corol. 5.º *Los ángulos formados por dos rectas que se cortan, valen tambien cuatro rectos.*

Recíprocamente. *Si dos ángulos AOC y COF, que tienen un lado OC común y el mismo vértice O, son suplementarios, serán tambien adyacentes, ó lo que es igual, los lados AO y OF estan en línea recta.*

La prolongacion de AO formará con la OC un ángulo suplementario de AOC (teor. direc.), luego tiene que ser igual á COF (18, corol.); luego la prolongacion de AO es OF, ó AF es una línea recta.

20. *Se llaman ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE aquellos de los que el uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.*



AOC y DOB (fig. 12) son opuestos por el vértice; lo mismo que AOD y COB.

21. Teorema 3.º *Los ángulos AOC y DOB opuestos por el vértice son iguales.*

AOC tiene por suplemento á AOD, y DOB á AOD (18); luego AOC y DOB tienen el mismo suplemento AOD; luego son iguales (18, corol.).

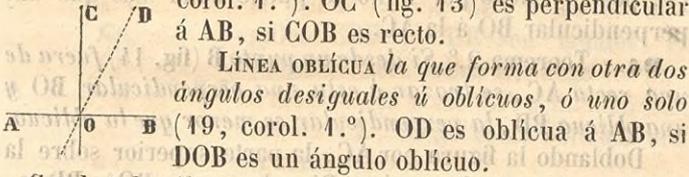
(*) Las líneas que entran en los enunciados de los teoremas y problemas se trazan completas generalmente, y de rayitas las auxiliares de la demostracion ó resolucion. Decimos *generalmente*, porque algunas veces se hace lo contrario, para evitar la repeticion de figuras ó para que estas resulten mas claras.

ARTICULO II.

Perpendiculares y oblicuas.

22. Se llama **LÍNEA PERPENDICULAR** la que forma con otra dos ángulos rectos, ó uno solo (49, corol. 1.º). OC (fig. 13) es perpendicular á AB, si COB es recto.

Fig. 13.



LÍNEA OBLICUA la que forma con otra dos ángulos desiguales ú oblicuos, ó uno solo (49, corol. 1.º). OD es oblicua á AB, si DOB es un ángulo oblicuo.

— Corol. 1.º Si una recta CO es perpendicular á otra AB, esta lo será á la primera; y si una recta DO es oblicua á otra AB, esta tambien lo será á aquella.

Corol. 2.º Si dos rectas AB y CO se cortan perpendicularmente, forman cuatro ángulos rectos.

23. Teorema 1.º Por un punto dado, no se puede trazar mas que una sola perpendicular á una recta.

Pueden ocurrir dos casos: 1.º Que el punto dado esté en la recta: 2.º que esté fuera de ella.

1.º Sea el punto O en la recta AB, decimos que no se puede levantar mas perpendicular que la OC; porque otra recta cualquiera OD forma con la AB los ángulos AOD y DOB, el primero mayor que el recto AOC, y el segundo menor que el recto COB; luego dichos ángulos AOD y DOB son desiguales, luego OD es oblicua á AB; luego por el punto O no se puede levantar mas que una sola perpendicular.

2.º Sea el punto B fuera de la recta AC (fig. 14), decimos que no se puede bajar mas perpendicular que la BO. Doblando la parte superior de la figura, por AC, sobre la inferior, el punto B vendrá á parar á B'; y como AOB es un ángulo recto, por hipótesis, AOB' lo será tambien; luego BB' es una línea recta (49, rec.). Si desde B se bajase otra perpendicular BD: uniendo D con B' y doblando otra

vez la parte superior de la figura sobre la inferior, BD coincidirá con B'D; luego el ángulo B'DO sería recto como su igual BDO; luego BDB' formaría una línea recta (49, rec.); luego habria dos rectas que tendrian dos puntos comunes B y B' sin coincidir, lo que es imposible (4, post.). Luego por B no se puede bajar mas que una perpendicular BO á la AC.

24. Teorema 2.º *Si desde un punto B (fig. 14) fuera de una recta AC, se trazan á esta una perpendicular BO y una oblicua BD, la perpendicular es menor que la oblicua.*

Doblando la figura por AC, la parte superior sobre la inferior, el punto B caerá en B', y las rectas BO y BD tomarán las posiciones de OB' y DB'.

El ángulo AOB es recto; luego AOB' lo será tambien, puesto que es el primero colocado en otra posicion despues de doblada la figura; luego BO y OB' forman una línea recta (49, rec.). Como por dos puntos B y B' no puede pasar mas que una recta (4, post.), BD y DB' forman una línea quebrada;

luego (4)

$$BB' < BDB':$$

y como BO es mitad de BB' y BD de BDB', se tendrá por fin

$$BO < BD.$$

Corol. *La distancia entre un punto y una recta se mide por la perpendicular trazada desde dicho punto á la recta.*

Recíprocamente. *Si una recta es la menor que se puede trazar entre un punto y otra recta, será perpendicular á esta.*

Porque si no sería oblicua, y entonces trazando una perpendicular sería menor que ella; lo que es contra la hipótesis.

25. Teorema 3.º Si desde un punto C , fuera de una recta AB (fig. 15), se trazan á esta una perpendicular CD y diferentes oblicuas CE , CF y CG : 1.º las oblicuas CE y CF , que se separan igualmente de la perpendicular, son iguales: 2.º de dos oblicuas CE y CG , la que mas se separa de la perpendicular es la mayor.

1.º Si $DE = DF$, doblando la figura CDF sobre CDE , sirviendo de eje CD , como los ángulos CDF y CDE son iguales, el punto F caerá sobre E ; luego los extremos de la recta CF coinciden con los de CE ; luego estas oblicuas son iguales.

2.º Si $DG > DF$, doblando la parte superior CDB de la figura sobre la inferior, el punto C vendrá á parar á C' , y las rectas CD , CF y CG quedarán representadas por $C'D$, $C'F$ y $C'G$: siendo recto el ángulo CDB , $C'DB$ tambien lo será (19, corol. 1.º); luego CC' será una línea recta (19, rec.), y CFC' y CGC' serán líneas quebradas (4, post.); luego $CGC' > CFC'$ (7): pero CG es mitad de CGC' y CF mitad tambien de CFC' , luego

$$CG > CF.$$

Si las oblicuas fuesen CG y CE , una á cada lado de la perpendicular, trazariamos la CF , de modo que $DF = DE$, y se demostraria, como acaba de hacerse, que $CG > CF$: mas CF y CE son iguales por el caso 1.º; luego $CG > CE$.

Recíprocamente. 1.º Si dos oblicuas son iguales, se separan igualmente de la perpendicular. 2.º Si dos oblicuas son desiguales, la mayor es la que mas se separa de la perpendicular (12).

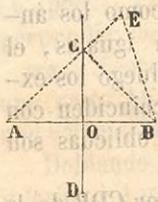
Corol. Desde un punto á una recta se pueden trazar dos rectas iguales, y de dos en dos todas las que se quiera; pero no se pueden trazar tres, ni mas de tres, iguales entre sí.

26. Teorema 4.º 1.º Un punto cualquiera C , situado

en la perpendicular CD (fig. 46) levantada en el punto medio O de una recta AB ; equidista de los extremos de esta. 2.º Un punto cualquiera E , situado fuera de la perpendicular, dista desigualmente de los extremos de la recta.

1.º Uniendo C con A y con B , las oblicuas CA y CB son iguales (25); luego C equidista de A y de B .

Fig. 46.



2.º Trazando las rectas EA , EB y CB se tendrá (4)

$$CE + CB > EB;$$

y como CA y CB son iguales, según la primera parte del teorema, substituyendo la primera de estas líneas por la segunda, resulta

$$CE + CA > EB,$$

$$EA > EB.$$

Recíprocamente. 1.º Un punto cualquiera equidistante de los extremos de una recta, está en la perpendicular levantada en su punto medio. 2.º Un punto cualquiera que no equidista de los extremos de una recta, está fuera de la perpendicular levantada en su punto medio (12).

Llámase LUGAR GEOMÉTRICO de ciertos puntos la línea ó figura que tiene una propiedad exclusiva á dichos puntos. Así la circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos, que en el mismo plano equidistan del centro.

Corol. 1.º El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de una recta es la perpendicular levantada en su punto medio.

Corol. 2.º Si una recta CD tiene dos puntos cualesquiera C y D , equidistantes de los extremos A y B de otra recta AB , le es perpendicular en su punto medio O .

Porque levantando en dicho punto medio O una perpendicular, pasará por los puntos C y D (corol. ant.); luego coincidirá con la recta CD (4, corol. 1.º); luego será perpendicular á la AB en su punto medio O .

ARTÍCULO III.

De las líneas paralelas.

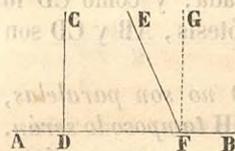
27. Se llaman **LÍNEAS PARALELAS** las rectas que estando en un mismo plano no se encuentran por mas que se prolonguen.

28. Teorema 1.º Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.

En efecto, si se encontrasen en un punto cualquiera, desde este punto habria trazadas dos perpendiculares á una recta, lo que es absurdo (23).

29. Postulado. Dos rectas, una CD perpendicular y otra EF (fig. 17) oblicua á una tercera AB , no son paralelas; y se encuentran hácia donde la oblicua EF forma con la AB el ángulo EFA agudo (*).

Fig. 17.



Corol. 4.º Por un punto F fuera de una recta CD no se puede trazar á esta mas que una paralela.

Porque trazando la AB perpendicular á CD , y la FG perpendicular á AB , CD y FG serán paralelas (28), y cualquiera otra recta FE será oblicua respecto de la AB (23); luego no será paralela á CD segun el postulado. Luego por F no puede trazarse mas que una paralela á CD .

Corol. 2.º Si una recta FE corta á una de dos paralelas GF , prolongada suficientemente tambien cortará á la otra CD .

Pues de lo contrario por F habria dos paralelas, EF y GF , á una misma recta CD ; lo que es imposible (corol. ant.).

Corol. 3.º Si una recta AB es perpendicular á una de dos paralelas CD , tambien lo será á la otra GF .

Porque si AB no fuese perpendicular á GF , le sería

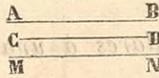
(*) Este es el célebre postulado de Euclides. Puede verse una demostracion de él en Vincent, *Cours de Géométrie élémentaire*, pág. 27.



oblicua, y esta tambien sería oblicua respecto de aquella; y por el punto F podriamos trazar una perpendicular FE á AB, la cual sería paralela á CD (28); luego por F se podrian trazar dos paralelas FG y FE á la CD, lo que es absurdo (corol. 4.^o).

Corol. 4.^o *Dos rectas AB y CD (fig. 48), paralelas á una tercera MN, son paralelas entre sí.*

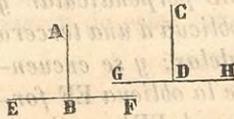
Fig. 48.



Porque si AB y CD se encontrasen, desde el punto en que lo hiciesen habria dos paralelas á MN, lo que es imposible (corol. 4.^o).

Corol. 5.^o *Dos rectas AB y CD, respectivamente perpendiculares á dos paralelas EF y GH, son paralelas entre sí (fig. 49).*

Fig. 49.



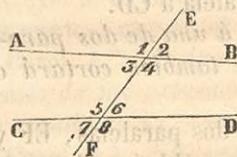
Si AB es perpendicular á EF tambien lo será á su paralela GH (corol. 3.^o) prolongada; y como CD lo es á esta por hipótesis, AB y CD son paralelas (28).

Corol. 6.^o *Si dos rectas AB y CD no son paralelas, sus perpendiculares respectivas EF y GH tampoco lo serán.*

Porque si EF y GH fuesen paralelas, sus perpendiculares respectivas AB y CD lo serían tambien (corol. 5.^o), lo que es contra la hipótesis.

30. *Se llama SECANTE ó TRANSVERSAL la recta EF que corta á otras dos AB y CD (fig. 20).*

Fig. 20.



La secante forma con las rectas que corta ocho ángulos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Reciben el nombre de ángulos INTERNOS los que estan formados dentro de las rectas, como 3, 4, 5 y 6, y EXTERNOS los que estan fuera, tales son 1, 2, 7 y 8.

Llamaremos ángulos ALTERNOS los que estan dentro de las rectas, uno con cada una, y á diferente lado de la secante, como 3 y 6, 4 y 5.

Ángulos CORRESPONDIENTES son los que estan uno dentro y otro fuera de las rectas, uno con cada una, y á un mis-

mo lado de la secante, como 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

31. Teorema 2.º Si dos rectas cortadas por otra forman con ella: 1.º ángulos alternos ó correspondientes iguales, ó internos de un mismo lado de la secante suplementarios, dichas rectas son paralelas: 2.º si forman ángulos alternos ó correspondientes desiguales, ó internos de un mismo lado no suplementarios, dichas rectas no son paralelas.

1.º *Alternos.* Supongamos que los ángulos AGH y DHE, ó 3 y 6 (fig. 24) sean iguales.

Por el punto O, medio de la GH, se traza la PQ perpendicular á CD. Hágase girar la figura OHQ, en el mismo plano, al rededor del punto O hasta que OH coincida con OG: el punto H caerá sobre G, por ser estas rectas iguales por construccion: la línea OQ coincidirá con OP, por ser los ángulos POG y HOQ iguales (20): la HQ coincidirá tambien con GP, por ser los ángulos PGO y QHO iguales por hipótesis; luego el ángulo OQH coincide con OPG: pero OQH es recto, luego OPG tambien lo será; luego AB y CD son perpendiculares á PQ, luego son paralelas (28).

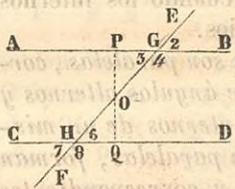
Si los ángulos alternos iguales fuesen 4 y H, como son respectivamente suplementarios de 3 y 6, estos serían tambien iguales (18, corol.), y el paralelismo de AB y CD se demostraria como acaba de verse.

Correspondientes. Si los ángulos iguales son 3 y 7, como 7 es igual al 6 por opuestos en el vértice, 3 y 6 serán iguales: pero estos son alternos; luego las rectas son paralelas.

Internos de un mismo lado. Supongamos que 4 y 6 sean suplementarios; como 3 y 4 lo son tambien (19), 3 y 6 serán iguales: pero estos son alternos; luego las rectas son paralelas.

2.º *Alternos desiguales.* Supongamos que los ángulos

Fig. 24.



AOF y DXE (fig. 22) sean desiguales, vamos á demostrar que AB y CD no son paralelas.

Porque si lo fuesen, trazando por O una recta MN, que formase el ángulo MOF igual á DXE, MN sería paralela á CD, segun la primera parte del teorema; luego por O se tendrían dos paralelas, AB y MN, á CD, lo que es imposible (29, corol. 4.º); luego AB no es paralela á CD.

De una manera análoga se demuestra que las rectas no son paralelas cuando los ángulos correspondientes son desiguales, ó cuando los internos de un mismo lado no son suplementarios.

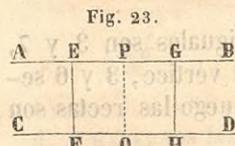
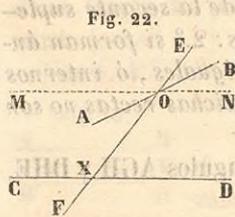
Recíprocamente. 1.º Si dos rectas son paralelas, cortadas por otra, forman con la secante ángulos alternos y correspondientes iguales, y ángulos internos de un mismo lado suplementarios. 2.º Si no son paralelas, forman con la transversal ángulos alternos y correspondientes desiguales, é internos de un mismo lado no suplementarios (12).

32. Teorema 3.º Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que dos de las paralelas sean perpendiculares á las otras dos; 2.º que les sean oblicuas.

1.º Sean las paralelas AB y CD, EF y GH (fig. 23).

Por el punto P, medio de EG, se traza la PO perpendicular á la AB, la cual lo será también á la CD (29, corol. 3.º). Doblando la figura POBD por PO sobre la POAC, PB coincidirá con PA por ser los ángulos BPO y APO rectos: por igual razón OD coincidirá con OC: el punto G caerá sobre E, por ser PG igual á PE por construcción; luego la línea GH coincidirá con EF, porque si no desde E habria dos perpendiculares á la CD, lo que es im-



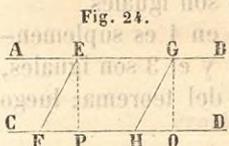
posible; luego la GH coincide en todos sus puntos con la EF, luego son iguales.

Lo mismo se demostraría que FH es igual á EG, trazando por el medio de GH una perpendicular á EF.

Corol. *Los puntos de una recta equidistan de su paralela.*

2.º Sean las paralelas AB y CD, EF y GH (fig. 24).

Por los puntos E y G se trazan las perpendiculares EP y GQ á la AB, que lo serán también á la CD (29, corol. 3.º), é iguales entre sí, segun la primera parte del teorema.



Superponiendo la figura HGQ sobre FEP, de manera que GQ y EP coincidan, GH caerá sobre EF, por ser los ángulos FEP y HGQ iguales por complementos de AEF y AGH, también iguales (31, réc.): QH caerá sobre PF por ser rectos los ángulos en P y en Q; luego el punto H caerá sobre F; luego los extremos de GH se confunden con los de EF, luego estas rectas son iguales.

Para demostrar que EG y FH son también iguales, se tiene, segun la primera parte del teorema,

$$EG = PQ:$$

pero resultando $QH = PF$, por la superposicion anterior, se tendrá también

$$\begin{aligned} QH + HP &= PF + HP, \\ PQ &= FH; \end{aligned}$$

de esta igualdad y de la primera resulta al fin

$$EG = FH.$$

33. Teorema 4.º 1.º *Los ángulos 1 y 3, ó 3 y O (figura 25), que tienen sus lados BA y OD, BC y OE, paralelos y dirigidos en el mismo sentido, ó BA y OF, BC y OG en sentido opuesto, son iguales.* 2.º *Los ángulos 3 y 5, que tienen sus lados paralelos, dos BA y OD dirigidos en*

el mismo sentido y otros dos BC y OG en sentido opuesto, son suplementarios.

1.º Los ángulos 4 y 2 son iguales por correspondientes: 3 y 2 lo son también por igual razón; luego el ángulo 4 es igual al 3.

Los ángulos O y 4 son iguales por opuestos en el vértice: el 4 es igual al 3 por lo que se acaba de demostrar; luego O y 3 son iguales.

2.º El ángulo en 4 es suplementario del 5, por adyacentes: pero el 4 y el 3 son iguales, por lo demostrado en la primera parte del teorema; luego 3 y 5 son suplementarios.

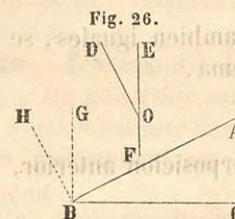
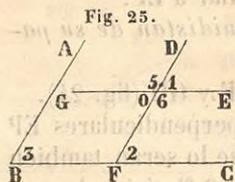
Corol. Los ángulos de lados paralelos son iguales ó suplementarios.

34. Teorema 5.º Los ángulos ABC y DOE ó DOF (figura 26), que tienen sus lados BC y EF, BA y DO perpendiculares, son iguales ó suplementarios.

Trácese por B las rectas BG y BH, respectivamente paralelas á EF y DO, y se tendrá que los ángulos HBA y GBC son rectos (29, 3.º); luego los ángulos HBG y ABC, que tienen el mismo complemento ABG, son iguales (18, corol.); pero HBG y DOE ó DOF tienen sus lados paralelos, luego son iguales ó suplementarios (33, corol.); luego

ABC y DOE ó DOF también lo serán.

Observacion. Son iguales los ángulos de la misma especie, como ABC y DOE, y suplementarios los de especie distinta, como ABC y DOF.



CAPÍTULO II.

De la circunferencia.



ARTÍCULO PRIMERO.

Propiedades de la circunferencia.

35. Teorema 1.º *Dos circunferencias de igual radio son iguales.*

Porque superpuestas de modo que coincidan los centros, coincidirán en todos sus puntos, pues de lo contrario unos puntos se separarían del centro mas que otros, lo que es imposible (9, corol.); luego dichas circunferencias son iguales.

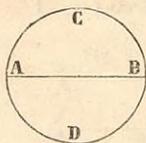
Observacion 1.ª Este racionio demuestra igualmente que si dos arcos de igual radio se superponen de modo que coincidan los centros de las circunferencias á que pertenecen y uno de sus extremos, coinciden en todos sus puntos si son iguales, y si son desiguales el menor se ajusta sobre el mayor, aunque no ocupe toda su extension; y que, si superpuestos de la misma manera coinciden sus extremos, se ajustan en todos sus puntos, y por lo tanto son iguales.

Observacion 2.ª El mismo racionio demuestra tambien que dos círculos de igual radio, superpuestos de modo que coincidan sus centros, coinciden en todos sus puntos, y por lo tanto son tambien iguales.

36. Teorema 2.º *El diámetro AB divide á la circunferencia en dos partes iguales, llamadas SEMICIRCUNFERENCIAS.*

Doblando la figura 27 por el diámetro AB, la parte ACB coincidirá con ADB; porque si no coincidiesen, las distancias del centro á la circunferencia no serian iguales, lo que es absurdo (9, corol.); luego las dos partes en que el diámetro divide á la circunferencia coinciden en todos sus puntos, luego son iguales.

Fig. 27.



Observacion. La superposicion anterior demuestra tambien que el diámetro divide al círculo en dos partes iguales, que reciben el nombre de *semicírculos*.

37. Teorema 3.º *El diámetro AB (fig. 28) es mayor que otra cuerda cualquiera CD.*

Fig. 28.



Trazando los radios OC y OD se tendrá (4)

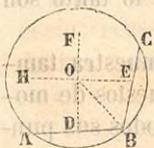
$$OC + OD > CD;$$

pero OC y OD componen el diámetro AB (10, corol. 1.º);

$$\text{luego } AB > CD.$$

38. Teorema 4.º *Por tres puntos A, B, C (fig. 29), que no estan en línea recta, puede pasar una circunferencia, pero nada mas que una sola: ó, lo que es igual, tres puntos que no estan en línea recta determinan la posición de una circunferencia.*

Fig. 29.



Uniendo estos puntos por las rectas AB y BC, y levantando en los puntos medios D y E de estas las perpendiculares DF y EH, estas perpendiculares se encuentran en un punto, tal como O (29, corol. 6.º).

Ahora, siendo DF el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y B (26, corol. 1.º), y EH el de los puntos equidistantes de B y C, el punto O, donde se cortan, será el único que en el mismo plano equidista de A, B y C; luego si se hace centro en O, y con un radio OB se traza

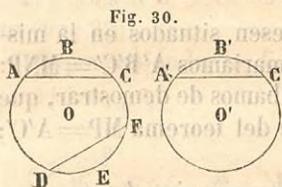
una circunferencia, pasará por los tres puntos A, B, C; y como en el mismo plano no hay otro punto equidistante de los tres dados, no se podrán trazar mas circunferencias diferentes que pasen por los mismos.

Corol. *Dos circunferencias no pueden tener mas que dos puntos comunes.*

Porque si tuviesen tres, las dos circunferencias se confundirían en una sola.

39. Teorema 5. *En circunferencias iguales, ó en una misma circunferencia: 1.º arcos iguales tienen cuerdas iguales: 2.º el mayor arco tiene la mayor cuerda.*

1.º Sean las circunferencias O y O' (fig. 30) iguales, é iguales tambien los arcos ABC

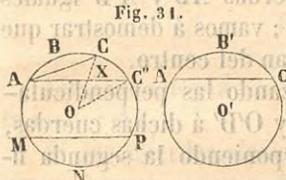


y A'B'C'; vamos á demostrar que las cuerdas AC y A'C' lo son del mismo modo.

Superponiendo la circunferencia O' sobre la O, de manera que el punto A' coincida con A, el punto C' caerá sobre C, por ser los arcos ABC y A'B'C' iguales; luego los extremos de las cuerdas se confunden, luego estas son iguales.

Si los arcos iguales fuésen ABC y DEF, situados en la misma circunferencia O, en la O' tomaríamos A'B'C' = DEF; de donde resultaria, por lo que se acaba de demostrar, que $DF = A'C'$ y $AC = A'C'$, luego $AC = DF$.

2.º Sean las circunferencias O y O' (fig. 31) iguales, y A'B'C' > ABC; vamos á demostrar que $A'C' > AC$.



Superponiendo la circunferencia O' sobre la O, de modo que el punto A' coincida con A, el punto C' caerá mas abajo de C en C'', por ser el arco A'B'C' mayor que el ABC por hipótesis;

luego la cuerda A'C' estará representada y será igual, según la primera parte del teorema, á la AC''.

Ahora trazando los radios OC y OC'' se tiene (4)

$$AX + XC > AC,$$

y

$$OX + XC'' > OC''.$$

Sumando estas desigualdades, resulta

$$AX + XC + OX + XC'' > AC + OC'',$$

ó

$$AC'' + OC > AC + OC''.$$

Suprimiendo en ambos miembros los radios OC y OC'' , se tiene

$$AC'' > AC,$$

y substituyendo en vez de AC'' su igual $A'C'$, resulta por fin

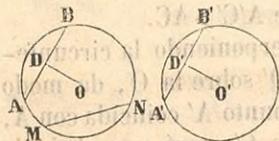
$$A'C' > AC.$$

Si los arcos $MNP > ABC$ estuviesen situados en la misma circunferencia O , en la O' tomaríamos $A'B'C' = MNP$: de donde resultaría, por lo que acabamos de demostrar, que $A'C' > AC$, y por la primera parte del teorema $MP = A'C'$; luego $MP > AC$.

Recíprocamente. *En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia: 1.º cuerdas iguales subtenden arcos iguales (*); 2.º la mayor cuerda subtende el mayor arco (12).*

40. Teorema 6.º *En circunferencias iguales, ó en una misma circunferencia: 1.º cuerdas iguales equidistan del centro; 2.º de dos cuerdas desiguales la mayor se aproxima mas al centro que la menor.*

1.º Sean las circunferencias O y O' (fig. 32) iguales, y las cuerdas AB y $A'B'$ iguales tambien; vamos á demostrar que equidistan del centro.



Trazando las perpendiculares OD y $O'D'$ á dichas cuerdas, y superponiendo la segunda fi-

(*) Toda cuerda subtende dos arcos, uno mayor y otro menor que la semicircunferencia (cuando no es diámetro). Si, como en el teorema del texto, se menciona solo uno de los arcos, se entiende siempre que se habla del menor que la semicircunferencia.

gura sobre la primera, de modo que O' y O coincidan, y que A' y A se confundan tambien, B' caerá sobre B por ser los arcos AB y $A'B'$ iguales (39): y la cuerda $A'B'$ se confundirá con AB ; luego $O'D'$ coincide con OD , pues de lo contrario desde O habria dos perpendiculares á la AB , lo que es absurdo (23); luego OD y $O'D'$ son iguales: pero estas líneas son las que miden las distancias de las cuerdas á los centros respectivos (24, corol.); luego dichas cuerdas equidistan del centro.

Si las cuerdas iguales estuviesen en una misma circunferencia como AB y MN ; la demostracion sería análoga á la empleada en igual hipótesis del teorema anterior.

2.º Sea $A'B' > AB$ en las circunferencias O' y O iguales (fig. 33).

Superponiendo la figura primera sobre la segunda, de modo que el centro O' coincida con O y el punto A' con A , el punto B' caerá en B'' , por ser el arco $A'B'$ mayor que AB (39, rec.): la cuerda $A'B'$ estará representada por su igual AB'' (39), y $O'D'$ por su igual OD'' , segun la primera parte de este teorema.

Ahora (24)

	$OC > OD''$;
pero	$OD > OC$,
luego con mas razon	$OD > OD''$,
ó, una vez que	$OD'' = O'D'$;
	$OD > O'D'$.

Luego la cuerda mayor $A'B'$ dista menos del centro que la menor AB .

Si las cuerdas desiguales estuviesen en una misma circunferencia, como AB y MN , la demostracion sería análoga á la empleada en igual hipótesis del teorema anterior.

Recíprocamente. *En circunferencias iguales ó en una*

misma circunferencia: 1.º cuerdas equidistantes del centro son iguales: 2.º de dos ó mas cuerdas, la que más se aproxima al centro es la mayor.

41. Teorema 7.º El diámetro AB, perpendicular á una cuerda CD (fig. 34), divide á la cuerda y á los arcos CBD y CAD, que esta subtiende, en dos partes iguales.

Doblando la parte ADB de la figura sobre la ACB, sirviendo de eje el diámetro AB, la línea XD tiene que caer sobre XC, por ser rectos los ángulos AXD y AXC: y siendo D punto de la circunferencia tiene que caer sobre C, que también es punto de la misma; luego XD se confunde con XC, el arco BD con CB y el AD con AC; luego la cuerda y los arcos quedan divididos en dos partes iguales.

Fig. 34.



Corol. Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen la circunferencia en cuatro partes iguales, llamadas CUADRANTES.

Observacion. La recta AB cumple con las condiciones siguientes:

- 1.ª Pasa por el centro del círculo.
- 2.ª Es perpendicular á la cuerda.
- 3.ª Divide á la cuerda en dos partes iguales.
- 4.ª Divide también en dos partes iguales el arco menor que la cuerda subtiende.
- 5.ª Divide igualmente al arco mayor en dos partes iguales.

Dos de estas condiciones determinan la posición de una recta (4, corol. 1.º y 23); luego

Si una recta cumple con dos cualesquiera de las condiciones precedentes, cumplirá también con las tres restantes.

Si las cuerdas desiguales estuviesen en una misma circunferencia como AB y MN, la demostración sería análoga á la empleada en igual hipótesis del teorema anterior. En circunferencias iguales ó en una

ARTÍCULO II.

Líneas secantes y tangentes á la circunferencia.

42. Teorema 1.º *Una recta no puede tener mas que dos puntos comunes con la circunferencia.*

Porque si tuviese tres, trazando por ellos radios se tendrían bajadas desde el centro á la recta tres rectas iguales, lo que es absurdo (25, corol.).

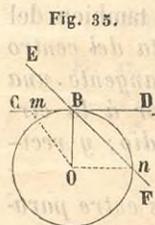
43. *Se llama SECANTE de una circunferencia una recta ilimitada, que tiene dos puntos comunes con ella; y TANGENTE una recta, tambien ilimitada, que tiene un solo punto comun con la circunferencia. El punto comun se llama punto de contacto.*

44. Teorema 2.º *Toda línea que pasa por el extremo exterior de un radio: 1.º si es perpendicular al radio será tangente á la circunferencia: 2.º si es oblicua será secante.*

1.º Si CD es perpendicular en el extremo B del radio OB (fig. 35), será tangente.

En efecto, siendo CD perpendicular á OB, OB lo será

á CD (22, corol. 1.º); luego otra recta cualquiera Om será oblicua á CD (23); luego será mas larga que la perpendicular OB (24); luego el punto m está fuera de la circunferencia: y como lo mismo se demuestra de otro punto cualquiera de la CD, resulta que esta no tiene mas que un punto común con la circunferencia, luego es tangente (43).



2.º Si la EF es oblicua á OB, será secante de la circunferencia.

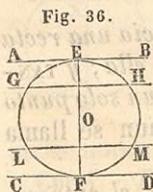
Siendo EF oblicua á OB, OB lo será á EF; luego desde O se puede trazar otra oblicua On igual con OB (25, corol. 1.º); luego el punto n se halla en la circunferencia (11, rec. 1.º); luego la recta indefinida EF tiene dos puntos comunes con la circunferencia, luego será secante (43).

Recíprocamente. *Toda línea que pasa por el extremo exterior de un radio: 1.º si es tangente será perpendicular al radio: 2.º si es secante será oblicua (12).*

Corol. 1.º *Por un punto de la circunferencia no se puede trazar mas que una tangente.*

Porque si se pudiesen trazar dos ó mas, habria en el extremo del radio dos ó mas perpendiculares á este; lo que es absurdo (23).

Corol. 2.º *Dos paralelas AB y CD (fig. 36) tangentes á una circunferencia O, tienen sus puntos de contacto E y F en los extremos de un mismo diámetro EF.*



Porque trazando por el punto de contacto E un diámetro, este será perpendicular á AB, segun el teorema recíproco anterior; luego tambien lo será á CD (29, corol. 3.º), luego pasará por el punto de contacto F; pues de lo contrario uniendo F con O, esta línea sería perpendicular á FD, segun el recíproco precedente, y por consiguiente desde el centro habria dos perpendiculares á la CD, lo que es imposible; luego los puntos E y F están en los extremos de un mismo diámetro.

Observacion. Del recíproco anterior, y tambien del número 24, se infiere que: *la secante dista del centro una magnitud menor que el radio, la tangente una cantidad igual al radio, y la línea exterior á la circunferencia una cantidad mayor que el radio; y recíprocamente (12).*

45. Teorema 3.º *Los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.*

Pueden ocurrir tres casos: 1.º que las paralelas sean dos secantes, ó dos cuerdas GH y LM: 2.º que sean una secante ó cuerda LM y una tangente AB: 3.º que sean dos tangentes AB y CD.

1.º Si se traza el diámetro EF perpendicular á GH se tendrá (44)

$$HMF = GLF$$

pero siendo EF perpendicular á GH, lo será también á LM (29, corol. 3.º); luego

$$MF = LF,$$

restando estas dos igualdades se tiene

$$HMF - MF = GLF - LF,$$

$$HM = GL.$$

2.º Trazando el diámetro EF, será perpendicular á AB (44, rec.), y por consiguiente á LM (29, corol. 3.º); luego

$$MHE = LGE.$$

3.º Por E se traza un diámetro, el cual pasará también por F (44, corol. 2.º); luego (36)

$$FMHE = FLGE.$$

46. Se dice que dos circunferencias son SECANTES una de otra cuando tienen dos puntos comunes, y TANGENTES cuando solo tienen uno.

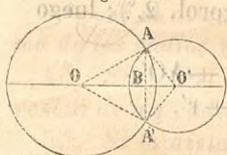
47. Teorema 4.º Si dos circunferencias O y O' (figura 37) tienen un punto común A fuera de la línea OO', que une los centros, serán secantes.

Bájese desde A una perpendicular AB sobre OO' y prolongúese de modo que A'B sea igual á AB, uniendo los puntos A y A' con O y O', las oblicuas OA y OA' son iguales (25); luego si A es punto de la circunferencia O, también lo será A' (11, rec. 1.º); por igual razón las oblicuas AO' y O'A' son iguales; luego siendo A punto de la circunferencia O', también A' lo será; luego las circunferencias O y O' tienen dos puntos comunes, luego son secantes (46).

Corol. 1.º La línea de los centros de dos circunferencias secantes es perpendicular á la cuerda común.

Corol. 2.º El punto de contacto de dos circunferencias tangentes está en la línea de los centros.

Fig. 37.



Porque si estuviese fuera serian secantes.

48. Teorema 5.º *Dos circunferencias, que estan en un mismo plano:*

1.º *Si son exteriores la una á la otra, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

2.º *Si se tocan exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios.*

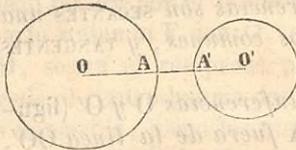
3.º *Si se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.*

4.º *Si se tocan interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

5.º *Si son interiores la una á la otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

1.º La simple inspeccion de la figura 38 nos da

Fig. 38.



$$OO' = OA + AA' + A'O';$$

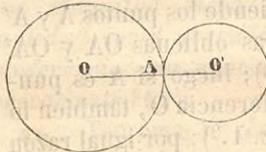
de donde $OO' > OA + O'A'$,

ó llamando d la distancia de los centros, r y r' los radios de las circunferencias O y O' ,

$$d > r + r'.$$

2.º El punto de contacto de estas circunferencias (figura 39) está en la línea de los centros (47, corol. 2.º); luego

Fig. 39.

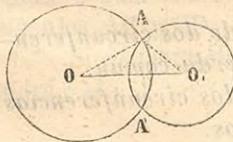


$$OO' = OA + AO',$$

$$\text{ó } d = r + r'.$$

3.º Los puntos de interseccion A y A' (fig. 40) estan fuera de la línea de los centros (47, corol. 2.º); luego los puntos O , A y O' no estan en línea recta; luego (4)

Fig. 40.



$$OO' < AO + AO';$$

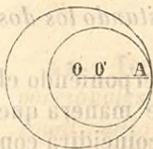
y tambien $OA < OO' + AO';$

de donde $OO' > OA - AO',$

ó reuniendo la primera y última desigualdad,

$$d < r + r', \quad d > r - r'.$$

- 4.º El punto de contacto de estas circunferencias (figura 41) está en la línea OO' (47, col. 2.º); luego



$$OO' = OA - O'A, \\ \text{ó} \quad d = r - r'.$$

- 5.º La simple inspección de la figura 42 nos da

Fig. 42.

$$OO' = OA - O'A' - A'A$$



sumando A'A con el segundo miembro, este crecerá, y por consiguiente

$$OO' < OA - O'A', \\ \text{ó} \quad d < r - r'.$$

Recíprocamente. *Dos circunferencias que están en un mismo plano:*

1.º *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, son exteriores la una á la otra.*

2.º *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, se tocan exteriormente.*

3.º *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia, se cortan.*

4.º *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios, se tocan interiormente.*

5.º *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios, son interiores la una á la otra (42).*

ARTÍCULO III.

Medida de los ángulos.

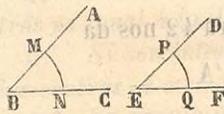
49. *Se llama ARCO CORRESPONDIENTE á un ángulo el arco interceptado entre sus lados, y trazado desde el vértice como centro.*

Corol. *El arco correspondiente á un ángulo recto es un cuadrante (41, corol.).*

50. Teorema 1.º — 1.º *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes trazados con el mismo radio son también iguales. 2.º Si dos ángulos son desiguales, el mayor tiene mayor arco correspondiente, estando los dos arcos trazados con el mismo radio.*

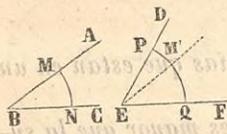
1.º Sean los ángulos B y E (fig. 43); superponiendo el primero al segundo, de manera que coincidan, el punto N coincidirá con Q y el M con P, por ser iguales por hipótesis los radios BN y EQ; luego el arco MN se confunde con PQ (35, corol. 1.º), luego son iguales.

Fig. 43.



2.º Sean los ángulos B y E (fig. 44); superpóngase el primero al segundo, de modo que coincidan los vértices y que BC caiga sobre EF, y el otro lado BA caerá en la parte interior del ángulo DEF, en EM' p. e., por ser este ángulo mayor que el en B por hipótesis: el punto N caerá sobre Q por la igualdad de los radios BN y EQ, y NM se ajustará con QP (35, obs. 1.ª). Ahora los arcos MN y M'Q son iguales por la primera parte del teorema; pero PQ es evidentemente mayor que M'Q; luego también será

Fig. 44.



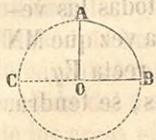
$PQ > MN$.

Recíprocamente 1.º *Si dos arcos trazados con el mismo radio son iguales, sus ángulos correspondientes también lo serán. 2.º Si dos arcos trazados con el mismo radio son desiguales, el mayor corresponde á mayor ángulo.*

Corol. *Si el arco AB (fig. 45), correspondiente á un ángulo AOB es un cuadrante, el ángulo será recto.*

Porque completando la circunferencia y prolongando BO hasta C, CAB será una semicircunferencia (36); pero

Fig. 45.



AB es un cuadrante por hipótesis, luego AC será otro cuadrante; luego los ángulos AOB y AOC son iguales, según el teorema anterior. Por otra parte AOB y AOC valen juntos dos rectos (19), luego cada uno de ellos valdrá un recto; luego AOB es un ángulo recto.

51. Teorema 2.º *Dos ángulos cualesquiera son proporcionales á sus arcos correspondientes trazados con igual radio.*

Se distinguen dos casos: 1.º que los arcos sean conmensurables: 2.º que sean inconmensurables (5).

1.º Sean MN y PQ conmensurables (fig. 46) y $Mm = Pp$ la unidad de medida comun. Supongamos que esta se puede colocar en MN tres veces y cinco en PQ, se tendrá

Fig. 46.



$$MN : PQ :: 3 : 5.$$

Trazando por los puntos de division de estos arcos y por los vértices líneas rectas, los ángulos ABC y DEF quedarán divididos el primero en cinco ángulos y el segundo en tres, todos iguales entre sí (50, rec.); luego

$$ABC : DEF :: 3 : 5;$$

esta proporción y la anterior tienen comun la razón 3:5; luego

(Alg. 128). $ABC : DEF :: MN : PQ,$

ó $\frac{ABC}{DEF} = \frac{MN}{PQ}.$

2.º Sean MN y PQ (fig. 47) inconmensurables; supongamos que el arco MN se divide en partes iguales entre sí, tan pequeñas como se quiera (lo que es posible, puesto que se puede suponer dividido MN en dos partes iguales, cada una de estas

Fig. 47.



en otras dos y así sucesivamente), y que una de estas partes sea Mm : colóquese esta medida sobre PQ todas las veces que se pueda, y quedará un resto Qq , una vez que MN y PQ son incommensurables: trácese luego la recta Eg .

Siendo los arcos MN y Pq commensurables, se tendrá, según la primera parte del teorema,

$$ABC : DEq :: MN : Pq,$$

$$\text{ó} \quad \frac{ABC}{DEq} = \frac{MN}{Pq}.$$

Comparando estos quebrados con los siguientes

$$\frac{ABC}{DEF} \text{ y } \frac{MN}{PQ},$$

se observará que los segundos (que están en columna) tienen el numerador MN común, y que el denominador Pq se puede aproximar á PQ todo lo que se quiera; porque qQ es menor que Mm , y esta parte puede ser mas pequeña que una cantidad cualquiera dada; luego $\frac{MN}{PQ}$ es el límite de $\frac{MN}{Pq}$ (*): por igual razón $\frac{ABC}{DEF}$ es el límite de $\frac{ABC}{DEq}$:

pero las cantidades variables son iguales, luego los límites también lo serán [(*) corol.]; luego

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{MN}{PQ},$$

$$\text{ó} \quad ABC : DEF :: MN : PQ.$$

(*) Se llama cantidad *variable* la que admite un número ilimitado de valores distintos, y *constante* la que no admite mas de uno.

Límite de una cantidad variable es otra constante, á la que la primera puede aproximarse cuanto se quiera; pero sin que jamás le sea igual. El límite es *superior* cuando creciendo la variable se aproxima á él, é *inferior* en el caso contrario.

Corol. Si dos cantidades variables x y z , permaneciendo iguales entre sí, se aproximan á sus límites respectivos A y B , estos serán iguales.

En efecto se puede suponer á x un valor que se aproxime á A todo lo que se quiera; luego también se puede suponer á z el mismo valor, puesto que x y z permanecen siempre iguales: luego A es también límite de z ; luego A y B son límites de z (la primera de estas cantidades por lo que se acaba de demostrar y la segunda por hipótesis): y como una misma variable z no puede aproximarse al mismo tiempo á dos límites diferentes, A es igual á B .

Observacion. La unidad de medida de los ángulos es un ángulo, y la de los arcos otro arco; porque la unidad de medida ha de ser siempre de la misma naturaleza que la cantidad que se mide: si, pues, tomamos por unidad de medida del ángulo ABC el DEQ, y por unidad de medida de los arcos el PQ, correspondiente á la unidad de medida angular, la igualdad anterior $\frac{ABC}{DEF} = \frac{MN}{PQ}$ nos dice que

La relacion de un ángulo con su unidad de medida es la misma que la de su arco correspondiente con su unidad de medida tambien.

En las mismas hipótesis anteriores la igualdad precedente se convierte en $\frac{ABC}{1} = \frac{MN}{1}$,

ó $ABC = MN;$

luego en igual sentido se puede decir que

La medida (6) de un ángulo es su arco correspondiente.

52. El ángulo tomado comunmente por unidad de medida es el ángulo recto, y como su arco correspondiente (49, corol.) es un cuadrante, el cuadrante será tambien la unidad de medida de los arcos. A fin de facilitar la determinacion de las relaciones de los arcos con el cuadrante, se divide este en 90 grados, de manera que la circunferencia tiene 360 de estos: cada grado se divide en 60 minutos, cada minuto en 60 segundos, etc.

Los grados, minutos, segundos, etc. se indican así para mayor concision,

$$42 \text{ grados } 12 \text{ minutos } 37 \text{ segundos} = 42^\circ 12' 37''.$$

Siendo la medida de un ángulo su arco correspondiente (obs. ant.) la misma denominacion de los arcos se aplica á los ángulos; así se dice que un ángulo tiene, p. e., $13^\circ 48' 14''$, cuando su arco correspondiente es de $13^\circ 48' 14''$; segun lo cual el ángulo recto tiene 90° , el agudo menos de 90° y el obtuso mas de 90° .

Modernamente se ha dividido la circunferencia tambien en cuatro cuadrantes, pero cada cuadrante en 100 grados,

cada grado en 100 minutos, cada minuto en 100 segundos, etc. Para distinguir los grados, minutos y segundos, etc. de una y otra division, llamaremos *sexagesimales* á los de la division antigua, y *centesimales* á los de la moderna (*). Cuando no se haga diferencia, entenderemos que se habla de la division antigua, que es todavía la mas usada, por las escasas ventajas y muchos inconvenientes que presenta esta variacion.

53. Aunque la medida de un ángulo es su arco correspondiente, conviene sin embargo muchas veces referir la medida de ciertos ángulos á arcos no trazados desde el vértice como centro, y de esto vamos á ocuparnos al presente.

El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia se llama INSCRIPTO si está formado por dos cuerdas, y SEMI-INSCRIPTO si por una tangente y una cuerda.

El ángulo cuyo vértice está dentro de la circunferencia se llama INTERIOR; y es CENTRAL cuando su vértice está en el centro, y EXCÉNTRICO en otro caso.

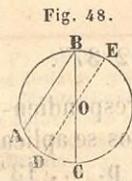
El ángulo cuyo vértice está fuera de una circunferencia, y cuyos lados tocan ó cortan á esta, se llama EXTERIOR.

54. Teorema 3.º *El ángulo inscripto tiene por medida la mitad del arco comprendido por sus lados.*

Se distinguen tres casos: 1.º que el centro de la circunferencia esté en uno de los lados: 2.º que esté comprendido entre ellos: 3.º que esté fuera del ángulo.

Sea el ángulo ABC, cuyo lado BC pasa por el centro O. Trazando el diámetro DE paralelo á AB, el ángulo DOC es igual á ABC por correspondientes: pero éste tiene por medida el arco DC; luego ABC también tendrá por medida el mismo arco DC.

Ahora el arco DC es igual á BE, por



(*) Los franceses llaman *dégrés* á los de la primera division, y *grades* á los de la segunda.

Es inútil advertir que por medio de una simple proporcion se reducen los grados, minutos, etc. de la division antigua á grados, minutos, etc. de la moderna; puesto que estas divisiones estan en la razon 90: 100 ó 9: 10.

arcos correspondientes, y trazados con el mismo radio, de los ángulos iguales (21) DOC y BOE : BE es también igual á AD (45); luego DC es igual á AD , luego DC es la mitad de AC . Luego el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AC comprendido entre sus lados.

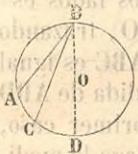
Fig. 49.



mitad de AC .

3.º Si el ángulo fuera ABC (fig. 50), cuyos lados AB y BC están á la izquierda del centro O , trazando el diámetro BD se tendría que ABC sería igual á ABD menos CBD ; pero ABD tiene por medida la mitad del arco ACD , y CBD la mitad de CD , según la primera parte del teorema; luego la medida de ABC será

Fig. 50.



$$\frac{1}{2} \text{ACD} - \frac{1}{2} \text{CD} = \frac{1}{2} (\text{ACD} - \text{CD}) = \frac{1}{2} \text{AC}.$$

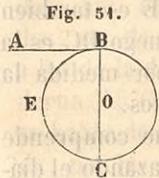
Corol. 1.º *Los ángulos inscritos, cuyos lados comprenden un mismo arco ó arcos iguales, son iguales.*

Corol. 2.º *Los ángulos inscritos, cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro ó comprenden una semicircunferencia, son rectos (50, corol.), los que comprenden un arco mayor obtusos, y los que menor agudos.*

55. Teorema 4.º *El ángulo semi-inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido por sus lados.*

También distinguiremos tres casos: 1.º que el centro de la circunferencia esté en la cuerda: 2.º que esté comprendido entre los dos lados: 3.º que esté fuera de ellos.

1.º Sea el ángulo ABC (fig. 51), cuyo lado BC pasa por el centro O, este ángulo será recto (44, rec.); luego tendrá por medida un cuadrante (49, corol. y 51, obs.), ó sea la mitad de la semicircunferencia BEC comprendida por sus lados.

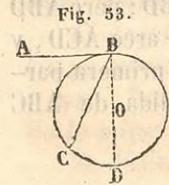


2.º Si el ángulo es ABC (fig. 52), cuyos lados comprenden el centro O, trazando el diámetro BD se tendrá que ABC es igual á ABD mas DBC: pero la medida de ABD es la mitad de BED, segun el primer caso del teorema, la de DBC es la mitad de DC (54); luego la de ABC será



$$\frac{1}{2} \text{BED} + \frac{1}{2} \text{DC} = \frac{1}{2} \text{BEDC}.$$

3.º Si el ángulo fuese ABC (fig. 53), cuyos lados estan á la izquierda del centro O, trazando el diámetro BD se tendrá que ABC es igual á ABD menos CBD: pero la medida de ABD es la mitad de BCD, segun el primer caso, y la de CBD la mitad de CD; luego la medida de ABC será



$$\frac{1}{2} \text{BCD} - \frac{1}{2} \text{CD} = \frac{1}{2} (\text{BCD} - \text{CD}) = \frac{1}{2} \text{BC}.$$

56. Teorema 5.º *El ángulo ABC (fig. 54), interior ex-céntrico, tiene por medida la semisuma de los arcos AC y ED comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de estos.*

Trazando la recta DF, paralela á EC, se tiene que los ángulos ABC y ADF son iguales por correspondientes; pero ADF tiene por medida la mitad del arco ACF (54); luego ABC tendrá la misma medida.



Ahora el arco ACF es igual á AC mas CF ó á AC mas ED, puesto que CF y

ED son iguales (45); luego la medida de ABC será

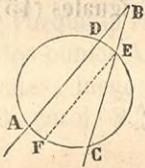
$$\frac{1}{2}(AC + ED).$$

57. Teorema 6.° *El ángulo exterior tiene por medida la mitad del arco cóncavo comprendido entre sus lados, menos la mitad del arco convexo comprendido entre los mismos (*)*.

Conviene también distinguir tres casos: 1.° que el ángulo esté formado por dos secantes: 2.° por una secante y una tangente: 3.° por dos tangentes.

1.° Sea el ángulo ABC (fig. 55), formado por dos secantes AB y BC: trazando la cuerda EF paralela á AB, se tendrá que el ángulo ABC es igual al FEC por correspondientes: pero este tiene por medida la mitad del arco FC, luego ABC tendrá la misma medida. Por otra parte, el arco AF es igual al DE (45) y por consiguiente $FC = AC - AF = AC - DE$. Luego la medida de ABC es, por último,

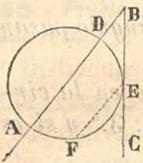
Fig. 55.



$$\frac{1}{2}(AC - DE) = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}DE.$$

2.° Si el ángulo es ABC (fig. 56), formado por la secante AB y la tangente BC, trazando por el punto de contacto E la recta EF, paralela á AB, se tendrá que el ángulo ABC es igual al FEC por correspondientes; mas FEC tiene por medida la mitad del arco FE (55), luego ABC tendrá la misma medida.

Fig. 56.



El arco FE es igual á AFE menos AF, ó

(*) Una curva cualquiera se llama *cóncava* respecto de un punto cuando sus puntos intermedios son los que más se alejan de dicho punto, y *convexa* cuando sucede lo contrario. El arco AC (fig. 55) es cóncavo respecto al punto B, y el DE convexo respecto al mismo punto.

á AFE menos DE, puesto que AF y DE son iguales (45); luego la medida de ABC es, por último,

$$\frac{1}{2}(AFE - DE) = \frac{1}{2}AFE - \frac{1}{2}DE.$$

Fig. 57.



3.º Siendo el ángulo ABC (fig. 57), cuyos lados son las tangentes AB y BC, se traza por uno de los puntos de contacto E la recta EF, paralela á AB, y se tendrá que el ángulo ABC es igual á FEC, por correspondientes: pero FEC tiene por medida la mitad del arcó FE, luego ABC tendrá la misma medida. El arco FE es igual á DFE menos DF, ó á DFE menos DE, una vez que DF y DE son iguales (45); luego la medida ABC será por fin

$$\frac{1}{2}(DFE - DE) = \frac{1}{2}DFE - \frac{1}{2}DE.$$

Observacion. Del corolario 2.º número 54, y de los teoremas de los números 56 y 57, se infiere que

Cuando los lados de un ángulo pasan por los extremos de un diámetro:

1.º Si el ángulo tiene su vértice en la circunferencia, es recto: 2.º si le tiene dentro es obtuso: 3.º y si le tiene fuera, agudo.

Recíprocamente. Cuando los lados de un ángulo pasan por los extremos de un diámetro:

1.º Si el ángulo es recto, tiene su vértice en la circunferencia: 2.º si es obtuso, le tiene dentro: 3.º y si es agudo, le tiene fuera (12).

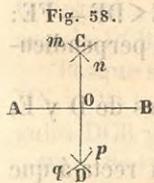
Corol. La circunferencia es el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos, cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro.

PROBLEMAS GRÁFICOS

relativos á los dos capítulos precedentes (*).

58. Problema 1.º Dividir una recta AB en dos partes iguales por medio de una perpendicular.

Se hace centro en el extremo A (fig. 58), y con un radio mayor que la mitad de AB, se trazan dos arcos, *mn* y *pq*: se hace centro en B y con el mismo radio se trazan dos arcos, que cortarán á los anteriores (48, rec. 3.º) en los puntos C y D: se unen estos puntos por una recta, la cual dividirá á la AB en dos partes iguales AO y OB.



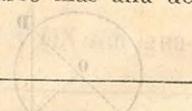
Porque la recta CD tiene los puntos C y D equidistantes de los puntos A y B de la recta AB, por radios de círculos iguales, luego le será perpendicular en su punto medio (26, corol. 2.º); luego

$$AO = OB.$$

Observacion. Cada una de las partes AO y OB puede dividirse del mismo modo en otras dos, cada una de estas en otras dos, y así sucesivamente; de manera que una recta puede dividirse por este medio en un número de partes iguales espresado por 2, 4, 8,, y en general por una potencia cualquiera entera de 2.

59. Problema 2.º Por un punto dado trazar una perpendicular á una recta (**).

Distinguiremos tres casos: 1.º que el punto esté fuera de la recta: 2.º que se halle en esta: 3.º que esté en uno de sus extremos, sin que pueda prolongarse mas allá de dicho extremo.



(*) Se llaman problemas *gráficos* los que se resuelven con la regla y el compás, á diferencia de los numéricos que se resuelven por el cálculo.

(**) Este problema se resuelve facilísimamente por medio de la *escuadra*, como se comprende con solo tenerla á la vista.

1.º Sea el punto A y la recta BC (fig. 59).

Hágase centro en A, y con un radio mayor que la distancia de A á BC trácese un arco, que cortará á la BC en dos puntos D y E (44, obs.): hágase centro en estos puntos y con el mismo radio, ú otro mayor que la mitad de ED, describanse otros dos arcos, que se cortarán en F (48, rec. 3.º), aun en la primera hipótesis, una vez que $DE < AD + AE$, de donde $DE < DF + FE$: únase el punto F con A, y la recta AF será la perpendicular pedida.

Porque tiene los puntos A y F equidistantes de D y E; luego le es perpendicular (26, corol. 2.º).

2.º Si el punto fuese O, y AB (fig. 60) la recta á que se ha de trazar la perpendicular, tomaríamos á la derecha é izquierda de O las distancias iguales OD y OC: haciendo centro en C, y con un radio mayor que la mitad de CD, describiríamos un arco por la parte superior ó inferior de la recta dada: haciendo centro en D, y con el mismo radio, trazaríamos otro arco que cortase á uno de los dos anteriores (48, rec. 3.º) en el punto E ó F; y uniendo uno de estos puntos con O, se tendrá la perpendicular pedida.

Porque tiene los puntos E y O, ó F y O equidistantes de C y D; luego es perpendicular á la CD (26, corol. 2.º) ó á la AB.

3.º Sea el punto B, extremo de la AB (fig. 61), que no puede prolongarse en este sentido.

Se elige un punto O fuera de la recta AB, tal que la circunferencia descrita desde él, con un radio OB, corte á la recta dada en un punto cualquiera C (para lo que basta que el ángulo OBA sea agudo): se traza el diámetro CD: se une el punto D con B, y la recta DB será la perpendicular pedida.

Porque el ángulo ABD es recto (54, cor. 2.º).

Fig. 59.

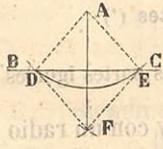


Fig. 60.

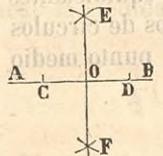
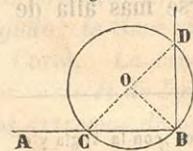


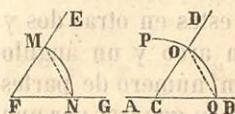
Fig. 61.



60. Problema 3.º En un punto C de una recta AB (fig. 62) formar un ángulo igual á otro dado EFG (*).

Haciendo centro en el vértice F del ángulo dado, con un radio cualquiera se traza el arco MN: haciendo centro en C, y con el mismo radio, se traza el arco indefinido PQ: se toma la cuerda MN y se aplica sobre PQ, que principiando en Q llegará á O, p. e.: por C y O se traza la recta DC, y el ángulo DCB será el pedido.

Fig. 62.



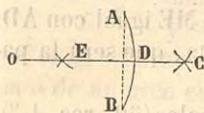
Porque siendo las cuerdas MN y OQ iguales, los arcos MN y OQ lo serán tambien (39, rec. 1.º); luego los ángulos DCB y EFG son iguales (30, rec. 1.º).

61. Problema 4.º Dividir un arco en dos partes iguales.

Distinguiremos dos casos: 1.º que sea conocido el centro del arco: 2.º que no lo sea.

1.º Si el arco es AB (fig. 63) cuyo centro está en O,

Fig. 63.

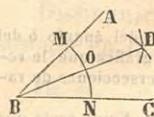


se traza la cuerda AB y desde O se le baja una perpendicular (59, 1.º) OC, y esta dividirá el arco en dos partes AD y BD iguales (41).

2.º Si el arco AB no tuviese el centro O determinado, se trazaria tambien su cuerda AB, y esta se dividiria en dos partes iguales por la perpendicular EC (58), la cual dividiria del mismo modo el arco dado en dos partes AD y BD iguales (41, obs.).

Corol. Para dividir un ángulo ABC (fig. 64) en dos

Fig. 64.



partes iguales, ó sea para trazar su bisectriz, se describe su arco correspondiente MN, y se divide en dos partes iguales (64, 1.º) por medio de la recta BD, la cual será la bisectriz de dicho ángulo.

Porque si los arcos MO y ON son igua-

(*) Este problema se resuelve con mucha facilidad por medio del *semicírculo* ó de la *falsa escuadra*, como se comprende sin mas explicacion que tener á la vista estos instrumentos.

les, los ángulos $\angle ABD$ y $\angle DBC$ lo serán también (50, rec. 1.º).

Observacion. Cada uno de los arcos MO y ON , ó cada ángulo $\angle ABD$ y $\angle DBC$, puede dividirse del mismo modo en otras dos partes iguales, cada una de estas en otras dos y así sucesivamente; de manera que un arco y un ángulo pueden dividirse por este medio en un número de partes iguales, expresado por $2, 4, 8, \dots$; y en general por una potencia cualquiera entera de 2 (*).

62. Problema 5.º Por un punto A fuera de una recta BC (figura 65) trazarle una paralela.

Se hace centro en A , y con un radio mayor que la distancia de A á dicha recta, se traza un arco MN , que cortará á la recta BC (44, obs.) en un punto cualquiera M : se hace centro en M y con el mismo radio se describe el arco AD : se toma sobre MN una parte ME igual con AD , y por los puntos A y E se traza una recta, que será la paralela pedida.

Porque los ángulos en 1 y en 2 son iguales (50, rec. 1.º); pero estos son alternos, luego BC y AE son paralelos (31, 4.º) (**).

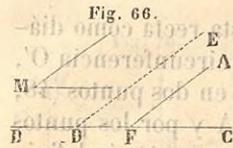
63. Problema 6.º Por un punto A fuera de una recta BC (figura 66) trazar otra recta AF , que forme con la primera un ángulo $\angle ABC$ igual á otro ángulo dado M .

(*) Es famoso en Geometría el problema de la *triseccion* del ángulo ó del arco, por no haberse hallado hasta ahora una construcción gráfica que le resuelva con facilidad y exactitud. Lacroix le resuelve por intersecciones de ramas de parábolas. (V. *Traité de Trigonométrie*, pág. 260.)

(**) Este problema puede resolverse también trazando por A una recta que corte á la BC , y formando los ángulos alternos ó correspondientes iguales, ó los externos de un mismo lado suplementarios: ó igualmente bajando desde A una perpendicular á BC , y trazando por A otra perpendicular á esta última (34 y 28); pero el medio mas exacto en la práctica es el que hemos empleado.

Con la escuadra se resuelve también fácilmente; y por medio de esta y la regla, siempre que sobre el papel deban trazarse muchas rectas paralelas entre sí.

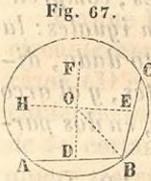
En un punto cualquiera D de la BC se forma el ángulo EDC igual al dado M (60): por A se traza la recta AF paralela á ED (62), y el ángulo AFC será el pedido.



Porque el ángulo EDC es igual al en M por construcción; pero el EDC es igual al AFC (31, rec. 1.º); luego los ángulos AFC y M serán también iguales.

64. Problema 7.º Describir una circunferencia que pase por tres puntos A, B, C (fig. 67), que no están en línea recta.

Unanse los puntos dados por medio de dos rectas AB y BC: divídanse estas en dos partes iguales por medio de perpendiculares (58): y haciendo centro en el punto O donde se encuentran, y con un radio igual á OB, se traza una circunferencia, la cual pasará también por los otros dos puntos A y C (38), y será la pedida.



Corol. Para determinar el centro de una circunferencia ó de un arco cualquiera, se toman tres puntos: se unen por medio de cuerdas: se dividen estas en dos partes iguales por perpendiculares, y donde estas se corten será el centro buscado. Las dos cuerdas pueden trazarse tomando cuatro puntos de la circunferencia ó del arco. En este caso las dos cuerdas no tienen un punto comun.

65. Problema 8.º Por un punto dado trazar una tangente á la circunferencia.

Distinguiremos dos casos: 1.º que el punto dado esté situado en la circunferencia: 2.º fuera de ella; porque si estuviese dentro, el problema sería evidentemente imposible.

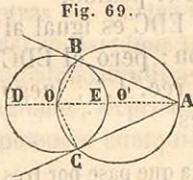
1.º Sea el punto A (fig. 68) situado en la circunferencia O.

Unase el punto O con A: trácese la perpendicular BC al extremo A del radio OA, y BC será la tangente pedida (44, 1.º).



2.º Sea el punto A (fig. 69) situado fuera de la circunferencia O.

Unase el punto O con A, y sobre esta recta como diámetro, describáse la circunferencia O', la cual cortará á la O en dos puntos (48, rec. 3.º) B y C: por A y por los puntos B y C se trazan las dos rectas indefinidas AB y AC, cada una de las cuales será la tangente pedida.



Porque trazando los radios OB y OC, los ángulos ABO y ACO son rectos (54, corol. 2.º); luego AB y AC son tangentes de la circunferencia O (44, 1.º).

Corol. *Las partes AB y AC de las tangentes, comprendidas entre el punto A y el de contacto, son iguales: la recta OA que pasa por el centro y por el punto dado, divide al ángulo BAO, formado por las tangentes, y al arco convexo BEC, comprendido entre las mismas, en dos partes iguales.*

En efecto, doblando la figura por la recta AD, la semicircunferencia ABO coincide con la ACO, y la EBD con la ECD (36); y como el punto B es común á las dos semicircunferencias superiores, tendrá que coincidir con el C donde se cortan las inferiores; luego AB coincide con AC, el ángulo BAO con el OAC y el arco BE con el EC. Luego

$$AB = AC, \quad BAO = OAC \quad \text{y} \quad BE = EC.$$

Recíprocamente. *Si una recta DA divide en dos partes iguales el ángulo BAC, formado por las tangentes á una circunferencia, pasará por el centro O de esta; pues de lo contrario, trazando por O y A una recta habria dos bisectrices de un mismo ángulo BAC, lo que es absurdo.*

Observacion. El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á los lados de un ángulo es la bisectriz de este.

66. *Problema 9.º* Describir una circunferencia O, tangente á tres rectas AB, BC y CD (fig. 70), que forman entre sí ángulos cualesquiera.

Trácese las bisectrices de los ángulos, las que se cortarán en un punto O ; porque siendo cada uno de los ángulos B y C menor que dos rectos (19, corol. 2.º), la suma de sus mitades OBC y OCB vale menos también que dos rectos, y por lo tanto OB y OC no son paralelas (34, 2.º): hágase centro en O , y con un radio OE igual á las distancias de O á una de las rectas CD , se describe la circunferencia pedida.

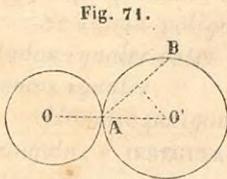
Porque BO es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á AB y BC (65, obs.): por igual razon CO es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á BC y CD ; luego el punto O , donde se cortan, será el centro de la circunferencia que se quiere trazar, y la distancia á una de las rectas dadas el radio de dicha circunferencia.

Observacion. Suponiendo prolongadas indefinidamente las rectas AB , BC y CD , se podrian trazar otras tres circunferencias, tangentes á las mismas rectas, cuyos centros serian O' , O'' y O''' .

67. Problema 10.º Trazar una circunferencia tangente á otra en un punto, y que pase por otro punto dado, interior ó exterior á ella.

Distinguiremos dos casos: 1.º que el punto dado (que no se halla en la circunferencia) sea exterior: 2.º que sea interior.

1.º Sea O (fig. 71) la circunferencia dada, A el punto de contacto y B el exterior por donde ha de pasar la circunferencia que va á describirse.



Trácese la recta AB y el radio OA , prolongándole indefinidamente en este sentido: divídase la AB en dos partes iguales por una perpen-

dicular, la que encontrará á la OA prolongada suficiente-
mente, si el ángulo BAO es oblicuo (29): desde el punto
 O' , donde se cortan, con el radio $O'A$ se describe una cir-
cunferencia, que será la pedida.

Porque pasando por A pasará también por B (26, 4.º), y
será tangente á la circunferencia O (48, rec. 2.º).

2.º Si el punto B (fig. 72) es interior, se ejecuta una
construcción análoga á la precedente como se ve en la fi-
gura.

Observacion. Si el ángulo BAO (figs. 71 ó 72) fuese
recto, el problema sería imposible.

Fig. 72.



Porque BO es el lugar de los centros de las
circunferencias tangentes á BC (55, obs.); por igual
razon CO es el lugar de los centros de las cir-
cunferencias tangentes á AC (55); luego el punto O , don-
de se cortan, será el centro de la circunferencia que se
quiere trazar, y la distancia OA una de las rectas dadas el
radio de dicha circunferencia.

Observacion. Suponiendo prolongadas indistintamen-
te las rectas AB , BC y CA , se podrían trazar otras tres
circunferencias tangentes á las mismas rectas, cuyos cen-
tros serian O' , O'' y O''' .

47. Problema 10.º Trazar una circunferencia tangente á otra
en un punto, y que pase por otro punto dado, interior ó exterior
á ella.

Distinguimos dos casos: 1.º que el punto dado (que
no se halla en la circunferencia) sea exterior; 2.º que sea
interior.

1.º Sea O (fig. 71) la circunferencia dada, A el punto
de contacto y B el exterior por don-
de ha de pasar la circunferencia que
se describe.

Trácese la recta AB y el radio
 OA , prolongándose indistintamente
en este sentido: divídase la AB en
dos partes iguales por una perpen-



CAPITULO III.

De los polígonos.

ARTÍCULO PRIMERO.

Definiciones preliminares.

68. Se llama **POLÍGONO** la porción de superficie plana comprendida por rectas. Estas rectas, los ángulos que forman y sus vértices, reciben los nombres de *lados*, *ángulos* y *vértices* del polígono.

Llábase **PERÍMETRO** del polígono la suma ó conjunto de sus lados.

DIAGONAL es la línea que une dos vértices no contiguos á un mismo lado, como AE (fig. 73).

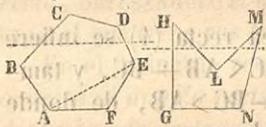
Un polígono se llama **CONVEXO** cuando no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos; y **CÓNCAVO** en el caso contrario. ABCDEF es un polígono convexo, y GHLMN cóncavo.

Cuando en lo sucesivo se nombre un polígono en general, se entenderá que se habla del convexo, que es el único de cuyas propiedades se ocupa la Geometría elemental.

Se llama **polígono EQUILÁTERO** el que tiene todos sus lados iguales entre sí, y **EQUIÁNGULO** el que tiene sus ángulos iguales.

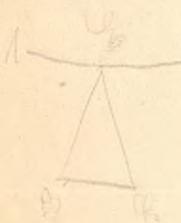
Llábase **polígono REGULAR** el que es equilátero y equiángulo, é **IRREGULAR** el que no reúne estas dos circunstancias.

Fig. 73.



69. Un polígono tiene evidentemente tantos lados como ángulos y como vértices; por razón, pues, del número de lados ó ángulos (*) se clasifican los polígonos de la manera siguiente:

- El polígono que tiene 3 lados se llama *Triángulo*.
 4. *Cuadrilátero*.
 5. *Pentágono*.
 6. *Exágono*.
 7. *Eptágono*.
 8. *Octógono*.
 9. *Enneágono*.
 10. *Decágono*.
 11. *Endecágono*.
 12. *Dodecágono*.
 15. *Pentadecágono*.



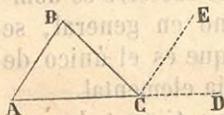
Los polígonos de diferente número de lados de los precedentes no tienen nombres especiales, y se les llama polígonos de 13, 20, 100, etc. lados.

ARTÍCULO II.

De los triángulos.

70. De la definición de la línea recta (4) se infiere que (fig. 74) $AC < AB + BC$, y también que $AC + BC > AB$, de donde $AC > AB - BC$; luego

Fig. 74.



Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

71. Teorema 4.º *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

(*) El cuadrilátero es el único polígono que toma el nombre del número de sus lados, los demás le toman del de sus ángulos.

Sea el triángulo ABC. Trazando por C una paralela á AB, se tendrá (31, rec. 1.º):

$$\begin{aligned} & \text{BAC} + \text{ACE} = 2\text{R}, \\ \text{ó} & \text{BAC} + \text{ACB} + \text{BCE} = 2\text{R} : \\ \text{pero (31, rec. 1.º)} & \text{BCE} = \text{CBA}; \\ \text{luego} & \text{BAC} + \text{ACB} + \text{CBA} = 2\text{R}. \end{aligned}$$

Corol. 1.º *Un ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos; y por consiguiente, si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, también tendrán igual el tercer ángulo (18, corol.).*

Corol. 2.º *El ángulo BCD, formado por un lado BC de un triángulo y la prolongación CD de otro lado, llamado ángulo EXTERNO, es igual á la suma de los dos internos A y B no adyacentes.*

Porque la suma de A y B tiene por suplemento el ángulo ACB (corol. ant.): pero BCD tiene también por suplemento á ACB (19); luego (18, corol.)

$$\text{BCD} = \text{A} + \text{B}.$$

Corol. 3.º *Si un triángulo tiene un ángulo recto ú obtuso, los demás serán agudos.*

Llábase triángulo RECTÁNGULO el que tiene un ángulo recto, OBTUSÁNGULO el que tiene un ángulo obtuso y ACUTÁNGULO el que tiene sus tres ángulos agudos.

En el triángulo rectángulo se llama HIPOTENUSA el lado opuesto al ángulo recto, y CATETOS los lados que forman dicho ángulo recto.

Corol. 4.º *Los dos ángulos agudos en el triángulo rectángulo son complementarios; y reciprocamente, si dos ángulos de un triángulo son complementarios, el triángulo será rectángulo.*

Corol. 5.º *Si desde un punto de una oblicua se baja una perpendicular sobre la recta á que lo es, la perpendicular caerá dentro del ángulo agudo.*

Porque si cayese dentro del ángulo obtuso, resulta—

ria un triángulo con un ángulo obtuso y otro recto, lo que es imposible (corol. 3.^o).

72. Teorema 2.^o *Dos triángulos son iguales: 1.^o si tienen sus tres lados respectivamente iguales: 2.^o si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido: 3.^o si tienen un lado igual contiguo á dos ángulos respectivamente iguales.*

1.^o Sean los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 75) en que suponemos $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $AC = A'C'$: superpongase el triángulo A'B'C' al ABC, de modo que A'C' coincida con su igual AC, y que el vértice B' caiga á diferente lado de la AC que el vértice B, en B'' p. e.: únanse los puntos B y B''.

La recta AC tiene el punto A equidistante de B y B'', por ser las rectas AB y AB'' iguales por hipótesis: por igual razon C equidista tambien de B y B''; luego la AC es perpendicular á la BB'', y la divide en dos partes iguales $OB = OB''$ (26, corol. 2.^o). Doblando, pues, esta figura por AC, la parte inferior sobre la superior, OB'' caerá sobre OB (23), y el punto B'' coincidirá con B; luego los tres vértices de los triángulos ABC y AB''C coinciden; luego tambien los lados y ángulos, luego son iguales: pero este representa al triángulo A'B'C'; luego

$$ABC = A'B'C'.$$

2.^o Si los triángulos fuesen los mismos, y se supudiese $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y el ángulo BAC igual al B'A'C', colocando el triángulo A'B'C' sobre el ABC, de modo que A'C' coincidiese con su igual AC, y el vértice B' cayese hacia la parte superior de AC como el vértice B, el ángulo B'A'C' coincidirá con su igual BAC y el punto B' caerá sobre B, por ser iguales tambien por hipótesis las rectas A'B' y AB; luego los tres vértices de los triángulos coinciden, luego son iguales.

3.º Sean los mismos triángulos, en que se supone $AC = A'C'$, el ángulo $BAC = B'A'C'$ y $ACB = A'CB'$: superponiendo dichos triángulos de manera que $A'C'$ coincida con su igual AC , $A'C'$ caerá sobre AB , por ser iguales los ángulos BAC y $B'A'C'$, y $B'C'$ caerá sobre BC por igual razón; luego el punto B' coincidirá con B (4, corol. 3.º); luego los tres vértices de los triángulos se confunden, luego son iguales.

Corol. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual y dos ángulos cualesquiera respectivamente iguales, con tal que estos tengan la misma colocación en los dos triángulos respecto al lado igual.*

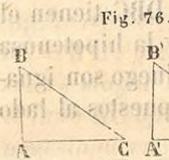
Porque teniendo dos ángulos respectivamente iguales, tienen el tercero también igual (74, cor. 1.º); luego si los ángulos respectivamente iguales tienen la misma colocación respecto al lado igual, tendrán necesariamente un lado igual á un lado contiguo á dos ángulos iguales.

73. Teorema 3.º *Dos triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 76) son iguales si tienen las hipotenusas BC y $B'C'$ iguales, y un cateto AB igual á otro cateto $A'B'$.*

Superpóngase el triángulo $A'B'C'$ al ABC , de modo que el cateto $A'B'$ coincida con su igual AB : el cateto $A'C'$ caerá sobre AC , por la igualdad de los ángulos rectos en A' y en A , y la hipotenusa $B'C'$ sobre BC , pues de lo contrario $B'C'$ y BC serían desiguales (25, 2.º), lo que es contra la hipótesis; luego el punto C' caerá sobre C , luego los triángulos son iguales.

Observación. En este caso de igualdad de triángulos, lo mismo que en los del número anterior, se notará que los ángulos que coinciden son los opuestos á lados iguales, y que los lados que coinciden también son los opuestos á ángulos iguales; de manera que *en triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.*

74. Los triángulos por razón de sus lados se dividen



tambien en ESCALENOS, que tienen sus tres lados desiguales, ISÓSCELES que tienen dos lados iguales, y EQUILÁTEROS que tienen los tres lados iguales entre si.

Se llama BASE de un triángulo uno cualquiera de sus lados; VÉRTICE el vértice del ángulo opuesto al lado tomado por base, y ALTURA la perpendicular bajada desde el vértice á la base ó á su prolongacion.

Si AC es la base del triángulo ABC (fig. 77), el punto B será el vértice y la perpendicular BD la altura.

Corol. En el triángulo rectángulo si un cateto es la base el otro será la altura.

Observacion. En el triángulo isósceles suele llamarse base al lado desigual.

75. Teorema 4.º En todo triángulo: 1.º á lados iguales se oponen ángulos iguales: 2.º al mayor lado se opone mayor ángulo.

1.º Sea el triángulo ABC (fig. 77) en que se supone $AB=BC$, y vamos á demostrar que el ángulo en A es igual al en C.

Bájese desde B una perpendicular BD sobre AC. Los triángulos rectángulos ABD y DBC tienen el cateto BD comun, y la hipotenusa AB igual á la hipotenusa BC por hipótesis; luego son iguales (73): luego los ángulos en A y en C, opuestos al lado comun, tambien lo serán (73, obs.).

2.º Sea el triángulo EFG (fig. 77); si $FG > FE$, el ángulo FEG será mayor que el G.

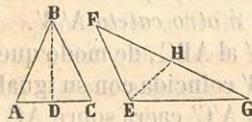
Tomando sobre FG una parte $FH=FE$ se tendrá, segun la primera parte del teorema, el ángulo

$FHE = FHE:$
pero (74, corol. 2.º) $FHE > G;$
luego $FHE > G:$

el ángulo FEH es una parte de FEG; luego con mayor razon

$FEG > G.$

Fig. 77.



Recíprocamente. *En todo triángulo: 1.º á ángulos iguales se oponen lados iguales: 2.º al mayor ángulo se opone el mayor lado* (12).

Corol. 1.º *Si un triángulo es isósceles, los ángulos contiguos á la base son iguales, y recíprocamente.*

Corol. 2.º *Si un triángulo es equilátero, será también equiángulo, y recíprocamente; luego el triángulo equilátero ó equiángulo es un polígono regular.*

Corol. 3.º *El mayor lado en el triángulo obtusángulo es el opuesto al ángulo obtuso, y en el rectángulo la hipotenusa.*

Observacion. La recta BD, trazada en un triángulo ABC isósceles, reúne las circunstancias siguientes:

- 1.ª *Pasa por el vértice del triángulo.*
- 2.ª *Es perpendicular á la base.*
- 3.ª *Divide la base en dos partes iguales.*
- 4.ª *Es bisectriz del ángulo en el vértice.*

Y como dos de estas condiciones determinan la posición de la recta, resulta que

Si una recta cumple con dos cualesquiera de las condiciones precedentes, cumplirá también con las dos restantes.

76. Teorema 5.º *Si dos triángulos ABC y A'B'C' (fig. 78) tienen dos lados respectivamente iguales $AB=AB'$, $BC=B'C'$, y el ángulo B comprendido por los dos primeros es mayor que el B' comprendido por los dos segundos, el lado AC opuesto al mayor ángulo es mayor que el A'C' opuesto al menor.*

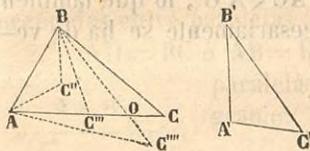
Superpóngase el triángulo A'B'C' al ABC, de modo que

A'B' coincida con su igual AB, y el lado B'C' caerá dentro del ángulo ABC, puesto que este ángulo es mayor por hipótesis que el A'B'C'.

Ahora el punto C' puede tomar tres posiciones distintas:

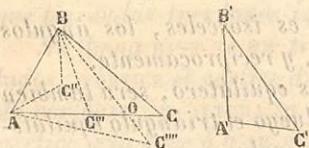
1.ª en C'' dentro del triángulo: 2.ª en C''' sobre el lado AC: 3.ª en C'''' fuera del triángulo.

Fig 78.



1.^a Si C' cae en C'' se tendrá (7)

Fig 78.



$$AC + CB > AC'' + BC'';$$

y como $CB = BC''$ por hipótesis, resulta

$$AC > AC'' \quad \text{ó} \quad AC > A'C'.$$

2.^a Si el punto C' cayese en C'' se tendría (Arit. 7, 3.^o)

$$AC > AC''' \quad \text{ó} \quad AC > A'C'.$$

3.^a Si dicho punto C' cae en C'''' se tiene (7)

$$AO + OC'''' > AC'''' \quad \text{y} \quad BO + OC > BC;$$

sumando estas desigualdades, resulta

$$AO + OC'''' + BO + OC > AC'''' + BC,$$

$$\text{ó} \quad AC + BC'''' > AC'''' + BC;$$

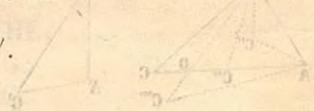
y como $BC = BC''''$ por hipótesis, resulta al fin

$$AC > AC'''' \quad \text{ó} \quad AC > A'C'.$$

Recíprocamente. Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen dos lados respectivamente iguales $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y el tercer lado AC es mayor que el tercer lado $A'C'$, el ángulo B , opuesto al mayor lado, es mayor que el ángulo B' opuesto al menor.

En efecto, si B no fuese mayor que B' , sería $B = B'$ ó $B < B'$; pero si $B = B'$ los triángulos serían iguales (72, 2.^o), y por consiguiente $AC = A'C'$, contra la hipótesis: si $B < B'$, según el teorema directo, sería $AC < A'C'$, lo que también es contra la hipótesis; luego necesariamente se ha de verificar que

$$B > B'.$$



ARTÍCULO II.

De los cuadriláteros.

77. Los cuadriláteros se dividen en TRAPEZOIDES, que no tienen ningún lado paralelo á otro, como ABCD (fig. 79): TRAPECIOS, que tienen dos lados paralelos y otros dos no,

Fig. 79.



como EFGH: y PARALELOGRAMOS, que tienen sus lados paralelos dos á dos, como MNPQ.

Se llaman BASES del trapecio los lados paralelos, y ALTURA la perpendicular bajada de una de las bases á la otra, ó sea la distancia entre estas.

En el paralelogramo recibe el nombre de base uno cualquiera de sus lados, y de altura la perpendicular trazada desde el lado opuesto á la base á esta ó á su prolongacion, ó sea la distancia entre la base y su lado opuesto.

78. Teorema 1.º Los ángulos de un cuadrilátero ABCD (fig. 79) valen juntos cuatro ángulos rectos.

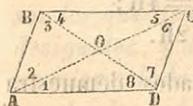
Trazando la diagonal BD queda dividido en dos triángulos, cuyos ángulos componen los del cuadrilátero propuesto: pero los ángulos de cada triángulo valen juntos dos rectos (74); luego los del cuadrilátero valdrán cuatro.

79. Teorema 2.º En todo paralelogramo ABCD (figura 80): 1.º los lados opuestos AD y BC, AB y DC son iguales: 2.º dos lados opuestos AD y BC ó AB y DC son iguales y paralelos: 3.º los ángulos opuestos A y C, B y D son también iguales: 4.º las diagonales se dividen mutuamente en dos partes AO y OC, BO y OD iguales entre sí.

1.º $AD = BC$ y $AB = DC$ por partes de paralelas comprendidas entre paralelas (32).

2.º $AD = BC$ ó $AB = DC$ por el caso anterior, y son paralelas por la definición del paralelogramo (77).

Fig. 80.



3.º $A = C$ y $B = D$, porque estos ángulos tienen sus lados paralelos y dirigidos en sentido opuesto (33, 1.º).

4.º Los triángulos AOB y COD tienen $AB=CD$, por la primera parte del teorema: el ángulo en 2 igual al en 6, por alternos entre las paralelas AB y CD cortadas por la transversal AC (31, rec. 1.º): el 3 igual al en 7 por la misma razón; luego dichos triángulos son iguales (72, 3.º); luego (73, obs.)

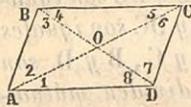
$$AO=OC \quad \text{y} \quad OB=OD.$$

Recíprocamente. *Todo cuadrilátero ABCD será paralelógramo: 1.º si los lados opuestos AB y DC, AD y BC son iguales: 2.º si dos lados AD y BC ó AB y DC son iguales y paralelos: 3.º si los ángulos opuestos A y C, B y D son iguales: 4.º si las dos diagonales se dividen mutuamente en dos partes iguales $AO=OC$ y $BO=OD$.*

1.º Trácese una de las diagonales AC, y los triángulos ABC y ACD tienen AC comun, $AB=DC$ y $AD=BC$ por hipótesis; luego son iguales (72, 4.º); luego los ángulos 2 y 6 son iguales (73, obs.); luego AB y CD son paralelas (31, 4.º). La igualdad de los mismos triángulos nos da la de los ángulos 4 y 5, y esta el paralelismo de AD y BC; luego los cuatro lados del cuadrilátero son paralelos dos á dos, luego es un paralelógramo.

2.º Si AB y CD son iguales y paralelos, trazando la diagonal AC, los triángulos ABC y ACD tienen AC comun, $AB=CD$ por hipótesis, y el ángulo 2 igual al 6 por alternos entre las paralelas AB y CD, luego dichos triángulos son iguales (72, 2.º); luego los ángulos 4 y 5 son también iguales (73, obs.), luego AD y BC son también paralelas (31, 4.º); luego el cuadrilátero será un paralelógramo.

Fig. 80.



3.º Si los ángulos $A=C$ y $B=D$, como (78) $A+B+C=4R$, se tendrá $2A+2B=4R$ y $2A+2D=4R$; de donde $A+B=2R$ y $A+D=2R$.

La primera de estas últimas igualdades demuestra

(31, 1.º) que AD y BC son paralelas, y la segunda que AB y CD lo son tambien; luego el cuadrilátero es un paralelógramo.

4.º Siendo $AO = OC$ y $BO = OD$, como el ángulo AOB es igual á COD por opuestos por el vértice, los triángulos AOB y COD son iguales (72, 2.º); luego los ángulos 2 y 6 son tambien iguales (73, obs.); luego AB y CD son paralelas (31, 1.º).

La igualdad de los mismos triángulos nos da tambien la igualdad de los ángulos 1 y 5, y esta el paralelismo de AD y BC; luego el cuadrilátero es un paralelógramo.

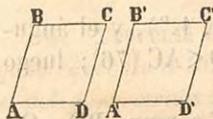
Corol. 1.º *La diagonal de un paralelógramo le divide en dos triángulos iguales.*

Porque tienen un lado comun y los otros dos respectivamente iguales.

Corol. 2.º *Dos paralelógramos ABCD y A'B'C'D' (figura 81) son iguales, si tienen un ángulo igual $A = A'$, formado por dos lados respectivamente iguales $AB = A'B'$ y $AD = A'D'$.*

Porque superponiendo el segundo de estos paralelógramos al primero, de modo que A'D' coincida con su igual AD, A'B' caerá sobre AB, por ser $A = A'$ por hipótesis, y el punto B coincidirá con B' por ser tambien $A'B' = AB$: B'C' caerá sobre BC por la igualdad de los ángulos B' y B, como suplementos de los iguales A' y A; y el punto C' coincidirá con C, una vez que $B'C' = BC$, como iguales respectivamente, segun la primera parte del teorema directo, con A'D' y AD iguales entre sí por hipótesis; luego los vértices de los dos paralelógramos se confunden, luego son iguales.

Fig. 81.



§ 80. Los paralelógramos se dividen en ROMBOIDES, que son los que tienen los lados que forman un mismo ángulo desiguales, y desiguales tambien los ángulos adyacentes á un mismo lado, como ABCD (fig. 82): ROMBOS, que tienen iguales los lados que forman un mismo ángulo (y por con-

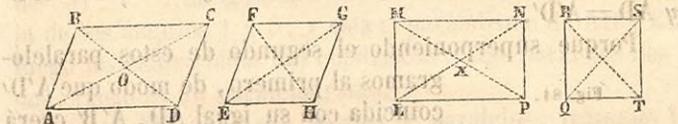
siguiente todos sus lados iguales entre sí), y los ángulos adyacentes á un mismo lado desiguales, como EFGH: RECTÁNGULOS que tienen los lados que forman un mismo ángulo desiguales, y los ángulos adyacentes á un mismo lado iguales (y por consiguiente todos rectos) como LMNP: CUADRADOS, que tienen los lados que forman un ángulo iguales, é iguales también los ángulos adyacentes á un mismo lado (y por consiguiente todos sus lados y todos sus ángulos iguales entre sí) como QRST.

(1) Corol. El cuadrado es un polígono regular.

81. Teorema 4.º 4.º Las diagonales del romboide son desiguales y oblicuas entre sí: 2.º las del rombo desiguales y perpendiculares: 3.º las del rectángulo iguales y oblicuas: 4.º las del cuadrado iguales y perpendiculares.

1.º Sea el romboide ABCD (fig. 82): los triángulos ABD

Fig. 82.



y ADC tienen AD común, $AB = CD$ (79, 1.º), y el ángulo comprendido $\angle BAD < \angle ADC$, luego $BD < AC$ (76); luego las diagonales son desiguales.

Los triángulos BOC y COD tienen OC común, $BO = OD$ (79, 4.º), y $BC > CD$ por la definición del romboide, luego el ángulo $\angle BOC > \angle COD$ (76, rec.); luego las diagonales son oblicuas.

2.º En el rombo EFGH, los triángulos FEH y EHG tienen EH común, $EF = GH$ por la definición, y el ángulo $\angle E < \angle H$; luego $EG > FH$ (76); luego las diagonales son desiguales.

Por la definición del rombo se tiene también $EF = EH$ y $FG = GH$; luego EG es perpendicular á FH (26, corol. 2.º).

3.º En el rectángulo LMNP resultan los triángulos MLP y LPN iguales, por tener dos lados respectivamente iguales

é igual el ángulo comprendido: de donde $LN = MP$; luego las diagonales son iguales.

Los triángulos MXN y NXP tienen XN común, $MX = XP$ (79, 4.º), y $MN > NP$, por la definición del rectángulo; luego el ángulo $MXN > NXP$ (76, rec.); luego las diagonales LN y MP son oblicuas.

4.º En el cuadrado $QRST$ resultan iguales los triángulos RQT y QTS , por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego $RT = QS$; luego las diagonales son iguales.

Por la definición del cuadrado resulta también $QR = QT$ y $RS = ST$; luego QS es perpendicular á RT (26, corol. 2.º).

Recíprocamente. *Si las diagonales de un paralelogramo: 1.º son desiguales y oblicuas, el paralelogramo será romboide: 2.º si son desiguales y perpendiculares, será rombo: 3.º si son iguales y oblicuas, será rectángulo: 4.º si son iguales y perpendiculares será un cuadrado* (12).

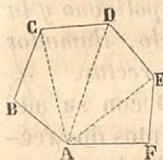
ARTÍCULO III.

De los polígonos en general.

82. Teorema 1.º *La suma de los ángulos de un polígono equivale á tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*

Sea el polígono $ABCDEF$ (fig. 83); si desde uno de sus vértices A se trazan diagonales á los demás, quedará el polígono dividido en tantos triángulos como lados tiene menos dos; porque los triángulos externos ABC y AEF tienen cada uno por lados dos del polígono, y los restantes cada uno tiene un solo lado del mismo polígono: los ángulos de los triángulos componen los del polígono: pero los de cada triángulo valen dos rectos (74); luego los del polígono equivaldrán á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

Fig. 83.



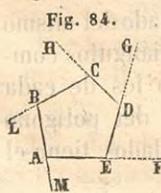
Observacion. Llamando *S. i.* á la suma de los ángulos (internos) del polígono, y *n* al número de lados ó de ángulos, el teorema precedente quedará traducido en la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} \text{ó} \quad S. i. &= 2R(n-2), \\ &S. i. = 2nR - 4R. \end{aligned}$$

Corol. Como los ángulos de un polígono regular son iguales entre sí, para hallar el valor de uno de estos ángulos, no hay mas que dividir el segundo miembro de cualquiera de las fórmulas anteriores por *n*, número de ángulos ó lados. Así

$$\begin{aligned} \text{Ángulo interno de polígono regular} &= \frac{2R(n-2)}{n}; \text{ de donde} \\ \text{Ángulo de triángulo equilátero} &= \frac{2R}{3} = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \times 90^\circ = 60^\circ. \\ \text{Ángulo de cuadrado.} &= \frac{4R}{4} = R = \dots 90^\circ. \\ \text{Ángulo de pentágono regular} &= \frac{6R}{5} = \frac{6}{5}R = \dots 108^\circ. \\ \text{Ángulo de exágono regular} &= \frac{8R}{6} = \frac{4}{3}R = \dots 120^\circ. \\ \text{Ángulo de heptágono regular} &= \frac{10R}{7} = \frac{10}{7}R = 128,57\dots \\ \text{Ángulo de decágono regular} &= \frac{16R}{10} = \frac{8}{5}R = \dots 144^\circ. \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

83. Teorema 2.º *La suma de los ángulos DEF + CDG + etc. (fig. 84), formados por los lados del polígono y la prolongacion de los mismos en igual sentido, llamados ángulos EXTERNOS, es igual á cuatro ángulos rectos.*



Cada ángulo interno AED con su adyacente externo DEF valen juntos dos rectos; luego la suma de los ángulos internos y externos será

$$\begin{aligned} S. i. + S. e. &= 2nR; \\ \text{pero } S. i. &= 2nR - 4R \text{ (82, obs.)}; \end{aligned}$$

luego restando estas igualdades resulta

$$S. e. = 2nR - (2nR - 4R) = 4R.$$

Corol. 1.º *Un polígono no puede tener mas de tres ángulos agudos.*

Porque si tuviese cuatro ó mas, la suma de los ángulos externos valdria mas de cuatro rectos.

Corol. 2.º *Como los ángulos externos de los polígonos regulares son iguales por suplementos de ángulos iguales, se tendrá*

$$\text{Ángulo externo de triángulo equilátero} = \frac{4}{3} R = 120^\circ.$$

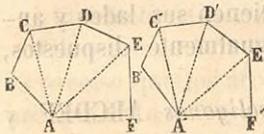
$$\text{Ángulo externo de cuadrado} \dots \dots \dots = \dots R = 90^\circ.$$

$$\text{Ángulo externo de pentágono regular} = \frac{4}{5} R = 72^\circ.$$

etc.

84. Teorema 3.º *Si dos polígonos ABCDEF y*

Fig. 85.



A'B'C'D'E'F' (fig. 85) *tienen sus lados* $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, etc., *y sus ángulos* $A = A'$, $B = B'$, etc. *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales.*

Superponiendo el segundo polígono sobre el primero, de modo que AB coincida con su igual $A'B'$, BC caerá sobre $B'C'$, por ser los ángulos en B y B' iguales, y el punto C coincidirá con C' , por ser también $BC = B'C'$. Del mismo modo se demuestra que todos los vértices coinciden; luego los polígonos son iguales.

85. Teorema 4.º *Si dos polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' se componen del mismo número de triángulos* ABC y $A'B'C'$, ACD y $A'C'D'$, etc., *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, los polígonos son iguales.*

La igualdad de los triángulos ABC y $A'B'C'$ nos da $AB = A'B'$, $BC = B'C'$; la de los triángulos ACD y $A'C'D'$ nos da también $CD = C'D'$; y como lo mismo se deduce respecto de los demás lados, resulta que los polígonos tie-

nen sus lados respectivamente iguales é igualmente dispuestos.

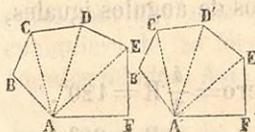
De la igualdad de los mismos triángulos ABC y A'B'C' se deduce igualmente que el ángulo

$$B = B',$$

y tambien

$$BCA = B'C'A':$$

Fig. 83.



la de los triángulos ACD y A'C'D' nos da del mismo modo

$$\text{ángulo } ACD = A'C'D'.$$

Sumando estas dos igualdades resulta

$$BCA + ACD = B'C'A' + A'C'D',$$

ó

$$C = C'.$$

Como lo mismo se demuestra de los demás ángulos, se deduce que estos son respectivamente iguales en los polígonos dados.

Luego los polígonos propuestos tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, luego son iguales (84).

Recíprocamente. *Si dos polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' son iguales, se pueden descomponer en el mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Trazando desde A y A' diagonales á los otros vértices, resulta que los triángulos ABC y A'B'C' tienen $AB = A'B'$ y $BC = B'C'$ por lados de polígonos iguales, y el ángulo $B = B'$ por la misma razón; luego dichos triángulos son iguales (72, 2.º).

La igualdad de estos triángulos nos da $AC = A'C'$ y el ángulo

$$ACB = A'CB':$$

y como los ángulos igualmente dispuestos del polígono son iguales, se tiene tambien

$$C = C';$$

restando de esta igualdad la anterior, resulta

$$ACD = A'C'D'.$$

Por otra parte $CD = C'D'$ por la igualdad de los polígonos.

Luego los triángulos ACD y $A'C'D'$ son iguales (72, 2.^o).

Del mismo modo se demuestra la igualdad de los demás triángulos; luego el teorema recíproco es verdadero.

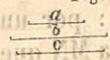
PROBLEMAS GRÁFICOS

relativos al capítulo que precede.

86. Problema 1.^o Dados los tres lados a , b , c , construir un triángulo.

Tómese una recta $AC = b$ (fig. 86), y haciendo centro en los extremos A y C con radios respectivamente iguales á c y a , se trazan dos arcos que se cortarán en B ; uniendo este punto con A y con C , se tendrá el triángulo ABC , que es el pedido.

Fig. 86.



En efecto $AC = b$, $AB = c$ y $BC = a$.

Observación 1.^a Para que este problema sea posible, es preciso que los arcos se corten, lo que sucederá siempre que $b < a + c$ y $b > a - c$ (48, rec. 3.^o), cuyas condiciones se hallan incluidas en la siguiente:

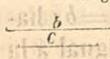
Siempre que la mayor de las líneas dadas, sea menor que la suma de las otras dos, el problema es posible.

Observación 2.^a Si se tratase de construir un triángulo isósceles, bastaría conocer los dos lados desiguales; y si equilátero, su lado.

87. Problema 2.^o Dados dos lados b y c , y el ángulo comprendido A , construir el triángulo.

Fórmese un ángulo DAE (fig. 87) igual al dado A (60): sobre sus lados tómense las partes AC

Fig. 87.



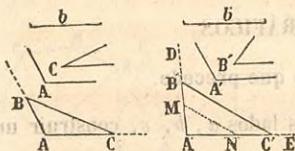
y AB respectivamente iguales á b y c ; únense los puntos B y C , y el triángulo ABC será el pedido. Porque $AC = b$, $AB = c$ y $BAC = A$.

88. Problema 3.º Dado un lado y dos ángulos, construir el triángulo.

Distinguiremos dos casos: 1.º que los ángulos dados sean adyacentes al lado conocido: 2.º que uno sea adyacente y otro opuesto.

1.º Sea el lado b y A y C (fig. 88) los ángulos adyacentes. Tómesese en una

Fig. 88.



recta cualquiera una parte $AC = b$: fórmense en los extremos A y C de esta ángulos respectivamente iguales á los dados A y C (60), y el triángulo ABC será el pedido.

2.º Si fuese el lado b' y los ángulos A' y B' , de los que el primero es adyacente y el segundo opuesto á dicho lado b' , se formaria un ángulo $DA'E$ igual al dado A' : por un punto cualquiera M de la $A'D$ se trazaria la recta MN que formase el ángulo $A'MN = B'$: tomando $A'C' = b$, y trazando la $B'C'$ paralela á MN , resultaria el triángulo $A'B'C'$ pedido.

En efecto, en el primer caso se tiene

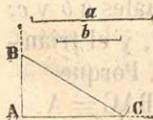
$$AC = b, \quad BAC = A \quad \text{y} \quad ACB = C.$$

En el segundo $A'C' = b'$, $B'A'C' = A'$. Por otra parte $A'B'C' = A'MN$ (31, rec. 4.º): pero $A'MN = B'$ por construcción; luego tambien $A'B'C' = B'$.

Observacion. Para que este problema sea posible es necesario que los ángulos dados valgan juntos menos que dos rectos; de lo contrario las rectas CA y CB en el primer caso, y las MN y $A'C'$ en el segundo, serian paralelas ó se encontrarían á la izquierda de los vértices A ó A' (31).

89. Problema 4.º Dada la hipotenusa a y un cateto b construir un triángulo rectángulo.

Fig. 89.



Fórmese un ángulo A (fig. 89) recto: sobre uno de sus lados se toma $AB = b$: haciendo centro en B , con un radio igual á la hipotenusa a , se traza un arco que cortará el otro lado en un punto C (75, corol. 3.º,

y 44, obs.), y uniendo este con B el triángulo ABC será el pedido.

Porque el ángulo en A es recto, $AB=b$ y $BC=a$.

90. *Problema 5.º* Formar un triángulo igual á otro dado.

Con los tres lados del triángulo dado, con dos lados y el ángulo comprendido, con un lado y dos ángulos igualmente dispuestos, ó con la hipotenusa y un cateto (si fuese rectángulo) se construye un nuevo triángulo (86, 87, 88, 89), el cual será igual al propuesto (72 ó 73).

91. *Problema 6.º* Dados dos lados a , b , y el ángulo comprendido A , construir un paralelógramo.

Fórmese un ángulo $EAF=A$ (fig. 90): tómesese $AB=b$ y $AD=a$: haciendo centro en B con el radio AD se traza un arco, y haciendo centro en D con el radio AB se traza otro arco, que cortará al anterior (70 y 48, rec. 3.º) en un punto C:

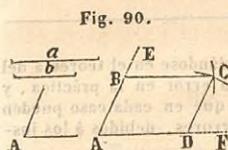


Fig. 90.

se une este punto con B y con D, y ABCD será un paralelógramo (79, rec. 1.º), que tiene las circunstancias pedidas.

Porque $BAD=A$, $AB=b$ y $AD=a$.

Observacion. Un rombo se construye dado el lado y un ángulo: un rectángulo conociendo los lados desiguales; y un cuadrado si se da su lado.

92. *Problema 7.º* Construir un polígono igual á otro dado ABCDEF (fig. 83).

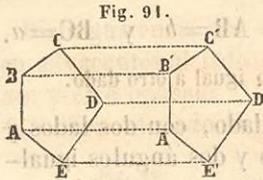
Se divide este polígono dado en triángulos por medio de diagonales trazadas desde el vértice A: se forman los triángulos $A'B'C'$, $A'C'D'$, etc. respectivamente iguales á los ABC , ACD , etc., y que tengan entre sí la misma colocacion que estos; y el polígono $A'B'C'D'E'F'$, formado por los lados exteriores de dichos triángulos, será el pedido (85).

Otra construccion. Sea el polígono ABCDE (fig. 91): trácense por todos sus vértices paralelas entre sí: tómensese



sobre estas las partes iguales $AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$:

únase el punto A' con B' , B' con C' , C' con D' , D' con E' y E' con A' , y el polígono $A'B'C'D'E'$ será igual al dado.



Porque las figuras $ABA'B'$, $BCB'C'$, etc., son paralelogramos (79, rec. 2.^o); luego $AB = A'B'$; $BC = B'C'$, etc. (79, 1.^o), y los ángulos $ABC = A'B'C'$, $BCD = B'C'D'$, etc. (33, 4.^o). Luego el polígono propuesto y el que acaba de formarse tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos; luego son iguales (2.^o).

(*) También podría resolverse este problema fundándose en el teorema del núm. 84; pero la construcción estaría mas sujeta á error en la práctica, y conviene siempre elegir entre los diferentes medios, que en cada caso pueden emplearse, aquel en que menos se multiplican los errores, debidos á los instrumentos de que tenemos que valernos.

ABCD será un paralelogramo (79, rec. 1.^o), que tiene las

Observación. En rombo se construye dado el lado y un

ángulo: un rectángulo conociendo los lados desiguales; y un cuadrado si se da su lado.

72. Problema 7. Construir un polígono igual á otro dado ABCDEF (fig. 23).

Se divide este polígono dado en triángulos por medio

de diagonales trazadas desde el vértice F, se forman los triángulos FAC , FCA , etc., respectivamente iguales á los FBC , FCD , etc., y que tocan entre sí en una sola

línea que es la AC ; y el polígono $FACD$ formado por los lados exteriores de dichos triángulos, será el ped-

Observación. Sea el polígono ABCDE (fig. 24); trázase por todos sus vértices paralelas entre sí, fórmase

SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION DE LAS FIGURAS PLANAS.

CAPITULO PRIMERO.

Figuras semejantes.

ARTICULO PRIMERO.

De las lineas proporcionales.

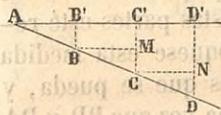
93. Teorema 1.º *Si sobre el lado AD de un ángulo DAD' (fig. 92) se toman partes iguales $AB=BC=CD$, y por los puntos de division se trazan paralelas BB' , CC' , DD' hasta encontrar al otro lado AD', las partes de este AB' , $B'C'$, $C'D'$, interceptadas entre las paralelas, serán tambien iguales entre sí.*

Trazando por los puntos B, C, las rectas BM, CN, paralelas á la AD', los triángulos $AB'B$, BMC , CND tienen $AB=BC=CD$ por hipótesis, los ángulos BAB' , CBM , DCN iguales por correspondientes, y los ABB' , BCM , CDN iguales tambien por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales (72, 3.º), luego (73, obs.)

$AB' = BM = CN$:
pero $BM = B'C'$ y $CN = CD'$ por lados opuestos de paralelógramos; luego

$$AB' = B'C' = C'D'.$$

Fig. 92.

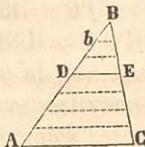


94. Teorema 2.º *Si una recta DE (fig. 93) es paralela á un lado AC de un triángulo ABC, divide á los otros dos lados AB y BC en partes proporcionales.*

Distinguiremos dos casos: 1.º que las partes BD y DA de un lado sean conmensurables: 2.º que no lo sean.

1.º Sea Bb la medida comun; supongamos que se pueda colocar sobre BD tres veces, y cuatro sobre DA, y se tendrá

Fig. 93.



$$BD : DA :: 3 : 4.$$

Por los puntos de division trácense paralelas á DE ó á la AC, y segun el teorema anterior la BC quedará dividida en otras siete partes iguales entre sí, de las que la BE contiene tres y la EC cuatro; luego

$$BE : EC :: 3 : 4.$$

Esta proporción y la anterior tienen una razón comun; luego (Alg. 128)

$$BD : DA :: BE : EC.$$

2.º Sean BD y DA (fig. 94) inconmensurables; supongamos que la BD sea dividida en partes iguales entre sí, tan pequeñas como se quiera, y que una de estas partes esté representada por Bb : colóquese esta medida sobre DA todas las veces que se pueda, y quedará un resto Aa , una vez que BD y DA son inconmensurables: trácese, por último, la ac paralela á DE.

Siendo BD y Da conmensurables se tendrá, segun la primera parte del teorema,

$$BD : Da :: BE : Ec,$$

ó bien $\frac{BD}{Da} = \frac{BE}{Ec}$:

comparando estos quebrados con los siguientes

$$\frac{BD}{DA} \text{ y } \frac{BE}{EC},$$

se observará que los dos primeros (que estan en columna) tienen el numerador BD comun, y que el denominador Da se puede aproximar á DA todo lo que se quiera; porque la diferencia Aa es menor que Bb, y esta parte puede ser mas

pequeña que una cantidad cualquiera dada; luego $\frac{BD}{DA}$ es el limite de $\frac{BD}{Da}$ [54, (*)]: por igual razon $\frac{BE}{EC}$ es tam-

bien el limite de $\frac{BE}{Ec}$: pero las cantidades variables son iguales; luego los limites lo serán del mismo modo [54, (*) corol.], luego

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC},$$

ó $BD : DA :: BE : EC$.

Corol. De la proporcion anterior se deduce (Alg. 429)

$$BD + DA : BD :: BE + EC : BE$$

y $BD + DA : DA :: BE + EC : EC$,

ó bien $BA : BD :: BC : BE$

y $BA : DA :: BC : EC$,

esto es: *todo un lado es á su parte superior ó inferior á la paralela, como todo el otro lado es á la parte superior ó inferior á la misma.*

Recíprocamente. Si una recta divide á dos lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela al tercer lado.

Es decir, que si se tiene (fig. 95) la proporcion

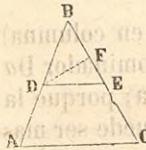
$BD : DA :: BE : EC$, ó lo que es igual (corol. ant.)

$$BA : BD :: BC : BE,$$

la recta DE será paralela á AC.

Porque si no lo fuese, se podría trazar por D la DF paralela á AC, en cuyo caso, segun el corolario precedente, se tendría

Fig. 95.



$$BA : BD :: BC : BF.$$

Esta proporción y la anterior tienen los tres primeros términos iguales, luego

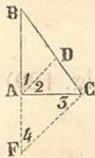
$$BE = BF:$$

peró esto es imposible; luego la paralela á DF tiene que confundirse con DE, luego esta es paralela al lado AC.

95. Teorema 3.º *La bisectriz AD (fig. 96) de un ángulo BAC en el triángulo ABC divide al lado opuesto BC en partes proporcionales á los lados que forman dicho ángulo.*

Por el punto C trácese la recta CF paralela á la bisectriz AD, prolongándola hasta que corte en F á la BA también prolongada, y se tendrá (94)

Fig. 96.



$$BD : DC :: BA : AF.$$

Ahora el ángulo en 1 es igual al 4 por correspondientes, el 2 es igual al 3 por alternos: pero 1 y 2 son iguales por hipótesis; luego 3 y 4 también lo serán; luego (75, rec. 4.º)

$$AF = AC.$$

Sustituyendo este valor de AF en la proporción anterior, resulta al fin

$$BD : DC :: BA : AC.$$

Corol. *Los lados de un triángulo no son proporcionales á sus ángulos opuestos.*

Porque siendo a, b dos lados y A, B sus ángulos res-

pectivamente opuestos, se tienen las cuatro cantidades homogéneas dos á dos

$$A \dots a,$$

$$B \dots b;$$

y duplicando ó dividiendo por 2 una de las homogéneas A, su relativa a no queda duplicada ni dividida por 2, según el teorema; luego dichas cantidades no son proporcionales (Alg. 135, obs.).

ARTÍCULO II.

De los triángulos semejantes.

96. Se llaman en general **POLÍGONOS SEMEJANTES**, los que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Llámanse **vértices HOMÓLOGOS** los vértices de los ángulos iguales; y **lados HOMÓLOGOS** los que unen vértices homólogos.

En los triángulos semejantes los lados homólogos están opuestos á ángulos iguales (70, corol. 1.); y como esta circunstancia es mas fácil de apreciar, de ella toman su denominación. Así que si en los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 98) se tiene: $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$; BC y B'C' son homólogos, AC y A'C', AB y A'B' lo son también.

97. Teorema 1.º Si en un triángulo ABC (fig. 97) se traza una línea DE paralela á un lado AC, el triángulo parcial BDE que resulta es semejante al total ABC.

En efecto el ángulo en B es común á los dos triángulos, el $BDE = A$ por correspondientes y $BED = C$ por la misma razón; luego dichos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

Por otra parte, por ser DE paralela á AC se tiene (94, corol.)

$$BA : BD :: BC : BE ;$$

Fig. 97.



y trazando la EF paralela á BA se tiene tambien

$$BC : BE :: AC : AF,$$

ó, puesto que $AF = DE$ (79, 1.º), $BC : BE :: AC : DE$.

Esta proporción y la primera tienen comun la razón $BC : BE$, luego (Alg. 428)

$$BA : BD :: BC : BE :: AC : DE ;$$

luego el triángulo parcial y el total tienen sus lados homólogos proporcionales.

Luego los triángulos ABC y DBE tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales, luego son semejantes (96).

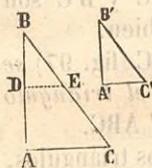
98. Teorema 2.º *Dos triángulos son semejantes: 1.º si tienen sus lados proporcionales: 2.º si tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido: 3.º si tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.*

4.º Sean los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 98), en que se supone que

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: AC : A'C' .$$

Tómese sobre BA una parte $BD = A'B'$, y trazando la recta DE paralela á AC, resulta (97)

Fig. 98.



$$AB : BD :: BC : BE :$$

esta proporción y la de la hipótesis $AB : A'B' :: BC : B'C'$ tienen sus tres primeros términos iguales, una vez que $A'B' = BD$; luego

$$BE = B'C' .$$

Por el mismo núm. 97 se tiene tambien

$$AB : BD :: AC : DE ,$$

cuya proporción y la de la hipótesis $AB : A'B' :: AC : A'C'$ tienen del mismo modo sus tres primeros términos iguales; luego

$$DE = A'C' .$$

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (72, 1.º): pero DBE es semejante á ABC (97); luego ABC y A'B'C' tambien lo serán.

2.º Supóngase que (en los mismos triángulos) $B = B'$, y que $AB : A'B' :: BC : B'C'$.

Tomando $BD = B'A'$ y trazando DE paralela á AC, como en el caso precedente, se tendrá (97)

$$AB : BD :: BC : BE ;$$

esta proporción y la de la hipótesis tienen iguales sus tres primeros términos; luego

$$BE = B'C'.$$

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (72, 2.º): pero DBE es semejante á ABC (97); luego ABC y A'B'C' tambien lo serán.

3.º Supongamos (en los mismos triángulos) $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, y ejecutando igual construcción que en los casos anteriores, se tendrá que los triángulos DBE y A'B'C' tienen $DB = A'B'$ por construcción, y los ángulos $B = B'$, y $D = A'$, por ser $A = A'$ por hipótesis y $A = D$ por correspondientes.

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (72, 3.º): pero DBE es semejante á ABC (97); luego ABC y A'B'C' tambien lo serán.

Corol. *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes (71, corol. 1.º).*

99. Teorema 3.º *Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen la hipotenusa y un cateto proporcionales.*

Supónganse rectángulos en A y en A' los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 98), y además que

$$AB : A'B' :: BC : B'C'.$$

Sobre BA tómese $BD = B'A'$ y trácese DE paralela á AC.

Siendo ABC rectángulo en A, DBE lo será en D por ser $A = D$ por correspondientes.

Por otra parte (97) $AB : BD :: BC : BE$:

esta proporción y la de la hipótesis tienen los tres primeros términos iguales; luego

$$BE = B'C'.$$

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (73): pero DBE es semejante á ABC (97); luego ABC y A'B'C' también lo serán.

100. Teorema 4.º *Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.*

En ambos casos los ángulos de uno de los triángulos serán respectivamente iguales ó suplementarios de los del otro (33, corol. y 34). Mas dos ángulos de uno de los triángulos no pueden ser suplementarios de otros dos del otro; porque en tal caso estos cuatro ángulos equivaldrían á cuatro rectos, lo que es imposible (71): luego dos ángulos de uno de los triángulos serán respectivamente iguales á dos del otro; luego los triángulos son semejantes (98, corol.).

Observacion. Los lados homólogos en estos triángulos son los respectivamente paralelos ó perpendiculares.

ARTÍCULO III.

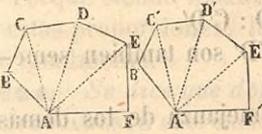
Semejanza de los polígonos en general.

101. Teorema 1.º *Si dos polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' (fig. 99) se componen del mismo número de triángulos ABC y A'B'C', ACD y A'C'D', etc., semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

La semejanza de los triángulos ABC y A'B'C' nos da los ángulos $B = B'$, y $BCA = B'C'A'$: la de los triángulos ACD y A'C'D' da tam-

bien los ángulos $\angle ACD = \angle A'C'D'$; y sumando estas dos igualdades resulta $\angle BCD = \angle B'C'D'$, ó bien $\angle C = \angle C'$;

Fig. 99.



como lo mismo se demostraría de los demás ángulos, se infiere que los dos polígonos tienen sus ángulos respectivamente iguales.

De la semejanza de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ resulta igualmente

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: AC : A'C' ;$$

y de la igualdad de los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle A'C'D'$ resulta del mismo modo

$$AC : A'C' :: CD : C'D' :: AD : A'D' ;$$

estas proporciones tienen comun la razon $AC : A'C'$; luego (Alg. 128) $AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D'$.

Como lo mismo se extenderia la demostracion á probar la proporcionalidad de los demás lados, se deduce que dichos polígonos tienen sus lados homólogos proporcionales.

Luego los polígonos propuestos tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales, luego son semejantes (96).

Recíprocamente. *Si dos polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' son semejantes, se pueden descomponer en el mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.*

Por hipótesis se tiene: $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, etc., y $AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' ::$ etc. : etc.

Trazando desde los vértices A y A' diagonales á los demás, resulta que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen $B = B'$ por hipótesis, y por igual razon

$$AB : A'B' :: BC : B'C' ;$$

luego son semejantes (98, 2.º).

La semejanza de estos triángulos nos da los ángulos

$$\angle BCA = \angle B'C'A' ;$$

y restando esta igualdad de la de la hipótesis

$$C = C',$$

resultan los ángulos $ACD = A'C'D'$.

De la semejanza de los mismos triángulos BAC y $B'A'C'$ resulta igualmente $BC : B'C' :: AC : A'C'$;
mas por hipótesis $BC : B'C' :: CD : C'D'$;
de donde (Alg., 128) $AC : A'C' :: CD : C'D'$.

Luego los triángulos ACD y $A'C'D'$ son también semejantes (98, 2.º).

Lo mismo se demostraría la semejanza de los demás triángulos ; luego el teorema recíproco es verdadero.

102. Teorema 2.º *Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.*

Estos polígonos tienen sus ángulos iguales (82, corol.).

Por otra parte, siendo los lados de cada uno iguales entre sí, si llamamos l al lado de un polígono y l' al del otro, evidentemente se podrá formar esta proporción:

$$l : l' :: l : l' :: \text{etc.} : \text{etc.}$$

Luego los polígonos son semejantes.

ARTÍCULO IV.

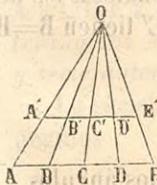
Consecuencias de la semejanza de los polígonos.

103. Teorema 1.º *Si tres ó mas rectas OA , OB , OC , etc. (fig. 100) que concurren en un punto O , cortan á dos paralelas AE y $A'E'$, las dividen en partes proporcionales.*

Los triángulos AOB y $A'OB'$ son semejantes (97); luego

$$AB : A'B' :: OB : OB'.$$

Fig. 100.



También son semejantes los triángulos BOC y $B'OC'$ (97); de donde

$$OB : OB' :: BC : B'C' :: OC : OC'.$$

Esta proporción y la anterior tienen común la razón $OB : OB'$; luego (Alg., 128)

$$AB : A'B' :: BC : B'C'.$$

La semejanza de los triángulos COD y C'OD', DOE y D'OE', nos daría la proporcionalidad de las partes restantes con las anteriores; luego el teorema es verdadero.

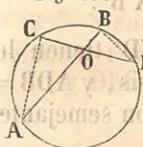
Corol. *Si las partes de una de las paralelas son iguales entre sí, las de la otra lo serán también.*

Porque siendo iguales los antecedentes ó consecuentes de estas proporciones, los consecuentes ó antecedentes lo son igualmente.

104. *Se dice que dos rectas están divididas en partes RECÍPROCAMENTE PROPORCIONALES, cuando las partes de la una, ó toda la recta y una parte suya, forman los extremos de una proporción, y las partes de la otra, ó toda la recta y una parte suya, forman los medios [V. Alg., 135, (*)].*

105. Teorema 2.º *Si dos cuerdas AB y CD (fig. 401) se cortan, quedan divididas en partes reciprocamente proporcionales.*

Fig. 101.

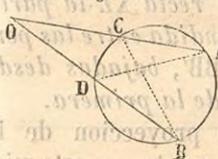


Uniendo A con C, y B con D, los triángulos AOC y BOD tienen los ángulos $A = D$ y $C = B$ (54, corol. 4.º); luego son semejantes (98, corol.), luego

$$AO : OD :: OC : OB.$$

106. Teorema 3.º *Si desde un punto O (fig. 402) fuera de un círculo se trazan dos secantes OA y OB, que terminen en la parte cóncava de la curva, los segmentos externos OC y OD son reciprocamente proporcionales con las secantes enteras.*

Fig. 102.



Uniendo A con D, y C con B, los triángulos AOD y BOC tienen el ángulo en O común y $A = B$ (54, corol. 4.º); luego son semejantes (98, corol.), luego

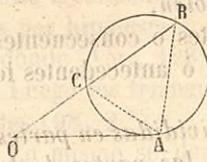
$$OA : OB :: OD : OC.$$

107. Teorema 4.º *Si desde un punto O fuera de un círculo (fig. 403) se traza una tangente OA, que termine en el punto A de contacto, y una secante OB, que termine*

en la parte cóncava de la curva, la tangente es media proporcional entre toda la secante y el segmento externo OC.

Uniendo B con A, y A con C, los triángulos OAB y OAC tienen el ángulo en O común, y $\angle OAC = \angle B$; porque el primero tiene por medida la mitad del arco AC (53), y el segundo tiene también por medida la mitad del mismo arco (54); luego los triángulos son semejantes (98, corol.), luego

Fig. 103.



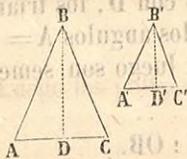
$$OB : OA :: OA : OC.$$

108. Teorema 5.º Dos triángulos semejantes ABC y A'B'C' (fig. 104) tienen las bases AC y A'C' proporcionales con las alturas BD y B'D'.

Por hipótesis se tiene

$$AC : A'C' :: AB : A'B'.$$

Fig. 104.



los triángulos ABD y A'B'D' tienen los ángulos $A = A'$ por hipótesis, y $\angle ADB = \angle A'D'B'$ por rectos; luego son semejantes (98, corol.), luego

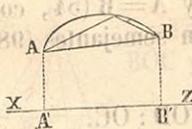
$$AB : A'B' :: BD : B'D';$$

de cuyas proporciones se deduce (Alg. 428)

$$AC : A'C' :: BD : B'D'.$$

109. Se llama PROYECCION de una línea cualquiera AB (fig. 105) sobre una recta XL la parte A'B' de esta, comprendida entre las perpendiculares AA' y BB', bajadas desde los extremos A y B de la primera.

Fig. 105.

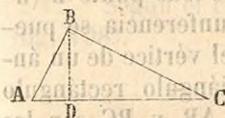


Observacion. La proyeccion de la hipotenusa sobre un cateto, es este mismo cateto. Así en el triángulo rectángulo ABD (fig. 106) la proyeccion de la hipotenusa AB sobre el cateto AD es este cateto.

110. Teorema 6.º Si desde el vértice B (fig. 406) del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular BD sobre la hipotenusa AC: 1.º un cateto AB es medio proporcional entre la hipotenusa AC y su proyección AD sobre esta hipotenusa: 2.º la perpendicular BD es también media proporcional entre los segmentos AD y DC de la hipotenusa, ó sea entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

1.º Los triángulos ABC y ABD tienen el ángulo A común, y $\angle ABC = \angle ADB$ por rectos; luego son semejantes (98, corol.), luego

Fig. 406.



$$AC : AB :: AB : AD.$$

Del mismo modo se demuestra la semejanza de los triángulos ABC y DBC, y de ella se deduce

$$AC : BC :: BC : DC.$$

2.º Siendo ABC semejante con ABD, y ABC semejante también con DBC; según acaba de verse, los triángulos ABD y DBC son semejantes entre sí; luego

$$AD : BD :: BD : DC.$$

Corol. 1.º De las proporciones del primer caso

$$AC : AB :: AB : AD,$$

$$AC : BC :: BC : DC,$$

se deducen las igualdades (Alg., 125)

$$(AB)^2 = (AC) \times (AD);$$

$$(BC)^2 = (AC) \times (DC). (*)$$

(*) Siempre que en lo sucesivo haya que indicar una operación con el conjunto de letras que representa una línea, se hará como si todas ellas fuesen un solo signo. Así por $(AB)^2$ escribiremos AB^2 , y por $(AC) \times (AD)$ se escribirá $AC \times AD$.

Luego el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por su proyeccion sobre este (*).

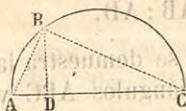
Corol. 2.º Formando una proporcion con las dos igualdades del corolario anterior, se tiene

$$AB^2 : BC^2 :: AC \times AD : AC \times DC :: AD : DC;$$

luego los cuadrados de los catetos son proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa.

Observacion. Como el ángulo inscripto cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro es recto (54, corol. 2.º), resulta que todo punto B (fi-

Fig. 107.



gura 107) de la circunferencia se puede considerar como el vértice de un ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos AB y BC son las cuerdas que de dicho punto van á los

extremos del diámetro, y cuya hipotenusa AC es el diámetro mismo; luego las proposiciones anteriores, sustituyendo punto de la circunferencia por vértice, cuerda por catetos, y diámetro por hipotenusa, se convierten en los teoremas siguientes:

Si desde un punto de la circunferencia se baja una perpendicular al diámetro, y por dicho punto y los extremos del diámetro se trazan cuerdas:

- 1.º Cada cuerda es media proporcional entre el diámetro y su proyeccion sobre este:
- 2.º la perpendicular es media proporcional entre los segmentos del diámetro, ó sea entre las proyecciones de las cuerdas sobre el diámetro:
- 3.º el cuadrado de una cuerda es igual al producto del diámetro por su proyeccion sobre este:
- 4.º los cuadrados de las cuerdas son proporcionales á sus proyecciones sobre el diámetro.

(*) Se entiende por cuadrado de una linea el cuadrado de su valor numérico, referido á una unidad longitudinal cualquiera; y por producto de dos lineas el producto de sus valores numéricos, referidos á una misma unidad, aunque arbitraria.

Teorema 7.º 1.º *En el triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* (*): 2.º *en el obtusángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, mas el duplo del producto de uno de estos por la proyeccion del otro sobre él*: 3.º *en un triángulo cualquiera, el cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de uno de estos por la proyeccion del otro sobre él.*

1.º Segun el corol. 1.º del teorema anterior, se tiene (fig. 108).

$$AB^2 = AC \times AD,$$

$$BC^2 = AC \times DC,$$

y sumando estas igualdades resulta

$$AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC = AC \times (AD + DC) = AC \times AC = AC^2,$$

$$\text{ó bien} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Corol. De la igualdad que precede se deducen las siguientes:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2,$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2},$$

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}.$$

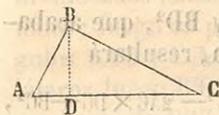


Fig. 108.

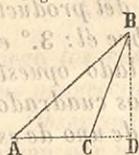
Luego el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto: la hipotenusa es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos: un cateto cualquiera es igual á la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.

2.º Sea el triángulo ABC (fig. 109) y AB el lado opues-

(*) Esta primera parte del teorema, que es sin duda una de las verdades mas fundamentales de la Geometría, se llama *teorema de Pitágoras*, del nombre del célebre filósofo que le descubrió.

to al ángulo obtuso: bajando la perpendicular BD sobre AC prolongada, se tendrá en el triángulo ABD, según la primera parte del teorema,

Fig. 109.



$$AB^2 = AD^2 + BD^2; \quad \text{pero}$$

$$AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2$$

(Alg., 24, 1.º),

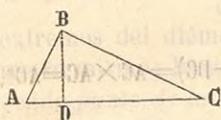
$$\text{y} \quad BD^2 = BC^2 - CD^2 \quad (\text{corol. ant.});$$

luego substituyendo estos valores en la igualdad primera, resultará

$$AB^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD,$$

ó bien $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD.$

Fig. 110.



3.º Sea el triángulo ABC (figura 110), y AB el lado opuesto á un ángulo agudo: bajando la perpendicular BD, en el triángulo rectángulo ABD se tiene

$$AB^2 = AD^2 + BD^2;$$

pero $AD^2 = (AC - DC)^2 = AC^2 - 2AC \times DC + DC^2$

(Alg., 24, obs. 1.ª),

y en el triángulo DBC $BD^2 = BC^2 - DC^2$ (corol. ant.);

luego, substituyendo los valores de AD^2 y BD^2 , que acabamos de terminar, en la igualdad primera, resultará

$$AB^2 = AC^2 - 2AC \times DC + DC^2 + BC^2 - DC^2 = AC^2 - 2AC \times DC + BC^2,$$

ó bien $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times DC.$

Recíprocamente. 1.º Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los otros dos, el ángulo opuesto al primero será recto: 2.º si es mayor, el ángulo opuesto será obtuso: 3.º si es menor, agudo (12).

112. Teorema 8.º Los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus lados homólogos.

Llamando a, b, c , etc. á los lados de uno de los polígonos, y a', b', c' , etc. á los del otro, se tendrá (96)

$$a : a' :: b : b' :: c : c' :: \text{etc.} :: \text{etc.};$$

de donde (Alg., 430)

$$a + b + c + \text{etc.} : a' + b' + c' + \text{etc.} :: a : a',$$

ó expresando por p y p' dichos perímetros

$$p : p' :: a : a'.$$

PROBLEMAS RELATIVOS AL CAPÍTULO QUE PRECEDE.

Problemas gráficos.

113. Problema 1.º Dividir una recta a en partes proporcionales á otras rectas dadas b, c, d .

Sobre una recta indefinida MN (fig. 111) tómenselas partes $BD = b, DE = c, EC = d$: fórmese sobre BC el triángulo equilátero BAC (86, obs. 2.ª): sobre AB y AC tómenselas partes $AB' = a$ y $AC' = a$: trácese las rectas $B'C', AD, AE$; y $B'D', D'E', E'C'$ serán las partes de a proporcionales á b, c, d .

En efecto, siendo $AB = AC$ y $AB' = AC'$, la línea $B'C'$ divide á los lados del triángulo ABC en partes proporcionales; luego es paralela á BC (94, rec.); luego los triángulos BAC y $B'AC'$ son semejantes (97): pero BAC es equilátero; luego $B'C' = B'A = a$.

La recta $B'C'$ está dividida en partes $B'D', D'E', E'C'$ proporcionales á BD, DE, EC (103); y por consiguiente á b, c, d ; luego también están determinadas las partes de su igual a proporcionales á b, c, d .

Observacion. Si los puntos B' y C' cayesen en la parte inferior de B y C, la demostracion sería la misma, tanto en este problema como en el siguiente.

114. Problema 2.º Dividir una recta a en un número cualquiera de partes iguales, p. e., en cinco.

Este problema se resuelve como el anterior, según aparece en la figura 112, sin mas diferencia que la de tomar

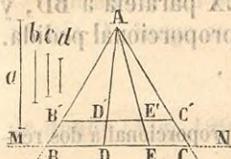
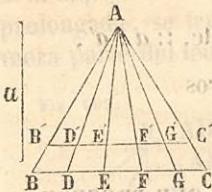


Fig. 112.

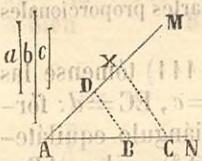


la parte BD arbitraria, y las DE, EF, FG y GC iguales con BD. La demostración tambien es la misma que la precedente, fundándose la igualdad de las partes en que queda dividida la recta B'C', y por consiguiente la dada a , en el corol. del núm. 103.

115. Problema 3.º Hallar una cuarta proporcional á tres rectas a, b, c .

Fórmese un ángulo cualquiera MAN (fig. 113): sobre el lado AN tómese $AB = a$ y $AC = b$, y sobre AM tómese tambien $AD = c$: únase el punto B con el D, ó sean los extremos de los antecedentes a y c de la proporción: por C, extremo del consecuente b , trácese la recta CX paralela á BD, y la AX será la cuarta proporcional pedida.

Fig. 113.

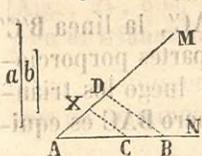


Porque (97) $AB : AC :: AD : AX$,

ó bien $a : b :: c : AX$.

116. Problema 4.º Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas a y b .

Fig. 114.

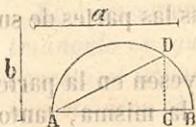


Se resuelve como el anterior, tomando AC y AD (fig. 114) iguales á b , como aparece en en la figura.

117. Problema 5.º Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas a y b .

Sobre la recta AB (fig. 115) igual á la mayor a de las dadas, trácese una semicircunferencia: tómese $AC = b$: levántese la perpendicular CD, y la cuerda AD será la media proporcional pedida (*).

Fig. 115.



Porque (110, obs.) $AB : AD :: AD : AC$,

$a : AD :: AD : b$.

ó $a : AD :: AD : b$.

(*) Es inútil repetir que, entre los diferentes medios que pueden emplearse en la resolución de este problema y precedentes, hemos elegido los que nos parecen mas sencillos y exactos en la práctica.

118. Se dice que una recta está dividida en MEDIA Y EXTREMA RAZON, cuando está dividida en dos partes tales que la mayor es media proporcional entre la menor y la línea entera.

119. Problema 6.º Dividir una recta a en media y extrema razón.

Tómese una recta $AB = a$ (fig. 116): en el extremo B levántese una perpendicular $BO = \frac{1}{2}a$:

desde O con el radio OB trácese una circunferencia: por A y O se traza la secante AC, y la parte AD, exterior de la secante, aplicada sobre AB divide á ésta en E en media y extrema razón.

En efecto AB es tangente y AC secante de la circunferencia O; luego se tendrá (107)

$$AC : AB :: AB : AD;$$

de donde (Alg. 129)

$$AC - AB : AB :: AB - AD : AD ;$$

y como $AB = 2BO = DC$ y $AD = AE$, esta proporción se convierte en

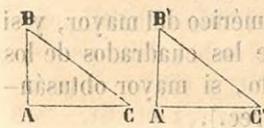
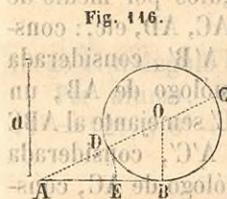
$$AE : AB :: EB : AE,$$

ó (Alg. 127, 2.º)

120. Problema 7.º Dado un triángulo ABC (fig. 117), construir sobre una recta dada A'C', considerada como lado homólogo de AC, otro triángulo semejante al primero.

Fórmense en los extremos de la recta A'B' los ángulos $A' = A$ y $C' = C$, y A'B'C' será el triángulo pedido (98, corol.): ó

fórmese $A' = A$ y tómese A'B' igual á una cuarta proporcional á las rectas AC, A'C' y AB (115), y el triángulo A'B'C' será el buscado (98, 2.º):

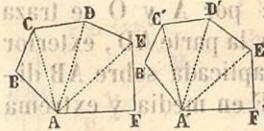


ó tambien, hállese una cuarta proporcional á AC, A'C' y AB, otra á AC, A'C' y BC; con estas cuartas proporcionales y con la recta dada A'C' fórmese el triángulo A'B'C' (86), el cual será el pedido (98, 1.º).

121. Problema 8.º Dado un polígono ABCDEF (fig. 118) construir sobre una recta dada A'B', considerada como lado homólogo de AB, otro polígono semejante al primero:

Dividase el polígono dado en triángulos por medio de las diagonales AC, AD, etc.: constrúyase sobre A'B', considerada como lado homólogo de AB, un triángulo A'B'C' semejante al ABC (120): sobre A'C', considerada como lado homólogo de AC, constrúyase otro A'C'D' semejante á ACD; y así sucesivamente. El polígono A'B'C'D'E'F' será el pedido (101).

Fig. 118.



Problemas numéricos.

122. Problema 1.º Dados los valores numéricos de dos lados de un triángulo rectángulo determinar el tercer lado.

Distinguiremos dos casos: 1.º que el lado desconocido sea la hipotenusa: 2.º que sea un cateto.

1.º Supongamos que un cateto tiene 40 metros y el otro 32: llamando a á la hipotenusa se tendrá (111, corol.)

$$a = \sqrt{40^2 + 32^2} = \sqrt{2624} = 51,22\dots \text{ metros.}$$

2.º Supongamos que un cateto tiene 6 metros y 40 la hipotenusa, llamando b al otro cateto, será (111, corol.)

$$b = \sqrt{40^2 - 6^2} = \sqrt{1584} = 39,79\dots \text{ metros.}$$

123. Problema 2.º Dados los valores numéricos de los lados de un triángulo determinar la especie de sus ángulos.

Se eleva al cuadrado el valor numérico del mayor, y si este cuadrado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos el triángulo será rectángulo, si mayor obtusángulo, y si menor acutángulo (114, rec.).

Así si los lados son 3, 4, 5, como $5^2=25$ y $3^2+4^2=25$, se tendrá

$$5^2=3^2+4^2;$$

luego el triángulo es rectángulo (').

Si los lados son 10, 12, 20, como $20^2=400$ y $10^2+12^2=244$, resulta

$$20^2 > 10^2 + 12^2;$$

luego el triángulo es obtusángulo.

Por último, si los lados fuesen 8, 9, 11, como $11^2=121$, y $8^2+9^2=145$, se tendría

$$11^2 < 8^2 + 9^2;$$

luego el ángulo opuesto al mayor lado sería agudo, y siendo los demás menores ($75, 2^\circ$), el triángulo sería acutángulo.

(*) Si con una cuerda ó cadena dividida en pies, p. e., se quisiese formar un triángulo rectángulo, bastaría tomar por lados 3, 4, 5 divisiones, ó 6, 8, 10, y el ángulo opuesto al lado 5 en el primer caso y al 10 en el segundo sería recto; porque $5^2=3^2+4^2$ y $10^2=8^2+6^2$.

1.ª. Trácese una circunferencia que pase por los vértices A, B y C (el O desde el centro O de esta pases la perpendicular OM al lado BC, y únase el punto O con A y con D. Doblado el cuadrilátero MOC sobre el MOA, MC caerá sobre MB por ser rectos los ángulos OMC y OMB: el punto C coincidirá con M, una vez que MC=MB



CAPITULO II.

Poligonos regulares inscriptos y circunscriptos, y razon de la circunferencia al diámetro.

ARTÍCULO PRIMERO.

Inscripcion y circunscripcion de poligonos.

124. Se dice que una circunferencia está **CIRCUNSCRIPTA** á un poligono, ó que un poligono está **INSCRIPTO** en una circunferencia, cuando esta pasa por todos los vértices del poligono.

Dicese que una circunferencia está **INSCRIPTA** en un poligono ó que un poligono está **CIRCUNSCRIPTO** á una circunferencia, cuando son tangentes á esta todos los lados del poligono.

125. Teorema 1.º A todo poligono regular ABCDE (fig. 419): 1.º se le puede circunscribir una circunferencia: 2.º inscribir otra.

1.º Trácese una circunferencia que pase por los vértices A, B y C (64): desde el centro O de esta bájese la perpendicular OM al lado BC, y únase el punto O con A y con D.

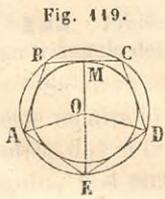


Fig. 419.

Doblando el cuadrilátero MODC sobre el MOAB, MC caerá sobre MB, por ser rectos los ángulos OMC y OMB: el punto C coincidirá con M, una vez que MC=MB

(41): la recta CD caerá sobre BA, por ser iguales los ángulos en B y en C por hipótesis; y el punto D coincidirá con A por ser también $CD = BA$; luego los extremos de OD y OA coinciden, luego estas rectas son iguales; luego la circunferencia que pasa por A, B y C pasará también por D. Lo mismo se demostraría que pasa por los vértices restantes; luego dicha circunferencia está circunscripta al polígono.

2.º Los lados del polígono inscripto son cuerdas iguales de la circunferencia circunscripta; luego equidistan del centro de esta (40, 1.º); luego todas las perpendiculares trazadas desde O á los lados del polígono son iguales con OM (24, corol.); luego la circunferencia trazada desde O con el radio OM pasará por los extremos de estas perpendiculares; luego todos los lados del polígono serán tangentes, y por lo tanto la nueva circunferencia estará inscrita en el polígono.

126. Llámase *centro* de un polígono regular el centro de la circunferencia circunscripta é inscrita: *radios* del polígono las rectas que van desde el centro á los vértices de sus ángulos; y *apotemas* las perpendiculares trazadas desde el centro á los lados del polígono. Los radios suelen también llamarse *radios oblicuos*, para distinguirse de las apotemas, que se denominan *radios rectos*.

Corol. 1.º *Los radios de un polígono son iguales entre sí, y las apotemas lo son también.*

Corol. 2.º *Los radios de un polígono son bisectrices de sus ángulos.*

En efecto, los triángulos AOE, EOD son iguales (72, 1.º); luego los ángulos AEO, OED son también iguales; luego EO es bisectriz del ángulo en E. Lo mismo se demuestra de los demás.

Corol. 3.º *Los ángulos en el centro AOE, EOD, etc., son iguales.*

Por la igualdad de los mismos triángulos AOE, EOD, etc.

Observacion 1.ª Para determinar el centro O de un polígono, se trazan las bisectrices AO y EO de dos de sus ángulos cualesquiera consecutivos A y E, ó las perpendicu-



lares en los puntos medios de dos lados consecutivos.
Observacion 2.^a Los ángulos en el centro O de un polígono regular valen juntos $4R$ (19, corol 4.^o) y son iguales entre sí (corol. ant.); luego el valor del ángulo en el centro de un polígono regular estará representado por la fórmula

$$\frac{4R}{n}$$

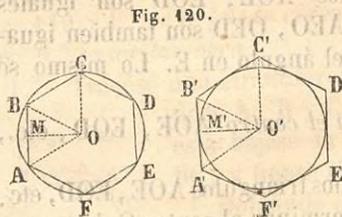
De donde

Ángulo en el centro de triáng.^o equilát.^o $= \frac{4R}{3} = \frac{4}{3}R = 120^\circ$,
 Id. de cuadrado. $= \frac{4R}{4} = R = 90^\circ$,
 Id. de pentágono regular. $= \frac{4R}{5} = \frac{4}{5}R = 72^\circ$,
 Id. de exágono id. $= \frac{4R}{6} = \frac{4}{6}R = 60^\circ$,
 Id. de heptágono id. $= \frac{4R}{7} = \frac{4}{7}R = 51^\circ 42'$,
 Id. de decágono id. $= \frac{4R}{10} = \frac{2}{5}R = 36^\circ$.

127. Teorema 2.^o *Todo polígono: 1.^o si es inscrito y equilátero es regular: 2.^o si es circunscrito y equiángulo es también regular.*

1.^o Sea el polígono ABCDEF (fig. 120). Los ángulos ABC, BCD, etc., del polígono son inscritos y comprenden entre sus lados arcos iguales (que en este caso cada uno es $\frac{2}{3}$ de la circunferencia), luego son iguales (54, corol. 4.^o); luego el polígono es regular.

2.^o Sea el polígono A'B'C'D'E'F'. Trazando por el cen-



tro O' de la circunferencia inscrita y por los vértices del polígono las líneas $O'A'$, $O'B'$ y $O'C'$, dividirán los ángulos A' , B' , C' del polígono en dos partes iguales (65, corol.); luego los ángulos $O'A'B'$, $O'B'A'$, $O'B'C'$, $O'C'B'$ son iguales; luego los triángulos $A'B'O'$ y $B'C'O'$, que tienen el lado $B'O'$ comun y dos ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales (72, corol.); luego $A'B' = B'C'$.

Del mismo modo se demostraria que $B'C' = C'D'$, $C'D' = D'E'$, etc.; luego el polígono dado es tambien equilátero; luego es regular.

128. Teorema 3.º *Los perimetros de los poligonos regulares $ABCD\dots$, $A'B'C'D'\dots$ (fig. 120), de igual número de lados, son proporcionales á sus radios OA , $O'A'$ y á sus apotemas OM , $O'M'$.*

Los poligonos propuestos son semejantes (102); luego se tendrá (112)

$$p : p' :: AB : A'B'.$$

Los ángulos A , B , $C\dots$ y A' , B' , $C'\dots$ de los poligonos regulares de igual número de lados son todos iguales entre sí (82, corol.); luego sus mitades tambien lo serán; luego los triángulos AOB y $A'O'B'$ tienen los ángulos $AOB = A'O'B'$ y $BAO = B'A'O'$ por ser AO y BO , $A'O'$ y $B'O'$ bisectrices de los ángulos de los poligonos (126, corol. 2.º); luego son semejantes (98, corol.); luego se tendrá (108)

$$AB : A'B' :: AO : A'O' :: MO : M'O'.$$

Esta proporcion y la anterior tienen una razon comun; luego (Alg. 128)

$$p : p' :: AO : A'O' :: MO : M'O',$$

ó, llamando r , r' los radios, y a , a' las apotemas,

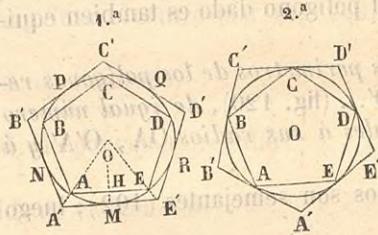
$$p : p' :: r : r' :: a : a'.$$

PROBLEMAS

relativos al capítulo precedente.

129. Problema 1.º Inscribir en una circunferencia un polígono regular de cualquiera número de lados, p. e., 5.

Divídase la circunferencia en 5 partes iguales (*), AB, BC, etc. (fig. 121, 1.ª y 2.ª); trácense las cuerdas correspondientes á estos arcos, y el polígono ABCDE será el pedido.



Los arcos AB, BC, ... son iguales; luego las cuerdas también lo serán

(39, 1.º); luego el polígono es equilátero é inscrito, luego es regular (127, 1.º).

130. Problema 2.º Dado un polígono regular inscrito: 1.º circunscribir á la misma circunferencia otro del mismo número de lados: 2.º hallar el valor del lado de este último en valores del lado del primero y del radio.

1.º Sea el polígono dado ABCDE; por los puntos M, N, P, etc., medios de los arcos subtendidos por sus lados (fig. 121, 1.ª), ó por los vértices A, B, C, etc. del polígono (fig. 121, 2.ª) trácense tangentes, y el polígono A'B'C'D'E', formado en una ú otra figura, será el pedido.

Porque en uno y otro caso los ángulos A', B', C', etc., del nuevo polígono tienen por medida mitades de arcos

(*) De dos maneras puede hacerse esta división: 1.ª por tanteo, 2.ª calculando el ángulo en el centro del polígono que trata de formarse (126, obs. 2.ª), que en este caso sería $54^\circ, 42'$: construyendo con el semicírculo un ángulo AOB de este número de grados; y el arco AB, que interceptan sus lados, será la séptima parte de la circunferencia. Por mas que este método parezca expedito y exacto no lo es sin embargo, en la práctica es preferible el primero.

iguales, luego son iguales; luego el polígono A'B'C'D'E' es equiángulo y está circunscrito; luego es regular (127, 2.º), teniendo además evidentemente igual número de lados que el propuesto.

Observacion 1.ª En el caso de ser los lados paralelos, como en la figura 1.ª, la recta A'O divide el arco convexo MAN en dos partes iguales (65, corol.); luego pasa por el punto A, medio de este arco; luego

Los vértices correspondientes, como A' A, y el centro están en línea recta.

2.º Los triángulos A'E'O y AEO son semejantes (97); luego (408)

$A'E' : AE :: MO : HO$,
ó llamando l el lado del polígono dado y r el radio del círculo

$A'E' : l :: r : HO$;
de donde $A'E' = \frac{rl}{HO}$ [1].

En el triángulo rectángulo AHO se tiene (444, corol.)

$$HO = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}l^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2} \quad [2].$$

Sustituyendo este valor de HO en la ecuacion [1] resulta

$$A'E' = \frac{rl}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}} = \frac{2rl}{\sqrt{4r^2 - l^2}} \quad \text{ó} \quad A'E' = \frac{2rl}{\sqrt{4r^2 - l^2}}.$$

Observacion 2.ª Traducida la fórmula [2] al lenguaje comun, nos dice que: *la apotema de un polígono regular es igual á la mitad de la raíz cuadrada del cuádruplo del radio cuadrado menos el cuadrado del lado.*

131. *Problema 3.º* Dado un polígono ABCDE (fig. 122) regular é inscripto: 1.º inscribir otro de duplo número de lados: 2.º hallar el valor del lado de este último en valores del lado del primero y del radio.

1.º Dividanse los arcos AB, BC, etc., subtendidos por los lados del polígono dado, en dos partes iguales (61); trácense las cuerdas de estos nuevos arcos, y el polígono AMBNC... formado por ellas, será el pedido.

Fig. 122.



Porque es regular (427, 4.º), y evidentemente de duplo número de lados que el propuesto.

2.º Trácense los radios AO, MO y BO: MO pasa por el punto medio del arco AMB; luego será perpendicular á la cuerda AB y la dividirá en dos partes iguales (41, obs.); luego el triángulo BHO es rectángulo en H; luego el ángulo BOM es agudo (74, corol. 3.º); luego en el triángulo BOM se tendrá (444, 3.º)

$$BM^2 = BO^2 + MO^2 - 2MO \times HO = 2BO^2 - 2MO \times HO,$$

ó llamando r el radio,

$$BM^2 = 2r^2 - 2r \times HO;$$

pero se tiene (130, 2.º)

$$HO = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l^2};$$

luego substituyendo este valor de HO en la ecuacion anterior, resulta

$$BM^2 = 2r^2 - 2r \times \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l^2} = 2r^2 - r \sqrt{4r^2 - l^2} = r(2r - \sqrt{4r^2 - l^2});$$

de donde
$$BM = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - l^2})}$$

132. *Problema 4.º* Dada una circunferencia: 1.º inscribir en ella un cuadrado: 2.º hallar el lado de este en valores del radio.

1.º Se trazan dos diámetros AC y BD (fig. 123) perpen-

diculares entre sí, los que dividirán la circunferencia en cuatro partes iguales (41, corol.) ; se unen los extremos de estos arcos por medio de cuerdas, y el polígono ABCD que estas forman, será el cuadrado pedido (129).



de donde

ó llamando r el radio, $AB = r\sqrt{2}$.

Observación 1.ª De esta última ecuacion se deduce

$$\frac{AB}{r} = \sqrt{2}$$

Luego la razón del lado del cuadrado inscrito en una circunferencia al radio es inconmensurable.

Como el lado AB es á su vez la diagonal de un cuadrado AEBF, cuyo lado es el radio, se infiere tambien que el lado de un cuadrado y su diagonal son inconmensurables.

Observación 2.ª Si en la ecuacion anterior se supone $r = s$, resulta

$$AB = \sqrt{2}s$$

Luego construyendo un cuadrado cuyo lado sea la unidad, su diagonal representa exactamente á $\sqrt{2}$; luego la Geometría proporciona medios para determinar el valor exacto de cantidades irracionales (*).

133. Problema 3.º Dada una circunferencia, inscribir en ella un exágono regular.

Supongamos el problema resuelto, y que AB (fig. 124)

(*) Esta exactitud es puramente ideal; porque los medios que se emplean para resolver gráficamente los problemas no dan sino resultados mas ó menos aproximados á la exactitud, que jamás se consigue de esta manera.

sea el lado del exágono inscripto. Trazando los radios AO y BO, el ángulo AOB = 60° (126, obs. 2.^a); luego los ángulos A y B del mismo triángulo ABO valdrán 120° (71, corol. 1.^o). Mas siendo AO = BO, los ángulos en A y en B serán iguales; luego cada uno de ellos valdrá 60°; luego el triángulo ABO es equiángulo, luego será equilátero (73, corol. 2.^o); luego

Fig. 124.



$$AB = AO;$$

luego el lado del exágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

Luego para inscribir en una circunferencia el exágono regular, se coloca el radio sobre la curva seis veces: se unen los extremos de cada arco, y el polígono ABCD..... será el exágono pedido.

Corol. *Uniendo de dos en dos, dejando uno intermedio, por medio de rectas, BD, DF, FB, los vértices del exágono regular, se tendrá el triángulo equilátero BDF inscripto.*

Observacion 1.^a Si se quiere hallar tambien el lado del triángulo equilátero inscripto en valores del radio, trazando el diámetro AD, el triángulo AFD rectángulo en F (54, corol. 2.^o) nos daría (111, corol.)

$$DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \sqrt{(2AO)^2 - AF^2} = \sqrt{4AO^2 - AO^2} = \sqrt{3AO^2} = AO\sqrt{3},$$

ó llamando r el radio, $DF = r\sqrt{3}.$

De esta ecuacion se pueden sacar consecuencias análogas á las deducidas en las observaciones 1.^a y 2.^a del número anterior.

Observacion 2.^a La recta BF tiene los puntos B y F equidistantes de A y O; luego es perpendicular á la AO en su punto medio G (26, corol. 2.^o); luego AG = GO: mas GO es la apotema del triángulo equilátero inscripto; luego *la apotema del triángulo equilátero inscripto es igual á la mitad del radio.*

131. *Problema 6.º* Dada una circunferencia, inscribir en ella un decágono regular.

Supongamos que AB (fig. 125) sea el lado del decágono inscrito. Trazando los radios AO y BO, el ángulo AOB = 36° (126, obs. 2.ª): luego los ángulos en A y B valdrán 44° (74, corol. 4.º). Mas como

AO = BO, los ángulos en A y B del mismo triángulo ABO serán iguales, luego cada uno de ellos valdrá 72°. Trácese la bisectriz del ángulo en A, y sus mitades QAB y QAO valdrán 36°. Luego el triángulo OAQ tiene los ángulos AOQ = QAO; luego (75, rec. 4.º).



$$AQ = OQ.$$

El triángulo ABQ es también isósceles; porque siendo QAB = 36°, y B = 72°, será AQB = 72° (74, corol. 4.º); luego

$$AQ = AB.$$

Esta igualdad de lados y la anterior nos dan

$$AB = OQ.$$

Siendo AQ bisectriz del ángulo en A, se tendrá (95)

pero
luego
o

$$\begin{aligned} AO : AB &:: OQ : QB; \\ AO = OB &\text{ y } AB = OQ; \\ OB : OQ &:: OQ : QB; \\ OB : AB &:: AB : QB. \end{aligned}$$

Luego el lado del decágono regular inscrito es igual a la parte mayor del radio, dividido en media y extrema razón (118).

Luego para inscribir en una circunferencia el decágono regular se coloca la parte mayor del radio, dividido en media y extrema razón (119), sobre la curva diez veces,

una á continuacion de otra: se unen los extremos de cada arco, y el polígono ABCD.... será el decágono pedido (*).

Corol. 1.º Uniendo de dos en dos, dejando uno intermedio, los vértices D, F, H, M,...., se tendrá inscripto el pentágono regular DFHM....

Corol. 2.º Para inscribir el pentedecágono regular se toma la diferencia entre el arco subtendido por el lado del exágono y el del decágono, y esta diferencia se coloca quince veces, una á continuacion de otra, sobre la circunferencia, la cual quedará dividida en quince partes iguales: se trazan las cuerdas correspondientes á estos arcos, y el polígono que forman será el pentedecágono regular.

En efecto, el lado del exágono subtiende un arco $\frac{1}{6}$ de circunferencia: el del decágono $\frac{1}{10}$ de id.: la diferencia entre estos arcos es

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{10}{60} - \frac{6}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

de circunferencia; luego este arco, colocado quince veces sobre la circunferencia, la divide en quince partes iguales, cuyas cuerdas formarán el pentedecágono regular (127, 1.º).

135. Observacion general. Se saben inscribir geoméricamente, entre otros polígonos regulares, los siguientes: el triángulo (133, corol.), el cuadrado (132), el pentágono (134, corol. 1.º) y el pentedecágono (134, corol. 2.º). Mas como inscripto un polígono regular se circunscribe otro del mismo número de lados (130, 1.º), y se inscribe otro de número de lados duplo (131, 1.º); resulta que se pueden inscribir y circunscribir geoméricamente los polígonos re-

(*) Esta construcción, si bien exacta en teoría, es bastante errónea en la práctica; porque el error que necesariamente se comete en la división del radio en media y extrema razón, se multiplica por 40 al hacer aplicación de ella. Es preferible en este caso, y en los que de él dependen, dividir la circunferencia por tanto en las partes iguales que se desee.

gulares, cuyo número de lados expresan los diferentes términos de las siguientes progresiones :

$$\therefore 3 : 6 : 12 : 24 : \dots : 3 \times 2^n$$

$$\therefore 4 : 8 : 16 : 32 : \dots : 4 \times 2^n$$

$$\therefore 5 : 10 : 20 : 40 : \dots : 5 \times 2^n$$

$$\therefore 15 : 30 : 60 : 120 : \dots : 15 \times 2^n$$

136. Problema 7.º Dado el lado a (fig. 126) de un polígono regular cualquiera, p. e., de un octógono, construir el polígono.

En una circunferencia, cuyo radio sea una línea cualquiera OB , inscribese un octógono $ABCD$ sobre uno de sus lados AB tómese $AM \equiv a$: por M trácese una paralela MB' al radio OA , hasta que corte en B' al OB' , prolongado si es necesario: con un radio igual á OB' trácese una nueva circunferencia: prolonguense los radios OA , OC , OD , etc., si se necesita, hasta que encuentren la nueva circunferencia en los puntos A' , C' , D' , etc.: únanse estos puntos por medio de cuerdas, y el polígono $A'B'C'D'$ será el pedido.

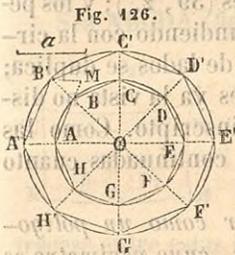
Porque siendo $OA \equiv OB$ y $OA' \equiv OB'$, se tiene

$$OA : OA' :: OB : OB';$$

luego AB es paralela á $A'B'$ (94, rec.); y como MB' es también paralela á AA' , por construcción, la figura $AA'B'M$ es un paralelógramo; luego (79, 1.º)

$$A'B' \equiv AM \equiv a.$$

Siendo los ángulos en O iguales entre sí, los arcos $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ que miden estos ángulos, serán también iguales; luego $A'B'C'D'$ es un octógono regular, cuyo lado es igual á la recta dada a .



ARTICULO II.

Razon de la circunferencia al diámetro.

137. Teorema 1.º *Dos circunferencias cualesquiera son proporcionales á sus radios y á sus diámetros.*

Inscribiendo en una circunferencia un polígono regular cualquiera, después otro de duplo número de lados, luego otro, y así sucesivamente: los radios de estos polígonos permanecen siempre iguales á los de la circunferencia: las apotemas se van aproximando al radio, porque los lados del polígono son cada vez menores (39, 2.º); y los perímetros de los polígonos se van confundiendo con la circunferencia, á medida que el número de lados se duplica; de manera que á las pocas inscripciones ya la vista no distingue la curva del último polígono inscripto. Como las inscripciones se pueden aun suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que

Todo círculo se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro es la circunferencia, y cuyos radios y apotemas son iguales.

Luego, siendo c , c' dos circunferencias, r , r' sus radios, y d , d' los diámetros, se tendrá (128)

$$c : c' :: r : r' :: 2r : 2r',$$

$$c : c' :: r : r' :: d : d'.$$

Corol. 1.º *La razon de la circunferencia al diámetro es una cantidad constante.*

En efecto, alternando la proporcion

Siendo los ángulos en O iguales entre sí, los arcos AB, BC, CD, ... que miden los ángulos, serán tambien iguales; luego el círculo ABCD, será también un polígono regular, y se tiene

$$d : c :: d' : c',$$

ó

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}.$$

— *Corol. 2.º* Llamando π (*) la razón de la circunferencia al diámetro, se tendrá

$$\frac{c}{d} = \pi \quad \text{ó} \quad \frac{c}{2r} = \pi,$$

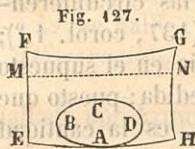
En cualquiera de estas dos ecuaciones entran tres cantidades indeterminadas, y por consiguiente conocidas dos de ellas se puede hallar el valor de la otra. Así

$$c = \pi d \quad \text{ó} \quad c = 2\pi r,$$

$$d = \frac{c}{\pi} \quad \text{ó} \quad r = \frac{c}{2\pi}.$$

138. Teorema 2.º *Toda línea convexa (**)* cerrada, comprendida dentro de otra cualquiera, es menor que esta.

Sea ABCDA (fig. 127) la línea convexa. Si esta no es menor que todas las que la comprenden, habrá de ellas una menor que todas las demás, que será mas corta que ABCDA ó igual con ella. Supongamos que la línea que comprende á la ABCDA con estas circunstancias sea AEEFGH: trácese entre estas dos líneas una recta cualquiera MN, que no corte á la ABCDA, y se tendrá (4)



$$MN < MFGN,$$

y agregando á los dos miembros la línea MEAHN resulta

$$AEMNHA < AEEFGHA :$$

mas por hipótesis AEEFGHA es la línea menor de las que comprenden á la ABCDA; luego esta hipótesis es absurda; luego todas las líneas que comprenden á la convexa son mayores que ella, ó ABCDA es la menor de todas.

(*) Este signo es la π griega, que se pronuncia pi.

(**) Cuando se da este nombre á una curva, sin relacion á otra línea ni punto, se significa con él que la curva no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos. Así la circunferencia es una curva convexa.

Corol. 1.º *La circunferencia es mayor que el perímetro de un polígono cualquiera inscripto, y menor que el de otro cualquiera circunscripto.*

Corol. 2.º *Los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, van creciendo á medida que el número de sus lados se duplica, y los de los circunscriptos van disminuyendo en igual caso.*

Observacion. De estos corolarios se infiere tambien [51, (')] que

La circunferencia es el limite superior de los polígonos regulares inscriptos, y el inferior de los circunscriptos.

PROBLEMAS relativos al capitulo que precede.

139. Problema 1.º Hallar la razon numérica de la circunferencia al diámetro, ó sea el valor de π .

Siendo constante, ó igual para todas las circunferencias la cantidad que vamos á determinar (137, corol. 1.º); si se calcula el valor de una circunferencia en el supuesto que el diámetro es 1, se tendrá la razon pedida; puesto que la razon de una cantidad con la unidad, es la cantidad misma.

Inscribiendo en una circunferencia, cuyo diámetro es 1, un exágono regular, el lado de este polígono valdrá $\frac{1}{2}$ (133); y el perímetro

$$\frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

El lado del exágono circunscripto será tambien (130, 2.º)

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{3} = 0,577\dots$$

y el perímetro $0,577 \times 6 = 3,46\dots$

Ahora la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscripto y menor que el del circunscripto (138, corol. 1.º); luego el valor numérico de la circunferencia será 3 y una fracción decimal menor que 0,46.

Si del mismo modo calculámos el perímetro del polígono inscripto de 12 lados (131, 2.º), y el de igual número de lados circunscripto: el primero de estos valores será mayor que 3 y el segundo menor que 3,46... (138, corol. 2.º), luego la circunferencia estará representada por 3 y la parte decimal que tengan comun los perímetros que acaban de determinarse.

Continuando de la misma manera el cálculo de los perímetros de los polígonos inscriptos y circunscriptos de 24, 48, 96, etc., lados, los valores de estos perímetros se irán aproximando mas y mas, y el valor de la circunferencia se podrá hallar tan aproximado como se quiera (*).

Así se halló $\pi = 3,14159\dots$

Observacion. La razon de la circunferencia al diámetro

hallada por Arquímedes es $\frac{22}{7}$:

por Pedro Mecio $\frac{355}{113}$ (**):

por otros procedimientos menos elementales que el que hemos empleado

$\pi = 3,1415926535\dots$ (hasta 155 cifras decimales).

140. Problema 2.º Si un radio tiene 6 metros ¿cuál será la longitud de la circunferencia?

(*) Claro se ve que por este procedimiento no es posible llegar á un valor exacto que represente la razon de la circunferencia al diámetro. Mas aun, por cualquiera otro de los inventados ó por inventar se hallaria un resultado análogo; porque la razon de la circunferencia al diámetro, y aun el cuadrado de esta razon, es una cantidad inconmensurable. (V. Legendre, Geom., nota 4.º)

(**) Este número se puede obtener escribiendo las tres primeras cifras impares cada una dos veces, y separando por medio el grupo que forman; de este modo

Se tendrá (137, corol. 2.º)

$$C = 2\pi r = 2 \times 3,14159 \times 6 = 37,69908 \text{ metros.}$$

Recíprocamente. Si una circunferencia tiene 516 varas de longitud ¿cuál será su radio?

El radio será (137, corol. 2.º)

$$r = \frac{c}{2\pi} = \frac{516}{6,28318} = 82,12 \text{ varas.}$$

141. *Problema 3.º* Si un arco tiene 20° y el radio es 10 metros ¿cuál será la longitud del arco?

La de la circunferencia es (137, corol. 2.º)

$$c = 2 \times 3,14159 \times 10 = 62,8318 \text{ metros,}$$

y la del arco se halla por la siguiente proporción

$$360^\circ : 20^\circ :: 62,8318 : x;$$

de donde
$$x = \frac{20 \times 62,8318}{360} = 3,4906 \text{ metros.}$$

142. *Problema 4.º* Conocido el radio de un arco, hallar el número de grados que debe tener para que su longitud sea igual a la de una circunferencia de radio también dado.

Llamando r el radio del arco y x el número de grados, la longitud del arco será

$$\frac{2\pi r \times x}{360};$$

la de la circunferencia cuyo radio es r' será también

$$2\pi r';$$

y como estas dos expresiones representan, por hipótesis, cantidades iguales, resulta

$$\frac{2\pi r \times x}{360} = 2\pi r';$$

de donde (Alg. 41)
$$x = 360 \times \frac{r'}{r};$$

Así el número de grados de un arco cuyo radio son 24

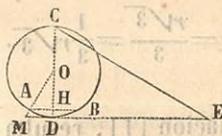
varas, é igual en longitud á una circunferencia, cuyo radio sean 10 varas, será

$$x = 360^\circ \times \frac{10}{24} = 150^\circ.$$

143. Problema 5.º Hallar gráficamente la longitud aproximada de una circunferencia (*).

Trácese la cuerda AB (fig. 128) igual al radio, y el diámetro CD perpendicular á esta cuerda: se traza por D la tangente ME, y el radio OA, prolongándole hasta encontrarla en M: desde este punto hácia la derecha se toman tres radios; se une el extremo E del último con el C del diámetro, y la rec-

Fig. 128.



ta CE será la longitud de la semicircunferencia con menos error que $\frac{1}{10000}$ del radio.

En efecto: en el triángulo CDE, rectángulo en D, se tiene (111, corol.)

$$CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{CD^2 + (ME - MD)^2} = \sqrt{CD^2 + ME^2 - 2ME \times MD + MD^2}$$

ó, poniendo en vez de CD su valor $2r$, y en lugar de ME el suyo $3r$,

$$CE = \sqrt{4r^2 + 9r^2 - 6r \times MD + MD^2} = \sqrt{13r^2 - 6r \times MD + MD^2} [1].$$

(*) También ha sido imposible hasta ahora la resolución *exacta* de este problema. No se crea sin embargo demostrada esta imposibilidad, porque el diámetro y la circunferencia sean incommensurables (139, (*)); puesto que el lado del cuadrado y su diagonal también lo son (132, obs. 1.ª), y es evidente con todo, que dada una de estas líneas, se construye la otra con exactitud geométrica.

Para hallar el valor de MD, de los triángulos semejantes OAH y OMD se deduce

$$MD : AH :: OD : OH ;$$

de donde
$$MD = \frac{AH \times OD}{OH} ,$$

ó, substituyendo $\frac{1}{2}r$ por AH, r por OD, y $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - r^2}$ por OH (130, 2.^o),

$$MD = \frac{\frac{1}{2}r \times r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - r^2}} = \frac{\frac{1}{2}r^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3r^2}} = \frac{r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}r\sqrt{3} .$$

Substituyendo este valor de MD en la ecuacion [1], resulta

$$CE = \sqrt{13r^2 - 6r \times \frac{1}{3}r\sqrt{3} + \frac{4}{9} \times r^2 \times 3} = \sqrt{r^2 \left(13 - \frac{4}{3} \times 2\sqrt{3}\right)} = r\sqrt{13,66... - 3,46...} = r\sqrt{10,20...} ;$$

ó por último

$$CE = r \times 3,14453 ;$$

y como (137, corol. 2.^o) $C = 2r \times 3,14459$, la línea CE representa el valor de la semicircunferencia con menos error de 0,0001 del radio.

CAPÍTULO III.

De las áreas de las figuras planas.

ARTÍCULO PRIMERO.

Determinación de las áreas de las figuras planas.

144. Se llaman figuras EQUIVALENTES las que tienen igual extensión superficial, pero distinta forma; de manera que superpuestas no coinciden en todos sus puntos.

145. Teorema 1.º Dos paralelogramos (fig. 429) AC y EG (*), que tienen las bases AD y EH iguales é igual altura (77), son equivalentes.

Superpóngase el paralelogramo EG al AC, de modo que EH coincida con su igual AD; y

Fig. 429.



como las alturas son iguales, los lados BC y FG formarán la línea recta BG' (32, corol.).

Los triángulos ABF' y CDG' tienen los ángulos $\angle BAF' = \angle CDG'$ (33, 1.º), además $AB = CD$ y $AF' = DG'$ (79, 1.º), luego son iguales (72, 2.º).

Si del trapecio ABG'D se resta el triángulo ABF' queda

(*) Estos paralelogramos los nombramos, para mayor concisión, por las letras colocadas en los extremos de una diagonal: del mismo modo se expresará en lo sucesivo todo cuadrilátero, siempre que esto no dé lugar á equivocaciones.

el paralelogramo AF'G'D, que representa al EG; si del mismo trapecio se resta el triángulo DCG' queda el paralelogramo AC; luego los paralelogramos AC y EG son equivalentes.

146. Teorema 2.º *Todo triángulo ABC (fig. 130) es la mitad de un paralelogramo de igual base y altura.*

Si por los vértices B y C se trazan las rectas BD y CD respectivamente paralelas á AC y AB, la figura ABCD es un paralelogramo, que tiene

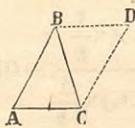


Fig. 130.

la misma base AC que el triángulo, y también la misma altura (32, corol.), pero los triángulos ABC y BCD, son iguales (79, corol. 1.º); luego ABC es la mitad del paralelogramo AD, que tiene la misma base y altura.

Corol. *Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.*

Porque son mitades de paralelogramos equivalentes (145).

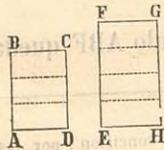
147. *Se llama ÁREA de una figura la medida de su extensión superficial (6).*

En la determinación de las áreas tomaremos siempre por unidad un cuadrado cuyo lado sea la unidad de longitud.

148. Teorema 3.º *Las áreas de dos rectángulos AC y EG (fig. 131), de iguales bases AD y EH, son proporcionales á sus alturas AB y EF.*

Distinguiremos dos casos: 1.º que las alturas sean conmensurables: 2.º que sean inconmensurables.

Fig. 131.



1.º Supongamos que la medida común se pueda colocar 3 veces sobre AB, y 4 sobre EF, y se tendrá

$$AB : EF :: 3 : 4.$$

Por los puntos de división trácense paralelas á las bases, y los rectángulos AC y EF quedarán divididos el primero en 3 rectángulos

parciales, y el segundo en 4, todos iguales entre sí (79, corol. 2.^o); luego

$$AC : EG :: AB : EF.$$

2.^o Sean AB y EF (fig. 432) incommensurables. Supongamos que la AB se divida en partes iguales tan pequeñas como se quiera, y que una de estas partes sea Aa : colóquese esta parte sobre EF todas las veces que se pueda, y quedará un resto Ff , una vez que AB y EF son incommensurables: trácese luego la fg paralela á EH .

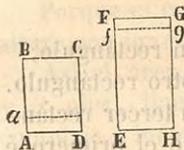


Fig. 432.

Siendo las rectas AB y Ef commensurables, se tendrá (1.^a parte del teorema)

$$AC : Eg :: AB : Ef,$$

ó

$$\frac{AC}{Eg} = \frac{AB}{Ef}.$$

Comparando estos quebrados con los siguientes:

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF},$$

se observará que los segundos (que estan en columna) tienen el numerador AB comun, y que el denominador Ef se puede aproximar á EF todo lo que se quiera; porque Ff es menor que Aa , y esta parte puede ser mas pequeña que una cantidad dada cualquiera;

luego $\frac{AB}{EF}$ es el limite de $\frac{AB}{Ef}$ [54, (')]: por igual razon $\frac{AC}{EG}$ es el limite de $\frac{AC}{Eg}$: pero las cantidades variables son iguales; luego los limites tambien lo serán [54, (') corol.], luego

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF},$$

ó

$$AC : EG :: AB : EF.$$

Observación. Como en todo rectángulo se pueden tomar las bases por alturas, y las alturas por bases, resulta que

Las áreas de dos rectángulos de iguales alturas, son proporcionales á sus bases.

149. Teorema 4.º *Las áreas de dos rectángulos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Llámesse

R , b , a , el área, base y altura de un rectángulo,

R' , b' , a' , el área, base y altura de otro rectángulo.

R'' , b , a' , el área, base y altura de un tercer rectángulo, que como se ve, tiene igual base que el primero é igual altura que el segundo. El primero y tercer rectángulo tienen bases iguales, luego (148).

$$R : R'' :: a : a'$$

El segundo y tercer rectángulo tienen iguales alturas, luego (148, obs.)

$$R'' : R' :: b : b'$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor R'' , comun á los dos términos de la primera razon compuesta, resulta

$$R : R' :: a \times b : a' \times b'$$

Corol. 1.º Esta proporción se escribe tambien así

$$\frac{R}{R'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}$$

Si suponemos que R' es la unidad de medida del rectángulo R , el primer quebrado representa el área de este rectángulo (6): mas en tal caso $b' = a' = 1$ (147); luego en dicha hipótesis se tiene

$$R = a \times b.$$

Luego el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

De modo que si un rectángulo tuviese por base 41 metros y por altura 22 id.; llamando R su área, se tendría

$$R = 41 \times 22 = 902 \text{ metros cuad.}$$

Corol. 2.º *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

Porque el cuadrado es un rectángulo en que la base y altura son iguales.

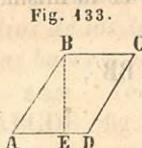
Así el área de un cuadrado, cuyo lado son 6 varas y 2 pies, llamando C á dicha área, y reduciendo el complejo á incomplejo (*) resulta

$$C = 20^2 = 400 \text{ piés cuad.}$$

150. **Teorema 5.º** *El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*

Porque el paralelógramo es equivalente á un rectángulo de igual base y altura (445): el área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura (449, corol. 1.º); luego la del paralelógramo será igual tambien al producto de la base por la altura.

Así, para hallar el área del paralelógramo AC (fig. 133), se mide su base AD, que supongamos tiene seis metros: se traza su altura BE, que tambien se mide, y supóngase que tiene 8 metros: y llamando P al área buscada, se tendrá



$$P = 6 \times 8 = 48 \text{ metros cuad.}$$

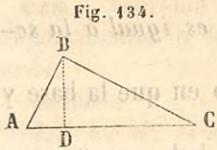
151. **Teorema 6.º** *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Porque el triángulo es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura (446): el área del paralelógramo es

(*) Esto es preferible á la multiplicacion por el método ordinario, y aun por el de las partes alicuotas (V. Arit., 105, 107 y 110).

igual al producto de su base por su altura (150); luego la del triángulo será igual á la mitad del producto de la base por la altura.

De modo que para hallar el área del triángulo ABC (figura 134), se mide su base AC: se



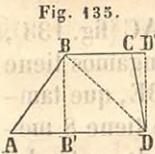
traza la altura BD, que se mide también, y suponiendo que la primera de estas líneas tenga 10 varas y la segunda 7, llamando T el área buscada, será

$$T = \frac{10 \times 7}{2} = 35 \text{ varas cuad.}$$

Corol. Las áreas de dos triángulos son proporcionales á los productos de las bases por las alturas: si las bases son iguales, serán proporcionales á las alturas; y si las alturas son iguales, serán proporcionales á las bases.

152. Teorema 7.º El área de un trapecio ABCD (figura 135) es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases.

Trazando la diagonal BD, el trapecio queda dividido en dos triángulos, cuyas bases pueden ser las AD y BC del trapecio, y cuyas alturas son en tal caso $BB' = DD'$, que es la misma del trapecio.



El área de ABD es $\frac{1}{2} AD \times BB'$,

la de BDC es $\frac{1}{2} BC \times DD'$;

luego la del trapecio será

$$\frac{1}{2} AD \times BB' + \frac{1}{2} BC \times DD' = BB' \times \frac{1}{2} (AD + BC).$$

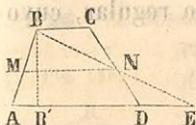
Así el área del trapecio anterior, en el supuesto de que $BB' = 10$ pulgadas, $AD = 13$ y $BC = 5$, sería

$$10 \times \frac{1}{2} (13 + 5) = 10 \times 9 = 90 \text{ pulgadas cuad.}$$

Observacion. Si se prolonga la base AD del trape-

cio ABCD (fig. 136) una parte $DE = BC$, y se une B con E, el triángulo ABE es equivalente al trapecio; porque tiene la misma altura que este, y su base es la suma de las dos bases del mismo. Luego el área del trapecio es también

Fig. 136.



$$BB' \times \frac{1}{2} AE \quad [1].$$

Los triángulos BCN y NDE, que tienen $BC = DE$ por hipótesis, y los ángulos $BCN = NDE$ y $NBC = DEN$, por alternos entre paralelas, son iguales ($72, 3.^\circ$); luego $BN = NE$, y también $CN = ND$.

Trazando por N la recta NM paralela á AE, se tendrá (97)

$$BN : BE :: BM : BA :: MN : AE;$$

pero $BN = \frac{1}{2} BE$; luego $BM = \frac{1}{2} BA$ y $MN = \frac{1}{2} AE$.

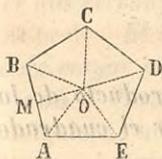
Sustituyendo este valor de $\frac{1}{2} AE$ en la fórmula [1], el área del trapecio será

$$BB' \times MN.$$

Luego el área del trapecio es también igual al producto de su altura por una línea trazada por los puntos medios de los lados no paralelos, ó sea por una paralela á las bases y equidistante de estas.

153. Teorema 8.º *El área de un polígono regular ABCDE (fig. 137) es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro.*

Fig. 137.



Trazando los radios AO, BO, CO, etc. del polígono, este queda dividido en tantos triángulos AOB, BOC, etc. iguales entre sí ($72, 4.^\circ$) como lados tiene: el área de uno de los triángulos AOB es $\frac{1}{2} MO \times AB$ (151); luego la del polígono será $\frac{1}{2} MO \times AB \times 5 = \frac{1}{2} MO \times 5AB$,

ó llamando P el área del polígono, a la apotema y p el perímetro,

$$P = \frac{1}{2}ap.$$

Así, para hallar el área de un exágono regular, cuyo lado tiene 4 metros, será

$$P = 6 \times 4 = 24 \text{ metros,}$$

y (130, obs. 2.^a) $a = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 16 - 16} = 3,46$ metros;

de donde $P = \frac{1}{2} \times 3,46 \times 24 = 41,52$ metros cuad.

154. Llámase SECTOR POLIGONAL la parte ABCO del polígono comprendida por dos radios y dos ó mas lados.

La parte ABC de perímetro correspondiente á un sector, se llama BASE de este.

Corol. El área de un sector poligonal es igual á la mitad del producto de su apotema por la base.

155. Teorema 9.^o El área del círculo es igual á la mitad del producto del radio por la circunferencia.

Porque el círculo se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro es la circunferencia, y cuya apotema es el radio (137); luego llamando c la circunferencia, r el radio y C el área del círculo, se tendrá

$$C = \frac{1}{2}rc.$$

Corol. Sustituyendo en esta fórmula en vez de c su valor $2\pi r$ (137, corol. 2.^o) se tendrá

$$C = \frac{1}{2}r \times 2\pi r = \pi r^2,$$

ó $C = \pi r^2.$

Luego el área del círculo es igual al producto de la razón de la circunferencia al diámetro por el cuadrado del radio.

Así el área de un círculo, cuyo radio son 10 varas, será

$$C = 3,14159 \times 10^2 = 314,159 \text{ varas cuad.}$$

156. Llámase **SECTOR** de círculo la parte ABCO (figura 138) de este, comprendida entre dos radios OA, OC y un arco ABC.

Fig. 138.



Corol. El área de un sector de círculo es igual a la mitad del producto de su radio por el arco.

Porque se puede considerar también como un sector poligonal, correspondiente a un polígono regular de infinito número de lados.

157. Se llama **SEGMENTO** de círculo la parte de este comprendida entre una cuerda y su arco, ó entre dos cuerdas paralelas y los arcos que estas interceptan.

La cuerda ó cuerdas que le forman se llaman **base** ó **bases** del segmento.

ABC y ADC son segmentos de una base AC: ACNM es un segmento de dos bases AC y MN.

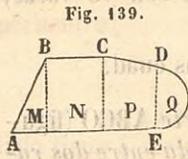
Corol. El área de un segmento ABC de una base, y menor que el semicírculo, es igual a la del sector AOCB menos la del triángulo AOC: la de un segmento ADC de una base también, pero mayor que el semicírculo, es igual a la del sector ADCO más la del triángulo AOC; y la del segmento ACNM de dos bases es igual a la diferencia de las áreas de los segmentos MBN y ABC de una base.

158. Se llaman **circunferencias CONCÉNTRICAS** las que tienen el mismo centro.

Llámase **CORONA** ó **ANILLO** la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas de diferente radio.

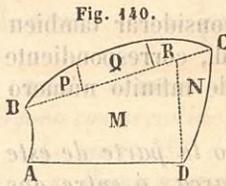
Corol. El área de una corona es igual a la del círculo de mayor radio menos la del círculo de radio menor.

159. Para determinar el área de una figura plana cualquiera, no comprendida en lo que precede de este artículo, se divide exacta ó aproximadamente en otras, cu-



Si la figura no fuese rectilínea ni compuesta de arcos

de círculo, como ABCD (fig. 140), se dividiría en otras que supondríamos rectilíneas, p. e., el trapecio M, los triángulos P, R, N y el rectángulo Q; y la suma de las áreas de estas sería aproximadamente el área de la figura propuesta.



ARTÍCULO II.

Comparacion de las áreas de las figuras planas.

160. Teorema 1.º Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.

Siendo semejantes los triángulos ABC y A'B'C', cuyas alturas son BD y B'D' (fig. 141), se tendrá (108)



$$BD : B'D' :: AC : A'C' ;$$

esta proporción y la que es por otra parte evidente

$$AC : A'C' :: AC : A'C' ,$$

multiplicadas ordenadamente y partiendo por 2 los dos primeros términos, dan

$$\frac{1}{2} AC \times BD : \frac{1}{2} A'C' \times B'D' :: AC^2 : A'C'^2 .$$

Los términos de la primera razón representan las áreas

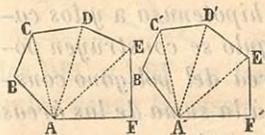
de los triángulos dados (151), y la razón segunda es igual á $AB^2 : A'B'^2$ y á $BC^2 : B'C'^2$ (Alg., 127, 4.^a); luego

$$ABC : A'B'C' :: AB^2 : A'B'^2 :: AC^2 : A'C'^2 :: BC^2 : B'C'^2.$$

161. Teorema 2.^o Las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera $ABCD\dots$ y $A'B'C'D'\dots$ (fig. 142) son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.

Estos polígonos se pueden descomponer en igual número de triángulos ABC y $A'B'C'$, ACD y $A'C'D'$, etc., semejantes y semejantemente dispuestos (101, rec.); luego se tendrá (160):

Fig. 142.



$$ABC : A'B'C' :: BC^2 : B'C'^2,$$

$$ACD : A'C'D' :: CD^2 : C'D'^2$$

.....

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (96, y Alg., 127, 4.^a)

$$ABC : A'B'C' :: ACD : A'C'D' :: \text{etc.} : \text{etc.} :: BC^2 : B'C'^2;$$

de donde (Alg., 130)

$$ABC + ACD + \text{etc.} : A'B'C' + A'C'D' + \text{etc.} :: BC^2 : B'C'^2,$$

ó llamando P y P' las áreas de los polígonos,

$$P : P' :: BC^2 : B'C'^2.$$

Corol. Las áreas de los polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á los cuadrados de sus radios y apotemas.

Estos polígonos son semejantes (102); luego sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de los lados: y como los lados son proporcionales á los radios y apotemas, los cuadrados de los lados serán proporcionales á los cuadrados de los radios y de las apotemas (Alg., 127, 4.^a); y por consiguiente las áreas serán también proporcionales á los cuadrados de los radios y de las apotemas.

Así $P : P' :: r^2 : r'^2 :: a^2 : a'^2$.



162. Teorema 3.^o *Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de los radios y de los diámetros.*

Las fórmulas de las áreas de dos círculos son (155, corol.):

$C = \pi r^2$ y $C' = \pi r'^2$;
de donde $C : C' :: \pi r^2 : \pi r'^2 :: r^2 : r'^2$;

y como los cuadrados de los radios son proporcionales á los cuadrados de los diámetros, resulta

$C : C' :: r^2 : r'^2 :: d^2 : d'^2$.

163. Teorema 4.^o *Si sobre la hipotenusa a y los catetos b y c de un triángulo rectángulo se construyen polígonos semejantes A, B, C; el área del polígono construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos.*

En efecto, se tiene (161)

$A : a^2 :: B : b^2 :: C : c^2$;

pero $a^2 = b^2 + c^2$ (111, 1.^o) ; luego (Alg. 130, corol.)

$A = B + C$.

Corol. 1.^o *El cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Porque estos tres cuadrados son polígonos semejantes (102).

Corol. 2.^o *Si con radios respectivamente iguales á la hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo se trazan circunferencias, y en ellas se inscriben ó circunscriben polígonos regulares de igual número de lados, el área del polígono formado en la primera es igual á la suma de las áreas de los otros dos.*

Este corolarjo y el siguiente se demuestran como el teorema.

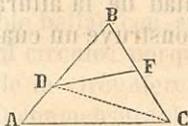
Corol. 3.^o *El área del círculo trazado con un radio ó diámetro igual á la hipotenusa es igual á la suma de las*



áreas de los trazados con el radio ó diámetro respectivamente iguales á los catetos.

164. Teorema 5.º *Las áreas de dos triángulos ABC y DBF (fig. 143), que tienen un ángulo B común, son proporcionales á los productos $AB \times BC$ y $BD \times BF$ de los lados que en cada triángulo forman dicho ángulo.*

Fig. 143.



Trazando la DC y tomando por bases de los triángulos ABC y DBC los lados AB y DB, estos triángulos tienen la misma altura; luego (151, corol.)

$$ABC : DBC :: AB : DB .$$

Si se toman por bases de los triángulos DBC y DBF los lados BC y BF, también estos triángulos tienen la misma altura; luego

$$DBC : DBF :: BC : BF .$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo al mismo tiempo el factor común DBC, resulta

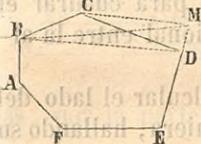
$$ABC : DBF :: AB \times BC : DB \times BF .$$

PROBLEMAS

relativos al capítulo que precede.

165. *Problema 1.º* Trasformar un polígono ABCD... (fig. 144) en otro equivalente y que tenga un lado menos.

Fig 144.



Unase B con D: por C trácese CM paralela á BD; prolonguense el lado ED hasta encontrar en M á la CM, y el polígono ABMEF será el pedido.

En efecto, los triángulos BCD y BMD, que tienen la misma base BD y sus vértices C y M equidistantes de esta base (32, corol.) son equivalentes (146, corol.). Luego si al polígono ABDEF se le agrega el triángulo BCD, y después el BMD, los polígonos resultantes ABCDEF y ABMEF son equivalentes; y este tiene evidentemente un lado menos que el primero.

Corol. *Todo polígono se puede transformar gráficamente en un triángulo equivalente.*

Porque si tiene, p. e., 10 lados se transforma en otro equivalente que tenga 9, luego en otro que tenga 8, y así sucesivamente.

166. Problema 2.º Cuadrar un triángulo, ó sea trasformarle en cuadrado equivalente.

Hállese una media proporcional entre la altura y la mitad de la base, ó entre la base y la mitad de la altura (146): sobre esta media proporcional se construye un cuadrado, el cual será el pedido.

En efecto, de la proporción

$$a : x :: x : \frac{1}{2}b \quad \text{ó} \quad b : x :: x : \frac{1}{2}a,$$

se deduce $x^2 = \frac{1}{2}ab.$

Corol. *Todo polígono puede cuadrarse gráficamente.*

Porque se puede trasformar en triángulo equivalente (165, corol.); y luego en cuadrado, según el problema.

Observacion 1.ª Los polígonos para la determinación de cuya área hay fórmula determinada, pueden cuadrarse sin necesidad de trasformarlos antes en triángulos equivalentes, hallando una media proporcional entre los dos factores que forman dicha área, y construyendo un cuadrado sobre dicha media proporcional.

Así para cuadrar el paralelógramo se halla la media proporcional entre la base y la altura; para cuadrar el trapecio, se determina la media proporcional entre la altura y la semisuma de las bases, etc.

Observacion 2.ª También es fácil calcular el lado del cuadrado equivalente á una figura cualquiera, hallando su área y extrayendo la raíz cuadrada del número que resulte.

Así el lado del cuadrado equivalente á una figura cuya área son 1800 varas cuadradas, es

$$l = \sqrt{1800} = 42,42... \text{ varas.}$$

167. *Problema 3.º* Cuadrar el círculo aproximadamente.

Hállese una media proporcional entre el radio y la semicircunferencia, y este será aproximadamente el lado del cuadrado equivalente al círculo; ó determínese el área del círculo, extráigase la raíz cuadrada del número que la represente, y esta raíz será con aproximación el lado del cuadrado equivalente.

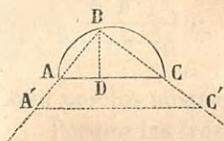
Observacion. Por este último procedimiento es imposible hallar con exactitud el lado del cuadrado equivalente al círculo; porque entrando por factor del área la razón de la circunferencia al diámetro, y siendo esta cantidad inconmensurable [139, (*)] el resultado no puede ser exacto, aunque sí tan aproximado como se quiera. Tampoco puede resolverse el problema por el primer medio con exactitud; puesto que hasta ahora no ha podido rectificarse exactamente la circunferencia [143, (*)].

De manera que la cuadratura del círculo, el problema mas famoso de la Geometría, ha sido hasta el presente irresoluble, y probablemente no se llegará nunca á resolver con exactitud (*).

168. *Problema 4.º* Dado un polígono P construir otro P' semejante al primero, y cuyas áreas esten en una razón dada, p. e., de 3 á 4.

En una recta AC (fig. 145) tómesese $AD = 3$ partes cualesquiera, pero iguales entre sí, y á continuacion $DC = 4$ partes iguales á las anteriores: sobre AC como diámetro trácese una semicircunferencia: en el punto D del diámetro levántese la perpendicular DB, y trácese las rectas BA y BC, indefinidas, por la parte inferior del diámetro: tómesese sobre BA

Fig. 145.



(*) Si bien la resolución exacta de este problema sería un descubrimiento interesante bajo el punto de vista científico, no lo sería tanto, mejor dicho, traería muy poca utilidad, con relación á sus aplicaciones prácticas; puesto que la aproximación puede llevarse tan adelante como en cualquier caso sea de desear.

una parte BA' igual á uno de los lados del polígono dado P :
y trazando la recta $A'C'$ paralela al diámetro, constrúyase
sobre BC' , considerada como lado homólogo del lado BA'
del polígono P , otro polígono P' semejante al dado (124);
y el polígono formado de esta manera será el pedido.

En efecto, se tiene (161)

$$P : P' :: BA'^2 : BC'^2 .$$

Los triángulos BAC y $BA'C'$ son semejantes (97); luego

$$BA' : BC' :: BA : BC ,$$

ó (Alg. 127, 4.ª) $BA'^2 : BC'^2 :: BA^2 : BC^2 :$
pero (110, obs.) $BA^2 : BC^2 :: 3 : 4 ;$

luego de esta proporción y la anterior, que tienen una razón común, se deduce

$$BA'^2 : BC'^2 :: 3 : 4 .$$

Esta proporción y la primera tienen también una razón igual; luego por último

$$P : P' :: 3 : 4 .$$

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO.

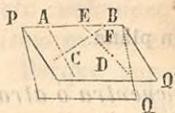
PRELIMINARES.

Del plano.

169. Teorema 1.º *Por tres puntos A, B, C (fig. 146), que no esten en linea recta, puede pasar un plano, pero nada mas que uno solo; ó lo que es igual, tres puntos que no estan en linea recta determinan la posicion de un plano.*

Por los puntos A, B, C trácense rectas: por una de estas AB, hágase pasar un plano PQ (*),

Fig. 146.



el cual puede evidentemente girar sirviéndole de eje AB hasta llegar al punto C; luego el plano PQ pasa por los tres puntos dados.

Otro plano cualquiera PQ', que pase por los mismos puntos A, B, C, coincidiría con el PQ.

Porque las tres rectas AB, BC y AC estarían en los dos planos (8, corol.); luego por un punto cualquiera D, situado en el plano PQ', se podría trazar una recta DE que

(*) El plano se representa comunmente por un paralelogramo que debe suponerse ilimitado, y se nombra por las letras de una de sus diagonales, como ya se ha visto (145 y siguientes). Con mas propiedad se representaria por un circulo; pero esto ni se acostumbra ni sería mas cómodo.

cortase dos rectas AB y BC de las tres que unen los puntos dados. Ahora la recta DE, que tiene los puntos E y F en el plano PQ, coincidirá con él en toda su extension (8, corol.); luego el punto D de esta recta se hallará tambien en el plano PQ, luego dicho punto es comun á los dos planos; luego estos tienen todos sus puntos comunes, luego coinciden.

Corol. 1.º *Un ángulo ó dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

Porque el punto comun de las dos rectas y otro en cada una de ellas forman un sistema de tres puntos que no estan en línea recta; hallándose las dos rectas en el plano de dichos puntos (8, corol.).

Corol. 2.º *Dos paralelas determinan la posicion del plano en que estan situadas.*

Porque tomando un punto en una de las paralelas y dos en la otra, se tiene un sistema de tres puntos que no estan en línea recta.

Corol. 3.º *La interseccion de dos planos es una línea recta.*

Porque si en esta interseccion se pudiesen tomar tres puntos no en línea recta, los dos planos formarian uno solo; contra la hipótesis.

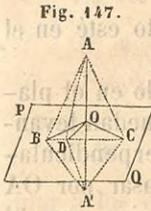
Rectas perpendiculares y oblicuas á un plano.

170. *Se llama PIÉ de una línea que encuentra ó atraviesa á un plano, el punto comun á la recta y al plano.*

Se dice que una recta es PERPENDICULAR á UN PLANO, ó que este lo es á aquella, cuando la línea es perpendicular á todas las rectas que pueden pasar por su pié en el mismo plano; y OBLICUA cuando le encuentra sin serles perpendicular.

171. Teorema 1.º *Si una recta AO (fig. 147) es perpendicular á otras dos BO y CO, que pasan por su pié O, en un plano PQ, lo será tambien á otra recta cualquiera DO, que pasa por este punto O en el mismo plano.*

Tómese (sobre AO y su prolongacion) $AO = A'O$: trácese por un punto cualquiera D de la DO una recta BC, que corte á las rectas indefinidas BO y CO: únense los puntos A y A' con los B, C y D.



Como los puntos A, B y A' estan en un mismo plano (169), y además BO es perpendicular á AA' en su punto medio O, resulta (25, 1.º) $AB = A'B$: por igual razon $AC = A'C$; luego los triángulos ABC y A'BC tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales. Doblando A'BC sobre el ABC, por la recta BC, la línea A'D coincide con la AD, luego son iguales; luego la recta DO tiene los puntos D y O equidistantes de A y A', luego es perpendicular á la AA' (26, corol. 2.º); y por consiguiente AA' lo será á DO (22, corol. 4.º).

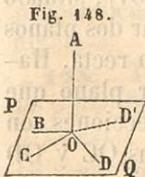
Corol. 1.º Si una recta es perpendicular á dos que pasan por su pié en un plano, es perpendicular al plano.

Corol. 2.º El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos A y A' de una recta, es el plano PQ perpendicular en el punto medio O de dicha recta.

Recíprocamente. Si dos rectas BO y CO fig. 148) son perpendiculares á una tercera AO en un punto dado O, otra recta cualquiera DO, perpendicular á la misma AO y en el mismo punto, estara en el plano BOC de las dos primeras.

Porque supongamos que, siendo PQ el plano de las BO y CO, la DO se encuentre fuera de él: hágase pasar por AO y DO otro plano, el cual cortará al PQ en otra recta D'O distinta de DO, y se tendrá: D'O perpendicular á AO (corol. ant.), y DO perpendicular tambien á la AO por hipótesis; luego en el punto O de la AO y en el plano AOD se tienen dos perpendiculares á esta recta, lo que es absurdo (23).

Corol. El lugar geométrico de las perpendiculares trazadas en un punto de una recta, es el plano perpendicular á la recta en el mismo punto.

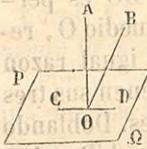


172. Teorema 2.º *Por un punto dado, no se puede trazar á un plano mas de una perpendicular.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que el punto esté en el plano: 2.º que esté fuera de él.

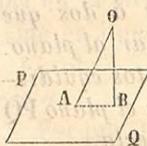
1.º Sea el punto dado O (fig. 449), situado en el plano PQ , y supongamos que se puedan levantar las dos rectas OA y OB perpendiculares á dicho plano. Haciendo pasar por OA y OB otro plano, su interseccion con el PQ será una recta CD (469, corol. 3.º); luego en el punto O de la recta CD se tendrían dos perpendiculares á esta recta (470), lo que es absurdo (23).

Fig. 449.



2.º Sea el punto dado O (fig. 450), situado fuera del plano PQ , y supongamos que se puedan bajar las perpendiculares AO y BO á este plano. Haciendo pasar por AO y BO otro plano, su interseccion con el PQ será una recta AB (469, corol. 3.º); luego desde el punto O se tendrían bajadas sobre la AB dos perpendiculares (470), lo que es imposible (23).

Fig. 450.

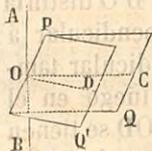


173. Teorema 3.º *Por un punto dado, no se puede trazar á una recta mas que un plano perpendicular.*

Se distinguen tambien dos casos: 1.º que el punto esté en la recta: 2.º que esté fuera de ella.

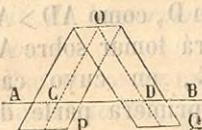
1.º Supongamos que por el punto O (fig. 451), situado en la recta AB , se puedan trazar dos planos PQ y PQ' perpendiculares á esta recta. Haciendo pasar por AO un tercer plano que corte á los otros dos, sus intersecciones con los dos primeros serán las rectas OC y OD (469, corol. 3.º); luego la recta AO sería perpendicular á las OC y OD , que pasan por su pié en dichos planos (470); luego en el punto O de la recta AB , y en un mismo plano, se tendrían dos perpendiculares á dicha recta, lo que es absurdo (23).

Fig. 451.



2.º Si desde el punto O (fig. 152), situado fuera de la recta AB, suponemos trazados los dos planos OP y OQ perpendiculares á esta recta, haciendo pasar por O y por dicha recta AB un tercer plano, las intersecciones de este con los primeros serían las rectas OC y OD (169, corol. 3.º); y como AB es perpendicular á los dos planos OP y OQ, lo sería también á las rectas OC y OD que pasan por los puntos C y D en estos planos (170); luego desde el punto O fuera de la recta AB, y en un mismo plano, se tendrían dos perpendiculares á dicha recta, lo que es imposible.

Fig. 152.



174. Teorema 4.º Si desde un punto O, fuera de un plano PQ (fig. 153), se trazan á este una perpendicular OA y una oblicua OB, la perpendicular es menor que la oblicua.

Uniendo B con A el triángulo OAB es rectángulo en A (170); luego $OA < OB$ (73, corol. 3.º).

Fig. 153.



Corol. La distancia entre un punto y un plano se mide por la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.

Recíprocamente. Si una recta es la menor que se puede trazar entre un punto y un plano, será perpendicular á este plano.

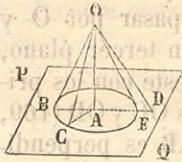
Porque si no fuera perpendicular, y entonces trazando una perpendicular sería menor que ella, lo que es contra la hipótesis.

175. Teorema 5.º Si desde un punto O, fuera de un plano PQ, se trazan á este una perpendicular OA y diferentes oblicuas OB, OC, OD: 1.º Las oblicuas OB y OC, que se separan igualmente de la perpendicular, son iguales: 2.º de dos oblicuas OC y OD, la OD que mas se separa de la perpendicular es la mayor.

1.º Uniendo A con B y con C, los triángulos AOB y AOC tienen el lado AO comun, $AB = AC$ por hipótesis, y

los ángulos BAO y CAO iguales por rectos; luego estos triángulos son iguales (72, 2.º), luego $OB = OC$.

Fig. 153.



2.º Uniendo A con D, como $AD > AC$ por hipótesis, se podrá tomar sobre AD una parte $AE = AC$, en cuyo caso $OC = OE$, según la primera parte del teorema: pero $OD > OE$ (25, 2.º); luego $OD > OC$.

Recíprocamente. Si desde un punto fuera de un plano se trazan á este perpendicular y diferentes oblicuas: 1.º las oblicuas equidistantes se separan igualmente de la perpendicular: 2.º la mayor es la que mas se separa de la perpendicular.

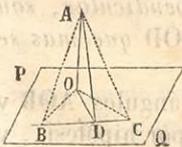
Corol. 1.º El lugar geométrico de los pies B, C, E, de las oblicuas iguales OB, OC, OE, etc., bajadas desde un mismo punto O sobre un plano PQ, es una circunferencia BCE, cuyo centro es el pié A de la perpendicular AO, y cuyo radio es la distancia de este pié al de las oblicuas.

Corol. 2.º El lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia BCE, es la perpendicular AO levantada en el plano PQ de dicha circunferencia y en su centro A.

176. Teorema 6.º Si desde el punto O (fig. 154) de la perpendicular AO á un plano PQ se levanta una perpendicular OD á otra recta BC situada en el mismo plano, y se une el punto D donde estas rectas se encuentran con otro cualquiera A de la perpendicular al plano, la recta AD, que une estos dos puntos, es perpendicular á la línea BC situada en dicho plano.

Tómese $DB = DC$, y únense los puntos B y C con O y con A. Las oblicuas OB y OC son iguales (25, 4.º); luego las oblicuas AB y AC al plano PQ lo son también (175, 4.º); luego el triángulo ABC es isósceles; luego la línea AD es perpendicular á la base BC de este triángulo (75, obs.).

Fig. 154.



Observacion. La recta BC es perpendicular al plano AOD (174, corol. 1.º).

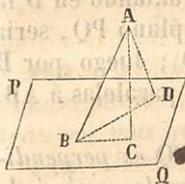
177. Llámase PROYECCION de un punto sobre un plano el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.

PROYECCION DE UNA RECTA AB (fig. 155) sobre un plano es otra recta BC, que une las proyecciones de los extremos de la primera.

178. Teorema 7.º El ángulo ABC, que forma una recta AB con su proyeccion BC sobre un plano PQ, es menor que el ABD que la misma recta forme con otra cualquiera BD, trazada por su pié en el mismo

Tómese $BD=BC$, y los triángulos ABC y ABD tendrán el lado AB común, y el ángulo $\angle ABC < \angle ABD$, por ser AC perpendicular al plano PQ (177) y AD oblicua al mismo (172); luego el ángulo $\angle ABC < \angle ABD$ (75, 2.º)

Fig. 155.



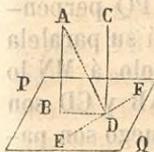
Corol. El ángulo que una recta forma con un plano, tiene por medida el que la misma recta forma con su proyeccion sobre dicho plano.

De las rectas paralelas en el espacio.

179. Teorema 8.º Si las rectas AB y CD (fig. 156), perpendiculares á una misma recta BD que une sus pies, son paralelas.

AB y CD son perpendiculares á la recta BD que une sus pies.

Fig. 156.



Por otra parte, trazando la EF perpendicular á BD en el plano PQ y uniendo A con D, esta recta AD es perpendicular á la EF (176): BD y CD lo son también, la primera por construcción y la segunda por hipótesis; luego las tres rectas BD, AD y CD están en un mismo plano (174, rec.): y como la AB se halla también en él (8, corol.), las rectas AB y CD están en un mismo plano, y son

perpendiculares á una tercera; luego son paralelas (28).

180. Teorema 2.º *Por un punto A (fig. 157), dado en el espacio, no se puede trazar á una recta CD mas que una paralela AB.*

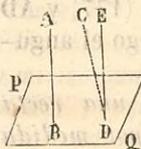
En efecto, si se pudiese trazar otra AE, como las rectas AB y AE estarían en el plano que pasa por los puntos A, C y D (27), las tres rectas se hallarían en este plano (169); luego por un punto fuera de una recta y en un mismo plano se tendrían dos paralelas á dicha recta, lo que es absurdo (29, corol. 1.º).

Fig. 157.



Corol. 1.º *Dos rectas, una AB (fig. 158) perpendicular, y otra oblicua á un plano PQ, no son paralelas.*

Fig. 158.



Porque si lo fuesen, levantando en D la DE perpendicular al mismo plano PQ, sería paralela también á AB (179); luego por D habría dos rectas DC y DE paralelas á AB, lo que es imposible.

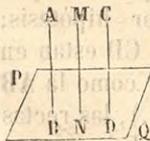
Corol. 2.º *Si un plano PQ es perpendicular á una de dos paralelas AB, también lo será á la otra DE.*

Porque si el plano PQ fuese oblicuo respecto de DE, esta recta no sería respecto de él; en cuyo caso las rectas AB y DE no serían paralelas (corol. anterior), contra la hipótesis.

Observacion. Este corol. puede enunciarse de otro modo: *Si una recta es perpendicular á un plano cualquiera, otra recta paralela con ella será perpendicular al mismo plano.*

Corol. 3.º *Dos rectas AB y CD (fig. 159), paralelas á una tercera MN, son paralelas entre sí.*

Fig. 159.

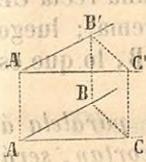


Porque trazando un plano PQ perpendicular á AB, lo será también á su paralela MN (corol. anterior), y siéndolo á MN lo será á su paralela CD; luego AB y CD son perpendiculares al plano PQ, luego son paralelas (179).

181. Teorema 3.º *Si dos ángulos BAC y B'A'C' (fig. 160), situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales.*

Tómese $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, y trácense las rectas AA' , BB' , CC' , BC y $B'C'$. El cuadrilátero $ABA'B'$ tiene AB igual y paralela á $A'B'$, luego es un paralelogramo (79, rec. 2.º); luego AA' es igual y paralela con BB' : por igual razon CC' es igual y paralela á BB' ; luego BB' y CC' son iguales y paralelas entre sí; luego $BCB'C'$ es un paralelogramo, luego $BC = B'C'$; luego los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales (72, 1.º), luego los ángulos BAC y $B'A'C'$ lo son también.

Fig. 160.



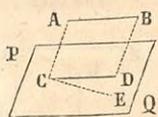
De las rectas paralelas á un plano.

182. *Se dice que una recta es PARALELA A UN PLANO, ó que el plano es paralelo á la recta, cuando no se encuentran por mas que uno y otra se prolonguen.*

183. Teorema 1.º *Si una recta AB (fig. 161) es paralela á otra CD, situada en un plano PQ, es paralela al plano.*

La AB está en el plano $ABCD$ (27); luego no puede encontrar al plano PQ sino en algun punto de la CD ; pero esto es contra la hipótesis, luego tampoco puede encontrar á dicho plano, luego le es paralela.

Fig. 161.

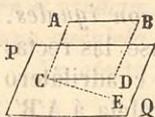


184. Teorema 2.º *Si por una recta AB, paralela á un plano PQ, se traza otro plano que corte al primero, la interseccion CD de estos planos es paralela á la recta dada.*

En efecto AB y CD estan en un mismo plano $ABCD$: además AB no puede encontrar á CD , porque si la encontrase, encontraría también al plano PQ en que esta se halla situada, lo que es contra la hipótesis; luego AB y CD son paralelas (27).

Corol. 1.º *Si una recta AB es paralela á un plano PQ,*

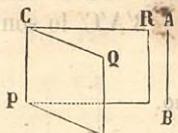
Fig. 161.



y por un punto C de este se traza otra recta CD paralela á la primera, dicha recta CD estará toda ella en el mismo plano. Porque si CD no tuviese mas que el punto C en el plano PQ , trazando por AB y CD otro plano, cortaria al PQ en una recta CE paralela con AB (segun el teorema); luego por C habria dos paralelas CD y CE á la AB , lo que es imposible (29, corol. 1.º).

Corol. 2.º Si una recta AB (fig. 162) es paralela á dos planos PQ y PR , que se cortan, será paralela á la interseccion CP de estos planos.

Fig. 162.



Porque trazando por un punto cualquiera C de la interseccion CP una paralela á la AB , debe hallarse al mismo tiempo en los dos planos (corol. anterior); luego coincide con dicha interseccion CP , luego AB y CP son paralelas.

CAPÍTULO PRIMERO.

Planos en sus diferentes posiciones.

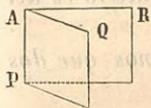
ARTÍCULO PRIMERO.

Ángulos diedros.

185. Se llama **ÁNGULO DIEDRO** ó simplemente **DIEDRO**, la mayor ó menor inclinación de dos planos que se cortan. Estos planos se llaman **CARAS**, y **ARISTA** su intersección.

QAPR (fig. 163) es un ángulo diedro, cuyas caras son **PQ** y **PR**, y cuya arista es **AP**.

Fig. 163.



Un ángulo diedro se nombra, como acaba de verse, por cuatro letras, expresando siempre en el medio las dos de la arista. También se puede nombrar, cuando está solo por las letras de la arista; así se dice el diedro **AP**.

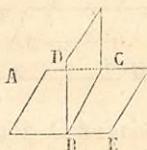
Corol. Un diedro no varía de valor aunque varíe la magnitud de sus caras.

186. Se llaman **DIEDROS ADYACENTES** los que teniendo una cara y la arista común, tienen las otras dos caras formando un plano.

ABCD y **DCBE** (fig. 164) son adyacentes.

187. Llámase **DIEDRO RECTO** cada uno de los dos adyacentes é iguales que un plano forma con otro, y **oblicuo** al que es mayor ó menor que uno recto.

Fig. 164



188. Teorema 1.º Los ángulos diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.

Se demuestra como su análogo de la Geometría plana (véase núm. 16).

189. Llámase **ÁNGULO DIEDRO AGUDO** el oblicuo menor que uno recto, y **OBTUSO** el oblicuo mayor que el recto.

190. Se llaman **DIEDROS COMPLEMENTARIOS** aquellos que sumados forman uno recto, y **SUPLEMENTARIOS** los que forman dos.

Corol. Dos ángulos que tienen el mismo complemento ó complementos iguales, ó el mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales.

Porque agregándoles el complemento en un caso y el suplemento en otro, dan una misma suma.

191. Teorema 2.º Los diedros adyacentes valen juntos dos rectos, ó son suplementarios.

Se demuestra como su análogo de la geometría plana; y del mismo modo se deducen los corolarios siguientes, y se demuestra el recíproco correspondiente (V. número 49).

Corol. 1.º Si un diedro es recto, su adyacente lo será también; y si un diedro es oblicuo, su adyacente lo es del mismo modo.

Corol. 2.º Un diedro cualquiera vale menos que dos rectos.

Corol. 3.º Los diedros, que se pueden formar en una recta situada en un plano y á un lado de este, valen juntos dos rectos.

Corol. 4.º Todos los diedros, que se pueden formar al rededor de una recta, valen juntos cuatro rectos.

Corol. 5.º Los ángulos formados por dos planos, que se cortan, valen también cuatro rectos.

Recíprocamente. Si dos diedros que tienen una cara común y la misma arista son suplementarios, serán también adyacentes, ó lo que es igual, las otras dos caras forman un solo plano.

192. Teorema 3.º Los diedros opuestos por la arista son iguales.

Porque tienen el mismo suplemento.

193. Se llama **ÁNGULO RECTILÍNEO CORRESPONDIENTE** á un diedro el formado por dos perpendiculares á la arista, en un mismo punto de esta y una en cada cara.

Si las rectas MO y ON (fig. 165) son perpendiculares á BC , el ángulo MON es el rectilíneo correspondiente al diedro $ABCD$, y en igual hipótesis ECD lo será también.

Corol. Los ángulos rectilíneos MON , ECD , etc., correspondientes á un mismo diedro BC , son iguales.

Porque tienen sus lados paralelos (28) y dirigidos en el mismo sentido, luego son iguales (181).

194. Teorema 4.º 1.º Si dos diedros son iguales, sus rectilíneos correspondientes lo son también: 2.º si dos diedros son desiguales, el mayor tiene mayor rectilíneo correspondiente.

1.º Sean los diedros BC y $B'C'$ (fig. 165): superponiendo el primero al segundo, de manera que coincidan

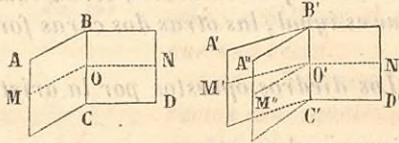
Fig. 165.



la arista BC con $B'C'$, el punto O con O' y la cara BD con la $B'D'$; la otra cara AC coincidirá con $A'C'$, por la igualdad de los diedros: la línea ON coincidirá con $O'N'$, porque si no habria dos perpendiculares en el punto O' de la arista $B'C'$ en el plano $B'D'$, lo que es imposible (23): por igual razon OM coincide con $O'M'$; luego los ángulos rectilíneos MON y $M'O'N'$ son iguales.

2.º Sean los diedros BC y $B'C'$ (fig. 166): superpóngase el primero al segundo, de manera que la arista BC

Fig. 166.



coincida con $B'C'$, el punto O con O' y la cara BD con $B'D'$: la cara AC caerá dentro del diedro $B'C'$, una vez que este es mayor que el BC , y es-

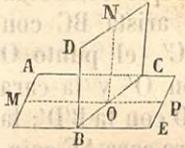
tará representada por $A''C'$: ON coincidirá con $O'N'$, y OM quedará representada por $O'M''$. Las tres rectas $O'N'$, $O'M''$ y $O'M'$ son perpendiculares, por hipótesis, á la arista $B'C'$ en el punto O' ; luego estarán en un mismo plano (171, rec.); luego evidentemente el ángulo rectilíneo $M'O'N' > M''O'N'$ ó $M'O'N' > MON$.

Recíprocamente. 1.º Si los ángulos rectilíneos correspondientes á dos diedros son iguales, los diedros también lo serán: 2.º si los ángulos rectilíneos correspondientes á dos diedros son desiguales, al mayor corresponde mayor diedro (12).

Corol. El ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro recto es también recto.

Porque si $ABCD$ (fig. 167) es recto, su adyacente $DBCE$

Fig. 167.



también lo será (190, corol. 1.º); luego los rectilíneos correspondientes MON y NOP son iguales, según el teorema directo; luego son rectos (15).

Recíprocamente. El ángulo diedro, cuyo rectilíneo correspondiente es recto, será también recto.

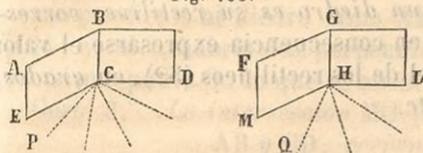
Porque si MON es recto, NOP también lo será (19, corol. 1.º); luego los diedros $ABCD$ y $DBCE$ son iguales, según el teorema recíproco, luego son rectos (187).

195. Teorema 5.º Dos diedros $ABCD$ y $FGHL$ (figura 168) son proporcionales á sus rectilíneos correspondientes ECD y MHL .

Distinguiremos dos casos: 1.º que los ángulos rectilíneos sean commensurables: 2.º que no lo sean.

1.º Sea el ángulo $ECP = MHQ$ la unidad de medida

Fig. 168.



comun de los rectilíneos ECD y MHL: supongamos que el primero de estos contenga 5 veces dicha unidad y el segundo 4; y se tendrá

$$ECD : MHL :: 5 : 4.$$

Trazando por la arista BC y por las divisiones CP, etc. del rectilíneo ECD planos, el diedro ABCD quedará dividido en 5, todos iguales entre sí (194, rec. 4.º): de igual manera el diedro FGHL puede dividirse en 4 iguales entre sí, é iguales á los anteriores; luego

$$ABCD : FGHL :: 5 : 4;$$

de donde (Alg., 128) $ABCD : FGHL :: ECD : MHL.$

2.º Si los ángulos ECD y MHL fuesen inconmensurables, este caso se demostraria como su análogo (51, 2.º).

Observacion. La proporción anterior se escribe tambien así

$$\frac{ABCD}{FGHL} = \frac{ECD}{MHL}.$$

Si suponemos que FGHL es la unidad de medida del diedro ABCD, y que MHL, correspondiente al diedro unidad de medida, es tambien la unidad de medida de los ángulos rectilíneos, la igualdad anterior nos dice que:

La razón de un diedro con su unidad de medida es la misma que la de su arco correspondiente con su unidad de medida tambien.

En las mismas hipótesis, la igualdad precedente se convierte en

$$\frac{ABCD}{1} = \frac{ECD}{1}, \quad \text{ó} \quad ABCD = ECD;$$

luego en igual sentido se puede decir que

La medida (6) de un diedro es su rectilíneo correspondiente; pudiendo en consecuencia expresarse el valor de los diedros, como el de los rectilíneos (52), en grados, minutos, segundos, etc.

ARTÍCULO II.

De los planos perpendiculares y oblicuos entre sí.

196. *Se llama PLANO PERPENDICULAR el que forma con otro dos diedros rectos, ó uno solo (191, corol. 1.º), y PLANO OBLICUO el que forma con otro dos diedros oblicuos, ó uno solo.*

Corol. 1.º *Si un plano es perpendicular á otro, este lo será al primero; y si un plano es oblicuo á otro, este lo será á aquel.*

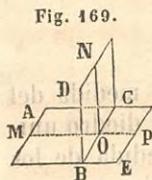
Corol. 2.º *Si dos planos se cortan perpendicularmente forman cuatro diedros rectos.*

197. *Teorema 1.º Si una recta NO (fig. 169) es perpendicular á un plano AE, todo plano DC que pase por ella es perpendicular al primero.*

Trazando en el plano AE la recta MO, perpendicular á la interseccion BC de los dos planos AE y DC, el ángulo MON es recto (170); pero este ángulo es el rectilíneo correspondiente al diedro ABCD; luego este diedro es también recto; luego el plano DC es perpendicular al AE (196).

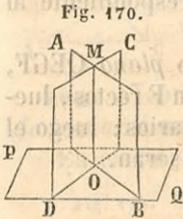
Corol. 1.º *Por un punto cualquiera N ú O, ó por una recta NO perpendicular á un plano AE, se pueden trazar infinitos planos perpendiculares al primero.*

Corol. 2.º *Si en un punto O de la interseccion BC de dos planos AE y DC, perpendiculares entre sí, se levanta una perpendicular á uno de ellos AE, esta perpendicular coincidirá con el otro plano.*



Porque si no coincidiese con el plano DC, como MON, correspondiente al diedro recto ABCD, es tambien recto (194, corol.), habria dos perpendiculares al plano AE en un mismo punto O, lo que es absurdo (173).

Corol 3.º *La interseccion MO (fig. 170) de dos planos AB y CD, perpendiculares á un tercero PQ, es perpendicular á este tercer plano.*

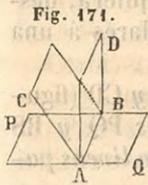


Porque si en el punto O, comun á los tres planos, se levanta una perpendicular al PQ, esta perpendicular se hallará en los dos planos AB y CD (corol. ant.); luego coincide con la interseccion OM de estos, luego esta recta es perpendicular á PQ.

198. Teorema 2.º *Por una recta no perpendicular á un plano, no se puede trazar mas que otro perpendicular al primero.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que la recta dada esté en el plano dado: 2.º que esté fuera de él.

1.º Sea la recta AB en el plano PQ (fig. 171); si por ella se pudiesen levantar los dos planos CB y DA, perpendiculares á PQ, los ángulos diedros CABQ y DABQ serian iguales (188); lo que es absurdo.



2.º Si la recta dada estuviese situada fuera del plano, sería paralela á este ú oblicua; y si en cualquiera de estos dos casos se pudiesen trazar por ella dos planos perpendiculares al primero, la interseccion comun de dichos planos, ó sea la recta dada, sería perpendicular al plano dado (197, 3.º); lo que es contra la hipótesis.

199. Teorema 3.º *Si desde un punto O (fig. 172) interior á un diedro ABCD, se trazan dos perpendiculares OE y OF, una á cada cara, el ángulo EOF formado por las perpendiculares es suplemento del diedro.*

En efecto, si por las perpendiculares OE y OF se hace pasar un plano, será perpendicular á los otros dos AC

y BD (197); luego la interseccion BC de estos dos planos será perpendicular al plano OEGF (197, corol. 3.^o); luego BC será perpendicular á las rectas EG y GF, que pasan por su pié en este plano (170); luego el ángulo EGF es el rectilíneo correspondiente al diedro ABCD.

Ahora el cuadrilátero *plano* OEGF, tiene los ángulos en E y en F rectos, luego el ángulo en O y el EGF son suplementarios; luego el ángulo en O y el diedro ABCD tambien lo serán.

ARTÍCULO III.

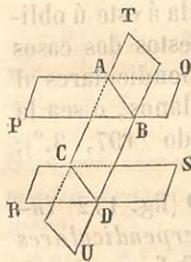
Planos paralelos.

200. *Se llaman PLANOS PARALELOS aquellos que no se encuentran por mas que se prolonguen.*

201. Teorema 1.^o *Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.*

Porque si se encontrasen en un punto cualquiera, desde este punto habria dos planos perpendiculares á una misma recta, lo que es imposible (173).

202. Teorema 2.^o *Las intersecciones AB y CD (figura 173) de planos paralelos PQ y RS con un tercer plano TU, son líneas paralelas.*

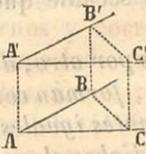


En efecto, AB y CD estan en el plano TU; y no pueden encontrarse, porque si lo hiciesen se encontrarían tambien los planos PQ y RS en que estan situadas, lo que es contra la hipótesis; luego son paralelas (27).

Corol. *Si dos ángulos BAC y B'A'C' (fig. 174), situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos, los planos que determinan son tambien paralelos.*

Porque trazando por A' un plano paralelo al BAC , su interseccion con el $AA'B'B$ será paralela con AB ; luego tiene que coincidir con $A'B'$ (29, corol. 1.^o): por igual razon la interseccion de dicho plano con el $AA'C'C$ tiene que coincidir con $A'C'$; luego el plano trazado por A' , paralelamente al BAC , coincide con el $B'A'C'$; luego estos son paralelos.

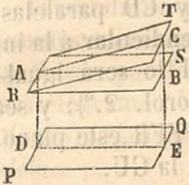
Fig. 174.



203. Teorema 3.^o *Por un punto A (fig. 175) no se puede trazar á un plano PQ mas que otro RS paralelo.*

En efecto, si se pudiesen trazar dos RS y RT, cortando estos tres planos por otro ADEC, las intersecciones AB y AC serían paralelas con DE (202); lo que es absurdo (29, corol. 4.^o).

Fig. 175.



Corol. 1.^o *Dos planos PQ y RT, uno perpendicular y otro oblicuo á una recta AD, no son paralelos.*

Porque si lo fuesen, trazando por A otro RS perpendicular á la recta AD , sería paralelo con PQ (201); luego por A habria dos planos RT y RS paralelos á PQ , lo que es imposible segun el teorema.

Corol. 2.^o *Si una recta AD es perpendicular á un plano PQ, tambien lo será á su paralelo RS.*

Pues si fuese oblicua á RS , este plano tambien lo sería á dicha recta AD ; en cuyo caso los planos no serían paralelos (corol. ant.), contra la hipótesis.

Corol. 3.^o *Dos planos PQ y RS (fig. 176), paralelos con un tercero TU, son paralelos entre si.*

Fig. 176.



Porque trazando una perpendicular AB al plano PQ , lo será á su paralelo TU (corol. ant.): siéndolo á este lo será tambien á su paralelo RS ; luego PQ y RS son perpendiculares á una misma recta AB , luego son paralelos (201).

204. Dos planos PQ y RS (fig. 177), cortados por un

tercero TU, forman ocho ángulos diedros, que toman los nombres de *internos*, *externos*, *alternos* y *correspondientes*, como los rectilíneos formados por una secante que corta á dos paralelas (30).

205. Teorema 4.º *Si dos planos cortados por otro, de manera que las intersecciones sean paralelas, forman con él: 1.º ángulos diedros alternos ó correspondientes iguales, ó internos de un mismo lado suplementarios, dichos planos son paralelos: 2.º si forman diedros alternos ó correspondientes desiguales, ó internos de un mismo lado no suplementarios, dichos planos no son paralelos.*

1.º Alternos. Supongamos que los diedros PABC y ACDS sean iguales, siendo además AB y CD paralelas.

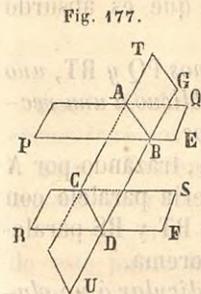
Trácese un plano perpendicular á la intersección AB, el cual lo será igualmente á la CD (480, corol. 2.º); y sea para mayor sencillez PEFR este plano, que también contiene á la GU.

Como AB y CD son perpendiculares al plano PEFR que acaba de trazarse, los ángulos rectilíneos PBD y BDF son los correspondientes á dichos diedros: pero estos son iguales; luego $PBD = BDF$ (194); luego las rectas PE y RF son paralelas (31, 1.º), y como AB y CD lo son por hipótesis, PBA ó sea PQ es paralelo al CDF, ó sea al RS (202, corol.).

Las demás partes del teorema se demuestran de un modo análogo, como en el núm. 31.

Recíprocamente. **1.º** *Si dos planos son paralelos, cortados por otro forman con él diedros alternos y correspondientes iguales, y diedros internos de un mismo lado suplementarios. 2.º Si no son paralelos, forman con el transversal diedros alternos y correspondientes desiguales, é internos de un mismo lado no suplementarios (12).*

Observación. El teorema directo no será cierto si las intersecciones de los planos con el transversal no son paralelas, como fácilmente se comprende observando que si



dos planos que se cortan son perpendiculares á un tercero, forman con este los ocho ángulos diedros rectos y por consiguiente iguales; resultando consiguientemente los alternos y correspondientes iguales y los internos de un mismo lado suplementarios, sin que los planos sean paralelos. En el recíproco dichas intersecciones son siempre paralelas (198), y este por lo tanto es cierto en todo caso, ó sea sin mas hipótesis que las hechas en el análogo de la Geometría plana.

206. Teorema 5.º *Las partes AC y BD (fig. 177) de paralelas, comprendidas entre planos PQ y RS paralelos, son iguales.*

Trazando un plano que pase por dichas paralelas, las comunes secciones AB y CD de este plano con los paralelos son líneas paralelas (202); luego la figura ABDC es un paralelógramo, luego $AC = BD$.

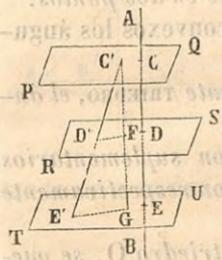
Corol. *Los puntos de un plano equidistan de su paralelo.*

Porque las perpendiculares trazadas desde un plano á su paralelo son paralelas (479), luego son iguales.

207. Teorema 6.º *Dos rectas CE y C'E' (fig. 178) comprendidas entre dos planos PQ y TU paralelos, cortadas por un tercer plano RS, paralelo á los primeros, quedan divididas en partes proporcionales.*

Trácese la recta C'G paralela á CE, y por E'C'G hágase pasar un plano.

Fig. 178.



D'F y E'G serán paralelas (202); luego se tendrá (94)

$$C'F : FG :: C'D' : D'E' :$$

pero $C'F = CD$ y $FG = DE$ por partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos; luego

$$CD : DE :: C'D' : D'E' .$$

ARTÍCULO IV.

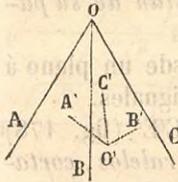
De los ángulos poliedros.

208. Se llama **ÁNGULO POLIEDRO** la figura formada por tres ó mas ángulos rectilíneos no situados en un mismo plano, que tienen dos á dos un lado comun, y cuyos vértices se reúnen en un mismo punto.

Los ángulos rectilíneos se llaman *caras*, los lados de estos ó sea las intersecciones de las caras reciben el nombre de *aristas*, y el de *vértice* el punto donde se reúnen los vértices de los ángulos rectilíneos.

OABC (fig. 179) es un ángulo poliedro: AOB, BOC y COA sus caras; OA, OB y OC las aristas, y O el vértice.

Fig. 179.



Un ángulo poliedro se nombra, como acaba de verse, por la letra del vértice seguida de una colocada en cada arista. También se puede nombrar, si está solo, por la letra del vértice: así para expresar el anterior bastará decir el ángulo poliedro O.

Corol. Un ángulo poliedro no varía de valor aunque varíe la longitud de sus aristas.

Se da el nombre de **ángulo poliedro CONVEXO** al que no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos.

En todo lo que sigue supondremos convexos los ángulos poliedros.

Llámanse **ÁNGULO TRIEDRO** ó simplemente **TRIEDRO**, el ángulo poliedro formado por tres caras.

209. Se dice que dos triedros son **suplementarios** cuando los ángulos rectilíneos del uno son respectivamente suplementarios de los diedros del otro.

210. Teorema 1.º Dado un ángulo triedro O, se puede formar otro suplementario.

Desde un punto O' interior del triedro dado trácese

las perpendiculares $O'A'$, $O'B'$ y $O'C'$ á las caras AOB , BOC y COA del mismo triedro, y el formado en O' por estas perpendiculares será el pedido.

En efecto, el ángulo rectilíneo $A'O'C'$, formado por las perpendiculares $O'A'$ y $O'C'$ á las caras AOB y AOC , es suplemento del diedro OA (199): por igual razon los rectilíneos $A'O'B'$ y $B'O'C'$ son suplementos de los diedros OB y OC ; luego los ángulos rectilíneos del triedro O' son suplementarios de los diedros del triedro O .

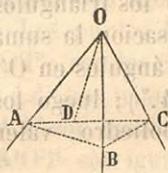
Siendo $O'A'$ perpendicular á la cara AOB , y $O'C'$ á la AOC , el plano $A'O'C'$ es perpendicular á estas dos caras (197); luego la interseccion AO de estas será perpendicular á dicho plano $A'O'C'$ (197, corol. 3.º); por igual razon OB es perpendicular al plano $A'O'B'$, y OC al $B'O'C'$; luego el diedro $O'A'$ es suplemento del ángulo rectilíneo AOB , $O'B'$ del rectilíneo BOC , y $O'C'$ del AOC ; luego los ángulos rectilíneos del triedro O son suplementos de los diedros del triedro O' .

Luego los triedros O y O' son suplementarios (209).

211. Teorema 2.º *En todo ángulo triedro, un ángulo rectilíneo: 1.º es menor que la suma de los otros dos: 2.º es mayor que su diferencia.*

1.º Sea el triedro O (fig. 180), y supongamos que el ángulo rectilíneo AOC es mayor que cualquiera de los otros dos AOB y BOC .

Fig. 180.



Fórmese el ángulo $DOC = BOC$, y trácese por D la recta AC : tómese $OB = OD$, y únase B con A y con C .

De esta construcción resulta que los triángulos DOC y BOC son iguales (72, 2.º), luego $DC = BC$: AC ó sea $AD + DC < AB + BC$ (70); luego, restando de esta desigualdad la igualdad anterior, se tiene

$$AD < AB.$$

Ahora los triángulos AOD y AOB tienen AO comun, $OD = OB$ por construcción y $AD < AB$; luego el ángulo

$AOD < AOB$ (76, rec.); luego sumando con esta desigualdad los ángulos iguales por construcción DOC y BOC , resulta

$$AOD + DOC < AOB + BOC \quad \text{ó} \quad AOC < AOB + BOC.$$

2.º Esta parte del teorema es una consecuencia necesaria de la primera.

212. Teorema 3.º *La suma de los ángulos rectilíneos AOB , BOC , etc., que forman un ángulo poliedro O (figura 181) es menor que cuatro rectos.*

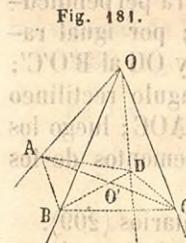
Córtense todas las aristas del ángulo poliedro O por un plano $ABCD$, y desde un punto O' , interior de este polígono, trácense las líneas $O'A$, $O'B$, etc. á los vértices de todos sus ángulos.

La suma de los ángulos de los triángulos laterales AOB , BOC , etc. es igual á la de los ángulos de igual número de triángulos $AO'B$, $BO'C$, etc. etc., formados en el polígono (71).

Ahora en el triedro $BAOC$ se tiene $ABC < ABO + OBC$ (211, 1.º), ó $ABO' + O'BC < ABO + OBC$; y como lo mismo se verifica en los triedros cuyos vértices estan en los puntos C , D y A , resulta que en los triángulos cuyo vértice está en O , los ángulos en las bases son mayores que los ángulos, también en las bases, de los triángulos cuyo vértice está en O' ; luego por compensacion la suma de los ángulos en O es menor que la de los ángulos en O' : pero estos valen cuatro rectos (20, corol. 4.º); luego los en O , ó sean los rectilíneos del ángulo poliedro, valen menos de cuatro rectos.

213. Teorema 4.º *La suma de los ángulos diedros de un triedro cualquiera es mayor que dos rectos, y menor que seis.*

En efecto, los ángulos diedros de un triedro, sumados con los rectilíneos de su suplementario, valen seis rectos: pero los rectilíneos del suplementario valen mas de cero

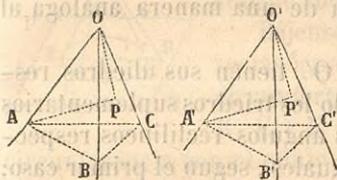


evidentemente, y menos de cuatro rectos (112); luego los diedros del primitivo valen menos de seis rectos y mas de dos.

214. Teorema 5.º *Dos ángulos triedros son iguales: 1.º si tienen sus tres caras ó ángulos rectilíneos respectivamente iguales; 2.º si tienen dos caras iguales é igual el diedro comprendido; 3.º si tienen una cara igual contigua á dos diedros respectivamente iguales; 4.º si tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos esten dispuestos del mismo modo.*

1.º Sean los triedros O y O' (fig. 182), en que se supone $AOB = A'O'B'$, $BOC = B'O'C'$ y $AOC = A'O'C'$.

Fig. 182.



Tómense las aristas OA , OB , OC , $O'A'$, $O'B'$ y $O'C'$ iguales, y trácense los triángulos ABC y $A'B'C'$: bájense las perpendiculares OP y $O'P'$ sobre los planos de estos triángulos, y únense los puntos P y P' con A y A' .

En los triángulos AOB y $A'O'B'$ se tiene $AO = OB = O'A' = O'B'$ y el ángulo $AOB = A'O'B'$; luego estos triángulos son iguales (72, 2.º), luego $AB = A'B'$; por igual razon $BC = B'C'$, y $AC = A'C'$; luego los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales (72, 4.º).

Los puntos P y P' , pies de las perpendiculares OP y $O'P'$, son los centros de las circunferencias circunscritas á dichos triángulos (175, corol. 4.º); luego los radios AP y $A'P'$ son iguales; luego los triángulos rectángulos AOP y $A'O'P'$ son iguales, luego $OP = O'P'$.

Superpóngase el triedro O al O' , de modo que el triángulo ABC coincida con su igual $A'B'C'$: el punto P coincide con P' y PO con $P'O'$ (172); luego la arista OA coincidirá con $O'A'$, OB con $O'B'$ y OC con $O'C'$; luego los triedros coinciden, luego son iguales.

2.º Supongamos que en los triedros O y O' se tengan

los diedros $AO = A'O'$, y los rectilíneos $AOB = A'O'B'$ y $AOC = A'O'C'$.

Superpóngase el triedro O al O' , de modo que la cara AOC coincida con su igual $A'O'C'$, y que la arista OB caiga al mismo lado de la cara común que la $O'B'$: la cara AOB caerá sobre $A'O'B'$ por ser los diedros OA y $O'A'$ iguales, y la arista OB coincidirá con $O'B'$ por la igualdad de los ángulos rectilíneos AOB y $A'O'B'$; luego los triedros coinciden; luego son iguales.

3.º Este caso se demuestra de una manera análoga al precedente.

4.º Si los triedros O y O' tienen sus diedros respectivamente iguales, formando los triedros suplementarios respectivos, estos tendrán sus ángulos rectilíneos respectivamente iguales; luego son iguales, según el primer caso; luego los ángulos rectilíneos de los triedros O y O' son iguales; luego estos triedros también lo serán (primer caso).

Observación. Cuando dos triedros tienen los elementos que se indican en cada caso respectivamente iguales, y dispuestos de diferente modo, todas sus partes son iguales respectivamente; pero la coincidencia no puede verificarse.

Los triedros que reúnen estas circunstancias, se llaman *simétricos*.

Si las aristas de un triedro $OABC$ (fig. 483) se prolongan al otro lado del vértice, resulta el triedro $OA'B'C'$ simétrico del primero.

En efecto, los ángulos rectilíneos AOB y $A'O'B'$ son iguales por opuestos por el vértice, lo mismo que los AOC y $A'OC'$, BOC y $B'OC'$; los diedros OA y OA' son iguales también (192), y los OB y OB' , OC y OC' lo son de igual modo. Por otra parte, estos dos triedros no pueden, en general,

Fig. 482.

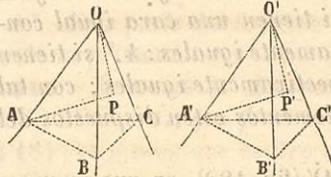
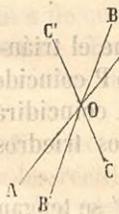


Fig. 483.



superponerse de modo que coincidan, como á simple vista se percibe.

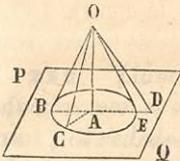
PROBLEMAS

relativos á lo que precede de la Geometría del espacio.

214*. *Problema 1.º* Por un punto dado trazar una perpendicular á un plano.

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que el punto dado esté fuera del plano: 2.º que esté en el mismo plano.

Fig. 184.

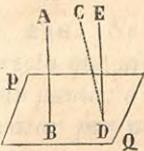


1.º Sea el punto dado O (fig. 184), situado fuera del plano PQ (*).

Bájense desde O sobre el plano tres rectas iguales OB, OC y OE: trácese una circunferencia que pase por sus pies B, C y E (64): únase el centro A de esta circunferencia con el punto dado O, y la recta AO será la perpendicular pedida.

Porque la perpendicular levantada en A pasa por O (175, corol. 2.º); luego esta recta es la perpendicular pedida.

Fig. 185.



2.º Sea el punto D (fig. 185) situado en el plano PQ.

Desde un punto cualquiera A, fuera de este plano, bájese una perpendicular AB al mismo (caso ant.): por D trácese una paralela DC á esta perpendicular, y la recta DE será la perpendicular pedida (180, corol. 2.º obs.).

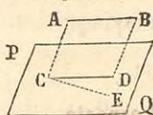
(*) En la resolución de este problema no se hace mérito de las líneas OD, ED, etc. de la figura del márgen; lo cual depende de que la misma figura ha sido empleada en la demostración de proposiciones en que era necesaria la consideración de las líneas ahora omitidas.

Una cosa análoga sucede, por igual razón, con las tres figuras siguientes y con otras mas de que se hará uso en lo sucesivo.



215. Problema 2.º Por un punto dado A (fig. 186), fuera de un plano PQ, trazar una paralela á este plano.

Fig. 186.

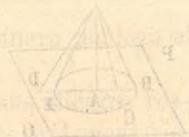
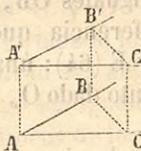


Trácese en el plano PQ una recta cualquiera CD, y por A una paralela AB á la CD; la recta AB será la pedida (183).

216. Problema 3.º Por un punto A' (fig. 187), situado fuera de un plano BAC, trazar otro plano paralelo al dado.

Por A' trácese dos rectas A'B' y A'C' respectivamente paralelas á otras dos AB y AC, situadas en el plano dado BAC, y el plano determinado por B'A'C' será el pedido (202, corol.).

Fig. 187.



En la resolución de este problema no se hace mérito de las líneas AB, AC, etc. de la figura del margen; lo cual depende de que la misma figura ha sido empleada en la demostración de proposiciones en que era necesaria la consideración de las líneas AB y AC.

Las otras líneas de la figura, que en el texto se refieren á ellas, son las que se refieren á ellas en el texto.



CAPITULO II.

De las superficies de revolucion.



217. Llámanse SUPERFICIES DE REVOLUCION las engendradas por el movimiento de una línea, llamada GENERATRIZ, al rededor de una recta fija, que recibe el nombre de EJE.

Entre las infinitas superficies de revolucion, que pueden concebirse, tres son las que ahora nos interesa conocer: la cónica, la cilíndrica y la esférica.

ARTÍCULO PRIMERO.

De la superficie cónica.

218. Se llama SUPERFICIE CÓNICA la engendada por una recta que gira al rededor de otra con la cual concurre en un punto; ó tambien la originada por una recta sujeta á pasar por un punto fijo, llamado VÉRTICE, y á recorrer una curva plana cualquiera que toma el nombre de DIRECTRIZ (*).

(*) Si la generatriz se supone prolongada al otro lado del vértice, trazará otra superficie cónica que con la primera forman la superficie cónica total, de la que cada una de las parciales es una hoja. Actualmente no consideramos mas que una de estas hojas.

En este último caso llamamos EJE á la recta que pasa por el vértice y por el centro de la directriz, si le tiene.

OABCD (fig. 188) es una superficie cónica, cuyo vértice es O: OA, OB, OC ú OD, prolongada cuanto se quiera por la parte inferior, es la generatriz en sus diferentes posiciones, ó las generatrices, cuando se consideran dos ó mas: la curva ABCD es la directriz, y OP el eje.

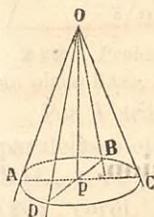


Fig. 188.

La superficie cónica es RECTA si el eje es perpendicular al plano de la directriz, como la figura 188; y OBLICUA cuando el eje es oblicuo á dicho plano, como la figura 189.

Llámanse superficie cónica CIRCULAR aquella cuya directriz es una circunferencia.

219. Recibe el nombre de CONO el espacio comprendido por una superficie cónica OABCD, y un plano ABCD que corta todas las generatrices.

VÉRTICE del cono es el vértice O de la superficie cónica: BASE el plano ABCD que limita la superficie cónica: LADOS la parte OA, OB, etc., de las generatrices, interceptadas entre el vértice y la base, y EJE es la recta OP que une el vértice con el centro de la base, si le tiene.

El cono es RECTO si el eje es perpendicular á la base, como la figura 188, y OBLICUO en el caso contrario (fig. 189).

Se llama ALTURA del cono la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

CONO CIRCULAR es aquel cuya base es un círculo.

Corol. 1.º En el cono recto la altura coincide con el eje.

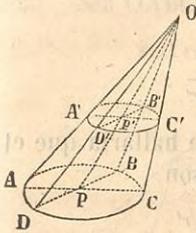
Corol. 2.º Los lados del cono recto y circular son iguales (175, 4.º).

Observacion. El cono recto y circular se puede suponer tambien engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo APO al rededor de uno de sus catetos OP.

220. Teorema. Si la superficie curva de un cono circular (fig. 189), se corta por un plano A'B'C'D' paralelo á la base ABCD, la seccion es una circunferencia.

En efecto, haciendo pasar planos por los lados OA, OB, OC, etc., y por el eje OP, las intersecciones AP y A'P', BP y B'P', etc., de estos planos con los paralelos ABCD y A'B'C'D' serán paralelas (202); luego los triángulos OPA y OP'A', OPB y OP'B', etc., son semejantes (97); luego

Fig. 189.



$$AP : A'P' :: OP : OP'$$

$$BP : B'P' :: OP : OP';$$

de donde $AP : A'P' :: BP : B'P' :: \text{etc.} : \text{etc.} :$

pero $AP = BP = \text{etc.}$, por radios de un mismo círculo; luego

$$A'P' = B'P' = \text{etc.};$$

luego la curva A'B'C'D' es una circunferencia.

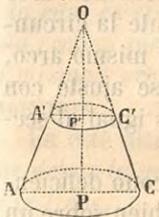
221. Llámase TRONCO ó TROZO de cono la parte ABCDA'B'C'D' de cono, comprendida entre la base de este y un plano que le corta paralelamente á dicha base; y cono DEFICIENTE la parte del cono total, que queda al otro lado del plano secante.

Los planos ABCD y A'B'C'D', que limitan el tronco ó trozo de cono, se llaman BASES; y ALTURA la distancia entre las bases.

222. Problema 1.º Dado un tronco ó trozo de cono circular y recto AC' (fig. 190), hallar la altura OP del cono total, y la OP' del cono deficiente.

Complétese el cono OPAC, y la semejanza de los triángulos OPA y OP'A', nos dará

Fig. 190.



$$AP : A'P' :: OP : OP';$$

de donde (Alg. 429)

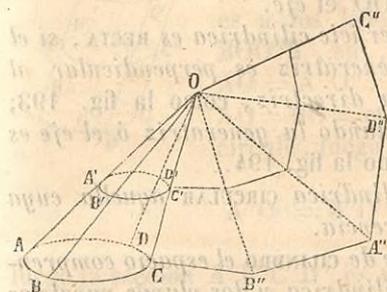
$$AP - A'P' : AP :: OP - OP' : OP$$

$$\text{y } AP - A'P' : A'P' :: OP - OP' : OP',$$

ó llamando r, r' los radios de las bases

plano, es evidentemente el sector $OC'C''$; y por consiguiente la del tronco ó trozo AC' es el *trapezio circular* $CC'C''C''$.

Fig. 192.



2.º Sea OABCD un cono cualquiera (fig. 192). Divídase la directriz CBAD en partes bastante pequeñas para que se puedan tomar como rectas, sin error sensible: constrúyanse los triángulos OCB'' , $OB''A''$, etc. respectivamente iguales á los OCB , OBA , etc., considerados como rectilíneos; y el polígono $OCB'' \dots C''$ será aproximadamente la superficie cónica desarrollada sobre un plano.

Observacion 2.ª La superficie curva de un tronco de cono cualquiera se puede desarrollar por un procedimiento análogo al empleado en este caso; advirtiendo solo que la division de dicha superficie debe ser ahora en trapezios, como se advertirá en la figura.

ARTÍCULO II.

De la superficie cilíndrica.

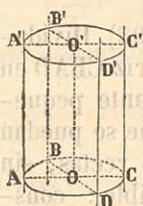
224. *Llámanse SUPERFICIE CILÍNDRICA la engendrada por el movimiento de una recta que gira al rededor de otra, á la cual es siempre paralela; ó tambien la originada por una recta, que permaneciendo constantemente paralela á sí misma, recorra una curva plana cualquiera llamada DIRECTRIZ.*

En este último caso llamamos EJE la recta, que siendo paralela á la generatriz, pasa por el centro de la directriz, si le tiene.

:

ABCD A'B'C'D' (fig. 193) es una superficie cilíndrica: AA', BB', CC' ó DD', considerada como indefinida, es la *generatriz* en sus diferentes posiciones, ó las *generatrices*, cuando se consideran dos ó mas: la curva ABCD la *directriz*, y OO' el *eje*.

Fig. 193.



La superficie cilíndrica es RECTA, si el eje ó la generatriz es perpendicular al plano de la directriz, como la fig. 193; y OBLÍCUA cuando la generatriz ó el eje es oblicuo á dicho plano, como la fig. 194.

Llámanse superficie cilíndrica CIRCULAR aquella cuya directriz es una circunferencia.

225. Recibe el nombre de CILINDRO el espacio comprendido por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos ABCD y A'B'C'D' que cortan las generatrices.

BASES del cilindro son los planos ABCD y A'B'C'D' que limitan la superficie curva: LADOS las partes AA', BB', etc., de las generatrices interceptadas por las bases; y EJE la recta OO' que une los centros de las bases, si le tienen.

El cilindro es RECTO si el eje es perpendicular á las bases, como la fig. 193; y OBLÍCUO en el caso contrario, como la fig. 194.

Se llama ALTURA del cilindro la distancia entre las bases. Cilindro CIRCULAR es aquel cuyas bases son dos círculos.

Corol. 1.º En el cilindro recto la altura es igual al eje.

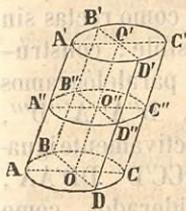
Corol. 2.º Los lados del cilindro son iguales (206).

Observacion. El cilindro recto y circular se puede tambien suponer engendrado por la revolucion de un rectángulo AOO'A' al rededor de uno de sus lados OO'.

226. Teorema. Si la superficie curva de un cilindro circular (fig. 194) se corta por un plano A'B''C''D'', paralelo á una de sus bases ABCD, la seccion es una circunferencia igual á esta base.

Haciendo pasar planos por los lados AA' , BB' , etc., y

Fig. 194.



por el eje OO' , las intersecciones de estos planos con la base y la seccion son las rectas AO y $A''O''$, BO y $B''O''$, etc. paralelas (202): y como el eje OO' lo es á los lados, las figuras $AOO''A''$, $BOO''B''$, etc., son paralelógramos; luego $AO = A''O''$, $BO = B''O''$, etc.: pero $AO = BO = \text{etc.}$ por radios de un mismo círculo, luego

$$A''O'' = B''O'' = \text{etc.};$$

luego la seccion $A''B''C''D''$ es una circunferencia igual á la de la base $ABCD$.

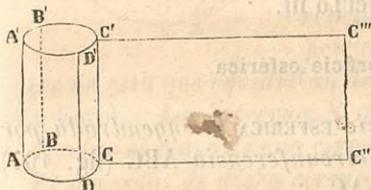
Corol. *Las bases del cilindro circular son iguales (*)*.

Problema. Desarrollar sobre un plano una superficie cilíndrica.

Distinguiremos dos casos: 1.º que el cilindro á que esta superficie pertenece sea recto: 2.º que sea oblicuo.

1.º Sea el cilindro recto AC' (fig. 195). Constrúyase sobre el lado CC' un rectángulo $CC''C'''C'$, cuya base CC'' sea la curva $ABCD$ rectificada, y el rectángulo construido será la superficie cilíndrica desarrollada.

Fig. 195.



Se demuestra como en

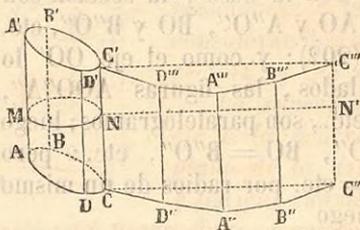
el núm. 223, 1.º

2.º Sea el cilindro oblicuo AC' (fig. 196). Divídanse los perímetros de las bases, partiendo de un mismo lado,

(*) Esta propiedad es común á todos los cilindros, como fácilmente se comprende; por cuya razon omitimos la demostracion, que por otra parte tampoco es de este lugar.

en partes respectivamente iguales $CD=C'D'$, $DA=D'A'$, etc., y suficientemente pequeñas para que se puedan tomar como rectas sin error sensible: constrúyanse los paralelógramos $CD''D'''C'$, $D''A''A'''D'''$, etc., respectivamente iguales á los $DCC'D'$, $DD'AA'$, etc. considerados como planos, y el polígono $CD''.....C''C'''B'''.....C'$ será aproximadamente la superficie cilíndrica desarrollada sobre un plano.

Fig. 196.



Observacion. El rectángulo $CC'C''C'$, cuya altura es el lado del cilindro, y cuya base debe ser igual evidentemente á la longitud NN' de la sección MN perpendicular al lado, es equivalente al polígono que representa la superficie cilíndrica desarrollada; porque lo que á cada paralelógramo le falta por su parte superior para llenar dicho rectángulo, le sobra por la inferior, como á la simple vista se percibe y sería fácil demostrar.

ARTÍCULO III.
De la superficie esférica.

227. Se llama superficie ESFÉRICA la engendrada por la revolucion de una semicircunferencia ABC (fig. 197) al rededor de su diámetro AC .

Recibe el nombre de ESFERA el espacio comprendido por una superficie esférica.

Observacion. Con frecuencia se suele llamar esfera la superficie esférica; pero el sentido en que se habla, denota si se trata del cuerpo geométrico ó de su superficie.

Llámase centro el punto O , centro de la semicircunferencia generatriz; radio toda recta OA que desde el centro va á terminar en la superficie esférica, y diámetro la

recta que pasando por el centro termina por sus dos extremos en la superficie esférica.

Corol. 1.º *Los radios de una misma esfera son iguales.*

Porque son radios de la semicircunferencia generatriz en alguna de sus posiciones.

Corol. 2.º *Los diámetros de una misma esfera son iguales.*

Porque cada uno se compone de dos radios.

Se llama **EJE** de la esfera el diámetro de la semicircunferencia generatriz.

Se llaman **POLOS** de la esfera los extremos **A** y **C** del eje.

228. Teorema 1.º *La interseccion de un plano **EG** con la superficie esférica **O**, es una circunferencia **EFGH**.*

Trazando el radio **OC** perpendicular á dicho plano, y los **OE**, **OF**, **OG**, **OH**, etc., las rectas **EP**, **FP**, **GP**, etc. que unen el pié de la perpendicular al plano con los diferentes puntos de la curva, son iguales (175, rec. 1.º); luego la curva **EFGH** es una circunferencia.

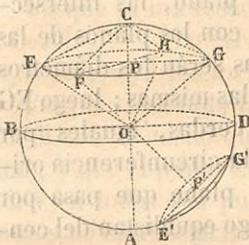
Llámase **POLO** de una circunferencia **EFGH**, trazada en la superficie esférica, cada uno de los puntos de esta que equidistan de dicha circunferencia.

Corol. *Los extremos **A** y **C** del diámetro **AC** perpendicular al plano de una circunferencia **EFGH** en su centro **P**, son polos de dicha circunferencia, y son los únicos que puede tener (175, corol. 2.º).*

229. Teorema 2.º *Si haciendo centro en un punto **C** (fig. 197) de la superficie esférica, con un radio cualquiera **CE**, se traza una curva **EFGH**, esta curva será una circunferencia.*

Trácese el radio **OC** de la esfera, y otros mas **OE**, **OF**, **OG**, etc., á diferentes puntos de la seccion: los triángulos **OEC**, **OFC**, **OGC**, etc., que tienen $OE=OF=OG=etc.$,

Fig. 197.



por radios de la esfera, $EC = FC = GC = \text{etc.}$, por hipótesis, y el lado OC comun, son iguales (72, 1.^o); luego si desde los vértices $E, F, G, \text{etc.}$, se bajan perpendiculares sobre el lado comun OC , se encontrarán evidentemente en un mismo punto P ; luego estarán en un mismo plano (171, rec.): y como además $EP = FP = GP = \text{etc.}$, la curva $EFGH$ será una circunferencia.

Observacion. El punto C , que ha servido de centro para trazar una circunferencia, es uno de sus polos.

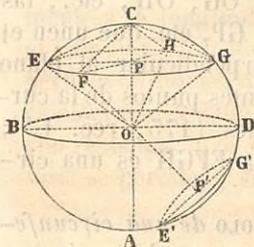
230. Teorema 3.^o *En una misma esfera, 1.^o los planos de circunferencias iguales equidistan del centro: 2.^o los planos de dos circunferencias desiguales, el correspondiente á la mayor se aproxima mas al centro que el de la menor.*

1.^o Sean las circunferencias, cuyos centros son P y P' iguales (fig. 197). Haciendo pasar por el centro O de la esfera y por los P y P' un plano, las intersecciones de este con los planos de las circunferencias serán los diámetros EG y $E'G'$ de las mismas; luego EG y $E'G'$ son cuerdas, iguales por hipótesis, de la circunferencia originada por el plano que pasa por O, P y P' ; luego equidistan del centro O (40, 1.^o); luego $OP = OP'$: pero OP y OP' miden tambien la distancia del centro de la esfera á los planos de dichas circunferencias (174, corol.); luego estos planos equidistan del centro de la esfera.

2.^o Sea la circunferencia P mayor que P' . Repitiendo la construccion anterior se hallará del mismo modo $OP < OP'$ (40, 2.^o); luego el plano de la circunferencia P se aproxima mas al centro que el de la circunferencia P' .

Recíprocamente. *En una misma esfera, 1.^o las circunferencias cuyos planos equidistan del centro son iguales: 2.^o de dos circunferencias cuyos planos no equidistan del centro, la correspondiente al plano que mas se aproxima al centro es la mayor (12).*

Fig. 197.



Corol. 1.º *La mayor circunferencia de la esfera es aquella cuyo plano pasa por el centro.*

Por esta razon se llama circunferencia máxima y las demás menores; la circunferencia cuyo diámetro es BD es máxima, y las que tienen por diámetros EG y E'G' son menores.

Corol. 2.º *Las circunferencias máximas de una misma esfera son iguales.*

Corol. 3.º *Dos puntos de la superficie esférica, que no sean extremos de un mismo diámetro, determinan una circunferencia máxima.*

Porque estos dos puntos y el centro de la esfera, forman un sistema de tres puntos, no en línea recta, que determinan la posición del plano de dicha circunferencia (469).

Corol. 4.º *Las circunferencias máximas se dividen mutuamente en dos partes iguales.*

Porque la interseccion de sus planos es un diámetro.

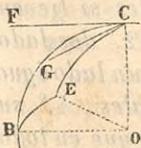
Corol. 5.º *Una circunferencia máxima BD divide á la superficie esférica en dos partes iguales.*

Porque colocando la parte superior BCD sobre la inferior BAD, de modo que la circunferencia permanezca común, y que el punto C caiga hácia A, estas dos partes coinciden en todos sus puntos; porque de lo contrario estos puntos no equidistarían del centro O.

Observacion. Esta superposicion prueba tambien que un círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales, que se llaman *hemisferios*.

231. *Recibe el nombre de ÁNGULO ESFÉRICO, la mayor ó menor inclinacion de dos arcos de circunferencia máxima BC y EC (fig. 498), llamados lados, que se reúnen en un mismo punto C, llamado vértice.*

Fig. 498.



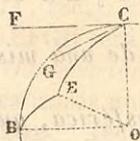
MEDIDA DE UN ÁNGULO ESFÉRICO es el ángulo rectilíneo FCG, formado por dos tangentes FC y GC, una á cada arco, en el vértice del ángulo.

Corol. *La medida de un ángulo esférico, es medida*

tambien del diedro formado por los planos que determinan sus lados.

Porque siendo FC tangente al arco BC en el punto C , es perpendicular al radio OC (44, rec. 4.^o): por igual razon GC es perpendicular al mismo radio y en el mismo punto: y como estas rectas estan en los planos de los arcos, el ángulo rectilíneo FGC es el rectilíneo correspondiente al diedro $BCOE$ (193); luego tambien será su medida (195, obs.).

Fig. 498.



232. Llámase TRIÁNGULO ESFÉRICO la porción de superficie esférica comprendida por tres arcos de circunferencia máxima: BCE (fig. 198) es un triángulo esférico.

Observacion. Si los vértices B , C , E del triángulo esférico BCE , se unen con el centro O de la esfera por medio de radios, estos forman un ángulo triedro O , cuyos ángulos diedros OB , OC y OE tienen la misma medida que los ángulos esféricos CBE , BCE y BEC (231, corol.), y cuyos ángulos rectilíneos BOC , BOE y COE tienen por medida los lados BC , BE y CE del mismo triángulo; luego las propiedades de los triángulos esféricos se deducen de las de los ángulos triedros; luego reemplazando los nombres de caras y ángulos diedros por los de lados y ángulos, se tendrá:

1.^o En todo triángulo esférico un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia (244).

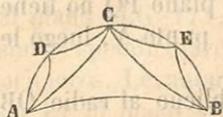
2.^o La suma de los lados de un triángulo esférico es mayor que una circunferencia máxima (242).

3.^o La suma de los ángulos de un triángulo esférico, es mayor que dos rectos y menor que seis (243).

4.^o Dos triángulos esféricos son iguales si tienen: 1.^o sus tres lados respectivamente iguales, 2.^o dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, 3.^o un lado igual contiguo á dos ángulos respectivamente iguales, 4.^o sus tres ángulos respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos esten dispuestos del mismo modo (244).

233. Teorema 4.º *El arco AB (fig. 199) de circunferencia máxima, que une dos puntos A y B de una superficie esférica, es menor que otra curva cualquiera ACB, trazada sobre la misma superficie, y que une dichos puntos.*

Fig. 199.



En efecto, uniendo A con C, y C con B por arcos de circunferencia máxima, se tiene (232, obs. 1.ª)

$$AB < AC + CB.$$

Tomando entre A y C y entre C y B los puntos intermedios D y E, y trazando los arcos de circunferencia máxima AD, DC, CE y EB, se tendrá también

$$AC < AD + DC \quad \text{y} \quad CB < CE + EB;$$

de donde $AC + CB < AD + DC + CE + EB.$

Si se continúa tomando puntos intermedios, se seguirá formando líneas poligonales esféricas, de las que cada una tiene mas puntos comunes con la curva, y es mayor que la anterior; luego la curva es el límite superior de dichas líneas poligonales [51, (')] ; y como AB es menor que la mas corta de estas, con mayor razon será menor que la curva propuesta ACB.

234. *Se llama plano TANGENTE á la superficie esférica el que no tiene con esta mas que un punto comun; y SECANTE el que tiene con la misma mas de un punto comun, esto es, una circunferencia (228).*

El punto comun á la superficie esférica y al plano tangente, recibe el nombre de *punto de contacto*.

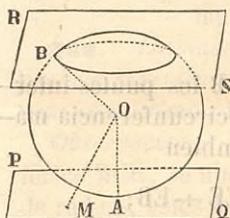
235. Teorema 5.º *Todo plano que pasa por el extremo exterior de un radio de la superficie esférica: 1.º si es perpendicular al radio, será tangente á esta superficie: 2.º si es oblicuo será secante.*

1.º Si el plano PQ (fig. 200), es perpendicular al radio OA en el extremo A, el radio también lo será al plano;

luego uniendo el punto O con otro cualquiera M del mismo plano, la recta OM será oblicua á este (172), luego será mayor que OA (174); luego el punto M estará fuera de la superficie esférica; luego el plano PQ no tiene comun con esta superficie mas que el punto A , luego le es tangente.

2.º Si el plano RS (fig. 200) es oblicuo al radio OB en el extremo B , el radio tambien lo será al plano; luego bajando desde O sobre éste oblicuas iguales con OB , los pies de estas se hallarán á la vez en la superficie esférica y en el plano: y como el lugar geométrico de los pies de estas oblicuas sobre el plano es una circunferencia (175, corol. 1.º), el plano y la superficie esférica tienen una circunferencia comun; luego el plano es secante de la superficie esférica.

Fig. 200.



Recíprocamente. *Todo plano que pasa por el extremo exterior de un radio de la superficie esférica: 1.º si es tangente á esta superficie, será perpendicular al radio: 2.º si es secante, será oblicuo (12).*

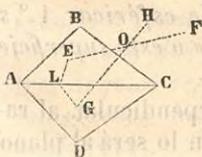
Corol. *Por un punto de la superficie esférica no se puede trazar mas que un plano tangente.*

Porque si se pudiesen trazar dos ó mas, habria en el extremo de un radio dos ó mas planos perpendiculares á este, lo que es absurdo (173).

236. Teorema 6.º *Cuatro puntos A, B, C y D (fig. 201) que no estan en un mismo plano, determinan la posicion de una superficie esférica.*

Tres cualesquiera de estos puntos A, B, C , estarán en un mismo plano (469), y A, C, D estarán tambien en otro, pero diferente del primero; puesto que por hipótesis los cuatro no estan en uno mismo. Supongamos que E y G sean los centros de las circunferencias

Fig. 201.



circunscriptas á los triángulos ABC y ACD : desde estos puntos E y G bájense perpendiculares sobre la AC , comun seccion de los planos, y estas perpendiculares se encontrarán en un punto L (41); luego la recta AC será perpendicular al plano ELG (171, corol.); luego los planos ABC y ACD son perpendiculares al ELG (197), y este lo será á los dos primeros. Levantando ahora en el punto E la perpendicular EF al plano ABC , esta perpendicular se hallará en el plano ELG (197, corol. 2.^o): por igual razon la GH , perpendicular al plano ACD , se hallará tambien en el ELG ; luego las rectas EF y GH estan en un mismo plano ELG . Por otra parte EF y GH no son paralelas; porque si lo fuesen, la EL perpendicular á una de ellas EF , lo sería á á la otra GH ; luego por L habria dos perpendiculares EL (prolongada) y LG á GH : lo que es imposible (23). Luego EF y GH se encuentran en un punto O .

Ahora, siendo EF el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A , B y C (175, corol. 2.^o), y GH el de los puntos equidistantes de A , D y C , el punto O donde se cortan será el único equidistante de A , B , C y D ; luego estos puntos (si no estan en un mismo plano) determinan la posicion de la esfera.

Corol. 1.^o *La interseccion de dos superficies esféricas tiene todos sus puntos en un mismo plano.*

Porque de lo contrario se podrian tomar tres puntos de los comunes en un plano, y uno en otro plano distinto; y las dos superficies esféricas se confundirian en una sola, contra la hipótesis.

Corol. 2.^o *La interseccion de dos superficies esféricas es una circunferencia.*

Porque esta interseccion tiene todos sus puntos en un mismo plano (corol. anterior); luego es la interseccion de un plano con cada una de las superficies esféricas; luego es una circunferencia (228).

Observacion. Con suma facilidad se pueden demostrar, relativamente á la interseccion y contacto de dos superficies esféricas, teoremas análogos á los demostrados acerca

de la interseccion y contacto de dos circunferencias (47 y 48).

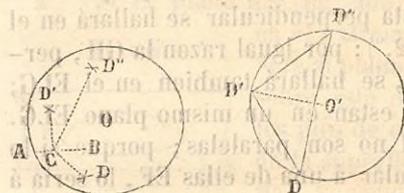
237. Problema. Dada una esfera O (fig. 202), determinar su radio.

Tómense dos puntos A y B sobre la superficie esférica:

Fig. 202.

haciendo centro en estos puntos y tomando un radio cualquiera, trácense dos arcos que se corten en D y D' ; con un radio diferente trácense otros dos arcos, que se corten en otro punto D'' : con las distancias DD' , $D'D''$ y DD'' constrúyase aparte, en un plano, el triángulo $DD'D''$: circunscríbasele una circunferencia (64), y el radio $O'D'$ de esta será igual al radio de la esfera.

En efecto, uniendo los puntos D , D' , D'' con el medio C de la recta AB , las rectas CD , CD' , CD'' son perpendiculares á la AB en el punto C (26, corol. 2.^o); luego estan en el plano perpendicular á la AB en su punto medio (174, rec. corol.); luego el centro O de la esfera estará en el mismo plano (174, corol. 2.^o); luego la circunferencia que pasa por los puntos D , D' , D'' es máxima; y como esta es igual á la circunscripta al triángulo $DD'D''$, el radio $O'D'$ de la última es igual al radio de la esfera.



CAPITULO III.

De los poliedros.

DEFINICIONES PRELIMINARES.

238. Se llama **POLIEDRO** el espacio terminado por planos.

Estos planos, limitados por sus mútuas intersecciones, los ángulos diedros ó poliedros que forman las aristas y los vértices de estos, reciben los nombres de *caras*, *ángulos*, *aristas* y *vértices* del poliedro.

DIAGONAL es toda línea que une dos vértices, que no están en una misma cara.

Un poliedro se llama **CONVEXO** cuando su superficie no puede ser atravesada por una recta mas que en dos puntos.

Los poliedros de que nos ocuparemos en lo sucesivo serán convexos; si no se advierte lo contrario.

239. Llámase **POLIEDRO REGULAR** aquel cuyas caras son polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos poliedros son tambien iguales; é **IRREGULAR** el que no reúne estas condiciones.

Por razon del número de caras que pueden tener los poliedros se clasifican del modo siguiente:

El poliedro que tiene 4 caras se llama **Tetraedro**.

El poliedro que tiene 5 caras se llama **Pentaedro**.

El poliedro que tiene 6 caras se llama	<i>Hexaedro.</i>
7	<i>Heptaedro.</i>
8	<i>Octaedro.</i>
12	<i>Dodecaedro.</i>
20	<i>Icosaedro.</i>

Los poliedros de diferente número de caras que los precedentes no tienen nombres especiales, y se les llama poliedros de 9..., 13..., 100, etc., caras.

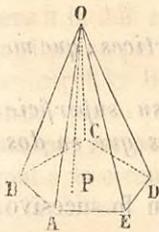
ARTÍCULO PRIMERO.

De las pirámides.

240. Se da el nombre de *PIRÁMIDE* á un poliedro que tiene una cara poligonal cualquiera, y las demás son triángulos cuyos vértices se reúnen en un mismo punto.

La cara poligonal se llama *base*, *vértice* el vértice común á las caras triangulares, y *altura* la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

Fig. 203.



OABCDE (fig. 203) es una pirámide, cuya base es el polígono ABCDE, el punto O el vértice y la recta OP la altura.

241. Se llama *pirámide REGULAR* aquella cuya base es un polígono regular y cuya altura cae en el centro del polígono de la base: é *IRREGULAR* la que no reúne estas condiciones.

Corol. 1.º Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales (175, 4.º).

Corol. 2.º Las caras laterales son triángulos iguales é isósceles.

Llámase *APOTEMA* en una pirámide regular la altura de cualquiera de sus triángulos laterales.

Observacion. Las pirámides regulares no son siempre poliedros regulares, tales como se han definido en el nú-

mero 239: una sola pirámide puede ser poliedro regular (V. 256).

212. Por razón del número de lados del polígono de la base, las pirámides se dividen en *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc., según dicho polígono sea triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.

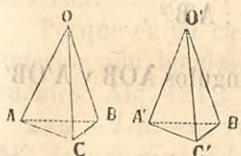
Observacion. La pirámide triangular es un tetraedro, y es además el poliedro más sencillo ó de menor número de caras; porque es imposible cerrar espacio con menos de cuatro planos.

213. Teorema 1.º *Dos tetraedros son iguales si tienen: 1.º tres caras respectivamente iguales: 2.º dos caras respectivamente iguales é igual el diedro comprendido; 3.º una cara igual contigua á dos diedros respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos esten dispuestos del mismo modo.*

1.º Sean los tetraedros $OABC$ y $O'A'B'C'$ (fig. 204), y supongamos que los triángulos $AOB = A'O'B'$, $BOC = B'O'C'$ y $AOC = A'O'C'$.

De la igualdad de estos triángulos se deduce la de los ángulos rectilíneos, que forman los triedros en O y en O' ; luego estos triedros son iguales (214, 1.º); luego superpuestos coinciden, y al verificarlo, coinciden también las caras ABC y $A'B'C'$; luego los tetraedros son iguales.

Fig. 204.



2.º Supongamos que los mismos tetraedros tengan los diedros $AO = A'O'$ y los triángulos $AOB = A'O'B'$, $AOC = A'O'C'$.

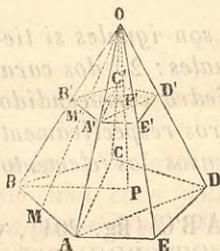
Superponiendo estos tetraedros de modo que la cara AOB coincida con su igual $A'O'B'$, la cara AOC caerá sobre $A'O'C'$, por ser iguales los diedros AO y $A'O'$; y como estas caras son también iguales, la arista OC coincide con $O'C'$, la OB con $O'B'$, etc.; luego los dos tetraedros coinciden en todos sus puntos, luego son iguales.

3.º Se demuestra de una manera análoga á las anteriores.

244. Teorema 2.º *Si una pirámide OABCDE (fig. 205) es cortada por un plano A'B'C'D'E' paralelo á la base:*
 1.º *el polígono de la seccion es semejante al de la base:*
 2.º *las áreas de estos poligonos son proporcionales á los cuadrados de sus distancias OP y O'P' al vértice de la pirámide.*

1.º Las rectas AB y A'B', BC y B'C', CD y C'D', etc., son paralelas (202): por igual razon si se trazan las diagonales AC y AD en el polígono de la base, y por ellas y la arista OA se hace pasar planos, AC y A'C', AD y A'D' serán tambien paralelas; luego los triángulos ABC y A'B'C' tienen sus ángulos respectivamente iguales (184), luego son semejantes: y como lo mismo sucede con los triángulos ACD y A'C'D', etc., resulta que los poligonos ABCDE y A'B'C'D'E' son tambien semejantes (104).

Fig. 205.



2.º De la semejanza de los poligonos ABCDE y A'B'C'D'E' se deduce (161)

$$ABCDE : A'B'C'D'E' :: AB^2 : A'B'^2 .$$

Siendo AB y A'B' paralelas, los triángulos AOB y A'OB' son semejantes, luego

$$AB : A'B' :: BO : B'O :$$

por igual razon, haciendo pasar un plano por la arista BO y la altura PO, se tendrá

$$BO : B'O :: PO : P'O .$$

De esta proporcion y la anterior se deduce

$$AB : A'B' :: PO : P'O ,$$

$$\text{ó } AB^2 : A'B'^2 :: PO^2 : P'O^2 :$$

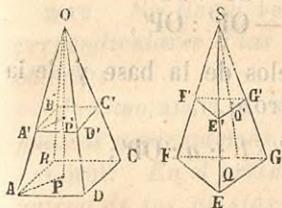
pero esta última proporción y la primera tienen una razón común; luego

$$ABCDE : A'B'C'D'E' :: PO^2 : P'O^2.$$

Corol. 1.º *Si dos pirámides OABCD y SEFG (fig. 206) de igual altura, se cortan por planos A'B'C'D' y E'F'G' equidistantes de los vértices, las áreas de las secciones son proporcionales á las de las bases.*

Porque, según el teorema, se tiene

Fig. 206.



$$ABCD : A'B'C'D' :: PO^2 : P'O^2$$

$$\text{y } EFG : E'F'G' :: QS^2 : Q'S^2 :$$

mas por hipótesis $PO = SQ$ y $P'O = Q'S$; luego estas proporciones tienen igual la última razón, luego

$$ABCD : A'B'C'D' :: EFG : E'F'G'$$

Corol. 2.º *Si, en las mismas hipótesis, las bases son equivalentes, las secciones también lo serán.*

Porque en tal caso los antecedentes de la proporción anterior son iguales; luego también lo serán los consecuentes (Alg. 124).

245. *Llámanse TRONCO ó TROZO de pirámide la parte AC' de una pirámide, comprendida entre la base de esta y el plano que la corta paralelamente á dicha base; y pirámide DEFICIENTE la parte de pirámide que queda al otro lado del plano secante.*

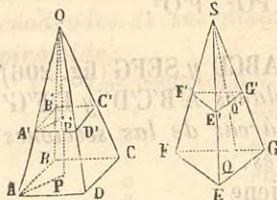
Los planos ABCD A'B'C'D' que limitan el tronco ó trozo, se llaman *bases* del mismo, y *altura* la distancia entre las bases.

Problema. Dado un tronco ó trozo de pirámide AC' (fig. 206) hallar la altura OP de la pirámide total y la OP' de la pirámide deficiente.

Supongamos completa la pirámide OABCD, y la

semejanza de los triángulos AOB y $A'O'B'$ nos dará

Fig. 206.



$$AB : A'B' :: AO : A'O ;$$

la de los triángulos AOP y $A'OP'$ da también

$$AO : A'O :: OP : OP' ;$$

de cuyas proporciones se deduce

$$AB : A'B' :: OP : OP' ;$$

de donde (Alg. 129)

$$AB - A'B' : AB :: OP - OP' : OP$$

y

$$AB - A'B' : A'B' :: OP - OP' : OP' ,$$

ó, llamando l y l' los lados paralelos de la base y de la seccion y a la altura del tronco ó trozo,

$$l - l' : l :: a : OP \quad \text{y} \quad l - l' : l' :: a : OP' ;$$

y por consiguiente

$$OP = \frac{a \times l}{l - l'} \quad \text{y} \quad OP' = \frac{a \times l'}{l - l'}$$

ARTÍCULO II.

De los prismas.

246. Se da el nombre de PRISMA á un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, y las demás son paralelógramos.

Las caras iguales y paralelas se llaman bases, y altura la distancia entre estas.

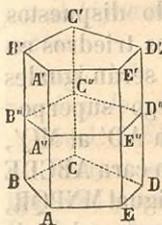
El poliedro AD' (fig. 207) es un prisma cuyas bases son los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$, y cuya altura es la recta CC' .

Corol. 1.º Las aristas de un prisma son paralelas (180, corol. 3.º) é iguales (206).

Corol. 2.º Para construir un prisma se traza una de

sus bases $ABCDE$: en los vértices A, B, C , etc. se levantan las aristas laterales AA', BB', CC' , etc. iguales y paralelas, y se unen los extremos de estas aristas consecutivas, por rectas

Fig. 207.



$D. A'B', B'C', C'D'$, etc. Porque las caras laterales BA', BC', CD' , etc., son paralelogramos (79, rec. 2.^o); luego AB es igual y paralela á $A'B'$, BC á $B'C'$, CD á $C'D'$, etc.; luego los ángulos $ABC = A'B'C'$, $BCD = B'C'D'$, etc. (181); luego los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son también iguales (84).

217. Se llama PRISMA RECTO aquel cuyas aristas son perpendiculares á las bases, y OBLICUO aquel en que son oblicuas.

Prisma REGULAR es aquel cuyas bases son polígonos regulares y que además es recto.

Corol. En el prisma recto la altura es igual á cualquiera de sus aristas, y las caras laterales son rectángulos; en el prisma regular los rectángulos laterales son iguales entre sí.

Observacion. Los prismas regulares no son siempre poliedros regulares como se han definido (239): el cubo es el único prisma regular, que es al mismo tiempo poliedro regular (V. 256).

218. Teorema 1.^o Si un prisma AD' se corta por un plano $A''B''C''D''E''$, paralelo á las bases, la seccion es un polígono igual á una cualquiera de estas $ABCDE$.

Las rectas AB y $A''B''$, BC y $B''C''$, CD y $C''D''$, etc., son paralelas (202); luego los ángulos ABC y $A''B''C''$, BCD y $B''C''D''$, etc., son iguales (181).

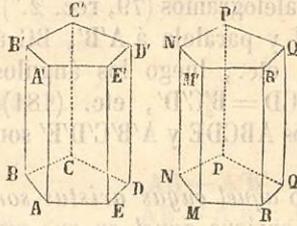
Por otra parte, siendo AA'' y BB'' , BB'' y CC'' , etc. paralelas, los cuadriláteros AB'' , BC'' , CD'' , etc., son paralelogramos; luego $AB = A''B''$, $BC = B''C''$, etc. Luego los polígonos $ABCDE$ y $A''B''C''D''E''$ tienen sus ángulos y lados respectivamente iguales; luego son iguales (84).

219. Teorema 2.^o Dos prismas AD' y MQ' (fig. 208)

son iguales, si tienen un ángulo triedro A y M, formado por tres caras respectivamente iguales, $ABCDE = MNPQR$, $AB' = MN'$ y $AE' = MR'$ é igualmente dispuestas.

Siendo iguales respectivamente y estando dispuestos del mismo modo los polígonos, que forman los triedros en

Fig. 208.



A y en M, estos serán iguales (244, 4.º); luego superponiendo el prisma AD' al MQ' , de manera que la cara $ABCDE$ coincida con su igual $MNPQR$, la cara AB' caerá sobre la MN' , y como estas caras son iguales, la recta $A'B'$ coincidirá con $M'N'$: por igual razon

$A'E'$ coincidirá con $M'R'$; luego la base $A'B'C'D'E'$ coincide con su igual $M'N'P'Q'R'$; luego los vértices de los dos prismas coinciden, luego estos son evidentemente iguales.

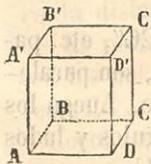
Corol. Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.

250. Por razon del número de lados de las bases, los prismas se dividen en *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc., segun dichas bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

Llámanse **PARALELEPÍPEDO** el prisma cuyas bases son paralelógramos.

251. Teorema 3.º En todo paralelepípedo AC' (figura 209) las caras laterales y opuestas AB' y DC' , AD' y BC' , son tambien iguales y paralelas.

Fig. 209.



La recta AA' es igual y paralela á DD' (246, corol. 4.º), y por hipótesis AB es igual y paralela con DC ; luego la cara AB' es igual y paralela á DC' (79, corol. 2.º, y 202, corol.). Por igual razon la cara AD' es igual y paralela á BC' .

Corol. En un paralelepípedo se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera.

252. Se llama *paralelepípedo rectángulo* aquel que

tiene por bases dos paralelogramos rectángulos, y además es recto.

Corol. Las caras de un paralelepipedo rectángulo son paralelogramos rectángulos, y sus ángulos diedros son rectos.

253. Se da el nombre de CUBO á un paralelepipedo rectángulo, cuyas aristas son todas iguales.

Corol. El cubo es un exaedro regular.

Porque sus caras son evidentemente seis cuadrados iguales, y sus ángulos poliedros, formados por tres ángulos de cuadrado, son tambien iguales ($214, 1.^\circ$).

ARTÍCULO II.

De los poliedros en general.

254. Teorema 1.º Si dos poliedros $OPABCD$ y $O'P'A'B'C'D'$ (fig. 240) tienen sus caras $ABCD$ y $A'B'C'D'$, $ABOP$ y $A'B'O'P'$, etc., y sus ángulos diedros AB y $A'B'$, OB y $O'B'$, etc., respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales.

Superpóngase el primer poliedro al segundo, de modo

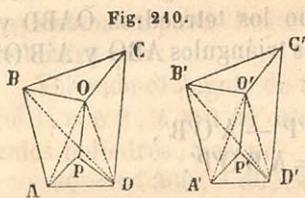


Fig. 240.

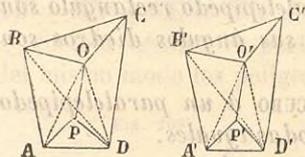
que la cara $ABCD$ coincida con su igual $A'B'C'D'$; la cara $ABOP$ caerá sobre $A'B'O'P'$, por ser los diedros AB y $A'B'$ iguales, y la arista OP coincidirá con la $O'P'$, por la igualdad de estas caras; luego los vértices de estos poliedros coinciden, luego los poliedros son iguales.

Del mismo modo se demostraría cualquiera que fuese el número de caras de los poliedros.

255. Teorema 2.º Si dos poliedros $OPABCD$ y $O'P'A'B'C'D'$ se componen del mismo número de tetraedros $OABD$ y $O'A'B'D'$, $OAPD$ y $O'A'P'D'$, $OBCD$ y $O'B'C'D'$ res-

pectivamente iguales é igualmente dispuestos, los poliedros son iguales.

Fig. 210.



La igualdad de los tetraedros OABD y O'A'B'D' nos da los diedros

$$AB = A'B'.$$

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los diedros OADB y O'A'D'B': y como los tetraedros OAPD y O'A'P'D' son tambien iguales, los diedros OADP y O'A'D'P' lo serán de la misma manera; luego los diedros

$$OADB + OADP = O'A'D'B' + O'A'D'P',$$

ó los diedros totales

$$AD = A'D'.$$

Lo mismo se demuestra en igualdad de los diedros restantes.

La igualdad de los tetraedros OAPD y O'A'P'D' nos da la igualdad de sus caras homólogas

$$APD = A'P'D'.$$

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los triángulos AOP y A'O'P': y como los tetraedros OABD y O'A'B'D' son tambien iguales, los triángulos ABO y A'B'O' lo serán del mismo modo; luego

$$AOP + AOB = A'O'P' + A'O'B',$$

ó las caras totales (85) $ABOP = A'B'O'P'.$

Lo mismo se demuestra la igualdad de las caras restantes.

Luego los poliedros propuestos tienen sus caras y ángulos diedros respectivamente iguales y ordenados del mismo modo; luego son iguales (254).

Recíprocamente. Si dos poliedros son iguales, se pueden descomponer en el mismo número de tetraedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.

Haciendo pasar un plano por los puntos O, A, D, y otro por los O, B, D, y ejecutando igual operacion en el segundo poliedro, aquel quedará dividido en los tetraedros

OAPD, OABD, OBCD,
y este en los O'A'P'D', O'A'B'D', O'B'C'D'.

Ahora, los tetraedros OAPD y O'A'P'D' tienen el diedro $AP = A'P'$, por ser diedros colocados del mismo modo en los poliedros iguales: la cara $APD = A'P'D'$ tambien por hipótesis, y la $OAP = O'A'P'$ (85, rec.); luego los tetraedros son iguales (243, 2.º).

Como del mismo modo se demuestra la igualdad de los tetraedros restantes, el teorema reciproco es cierto.

256. *El número de poliedros regulares no puede pasar de cinco.*

En efecto, el número de poliedros regulares no puede exceder al de ángulos poliedros que puedan formarse con ángulos de poligonos regulares iguales (239); luego si demostramos que el número de estos ángulos poliedros es cinco, se tendrá demostrado que el de los poliedros regulares no puede exceder á este número.

Esto supuesto, y recordando que para formar ángulo poliedro se necesitan á lo menos tres ángulos rectilíneos, cuya suma no puede llegar á cuatro rectos (212) ó sea 360° , se tendrá que:

Valiendo el ángulo de triángulo equilátero 60° (82, corol.), con 3, 4 y 5 de estos ángulos se podrán formar ángulos poliedros, porque

$60 \times 3 < 360$, $60 \times 4 < 360$, y $60 \times 5 < 360$;
mas con 6 ya no puede formarse, porque
 $60 \times 6 = 360$.

Valiendo el ángulo de cuadrado 90° , con tres de estos ángulos se podrá formar un ángulo poliedro, porque

$90 \times 3 < 360$;
pero con 4 de estos ángulos ya no puede formarse, porque
 $90 \times 4 = 360$.

Valiendo el ángulo de pentágono regular 108° , con 3

de estos ángulos se puede formar un ángulo poliedro, porque

$$108 \times 3 < 360;$$

mas con 4 ya no puede formarse, porque

$$108 \times 4 > 360.$$

Valiendo el ángulo del exágono 120° , con 3 de estos ángulos no puede formarse ya ángulo poliedro, porque

$$120 \times 3 = 360.$$

Con mayor razon no pueden formarse ángulos poliedros con ángulos de poligonos regulares de mayor número de lados.

Luego con ángulos de poligonos regulares é iguales, solo pueden formarse 5 ángulos poliedros, 3 con los ángulos de triángulo equilátero, 1 con los del cuadrado y 1 con los del pentágono; luego el número de poliedros regulares no puede pasar de 5.

Observacion. Deberiamos ahora demostrar la posibilidad de la formacion de los 5 poliedros regulares; pero la demostracion no es de este lugar. Nos limitaremos á indicar que efectivamente existen estos 5 poliedros regulares, y son

El tetraedro, terminado por 4 triángulos equiláteros (fig. 211, 1).

El exaedro, terminado por 6 cuadrados (fig. 211, 2).

El octaedro, terminado por 8 triángulos equiláteros (fig. 211, 3).

El dodecaedro, terminado por 12 pentágonos regulares (fig. 211, 4).

El icosaedro, terminado por 20 triángulos equiláteros (fig. 211, 5).

Fig. 211.



SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO.

CAPITULO PRIMERO.

De los poliedros semejantes, inscriptos y circunscriptos.

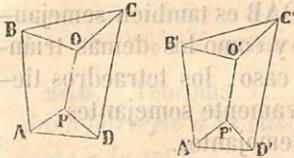
PRELIMINARES.

257. *Se llaman POLIEDROS SEMEJANTES los que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales, y sus caras homólogas semejantes.*

Llámanse ARISTAS HOMÓLOGAS las aristas de los diedros iguales; y CARAS HOMÓLOGAS las formadas por aristas homólogas.

Si en los poliedros $OPABCD$ y $O'P'A'B'C'D'$ (fig. 212), suponemos iguales los diedros, $AB = A'B'$, $BO = B'O'$, etc., cuyas aristas tienen las mismas letras, las aristas AB y $A'B'$, AP y $A'P'$, etc., son homólogas; y las caras $ABOP$ y $A'B'O'P'$, APD y $A'P'D'$, etc., formadas por dichas aristas, son las caras homólogas.

Corol. *Los poliedros semejantes tienen proporcionales las aristas homólogas.*



Porque la semejanza de las caras ABOP y A'B'O'P' nos da

$$AB : A'B' :: BO : B'O' :: OP : O'P' :: AP : A'P',$$

y la de los triángulos APD y A'P'D' da tambien

$$AP : A'P' :: AD : A'D' :: PD : P'D',$$

cuyas series de razones iguales se enlazan por la razon comun $AP : A'P'$, y se enlazarian igualmente con otras deducidas de la comparacion de las caras homólogas restantes.

ARTÍCULO PRIMERO.

De los tetraedros semejantes.

258. Teorema 1.º *Si un tetraedro OABC (fig. 213) se corta por un plano A'B'C' paralelo á una de sus caras, el tetraedro OA'B'C' parcial que resulta, es semejante al total.*

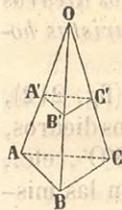
Los diedros OB y OB' son uno mismo, y por lo tanto iguales. Otro tanto sucede con los diedros laterales restantes. Los diedros OBAC y OB'A'C' son tambien iguales (205, rec. 1.º): y como lo mismo se demostraria respecto de los demás diedros de las bases, resulta que los tetraedros propuestos tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales.

Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes (244, 1.º); OAB es tambien semejante con OA'B' (97), y como los demás triángulos laterales se hallan en igual caso, los tetraedros tienen sus caras homólogas respectivamente semejantes.

Luego dichos tetraedros son semejantes.

259. Teorema 2.º *Dos tetraedros son semejantes: 1.º si tienen tres caras respectivamente semejantes: 2.º si tienen dos caras respectivamente semejantes é igual el diedro comprendido: 3.º si tienen una cara semejante*

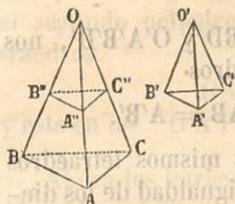
Fig. 213.



contigua á tres diedros respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos esten semejantemente dispuestos.

1.º Sean los tetraedros $OABC$ y $O'A'B'C'$ (fig. 214), en que se suponen semejantes los triángulos OAB y $O'A'B'$, OAC y $O'A'C'$, OBC y $O'B'C'$.

Fig. 214.



Tómese sobre la arista OB una parte $OB'' = O'B'$, y por el punto B'' trácese el plano $B''A''C''$, paralelo á BAC .

Los tetraedros $OABC$ y $O'A''B''C''$ serán semejantes (258). De la semejanza de estos tetraedros se deduce la de las caras homólogas OAB y $O'A''B''$, OBC y $O'B''C''$, etc.: mas por hipótesis OAB y $O'A'C'$, OBC y $O'B'C'$, etc., son también semejantes; luego los triángulos $O'A''B''$ y $O'A'B'$, $O'B''C''$ y $O'B'C'$, etc., tienen sus ángulos respectivamente iguales; luego los triángulos $O'A''B''$ y $O'A'B'$, $O'B''C''$ y $O'B'C'$, que tienen $OB'' = O'B'$ por construcción y los ángulos contiguos iguales, son iguales (72, 3.º), luego los triángulos $O'A''C''$ y $O'A'C'$ también lo serán (72, 2.º); luego los tetraedros $O'A''B''C''$ y $O'A'B'C'$ son iguales (243, 4.º): pero el primero es semejante con $OABC$, luego el segundo también lo será.

2.º y 3.º Estos casos se demuestran de una manera análoga, fundándose en el 2.º y 3.º del núm. 243.

ARTÍCULO II.

De los poliedros semejantes en general.

260. Teorema 1.º Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, la pirámide deficiente es semejante á la total.

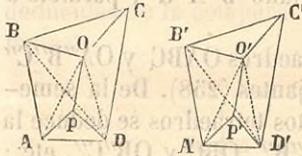
La demostracion de este teorema es igual á la del teorema del núm. 258, que es un caso particular del presente.

Corol. Las bases de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas (244, 2.º).

261. Teorema 2.º Si dos poliedros $OPABCD$ y $O'P'A'B'C'D'$ (fig. 215), están compuestos del mismo número de tetraedros $OABD$ y $O'A'B'D'$, $OAPD$ y $O'A'P'D'$, $OBCD$ y $O'B'C'D'$ respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.

La semejanza de los tetraedros $OABD$ y $O'A'B'D'$, nos da los diedros

Fig. 215.



$$AB = A'B'.$$

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los diedros $OADB$ y $O'A'D'B'$: y como los tetraedros $OAPD$ y $O'A'P'D'$ son tambien semejantes, los diedros $OADP$ y $O'A'D'P'$ serán de la misma manera iguales; luego los diedros

$$OADB + OADP = O'A'D'B' + O'A'D'P',$$

ó los diedros totales $AD = A'D'$.

Lo mismo se demuestra la igualdad de los diedros restantes.

La semejanza de los tetraedros $OAPD$ y $O'A'P'D'$ nos da la semejanza de sus caras homólogas

$$APD \text{ y } A'P'D'.$$

De los mismos tetraedros resulta la semejanza de los triángulos AOP y $A'O'P'$: y como los tetraedros $OABD$ y $O'A'B'D'$ son tambien semejantes, los triángulos ABO y $A'B'O'$ lo serán del mismo modo; luego los polígonos

$$ABOP \text{ y } A'B'O'P'$$

son semejantes (401).

Lo mismo se demuestra la semejanza de las demás caras. Luego los poliedros propuestos tienen sus ángulos die-

dros respectivamente iguales y sus caras homólogas semejantes; luego son semejantes (257).

Recíprocamente. *Si dos poliedros son semejantes, se pueden descomponer en el mismo número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.*

Haciendo pasar un plano por los puntos O, A, D, y otro por los O, B, D, y ejecutando igual operación en el segundo poliedro, aquel quedará dividido en los tetraedros

OAPD, OABD, OBCD,
y este en los O'A'P'D', O'A'B'D', O'B'C'D'.

Ahora los tetraedros OAPD y O'A'P'D' tienen los diedros $AP \equiv A'P'$, por ser diedros colocados del mismo modo en los poliedros semejantes; el triángulo APD es semejante al A'P'D', también por hipótesis, y el OAP al O'A'P' (101, rec.); luego los tetraedros son semejantes.

Como del mismo modo se demostraría la semejanza de los tetraedros restantes, el teorema recíproco es evidente.

ARTÍCULO III.

Poliedros inscritos y circunscriptos en los cuerpos de revolución.

262. *Se dice que una pirámide está INSCRIPTA en un cono, ó un cono CIRCUNSCRIPTO á una pirámide, cuando ambos cuerpos tienen el mismo vértice y la base de la pirámide está inscrita en la del cono.*

263. Inscribiendo en un cono una pirámide cualquiera, despues otra de duplo número de caras laterales, luego otra, y así sucesivamente, las aristas de la pirámide permanecen iguales á los lados del cono: el número de aristas que coincide con la superficie cónica se duplica; y por lo tanto la superficie lateral de la pirámide se va confundiendo con la superficie cónica, y la base de aquella con la de



esta, de manera que á las pocas inscripciones ya la vista no puede distinguir un cuerpo del otro. Como las inscripciones se pueden aun suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que

Todo cono se puede considerar como una pirámide de infinito número de caras.

Observacion. El cono recto y circular se debe considerar, en tal caso, como una pirámide regular de infinito número de caras, cuyas apotemas y aristas son iguales y estan representadas por los lados.

264. *Se dice que un prisma está INSCRIPTO en un cilindro, ó un cilindro CIRCUNSCRIPTO á un prisma, cuando las bases del prisma estan inscriptas en las del cilindro.*

265. Si en un cilindro se inscribe un prisma cualquiera, después otro de duplo número de caras laterales, luego otro, y así sucesivamente, el número de aristas que coincide con la superficie cilíndrica se va duplicando á medida que el número de caras laterales se duplica; y por lo tanto la superficie lateral del prisma se va confundiendo con la del cilindro, y las bases de aquel con las de este, de manera que á las pocas inscripciones ya no es fácil distinguir un cuerpo del otro. Como las inscripciones se pueden aun suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que

Todo cilindro se puede considerar como un prisma de infinito número de caras.

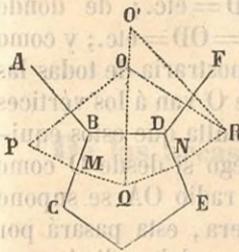
266. *Se dice que un poliedro está INSCRIPTO en una esfera, ó una esfera CIRCUNSCRIPTA á un poliedro, cuando todos los vértices del poliedro estan en la superficie esférica.*

Dícese que un poliedro está CIRCUNSCRIPTO á una esfera, ó una esfera INSCRIPTA en un poliedro, cuando todas las caras del poliedro son tangentes á la superficie esférica.

267. Teorema. *A todo poliedro regular: 1.º se le puede inscribir una esfera: 2.º circunscribir otra.*

Supongamos que ABC y CBD (fig. 246) sean dos caras

Fig. 246.

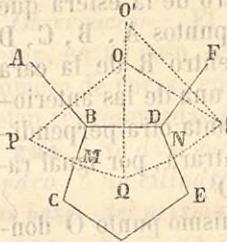


adyacentes del poliedro dado; levantando en los centros P y Q de los polígonos, que forman dichas caras, perpendiculares á las mismas, estas perpendiculares se encontrarán en el punto O, centro de la esfera que pasa por dichos puntos A, B, C, D (236). Si en el centro R de la cara EDF, contigua á una de las anteriores CBD, se levanta otra perpendicular, esta encontrará, por igual razón, á la QO en un punto cualquiera O'.

Ahora este punto O' debe ser el mismo punto O donde se encuentran las PO y QO. En efecto, trácense desde P y Q perpendiculares sobre la arista BC, común á las dos primeras caras, cuyas perpendiculares concurrirán en el punto M (41); y desde Q y R sobre la DE, las cuales concurren en N, por la misma razón: dóblese el cuadrilátero plano (236) OPMQ sobre el de igual clase O'QNR, sirviendo de eje OQ, y QM caerá sobre QN por ser los ángulos OQM y OQN rectos (170), y el punto M coincidirá con N, porque QM=QN por apotemas de un mismo polígono: MP caerá sobre NR, por ser iguales los ángulos PMQ y QNR, como medidas de los diedros BC y DE, iguales por hipótesis; y el punto P coincidirá con R por ser PM=NR, como apotemas de polígonos iguales: PO caerá sobre RO' por ser rectos los ángulos OPM y O'RN (170); luego el punto O' coincide con O, y OP=OR. Como lo mismo se demostraría respecto de la perpendicular levantada en el centro de otra cara cualquiera, resulta que todas las perpendiculares levantadas en los centros de los polígonos, se encuentran en un mismo punto O y son iguales; luego todas las caras equidistan de este punto O: luego si desde él como centro y con el radio OP se traza una esfera, todas las caras del poliedro son perpendiculares á los extremos de los radios OP, OQ, OR, etc., de esta esfera, luego son tangentes (235, 1.º); luego la esfera queda inscrita en el poliedro.

2.º Siendo OP perpendicular al polígono ABC en su centro P , se tendrá (*) $OA = OB = OC = \text{etc.}$ (175, 1.º); por igual razón $OB = OC = OD = \text{etc.}$; de donde $OA = OB = OC = OD = \text{etc.}$; y como

Fig. 216.



lo mismo se demostraría de todas las rectas que desde O van á los vértices del poliedro, resulta que estos equidistan de O ; luego si desde O como centro y con un radio OA se supone trazada una esfera, esta pasará por todos los vértices del poliedro, y por lo tanto estará circunscrita á este.

268. Llámase CENTRO de un poliedro regular el centro de las esferas, inscrita y circunscrita al mismo poliedro: RADIOS del poliedro las rectas que van desde el centro á los vértices de sus ángulos; y APOTEMAS las perpendiculares trazadas desde el centro á las caras del poliedro.

Corol. 1.º Los radios de un poliedro son iguales entre sí, y las apotemas lo son también.

Corol. 2.º Todo poliedro regular se puede descomponer en tantas pirámides regulares como caras tiene, cuyas bases son las caras del poliedro y cuyos vértices se reúnen en el centro.

(*) Estas líneas no están trazadas en la figura; porque los puntos extremos las expresan con claridad, y si se hubiesen trazado, la figura resultaría confusa.

CAPÍTULO II.

De las áreas de los cuerpos geométricos.

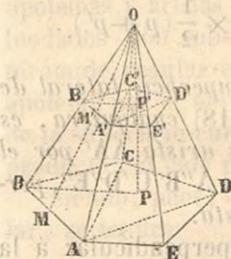
ARTÍCULO PRIMERO.

Determinación de las áreas de los poliedros.

El área de la superficie de un poliedro cualquiera es evidentemente igual á la suma de las áreas de los polígonos que forman sus diferentes caras; y como se saben determinar las áreas de las figuras planas (*), solo nos ocuparemos al presente de las áreas de las superficies laterales del prisma, de la pirámide regular y de su tronco, que pueden determinarse de una manera mas sencilla, como aparece de los siguientes teoremas.

269. Teorema 1.º *El área de la superficie lateral de una pirámide regular OABCDE (figura 217), es igual á la mitad del producto de la apotema OM por el perímetro de la base.*

Fig. 217.



Los triángulos laterales AOB, BOC, etc., son iguales é isósceles (241, corol. 2.º): el área de cada uno de estos triángulos es $\frac{1}{2}MO \times AB$ (151); luego la de los cinco será

$$\frac{1}{2}MO \times AB \times 5 = \frac{1}{2}MO \times 5AB,$$

(*) (V. Geometría plana, sección II, capítulo III, art. 1.º

ó llamando a la apotema y p el perímetro de la base,

$$\text{Ar. de sup. lat. de pirám. reg.} = \frac{1}{2} ap.$$

Ejemplo. Hallar el área de la superficie lateral de la pirámide OABC..., suponiendo que la apotema tiene 3,42 metros y el lado de la base 1,03 metros: $p=1,03 \times 5=5,15$, $a=3,42$; luego el área buscada será

$$5,15 \times 3,42 = 16,0680 \text{ metros cuadrados.}$$

270. Teorema 2.º *El área de la superficie lateral de un tronco AD' de pirámide regular, es igual al producto de su apotema MM' por la semisuma de los perímetros de las bases.*

Los trapecios laterales ABA'B', BCB'C', etc., son evidentemente iguales: el área del primero de estos es

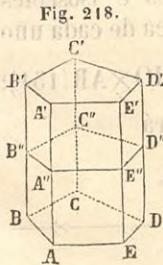
$$MM' \times \frac{1}{2} (AB + A'B') (152); \text{ luego la de los cinco será}$$

$$MM' \times \frac{1}{2} (AB + A'B') \times 5 = MM' \times \frac{1}{2} (5AB + 5A'B'),$$

ó, llamando p y p' los perímetros de sus bases y a la apotema,

$$\text{Ar. lat. de tronco de pir. reg.} = a \times \frac{1}{2} (p + p').$$

271. Teorema 3.º *El área de la superficie lateral de un prisma AD' (fig. 218) cualquiera, es igual al producto de la arista AA' por el perímetro de una seccion A'B'C'D'E'', perpendicular á dicha arista.*



Siendo la seccion perpendicular á la arista AA', lo será á todas (180, corol. 2.º); luego estas lo serán á la seccion, y por lo tanto, cada una de ellas á los lados A''B'', B''C'', ..., de la seccion, que pasan por su

pié en el mismo plano (170); luego el área de los paralelógramos laterales será (150)

$$ABA'B' = AA' \times A'B'', \quad BCB'C' = BB' \times B'C'', \text{ etc. ;}$$

luego el área de la superficie lateral del prisma, como las aristas son iguales (246, corol. 1.º), será

$$AA'(A'B'' + B'C'' + C'D'' + D'E'' + E'A''),$$

ó llamando a la arista y p el perímetro de dicha seccion,

$$\text{Ar. lat. de pris.} = ap.$$

Corol. *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de la base.*

Porque en este prisma la base es una seccion perpendicular á la arista.

ARTÍCULO II.

Áreas de los cuerpos de revolucion.

272. Teorema 1.º *El área de la superficie curva de un cono recto y circular, es igual á la mitad del producto del lado por la circunferencia de la base.*

El cono recto y circular se puede considerar como una pirámide regular de infinito número de caras, cuyas apotemas y aristas son iguales, y estan representadas por los lados (263, obs.): el área de la superficie lateral de la pirámide regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro de la base (269); luego el área de la superficie curva del cono será tambien la mitad del producto del lado por la circunferencia de la base.

Siendo, pues, OPAB (fig. 149) un cono recto y circular, se tendrá

$$\text{Ar. de sup. cur. de OPAB} = \frac{1}{2} OA \times 2\pi PA = \pi PA \times OA \quad [1],$$

ó llamando r el radio de la base y l el lado,

$$\text{Ar. de sup. cur. de cono rec. y cir.} = \pi rl \quad [2].$$

Observacion 1.^a Si por el punto A' , medio del lado AO , se traza una seccion paralela á la base cuyo diámetro sea $A'B'$, de la semejanza de los triángulos OAP y $OA'P'$, resulta

Fig. 219.



$$OA' : OA :: P'A' : PA :$$

pero $OA' = \frac{1}{2} OA ;$

luego $P'A' = \frac{1}{2} PA, \text{ ó } PA = 2P'A',$

cuyo valor sustituido en la fórmula [1], nos da

$$\text{Ar. de sup. cur. de OPAB} = 2\pi P'A' \times OA.$$

Luego el área de la superficie curva de un cono recto y circular, es igual tambien al producto del lado por la circunferencia de una seccion hecha por el punto medio del lado y paralela á la base.

Observacion 2.^a Si por el punto A' , medio del lado, se trazan la $A'C$ perpendicular á este, los triángulos ΔOP y $\Delta P'C$ serán semejantes (100); luego

$$AO : A'C :: OP : A'P' ;$$

de donde

$$AO \times A'P' = A'C \times OP,$$

cuyo valor sustituido en la fórmula de la obs. ant., da

$$\text{Ar. de sup. cur. de OPAB} = 2\pi A'C \times OP.$$

Luego el área de la superficie curva de un cono recto y circular, es tambien igual al producto del eje por la circunferencia cuyo radio es la perpendicular levantada en el punto medio del lado, é interceptada entre este punto y el eje.

273. Para determinar el área de la superficie curva de un cono cualquiera, se desarrolla dicha superficie sobre un plano (223, 2.^o), y luego se halla el área de la figura plana resultante (159).

274. Teorema 2.^o *El área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular, es igual al producto de su*

lado por la semisuma de las circunferencias de las bases!

Considerándose el cono recto y circular como una pirámide de infinito número de caras (263, obs.), el tronco de cono recto y circular se puede considerar también como el tronco de una pirámide regular, cuyo número de caras es infinito: el área de la superficie de la pirámide truncada es igual al producto de la apotema por la semisuma de los perímetros de las bases (270); luego la del tronco de cono recto y circular será también igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de las bases.

Siendo, pues, AB' (fig. 220) un tronco de cono recto y circular, se tendrá

$$\text{Ar. de sup. cur. de } AB' = AA' \times \frac{1}{2} (2\pi PA + 2\pi P'A') = AA' \times 2\pi \frac{PA + P'A'}{2}$$

Observacion 1.^a Si por el punto A'' , medio de AA' , se traza una seccion paralela á las bases cuyo diámetro es $A''B''$, en el trapéicio $APA'P'$, resulta (152, obs.)

Fig. 220.



$$\frac{PA + P'A'}{2} = P''A''$$

cuyo valor sustituido en la fórmula precedente, da

$$\text{Ar. de sup. cur. de } AB' = 2\pi P''A'' \times AA'$$

— Luego el área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular, también es igual al producto de su lado por la circunferencia de una sección hecha por el punto medio del lado y paralela á la base.

Observacion 2.^a Si por los puntos A' y A'' se trazan las perpendiculares AD y $A''C$ á la base y al lado AA' , los triángulos $AA'D$ y $A''P''C$ serán semejantes (100); luego

$$DA : P''A'' :: AA' : CA'' ;$$

de donde, y supuesto que $DA' = PP'$,

$$P'A'' \times AA' = CA'' \times PP',$$

cuyo valor sustituido en la fórmula de la precedente observacion, da

$$\text{Ar. de sup. cur. de } AB' = 2\pi A''C \times PP'.$$

Luego el área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular, es igual tambien al producto de su eje por una circunferencia, cuyo radio es la perpendicular levantada en el punto medio del lado é interceptada entre este punto y el eje.

275. Para determinar el área de la superficie curva de un tronco de cono cualquiera, se desarrolla dicha superficie sobre un plano (223, obs. 2.^a), y luego se halla el área de la figura resultante (159).

276. Teorema 3.^o *El área de la superficie curva de un cilindro cualquiera, es igual al producto del lado por el perímetro de una seccion perpendicular á dicho lado.*

A todo cilindro se le puede considerar como un prisma de infinito número de caras (265): el área de la superficie lateral del prisma es igual al producto de la arista por el perímetro de la seccion perpendicular á la misma arista (271); luego la del cilindro será igual al producto del lado por el perímetro de la seccion perpendicular á este lado (*).

Corol. *El área de la superficie curva del cilindro recto y circular es igual al producto de la circunferencia de la base por el lado.*

Porque en este cilindro la base es una seccion perpendicular al lado.

Llamando r el radio de la base y l el lado, se tiene

$$\text{Ar. de sup. cur. de cil. rec. y cir.} = 2\pi rl.$$

(*) Como no sabemos rectificar más curvas que la circunferencia, en el presente caso puede arrollarse un hilo perpendicular á los lados del cilindro, y la medida de su extension nos dará la longitud del perímetro de la seccion pedida.

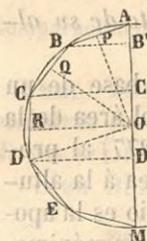
Ejemplo. ¿Cuál es el área de la superficie curva de un cilindro recto y circular, cuyo radio de la base es 6 metros y el lado 10?

La circunferencia de la base es $c = 2\pi r = 37,69908$, y por consiguiente el área buscada, será

$$37,69908 \times 10 = 376,9908 \text{ metros cuadrados.}$$

277. Teorema 4.^o *El área de la superficie descrita por la base ABCD (fig. 221) de un sector poligonal ABCDO, que gira al rededor de uno de sus diámetros AM, es igual al producto de una circunferencia, cuyo radio es la apotema OP, por la proyección AD' de la base sobre el eje.*

Fig. 221.



El lado AB describe la superficie curva de un cono recto y circular, cuyo eje es AB': CB la de un tronco de cono recto y circular, cuyo eje es B'C': y CD la de un cilindro, que tiene por eje C'D'; luego

$$\text{Ar. de sup. desc. por AB} = 2\pi OP \times AB' \text{ (272, obs. 2.ª)}$$

$$\text{Ar. de sup. desc. por BC} = 2\pi OQ \times B'C' \text{ (274, obs. 2.ª)}$$

$$\text{Ar. de sup. des. por CD} = 2\pi DD' \times CD \text{ (276, corol.)}$$

Sumando estas igualdades, advirtiendo que $CD = C'D'$, y que $DD' = OP$ y $OP = OQ = OR$ (126, corol. 1.^o), resulta

$$\text{Ar. de sup. desc. por ABCD} = 2\pi OP \times AD'.$$

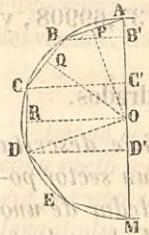
278. *Se llama zona esférica la parte de superficie de la esfera, descrita por un arco cualquiera de la semicircunferencia generatriz de la superficie esférica.*

Las circunferencias descritas por los extremos del arco generador de la zona se llaman BASES de esta; y ALTURA la proyección de dicho arco sobre el eje.

Si uno de los extremos del arco generador coincide con el eje, la zona tiene una base sola.

La zona de una sola base se llama tambien *casquete esférico*.

Fig. 221.



La superficie descrita por el arco BCD es una zona: sus bases son las circunferencias que tienen por radios las rectas B'B y D'D, y B'D' es su altura. Si el arco generador fuese ABC, la única base sería la circunferencia, cuyo radio es CC', y AC' la altura.

279. Teorema 5.º *El área de una zona esférica es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

Considerando el arco generador como la base de un sector poligonal de infinito número de lados, el área de la superficie descrita por esta base será igual (277) al producto de su proyección sobre el diámetro, ó sea á la altura de la zona, por la circunferencia cuyo radio es la apotema de dicho sector, ó sea por una circunferencia máxima.

Llamando, pues, Z el área de la zona, a su altura y r el radio de la esfera, se tendrá

$$Z = 2\pi r a.$$

Corol. *El área de la esfera es igual al producto del diámetro por una circunferencia máxima.*

Porque

$$\text{Ar. de zona desc. por arc. AD} = 2\pi r \times AD',$$

$$\text{Ar. de zona desc. por arc. DM} = 2\pi r \times D'M;$$

luego

$$\text{Ar. de sup. desc. por ADM} = 2\pi r (AD' + D'M) = 2\pi r \times AM,$$

ó llamando d el diámetro y E la superficie esférica,

$$\text{Ar. de E} = 2\pi r d,$$

ó sustituyendo en vez de d su valor $2r$,

$$\text{Ar. de E} = 4\pi r^2.$$

Observacion. Siendo πr^2 el área de un círculo máxi-

mo, resulta que *el área de la superficie esférica es cuádrupla de la del círculo máximo.*

Ejemplo. Suponiendo que la tierra sea esférica, y que su radio sea 1442 leguas, ¿cuál será el área de su superficie?

Ar. de sup. T. = $4 \times 3,14159 \dots \times 1442^2 = 16\ 388\ 608$ leguas cuadradas próximamente.

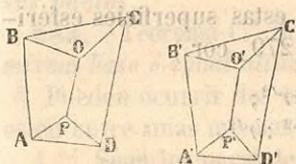
ARTÍCULO III.

Comparacion de las áreas de los cuerpos geométricos semejantes.

280. Teorema 1.º *Las áreas de las superficies de los poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Sean OPABCD y O'P'A'B'C'D' (fig. 222) los poliedros semejantes, y se tendrá (461)

Fig. 222.



$$\begin{aligned} ABOP &: A'B'O'P' :: AB^2 : A'B'^2 \\ BOC &: B'O'C' :: OC^2 : O'C'^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales

(257, cor., y Alg., 127, 4.ª); luego

$$ABOP : A'B'O'P' :: BOC : B'O'C' :: \text{etc.} : \text{etc.} :: AB^3 : A'B'^3;$$

de donde (Alg. 130)

$$ABOP + BOC + \text{etc.} : A'B'O'P' + B'O'C' + \text{etc.} :: AB^2 : A'B'^2$$

ó llamando A y A' las áreas de las superficies de estos poliedros,

$$A : A' :: AB^2 : A'B'^2.$$

281. *Dos conos rectos y circulares son semejantes, cuando los triángulos generadores lo son también.*

282. Teorema 2.º *Las áreas de las superficies curvas*

de dos conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Llamando r, r' los radios y l, l' los lados de estos dos conos, las áreas de sus superficies curvas serán (272)

de donde
$$\frac{\pi r l}{\pi r' l'} :: r l : r' l',$$

y sustituyendo en la razon compuesta $r l : r' l'$ en vez de la razon componente $l : l'$ su igual por hipótesis $r : r'$ (Alg., 123, corol.), resulta

$$\pi r l : \pi r' l' :: r^2 : r'^2.$$

Observacion. De una manera análoga se definen los cilindros semejantes, y se demuestra tambien que las áreas de sus superficies curvas son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

283. Teorema 3.º Las áreas de dos superficies esféricas son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Llamando r y r' los radios de estas superficies esféricas, sus áreas respectivas serán (279, cor.)

de donde
$$4\pi r^2 : 4\pi r'^2 :: r^2 : r'^2.$$

CAPÍTULO III.

De los volúmenes de los cuerpos geométricos.

ARTÍCULO PRIMERO.

Equivalencia de los poliedros.

284. *Se dice que dos cuerpos geométricos son EQUIVALENTES cuando tienen igual extensión, pero distinta forma; de manera que superpuestos no coinciden en todos sus puntos.*

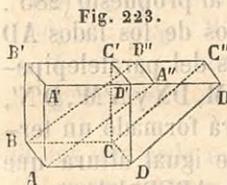
285. Teorema 1.º *Dos paralelepípedos, que tienen una misma base é igual altura, son equivalentes.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que las bases superiores estén entre unas mismas paralelas: 2.º que no lo estén.

4.º Sean los paralelepípedos AC' y AC'' (fig. 223), cuyas bases superiores están entre las paralelas $A'D'$ y $B'C''$.

Los prismas triangulares $AA'A''BB'B''$ y $DD'D''CC'C''$ tienen las caras $BA' = CD'$ (251): $A'B'B''A'' = D'C'C''D''$ por componerse de la parte común $D'C'B''A''$ y de los paralelogramos $A'C'$ y $A''C''$, iguales entre sí, por serlo cada uno de ellos con la base común AC : y el triángulo $AA'A'' = DD'D''$ (72, 1.º); luego los prismas triangulares tienen un ángulo triedro (A y A'') formado por tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas, luego son iguales (249).

Si del poliedro total se resta el primero de dichos pris-



mas, queda el paralelepipedo AC'' , si se resta el segundo queda el paralelepipedo AC' ; luego estos paralelepipedos son equivalentes.

2.º Sean los dos paralelepipedos AC' y AC'' (fig. 224).

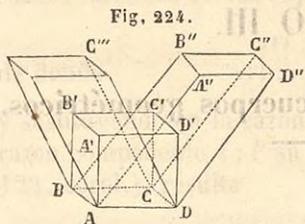


Fig. 224.

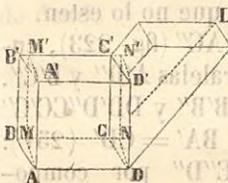
Como estos paralelepipedos tienen (por hipótesis) igual altura, sus bases superiores estarán en un mismo plano paralelo á la base comun; luego si se prolongan las caras BA' y CD' del primero, y las AD'' y BC'' del segundo, sus

intersecciones formarán un tercer paralelepipedo AC''' (250), que será equivalente á cada uno de los dados AC' y AC'' , segun la primera parte del teorema; luego estos son equivalentes entre sí.

286. *Todo paralelepipedo se puede convertir en otro rectangular equivalente, de la misma altura y base equivalente á la del primero.*

Sea el paralelepipedo AL (fig. 225) oblicuo, y su base $ABCD$ un paralelogramo oblicuángulo;

Fig. 225.



levantando en los vértices A , B , C y D de la base las aristas AA' , BB' , etc. perpendiculares á dicha base é iguales á la altura del paralelepipedo dado, se formará el paralelepipedo recto AC' equivalente al propuesto (285).

En los extremos de los lados AD y $A'D'$ de las bases del paralelepipedo AC' , levántense las perpendiculares AM , DN y $A'M$, $D'N$, trácese las rectas MM' y NN' ; y quedará formado un tercer paralelepipedo AN' rectangular, de igual altura que AL , y cuya base $AMND$ es equivalente á la $ABCD$ del mismo.

Ahora puede suponerse que los paralelepipedos AC' y AN' tienen por base la cara comun $AA'D'D$ y por altura la perpendicular AM ; luego tienen la misma base y altura, luego son equivalentes (285): pero AC' es equivalente á AL ,

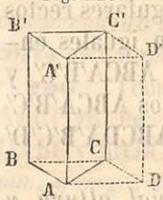
luego AN' también lo será. Luego el paralelepípedo AL se puede convertir en otro AN' equivalente, rectangular, de igual altura y base equivalente.

287. Teorema 3.º *Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de igual altura y dupla base.*

Distinguiremos dos casos: 1.º que el prisma triangular sea recto: 2.º que sea oblicuo.

1.º Sea el prisma triangular $ABCA'B'C'$ (fig. 226) recto.

Fig. 226.



Complétese el paralelepípedo BD' . Los prismas triangulares $ABCA'B'C'$ y $ACDA'C'D'$ son rectos, tienen iguales las bases ABC y ACD (79, corol. 4.º) é igual altura; luego son iguales (249, corol.); luego cada uno de ellos es la mitad del paralelepípedo BD' ; luego el prisma triangular $ABCA'B'C'$ es la mitad del paralelepípedo BD' de igual altura y dupla base.

2.º Sea el prisma triangular oblicuo $ABCA'B'C'$ (figura 227).

Complétese el paralelepípedo BD' , y trácese el plano $M'N'P'Q'$ perpendicular á sus aristas: prónguese estas hácia la parte inferior de

Fig. 227.



modo que $M'M = N'N = P'P = Q'Q = AA'$: únense los extremos de las aristas contiguas á la misma cara, y se tendrá el paralelepípedo recto $MNPQM'N'P'Q'$ (246, corol. 2.º): trácese las diagonales MP y $M'P'$, y resultarán los dos prismas triangulares rectos

$MNPM'N'P'$ y $MPQM'P'Q'$,

de los que cada uno es la mitad del paralelepípedo recto (4.ª parte del teor.), y por consiguiente son iguales entre sí.

Superponiendo el poliedro $MNPABC$ al $M'N'P'A'B'C'$ de modo que la base MNP coincida con su igual $M'N'P'$, la arista MA caerá sobre $M'A'$ (172); y como estas aristas son iguales, porque restando de AA' y MM' , iguales por cons-

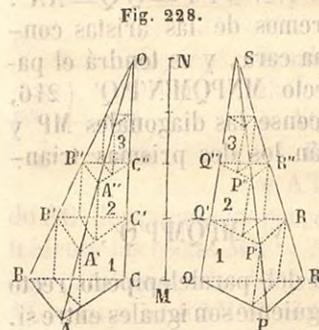
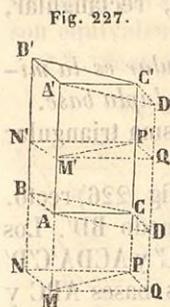
truccion, la parte AM' comun, quedan los residuos $MA = M'A'$, el vértice A coincide con A' : lo mismo se demuestra que B coincide con B' y C con C' ; luego dichos poliedros son iguales. Luego agregando á cada uno de estos poliedros la parte $ABCM/NP'$, los prismas triangulares $ABCA'B'C'$ y $MNPM/NP'$ son equivalentes: del mismo modo se demuestra que $ACDA'C'D'$ y $MPQM/P'Q'$ son equivalentes: pero los prismas triangulares rectos $MNPM/NP'$ y $MPQM/P'Q'$ son iguales entre sí, luego los oblicuos $ABCA'B'C'$ y $ACDA'C'D'$ son equivalentes; luego uno de ellos $ABCA'B'C'$ será equivalente á la mitad del paralelepípedo $ABCD A'B'C'D'$ de igual altura y dupla base (446).

Corol. Los prismas triangulares de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.

288. Teorema 4.º *Dos tetraedros OABC y SPQR (figura 228), de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

Supongamos, para mayor sencillez, colocadas las bases de los tetraedros en un mismo plano, y dividida su altura comun MN en un número cualquiera de partes iguales.

Si por los puntos de division se trazan planos paralelos á las bases, los tetraedros quedarán divididos en trozos de igual altura, y cuyas bases $A'B'C'$ y $P'Q'R'$ son equivalentes por hipótesis, $A''B''C''$ y $P''Q''R''$, etc., lo son tambien (244, corol. 2.º). Construyendo en cada trozo un prisma triangular (tomando por base la superior del trozo), los 1 y 1, 2 y 2, etc., son equivalentes (287, corol.); luego la suma de los prismas inscriptos en uno de los tetraedros es igual á la de los



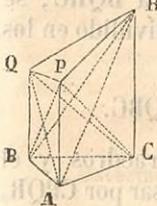
inscritos en el otro. Dividiendo la altura en duplo, cuádruplo, etc. número de partes, y ejecutando iguales construcciones, la suma de los prismas inscritos en el primer tetraedro permanecerá igual á la de igual número de los inscritos en el segundo: y como por otra parte la extensión de los prismas inscritos se aproxima indefinidamente á la de los tetraedros $OABC$ y $SPQR$, estos serán equivalentes [54, (*) corol.].

289. Llámase PRISMA TRUNCADO la parte de un prisma comprendida entre una de sus bases y un plano que le corta oblicuamente á esta.

290. Teorema 5.º Todo prisma triangular truncado $ABCPQR$ (fig. 229) es equivalente á tres tetraedros $PABC$, $QABC$ y $RABC$, que tienen por base una base ABC del prisma, y cuyos vértices son los vértices P , Q , R de la otra base del mismo.

Haciendo pasar un plano por el vértice P y por la arista BC , y otro por el mismo punto P y por la diagonal BR de la cara $BQRC$, queda el prisma truncado dividido en los tetraedros

Fig. 229.



$PABC$, $PBCR$ y $PBQR$.

El primero de estos tetraedros cumple con las condiciones del teorema.

El segundo $PBCR$ y el $ABRC$ tienen la base común BRC , y sus vértices en los puntos P y A equidistantes de esta base; luego son equivalentes (288): pero el $ABRC$, tomando por vértice R , es el $RABC$; luego el segundo tetraedro cumple también con las condiciones del teorema.

El tercer tetraedro $PBQR$ es equivalente al $ABQC$, porque tienen iguales alturas, y las bases BQC y BQR son equivalentes (446, cor.); pero el $ABQC$, tomando por vértice el punto Q , es $QABC$; luego el tercer tetraedro cumple del mismo modo las condiciones del teorema.

Luego el prisma truncado $ABCPQR$ es equivalente á los

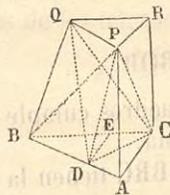
tres tetraedros $PABC$, $RABC$ y $QABC$, que tienen la misma base ABC que el prisma y cuyos vértices se hallan en los vértices P , Q , R , de la otra base.

Corol. *Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

Porque el teorema anterior es cierto, cualquiera que sea la posición de las bases, y en el prisma los tres tetraedros á que equivale, tienen la misma base que él y la misma altura, puesto que todos los puntos de una de las bases equidistan de su paralela (206, corol.); luego los tres tetraedros son equivalentes (288); luego cada uno de ellos es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.

291. Teorema 6.º *Todo tetraedro truncado $ABCPQR$ (fig. 230) es equivalente á tres tetraedros $PABC$, $CPQR$ y $QBDC$, que tienen la misma altura que el tronco y cuyas bases son la base mayor del mismo tronco, la menor y la BDC , media proporcional entre ellas.*

Fig. 230.



Haciendo pasar un plano por el vértice P y por la arista BC , y otro por el mismo punto P y por la diagonal QC de la cara $BQRC$, se tiene el tronco de tetraedro dividido en los tres tetraedros

$PABC$, $PQRC$ y $PQBC$.

El primero de estos tetraedros y el segundo, que se puede expresar por $CPQR$, cumplen con las condiciones del teorema.

Trazando la PD paralela á QB , y uniendo D con C y con Q , el tercer tetraedro $PQBC$ y el $QBDC$ tienen comun la base QBC y los vértices P y D en la recta PD paralela á esta cara (183); luego tienen igual base y altura, luego son equivalentes.

Solo, pues, resta demostrar que el triángulo BDC es una media proporcional entre la base mayor ABC y la menor PQR .

Al efecto, trácese la recta DE paralela á AC , y el triángulo BED es igual al PQR (72, 3.º). Los triángulos BDC y

BDE, cuyas bases BC y BE están en línea recta y cuyos vértices están en el punto D, tienen la misma altura, luego son proporcionales á sus bases (151, corol.); luego

$$BDC : BDE :: BC : BE :$$

por igual razón los triángulos BCD y BCA nos dan

$$ABC : BDC :: BA : BD :$$

pero (97) $BC : BE :: BA : BD ;$

luego las dos primeras proporciones tienen una razón igual; luego (Alg. 128).

$$ABC : BDC :: BDC : BDE :$$

y como $BDE = PQR$, resulta al fin

$$ABC : BDC :: BDC : PQR.$$

ARTICULO II.

Determinación de los volúmenes de los poliedros.

292. Se llama VOLUMEN de un cuerpo la medida de su extensión.

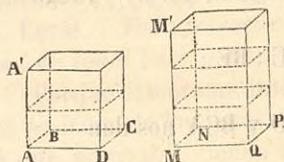
En la determinación de los volúmenes tomaremos siempre por unidad un cubo cuya arista sea la unidad de longitud.

293. Teorema 1.º Dos paralelepípedos rectángulos A'C y M'P (fig. 231), de iguales bases $ABCD = MNPQ$, son proporcionales á sus alturas AA' y MM'.

Distinguiremos dos casos: 1.º que las alturas sean conmensurables: 2.º que no lo sean.

1.º Supongamos que la comun medida de las alturas se pueda colocar 2 veces sobre AA' y 3 sobre MM', y se tendrá

Fig. 234.



$$AA' : MM' :: 2 : 3.$$

Si por los puntos de division se trazan planos paralelos á las bases, los paralelepípedos propuestos quedarán divididos el primero en 2 paralelepípedos parciales, y el segundo en 3, todos iguales entre sí (249, corol.); luego

$$A'C : M'P :: 2 : 3;$$

de cuyas proporciones se deduce

$$A'C : M'P :: AA' : MM'.$$

2.º Este caso se demuestra como su análogo del número 148.

Observacion. Las aristas AA', AB y AD, que forman un ángulo triedro A de un paralelepípedo rectángulo A'C, son sus tres dimensiones; y como por otra parte el producto $AB \times AD$ representa la cara ABCD á que pertenecen las dimensiones ó factores AB y AD (149, corol. 1.º), resulta que el teorema anterior puede tambien expresarse de este modo.

Dos paralelepípedos rectángulos, que tienen dos dimensiones iguales, son proporcionales á la tercera dimension.

Corol. Dos paralelepípedos rectángulos, que tienen igual altura, son proporcionales á sus bases (), ó dos paralelepípedos rectángulos, que tienen una dimension igual, son proporcionales al producto de las otras dos.*

(*) Esto es, á las áreas de las superficies de sus bases. Otro tanto debe entenderse siempre que una base ó seccion se haya de comparar con otra, ó multiplicarse por la longitud de una linea.

Porque llamando P, a, b, c el volúmen y las tres dimensiones de uno de los paralelepípedos.

P', a, b', c' el volúmen y las tres dimensiones del otro, y P'', a, b, c' el volúmen y las tres dimensiones de un tercer paralelepípedo, que, como se ve, tenga dos dimensiones iguales á otras dos del primero, y dos iguales tambien á otras dos del segundo, se tendrá

$$P : P'' :: c : c'$$

y $P'' : P' :: b : b';$

de donde, multiplicando estas dos proporciones y suprimiendo el factor P'' , comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$P : P' :: b \times c : b' \times c'.$$

294. Teorema 2.º *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas, ó á los productos de sus tres dimensiones.*

Llámesse, de una manera análoga al corol. anterior, P, a, b, c el volúmen y las tres dimensiones de uno de los paralelepípedos,

P', a', b', c' el volúmen y las tres dimensiones del otro y P'', a', b, c el volúmen y las tres dimensiones de un tercer paralelepípedo, que tenga, como se ve, dos dimensiones iguales á otras dos del primero, y una igual á otra del segundo, y se tendrá (291, obs.)

$$P : P'' :: a : a',$$

y tambien (293, corol.) $P'' : P' :: b \times c : b' \times c';$

de donde $P : P' :: a \times b \times c : a' \times b' \times c'.$

Corol. 1.º Esta proporción se puede tambien escribir de este modo

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'}$$



Si suponemos que P' es la unidad de medida del paralelepípedo P , el primer quebrado representa el volúmen de este paralelepípedo (6): mas en tal caso $a' = b' = c' = 1$. (290); luego en dicha hipótesis se tiene

$$P = a \times b \times c.$$

Luego el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura, ó al producto de sus tres dimensiones.

Así el volúmen de un paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones son 4,6 metros, 3,24 id. y 6 id., será

$$P = 4,6 \times 3,24 \times 6 = 89,424 \text{ metros cúbicos.}$$

Corol. 2.º *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su arista.*

Porque el cubo es un paralelepípedo rectángulo, cuyas aristas son todas iguales (253).

295. Teorema 3.º *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Todo paralelepípedo se puede convertir en otro equivalente rectangular de igual altura y base equivalente (286): el volúmen de este es igual al producto de su base por su altura (294, corol. 1.º), luego el de un paralelepípedo cualquiera, será tambien igual al producto de la base por la altura.

296. Teorema 4.º *El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.*

Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de igual altura y dupla base (287): el volúmen del paralelepípedo es igual al producto de su base por su altura; luego el del prisma será tambien igual al producto de su base por su altura.

Corol. 1.º *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Porque trazando diagonales desde dos vértices homólogos de las bases á todos los demás, y haciendo pasar por ellas planos, el prisma quedará dividido en tantos triangulares, de igual altura, como triángulos se hayan for-

mado en una de las bases: el volúmen de cada prisma triangular se halla multiplicando la base por la altura; luego el del prisma total será igual á su altura, que es la altura comun de los triangulares, por su base, que es la suma de las bases de los triangulares.

Corol. 2.º *Dos prismas de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.*

297. Teorema 5.º *El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma de igual base y altura (290, corol.): el volúmen del prisma es igual al producto de su base por su altura (296, corol. 4.º); luego el del tetraedro será igual al tercio del producto de su base por altura.

Corol. 4.º *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Se deduce como el corol. 4.º del núm. anterior.

Corol. 2.º *Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

298. *El volúmen de un prisma triangular truncado, es igual al tercio del producto de una de sus bases por la suma de las tres perpendiculares bajadas sobre ella desde los vértices de la otra.*

Llamando B una de las bases, y a , a' , a'' las perpendiculares bajadas sobre ella desde los vértices de la otra, los volúmenes de los tetraedros á que el prisma equivale (290), serán (297)

$$\frac{1}{3}B \times a, \quad \frac{1}{3}B \times a' \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}B \times a'',$$

cuya suma, que es evidentemente el volúmen del prisma truncado, será

$$\frac{1}{3}B (a + a' + a'').$$

Corol. 1.º *El volúmen de un prisma triangular truncado y recto con relacion á una de las bases, es igual al*

tercio del producto de esta base por la suma de las tres aristas.

Porque en este caso las tres aristas son las alturas respectivas de los tetraedros, en que se considera descompuesto.

Corol. 2.º *El volúmen de un prisma triangular truncado cualquiera, es tambien igual al tercio del producto de una seccion perpendicular á las aristas por la suma de estas.*

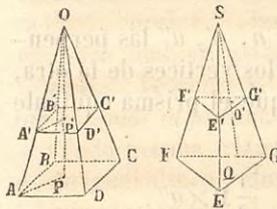
Porque la seccion le divide en dos rectos, de los que esta es la base comun, y la suma de las 6 aristas compone las 3 del prisma dado.

299. *El volúmen de un tetraedro truncado es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas (294 y 297).*

Corol. 1.º *El volúmen de un tronco de pirámide cualquiera AC' (fig. 232) es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas.*

Porque completando la pirámide OABCD, y construyendo otra triangular SEFG, de igual altura y base equivalente á la primera, estas dos pirámides serán equivalentes (297, corol. 2.º).

Fig. 232.



Si se corta la pirámide triangular por un plano paralelo á la base, y que diste del vértice S tanto como la base menor A'B'C'D' del tronco AC' dista de O, la seccion E'F'G' es equivalente á A'B'C'D' (244, corol. 2.º); luego las pirámides deficientes son tambien equivalentes (297, corol. 2.º).

Luego los troncos AC' y EG', diferencias entre las pirámides totales y las respectivas deficientes, son equivalentes tambien.

El volúmen de EG' es igual al producto de su altura

por la suma de las bases mayor, menor y media proporcional entre ellas; luego el de AC' será del mismo modo igual al producto de su altura, que es la misma que la del tronco de tetraedro, por la suma de sus bases, equivalentes á la del mismo, y una media proporcional entre ellas, igual evidentemente á la media proporcional entre las del tronco de tetraedro.

Corol. 2.^o *Dos troncos de pirámide, de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

Ejemplo. ¿Qué volúmen tiene un tronco de pirámide, cuya base mayor son 10,20 metros cuadrados, la menor 6,50 id. id. y la altura 4,4 metros?

La media proporcional entre las bases será (Álgebra, 126, 2.^o)

$$m = \sqrt{10,20 \times 6,50} = 8,14 \text{ metros cuadrados};$$

y por consiguiente el volúmen de tronco es

$$V = \frac{1}{3} \times 4,4 \times (10,20 + 6,50 + 8,14) = 33,948 \text{ met. cúb.}$$

300. El volúmen de los cinco poliedros regulares se halla: el del *tetraedro* regular como el de un tetraedro cualquiera (297): el del *cubo*, como se ha dicho (294, corol. 2.^o): el del *octaedro* suponiéndole descompuesto en dos pirámides, cuya base comun es un cuadrado que tiene por lado una arista, y cuya altura es la mitad de la distancia entre dos vértices opuestos: el del *dodecaedro* considerándole formado de 12 pirámides pentagonales, que tienen por base una cara del poliedro, y por altura la apotema (268, corol. 2.^o), ó sea la mitad de la distancia entre dos caras opuestas: y el del *icosaedro* suponiéndole descompuesto en 20 pirámides regulares é iguales, de una manera análoga á la anterior.

ARTÍCULO III.

Determinación de los volúmenes de los cuerpos de revolución.

301. Teorema 1.º *El volúmen de un cilindro cualquiera es igual al producto de su base por su altura* (265 y 296, corol. 1.º).

Observacion. Si el cilindro fuese circular, llamando r el radio y a la altura, la fórmula de su volúmen sería

$$C = \pi r^2 a.$$

Ejemplo. ¿Cuál es el volúmen de un cilindro circular, cuyo radio es 30 centímetros y 52 su altura?

$C = 3,14159 \times 30^2 \times 52 = 14703$ centím. cúb. próximam.

302. Teorema 2.º *El volúmen de un cono cualquiera es igual al tercio de producto de su base por su altura* (263 y 297, corol. 1.º).

Observacion. Si el cono es circular, llamando r el radio y a la altura, la fórmula de su volúmen es

$$C = \frac{1}{3} \pi r^2 a.$$

303. Teorema 3.º *El volúmen de un tronco ó trozo de cono es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas.*

Todo cono truncado se puede considerar como una pirámide truncada de infinito número de caras; luego su volúmen será igual al tercio del producto; etc. (299, corol. 1.º).

Observacion. Si el tronco de cono fuese circular, llamando r , r' los radios y a su altura, la fórmula de su volúmen sería

$$T = \frac{1}{3} (\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \times \pi r'^2}) \times a = \frac{1}{3} \pi (r^2 + r'^2 + r r') \times a,$$

$$\text{ó} \quad T = \frac{1}{3} \pi a (r^2 + r'^2 + r r').$$

304. Teorema 4.º *El volúmen de la esfera es igual al tercio del producto de su área por el radio.*

En efecto, la superficie de la esfera se puede considerar como una superficie poliédrica de infinito número de caras; si suponemos unidos los vértices de estas caras con el centro de la esfera, esta quedará dividida en un número infinito de pirámides, cuya altura es el radio de la misma esfera: el volúmen de cada pirámide es el tercio del producto de su base por su altura; luego el de la esfera será igual al tercio del producto de su área, que es la suma de las bases infinitamente pequeñas de las pirámides, por el radio, altura comun de estas.

Observacion. Llamando r el radio de la esfera, la fórmula de su volúmen será

$$E = \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Ejemplo. ¿Cuál es el volúmen de la tierra, suponiéndola esférica y de un radio de 1142 leguas?

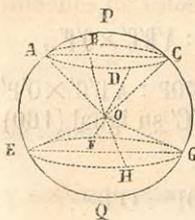
V. de $T = \frac{4}{3} \times 3,14159 \dots \times 1142^3 = 6\ 238\ 596\ 735$ leg. cúb. próximam.

305. *Llámanse SECTOR ESFÉRICO la parte de esfera engendrada por un sector cualquiera del semicírculo generador de la misma esfera.*

Corol. *El volúmen de un sector esférico es igual al tercio del producto del área de la zona, correspondiente al sector, por el radio.*

306. *Se llama SEGMENTO ESFÉRICO la parte de esfera comprendida por una zona y el plano ó planos que determinan la base ó bases de esta.*

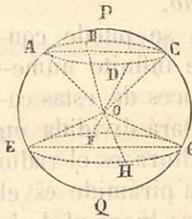
Fig. 233.



El plano ó planos que le forman, se llaman BASE ó BASES del segmento.

Corol. *El volúmen de un segmento PABCD (fig. 233) de una base y menor que la semiesfera, es igual al volúmen del sector OAPC menos el del cono*

Fig. 233.



OABCD: el del segmento QABCD, de una base también y mayor que la semi-esfera, es igual al del sector OAQC mas el del cono OABCD; y el del segmento ABCDEFGH de dos bases, es igual a la diferencia de los segmentos PEFGH y PABCD de una base.

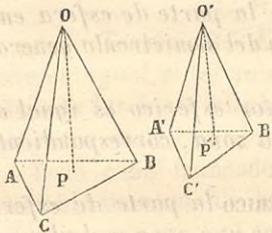
307. Para determinar el volúmen de cuerpos, no comprendidos en lo que precede de este artículo y del anterior, se dividen exacta ó aproximadamente en otros cuyos volúmenes se saben hallar: se suman estos volúmenes, y la suma será exacta ó aproximadamente el volúmen pedido.

ARTÍCULO IV.

Comparacion de los volúmenes de los cuerpos semejantes.

308. Teorema 4.º *Los volúmenes de dos tetraedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Fig. 234.



Sean los tetraedros OABC y O'A'B'C' (fig. 234): sus volúmenes serán (297)

$$\frac{1}{3} \times ABC \times OP$$

y $\frac{1}{3} \times A'B'C' \times O'P'$;

de donde

$$\frac{1}{3} \times ABC \times OP : \frac{1}{3} \times A'B'C' \times O'P' :: ABC \times OP : A'B'C' \times O'P',$$

y sustituyendo en la razon compuesta $ABC \times OP : A'B'C' \times O'P'$ en vez de la razon componente $ABC : A'B'C'$ su igual (160) $OP^2 : O'P'^2$, se tiene (Alg. 123, corol.).

$$\frac{1}{3} \times ABC \times OP : \frac{1}{3} \times A'B'C' \times O'P' :: OP^3 : O'P'^3;$$

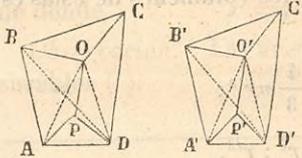
y como $OP : O'P' :: OA : O'A'$, y por consiguiente $OP^3 : O'P'^3 :: OA^3 : O'A'^3$, resulta (Alg., 128)

$$\frac{1}{3} \times ABC \times OP : \frac{1}{3} \times A'B'C' \times O'P' :: OA^3 : O'A'^3.$$

309. Teorema 2.º *Los volúmenes de dos poliedros semejantes OPABCD y O'P'A'B'C'D' (fig. 235) son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Estos poliedros se pueden dividir en igual número de

Fig. 235.



tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos (261, rec.) OABD y O'A'B'D', OAPD y O'A'P'D', etc.; luego (308)

$$OABD : O'A'B'D' :: AB^3 : A'B'^3$$

$$OAPD : O'A'P'D' :: AD^3 : A'D'^3$$

.....

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (257, corol., y Alg., 127, 4.ª); luego

$$OABD : O'A'B'D' :: OAPD : O'A'P'D' :: \text{etc.} : \text{etc.} :: AB^3 : A'B'^3;$$

de donde (Alg., 430)

$$OABD + OAPD + \text{etc.} : O'A'B'D' + O'A'P'D' + \text{etc.} :: AB^3 : A'B'^3,$$

ó llamando V y V' los volúmenes de estos poliedros,

$$V : V' :: AB^3 : A'B'^3.$$

310. Teorema 3.º *Los volúmenes de dos conos semejantes (281) son proporcionales á los cubos de sus radios.*

Llamando r, r' sus radios, y a, a' sus alturas, los volúmenes de estos conos serán (302)

$$\frac{1}{3} \pi r^2 a \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} \pi r'^2 a';$$

$$\text{de donde} \quad \frac{1}{3} \pi r^2 a : \frac{1}{3} \pi r'^2 a' :: r^2 a : r'^2 a',$$

y sustituyendo en la razon compuesta $r^2 a : r'^2 a'$, en vez de



la razon componente $a : a'$ su igual por hipótesis $r : r'$, resulta (Alg., 423)

$$\frac{1}{3} \pi r^2 a : \frac{1}{3} \pi r'^2 a' :: r^3 : r'^3.$$

Observacion. De una manera análoga se demuestra que los volúmenes de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de sus radios.

311. Teorema 4.º *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios.*

Llamando r y r' sus radios, los volúmenes de estas esferas serán (304, obs.)

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{y} \quad \frac{4}{3} \pi r'^3;$$

de donde
$$\frac{4}{3} \pi r^3 : \frac{4}{3} \pi r'^3 :: r^3 : r'^3.$$

Problemas numéricos.

312. 1.º ¿Cuál será el radio de una esfera, cuyo volúmen es 1000 metros cúbicos?

La fórmula del volúmen de la esfera es (304 obs.)

$$E = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

de donde

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \times E}{4\pi}},$$

y por consiguiente en el presente caso

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \times 1000}{4 \times 3,14159\dots}} = 6,2035 \text{ metros.}$$

2.º ¿Cuánto pesa un tubo de hierro fundido, de 3 metros de largo y 5 centímetros de grueso, teniendo el radio mayor 40 centímetros, y pesando un centímetro cúbico del mismo hierro 7,207 gramos?

El volúmen del tubo es (304)

$$3,14159(40^2 - 35^2) \times 300 = 353428,875 \text{ centím. cub.,}$$

y el peso será

$$353428,875 \times 7,207 = 2547161,902 \text{ gram.} = 2547,162 \text{ kilógr.}$$

3.º Hallar la arista x de un cubo de duplo volúmen que otro cuya arista es a .

Los volúmenes de estos cubos serán (294 , corol. 2.º)

$$x^3 \text{ y } a^3;$$

luego segun las condiciones del problema,

$$x^3 = 2a^3;$$

de donde
$$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}.$$

Observacion. Las aristas de estos cubos son inconmensurables (*).

(*) Ya se ve que el problema de la *duplicacion del cubo* no puede resolverse exactamente por el cálculo. Tampoco se ha hallado hasta ahora una construcción gráfica elemental que le resuelva con exactitud. *Lacroix* le resuelve por la interseccion de ramas de parábolas (V. *Traité de Trigonométrie*, página 259).

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPITULO PRIMERO.

De las líneas trigonométricas.

PRELIMINARES.

1. Las construcciones gráficas, empleadas en la resolución de los problemas geométricos, no son tan exactas como en muchos casos sería de desear; porque la exactitud está siempre limitada por la imperfección de los instrumentos, y también por la mayor ó menor destreza del que ha de manejarlos.

Por esta razón, aunque ya hemos visto cómo en Geometría se *resuelve* un triángulo rectilíneo, esto es, *cómo se hallan tres de sus seis elementos, conocidos otros tres que le determinan* (*), volveremos ahora á insistir en la resolución del mismo problema general (que es del mayor interés), empleando en vez de las construcciones gráficas el cálculo, el cual permite obtener los elementos incógnitos con toda la aproximación que en cada caso puede ser necesaria. Tal es el objeto de la *Trigonometría rectilínea*.

(*) V. Geometría, números 86, 87, 88 y 89.

Es, pues, la TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA la ciencia que enseña á resolver los triángulos rectilíneos por medio del cálculo.

Este resultado se conseguiria por medio de una simple proporción, si los ángulos de los triángulos fuesen proporcionales con sus lados opuestos; pero no sucediendo así (Geom., 95, corol.), fué necesario inventar un sistema de rectas, que al mismo tiempo que determinan los arcos, y por consiguiente los ángulos que estos arcos miden, son proporcionales á los lados de los triángulos á que dichos ángulos pertenecen. De este sistema de líneas, llamadas *líneas trigonométricas*, nos vamos á ocupar al presente.

ARTÍCULO PRIMERO.

Valor absoluto de las líneas trigonométricas.

2. *Llámase SENO de un arco la perpendicular bajada desde uno de sus extremos al radio ó diámetro, que pasa por el otro extremo.*



El seno del arco AM (fig. 1.ª) es MP, el de AB es BO, el de ABM' es M'P', el de la semicircunferencia ABA' es cero, el del arco ABAM' es M''P', etc.

Corol. 1.º *El seno de un arco cero es cero, el de un cuadrante el radio, el de la semicircunferencia tambien es cero, etc.*

Corol. 2.º *El seno de un arco AM es la mitad de la cuerda MM''' del arco duplo.*

Porque $PM = \frac{1}{2} MM'''$ y $MAM''' = 2AM$ (Geom., 41).

Observacion. El menor valor absoluto del seno es cero, y el mayor el radio.

3. *Se llama TANGENTE trigonométrica de un arco la*

parte de la tangente geométrica, levantada en uno de sus extremos é interceptada entre el punto de contacto y la prolongacion del radio ó diámetro, que pasa por el otro extremo.

La tangente del arco AM es AT, la del arco AB infinita, la de ABM' es AT', la de la semicircunferencia ABA' cero, la del arco ABA'M'' es AT', etc.

Corol. 1.º La tangente del arco cero es cero, la del cuadrante infinita, la de la semicircunferencia tambien cero.

Observacion. El menor valor absoluto de la tangente es cero, y el mayor el infinito.

Corol. 2.º La tangente del arco de 45º es igual al radio.

Porque si el arco AM es de 45º, el ángulo AOT, que mide, será de 45º; luego el ángulo ATO tambien será de 45º (Geom., 74, corol. 4.º); luego $AT = AO$ (Geom., 75 rec., corol. 4.º).

4. Llamaremos arcos COMPLEMENTARIOS aquellos que sumados algebráicamente forman un cuadrante, y SUPLEMENTARIOS los que forman dos.

El complemento del arco AM es MB, el de AB es cero, el de ABM' es $-BM'$, el de ABA' es $-BA'$, el de ABA'M'' es $-BA'M''$, etc. El suplemento de AM es MBA', el de la semicircunferencia cero, el de ABA'M'' es $-A'M''$, etc.

Observacion. Los complementos de los arcos que nacen en A y se cuentan en el sentido AM, tienen su origen en B, y los suplementarios de iguales condiciones, en A'.

5. Se llama COSENO (*) de un arco el seno de su arco complementario.

El coseno del arco AM es MQ, el de AB es cero, el de ABM' es M'Q, el de la semicircunferencia es el radio A'O, el de ABA'M'' es M''Q', etc.

(*) La palabra coseno está formada de *complementi signus*, esto es, seno del complemento. De igual modo *cotangente* se forma de *complementi tangens*, tangente del complemento.

Observacion. Como $QM=OP$, $M'Q=OP'$, $M''Q'=OP''$, etc., por lados opuestos de paralelógramos, resulta que

El coseno de un arco es la parte del radio interceptada entre el pie del seno y el centro.

6. *llámase COTANGENTE de un arco la tangente de su arco complementario.*

La cotangente del arco AM es BC , la de AMB es cero, la de ABM' es BC' , la de la semicircunferencia es infinita, la de $ABA'M''$ es BC , etc.

De lo expuesto en este número y precedentes, se deduce que

1.° A todo arco se refieren cuatro líneas trigonométricas, dos *propias*, que son el seno y la tangente, y dos del arco complementario, llamadas por esta razón *colíneas*, que son el coseno y la cotangente (*).

2.° *Las líneas PROPIAS de un arco son las colíneas del complemento, y las colíneas de un arco son las líneas propias del complementario.* Así llamando el arco x , como su complemento es $90^\circ - x$ (4), se tiene

$$\operatorname{sen} x = \cos(90^\circ - x), \quad \operatorname{tg} x = \cot(90^\circ - x) (**),$$

$$\cos x = \operatorname{sen}(90^\circ - x), \quad \cot x = \operatorname{tg}(90^\circ - x).$$

3.° Cuando un arco crece desde cero hasta el cuadrante, crecen sus líneas propias y menguan sus colíneas; lo contrario sucede cuando el arco crece desde el cuadrante hasta la semicircunferencia.

ARTÍCULO II.

Valores relativos de las líneas trigonométricas.

7. Se ha visto (Alg. 11), que si las cantidades que tienen un modo de ser determinado, se consideran como *positivas*, las que tienen un modo de ser contrario á ellas

(*) Se suelen considerar otras cuatro mas, que son el *senoverso*, la *secante*, el *cosenoverso* y la *cosecante*.

(**) Los nombres seno, tangente, coseno y cotangente se escriben abreviadamente de este modo: sen , tg , \cos , \cot .

son *negativas*. Haciendo, pues, aplicacion de esto al caso presente, y considerando como positivos los arcos que tienen su origen en A y se prolongan en el sentido AMB..., y como positivas tambien las líneas trigonométricas del arco positivo AM, menor que el cuadrante, resulta que

1.º Los arcos que tienen su origen en A y se prolongan en el sentido AM''B'.... son *negativos*.

2.º Los senos y las tangentes que como M''P, M''P' y AT', se encuentran en la parte inferior del diámetro AA' son *negativos*; y tambien lo serán los cosenos y cotangentes que, como BC' y OP', se hallan á la izquierda del diámetro BB'.

Corol. *Las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos en el primer cuadrante son positivas: las de los que terminan en el 2.º son negativas, excepto el seno: de las correspondientes á arcos que terminan en el 3.º cuadrante son negativas el seno y el coseno, y positivas la tangente y cotangente: las de los que terminan en el 4.º son negativas, excepto el coseno.*

S. Teorema 4.º *Las líneas trigonométricas de un arco negativo — AM''' son iguales en valor absoluto á las de otro positivo +AM, de la misma longitud que el primero; pero tienen signo contrario, exceptuando el coseno que es en todo igual para los dos arcos.*

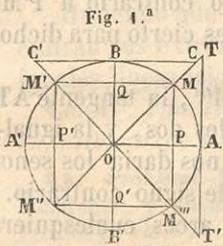


Fig. 1.ª

Los senos MP y M''P son iguales en longitud (2, corol. 2.º); pero positivo el primero y negativo el segundo (7, 2.º)

Los triángulos AOT y AOT' tienen AO comun, los ángulos en A rectos, y los AOT = AOT', porque tienen por medidas los arcos AM y AM''', iguales en valor absoluto por hipótesis; luego dichos triángulos son iguales, luego las tangentes AT y AT' tambien lo serán en longitud; mas la primera es positiva y la segunda negativa (7, 2.º).

El coseno OP es comun á los dos arcos y positivo para ambos.

Los triángulos BOC y BOC' tienen OB comun, los ángulos en B rectos: y como AM es igual en longitud á AM'' y este lo es con A'M', los arcos AM y A'M' son iguales en longitud; luego sus complementos BM y BM' tambien lo serán, luego los ángulos BOC = BOC'. Luego dichos triángulos son iguales, luego las cotangentes BC y BC' son de igual longitud; mas la primera es positiva y la segunda negativa (7, 2.^o).

Llamando x un arco cualquiera, este teorema se expresa algebráicamente así

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x,$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{cos}(-x) = +\operatorname{cos} x,$$

$$\operatorname{cot}(-x) = -\operatorname{cot} x.$$

9. Teorema 2.^o *Las líneas trigonométricas de dos arcos AM y ABA'M'', que tienen un extremo A comun y los otros dos M y M'' en un mismo diámetro, son iguales; pero el seno y coseno llevan signo contrario en los dos arcos.*

AT es la tangente de estos dos arcos y BC la cotangente. La igualdad de los triángulos OPM y OP'M'' nos da PM = P'M'' y OP = OP': pero PM es de signo contrario á P'M'' y OP á OP' (7, 2.^o); luego el teorema es cierto para dichos arcos.

Si los arcos fuesen ABM' y ABA'B'M''', la tangente AT' y la cotangente BC' serían comunes á los dos, y la igualdad de los triángulos OP'M' y OP'M''' nos daría los senos y cosenos respectivamente iguales, y de signo contrario.

Lo mismo se verifica en otros dos arcos cualesquiera de iguales condiciones; aunque uno sea positivo y otro negativo como ABM' y AM''', ó los dos negativos como AM'' y ABA'M'.

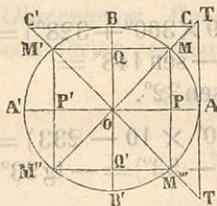
Llamando x un arco cualquiera, el otro arco será

$180^\circ + x$, y este teorema se expresa algebraicamente así

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ + x) &= -\operatorname{sen} x, \\ \operatorname{tg}(180^\circ + x) &= +\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cos}(180^\circ + x) &= -\operatorname{cos} x, \\ \operatorname{cot}(180^\circ + x) &= +\operatorname{cot} x. \end{aligned}$$

Corol. *Las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario; excepto el seno, que es igual en todo para los dos arcos.*

Fig. 1.^a



Porque mudando el signo á la x en las fórmulas anteriores, y teniendo presente que cuando el arco cambia de signo todas sus líneas trigonométricas varían de signo también, excepto el coseno (8), resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ - x) &= +\operatorname{sen} x, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - x) &= -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cos}(180^\circ - x) &= -\operatorname{cos} x, \\ \operatorname{cot}(180^\circ - x) &= -\operatorname{cot} x. \end{aligned}$$

10. Teorema 3.º *Las líneas trigonométricas de los arcos que se diferencian en una, dos, tres, etc., circunferencias, son iguales.*

Haciendo que estos arcos tengan un mismo origen, coincidirán sus extremos, y por lo tanto tienen evidentemente iguales líneas trigonométricas.

Corol. *Una línea trigonométrica dada, corresponde á infinitos arcos distintos.*

11. Problema. Reducir un arco x á otro contenido en el primer cuadrante, y cuyas líneas trigonométricas sean respectivamente iguales en valor absoluto á las del arco dado.

Réstense del arco x todas las circunferencias que contenga, y el resto x' tendrá iguales líneas trigonométricas que x (10). Si x' fuese mayor que una semicircunferencia,

réstese esta de él, y el resto x'' tendrá sus líneas trigonométricas de igual valor absoluto que x' (9), y por consiguiente que x . Si x'' fuese mayor que un cuadrante, tómese su suplemento ($180^\circ - x''$), y las líneas trigonométricas de este serán iguales en valor absoluto á las de x'' (9, corol.), á las de x' y á las del arco primitivo x .

Observacion. El signo de cada línea trigonométrica del arco dado, se deduce fácilmente de los principios expuestos en los cuatro números precedentes.

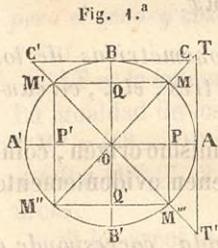
Ejemplos. 1.º $\text{sen } 3568^\circ = \text{sen } (9 \times 360^\circ + 328^\circ) = \text{sen } 328^\circ = -\text{sen } (328^\circ - 180^\circ) = -\text{sen } 148^\circ = -\text{sen } (180^\circ - 148^\circ) = -\text{sen } 32^\circ.$

2.º $\text{tg } (-3833^\circ) = -\text{tg } (-360^\circ \times 10 - 233) = \text{tg } (-233^\circ) = \text{tg } (-233^\circ + 180^\circ) = \text{tg } (-53^\circ) = -\text{tg } 53^\circ.$

ARTÍCULO III.

Relacion entre las líneas trigonométricas de un mismo arco.

12. Sea el arco AM, menor que un cuadrante, sus líneas trigonométricas serán: MP el seno, OP el coseno, AT la tangente, y BC la cotangente.



El triángulo rectángulo OMP nos da (Geom. 444, 4.º)

$$PM^2 + PO^2 = OM^2$$

ó llamando x este arco y r el radio,

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = r^2.$$

De la semejanza de OPM y OAT, resulta

$$OP : MP :: OA : AT,$$

$$\text{ó } \cos x : \text{sen } x :: r : \text{tg } x;$$

de donde
$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x \times r}{\cos x}.$$

Los triángulos OPM y OBC, también son semejantes, porque además de tener los ángulos en P y en B rectos, tienen MOP = OCB por alternos entre paralelas; luego

$$OP : MP :: BC : OB,$$

$$\text{ó } \cos x : \operatorname{sen} x :: \cot x : r;$$

$$\text{de donde } \cot x = \frac{\cos x \times r}{\operatorname{sen} x}$$

Observacion. Haciendo $r=1$ en las fórmulas anteriores, se convierten respectivamente en

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad [1],$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad [2],$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad [3].$$

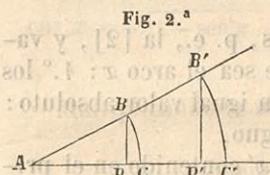
Recíprocamente, si se quisiese restablecer el radio en alguna fórmula trigonométrica, de donde hubiese desaparecido por haberle hecho igual á la unidad, se observará que describiendo desde el vértice A (fig. 2.^a) de un ángulo dos arcos BC y B'C', y trazando sus senos correspondientes BP y B'P', la semejanza de los triángulos ABP y AB'P' nos da

$$BP : AB :: B'P' : AB';$$

$$\text{de donde } \frac{BP}{AB} = \frac{B'P'}{AB'}.$$

Suponiendo ahora los radios $AB=1$, $AB'=r$, y llamando x el número de grados de los arcos BC y B'C' y z la longitud del seno BP, se tendrá

$$z = \frac{\operatorname{sen} x}{r};$$



luego en vez de z ó sea $\text{sen } x$, se deberá sustituir $\frac{\text{sen } x}{r}$:
y como otro tanto puede demostrarse de las demás líneas trigonométricas, resulta que

Para restablecer el radio en una fórmula trigonométrica, se sustituye en vez de cada línea, la misma partida por el radio.

Así, restableciendo el radio en la fórmula [1], se tendría

$$\left(\frac{\text{sen } x}{r}\right)^2 + \left(\frac{\text{cos } x}{r}\right)^2 = 1,$$

ó
$$\frac{\text{sen}^2 x}{r^2} + \frac{\text{cos}^2 x}{r^2} = 1;$$

y por último
$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = r^2,$$

que es la fórmula de donde la [1] provino.

13. Las fórmulas obtenidas en el número anterior, en el supuesto de que el arco es menor que un cuadrante, son generales y ciertas por lo tanto para otro arco cualquiera.

Tomemos una de dichas fórmulas, p. e., la [2], y vamos á demostrar que cualquiera que sea el arco x : 1.º dos miembros de esta relacion tienen igual valor absoluto: 2.º que tambien tienen el mismo signo.

1.º Reduciendo el arco x á otro x' contenido en el primer cuadrante (11), se tiene para x' (12)

$$\text{tg } x' = \frac{\text{sen } x'}{\text{cos } x'};$$

y como las líneas trigonométricas de x' tienen respectivamente igual valor absoluto que las de x , $\text{tg } x'$ y $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ son iguales en valor absoluto.

2.º $\text{Sen } x$ y $\text{cos } x$ tienen el mismo signo en el 1.º cuadrante, contrario en el 2.º, el mismo en el 3.º, y contrario en el 4.º (7, corol.); luego el miembro $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ es positivo

en el 1.^{er} cuadrante, negativo en el 2.^o, positivo en el 3.^o y negativo en el 4.^o; pero esto es lo que sucede á $\operatorname{tg} x$

(7, corol.); luego $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\operatorname{tg} x$ tienen el mismo signo,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

cualquiera que sea el valor del arco x .

Lo mismo se demuestra la generalidad de las demás fórmulas.

14. Por medio de las tres ecuaciones

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{y} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

que ligan entre sí las cuatro líneas trigonométricas, conocida una de estas se pueden determinar las restantes (Álgebra, 63).

Suponiendo conocido $\operatorname{sen} x$, se tendrá

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} \quad \text{y} \quad \cot x = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x}.$$

Multiplicando la fórmula [2] por la [3], también se tiene

$$\operatorname{tg} x \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1;$$

de donde $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cot x}$ [4].

ARTÍCULO IV.

Relacion entre las líneas trigonométricas de dos arcos y las de la suma ó diferencia de los mismos.

15. Problema. Dados los *senos* y *cosenos* de dos arcos a y b , determinar el *coseno* de la diferencia de dichos arcos.

Supongamos en primer lugar que los arcos a y b sean

Fig. 3.^a



positivos y menores que el cuadrante, p. e., $a = AC$ y $b = AD$ (fig. 3.^a). Trácese desde C y D las perpendiculares CP y DQ sobre el diámetro AA' , la DE paralela á este y la cuerda CD . El triángulo rectángulo CDE nos da (Geom. 111, 1.^o)

$$CD^2 = CE^2 + ED^2 :$$

pero evidentemente se tiene

$$CD = \text{cuerda}(a - b), \quad CE = \text{sen } a - \text{sen } b \quad \text{y} \quad ED = \text{cos } b - \text{cos } a;$$

luego sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, resulta

$$\text{cuerda}^2(a - b) = (\text{sen } a - \text{sen } b)^2 + (\text{cos } b - \text{cos } a)^2 = \text{sen}^2 a - 2\text{sen } a \text{ sen } b + \text{sen}^2 b + \text{cos}^2 b - 2\text{cos } a \text{ cos } b + \text{cos}^2 a,$$

ó como $\text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a = 1$ y $\text{sen}^2 b + \text{cos}^2 b = 1$ (12, obs.),

$$\text{cuerda}^2(a - b) = 2 - 2(\text{sen } a \text{ sen } b + \text{cos } a \text{ cos } b) \quad [A].$$

Ahora supongamos que los arcos a y b sean de una magnitud y signo cualquiera, dándoles un origen comun A , cualquiera que sea la posicion de los puntos C y D en que caen los otros extremos, se puede repetir la construccion anterior y siempre quedará formado el triángulo CDE .

Para demostrar por consiguiente la generalidad de la fórmula [A], basta probar que en todo caso se verifica

- 1.^o $CD = \text{cuerda}(a - b),$
- 2.^o $CE = \pm(\text{sen } a - \text{sen } b),$
- 3.^o $ED = \pm(\text{cos } b - \text{cos } a).$

4.^o El arco a se compone del menor arco positivo AC , que va desde A á C aumentado de cierto número de circunferencias positivas ó negativas: de igual manera el arco b es igual al menor arco positivo AD mas ó menos cierto número de circunferencias; luego la diferencia $a - b$ de estos dos arcos es el arco $DC = AC - AD$ mas ó menos cier-

to número de circunferencias. Si se toma el punto A como origen de este arco, será necesario hacerle dar cierto número de vueltas en uno ú otro sentido, tomar despues un arco $AH=CD$ en el sentido $AHDCB\dots$, y H será el extremo del arco $a-b$; luego la cuerda AH de este arco será igual á la del arco CD.

2.º Si los puntos C y D estan á un mismo lado del diámetro AA' , es evidente que $CE=\pm(\text{sen } a - \text{sen } b)$, tomando el signo $+$ cuando esten en la parte superior y el $-$ cuando en la inferior; si estan á lado diferente del diámetro, CE es una suma $CP+DQ$, pero entonces uno de ellos es positivo y otro negativo; luego tambien en este caso se verifica que $CE=\pm(\text{sen } a - \text{sen } b)$.

3.º Del mismo modo se demuestra que la igualdad $ED=\pm(\text{cos } b - \text{cos } a)$, evidente cuando los puntos C y D estan á un mismo lado del diámetro BB' , se verifica del mismo modo cuando se hallan á diferente lado de dicho diámetro.

Luego la ecuacion [A] es cierta para cualesquiera valores de los arcos a y b .

Suponiendo, pues, $b=0$, dicha ecuacion se convierte en (2, corol. 4.º y 5)

$$\text{Cuerd}^2 a = 2 - 2 \cos a,$$

y cambiando en esta ecuacion a en $a-b$, resulta

$$\text{Cuerd}^2 (a-b) = 2 - 2 \cos (a-b);$$

de esta última ecuacion y de la [A], que tienen comun el primer miembro, se deduce

$$2 - 2 \cos (a-b) = 2 - 2 (\text{sen } a \text{ sen } b + \text{cos } a \text{ cos } b),$$

ó despejando $\cos (a-b)$,

$$\cos (a-b) = \text{cos } a \text{ cos } b + \text{sen } a \text{ sen } b \quad [1],$$

cuya ecuacion resuelve el problema propuesto (*).

(*) Esta elegante demostracion está tomada de la *Trigonometria de MM. Rouche et Lacour*, que á su vez la han tomado de *Mr. Sarrus*.

Corol. 1.º Si se toma el arco a en el número de circunferencias. Si se toma el arco b en el número de este arco, será necesario haberlo dividido en partes iguales.

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \quad [2].$$

Porque cambiando b en $a-b$ en la fórmula [1], y substituyendo despues en vez de $\cos(a-b)$ el valor que da la misma fórmula, y en vez de $\cos^2 a$ el suyo $1 - \operatorname{sen}^2 a$ (14), resulta

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos(a-b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(a-b) = \\ \cos a (\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(a-b) &= \\ \cos^2 a \cos b + \cos a \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(a-b) &= \\ \cos b (1 - \operatorname{sen}^2 a) + \cos a \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(a-b); \end{aligned}$$

de donde

$$\operatorname{sen}(a-b) = \frac{\cos b \operatorname{sen}^2 a - \cos a \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b.$$

Corol. 2.º Si se toma el arco a en el número de circunferencias. Si se toma el arco b en el número de este arco, será necesario haberlo dividido en partes iguales.

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad [3], \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \quad [4]. \end{aligned}$$

Porque cambiando el signo al arco b en las fórmulas [1] y [2], y teniendo presente que $\operatorname{sen} b$ cambia tambien de signo (8), resultan las del corolario.

Observacion. Por medio de las cuatro fórmulas precedentes fácilmente se hallarian otras análogas para $\operatorname{tg}(a \pm b)$ y $\operatorname{cot}(a \pm b)$.

16. Haciendo $a=b$ en las fórmulas [3] y [4] del número anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a, \\ \operatorname{sen} 2a &= 2 \operatorname{sen} a \cos a; \end{aligned}$$

y suponiendo en estas $2a = A$, de donde $a = \frac{1}{2} A$, resulta

$$\cos A = \cos^2 \frac{1}{2} A - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A \quad [1],$$

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A \quad [2].$$

Tambien se tiene (12, obs.)

$$1 = \cos^2 \frac{1}{2} A + \sin^2 \frac{1}{2} A,$$

de cuya ecuacion y de la de la [1] se deduce (Alg., 50, 4.º)

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 + \cos A}{2} \quad \text{y} \quad \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{2};$$

de donde $2 \cos^2 \frac{1}{2} A = 1 + \cos A$ [3]

y $2 \sin^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos A$ [4].

17. La suma de las fórmulas [4] y [2] del número 15 nos da

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b,$$

y la diferencia

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b;$$

dividiendo ordenadamente estas igualdades y observando

que $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ (12, obs.), resulta

$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)} = \frac{2 \sin a \cos b}{2 \cos a \sin b} = \frac{\sin a}{\cos a} : \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b};$$

suponiendo en esta ecuacion $a+b=A$ y $a-b=B$;

de donde $a = \frac{1}{2}(A+B)$ y $b = \frac{1}{2}(A-B)$, se tiene al fin

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)},$$

ó $\sin A + \sin B : \sin A - \sin B :: \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$ [1].

CAPITULO II.

De las tablas trigonométricas.

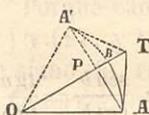
ARTÍCULO PRIMERO.

Determinacion de $\text{sen } A'$ en valores del radio.

18. Teorema 1.º *Todo arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Sea el arco AB (fig. 4.^a). Trácese los radios OA y OB, el seno AP y la tangente AT: dóblese la figura AOT hácia la parte superior, sirviendo de eje OT; y en la figura total resultante AOA'T se tendrá (Geom., 4 y 138),

Fig. 4.^a



$$AA' < ABA' < ATA',$$

ó partiendo por 2 y llamando x el arco AB,

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

19. Teorema 2.º *La diferencia entre un arco del primer cuadrante y su seno, es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

Sea x el arco menor que el cuadrante, y se tendrá (48)

$$\text{tg } \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x, \quad \text{ó (12., obs.)} \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x;$$

de donde
$$\text{sen } \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x,$$

y multiplicando esta desigualdad por $2\cos \frac{1}{2}x$, resulta

$$2\operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x > x \cos^2 \frac{1}{2}x :$$

mas $2\operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = \operatorname{sen} x$ (16),

y $\cos^2 \frac{1}{2}x = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x$ (14);

luego $\operatorname{sen} x > x \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x\right)$.

Sustituyendo en vez de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ el arco $\frac{1}{2}x$, que es mayor que el seno (18), el sustraendo del segundo miembro aumenta; luego el resto, ó sea el segundo miembro, disminuye; luego con mayor razon se tiene

$$\operatorname{sen} x > x \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x > x - \frac{1}{4}x^3,$$

ó $x - \frac{1}{4}x^3 < \operatorname{sen} x$.

y sumando con los dos miembros de esta última desigualdad $\frac{1}{4}x^3 - \operatorname{sen} x$, resulta al fin

$$x - \operatorname{sen} x < \frac{1}{4}x^3.$$

20. Problema. Calcular el valor del seno de un minuto, suponiendo el radio igual á la unidad.

La longitud de la circunferencia, que tiene 1 por radio, es (Geom., 137, corol. 2.º)

$$c = 2\pi;$$

de donde $\frac{1}{2}c = \pi$ ó $180^\circ = \pi$;

luego la longitud del arco de 1' será

$$\text{arco de } 1' = \frac{\pi}{180^\circ \times 60} = \frac{3,14159\dots}{10800} = 0,000\ 290\ 882\ 086\ 6\dots$$



La longitud de este arco es, pues, menor que 0,0003; luego si se supone

$$\text{sen } 4' = \text{arco } 4',$$

el error cometido es menor (49) que

$$\frac{1}{4} (0,0003)^3 < 0,000\ 000\ 000\ 007:$$

y como este error solo afecta la cifra decimal del orden duodécimo, resulta que el valor del seno con once cifras decimales es

$$\text{sen } 4' = 0,000\ 290\ 882\ 08.$$

ARTÍCULO II.

Formacion de las tablas.

21. Las tablas trigonométricas *naturales* contienen al lado de cada arco desde 0 hasta 90°, contados de minuto en minuto ó de 10 en 10 segundos, los valores de las líneas trigonométricas correspondientes. No es necesario que se extiendan á mayor número de grados, porque ya se ha dicho (44) que todo arco puede reducirse á otro contenido en el primer cuadrante, y cuyas líneas trigonométricas sean respectivamente iguales en valor absoluto á las del arco primitivo; pudiendo tambien en cada caso determinarse el signo correspondiente (44, obs.).

Así $\text{sen } 145^\circ = \text{sen } 35^\circ$, $\text{tg } 98^\circ = -\text{tg } 82^\circ$, etc.

Debe advertirse igualmente que basta calcular las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos desde 0 á 45° inclusive; pues las líneas *propias* y *colineas* de los arcos mayores que 45° (y menores que 90°) son las *colineas* y líneas *propias* de sus arcos complementarios, necesariamente menores que 45° (6, 2.º).

Así $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ$, $\text{cos } 72^\circ = \text{sen } 18^\circ$, etc.

Supondremos que en las tablas, de cuya formación se trata, los arcos crecen de minuto en minuto; de manera que según lo expuesto, el problema que nos proponemos resolver se reduce á la determinación de las líneas trigonométricas de los arcos de 1', 2', 3', etc., hasta 45°.

22. Conociendo el valor de $\text{sen } 1'$ (20), el de $\text{cos } 1'$ se determina por la fórmula (14)

$$\text{cos } x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x},$$

haciendo en ella $x = 1'$, y sustituyendo en vez de $\text{sen } 1'$ el valor hallado para este.

Los valores de los senos y cosenos de 2', 3', 4', ..., 45°, se pueden calcular por medio de las fórmulas (13, corol. 2.º)

$$\begin{aligned} \text{sen}(a + b) &= \text{sen } a \text{ cos } b + \text{cos } a \text{ sen } b, \\ \text{cos}(a + b) &= \text{cos } a \text{ cos } b - \text{sen } a \text{ sen } b, \end{aligned}$$

haciendo en ellas $a = 1'$ y $b = 1', 2', 3', 5', \dots, 44^\circ 59'$.

Los valores de las tangentes y cotangentes pueden hallarse también por las fórmulas (12, obs.)

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \quad \text{y} \quad \text{cot } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x},$$

sustituyendo en vez de $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ los valores de los senos y cosenos de 1', 2', 3', ..., 45°, calculados de antemano.

23. Del modo que acabamos de exponer se pueden concebir formadas las tablas trigonométricas *naturales* (*); mas ejecutándose los cálculos por medio de logaritmos con

(*) El método expuesto sirve solo para que se vea la posibilidad de la construcción de las tablas, á fin de que los principiantes no se arredren al manejar unos libros cuya formación es para ellos un misterio. Por lo demás existen otros métodos mucho mas expeditos, cuya exposición no es de este lugar.

mucha mayor facilidad que por los métodos ordinarios, estas tablas han sido transformadas en otras, donde al lado de cada arco se hallan los logaritmos de sus respectivas líneas trigonométricas. A las nuevas tablas se las conoce con el nombre de tablas trigonométricas *artificiales* ó simplemente de *tablas trigonométricas*, porque son las únicas de que en la práctica se hace uso.

Al ejecutar la trasformacion de que se acaba de hacer mérito, como los senos y cosenos son menores que el radio, sucediendo otro tanto con las tangentes de los arcos comprendidos entre 0° y 45° y las cotangentes de los comprendidos entre 45° y 90° , los logaritmos de todas estas líneas trigonométricas deberian resultar negativos, en la suposicion de que el radio sea igual á la unidad (Alg., 456, 3.º).

A fin de evitar este pequeño inconveniente, se supuso el radio igual á diez mil millones, esto es, $r=10^{10}$, con cuya hipótesis todas las líneas trigonométricas de que pueda hacerse aplicacion tienen logaritmos positivos, y por otra parte en nada se complican los cálculos; pues basta restablecer en las fórmulas trigonométricas halladas, suponiendo $r=1$, el nuevo valor de este 10^{10} , cuyo logaritmo es 10 (Alg., 462, 4.ª y 2.ª).

ARTÍCULO III.

Uso de las tablas trigonométricas.

24. Las tablas de los logaritmos de los números van acompañadas casi siempre de las *trigonométricas*: siendo de aquellas las mas conocidas entre nosotros, como ya se indicó en otro lugar, las españolas de Vazquez Queipo y Calvet, y las francesas de Callet y Lalande, otro tanto sucede con las trigonométricas.

Las de Vazquez Queipo y Lalande contienen los logaritmos de las líneas trigonométricas de los diferentes arcos del cuadrante, contados de minuto en minuto, con 6 ci-

fras decimales las primeras y con 5 las segundas (*). En las de Callet y Calvet los arcos aumentan de 10 en 10 segundos, y las líneas trigonométricas van expresadas con 7 cifras decimales de aproximación.

Por medio de cualquiera de ellas se resuelve el problema general: «Dado un arco ó ángulo, hallar los logaritmos de las líneas trigonométricas del mismo» y su recíproco. Al efecto van precedidas de su respectiva explicación, que sería inútil repetir aquí.

Ya hemos dicho la preferencia que para nosotros merecían las de Vazquez Queipo, por cuya razón á ellas nos referiremos en los problemas que hayamos de resolver en lo sucesivo.

(*) Las de Lalande tenían solo cinco cifras decimales; pero fueron extendidas por *Marie* hasta siete.



las decimales las primeras y con 5 las segundas. En las de Callet y Calvet los arcos aumentan de 10 en 10 segundos y las líneas trigonométricas van expresadas con 7 cifras decimales de aproximación.

CAPÍTULO III.

De la resolución de triángulos.

Por medio de cualquiera de ellas se resuelve el problema general: «Dado un ángulo y un lado, hallar los otros dos de las líneas trigonométricas del mismo y su recíproco». Al elevarse el ángulo a 90°, el problema se resuelve en un caso particular que nos interesa mucho. En efecto, si el ángulo es un ángulo recto, el triángulo es rectángulo y el problema se reduce a resolver en un triángulo rectángulo.

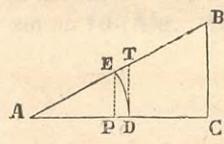
ARTÍCULO PRIMERO.

Teoremas relativos a la resolución de triángulos rectángulos.

25. Teorema 1.º *En todo triángulo rectángulo el radio es al seno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto opuesto a dicho ángulo.*

Sea el triángulo ABC (fig. 5.^a): con un radio cualquiera describese el arco DE correspondiente al ángulo en A: trácese el seno EP, y de la semejanza de los triángulos AEP y ABC se deduce

Fig. 5.^a



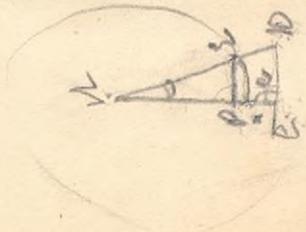
$$AE : EP :: AB : BC.$$

Sustituyendo en lugar de estas líneas sus valores, y expresando para mayor sencillez por *a* el lado BC opuesto a A, por *b* el opuesto a B y por *c* el que se opone a C (como haremos siempre en lo sucesivo), resulta

$$r : \text{sen } A :: c : a.$$

Corol. *Suponiendo $r=1$, un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto.*

Porque en dicha hipótesis la proporción anterior da $a = c \times \text{sen } A.$



Handwritten notes in pencil: $r = 1$, $a = c \times \text{sen } A$, $b = c \times \text{cos } A$.

26. Teorema 2.º *En todo triángulo rectángulo el radio es al coseno de un ángulo agudo, como la hipotenusa es al cateto contiguo á dicho ángulo.*

La semejanza de los mismos triángulos AEP y ABC nos da

$$AE : AP :: AB : AC,$$

ó

$$r : \cos A :: c : b.$$

Corol. *Suponiendo $r=1$, un cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo contiguo.*

Porque en esta hipótesis

$$b = c \times \cos A.$$

27. Teorema 3.º *En todo triángulo rectángulo el radio es á la tangente de un ángulo agudo, como el cateto contiguo á dicho ángulo es al cateto opuesto.*

Trazando la tangente trigonométrica DT (en la misma figura), la semejanza de los triángulos ADT y ACB nos da

$$AD : DT :: AC : BC,$$

ó

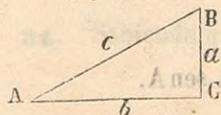
$$r : \operatorname{tg} A :: b : a.$$

ARTÍCULO II.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

28. Como siempre es conocido el ángulo recto en un triángulo rectángulo, basta que se conozcan dos lados ó un lado y un ángulo agudo para resolverle ó sea para determinar los tres elementos restantes (Geom., 87, 88 y 89). La combinacion binaria de los cinco elementos indeterminados, sujetos á las indicadas condiciones, da lugar á los cuatro problemas particulares distintos, que aparecen á continuacion, donde el ángulo recto es C (fig. 6.ª).

Fig. 6.ª



	DATOS.	INCOGNITAS.
1.º	$c, a,$	$A, B, b.$
2.º	$a, b,$	$A, B, c.$
3.º	$c, A,$	$B, a, b.$
4.º	$a, A,$	$B, c, b.$

29. Problema 1.º Dada la hipotenusa c y el cateto a , determinar los ángulos agudos A , B y el otro cateto b .

El ángulo A se determina por medio de la proporción (25)

$$r : \text{sen } A :: c : a;$$

de donde (Alg., 174, 1.º)

$$L. \text{sen } A = L. r + L. a + C_0 L. c.$$

Las tablas darán el valor de este ángulo.

Para hallar el ángulo B se tiene (Geom., 70, 4.º)

$$B = 90 - A.$$

El cateto b se calcula por la proporción (26)

$$r : \text{cos } A :: c : b;$$

de donde $L. b = L. \text{cos } A + L. c + C_0 L. r.$

Observacion. Tambien se puede calcular el ángulo B por la proporción (26), $r : \text{cos } B : c : a$; y despues el cateto b directamente por medio de la ecuacion (Geom., 111, corol.)

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)(c - a)};$$

de donde $L. b = \frac{1}{2} [L. (c + a) + L. (c - a)].$

30. Problema 2.º Dados los catetos a y b , hallar los ángulos agudos A , B y la hipotenusa c .

El ángulo A se determina por la proporción (27)

$$r : \text{tg } A :: b : a;$$

de donde $L. \text{tg } A = L. r + L. a + C_0 L. b.$

El B se halla por la igualdad $B = 90^\circ - A.$

Por último, la hipotenusa c , conocido el ángulo A , se determina por la proporción (25)

$$r : \text{sen } A :: c : a;$$

de donde $L. c = L. r + L. a + C_0 L. \text{sen } A.$

Observacion. Tambien puede hallarse directamente la

hipotenusa c por medio de la ecuacion (Geom., 414, corol.) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; pero esta fórmula tiene el inconveniente de no estar preparada para el cálculo logaritmico (Alg., 174, 5.º ej.).

31. Problema 3.º Dada la hipotenusa c y el ángulo agudo A , determinar el otro B y los catetos a y b .

Para hallar B se tiene $B = 90^\circ - A$.

El cateto a se calcula por la proporción (25) $r : \text{sen } A :: c : a$; de donde $L. a = L. \text{sen } A + L. c - C \text{ ó } L. r$.

De igual manera se halla b por medio de la proporción (26) $r : \text{cos } A :: c : b$.

Observacion. Hallando uno de los catetos, el otro se puede determinar por la fórmula (Geom. 411, corol.)

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

32. Problema 4.º Dado un cateto a y el ángulo agudo A determinar el otro ángulo agudo B , la hipotenusa C y el cateto restante b .

$$B = 90^\circ - A.$$

La hipotenusa C se halla por la proporción

$r : \text{sen } A :: c : a$; y el cateto b por la otra $r : \text{tg } A :: b : a$.

Observacion. Despues que se haya determinado el lado c ó b se puede hallar el otro por medio de la ecuacion $c^2 = a^2 + b^2$.

33. Observaciones generales. 1.ª Los problemas resueltos son siempre determinados y posibles, con tal que en el 1.º la hipotenusa sea mayor que el cateto conocido, y en los dos últimos el ángulo dado sea agudo.

2.ª Los valores hallados para las incógnitas se pueden comprobar calculando alguno de ellos por el medio indicado en la observacion respectiva, y comparando este resultado con el hallado anteriormente.

Ejemplo.

34. Sabiendo que en un triángulo rectángulo en C

$$c = 300 \text{ y } a = 240,$$

hallar los ángulos A , B y el cateto b .

Las fórmulas que deben emplearse son (29)

$$L. \operatorname{sen} A = L. r + L. a + C_0 L. c,$$

$$B = 90^\circ - A,$$

$$L. b = L. \cos A + L. c + C_0 L. r.$$

$$L. \operatorname{sen} A = \begin{Bmatrix} 10, \\ 2,380211 \\ 3,522879 \\ 9,903090 \end{Bmatrix} \quad L. b = \begin{Bmatrix} 9,778152 \\ 2,477121 \\ 10, \\ 2,255273 \end{Bmatrix}$$

$$A = 53^\circ 7' 48'', \quad B = \begin{matrix} 89^\circ 59' 60'' \\ 53 \quad 7 \quad 48 \end{matrix}, \quad b = 180.$$

Comprobacion.

$$b = \sqrt{300^2 - 240^2} = 180.$$

ARTÍCULO III.

Teoremas relativos a la resolucion de triángulos oblicuángulos.

35. Teorema 1.º *El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido.*

Distinguiremos dos casos: 1.º que el lado, que ha de formar el primer miembro de la igualdad del teorema, esté opuesto a un ángulo agudo: 2.º que esté opuesto a un ángulo obtuso.

1.º Sea el lado AB (fig. 7.^a) opuesto al ángulo agudo C en el triángulo ABC: hájese la perpendicular BD y se tendrá (Geometría 111, 3.º)

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times DC;$$

pero (26, corol.) $DC = BC \times \cos C;$

$$\text{luego } AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times BC \times \cos C.$$

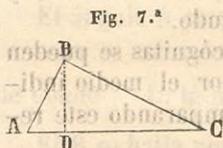
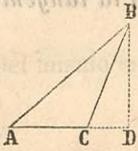


Fig. 7.^a

2.º Sea AB (fig. 8.^a) opuesto al ángulo obtuso ACB: bajando la perpendicular BD, se tendrá de igual modo (Geom. 144, 2.º)



$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC \times CD;$$

pero $CD = BC \times \cos BCD$, y como por otra parte $\cos BCD = -\cos ACB$ (9, corol.),

$$CD = BC \times \cos ACB = -BC \times \cos C;$$

luego $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times BC \times \cos C$.

Luego en todo caso se verifica que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos C,$$

de igual modo se demostraría que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A.$$

Observacion. Estas tres ecuaciones contienen los elementos necesarios para la resolución general de los triángulos rectilíneos.

36. Teorema 2.º *En todo triángulo los senos de los ángulos son proporcionales á los lados opuestos.*

Bajando la perpendicular BD (fig. 9.^a) sobre la base, se tiene (25, corol.)

$$BD = AB \times \text{sen } A \quad \text{y} \quad BD = BC \times \text{sen } C;$$

luego $AB \times \text{sen } A = BC \times \text{sen } C,$

ó $c \times \text{sen } A = a \times \text{sen } C;$

de donde (Alg. 427)

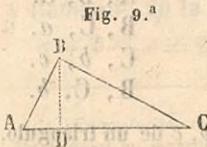
$$\text{sen } A : a :: \text{sen } C : c.$$

Bajando la perpendicular desde C sobre AB, del mismo modo se deduciría que

$$\text{sen } A : a :: \text{sen } B : b,$$

de cuya proporcion y de la anterior resulta

$$\text{sen } A : a :: \text{sen } B : b :: \text{sen } C : c.$$



37. Teorema 3.º La suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.

Por el teorema anterior se tiene

$$\text{sen } A : a :: \text{sen } B : b ;$$

de donde (Alg. 129, corol. 4.º)

$$\text{sen } A + \text{sen } B : \text{sen } A - \text{sen } B :: a + b : a - b :$$

pero (17)

$$\text{sen } A + \text{sen } B : \text{sen } A - \text{sen } B :: \text{tg } \frac{1}{2}(A + B) : \text{tg } \frac{1}{2}(A - B) ;$$

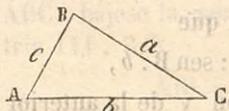
$$\text{luego } a + b : a - b :: \text{tg } \frac{1}{2}(A + B) : \text{tg } \frac{1}{2}(A - B).$$

ARTÍCULO IV.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

38. Si en un triángulo cualquiera se conocen 3 de los 6 elementos que le constituyen, con tal que entre los datos se halle un lado, el triángulo puede resolverse, ó lo que es igual, se pueden determinar los 3 elementos restantes (Geom. 86, 87, 88).

La combinacion ternaria de los seis elementos, sujetos á dicha condicion, da lugar á los *cuatro* problemas particulares distintos, que aparecen á continuacion :

Fig. 40. ^a	DATOS.	INCÓGNITAS.
	1.º $a, b, c,$	$A, B, C.$
	2.º $b, c, A,$	$B, C, a.$
	3.º $a, A, B,$	$C, b, c.$
	4.º $a, c, A,$	$B, C, b.$

39. Problema 1.º Dados los tres lados, a, b, c de un triángulo, determinar los tres ángulos $A, B, C.$

De la fórmula (35) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$, se deduce

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad [1].$$

Del mismo modo $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad [2],$

y $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad [3].$

Para hallar ahora cualquiera de los ángulos, el A por ejemplo, se restablece el radio en la fórmula [1], y resulta

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times r,$$

y tomando los logaritmos

$$L. \cos A = L. (b^2 + c^2 - a^2) + L. r + C_0(2bc) \quad (*).$$

Es evidente que de una manera análoga se pueden determinar los ángulos B y C.

Observacion. Las fórmulas precedentes no se hallan bien preparadas para el cálculo logarítmico, porque, ya se ve que para tomar el logaritmo de $b^2 + c^2 - a^2$, es necesario ejecutar de antemano tres elevaciones al cuadrado y la suma y resta indicadas. Por esta razón se las suele transformar en otras, mas cómodas en la práctica, del modo siguiente:

Restando la ecuación [1] de la igualdad $1 = 1$, se halla

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc} \quad (\text{Alg.}, 24, 3.^\circ),$$

y llamando $2p$ la suma de los tres lados, se tiene

$$a + b + c = 2p, \quad \text{de donde} \quad a + b - c = 2p - 2c,$$

(*) Es preferible casi siempre hallar por el método ordinario el producto $2bc$ á sumar los logaritmos de sus factores, etc.

y $a + c - b = 2p - 2b$, cuyos valores sustituidos en la ecuacion primera, teniendo al mismo tiempo presente que

$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A$ (16), resulta

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = \frac{4(p-c)(p-b)}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc};$$

de donde $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ [A],

y de una manera análoga

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad [B],$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad [C] \quad (*).$$

Restableciendo el radio en cualquiera de estas fórmulas, por ejemplo en la 1.^a, resulta

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \times r^2,$$

y tomando los logaritmos

$$L. \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} [L. (p-b) + L. (p-c) + 2L. r + C. L. b + C. L. c].$$

40. Problema 2.º Dados dos lados b, c y el ángulo comprendido A , determinar los otros dos ángulos B, C y el tercer lado a .

La suma de los ángulos B y C es

$$B + C = 180^\circ - A,$$

y por consiguiente $\frac{1}{2}(B + C) = \frac{180^\circ - A}{2}$:

tambien tenemos (37)

$$b + c : b - c :: \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C);$$

(*) De los dos valores de estos radicales, solo el positivo satisface las condiciones del problema; porque siendo un ángulo cualquiera $A < 180^\circ$, $\frac{1}{2} A < 90^\circ$; luego todas sus líneas trigonométricas son positivas (7.º corol.).

de donde

$$L. \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C) = L. \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C) + L. (b-c) + C_0 L. (b+c),$$

por medio de cuya igualdad se determina el valor de

$$\frac{1}{2}(B-C),$$

y como el de $\frac{1}{2}(B+C)$ es también conocido, se tendrá (Alg., 50, 1.º), suponiendo que B esté opuesto al mayor lado,

$$B = \frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(B-C) \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B-C).$$

El lado a se halla por medio de la proporción (36)

$$\operatorname{sen} B : b :: \operatorname{sen} A : a.$$

41. Problema 3.º Dado un lado a y dos ángulos cualesquiera A y B , determinar el tercer ángulo C y los otros dos lados b y c .

El ángulo C se halla por medio de la ecuación

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

y los lados b y c por las proporciones (36)

$$\operatorname{sen} A : a :: \operatorname{sen} B : b$$

$$\text{y} \quad \operatorname{sen} A : a :: \operatorname{sen} C : c.$$

42. Problema 4.º Dados dos lados a y c y el ángulo A , opuesto á uno de ellos, determinar los otros ángulos B y C y el tercer lado b .

El ángulo C se halla por medio de la proporción (36)

$$\operatorname{sen} A : a :: \operatorname{sen} C : c,$$

el ángulo B se determina por la igualdad

$$B = 180^\circ - (A + C),$$

y el lado b también por medio de la proporción (36)

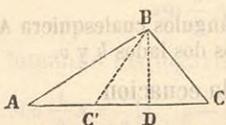
$$\text{sen } A : a :: \text{sen } B : b .$$

Observacion. Como el seno corresponde siempre á dos arcos menores que la semicircunferencia, uno contenido en el cuadrante y otro suplementario del primero (9, corol.), cuando un ángulo se determina por medio de su seno, puede ocurrir la duda de si el ángulo buscado es el agudo que dan las tablas ó debe ser su suplemento obtuso.

Esta duda, que no ocurre en la resolución de los triángulos rectángulos, porque los ángulos incógnitos son siempre agudos, ni en los tres primeros problemas de los oblicuángulos, como aparece de un ligero exámen de cada uno de ellos, puede tener lugar en el presente caso.

En efecto, sea ABC (fig. 44.^a) el triángulo á que se refiere el problema último: bajando desde B la perpendicular BD sobre AC , tomando $DC' = DC$ y uniendo C' con B , los dos triángulos ABC y ABC' contienen los mismos datos A , c y $a = BC'$; y como los ángulos $BC'C$ y BCC' son iguales, $BC'A$ tiene por suplemento el ángulo C ; luego $\text{sen } C$ corresponde también al ángulo $BC'A$. Si se toma para C el ángulo que dan las tablas, resulta $b = AC$ y $B = ABC$; si se toma para C el suplemento del ángulo que dan las tablas, resulta $b = AC'$ y $B = ABC'$.

Fig. 44.^a



La doble solución, que acaba de hallarse, no tiene lugar sino cuando el lado opuesto al ángulo dado sea menor que el otro lado conocido, esto es cuando $a < c$; porque en cualquier otra hipótesis el ángulo C es agudo, y por lo tanto el que dan las tablas es el único que satisface las condiciones del problema.

La doble solución, que acaba de hallarse, no tiene lugar sino cuando el lado opuesto al ángulo dado sea menor que el otro lado conocido, esto es cuando $a < c$; porque en cualquier otra hipótesis el ángulo C es agudo, y por lo tanto el que dan las tablas es el único que satisface las condiciones del problema.

43. Observaciones generales.—1.^a Los tres primeros problemas de que acabamos de ocuparnos, son posibles siempre que en el 1.^o el mayor lado sea menor que la suma

de los otros dos; y en el 3.º los dos ángulos conocidos valgan menos que 180°. El 4.º problema es evidentemente imposible ó absurdo cuando A no es agudo y $a < c$: lo será además si $a < BD$, esto es, cuando el lado opuesto al ángulo conocido es menor que la perpendicular bajada desde el vértice comun á los lados a y c conocidos, sobre el tercer lado. Esta última condicion no siempre se conoce á simple vista; pero lo absurdo del problema se manifiesta en el cálculo al determinar el ángulo C, hallando para él un seno mayor que el radio (como se verá ej. 3.º), cuyo resultado significa lo mismo que las raíces *imaginarias* en las ecuaciones de 2.º grado ó el valor *infinito* en las de 4.º

2.ª Los valores hallados para las incógnitas en los anteriores problemas se pueden comprobar, en el 4.º sumando los tres ángulos y viendo si la suma compone 180°; en el 2.º hallando directamente los dos ángulos incógnitos, y observando si sumados con el 3.º dan tambien 180°, y en el 3.º y 4.º calculando uno de los ángulos por la fórmula del 4.º caso, y comparando el resultado con la hipótesis ó con otro resultado hallado anteriormente.

Ejemplos.

44. 1.º Dados los tres lados de un triángulo

$$a = 85, \quad b = 70, \quad c = 45,$$

hallar los tres ángulos A, B y C.

Las fórmulas que pueden emplearse son (39, obs.)

$$L. \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} [L.(p-b) + L.(p-c) + 2L.r + C_0 L.b + C_0 L.c]$$

$$L. \operatorname{sen} \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} [L.(p-a) + L.(p-c) + 2L.r + C_0 L.a + C_0 L.c]$$

$$L. \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \text{ etc.}$$

Ahora $a + b + c = 200$; de donde $p = 100$, $p - a = 15$,

$$p - b = 30 \quad \text{y} \quad p - c = 55.$$

Luego

$$L. \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1,477121 \\ 1,740363 \\ 20, \\ \hline 2,154902 \\ 2,346787 \\ \hline 49,719173 \\ 9,859586 = L. \operatorname{sen} (46^\circ, 24' 53'') \end{array} \right.$$

$$L. \operatorname{sen} \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1,176091 \\ 1,740363 \\ 20, \\ \hline 2,070581 \\ 2,346787 \\ \hline 49,333822 \\ 9,666911 = L. \operatorname{sen} (27^\circ, 40' 22'') \end{array} \right.$$

$$L. \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1,176091 \\ 1,477121 \\ 20, \\ \hline 2,070581 \\ 2,154902 \\ \hline 48,878695 \\ 9,439347 = L. \operatorname{sen} (45^\circ, 57' 45'') \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} A &= 92^\circ 43' 46'' \\ B &= 55^\circ 20' 44'' \\ C &= 31^\circ 55' 30'' \end{aligned}$$

Compr. $A + B + C = 178^\circ 118' 120'' = 180^\circ$.

2.º Dados dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos

$$a = 1085, \quad c = 1098, \quad A = 46^\circ 12' 42'',$$

hallar los otros dos ángulos B, C y el tercer lado *b*.

Las fórmulas que deben emplearse, son (36)

$$\operatorname{sen} A : a :: \operatorname{sen} C : c,$$

$$B = 180^\circ - (A + C),$$

$$\text{sen A} : a :: \text{sen B} : b.$$

Este ejemplo tiene dos soluciones (42, obs.).

Primera solución.

$$\text{L. sen C} = \begin{array}{r} 3,040602 \\ 9,858393 \\ \hline 4,964370 \\ 9,863630 = \text{L. sen}(46^\circ 55' 57'') \end{array} \quad \text{L. } b = \begin{array}{r} 3,035430 \\ 9,999343 \\ \hline 10,141522 \\ 3,176298 = \text{L. } 1500,7... \end{array}$$

$$B = 180^\circ - (93^\circ 8' 39'') = 86^\circ 51' 21''$$

$$C = 46^\circ 55' 57''$$

$$B = 86^\circ 51' 21''$$

$$b = 1500,714$$

Segunda solución.

$$C = 180^\circ - (46^\circ 55' 57'') = 133^\circ 4' 3''$$

$$B = 180^\circ - (179^\circ 16' 45'') = 0^\circ 43' 15''$$

$$\text{L. } b = \begin{array}{r} 3,035430 \\ 3,414137 \\ 4,685364 \\ \hline 10,1441522 \\ 1,276653 = \text{L. } 18,91 \end{array}$$

$$b = 18,91$$

Comprobacion de la solución 1.^a (43, 2.^a)

$$\text{L. sen } \frac{1}{2} A = \begin{array}{r} 2,532937 \\ 2,871490 \\ \hline 20, \\ 4,823702 \\ 4,959398 \\ \hline 19,187527 \\ 9,593763 = \text{L. sen}(23^\circ, 6' 21'') \end{array}$$

Luego $A_1 = 46^\circ 42' 42''$.

De una manera análoga se comprueba la 2.ª solución.

3.º Dados dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos

$$a = 511, \quad c = 869, \quad A = 66^\circ 40' 12''$$

hallar los ángulos B, C y el tercer lado b.

En este ejemplo se emplean las mismas fórmulas que en el anterior.

$$L. \text{ sen } C = \begin{array}{r} 2,939020 \\ 9,961290 \\ \hline 11 \\ 3,289883 \\ \hline 10,190204 \end{array}$$

Luego este problema es absurdo (43, 4.ª).

INDICE.

CAPÍTULOS.PÁGINAS.

GEOMETRÍA.

INTRODUCCION. 5

GEOMETRÍA PLANA.

SECCION I.—Propiedades de las figuras planas.

Primero.	LÍNEAS RECTAS EN SUS DIFERENTES POSICIONES.	13
	De los ángulos.	id.
	Perpendiculares y oblicuas.	17
	De las líneas paralelas.	21
II.....	DE LA CIRCUNFERENCIA.	27
	Propiedades de la circunferencia.	id.
	Líneas secantes y tangentes á la circunferencia.	33
	Medida de los ángulos.	37
	<i>Problemas gráficos.</i>	47
III....	DE LOS POLÍGONOS.	53
	Definiciones preliminares.	id.
	De los triángulos.	56
	De los cuadriláteros.	63
	De los polígonos en general.	67
	<i>Problemas gráficos.</i>	71

SECCION II.— De la extension de las figuras planas.

Primero.	FIGURAS SEMEJANTES.	75
	De las líneas proporcionales.	id.
	De los triángulos semejantes.	79
	Semejanza de los polígonos en general.	82

	Consecuencias de la semejanza de los polígonos. . .	84
	<i>Problemas gráficos.</i>	91
	<i>Problemas numéricos.</i>	94
II....	POLÍGONOS REGULARES INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS, Y RAZON DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO.	96
	Inscripcion y circunscripcion de polígonos.	id.
	<i>Problemas.</i>	100
	Razon de la circunferencia al diámetro.	108
	<i>Problemas.</i>	110
III....	DE LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.	115
	Determinacion de las áreas de las figuras planas. . .	id.
	Comparacion de las áreas de las figuras planas. . . .	124
	<i>Problemas.</i>	127

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

SECCION I.—Propiedades de las figuras en el espacio.

	PRELIMINARES.	131
Primero.	PLANOS EN SUS DIFERENTES POSICIONES.	141
	Ángulos diedros.	id.
	De los planos perpendiculares y oblicuos entre sí. . .	146
	Planos paralelos.	148
	De los ángulos poliedros.	152
	<i>Problemas.</i>	157
II....	DE LAS SUPERFICIES DE REVOLUCION.	159
	De la superficie cónica.	id.
	De la superficie cilíndrica.	163
	De la superficie esférica.	166
III....	DE LOS POLIEDROS.	175
	<i>Definiciones preliminares.</i>	id.
	De las pirámides.	176
	De los prismas.	180
	De los poliedros en general.	183

SECCION II.— De la extension de las figuras en el espacio.

Primero.	DE LOS POLIEDROS SEMEJANTES, INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS.	187
	<i>Preliminares.</i>	id.
	De los tetraedros semejantes.	188
	De los poliedros semejantes en general.	189

	De los poliedros inscritos y circunscriptos en los cuerpos de revolucion.	191
II....	DE LAS ÁREAS DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS.	193
	Determinacion de las áreas de los poliedros.	id.
	Áreas de los cuerpos de revolucion.	197
	Comparacion de las áreas de los cuerpos geométricos semejantes.	203
III....	DE LOS VOLÚMENES DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS.	203
	Equivalencia de los poliedros.	id.
	Determinacion de los volúmenes de los poliedros.	211
	Determinacion de los volúmenes de los cuerpos de revolucion.	218
	Comparacion de los volúmenes de los cuerpos semejantes.	220
	<i>Problemas.</i>	222

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

Primero.	DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.	225
	Valor absoluto de las líneas trigonométricas.	226
	Valores relativos de las líneas trigonométricas.	228
	Relacion entre las líneas trigonométricas de un mismo arco.	232
	Relacion entre las líneas trigonométricas de dos arcos y las de la suma y diferencia de los mismos.	235
II....	DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.	240
	Determinacion de $\text{sen}1'$ en valores del radio.	id.
	Formacion de las tablas.	242
	Uso de las tablas trigonométricas.	244
III....	DE LA RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.	246
	Teoremas relativos á la resolucion de triángulos rectángulos.	id.
	Resolucion de los triángulos rectángulos.	247
	<i>Ejemplo.</i>	249
	Teoremas relativos á la resolucion de triángulos oblicuángulos.	250
	Resolucion de los triángulos oblicuángulos.	252
	<i>Ejemplos.</i>	257



[Faint, illegible handwriting]

[Small, faint mark or signature]



