tiene factores 2 y 5, es divisor de 999; luego es imposible obtener dos residuos iguales sin hallar antes un cociente exacto; por consiguiente 999... es múltiplo de B.

226. Teorema. *Si el denominador de una fraccion irreducible es primo con 10, la fraccion decimal equivalente es periódica pura.*

Sea la fraccion $\frac{A}{B}$, y R el residuo de dividir A por B.

Añadiendo un cero al residuo R y dividiendo por B se obtiene la cifra de las décimas: si en el curso de la operacion se repite el residuo R, añadiéndole un cero y dividiendo por B se reproducirán dicha cifra y las siguientes en el mismo órden, y la fraccion será periódica pura.

La operacion de convertir $\frac{A}{B}$ en decimal, se reduce á dividir A seguido de un número indefinido de ceros por B; por tanto los dividendos totales pueden representarse por $A \cdot 10^m$, donde m valdrá sucesivamente 1, 2, 3, 4 etc.

Para que un dividendo total $A \cdot 10^m$ reproduzca el residuo R dado por el numerador A, basta que la diferencia $A \cdot 10^m - A$ sea divisible por B [77].

Pero $$A \cdot 10^m - A = A\,(10^m - 1),$$
y siendo $10^m - 1$ un número escrito sólo con nueves, llegará á ser múltiplo de B [Lema], y, con mayor razon, la diferencia $A\,(10^m - 1)$ será tambien divisible por B; luego el residuo R se repetirá y la fraccion periódica será pura.

Escolios. 1.º Cuando se llega á un dividendo $A \cdot 10^m$ que reproduce el residuo R, concluye el primer período; y como cada cero añadido al numerador A origina una cifra decimal, el período tendrá m cifras; pero R se repite cuando B es divisor de la diferencia $A\,(10^m - 1)$, ó sea de $10^m - 1$, puesto que B es primo con A, y no puede repetirse antes [78]; luego si observamos que $10^m - 1$ es un número escrito con m nueves, deduciremos que

El número de cifras del período es igual al menor número de nueves necesario para formar un múltiplo del denominador.

2.º Llamando C al cociente entero de $\frac{A}{B}$, ó sea á la parte entera de la decimal periódica pura, y C' al cociente entero de $A \cdot 10^m$ por B, esto es, á la parte entera seguida del primer período tendremos,

$$A \times 10^m = B \times C' + R.$$
$$A \quad = B \times C + R;$$

restando estas igualdades ordenadamente resulta

$$A\,(10^m - 1) = B\,(C' - C). \quad [1]$$

Si A termina en cero, el primer miembro es divisible por 10, y el segundo tambien tendrá que serlo; pero 10 es primo con B, luego será divisor de $C' - C$. Ahora bien, para que esta diferencia sea divisible por 10 es necesario que termine en cero, ó lo que es lo mismo, que la última cifra de la parte entera sea igual á la última del período.

Luego *si el numerador termina en cero, la última cifra entera y la última del período son iguales.* [1]

Por el contrario, si A no termina en cero, como $10^m - 1$ no contiene el factor 2 ni el 5, el primer miembro de la igualdad [1] no termina en cero, por consiguiente tampoco el segundo terminará en dicha cifra, y las últimas de C y C' serán desiguales.

Luego *si el numerador no termina en cero, la última cifra entera y la última del período serán desiguales.*

EJEMPLOS.

1.º Sea la fraccion $\frac{5}{11}$.

El denominador no contiene el factor 2 ni el 5: luego la fraccion decimal equivalente será periódica pura.

El menor múltiplo del denominador, formado sólo con nueves, es 99; luego el período tendrá dos cifras.

Efectivamente $\frac{5}{11} = 0{,}4545....$

2.º Sea el quebrado $\frac{500}{37}$.

La fraccion decimal equivalente es periódica pura.

El menor múltiplo del denominador, formado sólo con nueves, es 999; luego el período tendrá tres cifras.

Además, terminando el numerador en cero, la última cifra entera y la última del período serán iguales.

---

1 Hemos creido oportuno deducir esta conclusion, porque muchos autores afirman en absoluto que las cifras de que se trata siempre son desiguales.

Efectivamente $\frac{500}{37} = 13{,}513513....$

227. Teorema. *Si el denominador de una fraccion irreducible contiene el factor 2, el factor 5 ó ambos, y además un factor primo distinto de 2 y 5, la fraccion decimal equivalente es periódica mixta; y la parte no periódica tiene tantas cifras como unidades tenga el mayor de los exponentes de 2 y 5.*

Sea la fraccion irreducible $\frac{A}{B}$, y supongamos que

$$B = 2^2 . 5^3 . 3.$$

Queremos demostrar: 1.° que la fraccion decimal equivalente es periódica mixta; 2.° que la parte no periódica tiene tres cifras.

1.° La fraccion equivalente á $\frac{A}{B}$ es periódica [223]; si fuese periódica pura tendríamos la igualdad

$$A\,(10^m - 1) = B\,(C' - C), \qquad [226, \text{escolio } 2.°].$$

Ahora bien, siendo B factor del segundo miembro, lo es tambien del primero; pero B es primo con A, luego divide á $10^m - 1$; lo que es imposible, porque $10^m - 1$ es un número escrito con nueves, y por tanto no contiene los factores 2 y 5 de B.

Luego la fraccion decimal es periódica mixta.

2.° Supongamos que la parte no periódica tenga m cifras, y n el período.

Dividiendo $A . 10^m$ por B, el cociente C será la parte entera seguida de la no periódica; y dividiendo $A . 10^m . 10^n$ por B, el cociente C' será la parte entera seguida de la no periódica y del período. Los residuos de estas divisiones son iguales, porque son los que originan la primera cifra del período.

Tenemos, pues,

$$A . 10^m . 10^n = B . C' + R$$
$$A . 10^m \qquad = B . C + R.$$

Restando ordenadamente estas igualdades resulta

$$A . 10^m (10^n - 1) = B (C' - C).$$

Ahora bien: 5^3 es factor de B, luego divide al primer miembro, y siendo primo con A y con $10^n - 1$, divide á 10^m; por consiguiente m vale 3 por lo menos. Si m fuese mayor que 3, por ejemplo 4, el primer miembro seria divisible por 10^4, luego tambien lo seria el segundo: y como B á lo mas puede ser divisible por 10^3, $C' - C$ lo seria por 10 ó terminaria en cero, lo que es imposible; porque entonces la última cifra de C seria igual á la última de C', es decir, la última cifra de la parte no periódica seria igual á la última del período, y éste empezaria una cifra ántes, quedando la parte no periódica con una cifra menos que las m supuestas; luego m no es mayor que 3.

Por consiguiente, el número de cifras de la parte no periódica es 3. [1]

Ejemplo. Sea el quebrado $\frac{77}{750}$.

El denominador es igual á $2 \,.\, 5^3 \,.\, 3$; luego la fraccion equivalente es periódica mixta, y la parte no periódica tendrá tres cifras.

Efectivamente $\frac{77}{750} = 0,102666...$

II.—Conversion de las fracciones decimales en ordinarias equivalentes.

228. En la resolucion de este problema debemos considerar tres casos: 1.° que la fraccion decimal tenga un número limitado de cifras; 2.° que sea periódica pura; y 3.° que sea periódica mixta.

229. PRIMER CASO. Si la fraccion decimal es 6,237, multiplicándola y partiéndola por 1000, tendremos

$$6,237 = \frac{6237}{1000};$$

luego *para convertir una fraccion decimal exacta en fraccion ordinaria, se pone por numerador la fraccion decimal, prescindiendo de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fraccion.*

230. SEGUNDO CASO. En el número 226, escolio 2.°, hemos visto que

$$A\,(10^m - 1) = B\,(C' - C):$$

de esta igualdad se deduce [193]

---

1 Preferimos esta demostracion á otras mas sencillas, porque ofrece la ventaja de simplificar notablemente la del número 231.

$$\frac{A}{B}=\frac{C'-C}{10^m-1},$$

pero C' es la parte entera seguida del primer periodo, C la parte entera, y m el número de cifras del periodo; luego

Para hallar la fraccion generatriz de una decimal periódica pura, se corre la coma á la derecha del primer periodo; del número que queda á la izquierda se resta la parte entera, si la hay; y se parte la diferencia por un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el periodo.

EJEMPLOS.

1.° Sea la fraccion 27,358358... La generatriz es $\frac{27358-27}{999}$.

2.° Sea la fraccion 0,4747....... La generatriz es $\frac{47}{99}$.

231. TERCER CASO. En el número 227 hemos obtenido la igualdad

$$A\,.\,10^m\,(10^n-1)=B\,(C'-C).$$

Como el primer miembro puede considerarse como el producto de A por $10^m\,(10^n-1)$, será [193]

$$\frac{A}{B}=\frac{C'-C}{10^m\,(10^n-1)}.$$

Pero es evidente que el denominador se compone de n nueves seguidos de m ceros, luego

Para hallar la generatriz de una fraccion decimal periódica mixta se corre la coma á la derecha del primer periodo; del número que queda á la izquierda se resta la parte entera seguida de la no periódica, prescindiendo de la coma; y se parte la diferencia por un número formado con tantos nueves como cifras tenga el periodo, y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

EJEMPLO.

1.° Sea la fraccion 5,34267267... La generatriz es $\frac{534267-534}{99900}$.

2.° Sea la fraccion 0,62828....... La generatriz es $\frac{628-6}{990}$.

EJERCICIOS.

I. Si de los términos de un quebrado se resta un mismo número entero, el quebrado disminuye ó aumenta, segun que sea propio ó impropio. Demostracion.

II. Para restar de un entero un quebrado se multiplica el entero por el denominador del quebrado, del producto se resta el numerador, y se parte la diferencia por el denominador. Demostracion.

III. ¿Cuál es el número que sumado con $\frac{5}{8}$ es igual á 9?

IV. ¿Qué número debe añadirse á $\frac{3}{5}$ para hallar $\frac{13}{7}$?

V. Hallar los $\frac{7}{11}$ de 55.

VI. Hallar los $\frac{17}{19}$ de $\frac{8}{9}$.

VII. Hallar los $\frac{8}{5}$ de $3\frac{2}{7}$.

VIII. Hallar un número cuyos $\frac{7}{11}$ valgan 35.

IX. Hallar un número cuyos $\frac{5}{8}$ valgan $\frac{3}{7}$.

X. Hallar un número cuyos $\frac{6}{7}$ valgan $7\frac{5}{8}$.

XI. Siendo $\frac{63}{40}$ la suma de cuatro números, uno de estos $\frac{3}{8}$, y los demás iguales entre sí, hallar todos los sumandos.

XII. Hallar cuatro números, sabiendo que el primero es $\frac{1}{3}$ de la suma de todos, el segundo los $\frac{2}{5}$, el tercero $\frac{1}{8}$, y que el último es 34.

XIII. Hallar un número que aumentado en sus $\frac{5}{7}$ sea igual á 252.

XIV. Hallar un número que disminuido en sus $\frac{6}{11}$ sea igual á 85.

XV. Hallar un número que aumentado en sus $\frac{5}{6}$ y disminuido en sus $\frac{3}{8}$ sea igual á 140.

XVI. Hallar un número que aumentado en sus $\frac{2}{9}$ y disminuido en sus $\frac{3}{4}$ sea igual á 72.

XVII. Hallar un número tal que disminuidos sus $\frac{8}{9}$ en sus $\frac{2}{5}$ y sus $\frac{2}{7}$, sea igual á 762.

XVIII. Hallar el cociente de dos números con un error menor que media unidad de un órden dado.

XIX. Si dos fracciones irreducibles tienen denominadores primos con diez é iguales, el número de cifras de los períodos es el mismo. Demostracion.

XX. Si el denominador de una fraccion irreducible es primo con 10, la diferencia entre la parte entera seguida del primer período y la parte entera, es un múltiplo del numerador. Demostracion.

Obsérvese que si la fraccion propuesta es propia, la parte entera de la decimal equivalente es cero; luego

Si el denominador de una fraccion irreducible y menor que la unidad es primo con 10, el período será un múltiplo del numerador.

XXI. Si la fraccion irreducible menor que la unidad $\frac{A}{B}$ origina un período P, la fraccion $\frac{1}{B}$ originará un período $\frac{P}{A}$. Demostracion.

XXII. *Corolario.* Para hallar el período de una decimal periódica pura $\frac{A}{B}$, se puede hallar el período de $\frac{1}{B}$ y multiplicarle por A.

XXIII. Toda fraccion ordinaria irreducible de la forma

$$\frac{A}{2^m \cdot 5^n \cdot B},$$

es igual al cociente de otra fraccion ordinaria irreducible de la forma $\frac{A'}{B}$ dividida por la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el mayor de los exponentes de 2 y 5. Demostracion.

XXIV. *Corolario.* La parte no periódica de la fraccion decimal equivalente á $\frac{A}{2^m \cdot 5^n \cdot B}$ tiene m cifras, suponiendo $m > n$; y el número de cifras del período es igual al menor número de nueves necesario para formar un múltiplo de B.

XXV. Este corolario y el escolio 1.º del número 226, pueden comprenderse en el siguiente enunciado:

En toda fraccion decimal periódica, el número de cifras del período es igual al menor número de nueves necesario para formar un múltiplo del cociente que resulta suprimiendo en el denominador de la fraccion generatriz los factores 2 y 5 que pueda contener.

XXVI. En toda fraccion periódica mixta, la diferencia entre la parte entera seguida de la no periódica y del período, y la parte entera seguida de la no periódica, es un múltiplo del numerador de la fraccion generatriz. Demostracion.

XXVII. Si dos fracciones ordinarias irreducibles, *que tienen diferente denominador*, equivalen á otras decimales periódicas puras ó mixtas, la suma ó diferencia de ellas equivaldrá tambien á una decimal periódica pura ó mixta respectivamente. Demostracion.

LIBRO TERCERO.

NÚMEROS INCONMENSURABLES.

CAPÍTULO PRIMERO.

RROPIEDADES DE LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES.

232. Sabemos que si una cantidad A no tiene medida comun con la unidad B, es imposible expresar aquella por un número entero ó fraccionario; pero que dividiendo la unidad en un número creciente de partes, se obtienen números conmensurables que expresan aproximadamente la cantidad A, pudiendo ser el error tan pequeño como se quiera.

Sea p una de las partes; suponiéndola contenida m veces en A quedando un residuo, y n veces exactamente en B, será

$$B = np.$$

A es mayor que m partes de B y menor que $m+1$ partes, esto es,

$$A > mp \quad \text{y} \quad A < (m+1)p.$$

Si tomamos en vez de A una de las cantidades mp ó $(m+1)p$, el error en menos ó en mas será menor que p, y puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Siendo mp y $(m+1)p$ conmensurables con la unidad B, sus expresiones numéricas son

$$\frac{mp}{np} \quad \text{y} \quad \frac{(m+1)p}{np},$$

ó simplificando

$$\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad \frac{m+1}{n}.$$

La relacion $\frac{A}{B}$ se halla comprendida entre estos quebrados, cuya diferencia $\frac{1}{n}$ llegará á ser tan pequeña como se quiera si hacemos á n suficientemente grande; luego

Todo número inconmensurable está comprendido entre dos conmensurables, cuya diferencia puede ser menor que cualquier cantidad asignable, por pequeña que sea ésta.

De aquí se desprende que A puede expresarse aproximadamente por un número conmensurable $\frac{m}{n}$ ó $\frac{m+1}{n}$, siendo el error tan pequeño como se quiera.

233. Si una cantidad experimenta trasformaciones, sujetas á una ley determinada, que cambian su valor, se llama *variable*; y si tiene un valor fijo se llama *constante*.

Cuando los valores sucesivos, crecientes ó decrecientes, de la variable se aproximan cada vez mas á una constante, de modo que la diferencia, sin llegar á anularse, pueda ser tan pequeña como se quiera, dicha constante se llama *límite* de la variable.

Si la variable tiene un límite, los valores sucesivos de aquella son expresiones cada vez mas aproximadas del límite.

La fraccion $\frac{m}{n}$ del número anterior es un ejemplo de cantidades variables.

Sabemos, en efecto, que dividiendo la unidad en un número creciente de partes, $\frac{m}{n}$ adquiere valores cada vez mayores y mas próximos á $\frac{A}{B}$, pudiendo ser la diferencia tan pequeña como se quiera; luego el número inconmensurable $\frac{A}{B}$ es el límite superior de la cantidad variable $\frac{m}{n}$.

Otro ejemplo de cantidades variables, son las fracciones periódicas. Así, la fraccion 0,353535... recibe valores crecientes, á medida que aumenta el número de cifras decimales: un valor cualquiera de esta fraccion difiere de la generatriz en menos de una unidad decimal del último órden; luego aumentando suficientemente el número de cifras, la diferencia será tan pequeña como queramos; por consiguiente $\frac{35}{99}$ es el límite de 0,353535...

Obsérvese que los límites pueden ser conmensurables ó inconmensurables.

234. Lema. *Si una cantidad variable tiene dos límites, estos son iguales.*

Sea a una variable con dos límites A y B, que supondremos superiores.

Si estos límites son desiguales, la variable podrá aproximarse cuanto se quiera al menor de ellos, B por ejemplo, pero no al mayor A. En efecto, dicha variable es siempre menor que B [233], por lo tanto le falta para valer A una cantidad mayor que la diferencia entre A y B, lo que es contrario á la definicion de límite; luego $A = B$.

Razonaríamos de un modo análogo, si los límites de la variable fuesen inferiores.

Además, es evidente que una variable no puede aproximarse á la vez á dos límites uno superior y otro inferior.

235. Teorema de los límites. *Si los valores sucesivos de dos cantidades variables son siempre respectivamente iguales, los límites tambien son iguales.*

Sean a y b dos variables constantemente iguales, y A, B sus respectivos límites.

Siendo a y b constantemente iguales, pueden considerarse como una sola variable con dos límites A y B; luego, segun el lema anterior, $A = B$.

236. Teorema. *El límite de una suma de cantidades variables, es la suma de los límites de dichas variables.*

Sean a, b, c tres cantidades variables, que tienen á A, B, C respectivamente por límites superiores.

Si estos límites son números inconmensurables, representemos por a', b', c' tres cantidades conmensurables mayores que A, B, C y que varían al mismo tiempo que a, b y c; por manera que A está siempre comprendida entre a y a', B entre b y b', C entre c y c', y las diferencias conmensurables $a' - a$, $b' - b$ y $c' - c$ pueden ser menores que cualquiera cantidad asignable, por pequeña que sea [232].

Es evidente que la suma $A + B + C$ estará comprendida entre $a + b + c$ y $a' + b' + c'$.

Llamemos d, d', d'' á las diferencias mencionadas, y será

$$a' = a + d, \qquad b' = b + d', \qquad c' = c + d''.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, tendremos

$$a' + b' + c' = a + b + c + d + d' + d'',$$

ó $$a' + b' + c' = (a + b + c) + (d + d' + d'');$$

de donde $(a' + b' + c') - (a + b + c) = d + d' + d''$.

Pudiendo ser d, d', d'' tan pequeñas como queramos, la suma $d + d' + d''$ estará en el mismo caso; luego las sumas $a' + b' + c'$ y $a + b + c$ se diferencian en una cantidad menor que cualquiera asignable, por consiguiente cada una de ellas se diferencia de $A + B + C$, con mayor razon, en tan poco como se quiera; luego el límite de $a + b + c$ es $A + B + C$.

Si los límites de a, b y c fuesen conmensurables, llamando d, d' y d'' á lo que falta á cada una de las variables, considerada en un momento cualquiera de su crecimiento, para llegar al límite respectivo, tendremos

$$A = a + d, \quad B = b + d', \quad C = c + d'';$$

de donde fácilmente se deduce

$$(A + B + C) - (a + b + c) = d + d' + d'',$$

y como la suma $d + d' + d''$ puede ser tan pequeña como queramos, resulta

$$\textit{límite de} \quad (a + b + c) = A + B + C.$$

237. Teorema. *El límite de la diferencia entre dos cantidades variables, es la diferencia entre los límites de dichas variables.*

Sean a y b dos variables; A y B sus límites.

Sean además

$$a - b = c \quad \text{y} \quad A - B = C.$$

De estas igualdades se deduce

$$a = b + c \quad \text{y} \quad A = B + C.$$

La primera $a = b + c$ se verifica siempre, esto es, las variables a y $b + c$ son constantemente iguales, luego sus límites lo son tambien [235]. El límite de a es A, el de $b + c$ es $B +$ *límite de c* [236]; luego

$$A = B + \textit{límite de } c,$$

pero $$A = B + C;$$

luego $$\textit{lím. de } c = C.$$

Lo que debiamos demostrar.

Escolio. Si c fuese constante, se verificaria tambien la igualdad

$$a = b + c;$$

el límite de a es A, el de $b+c$ es evidentemente $B+c$; luego

$$A = B + c,$$

y como

$$A = B + C,$$

resulta

$$c = C.$$

Por consiguiente el teorema es cierto en este caso, puesto que el límite de c, cuando esta cantidad es constante, es la misma cantidad c. [1]

238. Teorema. *El límite de un producto de varias cantidades variables, es el producto de los límites de dichas variables.*

Consideremos, en primer lugar, dos variables a y b cuyos límites superiores sean los números inconmensurables A y B; y sean a' y b' dos variables que tengan á A y B por límites inferiores.

Tendremos

$$a' = a + d, \qquad b' = b + d',$$

siendo d y d' números conmensurables: multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$a'b' = (a + d)(b + d') = ab + ad' + db + dd',$$

de donde

$$a'b' - ab = ad' + db + dd'.$$

Pudiendo ser d y d' tan pequeñas como queramos, los términos ad', db y dd' lo serán tambien, y lo mismo sucederá á la suma; luego los productos ab y $a'b'$, que evidentemente comprenden al AB, pueden diferenciarse en una cantidad menor que cualquiera asignable; por consiguiente ab se aproximará con mayor razon á AB todo cuanto queramos.

Si los límites A y B fuesen números conmensurables, representando por d y d' la cantidad conmensurable que falta á cada variable a y b, considerada en un momento cualquiera de su crecimiento, para llegar al límite respectivo, tendríamos

$$A = a + d, \qquad B = b + d',$$

de donde se deduce fácilmente

---

1 Este resultado $c = C$ indica que *si la diferencia entre dos cantidades variables es una cantidad constante, la diferencia entre los límites de las variables es igual á dicha constante.*

Puede considerarse este teorema como una generalizacion del de los límites, pues cuando $c = 0$, será $C = 0$, esto es, cuando las variables sean iguales lo serán tambien sus límites.

$$AB - ab = ad' + db + dd'.$$

Lo que demuestra el teorema cuando los factores son dos.

Si las variables son a, b, c y sus límites A, B, C, el límite de ab será AB; luego el de $ab \times c$ será $AB \times C$ ó ABC.

Haríamos el mismo razonamiento si las variables fuesen cuatro, cinco etc.

239. TEOREMA. *El límite del cociente de dos cantidades variables, es el cociente de los límites de dichas variables.*

Sean a, b las variables y A, B sus límites.

Sean además

$$\frac{a}{b} = c, \quad \frac{A}{B} = C;$$

de estas igualdades se deduce

$$a = bc, \quad A = BC.$$

La primera $a = bc$ se verifica siempre, esto es, las variables a y bc son siempre iguales, luego tambien lo son sus límites.

El de a es A, el de bc es $B \times$ *límite de* c [238]; luego

$$A = B \times \textit{límite de } c.$$

y como $$A = BC,$$

resulta $$\textit{lím. de } c = C.$$

Lo cual debíamos demostrar.

ESCOLIO. Si c fuese constante, la igualdad $a = bc$ se verificaria tambien; el límite de a es A, el de bc es evidentemente Bc; luego

$$A = Bc,$$

y como $$A = BC,$$

resulta $$c = C;$$

luego el teorema es cierto en este caso. [1]

240. En vista de los cuatro teoremas últimos llamaremos *suma*, *diferencia*, *producto* y *cociente* de números inconmensurables, al límite de la suma, diferencia, producto y cociente de

---

1 Este resultado indica que *si el cociente de dos variables es constante, el cociente de los límites de las variables es igual á dicha constante.*

Puede considerarse este teorema como una generalizacion del de los límites, pues si $\frac{a}{b} = 1$, esto es, si $a = b$, será $\frac{A}{B} = 1$ ó $A = B$.

los números conmensurables que tienen por límites los inconmensurables propuestos.

241. TEOREMA. *Siempre que tengamos una igualdad en cuyos miembros entren sumas, diferencias, productos ó cocientes de números conmensurables variables, y la igualdad sea cierta para todos los valores sucesivos de estos, podremos sustituir cada variable por su límite respectivo, sin que la igualdad se altere.*

En efecto: siendo constantemente iguales los dos miembros, sus límites lo son tambien. Al tomar estos, las sumas, diferencias, productos ó cocientes que encierre cada miembro, tendrán por límites otras sumas, diferencias, productos ó cocientes, y los términos de cada una de estas operaciones serán sustituidos por sus límites respectivos, en virtud de los teoremas de los números 236, 237, 238 y 239.

Luego la única variacion que experimenta la igualdad, es el cambio de las variables por sus respectivos límites.

EJEMPLOS.

1.º Si a, b, c, m son cantidades variables y a', b', c', m' sus límites respectivos, tendremos siempre la igualdad

$$(a+b+c)\,m = am + bm + cm,$$

luego los límites de los dos miembros serán iguales [235]; pero el límite del primer miembro es [238 y 236]

$$(a'+b'+c')\,m';$$

y el del segundo

$$a'\,m' + b'\,m' + c'\,m',$$

luego $(a'+b'+c')\,m' = a'\,m' + b'\,m' + c'\,m'$.

2.º Sean a, b, c, d varias cantidades variables, y $a', b', c'\,d'$, sus límites.

Tendremos siempre

$$abcd = bcad;$$

pero el límite de $abcd$ es $a'\,b'\,c'\,d'$, y el de $bcad$ es $b'\,c'\,a'\,d$; luego $a'\,b'\,c'\,d' = b'\,c'\,a'\,d'$.

Siguiendo igual método, es fácil evidenciar que *todos los teoremas demostrados en el artículo VI del primer capítulo del libro anterior para números conmensurables, son igualmente ciertos para los números inconmensurables.*

CAPÍTULO SEGUNDO.

RAIZ CUADRADA.

I.—Raiz cuadrada de los números enteros.

242. Hemos dicho [70] que cuadrado de un número es el producto de multiplicar dicho número por sí mismo.

Así, el cuadrado de 8 es 8 . 8 ó 64.

RAIZ CUADRADA *de un número es otro número cuyo cuadrado es igual al primero.*

Así, la raiz cuadrada de 64 es 8, porque $8^2 = 64$.

Para expresar la raiz cuadrada de un número se emplea el *signo radical* $\sqrt{}$, que se lee *raiz cuadrada de.*

La raiz cuadrada de 36 se expresa por $\sqrt{36}$.

Los cuadrados de los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

son respectivamente

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Recíprocamente, las raices cuadradas de los números de la segunda línea, son los corrrespondientes en la primera.

243. Es evidente que cuanto mayor es un número, mayor es su cuadrado; por consiguiente *cuanto mayor sea un número, su raiz cuadrada será mayor.*

Siendo 10 la raiz cuadrada de 100, la de un número menor que 100 será menor que 10; por lo tanto, entre los números menores que 100 solo hay nueve cuya raiz sea un número entero, y se concibe que entre los mayores existen muchos cuya raiz no es un número entero.

TEOREMA. *Si la raiz cuadrada de un número entero no es otro entero, tampoco será un número fraccionario.*

Si la raiz fuese el número fraccionario $\frac{a}{b}$, que supondremos reducido á su mas simple expresion, el cuadrado $\frac{a^2}{b^2}$ seria igual al número dado: pero siendo $\frac{a}{b}$ una fraccion irreducible, a y b

son primos entre sí; luego a^2 y b^2 tambien lo son [117], y $\frac{a^2}{b^2}$ será una fraccion irreducible [144]; por consiguiente no puede ser igual al número propuesto.

Siendo imposible expresar estas raices por un número entero ó fraccionario, son *inconmensurables* con la unidad á que se refiere el número, y no pueden hallarse exactamente.

244. Raiz cuadrada entera *de un número es la raiz exacta del mayor cuadrado entero contenido en dicho número.*

El exceso del número dado sobre el mayor cuadrado entero contenido en él, se llama residuo.

La raiz entera de 87 es 9, porque el mayor cuadrado entero contenido en 87 es 81, cuya raiz exacta es 9; el residuo es $87 - 81 = 6$.

De las definiciones dadas se deduce: 1.° *Todo número es igual al cuadrado de su raiz cuadrada exacta.* 2.° *Todo número es igual al cuadrado de su raiz cuadrada entera, mas el residuo.*

Teorema. *La diferencia entre la raiz entera de un número y la exacta, es menor que una unidad.*

Si el número es 75, por ejemplo, estará comprendido entre dos cuadrados enteros consecutivos 64 y 81, luego su raiz estará comprendida entre las raices 8 y 9 de dichos cuadrados: estas raices se diferencian en una unidad; por consiguiente $\sqrt{75}$ difiere de cualquiera de ellas en menos de una unidad.

245. En la extraccion de la raiz cuadrada entera de un número entero, distinguiremos dos casos: 1.° que el número sea menor que 100; 2.° que sea mayor.

246. Primer caso. Si el número es menor que 100, se hallará fácilmente su raiz entera examinando los cuadrados de los diez primeros números

Estos cuadrados deben saberse de memoria.

247. Teorema. *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, mas el duplo del producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo.*

Sea a el primer número y b el segundo; la suma de los dos será $a + b$, y su cuadrado $(a + b)^2$.

Tenemos

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a\,.\,a + a\,.\,b + b\,.\,a + b\,.\,b =$$
$$a^2 + ab + ab + b^2$$

ó sea
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Lo que demuestra el teorema.

248. Corolario. Todo número mayor que 10 es igual á sus decenas mas sus unidades; luego

El cuadrado de un número mayor que 10 *consta de tres partes ó sumandos:* 1.ª *cuadrado de las decenas;* 2.ª *duplo del producto de las decenas por las unidades;* 3.ª *cuadrado de las unidades.*

Si el número es 67 se descompone en $60+7$, y su cuadrado será $60^2+2\,.\,60\,.\,7+7^2$.

249. Segundo caso. Propongámonos ya extraer la raiz cuadrada de un número mayor que 100, y principiemos por uno que solo tenga tres ó cuatro cifras, 7849 por ejemplo.

Como este número es mayor que 100, su raiz es mayor que 10, y siendo todo número igual al cuadrado de su raiz entera mas el residuo, 7849 se compone del cuadrado de las decenas de dicha raiz, del duplo de las decenas por las unidades, del cuadrado de las unidades, y del residuo, si lo hay.

El cuadrado de las decenas es un número justo de centenas, pues debe terminar en dos ceros, las que estarán comprendidas en las 78 centenas del número dado; luego la raiz entera de 78 no será menor que la cifra de las decenas de la raiz. Tampoco puede ser mayor, porque si son a las decenas de la raiz. ésta es cuando mas igual á a decenas mas nueve unidades; y si la raiz entera de 78 centenas fuese a decenas mas una decena, tendríamos que la raiz de 7800 seria mayor que la de 7849, lo que es imposible [243]; luego

Extrayendo la raiz cuadrada entera de las centenas de un número, se obtienen las decenas de su raiz.

La raiz entera de 78 es 8.

Restando de 7849 el cuadrado de 8 decenas, ó sea 64 centenas, la diferencia 1449 se compone del duplo de 8 decenas multiplicado por las unidades de la raiz, del cuadrado de éstas y del residuo.

El duplo del producto de las decenas por las unidades es un número exacto de decenas, pues terminará en un cero, y debiendo estar contenido en 1449, lo estará en las 144 decenas del resto; luego dividiendo 144 por el duplo de las decenas, el cociente no será menor que la cifra de las unidades de la raiz; pero podrá ser mayor.

Nada se opone, en efecto, á que el cuadrado de las unidades, mas el residuo, compongan un número de decenas igual ó mayor que el duplo de las decenas de la raiz; y cuando esto suceda, el cociente será mayor que la cifra de las unidades.

Dividiendo 144 por 16, duplo de las decenas de la raiz, el cociente es 9, y como esta cifra puede ser mayor que la de las unidades, es necesario comprobarla.

Para esto, elevaremos la raiz hallada 89 al cuadrado, y si obtenemos un número igual ó menor que 7849, la raiz hallada será la verdadera; y restando su cuadrado del número propuesto, obtendremos el residuo de la operacion.

Pero habiendo restado ya de 7849 el cuadrado de las decenas, lo que ha dado 1449, se obtendrá mas fácilmente el residuo restando de 1449 el duplo de decenas por unidades y el cuadrado de éstas, esto es, $2 . 80 . 9 + 9^2 = 1521$.

Siendo este número mayor que 1449, el cuadrado de 89 es mayor que 7849; luego la cifra 9 es mayor que la verdadera.

Disminuyéndola en una unidad, y comprobando la cifra 8, será $2 . 80 . 8 + 8^2 = 1344$, número menor que 1449; luego 8 es la cifra de las unidades, y $1449 - 1344 = 105$ el residuo de la operacion.

Obsérvese que

$$2 . 80 . 8 + 8^2 = (2 . 80 + 8) \times 8,$$

y que terminando 2 . 80 en un cero, la suma $2 . 80 + 8$ se formará escribiendo las unidades á la derecha del duplo de las decenas; si multiplicamos el número 168, que resulta, por las unidades, tendremos el duplo de decenas por unidades mas el cuadrado de éstas.

La disposicion práctica de la operacion es como sigue.

```
78.4 9 | 88
64 0 0 |----
------ |
14 4.9 | 168
13 4 4 |
------ |
 1 0 5 |
```

Supongamos, ahora, que el número tenga cinco ó seis cifras, y sea por ejemplo 326517.

```
32.6 5.1 7 | 571
25 0 0     |-----
--------   |
 7 6.5     | 107
 7 4 9     |
--------   |
   1 6 1.7 | 1141
   1 1 4 1 |
--------   |
     4 7 6 |
```

Segun hemos demostrado anteriormente, la raiz cuadrada entera de 3265 centenas es igual á las decenas de la raiz.

Como 3265 tiene cuatro cifras, sabemos extraer su raiz cuadrada entera, que es 57.

Restando del número dado el cuadrado de 57 decenas, la diferencia será el duplo de 57 decenas por las unidades de la raiz, mas el cuadrado de éstas, mas el residuo; por consiguiente, dividiendo las decenas de dicha diferencia por el duplo de 57, el cociente será la cifra de las unidades, ó una cifra mayor.

Pero al extraer la raiz de 3265, hemos restado de este número el cuadrado de 57, obteniendo la diferencia 16; y como el cuadrado de 57 decenas se forma agregando dos ceros á la derecha del cuadrado de 57, resulta que para obtener la diferencia entre 326517 y el cuadrado de 57 decenas, basta colocar á la derecha del resto 16 las dos últimas cifras del número propuesto, esto es, el 1 y el 7.

Dividiendo las 161 decenas del resto por 114, duplo de las decenas de la raiz, obtenemos 1 para cifra de las unidades, y comprobándola por el método del ejemplo anterior, vemos que es la verdadera.

Haciendo extensivo este razonamiento á un número de 8 cifras, despues á uno de diez etc., veriamos que el procedimiento de los ejemplos anteriores puede aplicarse á cualquier número.

Para hallar la primera cifra de la raiz hemos dividido el número dado en grupos de dos cifras, empezando por la derecha, y extraido la raiz entera del primer grupo de la izquierda; las cifras restantes se han obtenido por medio de divisiones. Se forma el primer dividendo restando del primer grupo el cuadrado de la primera cifra de la raiz, considerada como unidades simples, colocando á la derecha del resto el grupo siguiente, y separando con un punto las decenas del número que se forma. Los dividendos restantes se han obtenido colocando á la derecha del resto anterior el grupo correspondiente, y separando una cifra.

Todas las consideraciones anteriores conducen á la siguiente regla:

Para extraer la raiz cuadrada entera de un entero mayor que 100, *se divide el número en grupos de dos cifras, empezando por la derecha: se extrae la raiz entera del primer grupo de la izquierda que podrá tener una sola cifra, lo que da la primera de la raiz. El cuadrado de esta cifra se resta del primer grupo, y á la derecha del resto se coloca el segundo: se separan las unidades del número que se forma, y se dividen las decenas por el duplo de la primera cifra de la raiz, lo que da otra cifra, que debe comprobarse: para esto, se escribe la cifra que se comprueba* *á la derecha del duplo de la raiz hallada, y el número que resulta se multiplica por dicha cifra; si el producto puede restarse del dividendo seguido de la cifra separada, la que se comprueba es la segunda de la raiz, y se coloca por tanto á la derecha de la primera; pero si la sustraccion es imposible, se disminuye la cifra comprobada en una unidad, y la nueva cifra se somete á idéntica comprobacion, continuando así hasta que la sustraccion sea posible: una vez efectuada, se coloca á la derecha del resto el tercer grupo, se dividen las decenas del número que se forma por el duplo de la raiz hallada, y se comprueba el cociente como el anterior, continuando del mismo modo hasta emplear el último grupo. El último resto es el residuo de la operacion.*

Si algun dividendo es menor que el divisor respectivo, se pone un cero en la raiz, se baja el grupo siguiente, y se continúa la operacion por el método ordinario.

Obsérvese que la raiz tiene tantas cifras como grupos resultan en el número.

250. Teorema. *La diferencia entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos, es igual al duplo del menor mas una unidad.*

Si a es el menor de los números, $a+1$ será su consecutivo.

El cuadrado de $a+1$ es

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

y el cuadrado de a es a^2; luego la diferencia entre estos cuadrados es $2a+1$, esto es, el duplo del menor mas uno.

251. Corolario. *El residuo de la raiz cuadrada de un número, es menor que el duplo de dicha raiz mas una unidad.*

Si a es la raiz entera de un número, será éste mayor que a^2 y menor que $(a+1)^2$; la diferencia entre estos cuadrados es $2a+1$; luego el exceso del número dado sobre a^2, esto es el residuo, es menor que $2a+1$.

Lo cual debíamos demostrar.

Segun esto, cuando un residuo sea mayor que el duplo de la raiz hallada, ésta será menor que la verdadera, y deberá aumentarse la última cifra en una unidad.

En la práctica, al hallar una cifra de la raiz por medio de la division, se toma con frecuencia para dicha cifra un número menor que el cociente, á fin de disminuir el número de comprobaciones. Esta precaucion, conveniente en la mayor parte de los casos, es causa, algunas veces, de que la cifra elegida por tanteo sea menor que la verdadera, lo que se conoce fácilmente comparando el residuo con el duplo de la raiz.

252. Sabemos ya extraer la raiz cuadrada de un número entero, con un error menor que una unidad; pero esta aproximacion es insuficiente en la generalidad de los casos, por lo que vamos á ocuparnos en extraer la raiz de un número entero, con un error tan pequeño como se quiera.

Debemos, para esto, demostrar ántes el siguiente

Teorema. *La raiz cuadrada de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices cuadradas de los factores.*

Sea el producto abc.

Queremos demostrar que

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.$$

En efecto: $\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}$ será la raiz del producto abc, siempre que elevándola al cuadrado resulte abc; pero

$$(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c})^2=(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c})\times(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c})=$$
$$\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}=\sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{c}=abc.$$

Luego el teorema enunciado es cierto.

253. Problema. *Extraer la raiz cuadrada del entero* N *con un error menor que* $\frac{1}{n}$.

Segun el teorema anterior, tenemos

$$\sqrt{N.n^2}=\sqrt{N}\cdot\sqrt{n^2}=\sqrt{N}.\,n;$$

partiendo por n los dos miembros de esta igualdad, será

$$\frac{\sqrt{N.n^2}}{n}=\sqrt{N}.$$

La raiz cuadrada de $N.n^2$ está comprendida entre dos enteros consecutivos m y $m+1$, luego su cociente por n lo estará entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$; y como la diferencia entre estas fracciones es $\frac{1}{n}$, la primera de ellas $\frac{m}{n}$ será la raiz cuadrada de N, con un error menor que $\frac{1}{n}$.

Este error será tan pequeño como queramos, puesto que siendo n suficientemente grande, la fraccion $\frac{1}{n}$ será menor que cualquiera cantidad asignable.

Observando que la fraccion $\frac{m}{n}$ se obtiene partiendo por n la raiz entera de $N \cdot n^2$, podremos enunciar la regla siguiente:

Para hallar la raiz cuadrada de un entero, con un error menor que una unidad fraccionaria dada, se multiplica el entero por el cuadrado del denominador de la unidad fraccionaria, se extrae la raiz entera del producto y se divide por dicho denominador.

Ejemplo. Extraer la raiz cuadrada de 236 con un error menor que $\frac{1}{13}$.

Multiplicando 236 por 13^2 resulta 39884; la raiz entera de este número es 199; luego la raiz pedida es $\frac{199}{13}$.

254. Si la unidad fraccionaria dada es decimal, por ejemplo 0.001, se obtendrá el cuadrado del denominador 1000 con solo duplicar el número de ceros: el producto del número dado por este cuadrado se obtiene añadiendo los ceros á la derecha del número, y finalmente la division por el denominador se efectúa colocando la coma en el lugar correspondiente; luego

Para hallar la raiz cuadrada de un número, con un error menor que una unidad decimal, se añade á la derecha del número dos veces tantos ceros como tiene el denominador de la unidad decimal, se extrae la raiz cuadrada entera del número que resulta, y de la derecha de dicha raiz se separan tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador de la unidad dada.

Ejemplo. Extraer la raiz cuadrada del número 345 con un error menor que 0,01.

Colocaremos *cuatro* ceros á la derecha del número, y extrayendo la raiz entera de 3450000, obtendremos 1857; luego la raiz buscada es 18,57.

II.—Raiz cuadrada de los números fraccionarios.

255. TEOREMA. *La raiz cuadrada de un quebrado, es igual á la raiz del numerador partida por la raiz del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$, cuyos términos son enteros.

Vamos á demostrar que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

En efecto: los términos del segundo miembro serán números conmensurables ó inconmensurables, segun que a y b sean cuadrados ó no lo sean; pero en todos los casos tenemos [241]

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\,.\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,.\sqrt{b}}=\frac{a}{b}.$$

Luego $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ es la raiz cuadrada de $\frac{a}{b}$.

256. Teorema. *Para que la raiz de un quebrado irreducible sea un número conmensurable, se necesita y basta que los dos términos del quebrado sean cuadrados.*

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$.

Su raiz cuadrada no es un número entero, porque el cuadrado de un número entero seria otro entero y no podria ser igual á la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$.

Para que dicha raiz sea un quebrado $\frac{a'}{b'}$, que siempre puede hacerse irreducible, es necesario que el cuadrado de $\frac{a'}{b'}$ sea igual á $\frac{a}{b}$, y como el cuadrado $\frac{a'^2}{b'^2}$ es tambien irreducible, es necesario que se verifiquen las igualdades

$$a=a'^2,\qquad b=b'^2,\quad [146]$$

esto es, que a y b sean cuadrados.

La condicion enunciada es tambien suficiente, pues si el quebrado es $\frac{25}{49}$, su raiz cuadrada es $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7}$.

257. Teorema. *Si el numerador de un quebrado no es cuadrado, y el denominador lo es, partiendo la raiz entera del numerador por la exacta del denominador, se obtiene la raiz del quebrado con un error menor que la unidad dividida por la raiz del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{70}{49}$.

Su raiz cuadrada es $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{70}}{7}$; la raiz del numerador está comprendida entre 8 y 9, luego la del quebrado lo estará entre $\frac{8}{7}$ y $\frac{9}{7}$; por tanto $\frac{8}{7}$ será la raiz del quebrado propuesto, con un error menor que $\frac{1}{7}$.

Siempre se puede conseguir que el denominador de una fraccion sea cuadrado, multiplicando los dos términos por dicho denominador. Extrayendo la raiz cuadrada del quebrado que resulta, se obtiene la del propuesto, con un error menor que la unidad partida por el denominador de éste.

Si tenemos, por ejemplo, el quebrado $\frac{7}{15}$, multiplicando por 15 sus dos términos, resulta el quebrado equivalente $\frac{7 \cdot 15}{15^2}$. La raiz entera 10 del numerador partida por la exacta 15 del denominador da $\frac{10}{15}$ para raiz de $\frac{7}{15}$, con un error menor que $\frac{1}{15}$.

258. Propongámonos extraer la raiz cuadrada de una fraccion decimal.

Escribiendo estas fracciones en forma de quebrado ordinario, pueden aplicarse á ellas las reglas anteriores.

Si la fraccion tiene un número par de cifras decimales, su denominador es cuadrado; y si el número de cifras decimales es impar, se hará par añadiendo un cero á la derecha.

Sea el número decimal 3,7543.

Dándole forma de quebrado ordinario es $\frac{37543}{10000}$.

La raiz entera 193 del numerador partida por 100, da 1,93 para raiz del número dado, con un error menor que 0,01.

Si el número dado es 5,235, añadiendo un cero á su derecha será 5,2350; y la raiz se obtendrá como en el ejemplo anterior.

Así diremos: la raiz entera de 52350 es 228, luego la del número dado es 2,28.

De lo expuesto se deduce que

Para extraer la raiz cuadrada de un número decimal, se aña-

de un cero á su derecha, si el número de cifras decimales es impar, se prescinde de la coma, se halla la raiz entera del número entero que resulta, y se separa en la raiz una cifra decimal por cada dos de las que tiene el número. El error que se comete es menor que una unidad del último órden decimal de la raiz.

Agregando ceros á la parte decimal de un número dado, puede tener éste cuantas cifras se desee, y como cada dos de ellas originan una en la raiz, la aproximacion podrá ser tan grande como queramos.

En la práctica se añaden los ceros á los residuos, sin ponerlos antes á la derecha del número.

Ejemplo. Hallar la raiz cuadrada de 8,5 con un error menor que 0,001.

Para conseguir esta aproximacion, necesitamos llegar en la raiz á la cifra de las milésimas.

La operacion se dispone del modo siguiente.

8,5 0	2,915
4 5.0	4 9
90.0	5 81
31 90.0	5 825
2 77 5	

La raiz es 2,915.

259. La raiz de un quebrado ordinario puede obtenerse convirtiéndole préviamente en decimal, y hallando la raiz de éste.

Si la decimal equivalente fuese periódica, se tomarian dos cifras decimales por cada una de las que hubiese de tener la raiz.

Ejemplo. Hallar la raiz de $\frac{4}{3}$ con un error menor que 0,001.

Convirtiendo la fraccion dada en decimal, se obtiene

$$\frac{4}{3} = 1{,}333.....$$

Puesto que se pide aproximacion hasta milésimas, la raiz deberá tener tres cifras decimales, y el número el doble, ó sean seis.

1,3 3.3 3.3 3	1,154
3.3	2 1
1 2 3.3	2 25
1 0 8 3.3	2 304
1 6 1 7	

Por último, la raiz cuadrada de un número mixto se obtiene reduciéndole á quebrado y extrayendo la raiz de éste.

260. PROBLEMA. *Hallar una media proporcional entre dos números* a *y* b.

Sabemos que la media factorial entre a y b es una cantidad x, tal que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

de esta igualdad fraccionaria se deduce

$$x^2 = ab,$$

y extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros, será

$$x = \sqrt{ab};$$

luego *para hallar una media factorial ó proporcional entre dos números, se extrae la raiz cuadrada del producto de dichos números.*

Ejemplo. Hallar la media factorial entre 120 y 30.

Segun la regla anterior

$$x = \sqrt{120 \,.\, 30} = \sqrt{3600}, \quad \text{ó} \quad x = 60.$$

CAPÍTULO TERCERO.

RAIZ CÚBICA.

I.—Raiz cúbica de los números enteros.

261. Sabemos [70] que cubo de un número es el producto de multiplicar dicho número por sí mismo dos veces.

Así, el cubo de 4 es 4 . 4 . 4 ó 64.

RAIZ CÚBICA *de un número es otro número cuyo cubo es igual al primero.*

Así, la raiz cúbica de 64 es 4; porque $4^3 = 64$.

Para expresar la raiz cúbica de un número, se emplea el signo $\sqrt[3]{}$, que se lee *raiz cúbica de.*

La raiz cúbica de 27 se expresa por $\sqrt[3]{27}$.

El número 3 que acompaña al radical, se llama *índice.*

Los cubos de los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

son respectivamente

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Recíprocamente, las raices cúbicas de los números de la segunda línea, son los correspondientes en la primera.

262. Es evidente que cuanto mayor es un número, mayor es su cubo: por consiguiente, *cuanto mayor sea un número, mayor será su raiz cúbica.*

Siendo 10 la raiz cúbica de 1000, la de un número menor que 1000 será menor que 10; por consiguiente, entre los números menores que 1000 solo hay nueve cuya raiz cúbica sea exactamente un número entero, y se concibe que entre los mayores existen muchos cuya raiz no es un número entero.

TEOREMA. *Si la raiz cúbica de un número entero no es otro entero, tampoco será un número fraccionario.*

Si la raiz fuese el número fraccionario $\frac{a}{b}$, que supondremos reducido á su mas simple expresion, el cubo $\frac{a^3}{b^3}$ seria igual al número dado; pero siendo $\frac{a}{b}$ una fraccion irreducible, a y b son primos entre sí; luego a^3 y b^3 tambien lo son [117], y $\frac{a^3}{b^3}$ será una fraccion irreducible [144]; por consiguiente no puede ser igual al número propuesto.

Siendo imposible expresar estas raices por un número entero ó fraccionario, son *inconmensurables* con la unidad á que se refiere el número dado, y no pueden hallarse exactamente.

263. RAIZ CÚBICA ENTERA *de un número es la raiz exacta del mayor cubo entero contenido en el número.*

El exceso del número dado sobre el mayor cubo contenido en él, se llama *residuo.*

La raiz cúbica entera de 284 es 6, porque el mayor cubo entero contenido en 284 es 216, cuya raiz exacta es 6.

El residuo es $284 - 216 = 68$.

De las definiciones dadas se deduce: 1.° *Todo número es igual al cubo de su raiz cúbica exacta.* 2.° *Todo número es igual al cubo de su raiz cúbica entera, mas el residuo.*

TEOREMA. *La diferencia entre la raiz cúbica entera de un número y la exacta, es menor que una unidad.*

Si el número es 80, por ejemplo, estará comprendido entre dos cubos enteros consecutivos 64 y 125; luego su raiz estará comprendida entre las raices 4 y 5 de dichos cubos: estas raices se diferencian en una unidad, por tanto $\sqrt[3]{80}$ difiere de cualquiera de ellas en menos de una unidad.

264. En la extraccion de la raiz cúbica entera de un número entero, distinguiremos dos casos: 1.° que el número sea menor que 1000; 2.° que sea mayor que 1000.

265. PRIMER CASO. Si el número dado es menor que 1000, se hallará fácilmente su raiz entera, examinando los cubos de los diez primeros números que deben saberse de memoria.

266. TEOREMA. *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo.*

Sea a el primer número y b el segundo; la suma de los dos será $a+b$, y su cubo $(a+b)^3$.

Ahora bien, $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2 (a+b)$; y como [247] $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, será $\quad (a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b);$

efectuando esta multiplicacion indicada, tendremos

$$(a+b)^3=a^2.a+a^2.b+2ab.a+2ab.b+b^2.a+b^2.b;$$

ó $\quad (a+b)^3=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3,$

y por último

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Lo que demuestra el teorema.

267. Corolario. Todo número mayor que 10 es igual á sus decenas mas sus unidades; luego

El cubo de un número mayor que 10 *consta de cuatro partes*: 1.ª *cubo de las decenas;* 2.ª *triplo del cuadrado de las decenas por las unidades;* 3.ª *triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades;* 4.ª *cubo de las unidades.*

Si el número es 47, se descompone en $40+7$; y su cubo será

$$40^3+3.40^2.7+3.40.7^2+7^3.$$

268. Segundo caso. Propongámonos ya extraer la raiz cúbica de un número mayor que 1000, y principiemos por uno que tenga cuatro, cinco ó seis cifras, por ejemplo 304215.

Como este número es mayor que 1000, su raiz es mayor que 10; y componiéndose todo número del cubo de su raiz entera y del residuo, el propuesto constará del cubo de las decenas de la raiz, del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, del cubo de las unidades, y del residuo, si lo hubiese.

El cubo de las decenas es un número justo de millares, pues debe terminar en tres ceros, los que estarán comprendidos en los 304 millares del número dado; luego la raiz entera de 304 no será menor que la cifra de las decenas de la raiz. Tampoco puede ser mayor, porque si son a las decenas de la raiz, ésta es cuando mas igual á a decenas mas nueve unidades; y si la raiz entera de 304 millares fuese a decenas mas una decena, tendríamos que la raiz de 304000 seria mayor que la de 304215, lo que es imposible [262]; luego

Extrayendo la raiz entera de los millares de un número, se obtienen las decenas de la raiz.

La raiz entera de 304 es 6.

Restando del número propuesto el cubo de 6 decenas, ó sea 216 millares, la diferencia 88215 se compone del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, del cubo de las unidades y del residuo.

El cuadrado de las decenas de la raiz es un número exacto de centenas; luego el triplo de este cuadrado multiplicado por las unidades, es un número exacto de centenas, que debiendo estar contenidas en 88215, lo estarán en las 882 centenas de este resto; luego dividiendo 882 por el triplo del cuadrado de la cifra 6, el cociente no será menor que la cifra de las unidades de la raiz; pero podrá ser mayor.

Nada se opone, en efecto, á que el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, el cubo de éstas y el residuo, compongan un número de centenas igual ó mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raiz, y cuando esto suceda, el cociente será mayor que la cifra de las unidades.

Dividiendo 882 por $3 \,.\, 6^2 = 108$, el cociente es 8, y como esta cifra puede ser mayor que la de las unidades, es necesario comprobarla.

Para esto elevaremos la raiz hallada 68 al cubo: si obtenemos un número igual ó menor que el propuesto, la raiz hallada será la verdadera; y restando su cubo del número propuesto, obtendremos el residuo de la operacion.

Pero habiendo restado ya de 304215 el cubo de las decenas, lo que ha dado 88215, se obtendrá mas fácilmente el residuo restando de 88215 el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades, ó sea

$$3 \,.\, 60^2 \,.\, 8 + 3 \,.\, 60 \,.\, 8^2 + 8^3 = 98432.$$

Como este número es mayor que 88215, el cubo de 68 excede á 304215; luego la cifra 8 es mayor que la verdadera.

Comprobemos la cifra 7.

$$3 \,.\, 60^2 \,.\, 7 + 3 \,.\, 60 \,.\, 7^2 + 7^3 = 84763 < 88215;$$

luego 7 es la cifra de las unidades, y $88215 - 84763 = 3452$ el residuo.

La suma $3 \,.\, 60^2 \,.\, 7 + 3 \,.\, 60 \,.\, 7^2 + 7^3$, puede obtenerse por un procedimiento bastante breve.

En efecto: separando el factor 7, comun á todos los sumandos, dicha suma adquiere la forma

$$(3 \,.\, 60^2 + 3 \,.\, 60 \,.\, 7 + 7^2) \times 7: \qquad [1]$$

de los sumandos contenidos en el paréntesis, conocemos el primero $3 \,.\, 60^2$; en cuanto á la suma de los otros dos, puede escribirse de este modo:

$$(3 \,.\, 60 + 7) \times 7. \qquad [2]$$

Para hallar el valor de $3 \,.\, 60 + 7$, basta evidentemente multiplicar 3 por 6, y en vez del cero que debe añadirse, colocar á la derecha de 18 el 7, de modo que

$$3 \,.\, 60 + 7 = 187.$$

Multiplicando este número por 7, se halla el valor efectuado de la expresion [2], que es 1309; añadiendo á éste el valor conocido de $3 \,.\, 60^2 = 10800$, y multiplicando la suma 12109 por 7, resulta el valor efectuado de la expresion [1].

La disposicion práctica de la operacion es como sigue:

304.2 15	67
216 0 00	
88 2.15	108
84 7 63	
3 4 52	

Comprobacion de la cifra 8.

```
  188
    8
 ----
 1504
 108
-----
12304
    8
-----
98432
```

Comprobacion de la cifra 7.

```
  187
    7
 ----
 1309
 108
-----
12109
    7
-----
84763
```

Supongamos ahora que el número dado tenga 7, 8 ó 9 cifras, por ejemplo, 564237981.

564.2 37.981	826
512.0 00	
52 2.37	192
39 3 68	
12 8 69 9.81	20172
12 1 91 9 76	
6 78 0 05	

Comprobacion de la cifra 2.	Comprobacion de la cifra 6.
242	2466
2	6
484	14796
192	20172
19684	2031996
2	6
39368	12191976

Segun hemos demostrado anteriormente, la raiz cúbica entera de 564237 millares es igual á las decenas de la raiz.

Como 564237 tiene seis cifras, sabemos extraer su raiz entera, que es 82.

Restando del número dado el cubo de 82 decenas, la diferencia será el triplo del cuadrado de 82 decenas por las unidades de la raiz, mas el triplo de 82 decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de éstas, mas el residuo; por consiguiente dividiendo las centenas de dicha diferencia por el triplo del cuadrado de 82, el cociente será la cifra de las unidades ó una mayor.

Al extraer la raiz de 564237 millares, hemos restado de este número el cubo de 82, obteniendo la diferencia 12869; y como el cubo de 82 decenas se forma agregando tres ceros á la derecha del cubo de 82, resulta que para obtener la diferencia entre el número dado y el cubo de 82 decenas, basta colocar á la derecha del resto 12869 las tres últimas cifras del número propuesto, esto es 981.

Dividiendo las 128699 centenas del resto por 20172, triplo del cuadrado de 82, obtenemos 6 para cifra de las unidades; y comprobándola por el método expuesto en el ejemplo anterior, veremos que es la verdadera.

Haciendo extensivo este razonamiento á números de mas de nueve cifras, veríamos que el procedimiento de los ejemplos anteriores puede aplicarse á cualquier número.

Para hallar la primera cifra de la raiz, hemos dividido el número dado en grupos de tres cifras, empezando por la derecha, y extraido la raiz del primer grupo de la izquierda. Las cifras restantes se obtienen por medio de divisiones: el primer dividendo se forma restando del primer grupo el cubo de la primera cifra de la raiz, colocando á la derecha del resto el grupo siguiente, y separando con un punto las centenas del número que se forma; los dividendos siguientes se obtienen tambien colocando á la derecha del resto anterior el grupo correspondiente, y separando las centenas del número que resulta.

Las consideraciones anteriores justifican la siguiente regla:

Para extraer la raiz cúbica entera de un número mayor que 1000, *se divide el número en grupos de tres cifras, empezando por la derecha: se extrae la raiz cúbica del primer grupo de la izquierda, que podrá tener una ó dos cifras, lo que da la primera de la raiz: el cubo de esta cifra se resta del primer grupo, y á la derecha del resto se coloca el segundo: del número que se forma, se separan dos cifras de la derecha, y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raiz, se obtiene otra que debe comprobarse: para esto, se escribe á la derecha del triplo de la raiz hallada la cifra que se comprueba, el número que se forma se multiplica por esta cifra, se añade al producto el triplo del cuadrado de la raiz hallada, considerado como centenas, y se multiplica la suma por la cifra que se comprueba: si el resultado puede restarse del dividendo, seguido de las dos cifras separadas, la que se comprueba es la segunda de la raiz, y se colocará por tanto á la derecha de la primera; pero si la sustraccion es imposible, se disminuye la cifra comprobada en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo modo que la primera, continuando así hasta que la sustraccion sea posible: una vez efectuada, se coloca á la derecha del resto el tercer grupo, se separan dos cifras de la derecha, se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y se comprueba el cociente, continuando del mismo modo hasta emplear el último grupo. El último resto será el residuo de la operacion.*

Si alguno de los dividendos es menor que el divisor respectivo, se pondrá en la raiz un cero, y bajando el grupo siguiente, se continuará la operacion de la manera ordinaria.

Obsérvese que la raiz tiene tantas cifras como grupos hayan resultado al dividir el número.

269. Teorema. *La diferencia entre los cubos de dos enteros consecutivos, es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor, mas una unidad.*

Si a es el menor de los números, $a+1$ será el otro.

El cubo de $a+1$ es

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1,$$

y el cubo de a es a^3; luego la diferencia entre estos cubos es $3a^2 + 3a + 1$, lo cual debiamos demostrar.

270. Corolario. *El residuo de la raiz cúbica de un número, es menor que el triplo del cuadrado de su raiz entera, mas el triplo de esta raiz, mas una unidad.*

Si a es la raiz entera de un número, será éste mayor que a^3 y menor que $(a+1)^3$; la diferencia entre estos cubos es $3a^2+3a+1$, luego el exceso del número dado sobre a^3, esto es el residuo, es menor que $3a^2+3a+1$.

Segun esto, cuando un residuo sea mayor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma, ésta será menor que la verdadera, y deberá aumentarse la última cifra en una unidad.

En la práctica, al hallar una cifra de la raiz por medio de la division, se toma con frecuencia un número menor que el cociente, á fin de disminuir el número de comprobaciones. Esta precaucion es conveniente, pero origina algunas veces cifras menores que las verdaderas, lo que se conoce comparando el residuo con el triplo del cuadrado de la raiz mas el triplo de la misma.

271. Sabemos ya extraer la raiz cúbica de un número entero, con un error menor que una unidad; pero esta aproximacion es insuficiente en la generalidad de los casos, por lo que vamos á ocuparnos en extraer la raiz de un entero, con un error tan pequeño como se quiera.

A este fin demostraremos el siguiente

Teorema. *La raiz cúbica de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices cúbicas de los factores.*

Queremos demostrar que

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{b}\,.\,\sqrt[3]{c}\,.$$

En efecto: el segundo miembro de esta igualdad será la raiz cúbica de abc, si elevándole al cubo resulta abc. Pero el cubo del segundo miembro contendrá las raices cúbicas de a, b y c repetida cada una tres veces por factor, ó sea elevada al cubo; y como el cubo de la raiz cúbica de una cantidad es igual, segun la definicion, á dicha cantidad, resulta que el cubo del segundo miembro se compondrá de los factores a, b, c, ó será abc.

Lo que demuestra el teorema.

272. Problema. *Extraer la raiz cúbica del entero* N *con un error menor que* $\frac{1}{n}$.

Por el teorema anterior, tenemos

$$\sqrt[3]{N \cdot n^3} = \sqrt[3]{N} \cdot n;$$

partiendo los dos miembros de esta igualdad por n, será

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \cdot n^3}}{n}$$

La raiz cúbica de $N \cdot n^3$ está comprendida entre dos números enteros consecutivos m y $m+1$; luego su cociente por n, lo estará entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$; y como la diferencia entre estas fracciones es $\frac{1}{n}$, la primera $\frac{m}{n}$ será la raiz cúbica de N, con un error menor que $\frac{1}{n}$

Este error será tan pequeño como queramos, puesto que dando á n un valor suficientemente grande, la fraccion $\frac{1}{n}$ será menor que cualquiera cantidad asignable.

Observando que la fraccion $\frac{m}{n}$ se obtiene partiendo por n la raiz entera de $N \cdot n^3$. podremos enunciar la siguiente regla:

Para hallar la raiz cúbica de un entero, con un error menor que una unidad fraccionaria dada, se multiplica el entero por el cubo del denominador de la unidad fraccionaria, se extrae la raiz cúbica entera del producto y se divide por dicho denominador.

Ejemplo. Extraer la raiz cúbica de 24 con un error menor que $\frac{1}{9}$.

Multiplicando 24 por el cubo de 9, resulta 17496; la raiz cúbica entera de este número es 25; luego $\frac{25}{9}$ es la raiz cúbica de 24 con un error menor que $\frac{1}{9}$.

273. Si la unidad fraccionaria dada es decimal, por ejemplo 0,001, se obtiene el cubo de su denominador con solo triplicar el número de ceros; el producto del número dado por este cubo, se halla añadiendo los ceros á la derecha, y finalmente, para efectuar la division por el denominador, bastará colocar la coma en el lugar correspondiente; luego

Para hallar la raiz cúbica de un número con un error menor que una unidad decimal dada, se añaden á la derecha del número tres veces tantos ceros como tiene el denominador de la unidad decimal, se extrae la raiz cúbica entera del producto, y se separan en dicha raiz tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador de la unidad decimal.

Ejemplo. Hallar la raiz cúbica de 32 con un error menor que 0.01.

Colocaremos seis ceros á la derecha de 32; la raiz cúbica entera de 32000000 es 317; luego 3,17 es la raiz buscada.

II.—Raiz cúbica de los números fraccionarios.

274. Teorema. *La raiz cúbica de un quebrado es igual á la raiz cúbica del numerador partida por la del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$, cuyos términos son números enteros.

Vamos á demostrar que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

En efecto: los términos del segundo miembro serán números conmensurables ó inconmensurables, segun que a y b sean cubos ó no lo sean; pero en todos los casos tenemos [241]

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3} = \frac{a}{b}.$$

luego $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ es la raiz cúbica de $\frac{a}{b}$.

275. Teorema. *Para que la raiz cúbica de un quebrado irreducible sea un número conmensurable, se necesita y basta que los dos términos del quebrado sean cubos.*

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$.

Su raiz cúbica no puede ser un número entero, porque el cubo de éste seria tambien un número entero igual á $\frac{a}{b}$, lo que es imposible.

Para que dicha raiz sea un quebrado $\frac{a'}{b'}$, que siempre puede suponerse irreducible, es necesario que el cubo $\frac{a'^3}{b'^3}$ sea igual á $\frac{a}{b}$; y como dicho cubo es tambien un quebrado irreducible, es necesario que se verifiquen las igualdades

$$a = a'^3, \qquad b = b'^3,$$

esto es, que a y b sean cubos.

Si el quebrado es $\frac{343}{729}$, su raiz cúbica es $\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{7}{9}$; luego la condicion es tambien suficiente.

276. Teorema. *Si el numerador de un quebrado no es cubo, y el denominador lo es, partiendo la raiz entera del numerador por la exacta del denominador, se obtiene la raiz del quebrado, con un error menor que la unidad dividida por la raiz cúbica del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{80}{125}$.

Su raiz cúbica es $\frac{\sqrt[3]{80}}{5}$; pero la raiz cúbica de 80 está comprendida entre 4 y 5; luego la del quebrado lo estará entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{5}$; luego será $\frac{4}{5}$, con un error menor que $\frac{1}{5}$.

Siempre puede conseguirse que el denominador de una fraccion sea cubo, pues basta multiplicar los dos términos de la fraccion por el cuadrado del denominador. Extrayendo la raiz cúbica del quebrado que resulta, se obtiene la del propuesto con un error menor que la unidad dividida por su denominador.

Sea el quebrado $\frac{3}{7}$, cuyo denominador no es cubo.

Multiplicando sus dos términos por 7^2, resulta el quebrado equivalente $\frac{3 \,.\, 7^2}{7^3}$. La raiz cúbica entera del numerador es 5, y 7 la exacta del denominador; luego $\frac{5}{7}$ es la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$.

277. Propongámonos extraer la raiz cúbica de un número decimal.

Escribiendo estos números en forma de quebrados ordinarios, podemos aplicar á ellos las reglas anteriores. Si la parte decimal tiene un número de cifras múltiplo de 3, el denominador es cubo; y si el número de cifras decimales no es múltiplo de 3, se añade uno ó dos ceros.

Sea el número decimal 0,354279.

Convertido en quebrado ordinario es $\frac{354279}{1000000}$. La raiz del denominador es 100 exactamente; luego por medio de la regla del número anterior, obtendremos la raiz con un error menor que una centésima. Como la raiz entera del numerador es 70, la raiz buscada será 0,70.

Si el número decimal es 3,4562, añadiendo dos ceros á la parte decimal será 3,456200, y siguiendo como en el caso anterior hallaremos 1,53 con un error menor que 0,01.

De lo expuesto se deduce que

Para extraer la raiz cúbica de un número decimal, se añade uno ó dos ceros á su derecha, si el número de cifras decimales no es múltiplo de 3; se prescinde de la coma y se extrae la raiz entera del número que resulta; separando despues una cifra decimal por cada tres de las que tiene el número, se obtiene la raiz cúbica de éste, con un error menor que una unidad decimal del último órden hallado en la raiz.

Agregando ceros á la parte decimal de un número dado, se consigue que tenga cuantas cifras se quiera; y como cada tres de ellas dan una en la raiz, se podrá llevar la aproximacion al grado que se desee.

En la práctica no se agregan los ceros al número: basta añadir á los residuos tres ceros, por cada cifra decimal que deba tener la raiz.

Ejemplo. Hallar la raiz cúbica de 0,56 con un error menor que 0,001.

Necesitamos llegar en la raiz á la cifra de las milésimas.

La operacion se dispone del modo siguiente:

0,560	0,824
512	
480.00	192
393 68	
86 320.00	20172
81 082 24	
5 237 76	

La raiz es 0,824.

278. La raiz de un quebrado ordinario puede obtenerse tambien convirtiéndole préviamente en decimal, y hallando la raiz de éste.

Si la decimal equivalente es periódica, se toman tres cifras decimales por cada una de las que deba tener la raiz.

Ejemplo. Hallar la raiz cúbica de $\frac{7}{11}$ con un error menor que 0,01.

Tenemos $\frac{7}{11} = 0,6363.....$ Tomaremos seis cifras decimales, y será

0,636.3 63	0.86
512	
124 3.63	192
124 0 56	
3 07	

Por último, la raiz cúbica de un número mixto se obtiene reduciendo el mixto á quebrado, y extrayendo la raiz de éste.

EJERCICIOS.

I. Si á los términos de una fraccion, propia ó impropia, se añaden cantidades iguales y enteras, cuyo valor aumenta, el límite de los valores sucesivos de la fraccion es la unidad. Demostracion.

II. La suma de una cantidad conmensurable con la unidad y otra inconmensurable, es inconmensurable con la misma unidad. Demostracion.

III. La diferencia entre una cantidad conmensurable con la unidad y otra inconmensurable, es tambien inconmensurable con la unidad. Demostracion.

IV. La suma de dos cantidades inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

V. La diferencia entre dos cantidades inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

VI. El producto de un número inconmensurable por otro conmensurable, es inconmensurable. Demostracion.

VII. El cociente de un número inconmensurable por otro conmensurable, es inconmensurable. Demostracion.

VIII. El cociente de un número conmensurable por otro inconmensurable, es inconmensurable. Demostracion.

IX. El producto de dos números inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

X. El cociente de dos números inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

XI. Averiguar cuántos cuadrados enteros contienen los diez mil primeros números.

XII. Hallar la diferencia entre los cuadrados de dos números que difieren en media unidad.

XIII. Regla para conocer, á la simple inspeccion del residuo, si el error cometido al tomar la raiz entera de un número en lugar de la exacta, es mayor ó menor que media unidad.

XIV. Un número entero que termina en 2, 3, 7 ú 8, no tiene raiz cuadrada exacta. Demostracion.

XV. Un número primo no tiene raiz cuadrada exacta. Demostracion.

XVI. Si un número compuesto tiene alguno de sus factores primos con exponente impar, no puede tener raiz cuadrada exacta. Demostracion.

XVII. Todo entero terminado en un número impar de ceros, tiene raiz cuadrada inconmensurable. Demostracion.

XVIII. Si un número termina en 5, y la cifra de sus decenas no es 2, la raiz cuadrada de dicho número no puede ser exacta. Demostracion.

XIX. El cuadrado de un número impar, es un múltiplo de 8, mas una unidad. Demostracion.

Corolario. Si un número impar disminuido en una unidad no es múltiplo de 8, su raiz es inconmensurable.

XX. El cuadrado de un número, que no es múltiplo de 5, es igual á un múltiplo de 5, mas ó menos una unidad. Demostracion.

Corolario. Para que un número no divisible por 5 sea cuadrado, se necesita que aumentado ó disminuido en una unidad, resulte un múltiplo de 5.

XXI. Para que un quebrado cualquiera tenga raiz cuadrada exacta, es necesario y suficiente que el producto de sus dos términos sea un cuadrado. Demostracion.

XXII. Averiguar cuántos cubos enteros contienen los números menores que 1000001.

XXIII. Hallar la diferencia entre los cubos de dos números que difieren en media unidad.

XXIV. Regla para conocer si el error cometido al tomar la raiz cúbica entera de un número en lugar de la exacta, es mayor ó menor que media unidad.

XXV. Si alguno de los exponentes de los factores primos de un número no es múltiplo de 3, la raiz cúbica de dicho número es inconmensurable. Demostracion.

XXVI. La raiz cúbica de un entero terminado en un número de ceros no múltiplo de 3, es inconmensurable. Demostracion.

XXVII. El cubo de un número impar es un múltiplo de 8, aumentado ó disminuido en una ó cinco unidades. Demostracion.

Corolario. Todo número impar que aumentado ó disminuido en una ó cinco unidades no sea múltiplo de 8, no tiene raiz cúbica exacta.

XXVIII. Para que un quebrado cualquiera tenga raiz cúbica exacta, es necesario y suficiente que el producto de sus dos términos sea un cubo. Demostracion.

APLICACIONES
DE LA ARITMÉTICA.

CAPÍTULO PRIMERO.

SISTEMAS DE MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS.

I.—Consideraciones generales á todos los sistemas.

279. Hasta ahora hemos considerado el número como la relacion abstracta entre una cantidad y su unidad; pero en las aplicaciones deberemos ver en él además la expresion de una magnitud concreta y determinada, lo que obliga á tener en cuenta la especie de la cantidad y la magnitud de la unidad.

Ésta se elige arbitrariamente; pero una vez adoptada es invariable, y si la experiencia y la razon aconsejan sustituirla por otra mayor ó menor, deberá determinarse con la posible exactitud la relacion entre la unidad antigua y la nueva.

La cantidad que trata de medirse y la unidad adoptada son necesariamente de la misma especie; por consiguiente, debiendo representar los números longitudes, áreas, volúmenes, pesos, capacidades etc., necesitamos una unidad para cada especie mencionada. Por esto, todos los sistemas de pesas y medidas tienen unidades longitudinales, superficiales, cúbicas, de peso, de capacidad etc.

Dentro de cada especie se consideran cantidades muy pequeñas, y otras excesivamente grandes; todas pueden medirse con una misma unidad; pero se comprende que la expresion de las primeras será una fraccion muy pequeña, y la de las segundas, un número de muchas cifras. Para operar, en lo posible, con números de expresion breve y fácil manejo, se consideran en cada especie múltiplos y submúltiplos de una unidad, llamada principal, formando así nuevas unidades, cuyas relaciones entre sí y con la principal son conocidas, de las cuales se elige, en cada caso concreto, la mas proporcionada á la magnitud de las cantidades que debemos expresar.

Al conjunto de las medidas, pesas y monedas usuales de un país ó region cualquiera, y relaciones de la unidad principal con sus múltiplos y divisores, se llama *sistema* de medidas, pesas y monedas de aquel país ó region.

280. Las totalidades de objetos iguales en un concepto cualquiera se expresan tambien por números, tomando por unidad uno de los objetos ó un grupo cualquiera de ellos.

Así, un monton de libros, por ejemplo, se determina numéricamente tomando por unidad un libro, ó una docena de ellos etc.; las casas de una poblacion, tomando por unidad una casa; los soldados de un batallon, tomando por unidad el soldado, la compañía etc.

II.—Sistema métrico decimal.

281. El sistema legal de pesas y medidas en España es el métrico decimal: sus unidades principales son las siguientes:

UNIDAD DE LONGITUD Y FUNDAMENTAL DEL SISTEMA. EL METRO, *diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre que pasa por Paris.*

UNIDAD DE SUPERFI IE. EL ÁREA, *cuadrado de diez metros de lado.*

UNIDAD CÚBICA Ó DE VOLÚMEN. EL METRO CÚBICO, *cubo cuya arista tiene de largo un metro.*

UNIDAD DE CAPACIDAD para áridos y líquidos. EL LITRO, *capacidad de un cubo cuya arista es la décima parte del metro.*

UNIDAD DE PESO. EL GRAMO, *peso en el vacío, á la temperatura de cuatro grados centígrados, de un volúmen de agua destilada igual al de un cubo, cuya arista sea la centésima parte del metro.*

El metro, área, metro cúbico, gramo y litro se expresarán abreviadamente por las iniciales m, a, m^3, g y l.

282. Los múltiplos de cada unidad principal siguen la ley

decimal, y se enuncian anteponiendo al nombre de aquella una de las palabras, de orígen griego,

Deca, *Hecto*, *Kilo*, *Miria*,

que significan respectivamente

diez, ciento, mil, diez mil,

y expresaremos por las abreviaturas

D. *H.* *K.* *M.*

Los submúltiplos ó divisores siguen la misma ley, y se enuncian anteponiendo al nombre de la unidad principal una de las palabras, de orígen latino,

deci, *centi*, *mili*,

que significan respectivamente

décima parte, centésima parte, milésima parte,

y representaremos por

d, *c*, *m*.

EJEMPLOS.

Nombre.	Valor.	Expresion abreviada.
Miriámetro. . . .	10000 metros	*Mm.*
Kilógramo	1000 gramos.	*Kg.*
Hectólitro.	100 litros.	*Hl.*
Decámetro. . . .	10 metros.	*Dm.*
Decilitro.	0,1 litro.	*dl.*
Centiárea.	0,01 área.	*ca.*
Miligramo	0,001 gramo.	*mg.*

283. UNIDADES DE LONGITUD.

Miriámetro $= 10^{Km} = 10000^{m}$
Kilómetro $= 10^{Hm} = 1000$
Hectómetro $= 10^{Dm} = 100$
Decámetro $= 10^{m} = 10$
Metro $= 10^{dm} = 1$
Decímetro $= 10^{cm} = 0{,}1$
Centímetro $= 10^{mm} = 0{,}01$
Milímetro $= 0{,}001$

El miriámetro y kilómetro se emplean en la medicion de distancias itinerarias; el hectómetro y decámetro en los terrenos destinados á la agricultura; el metro y decímetro en el comercio y usos comunes de la vida; el centímetro y milímetro en las artes y en las investigaciones científicas.

284. UNIDADES DE SUPERFICIE Ó CUADRADAS.

Son cuadrados que tienen por lados las unidades lineales.

Miriámetro cuadrado $= 100^{Km^2} = 100000000^{m^2}$
Kilómetro cuadrado $= 100^{Hm^2} =$ 1000000
Hectómetro cuadrado $= 100^{Dm^2} =$ 10000
Decámetro cuadrado $= 100^{m^2} =$ 100
Metro cuadrado $= 100^{dm^2} =$ 1
Decímetro cuadrado $= 100^{cm^2} =$ 0,01
Centímetro cuadrado $= 100^{mm^2} =$ 0,0001
Milímetro cuadrado $=$ 0,000001

El miriámetro y kilómetro cuadrados sirven para medir la extension superficial de las naciones y provincias; el hectómetro, decámetro y metro cuadrados se usan especialmente para medir la superficie de los campos destinados al cultivo, recibiendo en tal caso los nombres de *hectárea*, *área* y *centiárea*.

Tendremos, pues,

Hectárea $= 100^{a} = 10000^{m^2}$
Área $= 100^{ca} =$ 100
Centiárea $=$ 1

El decímetro, centímetro y milímetro cuadrados se emplean en las artes y ciencias.

285. Unidades de volúmen ó cúbicas.

Son cubos que tienen por aristas las unidades lineales.

Miriámetro cúbico $= 1000^{Km^3} = 1000000000000^{m^3}$
Kilómetro cúbico $= 1000^{Hm^3} =$ 1000000000
Hectómetro cúbico $= 1000^{Dm^3} =$ 1000000
Decámetro cúbico $= 1000^{m^3} =$ 1000
Metro cúbico $= 1000^{dm^3} =$ 1
Decímetro cúbico $= 1000^{cm^3} =$ 0,001
Centímetro cúbico $= 1000^{mm^3} =$ 0,000001
Milímetro cúbico $=$ 0,000000001

Las unidades superiores al metro cúbico se usan pocas veces; el metro cúbico se emplea en la medicion de grandes volúmenes, y cuando sirve para el arqueo de los buques se llama *tonelada de arqueo.*

286. Unidades de capacidad, para áridos y líquidos.

Miriálitro	= 10^{Kl} =	10000^{l}
Kilólitro	= 10^{Hl} =	1000
Hectólitro	= 10^{Dl} =	100
Decálitro	= 10^{l} =	10
Litro	= 10^{dl} =	1
Decílitro	= 10^{cl} =	0,1
Centílitro	= 10^{ml} =	0,01
Milílitro	=	0,001

El miriálitro y kilólitro son poco usados; el litro es la unidad usual en la vida ordinaria; las demás se emplean todas, eligiendo la mas proporcionada á las cantidades de áridos ó líquidos que deban medirse.

287. Unidades de peso.

Miriágramo	= 10^{Kg} =	10000^{g}
Kilógramo	= 10^{Hg} =	1000
Hectógramo	= 10^{Dg} =	100
Decágramo	= 10^{g} =	10
Gramo	= 10^{dg} =	1
Decígramo	= 10^{cg} =	0,1
Centígramo	= 10^{mg} =	0,01
Milígramo	=	0,001

La unidad usual es el kilógramo; el miriágramo se usa poco; las demás se emplean todas.

Para la determinacion de pesos muy grandes, hay dos nuevos múltiplos, que son:

Tonelada = 10 quintales métricos = 1000^{Kg}

Quintal métrico = 100

288. Sistema monetario.

La unidad monetaria en España es actualmente la *peseta,* que se divide en cien *céntimos.*

Se acuñan monedas de oro, plata y bronce: las de oro y plata contienen una parte de otro metal, generalmente el cobre, de modo que formen una aleacion ó liga homogénea en todas sus partes; y se llama *ley* la relacion entre el peso de metal fino que contiene una moneda y el peso total de la misma.

Para expresar, de una manera uniforme, la ley de las monedas, se considera dividido su peso total en mil partes iguales, llamadas *milésimas:* el número de milésimas de metal fino que contiene la moneda, es la expresion de su ley.

En las monedas de oro y en las piezas de plata de cinco pesetas, mandadas acuñar por Decreto de 19 de Octubre de 1868, la ley es de 900 milésimas; lo que significa que las 900 milésimas de su peso son de metal fino, y las 100 restantes de liga.

La fabricacion de la moneda no puede ser tan perfecta, que no haya que tolerar algun exceso ó falta en su peso y ley, esta tolerancia tiene un límite, que determinan las leyes, y se llama *permiso*.

El cuadro siguiente contiene las monedas mandadas acuñar por el citado Decreto, y sus principales circunstancias.

SISTEMA MONETARIO.

MONEDAS.	PESO.		LEY.		DIAMETRO.
	EXACTO. — Gramos.	PERMISO — Milésim.	EXACTA. — Milésimas.	PERMISO — Milésim.	— Milímet.
De oro. [1]					
De 100 pesetas.	32,25806	1	900	2	35
De 50 »	16.12903	1			28
De 20 »	6,45161	2			21
De 10 »	3,22580	2			19
De 5 »	1,61290	3			17
De plata.					
De 5 pesetas.	25	3	900	2	37
De 2 »	10	5	835.	3	27
De 1 »	5				23
De 0,50 »	2,50	7			18
De 0,20 »	1	10			16
De bronce.					
De 0,10 pesetas.	10	10	950 cobre	10	30
De 0,05 »	5		40 estaño	5	25
De 0,02 »	2	15	10 zinc		20
De 0,01 »	1				15

1 No han llegado á acuñarse.

III.—Sistema de medidas y pesas de Castilla.

289. Unidades de longitud.

El modelo ó patron de estas unidades es la vara del archivo de la ciudad de Búrgos.

Sus múltiplos y divisores son:

Itineraria.	Legua	$= 6666\frac{2}{3}$ varas	$= 20000$ piés.
Agraria.	Estadal	$= 4$	»
Para usos comunes.	Vara	$= 3$ piés.	
	Pié	$= 12$ pulgadas.	
	Pulgada	$= 12$ líneas.	
	Línea	$= 12$ puntos.	

En la marina las unidades de longitud son:

Legua marina	= 3 millas.	Braza	= 6 piés.
Milla	= 10 cables.	Codo de ribera	= 2 piés 9 líneas.
Cable	= 111 brazas.		

290. Unidades de superficie ó cuadradas.

Geográfica. .	Legua cuadrada	= 400000000 piés cuadrados.
Para usos comunes. . . .	Vara cuadrada	= 9 » »
	Pié cuadrado	= 144 pulg. cuadrad.
	Pulgada cuadrada	= 144 líneas cuadrad.
Agrarias. . .	Fanega de tierra	= 576 estadales cuadrados.
	Aranzada	= 400 » »
	Estadal cuadrado	= 16 varas cuadradas.

La fanega de tierra se divide en 12 celemines de tierra, y éste en 4 cuartillos.

291. Unidades de volúmen ó cúbicas.

Legua cúbica	= 8000000000000 piés cúbicos
Vara cúbica	= 27 » »
Pié cúbico	= 1728 pulgadas cúbicas.
Pulgada cúbica	= 1728 líneas cúbicas.

Para el arqueo de los buques y grandes volúmenes.

Tonelada de arqueo	= 8 codos cub. de rib.ª = 70,189 piés cúb.
Tonelada comun	= 42,646 » »

292. Unidades de capacidad.

El modelo ó patron de estas unidades es la *media fanega* del archivo de la ciudad de Ávila, para los áridos; y la *cántara* de Toledo, para los líquidos.

Para áridos.		Para líquidos.	
Cahiz	= 12 fanegas.	Moyo	= 16 cántaras.
Fanega	= 12 celemines.	Cántara	= 8 azumbres.
Celemin	= 4 cuartillos.	Azumbre	= 4 cuartillos.
		Cuartillo	= 4 copas.

Las medidas para el aceite son: la arroba de aceite, que tiene 25 libras; y la libra, cuatro panillas ó cuarterones.

293. Unidades de peso.

El modelo ó patron es el *marco* del archivo del Consejo de Castilla.

Para usos comunes.		Para metales finos y piedras preciosas.	
Quintal	= 4 arrobas.	Marco	= 8 onzas.
Arroba	= 25 libras.	Onza	= 8 ochavas.
Libra	= 16 onzas.	Ochava	= 6 tomines.
Onza	= 16 adarmes.	Tomin	= 3 quilates.
Adarme	= 3 tomines.	Quilate	= 4 granos.
Tomin	= 12 granos.		

Para la farmacia.

Libra	= 12 onzas.	Dracma	= 3 escrúpulos.
Onza	= 8 dracmas.	Escrúpulo	= 24 granos.

294. Unidades de tiempo.

Siglo	= 100 años.	Dia	= 24 horas.
Año	= 12 meses.	Hora	= 60 minutos.
Mes	= 30 ó 31 dias.	Minuto	= 60 segundos.

295. Monedas.

De oro.		De plata.	
Onza	= 320 reales.	Peso fuerte ó duro	= 20 reales.
Media onza	= 160 »	Medio duro ó escudo	= 10 »
Centen	= 100 »	Peseta	= 4 »
Ochentin	= 80 »	Media peseta	= 2 »
Escudo de oro	= 40 »	Real de vellon	= 34 maravd.
Escudito	= 20 »	Peseta columnaria	= 5 reales.
Escudito de premio	= 21¼ »	Media peseta id	= 2½ »
		Real columnario	= 1¼ »

De cobre.

Medio real = 0,50 reales.
Cuartillo = 0,25 »
Dos cuartos = 8 maravedises.

Cuarto = 4 maravedises.
Ochavo = 2 »
Maravedí, imaginaria.

IV.—Equivalencias aproximadas entre las monedas y pesas antiguas y las métrico-decimales.

UNIDADES DE LONGITUD.

	Leguas á kilómetros.	Varas á metros.	Piés á decímetros.	Pulgadas á centímetros	Líneas á milímetros.
1	5,5727	0,8359	2,7864	2,3220	1,9350
2	11,1454	1,6718	5,5727	4,6439	3,8699
3	16,7181	2,5077	8,3591	6,9659	5,8049
4	22,2908	3,3436	11,1454	9,2878	7,7399
5	27,8635	4,1795	13,9318	11,6098	9,6748
6	33,4362	5,0154	16,7181	13,9318	11,6098
7	39,0089	5,8513	19,5045	16,2537	13,5448
8	44,5816	6,6872	22,2909	18,5757	15,4797
9	50,1543	7,5231	25,0772	20,8977	17,4147
	Kilómetros á leguas.	**Metros á varas.**	**Decímetros á piés.**	**Centímetros á pulgadas.**	**Milímetros á líneas.**
1	0,1794	1,1963	0,3589	0,4307	0,5168
2	0,3589	2,3926	0,7178	0,8613	1,0336
3	0,5383	3,5889	1,0767	1,2920	1,5504
4	0,7178	4,7852	1,4356	1,7227	2,0672
5	0,8972	5,9815	1,7945	2,1534	2,5840
6	1,0767	7,1778	2,1534	2,5840	3,1008
7	1,2561	8,3742	2,5122	3,0147	3,6176
8	1,4356	9,5705	2,8711	3,4454	4,1344
9	1,6150	10,7668	3,2300	3,8760	4,6512

UNIDADES DE SUPERFICIE.

	Leguas cuadradas á kilómetros cuadrados.	Fanegas á hectáreas.	Varas cuadradas á metros cuadrados.	Piés cuadrados á decímetros cuadrados.	Pulgadas cuadradas á centímetros cuadrados.
1	31,0550	0,6440	0,6987	7,7637	5,3915
2	62,1100	1,2879	1,3975	15,5275	10,7830
3	93,1650	1,9319	2,0962	23,2912	16,1745
4	124,2199	2,5758	2,7949	31,0550	21,5660
5	155,2749	3,2198	3,4937	38,8187	26,9575
6	186,3299	3,8637	4,1924	46,5825	32,3489
7	217,3849	4,5077	4,8912	54,3462	37,7404
8	248,4399	5,1516	5,5899	62,1100	43,1319
9	279,4949	5,7956	6,2886	69,8737	48,5234

	Kilómetros cuadrados á leguas cuadradas	Hectáreas á fanegas.	Metros cuadrados á varas cuadradas.	Decímetros cuadrados á piés cuadrados.	Centímetros cuadrados á pulgadas cuadradas.
1	0,0322	1,5529	1,4312	0,1288	0,1855
2	0,0644	3,1058	2,8623	0,2576	0,3710
3	0,0966	4,6587	4,2935	0,3864	0,5564
4	0,1288	6,2116	5,7246	0,5152	0,7419
5	0,1610	7,7645	7,1558	0,6440	0,9274
6	0,1932	9,3174	8,5869	0,7728	1,1129
7	0,2254	10,8703	10,0181	0,9016	1,2983
8	0,2576	12,4232	11,4492	1,0304	1,4838
9	0,2898	13,9761	12,8804	1,1592	1,6693

UNIDADES DE CAPACIDAD, PARA ÁRIDOS, Y DE VOLÚMEN.

	Cahices á kilólitros.	Fanegas á hectólitros.	Celemines á decálitros.	Varas cúbicas á metros cúbicos.	Piés cúbicos á decímetros cúbicos.
1	0,6660	0,5550	0,4625	0,5841	21,6325
2	1,3320	1,1100	0,9250	1,1682	43,2650
3	1,9980	1,6650	1,3875	1,7522	64,8975
4	2,6640	2,2200	1,8500	2,3363	86,5301
5	3,3301	2,7751	2,3125	2,9201	108,1626
6	3,9961	3,3301	2,7750	3,5045	129,7951
7	4,6621	3,8851	3,2376	4,0886	151,4276
8	5,3281	4,4401	3,7001	4,6727	173,0601
9	5,9941	4,9951	4,1626	5,2568	194,6926

	Kilólitros á cahices.	Hectólitros á fanegas.	Decálitros á celemines.	Metro cúbicos á varas cúbicas.	Decímetros cúbicos á piés cúbicos
1	1,5015	1,8018	2,1621	1,7121	0,0462
2	3,0030	3,6035	4,3243	3,4242	0,0925
3	4,5044	5,4053	6,4864	5,1363	0,1387
4	6,0059	7,2071	8,6485	6,8484	0,1849
5	7,5074	9,0088	10,8106	8,5605	0,2311
6	9,0088	10,8106	12,9727	10,2726	0,2774
7	10,5103	12,6124	15,1349	11,9847	0,3236
8	12,0118	14,4142	17,2970	13,6968	0,3698
9	13,5133	16,2159	19,4591	15,4089	0,4160

UNIDADES DE CAPACIDAD PARA LÍQUIDOS.

	Cántaras á decálitros.	Cuartillos á litros.	Arrobas de aceite á decálitros.	Libras de aceite á litros.
1	1,6133	0,5042	1,2563	0,5025
2	3,2266	1,0083	2,5126	1,0050
3	4,8399	1,5125	3,7689	1,5076
4	6,4532	2,0166	5,0252	2,0101
5	8,0665	2,5208	6,2815	2,5126
6	9,6798	3,0249	7,5378	3,0151
7	11,2931	3,5291	8,7941	3.5176
8	12,9064	4,0333	10,0504	4,0202
9	14.5197	4,5374	11,3067	4,5227

	Decálitros á cántaras.	Litros á cuartillos.	Decálitros á arrobas de aceite.	Litros á libras de aceite.
1	0,6198	1,9835	0,7960	1,9900
2	1,2397	3,9670	1,5920	3,9799
3	1,8595	5,9505	2,3880	5,9699
4	2,4794	7,9341	3,1840	7,9599
5	3,0992	9,9176	3,9799	9,9499
6	3,7191	11,9011	4,7759	11,9398
7	4,3389	13,8846	5,5719	13,9298
8	4,9588	15,8681	6,3679	15,9198
9	5,5786	17.8516	7.1639	17,9097

UNIDADES DE PESO.

	Quintales á quintales métricos.	Arrobas á kilógramos.	Libras á kilógramos.	Onzas á gramos.	Adarmes á gramos.
1	0,4601	11,5023	0,4601	28,7558	1,7972
2	0,9202	23,0046	0,9202	57,5116	3,5945
3	1,3803	34,5070	1,3803	86,2674	5,3917
4	1,8404	46,0093	1,8404	115,0232	7,1890
5	2,3005	57,5116	2,3005	143,7791	8,9862
6	2,7606	69,0139	2,7606	172,5349	10,7834
7	3,2207	80,5163	3,2207	201,2907	12,5807
8	3,6807	92,0186	3,6807	230,0465	14,3779
9	4,1408	103,5209	4,1408	258,8023	16,1752

	Quintales métricos á los antiguos.	Kilógramos á arrobas.	Kilógramos á libras.	Gramos á onzas.	Gramos á adarmes.
1	2,1735	0,0869	2,1735	0,0348	0,5564
2	4,3469	0,1739	4,3469	0,0696	1,1128
3	6,5204	0,2608	6,5204	0,1043	1,6692
4	8,6939	0,3478	8,6939	0,1391	2,2256
5	10,8674	0,4347	10,8674	0,1739	2,7820
6	13,0408	0,5216	13,0408	0,2087	3,3384
7	15,2143	0,6086	15,2143	0,2435	3,8948
8	17,3878	0,6955	17,3878	0,2782	4,4513
9	19,5613	0,7825	19,5613	0,3130	5,0077

UNIDADES MONETARIAS.

	Reales á pesetas.	Pesetas á reales.	Maravedises á céntimos.	Céntimos á maravedises.
1	0,25	4	0,7353	1,36
2	0,50	8	1,4706	2,72
3	0,75	12	2,2059	4,08
4	1	16	2,9412	5,44
5	1,25	20	3,6765	6,80
6	1,50	24	4,4118	8,16
7	1,75	28	5,1471	9,52
8	2	32	5,8824	10,88
9	2,25	36	6,6176	12,24

296. Las tablas anteriores se usan como se verá en los siguientes

EJEMPLOS.

1.º Reducir 53 varas á metros.

Varas.		Metros.
50	=	41,795
3	=	2,5077
53	=	44.3027

Segun las tablas, 5 varas = 4,1795 metros; luego 50 varas = 41,795 metros, además 3 varas = 2,5077 metros: sumando estas igualdades se obtiene

53 varas = 44,3027 metros.

2.º Reducir 475 hectólitros á fanegas.

Hectólitros.		Fanegas.
400	=	720,71
70	=	126,124
5	=	9,0088
475	=	855,8428

3.º Reducir 206 metros á varas.

Metros.		Varas.
200	=	239,26
6	=	7,1778
206	=	246,4378

4.º Reducir 27 maravedises á céntimos de peseta.

Maravedises.		Céntimos.
20	=	14,706
7	=	5,1471
27	=	19,8531

V.—Medidas, pesas y monedas mas usuales de algunas naciones extranjeras.

297. El sistema métrico decimal, que hemos expuesto, rige en Francia, Italia y Bélgica.

Por ley de 24 de Noviembre de 1871, se adoptó tambien en el Imperio de Alemania, conservando la mayor parte de los nombres antiguos, y modificando la milla, que es igual á 7,5 kilómetros.

298. MEDIDAS Y PESAS DE INGLATERRA.

UNIDADES DE LONGITUD.

Principal...... Yarda *(Yard)* = 3 piés *(Feet)*.
Itineraria...... Milla *(Mile)* = 1760 yardas.

UNIDAD DE SUPERFICIE.

Acre = 4840 yardas cuadradas.

UNIDADES DE CAPACIDAD.

Para líquidos.... Gallon imperial = 4 quarts = 8 pints.
Para áridos..... Bushel = 8 gallones.

UNIDADES DE PESO.

Para usos comunes... { Libra *avoir du puis* = 16 onzas. Quintal = 112 libras.
Para el oro, plata etc. Libra *troy* = 12 onzas.

299. MEDIDAS Y PESAS ANTIGUAS DE PRUSIA.

UNIDADES DE LONGITUD.

Pié *(Fuss)* del Rhin = 12 pulgadas *(Zolle)*.
Ruthe = 12 piés.
Vara *(Elle)* = 25 ½ pulgadas.
Itineraria. Milla prusiana *(Preussische Meile)* = 2000 Ruthen.

UNIDAD AGRARIA.

Morgen = 180 Ruthen cuadrados.

UNIDADES DE CAPACIDAD.

Para líquidos.... Anker = 30 Quart = 60 Oessel.
Para áridos..... Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen.

DE PESO. (Antes de 1.º de Julio de 1858).

Libra *(Pfund)* = 32 Loth.
Quintal *(Centner)* = 110 libras.

DE PESO. (Desde 1.º de Julio de 1858).

Libra = 30 Loth = 500 gramos (sistema métrico).
Quintal = = 100 libras.
Libra antigua = 0,935422025 libra nueva.

300. MONEDAS PRINCIPALES.

Francia y Bélgica.. Franco = 100 céntimos = 3,85 reales.
Italia........... Lira = 100 » = 3,85 »
Inglaterra...... Libra esterlina *(Sovereign)* =
20 chelines *(Shillingen)* = 96,92 »
Chelin *(Shilling)* = 12 peniques *(Pence)* = 4,47 »
Alemania. Thaler = 30 Silbergroschen = 14,28 »

VI.—Equivalencias aproximadas entre las medidas y pesas de algunas naciones.

ESPAÑA. (*Sistema de Castilla*).

SISTEMA DE CASTILLA.		INGLATERRA.	PRUSIA.
De longitud. .	Vara.	0,9142 yardas.	2,6634 piés.
	Pié.	0,3047 »	0,8878 »
	Legua (Itineraria).	3,4628 millas.	0,7398 millas.
De superficie.	Vara cuadrada. . .	0,8357 yardas².	7,0935 piés².
	Pié cuadrado. . . .	0,8357 piés².	0,7882 »
	Fanega (Agraria).	1,5913 acres.	2,5221 morgen.
De volumen. .	Vara cúbica.	0,7641 yardas³.	18,8925 piés³.
	Pié cúbico.	0,7641 piés³.	0,6997 »
Capacidad	Cántara (Líquidos)	3,5508 gallons.	14,0896 quart.
	Cuartillo.	0,8877 pints.	0,8806 oessel.
	Fanega (áridos). .	1,5269 bushel.	1,0096 scheffel.
Peso. . . .	Libra. . . . , . . .	1,0143 lib. avoir.	0,9837 libras antigs.
	Quintal.	0,9056 quintales.	0,8942 quint. »

SISTEMA MÉTRICO.

SISTEMA MÉTRICO.		INGLATERRA.	PRUSIA.
Longitud. .	Metro.	1,0936 yardas.	3,1862 piés.
	Decímetro.	0,3281 piés.	3,8234 pulgadas.
	Kilómetro.	0,6214 millas.	0,1328 millas.
Superficie.	Metro cuadrado. .	1,1960 yardas².	10,1519 piés².
	Hectárea.	2,4711 acres.	3,9162 morgen.
Volúmen. .	Metro cúbico. . . .	1,3080 yardas³.	32,3459 piés³.
	Decímetro cúbico. .	0,0353 piés³.	55,8937 pulgadas³.
Capacidad	Decálitro (líquidos)	2,2010 gallons.	8,7334 quart.
	Litro »	1,7608 pints.	1,7467 oessel.
	Hectólitro (áridos).	2,7520 bushels.	1,8195 scheffel.
Peso. . . .	Kilógramo.	2,2046 lib. avoir.	2,1381 libras antigs.
	Quintal métrico. .	1,9684 quintales.	1,9437 quints. antig.

INGLATERRA.

INGLATERRA.		SISTEMA MÉTRICO.	SISTEMA DE CASTILLA.
Longitud.	Yarda.	0,9144 metros.	1,0939 varas.
	Pié.	3,0479 decímetros.	1,0939 piés
	Milla (itineraria) .	1,6093 kilómetros.	0,2888 leguas.
Superficie.	Yarda cuadrada. .	0,8361 metros ^{2}.	1,1966 varas ^{2}.
	Pié cuadrado. . . .	9,2900 decímetros ^{2}.	1,1966 piés ^{2}.
	Acre (agraria). . .	0,4047 hectáreas.	0,6284 fanegas.
Volúmen.	Yarda cúbica. . . .	0,7645 metros ^{3}.	1,3089 varas ^{3}.
	Pié » . . .	28,3153 decímetros ^{3}.	1,3089 piés ^{3}.
Capacidad.	Gallon (líquidos) .	4,5435 litros.	0,2816 cántaras.
	Pint » .	0,5679 »	1,1264 cuartillos.
	Bushel (áridos) . .	36,3477 »	0,6549 fanegas.
Peso.	Libra avoir.	0,4536 kilógramos.	0,9859 libras.
	Libra troy.	0,3732 »	0,8113 »
	Quintal.	50,8029 »	1,1042 quintales.

PRUSIA. *(Sistema antiguo.)*

PRUSIA.		SISTEMA MÉTRICO.	SISTEMA DE CASTILLA.
Longitud.	Vara.	0,6669 metros.	0,7979 varas.
	Pié.	0,3139 »	1,1264 piés.
	Milla (itineraria) .	7,5325 kilómetros.	1,3517 leguas.
Superficie	Pié cuadrado. . . .	9,8504 decímetros ^{2}.	1,2688 piés ^{2}.
	Morgen.	0,2553 hectáreas.	0,3965 fanegas.
Volúmen.	Pié cúbico.	30,9158 decímetros ^{3}.	1,4291 piés ^{3}
Capacidad.	Anker (líquidos). .	34,3509 litros	2,1292 cántaras.
	Quart » . .	1,1450 »	2,2712 cuartillos.
	Scheffel (áridos). .	54,9615 »	0,9903 fanegas.
Peso.	Libra antigua. . .	0,4677 kilógramos.	1,0166 libras.
	Quintal » . . .	51,4482 »	1,1182 quintales.

CAPÍTULO SEGUNDO.

NÚMEROS COMPLEJOS.

I.—Reduccion de números complejos á incomplejos y vice-versa.

302. Una cantidad cualquiera se puede expresar por números diferentes, refiriéndola sucesivamente á unidades de su especie variables en magnitud; y se comprende que los números aumentarán si la unidad disminuye, y al contrario.

Es evidente que el número será dos, tres, cuatro veces mayor, cuando la unidad se reduzca á su mitad, tercera ó cuarta parte; y aquél quedará reducido á su mitad, tercera ó cuarta parte, cuando la unidad sea el duplo, triplo ó cuádruplo de la primitiva: luego

REGLA 1.ª *Para convertir un número de especie dada en otro equivalente de especie menor, se multiplica el primero por el número de veces que su unidad contiene á la de especie menor.*

EJEMPLOS.

1.° Convertir 12 pesetas en reales.

La peseta contiene 4 veces al real; luego multiplicando 12 por 4, el producto será el número de reales equivalente á 12 pesetas; así

$$12 \text{ pesetas} = 12 \,.\, 4 = 48 \text{ reales}.$$

2.° Convertir $\frac{5}{8}$ de libra en onzas.

Como una libra tiene 16 onzas será

$$\frac{5}{8} \text{ de libra} = \frac{5}{8} \times 16 = \frac{80}{8} = 10 \text{ onzas}.$$

3.° Convertir 7 duros en maravedises.

Valiendo un duro 20 reales, y un real 34 maravedises, es claro que un duro tiene 20 . 34 = 680 maravedises; luego

$$7 \text{ duros} = 7 \,.\, 680 = 4760 \text{ maravedises}.$$

REGLA 2.ª *Para convertir un número de especie dada en otro equivalente de especie mayor, se divide el primero por el número de veces que su unidad está contenida en la de especie mayor.*

EJEMPLOS.

1.° Convertir 27 piés en varas.

El pié está contenido 3 veces en la vara; luego dividiendo 27 por 3, el cociente será el número de varas equivalente á 27 piés; así

$$27 \text{ piés} = \frac{27}{3} = 9 \text{ varas}.$$

2.° Convertir 15 reales en duros.

Como el real está contenido en el duro 20 veces, será

$$15 \text{ reales} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ de duro}.$$

3.° Convertir 180 pulgadas en varas.

Como la pulgada está contenida 12 veces en el pié y éste 3 veces en la vara, es claro que la pulgada está contenida en la vara $12 \, . \, 3 = 36$ veces; luego

$$180 \text{ pulgadas} = \frac{180}{36} = 5 \text{ varas}.$$

303. NÚMERO INCOMPLEJO *es el que se refiere á una sola unidad*, por ejemplo 12 arrobas.

NÚMERO COMPLEJO *es la reunion de varios incomplejos referidos á unidades diferentes de la misma naturaleza;* por ejemplo 7 arrobas 13 libras y 10 onzas.

Para convertir un número complejo en incomplejo de la menor especie, se reducen las unidades superiores del complejo á la especie inferior inmediata y se añaden las unidades de esta especie contenidas en el número dado; el número que resulta se reduce á la especie inferior siguiente, y se añaden las unidades de esta última; y así sucesivamente, hasta llegar á la última de las especies.

EJEMPLOS.

1.° Convertir el número complejo 24 duros y 12 reales en incomplejo de reales.

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{rl} 24 & \text{duros.} \\ 20 & \\ \hline 480 & \text{reales.} \\ 12 & \\ \hline 492 & \text{reales.} \end{array}$$

2.° Convertir el número complejo 12 arrobas, 9 libras y 6 onzas en incomplejo de onzas.

$$\begin{array}{rl} 12 & \text{arrobas.} \\ 25 & \\ \hline 60 & \\ 24 & \\ \hline 300 & \text{libras.} \\ 9 & \\ \hline 309 & \text{libras.} \\ 16 & \\ \hline 1854 & \\ 309 & \\ \hline 4944 & \text{onzas.} \\ 6 & \\ \hline 4950 & \text{onzas.} \end{array}$$

Para convertir un número complejo en incomplejo de cualquiera de sus especies, se convierte el número dado en incomplejo de su especie inferior, y el resultado se divide por el número de veces que la unidad inferior esté contenida en la de la especie á que debe referirse el número.

Ejemplo. Convertir el complejo 14 días, 15 horas, 43 minutos y 50 segundos en incomplejo de horas.

Reducido el número dado á segundos da 1266230 segundos; para reducir éste á horas, debemos dividirle por $60 \,.\, 60 = 3600$, y obtendremos

$$\frac{1266230}{3600} = \frac{126623}{360} \text{ horas.}$$

304. *Para convertir un incomplejo de especie inferior en complejo, se reduce el número dado á la especie superior inmediata; el cociente entero se reduce á la especie superior siguiente; y se continúa del mismo modo hasta obtener un cociente de la especie superior del complejo, ó un cociente cero. El último cociente y los residuos de las divisiones componen el número complejo equivalente al incomplejo dado, siendo cada residuo de la especie del dividendo respectivo.*

Ejemplo. Convertir el número incomplejo 4950 onzas en complejo.

Disposicion práctica.

4950	16		
150	309 libras	25	
6 onzas	59	12 arrobas	4
	9 libras	0 arrobas	3 quintales.

Luego, 4950 onzas = 3 quintales, 0 arroba, 9 libras, 6 onzas.

Para convertir un quebrado incomplejo de especie superior en número complejo, se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero será el número de especie superior del complejo que se busca. Se reduce el residuo á la especie menor inmediata, y el resultado se divide por el denominador del quebrado propuesto, continuando de este modo hasta llegar á la especie inferior.

EJEMPLOS.

1.º Convertir el incomplejo $\frac{11}{4}$ de arroba en complejo.

Disposicion práctica.

11 arrobas	4
3	2 arrobas 18 libras 12 onzas.
25	
75 libras	
35	
3	
16	
48 onzas	
48	
0	

Luego, $\frac{11}{4}$ de arroba = 2 arrobas, 18 libras, 12 onzas.

2.º Convertir en complejo el incomplejo $\frac{18}{7}$ de cahiz.

18 cahices	7
4	2 cahices, 6 fanegas, 10 celemines, $1\frac{1}{7}$ cuart.
12	
48 fanegas	
6	
12	
72 celemines	
2	
4	
8 cuartillos	
1	

305. En el sistema métrico se ha visto que una unidad cualquiera contiene 10 veces á la inmediata inferior, exceptuándose las superficiales que decrecen de 100 en 100, y las cúbicas, que decrecen de 1000 en 1000; luego la reduccion de un número métrico incomplejo á especie menor ó mayor, se efectuará siempre multiplicando ó dividiendo dicho número por la unidad seguida de ceros, para lo que basta correr la coma á derecha ó izquierda cierto número de lugares.

EJEMPLOS.

1.° Convertir 345, 28 metros en centímetros.

Es claro que basta multiplicar por 100 el número dado; luego

$$345^{m}, 28 = 34528^{cm}.$$

2.° Convertir 34,52658 metros cuadrados en centímetros cuadrados.

Como las unidades de superficie decrecen de 100 en 100, debemos multiplicar por 100.100 = 10000, y será

$$34^{\overset{2}{m}}, 52658 = 345265^{\overset{2}{cm}}, 8.$$

3.° Convertir 0,345792 kilómetros cúbicos en hectómetros cúbicos.

$$0^{\overset{3}{Km}}, 345792 = 345^{\overset{3}{Hm}}, 792.$$

4.° Convertir 35 hectógramos en gramos.

$$35^{Hg} = 3500^{g}.$$

5.° Convertir 38357, 2 litros en kilólitros.

Como se quiere reducir á unidades superiores, debemos *dividir* el número dado por 1000, y será

$$38357^{l},2 = 38^{Kl},3572.$$

6.° Convertir 357,52 metros cuadrados en hectáreas.

$$357^{\overset{2}{m}},52 = 0^{Ha},035752.$$

7.° Convertir 748956 decímetros cúbicos en decámetros cúbicos.

$$748956^{\overset{3}{dm}} = 0,^{\overset{3}{Dm}}748956.$$

306. Propongámonos convertir el número métrico complejo $8^{Hl}\,6^{Dl}\,3^{l}\,5^{cl}$ en incomplejo de su especie inferior.

Segun la regla del núm. 303, debemos multiplicar 8 hectólitros por 10, y añadir 6 decálitros, lo que da 86 decálitros; pero es evidente que siendo los hectólitros del órden de las decenas, con respecto á los decálitros, se obtiene el mismo resultado colocando el 6 á la derecha del 8. De igual manera se convierten los decálitros en litros, etc.; luego

$$8^{Hl}\,6^{Dl}\,3^{l}\,5^{cl} = 86305^{cl}.$$

Si las unidades son superficiales, cada órden de las mismas debe ocupar dos lugares, y si son cúbicas, tres; así

$$59^{\overset{2}{m}}\,48^{\overset{2}{dm}}\,6^{\overset{2}{cm}} = 594806^{\overset{2}{cm}}.$$

$$81^{\overset{3}{m}}\,7^{\overset{3}{cm}} = 81000007^{\overset{3}{cm}}.$$

Por el contrario, un número métrico incomplejo quedará convertido en complejo separando sus cifras una á una, si expresa una longitud, capacidad ó peso, dos á dos, si es la expresion de una superficie, tres á tres, si es la de un volúmen: así

$$34589^{g} = 3^{Mg}\,4^{Kg}\,5^{Hg}\,8^{Dg}\,9^{g}.$$

$$457629^{\overset{2}{m}} = 45^{\overset{2}{Hm}}\,76^{\overset{2}{Dm}}\,29^{\overset{2}{m}}.$$

$$47008290^{\overset{3}{m}} = 47^{\overset{3}{Hm}}\,8^{\overset{3}{Dm}}\,290^{\overset{3}{m}}.$$

II.—Adicion.

307. Para que varios números puedan reunirse en uno solo, es necesario que sean de igual naturaleza, ó que se consideren bajo un concepto comun á todos ellos. En tal caso, la suma es de la misma naturaleza que los sumandos, ó se considera bajo el mismo concepto que estos.

La suma de números incomplejos se efectúa como la de números abstractos.

Para sumar varios números complejos, se suman separadamente las unidades de cada especie de los sumandos, empezando por las inferiores. Las sumas que no componen una unidad de la especie superior inmediata á la suya, se escriben tal como se obtienen; y de las que componen una ó mas unidades superiores, solo se escribe el residuo, reservando aquellas para añadirlas á la suma parcial siguiente.

EJEMPLOS.

1.º	8	horas	54	minutos	13	segundos
	6	»	48	»	10	»
	12	»	39	»	20	»
	28	»	21	»	43	»

2.º	15	libras	13	onzas	9	adarmes	2	tomines
	19	»	12	»	2	»	1	»
	24	»	15	»	1	»		
	60	»	8	»	13	»	0	»

III—Sustraccion.

308. El minuendo y el sustraendo deben ser de igual naturaleza, ó considerarse bajo un concepto comun; y la diferencia es de la misma naturaleza que los números dados.

Si estos son incomplejos, la sustraccion se efectúa como la de números abstractos.

Para restar dos números complejos se restan separadamente las unidades de cada especie, empezando por las inferiores; si algun sustraendo parcial es mayor que el minuendo respectivo, se añade á éste una unidad de la especie superior inmediata, y á fin de que el resto no se altere, se añade tambien una unidad al sustraendo parcial siguiente.

EJEMPLOS.

1.º	10	varas	2	piés	8	pulgadas
	3	»	1	»	5	»
	7	»	1	»	3	»

2.º	9	dias	13	horas	15	minutos	13	segundos
	4	»	7	»	34	»	15	»
	5	»	5	»	40	»	58	»

En este ejemplo, el primer sustraendo parcial 15 es mayor que el minuendo respectivo 13; para efectuar la resta se añade al minuendo 1 minuto, que vale 60 segundos, y se obtiene el nuevo minuendo 73; restando 15 de 73, hallamos 58 segundos. Aumentando el sustraendo siguiente en 1 unidad se convierte en 35, que tampoco se puede restar de 15; pero añadiendo á este número una hora, que vale 60 minutos, se convierte en 75 minutos, y restando 35, se hallan 40 para resto. Por último, añadiendo una unidad al sustraendo siguiente, se convierte en 8 horas, que restadas de 13 dan 5.

3.°	8 duros		
	4 »	13 reales	20 maravedises
	3 »	6 »	14 »

Como no hay maravedises en el minuendo, se toma un real, que vale 34 maravedises, y restando 20, se halla 14 para la diferencia. Añadiendo una unidad al sustraendo parcial siguiente se convierte en 14, que no tiene minuendo de que restarse; pero se toma un duro, que vale 20 reales, y restando 14 se halla 6. Por último, se añade una unidad al sustraendo siguiente, y restando 5 de 8, se obtiene 3 duros para la diferencia.

IV.—Multiplicacion.

309. La operacion de multiplicar tiene por objeto, dados dos números hallar un tercero, que sea respecto de uno de los dados, lo que el otro es respecto de la unidad; por consiguiente en la multiplicacion se consideran cuatro cantidades, que se comparan dos á dos: el producto con el multiplicando, y el multiplicador con la unidad; y la definicion exige que los resultados de estas comparaciones sean iguales.

Para que dos cantidades sean comparables entre sí, es necesario que sean de igual naturaleza; luego *el producto es de igual naturaleza que el multiplicando, y el multiplicador de igual naturaleza que la unidad.*

Para efectuar la comparacion del multiplicador con la unidad, es necesario reducirle á la especie de ésta, y como aquel expresa la relacion cuantitativa, y por tanto abstracta, del producto y multiplicando, resulta que *el multiplicador debe reducirse á la especie de la unidad, y considerarse despues como un número abstracto.*

El objeto práctico de la multiplicacion de magnitudes concretas es generalmente hallar el valor de varias unidades, ó de una fraccion de unidad, cuando se conoce el valor de ésta.

El valor conocido de la unidad se tomará siempre para multiplicando; el número de unidades ó la fraccion de unidad cuyo valor se busca será el multiplicador.

Si los factores son incomplejos y el multiplicador es de la especie de la unidad, cuyo valor es el multiplicando, la operacion se efectúa como la de números abstractos. Si el multiplicador es de otra especie, se reduce ante todo á la especie de la unidad.

EJEMPLOS.

1.° *Un metro de tela cuesta* 54 *reales, ¿cuánto costarán* 23 *metros?*

54 reales, valor de la unidad, es el multiplicando, y 23 el multiplicador; luego el valor de 23 metros es

$$54 \cdot 23 = 1242 \text{ reales.}$$

2.° *En una hora recorre un móvil* $3427\ \frac{2}{3}$ *varas, ¿qué distancia recorrerá en* $\frac{3}{5}$ *de hora?*

El multiplicando es $3427\ \frac{2}{3}$ varas; luego el camino recorrido es

$$3427\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 2056\ \frac{3}{5} \text{ varas.}$$

3.° *Una máquina eleva un cuerpo á* 3,7 *metros de altura en* 1 *minuto, ¿á qué altura elevará el mismo cuerpo en* 0,13 *de hora?*

El multiplicador 0,13 de hora, reducido á minutos, da $0{,}13 \times 60 = 7{,}8$ minutos; luego la altura buscada será

$$3{,}7 \times 7{,}8 = 28{,}86 \text{ metros.}$$

4.° *Un pié cúbico de agua á* 4 *grados pesa* 47,018 *libras, ¿cuánto pesarán* 400 *pulgadas cúbicas de agua en iguales condiciones?*

El multiplicador 400 pulgadas cúbicas, reducido á piés cúbicos, da $\frac{400}{1728} = \frac{25}{108}$ piés cúbicos; luego el peso buscado será

$$47{,}018 \times \frac{25}{108} = 10{,}884 \text{ libras.}$$

Si alguno de los factores ó ambos son complejos, se reduce el multiplicando á incomplejo de una especie cualquiera, y el multiplicador á la especie de la unidad cuyo valor es el multiplicando.

EJEMPLOS.

1.° *Una fanega de trigo cuesta* 42 *reales y* 25 *maravedises, ¿cuánto costarán* 28 $\frac{3}{8}$ *cahices?*

El multiplicando reducido á reales se convierte en $\frac{1453}{34}$ reales, y el multiplicador convertido en fanegas vale $\frac{681}{2}$ fanegas; luego el valor buscado es

$$\frac{1453}{34} \times \frac{681}{2} = \frac{989493}{68} \text{ reales} = 14551 \text{ reales } 12\ \frac{1}{2} \text{ maraved.}$$

2.° *Valiendo una libra* 3 *duros,* 14 *reales y* 18 *maravedises, ¿cuánto valdrán* 11 *libras y* 12 *onzas?*

El multiplicando, convertido en reales, es igual á $\frac{2534}{34}$ reales; y el multiplicador, reducido á libras, equivale á $\frac{188}{16} = \frac{47}{4}$ libras; luego el valor buscado es

$$\frac{1267}{17} \times \frac{47}{4} = \frac{59549}{68} \text{ reales} = 875 \text{ reales } 24\ \frac{1}{2} \text{ maravedises.}$$

3.° *Un decímetro cúbico de agua pesa un kilógramo, ¿cuánto pesarán* 3 *metros cúbicos y* 28 *decímetros cúbicos?*

Reducido el multiplicador á decímetros cúbicos, se convierte en 3028^{dm^3}; luego el producto será

$$1 \times 3028 = 3028^{Kg}.$$

Si el multiplicando es complejo y el multiplicador, despues de reducido á la especie de la unidad, es un número entero, se efectúa la operacion multiplicando cada incomplejo del primer factor por el segundo, y extrayendo de cada producto parcial las unidades superiores que contenga, para añadirlas al siguiente.

EJEMPLOS.

1.° *El caño de una fuente arroja en un minuto* 5 *azumbres,* *3 cuartillos y 2 copas de agua, ¿cuánto arrojará en* $\frac{1}{12}$ *de hora?*

Reducido el multiplicador á minutos, resulta $\frac{60}{12} = 5$ minutos.

	5 azumbres	3 cuartillos		2 copas		
				5		
	25	»	15	»	10	»
ó	29	»	1	»	2	»

2.° *Costando una libra 2 duros, 15 reales y 20 maravedises, ¿cuánto costarán* $\frac{3}{5}$ *de arroba?*

$$\frac{3}{5} \text{ de arroba} = \frac{3 \,.\, 25}{5} = 15 \text{ libras.}$$

2 duros	15 reales		20 maravedises	
			15	
41	»	13	»	28 »

Método de las partes alícuotas.

310. Propongámonos resolver la cuestion siguiente:

Una libra cuesta 8 duros, 16 reales y 24 maravedises, ¿cuánto costarán 15 libras, 13 onzas y 6 adarmes?

El multiplicador se compone, en primer lugar, de 15 libras; cuyo valor se obtiene multiplicando por 15 el precio de una libra. Además contiene 13 onzas, que se descomponen en 8 onzas ó $\frac{1}{2}$ libra, 4 onzas ó $\frac{1}{4}$ libra y 1 onza ó $\frac{1}{16}$ de libra; los valores de estas partes alícuotas de libra se calcularán fácilmente dividiendo el valor de una por 2, el de 8 onzas por 2, y el de cuatro onzas por 4. Por último, los 6 adarmes del multiplicador se descomponen en 4 y 2 adarmes, ó sea $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ de onza, que se calcularán por medio de divisiones muy sencillas.

Sumando los valores parciales, es evidente que se obtendrá el de 15 libras, 13 onzas y 6 adarmes.

Disposicion práctica.

Valor de una libra....	8	duros	16	reales	24	maravedises.	
	15	libras	13	onzas	6	adarmes.	
Valor de 15 libras....	120	duros	240	reales	360	maravedises.	
Valor de 8 onzas....	4	»	8	»	12	»	
Valor de 4 onzas....	2	»	4	»	6	»	
Valor de 1 onza.....	»	»	11	»	1,5	»	
Valor de 4 adarmes	»	»	2	»	25,875	»	
Valor de 2 adarmes	»	»	1	»	12,9375	»	
	139	»	18	»	10,3125	»	

V.—Division.

311. La division tiene por objeto, segun sabemos, descomponer un producto en dos factores, siendo uno de estos conocido.

El producto es de igual naturaleza que el multiplicando, y el multiplicador se considera como abstracto, despues de reducido á la especie de la unidad; y como cualquiera de estos factores puede ser divisor, es claro que debemos considerar dos casos: 1.° que el dividendo y divisor sean de la misma naturaleza; 2.° que sean de distinta naturaleza.

312. PRIMER CASO. Si el dividendo y divisor son de la misma naturaleza, el cociente se debe considerar como abstracto, y la cuestion propuesta indicará su naturaleza.

Para dividir dos números de igual naturaleza se reducen el dividendo y divisor á una misma especie, y se dividen los números que resultan.

EJEMPLOS.

1.° *En un minuto arroja el caño de una fuente* 8 *litros de agua ¿cuántos minutos empleará en arrojar* 70 *litros?*

Es claro que la cantidad que se busca será igual al número de veces que 70 contiene á 8, esto es

$$\frac{70}{8} \text{ minutos} = 8 \text{ minutos } 45 \text{ segundos.}$$

2.° *Una vara de tela cuesta* 25 *reales, ¿cuántas varas podrán comprarse con* 60 *duros?*

Tenemos que dividir 60 duros por 25 reales, para lo que es necesario que el dividendo y divisor sean de la misma especie.

60 duros, reducidos á reales, dan 1200 reales; luego el cociente que buscamos será

$$\frac{1200}{25} = 48 \text{ varas.}$$

3.° *Una familia consume en un mes* 4 *libras y* 4 *onzas de café, ¿cuánto tiempo tardará en consumir* 1 *arroba,* 8 *libras y* 6 *onzas?*

Debemos dividir 1 arroba, 8 libras, 6 onzas por 4 libras, 4 onzas, reduciendo antes los números á incomplejos. El dividendo reducido á onzas vale 534 onzas, y el divisor 68; luego el número buscado es

$$\frac{534}{68} \text{ meses} = 7 \text{ meses } 25 \text{ dias.}$$

313. Segundo caso. Si el dividendo y divisor son de distinta naturaleza, el cociente es de igual naturaleza que el dividendo, y el divisor debe considerarse como número abstracto.

El objeto práctico de este caso es generalmente hallar el valor de la unidad, cuando se conoce el de varias unidades de la misma especie ó el de una fraccion de unidad.

Para dividir dos números de distinta naturaleza, se reduce el divisor á la especie de la unidad cuyo valor se busca, y el dividendo, si es complejo, á incomplejo de cualquiera de sus especies, y se efectúa la division.

Ejemplos.

1.° 76 *kilógramos han costado* 627 *reales, ¿cuánto vale el kilógramo?*

El precio del kilógramo es el cociente de 627 reales por 76, esto es, $\frac{627}{76} = 8{,}25$ reales.

2.° 23 *arrobas han costado* 920 *reales, ¿cuánto vale una libra?*

El dividendo es 920 reales, y el divisor debe reducirse á la especie de la unidad cuyo valor se pide, en este caso á libras, lo que da 23 . 25 = 575; luego el valor de una libra es

$$\frac{920}{575} = 1{,}60 \text{ reales.}$$

3.° *Con* 20 *libras y* 12 *onzas de hilo se tejen* 175 *varas,* 2 *piés y* 10 *pulgadas de tela, ¿cuánta de la misma clase se obtendrá con una arroba de hilo?*

El dividendo 175 varas, 2 piés y 10 pulgadas, reducido á una cualquiera de sus especies, la vara por ejemplo, se convierte en $\frac{6334}{36}$ varas, y el divisor, reducido precisamente á arrobas, da $\frac{332}{400}$ de arroba; luego el número buscado será

$$\frac{6334}{36} : \frac{332}{400} = 212 \text{ varas próximamente.}$$

Si reducido el divisor á la especie cuyo precio se busca, resulta un número entero, se dividen sucesivamente por el divisor los números incomplejos que constituyen el dividendo, empezando por las unidades superiores, y agregando cada residuo, reducido á la especie inferior inmediata, al dividendo parcial siguiente.

EJEMPLO.

12 *arrobas y* 13 *libras cuestan* 180 *duros,* 14 *reales y* 30 *maravedises, ¿cuánto cuesta una libra?*

El divisor, reducido á libras, da 313. Dejaremos, pues, el dividendo en su forma compleja, y dispondremos la operacion del modo siguiente:

180 duros 14 rs. 30 marav.	313
20	0 duros 11 rs. 18 $\frac{210}{313}$ maraved.
3600	
14	
3614 reales	
484	
171	
34	
684	
513	
5814	
30	
5844 maravedises	
2714	
210	

CAPÍTULO TERCERO.

PROBLEMAS USUALES DE ARITMÉTICA.

I.—Cantidades proporcionales.

314. El cociente ó razon de dos cantidades de igual naturaleza es un número abstracto [312], que se obtiene refiriendo las cantidades á la misma unidad y dividiendo los números que resultan. Diremos, pues,

RAZON ó RELACION *de dos cantidades de igual naturaleza, es la relacion abstracta de los números que se obtienen reduciendo dichas cantidades á la misma unidad.*

Así, para hallar la relacion de 23 varas 1 pié y 4 varas 2 piés, reduciremes las dos cantidades á la misma especie, el pié por ejemplo, y dividiendo los números 70 piés y 14 piés que resultan, el cociente abstracto 5 es la razon buscada, esto es,

$$\frac{23 \text{ varas } 1 \text{ pié}}{4 \text{ varas } 2 \text{ piés}} = \frac{70 \text{ piés}}{14 \text{ piés}} = \frac{70}{14} = 5.$$

Si redujéramos á varas, seria

$$\frac{23 \text{ varas } 1 \text{ pié}}{4 \text{ varas } 2 \text{ piés}} = \frac{\frac{70}{3} \text{ varas}}{\frac{14}{3} \text{ varas}} = \frac{70 \cdot 3}{14 \cdot 3} = 5.$$

315. *Cuando dos cantidades de igual naturaleza están ligadas, por las condiciones de una cuestion, á otras dos entre sí de igual naturaleza, de tal modo que la relacion de las primeras sea igual á la de las últimas, se dice que aquellas son* PROPORCIONALES *á éstas y recíprocamente.*

En algunas cuestiones la proporcionalidad es evidente; en otras corresponde su demostracion á ciencias distintas de la Aritmética; y tambien ocurren casos en que, no siendo las cantidades rigurosamente proporcionales, se tratan por convenio como si lo fueran.

Siempre que se consideran cantidades proporcionales, cualquiera que sea la cuestion propuesta, cada uno de los números que forman una razon corresponde de algun modo á uno de los que forman la otra: si el enunciado de la cuestion manifiesta que los numeradores de las razones son números correspondientes y los denominadores tambien, se dice que las cantidades de cada especie son *directamente proporcionales* á las de la otra, ó que están en *razon directa;* pero si al numerador de la primera razon corresponde el denominador de la segunda, y al denominador de aquella el numerador de ésta, las cantidades son *inversamente proporcionales,* ó están en *razon inversa.*

316. En todos los casos deberá ordenarse la proporcion de modo que si la primera razon es mayor que la unidad, lo sea tambien la segunda, y al contrario; por consiguiente:

Si el numerador de la primera razon es mayor ó menor que su denominador, el numerador de la segunda fraccion debe ser respectivamente mayor ó menor que el denominador de la misma.

317. Para que las propiedades demostradas en la teoría de igualdades fraccionarias puedan aplicarse á toda proporcion entre cantidades concretas, es necesario: 1.° *reducir á la misma especie los términos de cada fraccion;* 2.° *considerar como abstractos los números que resulten* [314].

II.—Regla de tres.

318. Todo problema en que entran uno ó mas pares de cantidades conocidas, siendo las de cada par homogéneas entre sí y proporcionales á las de otro par de cantidades tambien homogéneas, pero una de ellas desconocida, se llama *regla de tres.*

Si en el problema entra solamente un par de cantidades conocidas y proporcionales á las de otro par de cantidades, una de ellas desconocida, la regla de tres se llama *simple.* Si entran dos ó mas pares de cantidades conocidas, la regla de tres se llama *compuesta.*

Regla de tres simple.

319. Problema 1.° a *metros de tela han costado* b *reales. ¿Cuánto costarán* a' *metros de la misma clase de tela?*

Sea x el valor de los a' metros.

Metros.		Reales.
a	. . . .	b
a'	. . . .	x

En esta cuestion, a metros y a' metros forman un par de cantidades conocidas y homogéneas; b reales y x reales forman otro par de cantidades tambien homogéneas, pero una de ellas

x desconocida. Además, es evidente que si a metros se multiplica por un número cualquiera m, la cantidad correspondiente b reales resultará multiplicada por el mismo número; luego am metros costarán bm reales. Si consideramos las cuatro cantidades

Metros.		Reales.
a	. . . .	b
am	. . . .	bm

tendremos

$$\frac{a}{am}=\frac{b}{bm} \quad [1],$$

pues ambas fracciones simplificadas dan $\frac{1}{m}$. Puesto que m es un número cualquiera, haremos $m=\frac{a'}{a}$; y en este supuesto la cantidad bm reales, que representa en general el valor de am metros, representará ahora el valor de $a\times\frac{a'}{a}$ metros, ó sea el de a'; mas como este valor se representa por x, será $bm=x$. Haciendo en la igualdad [1] $am=a\times\frac{a'}{a}=a'$, $bm=x$, tendremos

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{x} \quad \text{de donde} \quad x=b\times\frac{a'}{a}.$$

Observando que los numeradores de la igualdad fraccionaria son números correspondientes, podremos decir:

Siempre que multiplicando una de las cantidades por un número deba resultar multiplicada su correspondiente, las cantidades son directamente proporcionales; y para hallar la incógnita se multiplica el número de su especie por una fraccion, que tiene por numerador la cantidad correspondiente á la incógnita y por denominador la correspondiente á su homogénea.

PROBLEMA 2.° a *obreros hacen una obra en* b *dias. ¿En cuántos dias harán* a' *obreros otra igual?*

Sean x los dias que emplearán los a' obreros.

Obreros.		Dias.
a	. . . .	b
a'	. . . .	x

La naturaleza de esta cuestion manifiesta con evidencia que si a obreros se multiplica por un número cualquiera m, la cantidad correspondiente b dias resultará dividida por el mismo número; luego am obreros emplearán en hacer la obra $b : m$ dias. Considerando las cantidades

Obreros.		Dias.
a	. . . .	b
am	. . . .	$b : m$,

vemos que

$$\frac{a}{am} = \frac{b : m}{b} \quad [1],$$

pues simplificando estas fracciones dan los valores iguales $\frac{1}{m}$ y $1 : m$. Puesto que m es un número cualquiera, sea $m = \frac{a'}{a}$; en este supuesto la cantidad $b : m$, que representa en general el número de dias correspondiente á am obreros, representará ahora el número de dias que emplearán en hacer la obra $a \times \frac{a'}{a}$ ó sea a' obreros; mas como este número de dias se representa por x, será $b : m = x$. Haciendo en la igualdad [1] $am = a \times \frac{a'}{a} = a'$, $b : m = x$, tendremos

$$\frac{a}{a'} = \frac{x}{b}, \quad \text{de donde} \quad x = b \times \frac{a}{a'}.$$

Observando que al numerador a de la primera fraccion corresponde, en el enunciado del problema, el denominador b de la segunda, diremos:

Siempre que multiplicando una de las cantidades por un número deba resultar dividida su correspondiente por el mismo número, las cantidades son inversamente proporcionales; y para hallar la incógnita se multiplica el número de su especie por una fraccion, que tiene por numerador la cantidad correspondiente á la homogénea de la incógnita y por denominador la correspondiente á ésta.

EJEMPLOS.

1.° 15 *litros de mercurio á cero grados pesan* 204 *kilógramos. ¿Cuánto pesarán* 34,25 *litros de mercurio en iguales condiciones?*

Dispuestas las cantidades como sigue

Litros.		Kilógramos.
15	. . . .	204
34,25	. . . .	x

diremos: si el número de litros se duplica, el de kilógramos se duplicará tambien; luego la proporcionalidad es directa y

$$x = 204 \times \frac{34,25}{15} = 465,8 \text{ kilógramos.}$$

Si queremos escribir la proporcion tomaremos para numeradores las cantidades correspondientes 15 y 204, y será

$$\frac{15}{34,25} = \frac{204}{x}.$$

2.° 2500 *hombres tienen víveres para* 60 *dias. ¿Cuántos dias durarán los mismos víveres á* 3000 *hombres?*

Dispuestas las cantidades como sigue

Hombres.		Dias.
2500	. . . .	60
3000	. . . .	x

diremos: si el número de hombres se duplica, el de dias quedará dividido por 2; luego la proporcionalidad es inversa y

$$x = 60 \times \frac{2500}{3000} = 50 \text{ dias.}$$

Si queremos escribir la proporcion tomaremos la cantidad 2500 para numerador del primer quebrado, y su correspondiente 60 para denominador del segundo, y será

$$\frac{2500}{3000} = \frac{x}{60}.$$

Regla de tres compuesta.

320. Problema. a *obreros, trabajando* b *horas al dia, concluyen en* c *dias una obra, cuya dificultad está representada por* d. *¿En cuántos dias concluirán* a' *obreros, trabajando* b' *horas al dia, una obra cuya dificultad sea* d'*?*

Llamemos x á los dias que emplearán en hacer la segunda obra los a' obreros, y dispongamos las cantidades en la forma siguiente:

Obreros.	Horas.	Dias	Dificultad.
a	. b . . .	. c	. d.
a'	. b' . . .	. x	. d'

Suponiendo iguales las horas de trabajo y la dificultad, la cuestion se reduce á esta otra:

a *obreros hacen una obra en* c *dias*; a' *obreros, ¿en cuántos dias la harán?*

Esta regla de tres es simple, y da para valor de la incógnita $c \times \frac{a}{a'}$.

Suponiendo ahora igual la dificultad solamente, se presenta esta otra cuestion:

si a' *obreros, trabajando* b *horas, hacen una obra en* $c \times \frac{a}{a'}$ *dias; trabajando* b' *horas, ¿en cuántos dias la concluirán?*

Tambien esta regla de tres es simple, y la incógnita es $c \times \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}$.

Por último, suponiendo desigual la dificultad diremos: *si* a' *obreros, trabajando* b' *horas, emplean* $c \times \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}$ *dias en hacer una obra cuya dificultad es* d, *¿cuánto tiempo invertirán si la dificultad es* d'?

Esta regla de tres simple resuelve el problema propuesto, y el valor de la incógita es

$$x = c \times \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{d'}{d}.$$

Si tenemos presente que el número de dias es inversamente proporcional al de obreros y al de horas, y directamente proporcional á la dificultad, podremos decir:

En una regla de tres compuesta, la cantidad incógnita se obtiene multiplicando su homogénea por las razónes que se forman dividiendo las cantidades de cada par. Cuando un par es directamente proporcional al de la incógnita, se pone por numerador la cantidad correspondiente á ésta y la otra por denominador; y al contrario si los mencionados pares son inversamente proporcionales.

EJEMPLOS.

1.° 1500 *obreros han abierto un canal de* 70 *kilómetros de largo,* 18 *metros de ancho y* 4 *metros de hondo, en* 520 *dias. ¿Cuánto tiempo emplearán* 580 *obreros en abrir otro canal de* 50 *kilómetros de largo,* 20 *metros de ancho y* 3,80 *de profundidad?*

Obreros.	Largo.	Ancho.	Hondo.	Dias.
1500	70	18	4	520
580	50	20	3,80	x

El primer par es inversamente proporcional al de la incógnita, y los tres restantes lo son directamente; luego

$$x = 520 \times \frac{1500}{580} \times \frac{50}{70} \times \frac{20}{18} \times \frac{3,80}{4} = 1014 \text{ dias.}$$

2.° *Un caño, que arroja en* 6 *minutos* 90 *litros de agua, ha llenado un estanque de* 14 *metros de largo,* 4 *de ancho y* 1,50 *de hondo, en* 93 $\frac{1}{3}$ *horas. Otro caño que arroja en* 5 *minutos* 120 *litros de agua, ¿en cuánto tiempo llenará un estanque de* 12 *metros de largo,* 5 *de ancho y* 0,80 *de hondo?*

Minutos.	Litros.	Largo.	Ancho.	Hondo.	Horas.
6. . .	90. . .	14. . .	4. . .	1,50. .	93 ⅓
5. . .	120. . .	12. . .	5. . .	0,80. .	x

Los litros son inversamente proporcionales á las horas; los demás pares están en razon directa, luego

$$x = 93\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{90}{120} \times \frac{12}{14} \times \frac{5}{4} \times \frac{0,80}{1,50} = 33\frac{1}{3} \text{ horas.}$$

Método de reduccion á la unidad.

321. Para resolver por este método una regla de tres simple, *se halla la cantidad correspondiente á una unidad de la especie del par conocido, y despues la correspondiente á un número de unidades de la misma especie indicado por la pregunta del problema. El resultado será la incógnita del mismo.*

Cuando la regla de tres es compuesta, se descompone en varias reglas de tres simples, segun se ha visto en el número 320, resolviendo cada una por la anterior regla.

Ejemplos.

1.° 13 *libras equivalen á* 6 *kilógramos. ¿Á cuántos kilógramos equivalen* 52 *libras?*

Libras.	Kilógramos.
13	6
52	x

Si 13 libras equivalen á 6 kilógramos, 1 libra equivaldrá á $\frac{6}{13}$ kilógramos, y 52 libras á

$$\frac{6}{13} \times 52 = 24 \text{ kilógramos.}$$

2.º *Con una velocidad de 40 kilómetros por hora, recorre un tren su trayecto en 18 horas. ¿En cuánto tiempo recorrerá igual trayecto si la velocidad es de 24 kilómetros?*

Kilómetros.		Horas.
40	. . . .	18
24	. . . .	x

Si con la velocidad 40 recorre el tren su trayecto en 18 horas, con la velocidad 1 lo recorrerá en 18×40 horas, y con la velocidad 24 en

$$\frac{18 \times 40}{24} = 30 \text{ horas.}$$

3.º *Cada página de un manuscrito tiene 26 líneas de 44 letras cada una, y ocupa 240 páginas. ¿Cuántas páginas de impresion ocupará teniendo cada página 33 líneas de 47 letras?*

Líneas.		Letras.		Páginas.
26	. . . .	44	. . . .	240
33	. . . .	47	. . . .	x

Suponiendo igual el número de letras de cada línea, diremos: si teniendo cada página 26 líneas ocupa el manuscrito 240 páginas, teniendo una línea ocuparia el manuscrito 240×26, y teniendo 33 ocuparia $\frac{240 \times 26}{33}$ páginas.

Tomando ahora en cuenta el número de letras de cada línea, diremos: si siendo las letras 44 se ocupan $\frac{240 \times 26}{33}$ páginas, teniendo una letra cada línea se ocuparian $\frac{240 \times 26 \times 44}{33}$ páginas, y teniendo 47, será

$$x = \frac{240 \times 26 \times 44}{33 \times 47} = 177 \text{ páginas.}$$

Escolio. Las operaciones necesarias para calcular la incógnita por este método, son las mismas que exige el anterior.

III.—Interés.

322. *Se llama* INTERÉS *de un capital la ganancia obtenida por el préstamo ó empleo del mismo, durante un tiempo determinado.*

Para calcular los intereses de un modo uniforme, se conviene en que 100 unidades de dinero produzcan al dueño del capital una cierta cantidad al cabo de un año; y el número abstracto que expresa esta cantidad se llama *tanto por ciento*.

Si cada 100 pesetas producen en un año 7 pesetas de ganancia, se dice que el capital produce el 7 por ciento, que se expresa por la abreviatura $7^{0}/_{0}$.

El interés puede ser *simple* y *compuesto*.

Es *simple* cuando se perciben los intereses cada seis meses, cada año, en general, por períodos iguales de tiempo, sin que el capital varíe.

El interés es *compuesto* cuando los intereses que produce un capital en un período de tiempo, se acumulan al capital, formando así uno nuevo, que aumenta al fin de cada período.

Vamos á ocuparnos tan solo del interés simple.

Es evidente que *los intereses de dos capitales en el mismo tiempo, son directamente proporcionales á los capitales.*

Se admite como cierto que *los intereses de un capital en tiempos diferentes, son directamente proporcionales á los tiempos.*

PROBLEMA. *Hallar el interés de un capital* C *durante un tiempo* t *al tanto por ciento* r.

Este problema puede enunciarse diciendo:

El capital 100 *produce en* 1 *año* r *unidades. ¿Cuánto producirá el capital* C *en* t *años?*

La cuestion, enunciada así, es una regla de tres compuesta.

Llamemos i al interés del capital C, y dispongamos las cantidades como sigue:

Capital.	Tiempo.	Interés.
100	1	r
C	t	i

Segun se ha dicho, el interés está en razon directa del capital y del tiempo, luego

$$i = r \times \frac{C}{100} \times \frac{t}{1}, \quad \text{ó} \quad i = \frac{C . r . t}{100}.$$

Los términos de la razon $\frac{t}{1}$ deben ser de la misma especie [314]; por consiguiente si el tiempo se expresa en meses, dicha razon se convierte en $\frac{t}{12}$, y si en dias en $\frac{t}{360}$[1]. Los respectivos valores de i serán

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}, \quad i = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000};$$

donde vemos que el número 100 que entra en el primer valor de i, deberá sustituirse por 1200, si el tiempo se expresa en meses; y por 36000, si se expresa en dias.

De la expresion $i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ se deduce fácilmente:

$$r = \frac{100 \cdot i}{C \cdot t}, \quad t = \frac{100 \cdot i}{C \cdot r}, \quad C = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t}.$$

Por consiguiente, siempre que tres de las cantidades C, r, t, i sean conocidas, podrá hallarse la cuarta.

Ejemplos.

1.° *Hallar el interés de* 120000 *pesetas en un año al* 8 *p°*$|_0$.

C vale 120000, r vale 8, t vale 1, luego

$$i = \frac{120000 \cdot 8}{100} = 9600 \text{ pesetas.}$$

2.° *Hallar el interés de* 4500 *duros en* 4 *meses al* 7 *p°*$|_0$.

C vale 4500, r vale 7, t vale 4, y 100 se debe sustituir por 1200, luego

$$i = \frac{4500 \cdot 7 \cdot 4}{1200} = 105 \text{ duros.}$$

3.° 80000 *reales han producido en* 270 *dias un interés de* 3000 *reales. ¿Cuál ha sido el tanto por ciento?*

C vale 80000, i vale 3000, t vale 270, y 100 debe sustituirse por 36000, luego

$$r = \frac{36000 \cdot 3000}{80000 \cdot 270} = 5.$$

---

1 En el comercio se considera generalmente el año de 360 dias.

4.° *¿Cuánto tiempo ha estado impuesto un capital de* 100000 *reales que al* 8 $p^{o}|_{o}$ *ha producido* 2400 *reales?*

i vale 2400, C vale 100000, r vale 8, luego

$$t = \frac{100 \times 2400}{100000 \cdot 8} = \frac{3}{10} \text{ año} = 108 \text{ dias.}$$

5.° *¿Qué capital deberá imponerse al* 7 $p^{o}|_{o}$ *para recibir cada* 6 *meses* 12000 *reales?*

i vale 12000, r vale 7, t vale 6, y 100 debe sustituirse por 1200, luego

$$C = \frac{1200 \cdot 12000}{7 \cdot 6} = 342857 \text{ reales.}$$

IV.—Descuento.

323. *Se llama* LETRA DE CAMBIO *un documento mercantil, por el que una persona manda á otra pagar cierta cantidad á la órden de una tercera persona.*

En la letra se expresa si el pago debe hacerse *á la vista* ó *á plazo*, esto es, en el acto de presentarla ó pasado un tiempo, indicado en la misma letra, que se cuenta desde el dia siguiente á la presentacion de ésta ó á su fecha.

PAGARÉ *es tambien un documento mercantil por el que una persona se obliga á pagar á la órden de otra una cantidad, en determinada fecha.*

Si el tenedor de un pagaré ó de una letra á plazo la presenta al cobro el dia del vencimiento, recibe toda la cantidad que expresa la letra: pero si desea hacerla efectiva ántes del vencimiento, recibirá una cantidad menor, en atencion al anticipo que se le hace. Tienen, pues, las letras á plazo y los pagarés dos valores: el que expresa el documento, llamado *valor nominal;* y el que se le da convencionalmente ántes del vencimiento, llamado *valor actual*. Es claro que el valor actual aumenta á medida que se acerca el vencimiento, y es igual al nominal cuando espira el plazo. La diferencia entre los valores nominal y actual se llama *descuento*.

Hay dos clases de descuento, llamados *comercial* y *racional*. *El primero es proporcional al valor nominal de la letra y al tiempo que falta para su vencimiento*. Es, pues, el interés del valor nominal en dicho tiempo.

El segundo es proporcional al valor actual de la letra y al *tiempo*. Es, pues, el interés de la cantidad que realmente anticipa el que toma la letra.

Estos intereses se calculan por un tanto por 100, llamado *tanto por ciento de descuento.*

324. Problema. *Descontar comercialmente una letra de* N *reales, que vence al fin del tiempo* t, *siendo* r *el tanto por* 100 *de descuento.*

El interés de N reales en el tiempo t, al tanto por ciento r, es $\frac{N.r.t}{100}$ [322], y este interés es el descuento.

El valor actual de la letra será

$$N-\frac{N.r.t}{100}=N\left(1-\frac{r.t}{100}\right).$$

En la práctica, 100 se sustituye por 1200, si el tiempo se expresa en meses; y por 36000, si el tiempo se expresa en dias.

Ejemplo. *Descontar comercialmente una letra de* 40000 *pesetas, que vence á los* 70 *dias, al* 5 $p^{\circ}|_{0}$ *de descuento.*

N vale 40000, r vale 5, t vale 70, y 100 se reemplaza por 36000; luego el descuento será

$$\frac{40000.5.70}{36000}=388,88 \text{ pesetas.}$$

El valor actual es

$$40000-388,88=39611,12 \text{ pesetas.}$$

325. Problema. *Descontar racionalmente una letra de* N *reales, que vence al fin del tiempo* t, *siendo* r *el tanto por* 100 *de descuento.*

El interés del capital 100 en el tiempo t es $\frac{100.r.t}{100}=rt$; luego 100 reales, al cabo del tiempo t valen $100+rt$; y el valor actual de la letra, que representaremos por A, al cabo del mismo tiempo se convierte en el nominal N. Tenemos, pues, las cantidades siguientes, que son directamente proporcionales.

Valor actual.	Valor al vencimento.
100	$100+rt$
A	N

Luego la incógnita

$$A=100\times\frac{N}{100+rt}.$$

Si el tiempo se expresa en meses, el interés de 100 unidades en t meses será $\frac{rt}{12}$, y la cantidad $100+rt$ deberá sustituirse en el valor de A por $100+\frac{rt}{12}$, lo que dará

$$A=100\times\frac{N}{100+\frac{rt}{12}}=1200\times\frac{N}{1200+rt}.$$

Del mismo modo, es fácil ver que si el tiempo se expresa en dias, será

$$A=36000\times\frac{N}{36000+rt}.$$

Luego si el tiempo se expresa en dias ó en meses, se sustituye en el primer valor de A cada número 100 por 36000 ó 1200.

EJEMPLO. *Descontar racionalmente una letra de 40000 pesetas, que vence á los 70 dias, al 5 p°|₀ de descuento.*

N vale 40000, r vale 5, t vale 70, y en lugar de 100 pondremos 36000, luego

$$A=36000\times\frac{40000}{36000+5\,.\,70}=39614{,}86 \text{ pesetas.}$$

V.—Regla de compañía.

326. *La* REGLA DE COMPAÑÍA *tiene por objeto repartir entre varios socios la ganancia ó pérdida que ha tenido la sociedad.*

Tres casos pueden ocurrir en la resolucion de este problema.

1.° Que los capitales de los socios sean diferentes y estén el mismo tiempo en la sociedad.

2.° Que los capitales sean iguales y los tiempos diferentes.

3.° Que los capitales y los tiempos sean diferentes.

La resolucion de estos casos se funda en los principios siguientes:

1.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales diferentes en un mismo tiempo, son proporcionales á los capitales.*

2.° *Las ganancias ó pérdidas de un capital en tiempos diferentes, son proporcionales á los tiempos.*

3.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales diferentes en tiempos diferentes, son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

El primer principio es evidente; el segundo se admite convencionalmente como cierto; el tercero es consecuencia de los otros dos.

En efecto, llamemos C y C' á los capitales, t y t' á los tiempos, x y x' á las ganancias ó pérdidas; y dispongamos estas cantidades en la forma siguiente:

Capitales.	Tiempos.	Ganancias ó pérdidas.
C	t	x
C'	t'	x'

Siendo las ganancias ó pérdidas directamente proporcionales á los capitales y á los tiempos, tendremos

$$x = x' \times \frac{C}{C'} \times \frac{t}{t'}, \text{ de donde } \frac{x}{x'} = \frac{C \,.\, t}{C' \,.\, t'}.$$

327. Los principios anteriores manifiestan que todos los casos de la regla de compañía están comprendidos en la cuestion general siguiente.

Problema. *Dividir un número dado* N *en partes proporcionales á varios números dados* a, b, c.

Sean x, y, z las partes en que se quiere dividir el número N.

Segun el enunciado del problema, los números x, y, z deben satisfacer á las dos condiciones:

$$x + y + z = N, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

De la segunda se deduce [200]

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a}, \quad \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{y}{b}, \quad \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{z}{c};$$

pero, en virtud de la primera condicion, es $x + y + z = N$; luego

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a}, \quad \frac{N}{a+b+c} = \frac{y}{b}, \quad \frac{N}{a+b+c} = \frac{z}{c}.$$

De estas igualdades se deduce [191]

$$x = \frac{N}{a+b+c} \times a, \; y = \frac{N}{a+b+c} \times b, \; z = \frac{N}{a+b+c} \times c.$$

Luego, *para dividir un número en partes proporcionales á otros dados, se divide el número por la suma de estos, y el cociente se multiplica sucesivamente por cada uno de ellos.*

EJEMPLOS.

1.° *Los capitales de tres socios son, durante el mismo tiempo,* 70000, 40000 *y* 50000 *reales respectivamente; la ganancia es de* 24000 *reales. ¿Cuál es la parte de cada uno?*

Dividiendo 24000 en partes proporcionales á los capitales, resulta

Ganancia del 1.er socio... $\dfrac{24000}{70000+40000+50000} \times 70000 = 10500$ reales.

Idem del 2.°.. $\dfrac{24000}{70000+40000+50000} \times 40000 = \ 6000$ »

Idem del 3.°.. $\dfrac{24000}{70000+40000+50000} \times 50000 = \ 7500$ »

2.° *Tres socios ponen capitales iguales, el primero por* 11 *meses, el segundo por* 10 *y el tercero por* 9; *sufren una pérdida de* 15000 *reales. ¿Cuánto pierde cada uno?*

Dividiendo 15000 en partes proporcionales á los tiempos, se obtiene

Pérdida del 1.er socio. $\dfrac{15000}{11+10+9} \times 11 = 5500$ reales.

Pérdida del 2.°......... $\dfrac{15000}{11+10+9} \times 10 = 5000$ »

Pérdida del 3.°......... $\dfrac{15000}{11+10+9} \times 9 = 4500$ »

3.° *Tres socios forman compañía: el primero pone* 8000 *reales por* 7 *meses, el segundo* 50000 *reales por* 4 *meses, y el tercero* 100000 *reales por* 9 *meses; la ganancia es de* 28900 *reales. ¿Cuánto corresponde á cada uno?*

Hay que dividir el número 28900 en partes proporcionales á los productos 8000 . 7, 50000 . 4, 100000 . 9 de los capitales por los tiempos.

Así se obtiene

Parte del 1.er socio $\dfrac{28900}{8000.7+50000.4+100000.9} \times \ 8000.7 = \ 1400$ rs.

Id. del 2.° $\dfrac{28900}{8000.7+50000.4+100000.9} \times \ 50000.4 = \ 5000$ »

Id. del 3.° $\dfrac{28900}{8000.7+50000.4+100000.9} \times 100000.9 = 22500$ »

VI.—Regla de aligacion.

328. *La* REGLA DE ALIGACION *tiene dos objetos principales:*

1.° *Hallar el precio de una mezcla, conociendo las cantidades mezcladas y sus respectivos precios;*

2.° *Hallar las cantidades que deben mezclarse, conociendo sus precios respectivos y el precio de la mezcla.*

El primer problema se llama regla de aligacion *directa*, y el segundo, regla de aligacion *inversa*.

329. Las reglas de aligacion directa se resuelven hallando los valores de las cantidades mezcladas y sumándolos, con lo que se obtiene el valor de la mezcla. Para hallar el precio de la misma, ó sea el valor de la unidad, se divide el valor de la mezcla por la suma de las cantidades mezcladas.

EJEMPLOS.

1.° *Se mezclan* 27 *kilógramos de café de* 18 *reales el kilógramo, con* 10 *kilógramos de* 23 *reales y* 17 *de* 20, *¿cuál es el precio de la mezcla?*

27	kilógramos	á 18	reales	valen	486 reales
10	»	23	»	»	230 »
17	»	20	»	»	340 »
54	kilógramos de mezcla			valen	1056 reales;

luego el precio de la mezcla es

$$\frac{1056}{54} = 19\frac{5}{9} \text{ reales.}$$

2.° *Se ligan* 36 *kilógramos de plata cuya ley es de* 950 *milésimas, con* 20 *cuya ley es de* 835 *milésimas, con* 10 *cuya ley es de* 720 *milésimas y con* 13 *de plata pura. ¿Cuál es la ley de la aleacion?*

36	kilógramos	de 950	milésimas	contienen	34200 milésimas
20	»	835	»	»	16700 »
10	»	720	»	»	7200 »
13	»	de plata pura		»	13000 »
79	kilógramos de liga contienen.				71100 milésimas;

luego la ley de la aleacion es

$$\frac{71100}{79} = 900 \text{ milésimas.}$$

330. La resolucion de los problemas de aligacion inversa se funda en el teorema siguiente:

Si se mezclan cantidades de dos especies, dichas cantidades están en razon inversa de las diferencias de sus precios al precio de la mezcla.

Sean x é y las cantidades que deben mezclarse, p y p' sus precios respectivos, y m el precio de la mezcla. Supongamos que $p > p'$.

Es evidente que el precio de la mezcla debe estar comprendido entre los precios de las especies mezcladas, de modo que $p > m$ y $m > p'$.

Cada unidad de clase superior, cuyo valor es p, vendida al precio m de la mezcla, causa una pérdida $p - m$, por consiguiente x unidades de dicha clase causarán una pérdida de $x\,(p - m)$.

Cada unidad de clase inferior, cuyo valor es p', vendida al precio m de la mezcla, produce una ganancia $m - p'$, luego y unidades de dicha clase producirán una ganancia de $y\,(m - p')$.

Pero al hacer la mezcla de las especies no se quiere perder ni ganar, luego la pérdida que originan las x unidades de clase superior debe ser igual á la ganancia que producen las y unidades de clase inferior, esto es,

$$x\,(p - m) = y\,(m - p'),$$

de donde se deduce [193]

$$\frac{x}{y} = \frac{m - p'}{p - m},$$

igualdad que demuestra el teorema.

Para verificarse esta igualdad es necesario solamente que la razon de los valores asignados á x é y, sea igual á la razon $\frac{m - p'}{p - m}$, lo que tendrá lugar haciendo $x = m - p'$, $y = p - m$; y como los términos de un quebrado $\frac{x}{y}$ se pueden multiplicar ó dividir por un número cualquiera, sin que se altere su relacion, se deduce que multiplicando ó dividiendo los números $m - p'$ y $p - m$ por un mismo número se obtendrán cuantas soluciones se quieran.

Ejemplo. *Se quiere mezclar vino de* 50 *reales el decálitro con* *vino de* 68 *reales, para vender la mezcla á* 62 *reales. ¿Cuántos decálitros de cada especie se mezclarán?*

Precio de la mezcla.	Precios de las especies.	Cantidades.
62	50	6
	68	12

Restando 50 del precio de la mezcla se obtienen los decálitros de la clase superior, que son 12; y restando 62 de 68, los de la clase inferior, que son 6.

Multiplicando los números 6 y 12 por un mismo número, obtendremos otras soluciones. Así, pueden mezclarse 12 decálitros de la clase superior y 6 de la inferior, ó 24 de la primera y 12 de la segunda etc.

Si las especies que deben mezclarse son mas de dos, se reduce el problema al que acabamos de resolver considerando las especies dos á dos, en un órden cualquiera, si bien cuidando de que sus precios comprendan al de la mezcla, hasta haberlas considerado todas.

Ejemplos.

1.° *Se mezclan varias clases de trigo de* 23,50 *pesetas,* 28,75 *pesetas,* 20 *pesetas y* 26,25 *pesetas el hectólitro. ¿Cuántos hectólitros de cada clase se tomarán para vender la mezcla á* 25,50 *pesetas el hectólitro?*

Precio de la mezcla.	Precios de las especies.	Cantidades.
	23,50	3,25
25,50	28,75	2
	20	0,75
	26,25	5,50

2.° *Se liga plata de* 720 *milésimas, de* 850, *de* 950, *de* 600 *y plata pura. ¿Cuánta deberá tomarse de cada especie para obtener plata de* 900 *milésimas?*

Ley de la liga.	Leyes de las especies.	Cantidades.
	720	50
	850	100
900	950	180 + 300
	600	50
	1000	50

Considerando las leyes 950 y 720, que comprenden la ley de la liga, resultan los números 50 y 180; considerando otras dos 1000 y 850, por ejemplo, se obtienen 100 y 50; por último, considerando otras dos 950 y 600, hemos hallado 50 y 300.

331. Si en la igualdad fraccionaria

$$\frac{x}{y}=\frac{m-p'}{p-m},$$

que da para x é y infinidad de valores, damos á x ó á y un valor determinado, la otra incógnita tendrá tambien un solo valor.

Lo mismo sucederá cuando el valor de $x+y$ ó de $x-y$ sea determinado.

En efecto:

1.° *¿Cuántas libras de café de* 12 *reales deberán mezclarse con* 24 *libras de* 7 *reales, para vender la mezcla á* 9 *reales?*

Sabemos que en este caso $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$; pero y vale 24, luego

$$\frac{x}{24}=\frac{2}{3},\qquad x=\frac{2\times 24}{3}=16 \text{ libras.}$$

2.° *¿Cuánto trigo de* 38 *reales fanega se mezclará con trigo de* 47 *reales, para obtener* 270 *fanegas y venderlas á* 43 *reales?*

Tenemos $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$, de donde $\frac{x+y}{x}=\frac{4+5}{4}$,

pero $x+y=270$, luego $\frac{270}{x}=\frac{9}{4}$,

$$x=\frac{270\,.\,4}{9}=120 \text{ fanegas.}$$

Del mismo modo, $\frac{x+y}{y}=\frac{4+5}{5}$,

pero $x+y=270$, luego $\frac{270}{y}=\frac{9}{5}$,

de donde $$y=\frac{270\times 5}{9}=150 \text{ fanegas.}$$

3.° *Se quiere mezclar vino de* 76 *reales decálitro con otra clase de vino de* 60 *reales, debiendo exceder la cantidad de la clase primera á la otra en* 20 *decálitros. ¿Cuántos decálitros de cada clase debemos mezclar, para vender la mezcla á* 72 *reales?*

Tenemos $\frac{x}{y}=\frac{12}{4}$, luego $\frac{x-y}{x}=\frac{12-4}{12}$;

pero $x-y=20$, luego $\frac{20}{x}=\frac{8}{12}$,

$$x=30 \text{ decálitros.}$$

Del mismo modo, $\frac{x-y}{y}=\frac{12-4}{4}$;

pero $x-y=20$, luego $\frac{20}{y}=\frac{8}{4}$,

$$y = 10 \text{ decálitros.}$$

VII.—Regla conjunta.

332. Se llaman *cantidades equivalentes* las cantidades que reducidas á la misma unidad son iguales.

Tales son 20 varas y 60 piés; 5 duros y 25 pesetas.

La propiedad de ser equivalentes dos cantidades se expresa por medio del signo *igual á* colocado entre ellas; por ejemplo 5 metros = 6 varas, y la expresion recibe el nombre de *equivalencia.*

Teorema. *Los productos ordenados de varias equivalencias, tales que el primer miembro de cada una sea de la especie del segundo miembro de la anterior, son equivalentes, siendo el primer producto de la primera de todas las especies y el segundo de la última.*

Sean las equivalencias

$$\begin{aligned} a \text{ varas} &= b \text{ metros,}\\ c \text{ metros} &= d \text{ yardas,}\\ e \text{ yardas} &= f \text{ piés del Rhin.}\end{aligned}$$

Queremos demostrar que

$$a \times c \times e \text{ varas} = b \times d \times f \text{ piés del Rhin.}$$

Multiplicando la primera equivalencia por c y la segunda por b, considerados como números abstractos, resulta

$$\begin{aligned} a \times c \text{ varas} &= b \times c \text{ metros,}\\ c \times b \text{ metros} &= b \times d \text{ yardas.}\end{aligned}$$

De estas dos se deduce evidentemente esta otra

$$a \times c \text{ varas} = b \times d \text{ yardas.}$$

Multiplicando ésta por e y la tercera de las propuestas por el producto $b \times d$, resultan

$$\begin{aligned} a \times c \times e \text{ varas} &= b \times d \times e \text{ yardas,}\\ b \times d \times e \text{ yardas} &= b \times d \times f \text{ piés del Rhin.}\end{aligned}$$

De donde

$$a \times c \times e \text{ varas} = b \times d \times f \text{ piés del Rhin.}$$

333. La *regla conjunta* tiene por objeto reducir una magnitud concreta á otra equivalente de diferente especie, por medio de equivalencias que ligan la primera con la segunda.

Para resolver los problemas de regla conjunta, se escriben varias equivalencias de modo que el primer miembro de cada una sea de la especie del segundo de la anterior, y el segundo miembro de la última de la misma especie que el primero de la primera. Multiplicando despues ordenadamente las equivalencias, se deducirá fácilmente el valor de la incógnita.

EJEMPLOS.

1.° *Reducir* 180 *varas á yardas, sabiendo que* 61 *varas equivalen á* 51 *metros,* 43 *metros á* 137 *piés del Rhin,* 34 *piés del Rhin á* 35 *piés ingleses, y que la yarda tiene tres piés ingleses.*

Llamemos x al número de yardas equivalente á 180 varas, y escribamos las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} x \text{ yardas} &= 180 \text{ varas} \\ 61 \text{ varas} &= 51 \text{ metros} \\ 43 \text{ metros} &= 137 \text{ piés del Rhin} \\ 34 \text{ piés del Rhin} &= 35 \text{ piés ingleses} \\ 3 \text{ piés ingleses} &= 1 \text{ yarda} \end{aligned}$$

Multiplicándolas ordenadamente resulta

$$x \,.\, 61 \,.\, 43 \,.\, 34 \,.\, 3 \text{ yardas} = 180 \,.\, 51 \,.\, 137 \,.\, 35 \,.\, 1 \text{ yardas}$$

luego
$$x = \frac{180 \,.\, 51 \,.\, 137 \,.\, 35 \,.\, 1}{61 \,.\, 43 \,.\, 34 \,.\, 3} = 164{,}53 \text{ yardas.}$$

2.° *Reducir* 520 *libras esterlinas á reales, suponiendo que* 3 *libras esterlinas se cambian por* 20 *thalers,* 4 *thalers por* 15 *francos y* 5 *francos por* 19 *reales.*

Llamemos x al número de reales equivalente á 520 libras esterlinas, y escribamos las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} x \text{ reales} &= 520 \text{ libras esterlinas,} \\ 3 \text{ libras} &= 20 \text{ thalers,} \\ 4 \text{ thalers} &= 15 \text{ francos,} \\ 5 \text{ francos} &= 19 \text{ reales.} \end{aligned}$$

Multiplicándolas ordenadamente resulta

$$x \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \text{ reales} = 520 \,.\, 20 \,.\, 15 \,.\, 19 \text{ reales,}$$

de donde

$$x = \frac{520 \,.\, 20 \,.\, 15 \,.\, 19}{3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 520 \,.\, 5 \,.\, 19 = 49400 \text{ reales.}$$

EJERCICIOS.

I. Convertir 7 duros, 12 reales, 15 maravedises en incomplejo de la especie inferior.
II. Convertir 30 hectáreas, 28 áreas, 35 metros cuadrados en incomplejo de la especie inferior.
III. Convertir 12 arrobas, 22 libras, 10 onzas en incomplejo de libras y en incomplejo de arrobas.
IV. Convertir 28 kilógramos, 3 decágramos, 7 decígramos en incomplejo de kilógramos, de hectógramos, de decágramos y de gramos.
V. Convertir 5728 maravedises en complejo.
VI. Convertir 4579008 milímetros en complejo.

VII. Convertir $\frac{19}{7}$ de cántara en complejo.

VIII. Convertir $\frac{27}{16}$ de kilómetro en complejo.

IX. Reducir 15 arrobas, 20 libras á kilógramos.
X. Reducir 45 decálitros, 6 litros á cántaras.
XI. Reducir 25 fanegas y 100 varas cuadradas á hectáreas.
XII. Reducir 50,4528 hectáreas á fanegas.
XIII. Convertir 34 piés cúbicos en decímetros cúbicos.
XIV. Convertir 78 metros cúbicos en varas cúbicas.

XV. Un obrero teje en un dia 20 varas, 2 piés, 9 pulgadas de tela, y otro teje en el mismo tiempo 29 varas, 1 pié, 6 pulgadas. ¿Cuánta tela tejen los dos juntos? ¿En cuánto excede el trabajo del segundo obrero al del primero?
XVI. En un dia vende un fabricante cuatro partidas de género: la primera de 28 arrobas, 15 libras, 12 onzas; la segunda de 14 arrobas, 10 libras y 10 onzas; la tercera de 20 arrobas, 8 onzas; y la cuarta de 40 arrobas, 23 libras; pero su fábrica produce en el mismo dia 60 arrobas, 19 libras, 6 onzas. ¿En cuánto habrá aumentado ó disminuido la existencia en sus almacenes?

XVII. Una persona presta á otra 637 duros, y convienen en que la primera recibirá anualmente en recompensa 1 real y 20 maravedises por duro. ¿Cuánto debe recibir al fin del año?
XVIII. Una libra cuesta 8 reales, ¿cuánto costarán 7 arrobas, 20 libras y 12 onzas?
XIX. Un comerciante compra 257 arrobas á 3 duros 15 reales la arroba, y las vende á 4 duros 9 reales, ¿qué ganancia ha obtenido?
XX. Un comerciante compra tres partidas de género á 4 duros, 8 reales, 17 maravedises la arroba. La primera partida es de 15 arrobas, 20 libras, 10 onzas; la segunda de 19 arrobas, 16 libras, 15 onzas; y la tercera de 13 arrobas, 12 libras, 7 onzas, ¿cuánto cuestan las tres partidas?

XXI. Un comerciante compra 37 arrobas, 15 libras, 8 onzas á 12 duros, 15 reales y 17 maravedises la arroba; y las vende á 15 duros, 10 reales. ¿Qué ganancia obtiene?

XXII. 2 varas, 1 pié y 5 pulgadas de una barra de hierro pesan una arroba. ¿Cuánto pesarán 24 varas, 8 pulgadas de la misma barra?

XXIII. Un móvil recorre en un minuto 76 varas, 9 pulgadas. ¿Qué tiempo empleará en recorrer 500 varas?

XXIV. 20 arrobas 17 libras de género han costado 986 reales, 25 maravedises. ¿Cuál es el precio de la arroba?

XXV. Una máquina de vapor extrae de una mina en 3 horas y 35 minutos, 728 quintales de carbon de piedra. ¿Qué cantidad extrae por hora?

XXVI. Un comerciante vende 79 arrobas y 20 libras por 300 duros, 15 reales y 27 maravedises, y obtiene una ganancia de 89 duros, 18 reales y 25 maravedises. ¿A qué precio compró la arroba?

XXVII. Un comerciante compra tres fardos de género: el primero pesa 200 libras, el segundo $1\frac{3}{5}$ veces menos que el primero, y el tercero los $\frac{6}{5}$ de la diferencia entre los primeros; vende todo el género en 4150 reales, y obtiene una ganancia de 830 reales. ¿Cuánto le costó cada libra y á qué precio la vendió?

XXVIII. En un molino hay una piedra de cuarzo, que pesa 75 arrobas. ¿Cuánto pesará otra igual de basalto, suponiendo que los pesos de dos trozos iguales de basalto y de cuarzo estén representados por los números 13 y 15? [1]

XXIX. Un salon permanece iluminado cada noche durante 6 horas por 17 luces que cuestan al mes 272 reales. ¿Cuánto costará cada mes iluminar con 12 luces iguales otro salon que estará abierto 7 horas?

XXX. 40 obreros, trabajando 9 horas al dia, hacen una obra de 270 metros en 70 dias; 35 obreros, trabajando 8 horas los 14 primeros dias, y 12 los dias restantes ¿cuánto tardarán en hacer 492 metros?

XXXI. Una máquina eleva 560 kilógramos de peso en 35 minutos á una altura de 20 metros. ¿A qué altura elevará en 59 minutos un peso de 320 kilógramos, suponiendo que á la altura de 9 metros se aumenta el peso hasta 490 kilógramos?

XXXII. ¿Qué capital produce en 270 dias 12000 reales de interés al 10 p°|₀?

XXXIII. Una persona presta 80000 reales al 6 p°|₀, y recibe entre capital é intereses 82000 reales. ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el capital?

XXXIV. Una persona presta á otra cierta cantidad al 7 p°|₀ de interés anual, y recibe al cabo de 10 meses 127000 reales por el capital y los intereses. ¿Qué capital prestó?

XXXV. Una persona presta dos capitales al mismo tanto por cien-

---

[1] Desde este problema hasta el XLVII tienen todos solucion entera.

to: el primer capital es de 130000 reales y lo presta por 220 dias, y el segundo de 50000 por 170 dias. ¿Cuál debe ser el tanto por ciento para que los intereses reunidos de los dos capitales importen 9275 reales?

XXXVI. Un comerciante emplea 50000 reales en un negocio, y gana el 23 p% del capital. ¿Cuál es la ganancia?

XXXVII. Una partida de géneros adeuda por derechos de introduccion 2575 reales al 25 p% de su valor. ¿Cuál es este valor?

XXXVIII. Un comisionista que ha vendido géneros por valor de 35000 reales, recibe 3150 reales por su comision. ¿Cuál es el tanto por ciento de comision?

XXXIX. Descontar comercialmente un pagaré de 90000 reales que vence á los 160 dias, al 7 p%.

XL. Por una letra de 50000 reales, que vence á los 90 dias, se reciben 49000 reales. ¿Cuál es el tanto por ciento de descuento?

XLI. Dividir el número 4580 en partes proporcionales á los números 38, 79, 54 y 58.

XLII. Dividir el número 2960 en partes proporcionales á los números $\frac{4}{5}$, 1 y $\frac{2}{3}$.

XLIII. Dividir 76114 reales entre tres personas, de modo que la segunda reciba el 6 por % mas que la primera, y la tercera el 8 p% mas que la segunda.

XLIV. Dividir el número 74000 en tres partes tales que la razon de la primera y segunda sea $\frac{4}{5}$, y la de la segunda y tercera $\frac{3}{2}$.

XLV. ¿Cuánto trigo de 36 reales fanega debe mezclarse con otra especie de 46 reales para obtener 200 fanegas y venderlas á 42 reales?

XLVI. Una mezcla de trigo contiene 100 hectólitros, y vale 9522 reales; las especies mezcladas han sido dos, de 85 reales y 99 reales el hectólitro. ¿Cuántos hectólitros de cada especie contiene la mezcla?

XLVII. Una aleacion de plata pesa 40 kilógramos, y su ley es de 900 milésimas; para obtenerla se ha ligado plata de 800 y de 960 milésimas. ¿Cuántos kilógramos de cada especie han entrado en la aleacion?

XLVIII. Un objeto de oro ligado con plata, tiene 640 centímetros cúbicos de volúmen, y pesa 10 kilógramos. Cada centímetro cúbico de oro puro pesa 19,26 gramos, y cada centímetro cúbico de plata 10,47 gramos. ¿Cuántos kilógramos de oro y cuántos de plata contiene el objeto?

XLIX. Reducir 420 varas prusianas á varas de Castilla, suponiendo que 48 varas prusianas equivalen á 32 metros, y que 5 metros equivalen á 6 varas castellanas.

L. Reducir 380 piés cúbicos ingleses á varas cúbicas de Castilla, suponiendo que 59 piés cúbicos ingleses equivalen á 54 piés cúbicos prusianos, que 841 piés cúbicos prusianos equivalen á 26 metros cúbicos, y que 7 metros cúbicos equivalen á 12 varas cúbicas de Castilla.

ÁLGEBRA.

INTRODUCCION.

1. Álgebra *es la ciencia de las leyes generales de la cantidad.*

2. La Aritmética considera las determinaciones particulares de la cantidad ó sea la cantidad representada por números; pero este medio de representacion es impropio para descubrir leyes generales.

Tanto es así, que en los teoremas de Aritmética, si bien representábamos con frecuencia las cantidades por números, prescindíamos de los valores particulares de estos y solamente atendíamos á los caractéres generales; por manera que en realidad se consideraba el número como un símbolo general representativo de todos los números de su especie.

Aun procediendo así, no tenian las leyes descubiertas el grado de generalidad de que eran susceptibles: si las cantidades estaban representadas por números enteros, solo á estos eran aplicables los razonamientos, y por tanto la ley quedaba demostrada tan solo para los mismos, siendo necesario dar nuevas demostraciones, si habia de hacerse extensiva á toda clase de números.

En la resolucion de problemas, la representacion de la cantidad por medio del número presenta otro inconveniente; si las operaciones se efectúan á medida que se van presentando, el resultado final, ó sea la solucion, es un número que conviene al problema particular propuesto, pero que no expresa la ley de su formacion, esto es, la série de operaciones que deben efectuarse con los datos, en todos los problemas de igual naturaleza, para determinar la incógnita; y si dichas operaciones se dejan indicadas, será imposible distinguir aquellos datos que tengan igual valor y los números que originen las reducciones

3. Como medio de generalizacion, se representan en Álgebra las cantidades por las letras del alfabeto. Por consiguiente, una letra cualquiera designará en lo sucesivo una cantidad en general, y solo cuando alguna cantidad deba tener circunstancias particulares, se limitará la significacion de su signo atribuyéndole estas circunstancias.

Así, por ejemplo, a, b, c representan tres cantidades ó números, que podrán ser enteros, fraccionarios ó inconmensurables; pero si la cuestion propuesta lo exige, a podrá representar exclusivamente un número entero, un número par, un número comprendido entre ciertos límites etc., con solo suponer que existen tales circunstancias, y tener en cuenta esta hipótesis en el curso del razonamiento.

4. Para aclarar estas consideraciones, presentaremos dos ejemplos.

1.° Teorema. *La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, es igual á la diferencia entre los cuadrados de dichas cantidades.*

Sean 10 y 6 estas cantidades.

Tenemos $(10+6)(10-6)=16 \,.\, 4=64$

$$10^2-6^2=100-36=64;$$

luego $(10+6)(10-6)=10^2-6^2$.

Este razonamiento se apoya solamente en los valores de los números propuestos; luego hemos comprobado un hecho particular, pero no se ha demostrado la ley general enunciada.

Si, prescindiendo ahora de los valores numéricos de 10 y 6, atendemos solo á las propiedades comunes á todos los números enteros, diremos: multiplicar $10+6$ por $10-6$ equivale á repetir el multiplicando por sumando $10-6$ veces; pero si se repite 10 veces y despues 6 veces, restando los resultados, la diferencia contendrá al multiplicando $10-6$ veces, y será el producto buscado; así pues

$$(10+6)(10-6)=(10+6)\,10-(10+6)\,6.$$

Debemos efectuar ahora dos multiplicaciones: la primera $(10+6)\,10$ se reduce evidentemente á repetir cada sumando 10 veces; y la segunda $(10+6)\,6$ á repetirlos 6 veces; luego

$$(10+6)(10-6)=10\,.\,10+6\,.\,10-10\,.\,6-6\,.\,6,$$

ó $$(10+6)(10-6)=10^2+6\,.\,10-10\,.\,6-6^2;$$

pero $$6\,.\,10-10\,.\,6=0;$$

luego $$(10+6)(10-6)=10^2-6^2.$$

Este razonamiento se apoya en una propiedad comun á todos los números enteros, que es la siguiente: el producto de un número por otro entero es una suma de tantos números iguales al multiplicando, como unidades tiene el multiplicador; por consiguiente es aplicable á todos los números enteros; pero no á los fraccionarios ni á los inconmensurables.

Si queremos extender la ley á toda clase de números y que tenga el grado de generalidad de que es susceptible, representaremos las cantidades por letras, y apoyaremos el razonamiento en propiedades demostradas anteriormente y comunes á toda clase de números.

Probemos, pues, en general que

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Considerando á $a-b$ como un número, será

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b),$$

ó

$$(a+b)(a-b)=(a-b)a+(a-b)b;$$

efectuando las multiplicaciones indicadas en el segundo miembro, resulta

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$$

ó

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Ahora queda demostrada la ley con toda la generalidad posible, segun al principio la habíamos enunciado.

2.° PROBLEMA. *Hallar dos cantidades, conociendo la suma y la diferencia de las mismas.*

Sea 64 la suma y 12 la diferencia.

Si representamos por x la menor de las cantidades, la mayor será $x+12$, y la suma de las dos $x+x+12$ ó $2x+12$; pero esta suma es igual, segun el enunciado, á 64; luego

$$2x+12=64.$$

Restando 12 de los dos miembros resulta

$$2x=52,$$

de donde

$$x=26.$$

Siendo 26 la menor de las cantidades, la mayor será

$$26+12=38.$$

Los números pedidos son, pues, 26 y 38; pero estos números no expresan la ley con arreglo á la cual están formados; por lo que tendremos necesidad de repetir los razonamientos anteriores, cuando los datos del problema sean diferentes.

Representemos, ahora, por s la suma dada y por d la diferencia, y sea x la cantidad menor.

La mayor será $x+d$, y la suma de ambas $x+x+d$ ó $2x+d$; como esta suma debe ser igual á s, tendremos:

$$2x+d=s.$$

Restando d de los dos miembros será

$$2x=s-d,$$

de donde $$x=\frac{s-d}{2}.$$

Añadiendo á este valor la diferencia d tendremos la cantidad mayor, que será

$$\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\frac{s+d}{2}.$$

Las cantidades menor y mayor, que hemos hallado, pueden escribirse en la forma

$$\frac{s}{2}-\frac{d}{2} \quad \text{y} \quad \frac{s}{2}+\frac{d}{2}.$$

Estas expresiones llamadas *fórmulas*, son las leyes de formacion de las incógnitas del problema, ó sea la representacion de las operaciones que debemos efectuar con los datos para determinar las incógnitas.

Siendo las fórmulas reglas, escritas en lenguaje algebráico, para resolver los problemas generales, pueden traducirse al lenguaje vulgar. Las que acabamos de obtener se traducen del modo siguiente:

Dadas la suma y la diferencia de dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia; y la menor á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

Por medio de la fórmula se resuelven todas las cuestiones particulares comprendidas en el problema general propuesto. Para esto *se sustituye cada letra por el valor particular del dato que representa, y se efectúan las operaciones indicadas.*

Por ejemplo, si la suma de las cantidades es 64 y la diferencia 12, sustituiremos en las fórmulas s por 64 y d por 12, y obtendremos

$$\frac{64}{2}-\frac{12}{2}=26, \quad \frac{64}{2}+\frac{12}{2}=38.$$

5. Los signos de la adicion y de la sustraccion son en Álgebra los mismos que en Aritmética.

La multiplicacion se expresa tambien por el signo $\times$ ó por un punto. Sin embargo, si los factores son letras, se escriben unas á continuacion de otras sin interponer ningun signo.

Así, el producto de las cantidades a, b, c se expresará por $a\times b\times c$ ó $a.b.c$, y mas comunmente por abc.

Las sumas y diferencias indicadas, que entren como factores, se escribirán dentro de un paréntesis; por ejemplo, si los factores son $a+b+c$, $d-e+f$ y m, el producto se escribe

$$(a+b+c)\,(d-e+f)\,m.$$

La division se expresa por el signo : que empleábamos en Aritmética. Si el dividendo, el divisor ó ambos son sumas ó diferencias indicadas, se escribirán tambien dentro de un paréntesis; así el cociente de $a-b+c$ por m se escribe

$$(a-b+c) : m;$$

el de $a+b$ por $m-n$ se escribe

$$(a+b) : (m-n).$$

Por último, las potencias y raices se expresan como en Aritmética.

Cuando una cantidad se repite varias veces por sumando, se simplifica la escritura anteponiendo á la cantidad un número que exprese las veces que está repetida por sumando. Este número se llama *coeficiente;* así

$$a+a \text{ se representa por } 2a.$$

$$a^9b+a^9b+a^9b \text{ por } 3a^9b.$$

El coeficiente de $2a$ es 2; el de $3a^9b$ es 3.

No debe confundirse el coeficiente con el exponente: aquel expresa las veces que una cantidad se repite por sumando; éste las veces que una cantidad se repite por factor. La expresion $3a$ equivale á $a+a+a$, mientras que a^3 es igual á $a.a.a$; si a vale 5, será

$$3a=5+5+5=15,$$

$$a^3=5\,.\,5\,.\,5=125.$$

Una cantidad sin coeficiente expreso, tiene siempre implícitamente el coeficiente *uno.*

En efecto: $a^3b=1\times a^3b=1a^3b$.

Una cantidad sin exponente, puede considerarse con el exponente *uno;* así $a=a^1$.

6. EXPRESION ALGEBRÁICA Ó CANTIDAD LITERAL *es el conjunto de varias letras separadas por los signos de las operaciones.*

Se llama así por ser la expresion, en lenguaje algebráico, de una cantidad cualquiera.

$2a^2b$, $2a+3b^2$, son expresiones algebráicas, que significan respectivamente

$$a.a.b+a.a.b, \qquad a+a+b.b+b.b+b.b.$$

Por estos ejemplos se comprenderá que los signos algebráicos abrevian considerablemente la representacion de las cantidades.

7. CANTIDAD RACIONAL *es toda expresion algebráica que no contiene ningun signo radical.*

Tales son $\quad a-b, \quad a^2b+\frac{c^2}{d}.$

CANTIDAD IRRACIONAL Ó RADICAL *es toda expresion algebráica que contiene algun signo radical.*

Por ejemplo $\quad a+3\sqrt{b}.$

CANTIDAD ENTERA *es toda expresion que no contiene ningun radical ni denominador.*

8. Una expresion algebráica no ligada á ninguna otra por el signo de la adicion ni por el de la sustraccion, se llama *monomio*, ó expresion de un término; así $3ab^4$ es un monomio.

La cantidad literal compuesta de varios monomios ligados entre sí por los signos de la suma ó de la resta, se llama *polinomio.*

$5a^2-\sqrt{3ab}+\frac{3a-2b}{7}$ es un polinomio, compuesto de los términos $5a^2$, $-\sqrt{3ab}$, $+\frac{3a-2b}{7}$.

Si el polinomio consta de dos términos, se llama *binomio,* si de tres *trinomio* etc.

9. VALOR NUMÉRICO *de una expresion algebráica es el número que se obtiene sustituyendo las letras por valores particulares, y efectuando las operaciones indicadas.*

Sea la expresion $5a^2b^3c$.

Si suponemos $a=4$, $b=2$, $c=1$, el valor numérico será

$$5.4^2.2^3.1=640.$$

Sea el polinomio $2a^3b-ab^3-b^5$.

Si suponemos $a=2$, $b=1$, los términos valen respectivamente 16, 2, 1; luego el valor del polinomio es

$$16 - 2 - 1 = 13.$$

Si suponemos $a = 4$, $b = 2$, el polinomio vale

$$256 - 32 - 32 = 192.$$

El valor numérico de un polinomio no varía alterando el órden de sus términos, siempre que conserven estos sus signos.

Es claro que

$$a + b - c - d = b - c + a - d,$$

puesto que, sea cualquiera el órden en que se efectúen las operaciones, siempre a y b, que son sumandos, producirán en el resultado un aumento igual á sus respectivos valores, y c y d, que son sustraendos, una disminucion.

10. *Se llama* GRADO *de un monomio entero el número de factores literales que lo componen.*

El monomio $7a^4b^3c = 7aaaabbbc$ es de *octavo* grado.

Es evidente que *el grado de un monomio se obtiene sumando los exponentes de sus letras.*

Se llama GRADO *de un polinomio, con respecto á una de sus letras, al mayor de los exponentes de ésta en el polinomio.*

El polinomio

$$a^2x^4 - 5a^3x^3 - a^6$$

es de *cuarto* grado, con respecto á la letra x, y de *sexto*, con respecto á la letra a.

Un polinomio se llama HOMOGÉNEO *cuando todos sus términos son del mismo grado.*

GRADO *de un polinomio homogéneo es el grado de cualquiera de sus términos.*

El último polinomio es homogéneo y de *sexto* grado.

11. Al descomponer un polinomio

$$a + b - c + d - e$$

en sus diferentes términos, cada uno de estos va precedido del signo que le ligaba al anterior; los términos del polinomio propuesto son, pues, $a, +b, -c, +d, -e$.

Los que están precedidos del signo *mas* se llaman términos *aditivos* ó *positivos*, y los precedidos del signo *menos* se llaman *sustractivos* ó *negativos*.

Los primeros tienden á producir en el valor numérico del polinomio un aumento igual á su valor, y los segundos una disminucion.

Si el primer término no está precedido de nigun signo, se entiende que es aditivo ó que lleva el signo *mas*.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO ALGEBRÁICO.

CAPÍTULO PRIMERO.

OPERACIONES CON LAS CANTIDADES LITERALES ENTERAS.

I.—Preliminares y reduccion de términos semejantes.

12. Las definiciones de adicion, sustraccion, multiplicacion y division dadas en Aritmética, son completamente generales; por lo que las adoptamos en Álgebra sin modificarlas.

Como en esta ciencia se representan las cantidades por medio de expresiones literales, en cuya formacion es frecuente que no haya analogía, ocurre muchas veces que las operaciones no pueden efectuarse, y nos limitamos á indicarlas por medio de los signos respectivos; pero otras veces se efectúan realmente, obteniendo resultados que no permiten descubrir cuáles hayan sido los datos.

13. *Se llaman* TÉRMINOS SEMEJANTES *los monomios compuestos de las mismas letras con iguales exponentes.*

Los términos $5a^3x$, $-3a^3x$ y a^3x son semejantes.

Propongámonos reducir á uno solo, los términos semejantes de un polinomio.

Si $4a^3x^2$ y $5a^3x^2$ son términos de un polinomio, es evidente que pueden reducirse á $9a^3x^2$.

Los términos $-6a^4x^5$ y $-2a^4x^5$, tambien es claro que equivalen á $-8a^4x^5$.

Luego, *para reducir dos términos semejantes de signos iguales, se suman los coeficientes, y al resultado se antepone el signo de los términos.*

Sean ahora los términos $9a^3b^7$ y $-7a^3b^7$; es evidente que

$$9a^3b^7-7a^3b^7=2a^3b^7.$$

Sean $8ab^5$ y $-12ab^5$ otros dos términos; es claro que

$$8ab^5-12ab^5=8ab^5-8ab^5-4ab^5,$$

y como
$$8ab^5-8ab^5=0,$$

los términos propuestos se reducen á $-4ab^5$; pero el coeficiente 4 se hubiera obtenido restando 8 de 12; luego

Para reducir dos términos semejantes de signos contrarios, se restan los coeficientes, y al resultado se antepone el signo del mayor.

Vamos á reducir los términos semejantes del polinomio

$$2a^5b^4-5ab^6+7ab^6+a^5b^4+6a^5b^4.$$

Como el órden de los términos no influye en el valor del polinomio, podemos reunir los términos semejantes, y será

$$2a^5b^4+a^5b^4+6a^5b^4-5ab^6+7ab^6;$$

reduciendo ahora el primer término con el segundo, y el resultado con el tercero, se obtiene para valor de los tres primeros términos $9a^5b^4$; reduciendo igualmente los otros dos, resulta $+2ab^6$; luego el polinomio queda reducido á

$$9a^5b^4+2ab^6.$$

En la práctica no se altera el órden de los términos del polinomio: lo mas breve es recorrer con la vista todos los términos y reducir mentalmente los semejantes, á medida que se van presentando, sin escribir mas que el resultado final.

Así, en el polinomio

$$9ax^7-6ax^6+5ax^7-6ax^7-4ax^6,$$

diremos: $9ax^7+5ax^7=14ax^7, 14ax^7-6ax^7=8ax^7$;

$$-6ax^6-4ax^6=-10ax^6;$$

luego el polinomio reducido es

$$8ax^7-10ax^6.$$

Del mismo modo se encuentra

$$4a^8b-5a^8b+6a^8b=5a^8b$$

$$ax^5-3a^4x^6-6a^4x^6+5ax^5=6ax^5-9a^4x^6.$$

II.—Adicion.

14. Supongamos que se quieran sumar las cantidades $2a$, b y c^5; es evidente que la suma es

$$2a+b+c^5.$$

Sean las cantidades $3x^3$ y $5x^3$; la suma será

$$3x^3+5x^3=8x^3.$$

Si los sumandos son los polinomios

$$a-b,\quad 2a+c-d \quad \text{y} \quad 4a-5c,$$

observaremos que sumar los dos primeros es añadir á $a-b$ el resultado de efectuar las operaciones indicadas en $2a+c-d$; si llamamos R á este resultado, la suma de los dos primeros polinomios será

$$a-b+R \quad \text{ó} \quad R+a-b \quad [9];$$

poniendo en vez de R el polinomio $2a+c-d$, dicha suma se convierte en

$$2a+c-d+a-b,$$

y alterando el órden, en

$$a-b+2a+c-d.$$

Por el mismo razonamiento se demostraria que la suma de $a-b+2a+c-d$ con el tercer sumando $4a-5c$ es

$$a-b+2a+c-d+4a-5c,$$

que es la suma de los tres polinomios propuestos.

Observando la composicion de esta suma, se deduce la regla siguiente:

Para sumar varios polinomios se escriben los sumandos unos á continuacion de otros, conservando á cada término el signo respectivo.

En la práctica se efectúa la reduccion de términos semejantes, si los hay, la que se facilita colocando los sumandos unos debajo de otros.

Ejemplo. Sean los sumandos $13a^5b^4+6a^4b+7ab^6$, $9a^5b^4-13a^4b-ab^6-4a^2b^7$ y $-4a^5b^4+2ab^6$.

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{l} 13a^5b^4+\ 6a^4b+7ab^6 \\ 9a^5b^4-13a^4b-\ ab^6-4a^2b^7 \\ -\ 4a^5b^4 \qquad\qquad +2ab^6 \\ \hline 18a^5b^4-\ 7a^4b+8ab^6-4a^2b^7. \end{array}$$

III.—Sustraccion.

15. Es evidente que la diferencia de las cantidades $3a$ y $2b$ es $3a-2b$.

Si las cantidades son $7abc$ y $3abc$, la diferencia será

$$7abc-3abc=4abc.$$

Supongamos que se trate de restar los polinomios

$$5x-2y+3z \quad \text{y} \quad 2x^8-7y.$$

La diferencia será un polinomio que sumado con el sustraendo produzca el minuendo; este polinomio es

$$5x-2y+3z-2x^8+7y.$$

En efecto: añadiendo el sustraendo $2x^8-7y$, se obtiene

$$5x-2y+3z-2x^8+7y+2x^8-7y,$$

que reduciendo se convierte en el minuendo; luego

Para restar dos polinomios se escribe el minuendo y á continuacion el sustraendo, cambiando el signo de cada uno de sus términos.

En la práctica se efectúa la reduccion de términos semejantes, si los hay, lo que se facilita colocando el sustraendo debajo del minuendo.

Ejemplo. Restar los polinomios $8ab^9-7a^5b-6a^8b^6$ y $3ab^9-5a^5b$.

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{l} 8ab^9-7a^5b-6a^8b^6 \\ 3ab^9-5a^5b \\ \hline 5ab^9-2a^5b-6a^8b^6. \end{array}$$

16. Conviene en muchos casos considerar un polinomio como la diferencia de otros dos.

Para conseguir este objeto, se forma el sustraendo con varios términos del polinomio, teniendo cuidado de cambiar el signo de cada uno. Así

$$5a^3-2b+3c^2-2a-7b+5c=5a^3-2b+3c^2-(2a+7b-5c)$$

$$a+b-c+d=a-(-b+c-d).$$

En efecto: si efectuamos las sustracciones indicadas en los segundos miembros, obtendremos los primeros.

IV.—Multiplicacion.

17. Tratemos de hallar el producto de dos potencias de una misma cantidad.

Sea $a^3\times a^5$. El factor a^3 es un producto de *tres* factores iguales á a, esto es, aaa; y el factor a^5 es tambien un producto de *cinco* factores iguales á a, ó sea $aaaaa$; luego el producto $a^3\times a^5$ contiene al factor a *tres* veces mas *cinco* veces, ó sean *ocho* veces; por consiguiente $a^3\times a^5=a^8$.

Podemos, pues, enunciar la siguiente regla abreviada:

Para multiplicar dos potencias de una misma cantidad, se suman los exponentes.

Multiplicacion de dos monomios.

18. Sean los monomios $8a^5b^4c$ y $5a^3bd$.

El producto $8a^5b^4c\times 5a^3bd$ de dos productos indicados $8 . a^5 . b^4 . c$ y $5 . a^3 . b . d$, es igual á $8 . a^5 . b^4 . c . 5 . a^3 . b . d$ [Aritm. 65, 179, 241]; como podemos alterar el órden de los factores sin que el producto varíe [Aritm. 67, 181, 241], será

$$8a^5b^4c\times 5a^3b\,d=8 . 5 . a^5 . a^3 . b^4 . b . c . d,$$

ó

$$8a^5b^4c\times 5a^3b\,d=40a^8b^5c\,d.$$

Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficientes y se escriben á la derecha del producto todas las letras comunes al multiplicando y multiplicador, poniendo á cada letra un exponente igual á la suma de los exponentes que afectan á la misma en los dos factores. En cuanto á las letras que entran en un solo factor, se escriben en el producto con el exponente que cada una tiene.

Aplicando esta regla tendremos:

$$4a^3b^7x^8\times 12ab^2c^3x=48a^4b^9c^3x^9$$

$$9a^2b^2cd\times a^4b^3x=9a^6b^5cdx.$$

Escolio. Es evidente que el producto de dos monomios es otro monomio que contiene por sí solo tantos factores literales como el multiplicando y multiplicador.

Multiplicacion de un polinomio por un monomio.

19. Supongamos en primer lugar que todos los términos del multiplicando sean aditivos, y hallemos el producto de $a+b+c$ por el monomio m.

Hemos demostrado en Aritmética [41, 173, 241] que

$$(a+b+c)\,m = am + bm + cm.$$

Consideremos ahora un polinomio que contenga términos aditivos y sustractivos, por ejemplo $a-b+c-d$.

Este polinomio puede escribirse en la forma $(a+c)-(b+d)$ [16], y por consiguiente ser considerado como una diferencia indicada, siendo $a+c$ el minuendo y $b+d$ el sustraendo. El producto de esta diferencia indicada por un monomio m será

$$(a+c)\,m-(b+d)\,m = (am+cm)-(bm+dm)$$

ó $$am+cm-bm-dm = am-bm+cm-dm;$$

luego $$(a-b+c-d)\,m = am-bm+cm-dm.$$

Observando los resultados obtenidos en los dos casos que hemos estudiado, se descubre la siguiente regla:

Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplican sucesivamente los términos del polinomio por el monomio, poniendo á cada producto parcial el mismo signo que tiene el término respectivo del multiplicando.

Escolio. Como suponemos que el multiplicando no contiene términos semejantes, pues si hubiera algunos los reduciríamos ante todo, es evidente que el producto tampoco los contendrá; luego el producto de un polinomio por un monomio, es otro polinomio de igual número de términos que el multiplicando.

Multiplicacion de dos polinomios.

20. Supongamos que los términos del multiplicando y del multiplicador sean todos aditivos, ó unos aditivos y otros sustractivos; y tratemos de hallar el producto de

$$(a-b+c)\,(m+n-p).$$

Si suponemos efectuadas las operaciones del multiplicando, y representamos por R el resultado, el producto propuesto será

$$R\,(m+n-p)=(m+n-p)\,R;$$

pero, segun el caso anterior,

$$(m+n-p)\,R=mR+nR-pR$$

ó
$$R\,(m+n-p)=Rm+Rn-Rp.$$

Poniendo ahora en lugar de R el polinomio $a-b+c$, se obtiene

$$(a-b+c)\,(m+n-p)=(a-b+c)\,m+(a-b+c)\,n-(a-b+c)\,p.$$

Este resultado indica que para multiplicar dos polinomios deben hallarse sucesivamente los productos del multiplicando por cada término del multiplicador, y poner á cada uno de estos productos parciales el signo que afecta al término respectivo del multiplicador; por manera que los productos parciales del multiplicando por los términos aditivos m y n entrarán en el producto total como sumandos, y los productos por los términos sustractivos, tales como p, entrarán como sustraendos. Pero segun la regla de la sustraccion de polinomios, restar el producto parcial $(a-b+c)\,p$ equivale á sumarle despues de haber cambiado los signos de todos sus términos; luego

Para multiplicar dos polinomios, se efectúan sucesivamente las multiplicaciones del multiplicando por cada término del multiplicador, teniendo cuidado de cambiar los signos á todos los términos de los productos parciales que procedan de multiplicar por un término negativo del multiplicador. Sumando despues los polinomios obtenidos, se halla el producto total.

Ejemplo. Multiplicar el polinomio $3a^2b-7ab^2+5b^3$ por $6a^2b^2+4ab^3-b^4$.

En la práctica se dispone la operacion del modo siguiente.

$$\begin{array}{rrrrr}
3a^2b & -\;7ab^2 & +\;5b^3 & & \\
6a^2b^2 & +\;4ab^3 & -\;b^4 & & \\
\hline
18a^4b^3 & -\;42a^3b^4 & +\;30a^2b^5 & & \\
 & 12a^3b^4 & -\;28a^2b^5 & +\;20ab^6 & \\
 & & -\;3a^2b^5 & +\;7ab^6 & -\;5b^7 \\
\hline
18a^4b^3 & -\;30a^3b^4 & -\;a^2b^5 & +\;27ab^6 & -\;5b^7.
\end{array}$$

21. Se desprende, de las reglas dadas para multiplicar un polinomio por un monomio ó por otro polinomio, que el producto de un término del multiplicando por otro del multiplicador tiene el signo del primero de estos términos, cuando el segundo es positivo, y el signo contrario, cuando el segundo es negativo.

Así, en el ejemplo anterior, el producto del término positivo $3a^2b$ por el positivo $6a^2b^2$ es positivo; el producto del término negativo $-7ab^2$ por el positivo $6a^2b^2$ es negativo; el producto del término positivo $3a^2b$ por el negativo $-b^4$ es negativo; y finalmente, el producto del término negativo $-7ab^2$ por el negativo $-b^4$ es positivo.

Este resultado suele expresarse abreviadamente diciendo:

$+$ *multiplicado por* $+$ *da* $+$
$-$ *multiplicado por* $+$ *da* $-$
$+$ *multiplicado por* $-$ *da* $-$
$-$ *multiplicado por* $-$ *da* $+$

Y observando que *mas* por *mas* da *mas*, y *menos* por *menos* da *mas*, se dice:

signos iguales dan producto positivo;

y como *menos* por *mas* da *menos*, y *mas* por *menos* da *menos*, se dice tambien:

signos contrarios dan producto negativo.

En la práctica nos serviremos de estas reglas para hallar los signos de los términos de un producto.

22. Á fin de facilitar la reduccion de términos semejantes, es muy útil *ordenar* los términos del multiplicando y del multiplicador por las potencias crecientes ó decrecientes de una letra, que en tal concepto se llama letra *ordenatriz* ó *principal*.

El polinomio $7ab^6-2a^3b^4-b^7+5a^4b^3-a^2b^5$, ordenado por las potencias crecientes de b, será

$$5a^4b^3-2a^3b^4-a^2b^5+7ab^6-b^7.$$

Si la letra ordenatriz entra con el mismo exponente en varios términos, se escriben estos unos debajo de otros, prescindiendo de dicha letra, la que se coloca despues una sola vez á la derecha del primer término interponiendo una raya vertical.

Si queremos ordenar el polinomio $6a^3b^2+b-c-5a^2b^2+2a^3b+a^2b+a^3b^3$, por las potencias decrecientes de a, se escribirá en la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{r} b^3 \\ +6b^2 \\ +2b \end{array}\right| a^3 \left.\begin{array}{r} -5b^2 \\ +b \\ \end{array}\right| a^2 \begin{array}{r} +b \\ -c \\ \end{array}$$

Las cantidades colocadas á la izquierda de la raya vertical se consideran como coeficientes de la letra ordenatriz: el coeficiente de a^3 es b^3+6b^2+2b.

Vamos á multiplicar los polinomios

$2a^4x+a^5-3a^3bx-b^3x^2+a^3x^2$ y $a^3x-a^2bx+a^2x^2-2abx^2$.

Ordenaremos los factores con relacion á las potencias decrecientes de x, y será

Multiplicando.	a^3 $-b^3$	x^2+2a^4 $-3a^3b$	$x+a^5$		
Multiplicador.	a^2 $-2ab$	x^2+a^3 $-a^2b$	x		
Producto por a^2 | x^2 $-2ab$ |	a^5 $-a^2b^3$ $-2a^4b$ $+2ab^4$	x^4+2a^6 $-3a^5b$ $-4a^5b$ $+6a^4b^2$	x^3+a^7 $-2a^6b$	x^2	
Producto por a^3 | x $-a^2b$ |		$+a^6$ $-a^3b^3$ $-a^5b$ $+a^2b^4$	x^3+2a^7 $-3a^6b$ $-2a^6b$ $+3a^5b^2$	x^2+a^8 $-a^7b$	x
Producto total.	a^5 $-2a^4b$ $-a^2b^3$ $+2ab^4$	x^4+3a^6 $-8a^5b$ $+6a^4b^2$ $-a^3b^3$ $+a^2b^4$	x^3+3a^7 $-7a^6b$ $+3a^5b^2$	x^2+a^8 $-a^7b$	x

23. TEOREMA. *Si dos polinomios y su producto están ordenados por las potencias de una misma letra, el primer término del producto reducido es el resultado de multiplicar el primer término del multiplicando por el primero del multiplicador, y el último término del producto es el resultado de multiplicar los últimos términos de los factores.*

En efecto: la proposicion es evidente ántes de reducir los términos semejantes; ahora bien, suponiendo ordenados los polinomios por las potencias decrecientes de una letra, los primeros términos de los factores contendrán la letra ordenatriz con mayor exponente que los demás, luego ántes de reducir los términos semejantes, el primer término del producto contiene la letra ordenatriz con un exponente mayor que los demás términos, por consiguiente ninguno de estos puede reducirse con el primero ni anteponérsele. De una manera análoga podríamos razonar sobre el último término; luego el primer término y el último no esperimentan ninguna alteracion al reducir los términos semejantes, lo que demuestra que la proposicion enunciada es tambien cierta despues de efectuar dicha reduccion.

Escolio. De aquí se desprende que el producto de dos polinomios consta por lo menos de dos términos, luego *el producto de dos polinomios es otro polinomio.*

24. Teorema. *El producto de dos polinomios homogéneos es tambien homogéneo, y su grado es igual á la suma de los grados de los factores.*

En efecto: ántes de efectuar la reduccion de términos semejantes, un término cualquiera del producto es el producto de un término del multiplicando por otro del multiplicador, y contiene por sí solo tantos factores literales como los dos términos mencionados; pero el número de factores de los términos es el mismo en cada polinomio, luego tambien lo será en el polinomio producto. Además, la reduccion de términos semejantes solo altera los coeficientes, por manera que el producto, despues de reducido, seguirá siendo homogéneo y del mismo grado que ántes de la reduccion.

25. Las siguientes expresiones, de frecuente uso en las Matemáticas, son consecuencias de la regla dada para multiplicar dos polinomios.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Su traduccion al lenguaje vulgar es la siguiente:

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de dichas cantidades, mas el duplo del producto de las mismas.

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de dichas cantidades, menos el duplo del producto de las mismas.

La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual á la diferencia entre los cuadrados de dichas cantidades.

V.—Division.

26. Se llama cociente *exacto* de dos cantidades literales, la expresion algebráica entera que multiplicada por el divisor produce el dividendo.

En este caso la division se llama tambien *exacta ó completa,* y se dice que el dividendo es *divisible* por el divisor.

Pero si no existe ninguna cantidad algebráica entera que multiplicada por el divisor reproduzca el dividendo, la division se llama *inexacta ó incompleta.*

27. Tratemos de hallar el cociente de dos potencias de una misma cantidad.

Sea $a^8 : a^3$.

El dividendo a^8 es el producto del divisor a^3 por el cociente, y como a^8 contiene ocho veces al factor a y a^3 lo contiene tres veces, el cociente lo contendrá cinco veces; además el cociente no puede contener ningun factor distinto de a, pues si contuviese un factor b, entraria este factor en el producto del cociente por el divisor, esto es, en el dividendo; luego el cociente consta de cinco factores iguales á a, y es por consiguiente a^5.

Podemos, pues, enunciar la siguiente regla abreviada.

Para dividir dos potencias de una misma cantidad, se restan los exponentes.

División de dos monomios.

28. Sean los monomios $40a^8b^7c^4d$ y $8a^5b^6c$.

El cociente es tambien monomio, puesto que un polinomio multiplicado por el divisor, daria para dividendo otro polinomio [19, Escolio]. Recordando la regla dada para multiplicar dos monomios, veremos que el coeficiente del cociente debe ser un número que multiplicado por 8 dé 40, luego es $40 : 8 = 5$; el exponente de a debe ser tal que sumado con 5 dé 8, luego es $8 - 5 = 3$; del mismo modo el exponente de b en el cociente es $7 - 6 = 1$, el de c, $4 - 1 = 3$; y el factor d que no entra en el divisor debe entrar en el cociente, luego

$$40a^8b^7c^4d : 8a^5b^6c = 5a^3bc^3d.$$

Para dividir dos monomios, se dividen los coeficientes, y se escriben á la derecha del cociente las letras comunes al dividendo y divisor con exponentes iguales á la diferencia de los exponentes que tienen las mismas en los monomios propuestos. En cuanto á las letras que solo entran en el dividendo, se escriben en el cociente con sus mismos exponentes.

Aplicando esta regla se obtiene

$$30a^5b^6c^4d : 6ab^5c^4 = 5a^4bd,$$
$$42a^8b^4c^5d : 14ab^4c = 3a^7b^0c^4d.$$

En el segundo ejemplo se presenta el factor b^0 como expresion del cociente de $b^4 : b^4$, y debiendo ser el exponente un número entero, la expresion b^0 carece de sentido.

Sin embargo, observando que $b^4 : b^4 = 1$, podremos admitir en el cálculo la expresion b^0 como representando la *unidad*, y obtendremos de este modo mayor generalidad en las reglas, y la ventaja de conservar, si así conviene, en las expresiones algebráicas aquellas letras que la division hace desaparecer.

La regla del número 27 supone que el exponente de una letra en el dividendo es mayor que el de la misma en el divisor; pero convendremos en hacer dicha regla extensiva al caso en que estos exponentes son iguales, y admitiremos que

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0,$$

y como $a^m : a^m = 1$, resulta $a^0 = 1$.

Admitiremos, pues, convencionalmente que toda *cantidad con exponente cero es un símbolo que representa la unidad.*

29. Segun la regla anterior, para que el cociente de dos monomios sea exacto se necesita y basta: 1.° que el coeficiente del dividendo sea divisible por el del divisor; 2.° que todas las letras del divisor entren en el dividendo con exponentes iguales ó mayores.

Si no se verifican estas dos condiciones, el cociente no puede ser entero, y se expresa en forma de fraccion, la que se simplifica suprimiendo los factores comunes al dividendo y divisor.

EJEMPLOS.

1.° $$7a^8b^5c^3 : 4ab^4d^6x^4 = \frac{7a^8b^5c^3}{4ab^4d^6x^4} = \frac{7a^7bc^3}{4d^6x^4}$$

2.° $$20ab^3c : 32a^4b^5c = \frac{20ab^3c}{32a^4b^5c} = \frac{5}{8a^3b^2}$$

DIVISION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.

30. *Para dividir un polinomio por un monomio, se dividen sucesivamente todos los términos del polinomio por el monomio, poniendo á cada cociente parcial el mismo signo que tiene el término respectivo del dividendo.*

Sea $a - b + c$ el polinomio y m el monomio.

Decimos que

$$(a - b + c) : m = a : m - b : m + c : m.$$

En efecto: si multiplicamos el polinomio

$$a : m - b : m + c : m$$

por el divisor m, para lo cual basta multiplicar cada término del polinomio por m [19], y observamos que $(a : m)\,m = a$; $(b : m)\,m = b$ etc., el producto será el dividendo $a - b + c$; luego el cociente buscado es

$$a:m-b:m+c:m.$$

Se deduce de la regla anterior que la division de un polinomio por un monomio será exacta, si todos los términos del polinomio son divisibles por el monomio. En el caso contrario, se escribirán en forma fraccionaria las divisiones inexactas.

EJEMPLOS.

1.° $(21a^5b^3-6a^8b^4+3a^6b):3a=7a^4b^3-2a^7b^4+a^5b$

2.° $(25a^4x-21a^9+10a^6x^5):5a^3x=5a-\dfrac{21a^6}{5x}+2a^3x^4.$

DIVISION DE DOS POLINOMIOS.

31. Es conveniente recordar que el dividendo es el producto de multiplicar el divisor por el cociente. Si suponemos ordenados el dividendo y el divisor por las potencias decrecientes de una letra, y que el cociente se halla ordenado del mismo modo, el primer término del dividendo es el resultado de multiplicar el primer término del divisor por el primer término del cociente [23]; luego

Dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor, se obtendrá el primer término del cociente.

Pero el dividendo es la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar el divisor por cada uno de los términos del cociente; si de esta suma restamos el primer producto parcial, esto es, el producto del divisor por el primer término del cociente, el resto será la suma de los demás productos parciales, es decir, la suma de los productos del divisor por el segundo, tercero, cuarto, etc. términos del cociente; por consiguiente el primer término del resto reducido será el producto de multiplicar el primer término del divisor por el segundo término del cociente [23]; luego

Dividiendo el primer término del resto por el primer término del divisor, se obtendrá el segundo término del cociente.

Si del dividendo, disminuido en el primer producto parcial, restamos el segundo de estos productos, que se obtendrá multiplicando el divisor por el segundo término del cociente, el nuevo resto contendrá los demás productos parciales, esto es, será el producto del divisor por el polinomio que forman el tercero, cuarto etc. términos del cociente; luego

Dividiendo el primer término del segundo resto por el primer término del divisor, se obtendrá el tercer término del cociente.

Si continuando de este modo llegamos á un residuo cero, la division habrá terminado y será exacta; puesto que del dividendo se habrán restado los productos del divisor por cada uno de los términos del cociente, y como el residuo es cero, el dividendo es igual al producto del divisor por la suma de dichos términos, que constituirán el cociente exacto. Pero si en vez de cero encontramos un residuo cuyo primer término contenga la letra ordenatriz con un exponente menor que el que afecta á dicha letra en el primer término del divisor, daremos por terminada la operacion; porque el término siguiente del cociente no podrá ser entero, y por consiguiente la division será inexacta.

En la division inexacta el último resto se llama *residuo*, y el cociente es *incompleto ó entero;* para que sea exacto es necesario añadirle la expresion del cociente de dividir el residuo por el divisor.

Nos falta averiguar los signos que deben tener los diferentes términos del cociente.

Sabemos [21] que el producto de dos monomios es positivo, cuando los monomios tienen el mismo signo; y negativo, si tienen signos contrarios; luego recíprocamente, si el producto de dos monomios es positivo, tendrán el mismo signo, y si dicho producto es negativo, tendrán signos contrarios; por consiguiente

si el dividendo es positivo y el divisor positivo, el cociente es positivo,
si el dividendo es positivo y el divisor negativo, el cociente es negativo,
si el dividendo es negativo y el divisor positivo, el cociente es negativo,
si el dividendo es negativo y el divisor negativo, el cociente es positivo,

Este resultado puede expresarse abreviadamente diciendo

+ *dividido por* + *da* +
+ *dividido por* — *da* —
— *dividido por* + *da* —
— *dividido por* — *da* +

Y observando que *mas* dividido por *mas* da *mas*, y *menos* dividido por *menos* da *mas*, se dice:

signos iguales dan cociente positivo;

y como *menos* dividido por *mas* da *menos*, y *mas* dividido por *menos* da *menos*, se dice tambien:

signos contrarios dan cociente negativo.

En la práctica, para hallar el signo de cada término del cociente, nos serviremos de estas reglas, que como puede observarse, son las mismas dadas en la multiplicacion.

Los razonamientos hechos en este número, conducen á la regla siguiente:

Para dividir dos polinomios, se ordenan por las potencias de una misma letra, y dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor se obtiene el primero del cociente. Se multiplica el término hallado por el divisor, y el producto se resta del dividendo: dividiendo despues el primer término del resto por el primero del divisor, se obtiene el segundo término del cociente. Se multiplica este término por el divisor, y el producto se resta del primer resto: dividiendo despues el primer término del resto por el primero del divisor, se obtiene el tercer término del cociente. Se continúa del mismo modo hasta obtener un residuo cero, en cuyo caso la operacion está concluida, ó uno cuyo primer término no sea divisible por el primero del divisor: en este caso se añade al cociente entero una fraccion, que exprese el cociente del residuo por el divisor.

32. Es muy útil, para la completa inteligencia del razonamiento anterior, comparar las siguientes operaciones.

MULTIPLICACION.

Multiplicando.........	$3a^6$	$-a^5b$	$+2a^4b^2$		
Multiplicador.........	$2a^5b^4$	$+a^4b^5$	$-a^3b^6$		
1.er producto parcial.	$6a^{11}b^4$	$-2a^{10}b^5$	$+4a^9b^6$		
2.° id. id...		$3a^{10}b^5$	$-a^9b^6$	$+2a^8b^7$	
3.° id. id...			$-3a^9b^6$	$+a^8b^7$	$-2a^7b^8$
Producto total........	$6a^{11}b^4$	$+a^{10}b^5$		$+3a^8b^7$	$-2a^7b^8$

DIVISION.

Dividendo	$6a^{11}b^4$	$+a^{10}b^5$		$+3a^8b^7$	$-2a^7b^8$	$3a^6-a^5b+2a^4b^2$ Divisor.
1er. prod.	$6a^{11}b^4$	$-2a^{10}b^5$	$+4a^9b^6$			$2a^5b^4+a^4b^5-a^3b^6$ Cociente.
1er. resto		$3a^{10}b^5$	$-4a^9b^6$	$+3a^8b^7$	$-2a^7b^8$	
2°. prod.		$3a^{10}b^5$	$-a^9b^6$	$+2a^8b^7$		
2°. resto.			$-3a^9b^6$	$+a^8b^7$	$-2a^7b^8$	
3er. prod.			$-3a^9b^6$	$+a^8b^7$	$-2a^7b^8$	
3er. resto.				0		

Vemos que el dividendo es el producto total, y el divisor y cociente son los factores; los productos del divisor por los términos 1.°, 2.° y 3.° del cociente, son respectivamente los productos parciales 1.°, 2.° y 3,°; el dividendo es la suma de los tres productos parciales, el primer resto es la suma de dos, y el segundo resto es igual al tercer producto parcial; por último, como restando del dividendo los tres productos parciales del divisor por el cociente, el resto ha sido cero, es claro que el polinomio

$$2a^5b^4 + a^4b^5 - a^3b^6$$

es el cocieute exacto.

33. Para restar del dividendo ó de un resto el producto del divisor por un término del cociente, se cambian los signos del producto á medida que se va obteniendo, y se hace despues la reduccion de términos semejantes.

El primer término del mencionado producto es siempre igual al primer término del dividendo ó resto respectivo, y lo anula al efectuarse la reduccion; por lo que se suprime ó tacha desde luego, y se multiplica el término del cociente por los del divisor á partir del segundo de estos.

La operacion se dispone como en los ejemplos siguientes:

1.°
$$\begin{array}{l|l}
a^5b^3 - 4a^4b^4 - 19a^3b^5 + 22a^2b^6 + 48ab^7 & a^3b^2 + a^2b^3 - 6ab^4 \\ \cline{2-2}
\quad - a^4b^4 + 6a^3b^5 & a^2b - 5ab^2 - 8b^3 \\ \cline{1-1}
\quad -5a^4b^4 - 13a^3b^5 & \\
\qquad\qquad + 5a^3b^5 - 30a^2b^6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad - 8a^3b^5 - 8a^2b^6 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 8a^2b^6 - 48ab^7 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

2.° Dividir el polinomio $22a^5x^5 + 4a^7x^3 - 3a^4x^6 + x^7 - 18a^6x^4$ por $2a^5 - 5a^4x$.

Ordenemos el dividendo por las potencias decrecientes de a, y tendremos

$$\begin{array}{l|l}
4a^7x^3 - 18a^6x^4 + 22a^5x^5 - 3a^4x^6 + x^7 & 2a^5 - 5a^4x \\ \cline{2-2}
\qquad 10a^6x^4 & 2a^2x^3 - 4ax^4 + x^5 \\ \cline{1-1}
\quad - 8a^6x^4 & \\
\qquad\qquad - 20a^5x^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 2a^5x^5 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 5a^4x^6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 2a^4x^6 + x^7 &
\end{array}$$

Conteniendo $2a^4x^6$ la letra ordenatriz con un exponente menor que el de la misma letra en $2a^5$, el cociente de estos monomios no puede ser entero, y suspendemos por tanto la operacion.

La parte entera del cociente es $2a^2x^3 - 4ax^4 + x^5$, y para completarlo falta añadir el cociente indicado del residuo $2a^4x^6 + x^7$ por el divisor, así el cociente completo será

$$2a^2x^3 - 4ax^4 + x^5 + \frac{2a^4x^6 + x^7}{2a^5 - 5a^4x}.$$

34. Si la letra ordenatriz entra en varios términos con el mismo exponente, se ordena el polinomio en la forma explicada en el número 22, y se considera el conjunto de los términos que contienen una misma potencia de una letra, como un solo término, cuyo coeficiente es el polinomio situado á la izquierda de la raya vertical. Para efectuar la division del primer término del dividendo ó de un resto por el primero del divisor, se dividen separadamente los coeficientes, y despues las potencias de la letra principal.

EJEMPLO.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
a^6 & x^5+2a^5 & x^4+2a^4 & x^3+a^3 & \\
-4b^2 & \quad -3a^3b^3 & \quad -3a^2b^3 & \quad -2ab^3 & \\
 & \quad +2b^4 & \quad +2ab & & \\
 & & \quad +2b^6 & & \\
 & -a^5 & x^4-a^4 & x^3 & \\
 & +a^3b^3 & \quad -2ab & & \\
 & -2a^2b & & & \\
 & +2b^4 & & & \\ \hline
 & +a^5 & x^4+a^4 & x^3 & \\
 & -2a^3b^3 & \quad -3a^2b^3 & & \\
 & -2a^2b & \quad +2b^6 & & \\
 & +4b^4 & & & \\
 & & -a^4 & x^3-a^3 & x^2 \\
 & & +a^2b^3 & \quad +2ab^3 & \\
 & & +2a^2b^3 & & \\
 & & -2b^6 & & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
a^3 & x^3+a^2 & x^2+ax \\
-2b & \quad -b^3 & \\ \hline
a^3 & x^2+a^2 & x \\
+2b & \quad -2b^3 &
\end{array}$$

Divisiones parciales.

1.ª
$$\begin{array}{rr|l}
a^6 & -4b^2 & a^3-2b \\ \cline{3-3}
+2a^3b & & a^3+2b \\
 & +4b^2 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

2.ª
$$\begin{array}{r|l}
a^5-2a^3b^3-2a^2b+4b^4 & a^3-2b \\ \cline{2-2}
+2a^2b & a^2-2b^3 \\ \hline
-2a^3b^3 \qquad\qquad & \\
-4b^4 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

35. De la regla dada para dividir dos polinomios y del principio demostrado en el número 23, se deduce lo siguiente:

La division de dos polinomios no es exacta, si el primer término del dividendo no es divisible por el primero del divisor, y el último término de aquel por el último de éste; ó si se presenta algun resto, cuyo primer término no sea divisible por el primero del divisor.

36. Teorema. *Si se divide el polinomio*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L,$$

ordenado por las potencias decrecientes de x, *por el binomio* x — a, *el residuo de la division será el polinomio que resulta sustituyendo* x *por* a *en el dividendo*, esto es,

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots\ldots + Ka + L.$$

En efecto: supongamos que se efectúa la division del polinomio propuesto por $x - a$; el primer término del cociente es $Ax^m : x = Ax^{m-1}$; multiplicando este término por el divisor, resulta $Ax^m - aAx^{m-1}$, y restando este producto del dividendo, el término Ax^m se anula, y resulta para primer término del resto

$$Bx^{m-1} + aAx^{m-1} = (B + aA)\,x^{m-1},$$

donde vemos que el exponente de x ha disminuido en una unidad.

Continuando la division, el exponente de x disminuirá en una unidad por lo menos á cada resto; luego llegaremos á obtener un resto independiente de x, que será el residuo de la operacion.

El cociente entero, que representaremos por Q, será un polinomio en x, y el residuo R podrá ser *cero*, si la division es exacta: pero en cualquier caso tendremos:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = (x - a)\,Q + R,$$

siendo el primer miembro de esta igualdad el resultado de las operaciones indicadas en el segundo.

Si damos á x un valor particular cualquiera, es evidente que los dos miembros de esta igualdad adquieren valores iguales; supongamos, pues, $x = a$. El primer miembro se convierte en

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + Ka + L;$$

el factor $x - a$ del segundo miembro, se reduce á $a - a = 0$; el factor Q adquiere un valor particular cualquiera, que multiplicado por *cero* da *cero*, y R no se altera, porque no contiene la letra x; tendremos, pues,

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + Ka + L = R.$$

Igualdad que demuestra la proposicion enunciada.

37. Corolarios. 1.° *Si el polinomio* $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + Kx + L$ *se reduce á cero poniendo* a *en lugar de* x, *dicho polinomio es divisible por* $x - a$.

En efecto: el residuo de dividir $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + Kx + L$ por $x - a$ es $Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + ... + Ka + L$; si este residuo es cero como suponemos, el polinomio es divisible por $x - a$.

2.° Recíproco del anterior. *Si el polinomio* $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + Kx + L$ *es divisible por* $x - a$, *dicho polinomio se reduce á cero poniendo* a *en lugar de* x.

En efecto: el residuo es $Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + ... + Ka + L$, y este residuo es cero por hipótesis.

3.° *La diferencia entre las potencias de igual grado de dos cantidades, es divisible por la diferencia de estas cantidades.*

Vamos á demostrar que $x^m - a^m$ es divisible por $x - a$.

Si en $x^m - a^m$ hacemos $x = a$, se convierte en $a^m - a^m = 0$; luego $x^m - a^m$ es divisible por $x - a$.

Dividamos ahora estas cantidades.

$$
\begin{array}{ll|l}
x^m & -a^m & x - a \\
\hline
\quad ax^{m-1} & & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + ... + a^{m-1} \\
\qquad a^2x^{m-2} & & \\
\qquad . & & \\
\qquad\quad . & & \\
\qquad\qquad . & & \\
\qquad\qquad . & +a^m & \\
\hline
\qquad 0 & &
\end{array}
$$

El primer término del cociente es $x^m : x$, y se obtiene disminuyendo el exponente de x en una unidad. Como el dividendo no tiene mas término en x que el primero y éste desaparece en la primera sustraccion, el primer término de cada resto será el producto, cambiado el signo, del segundo término del divisor por el último hallado en el cociente; al dividir el primer término del resto por x, disminuye el exponente de esta letra en una unidad; luego *dado un término del cociente se obtiene el siguiente multiplicando aquel por* a *y dividiendo por* x, ó lo que es lo mismo, *aumentando el exponente de* a *y disminuyendo el de* x *en una unidad.*

Ejemplo.

$$\frac{x^9 - a^9}{x - a} = x^8 + ax^7 + a^2x^6 + a^3x^5 + a^4x^4 + a^5x^3 + a^6x^2 + a^7x + a^8$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

CANTIDADES NEGATIVAS.

38. En los polinomios considerados hasta ahora, el coeficiente y las letras de cada monomio tienen un valor absoluto, independiente de los signos mas y menos; solamente el término va precedido de uno de estos signos, los que indican, no un modo de ser del mismo, sino el concepto bajo el cual entra en la composicion del polinomio, esto es, el signo *mas*, puesto delante de un término, indica, como en Aritmética, que dicho término debe sumarse, y el signo *menos*, que debe ser restado.

Así, las expresiones

$$a+b \text{ y } a-b$$

expresan la primera que el valor numérico de a debe sumarse con el de b, y la segunda, que del valor de a debe restarse el de b; por manera que cada una de estas operaciones tiene su modo particular de ser indicada. Sin embargo, se comprende que seria muy ventajoso reducir las expresiones que nos ocupan á una sola, lo que puede conseguirse mediante ciertos convenios.

Estos son:

1.° *Cada letra puede ir precedida del signo* mas *ó del signo* menos, esto es, *en las cantidades podemos considerar el valor absoluto*, como se ha hecho en Aritmética, *y además el signo*, lo que es propio del Álgebra.

2.° *Las operaciones con cantidades aisladas precedidas del signo* mas *ó del* menos, *se efectuarán como si dichas cantidades fuesen términos de un polinomio.*

En virtud de estos convenios, la expresion

$$a+b$$

representa igualmente la suma y la diferencia de los valores absolutos de a y b; puesto que si b es una cantidad positiva, la expresion será

$$a+(+b)=a+b,$$

y si b es negativa, la expresion se convierte en

$$a+(-b)=a-b.$$

Supongamos, ahora, que $a+b$ se eleva al cuadrado, y será

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad [1]$$

Esta fórmula encierra tambien, en virtud de los convenios anteriores, la siguiente

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

En efecto: suponiendo en [1] que b es negativa, será

$$(a+(-b))^2=a^2+2a\,.-b+(-b)^2. \qquad \text{[1}^{\text{er}}\text{. convenio]}$$

ó $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad \text{[2.}^{\text{o}}\text{ convenio]}$$

39. Los mencionados convenios no deben ser admitidos, sin asegurarnos ántes de que *los resultados á que pueden conducirnos son siempre exactos.*

Á este fin, demostraremos algunas proposiciones.

1.ª *Si en un polinomio entero se sustituye una letra* a *por* — a, *y las operaciones indicadas que resultan se efectúan del modo dicho en el 2.º convenio, el nuevo polinomio solo se diferencia del propuesto en los signos de los términos que contienen potencia impar de dicha letra.*

Considerando las expresiones

$$a^m=a\,.\,a\,.\,a.... \quad \text{y} \quad (-a)^m=-a\,.-a\,.-a...,$$

vemos que cada dos factores dan producto positivo, tanto en a^m como en $(-a)^m$ [21]; luego si m es par, las dos potencias serán positivas; pero si m es impar, multiplicando todos los factores menos el último los productos serán positivos, y como el último factor es positivo en a^m y negativo en $(-a)^m$, la primera de estas potencias será positiva y la segunda negativa.

Segun esto, los términos que contengan una potencia par de a, no varian por el cambio de signo de esta letra; y los que contengan una potencia impar, cambian de signo; puesto que un término positivo $2a^3b$ se convierte en $2\,.-a^3\,.\,b=-2a^3b$, y uno negativo $-2a^3b$ se convierte en $-2\,.-a^3\,.\,b=2a^3b$.

Además, es evidente que los términos independientes de a no sufren alteracion; luego el teorema enunciado es cierto.

2.ª *Si se suman ó restan varios polinomios, y se repite despues la misma operacion con los que se obtengan sustituyendo una letra* a *por* —a *en los propuestos, el segundo resultado puede deducirse del primero haciendo en éste la misma sustitucion.*

En efecto: sustituyendo una letra a por $-a$ en los polinomios propuestos, y efectuando las operaciones indicadas que se presenten, del modo dicho en el 2.º convenio, resultarán otros polinomios que se diferenciarán de los dados en los signos de los términos que contengan potencia impar de a [Prop. 1.ª]. Sumando ó restando los polinomios propuestos y despues los trasformados, sin hacer las reducciones, los resultados constarán de los mismos términos; en cuanto á los signos, sabemos que al sumar no varian, y que al restar cambian los del sustraendo; pero como esto sucede en las dos sustracciones que comparamos, los términos iguales que tuvieran en los sustraendos el mismo signo ó signos contrarios, tendrán tambien en los restos signos iguales ó contrarios. Luego los resultados de las dos adiciones ó sustracciones, solo se diferencian en los signos de los términos con potencia impar de a.

Al hacer la reduccion de términos semejantes, los que contienen una misma potencia impar de a se pueden reducir sumando los positivos separadamente de los negativos; si m es el coeficiente de la primera suma y n el de la segunda, $m-n$ será el coeficiente de los términos reducidos, suponiendo $m>n$; pero los términos positivos que en uno de los resultados han dado m, son negativos en el otro; y los negativos del primero, que han dado n, son positivos en el segundo; por consiguiente $-(m-n)$ es en éste el coeficiente de los términos reducidos, que evidentemente se diferencia de $m-n$ tan solo en el signo. En cuanto á los términos que no contienen potencia impar de a, es evidente que despues de la reduccion serán iguales en ambas sumas ó diferencias, tanto en valor como en signo.

Vemos, pues, que el resultado de sumar ó restar los polinomios trasformados, solamente se diferencia del de sumar ó restar los propuestos en los signos de los términos con potencia impar de a; luego aquel resultado puede obtenerse sustituyendo en éste la letra a por $-a$. [Prop. 1.ª]

3.ª *Si se multiplican dos polinomios, y se repite despues la misma operacion con los que se obtengan sustituyendo una letra* a *por* —a *en los propuestos, el segundo producto puede deducirse del primero haciendo en éste la misma sustitucion.*

En efecto: en la multiplicacion de dos polinomios, cada término del producto, considerado ántes de la reduccion, se forma multiplicando dos monomios, uno del multiplicando y otro del multiplicador; por consiguiente los dos productos que nos proponemos comparar constarán de los mismos términos.

Examinemos los signos de estos productos parciales en los tres casos que pueden presentarse: 1.° que ninguno de los monomios contenga potencia impar de a; 2.° que uno la contenga y el otro no; 3.° que los dos la contengan.

En el primer caso, los monomios del producto propuesto y los iguales á estos en el otro producto, tienen respectivamente los mismos signos; luego despues de multiplicados entre sí, darán términos iguales en valor y en signo, y la potencia de *a*, si la hay, será par.

En el segundo caso, el monomio sin potencia impar de *a* entra en el multiplicando ó en el multiplicador de las dos operaciones con el mismo signo, y el monomio con potencia impar de dicha letra, entra en el otro factor, pero con el signo *mas* en una de las operaciones y el *menos* en la otra; luego los resultados de multiplicar estos monomios tendrán signos contrarios, y la potencia de *a* es impar.

En el tercer caso, los monomios de la segunda operacion tienen signos contrarios á los de los monomios iguales de la primera: si en ésta son los dos positivos, en la segunda serán los dos negativos, y los productos tendrán ambos el mismo signo, que será el *mas*, si en la primera es positivo uno de los monomios y el otro negativo, en la segunda serán respectivamente negativo y positivo, y por tanto los productos tendrán tambien el mismo signo, que será el *menos*. En cuanto á la potencia de *a* es par en los dos productos.

Vemos, pues, que los términos iguales de los productos tendrán el mismo signo, si son independientes de la letra *a* ó la contienen con exponente par, y signos contrarios, si dicho exponente es impar; además sabemos que despues de la reduccion sucederá lo mismo [Prop. 2.ª]; luego el resultado de multiplicar los polinomios trasformados, solamente se diferencia del de multiplicar los propuestos en los signos de los términos con potencia impar de *a;* por lo tanto, aquel resultado podráobtenerse sustituyendo en éste la letra *a* por —*a* [Prop. 1.ª].

4.ª *Si se dividen dos polinomios, y se repite despues la misma operacion con los que se obtengan sustituyendo* a *por* —a *en los propuestos, el nuevo cociente puede deducirse del primero haciendo en éste la misma sustitucion.*

La division de un monomio por otro da lugar á los mismos casos que la multiplicacion, y las consecuencias son las mismas. Por otra parte, la division de dos polinomios se reduce á tres clases de operaciones, que son: dividir un monomio por otro, multiplicar un término del cociente por el divisor, restar el producto del dividendo ó de un resto anterior; y como los resultados de estas operaciones parciales solo se diferenciarán en los signos de los términos con potencia impar de la letra *a*, es evidente que lo mismo tendrá lugar en los cocientes y en los residuos, si los hay, de las divisiones que consideramos; por consiguiente el cociente de los polinomios trasformados puede deducirse poniendo —*a* en lugar de *a* en el de los propuestos.

40. De las proposiciones que acabamos de demostrar, se deduce la siguiente importante consecuencia:

Se puede cambiar el signo de una letra en los datos y en el resultado de una operacion ó de una série cualquiera de ellas, siempre que convengamos en efectuar las operaciones indicadas con monomios aislados, precedidos del signo mas *ó del* menos, *como si dichos monomios fuesen términos de un polinomio.*

41. Es evidente que despues de cambiar en los datos y en el resultado el signo de una letra a, puede cambiarse el de otra b, despues el de c, etc. Las expresiones finales que originen estos cambios sucesivos de signo, serán las mismas que obtendríamos haciéndolos todos simultáneamente; luego la consecuencia enunciada en el número anterior, es igualmente cierta cuando se cambian los signos de dos ó mas letras.

42. Acabamos de demostrar que los convenios del número 38, dan lugar siempre á resultados exactos; por tanto podemos admitirlos desde ahora. El Álgebra alcanzará así un alto grado de generalidad, puesto que *cuando se haya efectuado una operacion ó una série cualquiera de ellas con varias expresiones algebráicas, si se presentan las mismas operaciones con otras expresiones que solo se diferencien de las primeras en los signos de una ó mas letras,* NO SERÁ NECESARIO REPETIR LOS CÁLCULOS, PARA OBTENER EL NUEVO RESULTADO, *bastando cambiar en el primero los signos de dichas letras.*

43. Damos el nombre de *cantidad positiva* á toda expresion precedida del signo *mas*, y el de *cantidad negativa* á toda expresion precedida del signo *menos*.

Estas expresiones precedidas del signo *mas* ó del *menos*, carecen de sentido cuando están aisladas: las introducimos en el cálculo como medio único y necesario de dar al Álgebra una gran generalidad; pero solo despues de haber demostrado que su admision y las reglas á que ha de sujetarse el cálculo de las mismas, originan siempre resultados exactos.

44. En virtud de los convenios que acabamos de admitir, las palabras sumar y restar no envuelven en Álgebra las ideas de aumento y disminucion, pudiendo por el contrario ser la suma menor que un sumando, y la diferencia mayor que el minuendo; puesto que la suma $a+(-b)$ es en realidad la diferencia $a-b$, y la diferencia $a-(-b)$ equivale á la suma $a+b$.

Por esto se llama suma ó diferencia *algebráica* á la suma ó diferencia en que entran cantidades negativas, y suma ó diferencia *aritmética* á aquellas en que solo se consideran los valores absolutos de las cantidades.

CAPÍTULO TERCERO.

FRACCIONES ALGEBRÁICAS.

45. FRACCION ALGEBRÁICA Ó LITERAL *es el cociente indicado de dos expresiones algebráicas.*

Por ejemplo

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{3a+5b}{2+\sqrt{a}}.$$

El dividendo y divisor reciben como en Aritmética los nombres de *numerador* y *denominador*; sin embargo, no debe atribuirse á estos nombres la misma significacion.

Los términos de la fraccion algebráica no representan mas que el dividendo y divisor de una division indicada, y segun los valores numéricos de las letras que entran en ellos, podrán ser números enteros, fraccionarios ó inconmensurables, mientras que la significacion dada en Aritmética al numerador y denominador supone esencialmente que estos términos son números enteros.

46. De los teoremas demostrados en el número 142 de la Aritmética y generalizados despues, se deduce:

1.º *Multiplicando ó dividiendo el numerador por una cantidad cualquiera, la fraccion queda multiplicada ó dividida por dicha cantidad.*

2.º *Multiplicando ó dividiendo el denominador por una cantidad cualquiera, la fraccion queda dividida ó multiplicada por dicha cantidad.*

3.º *Multiplicando ó dividiendo el numerador y el denominador por una cantidad cualquiera, la fraccion no varía.*

47. *Si los términos de una fracion algebráica tienen factores comunes, se obtendrá otra fraccion equivalente á la propuesta y de términos mas sencillos, dividiendo los dos términos por el producto de sus factores comunes.*

Así la fraccion $\frac{36a^4b^2c^5x^6}{24a^2b^5c}$ se convierte en $\frac{3a^2c^4x^6}{2b^3}$, con solo dividir los dos términos por $12a^2b^2c$.

La fraccion $\frac{x^3 - a^3}{(x-a)^2}$, cuyos términos son divisibles por $x - a$, se reduce á

$$\frac{x^2 + ax + a^2}{x - a}.$$

48. *Para reducir varias fracciones algebráicas á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada fraccion por el producto de los denominadores de las demás.*

Es evidente, en efecto, que las fracciones que se obtengan por esta regla son iguales á las propuestas, y tienen denominadores iguales.

Así,
$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{m}{n}$$
se convierten respectivamente en
$$\frac{adn}{bdn},\quad \frac{cbn}{dbn},\quad \frac{mbd}{nbd}.$$

49. El empleo del mínimo comun múltiplo, cuando los denominadores tienen factores comunes, ofrece en Álgebra ventajas análogas á las expuestas en Aritmética; pero el problema de hallar el mínimo comun múltiplo de varios polinomios es bastante complicado para ser expuesto en un curso elemental.

Por consiguiente, haremos uso del mínimo comun múltiplo tan solo cuando los denominadores de las fracciones dadas sean monomios.

Llamaremos *mínimo comun múltiplo* de varios monomios á otro monomio divisible por los primeros y compuesto del menor número posible de factores.

Es evidente, segun esta definicion, que *para hallar el mínimo comun múltiplo de varios monomios, se escriben á la derecha del mínimo comun múltiplo de sus coeficientes todas las letras de los monomios, sin repetir ninguna, afectadas de los mayores exponentes que tengan en dichos monomios.*

En cuanto á la regla para efectuar la reduccion de varias fracciones á un comun denoninador, por medio del mínimo comun múltiplo, es la misma dada en Aritmética.

Ejemplo. Sean las fracciones

$$\frac{5a}{3b^2c^4x},\quad \frac{b}{8a^5c^2},\quad \frac{7c}{12a^3b^3}.$$

El mínimo múltiplo comun es $24a^5b^3c^4x$, que dividido por los denominadores da respectivamente

$$8a^5b,\ 3b^3c^2x,\ 2a^2c^4x.$$

Multiplicando estos cocientes por los numeradores, y partiendo los productos por el mínimo comun múltiplo, se obtiene

$$\frac{40a^6b}{24a^5b^3c^4x},\ \frac{3b^4c^2x}{24a^5b^3c^4x},\ \frac{14a^2c^5x}{24a^5b^3c^4x}.$$

50. *Para sumar ó restar fracciones algebráicas de igual denominador, se suman ó restan los numeradores, y el resultado se parte por el denominador comun.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

En efecto; llamando p, q, r á los valores de las fracciones dadas, tendremos

$$\frac{a}{m}=p,\ \frac{b}{m}=q,\ \frac{c}{m}=r,$$

de donde

$$a=mp,\ b=mq,\ c=mr;$$

sumando las dos primeras igualdades y restando la tercera resulta

$$a+b-c=m(p+q-r);$$

de donde

$$p+q-r=\frac{a+b-c}{m}$$

ó

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Si las fracciones tienen denominadores diferentes, se reducen á un comun denominador, y se aplica la regla anterior.

51. *Para multiplicar entre sí dos ó mas fracciones algebráicas, se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}=\frac{acm}{bdn}.$$

En efecto, llamando p, q, r á los valores de las fracciones dadas, tendremos

$$\frac{a}{b}=p, \frac{c}{d}=q, \frac{m}{n}=r,$$

de donde

$$a=bp, \quad c=dq, \quad m=nr;$$

multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$acm=bpdqnr \quad \text{ó} \quad acm=bdn\times pqr,$$

de donde

$$pqr=\frac{acm}{bdn},$$

ó

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}=\frac{acm}{bdn}.$$

52. *Para dividir una fraccion algebráica por otra, se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda, y el numerador de ésta por el denominador de aquella, y se divide el primer producto por el segundo.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

En efecto: $\quad \frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b};$

luego $\frac{ad}{bc}$ es el cociente.

Para dividir una cantidad entera por otra fraccionaria, se multiplica la primera por el denominador de la segunda, y se parte el producto por el numerador.

$$a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}.$$

En efecto, $\quad \frac{ac}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{abc}{bc}=a.$

Lo que demuestra la regla.

53. *Para reducir una expresion mixta á fraccion algebráica, se multiplica la parte entera por el denominador de la fraccion, y se añade ó resta el numerador de la misma, poniendo al resultado por denominador el de la fraccion.*

En efecto: $\quad a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c},$

Lo mismo, $$a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}.$$

Las operaciones con expresiones mixtas se efectúan convirtiendo dichas expresiones en fracciones equivalentes, y operando despues con éstas.

54. Las propiedades de las fracciones iguales se han demostrado en Aritmética [188 y siguientes] en el supuesto de ser conmensurables los términos de las fracciones; pero si se observa que todos los razonamientos hechos con aquel objeto se apoyan en las propiedades generales de los quebrados, y en transformaciones iguales efectuadas con cantidades iguales, y que las propiedades demostradas en Aritmética para fracciones de términos conmensurables acaban de hacerse extensivas á toda clase de fracciones, podremos decir: *las propiedades de las fracciones iguales demostradas en Aritmética para números conmensurables, son igualmente ciertas cuando los números son inconmensurables ó unos conmensurables y otros inconmensurables.*

EJERCICIOS.

I. Dadas dos cantidades a y b, expresar algebráicamente una tercera cantidad igual á *cinco* veces la *cuarta* potencia de a, menos *nueve* veces el *cuadrado* de b.

II. Dadas las cantidades x é y, expresar una tercera cantidad que exceda en *veinte* unidades al *triplo* del *cubo* de x, disminuido en la *quinta parte* del *cuadrado* de y.

III. Hallar el valor numérico de

$$4a^3b+3ab^2-b^4,$$

siendo $a=2$, $b=3$.

IV. Multiplicar los polinomios $a^3x^3-a^4x^2-2a^5x+a^6$, $a^2x^2+a^3x-3a^4$.

V. ¿Cuántos términos contiene el producto de dos polinomios, ántes de efectuar la reduccion?

VI. Dividir los polinomios $a^5x^5-6a^7x^3+2a^8x^2+7a^9x-3a^{10}$, $a^2x^2+a^3x-3a^4$.

VII. Averiguar si el polinomio $ax^4-4a^2x^3+7a^3x^2-4a^4x$ es divisible por $x-a$, sin efectuar la division.

VIII. Simplificar la fraccion $\dfrac{a^2b^3x^5-ab^2x^4}{5abx^3+3a^2b^2x^6}$.

IX. Simplificar la fraccion $\dfrac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-7ax^2+8a^2x-3a^3}$.

X. Efectuar la siguiente operacion indicada

$$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b},$$

obteniendo el resultado mas sencillo.

XI. Efectuar la trasformacion siguiente:

$$\frac{\left(\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{a+x}\right)\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}\right)}{\left(\dfrac{a-x}{x}-\dfrac{a-x}{a}\right)\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{a}\right)}=\frac{ax^2}{(a-x)^3}.$$

LIBRO SEGUNDO.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES PRELIMINARES.

I.—Definiciones.

55. ECUACION *es una igualdad en que entran una ó mas cantidades incógnitas.*

Por medio de las ecuaciones se expresán en Álgebra las relaciones que ligan las cantidades conocidas de un problema con las desconocidas. Á este fin se representan los datos por sus valores numéricos ó por las primeras letras del alfabeto, y las incógnitas por las últimas.

56. La ecuacion se distingue de la igualdad en que ésta relaciona generalmente cantidades conocidas; sin embargo, puede tambien ocurrir que una igualdad encierre incógnitas, y en este caso se distinguirá de la ecuacion en que uno de los miembros es el resultado de operaciones indicadas en el otro, ó bien los dos miembros son operaciones indicadas que dan igual resultado.

Asi, $(x-a)\,m = mx - am$, $(a+x)^2 = (a+x)\,(a+x)$ son igualdades, áun cuando x sea incógnita.

57. Las ecuaciones pueden ser *numéricas* ó *literales*. Una ecuacion es numérica cuando los datos están representados por números, y literal si se representan por letras.

La ecuacion $3x + 2y = 14$, es numérica.

La ecuacion $ax + by = c$, es literal.

58. Tambien se distinguen las ecuaciones por su *grado*.

GRADO *de una ecuacion con una incógnita es el mayor de los* *exponentes de la incógnita*, con tal que ésta no entre en ningun denominador ni bajo signo radical.

La ecuacion $ax^3 - bx^2 = cx + d$, es de tercer grado.

Grado *de una ecuacion con dos ó mas incógnitas es la mayor suma de los exponentes que tienen éstas en cada término.*

La ecuacion $x^2 y^2 - 3xy + x^3 = 0$, es de cuarto grado.

59. Identidad *es una igualdad evidente por sí misma.*

Por ejemplo

$$a = a, \qquad a + \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}, \qquad 4 + 5 = 4 + 5.$$

Resolver una ecuacion con una incógnita *es hallar todas las cantidades que puestas en lugar de la incógnita, convierten la ecuacion en identidad.*

Cada una de dichas cantidades se llama *solucion* de la ecuacion.

Resolver una ecuacion con dos ó mas incógnitas *es hallar todos los sistemas de valores que puestos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuacion en identidad.*

Cada sistema de valores es una *solucion* de la ecuacion.

60. Una ecuacion se llama *absurda* ó *imposible* cuando no tiene ninguna solucion.

Ecuacion *indeterminada* es, por el contrario, la que tiene un número ilimitado de soluciones.

II.—Cambios que pueden sufrir las ecuaciones.

61. *Dos ecuaciones son* equivalentes *cuando tienen las mismas soluciones.*

Se demuestra la equivalencia de dos ecuaciones patentizando que toda solucion de la primera es solucion de la segunda, y recíprocamente.

62. Teorema. *Si se aumentan ó disminuyen los dos miembros de una ecuacion en una misma cantidad, la ecuacion que resulta es equivalente á la propuesta.*

Representando por A y B los dos miembros de la ecuacion propuesta, la ecuacion es

$$A = B;$$

si aumentamos los dos miembros en la cantidad C, tendremos una nueva ecuacion

$$A + C = B + C.$$

Toda solucion de $A = B$, sustituida en lugar de las incógnitas de esta ecuacion, da para A y B valores idénticos; y es evidente que si A y B son idénticos, lo serán tambien $A+C$ y $B+C$.

Luego toda solucion de la ecuacion primera, es solucion de la segunda.

Recíprocamente, toda solucion de $A+C=B+C$, sustituida en vez de las incógnitas de esta ecuacion, da para $A+C$ y $B+C$ valores idénticos, y como los valores de C en los dos miembros son idénticos, los de A y B lo son tambien.

Luego toda solucion de la ecuacion segunda, lo es tambien de la primera.

Del mismo modo demostraríamos que las ecuaciones $A=B$ y $A-C=B-C$ son equivalentes.

63. Corolario 1.° *Un término de una ecuacion puede pasar del miembro en que se encuentra al otro, con solo cambiar el signo de dicho término.*

Sea la ecuacion

$$ax-d=cx+b.$$

Si queremos pasar el término $-d$ al segundo miembro, aumentaremos los dos miembros de la ecuacion en la cantidad d, y será

$$ax-d+d=cx+b+d$$

ó

$$ax=cx+b+d.$$

Si ahora el término cx quiere pasarse al primer miembro, restaremos cx de los dos miembros de la ecuacion, y será

$$ax-cx=cx+b+d-cx$$

ó

$$ax-cx=b+d.$$

Trasposicion *es una operacion que tiene por objeto reunir en un miembro todos los términos que contienen alguna incógnita, y en el otro los términos conocidos.*

Para efectuar la trasposicion se reunen en un miembro los términos que contienen alguna incógnita y en el otro los conocidos, cambiando el signo á cada término que pasa de un miembro á otro.

64. Corolario 2.° *Se puede cambiar los signos á todos los términos de una ecuacion.*

Basta, en efecto, pasar cada término del miembro en que se encuentra al otro.

Así la ecuacion

$$ax-d=cx+b$$

se convierte en

$$-cx-b=-ax+d \quad \text{ó} \quad -ax+d=-cx-b.$$

65. Teorema. *Si se multiplican ó dividen los dos miembros de una ecuacion por una misma cantidad conocida, la ecuacion que resulta es equivalente á la propuesta.*

Representando por A y B los dos miembros de la ecuacion propuesta, la ecuacion es

$$A=B:$$

si multiplicamos los dos miembros por la cantidad conocida m, tendremos una nueva ecuacion

$$Am=Bm.$$

Toda solucion de $A=B$, sustituida en vez de las incógnitas de esta ecuacion, da para A y B valores idénticos; y es evidente que si A y B son idénticos, Am y Bm lo serán tambien.

Luego toda solucion de la ecuacion primera es solucion de la segunda.

Recíprocamente, toda solucion de $Am=Bm$, sustituida en vez de las incógnitas, da para Am y Bm valores idénticos, y como el factor m es independiente de las incógnitas, la sustitucion indicada no altera esta cantidad; luego para que Am y Bm sean idénticos, es necesario que A y B lo sean tambien.

Por consiguiente, toda solucion de la ecuacion segunda, lo es tambien de la primera.

Del mismo modo demostraríamos que las ecuaciones $A=B$ y $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{m}$ son equivalentes.

66. Si la cantidad m es cero ó contiene alguna incógnita, la proposicion demostrada no es cierta.

En efecto: si multiplicamos por cero los miembros de la ecuacion $A=B$, resulta

$$A\times 0=B\times 0.$$

Es evidente que cualquier valor ó sistema de valores que asignemos á las incógnitas, darán para A y B valores cualesquiera, que multiplicados por cero, harán idénticos los miembros de $A\times 0=B\times 0$; luego esta ecuacion tiene las soluciones de $A=B$, y además otras en número infinito.

Si multiplicamos por una cantidad que contenga alguna incógnita, por ejemplo $x-a$, la ecuacion se trasforma en

$$A(x-a)=B(x-a),$$

que tiene todas las soluciones de $A=B$, y además la solucion

$x=a$, que convirtiendo en cero el factor $x-a$, hace idénticos los dos miembros.

Por el contrario, la division por una cantidad que contenga alguna incógnita, hace desaparecer alguna ó algunas soluciones de la ecuacion propuesta.

67. Quitar denominadores *es una operacion que tiene por objeto convertir la ecuacion propuesta en otra equivalente de términos enteros.*

Para quitar los denominadores de una ecuacion, se multiplica cada término por el producto de todos los denominadores; lo que se consigue multiplicando el numerador de cada fraccion por el producto de los denominadores de las demás, y los términos enteros por el producto de todos los denominadores.

Si estos son monomios y tienen factores comunes, *se multiplica cada término de la ecuacion por el mínimo comun múltiplo de los denominadores; lo que se consigue multiplicando el numerador de cada fraccion por el cociente de dividir el mínimo comun múltiplo por el denominador, y los términos enteros por el mínimo comun múltiplo.*

Ejemplos.

1.° Sea la ecuacion

$$\frac{5x}{7}-\frac{2x}{3}+2=3-\frac{x}{2}.$$

Para quitar sus denominadores debemos multiplicar por 42 cada término; pero una fraccion $\frac{5x}{7}$, por ejemplo, se multiplíca por 42, multiplicando el numerador por 6, producto de los denominadores de las demás, y prescindiendo del denominador; lo mismo puede decirse de las demás fracciones. Operando así se obtiene

$$30x-28x+84=126-21x.$$

2.° Sea la ecuación

$$\frac{ax}{12b^2}-\frac{bx}{6a}+c=\frac{x}{9a}+\frac{b}{18a^2}.$$

El mínimo comun múltiplo de los denominadores es $36a^2b^2$; multiplicando todos los términos por esta cantidad, resulta

$$3a^3x-6ab^3x+36a^2b^2c=4ab^2x+2b^3.$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

68. *Para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, se quitan denominadores, se efectúan las operaciones indicadas, se hace la trasposicion, reuniendo en el primer miembro los términos desconocidos, se reducen los términos semejantes, se saca la incógnita por factor comun, si entra en dos ó mas términos, y se despeja la incógnita, para lo cual se divide el segundo miembro de la ecuacion por todo lo que multiplica á la incógnita en el primero.*

Advertiremos que, con frecuencia, algunas de estas operaciones no son necesarias.

EJEMPLOS.

1.° Sea la ecuacion

$$\frac{5x}{12} - 3 + \frac{x}{30} = \frac{7x}{24} + \frac{4}{5}.$$

Quitando denominadores, resulta

$$50x - 360 + 4x = 35x + 96.$$

Haciendo la trasposicion, tendremos

$$50x + 4x - 35x = 96 + 360.$$

De donde, reduciendo,

$$19x = 456,$$

y despejando

$$x = \frac{456}{19} \quad \text{ó} \quad x = 24.$$

Comprobacion.

$$\frac{5 \cdot 24}{12} - 3 + \frac{24}{30} = \frac{7 \cdot 24}{24} + \frac{4}{5}, \quad 10 - 3 + \frac{4}{5} = 7 + \frac{4}{5}$$

ó

$$7 + \frac{4}{5} = 7 + \frac{4}{5}.$$

2.º Resolver la ecuacion

$$\frac{6x}{5}-x+2=\frac{4x}{15}-\frac{x}{25}.$$

Siguiendo la regla dada, obtendremos sucesivamente:

$$90x-75x+150=20x-3x,$$
$$90x-75x-20x+3x=-150,$$
$$-2x=-150.$$

Los dos miembros de la última ecuacion son negativos. Este resultado proviene de haber pasado al primer miembro los términos que contienen la incógnita y al segundo los conocidos. Podria evitarse trasponiendo al segundo miembro los términos en x, y los conocidos al primero; pero es mas breve cambiar los signos [64], con lo que se obtiene

$$2x=150,\quad x=\frac{150}{2}=75.$$

Comprobacion.

$$\frac{6.75}{5}-75+2=\frac{4.75}{15}-\frac{75}{25},\quad 90-75+2=20-3,\quad 17=17.$$

3.º Resolver la ecuacion

$$\frac{bx}{2(a-b)}-\frac{a}{3b}=\frac{3x}{a(a^2-b^2)}-\frac{2}{b^2(a+b)}.$$

El mínimo comun múltiplo de los denominadores es $6ab^2(a^2-b^2)$; haciéndolos desaparecer, resulta

$$3ab^3(a+b)x-2a^2b(a^2-b^2)=18b^2x-12a(a-b);$$

trasponiendo será

$$3ab^3(a+b)x-18b^2x=2a^2b(a^2-b^2)-12a(a-b);$$

de donde

$$(3a^2b^3+3ab^4-18b^2)x=(a-b)(2a^3b+2a^2b^2-12a);$$

$$x=\frac{(a-b)(2a^3b+2a^2b^2-12a)}{3a^2b^3+3ab^4-18b^2},$$

$$x=\frac{2a(a-b)(a^2b+ab^2-6)}{3b^2(a^2b+ab^2-6)};$$

y por último $\quad x=\dfrac{2a(a-b)}{3b^2}.$

CAPÍTULO TERCERO.

PROBLEMAS QUE PUEDEN SER RESUELTOS
POR MEDIO DE UNA ECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

69. La resolucion de un problema algebráico consta de dos partes principales. La primera consiste en expresar con los signos del Álgebra, por medio de una ecuacion ó de varias, las relaciones que, segun el enunciado, ligan los datos y las incógnitas; á lo que se llama *poner el problema en ecuacion*. La segunda consiste en *resolver la ecuacion ó ecuaciones* obtenidas.

Los valores de las incógnitas que verifiquen las ecuaciones, satisfarán en general á todas las condiciones del enunciado, y serán, por tanto, las soluciones del problema; puesto que las ecuaciones son el mismo enunciado escrito en la lengua del Álgebra. [1]

La primera parte no está sujeta á reglas fijas, pero se facilita teniendo en cuenta las observaciones que vamos á exponer, primero para los problemas que tienen una sola incógnita y despues para aquellos que teniendo varias pueden resolverse por una sola ecuacion con una incógnita.

I—Problemas con una incógnita.

70. Para poner en ecuacion estos problemas, son necesarias las siguientes operaciones:

1.ª *Representar la incógnita por una letra*, generalmente de las últimas del alfabeto.

2.ª *Investigar las relaciones que ligan los datos con la incógnita.*

El enunciado del problema contiene una relacion de igualdad entre dos expresiones, monomios ó polinomios, que resultan de la combinacion de datos é incógnita por medio de las operaciones aritméticas, y que son los miembros de la ecuacion.

---

1 Puede suceder, sin embargo, que el enunciado contenga alguna condicion no expresable algebráicamente, y que, á consecuencia de esto, la solucion de la ecuacion no convenga al problema. Véase número 74.

Dicha relacion de igualdad se encuentra siempre explícita ó implícitamente en el enunciado. La série de operaciones indicadas que han de constituir los miembros de la ecuacion, se hallará tambien en el enunciado, será una consecuencia de él, ó dependerá de algun principio demostrado en otra ciencia.

3.ª *Escribir la ecuacion.*

Representada ya la incógnita por una letra del alfabeto, y analizada la condicion á que debe satisfacer el valor buscado, se indican las dos séries de operaciones que efectuadas con los datos y la incógnita, si ésta fuese conocida, darian resultados idénticos, lo que origina la ecuacion del problema.

PROBLEMAS.

1.º *Hallar un número tal que la suma de su tercio y su cuarta parte exceda á su mitad en 3 unidades.*

Sea x el número buscado: la suma de su tercio y su cuarta parte será $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$, y el exceso de esta suma sobre su mitad $\frac{x}{2}$ debe ser 3, luego

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{2}=3.$$

Resolviendo esta ecuacion, resulta $x=36$.

Comprobacion.

$$\frac{36}{3}+\frac{36}{4}-\frac{36}{2}=3, \quad ó \quad 3=3.$$

2.º *Un padre tiene 54 años y su hijo 10. ¿Cuántos años han de trascurrir hasta que la edad del padre sea triple de la del hijo?*

Sea x el número desconocido de años. Dentro de x años, el padre tendrá $54+x$ años, y el hijo $10+x$; debiendo ser la edad del primero tres veces mayor que la del segundo, tendremos:

$$54+x=3\,(10+x).$$

Resolviendo esta ecuacion, se encnentra $x=12$.

Comprobacion.

$$54+12=3\,(10+12) \quad ó \quad 66=66.$$

3.° *Un padre tiene 54 años y su hijo 10. ¿Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué 12 veces la del hijo?*

Sea x la incógnita. Hace x años el padre tenia $54 - x$ años, y el hijo $10 - x$; debiendo ser la edad del primero 12 veces mayor que la del segundo, tendremos

$$54 - x = 12\,(10 - x).$$

Resolviendo la ecuacion, hallamos $x = 6$.

Comprobacion.

$$54 - 6 = 12\,(10 - 6) \quad ó \quad 48 = 48.$$

4.° *Tres caños pueden llenar un estanque, el primero en 35 horas, el segundo en 45, y el tercero en 63; si los tres caños se abren al mismo tiempo, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

Sea x este número de horas. La relacion de igualdad en este problema es que la parte que llena el primer caño en x horas, mas las que llenan el segundo y tercero en el mismo tiempo, es igual á la capacidad total del estanque, que representaremos por 1.

Ahora bien, si el primer caño llena por sí solo el estanque en 35 horas, en x horas llenará una parte representada por $\frac{x}{35}$. Igualmente, las partes que llenan los otros dos caños estarán representadas por $\frac{x}{45}$, $\frac{x}{63}$; luego

$$\frac{x}{35} + \frac{x}{45} + \frac{x}{63} = 1.$$

Resolviendo esta ecuacion resulta $x = 15$.

Comprobacion.

$$\frac{15}{35} + \frac{15}{45} + \frac{15}{63} = 1, \quad ó \quad 1 = 1.$$

5.° *Un caño puede llenar un estanque en 4 horas, y dos orificios pueden vaciarlo, el primero en 24 horas y el segundo en 8; si los orificios se abren al mismo tiempo que el caño, ¿en cuántas horas, se llenará el estanque?*

Sea x el número pedido. Es claro que, representando por 1 la capacidad del estanque, el caño arroja en x horas un volúmen de agua expresado por $\frac{x}{4}$, y los orificios vacian partes expresadas por $\frac{x}{24}$ y $\frac{x}{8}$; luego la ecuacion del problema es

$$\frac{x}{4}-\frac{x}{24}-\frac{x}{8}=1.$$

Resolviéndola resulta $x=12$.

Comprobacion.

$$\frac{12}{4}-\frac{12}{24}-\frac{12}{8}=1, \text{ ó } 1=1.$$

II.—Problemas con varias incógnitas.

71. Cuando son varias las incógnitas de un problema, existen diferentes relaciones de igualdad, que dan lugar á otras tantas ecuaciones. Sin embargo, con frecuencia sucede que una de las incógnitas se halla enlazada con las demás mediante relaciones tan sencillas, que conocida aquella se deducen inmediatamente éstas. En tal caso el problema puede resolverse con ventaja empleando una sola ecuacion.

Para obtenerla se observarán las siguientes reglas:

1.ª *Distinguir los datos de las incógnitas.*

En muchos casos el enunciado indica claramente esta distincion, pero otras veces existen condiciones que, examinadas atentamente, disminuyen el número aparente de incógnitas.

2.ª *Investigar las relaciones que ligan los datos con las incógnitas.*

Un exámen atento del enunciado hará distinguir, en general, tantas relaciones de igualdad como incógnitas. Una de estas relaciones servirá para obtener la ecuacion con una incógnita del problema, y las demás para determinar las incógnitas restantes. Se elegirá para incógnita de la ecuacion la que, suponiéndola conocida, conduciria mas fácilmente al conocimiento de las demás, y se representará por una letra.

3.ª *Escribir la ecuacion.*

Representada la incógnita *principal* por una letra, se expresará cada una de las incógnitas que deban entrar en uno ú otro miembro de la ecuacion, por la série de operaciones indicadas que determinaria su valor, si la incógnita principal fuese conocida.

Por último, se obtendrá la ecuacion del problema indicando con los datos y las incógnitas, representadas en la forma expuesta, las dos séries de operaciones que, en virtud de la relacion elegida al efecto, darian resultados idénticos, si los valores de las incógnitas fuesen conocidos.

PROBLEMAS.

6.° *Distribuir* 5324 *pesetas entre dos personas, de modo que la parte de la segunda sea el triplo de la parte de la primera.*

Las incógnitas de este problema están ligadas entre sí y con los datos por dos relaciones: 1.ª la suma de las dos partes es igual á 5324; 2.ª la parte segunda es triple de la primera.

Sea x esta parte; la segunda estará representada por $3x$; y en virtud de la primera relacion, será

$$x + 3x = 5324,$$

de donde

$$x = 1331.$$

La segunda parte es $3 \times 1331 = 3993$.

Comprobacion.

$$1331 + 3993 = 5324.$$

7.° *Dividir el número* 420 *en tres partes, tales que la primera esté con la segunda en la relacion* 9 : 5, *y que la tercera sea mitad de la suma de las otras dos.*

Tres relaciones ligan en este problema las incógnitas con los datos: 1.ª la suma de las tres partes es 420; 2.ª las partes primera y segunda son entre sí como 9 : 5; 3.ª la última parte es mitad de la suma de las otras dos.

Esta relacion manifiesta que la parte tercera es $\frac{1}{3}$ de 420, ó sea 140, lo que reduce á dos las incógnitas.

Si representamos por x la primera parte, la segunda lo estará por $420 - 140 - x$, ó sea $280 - x$, y en virtud de la segunda relacion, tendremos

$$\frac{x}{9} = \frac{280 - x}{5},$$

de donde $x = 180$.

La segunda parte será $280 - 180 = 100$.

8.° *Un padre dispuso en su testamento que, del capital que dejaba, recibiese el hijo mayor 1000 duros, y la sexta parte del resto; el segundo 2000 duros, y la sexta parte del resto; el tercero 3000 duros y la sexta parte del resto, y así sucesivamente. Hechas las partes, se vió que todas eran iguales. ¿Cuánto importaba la herencia total, cuánto la parte de cada hijo, y cuántos eran estos?*

Es claro que si conociésemos la herencia total, se obtendria fácilmente la parte del primer hijo, y por consiguiente las demás; dividiendo despues dicha herencia por una de las partes, el cociente seria el número de hijos.

Tomaremos, pues, por incógnita la herencia total, y la representaremos por x.

Separando 1000 duros para el primer hijo, el resto es $x - 1000$, y la parte que corresponde á aquel será

$$1000 + \frac{x - 1000}{6}, \text{ ó sea } \frac{5000 + x}{6}.$$

Deducida la parte del primer hijo, y además 2000 duros para el segundo, el resto es

$$x - \frac{5000 + x}{6} - 2000, \text{ ó sea } \frac{5x - 17000}{6};$$

luego la parte del segundo hijo es

$$2000 + \frac{5x - 17000}{36}, \text{ ó bien } \frac{55000 + 5x}{36}.$$

Pero, segun el enunciado del problema, las partes del primer hijo y del segundo son iguales, luego tenemos la ecuacion

$$\frac{5000 + x}{6} = \frac{55000 + 5x}{36}.$$

Resolviéndola se encuentra $x = 25000$ duros.

La parte del primer hijo será $\frac{5000 + 25000}{6} = 5000$ duros,

y el número de hijos $\frac{25000}{5000} = 5$.

Comprobacion.

$$\frac{5000 + 25000}{6} = \frac{55000 + 125000}{36} \text{ ó } 5000 = 5000.$$

Para comprobar las partes de los hijos, diremos:

al primero corresponden. . . . . . 5000 duros.

al segundo $2000 + \frac{25000 - 7000}{6} = 5000$ »

al tercero.. $3000 + \frac{25000 - 13000}{6} = 5000$ »

al cuarto... $4000 + \frac{25000 - 19000}{6} = 5000$ »

al quinto.. $5000 + \frac{25000 - 25000}{6} = 5000$ »

III.—Problemas generales.

72. 1.° *La edad de un padre es* a *años y la de su hijo* b. *¿Cuántos años han de trascurrir para que la edad del padre sea* m *veces mayor que la del hijo?*

Si llamamos x á este número de años, la ecuacion será

$$a + x = m(b + x).$$

Resolviéndola, tendremos

$$x = \frac{a - bm}{m - 1}.$$

Caso particular. Si hacemos $a = 54$, $b = 10$, $m = 3$, la fórmula anterior resuelve el problema 2.° del número 70.

En efecto, $x = \frac{54 - 10 \cdot 3}{3 - 1} = 12.$

2.° *La edad de un padre es* a *años y la de su hijo* b. *¿Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué* m *veces mayor que la del hijo?*

Si llamamos x á este número de años, la ecuacion será

$$a - x = m(b - x).$$

Resolviéndola, tendremos

$$x = \frac{bm - a}{m - 1}.$$

Caso particular. Si hacemos $a = 54$, $b = 10$, $m = 12$, la fórmula anterior resuelve el problema 3.° del número 70.

En efecto, $x = \dfrac{10 \,.\, 12 - 54}{12 - 1} = 6.$

3.° *Tres caños pueden llenar un estanque, el primero en* a *horas, el segundo en* b *horas, y el tercero en* c *horas; si los tres caños se abren al mismo tiempo, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

Sea x el número de horas. La ecuacion del problema es

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1.$$

Resolviéndola, tendremos

$$x = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

Caso particular. Si hacemos $a = 35$, $b = 45$, $c = 63$, la fórmula anterior resuelve el problema 4.° del número 70.

En efecto, $x = \dfrac{35 \,.\, 45 \,.\, 63}{35 \,.\, 45 + 35 \,.\, 63 + 45 \,.\, 63} = 15.$

4.° *Un caño puede llenar un estanque en* a *horas, y dos orificios pueden vaciarlo, el primero en* b *horas, y el segundo en* c *horas; si los orificios se abren al mismo tiempo que el caño, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

Sea x este número de horas. La ecuacion del problema es

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1.$$

Resolviéndola, tendremos

$$x = \frac{abc}{bc - ac - ab}.$$

Caso particular. Si hacemos $a = 4$, $b = 24$, $c = 8$, la fórmula anterior resuelve el problema 5.° del número 70.

En efecto, $x = \dfrac{4 \,.\, 24 \,.\, 8}{24 \,.\, 8 - 4 \,.\, 8 - 4 \,.\, 24} = 12.$

5.° *Un padre dispuso en su testamento que, del capital que dejaba, recibiese el hijo mayor* a *duros y la* n *ésima parte del resto; el segundo* 2a *duros y la* n *ésima parte del resto; el tercero* 3a *duros y la* n *ésima parte del resto, y así sucesivamente. Hechas las partes se vió que todas eran iguales. ¿Cuánto importaba la* *herencia total, cuánto la parte de cada hijo, y cuántos eran estos?*

Sea x la herencia total. La parte del primer hijo será

$$a + \frac{x - a}{n}.$$

Deduciendo de la herencia total la parte del primer hijo, y además la cantidad $2a$ para el segundo, el resto es

$$x - a - \frac{x - a}{n} - 2a, \quad \text{ó bien} \quad \frac{nx - x + a - 3an}{n};$$

luego la parte del segundo hijo es

$$2a + \frac{nx - x + a - 3an}{n^2}.$$

Pero, segun el enunciado del problema, las partes del primer hijo y del segundo son iguales, luego tenemos la ecuacion

$$a + \frac{x - a}{n} = 2a + \frac{nx - x + a - 3an}{n^2}.$$

Restando a de los dos miembros se convierte en

$$\frac{x - a}{n} = a + \frac{nx - x + a - 3an}{n^2}.$$

Quitando denominadores resulta

$$nx - an = an^2 + nx - x + a - 3an,$$

trasponiendo

$$nx - nx + x = an^2 + an + a - 3an,$$

reduciendo

$$x = an^2 - 2an + a, \quad \text{ó} \quad x = a(n^2 - 2n + 1);$$

pero

$$n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2;$$

luego

$$x = a(n - 1)^2.$$

La parte del hijo mayor se obtendrá sustituyendo, en $a + \frac{x - a}{n}$, la incógnita x por $a(n - 1)^2$; será, pues,

$$a + \frac{an^2 - 2an + a - a}{n} = \frac{an^2 - an}{n} = a(n - 1).$$

Las demás partes son tambien iguales á $a(n - 1)$, segun el enunciado del problema.

Por último, el número de hijos es

$$\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)}=n-1.$$

Caso particular. Si hacemos $a=1000$, $n=6$, las fórmulas obtenidas resuelven el problema 8.° del número 71.

En efecto, $x=1000(6-1)^2=25000$ duros.

La parte de cada hijo es $1000(6-1)=5000$ duros.

El número de hijos $6-1=5$.

CAPÍTULO CUARTO.

DISCUSION DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.—INTERPRETACION DE LAS SOLUCIONES NEGATIVAS. GENERALIZACION DE LAS FÓRMULAS POR MEDIO DE LAS CANTIDADES NEGATIVAS.

I.—Discusion de las ecuaciones y problemas de primer grado con una incógnita.

73. Toda ecuacion de primer grado, despues de quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, hacer la trasposicion y la reduccion, adquiere la forma general

$$Ax=B,$$

donde A es el resultado de reducir los coeficientes de x á un solo número, y B el de reducir los términos conocidos.

Si despues de efectuar la trasposicion, los términos en x y los conocidos son aditivos, la reduccion de todos ellos no ofrece ninguna dificultad; pero comunmente unos son aditivos y otros sustractivos, ya en ambos miembros, ya en uno solo de ellos; representando por a la suma de los coeficientes positivos y por b la de los negativos, el coeficiente de x será

$$a-b;$$

pero al asignar valores particulares á a y b, pueden ocurrir tres casos: $a>b$, $a<b$, $a=b$.

Si $a>b$, la diferencia $a-b$ es positiva.

Si $a<b$, la sustraccion $a-b$ no puede efectuarse.

Si $a=b$, la diferencia $a-b$ es cero.

En el segundo caso, suponiendo que los valores a y b son 8 y 13, la diferencia es

$$8 - 13 = 8 - 8 - 5,$$

y reduciendo

$$8 - 13 = -5, \text{ cantidad negativa.}$$

Luego A puede ser una cantidad positiva, negativa ó nula, é igualmente B; por consiguiente la ecuacion $Ax = B$ puede adquirir una de estas formas

$$Ax = B,\ Ax = -B,\ -A\,.\,x = B,\ -A\,.\,x = -B,$$

$$Ax = 0,\quad 0 \times x = B,\quad 0 \times x = 0,$$

donde A y B son números absolutos.

Los respectivos valores de x son

$$x = \frac{B}{A},\ x = \frac{-B}{A},\ x = \frac{B}{-A},\ x = \frac{-B}{-A},$$

$$x = \frac{0}{A},\ x = \frac{B}{0},\ x = \frac{0}{0}.$$

Los valores $\frac{B}{A}$ y $\frac{-B}{-A}$ se reducen al primero, pues cambiando los signos en la ecuacion $-A\,.\,x = -B$, se convierte en $Ax = B$.

Si efectuamos la division de cantidades monomias negativas, por la regla de los signos demostrada exclusivamente para la division de polinomios, las expresiones $x = \frac{-B}{A}, x = \frac{B}{-A}$, se reducen á una sola: $x = -\frac{B}{A}$.

Por consiguiente, los valores que debemos examinar son

$$x = \frac{B}{A},\ x = -\frac{B}{A},\ x = \frac{0}{A},\ x = \frac{B}{0},\ x = \frac{0}{0}.$$

74. Solucion positiva, $x = \frac{B}{A}$.

Esta solucion verifica siempre la ecuacion del problema, pues si en $Ax = B$ damos á x su valor, resulta

$$A\,\frac{B}{A} = B,\ \text{ó}\ \ B = B;$$

y sabemos que la ecuacion $Ax = B$ y la propuesta tienen iguales soluciones.

Puede ocurrir, sin embargo, que siendo $\frac{B}{A}$ solucion de la ecuacion, no lo sea del problema. Esto solo sucederá cuando la solucion del problema deba estar sujeta á condiciones no expresables algebráicamente.

Sea, por ejemplo, el siguiente problema.

Preguntado un padre sobre el número de sus hijos, respondió: el número de hembras es triple del de varones, y si á éste se añade la mitad de aquel, la suma es igual á 8. ¿Cuántos hijos tenia?

Llamando x al número de hijos varones, el de hembras es $3x$, y la ecuacion del problema será

$$x + \frac{3x}{2} = 8,$$

de donde $x = 3\frac{1}{5}$, valor que verifica la ecuacion, pero no es solucion del problema, puesto que la naturaleza de éste exige que x sea un número entero. Como las condiciones numéricas del enunciado tan solo las satisface el número $3\frac{1}{5}$, se deduce evidentemente que el problema es imposible.

75. Solucion cero, $x = \frac{0}{A}$.

Si en la ecuacion $Ax = B$, se reduce á cero el segundo miembro, y A adquiere un valor diferente de cero, la ecuacion se convierte en $Ax = 0$, y es evidente que el único valor de x que la convierte en identidad es $x = 0$.

76. Solucion infinito, $x = \frac{B}{0}$.

Si A es cero y B adquiere un valor diferente de cero, la ecuacion $Ax = B$ se convierte en $0 \times x = B$, y el valor de x debe ser tal, que multiplicado por 0 dé B; pero como todo número multiplicado por cero da cero, la ecuacion es absurda y el problema imposible.

Propongámonos interpretar la significacion de un quebrado, cuyo denominador es cero, sin que lo sea el numerador.

Si en el quebrado $\frac{a}{b}$ permanece constante el numerador y disminuye el denominador, la fraccion aumenta: si el denominador se hace 10, 100, 1000 veces menor, la fraccion adquiere valores 10, 100, 1000 veces mayores que el primitivo; se concibe, pues, que haciendo el denominador b suficientemente pequeño, llegará la fraccion á tener un valor tan grande como queramos, y que si el denominador disminuye hasta cero, la fraccion adquiere un valor mayor que cualquiera cantidad asignable, ó *infinito.*

La fraccion $\frac{a}{0}$ *es, pues, un símbolo que representa el infinito.*

Este valor infinito se expresa por el signo ∞; asi escribiremos

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

77. Solucion indeterminada, $x=\frac{0}{0}$.

Si en la ecuacion $Ax=B$, A y B se convierten en cero, será $0\times x=0$, y es evidente que cualquier valor de x multiplicado por cero, da cero; luego la incógnita tiene infinidad de valores, y la fraccion $\frac{0}{0}$ es *símbolo de indeterminacion.*

Sin embargo, una fraccion puede adquirir la forma $\frac{0}{0}$, y tener un valor determinado. Sea en efecto la fraccion

$$\frac{a^2-b^2}{a(a-b)}.$$

Si los valores numéricos de a y b son iguales, se convierte en $\frac{0}{0}$; pero si antes de hacer dicha hipótesis, observamos que los dos términos son divisibles por $a-b$, y suprimimos este factor comun, la fraccion se convierte en

$$\frac{a+b}{a},$$

y suponiendo $a=b$, adquiere el valor determinado

$$\frac{2a}{a}=2.$$

El valor $\frac{0}{0}$ es debido, en este caso, al factor comun $a-b$ que, convirtiéndose en cero por la hipótesis $a=b$, anula los dos términos del quebrado.

Luego, *para hallar el verdadero valor de una fraccion que,* *en virtud de cierta hipótesis, se presenta bajo la forma* $\frac{0}{0}$, *es necesario examinar si existe en los dos términos algun factor comun, que se convierta en cero por dicha hipótesis, y suprimirlo; si hecha la hipótesis en la fraccion que resulta, se obtiene tambien* $\frac{0}{0}$, *volveremos á examinar si existe algun otro factor comun, que se suprimirá igualmente. Continuando de este modo, se llegará á obtener un valor determinado, ó una fraccion irreducible, en cuyo caso, si todavía toma la forma* $\frac{0}{0}$, *será indeterminado su valor.*

Ejemplo. Sea la fraccion

$$\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{a^2b-2ab^2+b^3}.$$

Haciendo $a=b$ se convierte en $\frac{0}{0}$, pero suprimiendo el factor $a-b$, comun á sus dos términos [37], se reduce á

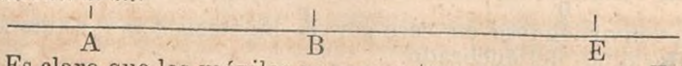
$$\frac{a^2-ab}{ab-b^2}.$$

Haciendo en ésta $a=b$, se convierte tambien en $\frac{0}{0}$, pero suprimiendo el factor comun $a-b$, resulta $\frac{a}{b}$.

Por último, haciendo en ésta $a=b$, se convierte en $\frac{b}{b}=1$, que es el verdadero valor de la fraccion dada, en la hipótesis $a=b$.

78. El problema siguiente presenta ejemplos de las diversas soluciones que hemos examinado.

Dos móviles parten en el mismo instante de los puntos A *y* B, *que distan entre sí* a *metros, y recorren la línea* AB, *ambos en la direccion de izquierda á derecha; las velocidades respectivas son* v *y* v' *metros por minuto. ¿Á qué distancia del punto* A *se encontrarán?*



Es claro que los móviles se encuentran en un punto E situado á la derecha de B. Llamando x á la distancia AE del punto A al de encuentro E, el primer móvil recorrerá esta distancia mientras el segundo recorre BE, que puede representarse por $x - a$.

Puesto que el primer móvil recorre en un minuto v metros, para recorrer x metros empleará $\frac{x}{v}$ minutos; y el segundo móvil, que recorre v' metros por minuto, empleará en recorrer la distancia $x - a$ un número de minutos representado por $\frac{x-a}{v'}$.
Pero los móviles parten en el mismo instante de A y B respectivamente, luego los tiempos que emplean en llegar al punto de encuentro E son iguales.

La ecuacion del problema es por consiguiente

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{v'};$$

de la que se deduce

$$x = \frac{va}{v - v'}.$$

Discutamos ahora esta fórmula, esto es, examinemos los valores que adquiere la incógnita, en virtud de ciertas hipótesis hechas sobre los valores de los datos, y si aquellos valores están de acuerdo con las circunstancias de la cuestion.

1.º Supongamos $v > v'$.

En esta hipótesis, el valor de x es positivo; el denominador $v - v'$ es menor que v, la fraccion $\frac{v}{v - v'}$ es mayor que la unidad, y el valor de x

$$\frac{va}{v - v'} = a \times \frac{v}{v - v'}$$

será mayor que a.

Lo que nos dice que los móviles se encuentran á la derecha del punto B. Este resultado está de acuerdo con las condiciones de la cuestion, pues es evidente que siendo la velocidad del móvil que parte de A mayor que la del otro, la distancia que los separa disminuirá á cada momento, y se encontrarán mas allá del punto B.

Por otra parte, si v disminuye, los términos de la fraccion $\frac{va}{v - v'}$ disminuyen al mismo tiempo; para saber en qué sentido varía la fraccion, dividiremos por v sus dos términos y obtendremos

$$x = \frac{a}{1 - \frac{v'}{v}}.$$

Ahora se ve que si disminuye v, la fraccion $\frac{v'}{v}$ aumenta, la diferencia $1 - \frac{v'}{v}$ disminuye, y por tanto el valor de x aumenta. La fórmula manifiesta, segun esto, que el punto de encuentro se aleja de A á medida que disminuye la velocidad del primer móvil, lo que es evidente.

Si suponemos $a = 0$, el valor de x será

$$x = \frac{v \times 0}{v - v'} = 0,$$

lo que nos dice que el encuentro de los móviles se verifica en el mismo punto de partida, como sucede efectivamente; por consiguiente el valor *cero*, que en este caso adquiere la incógnita, es solucion del problema.

2.° Supongamos $v = v'$.

El valor de x se presenta en este caso bajo la forma $\frac{av}{0}$. Este valor manifiesta que la ecuacion es absurda, por consiguiente el problema lo es tambien.

Y en efecto: la ecuacion, en la hipótesis $v = v'$, se convierte en

$$\frac{x}{v} = \frac{x - a}{v},$$

y es claro que dos fracciones de igual denominador y numeradores diferentes, no pueden ser iguales. En cuanto al problema, encierra una condicion imposible de satisfacer, pues si entre A y B media una distancia a, y los móviles caminan con igual velocidad, nunca se encontrarán.

La expresion $\frac{av}{0}$ ha sido admitida anteriormente [76] como símbolo del infinito; por consiguiente diremos que el valor de x es infinito, esto es, que los móviles se encuentran á una distancia infinita del punto A, ó que no se encuentran.

Si además de ser $v = v'$, suponemos $a = 0$, el valor de x es

$\frac{0}{0}$, y como la fraccion $\frac{av}{v-v'}$ no tiene ningun factor comun á sus dos términos, deduciremos que el valor de x es indeterminado; lo que está conforme con las condiciones de la cuestion, pues si $a=0$, los móviles parten del mismo punto con igual velocidad, luego el encuentro se verifica á todas las distancias del punto A. La ecuacion del problema se convierte en

$$\frac{x}{v}=\frac{x}{v},$$

y queda satisfecha por todos los valores que se asigne á x.

II.—Interpretacion de las expresiones negativas, cuando se presentan como soluciones.

79. *La edad de un padre es* a *años, y la de su hijo* b. *¿Cuántos años han de trascurrir para que la edad del padre sea* m *veces mayor que la del hijo?*

Este problema, resuelto ya [72], nos ha dado la ecuacion

$$a+x=m(b+x),$$

y la fórmula

$$x=\frac{a-bm}{m-1}.$$

Supongamos $a=40$, $b=16$, $m=3$. Aplicando la fórmula á este caso particular, será

$$x=\frac{40-16.3}{3-1}=\frac{40-48}{3-1}=\frac{-8}{2}=-4.$$

Este resultado carece de sentido, puesto que el problema exige que la solucion sea un número absoluto; como, por otra parte, la ecuacion traduce exactamente todas las condiciones del problema, debemos deducir que éste no tiene solucion, ó que es imposible, en el caso particular propuesto.

Esta imposibilidad se hace evidente por medio de la ecuacion, que en el caso que consideramos es

$$40+x=3(16+x),$$

ó

$$40+x=48+3x;$$

ecuacion absurda para todo valor absoluto de x, pues el segundo miembro será siempre mayor que el primero.

Si suponemos que x pueda ir precedida del signo mas ó del menos, la ecuacion

$$40 + x = 3\,(16 + x),$$

se trasforma, cambiando el signo de x, en

$$40 - x = 3\,(16 - x);$$

sustituyendo x por 4, se obtiene la indentidad

$$36 = 36,$$

lo que manifiesta que el valor negativo -4 es solucion, prescindiendo del signo, de la ecuacion que se obtiene cambiando en la propuesta el signo de x.

Ahora bien, si dicha ecuacion corresponde á algun problema análogo al propuesto, 4 será la solucion del mismo.

Para averiguarlo, observemos que el primer miembro $40 - x$ representa la edad del padre *hace* x años, y el segundo $3\,(16 - x)$ es el triplo de la del hijo *hace* tambien x años; luego para que el problema sea posible, es necesario modificar su enunciado en el sentido de que *la época en que se verificaron las condiciones del mismo es* PASADA, *y no* FUTURA *como se habia supuesto.*

Por manera que el problema será:

La edad del padre es 40 años, y la de su hijo 16. ¿Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué tres veces mayor que la del hijo?

Ocupémonos otra vez del problema de los móviles [78].

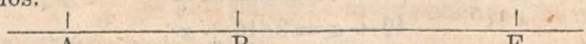
Segun hemos visto, la ecuacion de este problema es

$$\frac{x}{v} = \frac{x - a}{v'},$$

y la fórmula

$$x = \frac{va}{v - v'}.$$

Si suponemos $v < v'$, el denominador de la fórmula es negativo, y como el numerador es positivo, el valor de x será negativo. Como la ecuacion es la traduccion exacta del enunciado, concluiremos que el problema es imposible, en el caso que consideramos.



Se ve, en efecto, que si la velocidad del móvil A es menor que la del B, no es posible el encuentro marchando en la direccion AB, como expresamente exige el enunciado.

Para saber á qué problema análogo corresponde la solucion obtenida, prescindiendo del signo, pondremos en la ecuacion $-x$ en lugar de x, y se convertirá en

$$\frac{-x}{v}=\frac{-x-a}{v'};$$

cambiando los signos será

$$\frac{x}{v}=\frac{x+a}{v'}.$$

El numerador $x+a$ es la distancia que recorre el móvil B, luego el encuentro se verifica á la izquierda de A, y el problema modificado es el siguiente:

Dos móviles parten en el mismo instante de A *y* B, *que distan entre sí* a *metros, y recorren la línea* BA, *ambos en la direccion* DE DERECHA Á IZQUIERDA; *las velocidades respectivas etc.*

El valor de x se obtiene cambiando el signo de $\frac{va}{v-v'}$; será pues

$$\frac{va}{v'-v}.$$

Este mismo resultado se obtiene resolviendo directamente el problema modificado.

80. En general

1.° *El valor negativo de la incógnita, en una ecuacion de primer grado, indica que no existe ningun número absoluto capaz de convertir ésta en identidad; y que si la ecuacion traduce exactamente las condiciones del enunciado, el problema es imposible.*

En efecto: la ecuacion final $Ax=B$ procede de efectuar con la propuesta diversas trasformaciones, que originan siempre ecuaciones equivalentes á la primera [62,65]; si pues $Ax=B$ no puede quedar satisfecha por ningun valor absoluto de x, esto es, por ningun valor independiente de los signos *mas* y *menos*, tampoco la propuesta podrá quedar satisfecha por ningun valor absoluto de x; y el problema será imposible, puesto que el valor negativo de la incógnita carece de sentido.

2.° *El valor negativo de la incógnita, en una ecuacion de primer grado, es solucion, si se prescinde del signo, de la ecuacion que resulta poniendo* $-$ x *en lugar de* x *en la propuesta.*

En efecto: la ecuacion propuesta, despues de quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, trasponer y reducir, habrá tomado una de estas formas

$$-Ax=B, \qquad Ax=-B.$$

Si en dicha ecuacion ponemos $-x$ en lugar de x, y repetimos las mencionadas operaciones, que se reducen á las fundamentales, obtendremos [42]

$$Ax=B, \qquad -Ax=-B,$$

que se reducen, cambiando los signos en la segunda, á

$$Ax=B.$$

El valor de x en la ecuacion propuesta es $-\frac{B}{A}$, y este valor prescindiendo del signo, esto es $\frac{B}{A}$, es la solucion de la ecuacion trasformada $Ax=B$, luego la proposicion enunciada es cierta.

De aquí se desprende que *el valor negativo de la incógnita, tomado en absoluto, podrá ser solucion de un nuevo problema análogo al propuesto, cuyo enunciado se obtendrá traduciendo fielmente al lenguage vulgar la ecuacion trasformada.*

81. Pongamos $-x$ en lugar de x en la ecuacion $-Ax=B$, y se convertirá en $-A\times-x=B$; sustituyamos ahora x por $\frac{B}{A}$, y la expresion que resulta

$$-A\times-\frac{B}{A}=B$$

será una identidad, segun acabamos de demostrar.

Pero, poner $-x$ en lugar de x en una ecuacion y sustituir despues x por $\frac{B}{A}$, da el mismo resultado que poner desde luego $-\frac{B}{A}$ en vez de x; y como el primer procedimiento convierte la ecuacion en una identidad, la sustitucion de x por $-\frac{B}{A}$ hará idénticos los dos miembros de la ecuacion.

Así, la ecuacion

$$40+x=3\,(16+x),$$

se convierte, sustituyendo x por -4, en la identidad

$$40-4=3\,(16-4) \quad ó \quad 36=36.$$

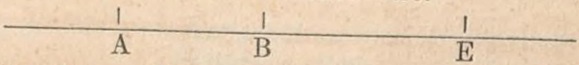
Si convenimos, pues, en llamar solucion de una ecuacion á toda cantidad literal ó numérica, carezca ó no de sentido, que puesta en vez de la incógnita, y con arreglo al 2.º convenio del número 38, convierta la ecuacion en identidad, *el valor negativo de una incógnita podrá considerarse como solucion de la ecuacion.*

82. *Si en una ecuacion literal de primer grado con una incógnita se cambian los signos de una ó mas letras, la fórmula que resuelve la primera ecuacion resuelve tambien la segunda, con solo cambiar los signos de las mismas letras en dicha fórmula.*

Siendo la fórmula el resultado de efectuar una série de operaciones fundamentales con los dos miembros de la ecuacion, esta proposicion es consecuencia cierta de la enunciada en el número 40.

83. Hasta ahora hemos supuesto que el enunciado del problema no presenta circunstancias dudosas, y que la ecuacion es, por consiguiente, la traduccion exacta de aquel: en tal caso, hemos visto que la solucion negativa indica la imposibilidad de resolver el problema tal como se ha enunciado; pero ocurre con frecuencia que las condiciones dejan alguna circunstancia indeterminada, y al escribir la ecuacion nos vemos obligados á hacer una hipótesis arbitraria Si entonces obtenemos una solucion negativa, *no deduciremos inmediatamente la imposibilidad del problema*, sino que ensayaremos si haciendo otra hipótesis, será positivo el valor de la incógnita.

Para presentar un ejemplo, que aclare estas consideraciones, supongamos que en el problema de los móviles, no partan estos al mismo tiempo de A y B, sino que moviéndose desde un tiempo indefinido en la direccion AB, pasen uno por A y otro por B en el mismo instante, y tratemos de averiguar á qué distancia del punto A se verifica el encuentro.



Enunciado así el problema, no podemos determinar desde luego si el punto de encuentro está á la izquierda de A ó á la derecha de B, y para escribir la ecuacion tenemos que hacer una hipótesis arbitraria sobre la situacion de dicho punto.

Suponiendo que el encuentro se verifique á la derecha de B, la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{v'},$$

y la fórmula

$$x = \frac{va}{v - v'}.$$

Si $v < v'$, el valor de x es negativo; como se ha hecho una hipótesis arbitraria, supondremos, ántes de afirmar que el problema es imposible, que el encuentro se verifique á la izquierda del punto A.

En esta hipótesis la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x + a}{v'},$$

que se diferencia de la anterior en el signo de a; para obtener la fórmula no es necesario repetir los cálculos, pues basta [82] cambiar el signo de a en la obtenida anteriormente; así resulta

$$x = \frac{-va}{v - v'}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{va}{v' - v}.$$

Si $v < v'$, el valor de x es ahora positivo; luego el problema es posible, el encuentro se verifica á la izquierda de A, y la solucion negativa fué debida á una hipótesis falsa, hecha al poner el problema en ecuacion.

Vemos, pues, que *si el enunciado de un problema presenta circunstancias dudosas, la solucion negativa puede provenir de una hipótesis falsa, hecha al escribir la ecuacion, sobre el sentido en que deben ser contadas ciertas cantidades, que se han supuesto aditivas debiendo ser sustractivas, ó al contrario. Cuando esto suceda debemos examinar si, haciendo otra hipótesis, adquiere la incógnita un valor positivo, ó si todas las hipótesis posibles dan valores negativos: en el primer caso, el valor positivo hallado es la solucion del problema; en el segundo, podremos afirmar que el problema no tiene solucion.*

III.—Generalizacion de las fórmulas por medio de las cantidades negativas.

84. Las fórmulas que se obtienen resolviendo un problema general, no solo se aplican á todos los casos particulares del mismo, sino que además convienen á otros problemas generales, cuyos enunciados se diferencian del problema propuesto en el sentido de algunas cantidades, que en éste son aditivas y en aquel sustractivas, y recíprocamente.

Para cerciorarnos de ello, volvamos á considerar el problema siguiente:

Tres caños pueden llenar un estanque, el primero en a *horas, el segundo en* b *horas y el tercero en* c *horas; si los tres caños se abren al mismo tiempo, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

La ecuacion sabemos que es [72]

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1.$$

y la fórmula

$$x=\frac{abc}{ab+ac+bc}.$$

Supongamos ahora que se quiere resolver este otro problema.

Un caño puede llenar un estanque en a *horas, y dos orificios pueden vaciarlo, el primero en* b *horas y el segundo en* c *horas; si los orificios se abren al mismo tiempo que el caño, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

La única diferencia entre la ecuacion de este problema y la del anterior, consiste evidentemente en que $\frac{x}{b}$ y $\frac{x}{c}$ representan cantidades que deben restarse de $\frac{x}{a}$; por consiguiente, cambiando el signo de las mismas se obtendrá la ecuacion del problema, y haciendo el mismo cambio en la fórmula del anterior, tendremos la fórmula del actual.

Para que $\frac{x}{b}$ y $\frac{x}{c}$ cambien de signo, sin alterar los demás términos de la ecuacion, cambiaremos los signos de b y c, obteniendo así

Ecuacion $$\frac{x}{a}+\frac{x}{-b}+\frac{x}{-c}=1,$$

Fórmula $$x=\frac{a\,.-b\,.-c}{a\,.-b+a\,.-c+-b\,.-c};$$

efectuando ahora las operaciones por las reglas que, para monomios negativos aislados, hemos convenido en admitir, resulta

Ecuacion $$\frac{x}{a}-\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=1,$$

Fórmula $$x=\frac{abc}{bc-ac-ab}.$$

Resolviendo directamente el problema, obtuvimos [72,4.°] los mismos resultados.

Los problemas generales 1.° y 2.° del número 72, se resuelven tambien por medio de una sola ecuacion y una fórmula.

En efecto: el primero dió la ecuacion

$$a + x = m\,(b + x),$$

y la fórmula

$$x = \frac{a - bm}{m - 1}.$$

Si suponemos que x es cantidad positiva, la ecuacion y la fórmula corresponden al primer problema; pero suponiendo que x es cantidad negativa, dichas expresiones convendrán al segundo.

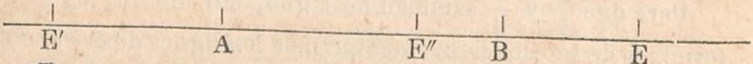
Así, sustituyendo x por $-x$, será

$$a - x = m\,(b - x),$$

$$-x = \frac{a - bm}{m - 1}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{bm - a}{m - 1}.$$

El mismo resultado obtuvimos resolviendo directamente el problema.

Consideremos, como último ejemplo, el problema siguiente: *Dos móviles recorren la línea* AB, *y pasan en el mismo instante uno por* A *y el otro por* B. *La distancia entre* A *y* B *es* a *metros, la velocidad del primer móvil es* v *metros por minuto, y la del segundo* v' *metros. ¿A qué distancia del punto* A *se encontrarán?*



Tres casos debemos considerar:

1.° Que los móviles sigan la misma direccion AB.
2.° Que sigan la misma direccion BA.
3.° Que sigan direcciones opuestas.

En el primer caso, suponiendo que el punto de encuentro se halle en E, la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x - a}{v'}, \quad \text{y la fórmula} \quad x = \frac{av}{v - v'}.$$

En el segundo caso, suponiendo que el punto de encuentro se halle en E', la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x + a}{v'}, \quad \text{y la fórmula} \quad x = \frac{av}{v' - v}.$$

En el tercer caso, el encuentro se verifica entre A y B; la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{a-x}{v'}, \text{ y la fórmula } x = \frac{av}{v+v'}.$$

Vemos, pues, que no considerando en las cantidades mas que sus valores absolutos, necesitamos tres ecuaciones y tres fórmulas para abrazar todos los casos; sin embargo, la primera ecuacion y su fórmula respectiva se aplicarán indistintamente á cualquiera de ellos, si admitimos las cantidades negativas, con solo cambiar convenientemente algunos signos.

En el segundo caso, la distancia de B al punto de encuentro E′ está representada por $x+a$; luego la primera ecuacion se aplicará á este caso cambiando el signo de a. Pero sabemos [82] que si en la ecuacion se cambia el signo de a, la fórmula sufre igual alteracion; luego en el segundo caso tendremos

$$x = \frac{-av}{v-v'}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{av}{v'-v}.$$

En el tercer caso, la distancia de B al punto de encuentro E″, está representada por $a-x$; luego la primera ecuacion se aplicará á este caso cambiando el signo del numerador $x-a$; pero igual resultado obtendremos cambiando el signo del denominador v', por consiguiente la ecuacion del tercer caso será

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{-v'}, \quad \text{ó} \quad \frac{x}{v} = \frac{a-x}{v'};$$

cambiando el signo de v' en la primera fórmula, tendremos la del tercer caso

$$x = \frac{av}{v+v'}.$$

85. El grado de generalidad que adquieren las fórmulas por el cambio de signos, se obtiene tambien por otro medio.

Observemos, ante todo, que existen cantidades susceptibles de contarse en dos sentidos directamente opuestos: las distancias sobre una recta AB pueden ser recorridas en la direccion AB y en la opuesta BA, los tiempos pueden ser anteriores ó posteriores á un momento dado, los capitales pueden contarse como ganancias ó como pérdidas etc.

Si un número m representa una distancia, un tiempo ó un capital, se ha convenido en anteponerle uno de los signos *mas* y *menos*, para que además exprese el modo de ser de dichas cantidades.

Por ejemplo, si $+m$ representa una distancia recorrida en la direccion AB, otra distancia igual, pero contada en el sentido BA, se representa por $-m$; si un tiempo posterior á una época dada se expresa por $+20$ años, otro anterior en la misma cantidad, se expresará por -20 años: si una ganancia de 4000 reales se expresa por $+4000$, una pérdida igual será -4000.

Concretándonos al problema de los móviles, convendremos en que x representa indistintamente, en la ecuacion y en la fórmula del primer caso, $+$ la distancia del punto A al punto de encuentro, si éste se verifica á la derecha de A, y $-$ la distancia mencionada, si el encuentro tiene lugar á la izquierda de A. Igualmente, v y v' representan $+$ el espacio recorrido en un minuto por cada móvil, si el movimiento se verifica en el sentido AB, y $-$ dicho espacio, si el movimiento se verifica en la direccion BA.

En virtud de este convenio, la ecuacion del primer caso comprende las otras dos, y la fórmula

$$x=\frac{av}{v-v'},$$

se aplicará á todos los casos que puedan presentarse, sustituyendo x, v, v' respectivamente por $-x$, $-v$, $-v'$, cuando las distancias que representan estas cantidades sean recorridas por los móviles en la direccion BA.

Así, en el segundo caso, se cambiarán los signos de x, v, y v', y tendremos

$$-x=\frac{-av}{-v+v'}, \quad \text{ó} \quad x=\frac{av}{v'-v}.$$

En el tercero, cambiando el signo de v', resulta

$$x=\frac{av}{v+v'}.$$

Escolios.

1.° Este procedimiento da siempre resultados exactos; pero no todas las cantidades concretas tienen dos modos de existencia directamente contrarios: y además no se ha demostrado, de una manera general, la correspondencia entre dichos modos de existencia y los signos *mas* y *menos*.

2.° La generalizacion de las fórmulas no podria lograrse sin admitir los convenios del número 38.

CAPÍTULO QUINTO.

RESOLUCION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TANTAS ECUACIONES COMO INCÓGNITAS.

I.—Definiciones.

86. SISTEMA DE ECUACIONES *es la reunion de dos ó mas ecuaciones que deben ser satisfechas por los mismos valores de las incógnitas.*

SOLUCION *de un sistema de ecuaciones es la reunion de valores de las incógnitas que verifican todas las ecuaciones del sistema.*

87. Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes*, cuando tienen las mismas soluciones.

Para demostrar la equivalencia de dos sistemas, es necesario patentizar que toda solucion del primero es solucion del segundo, y recíprocamente.

Diremos que un sistema no se altera, cuando se sustituya por otro equivalente.

88. ELIMINAR *una incógnita entre dos ecuaciones es deducir de éstas una nueva ecuacion que no contenga dicha incógnita, y que pueda sustituir á cualquiera de las ecuaciones dadas sin alterar el sistema.*

Métodos de eliminacion son los diversos procedimientos que pueden emplearse para eliminar una incógnita.

II.—Resolucion de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

89. Toda ecuacion con dos incógnitas puede reducirse á la forma general

$$ax + by = c.$$

Para conseguirlo, basta quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, pasar al primer miembro los términos en x y los en y, así como al segundo los conocidos, y hacer la reduccion.

Propongámonos resolver el sistema de ecuaciones

$$ax + by = c \qquad [1]$$

$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

90. Método de eliminacion por sustitucion. Despejando x en la primera ecuacion, como si la incógnita y fuese conocida, se obtiene

$$x = \frac{c - by}{a} \qquad [3];$$

sustituyendo este valor de x en la segunda ecuacion, resulta

$$a' \times \frac{c - by}{a} + b'y = c' \qquad [4].$$

Demostremos ahora que el sistema propuesto es equivalente al formado con una de las ecuaciones dadas y la ecuacion [4], esto es, á

$$ax + by = c \qquad [1]$$

$$a' \times \frac{c - by}{a} + b'y = c' \qquad [4].$$

En efecto: todo par de valores de x é y que convierta en identidades las ecuaciones propuestas, verifica tambien la ecuacion [3], que es la primera de aquellas en otra forma; por consiguiente sustituyendo y por su valor en la fraccion $\frac{c - by}{a}$ se obtiene el valor de x; pero la ecuacion [2] difiere de la [4] solamente en que x está sustituida por $\frac{c - by}{a}$, luego dando á x é y sus valores en la ecuacion [2] y poniendo el de y en la [4], se obtendrá el mismo resultado; y como la ecuacion [2] se convierte por hipótesis en una identidad, la [4] se convierte tambien en identidad.

Luego toda solucion del primer sistema, es solucion del segundo.

Recíprocamente, todo par de valores de x é y que verifique las ecuaciones [1] y [4], verifica la ecuacion [3], que es la [1] en otra forma; por consiguiente sustituyendo y por su valor en la fraccion $\frac{c - by}{a}$, se obtiene el valor de x; pero la ecuacion [4] difiere solamente de la [2] en que $\frac{c - by}{a}$ sustituye á x, luego dando á y su valor en la ecuacion [4] y poniendo los de x é y en la [2], se obtendrá el mismo resultado; y como la ecuacion [4] se convierte por hipótesis en una identidad, la [2] se convertirá tambien en identidad.

Luego toda solucion del segundo sistema, es solucion del primero.

Ahora bien, la ecuacion [4] no contiene otra incógnita que la y, por manera que la x ha sido eliminada.

En vista del procedimiento empleado, podremos decir:

Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, por el método de sustitucion, se despeja la incógnita que se quiere eliminar en una de las ecuaciones, y se sustituye su valor en la otra.

Resolviendo ahora la ecuacion [4], encontramos sucesivamente

$$a'c - a'by + ab'y = ac',$$
$$(ab' - ba')\,y = ac' - ca',$$
$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuacion [1], ó lo que es igual, en su trasformada [3], será

$$x = \frac{c - \dfrac{abc' - bca'}{ab' - ba'}}{a} = \frac{acb' - bca' - abc' + bca'}{a\,(ab' - ba')} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones

$$7x - 2y = 11$$
$$4x + 3y = 27.$$

Despejando x en la primera ecuacion, resulta

$$x = \frac{11 + 2y}{7};$$

sustituyendo este valor de x en la segunda, se obtiene

$$4 \times \frac{11 + 2y}{7} + 3y = 27.$$

Esta ecuacion da sucesivamente

$$44 + 8y + 21y = 189,$$
$$8y + 21y = 189 - 44,$$
$$29y = 145.$$

$$y = \frac{145}{29}, \quad y = 5.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuacion

$$x = \frac{11 + 2y}{7},$$

resulta
$$x = \frac{11 + 10}{7}, \quad x = 3.$$

Comprobacion.

$$7 \,.\, 3 - 2 \,.\, 5 = 11, \quad ó \quad 11 = 11.$$
$$4 \,.\, 3 + 3 \,.\, 5 = 27, \quad ó \quad 27 = 27.$$

91. Método de eliminacion por igualacion. Sean las ecuaciones

$$ax + by = c \qquad [1]$$
$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

Si queremos eliminar la x, despejaremos esta incógnita en las dos ecuaciones, como si la y fuese conocida, y tendremos

$$x = \frac{c - by}{a}, \quad x = \frac{c' - b'y}{a'}.$$

Igualando, ahora, estos valores de x, resulta la ecuacion

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'} \qquad [3],$$

que no contiene la x.

Este método, en el fondo, es igual al de sustitucion, por lo que no nos detendremos á demostrar que la ecuacion [3] y una de las propuestas forman un sistema equivalente al de las ecuaciones [1] y [2].

El procedimiento seguido para eliminar la x, es el que expresa esta regla:

Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, por el método de igualacion, se despeja en las dos ecuaciones la incógnita que se trata de eliminar, y se igualan los valores obtenidos.

Resolviendo la ecuacion [3], se obtiene

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

sustituyendo este valor en cualquiera de las expresiones de x, se hallará, como en el método anterior,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

92. MÉTODO DE ELIMINACION POR REDUCCION. Sean las ecuaciones

$$ax + by = c \qquad [1]$$
$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

Si los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar, la x por ejemplo, fuesen iguales, restando ordenadamente las ecuaciones, cuando los términos ax y $a'x$ tuviesen el mismo signo, y sumándolas, cuando dichos términos tuviesen signos contrarios, los términos en x desaparecerian por la reduccion, quedando eliminada esta incógnita.

Pero si multiplicamos la primera ecuacion por a' y la segunda por a, se convierten en

$$aa'x + ba'y = ca'$$
$$aa'x + ab'y = ac',$$

en las que los coeficientes de x son iguales.

Restándolas ordenadamente, se obtiene

$$aa'x - aa'x + ab'y - ba'y = ac' - ca',$$

y *reduciendo* será

$$ab'y - ba'y = ac' - ca' \qquad [3].$$

Demostremos, ahora, que el sistema de las ecuaciones [1] y [2], puede sustituirse por las ecuaciones [1] y [3].

Suponiendo que en las ecuaciones propuestas pasan al primer miembro todos los términos, podrán representarse por

$$A = 0$$
$$A' = 0,$$

y el sistema de ecuaciones [1] y [3] será

$$A = 0$$
$$A'a - Aa' = 0.$$

Es evidente que los valores de x é y capaces de verificar el primer sistema, verifican el segundo; pues siendo $A = 0$ y $A' = 0$, $A'a - Aa'$ tambien se reduce á cero.

Recíprocamente, todo par de valores de x é y que verifique el segundo sistema, verifica tambien el primero; pues siendo

$A'a - Aa' = 0$ y $A = 0$, $A'a$ debe ser cero, y como a no lo es, será $A' = 0$.

En vista del procedimiento empleado, podremos enunciar la regla siguiente:

Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, por el método de reduccion, se multiplica la primera ecuacion por el coeficiente que tiene dicha incógnita en la segunda; y la segunda ecuacion por el coeficiente de la misma incógnita en la primera, y se suman ó restan las ecuaciones resultantes, segun que los términos que contienen la incógnita lleven signos contrarios ó iguales.

La ecuacion

$$ab'y - ba'y = ac' - ca'$$

da

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

sustituyendo este valor en la ecuacion [1], y resolviéndola, se halla

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones

$$11x - 15y = 7$$
$$4x + 7y = 15.$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por 11, resulta

$$44x - 60y = 28$$
$$44x + 77y = 165;$$

restando éstas ordenadamente, obtendremos

$$137\,y = 137,$$
$$y = 1.$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuacion, será

$$11x - 15 = 7,$$
$$11x = 22,$$
$$x = 2.$$

Si los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar no son primos entre sí, se halla su mínimo comun múltiplo, y se multiplica cada ecuacion por el resultado de dividir el mínimo comun múltiplo por el coeficiente de la incógnita en dicha ecuacion.

Ejemplo. Sean las ecuaciones

$$48x - 26y = 35$$
$$-36x + 74y = 1.$$

El mínimo comun múltiplo de los coeficientes de x es 144; multiplicando la primera ecuacion por 3, y la segunda por 4, resulta

$$144x - 78y = 105,$$
$$-144x + 296y = 4.$$

Sumándolas tendremos

$$218y = 109$$
$$y = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene fácilmente

$$x = 1.$$

93. Las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned} \qquad [1]$$

resueltas por los tres métodos de eliminacion que hemos expuesto, han dado siempre las fórmulas

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Supongamos, ahora, que las ecuaciones fuesen

$$\begin{aligned} ax - by &= c \\ a'x - b'y &= c'. \end{aligned} \qquad [2]$$

que se obtienen cambiando en las primeras los signos de b y b', y veamos cuales son las fórmulas que las resuelven.

Observemos, para esto, que todas las trasformaciones necesarias para hallar los valores de x é y, se reducen á sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Si suponemos que se resuelven simultáneamente los sistemas [1] y [2], efectuaremos en ambos la misma série de operaciones con cantidades que solo se diferencian en los signos de b y b'; luego las fórmulas resultantes de ambos sistemas, se diferenciarán tambien en dichos signos [40].

Segun esto, las fórmulas que resuelven el segundo sistema son

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ba' - ab'}.$$

Luego, *cuando se ha resuelto un sistema de dos ecuaciones literales con dos incógnitas, si se presenta otro sistema que se diferencia del primero en los signos de algunos términos;* NO SERÁ NECESARIO REPETIR LOS CÁLCULOS PARA HALLAR LAS NUEVAS FÓRMULAS, *bastando cambiar en las primeras los signos de los coeficientes de dichos términos.*

Propongámonos resolver, por medio de las fórmulas generales, el sistema de ecuaciones

$$48x - 26y = 35$$
$$-36x + 74y = 1.$$

Tenemos que cambiar en las fórmulas los signos de b y a' y hacer $a = 48$, $b = 26$, $c = 35$, $a' = 36$, $b' = 74$, $c' = 1$; pero, poner en las fórmulas $-b$ en lugar de b y hacer despues $b = 26$, es lo mismo que poner de una vez -26 en lugar de b; por la misma razon pondremos tambien desde luego -36 en vez de a'. Los valores de x é y, haciendo las mencionadas sustituciones, serán

$$x = \frac{35 \,.\, 74 - -26 \,.\, 1}{48 \,.\, 74 - -26 \,.\, -36}, \quad y = \frac{48 \,.\, 1 - 35 \,.\, -36}{48 \,.\, 74 - -26 \,.\, -36}.$$

ó $$x = \frac{35 \,.\, 74 + 26 \,.\, 1}{48 \,.\, 74 - 26 \,.\, 36}, \quad y = \frac{48 \,.\, 1 + 35 \,.\, 36}{48 \,.\, 74 - 26 \,.\, 36};$$

de donde $$x = 1, \quad y = \frac{1}{2}.$$

III.—Resolucion de un sistema de tres ó mas ecuaciones de primer grado, con tantas incógnitas como ecuaciones.

94. Toda ecuacion de primer grado con varias incógnitas, puede escribirse en la forma

$$ax + by + cz + \ldots\ldots = k.$$

Basta, para conseguirlo, quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, hacer la trasposicion y la reduccion.

Propongámonos resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + 5z &= 20\\
3x + y - 2z &= 3\\
6x + 4y - 3z &= 14.
\end{aligned}
$$

Eliminando sucesivamente la x entre la primera ecuacion y cada una de las otras, por el método de reduccion, se obtienen dos ecuaciones con las incógnitas y, z:

$$
\begin{aligned}
-11y + 19z &= 54\\
-13y + 18z &= 46.
\end{aligned}
$$

Si eliminamos ahora la incógnita y entre estas dos ecuaciones, se obtiene una ecuacion con la incógnita z:

$$49z = 196.$$

El sistema de ecuaciones propuesto es equivalente á este otro

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + 5z &= 20\\
-11y + 19z &= 54\\
49z &= 196,
\end{aligned}
$$

compuesto de una ecuacion de las dadas, otra de las ecuaciones con dos incógnitas, y de la ecuacion con la única incógnita z.

En efecto, si pasamos al primer miembro todos los términos de las ecuaciones, los segundos se reducen á cero, y aquellas adquieren la forma

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0 \qquad [1].$$

Llamando a, a', a'' á los coeficientes de x en las tres ecuaciones, y eliminando x entre la primera y cada una de las demás, obtendremos

$$Aa' - A'a = 0, \qquad Aa'' - A''a = 0.$$

Ahora es fácil demostrar que el sistema de ecuaciones [1], es equivalente á este otro

$$A = 0, \quad Aa' - A'a = 0, \quad Aa'' - A''a = 0 \quad [2].$$

En efecto: los valores de x, y, z, capaces de verificar las ecuaciones [1], convierten en cero las expresiones A, A' y A'': luego tambien convierten en cero los primeros miembros de las ecuaciones [2].

Recíprocamente, todo sistema de valores de las incógnitas, capaz de verificar las ecuaciones [2], verifica las ecuaciones [1], porque para que sea $A = 0$ y $Aa' - A'a = 0$, es necesario que A' sea cero; y para que sea $A = 0$ y $Aa'' - A''a = 0$, es tambien necesario que A'' sea cero.

Si ahora eliminamos la incógnita y entre las ecuaciones

$$Aa' - A'a = 0, \qquad Aa'' - A''a = 0,$$

estas dos ecuaciones podrán sustituirse por el sistema compuesto de una de ellas y de la que resulte de la eliminacion, que tendrá la forma $Bz = C$; por consiguiente el sistema [2], y por tanto el [1], es equivalente á este otro

$$A = 0, \quad Aa' - A'a = 0, \quad Bz = C \qquad [3].$$

En virtud de lo expuesto, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 20 \\ -11y + 19z &= 54 \\ 49z &= 196. \end{aligned}$$

De la tercera se deduce $z = 4$; sustituyendo este valor en la segunda, resulta

$$\begin{aligned} -11y + 76 &= 54 \\ -11y &= -22 \\ y &= 2; \end{aligned}$$

poniendo en la primera los valores de z é y, resulta

$$2x - 6 + 20 = 20 \;\text{ ó }\; 2x = 6, \text{ de donde } x = 3.$$

En general, *para resolver un sistema de* m *ecuaciones con* m *incógnitas, se elimina una de éstas sucesivamente entre una de las ecuaciones dadas y cada una de las demás; de este modo se obtienen* m — 1 *ecuaciones con* m — 1 *incógnitas; se elimina una de éstas entre una ecuacion y cada una de las demás, lo que da* m — 2 *ecuaciones con* m — 2 *incógnitas. Continuando de este modo se llegará á obtener dos ecuaciones con dos incógnitas, y por último una ecuacion con una sola incógnita. Se halla el valor de esta incógnita y se sustituye en una de las dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que da el valor de una segunda incógnita; se sustituyen los dos valores hallados en una de las tres ecuaciones con tres incógnitas, y se continúa de este modo hasta hallar los valores de las* m *incógnitas.*

Ejemplo. Resolver las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3x - y + 2z - 2u &= 5 \\ x + 3y - z + 3u &= 8 \\ 4x - 2y + 3z - u &= 15 \\ 2x + y - 4z + 2u &= 3. \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

Eliminando y entre la primera ecuacion y cada una de las demás, por el método de reduccion, se obtendrán las ecuaciones

$$\begin{aligned} 10x + 5z - 3u &= 23 \\ 2x + z - 3u &= -5 \\ 5x - 2z + u &= 8 \end{aligned} \qquad [2]$$

Eliminando ahora la incógnita u entre la primera ecuacion y cada una de las demás, resulta

$$\begin{aligned} 8x + 4z &= 28 \\ 25x - z &= 47, \end{aligned}$$

simplificando la primera ecuacion se obtiene

$$\begin{aligned} 2x + z &= 7 \\ 25x - z &= 47, \end{aligned} \qquad [3]$$

y sumando éstas resulta

$$27x = 54, \text{ de donde } x = 2.$$

Sustituyendo x por su valor en la primera de las ecuaciones [3], se halla $z = 3$. Poniendo por x y z sus valores en la segunda de las ecuaciones [2], se obtendrá $u = 4$. Por último, reemplazando las incógnitas x, z, u por sus valores en la primera de las ecuaciones dadas, se encuentra $y = -1$.

CAPÍTULO SEXTO.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

95. Cuando las incógnitas de un problema están ligadas entre sí y con los datos por medio de relaciones complicadas, se representa cada incógnita por una letra, y se escriben separadamente todas las relaciones de igualdad que se descubran en el enunciado.

Si resulta un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas, su resolucion no presenta generalmente ninguna dificultad.

Mas adelante examinaremos el caso en que el número de incógnitas sea mayor ó menor que el de ecuaciones.

Problemas.

1.° *Distribuir* 5324 *pesetas entre dos personas, de modo que la parte de la segunda sea el triplo de la parte de la primera.*

Sea x la parte de la primera persona é y la de la segunda; las ecuaciones del problema son

$$\begin{aligned} x + y &= 5324 \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Eliminando la y, por el método de sustitucion, se obtiene

$$x+3x=5324,$$

de donde $$x=1331.$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuacion, resulta

$$y=3\times 1331, \quad \text{ó} \quad y=3993.$$

Obsérvese que al resolver este problema empleando una sola incógnita [71], se hicieron las mismas trasformaciones que hemos hecho ahora, solo que entónces la sustitucion de la parte segunda y por el triplo de la primera $3x$ se efectuó mentalmente.

2.° *Dividir el número 420 en tres partes, tales que la primera esté con la segunda en la relacion 9 : 5, y que la tercera sea mitad de la suma de las otras dos.*

Sean x, y, z las tres partes.

Las ecuaciones del problema son

$$x+y+z=420$$

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}$$

$$z=\frac{x+y}{2}.$$

Sustituyendo el valor de z en la primera ecuacion, se obtiene el sistema de dos ecuaciones

$$x+y+\frac{x+y}{2}=420.$$

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5},$$

que quitando denominadores, trasponiendo y simplificando, se reducen á

$$x+\ y=280$$

$$5x-9y=\ 0.$$

Eliminando la x se obtiene $y=100$,

luego $x=280-100$, ó $x=180$,

y $z=420-100-180$ ó $z=140$.

3.° *Un objeto de oro ligado con plata tiene 640 centímetros cúbicos de volúmen y pesa 10000 gramos. Cada centímetro cúbico de oro puro pesa 19,26 gramos y cada centímetro cúbico de plata 10,47 gramos. ¿Cuántos gramos de oro y cuántos de plata contiene el objeto?*

Llamando x al peso del oro é y al de la plata, es evidente que el volúmen del oro contenido en el objeto es $\frac{x}{19,26}$, y el de la plata $\frac{y}{10,47}$ centímetros cúbicos; luego tendremos

$$x + y = 10000$$

$$\frac{x}{19,26} + \frac{y}{10,47} = 640.$$

Resolviendo estas ecuaciones se encontrará

$$x = 7229 \text{ gramos}, \qquad y = 2771 \text{ gramos}.$$

4.° *Un banquero quiere emplear* 40000 *duros en un negocio, que debe producirle cierto tanto por ciento de ganancia, y para reunir dicha suma le faltan* 8500 *duros, que toma prestados á un interés menor: la operacion le produce* 3005 *duros. Otra operacion de iguales condiciones, en la que presta* 54600 *duros, de los cuales* 12800 *toma á préstamo, le produce un beneficio de* 4018 *duros. ¿Qué tanto por ciento ha producido el negocio, y á qué tanto por ciento le fueron prestadas las cantidades que le faltaban?*

Representando por x é y las incógnitas del problema, será

$$\frac{40000x}{100} - \frac{8500y}{100} = 3005.$$

$$\frac{54600x}{100} - \frac{12800y}{100} = 4018.$$

Simplificándolas se convierten en

$$80x - 17y = 601$$
$$273x - 64y = 2009.$$

Resolviéndolas por cualquier método se obtendrá

$$x = 9, \qquad y = 7.$$

5.° *Una persona se encarga de trasportar objetos de tres tamaños diferentes, á condicion de abonar por cada objeto que se rompa una cantidad igual á la que recibiria por la conduccion, si lo entregase intacto. En el primer viaje recibe* 4 *objetos pequeños,* 5 *medianos y* 8 *grandes; rompe los medianos, y recibe* 32 *reales. En el segundo viaje conduce* 6 *objetos pequeños,* 3 *medianos y* 5 *grandes; rompe los grandes y solo recibe* 5 *reales. En el tercer viaje conduce* 7 *objetos pequeños,* 2 *medianos y* 6 *grandes; rompe los medianos y recibe* 43 *reales. ¿Cuál es el precio de trasporte de un objeto de cada tamaño?*

Sea x el precio de trasporte de un objeto pequeño, y el de uno mediano y z el de uno grande. Las ecuaciones son

$$4x - 5y + 8z = 32$$
$$6x + 3y - 5z = 5$$
$$7x - 2y + 6z = 43.$$

Resolviéndolas se hallará

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5.$$

CAPÍTULO SÉTIMO.

DISCUSION DE LAS FÓRMULAS QUE RESUELVEN DOS ECUACIONES GENERALES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

96. Vamos á examinar si los valores que adquieren las fórmulas generales

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

en ciertos casos particulares, convienen á las ecuaciones correspondientes á dichos casos.

Primer caso. Supongamos que el denominador $ab' - ba'$ sea cero, sin que lo sean los numeradores, y tendremos

$$x = \frac{cb' - bc'}{0}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{0},$$

valores infinitos.

Veamos, ahora, en qué se convierten las ecuaciones

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

por la hipótesis $ab' - ba' = 0$. De esta igualdad se deduce $a = \frac{ba'}{b'}$; sustituyendo este valor de a en la primera ecuacion, se convierte en

$$\frac{ba'x}{b'} + by = c,$$

ó quitando el denominador y partiendo ambos miembros por b,

$$a'x + b'y = \frac{cb'}{b}.$$

Comparando esta ecuacion con la segunda de las propuestas, vemos que serán *compatibles*, esto es, podrán verificarse por los mismos valores de x é y, si se verifica la igualdad

$$\frac{cb'}{b} = c',$$

que se convierte fácilmente en esta otra

$$cb' - bc' = 0;$$

pero como hemos supuesto que ninguno de los numeradores es cero, se deduce que las ecuaciones propuestas son contradictorias ó incompatibles.

Esto mismo nos dicen las fórmulas, que al dar para x é y valores infinitos, manifiestan la imposibilidad de hallar dos cantidades que verifiquen el sistema.

Segundo caso. Supongamos que el denominador comun y uno de los numeradores sean iguales á cero, esto es,

$$ab' - ba' = 0, \qquad cb' - bc' = 0.$$

De estas igualdades se deduce

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'};$$

luego $$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}, \quad \text{ó} \quad ac' - ca' = 0.$$

Por consiguiente, si el numerador de x es cero, el de y tambien lo es. Del mismo modo demostraríamos la recíproca. Luego

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Si representamos por m el valor de cada una de las fracciones iguales $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, tendremos

$$a = ma', \quad b = mb', \quad c = mc',$$

y sustituyendo en la primera ecuacion del sistema, resulta

$$ma'x + mb'y = mc',$$

que dividida por m se convierte en la segunda

$$a'x + b'y = c'.$$

Luego el sistema de dos ecuaciones se reduce á una sola con dos incógnitas; pero de esta ecuacion se deduce

$$x = \frac{c' - b'y}{a'},$$

y dando á y valores cualesquiera, se hallarán otros correspondientes para x; por consiguiente los valores de x é y son indeterminados, segun manifiestan las fórmulas.

CAPÍTULO OCTAVO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON MAS INCÓGNITAS QUE ECUACIONES.

97. Consideremos, en primer lugar, la ecuacion con dos incógnitas

$$2x - 5y = 3.$$

Despejando la x se obtiene

$$x = \frac{3 + 5y}{2}.$$

Si ahora damos á y valores cualesquiera, y á x los que se obtengan efectuando las operaciones indicadas en $\frac{3+5y}{2}$, la ecuacion $x = \frac{3+5y}{2}$ se convertirá en identidad por cada par de valores correspondientes de x é y; por consiguiente sucederá lo mismo con la propuesta.

Haciendo sucesivamente $y = 0\ ,\ 1,\ \ 2\ ,\ 3, \ldots\ldots$

se obtendrá $\qquad x = \frac{3}{2},\ 4,\ \frac{13}{2},\ 9, \ldots\ldots$

Una ecuacion de primer grado con dos ó mas incógnitas, tiene infinitas soluciones, por lo que se llama ecuacion *indeterminada*.

Se resolverá siempre despejando una de las incógnitas, y dando valores arbitrarios á las demás. Las incógnitas que reciben valores arbitrarios, se llaman *variables independientes;* y la que se ha despejado varía segun los valores que reciben aquellas: por esto se llama *funcion* de dichas variables.

En la resolucion anterior, la variable independiente es y, mientras que x es una funcion de y.

En general, se llama *funcion* de una ó mas cantidades variables, toda cantidad cuyo valor depende de los de dichas variables.

98. *Para resolver un sistema de dos ó mas ecuaciones con mayor número de incógnitas, se despejan tantas incógnitas como ecuaciones tenga el sistema, considerando las restantes como cantidades conocidas; se da á éstas valores cualesquiera; y estos*

valores, juntos con los correspondientes de las incógnitas despejadas, formarán las soluciones del sistema.

Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z + 3u &= 13 \\ x + 4y - 8z - 3u &= 5. \end{aligned}$$

Considerando z y u como conocidas, y pasándolas por consiguiente al segundo miembro, las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} 2x - y &= 13 - 5z - 3u \\ x + 4y &= 5 + 8z + 3u. \end{aligned}$$

Resolviéndolas se encuentra

$$x = \frac{19 - 4z - 3u}{3}, \quad y = \frac{-1 + 7z + 3u}{3}.$$

Si hacemos $z = 1$, $u = 2$, se obtiene $x = 3$, $y = 4$;
suponiendo $z = 1$, $u = 3$, resulta $x = 2$, $y = 5$.
De este modo pueden hallarse cuantas soluciones se quieran.

CAPÍTULO NOVENO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON MENOS INCÓGNITAS QUE ECUACIONES.

99. *Para resolver un sistema de ecuaciones con menor número de incógnitas, se resuelven tantas ecuaciones como incógnitas tenga el sistema. Si los valores hallados verifican las ecuaciones restantes, todas las propuestas serán compatibles; pero si dichos valores no verifican las ecuaciones restantes, el sistema no tiene solucion, ó lo que es lo mismo, las ecuaciones que lo forman son incompatibles.*

Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 5 \\ 6x - 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= 5 \\ 10x - 2y &= 3. \end{aligned}$$

Resolviendo las dos primeras se hallará

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 1;$$

sustituyendo estos valores en las demás, veremos que se convierten en identidades; luego las ecuaciones propuestas tienen la solucion $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$.

Sean las ecuaciones

$$3x - y = 4$$
$$5x - 2y = 5$$
$$2x - 3y = 8.$$

Las dos primeras dan $x = 3$, $y = 5$; sustituyendo estos valores en la tercera resulta la igualdad absurda

$$6 - 15 = 8;$$

luego las ecuaciones propuestas son incompatibles.

100. Si las ecuaciones propuestas contienen *coeficientes indeterminados*, podrán hallarse las condiciones á que deben satisfacer dichos coeficientes para que el sistema sea compatible.

Sean las ecuaciones

$$ax - y = 4$$
$$bx + 2y = 2$$
$$x + y = 2.$$

Para determinar los valores particulares de a y b, que las hacen compatibles, deduciremos de la 1.ª y 3.ª los valores de x é y, que son

$$x = \frac{6}{a+1}, \quad y = \frac{2a-4}{a+1};$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion segunda, se halla

$$\frac{6b}{a+1} + \frac{4a-8}{a+1} = 2,$$

de donde $\qquad a = 5 - 3b.$

Como esta *ecuacion de condicion* es indeterminada, podremos asignar á los coeficientes a y b infinitos valores.

Si hacemos $b = \frac{1}{3}$, será $a = 4$, y las ecuaciones se convierten en

$$4x - y = 4$$
$$\frac{x}{3} + 2y = 2$$
$$x + y = 2,$$

que son compatibles.

EJERCICIOS.

I. Resolver las ecuaciones siguientes

$$\frac{7x}{30}+\frac{x}{45}-\frac{1}{9}=\frac{4x}{5}-\frac{11x}{20}. \quad \frac{6x}{11}-\frac{x}{3}+\frac{12x}{9}=\frac{x}{22}+1.$$

$$\frac{ab}{x}-c=\frac{a}{2x}+b. \quad \frac{a^2-x^2}{ax}=b-\frac{x}{a}$$

II. Dos personas prestan capitales iguales, la primera al 7 por ciento y la segunda al 4; la ganancia de la primera excede á la de la segunda en 1500 pesetas. ¿Qué capital prestaron?

III. Una persona que posee 250000 reales, presta una parte de su capital al 8 por ciento de interés, y la parte restante al 5 por ciento; recibe por los intereses de todo el capital la cantidad de 17900 reales. ¿Cuáles son las partes?

IV. Una aleacion de plata pesa 40 kilógramos, y su ley es de 900 milésimas; para obtenerla se ha ligado plata de 800 y de 960 milésimas. ¿Cuántos kilógramos de cada especie han entrado en la aleacion?

V. En un reloj son las cuatro en punto. ¿A qué hora el minutero, que señala las doce, alcanzará al horario?

VI. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x-y&=21\\ x+2y&=42. \end{aligned}$$

VII. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} bcx+2b-cy&=0\\ b^2y+\frac{a(c^3-b^3)}{bc}&=\frac{2b^3}{c}+c^3x. \end{aligned}$$

VIII. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x-2y-z&=25\\ 2x-y-2z&=3\\ x+7y-6z&=4. \end{aligned}$$

IX. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y-z&=16\\ x-y+z&=6\\ x+y+z&=20. \end{aligned}$$

X. Una persona dice á otra: si me das 60 reales, tendré tanto dinero como tú; y si te doy la misma cantidad, tendrás tres veces mas dinero que yo. ¿Cuánto tenia cada persona?

XI. Por 6 libras de azúcar y 5 de café he pagado 85 reales, y otra vez pagué 109 reales por 2 libras de azúcar y 9 de café. ¿A qué precio he pagado estos géneros?

XII. Tres hermanos han contraido una deuda de 4000 reales: al primero le falta para poder satisfacerla las dos quintas partes del capital del tercero; al segundo la mitad del capital del primero; y al tercero los cinco treceavos del capital del segundo. ¿Cuál es el capital de cada uno?

XIII. Hallar un número compuesto de cuatro cifras: la suma de todas ha de ser 21; la segunda y la cuarta, contando de izquierda á derecha, valen doble que la primera; la primera, segunda y cuarta equivalen al séxtuplo de la tercera; y restando la primera de la segunda, la diferencia es doble que restando la tercera de la cuarta.

XIV. Resolver el sistema *indeterminado* siguiente

$$\frac{5(x-3)}{3} - \frac{3(y-2)}{2} + y = \frac{5y}{4} + \frac{2(x-7)}{4} + 5$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + 5 = 2x - 3y.$$

XV. Averiguar si son compatibles las ecuaciones

$$2x - y = 2$$
$$2x - 3y = 1$$
$$3x - 5y = 0.$$

LIBRO TERCERO.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

CAPÍTULO PRIMERO.

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA DE LOS MONOMIOS.

101. *Para elevar al cuadrado un producto de varios factores, se eleva cada factor al cuadrado.*

Si el producto es abc, tendremos

$$(abc)^2 = abc \times abc = abcabc = aabbcc = a^2 b^2 c^2.$$

102. *Para elevar al cuadrado una potencia cualquiera, se multiplica su exponente por 2.*

Si la potencia es a^m, tendremos

$$(a^m)^2 = a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m}.$$

103. *Para elevar al cuadrado un monomio entero, se eleva el coeficiente á dicha potencia, y se multiplican los exponentes de las letras por 2.*

Esta regla es una consecuencia de las anteriores.

Así,
$$(5a^2 b^3 c^5 d)^2 = 25a^4 b^6 c^{10} d^2$$
$$(-2abc^6)^2 = 4a^2 b^2 c^{12}.$$

104. *Para elevar una fraccion al cuadrado, se elevan á dicha potencia sus dos términos.*

En efecto: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a\,.\,a}{b\,.\,b} = \frac{a^2}{b^2}.$

105. *Para extraer la raiz cuadrada de un producto de varios factores, se extrae la raiz de cada factor.*

Así, $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c};$

porque $(\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c}\,)^2 = (\sqrt{a}\,)^2(\sqrt{b}\,)^2(\sqrt{c}\,)^2 = abc.$

106. *Para extraer la raiz cuadrada de una potencia de **grado par**, se divide su exponente por* 2.

Así $\sqrt{a^{2m}} = a^m$, puesto que $(a^m)^2 = a^{2m}$.

107. *Para extraer la raiz cuadrada de un monomio entero se extrae la raiz cuadrada del coeficiente y se dividen por* 2 *los exponentes de las letras.*

Esta regla es consecuencia de las dos anteriores.

Así, $\sqrt{49a^6b^8c^{10}} = 7a^3b^4c^5$.

Se ve que un monomio no tiene raiz cuadrada exacta: 1.° cuando el coeficiente no es cuadrado; 2.° cuando alguno de los exponentes no es par.

Sea, por ejemplo, $\sqrt{27a^3b^4c^2}$.

No siendo posible extraer exactamente la raiz cuadrada de 27 ni la de a^3, el monomio no tiene raiz cuadrada exacta.

En este caso, las expresiones irracionales pueden con frecuencia simplificarse *extrayendo la raiz de los factores que la tienen exacta.*

El monomio $27a^3b^4c^2$ se descompone en

$$9a^2b^4c^2 \times 3a.$$

Extrayendo la raiz cuadrada exacta del primer factor, y multiplicándola por $\sqrt{3a}$, que no puede efectuarse, tendremos

$$\sqrt{27a^3b^4c^2} = 3ab^2c\sqrt{3a}.$$

Por el contrario, *se introduce un factor bajo el signo radical, elevándole al cuadrado.*

$$2a^2b\sqrt{5a} = \sqrt{4a^4b^2 \times 5a} = \sqrt{20a^5b^2}.$$

108. *Para extraer la raiz cuadrada de una fraccion, se divide la raiz cuadrada del numerador por la del denominador.*

Queremos demostrar que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

En efecto: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a}\,)^2}{(\sqrt{b}\,)^2} = \frac{a}{b}.$

EJEMPLOS.

1.° $$\sqrt{\frac{25a^2b^4}{16m^6n^8}} = \frac{5ab^2}{4m^3n^4}.$$

2.° $$\sqrt{\frac{48a^3b^4c^5}{98m^2n^5}} = \frac{4ab^2c^2\sqrt{3ac}}{7mn^2\sqrt{2n}}.$$

109. Sabemos que las potencias de grado par de una cantidad no varian, aunque se cambie el signo de dicha cantidad, así

$$(+a)^2 = a^2, \ (-a)^2 = a^2;$$

por consiguiente *la raiz de grado par de toda cantidad positiva, tiene dos valores iguales y de signo contrario.*

Por ejemplo, la raiz cuadrada de 16 es 4 y — 4, lo que se expresa diciendo

$$\sqrt{16} = \pm 4.$$

Se llaman *expresiones imaginarias* las raices de grado par de las cantidades negativas.

Si tenemos $\sqrt{-16}$, esta raiz no puede ser positiva, porque una cantidad positiva elevada al cuadrado da resultado positivo; pero tampoco puede ser dicha raiz negativa, porque toda cantidad negativa elevada al cuadrado da resultado tambien positivo. No hay, pues, cantidad ninguna que represente la expresion $\sqrt{-16}$: por esto se llama *expresion imaginaria.*

Lo mismo podriamos decir de una raiz de otro grado par cualquiera.

Por oposicion, se llaman cantidades *reales* las que no son imaginarias.

CAPÍTULO SEGUNDO.

RESOLUCION DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

110. Una ecuacion de segundo grado con una incógnita puede tener tres clases de términos: unos que contengan la segunda potencia de la incógnita, otros que contengan la primera potencia, y términos conocidos.

Si la ecuacion tiene estas tres clases dé términos, puede reducirse á la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

para lo cual se quitarán denominadores, se pasarán todos los términos al primer miembro, lo que reduce á cero el segundo, y se efectuarán las reducciones posibles.

La ecuacion que contiene las tres clases de términos mencionadas, se llama *completa*.

Puede suceder que falten los términos conocidos, los que contienen la potencia primera de la incógnita, ó unos y otros; las ecuaciones entónces son respectivamente:

$$ax^2 + bx = 0,$$
$$ax^2 + c \;\; = 0,$$
$$ax^2 = 0,$$

y se llaman *incompletas*.

I.—Ecuacion completa.

111. Vamos á resolver la ecuacion general completa

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad [1],$$

en la que a se supone siempre posititiva, pudiendo ser b y c positivas ó negativas, ó una positiva y otra negativa. Si a fuese negativa se cambiarian los signos á todos los términos de la ecuacion.

Dividiendo la ecuacion por el primer coeficiente a, á fin de que el coeficiente del primer término sea la unidad, resulta

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

haciendo, para abreviar, $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, la ecuacion anterior adquiere la forma

$$x^2 + px + q = 0 \qquad [2];$$

pasando q al segundo miembro, resulta

$$x^2 + px = -q.$$

El primer miembro es ahora la suma de los dos primeros términos del cuadrado de $x + \frac{p}{2}$, puesto que

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4};$$

si añadimos $\frac{p^2}{4}$ á los dos miembros, tendremos

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q.$$

El primer miembro de esta ecuacion tiene ahora raiz cuadrada exacta; escribiéndole en forma de cuadrado será

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q;$$

extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros, resulta

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$ [1]

de donde $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad [3].$$

Llamamos *raiz* de una ecuacion á toda expresion numérica ó literal, carezca ó no de sentido, que puesta en lugar de la incógnita hace idénticos los dos miembros.

La ecuacion [2] tiene, pues, dos raices, que son

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Traduciendo la fórmula [3] al lenguaje vulgar, tendremos:

En toda ecuacion de la forma $x^2+px+q=0$, *la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario, mas ó menos la raiz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicha mitad y el término conocido.*

---

1 No ponemos el signo $\pm$ al primer miembro de esta ecuacion, como debiera hacerse en virtud de lo expuesto anteriormente (109), porque sería una redundancia inútil. En efecto: separando las ecuaciones que resultarian se tiene

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad -\left(x+\frac{p}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

pero cambiando los signos de la segunda resulta la primera, luego las dos son equivalentes. En general: *al extraer la raiz cuadrada de los dos miembros de una ecuacion, se antepondrá el signo $\pm$ á uno solo de los resultados.*

112. Sustituyendo p y q por $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ en la fórmula [3], se obtiene la que resuelve la ecuacion [1].

Así tendremos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ó

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}};$$

extrayendo ahora la raiz cuadrada del denominador $4a^2$, y sumando ó restando las fracciones de igual denominador que resultan, obtendremos por último

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad [4],$$

fórmula que traducida al lenguaje vulgar, dice:

En toda ecuacion de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, *la incógnita es igual al coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario, mas ó menos la raiz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicho coeficiente y el cuádruplo del producto de los coeficientes primero y tercero, dividido todo por el duplo del coeficiente del primer término.*

EJEMPLOS.

1.° Resolver la ecuacion

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Aplicando la fórmula [3], resulta

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 15}, \qquad ó \qquad x = 1 \pm 4;$$

luego los valores que verifican la ecuacion propuesta son

$$x = 1 + 4, \quad x = 1 - 4; \quad ó \quad x = 5, \quad x = -3.$$

2.° Resolver la ecuacion

$$6x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Aplicando la fórmula [4], se obtiene

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12}, \quad ó \quad x = \frac{5 \pm 13}{12},$$

de donde $x = \frac{18}{12}$, $x = -\frac{8}{12}$; ó $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{2}{3}$.

II.—Ecuaciones incompletas.

113. Sea la ecuacion

$$ax^2 + bx = 0.$$

Siendo x factor comun, podemos escribir

$$x\,(ax + b) = 0.$$

El producto $x\,(ax + b)$ se convierte en cero si uno de los factores es cero, luego $x = 0$ es una raiz de la ecuacion propuesta, y obtendremos otra raiz dando á x un valor tal que el factor $ax + b$ se convierta en cero; pero de

$$ax + b = 0, \quad \text{se deduce} \quad x = -\frac{b}{a};$$

luego $x = 0$, $x = -\dfrac{b}{a}$ son las raices de la ecuacion propuesta.

La fórmula [4] puede aplicarse á este caso, pues haciendo $c = 0$ en la ecuacion [1], se convierte en $ax^2 + bx = 0$, que es la ecuacion propuesta.

Si damos á c el valor cero en la fórmula, obtendremos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b \pm b}{2a};$$

de donde $\quad x = \dfrac{0}{2a} = 0, \quad x = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}.$

114. Sea la ecuacion incompleta $ax^2 + c = 0$.

Pasando c al segundo miembro, será $ax^2 = -c$,

de donde $\quad x^2 = -\dfrac{c}{a}, \quad x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}.$

Si a y c tienen el mismo signo, las raices serán imaginarias; pero si tienen signos contrarios, las raices serán reales.

Haciendo $b = 0$ en la fórmula [4], podrá aplicarse al caso actual. En efecto:

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac}{4a^2}} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

115. Si la ecuacion incompleta es $ax^2 = 0$, es evidente que será satisfecha por $x = 0$. Aplicando la fórmula [4] se halla lo mismo.

III.—Descomposicion del trinomio x^2+px+q en factores de primer grado, y propiedades de las raices de la ecuacion $x^2+px+q=0$.

116. Añadiendo y restando la cantidad $\frac{p^2}{4}$ al primer miembro de la ecuacion

$$x^2+px+q=0,$$

se convierte en

$$x^2+px+q+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}=0.$$

ó sea en

$$\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0.$$

La cantidad del primer paréntesis es el cuadrado del binomio $x+\frac{p}{2}$, y la del segundo se puede considerar como el cuadrado de su raiz cuadrada; así tendremos

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=0;$$

pero ahora se presenta la diferencia entre los cuadrados de dos cantidades, que sabemos es igual á la suma de dichas cantidades multiplicada por su diferencia; luego la ecuacion será

$$\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0.$$

Si hacemos $\quad -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x'$

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x'',$$

la ecuacion adquiere la forma

$$(x-x')(x-x'')=0.$$

Observando que las expresiones representadas por x' y x'' son las raices de la ecuacion $x^2+px+q=0$, podremos decir:

Todo trinomio de la forma $x^2 + px + q$ *es igual al producto de dos factores binomios, que se forman restando de* x *las raices de la ecuacion* $x^2 + px + q = 0$.

Ejemplo. Descomponer el trinomio $x^2 - 2x - 15$ en factores de primer grado.

Resolviendo la ecuacion $x^2 - 2x - 15 = 0$, se obtiene

$$x' = -3, \qquad x'' = 5;$$

luego $$x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5).$$

117. Hemos visto que llamando x', x'' á las raices de la ecuacion $x^2 + px + q = 0$, el primer miembro de la misma es igual á $(x - x')(x - x'')$. Efectuando esta multiplicacion obtendremos

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Ahora bien, para que este trinomio sea igual á

$$x^2 + px + q,$$

es necesario que se verifiquen las relaciones siguientes:

$$x' + x'' = -p$$
$$x'x'' = q.$$

Luego, *en una ecuacion de segundo grado de la forma* $x^2 + px + q = 0$, *la suma de las raices es igual al coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario; y el producto de las mismas es igual al término conocido.*

En virtud de este principio, puede escribirse una ecuacion de segundo grado cuyas raices sean conocidas.

Sean éstas, por ejemplo, 4 y -7; el coeficiente del segundo término será

$$-(4 - 7) = 3,$$

y el término conocido

$$4 \times -7 = -28;$$

luego la ecuacion es

$$x^2 + 3x - 28 = 0.$$

Resolviéndola se hallará efectivamente

$$x' = 4, \qquad x'' = -7.$$

CAPÍTULO TERCERO.

DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

118. La ecuacion

$$x^2 + px + q = 0,$$

ha dado la fórmula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Para discutirla distinguiremos tres casos, segun que el término q sea negativo, cero ó positivo.

PRIMER CASO. Siendo el término q negativo, si ponemos su signo de manifiesto, la diferencia $\frac{p^2}{4} - q$ se convierte en la suma $\frac{p^2}{4} + q$ de dos números positivos; luego la cantidad subradical es positiva y mayor que $\frac{p^2}{4}$, por consiguiente el valor del radical es real y mayor que $\frac{p}{2}$.

Los dos valores de x son reales en este caso, y podrán hallarse exactamente si $\frac{p^2}{4} + q$ tiene raiz cuadrada exacta, y con cuanta aproximacion se desee, en el caso contrario.

El coeficiente p será positivo ó negativo: si es positivo, las raices son

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad [a], \qquad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad [b],$$

siendo p y q números absolutos, y como el radical es mayor que $\frac{p}{2}$, la primera será positiva; en cuanto á la segunda evidentemente es negativa.

Si p es negativo, las raices son

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad [a'], \qquad \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad [b'],$$

positiva la primera y negativa la segunda.

En resúmen: si q es cantidad negativa, las dos raices son reales, una positiva y otra negativa.

Obsérvese que las raices [b'] y [a'], correspondientes á p negativo, son iguales y de signo contrario á las [a] y [b], correspondientes á p positivo; luego si en la ecuacion $x^2+px+q=0$ cambiamos el signo de p, hallaremos raices iguales á las primitivas, pero de signos contrarios.

Segundo caso. Si q es igual á cero, el radical $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ se convierte en $\frac{p}{2}$.

Si p es positivo, las raices son $-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$, de las cuales la primera $-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}$ equivale á cero; y la segunda $-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}$ se reduce á $-p$.

Si p es negativo, las raices serán $\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$: la primera $\frac{p}{2}+\frac{p}{2}$ se reduce á p, y la segunda $\frac{p}{2}-\frac{p}{2}$ equivale á cero.

Se ve que estas últimas se diferencian de las anteriores en el signo.

Ya hemos visto que en este caso la ecuacion se convierte en

$$x^2+px=0, \quad ó \quad x(x+p)=0;$$

el primer miembro será cero si $x=0$, lo que da una raiz, ó si $x+p=0$, de donde $x=-p$, lo que da la otra raiz.

Tercer caso. Si q es cantidad positiva, podrá ser menor, igual ó mayor que $\frac{p^2}{4}$.

Si $q<\frac{p^2}{4}$, la cantidad subradical es positiva y menor que $\frac{p^2}{4}$, luego el radical es real y menor que $\frac{p}{2}$; por consiguiente en esta hipótesis las raices son reales.

Si p es positivo, las raices son

$$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

evidentemente negativas; y si p es negativo serán

$$\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

ambas positivas é iguales en valor absoluto á las anteriores.

Si q es igual á $\frac{p^2}{4}$, los dos valores de x se reducen á uno solo, que será $-\frac{p}{2}$ ó $\frac{p}{2}$, segun sea el signo de p.

Poniendo en la ecuacion $\frac{p^2}{4}$ en lugar de q, se convierte en

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0,$$

ó
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

ó bien
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Esta ecuacion se convierte en identidad por todos los valores de x que anulen uno ú otro de los factores del primer miembro; pero el primer factor da

$$x + \frac{p}{2} = 0, \quad \text{de donde } x = -\frac{p}{2}.$$

y el segundo da exactamente lo mismo; luego la ecuacion tiene *dos raices iguales* á $-\frac{p}{2}$.

Si $q > \frac{p^2}{4}$, la cantidad subradical $\frac{p^2}{4} - q$ es negativa y los dos valores de x son imaginarios, cualquiera que sea el signo de p.

Llamemos d á la diferencia $q - \frac{p^2}{4}$, y tendremos

$$q = \frac{q^2}{4} + d,$$

siendo d una cantidad positiva. Sustituyendo q por su valor, la ecuacion será

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + d = 0$$

ó bien
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + d = 0;$$

pero $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ es siempre una cantidad positiva, y como d tambien lo es, resulta que la ecuacion encierra un absurdo, puesto que la suma de dos cantidades positivas no puede ser igual á cero.

De aquí se deduce que las raices imaginarias indican un absurdo en la ecuacion.

119. Escolio. En todos los casos en que las raices son reales, se habrá observado que si cambiamos el signo de p en la ecuacion $x^2 + px + q = 0$, las raices son iguales y de signos contrarios á las primitivas; ahora bien, si en una ecuacion de segundo grado ponemos $-x$ en lugar de x, el primer término no varía, por ser potencia par de x, y el tercero tampoco, como independiente de esta letra, pero el segundo cambia de signo; luego poner $-x$ en lugar de x equivale á cambiar el signo de p; por consiguiente *si en la ecuacion* $x^2 + px + q = 0$ *se cambia* x *en* $-$x, *las raices de la ecuacion que resulta son iguales y de signos contrarios á las de la propuesta.*

Cuando las raices son imaginarias, el cambio de x en $-x$ altera el signo del término real $\frac{p}{2}$, pero las raices continúan siendo imaginarias.

La proposicion anterior es tambien cierta para una ecuacion de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. En efecto, poniendo $-x$ en lugar de x se convierte en $ax^2 - bx + c = 0$; dividiendo por a las dos ecuaciones, lo que no altera los signos, se trasforman en

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 - px + q = 0,$$

cuyas raices son iguales y de signos contrarios.

120. Algunos de los resultados obtenidos en la discusion anterior, pueden deducirse brevemente del principio demostrado en el número 117.

Consideremos la ecuacion

$$x^2 + px - q = 0,$$

siendo q un número absoluto.

Sabemos que las raices son reales [118, 1.er caso], y como su producto debe ser igual á $-q$, una de ellas es positiva y la otra negativa.

Si p es positivo, la suma de las raices es $-p$, luego la negativa tiene mayor valor absoluto; y si p es negativo, la suma de las raices es $+p$, luego será mayor la positiva.

Sea la ecuacion $\quad x^2 + px + q = 0$.

Supongamos reales las raices.

Debiendo ser el producto de ellas igual á $+q$, serán las dos positivas ó las dos negativas. Si p es positivo, la suma de las raices es $-p$, luego las dos son negativas; si por el contrario, p es negativo, la suma de las raices es $+p$, y serán positivas.

EJEMPLOS.

$x^2-2x-8=0$. raices reales, de signo contrario; mayor la positiva.
$x^2+2x-3=0$, id. id. , mayor la negativa.
$x^2-7x+12=0$, id. , las dos positivas.
$x^2+7x+10=0$, id. , las dos negativas.
$x^2-5x+8=0$, raices imaginarias.
$x^2-6x+9=0$, raices iguales positivas.
$x^2+8x+16=0$, raices iguales negativas.

121. La ecuacion

$$ax^2+bx+c=0,$$

ha dado la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si suponemos $a=0$, los valores de x son

$$\frac{-b\pm b}{0};$$

el primero se reduce á $\frac{0}{0}$ y el segundo á $-\frac{2b}{0}$.

Sin embargo, haciendo en la ecuacion la misma hipótesis, se convierte en $bx+c=0$, de donde $x=-\frac{c}{b}$.

Examinemos si efectivamente es indeterminado el primer valor de x, ó si existe algun factor comun á los dos miembros de la fraccion

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Multiplicando los dos términos por $\sqrt{b^2-4ac}+b$, el numerador será

$$(\sqrt{b^2-4ac}-b)(\sqrt{b^2-4ac}+b)$$

esto es, el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia; luego la fraccion se convierte en

$$\frac{b^2-4ac-b^2}{2a(\sqrt{b^2-4ac}+b)},$$

Reduciendo en el numerador, notaremos un factor $2a$ comun á los dos términos, que siendo $a = 0$ los convierte en cero; pero suprimiendo dicho factor, la fraccion es

$$\frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

y haciendo ahora $a = 0$, la fraccion adquiere el valor $-\frac{c}{b}$, deducido de la ecuacion directamente.

La segunda raiz $-\frac{2b}{0}$ es el límite de

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

cuando a disminuye indefinidamente; puesto que en tal caso $\sqrt{b^2 - 4ac}$ crece y tiene por límite $\sqrt{b^2}$ ó b, por consiguiente el numerador tiende al valor $-2b$; á medida que a disminuye, la fraccion aumenta en valor absoluto, y cuando a tenga un valor suficientemente pequeño, el valor absoluto de la fraccion será mayor que cualquiera cantidad asignable; luego dicho valor es infinito, cuando $a = 0$.

CAPÍTULO CUARTO.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

122. PROBLEMAS.

1.° *Hallar un número tal que el quíntuplo de su cuadrado, disminuido en su producto por* 63, *sea igual á* 180.

Llamando x al número que buscamos, la ecuacion es

$$5x^2 - 63x = 180,$$

ó

$$5x^2 - 63x - 180 = 0;$$

de donde $x = \frac{63 \pm \sqrt{7569}}{10}$, ó $x = \frac{63 \pm 87}{10}$.

Tomando el signo *mas*, será $x' = 15$.

Comprobacion: $5 \cdot 15^2 - 63 \cdot 15 = 1125 - 945 = 180$.

La raiz $x' = 15$ es, pues, una solucion del problema.

Tomando el signo *menos* en el valor de x, será $x'' = -\frac{12}{5}$.

Este valor negativo es solucion, prescindiendo del signo, de un problema análogo al propuesto. En efecto, si en la ecuacion de éste cambiamos x en $-x$, obtendremos

$$5x^2 + 63x = 180,$$

y las raices de esta ecuacion serán [119] $\frac{12}{5}$ y -15.

Modificando el enunciado primitivo, de modo que la ecuacion $5x^2 + 63x = 180$ sea la traduccion exacta al lenguaje algebráico del nuevo enunciado, tendremos este problema: *hallar un número tal que el quíntuplo de su cuadrado aumentado en su producto por* 63, *sea igual á* 180, cuya solucion es $\frac{12}{5}$.

2.° *Por* 144 *reales compra una persona cierta cantidad de café; si con el mismo dinero comprase* 6 *libras menos, cada libra le costaria* 4 *reales mas. ¿Cuántas libras ha comprado?*

Sea x la incógnita: el primer precio será $\frac{144}{x}$, y el segundo $\frac{144}{x-6}$; como éste excede al primero en 4 reales, la ecuacion es

$$\frac{144}{x-6} - \frac{144}{x} = 4.$$

Quitando denominadores, reduciendo y simplificando, será

$$x^2 - 6x - 216 = 0;$$

y resolviéndola $x = 3 \pm 15.$

Tomando el signo *mas*, tendremos $x' = 18$, valor que verifica la ecuacion, y es solucion del problema.

Tomando el signo *menos*, se obtiene $x' = -12$, valor que prescindiendo del signo es solucion del siguiente problema:

Por 144 *reales compra una persona cierta cantidad de café; si con el mismo dinero comprase* 6 *libras mas, cada libra le costaria* 4 *reales menos. ¿Cuántas libras ha comprado?*

3.° *Hallar dos números cuya suma sea* 15 *y su producto* 56.

Si x es uno de ellos, el otro será $15 - x$; y la ecuacion

$$x(15 - x) = 56,$$

ó

$$x^2 - 15x + 56 = 0.$$

Resolviéndola resulta $x = \frac{15}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Las raices son, pues, $x' = 8$, $x'' = 7$; pero

$$x' + x'' = 15, \quad x'x'' = 56;$$

luego los valores de x son los dos números buscados.

Obtendríamos el mismo resultado observando que las incógnitas del problema son las raices de una ecuacion, que tiene por coeficiente del segundo término la suma dada, tomada con signo contrario, y por tercer término el producto dado; llamando u á la incógnita de dicha ecuacion, se tiene

$$u^2 - 15u + 56 = 0,$$

cuyas raices $u' = 8$, $u'' = 7$ deben ser los números buscados.

4.º *Hallar en la recta* AB *que une dos luces, un punto igualmente iluminado por cada una de ellas.*

P″ A P B P′

Sean a y b las intensidades respectivas de las luces A y B, ó sea, las cantidades de luz que arroja cada una de ellas á la unidad de distancia; y representemos por d la distancia entre los puntos A y B.

Suponemos conocido un principio de Física que dice: *las intensidades de una luz á distancias diferentes, son inversamente proporcionales á los cuadrados de las distancias.*

Si el punto buscado está situado entre A y B, por ejemplo en P, y llamamos x á la distancia AP, la PB será $d - x$; ahora bien, siendo a la intensidad de la primera luz á la unidad de distancia, á una distancia como 2 será $\frac{a}{4}$, á una distancia como 3 será $\frac{a}{9}$, y en fin á la distancia x será $\frac{a}{x^2}$; igualmente, la intensidad de la segunda luz á la distancia $d - x$ será

$$\frac{b}{(d-x)^2};$$

debiendo ser iguales las intensidades de las dos luces en el punto P, tendremos la ecuacion

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Pudiéramos resolverla por el método general, esto es, reduciéndola á la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y aplicando la fórmula correspondiente; pero es mas sencillo convertirla en otra de primer grado.

Para esto, se extrae la raiz cuadrada de ambos miembros, y resulta

$$\frac{\sqrt{a}}{x} = \pm \frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

Resolviendo esta ecuacion se obtiene fácilmente

$$x = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

Discusion. Examinaremos sucesivamente tres casos principales, que serán $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Primer caso. Siendo $a > b$, tendremos $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, luego $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ será mayor que $\sqrt{a}$, pero menor que $2\sqrt{a}$; por consiguiente $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ es menor que uno, pero mayor que $\frac{1}{2}$; luego el primer valor de x, $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, será menor que d y mayor que $\frac{d}{2}$. Esto significa que el punto P está situado entre A y B, mas cerca de B que de A. Se comprende que así debe suceder, puesto que siendo diferentes las intensidades de las dos luces, el punto igualmente iluminado debe estar mas próximo á la luz mas débil.

El segundo valor de x es $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; el denominador es positivo y menor que $\sqrt{a}$, luego $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ es positivo y mayor que uno; por consiguiente el valor de x es positivo y mayor que d.

Este resultado significa que existe á la derecha de B otro punto, tal como P', igualmente iluminado por las dos luces.

Vemos que en este caso tiene el problema dos soluciones.

Segundo caso. Si $a = b$, el primer valor de x es $\frac{d\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$ ó $\frac{d}{2}$.

Esto significa que el punto P está en medio del intérvalo AB que separa las dos luces, lo que es evidente.

El segundo valor de x es $\frac{d\sqrt{a}}{0} = \infty$. Si suponemos que en la fórmula $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ es $a > b$, pero que b aumenta gradualmente, el denominador irá disminuyendo, y la fraccion aumentará; si la diferencia entre a y b es suficientemente pequeña, la fraccion podrá adquirir un valor tan grande como se quiera, de modo que el punto P′ se alejará cnanto queramos, y cuando b llegue á ser igual á a, dicho punto se colocará á una distancia infinita, esto es, desaparecerá.

En este caso tiene, pues, el problema una sola solucion.

Tercer caso. Si $a < b$, la suma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es mayor que $2\sqrt{a}$, luego el primer valor de x es menor que $\frac{d}{2}$, por tanto, el punto P estará mas próximo á la luz A que á la B, como efectivamente debe suceder.

El segundo valor $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ de x es negativo; poniendo $-x$ en lugar de x, la ecuacion se convierte en

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d+x)^2},$$

y debiendo representar $d+x$ la distancia del punto B al que se busca, es claro que dicho punto está á la izquierda de A á una distancia AP″ representada por el valor positivo $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$.

CAPÍTULO QUINTO.

ECUACIONES BICUADRADAS.

123. Se llama ecuacion *bicuadrada* toda ecuacion de la forma

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Dividiendo por a todos sus términos, y representando por p y q las fracciones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$, se trasforma en

$$x^4+px^2+q=0.$$

Para resolver esta ecuacion, hagamos $x^2=y$, en cuyo supuesto será $x^4=y^2$, y la ecuacion se convierte en la de segundo grado

$$y^2+py+q=0.$$

Sabemos que

$$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

y como de $x^2 = y$ se deduce $x = \pm \sqrt{y}$, será

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

La incógnita x tiene, segun vemos, los cuatro valores siguientes:

$$\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \quad -\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

$$\sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}. \quad -\sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Si q es cantidad negativa, las dos primeras raices son reales, iguales en valor absoluto, pero una positiva y otra negativa. Las raices tercera y cuarta son imaginarias.

Si $q = 0$, y p es positiva, las dos primeras raices son iguales á cero; pero si $q = 0$, y p es negativa, dichas raices son iguales á $\sqrt{p}$, aunque de signo contrario. La tercera y cuarta son imaginarias en el primer caso y cero en el segundo.

Si q y p son positivas, las cuatro raices son imaginarias; pero si q es positiva y p negativa, serán todas reales, iguales y de signo contrario dos á dos, cuando sea $q < \frac{p^2}{4}$; todas reales, iguales en valor absoluto á $\sqrt{\frac{p}{2}}$, pero dos positivas y dos negativas, cuando sea $q = \frac{p^2}{4}$; y todas imaginarias, cuando sea $q > \frac{p^2}{4}$.

124. En algunos casos, los radicales dobles que se obtienen resolviendo una ecuacion bicuadrada, pueden convertirse en la suma ó diferencia de dos radicales simples.

Propongámonos convertir el radical doble $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ en otra expresion de la forma $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, siendo A y B cantidades racionales.

Sabemos [25] que

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=a+\sqrt{b}+2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}+a-\sqrt{b},$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=a+\sqrt{b}-2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}+a-\sqrt{b};$$

pero es evidente [105] que

$$2\sqrt{a+\sqrt{b}}\,\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{(a+\sqrt{b})\,(a-\sqrt{b})}=2\sqrt{a^2-b};$$

luego $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a+2\sqrt{a^2-b},$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a-2\sqrt{a^2-b}.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros de las igualdades anteriores, será

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

siendo conocida la suma y la diferencia de dos cantidades, tendremos [4, 2.º]

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}+\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}-\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

ó sea $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ [1]

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad [2].$$

Las expresiones equivalentes á $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ y $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, que acabamos de obtener, serán la suma de dos radicales simples, siempre que a^2-b tenga raiz cuadrada exacta; pero si a^2-b no tiene raiz cuadrada exacta, no deberá emplearse la trasformacion expuesta, puesto que en lugar de un radical doble que teníamos, obtendremos la suma de dos radicales dobles tambien.

Ejemplo. Sea la expresion

$$\sqrt{15-2\sqrt{14}}.$$

Introduciendo el factor 2 bajo el segundo radical, se convierte en $\sqrt{15-\sqrt{56}}$.

Ahora, $a^2-b=15^2-56=13^2$ es un cuadrado perfecto, luego podrá trasformarse el radical doble en la diferencia de dos radicales simples.

Aplicando la fórmula [2] se obtiene

$$\sqrt{15-\sqrt{56}}=\sqrt{\frac{15+13}{2}}-\sqrt{\frac{15-13}{2}},$$

ó $$\sqrt{15-\sqrt{56}}=\sqrt{14}-\sqrt{1}=\sqrt{14}-1.$$

CAPÍTULO SEXTO.

EXPRESIONES IMAGINARIAS.

125. Hemos llamado expresiones imaginarias á las raices de grado par de las cantidades negativas. Vamos á ocuparnos de las imaginarias de segundo grado, esto es, de aquellas en las que el índice de la raiz es 2.

Monomio imaginario es el producto de una cantidad real por la raiz cuadrada de una cantidad negativa; por ejemplo

$$(a+b)\sqrt{-5}.$$

126. Las expresiones imaginarias se admiten en el cálculo algebráico, *conviniendo* en aplicarles las reglas dadas para el cálculo de las cantidades reales.

En virtud de este convenio tendremos

$$\sqrt{-A}=\sqrt{A.-1}=\sqrt{A}\ \sqrt{-1};$$

luego *todo monomio imaginario puede reducirse á la forma* $a\sqrt{-1}$, en la que a representa una cantidad real positiva ó negativa, de uno ó muchos términos.

127. *Binomio imaginario* es toda expresion algebráica compuesta de una cantidad real cualquiera, y de un monomio imaginario; por ejemplo

$$a+b\sqrt{-1}.$$

Los binomios imaginarios se consideran siempre reducidos á la forma $a+b\sqrt{-1}$, en la que a y b son cantidades reales cualesquiera. Esto es posible, porque, segun hemos visto, todo monomio imaginario puede adquirir la forma $b\sqrt{-1}$.

128. Teorema. *La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos binomios imaginarios, es en general un binomio imaginario.*

Suma. $(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}.$

Casos particulares. Si $a+c=0$, la suma de los binomios es un monomio imaginario; y si $b+d=0$, dicha suma es la cantidad real $a+c$.

Diferencia. $(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}.$

Casos particulares. Si $a-c=0$, la diferencia es un monomio imaginario; y si $b-d=0$, será la cantidad real $a-c$.

Producto. $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}.$

Casos particulares. Si $ac-bd=0$, el producto es un monomio imaginario; y si $bc+ad=0$, una cantidad real.

Cociente. $$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=$$
$$\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

Casos particulares. Si el término real es cero, el cociente será un monomio imaginario; y si el coeficiente de $\sqrt{-1}$ es cero, dicho cociente es una cantidad real.

129. En virtud de la definicion de potencia, tenemos

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=-1\,.-1=1.$$

Las potencias siguientes de $\sqrt{-1}$, hasta la octava inclusive, se obtendrán multiplicando la cuarta por cada una de las halladas, y como $(\sqrt{-1})^4=1$, es evidente que se reproducirán las cuatro primeras. Lo mismo sucederá al hallar las siguientes hasta el grado 12 inclusive, y así sucesivamente; luego representando por n un número entero cualquiera, será

$$(\sqrt{-1})^{4n}=1,\ (\sqrt{-1})^{4n+1}=\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=-1,\ (\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}.$$

Fórmulas que contienen todas las potencias de $\sqrt{-1}$, pues todo exponente estará comprendido en alguna de las expresiones $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ó $4n+3$.

130. Se llama *módulo* de una expresion imaginaria $a+b\sqrt{-1}$, la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de a y b, esto es, $\sqrt{a^2+b^2}$.

Dos expresiones imaginarias se llaman *conjugadas*, cuando solo se diferencian en el signo del coeficiente de $\sqrt{-1}$.

Tales son $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$.

Es evidente que dos imaginarias conjugadas tienen el mismo módulo $\sqrt{a^2+b^2}$.

131. Teorema. *Si el módulo de una expresion imaginaria es cero, la expresion es igual á cero.*

Sea la expresion imaginaria $a+b\sqrt{-1}$; su módulo será $\sqrt{a^2+b^2}$.

Para que $\sqrt{a^2+b^2}$ sea cero, es necesario que la cantidad subradical sea cero; pero a^2+b^2 es la suma de dos cantidades positivas, puesto que a y b tienen un valor real, luego debe ser $a=0$, $b=0$; por consiguiente $a+b\sqrt{-1}=0$.

132. Teorema recíproco. *Si una expresion imaginaria* $a+b\sqrt{-1}$ *es cero, su módulo es tambien cero.*

Para que $a+b\sqrt{-1}$ sea cero, es necesario que sea $a=0$, $b=0$; luego $\sqrt{a^2+b^2}=0$.

133. Teorema. *El módulo del producto de dos factores imaginarios, es igual al producto de los módulos de dichos factores.*

Hemos visto [128] que

$$(a+b\sqrt{-1})\,(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}.$$

El módulo de este producto es

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}.$$

Poniendo a^2 y b^2 por factores comunes, el módulo del producto será

$$\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)};$$

pero $$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2},$$

y como $\sqrt{a^2+b^2}$ y $\sqrt{c^2+d^2}$ son los módulos de los factores, el teorema es cierto.

134. Teorema. *El módulo del cociente de dos expresiones imaginarias, es igual al cociente de los módulos de dichas expresiones.*

Llamando $a'' + b''\sqrt{-1}$ á la expresion imaginaria que resulta de dividir $a + b\sqrt{-1}$ por $a' + b'\sqrt{-1}$, tendremos

$$a + b\sqrt{-1} = (a' + b'\sqrt{-1})\,(a'' + b''\sqrt{-1}.)$$

Pero, segun el teorema anterior, es

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a'^2 + b'^2}\;\sqrt{a''^2 + b''^2};$$

luego
$$\sqrt{a''^2 + b''^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

igualdad que demuestra el teorema.

135. Teorema. *Un producto de varios factores imaginarios es igual á cero, si uno cualquiera de los factores es igual á cero.*

En efecto: es evidente que el teorema demostrado en el número 133 para un producto de dos factores imaginarios, es igualmente cierto si los factores son mas de dos. Ahora bien, si uno de estos factores es cero, su módulo tambien será cero, luego el producto de los módulos se reducirá á cero; pero el producto de los módulos es el módulo del producto, y siendo este módulo cero, dicho producto tambien es cero.

EJERCICIOS.

I. Extraer las siguientes raices:

$$\sqrt{144a^8b^6},\qquad \sqrt{\frac{4a^6b^4}{9m^2n^{10}}},\qquad \sqrt{a^2-ab+\frac{b^2}{4}}.$$

II. Separar de la cantidad subradical los factores que tengan raiz cuadrada exacta en las expresiones siguientes:

$$\sqrt{\frac{a}{4}}\qquad \sqrt{147a^5b^4c^3d},\qquad \sqrt{x^3+3x^2+3x+1},\qquad \sqrt{\frac{20a^4b^6c^9d}{9m^8n^4}}.$$

III. Introducir bajo el signo radical los factores que están fuera del mismo en las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{5}\sqrt{a},\qquad 3b^2c\sqrt{7abc},\qquad (a-1)\sqrt{a-1},\qquad \frac{\sqrt{3abc}}{5a^2b^3}.$$

IV. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$x^2-8x=-15,\qquad x^4-4x-45=0,$$
$$x^2-3x+9=0,\qquad \frac{3}{x}+1=\frac{x}{5}.$$

V. Resolver las ecuaciones

$$3x^2=17x-10,\qquad 2=15x^2+x.$$
$$\frac{x}{2+5x}=\frac{7}{6x-5},\qquad \frac{36}{2x+3}+3=\frac{111}{3x-8}.$$

VI. Descomponer en factores de primer grado los trinomios siguientes:

$$x^2+x-2,\qquad x^2+(a-2b)x-2ab.$$

VII. Escribir una ecuacion de segundo grado cuyas raices sean 5 y $2a$.

VIII. Una persona quiere repartir 180 reales entre varios pobres: si los pobres fuesen 6 menos, cada uno recibiria un real mas. ¿Cuántos son los pobres?

IX. Los capitales de dos socios importan 6000 duros: el primero de estos se retira de la sociedad á los 15 meses, y recibe 4050 duros entre capital é intereses, el segundo se retira á los 7 meses, recibiendo 2540 duros tambien entre capital é intereses. ¿Cuál es el capital de cada socio?

LIBRO CUARTO.

POTENCIAS Y RAICES DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

POTENCIAS Y RAICES DE LOS MONOMIOS.

I.—Potencias de los monomios.

136. *Para elevar un producto de varios factores á una potencia cualquiera, se eleva cada factor á dicha potencia.*

En efecto:

$$(abc)^m = abc \,.\, abc \ldots\ldots \text{ repetido } m \text{ veces;}$$

pero $$abc \,.\, abc \ldots = aa \ldots bb \ldots cc \ldots,$$

entrando cada letra a, b y c por factor m veces; luego

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

137. *Para elevar una potencia de una cantidad á otra potencia cualquiera, se multiplican los exponentes.*

En efecto: $(a^m)^n = a^m \,.\, a^m \ldots\ldots = a^{m+m+\ldots\ldots}$

entrando m en el exponente por sumando n veces;

luego $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

138. *Para elevar un monomio entero á una potencia cualquiera, se eleva el coeficiente á dicha potencia, y se multiplican los exponentes de las letras por el de la potencia. El resultado será positivo si el exponente de la potencia es par, y llevará el signo del monomio si dicho exponente es impar* [39].

Esta regla es consecuencia inmediata de las anteriores.

Así $(3ab^2c^5)^3 = 27a^3b^6c^{15}$, $(-2a^4b^3c^2)^4 = 16a^{16}b^{12}c^8$,

$$(-5m^2n^4p)^3 = -125m^6n^{12}p^3.$$

139. *Para elevar una fraccion á una potencia cualquiera, se elevan á dicha potencia sus dos términos.*

En efecto: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots = \frac{a \cdot a \ldots}{b \cdot b \ldots}$,

entrando cada letra a y b por factor m veces, luego

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Asi, $$\left(\frac{3a^2b}{5cd^3}\right)^3 = \frac{27a^6b^3}{125c^3d^9}.$$

II.—Raices de los monomios.

140. *Para extraer la raiz de un grado cualquiera de un producto de varios factores, se extrae la raiz del mismo grado de cada factor.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}.$$

En efecto:

$$\left(\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \left(\sqrt[m]{b}\right)^m \left(\sqrt[m]{c}\right)^m = abc.$$

141. *Para extraer la raiz de un grado cualquiera de una potencia, cuando el exponente de ésta es divisible por el índice de la raiz, se efectúa la division del exponente por el índice.*

Decimos que $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{m}} = a^n$.

En efecto: $(a^n)^m = a^{nm}$.

142. *Para extraer la raiz de cualquier grado de un monomio entero, se extrae la raiz del mismo grado del coeficiente, y se divide el exponente de cada letra por el índice de la raiz. El signo del resultado será $\pm$ si la cantidad subradical es positiva y el índice de la raiz es par, y llevará el signo de la cantidad subradical si dicho índice es impar.*

Esta regla es consecuencia de las anteriores.

Así $\sqrt[4]{81a^4b^8c^{12}} = \pm\, 3ab^2c^3$, $\sqrt[3]{216a^9c^6d^3} = 6a^3c^2d$,

$$\sqrt[5]{-32a^{10}b^{15}} = -\,2a^2b^3.$$

143. Para que la raiz de un monomio sea exacta, esto es, para que esta raiz sea una cantidad racional, se necesita: 1.º que el coeficiente tenga raiz exacta; 2.º que los exponentes de las letras sean divisibles por el índice de la raiz. Si falta alguna de estas condiciones, se descompone, si es posible, la cantidad sub-radical en dos factores, tales que uno de ellos tenga raiz exacta, y se extrae la raiz de dicho factor, dejando indicada la del otro.

Así $\sqrt[3]{54a^5b^7c^2} = \sqrt[3]{27a^3b^6} \times \sqrt[3]{2a^2bc^2} = 3ab^2\sqrt[3]{2a^2bc^2}$.

Por el contrario, se introduce un factor bajo el signo radical, elevándole á la potencia indicada por el índice del radical. Así

$$4ab^2c\sqrt[4]{3a^3b^2} = \sqrt[4]{256a^4b^8c^4} \times \sqrt[4]{3a^3b^2} = \sqrt[4]{768a^7b^{10}c^4}.$$

144. *Para extraer la raiz de cualquier grado de una fraccion, se divide la raiz del numerador por la del denominador*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

En efecto:

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b}.$$

Así

$$\sqrt[3]{\frac{8a^6b^3}{27m^9n^3}} = \frac{2a^2b}{3m^3n}, \quad \sqrt{\frac{32a^4bc}{9mn^6}} = \frac{4a^2\sqrt{2bc}}{3n^3\sqrt{m}}.$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

POTENCIAS Y RAICES DE LOS POLINOMIOS.

I.—Permutaciones y combinaciones.

145. *Se llaman* PERMUTACIONES *los grupos que se pueden formar con varias letras ú objetos, tomándolos uno á uno, dos á dos, tres á tres, etc., de modo que dos grupos de igual número de objetos se diferencien en alguno de estos ó en el órden de colocacion.*

Vamos á formar las permutaciones binarias de las letras $a, b, c, d, \ldots\ldots$ Para esto, se escriben á la derecha de cada letra todas las demás, una á una; así tendremos:

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & \ldots\ldots \\ ba, & bc, & bd, & \ldots\ldots \\ ca, & cb, & cd, & \ldots\ldots \\ da, & db, & dc, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}$$

Para formar ahora las permutaciones ternarias, se escribe á la derecha de cada binaria las letras que no entran en ella.

Así resulta

$$\begin{array}{llllll} abc, & abd\ldots. & acb, & acd\ldots. & adb, & adc\ldots. \\ bac, & bad\ldots. & bca, & bcd\ldots. & bda, & bdc\ldots. \\ cab, & cad\ldots. & cba, & cbd\ldots. & cda, & cdb\ldots. \\ dab, & dac\ldots. & dba, & dbc\ldots. & dca, & dcb\ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Las permutaciones cuaternarias se formarian escribiendo á la derecha de cada ternaria las letras que no entran en ella, una á una.

146. PROBLEMA. *Hallar el número de permutaciones que pueden formarse con* m *letras tomadas* n *á* n.

Es evidente que con m letras tomadas una á una se forman m permutaciones.

Si á la derecha de la primera letra se colocan una á una las demás, se formarán $m - 1$ permutaciones de dos letras; igualmente la segunda letra origina otras $m - 1$ permutaciones, y así todas las demás; luego las m letras dadas originan

$$m\,(m - 1)$$

permutaciones binarias.

Si á la derecha de la primera permutacion binaria se escriben una á una las $m-2$ letras que no entran en ella, se formarán $m-2$ permutaciones ternarias; del mismo modo, la segunda permutacion binaria origina otras $m-2$ ternarias, y así todas las demás; luego las $m(m-1)$ permutaciones binarias originan

$$m(m-1)(m-2)$$

permutaciones ternarias.

En general, si á la derecha de la primera permutacion de x letras se colocan una á una las $m-x$ letras que no entran en ella, se formarán $m-x$ permutaciones de $x+1$ letras; igualmente la segunda permutacion de x letras origina otras $m-x$ permutaciones de $x+1$ letras, y así todas las demás; luego representando por P_x el número de permutaciones de m letras tomadas x á x, cuando se tome en cada permutacion una letra mas resultarán $P_x(m-x)$ permutaciones de $x+1$ letras, esto es,

$$P_{x+1}=P_x(m-x).$$

Haciendo en esta fórmula sucesivamente $x=1, =2, =3, \ldots . =n-1$, y recordando que $P_1=m$, tendremos

$$P_2=m(m-1)$$
$$P_3=P_2(m-2)$$
$$P_4=P_3(m-3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n=P_{n-1}(m-n+1).$$

Si ahora multiplicamos ordenadamente estas igualdades, y suprimimos despues los factores comunes á los dos miembros del resultado, tendremos

$$P_n=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.(m-n+1). \qquad [1]$$

Ejemplo. Hallar el número de permutaciones que pueden formarse con 12 letras tomadas 6 á 6.

El primer factor m vale 12, y cada uno de los demás se halla disminuyendo el anterior en una unidad, y el último $m-n+1$ vale $12-6+1=7$; luego

$$P_6=12.11.10.9.8.7=665280.$$

147. Si en la fórmula [1] suponemos $m=n$, el último factor $m-n+1$ se reduce á 1, y será

$$P_m=m(m-1)(m-2)\ldots.. 1,$$

6 $$P_m=1.2.3\ldots..m. \qquad [2]$$

Esta fórmula da el número de permutaciones que se pueden formar con m letras entrando todas ellas en cada permutacion.

Así, el número de permutaciones de 5 letras, tomando todas en cada grupo, es

$$P_5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120.$$

148. *Se llaman* COMBINACIONES *los grupos que se pueden formar con varias letras ú objetos, tomándolos uno á uno, dos á dos, tres á tres, etc., de modo que dos grupos de igual número de objetos se diferencien por lo menos en uno de estos.*

Para formar las combinaciones binarias de las letras a, b, c, d, e....., se escriben á la derecha de cada letra todas las siguientes, una á una.

Así tendremos

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & ae...... \\ & bc, & bd, & be...... \\ & & cd, & ce...... \\ & & & de...... \end{array}$$

. . . .

Para formar las combinaciones ternarias, se escriben á la derecha de cada combinacion binaria las letras que siguen á la última. Así se obtienen

$$\begin{array}{lll} abc, abd, abe...., & acd, ace.... & ade.... \\ & bcd, bce.... & bde.... \\ & & cde.... \end{array}$$

. . . .

Las combinaciones cuaternarias se formarian escribiendo á la derecha de cada ternaria las letras que siguen á la última.

149. PROBLEMA. *Hallar el número de combinaciones que pueden formarse con* m *letras tomadas* n *á* n.

Si suponemos formadas las combinaciones de m letras tomadas dos á dos, cada combinacion, alterando el órden de las letras, dará dos permutaciones; por ejemplo, la combinacion ab dará las permutaciones ab y ba, luego el número de combinaciones binarias es la mitad del número de permutaciones; llamando C_2 al número de aquellas, será

$$C_2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Si se han formado las combinaciones ternarias de m letras, alterando el órden de éstas en cada combinacion de todas las maneras posibles, resultarán, segun la fórmula [2], 1 . 2 . 3 permutaciones; por ejemplo, la combinacion abc origina las permutaciones abc, acb, bac, bca, cab, cba;

luego el número de combinaciones ternarias es igual al de permutaciones dividido por 1 . 2 . 3; así

$$C_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

En general, si suponemos formadas las combinaciones de m letras tomadas n á n, y alteramos de todas las maneras posibles el órden de las n letras que forman una combinacion, se originan

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n$$

permutaciones; luego para hallar el número de combinaciones de m letras n á n, se divide el número de permutaciones de las mismas letras por el producto

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n.$$

Así

$$C_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}. \qquad [3]$$

Ejemplo. Hallar el número de combinaciones que se pueden formar con 10 letras tomadas 4 á 4.

Haciendo $m = 10$, $n = 4$ en la fórmula [3], se obtiene

$$C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

150. TEOREMA. *El número de combinaciones de* m *letras tomadas* n *á* n *es igual al número de combinaciones de las mismas letras tomadas* m — n *á* m — n.

Si de las m letras dadas separamos n, formarán éstas una combinacion de n letras; y las $m - n$ no separadas formarán igualmente otra combinacion de $m - n$ letras.

Supongamos que vuelven á reunirse las m letras: si separamos un grupo que contenga n de ellas, y que se diferencie del separado la primera vez en una letra por lo menos, tendremos una segunda combinacion de n letras, y las no separadas formarán igualmente otra combinacion de $m - n$ letras, distinta de la primera.

Luego á cada combinacion de n letras corresponde otra de $m - n$ letras. De un modo análogo se demostraria que á cada combinacion de $m - n$ letras corresponde otra de n letras; luego el número de combinaciones de m letras es el mismo cuando entran n en cada grupo que cuando entran $m - n$.

Así, el número de combinaciones de 12 letras tomadas 3 á 3, es igual al número de combinaciones de 12 letras tomadas 9 á 9, lo que puede comprobarse por medio de la fórmula [3].

II.—Fórmula del binomio de Newton.

151. Efectuando sucesivamente las multiplicaciones de dos, tres, cuatro etc. factores binomios, cuyos primeros términos son iguales y los segundos diferentes, se obtiene

$$(x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{array}{r}a\\+b\end{array}\right| x+ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{array}{r}a\\+b\\+c\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r}ab\\+ac\\+bc\end{array}\right| x+abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{array}{r}a\\+b\\+c\\+d\\ \\ \end{array}\right| x^3+\left.\begin{array}{r}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\\ \\ \end{array}\right| x+abcd.$$

En la formacion de estos productos se observa la ley siguiente:

El exponente de x *en el primer término es igual al número de factores binomios, y disminuye sucesivamente en una unidad. El coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo, la suma de los segundos términos de los factores; el del tercero, la suma de sus combinaciones binarias; el del cuarto, la suma de las combinaciones ternarias, etc. El último término es el producto de los segundos términos de los binomios.*

Demostremos, ahora, que si la ley enunciada se verifica para m factores binomios, se verificará igualmente para $m+1$.

Representemos el producto de m factores por la expresion

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots.+U,$$

en la que, con objeto de abreviar, se representan por A, B, C,.... U los coeficientes de x, esto es,

$$\begin{array}{l}A=a+b+c+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ B=ab+ac+bc+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C=abc+abd+acd+\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ U=abcd\ldots\ldots\end{array}$$

Multiplicando dicho producto por un factor nuevo $x+p$, se encuentra

$$\begin{array}{l}
x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots. + U \\
x \;+ p \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x^{m+1} + A & x^m + B & x^{m-1} + C & x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots \\
+ p & + Ap & + Bp & + \ldots\; Up.
\end{array}$$

Examinando este producto se reconoce que el exponente de x en el primer término es igual al número de binomios, y que disminuye sucesivamente en una unidad.

El coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo es $A+p$, y como A es la suma de los segundos términos de los m binomios y p el segundo término del binomio nuevo, $A+p$ es la suma de los segundos términos de los $m+1$ binomios.

El coeficiente del tercer término es $B+Ap$, siendo B la suma de las combinaciones binarias de m letras. Pero es evidente que dadas las combinaciones binarias de m letras, se hallarán las combinaciones posibles del mismo órden con una letra mas, agregando á las ya formadas los grupos que resulten poniendo la letra nueva á la derecha de cada una de las primeras; luego

$$B+Ap \quad \text{ó sea} \quad B+(a+b+c+\ldots..)\,p$$

es la suma de las combinaciones binarias de los segundos términos de los $p+1$ binomios.

El coeficiente del cuarto término es $C+Bp$, siendo C la suma de las combinaciones ternarias de m letras; si añadimos una letra mas, originará otras combinaciones ternarias, que podrán formarse colocando la nueva letra p á la derecha de cada combinacion binaria de m letras; luego

$$C+Bp \quad \text{ó sea} \quad C+(ab+ac+bc+\ldots..)\,p$$

es la suma de las combinaciones ternarias de los segundos términos de los $p+1$ binomios.

Este razonamiento puede aplicarse á los demás coeficientes, y se verá que todos obedecen en su formacion á la ley enunciada.

El último término Up se compone de U, producto de los segundos términos de los m binomios, y de p, segundo término del factor nuevo: luego Up es el producto de los segundos términos de los $m+1$ binomios.

Vemos, pues, que si la ley es cierta para m factores binomios, lo es tambien si se toma un factor mas.

Pero sabemos que es cierta para dos, tres y cuatro factores, luego lo será tambien para cinco, y siéndolo para cinco, lo será tambien para seis, y así sucesivamente; luego la ley es cierta para un número cualquiera de factores binomios.

152. Si en un producto de m factores binomios suponemos iguales entre sí los segundos términos, esto es, si hacemos $a = b = c = d$......, el producto indicado

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots..$$

se convierte en

$$(x+a)(x+a)(x+a)\ldots.. = (x+a)^m.$$

En el producto efectuado, el coeficiente del segundo término

$$a+b+c+\ldots\ldots$$

se convierte en

$$a+a+a+\ldots\ldots = ma;$$

el del tercer término

$$ab+ac+bc+\ldots\ldots$$

se convierte en

$$a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots.$$

donde a^2 se repite por sumando tantas veces como combinaciones binarias pueden formarse con m letras, esto es $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$ veces; luego dicho coeficiente será

$$\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,a^2.$$

Del mismo modo se verá que el coeficiente del cuarto término es

$$a^3+a^3+a^3+\ldots\ldots,$$

estando a^3 repetido por sumando $\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ veces; luego dicho coeficiente es

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3.$$

Los demás coeficientes se hallarán del mismo modo.

El último término $abc\ldots..$

se convierte en $aaa\ldots\ldots = a^m$.

Luego el desarrollo de la potencia $(x+a)^m$ será

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2} +$$

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3x^{m-3} + \ldots\ldots + a^m.$$

Tal es la fórmula del binomio de Newton.

153. Puede obtenerse una expresion general que represente todos los términos del desarrollo de $(x + a)^m$, á partir del segundo.

En efecto: obsérvese que el exponente de a en un término dado es el número de términos que preceden á éste, y el de x es igual á m disminuido en el mismo número; por manera que la suma de ambos exponentes es siempre m.

Los factores

$$m, \quad \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}, \quad \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

que preceden á las letras a y x, representan, en un término cualquiera, el número de combinaciones que se pueden formar con m letras, tomando tantas en cada grupo como términos preceden al que se considera.

Llamando $n + 1$ al lugar que ocupa un término, contando desde el primero, dicho término estará precedido por otros n, y será

$$T_{n+1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,......\,(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,......\,n}\,a^n x^{m-n}.$$

Esta expresion, llamada *término general*, da los términos 2.º, 3.º, 4.º etc. del desarrollo de $(x + a)^m$, con solo hacer en ella respectivamente $n = 1, = 2, = 3$ etc.

Por ejemplo, para hallar el 5.º término, haremos $n = 4$, y será

$$T_5 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^4 x^{m-4}.$$

Para hallar el último término, observaremos que el desarrollo tiene $m + 1$ términos, y se hará $n = m$; así el último término será

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,....\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,....\,m}\,a^m x^0;$$

pero el numerador y el denominador de la fraccion son ambos el producto de todos los números enteros desde 1 hasta m, y por tanto iguales, y $x^0 = 1$; luego el último término es a^m, segun sabíamos.

154. Si damos á n el valor $n + 1$, el término general se convierte en

$$T_{n+2} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,....\,(m-n+1)\,(m-n)}{1\,.\,2\,.\,3\,....\,n\,.\,(n+1)}\,a^{n+1} x^{m-n-1}.$$

Comparando las expresiones de T_{n+2} y T_{n+1} se observará esta ley:

Un término del desarrollo de $(x+a)^m$, *se forma multiplicando el anterior por el exponente de* x, *dividiendo el producto por el número que expresa el lugar de este término, aumentando el exponente de* a *en una unidad, y disminuyendo, tambien en una unidad, el de* x.

De este modo se obtiene

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

155. En la práctica, solo es necesario calcular la mitad de los coeficientes de una potencia ó la mitad mas uno, porque *los términos equidistantes de los extremos tienen coeficientes iguales.*

En efecto: supongamos dos términos equidistantes en n lugares del primero y último respectivamente.

El término que dista n lugares del primero ocupa el lugar $n+1$, y tiene por coeficiente el número de combinaciones de m letras tomadas n á n; y el término que dista n lugares del último, dista del primero $m-n$ lugares, luego su coeficiente es el número de combinaciones de m letras tomadas $m-n$ á $m-n$; pero el número de combinaciones de m letras tomadas n á n es igual al número de combinaciones de m letras tomadas $m-n$ á $m-n$; luego los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

Supongamos que se quiere desarrollar la potencia $(x+a)^9$.

Debiendo tener 10 términos este desarrollo, se calculan solamente los coeficientes de los cinco primeros, por la regla del número 154, y se repiten dichos coeficientes en los cinco términos restantes, en órden inverso.

Así $(x+a)^9=x^9+9ax^8+36a^2x^7+84a^3x^6+126a^4x^5+126a^5x^4+$
$84a^6x^3+36a^7x^2+9a^8x+a^9$.

156. Tratemos de hallar el desarrollo de $(x-a)^m$.

Si en la fórmula de Newton cambiamos el signo de a, cambiarán de signo los términos en que esta letra tenga exponente impar, y aquellos en que el exponente sea par no se alterarán;

luego $$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+\ldots.\pm a^m.$$

Obsérvese que los términos son alternativamente positivos y negativos, á partir del primero, que es positivo.

Ejemplo. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$.

III.—Potencias de los polinomios.

157. Todo polinomio $a+b+c+d$ ..... puede considerarse como un binomio, cuyo primer término es a y el segundo la suma $b+c+d$......

Por consiguiente, la fórmula del binomio de Newton sirve para hallar una potencia cualquiera de un polinomio.

Sea la potencia $(a+b+c)^4$.

Considerando á a como primer término de un binomio y á $b+c$ como segundo, y representando la suma $b+c$ por s, será

$$(a+b+c)^4=(a+s)^4;$$

pero $$(a+s)^4=a^4+4a^3s+6a^2s^2+4as^3+s^4;$$

luego, desarrollando las potencias sucesivas de s hasta la cuarta y sustituyendo s, s^2, s^3 y s^4 por sus respectivos desarrollos, se obtendrá la potencia cuarta de $a+b+c$. Así tendremos

$$\begin{aligned} s &= b+c \\ s^2 &= b^2+2bc+c^2 \\ s^3 &= b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \\ s^4 &= b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4; \end{aligned}$$

luego $(a+b+c)^4=a^4+4a^3(b+c)+6a^2(b^2+2bc+c^2)+4a(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$.

ó $(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4b^3a+4b^3c+4c^3a+4c^3b+6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+12a^2bc+12b^2ac+12c^2ab$.

158. En general,

$$(a+b+c+....)^m=(a+s)^m=a^m+ma^{m-1}s+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}s^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}s^3+.....+s^m.$$

Donde vemos que la potencia m de un polinomio depende de varias potencias de otro polinomio s, que tiene un término menos que el propuesto.

Representando s ó $b+c+d+....$ por otro binomio $b+s'$, las potencias de s dependerán de varias potencias de s', polinomio que tiene dos términos menos que el propuesto.

Continuando del mismo modo, la potencia $(a+b+c+...)^m$ llegará á depender solamente de varias potencias de un binomio, que se desarrollarán fácilmente.

IV.—Raices de los números y de los polinomios.

Raices de los números.

159. Los razonamientos que nos condujeron en Aritmética á las reglas de la raiz cuadrada y de la cúbica, se apoyan en la composicion del cuadrado y cubo de un número mayor que 10.

Por medio de la fórmula de Newton, podemos ahora estudiar la composicion de una potencia cualquiera m de un número compuesto de decenas y unidades; por consiguiente nada mas fácil que deducir la regla para extraer la raiz m de un número, mediante razonamientos análogos á los expuestos en las raices cuadrada y cúbica.

Sin embargo, la teoría de logaritmos, que expondremos en el libro siguiente, da un procedimiento general y breve para hallar la raiz de cualquier grado de un número; por tanto nos limitaremos aquí á indicar la posibilidad de hallar reglas especiales para la extraccion de raices de índice mayor que 3.

Raices de los polinomios.

160. Sea un polinomio $A+B+C+D+\ldots\ldots$, y su raiz del grado m, $a+b+c+d+\ldots\ldots$

Supongamos que el polinomio propuesto y su raiz se hallen ordenados por las potencias decrecientes de una misma letra.

Es evidente que

$$A+B+C+D+\ldots.=(a+b+c+d+\ldots.)^m;$$

ó sea [157]

$$A+B+C+D+\ldots.=a^m+ma^{m-1}(b+c+d+\ldots..)+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c+d+\ldots.)^2+\ldots.. \qquad [1]$$

El primer término del desarrollo de esta potencia es a^m [23], puesto que dicha potencia es un producto de m factores ordenados por las potencias de una misma letra; luego

$$A=a^m, \quad \text{de donde} \quad a=\sqrt[m]{A}.$$

Por consiguiente, para hallar el primer término a de la raiz se extrae la raiz del grado m del primer término del polinomio.,

Restando A del primer miembro de la igualdad [1] y a^m del segundo, resulta

$$B+C+D+\ldots\ldots = ma^{m-1}(b+c+d+\ldots\ldots)+$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c+d+\ldots\ldots)^2+\ldots\ldots \qquad [2]$$

Puesto que b contiene la letra ordenatriz con mayor exponente que c, d,.... .. etc., $ma^{m-1}b$ será término anterior á $ma^{m-1}c$, $ma^{m-1}d$...... etc.

Por igual razon, el primer término en cada potencia $(b+c+d+\ldots)^2$, $(b+c+d+\ldots)^3$... etc., será b^2, b^3... etc.

Pero el producto $a^{m-1}b$ contiene la letra ordenatriz con mayor exponente que $a^{m-2}b^2$, puesto que $a^{m-1}b=a^{m-2}ab$, y de los factores distintos ab y b^2, el primero contiene la letra ordenatriz con mayor exponente que el segundo. Del mismo modo es fácil ver que $a^{m-1}b$ contiene mas veces como factor á la letra ordenatriz que $a^{m-3}b^3$...... etc. Luego el primer término del segundo miembro de la igualdad [2] es $a^{m-1}b$, por tanto

$$B=ma^{m-1}b, \quad \text{de donde} \quad b=\frac{B}{ma^{m-1}}.$$

Luego, para hallar el segundo término b de la raiz, se divide el segundo término del polinomio propuesto por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz.

Consideremos el polinomio $a+b+c+d+\ldots.$ como un binomio, cuyo primer término es $a+b$ y el segundo $c+d+\ldots$; y será

$$A+B+C+D+\ldots. = (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots.)+$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}(c+d+\ldots.)^2\ldots.$$

Restando la cantidad $(a+b)^m$ de los dos miembros y representando la diferencia $A+B+C+D+\ldots-(a+b)^m$ por $A'+B'+C'+\ldots\ldots$, será

$$A'+B'+C'+\ldots\ldots = m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots\ldots)+$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}(c+d+\ldots.)^2+\ldots.$$

Ahora se podria demostrar que el primer término del segundo miembro es $ma^{m-1}c$; luego

$$A'=ma^{m-1}c, \quad \text{de donde} \quad c=\frac{A'}{ma^{n-1}}.$$

Por consiguiente, para hallar el tercer término c de la raiz, se resta del polinomio propuesto la potencia $(a+b)^m$, y se divide el primer término del resto por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz.

Considerando, ahora, la raiz como un binomio, cuyo primer término fuese $a+b+c$ y el segundo $d+\ldots$, y repitiendo los razonamientos, se veria que el cuarto término se obtiene dividiendo el primero del resto por ma^{m-1}.

Podemos, por tanto, enunciar la siguiente regla.

Para extraer la raiz del grado m *de un polinomio, se ordena por las potencias de una letra, y extrayendo la raiz del grado* m *del primer término, se obtiene el primer término de la raiz. Se divide el segundo término del polinomio por* m *veces la potencia* m — 1 *del término primero de la raiz, y el cociente será el segundo término de ésta. Se resta del polinomio propuesto la potencia del grado* m *de la raiz hallada, y se divide el primer término del resto por* m *veces la potencia* m — 1 *del primer término de la raiz, lo que da el tercer término de ésta. Se continúa del mismo modo, y cuando se obtenga residuo cero, el polinomio hallado será la raiz del propuesto.*

EJEMPLOS.

1.° Extraer la raiz cuadrada del polinomio

$$9a^2x^6 - 6a^3x^5 + 13a^4x^4 - 4a^5x^3 + 4a^6x^2.$$

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
9a^2x^6 & -6a^3x^5 & +13a^4x^4 & -4a^5x^3 & +4a^6x^2 & 3ax^3 - a^2x^2 + 2a^3x \\ \cline{6-6}
-9a^2x^6 & +6a^3x^5 & -a^4x^4 & & & 6ax^3 \\ \hline
 & & 12a^4x^4 & -4a^5x^3 & +4a^6x^2 & \\
 & & -12a^4x^4 & +4a^5x^3 & -4a^6x^2 & \\ \hline
 & & & 0 & &
\end{array}$$

El primer término de la raiz es $\sqrt{9a^2x^6} = 3ax^3$. El segundo se halla dividiendo $-6a^3x^5$ por *dos* veces la *primera* potencia de $3ax^3$; será pues $-6a^3x^5 : 6ax^3 = -a^2x^2$.

Elevando $3ax^3 - a^2x^2$ al cuadrado y restando el resultado del polinomio propuesto, el primer término del resto es $12a^4x^4$; luego el tercero de la raiz será $12a^4x^4 : 6ax^3 = 2a^3x$.

Ahora hay que restar del polinomio dado el cuadrado de la raiz hallada; pero ésta puede considerarse como un binomio, cuyo primer término es $3ax^3 - a^2x^2$ y el segundo $2a^3x$, y como ya se ha restado el cuadrado de $3ax^3 - a^2x^2$, solo falta restar la expresion

$$2(3ax^3 - a^2x^2)\, 2a^3x + (2a^3x)^2 = 12a^4x^4 - 4a^5x^3 + 4a^6x^2,$$

lo que da residuo cero; luego la raiz del polinomio dado es

$$3ax^3 - a^2x^2 + 2a^3x.$$

2.° Extraer la raiz cúbica del polinomio

$$6ax^8 - 4a^3x^6 + a^6x^3 - x^9 + 9a^4x^5 - 9a^2x^7 + 6a^5x^4.$$

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{r|l}
a^6x^3+6a^5x^4+\ 9a^4x^5-\ 4a^3x^6-9a^2x^7+6ax^8-x^9 & a^2x+2ax^2-x^3 \\
\cline{2-2}
-a^6x^3-6a^5x^4-12a^4x^5-\ 8a^3x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad & 3a^4x^2 \\
\hline
-3a^4x^5-12a^3x^6-9a^2x^7+6ax^8-x^9 & \\
3a^4x^5+12a^3x^6+9a^2x^7-6ax^8+x^9 & \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

El primer término de la raiz es $\sqrt[3]{a^6x^3} = a^2x$. El segundo se halla dividiendo $6a^5x^4$ por *tres* veces la *segunda* potencia de a^2x; será pues $6a^5x^4 : 3a^4x^2 = 2ax^2$.

Elevando $a^2x + 2ax^2$ al cubo y restando el resultado del polinomio propuesto, el primer término del resto es $-3a^4x^5$; luego el tercero de la raiz será

$$-3a^4x^5 : 3a^4x^2 = -x^3.$$

Ahora hay que restar del polinomio dado el cubo de la raiz hallada; pero ésta puede considerarse como un binomio

$$(a^2x + 2ax^2) - x^3,$$

y como ya se ha restado el cubo del primer término, solo falta restar la expresion

$$-3(a^2x + 2ax^2)^2 .\, x^3 + 3(a^2x + 2ax^2) .\, x^6 - x^9 =$$
$$-3a^4x^5 - 12a^3x^6 - 9a^2x^7 + 6ax^8 - x^9,$$

lo que da residuo cero; luego la raiz pedida es

$$a^2x + 2ax^2 - x^3.$$

161. Escolio. Un polinomio ordenado no tiene raiz exacta del grado m: 1.° si el primer término ó el último no tiene raiz exacta; 2.° si el segundo término no es divisible por m veces la potencia $m-1$ del primer término de la raiz; 3.° si el primer término de un resto no es divisible por dicha cantidad.

CAPÍTULO TERCERO.

CÁLCULO DE LOS VALORES ARITMÉTICOS DE LAS CANTIDADES RADICALES.—EXPONENTES FRACCIONARIOS Y NEGATIVOS.

I.—Cálculo de los valores aritméticos de las cantidades radicales.

162. Si convenimos en llamar raiz del grado m de una cantidad á toda expresion, positiva ó negativa, que elevada á la potencia m reproduzca la cantidad propuesta, las raices de grado par de una cantidad positiva tienen, segun sabemos, dos valores iguales y de signo contrario; pero si además consideramos como raices las expresiones imaginarias que elevadas á la potencia m reproducen una cantidad dada, se demuestra en Álgebra superior que un número a admite tantas raices del grado m como unidades tiene el índice.

Se llama VALOR ARITMÉTICO *de un radical al valor real absoluto de la raiz de una cantidad positiva.*

Vamos á ocuparnos solamente del cálculo de los valores aritméticos de los radicales.

163. *Se llaman* RADICALES SEMEJANTES, *los que tienen el mismo índice é igual cantidad subradical.*

Así $\quad 3ab\sqrt[3]{2a^2b},\quad 2b^3\sqrt[3]{2a^2b},\quad -a\sqrt[3]{2a^2b}$

son radicales semejantes.

Tambien lo son

$$a\sqrt{4ab},\quad 3\sqrt{a^5b},\quad \sqrt{ab^3},$$

porque extrayendo la raiz cuadrada de los factores que la tienen exacta, se convierten los radicales propuestos en estos otros

$$2a\sqrt{ab},\quad 3a^2\sqrt{ab},\quad b\sqrt{ab}.$$

164. TEOREMA. *Una cantidad radical no se altera multiplicando el índice por un número entero, con tal que se eleve la*

cantidad subradical á la potencia indicada por dicho número entero.

En efecto: es evidente que

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a;$$

elevando los dos miembros de esta igualdad á la potencia n, será [137]

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n;$$

extrayendo la raiz del grado mn, es claro que el primer miembro, que es la potencia mn de $\sqrt[m]{a}$, se convierte en $\sqrt[m]{a}$; luego

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n},$$

igualdad que demuestra el teorema.

165. Una aplicacion importante de este teorema es la reduccion de radicales que tienen diferente índice á otros equivalentes de índice comun.

Para reducir radicales á un índice comun, se halla el mínimo comun múltiplo de los índices, y éste será el índice comun. Despues se eleva cada cantidad subradical á la potencia indicada por el factor que falta á su índice respectivo para valer el índice comun.

Ejemplo. Sean los radicales

$$\sqrt[6]{3ab}, \quad \sqrt[3]{2a^2b}, \quad \sqrt[4]{a^3}.$$

El índice comun es 12, y los factores que faltan á cada uno de los índices para valer 12 son respectivamente 2, 4, 3; por lo tanto las cantidades subradicales se elevarán á las potencias 2.ª, 4.ª y 3.ª. Así tendremos

$$\sqrt[12]{9a^2b^2}, \quad \sqrt[12]{16a^8b^4}, \quad \sqrt[12]{a^9}.$$

166. *Si los índices no tienen factores primos comunes, para reducir los radicales á un índice comun se multiplica cada índice por el producto de todos los demás, y se eleva la cantidad subradical á la potencia indicada por dicho producto.*

Ejemplo. Sean los radicales

$$\sqrt[3]{a} \quad \sqrt{b} \quad \sqrt[5]{a^2b^3}.$$

Aplicando la regla anterior, se obtendrá

$$\sqrt[30]{a^{10}}, \quad \sqrt[30]{b^{15}}, \quad \sqrt[30]{a^{12}b^{18}}.$$

167. Teorema. *Una cantidad radical no se altera dividiendo el índice por uno de sus factores, con tal que se extraiga de la cantidad subradical una raiz del grado que indique dicho factor.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^p}.$$

En efecto: $$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^m = a^p;$$

elevando ambos miembros de esta igualdad á la potencia n será

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^{mn} = a^{pn};$$

esta igualdad manifiesta que $\sqrt[m]{a^p}$ es la raiz del grado mn de a^{pn}, esto es, que

$$\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^p},$$

lo cual debíamos demostrar.

En virtud de este teorema, siempre que el índice de un radical sea divisible por un número entero, y se pueda extraer de la cantidad subradical la raiz del grado que indica este número, se simplificará el radical efectuando la division del índice y extrayendo la raiz de la cantidad subradical.

De este modo los radicales

$$\sqrt[6]{16a^8b^4}, \quad \sqrt[12]{a^8b^4},$$

se convierten en $$\sqrt[3]{4a^4b^2}, \quad \sqrt[3]{a^2b}.$$

Operaciones con las cantidades radicales.

168. *Las cantidades radicales se suman y restan como las racionales. Si el resultado presenta términos semejantes se efectúa la reduccion de ellos.*

Ejemplos.

1.° $\left(3a^2\sqrt[3]{ab}\right) + \left(-5a^2\sqrt[3]{ab}\right) = 3a^2\sqrt[3]{ab} - 5a^2\sqrt[3]{ab} = -2a^2\sqrt[3]{ab}.$

2.° $\left(7\sqrt[4]{a^3b}\right) - \left(5\sqrt[4]{a^3b}\right) = 7\sqrt[4]{a^3b} - 5\sqrt[4]{a^3b} = 2\sqrt[4]{a^3b}.$

169. *Para multiplicar cantidades radicales que tienen igual índice, se multiplican las cantidades subradicales, y el producto se escribe bajo un radical del mismo índice.*

Si los radicales tienen índices diferentes, se reducen á un índice comun y se efectúa despues la multiplicacion del modo dicho.

En efecto: hemos demostrado [140] la igualdad

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c},$$

ó sea

$$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}.$$

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[5]{2ab}\ .\ 3\sqrt[5]{6a^2}\ .\ 6\sqrt[5]{ab^2} = 18\sqrt[5]{12a^4b^3}.$

2.° $\sqrt{ab}\ .\ 3\sqrt[3]{a^2b}\ .\ 2\sqrt[4]{2ab^3} = \sqrt[12]{a^6b^6}\ .\ 3\sqrt[12]{a^8b^4}.\ 2\sqrt[12]{8a^3b^9} = 6\sqrt[12]{8a^{17}b^{19}}.$

170. *Para dividir dos cantidades radicales que tienen igual índice, se dividen las cantidades subradicales, y el cociente se escribe bajo un radical del mismo índice.*

Si los radicales tienen índices diferentes, se reducen á un índice comun, y se efectúa despues la division del modo dicho.

En efecto: hemos demostrado [144] la igualdad

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

EJEMPLOS.

1.° $$\frac{\sqrt[4]{3a^2b^2}}{\sqrt[4]{5a^4b}} = \sqrt[4]{\frac{3a^2b^2}{5a^4b}} = \sqrt[4]{\frac{3b}{5a^2}}.$$

2.° $$\frac{\sqrt[3]{7a^2b^2}}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt[6]{49a^4b^4}}{\sqrt[6]{8a^3}} = \sqrt[6]{\frac{49a^4b^4}{8a^3}} = \sqrt[6]{\frac{49ab^4}{8}}.$$

171. *Para elevar una cantidad radical á una potencia, se eleva á dicha potencia la cantidad subradical.*

Vamos á demostrar que

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

En efecto:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a}\ \ldots. = \sqrt[m]{a\,.\,a\,.\,a\ldots.} = \sqrt[m]{a^n}.$$

EJEMPLOS.

1.° $$\left(\sqrt[5]{6ab^2c}\right)^2 = \sqrt[5]{36a^2b^4c^2}.$$

2.° $$\left(\sqrt[8]{3a^2b}\right)^4 = \sqrt[8]{3^4a^8b^4} = \sqrt{3a^2b}.$$

Si el índice de la raiz es divisible por el exponente de la potencia, *se obtendrá un resultado mas sencillo dividiendo el índice por el exponente, sin alterar la cantidad subradical.*

En efecto: $$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

Aplicando esta regla al segundo de los ejemplos anteriores, se obtiene inmediatamente

$$\left(\sqrt[8]{3a^2b}\right)^4 = \sqrt{3a^2b}.$$

172. *Para extraer la raiz de un grado cualquiera de una cantidad radical, se multiplican los índices de las dos raices.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

En efecto: $$\left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}. \qquad [171];$$

luego $\sqrt[nm]{a}$ es la raiz del grado n de $\sqrt[m]{a}$.

EJEMPLOS.

1.° $$\sqrt{\sqrt[3]{5a^2b}} = \sqrt[6]{5a^2b}.$$

2.° $$\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^6b^3}} = \sqrt[15]{8a^6b^3} = \sqrt[5]{2a^2b} \qquad [167].$$

Si la cantidad subradical es una potencia exacta del mismo grado que la raiz pedida, *se obtendrá un resultado mas sencillo extrayendo esta raiz de la cantidad subradical, sin alterar el índice.*

En efecto: $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

Aplicando esta regla al segundo de los ejemplos anteriores, se obtiene inmediatamente

$$\sqrt{\sqrt[5]{8a^6b^3}} = \sqrt[5]{2a^2b}.$$

173. Acabamos de ver que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

luego $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$, $\sqrt[8]{a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$, etc.

Por consiguiente, *para extraer de una cantidad una raiz cuyo índice es un número compuesto, se extraen sucesivamente las raices que indican los factores simples de dicho índice.*

Si estos factores son el 2 y el 3, solo habrá que extraer raices cuadradas y cúbicas.

Ejemplo. $\sqrt[6]{191102976} = \sqrt[3]{\sqrt{191102976}} = \sqrt[3]{13824} = 24.$

II.—Exponentes fraccionarios y negativos.

174. Supongamos que se trate de extraer la raiz del grado n de una potencia a^m. Ya hemos visto [141] que en el caso de ser m divisible por n, la raiz pedida es $a^{\frac{m}{n}}$, expresion que nada tiene de singular, puesto que $\frac{m}{n}$ es un número entero.

Pero si aplicamos la regla citada al caso en que m no sea múltiplo de n, la expresion $a^{\frac{m}{n}}$ carecerá de sentido, porque la definicion de potencia exige que todo exponente sea entero y positivo.

Sin embargo, los exponentes fraccionarios se emplean ventajosamente en Álgebra, mediante el siguiente convenio:

Toda cantidad con exponente fraccionario representa la raiz, cuyo índice es el denominador de la fraccion, de una potencia de la misma cantidad, cuyo exponente es el numerador.

Así, las expresiones $\sqrt[n]{a^m}$ y $a^{\frac{m}{n}}$ representan una misma cantidad, á saber: la que se obtendria elevando a á la potencia del grado m, y extrayendo despues la raiz del grado n de dicha potencia; por consiguiente una cualquiera de estas expresiones puede sustituirse por la otra, siempre que convenga; y la regla dada para extraer la raiz de una potencia, puede hacerse extensiva al caso en que el exponente de la potencia no sea divisible por el índice de la raiz.

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[5]{a^3}=a^{\frac{3}{5}}$, 2.° $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, 3.° $a^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{a}$, 4.° $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

175. Supongamos que se trata de efectuar la division de a^m por a^n.

El cociente es a^{m-n} [27].

Pero si n es mayor que m, por ejemplo

$$n=m+p,$$

la sustraccion de los exponentes da orígen á esta expresion

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-m-p}=a^{-p}.$$

Observemos además que siendo $n=m+p$, será

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m\times a^p}=\frac{1}{a^p}.$$

Estos dos resultados de una misma division, conducen á admitir convencionalmente la igualdad

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p},$$

que en lenguaje vulgar significa:

Toda cantidad con exponente negativo representa una fraccion, que tiene por numerador la unidad y por denominador la misma cantidad con el exponente hecho positivo.

Por lo tanto, las expresiones a^{-p} y $\frac{1}{a^p}$ serán consideradas como equivalentes, pudiéndose sustituir cualquiera de ellas por la otra; y la regla dada para dividir dos potencias de una misma cantidad se hace extensiva al caso en que el exponente del dividendo sea menor que el del divisor.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{a^3}{a^5}=a^{-2}$, 2.° $\frac{1}{a}=a^{-1}$,

3.° $a^{-5}=\frac{1}{a^5}$.

176. Por medio de los exponentes fraccionarios y negativos, puede darse forma entera á las expresiones irracionales y á las fraccionarias.

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^2}\ \sqrt[3]{b} = a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}.$

2.° $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c} = a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}\, c^{\frac{1}{2}}.$

3.° $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} = ab^{-1}.$

4.° $\frac{3a^2b}{c^2d^3} = 3a^2b \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d^3} = 3a^2bc^{-2}d^{-3}.$

Las raices inexactas de las fracciones pueden igualmente recibir forma entera, si admitimos los exponentes fraccionarios negativos.

Así,
$$\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{3a^2}{5b^3}} = \sqrt[5]{3a^2 \,.\, 5^{-1} b^{-3}} = 3^{\frac{1}{5}} \,.\, 5^{-\frac{1}{5}}\, a^{\frac{2}{5}}\, b^{-\frac{3}{5}}.$$

177. *Para multiplicar potencias cualesquiera de una misma cantidad, se suman los exponentes.*

Vamos á demostrar que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}.$$

En efecto:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{\frac{1}{a^{pn}}} =$$

$$\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}.$$

178. *Para dividir potencias cualesquiera de una misma cantidad, se restan los exponentes.*

Demostremos que

$$a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

En efecto: multiplicando el segundo miembro de esta igualdad por el divisor $a^{\frac{p}{q}}$, tendremos

$$a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}},$$

que es el dividendo; luego $a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ es el cociente.

179. *Para elevar una potencia de una cantidad á otra potencia cualquiera, se multiplican los exponentes.*

En efecto:

$$(a^p)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a^p)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{pm}}} = \frac{1}{a^{\frac{pm}{n}}} = a^{-\frac{pm}{n}}.$$

180. *Para extraer una raiz de una potencia cualquiera, se divide el exponente de la potencia por el índice de la raiz.*

En efecto:

$$\sqrt[p]{a^{-\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \sqrt[pn]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[pn]{1}}{\sqrt[pn]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{pn}}} = a^{-\frac{m}{pn}}.$$

181. Trasformando las cantidades radicales y fraccionarias en otras de forma entera, podemos ahora efectuar el cálculo de toda clase de cantidades por las reglas dadas para las enteras.

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[6]{a^5} \times \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{5}{6}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{a^{19}}.$

2.° $\frac{3a^2}{b} : \sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}} = 3a^2b^{-1} : a^{\frac{2}{5}} b^{-\frac{3}{5}} = 3a^{\frac{8}{5}} b^{-\frac{2}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{a^8}{b^2}}.$

EJERCICIOS.

I. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con las cinco primeras significativas, sin que ninguna de ellas se repita en el mismo número?

II. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 12 personas al rededor de una mesa?

III. ¿Cuántos productos diferentes de tres factores pueden formarse con las cantidades a, b, c, d?

IV. ¿De cuántos modos pueden distribuirse 30 bolas diferentes en grupos de 7 y de 23 bolas?

V. Hallar la diferencia siguiente

$$(a+b)^m-(a-b)^m.$$

VI. Hallar el término octavo del desarrollo de

$$(a+x)^{12}.$$

VII. Hallar el término medio del desarrollo de

$$(a+b)^8.$$

VIII. Extraer la raiz cuadrada del polinomio

$$a^2+b^2+4c^2-2ab+4ac-4bc.$$

IX. Extraer la raiz cúbica del polinomio

$$a^9-6a^8b+12a^7b^2-5a^6b^3-12a^5b^4+12a^4b^5+3a^3b^6-6a^2b^7+b^9.$$

X. Efectuar las siguientes multiplicaciones

$$(3+\sqrt{2}+7\sqrt[3]{9})(\sqrt[4]{6}+\sqrt{5})$$

$$(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[8]{b^3})(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[8]{b^3}).$$

XI. Efectuar las divisiones siguientes

$$3\sqrt{5ab}:2\sqrt{4ab^2},\qquad \sqrt[4]{a^3b^2}:\sqrt[12]{2ab^3},$$

$$\frac{a\sqrt[6]{a}+2a\sqrt[3]{b}-3a\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt{a}+2\sqrt[3]{ab}-3\sqrt[4]{a^3}.$$

XII. Trasformar la expresion

$$\left(\frac{a^2b}{(c+d)^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

en otra cuyos exponentes sean enteros y positivos.

LIBRO QUINTO.

PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PROGRESIONES.

I.—Progresiones por diferencia.

182. PROGRESION POR DIFERENCIA ó ARITMÉTICA *es una série de números tales que restando de cada uno de ellos el anterior, se obtiene siempre la misma diferencia.*

Esta diferencia constante se llama *razon* de la progresion.

Si los números ó términos van aumentando, la progresion se llama *creciente;* en este caso la razon es una cantidad positiva. Si los términos van disminuyendo, la progresion se llama *decreciente*, y la razon es una cantidad negativa.

Las progresiones aritméticas se escriben del modo siguiente:

$$\div 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \ldots\ldots$$

El punto que separa dos términos consecutivos, se lee *es á.*

La anterior progresion es creciente, y su razon es 2; por el contrario

$$\div 25 \,.\, 22 \,.\, 19 \,.\, 16 \,.\, 13 \ldots\ldots$$

es decreciente, y la razon es -3.

183. Sea la progresion

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots\ldots$$

Si llamamos r á la razon, pudiendo ser r positiva ó negativa, deduciremos fácilmente de la definicion las igualdades

$$b = a + r, \qquad c = b + r.$$

Sustituyendo, en la segunda, la cantidad b por su igual $a+r$, tendremos

$$c=a+r+r=a+2r.$$

Del mismo modo se halla

$$d=c+r=a+2r+r=a+3r \quad \text{etc.}$$

De las igualdades

$$b=a+r, \qquad c=a+2r, \qquad d=a+3r,$$

se deduce que *un término de una progresion aritmética es igual al primero, mas tantas veces la razon como términos preceden al que se considera.*

Si llamamos t_n al término que ocupa en la progresion el lugar n, es claro que estará precedido de $n-1$ términos, y será

$$t_n=a+(n-1)r \qquad [1].$$

Considerando la razon r como incógnita y las demás cantidades, que entran en la fórmula anterior, como datos, se obtiene

$$r=\frac{t_n-a}{n-1} \qquad [2].$$

Luego *la razon de una progresion aritmética se obtiene restando el primer término de un término dado, y dividiendo la diferencia por el número de términos que preceden al dado.*

La fórmula [1] da tambien el valor del primer término, pues despejando a se obtiene

$$a=t_n-(n-1)r.$$

Igualmente, despejando n, resulta

$$n=1+\frac{t_n-a}{r}.$$

EJEMPLOS.

1.° *Hallar el octavo término de una progresion, siendo el primer término* 5 *y la razon* 3.

$$t_8=5+(8-1)3=26.$$

2.° *Hallar la razon de una progresion, que empieza por* 5, *siendo* 26 *el octavo término.*

$$r=\frac{26-5}{8-1}=3.$$

3.° *Determinar el primer término de una progresion cuya razon es 3, siendo 26 el término octavo.*

$$a = 26 - (8 - 1)\,3 = 5.$$

4.° *¿Cuántos términos tiene la progresion*

$$\div 5\,.\,8\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,26?$$

$$n = 1 + \frac{26 - 5}{3} = 8.$$

184. INTERPOLAR MEDIOS DIFERENCIALES *entre dos números dados, es formar una progresion aritmética cuyos extremos sean dichos números.*

Tratemos de interpolar m medios diferenciales entre los números p y q.

Si conociésemos la razon, que llamarémos r, de la progresion que deseamos formar, el problema estaria resuelto: pues añadiendo al primer término p la razon, obtendríamos el segundo, añadiendo á éste la razon, resultaria el tercero y así sucesivamente, hasta que llegásemos al término q.

Haciendo en la fórmula [2] del número anterior $a = p$, $t_n = q$, $n = m + 2$, resulta

$$r = \frac{q - p}{m + 1} \qquad [3].$$

Luego cuando se quiera interpolar un número dado de medios diferenciales entre dos números, *se hallará la razon dividiendo la diferencia de los números dados por el número de medios que se han de interpolar mas uno.*

EJEMPLO.

Interpolar 6 *medios diferenciales entre* 2 *y* 30.

$$r = \frac{30 - 2}{6 + 1} = 4;$$

luego la progresion es

$$\div 2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\,.\,22\,.\,26\,.\,30.$$

185. TEOREMA. *Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por diferencia se interpola igual número de medios diferenciales, resulta otra progresion por diferencia.*

En efecto: la interpolacion mencionada origina una série de progresiones parciales cuya razon es la misma; puesto que al determinar los valores de r por medio de la fórmula [3], hallaremos siempre para numerador la razon de la progresion dada, y para denominador el número constante de medios que se interpolan aumentado en una unidad. Además el último término de una progresion parcial es el primero de la siguiente; luego todas las progresiones parciales forman una sola progresion.

186. Teorema. *En toda progresion por diferencia, la suma de dos términos equidistantes de los extremos, es igual á la suma de dichos extremos.*

Sea la progresion

$$\div a \ldots\ldots p \ldots\ldots q \ldots\ldots u.$$

Suponemos que entre a y p hay n términos y otros n entre q y u, y queremos demostrar que

$$p+q=a+u.$$

En efecto: sabemos [183] que

$$p=a+r\,(n+1)$$
$$u=q+r\,(n+1);$$

restando estas igualdades resulta

$$p-u=a-q;$$

trasponiendo los términos u y q, tendremos por último

$$p+q=a+u.$$

Escolio. Si el número de términos de una progresion es impar, el término medio equidista de los extremos, y la demostracion anterior patentiza que la suma de los extremos es igual al duplo del término medio.

187. Problema. *Hallar la suma de los términos de una progresion por diferencia.*

Sea la progresion

$$\div a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots m \,.\, p \,.\, u.$$

Designando por S la suma de todos sus términos, tendremos

$$S=a+b+c+\ldots\ldots+m+p+u.$$
$$S=u+p+m+\ldots\ldots+c+b+a.$$

Sumando estas igualdades, se obtiene

$$2S=(a+u)+(b+p)+(c+m)+\ldots.+(m+c)+(p+b)+(u+a);$$

pero las sumas $a+u$, $b+p$, $c+m$ etc. son iguales todas á

$a+u$ [186], y hay tantas como términos tiene la progresion dada; por consiguiente, si designamos por n el número de términos, será

$$2S=(a+u)\,n,$$

de donde

$$S=\frac{(a+u)\,n}{2}.$$

Esta fórmula manifiesta que

La suma de los términos de una progresion por diferencia es igual á la mitad del producto que se obtiene multiplicando la suma de los extremos por el número de términos.

EJEMPLOS.

1.° *Calcular la suma de los* 15 *primeros términos de la progresion.*

$$\div 3\,.\,6\,.\,9\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

El último término será $3+14\,.\,3=45$; luego

$$S=\frac{(3+45)\,15}{2}=360.$$

2.° *Calcular la suma de los términos de la progresion*

$$\div 4\,.\,11\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,60.$$

El número de términos será $1+\dfrac{60-4}{7}=9$; luego

$$S=\frac{(4+60)\,.\,9}{2}=288.$$

3.° *Calcular la suma de los* n *primeros números impares.*

El último término de la progresion

$$\div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

es

$$1+2\,(n-1)=2n-1;$$

luego

$$S=\frac{2n^2}{2}=n^2.$$

Este resultado manifiesta que *la suma de los* n *primeros números impares es igual al cuadrado del número de estos términos.*

II.—Progresiones por cociente.

188. PROGRESION POR COCIENTE ó GEOMÉTRICA *es una série de*

números tales que dividiendo cada uno de ellos por el anterior, se obtiene siempre el mismo cociente.

Este cociente constante se llama *razon* de la progresion.

Si los términos van aumentando, la progresion se llama *creciente;* en este caso la razon es mayor que la unidad. Si los términos van disminuyendo, la progresion se llama *decreciente,* y la razon es menor que uno.

Las progresiones geométricas se escriben del modo siguiente:

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : \ldots\ldots.$$

El signo (:) que separa dos términos consecutivos se lee *es á.*

La anterior progresion es creciente, y su razon es 2; por el contrario

$$\div 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2 : \frac{2}{3} : \ldots..$$

es una progresion decreciente, cuya razon es $\frac{1}{3}$.

189. Sea la progresion

$$\div a : b : c : d : \ldots\ldots.$$

Si llamamos q á la razon, tendremos

$$b = aq, \qquad c = bq.$$

Sustituyendo, en la segunda igualdad, el término b por su igual aq, será

$$c = aq \times q = aq^2.$$

Del mismo modo se halla

$$d = cq = aq^2 \times q = aq^3 \text{ etc.}$$

De las igualdades

$$b = aq, \qquad c = aq^2, \qquad d = aq^3,$$

se deduce que *un término de una progresion geométrica es igual al primero multiplicado por una potencia de la razon, cuyo exponente es el número de términos que preceden al que se considera.*

Si llamamos t_n al término que ocupa en la progresion el lugar n, es claro que estará precedido de $n - 1$ términos, y será

$$t_n = aq^{n-1} \qquad [1].$$

Si en esta fórmula consideramos la razon como incógnita, y las demás cantidades como conocidas, obtendremos despejando q

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{a}} \qquad [2].$$

Luego, *la razon de una progresion geométrica se obtiene dividiendo un término dado por el primero, y extrayendo del cociente una raiz cuyo índice es el número de términos que preceden al dado.*

La fórmula [1] da tambien el valor del primer término, pues despejando a se obtiene

$$a = \frac{l_n}{q^{n-1}}.$$

EJEMPLOS.

1.° *Hallar el octavo término de una progresion, siendo el primer término 5 y la razon 3.*

$$t_8 = 5 \times 3^7 = 10935.$$

2.° *Hallar la razon de una progresion geométrica que empieza por 3, siendo 768 el término noveno.*

$$q = \sqrt[8]{\frac{768}{3}} \quad \text{ó} \quad q = \sqrt[8]{256}.$$

Extrayendo tres raices cuadradas sucesivas del número 256 se obtiene $q = 2$.

3.° *Determinar el primer término de una progresion geométrica cuya razon es $\frac{1}{3}$, siendo $\frac{2}{9}$ el término octavo.*

$$a = \frac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{1}{3}\right)^7} = 486.$$

190. INTERPOLAR MEDIOS PROPORCIONALES *entre dos números dados, es formar una progresion geométrica cuyos extremos sean dichos números.*

Tratemos de interpolar m medios proporcionales entre los números p y q.

Si conociésemos la razon x de la progresion, el problema no ofreceria dificultad, pues siendo p el primer término, el segundo seria px, el tercero px^2 etc.

Haciendo en la fórmula [2] del número anterior $a = p$, $t_n = q$ $n = m + 2$, resulta

$$x = \sqrt[m+1]{\frac{q}{p}} \qquad [3].$$

Luego cuando se quiera interpolar un número dado de medios proporcionales entre dos números, *se hallará la razon extrayendo del cociente de los números dados una raiz cuyo índice sea el número de medios proporcionales aumentado en una unidad.*

EJEMPLO.

Interpolar 5 medios proporcionales entre 4 y 256.

$$x = \sqrt[6]{\frac{256}{4}}, \quad ó \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2;$$

luego la progresion es

$$\div 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.$$

191. TEOREMA. *Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por cociente se interpola igual número de medios proporcionales, resulta otra progresion por cociente.*

En efecto: la interpolacion mencionada origina una série de progresiones parciales, que tienen todas la misma razon, puesto que al determinar los valores de x por medio de la fórmula [3], hallaremos siempre para cantidad subradical la razon de la progresion dada, y para índice el número constante de medios que se interpolan aumentado en una unidad. Además el último término de una progresion parcial es el primero de la siguiente; luego todas las progresiones parciales forman una sola progresion.

192. PROBLEMA. *Hallar la suma de los términos de una progresion por cociente.*

Sea la progresion

$$\div a : b : c : d : \ldots\ldots\ldots : u.$$

Designando por S la suma de sus términos, tendremos

$$S = a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots + u \qquad [4].$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la razon q de la progresion, y teniendo presente que el producto de un término por la razon es el término siguiente, será

$$Sq = b + c + d + \dots\dots\dots + u + uq \qquad [5].$$

Restando de esta igualdad la anterior, tendremos

$$Sq - S = uq - a, \quad \text{ó} \quad S(q-1) = uq - a,$$

de donde
$$S = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

Esta fórmula manifiesta que

La suma de los términos de una progresion por cociente es igual á la diferencia entre el último término multiplicado por la razon, y el primer término, partida por el exceso de la razon sobre la unidad.

Si la progresion es decreciente, los dos términos del valor de S serán negativos; por consiguiente el cociente es positivo.

Si queremos que dichos términos sean siempre positivos deberemos restar la igualdad [5] de la [4], cuando la progresion sea decreciente, y la suma será

$$S = \frac{a - uq}{1 - q}.$$

EJEMPLOS.

1.º *Calcular la suma de los* 6 *primeros términos de la progresion*

$$\div 1 : 4 : 16 \dots\dots$$

El último término será $4^5 = 1024$; luego

$$S = \frac{1024 \,.\, 4 - 1}{4 - 1} = 1365.$$

2.º *Calcular la suma de los* 5 *primeros términos de la progresion*

$$\div 128 : 64 : 32 \dots\dots\dots$$

El último término será $128 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8$;

luego
$$S = \frac{128 - 8 \,.\, \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 248.$$

193. Teorema. *Las potencias, enteras y positivas, de un número mayor que la unidad, crecen, si crece el exponente, y pueden adquirir un valor tan grande como se quiera.*

Sea n un número mayor que 1.

Si consideramos dos potencias sucesivas n^p, n^{p+1}, sabemos que la segunda es igual á $n^p \times n$; pero siendo el multiplicador n mayor que 1, el producto n^{p+1} es mayor que el multiplicando n^p, lo que demuestra la primera parte del teorema.

Si representamos n por $1 + a$, tendremos

$$n^p = (1 + a)^p = 1 + pa + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \dots + a^p;$$

es evidente que el segundo miembro es mayor que $1 + pa$, y como dando á p un valor suficientemente grande, el producto pa podrá ser mayor que cualquiera cantidad dada, resulta que $1 + pa$, y con mayor razon n^p podrá adquirir un valor tan grande como se quiera.

194. Teorema. *Las raices de un número mayor que la unidad disminuyen, si aumenta el índice, y tienen la unidad por límite.*

Sean $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[m+n]{a}$ dos raices de la misma cantidad; decimos que si $a > 1$, será $\sqrt[m+n]{a} < \sqrt[m]{a}$.

En efecto: siendo $a > 1$, la raiz del grado m de a debe ser mayor que 1; porque la raiz de un grado cualquiera de 1 es 1, y es evidente que si un número aumenta su raiz tambien aumenta.

Si hacemos $\sqrt[m]{a} = r$, tendremos $r > 1$ y $a = r^m$.

Ahora bien: $\sqrt[m+n]{a}$ no puede ser igual ni mayor que $\sqrt[m]{a}$ pues si tuviésemos $\sqrt[m+n]{a} = r$ ó $\sqrt[m+n]{a} > r$,

seria $a = r^{m+n}$ ó $a > r^{m+n}$,

y como $a = r^m$, resultaria una de las expresiones absurdas [193

$$r^m = r^{m+n} \quad ó \quad r^m > r^{m+n};$$

luego

$$\sqrt[m+n]{a} < \sqrt[m]{a}.$$

Demostremos ahora que $\sqrt[m]{a}$ tiene por límite inferior la unidad, si el índice aumenta indefinidamente, esto es, que

$$\sqrt[m]{a} - 1 < d,$$

siendo d una cantidad tan pequeña como se quiera.

En efecto: para que la desigualdad anterior se verifique, basta que se verifiquen estas otras, que no son mas que trasformaciones de la primera,

$$\sqrt[m]{a} < 1 + d,$$

$$a < (1+d)^m \quad ó \quad (1+d)^m > a;$$

pero siendo $1+d$ mayor que la unidad, la potencia $(1+d)^m$ puede adquirir un valor mayor que a, por grande que sea este número [193]; luego

$$lím. de \sqrt[m]{a} = 1.$$

195. Teorema. *Las potencias, enteras y positivas, de un número menor que la unidad, disminuyen, si aumenta el exponente, y pueden adquirir un valor tan pequeño como se quiera.*

En efecto: si consideramos las potencias n^p y n^{p+1}, tendremos

$$n^{p+1} = n^p \times n$$

y es claro que siendo n menor que 1, el producto n^{p+1} es menor que el multiplicando n^p.

Además, todo número menor que 1 puede escribirse en la forma $\frac{1}{a}$, donde a será entero, fraccionario ó inconmensurable, pero mayor que 1.

Si elevamos $\frac{1}{a}$ á potencias cuyos exponentes crezcan indefinidamente, el denominador llegará á ser tan grande como se quiera, y como el numerador es siempre 1, la fraccion llegará á ser menor que cualquiera cantidad asignable.

196. Teorema. *Las raices de un número menor que la unidad, crecen, si aumenta el índice, y tienen la unidad por límite.*

Sean $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[m+n]{a}$ dos raices de la misma cantidad, decimos que si $a < 1$, será $\sqrt[m+n]{a} > \sqrt[m]{a}$.

En efecto: siendo $a < 1$, la raiz del grado m de a debe ser menor que 1; porque la raiz de un grado cualquiera de 1 es 1, y es evidente que si un número disminuye su raiz tambien disminuye.

Si hacemos $\sqrt[m]{a}=r$, tendremos $r<1$ y $a=r^m$.

Ahora bien: $\sqrt[m+n]{a}$ no puede ser igual ni menor que $\sqrt[m]{a}$, pues

si tuviésemos $\qquad \sqrt[m+n]{a}=r \quad ó \quad \sqrt[m+n]{a}<r$,

seria $\qquad a=r^{m+n} \quad ó \quad a<r^{m+n}$;

y como $a=r^m$, resultaria una de las expresiones absurdas [195]

$$r^m=r^{m+n} \quad ó \quad r^m<r^{m+n};$$

luego $\qquad \sqrt[m+n]{a}>\sqrt[m]{a}$.

Demostremos ahora que $\sqrt[m]{a}$ tiene por límite superior la unidad, si m aumenta indefinidamente, esto es, que

$$1-\sqrt[m]{a}<d,$$

siendo d una cantidad tan pequeña como se quiera.

En efecto: la desigualdad anterior se verificará siempre que se verifique la siguiente:

$$1-d<\sqrt[m]{a}$$

ó $\qquad (1-d)^m<a$;

pero siendo $1-d$ menor que la unidad, la potencia $(1-d)^m$ puede adquirir un valor menor que a, por pequeño que sea este número [195]; luego

$$lim.\ de \sqrt[m]{a}=1.$$

197. Si en la fórmula

$$S=\frac{a-uq}{1-q},$$

que da la suma de los términos de una progresion geométrica decreciente, se sustituye u por su valor aq^{n-1}, se convierte en

$$S=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Siendo $q<1$, el valor de q^n, y por consiguiente el de aq^n, disminuye á medida que aumenta el número de términos de la progresion, pudiendo llegar á ser menor que cualquiera cantidad asignable; luego si n es infinito será $aq^n = 0$, y

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Vemos, pues, que *la suma de los términos de una progresion geométrica decreciente, continuada al infinito, es igual al primero dividido por el exceso de la unidad sobre la razon.*

EJEMPLOS.

1.º Sea la progresion

$$\div 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3} : \ldots\ldots$$

La razon es $\frac{1}{a}$, luego

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1}.$$

2.º Convertir en ordinaria la fraccion periódica

0,4343 ....

Esta fraccion puede considerarse como la suma de los términos de la progresion

$$\div 0{,}43 : 0{,}0043 : 0{,}000043 \ldots\ldots,$$

cuya razon es 0,01; luego

$$S = \frac{0{,}43}{1-0{,}01} = \frac{43}{99}.$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

LOGARITMOS.

I.—Idea general de los logaritmos.

198. Si consideramos dos progresiones

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 \ldots\ldots$$
$$\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, 5r \,.\, 6r \ldots\ldots$$

la primera geométrica y principiando por la unidad, y la segunda aritmética y empezando por cero, se observarán en ellas las siguientes propiedades:

1.ª El producto de dos términos de la progresion geométrica es un término de la misma, puesto que ésta contiene todas las potencias de la razon; y la suma de dos términos de la progresion aritmética es un término de la misma, puesto que ésta contiene todos los múltiplos de la razon.

2.ª Si se suman dos términos de la progresion aritmética y se multiplican los correspondientes de la geométrica, la suma y el producto son términos correspondientes de las respectivas progresiones.

En efecto: si q^m y $q^{m'}$ son dos términos de la progresion geométrica, mr y $m'r$ serán los correspondientes en la aritmética; el producto de los primeros es $q^{m+m'}$, que ocupa en la progresion geométrica el lugar $m+m'+1$, y la suma de los segundos es $(m+m')\,r$, que tambien ocupa en la aritmética el lugar $m+m'+1$.

De estas dos propiedades se deduce que *para multiplicar dos términos de la progresion geométrica, basta sumar los correspondientes de la aritmética, y el término de la primera correspondiente á la suma, leida en la segunda, será el producto pedido.*

Si las progresiones son

$$\div\!\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : 19683 \ldots\ldots$$
$$\div 0 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 12 \,.\, 14 \,.\, 16 \,.\, 18 \ldots\ldots$$

y queremos hallar el producto 27×729, sumaremos los términos correspondientes 6 y 12 de la progresion aritmética, y el número 19683, que corresponde á la suma 18, es el producto de 27 por 729.

199. Para que las propiedades enunciadas en el número anterior se verifiquen, ES NECESARIO: 1.° *que la progresion geométrica contenga un término igual á* 1 *y la aritmética uno igual á* 0; 2.° *que estos términos* 1 *y* 0 *se correspondan.*

En efecto: si a es el primer término de una progresion por cociente y q la razon, dos términos cualesquiera estarán representados por aq^m y $aq^{m'}$; para que el producto

$$a^2q^{m+m'}$$

de estos términos pertenezca á la progresion, es necesario que tenga la forma general aq^n; esto es, que se verifique la igualdad

$$a^2q^{m+m'} = aq^n,$$

siendo n un número entero cualquiera.

De esta igualdad se deduce

$$aq^{m+m'} = q^n.$$

Ahora bien, $aq^{m+m'}$ es un término de la progresion que empieza por a; luego su igual q^n debe estar entre los términos de la misma; por consiguiente, para que el producto de dos términos de una progresion geométrica pertenezca á la progresion, es *necesario* que haya entre los términos de ésta uno de la forma q^n; pero los términos anteriores á q^n son q^{n-1}, q^{n-2}..... etc., luego llegaremos necesariamente á uno de la forma $q^{n-n}=q^0=1$.

Del mismo modo se ve que si $a + mr$ y $a + m'r$ son dos términos de una progresion aritmética que empieza por a, la suma

$$2a + (m + m')\,r$$

pertenecerá á la progresion siempre que se verifique la igualdad

$$a + (m + m')\,r = nr,$$

esto es, siempre que la progresion contenga un término de la forma nr; pero los términos anteriores á nr son

$$(n-1)\,r,\ (n-2)\,r\ldots\ldots \text{ etc.}$$

luego llegaremos á uno de la forma $(n-n)\,r = 0$.

Para demostrar la segunda parte del teorema, supongamos las progresiones, que contienen los términos 1 y 0 respectivamente

$$\div\!\div \ldots\ldots\ldots : q^m : \ldots\ \ldots : q^{m'} : \ldots\ldots\ldots$$
$$\div \ldots\ldots\ldots .\ nr \ldots\ldots\ldots .\ n'r\ \ldots\ldots\ldots$$

Observando que el exponente de q y el coeficiente de r aumentan una unidad á cada término, se comprende que el producto

$$q^m \times q^{m'} = q^{m+m'}$$

dista m lugares de $q^{m'}$, y la suma

$$nr + n'r = (n + n')r,$$

dista de $n'r$, n lugares; para que el producto y la suma se correspondan es, pues, *necesario* que $m = n$; pero en tal caso, el término q^m dista m lugares de 1, y su correspondiente nr dista de 0 otros m lugares; por consiguiente, los términos 1 y 0 se corresponden necesariamente.

200. Cuando dos progresiones tienen las propiedades del número 198, los términos de la aritmética se llaman *logaritmos* de los correspondientes en la geométrica. Diremos, pues,

Se llaman LOGARITMOS, *los términos de una progresion aritmética, que empieza por cero, correspondientes á los de otra geométrica, que empieza por la unidad.*

Así en las progresiones

$$\div\!\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots q^n \ldots\ldots$$
$$\div\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots\ldots nr \ldots\ldots,$$

tenemos

$$\log 1 = 0, \quad \log q = r, \quad \log q^2 = 2r \ldots \log q^n = nr.$$

201. Si pudiéramos formar una progresion geométrica que contuviese todos los números, hallaríamos sus respectivos logaritmos en la progresion aritmética correspondiente; en tal caso la operacion de multiplicar se reduciria á una simple suma, segun se ha visto en el número 198, y las demás operaciones aritméticas se simplificarian tambien notablemente [210].

Veamos si es posible formar dicha progresion.

Interpolando el mismo número m de medios proporcionales entre cada dos términos consecutivos de la progresion geométrica, la razon de la nueva progresion que resulta será $\sqrt[m+1]{q}$ [190]; por consiguiente si a es un término de ésta, el siguiente será $a\sqrt[m+1]{q}$, y la diferencia entre ambos

$$a\left(\sqrt[m+1]{q} - 1\right).$$

La expresion $\sqrt[m+1]{q} - 1$ tendrá un valor tan pequeño como se quiera, si hacemos á m suficientemente grande, esto es, si interpolamos suficiente número de medios proporcionales, porque $\sqrt[m+1]{q}$ tiene por límite la unidad [194 y 196]; luego la diferencia

$$a\left(\sqrt[m+1]{q} - 1\right)$$

entre dos términos consecutivos podrá ser tan pequeña, que permita considerar la progresion geométrica como una série de términos que crecen de una manera contínua ó por grados insensibles, y entre los cuales se encuentran todos los números mayores que 1.

Interpolando entre cada dos términos consecutivos de la progresion aritmética, tantos medios diferenciales como medios proporcionales se hayan interpolado entre cada dos términos de la geométrica, se hallarán los logaritmos de los números que ha originado la primera interpolacion.

Si queremos obtener los logaritmos de los números menores que 1, conseguiremos que estos números formen parte de la progresion geométrica prolongando ésta hácia la izquierda, para lo que basta dividir cada término por la razon; y obtendremos los logaritmos respectivos prolongando igualmente la progresion aritmética en el mismo sentido, lo que se logra restando la razon de cada término.

Por este medio se obtienen las progresiones

$$\div\!\div \;\ldots\ldots : \frac{1}{q^n} : \ldots : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots$$

$$\div \;\ldots\ldots -nr \,.\, \ldots -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots \,.\, nr \,.\, \ldots,$$

donde se ve que *los números menores que* 1 *tienen logaritmos negativos.*

Las anteriores consideraciones manifiestan que *todo número tiene un logaritmo.* Sin embargo, la continuidad perfecta de la progresion geométrica, si bien se concibe, no puede alcanzarse prácticamente, por lo que, en la mayoría de los casos, no forma parte de dicha progresion el número cuyo logaritmo se busca; pero como al menos se hallará comprendido entre dos términos consecutivos de la misma, podrá tomarse el logaritmo de uno de ellos en lugar del verdadero, cometiendo un error menor que la razon $\frac{r}{m+1}$ [184] de la progresion aritmética, que será tan pequeña como se quiera si damos á m un valor suficientemente grande.

202. Las progresiones del número anterior pueden escribirse [175] en la forma

$$\div \ldots : q^{-n} : \ldots : q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots$$
$$\div \ldots -nr \,.\, \ldots -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots \,.\, nr \,.\, \ldots$$

Haciendo ahora $q = a^r$, lo que siempre es posible, puesto que esta igualdad se trasforma en $\sqrt[r]{q} = a$, y podemos representar por a el valor de $\sqrt[r]{q}$, las progresiones serán

$$\div \ldots : a^{-nr} : \ldots : a^{-3r} : a^{-2r} : a^{-r} : 1 : a^r : a^{2r} : a^{3r} : \ldots : a^{nr} \ldots$$
$$\div \ldots -nr \,.\, \ldots -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots \,.\, nr \ldots,$$

donde vemos que

$$\log a^{-2r} = -2r, \quad \log a^{3r} = 3r, \quad \log a^{nr} = nr,$$

esto es, que el logaritmo de un término de la progresion por cociente es el exponente de a en dicho término.

Esta observacion permite dar una nueva definicion de logaritmos independiente de toda idea de progresion, diciendo

Logaritmos de los números son los exponentes de las potencias á que debe elevarse un número constante para obtener los propuestos.

203. Sea la ecuacion $a^x = y$.

Si a es un número constante, cada valor particular de x dará para y otro valor, y á cada valor de y corresponderá otro de x; por manera que x é y son dos cantidades variables dependientes una de otra, y los valores de x correspondientes á los de y son los logaritmos de estos últimos.

Pero es evidente que si a cambia de valor, á un mismo número y corresponderán diferentes valores de x, esto es, *un número puede tener diferentes logaritmos.*

Llamamos SISTEMA DE LOGARITMOS al conjunto de los valores de x que corresponden á otros de y, cuando a recibe un valor particular invariable.

Este valor de a, constante para cada sistema, se llama BASE del mismo, y sirve para distinguir un sistema de otro.

204. TEOREMA. *Si el exponente* x *de una cantidad* a *positiva y diferente de la unidad, crece de una manera continua, la funcion* a^x *varía tambien de una manera continua.*

Distinguiremos dos casos, segun que a sea mayor ó menor que la unidad.

PRIMER CASO. $a > 1$. Sean m y $m + \frac{1}{n}$ dos valores sucesivos del exponente x; decimos que si la diferencia entre estos valores es suficientemente pequeña, esto es, si n crece lo bastante, la diferencia entre los valores correspondientes de la funcion, que son a^m y $a^{m+\frac{1}{n}}$, será menor que cualquiera cantidad asignable, por pequeña que sea.

En efecto: la diferencia entre los valores de la funcion es

$$a^m\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=a^m\left(\sqrt[n]{a}-1\right),$$

y siendo $a>1$ esta diferencia es positiva, luego si el exponente x crece la funcion a^x crece tambien.

Pero si n es suficientemente grande, la cantidad $\sqrt[n]{a}-1$ será tan pequeña como queramos [194], y su producto por a^m lo será tambien.

Además, si $x=0$, tendremos $a^x=1$;

y si $\quad x=\infty, \quad$ será $\quad a^{\infty}=\infty$ [193];

luego cuando $a>1$, *si* x *crece de una manera continua desde* CERO *hasta* INFINITO, a^x *crece de una manera continua desde* UNO *hasta* INFINITO.

Supongamos ahora que se den á x valores que crezcan negativamente, y sean $-m$ y $-\left(m+\frac{1}{n}\right)$ dos valores sucesivos de x; los correspondientes de la funcion serán

$$a^{-m} \text{ y } a^{-\left(m+\frac{1}{n}\right)} \text{ ó bien } \frac{1}{a^m} \text{ y } \frac{1}{a^{m+\frac{1}{n}}},$$

que restados dan $\dfrac{a^{m+\frac{1}{n}}-a^m}{a^{2m+\frac{1}{n}}}$; como esta diferencia es positiva, es claro que la funcion a^x disminuye cuando el exponente x crece negativamente.

Además, si n es suficientemente grande el numerador $a^{m+\frac{1}{n}}-a^m$ será tan pequeño como se quiera, y con mayor razon lo será tambien la fraccion, toda vez que su denominador es mayor que 1.

Pero si $x = 0$ será $a^x = 1$; y si el valor absoluto de x es infinito, la funcion $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\infty}$ adquiere el valor *cero;* luego cuando $a > 1$, *si* x *crece negativamente y de una manera contínua desde* CERO *hasta el* INFINITO NEGATIVO, *la funcion* a^x *disminuye de una manera contínua desde* UNO *hasta* CERO.

SEGUNDO CASO. $a < 1$. Razonamientos análogos á los anteriores, fundados en los teoremas de los números [196], [195] demuestran que *si* x *crece de una manera contínua desde* CERO *hasta el* INFINITO POSITIVO, *la funcion* a^x *disminuye de una manera contínua desde* UNO *hasta* CERO; *y que si* x *crece negativamente desde* CERO *hasta el* INFINITO NEGATIVO, *la funcion aumenta desde* UNO *hasta el* INFINITO POSITIVO.

ESCOLIOS.

205. 1.° Acabamos de ver que la funcion a^x puede adquirir todos los valores comprendidos entre *cero* é *infinito*, luego todos los números positivos pueden considerarse como potencias, positivas ó negativas, de un número constante; por consiguiente: *todos los números positivos tienen logaritmos.*

2.° *La base de todo sistema de logaritmos debe ser positiva y diferente de la unidad.*

Puesto que las potencias sucesivas de un número negativo serian unas positivas, otras negativas y otras imaginarias; y por consiguiente la funcion no variaria de una manera contínua. Además es evidente que la unidad no puede ser base de ningun sistema, porque todas sus potencias son iguales á 1.

3.° *En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero y el de la base es uno.*

En efecto: si en la ecuacion $a^x = y$, se hace $x = 0$, será $a^0 = 1$, luego

$$\log 1 = 0;$$

y si hacemos $x = 1$, será $a^1 = a$, luego

$$\log a = 1.$$

II.—Propiedades generales de los logaritmos.

206. Teorema. *El logaritmo de un producto de varios factores es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Sean y, y', y'' ... varios números, x, x', x'' ... sus logaritmos respectivos en el sistema cuya base es a. Tendremos [202]

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y', \quad a^{x''} = y'', ...;$$

multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$a^{x+x'+x''+....} = yy'y''......;$$

donde vemos que $x + x' + x''$.... es el exponente de la potencia á que debe elevarse la base a para obtener el producto $yy'y''$.....; luego

$$\log (yy'y''...) = x + x' + x'' + ...;$$

pero siendo x, x', x''..... los logaritmos de y, y', y''....., la igualdad anterior se convierte en

$$\log (yy'y''...) = \log y + \log y' + \log y'' + ...$$

207. Teorema. *El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sean y el dividendo é y' el divisor, x y x' los logaritmos de estos números, y a la base del sistema. Tenemos las igualdades

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y',$$

dividiéndolas ordenadamente, resulta

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'};$$

luego $\log \frac{y}{y'} = x - x'$ ó $\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'$.

208. Teorema. *El logaritmo de una potencia cualquiera de un número, es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Sea y el número, x su logaritmo. Tenemos la igualdad

$$a^x = y;$$

elevando ambos miembros á una potencia cualquiera m, será

$$a^{mx} = y^m;$$

luego $\log y^m = mx$ ó $\log y^m = m \log y$.

209. Teorema. *El logaritmo de la raiz de un número es*

igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raiz.

Sea y el número, x su logaritmo.

Tenemos la igualdad

$$a^x = y;$$

extrayendo la raiz m de ambos miembros, será

$$a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{y},$$

de donde $\log \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m}$ ó $\log \sqrt[m]{y} = \frac{\log y}{m}$.

210. En virtud de las propiedades anteriores, las operaciones aritméticas se simplifican considerablemente, por el empleo de los logaritmos.

Se ve, en efecto, que para hallar el producto de varios números bastará *sumar* los logaritmos de los factores, y buscar el número correspondiente á esta suma; y que un cociente se hallará *restando* los logaritmos del dividendo y divisor. Todavía son mayores las ventajas cuando se aplican los logaritmos á la elevacion á potencias y extraccion de raices de todos los grados, puesto que estas operaciones tan laboriosas, se reducen respectivamente á multiplicaciones y divisiones muy sencillas.

III.—Construccion de las tablas de logaritmos, y propiedades particulares de los logaritmos de Briggs.

211. Unas tablas de logaritmos es la reunion de los números enteros desde uno hasta 10000, 100000 etc., y de sus correspondientes logaritmos en un sistema dado.

El sistema que ha merecido la preferencia es aquel cuya base es 10. Los logaritmos en este sistema se llaman logaritmos *ordinarios*, *tabulares* ó de Briggs. [1]

212. Teorema. *Para que el logaritmo ordinario de un número conmensurable sea conmensurable, se necesita y basta que el número sea una potencia de la base* 10, *cuyo exponente sea entero, positivo ó negativo.*

En efecto: sea n un número conmensurable.

---

1 La invencion de los logaritmos se debe á Juan Neper, baron escocés, que publicó su teoría á principios del siglo XVII.

Henri Briggs, profesor de Oxford, fué el primero que, á instancia de Neper, construyó unas tablas con la base 10. La base de los logaritmos *neperianos* es 2,718281828.....

Para que su logaritmo sea entero es necesario que la ecuacion $10^x = n$ se verifique por un valor entero de x; pero si x es entero, n será potencia entera de 10.

Supongamos que el logaritmo de n sea fraccionario, y distingamos dos casos, segun que n sea mayor ó menor que la unidad.

En el primer caso el logaritmo de n es positivo y podrá representarse por la fraccion $\frac{p}{q}$, debiendo verificarse la igualdad

$$10^{\frac{p}{q}} = n \quad ó \quad 10^p = n^q.$$

Esta igualdad exige que n sea un número entero y además que sus factores primos sean 2 y 5, únicos que componen el primer miembro; sea

$$n = 2^r \times 5^s,$$

tendremos

$$10^p = 2^{rq} \times 5^{sq} \quad ó \quad 2^p \times 5^p = 2^{rq} \times 5^{sq};$$

de esta igualdad se deduce

$$p = rq, \quad p = sq, \quad ó \quad r = s;$$

luego

$$n = 2^r \times 5^r = 10^r,$$

potencia positiva de 10.

Si n es menor que la unidad, podrá representarse por la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$, y su logaritmo será negativo. Representándole por $-\frac{p}{q}$, se tendrá

$$10^{-\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}, \quad ó \quad 10^{-p} = \frac{a^q}{b^q}, \quad ó \quad \frac{1}{10^p} = \frac{a^q}{b^q};$$

de donde [Aritm. 146.]

$$1 = a^q, \quad 10^p = b^q.$$

De la primera de estas igualdades se deduce $a = 1$, y la segunda exige, segun se ha visto en el primer caso, que b sea potencia positiva de 10, por ejemplo 10^r; luego

$$n = \frac{1}{10^r} = 10^{-r}$$

potencia negativa de 10.

Para demostrar que la condicion del enunciado es suficiente, supongamos que el número n sea potencia entera de 10, y llamemos p al exponente de dicha potencia; segun esto tendremos

$$n = 10^p,$$

donde vemos que el logaritmo de n es p, número conmensurable; que será positivo si n es mayor que 1 y negativo en el caso contrario.

Así, $\log 10^0 = 0$, $\log 10^1 = 1$, $\log 10^2 = 2$, $\log 10^3 = 3$...

$\log 10^{-1} = -1$, $\log 10^{-2} = -2$, $\log 10^{-3} = -3$...

ó sea $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$...

$$\log \frac{1}{10} = -1, \log \frac{1}{100} = -2, \log \frac{1}{1000} = -3...$$

213. Acabamos de ver que las potencias enteras de la base 10 son los únicos números conmensurables que tienen logaritmo conmensurable, y que éste es igual al exponente de la potencia. Veamos, ahora, de qué modo podrán calcularse los logaritmos de los demás números.

Supongamos que se trate de hallar el logaritmo del número 2.

En el sistema de logaritmos de Briggs, las progresiones son

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000.....$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 .....$$

Hallándose el número 2 comprendido entre 1 y 10, su logaritmo lo estará entre 0 y 1; si hallamos un medio proporcional entre 1 y 10, y un medio diferencial entre 0 y 1, tendremos las progresiones

$$\because 1 : 3,162 : 10.....$$
$$\div 0 . 0,5 . 1 .....$$

Como el número dado está comprendido entre 1 y 3,162, su logaritmo lo estará entre 0 y 0,5; hallando un medio proporcional entre 1 y 3,162 y otro diferencial entre 0 y 0,5, resultan las progresiones

$$\because 1 : 1,778 : 3,162.....$$
$$\div 0 . 0,25 . 0,5 .....$$

Ahora el número 2 se encuentra entre 1,778 y 3,162, y su logaritmo entre 0,25 y 0,5.

Si se continúa interpolando un medio proporcional entre cada dos números que contienen al dado, y á la vez uno diferencial entre los logaritmos de aquellos, se llegará á encontrar dos números, uno menor y otro mayor que 2, cuyos logaritmos se diferencien en menos de una décima, centésima, milésima etc., y tomando uno de estos para logaritmo de 2, el error será menor que una de las mencionadas diferencias.

Así, despues de once interpolaciones, se encuentra el número 2 comprendido entre los medios proporcionales 1,999 y 2,001, y su logaritmo entre los diferenciales 0,3008 y 0,3013, que se diferencian en menos de una milésima; luego

$$\log 2 = 0{,}301$$

con un error menor que una milésima.

Del mismo modo podrian determinarse los logaritmos de los demás números primos menores que el límite de las tablas; y despues sumando los logaritmos de los números primos se hallarian los de los compuestos, quedando así formada una tabla de logaritmos.

Debemos advertir que este procedimiento sólo sirve para demostrar la posibilidad de construir unas tablas de logaritmos; en las Matemáticas superiores se estudian otros mucho mas breves.

214. Una vez determinados los logaritmos de los números en un sistema cuya base es a, se puede hallar los logaritmos de los mismos números en otro sistema de base A, sin repetir los cálculos.

En efecto: sea n un número, x su logaritmo en el sistema de base a, x' su logaritmo en el nuevo sistema de base A; tendremos evidentemente

$$a^x = n, \qquad A^{x'} = n,$$

de donde

$$a^x = A^{x'}.$$

Siendo iguales estas cantidades, tambien lo serán sus logaritmos, esto es,

$$x \log a = x' \log A;$$

pero

$$\log a = 1;$$

luego

$$x = x' \log A \quad \text{ó} \quad x' = x \times \frac{1}{\log A}.$$

Segun esto, *dado el logaritmo de un número en un sistema, se obtendrá el logaritmo del mismo número en otro sistema, multiplicando el logaritmo dado por una fraccion que tenga por numerador la unidad y por denominador el logaritmo de la nueva base tomado en el primer sistema.*

Esta fraccion recibe el nombre de *módulo*.

215. Los logaritmos ordinarios de los números que no son

potencia de 10, se expresan aproximadamente por medio de fracciones decimales. La parte entera de un logaritmo se llama *característica*, y la parte decimal *mantisa*.

Teorema. *La característica del logaritmo de un número mayor que* 1, *consta de tantas unidades menos una, como cifras enteras tenga el número.*

Todo número de n cifras enteras que no es potencia de 10, es mayor que 10^{n-1} y menor que 10^n, y su logaritmo estará comprendido entre los logaritmos de estos números, que son $n-1$ y n; luego la parte entera de dicho logaritmo será $n-1$.

Así, la característica del logaritmo de 4527,8 es 3; puesto que siendo 4527,8 mayor que 10^3 y menor que 10^4, su logaritmo será mayor que 3 y menor que 4.

De aquí se deduce evidentemente que *un número tiene tantas cifras enteras mas una, como unidades tiene la característica de su logaritmo.*

Así, cuando la característica es 0, 1, 2, 3, el número tiene 1, 2, 3, 4, cifras enteras.

216. Teorema. *Si un número* a *se multiplica ó se divid por una potencia de la base* 10, *la característica de su logaritmo aumenta ó disminuye en tantas unidades como tenga el exponente de dicha potencia, y la mantisa no varía.*

Tenemos, en efecto:

$$\log(a \cdot 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n$$

y

$$\log(a : 10^n) = \log a - \log 10^n = \log a - n,$$

donde vemos que multiplicando ó dividiendo a por 10^n, su logaritmo aumenta ó disminuye en n unidades enteras, que se agregarán á la característica ó se restarán de ella, sin que varíe la mantisa.

217. Corolario 1.° *Cuando dos números están escritos con las mismas cifras, colocadas en el mismo órden, y por consiguiente solo se diferencian en el lugar de la coma, sus logaritmos tienen igual mantisa.*

Puesto que uno de aquellos es igual al otro multiplicado ó dividido por una potencia de 10.

Así, los logaritmos de los números

827,5. 82,75, 8,275

tiene igual mantisa, siendo las características 2, 1 y 0.

218. Corolario 2.° *Si la característica del logaritmo de un número aumenta ó disminuye en* n *unidades, el número se multiplica ó divide por* 10^n.

IV.—Disposicion y uso de las tablas de logaritmos.

219. Problema 1.° *Dado un número entero, hallar su logaritmo.*

Suponemos que se tiene á la vista las tablas de logaritmso de Vazquez Queipo, última edicion [1], que contiene los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 20000 con *seis* cifras decimales.

Al hallar, por medio de ellas, el logaritmo de un número entero, pueden ocurrir tres casos:

1.° Que el número sea menor que 2000.

2.° Que esté comprendido entre 2000 y 20000.

3.° Que sea mayor que 20000.

220. Primer caso. *El número cuyo logaritmo se busca es menor que 2000.*

La primera plana de las tablas contiene, en columnas verticales, estrechas y señaladas arriba y abajo con la letra N., los números enteros desde 0 hasta 399, y á la derecha de los números, en columnas mas anchas, señaladas con la abreviatura Log., sus logaritmos respectivos.

En la segunda plana se observa ya que solo hay dos columnas de números señaladas con la letra N., la primera de la izquierda en cada llana, y que estos son los mismos en ambas columnas. Todas las demás planas, hasta el fin de la tabla, presentan dichas dos columnas de números y éstas contienen repetidos los enteros desde 100 hasta 1999.

Comprendida esta disposicion, es fácil encontrar en las tablas un número menor que 2000.

En el caso presente *debe leerse el número dado en la llana primera ó de la izquierda*, y á su derecha, en la columna señalada con la abreviatura log. 0. se encuentra la parte decimal de

---

1 Estas tablas son de las llamadas de *doble entrada*. Los alumnos que aprendan á manejarlas, no se verán embarazados para emplear otras mas extensas y voluminosas, como las tan generalizadas de *Callet*, puesto que la disposicion es la misma, salvo ligeras variaciones que se descubren á primera vista.

su logaritmo. [1] En cuanto á la característica, se determina por el principio del número 215.

Propongámonos, por ejemplo, hallar el logaritmo de 563.

Ante todo escribiremos la característica, que es 2; buscaremos despues el número en la columna N., llana izquierda, y á su derecha se encontrarán las cifras 750508 que constituyen la mantisa.

Por consiguiente,

$$\log 563 = 2{,}750508.$$

Sea el número 1417.

La característica es 3; las dos primeras cifras de la mantisa no están escritas, pero se toman las del logaritmo completo anterior, que son 15; las cuatro últimas son 1370; luego

$$\log 1417 = 3{,}151370.$$

221. Segundo caso. *El número dado es mayor que* 2000 *y menor que* 20000.

Prescindiendo por el momento de una cifra de la derecha, el número que resulta se encuentra en las tablas. Se buscará este número en la llana de la izquierda, si la cifra de que prescindimos es menor que 5, y en la llana de la derecha si dicha cifra es 5 ó mayor que 5, y á la derecha del número, en la primera columna, se tomarán las dos primeras cifras de la mantisa, como en el primer caso. Para hallar las cuatro restantes es necesario fijarse en las columnas que tienen á su cabeza y pié las cifras 0, 1, 2, etc. hasta 9, impresas en caractéres gruesos, y buscar el resto de la mantisa enfrente del número, pero en la columna que tiene á su cabeza y pié la cifra de que se ha prescindido.

Sea, por ejemplo, el número 12363.

Prescindiendo de la cifra 3, buscaremos en la llana de la izquierda el número 1236, y á la derecha de éste encontraremos dos cifras 09 de la mantisa; despues, en la línea horizontal del número 1236 y columna de la cifra 3, de que hemos prescindido, se encuentran las cifras 2124 que completan la mantisa; por consiguiente

---

1 La mantisa tiene siempre *seis* cifras: las dos primeras se repiten varias veces, por lo que se han omitido en la mayor parte de los logaritmos, y se encuentra su lugar en blanco. Cuando suceda esto, se tomarán para dos primeras cifras las del logaritmo anterior mas inmediato que esté completo; las cuatro últimas siempre se encuentran enfrente del número.

$$\log 12363 = 4,092124.$$

Sea el número 9487.

Buscaremos en la llana de la derecha el número 948, y hallaremos 97 para primeras cifras de la mantisa; en la línea horizontal del número 948 y columna del 7, se encuentran las cifras restantes 7129; luego

$$\log 9487 = 3,977129.$$

Debe tenerse muy presente que si las cuatro últimas cifras de la mantisa de un logaritmo están en las tablas precedidas de un asterisco *, las dos primeras no serán las que se encuentran del modo ordinario, sino las del logaritmo completo mas inmediato posterior, esto es, las que se encuentran descendiendo por la columna correspondiente.

Por ejemplo, si queremos hallar el logaritmo de 6458, observaremos que las cuatro últimas cifras de la mantisa 0098 están señaladas con un asterisco; por consiguiente no tomaremos 80 para dos primeras, sino 81.

Así $$\log 6458 = 3,810098.$$

222. Tercer caso. *El número dado es mayor que* 20000.

Sea, por ejemplo, 648735.

Separemos de la derecha con una coma las cifras necesarias para que la parte entera del número que resulte sea menor que 20000, y tendremos el decimal

$$6487,35.$$

El logaritmo de este número tiene igual mantisa que el del propuesto [217], por consiguiente la cuestion se reduce á determinar la mantisa del logaritmo de 6487, 35.

Como 6487, 35 es mayor que 6487 y menor que 6488, su logaritmo estará comprendido entre los logaritmos de estos números, que se hallan en las tablas; luego será preciso averiguar qué aumento experimenta el logaritmo de 6487 cuando el número aumenta en 35 centésimas.

Á este fin se admite, sin error sensible, que *las diferencias entre los logaritmos son proporcionales á las diferencias entre los números, con tal que estos sean mayores que* 1000 *y que su mayor diferencia no exceda de la unidad.*

En nuestro ejemplo tenemos

$$\begin{array}{r} \log 6488 = 3,812111 \\ \log 6487 = 3,812044 \\ \hline 0,000067, \end{array}$$

lo que manifiesta que si 6487 aumenta en una unidad entera su logaritmo aumenta en 67 unidades del último órden decimal; luego, segun el principio anterior, si 6487 aumenta en

$$0{,}01, \quad 0{,}02, \quad 0{,}03 \text{ etc.},$$

su logaritmo 3, 812044 aumentará en

$$0{,}01 \times 67, \quad 0{,}02 \times 67, \quad 0{,}03 \times 67 \text{ etc.}$$

unidades del último órden; como actualmente el número aumenta en 0,35, el aumento de su logaritmo es

$$0{,}35 \times 67 = 23{,}45$$

unidades del último órden.

Luego $\log 6487{,}35 = 3{,}812067$, despreciando las cifras que siguen á la sexta.

Ahora bien, el logaritmo del número propuesto 648735, se diferencia solamente del que acabamos de obtener en la característica; por lo tanto

$$\log 648735 = 5{,}812067.$$

Las diferencias entre los logaritmos de dos números consecutivos se encuentran en las tablas en columnas, señaladas con la abreviatura *dif.*, á la derecha del logaritmo menor, y reciben el nombre de *diferencias tabulares.*

Segun acabamos de ver, *para hallar el logaritmo de un número mayor que* 20000 *se separan de la derecha con una coma las cifras decimales necesarias para que la parte entera sea menor que* 20000; *se halla la mantisa del logaritmo de esta parte entera; se multiplica la diferencia tabular por la parte decimal separada, y añadiendo el producto á la mantisa hallada en las tablas, se tendrá la mantisa que se busca. La característica se obtiene por medio del teorema del número* 215.

EJEMPLOS.

1.° Hallar el logaritmo de 325845.

Separando dos cifras decimales, resulta. . . .	3258,45
La mantisa del logaritmo de 3258 es.	512951
La diferencia tabular 133 multiplicada por 0,45 da, prescindiendo de las cifras decimales.	60
Luego, log 325845 =	5.513011

2.° Sea el número 18726493.

Separando tres cifras decimales, resulta. . .	18726,493
La mantisa de log 18726 es.	272445
La diferencia tabular 23 multiplicada por 0,493 da.	11
Luego, log 18726493 =	7,272456

223. Para multiplicar la diferencia tabular por la parte decimal separada con la coma, pueden emplearse las tablitas auxiliares llamadas de las *partes proporcionales*, que impresas al márgen de las planas, contienen los productos de las diferencias tabulares por cada una de las cifras 1, 2, 3,........ hasta 9; de modo que se encuentran en ellas los productos parciales de la diferencia tabular por cada cifra de la parte decimal separada, lo que evita el trabajo de formarlos.

Así, para hallar el logaritmo de 325845, empleando las partes proporcionales, escribiremos la mantisa correspondiente al logaritmo de 3258, y buscaremos los productos de la diferencia tabular 133 por las cifras separadas 4 y 5. que son respectivamente 532 y 665, los que se escribirán debajo de dicha mantisa, pero teniendo cuidado de correr el primero un lugar á la derecha, porque representa *décimas*, y el segundo un lugar mas, porque representa *centésimas*. Sumando y despreciando lás cifras decimales que siguen á la sexta, se obtiene el logaritmo pedido.

La operacion se dispone así:

Mantisa de log 3258. . . .	512951
Dif. tab. por 0,4.	532
Id. id. por 0,05.	665
Suma.	51301085

Luego log 325845 = 5,513011.

Sea el número 18726493.

Mantisa de log 18726. . .	272445
Dif. tab. por 0,4	92
Id. id. por 0,09.	207
Id. id. por 0,003..	69
Suma.	272456339

Luego log 18726493 = 7,272456.

224. Problema 2.° *Dado un logaritmo hallar el número correspondiente.*

En la resolucion de este problema distinguiremos dos casos: 1.° que la mantisa del logaritmo dado se encuentre en las tablas; 2.° que dicha mantisa no se encuentre en las tablas.

225. Primer caso. *La mantisa del logaritmo dado se encuentra en las tablas.*

Se buscarán las dos primeras cifras de la mantisa en la columna log. 0; descendiendo despues por la misma columna, se busca una línea que empiece por las dos cifras siguientes de la mantisa, ó por dos cifras que compongan un número menor y lo mas próximo posible al compuesto por aquellas. Recorriendo dicha línea de izquierda á derecha, en toda la extension de las dos llanas, se encontrarán las cuatro cifras últimas de la mantisa.

Hecho esto se escribe el número de la columna N., que esté enfrente de las cuatro últimas cifras de la mantisa; á su derecha se pone la cifra de la columna en que se han encontrado éstas; y del número que resulta se toma para parte entera tantas cifras como unidades mas una tiene la característica [215], añadiendo al efecto uno ó mas ceros si fuesen necesarios.

Propongámonos hallar el número cuyo logaritmo es 3, 685473.

Buscaremos las dos primeras cifras 68 en la columna log. 0; y descendiendo por la misma, hallaremos una línea que empieza por 48; como la siguiente empieza por 57, número mayor que 54, se recorre la primera de izquierda á derecha, y en la columna del 7 se hallan las cifras 5473. El número de la columna N. seguido de un 7, da 4847, que es el número buscado, pues debe tener cuatro cifras enteras.

Sea el logaritmo 5,180069.

El número 18 y todos los comprendidos entre 00 y 30 se encuentran en las tablas en dos puntos bastante separados, uno ántes y otro despues del número 1000: conviene en todos los casos leer las dos primeras cifras de la mantisa, cuando no pasan de 30, despues del número 1000. Una vez hallado el número 18, observaremos que va seguido en las tablas de las cifras 01, que ya son mayores que las 00 del logaritmo dado: en este caso y en todos los análogos, se buscan las cifras restantes de la mantisa en la línea *superior* inmediata, y se encontrarán precedidas de un asterisco. En el ejemplo actual las hallamos en la columna 8 frente al número 1513, que con la cifra 8 da 15138; como la característica es 5, añadiremos un cero, y 151380 será el número correspondiente al logaritmo dado.

226. SEGUNDO CASO. *La mantisa del logaritmo dado no se encuentra en las tablas.*

Sea el logaritmo dado 3, 893912.

Buscando esta mantisa, por la regla del caso anterior, se encontrarán dos consecutivas 893873 y 893928, una menor y otra mayor que la propuesta, de donde se infiere que ésta no se encuentra en las tablas. Los números correspondientes á las mantisas halladas son 7832 y 7833, entre los que debe hallarse el número que buscamos; para calcular qué aumento experimenta el número 7832 cuando su logaritmo aumenta en 39 unidades del último órden decimal, que es la diferencia entre el logaritmo dado y el inmediato inferior de las tablas, buscaremos en éstas la diferencia tabular 55, y diremos: si por el aumento de 0,000055 en el logaritmo, aumenta 1 unidad el número, cuando el logaritmo aumenta en 0,000039 ¿cuánto aumentará el número?

Segun el principio enunciado en el número 222, el aumento que buscamos será

$$0{,}000039 : 0{,}000055 \quad \text{ó} \quad 39 : 55 = 0{,}709;$$

luego el número correspondiente al logaritmo dado será 7832,709.

De lo expuesto se deduce la regla siguiente:

Para hallar el número correspondiente á un logaritmo, cuando la mantisa no se encuentra en las tablas, se busca en ellas la mantisa menor mas próxima á la dada, y se divide la diferencia entre ambas por la diferencia tabular correspondiente á la menor; la parte decimal del cociente se escribe á la derecha del número correspondiente á la mantisa hallada en las tablas, y se toman tantas cifras enteras como unidades mas una tiene la característica.

EJEMPLOS.

1.º Hallar el número correspondiente al logaritmo 4, 168130.

Mantisa del log. dado.	168130
Id. del inmediato menor.	168114
Diferencia.	16
Diferencia tabular.	30
Cociente de 16 : 30 = 0,533.	

Escribiendo este cociente á la derecha del número 14727, correspondiente á la mantisa hallada en las tablas, y separando 5 cifras enteras, resulta el número 14727,533.

2.º Sea el logaritmo.	5,732580
Mantisa del inmediato menor.	732555
Diferencia. . . , ...	25
Diferencia tabular.	80
Cociente de 25 : 80 = 0,3125.	
Número correspondiente á la mantisa halllada en las tablas.	5402.

Luego $5{,}732580 = \log 540231{,}25.$

227. Las tablas de partes proporcionales dan fácilmente el cociente de dividir la diferencia entre las mantisas por la diferencia tabular.

Para dividir 25 por 80, ejemplo 2.º, se busca al márgen la diferencia tabular 80, y se recorre la columna de los productos hasta encontrar el número inmediato inferior á 25, que es 24; la cifra 3 de la izquierda, es la primera del cociente. La diferencia 1 entre 24 y 25 se multiplica por 10, y se búsca en la columna de los productos el número mas próximo á 10, que es 8; la cifra 1 de la izquierda es la segunda del cociente. La diferencia 2 entre 8 y 10 se multiplica por 10, y se busca el número mas próximo al producto 20, que es 16, y 2 será la tercera cifra del cociente. Del mismo modo se obtiene la última, que es 5.

228. PROBLEMA 3.º *Hallar el logaritmo de una fraccion.*

Sea la fraccion $\frac{7}{13}$.

Sabemos [207] que

$$\log \frac{7}{13} = \log 7 - \log 13;$$

siendo el logaritmo de 7 menor que el de 13, la diferencia, ó sea el logaritmo de $\frac{7}{13}$, será negativa, lo que sabíamos ya [201].

Así, $\log \frac{7}{13} = 0{,}845098 - 1{,}113943 = -0{,}268845.$

229. Tratemos ahora de hallar el logaritmo de una fraccion decimal menor que la unidad.

Sea la fraccion 0,00456.

Tenemos $\quad 0{,}00456 = 4{,}56 : 1000;$

luego $\quad \log 0{,}00456 = \log 4{,}56 - \log 1000,$

ó $\quad \log 0{,}00456 = \log 4{,}56 - 3.$

El logaritmo de 4,56 tiene igual mantisa que el de 456, y la característica es *cero;* luego

$$\log 0{,}00456 = 0{,}658965 - 3.$$

Ahora podríamos restar 0,658965 de 3, y poner á la diferencia el signo menos; pero es preferible dejar indicada la sustraccion, si bien bajo otra forma.

Esta es: $\bar{3}{,}658965$.

De suerte que el signo *menos* colocado sobre el 3, indica que la característica es negativa y la mantisa positiva.

Así, $$\bar{3},658965 = -3 + 0,658965.$$

Obsérvese que la cifra 3 de la característica indica el lugar que ocupa en el número propuesto, la primera cifra decimal significativa.

Demostremos ahora que siempre sucede lo mismo.

En efecto: si n es el lugar de dicha cifra decimal, multiplicando el número dado por 10^n, se obtendrá otro cuya parte entera constará de una cifra, siendo por lo tanto *cero* la característica de su logaritmo; pero habiendo multiplicado el número propuesto por 10^n, su logaritmo ha aumentado en n unidades, las que deben restarse de la característica *cero* para obtener la verdadera. Por consiguiente ésta será

$$0 - n = \bar{n}.$$

Ahora podemos enunciar la regla siguiente:

La característica del logaritmo de una fraccion decimal menor que 1, tiene tantas unidades negativas como indica el lugar de la primera cifra significativa; en cuanto á la mantisa se obtiene como si el número dado fuese entero.

Así, $$\log\ 0,7852 = \bar{1},894980.$$
$$\log\ 0,00027 = \bar{4},431364.$$

230. PROBLEMA 4.º *Hallar la fraccion correspondiente á un logaritmo de característica negativa.*

Sea el logaritmo $\bar{2},653213$.

La característica $\bar{2}$ indica que la primera cifra decimal significativa es la segunda, y como á la mantisa dada corresponde el número 45 tendremos:

$$\bar{2},653213 = \log\ 0,045.$$

Luego, *para hallar la fraccion correspondiente á un logaritmo dado de característica negativa, se opera como si ésta fuese positiva, y se escriben despues de la coma los ceros necesarios para que la primera cifra significativa ocupe el lugar indicado por la característica.*

Así, $$\bar{1},845098 = \log\ 0,7$$
$$\bar{5},255273 = \log\ 0,000018.$$

231. Examinemos ahora cómo deben efectuarse las operaciones aritméticas, cuando algunos datos ó todos son fracciones decimales de característica negativa y mantisa positiva.

Adicion.

$$\begin{array}{r} \bar{4},853469 \\ \bar{1},934508 \\ 3,695430 \\ \hline 0,483407 \end{array}$$

Sumando las partes decimales, por la regla general, resulta la parte decimal de la suma y además 2 unidades enteras positivas, que sumadas algebráicamente con -4, -1 y 3, dan la característica 0.

232. Sustraccion.

$$\begin{array}{r} \bar{4},457893 \\ \bar{2},583942 \\ \hline \bar{3},873951 \end{array}$$

Restando las partes decimales, por la regla general, resulta la parte decimal de la diferencia; pero habiendo aumentado el minuendo en una unidad positiva, debe aumentarse en la misma la parte entera del sustraendo, que así se convierte en -1; restando algebráicamente las características resulta

$$-4-(-1)=-4+1=-3.$$

La sustraccion puede convertirse en suma, por medio del complemento logarítmico.

Llamamos *complemento aritmético de un logaritmo ó complemento logarítmico*, á otro logaritmo que sumado con el propuesto dé la suma *cero*.

Se desprende de esta definicion que el complemento de un logaritmo es igual á éste y de signo contrario.

Así, el complemento de 5 es $\bar{5}$, y recíprocamente, puesto que

$$5+\bar{5}=0.$$

Igualmente, el complemento de 3,141724 es $-3,141724$, puesto que

$$3,141724+(-3,141724)=0.$$

Sin embargo, como al efectuar operaciones con logaritmos nunca emplearemos los negativos, sino que serán reemplazados por los de característica negativa y mantisa positiva, para hallar el complemento de un logaritmo, en vez de cambiar el signo, observaremos, si aquel tiene mantisa, las reglas siguientes:

1.ª *Se cambiará el signo de la característica, despues de añadir á ésta una unidad positiva.*

2.ª *Se restará de 10 la primera cifra decimal significativa de la derecha, y de 9 las demás.*

Demostremos estas reglas.

Sea el logaritmo positivo 4,274356; su complemento será $-4{,}274356$; añadiendo y restando á este número 5 unidades, esto es, tantas mas una como tiene la característica, resulta

$$-4{,}274356 = -5 + (5 - 4{,}274356)$$

ó

$$-4{,}274356 = -5 + 0{,}725644 = \bar{5}{,}725644.$$

Donde vemos que la característica $\bar{5}$ se obtiene por la primera regla, y que la sustraccion indicada contenida en el paréntesis, puede efectuarse restando de 10 la primera cifra decimal significativa y las demás de 9.

Sea ahora el logaritmo de característica negativa $\bar{2}{,}472358$. Su complemento será

$$2 - 0{,}472358,$$

donde vemos que la característica cambia de signo y que al efectuar la sustraccion disminuirá en una unidad, lo que equivale á aumentar $\bar{2}$ en esta unidad y cambiar despues el signo; por consiguiente el complemento buscado es

$$1{,}527642.$$

Veamos ya cómo la sustraccion puede convertirse en adicion.

Sea

$$4{,}472935 - 6{,}895023.$$

Esta diferencia equivale á la suma

$$4{,}472935 + (-6{,}895023);$$

pero la cantidad contenida en el paréntisis es el complemento logarítmico del sustraendo 6,895023; luego

Para restar dos logaritmos, se añade al minuendo el complemento del sustraendo.

EJEMPLOS.

1.º Efectuar la sustraccion siguiente:

$$\bar{4}{,}457893 - \bar{2}{,}583942.$$

Disposicion práctica.

Minuendo.	$\bar{4},457893$
C.to del sustraendo. .	$1,416058$
Diferencia..	$\bar{3},873951$

2.º Hallar el logaritmo de la fraccion $\frac{43}{79}$.

Disposicion práctica.

Log 43.	$1,633468$
C.to log 79.	$\bar{2},102373$
$\text{Log}\ \frac{43}{79}$.	$\bar{1},735841$

MULTIPLICACION.

233. Solo vamos á considerar el caso en que el multiplicando es un logaritmo de característica negativa, y el multiplicador un número entero y positivo, por ejemplo

$$\begin{array}{r} \bar{3},257608 \\ 5 \\ \hline \overline{14},288040 \end{array}$$

Multiplicando 5 por la parte decimal del logaritmo, se obtiene la del producto y además una unidad positiva, que sumada algebráicamente con $\overline{15}$, producto de 5 por la característica, da $\overline{14}$.

DIVISION.

234. Supongamos que el dividendo es un logaritmo de característica negativa, y el divisor un número entero y positivo, y distinguiremos dos casos; 1.º que la caracteristica sea múltiplo del divisor; 2.º que no lo sea.

1.º $\overline{42},214572 : 6 = \bar{7}\ 035762.$

Como se ve este caso no ofrece dificultad.

2.º $\bar{3},460935 : 5 = (-3 + 0,460935) : 5.$

Aumentando y disminuyendo el dividendo en las unidades necesarias para que la característica sea divisible por 5, que son 2 en nuestro ejemplo, tendremos

$$\bar{3},460935 : 5 = (\bar{5} + 2,460935) : 5 = -1 + 0,492187 = \bar{1},492187.$$

235. Para ejercitarse en el uso de los logaritmos, es muy conveniente efectuar los cálculos siguientes:

1.° Hallar el valor de x dado por la igualdad

$$x = \frac{429 \,.\, 217}{835}.$$

Tomando logaritmos en los dos miembros, será

$$\log x = \log 429 + \log 217 - \log 835,$$

ó

$$\log x = \log 429 + \log 217 + \text{C.}^{\text{to}} \log 835.$$

$$\begin{array}{r} 2,632457 \\ 2,336460 \\ \bar{3},078314 \\ \hline \end{array}$$

$$\log x = 2,047231, \quad x = 111,4887.$$

2.° Hallar el valor de x dado por la igualdad

$$x = \frac{3,27 \times 5,428}{7,2 \times 95 \times 0,36}.$$

$$\text{Log } x = \log 3,27 + \log 5,428 + \text{C.}^{\text{to}} \log 7,2 + \text{C.}^{\text{to}} \log 95 + \text{C.}^{\text{to}} \log 0,36.$$

$$\begin{array}{r} 0,514548 \\ 0,734640 \\ \bar{1},142668 \\ \bar{2},022276 \\ 0,443697 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log } x = \bar{2},857829, \quad x = 0,072082.$$

3.° $$x = \left(\frac{427}{584}\right)^4$$

$$\log x = (\log 427 + \text{C.}^{\text{to}} \log 584)\, 4,$$

$$\begin{array}{r} 2,630428 \\ \bar{3}.233587 \\ \hline \bar{1},864015 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\log x = \bar{1},456060, \quad x = 0,285798.$$

4.º $$x = \sqrt[5]{\frac{49 \cdot 8}{75}}$$

$$\log x = \frac{\log 49 + \log 8 + \text{C.}^{\text{to}} \log 75}{5}.$$

$$\begin{array}{r} 1{,}690196 \\ 0{,}903090 \\ \bar{2}.124939 \\ \hline 0{,}718225 \end{array}$$

$$\log x = 0{,}143645, \quad x = 1{,}392019.$$

5.º $$x = \sqrt[3]{\left(\frac{24}{17 \cdot 5}\right)^5}$$

$$\log x = \frac{(\log 24 + \text{C.}^{\text{to}} \log 17 + \text{C}^{\text{to}} \log 5)\, 5}{3}.$$

$$\begin{array}{r} 1{,}380211 \\ \bar{2}{,}769551 \\ \bar{1}{,}301030 \\ \hline \bar{1}{,}450792 \\ 5 \\ \hline \bar{3}{,}253960 \end{array}$$

$$\log x = \bar{1}{,}084653, \quad x = 0{,}121521.$$

6.º $$x = -\frac{24 \cdot 35}{87}.$$

Prescindiendo del signo menos, será

$$\log \frac{24 \cdot 35}{87} = \log 24 + \log 35 + \text{C.}^{\text{to}} \log 87.$$

$$\begin{array}{r} 1.380211 \\ 1.544068 \\ \bar{2}{,}060481 \\ \hline 0{,}984760 \end{array}$$

$$\frac{24 \cdot 35}{87} = 9{,}655178. \quad x = -\, 9{,}655178.$$

V.—Aplicacion de los logaritmos á la resolucion de las ecuaciones exponenciales.

236. *Se llama* ECUACION EXPONENCIAL *la ecuacion en que la incógnita entra como exponente.*

$$a^x = b,$$

es una ecuacion exponencial.

Tambien lo es

$$a^{b^x} = c.$$

La primera es una exponencial de *primer órden,* y la segunda de *segundo órden,* por ser el exponente b^x una exponencial de primer órden. Del mismo modo

$$a^{b^{c^x}} = d,$$

es una exponencial de *tercer órden* etc.

Vamos á resolver la ecuacion

$$a^x = b.$$

Tomando logaritmos, resulta

$$x \log a = \log b,$$

de donde

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Sea la ecuacion

$$a^{b^x} = c.$$

Tomando logaritmos será

$$b^x \log a = \log c,$$

de donde

$$b^x = \frac{\log c}{\log a};$$

si tomamos logaritmos otra vez, tendremos

$$x \log b = \log \log c - \log \log a,$$

de donde

$$x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

Por un procedimiento análogo se resolverian las ecuaciones exponenciales de otros órdenes.

EJEMPLOS.

1.° $8^x = 7524.$

$$x = \frac{\log 7524}{\log 8} = \frac{3,876449}{0,903090} = 4,292428.$$

2.° $4^{2^x} = 65536$

$$2^x = \frac{\log 65536}{\log 4} = \frac{4,816479}{0,602060}.$$

$$x = \frac{\log 4,816479 - \log 0,602060}{\log 2} = \frac{0,903090}{0,301030} = 3.$$

VI.—Interés compuesto.—Anualidades.

237. Sabemos [Aritm. 322] que el interés se llama *compuesto* cuando los intereses que produce un capital en un período de tiempo, se acumulan al capital, formando así uno nuevo, que aumenta al fin de cada período.

Por ejemplo, si una persona presta 20000 pesetas al 5 por ciento anual, y trascurrido el primer año no percibe los intereses, el capital durante el segundo año será igual al primitivo aumentado en dichos intereses, que importan 1000 pesetas, esto es, á 21000 pesetas; de suerte que el interés al cabo del segundo año se compondrá del interés del capital 20000 mas el interés del interés 1000, importando, por consiguiente

$$1000 + 50 = 1050 \text{ pesetas.}$$

Si tampoco se perciben estos intereses, el capital será durante el tercer año

22050 pesetas,

y se aumentará en el 5 por ciento para formar el capital correspondiente al cuarto año, y así sucesivamente.

En las cuestiones de interés compuesto, en vez del tanto por ciento se emplea, como mas cómodo, el *tanto por uno*: en lugar de decir, por ejemplo, que 100 pesetas producen 5, diremos que 1 peseta produce $\frac{5}{100}$ ó 0,05, lo que es enteramente igual.

Propongámonos resolver el siguiente

PROBLEMA 1.° *Un capital* c *se coloca durante* t *años á interes compuesto, siendo* r *el tanto por uno anual. ¿Cuánto valdrá la suma del capital é intereses al cabo de dicho tiempo?*

Cada unidad de dinero produce en un año la cantidad r, por consiguiente vale al cabo de este tiempo $1+r$; si una unidad se convierte en $1+r$, c unidades se convertirán en

$$c(1+r);$$

luego *para hallar el valor de un capital al cabo de un año, se multiplica por* $1+r$.

Esta regla tan sencilla, puede aplicarse á un capital cualquiera, por lo tanto el capital $c(1+r)$, al cabo del segundo año, será

$$c(1+r)(1+r)=c(1+r)^2.$$

Aplicando de nuevo la regla á este capital, resulta al fin del tercer año

$$c(1+r)^2(1+r)=c(1+r)^3.$$

Finalmente el capital al cabo de t años será

$$c(1+r)^t.$$

Si lo representamos por C tendremos la fórmula

$$C=c(1+r)^t \qquad [1].$$

Esta fórmula se ha obtenido en la hipótesis de que t es un número entero de años.

Supongamos, ahora, que el tiempo sea el número fraccionario de años $\frac{m}{n}$.

Representemos por x el interés que debe producir la unidad de dinero en el tiempo $\frac{1}{n}$, para que en un año produzca r.

Si cada unidad de dinero produce x en el tiempo $\frac{1}{n}$, se convierte al cabo de este tiempo en $1+x$; luego c unidades de dinero se convertirán en

$$c(1+x);$$

vemos, pues, que para hallar el valor de un capital al cabo de la fraccion de año $\frac{1}{n}$, se multiplica el capital por $1+x$.

Como esta regla puede aplicarse á un capital cualquiera, es claro que $c(1+x)$ al cabo de otra fraccion $\frac{1}{n}$ de año, ó sea el capital c al cabo del tiempo $\frac{2}{n}$, será

$$c(1+x)^2;$$

igualmente, al cabo del tiempo $\frac{3}{n}$. el capital c será

$$c(1+x)^3,$$

y por último, el capital c al cabo del tiempo $\frac{m}{n}$, será

$$c(1+x)^m.$$

Tendremos, pues,

$$C=c(1+x)^m, \qquad [2]$$

llamando C á la suma del capital é intereses al cabo del tiempo $\frac{m}{n}$.

El razonamiento anterior demuestra que el capital c al cabo del tiempo $\frac{n}{n}$, esto es, al cabo de un año es

$$c(1+x)^n,$$

y como sabemos por otra parte que este capital es tambien

$$c(1+r),$$

tendremos

$$c(1+x)^n=c(1+r);$$

de donde

$$1+x=(1+r)^{\frac{1}{n}}.$$

Sustituyendo este valor de $1+x$ en la fórmula [2], resulta

$$C=c\left((1+r)^{\frac{1}{n}}\right)^m=c(1+r)^{\frac{m}{n}},$$

y como $\frac{m}{n}$ es el tiempo, se puede sustituir por t, obteniendo

$$C=c(1+r)^t \qquad [1].$$

Luego la fórmula [1], obtenida en el supuesto de ser t un número entero de años, es igualmente cierta cuando t sea un número fraccionario.

La ecuacion [1] establece una relacion entre las cantidades C, c, r, t, y nos dará una cualquiera de éstas, cuando se conozcan las otras tres.

Si conocemos el capital primitivo, el tanto por uno y el tiempo, tomando logaritmos, será

$$\log C = \log c + t \log (1+r).$$

Si conociendo la suma C del capital é intereses, el tanto por uno y el tiempo, queremos hallar el capital primitivo c, tendremos

$$c = \frac{C}{(1+r)^t};$$

de donde

$$\log c = \log C - t \log (1+r).$$

Si la incógnita es el tiempo t, será

$$t = \frac{\log C - \log c}{\log (1+r)}.$$

Por último, si deseamos conocer el tanto por uno r, tendremos

$$1 + r = \sqrt[t]{\frac{C}{c}}.$$

$$\log (1+r) = \frac{\log C - \log c}{t}.$$

EJEMPLOS.

1.° *Hallar el valor del capital* 6500 *duros al cabo de* 8 *años al* 6 *por ciento.*

$$\begin{aligned} \log 6500 \ldots\ldots &= 3{,}812913 \\ \log 1{,}06 = 0{,}025306 & \\ 8 \log 1{,}06 \ldots\ldots &= 0{,}202448 \\ \hline \text{Log } C &= 4{,}015361 \end{aligned}$$

$$C = 10360 \text{ duros.}$$

2.° *¿Cuál es el capital que vale al cabo de* 9 *años* 43800 *pesetas, siendo* 5 *el tanto por ciento?*

$$\begin{aligned} \log 43800 \ldots\ldots &= 4{,}641474 \\ \log 1{,}05 = 0{,}021189 & \\ 9 \log 1{,}05 \ldots\ldots &= 0{,}190701 \\ \hline \log c &= 4{,}450773 \end{aligned}$$

$$c = 28234{,}03.$$

3.° *¿Cuánto tiempo deberá estar colocado un capital de* 8000 *pesetas, al* 5 *por ciento, para que adquiera el valor* 14000 *pesetas?*

$$\begin{array}{lrl} \log 14000 \ldots\ldots & = & 4,146128 \\ \log 8000 \ldots\ldots & = & 3,903090 \\ & & \overline{0,243038} \\ \log 1.05 \ldots\ldots & = & 0,021189 \\ \log 0,243038 \ldots & = & \bar{1},385674 \\ \log 0,021189 \ldots & = & \bar{2},326110 \\ \log t & = & 1,059564 \end{array}$$

$t = 11$ años 5 meses 19 dias.

4.° *¿Á qué tanto por ciento deberá colocarse un capital de* 25780 *pesetas, para que al cabo de* 4 *años ascienda á* 33792,40 *pesetas?*

$$\begin{array}{lrl} \log 33792,40 & = & 4,528819 \\ \log 25780 & = & 4,411283 \\ & & \overline{0,117536} \end{array}$$

$$\log (1 + r) = 0,117536 : 4 = 0,029384$$

$$1 + r = 1,07, \quad r = 0,07;$$

luego el tanto por ciento es 7.

238. PROBLEMA 2.° *Un capital* c *se coloca por* t *años al tanto por uno* r, *á interés compuesto; y cada año se agrega al capital primitivo una suma igual con las mismas condiciones. ¿Cuál será, al cabo de dicho tiempo, la suma total de capitales é intereses compuestos?*

El capital primitivo c, al cabo de t años, vale

$$c\,(1 + r)^t;$$

la suma c, que se agrega al fin del primer año, permanece colocada $t - 1$ años, luego se convierte en

$$c\,(1 + r)^{t-1};$$

igualmente, las sumas iguales á c agregadas al fin del segundo, tercero, cuarto etc. año, valen

$$c\,(1 + r)^{t-2}, \quad c\,(1 + r)^{t-3}, \quad c\,(1 + r)^{t-4} \text{ etc.};$$

y la última suma c, como solo produce interés durante el último año, se convierte en

$$c\,(1 + r).$$

Si llamamos C á la suma total de capitales é intereses compuestos, será

$$C = c(1+r)^t + c(1+r)^{t-1} + c(1+r)^{t-2} + \dots + c(1+r);$$

poniendo c por factor comun, resulta

$$C = c\left[(1+r)^t + (1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \dots + (1+r)\right].$$

El segundo miembro es el producto de c por la suma de los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término es $1+r$, el último $(1+r)^t$, y la razon $1+r$; luego

$$C = \frac{c\left[(1+r)^{t+1} - (1+r)\right]}{r} = \frac{c(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r}.$$

Ejemplo.

Una suma de 1000 *pesetas se coloca á interés compuesto, siendo* 5 *el tanto por* 100, *y cada año se agrega al capital primitivo otras* 1000 *pesetas con las mismas condiciones. ¿Cuál será al cabo de* 12 *años la suma total de capitales é intereses?*

Tenemos

$$c = 1000, \qquad r = 0{,}05, \qquad t = 12,$$

$$C = \frac{1000 \times 1{,}05\,(1{,}05^{12} - 1)}{0{,}05}.$$

$$\begin{aligned}
&\log 1000 \dots\dots\dots = 3\\
&\log 1{,}05 \dots\dots\dots = 0{,}021189\\
&1{,}05^{12} - 1 = 0{,}795842\\
&\log 0{,}795842 \dots\dots = \bar{1}{,}900827\\
&\text{C.}^{\text{to}} \log 0{,}05 \dots\dots = 1{,}301030\\
&\qquad \text{Log } C = 4{,}223046
\end{aligned}$$

$$C = 16712{,}69 \text{ pesetas.}$$

239. Problema 3.º *Un capital* c, *tomado á préstamo, debe pagarse por medio de* t *cuotas iguales, que serán satisfechas al fin de cada año, á contar de la época del empréstito. ¿Cuál será la cuota anual siendo* r *el tanto por uno?*

La cuota anual recibe el nombre de *anualidad;* de suerte que anualidad *es la suma que debe pagarse anualmente para extinguir una deuda y sus intereses compuestos en cierto número de años.*

El capital c al cabo de t años, se convierte en

$$c(1+r)^t,$$

y esta es la suma que deberia abonarse al prestador si todos los pagos se hiciesen al fin del tiempo t.

Pero la anualidad a satisfecha despues del primer año, representa á los t años de la época del empréstito una suma mayor, que será

$$a(1+r)^{t-1};$$

igualmente, las cuotas iguales á a satisfechas despues del segundo, tercero, cuarto etc. años, representan al fin del tiempo t, otras cantidades mayores, expresadas por

$$a(1+r)^{t-2}, \quad a(1+r)^{t-3}, \quad a(1+r)^{t-4};$$

y la suma de los valores que adquieren las cuotas al fin del tiempo t mas el valor a de la última, debe ser igual á la cantidad

$$c(1+r)^t.$$

Tenemos, pues,

$$a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+a(1+r)^{t-3}+\ldots\ldots+a=c(1+r)^t,$$

ó $\quad a[(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-3}+\ldots\ldots+1]=c(1+r)^t;$

$$\frac{a[(1+r)^t-1]}{r}=c(1+r)^t.$$

En esta ecuacion entran cuatro cantidades a, c, t, r: las dos primeras pueden calcularse fácilmente, siempre que las otras tres sean conocidas.

En efecto, despejando a y despues c, tendremos:

$$a=\frac{cr(1+r)^t}{(1+r)^t-1}, \qquad c=\frac{a[(1+r)^t-1]}{r(1+r)^t}.$$

Para hallar el valor de t puede hacerse

$$(1+r)^t-1=x,$$

trasformando así la ecuacion en

$$\frac{ax}{r}=c(1+x), \quad \text{que da} \quad x=\frac{cr}{a-cr};$$

una vez conocida x, hallaremos t del modo siguiente:

$$(1+r)^t=1+x,$$

$$t\log(1+r)=\log(1+x),$$

$$t=\frac{\log(1+x)}{\log(1+r)}.$$

Por último, si tratásemos de hallar r, encontraríamos, haciendo $1+r=x$, la ecuacion del grado $t+1$

$$cx^{t+1}-(c+a)x^t+a=0,$$

que no sabemos resolver.

EJERCICIOS.

I. Un obrero, que debe abrir un pozo de 15 metros de profundidad, recibe 3 pesetas por el primer metro, 4 por el segundo, 5 por el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuánto recibe por abrir el pozo?

II. Un cuerpo, al caer en el vacío, recorre durante el primer segundo 4,8997 metros, durante el segundo recorre tres veces esta distancia, durante el tercero, recorre cinco veces la misma, y así sucesivamente. ¿Cuántos metros descenderá en 12 segundos?

III. Hallar la suma de los términos de una progresion aritmética, conociendo el último, la razon y el número de términos.

IV. Hallar los términos extremos de una progresion aritmética, conociendo la razon, el número de términos y la suma de estos.

V. Conociendo el primer término de una progresion por diferencia, la suma de todos y la razon, hallar el último término y el número de estos.

VI. Una persona accede á vender su caballo á condicion de recibir un céntimo de real por el primero de los 32 clavos que tienen las herraduras, 2 céntimos por el segundo, 4 céntimos por el tercero y así sucesivamente, duplicando siempre el número de céntimos. ¿Cuánto pide por el caballo?

VII. Resolver los problemas III, IV, y V cuando la progresion es geométrica.

VIII. Calcular por medio de logaritmos las siguientes expresiones:

$$x = \sqrt[5]{\frac{13}{15} \cdot \left(\frac{12}{29}\right)^3} \qquad x = \sqrt[m]{\frac{a^2 - b^2}{c}}.$$

IX. Averiguar de qué expresiones provienen los siguientes valores:

$$\log x = \frac{1}{3} \log a - \frac{1}{5} \log b; \quad \log x = 5 \log a + 7 \log b - 3 - \frac{2}{5} \log a.$$

X. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$2^{3x} \cdot 3^{x-2} = 5^{x-1} \cdot 4^{x}$$

$$2^{x^2} \cdot 3^{x} = 9.$$

XI. En cuántos años se duplica un capital cualquiera, prestado á interés compuesto, siendo 5 el tanto por ciento?

XII. Averiguar qué capital será necesario colocar á interés compuesto, para que retirando al fin de cada año una suma de 5000 pesetas, se reembolse el capital y los intereses al 6 por ciento en 20 años.

Se halla de venta este tomo en Orense, librerías de D. Vicente Miranda y de D. Nemesio Perez, al precio de 26 reales, rústica.

En las mismas se vende el tomo II, *Geometría y Trigonometría*, al precio de 22 reales.

Los pedidos de alguna consideracion pueden hacerse directamente al autor.