ELEMENTOS

DE

MATEMATICAS,

POR

D. ACISCLO F. VALLIN Y BUSTILLO,
Doctor en ciencias, y Catedrático de esta asignatura.

9.ª EDICION.
Tirada estereotípica.

ARITMETICA Y ALGEBRA.

27 rs. en Madrid y 28 en las provincias.

MADRID.
IMPRENTA DE SANTIAGO AGUADO,
CALLE DE LOS REYES, NÚM. 18.

Librerías de la Publicidad y de Cuesta.
La correspondencia se dirigirá al AUTOR, calle de la Luna, núm. 30.

1860.

Los tratados de Aritmética, Algebra, Geometria, Trigonometria y Topografia, de que se compone esta obra, han sido aprobados para servir de texto en las Universidades, Institutos y Escuelas especiales por el Real Consejo de Instruccion pública y la Junta de Profesores del Real Instituto Industrial.

Los MM. RR. Arzobispos y RR. Obispos de casi todas las diócesis del Reino, se han dignado tambien señalar estos Elementos como texto para los Seminarios conciliares respectivos.

PRÓLOGO DE LA QUINTA EDICION.

La benevolencia con que han sido acogidos, tanto por el profesorado como por el público, nuestros Elementos de Matemáticas, nos han estimulado á introducir en ellos todas aquellas mejoras, que reclama el estado actual de la ciencia y su mas provechosa aplicacion á los usos didácticos.

Una de las primeras dificultades, sino la mayor, de las obras elementales científicas, es la eleccion del método con que han de exponerse, y ninguna tiene en esta parte iguales exigencias que una obra de Matemáticas, ya por la índole especial y propia de la ciencia, ya porque, sirviendo de modelo á todas las demás, debe formar con la claridad de sus ideas, la evidencia de sus juicios y el rigor de sus demostraciones, un todo regular y armónico, ideal perfecto del saber humano.

Un conjunto de verdades matemáticas rigorosamente demostradas, pero sin órden ni enlace alguno, no forma, no puede formar un libro elemental. Desde los primeros pasos que se dan en la ciencia de la cantidad (tipo el mas perfecto de todas las evoluciones metódicas del espíritu humano) es preciso acostumbrarse á saber el camino recorrido y el que falta por recorrer, siendo de este modo el principio de deduccion un auxiliar poderoso para no fatigar la memoria con verdades aisladas, sino que construyendo por nosotros mismos la síntesis de la ciencia y penetrándonos bien de sus principios siempre luminosos y de la extension adecuada y verdaderamente lógica de las definiciones, alcancemos á deducir el desarrollo, que puede y debe tener cada una de sus teorías.

Este ha sido el objeto principal que nos hemos propuesto al dar á nuestro libro la forma rigorosamente filosófica, que domina en cada uno de los diferentes tratados que contiene, y de cuyos ventajosos resultados recibimos cada dia nuevas pruebas, tanto en nuestra enseñanza personal, como en la de muchos de nuestros compañeros, que nos honran con sus observaciones.

Para completar este pensamiento, solo faltaban en las ediciones anteriores unas ligeras nociones de lógica, que sirviendo de introduccion de la obra, pudieran, no solo facilitar su estudio, sino guiarle con mas acierto en la marcha rigorosamente deductiva de la ciencia. No conviene que pase, en efecto, desapercibido para los jóvenes el gran fondo de lógica, que encierran las ciencias exactas. Esta innovacion es la que hemos añadido últimamente, en la inteligencia de que será de gran provecho, si, explicados los preliminares con detenimiento, y presentando en cada caso ejemplos sencillos y al alcance de los conocimientos de los alumnos, procura el profesor repetir su aplicacion por todo el cuerpo de la obra, haciendo distinguir en cada teoría, las definiciones de los principios fundamentales, y estos de los teoremas, problemas y corolarios; las demostraciones directas de las indirectas, las mediatas de las inmediatas: si los razonamientos son deductivos ó inductivos, etc., etc. (*)

El estudio de nuestros Elementos de Matemáticas bajo este plan será de una utilidad inmensa, tanto para los que no reciban otros estudios filosóficos ulteriores, como para los que cursen despues la lógica con mayor extension, donde harán iguales aplicaciones á las matemáticas. Las matemáticas y la lógica se auxilian y completan de un modo provechoso para ambas ciencias: son inseparables, y, si bien se profundiza esta materia, no hacen aquellas sino dar realidad objetiva en el tiempo y en el espacio á las formas intelectuales, que esta maneja ó entre sí combina en sus juicios y raciocinios. Ambas ciencias se nutren del mismo espíritu de evidencia y exactitud, y ambas engendran iguales hábitos de rigor y organismo en todas las construcciones intelectuales.

Todos los tratados de esta edicion han sido además enriquecidos en doctrina respecto de las otras ediciones, sin aumentar por eso su volúmen, dando la importancia que es debida á los ejercicios prácticos, que, diseminados por todo el cuerpo de la obra, son un poderoso estímulo para que el lector adquiera facilidad en su diferentes soluciones, familiarizándose así con el espíritu investigador de la ciencia, para caminar luego con paso seguro en el estudio de sus verdades mas sublimes.

A todas estas ventajas sirve de complemento, y en nuestro juicio de complemento necesario, el PROGRAMA GENERAL de toda la obra, que á manera de tabla sinóptica contiene el resúmen de cada una de las lecciones, en que pueden dividirse sus diferentes tratados.

(*) Convencidos de cuán necesaria es la uniformidad de la doctrina en los primeros pasos de la ciencia, hemos preferido al redactar estas nociones de lógica no separarnos de la obra, que consideramos hoy como la primera en su género, entre nosotros. Esta obra es el *Curso de Psicología y lógica* de los señores Monlau y Rey, catedráticos de la Universidad central.

Expuestas ya las principales alteraciones, que hemos creido conveniente hacer en esta edicion, réstanos ahora indicar, siquiera sea muy ligeramente, el método, que puede adoptarse en su estudio, pues nada hay mas fácil que el de las matemáticas, si se procede con órden, ni tampoco cosa mas difícil, cuando falta este requisito.

La inteligencia del texto ha de ser el primer objeto del lector, por lo tanto, despues de meditar bien los diferentes párrafos de cada leccion, hasta darse cuenta de las ideas del autor y del enlace y armonía, que tienen todas ellas con el objeto de la teoría á que pertenecen; se se deberán distinguir con cuidado los principios fundamentales y las definiciones, que les sirven de base. Encomendadas estas á la memoria, asi como tambien los enunciados de los diferentes teoremas, problemas y corolarios, se deducirán fácilmente las consecuencias inmediatas de las definiciones y principios, y las demostraciones y soluciones de los teoremas y problemas con todos sus detalles, repitiendo, cuantas veces sea necesario, las verdades, que sirven de base á cada cuestion, formen ó no parte integrante de la teoría. Conviene, además, distinguir, las definiciones generales de las particulares, las constructivas de las meramente nominales, las demostraciones mediatas de las inmediatas, las directas de las indirectas, etc., esforzándose en presentar otras diferentes sobre las mismas cuestiones. Si estas son problemas, no solo se deben verificar todos, absolutamente todos los ejemplos del libro, sino proponerse la resolucion de otros y otros, comprobando luego los resultados por las reglas conocidas de antemano.

En la geometría, trigonometría y topografía, despues de comprender bien cada una de las cuestiones de la leccion y de leer varias veces las demostraciones ó soluciones, teniendo á la vista la figura correspondiente, se repetirán estas, cambiando primero la posicion de la figura y despues las letras de la misma, hasta adquirir, no solo la evidencia de la verdad propuesta, sino la conciencia de que nos seria posible hacerla comprender á los demás, cualquiera que fuese la forma y posicion de la figura, y las letras adoptadas para la demostracion.

Es importantísimo fijarse bien en los puntos capitales de cada teoría, pues en matemáticas, como en todas las ciencias, hay cuestiones dominantes, que una vez entendidas facilitan la inteligencia de todas las demás; saber conocerlas, saber colocarse en ellas y saber dirigir la vista en torno, como quien contempla un paisage desde la cima de una montaña, es uno de los principales secretos del estudio.

Aunque las lecciones destinadas á los ejercicios no presentan nada que confiar á la memoria, son sin embargo de grande utilidad, porque en ellas se convence el lector de su poco ó mucho adelantamiento, segun las dificultades, que encuentra, al resolver las cuestiones, en que se ejercita. Algunas pocas de estas hay en el álgebra y la geometría, que presentarán sin duda inconvenientes para los alumnos menos aventajados: su resolucion, lo mismo que el contenido de todos los párrafos que llevan asterisco, puede suprimirse por punto general en la primera lectura de la obra, y hasta puede omitirse completamente por los alumnos de escasa disposicion para el estudio.

Terminado de este modo el trabajo de cada dia, se escribirá su resúmen en un cuaderno dispuesto al efecto, para lo cual puede servir de guia el programa general, que hemos empezado á publicar con esta edicion.

Últimamente, conviene advertir que los números encerrados dentro de un paréntesis, que se encuentran á cada paso por toda la obra, se refieren á doctrinas ya explicadas, que deberán consultarse antes de pasar adelante. Los números del PROGRAMA hacen referencia á los de la obra; de este modo es muy fácil señalar en esta la extension de cada una de las lecciones.

Posteriormente á la quinta edicion hemos mejorado aun mas la parte material, corregido algunas definiciones y erratas, reducido ó ampliado muchas teorías, añadido fórmulas, tablas y notas importantes, con las soluciones del mayor número de ejercicios, y refundido por último el tratado de TOPOGRAFÍA, siempre con el objeto de llegar á formar un libro de texto, que reuna todas las condiciones de una buena obra elemental.

No creemos que deje de serlo nuestro libro por la mayor extension que adquiere con las últimas innovaciones; porque estas van convenientemente distinguidas, para que se reserve su estudio á los alumnos aventajados; y en nada perjudican á la sencillez de la parte elemental, que es el principal objeto de la obra.

Si estas mejoras recientes merecen la misma buena acogida que las anteriores; de parte de las personas competentes, quedarán cumplidos nuestros deseos, sin renunciar por eso á continuar corrigiendo todo lo que parezca reclamar algun perfeccionamiento, bien nos lo acredite la experiencia propia, ó bien de ello nos convenza la observacion agena.

ÍNDICE

DE LOS DIFERENTES TRATADOS DE ESTA OBRA.

ALGEBRA.

Definicion, generalidad y division del ÁLGEBRA. Notacion algebráica. Diferentes formas de las expresiones literales. Igualdad y desigualdad de las expresiones algebráicas. Fórmulas algebráicas y su traduccion al lenguaje ordinario.

PARTE PRIMERA. CÁLCULO ALGEBRÁICO.

CANTIDADES REALES.

Adicion de las cantidades algebráicas enteras, 9; sustraccion, 11; multiplicacion, 12; division, 16; elevacion á potencias, 23; y extraccion de raices, 25. Ejercicios prácticos para el cálculo de estas expresiones, 32.

Cálculo de las cantidades fraccionarias literales, 34. Cálculo de las mismas cantidades bajo la forma de enteras con exponentes negativos, 38. Ejercicios para el cálculo de estas expresiones, 41.

Cálculo de las cantidades radicales literales, 42. Cálculo de las mismas cantidades bajo la forma racional con exponentes fraccionarios, 48. Ejercicios, 51.

CANTIDADES IMAGINARIAS.

Nociones preliminares relativas á las expresiones imaginarias en general, 52. Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de las expresiones imaginarias reducidas á la forma $B\sqrt{-1}$ ó $A+B\sqrt{-1}$, 53. Consideraciones generales acerca de estas expresiones, 56. Ejercicios, 58.

Complemento del cálculo algebráico. Fórmula de Newton.

Teoria de las permutaciones y combinaciones, 59. Deduccion de la fórmula de Newton y observaciones generales acerca de ella, 62. Aplicaciones de esta fórmula á la elevacion á potencias y extraccion de raices, 66. Ejercicios prácticos, 68.

PARTE SEGUNDA. COMPARACION ALGEBRÁICA.

COMPARACION DE IGUALDAD.

Ecuaciones de primer grado, 69. Resolucion y discusion de una ó mas ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, 72. Resoluciou de un sistema cualquiera de ecuaciones con menor ó mayor número de incógnitas, 84. Ejercicios prácticos, 85. Análisis de los problemas de primer grado, 86. Ejercicios, 96.

Ecuaciones de segundo grado, 98. Resolucion y discusion de una ó mas ecuaciones de segundo grado con igual número de incógnitas, 98. Resolucion de un sistema cualquiera de ecuaciones de primero y segundo grado, ó solo de segundo grado con mayor ó menor número de incógnitas, 103. Ejercicios prácticos, 104. Análisis de los problemas de grado segundo, 105. Ejercicios, 110.

Teoría de los logaritmos.

Teoria algebráica de los logaritmos y sus aplicaciones al cálculo literal y á la resolucion de las ecuaciones exponenciales, 111. Ejercicios, 119.

COMPARACION DE DESIGUALDAD.

Inecuaciones de primer grado, 120. Resolucion de una ó mas inecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, 121. Análisis de los problemas cuya traduccion algebráica es una ó mas inecuaciones de primer grado.

Inecuaciones de segundo grado, 122. Resolucion de una ó mas inecuaciones de segundo grado con igual número de incógnitas. Observaciones generales.

Teoria de las progresiones, 123. Suma de las potencias de un mismo grado de todos sus términos. Números figurados, 129. Pilas de balas, 130. Ejercicios prácticos para todas las cuestiones de la comparacion de desigualdad, 131.

GEOMETRIA.

Preliminares.

Definicion de la Geometria, de la extension, de la superficie, de la línea y del punto matemático. Cantidad y forma de la extension. Líneas rectas y curvas: sus propiedades mas notables. Superficies planas y curvas. Division de la Geometria en Geometria plana y Geometria del espacio.

GEOMETRIA PLANA.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

TRIGONOMETRIA Y TOPOGRAFIA.

Objeto de la TRIGONOMETRIA. Su division en rectilínea y esférica. Introduccion de las líneas trigonométricas en el cálculo.

Líneas trigonométricas.

Definicion y construccion de las líneas trigonométricas de un arco positivo. Alteracion de estas líneas para todos los arcos desde cero hasta 180°. Líneas trigonométricas de un arco negativo y de dos arcos suplementarios, pág. 6.

Relacion entre el rádio, el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de un arco cualquiera positivo ó negativo, menor ó mayor que un cuadrante. Fórmulas de todas estas líneas en funcion del rádio y una cualquiera de ellas, pág. 9.

Fórmulas de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de la suma y diferencia de dos arcos, y de los múltiplos y divisores de un arco dado, pág. 12.

Construccion, disposicion y uso de las tablas trigonométricas, pág. 20.

Ejercicios para el estudio de las fórmulas trigonométricas, pág. 24.

Resolucion numérica de los triángulos.

Proposiciones fundamentales para la resolucion de los triángulos rectilíneos rectángulos. Su aplicacion á los únicos cuatro casos que pueden ocurrir. Ejemplos, pág. 25.

Proposiciones fundamentales para la resolucion de los triángulos rectilíneos en general. Su aplicacion á los cuatro casos siguientes: dados los tres lados; dos lados y el ángulo comprendido; dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos; ó un lado y los ángulos adyacentes, resolver el triángulo. Ejemplos, pág. 27.

Cuadro sinóptico para la resolucion de los triángulos rectilíneos, pág. 32.

Teoremas fundamentales para la resolucion de los triángulos esféricos en general. Resolucion de los rectángulos y oblicuángulos en los seis casos diferentes, que pueden ocurrir en la práctica. Ejemplos, pág. 33.

Cuadro sinóptico para la resolucion de los triángulos esféricos, pág. 45.

Ejercicios para la resolucion de los triángulos rectilíneos y esféricos, pág. 46.

Objeto de la TOPOGRAFIA. La planimetria, la nivelacion y la memoria descriptiva de un terreno son datos bastantes, para formar una idea exacta de su extension y demas accidentes propios de la topografia. Division de la topografia en regular é irregular. Escalas gráficas y numéricas. Figura de la tierra. Nombres de algunas líneas y planos que se conciben trazados en su superficie, pág. 59.

Instrumentos topográficos.

Descripcion y uso de los piquetes ó jalones, cadenilla, plomada, Estadía, Escuadra de agrimensor, Plancheta y alidada, Brújula, Grafómetro, Teodolito, y Niveles. Práctica de los diferentes problemas, que se resuelven con ayuda de cada uno de estos instrumentos.

Cartas y planos topográficos.

Breves observaciones acerca de las cartas geográficas, pág. 89.

Levantamiento de un plano topográfico en general, dividiendo esta operacion en otras seis, que son: triangulacion del terreno, determinacion de los detalles, nivelacion, orientacion, dibujo topográfico y su copia ó reduccion á una escala determinada. La memoria descriptiva es el complemento del plano.

NOTAS AL FIN DE CADA TRATADO.

ARITMETICA.

Diferentes sistemas de numeracion.

Observaciones generales. Sistema duodecimal. Sistema binario.
Dado un número en el sistema decimal, expresarlo en el duodecimal ú otro cualquiera y vice-ver

Abreviaciones del cálculo aritmético.

Abreviaciones en la multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices.

Nociones sobre los límites.

Números constantes y variables. Teorema de Arbogast. Teorema de los límites.

Pesos, medidas y monedas españolas.

Reduccion legal de las pesas, medidas y monedas métricas á las de Castilla y vice-versa.

ALGEBRA.

Aplicaciones aritméticas.

Propiedades de los números. Fracciones contínuas. Reglas de tres, compañía, interés, etc.

Ecuaciones de primer grado.

Eliminacion por el método de Bezout. Resolucion en números enteros de la ecuacion $Ax+By=C$.

Ecuaciones de segundo grado.

Resolucion y discusion de $x^2+Sx+P=o$, $Ax^2+Bx+C=o$ y $Ax^{2n}+Bx^n+C=o$.
Máximos y mínimos de las expresiones algebráicas.

Ecuaciones binomias.

Resolucion de algunas de estas ecuaciones.

GEOMETRIA.

Resolucion gráfica de los triángulos rectilíneos.

Construccion de las escalas gráficas. Su aplicacion á la resolucion de triángulos.

Simetría de posicion.

Simetría respecto á un punto, á una recta ó á un plano. Simetría absoluta.

Propiedades de algunas curvas notables.

Preliminares. Elipse, parábola, hipérbola y hélice.

Breves nociones de geometría descriptiva.

Objeto de la geometría descriptiva. Resolucion de algunos de sus problemas mas sencillos.

TRIGONOMETRIA Y TOPOGRAFIA.

Aplicaciones geométricas.

Nuevas fórmulas del área de algunos polígonos. Reducir un ángulo al horizonte.
Conocidas la longitud y latitud de dos puntos de la tierra, hallar la distancia entre ellos.

Otra resolucion de los triángulos rectilíneos.

La fórmula $A+B+C=180°$, y el teorema que dice: «los senos de los ángulos son como los lados opuestos» bastan para resolver el problema general de la trigonometría plana.

Fórmula de Moivre y sus aplicaciones.

Fórmula de Moivre. Fórmula del seno y coseno de un arco en funcion del mismo arco.
Observaciones importantes acerca de las expresiones imaginarias.

Agrimensura ó medicion y division de terrenos.

Resolucion de los problemas de un uso mas frecuente en la práctica.

Correcciones en la nivelacion.—Barómetro.

Diferencia entre el nivel aparente y el verdadero. Refraccion. Medicion de alturas con el barómetro.

Nociones de gnomónica.

Determinacion de la meridiana por la estrella polar, y su aplicacion á la gnomónica.

Anteojos topográficos.

Brevísimas nociones de óptica con aplicacion á los instrumentos de reflexion.

NOCIONES DE LOGICA

como preliminares al estudio elemental de las matemáticas.

Filosofia es el conjunto de todos los conocimientos humanos adquiridos por los medios naturales, es decir, mediante el empleo legítimo de nuestras facultades.

Las facultades son las diversas *capacidades* naturales del alma humana, viniendo á ser respecto de esta lo que las *propiedades* respecto de las demás cosas. Estas facultades, llamadas tambien operaciones del alma ó fenómenos de conciencia, son tres: *sensibilidad*, *inteligencia* y *voluntad*. Las capacidades de sentir, pensar y querer son naturales en el hombre, y se desenvuelven en él espontáneamente, segun las leyes que á la naturaleza humana impuso la Providencia. Cuando la *razon* dirige estas capacidades, entonces pasan á ser verdaderas facultades.

La verdad es la aspiracion natural y constante de la inteligencia.

La facultad, que tiene el hombre de ejercitar con regularidad y armonía todas las funciones de la inteligencia con el fin de saber, se llama *razon*.

Los resultados obtenidos por el ejercicio de la inteligencia se llaman *conocimientos*.

Idea es el conocimiento adquirido por simple percepcion, sin afirmar ni negar nada ó sea sin juicio.

Juicio es el acto del entendimiento por el que referimos unas á otras las ideas adquiridas. El juicio es la forma propia de la razon.

Raciocinio es el acto de la razon, por el que referimos unos á otros varios juicios ya formados.

Por medio de la *conciencia*, los *sentidos exteriores* y la *razon*, recibe el entendimiento la impresion de la verdad y forma todos sus primeros conocimientos; por la *atencion*, la *abstraccion*, la *generalizacion* y el *razonamiento* los modifica y los extiende; por la *memoria* los conserva y los recuerda, y por la *imaginacion* concibe objetos, que no existen en la naturaleza.

Se llama *lenguaje* la expresion del pensamiento humano.

Palabra es la expresion hablada de una idea.

Proposicion es la expresion hablada de un juicio.

Oracion es la expresion de un raciocinio por medio de palabras; y el conjunto de oraciones de que nos valemos para enunciar la série de raciocinios ó pensamientos, que sirven para la averiguacion de una verdad, se llama *discurso*: de modo que el discurso oral es el organismo de la razon.

De la estrecha union, que existe entre el pensamiento y la palabra, nace el que muchas veces el pensamiento y sus partes se tomen como sinónimos del discurso y las suyas; y tambien el que para adelantar con seguridad en cualquiera ciencia ó sea para cultivar las ciencias en el seno de la razon, necesitemos expresarnos de una manera clara y conveniente. De la necesidad de discurrir bien y de evitar los errores, en que puede caer la inteligencia, ha nacido la Lógica; y de la necesidad de enunciar nuestros pensamientos con claridad y exactitud há nacido la Gramática.

La Lógica es la ciencia, que expone las leyes de la inteligencia y las reglas que han de dirigirla en la investigacion de la verdad.

La lógica tiene relaciones muy íntimas con todas las demás ciencias. Todas reciben de ella el método, que las constituye como tales, y que las expone despues con claridad y sencillez, porque abraza el criterio de nuestras ideas, de nuestros juicios y de nuestros razonamientos.

Las ideas matemáticas son las nociones ó conceptos de la inteligencia en la intuicion del número y de la extension.

Lo mismo en matemáticas que en cualquiera otra ciencia, las ideas son *simples*, si su objeto es absolutamente indescomponible, como las de olor, de color, de placer, de extension, de movimiento, etc., y *compuestas*, si su objeto puede descomponerse real ó mentalmente en mas ó menos elementos, como las de un árbol, de una casa, de un triángulo, del movimiento acelerado, etc. Las ideas simples no pueden comunicarse por medio alguno al que no las haya adquirido ó experimentado por sí mismo.

Ideas particulares son las que representan la nocion de un ser separado de los demás, como v. g. la idea de Alonso el Sábio, Napoleon, etc., y *generales* las que abrazan á un cierto número de séres, que están comprendidos en las mismas condiciones; v. g. la idea de hombre.

Las ideas generales son ciertamente las mas numerosas, puesto que entre nueve ó diez especies de palabras de que se componen las lenguas, una sola especie comprende signos consagrados á las nociones individuales; esta es la de los sustantivos ó nombres propios, Pedro, Juan, Madrid, etc. Todas los otras especies de palabras expresan nociones generales.

Como todas las ideas generales no lo son en el mismo grado, es decir, no se extienden al mismo número de individuos, ha sido preciso dividirlas en varias clases subordinadas las unas á las otras, y de aqui resultaron las nociones de *especie*, *género*, *familia* y *órden*, que sirven para retener con facilidad y transmitir con prontitud los detalles de las ciencias. Estas nociones presentan una doble propiedad: se extienden á un cierto número de objetos, que es lo que constituye la *extension* de la idea, y expresan los atributos ó caractéres comunes á estos objetos, que es lo que constituye su *comprension*. La comprension está en razon inversa de la extension, es decir, que una idea general abraza menos cualidades segun que sea mayor el número de individuos á que es aplicable.

Ideas *abstractas* son las que tenemos de aquellas condiciones, que afectan á los séres, prescindiendo de los séres mismos, como sucede en la idea del sonido, en la cual prescindimos del cuerpo que le produce, y *concretas* las que tenemos de los séres con relacion á las determinadas condiciones que les afectan, como v. g. la idea de cañonazo, por referirnos en ella al estampido del cañon. Toda idea que tiene algun valor es abstracta y general. La abstraccion es la condicion de todas las investigaciones científicas. La idea abstracta de la extension es el fundamento de la Geometría, la idea abstracta del movimiento dá orígen á la Mecánica

Por medio de los JUICIOS relacionamos, referimos recíprocamente ó combinamos entre sí dos ó mas ideas.

En el juicio se contienen dos elementos enteramente distintos, á saber, la *percepcion* de la relacion, la cual nos dá el conocimiento, y la *afirmacion* por la cual nos apropiamos la verdad y tomamos posesion de ella.

Cuando el espíritu ha formado un cierto número de ideas y las ha comparado, no tarda en apercibirse de que las unas convienen entre sí y pueden reunirse, y que lo contrario sucede á las otras. Si reconocemos, por ejemplo, que la idea de DIOS conviene con la idea de *bondad*, y que no conviene con la idea de injusticia, percibir la relacion, que existe entre estas dos ideas, es *juzgar*. Dios es bueno, Dios no es injusto, son dos juicios, el primero *afirmativo* y el segundo *negativo*. Tambien pueden ser los juicios *generales* ó *particulares* segun que se refieran á un conjunto de individuos tomados colectivamente ó á uno solo en particular. Todos los hombres son mortales, es un juicio *general afirmativo*, y este hombre no es estudioso, lo es *particular negativo*.

El juicio no es una facultad especial del entendimiento humano, como los sentidos y la memoria, es mas bien la ley universal de todas nuestras facultades, la consecuencia necesaria de nuestra organizacion espiritual. Un ser inteligente, que no juzgase, es decir, que no creyese, ofreceria la mas extraña y la mas inexplicable de todas las contradicciones.

La enunciacion oral de un juicio se llama PROPOSICION. Sus elementos lógicos son *sugeto*, *predicado* y *cópula*: *sugeto* es el ser ó entidad de quien se afirma ó niega alguna cosa; *predicado* es la condicion que se afirma ó niega del sugeto; *cópula* es la afirmacion ó negacion de la relacion que se establece entre el sugeto y el predicado.

Dios *(sugeto)* es *(cópula)* infinito *(predicado)*. La sabiduría *(sugeto)* es y ha sido siempre *(cópula)* loable en todos los pueblos civilizados *(predicado)*.

El RACIOCINIO es la operacion que practicamos, para encontrar la relacion entre dos ideas, que no aparecen directamente relacionadas.

La enunciacion oral de un raciocinio expresado por medio de proposiciones lógicas se llama *argumentacion*. La argumentacion se divide en *inductiva* y *deductiva*; la primera expresa la marcha, que sigue la razon cuando, de la observacion de un cierto número de hechos particulares, asciende á establecer principios generales aplicables á todos los hechos de la misma especie; y la segunda expresa la marcha de la razon cuando, poseedora de ciertos principios generales, desciende á las consecuencias particulares que contienen. En la argumentacion inductiva no hay cuestion préviamente propuesta; es mas bien un medio de invencion que de enseñanza; en la deductiva hay siempre una cuestion propuesta de antemano á la cual venimos á parar como término del procedimiento: es un poderoso instrumento de enseñanza. Ultimamente, por la induccion ascendemos de los hechos á las leyes ó de las verdades particulares á las generales, y por la deduccion recorremos este camino en sentido inverso, descendiendo de los principios generales á las aplicaciones particulares (*).

(*) La induccion tiene un fundamento: este es el principio intuitivo, la verdad primera en cuya virtud inducimos. La induccion es el complemento natural y necesario de la deduccion.

A la vista de un cuerpo que cae, concebir que todos los cuerpos caen es proceder por *induccion*; y establecido que todos los cuerpos caen, concluir que uno particular tiene la misma propiedad, es raciocinar por *deduccion*. El principio de la deduccion es; que se puede afirmar de un ser todo lo que se afirma de la clase, á que pertenece; máxima evidente, porque ningun objeto pertenece á una clase si no posee todos sus caractéres.

Llámase *silogismo* una argumentacion, que consta de tres proposiciones dispuestas de tal suerte, que de las dos primeras, llamadas *premisas*, se infiere la tercera, llamada *conclusion*. Es la forma mas simple de la argumentacion, porque con menos de tres proposiciones no pueden expresarse los tres juicios (dos preparatorios y uno definitivo) que intervienen en el raciocinio mas sencillo.

Las tres ideas, que se combinan dos á dos para formar las tres proposiciones de un silogismo, se llaman *términos*, que se distinguen con los nombres de *mayor* el mas general, *menor* el menos general, y *medio* el que une las dos ideas extremas. Entre estos términos se verifica una especie de cálculo, que consiste en comparar en cada premisa uno de los términos extremos con el término medio, y comparar los dos extremos entre sí en la conclusion. Asi, por ejemplo, en el silogismo

PREMISAS	Todo cuerpo es pesado: El aire es cuerpo;	CONCLUSION	Luego el aire es pesado.

el término mayor ó mas general *pesado*, y el menor ó menos general *aire*, (como que designa una sustancia particular), se comparan en las dos premisas con el término medio *cuerpo*, y de la conveniencia con esta idea inferimos en la conclusion que el aire y la pesadez convienen entre sí ó que el aire es pesado.

La forma mas matemática del silogismo es la disyuntiva, que consiste en presentar en la proposicion mayor (aquella en que se compara el término mayor con el término medio) varios miembros ó extremos incompatibles, afirmar en la menor uno cualquiera de ellos y negar los demás en la conclusion, ó negar todos menos uno en la menor y afirmar este en la conclusion.

A es *igual*, *mayor* ó *menor* que B: Pero es *mayor*; Luego no es *igual* ni *menor*.	A es *mayor*, *igual* ó *menor* que B: No es *mayor* ni *menor*; Luego es *igual*.

Tal es la constitucion regular del silogismo, pero no siempre se presentan los razonamientos bajo esta forma perfecta; resultando de esto las siguientes variedades del sistema deductivo: 1.ª El *entimema* en el que una de las premisas del silogismo está sobreentendida, como por ejemplo, todo cuerpo es pesado, luego el aire es pesado. ¿No os arrepentís? pues temed la justicia de Dios. 2.ª El *epiquerema* en que una al menos de las premisas está acompañada de su prueba: Todos los cuerpos son pesados segun lo demuestra la experiencia; pero el aire es un cuerpo, luego etc. 3.ª El *sorites*, que puede compararse á una série de igualdades, en el cual concluimos la igualdad de dos extremos entre sí, por ser iguales á varios términos medios con los cuales vamos comparando, ya el término mayor (sorites directo), ya el menor (sorites regresivo). Quien honra á Dios, respeta sus mandamientos; el que respeta los mandamientos divinos, practica la caridad; el que practica la caridad, contribuye á prevenir el crímen por el alivio de la desgracia; el que previene las acciones criminales, sirve los intereses del Estado; luego el que honra á Dios, sirve los intereses del Estado. 4.ª El *dilema* en donde dos proposiciones contrarias son el punto de partida de dos silogismos, que tienen la misma conclusion:

Ó sabes que no sabes, ó no sabes que no sabes;

Si sabes que no sabes, algo sabes.

Si no sabes que no sabes, no tienes razon para afirmar que no sabes.

Este dilema sirve para convencer á los escépticos que afirman que nada se sabe.

CIENCIA es una série de verdades dependientes unas de otras, y subordinadas todas á un principio (*).

En toda ciencia ha de haber *principios*, puesto que la série de verdades dependientes ha de tener un último punto en qué apoyarse, el cual no necesita otro fundamento ó razon anterior. Los principios de una ciencia han de ser de dos clases: unos fundamentales ó especiales para cada ciencia y otros formales y comunes para todas ellas, porque son las leyes de la razon en su marcha inductiva ó deductiva, y siempre se induce con arreglo á unos mismos principios.

El progreso y la vida de las ciencias dependen del método que se adopte para constituirlas ó exponerlas. MÉTODO es el ejercicio adecuado de las funciones intelectuales mas apropiadas para adquirir un conocimiento científico ó para enunciarlo despues de adquirido. Se divide en *analítico* y *sintético*.

Método *analítico* ó método de invencion es el que procede de lo compuesto á lo simple, elevándose poco á poco de lo particular y determinado á lo universal é interminado, pudiendo aplicarse lo mismo al mundo físico que al mundo moral, á los fenómenos de la materia como á los del espíritu. Método *sintético* ó método de enseñanza es el que procede de lo simple á lo compuesto, descendiendo por grados de los principios mas altos y fundamentales á la cuestion particular y determinada, que se trata de resolver.

Acaso no esté muy distante la ciencia de llegar al verdadero método y el mas oportuno para su perfecta explanacion, pero mientras tanto que ulteriores y grandes descubrimientos no lleguen á demostrar las profundas innovaciones que tal sospecha despierta, fuerza es que en la enseñanza de las matemáticas puras se siga el método mixto de analítico y de sintético.

El método matemático no es pues ni el analítico ni el sintético; sino que se compone de ambos, los cuales por esta razon, en vez de excluirse se completan mútuamente, pues por el primero se descompone una proposicion, incierta aun, en sus diferentes partes, las cuales deben ser verdaderas y hallarse ligadas, si la proposicion es verdadera, y falsas y sin enlace posible, si la proposicion es falsa; mientras que por el método sintético se unen de cierta manera muchas verdades, de cuyo enlace resultan verdades nuevas. En una palabra, en el análisis se va de las ramas al tronco, y en la síntesis se va del tronco á las ramas.

(*) El principio fundamental de la ciencia, no deberia ser mas que uno, pero aun no han llegado las ciencias á tal grado de perfeccion que presenten bien descubierto ese único y altísimo fundamento.

En la exposicion de las ciencias matemáticas se conserva la nomenclatura siguiente:

Definicion es el desarrollo verbal de la comprension de una idea ó bien el acto por el cual el espíritu desenvuelve y fija el sentido de una palabra ó la naturaleza de una cosa; las primeras se llaman *reales* y las segundas *nominales*.

La definicion debe convenir á todo el definido y solo á él, es decir, debe ser propia y universal. Tambien debe ser recíproca, es decir, que el sugeto y el atributo puedan tomarse indiferentemente el uno por otro. Este último carácter es lo que distingue la definicion de las proposiciones puras y simples, cuyos términos no son convertibles.

El oro es amarillo; es una proposicion, porque la idea de color amarillo no es adecuada á la idea de oro, puesto que hay otras cosas diferentes del oro que son amarillas. Las estrellas son astros, que brillan con luz propia, es una *definicion*, porque el sugeto y el atributo son dos ideas iguales; ó mejor dicho, una sola, expresada de dos maneras diferentes: por una sola palabra en el primer miembro, y por un conjunto de ellas en el segundo.

Una última cualidad, necesaria á la definicion, es la claridad.

No hay sino una sola ciencia, la geometría, en donde las definiciones tienen una evidencia inmediata, pues en todas las otras ciencias humanas son por lo regular inexactas é hipotéticas. Las figuras, y en general los objetos de la geometría, son los productos del pensamiento, que forma precisamente lo que quiere y sabe todo lo que forma. Por ejemplo, describir un círculo es trazar una figura terminada por una curva, cuyos puntos equidistan de otro comun llamado centro: la palabra *círculo* resume este hecho; la definicion le expone y no le queda al geómetra mas que deducir las consecuencias. Lo mismo se puede decir de la definicion del triángulo, pirámide, prisma, etc. Estas definiciones se llaman *constructivas*.

Axiomas son los principios formales comunes á todas las ciencias, y por consiguiente de una evidencia tan inmediata que basta enunciarlos para ver su verdad. Los axiomas que principalmente se emplean en matemáticas son los siguientes: una cosa es igual á ella misma: el todo es igual al conjunto de sus partes: el todo es mayor que una parte y esta menor que el todo: si con cosas iguales se hacen operaciones iguales, interviniendo valores iguales, los resultados serán tambien iguales: dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí: dos cosas, una mayor y otra igual ó menor que otra tercera, ó vice-versa, no son iguales entre sí: la distancia mas corta entre dos puntos es la línea recta.

Hay axiomas en todas las ciencias, pero donde se reconoce mas su importancia es en las matemáticas, pues son la base de todas las demostraciones; y si bien no bastan para el desarrollo de los teoremas, ninguna verdad puede establecerse sin su concurso. ¿Qué grado de certeza ofrecerian las mas simples verdades de la geometría, si no fuera evidente que el todo es mayor que la parte, que dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí, y que la línea recta es la mas corta distancia entre dos puntos?

Postulados son las verdades fundamentales que tienen un carácter práctico y en que se enuncia la evidente posibilidad de hacer alguna cosa.

Teoremas son los enunciados especulativos, en que se propone una verdad demostrable. En todo teorema hay siempre tres cosas: una hipótesis, que sirve de dato á la demostracion, una tésis ó consecuencia, que expresa la verdad demostrable; y en seguida la demostracion. A veces la hipótesis es una simple definicion del objeto. Un teorema es recíproco de otro, cuando la hipótesis del uno es tésis ó conclusion del otro y al contrario.

Problemas son los enunciados prácticos, en que se propone determinar una ó mas cosas desconocidas, llamadas incógnitas, por medio de otras conocidas que se llaman *datos*, enseñando y legitimando á un tiempo los procedimientos para lograrlo. En los problemas hay tambien tres cosas indispensables; una propuesta, una solucion y una demostracion. Los problemas se convierten en teoremas haciendo de la solucion una hipótesis, de la propuesta una tésis; y dejando la misma demostracion.

Los teoremas y problemas, aunque no son evidentes por sí mismos, adquieren su evidencia por la demostracion.

Ayudado el espíritu humano de los axiomas y definiciones, ha creado las matemáticas y en general todas las ciencias, que se apoyan en la deduccion. Los axiomas son por sí mismos verdades estériles, pero cuando se combinan con las definiciones, conducen á consecuencias que el espíritu no puede rechazar; dando asi lugar á la demostracion que no es otra cosa que la misma deduccion, fundada sobre principios ciertos, para hacer ver la verdad de alguna proposicion. Asi decimos que

Demostracion es un raciocinio, en que se hace ver la verdad de una proposicion fundándose en principios evidentes. La demostracion puede ser *inmediata* ó *mediata*; la primera toma por principio una verdad evidente por sí misma, y la segunda parte de una verdad, que á su vez se hizo evidente por otro ú otros principios. Tambien se divide en *directa* é *indirecta*; es directa cuando funda la verdad del enunciado en la relacion que este guarda con un principio evidente: é indirecta ó *ad absurdum* cuando, suponiendo que la tésis no es cierta, deducimos un absurdo ó una contradiccion con algun principio evidente ó con la hipótesis de la misma proposicion.

Corolarios son las verdades, que se derivan inmediatamente ó por medio de un razonamiento fácil de un axioma, de una definicion ó de una proposicion ya demostrada, y que por lo mismo, no necesitan de demostracion especial y propia. Los corolarios ó consecuencias son verdaderos teoremas ó problemas, á veces de grande importancia.

Lemas son proposiciones auxiliares, que solo sirven para facilitar la demostracion de otras, consideradas como mas principales.

Escolios son las observaciones ó advertencias comunes á dos ó mas proposiciones, que tienen por objeto hacer notar su enlace, aplicaciones, etc. Los escolios se van intercalando por todo el cuerpo de la ciencia, para facilitar su marcha deductiva.

Teoría es un conjunto de verdades correspondientes á un objeto, considerado bajo todos sus aspectos y en todas sus relaciones. Los teoremas son los elementos integrantes de la teoría en la cual todo es especulativo: el conjunto de todos los que se necesitan, para el completo desenvolvimiento de las verdades matemáticas ó de las que se refieren á cada uno de los tratados de la ciencia, constituye la teoría de la misma.

ALFABETO GRIEGO.

Es costumbre admitida por todos los autores de matemáticas, la de emplear las letras del alfabeto griego, bien sea para expresar cantidades, que convenga distinguir de una manera notable en una cuestion dada, ó bien para hacer referencias á fórmulas ó cuestiones ya explicadas, pagando así un tributo de reconocimiento al idioma helénico, en que se escribieron las mas célebres obras matemáticas de la antigüedad. Siguiendo nosotros esta costumbre, ponemos á continuacion la figura, el nombre y la pronunciacion del alfabeto griego mas familiar, llamado alfabeto jónico.

Figura.	Nombre.		Pronunciacion.
Α, α,	ἄλφα,	*alpha.*	A *a.*
Β, ϐ,	ϐῆτα,	*beta.*	B *b.*
Γ, γ,	γαμμα,	*gamma.*	G *g.*
Δ, δ.	δέλτα,	*delta.*	D *d.*
Ε, ε,	ἐψιλον,	*épsilon.*	E *e* breve.
Ζ, ζ,	ζητα,	*zeta.*	Z *z.*
Η, η,	ἦτα,	*eta.*	E *é* larga.
Θ, θ,	θῆτα,	*theta.*	Th *th* ó *z.*
Ι, ι,	ἰῶτα,	*iota.*	I *i* vocal.
Κ, κ,	καππα,	*kappa.*	K *k.*
Λ, λ,	λαμϐδα,	*lambda.*	L *l.*
Μ, μ,	μῦ,	*mu.*	M *m.*
Ν, ν,	νῦ,	*nu.*	N *n.*
Ξ, ξ,	ξῖ,	*xi.*	X *x* (cs ó gs)
Ο, ο,	ὄμικρὸν,	*ómicron.*	O *o* breve.
Π, π,	πῖ,	*pi.*	P *p.*
Ρ, ρ,	ῥῶ,	*rho.*	R *r*, *rh.*
Σ, σ, ς,	σῖγμα,	*sigma.*	S *s.*
Τ, τ,	ταῦ,	*tau.*	T *t.*
Υ, υ,	ὑψιλὸν,	*úpsilon.*	U *u.*
Φ, φ,	φῖ,	*phi*	F *f*, *ph.*
Χ, χ,	χῖ,	*chi.*	J *j*, *ch*, *q.*
Ψ, ψ,	ψῖ,	*psi.*	Ps *ps.*
Ω, ω,	ὦμέγα,	*omega.*	O *ó* larga.

Úsanse tambien las letras del alefato hebráico y los caracteres árabes, cuando los alfabetos anteriores no bastan á designar todos los elementos de una consideracion teórica ó de una resolucion práctica, ó cuando se quiera dar á algunos de ellos una notacion mas característica, que los distinga de los demás.

DEFINICION Y DIVISION DE LAS MATEMATICAS.

Las MATEMÁTICAS, consideradas en su conjunto ó como formando una sola ciencia, pueden definirse diciendo que son la *ciencia, que trata de la cantidad.*

Los griegos dieron el nombre de *matemáticas* á la reunion de conocimientos que poseian en la infancia de su civilizacion, pero los progresos contínuos de la inteligencia humana hicieron necesaria algun tiempo despues una division de todas las verdades conocidas, reuniendo en un solo tratado las que tenian entre sí alguna conexion. Cada uno de estos tratados recibió un nombre especial, conservando únicamente el primitivo de matemáticas el conjunto de verdades relativas á la cantidad.

Por CANTIDAD se entiende ordinariamente todo lo que es susceptible de aumento y disminucion;

Pero, considerada de un modo general y filosófico, la cantidad no es la cosa misma, que puede ser mayor ó menor, sino un modo de ver del entendimiento humano, el cual contempla las cosas como unas (*unidad*), ó como muchas (*pluralidad*), ó como colecciones de muchas unidades (*totalidad*). Así la unidad misma no es cantidad, sino en cuanto es considerada como totalidad de una cierta pluralidad de unidades inferiores.

Llámase *unidad* á cada una de las partes iguales, de que se compone la cantidad.

Un objeto material, por ejemplo, un monton de arena, no se nos representa (haciendo abstraccion de su naturaleza física) sino como un agregado de partes ó unidades, es decir, como una cantidad mayor ó menor, susceptible de ser aumentada añadiéndole otras nuevas, ó de ser disminuida quitándole algunas de las que la componen. Además, la porcion del espacio indefinido, en que se hallan colocados todos los cuerpos, que ocupa el monton de arena, es tambien una cantidad, que puede crecer ó disminuir, segun que se añadan ó quiten partes componentes ó unidades, ó bien segun que estas partes estén mas ó menos unidas entre sí.

Lo mismo sucede á todos los objetos del mundo físico. Cualesquiera que sean su naturaleza íntima y sus propiedades individuales, estos objetos, considerados en su forma, son agregados de partes dadas primitivamente y susceptibles de mas y de menos, de aumentar y disminuir, es decir son cantidades; y por consiguiente, la ciencia de la cantidad abraza todos los fenómenos del universo, y las leyes de la cantidad son á la vez las leyes de la determinacion de estos fenómenos.

Y, como el tiempo y el espacio son las condiciones primordiales de los fenómenos, puesto que todos están sujetos á la forma necesaria del tiempo y los que pertenecen al mundo físico suceden por necesidad en algun punto del espacio, tambien se pueden definir las matemáticas y de una manera profundamente filosófica, diciendo que son la *ciencia de la forma de todos los fenómenos, que suceden en el tiempo y en el espacio.*

En la cantidad hay pues que considerar además de la unidad, el NÚMERO y la EXTENSION. El *número* se refiere al conjunto ó totalidad mayor ó menor de la pluralidad de partes ó unidades, que constituyen un objeto; y la *extension* al mayor ó menor espacio que ocupan estas partes. Y por consiguiente:

NÚMERO es un conjunto de unidades,
ó tambien la totalidad de unidades *sucesivas* en el tiempo;

Y EXTENSION es el espacio que ocupa un cuerpo,
ó bien la totalidad de unidades *simultáneas* en el espacio.

Las matemáticas se dividen en *puras* y *mixtas*; segun que tratan de la cantidad en abstracto ó con aplicacion á alguna de las demás propiedades de los cuerpos.

Las matemáticas *puras* consideran al número y á la extension como cualidades abstraidas de cualesquiera otras, que pueden percibirse en los fenómenos; y las *mistas* ó *aplicadas* tratan del número y de la extension como realmente existen en los objetos naturales, esto es, concretados y como reunidos á las otras determinaciones objetivas.

Las matemáticas puras tienen, pues, la prerogativa de estár fundadas sobre los conceptos *á priori* de la cantidad, y por eso sus verdades son universales.

Estos conceptos son independientes de toda experiencia, y parece que el espíritu humano los lleva en su propio seno, como forma necesaria de todo pensamiento de la cantidad. Esto significa la frase *á priori* con que se les designa en la filosofía moderna.

Las **matemáticas puras** se dividen en tres tratados, **aritmética**, ó ciencia de los números, **geometría** ó ciencia de la extension, y **álgebra**, que trata de las leyes generales de toda cantidad.

La *aritmética*, tan sencilla en sí misma como extensa y útil en sus aplicaciones, trata de los números de una manera particular y determinada; es sin embargo ciencia pura, y prescinde de las cualidades empíricas de las cantidades, que numera y combina. Su carácter distintivo es la precision y la exactitud.

La *geometría* considera á la cantidad como determinada en el espacio, contínua y mensurable, y solo atiende á las varias formas que pueden ser realizadas en este, prescindiendo de las demás determinaciones físicas de los cuerpos. A la exactitud y precision, que son propias de la aritmética, añade la geometría la evidencia intuitiva ó perfecta claridad en los objetos de su especulacion. Esta luz vivísima, que penetra la ciencia geométrica, viene de la imaginacion que interviene en la representacion del espacio y de todas sus formas.

El *álgebra* viene á coronar este cuadro, elevándose á la region puramente conceptual del entendimiento: es como la lógica de las ciencias exactas, y en la validez de sus conclusiones envuelve mucho del carácter intuitivo de la aritmética y de la geometría. Por su universalidad y transcendencia abraza los medios de expresion teórica y práctica mas generales y fecundos, siendo además, como lengua, un poderoso instrumento de análisis, y por consiguiente de invencion, de propiedades así numéricas como geométricas.

Las **matemáticas mistas** se pueden dividir en dos grandes secciones, una que hace aplicacion de la ciencia de la cantidad abstracta á los objetos de la naturaleza, y otra á los objetos del arte.

A la primera seccion pertenecen todas las ciencias llamadas físico-matemáticas, como son la **mecánica** ó sea la ciencia del movimiento y equilibrio de los cuerpos la cual se subdivide en Estática é Hidróstática, y en Dinámica é Hidrodinámica segun que el equilibrio y el movimiento se consideren en los sólidos ó en los líquidos; la **astronomía**, que estudia el movimiento de los astros ó cuerpos celestes; la **óptica**, que trata de la propagacion de la luz; la **acústica**, que versa sobre la generacion y las relaciones de los sonidos, etc.

La segunda seccion la constituyen la **agrimensura**, la **geodesia**, la **navegacion**, la **arquitectura**, la **fortificacion**, la **balística**, la **gnomónica**, la **cronologia**, etc., etc.

TRATADO
DE
ARITMETICA.

ARITMETICA.

Nociones preliminares.

1. ARITMÉTICA es la ciencia de los *números*.

Llámase UNIDAD á uno ó mas objetos considerados como un todo; un libro, una docena de naranjas son *unidades*.

NÚMERO ENTERO es la reunion de varias unidades; cuatro libros, seis docenas de naranjas son *números enteros*.

NÚMERO ABSTRACTO es el que no se refiere á unidad alguna determinada, como *cuatro, seis, ciento*.

NÚMERO CONCRETO es el que se refiere á una unidad determinada, como *cuatro libros, seis naranjas, cien soldados*, etc.

Los números concretos son HOMOGÉNEOS si se refieren á unidades de una misma especie, como *tres reales* y *cinco reales;* y son HETEROGÉNEOS cuando se refieren á unidades de distinta especie, como *cuatro libros* y *seis naranjas*.

Los números concretos se dividen tambien en *complejos* é *incomplejos*. Se llaman *incomplejos* si se refieren á una sola unidad, como *cinco dias*, *ocho reales;* y *complejos* si se refieren á dos ó mas unidades de diferente especie, pero de la misma naturaleza, como *cinco dias* y *seis horas*, ó bien *cuatro duros, tres reales* y *diez maravedises*.

En la ARITMETICA se consideran exclusivamente los números abstractos, dejando para sus aplicaciones el tratar de los números concretos.

La ARITMÉTICA tiene dos partes, una que tiene por objeto la *formacion* de los números, llamada CÁLCULO ARITMÉTICO, y otra que se refiere á la *comparacion* de los mismos números.

2. Los signos que se usan en la aritmética para mayor facilidad en los razonamientos del cálculo son los siguientes:

$+$	equivale á mas
$-$	menos
$\times$ ó .	multiplicado por
$:$	dividido por
$(\ )^n$	potencia $n.^{\text{sima}}$ ó del grado n
$\sqrt[n]{\ }$	raiz $n.^{\text{sima}}$ ó del grado n
$=$	igual á
$>$	mayor que
$<$	menor que

Se llama *igualdad* á una expresion aritmética que consta de dos miembros equivalentes separados por el signo $=$; y *desigualdad* á esta misma expresion cuando sus miembros no equivalentes se hallan separados por el signo $>$ ó $<$

CALCULO ARITMETICO.

Números enteros. Números fraccionarios. Números incomensurables

Definiciones generales y sus consecuencias

3. La Numeracion es la parte de la aritmética que tiene por objeto el formar todos los números con pocas palabras ó signos convencionales. En el primer caso se llama *numeracion hablada* ú *oral*, y en el segundo *numeracion escrita.*

El número de signos, cifras ó guarismos diferentes de un sistema de numeracion se llama *base* del sistema. Cuando la base es dos el sistema se llama *binario*; si tres *ternario*; si diez *decimal*; si doce *duodecimal*, etc.

4. Adicion es una operacion, cuyo objeto es reunir en un solo número el valor de dos ó mas. Los números que se dan para sumar se llaman *sumandos* y el resultado *suma*. Para indicar la adicion se escribe entre los sumandos el signo +

$$4+6=10 \qquad 6+4=10$$

De la definicion de la *adicion* se deduce que.....

La suma no varia aunque se altere el órden de los sumandos.

La suma aumenta ó disminuye en el mismo número, con que aumenta ó disminuye uno de los sumandos.

La suma no varía aunque uno de los sumandos se aumente en el mismo número, con que se disminuya otro.

5. Sustraccion es una operacion, que tiene por objeto determinar uno de dos sumandos, conocida la suma y el otro sumando (*). La sustraccion es inversa de la adicion. La suma se llama *minuendo*, el sumando conocido *sustraendo*, y el resultado *resta* ó *resíduo.*

Para indicar la sustraccion se escribe el minuendo y á su continuacion el sustraendo separándolos con el signo —

$$10-4=6 \qquad 10-6=4$$

De la definicion de la *sustraccion* se deduce que.....

El minuendo es siempre igual á la suma del sustraendo y el resíduo, luego el resíduo será la *diferencia* entre el minuendo y el sustraendo; y por consiguiente tambien se puede decir que *restar es hallar la diferencia de dos números.*

Si el minuendo aumenta ó disminuye en un número cualquiera, el resíduo aumentará ó disminuirá en el mismo número.

Si el sustraendo aumenta ó disminuye, permaneciendo igual el minuendo, el resíduo disminuirá ó aumentará en el mismo número.

Luego un resíduo no se altera aunque al minuendo y sustraendo se les añada ó quite un mismo número.

Es evidente que, si el minuendo y el sustraendo son iguales, el resíduo será nada ó *cero.*

(*) O descomponer un número dado en dos sumandos conociendo uno de estos sumandos.

Si el minuendo es menor que el sustraendo, su resíduo será menor que cero. Para hallar el resíduo en este caso, se escribe el exceso del sustraendo sobre el minuendo anteponiendole el signo — en esta forma $4-10=-6$

El resíduo ó diferencia de dos números, cuando el minuendo es menor que el sustraendo, se llama NÚMERO NEGATIVO (*).

6. MULTIPLICACION de un número por otro es hallar un tercero, que sea respecto del primero, lo que el segundo es respecto de la unidad.

El número primero ó sea el que se multiplica se llama *multiplicando*, el otro *multiplicador* y el resultado *producto*. El multiplicando y el multiplicador juntos se llaman *factores del producto*.

La multiplicacion se indica separando los factores por el signo $\times$ ó bien por un punto.

$$4\times6=24 \qquad 6.4=24$$

De la definicion de la *multiplicacion* se deduce que.....

Si el multiplicador es la unidad, el producto es igual al multiplicando.

Si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto es mayor que el multiplicando.

Si el multiplicador es menor que la unidad, el producto es menor que el multiplicando.

Ultimamente, el producto de un número por cero es cero.

7. DIVISION es una operacion, que tiene por objeto determinar uno de los factores de un producto conocido, dado el otro factor (**). La division es inversa de la multiplicacion.

El producto ó sea el número que se divide se llama *dividendo*, el factor conocido *divisor*, y el resultado *cociente*. El dividendo y divisor juntos se llaman *términos de la division*.

La division se indica escribiendo el dividendo sobre una raya horizontal y debajo el divisor, ó separando este de aquel por dos puntos en esta forma:

$$24:6=4 \qquad \frac{24}{4}=6$$

De la definicion de la *division* se deduce que.....

Si el divisor es igual á la unidad, el cociente es igual al dividendo.

Si el divisor es mayor que la unidad, el cociente es menor que el dividendo.

Si el divisor es menor que la unidad, el cociente es mayor que el dividendo.

El cociente de cero por un número cualquiera es siempre cero.

Cuando el dividendo y divisor son iguales el cociente es la unidad.

Si el dividendo es mayor que el divisor, el cociente es mayor que la unidad.

Si el dividendo es menor que el divisor, el cociente es menor que la unidad.

El cociente de dos números, cuando el dividendo no es el producto del divisor por ningun número entero, se llama NÚMERO FRACCIONARIO.

$\frac{4}{9}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{11}{4}$ son *números fraccionarios*.

(*) La interpretacion y el cálculo de los números negativos ó menores que cero corresponde al tratado de ÁLGEBRA.

(**) O descomponer un número dado en dos factores, conociendo uno de estos factores.

8. Elevacion á potencias. *Potencia* de un número es el producto, que resulta de multiplicarle por si mismo, ó repetirlo por factor, varias veces. El número de estos factores se llama *exponente, grado* ó *índice* de la potencia.

Cuadrado ó *segunda potencia* de un número es el producto que resulta de tomarle dos veces por factor; *cubo* ó *tercera potencia* de un número es el producto que resulta de tomarle tres veces por factor; *cuarta potencia* de un número es el producto que resulta de tomarle cuatro veces por factor, etc.

La *elevacion á potencias* tiene por objeto determinar las diferentes potencias de un número. Para indicar una potencia cualquiera de un número, se escribe á su derecha y arriba el exponente ó grado de la potencia.

$$5^2=5\times5=25 \qquad 2^5=2\times2\times2\times2\times2=32$$

La potencia primera de un número es el mismo número.

Todas las potencias de la unidad son iguales á la unidad.

9. Extraccion de raices. *Raiz* de un número es otro, que multiplicado por si mismo una ó mas veces, produce el número dado; ó bien, otro número cuya potencia del mismo grado que el índice de la raiz, es igual al número dado.

Raiz cuadrada de un número es otro cuyo cuadrado ó segunda potencia es igual al mismo número; *raiz cúbica* de un número es otro cuyo cubo ó tercera potencia es igual al mismo número, etc.

La *extraccion de raices* tiene por objeto hallar las diferentes raices de un número, y por consiguiente es una operacion inversa de la elevacion á potencias. Para indicar la extraccion de la raiz de un número, se escribe delante el signo radical $\sqrt{}$ y en la abertura de este el índice de la raiz.

El índice se suprime si es 2, escribiendo solo el signo radical.

$$\sqrt{25}=5 \qquad \sqrt{64}=8 \qquad \sqrt[3]{8}=2 \qquad \sqrt[3]{64}=4$$

La raiz primera de un número es el mismo número. La raiz cuadrada, la cúbica y en general, la raiz de cualquier grado de la unidad, es la misma unidad.

La raiz de un número, que no es potencia del mismo grado que el índice del radical, se llama Número incomensurable.

Los números $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{9}$ y $\sqrt[4]{10}$ *son números incomensurables.*

Esc. gral. La adicion, multiplicacion y elevacion á potencias se llaman operaciones de composicion; y las de sustraccion, division y extraccion de raices se llaman de descomposicion. Estas últimas, cuando los datos son enteros dan orígen en casos particulares á los números *negativos*, á los *fraccionarios* y á los *incomensurables.* En la aritmética solo se consideran los números enteros, los fraccionarios y los incomensurables.

En todos ellos, para indicar una operacion cualquiera cuando uno ó mas datos representan operaciones tambien indicadas, se escribe cada uno de estos dentro de un paréntesis.

Así, no se debe confundir $40-(10+4)$ con $40-10+4$ pues $40-(10+4)$ equivale á la diferencia entre 40 y la suma indicada $10+4$, y $40-10+4$ es igual á la suma de $40-10$ ó sea 30 y el número 4. (*)

(*) Llámase prueba de una operacion á una segunda operacion, por la cual nos cercioramos de que el resultado obtenido por la primera es el verdadero.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Numeracion. Adicion. Sustraccion. Multiplicacion. Division. Elevacion á potencias. Extraccion de raices. Divisibilidad de los números.

NUMERACION DECIMAL DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Nomenclatura y escritura de la numeracion decimal. Diferentes sistemas de numeracion. Numeracion romana. Ejercicios.

Numeracion oral ó hablada.

10. Las palabras adoptadas en el sistema decimal de numeracion, para expresar todos los números enteros son las siguientes.....

Uno ó la unidad en sí misma (*); *dos* ó una unidad mas otra unidad; *tres* ó dos unidades con otra mas. Agregando así sucesivamente una unidad al número anterior, se forman los números *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve* y *diez*.

La reunion de diez unidades se considera como una nueva unidad, que se llama Decena. Por decenas se cuenta desde uno hasta diez lo mismo que se cuenta por unidades.

Así se dice: una decena ó *diez* unidades, dos decenas ó *veinte* unidades, tres decenas ó *treinta* unidades, cuatro decenas ó *cuarenta* unidades, cinco decenas ó *cincuenta* unidades, seis decenas ó *sesenta* unidades, siete decenas ó *setenta* unidades, ocho decenas ú *ochenta* unidades, nueve decenas ó *noventa* unidades, diez decenas ó *cien* unidades.

Para expresar los números comprendidos entre las decenas, se añaden á los nombres de estas los de los nueve primeros números.

Así entre diez y veinte diremos..... *diez y uno*, *diez y dos*, *diez y tres*, *diez y cuatro*, *diez y cinco*, *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve*; Entre veinte y treinta *veinte y uno*, *veinte y dos*, *veinte y tres*, *veinte y cuatro*..... *veinte y ocho*, *veinte y nueve*; y así sucesivamente entre treinta y cuarenta, entre cuarenta y cincuenta, etc. (**)

Diez decenas ó cien unidades componen otra unidad, llamada Centena. Por centenas se cuenta hasta diez centenas, lo mismo que por decenas y unidades.

Una centena ó *cien* unidades, dos centenas ó *doscientas* unidades, tres centenas ó *trescientas* unidades, cuatro centenas ó *cuatrocientas* unidades y así sucesivamente hasta diez centenas ó *mil* unidades (***).

Para expresar los números comprendidos entre las centenas, se añaden a los nombres de estas los noventa y nueve números primeros.

Tenemos pues..... *ciento uno*, *ciento dos*, *ciento tres*, *ciento cuatro*..... hasta *ciento noventa y nueve*: *doscientos uno*, *doscientos dos*, *doscientos tres* hasta *doscientos noventa y nueve*..... y así sucesivamente hasta llegar al número *nuevecientos noventa y nueve*.

(*) La unidad se considera tambien como un número entero.

(**) El uso admite las irregularidades siguientes:
once por diez y uno, *doce* por diez y dos y así sucesivamente *trece*, *catorce* y *quince*.

(***) Cinco cientos se dice *quinientos*.

El conjunto de diez centenas ó mil unidades constituye la nueva unidad principal, que llamamos UNIDAD DE MILLAR.

Contando por unidades de millar, decenas de millar y centenas de millar, lo mismo que contamos por unidades, decenas y centenas simples, llegaremos á... *nuevecientas noventa y nueve mil nuevecientas noventa y nueve unidades*, y por último á diez centenas de millar ó sea un MILLON de unidades.

Desde un *millon* á un *billon* se cuenta lo mismo que desde uno á un millon, é igualmente hasta los *trillones, cuatrillones*, etc.

Luego combinando convenientemente entre sí las palabras... *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, ciento, mil, millon, billon*, etc., se pueden expresar todos los números enteros que se quiera (*).

Las unidades primitivas, que han servido para la composicion de todos los números, se llaman simplemente *unidades*, ó unidades absolutas ó de primer órden: las decenas son unidades de segundo órden, las centenas lo son de tercero, las unidades de millar de cuarto, las decenas de millar de quinto, las centenas de millar de sexto, etc.

Las unidades de un órden cualquiera son decenas respecto de las del órden inmediato inferior, y por consiguiente diez unidades de un órden forman una unidad del órden superior inmediato.

Numeracion decimal escrita.

11. Los signos ó cifras convencionales de la aritmética y sus valores respectivos son los siguientes:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

Las nueve últimas se llaman *significativas* y el cero *no significativa* (**).

En la escritura de la numeracion decimal se convino en que las unidades de cada órden ocuparan un lugar mas hácia la izquierda que las del inmediato inferior, y por consiguiente que las unidades simples ó de inferior órden se escribieran siempre á la derecha ó sea en el primer lugar, las decenas en el segundo, las centenas en el tercero, las unidades de millar en el cuarto, las decenas de millar en el quinto, las centenas de millar en el sexto, las unidades de millon en el séptimo, las decenas de millon en el octavo, etc.

Segun esta convencion, cada cifra significativa tiene dos valores, uno *absoluto* expresado por el número de sus unidades y otro *relativo* segun el órden de estas mismas unidades. Luego.....

Para *escribir* un número entero cualquiera, se escriben los guarismos que expresan el número de unidades de cada órden unos al lado de otros principiando por la izquierda, y cuidando de ocupar con ceros los lugares donde no haya unidades.

Las unidades de los diferentes órdenes, en el sistema decimal de numeracion se escriben así

1, 10, 100, 1000, 10000, etc.....

(*) Los franceses llaman *billones* a las unidades de millar de millon, *trillones* á las unidades de billon, etc.

(**) Las cifras significativas del sistema de numeracion decimal se llaman tambien *números dígitos*, de la palabra *digitus* que significa dedo.

Para escribir el número *trescientos sesenta y cinco unidades*, ó lo que es lo mismo, *tres* centenas, *seis* decenas y *cinco* unidades, escribiremos las cifras 3, 6 y 5 (que representan las unidades de cada órden) unas al lado de otras de este modo, 365. Los valores absolutos de las cifras de este número son 3, 6 y 5; y los relativos 3 centenas, 6 decenas y 5 unidades.

El número *cinco mil doscientos ochenta y cuatro* unidades, que equivale á *cinco* millares *dos* centenas *ocho* decenas y *cuatro* unidades, se escribirá así 5284.

Para escribir el número *seis mil* unidades ó sean *seis* unidades de millar, ocuparemos con ceros los lugares de los órdenes inferiores y tendremos 6000.

Del mismo modo se escriben..... nueve mil cuatro 9004. Setenta mil 70000. Cincuenta mil ocho 50008. Ochenta mil cuarenta y siete 80047. Quinientos mil uno 500001. Un millon cuatrocientos mil trescientos once 1400311. Treinta y dos mil ciento cuatro millones, ciento cinco unidades 32104000105.

12. Para *leer* un número se pronuncian los valores relativos de sus cifras empezando siempre por las unidades de órden superior. Si el número consta de muchos guarismos, para averiguar con mas facilidad el valor relativo de cada uno, se divide en secciones de seis en seis de derecha á izquierda. La 1.ª seccion de la derecha es de *unidades*, la 2.ª de *millones*, la 3.ª de *billones*, etc.

El número 394 se lee: trescientas noventa y cuatro *unidades*.
8200......... ocho mil doscientas *unidades*.
1500084......... un millon quinientas mil ochenta y cuatro *unidades*.
41110874000106309......... cuarenta y un mil ciento diez *billones*, ochocientos setenta y cuatro mil *millones*, ciento seis mil trescientas nueve *unidades*.

Tambien se facilita la lectura de los números de muchas cifras, dividiéndolos en secciones de á tres empezando por la derecha. La primera seccion es de *unidades*, la segunda de *millares*, la tercera de *millones*, etc.

El número 15010807023650 se lee así.....
15 *billones* 10 *millares de millon* 807 *millones* 23 *millares* y 650 *unidades*.

Observaciones acerca de los diferentes sistemas de numeracion.

***13.** En todos los sistemas de numeracion semejantes al decimal se puede convenir en que una cifra cualquiera, colocada á la izquierda de otra, represente unidades del órden inmediato superior, es decir tantas veces mayores como exprese la base del sistema.

El guarismo cero es comun á todos estos sistemas de numeracion. La base se escribe del mismo modo en todos ellos.

Así, 10 en el sistema binario dice *dos*, en el ternario *tres*, en el decimal *diez*, en el duodecimal *doce*, y así sucesivamente (*).

Para indicar el sistema en que está escrito un número cualquiera, se pone la base dentro de un paréntesis á la izquierda y arriba del número propuesto. La base se escribe generalmente en el sistema decimal.

Los números $^{(2)}10101$ y $^{(12)}890\alpha\beta$ estan escritos el primero en el sistema binario, y el segundo en el duodecimal. Las cifras del binario son 0 y 1; las del duodecimal pueden ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β.

(*) LEIBNITZ fué el primero, que, generalizando el principio fundamental de la numeracion decimal, inventó la Aritmética binaria, demostrando á la vez que del mismo modo pudiéramos valernos de tres, cuatro, cinco..... doce, etc., cifras, para representar todos los números.

14. NUMERACION ROMANA es el arte de representar los números enteros con las siete letras siguientes:

I	V	X	L	C	D	M

cuyos valores respectivos son

1	5	10	50	100	500	1000

Para escribir con estas letras un número entero cualquiera, basta escribirlas unas al lado de otras, empezando por las de mayor valor, y teniendo presente que una letra menor antepuesta á otra mayor, rebaja á esta el valor de aquella.

Las unidades simples pasan á ser millares poniendo una línea horizontal encima de las letras correspondientes ó una *m* por la parte inferior de las mismas.

Ejemplos de varios números escritos en el sistema decimal y en el adoptado para la numeracion romana:

4	7	9	45	91	751	1602	20176	500090
IV,	VII,	IX,	VL,	XCI,	DCCLI,	MDCII,	$\overline{\mathrm{XX}}^{m}$CLXXVI,	D$_{m}$XC

Ejercicios para la numeracion.

15. *Escribir en el sistema decimal los números siguientes:* Quinientos diez; ciento once; mil ciento uno; cinco mil veinte; nueve mil ciento; doce mil cinco; cincuenta mil doscientos; cien mil ciento; quinientos mil uno; cinco millones ochocientos; cien millones cien mil ciento; mil un millones cinco mil dos decenas de millar; mil quinientos billones treinta mil millones once mil cinco centenas.

Leer los números que siguen escritos en el sistema decimal:

10104	11001	10101	100101	101080	500010
700900	909999	1000000	5184329	9857000	9000857
1100900	4099909	19005501	1000070101	1000100008417001200000105	

Leer los números romanos que siguen.....

XV, LXI, CCIV, DIL, DCCXC, MXI, MDCVI, MMDCCLXXiX

Escribir en el mismo sistema de numeracion romana los números decimales

18, 37, 81, 99, 111, 570, 889, 1047, 1857 9919, 1812905

Fundamento de la *nomenclatura* en los sistemas de numeracion semejantes al decimal. Número de unidades simples, que componen una unidad del segundo, tercero ó cuarto órden en los sistemas binario, ternario y duodecimal. Número de palabras, que se necesitan para expresar todos los números en el sistema decimal desde uno hasta un millon. Fundamento de la *escritura* en los sistemas de numeracion, semejantes al decimal. ¿Se necesita el cero en todos los sistemas de numeracion? Diferencia entre los valores absoluto y relativo de una cifra cualquiera. ¿La base se escribe del mismo modo en todos los sistemas? ¿Por qué se escriben y leen los números enteros empezando por la izquierda? ¿Por qué para leer un número entero, se le divide en secciones de á seis guarismos empezando por la derecha? ¿Es necesaria esta division? Inconvenientes del sistema binario (*).

(*) La idea tan sencilla cuanto ingeniosa de atribuir á las cifras ó guarismos ademas de su valor absoluto otros relativos ó de posicion trae su origen de la lengua sanscrita: ha llegado hasta nosotros por el intermedio de los árabes desde la india oriental (hacia el siglo XIII) y por eso llamamos *cifras árabes* á los caractéres que representan los números simples. Los árabes las llaman *indianas* ó *chinas* y á la aritmética, HENDESSCH, que significa CIENCIA DE LA INDIA.

ADICION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Adicion de un número entero con otro ú otros de una sola cifra. Adicion de dos ó mas números enteros. Prueba de la adicion. Observaciones generales.

16. Para reunir dos ó mas números en uno solo se pueden descomponer los números dados en las partes que se quiera, sumar estas entre sí, y reunir las sumas parciales. Es evidente que el resultado final asi obtenido contendrá todas las partes de los sumandos, y será por consiguiente la suma total. (*)

Adicion de un número entero con otro ú otros de una sola cifra.

17. Para sumar un número entero con otro ú otros de una sola cifra, basta añadir al primero las unidades del segundo una á una; á la suma del primero y segundo las unidades del tercero, y asi sucesivamente hasta reunir todos los sumandos.

Sumar los números 12, 7, 3 y 9

12 unidades y 7 componen 19, y 3 son 22, y 9 suman 31 unidades. (**)

Luego el número 31, que contiene todas las unidades de los sumandos, es la suma total de todos ellos; y por consiguiente tendremos

$12+7+3+9=31$ que es la *suma total.*

Adicion de dos ó mas números enteros.

18. Para hallar la *suma* de dos ó mas números enteros, se suman sucesivamente las unidades simples ó de primer órden, las decenas, centenas, millares, etc.

Si en la suma de las unidades de un órden resulta una ó mas unidades del inmediato superior, se reservan para añadirlas á este.

El número formado por estas sumas parciales será la suma total.

Sumar los números enteros 2314, 9432, 43 y 920

$$\text{sumandos}\left\{\begin{array}{r}2314\\9432\\43\\920\end{array}\right.$$
$$\overline{12709}\ \text{suma}$$

Cada uno de los números dados puede descomponerse en unidades, decenas, centenas, etc.; sumando, pues, separadamente las unidades de un mismo órden, y reuniendo los resultados parciales, tendremos la *suma total* que se busca.

Esto supuesto, despues de colocados todos los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan en una misma columna las unidades de cada órden, y tirar una raya por la parte inferior, diremos:

4 *unidades* y 2 son 6 unidades, y 3 son 9, y 0 son 9 *unidades*, que escribiremos debajo de la columna de las unidades de los sumandos.

(*) Esta proposicion es un verdadero *postulado* y sirve de fundamento para la determinacion de la suma de dos ó mas números.

(**) La suma de 12 y 7 se halla agregando al primero todas las unidades del segundo, una á una, de este modo: $12+7=13+6=14+5=15+4=16+3=17+2=18+1=19$

1 *decena* y 3 son 4 decenas, y 4 son 8, y 2 son 10 *decenas*, que componen 1 centena y 0 decenas; escribiremos 0 debajo de las decenas, y la centena se añadirá á la columna de las centenas.

1 *centena* y 3 son 4 centenas, y 4 son 8, y 9 son 17 *centenas*, que componen 1 unidad de millar y 7 centenas; las centenas se escribirán debajo de la columna correspondiende, y la unidad de millar se reunirá con los millares.

1 y 2 son 3, y 9 son 12 *millares*, que componen 1 decena de millar y 2 unidades de millar; escribiremos las unidades debajo de las unidades de millar, y como no hay mas columnas que sumar, la decena de millar se escribirá á la izquierda del guarismo últimamente puesto, y el resultado 12709 *unidades*, que contiene todas las unidades simples, todas las decenas, centenas, etc., de los sumandos, será la suma pedida.

En la práctica no se enuncian las cifras de cada columna, ni la especie de unidades de las sumas parciales, se dice simplemente.....

Para la columna de las unidades; 4, 6, 9 (se escribe 9). Para las decenas; 1, 4, 8, 10 (se escribe cero); y asi sucesivamente.

OTROS EJEMPLOS:	12843238		48612320		40000
	28123		328712		1023
	81200		11200		410
(A)	841000	(B)	4012371	(C)	154
	12888		66842		4101
	4404		123990		242001
	13810853		9413		287689
			53164848		

Prueba de la adicion.

19. La adicion se prueba sumando de nuevo los números dados en un órden inverso al seguido para obtener la primera suma, es decir, principiando á sumar las cifras de cada columna de abajo para arriba, si la vez primera se sumaron de arriba para abajo. Las sumas obtenidas en ambos casos deben ser iguales, para que la operacion esté bien hecha.

Observaciones generales.

20. La adicion de los números enteros se empieza por la derecha, para añadir á cada columna las unidades de su especie, que resulten de la suma de la columna anterior. Si la suma de cada columna es menor que la base del sistema de numeracion, se puede empezar por las unidades simples ó por las del órden superior (véase el ejemplo C).

La disposicion del cálculo formando columnas es por comodidad; lo mismo se puede sumar separando los datos por medio del signo + y el resultado de los sumandos por el signo =, en esta forma:

84 2+104+180084+948=189588 *suma total.*

Si en la adicion hubiese muchos sumandos, se la divide en varias adiciones parciales, y la suma de estos resultados será el resultado total.

Si á los dos miembros de una igualdad añadimos un mismo número, el resultado será una igualdad. La suma ordenada de dos ó mas igualdades será tambien una igualdad. (*)

(*) *Ordenada* ú *ordenadamente* quiere decir el primer miembro de la una con el primero de la otra, y el segundo con el segundo.

SUSTRACCION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Sustraccion de un número de una sola cifra de otro número entero. Sustraccion de un número entero de otro número entero. Prueba de la sustraccion. Observaciones generales. Ejercicios.

21. Para hallar la *diferencia* de dos números, se pueden descomponer en igual número de partes, y la suma de sus diferencias parciales será la diferencia total entre los números dados (*).

Sustraccion de un número de una sola cifra de otro número entero.

22. Para *restar* un número de una sola cifra de otro número entero cualquiera, se restan sucesivamente de este todas las unidades del primero una á una.

Restar 4 *de* 6 *ó hallar la diferencia entre los números* 6 *y* 4.

Para hallar el resíduo de los números dados, tenemos que restar ó rebajar del minuendo 6, las unidades que componen el sustraendo 4. Quitando la primera quedan 5, rebajando la segunda quedan 4, quitando la tercera quedan 3, y quitando la cuarta y última quedan 2. Luego 2 es el resto de la sustraccion ó el exceso de 6 sobre 4, y tendremos 6—4=2

Evidentemente el minuendo 6 es igual á la suma del sustraendo y el resíduo.

Del mismo modo resultan las igualdades siguientes:

9—3=6 9—8=1 14—4=10 109—8=101 300—9=291

Sustraccion de un número entero de otro número entero.

23. Para hallar la *diferencia* de dos números enteros cualesquiera, se restan sucesivamente las unidades simples del sustraendo de las unidades simples del minuendo; las decenas, de las decenas; las centenas, de las centenas, etc., y el número formado por estas restas parciales será la diferencia ó el *resíduo total*.

Si alguna cifra del minuendo es menor que la del mismo órden del sustraendo, se agregan á ella diez unidades (**), ó sea una unidad del órden superior inmediato, teniendo presente al restar las cifras del órden siguiente, que la del minuendo tiene una unidad de menos, ó bien la del sustraendo una unidad de mas.

Restar del número entero 8264 *el número* 1201

minuendo	8264
sustraendo	1201
resíduo	7063

Cada uno de los números dados puede descomponerse en unidades, decenas, centenas, etc.; hallando, pues, separadamente la diferencia entre las unidades de un mismo órden, y reuniendo los resultados parciales, tendremos la diferencia ó el *resíduo total* que se pide. Esto supuesto

(*) Este *postulado* sirve de base al problema de la sustraccion.

(**) O en general tantas como indique la base del sistema de numeracion del minuendo y sustraendo.

Despues de escrito el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan en columna las unidades de un mismo órden, diremos:
4 unidades menos 1 son 3 *unidades*, que escribiremos debajo de las de los datos
6 decenas menos 0 son 6 *decenas*, que se escriben debajo de las decenas.
2 centenas menos 2 son 0, que se escribe debajo de las centenas.
8 millares menos 1 son 7 *millares*, que se escriben en el lugar correspondiente.

Luego, si hemos restado del minuendo todas las unidades del sustraendo, es evidente que el *resíduo ó diferencia total* de los números dados será igual á la suma de los resíduos ó diferencias parciales, es decir á 7 unidades de millar, 6 decenas y 3 unidades, ó lo que es lo mismo 7063 unidades.

Hallar la diferencia de los números 38154 *y* 25269

minuendo	38154
sustraendo	25269
resíduo	12885

La cifra 4 de las unidades del minuendo es menor que la 9 del sustraendo, agregando, pues, 10 unidades á la primera, la diferencia 5 entre esta suma y las unidades del sustraendo se escribirá debajo de las unidades de los datos.

Para que el resto ó diferencia total de los números dados no varie, debemos considerar á la segunda cifra 5 del minuendo con una unidad de menos, ó bien añadir la misma unidad á las decenas 6 del sustraendo.

Vamos á continuar la sustraccion en el primer supuesto:

De las 4 decenas del minuendo no se pueden restar las 6 del sustraendo; agregando á la primera 10 decenas ó 1 unidad del guarismo inmediato, la diferencia 8 entre la suma 14 y las decenas 6 del sustraendo será la cifra de las *decenas* del resíduo.

De 0 centenas no se pueden restar las 2 del sustraendo, añadiendo 10 á 0, la diferencia 8 serán las *centenas* del resíduo.

Como de 7 millares se pueden restar los 5 del sustraendo, la diferencia 2 serán las *unidades de millar* del resíduo total.

Ultimamente, la diferencia 1 entre las decenas de millar de los datos será la cifra de las unidades del mismo órden del resultado; y por consiguiente la *resta ó diferencia total* de los números dados será igual á la suma de 1 decena de millar, 2 unidades de millar, 8 centenas, 8 decenas y 5 unidades ó sea el número 12885 unidades.

Otros ejemplos:	(A)	(B)	(C)	(D)
	47409037	800001000	13428749	843287
	7984748	798704017	8873997	20156
	39424289	1296983	4554752	823131

En la práctica no se enuncia la especie de unidades de cada resta parcial, se dice simplemente:

En el ejemplo (A) 17 menos 8 son 9; 13 menos 5 son 8; 10 menos 8 son 2; 9 menos 5 son 4; 10 menos 8 son 2; 14 menos 10 son 4; 17 menos 8 son 9; y 4 menos 1 son 3.

Prueba de la sustraccion.

24. Para *comprobar* la sustraccion se suma el sustraendo con el resíduo, y el resultado, si la operacion está bien hecha, será igual al minuendo.

Observaciones generales.

25. En los números enteros se empieza á restar por la derecha ó sea por las unidades de especie inferior, para, si alguno de los guarismos del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo, poder tomar una unidad de la cifra inmediata superior, considerándola luego con dicha unidad de menos. Si todas las cifras del minuendo son mayores que las correspondientes del sustraendo, es indiferente empezar la sustraccion por las unidades de órden superior ó por las del inferior (véase el ejemplo D).

La disposicion del cálculo es arbitraria; lo mismo se obtiene el resultado escribiendo el minuendo, el sustraendo y la resta en un mismo renglon, separando los dos primeros con el signo — y los dos últimos con el signo = en esta forma.....

841029—201941=639088 resíduo

Dos números cuya diferencia es 1 se llaman números *consecutivos*.

Una igualdad no dejará de serlo aunque restemos de ambos miembros un mismo número. Luego, si dos igualdades se restan ordenadamente, el resultado será tambien otra igualdad.

*26. Para restar de un mismo número la suma indicada de dos ó mas, se resta del minuendo uno cualquiera de los sumandos del sustraendo, y del resíduo se resta otro, continuando asi hasta restar el último sustraendo.

Hallar la diferencia entre el número 40 *y la suma indicada* 10+4

40—(10+4)=40—10—4=30—4=26 resíduo final.

En efecto, si el sustraendo fuera 10, el resíduo seria 40—10: pero el sustraendo dado tiene 4 unidades mas, luego el resíduo que se busca tendrá 4 unidades menos que 40—10, y será por consiguiente 40—10—4

De otro modo: súmense todos los números, que constituyen el sustraendo, y la diferencia entre esta suma y el minuendo comun será el resíduo final.

40—(10+4)=40—14=26 diferencia pedida.

Otro ejemplo resuelto por ambos procedimientos:

100—(40+25+8)=100—40—25—8=60—25—8=35—8=**27**

100—(40+25+8)=100—73=27; resultado igual al anterior.

*27. Para restar de un mismo número la diferencia indicada de otros dos, se resta del primero el segundo, y al residuo se añade el tercero.

Hallar la diferencia entre el número 40 *y el resíduo indicado* 10—4

40—(10—4)=40—10+4=30+4=34 resíduo final.

En efecto, si el sustraendo fuera 10, el resíduo seria 40—10; pero el sustraendo dado tiene 4 unidades menos, luego el resíduo que se busca tendrá 4 unidades mas que 40—10, y será por consiguiente 40—10+4

Del mismo modo, tendremos tambien

100—(35—12)=100—35+12=65+12=77 (*)

(*) Con el objeto de generalizar en cuanto sea posible las proposiciones del texto, representaremos en adelante los números enteros por letras del alfabeto, que no teniendo por sí valor alguno pueden no obstante recibir los que se quiera.

En este supuesto, de las dos últimas proposiciones deduciremos las igualdades siguientes

A—(B+C+D)=A—B—C—D A—(B—C)=A—B+C

que se verificarán siempre, sean cualesquiera los valores de A, B, C, D, etc.

Ejercicios para la adicion y la sustraccion.

28. *Hallar la suma de las adiciones que siguen:*

100742	18927	5009719
1840	407	99072
1492	8721	107099
80210	400010	9914100

1080412
10942
3914
87104
1492
52000100

109625418
4120018
420089
1007704
89099100
1084199
440019
50072
1000000
4005207
1004
25
102109
4112017
40741
1094172
994012
3300100
861040123
19190004
100045090

109+7475001+102 centenas de millar+807400972+1001024+1512 decenas=
100402+601042+104 decenas+2840124 millares+12 millones=

Hallar la suma del primer ejemplo empezando por las unidades superiores: inconvenientes de este procedimiento. Método abreviado para obtener la suma final de la quinta adicion. Corregir la suma del último ejemplo en el caso de ser el tercer sumando 204 *centenas*. Hallar la suma total de todos los sumandos de las adiciones anteriores. ¿Si dos sumas son iguales, los sumandos respectivos lo serán tambien?

Hallar los residuos de las sustracciones siguientes:

850509	(A)	400100421	(B)	100000000102	(C)
75898		10978087		94909000107	

1084109—120748= 451 centenas—1020 unidades+70 decenas=
109410 decenas de millar—(102454 unid.+125 cent. de millar—95 decenas)=

Hallar el resíduo del primer ejemplo, empezando por las unidades superiores: inconvenientes de este procedimiento. Corregir el resíduo del ejemplo (B) suponiendo 2 la cifra del cuarto órden del minuendo y *cero* la del último órden del sustraendo. ¿Varía el resíduo de dos números, si se añade una unidad al minuendo y se resta esta misma unidad del sustraendo? ¿Por qué al efectuar la resta se añaden 10 unidades y no 2, 3, 4, etc. á la cifra del minuendo que es menor que la correspondiente del sustraendo? ¿La diferencia entre el minuendo y el resíduo es conocida? ¿Cuál es el fundamento de la prueba de la sustraccion? Dos resíduos iguales tienen iguales minuendos é iguales sustraendos? ¿Cuál es la diferencia entre 12 unidades de millar y 97 centenas? y cuál el exceso de 180 decenas de millon sobre 10199 unidades de millar? Corregir los resultados de las operaciones, que siguen, añadiendo 10 unidades á cada uno de los tres números que entran en los datos:

15000—(4000—753)= 15000—(4000+753)=

¿Cuál será el número, que, añadiendole 400 unidades y 11 centenas, y restando 12 decenas de la suma, dá por resultado 1858 unidades? [478]

Hallar un número tal que, añadiéndole XI centenas, la diferencia entre esta suma y MMCLV unidades sea igual al exceso de 1000 unidades sobre XXIII decenas. [El número que cumple con las condiciones de este problema es MDCCCXXV].

MULTIPLICACION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

Definicion y sus consecuencias. Multiplicacion de un número entero por 10, 100, 1000 y en general por la unidad seguida de ceros. Multiplicacion de dos números de una sola cifra. Multiplicacion de un número entero por otro de una cifra. Multiplicacion de dos números enteros. Abreviaciones de la multiplicacion. Prueba. Observaciones generales.

Definicion de la multiplicacion de un número por otro entero.

29. Segun la definicion general de la multiplicacion, el producto de 8 por 5 será un número compuesto de tantas veces el multiplicando 8, como unidades tiene el multiplicador. Pero el multiplicador 5 está compuesto de la adicion de 5 unidades; luego el producto de 8 por 5 será igual al multiplicando repetido por sumando 5 veces, y tendremos.....

$8 \times 5 = 8+8+8+8+8 = 40$ de aquí se deduce que....

El producto de un número por otro entero es igual al multiplicando repetido por sumando tantas veces como unidades tiene el multiplicador; de donde tambien se infiere que *multiplicar un número por otro número entero* es hallar un tercer número, que sea tantas veces mayor que el multiplicando, como unidades tiene el multiplicador.

Consecuencias de la definicion anterior.

30. El producto de dos factores enteros no varía aunque se tome el multiplicando por multiplicador y este por multiplicando.

Suponiendo los factores 4 y 3, se verificará que $4 \times 3 = 3 \times 4$

En efecto; 4×3 equivale á repetir el multiplicando 4, *tres* veces por sumando; y por consiguiente las unidades del producto serán las del cuadro (A)

$$\begin{array}{c} 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1 \end{array} \quad (A)$$

Pero estas mismas unidades consideradas en columnas verticales contienen *cuatro* líneas de 3 sumandos cada una, luego el número total de unidades será $3+3+3+3 = 3 \times 4$; y como el número de unidades del cuadro (A) es el mismo, ya se consideren en línea horizontal, ya en vertical; tendremos que.....

4×3 será igual á 3×4

Esta demostracion es igualmente aplicable á cualesquiera otros números enteros; luego la proposicion ó el teorema es verdadero.

2.ª Para *multiplicar* dos números enteros cualesquiera se puede repetir uno de ellos por sumando tantas veces como unidades tiene el otro, y la suma total será el producto (*).

31. Para facilitar lo embarazoso de este procedimiento conviene establecer el siguiente postulado:

Para multiplicar un número entero por otro, se puede descomponer el multiplicando ó el multiplicador en varios sumandos, multiplicar sucesivamente cada uno de ellos por el otro factor y sumar luego los productos parciales.

(*) Luego para hallar el producto de 100 por 12, sumaríamos 12 veces las cien unidades de 100; y como en tal supuesto cada una de estas unidades se convertiria en 12, la suma total ó sea el producto de 100 por 12 seria lo mismo que el producto de 12 por 100.

Multiplicacion de un número entero por 10, 100, 1000, etc.

32. Para multiplicar un número entero por la unidad seguida de uno ó mas ceros, basta escribir á la derecha de dicho número tantos ceros cuantos sigan á la unidad.

Asi el producto de 278 por 1000 será igual á 278000

En efecto, el multiplicando puede descomponerse en unidades, decenas y centenas; multiplicando pues cada uno de estos sumandos por 1000 y sumando los resultados, tendremos el producto que se pide. Las unidades, decenas y centenas del número dado se multiplican por 1000, transformándolas respectivamente en unidades, decenas y centenas de millar, y como esto se consigue con solo escribir tres ceros á la derecha del multiplicando, el producto pedido será igual á 278000

Del mismo modo, tendremos tambien

$10740 \times 100 = 1074000 \qquad 100000 \times 105 = 105 \times 100000 = 10500000$

Multiplicacion de dos números de una cifra.

33. Para hallar el *producto* de dos números dijitos en el sistema de numeracion decimal, basta saber de memoria la tabla de multiplicar.

Esta tabla se forma escribiendo en línea horizontal los nueve números dijitos, sumando luego cada uno consigo mismo hasta nueve veces, y colocando los resultados en columna vertical.

Del órden adoptado en la formacion de la tabla, se sigue que, para hallar el producto de dos números dijitos, se busca uno de los factores en la primera línea horizontal, y el otro en la vertical de la izquierda, y el número de la casilla, correspondiente al punto de concurso, será el *producto*.

$7 \times 8 = 56 \qquad 4 \times 9 = 36 \qquad 9 \times 9 = 81$

Multiplicacion de un número entero por otro de una cifra.

34. Para hallar el *producto* de un número entero cualquiera por otro de una sola cifra se multiplican todas las cifras del multiplicando por el multiplicador, empezando por la derecha y añadiendo á cada producto parcial las unidades del mismo órden, que resulten del producto parcial anterior. El número formado de todos estos productos parciales será el *producto total*.

Hallar el producto de 4021 *por* 3.

El multiplicando 4021 se puede descomponer en unidades de 1.°, 2.°, 3.° y 4.° órden; multiplicando pues la cifra de las unidades de cada órden por 3 y sumando los productos parciales, tendremos el total. Esto supuesto:

3 veces 1 unidad son 3 unidades,
3 veces 2 decenas son 6 decenas,
3 veces 0 centenas son 0 centenas,
3 veces 4 millares son 12 millares;

luego, si hemos multiplicado por 3 todas las diferentes unidades del multiplicando, es evidente que el *producto total* de los números dados, será igual á la suma de estos productos parciales, es decir á....

12 millares+6 decenas+3 unidades ó lo que es lo mismo 12063 unidades.

El mismo resultado se obtiene tomando el factor 4021 tres veces por sumando.

$4021 \times 3 = 4021 + 4021 + 4021 = 12063$

Propongámonos por 2.° ejemplo *hallar el producto de* 8349 *por* 5

Disposicion del cálculo	8349	multiplicando
	5	multiplicador
	41745	producto

5 por 9 unidades son 45 unidades, que componen 4 decenas y 5 unidades: las *unidades* se escriben debajo de las unidades de los factores y las decenas se añaden al producto parcial siguiente.

5 por 4 decenas son 20 y 4 del producto anterior, componen 24 decenas: las *decenas* se escriben debajo de las decenas, reservando las centenas para agregarlas al producto de las centenas.

5 por 3 centenas son 15 y 2 del producto anterior son 17 centenas;

5 por 8 son 40 y 1 del producto anterior son 41 millares;

luego el número 41745 unidades será el producto pedido.

OTROS EJEMPLOS:

734125	118000357	8010070	89400500
9	8	7	6
6607125	944002856	56070490	536403000

Tambien se acostumbra disponer este caso de la multiplicacion escribiendo el multiplicando, el multiplicador y el producto en un mismo renglon, separando los dos primeros por el signo $\times$ y los dos últimos por el signo de igualdad.

$1235\times7=8645$ $\quad$ $100259\times3=300777$ $\quad$ $108900\times9=980100$

Multiplicacion de dos números enteros.

35. Para hallar el *producto* de un número entero por una cifra significativa seguida de uno ó mas ceros, se multiplica el número entero por dicha cifra, y á la derecha del producto se escriben los ceros del multiplicador.

Hallar el producto de 1627 *por* 300	1627	multiplicando
	300	multiplicador
	488100	producto total

Multiplicar 1627 por 300 equivale á sumar el número 1627 trescientas veces. Esta suma indicada puede dividirse en 100 grupos de á 3 sumandos ó lo que es lo mismo en 100 veces 1627 por 3; y como 1627×3 es igual á 4881, el *producto total* se hallará multiplicando este número por 100 ó añadiendo dos ceros á su derecha.

$94\times7000=658000$ $\quad$ $142\times80000=11360000$

36. Para hallar el *producto* de dos números enteros de varias cifras, se multiplica todo el multiplicando por cada una de las cifras significativas del multiplicador, escribiendo los productos parciales unos debajo de otros, de modo que la primera de sus cifras ocupe el mismo lugar que la cifra correspondiente del multiplicador, y la suma de todos estos productos parciales será el producto total.

Conviene tomar por multiplicando el factor que tenga menos cifras significativas, porque de este modo es menor el número de productos parciales.

Propongámonos *hallar el producto de* 1627 *por* 324.

1627 / 324	factores
6508.....	producto de 1627 por 4
32540.....	producto de 1627 por 2 con un cero á su derecha$=1627\times20$
488100.....	producto de 1627 por 3 con dos ceros á su derecha$=1627\times300$
527148.....	producto total.

El producto de los números dados se hallará multiplicando 1627 unidades por las unidades, decenas y centenas del multiplicador, y sumando despues los productos parciales.

El producto de 1627 por 4 unidades es igual á 6508 unidades.

El producto de 1627 por 2 decenas ó 20 unidades es lo mismo que el producto de 1627 por 2, con un cero á su derecha; ó sean 32540 unidades.

El producto de 1627 por 3 centenas ó 300 unidades equivale al producto de 1627 por 3, con dos ceros á su derecha; ó sean 488100 unidades.

Luego la suma de estos productos parciales será el *producto total.*

En la práctica se omiten los ceros de la derecha de los productos parciales, empezando á escribir cada uno debajo del multiplicador respectivo.

Abreviaciones de la multiplicacion.

37. Cuando uno ó ambos factores terminan en ceros, se abrevia la operacion prescindiendo de ellos y escribiéndolos en seguida á la derecha del producto total.

La 1.ª parte se demuestra lo mismo que el caso particular suyo, número **35.**

Para demostrar la segunda, sean los factores 2100 y 30.

El multiplicando 2100 unidades es lo mismo que 21 centenas, luego el producto de 30 por 2100, equivale á sumar 30 veces el número 21 centenas; y como esta suma se puede sustituir por otra compuesta de 10 sumandos iguales cada uno á tres de los anteriores, el número pedido será igual á 10 veces el producto de 3 por 21 centenas ó sea 63000 unidades (número que resulta de multiplicar 3 por 21 añadiendo tres ceros á la derecha del producto).

Si entre los guarismos del multiplicador hay ceros, los productos parciales del multiplicando por los ceros del multiplicador serán todos ceros, por cuya razon no se multiplicará por ellos el multiplicando.

```
     18959060            704109000
       548200             43009100
    ---------          -----------
      3791812               704109
    15167248              6336981
    7583624              2112327
   9479530              2816436
 --------------     -----------------
 10393356692000     30283094391900000
```

Prueba de la multiplicacion.

38. Para hacer la *prueba* de la multiplicacion, basta repetir la operacion tomando el multiplicador por multiplicando y este por multiplicador. El producto que se obtenga de este modo será igual al primitivo, si la operacion está bien hecha.

OBSERVACIONES GENERALES.

39. El producto de un número por 2, 3, 4 y en general por un número entero cualquiera, se llama *duplo*, *triplo*, *cuádruplo*... y en general *múltiplo* de este número. Es evidente que el producto de dos números enteros es múltiplo de cualquiera de ellos. El multiplicando y el multiplicador se llaman *submúltiplos* del producto.

Una igualdad no deja de serlo aunque ambos miembros se multipliquen por un mismo número. Luego, si dos igualdades se multiplican ordenadamente, el resultado será tambien una igualdad.

Producto de una suma indicada por un número entero (*).

40. Para multiplicar una *suma indicada* por un número entero, se multiplican todos los sumandos por dicho número, y la suma de los productos parciales nos dará el producto total.

$$(4+3)\times 2=4\times 2+3\times 2$$
$$11\times(10+5+1)=11\times 10+11\times 5+11\times 1$$

Esta proposicion es una consecuencia inmediata del postulado del número **31**. Se enuncia tambien así:

El producto de la suma indicada de varios números por otro número entero es igual á la suma de los productos parciales de los sumandos por el mismo número entero.

APLICACIONES. *Hallar el producto de* 5020 *por* 12

$$5020\times 12=(5000+20)\times 12=60000+240=60240$$
$$5020\times 12=5020\times(10+2)=50200+10040=60240$$

Cor. Para multiplicar una *suma indicada* por otra *suma* de números enteros tambien indicada, se multiplica cada uno de los sumandos del multiplicador por todo el multiplicando, y la suma de los productos parciales será el producto total.

$$(4+3)\times(10+2)=4\times 10+3\times 10+4\times 2+3\times 2$$

En efecto, el producto de un número por $10+2$, es igual á la suma de los productos parciales del mismo número por 10 y por 2.

El producto del multiplicando por 10 es igual á $4\times 10+3\times 10$
y el producto del mismo número por 2 es igual á $4\times 2+3\times 2$

Luego la suma de estos productos será evidentemente el producto pedido.

Los resultados finales de estas operaciones son evidentemente los mismos que resultarian de sustituir en vez de cada factor el número entero correspondiente. Así en este último ejemplo la suma de los productos parciales 40, 30, 8 y 6 del segundo miembro es igual al producto de los factores 7 y 12 del primero.

Del mismo modo tendremos tambien

$$(10+4+2)\times(3+5)=10\times 3+4\times 3+2\times 3+10\times 5+4\times 5+2\times 5 \quad (**).$$

(*) Recuérdese que no debe confundirse $(4+3)\times 2$ con $4+3\times 2$ pues $(4+3)\times 2$ equivale al producto de la suma indicada $4+3$ por el número 2, y $4+3\times 2$ es igual al número 4 mas el producto indicado de 3 por 2. Del mismo modo, $(4+3)\times(5-2)$ indica el producto de la suma $4+3$ por la diferencia $5-2$

(**) Generalizando la proposicion y su corolario, y teniendo presente que dos letras unidas equivalen al producto de los números que representan, tendremos.....

Teorema. $(A+B+C+.....)\times M=\left\{\begin{array}{l}A+B+C+....\\A+B+C+.....\\........\end{array}\right\}=A\times M+B\times M+C\times M+.....$

Cor. $(A+B+C)\times(M+N)=(A+B+C)\times M+(A+B+C)\times N=AM+BM+CM+AN+BN+CN$

Producto de una diferencia indicada por un número entero.

41. Para multiplicar una *diferencia indicada* por un número entero, se multiplica el minuendo y el sustraendo por dicho número, y restando los dos productos parciales, el resultado será el producto total pedido.

$$(7-3)\times2=7\times2-3\times2$$

En efecto, el producto de la diferencia 7—3 por 2 es lo mismo que el producto de 2 por 7—3; y como, para hallar este último producto, basta repetir por sumando el número 2 siete veces, y despues tres veces, restando luego ambos resultados, es evidente que $(7-3)\times2$ equivale á $7\times2-3\times2$

*De otro modo: de la igualdad $7-3=4$ se deduce $7=3+4$
y por consiguiente, segun el teorema anterior, tendremos

$$7\times2=3\times2+4\times2$$

de donde resulta $7\times2-3\times2=4\times2$

ó bien $7\times2-3\times2=(7-3)\times2$

Esta proposicion se enuncia tambien diciendo que:

El producto de la diferencia indicada de dos números por otro entero es igual á la diferencia de los productos parciales del minuendo y el sustraendo por el mismo número entero.

Igualmente $10\times(9+2-5)=10\times9+10\times2-10\times5$

Aplicaciones. Hallar el producto de 1999 por 12

$$1999\times12=(2000-1)\times12=24000-12=23988$$

$$195\times79998=195\times(80000-2)=15600000-390=15599610$$

**Cor.* Para multiplicar una *diferencia* indicada por una suma de números enteros igualmente indicada, se multiplica cada uno de los sumandos del multiplicador por la diferencia indicada del multiplicando, y la reunion de los productos parciales será el producto total.

Para multiplicar una *diferencia indicada* por otra *diferencia* de números enteros tambien indicada, se multiplica el minuendo y el sustraendo del multiplicador por todo el multiplicando, y la diferencia de los productos parciales será el producto total.

$$\left\{\begin{array}{l}(7-3)\times(10+2)=7\times10-3\times10+7\times2-3\times2\\(7-3)\times(10-2)=7\times10-3\times10-7\times2+3\times2\end{array}\right\}$$

En efecto, el producto de 7—3 por 10 es igual á $7\times10-3\times10$
y el producto de 7—3 por 2 es igual á $7\times2-3\times2$
luego la *suma* de estos resultados será el producto total de 7—3 por 10+2
y la *diferencia* de los mismos será el producto de 7—3 por 10—2

Esc. Teniendo presente que en toda igualdad se puede reemplazar siempre el primer miembro por el segundo y este por el primero, de los dos últimos teoremas, se deduce que podemos sustituir por

$4.2+3.2$ su igual $(4+3)\times2$,
y en vez de $4.2-3.2$ el producto indicado $(4-3)\times2$,

á cuyas sustituciones, de un uso muy frecuente en la práctica, se les llama *descomponer en factores la suma ó la diferencia de dos números* (*).

(*) Generalizando todos estos resultados tendremos como en el número anterior las igualdades siguientes:

$$(A-B)\times M=(A-B)+(A-B)+(A-B)+\ldots\ldots=A+A+A+A\ldots\ldots-B-B-B-B=A\times M-B\times M$$

$$(A-B)\times(M+N)=AM-BM+AN-BN \quad y \quad (A-B)\times(M-N)=AM-BM-AN+BN$$

Producto de varios factores.

42. Un producto indicado de varios factores como por ejemplo $4\times5\times3\times8$ quiere decir que el producto de 4 por 5 se ha de multiplicar por el factor siguiente 3, este producto por el otro factor 8, y así sucesivamente.

El producto indicado 4.5×3.8 significa que el producto 4.5 se debe multiplicar por el producto 3.8

El producto de tres ó mas factores enteros no varia aunque se altere el órden de los factores.

*Sea el producto indicado 11.7.3.5.2.13 y vamos á demostrar que no se altera su valor cambiando el órden de dos factores cualesquiera, por ejemplo 3 y 5; es decir que equivale al nuevo producto indicado 11.7.5.3.2.13

En efecto, de la definicion de la multiplicacion se deduce que

$$11.7.3=11.7+11.7+11.7$$

y multiplicando ambos miembros por 5 nos dará;

$$11.7.3.5=11.7.5+11.7.5+11.7.5 \quad \text{ó bien} \quad 11.7.3.5=11.7.5.3$$

Multiplicando ahora los dos miembros de la última igualdad por el factor 2, y los dos miembros de la que resulte por el factor 13, tendremos

$$11.7.3.5.2.13=11.7.5.3.2.13$$

Luego, si cada factor se puede permutar con su adyacente, sin que el producto varie, efectuando esta operacion las veces suficientes para que cada uno de los factores ocupe el lugar que se quiera, quedará demostrada la proposicion en toda su generalidad.

Asi, para deducir que el producto 5.7.9.11 equivale á 7.11.5.9, tendremos las siguientes igualdades:

$$5.7.9.11=7.5.9.11=7.5.11.9=7.11.5.9$$

Cor. 1.° Para formar el producto de muchos factores enteros, se multiplican dos cualesquiera de ellos, luego el producto de estos por otro y asi sucesivamente.

El producto de $2\times7\times5\times11=10\times7\times11=10\times77=770$

$$15\times25\times99\times4\times5=15\times100\times99\times5=75\times100\times99=742500$$

Cor. 2.° Para multiplicar un producto indicado de factores enteros por un número entero, basta multiplicar por este uno de dichos factores.

En efecto, sea el producto indicado 2.3.5.7

Multiplicando uno de sus factores por otro entero cualquiera 10, tendremos 2.3.50.7 ó lo que es lo mismo 2.3.7.50 ó bien 2.3.7.5.10 pero 2.3.7.5.10 equivale al producto de 2.3.5.7 por 10; luego la proposicion es evidente, y tendremos:

$$2.3.5.7\times10=20.3.5.7=2.30.5.7=2.3.50.7=2.3.5.70$$

Esc. El producto de dos ó mas productos indicados de factores enteros es igual á un producto indicado de todos los factores de los productos dados. El producto de dos ó mas números contiene todos los factores de estos números (*).

(*) En estas proposiciones se funda tambien la primera abreviacion del núm. **37**. En efecto...

$$834\times200=834\times2\times100=1668\times100=166800$$
$$2100\times30=21\times100\times3\times10=21\times3\times100\times10=63\times1000=63000$$

Número de cifras del producto de dos ó mas números enteros.

43. El producto de dos factores enteros consta de tantas cifras ó de tantas menos una como cifras tienen los factores.

En efecto, sean los factores dados 327 y 48

El producto 327×48 es menor que 327×100 y mayor que 327×10; pero el producto 327×100 consta de tantas cifras como tienen los factores dados, y el producto 327×10 consta del mismo número menos una; luego la proposicion enunciada es evidente supuesto que 327×48 está comprendido entre uno y otro producto.

Del mismo modo el producto 1852×538 constará de seis ó siete cifras, pues si el multiplicador está comprendido entre 100 y 1000, el producto propuesto lo estará entre 185200 y 1852000.

***Cor.** Cuando los factores son tres ó mas, el *producto total* no puede tener mas cifras que las que tienen sus factores, y tiene siempre mas que la diferencia entre este número y el de los factores.

Alteraciones del producto por la variacion de los factores.

44. De la definicion de la multiplicacion y de los teoremas expuestos en los números anteriores se deducen fácilmente los siguientes:

Añadiendo á uno de los factores de un producto indicado de dos números enteros, otro número cualquiera, el producto tendrá tantas unidades mas como exprese el producto de este número por el otro factor.

En efecto, si $5 \times 4 = 20$ tendremos $(5+2) \times 4 = 20 + 2.4$

Igualmente si $5 \times 8 = 40$ se verificará $5 \times 10 = 40 + 2 \times 5$

Restando de uno de los factores otro número, el producto tendrá tantas unidades menos como exprese el producto de este número por el otro factor.

Siendo $5 \times 4 = 20$ será $(5-3) \times 4 = 20 - 3.4$

Del mismo modo, si $5 \times 8 = 40$ se verificará $5 \times 6 = 40 - 2 \times 5$

Multiplicando uno de los factores por un número entero, el producto resultará multiplicado por el mismo número.

Si $5 \times 4 = 20$ será $5.2 \times 4 = 20 \times 2$ y $5 \times 4.10 = 20 \times 10$

Multiplicando cada uno de los factores por un número entero, el producto quedará tambien multiplicado por el producto de los números por que se multiplicaron los factores.

Si en el producto indicado 5×4 se multiplica el primer factor por 3 y el segundo por 2, tendremos 5.3×4.2 ó lo que es lo mismo 5.4×3.2 (*)

Si dos productos iguales tienen un factor comun, los segundos factores serán iguales. Si dos productos tienen un factor comun, el producto mayor tendrá mayor el otro factor. Si dos productos iguales tienen factores diferentes, al producto de mayor multiplicando corresponde menor multiplicador, y al contrario.

(*) Generalizando todas estas proposiciones, cualesquiera que sean los números enteros, tendremos que, si el producto de A por B es P, ó lo que es lo mismo, si se verifica la igualdad $A \times B = P$, se verificarán tambien las siguientes:

$$(A+M) \times B = A \times B + M \times B = P + M \times B$$
$$A \times (B-M) = A \times B - A \times M = P - A \times M$$
$$A.M \times B = A.B \times M = P \times M$$
$$A.M \times B.N = A.B \times M.N = P \times M.N$$

DIVISION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Definicion de la division y su consecuencia. Division de un número entero que termina en ceros por 10, 100, 1000, etc. Division de dos números de una cifra. Division de un número entero por otro de una cifra. Division de dos números enteros. Prueba. Observaciones generales. Ejercicios

---

Definicion de la division de un número por otro entero.

45. Se deduce de la definicion de la division que el dividendo es siempre igual al producto del divisor por el cociente. Pero el producto de dos números enteros equivale á repetir el uno por sumando tantas veces como unidades tiene el otro, ó bien hacer al uno tantas veces mayor como unidades tiene el otro; luego

La division de dos números enteros tiene por objeto hallar las veces que el dividendo contiene al divisor, ó bien hacer al dividendo tantas veces menor como unidades tiene el divisor, ó últimamente, *partir* el dividendo en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor.

Llámase *division exacta* aquella cuyo cociente es un número entero; el dividendo contiene entonces al divisor un número exacto de veces. *Division inexacta* es aquella, cuyo cociente no es un número entero; en este caso, el dividendo no contiene al divisor un número exacto de veces. En la division inexacta, el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor se llama *cociente entero*, y la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por dicho cociente entero se llama *resto*. En toda division inexacta, el dividendo es igual al producto del cociente entero por el divisor, mas el resto.

El resto debe ser menor que el divisor, pues de lo contrario, el divisor estaria aun contenido en el dividendo una ó mas veces.

Consecuencia de la definicion anterior.

46. Para hallar el *cociente* de un número por otro entero, se resta el divisor del dividendo todas las veces que sea posible, y este número de veces será el cociente. (*)

Hallar el cociente de 60 *entre* 12

$$\begin{array}{r} 60 \\ 12 \\ \hline 48 \end{array}\quad \begin{array}{r} 48 \\ 12 \\ \hline 36 \end{array}\quad \begin{array}{r} 36 \\ 12 \\ \hline 24 \end{array}\quad \begin{array}{r} 24 \\ 12 \\ \hline 12 \end{array}\quad \begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 00 \end{array}$$

luego 5 es el *cociente exacto* de 60:12 siendo el resto cero (**).

Hallar el cociente de 60 *entre* 13

$$\begin{array}{r} 60 \\ 13 \\ \hline 47 \end{array}\quad \begin{array}{r} 47 \\ 13 \\ \hline 34 \end{array}\quad \begin{array}{r} 34 \\ 13 \\ \hline 21 \end{array}\quad \begin{array}{r} 21 \\ 13 \\ \hline 8 \end{array}$$

luego 4 es el *cociente entero* de 60:13 siendo el resto 8.

47. Este procedimiento es muy embarazoso en la práctica; para simplificarlo estableceremos el siguiente postulado·

Para dividir un número por otro, se puede descomponer el dividendo en varios sumandos, dividir sucesivamente cada uno de ellos por el divisor, y sumar luego los productos parciales.

Esto supuesto, propongámonos hallar el cociente de dos números enteros en los diferentes casos que pueden ocurrir que son los siguientes:

(*) Por la palabra *cociente* entiéndase por ahora *cociente exacto*, si la division es exacta, ó cociente entero en caso contrario.

(**) El mismo resultado se obtiene tambien por medio de la adicion del divisor consigo mismo, ó de la multiplicacion del divisor por los números 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Division de un número entero que termina en ceros por 10, 100, 1000, etc.

48. Para *dividir* un número entero, que termina en ceros, por la unidad seguida de igual ó menor número de ellos, se suprimen de su derecha tantos como tiene el divisor, y el resultado será el cociente.

$$278000:1000=278 \qquad 1074000:100=10740$$

Esta proposicion se deduce inmediatamente de su inversa núm. **32**, ó del convenio establecido para la escritura decimal.

Division de dos números de una sola cifra ó de un entero de dos cifras, por otro de una sola, siempre que el cociente sea tambien de una cifra (*).

49. Para hallar el *cociente* en este caso, basta saber de memoria la tabla de multiplicar.

El cociente de 8 por 2 es igual á 4; porque $8=4\times2$

El cociente de 9 por 4 es igual á 2, y 1 de resto; pues $9=2\times4+1$

Con la misma facilidad podemos dividir un número de dos cifras por otro de una sola, siempre que la cifra de las decenas del dividendo sea menor que e divisor. En efecto, el cociente de 40 entre 8 es 5, pues el producto 5×8 es 40

$$\left.\begin{array}{r}35:6=5 \text{ cociente entero}\\ \text{resto}=5\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}79:9=8 \text{ cociente entero}\\ \text{resto}=7\end{array}\right\}$$

Division de un número entero por otro de una sola cifra.

50. Para *dividir* un número entero de varias cifras por otro de una sola, se dividen todas las del dividendo por el divisor, empezando por las del órden superior, para que de esta manera se añada á cada dividendo parcial el resíduo del anterior. El número formado por estos cocientes parciales será el *cociente total.*

El primer cociente parcial se halla dividiendo la cifra de órden superior del dividendo por el divisor, si fuere igual ó mayor que el divisor, ó las dos primeras en otro caso. Si un dividendo parcial es menor que el divisor, se escribe cero en el cociente, y el resto será todo el dividendo. Es evidente que el valor absoluto de cada resto es siempre menor que el divisor. Ningun cociente parcial puede pasar de 9, pues de otro modo el cociente parcial anterior, por ser menor que el verdadero, nos daria un resto igual ó mayor que el divisor.

El número de cifras del cociente es igual al número de cifras del dividendo, ó una menos.

Hallar el cociente de los números enteros 9063 *y* 3

Dividendo 9063	3 divisor
resto 0	3021 cociente

El dividendo se puede descomponer en unidades, decenas, centenas y unidades de millar; dividiendo, pues, la cifra de las unidades de cada órden por 3, y sumando los cocientes parciales, tendremos el total.

(*) El cociente de dos números enteros (siendo el dividendo mayor que el divisor) será de una sola cifra, si escribiendo un cero á la derecha del divisor, resulta un número mayor que el dividendo.

Esto supuesto, empezaremos la operacion, diciendo.....

9 millares : 3=3 *millares*, ó sean las unidades superiores del cociente.
0 centenas : 3=0 *centenas*; segunda cifra del cociente;
6 decenas : 3=2 *decenas*; tercera cifra del cociente;
3 unidades : 3=1 *unidad*; cuarta y última cifra del cociente.

Luego, si hemos dividido todas las diferentes unidades del dividendo por el divisor, es evidente que el cociente total de los números dados será igual á 3 millares, 2 decenas, y 1 unidad; ó lo que es lo mismo, á 3021 unidades.

Hallar el cociente de 810015 *entre* 5

Dividendo. . . .	810015	5 divisor
2.º dividendo parcial	31	162003 cociente exacto
3.ʳ dividendo parcial	10	
4.º 5.º y 6.º . . .	0015	
Resto.	00	

El cociente de esta division está comprendido entre 100000 y 1000000, y consiguiente constará de 6 cifras, como se deduce de las igualdades

5 divisor×100000 =500000; producto menor que el dividendo 810015
5 divisor×1000000=5000000, producto mayor que el dividendo 810015

Sentado esto; tratemos de hallar la cifra de especie superior del cociente, es decir, la que expresa las centenas de millar; y como la cifra de especie superior del dividendo es mayor que el divisor; diremos

8 entre 5 á 1; luego 8 centenas de millar entre 5 unidades á 1 centena de millar.

(1 *es la cifra del órden superior del cociente*)

Multiplíquese este cociente por el divisor y réstese el producto del dividendo;

1 por 5 es 5, al 8, van 3

á la derecha de esta resta, 3 centenas de millar, bájese el guarismo siguiente del dividendo, y tendremos por dividendo parcial 31 decenas de millar.

31 entre 5 á 6; luego 31 decenas de millar entre 5 á 6 decenas de millar.

(6 *es la segunda cifra del cociente, que se escribe á la derecha de la anterior*).

Multiplíquese este cociente por el divisor y réstese el producto del dividendo;

6 por 5 son 30, al 31, vá 1

bájese á la derecha de este resíduo la cifra siguiente del dividendo que es cero, y continuando así en todo lo demás de la operacion; tendremos.....

10 entre 5 á 2 (*tercera cifra del cociente*); 2 por 5 son 10, al 10 va cero;

Como la cifra inmediata tambien es cero, cero será el cociente (4.ª *cifra*): y como de bajar la otra 1, es aun el dividendo parcial menor que el divisor, se volverá á escribir cero en el cociente (5.ª *cifra*).

Finalmente, el resíduo 1, junto con el último guarismo 5 del dividendo, nos dará el último dividendo parcial.....

15 entre 5 á 3 (*última cifra del cociente*); 3 por 5 son 15, al 15, cero.

Luego el *cociente total* pedido será 162003 unidades.

Otros dos ejemplos:

1000000	8	540 081	9
20	125000	0010	060120
40	(cociente)	18	(cociente)
0000		01 (resto)	

Tambien se dispone este caso de la division escribiendo el dividendo, el divisor y el cociente en un mismo renglon del modo siguiente.....

15734 : 9=1748 (cociente entero)	7800074 : 8=975009
67	60
43	40
74	0074
2 resto	resto 2

Y omitiendo los restos y dividendos parciales, lo cual ofrece grandes ventajas en la práctica, se tendrá.....

347421 : 3=115807   80017456 : 8=10002182   10009701 : 9=1112189

Division de dos números enteros.

51. Para *dividir* dos números enteros de varias cifras, se separan de la izquierda del dividendo tantas como tiene el divisor, ó una mas, si las primeras (consideradas como unidades simples) no contienen al divisor. Se dividen las cifras separadas ó sea el primer dividendo parcial por el divisor, y tendremos la primera cifra del cociente. Se multiplica esta cifra por el divisor, y se resta el producto del dividendo parcial. A la derecha del resíduo se escribe la cifra siguiente del dividendo, y tendremos el segundo dividendo parcial con el cual se ejecutará la misma operacion que con el anterior. El número formado por todos estos cocientes parciales, será el *cociente total.*

Tambien en este caso como en el anterior, si el dividendo parcial es menor que el divisor, se escribe cero en el cociente y se baja la cifra siguiente. Cada resíduo parcial es menor que el divisor. Ningun cociente parcial puede exceder de 9.

Hallar el cociente de los números 32481 *y* 12.

De las dos igualdades siguientes.....

$$\begin{cases} 12 \text{ divisor}\times 1000 = 12000 \text{ producto menor que el dividendo } 32481 \\ 12 \text{ divisor}\times 10000 = 120000 \text{ producto mayor que el dividendo } 32481 \end{cases}$$

se deduce que, el cociente de los números dados estará comprendido entre 1000 y 10000 y de consiguiente constará de 4 cifras, á saber: *unidades de millar, centenas, decenas y unidades.*

Las disposicion del cálculo para determinar todas estas cifras, puede ser como sigue:

Dividendo total.	32481	12 divisor
producto de la 1.ª cifra del cociente por el divisor	24	2706 cociente
2.º dividendo.	8481	
producto de la 2.ª cifra del cociente por el divisor	84	
3.º y 4.º dividendos.	081	
producto de la 4.ª cifra del cociente por el divisor	72	
Resto.	9	

Determinar la cifra de las unidades de órden superior del cociente, ó sea la cifra de las unidades de millar. Como el producto del divisor por la cifra de los millares del cociente es un número exacto de millares, dicho producto se hallará precisamente en los millares del dividendo. Luego si dividimos los 32 millares del dividendo por el divisor 12, el cociente será la cifra de los millares del cociente pedido, ó sea la cifra de las unidades de órden superior.

Para averiguar las veces que el dividendo parcial 32 contiene al divisor 12, diremos..... El dividendo 32 contiene la suma de los productos parciales de las unidades y decenas del divisor por el cociente que se busca, mas el resto, si la division no es exacta. Luego las decenas 3 del dividendo contendrán las decenas que resulten del producto de las decenas del divisor por el cociente, mas las decenas del resto en algunos casos. Y por consiguiente dividiendo las 3 decenas del dividendo por 1 decena del divisor, el cociente será evidentemente el verdadero ó mayor que el verdadero. Para saber si es ó no el verdadero, se multiplica por todo el divisor, y si el producto no es mayor que el dividendo, será el verdadero; pero si el producto es mayor que el dividendo, el cociente será tambien mayor que el verdadero, en cuyo caso se le disminuirá en una unidad y se someterá á la misma comprobacion. Esto supuesto; 3 entre 1 á 3,
3 cociente $\times 12$ divisor$=36$, que por ser mayor que 32 indica, que la cifra 3 del cociente es *mayor* que la verdadera. Veamos la cifra 2:
2 cociente$\times 12$ divisor$=24$ que por ser menor que el dividendo, la cifra 2 será la del órden superior del cociente, es decir la de las unidades de millar.

Determinar la 2.ª *cifra del cociente* ó sea la cifra de las centenas.

Multiplicando la cifra 2 de los millares del cociente por el divisor 12 y restando el producto del dividendo total; el resíduo 8481 será el producto del divisor por las centenas, decenas y unidades del cociente, mas el resto.

Tendremos pues un nuevo dividendo 8481 unidades, para dividirlo entre 12.

El producto del divisor por la cifra de las centenas del cociente es un número exacto de centenas, y por consiguiente dicho producto se hallará en las centenas del nuevo dividendo. Luego dividiendo las 84 centenas del dividendo por el divisor, resultará la cifra de las centenas del cociente.

El cociente de 84 por 12 se halla lo mismo que el de 32 y 12.....

8 entre 1 á 8; pero $8\times 12=96$ es$>$que 84; luego la cifra 8 no es buena.

8 entre 1 á 7 y como $7\times 12=84$ es igual al dividendo; la cifra 7 será buena: luego 7 será la 2.ª cifra del cociente que se busca ó sea la cifra de las centenas.

Hallar la 3.ª *cifra del cociente* ó sea la cifra de las decenas.

Multiplicando la cifra 7 de las centenas del cociente por el divisor 12 y restando el producto del dividendo, el resíduo 81 será el producto del divisor por las decenas y unidades del cociente, mas el resto.

Tendremos por lo tanto el dividendo 81 unidades, para dividirlo entre 12.

Repitiendo el razonamiento empleado en la determinacion de las cifras anteriores, si dividimos las decenas 8 del dividendo por el divisor 12, resultará la cifra de las decenas del cociente; pero el cociente de 8 entre 12 es cero; luego cero será la tercera cifra del cociente de los números dados.

Determinar la 4.ª *y última cifra del cociente*, es decir, la de las unidades. Como la cifra anterior del cociente es cero, el dividendo parcial correspondiente será el producto del divisor por las unidades del cociente, mas el resto. Dividiendo pues dicho dividendo 81 por el divisor, hallaremos las unidades del cociente y el resto final de la division.

8 entre 1 á 8; pero $8\times 12=96>81$, luego la cifra 8 no es buena;

8 entre 1 á 7; pero $7\times 12=84>81$, luego la cifra 7 no es buena;

8 entre 1 á 6 y como $6\times 12=72<81$, la cifra 6 será buena;
luego 6 será la 4.ª y última cifra del cociente, ó sea la cifra de las unidades; y restando del dividendo final 81 el producto 6×12, tendremos el *resto final* 9.

52. En la práctica conviene tener presentes las siguientes observaciones:

1.ª Como en cada dividendo parcial no se tienen en cuenta las cifras del órden inferior á la que se trata de determinar en el cociente, se abrevia la operacion no escribiendo á la derecha de los resíduos parciales mas que la cifra correspondiente del dividendo total.

Segun esto, el cálculo podrá disponerse así:

58725	85	564094	94
510	690 cociente	564	6001 cociente
772		0094	
765		94	
75 resto		00	

2.ª La multiplicacion de cada cifra del cociente por el divisor y la sustraccion del dividendo parcial respectivo se pueden hacer á un mismo tiempo. Si el producto parcial que se resta es mayor que la cifra del dividendo de quien se resta, se añaden á este las unidades suficientes del órden inmediato superior, para que la resta sea posible, añadiendo luego otras tantas unidades al producto parcial siguiente.

En la division de los números 1946 por 348, tendremos	1946	348
	58	65 (cociente)
Resíduo correspondiente á la cifra 5 del cociente.....	206	

6 cociente×8 unidades del divisor son 48, que no se pueden restar de la cifra 6 del dividendo; añadiendo pues 5 decenas á esta cifra, resultan 56 unidades, y tendremos $6\times8=48$ al 56 van 8 de resta.

6 cociente×4 decenas del divisor son 24 decenas, y 5 que añadimos antes al minuendo componen 29 decenas, que no pueden restarse de las 4 decenas del dividendo ó sea minuendo, añadiendo 3 centenas al minuendo, resultan 34 decenas, y por consiguiente, $6\times4=24$ y 5, 29 al 34 van 5 de resta.

6 cociente×3 centenas del divisor son 18 centenas, y 3 que añadimos al minuendo, componen 21 centenas que no pueden restarse de las del dividendo: luego si el producto de 6 por el divisor es mayor que 21 centenas y el dividendo no llega á 20 centenas, *la cifra* 6 *será mayor que la verdadera.*

Veamos la 5; 5×8 son 40 á 46 van 6 y llevamos 4; 5×4 son 20 y 4 son 24 á 24, cero, y llevamos 2; 5×3 son 15 y 2 son 17 á 19 van 2: *luego la cifra* 5 *será la verdadera.*

3.ª Sin efectuar la multiplicacion de la cifra del cociente por todo el divisor se puede averiguar si dicha cifra es ó no mayor que la verdadera, con solo empezar la multiplicacion por las unidades de órden superior del divisor

Pues es evidente que, si en este caso algun producto parcial fuese menor que la cifra ó cifras correspondientes del dividendo, con mas razon lo seria empezando por las unidades de órden inferior á causa de las unidades que pudieran llevarse del producto parcial anterior.

Comprobar la cifra 6 *del cociente de los números* 1946 *y* 348

Dividendo 1946	348 divisor
	65

6 cociente×3 centenas del divisor=18 centenas, á 19 centenas del dividendo va 1 centena, que unida á las 46 unidades restantes del dividendo componen 146 unidades=14 decenas y 6 unidades.

6 cociente×4 decenas del divisor=24 decenas, y como este producto es mayor que las 14 decenas del dividendo, se sigue que el producto de la cifra 6 por todo el divisor será evidentemente mayor que el dividendo; luego el cociente 6 es mayor que el verdadero.

Para comprobar la cifra 5, *diremos.....*

5×3 son 15 al 19 van 4, que con el 4 componen 44,

5×4 son 20 al 44 van 24, que con el 6 componen 246,

5×8 son 40 al 246 van 206. Luego la cifra 5 no es mayor que la verdadera.

Cuando siguiendo este método de comprobacion se halla un resíduo parcial igual ó mayor que la cifra tomada por cociente, esta cifra no es mayor que la verdadera.

El caso menos favorable se verifica cuando las cifras siguientes del dividendo son ceros, y nueves las del divisor, por ejemplo en la division de 2500 por 499.

Tratemos de comprobar la cifra 5 *del cociente* de estos números.

5×4 centenas del divisor=20 centenas, á 25 del dividendo van 5; bajando á la derecha de este resíduo la cifra siguiente del dividendo, tendremos el dividendo parcial 50; que excede en el mismo número 5 al producto del cociente por la cifra mayor del divisor que es 9. Luego evidentemente 5 no es mayor que la cifra verdadera del cociente.

Ultimamente la comprobacion de las cifras del cociente se hace de memoria, sin escribir mas resíduos parciales que los correspondientes á las cifras verdaderas. El tanteo debe continuarse hasta llegar á una sustraccion imposible, ó bien á un resíduo igual ó mayor que la cifra que se tantea, en el primer caso el cociente será mayor que el verdadero y en el segundo no lo será.

Hallar el cociente de 326463 *por* 682

Dividendo.	3264.63	682 divisor
2.° dividendo parcial. . .	536 6	478 cociente entero
3.°.	59 23	
Resto final. . .	4 67	

Supuesto que { 682× 100= 68200 producto menor que el dividendo,
682×1000=682000 producto mayor que el dividendo,

el cociente de los números dados estará comprendido entre 100 y 1000; es decir, constará de tres cifras ó sean *centenas, decenas* y *unidades*.

Separando con un punto, una coma ú otra señal cualquiera de la izquierda del dividendo tantas cifras como basten (consideradas como unidades simples) para contener al divisor, el cociente de dichas cifras separadas, por el divisor, será la primera cifra del cociente que se busca. Así, tendremos... 32 entre 6 á 5;

5×6 son 30 á 32 van 2 que con el 6 componen 26,

5×8 son 40 que por ser mayor que 26, la cifra 5 será > que la verdadera.

Comprobacion de la cifra 4:

4×6 son 24 á 32 van 8, que es mayor que la cifra que se tantea, luego 4 será el cociente. Multiplicando esta cifra 4 por el divisor y restando el producto del dividendo parcial, tendremos.....

4×2 son 8 al 14 van 6 y llevamos 1
4×8 son 32 y 1 son 33, á 36 van 3 y llevamos 3 } Resíduo total 536
4×6 son 24 y 3 son 27, á 32 van 5

Bajando á la derecha de este resíduo la cifra siguiente del dividendo, nos dará el segundo dividendo parcial 5366; y diremos... 53 entre 6 á 8,

8×6 son 48 á 53 van 5, que con el 6 componen 56,

8×8 son 64 que por ser mayor que 56, la cifra 8 no será buena.

Veamos la cifra 7; 7×6 son 42 á 53 van 11, que es mayor que la cifra que se tantea, luego 7 será el cociente. Multiplicando, pues, esta cifra del cociente por todo el divisor y restando el producto del dividendo parcial, resulta

7×2=14 á 16 van 2 y llevamos 1
7×8=56 y 1 son 57 á 66 van 9 y llevamos 6 } Resíduo total 592
7×6=42 y 6 son 48 á 53 van 5

Escribiendo á la derecha de este resíduo la cifra de las unidades del dividendo, resultará el último dividendo parcial: dividiendo pues 5923 por el divisor, tendremos la última cifra del cociente, y el *resto* final.

Otros varios ejemplos de division de dos números cualesquiera:

9639.47	2789	200658969 : 39837=5037	4869,400	973
1272 4	345	147396	004 400	5004
156 87		278859	508	
17 42		000		

120769995 : 13007=9285	20013470 : 6009=3330 y 3500 de *resto*
89790122 : 99989=898	188890715 : 37081=5094 y 101 de *resto*

Prueba de la division.

53. Para *comprobar* la division se multiplica el cociente entero por el divisor, y al producto se añade el resto. El resultado será igual al dividendo, si la operacion está bien ejecutada.

OBSERVACIONES GENERALES.

54. Todo número es *divisible* por otro cuando el primero contiene al segundo un número exacto de veces. El número segundo se llama divisor, factor, submúltiplo ó parte alícuota del primero (*).

El cociente exacto de un número por 2, 3, 4, etc., se llama mitad, tercera, cuarta parte, etc., de dicho número.

Para dividir un número entero por otro y despues por otro, etc., se dividen los dos primeros entre sí, el cociente de estos se divide por el tercero, y asi sucesivamente hasta dividir por el último divisor.

(60 : 10) : 3=6 : 3=2 cociente final.

En toda division inexacta, si el dividendo es mayor que el divisor, será tambien mayor que el duplo del resto (**).

Una igualdad no deja de serlo aunque se dividan ambos miembros por un mismo número. Si se dividen dos igualdades ordenadamente, el resultado será otra igualdad.

Cociente de una suma indicada por un número entero (***).

55. Para dividir una *suma indicada* por un número entero, se dividen todos los sumandos por dicho número, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.

$$(20+8) : 4=(20 : 4)+(8 : 4)$$

Esta proposicion es una consecuencia inmediata de su inversa núm. **40** y se puede enunciar diciendo:

El cociente de la suma indicada de varios números por otro entero es igual á la suma de los cocientes parciales de los sumandos por el mismo número entero.

Aplicaciones. Hallar el cociente de 1440060 entre 12

1440060 : 12=(1440000+60) : 12=120000+5=120005

Cor. Si el dividendo de una division se compone de la suma de dos números, uno de ellos múltiplo del divisor, y el otro menor que el divisor, el sumando menor que el divisor expresará el resto final de la division.

(*) El número entero, que no es divisible por ningun otro número entero, se llama *número primo*. Los numeros 2, 3, 5, 7, 11, etc., son primos.

(**) En efecto, sea A el dividendo, B el divisor, C el cociente y R el resto; y tendremos.... A=B×C+R Suponiendo el cociente igual 1, será A=B+R y como R es siempre menor que B, se verificará A>2R.

Si la proposicion es evidente cuando C es 1, con mas razon lo será cuando es mayor.

(***) En todo lo que resta de la division se considera el cociente completo ó total conforme á su definicion (7).

$23 : 5=(20+3) : 5=(4 \text{ veces } 5+3) : 5=4 \left.\begin{array}{r}\text{cociente entero}\\ \text{resto... } 3\end{array}\right\}$

y como esta descomposicion del dividendo se verifica siempre que el divisor es 10, 100, 1000, etc., se deducirá fácilmente la abreviacion que sigue.....

Para dividir un número entero por **10, 100, 1000, etc.,** basta separar de su derecha tantas cifras, cuantos ceros sigan á la unidad. Las cifras de la izquierda son el *cociente entero*, y las separadas el *resto*.

En efecto..... $5396 : 100=(5300+96) : 100=53 \left.\begin{array}{r}\text{cociente entero}\\ \text{resto... } 96\end{array}\right\}$

$5396 : 1000=5{,}396$ es decir 5 por cociente entero y 396 de resto.

Del mismo modo: Si el dividendo se compone de la suma de dos números, uno de ellos múltiplo del divisor y el otro no, el resto que resulte de dividir el sumando no divisible por dicho divisor, será el *resto final* de la division.

Cociente de una diferencia indicada por un número entero.

56. Para dividir una *diferencia indicada* por un número entero, se dividen el minuendo y el sustraendo por dicho número, y restando los dos cocientes parciales, el resultado será el cociente pedido.

$$(20-8) : 4=(20 : 4)-(8 : 4)$$

Esta proposicion se deduce de su inversa núm. **41**, y se enuncia tambien diciendo que: El cociente de una diferencia indicada de dos números por un número entero es igual á la diferencia de los cocientes del minuendo y el sustraendo por dicho número entero.

Cociente de un producto indicado por un número entero.

57. Para dividir un *producto indicado* de dos ó mas factores enteros por un divisor de cualquiera de ellos, basta dividir este factor por el divisor.

Y por consiguiente, el cociente de 9.8.6.15 entre 3 se puede expresar por uno cualquiera de los productos siguientes:

3.8.6.15 | 9.8.2.15 | 9.8.6.5

Esta proposicion es una consecuencia del *Cor.* 2.° del núm. **42**, pues evidentemente se verifica que cualquiera de estos cocientes multiplicado por el divisor es igual al dividendo (*).

Cor. El cociente de un *producto indicado* de dos ó mas factores enteros por uno cualquiera de ellos es igual al producto de los otros factores.

El cociente de 7.11.13 entre 11 es igual á 7.1.13 ó bien á 7.13

Cociente de un número entero por un producto indicado de dos ó mas factores.

58. Para dividir un número entero por el *producto indicado* de dos ó mas de sus divisores, se divide el número dado por uno de los factores del divisor, luego el cociente de esta division se divide por otro y asi sucesivamente.

$120 : (3.4.5)$ será lo mismo que $120 : 3 : 4 : 5$

En efecto, de $120 : (3.4.5)=cociente$ se deduce $120=3.4.5\times cociente$, y dividiendo ambos miembros de esta igualdad por 3 y los dos miembros de la que resulte por 4 y asi sucesivamente, tendremos.....

$120 : 3=4.5\times cociente$; $120 : 3 : 4=5\times cociente$; $120 : 3 : 4 : 5=cociente.$

Cor. El cociente de un número por varios de sus divisores se puede hallar dividiendo dicho número por el producto de estos divisores.

$1200 : 2 : 5 : 4 : 10=1200 : (2\times5\times4\times10)=1200 : 400=3$ cociente final

(*) Luego el producto de dos ó mas números enteros no se altera cuando uno de ellos se divide por un divisor suyo, con tal que se multiplique otro cualquiera de los factores por el mismo divisor. Mas adelante tendremos ocasion de generalizar todas estas proposiciones.

Número de cifras del cociente de dos números enteros.

59. El número de cifras del cociente de dos números enteros, es igual á la diferencia entre las del dividendo y las del divisor, ó á la diferencia mas uno, segun que el primer dividendo parcial contenga una cifra mas que el divisor ó tantas como el divisor.

Esta proposicion se deduce de la regla general de la division de dos números enteros (**51**).

Alteraciones del cociente total por la variacion del dividendo y divisor.

60. De las alteraciones del producto por la variacion de los factores, y de las observaciones generales de la division se deducen las consecuencias siguientes:

Aumentando el dividendo ó disminuyendo el divisor, aumenta el *cociente* Disminuyendo el dividendo ó aumentando el divisor, disminuye el *cociente* Si el dividendo de una division exacta se multiplica por un número entero cualquiera, ó se divide por uno de sus divisores, el *cociente* resultará multiplicado ó dividido por el mismo número. Si el divisor se multiplica por un número entero cualquiera ó se divide por uno de sus divisores, el *cociente* resultará dividido ó multiplicado por el mismo número. Multiplicando el dividendo y divisor por un número entero cualquiera ó dividiendo el uno y el otro por un divisor comun á ambos, el *cociente* no se altera.

De donde se infiere que, si á la derecha del dividendo y divisor hay ceros, se puede suprimir en ambos igual número de ellos, sin que el cociente varie, pues esta supresion equivale á dividir el dividendo y el divisor por un mismo número.

Si dos cocientes iguales tienen comun el dividendo ó el divisor, los divisores ó dividendos serán iguales. Si dos cocientes desiguales tienen comun el dividendo, el cociente mayor será el correspondiente al menor divisor. Si dos cocientes desiguales tienen comun el divisor, el cociente mayor será el correspondiente al mayor dividendo.

Multiplicando el dividendo y el divisor de una division inexacta, por un número entero cualquiera, el cociente entero no varía, pero el resto resulta multiplicado por el mismo número.

En efecto, siendo 41 el dividendo y 9 el divisor; el *cociente entero* será 4 y el *resto* 5: luego tendremos la igualdad..... $41=4.9+5$
y multiplicando ambos miembros por 12, tendremos esta otra

$$41\times12=4.9\times12+5\times12$$

pero el resto 5 es siempre menor que el divisor 9, luego 5×12 será menor que 9×12 y por consiguiente segun el *Cor.* del núm. **55**, se verificará que.....

$$(41\times12):(9\times12)=4 \text{ cociente entero y } 5\times12 \text{ de resto (*)}.$$

Del mismo modo se demuestra que, si el dividendo y el divisor se dividen por un divisor comun á ambos, el cociente entero no varia, pero el resto resultará dividido por dicho divisor (**).

(*) Del resultado de la division de 41 entre 9 se deduce que 41 unidades contienen 4 veces 9 unidades y ademas otras 5 unidades. Y como la palabra *unidad* expresa aqui un valor arbitrario, que puede muy bien ser una coleccion de doce objetos, ó sea una docena, tendremos que 41 docenas contienen 4 veces 9 docenas y ademas otras 5 docenas: luego el cociente entero de 41×12 entre 9×12 es 4 y el resto 5×12.

(**) El *resto* no varia, si al dividendo se añade ó quita un múltiplo cualquiera del divisor.

Ejercicios para la multiplicacion y division.

61. Hallar los productos de las multiplicaciones que siguen:

(A)	(B)	(C)
603104×12	1847201×549	10709000×80090

Demostrar que los productos 9×4 y 4×9 son iguales. Hallar el producto de los factores (A), sin escribir los productos parciales. ¿Es indiferente empezar la multiplicacion por las unidades superiores ó inferiores del multiplicando ó del multiplicador? Hallar el producto de los factores (B), empezando por la izquierda del multiplicador. *Demostrar que el producto de tres ó mas factores no se altera aunque el órden de estos se varie. ¿Qué número se debe añadir á 1856 para hacerle 1000 veces mayor? [1854144]. Hallar abreviadamente los productos de 249999 por 5204 y 49999×50×8×25. Indicar el número de cifras de estos productos. ¿Varía el producto, si se añade una unidad al multiplicando, al multiplicador ó á ambos factores? ¿Añadiendo un número cualquiera al multiplicando y rebajando igual número al multiplicador, variará el producto? *Corregir el último producto indicado de cuatro factores en los dos casos siguientes; 1.° añadiendo á todos los factores una unidad: y 2.° añadiendo la misma unidad á los dos primeros, y rebajándola á los dos últimos. Si se duplica ó triplica el multiplicando, el multiplicador ó ambos factores, ¿qué variacion sufre el producto? ¿Dos productos iguales pueden proceder de distintos factores?

Hallar los cocientes de las divisiones que siguen:

6041024 : 12=	1318032 : 4068=	5024242 : 63498=
154300 : 1000=	195472400 : 509000=	134217750 : 357914=

Hallar el cociente de la primera division, sin escribir dividendos ni resíduos parciales. ¿Es indiferente empezar la division por las unidades superiores ó inferiores del dividendo? ¿Por qué en la division se procede en un órden inverso al seguido en las operaciones anteriores? ¿Es lo mismo cociente completo ó verdadero que cociente entero? Qué significa el *resto* de la division? Valor máximo de este resto. *El resto es siempre menor que la mitad del dividendo, si este es mayor que el divisor. Hallar abreviadamente el cociente entero de 12005 por 2×25×410 y de 12×7×9990 por 7×6×111×5. Dividir 1808 por un número tal que el cociente sea igual al dividendo disminuido de 1582 unidades. Hallar un número que dividiéndole por 1856 dé por cociente 1492 y por resto 1808. ¿Varía el cociente de una division exacta, si se añade una unidad ó cualquiera número de ellas al dividendo, al divisor, ó al uno y al otro? y si se añade á uno y se rebaja al otro? ¿Qué variacion debe sufrir el dividendo ó el divisor de una division exacta, para obtener una unidad mas ó una unidad menos en el cociente? Si se multiplican el dividendo, el divisor ó ambos términos por un número entero cualquiera ó se dividen por uno de sus divisores comunes, qué variacion sufrirán el cociente total, el cociente entero y el resto final? Alteraciones del dividendo y divisor permaneciendo constante el cociente total (*). ¿Dos cocientes totales iguales tienen iguales dividendos é iguales divisores? ¿Dos cocientes enteros iguales con restos tambien iguales, tienen dividendos y divisores respectivamente iguales? ¿Cuál es el número que multiplicándole por 3, por 16 y por 25 y dividiendo el producto por 104, dá por resultado el triplo de 1850? [481] Hallar dos números cuya suma sea 104 y su diferencia 32. [68 y 36] ¿Cuál es el número que multiplicándole por 12, se aumenta en 20438 unidades? [1858] ¿Y otros dos cuya suma sea 100 y el cociente 4? [80 y 20]. Descomponer el número 86 en tres partes de las cuales, la primera tenga 10 unidades mas que la segunda y esta 20 mas que la tercera. [42, 32 y 12].

(*) Alteraciones de los factores permaneciendo constante el producto.

ELEVACION Á POTENCIAS DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Formacion de una potencia cualquiera de un número entero. Prueba de la elevacion á potencias. Observaciones y teoremas relativos á esta operacion.

Formacion de una potencia cualquiera de un número entero.

62. La formacion de una potencia cualquiera de un número se consigue con facilidad por medio de la multiplicacion sucesiva de dicho número por si mismo cierto número de veces. El grado de la potencia determina el número de factores.

He aquí los *cuadrados* y *cubos* de los diez primeros números enteros.....

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cuadrados. .	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
cubos. . . .	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Del mismo modo $5^4=625$ $(102)^2=10404$

Las potencias sucesivas de la base de nuestro sistema de numeracion son las unidades de los diferentes órdenes del mismo sistema.

Prueba de la elevacion á potencias.

63. Para *comprobar* el resultado de la elevacion á potencias, se forman aquellas potencias del número dado, cuyos índices sumados compongan el índice de la potencia propuesta, y el producto de estas potencias será la potencia pedida.

OBSERVACIONES GENERALES.

64. Las cifras del cuadrado de un número entero son el duplo de las de dicho número ó el duplo menos una.

Las cifras del cubo de un número entero son el triplo de las del mismo número ó el triplo menos una ó menos dos (**43**).

Una igualdad no deja de serlo elevando ambos miembros á una misma potencia.

65. El *cuadrado* de la suma indicada de dos números enteros se compone del cuadrado del primero, *mas* el doble producto del primero por el segundo, *mas* el cuadrado del segundo.

Si los números dados son 4 y 5 se verificará que $(4+5)^2=4^2+2\times4.5+5^2$

En efecto; $(4+5)^2=(4+5)\times(4+5)$

pero el producto de $4+5$ por 4 equivale á $4^2+4.5$

y el producto de $4+5$ por 5 es igual á $4.5+5^2$

luego sumando, será $(4+5)^2=4^2+2$ veces $4.5+5^2$ (*)

De la igualdad 4^2+2 veces $4.5+5^2=4^2+5^2+2.4.5$ se deduce que.....

El cuadrado de la suma de dos números es igual á la suma de sus cuadrados, mas el doble producto de los mismos números.

Luego es evidente que la potencia de la suma de dos números no es igual á la suma de las mismas potencias de dichos números.

Cor. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor, mas 1.

La diferencia de los cuadrados de 101 y 100, es igual á $2\times100+1$ (**).

(*) Si los números dados son A y B, el cuadrado de su suma será.....

$(A+B)^2=(A+B)\times(A+B)=A^2+AB+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$

(**) Siendo A y A+1 dos números consecutivos; segun la nota anterior, tendremos....

$(A+1)^2=A^2+2A+1$ y por consiguiente $(A+1)^2-A^2=2A+1$

Cor. 2.° Supuesto que todo número entero mayor que 10 se compone de decenas y unidades, su cuadrado se compondrá del cuadrado de las decenas, mas el duplo de las decenas por las unidades, mas el cuadrado de las unidades.

Es evidente que el cuadrado de las decenas es un número de *centenas*, y el doble producto de las decenas por las unidades es un número de *decenas*.

Segun esto: $(124)^2=12^2$ centenas$+2\times12.4$ decenas$+4^2$ unidades$=15376$

Esc. Los cuadrados de los números cuya cifra de las unidades no es cero terminan por una de las cifras 1, 4, 5, 6, ó 9. Los cuadrados de los números cuya cifra de las unidades es cero terminan en dos ceros. Ultimamente, los cuadrados de los números cuya cifra de las unidades es 5 terminan en 25.

Pues de la formacion del cuadrado de un número que termina en 5 se deduce que las dos primeras partes de las tres que componen el cuadrado terminan en dos ceros, y como la tercera es 25, la suma total terminará en 25.

La cifra de las unidades del cuadrado de un número entero, no puede ser 2, 3, 7, ni 8.

66. El *cubo* de la suma indicada de dos números enteros es igual al cubo del primero, mas el triplo del cuadrado del primero multiplicado por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo.

Suponiendo los números dados 4 y 5 se verificará que

$$(4+5)^3=4^3+3\times4^2.5+3\times4.5^2+5^3$$

En efecto; $(4+5)^3=(4+5)\times(4+5)\times(4+5)=(4^2+2\times4.5+5^2)\times(4+5)$

pero el multiplicando por 4 equivale á. . . . . . $4^3+2\times4^2.5+4.5^2$

y multiplicado por 5 es igual á. . . . . $4^2.5+2\times4.5^2+5^3$

luego sumando será $(4+5)^3=4^3+3\times4^2.5+3\times4.5^2+5^3$ (*).

De $4^3+3\times4^2.5+3\times4.5^2+5^3=4^3+5^3+3\times4^2.5+3\times4.5^2$ se deduce que....

El cubo *de la suma de dos números enteros es igual á la suma de sus cubos, mas el triplo del cuadrado de cada uno por el otro.*

Cor. La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor, mas 1.

La diferencia de los cubos de 101 y 100 es igual á $3\times100^2+3\times100+1$ (**).

Cor. 2.° Todo número mayor que 10 se compone de decenas y unidades; luego su cubo se compondrá del cubo de las decenas, mas el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades.

Es evidente que el cubo de las decenas es un número de *millares*, el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades es un número de *centenas*, y el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades es un número de *decenas*.

$(124)^3=12^3$ *millares*$+3\times12^2.4$ *cent.* $+3\times12.4^2$ *dec.* $+4^3$ *unid.* $=1906624$

Esc. Los cubos de los números cuya cifra de las unidades es 1, 4, 5, 6, ó 9 terminan en la misma cifra. Los cubos de los números cuya cifra de las unidades es 2, 3, 7 ú 8 terminan respectivamente en 8, 7, 3 ó 2.

Ultimamente los cubos de los números cuyas cifras de la derecha son ceros, terminan en triplo número de ellos.

(*) Llamando A y B los números dados, el cubo de su suma será.....

$(A+B)^3=(A+B)\times(A+B)\times(A+B)=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

(**) Siendo A y A+1 dos números consecutivos, será $(A+1)^3-A^3=3A^2+3A+1$

*67. El *cuadrado* de la diferencia indicada de dos números enteros es igual al cuadrado del primero, *menos* el doble producto del primero por el segundo, *mas* el cuadrado del segundo.

$$(7-5)^2=7^2-2 \text{ veces } 7.5+5^2$$

De la igualdad $7^2-2\times7.5+5^2=7^2+5^2-2\times7.5$ se deduce que.....

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual á la suma de sus cuadrados menos el doble producto de los mismos números.

El *cubo* de la diferencia indicada de dos números enteros es igual al cubo del primero, *menos* el triplo del cuadrado del primero por el segundo, *mas* el triplo del primero por el cuadrado del segundo, *menos* el cubo del segundo.

$$(7-5)^3=7^3-3\times7^2.5+3\times7.5^2-5^3$$

Estas proposiciones se demuestran como las anteriores (65 y 66), y de ellas se deducen análogas consecuencias. (*)

De unas y otras se deduce tambien que, la suma de los cuadrados de dos números diferentes es mayor que el doble producto de los mismos números.

Pues siendo $7^2+5^2-2\times7.5=(7-5)^2$; será $7^2+5^2>2\times7.5$

Ultimamente, la diferencia de los cuadrados de dos números es igual al producto de la suma por la diferencia de dichos números.

$$(4+5)(4-5)=4^2+5.4-4.5-5^2=4^2-5^2$$

*68. La potencia de un producto de dos ó mas factores enteros es igual al producto de las potencias del mismo grado de cada uno de los factores.

$$(4.5.10)^3=4.5.10\times4.5.10\times4.5.10=4^3\times5^3\times10^3 \qquad (**)$$

La potencia del cociente exacto de dos números enteros es igual al cociente de las potencias del dividendo y divisor.

Esta proposicion se deduce inmediatamente de la anterior.

El producto de varias potencias de un número es igual al mismo número elevado á la potencia, que indique la suma de los exponentes de los factores.

$$4^2\times4^3=4.4\times4.4.4=4^{2+3} \qquad 10^4\times10^2\times10=10^7$$

El cociente de dos potencias de un número es una potencia del mismo número, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor.

$$4^5:4^2=4^{5-2}=4^3 \text{ pues } 4^3\times4^2=4^5 \qquad 10^6:10^5=10 \qquad (***)$$

Para elevar una potencia indicada á otra potencia, basta multiplicar entre sí sus exponentes, y el producto marcará el índice del resultado.

$$(4^2)^3=4^2\times4^2\times4^2=4^{2+2+2}=4^{2\times3}=4^6 \qquad (10^3)^5=10^{15} \qquad (****)$$

Alteracion del resultado por la variacion de los datos.

*69. Si un número entero es mayor que otro, una potencia cualquiera del primero será mayor que la potencia del mismo grado del segundo. La potencia de un número entero aumenta siempre que aumenta el índice de la potencia. Si un número entero se multiplica por otro entero cualquiera, ó se divide por uno de sus divisores, la potencia del resultado es igual al producto ó cociente de las potencias del mismo grado de los números dados.

Siendo $12^2=144$, será $(120)^2=12^2\times10^2=12^2\times100=14400$

y tambien $(12:4)^2=12^2 : 4^2 =12^2 : 16 =9$

(*) $(A-B)^2=A^2-AB-AB+B^2=A^2-2AB+B^2$ | $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

(**) $(A\times B\times C...)^n=A.A.A.A...\times B.B.B.B...\times C.C.C...=A^n\times B^n\times C^n$

(***) $A^m:A^n=A.A.A.A...$ hasta m factores : $A.A.A.A...$ hasta n factores $=A^{m-n}$

(****) $(A^m)^n=A^m\times A^m\times A^m...$ hasta n factores $=A^{m+m+\cdots}=A^{mn}$

EXTRACCION DE RAICES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Raiz cuadrada de los números enteros menores que 100. Raiz cuadrada de los números enteros mayores que 100. Raiz cúbica de los mismos números. Raices de diferentes grados. Prueba y observaciones generales. Ejercicios.

Raiz cuadrada de los números enteros menores que 100.

70. Llámase *raiz cuadrada entera* de un número entero, la raiz cuadrada del mayor cuadrado entero contenido en dicho número.

Generalmente se entiende por raiz cuadrada de un número entero la raiz cuadrada entera de dicho número.

La raiz cuadrada *verdadera* se diferencia de la raiz cuadrada *entera* en menos de una unidad. Si la raiz verdadera es un número entero, se llamará raiz *exacta*.

Llámase resíduo ó *resto* de la raiz la diferencia entre el número dado y el mayor cuadrado entero contenido en él.

Esto supuesto, como los cuadrados de los primeros números enteros

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
son respectivamente	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

se deduce que, entre todos los números enteros de una y dos cifras, solo nueve tienen raiz cuadrada exacta, y por consiguiente la raiz cuadrada de todos los números menores que 100, y no comprendidos en la segunda línea, será inexacta, y vendrá expresada por uno de los números de la primera, con menos de una unidad de diferencia. Basta, pues, saber los cuadrados de los números dígitos, para hallar inmediatamente las raices cuadradas exactas ó enteras de todos los números de una ó dos cifras.

Asi, la $\sqrt{40}$ es 6, porque el mayor cuadrado contenido en 40 es 36; y como 40 está comprendido entre los cuadrados 36 y 49, la raiz cuadrada de 40 será mayor que 6 y menor que 7; luego será 6 con menos de una unidad de error.

Raiz cuadrada de los números enteros mayores que 100.

71. Siendo los cuadrados de 1 10 100 1000 etc.
respectivamente. . . . . 1 100 10000 1000000 etc.
los números comprendidos entre 1 y 100, entre 100 y 10000, entre 10000 y 1000000, etc., tendrán su raiz cuadrada comprendida entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000, etc. Por consiguiente, la raiz cuadrada de un número de una ó dos cifras tiene una sola cifra; la raiz cuadrada de un número de tres ó cuatro cifras tiene dos cifras; la raiz cuadrada de un número de cinco ó seis cifras tiene tres cifras; y en general para cada dos cifras del número dado tendremos una en su raiz cuadrada. Si el número de cifras es impar, habrá una mas en la raiz.

72. *Extraer la raiz cuadrada de un número mayor que* 100 *y menor que* 10000, es decir, que conste de tres ó cuatro cifras, *como por ejemplo* 1024.

Disposicion del cálculo	$\sqrt{10.24}=32$ *raiz exacta* del número dado.	
cuadrado de las decenas de la raiz. .	9 0 0	
Resíduo.	1 2.4	6, duplo de las decenas de la raiz
duplo de las decenas por las unidades	1 2	2, unidades de la raiz
cuadrado de las unidades de la raiz. .	4	
Resto final.	0 0	

Como el número propuesto consta solo de cuatro guarismos, su raiz cuadrada constará de dos, que representarán *decenas* y *unidades*; luego

1024 será igual { al cuadro de las *decenas* del número que se busca, mas el duplo de las *decenas* por las *unidades*, mas el cuadrado de las *unidades*, y algun resto (*).

Para hallar estas decenas y unidades, diremos:

El cuadrado de las decenas son centenas, luego separando con un punto, una coma ó señal cualquiera los guarismos que ocupan el lugar de las unidades y decenas del número dado, la raiz cuadrada 3, de las cifras que quedan á la izquierda, serán *las decenas de la raiz cuadrada del número dado* (**). Restando de 1024 el cuadrado de las decenas de la raiz, que son 9 centenas, el *residuo* 124 será igual { al duplo de las decenas por las unidades de la raiz, mas el cuadrado de las unidades, mas el resto final.

El duplo de las decenas por las unidades es un número cabal de decenas, luego separando del resto 124, la cifra de las unidades (para restar de ella el cuadrado de las unidades de la raiz) y dividiendo lo demás por el duplo de las decenas, que ya conocemos, el cociente será igual ó mayor que la cifra de las unidades de la raiz. Será igual, ó lo que es lo mismo, la cifra del cociente será buena, siempre que su producto por el divisor (ó sea el duplo de las decenas por las unidades), y el cuadrado de la misma cifra se pueda restar todo del resíduo 124. El tanteo, se reduce, pues, al de la division ordinaria, con solo modificar el divisor, considerando escrita á su derecha la cifra que se tantea. Así, diremos: 12 entre 6 á 2; 2 por 6 son 12 al 12 cero, 4 entre 2 á 2; luego la cifra 2 es buena; y por consiguiente restando de 124 el cuadrado de dicha cifra y su producto por el divisor, como el resíduo es cero, *la raiz exacta del número* 1024 es igual á 3 *decenas* y 2 *unidades*, ó sean 32 unidades.

73. *Hallar la raiz cuadrada de un número entero de cinco ó seis cifras.*

Sea el número propuesto 15376, y tendremos. . . . $\sqrt{1{,}53{,}76} = 124$

Cálculo para determinar las decenas de la raiz.	1	
	5,3 7 6	2
	4 4	2
Duplo de las decenas por las unidades+el cuadrado de las unidades.	9 7,6	24 (***)
Cociente por el divisor+el cuadrado del cociente.	9 7 6	4
Resto final.	0 0	

La raiz cuadrada del número dado debe constar por lo menos de decenas y unidades, y por lo mismo.....

$$15376 = (\text{decenas}+\text{unidades})^2 = \overline{\text{decenas}}^2 + 2\ \textit{veces}\ \text{decenas}\times\text{unidades} + \overline{\text{unidades}}^2$$

Para hallar las decenas de la raiz, diremos:

El cuadrado de las decenas son *centenas*, el duplo de *decenas* por *unidades*

(*) Si el número dado no tiene raiz cuadrada exacta ó no es *cuadrado perfecto*. Recibe este nombre, aunque muy impropiamente, el número cuya raiz cuadrada es exacta.

(**) En efecto, siendo $3^2<10$, será 3^2 centenas <10 centenas y tambien 3^2 centenas <1024; luego la raiz cuadrada de 1024 no puede ser menor que la de 3^2 centenas, que es 3 decenas. Además, tenemos $(3+1)^2>10$ y $(3+1)^2$ centenas>10 centenas (en una ó mas centenas), luego $(3+1)^2$ centenas>1024; y por consiguiente, la raiz cuadrada del número dado será menor que la de $(3+1)^2$ centenas, que es $(3+1)$ decenas. Si la raiz cuadrada pedida no es menor que 3 decenas y no llega á 4; la cifra de las decenas será 3. Esta demostracion puede sustituirla ventajosamente el lector, diciendo: el número 1024 está comprendido entre 9 centenas y 16 centenas, cuyas raices cuadradas son 3 y 4 decenas; luego la raiz cuadrada del número propuesto será mayor que 3 decenas y menor que 4.

(***) *Duplo de la decena de la raiz del número propuesto*, á cuya derecha se supone escrita la cifra que se tantea en el cociente.

son *decenas*, y el cuadrado de unidades son *unidades*; luego el cuadrado de las decenas de la raiz estará incluido en las 153 centenas del número dado.

La raiz cuadrada de 153, segun el procedimiento del ejemplo anterior, es 12; luego.....

12 *serán las decenas de la raiz cuadrada del número propuesto.*

El resíduo 9 centenas ó 900 unidades, con las 7 decenas y 6 unidades del número dado separadas anteriormente, representa el duplo de las decenas de la raiz por las unidades y el cuadrado de las unidades. El duplo de las decenas por las unidades son decenas; luego dividendo 97 por el duplo de las decenas, el cociente 4 *serán las unidades de la raiz.*

El producto de 4 por 24, mas el cuadrado de 4, es igual 976; luego la raiz cuadrada del número propuesto será 12 *decenas*+4 *unidades*=124 unidades.

74. Del procedimiento seguido en los dos ejemplos anteriores, se deducen las teoremas siguientes.....

1.° Las *decenas* de la raiz cuadrada de un número entero son la raiz cuadrada del valor absoluto de las centenas del número entero dado. 2.° Si se divide la diferencia entre un número entero y el cuadrado de las decenas de su raiz cuadrada, por el duplo de las decenas de esta raiz; el cociente será igual ó mayor que la cifra de las *unidades* de la misma raiz. Esto supuesto:

Para *extraer la raiz cuadrada* de un número entero, se divide en secciones de á dos cifras empezando por la derecha, se extrae la raiz cuadrada de la primera seccion de la izquierda (*), y se tendrá la primera cifra de la raiz. El cuadrado de esta cifra se resta de la primera seccion, y á la derecha de la resta se baja la seccion siguiente, de la cual se separa la primera cifra de la derecha con una coma. El número que queda á la izquierda se divide por el duplo de la raiz hallada. El cuadrado del cociente y el producto del cociente por el divisor se restan del número que forman el dividendo y la cifra separada. A la derecha de la resta se baja la seccion siguiente, y se continua del mismo modo hasta que no haya mas secciones que bajar, y la raiz de la primera seccion con los cocientes de las divisiones sucesivas formará la *raiz cuadrada* del número dado.

Si al hallar una cifra cualquiera de la raiz, el dividendo (sin contar la cifra separada) es menor que el divisor, dicha cifra será cero y se baja en seguida la seccion siguiente. La cifra del cociente será *buena* si la suma del producto de dicha cifra por el divisor y el cuadrado de la misma cifra es igual ó menor que el número que forman el dividendo y la cifra separada: por consiguiente el tanteo se hace como en la division de los números enteros considerando á la derecha del divisor la cifra que se tantea. La raiz tiene tantas cifras como secciones tiene el número propuesto.

Ultimamente, la extraccion de la raiz cuadrada se abrevia en la práctica haciendo á un mismo tiempo la multiplicacion de cada cifra de la raiz por el divisor y la sustraccion del respectivo dividendo. A continuacion presentamos varios ejemplos que pueden servir de ejercicio á los lectores.

Es evidente que el resto de la raiz cuadrada de un número entero es siempre menor que el duplo de la raiz hallada mas 1; porque de lo contrario la raiz admitirá una unidad mas (**65.** *Cor.* 1.°) Luego si al extraer la raiz cuadrada de

(*) La primera seccion de la izquierda puede tener una sola cifra.

un número entero, se halla un resto igual al duplo de la raiz hallada mas 1, ó mayor que esta suma, la raiz hallada será menor que la verdadera (*).

$\sqrt{58.97}=76$ aproximadamente

```
  9 97..................|14
                        |------
  1 21 resto            |6
```

$\sqrt{3448449}=1857$ exactamente

$\sqrt{1008434}=1004$ aproximadamente

$\sqrt{90269001}=9501$ exactamente

$\sqrt{81,61,31,56}=9034$ exactamente

```
   61 31.........|180
                 |------
                 |03
   7 22 56.......|1806
                 |------
      00 resto   |4
```

$\sqrt{8859335624}=94124$ aproximadamente

$\sqrt{6255069921}=79089$ exactamente

75. En muchos casos la sola inspeccion de un número entero basta para conocer que no tiene raiz cuadrada exacta. Así.....

La raiz cuadrada de un número entero no será exacta:

1.° Si la cifra de las unidades es 2, 3, 7 ú 8;
2.° Si termina en un número impar de ceros;
3.° Si la cifra de las unidades es 5, á no ser que la de las decenas sea 2;
4.° Si no es divisible por 4 siendo par, ó no deja por resto 1 si es impar.

Raiz cúbica de los números enteros menores que 1000.

76. Llámase *raiz cúbica entera* de un número la raiz cúbica del mayor cubo entero contenido en dicho número.

Generalmente se entiende por raiz cúbica de un número entero la raiz entera de dicho número. La raiz cúbica *verdadera* de un número se diferencia de la raiz cúbica *entera* en menos de una unidad. Si la raiz verdadera es un número entero, se llama *exacta*.

Llámase *resto* de la raiz, la diferencia entre el número dado y el mayor cubo entero contenido en él.

Esto supuesto, como los cubos de los diez primeros números enteros.....

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
son respectivamente...	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

se deduce que, entre todos los números enteros de una, dos y tres cifras solo nueve son cubos perfectos, y por lo mismo la raiz cúbica de todos los números menores que 1000 y no comprendidos en la segunda línea será inexacta y vendrá expresada por uno de los números de la primera, con menos de una unidad de error.

Segun esto, basta saber los cubos de los números díjitos para calcular inmediatamente las raices cúbicas de todos los números de una, dos ó tres cifras.

Así la *raiz cúbica* de 100 es 4, porque el menor cubo contenido en 100 es 64; y como 100 está comprendido entre los cubos 64 y 125, la raiz cúbica de 100 será mayor que 4 y menor que 5: luego será 4 con menos de una unidad de error. Del mismo modo la raiz cúbica entera del número 530 será 8.

(*) Llamando N el número cuya raiz cuadrada se desea hallar, A *la raiz cuadrada entera* de dicho número y R el resto; tendremos..... $R<2A+1$
Pues siendo $R=$ ó $>2A+1$, tambien A^2+R ó N sería $=$ ó $>$ que A^2+2A+1, lo que es imposible.

Raiz cúbica de los números enteros mayores que 1000

*77. Siendo los cubos de 1 10 100 1000 etc.
respectivamente................ 1 1000 1000000 1000000000 etc.
los números comprendidos entre 1 y 1000, entre 1000 y 1000000, entre un millon y mil millones, etc., tendrán su raiz cúbica comprendida entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000 etc. Por consiguiente..... La raiz cúbica de un número entero de una, dos, ó tres cifras tiene una sola cifra. La raiz cúbica de un número de cuatro, cinco ó seis cifras, tiene dos cifras. La raiz cúbica de un número de siete, ocho ó nueve cifras, tiene tres cifras..... y en general para cada tres cifras del número dado tendremos una en su raiz cúbica. Si aun quedaran una ó dos cifras despues de contar secciones de á tres, habrá una cifra mas en la raiz.

*78. *Extraer la raiz cúbica de un número mayor que* 1000 *y menor que* 1000000; es decir, que conste de cuatro, cinco ó seis cifras.

Sea el número dado 74088 y tendremos.	$\sqrt[3]{74,0\ 88}=42$ exactamente		
Cubo de las decenas de la raiz.	64		
Residuo.	10 0,88......	48	(*)
Triplo del cuadrado de las decenas de la raiz por las unidades	9 6	2	(**)
Triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades. . . .	4 8		
Cubo de las unidades de la misma raiz.	8		
Suma de los tres últimos valores.	10 0 88		
Resto final.	0 00		

La raiz cúbica del número dado debe constar de dos cifras; luego...

74088= { cubo de las *decenas* de la raiz que se busca,
mas el triplo del cuadrado de las *decenas* por las *unidades*,
mas triplo de las *decenas* por el cuadrado de las *unidades*,
mas el cubo de las *unidades* y algun resto (***).

Para hallar estas decenas y unidades, diremos.... El cubo de las decenas son millares; luego, separando con una coma los guarismos que expresan las unidades, decenas y centenas del número propuesto, la raiz cúbica de las cifras que quedan á la izquierda nos dará las decenas de la raiz, y como 74 está comprendido entre los números 64 y 125, cubos de 4 y 5, es evidente que....

4 *es la cifra de órden superior de la raiz cúbica que se busca.* (****)

Si del número 74088 restamos el cubo de las decenas que son 64 millares ó 64000 unidades el resíduo 10088 contendrá..... El triplo del cuadrado de las decenas por las unidades de la raiz, mas el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades.+el *resto final.*

El triplo del cuadrado de las decenas por las unidades son centenas, y como estas no pueden estár contenidas en las unidades ni decenas del número dado; separando en el residuo 10088, las cifras que ocupan estos lugares, y dividiendo lo demás por el triplo del cuadrado de las decenas, que ya conocemos, el cociente expresará las unidades de la raiz cúbica pedida, siempre que el producto del cociente por el divisor, el triplo de la raiz hallada por el cuadrado del cociente y el cubo del cociente se puedan restar de dicho resíduo 10088.

(*) Triplo del cuadrado de las decenas de la raiz. (**) Cifra de las unidades de la misma raiz.
(***) Suponiendo que 74088 no tenga raiz cúbica exacta ó no sea *cubo perfecto.*
(****) El número dado está comprendido entre 64 y 125 millares cuyas raices cúbicas son 4 y 5 decenas; luego la raiz cúbica de dicho número será mayor que 4 y menor que 5 decenas. La cifra de las decenas será pues 4.

100 entre 48 á 2, y como 48 es el triplo del cuadrado de las decenas, si 2 expresa las unidades, el producto del cociente por el divisor expresará la segunda parte del cubo, que escribiremos convenientemente debajo del resíduo 10088. Mas como este resíduo debe contener tambien el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades, diremos.... el triplo de 4 decenas son 12, y por el cuadrado de las unidades dan 48 decenas, que se escribirán un lugar mas hácia la derecha que el producto anterior, es decir, debajo de las decenas del número propuesto: el cubo de 2 unidades son 8 unidades. Luego si, sumados estos valores, la suma es igual ó menor que el resíduo 10088, el cociente 2 no será mayor que las unidades de la raiz. La diferencia es *cero*, luego, la cifra 2 será la de las unidades de la raiz, y por consiguiente la raiz cúbica exacta del número 74088 es igual 4 *decenas* y 2 *unidades* ó sean 42 unidades.

*19. *Hallar la raiz cúbica de un número entero de siete, ocho ó nueve cifras*, es decir mayor que un millon y menor que mil millones.

Sea el número dado 1906624 y tendremos..... $\sqrt[3]{1,906,624}=124$ *raiz* cúbica

	1,	
Cálculo para determinar las decenas de la raiz.	906.........	3
	6	2
	12	
	8	
	728	
Núm.° dado menos el cubo de las decenas de su raiz cúbica.	178 6,24...	432 (*)
triplo del cuadrado de las decenas por las unidades. . . .	172 8	4 (**)
triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades. .	5 7 6	
cubo de las unidades de la raiz.	64	
Suma de los tres valores anteriores	178 6 24	
Resto final.	0 00	

La raiz cúbica del número propuesto debe constar por lo menos de decenas y unidades, y por lo mismo....

1906624 será igual al cubo de las decenas de la raiz (que son *millares*)+el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades (que son *centenas*)+el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades (que son *decenas*)+el cubo de las unidades (que son *unidades*).

El cubo de las decenas de la raiz estará pues comprendido en los millares 1906 del número dado, y por consiguiente la raiz cúbica de 1906 serán las *decenas* de la raiz pedida. La raiz cúbica de 1906, segun el procedimiento del ejemplo anterior, es 12, luego... 12 serán las *decenas* de la raiz cúbica del número propuesto.

El resíduo 178 millares con las cifras separadas 6, 2 y 4 debe contener los tres valores finales del cubo, á saber..... el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, y el cubo de las unidades. Y como el triplo del cuadrado de decenas por unidades son centenas; dividiendo 1786 centenas por el triplo del cuadrado de las decenas 12, que ya conocemos, el cociente 4 *serán las unidades de la raiz pedida*..... siempre que el producto del cociente por el divisor, el triplo de la raiz hallada por el cuadrado del cociente y el cubo del mismo cociente, se puedan restar de 178624; y como la suma de todos estos valores es igual á dicho número, tendremos.....

$\sqrt[3]{1906624}=12$ decenas$+4$ unidades$=1$ centena...2 decenas...4 unidades$=124$

(*) Triplo del cuadrado de las decenas de la raiz que se busca. (**) Unidades de la misma raiz

***80.** Del procedimiento seguido en los dos ejemplos anteriores, se deducen los teoremas siguientes....

Las *decenas* de la raiz cúbica de un número entero son la raiz cúbica del valor absoluto de los millares del mismo número.

Si se divide la diferencia entre un número y el cubo de las decenas de su raiz cúbica por el triplo del cuadrado de las decenas de esta raiz, el cociente será igual ó mayor que la cifra de las *unidades* de la misma raiz. Esto supuesto...

Para extraer la raiz cúbica de un número entero, se divide en secciones de á tres cifras, empezando por la derecha, se extrae la raiz cúbica de la primera seccion de la izquierda (*), y se tendrá la 1.ª cifra de la raiz. El cubo de esta cifra se resta de la primera seccion y á la derecha de la resta se baja la seccion siguiente, de la cual se separan las dos primeras cifras de la derecha con una coma. El número que quede á la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la raiz hallada y el cociente será la 2.ª cifra de la raiz.

El triplo del cuadrado de la raiz hallada por el cociente, el triplo de la raiz por el cuadrado del cociente y el cubo del cociente, se restan juntos del número que forma el dividendo y las cifras separadas. A la derecha de la resta se baja la seccion siguiente y se continúa del mismo modo, hasta que no haya mas secciones que bajar. La raiz tiene tantas cifras como secciones tiene el número dado.

Si al hallar una cifra cualquiera de la raiz, el dividendo (sin contar las cifras separadas con la coma) es menor que el divisor, dicha cifra será cero y se baja en seguida la seccion siguiente.

Para comprobar cada cifra del cociente y continuar la operacion, se suman el triplo del cuadrado de la raiz hallada por la cifra que se tantea, el triplo de la raiz por el cuadrado de dicha cifra, y el cubo de la misma; y si esta suma no es mayor que el número compuesto del dividendo y las dos cifras separadas, la cifra que se tantea será *buena*.

El resíduo de la raiz cúbica de un número entero es siempre menor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma raiz, mas 1; porque de lo contrario la raiz admitirá una unidad mas (**66**. *Cor.*) Luego, si al extraer la raiz cúbica de un número entero se halla un resíduo igual ó mayor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma raiz, mas la unidad, la raiz hallada será menor que la verdadera.

Sirva de ejemplo: $\sqrt[3]{185,1\ 99}=57$ raiz cúbica entera.

Cubo de la cifra de órden superior de la raiz. . . .		125	
		60 1,99	75
Comprobacion de la cifra 8	$3\times5^2\times8$ centenas. .	60 0	8 2.ª cifra de la raiz.
	$3\times5\times8^2$ decenas. .	9 6 0	
	8^3 unidades. .	5 12	
	Suma.	70 1 12	

y como esta suma es mayor que 60199, la cifra 8 es mayor que la verdadera.

Comprobacion de la cifra 7	$3\times5^2\times7$ centenas. .	52 5	75 divisor anterior
	$3\times5\times7^2$ decenas. .	7 3 5	7 2.ª cifra de la raiz.
	7^3 unidades. .	3 43	
	Suma.	60 1 93	

Luego la raiz cúbica de 185199 será igual á 57 con menos error que una unidad.

$\sqrt[3]{6372783864}=1854$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4021630425}=1590$ aproximadamente.

(*) La primera seccion de la izquierda puede tener una ó dos cifras.

Raices de diferentes grados cuya determinacion depende de las cuadradas y cúbicas.

***81.** **La *raiz de cuarto grado* de un número es la raiz cuadrada de su raiz cuadrada.**

La *raiz de cuarto grado* de 4096 es igual á $\sqrt{\sqrt{4096}}$

En efecto; $4096=\sqrt[4]{4096}\times\sqrt[4]{4096}\times\sqrt[4]{4096}\times\sqrt[4]{4096}$

ó lo que es lo mismo $4096=(\sqrt[4]{4096})^2\times(\sqrt[4]{4096})^2$

de donde se deduce que $(\sqrt[4]{4096})^2$ es la *raiz cuadrada* de 4096;

y por consiguiente $\sqrt[4]{4096}$ será igual á $\sqrt{\text{de la } \textit{raiz cuadrada} \text{ de } 4096}$

Del mismo modo se demuestra que la *raiz octava* de un número es igual á la raiz cuadrada de la raiz cuarta del mismo número; ó mas bien á la raiz cuadrada, de la raiz cuadrada, de la raiz cuadrada del número propuesto.

$$\sqrt[8]{1808}=\sqrt[4]{\sqrt{1808}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{1808}}}$$

Igualmente la *raiz décima-sexta* de un número es igual á la raiz cuadrada de la octava del mismo número. etc.

La raiz *novena, vigésima-sétima, octogésima-prima* de un número se halla extrayendo sucesivamente la raiz cúbica.

Por la misma razon la *raiz de sexto grado* de un número es igual á la raiz cúbica de la raiz cuadrada, ó bien, á la raiz cuadrada de la cúbica de dicho número; la *raiz duodécima* equivale á la raiz cuadrada de la sexta; y así sucesivamente (*).

$\sqrt[4]{121550625}=\sqrt{\sqrt{121550625}}=\sqrt{11025}=105$ exactamente

$\sqrt[8]{390625}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{390625}}}=\sqrt{\sqrt{625}}=\sqrt{25}=5$ exactamente

$\sqrt[6]{4225}=\sqrt[3]{\sqrt{4225}}=\sqrt[3]{65}=4$ con menos de una unidad de error.

$\sqrt[6]{4225}=\sqrt{\sqrt[3]{4225}}=\sqrt{16 \text{ con menos de una unidad de error}}=4$ aproxim.

$\sqrt[9]{5159780352}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{5159780352}}=\sqrt[3]{1728}=12$ exactamente.

Prueba de la extraccion de raices.

82. Para *comprobar* el resultado de la extraccion de raices se eleva la raiz entera hallada á la potencia del mismo grado que marca el índice del radical, y añadiendo el resto á este número, la suma deberá ser igual al número dado.

(*) En general, tambien se verifica que $\sqrt[m.n]{A}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$
pues si elevamos ambos miembros á la potencia del grado $m.n$ tendremos que..... la del primer miembro será evidentemente la cantidad A,
y como la potencia del grado m del segundo es $\sqrt[n]{A}$ y la del grado n de este resultado es A; la igualdad propuesta y la proposicion cuya traduccion representa serán verdaderas.

OBSERVACIONES GENERALES.

83. Una igualdad no deja de serlo extrayendo de ambos miembros la raiz de un mismo grado.

La raiz de la suma de dos números enteros no es igual á la suma de las raices de dichos números.

En efecto, si $\sqrt{25+9}$ fuera igual á $5+3$, se verificaria $(5+3)^2=25+9$, lo que es absurdo, puesto que el cuadrado de $5+3$ es igual á $25+10.3+9$

La raiz de la diferencia indicada de dos números enteros no es igual á la diferencia de las raices de dichos números.

Suponiendo $\sqrt{25-9}$ igual á $5-3$, tambien $(5-3)^2=25-9$, lo que es imposible.

La raiz exacta de un producto de dos ó mas factores enteros es igual al producto de las raices exactas de igual grado de dichos factores.

$$\sqrt{900}=\sqrt{25\times4\times9}=\sqrt{25}\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}=5\times2\times3$$

La igualdad anterior será evidente siempre que el cuadrado del segundo miembro sea igual al producto $25\times4\times9=900$, lo que en efecto se verifica, pues..... $(5\times2\times3)^2=5.5\times2.2\times3.3=25\times4\times9=900$

La raiz exacta de un cociente indicado de dos números enteros es igual al cociente de las raices exactas del dividendo y divisor.

Esta proposicion se deduce inmediatamente de la anterior (*)

La raiz de un grado cualquiera de la potencia indicada del mismo grado de un número es el mismo número.

Así, tendremos $\sqrt{10^2}=10$, $\sqrt[3]{10^3}=10$, $\sqrt[n]{10^n}=10$

Esta verdad es evidente segun las definiciones de la elevacion á potencias y extraccion de raices.

La raiz de una raiz indicada de un número entero dado es igual á la raiz del mismo número, cuyo índice es el producto de los índices de los dos radicales.

La *raiz cuadrada* de la *cúbica* de 64, es igual á $\sqrt[6]{64}=2$

En efecto; $\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{64}=4 \text{ y } \sqrt{4}=2\\ \text{pero } 64=4^3 \text{ y } 4=2^2\end{array}\right\}$ luego $64=\left[(2)^2\right]^3=2^{2.3}$ y por consig. $\sqrt[2.3]{64}=2$

Véase la nota del núm. **81** en la página anterior.

Alteraciones del resultado por la variacion de los datos.

84. Si un número es mayor que otro, una raiz cualquiera del primero será mayor que la raiz del mismo grado del segundo.

La raiz de un número entero disminuye, si aumenta el índice de la raiz, é inversamente aumenta la raiz de dicho número, si disminuye el exponente ó índice de la raiz.

De las observaciones del número anterior, se deduce que.....

Siendo $\sqrt{144}=12$ será $\sqrt{14400}=\sqrt{144}\times\sqrt{100}=\sqrt{144}\times10=12\times10=120$

$\sqrt[3]{1728}=12$; luego $\sqrt[3]{1728:64}=\sqrt[3]{1728}:\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{1728}:4=12:4=3$

(*) $\sqrt{A}=\sqrt{\frac{A}{B}\times B}=\sqrt{\frac{A}{B}}\times\sqrt{B}$ y por consiguiente $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

Ejercicios para la elevacion y extraccion.

85. Escribir en el sistema duodecimal las potencias sucesivas de la base. Conocido el cuadrado y el cubo de 100, deducir inmediatamente el cuadrado y el cubo de 99 y 101. Si 209 es la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos, ¿cuáles son estos números? [104 y 105] ¿Si dos números son el uno duplo del otro, y el producto de ambos es 50 *¿cuáles son estos números*? [5 y 10]. Número de cifras del cuadrado, cubo y cuarta potencia de un número entero dado. Si dos números se diferencian en una ó mas unidades, ¿la diferencia de sus cuadrados será la misma, sean cualesquiera los números dados? Si un número es duplo ó mitad de otro, ¿el cuadrado y cubo del primero serán igualmente duplo ó mitad del cuadrado y cubo respectivo del segundo? Hallar la cuarta potencia del producto indicado $3\times4\times2\times10$. ¿El cuadrado del cubo de un número es la potencia del quinto grado del mismo número? ¿El cuadrado del cubo de un número es igual á la potencia cúbica del cuadrado del mismo número? Conocida la potencia del quinto grado de un número, ¿cómo se obtiene la del 4.°, 6.° y 10.° del mismo número?*¿La suma, diferencia, producto y cociente de dos cuadrados es otro cuadrado? ¿Una potencia cualquiera del cuadrado de un número es un cuadrado perfecto?*Demostrar que el cuadrado de un número impar $(2n+1)$ es un múltiplo de 8 aumentado en una unidad. ¿Una potencia cualquiera de un número puede ser al mismo tiempo potencia de otro número? *Si 32761 es la diferencia de los cubos de dos números consecutivos ¿cuáles son estos números? (*).

¿Cuántos números enteros menores que un millon tienen raiz cuadrada ó raiz cúbica exacta? Teoremas fundamentales para determinar las raices cuadrada y cúbica de los números enteros. Resto máximo de ambas raices.

Hallar los valores de las raices indicadas que siguen:

$\sqrt{27081616}$	$\sqrt[3]{140932729664}$	$\sqrt[4]{96059601}$	$\sqrt[6]{941478149401}$
$\sqrt{10005021000}$	$\sqrt[3]{10005021000}$	$\sqrt[8]{456976}$	$\sqrt[12]{410000100208}$

¿Qué variacion debe sufrir un cuadrado ó un cubo exacto para obtener en sus raices cuadrada ó cúbica respectiva una unidad mas ó una unidad menos? Si un número es cuádruplo de otro, la raiz cuadrada del primero lo será igualmente de la del segundo? ¿Si un número es la octava parte de otro, la raiz cúbica del primero lo será tambien de la del segundo? ¿La raiz cuadrada de la raiz cúbica de un número es igual á la raiz del quinto grado del mismo número? La raiz cuadrada de la raiz cúbica de un número es igual á la raiz cúbica de la cuadrada del mismo número? ¿Conocida la raiz cúbica de un número, se obtienen fácilmente, la cuadrada, y la del cuarto grado del mismo número? ¿Una raiz cualquiera exacta de un número, puede ser raiz exacta de otro número?

(*) Solo los principiantes y las personas de cortos alcances aritméticos pueden considerar como
poco lógica la colocacion de la elevacion á potencias y extraccion de raices de los números enteros
inmediatamente despues de la division de los mismos números. Las dificultades prácticas (dado el
caso de que existan realmente) y menos aun las teóricas, nunca pueden justificar el aplazamiento á
voluntad de esta ó la otra teoria, rompiendo así el íntimo enlace que las partes tienen con el todo de
un sistema matemático. Si las dificultades fueran una razon para estos aplazamientos, la operacion
de dividir que es donde real y efectivamente halla el principiante las mayores dificultades de la arit-
mética, debiera reservarse para el final de este tratado. Por otra parte, el ejemplo de los mas auto-
rizados autores, nunca debe impedir que la lógica reine en el órden y distribucion de las teorías de
una ciencia que de una manera tan inmediata y tan viva expresa el rigor del entendimiento en el de-
finir, en el deducir y en el clasificar sus propios objetos.
Del divorcio inconcebible de la lógica y las matemáticas, han nacido siempre las mayores difi-
cultades del estudio de esta ciencia, y por eso no vacilamos en sacrificar alguna vez la generalidad
de una teoría y hasta el esquisito rigor matemático en esta ó la otra demostracion al órden lógico
en la exposicion general de cada tratado.

COMPLEMENTO DEL CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Principios fundamentales de la divisibilidad. Caracteres de divisibilidad de un número por otro
Máximo comun divisor de dos ó mas números. Números primos.
Descomposicion de un número en factores simples ó primos.
Divisores de un número dado. Mínimo múltiplo comun de varios números.

---

86. Un número es *múltiplo* ó *divisible* por otro cuando contiene á este un número exacto de veces. Un número es *divisor* ó *factor* de otro cuando está contenido en este un número exacto de veces.

El divisor ó factor de un número se llama tambien *sub-múltiplo* ó *parte alícuota* de dicho número.

Todo número es múltiplo y divisor de sí mismo.

La unidad es divisor de todos los números enteros.

Llámase número *primo* al que no tiene otros factores ó divisores que el mismo y la unidad.

Los números primos menores que 100 son los siguientes:

1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97

Principios fundamentales de la divisibilidad.

87. Si dos ó mas números tienen un divsior comun, la *suma* de ellos tendrá el mismo divisor.

Siendo 12, 15 y 21 divisibles por 3; la *suma* $12+15+21$ tambien la será.

En efecto $12=4$ veces 3 $15=5$ veces 3 $21=7$ veces 3;
sumando ordenadamente estas igualdades y separando el factor comun 3, tendremos $12+15+21=3.4+3.5+3.7=3\times(4+5+7)$
y por consiguiente $(12+15+21):3=4+5+7$
luego 3 es divisor de la suma de los números dados. (*)

Este teorema se enuncia tambien diciendo: *La suma de varios múltiplos de un número es un múltiplo del mismo número.*

88 Si dos números tienen un divisor comun, su *diferencia* tendrá el mismo divisor.

Supuesto que 7 es divisor de 35 y 21, será divisor de la *diferencia* $35-21$
En efecto; de las igualdades $35=5$ veces 7 y $21=3$ veces 7
se deduce $35-21=5$ veces 7, *menos* 3 veces $7=(5-3)$ veces $7=7\times(5-3)$
y por consiguiente $(35-21):7=5-3$
luego 7 es divisor de la diferencia de los números dados. (**)

Este mismo teorema se enuncia tambien así: *La diferencia de dos múltiplos de un número es un múltiplo del mismo número.*

(*) Llamando D al divisor comun de los numeros A, B, C; S la suma de estos, y a, b, c los cocientes respectivos de cada uno por el divisor comun, tendremos la igualdad..... $S=A+B+C$
y dividiendo ambos miembros por D, resulta... $\frac{S}{D}=\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}$ ó bien $\frac{S}{D}=a+b+c$
luego si el cociente de S por D es un núm. entero; D será divisor de la suma de los núms. dados.

(**) Sea D el divisor comun de los números A y B, R la diferencia de estos, a y b los cocientes respectivos de cada uno por el divisor comun; y tendremos.....

$R=A-B$ de donde $\frac{R}{D}=\frac{A}{D}-\frac{B}{D}$ ó bien $\frac{R}{D}=a-b$

luego D será divisor de la diferencia de los números dados.

Cor De los dos teoremas anteriores se deducen las consecuencias siguientes: Cuando se combinan varios números por adicion y sustraccion, y todos ellos tienen un divisor comun, el resultado tendrá el mismo divisor. Si la suma y todos los sumandos menos uno tienen un divisor comun, el sumando restante tendrá el mismo divisor. Si el resíduo y uno de los datos tienen un mismo divisor, tambien le tendrá el otro dato. Si un número es divisor de todos los sumandos menos uno, no es divisor de la suma. Si un número es divisor del minuendo y no del sustraendo (ó al contrario), no lo será del resíduo.

89. Si uno de los factores de un producto tiene un divisor, el *producto* tendrá el mismo divisor. Luego, si dos ó mas números tienen un divisor comun, el *producto* de ellos tendrá el mismo divisor.

Por ser 5 divisor de 10, lo será tambien del producto $10\times2\times3$
En efecto; $10\times2\times3=10+10+10.....$ hasta 2×3 veces,
pero 5 es divisor de todos estos sumandos, luego lo será de la suma (87), y por consiguiente del producto propuesto (*).

Este teorema es un corolario del número (87), y se enuncia tambien diciendo: *Si un número es múltiplo ó divisible por otro, será divisible por todos los factores de este otro.*

Asi, todo múltiplo de 10 lo es tambien de los factores de 10, que son 2 y 5.

90. Si dos números tienen un divisor comun, el *resto*, que resulta de dividir el mayor por el menor, tendrá el mismo divisor. Si el resto y el menor de los números dados tienen un divisor comun, el otro número tendrá el mismo divisor.

Sean 180 y 32 los números dados, cuyo cociente entero es 5, y 20 el resto, en cuyo supuesto vamos á demostrar.....

1.° Los factores comunes de 180 y 32 lo son tambien del resto 20.

En efecto; el resto 20 es igual al *dividendo* menos el *cociente×divisor*; luego si el dividendo y el divisor, y por consiguiente el dividendo y el producto del cociente por el divisor, son divisibles por un número cualquiera, la *diferencia* de ellos tambien lo será (88).

2.° Los factores comunes de 20 y 32 lo son tambien del *dividendo* 180.

En efecto; el dividendo 180 es igual al *resto* mas el *cociente×divisor*; luego si el resto y el divisor, y por consiguiente el resto y el producto del cociente por el divisor, son divisibles por un número cualquiera, la *suma* de ellos tambien lo será (**).

Enunciando este teorema de otro modo, tendremos que: *Si el dividendo y divisor son múltiplos de un número cualquiera, el residuo de la division tambien lo será. Si el divisor y el resto son múltiplos de otro número, lo será igualmente el dividendo.*

91. Si un número tiene un divisor, todas sus *potencias* tendrán el mismo divisor, ó lo que es lo mismo, si un número es múltiplo de otro, todas su potencias lo serán tambien.

Este teorema se puede considerar como un corolario del número 89

(*) Sea P el producto de los números A y B, D el divisor de A, a el cociente de A por D; y tendremos $A=a\times D$ y por consiguiente $A\times B=a\times D\times B$
Dividiendo ahora los dos miembros de la última igualdad por D, será...
$P:D=a\times B$ y como $a\times B$ es un número entero, D será divisor de P.

(**) Llamando D al divisor comun de los números A y B, C al cociente entero de estos números, y R al resto de la division; tendremos $A=C\times B+R$ ó bien $R=A-C\times B$
pero D es divisor de A y de $C\times B$ (por serlo de B); luego lo será de R
En el segundo caso, de la igualdad $A=C\times B+R$ se deduce quo...
siendo D divisor de $C\times B$ y de R, lo será igualmente de A que es la suma de estos números.

Caractéres de divisibilidad de un número entero por otro en el sistema de numeracion decimal.

92. *El resto de la division de un número entero por* 10 *es la cifra de las unidades simples del mismo número; por* 100 *son sus decenas y unidades; por* 1000 *sus centenas, decenas y unidades*, etc.

En efecto; descomponiendo en el primer caso el número dado en decenas y unidades, como las decenas son evidentemente un múltiplo de 10, el resto de dividir el número total por 10 será la cifra de las unidades. (**55**. *Cor.*)

Sea el número propuesto 2854, y los restos de dividirlo por 10, 100, 1000, etc., se deducirán de las igualdades siguientes...

$$\begin{cases} 2854=2850+4=285\times10+4 \\ 2854=2800+54=28\times100+54 \\ 2854=2000+854=2\times1000+854 \end{cases}$$

En la última, por ejemplo, el resto de dividir $2\times1000+854$ por 1000 es evidentemente el mismo que resulta de dividir el segundo sumando por 1000, y como el resto de esta division es 854, la proposicion es verdadera. Luego.....

Un número entero es divisible por 10, 100, 1000, etc. si termina en uno, dos, tres, etc., ceros.

93. *El resto de la division de un número entero por* 2 *ó* 5 *es el mismo que resulta de dividir la cifra de sus unidades por* 2 *ó* 5.

Porque, si descomponemos el número dado en decenas y unidades, como las decenas son divisibles por 10 y por consiguiente por 2 y 5 (**89**), el resto de dividir el número total por 2 ó 5 será el mismo que el de dividir las unidades de dicho número.

Sea el número dado $1857=1850+7$

el sumando 1850 es divisible por 10 y por consiguiente por sus factores 2 y 5; luego el resto de dividir $1850+7$ ó 1857 por 2 ó 5, será el mismo que resulte de dividir la cifra 7 de las unidades por 2 ó 5. Luego.....

Para que un número entero sea divisible por 2, se necesita y basta que la cifra de las unidades sea 0, 2, 4, 6 ú 8 (*)

Un número entero es divisible por 5, si la cifra de las unidades es 0 ó 5.

94. *El resto de la division de un número entero por* 4 *ó* 25 *es el mismo que resulta de dividir el conjunto de sus decenas y unidades, ó sean las dos primeras cifras de la derecha, por* 4 *ó* 25.

Descomponiendo el número dado en centenas y unidades, la demostracion será la misma que la del teorema anterior, supuesto que las centenas son siempre divisibles por 4 y 25 (factores de 100). Y por consiguiente.....

Un número entero es divisible por 4 ó por 25, si el conjunto de sus decenas y unidades es divisible por 4 ó 25.

95. *El resto de la division de un número por* 8 *ó* 125 *es el mismo que resulta de dividir el conjunto de sus centenas, decenas, y unidades, ó sean las tres primeras cifras de la derecha, por* 8 *ó* 125.

Los millares son siempre divisibles por 8 y 125 (factores de 1000); y como el número dado se puede descomponer en millares y unidades, la proposicion es evidente. Luego.....

Un número entero es divisible por 8 ó 125, siempre que el conjunto de sus centenas, decenas y unidades sea divisible por 8 ó 125.

Números divisibles por 8 ó 125	Números no divisibles por 8 ni 125
5000, 4008, 15072, 19250	1042, 5100, 9700, 10550

(*) Llámase *número par* el número divisible por 2, é *impar* el que no es divisible por 2. Las cifras pares en el sistema decimal son 2, 4, 6 y 8, y las impares 1, 3, 5, 7 y 9.

96. *El resto de la division de un número por 9 ó 3 es el mismo que resulta de dividir la suma de los valores absolutos de sus cifras por 9 ó 3.*

En efecto; de las igualdades $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$ etc., se deduce que, una unidad de un órden cualquiera es múltiplo de 9 mas una unidad simple; y por consiguiente 2, 3, 4, etc. unidades del mismo órden serán un múltiplo de 9 mas 2, 3, 4, etc., unidades simples. Luego toda cifra significativa, seguida de uno ó mas ceros, se compone de un múltiplo de 9 mas el valor absoluto de dicha cifra.

Esto supuesto, si consideramos el número dado descompuesto en unidades, decenas, centenas, etc., cada uno de estos sumandos será igual á un múltiplo de 9 mas el valor absoluto de la cifra significativa correspondiente; y por lo mismo el número propuesto será igual á un múltiplo de 9 mas la suma de sus cifras significativas. Luego, dividiendo esta suma por 9, tendremos el mismo *resto* que si dividiéramos por 9 el número dado. (**55.** *Cor.*)

Sea el número dado $2856=2000+800+50+6$

y tendremos que 2000 es un múltiplo de $9+2$ unidades
800 es un múltiplo de $9+8$
50 es un múltiplo de $9+5$
6 es. 6

luego 2856 será un múltiplo de $9+(2+8+5+6)$

y por consiguiente el resto de dividir $2+8+5+6$ por 9 será el que resulte de dividir el número propuesto por el mismo divisor.

Lo mismo se verifica relativamente al factor 3 (divisor de 9). Luego.....

Un número entero es divisible por 9 ó por 3, si la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 9 ó por 3.

***97.** *El resto de dividir un número entero por 7 es el mismo que resulta de dividir por 7 la suma de los productos de sus cifras por 1, 3, 2, 6, 4, 5, empezando por la de las unidades simples.*

Los restos de dividir cada una de las unidades de los órdenes sucesivos 1.°, 2.°, 3.°, etc., por el número 7 son los siguientes:

Dividendos		*Divisor*	*Restos*
1	:	7	1
10	:	7	3
100	:	7	2
1000	:	7	6
10000	:	7	4
100000	:	7	5
1000000	:	7	1

y continuando la division, se repetirán indefinidamente los restos 1, 3, 2, 6, 4 y 5

Del exámen de esta tabla se deduce que.....
Todo número entero se compone de un múltiplo de 7, mas la suma de los productos que resultan de multiplicar la cifra de las unidades por 1, la de las decenas por 3, la de las centenas por 2, la de los millares por 6, la de las decenas de millar por 4, la de las centenas de millar por 5, la de los millones por 1, etc.

Sea el número dado $214329=200000+10000+4000+300+20+9$

9 es un múltiplo de $7+9\times1$ unidades
20 es un múltiplo de $7+2\times3$
300 es un múltiplo de $7+3\times2$
4000 es un múltiplo de $7+4\times6$
10000 es un múltiplo de $7+1\times4$
200000 es un múltiplo de $7+2\times5$

Luego 214329 será un múltiplo de $7+(9.1+2.3+3.2+4.6+1.4+2.5)$

Y por consiguiente, un número será divisible por 7, si la suma de los productos, que resultan de multiplicar la primera cifra de la derecha por 1, la segunda por 3, la tercera por 2, la cuarta por 6, la quinta por 4, la sexta por 5, la séptima por 1, y así sucesivamente, es tambien divisible por 7.

*98. *El resto de la division de un número por 11 es igual al resto de dividir por 11 el exceso de la suma de los valores absolutos de las cifras de órden impar, sobre la suma de los valores absolutos de las de órden par, añadiendo á la primera, si es menor que la segunda, un múltiplo de 11 suficientemente grande para hacer posible la sustraccion.*

1 : 11=0 de cociente y 1 por resto
10 : 11=0 de cociente y 10 por resto
100 : 11=9 de cociente y 1 por resto
1000 : 11=90 de cociente y 10 por resto
10000 : 11=909 de cociente y 1 por resto etc.

luego los restos 1 y 10 se repiten constantemente, el primero para las unidades de órden impar y el segundo para las de órden par, deduciéndose por consiguiente que toda unidad de órden impar es un múltiplo de 11 mas una unidad simple, y toda unidad de órden par es un múltiplo de 11 menos una unidad simple. Luego toda cifra significativa de órden impar es igual á un múltiplo de 11 mas el valor absoluto de dicha cifra; y si es de órden par será igual á un múltiplo de 11 menos el valor absoluto de la misma cifra.

Esto supuesto; cada una de las diversas colecciones de unidades de un número entero dado será un múltiplo de 11 mas ó menos el valor absoluto de su cifra significativa, segun que el órden correspondiente sea impar ó par, y por lo mismo todo número entero será un múltiplo de 11 mas la suma de los valores absolutos de las cifras de órden impar, menos la suma de los valores absolutos de las cifras de órden par.

Sea el número dado 15836=10000+5000+800+30+6

10000 es un múltiplo de 11+1
5000 es un múltiplo de 11—5
800 es un múltiplo de 11+8
30 es un múltiplo de 11—3
6 es 6
luego 15836 es un múltiplo de 11+(1+8+6)—(5+3)

y por consiguiente, el resto de dividir la diferencia (1+8+6)—(5+3) por 11, será el mismo que resulte de dividir por 11 el número dado;
pero (1+8+6)—(5+3) es igual 7: luego 7 es el resto de dividir 15836 por 11.

Si la suma de los valores absolutos de las de lugar impar es menor que la suma de los valores de las de lugar par, se añadirá á la primera el múltiplo de 11, que sea necesario para hacer posible la sustraccion.

31085=un múltiplo de 11+8—9=m. de 11+19—9=m. de 11+10
luego 10 es el resto de dividir por 11 el número 31085. Segun esto,

Un número será divisible por 11, si la suma de las cifras de órden impar es igual á la suma de las de órden par, ó bien si la diferencia de estas sumas es 11 ó un múltiplo de 11 (*).

Números divisibles por 11	Números no divisibles por 11
9788581, 8460518, 135080	1854, 4581, 1049804270

Escolio general. Un procedimiento análogo al que hemos seguido para determinar los restos, que resultan de dividir un número entero por 7 y por 11, se puede seguir en la determinacion de los que corresponden á cualquier otro divisor.

(*) Llamando N al número dado, Y á la suma de los valores absolutos de las cifras de órden impar, y P á la suma de las cifras, de órden par; tendremos N=múltiplo de 11+(Y—P) y el resto de dividir la diferencia Y—P por 11, será el mismo que resulta de dividir N por 11. Luego si la diferencia Y—P es cero, N será divisible por 11, y si Y—P no es cero, será Y>P ó Y<P
En el primer caso si la diferencia Y—P es divisible por 11, lo será igualmente el número N.
En el segundo podemos considerar al número dado como la diferencia (m. de 11+Y)—P; y como un residuo no varia aunque se quite del minuendo y sustraendo un mismo número; será N=m. de 11—(P—Y), y por consiguiente, si P—Y es divisible por 11 lo será tambien el núm. N

Máximo comun divisor de dos ó mas números.

99. Llámase *máximo comun divisor* de varios números el mayor divisor comun de todos ellos.

El m. c. d. de 8 y 24 es 8 | El m. c. d. de 18, 30 y 48 es 6 (*)

Los números, cuyo único divisor comun es la unidad, se llaman *números primos entre sí.*

Los números 9 y 10 son primos entre sí.

La determinacion del máximo comun divisor de dos ó mas números se funda en el teorema siguiente:

El máximo comun divisor del dividendo y divisor es igual al máximo comun divisor del divisor y del resto.

En efecto, el m. c. d. del dividendo y divisor es *divisor* del dividendo, divisor y resto (**90**): luego no será *mayor* que el m. c. d. del divisor y del resto.

El m. c. d. del divisor y del resto es *divisor* del dividendo, divisor y resto; luego no será *mayor* que el m. c. d. del dividendo y divisor.

Y por consiguiente si el m. c. d. del dividendo y divisor no es mayor que el m. c. d. del divisor y resto, ni este es mayor que aquel, es evidente que ambos divisores máximos serán iguales.

Hallar el máximo comun divisor de dos números.

100. El m. c. d. de dos números no es mayor que el menor de ellos, y por consiguiente, si el cociente de los dos es exacto, evidentemente el menor será el m. c. d. pedido.

Así el m. c. d. de los números 12 y 60 es el número 12.

Hallar el máximo comun divisor de los números 143 y 52.

Dividiendo 143 por 52, como el cociente no es exacto, 52 no será el m. c. d. que se busca; pero el m. c. d. del dividendo y divisor, lo es tambien del divisor y resto: luego la cuestion queda reducida á determinar el máximo comun divisor de 52 (*divisor*) y 39 (*resto*).

El cociente de 52 por 39 tampoco es exacto, luego 39 no será el m. c. d. de 52 y 39. Por lo mismo, continuaremos la operacion hallando el m. c. d. de 39 (*divisor*) y 13 (*resto* correspondiente).

La division de 39 por 13 es exacta, luego 13 será el m. c. d. de 13 y 39; y por consiguiente de 39 y 52, y últimamente de 52 y 143.

Números dados 143 y 52 (m. c. d.=13)

143	**52**	39	13	m. c. d. pedido
	2	1	3	cocientes enteros
39	13	00		restos

Del procedimiento seguido en el ejemplo anterior se deduce que.....

Para hallar el m. c. d. de dos números enteros, se divide el mayor por el menor y, si el cociente es exacto, el número menor será el m. c. d. pedido. Pero, si queda resto, se divide el divisor por el resto, y se continuará dividiendo siempre el último divisor por el último resto hasta llegar á un cociente exacto, en cuyo caso el último divisor será el m. c. d. de los números dados.

(*) m. c. d. quiere decir *máximo comun divisor.*

Si el penúltimo resto ó sea el último divisor es 1, los números dados serán primeros entre sí. Si dos restos son primos entre sí, lo serán tambien los números propuestos, pues el m. c. d. de los números dados, es tambien el m.c.d. de todos los restos. Cada resto es siempre menor que el divisor correspondiente en una ó mas unidades, y como este divisor es el resto anterior, los restos irán disminuyendo hasta llegar á cero (*).

101. Todo divisor comun de dos números lo es tambien de su máximo comun divisor.

En efecto; aplicando á los números dados la regla anterior del m. c. d. se deduce que todo divisor comun de dos números es divisor del resto de la primera division; pero este resto es el divisor de la division siguiente, luego todo divisor de los números dados será divisor del dividendo y divisor de la segunda division, y así sucesivamente..... luego será divisor de todos los restos de la operacion y por consiguiente del m. c. d. que es uno de ellos. Luego.....

Para hallar los divisores comunes de dos números, basta hallar los divisores de su máximo comun divisor.

Hallar el máximo comun divisor de tres ó mas números.

***102.** Sean los números dados 578, 374 y 85;
El m. c. d. de 578 y 374 es 34 }
El m. c. d. de 34 y 85 es 17 } Luego 17 será el m. c. d. pedido.
En efecto; el m. c. d. que se busca es divisor de 578 y 374; luego lo será de 34, pero el mismo m. c. d. es tambien divisor de 34 y 85; luego lo será de 17, y por consiguiente dicho máximo comun divisor no será mayor que 17.

Si probamos ahora que 17 es divisor de los números dados, será el *máximo*: 17 es divisor de 34 y 85; 34 es divisor de 374 y 578: Luego 17 será el número pedido.

Cuando los números dados son mas que tres, se empleará un razonamiento análogo, y por consiguiente se puede establecer por regla general que:

Para hallar el m. c. d. de varios números, se halla el m. c. d. de dos de ellos, luego el m. c. d. del último hallado y otro número, y así sucesivamente. El m. c. d. del último número y del m. c. d. anterior será el m. c. d. de todos los números dados.

La operacion se dispone del modo siguiente:

Números dados 578, 374, 85 (m. c. d.=17) (**)

578	**374**	204	170	34	**85**	34	17 m. c. d. pedido
	1	1	1	5		2	2

El m. c. d. de los números 320, 680 y 80, es igual 40.

Los números 253, 161 y 91 son primos entre sí, por ser primos 91 y el máximo comun divisor de los otros dos.

Cor. Todo divisor comun de varios números es divisor de su m. c. d., y por consiguiente, para hallar los divisores comunes de tres ó mas números, basta hallar los divisores de su m. c. d.

(*) Supuesto que el dividendo es mayor que el duplo del resto, se demuestra fácilmente que el número de divisiones, que se deben hacer para hallar el m. c. d. de dos números, es á lo mas igual al duplo del exponente de la mayor potencia de 2 inmediatamente superior al menor de los números dados.

(**) En este ejemplo suprimimos los restos segun se hace siempre en la práctica.

Teoremas relativos al m. c. d. de varios números.

103. **Si dos ó mas números se multiplican ó se dividen exactamente por otro, su máximo comun divisor resultará multiplicado ó dividido por este otro.**

Siendo 13 el máximo comun divisor de 143 y 52; vamos á demostrar que el m. c. d. de 143×10 y 52×10 será 13×10

En efecto; si el dividendo y divisor se multiplican por un número entero cualquiera, el cociente entero no varia; pero el resto resulta multiplicado por dicho número (60). Luego de

$$\begin{array}{r|r|r|r} 143 & 52 & 39 & 13 \\ & \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} \end{array} \quad \text{se deduce que} \quad \begin{array}{r|r|r|r} 10\times143 & 10\times52 & 10\times39 & 10\times13 \\ & \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} \end{array}$$

y por consiguiente, el producto indicado 10×13 es el máximo comun divisor de los números 143 y 52 multiplicados ambos por 10.

La demostracion es la misma cuando los números dados son mas que dos (*).

La segunda parte se puede demostrar por un razonamiento análogo al anterior. Tambien se puede considerar como un corolario suyo.

Esc. El cálculo del m. c. d. se puede abreviar dividiendo los números dados por un factor comun, con tal que se multiplique despues el m. c. d. hallado por dicho factor.

Para hallar el m. c. d. de 13200, 27500, 18700 y 1100,
basta multiplicar por 100 el m. c. d. de 132, 275, 187 y 11.

104. **Si dos ó mas números se dividen por su m. c. d. los cocientes serán números primos entre sí.**

Suponiendo los números dados 143 y 52 cuyo m. c. d. es 13;
los cocientes 11 y 4 de dichos números por 13 serán primos entre sí.

En efecto, si los cocientes 11 y 4 no son primos entre sí, tendrán un divisor comun por ejemplo 2; y multiplicando 11 y 4 por 13, los productos 143 y 52 tendrán por divisor el producto 2×13, lo que es contra la hipótesis: Luego la proposicion es verdadera.

De otro modo: si dividimos los dos números dados 143 y 52 por 13, el m. c. d. de los cocientes 11 y 4 será el cociente de 13 por 13, es decir 1. Luego 11 y 4 serán primos entre sí.

Recip. **Si, dividiendo varios números por otro, los cocientes son exactos y primos entre sí; este otro será el m. c. d. de ellos.**

Dividiendo 143 y 52 por 13 los cocientes 11 y 4 son primos entre sí;
luego 13 será el m. c. d. de los números dados.

En efecto; el único divisor comun de 11 y 4 es 1
luego el m. c. d. de 13×11 y 13×4 ó bien de 143 y 52 será $13\times1=13$

Cor. **El m. c. d. de dos ó mas números es el producto de las menores potencias de los factores primos comunes de todos ellos.**

Y por consiguiente, el producto $2^2\times5^4\times7$ es el m. c. d. de los números....

$$\left\{\begin{array}{l} 2^4\times3^2\times5^5\times7^2\times17 \\ 2^3\times5^4\times7^3\times11^4 \\ 2^2\times3\times5^4\times7\times11\times13 \end{array}\right\}$$

(*) Siendo A, B, C, F los números dados, D el m. c. d. de A y B, D′ el m. c. d. de D y C, D″ el m. c. d. de D′ y F; el m. c. d. de A, B, C, F será D″; y por consiguiente si multiplicamos A, B, C, F por N, el m. c. d. de todos ellos resultará tambien multiplicado por N.

En efecto, el m. c. d. de AN y BN es DN, el m. c. d. de DN y CN es D′N, el m. c. d. de D′N y FN es D″N: luego D″N será el m. c. d. de AN, BN, CN y FN.

Números primos.

105. Hemos dicho que *número primo* ó primero es el que no tiene otros factores ó divisores mas que él mismo y la unidad (*).

Todo número, no divisible por los primos 2, 3, 5, 7, 11..... hasta obtener un cociente entero menor que el divisor, será *número primo.*

Así, el número 353 es primo puesto que dividiéndole por 2,3,5,7,11,13,17, y 19 no dá cociente exacto, siendo 18 el último cociente entero.

En efecto; el número dado no es divisible por ningun número, que no sea primo menor que 19; porque, si lo fuera, seria tambien divisible por los factores primos de dicho número (**89**), lo que es contrario á la hipótesis. Tampoco es divisible por ningun número mayor que 19, porque de otro modo el cociente exacto seria menor que 18, y como en toda division exacta el dividendo es múltiplo del cociente, el dividendo 353 seria divisible por un número menor que 19, lo que es imposible: Luego el número dado será *número primo.*

Este teorema se enuncia tambien diciendo que.....

Un número es primo *siempre que no sea divisible por ningun otro primo, cuyo cuadrado sea menor que el número propuesto* (**).

***106.** Todo número *primo* excepto el 1, 2 y 3, es un múltiplo de 6 aumentado ó disminuido en una unidad.

En efecto; los restos de dividir un número entero por 6 serán precisamente *cero*, 1,2,3, 4 ó 5. Si el dividendo es primo, los restos no pueden ser *cero,* 2,3 ni 4 (**90**); luego todo número primo dividido por 6, dará por resto 1 ó 5.

En el primer caso el número dado es un múltiplo de 6 mas 1, y en el segundo es un múltiplo de 6 mas 5 ó bien un múltiplo de 6 menos 1.

La proposicion recíproca es falsa, pues no todos los números múltiplos de 6, mas ó menos una unidad, son números primos; tales son 119, 121, 143, etc.

107. Dos ó mas números son *primos entre sí* cuando no tienen mas divisor comun que la unidad.

Los números 10, 77 y 40 son *primos entre sí.*

Números primos entre sí dos á dos son aquellos, que tomados de dos en dos del modo que se quiera son primos entre sí.

Los números 5, 7, 16, 99 son *primos entre si dos á dos.*

Dos ó mas números, primos entre sí, pueden no ser primos entre sí dos á dos; pero varios números, primos entre sí dos á dos, son siempre primos entre sí.

Dos números, que se diferencian en una unidad, son primos entre sí; pues, si tuviesen algun divisor comun, este lo seria de la diferencia 1 de dichos números.

108. Si un número primo no es divisor de otro número, los dos son *primos entre sí.*

En efecto, el número primo no tiene mas divisores que él mismo y la unidad; y como el otro número no es divisible por dicho número primo, es evidente que los dos números serán primos entre sí.

Cor. Dos ó mas números primos son *primos entre sí.*

La recíproca de esta proposicion es falsa, pues dos números 8 y 9 pueden ser *primos entre sí* y no ser primos separadamente.

(*) *Todo número que no es primo tiene al menos un divisor primo diferente de* 1, ó mas general: *todo número que no es primo es un producto de factores primos.*

(**) Llamando N el número dado, D un divisor suyo mayor que $\sqrt{N}$ y C el cociente de N por D; tendremos la igualdad $N=C\times D$ de donde $N:C=D$ y por consiguiente, C (necesariamente menor que $\sqrt{N}$) será divisor de N, pero esto es contrario á la hipótesis de no admitir N ningun divisor menor que $\sqrt{N}$; luego N será número primo.

Nuevos teoremas sobre la divisibilidad de los números.

***109**. **Todo número, que es divisor de un producto de dos factores y primo con uno de estos factores, es tambien divisor del otro factor.**

Sea $5687=47\times121$ y 11 un divisor de este producto, primo con 47; *vamos á demostrar* que 11 es divisor del otro factor 121.

En efecto; siendo 47 y 11 primos entre sí, su m. c. d. es 1
luego el m. c. d. de los productos 47×121 y 11×121 será $1\times121=121$;
Pero 11 es divisor de 47×121 por el supuesto, y lo es tambien de 11×121:
luego 11 será divisor de 121 m. c. d. de 47×121 y 11×121 (**101**).

Cor. **Un número *primo*, que es divisor de un producto, lo es por lo menos de uno de sus factores.**

Siendo el número primo 5, divisor del producto $7\times11\times25$, será tambien divisor de alguno de sus factores.

En efecto; si 5 y 7 son primos, 5 será divisor de 11.25;
pero 5 es tambien primo con 11, luego será divisor de 25 (*).

2.° Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, *es primo con el producto*; pues de lo contrario, si *el divisor comun* fuera primo, seria divisor de alguno de los factores del producto, y no siendo primo, tendrá con el producto, y por consiguiente con alguno de sus factores un divisor primo comun, lo que es contrario á la hipótesis.

Esc. Los *divisores primos* de un producto no pueden ser otros que los divisores primos de sus factores.

El producto de dos ó mas números impares es tambien un número impar.

110. **Si un número es *divisible* por dos ó mas primos entre sí dos á dos, es tambien divisible por el producto de todos ellos.**

Si 210 es divisible por los números 2,3 y 5, que son primos dos á dos, es tambien divisible por el producto de todos ellos 2.3.5
En efecto; 210 es divisible por 2 y el cociente es 105;
luego tendremos la igualdad $210=2\times105$
Siendo tambien 210 ó sea 2×105 divisible por 3; como 3 y 2 son primos, el factor 105 será divisible por 3; y tendremos $105=3\times35$

$$\text{luego}\quad 210=2\times105=2\times3\times35$$

y el número dado 210 será divisible por el producto de los factores primos 2 y 3.
En tal supuesto, tendremos igualmente que, siendo $210=2\times3\times35$ divisible por 5; como 2 y 3 son primos con 5; el factor 35 será divisible por 5 y por consiguiente $35=5\times7$

$$\text{luego}\quad 210=2\times105=2.3\times35=2.3.5.\times7$$

cuya última igualdad demuestra la proposicion enunciada.

De este teorema se deduce que un número será divisible por 6 cuando lo sea por 2 y por 3; será divisible por 15 cuando lo sea por 3 y por 5; será divisible por 60 si lo es por 4, por 3 y por 5 etc. (**).

(*) Puede un número ser divisor de un producto sin ser divisor de ninguno de sus factores, como por ejemplo el número 15, que siendo divisor de 120 no lo es de sus factores 6 y 20.

(**) Si el número A es divisible por los primos entre si a y b, lo será por $a\times b$
En efecto; si A es divisible por a, llamando q el cociente; tendremos $A=a\times q$
$A=a\times q$ es tambien divisible por b, y como a y b son primos, q será divisible por b.
Por ser q divisible por b, llamando Q el cociente, será $q=b\times Q$
y por consiguiente $A=a\times b\times Q$: Luego A es divisible por $a\times b$
Del mismo modo se demuestra que, si A es divisible por los primos dos á dos a,b,c, etc., será divisible por el producto de todos ellos.

111. Teniendo presente que una potencia cualquiera de un número es el producto de varios factores iguales á él, se deducen fácilmente de las proposiciones anteriores las consecuencias que siguen:

El número primo, que es divisor de una potencia de otro número, es tambien divisor de este número.

En efecto; una potencia cualquiera de un número es el producto de varios factores iguales á él; y como ya hemos demostrado, que todo número primo divisor de un producto, lo es de uno de los factores de este producto; la proposicion es verdadera (*).

Luego, si dos números son primos entre sí, las potencias de dichos números serán tambien primos entre sí.

Siendo 7 y 11 números primos entre sí, tambien lo serán 7^3 y 11^3; pues de otro modo, si llamamos D el factor primo comun de estos números, lo seria igualmente de los números dados 7 y 11, lo que es contrario á la hipotésis.

Todo número *primo* con una potencia de otro número es tambien primo con este. Recíprocamente, todo número primo con otro es primo con todas las potencias de este otro.

Pues de lo contrario tampoco se verificaria la hipótesis del teorema propuesto.

Formacion de una tabla de los números primos.

***112.** Para formar una tabla de los *números primos* comprendidos entre 1 y otro número cualquiera por ejemplo 1000, se escriben todos los números enteros desde 1 hasta 1000 y luego se borran los múltiplos de 2, 3, 5, 7, etc. Los múltiplos de 2 son los números pares, luego se borrarán 4, 6, 8, 10, etc. Los múltiplos de 3 son 6, 9, 12, 15, etc.; los de 5 son 10, 15, 20, etc.

Es evidente que al borrar los múltiplos de un número primo cualquiera se empezará por borrar el cuadrado de dicho número, pues los múltiplos menores deben estar borrados por serlo de los números primos anteriores.

Así, al borrar los múltiplos de 5 empezaremos por 25, pues los múltiplos 10, 15 y 20 menores que 25, son tambien múltiplos de 2 ó 3.

Los números primos comprendidos entre 1 y 100 son 26; entre 1 y 1000 son 169; entre 1 y 10000, 1230; entre 1 y 100000, 9592; entre 1 y 1000000, 78493. Las tablas de los números primos de Chernac contiene los comprendidos entre 1 y un millon, y las de Burckhardat los comprendidos entre 1 y 3036000.

Ultimamente, *la série de los números primos es ilimitada.*

Pues suponiendo si es posible que Z sea el mayor número primo, añadiendo la unidad al producto P de los números primos 1,2,3,5,7..... hasta Z; la suma P+1 será tambien número primo ó no lo será (**). En el primer caso, queda demostrado que hay un número primo mayor que Z; y en el segundo, P+1 tendrá un divisor primo mayor que Z, pues si admitiese un divisor primo menor, como este lo seria necesariamente de P (puesto que todo número primo menor que Z entra como factor en el próducto P), no podia serlo de P+1, una vez que dos números consecutivos como son P y P+1 son siempre primos entre sí.

Luego, si dado un número primero, se puede siempre hallar otro mayor que él, bien podemos asegurar que la série de estos números es ilimitada ó indefinida.

(*) La condicion necesaria para que un número entero sea potencia exacta de otro número entero es; que todos los exponentes de sus factores primos sean iguales ó múltiplos del número que expresa el grado ó indice de la potencia.

(**) Los valores de la suma P+1, son los números 3, 7, 31, 211, 2311, 30031, etc. de los cuales son *primos* los cinco primeros y el último *compuesto* é igual al producto de 59 por 509.

Descomposicion de un número entero en factores simples ó primos.

113. Descomponer un número en factores simples ó primos es hallar dos ó mas números primos cuyo producto sea igual al número dado.

Todo número, que no es primo, es un producto de números primos.

Sea 1050 *el número dado.* Supuesto que 1050 no es primo, será divisible por un núm. primo; este es 2: luego $1050=2\times525$

Si 525 fuera primo quedaria demostrado el teorema. No siendo primo será divisible por un número primo; este divísor es 3; luego $525=3\times175$

y por consiguiente $1050=2\times3\times175$

En el caso de ser 175 número primo, la proposicion es verdadera, pero no siendo así, dicho número 175 será divisible por algun número primo.....

y tendremos $175=5\times35$

de donde se deduce que. . . . . . . $1050=2\times3\times5\times35$

El número 35 es divisible por 5; y por consiguiente $35=5\times7$

Luego el número dado. . . . . $1050=2\times3\times5\times5\times7$

y como 7 es un número primo, la proposicion que deseábamos demostrar es evidente. Del procedimiento seguido en esta demostracion se puede deducir que....

Para descomponer un número entero en factores primos, se dividen dicho número y los cocientes sucesivos por su factor primo menor, hasta llegar á un cociente que sea igual á **1.** Los divisores de todas estas divisiones son los factores ó divisores primos o simples del número dado. El producto de todos los divisores primos de un número es igual á dicho número.

En la práctica se dispone la operacion del modo siguiente:

1050=2.3.5.5.7	1155=3.5.7.11	9900=2.2.3.3.5.5.11
525 : 3	385 : 5	43230=2.3.5.11.131
175 : 5	77 : 7	23595=3.5.11.11.13
35 : 5	11 : 11	
7 : 7	1	
1		

***114.** Un número entero no admite dos descomposiciones diferentes en factores primos.

Si el número dado es el producto de los factores primos 2.2.2.3.3.5; una nueva descomposicion del mismo número no puede dar ningun otro factor primo diferente de los anteriores, ni tampoco ninguno de estos repetido mayor ó menor número de veces que en la primera descomposicion, pues, si asi se verificase, tendriamos las igualdades absurdas.....

Número dado=2.2.3.5.7 | Número dado=2.3.5.5.5

puesto que, en el primer caso, resultaria 2.2.2.3.3.5=2.2.3.5.7, y como el segundo miembro de esta igualdad es múltiplo ó divisible por 7, el primero deberia serlo; pero los factores 2, 3 y 5 son primos con 7, luego su producto no será divisible por 7 (**109.** *Cor.*); y por consiguiente la primera igualdad es absurda.

En el segundo caso, se verificaria 2.2.2.3.3.5=2.3.5.5.5 ó bien 2.2.3=5.5 y como el segundo miembro de esta igualdad es divisible por 5, el primero deberia serlo, pero 2 y 3 son primos con 5; luego tambien esta segunda igualdad es absurda ó imposible.

El mismo razonamiento pudieramos hacer con otro número cualquiera; luego la proposicion es evidente.

Determinacion de todos los divisores de un número entero.

115. *Hallar todos los divisores* del número 210.

Los divisores primos de este número, hallados segun acabamos de indicar en los párrafos anteriores, son 2, 3, 5 y 7. La determinacion de los divisores restantes se funda en el teorema ya demostrado, que dice: *Si un número es divisible por dos ó mas primos entre sí, será divisible por el producto de ellos;* y en tal supuesto, es evidente que por ser los números primos 2 y 3 ambos divisores de 210, el producto 2×3 tambien lo será:

luego los números 2, 3 y 2×3 serán divisores de 210;

Pero estos divisores son primos con 5; luego el producto de cada uno por 5 será divisor del número dado y tendremos que, los números....

2, 3, 2×3, 5, 2×5, 3×5 y $2\times3\times5$ serán todos divis ores de 210.

Estos últimos divisores son primos con 7, luego el producto de 7 por cada uno de ellos, será tambien divisor del número propuesto; y por consiguiente los divisores de 210 serán los siguientes:

2, 3, 2.3, 5, 2.5, 3.5, 2.3.5, 7, 2.7, 3.7, 2.3.7, 5.7, 2.5.7, 3.5.7, 2.3.5.7

Los divisores hallados de este modo son todos los del número dado, pues de lo contrario se podria descomponer dicho número en factores primos de dos modos diferentes; lo que es imposible. Segun esto.....

Para hallar todos los divisores de un número, se multiplican dos cualesquiera de sus factores simples (iguales ó desiguales) y el producto será un nuevo divisor del número dado. Se multiplica este divisor y los simples anteriores por otro factor simple, y así se continúa multiplicando todos los divisores anteriores simples y compuestos por el factor primo siguiente; y los productos hallados de este modo serán todos los factores del número propuesto.

Dispuestos los factores simples en columna de menor á mayor, y empezando el cálculo por arriba, el primer factor compuesto será el menor. Si dos ó mas factores compuestos resultan iguales, basta escribir uno de ellos. Para mayor facilidad conviene escribir cada uno de los productos ó factores compuestos en frente del factor primo ó multiplicador respectivo.

Divisores simples y compuestos de 2310

2310	2,	
1155	3, 6	divisores de 2×3
385	5,10,15,30	divisores de $2\times3\times5$
77	7,14,21,42,35, 70,105,210	divisores de $2\times3\times5\times7$
11	11,22,33,66,55,110,165,330,77,154,231,462,385,770,1155,2310	divisores de... $2\times3\times5\times7\times11$
1		

Divisores simples y compuestos de 2080

2080	2,
1040	2, 4
520	2, 8
260	2,16
130	2,32=2.2.2.2.2
65	5,10,20,40,80,160=2.2.2.2.2.5
13	13,26,52,104,208,416,65,130,260,520,1040,2080=2.2.2.2.2.5.13 (*)

(*) Antiguamente se llamaban *números perfectos* los que son iguales á la suma de todos sus factores, divisores ó partes alícuotas, como 6, 28, 496, 8128 etc.; y *números amigos* entre sí, si se verifica que cada uno es igual á la suma de los factores del otro; tales son 220 y 284, 17296 y 184162, 9363584 y 9437056, únicos números amigos que hasta ahora se conocen.

116. Tambien se pueden hallar todos los divisores de un número entero del modo siguiente:

El número 2.2.2.3.3.5.5 es divisible por las potencias de 2, de 3, y de 5 desde la primera hasta la tercera para el factor 2, y desde la primera hasta la segunda para los otros dos factores, y como las diferentes potencias de 2 son números primos con las potencias de 3, etc., el número dado será divisible por las combinaciones posibles de dichas potencias.

Esto supuesto, escribiendo en diferentes renglones, 1 y las potencias sucesivas del primer factor primo, 1 y las potencias sucesivas del segundo, 1 y las potencias sucesivas del tercero; multiplicando luego los términos del primer renglon, por cada uno de los del segundo, y los productos así obtenidos, por cada uno de los términos del renglon último; tendremos evidentemente todos los divisores del número propuesto.

Luego el número total de factores de un número es igual al producto de los exponentes de sus factores primos, aumentando cada exponente en una unidad. Entre estos factores se hallan comprendidos la unidad y el número dado, puesto que ambos son divisores ó factores de este último (*).

Hallar los divisores de 17640, cuyos divisores primos son 2,2,2,3,3,5,7,7

1	2	2^2	2^3	(A)
1	3	3^2		(B)
1	5			(C)
1	7	7^2		(D)

(E)	1	2	4	8	productos de los divisores (A) por 1	Factores ó divisores simples y compuestos de 17640
	3	6	12	24	productos de los divisores (A) por 3	
	9	18	36	72	productos de los divisores (A) por $3^2=9$	
	5	10	20	40	productos de los divisores anteriores por 5	
	15	30	60	120		
	45	90	180	360		
(F)	7	14	28	56	productos de los divisores anteriores por 7	
	21	42	84	168		
	63	126	252	504		
	35	70	140	280		
	105	210	420	840		
	315	630	1260	2520		
	49	98	196	392	productos de los divisores (E) por $7^2=49$ ó bien de los divisores (F) por 7	
	147	294	588	1176		
	441	882	1764	3528		
	245	490	980	1960		
	735	1470	2940	5880		
	2205	4410	8820	17640		

Número total de factores..... $(1+3)\times(1+2)\times(1+1)\times(1+2)=72$

(*) Siendo $N=A^m\times B^n\times C^p$, el número total de factores ó divisores será $(m+1)(n+1)(p+1)$ En efecto, segun la regla del testo, tenemos.....

$1, A, A^2, A^3 ..... A^m$ ó sean $m+1$ términos
$1, B, B^2, B^3 ..... B^n$ ó sean $n+1$ términos
$1, C, C^2, C^3 ..... C^p$ ó sean $p+1$ términos

Multiplicando cada término de la 2.ª línea por los de la 1.ª resultarán $(m+1)(n+1)$ términos; y multiplicando ahora todos estos por cada uno de los de la 3.ª línea, el número total de términos será evidentemente igual al producto $(m+1)(n+1)(p+1)$.

Supuesto que los exponentes de los factores primos del cuadrado de un número entero deben ser todos pares, es evidente que el cuadrado de todo número entero contiene siempre un número impar de divisores. El número, que no sea cuadrado de otro entero, contiene un número par de divisores.

Mínimo múltiplo comun de dos ó mas números.

117. Llámase *mínimo múltiplo comun,* ó múltiplo mas simple de varios números, el número menor que sea divisible por todos ellos. (*)

El m. m. c. de los números 3, 4 y 6 es 12, por ser el menor de los múltiplos 12, 24, 36, 48, etc., de dichos números.

Hallar el m. m. c. de los números 2940, 462 y 275.

La descomposicion de estos números en factores simples, nos dá.....

$$2940=2.2.3.5.7.7\ ,\ 462=2.3.7.11\ \text{y}\ 275=5.5.11$$

Esto supuesto: debiendo ser el número que se busca divisible por los números dados, será divisible por los factores $2^2,3,5,7^2$ del primero; los 2,3,7,11 del segundo; y los $5^2,11$ del tercero.

Pero todo número divisible por dos ó mas primos y por consiguiente primos entre sí dos á dos, lo mismo que sus potencias respectivas, es divisible por el producto de todos ellos (**110**); luego el múltiplo pedido será divisible por el producto $2^2.3.5^2.7^2.11$. Y como el múltiplo menor de un número es el mismo número; es evidente que $2^2.3.5^2.7^2.11$ será el múltiplo mas simple, que buscamos. Luego:

El mínimo múltiplo comun de dos ó mas números es igual al producto de las mayores potencias de los factores primos diferentes de todos ellos.

Si uno de los números dados es factor de otro tambien dado, todo número divisible por el segundo lo será por el primero (**89**). Luego si uno ó mas números son factores de otros, se prescinde de los primeros, y el producto de las mayores potencias de los otros factores será el mínimo múltiplo comun pedido.

Hallar el mínimo múltiplo comun de los números 210, 64, 125, 2310

La descomposicion de estos números en factores simples es la siguiente:

$$210=2.3.5.7 \qquad 64=2^6 \qquad 125=5^3 \qquad 2310=2.3.5.7.11$$

luego el m. m. c. pedido será $\qquad 2^6.3.5^3.7.11=1848000$

Del mismo modo 15120 es el *mínino múltiplo comun* de 720, 1080 y 84.

Cor. Si varios números son primos dos á dos, ó no tienen factor alguno comun, su mínimo múltiplo comun será igual al producto de dichos números.

Asi, el m. m. c. de 3.5, 7.7.11 y 13.13.17 será $3.5.7^2.11.13^2.17$

2.° Si se divide el mínimo múltiplo comun de dos ó mas números por cada uno de estos, los cocientes son primos entre sí, pues de lo contrario se verificaria que dicho múltiplo comun no seria el menor.

Esc. Es evidente que los múltiplos comunes de dos ó mas números son igualmente múltiplos del mínimo múltiplo comun de estos números. (**)

(*) *Mínimo múltiplo comun* se escribe abreviadamente asi, m. m. c.

(**) *Hallar el mínimo múltiplo comun de varios números, independientemente de sus factores ó divisores simples.*

Supuesto que el m. m. c de los números A y B es igual al producto de las mayores potencias de sus factores primos diferentes: se hallará este m. m. c. multiplicando uno de los números dados, por ejemplo A, por el producto de todos los factores primos de B, que no lo sean de A: y por consiguiente:

El *mínimo múltiplo comun* de dos números se obtiene tambien multiplicando uno de ellos por el cociente de dividir el otro por el máximo comun divisor de ambos.

Siendo los números dados 675 y 275 (cuyo m. c. d. es 25) se hallará su m. m. c., multiplicando 675 por el cociente de 275 y 25, y el producto 7425 será el número pedido.

Ejercicios para la divisibilidad de los números.

118. ¿Los números primos en el sistema decimal, lo son tambien en todos los sistemas de numeracion? ¿Si dos números son múltiplos de un tercero, lo será la suma, la diferencia, el producto y el cociente de los mismos números? ¿Si un número es múltiplo de otro, lo serán todas sus potencias y raices? Enunciar de otro modo estas dos últimas proposiciones. ¿Las recíprocas son verdaderas? * Si se divide por n la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números, demostrar que el resto de la division es en el primer caso igual á la suma de los restos de cada sumando por n; en el segundo á la diferencia de los restos de los datos; en el tercero al producto, y en el cuarto al cociente de los mismos. Todo número entero N es divisible por 4, si la cifra de sus unidades mas el duplo de la cifra de las decenas es un múltiplo de 4, y recíprocamente. [Pues siendo a la cifra de las unidades y b la de las decenas, tendremos $N=$un múltiplo de $4+10b+a=$un múltiplo de $4+8b+2b+a=$un múltiplo de $4+2b+a$] Todo número es divisible por 8, si la cifra de sus unidades, mas el duplo de la de las decenas, mas el cuádruplo de la de las centenas es un múltiplo de 8, y recíprocamente. Todo número es divisible por 6, si la cifra de las unidades, mas el cuádruplo de las demás cifras es divisible por 6, y recíprocamente; puesto que una unidad de un órden cualquiera es siempre un múltiplo de 6, aumentado en 4 unidades simples. *El producto de tres números consecutivos es divisible por 6; ¿la recíproca es verdadera? *Si n es un número cualquiera, el producto $n(n+1)(2n+1)=N$ será tambien divisible por 6. [Siendo par n ó $n+1$, tambien lo será N y como de no ser n ó $n+1$ divisibles por 3 resultaria $n=3q+1$ y $2n+1=6q+3=$ un múltiplo de 3; es evidente que siempre N será divisible por 2 y por 3, y por consiguiente por 6.] ¿Si un número es divisible por 3, por 9 ó por 11, lo serán igualmente todos los números, que se formen con las mismas cifras? La diferencia de dos números compuestos de las mismas cifras es un múltiplo de 9. Caracteres de divisibilidad de un número por 12, 13, 60 y 80. Condiciones generales para que un número sea divisible por otro. Caracteres de un número primo ó de dos ó mas primos entre sí. ¿Un número primo con la suma, la diferencia, el producto ó el cociente de otros dos, lo será con estos? ¿Puede serlo con el uno y no con el otro? ¿Un número primo con la potencia ó raiz de otro número, lo será con este? Formar una tabla de todos los números primos en el sistema duodecimal desde 1 hasta el cuadrado de la base. ¿Cuáles son los divisores máximo y mínimo de un número? Teorema fundamental para la determinacion del m. c. d. de dos números. Hallar el m. c. d. de 2415 y 1155; 11027 y 599. Hallar el m. c. d. de 275, 1250, 2675 y 2500. El m. c. d. de dos ó mas números no varía aun cuando algunos de ellos se multipliquen por un número cualquiera ó se dividan por divisores que sean primos con los otros números dados. Descomponer en factores simples los números 5040 y 4002075. Hallar el m. c. divisor de dos ó mas números, conocidos sus factores simples. Hallar todos los divisores simples y compuestos de los números 31680, 76440 y 51030. ¿Cuáles son los múltiplos máximo y mínimo de un número? Teoremas fundamentales para determinar el mínimo múltiplo comun de dos ó mas números. Hallar el m. m. c. de los números 1441, 77, 4620 y 297. Si dividiendo un número M por otros varios A, B, C, los cocientes son primos entre sí ¿será M el m. m. c. de A, B y C? Determinacion del m. m. c. de dos ó mas números por medio del m. c. d. de los mismos números. El cuadrado de todo número primo P, diferente de 2 y 3, disminuido en una unidad, es siempre divisible por 12. [Pues de $P=6n\pm1$ se deduce $P^2-1=12(3n^2\pm n)$]. Si los números a y b son primos, el m c. d. de $a+b$ y $a-b$ es 2. [Esto se deduce de los teoremos **87** y **88**]. Dos números cualesquiera a y b ó bien a^n y b^n, divididos por su diferencia $a-b$, dan siempre restos iguales; y por consiguiente el cociente de a^n-b^n por $a-b$ debe ser exacto.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

(ORDINARIOS Y DECIMALES).

Numeracion. Adicion. Sustraccion. Multiplicacion. Division. Elevacion á potencias. Extraccion de raices.

Reduccion de los fraccionarios decimales á ordinarios y vice-versa.

NUMERACION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Definicion y numeracion de los números fraccionarios y sus consecuencias. Alteraciones producidas por la variacion de sus términos. Simplificacion. Reduccion de dos ó mas números fraccionarios á otros de un mismo denominador. *Definicion y numeracion de los números fraccionarios decimales y sus consecuencias.*

Definicion y numeracion de los números fraccionarios.

119. La adicion, sustraccion, multiplicacion y division exacta de los números enteros dan siempre resultados enteros. La division inexacta de los mismos números dá orígen á los *números fraccionarios.*

En efecto, el cociente total de 44 por 5 será igual á 8, que es el cociente entero, mas el cociente de dividir el resto 4 por el mismo divisor ó sea el resultado de partir el número 4 en cinco partes iguales; y como este cociente se obtiene dividiendo por 5 cada una de las unidades del 4, es evidente que la suma de los cocientes parciales nos dará el *cociente total* pedido. Esto supuesto:

Se llama *unidad fraccionaria* á cada una de las partes iguales en que se puede considerar dividida la unidad entera.

Número fraccionario es la reunion de dos ó mas unidades fraccionarias iguales (*).

Numerador del número fraccionario es el número que indica las partes que se toman de la unidad, y *denominador* el número que indica las partes iguales en que esta se considera dividida. El numerador y denominador juntos se llaman *términos* del número fraccionario.

Tambien se dice que el numerador marca las unidades fraccionarias del número fraccionario, y el denominador las unidades fraccionarias en que se considera dividida la unidad entera.

120. LA NOMENCLATURA de las diferentes unidades fraccionarias es la siguiente: cuando el denominador es 2, la unidad fraccionaria se llama *medio*; cuando el denominador es 3, se llama *tercio*; si el denominador es 4, *cuarto*; y así sucesivamente *quinto*, *sexto*, *sétimo*, *octavo*, *noveno*, y *décimo* para los denominadores 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Las denominaciones correspondientes á denominadores mayores se forman añadiendo al nombre del denominador la terminacion *avo;* así se dice *once-avo*, *doce-avo*, *veinte-avo*, *ciento catorce-avo*, etc., para los denominadores 11, 12, 20, 114, etc.

(*) Cuando se dice simplemente *unidad*, se sobreentiende la unidad entera ó uno.
Tanto la unidad entera como la fraccionaria se consideran como números respectivamente enteros ó fraccionarios.

121. Para enunciar un número fraccionario, se lee primero el numerador como si fuera entero, añadiendo luego la denominacion respectiva, ó sea la especie de la unidad fraccionaria á que se refiere.

Dividida la unidad en veinte partes iguales, cinco de estas partes formarán un número fraccionario, que se enunciará 5 *veinte-avos*. Diez y nueve de las mismas partes se leerán 19 *veinte-avos*, etc.

Para escribir los números fraccionarios, se escribe el numerador sobre una línea horizontal, y debajo el denominador.

Cinco *veinte-avos*, diez y nueve *veinte-avos* se escriben así... $\frac{5}{20}$ y $\frac{19}{20}$

Todos los números fraccionarios de igual denominador se refieren á una misma unidad fraccionaria y se llaman por esta razon *fraccionarios homogéneos*. Así dos *quintos*, tres *quintos*, cuatro *quintos* y nueve *quintos*, tienen por unidad comun á un *quinto*.

La reunion de un entero y un fraccionario se llama *número misto*.

8 unidades y cuatro-quintos de otra unidad forman un número misto.

Consecuencias de la definicion de los números fraccionarios.

122. Los números fraccionarios, cuyo numerador es menor que su denominador, valen menos que la unidad entera. Si el numerador es igual al denominador, valen una unidad. Si el numerador es mayor que el denominador, valen mas que la unidad.

$$\frac{4}{5}<1 \quad \Big| \quad \frac{5}{5}=1 \quad \Big| \quad \frac{6}{5}>1$$

Ordinariamente se llaman *fracciones* ó *quebrados propios* los números fraccionarios menores que la unidad entera, y *fraccionarios* ó tambien *quebrados impropios* los mayores que la unidad. Nosotros usaremos la palabra *fraccionario*, para indicar una parte ó un número compuesto de partes iguales de la unidad, ya sea mayor ó menor que esta unidad. La palabra *fraccion* indicará siempre un número menor que la unidad.

El cociente completo, ó el cociente total de dos números enteros, se halla añadiendo al cociente entero una fraccion cuyo numerador sea el resto de la division, y su denominador el divisor.

En efecto, para hallar el cociente total de 14 entre 3, se descompone el dividendo 14 en los sumandos 12+2, y la suma de los cocientes de estos números por 3 será evidentemente el total de los números dados.

$$14 : 3=4+\frac{2}{3}$$

Todo número fraccionario mayor que la unidad es igual al cociente total del numerador por el denominador (*). A todo número entero se puede dar la forma fraccionaria, suponiéndole por denominador la unidad. Un entero se reduce á fraccionario de un denominador dado, poniendo por numerador de este su producto por el entero.

$$\frac{25}{6}=4+\frac{1}{6} \qquad 8=\frac{8}{1} \qquad 11=\frac{11\times12}{12}$$

(*) Sea el número fraccionario dado $\frac{A}{B}$; llamando C el cociente entero del numerador por el denominador, y R el resto de esta division; tendremos.....

$$A=C\times B+R \qquad \text{de donde se deduce } \frac{A}{B}=C+\frac{R}{B}$$

Cuando los datos son números particulares, se omite el signo + que separa el entero del fraccionario.

Alteracion de los números fraccionarios por la variacion de sus términos.

123. Si aumenta ó disminuye el numerador de un número fraccionario (permaneciendo constante su denominador), aumentará ó disminuirá el número fraccionario.

Supuesto que la unidad fraccionaria es una misma (por ser constante el denominador), es evidente que el mayor ó menor número de estas hará mayor ó menor al número fraccionario.

Cor. Si dos ó mas números fraccionarios tienen un mismo denominador, es mayor el que tenga mayor numerador.

124. Si aumenta ó disminuye el denominador de un número fraccionario (permaneciendo constante el numerador), disminuirá ó aumentará el número fraccionario.

De la definicion de la unidad fraccionaria se deduce que, esta será tanto menor cuanto mayor sea su denominador. Luego en un mismo número de unidades fraccionarias, el menor ó mayor valor de cada una hará disminuir ó aumentar el valor de todas, ó sea el del número fraccionario equivalente.

Cor. Si dos ó mas números fraccionarios tienen un mismo numerador, es mayor el que tenga menor denominador.

Esc. Si añadimos ó restamos de los dos términos de una *fraccion* un mismo número entero, la fraccion que resulta es mayor en el primer caso y menor en el segundo que la fraccion primitiva. Lo contrario se verifica, si la fraccion es impropia ó mayor que la unidad.

Si la fraccion dada es $\frac{3}{5}$ será $\frac{3}{5}<\frac{3+10}{5+10}$

En efecto, las diferencias entre la unidad entera y las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{3+10}{5+10}$ son respectivamente $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{5+10}$; y como esta última diferencia es menor que la primera, es evidente que la segunda fraccion será mayor que la fraccion dada, puesto que le falta menos para valer la unidad.

Añadiendo á los dos términos de un número fraccionario, mayor que la unidad, un mismo número entero, el exceso del resultado sobre la unidad será menor que el exceso del número dado sobre la misma unidad; y por consiguiente, el número fraccionario que resulta será menor que el primitivo.

Una demostracion análoga es aplicable al caso de restar de ambos términos un mismo número.

Siendo $\frac{4}{3}$ un número fraccionario mayor que la unidad; tendremos.....

$$\frac{4}{3}>\frac{4+10}{3+10} \quad \Big| \quad \frac{4}{3}<\frac{4-1}{3-1} \qquad (^*)$$

125. Si el numerador de un número fraccionario se multiplica por cualquiera número entero, ó se divide por uno de sus divisores, el número fraccionario resultará multiplicado ó dividido por el mismo número.

En efecto, refiriéndose ambos números fraccionarios á la misma unidad fraccionaria, es evidente que, si el segundo contiene duplo ó mitad número de unidades que el primero, será tambien duplo ó mitad de este.

(*) Siendo A menor que B; tendremos.....

$$\frac{A}{B}<\frac{A+N}{B+N} \qquad \frac{A}{B}>\frac{A-N}{B-N} \qquad \frac{B}{A}>\frac{B+N}{A+N} \qquad \frac{B}{A}<\frac{B-N}{A-N}$$

Cor. Para *multiplicar* un número fraccionario por otro número entero, basta multiplicar el numerador por dicho número sin alterar el denominador. Para *dividir* un número fraccionario por uno de los divisores de su numerador, se divide este por dicho divisor, sin alterar el denominador.

$$\frac{8}{20}\times4=\frac{8\times4}{20}=\frac{32}{20} \qquad \frac{8}{20}:4=\frac{8:4}{20}=\frac{2}{20}$$

126. Si el denominador de un número fraccionario se multiplica por un número entero cualquiera, ó se divide por uno de sus divisores, el número fraccionario resultará dividido ó multiplicado por el mismo número.

Efectivamente; multiplicando el denominador de una unidad fraccionaria por 2, 3, 4, etc., la unidad fraccionaria será el mismo número de veces menor.

Dividiendo el denominador de una unidad fraccionaria por 2, 3, 4, etc., la unidad fraccionaria será el mismo número de veces mayor.

Luego, si el número de unidades fraccionarias es uno mismo antes y despues de la variacion del denominador, la proposicion es evidente.

Cor. Para *multiplicar* un número fraccionario por uno de los divisores de su denominador, basta dividir este por aquel divisor, sin alterar el numerador. Para *dividir* un número fraccionario por otro número entero cualquiera, basta multiplicar su denominador por dicho número, sin alterar el numerador.

$$\frac{8}{20}\times4=\frac{8}{20:4}=\frac{8}{5} \qquad \frac{8}{20}:4=\frac{8}{20\times4}=\frac{8}{80}$$

El producto de un número fraccionario por su denominador es igual al numerador.

$$\frac{4}{5}\times5=\frac{4}{5:5}=\frac{4}{1}=4 \qquad \frac{1}{20}\times20=1 \qquad \frac{9}{7}\times7=9$$

Esc. Un número fraccionario no varía aunque se multipliquen el numerador y denominador por un mismo número entero cualquiera, ó se dividan el uno y el otro por un divisor comun á ambos (*).

$$\frac{8}{20}=\frac{8\times5}{20\times5}=\frac{40}{100} \qquad \frac{8}{20}=\frac{8:4}{20:4}=\frac{2}{5}$$

En el primer caso, multiplicando el numerador 8 por el número entero 5, el quebrado resultará tambien multiplicado por 5;
y como por la multiplicacion del denominador 20 por el mismo número 5 se hace el resultado anterior 5 veces mas pequeño;
es evidente que el número fraccionario propuesto no varía aun cuando sus dos términos se multipliquen por 5 ó en general por un número entero cualquiera.

Lo mismo se prueba el caso de la division de ambos términos por uno de sus divisores comunes, puesto que, dividiendo el numerador del ejemplo propuesto por el divisor 4, el quebrado resultará tambien dividido por 4;
y como por la division del denominador 20 por el mismo número 4, se hace el resultado anterior 4 veces mayor; es evidente que el número fraccionario no habrá variado despues de dividir sus dos términos por el divisor comun 4.

$$\frac{3.10.49}{11.9.7.5.4}=\frac{2.49}{11.3.7.4}=\frac{7}{11.3.2}$$

(*) Si dos ó mas fraccionarios iguales se suman ó se restan ordenadamente, es decir los numeradores entre sí y despues los denominadores, el resultado será igual á uno cualquiera de los fraccionarios propuestos.

Simplificacion de los números fraccionarios.

127. *Simplificar* un número fraccionario es transformarle en otro equivalente, pero cuyos términos sean menores. Un número fraccionario se llama *irreducible* cuando no se puede expresar exactamente por otro fraccionario de términos menores.

Los dos términos de un número fraccionario irreducible son primos entre sí, y recíprocamente, *si el numerador y denominador de un número fraccionario son primos entre sí, el número fraccionario será irreducible.*

La primera parte de la proposicion es evidente, pues de lo contrario dividiendo el numerador y denominador por su m. c. d., hallaríamos un nuevo número fraccionario equivalente al dado y con términos menores.

Para demostrar la segunda parte, supongamos que el fraccionario $\frac{11}{7}$ cuyos términos son primos entre sí, sea igual á otro $\frac{5}{3}$ de términos respectivamente menores que 11 y 7. Multiplicando los numeradores de ambos fraccionarios por el denominador del segundo, los resultados serán iguales.... $\frac{11\times3}{7}=\frac{5\times3}{3}=5$

Luego 7 será divisor de 11×3, y como 7 y 11 son primos entre sí, 7 será divisor de 3 (**109**); pero esto es un absurdo porque 7 es mayor que 3; luego el número fraccionario propuesto $\frac{11}{7}$ será irreducible.

De este teorema se deducen las consecuencias siguientes:

Los términos de un número fraccionario equivalente á otro irreducible son los productos de multiplicar el numerador y denominador de este por un mismo número entero. Dos ó mas números fraccionarios, irreducibles iguales, tienen iguales sus numeradores y tambien sus denominadores; y dos números fraccionarios irreducibles de términos diferentes no pueden ser iguales.

128. Para *simplificar* un número fraccionario cuyos dos términos tienen un divisor comun diferente de la unidad, se dividen su numerador y denominador por este divisor.

La fraccion $\frac{30}{42}$ *ó sea* $\frac{2\times3\times5}{2\times3\times7}$ *despues de simplificada será* $\frac{5}{7}$

En efecto; los dos términos de la fraccion propuesta son divisibles por 2: suprimiendo en ambos este divisor tendremos otra fraccion equivalente. Los dos términos de esta son divisibles por 3, y por consiguiente, la supresion de este factor comun en el numerador y denominador nos dará una nueva fraccion, equivalente á la propuesta. Y como los dos términos de la última fraccion son primos entre sí, la fraccion dada, transformada en irreducible, será igual á $\frac{5}{7}$

Del mismo modo $\frac{1050}{11550}=\frac{105}{1155}=\frac{21}{231}=\frac{7}{77}=\frac{1}{11}$

Si no es fácil conocer inmediatamente los factores comunes del numerador y denominador del número fraccionario que se desea simplificar, se halla el máximo comun divisor de sus dos términos.

Así, para simplificar el número fraccionario $\frac{437}{391}$, hallaremos el máximo comun divisor del numerador y denominador, que es 23, y suprimiendo este divisor en ambos términos, tendremos el fraccionario irreducible equivalente al propuesto.

$\frac{2960}{4995}=\frac{592}{999}=\frac{16}{27}$ $\frac{29}{9889}=\frac{1}{341}$ $\frac{1155}{1365}=\frac{11}{13}$ $\frac{374}{136}=\frac{11}{4}$

Reduccion de dos ó mas números fraccionarios de diferentes denominadores á otros de igual valor y de un mismo denominador.

129. Para reducir dos ó mas números fraccionarios de diferentes denominadores á otros de igual valor y de un mismo denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demas.

Así $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$ equivalen respectivamente á $\frac{2\times4}{3\times4}$ y $\frac{5\times3}{4\times3}$ ó bien á $\frac{8}{12}$ y $\frac{15}{12}$

En efecto; multiplicando los dos términos del primer fraccionario por el denominador 4 del segundo y los dos términos de este por el denominador 3 del primero, los resultados, segun el escolío **126**, serán respectivamente iguales á los números dados, reuniendo ademas la circunstancia de tener ambos un mismo denominador igual al producto de los denominadores de los fraccionarios propuestos.

Igualmente $\frac{4}{9}$ y $\frac{13}{11}$ son equivalentes respectivamente á $\frac{44}{99}$ y $\frac{117}{99}$

Supongamos ahora que los números dados son tres ó mas, como por ejemplo los siguientes: $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{10}$

Multiplicando los dos términos del primero por 3×10; los del segundo por 7×10; y los del tercero por 7×3; tendremos

$$\frac{2}{7}=\frac{2.3.10}{7.3.10}=\frac{60}{210} \qquad \frac{4}{3}=\frac{4.7.10}{3.7.10}=\frac{280}{210} \qquad \frac{1}{10}=\frac{1.7.3}{10.7.3}=\frac{21}{210}$$

Otros ejemplos:

$$\frac{2}{3}\quad\frac{4}{7}\quad\frac{1}{10} \qquad \Big| \qquad \frac{3}{7}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{11} \qquad \Big| \qquad \frac{1}{3}\quad\frac{3}{2}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{3}{10}\quad\frac{6}{5}$$

$$\frac{140}{210}\quad\frac{120}{210}\quad\frac{21}{210} \qquad \Big| \qquad \frac{66}{154}\quad\frac{77}{154}\quad\frac{28}{154} \qquad \Big| \qquad \frac{400}{1200}\quad\frac{1800}{1200}\quad\frac{300}{1200}\quad\frac{360}{1200}\quad\frac{1440}{1200}$$

***130.** La reduccion de los números fraccionarios de diferentes denominadores á otros de un denominador comun se abrevia cuando dos ó mas denominadores no son primos entre sí. La regla en este caso es la siguiente: *Multipliquense los dos términos de cada fraccionario por el cociente de dividir el m. m. c. de todos los denominadores por el denominador del mismo.*

Reducir á un comun denominador, los números $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{25}{24}$

Como el denominador 24 del último fraccionario es el m. m. de todos los denominadores; se multiplicarán los dos términos del primer fraccionario por $24:3=8$; y los del segundo por $24:6=4$, y tendremos los nuevos fraccionarios $\frac{8}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{25}{24}$ iguales respectivamente á los fraccionarios dados.

Reducir á un denominador comun los números $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{45}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{17}{15}$

El m. m. c. de todos los denominadores es igual á $2.\ 3.\ 3.\ 5=90$;

luego los números dados serán respectivamente equivalentes á $\frac{21}{90}$, $\frac{22}{90}$, $\frac{10}{90}$, $\frac{27}{90}$, $\frac{102}{90}$

Esc. Si dos ó mas números fraccionarios tienen numeradores y denominadores diferentes, para saber cual de ellos es mayor, se reducen á un mismo denominador, y el que tenga despues de reducido mayor numerador será el mayor.

$\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{5}{9}$ por que $\frac{36}{45}$ es mayor que $\frac{25}{45}$

Definicion y numeracion de los números decimales.

Definicion de los números decimales y su nomenclatura.

131. Llámase *unidad fraccionaria decimal* la unidad fraccionaria cuyo denominador es 10, 100, 1000 ó en general la unidad seguida de ceros.

Dividida pues la unidad entera en diez, ciento, mil, diez mil, etc., partes iguales, cada una de estas será una unidad fraccionaria decimal; y por consiguiente.....

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000000}$ etc. son unidades fraccionarias *decimales.*

La NOMENCLATURA de las diferentes unidades decimales es la siguiente: *décimas* cuando el denominador es 10; *centésimas* cuando el denominador es 100; *milésimas* si el denominador es 1000, *diez milésimas*, *cien milésimas*, *millonésimas*, *diez millonésimas*, *cien millonésimas*, *mil millonésimas*, *diez mil millonésimas*, *cien mil millonésimas*, *billonésimas*, etc. para los denominadores 10000, 100000, 1000000 etc.

Luego una *unidad entera* vale 10 décimas ó 100 centésimas ó 1000 milésimas etc. Un *décima* vale 10 centésimas ó 100 milésimas ó 1000 diez milésimas etc. Una *centésima* es lo mismo que 10 milésimas ó 100 diez milésimas y así sucesivamente. Las décimas son unidades del primer órden decimal, las centésimas lo son del segundo órden decimal, las milésimas lo son del tercero, las diez milésimas del cuarto, etc.; y por consiguiente una unidad de un órden decimal cualquiera vale diez unidades del órden decimal siguiente. El número de unidades de cada órden es siempre inferior á 10.

Los números fraccionarios, cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, se llaman *fraccionarios decimales* ó simplemente *decimales*; y por consiguiente, tambien se puede decir que *números decimales* son los que constan de varias unidades decimales.

$\frac{5}{10}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{108}{1000}$, $\frac{12301}{10000}$ etc. son *números decimales.*

Ordinariamente los números decimales menores que la unidad entera se llaman *fracciones decimales*, y los mayores que la unidad *números mistos* de entero y decimal.

De lo que llevamos dicho se deduce que, los números decimales son un caso particular de los números fraccionarios, y por consiguiente todas las verdades, que hemos explicado relativamente á estos números, se verifican tambien en los decimales. No obstante, la uniformidad de las unidades decimales ofrece grandes ventajas en el cálculo aritmético, permite leer y escribir los números decimales como si fuesen enteros, es decir sin denominadores; y como ademas los enteros y decimales forman un sistema completo y uniforme de numeracion, se mira con fundamento á los decimales como una simplificacion de los números fraccionarios comunes ú ordinarios (*).

(*) Todas estas ventajas son independientes de la base del sistema de numeracion. Sea esta cualquiera, si el fundamento del sistema es el mismo que el del sistema decimal, las unidades y números fraccionarios, cuyos denominadores son la base ó sus potencias sucesivas, se escriben y leen como los enteros, formando unos y otros un sistema uniforme de numeracion. No obstante el empleo de las fracciones ordinarias siempre se necesitará para los casos en que los valores de los fraccionarios no pueden valuarse exactamente en otros equivalentes decimales.

Escritura de los números decimales.

132. Del principio fundamental de la numeracion escrita de los números enteros se deduce que, toda cifra escrita á la derecha de otra representa unidades diez veces menores que las que expresa la que está á su izquierda, y por consiguiente si escribimos nuevas cifras á la derecha de las unidades de primer órden de un número entero, la primera de estas cifras, ó sea la que inmediatamente sigue á las unidades, expresará *décimas*, la segunda *centésimas*, la tercera *milésimas* y así sucesivamente.

Para distinguir las unidades enteras de las decimales, se separan unas de otras por medio de una coma ó señal cualquiera; nosotros usaremos una vírgula de esta forma , para evitar las equivocaciones á que puede dar orígen el variado uso de la coma.

Esto supuesto, el número 35,249 equivale á

3 *decenas* 5 *unidades* 2 *décimas* 4 *centésimas* y 9 *milésimas*.

ó lo que es lo mismo á 35 *unidades* y 249 *milésimas* (*).

Del mismo modo 18,084527=18 *unidades*+84527 *millonésimas*.

Si el número dado no tiene unidades ó lo que es lo mismo vale menos que una unidad, la parte entera será cero. Así

0,625 equivale á 6 *décimas* 2 *centésimas* y 5 *milésimas* ó bien á 625 *milésimas*.

0,00104 es igual á 104 *cien milésimas*; y así sucesivamente. Luego....

Los números decimales menores que la unidad se escriben poniendo cero y despues la coma ó vírgula y á su derecha las décimas, luego las centésimas, despues las milésimas, etc. Si el número decimal es mayor que la unidad, la parte entera ocupará el lugar del cero.

El número decimal $\frac{4}{10}$ ó 4 *décimas* se escribirá así 0,4

Del mismo modo $\frac{12}{100}=0{,}12$ $\frac{12}{1000}=0{,}012$ $\frac{12}{1000000}=0{,}000012$

$\frac{1857}{10}=185{,}7$ $\frac{1857}{100}=18{,}57$ $\frac{1857}{1000}=1{,}857$ (**).

Los números decimales se leen como si fuesen enteros, expresando al fin la *denominacion* correspondiente á la última cifra.

Si el número decimal consta de parte entera y parte decimal, la parte entera se puede leer como los números enteros y la decimal como se acaba de indicar.

0,001857 se lee: mil ochocientos cincuenta y siete *millonésimas*.

2,045 dos mil cuarenta y cinco *milésimas* ó 2 unidades y 45 milésimas

104,0400001089 ciento cuatro *unidades* y cuatrocientos millones mil ochenta y nueve *diez mil millonésimas*. O de otro modo: 104 unidades 40 milésimas 108 mil millonésimas y 9 diez mil millonésimas.

Los números decimales, que llevan una misma denominacion, se refieren á una misma unidad decimal y tienen un mismo número de cifras decimales. Así cuatro, ocho, veinte, ó sesenta centésimas se refieren á la unidad comun *una centésima*.

(*) Pues si una décima vale 100 milésimas y una centésima vale 10 milésimas, es evidente que 2 décimas mas 4 centésimas serán lo mismo que 240 milésimas.

(**) Tambien se dice que, para escribir un número decimal, basta escribir el numerador y separar de su derecha tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador.

Consecuencias de la numeracion de los números decimales.

133. El órden de las unidades, que representa cada una de las cifras de un número decimal, depende únicamente del lugar que ocupa con relacion á la coma ó vírgula y por consiguiente.....

1.° **Un número decimal no varia aunque se añadan ó quiten ceros de su derecha.**

En efecto; 0,8 es lo mismo que 0,800;

pues 800 *milésimas* equivalen á 8 *décimas*, cero centésimas y cero milésimas.

Esto mismo se deduce, si escribimos los números decimales en forma de quebrados ordinarios, en cuyo caso.....

0,8 y 0,800 serán iguales, porque equivalen respectivamente á $\frac{8}{10}$ y $\frac{800}{1000}=\frac{8}{10}$

Cor. Todo número entero puede considerarse como decimal, escribiendo á su derecha el número de ceros decimales que se quiera.

Los números fraccionarios, cuya unidad decimal es diferente, se reducen á otros de una misma unidad añadiendo uno ó mas ceros á la derecha del que tuviere menos cifras decimales.

Así los números decimales	0,4	5,84	14,002
equivalen respectivamente á los homogéneos	0,400	5,840	14,002

2.° **Si la coma ó vírgula de un número decimal se mueve á la derecha uno, dos ó mas lugares, se hace el número diez veces mayor por cada lugar que adelante.**

Corriendo la coma de 2,548 dos lugares á la derecha, el número que resulta 254,8 será *cien veces mayor* que el primero.

En efecto; $\begin{cases} 2{,}548 = 2 \text{ unidades} + 5 \text{ décimas} + 4 \text{ centésimas} + 8 \text{ milésimas} \\ 254{,}8 = 2 \text{ centenas} + 5 \text{ decenas} + 4 \text{ unidades} \quad + 8 \text{ décimas} \end{cases}$

y como cada una de las partes del número segundo es *cien veces mayor* que la correspondiente del primero; se infiere que, todo el número segundo será *cien veces mayor* que el primero.

Mil veces 2,548 será 2548; y *un millon* de veces el mismo número, será 2548000

Cor. La supresion de la coma ó vírgula en un número decimal equivale á hacerle tantas veces mayor como indique la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene.

Así, la supresion de la vírgula en el número decimal 1,857 le transforma en el número entero 1857 que es *mil* veces mayor que el anterior.

3.° **Si la coma de un número decimal se mueve de derecha á izquierda, se hace el número diez veces menor por cada lugar que corra la coma.**

Corriendo la coma de 149,2 dos lugares á la izquierda, el número que resulta 1,492 será *cien veces menor* que el primero; pues este, segun la proposicion anterior, es cien veces mayor que aquel.

0,1492 y 0,0001492 son *mil* y *un millon* de veces menores que 149,2

Esta proposicion y la anterior se pueden demostrar tambien, transformando los números decimales en fraccionarios comunes ú ordinarios.

Cor. **Para dividir un número entero por la unidad seguida de ceros ó sea por una potencia cualquiera de la base del sistema de numeracion, basta separar de la derecha de dicho número tantas cifras decimales como indique el grado de la potencia de la base, ó sea el número de ceros que sigan á la unidad.**

1825 : 10=182,5   1825 : 1000=1,825   1825 : 100000=0,01825

ADICION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Adicion de dos ó mas números fraccionarios. Adicion de un entero y un fraccionario. Adicion de enteros y fraccionarios ó llámense números mistos. *Adicion de dos ó mas números fraccionarios decimales.*

Adicion de dos ó mas números fraccionarios.

134. Para *sumar* dos ó mas números fraccionarios de un mismo denominador, se suman los numeradores y á esta suma se pone por denominador el denominador comun. Si los sumandos tienen denominadores diferentes, se reducen á uno comun y se practica en seguida la misma operacion que en el caso anterior.

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9} \qquad \frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20} \qquad \frac{2}{5}+\frac{5}{4}+\frac{19}{20}+\frac{1}{2}=3\frac{1}{10}\ (*)$$

Adicion de un entero y un fraccionario.

135. Para sumar un entero y un fraccionario ó sea para reducir un número misto á fraccionario, se multiplica el entero por el denominador del fraccionario, al producto se añade el numerador, y á la suma se pone por denominador el denominador del fraccionario.

$$8+\frac{3}{4}=\frac{8\times4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{8\times4+3}{4}=\frac{35}{4} \qquad \frac{11}{8}+5=\frac{51}{8}$$

Adicion de enteros y fraccionarios ó sea de números mistos.

136. Para sumar dos ó mas números fraccionarios acompañados de enteros, ó sea para sumar números mistos, se suman los enteros con los enteros y los fraccionarios con los fraccionarios, añadiendo á aquellos lo que resulte de la suma de estos.

$$\left(8+\frac{2}{9}\right)+\left(4+\frac{3}{9}\right)+\left(10+\frac{1}{9}\right)=22\frac{6}{9}=22\frac{2}{3}$$

En efecto, la suma pedida será igual á la de los números $8, 4, 10, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}$; la de los enteros es 22 y la de los fraccionarios es $\frac{2}{3}$; luego la *total* será $22\frac{2}{3}$

$$8\frac{6}{11}+14\frac{1}{2}=22+\frac{12}{22}+\frac{11}{22}=22+\frac{23}{22}=23\frac{1}{22}$$

$$12\frac{3}{5}+5\frac{1}{2}+\frac{7}{20}+105=123\frac{9}{20}$$

$$\begin{array}{r} 2148\frac{1}{2}\ldots\ldots\frac{7}{14} \\ 205\frac{5}{14}\ldots\ldots\frac{5}{14} \\ \hline \text{suma } 2353\frac{6}{7} \end{array}$$

(*) Si los sumandos son $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$, se verrificará que $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=\frac{A+B+C}{D}$

En efecto; llamando a, b, c los valores respectivos de los datos, tendremos.....

$\frac{A}{D}=a \quad \frac{B}{D}=b \quad \frac{C}{D}=c$ de donde se deduce $A=a\times D \quad B=b\times D \quad C=c\times D$

sumando ordenadamente estas igualdades será $A+B+C=(a+b+c)\times D$

y por consiguiente $a+b+c=\frac{A+B+C}{D}$ ó bien $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=\frac{A+B+C}{D}$

Adicion de los números decimales.

137. Los números decimales se suman lo mismo que los enteros, escribiendo la coma ó vírgula en la suma en el lugar que la corresponde, es decir á la izquierda de las décimas.

El resultado así obtenido es la suma total, pues contiene las sumas parciales de las unidades de todos los órdenes de los sumandos.

Sumandos	0,147	0,0108049	185
	0,488	6,455	5,20098
	0,00004	18,01221	0,808
	0,1812	489,05	4,0090728
Suma	0,81624	513,5280149	195,0180528

$$6{,}22+10{,}009+0{,}12144+0{,}0094+1{,}105105+9{,}999=27{,}463945$$

SUSTRACCION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Sustraccion de un número fraccionario de otro fraccionario. Sustraccion de un número fraccionario de un número entero. Sustraccion de un número misto de otro misto. *Sustraccion de los números decimales.*

Sustraccion de un número fraccionario de otro fraccionario.

138. Para *restar* un número fraccionario de otro fraccionario, cuando ambos tienen un mismo denominador, se restan sus numeradores y á la resta se pone por denominador el denominador comun. Si el minuendo y sustraendo no tienen iguales denominadores, se transforman en otros de un mismo denominador y se practica en seguida la misma operacion que en el caso anterior.

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9} \qquad \frac{3}{4}-\frac{2}{7}=\frac{21}{28}-\frac{8}{28}=\frac{21-8}{28}=\frac{13}{28}$$

$$\frac{105}{800}-\frac{55}{800}=\frac{50}{800}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16} \qquad \frac{21}{16}-\frac{3}{8}=\frac{21}{16}-\frac{6}{16}=\frac{15}{16} \quad (*)$$

Sustraccion de un número fraccionario de un número entero.

139. Para restar un fraccionario de un entero, se multiplica el entero por el denominador del fraccionario, del producto se resta el numerador y al resíduo se pone por denominador el denominador del número fraccionario.

Esta regla se deduce de la anterior y de la que hemos dado para reducir un número entero á fraccionario de un denominador dado, puesto que transformado el minuendo en fraccionario del mismo denominador que el sustraendo, queda reducida la operacion á restar dos fraccionarios.

$$8-\frac{3}{4}=\frac{8\times4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{8\times4-3}{4}=\frac{29}{4}=7\frac{1}{4} \qquad 5-\frac{11}{8}=\frac{29}{8}=3\frac{5}{8}$$

(*) Si $\frac{A}{D}$ y $\frac{B}{D}$ son los datos; se verificará que $\frac{A}{D}-\frac{B}{D}=\frac{A-B}{D}$

Llamando a y b los valores respectivos del minuendo y sustraendo; tendremos.....

$\frac{A}{D}=a \quad \frac{B}{D}=b$ de donde se deduce $A=a\times D \quad B=b\times D$

restando ordenadamente estas igualdades será $A-B=(a-b)\times D$

y por consiguiente $a-b=\frac{A-B}{D}$ ó bien $\frac{A}{D}-\frac{B}{D}=\frac{A-B}{D}$

Sustraccion de un número misto de otro misto.

140. Para restar dos números compuestos de una parte entera y otra fraccionaria, ó sea para restar dos números mistos, se restan los fraccionarios y despues los enteros, y la suma de ambos resultados será la resta total.

Si el fraccionario del sustraendo es mayor que el del minuendo, se añade á este una unidad considerándola de menos al entero; ó bien se añade una unidad al fraccionario del minuendo y otra al entero del sustraendo para que la resta no se altere.

$$\left(8+\frac{7}{9}\right)-\left(2+\frac{5}{9}\right)=6+\frac{2}{9} \qquad 8\frac{4}{7}-2\frac{5}{7}=8\frac{11}{7}-3\frac{5}{7}=5\frac{6}{7}$$

Siendo 6 la diferencia de los enteros en el primer ejemplo, y $\frac{2}{9}$ la diferencia de los quebrados, es evidente que la suma de estas diferencias será la *diferencia* total que se pide.

La fraccion del minuendo en el segundo ejemplo es menor que la del sustraendo; y por consiguiente, si añadimos una unidad á la primera y otra al entero del sustraendo, la *diferencia* de los números dados será la misma que la de $8\frac{11}{7}$ y $3\frac{5}{7}$; es decir $5\frac{6}{7}$

Otros ejemplos:

$$11\frac{2}{9}-3\frac{1}{3}=11\frac{2}{9}-3\frac{3}{9}=7\frac{8}{9} \qquad 7\frac{4}{11}-3\frac{8}{7}=7\frac{28}{77}-3\frac{88}{77}=3\frac{17}{77}$$

Esc. Cuando uno de los datos es entero ó fraccionario, tendremos.....

$$15-2\frac{8}{11}=15\frac{11}{11}-3\frac{8}{11}=12\frac{3}{11} \qquad 7\frac{3}{5}-\frac{9}{8}=7\frac{24}{40}-\frac{45}{40}=6\frac{19}{40}$$

$$12\frac{8}{9}-10=2\frac{8}{9} \qquad 7-\frac{8}{19}=6\frac{11}{19}$$

El procedimiento seguido en este último ejemplo, que consiste en suponer cero el fraccionario del minuendo y aplicar luego la regla general para la sustraccion de dos números mistos, es preferible al que dejamos indicado antes, para el caso de restar de un número entero otro fraccionario (*).

Sustraccion de los números decimales.

141. Los números decimales se restan como si fuesen enteros, escribiendo la coma en el lugar correspondiente.

El resultado obtenido de este modo será el *resíduo total*, pues contiene los resíduos parciales de las unidades de todos los órdenes de los datos. Si el minuendo y sustraendo no se refieren á una misma unidad decimal, se añadirán ceros á la derecha del que tenga menor número de guarismos decimales y se practica la misma operacion que en el caso anterior.

datos	0,45085	40,874957	3,500000	(**)
	0,20588	0,320000	3,252999	
Resultado	0,24497	40,554957	0,247001	

Tambien se puede disponer esta operacion, escribiendo los datos y el resultado en un mismo renglon. Asi.....

$$0{,}52-0{,}2856=0{,}2344 \qquad 8{,}105-6=2{,}105 \qquad 1-0{,}000008=0{,}999992$$

(*) La adicion y sustraccion de los números mistos pudiera efectuarse reduciéndolos á fraccionarios y sumando ó restando estos.

(**) En la práctica se consideran el minuendo y sustraendo de igual número de guarismos decimales, suponiendo ceros á la derecha del que tuviere menos.

MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Multiplicacion de un número fraccionario por un entero, de un entero por un fraccionario, de dos fraccionarios, y de dos números mistos. Observaciones generales. *Multiplicacion de los números décimales.*

Multiplicacion de un número fraccionario por un entero.

142. Para *multiplicar* un número fraccionario por un número entero, se multiplica el numerador por el entero dejando el mismo denominador.

$$\frac{10}{12}\times3=\frac{10.3}{12}=\frac{30}{12}$$

En efecto; el producto que se pide equivale á la suma de tres sumandos iguales al multiplicando, y por consiguiente será.....

$$\frac{10}{12}\times3=\frac{10}{12}+\frac{10}{12}+\frac{10}{12}=\frac{10+10+10}{12}=\frac{10\times3}{12}$$

Multiplicacion de un entero por un número fraccionario.

143. Para multiplicar un entero por un número fraccionario, se multiplica el entero por el numerador dejando el mismo denominador.

$$3\times\frac{10}{12}=\frac{3.10}{12}=\frac{30}{12}$$

El multiplicador equivale á 10 veces la dozava parte de la unidad; y por consiguiente el producto de los números dados se hallará tomando 10 veces la dozava parte del multiplicando; pero la dozava parte de 3 es $\frac{3}{12}$; luego 10 veces este número será el producto pedido. (*)

Multiplicacion de dos números fraccionarios.

144. Para multiplicar dos números fraccionarios se multiplican los numeradores y despues los denominadores, escribiendo el primer producto por numerador y el segundo por denominador.

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$$

El producto será igual á 4 veces la quinta parte del multiplicando; pero la quinta parte del multiplicando es 5 veces menor que $\frac{2}{3}$ ó sea $\frac{2}{3.5}$ luego el producto pedido será 4 veces este número ó bien $\frac{2\times4}{3\times5}$.

Del mismo modo $\frac{3}{11}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{22}$ $\qquad \frac{5}{105}\times\frac{91}{11}=\frac{455}{1155}=\frac{91}{231}$

Esta regla comprende los dos casos anteriores, porque si uno cualquiera de los factores es entero, se le puede considerar como fraccionario escribiendo por denominador la unidad. (**)

(*) Este caso y el anterior se pueden reducir á uno diciendo que para multiplicar un entero por un fraccionario ó al contrario, se multiplica el numerador por el entero, sin alterar el denominador.

(**) Si los números dados son $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$; tendremos $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$

Llamando a al multiplicando y b al multiplicador; tendremos $A=a\times B \quad C=b\times D$

y multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta $A\times C=a\times b\times B\times D$

y por consiguiente $a\times b=\frac{A\times C}{B\times D}$ ó bien $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$

Esc. *El producto de dos números fraccionarios es el mismo aunque se tome el multiplicando por multiplicador y al contrario,* pues el producto tendrá siempre por numerador el producto de los numeradores de los factores y por denominador el producto de sus denominadores.

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5} \quad\Big|\quad \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4\times2}{5\times3}$$

145. Para multiplicar dos números compuestos de una parte entera y otra fraccionaria ó sea para multiplicar dos números mistos, se reducen á fraccionarios y luego se multiplican como estos. Si uno de los datos es entero ó fraccionario, se transforma el misto en fraccionario y la operacion queda reducida á uno de los casos anteriores.

$$2\frac{1}{3}\times4\frac{3}{5}=\frac{7}{3}\times\frac{23}{5}=10\frac{11}{15} \qquad 4\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{14}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{70}{24}=2\frac{11}{12}$$

$$5\frac{4}{11}\times4=\frac{59}{11}\times4=\frac{236}{11}=21\frac{5}{11} \qquad 10\times4\frac{1}{5}=10\times\frac{21}{5}=\frac{210}{5}=42$$

Observaciones y teoremas acerca de la multiplicacion de los números fraccionarios.

146. *Para multiplicar una suma ó diferencia indicada de dos ó mas números por otro fraccionario,* se multiplica cada número del multiplicando por el multiplicador y la suma ó diferencia de los productos parciales será el producto total.

$$\left(10+\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}=10\times\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4} \quad\Big|\quad \left(10-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}=10\times\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$$

*1.° El producto de $\left(10+\frac{2}{5}\right)$ por $\frac{3}{4}$ es igual á 3 veces la cuarta parte del multiplicando, ó bien á 3 veces la cuarta parte de los sumandos 10 y $\frac{2}{5}$; luego será tambien igual á tres cuartas partes de cada uno de estos sumandos y por consiguiente la primera igualdad es evidente.

*2.° Llamando D la diferencia entre 10 y $\frac{2}{5}$, tendremos

$10=D+\frac{2}{5}$ de donde se deduce $10\times\frac{3}{4}=D\times\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$; y por consiguiente

$$10\times\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=D\times\frac{3}{4} \quad \text{ó bien} \quad 10\times\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\left(10-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}$$

Cor. El producto de una suma ó diferencia indicada por una suma ó una diferencia tambien indicada de números cualesquiera, enteros ó fraccionarios, se halla multiplicando cada uno de los números del multiplicador por todo el multiplicando, y sumando ó restando luego los productos parciales, segun que el multiplicador sea una *suma* ó una *diferencia* indicada.

Esc. El producto de un misto por un número cualquiera se halla multiplicando cada una de las partes del misto por el multiplicador, y sumando luego los productos parciales.

$$\left(420+\frac{5}{9}\right)\times11=4620+6\frac{1}{9}=4626\frac{1}{9} \qquad \frac{2}{5}\times110\frac{1}{2}=\frac{220}{5}+\frac{2}{10}=44\frac{1}{5}$$

147. *Para formar el producto de varios factores fraccionarios,* se multiplican todos los numeradores y despues los denominadores, dividiendo el primer producto por el segundo. Si alguno de los factores es entero, se multiplica por el producto de los numeradores.

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{11}=\frac{2\times4}{3\times5}\times\frac{7}{11}=\frac{2\times4\times7}{3\times5\times11} \qquad 8\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{80}{70}=1\frac{1}{7}$$

Luego es evidente que un producto de enteros y fraccionarios ó solo de fraccionarios no varia, aunque se altere el órden de los factores.

148. De esta proposicion se deducen las siguientes consecuencias, que se verifican sean los números enteros, fraccionarios, ó enteros y fraccionarios.

Para formar el producto de varios factores, se multiplican dos cualesquiera de ellos, luego el producto de estos se multiplica por otro, y asi sucesivamente. *Para multiplicar un producto indicado por un numero entero ó fraccionario.* basta multiplicar por este número uno de los factores del producto dado. (*) El *producto de dos ó mas productos indicados* es igual á un producto indicado de los factores de los productos dados.

Las alteraciones del producto por la variacion de los datos son las mismas, que hemos indicado en la multiplicacion de los números enteros. No obstante, conviene advertir que el producto de un número entero ó fraccionario por una fraccion es siempre menor que el multiplicando (**).

Multiplicacion de los decimales.

149. **Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma ó vírgula tantos lugares á la derecha cuantos sean los ceros que acompañan á la unidad.**

$0,257\times100=25,7 \qquad 5,1851\times1000000=5185100$

Para multiplicar un número decimal por un entero, ó un número decimal por otro decimal, se prescinde de las comas y se multiplican como los números enteros, separando de la derecha del producto tantas cifras decimales como tienen los factores.

El producto de $0,425\times3$ será igual á $1,275$

En efecto; la supresion de la coma en el multiplicando equivale á multiplicarlo por 1000, y por consiguiente, el producto de $425\times3=1275$ será tambien 1000 veces mayor que el verdadero. Luego para obtener este, dividiremos 1275 por 1000 separando de su derecha tres cifras decimales, que son tantas como las que tienen los factores.

De otro modo: $0,425\times3=\frac{425}{1000}\times3=\frac{425\times3}{1000}=\frac{1275}{1000}=1,275$

2.° El producto de 5,146 por 0,8 será igual á 4,1168
La supresion de la coma en el multiplicando equivale á multiplicarlo por 1000: la supresion de la coma en el segundo factor equivale á multiplicarlo por 10: luego el producto de los enteros $5146\times8=41168$ será 1000×10 veces mayor que el verdadero; y por consiguiente, para obtener este, dividiremos 41168 por 10000 separando de la derecha cuatro cifras decimales, que son las de los factores.

$0,90008\times5,2=4,680416$	$4,236\times0,00102=0,00432072$
52	102
46 80416 producto de 90008 por 52	432072 producto de 4236×102
$61,296\times0,005=0,30648$	$4\times0,8\times2,5\times0,00105=0,0084$

(*) Multiplicando uno de los factores enteros ó fraccionarios del producto A.B.C por el número n (tambien entero ó fraccionario); tendremos $A.B\times n.C=A.B.C\times n$

(**) Llámase *unidad fraccionaria de otra fraccionaria* á cada una de las partes iguales en que se puede considerar dividida una unidad fraccionaria. *Número fraccionario de otro fraccionario* es la reunion de dos ó mas unidades fraccionarias de otras fraccionarias.
La mitad de un tercio es una unidad fraccionaria de otra fraccionaria.
Dos tercios de cuatro quintos es un número fraccionario de otro fraccionario.
La unidad y el número fraccionario de otro fraccionario se reducen á fraccionarios sencillos multiplicando entre si las unidades ó números componentes.

DIVISION DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

División de un número fraccionario por un entero, de un entero por otro fraccionario, de dos números fraccionarios, y de dos números mistos. Observaciones generales.
Division de los números decimales.
Aproximaciones del cociente de dos números enteros ó decimales.

Division de un número fraccionario por un entero.

150. Para *dividir* un número fraccionario por un número entero, se multiplica el entero por el denominador conservando el mismo numerador.

$$\frac{10}{12}:5=\frac{10}{12\times5}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

En efecto; el *cociente* multiplicado por 5 debe ser igual al dividendo, y por consiguiente, el *cociente* será la quinta parte del dividendo; pero la quinta parte de $\frac{10}{12}$ es $\frac{10}{12\times5}$ segun hemos indicado atrás (**126**); luego este último número será el *cociente* de los números dados. (*)

Division de un entero por un fraccionario.

151. Para dividir un número entero por otro fraccionario, se multiplica el entero por el denominador, y el producto se divide por el numerador.

$$5:\frac{10}{12}=\frac{5\times12}{10}=\frac{60}{10}=6$$

En efecto; de la definicion de la division se deduce que, el *cociente* $\times\frac{10}{12}$ ó bien $\frac{10}{12}$ del *cociente* debe ser igual al dividendo, y por consiguiente $\frac{1}{12}$ del *cociente* será la décima parte del dividendo es decir $\frac{5}{10}$ luego el *cociente*, que se busca, será doce veces mayor que $\frac{5}{10}$, es decir, igual al producto $\frac{5}{10}\times12$ ó sea $\frac{5\times12}{10}$

Cor. El cociente de la unidad por un número fraccionario es igual al divisor invertido (**).

$$1:\frac{4}{5}=\frac{5}{4} \qquad 1:\frac{11}{7}=\frac{7}{11} \qquad 1:\frac{1}{4}=4$$

Division de dos números fraccionarios.

152. Para dividir dos números fraccionarios, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el numerador del divisor por el denominador del dividendo, escribiendo el primer producto por numerador y el segundo por denominador del cociente.

$$\frac{8}{15}:\frac{2}{3}=\frac{8\times3}{2\times15}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$$

En efecto; de las definiciones de la division y multiplicacion se deduce que..

(*) Siempre que el numerador sea múltiplo del entero, conviene seguir la regla ya explicada otras veces, que consiste en dividir el numerador por el entero sin alterar el denominador.

(**) Llámase *invertido* respecto á otro el fraccionario, que tiene por numerador y denominador al denominador y numerador de este otro.

El *cociente* que se busca $\times\frac{2}{3}$ ó bien $\frac{2}{3}$ del *cociente* será igual al dividendo, y tomando la mitad, tendremos.....

$\frac{1}{3}$ del *cociente*=mitad del dividendo$=\frac{1}{2}$ de $\frac{8}{15}=\frac{8}{2\times15}$

luego el *cociente* total será igual al producto de este último resultado por 3, es decir igual á $\frac{8}{2\times15}\times3$ ó sea $\frac{8\times3}{2\times15}$

La misma demostracion tiene lugar sean cualesquiera el dividendo y divisor; luego para hallar el cociente de dos números fraccionarios, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el numerador de este por el denominador de aquel, dividiendo despues el primer producto por el segundo.

Aplicacion á varios ejemplos:

$$\frac{7}{15}:\frac{10}{9}=\frac{63}{150}=\frac{21}{50} \qquad \frac{11}{1911}:\frac{5}{105}=\frac{11}{91} \qquad \frac{1}{4}:\frac{1}{5}=\frac{5}{4}\ (*)$$

Este caso de la division de los números fraccionarios comprende los dos anteriores, porque si el dividendo ó el divisor es entero, se le puede considerar como fraccionario escribiendo la unidad por denominador.

$$4:\frac{2}{5}=\frac{4}{1}:\frac{2}{5}=\frac{20}{2}=10 \qquad \frac{2}{5}:4=\frac{2}{5}:\frac{4}{1}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

Esc. El cociente de dos números fraccionarios de un mismo *denominador* es igual al cociente de sus numeradores. El cociente de dos fraccionarios de un mismo *numerador* es igual al denominador del divisor, dividido por el denominador del dividendo. El cociente de dos fraccionarios, si los términos del dividendo son respectivamente múltiplos de los del divisor, es igual al cociente de los numeradores dividido por el de los denominadores.

$$\frac{3}{8}:\frac{5}{8}=\frac{3\times8}{5\times8}=\frac{3}{5} \qquad \frac{5}{7}:\frac{5}{8}=\frac{5\times8}{5\times7}=\frac{8}{7} \qquad \frac{8}{125}:\frac{2}{5}=\frac{8:2}{125:5}=\frac{4}{25}$$

Por último, tambien el cociente de dos fraccionarios cualesquiera, ó de un entero por un fraccionario, ó al contrario, es igual al producto del dividendo por el divisor invertido.

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=1\frac{1}{5} \qquad \frac{5}{7}:4=\frac{5}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{28}$$

Division de dos números mistos.

153. Para dividir dos números mistos, se reducen á fraccionarios y luego se dividen como estos. Si uno de los datos es entero ó fraccionario, se transforma el misto en fraccionario, y la operacion queda reducida á uno de los casos anteriores.

$$\left(5+\frac{1}{2}\right):\left(2+\frac{3}{5}\right)=\frac{11}{2}:\frac{13}{5}=2\,\frac{3}{26} \qquad 3\frac{4}{7}:1\frac{1}{5}=\frac{25.5}{7.6}=2\,\frac{41}{42}$$

$$4\frac{1}{2}:10=\frac{9}{2}:10=\frac{9}{20} \qquad 10:6\frac{9}{4}=10:\frac{33}{4}=1\,\frac{7}{33}$$

(*) Si los números dados son $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ se verificará $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\times D}{B\times C}$

Llamando a al dividendo y b al divisor; será...

$\frac{A}{B}=a \qquad \frac{C}{D}=b$ de donde se deduce $A=a\times B \qquad C=b\times D$

multiplicando los términos de estas igualdades respectivamente por D y B, tendremos

$A\times D=a\times B\times D \qquad C\times B=b\times D\times B$

y dividiendo la primera de estas igualdades por la segunda, resulta la proposicion.

Observaciones y teoremas acerca de la division de los números fraccionarios.

154. De las observaciones, que hemos expuesto en la multiplicacion de los números fraccionarios, y de las definiciones generales de la multiplicacion y division, se deducen las proposiciones que siguen, las cuales se verificarán sean los números enteros, fraccionarios, ó enteros y fraccionarios.

1.ª *Para dividir una suma ó diferencia indicada de dos ó mas números por otro,* se divide cada número del dividendo por el divisor, y la suma ó diferencia de los cocientes parciales será el cociente total.

Cor. El cociente de un número misto por un entero ó fraccionario se halla dividiendo cada una de las partes del misto por el divisor y sumando luego los cocientes parciales.

Asi, tendremos:

$$\left(1512+\frac{8}{9}\right):4=378+\frac{2}{9} \qquad 537\frac{1}{4}:5=107\frac{2}{5}+\frac{1}{20}=107\frac{9}{20}$$

2.ª *Para dividir un producto indicado por un número* basta dividir por este uno cualquiera de los factores del dividendo (*). *Para dividir un número por un producto indicado de varios factores*, se divide el dividendo por uno de los factores del divisor, el cociente de esta division se divide por otro factor, y asi sucesivamente. Luego *el cociente de un número por otros varios* es igual al cociente del primero por el producto de todos los demas.

3.ª Si el dividendo se multiplica ó se divide por un número, el cociente resultará multiplicado ó dividido por el mismo número (**). Si el divisor se multiplica ó se divide por un número, el cociente resultará dividido ó multiplicado por el mismo número (***). Si el dividendo y divisor se multiplican ó se dividen por un mismo número, el cociente no se altera (****).

Nota. *Supuesto que todo número fraccionario es el cociente del numerador por el denominador, es evidente que.....*

Si el numerador se multiplica ó se divide por otro número, el fraccionario resultará multiplicado ó dividido por el mismo número. Si el denominador se multiplica ó se divide por otro número, el fraccionario resultará dividido ó multiplicado por el mismo número. Un número fraccionario no se altera aunque se multipliquen ó se dividan ambos términos por un mismo número.

(*) Un producto de factores enteros y fraccionarios ó de fraccionarios solos no se altera aunque se multiplique uno de los factores por un número entero ó fraccionario y otro factor se divida por el mismo número.

Siendo A, B, C, n los números propuestos, se verificará $A.n\times B\times\frac{C}{n}=A.B.C$

pues segun la proposicion del texto... $A.n\times B\times\frac{C}{n}=\frac{A.n\times B\times C}{n}=\frac{An}{n}\times B.C=A.B.C$

(**) Llamando A el dividendo, B el divisor, Q el cociente y n un número entero ó fraccionario cualquiera, tendremos $A=B\times Q$, de donde se deducen las igualdades siguientes:

$A\times n=B\times Q\times n$ y por consig. $\frac{A\times n}{B}=Q\times n$ | $A:n=B\times(Q:n)$ y por consig. $\frac{A:n}{B}=Q:n$

(***) En los mismos supuestos que anteriormente, tendremos $A\times n=B\times n\times Q$
y dividiendo por n los dos miembros de esta igualdad, será... $A=B\,.\,n\times(Q:n)$

y por consiguiente $\frac{A}{B.n}=Q:n$ Del mismo modo se verifica $\frac{A}{B:n}=Q\times n$

(****) De la igualdad $A=B\times Q$ se deducen fácilmente las que siguen...

$\left.\begin{array}{l}A\times n=B\times n\times Q\\ A:n=(B:n)\times Q\end{array}\right\}$ y por consiguiente... $\frac{A\times n}{B\times n}=Q=\frac{A}{B}$ $\qquad \frac{A:n}{B:n}=Q=\frac{A}{B}$

Division de los números decimales.

155. Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma tantos lugares á la izquierda cuantos sean los ceros que acompañan á la unidad.

25,7 : 10=2,57 25,7 : 100=0,257 25,7 : 1000=0,0257

Para dividir un número decimal por un entero, se hace abstraccion de la coma ó vírgula del dividendo, se divide este por el divisor como si fuesen enteros, y luego se separan de la derecha del cociente tantas cifras decimales como tiene el dividendo.

1,275 : 3=0,425

La supresion de la coma en el dividendo equivale á multiplicarle por 1000, y por consiguiente, el cociente de 1275 entre 3 será tambien 1000 veces mayor que el verdadero. Luego para obtener este, dividiremos 425 por 1000, separando de su derecha tres cifras decimales que son tantas como las del dividendo.

De otro modo... $1,275 : 3=\frac{1275}{1000} : 3=\frac{1275:3}{1000}=\frac{425}{1000}=0,425$

Otro ejemplos.... 157,053 : 13=12,081 0,2592 : 108=0,0024
157 053 : 13=12 081 121,009 : 25 =4,84

Si el cociente de los números enteros no es exacto, se puede continuar la division hallando mayor número de cifras despues de añadir igual número de ceros á la derecha del dividendo ó del último resto. Es evidente que, al separar luego, de la derecha del cociente, las cifras decimales, se deben contar estos ceros como cifras decimales del dividendo.

56,4	15	94,15 : 16=5,884375
11 4	3,76	37,4 : 24=1,5583333.....
00 90		
00		0,001 : 7=0,0001428.....

156. Para dividir un entero ó decimal por otro decimal, se multiplican el dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor y quedará este caso reducido al anterior, ó á dividir dos números enteros.

110,656 : 3,2=1106,56 : 32=34,58

Multiplicando el dividendo y divisor por 10, el cociente no varía, y como el divisor resulta entero, queda la operacion reducida á dividir 1106,56 por 32 ó sea un número decimal por un entero que es el caso anterior.

Otro ejemplo; 1207,5 : 0,05=120750 : 5=24150

Multiplicando el dividendo y divisor por 100, quedará reducida la operacion á dividir dos números enteros. El cociente de estos números será evidentemente el de los números dados.

252 : 0,012=21000 34,002 : 0,09=377,8 1 : 5,25=0,19047....

Esc. Regla general para dividir los decimales. Si el dividendo y divisor se refieren á una misma unidad, se suprimen las comas y se dividen como enteros. Si los datos no se refieren á una misma unidad decimal, se añaden ceros á la derecha del que tenga menor número de guarismos decimales, y la operacion queda reducida al caso anterior.

No siendo la division exacta se puede continuar añadiendo uno ó mas ceros al último resto, obteniendo asi igual número de cifras decimales en el cociente.

Aproximacion del cociente de dos números enteros ó decimales, ó de un entero y otro decimal, con menos error que una unidad decimal dada.

137. Hemos visto que la division de los decimales se reduce á dividir dos números enteros, y como el cociente de estos cuando no es exacto se diferencia del verdadero en menos de una unidad, el de un número decimal por un entero se diferenciará tambien en el mismo caso en menos de una unidad decimal del órden inferior. Y como se pueden añadir á la derecha del dividendo los ceros que se quiera, considerados como decimales, sin alterar su valor, el cociente de dos números enteros ó decimales se podrá hallar con menos error que una unidad decimal de un órden cualquiera.

Hallar el cociente de los números 0,358 por 32

El cociente verdadero de los números 358 y 32 es mayor que 11 y menor que 12, luego el de los números dados será mayor que 0,011 y menor que 0,012; y por consiguiente 0,011 se diferenciará del verdadero en menos de una milésima.

Añadiendo ahora un número cualquiera de ceros á la derecha del dividendo, el cociente de 0,358000 por 32 será el mismo que el de los números dados; luego 0,011187 será el *cociente pedido* con menos error que una millonésima. Si continuamos añadiendo ceros al dividendo ó lo que es lo mismo uno á cada resto (que es como se hace en la práctica) hallaremos el cociente de los números dados con toda la aproximacion que se quiera. Un resto cero indica que el cociente hallado es el verdadero.

Otros ejemplos:

2,108 : 0,7=21,08 : 7 =3,011428...	1854 : 28 = 66,2142.....
12,04 : 2,5=120,4 : 25=4,816	1854 : 125 = 14,832
0,43047 : 0,253698 =1,6967......	8,005 : 0,0103=777,184.....

Esc. *En la aproximacion sucesiva de un cociente por decimales habrá un resto cero, ó de lo contrario una parte de las cifras del cociente se repetirá constantemente en el mismo órden.*

En efecto; los restos sucesivos, que se obtienen al dividir como enteros los dos números dados, son siempre menores que el divisor y por consiguiente cuando se haya hallado en el cociente un número de cifras igual á lo mas al de las unidades del divisor menos una, el resto inmediato será cero ó igual á otro ya obtenido (considerados en su valor absoluto). En el primer caso el cociente será el verdadero, y en el segundo la multiplicacion de los restos iguales por 10 dará dos dividendos parciales iguales. Luego á contar desde un cierto órden decimal, las cifras del cociente formarán *periodos* que se repetirán constantemente en el mismo órden. Así tendremos

4,21 : 0,07=421 : 7=60,142857 142857 142857 142.....

En este ejemplo, los seis primeros restos podian ser y han sido 1, 3, 2, 6, 4 y 5; luego..... el resto de la division siguiente será igual á uno de los anteriores y por consiguiente añadiendo un cero á su derecha, tendremos tambien uno de los anteriores dividendos con la misma cifra en el cociente, etc.

0,03 : 1,1 = 0,0272727...... 0,71 : 9 =0,078888.....
5 : 0,12=41,6666..... 0,11 : 0,075=1,46666.....

Las cifras decimales que se repiten constantemente forman lo que llamamos el *periodo*, y las anteriores al primer periodo la *parte no periódica*. Si el periodo de una fraccion decimal empieza inmediatamente despues de la coma, se llama periódica *pura*, y cuando no, periódica *mista*.

0,704704704. . . es una fraccion decimal *periódica pura*: el periodo es 704
12,16666. . . . . aquí la fraccion decimal es *periódica mista*, el periodo es 6

Las fracciones decimales periódicas se expresan tambien así:

0,704704..... =0,[704] 12,16666..... =12,1[6]

ELEVACION Á POTENCIAS DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Elevacion á potencias de los números fraccionarios y mistos. Observaciones generales. *Elevacion á potencias de los números decimales.*

Elevacion á potencias de los números fraccionarios y mistos.

158. Para elevar un número fraccionario á una potencia cualquiera se elevan el numerador y denominador á la misma potencia.

En efecto; $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times3\times3}{4\times4\times4}=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$

Del mismo modo $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$ $\qquad \left(\frac{1}{11}\right)^3=\frac{1}{1331}$

Para elevar un número misto á una potencia, se reduce el misto á fraccionario, y se eleva este á dicha potencia.

$\left(4\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}=20\frac{1}{4}$. | $\left(4\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{9}{2}\right)^3=\frac{729}{8}=91\frac{1}{8}$ | $\left(10\frac{2}{5}\right)^4=11698\frac{366}{625}$

Observaciones relativas á la elevacion á potencias de los números fraccionarios.

159. Los teoremas relativos á la elevacion á potencias de la suma, diferencia, producto, cociente (*) ú otra potencia indicada de los números enteros, se verifican igualmente aun cuando alguno ó todos los datos sean números fraccionarios; pues el resultado final será el producto del número que se desea elevar multiplicado varias veces por sí mismo; y como los teoremas de la multiplicacion de operaciones indicadas son los mismos para los enteros y fraccionarios, tambien lo serán los de la elevacion á potencias (**).

Las alteraciones del resultado por la variacion de los datos en la elevacion de fraccionarios, son tambien las mismas que hemos indicado para los enteros, si exceptuamos las que se deducen de la proposicion siguiente: *Las potencias de una fraccion van disminuyendo á medida que aumenta el índice de la potencia.*

Ultimamente, todas las potencias de un número fraccionario irreducible son fraccionarios *irreducibles*; pues, de lo contrario, el factor comun de los dos términos del resultado lo seria tambien de los dos términos del fraccionario primitivo.

Elevacion á potencias de los números decimales.

160. De la definicion general de la elevacion á potencias y de la multiplicacion de los decimales, se deduce que..... Un número decimal se eleva al cuadrado como si fuera entero, y de la derecha del resultado se separan tantas cifras decimales como indique el duplo de las decimales del número dado. Un número decimal se eleva al cubo como si fuera entero y de la derecha del resultado se separan tantas cifras decimales como indique el triplo de las del número propuesto. Y en general.....

Un número decimal se eleva á una potencia cualquiera, considerándole como entero y separando de la derecha del resultado tantas cifras decimales como indique el producto del índice de la potencia, por las cifras decimales del número dado.

$(0,5)^2=0,5\times0,5=0,25 \qquad (1,02)^3=1,061208$

(*) Sea A el dividendo, B el divisior, C el cociente; y tendremos.....
$A=B\times C$ de donde se deduce $A^n=B^n\times C^n$ y por consiguiente $A^n : B^n=C^n$

(**) Segun esto, el cuadrado de un número misto será igual al cuadrado del entero, mas el cuadrado del fraccionario, mas el duplo del primero por el segundo.

EXTRACCION DE RAICES DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

RAIZ CUADRADA de un número fraccionario y de un número mislo. Aproximacion de estas raices con menos error que una unidad fraccionaria dada. RAIZ CÚBICA de un número fraccionario y de un número mislo. Aproximacion de estas raices. *Raiz cuadrada de un número decimal* y su aproximacion. *Raiz cúbica de un número decimal* y su aproximacion.

Raiz cuadrada de un número fraccionario.

161. De la regla dada para elevar al cuadrado y en general á una potencia cualquiera un número fraccionario se deduce que.....

La raiz cuadrada de un número fraccionario, cuyos dos términos son cuadrados perfectos, es igual á la raiz cuadrada del numerador dividida por la raiz cuadrada del denominador.

En efecto; $\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}$ pues $\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5^2}{6^2}=\frac{25}{36}$

Un número fraccionario no tiene raiz cuadrada exacta cuando ningun otro número entero ó fraccionario elevado al cuadrado es igual al propuesto.

Si uno de los dos términos de un número fraccionario no es cuadrado perfecto; el número fraccionario no tendrá raiz cuadrada exacta.

En efecto; suponiendo que el número dado es el fraccionario irreducible $\frac{23}{36}$, su raiz cuadrada exacta no será un número entero, pues nunca el cuadrado de un entero puede ser igual á un número fraccionario irreducible. Tampoco lo será un número fraccionario, pues de lo contrario, se verificaria.....

$\sqrt{\frac{23}{36}}=\frac{x}{6}$ de donde $\frac{23}{36}=\frac{x^2}{6^2}$ y por consiguiente $23=x^2$ y $36=6^2$

lo que es contrario al supuesto de no ser ambos términos cuadrados perfectos.

La raiz cuadrada aproximada de un número fraccionario, cuando solo el denominador es cuadrado perfecto, se halla dividiendo la raiz cuadrada entera del numerador por la exacta del denominador.

La diferencia entre la raiz hallada de este modo y la raiz *verdadera* del número dado es menor que la unidad fraccionaria, que determina la raiz cuadrada de su denominador.

En efecto; $\sqrt{\frac{14}{25}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{14}}{5}$

pero la raiz cuadrada de 14 está comprendida entre los enteros 3 y 4; luego la raiz cuadrada pedida será mayor que $\frac{3}{5}$ y menor que $\frac{4}{5}$, y por consiguiente cualquiera de estas fracciones será la raiz cuadrada aproximada del número dado la primera por defecto y la segunda por exceso con menos de un quinto de error.

Del mismo modo, $\frac{2}{3}$ será la raiz cuadrada de $\frac{65}{144}$ con menos de $\frac{1}{12}$ de error. (*)

(*) Para que un número fraccionario tenga raiz cuadrada exacta, basta que el producto de su numerador por su denominador sea cuadrado perfecto, y recíprocamente si un número fraccionario tiene raiz cuadrada exacta, el producto de su numerador por su denominador, será un cuadrado perfecto.

La primera parte es evidente, puesto que, multiplicando el numerador y denominador del fraccionario propuesto, por su denominador resultará un número fraccionario equivalente, cuyos dos términos serán cuadrados perfectos. La segunda parte se deduce de la igualdad

$\frac{A}{B}=\frac{A.B}{B.B}=\frac{a^2}{b^2}$ donde es fácil probar que el producto $A\times B$ es un cuadrado perfecto.

Si el denominador no tiene raiz cuadrada exacta, se multiplican ambos términos por un número entero, que transforme al denominador en cuadrado perfecto, y entonces queda este caso reducido al anterior.

$$\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3.7}{7.7}}=\sqrt{\frac{21}{49}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4}{7} \text{ con menos de } \frac{1}{7} \text{ de error.}$$

$$\sqrt{\frac{5}{18}}=\sqrt{\frac{10}{36}}=\frac{\sqrt{10}}{6}=\frac{1}{2} \text{ con menos de } \frac{1}{6} \text{ de error.}$$

Ultimamente, la raiz cuadrada de un número misto es igual á la del número fraccionario equivalente.

$$\sqrt{6\tfrac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=2\tfrac{1}{2} \qquad \sqrt{21\tfrac{8}{9}}=\sqrt{\frac{197}{9}}=\frac{14}{3} \text{ con menos de } \frac{1}{3} \text{ de error.}$$

La raiz cuadrada entera de un número misto, compuesto de un entero y una fraccion, es la misma que la del número entero.

Aproximacion de la raiz cuadrada de un numero entero ó fraccionario con menos error que una unidad fraccionaria dada.

162. *Hallar la raiz cuadrada de N*, con menos error que $\frac{1}{5}$ de la unidad.

Supuesto que la raiz cuadrada del producto de dos factores es igual al producto de las raices cuadradas de dichos factores; si multiplicamos el número dado por el cuadrado del denominador de la unidad fraccionaria $\frac{1}{5}$ y extraemos la raiz cuadrada del producto $N\times5^2$; la raiz que resulta será igual á la raiz pedida multiplicada por 5.

Así tendremos que $\sqrt{N\times5^2}=\sqrt{N}\times\sqrt{5^2}=\sqrt{N}\times5$

y por consiguiente, si dividimos $\sqrt{N\times5^2}$ por 5, tendremos $\sqrt{N}$;

pero la $\sqrt{N\times5^2}$ está comprendida entre dos números, que se diferencian á lo mas en una unidad; luego el menor de estos números dividido por 5 nos dará la raiz cuadrada pedida. De este procedimiento se deduce que

Para extraer la raiz cuadrada de un número entero ó fraccionario con menos error que una unidad fraccionaria dada, se multiplica el número propuesto por el cuadrado del denominador de la unidad fraccionaria, se extrae la raiz cuadrada entera del producto, y esta raiz se divide por el mismo denominador.

Hallar la raiz cuadrada de 104 con menos de $\frac{1}{20}$ de error.

$\sqrt{104\times400}=\sqrt{41600}=203$ con menos de una unidad de error.

luego la *raiz pedida* será igual al cociente de 203 por 20, es decir á $10\frac{3}{20}$

Del mismo modo, tendremos tambien.....

$\sqrt{1854}$ con menos de $\frac{1}{12}$ de error$=43$ | $\sqrt{622}$ con menos de $\frac{1}{100}$ de error$=24,93$

Ultimamente, $\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{3/8\times144}}{12}=\frac{\sqrt{54}}{12}=\frac{7}{12}$ con menos de $\frac{1}{12}$ de error (*)

Si en este último caso el producto del número dado por el cuadrado del denominador de la fraccion, que señala la aproximacion de la raiz, no es un número entero, se desprecia el resto, puesto que su raiz cuadrada entera no sufre por esta supresion, alteracion ninguna. Sirva de ejemplo.....

$$\sqrt{\frac{4}{7}} \text{ con menos de } \frac{1}{20} \text{ de error } =\frac{\sqrt{4/7\times400}}{20}=\frac{\sqrt{228}}{20}=\frac{3}{4}$$

(*) Si el resto en la extraccion de la raiz cuadrada de un número entero es igual ó menor que la raiz cuadrada entera, esta raiz será la del número dado con menos de media unidad de error por *defecto*; y si es mayor, la misma raiz mas una unidad lo será por *exceso*.

Raiz cúbica de un número fraccionario.

*163. La raiz cúbica de un número fraccionario, cuyos dos términos son cubos perfectos, es igual á la raiz cúbica del numerador dividida por la raiz cúbica del denominador.

En efecto; $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}=\frac{5}{6}$ porque $\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$

Un número fraccionario no tiene raiz cúbica exacta cuando ningun otro número entero ó fraccionario elevado al cubo es igual al propuesto.

Si los dos términos de un número fraccionario no son cubos perfectos, el número fraccionario no tendrá raiz cúbica exacta.

Si el número dado es $\frac{71}{512}$ su raiz cúbica no puede ser exactamente un número entero ni otro fraccionario; pues en el primer caso el cubo de un entero seria igual á una fraccion irreducible, lo que es *absurdo*, y en el segundo el numerador y denominador del número dado serian cubos perfectos, lo que es contrario á la hipótesis. (*)

La raiz cúbica aproximada de un número fraccionario, cuando solo el denominador es cubo perfecto, se halla dividiendo la raiz cúbica entera del numerador por la exacta del denominador.

La diferencia entre la raiz hallada de este modo y la *verdadera* del número dado es menor que la unidad fraccionaria, que determina la raiz cúbica de su denominador.

En efecto; $\sqrt[3]{\frac{14}{125}}$ equivale á $\frac{\sqrt[3]{14}}{5}$

pero la raiz cúbica de 14 está comprendida entre los números 2 y 3; luego la raiz cúbica pedida será mayor que $\frac{2}{5}$ y menor que $\frac{3}{5}$; y por consiguiente, una cualquiera de estas fracciones será la raiz cúbica aproximada del número dado con menos de un quinto de error, la primera con defecto y la segunda con exceso.

Otro ejemplos:

$\sqrt[3]{\frac{70}{216}}=\frac{\sqrt[3]{70}}{6}=\frac{2}{3}$ aproximadamente | $\sqrt[3]{\frac{217}{512}}=\frac{6}{8}$ aproximadamente

Si el denominador no tiene raiz cúbica exacta, se multiplican ambos términos por un número entero, que transforme al denominador en cubo perfecto, y entonces queda este caso reducido al anterior.

Sirvan de ejemplos los dos siguientes:

$\sqrt[3]{\frac{8}{25}}=\sqrt[3]{\frac{8.5}{25.5}}=\sqrt[3]{\frac{40}{125}}=\frac{\sqrt[3]{40}}{5}=\frac{3}{5}$ con menos de $\frac{1}{5}$ de error

$\sqrt[3]{\frac{15}{32}}=\sqrt[3]{\frac{30}{64}}=\frac{\sqrt[3]{30}}{4}=\frac{3}{4}$ con menos error que $\frac{1}{4}$ de la unidad.

(*) Para que un número fraccionario tenga raiz cúbica exacta, basta que el producto de su numerador por el cuadrado de su denominador sea cubo perfecto y recíprocamente.
La demostracion de este doble problema es análoga á la que hemos expuesto para la raiz cuadrada en la nota de la pág. 112.

Ultimamente, la raiz cúbica de un número misto es igual á la del número fraccionario equivalente.

$$\sqrt[3]{3+\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2} \qquad \sqrt[3]{101\frac{5}{8}}=\sqrt[3]{\frac{813}{8}}=\frac{9}{2} \text{ aproximadamente.}$$

La raiz cúbica entera de un número misto, compuesto de un entero y una fraccion, es la misma que la de su número entero.

Aproximacion de la raiz cúbica de un número entero ó fraccionario con menos error que una unidad fraccionaria dada.

*164. *Hallar la raiz cúbica de N* con menos error que $\frac{1}{5}$ de la unidad.

Si multiplicamos el número dado por el cubo del denominador de la unidad fraccionaria $\frac{1}{5}$ y extraemos la raiz cúbica del producto; la raiz que resulte será igual á la raiz pedida multiplicada por 5, pues

$$\sqrt[3]{N\times5^3}=\sqrt[3]{N}\times\sqrt[3]{5^3}=\sqrt[3]{N}\times5$$

y por consiguiente, si dividimos $\sqrt[3]{N\times5^3}$ por 5, tendremos el valor de $\sqrt[3]{N}$; pero la $\sqrt[3]{N\times5^3}$ está comprendida necesariamente entre dos números consecutivos; luego el menor de estos números dividido por 5 nos dará por defecto la raiz cúbica pedida. Esto supuesto:

Para extraer la raiz cúbica de un número entero ó fraccionario con menos error que una unidad fraccionaria dada, se multiplica el número propuesto por el cubo del denominador de la unidad fraccionaria; se extrae la raiz cúbica entera del producto y esta raiz se divide por el mismo denominador (*).

Hallar la raiz cúbica de 104 con menos de $\frac{1}{20}$ de error.

$\sqrt[3]{104\times8000}=\sqrt[3]{832000}=94$ con menos de una unidad de error;

luego la *raiz pedida* será $\frac{94}{20}=4\frac{7}{10}$ con menos de $\frac{1}{20}$ de error.

OTROS EJEMPLOS.

$\sqrt[3]{1850}$ con menos de $\frac{1}{12}$ de error $=\frac{1}{12}\sqrt[3]{3196800}=12\frac{1}{4}$

$\sqrt[3]{622}$ con menos de $\frac{1}{100}$ de error $=\frac{1}{100}\sqrt[3]{622000000}=8,53$

$\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ con menos de $\frac{1}{12}$ de error $=\frac{1}{12}\sqrt[3]{\frac{3}{8}\times1728}=\frac{1}{12}\sqrt[3]{648}=\frac{2}{3}$

$\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ con menos de $\frac{1}{20}$ de error $=\frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{4}{7}\times8000}=\frac{1}{20}\sqrt[3]{4571}=\frac{4}{5}$

(*) Suponiendo N el número entero ó fraccionario dado y $\frac{1}{n}$ la fraccion, que determina la aproximacion de la raiz cúbica del primero, propongámonos hallar un número entero x tal que

$$\frac{x}{n}<\sqrt[3]{N} \text{ y } \frac{x+1}{n}>\sqrt[3]{N}$$

Elevando al cubo y multiplicando por n^3, tendremos $x^3<Nn^3$ y $(x+1)^3>Nn^3$ y por consiguiente x^3 será el mayor cubo entero contenido en el producto Nn^3 en cuyo supuesto x será la raiz cúbica de Nn^3 con menos de una unidad de error, cumpliendo así con las condiciones del enunciado.

Extraccion de raices de los números decimales.

Raiz cuadrada de los números decimales.

165. Para extraer la raiz cuadrada de un número decimal, cuyo número de cifras decimales es par, se extrae la raiz cuadrada como si fuera un número entero, y de la derecha del resultado se separan para decimales tantas cifras como indica la mitad de las cifras decimales del número dado.

Si el número de cifras decimales es impar, se escribe un cero á la derecha del número propuesto y quedará reducido este caso al anterior.

En efecto; suponiendo que el número dado conste de 6 cifras decimales, la supresion de la coma equivale á multiplicarle por 1000000. Luego la raiz cuadrada del producto será igual á la raiz pedida multiplicada por la raiz cuadrada de 1000000. Dividiendo pues dicha raiz hallada por 1000, lo que se consigue con separar de su derecha un número de cifras decimales igual á la mitad de las del número dado, tendremos la raiz cuadrada de dicho número con menos error que una unidad del último órden decimal.

Hallar la raiz cuadrada de la fraccion 0,7225

Considerando como entero el número dado que equivale á multiplicarlo por 10000, extrayendo su raiz cuadrada entera y dividiendo el resultado por 100 que es la raiz cuadrada de 10000, tendremos:

$$\sqrt{0{,}7225}=\frac{\sqrt{7225}}{100}=\frac{85}{100}=0{,}85 \text{ exactamente.}$$

Del mismo modo tendremos tambien para la raiz cuadrada del número 32,7 despues de añadir un cero á su derecha.....

$$\sqrt{32{,}7}=\sqrt{32{,}70}=5{,}7 \text{ con menos de una décima de error.}$$

Aproximacion de la raiz cuadrada de un número entero ó decimal con menos error que una unidad decimal dada.

166. *Para extraer la raiz cuadrada de un número entero ó decimal con menos error que una unidad decimal del órden* n, se escriben á su derecha tantos ceros decimales cuantos sean necesarios para que el número total de cifras decimales sea el duplo de n; se extrae luego la raiz cuadrada como si fuera un número entero y de la derecha del resultado se separan n cifras decimales.

Esta regla es un caso particular de la relativa á la aproximacion de la raiz cuadrada con menos error que una unidad fraccionaria cualquiera.

Hallar la raiz cuadrada de 104 con menos error que una milésima.

Escribiendo seis ceros decimales á la derecha del número dado, y extrayendo luego la raiz cuadrada del resultado, considerado como entero, tendremos....

$$\sqrt{104000000}=10198; \quad \text{luego} \quad \sqrt{104}=10{,}198$$

Igualmente, la $\sqrt{2}$ con menos de una millonésima de error será 1,414213

Hallar las raices cuadradas de los números 0,94785 y 51,1084 con menos de una millonésima de error:

$$\sqrt{0{,}94785}=\sqrt{0{,}947850}=0{,}973575 \quad \text{puesto que} \quad \sqrt{947850000000}=973575$$

$$\sqrt{51{,}1084}=7{,}149013 \quad \text{supuesto que} \quad \sqrt{51108400000000}=7149013$$

Otros ejemplos:

$\sqrt{1{,}53}=1{,}236931$..... | $\sqrt{0{,}003}=0{,}0547$..... | $\sqrt{101}=10{,}04987$.....

Raiz cúbica de los números decimales.

*167. Para extraer la raiz cúbica de un número decimal, cuyo número de cifras decimales es múltiplo de tres, se extrae la raiz cúbica como si fuera entero y de la derecha del resultado se separan tantas cifras decimales como indique la tercera parte de las del número propuesto. Si el número de cifras decimales no es divisible por 3, se hará que lo sea añadiendo á su derecha uno ó dos ceros antes de empezar la operacion y quedará este caso reducido al anterior.

La razon de esta regla es la misma que hemos dado para la extraccion de la raiz cuadrada de un número decimal.

Hallar la raiz cúbica de 0,614125

Considerado este número como entero, equivale á multiplicarlo por 1000000, y por consiguiente, si extraemos su raiz cúbica, el resultado será 100 veces mayor que el verdadero. Dividiendo pues esta raiz por 100, tendremos la que se busca, la cual es exacta porque 614125 es un cubo perfecto.

$$\sqrt[3]{0,614125}=\frac{\sqrt[3]{614125}}{100}=\frac{85}{100}=0,85 \text{ exactamente.}$$

Del mismo modo para la raiz cúbica aproximada de 32,7, despues de añadir dos ceros decimales á su derecha, resulta.....

$$\sqrt[3]{32,7}=\sqrt[3]{32,700}=3,2 \text{ aproximadamente.}$$

Aproximacion de la raiz cúbica de un número entero ó decimal, con menos error que una unidad decimal dada.

*168 *Para extraer la raiz cúbica de un número entero ó decimal con menos error que una unidad decimal del órden n*, se escriben á su derecha tantos ceros decimales cuantos sean necesarios para que el número total de cifras decimales sea el triplo de n; se extrae luego la raiz cúbica, como si fuera un número entero, y de la derecha del resultado se separan n cifras decimales.

Esta regla es un caso particular de la del número 164.

Hallar la raiz cúbica de 104 con menos error que una milésima.

Escribiendo nueve ceros á la derecha del número dado, y extrayendo luego la raiz cúbica del resultado, tendremos.....

$$\sqrt[3]{104000000000}=4702 \quad \text{y por consiguiente} \quad \sqrt[3]{104}=4,702$$

Igualmente $\sqrt[3]{2}$ con menos de una milésima de error, será 1,259

Hallar las raices cúbicas de los números 0,94785 y 51,1084 con menos error que una milésima de la unidad.

$$\sqrt[3]{0,94785}=\sqrt[3]{0,947850}=0,982 \quad \text{pues} \quad \sqrt[3]{947850000}=982 \text{ aproximadamente.}$$

$$\sqrt[3]{51,1084}=\sqrt[3]{51,108400}=3,711 \quad \text{pues} \quad \sqrt[3]{51108400}=3711 \text{ aproximad.}$$

Otros ejemplos:

$\sqrt[3]{12}=2,28942.....$ | $\sqrt[3]{5,8}=1,79670.....$ | $\sqrt[3]{28,25}=3,04559.....$

Reduccion de los números decimales á fraccionarios ordinarios y vice-versa.

169 Con el objeto de formar una idea exacta del valor de una fraccion decimal, se acostumbra reducirla á ordinaria. Por otra parte, como el cálculo de los números fraccionarios comunes es mucho mas complicado que el de los números decimales, y estos forman un sistema uniforme de numeracion para casi tódos los números mayores y menores que la unidad,conviene tambien reducir en muchos casos los números fraccionarios á decimales. Veamos la resolucion de este doble problema y sus importantes consecuencias.

Reduccion de un número decimal á fraccionario comun ú ordinario.

170. En esta cuestion conviene distinguir tres casos, á saber: cuando la fraccion decimal consta de un número limitado de cifras; cuando es periódica pura; y cuando lo es mista.

1.er caso. **Para reducir un número decimal de limitado número de cifras á fraccionario comun ú ordinario, basta poner por numerador el número dado con supresion de la vírgula ó coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene.**

Esta regla es una consecuencia inmediata de la definicion y numeracion de los números decimales; y por consiguiente tendremos inmediatamente

$$0{,}14=\frac{14}{100} \qquad 4{,}0108=\frac{40108}{10000} \qquad 0{,}000825=\frac{825}{1000000}$$

2.º caso Sea 0,127127127..... la fraccion decimal periódica:
y tendremos $0{,}127127127 = \textit{fraccion ordinaria}$ pedida;
multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el periodo, es decir por 1000, resulta

$$127{,}127127127.....=1000\times \textit{fraccion ordinaria}$$

y restando ordenadamente de esta igualdad la anterior, se verificará que

$127=999\times$*fraccion ordinaria*; luego la *fraccion ordinaria* será $\frac{127}{999}$

De este razonamiento, que es aplicable á cualquiera otra fraccion de la misma forma, se deduce que.....

Para reducir una fraccion decimal periódica pura á fraccion ordinaria, se pone por numerador el período y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el período.

$$0{,}185418541854.....=\frac{1854}{9999} \qquad\qquad 0{,}005005.....=\frac{5}{999} \quad (*)$$

Si el número decimal es mayor que la unidad, la parte entera se añade á la fraccion ordinaria obtenida por la regla anterior.

$$2{,}0001500015.....=2+\frac{15}{99999}=\frac{66671}{33333}$$

Cor. Aunque el numero fraccionario ordinario deducido del teorema anterior pueda simplificarse, su *denominador* no será nunca divisible por los factores 2 ó 5, y por consiguiente:

El denominador de la fraccion ordinaria irreducible equivalente á otra decimal periódica pura, no es múltiplo del factor 2 *ni del factor* 5.

(*) El mismo resultado se obtiene aun cuando se tomen dos ó mas periodos por numerador de la fraccion ordinaria, con tal que se escriban por denominador tantos nueves como cifras tengan los periodos del numerador.

3.er CASO. Sea la fraccion dada 0,12506506506.....

Corriendo la coma á la derecha de la parte no periódica, y dividiendo el resultado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la misma parte no periódica, tendremos evidentemente que la fraccion dada será igual á.....

$$\frac{12{,}506506...}{100}=\frac{12+\frac{506}{999}}{100}=\frac{12\times999+506}{99900}=\frac{12(1000-1)+506}{99900}=\frac{12506-12}{99900};\quad \text{luego}$$

Para convertir una fraccion decimal periódica mista en fraccion ordinaria, se escribe por *numerador* la parte no periódica seguida del primer período, menos la parte no periódica, y por *denominador* tantos nueves como cifras tiene el periodo, y tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica

$$0{,}5450202.....=\frac{54502-545}{99000}=\frac{53957}{99000} \qquad 10{,}000[35]=10+\frac{35}{99000}$$

Cor. El numerador de la fraccion ordinaria irreducible, equivalente á una decimal periódica mista, no puede terminar en cero, pues, si el numerador 12506—12 del primer ejemplo, terminase en un cero, las cifras 6 y 2 serian iguales, y la fraccion decimal 0,12502502, etc., tendria en su parte no periódica una sola cifra decimal, siendo asi que nosotros hemos supuesto dos.

2.° Es evidente, segun el corolario anterior, que el *numerador* de la fraccion generatriz de un fraccion decimal periódica mista no será nunca múltiplo de los factores 2 y 5, aunque sí puede serlo de uno cualquiera de ellos; y como el *denominador* antes de la simplificacion es siempre múltiplo de la potencia de 10, que expresa el número de cifras de la parte no periódica; se deduce que

El denominador de la fraccion ordinaria irreducible equivalente á otra decimal periódica mista, será múltiplo de los números 2 ó 5 elevados á la potencia que indique el número de cifras de la parte no periódica.

Reduccion de un número fraccionario comun á decimal. (*)

121. El número $\frac{154}{47}$ *reducido á decimal,* será igual á 154 : 47=3,27659....

En efecto; el número dado equivale al cociente de 154 por 47; y como, para hallar este cociente con la aproximacion que se quiera, se añade un cero á cada resto, fácilmente se deduce que.....

Para convertir en decimal un número fraccionario cualquiera, se divide el numerador por el denominador, y se tendrá la parte entera, y para hallar la decimal se continúa la division, añadiendo en cero á cada resto (**)

Si el número fraccionario es menor que la unidad, la parte entera del número decimal será cero. La diferencia entre el número fraccionario y el decimal será en todo caso menor que una unidad del último órden decimal: ambos números serán exactamente iguales, si uno de los restos es cero. Asi, tendremos...

(*) Esta proposicion es un caso particular de la general siguiente: «Transformar un número fraccionario en otro cuya unidad fraccionaria sea dada.»

(**) Y como añadir un cero á cada resto equivale á multiplicar el dividendo ó sea el numerador por 10, resulta la regla siguiente: *Para reducir una fraccion ordinaria á decimal, se añade á la derecha de el numerador el número de ceros que se quiera y se divide por el denominador, separando del cociente tantas cifras decimales como sean los ceros añadidos al numerador.* El resultado asi obtenido se diferenciará del verdadero en menos de una unidad del último órden decimal.

$\frac{3}{7}=3:7=0,42857$ con menos error que 0,00001 | $\frac{65}{16}=4,0625$ exactamente.

Si una fraccion ordinaria no es reducible á fraccion decimal exacta, será equivalente á una fraccion decimal periódica. (157. *Esc.*)

$\frac{11}{13}=0,[846153]$ $\frac{7}{12}=0,58[3]$ $\frac{25}{15}=1,6666.....$

171. Del procedimiento que acabamos de exponer, y de los corolarios de los teoremas anteriores, se deducen los siguientes:

1.° Si el denominador de un número fraccionario ordinario é irreducible es múltiplo únicamente de los factores 2 y 5, dicho número fraccionario se puede convertir *exactamente* en decimal.

Pues añadiendo al numerador tantos ceros como indique el mayor de los esponentes 2 ó 5 del denominador, la division será exacta.

$\frac{11}{40}=\frac{11}{2.2.2.5}=\frac{11000}{2.2.2.5}$ milésimas$=0,275$ $\frac{7}{8}=0,875$ $\frac{12}{5}=2,4$

2.° Si el denominador de una fraccion ordinaria é irreducible no es múltiplo de los factores 2 ó 5, dicha fraccion equivale á otra decimal *periódica pura.*

En efecto, como el numerador y denominador son primos entre si, los productos del numerador por 10, 100, 1000, etc., ó sea por las potencias sucesivas de diez, no serán divisibles por el denominador, y por consiguiente la fraccion decimal constará de un número ilimitado de cifras ó será *periódica.* Pero segun el corolario 2.° del caso tercero, número 170 no puede ser periódica mista, luego lo será *simple* ó *pura*, y el teorema será verdadero.

$\frac{3}{7.11}=0,038961038961.....$ $\frac{5}{3.7}=0,238095238095.....$

Si el denominador de una fraccion es 9, 99, 999 y en general un número cualquiera de nueves, el periodo de la fraccion decimal correspondiente será el numerador precedido de tantos ceros como indique la diferencia entre las cifras del numerador y denominador de la fraccion ordinaria dada.

$\frac{1}{9}=0,111.....$ $\frac{8}{9}=0,888.....$ $\frac{1}{99}=0,010101.....$ $\frac{12}{9999}=0,00120012.....$

3.° Si el denominador de una fraccion ordinaria é irreducible es múltiplo de los factores 2 ó 5 y de algun otro primo con ellos, dicha fraccion reducida á decimal será *periódica mista.*

Efectivamente, por la misma razon, que hemos indicado en el teorema anterior, la fraccion decimal equivalente á la ordinaria propuesta será periódica. *Pura* no puede ser, porque en tal caso el denominador no seria múltiplo de los factores 2 ó 5 segun lo expuesto en el corolario del caso 2.° núm. 170, luego será periódica *mista.*

En este caso se verifica tambien que el número de cifras de la parte no periódica es igual al mayor de los exponentes de los factores 2 ó 5, que se contengan en el nominador. (170 caso 3.° *Cor.* 2.°)

$\frac{11}{2.2.2.5.7}=0,039[285714]$ $\frac{7}{5.5.11.3}=0,00[84]$

Nota. En rigor no hay exactitud cuando se dice que una fraccion ordinaria y otra decimal periódica son equivalentes, pues acercándose la segunda á la primera tanto mas cuanto mayor sea el número de sus períodos, no puede existir nunca la igualdad absoluta de ambas fracciones. La ordinaria debe llamarse *generatriz* de la decimal y tambien su *límite*. (Nota III al final de la Aritmética.)

OBSERVACIONES GENERALES RELATIVAS Á LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

*123. Ya que conocemos las reglas para transformar un número fraccionario cualquiera en otro decimal equivalente, tenemos el medio de ejecutar con mas facilidad algunas de las operaciones de los números fraccionarios comunes (particularmente la extraccion de raices), operando sobre decimales equivalentes á los números dados.

$$\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{0,625}=\sqrt{0,625000}=0,79 \qquad \sqrt[4]{17\tfrac{11}{99}}=\sqrt[4]{17,111111...}=2,033$$

$$\sqrt[6]{\frac{7}{11}}=\sqrt[6]{0,636363636...}=0,92 \qquad \sqrt[3]{9\tfrac{7}{25}}=\sqrt[3]{9,28}=2,101$$

*124. De la generalidad de las demostraciones de todos los teoremas relativos al cálculo de los números fraccionarios, que hemos presentado por notas, se deduce que, la division indicada de dos números fraccionarios, constituye otro número fraccionario cuyas propiedades son las mismas que las de los fraccionarios originados de la division indicada de dos números enteros.

FRACCIONES CONTINUAS.

*125. Llámase FRACCION CONTINUA á una fraccion cuyo numerador es la unidad y su denomicador un entero mas otra fraccion cuyo numerador es la unidad y su denominador un entero mas otra fraccion de la misma forma que la anterior, y así sucesivamente.

El objeto de las fracciones contínuas es la determinacion aproximada de las fracciones ordinarias irreducibles, cuyos términos constan de muchas unidades.

Propongámonos hallar los diferentes valores aproximados de $\frac{104}{513}$

Dividiendo sus dos términos por 104; los dos términos de $\frac{97}{104}$ por 97; los dos términos de $\frac{7}{97}$ por 7 y asi sucesivamente, tendremos por último resultado una fraccion contínua equivalente á la fraccion ordinaria propuesta.

$$\frac{104}{513}=\cfrac{1}{4+\cfrac{97}{104}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{97}}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{6}{7}}}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}$$

Luego para reducir una fraccion ordinaria á fraccion continua se halla el m. c. d. *del numerador y denominador, y los cocientes sucesivos de esta operacion serán la parte entera de los denominadores de la fraccion continua.*

Llámase *fraccion integrante* cada una de las fracciones simples que constituyen una contínua. Llámase *fraccion reducida* la ordinaria equivalente á cierto número de las integrantes empezando desde la primera.

Las fracciones reducidas de la contínua anterior son las siguientes $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{14}{69}$ y $\frac{15}{74}$

Los términos de una reducida se forman multiplicando los respectivos de la reducida anterior por el cociente entero que corresponde á la reducida que se busca, y sumando estos productos con los respectivos de la fraccion precedente en dos lugares. La diferencia entre cada dos reducidas consecutivas es tanto menor cuanto mayor es el número de sus fracciones integrantes. Las reducidas van siendo alternativamente mayores y menores que la ordinaria, equivalente á la contínua. Las demostraciones de estas y otras propiedades de las fracciones contínuas pueden verse en la Nota I al final del Algebra.

Ejercicios para el cálculo de los números fraccionarios.

176. Numeracion. ¿Cuántas unidades fraccionarias componen una unidad entera? ¿Añadiendo á los dos términos de una fraccion un mismo número entero, se puede obtener una fraccion igual á la unidad entera? ¿Se puede simplificar un número fraccionario cuyos dos términos se diferencian en una unidad? ¿Se simplifica un número fraccionario restando de ambos términos una unidad? ¿Dos fraccionarios irreducibles iguales pueden tener numeradores ó denominadores diferentes? Reducir los números fraccionarios $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{8}$ á otros equivalentes cuya unidad fraccionaria sea comun y la mayor posible.

¿Cuántas unidades decimales componen una unidad entera? ¿Cuántas millonésimas componen una centésima ó una milésima? ¿Por qué los decimales se escriben como los enteros? ¿Por qué se escribe un cero antes de las fracciones decimales? ¿Si añadimos uno ó mas ceros á la derecha de un número decimal ó entre la coma y las décimas, aumenta su valor? Reducir dos ó mas números á otros cuya unidad decimal sea comun. Una unidad decimal de cualquier órden es siempre mayor que la suma de los valores de todas las cifras de los órdenes inferiores. ¿Si se suprime la coma de la fraccion duodecimal 0,459, el resultado 459 es mil veces mayor que 0,459?

Adicion. $\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}=$ $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$ $\quad \frac{3}{5}+\frac{1}{4}+\frac{8}{40}+\frac{3}{10}+\frac{3}{2}=$

$12+\frac{4}{3}=$ $\quad \frac{5}{4}+12=$ $\quad 105\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+10+4\frac{2}{3}+15\frac{3}{2}+24=$

*¿Si se suman separadamente los numeradores y los denominadores de dos ó mas fracciones iguales, el número fraccionario que resulte será igual, mayor ó menor que cada una de las fracciones dadas? *Si se suman ordenadamente los numeradores y los denominadores de dos ó mas fracciones desiguales, el número fraccionario que resulte será *mayor* que la fraccion menor, y *menor* que la mayor. Corregir la adicion siguiente, siendo 25 décimas el segundo sumando y 12 millonésimas el tercero..... 14,005+0,5+0,00012+4,12+108,00841+185,9900019=

Sustraccion. $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=$ $\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=$ $\quad 4-\frac{2}{3}=$ $\quad 4-\frac{5}{2}=$

$4-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=$ $\quad 10-\frac{4}{5}-2\frac{1}{7}=$ $\quad 10-\frac{4}{5}-2\frac{6}{7}=$ $\quad 10\frac{1}{5}-\left(5-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=$

*¿Si se restan separadamente los numeradores y los denominadores de dos fracciones iguales, el número fraccionario que resulte será igual, mayor ó menor que cada una de las fracciones dadas?

Hallar los valores de las diferencias indicadas que siguen:

0,4—0,014 $\quad$ 5,01—2,00405 $\quad$ 10—4,004 $\quad$ 10—0,999 $\quad$ 4,5—1

Multiplicacion. $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{11}=$ $\quad \left(1492+\frac{1}{2}\right)\times 10=$

$\left(10\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)\times 5=$ $\quad \left(4\frac{1}{2}-2\frac{1}{5}\right)\times 10\frac{1}{11}\times\frac{11}{2}\times\left(4\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)=$

¿Si añadimos una unidad á cualquiera de los factores del primer ejemplo, variará el producto? ¿La variacion será la misma sea cualquiera el factor al que se añada dicha unidad? Añadiendo una unidad al numerador ó al denominador de uno de los factores del mismo ejemplo, ¿qué variacion sufrirá el producto? ¿El producto de dos ó mas fracciones es mayor que cada una de ellas? y mayor tambien que su suma? ¿Qué valen $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de 100? [40]. Hallar el producto de la suma por la diferencia de la mitad y tercera parte de 8 y medio. $\left[10\frac{5}{144}\right]$

0,9×0,04= $\quad$ 12,05×0,104×100= $\quad$ 40×4005×0,0012×10000=

Division. $\frac{1}{5} : \frac{6}{5} =$ $\frac{4}{5} : 10 =$ $10 : \frac{4}{5} =$ $\frac{5}{6} : \frac{5}{4} =$ $\frac{6}{5} : \frac{4}{5} =$

$\left(1492+\frac{1}{2}\right) : 10 =$ $4\frac{1}{2} : 1\frac{5}{4} =$ $\left(10\frac{4}{9}-\frac{1}{2}\right) : 2 =$ $2 : \left(5-\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\right) =$

¿Si añadimos una unidad al dividendo ó al divisor de la primera division, variará el cociente? ¿y si añadimos la misma unidad al numerador, al denominador ó á los dos términos del dividendo ó divisor? ¿El cociente de dos fracciones es menor que cada una de ellas, y menor tambien que la suma y producto de las mismas?

$0{,}22248 : 12 =$ $2460 : 2{,}06 =$ $40{,}8 : 1{,}02$

Hallar con menos error que una millonésima los cocientes que siguen

$1856 : 27 =$ $15 : 0{,}7 =$ $4{,}5 : 0{,}00011 =$ $0{,}7 : 1{,}25 =$

Elevacion. $\left[\left(4\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times 10\right]^2 =$ $\left(5-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)^3 =$ $\left(100+\frac{1}{2}\right)^4 =$

¿El cubo de una fraccion es mayor ó menor que su cuadrado? ¿Se verifica lo mismo respecto del cubo y cuadrado de un número fraccionario mayor que la unidad? Si dos números se diferencian en media unidad ¿en cuánto se diferenciarán sus cuadrados, cubos y potencias cuartas?

$(0{,}05)^2 =$ $(0{,}05)^3 =$ $(10{,}2\times 1{,}2\times 100\times 0{,}05)^3 =$ $(5{,}2-0{,}5)^6 =$

Extraccion de raices. Hallar con menos error que $\frac{1}{12}$ las cuatro primeras raices que siguen; y con menos error que una millonésima las cuatro últimas:

$\sqrt{140}$ $\sqrt{26\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{140}$ $\sqrt[3]{25\frac{1}{2}}$ $\sqrt{1856}$ $\sqrt[3]{1856}$ $\sqrt{2{,}5}$ $\sqrt[4]{2{,}5}$

¿Un número fraccionario irreducible puede tener raiz exacta? y en tal caso, dicha raiz es tambien irreducible? ¿La raiz cúbica de una fraccion es mayor ó menor que su raiz cuadrada? ¿Se verifica lo mismo respecto de la raiz cúbica y cuadrada de los números fraccionarios mayores que la unidad? *Hallar la raiz cuadrada ó cúbica de un número entero ó fraccionario con menos error que otro fraccionario dado, por ejemplo $^3/_7$ que equivale á una unidad fraccionaria cuyo denominador es $^7/_3$. ¿Por qué para extraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número decimal, se necesita que el número de sus cifras decimales sea par en el primer caso y múltiplo de 3 en el segundo? ¿Se podría hallar la raiz cuadrada ó cúbica de un número fraccionario cualquiera, transformándole en otro cuyo numerador sea potencia exacta del mismo grado que la raiz que se busca? ¿Cómo se aprecia la aproximacion en este caso?

Reduccion de los números fraccionarios decimales á ordinarios y al contrario:

$0{,}504 =$ $0{,}5555.....$ $0{,}12504504..... =$ $4{,}0125666..... =$

$2{,}001 =$ $4{,}1111.....$ $5{,}0002525....... =$ $12{,}000104104..... =$

$\frac{4}{5} =$ $\frac{1}{8} =$ $\frac{9}{25} =$ $\frac{3}{15} =$ $\frac{2}{7} =$ $\frac{12}{5.11.2.7.2} =$

¿Es indiferente que en el segundo ejemplo el periodo sea 5 ó 55 y que en el ejemplo siguiente la parte no periódica sea 125 y el periodo 045? *Deducir inmediatamente el número de cifras de la parte no periódica, y el máximun de las del período correspondiente á la última fraccion ordinaria. *¿Si dos fracciones irreducibles tienen el mismo denominador, reducidas á decimales, tendrán los períodos igual número de cifras? ¿Cómo se reduce una fraccion ordinaria á fraccion duodecimal, y viceversa? Condiciones para que una fraccion ordinaria se pueda reducir exactamente á duodecimal. Si una fraccion ordinaria reducida á decimal es periódica ¿sucederá lo mismo si la reducimos á duodecimal?

Hallar con menos error que una milésima, el valor de $\frac{1850\sqrt[6]{5021\times(5{,}5)^4}}{25\sqrt{(1{,}333)^5}}$

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS INCOMENSURABLES.

Preliminares. Adicion. Sustraccion. Multiplicacion. Division. Elevacion á potencias. Extraccion de raices.

Preliminares.

177. Dos ó mas números son *comensurables ó incomensurables entre sí,* segun que contengan ó no á un entero ó fraccionario un número exacto de veces.

Un número se llama *comensurable ó racional*, si contiene á la unidad entera ó fraccionaria un número exacto de veces, *é incomensurable ó irracional* en el caso contrario.

Los números enteros y fraccionarios son siempre comensurables.

Todo número incomensurable se puede expresar por otro comensurable, de modo que la diferencia entre ambos sea menor que cualquiera número comensurable dado.

La adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices exactas de los números comensurables, dan siempre resultados *comensurables ó racionales.* La extraccion de raices inexactas de los números comensurables dá orígen á los números *irracionales ó incomensurables.*

***178.** *Si la raiz exacta de un número entero ó fraccionario no es otro número entero ó fraccionario, será incomensurable.*

Si $\sqrt[n]{N}$ no es entero, tampoco será fraccionario, pues suponiendo $\sqrt[n]{N}=\frac{a}{b}$ se verificaria $N=\frac{a^n}{b^n}$ lo que es absurdo; porque si a y b son primos, tambien lo serán sus potencias de un mismo grado (**111**).

Suponiendo que $\sqrt[n]{\frac{N}{M}}$ no es fraccionario, es evidente que tampoco será entero; luego, si las raices inexactas de los números comensurables no se pueden expresar por ningun número entero ni fraccionario (aunque sí aproximarse por medio de ellos cuanto se quiera), no contendrán exactamente á la unidad entera ni á la fraccionaria, y por lo mismo serán números *incomensurables.*

***179.** *Un número incomensurable bajo la forma de una raiz indicada no varia: 1.° aunque se multiplique el índice de la raiz por un número entero cualquiera, con tal que se eleve la parte subradical á la potencia que indique dicho número entero; 2.° si el índice de la raiz se divide por uno de sus divisores, con tal que se extraiga la raiz del mismo grado de la parte subradical.*

$$\sqrt{5}=\sqrt[2.3]{(5)^3}$$

En efecto, si llamamos x á $\sqrt{5}$

tendremos. . . . . . . $x^2=5$

y por consiguiente $x^{2.3}=(5)^3$

de donde $x=\sqrt[2.3]{(5)^3}$

luego $\sqrt{5}$ y $\sqrt[2.3]{(5)^3}$ serán equivalentes.

$$\sqrt[6]{25}=\sqrt[3]{\sqrt{25}}$$

Llamando x á. . . . $\sqrt[6]{25}$

tendremos. . . . . . . $x^6=25$

y por consiguiente $x^3=\sqrt{25}$

de donde $x=\sqrt[3]{\sqrt{25}}$

luego $\sqrt[6]{25}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{25}}$ serán equivalentes.

De este teorema se deducen las dos consecuencias siguientes:

1.ª *Si el indice de la raiz tiene algun divisor, se dividirá por él, extrayendo al mismo tiempo la raiz exacta del mismo grado de la parte subradical.*

$$\sqrt[4]{25}=\sqrt{5} \qquad \sqrt[6]{\frac{8}{729}}=\sqrt{\frac{2}{9}} \qquad \frac{1}{2}\sqrt[10]{32}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

2.ª *Para reducir dos ó mas números irracionales de indices diferentes á otros de un mismo indice, se multiplica el indice de cada radical por el producto de los indices de los demás, elevando al mismo tiempo la cantidad subradical á la potencia que indica dicho producto.*

$\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$ equivalen respectiv. á $\sqrt[30]{32768}$, $\sqrt[50]{9765625}$ y $\sqrt[30]{\frac{1}{4096}}$

Adicion de los números incomensurables.

180. *Para hallar la suma de dos ó mas números incomensurables, se transforman en comensurables decimales, y la suma de estos, despues de borrar una cifra de la derecha por cada diez sumandos, si pasaren de este número, será la de los números incomensurables dados con menos error que una unidad del penúltimo órden decimal.*

Con el objeto de obtener la mayor exactitud posible en el resultado, conviene calcular los números comensurables equivalentes á los incomensurables dados, con menos error que una misma unidad decimal, el uno por defecto y el otro por exceso alternativamente.

De la definicion de los números incomensurables se deduce que.....

La suma de un número comensurable con otro incomensurable es incomensurable; pues de lo contrario, la diferencia de dos números comensurables seria incomensurable.

La suma de dos ó mas números incomensurables puede ser comensurable ó incomensurable.

Sustraccion de los números incomensurables.

181. *Para hallar el resíduo ó diferencia de dos números incomensurables, se transforman en comensurables decimales, y la diferencia de estos será la de los números dados con menos error que una unidad del penúltimo órden decimal.*

La aproximacion de los números incomensurables se debe hallar para el minuendo y el sustraendo con menos error que una misma unidad decimal, en ambos por exceso ó en ambos por defecto.

La diferencia entre dos números, uno comensurable y otro incomensurable, es incomensurable; pues, de otro modo, la suma de uno comensurable y otro incomensurable seria comensurable, ó la de dos comensurables seria incomensurable, lo que es absurdo. *La diferencia de dos números incomensurables puede ser comensurable ó incomensurable.*

Multiplicacion de los números incomensurables.

182. El producto de un número A por otro incomensurable B es un número menor que el producto de A por un número comensurable cualquiera superior á B, y mayor que el producto de A por cualquiera número comensurable menor que B.

Para hallar el producto de dos ó mas números incomensurables, se transforman en comensurables decimales, y el producto de estos será el de los números dados con cuanta aproximacion se quiera.

Para multiplicar una suma ó diferencia indicada de dos ó mas numeros cualesquiera por otro incomensurable, se multiplica cada número del multiplicando por el multiplicador, y la suma ó diferencia de los productos parciales será el producto total.

Llamando α á un número incomensurable cualquiera, se verificará que.....

$$(A+B)\times\alpha=A\alpha+B\alpha \qquad (A-B)\times\alpha=A\alpha-B\alpha$$

En efecto: 1.° suponiendo el número incomensurable α comprendido entre los comensurables Δ y δ, de modo que la diferencia $\Delta-\delta$ sea tan pequeña como se quiera, tendremos que.....

$(A+B)\times\alpha$ estará comprendido entre $(A+B)\times\Delta$ y $(A+B)\times\delta$

$A\alpha+B\alpha$ lo estará tambien entre $A\Delta+B\Delta$ y $A\delta+B\delta$

pero $(A+B)\times\Delta$ y $(A+B)\times\delta$ son respectivamente iguales á $A\Delta+B\Delta$ y $A\delta+B\delta$ luego las cantidades constantes $(A+B)\times\alpha$ y $A\alpha+B\alpha$ que están comprendidas por dos variables, cuya diferencia puede ser tan pequeña como se quiera, serán iguales. (NOTA III al final de la Aritmética).

2.° Llamando D la diferencia $A-B$, será $A=B+D$ y por consiguiente $A\alpha=B\alpha+D\alpha$ de donde se deduce $A\alpha-B\alpha=D\alpha$ ó bien $A\alpha-B\alpha=(A-B)\times\alpha$

Cor. Siendo A,B,M y N números cualesquiera comensurables ó incomensurables ó todos incomensurables, tendremos.....

$$(A\pm B)\times(M+N)=(A\pm B)\times M+(A\pm B)\times N$$
$$(A\pm B)\times(M-N)=(A\pm B)\times M-(A\pm B)\times N$$

182. *El producto de varios números comensurables é incomensurables, ó todos incomensurables, no varia aunque se altere el órden de los factores.*

*Siendo α incomensurable, se verifica la igualdad $\alpha\times B\times C=B\times C\times\alpha$

En efecto; suponiendo A y a dos valores comensurables aproximados al número α, el uno por exceso y el otro por defecto, cuya diferencia sea tan pequeña como se quiera, tendremos que.....

$\alpha\times B\times C$ estará comprendido entre $A\times B\times C$ y $a\times B\times C$

$B\times C\times\alpha$ lo estará tambien entre $B\times C\times A$ y $B\times C\times a$

y como $A\times B\times C$ y $a\times B\times C$ son respectivam. iguales á $B\times C\times A$ y $B\times C\times a$, los productos constantes $\alpha\times B\times C$ y $B\times C\times\alpha$ estarán comprendidos entre los variables $A\times B\times C$ y $a\times B\times C$; pero la diferencia de estos puede ser tan pequeña como se quiera; luego los constantes serán iguales, y tendremos

$$\alpha\times B\times C=B\times C\times\alpha$$

La misma demostracion es aplicable en el caso en que los factores incomensurables son dos ó mas.

Esc. De la proposicion anterior se deducen las siguientes consecuencias, que se verifican, sean los números comensurables é incomensurables, ó todos incomensurables.

Para formar el producto de varios factores se multiplican dos cualesquiera de ellos, luego el producto se multiplica por otro, y así sucesivamente. Para multiplicar un producto indicado por otro número comensurable ó incomensurable, basta multiplicar por este número uno de los factores del producto dado. El producto de dos ó mas productos indicados es igual al producto indicado de todos los factores de los productos dados.

Las alteraciones del producto por la variacion de los factores son las mismas en los números incomensurables que en los comensurables.

Division de los números incomensurables.

184. *Para hallar el cociente de dos números incomensurables, se transforman en comensurables decimales, y el cociente de estos será el de los números dados con cuanta aproximacion se quiera.*

De las observaciones, que hemos hecho en la multiplicacion de los números incomensurables, y de las definiciones de la multiplicacion y division, se deducen las siguientes proposiciones, que se verifican sean los números comensurables é incomensurables, ó todos incomensurables.

Para dividir una suma ó diferencia indicada de dos números cualesquiera por otro incomensurable, se divide cada uno de los números del dividendo por el divisor, y la suma ó diferencia de los cocientes parciales será el cociente total. Para dividir un producto indicado por un número, basta dividir por este cualquiera de los factores (*). *Para dividir un número por un producto indicado de varios factores, se divide el dividendo por uno de los factores, el cociente de esta division se divide por otro, y así sucesivamente. Luego el cociente de un número por otros varios es igual al cociente del primero por el producto de todos los demas.*

Si el dividendo de una division se multiplica ó se divide por un número incomensurable, el cociente resultará multiplicado ó dividido por el mismo número. Si el divisor se multiplica ó se divide por un número, el cociente resultará dividido ó multiplicado por el mismo número. Ultimamente, si el dividendo y divisor se multiplican ó se dividen por un mismo número, el cociente no se altera.

Elevacion á potencias de los números incomensurables.

185. *Para hallar una potencia cualquiera de un número incomensurable se transforma en comensurable, y la potencia de este número será la aproximada del número dado.*

Todas las proposiciones relativas al cuadrado y cubo de la suma, diferencia, producto y cociente de los números comensurables, lo mismo que las que hacen referencia á las potencias indicadas de un número comensurable, se verifican igualmente, aun cuando los datos sean incomensurables.

Las diferentes potencias de un número incomensurable pueden ser comensurables ó incomensurables.

Extraccion de raices de los números incomensurables.

186. *Para hallar la raiz cuadrada, cúbica, etc. de un número incomensurable, se transforma primeramente en comensurable, y la raiz de este número será aproximadamente la del propuesto.*

Las raices de un número incomensurable son todas incomensurables.

Extraer con menos de un veinte-avo de error la raiz cuadrada de $5+\sqrt[3]{100}$

El producto de este número por $(20)^2$ es igual á $2000+400\sqrt[3]{100}=3856$ (**) y la raiz cuadrada de este número con menos de una unidad de error es 62; luego el número que se pide será el cociente de 62 por 20 ó bien 3,1

Calcular con menos de una décima de error los valores de $\sqrt[8]{1854,5}$ y $\sqrt{10+\frac{1}{2}\sqrt{10}}$

***187.** *La raiz de un producto indicado de factores comensurables ó incomensurables es igual al producto de las raices del mismo grado de los factores.*

Siendo A,B,C, números cualesquiera, se verificará $\sqrt{A\times B\times C}=\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C}$

(*) Si se multiplica uno de los factores de un producto por un número cualquiera y otro se divide por el mismo número, el producto no se altera.

(**) Hallando la raiz cúbica de 100 con menos de un cuatracientos-avo de error.

En efecto; el segundo miembro de esta igualdad será igual al primero, siempre que su cuadrado sea igual al producto A×B×C, como efectivamente se verifica pues..... $(\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times\sqrt{C})^2=(\sqrt{A})^2\times(\sqrt{B})^2\times(\sqrt{C})^2=A\times B\times C$

La demostracion es la misma, sea cualquiera el número de factores y el índice de la raiz (*).

Cor. Para hallar el producto de dos ó mas números incomensurables de un mismo índice, se escribe debajo del radical comun el producto de las cantidades sub-radicales. El resultado así obtenido se transforma en comensurable con menos error que una unidad decimal dada.

$\sqrt{2}\times\sqrt{10,2}=\sqrt{20,4}=4,516635$ $\quad \sqrt[3]{18}\times\sqrt[6]{144}=\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{216}=6$

El producto de dos ó mas números incomensurables puede ser comensurable ó incomensurable.

Para elevar un número incomensurable á una potencia cualquiera, se escribe debajo del signo radical la potencia de la cantidad sub-radical, transformando luego el resultado así obtenido en comensurable con menos error que una unidad decimal dada.

$(\sqrt[3]{10})^2=\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{100}=4,6415....$ $\quad (\sqrt{2})^3=\sqrt{8}=2,82842....$

188. *La raiz de un cociente indicado de dos números comensurables ó incomensurables es igual á la raiz del mismo grado del dividendo dividida por la del divisor.*

En efecto; $\sqrt{A:B}=\sqrt{A}:\sqrt{B}$ pues $(\sqrt{A}:\sqrt{B})^2=(\sqrt{A})^2:(\sqrt{B})^2=A:B$

Cor. Para dividir dos números incomensurables de un mismo índice, se escribe debajo del radical comun el cociente de las cantidades sub-radicales. El resultado así obtenido se transforma en comensurable con menos error que una unidad decimal dada.

$\sqrt[3]{1,25}:\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{0,125}=0,5$ $\quad \sqrt{10}:\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{1000}:\sqrt[6]{25}=\sqrt[6]{40}$

Del mismo modo $\quad 5:\sqrt{2}=\sqrt{25}:\sqrt{2}=\sqrt{12,5}$ $\quad \sqrt{5}:2=\sqrt{1,25}=1,118$

El cociente de dos números incomensurables ó de uno comensurable por otro incomensurable, ó al contrario, puede ser comensurable ó incomensurable.

Observaciones generales acerca de los números incomensurables.

189. La division de dos números incomensurables, ó uno comensurable y otro incomensurable, dá orígen á un número de forma fraccionaria, cuyos dos términos (ó uno de ellos) son incomensurables.

Las propiedades de los números fraccionarios, cuyo numerador y denominador son comensurables, se verifican igualmente, si son incomensurables.

La raiz indicada de un número incomensurable de cierto grado dá lugar á otro número incomensurable de grado superior. Los números incomensurables, sean del grado que se quiera, están todos sujetos á las reglas del cálculo aritmético que dejamos explicadas.

(*) Luego, si una cantidad sub-radical se puede descomponer en factores y alguno de ellos es potencia exacta del grado que indica el índice de la raiz, se *simplificará* la expresion incomensurable, extrayendo la raiz exacta de dicho factor y escribiendo el resultado delante de la raiz indicada de los demas factores.

$\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{\frac{7}{18}}=\frac{1}{3}\sqrt{3,5}$

GENERALIDAD DEL CÁLCULO ARITMÉTICO.

***190.** Con el objeto de expresar de una manera general las diferentes propiedades de los números, que llevamos explicadas en el cálculo de los enteros, en el de los fraccionarios y en el de los incomensurables, vamos á representar ahora indistintamente por medio de las letras del alfabeto, no solo estas diferentes clases de números, sino tambien los resultados finales de ejecutar una ó mas operaciones aritméticas, cuyos datos sean comensurables ó incomensurables (*).

En este supuesto son evidentes, sean cualesquiera los valores de A, B, C, etc. las igualdades que siguen:

$$A+B+C+D=A+C+D+B=C+D+B+A$$

Siendo $A+B=S$ y x un número cualquiera, tendremos

$$A+(B+x)=S+x \qquad A+(B-x)=S-x \qquad (A+x)+(B-x)=S$$

Siendo $A-B=D$ será $A=D+B$ $\quad B=A-D$ y tambien

$$(A+x)-B=D+x \mid (A-x)-B=D-x \mid A-(B+x)=D-x \mid A-(B-x)=D+x$$

$$(A+x)-(B+x)=D \qquad (A-x)-(B-x)=D$$

$$(A+B+C)\times M=AM+BM+CM \qquad (A+B-C)\times M=AM+BM-CM$$

$$(A+B)\times(M+N)=AM+BM+(AN+BN)$$
$$(A+B)\times(M-N)=AM+BM-(AN+BN)$$
$$(A-B)\times(M+N)=AM-BM+(AN-BN)$$
$$(A-B)\times(M-N)=AM-BM-(AN-BN)$$

$$A\times B\times C=B\times A\times C=C\times B\times A=C\times A\times B$$

$$A\times B\times C\times D\times E=AB\times C\times D\times E=ABC\times D\times E=ABCD\times E=ABCDE$$

$$(A.B.C.D)\times N=AN.B.C.D=A.BN.C.D=A.B.CN.D=A.B.C.DN$$

$$(A.B.C)\times(M.N)=A.B.C.M.N$$

Siendo $A\times B=P$ se verificarán las siguientes igualdades:

$$(A+x)\times B=P+Bx \qquad A\times(B+x)=P+Ax$$
$$(A-x)\times B=P-Bx \qquad A\times(B-x)=P-Ax$$
$$(A+x)\times(B+z)=P+Bx+Az+xz \qquad (A+x)\times(B-z)=P+Bx-Az-xz$$
$$(A-x)\times(B+z)=P-Bx+Az-xz \qquad (A-x)\times(B-z)=P-Bx-Az+xz$$

$$(A.x)\times B=P\times x \qquad (A.x)\times(B.z)=P\times xz \qquad (A.x)\times\frac{B}{x}=P$$

$$(A+B\pm C):N=\frac{A}{N}+\frac{B}{N}\pm\frac{C}{N} \qquad (A.B.C):N=\frac{A}{N}\times B.C=A\times\frac{B}{N}\times C=A\times B\times\frac{C}{N}$$

$$N:(A\times B\times C)=\frac{N:A}{B}:C \qquad N:A:B:C=N:(A\times B\times C)$$

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \qquad (A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2 \qquad (A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$
$$(A+1)^2-A^2=2A+1 \qquad (A+1)^3-A^3=3A^2+3A+1$$

$$(A\times B)^n=A^n\times B^n \mid \left(\frac{A}{B}\right)^n=A^n:B^n \mid (A^n)^m=A^{mn} \mid \left(\sqrt[n]{A}\right)^m=\sqrt[n]{A^m}$$

$$\sqrt[n]{A\times B}=\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B} \mid \sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\sqrt[n]{A}:\sqrt[n]{B} \mid \sqrt[n]{A^m}=\left(\sqrt[n]{A}\right)^m \mid \sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[mn]{A}$$

La traduccion de todas estas igualdades al lenguaje ordinario puede servir de repaso general de los enunciados de los teoremas mas notables, relativos al cálculo aritmético.

(*) Llámase FÓRMULA una expresion literal o simbólica, en que se cifra con toda generalidad una propiedad demostrable ó una série de operaciones, que deben practicarse para obtener un resultado.

COMPARACION ARITMETICA.

Igualdad. Desigualdad.

Preliminares.

191. Al comparar dos números (*) puede ocurrir únicamente que sean iguales ó desiguales; en el primer caso resulta una *igualdad* y en el segundo una *desigualdad*.

Es evidente que una igualdad no deja de serlo....

1.° *Añadiendo ó quitando un mismo número al primero y segundo miembro*; y por lo mismo todo número que se halle en un miembro por *sumando* podrá pasar al otro miembro por *sustraendo*, y al contrario. 2.° *Multiplicando ó dividiendo ambos miembros por un mismo número*; y por consiguiente, todo *factor* de un miembro pasará al otro por *divisor*, y al contrario. 3.° *Elevando ambos miembros á una misma potencia ó extrayendo de uno y otro la raiz del mismo grado.*

Si dos ó mas igualdades se suman, se restan, se multiplican ó se dividen ordenadamente, el resultado será otra igualdad.

Cuando uno ó mas números de una igualdad son desconocidos, la igualdad recibe el nombre de *ecuacion*, y los números desconocidos se llaman *incógnitas*. Resolver una ecuacion es hallar los valores de las incógnitas.

192. En toda desigualdad se verifica...

1.° Llamando A y B dos números cualesquiera, y R el exceso de A sobre B, tendremos $A>B$ y $A-B=R$; y como el resíduo ó diferencia de dos números no se altera aunque á uno y otro se añada ó quite un mismo número, será.....

$$(A+N)-(B+N)=R \quad \text{ó bien} \quad (A-N)-(B-N)=R$$

luego $A+N>B+N$ y $A-N>B-N$ de donde se deduce que

Una desigualdad no cambia el signo $>$ ó $<$ aunque se añada ó quite un mismo número al primero y segundo miembro; y por consiguiente todo *sumando* de un miembro podrá pasar al otro por *sustraendo*, y al contrario.

Si $A-B<C+D$ se verificará tambien $A<C+D+B$ y $A-B-D<C$

2.° De $A-B=R$ se deduce $A.N-B.N=R.N$ $(A:N)-(B:N)=R:N$

luego se verifica que $A.N>B.N$ y $A:N>B:N$

y por consiguiente; *Una desigualdad no cambia el signo $>$ ó $<$ aunque ambos miembros se multipliquen ó se dividan por un mismo número*; luego todo factor de un miembro puede pasar al otro por divisor, y al contrario.

Si $A\times B>\frac{D}{C}$ tambien se verificará $A>\frac{D}{C}:B$ y $A\times B\times C>D$

De las desigualdades $A>B$ y $C>D$ se deduce $A+C>B+D$; luego....

Si sumamos dos ó mas desigualdades de una misma especie (**), el resultado será otra desigualdad de la misma especie que las primeras.

Cuando uno ó mas números de una desigualdad son desconocidos, la desigualdad se llama *inecuacion* y los números desconocidos se dicen *incógnitas*. Resolver una inecuacion es hallar los límites de los valores de las incógnitas.

La teoría de las ecuaciones é inecuaciones forma parte del Algebra (***).

(*) Enteros, fraccionarios ó incomensurables, ó bien los resultados de una ó mas operaciones aritméticas cuyos datos sean comensurables ó incomensurables. Por esta razon las letras que usaremos en adelante representarán los números con toda generalidad.

(**) Dos desigualdades son de una misma especie, cuando ambas tienen un mismo signo $>$ ó $<$

(***) La teoría de las ecuaciones é inecuaciones numéricas de primero y segundo grado debiera en nuestro juicio formar parte de la Aritmética.

193. Comparacion de igualdad. El resultado de la comparacion de dos números iguales es forzosamente *cero* ó la *unidad*, segun que nos propongamos determinar la diferencia ó el cociente de ellos.

Comparacion de desigualdad. El resultado de la comparacion de dos números desiguales es un tercer número, que puede indicar el exceso de uno sobre el otro ó el número de veces que el uno contiene al otro, segun que nos propongamos determinar la diferencia ó el cociente de ellos.

El primero de los números que se comparan se llama *antecedente*, el otro *consecuente*, y los dos, términos de la diferencia ó términos del cociente. Cociente de dos números es lo mismo que *razon* de los mismos números.

La comparacion por *diferencia* entre los números 8 y 2 se escribe así 8(—)2
La comparacion por *cociente* entre los mismos números se escribe 8(:)2
El resultado de la comparacion en la primera es 6 y en la segunda es 4 (*).

La comparacion de desigualdad por diferencia y por cociente dá lugar á la teoría de las *diferencias, equidiferencias* y *progresiones por diferencia* en el primer caso, y á las *razones, proporciones* y *progresiones por cociente* en el segundo.

Nota. Se acostumbra llamar *razon* al resultado de la comparacion de dos números, bien nos propongamos hallar la *diferencia*, ó el *cociente* de ellos. En el primer caso la razon es *aritmética*, y en el segundo *geométrica*.

Comparacion de desigualdad por diferencia.

Diferencias. Equidiferencias. Progresiones por diferencia.

Diferencias.

194. *Diferencia* de dos números es el resíduo indicado del primero llamado *antecedente* y el segundo que se dice *consecuente*. El antecedente es pues igual al consecuente sumado con la diferencia.

La *diferencia* de dos números no se altera añadiendo ó quitando al antecedente y consecuente un mismo número.

Así; 12—4 es lo mismo que 13—5 é igual á 10—2 (**)

Una diferencia es *inversa* de otra cuando el antecedente de la una es consecuente de la otra y al contrario.

5—3 es inversa de 3—5 $\qquad$ a—b es inversa de b—a

Si se suman ordenadamente dos ó mas diferencias, la diferencia que resulta se llama *compuesta* y cada una de las que se suman *componente*. En toda razon compuesta se puede sustituir en lugar de cada componente otra igual, sin que la primera sufra alteracion. La suma de dos diferencias iguales es dupla de cada una de ellas. La suma de dos diferencias inversas, es cero.

Se acostumbra llamar diferencia *de mayor desigualdad*, aquella en que el antecedente es mayor que el consecuente y *de menor desigualdad* en caso contrario. La diferencia de mayor desigualdad es siempre mayor que cero y la de menor desigualdad es menor que cero ó negativa. Por analogía se dice diferencia *de igualdad*, cuando el antecedente y consecuente son iguales.

10—4=6 | 4—10=—6 | 10—10=0

(*) La comparacion por diferencia entre 8 y 2 se escribe tambien asi 8.2 ó bien 8 [:] 2 Nosotros hemos preferido la notacion del texto por acomodarse mejor al objeto de la comparacion por diferencia. La comparacion por raiz, que no tiene ninguna aplicacion en la parte elemental de la ciencia, es el resultado de extraer del antecedente la raiz del grado que indique el consecuente. La comparacion por raiz de los números 8 y 2 es $\sqrt{8}$

(**) En la práctica se suprime el paréntesis que encierra al signo —

Equidiferencias.

195. Llámase *equidiferencia* á la igualdad de dos diferencias (*).

La diferencia 8—2 es igual á la diferencia 10—4, y por consiguiente, los cuatro números 8,2,10 y 4 forman una equidiferencia, que se escribe así:

$8-2::10-4$ y se enuncia diciendo 8 es á 2 *como* 10 es á 4

De los cuatro números de una equidiferencia el primero y el tercero son *antecedentes*, el segundo y cuarto *consecuentes*, el primero y último *extremos* y el segundo y tercero *medios*. Si los medios de una equidiferencia son iguales, la equidiferencia se llama *contínua* y el medio repetido se llama *medio diferencial* entre los extremos.

$12-10::10-8$ es una equidiferencia *contínua* cuyo medio diferencial es 10.

196. En toda equidiferencia se verifican las *propiedades* siguientes:

1.ª La suma de los extremos es igual á la suma de los medios y al duplo del medio diferencial en la contínua.

En efecto; sea la equidiferencia $a-b::c-d$ ó bien $a-b=c-d$ trasladando los sustraendos b y d de uno al otro miembro, será $a+d=c+b$

Si la equidiferencia es contínua como $a-b::b-c$ ó sea $a-b=b-c$ se verificará tambien que $a+c=b+b=2\times b$

Recip. Si la suma de dos números es igual á la suma de otros dos, los cuatro forman una equidiferencia, haciendo de extremos los sumandos de una suma y de medios los de la otra.

Si tenemos $a+d=b+c$ y trasladamos el sumando d del primer miembro al segundo y el b del segundo al primero, será $a-b::c-d$

2.ª *Uno de los extremos* de toda equidiferencia es igual á la suma de los medios menos el otro extremo; y *un medio* equivale á la suma de los extremos menos el otro medio.

Sea la equidiferencia $a-b::c-d$ que dá $a+d=b+c$ trasladando sucesivamente de un miembro al otro las cantidades d,a,c,b tendremos..... $a=b+c-d$ $d=b+c-a$ $a+d-c=b$ $a+d-b=c$

En la equidiferencia contínua, *uno de los extremos* es igual al duplo del término medio menos el otro extremo, y *el medio* es igual á la mitad de la suma de los extremos.

Sea la equidiferencia contínua $a-b::b-c$ que dá $a+c=2\times b$ de donde se deducen fácilmente las igualdades que siguen.....

$c=2\times b-a$ $a=2\times b-c$ $\frac{1}{2}(a+c)=b$ medio diferencial.

3.ª Una equidiferencia no deja de serlo aunque se añada ó se quite un mismo número á todos sus términos, á los antecedentes, á los consecuentes, á los dos primeros términos, ó á los dos últimos, pues en todas estas transformaciones siempre se verifica la igualdad de las diferencias, que constituyen la equidiferencia.

4.ª En toda equidiferencia se pueden mudar de lugar los medios, ó cambiar de lugar las diferencias: pues siempre la suma del primero y último término será igual á la del segundo y tercero.

5.ª Si los antecedentes de una equidiferencia son iguales, tambien lo serán los consecuentes y al contrario. Si dos equidiferencias tienen una diferencia comun, con las otras dos se podrá formar otra equidiferencia. Si dos equidiferencias tienen iguales los antecedentes ó los consecuentes, los otros cuatro términos formarán una equidiferencia.

(*) Llámase tambien *proporcion aritmética* á la igualdad de dos razones aritméticas.

Progresiones por diferencia.

197. Llámase *progresion por diferencia* una série de términos tales que restando de cada uno el anterior, dan todos una misma diferencia, llamada *diferencia* de la progresion (*).

Si la diferencia es mayor que cero, los términos van creciendo y la progresion se llama *creciente*; si la diferencia es negativa, los términos van disminuyendo y la progresion se llama *decreciente*. En uno y otro caso, cada término de la progresion por diferencia es *medio diferencial* entre el que le precede y el que le sigue.

Una progresion por diferencia no deja de serlo aunque se añada ó se quite un mismo número á todos sus términos.

La progresion *decreciente* se hace *creciente* con solo invertir el órden de sus términos. A la izquierda del primer término de una progresion por diferencia se escribe el signo ÷

[α] ÷10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, etc. (diferencia=5)

[β] $\div 7\frac{1}{2}$, 7, $6\frac{1}{2}$, 6, $5\frac{1}{2}$, 5, $4\frac{1}{2}$, 4, $3\frac{1}{2}$, 3, $2\frac{1}{2}$, 2, etc. $\left(\text{dif.}=-\frac{1}{2}\right)$

La primera de estas progresiones se lee así; 10 es á 15, como 15 es á 20, como 20 es á 25, como 25 es á 30 etc. (**).

198. En las progresiones por diferencia se verifican las siguientes *propiedades*:

1.ª *En toda progresion creciente por diferencia; el segundo término es igual al primero mas la diferencia de la progresion; el tercero es igual al primero mas dos veces la misma diferencia; el cuarto es igual al primero mas tres veces la diferencia..... y en general un término cualquiera es igual al primero mas tantas veces la diferencia como términos le anteceden* (***).

En efecto; sea la progresion creciente propuesta $\div A, b, c, d, m, p, q, r, U$

Si llamamos D la diferencia de la progresion, tendremos.....

$b-A=D$ $\quad c-b=D$ $\quad d-c=D$ $\quad m-d=D$ etc.

de donde $b=A+D$ $\quad c=b+D$ $\quad d=c+D$ $\quad m=d+D$ etc.

es decir que, cada término es igual al anterior mas la *diferencia*.

Sustituyendo ahora el valor del segundo término en el tercero, el valor de este en el cuarto y así sucesivamente, resultarán las siguientes transformaciones.....

2.° térm ino $b=A+D$ es decir al 1.° mas la *diferencia*.

3.° término $c=b+D=A+D+D=A+2D$ ó sea al 1.° mas dos veces la *dif.*

4.° término $d=c+D=A+2D+D=A+3D$ ó bien al 1.° mas tres veces la *dif.*

y por consiguiente, el *último término* será igual al primero mas tantas veces la *diferencia* como términos menos uno tenga la progresion.

Suponiendo n el número de términos, será..... $U=A+(n-1)D$

Esto supuesto, los términos 9.° y 12.° de la progresion [α] del número anterior serán..... $10+(9-1)\times5=50$ y $10+(12-1)\times5=65$

(*) *Progresion aritmética* ó por diferencia es una série de números, que crecen ó menguan por diferencias iguales. Se acostumbra separar unos términos de otros por medio de un punto, nosotros, para evitar inexactitudes, los separaremos por una coma, escribiendo al principio el signo ÷

(**) Tambien se lee, 10 es á 15 es á 20 es á 25 etc.

(***) Si la progresion es *decreciente*, un término cualquiera es igual al primero menos tantas veces el valor absoluto de la diferencia como términos le anteceden.

2.ª *Un término cualquiera de una progresion creciente por diferencia es igual al último menos tantas veces la diferencia de la progresion como términos hay despues de él.*

En efecto, en la anterior progresion por diferencia, se verifica evidentemente

$r=U-D \qquad q=r-D \qquad p=q-D$ etc.

de donde $r=U-D \qquad q=U-D-D=U-2D \qquad p=U-2D-D=U-3D$ etc.

y por consiguiente, el *primer término* de una progresion *creciente* por diferencia será igual al último menos tantas veces la diferencia como términos menos uno tenga la progresion.

Suponiendo n el número de términos, será..... $A=U-(n-1)D$ (*)

El término quinto de la progresion α (**197**); es igual á $65-7\times5=30$ y el primero será $65-11\times5=10$

3.ª *Cuatro términos consecutivos de una progresion por diferencia forman una equidiferencia. Tres consecutivos la forman continua. Dos consecutivos cualesquiera forman equidiferencia con otros dos tambien consecutivos. Dos términos cualesquiera forman equidiferencia con otros dos que disten entre sí el mismo número de términos que los dos primeros. Tres cualesquiera con tal que los extremos disten igualmente del medio, forman una equidiferencia continua*; pues en todos estos casos se verifica que la diferencia de los dos primeros términos es la misma que la diferencia de los dos últimos.

4.ª *La suma del primer término y último de una progresion por diferencia es siempre igual á la de los medios equidistantes de los extremos ó al duplo del término medio, si el número de términos es impar.*

Siendo la progresion por diferencia $\div A,b,c,d,m,p,q,r,U$

De las equidiferencias $\left\{\begin{array}{lll} A-b::r-U & \text{se deduce que} & A+U=b+r \\ A-c::q-U & » & A+U=c+q \\ \text{y así sucesivamente.....} & & \\ A-m::m-U & » & A+U=2m \end{array}\right.$

5.ª Llamando U el último término de una progresion, A el primero, n el número de ellos y D la diferencia; se deduce de la propiedad primera, que.....

$U=A+(n-1)D$ y por consiguiente $U-A=(n-1)D$ de donde $D=\frac{U-A}{n-1}$ luego

Para hallar la diferencia de una progresion creciente, se resta del último término el 1.º y el residuo se divide por el número de términos menos uno.

La diferencia de la 1.ª progresion del número anterior, será $D=\frac{65-10}{12-1}=5$

Cor. Dados los extremos 10 y 1 de una progresion por diferencia de 12 términos, formar esta progresion.

La diferencia de la progresion creciente de 12 términos, cuyos extremos son 1 y 10, es igual á $\frac{10-1}{12-1}=\frac{9}{11}$

Luego la progresion será $\div 1,\ 1\frac{9}{11},\ 2\frac{7}{11},\ 3\frac{5}{11}.....\ 9\frac{2}{11},\ 10$

En el caso de que la progresion deba ser *decreciente*, basta invertir el órden de los términos de la anterior.

Si entre cada dos términos de una progresion por diferencia interpolamos un mismo número de medios, todos estos términos formarán una nueva progresion por diferencia, puesto que es una misma la *diferencia* de todas las progresiones parciales.

(*) Si la progresion es decreciente, el 1.º término es igual al último mas tantas veces el valor absoluto de la diferencia como términos hay despues de él.

6.ª *La suma de todos los términos de una progresion por diferencia es igual á la suma de los extremos multiplicada por la mitad del número de términos.*

Llamando S la suma de todos los términos de la progresion.....

$$\div A,b,c,d\ldots\ldots\ldots\ldots p,q,r,U$$

tendremos $S=A+b+c+d\ldots\ldots p+q+r+U$

y tambien $S=U+r+q+p\ldots\ldots d+c+b+A$

sumando ordenadamente estas igualdades nos darán.....

$$2S=(A+U)+(b+r)+(c+q)+(d+p)\ldots\ldots+(p+d)+(q+c)+(r+b)+(U+A)$$

y como todos estos sumandos son iguales segun la propiedad 4.ª; tendremos...

$$2S=(A+U)+(A+U)+(A+U)+(A+U)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A+U)$$

llamando n el número de términos de la progresion dada, será.....

$2S=(A+U)\times n$ de donde se deduce $S=(A+U)\times\frac{n}{2}$

Segun esto la suma de todos los términos de la progresion α (**197**), será $S=(10+65)\times\frac{12}{2}=450$; y la suma de los de la progresion [6], es 57.

Cor. Sustituyendo en la fórmula general anterior en lugar del primero y último término los que corresponden respectivamente á la progresion de los números naturales y á la de los números impares; tendremos...

La suma de los números naturales 1,2,3,4,5 etc. hasta n sumandos, es $\frac{n(n+1)}{2}$

La suma de los números impares 1,3,5,7,9 etc. hasta n términos es n^2 (*).

Comparacion de desigualdad por cociente.

Razones. Proporciones. Progresiones por cociente.

Razones.

199. *Razon* de dos números es el cociente indicado del primero llamado *antecedente* por el segundo que se dice *consecuente.* El antecedente es pues igual al producto del consecuente por la razon (**).

La razon de dos números no se altera multiplicando ó dividiendo el antecedente y el consecuente por un mismo número.

Así 12 : 4 es lo mismo que 120 : 40 é igual á 6 : 2 (***).

Una razon se dice *inversa* de otra cuando el antecedente de la una es consecuente de la otra y al contrario.

$8 : 2\frac{1}{2}$ es inversa de $2\frac{1}{2} : 8$ A : B es inversa de B : A (****).

Si se multiplican dos ó mas razones, la razon que resulta se llama *compuesta* y cada una de las que se multiplican *componentes.* En toda razon compuesta se puede sustituir en lugar de una de las razones componentes otra igual, sin

(*) De donde se deduce fácilmente la resolucion del siguiente problema: «*Hallar dos cuadrados cuya suma sea otro cuadrado*» pues, si consideramos un número impar que sea cuadrado, la suma de este número y el cuadrado del número de términos que le anteceden en la progresion de los números impares $\div 1,3,5,7,9$ etc. será evidentemente otro cuadrado.

(**) La razon de dos números se puede considerar tambien como un número fraccionario, cuyo numerador es el antecedente y su denominador el consecuente.

(***) En la práctica se suprime el paréntesis, que debe acompañar al signo :

(****) Las razones inversas se llaman tambien *reciprocas.*

Números recíprocos son aquellos cuyo producto es la unidad: tales son $\frac{m}{n}$ y $\frac{n}{m}$, 4 y $\frac{1}{4}$ etc.

que la primera sufra alteracion. El producto de dos razones iguales es el cuadrado de cada una de ellas. El producto de dos razones inversas ó recíprocas es siempre igual á la unidad.

Una razon se dice de *mayor desigualdad* cuando el antecedente es mayor que el consecuente y de *menor desigualdad* en caso contrario. La razon de mayor desigualdad es mayor que la *unidad* y la de menor desigualdad es menor que la *unidad*.

Por analogía se dice *razon de igualdad* á la razon de dos números iguales.

Proporciones.

200. Llámase *proporcion* á la igualdad de dos razones (*).

La razon 10 : 5 es igual á la razon 8 : 4; y por consiguiente los cuatro números 10, 5, 8 y 4 forman una proporcion, que se escribe así 10 : 5 :: 8 : 4 y se enuncia diciendo 10 es á 5 como 8 á 4.

Los términos primero y tercero son *antecedentes*, el segundo y cuarto *consecuentes*, el segundo y tercero *medios*, y el primero y cuarto *extremos*. Cuando los medios son iguales, la proporcion es *contínua* y el medio repetido se llama *medio proporcional* á los otros dos.

En la proporcion contínua se omite uno de los medios, escribiendo á la izquierda del término primero el signo ∺ que se llama de proporcion contínua.

4 : 12 :: 12 : 36 ó bien ∺4 : 12 : 36 es una proporcion *contínua*.

201. En toda proporcion se verifican las *propiedades* que siguen...

1.ª El producto de los extremos es igual al producto de los medios, y al cuadrado del término medio en la contínua.

Sea la proporcion A : B :: C : D ó bien $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$

pasando el divisor B al 2.° miembro y el D al primero, será $A\times D=B\times C$

Si la proporcion es *contínua* como ∺A : B : C

escrita con extension será..... A : B :: B : C donde se verifica $A\times C=B^2$

Recip. Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, los cuatro números forman una proporcion, siendo medios ó extremos los factores de un producto.

Si tenemos $A\times D=B\times C$

trasladando el factor D al segundo miembro y el B al primero, tendremos

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ó bien A : B :: C : D como se deseaba demostrar.

2.ª *Uno de los extremos* de toda proporcion es igual al producto de los medios dividido por el extremo conocido, y *un medio* equivale al producto de los extremos dividido por el otro medio.

Sea la proporcion A : B :: C : D ó bien $A\times D=B\times C$

Trasladando el factor D del primer miembro al segundo será..... $A=\frac{B\times C}{D}$

y calculando del mismo modo los valores de los demas términos, tendremos.....

$$A=\frac{B\times C}{D} \qquad D=\frac{B\times C}{A} \qquad \frac{A\times D}{C}=B \qquad \frac{A\times D}{B}=C$$

(*) Toda proporcion se puede considerar como la igualdad de dos números fraccionarios, cuyos numeradores son los antecedentes y sus denominadores los consecuentes de la proporcion.

Proporcion geométrica ó por cociente es la igualdad de dos razones geométricas.

En la proporcion contínua; *uno de los extremos* es igual al cuadrado del término medio dividido por el extremo conocido y *el medio* equivale á la raiz cuadrada del producto de los extremos.

Sea la proporcion contínua $\div A : B : C$ que dá $A \times C = B^2$

trasladando uno de los factores del primer miembro al 2.°, tendremos $C = \frac{B^2}{A}$

y extrayendo la raiz cuadrada en la misma igualdad, será..... $\sqrt{A \times C} = B$

3.ª Una proporcion no deja de serlo, aunque se multipliquen ó se dividan por un mismo número todos sus términos ó los antecedentes, los consecuentes, los dos primeros ó los dos últimos.

Pues en todas estas transformaciones se verifica la igualdad de ambas razones.

4.ª Si cuatro números son proporcionales, tambien lo son sus potencias y raices de un mismo grado.

Sea la proporcion $A : B :: C : D$ ó bien $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

elevando los dos miembros de esta igualdad á la potencia *n*, tendremos.....

$$\frac{A^n}{B^n} = \frac{C^n}{D^n} \quad \text{ó bien} \quad A^n : B^n :: C^n : D^n$$

Extrayendo la raiz del grado *n* de ambos miembros en la primera igualdad, se deduce fácilmente la evidencia de la segunda parte de la proposicion.

5.ª En toda proporcion pueden mudar de lugar los medios ó los extremos, sin que deje de subsistir la proporcion: esta transformacion se llama *alternar*. Tambien se pueden poner los medios por extremos, que se dice *invertir*. Ultimamente, se puede poner la segunda razon por primera y esta por segunda, lo que se llama *permutar*.

Pues en todas estas transformaciones el producto de los extremos es siempre igual al de los medios.

Segun esto, en la proporcion $A : B :: C : D$ se verificará.....

$A : C :: B : D$ | $D : B :: C : A$ | $B : A :: D : C$ | $C : D :: A : B$

6.ª Si los antecedentes de una proporcion son iguales, tambien lo serán los consecuentes y al contrario. Si dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos razones se puede formar proporcion.

La primera parte es evidente; para demostrar la segunda

Supongamos las dos proporciones $A:B :: C:D$ y $A:B :: M:N$

ó lo que es lo mismo $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ y $\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$; de donde $\frac{C}{D} = \frac{M}{N}$ luego $C:D :: M:N$

Cor. De la segunda parte de esta proposicion se deduce que, si dos proporciones tienen respectivamente iguales los antecedentes ó los consecuentes, los otros cuatro términos serán proporcionales.

Asi que, de $A : B : : C : D$ y $A : M : : C : N$ resulta $B : M : : D : N$

y de $A : B : : C : D$ y $M : B : : N : D$ resulta $A : M : : C : N$

7.ª Si dos ó mas proporciones se multiplican ó se dividen ordenadamente, los productos ó cocientes serán proporcionales.

En efecto, suponiendo $A:B :: C:D$ y $M:N :: P:Q$ ó bien $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ y $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$

si multiplicamos primero y dividimos despues ordenadamente estas igualdades, se deduce la evidencia de la proposicion.

8.ª La suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Sea la proporcion $A : B :: C : D$ donde se verifica $A \times D = B \times C$ añadiendo á uno y otro miembro el producto $A \times B$ ó el $C \times D$; tendremos..... $A.D + C.D = B.C + C.D$ ó bien $D(A+C) = C(B+D)$ de donde resulta segun la primera propiedad $A+C : B+D :: C : D$

Del mismo modo se deduce $A-C : B-D :: C : D$ (*)

Cor. *La suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los primeros es á la diferencia de los segundos.*

$$A+C : B+D :: A-C : B-D$$

Esc. Aplicando el teorema anteríor y su corolario á la proporcion $A:C :: B:D$, se deducirán para la primitiva $A:B :: C:D$ las nuevas propiedades, que siguen:

La suma ó diferencia de los dos primeros terminos es á la suma ó diferencia de los otros dos, como el primer antecedente es al segundo. La suma de los dos primeros es á la de los otros dos, como la diferencia de aquellos, es á la diferencia de estos (**)

Série de razones iguales.

202. Llámase *série de razones iguales* á la igualdad de tres ó mas razones. Las razones iguales, que componen la série, se escriben unas al lado de otras separándolas por el signo : : ó bien por un =

$4 : 5 :: 8 : 10 :: 40 : 50 :: 400 : 500 :: 20 : 25$ es una *série* de razones iguales.

En toda *série de razones iguales*, la suma ó diferencia de todos los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Sea la série de razones iguales $A:B :: C:D :: M:N :: P:Q :: R:S$
Llamando φ el cociente de A por B; será $A = B.\varphi$, $C = D.\varphi$, $M = N.\varphi$, etc. y sumando ordenadamente estas igualdades, tendremos.....

$A+C+M+P+R = \varphi\,(B+D+N+Q+S)$; luego $\dfrac{A+C+M+\ldots}{B+D+N+\ldots} = \varphi = \dfrac{A}{B}$

ó lo que es lo mismo $A+C+M+P+R : B+D+N+Q+S :: A : B$

Igualmente $A-C-M-P-R : B-D-N-Q-S :: A : B$

Cor. *La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como la diferencia de aquellos es á la diferencia de estos: 2.º la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia* (***).

(*) Si los antecedentes son menores que los consecuentes, se puede invertir la proporcion primitiva, y entonces se podrá efectuar la resta.

(**) Fundándonos en la 1.ª parte de este *Escolio* se pueden *hallar dos de los términos de una proporcion*, cuya suma ó diferencia sea conocida, siempre que uno de ellos sea medio y el otro extremo.

En efecto, si $x+z=S$ y $A : B :: x : z$ tendremos $A+B : S :: A : x$
si $x-z=D$ y $A : B :: x : z$ tendremos $A-B : D :: A : x$

Conocido el valor de la incógnita x, fácilmente se hallará el de la otra incógnita.

Tambien de las proposiciones del texto, se deduce que:

El cuadrado de la suma de los dos primeros términos de una proporcion es á su producto, como el cuadrado de la suma de los dos últimos es al suyo.

(***) Llámase *proporcion armónica* á la que existe entre tres números tales que la razon del primero y tercero es la misma que la razon de las diferencias entre el segundo y el primero y entre el tercero y el segundo.

Los números 2, 3 y 6 forman una proporcion armónica, puesto que $2 : 6 :: 3-2 : 6-3$

El término medio de una proporcion armónica es igual al cociente de dividir el doble producto de los extremos por la suma de los mismos.

Progresiones por cociente.

203. Llámase *progresion por cociente* una série de números tales que, dividiendo cada uno por el anterior, dan todos un mismo cociente. Este cociente se llama *razon* de la progresion.

Si la razon es mayor que la unidad, los términos van aumentando y la progresion se dice *creciente*. Si la razon es menor que la unidad, los términos van disminuyendo y la progresion se llama *decreciente*. En uno y otro caso, cada término de la progresion es *medio proporcional* entre el que le antecede y el que le sigue.

Una progresion por cociente no deja de serlo aun cuando se multipliquen ó se dividan todos sus términos por un mismo número.

[α] ∺ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc. [razon=2]

[6] ∺ 640, 320, 160, 80, 40, 20, 10, 5, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, etc. $\left[\text{razon}=\frac{1}{2}\right]$

La primera de estas progresiones se lee 1 es á 2 como 4 es á 8, como 16 es á 32, como 64 es á 128 etc (*)

204. En las progresiones por cociente se verifican las *propiedades* siguientes:

1.ª El segundo término de una progresion por cociente es igual al primero multiplicado por la razon; el tercero es igual al primero multiplicado por el cuadrado de la razon; el cuarto es igual al primero multiplicado por el cubo de la razon..... y en general un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razon elevada á la potencia del grado, que indique el número de términos, que hay antes de él.

Sea la progresion por cociente ∺A,B,C,D,M,N,P,R,U

Llamando Q la razon ó el cociente de esta progresion, tendremos.....

$\frac{B}{A}=Q$ $\quad\frac{C}{B}=Q$ $\quad\frac{D}{C}=Q$ $\quad\frac{M}{D}=Q$ etc.

de donde $B=A\times Q$ $\quad C=B\times Q$ $\quad D=C\times Q$ $\quad M=D\times Q$ etc.

es decir que, cada término se compone del anterior multiplicado por la razon. Sustituyendo ahora el valor de cada término en la expresion del anterior, el.....

2.° $B=A\times Q$ ó sea igual al primero multiplicado por la *razon*.

3.° $C=B\times Q=A\times Q\times Q=A\times Q^2$ ó sea al 1.° por el cuadrado de la *razon*

4.° $D=C\times Q=A\times Q^2\times Q=A\times Q^3$ ó sea al primero por el cubo de la *razon*;

y por consiguiente el *último término* U será igual al primero multiplicado por la razon elevada á la potencia que indique el número de términos menos uno de la progresion.

Suponiendo *n* el número de términos de la progresion, será $U=A\times Q^{n-1}$

El término 8.° de la progresion [α] del número anterior será igual á $1\times 2^7=128$

y el término 10° de la progresion [6] será $640\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=1\frac{1}{4}$

2.° Un término cualquiera de una progresion por cociente es igual al último dividido por la razon elevada á la potencia del grado, que indique el número de términos que le preceden.

(*) Tambien se lee diciendo 1 es á 2 es á 4 es á 8 es á 16 etc.

Los términos de la progresion por cociente se separan generalmente por el signo de la division; nosotros los separaremos por una coma lo mismo que los de la progresion por diferencia.

En efecto; en la progresion por cociente anterior, se verifica que.....

$R=\frac{U}{Q}$ $P=\frac{R}{Q}$ $N=\frac{P}{Q}$ etc. de donde se deduce $P=\frac{U}{Q^2}$ $N=\frac{U}{Q^3}$ $M=\frac{U}{Q^4}$ etc.;

y por consiguiente, el *primer término* de una progresion por cociente será igual al último dividido por la razon elevada á la potencia que indique el número de términos menos uno de la progresion.

Suponiendo n el número de términos de la progresion, será..... $A=\frac{U}{Q^{n-1}}$

3.ª Cuatro términos consecutivos de una progresion por cociente forman una proporcion. Tres consecutivos la forman contínua. Dos consecutivos cualesquiera forman proporcion con otros dos tambien consecutivos. Dos términos cualesquiera forman proporcion con otros dos, que disten entre sí el mismo número de términos que los primeros. Tres cualesquiera con tal que los extremos disten igualmente del medio, forman una proporcion contínua.

Pues en todos estos casos se verifica que la razon de los dos primeros términos es igual á la razon de los dos últimos.

4.ª El producto del primero y último término de una progresion por cociente es siempre igual al de cada dos medios equidistantes de los extremos y al cuadrado del término medio, si el número de términos es impar.

Siendo la progresion $\div\!\div A,B,C,D,M,N,P,R,U$; tendremos que

De las proporciones
$$\left\{\begin{array}{llr} A : B :: R : U & \text{se deduce.....} & A\times U=B\times R \\ A : C :: P : U & & A\times U=C\times P \\ \text{y asi sucesivamente.} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A : M :: M : U & & A\times U=M\times M \end{array}\right.$$

5.ª Llamando U el último término de una progresion por cociente, A el primero, n el número de ellos y Q la razon de la progresion, tendremos.....

$U=A\times Q^{n-1}$ y por consiguiente $\frac{U}{A}=Q^{n-1}$ de donde $Q=\sqrt[n-1]{\frac{U}{A}}$; luego.....

Para hallar la razon de una progresion por cociente, se divide el último término por el primero y del cociente se extrae la raiz, que indique el número de términos menos uno de la progresion.

La razon de la progresion [6] del número (**203**) será, $\sqrt[9]{\frac{5}{4} : 640}=\frac{1}{2}$

Cor. Dados los extremos 2 y $\frac{2}{729}$ de una progresion por cociente de siete términos, formar esta progresion.

La *razon* de la progresion es..... $\sqrt[6]{\frac{2}{729} : 2}=\sqrt[6]{\frac{1}{729}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$

luego la progresion será $\div\!\div 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{243}, \frac{2}{729}$

Cor. Si entre cada dos términos de una progresion por cociente se interpola un mismo número de medios, todos estos términos formarán una nueva progresion por cociente, puesto que es una misma la *razon* de todas las progresiones parciales.

6.ª La *suma de todos los términos* de una progresion por cociente es igual á la diferencia entre el primer término y el producto del último por la razon, dividida por la diferencia entre la unidad y la razon.

Llamando S la suma de todos los términos de la progresion dada, tendremos.....

$$S=A+B+C+D+. \dots \dots \dots \dots M+P+R+U$$

multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la razon Q y teniendo presente que el producto de cada término de la progresion por Q es igual al término siguiente, resulta.....

$$SQ=B+C+D+. \dots \dots \dots \dots P+R+U+UQ$$

restando de esta igualdad la anterior, siempre que la razon sea mayor que la unidad, tendremos.....

$$SQ-S=UQ-A$$

ó bien $S(Q-1)=UQ-A$

de donde $S=\frac{UQ-A}{Q-1}$

restando esta igualdad de la anterior, siempre que la razon sea menor que la unidad, tendremos.....

$$S-SQ=A-UQ$$

ó bien $S(1-Q)=A-UQ$

de donde $S=\frac{A-UQ}{1-Q}$

Ejemplos. La suma de los ocho primeros términos de la progresion α (**203**) será $\frac{128\times2-1}{2-1}=255$; y la suma de los de la siguiente [6], será igual á $1278^5/_4$

Hallar la suma de los nueve primeros términos de la progresion por cociente, cuyo tercer término es $\frac{1}{9}$ y el último $\frac{1}{6561}$

La razon ó el cociente de esta progresion es $\frac{1}{3}$ (segun la propiedad 5.ª) luego la suma que se busca será igual á $\frac{9841}{6561}$ (*)

Esc. Toda progresion por cociente se puede considerar como una série de razones iguales cuyos antecedentes sean los términos 1.º, 3.º, 5.º etc. y sus consecuentes los 2.º, 4.º, 6.º... etc. Y por consiguiente se puede deducir que...

En toda progresion por cociente, la suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente. La suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los primeros es á la diferencia de los segundos. La suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia. La razon de un antecedente con la suma ó diferencia de los otros, es la misma que la de su consecuente con la suma ó diferencia de los demas consecuentes.

La progresion ÷÷ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc. (**)
se considera como la série de razones..... 1 : 2 : : 4 : 8 : : 16 : 32 : : 64 : 128

(*) Por un procedimiento análogo al que hemos empleado para hallar la suma de todos los términos de una progresion por diferencia se puede demostrar que, en toda progresion por cociente se verifica que el producto de todos sus términos es igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos elevado á la potencia del grado, que indique el número de términos de la progresion.

(**) Puesto que tres términos consecutivos cualesquiera de la série.....

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

forman una proporcion armónica, al conjunto de todos se llama *progresion armónica.*

COMPLEMENTO DE LA COMPARACION DE LOS NÚMEROS.

TEORIA DE LOS LOGARITMOS.

Preliminares. Propiedades generales de los logaritmos y sus consecuencias. Construccion y disposicion de las tablas de logaritmos. Problemas. Definicion y uso del complemento. Aplicaciones de los logaritmos. Ejercicios.

Preliminares.

205. El escocés Juan Neper ha deducido, por la analogía de las propiedades de las progresiones por diferencia y por cociente, una de las teorias mas importantes de la ciencia de los números; tal es la *teoría de los logaritmos* (*).

Si consideramos dos progresiones cualesquiera, una por diferencia y otra por cociente, y restamos de todos los términos de la 1.ª su primer término y dividimos los términos de la 2.ª tambien por su primer término, nos resultarán dos nuevas progresiones, una por diferencia, cuyo primer término será *cero*, y otra por cociente, cuyo primer término será la *unidad*. La analogía, que existe entre la formacion de los términos de estas progresiones, es evidente; pues, en la 1.ª un término cualquiera es igual á la *diferencia* repetida por sumando tantas veces como terminos le anteceden, y en la 2.ª es igual á la *razon* repetida por factor tantas veces como términos le anteceden. Esta relacion de analogía es el fundamento de la invencion de los *logaritmos*.

206. Llámanse LOGARITMOS los términos de una progresion por diferencia, que, empezando por cero, se corresponden con los de otra por cociente, cuyo primer término es la unidad. Dos progresiones, que reunan estas condiciones, constituyen un *sistema de logaritmos.*

Logaritmo de un número es el término de la progresion por diferencia correspondiente al número dado en la progresion por cociente.

Es evidente que se pueden formar cuantos sistemas de logaritmos se quiera, con solo elegir dos progresiones por diferencia y cociente, cuyos términos se correspondan, siendo *cero* el primero de la aritmética y 1 el de la geométrica. Por esta razon un mismo número puede tener diferentes logaritmos y á un mismo logaritmo pueden corresponder diferentes números.

El número, cuyo logaritmo es la unidad, se llama *base* del sistema, pues conocido el logaritmo de un número en un sistema cualquiera, se determinan fácilmente los logaritmos de los demas números en el mismo sistema.

En el sistema de logaritmos, cuya base es 2, tendremos.....

÷ 0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	etc.	(A)
∺ 1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	1024,	2048,	etc.	

log. $1=0$ log. $2=1$ log. $4=2$ log. $8=3$ log. $16=4$ log. $32=5$ etc.

En el sistema, que sigue, cuya base es 4, será.....

÷ 0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	(L)
∺ 1,	4,	16,	64,	256,	1024,	4096,	16384,	65536,	262144,	1048576	

log. $1=0$ log. $4=1$ log. $16=2$ log. $64=3$ log. $256=4$ etc.

Vemos pues, que á excepcion del log. de la unidad, que en todos los sistemas es cero, los números en el sistema (A) tienen logaritmos diferentes que en (L).

La *base* puede ser entera, fraccionaria ó incomensurable.

(*) Neper nació en 1550 y murió en 1616. Su hijo Rober publicó en el mismo año de 1616 la obra póstuma de su padre bajo el título: *De mirificæ logarithmorum canonis constructiones* donde manifiesta el método, que habia seguido en la formacion de sus tablas.

Propiedades generales de los logaritmos y sus consecuencias.

207. En todo sistema de logaritmos se verifican los teoremas que siguen.

1.° El logaritmo de un producto de dos ó mas factores es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.

En efecto; sean las progresiones de un sistema cualquiera.....

$\div$ 0, a, b, c, d, e, f, g, h, etc.
$\dot{\div}$ 1, A, B, C, D, E, F, G, H, etc.

y tendremos..... cero$-a::b-c$ 1 : A::B : C
de donde se deducen las igualdades $c=a+b$ C=A×B
y como a,b y c son los logaritmos de A, B y C; la primera igualdad, nos dará....

log. C=log. A+log. B ó bien log. (A×B)=log. A+log. B

Esta demostracion es independiente de los términos, que se tomen en una y otra progresion: veamos el logaritmo del producto B×F

Si $0-b::f-h$ resulta $h=b+f$
y de 1 : B :: F : H se deduce H=B×F | luego log.H=log.(B×F)=log.B+log.F

Cuando los factores son mas que dos, se verifica igualmente el teorema, pues...
log. (M.N.P)=log. (M×N.P)=log. M+log. (N.P)=log. M+log. N+log. P

Cor. Para hallar el *producto* de dos ó mas números, se suman sus logaritmos, y el número correspondiente á esta suma será el producto.

Hallar en el sistema A *del número* (**206**), *el producto de* 8 *por* 64.

Sumando el logaritmo de 8, que es 3, con el logaritmo de 64, que es 6; la suma 9 de ambos logaritmos será el logaritmo del producto, que se pide. Pero 9 es el logaritmo de 512: luego este número será el producto de 8 por 64

2.° El logaritmo de un cociente es igual á la diferencia de los logaritmos del dividendo y divisor.

El dividendo es igual al producto del cociente por el divisor; luego es evidente segun la proposicion anterior que el logaritmo del dividendo será igual al logaritmo del divisor mas el logaritmo del cociente; restando pues del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, tendremos el logaritmo del cociente.

En efecto; de la igualdad log. dividendo=log. divisor+log. cociente
se deduce que. . . . . log. dividendo−log. divisor=log. cociente

Cor. Para hallar el *cociente* de dos números, se resta del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y el número correspondiente á esta diferencia será el cociente.

Dividir 256 *por* 4 *en el sistema cuya base es* 4 (**206**)

Restando de 4, que es el logaritmo de 256, 1 que lo es de 4, la diferencia 3 expresará el logaritmo del cociente ó sea el log. de 64. Luego este número será el cociente, que se pide.

3.° El logaritmo de una potencia de un número cualquiera es igual al logaritmo de dicho número multiplicado por el índice de la potencia.

Si la potencia es A^n ó lo que es lo mismo A×A×A×..... hasta n factores; tendremos..... log. A^n=log. A+log. A+log. A+.....$=n\times$log. A

Cor. Para hallar una *potencia* cualquiera de un número, se multiplica su logaritmo por el exponente de la potencia y el número correspondiente á este producto será la potencia pedida.

Hallar el cubo de 4 en el sistema cuyo base es 2 (**206**).

Multiplíquese el logaritmo de 4 que es 2, por el exponente 3 de la potencia, y como el producto 6 es el logaritmo de 64; este número será el cubo del número dado.

4.° El logaritmo de una raiz de un número cualquiera es igual al logaritmo de dicho número dividido por el índice de la raiz.

En efecto; es evidente que $A=(\sqrt[n]{A})^n$

de donde se deduce $\log. A=n\times\log. \sqrt[n]{A}$ y por consig. $\log. \sqrt[n]{A}=\frac{\log. A}{n}$

Cor. Para *extraer la raiz* de un número cualquiera, se divide su logaritmo por el exponente ó índice de la raiz, y el número correspondiente á este cociente será la raiz pedida.

Hallar la raiz cúbica de 64 *en el sistema cuya base es* 4 (**206**).

Divídase el logaritmo de 64, que es 3, por el índice 3 de la raiz; y como el cociente 1 es el logaritmo de 4, este número será la raiz cúbica del número propuesto.

Esc. De estas propiedades se deduce que las operaciones de multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raices de los términos de una progresion por cociente, cuyo primer término sea la unidad, se simplifican considerablemente por medio de sus logaritmos ó de los términos de la progresion por diferencia correspondiente, cuyo primer término sea cero. Si conseguimos pues, presentar una progresion por cociente, que contenga entre sus términos todos los números naturales desde la unidad hasta 10, 100, 1000, 1000000 etc., y otra por diferencia, que se corresponda con la primera, el cálculo aritmético se facilitará tanto que, para multiplicar ó dividir dos ó mas números entre sí, bastará sumar ó restar sus logaritmos respectivos, y para elevar á una potencia ó extraer de ellos una raiz, bastará multiplicar ó dividir su logaritmo por el exponente de la potencia ó índice de la raiz.

Construccion de las tablas ordinarias de logaritmos.

208. Se llaman *tablas de logaritmos* una reunion de números enteros desde uno hasta mil, diez mil..... un millon, etc., y de sus correspondientes logaritmos (en un mismo sistema), dispuestos del modo mas conveniente para que, dado un número, se halle inmediatamente su logaritmo y al contrario.

Entre los diferentes sistemas, que pudiéramos elegir, para obtener la formacion de unas tablas de logaritmos, ninguno es mas á propósito que aquel, cuya base es la misma que la del sistema de numeracion. Los logaritmos calculados en este supuesto, es decir, cuando la base es 10, se llaman *ordinarios* ó vulgares y tambien de Briggs (*) por ser el primero, que los empleó. Las progresiones fundamentales de este sistema, son las siguientes.....

$\div$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc.
$\because$ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, 100000000, etc.

(*) Briggs contemporáneo y amigo de Nepper escribió y publicó en 1618 el primer ensayo de sus trabajos logarítmicos, sustituyendo á la base de Neper el número 10, base del sistema usual de numeracion. En 1624 amplió Briggs sus tablas en la obrita titulada *Aritmética logarítmica*.
La base adoptada por Neper es 2,718281828 y sus logaritmos se llaman *neperianos* y tambien *hiperbólicos* (porque miden las áreas comprendidas entre una hipérbola equilátera y sus asíntotas). En el sistema neperiano de logaritmos se verifica que *la diferencia de la progresion aritmética es igual á la diferencia entre la razon de la progresion geométrica y la unidad.*

De la sola inspeccion de estas progresiones se deduce que.....

El logaritmo (*) de la unidad es *cero*; el log. de 10 es 1; el log. de 100 es 2... y en general el logaritmo de una potencia cualquiera de 10, es siempre un número entero. Luego los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10 serán mayores que cero y menores que 1, esto es, una fraccion: los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 100 serán mayores que 1 y menores que 2, es decir, 1 y una fraccion; los de los comprendidos entre 100 y 1000, serán 2 y una fraccion y así sucesivamente: y en general.....

El logaritmo de un número entero cualquiera consta de tantas unidades enteras mas una fraccion, como cifras menos una tiene el número dado. Las unidades de un logaritmo se llaman *caractéristica* y la fraccion *mantisa*.

La característica del logaritmo de un número entero se determina rebajando una unidad al número de cifras de dicho número entero.

Así la característica del log. de 1857 es 3 y la del log. de 1001808 es 6.

Se acostumbra á separar la característica de la mantisa con un punto, con el objeto de distinguir los *logaritmos* de los *números decimales*.

209. Las progresiones anteriores solo nos indican los logaritmos de las diferentes potencias de la base 10: para obtener los logaritmos de los demas números, basta calcular directamente los de los números primos, pues, conocidos los logaritmos de estos, las propiedades generales ya demostradas nos dicen el modo de hallar con mucha facilidad los logaritmos de todos los demas.

**Propongámonos calcular el logaritmo ordinario del número primo* 2 *con menos error que una cien milésima de la unidad* (**).

El número 2 está comprendido entre los números 1 y 10 y por consiguiente su logaritmo será mayor que cero y menor que uno. Si el número 2 fuese medio proporcional entre 1 y 10, su logaritmo seria el medio diferencial entre cero y uno; pero el medio proporcional entre 1 y 10 es $\sqrt{1\times10}=3{,}162277$

y el diferencial entre cero y 1 es 0,5; luego..... log. $3{,}162277=0.5$ (***).

Ahora el número 2 está comprendido entre 1 y 3,162277; y por consiguiente su logaritmo lo estará entre cero y 0.5 Hallando pues un medio proporcional entre 1 y 3,162277, su logaritmo será el diferencial entre cero y 0,5; y tendremos...

$$\log.\ \sqrt{1\times3{,}162277}=\frac{1}{2}(0+0{,}5)=0.25$$

Continuando del mismo modo, interpolando medios proporcionales entre cada dos números que comprendan el número dado 2, y á la vez medios diferenciales entre sus logaritmos respectivos; es evidente que al cabo de un número determinado de operaciones hallaremos dos medios proporcionales, el uno mayor y el otro menor que 2, cuyos logaritmos se diferencien en menos de una cien milésima y en este caso, la parte comun de ambos logaritmos, será el logaritmo del número 2 con menos error que una cien milésima.

Conocido el logaritmo de 2, se hallarán fácilmente los de todas sus potencias 4, 8, 16, 32, etc., con solo multiplicar dicho logaritmo por 2, 3, 4, etc.

Del mismo modo, para hallar el logaritmo del producto ó cociente de 2, 4, 8, etc. por una potencia cualquiera de la base del sistema, basta añadir ó restar de la

(*) En adelante entenderemos por log. de un número, el log. *ordinario* de dicho número.

(**) El procedimiento que vamos á emplear es muy embarazoso en la práctica, y al exponerle nos proponemos únicamente hacer ver la posibilidad de construir una tabla de logaritmos, sin otros conocimientos que los propios de la Aritmética. Mas adelante tenemos procedimientos muy sencillos y expeditos.

(***) Generalizando este procedimiento se puede deducir que «El logaritmo de un medio proporcional entre dos números N y n es igual á la mitad de la suma de sus logaritmos.»

En efecto; de $N : x :: x : n$ se deduce $x=\sqrt{N.n}$ y por consig. $\log. x=\frac{1}{2}(\log. N+\log. n)$

característica del logaritmo del primero, tantas unidades como indique el exponente de la potencia ó sean los ceros que sigan á la unidad (*) [α].

Vemos pues que, conocido el log. del número 2, tenemos inmediatamente los de todas sus potencias 4,8,16 etc. y los de los productos y cocientes de estos números entre sí y por la unidad seguida de ceros. El log. del número 5, por ejemplo, se hallará restando del log. de 10 el log. de 2, supuesto que 5 es el cociente de los numeros 10 y 2.

Calculando ahora el logaritmo del número primo 3, del mismo modo que hemos calculado el de 2, tendremos los logaritmos de todos los números formados por los factores 2,3 y 5. Investigando sucesivamente los logaritmos de los demas números y escribiendo 1,2,3,4,5,6 etc. en una columna y enfrente sus logaritmos, tendremos formada una tabla de logaritmos *ordinarios ó tabulares* con menos error que una unidad decimal dada.

Los logaritmos de los números, que no son potencias de 10, son números incomensurables, segun demostraremos al hablar de esta misma teoría en el tratado de Algebra.

Esc. La demostracion general de la proposicion [α], es como sigue.....

$$\text{Log.}(A\times 1000.....)=\text{log.}(A+10^n)=\text{log. }A+n\,\text{log. }10=\text{log. }A+n\times 1=\text{log. }A+n$$

$$\text{Log.}\frac{A}{1000.....}=\text{log.}\frac{A}{10^n}=\text{log. }A-\text{log. }10^n=\text{log. }A-n\times 1=\text{log. }A-n;\ \text{luego.....}$$

Conocido el logaritmo de un número, se obtiene el de otro 10, 100, 1000 etc. *veces mayor ó menor*, añadiendo ó quitando á la característica del logaritmo dado tantas unidades como ceros sigan á la unidad: la mantisa de todos estos logaritmos es la misma. Recíprocamente: *dado el número de un logaritmo se puede hallar el número de otro logaritmo con una, dos, tres etc. unidades de mas ó de menos*, multiplicando ó dividiendo el número dado por la unidad seguida de tantos ceros como unidades haya de diferencia entre los dos logaritmos.

Disposicion de las tablas ordinarias de logaritmos.

240. Las tablas de logaritmos de Lalande corregidas y aumentadas por Marie hasta 7 cifras decimales, comprenden los logaritmos de todos los números desde uno hasta 10000 y su disposicion es tan sencilla que basta abrirlas para hallar inmediatamente el logaritmo de un número menor que 10000, lo mismo que el número correspondiente á un logaritmo menor que 4.0000000

Las columnas señaladas con la palabra *Nomb.* contienen los números desde 1 hasta 10 mil. Las señaladas con la *Log.* contienen los logaritmos correspondientes á los números del mismo renglon de la izquierda; y en la *Diff.* estan las diferencias de cada dos logaritmos consecutivos.

Así en la página 21, se lee Log. 1857=3.2688119

y las diferencias entre el logaritmo de 1857 y los logaritmos anterior y posterior, son respectivamente 0.0002339 y 0.0002338

Las tablas francesas de Callet y las españolas de Calvet impresas en Barcelona contienen las mantisas de los logaritmos con siete cifras decimales de todos los números enteros, desde 1 hasta 108000 las primeras y desde 1 hasta 100000 las segundas; pero á pesar del mérito reconocido de unas y otras, y de estar dispuestas *con doble entrada* (**) su complicacion y demasiado volúmen, no las hace propias para los alumnos, que se dedican al estudio elemental de las matemáticas.

(*) En efecto: $\text{log. }2000=\text{log. }(2\times 1000)=\text{log. }2+\text{log. }1000=\text{log. }2+3$

y tambien $\text{log.}\frac{16}{10}=\text{log. }16-\text{log. }10=\text{log. }16-1$

(**) Se llaman *con doble entrada*, porque, para hallar el logaritmo de un número, hay que atender no solo á la columna vertical, sino tambien á la horizontal escrita á la cabeza y pié de cada plana.

Las tablas del Sr. Vazquez Queipo, á pesar de haberse estereotipado muy recientemente, son ya muy conocidas, porque á su perfecta exactitud y poco volúmen reunen la ventaja de una disposicion nueva é ingeniosa. Además, van precedidas de una explicacion clara y muy sencilla acerca del fundamento de los logaritmos y del modo de hallar el logaritmo de un número cualquiera y el número correspondiente á un logaritmo dado.

Las muchas aplicaciones, que el autor presenta como ejercicios de cálculo, hacen su obrita, muy recomendable.

Dado un número, que no se halle en las tablas, determinar su logaritmo.

211. *Hallar el log. de un número entero mayor que el máximo de la tabla.* Sea el número propuesto 897971:

Dividiendo este número por 10, 100, 1000, etc. de modo que el cociente entero sea menor que el número mayor de las tablas, tendremos (**209.** *Esc.*).... log. 897971=log. 8979,71+2; pero el log. de 8979,71 es igual al log. de 8979 mas una parte de la diferencia de los logaritmos de 8979 y 8980; luego, si hallando esta parte, la añadimos al logaritmo de 8979 y á la suma agregamos dos unidades de característica, tendremos el logaritmo pedido.

Para calcular esta parte de la diferencia de los logaritmos próximos mayor y menor al logaritmo del número preparado 8979,71, estableceremos la proporcion siguiente, que, si no rigorosamente exacta, lo es sin embargo lo bastante para la práctica ordinaria de los logaritmos. «Si por una unidad de diferencia entre los números 8980 y 8979 tenemos 0.000048 entre sus logaritmos, por 0,71 diferencia entre el número preparado y el próximo menor, ¿qué diferencia corresponde á sus logaritmos?

El cuarto término de esta proporcion $1 : 0.000048 :: 0,71 : x$ se añadirá al logaritmo del próximo menor, y el resultado 3.953262 será el logaritmo del número preparado, ó sea de 8979,71. Añadiendo á este logaritmo dos unidades de característica, tendremos el logaritmo del número propuesto.

La disposicion del cálculo es como sigue:

Log. 7848949=log. 7848,949+tres unidades

log. 7849=3.894814....log. del n.° próximo mayor al preparado
log. 7848=3.894759....log. del n.° próximo menor al preparado

$1 : 0,000055 :: 0,949 : x$ $\qquad x=0,000052$

log. 7848,949=3.894811 luego log. 7848949=6.894811

De otro modo: *Hallar el logaritmo de 1162049*

	log. 11620=4.065206	
log. 11620,49—log. 11620=	183	diferencia logarítmica 374
	log. 11620,49=4.065389	diferencia de los números 0,49
luego	log. 11620 49=6.065389	producto de ambas 183,26 (*)

212. *Hallar el logaritmo de un número fraccionario mayor que la unidad.* Supuesto que todo número fraccionario es el cociente del numerador por el denominador, es evidente que *el logaritmo de un número fraccionario es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*

$$\text{Log. } \frac{12}{5} = \text{log. } 12 - \text{log. } 5 = 1.079181 - 0.698970 = 0.380211$$

$$\text{Log. } 4\frac{1}{5} = \text{log. } 21 - \text{log. } 5 = 1.322219 - 0.698970 = 0.623249$$

(*) Si el número dado se puede descomponer en factores y cada uno de estos se halla en las tablas, la suma de los logaritmos de los factores será el logaritmo del número propuesto. *Hallar el logaritmo del número* 1572615=314523×5=104841×15=9531×165
Log. 1572615=log. 9531+log. 165=3.979138+2.217484=6.196622

Cor. Si el número fraccionario mayor que la unidad es decimal, se restan de la característica de su logaritmo, considerado como entero, tantas unidades como cifras decimales tuviere (**209** *Esc.*)

$$\text{Log. } 12{,}5=\text{log. } 125-1=2.096910-1=1.096910$$
$$\text{Log. } 1{,}25=\text{log. } 125-2=2.096910-2=0.096910$$

213. *Hallar el logaritmo de una fraccion.*

Como el numerador de una fraccion es menor que su denominador, el logaritmo del primero será menor que el logaritmo del segundo, y por consiguiente al hacer la sustraccion resultará evidentemente un logaritmo negativo.

Sea la fraccion dada $\frac{a}{b}$ y tendremos que.....

$$\text{Log.}\frac{a}{b}=\text{log.}\left(1:\frac{b}{a}\right)=\text{log. } 1-\text{log.}\frac{b}{a}=-\text{log.}\frac{b}{a}=-(\text{log. } b-\text{log. } a)$$

luego *el logaritmo de una fraccion es igual á la diferencia de los logaritmos del denominador y numerador, precedida del signo —; es decir, un logaritmo sustractivo ó negativo.*

Esto mismo se deduce tambien de las progresiones de Briggs, ó en general de las de otro cualquiera sistema; pues, si las continuamos desde cero y 1 en sentido descendente, conviniendo en señalar con el signo—antes del sustraendo, los resíduos 0—1, 0—2, etc., tendremos......

$$\div\ldots\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \text{ etc.}$$
$$\div\div\ldots\ \frac{1}{100000},\ \frac{1}{10000},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ 100000,\ 1000000$$

donde se vé que, los logaritmos de los dos números recíprocos 10 y $\frac{1}{10}$ no se diferencian mas que en el signo — delante del correspondiente al número menor que la unidad. Los logaritmos de 2 y $\frac{1}{2}$ no se diferencian mas que en el signo — para el log. de $\frac{1}{2}$; y por consiguiente, $\text{log.}\frac{a}{b}=-\text{log.}\frac{b}{a}$ (suponiendo $a<b$) (*).

Esc. Las propiedades generales de los logaritmos, que hemos demostrado al principio de esta teoría, son comunes igualmente á los logaritmos negativos; pero como el cálculo de las expresiones negativas es mas propio del Algebra que de la Aritmética, se acostumbra añadir 10 unidades de característica á los logaritmos negativos con el objeto de hacerlos positivos, teniendo presente este aumento al final de la operacion, para corregir convenientemente el logaritmo final. El logaritmo negativo, así transformado, se llama *complemento logarítmico* de la fraccion respectiva (**).

Si el log. de $\frac{2}{3}$ es -0.176091; el comp. log. de $\frac{2}{3}$ será $9{\cdot}823909$

2.º Supuesto que log. $0{,}5=\text{log. } 5-1=0.698970-1=-0.301030$

tambien comp. log. de $0{,}5=9{\cdot}698970$	comp. log. de $0{,}005=7{\cdot}698970$
comp. log. de $0{,}05=8{\cdot}698970$	comp. log. de $0{,}00005=5{\cdot}698970$

de donde se deduce que: *El complemento logarítmico de una fraccion decimal tiene por característica* 9 *ó tantas unidades menos que* 9 *cuantos ceros haya entre la coma y las cifras significativas, y por mantisa la misma que la del valor absoluto de estas cifras.*

(*) La suma de los logaritmos de dos números recíprocos es igual á *cero*.

(**) En los *complementos* logarítmicos se separa la característica de la mantisa por un punto escrito en la parte superior del renglon.

Dado un logaritmo que no se halle en las tablas, determinar el número correspondiente.

214. *Determinar el número de un logaritmo cuya característica no se halle en las tablas.* Sea el logaritmo propuesto 7.166726

La mantisa de este logaritmo con 3 de característica corresponde al número 1468; luego el número del logaritmo dado será igual al producto de 1468 por la unidad seguida de tantos ceros como expresa la diferencia de las características.

$$7.166726=3.166726+4=\log.\ (1468\times10000)=\log.\ 14680000$$

Si la característica del logaritmo dado es menor que la que corresponde en la tabla á su mantisa, se divide el número de la tabla por la potencia de 10, que indique la diferencia de las características.

$$1.166726=3.166727-2=\log.\ (1468:100)=\log.\ 14{,}68$$

215. *Hallar el número de un logaritmo cuya mantisa no está en las tablas.* Para resolver este problema se buscan los números de los logaritmos próximo mayor y menor al logaritmo dado, y conocida su diferencia se forma la siguiente proporcion: «Si la diferencia entre los logaritmos próximos mayor y menor nos dá 1 entre sus números; la diferencia entre el logaritmo dado y el menor, ¿qué nos dará?» cuyo cuarto término se añade al número del logaritmo menor, para tener aproximadamente el del propuesto. Damos por supuesto que la característica del logaritmo dado es igual á la de los logaritmos próximos mayor y menor de la tabla. En otro caso se multiplica ó se divide el resultado final por la potencia de 10, que indique la diferencia de las características.

Sea el logaritmo propuesto 3.561135

3.561221=log. 3641..... próximo mayor

3.561101=log. 3640..... próximo menor

0.000120 : 1 :: 0.000034 : x $\quad x=0{,}2833....$

luego el ***número*** de 3.561135 será 3640+0,2833....=3640,2833....

De otro modo: ***sea el logaritmo*** 2.726985

2.726727=log. 533	1.ª dif.... 0.000814
por la dif. entre el log. dado y el menor......log. 0,3169	2.ª 0.000258
y por consiguiente..... 2.626985=log. 533,3169	$x=0{,}3169$

Supongamos ahora que ***la característica del logaritmo propuesto no sea igual á la de los logaritmos próximos mayor y menor de la tabla***, y tendremos....

7.953394=3.953394+4	0.693258=3.693258—3
pero 3.953394=log. 8982,4375	pero 3.693258=log. 4934,67
7.953394= logaritmo de 8982 4375	0.693258= logaritmo de 4,93467

216. ***El número de un logaritmo negativo es igual á la unidad fraccionaria cuyo denominador sea el número del mismo logaritmo positivo.***

Hallar el número del logaritmo negativo ó sustractivo —0.301030

Número del logaritmo 0.301030=2; luego el número de —0.301030 será $\frac{1}{2}$

Hallar el n.° de —2.773567	Hallar el n.° de —0.176091
supuesto que.... 2.773567=log. 593,7	supuesto que..... 0.176091=log. 1,5
será..... N.° de $-2.773567=\frac{1}{593{,}7}=\frac{10}{5937}$	será...... N.° de $-0.176091=\frac{2}{3}$

Si el logaritmo dado tiene la forma complementaria, se hallará la fraccion decimal que le corresponde, escribiendo cero, coma ó vírgula y tantos ceros decimales como unidades falten á la característica para 9, y luego el número de la tabla que corresponde á la mantisa.

Número de 9·698970=0,5	7·698970=log. comp. de 0,005
Número de 8·698970=0,05	5·158362=log. comp. de 0,0000144

Definicion y uso del complemento.

217. Llámase *complemento de un número* lo que le falta para valer la unidad entera del órden inmediato superior.

Así el complemento de 8 es 2; comp. de 1825=8175; comp. de 12,5=87,5

Complemento de un logaritmo es lo que le falta para valer 10 de característica.

Complemento logarítmico de un número, es el complemento de su logaritmo.

Así, el comp. del log. de 12 es igual á 10—1.079181=8·920819

De las definiciones anteriores se deduce que.....

Para hallar el complemento de un número entero ó decimal ó de un logaritmo cualquiera, se resta la primera cifra significativa de la derecha de 10 y todas las demas de 9 (*).

Por medio del complemento, se convierte la *sustraccion* en *adicion*.

En efecto; 184—32=184+(100—32)—100=184+comp. de 32—100; luego...

$$1492-622=1492+378-1000=870$$

Lo mismo se verifica, aun cuando los datos sean logaritmos:

l. 86—l. 15=log. 86+comp. log. 15—10=1.934498+8·823909—10=0.758407

Si se combinan por adicion y sustraccion varios logaritmos, se abrevia la operacion añadiendo á los logaritmos *sumandos* los complementos de los logaritmos *sustraendos*, rebajando despues en la suma tantas decenas como complementos se hayan introducido.

El resultado final de log. 912+log. 80000—log. 59+log. 1,2—log. 5
será log. 912+log. 80000+log. 1,2+comp. log. 59+comp. log. 5—20
ó bien 2.959995+4.903090+0.079181+8·229148+9·301030—20=5.472444

Aplicacion de los logaritmos al cálculo aritmético.

218. La *multiplicacion* de dos ó mas números enteros ó fraccionarios, que constan de muchas cifras, se abrevia sumando sus logaritmos y buscando en la tabla el número correspondiente á la suma. En la *division* se resta del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y el número correspondiente al resíduo será el cociente. Cuando en una misma cuestion se combinan ambas operaciones, se suman los logaritmos de los factores, que hacen de dividendo, con los complementos logarítmicos de los factores del divisor, y el número correspondiente á esta suma (rebajada segun el número de complementos introducidos) será el número pedido.

Hallar el resultado final de $81040 \times \frac{15}{9{,}08} \times \frac{30{,}89}{1847} = P$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{log. } 81040 = & 4.908699 \\ \text{log. } 15 = & 1.176091 \\ \text{log. } 30{,}89 = & 1.489818 \\ \text{comp. log. } 9{,}08 = & 9{\cdot}041914 \\ \text{comp. log. } 1847 = & 6{\cdot}733533 \\ \hline & 3.350055 = \text{log. } 2239{,}005 \end{array}\right\} \text{ luego será P=2239,005 aproximadamente}$$

219. La *elevacion á potencias* de un número cualquiera se abrevia multiplicando el logaritmo del número dado por el exponente de la potencia y bus-

(*) Aun cuando el logaritmo dado sea menor que 1, se halla su *complemento* restándolo de 10: si fuera mayor que 10 se restará de 100. En general, se llama *complemento de un número ó logaritmo*, otro número o logaritmo, que sumado con el primero produce cero ó una cantidad dada.

El complemento del logaritmo de a, se expresará así C_0 log. a, C_{10} log. a, C_{20} log. a etc.; pero si se escribe simplemente comp. log. a, se sobreentiende el complemento á 10.

cando en la tabla el número correspondiente al resultado. Para hallar la *raiz* de un número, basta dividir su logaritmo por el índice de la raiz, y el número correspondiente al resultado será la raiz pedida.

Hallar el *cuadrado* del número 89

$\log.(89)^2=2\times\log.89=2\times1.949390=3.898780=\log.7921$; luego $(89)^2=7921$

Elevar á la potencia del grado noveno la fraccion *dos quintos*.

$\log.\frac{2}{5}=\log.2-\log.5=0.301030-0.698970=-0.397940$

pero $-0.397940\times9=-3.581460=\log.\frac{1}{3814,7}=\log.0{,}000262$;

luego la potencia novena de la fraccion propuesta será 0,000262

Hallar la *raiz cúbica* de 1331

$\log.\sqrt[3]{1331}=\frac{3.124178}{3}=1.041393=\log.11$; luego $\sqrt[3]{1331}=11$

Igualmente, $\log.\sqrt[5]{18415000}=\frac{7.265172}{5}=1.453034=\log.28{,}381$

Hallar por último el valor x de la expresion $\dfrac{1850\sqrt[6]{5021\times(5{,}5)^4}}{25\sqrt{(1{,}33...)^5}}$

$\log.x=\log.1850+\frac{1}{6}(\log.5021+4\log.5{,}5)+\text{comp.}\log.25+\text{comp.}\frac{5}{2}\log.\frac{4}{3}-20$

Aplicacion de los logaritmos á la comparacion de los números.

220. Para *hallar el cuarto término de una proporcion*, se suman los logaritmos de los medios con el complemento logarítmico del extremo conocido, y el número que en la tabla corresponde á esta suma (despues de rebajada una decena en virtud del complemento) será el número pedido.

Sea la proporcion $\sqrt[3]{104}\times\sqrt[5]{4{,}5} : \frac{108}{2{,}5} :: x : \sqrt[3]{\left(1512\times\frac{1}{11}\right)^2}$

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{1}{3}\log.104+\frac{1}{5}\log.4{,}5= & \begin{cases}0.672344\\0.130642\end{cases}\\ \frac{2}{3}(\log.1512-\log.11)= & 1.425439\\ \text{comp. log. del otro térm.} & 8{\cdot}364516\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\textit{Suma}...\ 0.592941=\log.3{,}917\\ \qquad\text{luego } x=3{,}917\end{array}$$

Del mismo modo, para hallar el término medio de una proporcion contínua, se divide por 2 la suma de los logaritmos de sus extremos, y el número del resultado será el medio proporcional que se pide.

221. La determinacion del primero ó último término de una progresion por cociente, la razon, la suma ó el producto de todos sus términos ó bien el número de estos, se abrevia igualmente por logaritmos, verificándose ademas la analogía que se advierte en el siguiente cuadro entre las fórmulas de las progresiones por diferencia y por cociente.

Progresiones por diferencia.	Progresiones por cociente.
Primer término $A=U-(n-1)D$	$\log.A=\log.U-(n-1)\log.Q$
Ultimo término $U=A+(n-1)D$	$\log.U=\log.A+(n-1)\log.Q$
Diferencia $D=\frac{U-A}{n-1}$	$\log.Q=\frac{\log.U-\log.A}{n-1}$
N.º de términos $n=\frac{U-A}{D}+1$	$n=\frac{\log.U-\log.A}{\log.Q}+1$
Suma total... $S=\frac{n}{2}(U+A)$	$\log.P=\frac{n}{2}(\log.U+\log.A)$ (*)

(*) Supuesto que, el producto de n términos de una progresion por cociente es igual á la raiz cuadrada de la potencia del grado n del producto de los extremos.

Ejercicios para la comparacion de los números.

222. ¿La diferencia de dos números fraccionarios ó incomensurables es tambien un número fraccionario ó incomensurable? Si el antecedente ó el consecuente es incomensurable, ¿lo será la diferencia? Propiedad fundamental de las equidiferencias. ¿Pueden ser uno ó dos términos de una equidiferencia comensurables y los otros incomensurables? Formar todas las equidiferencias posibles con los cuatro números de la igualdad $5+4=1+8$. ¿Si se suman ó se restan ordenadamente dos equidiferencias, el resultado será otra equidiferencia? Calcular el cuarto término de una progresion por diferencia compuesta de diez, suponiendo el último 100 y la diferencia 5. [70]. Hallar el primer término de una progresion de cinco, suponiendo 8,2 y 10,1 el penúltimo y último. [2,5]. Siendo el primer término 5, el tercero 9 y el último 199 ¿cuál es el número de término de la progresion? [98]. Dados los extremos 5,4 y 12 de una progresion de cuatro términos, hallar los medios. [7,6 y 9,8]. Hallar la suma de todos los términos de la série 100,99,98,97..... hasta 1. [5050]. Hallar la suma de los cien primeros términos de una progresion por diferencia,sabiendo que el quinto es 4,4 y el noveno 5,2. [1350]. Hallar dos cuadrados cuya suma sea otro cuadrado. [Uno de los términos de la progresion de los impares, 1, 3, 5, 7, 9, 11.... etc. y el cuadrado del número de los que le anteceden].

¿La razon de dos números fraccionarios ó incomensurables es tambien un número fraccionario ó incomensurable? ¿Si el antecedente ó el consecuente es fraccionario ó incomensurable, lo será igualmente la razon? Propiedad fundamental de las proporciones. ¿Pueden ser uno ó dos términos de una proporcion comensurables y los otros incomensurables y al contrario? Formar todas las proporciones posibles con los cuatro números de la igualdad $5\times10=25\times2$ ¿Cuatro números primos pueden formar proporcion? *El medio proporcional entre dos números es menor que el medio diferencial entre los mismos números: caso único en que esto no se verifica. Deducir de la proporcion $a+b:a-b::c+d:c-d$ esta otra $a:b::c:d$. *La suma de los términos mayor y menor de una proporcion es siempre mayor que la suma de los otros dos. *Demostrar que en toda série de razones iguales, la razon de un antecedente con la suma de los otros es la misma que la del consecuente respectivo con la suma de los demas consecuentes. Calcular el cuarto término de una progresion por cociente compuesta de diez, suponiendo el último 100 y la razon 5. [$^4/_{625}$]. Dados los extremos 1 y 15,625 de una progresion de cuatro términos, hallar los medios [2,5 y 6,25]. Hallar la suma de los diez primeros términos de una progresion por cociente, suponiendo el sesto igual á $^1/_4$ y el último $^1/_{64}$. [$15^{63}/_{64}$]. Hallar la suma de todos los términos de la série 1,10,100,1000..... $(10)^{10}$

Hallar la fórmula del producto de todos los términos de una progresion por cociente, por un procedimiento análogo al que empleamos en el texto para hallar la de la suma de una progresion por diferencia.

Objeto y fundamento de la teoría de logaritmos. ¿Puede tomarse por base de un sistema de logaritmos un número cualquiera comensurable ó incomensurable? Propiedades generales de los logaritmos. Caractéres de los logaritmos ordinarios y sus propiedades. Relacion entre los logaritmos de cuatro números, que forman proporcion. Hallar la razon de los números cuyos logaritmos ordinarios tengan la mantisa comun. Calcular los logaritmos de los números 1897499 y 85010090000. Demostrar que el logaritmo de una fraccion es negativo é igual al logaritmo del número recíproco, anteponiéndole el signo negativo ó sustractivo. Determinar los logaritmos complementarios de $^2/_5$ y 0,512 ¿Cuáles son los números de los logaritmos 7.523109 0.99990 —2.255999 y 8.158362? Hallar la raiz de quinto grado de la potencia sétima de la fraccion $^2/_3$ [0,5668].

APLICACIONES DE LA ARITMÉTICA

ó problemas relativos al cálculo y comparacion de los números concretos.

Preliminares.

223. Hasta ahora hemos considerado los números en abstracto, es decir, sin referencia á ninguna especie de unidades. Cuando los números expresan unidades determinadas, se llaman *concretos*.

Una misma cantidad puede representarse por diferentes números, segun la unidad que se tome por término de comparacion. Asi decimos 4 duros ú 80 reales, para expresar una misma cantidad de dinero; 2 dias ó 48 horas, para expresar otra de tiempo, etc. La unidad es arbitraria para cada cantidad. Las unidades prescritas por la ley contituyen el *sistema legal de pesos y medidas.* Las unidades principales, tanto del antiguo sistema llamado de Castilla como del legal métrico decimal, son las siguientes: (1)

Sistema de pesos y medidas de Castilla.	Sistema legal métrico-decimal.
Medidas de longitud.	
La VARA de Burgos.	EL METRO es la diez-millonésima parte del cuadrante del meridiano que pasa por Paris.
Medidas de capacidad.	
La CÁNTARA de Toledo (para líquidos). La MEDIA FANEGA de Avila (para áridos). La ARROBA de aceite de 25 libras de peso.	EL LITRO es una medida cilíndrica de igual capacidad que un cubo, cuyas dimensiones interiores sean la décima parte del metro.
Medidas de peso.	
El MARCO del Consejo de Castilla.	EL GRAMO es el peso (á la temperatura de 4° centíg.) de un volúmen de agua destilada igual á un cubo cuyas dimensiones interiores sean la centésima parte de un metro.
Medidas de superficie y agrarias.	
La VARA CUADRADA.	El METRO CUADRADO.
La FANEGA de marco real ó sea un cuadrado cuyo lado tiene 96 varas.	EL AREA es un cuadrado cuyo lado tiene diez metros de largo.
Medidas de volúmen.	
La VARA CÚBICA.	EL METRO CÚBICO.
Dinero.	
El REAL de vellon.	EL REAL, moneda efectiva de plata.
Tiempo.	
El DIA natural de 24 horas.	
Circunferencia.	
El GRADO ó la noventa-ava parte de un cuadrante de circunferencia.	EL GRADO CENTESIMAL, que es la centésima parte de un cuadrante de circunferencia.

(*) Llámase *cuadrado* á una figura terminada por cuatro rectas iguales llamadas *lados* y cuyos ángulos son rectos. Una VARA CUADRADA es un cuadrado cuyo lado es una vara.

Las superficies de dos cuadrados son entre sí como las segundas potencias de sus lados. Es decir que, si el lado de un cuadrado es una vara y el lado de otro cuadrado tiene 10 varas, la superficie del primero será $1 \times 1 = 1$ *vara cuadrada* y la del segundo $10 \times 10 = 100$ *varas cuadradas.*

Llámase *cubo* el espacio terminado por seis cuadrados iguales. Los lados de estos cuadrados se llaman lados ó aristas del cubo. Una VARA CÚBICA es un cubo cuyo lado ó arista es una vara.

Los volúmenes de dos cubos son entre sí como las terceras potencias de sus lados ó aristas. Es decir que si el lado de un cubo es una vara y el lado de otro cubo tiene 10 varas, el volúmen del primero será $1 \times 1 \times 1 = 1$ *vara cúbica* y el del segundo $10 \times 10 \times 10 = 1000$ *varas cúbicas.*

Sistema de pesos y medidas de Castilla.		Sistema legal métrico decimal.	
Medidas de longitud.			
		Miriámetro ó sean	10000 met.
		Kilómetro...........	1000
(*) La legua tiene	$1666\,^{2}/_{3}$ estadales.	Hectómetro.........	100
El estadal...........	4 varas.	Decámetro...........	10
La VARA..............	3 pies.	METRO (unidad usual)	
El pie...............	12 pulgadas.	decímetro..........	0,1
La pulgada..........	12 líneas.	centímetro..........	0,01
La línea.............	12 puntos.	milímetro...........	0,001
Medidas de capacidad.			
El cahiz tiene.......	12 fanegas.		
La FANEGA...........	12 celemines.		
El celemin ó almud.	4 cuartillos.		
—			
El moyo..............	16 cántaras.		
La CÁNTARA ó arrob.	8 azumbres.	(***)Kilólitro ó sean.....	1000 litros.
El azumbre.........	4 cuartillos.	Hectólitro............	100
El cuartillo..........	4 copas.	Decálitro.............	10
—		LITRO (unidad usual)	
La arroba............	25 libras.	decílitro.............	0,1
La LIBRA.............	4 panillas.	centílitro...........	0,01
Medidas ponderales.			
La tonel. de peso..	20 quintales.	Tonelada de peso..	1000000 gr.
El quintal...........	4 arrobas.	Quintal métrico.....	100000
La arroba............	25 libras.	KILÓGRAMO..	1000
La LIBRA.............	2 marcos.	Hectógramo..........	100
El marco............	8 onzas.	Decágramo...........	10
La onza..............	16 adarmes.	GRAMO......	1
El adarme..........	3 tomines.	decígramo...........	0,1
El tomin............	12 granos.	centígramo..........	0,01
—		milígramo...........	0,001
(**) La libra.............	12 onzas.		
La onza............	8 dracmas.		
La dracma...........	3 escrúpulos.		
El escrúpulo........	24 granos.		

(*) El grado medio de la tierra tiene 20 leguas próximamente. La legua se divide en 3 millas: 20000 pies ó $6666\,^{2}/_{3}$ varas. El codo de ribera vale 2 pies y 9 líneas.

(**) Esta division de la libra se usa en medicina y farmacia. Para el oro y la plata el marco contiene 8 onzas; la onza, 8 ochavas; la ochava, 6 tomines; y el tomin 12 granos.

(***) Tambien se llama tonelada de arqueo.

Medidas de superficie y agrarias.

La legua cuadrada tiene..........	2777778 estad. cuad.	Miriámet. cuadr.	100000000 met. cuad.
El estad. cuadrado.	16 varas cuad.	Kilómetro cuadrado	1000000 »
La VARA CUADRADA.	9 pies cuad.	Hectómetro cuad.	10000 »
El pie cuadrado...	144 pulg. cuad.	Decámetro cuadrado	100 »
La pulgada cuadr.	144 líneas cuad.	METRO CUADRADO (unidad usual)	
		decímetro cuadrado	0,01 »
		centímetro cuadrado	0,0001 »
(*)La FANEGA de tierra	12 celemines.	Hecto-área ó hectómetro cuadrado.	
El celemin.........	4 cuartillos.	AREA ó decámetro cuadrado.	
El cuartillo.........	192 varas cuad.	centiárea ó metro cuadrado.	

Medidas de volúmen.

La VARA CÚBICA....	27 pies cúb.	METRO CÚBICO (unidad usual)	
El pie cúbico.......	1728 pulg. cúb.	Decímetro cúbico....	0,001 mt. cb.
La pulgada cúbica.	1728 líneas cúb.	Centímetro cúbico...	0,000001

Dinero.

La onza de oro tiene.............	16 duros.	Doblon-Isabel.........	100 reales.
El duro...............	20 reales.	Escudo...............	10 »
El REAL...............	34 maraved.	REAL (unidad usual)	
		Décima...............	0,1 »

Ademas hay la media onza, el doblon, la doblilla ó escudo y el escudillo de *oro*: el medio duro, la peseta y la media peseta de *plata*: dos cuartos, un cuarto y el ochavo de *cobre*. (**)

Ademas hay el doble escudo, la peseta y la media peseta de *plata*; el medio real, la doble décima y la media décima de *cobre*.

Tiempo.

El siglo tiene.......	100 años.
El AÑO...............	365 dias. (***)
El DIA...............	24 horas.
La hora.............	60 minutos.
El minuto..........	60 segundos.

Division de la circunferencia.

La circunferencia se divide en.....	4 cuadrantes	La circunferencia....	4 cuadrantes
El cuadrante en...	90 grados.	El cuadrante.........	100 grados.
El GRADO en........	60 minutos.	El grado.............	100 minutos.
El minuto en.......	60 segundos.	El minuto............	100 segundos.

(*) La *fanega* de tierra tiene 576 estad. cuad. La *aranzada* tiene 400 estad. cuad.
(**) El *maravedi*, moneda imaginaria, es la unidad para expresar menos de 1 real. Un cuarto vale 4 mrs.
(***) El año bisiesto tiene 366 dias. El mes tiene 28, 29, 30 ó 31 dias.

(Véase la *Nota* IV al final de la Aritmética.)

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

Preliminares. Adicion, sustraccion, multiplicacion y division de estos números. Ejercicios.

---

224. Los números concretos se dividen en *complejos* é *incomplejos*: estos se refieren á una sola especie de unidades, y aquellos se refieren á unidades de diferentes especies, pero de un mismo género.

4 dias;	10 varas;	8 kilómetros	son números *incomplejos*
4 dias+2 horas;	10 varas+1 pie;	8 kilómet.+5 metros	son *complejos*

Los números que se refieren á unidades de una misma especie se llaman *homogéneos* como 8 reales y 100 reales.

225. Para reducir un número incomplejo á unidades de especie inferior, se multiplica el número dado por el que expresa las unidades de especie inferior que componen una de la superior.

Reducir á unidades inferiores el número entero 10 *dias.*

Supuesto que un dia tiene 24 horas, es evidente que 10 dias tendrán 10 veces mas; y por consiguiente para reducir á horas el número dado, bastará multiplicar 24 por 10, y el producto 240 serán las horas que equivalen á 10 dias. Del mismo modo; 10 dias serán lo mismo que $240\times60=14400$ minutos.

OTROS EJEMPLOS: $\frac{4}{5}$ de arroba$=\frac{4}{5}$ de 25 libras$=\frac{4\times25}{5}$ libras$=20$ libras.

$\frac{3}{4}$ de vara$=\frac{3}{4}$ de 3 pies$=\frac{9}{4}$ pies$=2$ pies$+\frac{1}{4}$ de otro pié;

pero $\frac{1}{4}$ de pié es igual á $\frac{1}{4}$ de 12 pulgadas ó sean. . . . . . 3 pulgadas

luego $\frac{3}{4}$ de vara será lo mismo que 2 pies+3 pulgadas

Ultimamente, reducir á unidades inferiores el núm. $\frac{7}{8}$ de *una vara cuadrada*.

Numerador del núm. fraccionario dado	7	
N.° de pies cuad. que tiene 1 vara cuad.	9	
Producto en pies cuadrados.....	63 (1r. dividendo.)	8 *denominador* del n.° dado
Resto de la division en pies cuadrados	7	7 pies cuad.+126 pl. cuad.
El mismo resto en pulgadas cuadrad.	1008 (2.° dividendo.)	
Resto final.....	00	

luego $\frac{7}{8}$ de una vara cuadrada será igual 7 pies cuadrados+126 pulgadas cuad.

Cuando la última division no es exacta, se desprecia el resto final, si no llega á la mitad del divisor, y se añade una unidad á las unidades inferiores del cociente, si es igual ó mayor que la mitad del divisor.

$\frac{14}{11}$ de qq. $=5$ arrobas... 2 libras... 4 onzas... 5 adarm... 2 tomin... 5 gran.

$\frac{3}{5}$ de moyo$=9$ cántaras+4 azumbres+3 cuartillos+1 copa.

Reducir á unidades inferiores el número decimal 0,45 de un duro.

0,45 de un duro$=$0,45 de 20 reales$=0{,}45\times20$ reales$=9$ reales.

OTROS EJEMPLOS. 2,548 pies=2 pies... 6 pulgadas... 7 líneas.

pulgadas de un pie	12	
producto...	6,576 en pulg.	0,024 qq.=2 libras.. 6 onzas.. 6,4 adarm.
líneas de una pulgada	12	5,512° =5°......... 30′......... 43,″2
producto...	6,912 en líneas.	

Si el número propuesto expresa unidades del *sistema métrico*, su reduccion á unidades de especie inferior inmediata se consigue con solo multiplicarle por 10. Si las unidades del número dado son de superficie ó agrarias, se multiplicará por 100; y si de volúmen se multiplicará por 1000.

42 kilómetros=420 hectóm.=4200 decám.=42000 met.=420000 decím., etc.
1,854 hecto-áreas=185,4 áreas=18540 centi-áreas=1854000 decím. cuad. etc.
$^2/_5$ de un kilógramo=0,4 kilógramos=4 hectógr.=40 decágr.=400 gramos, etc.

226. Para reducir un número incomplejo á unidades de especie superior, se divide el número dado por el que expresa las unidades de especie inferior que componen una del órden superior.

Reducir á unidades de especie superior el número 240 *horas.*

Una hora es lo mismo que $\frac{1}{24}$ de dia, y por consiguiente 240 horas serán tanto como $\frac{240}{24}$ de dia; luego, para reducir á dias el número dado, bastará dividirle por 24, y el cociente 10 serán los dias que equivalen á 240 horas.

Si la division no es exacta, el resto será evidentemente de la especie del dividendo. En este caso el cociente, mas el resto, formarán un número complejo igual al incomplejo dado.

El número 140 minutos equivale á 2 horas y 20 minutos.

Reducir medio millon de maravedises á unidades de especie superior.

500000 maravedises : 34=14705 reales : 20=735 duros
resto 30 mrs. resto 5 rs.
luego 500000 mrs.=735 duros....... 5 reales.......... 30 mr.

8425 $\frac{1}{5}$ *pies cuadrados*=58 estadales cuad.... 8 varas cuad.... 1,2 pies cuad.

5 *pulg.*$=\frac{5}{12}$ de pie$=\frac{5}{12\times3}$ de vara 3 *cuartillos* de vino$=\frac{3}{32}$ cántaras.

Si el número propuesto expresa unidades del *sistema métrico*, su reduccion á unidades de especie superior inmediata se consigue con solo dividirle por 10. Si las unidades del número dado son de superficie ó agrarias, se dividirá por 100, y si de volúmen se dividirá por 1000.

715021,5 centígr.=71502,15 decigr.=7150,215 gramos=7,150215 kilógramos.
200000000 milím. cúb.=200000 centím. cúb.=200 decím. cúb.=0,2 met. cúb.
$^2/_5$ de un metro cuadrado=0,004 decámetros cuadr.=0,0000004 kilómet. cuad.

De lo que llevamos expuesto y de la numeracion de los decimales se deducen las transformaciones siguientes:

8016,5 metros......=8 kilómetros. 1 decámetro... 6 metros. 5 decímetros.
8016,5 áreas........=80 hectáreas.. 16 áreas...................... 50 centi-áreas.
8016,5 decím. cúb.=8 met. cúb.. 16 decím. cúb.............. 500 centím. cúb.
8016,5 reales.......=80 doblones... 1 escudo....... 6 reales... 5 décimas (*).

(*) SISTEMA SEXAGESIMAL. *Reducir el número* 1094 *minutos á unidades de especie superior.* De la abreviacion de la division se deduce que, el cociente y el resto de 1094 por 60 se obtienen del modo siguiente: Escríbanse las unidades 4 del número dado (en el lugar de las unidades inferiores del complejo) y tomando la sexta parte de las decenas 109, el cociente 18 serán unidades de la especie superior inmediata, es decir horas. Añadiendo ahora el residuo 1 decena á las unidades inferiores 4, tendremos el complejo 19 *horas* y 14 *minutos* igual al incomplejo dado.

154814 *segundos*=2580 minutos... 14 segundos=43 horas... 0 minutos... 14 segundos.

Reduccion de los números complejos á incomplejos.

227. Para reducir un número complejo á incomplejo de especie inferior, se reducen las unidades principales á las de especie inferior inmediata, añadiendo al resultado las que hubiere de esta especie en el número dado. Y así se continúa hasta llegar á las unidades inferiores.

Reducir el número 4 dias.... 8 horas, á incomplejo de su especie inferior.
4 dias son lo mismo que 4 veces 24 horas, es decir 96 horas;
luego el número dado será igual á 96 horas mas 8 horas, es decir á 104 horas.

Otros ejemplos:

735 duros.. 5 rs. 30 mrs.
20 rs. que tiene un duro
(producto) 14700 reales
añadiendo 5 rs. nos dará.....
14705 rs.=735 dur.+5 rs.
34 mrs. que tiene un real
(producto) 499970 maravedises
añadiendo 30; tendremos.....
500000 m.=735 d. 5 rs. 30 m.

4 varas+2 pies+8 pulg.=176 pulg.
5 qq.+10 lib.+4$\frac{1}{2}$ onz.=8164,5 onz.
12 faneg.+4 celem.+2 varas cuad.=

Si el número complejo se compone de unidades del *sistema métrico*, su reduccion á unidades inferiores se obtiene con solo escribir unos al lado de otros los números, que representen sus diferentes unidades de mayor á menor, ocupando con ceros los lugares de las unidades, que falten, y teniendo presente que cada unidad de superficie debe ocupar dos lugares y tres las de volúmen.

14 kilógramos.. 2 hectógr..... 4 gram.... 5 decígram..= 142045 decígramos.
25 doblones... 4 escudos. 3 reales......= 2543 reales.
145 hecto-áreas 4 áreas.... 12 centiáreas.=1450412 centiáreas(*)

228. Para reducir un número complejo á incomplejo de especie superior ú otra intermedia, se escribe por numerador el número dado reducido á incomplejo de especie inferior, y por denominador el número, que indica las unidades de esta especie, que componen una de la superior ó de la intermedia, que se pide.

El número 4 dias+8 horas, equivale á 104 horas; y por consiguiente á $\frac{104}{24}$ dias
5 duros... 10 rs..... 10,2 mrs.=3750,2 mrs.=$\frac{3750,2}{34}$ reales.

En el *sistema métrico* esta reduccion se hace con mucha facilidad:

12 kilólitros.......... 4 hectólitros.... 5 litros = 12,405 kilólitros
154 hecto-áreas........ 25 áreas.......... 4 centiáreas = 154,2504 hecto-áreas
5 metros cúbicos... 94 decím. cúb... 80 cent. cúb. =5094,08 decím. cúb.

(*) SISTEMA SEXAGESIMAL. *Reducir 4 horas y 32 minutos á incomplejo de especie inferior.*
El producto de 4 por 60 es lo mismo que 4×6 decenas; luego copiando el guarismo 2 de la derecha de las unidades inferiores y añadiendo al 3 (decenas de dicha especie inferior) el producto 4×6; tendremos el incomplejo 272 *minutos* igual al complejo dado.
Del mismo modo 1.°.....52′.....35,″2=112′.....35″,2=6755″,2

Adicion de los números concretos.

229. En la *adicion* de los números concretos los sumandos deben ser del mismo género. Cuando son de una misma especie, la *suma* será de la especie de los sumandos.

Conviene distinguir dos casos; á saber, primero cuando los datos son *incomplejos*, y segundo cuando son *complejos*.

Adicion de dos ó mas números incomplejos.

230. Los números *incomplejos* de una misma especie se suman como si fuesen abstractos. Si los datos no son de una misma especie, se reducirán todos á una especie comun.

Un sugeto que cuenta 12000 rs. de renta por réditos de su capital; 15500 como propietario, y 50000 como empleado;

reunirá anualmente un total de 77500 rs.

Se desea averiguar las varas cuadradas de terreno de tres heredades cuyas dimensiones son.....

40 fanegas y media+5,2 *hectáreas*+1503 *pies cuadrados* (*)

40,5 fanegas=40,5×9216	varas cuadradas=...	373248	varas cuadradas
520 áreas=520×143,1153	varas cuadradas=...	74419,96	varas cuadradas
1503 pies cuadrados son lo mismo que..............		167	varas cuadradas
luego el número pedido será igual á		447834,96	*varas cuadradas*

La suma de 104 litros, 12,5 kilolit. y 5,5 cántaras de vino, será 12692,7 *litros.*

Adicion de los números complejos.

231. Para sumar dos ó mas números *complejos*, se suman las unidades de cada especie empezando por las inferiores, añadiendo á cada suma parcial las unidades de su especie que resulten de la suma anterior.

qq.	arrob.	lib.	onzas.	
14	2	7	10	
3	1	20	4	
9	0	3	2,5	
10	1	2	$7\frac{1}{2}$	
37	1	8	8	suma

dias	horas	minutos	segundos
120	10	10	10
15	1	50	$30\frac{1}{2}$
	22	45	00
102	5	14	$24\frac{1}{4}$
238	16	0	4,75

16 hecto-áreas	6 áreas	94 centi-áreas	=	1606,94 areas
8	12	70	=	812,70
81	62	5	=	8162,05
	26	80	=	26,8
106	8	49	=	10608,49 áreas

(*) Véanse en las NOTAS al final de la Aritmética las tablas de reduccion de las diferentes unidades del sistema métrico á las correspondientes del sistema de Castilla y vice-versa.

Para reducir por estas tablas un número concreto expresado en un sistema á su equivalente en el otro, basta multiplicar el número dado por la equivalencia de la unidad en el segundo sistema. Así para reducir 12 metros á pies de Búrgos, se multiplicará el número 12 por la equivalencia de un metro en pies, es decir por 3,5889 y el producto 43,0668 será el número que se busca.

Sustraccion de los números concretos.

232. En la *sustraccion* de los números concretos el minuendo y sustraendo deben ser de un mismo género. Cuando son de una misma especie, el *resíduo* será de la especie de los datos.

En los problemas de la sustraccion distinguiremos dos casos; á saber, cuando los datos son *incomplejos* ó cuando son *complejos*.

Sustraccion de dos números incomplejos.

233. Los números *incomplejos* de una misma especie se restan como si fuesen abstractos. Si los datos no son de una misma especie, se reducirá uno cualquiera de ellos á la especie del otro.

La persona que posea 80000 rs. de renta, y gaste anualmente 35500 rs.; economizará en cada año 44500 reales, ó sea la diferencia entre 80000 y 35500 rs.

Hallar la diferencia de capacidad entre 104 *cántaras de vino y* 8 *kilólitros y medio de aceite.*

Reduciendo el minuendo á cántaras.	Reduciendo el sustraendo á litros.
8,5 kilól.=8,5×61,9848 cánt.=526,87 cántaras	8,5 kilólit.=8500 litros
104	104 cántaras=1677,832 litros
Diferencia...... 422,87 cántaras	Diferencia.. 6822,168 litros

La *diferencia* entre 12,01 met. cúb. y 100 pies cúb. es igual á 9,847 met. cúb.

¿Cuál es el *exceso* de 20 quintales y medio, sobre 400 kilógr? [543,kg·191]

Sustraccion de dos números complejos.

234. Para hallar la diferencia entre dos números *complejos*, se restan de las unidades del minuendo las de la misma especie del sustraendo, empezando por las de especie inferior. Si algun snstraendo parcial es mayor que el minuendo respectivo, se añade á este una unidad de la especie superior inmediata, considerando luego al minuendo parcial siguiente con dicha unidad de menos.

duros	reales	mrs.	
1058. . . .	16. . . .	30	
429. . . .	19. . . .	$15^1/_2$	
628. . . .	17. . . .	14,5	resíduo

	grados	minutos	segundos	
	12			
	8 . . .	52. . . .	$40\,^1/_4$	
3^{v}. . .	7′. . . .	19. . . .	45‴	

			metros cúbicos.
1508 met-cúbicos. .	51 decímet-cúbicos.	5 centím-cúbicos=	1508,051005
654.	999.	45. . . . . =	654,999045
853.	51.	960. . . . . =	853,05196

(*)

(*) El cálculo de los números complejos se reduce al de los incomplejos, con solo transformar aquellos en estos; no obstante, en la adicion y sustraccion conviene operar directamente sobre los números complejos. En el sistema métrico siempre es conveniente la reduccion á incomplejos.

Multiplicacion de los números concretos.

235. De la definicion de la *multiplicacion* se deduce que, sea cual fuere el multiplicador, se debe considerar como abstracto, y por consiguiente las unidades del producto serán de la misma especie que las del multiplicando (*).

Las cuestiones, que se resuelven por la multiplicacion de los números concretos, determinan la especie de unidades del resultado, y por consiguiente el factor de esta misma especie será el multiplicando, sin que pueda tomarse nunca como tal el otro factor.

El problema mas frecuente en la multiplicacion de los números concretos es aquel en que nos proponemos averiguar el valor de un número, conocido el valor de la unidad. Para resolver esta cuestion se multiplica el valor de la unidad por el número cuyo valor se desea determinar.

Si el multiplicador no es de la especie de la unidad, cuyo valor es el multiplicando, se reducirá á esta especie.

En la multiplicacion de los números concretos conviene distinguir los casos siguientes:

Multiplicacion de dos números incomplejos.

236. Los números *incomplejos* se multiplican como si fueran abstractos y las condiciones del problema determinarán la especie del producto.

Hallar el valor de 5 varas de paño costando cada una 40 rs. y medio.

Si una vara vale 40 reales y medio, 5 varas valdrán cinco veces mas; y por consiguiente, multiplicando $40\frac{1}{2}$ por 5, el producto será el número pedido.

$40\frac{1}{2}$ rs.$\times 5=\frac{81}{2}$ rs.$\times 5=202$ reales y medio, valor de las 5 varas de paño.

Si un quintal vale 125 duros, hallar el valor de 10 libras y media.

El multiplicando es 125 duros y el multiplicador 10,5 libras ó bien 0,105 qq. luego tendremos 125 duros$\times$0,105=13 duros.... 2 rs..... 17 mrs. (n.° pedido)

¿Cuál es el peso de un litro de agua pura en su máxima densidad ó sea á la temperatura de 4.° del termómetro centígrado? [Un kilógramo].

Si un estadal cuadrado de terreno vale 50,4 rs.; cuánto valdrán 10 áreas?

Multiplicacion de un complejo por un incomplejo.

237. Para multiplicar un número *complejo* por un *incomplejo*, se multiplica este por cada una de las diferentes unidades de aquel, y la suma de los productos parciales será el producto total.

Hallar el valor de 5 qq. costando cada uno 10 duros y 10 reales.

(*) Excepto en los casos siguientes: Si los factores son de una misma especie y ambos expresan medidas longitudinales, el producto serán *unidades de superficie*.

4 varas$\times$3 varas=12 *varas cuadradas.*

Si los factores son tres, de una misma especie, y todos expresan medidas longitudinales, el producto serán *unidades cúbicas*.

5 pies$\times$2 pies$\times$3 pies=10 *pies cuadrados*$\times$3 pies=30 *pies cúbicos.*

El multiplicando será el valor de un quintal, es decir. . 10 duros. . . 10 rs.
y el multiplicador el número de quintales, es decir. 5

luego el número pedido será. . . . . 52 duros. . . 10 rs.

Si dos arrobas y un azumbre de vino valen un duro, ¿cuántas arrobas se podrán comprar con 500 rs.?

Supuesto que 500 rs. equivalen á 25 duros, el número pedido será igual á (2 arrob. y 1 azumb.)$\times$25=50 arrob. y 25 azumb.=53 arrob. y 1 azumb. (*)

Si una vara cúbica de piedra pesa 2 qq. métricos, 10 kilógr. y 6 gramos, *¿cuántos kilógramos pesarán* 10 *varas cúbicas y media?*

Multiplicacion de un número incomplejo ó complejo por otro complejo.

238. Para multiplicar un *incomplejo* por un *complejo*, se reduce este á incomplejo, y se multiplican como dos números incomplejos.

Si una vara de tela vale 6 *rs. ¿cuánto valdrán* 5 *varas*, 2 *pies y* 6 *pulg.?*

El multiplicador 5 varas 2 pies y 6 pulgadas, reducido á incomplejo de varas (puesto que el multiplicando es el precio de una vara) será $\frac{210}{36}$ varas; y por consiguiente, la operacion quedará reducida al caso primero, y tendremos ..

valor de una vara.
6 reales$\times$(5 varas... 2 pies... 6 pulgadas)=6 rs.$\times\frac{210}{36}$=35 rs.

Si en una hora se andan 5,2 *kilómetros, ¿cuántas leguas se andaran en* 8 *dias*, 10 *horas y* 10 *minutos?*

en una hora
5,2 kilómet.$\times$(8 dias, 10 horas, 10 minut.)=5,2 kilómet.$\times\frac{12130}{60}$=1051,267 km.
luego el número pedido será igual á 0,179446$\times$1051,267 (Véase la pág. 195).

239. Para multiplicar un *complejo* por otro *complejo*, se reducen á incomplejos, y se multiplican como estos.

Hallar el valor de 5 *varas y* 10 *pulgadas, costando cada pié* 12 *rs.* 30 *mrs.*

valor de un pié
(12 rs. y 30 mrs.)$\times$(5 varas y 10 pulgadas)=$\frac{438}{34}$rs.$\times\frac{190}{12}$=203 reales y 33 mrs.

Si una fanega de trigo pesa 4 *arrobas*, 2 *libras y* 6 *onzas ¿cuánto pesarán* 8 *celemines y* 3 *cuartillos?*

peso de una fanega
(4 arrob.+2 lib.+6 onz.)$\times$(8 celem.+3 cuart.)=$\frac{1638}{400}$arrob.$\times\frac{35}{48}$=.....
2 arrobas..... 24 libras..... 10,4 onzas.

Hallar el valor de 4 *hectólitros*, 2 *decálitros y* 4 *litros de un líquido cualquiera, costando un decálitro* 3 *doblones*, 2 *escudos y* 6 *rs. de la nueva moneda.*

valor de un decálitro
3,26 doblones$\times$42,4 decálitros=138,224 doblones

(*) *El producto de un complejo por un incomplejo* se halla tambien reduciendo el complejo á incomplejo y multiplicando luego dos incomplejos. Este procedimiento se emplea generalmente cuando el incomplejo es fraccionario.

Resolver la misma cuestion del texto, suponiendo que el dinero di ponible son 5 duros y medio.

(2 arrobas y 1 azumbre)$\times$5 $\frac{1}{2}$ =$\frac{17}{8}$ arrobas$\times\frac{11}{2}$=11 arrobas, 5 azumbres y 2 cuartillos.

MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS
por el método de las partes alícuotas.

***240.** Cuando alguno de los factores es *complejo* ó número *misto*, se puede hallar el producto descomponiendo este factor en partes alícuotas las unas de las otras y multiplicando en seguida cada una de ellas por el otro factor, empezando por las unidades de superior especie.

1.° *Hallar el precio de* $15\frac{3}{4}$ *libras, costando* 190 *reales cada una.*

Valor de una libra.	190 reales	multiplicando
número de libras.	$15^3/_4$	multiplicador
Valor de 15 libras.	2850 reales	
valor de $^2/_4$ libra ó sea media libra.	95	
valor de $^1/_4$ de libra.	47. . . . 17 mrs.	
suma total.	2992 reales. 17 mrs.	(producto)

2.° *Si en un dia se construyen* 10 *varas....* 2 *pies....* 8 *pulgadas de tela ¿qué número de varas se construirán en* 192 *dias?*

Tela que se construye en un dia.	10 varas... 2 pies ... 8 pulg.
número de dias de trabajo.	192
Producto de 192 por 10 varas.	1920 varas
producto de 192 por 1 pie ó $^1/_3$ de vara. .	64
producto de 192 por 1 pie.	64
producto de 192 por 6 pulg. ó $^1/_2$ pie.. . .	32
producto de 192 por 2 pulg. ó $^1/_3$ de 6 pulg.	10. . . . . 2 pies
total.	2090 varas... 2 pies

3.° *Hallar el peso de una barra de hierro de* 5 *varas...* 2 *pies......* 7 *pulgadas, pesando cada pie de dicha barra* 3 *qq....* 2 *arrob...* 1 *libra.*

	qq.	arrob.	libras	onz.
Si un pie, pesa.	3 qq.	2 arrob.	1 libra	
5 varas y 2 pies ó sean 17 pies, pesarán	59..	2.	17	
6 pulgadas ó la mitad de un pie pesará	1..	3.	0.	8 onz.
1 pulgada ó la 6.ª parte de 6 pulgadas..	1.		4.	4
Luego el peso total de la barra, será.	61 qq.	2 arrob.	21 libras.	12 onz.

4.° *Si un qq. vale* 104 *duros.....* 10 *reales.....* 20 *mrs. averiguar el valor de* 10 *quintales.....* 3 *arrobas.....* 11 *onzas.*

	duros	reales	mrs.
Valor de un quintal.	104 duros.	10 reales..	20 mrs.
10 quintales costarán.	1045.	5.	30
2 arrobas ó sea la mitad de un qq.	52.	5.	10
1 arroba á la mitad de 2 arrobas.	26.	2.	22
1 libra (producto auxiliar).	1.		$30^4/_5$ (*)
8 onzas ó la mitad de una libra.		10.	15,4
2 onzas.		2.	20,85
1 onza.		1.	10,425
valor total que se busca.	1124.	8.	6,675

(*) Pudiera evitarse este producto auxiliar, determinando el valor de 1 onza por medio de la division de 26 duros 2 reales y 22 mrs. por 400. Conocido el valor de 1 onza fácilmente se determinaria el de 2 onzas y despues el de 8 onzas.

Division de los números concretos.

241. Como el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor, deducimos.....

1.° Cuando el dividendo y divisor son de un mismo género y se refieren ademas á una misma especie de unidades, el *cociente* será un número abstracto, que expresará las veces que el dividendo contiene al divisor.

En los problemas en que ocurran divisiones de esta naturaleza, el enunciado determinará la especie del resultado.

2.° Cuando el dividendo y divisor son de diferente género, el divisor se considera como abstracto, y el *cociente* será de la misma especie que el dividendo, pues la operacion se reduce á dividir el dividendo en cierto número de parte iguales (*).

El problema que generalmente se resuelve en este caso es averiguar el valor de la unidad de un número, conociendo el valor de dicho número. El resultado es igual al cociente de dividir el valor conocido del número por el mismo número.

Conviene reducir el divisor á la especie de la unidad cuyo valor se busca.

Los casos diferentes, que pueden presentarse al dividir dos números concretos, son los siguientes:

Division de dos números incomplejos.

242. Para dividir un número incomplejo por otro, se dividen como si fueran abstractos, y las condiciones del problema determinarán la especie del cociente.

Pesando una fanega de trigo 4 arrobas y media, se pregunta el número de fanegas contenidas en diez quintales.

El número de fanegas, que se pide, será igual al número de veces que 4 arrobas y media están contenidas en diez quintales ó sean 40 arrobas; y por consiguiente dividiendo 40 por $4^1/_2$; tendremos $40 : 4{,}5 = 8\frac{8}{9}$
luego el número pedido será 8 faneg..... $10^2/_3$ celemines.

Averiguar el número de kilómetros de camino, que podrán construirse con 12 millones y medio de reales, costando cada metro 10 rs. y 4 décimas.

Cada kilómetro de camino costará evidentemente 10400 rs.; y por consiguiente el cociente de 12 millones y medio por 10400, será el número pedido.

Si 9 metros y 2 centímetros de paño, costaron 1000 rs.; ¿cuál será el valor de un decámetro?

El número pedido será 1108,65 reales (cociente de 1000 rs. por 0,902)

¿Cuál es el precio de una vara cuadrada de terreno, sabiendo que 12 áreas y media han costado 500 duros?

Supuesto que 12 áreas y media son lo mismo que 1250 metros cuadrados, el cociente de 10000 rs. por 1250 será el valor de un metro cuadrado. Pero un metro cuadrado es igual á 1,4312 varas cuadradas, luego si multiplicamos este numero por 8 rs.; tendremos resuelto el problema.

(*) Excepto en las cuestiones siguientes: Si el dividendo expresa unidades de superficie y el divisor unidades de longitud, el cociente serán unidades *longitudinales*.

12 varas cuadradas : 4 varas=3 *varas*.

Si el dividendo se refiere á unidades cúbicas y el divisor á unidades longitudinales ó de superficie, el cociente dará unidades de *superficie* ó de *longitud*.

30 pies cúbicos : 3 pies=10 *pies cuadrados*. 30 pies cúbicos : 10 pies cuadrados=3 pies,

Division de un número complejo por un incomplejo.

243. Para dividir un número *complejo* por otro *incomplejo*, se divide cada parte del dividendo por el divisor, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.

Si un móvil corre en 8 minutos con movimiento uniforme 14 varas, 2 pies, y 6 pulgadas; se desea hallar la velocidad de dicho móvil, ó sea el espacio corrido en la unidad de tiempo ó 1 minuto (*)

	14 varas... 2 pies... 6 pulg. (dividendo)	8 divisor
	6 varas=18 pies	1 vara... 2 pies... 6 pulg... 9 lín.
2.º dividendo	20 pies	(número pedido)
	4 pies=48 pulg.	
3.r dividendo...	54 pulg.	
4.º dividendo...	6 pulg.=72 líneas.	
	Resto final..... 00	

Hallar el precio de una vara cuadrada de terreno, en el supuesto de que 3 estadales cuadrados han costado 10 duros.... 10 rs.... 20 mrs.

3 estadales cuadrados son lo mismo que 48 varas cuadradas, y por consiguiente el cociente de 10 duros.... 10 rs.... 20 mrs. por 48 será el número pedido, que resulta igual á 4 rs... 13,2 mrs.

Si 4,5 litros han pesado 2 arrobas, 10 lib. y 6 onz., ¿cuánto pesará un litro? (**)

Division de un número incomplejo ó complejo por otro complejo.

244. Para dividir un número *incomplejo* por un *complejo*, se reduce el complejo á incomplejo, y la cuestion será de dividir dos incomplejos.

Hallar la razon de dos piezas de tela de igual ancho y cuya longitud sea ae 452 varas y un cuarto la una, y de 100 varas 1 pie y 6 pulgadas la otra.

$$452\frac{1}{4} :(100 \text{ varas... } 1 \text{ pies... } 6 \text{ pulgadas})=452\frac{1}{4} : \frac{3618}{36}=4\frac{1}{2}$$

luego la primera contiene á la segunda cuatro veces y media.

4 hectólitros 2 decálitros y 6 litros y medio de una especie cualquiera, han pesado 40 kilógramos, ¿cuántos arrobas pesará un kilólitro?

El cociente de 40 por 0,4265 kilólitros nos dará los kilógramos que pesa un kilólitro, y por consiguiente, el producto de este número por el correspondiente de las tablas de reduccion será el número que se pide.

245. Para dividir dos *complejos* se reducen á incomplejos, y la operacion será de dividir un número incomplejo por otro.

Si un metro cúbico vale 2 duros y 11 rs., ¿cuántos metros cúbicos se podrán comprar con 100 duros y 12 rs.?

$$(100 \text{ duros}+12 \text{ rs.}) : (2 \text{ duros}+11 \text{ rs.})=\frac{2012}{20} : \frac{51}{20}=39{,}451 \text{ metros cubicos.}$$

(*) Llámase *movimiento uniforme* el de un movil que en tiempos iguales anda espacios iguales.

(**) El cociente de un complejo por un incomplejo se puede hallar reduciendo el complejo á incomplejo y dividiendo luego los dos incomplejos. Este procedimiento se emplea generalmente cuando el divisor es fraccionario, y tambien cuando el dividendo y divisor son de una misma especie.

Si un pie cúbico de madera vale 4 rs. y medio, ¿cuánto pies cúbicos de madera se podrán comprar con 50 duros y 20 mrs.?

$$(1000 \text{ rs... } 20 \text{ mrs.}) : 4\frac{1}{2}=1000\frac{20}{34} : 4\frac{1}{2}=222{,}35 \text{ pies cúbicos (aproximadamente).}$$

Si en 1 dia... 10 horas... 10 minutos se han construido 1000 varas y 2 pies de tela, ¿cuántas varas corresponden á una hora de trabajo?

$$(1000 \text{ vs.}+2 \text{ ps.}) : (1 \text{ d.}+10 \text{ hs.}+10 \text{ ms.}) = \frac{3002}{3} \text{ vs.} : \frac{2050}{60} = 29 \text{ vs... } 10{,}3 \text{ pulgs.}$$

Si 5 litros... 4 decilitros han costado 4 doblones-Isabel mas 2 escudos y 8 reales, ¿cuánto costará un kilólitro?

Siendo el dividendo 4,28 doblones, y el divisor 0,0054 kilólitros fácilmente se hallará el cociente ó sea el número que se busca.

Tambien se halla el cociente de dos complejos, reduciendo el divisor á la menor de sus especies, dividiendo luego cada parte del dividendo por el divisor así reducido, y multiplicando despues este cociente por el número de unidades inferiores del divisor, que componen la superior á que se refiere el enunciado.

Siendo 57 duros y 15 rs. el valor de 5 quintales y 2 arrobas ¿cuál es el precio de un quintal?

El cociente de 57 duros y 15 rs. por 22 que son las arrobas del divisor,

es igual á 2 duros..... 12 reales..... 17 mrs.

luego el producto de este número por 4 será el número pedido.

---

246. Vamos á terminar el cálculo de los números concretos por una serie de problemas, en cuya resolucion se combinen dos ó mas de las operaciones anteriores:

Sumar y dividir. *Se han recibido 54 duros 8 rs. 10 mrs.; 104 napoleones 13 rs. 24 mrs.; y 8 doblones Isabel. En cambio de este dinero se entregó una partida de acero á razon de 7 duros y 4 rs. el qq. ¿cuál es el número de qq.?*

Divídase el dinero total recibido 3878 rs. por 144 rs., (valor de un quintal); y tendremos 26 qq..... 3 arrob. 18 lib. aproximadamente.

Restar y dividir. *De una letra cuyo líquido es de 400 duros 12 rs. 10 mrs.; se han satisfecho 400 rs. y 20 mrs., y con el resto se ha comprado una partida de trigo á razon de 55 rs. y medio la fanega; averiguar el número de fanegas.*

El cociente de 7611 rs... 24 mrs. por $55\frac{1}{2}$; será el número que se busca.

Multiplicar y dividir. *Con el importe de 12 áreas y 5 centiáreas de terreno á razon de 25 reales y 4 décimas el metro cuadrado, se ha satisfecho el valor de una pieza de paño de 40 metros y 8 decimetros; ¿cuál es el precio de un metro?*

El cociente de $1205 \times 25{,}4$ rs. por 40,8 será el valor de un metro.

Sumar, multiplicar, y dividir. *Con 20 onzas de oro, 16 medias onzas, 10 doblones Isabel, 70 duros, 125 napoleones, 104 pesetas y ademas el valor de 104 metros cúbicos de piedra á razon de 3 décimas el decimetro cúbico, se han satisfecho los jornales de 4747 trabajadores; se pregunta el jornal de cada uno.*

Sumar, restar, multiplicar y dividir. *En pago del importe de 53 quintales y 2 arrobas de arroz á 3 duros y 10 rs. el quintal, y 40 varas... 10 pulgadas de tela á 40 reales el pie, se han recibido 4000 rs... 17 mrs. en metálico y una partida de azúcar de 56 quintal y 2 arrobas. Se pregunta el precio de cada quintal de azúcar.*

Súmese el importe del arroz con el de la tela, de esta suma réstense 4000 reales y 17 mrs.; y dividiendo el resíduo por 56 y medio; el cociente será el valor de la incógnita de la cuestion ó sea el precio de un quintal

Ejercicios para el cálculo de los números concretos

243. Ventajas del sistema métrico decimal de pesos y medidas sobre el sistema antiguo llamado de Castilla. Equivalencias aproximadas con menos de una milésima de error de todas las unidades principales de uno y otro sistema. Determinar en metros la longitud de una legua de 20, de 25 ó de 17 y media cada grado; y tambien de una milla geográfica ó sea un minuto del ecuador. [5555,5, 4444,4, 6349,2, 1851,8]. ¿Cuál es el lado de un cuadrado que tiene 144 metros cuadrados de superficie? [12 metros] ¿Cuáles son las relaciones de la décima parte del metro cuadrado con el decímetro cuadrado; de la décima parte del metro cúbico con el decímetro cúbico, y del miriámetro cuadrado con la hectoárea? [10:1 , 100:1 , 10000:1]. Hallar el intervalo que media entre 15 años... 15 dias... 10 horas... 3 minutos, y 5 años... 7 meses... 20 dias... 20 horas... 15 minutos. Una persona en vez de emplear en una obra 30 hombres pagándoles 16 rs. diarios, quiere emplear 40 mugeres y 20 niños pagando á cada muger 60 rs. semanales; se pregunta el jornal que corresponde á cada niño para que el desembolso del propietario sea el mismo. [4 rs.]. Costando una cántara 12 pesos 6 rs. 12 mrs. averiguar el valor de 5 azumbres y media. [8 pesos 9 rs. 12,5 mrs.]. Un comerciante envia á otro tres partidas de acero, la una de 425 qq. á 7 duros y 15 rs. el qq. y la otra de 104 qq... 3 arrobas á 7 duros 12 rs. 12 mrs.; y la tercera de 56 arrobas y media á 7 duros 10 rs. 10 mrs.; en cambio de esto recibe 185 pipas de aguardiente á razon de 26 duros y 12 rs.; se pregunta el saldo que resulta á favor de uno de los comerciantes. [14463 rs. y 4 mrs.]. Comprada una pieza de paño de 54 metros y 2 decímetros á 10 duros y 6 rs. el metro; y habiendo vendido 45 metros y 7 decímetros á 11 duros y 12 rs. y el resto á 12 duros y 8 reales y medio se pregunta la ganancia total [1549 rs. y 45 cént.]

Si un obrero debe percibir 243 reales por 18 dias de trabajo, se pregunta lo que corresponde á 10 dias y 8 horas, suponiendo que son doce las horas diarias de trabajo. [144 rs.]. Un comerciante ha comprado 96 qq. y 1 arroba de arroz á 25 rs. la arroba y lo vendió á 132 rs. 10 mrs. el qq.: empleó el coste primitivo del arroz en trigo á razon de 50 rs. la fanega, y la ganancia en jornales para 10 trabajores durante tres semanas: se pregunta el número de fanegas de trigo y el jornal de los trabajadores. [192,5 fanegas y 17 rs. mas 3 décimas proximamente]. En 20 dias y 8 horas hacen 5 hombres una obra cualquiera; se pregunta cuánto tardarán en hacer la misma obra 12 trabajadores con iguales condiciones. [8 dias 7 horas y 20 minutos]. Habiendo satisfecho 200 duros y 10 reales y medio por atrasos de un censo cuya cuota anual es de 338 reales y 31 mrs., se pregunta el tiempo transcurrido desde el último pago. [11 años y 10 meses aproximadamente]. Hallar la mayor medida comun ó sea el máximo comun divisor entre la circunferencia y el arco de 4°... 15'... $1''\frac{1}{5}$ Dividir 1950 reales entre dos personas, con la condicion de llevar la primera lo que le corresponda en duros y la segunda en napoleones, y ser tantas las monedas de una como las de la otra. [50 cada una]. Un correo ha empleado 5 horas y 10 minutos en andar 40 kilómetros ¿cuánto tiempo necesitará para andar con iguales circunstancias 12 miriámetros y medio? [16 horas, 8 minutos y 45 segundos].

Hallar el peso de un metro cúbico de agua pura en su máxima densidad; el de 5 litros 2 decílitros y 8 centílitros de agua con iguales condiciones; el de un metro cúbico de aire; el de un litro de aire; y el del aire desalojado por cien kilógramos de cobre, sabiendo que el aire pesa 773 veces menos que el agua y esta 8,167 veces menos que el cobre. [Las incógnitas en otro órden que el de los enunciados de los problemas son 1,293 kg., 15,84 gr., 1,293 gr., 1000 kg. y 5,28 kg.]

COMPARACION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

Preliminares. Reglas de tres, compañia, conjunta, aligacion, interés y descuento. Fondos públicos. Rentas perpétuas, vitalicias y anualidades. Aplicacion de la teoria de las progresiones. Ejercicios.

Preliminares.

248. Para que cuatro números concretos formen proporcion, se necesita que todos sean homogéneos, ó lo sean dos á dos. Por el enunciado de la cuestion cada uno de los dos primeros (llamados *principales*) está ligado al que llamamos su *correspondiente* de los otros dos.

1.° *En 4 dias se gastaron 32 rs., en 10 dias ¿cuántos reales se gastarán?*

Aqui los números homogéneos 4 dias y 10 dias se corresponden, el primero con 32 rs.; y el segundo con los reales que se piden.

Llamando d al gasto de un dia, es evidente que el gasto de 4 dias será $4d$ y el de 10 dias será $10d$, y por consiguiente.....

$4d=32$ y $10d=x$ de donde se deduce $\frac{4d}{10d}=\frac{32}{x}$ ó bien $4:10::32:x$

Cuándo dos números homogéneos son proporcionales á otros dos tambien homogéneos, de modo que... EL NÚMERO 1.° ES AL 2.° COMO EL CORRESPONDIENTE AL 1.° ES AL CORRESPONDIENTE AL 2.°; se dice que los cuatro forman proporcion *directa* ó son *directamente proporcionales.*

2° *En 8 meses hacen 10 hombres una obra determinada, para hacer la misma obra en 2 meses ¿qué número de hombres se necesita poner al trabajo?*

Los números principales 8 meses y 2 meses se corresponden, el primero con 10 hombres, y el segundo con x hombres. Si 10 hombres hacen la obra en 8 meses, llamando m lo que un hombre hace en un mes, 10 hombres harán $10m$ en el mismo tiempo, y x hombres harán xm:

Luego 10 hombres en 8 meses harán.... $8\times10m$
y x hombres en 2 meses harán.... $2\times xm$
de consiguiente.... $8\times10m=2\times xm$ ó bien $8\times10=2\times x$
de donde se deduce 8 meses : 2 meses :: x hombres : 10 hombres

Cuando dos números homogéneos son proporcionales á otros dos tambien homogéneos, de modo que... EL NÚMERO 1.° ES AL 2.° COMO EL CORRESPONDIENTE AL 2.° ES AL CORRESPONDIENTE AL 1.°; se dice que los cuatro forman proporcion *inversa* ó son *inversamente proporcionales.*

Réstanos ahora indicar el modo de conocer, si la proporcionalidad entre los cuatro números de una cuestion dada es *directa* ó *inversa*. Será *directa* cuando multiplicando ó dividiendo por 2, 3, etc., uno de los números homogéneos principales, resulta segun el enunciado de la cuestion multiplicado ó dividido por el mismo número su correspondiente de la otra especie; y si multiplicando ó dividiendo el primero por 2, 3, etc., resulta dividido ó multiplicado por el mismo número el segundo, será *inversa*. No verificándose una de estas dos condiciones, la cuestion no podrá resolverse por una proporcion simple.

En la cuestion primera del número anterior los cuatro números son *directamente* proporcionales; pues si en 4 dias se gastan 32 rs., en 8 se gastarán 64. En la segunda los cuatro números son *inversamente* proporcionales; pues si en 8 meses hacen 10 hombres una obra cualquiera, para hacerla en 16 meses bastará la mitad del número de hombres, es decir, 5.

Regla de tres.

219. Regla de tres es la cuestion en que entran cuatro números homogéneos ó dos de una especie y dos de otra, y los primeros están en razon *directa* ó *inversa* de los segundos. Llámase *regla de tres*, porque su objeto es determinar uno de estos cuatro números, dados los otros tres (*).

1.° *Si* 10 *metros de tela costaron* 50 *rs.*, *¿cuánto costarán* 6 *metros?*

10 metros.... 50 reales 6 metros.... x reales	Aqui los números homogéneos de la primera especie son 10 metros y 6 metros, y los de la segunda 50 rs. (correspondiente á 10 metros), y el término desconocido x reales (correspondiente á 6 metros).

Para saber si la razon de los dos primeros es *directa* ó *inversa* de la de los segundos, basta decir: Si 10 metros costaron 50 rs., 20 metros costarán doble, luego la proporcionalidad es *directa*, y por lo mismo la proporcion........ 10 metros : 6 metros : : 50 rs. : x rs. nos dará el valor de los 6 metros.

2.° *Si* 4 *metros y* 2 *decímetros de paño han costado* 200 *rs.*, *¿con* 440 *rs. qué número de metros se comprarán?*

$$\left.\begin{array}{r}4{,}2 \text{ metros... } 200 \text{ reales}\\ x \text{ metros... } 440 \text{ reales}\end{array}\right\}\text{luego } 4{,}2 : x : : 200 : 440 \text{ y por consig. } x = 9{,}24 \text{ met.}$$

3.° *Si* 20 *hombres hacen una obra cualquiera en* 12 *dias*; 16 *hombres ¿qué tiempo emplearán en la misma obra y en iguales circunstancias?*

20 hombres.... 12 dias 16 hombres.... x dias	Los números de la primera especie son 20 hombres, y 16 hombres, y los de la segunda son 12 dias y x dias; pero si 20 hombres hacen la obra en 12 dias, 40 hombres la harán en 6: luego la razon de los primeros es *inversa* de la razon de los otros dos, y por consiguiente:

20 hombres : 16 hombres : : x dias : 12 dias, de donde se deduce $x=15$ dias.

4.° *Si una embarcacion tiene víveres para* 10 *dias*; *para estar en el mar* 17 *dias ¿á qué se reducirá la racion de cada individuo?*

Si el tiempo se duplica, la racion será la mitad; y por lo tanto, si los tiempos están en razon inversa de las cantidades de racion, llamando 1 á la racion ordinaria, la proporcion 10 dias : 17 dias :: x : 1 nos dará $x=\frac{10}{17}$

(*) La *regla de tres*, que tambien se llama de *oro*, se puede definir diciendo que es una cuestion en la cual, conocidos los valores de dos cantidades *directa* ó *inversamente proporcionales* se desea calcular la alteracion de una de ellas variando la otra.

Dos cantidades son *directamente proporcionales* ó simplemente *proporcionales* si dos valores cualesquiera de la primera tienen la misma razon que los correspondientes de la segunda. El salario de un obrero es *proporcional* al tiempo que emplea en el trabajo.

Dos cantidades son *inversamente proporcionales* si la razon de dos valores cualesquiera de la primera es inversa de los correspondientes de la segunda. El tiempo necesario para hacer una casa es *inversamente proporcional* al número de hombres que se emplean en ella.

Esto supuesto, siendo la longitud de un camino proporcional al capital invertido, será una *regla de tres* la cuestion que sigue: *Si* 8 *kilómetros han costado* 2 *millones de reales*, *se desea averiguar el número de kilómetros que se podrán construir con* 10 *millones*. La variacion del capital ha sido de 2 á 10, la del camino construido será de 8 á 40.

Si las cantidades dadas dependen de dos ó mas circunstancias, entonces se dice que son *directa* ó *inversamente proporcionales* cuando lo son relativamente á una de estas circunstancias, permaneciendo constantes las demás.

Una misma cantidad puede ser á la vez *directa* ó *inversamente* proporcional á otras varias.

Con los cuatro números homogéneos dos á dos, A y a, B y b,

se pueden formar estas dos proporciones distintas $\left\{\begin{array}{ll}A : a :: B : b & \text{directamente proporcionales.}\\ A : a :: b : B & \text{inversamente proporcionales.}\end{array}\right.$

y si todos son homogéneos, se podrá formar otra A : B :: b : a reciprocamente proporcionales.

5.° *Si las dificultades de dos obras son como de 3 á 5, y un obrero hizo en un tiempo determinado 40 varas de la primera, ¿cuántas varas hará en el mismo tiempo de la segunda con las mismas circunstancias?*

La proporcion $5 : 3 :: 40 : x$ nos dará el número que se pide.

250. La regla general para resolver la regla de tres simple, sea *directa* ó *inversa*, es la siguiente: El número menor de la primera especie *es* al mayor de la misma, *como* el menor de la segunda *es* al mayor de esta.

Basta, pues, averiguar si el número desconocido es mayor ó menor que su homogéneo para escribir en seguida esta proporcion.

Para empapelar una sala se han necesitado 100 varas de papel de $\frac{3}{4}$ de ancho, ¿cuántas varas se necesitarán de otro papel de $\frac{2}{3}$ de ancho?

Cuando mas estrecho sea el papel, mayor número de varas se necesitan; luego el valor de x será mayor que 100, y tendremos.....

$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} :: 100 : x$ de donde se deduce $x=112\frac{1}{2}$

251. Todas estas cuestiones se pueden resolver, evitando las proporciones, por medio del método conocido con el nombre de *reduccion á la unidad.*

En efecto; propongámonos resolver de nuevo el problema 1.° (**249**).

Si 10 metros costaron 50 reales, 1 metro costará 5 rs.
y por consiguiente 6 metros, costarán $5\times6=30$ rs.

Si 20 hombres concluyen una obra en 12 dias (**249**. 3.°)
un solo hombre empleará.. $20\times12=240$ dias
y 16 hombres, emplearán........... $240 : 16=15$ dias.

Regla de tres compuesta.

252. La regla de tres se llama *compuesta*, cuando la variacion de la cantidad que en ella se trata de determinar depende directa ó indirectamente de dos ó mas circunstancias (*).

1.° *10 hombres en 12 dias han construido 100 varas de pared; se pregunta cuántas varas harán 6 hombres trabajando 21 dias.*

En esta cuestion tenemos que considerar tres razones; á saber: la del número de obreros, la de los dias de trabajo, y últimamente la de las obras ejecutadas. Las obras ejecutadas (en iguales circunstancias) están en razon *directa* del número de obreros y del tiempo empleado en el trabajo, y por consiguiente la resolucion de dos reglas de tres simples nos dará el número que se busca.

En efecto; si 10 hombres en 12 dias han construido 100 varas de pared, para averiguar cuántas harán 6 hombres en el mismo tiempo, diremos.....
$10 : 6 :: 100 : x$ luego 60 son las varas ejecutadas por 6 hombres en 12 dias; pero como nosotros deseamos el número de varas ejecutadas en 21 dias, la nueva proporcion $12 : 21 :: 60 : X$ nos dará el número pedido ó sea 105 varas.

(*) La regla de tres se llama *compuesta* cuando su solucion depende de la de dos ó mas reglas de tres simples. En estos problemas suponiendo conocidos los valores de varias cantidades, de las cuales una es *directa* ó *inversamente* proporcional á las demás, se desea calcular las alteraciones de aquella variando estas.

La longitud de un camino es proporcional al capital invertido é inversamente proporcional al ancho de la via y al precio de un metro cuadrado, y por consiguiente, será una *regla de tres compuesta* la cuestion que sigue: *Sabiendo que 8 kilómetros de un camino de 5 metros de ancho han costado 2 millones de reales al tipo de 50 rs. el metro cuadrado, se desea averiguar el número de kilómetros que se podrán construir de otro camino con 8 metros de ancho á 40 rs. el metro cuadrado con un capital de 10 millones de reales*

El mismo resultado se obtiene resolviendo solo una proporcion·

En efecto; de las dos proporciones $\left\{\begin{matrix} 10 : 6 :: 100 : x \\ 12 : 21 :: x : X \end{matrix}\right\}$

se deduce esta otra $10\times12 : 6\times21 :: 100 : X$ y por consiguiente $X=105$ varas.

Resolucion del mismo problema por el método de reduccion á la unidad.

Si 10 hombres en 12 dias han construido 100 varas,

10 hombres en un dia, harán 12 veces menos es decir $\frac{100}{12}$ varas,

y un hombre en un dia, 10 veces menos que 10 hombres ó $\frac{100}{12\times10}$ varas;

luego 6 hombres en un dia, harán 6 veces mas que uno ó $\frac{100}{12\times10}\times6$ varas,

y por consiguiente 6 hombres en 21 dias harán. . . . . $\frac{100}{12\times10}\times6\times21=105$

2.° 6 *hombres en* 8 *dias, trabajando en cada dia* 10 *horas, han transportado* 100 *fanegas de trigo;* 12 *hombres en* 2 *dias trabajando* 15 *horas al dia ¿cuántas fanegas transportarán?*

$\left\{\begin{matrix} 6 \text{ hombres. . . . . .} & 8 \text{ dias. . . . . . .} & 10 \text{ horas. . . . .} & 100 \text{ fanegas} \\ 12. \text{ . . . .} & 2. \text{ . . . .} & 15. \text{ . . . .} & x \end{matrix}\right.$

Si 6 hombres en 8 dias trabajando 10 horas al dia han transportado 100 fanegas; 12 hombres en los mismos dias y trabajando las mismas horas ¿cuántas fanegas transportarán? $6 : 12 :: 100$ fanegas $: z$ $z=200$ fanegas

Si 12 hombres en 8 dias trabajando 10 horas diarias, han transportado 200 fanegas; los mismos hombres en 2 dias, trabajando 10 horas diarias ¿cuántas fanegas transportarán? $8 : 2 :: 200$ fanegas $: y$ $y=50$ fanegas.

Si 12 hombres en 2 dias trabajando 10 horas diarias, han transportado 50 fanegas; los mismos hombres en los mismos dias trabajando 15 horas al dia ¿cuántas fanegas transportarán? $10 : 15 :: 50 : x$ $x=75$ fanegas.

Para obtener este mismo resultado revolviendo una sola proporcion, tendremos que

De las proporciones $\left\{\begin{matrix} 6:12::100:z \\ 8:\ 2::\ z\ :y \\ 10:15::\ y\ :x \end{matrix}\right\}$ se deduce $6\times8\times10:12\times2\times15::100:x$ y por consiguiente $x=75$ fanegas.

3.° 600 *hombres en* 15 *dias trabajando* 12 *horas diarias han construido la mitad de las fortificaciones de una plaza; para completar la obra en* 11 *dias trabajando* 800 *hombres ¿qué número de horas deben trabajar cada dia?*

$\left\{\begin{matrix} 600 \text{ hombres. . . . . .} & 15 \text{ dias. . . . . .} & 12 \text{ horas} \\ 800. \text{ . . . .} & 11. \text{ . . . .} & x \end{matrix}\right.$

El número de hombres, lo mismo que los dias de trabajo, son *inversamente* proporcionales á las horas diarias de trabajo, y por consiguiente....

600 hombres : 800 hombres :: z horas : 12 horas ó bien $\left.\begin{matrix} 800 : 600 :: 12 : z \\ \text{y en segundo lugar}\quad 11 : 15 :: z : x \end{matrix}\right\}$

luego $800\times11 : 600\times15 :: 12 : x$ que dá $x=12$ horas y 16 minutos.

4.° *Si las dificultades de dos obras son como* 2 *á* 3, *y* 5 *trabajadores en una semana han hecho* 8 *metros y medio de la primera ¿*4 *trabajadores en el mismo tiempo qué número de metros harán de la segunda?*

Proporcionalidad *directa*. . . . . . $\left.\begin{matrix} 5 : 4 :: 8{,}5 : z \\ 3 : 2 :: z : x \end{matrix}\right\}$
inversa. . . . . .

de donde se deduce $15 : 8 :: 8{,}5 : x$

y por consiguiente $x=4{,}533$ metros.

5.° *Un correo caminando* 15 *horas diarias, anda* 65 *miriámetros en* 12 *dias; se pregunta cuántas horas necesitará emplear cada dia para andar* 80 *miriámetros en* 20 *dias.* [11 horas y 5 minutos aproximadamente.]

Regla de compañía.

253. Llámase *regla de compañía* la que enseña á averiguar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios individuos que han puesto su caudal en un fondo, en proporcion con los capitales de los asociados y el tiempo que dichos capitales han estado en el fondo.

Pueden ocurrir tres casos: 1.º que el tiempo sea el mismo y diferentes los capitales; 2.º que los capitales sean iguales y el tiempo diferente; y 3.º que sean diferentes los tiempos y los capitales.

Los dos primeros casos, se llaman de *compañía simple*; y el tercero de *compañía compuesta.*

De la misma definicion de la *regla de compañía*, se deduce que:

Las *ganancias* ó *pérdidas* son proporcionales á los capitales respectivos; y las de un mismo capital son proporcionales al tiempo que permanece en el fondo (*): luego.

Las *ganancias* ó *pérdidas* de dos ó mas capitales que estan diferentes tiempos en el fondo, son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.

Regla de compañía simple.

254. Suponiendo que tres individuos han reunido sus capitales para una empresa cualquiera y por *un mismo tiempo*, tendremos...

Capital del 1.º es á la ganancia ó pérdida correspondiente, como el capital del 2.º es á la ganancia ó pérdida respectiva, como el capital del 3.º es á su ganancia ó pérdida. De donde se deduce (**202**)

Capital total: *ganancia total*:: *capital del* 1.º: *ganancia del mismo*;

luego *la ganancia ó pérdida del* 1.º será $\frac{\text{ganancia ó pérdida total} \times \text{cap. del 1.º}}{\text{capital de todos}}$

y como la conclusion es la misma sea la ganancia ó pérdida del primero, del segundo ó del tercero; se puede establecer que *siendo los tiempos iguales....*

La ganancia ó pérdida de cada uno de los asociados, se halla multiplicando la ganancia de todos por el capital de cada socio, y dividiendo el producto por el capital total.

Suponiendo 100 *duros*, 240 *y* 170 *los capitales de tres socios, hallar la ganancia de cada uno, siendo* 1600 *reales la ganancia total.*

Capital total = 510 duros | Ganancia total = 80 duros.

Ganancia del 1.º $= \frac{80 \cdot 100}{510} =$ 15 duros. . . 13 rs. . . . 24,7 mrs.

Ganancia del 2.º $= \frac{80 \cdot 240}{510} =$ 37 . . . . . . 12. 32

Ganancia del 3.º $= \frac{80 \cdot 170}{510} =$ 26 . . . . . . 13. 11,3

El mismo resultado se obtiene dividiendo la ganancia total por el capital de todos y multiplicando este cociente por el capital de cada socio.

La resolucion de este primer caso no es otra cosa que la de dividir un número en partes proporcionales á otros números tambien dados. Así en el ejemplo anterior hemos dividido el número 80 duros en tres partes proporcionales á los

(*) Esta proposicion, aunque no rigorosamente exacta, se considera como tal en la práctica.

números 100, 240 y 170. Sentado esto se podrá resolver fácilmente el siguiente problema: *Distribuir una suma de* 36000 *rs. entre cuatro personas de modo que la segunda lleve el doble de la primera, la tercera tanto como la primera y la segunda; y la cuarta lleve el triplo de la tercera.*

Suponiendo que la parte de la primera es la unidad, la segunda llevará 2, la tercera 3 y la cuarta 9. Luego la cuestion se reduce á dividir el número dado en partes proporcionales á los números 1, 2, 3 y 9.

Para calcular el valor de la primera, diremos...

15 : 1 :: 36000 : x de donde $x = 2400$ rs.

Conocida la parte que corresponde á la primera, el determinar lo que corresponde á cada una de las otras no ofrece la menor dificultad.

2. caso. *Siendo iguales los capitales de los socios*, la ganancia ó pérdida total se dividirá en partes proporcionales á los tiempos que han estado dichos capitales en el fondo comun; y por consiguiente

La ganancia ó pérdida de cada socio, se halla multiplicando la ganancia total por el tiempo respectivo, y dividiendo el producto por el tiempo total.

Siendo A *el capital de cada uno de tres socios*, 2, 3 *y* 5 *años el tiempo respectivo que han tenido dicho capital en el fondo, y* 800 *reales la pérdida total*, corresponde á cada uno lo siguiente:

10 años : 2 años :: 800 rs. : x que dá para el 1.° 160 rs. de pérdida.
10 años : 3 años :: 800 rs. : x » 2.° 240 rs. »
10 años : 5 años :: 800 rs. : x » 3.° 400 rs. »

Si el 1.° *hubiera tenido su capital en la sociedad durante* 3 *años, el* 2.° *por* 15 *meses y el* 3.° *por medio año, y que la ganancia total fuese de* 2000 *reales*, habria que dividir este número en otros tres proporcionales con 12, 5 y 2.

Regla de compañía compuesta.

253. *Si los tiempos y capitales son diferentes* se multiplica el capital de cada socio por el tiempo respectivo, y queda este caso reducido al de *tiempos iguales.*

Los capitales de tres asociados son 200, 150 *y* 500 *duros, el primero puesto en el fondo por* 4 *años, por* 5 *el segundo y por* 2 *el tercero: la pérdida total es de* 4000 *reales. ¿Cuál es la pérdida de cada uno?*

200 duros en 4 años se consideran tanto como 4 × 200 duros en un año;
150 por 5 años son lo mismo que 5 × 150 duros por un año;
500 por 2 años son como 2 × 500 en un año;

luego el problema propuesto se puede sustituir por este otro, comprendido en el caso primero: *Tres sugetos forman compañía durante un año; poniendo el primero* 800 *duros, el segundo* 750 *y el tercero* 1000: *han perdido* 4000 *reales*; ¿cuánto corresponde á cada uno?

2.° *Cuatro asociados han formado una empresa comercial durante diez años y medio:*

El 1.°	con 10000 rs.	*por* 2 *años y al cabo de este tiempo*		*añadió*	200 duros.
El 2.°	10000 rs.	5 *años*	»	*retiró*	200 duros.
El 3.°	10000 rs.	6 *años*	»	*retiró*	200 duros.
El 4.°	10000 rs.	8 *meses*	»	*añadió*	200 duros.

El beneficio total ascendió á 50000 *rs. y se pregunta el beneficio de cada uno.*

El capital del primer socio se puede dividir en dos partes, una de 10000 rs. por 2 años, ó sean 20000 rs. por un año; y otra de 14000 rs. por ocho años y medio, ó sean 119000 rs. por un año. Resulta pues que el capital del primero puede suponerse igual á 139000 rs. durante un año.

Basta esta ligera indicacion para resolver con facilidad el problema.

Regla de aligacion.

256. Se llama *regla de aligacion* la que tiene por objeto resolver las dos cuestiones siguientes: 1.ª Hallar el precio medio de la mezcla de varias especies, conociendo el precio y la cantidad de las especies mezcladas. 2.ª Hallar el número de unidades que conviene mezclar, para vender la mezcla á un *precio medio*, conociendo los precios de las unidades mezcladas (*).

La regla de aligacion se divide en *directa ó inversa* segun resuelve la una ó la otra cuestion

Regla de aligacion directa.

257. *Se mezclaron 10 cántaras de vino de á 6 rs. la cántara, con 7 de á 3, y se pregunta el* PRECIO *de la mezcla.*

Las 10 cántaras á 6 reales valen 60 rs.; 7 cántaras á 3 rs. valen 21 reales: luego las 17 cántaras valdrán 81 reales, y por consiguiente, el valor de cada cántara será igual á 4 rs..... 26 mrs. Luego.....

Para hallar el *precio medio*, se divide el valor total de las unidades mezcladas por el número de ellas. El valor total de las unidades mezcladas es igual á la suma de los productos de cada una de las cantidades, que se mezclan, por su precio respectivo.

2.° *Mezcladas 12 fanegas de trigo de á 38 rs. con 16 de á 42 y con 10 de á 45 se pregunta el precio de la mezcla.*

12 fanegas	á 38 rs.	=456 rs.
16 id.	á 42 rs.	=672 rs.
10 id.	á 45 rs.	=450 rs.
38 total de fanegas.		1578 rs. valor de las 38 fanegas.

Luego el valor de una fanega será de 41 reales y 18 mrs.

3.° *Se mezclaron 10 litros de vino de á 5 rs. con 7 de agua, ¿á cómo se ha de vender la mezcla?*

Suponiendo que el agua no cuesta nada, el valor total de los 17 litros de vino aguado vale lo mismo que los 10 litros de vino puro, es decir 50 rs.; luego el valor de un litro será 2 rs..... 32 mrs.

Esc. Conocidos varios valores aproximados de un número, se llama *promedio* á otro nuevo valor deducido de los valores dados y mas exacto que cada uno de ellos.

El promedio de dos ó mas números conocidos es igual al cociente de dividir la suma de todos por el número de ellos.

Si tres astrónomos observan al mismo tiempo el principio de un eclipse y el primero señala las 3 horas 16 minutos 16 segundos; el segundo las 3 horas 15 minutos 50 segundos; y el tercero las 3 horas 16 minutos 10,5 segundos; el promedio de estas tres observaciones será igual á 3 horas 16 minutos 5,5 segundos.

Regla de aligacion inversa.

258. *Teniendo vino de á 14 rs. el litro, y vino de á 24 ¿qué número de litros se deben mezclar de cada especie, para vender la mezcla á 20 rs.?*

Cada litro de á 14 vendido á 20 deja 6 de ganancia, y cada litro de á 24 vendido á 20 dá 4 de pérdida. Por consiguiente, para que la ganancia compense la pérdida, basta mezclar 4 litros de á 14 (que dan 24 de ganancia) con 6 de á 24 (que dan 24 de pérdida), pudiendo entonces venderse la mezcla á 20 rs.

(*) Llámase *precio* al valor de la unidad

Otros 4 litros de á 14 con 6 de á 24 producirán la misma mezcla y al mismo precio, y así sucesivamente. Multiplicando pues 4 y 6 por un número cualquiera, los productos expresarán el número de litros que respectivamente podemos mezclar para que la mezcla resulte al mismo precio medio. Si estos productos se representan por x para el vino de á 14, y por X para el vino de á 24; como en cada litro de los de á 14 se ganan 6 rs., en x litros se ganarán $6 \times x$, y perdiendo 4 en cada uno de los de á 24, en X de estos se perderán $4 \times X$.

Pero el valor del vino antes y despues de la mezcla debe ser el mismo, luego la ganancia y la pérdida serán iguales y darán.....

$6 \times x = 4 \times X$ de donde $x : X :: 4 : 6$ que quiere decir.....

Los números que se deben mezclar de ambas especies estan en razon ***inversa*** de las diferencias de sus precios al precio medio; y por consiguiente:

Para resolver la regla de *aligacion inversa*, se toma de cada especie de unidades, que se han de mezclar, la diferencia entre el precio medio y el de la otra especie.

2.º *Teniendo trigo de á 54 reales la fanega y trigo de á 46, se desea saber el número de unidades que se han de mezclar de cada especie, para vender la mezcla á 49 reales la fanega.*

Siendo 49 rs. el precio medio tendremos $\left\{\begin{array}{l}\text{trigo de 54 rs.}\\ \text{trigo de 46 rs.}\end{array}\right. \left|\begin{array}{l}49-46=3\\ 54-49=5\end{array}\right.$

Luego se pueden mezclar 3 fanegas de á 54 y 5 de á 46 ó un número cualquiera veces *tres* de á 54 y el mismo número veces *cinco* de á 46.

3.º *Teniendo plata cuya ley* (*) *es de 9 dineros y 11 granos, y plata cuya ley es de* $10^1/_2$ *dineros, ¿cuántos marcos de una y otra plata se deben ligar para que sea de 10 dineros la ley de la liga?*

Siendo 10 dineros el precio medio, tendremos $\left\{\begin{array}{ll}\text{9 dineros y 11 granos....} & 12\\ \text{10 dineros y 12 granos....} & 13\end{array}\right.$

Luego con *doce* marcos de 9 dineros y 11 granos, y *trece* marcos de 10 dineros y medio, tendremos 25 marcos cuya ley será de 10 dineros.

259. Cuando las especies son mas de dos, se hallará el número de las unidades que se han de mezclar de dos cualesquiera, cuyos precios comprendan al precio medio; luego el de otras dos, y así sucesivamente.

¿Qué número de kilógramos de té de á 120 reales, 160 y 70 se han de mezclar, para vender la mezcla á 110 rs.?

(PRECIO MEDIO) 110 $\left\{\begin{array}{lll}\text{Siendo 120 rs. el precio de una clase, le corresp.} & & \text{40 kilógr.}\\ \text{Siendo 70 rs. el precio de otra} & » & \text{50+10 kg.}\\ \text{Siendo 160 rs. el de la tercera,} & » & \text{40 kilógr.}\end{array}\right.$

En efecto mezclando 40 kg. de á 120, con 10 de á 70, resultan 50 kilógr. de á 110; y 50 de á 70 con 40 de á 160 nos dan 90 tambien de á 110:

luego 40 kilógramos de á 120; 60 de á 70; y 40 de 160 valen lo mismo que 140 kilógramos vendidos al precio medio de 110 reales.

(*) El marco de plata se divide en 12 partes iguales, que se llaman *dineros* y cada dinero en 24 *granos*. *Ley de la plata* es la cantidad de plata pura que tiene un marco.

Plata de 10 dineros y 20 granos quiere decir que en cada marco de dicha plata hay 10 dineros y 20 granos de plata pura y 1 dinero y 4 granos de materia extraña.

Para apreciar el oro, se divide el tejo ó riel en 24 quilates, cada quilate en 32 granos.

Oro de 17 quilates quiere decir que en 24 unidades de peso hay 17 de oro puro y lo restante de mezcla ó liga. La nueva moneda española de oro y plata contiene 0,9 de su peso de estos metales y 0,1 de cobre.

Regla conjunta.

260. Llámase *regla conjunta* la que tiene por objeto hallar la razon de dos números por medio de otras razones intermedias (*).

La *regla conjunta* se funda en la proposicion siguiente.....

Si tenemos varias equivalencias (**) de modo que el primer miembro de cada una sea de la misma especie que el segundo de la anterior y se multiplican todas ordenadamente, los productos serán otra equivalencia, cuyo primer miembro corresponderá á la primera especie y el segundo á la última.

De las equivalencias $\begin{cases} 5 \text{ pesos } = 25 \text{ pesetas} & (A) \\ 4 \text{ pesetas} = 16 \text{ reales} & (B) \\ 2 \text{ reales } = 68 \text{ mrs.} & (C) \end{cases}$

se deduce..... $5\times4\times2$ pesos$=25\times16\times68$ mrs. (D)

En efecto; multiplicando los dos miembros de la primera equivalencia por 4 y los de la segunda por 25, tendremos......

$$\left.\begin{array}{l} 5 \text{ pesos } \times 4 = 25 \text{ pesetas} \times 4 \\ 4 \text{ pesetas} \times 25 = 16 \text{ reales } \times 25 \end{array}\right\}$$

y por consiguiente. . . . 5 pesos $\times$ 4$=$16 reales $\times$25 (E)

Por un razonamiento semejante, las equivalencias (C) y (E) nos darán la equivalencia final (D) que demuestra la proposicion enunciada.

La aplicacion de este teorema á las cuestiones de regla conjunta, nos dará fácilmente su resolucion. Sirvan de ejemplos, los siguientes:

1.° *Si 50 dineros ingleses valen un duro español, ¿cuántas libras esterlinas equivalen á 12000 reales?*

De las equivalencias $\left\{\begin{array}{l} 20 \text{ reales. . . . . .} = 50 \text{ dineros} \\ 240 \text{ dineros. . . . .} = 1 \text{ libra esterlina} \\ x \text{ libras esterlinas.} = 12000 \text{ reales} \end{array}\right\}$ se deduce..

$20\times240\times x=50\times1\times12000$ y por consiguiente $x=125$ libras esterlinas.

2.° *Hallar el número de pies ingleses equivalentes á 10 pies romanos, sabiendo que.....*

$\left.\begin{array}{l} 1000 \text{ pies romanos } = 296 \text{ metros} \\ 5 \text{ metros } = 17{,}945 \text{ pies de Búrgos} \\ 2{,}188 \text{ pies de Búrgos} = 2 \text{ pies ingleses} \\ x \text{ pies ingleses } = 10 \text{ pies romanos} \end{array}\right\}$ El número pedido será 9,7106

261. La regla conjunta se llama de *arbitraje* ó cambio, cuando tiene por objeto apreciar cantidades expresadas en monedas de diversos paises.

La cuestion 1.ª del número anterior es una regla de arbitraje ó cambio.

Los precios corrientes de los cambios varian con frecuencia; pero no varia nunca la clase de moneda efectiva ó imaginaria, en que estos vienen expresados. Además, para mayor sencillez en los cambios se considera fijo é invariable el número de monedas de una de las dos plazas, y de este modo la variacion recae únicamente sobre el número de monedas de cambio de la otra. La plaza que tiene constantemente la unidad de cambio se dice que dá lo *cierto* y la otra que dá lo incierto: la primera hace de vendedor y la segunda de comprador.

(*) Sus aplicaciones mas principales son la reduccion mútua de las monedas, pesas y medidas de dos paises, dadas las relaciones que estas tengan con las de otros paises diferentes.

Los problemas que se resuelven por la *regla conjunta* se pueden resolver tambien aunque no con tanta brevedad por medio de proporciones ó por el método de reduccion á la unidad.

(**) Llámase así la relacion de igualdad de dos números equivalentes de diferente especie; por ejemplo: 5 duros$=$100 reales: 2 metros$=$20 decímetros, etc.

Se llama *par anual* de una plaza, respecto de otra, el cambio medio á que puede suponerse ha ejecutado todas sus operaciones en el año.

Segun el decreto fecha 18 de Febrero de 1847, los cambios de España se arreglarán al tipo de 1 peso fuerte de 20 reales por la cantidad variable de.....

5 francos y 59 cént. . . . . . (FRANCIA)	88 á 91 dineros gros. . . . (HAMBURGO)
5 francos y 59 cént. . . . . . (BÉLGICA)	2 á 2,48 florines. . . . . .(AMSTERDAM)
44 á 53 dineros ó peniques (LÓNDRES)	120 á 123,50 granos. . . . . . (NÁPOLES)
852 á 885 reis. . . . . (LISBOA)	90 á 110 bayocos. . . . . (ROMA)
5lib. á 5 lib. y 47 cént. . . . . (CERDEÑA)	125 á 156 copecks. . . . . (RUSIA)

Si el cambio directo de Madrid y Lóndres es de 50,4 *peniques; y el de Madrid y Paris* 5 *francos* 30 *céntimos; el de Paris con Amsterdan* 53 *florines por* 120 *fr.; y el de Amsterdan con Lóndres* $12^1/_2$ *florines por* 240 *dineros ó sea una libra esterlina, ¿por qué medio será mas ventajoso remitir de Madrid á Lóndres* 500000 *reales?*

$$\left.\begin{array}{r} x \text{ dineros}=1 \text{ duro ó peso fuerte} \\ 1 \text{ duro}=5{,}3 \text{ francos} \\ 120 \text{ francos}=53 \text{ florines} \\ 12^1/_2 \text{ florines}=240 \text{ dineros} \end{array}\right\} \text{de donde se deduce} \quad x=44{,}9$$

luego es evidente que se debe preferir el cambio directo.

Regla de interés.

262. Se llama *interés* la ganancia que produce un capital empleado. Para mayor uniformidad en el modo de determinar el interés, se conviene ordinariamente en el que produce el capital 100 unidades en un año, cuyo número, considerado como abstracto, se llama *tanto por ciento*. El interés puede ser *simple ó compuesto*; llámase *simple* cuando el capital es el mismo durante todo el tiempo que existe el empleo del capital, y *compuesto* cuando el interés de cada año se añade al capital existente, para ganar nuevos intereses en los años sucesivos.

Interés simple.

En las cuestiones de interés simple hay que distinguir dos casos: 1.° que el capital se emplee por un año y 2.° que se emplee por mas ó menos de un año.

263. CUANDO EL TIEMPO ES UN AÑO (*). Es evidente que doble capital producirá doble interés, luego el capital total y el capital 100 serán proporcionales al interés pedido y al tanto por ciento; de donde se deduce la siguiente proporcion.....

100 : CAPITAL :: TANTO POR 100 : INTERES anual

Hallar el interès anual de 1800 *duros al* 5 *por* 100

100 : 1800 :: 5 : x de donde x=90 duros ó 1800 rs. (**).

Hallar el capital que produce 180 *reales anuales de interés, al* 3 *por* 100.

100 : x :: 3 : 180 nos dá x=6000 reales.

Se desea saber el tanto por ciento á que se prestaron 5000 *reales para producir* 30 *duros en un año.*

100 : 5000 :: x : 600 luego el tanto por ciento será 12

(*) Hay que considerar el *capital*, el *tanto por ciento* y el *interés*; dos de estas cantidades determinan la tercera.

(**) De la proporcion 100 : *Capital* :: 5 : *interés* anual, se deduce que..... El *interés anual* de un capital al 5 por 100 es la veinteava parte del mismo capital.

264. SI EL TIEMPO ES DIFERENTE DE UN AÑO (*). A doble tiempo deben corresponder dobles intereses y por lo mismo los réditos ó intereses son proporcionales á los tiempos (**); pero el capital total y el capital 100 son tambien proporcionales al interés pedido y al tanto por ciento, luego tendremos.....

Tomando por unidad de tiempo el dia.
36000 : CAPITAL$\times$TIEMPO :: TANTO por 100 : INTERES que se pide (***)

Se pregunta el interés de 2150 *duros en* 80 *dias al* 12 *por* 100

36000 : 2150$\times$80 :: 12 : x luego el *interés* que se pide es 57 ds. 6 rs. $22\frac{2}{3}$ mrs.

Hallar el capital que produce 70 *duros en* 140 *dias al* $1^1/_2$ *por* 100

36000 : $x\times$140 :: $1\frac{1}{2}$: 70 de donde se deduce que el Capital será 12000 duros.

¿En cuántos dias el capital 9000 *producirá* 100, *al* 10 *por* 100?

36000 : 9000$\times x$ :: 10 : 100 luego el número pedido será 40 dias.

8000 *rs. han producido* 180 *de interés en* 2 *años*, 4 *meses y* 5 *dias*: *se pregunta el tanto por* 100

36000 : 8000$\times$845 dias :: x : 180 nos dá para el *tanto* por ciento 0,96

Tomando por unidad de tiempo el mes.
1200 : CAPITAL$\times$TIEMPO :: TANTO por 100 : INTERES que se busca

600 *doblones han producido* 45 *de interés en tres meses ¿cuál es el tanto por* 100?

1200 : 600$\times$3 :: x : 45 luego el tanto por 100 será 30

¿Cuál es el capital que en 10 *meses y medio ha producido* 400 *duros y* 8 *rs. suponiendo* 3 *el tanto por ciento*?

1200 : $x\times10\frac{1}{2}$ :: 3 : 8008 rs. nos dá para el capital, 305067 reales.

Tomando por unidad de tiempo el año.
100 : CAPITAL$\times$TIEMPO :: TANTO por 100 : INTERES pedido

Se desea averiguar el interés de 2000 *rs. al* 3 *por* 100 *en* 5 *años.*

100 : 2000$\times$5 :: 3 : x luego 300 rs. será el *interés* que se busca.

¿Cuál es el capital que produce 800 *rs. de interés en* 3 *años, al* $1\frac{1}{2}$ *por* 100?

100 : $x\times$3 :: $1\frac{1}{2}$: 800 de donde se deduce *capital*$=17777\frac{7}{9}$ reales.

Hallar el tanto por 100 *de* 1800 *duros*, *suponiendo que sus intereses durante* 5 *años son* 2000 *reales.*

100 : 1800$\times$5 :: x : 100 luego el *tanto* por 100 será $1\frac{1}{9}$

265. Los problemas relativos al giro de letras no son otra cosa, que reglas de interés. Cuando se usa la palabra *beneficio*, *daño ó par* se entiende relativamente al valor nominal de la letra.

Hallar el beneficio de una letra de 20000 *duros al cambio de* $3\frac{1}{2}$ *b. p.*

El beneficio por cada 100 unidades de la letra es $3\frac{1}{2}$; luego el beneficio total será el 4.° término de la proporcion..... 100 : $3\frac{1}{2}$ :: 20000 : x

---

(*) Hay que considerar el *capital*, el *tanto por ciento*, el *interés* y el *tiempo*; tres de estas cantidades determinan la cuarta.

(**) Esta proposicion no es exacta cuando el interés es compuesto.

(***) Esta proporcion se deduce fácilmente de las dos siguientes.....
100 : *capital* :: *tanto* : interés anual y 360 : *tiempo* :: interés anual : *interés pedido*
En el comercio se considera el año de 360 dias y el mes de 30 dias.

Interés compuesto.

266. Se dice que el interés es *compuesto* cuando al fin de cada año se capitalizan los intereses; esto es, se une el capital con los intereses devengados en el año anterior, para producir nuevos intereses en el año siguiente.

Averiguar los réditos de 4000 *rs. en* 3 *años á interés compuesto, al* 5 *por* 100

La cantidad dada, al fin del primer año nos dará de intereses, 200 rs.

Unidos estos intereses con el capital primitivo, la suma 4200 rs. será el nuevo capital al empezar el segundo año, y sus intereses, al fin de él, estarán determinados por la proporcion $100 : 5 :: 4200 : x$ que da $x=210$ rs.

Uniendo 210 rs. al capital anterior 4200 rs. tendremos para el tercer año la suma 4410 rs. que producirá de intereses 220 reales y medio, y por consiguiente el *capital total*, que se busca, será igual á 4630 rs..... 17 mrs.

Hallando ahora la diferencia entre este número y el capital primitivo, tendremos que los réditos de 4000 rs. en 3 años á intereses compuestos al 5 por 100, son 630 rs..... 17 mrs.

Lo embarazoso de este método nos obliga á buscar una fórmula, que, no solo resuelva con mayor sencillez la cuestion anterior, sino otras muchas que se pueden proponer en la regla de interés compuesto.

***267.** *Hallar el capital total* C *equivalente al primitivo* c *puesto á interés compuesto por* t *años al* $100r$ *por* 100; *ó lo que es lo mismo suponiendo* r *la cuota ó el interés de una unidad del capital.*

interés del capital c al fin del primer año.. . . . $100 : 100r :: c : x$ $\quad x=cr$

Capital total al fin del mismo año. . . . . $c+cr=c(1+r)$

interés anual de este capital. . . . . $100 : 100r :: c(1+r) : cr(1+r)$

Capital total al fin del segundo año. . . . . . $c(1+r)+cr(1+r)=c(1+r)^2$

interés anual de este capital. . . . . $cr(1+r)^2$

Capital total al fin del tercero. $c(1+r)^3$

y continuando así deduciremos para el CAPITAL TOTAL al cabo de t años $c(1+r)^t$

Luego la fórmula pedida, será la siguiente:

$$C=c(1+r)^t \quad \text{ó bien} \quad \log. C=\log. c+t \log. (1+r)$$

Resolver el problema del número anterior por medio de esta fórmula, en cuyo caso los datos, serán... $c=4000$ rs. $100r=5$ ó bien $r=0{,}05$ $t=3$ años

sin logaritmos.	por logaritmos.
$1+r=1{,}05$	$\log. c=3.602060$
$(1+r)^t=(1{,}05)^3=1{,}157625$	$t\times\log. (1+r)=0.063567$
$c(1+r)^t= 4000 \times 1{,}157625$	$\log. C=3.665627=\log. 4630{,}5$
Capital total. . . . . 4630 rs. 17 mrs.	capital total. . . . 4630 rs... 17 mrs.
intereses compuestos 630 rs. 17 mrs.	inter. devengados 630 rs... 17 mrs.

Esc. En las cuestiones de interés compuesto hay que considerar las cuatro cantidades C, c, r, t; las fórmulas logarítmicas que, se deducen de la general anterior para calcular una de estas cantidades, conocidas las otras tres, son....

$\log. C=\log. c+t \log. (1+r)$	$\log. (1+r)=\frac{\log. C-\log. c}{t}$
$\log. c=\log. C-t \log. (1+r)$	$t=\frac{\log. C-\log. c}{\log. (1+r)}$

Hallar la suma de 1800 *reales y sus intereses compuestos durante* 5 *años siendo* 3 *el tanto por* 100.

$\log. C=\log. 1800+5 \log. 1{,}03=3.319459=\log. 2086{,}7$; luego $C=2086{,}7$ rs.

2.° *Hallar el capital que debe prestarse al* 5 *por* 100 *á interès compuesto, para producir en* 4 *años una suma de* 2000 *duros.*

$$\log. c = \log. 2000 - 4 \log. 1{,}05 = 3.216274 = \log. 1645{,}4$$

luego el capital será 1645 pesos y 8 rs.

Este problema puede enunciarse asi *¿cuál es el valor actual de* 2000 *duros, pagados dentro de* 4 *años?*

3.° *Si* 12 *rs. valen* 200 *al cabo de* 6 *años y medio, cuál es el tanto por* 100?

$$\log. (1+r) = 1.221849 : 6{,}5 = 0.187976 = \log. 1{,}5416$$

luego r será 0,5416 y por consiguiente el *tanto* por 100 ó $100r = 54{,}16$

4.° *Què tiempo necesita el capital* 10000 *rs. para producir* 20000 *al* 10 *por* 100

$$t = \frac{\log. 20000 - \log. 10000}{\log. 1{,}1} = \frac{0.301030}{0.041393} = 7 \text{ años... 3 meses... 8 dias (apróximadamente).}$$

Regla de descuento.

268. Llámase *descuento* la diferencia entre el valor nominal y el valor actual de una letra pagadera á un plazo dado.

Si el tenedor de una letra pagadera á un plazo determinado desea obtener su pago al contado, recibirá por ella menor cantidad que la que indica la letra. La diferencia entre la cantidad que se recibe por la letra antes de espirar el plazo y la que indica la letra se llama *descuento*, que no es otra cosa que el interés que debe *producir el valor actual ó nominal* de la letra hasta el fin del plazo, segun se convengan el tenedor y tomador de ella.

Lo justo es considerar como descuento el interés del valor actual ó real y no el nominal, pues de otro modo el pagador cobra, no solo los intereses de la cantidad que efectivamente adelanta, sino tambien los intereses del descuento ó sea de la diferencia entre lo que anticipa y el valor del billete á su vencimiento

Descuento igual al interés del valor nominal.

269. *Se desea averiguar el descuento de una letra de* 10000 *rs. que vence á los* 12 *meses y que en el mismo dia de aceptarse se presenta á un banquero para descontar al* 5 *por* 100.

Por cada 100 rs. se descuentan 5, si el pago se anticipa un año, y por consiguiente el descuento total de la letra será.....

100 : 5 :: valor nominal : *descuento* de donde se deduce $x = 500$ reales.

Conocido el descuento, fácilmente se determina el *valor actual* de la letra: en la cuestion propuesta será igual á 9500 rs.

Hallar el descuento de 80000 *rs. que se pagan con* 3 *meses de anticipacion, siendo* 6 *por* 100 *el tanto del descuento anual.*

Aunque el interés es compuesto, en la práctica se considera como simple, y en tal supuesto el tanto del descuento en 3 meses será 1 y medio.

Si 100 reales pierden en 3 meses real y medio; 80000 rs. qué perderán?
$x =$ 1200 rs. (*descuento*).
y el *valor actual* de la letra será..... 78800 rs.

Esc. Todas las cuestiones relativas al descuento, suponiendo este igual al interés del valor nominal de la letra durante el tiempo que se anticipa el pago, se resuelven del mismo modo que sus análogas de la regla de interés.

Descuento igual al interés del valor real.

270. En la primera cuestion, que hemos resultado anteriormente, cada 100 rs. producen al banquero ó tenedor de la letra 100+5 al cabo de un año, luego 100+5 rs. anticipando un año su pago, no valen mas que 100, y por consiguiente el valor actual de la letra será.....

100+5 : 100 :: 10000 : x de donde se deduce x=9523 rs..... 27,5 mrs.

y el *descuento* será. 476......... 6,5 mrs.

Para hallar directamente el descuento, tenemos la proporcion

100+5 : 5 :: valor nominal : *descuento*

que aplicada á la determinacion del descuento en el problema segundo del número anterior, dará 1182 rs..... 9 mrs. (*descuento*)

y el *valor actual* será por consiguiente igual á 78817 rs..... 25 mrs.

**Esc.* Llamando R el *tanto* por 100 en la unidad de tiempo, A el *valor nominal* de la letra, *d* el *descuento* y *t* el *tiempo* á que se debe hacer el pago; tendremos que, si 100 producen R en la unidad de tiempo, al cabo de *t* unidades, producirán Rt y por lo mismo 100+Rt tendrá un descuento igual á Rt. Luego, para hallar el *descuento* total de la letra dada, diremos.....

100+Rt : Rt :: A : *descuento* de donde $descuento=\frac{A\times Rt}{100+Rt}$ ó lo que es mejor...

log. del *descuento*=log. A+log. Rt—log. (100+Rt)

De estas fórmulas se deducen fácilmente otras, (como indicaremos en el álgebra) para determinar cualesquiera de las cantidades A, R, t, d, conocidas las demás.

Fondos públicos.

271. Llámase *renta contra el Estado* el interés de los capitales prestados al Gobierno por los particulares.

Estas deudas se llaman *consolidadas* cuando el nombre del acreedor y el capital se inscriben en el Gran Libro de la deuda pública, recibiendo el acreedor un *título*, que marca su capital y el interés anual.

El Gobierno tiene el derecho de amortizar el capital recibido, y, mientras no lo verifique, satisface por semestres que vencen en Junio y Diciembre el interés estipulado, quedándose con una parte del título llamada *cupon*.

Los títulos son *negociables* ó *transferibles*, á fin de facilitar al tenedor los medios de reembolsar su capital. Si un título se negocia por todo su valor nominal, se dice que se ha negociado á la par.

Hay *alza* cuando aumenta el valor del papel, y *baja* cuando disminuye. Los títulos ó fondos públicos de España son el 3 por 100 consolidado y el 3 por 100 diferido. El valor del 3 por 100 consolidado en la actualidad es de 39 ó 40; es decir, que el tenedor de un título de 100 rs. de capital y que produce una renta anual de 3 reales, no vale al contado mas que 39 ó 40 rs.

Todas las rentas contra el Estado se llaman *fondos públicos*.

Una persona emplea toda su fortuna en títulos del 3 por 100 consolidado al precio de 41 y se desea saber á cuánto por 100 impuso su capital.

Si 41 producen 3 en un año, 100 ¿qué producirán? x=7,317

Suponiendo que los títulos del 3 por 100 se negociasen á 50, ¿qué capital deberá emplearse para que produzca de renta 30000 rs.

3 : 50 :: 30000 : x y por consiguiente 500000 rs. será el número pedido.

Rentas perpétuas, vitalicias y anualidades.

***272.** El que toma prestada una cantidad puede obligarse á pagar al acreedor y á sus derecho-habientes, 1.° una cantidad anual durante un número ilimitado de años, llamada *renta perpétua*; 2.° á reembolsarle el capital recibido, pagándole anualmente y durante su vida una renta llamada *vitalicia*; 3.° á reembolsarle su capital, pagándole durante un número determinado de años una misma cantidad llamada *anualidad*.

Las anualidades y rentas vitalicias son una misma cosa, suponiendo que el número de años, en que debe extinguirse la deuda, es igual al número probable de años que restan de vida al prestamista. (*)

Un capital cualquiera equivale á una *renta perpétua* igual á su interés anual; y recíprocamente, una *renta perpétua* es lo mismo que un capital cuyo interés iguale á la renta.

Así una *renta perpétua* de 1000 rs al 5 por 100 es lo mismo que el capital 20000 rs.

Llamando a la renta y R el tanto por 100, el capital será $\frac{a\times 100}{R}$

Hallar el valor actual A *de una anualidad* a, *pagadera durante* t *años a* 100 r=R por 100.

Una anualidad satisfecha durante t años puede considerarse como la diferencia de dos rentas perpétuas, empezando á pagarse la primera el primer año del contrato, y la segunda en el año $t+1$

El valor actual de la primera es $\frac{a\times 100}{R}$ y el de la segunda $\frac{a\times 100}{R}\times\frac{1}{(1+r)^t}$;

luego la diferencia de estos valores nos dará.... $A=\frac{a\times 100}{R}\left(1-\frac{1}{(1+r)^t}\right)$ ó bien

$\log. A=2+\log. a+\log. \left[(1+r)^t-1\right]+ \text{comp. log. } R+\text{comp. } t \log. (1+r)-20$

Esc. De esta fórmula se deducen otras, para determinar cualesquiera de las cantidades A, a, t, r ó R, conocidas las demas.

Habiendo comprado una finca con la condicion de satisfacer su importe en 12 *anualidades de* 1200 *duros cada una, se desea averiguar la suma equivalente, que seria necesario satisfacer en el acto, ó sea el verdadero valor de la finca. El interés se supone* 5 *por* 100.

Sustituyendo en la fórmula anterior, tendremos:

$\log. A=2+3.079181+9\cdot 900826+9\cdot 301030+9\cdot 745732-30=4.026769$

luego A, ó sea el capital equivalente á doce anualidades de 1200 duros cada una es 10635 duros y 16 rs. aproximadamente.

(*) He aquí una tabla de la probabilidad de la vida humana. El primer renglon indica el número de años de la persona y el segundo los años que aun le restan de vida segun los cálculos de algunos autores, que se han ocupado de esta clase de cuestiones.

1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
37	43	45	46	47	43	39	36	33	30	26	23	20	17	14	11	9	7	6	5	4	3	2	1

Aplicacion de la teoría de las progresiones.

223. *¿Cuál será el precio de un caballo ajustado á razon de 1 duro por el primer clavo, 3 por el segundo, 5 por el tercero, y asi sucesivamente hasta completar el número de 24 clavos?*

El número pedido será igual al cuadrado del número 24, ó sea 576 duros.

Hallar el precio del mismo caballo costando el primer clavo 200 *duros, el segundo* 195, *el tercero* 190, *el cuarto* 185, etc.

2.° *Se promete pagar una suma de* 1000 *duros en mensualidades, con la condicion de satisfacer el primer mes* 10 *duros y el último* 90, *aumentando en todos los meses una misma cantidad sobre la mensualidad del anterior. Se pregunta la cantidad, que se aumenta mensualmente y el número de meses, que se necesitan para pagar totalmente los* 20000 *reales.*

El número 1000 será la suma de todos los términos de una progresion por diferencia, cuyo primer término es 10 y el último 90. Para hallar el número de términos de esta progresion, basta sustituir en la fórmula $S=\frac{n}{2}(A+U)$

y tendremos $1000=\frac{n}{2}(10+90)$; de donde se deduce $2000=100n$

y por consiguiente $n=20$, que es el número de mensualidades, que se deben satisfacer para pagar totalmente la deuda.

El aumento mensual se determina hallando la *diferencia* de la progresion, que será igual á 4 duros... 4 rs... 7 mrs. aproximadamente.

3.° *Si los capitales de* 4 *personas forman progresion geométrica y una de ellas tiene* 1200 *duros y otra tiene* 8400 *¿cuánto tendrán las otras dos?*

Este problema así enunciado admite varias soluciones, que pueden servir de ejercicio á los alumnos. Añadiendo por condicion que los números que se buscan son el uno mayor y el otro menor que los números dados, la cuestion quedará resuelta dividiendo por 7 el número menor de estos, y multiplicando por el mismo número el mayor.

1.° $171\frac{3}{7}$ duros 2.° 1200 duros 3.° 8400 duros 4.° 58800 duros

4.° *Hallar el capital, que ha reunido una persona durante* 32 *años, en el supuesto de ser sus economías las siguientes:*

En el primer año *un maravedí*; en el segundo año *dos maravedís*; en el tercero *cuatro*; en el cuarto *ocho*, y asi sucesivamente, aumentando cada año la economía en un duplo de lo ahorrado en el anterior.

El número pedido será evidentemente la suma de todos los términos de la progresion que sigue:

$$\div\!\div\ 1, 2, 4, 8, 16 \ldots\ldots\ldots\ldots 1\times 2^{31}$$

pero $2^{31}=2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2=2147483648$

luego el capital total al cabo de 32 años será igual á 126322567 rs. y 17 mrs.

En el caso de variar las condiciones de modo que el primer año se economizaran 1000 duros, en el segundo 500, en el tercero 250, y así sucesivamente por espacio de 32 años, el capital total al cabo de este tiempo sería la suma de los 32 primeros términos de la progresion $\div\!\div$ 1000, 500, 250 etc.

5.° *Si dos correos* A *y* B *llevan el mismo camino y el primero está un kilómetro mas atrás que el segundo, hallar el número de metros, que deben recorrer para encontrarse, suponiendo que la velocidad de* A *es doble de la de* B.

A debe recorrer doble camino que B y por consiguiente mientras A ande un kilómetro, B andará la mitad, y mientras A recorra el medio kilómetro siguiente, B andará un cuarto de kilómetro, y asi sucesivamente. Luego el camino, que debe recorrer A hasta encontrar á B, será.....

1 kilómet. $+\frac{1}{2}$ kilómet. $+\frac{1}{4}$ kilómet $+\frac{1}{8}$ kilómet. $+\ldots$ hasta cero $=2000$ metros.

Ejercicios para la comparacion de los números concretos.

74. Condiciones de la proporcionalidad directa y de la proporcionalidad inversa entre cuatro números homogéneos dos á dos. Si 17 marcos 4 onzas y 8 adarmes han costado 180 duros 17 reales y 17 mrs. ¿cuánto costarán 26 marcos y 10 adarmes? [5371 reales y 18 mrs.]. Suponiendo que una nave anda una milla por hora, cuando recorre 55,8 pies en 30 segundos ¿cuántas millas andará por hora, si recorre 100 pies en 20 segundos? [2,8 millas próximamente]. 14 mineros en 40 dias, trabajando 10 horas al dia, han abierto una mina de 115 metros de longitud, 3 de ancho y 4 de profundidad en un terreno cuya resistencia se expresa por 5; para abrir otra mina de 180 metros de largo, 3,5 de ancho y 5 de profundidad en un terreno resistente como 8 ¿cuántos dias necesitarán 20 mineros trabajando 12 horas cada dia? [85 dias 2¹/₂ horas]. Una bomba desagua un pozo en 6 horas, otra en 5 y otra en 4 ¿en cuánto tiempo desaguarian el pozo trabajando juntas las tres bombas? [1 hora y 37 minutos]. Cuatro fuentes llenan un estanque, la primera en 2 horas; la segunda en 4; la tercera en 8, y la cuarta en 10: se pregunta el tiempo, que necesitan las cuatro corriendo juntas, para llenar otro estanque de doble capacidad que el primero. [2 horas y 3 minutos]. Tres personas se asociaron para una empresa cualquiera, la primera puso 200000 rs. por 5 años 2 meses 15 dias; la segunda 150000 por 4 años 9 meses 15 dias y la tercera 5900 duros por 2 años 7 meses 18 dias: la ganancia total ha sido de 6000 duros y se pregunta lo que corresponde á cada una. Cinco accionistas de una compañía han cedido sus acciones con un beneficio total líquido de 100000 reales: las acciones del primero y quinto tenian un valor nominal de 45000 rs.; las del segundo y cuarto de 55000; las del segundo y quinto de 30000; las del primero y tercero de 40000; las del tercero y cuarto de 60000 ¿cuánto corresponde á cada uno? [La suma de estas partidas es el duplo del capital nominal, restando de este las partidas 3.ª y 5.ª el resíduo será el capital del socio primero, siendo por lo tanto las incógnitas 21739,13 reales, 8695,65 rs., 13043,48 rs., 39130,43 rs., y 17391,31 rs.]. Dividir 100000 duros entre 3 personas, de modo que la primera reciba 10 veces mas que la segunda y esta 100000 reales mas que la tercera. [87500, 8750 y 3750]. Formar una mezcla de 100 kilóg. de thé, y cuyo precio sea de 70 rs., con tres clases cuyos precios son 90, 80 y 60 rs. por cada kilógramo: de lo superior se han de mezclar precisamente 10 kilógramos. [10, 35 y 55]. El bronce de los cañones y de las estátuas se obtiene fundiendo 11 kilóg. de estaño con 100 de cobre: ¿cuál será el valor del bronce de una estátua cuyo peso es de 5 qq. 3 arrobas y 10 libras, suponiendo que el cobre vale á 5 rs. el kilóg. y el estaño á 6 rs. y 5 décimas? [1385 rs. y 8 décimas]. ¿Cuántos pies españoles vale la toesa francesa, sabiendo que 76 metros equivalen á 39 toesas, 1000 pies ingleses á 305 metros; y finalmente 11 pies ingleses á 12 españoles? [6,97]. Si los cambios de París, Amsterdam, Hamburgo y Rusia son los siguientes 120 fr. por 56 florines; 35 florines por 40 marcos; 9 sous (16 de estos hacen un marco) por un rublo ¿cuántos rublos serán 8000 fr. y cuantos fr. serán 3200 rublos? ¿Cuál es el interés de 1500 duros en un año, 5 meses y 12 dias, y tambien en 1 año 3 meses y 10 dias suponiendo 5 y medio el tanto por 100? ¿Cuál es el capital que ha producido 6500 rs. al 10 por °/₀ durante 1 año, 2 meses y 20 dias? [53181 reales y 8 decimas]. ¿Vale mas prestar 12000 rs. al 6 por 100 que 7000 rs. al 5 y 5000 al 7 por 100? Asegurada una casa en 30000 duros al medio por 1000 ¿cuál es la prima del seguro? ¿A cuánto ascienden 12000 duros al cabo de 4 años y 3 meses prestados á interés compuesto y suponiendo 8 y medio el tanto por 100? Una letra de 5000 reales pagadera á fin de año, ha pasado sucesivamente por tres personas; la 1.ª la recibió el 23 de enero, la 2.ª el 25 de marzo y la 3.ª el 4 de julio, ¿cuál era su valor real y justo en estas tres épocas siendo 6 el tanto por 100 de descuento?

NOTAS DE LA ARITMETICA.

Diferentes sistemas de numeracion.

Observaciones generales. Numeracion duodecimal y binaria.
Traducir en un sistema determinado un número escrito en otro sistema cualquiera

Abreviaciones del cálculo aritmético.

Abreviaciones en la multiplicacion, division y extraccion de raices.

Nociones sobre los límites.

Cantidades constantes y variables. Teorema de Arbogast. Teorema de los limites.

Pesas, medidas y monedas españolas.

Decreto y Ley sobre monedas, pesas y medidas españolas. Equivalencias aproximadas.
Reduccion legal de las pesas, medidas y monedas métricas á las de Castilla y vice-versa.

NOTA I. DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACION.

Observaciones generales acerca de los sistemas de numeracion.

225. En todos los sistemas de numeracion análogos al decimal (es decir, con valores absolutos y relativos para cada cifra, segun el lugar que ocupa respecto de las demás) se consideran unidades de diversos órdenes, que se llaman de 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, etc.

El número de unidades de un órden, necesarias para componer una unidad del órden inmediato superior, es constante y se llama *base* del sistema. La base de un sistema de numeracion debe ser á lo menos igual á dos, pues de otro modo las unidades de los diferentes órdenes de unidades serian iguales entre sí.

El sistema de numeracion, cuya base es dos, se llama *binario*, si la base es tres *ternario*, si cinco *quinario*, y así sucesivamente *decimal*, *duodecimal*, *vigesimal*, *sexagesimal*, etc.

En todos estos sistemas se puede descomponer un número entero cualquiera en partes compuestas respectivamente de unidades de 1.er órden, 2.°, 3.° etc.; y por consiguiente, para escribir con tantas cifras como unidades tiene la base (entre ellas el cero) un número entero cualquiera, basta convenir en que toda cifra escrita á la izquierda de otra exprese unidades del órden inmediatamente superior al de las de esta.

La *base* y sus potencias sucesivas se representan en cualquiera sistema por

10, 100, 1000, 10000, etc.

Sistema de numeracion duodecimal.

226. Las cifras ó guarismos del sistema duodecimal de numeracion, pueden ser 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, 6

y los valores de sus diferentes órdenes de unidades son los siguientes: la unidad de 1.er órden *uno*; la unidad de segundo órden *doce*; la unidad de 3.° $(doce)^2$; la unidad de 4.° $(doce)^3$, y así sucesivamente. Los números simples ó menores que la base se expresan por el guarismo correspondiente.

Una unidad de 2.° órden, ó sea la base *doce*, se escribe así.........	10
Dos unidades de 2.° órden, ó *veinte y cuatro* unidades simples...	20
Tres unidades de 2.° órden, ó *treinta y seis*........................	30
Nueve unidades del mismo órden ó *ciento ocho*..........................	90
Y últimamente once unidades de dicho órden ó *ciento treinta y dos* unidades simples..	60

Para expresar los números comprendidos entre las unidades de 2.° órden, se sustituye por la cifra 0 cada una de las cifras significativas 1, 2, 3... 9, α, 6;

El número *trece*, se escribe así 11; el número *diez y ocho* así 16; *veinticinco* así 21; *cincuenta y ocho*... 4α; *sesenta y nueve*...59; *cien treinta y uno*... α6; etc.

Una unidad de tercer órden, ó sean *ciento cuarenta y cuatro* unidades simples se escribe así... 100, y sustituyendo por 1 las cifras 2, 3, 4.... 6, tendremos todas las unidades de tercer órden. Para expresar los números comprendidos entre una y otra unidad, se escribirán en lugar de los ceros los números 1,2,3... hasta 66. Un procedimiento semejante nos servirá para expresar con las mismas cifras un número cualquiera, por grande que sea.

Sistema de numeracion binaria.

277. Los únicos caractéres de este sistema son... 0 y 1; y los valores de sus diferentes unidades, los siguientes: *uno* para la unidad de 1.^{er} órden, *dos* para la unidad de 2.^{o}, *cuatro* para la unidad de 3.^{o}, *ocho* para la de 4.^{o}, y así sucesivamente *diez y seis*, *treinta y dos*, etc.

El sistema de escritura binaria es el mismo que el de la duodecimal.

Desde *ocho* á *diez y seis* se escribirá del modo siguiente.....

1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000

De la posibilidad de escribir un número entero cualquiera en el sistema binario resulta inmediatamente que ***todo número entero es una suma de potencias diferentes de 2, ó una suma de potencias de 2, aumentada en una unidad.***

Así tenemos..... $88=2^3+2^4+2^6$ y $89=1+2^3+2^4+2^6$

Expresar un número decimal en el sistema cuya base es B y vice-versa.

***278.** En el sistema B, cada unidad de segundo órden vale B de primero, y por consiguiente, si se divide el número dado por B, el cociente expresará el número total de unidades de segundo órden, y el resto las unidades simples ó de primer órden, que contiene dicho número. Dividiendo ahora el cociente obtenido por B, el nuevo cociente será el número total de unidades de tercer órden, y el resto el de unidades de segundo. Continuando así hasta llegar á un cociente menor que B, hallaremos todas las cifras del número que se pide.

Escribir el número 5347 (sistema decimal), *en el sistema de ocho cifras.*

Dividiendo el número dado por 8, el resíduo 3 señalará la cifra de las unidades del primer órden del número que se busca.

Dividiendo ahora el cociente entero 668 de la division anterior por el mismo número 8, el resto 4 será la cifra de las unidades del órden que se pide.

Dividiendo igualmente el nuevo cociente entero 83 por la base 8, el resto 3 expresará la cifra de las unidades de tercer órden del número dado, escrito en el sistema cuya base es 8.

Lo mismo se hallan las cifras restantes, que son 2 y 1; y por consiguiente.... 5347 en el sistema *decimal*, será igual á 12343 en el sistema, cuya base es *ocho*.

Del mismo modo, dado el número 8423 en el sistema *decimal*, se puede transformar en el *duodecimal* equivalente 4α56; así como tambien el *decimal* 136 es lo mismo que el *binario* 10001000. Las igualdades consiguientes á estos dos últimos ejemplos se pueden expresar así:

$$^{(10)}8423={}^{(12)}4\alpha56 \quad | \quad ^{(10)}136={}^{(2)}10001000$$

***279.** Supongamos el número 56421 escrito en el sistema cuya base es B. Del principio fundamental de la numeracion resulta que el número propuesto estará bien representado por la suma $1+2\times B+4\times B^2+6\times B^3+5\times B^4$ y por consiguiente, dando valores particulares á la base B y efectuando en el sistema decimal las operaciones aquí indicadas, el resultado final será el número correspondiente á 56421, en el sistema decimal.

Escribir el número 60421 (sistema de ocho cifras) ***en el sistema decimal.***

Esta operacion se puede disponer de este modo:

Potencias de la base 8.	Cifras del n.° dado.	Productos respectivos.
	1	1
8	2	16
$8\times8=$ 64	4	256
$8\times8\times8=$ 512	0	000
$8\times8\times8\times8=$ 4096	6	24576
Número pedido en el sistema decimal		24849

$3\alpha 2\acute{6}$ en el sistema *duodecimal* es lo mismo que 6659 del sistema *decimal.*

De otro modo: Multiplíquese la cifra de órden superior del número dado por la base B escrita en el sistema decimal, y añádase al producto la cifra inmediata: multiplíquese de nuevo la suma obtenida por la base B, y añádase al producto la cifra siguiente, y continuando así hasta llegar á las unidades simples (ó sea la cifra de la derecha); la última suma será el número pedido.

Este supuesto, siendo el número dado $^{(8)}60421$; tendremos

$$\left\{\begin{array}{rl} 6\times8= & 48 \text{ y } 0 \text{ son } 48 \\ 48\times8= & 384 \text{ y } 4 \text{ son } 388 \\ 388\times8= & 3104 \text{ y } 2 \text{ son } 3106 \\ 3106\times8= & 24848 \text{ y } 1 \text{ son } 24849 \end{array}\right\}$$

luego 60421 en el sistema de ocho cifras será igual al decimal 24849.

*280. Ultimamente *dado el número* 23104 *escrito en el sistema quinario, se puede escribir tambien en otro sistema cualquiera, por ejemplo, el duodecimal.*

El número propuesto en el sistema decimal ú ordinario equivale á

$$4+1\times25+3\times125+2\times625=1654;$$

y como 1654 en el sistema decimal es lo mismo que $\acute{6}5\alpha$ del duodecimal; tendremos facilmente la igualdad $\quad ^{(5)}23104={}^{(12)}\acute{6}5\alpha$

*281. Algunas de las propiedades de los números expuestas en la 1.ª parte de la Aritmética son independientes de todo sistema de numeracion y se verifican por lo tanto lo mismo en el sistema decimal que en el duodecimal, binario etc., pero otras muchas son especialmente relativas al sistema decimal, aun cuando los razonamientos expuestos en sus demostraciones sean idénticos á los que debieramos hacer, para establecer las mismas verdades en el sistema cuya base es B. Asi, pueden servir de ejercicio á los lectores las demostraciones de los siguientes teoremas:

1.° El resto de la division de un número por un divisor δ de la base B es el mismo, que resulta de dividir su primera cifra por dicho divisor.

2.° El resto de la division de un número por una potencia δ^n de un divisor de la base B es el mismo que el resto de la division por δ^n del número formando por sus n cifras de la derecha.

3.° El resto de la division de un número por B—1 ó por un divisor δ de B—1 es el mismo que el resto de la division de la suma de sus cifras por B—1 ó por δ; y por consiguiente, para que un número sea divisible por B—1 ó por un divisor δ de B—1, basta que la suma de sus cifras, sea multiplo de B—1 ó de δ.

4.° El resto de la division de un número por B+1 ó por un divisor de B+1, es el mismo que el resto de la division por B+1 ó por δ del exceso de la suma de las cifras de lugar impar, sobre la suma de las de lugar par, y por consiguiente para que en número sea divisible por B+1 ó par un divisor δ de B+1 basta que la diferencia entre las sumas de las cifras de órden par é impar sea cero, ó un multiplo de B+1 ó δ.

Lo mismo pudieramos enunciar los teoremas relativos á la conversion de los números fraccionarios ordinarios á otros cuyos denominadores fueran una potencia cualquiera de la base.

NOTA II. ABREVIACIONES DEL CÁLCULO ARITMÉTICO

Abreviaciones en la multiplicacion, division y extraccion de raices.

Abreviaciones en la multiplicacion.

282. *Multiplicacion de un número entero por* 5, 25 *ó* 125. Escríbanse á la derecha del multiplicando uno, dos ó tres ceros, y del resultado tómese la mitad, cuarta ú octava parte.

El producto de 12584 por 25 será igual á la cuarta parte de 1258400

Multiplicacion de un número entero por 9,99,999 *etc.* Añádanse uno, dos, tres, etc. ceros á la derecha del multiplicando, y del resultado réstese el mismo número.

Asi el producto de 1858 por 999 es igual á...1858000—1858=1856142

Del mismo modo 1858×98==185800—2×1858=185800—3716=182084

Multiplicacion de un número entero por 11, 12, 13... 19. Escríbase el multiplicando y debajo, corriendo un lugar á la derecha, su producto por las unidades del multiplicador: y la suma de estos números será el producto.

Asi, el producto de 1858 por 15 será..... $\left\{\begin{array}{r}1858\\ 9290\end{array}\right\}$ =27870

Multiplicacion de un número entero por 21, 31, 41... 91. Escríbase el multiplicando y debajo, corriendo un lugar á la izquierda, su producto por la cifra de las decenas del multiplicador, y la suma de ambos números será el producto.

El producto de 1858 por 41 será........... $\left\{\begin{array}{r}1858\\ 7432\end{array}\right\}$ =76178

283. *Multiplicacion de dos números enteros de muchas cifras.* Fórmense aparte los productos sucesivos del multiplicando por todos los números díjitos; observando que el producto por 3 se forma de la suma de los productos por 2 y por 1; el producto por 4, duplicando el producto por 2, etc. Hecho esto, se escriben los productos parciales en sus lugares correspondientes, y la suma de estos será el producto que se pide.

```
          1702508431254
             3450012976
       ------------------
         10215050587524
        11917559018778
       15322575881286
       3405016862508
     1702508431254
   8512542156270
  6810033725016
 5107525293762
----------------------
5873676179575703951904 prod. total.
```

	Productos parciales.
1	1702508431254
2	3405016862508
3	5107525293762
4	6810033725016
5	8512542156270
6	10215050587524
7	11917559018778
8	13620067450032
9	15322575881286

***284.** *Aproximacion del producto de los números enteros ó decimales.* Oughtred en su obra Artis analiticae praxis, nos indica el medio de obtener con facilidad el producto de dos números con una aproximacion dada.

El producto de dos números enteros no varía aunque se empiece la multiplicacion por las unidades superiores con tal que se escriba cada producto parcial un lugar mas á la derecha que el anterior; y por consiguiente, si los factores son decimales, para hallar el producto con menor número de cifras decimales que las del multiplicando y multiplicador, se puede suspender cada una de las multiplicaciones parciales en un órden determinado y obtener así el producto final con la aproximacion que se quiera.

Hallar el producto de 152,3460527 por 95,318912 con menos de 0,01 de error.

El cálculo se dispone escribiendo el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que cada una de sus cifras, multiplicada por la de la misma columna del multiplicando, dé un producto cuyas unidades sean del órden inmediato inferior al que marca la aproximacion, que se desea en el producto total, lo que se consigue copiando el multiplicador en sentido inverso, y cuidando de escribir la cifra de las unidades inferiores en el lugar correspondiente.

```
152,3 460527
2198 1 359
─────────────
1371 1 144 prod. por 9 añadiendo 4 unid.
  76 1 730. . . . . 5
   4 5 704. . . . . 3. . . . . . 2
     1 523. . . . . 1
     1 218. . . . . 8. . . . . . 2
       137. . . . . 9. . . . . . 2
         1. . . . . 1
─────────────
1452 1,457 producto total.
```

Hecho esto se multiplica la 1.ª cifra de la derecha del multiplicador por el multiplicando, empezando por el cero y añadiendo al producto las unidades del mismo órden, que resultan de multiplicar dicha cifra por la parte que se desprecia del multiplicando (*).

Igualmente se multiplica cada una de las otras cifras del multiplicador por la parte del multiplicando que le corresponde, contando siempre con las unidades del mismo órden, que resulten de las cifras que se desprecian. Los productos parciales así obtenidos se escriben colocando sus primeras cifras en una misma columna vertical, y la suma de todos, despues de borrar la cifra de la derecha y separar para decimales las que indique la aproximacion, será el producto pedido.

El error en cada producto parcial es menor que media milésima, y como no llegan á veinte, el error total será menor que una centésima. No se ha multiplicado la cifra 2 del multiplicador porque su producto por el multiplicando es menor que una milésima.

Si el número de cifras del multiplicador es mayor que 20, los productos parciales deberán expresar unidades 100 veces menores que las que determina el grado de aproximacion, en cuyo caso de la suma de estos productos se deberán borrar las dos cifras de la derecha, separando luego las decimales correspondientes.

Otros ejemplos. En el segundo, no se ha alterado el órden de las cifras del multiplicador: los puntos, que llevan algunos guarismos de ambos factores, tienen por objeto señalar, durante la operacion, las cifras qne determinan el primer guarismo de cada producto parcial.

```
   63,25638128×4,506873219
912378 6054
──────────────
 253 0255 producto por 4
  31 6282. . . . . . . 5
     3795. . . . . . . 6
      506. . . . . . . 8
       44. . . . . . . 7
        2. . . . . . . 3
──────────────
 285,0884 producto total
```

```
3,14159265358×3,14159265358
3,14159265358
──────────────
9 42478 prod. por 3
  31416. . . . . 1
  12566. . . . . 4
    314. . . . . 1
    157. . . . . 5
     28. . . . . 9
      1. . . . . 2
──────────────
9,86960 producto total.
```

(*) Se añadirá una unidad cuando este segundo producto sea igual ó mayor que 5 unidades del órden inmediato inferior.

Abreviacion de la division de los números enteros ó decimales

285. *Division por* 5, 25, 125, *etc.* Multiplíquese el dividendo por 2,4,8, etc. y divídase el producto por 10, 100, 1000 etc.

Division de dos números enteros ó decimales cuando el cociente tiene muchas cifras. Fórmense separadamente los productos del divisor por 1,2,3..... 9 como en la multiplicacion, y, observando entre cuales de estos productos se halla cada dividendo parcial, se tendrá no solo la cifra del cociente sino el resto que le corresponde.

***286.** *Aproximacion del cociente de dos números enteros ó decimales.* Para hallar el cociente de dos números enteros con menos de una unidad de error, se separan de la derecha del dividendo tantas cifras menos dos como tiene el divisor, y se divide el dividendo así rebajado por el divisor, cuidando de suprimir una cifra de la derecha de este por cada una de las que se determinen en el cociente. Sirva de ejemplo la division *de* 183485347251 *por* 102584

```
18348534|7251 | 102584
  809013      |----------
  909254      | 17886352
   88582
    6515
     360
      53
       2
       0
```

Separadas las últimas cuatro cifras del dividendo, se divide 18348534 por el divisor, cuyo cociente 178 se determina por la regla general de la division de los números enteros (*). Para continuar la operacion, deberiamos bajar á la derecha del resto 88582 la cifra siguiente del dividendo, pero en cambio de esto consideramos suprimida la cifra 4 de las unidades del divisor hallando por cociente la cifra 8, que escribiremos á la derecha del cociente anterior. Del mismo modo se determinan las demas cifras del cociente, cuidando de borrar la última (**) y añadir una unidad á la anterior, si aquella fuese igual ó mayor que 5. Al multiplicar cada cifra del cociente por el divisor respectivo, se deben añadir las unidades, que resulten del producto de dicha cifra por la parte suprimida del divisor. Así para la cifra 5 del cociente, se dice 5 por cero es cero y 1 del producto de 5 por 2 es 1, al 3 van 2.

El error del cociente, por la suposicion de considerar como ceros las últimas cifras del dividendo, será siempre menor que una fraccion, que tenga por numerador á dichas cifras y por denominador el divisor, es decir menor que 0,1.

La supresion sucesiva de las cifras del divisor, nos dá para cada una del cociente un error menor que una y media décimas, luego el error total por este concepto será menor que $0{,}15 \times 4 = 0{,}6$.

Cuando el cociente tiene muchas cifras, entonces la suma de los errores, tanto por la supresion de las cifras del dividendo, como por la de las del divisor, puede ser mayor que 10 décimas ó una unidad. En este caso se calcula el cociente con menor error que una décima ó una centésima, para que así resulte exacto con menos de una unidad. Para hallar el cociente con menos de 0,001 de error, se transforma el dividendo en milésimas, se divide luego por el divisor, y borrando del cociente hallado la cifra de la derecha y separando para decimales las tres siguientes, tendremos el cociente pedido.

```
3,14159|265389 | 2,7182818    |  1,0000000|0000000 | 3,14159265
  42331        |-----------   |   575222           |------------
  15148        | 001,1557     |   261063           | 0,318309
   1557                       |     9736
    198                       |     0312
     08                       |       29
      0                       |        1
```

(*) Este cociente puede ser cero.

(**) Esta cifra expresa décimas.

Abreviaciones de la extraccion de raices de los números enteros y decimales.

*287. Raiz cuadrada. Todos los casos, que presenta la extraccion de la raiz cuadrada de un número, se pueden reducir á la extraccion de la raiz cuadrada de un número entero. Esta operacion se abrevia notablemente, demostrando que, conocidas mas de la mitad de las cifras de la raiz, las demas se pueden calcular por una simple division.

Sea N un número entero, $2n+1$ el número de cifras de su raiz cuadrada, a el valor relativo de las cifras, ya halladas por el método ordinario, y x el de las cifras, que vamos á determinar abreviadamente; y tendremos.....

$N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$ de donde se deduce $2ax+x^2=N-a^2$

y por consiguiente $x+\frac{x^2}{2a}=\frac{R}{2a}$ ó bien $x=\frac{R}{2a}-\frac{x^2}{2a}$ (*)

Llamando ahora c al cociente de R por $2a$ y r al resto; será.....

$x=c+\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}$; pero $\frac{r}{2a}$ y $\frac{x^2}{2a}$ son respectivamente menores que la unidad; luego sustituyendo en lugar de x el cociente entero c, el error que resulte será cero ó menor que una unidad por exceso ó por defecto; segun que x sea igual, menor ó mayor que c. Luego

Para extraer la raiz cuadrada de un número entero de muchas cifras, se determinan las tres primeras por el método ordinario y las dos siguientes dividiendo el resto por el duplo del valor absoluto de la raiz hallada. Conocidas las cinco primeras, las otras cuatro se calculan por la misma abreviacion, y así se continúa hasta hallar la raiz con la aproximacion que se quiera.

Hallar abreviadamente la raiz cuadrada del número 2.

Las tres primeras cifras de la raiz cuadrada del número 2 son 1,41 el cociente del resto 1190000 por 28200 ó bien de 11900 por 282 es 42; luego $\sqrt{2}$ con menos error que una diez milésima será 1,4142

El resto correspondiente á estas cifras de la raiz se determina fácilmente, hallando la diferencia entre 1190000 y la suma del cuadrado de 42 con el producto de 28200 por 42.

Para determinar las cuatro cifras siguientes de la raiz, se dividirá el resíduo anterior 38360000 por el duplo 28284 de la raiz hallada, y así tendremos...

$\sqrt{2}=1,41421356$ con menos error que una cien millonésima.

Determinando nuevamente el resto correspondiente á estas cifras de la raiz, y continuando del mismo modo la operacion, hallaremos la raiz pedida con toda la aproximacion que se quiera.

*288. Raiz cúbica. Un procedimiento análogo al empleado en la abreviacion de la raiz cuadrada, tiene lugar en la determinacion de la raiz cúbica.

En efecto; $N=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$ de donde $x=\frac{R}{3a^2}-\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{3a^2}$

y llamando c el cociente entero de R por $3a^2$ y r al resto; será.....

$x=c+\frac{r}{3a^2}-\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{3a^2}$ pero todos estos quebrados son fracciones, luego se puede sustituir c por x sin error sensible en la parte entera de la raiz, y por consiguiente..... Para extraer abreviadamente la raiz cúbica de un número entero ó decimal, se determinan las tres primeras cifras por el método ordinario y las dos siguientes dividiendo el resto por el triplo del cuadrado del valor absoluto de la raiz hallada. Conocidas las cinco primeras cifras, las otras cuatro se calculan por la misma abreviacion y así se continúa hasta hallar la raiz con la aproximacion que se quiera.

(*) R es el resto de la raiz cuadrada de N, correspondiente á la parte de la raiz hallada.

*NOTA III. NOCIONES SOBRE LOS LÍMITES.

Números constantes y variables. Teorema de Arbogast. Teorema de los límites.

289. Llámase número *constante* el que en una misma cuestion no tiene mas que un solo valor: y *variable* el que puede tener dos ó mas. Los números enteros y los fraccionarios—ordinarios son *constantes*. El número decimal, que representa con mas ó menos aproximacion otro incomensurable, es *variable*, porque su valor aumenta á medida que se considera mayor el número de sus cifras decimales (*).

Si un número variable al crecer se acerca á otro constante, este será mayor que aquel. Si decreciendo el variable se acerca al constante, será este menor que aquel. Dos números constantes son iguales, siempre que su diferencia sea menor que una cantidad dada por pequeña que sea, ó de otro modo: *si entre dos números variables, cuya diferencia puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad asignable, están siempre comprendidos dos constantes, estos son iguales.*

En efecto; si la diferencia entre los números variables y con mas razon la diferencia entre los constantes puede ser menor que cualquiera otro número, los constantes serán iguales, pues de lo contrario, su diferencia tambien constante no seria menor que cualquiera otro número dado.

Esta proposicion se conoce en la ciencia con el nombre de *teorema de Arbogast.*

Si un número variable tiene sus valores comprendidos entre dos constantes, estos se llaman sus *límites.* El número variable es evidentemente menor que uno de sus límites y mayor que el otro; el límite menor se llama inferior y el mayor superior (**).

La unidad es el límite superior de todas las fracciones.

En efecto; habiendo demostrado al hablar de las variaciones de los números fraccionarios que, si añadimos á los dos términos de una fraccion un mismo número, la fraccion que resulta es mayor que la primitiva, tendremos.....

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}\cdots<\frac{10}{11}\cdots<\frac{102}{103}\cdots<\frac{1004}{1005}\text{ etc.}$$

y por consiguiente, á medida que aumenta el número entero que añadimos á ambos términos, la fraccion resultante aumenta, sin que se verifique nunca la igualdad de ellos, que sería necesaria para que la fraccion fuese igual á la unidad.

La unidad es el límite inferior de los números fraccionarios, cuyo numerador es mayor que su denominador.

Añadiendo á los dos términos de un número fraccionario mayor que la unidad un mismo número, resulta un nuevo fraccionario menor que el anterior, y por consiguiente.....

$$\frac{3}{2}>\frac{4}{3}>\frac{5}{4}\cdots>\frac{11}{10}\cdots>\frac{103}{102}>\frac{105}{104}\cdots>\frac{1005}{1004}\text{ etc.}$$

luego, si el número fraccionario disminuye indefinidamente á medida que aumenta el número entero que añadimos á sus términos, sin verificarse la igualdad de estos, es evidente que el número fraccionario, no solo será mayor que

(*) Toda cantidad cuyo valor depende de otra se llama *funcion* de esta. La suma es *funcion* de los sumandos. Los réditos de un capital, prestado durante un año, son *funcion* del mismo capital y del tanto por ciento.

(**) Llamamos simplemente *límite* de una cantidad variable, otra constante, á la cual, se puede acercar la primera tanto como se quiera, sin llegar nunca á ser iguales. Los límites naturales de la cantidad son el *cero*, y el *infinito* que se expresa por el signo ∞.

la unidad, sino que la diferencia entre él y la unidad, será tan pequeña como se quiera: luego la proposicion es evidente.

Del mismo modo: *la fraccion generatriz de una decimal periódica, es el límite superior de esta.*

Asi $^1/_3$ es el límite superior de la fraccion decimal 0,3333..... y tambien la expresion $\frac{1}{0,333...}$ tiene por límite inferior el entero 3; pues cuanto mayor es el número de veces que se repite el período, mas se acerca la fraccion decimal primera á $\frac{1}{3}$ y por consiguiente la segunda expresion á $1 : \frac{1}{3}=3$

De donde se infiere que un número puede *aumentar* ó *disminuir* indefinidamente, sin que por eso llegue nunca á ser *mayor* ó *menor* que otro número dado.

290. *Si dos números son iguales, sus límites respectivos (superiores ó inferiores) tambien lo serán.*

Sean A y B dos números iguales, y L y L′ sus límites respectivos superiores ó inferiores. La diferencia entre L y A y por consiguiente entre L y B puede ser tan pequeña como se quiera sin llegar nunca á ser cero, luego L será límite de B, y como L′ lo es tambien, evidentemente L y L′ serán iguales.

Esta proposicion se llama *teorema de los límites.*

***291.** *Para que un número pueda ser tan pequeño como se quiera, es decir, menor que cualquiera otro, basta dividir el número dado por 2, como tambien el cociente, que resulte y los sucesivos hasta el infinito*; de donde se deduce que el límite inferior de un número, que se divide por 2 (y mejor por 3, 4, 5 etc.) indefinidamente, es *cero.*

En efecto, sea N el número dado y Δ otro número tan acerca de cero como se quiera; si multiplicamos Δ por x, de modo que su producto sea mayor que N, (*) tendremos $x\Delta > N$ de donde se deducen fácilmente las desigualdades que siguen.....

$$\frac{x\Delta}{2}>\frac{N}{2} \quad \Big| \quad x\Delta-\frac{x\Delta}{2}>\frac{N}{2} \quad \Big| \quad x\Delta-\Delta>\frac{N}{2} \quad \Big| \quad \Delta(x-1)>\frac{N}{2}$$

y restando nuevamente del primer miembro de esta última desigualdad, el número Δ que es menor que su mitad, y dividiendo el segundo miembro por 2; tendremos..... $\Delta(x-2)>\frac{N}{2\times2}$

Continuando del mismo modo la sustraccion en el primer miembro y la division en el segundo, al cabo de $x-1$ operaciones, será. . . . . $\Delta>\frac{N}{2^{x-1}}$

y por consiguiente, si el cociente de N por 2, $x-1$ veces seguidas, es menor que el número Δ cuyo valor se acerca á cero tanto como se quiera, la proposicion es evidente.

Cor. Supuesto que un producto se dividide por 2, dividiendo solo uno de sus factores; para hacer á un producto menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea, basta hacer menor que esta cantidad uno de sus factores.

Este teorema se enuncia tambien así:

Dados dos números desiguales, si del mayor se resta la mitad, y del resíduo la mitad y así sucesivamente, llegaremos á un resultado, que será menor que el otro número por pequeño que sea.

(*) En el caso menos favorable, es decir, cuando N fuese muy grande y Δ muy peqeueño basta representar este último por la unidad fraccionaria $\frac{1}{n}$, y suponer x igual á $(N+1)\,n$, para que se verifique la desigualdad del testo.

NOTA IV. PESAS, MEDIDAS Y MONEDAS.

Decreto y ley sobre monedas, pesas y medidas españolas.
Equivalencia recíproca legal entre las pesas y medidas métricas, y las del antiguo sistema de Castilla.
Equivalencias aproximadas entre unas y otras.
Correspondencia entre las medidas y pesas de las diferentes provincias de España y las métricas.
Pesas, medidas y monedas estranjeras: reduccion de estas últimas á reales de España.
Equivalencia de las monedas de contabilidad mas conocidas en Europa.

Decreto y ley sobre monedas, pesas y medidas españolas.

292. La variedad de pesas, medidas y monedas usadas en las diferentes provincias de España, y la poca uniformidad del sistema legal, llamado de Castilla, establecido por la Pragmática de 20 de febrero de 1801 como general para todo el reino, han ofrecido siempre graves inconvenientes á la agricultura, á la industria y al comercio. Para evitarlos, en lo posible, se han publicado el decreto de 15 de abril de 1848 sobre la reforma del sistema monetario, y la ley de 19 de julio de 1849 sobre las medidas y pesas en general, cuyos artículos mas principales son los que siguen.....

Sistema monetario. Art. 1.° En todos los dominios españoles la unidad monetaria será el real, moneda efectiva de plata, á la talla de 175 en el marco de 4608 granos. 2.° La ley de todas las monedas de plata y oro, que se acuñen en lo sucesivo, será de 900 milésimas de fino y 100 de liga. 3.° Las monedas, que se acuñarán en adelante, serán: de *oro*, el doblon Isabel, valor de 100 rs.; y de *plata*, el duro, valor de 20 rs., el medio duro ó escudo, valor de 10 rs., la peseta valor de 4 rs., la media peseta, valor de 2 rs. y el *real*. 8.° Las monedas de *cobre* serán el medio real, la décima de real, la doble décima y la media décima. 9.° El órden de contabilidad será el siguiente: doblones de Isabel, escudos, reales, décimas. Los duros, pesetas, y medias pesetas, el medio real, la doble décima y las medias décimas, serán monedas auxiliares (*).

Pesas y medidas. Art. 1.° En todos los dominios españoles habrá un solo sistema de medidas y pesas. 2.° La unidad fundamental de este sistema será igual en longitud á la diez millonésima parte del arco del meridiano que va del polo al N. al Ecuador, y se llama *metro*. 3.° El patron de este metro, hecho de platina que se guarda en el Conservatorio de Artes, y que fué calculado por don Gabriel Ciscar, y construido y ajustado por él mismo y D. Agustin Predayes, se declara patron prototipo y legal, y con arreglo á él se ajustarán todas las del reino. 4.° Su longitud, á la temperatura cero grados centígrados, es la legal y matemática del metro. 5.° Este se divide en diez decímetros, cien centímetros y mil milímetros. 6.° Las demás unidades de medida y peso se forman del metro, segun se vé en el adjunto cuadro (Véanse las páginas 154 y 155). 9.° Queda autorizada la circulacion y uso de patrones, que sean el doble, la mitad ó el cuarto de las unidades legales. 10.° En 1.° de enero de 1860 será obligatorio este sistema para todos los españoles. 15.° Los nuevos tipos ó patrones llevarán grabado su nombre respectivo.

Para todos los cálculos de reduccion de las unidades del sistema métrico al legal de Castilla y vice-versa, sirve la tabla de la correspondencia recíproca legal publicada en la Gaceta de Madrid del 28 de diciembre de 1852, que nosotros copiamos á continuacion.

Los datos de esta Tabla son mas que suficientes para completarla, deduciendo la relacion de cada una de las unidades métricas con todas las del mismo género de Castilla y vice-versa.

(*) El sistema monetario no forma propiamente parte del nuevo sistema métrico, sino en cuanto á su condicion decimal. El *real* pesa próximamente 1.315 gramos.

Reduccion legal de las pesas, medidas y monedas métricas á las de Castilla y vice-versa.

Medidas de longitud.

Miriámetro.....	1,794462	leguas.			
Kilómetro......	0,179446	leguas.			
Hectómetro....	119,6308	varas.	Legua.........	5,572705	kilómet.
Decámetro.....	11,96308	varas.	Estadal........	3,343623	metros.
METRO..........	3,58892	pies.	VARA..........	0,835905	metros.
decímetro......	4,30671	pulgadas.	pie.............	2,786352	decimet.
centímetro.....	0,43067	pulgadas.	pulgada........	2,3220	centímet.

Medidas de capacidad.

Kilólitro........	61,9848	cántaras.	Cahiz..........	6,66012	hectólit.
Hectólitro......	1,801769	fanegas.	FANEGA........	0,55501	hectólit.
Decálitro.......	0,79599	arrobas.	Celemin.......	4,625083	litros.
LITRO líquidos..	1,983512	cuartillos.	CÁNTARA.......	16,133	litros.
LITRO áridos....	0,216212	celemines.	azumbre.......	2,017	litros.
LITRO aceite....	1,989971	libras.	cuartillo.......	0,504	litros.
decílitro........	0,7934	copas.	arroba.........	12,56306	litros.
centílitro.......	0,0796	panillas.	LIBRA..........	0,50252	litros.

Medidas de superficie y agrarias.

METRO CUAD....	1,431153	var. cuad.	VARA CUADRAD.	0,698737	met. cuad.
decimet. cuad.	0,128804	pies cuad.	pié cuadrado..	7,7637	dec. cuad.
Hecto-área.....	1,532901	fanegas.	FANEGA........	64,395617	áreas.
AREA...........	143,115329	var. cuad.	aranzada.......	44,719178	áreas.
centí-area......	12,880375	pies cuad.	celemin........	5,366304	áreas.

Medidas cúbicas ó de volúmen.

METRO CÚBICO..	1,712100	var. cúb.	VARA CÚBICA..	0,584078	met. cúb.
decímet. cúb..	0,046227	pies cúb.	pié cúbico.....	21,6325	dec. cúb.
centímet. cúb.	0,079879	pulg. cúb.	pulgada cúb..	12,519	cent. cúb.

Pesas.

Tonelada.......	21,73474	quintales.	Tonelada......	9,20186	qq. met.
Quintal métric.	2,173474	quintales.	quintal.........	46,0093	kilóg.
KILÓGRAMO......	2,173474	libras.	arroba..........	11,502325	kilóg.
Hectógramo...	3,47756	onzas.	LIBRA...........	0,460093	kilóg.
decágramo.....	5,56409	adarmes.	onza............	28,756	gramos.
gramo..........	20,03074	granos.	adarme.........	1,797	gramos.

Monedas.

Doblon Isabel..	5	duros.	Onza de oro...	32	escudos.
Escudo.........	10	reales.	Duro...........	2	escudos.
RÉAL...........	1	real.	REAL DE VN...	1	real.
décima.........	3,4	mrs.	maravedí......	0,294	décimas.

Equivalencias aproximadas entre las medidas de Castilla y las métricas.

No siendo necesaria en muchas ocasiones la exactitud consiguiente á las equivalencias legales, calculadas por la COMISION DE PESAS Y MEDIDAS, conviene tener presente las *equivalencias aproximadas* de algunas unidades de ambos sistemas, para hacer con mas facilidad la reduccion de cualquier número de las de un sistema á sus equivalentes en el otro.

Esta reduccion se obtiene por medio de una proporcion cuyos dos primeros términos son siempre la respectiva equivalencia aproximada. Así:

$51 : 61 :: 840 : x$ nos dará las varas que equivalen á 840 metros.

$13 : 6 :: 45 : z$ nos dará los kilógramos que equivalen á 45 libras.

Para corregir estos resultados de los errores consiguientes á las equivalencias aproximadas que hemos empleado, se *añadirá* á x, $\frac{1}{5}$ por 1000 de su valor, y se *restará* de z, su $\frac{1}{3}$ por 100 (*).

Unidades de longitud.

		Error del resultado.
7 centímetros	= 3 pulgadas.	+1 por 200, poco menos.
5 metros	= 6 varas.	—1 por 300.
51 metros	=61 varas.	+1 por 5000, poco menos.
39 kilómetros	= 7 leguas comunes. . . .	—1 por 4000, idem.
50 kilómetros	= 9 leguas de 20 al grado.	cero.
50 kilómetros	= 9 leguas comunes. . .	—4 por 1300.

Unidades de capacidad.

1 litro	= 2 cuartillos de vino. .	—1 por 100, poco menos.
60 litros	=119 cuartillos.	+1 por 10000, idem.
37 litros	= 8 celemines	casi cero.
5 hectólitros	= 9 fanegas.	+1 por 1000.
1 litro	= 2 libras de aceite. . .	—1 por 200.
100 litros	=119 libras.	casi insignificante.
201 litros	= 16 arrobas.	casi cero.

Unidades de superficie y agrarias.

1 metro cuadrado	= 13 piés cuadrados. . .	—1 por 100, poco menos.
7 metros cuadrados	= 10 varas cuadradas. .	—1 por 600, poco mas.
100 metros cuadrados	=1288 piés cuadrados. . .	sin error sensible.
9 hectáreas	= 14 fanegas de tierra. .	—1 por 600, poco mas.

Unidades cúbicas.

1 metro cúbico	=46 piés cúbicos.	+1 por 200, poco menos.
7 métros cúbicos	=12 varas cúbicas.	—1 por 800, poco mas.
3 tonel.s de arqueo	= 2 idem viejas.	—5 por 400, poco menos.
41 tonel.s de arqueo	=27 idem viejas.	casi insignificante.

Unidades de peso.

6 kilógramos	= 13 libras.	+1 por 300, poco menos.
46 kilógramos	=100 libras.	—1 por 5000, poco mas.
46 quintales métricos	=100 idem antiguos. . . .	
92 tonel.s métricas	=100 idem antiguas (**). .	

(*) Los signos + y — de esta tabla indican el sentido en que deben corregirse los resultados, si pertenecen á unidades del sistema antiguo. Lo contrario se verificará si los resultados son métrico-decimales.

(**) Todas estas equivalencias, lo mismo que las correspondientes á cada provincia, se hallan reduciendo á fraccion continua el valor de una unidad antigua en unidades métricas, ó al contrario, y formando luego las reducidas de dicha fraccion continua.

TABLAS de correspondencia recíproca entre las pesas y medidas métricas, y las usadas hasta ahora en las diferentes provincias de España.

Gaceta de Madrid del 28 de Diciembre de 1852.

CASTILLA. *La vara* tiene 0,835905 metros; el *metro* 1,196308 varas, ó 1 vara, 7 pulgadas y 0,805 líneas: *la libra* 0,460093 kilógramos; *el kilógramo* 2,173474 libras, ó 2 libras, 2 onzas y 12,409 adarmes: *la cántara ó arroba de vino* 16,133 litros; *el litro de vino* 1,983512 cuartillos, ó 1 cuartillo y 3,934 copas: *la arroba de aceite* 12,563 litros; *el litro de aceite* 1,989971 libras, ó 1 libra y 3,960 panillas: *la fanega de áridos* 55,501 litros; *el litro de grano* 0,864849 cuartillos ó 3,459 ochavillos: *la fanega superficial de* 9216 *varas cuadradas* 64,395617 áreas; *la área* 143,115329 varas cuadradas.

Alava. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la cántara* tiene 16,365 litros; *el litro de líquido* 1 cuartillo y 3,822 copas: *la media fanega de áridos* 27,81 litros; *el litro de grano* 0,863 cuartillos: *la fanega de tierra de* 660 *estados de* 49 *pies cuadrados* 25,107956 áreas; *la área* 26 estados y 14,038 pies cuadrad.

Albacete. *La vara* tiene 0,837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0,129 líneas: *la libra* 0,458 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 2 onzas y 14,952 adarmes: *la media arroba para líquidos* 6,365 litros; *el litro de líquido* 2,514 cuartillos: *la media fanega de áridos* 28,325 litros; *el litro de grano* 0,847 cuartillos: *la fanega de tierra de* 10000 *varas cuadradas* 70,0569 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6,670 pies cuadrados.

Alicante. *La vara* tiene 0,912 metros; *el metro* 1 vara, 3 pulgadas y 5,684 líneas: *la libra* 0,533 kilógramos; *el kilógramo* 1 libra, 14 onzas y 0,300 adarmes: *la medida de libra para aceite* 0,60 litros; *el litro de aceite* 1 libra y 2,667 cuarterones: el *cántaro* 11,55 litros; *el litro de vino* 1,385 michetas: *la barchilla de grano* 20,775 litros; *el litro de grano* 0,770 cuartillas: *el jornal de tierra de* 5776 *varas cuadradas* 48,041533 áreas; *la área* 120 varas cuadradas y 2,064 pies cuadrados.

Almería. *La vara* tiene 0,833 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 2,607 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media arroba para líquidos* tiene 8,18 litros; *el litro de líquido* 2,200 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,531 litros; *el litro de grano* 0,872 cuartillos: *la tahulla de* 1600 *varas castellanas cuadradas para las tierras de riego* 11,182336 áreas; *la fanega para las tierras de secano* es la de Castilla.

Avila. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media cántara* tiene 7,96 litros; *el litro de líquido* 2,010 cuartillos: *la media fanega para áridos* 28,20 litros; *el litro de grano* 0,851 cuartillos: *la fanega de tierra de* 5625 *varas cuadradas* 39,303966 áreas: *la fanega de puño de* 6000 *varas cuadradas* 41,924230 áreas: *la aranzada de viña de* 6400 *varas cuadradas* 44,719179 áreas; *la huebra de* 3200 *varas cuadradas* 22,359589 áreas; *la peonada de prado de* 5600 *varas cuadradas* 39,129281 áreas.

Badajoz. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba para aceite* tiene 6,21 litros; *el litro de aceite* 4,831 cuartillos: *la media arroba para los demas líquidos* 8,21 litros; *el litro de líquido* 2,314 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,92 litros; *el litro de grano* 0,860 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

Baleares. PALMA. *La media cana* tiene 0,782 metros; *el metro* 5,115 palmos: *la libra* 0,407 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras y 5,484 onzas: *la mesura para aceite* 16,58 litros; *el litro de aceite* 2 libras y 2,055 onzas: *la cuarta para vino* 0,78 litros; *el litro de vino* 1,282 cuartas: *la libra para aguar-*

diente 0,41 litros; *el litro de aguardiente* 2,439 libras: *la media cuartera para áridos* 35,17 litros; *el litro de grano* 0,512 almudes: *el destre mallorquin lineal* 4,214 metros lineales; *el destre mallorquin superficial* 17,7578 metros cuadrados: *la cuarterada* 71,031184 áreas; *la área* 5 destres superficiales, 16 varas cuadradas de Búrgos y 0,365 pies idem.

Barcelona. *La cana* tiene 1,555 metros; *el metro* 5,145 palmos: *la libra* 0,400 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras y 6 onzas: *la libra medicinal* 0,300 kilógramos; *el kilógramo* 3 libras y 4 onzas medicinales: *el barrilon de líquido* 30,35 litros; *el litro de líquido* 1,054 mitadellas: *el cuartan de aceite* 4,15 litros; *el litro de aceite* 3,855 cuartas: *la media cuartera para áridos* 34,759 litros; *el litro de grano* 0,173 cuartanes: *la mojada superficial de* 2025 *canas superficiales* 48,965006 áreas; *la área* 41 canas cuadradas y 22,788 palmos id.

Búrgos. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media cántara* tiene 7,05 litros; *el litro* 2,270 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,17 litros; *el litro de grano* 0,883 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

Cáceres. *La vara* es de Castilla: *la libra* tiene 0,456 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 3 onzas y 1,404 adarmes; *el medio cuarto para vino* 1,73 litros; *el litro de vino* 2,601 cuartillos: *el medio cuarto para aceite* 1,69 litros; *el litro de aceite* 2,187 panillas; *la media fanega para áridos* 26,88 litros; *el litro de grano* 0,893 cuartillos; *la fanega de tierra* es la de Castilla.

Cádiz. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba para vino* tiene 7,922 litros; *el litro de vino* 2,020 cuartillos: *la media arroba para aceite* 6,26 litros; *el litro de aceite* 1 libra y 3,987 panillas: *la media fanega para áridos* 27,272 litros; *el litro de grano* 0,880 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

Canarias. *La vara* tiene 0,842 metros: *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 9,064 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la arroba de líquidos de Santa Cruz de Tenerife* tiene 5,08 litros; *el litro de líquido* 0,984 cuartillos; *la arroba de líquidos de la ciudad de las Palmas* 5,34 litros; *el litro de líquido* 0,936 cuartillos; *el cuartillo de líquido de Guia* 0,995 litros; *el litro de líquido* 1,005 cuartillos; *el cuartillo del arrecife de Lanzarote* 2,46 litros; *el litro de líquido* 0,407 cuartillos; *la media fanega de áridos da Santa Cruz de Tenerife* 31,33 litros; *el litro de grano* 0,766 cuartillos; *el medio almud de la ciudad de las Palmas* 2,75 litros; *el litro de grano* 0,182 almudes; *el medio almud de Guia* 2,84 litros; *el litro de grano* 0,176 almudes: *la fanegada superficial de* 7511 $\frac{1}{9}$ *varas castellanas cuadradas* 52,482925 áreas; *la área* 30,486 brazas.

Castellon. *La vara* tiene 0,906 metros; *el metro* 1 vara, 3 pulgadas y 8,821 líneas, ó bien 1 vara y 1,660 cuartas; *la libra* 0,358 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 9 onzas, 2 cuartas y 0,313 adarmes: *el cántaro para los líquidos, escepto el aceite*, 11,27 litros; *el litro de líquido* 1,420 cuartillos: *la arroba para aceite* 12,14 litros; *el litro de aceite* 2 libras y 2,544 cuartas: *la barchilla* 16,60 litros; *el litro de grano* 0,241 celemines: *la fanega superficial de* 200 *brazas reales* 8,310964 áreas; *la área* 24,065 brazas reales.

Ciudad-Real. *La vara* tiene 0,839 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 10,899 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media arroba para líquidos, escepto el aceite*, tiene 8 litros; *el litro de líquido* 2 cuartillos: *la media arroba para aceite* 6,22 litros; *el litro de aceite* 0,08 arrobas: *la media fanega para áridos* 27,29 litros; *el litro de grano* 0,879 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

Córdoba. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la arroba para líquidos* tiene 16,31 litros; *el litro de líquido* 1,962 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,60 litros; *el litro de grano* 0,870 cuartillos: *la fanega superficial* de 8760 $\frac{5}{12}$ *varas cuadradas* 61,212287 áreas; *la aranzada de* 5256 $\frac{1}{4}$ *varas cuadradas* 36,727372 áreas.

Coruña. *La vara* tiene 0,843 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 8,456 líneas: *la libra* 0,575 kilógramos; *el kilógramo* 1 libra y 14,783 onzas: *el ferrado de trigo* 16,15 litros; *el litro de trigo* 1,486 cuartillos: *el ferrado de maiz* 20,87 litros; *el litro de maiz* 1,15 cuartillos: *la cántara de vino* 15,58 litros; *el litro de vino* 2,182 cuartillos: *la cántara de aguardiente* 16,43 litros; *el litro de aguardiente* 2,069 cuartillos: *la arroba de aceite* 12,43 litros; *el litro de aceite* 2,011 cuartillos: *el ferrado superficial de* 900 *varas cuadradas* 6,395841 áreas; *el ferrado superficial de* 625 *varas cuadradas* 4,441556 áreas; *la área* 140 varas cuadradas y 6,448 pies cuadrados.

Cuenca. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba para líquidos* tiene 7,88 litros; *el litro* 2,030 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,10 litros; *el litro de grano* 0,886 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

Gerona. *La cana* tiene 1,559 metros; *el metro* 5 palmos y 0,526 cuartos: *la libra* 0,400 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras y 6 onzas: *el mallal para vino* 15,48 litros; *el litro de vino* 1,034 porrones: *el cuartan para áridos* 18,08 litros; *el litro de grano* 0,332 mesurones: *la vesana de tierra de* 900 *canas cuadradas* 21,874329 áreas; *la área* 41 canas cuadradas y 9,224 palmos cuadrados.

Granada. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba para líquidos* tiéne 8,21 litros; *el litro de líquido* 2,314 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,35 litros; *el litro de grano* 0,878 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

Guadalajara. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba para líquidos* tiene 8,21 litros; *el litro de líquido* 2,314 cuartillos: *la media arroba para aceite* 6,35 litros; *el litro de aceite* 1 libra y 3,874 panillas: *la media fanega para áridos* 27,40 litros; *el litro de grano* 0,876 cuartillos: *la fanega superficial de* $4444\frac{4}{9}$ *varas cuadradas* 31,054985 áreas.

Guipúzcoa. *La vara* tiene 0,837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0,129 líneas: *la libra de* 17 *onzas* 0,492 kilógramos: *el kilógramo* 2 libras y 0,553 onzas: *la media azumbre* 1,26 litros; *el litro de líquido* 1,587 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,65 litros; *el litro de grano* 1,157 chillas: *la fanega superficial de* 4900 varas cuadradas 34,327881 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6,670 pies cuadrados.

Huelva. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba para líquidos* tiene 7,89 litros; *el litro de líquido* 1,014 jarros: *la media fanega para áridos* 27,531 litros; *el litro de grano* 0,872 cuartillos: *la fanega superficial de* 5280 *varas cuadradas* 36,893323 áreas.

Huesca. *La vara* tiene 0,772 metros; *el metro* 1 vara y 0,886 tercias: *la libra* 0,351 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 10 onzas y 3,009 arienzos: *el cántaro* 9,98 litros; *el litro* 0,802 jarros: *la medida de libra para el menudeo de aguardiente* 0,36 litros; *el litro de aguardiente* 2,778 libras: *la medida de libra para el aceite* 0,37 litros; *el litro de aceite* 2,703 libras: *la fanega para áridos* 22,46 litros; *el litro de grano* 0,534 almudes: *la fanega superficial de* 1200 *varas cuadradas* 7,151808 áreas; *la área* 1 almud, 67 varas cuadradas y 7,108 tercias cuadradas.

Jaen. *La vara* tiene 0,839 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 10,899 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la medida de media arroba para vino* tiene 8,02 litros; *el litro* 1,995 cuartillos: *la medida de media arroba para aceite* 7,12 litros; *el litro de aceite* 1,896 libras: *la media fanega para áridos* 27,37 litros; *el litro de grano* 0,877 cuartillos: *la fanega superficial de* 8963 *varas castellanas cuadradas* 62,627812 áreas.

Leon. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media cántara* tiene 7,92 litros; *el litro* 2,020 cuartillos: *la emina para áridos* 18,11 litros; *el litro de grano* 0,883 cuartillos: *la emina superficial de* $1344\frac{4}{9}$ *varas cuadradas* *para las tierras de secano* 9,394133 áreas; *la emina superficial de* 896$\frac{2}{9}$ *varas cuadradas para las tierras de regadio* 6,262238 áreas.

Lérida. *La media cana* tiene 0,778 metros; *el metro* 5,141 palmos: *la libra* 0,401 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 5 onzas, 3 cuartas y 2,803 arxens: *el cántaro de vino* 11,38 litros; *el litro* 1,054 porrones: *la medida de tres cuartanes para áridos* 18,34 litros; *el litro de grano* 1,309 picotines: *el jornal superficial de* 1800 *canas cuadradas* 43,580448 áreas; *la área* 41 *canas cuadradas* y 19,387 palmos cuadrados.

Logroño. *La vara* tiene 0,837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0,129 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la cántara* tiene 16,04 litros; *el litro de vino* 1,995 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,47 litros; *el litro de grano* 0,874 cuartillos: *la fanega superficial de* 2722 *varas castellanas cuadradas* 19,019626 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6,670 pies cuadrados.

Lugo. *La vara* tiene 0,855 metros; *el metro* 1 vara y 6,105 pulgadas: *la libra* 0,573 kilógramos; *el kilógramo* 1 libra y 2,981 cuarterones: *el cuartillo para líquidos* 0,47 litros; *el litro* 2,128 cuartillos: *el ferrado para áridos* 13,13 litros; *el litro de grano* 0,076 ferrados: *el ferrado superficial de* 625 *varas castellanas cuadradas* 4,367107 áreas.

Madrid. *La vara* tiene 0,843 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 8,456 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media arroba para líquidos* tiene 8,15 litros; *el litro de líquido* 1,963 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,67 litros; *el litro de grano* 0,867 cuartillos: *la fanega superficial de* 4900 *varas castellanas cuadradas* 34,238121 áreas; *la fanega superficial de* 4900 *varas madrileñas cuadradas* 34,821801 áreas; *la área* 140 varas cuadradas y 6,448 pies cuadrados.

Málaga. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba para líquidos* tiene 8,33 litros; *el litro de líquido* 1,921 cuartillos: *la media fanega para áridos* 26,97 litros; *el litro de grano* 0,890 cuartillos: *la fanega superficial de* 8640 *varas cuadradas* 60,370891 áreas.

Murcia. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media arroba de vino* tiene 7,80 litros; *el litro de vino* 2,051 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,64 litros; *el litro de grano* 0,868 cuartillos: *la fanega superficial de* 9600 *varas cuadradas* 67,078768 áreas.

Orense. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tiene 0,574 kilógramos; *el kilógramo* 1 libra y 14,843 onzas: *la cántara* 15,96 litros; *el litro de líquido* 2,256 cuartillos: *el ferrado para medir grano* 13,88 litros; *el litro de grano* 1,729 copelos: *el ferrado colmado para medir maiz* 18,79 litros; *el litro de maiz* 1,277 copelos: *el ferrado superficial de* 900 *varas cuadradas* 6,288635 áreas: *la cavadura de* 625 *varas cuadradas* 4,367107 áreas.

Oviedo. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la cántara* tiene 18,41 litros; *el litro* 1,738 cuartillos: *la media fanega asturiana para áridos* 37,07 litros; *el litro de grano* 1,726 cuartillos: *el dia de bueyes ó sean* 1800 *varas cuadradas* 12,577269 áreas.

Palencia. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media cántara* tiene 7,88 litros; *el litro* 2,030 cuartillos: *la media arroba para aceite* 6,12 litros; *el litro de aceite* 2,042 libras: *la media fanega para áridos* es la de Castilla: *la obrada de tierra de* 7704$\frac{1}{6}$ *varas cuadradas* tiene 53,831876 áreas.

Pamplona. *La vara* tiene 0,785 metros; *el metro* 1 vara, 9 pulgadas y 10,318 líneas: *la libra* 0,372 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 8 onzas y 2,064 ochavas: *el cántaro* 11,77 litros; *el litro de vino* 1 pinta y 1,438 cuartillos: *la libra para medir aceite* 0,41 litros; *el litro de aceite* 2 libras y 1,756 cuarterones: *el robo para áridos* 28,13 litros; *el litro de grano* 0,569 almudes: *la robada superficial de* 1458 *varas cuadradas* 8,984560 áreas; *la área* 162 varas cuadradas y 2,506 pies cuadrados.

Pontevedra. *La vara* es la de Castilla : *la libra* tiene 0,579 kilógramos; *el kilógramo* 1 libra, 14 onzas y 8,677 adarmes : *el medio cañado para líquidos* 16,35 litros; *el litro* 2,080 cuartillos : *el ferrado para medir trigo* 15,58 litros; *el litro de trigo* 0,770 concas : *el ferrado para medir maiz* 20,86 litros; *el litro de maiz* 0,575 concas : *el ferrado de sembradura de* 900 *varas cuadradas* 6,288635 áreas.

Salamanca. *La vara* es la de Castilla : *la libra* tambien : *el medio cántaro* tiene 7,99 litros; *el litro de líquido* 2,003 cuartillos : *la media fanega para áridos* 27,29 litros; *el litro de grano* 0,879 cuartillos : *la fanega de tierra* es la de Castilla.

Santander. *La vara* es la de Castilla : *la libra* tambien : *la media cántara* tiene 7,90 litros; *el litro de líquido* 2,025 cuartillos : *la media fanega para áridos* 27,42 litros; *el litro de grano* 0,875 cuartillos : *la fanega superficial* es la de Castilla.

Segovia. *La vara* tiene 0,837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0,129 líneas : *la libra* es la de Castilla : *la media arroba para líquidos* tiene 8 litros; *el litro de líquido* 2 cuartillos : *la media fanega para áridos* 27,30 litros; *el litro de grano* 0,879 cuartillos : *la obrada de tierra de* 400 *estadales cuadrados* 39,303966 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6,670 pies cuadrados.

Sevilla. *La vara* es la de Castilla : *la libra* tambien : *la arroba para líquidos* tiene 15,66 litros; *el litro* 2,043 cuartillos : *la media fanega para áridos* 27,35 litros; *el litro de grano* 0,878 cuartillos : *la fanega superficial de* $8507\frac{15}{16}$ *varas cuadradas* 59,447248 áreas; *la aranzada de* $6806\frac{1}{4}$ *varas cuadradas* 47,557799 áreas.

Soria. *La vara* es la de Castilla : *la libra* tambien : *la media cántara* tiene 7,90 litros; *el litro de líquido* 2,025 cuartillos : *la media fanega para áridos* 27,57 litros; *el litro de grano* 0,871 cuartillos : *la fanega superficial de* 3200 *varas cuadradas* 22,359589 áreas.

Tarragona. *La media cana* tiene 0,780 metros; *el metro* 5,128 palmos: *la libra* 0,400 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras y 6 onzas : *la armiña para vino* 34,66 litros; *el litro de vino* 0,923 porrones: *la sinquena para aceite* 20,65 litros; *el litro de aceite* 0,242 cuartales: *la media cuartera para áridos* 35,40 litros; *el litro de grano* 0,169 cortanes: *la cana de rey superficial de* 2500 *canas cuadradas* 60,84 áreas; *la área* 41 canas cuadradas y 5,849 palmos cuadrados.

Teruel. *La vara* tiene 0,768 metros: *el metro* 1,302 varas: *la libra* 0,367 kilógramos; *el kilógramo* 2,725 libras: *el medio cántaro* 10,96 litros; *el litro de líquido* 0,046 cántaros: *la fanega para áridos* 21,40 litros; *el litro de grano* 0,047 fanegas: *la fanega de tierra de* 1600 *varas castellanas cuad.* 11,179795 áreas.

Toledo. *La vara* tiene 0,837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0,129 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media cántara* tiene 8,12 litros; *el litro de líquido* 1,970 cuartillos: *la media arroba para medir aceite* 6,25 litros; *el litro de aceite* 2 libras: *la media fanega para áridos* es la de Castilla: *la fanega superficial de* $5377\frac{7}{9}$ *varas castellanas cuadradas* 37,576532 áreas: *la fanega superficial de* $6722\frac{2}{9}$ *varas castellanas cuadradas* 46,970665 áreas.

Valencia. *La vara* tiene 0,906 metros; *el metro* 1 vara, 3 pulgadas y 8,821 líneas, ó bien 1 vara y 1,660 cuartas: *la libra* 0,355 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 9 onzas y 3,211 cuartas: *el cántaro de vino* 10,77 litros; *el litro de vino* 1,486 cuartillos: *la arroba de aceite* 11,93 litros; *el litro de aceite* 0,335 azumbres: *la barchilla para áridos* 16,75 litros; *el litro de grano* 0,955 cuartillos: *la fanega superficial de* $1012\frac{1}{2}$ *varas cuadradas* 8,310964 áreas; *la área* 24,065 brazas reales.

Valladolid. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *la media cántara* tiene 7,82 litros; *el litro* 2,046 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27,39 litros; *el litro de grano* 0,876 cuartillos: *la obrada superficial de* 600 *estadales* ó $6666\frac{2}{3}$ *varas cuadradas* 46,582478 áreas.

Vizcaya.—BILBAO. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tiene 0,488 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras y 13,377 adarmes: *la media azumbre* 1,11 litros; *el litro* 1,802 cuartillos: *la media arroba de aceite* 6,74 litros; *el litro de aceite* 1 libra, 3 cuarterones y 0,837 ochavas: *la media fanega para áridos* 28,46 litros; *el litro de grano* 0,211 celemines: *la peonada superficial de* $544\frac{4}{9}$ *varas cuadradas* 3,804236 áreas.

Zamora. *La vara* es la de Castilla: *la libra* tambien: *el medio cántaro* tiene 7,98 litros; *el litro* 2,005 cuartillos: *la media fanega prra áridos* 27,64 litros; *el litro de grano* 0,868 cuartillos: *la fanega superficial de* 4800 *varas cuadradas* 33,539384 áreas.

Zaragoza. *La vara* tiene 0,772 metros; *el metro* 1 vara, 10 pulgadas y 7,585 líneas: *la libra* 0,350 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 10 onzas, 1 cuarto y 0,571 adarmes: *el cántaro de vino* 9,91 litros; *el litro* 1,615 cuartillos: *la arroba para medir aceite* 13,93 litros; *el litro de aceite* 2,584 libras: *la arroba para medir aguardiente* 13,33 litros; *el litro de aguardiente* 2,701 libras: *la fanega para aridos* 22,42 litros: *el litro de grano* 0,535 almudes: *el cuartal superficial de* 400 *varas aragonesas cuadradas* 2,383936 áreas; *la área* 1 almud y 67,790 varas cuadradas.

Pesas y medidas de Cuba y Filipinas (*).

Isla de Cuba. *La vara* tiene 0,848 metros; *el metro* 1,17924528 varas, ó 1 vara, 6 pulgadas y 5,433 líneas: *el cordel de agrimensor* 20,352 metros: *la legua de* 5000 *varas cubanas* 4240 metros. *La vara de la Habana* tiene 0,841 metros; y *el metro* 1,184834 varas ó 1 vara, 6 pulgadas y 7,848 líneas.

La libra es la de Castilla.

La fanega de áridos de 200 libras de peso tiene 109,60 litros: *la caneca de la Habana de* 10 *frascos de vino* tiene 25 litros: *el barril miel* ó sesta parte del bocoy de 23 kilógramos de peso 22,72 litros: *la pipa de vino de* 600 *botellas* 435 litros. *El litro* equivale á 0,4 frascos.

El hato ó hacienda de ganado mayor es un círculo de 8480 metros de radio ó sean 22605,66682 hectáreas: *el corral ó hacienda de ganado menor* es un círculo de 4240 metros de radio ó sean 5651,40999 hectáreas: *la caballería de tierra* tiene 13,420206 hectáreas: *el solar en la Habana* 776,6323 metros cuadrados. *La área* tiene 139,06 varas cubanas cuadradas.

Islas Filipinas. *La vara* legal es la de Castilla, pero se usa tambien la de Manila que tiene 0,8474 metros, y el *pandipa* dividido en 2 samasas ó 10 bayac que tiene 1,694 metros.

La libra es la de Castilla. *El pico* se divide en 10 chinantas ó 100 cates y equivale á 5 arrobas, 12 libras y 8 onzas ó sean 63,2628 kilógramos. El *quintal* de 100 libras se divide en 8 chinantas ú 80 cates: si es de seda tiene 110 libras.

La tinaja de vino tiene 17 gantas ó 22 frascos; y la *tinaja de aceite* de la Laguna de 16 gantas pesa un quintal ó 46,0093 kilógramos.

El *Caban* tiene 25 gantas ó 200 chupas y pesa próximamente 127, 52, 88 ó 150 libras, segun sea de arroz, café, cacao ó trigo. El *cesto* tiene 15 gantas

El *quiñong* de 10 balitans ó 100 lobangs tiene 48,76416 áreas.

(*) Estos datos no son oficiales como los anteriores. Los relativos á Cuba se han tomado de la obrita titulada «*Prontuario del sistema métrico legal de pesas, medidas y monedas*, por D. Pelayo Gonzalez, Director de la Escuela general preparatoria y de las especiales de la Habana.»

Pesas y medidas extranjeras

con sus respectivos valores en unidades del sistéma métrico-decimal.

Inglaterra.

Longitud. La *milla* (mile) tiene 1760 yardas (yards), el *furlorg* 220 yardas, la *percha* (pole) 5 yardas y media, la *braza* (fathom) 2 yardas, la yarda 0,914383 metros, el *pié* (foot) un tercio de yarda, y la *pulgada* (ingh ó thumb) $\frac{1}{12}$ de pié. La *ana* para tejidos ordinarios (the english ell) 0,3809 metros, y para lienzos finos (the flemish ell) 0,2285 metros. La milla tiene 1609,344 metros. El *metro* equivale á 1,093633 yardas.

Capacidad. El *chaldron* tiene 12 sacos (sacks), el *quarter* 8 bushels, el *saco* 3 bushels, el *bushel* (fanega) 8 gallones, el *peck* 2 gallones, el gallon 4,543458 litros, el cuarto y el octavo de gallon (pint).

La *tonelada* (ton) tiene dos pipas (pipe), la *pipa* dos barricas (hogshead), la *barrica* 63 gallones ó 2 barriles (barrel), y el *rundhest* 18 gallones. El *litro* equivale á 1,700773 pint, y el *hectólitro* á 22,00967 gallones.

Superficie y agrarias. La *milla cuadrada* (square mile) tiene 640 acres, el *acre* 4840 yardas cuadradas, el *rood* 40 poles ó 1210 yardas cuadradas, la *percha cuadrada* (rod) 30,25 yardas cuadradas, la yarda cuadrada 0,836097 de metro cuadrado. El *metro cuadrado* equivale á 1,196033 yardas cuadradas, y la *hectárea* á 2,471143 acres.

Cúbicas. La *yarda cúbica* (cubic yard) tiene 27 pies cúbicos ó 764,513 decímetros cúbicos; y el *pié cúbico* (cubic foot) 1728 pulgadas cúbicas. El *metro cúbico* equivale á 1,308022 yardas cúbicas.

Pesas usuales (*). La *tonelada* (ton) tiene 20 quintales, el *quintal* (cwt) 112 libras ó 50,80 kilógramos, la *libra* (pound de 7000 granos) 16 onzas ó 0,4535 kilógramos, y la *onza* (ounce) 16 adarmes (dram). El *gramo* equivale á 15,432349 granos troy y el *kilógramo* á 2,204621 libras avoir du pois.

Pesas troy (**). La *libra* (troy de 5760 granos) tiene 12 onzas ó 0,3732 kilógramos, la *onza* 20 penny weights, el *penny weight* 24 granos, y el *grano* 0,065 gramos. El *gramo* equivale á 0,643015 penny weight.

Portugal.

La *vara* tiene 5 palmos de Craveira, el *codo* (covado) 3 palmos, el *pié* (pé) palmo y medio, y el palmo 8 pulgadas ó sean 0,2186 metros. El *palmo de la junta* vale 0,2002 metros, y el *aventajado* ó del comercio 22,688. La *legua* de 24 estadios equivale á 6174 metros.

El *tonel* tiene 2 pipas, la *pipa* ó *bota* 26 almudes, el *almud* 2 *alqueires*, el *alqueire* (cántaro) 2 canadas, y la canada 4 cuartillos ó 1,38 litros.

La *pipa de Lisboa* tiene 140 gallones de vino y se calcula en 31 almudes.

El *moyo* tiene 15 fanegas, la *fanega* (fanga) 4 alqueires ó 54,08 litros, el alqueire 8 octavas ó 13,52 litros, y la *octava* 2 celemines (selamines ó maquias).

La *geira* tiene 4840 varas cuadradas, y la *vara cuadrada* 11,1 pies cuadrados ó 1,2100 metros cuadrados.

La *vara cúbica* vale 1,331 metr. cúbicos; y el *pié cúbico* 1728 pulg. cúbicas.

La *tonelada* tiene 13 quintales y medio, el *quintal* 4 arrobas ó 58,75 kilógramos, la *arroba* 32 libras, la libra (arrate) 2 marcos ó 458,921 gramos. El *marco* 8 onzas, la *onza* 24 escrópulos ó 576 gramos. El escrópulo (para materias preciosas) vale 3 quilates, 12,396 granos ó 67,74 centígramos.

(*) Estas pesas se conocen con el nombre de *avoir du pois*.
(**) Para las materias preciosas.

La *tonclada de arqueo* es un cilindro de 6 pies de altura por 3 y medio de diámetro, ó sean 57,75 pies cúbicos ó 2,0754 metros cúbicos.

Austria.

Ana de Viena 0,7799 metros, y para los tejidos 0,7870 metros. La *toesa* tiene 6 pies ó 1,8966 metros. *Milla de posta* 4000 toesas ó 7586,455 metros.

Joch=1600 toesas cuadradas=57,5544 áreas.

Eymer=40 mass=80 canettes=240 pfiff=38,435 litros, (líquidos).

Metzen=8 achtel=64 mass=61,500 litros (áridos).

La *libra* 0,56 kilógramos, y el *centner* ó quintal 56 kilógramos.

El *marco de Viena* para el oro y la plata, equivale á 280,644 gramos. Se divide en 16 loths, 64 quentins ó 256 pfennigs.

Hamburgo.

La *ana* tiene 2 pies y vale 0,5730 metros. La *milla* 24000 pies del Rhin.

Foudre=6 ahm=30 eymer=480 kannen=960 cuart. El cuartillo 1,905 litr.

Fass=8 spuis=32 gross=64 klein mass=105,77 litros.

La *libra* de 32 loths vale 0,4797 kilógramos, y el *quintal* 112 libras. Para el oro y la plata se emplea el *marco de Colonia* de 233,864 gramos.

Holanda.

Pié de Amsterdan 0,2831 metros, y el *roaden* ó estadal 3,7404 metros. La *milla* tiene 5856 metros.

Arpent del Rhin=120 roedens cuadrados=1680,1392 metros cuadrados. *Morgent*=5 arpents=8396,3813 metros cuadrados.

Anker=2 stekans=33 mingles=38,63 litros.

Sack=3 scheppels=80,955 litros.

Libra del comercio 0,49409 kilógramos, la de *Brabante* 0,4704, la *troy* 0,4922 la *nueva* 1 kilógramo (*).

Prusia.

Pié del Rhin 0,31385 metros, y la *ana* 0,6668 metros. La *mille* 7532 metros.

Acre ó *morgen*=180 ruthes cuadradas=25,526 áreas.

Foudre=4 oxhoff=6 ohm=12 eymer=768 cuarts=883,20 litros.

Wimspel=8 malter=26 scheffell. *Scheffell*=96 metzen=54,8445 litros.

La *libra de Berlin* 0,467711 kilógramos, y el *zentner* ó quintal 110 libras.

El *marco* para el oro y la plata equivale á media libra ó sean 233,855 gramos.

Rusia.

La *sachina* ó toesa tiene 3 archinas ó 145 verschocks y vale 2,1335 metros. El pié del Rhin y el inglés, que es la sétima parte de la sachina, son los mas usados en el comercio. La *werst* tiene 500 sachinas ó 1067 metros.

Desaetine imperial=2400 sachinas cuadradas=109,250 áreas.

Tonnel=40 wedros=400 kruskas=320 chtoffs ó 491,56 litros. El *tchevert* vale 8 tschetverick ó sean 209,740 litros, y el *wedro de Riga* 13,0325 litros.

Kuhl=10 *tschetverick*=80 garnetz=262,15 litros (áridos).

Pud=40 libras=16,3807 kilógramos. La libra de artillería pesa 489,108 gramos. (**)

(*) En la actualidad el sistema legal de pesas y medidas de Holanda es el métrico-decimal.

(**) El *last*, medida de capacidad y de peso, usada en el Norte de Europa para el fletamento de los buques, se divide en 2 toneladas. Se valúa para los granos en 30 hectólitros; para las mercancías pesadas en 4000 libras ó 2000 kilógramos; y en 80 piés cúbicos para las mercancías lijeras. Esta valuacion varia, segun los géneros.

Monedas extrangeras

con sus respectivos valores en reales y céntimos de España.

Argel.

Las monedas de oro llevan asterisco: las demás son de plata.

*Zequin.	38,80
*Mahabú.	25,30
Piastra.	11,67

Asia.

*Rupia del Mogol.	158,27
*Mohur de la India inglesa. .	139,92
*Pagoda con estrella.	35,95
*Koban nuevo del Japon. . .	194,71
*Tigogin de 4 mas.	54,72
Itagana de 60 mas (Japon).	58,92
Kodama (id.).	6,44
Rupia de Bombay y Madrás.	9,08
Rupia de Bengala.	9,30

El peso fuerte español es la moneda universal en Asia. Las demas monedas, no teniendo valor fijo, se compran y venden al peso.
La rupia de oro equivale á 15 de plata.

Austria.

*Krone de 1858.	130,99
*Ducado del Emperador. . . .	45,03
*Medio soberano de $6^2/_3$ flor.s	66,80
Escudo ó rixdale de 1753. .	19,72
Florin ó medio thalers specie	9,86
20 Kreutzers.	3,27

Baviera.

*Carolino de 3 florines. . . .	97,50
*Maximiliano de 2 florines. .	65,28
*Ducado de Max. II, 1855. .	45,03
Escudo ó corona.	21,74
Rixdale corriente.	12,31
Florin de 60 kreutzers. . .	8,21
2 florines de 1845.	16,11

Bélgica y Francia.

*Pieza de 40 francos.	152,00
*Id. de 20, 10 y 5 francos.	
Pieza de 5 francos.	19,00
Id. de 2, 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ de franco.	
Un franco, ó 20 sous, vale	3,80

Las monedas de cobre son de 10 y 5 céntimos.

Cerdeña.

*Doppia de 100 liras.	380,00
*Carlino de 5 doblones. . . .	540,55
*Pistola de 24 liras.	107,54
Escudo nuevo de 5 liras. .	19,00
Cárlos Felix de 5 y 1 franco.	

Y además todas las monedas del sistema francés

China.

Taël de 10 maces.	28,50
Mace (tsin) ó 10 tandarin. .	2,85
Tandarin (fun) ó 10 tash. .	0,28

Dinamarca y Holstein.

*Cristiano (1773-1847). . . .	79,81
*Federico de 1848.	77,14
*Ducado fino.	44,84
*Id. corriente con corona 1767	35,98
Reichsthaler corriente(1849)	18,85
Marco de 16 schelines. . . .	2,85

Egipto.

*Doble sequin nuevo.	98,04
*Karat.	8,51
Duro nuevo.	16,72
Gruch de 10 medines. . . .	1,14
Diez paras.	0,28

Estados-Unidos de América.

*20 dollars de 1849.	393,83
*Aguila de 10 dollars. . . .	196,92
*Mitad y cuarto de águila.	
Dollars de 4 schelines (1837)	20,29
Dollars de 1849.	19,68

*La libra de la Carolina y la Georgia vale 88,24 reales, y la de New-York 50,82 reales.
Pasa además el oro de todas las naciones.

Francfort.

*Ducado *ad legem Imperii*. .	45,02
*Ducado nuevo de la ciudad.	44,66
Escudo de 1838 de $3^1/_2$ flor.	28,23
Rixdale ó thaler de 90 kr. .	14,80
Florin de 60 kreutzers. . .	8,09

Hamburgo.

*Ducado de 15 marc. y 8 suel.	92,38
*Ducado de la ciudad (1858).	44,69
Escudo de 3 marc. ó 12 suel.	11,26
Marco de 16 schelines. . . .	5,70
Marco de banco.	7,14
Rixdale antiguo ó escudo. .	22,00

Holanda.

*Ryder de 14 florines antig.	119,32
*Willem de Guillermo III. . .	158,50
*Ducado de Holanda.	44,84
*Pieza de 10 florines.	79,26
*Id. de 5 florines.	39,63
Florin ó $2\frac{1}{2}$ gulden de 1848.	19,98
Florin de 100 céntimos. . .	8,13
3 florines, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ de flor.	

Inglaterra.

*Guinea de 21 schelines. . .	100,60
*Media guinea.	50,30
*Soberano de 20 schelines. .	95,80
*Medio y cuarto de soberano.	
Dollar de Jorge III.	20,22
Corona de 5 schelines (1818)	22,08
Schelin de 1818.	4,41
Pieza de 6 peniques.	2,20
Otras de 4, 3, 2 y 1 peniques.	

Las monedas de cobre son el penique que vale 0,34 reales y el doble penique, medio y cuarto de penique ó farthing.

Marruecos.

*Mathou Kebis.	129,20
*Mathou.	29,64
*Miskal deheb.	19,76
Miskal.	19,76
Nysf miskal.	9,88
Dirhem ú onza.	1,94
Musuna ó blanquilla.	0,50

El duro y todas nuestras monedas de oro.

Nápoles.

*Décuplo de 30 ducados. . .	493,60
*Quíntuplo de 15 ducados. .	246,80
*Onza nueva de 3 ducados. .	49,36
*Doppia de 6 ducados. . . .	97,96
*Nuevo décuplo (1839). . . .	481,87
*Pieza de 20 liras de Murat.	76,00
Escudo de 5 liras.	19,00
Id. de 12 carlinos de 120 gr.	19,38
Ducado de 10 carlinos. . . .	16,11
Carlino de 10 granos. . . .	1,61

Portugal y Brasil.

*Dobraon de 12000 reis (1822)	322,52
*Mitad, 4.ª, 8.ª y 16.ª parte.	
*Lisbonina de 4000 reis. . . .	129,05
*Cruzado nuevo de 480 reis. .	13,26
*Corona de 10000 reis (1854).	212,80
*Mitad, 5.ª y 10.ª parte.	
Cruzado nuevo de 1822. . .	11,17
Su mitad, 4.ª y 8.ª parte.	
Teston de 100 reis (1854). .	1,94
5, 2, y medio teston.	
Corona de 1000 reis (1835).	32,92
y su mitad de 500 reis.	

Las monedas de oro anteriores á 1772 son el *dobraon* que vale hoy 24000 reis, *lisbonina* 4800, *moedor* 2400, *milreis* 1200, y el *cruzado nuevo* 480 reis. Un millon de reis se llama un conto.

Prusia.

*Federico doble de 10 escud.	157,93
*Federico de 5 escudos. . . .	78,97
*Ducado fino.	45,03
Escudo, rixdale ó thaler. . .	14,10
Rixdale ó thaler de 1823. .	14,25
Pieza de 5 silvergros. . . .	2,35
Gros.	0,38

Roma.

*Diez escudos.	201,54
*Doblon de Pio VI y Pio VII.	65,81
*Escudo de Pio IX (1854). .	20,37
Id. de Pio IX de 100 bayocos.	20,37
Paulo de 10 bayocos.	2,04
Groso de 5 bayocos.	1,02

Rusia.

*Imperial desde 1763.	155,80
*Ducado desde 1796.	44,97
Rublo desde 1763.	15,20
Monedas de 12, 6 y 3 rublos.	
Mitad y un cuarto de rublo.	

Repúblicas hispano-americanas.

*Onza de 16 pesos (Bogotá).	304,00
*Condor de 1854.	190,00
Pieza de 100 céntimos (1834)	19,00
Otras de 50, 20, 1 y ½ cént.	
*Onza de Buenos aires. . . .	307,80
Peso fuerte (Montevideo). .	19,95
*Onza de 8 escudos de Chile, el Perú y Guatemala. . . .	309,13
Duro, dollar ó piastra. . .	20,56
Real ó sea 8.ª parte del duro.	2,54
*Onza de Méjico.	320,00
*Doblon de 8 escudos.	308,16
*Escudo.	19,50
Peso fuerte de 8 rs.	20,56
Toston ó medio peso. . . .	10,28
Real fuerte.	2,56

Suecia y Noruega.

*Ducado.	44,46
Rixdale de 48 schelines. . .	21,85
Mark.	4,26

Turquía.

*Zequin de Abdul-Hamed. .	33,14
*Nisfie ó medio zequin. . . .	16,57
*Zequin de Selim III.	27,74
*Cien doblones (1845). . . .	86,18
Altmichlec de 60 paras. . .	13,38
Duro de Constantinopla. . .	7,60
Pieza de 50 escudos (1845).	16,91
Id. de 10 y 5 escudos.	

Monedas de contabilidad extrangeras

con sus respectivas equivalencias aproximadas en reales y francos.

		Reales	Francs
Alejandria.	Piastra de 40 medinis=120 aspres corrientes. .	6,19	1,63
Argel.	Budschu de 24 musunes antiguos.	7,07	1,86
Austria.	Florin=$\frac{2}{3}$rixdale=60 krotzers=240 peniques. .	9,88	2,60
Baviera.	Florin de 60 krotzers ó 240 peniques.	8,21	2,16
Bélgica.	Franco.	3,80	1,00
Berna.	Franco suizo de 10 batz ó 100 rappes.	5,62	1,48
Bucharest.	Lec ó piastra de 40 paras.	1,41	0,37
Cairo.	Talarí ó 15 piastras de 40 paras.	20,14	5,30
Calcuta.	Rupia ó 16 annas de 16 pices.	9,62	2,53
Canton.	Tale=10 maces=100 condorines=1000 cash. .	28,92	7,61
Cerdeña.	Lira ó libra nueva.	3,80	1,00
Dinamarca.	Rixdale de 6 marcos ó 96 schelines.	18,85	4,96
Estados-Unidos.	Dollar de 10 dineros ó 100 céntimos.	19,68	5,18
Francfort.	Florin ó 60 krotzerts=240 peniques	8,06	2,12
Francia.	Franco ó 100 céntimos.	3,80	1,00
Grecia.	Drachme ó 100 leptas.	3,42	0,90
Hamburgo.	Marc-banco=32 dineros gros.	7,14	1,88
Holanda.	Florin ó 100 céntimos.	8,12	2,14
Inglaterra.	Libra sterlina=4 crow=20 schelins ó sueldos= 240 peniques esterlines ó dineros.	95,80	25,21
Japon.	Tale=10 maces=100 condorines.	13,19	3,47
Madrás.	Rupia de plata de 1835.	8,97	2,36
Malta.	Libra sterlina inglesa.	95,80	25,21
Marruecos.	Metikals de 10 ukias ó 40 blanquillos.	15,66	4,12
Méjico.	Peso de 8 reales de plata ó 100 céntimos. . . .	20,29	5,34
Nápoles.	Ducado de 100 carlinos ó 100 granos.	16,11	4,24
Noruega.	Escudo.	21,39	5,63
Portugal.	Mil reis (corona) ó 10 testones.	26,86	7,07
	Cruzado de cambio antiguo de 400 reis.	9,16	2,41
Prusia.	Thaler de 30 silbergros ó 360 peniques.	14,10	3,71
Roma.	Corona ó escudo de Pio IX de 100 bayocos. . . .	20,37	5,36
Rusia.	Rublo=4 solvtnick=100 kopeck.	15,20	4,00
Sajonia.	Thaler de 24 bancogros.	14,82	3,90
Santo Domingo.	Gourde ó peso duro de España.	20,41	5,37
Siam.	Tikal de 3 maas.	11,78	3,10
Stocolmo.	Rixthaler specie de 48 schelines.	21,85	5,75
Suiza.	Franco.	3,80	1,00
Turquia.	Piastra de 100 aspres.	0,95	0,25
Wurtemberg.	Florin=2 rixdale.	8,05	2,12

FIN DE LA ARITMÉTICA.

ERRATA.

Pág. 120, línea 7 por abajo, debe decir: en el *denominador*.

TRATADO

DE

ALGEBRA.

La generalidad, á que aspira el espíritu humano en todas sus concepciones, no queda por lo comun satisfecha dentro de los límites de la ARITMÉTICA, que considera los números en particular y como cantidades determinadas y fijas. Los resultados obtenidos por procedimientos aritméticos han de ser tan particulares como lo son los números y nunca es lícito utilizarlos como resoluciones del inmenso número de problemas, que pueden proponerse sobre la cantidad en general.

Por eso al estudio de la Aritmética se sigue naturalmente el del ALGEBRA, ciencia que satisface esta aspiracion del espíritu á la generalidad de las leyes, en cuya unidad se comprenden los hechos que son de por sí múltiplos y diversos: esta ciencia además se convierte en un verdadero lenguaje tan universal y tan rico en formas y en locuciones, cuanto puede serlo la mas sábia lengua humana.

El ALGEBRA, pues, tiene una importancia muy superior á la de las demas ciencias llamadas exactas, las cuales todas sin distincion se le subordinan como menos transcendentales y mas limitadas en su aplicacion objetiva, es como la lójica de todas ellas con un carácter mas elevado que el meramente intuitivo de la aritmética y la geometría. Porque no solo enseña todos los medios de expresion teórica y práctica mas generales y fecundos, sino que es tambien un poderoso instrumento de análisis, y por consiguiente de invencion así de propiedades numéricas, como geométricas. Todos sus procedimientos aspiran, con efecto, á elevar el conocimiento limitado y concreto de las relaciones de cantidades dadas al conocimiento fundamental y abstracto de sus relaciones generales, despojando las cantidades de su determinacion concreta y particular, para no ver en ellas mas que lo que tienen de verdaderamente universal y científico.

Para lograr esta generalizacion sistemática, necesita el álgebra nuevos órdenes de signos arbitrarios, y convencionales y por lo mismo capaces de universal representacion, en los que se dejen percibir las relaciones generales con entera independencia de valores determinados. Para ello usa los caractéres alfabéticos, entre los cuales mezcla tambien los signos de relacion ó de operacion, ya conocidos en la aritmética.

Con las cantidades así expresadas, como con las palabras de un idióma, el álgebra instituye un cálculo especial, y libre de toda regulabilidad aritmética: este *cálculo algebráico* puede ser considerado como la parte *sintética* de la exposicion de la ciencia. Con el lenguaje ya formado y coordinado en oraciones y frases emprende en seguida el álgebra la resolucion de todas las cuestiones matemáticas, fundándose en la *comparacion de las cantidades*. Esta es la parte *analítica*, la mas esencial y fecunda de esta ciencia

ALGEBRA.

Nociones preliminares.

1. Algebra es la ciencia que trata de las leyes generales de la *cantidad*.

Las leyes de la cantidad son independientes de toda aplicacion numérica ó geométrica, y comprenden lo mismo á los *números* que á la *extension*.

Unidad numérica ó geométrica es una cantidad arbitraria, que se elige como término de comparacion, para determinar el valor de todas las de su misma especie. La unidad abstracta se expresa siempre por 1.

El valor de una cantidad es su razon con la unidad respectiva: esta razon puede ó no expresarse exactamente: en el primer caso la cantidad se llama *racional ó comensurable*, y en el segundo *irracional ó incomensurable*.

El carácter elevado y trascendental del álgebra exige que las cantidades se expresen por signos convencionales é indeterminados. Estos signos pueden ser las letras del alfabeto, y en tal caso las cantidades algebráicas se llaman tambien *literales*.

En toda cantidad algebráica no solo se ha de considerar su valor numérico ó geométrico con la generalidad que es propia de esta ciencia, sino que se ha de atender muy particularmente á su cualidad ó afeccion respectiva. Las ganancias y pérdidas de un comerciante, el tiempo anterior y posterior á una época determinada, la distancia que camina un móvil á la derecha ó á la izquierda, etc., son cantidades directamente contrarias, cuya diferente acepcion, si bien dependiente en gran parte de la voluntad del calculador, necesita indicarse con signos representantes del caracter *positivo* y *negativo*, en que consiste su contrariedad.

Aunque esta consideracion de las cantidades como positivas y negativas sea bastante para la generalidad de las cuestiones concretas, que el álgebra se propone resolver; hay sin embargo afecciones especiales, que no son lo positivo y negativo, y que introducen una nueva division de las cantidades en *reales* é *imaginarias*. Los créditos y las deudas de un comerciante son cantidades reales (positivas y negativas), y los depósitos activos ó pasivos, que no constituyen haber ni deber, son imaginarios. Las distancias, que camina un móvil á la derecha ó á la izquierda, son reales (positivas ó negativas); cualquiera otra direccion es imaginaria (*).

Las cantidades positivas y negativas tienen entre sí tales relaciones de simetría, que la suma ó adicion de las unas equivale á la sustraccion de las otras é inversamente. Por eso, dos cantidades una positiva y otra negativa, cuyos valores cuantitativos son iguales, dan un resultado nulo ó cero.

El álgebra tiene dos partes; una que enseña á ejecutar ó mas bien á indicar las operaciones ordinarias con las cantidades algebráicas ó literales, y se llama CÁLCULO ALGEBRÁICO, y la segunda que trata de la comparacion de estas cantidades, y se denomina COMPARACION ALGEBRÁICA.

Notacion algebráica.

2. Los signos mas comunes del álgebra son las letras del alfabeto: con ellas se expresa el valor de las cantidades. Tienen la ventaja de ser independientes unas de otras y poder recibir todos los valores numéricos ó geométricos que se quiera.

Las letras de nuestro alfabeto, los acentos convenientemente colocados á su alrededor y los caracteres griegos, hebreos, etc., bastan siempre para la representacion de todos los elementos del cálculo mas complicado.

La unidad real positiva se expresa por $+1$ ó simplemente por 1; y la negativa por -1. Las cantidades reales positivas van pues precedidas del signo $+$ ó no llevan signo alguno en principio de escritura; y las negativas llevan siempre el signo $-$ (**).

La unidad imaginaria positiva se expresa por $+\sqrt{-1}$ ó simplemente por $\sqrt{-1}$; y la negativa por $-\sqrt{-1}$. Las cantidades imaginarias positivas debieran por consiguiente ir precedidas del signo $\sqrt{-1}$ y las negativas de $-\sqrt{-1}$. Sin embargo estos signos suelen posponerse á la cantidad.

Para facilitar los razonamientos algebráicos se emplean ademas los signos siguientes, ya conocidos y usados en la aritmética:

$$+ \quad - \quad \times \text{ ó } . \quad : \quad (\ )^n \quad \sqrt[n]{\ } \quad = \quad > \quad <$$

asi, la *adicion algebráica* se indica separando los sumandos por el signo $+$, la *sustraccion* de una cantidad de otra poniendo el signo $-$ entre el minuendo y el sustraendo; la *multiplicacion* separando los factores por el signo $\times$ ó bien por un punto; la *division* escribiendo el dividendo sobre una línea horizontal y debajo el divisor, ó separando el uno del otro por dos puntos; la *elevacion á potencias* de una cantidad escribiendo esta dentro de un paréntesis y á la derecha y arriba el exponente, grado ó índice de la potencia; y finalmente la *extraccion de raices* escribiendo antes de la cantidad el signo radical con el grado ó índice de la raiz respectiva.

Cuando los factores son positivos, el producto se indica escribiéndolos unos al lado de otros sin interposicion de signo alguno. Llámase *coeficiente* al número que multiplica á toda cantidad algebráica. El coeficiente se escribe antes de la cantidad y se suprime cuando es 1.

En la elevacion á potencias se omite el exponente si este es la unidad, y en la extraccion de raices no se expresa el grado ó índice 2.

(*) Mas adelante veremos que no ha habido razon para estas denominaciones.

(**) Las cantidades negativas se llaman con mucha propiedad *sustractivas*, porque siempre se las puede concebir como resultado de la sustraccion de una cantidad mayor de otra menor. En general, se dice que una cantidad es menor que otra, si falta á la primera una cantidad positiva para ser igual á la segunda.

3. Llámase cantidad ó *expresion algebráica* ó literal á toda cantidad expresada por dos ó mas letras, unidas entre sí por los signos del cálculo.

$$5am-2ab^5+(a-b)^2-\sqrt{a+b}$$

Valor numérico ó geométrico de una expresion algebráica, es el resultado final de ejecutar numérica ó geométricamente las operaciones indicadas en ella, sustituyendo valores particulares por cada letra.

El valor numérico de la expresion algebráica $5a^2+b-\sqrt{a+c}$ suponiendo $a=10$, $b=1$ y $c=15$ será $5\times100+1-\sqrt{10+15}=496$

La cantidad algebráica, que no tiene denominador ni signo radical, tiene la forma *entera*. Si tiene uno ó mas denominadores y ningun signo radical, es *fraccionaria;* y últimamente, si está afecta del signo radical, se llama *irracional* ó *radical.*

$$(a^2+a+1)(a^2+b^2)+2ab \quad\Big|\quad \frac{a^2-a+1}{2ab+a(1+b)} \quad\Big|\quad 2ab+\sqrt{a+b}$$

Las cantidades enteras, fraccionarias é irracionales pueden ser reales ó imaginarias, y unas y otras positivas ó negativas.

Las cantidades precedidas del signo $\pm$ ó $\mp$ (llamado de *ambigüedad* ó mas propiamente de *conjugacion*) no son positivas y negativas al mismo tiempo, lo cual seria imposible, sino que en unos casos pueden tomarse con el signo $+$ y en otros con el signo $-$

Cuando se dice simplemente cantidades positivas, negativas, fraccionarias, irracionales, etc., entiéndase que se habla de cantidades reales.

La expresion algebráica, que no contiene ninguna adicion ni sustraccion indicadas, se llama *término.* La expresion algebráica, que consta de un solo término, se llama *monomio*, y si consta de mas se llama *polinomio.*

Un polinomio de dos términos se llama *binomio,* si consta de tres *trinomio,* si de cuatro *cuatrinomio,* etc.

La expresion algebráica $2a+b-a\sqrt{-1}+\frac{1}{a}$ es un polinomio de cuatro términos; tres reales y positivos, y uno imaginario negativo.

Todo monomio se puede considerar como un producto indicado de dos ó mas factores. El número de factores literales de un monomio entero se llama *grado* ó número de dimensiones del monomio.

Un polinomio se dice *homogéneo* cuando todos sus términos son de un mismo grado. El grado de un polinomio es el del término que tiene mayor número de dimensiones.

$5a^3b-b^4+2abm^2$ es un polinomio homogéneo de 4.° grado.

Cuando se quiere indicar que dos expresiones algebráicas son *iguales ó equivalentes,* es decir que tienen el mismo valor sean cualesquiera los valores particulares que se den á cada letra, se pone entre ellas el signo $=$. La primera expresion se llama primer miembro y la segunda, segundo. Para indicar la *desigualdad* de dos expresiones se usa de los signos $>$ ó $<$, segun que el primer miembro sea mayor ó menor que el segundo. Las palabras *igual, mayor y menor,* no siempre expresan una relacion cuantitativa, sino una relacion de valor, dependiente tambien de la afeccion de la cantidad. Solo en este sentido puede decirse que las cantidades negativas son menores que cero, y que de dos cantidades negativas, la mayor es aquella cuyo valor cuantitativo es menor.

$$a+b=b+a \qquad a+b>a \qquad a<2a \qquad -a<o \qquad -a>-2a$$

4. Llámase *fórmula* á una expresion algebráica, en que está cifrada una propiedad general de la cantidad, ó el procedimiento, que conduce á la resolucion de un problema.

Las fórmulas abrevian el enunciado y el procedimiento, con que se resuelven todas las cuestiones matemáticas, generalizando ademas todos los resultados; y por eso el álgebra, que considera á las cantidades bajo el aspecto mas general, puede llamarse la *ciencia de las fórmulas*.

Traducir una fórmula al lenguaje ordinario es, deducir de ella un teorema general, ó una regla, para resolver todas las cuestiones de la misma especie que la que dió orígen á la fórmula.

Así, las fórmulas $a+b=b+a$ y $ab=ba$ indican dos propiedades de la adicion y multiplicacion muy importantes, relativas al órden de los datos.

Respecto de la segunda parte, propongámonos antes resolver el siguiente problema: *Hallar dos números cuya suma es 100 y su diferencia 10.*

Llamando x el número menor, el mayor será $x+10$;
luego la suma de los dos estará bien expresada por $2x+10$
y como esta suma ha de ser igual á 100, tendremos $2x+10=100$
de donde se deduce, segun las consecuencias de la adicion, que $2x=100-10$
ó lo que es lo mismo $2x=90$ y por consiguiente $x=45$
Siendo el número menor 45, el mayor será $45+10$ ó sea 55

Dada la suma y la diferencia de otros dos números, es evidente que haciendo los mismos razonamientos, y por consiguiente los mismos cálculos, llegaremos á su determinacion. Para descubrir en toda su sencillez esta ley constante ó método general de combinacion entre los datos, no basta la resolucion de un caso particular como el anterior, pues alterados radicalmente los datos 100 y 10 con la realizacion de los cálculos sucesivos, no hay posibilidad de conocer en los resultados 45 y 55 la série de operaciones, que los han producido. Este inconveniente se evita representando por letras, y por consiguiente de una manera general, lo mismo los datos que las incógnitas, en cuyo supuesto, el problema propuesto se enunciará así:

Hallar dos cantidades cuya suma sea S *y su diferencia* D.

Llamando x la menor, la otra será $x+D$; y la suma de las dos $2x+D$
y como esta suma ha de ser igual á S, tendremos $2x+D=S$
de donde se deduce, segun las consecuencias de la adicion, que $2x=S-D$

y por consiguiente $x=\frac{S-D}{2}$ ó lo que es lo mismo $x=\frac{S}{2}-\frac{D}{2}$

Siendo la cantidad menor $\frac{S}{2}-\frac{D}{2}$, la mayor será $\frac{S}{2}-\frac{D}{2}+D$ ó bien $\frac{S}{2}+\frac{D}{2}$

Estos resultados ó fórmulas finales nos dicen claramente las operaciones, que deben ejecutarse con los datos, para determinar, cada una de las incógnitas. De su traduccion al lenguaje ordinario se deduce, que la cantidad mayor es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y la menor es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

La simple aplicacion de esta regla al ejemplo primero, nos dará los valores de las incógnitas. Siendo pues $S=100$ y $D=10$, el número mayor será $50+5$ ó 55 y el menor $50-5$ ó sea 45.

Vemos pues que las fórmulas algebráicas no solo facilitan y abrevian, sino que tambien generalizan la resolucion de las cuestiones relativas á la cantidad.

CALCULO ALGEBRAICO.

Cálculo de las cantidades reales.

Cantidades enteras. Cantidades fraccionarias. Cantidades irracionales.

Cálculo de las cantidades imaginarias.

Preliminares. Adicion, Sustraccion, Multiplicacion, Division, Elevacion y Extraccion.

Fórmula de Newton.

Teoria de las combinaciones. Fórmula de Newton y sus aplicaciones al cálculo algebráico.

5. El CALCULO ALGEBRÁICO en general enseña las transformaciones legítimas, que pueden recibir las expresiones de la cantidad. Los resultados de este cálculo conservan siempre la inapreciable ventaja de representar el modo, con que los datos concurren á su formacion.

Las operaciones ordinarias del cálculo aritmético tienen en álgebra una acepcion mas general: así el objeto de la *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion*, etc., de las cantidades literales es, hallar una cantidad algebráica, cuyo valor sea equívalente á la suma, resta, producto, etc., de los valores de los datos.

Hay un cálculo algebráico para las cantidades reales y otro para las imaginarias. El de las reales se subdivide en cálculo de las cantidades enteras, cálculo de las cantidades fraccionarias y cálculo de las cantidades irracionales.

CÁLCULO ALGEBRÁICO DE LAS CANTIDADES ENTERAS.

Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices.

Adicion de las cantidades algebráicas enteras.

Caracter positivo ó negativo de la suma. Adicion de dos ó mas monomios ó polinomios.

6. La *adicion algebráica* no es precisamente la suma de los valores cuantitativos de los sumandos, como en aritmética, sino la reduccion á una expresion única de los valores cuantitativos y cualitativos de todos ellos. Por eso ha de atenderse tanto á los signos que acompañan á las cantidades. Así;

La suma de dos ó mas cantidades positivas es positiva. La suma de dos ó mas cantidades negativas es negativa. La suma de varias cantidades unas positivas y otras negativas, es positiva, nula ó negativa.

La adicion algebráica no lleva, pues, la idea de aumentar un resultado, sino la de juntar varias cantidades en una sola, que puede ser cero, ó mayor ó menor que cada uno de los sumandos.

Adicion de dos ó mas monomios.

7. La *suma de dos ó mas monomios* es el polinomio, que resulta de escribirlos unos al lado de otros con sus mismos signos.

$$(+a)+(+b)=+a+b \qquad (+a)+(-b)=+a-b$$
$$(-a)+(-b)=-a-b \qquad (-a)+(+b)=-a+b$$

La suma de $5a^2$ $2ab$ $-3a$ y $2m$ es igual á $5a^2+2ab-3a+2m$

Luego todo polinomio se puede considerar como la suma algebráica de los monomios, que le componen. El valor numérico ó geométrico de un polinomio no varia, aunque se altere el órden de la colocacion de sus términos.

8. Llámanse *términos semejantes* los que tienen los mismos factores literales ó sean las mismas letras y en cada una iguales exponentes, aunque sean diferentes los signos y los coeficientes.

Asi $5a^3m^2b$ $\quad -2a^3m^2b \quad 10a^3m^2b$ y a^3bm^2 son *semejantes.*

La *suma de dos ó mas términos semejantes* se simplifica, reduciéndolos á uno solo. Para conseguir esto, basta escribir por coeficiente de la parte literal la suma de los coeficientes de los términos semejantes, si tienen un mismo signo, ó la diferencia, si tienen signos contrarios. En el primer caso el resultado llevará el signo comun, y en el segundo llevará el signo del mayor coeficiente.

La suma de $5a^2 \quad a^2$ y $4a^2$ será $5a^2+a^2+4a^2=10a^2$

Del mismo modo, la suma de $-2a^2b, \quad -a^2b$ y $3a^2b$

será $-2a^2b-a^2b+3a^2b=-3a^2b+3a^2b=o$

Ultimamente $-4ab^2$ es la suma de los monomios siguientes:

$5a^2, \quad -2a^2b, \quad 4a^2, \quad 3m, \quad -4ab^2, \quad -9a^2, \quad m, \quad 2ba^2$ y $-4m$

Adicion de dos ó mas polinomios.

9. La *suma de dos ó mas polinomios* es el polinomio, que resulta de escribir todos los términos de los sumandos unos al lado de otros con sus mismos signos.

Sean los sumandos $a+b-c$ y $m-n$

El primer sumando $a+b-c$ es la suma de los monomios a, b y $-c$

el segundo sumando $m-n$ es la suma de m y $-n$

luego la *suma total* de ambos polinomios será $a+b-c+m-n$ (*)

Si los sumandos son $3a+5ab-9a+4b-3$ y $-4ab+6a-4b-1$;

la *suma* será $3a+5ab-9a+4b-3-4ab+6a-4b-1=ab-4$

Siempre que los sumandos tengan términos semejantes, es conveniente escribir estos en columna, para hacer mas fácil la reduccion.

Hallar la suma de los polinomios que siguen.....

$5a^2+4am^2+3a^2b \qquad 5a^2b-a^2+a^2m-b \qquad -3a^2-a^2m+b-8ba^2$

$$\text{Disposicion del cálculo}\left\{\begin{array}{ll} 5a^2+4am^2+3a^2b+a^2m-b \\ -a^2 \qquad\qquad +5a^2b-a^2m+b \\ -3a^2 \qquad\qquad -8a^2b \end{array}\right\}$$

Suma reducida a^2+4am^2

$$\text{Otro ejemplo}\left\{\begin{array}{l} 5a^2b-3a-2am+2ab^2-5a+m+2b^5m \\ 2b^5m-5m-ab^2-4a^2b+7a-1-am \\ -a^2b+1+3am-4b^5m+4m+a-ab^2 \end{array}\right\}\text{Suma}=\textit{cero}$$

(*) De otro modo: la suma de $a+b-c$ y m es igual á $a+b-c+m$
luego la suma de $a+b-c$ y $m-n$ será $a+b-c+m-n$ segun las consecuencias que se deducen de la misma definicion general de la adicion.

Sustraccion de las cantidades algebráicas enteras.

Carácter positivo ó negativo del resíduo. Sustraccion de un monomio de otra cantidad algebráica. Sustraccion de los polinomios.

10. El resíduo de dos cantidades, ambas positivas ó negativas, puede ser positivo, nulo ó negativo. El resíduo de dos cantidades, una positiva y otra negativa, puede ser positivo o negativo.

La sustraccion algebráica ó literal no lleva en sí la idea de disminucion, como sucede en la aritmética, sino la de determinar una cantidad, que sumada con el sustraendo dé el minuendo, verificándose en algunos casos que el resíduo es mayor que el minuendo.

Sustraccion de un monomio de otra cantidad algebráica.

11. El *resíduo entre una cantidad literal y un monomio* es, la suma algebráica del minuendo y el sustraendo, cambiando á este su signo.

El minuendo será evidentemente igual á la suma algebráica del sustraendo y el resíduo obtenido por la regla anterior.

$(+a)-(+b)=+a-b \qquad (+a)-(-b)=+a+b$

$(-a)-(-b)=-a+b \qquad (-a)-(+b)=-a-b$

La diferencia de M y $3a^2b$ es igual $M-3a^2b$ pues $M-3a^2b+3a^2b=M$

La diferencia de M y $-3a^2b$ es igual $M+3a^2b$ pues $M+3a^2b-3a^2b=M$

Sustraccion de los polinomios.

12. El *resíduo de dos polinomios* es la suma algebráica del minuendo y el sustraendo, cambiando los signos á todos los términos de este.

Sea el minuendo $a+b-c$ y $m\pm n$ el sustraendo

El resíduo entre $a+b-c$ y m es igual á $a+b-c-m$

luego el resíduo entre $a+b-c$ y $m\pm n$ será $a+b-c-m\mp n$

La diferencia $5a^2+3ab-2m-(4a^2+ab-6m+1)$

será $5a^2+3ab-2m-4a^2-ab+6m-1=a^2+2ab+4m-1$

Cuando el minuendo y el sustraendo tienen términos semejantes, se escriben de modo que estos formen columna, con el objeto de facilitar la reduccion.

Hallar la diferencia de $5a^2b+4ab^2-3a^2m+a^2+1$ y $-3a^2m-a^2+1+ab^2$

Disposicion del cálculo $\left\{\begin{array}{r} 5a^2b+4ab^2-3a^2m+a^2+1 \\ -ab^2+3a^2m+a^2-1 \end{array}\right\}$

Resíduo $5a^2b+3ab^2+2a^2$

Esc. Todo polinomio se puede considerar como la diferencia de dos expresiones algebráicas, compuestas de sus mismos términos. El *minuendo* puede ser cero, uno, dos, ó mas términos, y todos los demas, encerrados dentro de un paréntesis, y con signos contrarios, serán el *sustraendo.*

Segun esto, el polinomio $A+B-C-D+L$

puede tomar las formas diferentes que se expresan á continuacion.....

$A+B-C-D-(-L) \qquad A+B-(C+D-L)$

$A+B-C-(D-L) \qquad A-(-B+C+D-L)$

$\text{cero}-(-A-B+C+D-L)=-(C+D-A-B-L)$ (*)

(*) Siendo la *adicion* y la *sustraccion* las operaciones mas simples del cálculo, solo en casos particulares se pueden simplificar. Por esta razon nos hemos limitado á indicar en general una y otra operacion, simplificando los resultados únicamente cuando los datos reunen ciertas condiciones de semejanza.

Multiplicacion de las cantidades algebráicas enteras.

arácter positivo ó negativo del producto. Multiplicacion de dos ó mas monomios, de un polinomio por un monomio, y de dos ó mas polinomios. Casos particulares de la multiplicacion.

---

13. El producto de dos cantidades positivas ó negativas es positivo. El producto de dos cantidades, una positiva y otra negativa, es negativo.

$$+A\times+B=+AB \qquad -A\times-B=+AB \qquad +A\times-B=-AB \qquad -A\times+B=-AB$$

pues segun la definicion general de la multiplicacion, si el signo del multiplicador es el de la unidad positiva, el signo del producto será el mismo del multiplicando, y si el signo del multiplicador es contrario al de la unidad positiva, el signo del producto será contrario al que lleve el multiplicando.

Del mismo modo, se verifican los productos siguientes:

$\pm\times+$ ó $+$ por $\pm=\pm$	$\mp$ por $+$ ó $+$ por $\mp=\mp$
$\pm\times-$ ó $-$ por $\pm=\mp$	$\mp$ por $-$ ó $-$ por $\mp=\pm$

Multiplicacion de dos ó mas monomios.

14. El valor absoluto de un producto no varia, aunque se altere el órden de los factores; y por consiguiente el producto de dos ó mas productos indicados es un producto único compuesto de todos los factores.

$$ABC=ACB=BAC=BCA=CAB=CBA \qquad ABC\times MN=ABCMN$$

Para hallar el *producto de dos monomios*, se multiplican sus coeficientes y se escriben á continuacion las letras diferentes de ambos factores. Si hubiere letras iguales, basta escribir una con la suma de sus exponentes (*). El producto total será positivo, si los factores tienen un mismo signo, y negativo en caso contrario.

Hallar el producto de los monomios $+5a^3b$ y $-3ab^2n$

El valor absoluto del producto de los monomios dados será igual á.....

$$5\times3\times a^3\times a\times b\times b^2\times n=5\times3\times aaa\times a\times b\times bb\times n=15a^4b^3n$$

y como el multiplicador es negativo, el signo del producto será contrario al del multiplicando; y tendremos..... $+5a^3b\times-3ab^2n=-15a^4b^3n$

Otros ejemplos;

$$-10a^2b^5m\times+2bn^2=-20a^2b^6mn^2$$
$$-5b^2m\times-ab^2t^5=+5ab^4mt^5$$
$$\pm abm^2\times-b^2mn=\mp ab^3m^3n$$

Cuando los factores son mas que dos, se halla el producto total multiplicando dos cualesquiera de ellos, luego el producto de estos por otro y asi sucesivamente.

$$4b^2mt\times-2mt^4\times-b^3m=-8b^2m^2t^5\times-b^3m=+8b^5m^3t^5$$
$$-2a^2b\times\mp5at^2\times10ab^2m\times-b^4n=\mp100a^4b^7t^2mn$$

(*) Asi, tendremos $a^3\times a^2=a^5$ $\quad a^m\times a^n=a\times a\times a\ldots\ldots\times a\times a\ldots\ldots=a^{m+n}$ es decir que; el producto de dos potencias de una cantidad es esta misma cantidad con un exponente igual á la suma de los exponentes de los factores. Este teorema se enuncia tambien diciendo: *para multiplicar dos cantidades iguales, se suman sus exponentes.*

Siempre que m ó n estén por exponente, representan (al menos por ahora) números enteros y positivos.

Esc. El producto de cualquiera número de factores positivos es positivo. El producto de un número par de factores negativos es positivo. El producto de un número impar de factores negativos es negativo. Luego, si uno de los factores de un producto muda de signo, el producto muda de signo. Si dos factores ó en general un número par de factores mudan de signo, el producto no muda de signo. El producto de cualquiera número de factores monomios es siempre otro monomio; y no varia aunque se altere el órden de los factores.

Multiplicacion de un polinomio por un monomio.

15. El producto de una suma ó diferencia indicada por otra cantidad, es gual á la suma ó diferencia de los productos parciales de cada parte ó término del multiplicando por el multiplicador.

$$(A+B+C)\times m=Am+Bm+Cm \qquad (A-B)\times m=Am-Bm$$

Para *multiplicar un polinomio por un monomio*, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, y la suma algebráica de los productos parciales será el producto total.

$$(A+B-C+D)\times +m=+Am+Bm-Cm+Dm$$
$$(A+B-C+D)\times -m=-Am-Bm+Cm-Dm \quad (*)$$
$$(7ab^3mn+4ab^2-m^5n)\times 5ab^2m=35a^2b^5m^2n+20a^2b^4m-5ab^2m^6n$$
$$(2b^3m-5ab^2n\pm 4b-1)\times -ab^2m=-2ab^5m^2+5a^2b^4mn\mp 4ab^3m+ab^2m$$

Si el multiplicador es el producto indicado de dos ó mas monomios, se multiplica cada término del multiplicando por el producto de los factores del multiplicador.

$$(5ab-m-2b^2n\mp am^5)\times -2a^2bm\times -am=(5ab-m-2b^2n\mp am^5)\times 2a^3bm^2$$
$$\text{ó bien} \quad 10a^4b^2m^2-2a^3bm^3-4a^3b^3m^2n\mp 2a^4bm^7$$

Esc. El producto de un polinomio por uno, dos ó mas monomios consta de tantos términos como tiene el polinomio. Si el multiplicando no tiene términos semejantes, el producto no admite reduccion. El producto es el mismo, aunque se varíe el órden de multiplicar los términos del polinomio por el monomio.

Multiplicacion de dos ó mas polinomios.

16. El producto de una suma ó diferencia indicada por otra suma ó diferencia tambien indicada, es igual á la suma ó diferencia de los productos parciales de cada parte del multiplicador por todo el multiplicando.

$$(A+B)(M+N)=AM+BM+AN+BN \qquad (A-B)(M+N)=AM-BM+AN-BN$$
$$(A+B)(M-N)=AM+BM-AN-BN \qquad (A-B)(M-N)=AM-BM-AN+BN$$

Para *multiplicar dos polinomios*, se multiplica cada término de uno de los factores, por todos los términos del otro, y la suma algebráica de los productos parciales será el producto total.

$$(A+B-C)\times(M-N\pm P)=AM+BM-CM-AN-BN+CN\pm AP\pm BP\mp CP$$

$$\left.\begin{array}{l} 3ab-5b^2m+b^5m \\ 4ab^2-a^2b \end{array}\right\} \text{factores}$$

$$12a^2b^3-20ab^4m+4ab^7m-3a^3b^2+5a^2b^3m-a^2b^6m \qquad \text{Producto total}$$

(*) Cuando el multiplicador es negativo, se multiplica el polinomio por el monomio positivo, y cambiando los signos al resultado, tendremos el producto que se pide, pues ya sabemos que, si uno de los factores de un producto muda de signo, tambien el producto muda de signo.

17. Para facilitar en algunos casos la reduccion de los términos semejantes en el producto, se ordenan el multiplicando y el multiplicador con relacion á una misma letra, llamada *letra principal*, es decir, se vuelven á escribir sus términos de modo que los exponentes de esta letra vayan disminuyendo ó aumentando desde el primer término al último. Generalmente se prefiere la ordenacion por las potencias descendentes de la letra principal. De uno ú otro modo el mayor exponente de la letra ordenatriz ó principal determina el *grado* de cada polinomio, con relacion á dicha letra.

El polinomio $5a^3m+2a^5m^2+4a+3a^2m^5-m^4+2a^4m^6b$
ordenado por la letra a, será $2a^5m^2+2a^4m^6b+5a^3m+3a^2m^5+4a-m^4$
ordenado por la letra m, será $4a+5a^3m+2a^5m^2-m^4+3a^2m^5+2a^4m^6b$ (*)

Se considera como coeficiente de la letra ordenatriz en cada término el producto de los demas factores, que componen dicho término. Si dos ó mas términos tienen la letra principal con un mismo exponente, se escriben unos debajo de otros, ó bien se descomponen en dos factores, uno la letra ordenatriz y otro la suma algebráica de sus coeficientes.

$3a^5m^2+2a^5m-a^5$ se escriben así $(3m^2+2m-1)a^5$ ó bien $\begin{array}{r|l} 3m^2 & a^5 \\ 2m & \\ -1 & \end{array}$

Esto supuesto, propongámonos hallar el producto de los polinomios...

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Multiplicando} & 5a^3-4a^2b+5ab^2-3b^3 \\
\textbf{Multiplicador} & 4a^2-5ab-b^2 \\
\hline
 & 20a^5-16a^4b+20a^3b^2-12a^2b^3 \\
 & \qquad -25a^4b+20a^3b^2-25a^2b^3+15ab^4 \\
 & \qquad\qquad -5a^3b^2+4a^2b^3-5ab^4+3b^5 \\
\hline
\textbf{Producto total} & 20a^5-41a^4b+35a^3b^2-33a^2b^3+10ab^4+3b^5
\end{array}$$

Del mismo modo $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\times(a-b)=a^5-b^5$

*Hallar el producto de....

$2am^5-2bm^4-m^5-m^3+(ab+5a^2)m^4+am^3+m^5b$ por $am^2-10a+m^2$

$$\begin{array}{lr|l|l|l}
\textbf{Multiplicando} & 2a & m^5+5a^2 & m^4 \quad +a & m^3 \\
 & b & -2b & \quad -1 & \\
 & -1 & ab & & \\
\textbf{Multiplicador} & a & m^2-10a & & \\
 & 1 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
2a^2 & m^7+5a^3 & m^6 \quad +a^2 & m^5-50a^3 & m^4-10a^2 & m^3 \\
ab & -2ab & -1 & +20ab & +10a & \\
-a & +a^2b & -20a^2 & -10a^2b & & \\
2a & +5a^2 & -10ab & & & \\
b & -2b & +10a & & & \\
-1 & ab & & & &
\end{array}$$

Producto reducido $(2a^2+ab+a+b-1)m^7+(5a^5-ab+a^2b+5a^2-2b)m^6+\ldots$
$(10a-19a^2-1-10ab)m^5+(20ab-10a^2b-50a^3)m^4+(10a-10a^2)m^3$

(*) Un polinomio se llama *completo* ó *incompleto* con relacion á una letra, segun que contenga ó no contenga todas las potencias consecutivas desde la mayor á la menor.
El polinomio del testo es completo con relacion á la letra a, é incompleto con relacion á m.

Esc. El producto de dos polinomios homogéneos es homogéneo, y de un grado igual á la suma de los grados de los factores.

El número de términos del producto de dos polinomios, antes de la reduccion, es igual al producto del número de términos del multiplicando por el número de términos del multiplicador. Si el producto admite reduccion, dos de sus términos no serán semejantes con ninguno de los otros: estos dos términos son; el producto de los dos términos de los factores en que una letra cualquiera tiene el mayor exponente, y el producto de los dos términos, en que la misma letra tiene el menor exponente, pues el primero contiene á dicha letra con el exponente máximo y el segundo la contiene con el exponente mínimo, no siendo por lo tanto semejantes con ninguno de los demas productos parciales.

Luego, si se multiplican dos polinomios ordenados, con respecto á una misletra, el primer término del resultado será igual al producto de los dos primeros términos de los factores, y el último, al producto de los dos últimos.

Propongámonos multiplicar $Am^5+Bm^4-Cm^3$ por Pm^2+Qm

$$(Am^5+Bm^4-Cm^3)(Pm^2+Qm)=\left\{\begin{array}{l} APm^7+BPm^6-CPm^5 \\ \qquad +AQm^6+BQm^5-CQm^4 \end{array}\right.$$

Producto total... $APm^7+(BP+AQ)m^6+(BQ-CP)m^5-CQm^4$

ó sea un polinomio ordenado con respecto á la misma letra principal de los factores, y cuyo *primer término* es igual al producto de los dos primeros términos de los factores, y el *último* es el producto de los dos últimos.

Para hallar el producto de tres ó mas polinomios, se multiplican dos de ellos, luego el producto de estos por otro, y así sucesivamente.

Casos particulares de la multiplicacion.

13. Entre otros son muy notables los productos que siguen:

$$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$$
$$(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$$
$$(a^4+a^3+a^2+a+1)(a-1)\ldots\ldots\ldots\ldots=a^5-1$$
$$(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+\ldots ab^{n-1}+b^n)(a-b)=a^{n+1}-b^{n+1}$$
$$(a^n+a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots a^2+a+1)(a-1)=a^{n+1}-1$$

De la traduccion algebráica de las tres primeras fórmulas se deduce que: El cuadrado de la suma ó diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, mas ó menos el duplo de la primera por la segunda, mas el cuadrado de la segunda. Y tambien que: El producto de la suma de dos cantidades, por su diferencia equivale á la diferencia de sus cuadrados; y recíprocamente, la diferencia de dos cuadrados será equivalente á la suma por la diferencia de sus raices cuadradas.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad (a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$$

La descomposicion en factores de un polinomio facilita en algunos casos la multiplicacion de un polinomio por otro.

***19.** *Para multiplicar un polinomio ordenado por otra cantidad independiente de la letra ordenatriz,* basta efectuar la multiplicacion sobre los coeficientes de las diferentes potencias de la letra principal.

Siendo el multiplicando $(a^2+ab+b^2)x^3+5(a+b)x^2-(b-a)x+1$

y $a-b$ el multiplicador, independiente de la letra ordenatriz x del otro factor; el producto será $(a^3-b^3)x^3+5(a^2-b^2)x^2+(a^2-2ab+b^2)x+a-b$

Division de las cantidades algebráicas enteras.

Caracter positivo ó negativo del cociente. Division de dos monomios, de un polinomio por un monomio, de dos polinomios, ó de un monomio por un polinomio. Casos particulares de la division.

20. El cociente de dos cantidades positivas ó negativas es siempre positivo. El cociente de dos cantidades una positiva y otra negativa es siempre negativo.

$$+A:+B=+\frac{A}{B} \quad -A:-B=+\frac{A}{B} \quad +A:-B=-\frac{A}{B} \quad -A:+B=-\frac{A}{B}$$

Estas verdades se deducen fácilmente de sus análogas de la multiplicacion.

Del mismo modo se verifican los cocientes que siguen:

$$\pm:+ \text{ ó } +:\pm=\pm \qquad \mp:+ \text{ ó } +:\mp=\mp$$
$$\pm:- \text{ ó } -:\pm=\mp \qquad \mp:- \text{ ó } -:\mp=\pm$$

Division de dos monomios.

21. El cociente de dos cantidades es el mismo, aunque se supriman del dividendo y divisor unos mismos factores.

El cociente de $A\times m$ y $B\times m$ es igual al cociente de A por B, pues si llamamos Q á este último; tendremos..... $A=B\times Q$

y por consiguiente $A\times m=B\times m\times Q$ y $Q=\frac{A\times m}{B\times m}$; luego $\frac{A}{B}=\frac{A\times m}{B\times m}$

Para hallar el *cociente de dos monomios*, se divide el coeficiente del dividendo por el coeficiente del divisor y se copian las letras diferentes; en el numerador del cociente las del dividendo, y en el denominador las del divisor. Las letras iguales se suprimen, si el exponente es uno mismo, y en otro caso se suprimen las potencias comunes del dividendo y divisor (*). El cociente total es positivo, si el dividendo y divisor tienen un mismo signo, y negativo en caso contrario.

La division es exacta cuando el cociente es una cantidad entera.

Hallar el cociente de $-15a^4b^6mn:+5a^3b^2n$

El valor absoluto del cociente de los monomios dados será igual á

$$\frac{15a^4b^6mn}{5a^3b^2n}=\frac{15aaaabbbbbbmn}{5aaabbn}=\frac{3abbbbm}{1}=3ab^4m$$

y como los signos del dividendo y divisor son opuestos, el del cociente será negativo; y tendremos..... $-15a^4b^6mn:+5a^3b^2n=-3ab^4m$

$$-20ab^6pm^2n:-10ab^5p=+2bm^2n \qquad 2a^2b^5m:+7ab^5m=+\frac{2a}{7}$$

$$+5ab^4mn:-ab^5m^2n=-\frac{5}{bm} \qquad 7m^4b:-21m^4b^2t=-\frac{1}{3bt}$$

Esc. Si el dividendo ó divisor muda de signo, el cociente muda de signo. Si el dividendo y divisor mudan de signo, el cociente no muda de signo.

(*) Así, tendremos $a^5:a^3=a^2$; $a^m:a^n=aaaa....:aaa...=a^{m-n}$ (suponiendo $m>n$); es decir que: el cociente de dos potencias de una misma cantidad, es esta misma con un exponente igual á la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor.

Este teorema se enuncia abreviadamente diciendo que, *para dividir dos cantidades iguales, se restan sus exponentes.*

El cociente de dos monomios es otro monomio entero ó fraccionario, segun que el dividendo contenga ó no todos los factores del divisor. No contendrá todos los factores en cualquiera de los casos siguientes: 1.° Cuando el coeficiente del dividendo no es múltiplo del coeficiente del divisor: 2.° Si el dividendo contiene una letra con un exponente menor que el exponente de la misma en el divisor; y 3.° Si contiene el divisor alguna letra, que no se halle en el dividendo.

Para dividir tres ó mas monomios entre sí, se divide el primero por el segundo, y luego el cociente de estos por otro, y así sucesivamente. Tambien se puede dividir el dividendo por el producto de todos los divisores.

22. Hemos dicho que al dividir dos monomios se suprimen del dividendo y divisor las letras iguales con un mismo exponente. Veamos si por una nueva notacion conservamos en el cociente esta letra comun á los dos términos de la division.

Suponiendo el dividendo A^m y el divisor A^m; el cociente será la unidad; pero, si el cociente de A^m por A^n se expresa por A^{m-n}, tambien el de A^m por A^m se deberá expresar por A^{m-m} ó lo que es lo mismo por A^0; y por consiguiente la unidad y A^0 serán equivalentes.

El exponente *cero* no tiene sentido alguno en la definicion primitiva del exponente, pero, como su procedencia es la division de dos potencias iguales de la cantidad á que se halla afecto, se puede establecer que ***toda cantidad con exponente cero es igual á la unidad.***

El cociente de $10a^5b^4$ por $-2a^2b^4$ es igual á $-5a^3b^0$ ó bien á $-5a^3$

Division de un polinomio por un monomio.

23. El cociente de una suma ó diferencia indicada por otra cantidad, es igual á la suma ó diferencia de los cocientes de cada parte del dividendo por el divisor.

$$(A+B+C) : m = \frac{A}{m}+\frac{B}{m}+\frac{C}{m} \qquad (A-B) : m = \frac{A}{m}-\frac{B}{m}$$

pues, en uno y otro caso, el cociente multiplicado por el divisor será igual al dividendo.

Para *dividir un polinomio por un monomio*, se divide cada término del polinomio por el monomio, y la suma algebráica de los cocientes parciales será el cociente total.

$$(A+B-C\pm D) : +m = \frac{A}{m}+\frac{B}{m}-\frac{C}{m}\pm\frac{D}{m}$$

$$(A+B-C\pm D) : -m = -\frac{A}{m}-\frac{B}{m}+\frac{C}{m}\mp\frac{D}{m}$$

$$(12ab^4m-8b^5m\pm 2ab^2m^5) : 2b^2m = 6ab^2-4b^3\pm am^4$$

$$\frac{4ab^3m^2+2ab^2m-6a^2b^2\mp b^2m}{-2ab^2m} = -2bm-1+\frac{3a}{m}\pm\frac{1}{2a}$$

Esc. El cociente de un polinomio por un monomio consta de tantos términos como tiene el polinomio, y no varía, aunque se altere el órden de dividir los términos del dividendo por el divisor. Si el dividendo no tiene términos semejantes, tampoco lo serán los cocientes parciales. Ultimamente, el cociente de un polinomio por un monomio será entero, si todos los cocientes parciales son enteros; en otro caso la division es inexacta y el cociente total será fraccionario.

Division de dos polinomios.

24. Ordenados el dividendo, el divisor y el cociente con respecto á una misma letra, el primer término del dividendo es igual al producto del primer término del cociente por el primero del divisor (**12.** *Esc.*); y por consiguiente se hallará el primer término del cociente, dividiendo el primero del dividendo por el primero del divisor. Esto supuesto:

Para *dividir dos polinomios*, despues de ordenados con respecto á una misma letra, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor y tendremos el primer término del *cociente*. Se multiplica este cociente por todo el divisor y se resta el producto del dividendo. Se divide el primer término del resto por el primero del divisor y tendremos el segundo término del cociente, continuando así hasta hallar un resto cero, ó un resto cuyo primer término no sea divisible por el primero del divisor: en el primer caso la division total será exacta y en el segundo no lo será.

Hallar el cociente de $2a^4t^3+a^2m^2+at^3m+2a^5m+mt^2+2a^3t^2$ por $a^2m+t^2+at^3$

Ordenados el dividendo y el divisor con respecto á la letra a; tendremos.....

Dividendo.	$2a^5m+2a^4t^3+2a^3t^2+a^2m^2+at^3m+mt^2$	$a^2m+at^3+t^2$ divisor
(*)	$-2a^5m-2a^4t^3-2a^3t^2$	$2a^3+m$ cociente
1.er resíduo ó 2.° divid. parcial. . .	$+a^2m^2+at^3m+mt^2$	
(**)	$-a^2m^2-at^3m-mt^2$	
Resíduo final.	$0 \quad 0 \quad 0$	

Considerando al *dividendo* como el producto del divisor por el cociente, su primer término $2a^5m$ será igual al producto del primero del divisor a^2m por el primero del cociente; luego dividiendo dicho primer término $2a^5m$ del *dividendo* por el primero a^2m del *divisor*, tendremos el primero $2a^3$ del *cociente*.

Restando ahora del *dividendo* el producto $2a^5m+2a^4t^3+2a^3t^2$, que resulta de multiplicar el *divisor* por el primer término del cociente, el *residuo* $a^2m^2+at^3m+mt^2$ será igual al *divisor* multiplicado por los demas términos del cociente. Luego, si dividimos su primer término a^2m^2 por a^2m primero del divisor, tendremos el segundo m del cociente.

Restando de nuevo del dividendo parcial, el producto de m por todo el divisor, el resultado es cero; luego al *cociente total* pedido, será $2a^3+m$ Evidentemente el producto del divisor por todo el cociente es igual al dividendo.

Otro ejemplo, cuyos datos estan ordenados tambien por la letra a.

$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	DIVIDENDO	$5a^4-2a^3b+4a^2b^2$
$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	2.° div. parcial	$a^3-4a^2b+2b^3$
$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	3r. div. parcial	(***)
resto=cero		

(*) Producto del primer término del cociente por todo el divisor, despues de mudar los signos.

(**) Producto del segundo término del cociente por todo el divisor despues de mudar los signos.

(***) En este ejemplo adoptamos las mismas simplificaciones indicadas en la *Aritmética*, efectuando las multiplicaciones y restas á la vez, y escribiendo solo los términos del residuo, que dá la reduccion, y los no reducibles del dividendo.

En algunos casos, los productos parciales del divisor por cada término del cociente no siguen el mismo órden que los términos del dividendo, pero esto en nada altera la marcha general de la operacion.

$$\begin{array}{ll|l}
\text{Dividendo} & 2a^5m+2a^4t^3+2a^3t^2+a^2m^2+at^3m+mt^2 \ldots & 2a^3+m \quad \text{divisor} \\ \cline{3-3}
 & +2a^4t^3+2a^3t^2 \ldots\ldots +at^3m+mt^2 & a^2m+at^3+t^2 \ \text{cociente} \\
 & +2a^3t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots +mt^2 & \\
 & \qquad \text{resto}=\textit{cero} &
\end{array}$$

Tambien puede suceder qne no haya en el dividendo términos semejantes á los que resulten de multiplicar el divisor por cada uno de los del cociente

$$\begin{array}{l|l}
a^3-b^3 \ldots\ldots\ldots & a-b \\ \cline{2-2}
+a^2b-b^3 & a^2+ab+b^2 \\
+ab^2-b^3 & \\
\text{resto}=\text{cero} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
a^3+a^2b-a^2b+ab^2-ab^2-b^3 & a-b \\ \cline{2-2}
+a^2b \ldots +ab^2-ab^2-b^3 & a^2+ab+b^2 \\
+ab^2 \ldots -b^3 & \\
\text{resto}=\textit{cero} &
\end{array}$$

***25.** Cuando el dividendo y divisor ó uno de ellos contienen á la letra principal elevada á la misma potencia en dos ó mas términos, conviene reducir antes á uno solo todos aquellos, en que dicha letra tiene el mismo exponente, disponiendo el cálculo como se ve á continuacion:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Dividendo} & 5a^2x^6-b^3x^7-5b^2x^6+a^2x^4+5ax^3+5bx^3+a^3x^7+b^2x^4+abx^4 \\
\text{Divisor} & x-bx^4+ax^4
\end{array}\right.$$

ordenados uno y otro con respecto á la letra x, serán.....

$$\begin{array}{ll|l}
 & (a^3-b^3)x^7+5(a^2-b^2)x^6+(a^2+ab+b^2)x^4+5(a+b)x^3 & (a-b)x^4+x \\ \cline{3-3}
\text{resto} & +5(a^2-b^2)x^6 \ldots\ldots\ldots +5(a+b)x^3 & (a^2+ab+b^2)x^3+5(a+b)x^2 \\
 & \quad \text{resto final}=0 &
\end{array}$$

Divisiones parciales $(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$ y $(a^2-b^2):(a-b)=a+b$

Hallar el cociente de los polinomios que siguen.....

$$\left\{\begin{array}{r|r|r|l}
5ab & m^7-50aq & m^5-bdm^3+abm & m-10aq \\
-b & +10q & +10dq &
\end{array}\right\}
\qquad
\left\{\begin{array}{r|l}
5a & m^5-dm+a \\
-1 &
\end{array}\right\}$$

***26.** Se puede efectuar tambien la division de dos polinomios sin ordenarlos, ú ordenándolos por las potencias ascendentes de la letra principal. En el primer caso se divide el término, en que la letra ordenatriz tiene en cada dividendo parcial el mayor exponente, por el término del divisor en que la misma letra tiene el mayor exponente. En el segundo se divide el primer término de cada dividendo parcial por el primero del divisor, continuando luego la operacion como en los ejemplos ya esplicados.

$$\begin{array}{ll|l}
\text{Dividendo} & 1-23a^4-9a^3+5a^5+2a \ldots\ldots\ldots & 2a+5a^2+1 \quad \text{divisor} \\ \cline{3-3}
 & 1-25a^4-10a^3 \ldots +2a & a^3-5a^2+1 \ \text{cociente ordenado} \\
 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots +2a+5a^2 & \\
 & \quad \text{resto}=\textit{cero} &
\end{array}$$

2.° $[4b^2a^4+4ba^5+4a^2b^2-a^2+a^4+2a^3-4ba^4-2a^5+4ba^3]:[2a^2-a+2ab]$

$$\begin{array}{r|l}
(4b^2-1)a^2+(4b+2)a^3+(4b^2-4b+1)a^4+(4b-2)a^5 & (2b-1)a+2a^2 \\ \cline{2-2}
+(4b^2-4b+1)a^4+(4b-2)a^5 & (2b+1)a+(2b-1)a^3 \\
\text{resto}=\textit{cero} &
\end{array}$$

División inexacta de los polinomios.

27. Sea cualquiera el número de términos, que se halle en el cociente, si se multiplican por todo el divisor y se resta el producto del dividendo, el *cociente* verdadero será igual á los términos hallados *mas* una expresion fraccionaria, cuyo numerador es el resto y su denominador el divisor.

Llamando A el dividendo, B el divisor y c los términos hallados en el cociente, el resto de la division será $A-Bc$

En este supuesto, vamos á demostrar que..... $A:B=c+\frac{A-Bc}{B}$

En efecto, tenemos $\frac{A-Bc}{B}=\frac{A}{B}-c$ (division de un polinomio por un monomio) y añadiendo á ambos miembros la cantidad $+c$, nos dará

$$\frac{A-Bc}{B}+c=\frac{A}{B}-c+c \quad \text{ó bien} \quad \frac{A}{B}=c+\frac{A-Bc}{B}$$

***28.** *Esto supuesto, el cociente de dos polinomios ordenados no es entero en los casos siguientes:*

1.° Cuando en el primer término de algun dividendo parcial la letra ordenatriz ó principal, tiene menor exponente que en el primero del divisor, ó lo que es lo mismo, cuando el primer término de algun dividendo parcial no es divisible por el primero del divisor, ó el último del dividendo no es divisible por el último del divisor.

$$[a^5b+a^4+a^3t+a^2b+10a+2t+2m]:[a^2b+a+t]=a^3+1$$

2.° dividendo parcial.... $+a^2b+10a+2t+2m$

3.^{r} dividendo parcial............$+\ 9a+\ t+2m$ ó sea el resto de la division;

luego el *cociente total*, será $a^3+1+\frac{9a+t+2m}{a^2b+a+t}$ (*)

2.° Si contiene el divisor alguna letra, que no tiene el dividendo, pues una tercera cantidad, multiplicada por el divisor dependiente de dicha letra, nunca puede dar un resultado independiente de ella.

La division de $5a^6+5a^5-10a^4+a^3-a^2$ por $5a^4+10a^3+b$ no es exacta, pues todos los productos del cociente por b no tienen semejantes en el dividendo.

3.° Si el exponente de la letra principal de un término cualquiera del cociente, sumado con el menor de la misma en el divisor, da un resultado menor que el exponente de dicha letra en el último término del dividendo; pues el producto de dichos términos del cociente y divisor no admite reduccion, ni menos destruccion, con ninguno de los del dividendo; luego nunca el resíduo será cero. (En este caso se suponen ordenados el dividendo y divisor por las potencias descendentes de la letra principal.)

Si el dividendo es $3a^8b^4+2a^7b-10a^5$ y $3a^5b^2+2a$ el divisor, la division será inexacta, pues el primer término del primer resíduo $2a^7b-10a^5-2a^4b^2$ no es divisible por el primero del divisor. Además el producto $2a^4b^2$ del primer término del cociente por el último del divisor no se puede reducir con ninguno de los términos del dividendo.

(*) Si se omite la ordenacion y se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, no se hallará cociente exacto aun cuando el dividendo sea divisible por el divisor; pero si se ordenan uno cualquiera de los restos y el divisor, todavía resultará (despues de la reduccion) el mismo cociente exacto que se hubiera obtenido dividiendo ambos polinomios ordenados desde el principio de la operacion. Si ordenados por una letra, se presenta imposible la division, se ordenarán por otra, no siendo por lo tanto inexacta la division, sino cuando ninguno de los términos de un dividendo parcial sea divisible por ninguno de los del divisor.

Division de un monomio por un polinomio.

29. Cualquiera que sea el número de términos que se halle en el cociente de dos cantidades algebráicas A y M+N, si se multiplican por todo el divisor y se resta el producto del dividendo, el cociente total será igual á los términos hallados C, mas una expresion fraccionaria cuyo numerador es el resto y su denominador el divisor (**23**).

Y por consiguiente $A:(M+N)=C+\frac{A-C(M+N)}{M+N}$ de donde se deduce que:

Para dividir un monomio por un polinomio, se divide el dividendo por el primer término del divisor y tendremos el primer término del *cociente*, continuando la operacion lo mismo que para dividir dos polinomios.

La division de un monomio por un polinomio es siempre inexacta; pues el producto de dos polinomios (cociente y divisor) tiene dos términos por lo menos, que no admiten reduccion con ninguno de los otros. (**17** *Esc.*)

Hallar el cociente de a^4 por el binomio $a+1$

a^4 dividendo.	$a+1$ divisor
$-a^3$	$a^3-a^2+a-1+\frac{1}{a+1}$ cociente
$+a^2$	
$-a$	
$+1$	

2.° ejemplo $2a^5b$.	$1-2a+a^2$
$+4a^6b-2a^7b$	$2a^5b+4a^6b+6a^7b+$etc.
$+6a^7b-4a^8b$	
$+8a^8b-6a^9b$ y así sucesivamente.	

3.° $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots\ldots$

4.° $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots\ldots$ (*)

Suponiendo $x=1$ en el ejemplo tercero, resulta la igualdad notable siguiente

$$\frac{1}{0}=1+1+1+1+\ldots\ldots\ldots\ldots=\infty \quad (\mathbf{103})$$

Casos particulares de la division.

***30** Si un polinomio ordenado con respecto á una letra a, se divide por el binomio $a-b$, el resto de la division será el mismo polinomio, sustituyendo en él la letra b por la letra a

Siendo el dividendo $Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+Ka+U$

Q el cociente entero de la division y R el resto; tendremos.....

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .+U=Q(a-b)+R$$

Si en esta igualdad damos á a un valor cualquiera, los dos miembros tomarán valores iguales. Sustituyendo b por a, el factor $a-b$ del segundo miembro se reduce á cero, y por consiguiente tendremos en tal supuesto,

$$Ab^m+Bb^{m-1}+Cb^{m-2}+.\ .\ .\ .\ .\ .+U=R$$

Es evidente que la division, en este caso, será exacta cuando la sustitucion de b por a en el polinomio dado le reduzca á cero.

(*) Los polinomios de un número indefinido de términos sometidos á una ley constante en su formacion como los cocientes de los últimos ejemplos, se llaman *séries*. La teoría de las séries forma una parte muy importante del estudio de las matemáticas.

Cor. El cociente de la suma ó diferencia de las potencias del mismo grado de dos cantidades, por la suma ó por la diferencia de estas mismas cantidades, da lugar á los cuatro casos que siguen, donde fácilmente se advierte la ley de formacion de los cocientes.

$(A^n-B^n):(A-B)=A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .+AB^{n-2}+B^{n-1}$

el cociente de esta division siempre es exacto, pues sustituyendo B por A en el dividendo, este se reduce á cero. El número de términos del cociente es n

Ademas, el primer resto de la division es $A^{n-1}B-B^n$ ó bien $B(A^{n-1}-B^{n-1})$ y por consiguiente tendremos $A^n-B^n=(A-B)\times A^{n-1}+B(A^{n-1}-B^{n-1})$ luego si $A^{n-1}-B^{n-1}$ es divisible por $A-B$, tambien lo será A^n-B^n, de donde se deduce que, si la diferencia de dos potencias de un mismo grado de dos cantidades es *divisible* por la diferencia de estas mismas cantidades, tambien lo será la diferencia de las potencias de un grado mas elevado en una unidad.

Esto supuesto, siendo A^2-B^2 divisible por $A-B$, tambien lo será A^3-B^3, y por consiguiente A^4-B^4..... y en general A^n-B^n

$$(a^5-b^5):(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$$
$$(M^4-1):(M-1)=M^3+M^2+M+1$$

Del mismo modo se pueden demostrar las proposiciones siguientes....

$(A^n+B^n):(A-B)=A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .+B^{n-1}+.....$

El cociente de esta division no es exacto, sea cualquiera el valor de n, pues sustituyendo B por A en el dividendo, este no se reduce á cero.

$$(a^5+b^5):(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4+\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

$(A^n-B^n):(A+B)=A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \pm B^{n-1}+......$

El cociente en este caso será exacto, ó no segun que n sea par ó impar, pues la sustitucion de $-B$ por A reduce el dividendo á cero si n es par, verificándose lo contrario si n es impar.

$$(a^5-b^5):(a+b)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$
$$(M^4-1):(M+1)=M^3-M^2+M-1$$

$(A^n+B^n):(A+B)=A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \pm B^{n-1}+......$

Este resultado será entero, ó no segun que n sea impar ó par; así tendremos...

$$(a^5+b^5):(a+b)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$$
$$(1+M^4):(1+M)=1-M+M^2-M^3+\text{etc.}$$

*31. *Para dividir un polinomio por una cantidad independiente de la letra ordenatriz*, basta efectuar la division de los coeficientes de las diferentes potencias de la letra principal por el divisor.

Si el dividendo es $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$ y M el divisor el cociente será $\frac{A}{M}x^4+\frac{B}{M}x^3+\frac{C}{M}x^2+\frac{D}{M}x+\frac{E}{M}$

y como todos estos términos son forzosamente desemejantes, para que un polinomio entero sea divisible por un divisor entero independiente de la letra ordenatriz del dividendo, se necesita y basta que cada uno de los coeficientes de la letra principal sea divisible por el divisor.

El cociente de $(y^4-1)x^2+(y^3-1)x+(y^2-1)$ por el binomio $y-1$ será $(y^3+y^2+y+1)x^2+(y^2+y+1)x+y+1$

Elevacion á potencias de las cantidades algebráicas enteras.

Carácter positivo ó negativo de la potencia. Elevacion de los monomios y polinomios.

32. Las potencias de grado par de una cantidad positiva ó negativa son *positivas*. Las potencias de grado impar de una cantidad positiva son *positivas*, y las de una cantidad negativa, son *negativas* (**13**).

Elevacion á potencias de los monomios.

33. La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de sus factores.

$(ABC)^n = ABC \times ABC \times ABC \times .... = AAA..... \times BBB..... \times CCC..... = A^n \times B^n \times C^n$

Como un monomio es el producto de varios factores, se elevará á una potencia, elevando á dicha potencia todos sus factores. Si el monomio es positivo, todas sus potencias serán positivas, y si es negativo serán positivas las de grado par y negativas las de grado impar.

Segun esto; el coeficiente se eleva como en aritmética, y las letras se copian en el resultado con un exponente igual al producto de su exponente por el grado ó índice de la potencia (*).

Hallar el cuadrado ó segunda potencia de $+5a^3b^2m$

El valor absoluto del cuadrado del monomio dado, será igual á.....

$(5a^3b^2m)^2 = 5^2 \times (a^3)^2 \times (b^2)^2 \times m^2 = 5^2 \times a^3 \times a^3 \times b^2 \times b^2 \times m^2 = 25a^6b^4m^2$

y por consiguiente tendremos..... $(+5a^3b^2m)^2 = +25a^6b^4m^2$

$(-2a^2bm^3)^3 = -8a^6b^3m^9$ $\quad (\pm a^5b^2m)^{2n} = a^{10n}b^{4n}m^{2n}$

Todas las potencias de un monomio son otro monomio.

Elevacion á potencias de los polinomios (**).

34. Cuadrado. El cuadrado de la suma algebráica de dos términos positivos, negativos, ó uno positivo y otro negativo es igual al cuadrado del primero, mas el doble del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo (**18**).

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

El cuadrado de un polinomio es igual al cuadrado del primer término, mas el duplo del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo, mas el duplo de los dos primeros por el tercero, mas el cuadrado del tercero, mas el duplo de los tres primeros por el cuarto, mas el cuadrado del cuarto y así sucesivamente.

Sea el polinomio propuesto $a+b\pm c$

llamando $a+b=M$ tendremos $a+b\pm c = M \pm c$; y por consiguiente.....

$(a+b\pm c)^2 = (M\pm c)^2 = M^2 \pm 2Mc + c^2$

sustituyendo ahora en lugar de M su valor $a+b$; será.....

$(a+b\pm c)^2 = (a+b)^2 \pm 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \pm 2(a+b)c + c^2$

(*) Asi, $(a^n)^3 = a^n \times a^n \times a^n = a^{3n}$ $\quad (a^3)^n = a^3 \times a^3 \times a^3 \times ..... = a^{3n}$ $\quad (a^m)^n = a^{mn}$ y por consiguiente, *para elevar una potencia indicada á otra potencia, se multiplican entre sí los exponentes.*

(**) Como en las aplicaciones numéricas y geométricas ocurre pocas veces elevar un polinomio á potencias superiores al cuadrado y cubo, nos limitamos por ahora á explicar la formacion de esta clase de potencias, dejando para el COMPLEMENTO DEL CÁLCULO ALGEBRÁICO, la teoría general de la elevacion á potencias de los polinomios.

La misma demostracion es aplicable al caso en que sean mas los términos del polinomio.

El cuadrado del polinomio $a+b-c+d$ considerando á todos sus términos menos el último como un solo término, será igual á.....

$$(a+b-c)^2+2(a+b-c)\times d+d^2$$

ó bien $\quad a^2+2ab+b^2-2(a+b)\times c+c^2+2(a+b-c)\times d+d^2$

Efectuando las operaciones indicadas y disponiendo convenientemente el órden de los términos, será.....

$$(a+b-c+d)^2=a^2+2ab-2ac+2ad+b^2-2bc+2bd+c^2-2cd+d^2$$

luego; el cuadrado de un polinomio es igual al cuadrado del primer término, mas el duplo del 1.° por cada uno de los que siguen, mas el cuadrado del 2.° mas el duplo de este por cada uno de los que siguen..... y así sucesivamente (*)

$$(5a^2b-3a^5m+b^2m^3)^2=25a^4b^2-30a^7bm+10a^2b^3m^3+9a^{10}m^2-6a^5b^2m^4+b^4m^6$$

El cuadrado de un polinomio de tres ó mas términos puede tener reduccion.

Elevar al cuadrado el polinomio $\quad 5a^2-2ab+1-b^2$

35. Cubo. El cubo de la suma algebráica de dos términos es igual al cubo del primero, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo.

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \qquad (A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$

El *cubo* de un polinomio es igual al cubo del primer término mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo, mas el triplo del cuadrado de los dos primeros por el tercero, mas el triplo de los dos primeros por el cuadrado del tercero, mas el cubo del tercero; y así sucesivamente.

Sea el polinomio propuesto $\quad a+b\pm c$

llamando $a+b=M$ tendremos $\quad a+b\pm c=M\pm c\quad$ y por consiguiente.....

$$(a+b\pm c)^3=(M\pm c)^3=M^3\pm 3M^2c+3Mc^2\pm c^3$$

sustituyendo ahora en lugar de M su valor $\; a+b$; será.....

$$(a+b\pm c)^3=(a+b)^3\pm 3(a+b)^2\times c+3(a+b)\times c^2\pm c^3=.....$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\pm 3(a+b)^2\times c+3(a+b)\times c^2\pm c^3$$

El cubo del polinomio $\; a+b-c+d$, considerando á todos sus términos menos el último como un solo término, será igual á.....

$(a+b-c)^3+3(a+b-c)^2\times d+3(a+b-c)\times d^2+d^3$; ó bien.....

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3(a+b)^2\times c+3(a+b)c^2-c^3+3(a+b-c)^2d+.....\text{ etc.}$$

El cubo ó tercera potencia del polinomio $\; 5a^2b-3a^5m+b^2m^3$, es igual á

$$125a^6b^3-225a^9b^2m+135a^{12}bm^2-27a^{15}m^3+75a^4b^4m^3-90a^7b^3m^4+27a^{10}b^2m^5+...$$

El cubo de un polinomio de tres ó mas términos puede tener reduccion.

Elevar al cubo el polinomio $\; 5a^2-2ab+1-b^2$ (**)

(*) Luego el número de términos del cuadrado de un polinomio de m términos antes de la reduccion de los semejantes es igual á la suma de la série de los números naturales desde m hasta la unidad ó sea $\; m+(m-1)+(m-2)+..........+3+2+1$

(**) Las potencias de un polinomio cuyos índices no tienen otros factores primos que 2 y 3 se forman elevando el polinomio dado y los resultados sucesivos á las potencias que indiquen estos factores. La potencia de sesto grado de $a-b$ se obtiene elevando al cubo, el cuadrado de $a-b$

Extraccion de raices de las cantidades algebráicas enteras.

Carácter positivo ó negativo de la raiz. Extraccion de raices de los monomios y polinomios.

36. Las raices de grado par de una cantidad positiva llevan el doble signo $\pm$ ó lo que es lo mismo, pueden ser positivas y negativas, pues unas y otras, elevadas á potencias de grado par, dan resultados positivos. Las raices de grado par de una cantidad negativa no son reales, sino *imaginarias* (33). Las raices de grado *impar* de una cantidad positiva ó negativa, son positivas ó negativas.

Mas adelante veremos que toda cantidad positiva tiene tantas raices de grado par como unidades tiene el índice, dos de ellas reales y las demas imaginarias; 2.° que, toda cantidad positiva ó negativa tiene tambien tantas raices de grado impar como unidades tiene el índice, una de ellas real y las demas imaginarias. Por ahora, entenderemos por raiz de una cantidad su raiz ó raices reales.

Extraccion de raices de los monomios.

37. La raiz de un producto es igual al producto de las raices del mismo grado de sus factores; y por consiguiente.....

Siendo todo monomio un producto de varios factores, se hallará una de sus raices, extrayendo la del mismo grado de todos sus factores. Si el monomio es positivo, sus raices de grado impar serán *positivas,* y las de grado par *positivas* y *negativas,* (llevando por consiguiente el doble signo $\pm$). Si el monomio es negativo, sus raices de grado impar son *negativas*, y las de grado par son *imaginarias.*

Segun esto, la raiz del coeficiente se hallará como hemos dicho en aritmética, y las letras se copiarán con un exponente igual al cociente de su exponente por el grado é índice de la raiz (*).

Hallar la raiz cuadrada del monomio $25a^6b^4m^2$

El valor absoluto de la raiz que se pide será igual á....

$$\sqrt{25a^6b^4m^2}=\sqrt{25}\times\sqrt{a^6}\times\sqrt{b^4}\times\sqrt{m^2}=5\times a^3\times b^2\times m=5a^3b^2m$$

y por consiguiente, $\sqrt{25a^6b^4m^2}=\pm 5a^3b^2m$

$$\sqrt[3]{-8a^6b^3m^9}=-2a^2bm^3 \qquad \sqrt[2n]{a^{10n}b^{4n}m^{2n}}=\pm a^5b^2m$$

La raiz cuadrada de $-4a^2$ tiene la forma *imaginaria* $\sqrt{-4a^2}=\pm 2a\sqrt{-1}$

Se dice que una cantidad racional tiene *raiz exacta*, cuando esta raiz es otra cantidad racional.

Un monomio racional tiene raiz exacta si la tienen todos sus factores. En otro caso conviene extraer la raiz de los factores, que la tengan exacta, escribiendo los demás debajo del signo radical.

$$\sqrt[3]{8a^5b^6m}=\sqrt[3]{8\times a^3\times a^2\times b^6\times m}=2ab^2\sqrt[3]{a^2m}$$

$$\sqrt{50a^4b^3m^2}=\pm 5a^2bm\sqrt{2b} \qquad \sqrt[5]{-32a^6b^4}=-2a\sqrt[5]{ab^4}$$

$$\sqrt{-9a^2}=\pm 3a\sqrt{-1} \qquad \sqrt[4]{-16a^8b^4}=\pm 2a^2b\sqrt[4]{-1}$$

Todas las raices de un monomio son otro monomio *racional*, *irracional* ó *imaginario.*

(*) De donde resulta que $\sqrt{a^6}=a^3$ $\sqrt[3]{a^6}=a^2$ $\sqrt[m]{a^{mn}}=a^n$ pues $(a^n)^m=a^{mn}$ y por consiguiente, *para extraer una raiz de una potencia indicada cuyo exponente sea divisible por el índice de la raiz, se efectua esta division.*

Extraccion de raices de los polinomios.

38. Raiz cuadrada. Ordenado un polinomio y su raiz cuadrada exacta, el primer término de la potencia será el cuadrado del primero de la raiz, y por consiguiente, este se hallará extrayendo la raiz cuadrada de aquel. Además, como el segundo de la potencia es el duplo del primero por el segundo de la raiz, si dividimos el segundo término del polinomio dado por el duplo del primero de la raiz, el cociente será el segundo de la misma raiz.

Llamando P el polinomio propuesto, x el primer término de su raiz cuadrada, y la suma algebráica de todos los demás, tendremos.....

$$P=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

luego el primer término del polinomio P será igual á x^2; (*) y por consiguiente, extrayendo la raiz cuadrada del primer término del polinomio propuesto, se tendrá el primer término de su raiz cuadrada.

Restando de P el cuadrado del primer término de la raiz y llamando R el resíduo, tendremos.....

$$R=P-x^2=2xy+y^2=y(2x+y)$$

luego el primer término de R será igual al producto de $2x$ por el término de y cuya letra principal tenga mayor exponente (que será indudablemente el segundo de la raiz). Y por consiguiente, si dividimos el primer término del resíduo R por $2x$, tendremos el segundo de la raiz. Luego

Para extraer la raiz cuadrada de un polinomio ya ordenado, se extrae la raiz cuadrada de su primer término, y tendremos el primero de la raiz. Se divide el segundo término del polinomio propuesto por el duplo del primero de la raiz, y el cociente será el segundo término de esta. Para hallar el tercero, cuarto, etc., se resta del polinomio propuesto el cuadrado de la raiz hallada, y se divide el primer término de la resta por el duplo del primero de la raiz.

El polinomio dado tendrá raiz exacta cuando se halle un resto, que sea cero. Todos los términos de la raiz se obtienen por una division, escepto el primero, que es la raiz cuadrada del primero del polinomio propuesto. Las divisiones sucesivas tienen todas el mismo divisor, que es el duplo del primer término de la raiz, y por dividendo el primero de cada resto.

Hallar la raiz cuadrada del polinomio $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$

	$\sqrt{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2}=a+b+c$	
	$-a^2$	
Residuo 1.º..........	$2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$......	$2a$ duplo del término 1.º de la raiz
$-(a+b)^2=$....	$-a^2-2ab\quad -b^2$	b 2.º término de la raiz
Residuo 2.º..........	$2ac\quad +2bc+c^2$......	c 3r. término de la raiz
$-(a+b+c)^2=$	$-a^2-2ab-2ac-b^2-2bc-c^2$	
	El resto final es cero.	

La raiz del polinomio propuesto no puede ser un monomio, luego constará de dos ó mas términos, por ejemplo x, y, z; en cuyo supuesto, tendremos.....

(*) En efecto, si dos polinomios son idénticos, los términos cuya letra ordenatriz tiene un mismo exponente serán iguales. Véase ademas el escolio del número 17

$$a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2=(x+y+z+.....)^2$$

ó bien $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2=x^2+2xy+y^2+2(x+y)z+z^2+.....$

y por consiguiente el primer término de la raiz, será igual á $\sqrt{a^2}$ ó sea a, considerando únicamente el valor positivo de la raiz.

Restando ahora del polinomio dado el cuadrado de la raiz hallada, se verificará que.....

$$2ab+2ac+b^2+2bc+c^2=2ay+y^2+2(a+y)z+z^2+.....$$

luego el cociente de $2ab$ ó sea $2ay$ por $2a$ (duplo del primer término de la raiz) nos dará el valor del segundo, que es b ó llámase y

Restando del polinomio dado el cuadrado de la raiz hallada $a+b$, que es $a^2+2ab+b^2$, el residuo será igual al duplo de los dos términos ya hallados por el tercero, mas el cuadrado del tercero, etc.; y tendremos.....

$$2ac+2bc+c^2=2az+2bz+z^2+\text{etc.}$$

y por consiguiente, si dividimos el primer término $2ac$ ó $2az$ de este residuo por el duplo del primero de la raiz, que es $2a$, el cociente será evidentemente el tercer término de la raiz, es decir c.

Restando ahora del polinomio propuesto el cuadrado de los tres términos de la raiz, como el residuo es cero, la raiz hallada será la raiz cuadrada exacta del polinomio dado.

Este procedimiento se abrevia restando del polinomio propuesto, no el cuadrado de los términos de la raiz, sino los términos de este cuadrado, que no se hubiesen restado anteriormente. Así, para hallar el residuo correspondiente al segundo término de la raiz del ejemplo anterior, se restan únicamente del polinomio dado, el duplo del primer término de la raiz por el segundo, y el cuadrado del segundo término.

Otra abreviacion, no menos frecuente en la práctica, consiste en no escribir debajo del polinomio propuesto los cuadrados sucesivos de la raiz hallada, sino los restos correspondientes despues de la reduccion de los términos semejantes.

Segun esto, hallemos la *raiz cuadrada* de $t^{10}-2m^2b-2t^5b+b^2+m^4+2m^2t^5$

El cálculo se puede disponer del modo siguiente:

$$\sqrt{m^4+2m^2t^5+t^{10}-2m^2b-2t^5b+b^2}=m^2+t^5-b$$

$$+2m^2t^5+t^{10}-2m^2b-2t^5b+b^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \Big|\; 2m^2 \;(*)$$

$$-2m^2b-2t^5b+b^2$$

$$\text{resto}=\text{cero}$$

Ultimamente, como ejercicio de cálculo, se puede comprobar la exactitud de la igualdad que sigue.....

$$\sqrt{2a^2b^2-10a^3b+a^4b^2-2a^2b+1+25a^2+b^2-10ab+10a-2b}=a^2b-5a+b-1 \quad (**)$$

(*) Este divisor es constante é igual al duplo del primer término de la raiz.

(**) La RAIZ CUADRADA de un polinomio ordenado se obtiene tambien por la regla siguiente: El *primer término* se halla extrayendo la raiz cuadrada del primero del polinomio dado y restando de este el cuadrado de dicha raiz. El *segundo término* se halla dividiendo el primer término del residuo anterior, por el duplo de la raiz hallada, multiplicando este cociente por sí mismo y por el divisor y restando todo esto de dicho residuo. Los *términos restantes* de la raiz se hallan por el mismo procedimiento.

Si el polinomio, cuya raiz cuadrada se busca, no está ordenado, se extrae la raiz del primer término que sea cuadrado perfecto, y al dividir el término de cada resto por el duplo de primero de la raiz hallada, se toma por dividendo un término múltiplo del divisor.

39. *Un binomio no tiene raiz cuadrada exacta*, pues el cuadrado de un monomio es otro monomio; y el cuadrado de un binomio, trinomio, etc., tiene siempre mas de dos términos.

Si un trinomio es un cuadrado perfecto (*) lo será forzosamente de un binomio. Un trinomio ordenado, en que el cuádruplo del producto de los coeficientes de los términos primero y tercero (ambos positivos) sea igual al cuadrado del coeficiente del segundo, puede ser un cuadrado perfecto, y su raiz cuadrada será el binomio que forman las raices cuadradas de sus extremos unidas por el signo del término medio.

El trinomio, en que no se verique esta propiedad, no es cuadrado perfecto. Una y otra proposicion se deducen fácilmente de la igualdad

$$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2$$

El trinomio $25a^2\mp 10a+1$ es un cuadrado perfecto, pues $4\times 25.1=10^2$

El trinomio a^2-a+9 no es cuadrado perfecto, pues 4×1.9 no es igual al cuadrado de la unidad que es el coeficiente del segundo término.

$$\sqrt{9a^2+6ab+b^2} = \sqrt{9a^2}+\sqrt{b^2} = 3a+b$$

$$\sqrt{1-4am^5+4a^2m^{10}} = 1-2am^5$$

***40.** *Un polinomio ordenado no tiene raiz cuadrada exacta*, 1.° cuando sus términos primero y último no son cuadrados perfectos. 2.° cuando el segundo término del polinomio propuesto ó el primero de los resíduos sucesivos, no son divisibles por el duplo del primero de la raiz. 3.° Si uno de los términos de la raiz tiene la letra principal elevada á una potencia menor que la mitad del exponente de la misma letra en el último término del polinomio.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{25a^2m^4-10am^2b^5+2b^5}=5am^2-b^5+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{resto}=2b^5-b^{10}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{25a^2b^4+10ab^3+b^2+12abc+c^2}=5ab^2+b+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{resto}=12abc+c^2\end{array}\right\}$$

$$\left.\sqrt{1+2a+5a^2}=1+a+2a^2-2a^3+4a^5\ldots\ldots\ldots\right\}$$

Si un polinomio, que no es cuadrado perfecto, se puede descomponer en factores de modo que algunos de ellos tengan raiz exacta, se extrae la raiz de estos y se deja indicada la de los otros.

$$\sqrt{2ab^4-20ab^2m^3+50am^6} = \sqrt{2a(b^4-10b^2m^3+25m^6)} = (b^2-5m^3)\sqrt{2a} \quad (^{**})$$

$$\sqrt{x^3+x^2-x-1}=(x+1)\sqrt{x-1}$$

Esc. gral. Asi como $\sqrt{a^2} = \pm a$, tambien $\sqrt{a^2\pm 2ab+b^2} = \pm(a\pm b)$ pues los cuadrados de $+(a\pm b)$ y $-(a\pm b)$ son iguales á $a^2\pm 2ab+b^2$ y por consiguiente, la raiz cuadrada de un polinomio tiene tambien dos valores, uno el que nos indica la regla ya explicada, y otro este mismo resultado con signos contrarios.

(*) Se llama cuadrado *perfecto* ó cubo *perfecto* una expresion racional cuya raiz cuadrada ó cúbica es exacta.

(**) No se debe confundir $(a+b)\sqrt{2a}$ con $a+b\sqrt{2a}$; pues la primera expresion indica el producto de $a+b$ por $\sqrt{2a}$ y la segunda la suma de a con $b\sqrt{2a}$. El coeficiente del primer radical es $a+b$ y el del segundo es b

*21. **Raiz cúbica.** Ordenado un polinomio y su raiz cúbica exacta, el primer término de la potencia será el cubo del primero de la raiz, y por consiguiente este se hallará extrayendo la raiz cúbica de aquel. Ademas, como el segundo de la potencia es el triplo del cuadrado del primero por el segundo de la raiz, si dividimos el segundo término del polinomio dado por el triplo del cuadrado del primero de la raiz, el cociente será el segundo de la misma raiz.

Si llamamos P al polinomio propuesto, x al primer término de su raiz cúbica, y á la suma algebráica de todos los demas; tendremos.....

$$P=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

luego el primer término del polinomio P será igual á x^3; y por consiguiente extrayendo la raiz cúbica del primer término del polinomio propuesto, se tendrá el primer término de su raiz cúbica.

Restando de P el cubo del primer término de la raiz, y llamando R el residuo; tendremos

$$R=P-x^3=3x^2y+3xy^2+y^3$$

de donde se deduce fácilmente la segunda parte de la proposicion. Luego:

Para extraer la raiz cúbica de un polinomio ordenado, se extrae la raiz cúbica de su primer término, y tendremos el primero de la raiz. Se divide el segundo del polinomio dado por el triplo del cuadrado de la raiz, y el cociente será el segundo término de esta. Para hallar el tercero, cuarto, etc., se resta del polinomio propuesto el cubo de la raiz hallada y se divide el primer término de la resta por triplo del cuadrado del primero de la raiz.

El polinomio dado tendrá raiz cúbica exacta cuando se halle un resto que sea cero. Todos los términos de la raiz se obtienen por una division escepto el primero, que es la raiz cúbica del primero del polinomio propuesto. Las divisiones sucesivas tienen todas el mismo divisor, que es el triplo del cuadrado del primer término de la raiz, y por dividendo el primer término de cada resto.

Hallar la raiz cúbica de $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$

$$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3}=a+b+c$$

$$\begin{array}{r|l}
-a^3 & \\
\hline
3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3\ldots.. & 3a^2\ (*) \\
\cline{2-2}
-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3 & b\ (**) \\
\hline
3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3\ldots.. & c\ (***) \\
-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3-3a^2c-6abc-3b^2c-3ac^2-3bc^2-c^3\ldots.. & \\
\hline
\text{resto final}=\text{cero} &
\end{array}$$

La raiz cúbica del polinomio propuesto no puede ser un monomio; luego constará de dos ó mas términos, por ejemplo x, y, z.....; y tendremos.....

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+\ldots\ldots c^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+\text{etc.}$$

y por consiguiente el primer término x de la raiz será la raiz cúbica de a^3

(*) Este divisor es constante é igual al triplo del cuadrado del primer término de la raiz.
(**) Segundo término de la raiz que se busca. (***) Tercer término de la misma raiz.

Restando del polinomio dado, el cubo de la raiz hallada, se verificará que...

$$3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+\ldots\ldots c^3=3a^2y+3ay^2+y^3+\text{etc.}$$

luego el cociente de $3a^2b$ por $3a^2$ (triplo del cuadrado del primer término de la raiz) nos dará el segundo término de esta raiz.

Restando del polinomio dado, el cubo de la raiz hallada $a+b$, el residuo será igual al triplo del cuadrado de los dos términos ya hallados por el tercero, mas el triplo de dichos términos por el cuadrado del tercero, mas el cubo del tercero y así sucesivamente.....

$$3a^2c+6abc+3b^2c+\ldots\ldots\ldots c^3=3(a+b)^2z+3(a+b)z^2+z^3+\text{etc.}$$

y por consiguiente, si dividimos el primer término de este residuo por el triplo del cuadrado del primero de la raiz, que es $3a^2$, el cociente será evidentemente el tercer término de la raiz.

Restando ahora del polinomio dado el cubo de los tres términos de la raiz, como el residuo es cero, la raiz hallada será la raiz cúbica exacta del polinomio propuesto.

Este procedimiento ofrece las mismas abreviaciones, que hemos indicado al hablar de la extraccion de la raiz cuadrada de un polinomio.

La operacion se puede disponer del modo siguiente:

$$\sqrt[3]{m^6+3m^4t^5+3m^2t^{10}-3m^4b-6m^2t^5b+3m^2b^2+t^{15}-3t^{10}b+3t^5b^2-b^3}=m^2+t^5-b$$

$$\begin{array}{r|l} 3m^4t^5+3m^2t^{10}-3m^4b-6m^2t^5b+3m^2b^2+t^{15}-3t^{10}b+3t^5b^2-b^3 & \underline{3m^4\ (*)} \\ -3m^4b-6m^2t^5b+3m^2b^2\ldots\ldots-3t^{10}b+3t^5b^2-b^3 & \\ \text{resto}=\text{cero} & \end{array}$$

luego el trinomio m^2+t^5-b es la *raiz cúbica* del polinomio propuesto.

Como ejercicios de cálculo, se puede comprobar la exactitud de las dos igualdades que siguen:

$$\sqrt[3]{1-3a+5a^3-3a^5-a^6}=1-a-a^2$$

$$\sqrt[3]{8b^3-y^6+a^9+(6b-3y^2)a^6+(4b^2-4by^2+y^4)3a^3-12b^2y^2+6by^4}=a^3+2b-y^2$$

Igualmente, se hallará $a^2b-5a+b-1$ por *raiz cúbica* del polinomio

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^6b^3-15a^5b^2+75b & a^4-125 & a^3-75 & a^2-15 & a+b^3-3b^2+3b-1 \\ -\ 3b^2 & +30b & +78b & +30b & \\ +\ 3b^3 & -30b^2 & -\ 6b^2 & -15b^2 & \qquad (**) \\ & & +\ 3b^3 & & \end{array}$$

(*) Triplo del cuadrado del primer término de la raiz cúbica del polinomio dado.

(**) La RAIZ CÚBICA de un polinomio ordenado se obtiene tambien por la regla siguiente: El *primer término* se halla extrayendo la raiz cúbica del primero del polinomio dado y restando de este el cubo de dicha raiz. El *segundo término* se halla dividiendo el primer término del residuo anterior por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y restando de dicho residuo, el producto del cociente por el divisor, el triplo de la raiz hallada por el cuadrado del cociente, y el cubo del cociente. Los *términos restantes* de la raiz se hallan por el mismo procedimiento.

Si el polinomio, cuya raiz cúbica se busca, no está ordenado, se extrae la raiz cúbica del primer término que sea cubo perfecto y al dividir el primer término de cada resto por el triplo del cuadrado del primero de la raiz, se toma por dividendo un término multiplo del divisor.

*42. Un binomio ó un trinomio no tienen raiz cúbica exacta pues el cubo de un monomio es otro monomio; y el cubo de un binomio, trinomio, etc. tienen siempre mas de tres términos. Si un cuatrinomio es cubo perfecto, lo será de un binomio, dos de sus términos serán cubos exactos y los otros dos expresarán el triplo del cuadrado de la raiz cúbica de cada uno de los dos primeros por la raiz cúbica del otro.

En efecto, de las fórmulas ó igualdades siguientes

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

se deducen $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} = a+b \qquad \sqrt[3]{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3} = a-b$

como a y b son respectivamente las raices cúbicas de los términos primero y último de los polinomios propuestos, se puede deducir la siguiente regla:

Para extraer la raiz cúbica de un cuatrinomio ordenado y á la vez cubo perfecto, se extrae la raiz cúbica del primero y último término, uniendo los resultados con el signo + ó el signo — segun que el segundo y cuarto término sean ambos positivos ó negativos.

$$\sqrt[3]{1-15am^5+75a^2m^{10}-125a^3m^{15}} = 1-5am^5$$

*43. *Un polinomio ordenado no tiene raiz cúbica exacta,* cuando sus términos primero y último no son cubos perfectos. 2.° cuando el segundo término del polinomio dado ó el primero de todas las restas sucesivas no son divisibles por el triplo del cuadrado del primero de la raiz. 3.° Si uno de los términos de la raiz tiene la letra principal elevada á una potencia menor que la tercera parte del exponente de la misma letra en el último término del polinomio dado.

$$\sqrt[3]{125a^3m^6-75a^2m^4b^5+15am^2b^{10}+8b^{10}}=5am^2-b^5+\ldots \quad \text{resto}=8b^{10}+b^{15}$$

$$\sqrt[3]{125a^3b^6+75a^2b^5+b^3+15ab^4+12abc-c^3}=5ab^2+b+\ldots \quad \text{resto}=12abc-c^3$$

$$\sqrt[3]{1-3a+27a^2+81a^3}=1-a+8a^2-\text{ etc.}$$

Si un polinomio, que no es cubo perfecto, se puede descomponer en factores de modo que alguno de ellos tenga raiz exacta, se extrae la raiz de este y se deja indicada la de los demas.

$$\sqrt[3]{2ab^6-6ab^4m^3+6ab^2m^6-2am^9}=(b^2-m^3)\sqrt[3]{2a}$$

$$\sqrt[3]{x^4+2x^3-2x-1}=(x+1)\sqrt[3]{x-1} \qquad (*)$$

Esta descomposicion de las cantidades radicales en dos factores, uno racional y otro irracional es muy útil en la práctica de los cálculos algebráicos.

Antes de terminar el cálculo de las cantidades algebráicas enteras conviene recordar la generalidad de sus resultados, sean cualesquiera los valores particulares de los datos y las transformaciones que reciban estos para llegar al resultado final. La equivalencia de los valores numéricos ó geométricos de los dos miembros de la igualdad á que se puede reducir cualquiera de las operaciones del cálculo literal, se verifica siempre, sean enteros, fraccionarios, incomensurables, positivos ó negativos los valores particulares de las letras, que constituyen dicha igualdad.

(*) La raiz, cuyo indice no tiene otros factores simples que 2 y 3, se halla extrayendo del polinomio dado y de los resultados sucesivos las raices cuadradas y cúbicas, que indiquen estos factores. Así, para hallar la raiz de *sexto grado* de un polinomio, se extraerá la raiz cubica de su raiz cuadrada.

Ejercicios para el cálculo de las cantidades literales enteras.

44. Objeto y ventajas del cálculo algebráico ó literal. Las definiciones de la adicion, sustraccion, multiplicacion etc. del cálculo aritmético ¿convienen igualmente al álgebra y tienen aquí igual significacion é iguales consecuencias? ¿Qué ventajas reporta el cálculo de la admision de las cantidades negativas? (*)

Hallar el valor numérico de los polinomios que siguen....

$2a^3-5a^2-100$	$ab^2+2a^2b-a+\sqrt{a+4b}$	$(a-b)^2-3\sqrt{2a^2y+a^3}$
suponiendo $a=10$	suponiendo $a=5$ y $b=1$	siendo $a=1,\ y=2,\ b=0$

Caractéres de la adicion algebráica; ¿en qué caso la suma algebráica es cero? Descomponer el polinomio A—B+C—D en dos ó mas sumandos. ¿Varía un polinomio, si se altera el órden de colocacion de sus términos? y si cambiamos los signos á todos ellos?

Hallar la suma de los polinomios siguientes:

$8a^3-3a^2b+4b^2m-5a+1$	$2a-5a^2b+b^2m-1+x$	$8ba^2+3a+5x-3mb^2$

Caractéres de la sustraccion algebráica: ¿en qué caso el residuo es negativo? ¿en qué caso es cero? El residuo es el mismo si se toma el minuendo por sustraendo y al contrario? y si cambiamos los signos á todos los términos de uno y otro? Descomponer el polinomio A—B+C—D en una diferencia indicada.

Hallar el residuo de $7b^2+5a^3-b-4a^2-1$ y $(-2a+5a^3-2a^2+5-b^2+b)$

¿En qué caso el producto de varios factores es positivo ó negativo? ¿Se alterará el producto si cambiamos los signos á todos los términos de los factores? Número de términos del producto de dos ó mas monomios, de un polinomio por un monomio, y de dos polinomios. Si un polinomio es homogéneo con respecto á dos letras, y se ordena por las potencias ascendentes de una de ellas ¿quedará ordenado tambien por las descendentes de la otra?

Hallar los productos de los polinomios que siguen...

$$(2b^3+3ab^2+4a^2b+5a^3)\times(3b^2+2ab-a^2)$$

$$(a^2+2ab+b^2-c^2)\times(a^2+2ab-b^2+c^2)$$

$$[y^3+(a+b)y^2+(a^2-b^2)y+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3]\times[y^2-(a-b)y+a^2-2ab+b^2]$$

$$^{*}\left\{\begin{array}{l|lll} 5a & x^5+2a & x^3+a & x^2+5x \\ 2b & \quad -b & \quad b & \end{array}\right\}\times\left\{\begin{array}{r|ll} 5a & x^2-b & x+a+b \\ -2b & & 2a \end{array}\right\}$$

$$(a^x+a^{x-1}b+a^{x-2}b^2+a^{x-3}b^3+\ .\ .\ .\ .\ ab^{x-1}+b^x)\times(a-b)=$$

Traducir al lenguaje ordinario la última fórmula despues de escrito el producto. Descomponer en factores los binomios A^3-1 y A^n-1

¿En qué casos el cociente de dos expresiones algebráicas es positivo ó negativo? ¿Se altera el cociente si se cambian los signos á todos los términos del dividendo, á los del divisor ó á unos y otros? Division exacta ó inexacta en los cuatro casos que pueden ocurrir en la division algebráica de las cantidades enteras: número de términos del cociente en cada uno de estos casos. Interpretacion del exponente cero. ¿Será el cociente homogéneo si los datos son hetero-

M'' A M' B M

(*) Si un móvil ocupa sucesivamente las tres posiciones M, M' y M'', expresar la distancia del móvil al punto A, en el supuesto de ser b su distancia al punto B. La distancia entre A y B se supone conocida é igual á d.

géneos? Cociente completo en la division inexacta. *Demostrar la formacion de los cocientes en los diferentes casos, que pueden ocurrir al dividir la suma ó la diferencia de las potencias de un mismo grado de dos cantidades por la suma ó la diferencia de estas mismas cantidades.

Divisiones exactas é inexactas de dos polinomios:

$$(a^6+2a^3y^3+y^6) : (a^2-ay+y^2) \quad =a^4+a^3y+ay^3+y^4$$

$$(a^6-16a^3y^3+64y^6) : (a^2-4ay+4y^2)=a^4+4a^3y+12a^2y^2+\text{etc.}]$$

$$(31a^2b^2-38ab^3-13a^3b+2a^4+24b^4) : (2a^2+4b^2-3ab)=a^2-5ab+6b^2$$

$$(a^2b^2-a^2y^2-ab+ay) : (b-y) \quad =a^2(b+y)-a$$

$$\frac{a^{m+n}b^n-4a^{m+n-1}b^{2n}-27a^{m+n-2}b^{3n}+42a^{m+n-3}b^{4n}}{a^mb^n-7a^{m-1}b^{2n}}=a^n+3a^{n-1}b^n-6a^{n-2}b^{2n}$$

dividendo — divisor — cociente

*$\begin{array}{r|r|r|l} 4b^2 & a^4-2bc & a^2b^2+b & 2ab^4-b^6 \\ -4bc & -b^2 & +c & \\ +c^2 & -c^2 & & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|r|l} 2b & a^2-b & ab+b^3 \\ -c & -c & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|r|l} 2b & a^2+b & ab-b^3 \\ -c & c & \end{array}$

$(1+a) : (1-a)$ $\qquad$ $(1-4x+x^2+x^3) : (1-3x+x^2)$ $\qquad$ $a : (1-x)$

$(a^8-16b^8) : (a^2-2b^2)$ $\qquad$ $(a^3b^3-1) : (ab-1)$ $\qquad$ $(a^x-1) : (1-a)$

Hallar el resto de dividir $Ay^m+By^{m-1}+Cy^{m-2}+\ldots\ldots Ky+U$ por $y-a$

Deducir de las fórmulas $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ las siguientes: $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ y $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ (*)

Deducir de los valores de $(a\pm b)^3$ otras dos fórmulas análogas, á las anteriores. ¿El cuadrado ó el cubo de un polinomio puede ser un monomio?

Elevar al cuadrado y despues al cubo, los polinomios:

$6a^4b^2-2a^5b-3a^2b+2ab^2$ | $(y^4-1)A^3+(y^3-1)A^2+(y^2-1)A+(y-1)$

¿Las raices de una cantidad real son todas reales? Raiz exacta é inexacta de una cantidad racional. Condiciones que debe reunir un trinomio para ser cuadrado perfecto. *Casos en que un polinomio no tiene raiz cuadrada, ni raiz cúbica exactas. ¿En qué se diferencian las dos raices cuadradas de toda cantidad algebráica? ¿Las raices cuadrada y cúbica de un polinomio pueden ser un monomio? Resolver los problemas que siguen:

	Raices.
$\sqrt{30a^5-4a+1+10a^2-2a^3+25a^6-11a^4}$	$5a^3+3a^2-2a+1$
$\sqrt{x^4(a+b)^2+2ax^3(a+b)+x^2(a^2+2ab+2b^2)+2abx+b^2}$	$x^2(a+b)+ax+b$
$\sqrt[3]{8a^6+48a^5b+60a^4b^2-80a^3b^3-90a^2b^4+108ab^5-27b^6}$	$2a^2+4ab-3b^2$

*Ultimamente, $x^2(y^2-1)+x(y-1)+1$ es la raiz cúbica del polinomio $x^6(y^2-1)^3+3x^5(y^2-1)^2(y-1)+6x^4y(y^2-1)(y-1)+x^3(7y^2-2y-5)(y-1)+6x^2y(y-1)+3x(y-1)+1$

(*) Estas fórmulas, lo mismo que las anteriores, no se alteran aunque se cambien las letras de que constan, ó en otros términos, subsisten lo mismo aun cuando se escriba A en lugar de B y B en lugar de A. Las expresiones ó fórmulas, que gozan de esta propiedad importante, se llaman *simétricas*.

CÁLCULO ALGEBRÁICO DE LAS CANTIDADES FRACCIONARIAS.

Preliminares. Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion y extraccion.

Teoría de los exponentes negativos.

Preliminares.

45. Llámase CANTIDAD FRACCIONARIA LITERAL la division indicada de dos cantidades literales (*). El dividendo se llama *numerador*, y el divisor *denominador*, y los dos juntos, términos de la cantidad fraccionaria.

$\frac{a}{b}$ $\frac{2a^5m}{a-b}$ $\frac{1}{a+b}$ $\frac{a^2-b^2}{10,5}$ son cantidades fraccionarias literales.

La consideracion de las cantidades fraccionarias literales no lleva en sí la idea de coleccion de partes de la unidad, como se verifica en la aritmética, sino la de una division indicada de dos expresiones cuyos valores numéricos ó geométricos pueden ser incomensurables, positivos y negativos ó ambos negativos. En este supuesto, vamos á demostrar que las reglas del cálculo de los números fraccionarios son comunes á las cantidades fraccionarias algebráicas ó literales.

46. El teorema fundamental, que sirve de base á toda la teoría de las cantidades fraccionarias en general, es el siguiente, que ya hemos demostrado en el número **21**.

Una cantidad fraccionaria no varía de valor aunque se multipliquen ó se dividan sus dos términos por otra cantidad cualquiera.

De esta verdad se deducen inmediatamente las consecuencias que siguen:

1.ª La simplificacion de una cantidad fraccionaria literal se obtiene suprimiendo en el numerador y denominador todos los factores comunes (**).

Cuando el numerador y denominador son monomios los factores comunes son el m. c. d. de los coeficientes y los factores expresados por letras iguales con el menor de sus exponentes respectivos.

Las letras diferentes se suponen factores primos.

La cantidad fraccionaria $\frac{8a^5b^3m}{12ab^4n}$ equivale á la irreducible $\frac{2a^4m}{3b^2n}$

pues los factores comunes á sus dos términos son 4, a y b^2

Cuando el numerador y el denominador son polinomios, se halla su m. c. d. algebráico; y los cocientes respectivos de uno y otro por este m. c. d., nos darán la cantidad reducida á su mas simple expresion. Si el numerador y denominador de la cantidad propuesta fueran primos, dicha cantidad seria irreducible.

En algunos casos se puede simplificar una cantidad fraccionaria, cuyos dos términos son polinomios, sin recurrir á la determinacion del m. c. d.

En efecto, $$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a+b)}=\frac{a-b}{a+b}$$

Del mismo modo: $$\frac{a^2-2a+1}{a^3-3a^2+3a-1}=\frac{(a-1)(a-1)}{(a-1)(a-1)(a-1)}=\frac{1}{a-1}$$

(*) O una literal y otra numérica.

(**) Las definiciones de *simplificacion, irreducible*, *m. c. d*, *m. c. m. etc.* que hemos dado en ARITMÉTICA son generales y aplicables por consiguiente á los cálculos algebráicos. La teoría completa del *m. c. d.* literal, pertenece á la parte superior del ÁLGEBRA.

2.ª Para reducir dos ó mas cantidades fraccionarias á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las otras.

El denominador comun será el menor posible, si los dos términos de cada expresion fraccionaria se multiplican por el factor ó factores, que falten á su denominador, para componer el mínimo múltiplo, ó sea el múltiplo mas simple de todos los denominadores.

Sean las cantidades fraccionarias dadas. . . . $\frac{a}{b}$ $\frac{1}{c}$ $\frac{m}{n}$

reducidas á un mismo denominador, serán. . . . $\frac{acn}{bcn}$ $\frac{bn}{bcn}$ $\frac{mbc}{bcn}$

Del mismo modo, las expresiones. . . . . . . $\frac{3a^3}{10b^5m}$ $\frac{1}{4b^2n}$ $\frac{2a}{5bm^2}$

equivalen respectivamente á. . . . . $\frac{6a^3mn}{20b^5m^2n}$ $\frac{5b^3m^2}{20b^5m^2n}$ $\frac{8ab^4n}{20b^5m^2n}$

pues el múltiplo mas simple de todos los denominadores es $20b^5m^2n$

Otros ejemplos:

$\frac{2ab}{a^2-b^2}$ $\frac{a}{a+b}$ $\frac{1}{a-b}$ son lo mismo respectivamente que $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ $\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}$ $\frac{a+b}{a^2-b^2}$

$\frac{a}{b^m}$ $\frac{1-a}{b^{m+n}}$ $\frac{b}{5}$ $\frac{1}{b^2}$ | $\frac{5ab^n}{5b^{m+n}}$ $\frac{5(1-a)}{5b^{m+n}}$ $\frac{b^{m+n+1}}{5b^{m+n}}$ $\frac{5b^{m+n-2}}{5b^{m+n}}$

Adicion de las cantidades fraccionarias literales.

47. Para *sumar* cantidades fraccionarias de un mismo denominador, basta dividir la suma de sus numeradores por el denominador comun. Si los sumandos tienen denominadores diferentes, se reducen á uno comun (*).

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=\frac{A+B+C}{D}$$

$$\frac{1-a}{a}+\frac{a}{1+a}=\frac{1-a^2}{a+a^2}+\frac{a^2}{a+a^2}=\frac{1-a^2+a^2}{a+a^2}=\frac{1}{a+a^2}$$

Sustraccion de las cantidades fraccionarias literales.

48. Para *restar* dos cantidades fraccionarias literales de un mismo denominador, basta dividir el residuo de sus numeradores por el denominador comun.

Si los datos tienen denominadores diferentes, se reducirán á un mismo denominador antes de aplicar la regla anterior.

$$\frac{A}{D}-\frac{B}{D}=\frac{A-B}{D}$$

$$\frac{1+a}{1+b}-\frac{1}{b-1}=\frac{(1+a)(b-1)}{b^2-1}-\frac{1+b}{b^2-1}=\frac{ab-a-2}{b^2-1}$$

(*) Véanse las demostraciones generales de la adicion, sustraccion, multiplicacion, etc., de los números fraccionarios, que hemos dado por notas en la Aritmética. Para la adicion y la sustraccion basta tener presente la regla, que sirve para determinar el cociente de un polinomio por un monomio.

Multiplicacion de las cantidades fraccionarias literales.

49. Para *multiplicar* dos ó mas cantidades fraccionarias literales, se divide el producto de sus numeradores por el producto de sus denominadores.

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\times\frac{M}{N}=\frac{A\times C\times M}{B\times D\times N}$$

$$\frac{a-1}{2a+1}\times\frac{1-4a^2}{ab-b}=\frac{(a-1)(1-4a^2)}{(2a+1)(ab-b)}=\frac{1-2a}{b}$$

Division de las cantidades fraccionarias literales.

50. Para *dividir* dos cantidades fraccionarias literales, se multiplica el dividendo por el divisor invertido.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$$

$$\frac{a^4-b^2}{1+2a+a^2}:\frac{a^2+b}{1+a}=\frac{(a^4-b^2)(1+a)}{(1+2a+a^2)(a^2+b)}=\frac{a^2-b}{1+a}$$

Elevacion á potencias de las cantidades fraccionarias literales.

51. Para *elevar* una cantidad fraccionaria literal á una potencia, se eleva el numerador y denominador á la misma potencia.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A}{B}\times\frac{A}{B}\times\frac{A}{B}\cdots\quad=\frac{A^n}{B^n}$$

$$\left(\frac{a-1}{a+b}\right)^2=\frac{a^2-2a+1}{a^2+2ab+b^2}\qquad\qquad\left(\frac{1-a}{a+ab+b}\right)^2=\frac{1-2a+a^2}{a^2+2a^2b+a^2b^2+2ab+2ab^2+b^2}$$

Extraccion de raices de las cantidades fraccionarias literales.

52. Para *extraer* una raiz de cualquiera grado de una cantidad fraccionaria literal, se extrae la raiz del mismo grado del numerador y denominador.

$$\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\quad\text{pues}\quad\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\right)^2=\frac{(\sqrt{A})^2}{(\sqrt{B})^2}=\frac{A}{B}$$

$$\sqrt{\frac{1-a}{a^2+2ab+2a+b^2+2b+1}}=\frac{\sqrt{1-a}}{a+b+1}\qquad(*)$$

(*) Son muy notables y fáciles de demostrar los teoremas cuyos enunciados se deducen de las fórmulas siguientes:

Siendo $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots$ será $\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}=\frac{a}{b}$ y $\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\ldots}}=\frac{a}{b}$

Observaciones generales acerca de las expresiones fraccionarias.

53. Las cantidades enteras pueden considerarse como fraccionarias cuyo denominador es la unidad positiva, y en tal supuesto, el cálculo de estas cantides combinadas con las fraccionarias se reducirá al de estas mismas.

$$(a-b)+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b} \qquad \frac{a-1}{a+1}-(1-a)=\frac{a^2+a-2}{a+1}$$

$$(a-1)\times\frac{1+a}{2a}=\frac{a^2-1}{2a} \qquad (a^2-1):\frac{1+a}{2a}=\frac{2a(a^2-1)}{a+1}=2a(a-1)$$

Todo polinomio, compuesto de términos enteros y fraccionarios, se puede reducir á una sola expresion fraccionaria, operando luego con esta segun las reglas que acabamos de indicar; pero es mas fácil, en algun casos, aplicar á esta clase de polinomios las reglas del cálculo de las cantidades enteras. (*)

$$\left(a+\frac{1}{a-1}\right)\times\left(1+\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2-a+1}{a-1}\times\frac{a+1}{a}=\frac{a^3+1}{a^2-a}$$

$$\left(\frac{1}{4}a^4+a^3b+\frac{2}{1-a}\right)\times\left(4a-\frac{1-a}{2}\right)=\frac{9}{8}a^5+\frac{9}{2}a^4b+\frac{8a}{1-a}-\frac{1}{8}a^4-\frac{1}{2}a^3b-1$$

$$\left(\frac{a^2}{bc}-\frac{2a}{n}+\frac{ac}{bm}+\frac{bc}{n^2}-\frac{c^2}{mn}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{n}\right)=\frac{a}{c}-\frac{b}{n}+\frac{c}{m}$$

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)^2=a^2+\frac{2a}{a+1}+\frac{1}{a^2+2a+1} \qquad \sqrt[3]{\frac{a^3}{8}-\frac{3a}{4}+\frac{3}{2a}-\frac{1}{a^3}}=\frac{a}{2}-\frac{1}{a}$$

54. Por medio de los polinomios fraccionarios se puede continuar indefinidamente la division y extraccion de raices no exactas de polinomios, sean estos enteros ó fraccionarios.

Hallar el cociente de a^2+b^2 por $a-b$

$$\begin{array}{l|l}
\text{Dividendo} \quad a^2+b^2 & a-b \quad \text{divisor} \\ \hline
\quad +ab+b^2 & a+b+\frac{2b^2}{a}+\frac{2b^3}{a^2}+\frac{2b^4}{a^3}+\ldots\ldots\frac{2b^n}{a^{n-1}} \\
\quad\quad +b^2+b^2=2b^2 & \\
\quad\quad\quad +\frac{2b^3}{a} &
\end{array}$$

Tambien $\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{b^3}{a^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{b^n}{a^{n+1}}$

La sola inspeccion de estos cocientes indica la ley de su formacion.

Hallar la raiz cuadrada del binomio a^2+b^2

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\frac{b^6}{16a^5}-\text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & 2a \quad \text{duplo del primer término de la raiz } (\textit{divisor comun}) \\ \hline
\text{dividendos} \left\{ +b^2 \right. & 2.^{\circ} \text{ término de la raiz} \\
\quad -\frac{b^4}{4a^2} & 3r. \text{ término de la raiz}
\end{array}$$

y continuando del mismo modo, se hallarán cuantos términos se quiera.

(*) Es evidente que las reglas del cálculo de las cantidades enteras se extienden al de las cantidades polinomias, que contienen uno ó mas términos fraccionarios, pues en las convenciones establecidas para hallar la suma, la diferencia, el producto, etc., de dos polinomios enteros, hemos prescindido del valor entero ó fraccionario, que pudiera tener cada una de las letras

Cálculo de las cantidades fraccionarias literales

bajo la forma de enteras con exponentes negativos.

53. El espíritu de generalidad propio del álgebra nos permite ampliar la notacion de los exponentes considerándolos negativamente, y simplificar por este medio el cálculo de las cantidades fraccionarias, las cuales pueden transformarse en enteras con exponentes negativos.

El cociente de A^m por A^n se escribe bajo la forma A^{m-n}

Si m es mayor que n, el *cociente* será una potencia de A de un grado igual á la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor.

Suponiendo $m=n$, el *cociente* tomará la forma de A^0

y como el cociente de dos cantidades iguales es siempre 1; tendremos $A^0=1$, segun ya hemos convenido en la division de un monomio por otro (22).

Cuando m es menor que n, si llamamos d la diferencia, será $n=m+d$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{y por consiguiente} & \dfrac{A^m}{A^n}=\dfrac{A^m}{A^{m+d}}=\dfrac{A^m}{A^m\times A^d}=\dfrac{1}{A^d}\\ \text{pero} & A^{m-n}=A^{m-(m+d)}=A^{m-m-d}=A^{-d}\end{array}\right\}\quad \text{luego}\quad A^{-d}=\frac{1}{A^d}$$

El exponente negativo no tiene sentido alguno en la definicion primitiva del exponente, pero como su procedencia es legítima, tomaremos de esta misma procedencia su definicion, diciendo que.....

Toda cantidad con exponente negativo es el cociente de la unidad por la misma cantidad con el exponente positivo.

Así, tendremos las igualdades que siguen:

$$a^{-1}=\frac{1}{a}\qquad (1-a)^{-2}=\frac{1}{(1-a)^2}\qquad a^{-3}b^{-1}=\frac{1}{a^3}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a^3b}$$

De la convencion y definicion anterior se deduce la siguiente consecuencia.....

Toda cantidad con exponente entero y positivo equivale al cociente de la unidad por la misma cantidad con el exponente negativo.

En efecto; de $A^{-d}=\frac{1}{A^d}$ se deduce $A^{-d}\times A^d=1$; luego $A^d=\frac{1}{A^{-d}}$.

Cor. **Para dividir dos cantidades iguales con exponentes positivos, basta escribir una sola con un exponente igual á la diferencia positiva ó negativa de los exponentes del dividendo y divisor.**

Sirvan de ejemplos los dos signientes: $\frac{a^2}{a^5}=a^{-3}$ y $\frac{b}{b^2}=b^{-1}$

**Esc.* Considerando las expresiones A^d y A^{-d}, tendremos.....

$$A^d=1\times A^d=1\times A\times A\times A.....\qquad A^{-d}=\frac{1}{A\times A\times A\times.....}$$

luego el exponente positivo de una cantidad A indica que la unidad se debe multiplicar d veces sucesivas por A; y por el contrario el exponente negativo indica que la unidad se debe dividir sucesivamente d veces por la misma cantidad A. Vemos pues, que tambien en los exponentes el cambio de signo corresponde á una accepcion contraria de la cantidad respectiva.

56. Lo que llevamos expuesto basta para transformar un monomio fraccionario en otro entero con exponentes negativos.

Pues de las transformaciones siguientes.....

$$\frac{a^3b}{m^2t}=\frac{a^3b}{t}\times\frac{1}{m^2}=\frac{a^3b}{t}\times m^{-2}=\frac{a^3bm^{-2}}{t}$$

$$\frac{a^3b}{m^2t}=a^3\times\frac{b}{m^2t}=\frac{1}{a^{-3}}\times\frac{b}{m^2t}=\frac{b}{m^2ta^{-3}}$$

se deduce que:

Todo factor del numerador de una cantidad fraccionaria se puede trasladar al denominador, y al contrario, mudando el signo á su exponente.

y por consiguiente $\quad \frac{a^3b}{m^2t}=a^3bm^{-2}t^{-1} \qquad \frac{5a^2}{b^2+1-2b}=5a^2\times(b-1)^{-2}$

57. Las cantidades enteras y fraccionarias con exponentes enteros negativos se calculan lo mismo que las cantidades con exponentes enteros positivos, que hemos considerado hasta ahora.

Adicion y sustraccion. Respecto á estas operaciones nada tenemos que advertir, porque las convenciones establecidas anteriormente son evidentemente generales para todas las cantidades, sean de la forma que se quiera.

Multiplicacion y division. Las letras diferentes se escriben en el *producto* las unas al lado de las otras; y en el *cociente* se escriben en el numerador las del dividendo, y en el denominador las del divisor. Si las letras son iguales, puede ocurrir que sus exponentes sean ambos negativos ó uno positivo y otro negativo. En tal caso, tendremos:

$$A^{-m}\times A^{-n}=\frac{1}{A^m}\times\frac{1}{A^n}=\frac{1}{A^{m+n}}=A^{-(m+n)}=A^{-m-n} \qquad (*)$$

$$A^m : A^{-n}=A^m : \frac{1}{A^n}=A^m\times A^n=A^{m+n}$$

y por consiguiente para *multiplicar ó dividir dos cantidades iguales con exponentes enteros uno positivo y otro negativo ó ambos negativos*, basta escribir una sola con un exponente igual á la suma de los exponentes de los factores en la multiplicacion, y á la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor en la division.

$$\left(2a+1-\frac{1}{2}a^{-1}+\frac{1}{3}a^{-2}\right)\times\left(\frac{1}{2}a^{-2}-a\right)=\frac{2}{3}a^{-1}+\frac{1}{2}a^{-2}-\frac{1}{4}a^{-3}+\frac{1}{6}a^{-4}+\frac{1}{2}-2a^2-a$$

ó lo que es lo mismo $\quad \frac{2}{3a}+\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{4a^3}+\frac{1}{6a^4}+\frac{1}{2}-2a^2-a$

$$\left(\frac{3}{2}a^{-3}b^{-1}m-\frac{a^{-7}}{m}\right) : 3a^{-5}b=\frac{a^2b^{-2}m}{2}-\frac{a^{-2}}{3mb}=\frac{a^2m}{2b^2}-\frac{1}{3a^2bm}$$

(*) Un procedimiento semejante nos dará resultados análogos, suponiendo los exponentes uno positivo y otro negativo. En la division presentamos el caso de un exponente positivo y otro negativo.

Elevacion a potencias y extraccion de raices. Tambien aqui puede suceder que el exponente de la cantidad y el índice de la potencia ó de la raiz sean ambos negativos, ó bien uno positivo y otro negativo. En uno y otro caso, tendremos:

$$(A^{-m})^n=\left(\frac{1}{A^m}\right)^n=\frac{1}{A^{mn}}=A^{-mn}$$

$$(A^{-m})^{-n}=\frac{1}{(A^{-m})^n}=1:\left(\frac{1}{A^m}\right)^n=1:\frac{1}{A^{mn}}=A^{mn}$$

$$\sqrt[n]{A^{-mn}}=\sqrt[n]{\frac{1}{A^{mn}}}=\frac{1}{A^{\frac{mn}{n}}}=A^{-m}$$

y por consiguiente; *para elevar una cantidad con exponente entero positivo ó negativo á una potencia, ó extraer de ella una raiz cuyo índice sea divisor del exponente de la cantidad dada*, se multiplica el exponente de la cantidad por el índice de la potencia, ó se divide el mismo por el índice de la raiz.

$$(5a^{-2}-ab^{-1})^3=125a^{-6}-75a^{-3}b^{-1}+15b^{-2}-a^3b^{-3}=\frac{125}{a^6}-\frac{75}{a^3b}+\frac{15}{b^2}-\frac{a^3}{b^3}$$

$$(a-a^{-1}+\tfrac{1}{2}a^{-2})^{-2}=1:(a^2-2+a^{-1}+a^{-2}-a^{-3}+\tfrac{1}{4}a^{-4})=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^4}-\frac{1}{a^5}+\text{etc.}$$

$$\sqrt[3]{8a^{-3}-6a^{-1}b^{-2}+\tfrac{3}{2}ab^{-4}-\tfrac{1}{8}a^3b^{-6}}=2a^{-1}-\frac{ab^{-2}}{2}=\frac{2}{a}-\frac{a}{2b^2}$$

Observaciones generales.

***58.** El cálculo de las cantidades enteras con exponentes negativos se emplea con ventaja en algunos casos, no solo para evitar la complicacion de las cantidades fraccionarias, sino tambien para deducir con mayor generalidad la ley de la formacion de ciertos resultados.

En efecto, aplicando las reglas generales de la division algebráica á los ejemplos siguientes, tendremos:

$$1:(a-b)=a^{-1}+a^{-2}b+a^{-3}b^2+a^{-4}b^3+\ldots\ldots\ldots\ldots a^{-n}b^{n-1}$$

$$\frac{2x^3+9x^2+15x+8}{x^2+3x+2}=2x+3+2x^{-1}-4x^{-2}+8x^{-3}\ldots\ldots\ldots$$

$$(a^4-b^4):(ab^2+b^3)=a^3b^{-2}-a^2b^{-1}+a-b \quad \text{ó bien} \quad a^3b^{-2}-a^2b^{-1}+a^1b^0-a^0b^1$$

cuya notacion permite considerar á todos los términos del cociente de la última division, compuestos de los factores a y b, ordenados el primero por las potencias descendentes desde el índice 3 hasta 0, y el segundo por las ascendentes desde —2 hasta 1.

Del mismo modo en la segunda division, el término 3 del cociente se puede considerar como representante de $3x^0$

Las reglas generales de la extraccion de las raices cuadrada y cúbica (**38** y **41**) nos dan los resultados que siguen.

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+\tfrac{1}{2}a^{-1}b^2-\tfrac{1}{8}a^{-3}b^4+\tfrac{1}{16}a^{-5}b^6-\tfrac{5}{128}a^{-7}b^8+\text{etc.}=a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\text{etc.}$$

$$\sqrt[3]{x^3-1}=x-\tfrac{1}{3}x^{-2}-\tfrac{1}{9}x^{-5}-\tfrac{5}{81}x^{-8}\ldots=x-\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{9x^5}-\frac{5}{81x^8}-\text{etc.} \quad (*)$$

(*) Un número entero ó decimal se puede considerar como un polinomio ordenado por las potencias sucesivas de la base del sistema de numeracion.

$$5240,38=5\times10^3+2\times10^2+4\times10+3\times10^{-1}+8\times10^{-2}$$

Ejercicios para el cálculo de las cantidades fraccionarias literales.

59. Orígen de las cantidades fraccionarias literales. Teorema fundamental de la teoría de estas cantidades y sus consecuencias inmediatas. ¿Todas las propiedades, que hemos demostrado en la aritmética acerca de los números fraccionarios, tienen aplicacion exacta en las expresiones fraccionarias literales?

Simplificar las expresiones fraccionarias siguientes:

$$\frac{5a^2+5ab}{a^2-b^2} \qquad \frac{a^2-2a+1}{a^2-1} \qquad \frac{a^2+2a-3}{a^2+5a+6}=\frac{a-1}{a+2} \qquad \frac{2x^3+3x^2+x}{x^3-x^2-2x}$$

¿Cuál debe ser la razon de las cantidades x, y para que, añadiendo la primera al numerador de la *fraccion* $\frac{a}{b}$ y la segunda al denominador, no se altere el valor de esta fraccion? Efectuar las operaciones indicadas á continuacion:

$$\frac{a}{a+b}\pm\frac{a}{a-b} \quad\Big|\quad \frac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2}+\frac{a^3+a^2b}{a^2+2ab+b^2} \quad\Big|\quad \frac{a^2}{b^{n+1}}+\frac{a}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}$$

$$\frac{a+1}{(1-a)^{n-1}}-\frac{a+1}{(1-a)^{n+1}} \quad\Big|\quad \frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(x^2+1)}$$

$$\frac{a+b}{2a-2x}\times\frac{4a^2-4x^2}{a+b} \qquad \left(\frac{a}{a-b}\pm\frac{b}{a+b}\right)\times\left(\frac{a}{a-b}\mp\frac{b}{a+b}\right)$$

$$\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right) \qquad \frac{2a^3+4a^2b}{5b}:\frac{a^2-ab}{a-2b}:\frac{a^2-4b^2}{a-b}=\frac{2a}{5b}$$

$$\left(\frac{a-b}{1+A^n-A^{n-1}}\right)^3 \qquad \sqrt{\frac{a^2-2a^2y+a^2y^2}{9y^2+9y+9/4}} \qquad \sqrt[3]{\frac{y^3-3y^2+3y-1}{(y+1)^4}}$$

Verificar ó comprobar la exactitud de la igualdad siguiente:

$$\frac{\left(1-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2b}\right)}{\left(a-2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)}=\frac{(a^2-ab-b^2)(a+b)}{2ab^2(b-a)}$$

Hallar los cocientes y raices inexactas respectivas en los ejemplos siguientes:

$$\frac{a}{1-x} \quad \frac{a}{x+1} \quad \frac{a+x}{b+x} \quad \frac{a-x}{b-x} \quad \frac{x+a}{x-b} \quad \sqrt{1-x^2} \quad \sqrt{a^2-b^2} \quad {}^{*}\sqrt[3]{1+x}$$

Los resultados de las dos últimas operaciones son.....

$$a-\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}-\frac{b^6}{16a^5}-\text{etc.} \quad\Big|\quad 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\text{etc.}$$

Interpretacion de los exponentes negativos: consecuencias de esta interpretacion. *Demostrar en todos los casos que la multiplicacion y division de dos cantidades iguales y la elevacion á potencias y extraccion de raices de una cantidad cualquiera se efectuan lo mismo cuando los exponentes son positivos, que siendo negativos, ó positivos y negativos.

$$\left(5a^{-2}-2b^{-3}+\tfrac{1}{2}(a+b)^{-1}\right)\times\left(2a^2-b^{-2}+\tfrac{2}{3}(a+b)\right)\ \Big|\ \left(a^{-1}+2a^{-2}b-5a^3b^{-2}\right)^3$$

Aplicaciones de los exponentes negativos á la determinacion de....

$$\frac{a}{x+1} \qquad \frac{x+a}{x-b} \qquad \sqrt{a^4-b^4} \qquad \sqrt{a^2-b} \qquad {}^{*}\sqrt[3]{a^3-b^3}$$

CÁLCULO ALGEBRÁICO DE LAS CANTIDADES RADICALES.

Preliminares. Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion y extraccion.

Teoría de los exponentes fraccionarios.

Preliminares.

60. La cantidad entera ó fraccionaria, que está afecta del signo radical, se llama CANTIDAD RADICAL.

Llámase *cantidad irracional* algebráica la raiz indicada é inexacta de una cantidad literal entera ó fraccionaria.

$\sqrt{2a}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{5a}}$ $\sqrt[n]{a^2-b^2}$ son cantidades irracionales.

El gran número de casos en que no es posible obtener la raiz exacta de una cantidad, y lo embarazoso de los cálculos por aproximacion, exijen una transformacion de las cantidades radicales, sean ó no irracionales, en otras mas sencillas, que permitan reducir y simplificar los resultados finales, y dar á las fórmulas toda la generalidad de que son susceptibles (*).

61. Una cantidad radical no varia de valor aunque se multiplique el índice por un número entero, con tal que se eleve la cantidad subradical á la potencia del mismo grado, que indique dicho número. Tampoco varia aunque se divida el índice del radical por uno de sus divisores, con tal que se extraiga de la cantidad subradical la raiz del mismo grado que indique dicho número.

En efecto; es evidente que..... $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n=A$

elevando ambos miembros á la potencia m, tendremos $\left(\sqrt[n]{A}\right)^{mn}=A^m$

y extrayendo ahora la raiz del grado mn, será $\sqrt[n]{A}=\sqrt[mn]{A^m}$

Esta última igualdad demuestra evidentemente las dos partes de la proposicion.

Consecuencia 1.ª Simplificar una cantidad radical.

Para simplificar una cantidad radical, se divide el índice por uno de sus divisores, y se extrae de la cantidad subradical la raiz del grado, que indique este divisor.

$$\sqrt[6]{25a^2-10a+1}=\sqrt[3]{5a-1} \qquad \sqrt[2n]{\frac{1}{4a^2}}=\sqrt[n]{\frac{1}{2a}}$$

Del número 33 se deduce tambien que, si alguno de los factores de la

(*) Ocurre con frecuencia que la cantidad considerada en el número sea *irracional* y considerada en la extension *sea racional.* Esto sucede en $\sqrt{a}$ cuando a es la suma de dos unidades numéricas ó geométricas, pues en el primer caso el número representado por $\sqrt{a}$ es *irracional* y en el segundo la extension bajo la misma forma es *racional.*

Tenemos que hacer tambien la siguiente observacion no menos importante que la anterior: $\sqrt{a}$ expresa indiferentemente las dos raices cuadradas de la cantidad a; sin embargo se supone ordinariamente que, si la expresion radical va precedida del signo + ó no lleva signo alguno, representa solo la raiz positiva numérica ó geométrica de a, y si lleva el signo — expresa la raiz negativa.

cantidad subradical tiene raiz exacta del grado que indica el índice de la raiz, se extrae esta y se escribe por coeficiente del radical. Recíprocamente, el coeficiente de una cantidad radical se puede introducir como factor debajo del signo radical, elevándole á la potencia del mismo grado, que indica el índice de la raiz.

$$\sqrt{5a(a-1)^2}=(a-1)\sqrt{5a} \qquad (a-1)\sqrt{5a}=\sqrt{5a(a^2-2a+1)}$$

$$\sqrt{\frac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}}=\frac{a-x}{a+x}\sqrt{x} \qquad \frac{x+1}{\sqrt{2-4x^2+2x^4}}=\frac{x+1}{(1-x^2)\sqrt{2}}=\frac{1}{(1-x)\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{(a-b)x}}{a-b}=\sqrt{\frac{(a-b)x}{(a-b)^2}}=\sqrt{\frac{x}{a-b}} \qquad \frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

Toda cantidad irracional se llama *racional* con relacion á su coeficiente. Un polinomio es *racional* respecto á una letra, cuando todos sus términos son racionales relativamente á ella.

Así el polinomio $x^3\sqrt{a}+2x^2\sqrt{b}+3x\sqrt{c}+4\sqrt{5}$ es racional respecto de x

Consecuencia 2.ª Reduccion de dos ó mas radicales de diferentes índices á otros de índice comun (*).

Para reducir dos ó mas radicales de índices diferentes á otros de un mismo índice, se multiplican todos los índices entre sí y tendremos el índice comun, y luego la cantidad subradical de cada uno se eleva á la potencia, que indica el producto de los índices de los demas radicales.

Sean las cantidades radicales dadas $\sqrt[m]{A}$, $\sqrt[n]{B}$

Multiplicando por n el índice de la primera, y elevando á la potencia del grado n la cantidad subradical A; multiplicando por m el índice de la segunda, y elevando á la potencia del grado m la cantidad subradical B, tendremos las nuevas expresiones radicales $\sqrt[mn]{A^n}$ y $\sqrt[mn]{B^m}$ con un índice comun y respectivamente iguales á las anteriores

Del mismo modo.....

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \quad 5\sqrt[n]{a-b} \quad \sqrt[3]{A^{-2}} \text{ equivalen á } \sqrt[6n]{a^{-3n}} \quad 5\sqrt[6n]{(a-b)^6} \quad \sqrt[6n]{A^{-4n}}$$

Este procedimiento se abrevia, cuando alguna de las cantidades radicales se puede simplificar, ó bien cuando los índices de los radicales no son primos entre sí, pues en tal caso, despues de simplificar las expresiones radicales y hallar el m. c. m. de sus índices, se multiplica el índice de cada una por el factor que le falta para convertirse en dicho m. c. m. cuidando de elevar la cantidad subradical á la potencia del grado, que indique el nuevo factor. Asi tendremos.....

$$\left\{\begin{array}{llllll} \sqrt[20]{a^3} & 2\sqrt[m]{b} & \sqrt{1-a} & \sqrt[5]{a^{-1}} & (a-1)\sqrt[mn]{A^n} & \sqrt{\frac{a}{b}} \\ \sqrt[10m]{a^m} & 2\sqrt[10m]{b^{10}} & \sqrt[10m]{(1-a)^{5m}} & \sqrt[10m]{a^{-2m}} & (a-1)\sqrt[10m]{A^{10}} & \sqrt[10m]{\left(\frac{a}{b}\right)^{5m}} \end{array}\right.$$

(*) Los radicales de un mismo índice se llaman *homogéneos*.

Adicion de las cantidades radicales literales.

62. La *suma* algebráica de dos ó mas radicales es el polinomio, que resulta, de escribir todos los sumandos unos al lado de otros con los mismos signos.

La suma de $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a+b}$ y $-\sqrt[n]{a+1}$ es igual á $\sqrt{a}+\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[n]{a+1}$

Llámanse cantidades radicales *semejantes* las que tienen el mismo índice é igual la parte subradical.

$4\sqrt{a+b}$, $5\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{a+b}$ son cantidades radicales semejantes

$\sqrt{4a^2b}$, $5a\sqrt{b}$ y $a\sqrt[4]{b^2}$ tambien son semejantes, pues la primera equivale á $2a\sqrt{b}$ y la última es lo mismo que $a\sqrt{b}$

La suma de dos ó mas cantidades radicales semejantes se simplifica sumando ó restando los factores racionales y multiplicando el resultado por la parte irracional comun.

La suma de $5a\sqrt{2ab}$ y $a\sqrt{2ab}$ es igual á $6a\sqrt{2ab}$

La suma de $2a\sqrt[3]{1-a}$ y $-b\sqrt[3]{1-a}$ es igual á $(2a-b)\sqrt[3]{1-a}$

Un polinomio compuesto de monomios racionales é irracionales, ó todos irracionales, se puede considerar como la suma algebráica de todos sus términos; y por consiguiente..... La suma algebráica de dos ó mas polinomios irracionales es el polinomio, que resulta de escribir todos los términos de los sumandos con los mismos signos.

$$\text{sumandos}\left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{5a(1-a)^n}\mp\sqrt[3]{2b^3}-(1-a)\sqrt[2n]{25a^2}\pm b\sqrt[3]{2}\\ 3a\sqrt{2m}-2\sqrt{1+a}+\frac{2}{a}\\ \sqrt{4a+4}+a\sqrt{8m}-\sqrt{a^{-2}}-\sqrt{32a^2m}\end{array}\right\}\text{Suma reducida}\quad a\sqrt{2m}+\frac{1}{a}$$

La suma de dos cantidades radicales conjugadas es una cantidad racional (*)

$$(A+\sqrt[n]{B})+(A-\sqrt[n]{B})=2A$$

Sustraccion de las cantidades radicales literales.

63. El *resíduo* ó diferencia de dos cantidades radicales monomias ó polinomias se obtiene escribiendo el minuendo y á su continuacion el sustraendo con signos contrarios.

$$\left[\frac{2}{a}\sqrt{1-a}-\sqrt[3]{16a^{-2}}\pm\frac{5a}{m}+\sqrt[4]{(1-a)^2}\right]-\left[\pm5am^{-1}-\frac{2\sqrt[3]{2a}}{a}\right]=\left(1+\frac{2}{a}\right)\sqrt{1-a}$$

La diferencia de dos cantidades radicales *conjugadas* es una cantidad irracional.

$$(A-\sqrt[n]{B})-(A+\sqrt[n]{B})=-2\sqrt[n]{B}$$

(*) Llámanse cantidades radicales *conjugadas* las expresiones de la forma siguiente: $A+\sqrt{B}$ y $A-\sqrt{B}$ que solo se diferencian en el signo + ó — que antecede al radical.

Multiplicacion de las cantidades radicales literales.

64. La raiz de un producto de dos ó mas factores es igual al producto de las raices del mismo grado de los factores. De donde se deduce que.....

El *producto* de dos ó mas cantidades radicales monomias de un mismo índice es igual á la raiz del mismo grado del producto de las cantidades subradicales. El coeficiente del producto es el producto de los coeficientes de los factores.

Si las cantidades radicales no son de un mismo índice, se reducirán á uno comun antes de aplicar la regla anterior.

$$2\sqrt{a+b}\times(1+a)\sqrt{a-b}=2(1+a)\sqrt{a^2-b^2}$$

$$5ab\sqrt{a}\times\sqrt[n]{a+1}=5ab\sqrt[2n]{a^n}\times\sqrt[2n]{a^2+2a+1}=5ab\sqrt[2n]{a^n(a^2+2a+1)}$$

Para hallar el producto de un monomio por un polinomio ó de dos polinomios irracionales, se emplea el mismo procedimiento que si fueran racionales,

$$\left(2a\sqrt[3]{b^2}+(1-a)\sqrt{2b}-\frac{1}{a}\right)\times2a\sqrt[3]{b}=4a^2b+2a(1-a)\sqrt[6]{8b^5}-2\sqrt[3]{b}$$

El producto de dos radicales *conjugadas* de 2.º grado, es una cantidad racional.

$$(A+\sqrt{B})\times(A-\sqrt{B})=A^2-B$$

Division de las cantidades radicales literales.

65. La raiz del cociente de dos cantidades es igual al cociente de las raices del dividendo y divisor. De donde se deduce que

El *cociente* de dos cantidades radicales monomias de un mismo índice es igual á la raiz del mismo grado del cociente de las cantidades subradicales. El coeficiente del cociente es igual al cociente de los coeficientes del dividendo y divisor.

Si las cantidades radicales no son de un mismo índice, se reducirán á uno comun antes de aplicar la regla anterior.

$$5a\sqrt{a^2-b^2} : (1-a)\sqrt{a+b}=\frac{5a}{1-a}\sqrt{a-b}$$

$$2(a^2-1)\sqrt[3]{a^4} : (1+a)\sqrt{4ab}=2(a^2-1)\sqrt[6]{a^8} : (1+a)\sqrt[6]{64a^3b^3}=(a-1)\sqrt[6]{a^5b^{-3}}$$

Para hallar el cociente de un polinomio por un monomio ó de un monomio ó polinomio por otro polinomio todos irracionales, se emplea el mismo procedimiento que si los dados fueran racionales.

$$\left[2a\sqrt{b}-\sqrt{2a^{-2}}-a^2\sqrt[6]{8b^5}-5\sqrt[6]{32a^2}+5\sqrt[3]{2a^4b}+\sqrt[3]{b}\right] : \left[\sqrt{2a^2b}-\frac{1}{a}-5\sqrt[3]{2a}\right]=\sqrt{2}-a\sqrt[3]{b}$$

El cociente de dos cantidades radicales *conjugadas* es una cantidad irracional.

$$\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}=\frac{(A+\sqrt{B})(A+\sqrt{B})}{(A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B})}=\frac{A^2+2A\sqrt{B}+B}{A^2-B}=\frac{A^2+B}{A^2-B}+\frac{2A}{A^2-B}\sqrt{B} \quad (*)$$

(*) La transformacion del cociente, multiplicando el dividendo y el divisor por la conjugada de este, abrevia en muchos casos la determinacion del resultado final. Sirva de ejemplo:

$$(3+4\sqrt{3}) : (\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5})=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5} \qquad \frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\frac{1}{2b}\left\{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right\}$$

Elevacion á potencias de las cantidades radicales literales.

66. La *potencia* de una cantidad radical monomia se halla elevando el coeficiente y la parte subradical á la misma potencia sin alterar el índice del radical.

$$(a\sqrt{B})^n = a\sqrt{B}\times a\sqrt{B}\times a\sqrt{B}\times\ldots\ldots = a^n\sqrt{B^n}$$

$$\left(5b\sqrt[n]{a-b}\right)^2 = 25b^2\sqrt[n]{a^2-2ab+b^2} \qquad \left((1-a)\sqrt{2a}\right)^3 = (1-a)^3\sqrt{8a^3}$$

Si el índice de la raiz es divisible por el exponente de la potencia, basta elevar el coeficiente y dividir el índice de la raiz por el exponente de la potencia, sin alterar la parte subradical.

$$(\sqrt[mn]{A})^n = \sqrt[mn]{A^n} = \sqrt[m]{A}$$

$$(2a\sqrt[5n]{a-b})^5 = 32a^5\sqrt[n]{a-b} \qquad (\tfrac{1}{a}\sqrt[10]{a-b})^5 = a^{-5}\sqrt{a-b}$$

Para elevar un polinomio irracional al cuadrado ó al cubo, seguiremos las mismas reglas, que hemos dado, para elevar los polinomios racionales.

$$(A\pm\sqrt{B})^3 = A^3\pm 3A^2\sqrt{B}+3AB\pm\sqrt{B^3}$$

$$(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2 = 2a-2\sqrt{a^2-b^2}$$

Extraccion de raices de las cantidades radicales literales.

67. La *raiz* de un grado cualquiera de una cantidad radical monomia se halla extrayendo la misma raiz del coeficiente y de la parte subradical, sin alterar su índice (63). Si esto no es posible, sin complicar demasiado el resultado, se multiplican los dos índices entre sí y se copia la parte subradical, elevando el coeficiente á la potencia del mismo grado que el índice del radical (*).

$$\sqrt[m]{A^m\sqrt[n]{B^{2m}}} = A\times\sqrt[n]{B^2} \qquad \sqrt[m]{A\sqrt[n]{B^2}} = \sqrt[m]{A}\times\sqrt[mn]{B^2} = \sqrt[mn]{A^n\times B^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}\sqrt{1-3a+3a^2-a^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-a}$$

$$\sqrt[5]{2\sqrt{(1-a)\sqrt{1-a}}} = \sqrt[20]{16(1-a)^3}$$

Para hallar la raiz cuadrada ó cúbica de un polinomio irracional, seguiremos las reglas generales explicadas para las cantidades racionales. Si el residuo es cero, el resultado que será siempre irracional, es la raiz exacta del polinomio propuesto. Así, tendremos:

$$\sqrt{a+\sqrt{4a}-4\sqrt[6]{a^3b^2}+1-4\sqrt[3]{b}+4\sqrt[3]{b^2}} = \sqrt{a}+1-2\sqrt[3]{b}$$

(*) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}$ pues suponiendo $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = a$, será $\sqrt[n]{A} = a^m$ y $A = a^{mn}$; luego la raiz del grado mn de A será igual a y por consiguiente á la raiz del grado m de $\sqrt[n]{A}$

*68. *Esc. gral.* De la aplicacion de las reglas anteriores se deduce que.....
La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos cantidades de la forma $A+\sqrt{B}$ son tambien de la misma forma.

Transformar la expresion $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ en otra de la forma $A'+\sqrt{B'}$ ó $\sqrt{A''}+\sqrt{B''}$

Llamando para mayor facilidad $A+\sqrt{B}=S$ y $A-\sqrt{B}=D$; tendremos, despues de hacer la sustitucion en lugar de S y D, efectuar las operaciones indicadas en la fórmula del cuadrado, y reducir los términos semejantes; las dos igualdades....

$$(\sqrt{S}+\sqrt{D})^2=2A+2\sqrt{A^2-B}$$

$$(\sqrt{S}-\sqrt{D})^2=2A-2\sqrt{A^2-B}$$

y extrayendo de los dos miembros de ambas igualdades la raiz cuadrada, resulta

$$\sqrt{S}+\sqrt{D}=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}$$

$$\sqrt{S}-\sqrt{D}=\sqrt{2A-2\sqrt{A^2-B}}$$

Ahora bien, si conocemos la *suma* y la *diferencia* de las cantidades $\sqrt{S}$ y $\sqrt{D}$, como es evidente que la mayor es igual á la menor mas la diferencia, la suma de ambas se compondrá de dos veces la menor mas la diferencia, ó lo que es lo mismo, dos veces la menor será el exceso de la *suma* sobre la *diferencia*, luego la *menor es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.* Del mismo modo se deduce que la mayor es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia. Y por consiguiente serán evidentes las igualdades, que siguen:

$$\sqrt{S}=\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Cuando A^2-B es un cuadrado exacto, la expresion propuesta se convierte en la suma ó diferencia de dos radicales simples, ó bien en la suma ó diferencia de una cantidad racional y otra irracional.

Aplicaciones á ejemplos particulares:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(7+\sqrt{49-48})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(7-\sqrt{49-48})}=2+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{3}-\sqrt{2} \qquad \sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}}=a+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}c\sqrt{a^2-c^2}}=\frac{1}{2}\left(c+\sqrt{a^2-c^2}\right) \qquad (*)$$

(*) Antes de terminar el cálculo de las cantidades irracionales, vamos á hacer una observacion acerca de la raiz cuadrada de un número, cuyo valor no se conoce con precision ó exactitud. Suponiendo dicho número N comprendido entre los conocidos A y B, es evidente que $\sqrt{N}$ estará comprendido entre $\sqrt{A}$ y $\sqrt{B}$, y, por consiguiente si tomamos por $\sqrt{N}$ un número cualquiera entre estos límites, el error que resulte será siempre menor que......

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B}) \quad \text{cuya expresion puede tomar la forma} \quad \frac{A-B}{2(\sqrt{A}+\sqrt{B})} \quad \text{ó bien} \quad \frac{A-B}{4\sqrt{B}}$$

puesto que $\sqrt{A}$ y $\sqrt{B}$ se pueden suponer iguales, atendiendo á que su diferencia suele ser tan pequeña como se quiera; luego esta última fórmula representará el límite inferior del grado de aproximacion, al hallar la raiz cuadrada de un número N, comprendido entre otras dos A y B.

Cálculo de las cantidades radicales literales,

bajo la forma de cantidades racionales con exponentes fraccionarios.

69. La generalidad de los cálculos algebráicos nos autoriza para amplia aun mas la notacion de los exponentes, que hasta ahora hemos considerado enteros positiva ó negativamente. Podemos en efecto, considerarlos tambien bajo la forma fraccionaria, y simplificar por este medio el cálculo de las cantidades irracionales, reduciéndolas á racionales con exponentes fraccionarios positivos ó negativos.

La raiz del grado n de la cantidad $A^{\pm m}$ se escribe bajo la forma $A^{\pm\frac{m}{n}}$
Si m es divisible por n, la raiz será una potencia de A, de un grado igual al cociente de m por n.

Si m es igual á n, la raiz será $A^{\pm 1}$

Cuando m no es divisible por n, podemos sin embargo convenir en representar por $A^{\pm\frac{m}{n}}$ la cantidad radical $\sqrt[n]{A^{\pm m}}$

El exponente fraccionario, positiva ó negativamente considerado, no tiene sentido alguno en la definicion primitiva del exponente; no obstante, como su procedencia es regular, le definiremos con relacion á esta regularidad de orígen diciendo que.....

El exponente fraccionario positivo ó negativo de una cantidad expresa la raiz del grado, que indica su denominador, de la misma cantidad con el numerador por exponente.

Así, tendremos las siguientes igualdades:

$$A^{\frac{1}{2}}=\sqrt{A} \qquad (1-a)^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{(1-a)^{-2}} \qquad A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{2}{n}}=\sqrt{A}\times\sqrt[n]{B^2}$$

Cor. Para extraer una raiz cualquiera de una cantidad con exponente entero positivo ó negativo, basta dividir este exponente por el índice de la raiz, sea el cociente entero ó fraccionario (positivo ó negativo).

Y por consiguiente toda cantidad con exponente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ etc., será igual á su raiz cuadrada, cúbica, cuarta, etc.; y la raiz cuyo índice sea $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc., será lo mismo que el cuadrado, cubo, etc.

Luego la expresion $(5a^{-2})^{\frac{1}{2}}$ será lo mismo que $\sqrt{5a^{-2}}$ ó bien $\frac{1}{a}\sqrt{5}$

y del mismo modo $\sqrt[4]{a+b}$ equivale á $\left(a+b\right)^{\frac{1}{4}}$

Ultimamente, $2\sqrt[\frac{1}{2}]{-5A^n}=2(-5A^n)^2=50A^{2n}$

70. Las cantidades enteras ó fraccionarias con exponentes fraccionarios positivos ó negativos se calculan lo mismo que las cantidades con exponentes enteros, que hemos considerado hasta ahora.

*Adicion y sustraccion. Las convenciones establecidas desde el principio del álgebra para la adicion y sustraccion son generales y por consiguiente independientes de la forma de los datos.

*MULTIPLICACION Y DIVISION. Tambien las convenciones establecidas para obtener los productos y cocientes algebráicos de cantidades diferentes son generales y por lo tanto independientes de la forma de los datos; pero si estos vienen expresados por letras iguales, puede ocurrir que sus exponentes sean ambos fraccionarios, ó uno entero y otro fraccionario, en cuyo caso tendremos....

$$A^{\frac{m}{n}}\times A^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{A^m}\times\sqrt[q]{A^p}=\sqrt[nq]{A^{mq}\times A^{np}}=\sqrt[nq]{A^{mq+np}}=A^{\frac{mq+pn}{nq}}\quad(*)$$

$$A^m : A^{\frac{p}{q}}=A^m : \sqrt[q]{A^p}=\sqrt[q]{A^{mq}} : \sqrt[q]{A^p}=\sqrt[q]{A^{mq-p}}=A^{m-\frac{p}{q}}$$

y por consiguiente; *para multiplicar ó dividir dos cantidades iguales con exponentes uno entero y otro fraccionario ó ambos fraccionarios*, basta escribir una sola con un exponente igual á la suma de los exponentes de los factores en la multiplicacion y á la diferencia de los del dividendo y divisor en la division.

$$\left[4a^{-\frac{1}{2}}b^2-2ab^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{b^{-2}}a^{1-\frac{m}{n}}\right]\times\frac{1}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{-2}=2a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{4}{3}}-5a^{\frac{5}{3}-\frac{m}{n}}$$

$$\text{ó bien}\quad 2\sqrt[6]{a}-\sqrt[3]{a^5b^{-4}}-5\sqrt[3n]{a^{5n-3m}}$$

$$\left[1-2a^{\frac{3}{2}}b^{-5}+ab^{-2}-10a^{-\frac{7}{10}}b^{-2}+20a^{\frac{4}{5}}b^{-7}-10a^{\frac{3}{10}}b^{-4}\right]:\left(a^{\frac{1}{2}}-10a^{-\frac{1}{5}}b^{-2}\right)=$$

$$a^{-\frac{1}{2}}-2ab^{-5}+b^{-2}\sqrt{a}\qquad\text{ó lo que es lo mismo}\qquad\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{2a}{b^5}+\frac{\sqrt{a}}{b^2}$$

*ELEVACION Y EXTRACCION. El exponente de la cantidad y el grado ó índice de la potencia ó raiz, pueden ser ambos fraccionarios ó uno entero y otro fraccionario. Los resultados en ambos supuestos, uno para la elevacion y otro para la extraccion, son los siguientes:

$$\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^p}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{A^m}\right)^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{A^{mp}}}=\sqrt[nq]{A^{mp}}=A^{\frac{mp}{nq}}=A^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}$$

$$\sqrt[q]{A^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{A^m}}=\sqrt[qn]{A^m}=A^{\frac{m}{qn}}=A^{\frac{m}{n}:q}$$

y por consiguiente; *para elevar una cantidad con exponente fraccionario á una potencia, cuyo exponente es tambien fraccionario, ó para extraer de dicha cantidad una raiz cualquiera*, se multiplica el exponente de la cantidad por el exponente de la potencia, ó se divide por el índice de la raiz.

$$\left(5a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}ab^{-\frac{3}{2}}\right)^2=25a-5a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}a^2b^{-3}=25a+\frac{a^2}{4b^3}-5a\sqrt{ab^{-3}}$$

$$\sqrt{a^{\frac{1}{2}}+4b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{4}}+2a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}+\text{etc.}$$

(*) Un procedimiento semejante nos dará resultados análogos, suponiendo ser ambos exponentes fraccionarios negativos, uno positivo y otro negativo, uno entero y otro fraccionario, etc.

Observaciones generales acerca de los exponentes.

*71. El cálculo de los exponentes fraccionarios es uno de los ejemplos mas notables de la utilidad de la notacion algebráica, pues por la analogía, que hay entre estos exponentes y los enteros (sean positivos ó negativos), se pueden calcular unos y otros por las mismas reglas, segun acabamos de ver en los números anteriores; necesitándose otras distintas para el cálculo de los radicales, á consecuencia de la ninguna relacion del signo $\sqrt{\ }$ con la operacion que indica.

El cálculo algebráico lleva pues en sí el sello de la generalidad mas completa, que puede imaginarse. El coeficiente, que en su orígen hemos considerado entero (positivo ó negativo), ha tomado despues la forma fraccionaria, la irracional y hasta puede tomar la imaginaria. Respecto al exponente tambien entero y positivo en un principio, le consideramos despues entero y negativo, y últimamente fraccionario positivo y negativo. Suponiéndole ahora irracional, nos será fácil demostrar la generalidad de las reglas ya conocidas para el cálculo de las cantidades con exponentes racionales ó comensurables.

1.° Siendo x y z irracionales (*) será $A^x \times A^z = A^{x+z}$

En efecto, si llamamos x' y z' á dos cantidades racionales tan próximas á x y z como queramos, tendremos segun las reglas de la multiplicacion para dos cantidades iguales con exponentes enteros ó fraccionarios (sean ambos positivos ó negativos, ó uno positivo y otro negativo), la igualdad siguiente:

$$A^{x'} \times A^{z'} = A^{x'+z'}$$

y por consiguiente, en virtud del *teorema de los límites*, tambien...

$A^x \times A^z$ será igual á A^{x+z}

2.° De la igualdad $A^x \times A^z = A^{x+z=d}$ se deduce que $A^d : A^x = A^{z=d-x}$

3.° $(A^x)^n = A^x \times A^x \times A^x \ldots = A^{nx}$

$$\left(A^x\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(A^x\right)^m} = \sqrt[n]{A^{mx}} = A^{\frac{mx}{n}}$$

$(A^x)^z = A^{xz}$ pues siendo z' una cantidad racional de modo que la diferencia $z - z'$ sea tan pequeña como se quiera, tendremos siempre $(A^x)^{z'} = A^{xz'}$ y por consiguiente tambien $(A^x)^z = A^{xz}$

4.° De las igualdades del caso anterior se deducen las análogas en la extraccion de raices.

Luego en la *multiplicacion* algebráica de dos ó mas cantidades iguales se suman siempre sus exponentes; en la *division* se restan, en la *elevacion á potencias* se multiplica el exponente de la cantidad por el índice de la potencia; y en la *extraccion de raices* se divide el exponente de la cantidad por el índice de la raiz.

Aplicacion á un caso particular:

$$(A+B)^{5+\sqrt{3}} \times (A+B)^{5-\sqrt{2}} = \frac{(A+B)^5 \times (A+B)^{\sqrt{3}} \times (A+B)^5}{(A+B)^{\sqrt{2}}}$$

(*) Positiva ó negativamente consideradas.

Ejercicios para el cálculo de las cantidades radicales.

72. Efectuar las operaciones indicadas en alguno de los ejemplos siguientes, y comprobar las de aquellos, cuyos resultados finales expresamos á continuacion:

$$\left(2a\sqrt{1-b}+\frac{1}{2}a\sqrt{2a}-3\sqrt{a^2-a^2b}\right)\pm\left(\frac{1}{5}\sqrt{50a^3}-2\sqrt{\frac{1-b}{a^2}}-\frac{a}{2}\sqrt{a}\right)$$

$$\left(2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\right)\times\left(\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b}\right)=2a+12\sqrt[3]{b^2}+11\sqrt[6]{a^3b^2}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\times\sqrt{c+\sqrt{d}} \qquad \left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{b^2}\right)\times\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[5]{b^2}\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{am^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{1}{b}}\right)\times\left(\frac{m}{n}\sqrt{(a+b)a}-\sqrt{\frac{b^5}{m^2}}\right)=\frac{am^2}{n}-\frac{b^2}{m}+\left(\frac{m}{bn}-\frac{b^2}{a+b}\right)\sqrt{(a+b)ab}$$

$$1:(2+\sqrt{3})=2-\sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{c}} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \qquad \sqrt{ab}+\frac{ab}{a-\sqrt{ab}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}=\sqrt[n]{\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}} \qquad \frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab}$$

$$\left(a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}\right)^3 \qquad \left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{c}\right)^2 \qquad \left(\sqrt{x-1}+1\right)^2$$

$$\sqrt{x+xy-2x\sqrt{y}}=(\sqrt{y}-1)\sqrt{x} \qquad *\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=1+\sqrt{a-1}$$

$$5\sqrt{2}\times3\sqrt{4+6\sqrt{2}}=30\sqrt{2+3\sqrt{2}} \qquad *\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$*\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \qquad *\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}\ (*)$$

*Demostrar que si dos expresiones en parte irracionales son iguales, lo serán separadamente las partes racionales y las irracionales entre sí. Es decir que si $A+\sqrt{B}$ y $a+\sqrt{b}$ son iguales, tendremos $A=a$ y $\sqrt{B}=\sqrt{b}$

Interpretacion de los exponentes fraccionarios. *Demostrar en todos los casos posibles que las cantidades con estos exponentes, sean positivos ó negativos, se calculan por las mismas reglas que las que llevan exponentes enteros

$$\left(5a^{\frac{1}{2}}+2ab^{-\frac{1}{3}}-\sqrt{b}\right)^3 \qquad \left(1+a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{a^{\frac{1}{2}}-1}$$

*Generalizacion de los exponentes, considerándolos irracionales, y demostrando que tambien las cantidades, que llevan estos exponentes, se calculan por las reglas establecidas para las cantidades con exponentes racionales. Ventajas que ofrece la generalizacion del exponente en los cálculos algebráicos.

(*) En este y otros casos semejantes, para hacer racional al denominador, se multiplican los dos términos de la expresion fraccionaria por el denominador despues de cambiar el signo al último radical; repitiendo esta misma operacion con el resultado hasta llegar á un denominador racional.

CÁLCULO ALGEBRÁICO DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS.

Preliminares. Adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion y extraccion.

Preliminares.

73. Se llama CANTIDAD IMAGINARIA la expresion algebráica afecta del signo $\sqrt{-1}$ (*)

Este signo indica al mismo tiempo la operacion ordinaria, que da orígen á las cantidades imaginarias, pues si nos propusiéramos determinar la raiz cuadrada de una cantidad real negativa, por ejemplo $-A$ ó sea el producto $A\times-1$ indicariamos la raiz de cada uno de estos factores bajo la forma $\sqrt{A}\times\sqrt{-1}$

Cualquiera otra raiz de grado par de la cantidad $-A$ puede tomar la forma $A'\times\sqrt{-1}$ como veremos mas adelante, y por eso *se llama tambien cantidad ó expresion imaginaria la raiz de grado par de una cantidad negativa.* En este supuesto, las cantidades imaginarias serán de 2.°, 4.°, 6.°, etc., grado, segun el índice de la raiz: nosotros no trataremos por ahora mas que de las de 2.° grado, una vez que todas pueden reducirse á esta forma.

Las expresiones imaginarias pueden ser unas respecto de otras *positivas* y *negativas*, segun que les preceda el signo + ó el signo —. El primero se omite al principio de escritura.

Las cantidades reales y las imaginarias no expresan la misma diferencia de conceptos que las positivas y negativas. Las cantidades numéricas positivas se pueden traducir en lenguaje ordinario y de aplicacion práctica por el *capital* de un indivíduo; las numéricas negativas se expresan en consecuencia por sus *deudas*; y las imaginarias por un capital, que ni le pertenece, ni lo debe, es decir que siéndole indiferente, permanece en depósito, sea ó no en su poder, siendo por tanto estraño á las variaciones de su *haber* y *deber*.

Las cantidades geométricas *positivas* se traducen generalmente por una recta mayor ó menor, que empieza á contarse hácia la derecha, sobre otra indefinida desde un punto conocido llamado *punto de origen*. Las negativas se cuentan desde el mismo punto y sobre la misma recta, hácia la izquierda; y las imaginarias desde el mismo punto tambien, pero en cualquiera otra direccion que no sea la positiva, ni la negativa.

La forma propia de las expresiones imaginarias es la de un producto indicado de la parte real por la imaginaria $\sqrt{-1}$, sin embargo se presentan tambien bajo la forma de la raiz cuadrada de una cantidad negativa.

La transformacion de una forma en otra es muy sencilla, como vamos á ver en los siguientes ejemplos. La consideracion positiva ó negativa de la cantidad propuesta debe permanecer constante en todas estas transformaciones. Asi.....

$$A\times\sqrt{-1}=\sqrt{A^2}\times\sqrt{-1}=+\sqrt{-A^2} \qquad A\times-\sqrt{-1}=-\sqrt{-A^2}$$

$$\sqrt{-4a^2}=\sqrt{4a^2\times-1}=2a\times\sqrt{-1} \qquad -\sqrt{-\tfrac{1}{4}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$

Segun esto, el cálculo de las expresiones imaginarias se reduce al cálculo de las cantidades reales, combinadas con la raiz cuadrada imaginaria de la unidad.

(*) El signo $\sqrt{-1}$ ó bien $1\sqrt{-1}$ es la expresion propia de la raiz cuadrada de la unidad negativa, ó sea la raiz cuadrada imaginaria de la unidad, ó simplemente la *unidad imaginaria* puede por lo tanto considerarse como un factor de la cantidad á quien afecta.

74. Adicion y sustraccion. La *suma* ó la *diferencia* de dos expresiones imaginarias es el polinomio, que resulta de escribir todos los datos unos á continuacion de otros, con los mismos signos en la adicion, y cambiando los del sustraendo en la sustraccion. Si el resultado tiene términos semejantes se harán las simplificaciones correspondientes.

La suma ó diferencia de una cantidad real y una expresion imaginaria es siempre *imaginaria,* ó lo que es lo mismo, todo binomio $A\pm\sqrt{-B}$ cuyos términos son uno real y otro imaginario, es una cantidad imaginaria, pues de otro modo la diferencia ó la suma de dos cantidades reales seria una expresion imaginaria, lo que es absurdo.

La suma de dos expresiones imaginarias *conjugadas* es una cantidad real, y la diferencia de las mismas expresiones es imaginaria.

$$(A\pm\sqrt{-B})+(A\mp\sqrt{-B})=2A$$
$$(A\pm\sqrt{-B})-(A\mp\sqrt{-B})=\pm2\sqrt{-B}$$

75. Multiplicacion. El producto de dos monomios imaginarios es el producto de sus factores reales por la unidad negativa.

$$\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=\sqrt{A}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{B}\times\sqrt{-1}=\sqrt{A}\times\sqrt{B}\times(\sqrt{-1})^2=\sqrt{AB}\times-1=-\sqrt{AB} \quad (*)$$
$$\sqrt{-2a^2b}\times-5\sqrt{-ab^{-1}}=\sqrt{2a^2b}\times-5\sqrt{ab^{-1}}\times-1=5\sqrt{2a^3}=5a\sqrt{2a}$$

Para multiplicar un polinomio por un monomio ó dos ó mas polinomios compuestos de términos imaginarios, se siguen las reglas generales de los polinomios, que hemos explicado para las cantidades reales.

$$(9a^2-2a\sqrt{-1}-2a^{-1}\sqrt{-1})(\sqrt{-a^2}-2\sqrt{-1})=\dots\dots$$
$$9a^3\sqrt{-1}+2a^2+2-18a^2\sqrt{-1}-4a-4a^{-1}$$

El producto de dos imaginarias *conjugadas* es una cantidad real.

$$(A+\sqrt{-B})\times(A-\sqrt{-B})=A^2+B$$

y por consiguiente, la suma de dos expresiones algebráicas será lo mismo que el producto de la suma por la diferencia de sus raices cuadradas, considerando imaginarias las de una de ellas.

$$a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})\times(a-b\sqrt{-1}) \qquad a+1=(\sqrt{a}+\sqrt{-1})\times(\sqrt{a}-\sqrt{-1})$$

(*) Este resultado no es contradictorio con el que se obtiene aplicando á los datos la regla general de la multiplicacion de las cantidades radicales, pues el producto $\sqrt{-A}\times\sqrt{-B}=\sqrt{AB}$, indica que, multiplicando los dos valores de $\sqrt{-A}$ que son $\pm\sqrt{A}.\sqrt{-1}$ por los dos de $\sqrt{-B}$ que son $\pm\sqrt{B}.\sqrt{-1}$, se hallan los dos de $\sqrt{AB}$, es decir, $+\sqrt{AB}$ y $-\sqrt{AB}$; y en el texto, solo hemos hallado el producto de los valores positivos.

El producto de los negativos $-\sqrt{A}.\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{B}.\sqrt{-1}$ resulta tambien igual á $-\sqrt{AB}$ pero $+\sqrt{A}.\sqrt{-1}\times-\sqrt{B}.\sqrt{-1}$ ó bien $-\sqrt{A}.\sqrt{-1}\times+\sqrt{B}.\sqrt{-1}$ nos daria $+\sqrt{AB}$

Tambien $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ considerando los dos valores de cada factor, resulta igual á $\sqrt{+1}=\pm1$ pero si expresamos este producto por $(\sqrt{-1})^2$ cada valor de $\sqrt{-1}$, se combina solo con su igual de cuya restriccion resulta uno de los valores de ±1, es decir -1.

Del mismo modo $\sqrt{A}\times\sqrt{A}=\sqrt{A^2}=\pm A$ y $(\sqrt{A})^2=+A$

76. Division. El cociente de dos monomios imaginarios es el cociente de sus factores reales.

$$\sqrt{-A} : \sqrt{-B} = \sqrt{A}\times\sqrt{-1} : \sqrt{B}\times\sqrt{-1} = \sqrt{A} : \sqrt{B}$$

$$-2\sqrt{-2a^5b^2} : \sqrt{-ab^4} = -2\sqrt{2a^5b^2} : \sqrt{ab^4} = -2\sqrt{2a^4b^{-2}} = -\frac{2a^2}{b}\sqrt{2}$$

Para dividir un polinomio por un monomio, ó un monomio ó polinomio por otro polinomio, compuestos de términos imaginarios, se siguen las reglas dadas en la division de las cantidades reales.

$$(5a^2\sqrt{-1}+a\sqrt{-2a}+a+5a\sqrt{a}+a\sqrt{2}-\sqrt{-a}) : (a-\sqrt{-a}) = 5a\sqrt{-1}+\sqrt{-2a}+1$$

El cociente de dos expresiones imaginarias *conjugadas* es siempre imaginario.

$$\frac{A+\sqrt{-B}}{A-\sqrt{-B}} = \frac{(A+\sqrt{-B})\times(A+\sqrt{-B})}{A^2+B} = \frac{A^2-B+2A\sqrt{-B}}{A^2+B} = \frac{A^2-B}{A^2+B}+\frac{2A}{A^2+B}\sqrt{-B}$$

77. Elevacion á potencias. Una potencia cualquiera de una cantidad imaginaria es igual al producto de las potencias del mismo grado de la parte real y de la imaginaria $\sqrt{-1}$

De la formacion de cualquiera potencia de la parte real ya hemos hablado anteriormente; vengamos ahora al exámen de las potencias sucesivas de $\sqrt{-1}$

$$\begin{array}{ll}
(\sqrt{-1})^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -1 \\
(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2\times\sqrt{-1} = -1\times\sqrt{-1} = & -\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2\times(\sqrt{-1})^2 = -1\times-1 = & +1 \\
(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4\times\sqrt{-1} = +1\times\sqrt{-1} = & \sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^4\times(\sqrt{-1})^2 = +1\times-1 = & -1
\end{array}$$

y asi sucesivamente, continuarán repitiendose indefinidamente las primeras cuatro potencias.

$$(\sqrt{-4a^2b})^3 = (\sqrt{4a^2b})^3\times-\sqrt{-1} = -8a^3b\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$$

$$(-2a\sqrt{-B})^4 = 16a^4B^2 \qquad [(1-a)\sqrt{-2}]^5 = 4(1-a)^5\sqrt{2}\times\sqrt{-1}$$

Para elevar al cuadrado ó al cubo un polinomio cualquiera de términos imaginarios, se siguen las reglas generales ya explicadas para las cantidades reales.

$$(A-\sqrt{-B})^3 = A^3-3A^2\sqrt{-B}-3AB+B\sqrt{-B}$$

$$\left(a\sqrt{-1}+\sqrt{-b}-\frac{1}{2}\sqrt{-a}\right)^2 = -a^2-2a\sqrt{b}+a\sqrt{a}-b+\sqrt{ab}-\frac{1}{4}a$$

78. Extraccion de raices. Una raiz cualquiera de un monomio imaginario es igual al producto de las raices del mismo grado de la parte real y de la imaginaria $\sqrt{-1}$

$$\sqrt[n]{\sqrt{-A}} = \sqrt[n]{\sqrt{A}\times\sqrt{-1}} = \sqrt[n]{\sqrt{A}}\times\sqrt[n]{\sqrt{-1}} = \sqrt[n]{\sqrt{A}}\times\sqrt[2n]{-1}$$

$$\sqrt[3]{8\sqrt{-a^6}} = 2a\sqrt[6]{-1} \qquad \sqrt{2\sqrt{-(1+2a+a^2)^2}} = (1+a)\sqrt{2}\times\sqrt[4]{-1}$$

Para hallar la raiz cuadrada ó cúbica de un polinomio imaginario, se emplean los mismos procedimientos de cálculo que en las cantidades reales.

$$\sqrt{9a^4-12a^3\sqrt{-1}-2a^2(2-3\sqrt{-2})+4a\sqrt{2}-2} = 3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$$

*79. *Esc. general.* De la aplicacion de las reglas anteriores se deduce que *la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos expresiones de la forma* $A+B\sqrt{-1}$ y $C+D\sqrt{-1}$ *son en general de la misma forma.*

$$(A+B\sqrt{-1})+(C+D\sqrt{-1})=(A+C)+(B+D)\sqrt{-1}$$
$$(A+B\sqrt{-1})-(C+D\sqrt{-1})=(A-C)+(B-D)\sqrt{-1}$$
$$(A+B\sqrt{-1})\times(C+D\sqrt{-1})=(AC-BD)+(BC+AD)\sqrt{-1}$$
$$(A+B\sqrt{-1}):(C+D\sqrt{-1})=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}+\frac{BC-AD}{C^2+D^2}\sqrt{-1}$$

Todos estos resultados pueden ser monomios imaginarios ó cantidades reales, segun que resulte cero el primer término, ó el coeficiente de la unidad imaginaria del segundo.

Del mismo modo: *Una potencia cualquiera del binomio imaginario* $A+B\sqrt{-1}$ *es en general un binomio imaginario de la misma forma*; y *una raiz cualquiera del mismo binomio es siempre otro binomio imaginario.*

$$(A+B\sqrt{-1})^n=(A+B\sqrt{-1})\times(A+B\sqrt{-1})\times(A+B\sqrt{-1})\times.....=$$
$$(A'+B'\sqrt{-1})\times(A+B\sqrt{-1})\times.....=(A''+B''\sqrt{-1})\times.....$$

La raiz cuadrada del binomio $A+B\sqrt{-1}$ ó bien $A+\sqrt{-B^2}$ es de la misma forma, pues sustituyendo $-B^2$ en lugar de B en la fórmula del núm. 69, tendremos.....

$$\sqrt{A+B\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2+B^2}}{2}}=A'+B'\sqrt{-1}$$

Cualquiera otra raiz, cuyo índice sea una potencia de 2, nos dará un resultado de la misma forma, pues evidentemente:

$$\sqrt[8]{A+B\sqrt{-1}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{A+B\sqrt{-1}}}}=\sqrt{\sqrt{A'+B'\sqrt{-1}}}=\sqrt{A''+B''\sqrt{-1}}$$

La demostracion general para el caso de ser *n* el exponente no es propia del álgebra elemental.

**Cor.* Las raices cuadradas de dos cantidades imaginarias conjugadas $A+\sqrt{-B}$ y $A-\sqrt{-B}$ son tambien imaginarias conjugadas; pues segun la fórmula anterior y las del núm. 69, tenemos.....

$$\sqrt{A+B\sqrt{-1}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(A+\sqrt{A^2+B^2})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{A^2+B^2}-A)}\times\sqrt{-1}=A'+B'\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{A-B\sqrt{-1}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(A+\sqrt{A^2+B^2})}-\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{A^2+B^2}-A)}\times\sqrt{-1}=A'-B'\sqrt{-1}$$

Aplicaciones á ejemplos numéricos

$$\sqrt{7+\sqrt{-72}}=3+\sqrt{2}\times\sqrt{-1} \qquad \sqrt{1+4\sqrt{-3}}+\sqrt{1-4\sqrt{-3}}=4$$

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})\times\sqrt{2} \qquad \sqrt{+\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{-B^2}=\sqrt{0+\sqrt{-B^2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}B}+\sqrt{\tfrac{1}{2}B}\times\sqrt{-1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}B}\times(1+\sqrt{-1})$$

OBSERVACIONES GENERALES ACERCA DE LAS EXPRESIONES IMAGINARIAS.

*80. De la igualdad $A=A\times 1$ se deduce $\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{+1}$

El valor real y positivo de $\sqrt[n]{A}$ se llama *valor absoluto* del radical. Las fórmulas, que resultan de la multiplicacion del valor absoluto por las diferentes raices reales ó imaginarias de la unidad, se llaman *valores algebráicos.* (*)

Suponiendo $n=2$, la expresion $\sqrt[n]{A}$ tomará la forma $\sqrt{A}$ y como las raices cuadradas de la unidad son $+1$ y -1 los *valores algebráicos* de $\sqrt{A}$, serán $+\sqrt{A}$ y $-\sqrt{A}$; es decir que todo radical de segundo grado tiene dos valores iguales, uno positivo y otro negativo.

Suponiendo $n=3$, la expresion $\sqrt[n]{A}$ tomará la forma $\sqrt[3]{A}$ y como las raices cúbicas de la unidad son $+1$, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ y $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ se deduce que todo radical de tercer grado tiene tres valores, el uno real y los otros dos imaginarios. (Véase la pág. 152.)

Siendo $n=4$, y las raices de cuarto grado de la unidad las siguientes $+1, -1, +\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$; todo radical de 4.° grado tiene cuatro valores, dos de ellos reales é iguales, uno positivo y otro negativo, y otros dos imaginarios, tambien iguales, pero con signos contrarios.

Considerando las expresiones imaginarias en toda su generalidad, se puede demostrar que *toda cantidad radical tiene tantos valores algebráicos diferentes como sean las unidades del índice de la raiz.*

*81. Si una cantidad imaginaria de la forma $A\pm B\sqrt{-1}$ es cero, necesariamente será $A=o$ y $B=o$; pues de otro modo resultaria una igualdad absurda entre una cantidad real y otra imaginaria.

Suponiendo $A+B\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}$; será $A-a+(B-b)\sqrt{-1}=o$ y por consiguiente $A-a=o$ y $B-b=o$ ó sea $A=a$ y $B=b$ luego una igualdad entre dos expresiones imaginarias puede considerarse como la representacion simbólica de dos igualdades entre las cantidades reales respectivas.

Para que un producto de expresiones imaginarias sea cero, basta que lo sea uno de los factores, ó lo que es lo mismo, *si un producto de factores imaginarias es cero, uno por lo menos de dichos factores será cero.*

Sea el producto $(A+B\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})=(Aa-Bb)+(Ab+Ba)\sqrt{-1}$ si este producto es cero, se verificará $Aa-Bb=o$ y $Ab+Ba=o$ de donde $(Aa-Bb)^2+(Ab+Ba)^2=o$ ó bien $(A^2+B^2)(a^2+b^2)=o$ (**) y por consiguiente $A=o$ y $B=o$ ó bien $a=o$ y $b=o$

Lo mismo se verifica, si los factores son tres ó mas, pues si ninguno de ellos fuese cero, no lo seria el producto de los dos primeros, ni este producto por el otro factor, etc.; luego no lo seria el producto total, que es contra la hipótesis de la proposicion.

(*) Un radical bajo esta forma $\sqrt[n]{}$ expresa todos sus valores algebráicos ó bien todas las raices del grado n de la cantidad á que afecta.

(**) De esta igualdad y la anterior se deduce que el producto de la suma de dos cuadrados por la suma de otros dos es tambien la suma de dos cuadrados.

***82.** Llámase *módulo* de una expresion imaginaria $A+B\sqrt{-1}$ ó $A-B\sqrt{-1}$ al valor absoluto de la raiz cuadrada de su producto por la imaginaria conjugada; es decir $\sqrt{A^2+B^2}$

Es evidente que, si el módulo es cero, la expresion imaginaria tambien lo será y recíprocamente.

De la igualdad de dos expresiones imaginarias se deduce la igualdad de sus módulos: la recíproca no es verdadera.

Las expresiones imaginarias $7+9\sqrt{-1}$, $9+7\sqrt{-1}$ y $3-11\sqrt{-1}$ tienen por *módulo* comun al número incomensurable $\sqrt{130}$

El módulo del producto de dos expresiones imaginarias es igual al producto de los módulos de los factores, y el módulo del cociente es igual al módulo del dividendo dividido por el módulo del divisor.

En efecto, el módulo del producto $(A+B\sqrt{-1})\times(a+b\sqrt{-1})$ es igual á

$$\sqrt{(Aa-Bb)^2+(Ab+Ba)^2}$$

pero $(Aa-Bb)^2+(Ab+Ba)^2$ equivale á $(A^2+B^2)(a^2+b^2)$

luego dicho *módulo* tomará la forma $\sqrt{(A^2+B^2)(a^2+b^2)}$

ó lo que es lo mismo $\sqrt{A^2+B^2}\times\sqrt{a^2+b^2}$

Del mismo modo se demuestra que el módulo del producto de tres ó mas cantidades imaginarias es igual al producto de los módulos de los factores.

La segunda parte de la proposicion es una consecuencia de la primera, teniendo en cuenta la forma del cociente de dos imaginarias.

Ultimamente la expresion imaginaria $A+B\sqrt{-1}$, puede representarse bajo la forma.....

$$\sqrt{A^2+B^2}\times\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sqrt{-1}\right]$$

Llamando M al módulo; de las igualdades $M^2=A^2+B^2$ y $\operatorname{tang.} x=\frac{B}{A}$ se deduce que la suma del seno y coseno del ángulo x, es igual á la suma de los cocientes de A y B por M; y por consiguiente la expresion anterior puede tambien presentarse bajo la forma siguiente:

$$M(\cos. x+\operatorname{sen.} x\sqrt{-1}) \quad (*)$$

donde el *módulo* expresa la longitud de una recta, y x el ángulo que esta forma con otra indefinida sobre la cual se cuentan las cantidades reales positivas y negativas desde un punto llamado orígen. Las aplicaciones geométricas de las imaginarias bajo esta forma, confirman las ideas apuntadas en el número **73** acerca de la traduccion práctica de sus expresiones y muestran al mismo tiempo la impropiedad de los nombres *real* é *imaginario*, para distinguir cantidades que siempre son reales, y que no se diferencian mas que en la *direccion*, segun esta coincida ó no con una base dada. En el analisis elevado de las matemáticas es donde se presentan las aplicaciones verdaderamente sorprendentes de las expresiones imaginarias; sin embargo, ya empieza á verse mucho de la misteriosa profundidad de estos símbolos en las operaciones elementales del cálculo, como veremos mas adelante.

(*) El Sr. Rey y Heredia en uno de sus mas notables opúsculos acerca de la FILOSOFIA DE LAS CIENCIAS EXACTAS, llama *directas* á las cantidades reales é *indirectas* á las imaginarias.

Ejercicios para el cálculo de las expresiones imaginarias.

83. ¿El signo $\sqrt{-1}$ representa con propiedad el carácter imaginario de las cantidades algebráicas? ¿Se representan siempre estas expresiones bajo la forma $\pm A\sqrt{-1}$? Las imaginarias bajo la forma $\sqrt{-A'}$ admiten tambien la forma anterior? Transformaciones de estas expresiones unas en otras, cuidando de señalar la afeccion positiva ó negativa, que debe acompañar á su carácter imaginario. Demostrar que el binomio $A\pm\sqrt{-B}$ es una expresion imaginaria. ¿La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos expresiones imaginarias conjugadas monomias ó polinomias son resultados reales ó imaginarios?

Efectuar las operaciones indicadas en los ejemplos siguientes y comprobar las de aquellos cuyos resultados finales van á continuacion:

$$2\sqrt{-48}+3\sqrt{-12}+5\sqrt{-8}-7\sqrt{-32} \qquad (3-\sqrt{-5})-(4-2\sqrt{-5}+\sqrt{-50})$$

$$(\sqrt{2}-3\sqrt{-5})\times(\sqrt{7}-\sqrt{-3}) = \sqrt{14}-3\sqrt{15}-(3\sqrt{35}+\sqrt{6})\sqrt{-1}$$

$$(x-a+b\sqrt{-1})\times(x-a-b\sqrt{-1})=(x-a)^2+b^2$$

$$\frac{5-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{-2}}=1-2\sqrt{2}.\sqrt{-1} \text{ (*)} \qquad (4\sqrt{5}-20) : \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{-10}-5\sqrt{-\tfrac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{2+(\sqrt{2}-\sqrt{8})\sqrt{-1}} \qquad \frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}=\frac{2(a^2-b)}{a^2+b}$$

Hallar el cuadrado, el cubo y la cuarta potencia, del binomio $-1+\sqrt{-1}$

$$\left(1-\sqrt{-2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-5}\right)^2 \qquad \left(\frac{a}{2\sqrt{-1}}+b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}\right)^3$$

$$\sqrt{a^2-4ab\sqrt{-1}+\frac{2}{\sqrt{-1}}-4b^2-\frac{4b}{a}-\frac{1}{a^2}}=a-2b\sqrt{-1}-\frac{1}{a}\sqrt{-1}$$

Transformar las expresiones siguientes en otras de la forma $A+B\sqrt{-1}$

$$\sqrt{4\sqrt{-6}-2} \qquad \sqrt{-83-60\sqrt{-3}}=5-6\sqrt{-3} \qquad \sqrt[4]{-1}=\sqrt{0+\sqrt{-1}}$$

$$\sqrt{a^4x^4-a^3b^2-a^2b^3-2a^3bx^2\sqrt{a+b}\times\sqrt{-1}}=a^2x^2-ab\sqrt{a+b}\times\sqrt{-1}$$

¿Por qué todas las potencias de la raiz cuadrada imaginaria de la unidad se reducen á ± 1 ó $\pm\sqrt{-1}$? ¿Cuál es la potencia trigésima prima de $\sqrt{-1}$? *¿En qué casos ó bajo qué condiciones la suma, el residuo, el producto y el cociente de dos expresiones de la forma $A+B\sqrt{-1}$ y $C+D\sqrt{-1}$ son reales. *¿Todas las potencias y raices de $A+B\sqrt{-1}$ son imaginarias? *Valores algebráicos de $\sqrt[n]{A}$ suponiendo $n=2$, $n=3$ y $n=4$. *Representacion de la igualdad de dos expresiones imaginarias. ¿De la igualdad ó desigualdad de dos expresiones imaginarias, se deduce la igualdad ó desigualdad de sus módulos? ¿El módulo de la suma de dos expresiones imaginarias es igual, mayor ó menor que la suma ó diferencia de sus módulos? Observaciones respecto á la interpretacion de las expresiones algebráicas.

(*) Para transformar una expresion fraccionaria cuyo denominador sea imaginario en otra cuyo denominador sea real, se multiplican sus dos términos por la conjugada del denominador.

FÓRMULA DE NEWTON

y sus aplicaciones á la elevacion á potencias y extraccion de raices de los polinomios.

COMBINACIONES, PERMUTACIONES Y PRODUCTOS DIFERENTES (*).

84. Llámanse *combinaciones* de un número cualquiera de letras ó cosas las diversas colecciones, que pueden formarse de ellas tomándolas de dos en dos, de tres en tres, etc. Las combinaciones, que se consideran distintas por el órden de colocacion de sus elementos, se llaman *permutaciones*, y aquellas en que se prescinde completamente de esta colocacion, toman el nombre de *productos diferentes.*

Las combinaciones en general se llaman *binarias*, cuando estan compuestas de dos letras, *ternarias* si de tres, *cuaternarias* si de cuatro, etc.

Las permutaciones binarias de las letras a,b,c son ab,ba,ac,ca,bc,cb; y los productos diferentes binarios de las mismas letras, $ab,\ \ ac,\ \ bc$ pues ab y ba, aunque son dos permutaciones binarias por el cambio de posicion de sus elementos, forman un solo producto en virtud de la igualdad de sus factores respectivos. Lo mismo se puede decir de ac y ca, etc.

Las permutaciones se diferencian pues, en alguna letra ó en el órden de su colocacion y los productos diferentes, tienen siempre uno ó mas elementos distintos.

Combinaciones. Permutaciones binarias.

85. *Formar las permutaciones binarias* de las letras $a,b,c,d...z$ del alfabeto.

Escribiendo al lado de a, todas las demas una á una; al lado de b, todas las demas una á una, etc., tendremos todas las permutaciones binarias del alfabeto.

$$\text{Permutaciones binarias del alfabeto:}\left\{\begin{array}{l} ab,ac,ad,ae,af,ag.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ az \\ ba,bc,bd,be..\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ bz \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ za,zb,zc.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ zy \end{array}\right.$$

y por consiguiente, para obtener todas las permutaciones binarias de varias letras, basta escribir al lado de cada letra todas las demas una á una.

El número de permutaciones binarias de n letras, es igual al producto $n(n-1)$

En efecto; cada letra del alfabeto ofrece 26 permutaciones binarias; suponiendo n el número de letras que se dan para permutar, cada una ofrecerá $n-1$ permutacion binarias, y el total de estas será n veces $(n-1)$ ó bien $n(n-1)$

Combinaciones. Permutaciones ternarias.

86. *Formar las permutaciones ternarias* de todas las letras del alfabeto.

Escribiendo al lado de ab (primera permutacion binaria), todas las demas letras una á una; al lado de ac (segunda permutacion binaria) todas las demas letras una á una, etc., tendremos todas las permutaciones ternarias pedidas.

$$\text{Permutaciones ternarias del alfabeto:}\left\{\begin{array}{l} abc,abd,abe,abf.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ abz \\ acb,acd,ace,acf.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ acz \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ zya,zyb,zyc.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ zyx \end{array}\right.$$

(*) Antes de tratar de la fórmula de Newton, tenemos que exponer siquiera sea brevemente la TEORIA DE LAS COMBINACIONES que le sirve de fundamento, advirtiendo de paso que, si bien se emplean las palabras *combinacion* y *permutacion* con bastante variedad al hablar de las diferentes colecciones, que pueden hacerse de varias cosas; nosotros creemos mas conveniente (una vez que nos referimos á cantidades expresadas por letras), darles el significado del texto.

Si se repite una misma letra dos ó mas veces como sucede al formar raices verbales en la lengua hebrea; las combinaciones que así resultan pueden llamarse *repeticiones*.

y por consiguiente, para obtener todas las permutaciones ternarias de un número cualquiera de letras, basta escribir al lado de cada permutacion binaria todas las demas letras una á una.

El número de permutaciones ternarias de n letras es el producto $n(n-1)(n-2)$

En efecto; cada permutacion binaria del alfabeto dá 25 ternarias; suponiendo n el número de letras, que se dan para permutar, cada binaria nos dará $n-2$ ternarias, y el número total de estas, será $n(n-1)(n-2)$

Combinaciones. Permutaciones cuaternarias.

87. *Las permutaciones cuaternarias* de un número cualquiera de letras se forman escribiendo al lado de cada permutacion ternaria todas las demas letras una á una.

El número de permutaciones cuaternarias de n letras, es el producto.....

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

Combinaciones. Permutaciones de n letras, tomando m en cada permutacion.

88. Las permutaciones de n letras, tomando m en cada permutacion, se obtienen escribiendo al lado de cada una de las permutaciones de $m-1$ en $m-1$ (es decir de las del órden inmediato inferior) las letras, que no entran en ella, una á una; y por consiguiente el número total de estas permutaciones será el producto de m factores consecutivos desde n hasta la diferencia entre n y $m-1$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\ldots\ldots(n-m+1)$$

Suponiendo $m=n$ ó lo que es lo mismo si en cada permutacion entran todas las letras dadas, la fórmula anterior será.....

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\ldots 4\times3\times2\times1$$

Combinaciones. Productos binarios.

89. *Formar los productos binarios* de las 27 letras del alfabeto.

Escribiendo al lado de la primera letra cada una de las otras; al lado de la segunda letra cada una de las que siguen; al lado de la tercera las que siguen, etc. tendremos todos los productos diferentes, de dos factores, que se pueden formar con las letras del alfabeto.

$$\text{Productos binarios del alfabeto:}\left\{\begin{array}{r} ab,ac,ad,ae.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;az \\ bc,bd,be.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;bz \\ cd,ce.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;cz \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ zy \end{array}\right.$$

y por consiguiente, para formar los productos binarios de un número cualquiera de letras, se escribe al lado de cada letra cada una de las siguientes.

El número de productos binarios de n letras, es igual á $\dfrac{n(n-1)}{2}$

En efecto; cada producto binario, *ab* por ejemplo, tiene dos permutaciones binarias *ab* y *ba*; y por consiguiente el número de productos binarios de n letras será igual á la mitad del número total de permutaciones binarias de las mismas letras (*).

(*) Hemos dicho que $(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, luego..... El *cuadrado de un polinomio* es igual á la suma de los cuadrados de todos sus términos, mas el duplo de los productos binarios de los mismos términos.

Del mismo modo el *cubo de un polinomio* es igual al cubo de cada término, mas el triplo del cuadrado de cada uno por la suma de los que siguen, mas el triplo de cada uno por la suma de los cuadrados de los que siguen, mas el sestuplo de los productos ternarios de todos los términos del polinomio propuesto.

Combinaciones. Productos ternarios.

90. *Formar los productos ternarios* de las letras del alfabeto.

Escribiendo al lado de cada uno de los productos binarios diferentes de las mismas letras, todas las que siguen en órden á la última del producto binario, una á una; tendremos todos los productos ternarios diferentes, que se pueden formar con las letras dadas.

$$\text{Productos ternarios del alfabeto: } \begin{cases} abc, abd, abf \ldots\ldots\ldots & abz \\ acd, ace, acf \ldots\ldots\ldots & acz \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & xyz \end{cases}$$

y por consiguiente, *para formar los productos ternarios diferentes de un número cualquiera de letras*, colocadas por órden, se forman primero los productos binarios de las mismas, y al lado de cada uno, se escriben una á una todas las letras que siguen.

El número de productos ternarios de n letras es igual á $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

Pues si cada producto ternario, abc por ejemplo, tiene 6 permutaciones ternarias abc, acb, bac, bca, cab, cba; el número de productos ternarios de n letras será la sexta parte del número de permutaciones de las mismas letras.

Combinaciones. Productos de n letras, tomando m en cada uno.

91. *Para formar los productos diferentes de* n *letras*, colocadas por órden, *y tomando* m *en cada uno*, se escriben al lado de cada producto del órden inmediato inferior de las mismas letras, todas las que siguen en órden á la última de cada producto del órden $m-1$, una á una.

El número de estos productos, será..... $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots m}$

donde el numerador expresa el número de permutaciones de n letras tomadas de m en m, y el denominador el número de permutaciones que entran en cada producto. Suponiendo $m=n$, ó lo que es lo mismo, si en cada producto entran todas las letras dadas, la fórmula anterior se reduce á 1.

92. De lo expuesto en los números anteriores se deduce:

1.° Formados los productos diferentes de un órden cualquiera de n letras, se hallarán los del mismo órden de $n+1$ letras, agregando á los productos anteriores, los que resulten de escribir el nuevo elemento al lado de cada uno de los productos del órden inmediato inferior de las n primeras letras.

2.° *El número de productos diferentes de* n *letras tomadas de* m *en* m, *es el mismo que tomándolas de* n—m *en* n—m, pues cada producto de los primeros nos dá evidentemente otro de los segundos y vice-versa. Además; el número de estos productos en uno y otro caso, estará bien representado por....

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots m} \quad \text{y} \quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n-m)}$$

cuya reduccion á un mismo denominador nos dará por numerador comun.......

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-m+1)(n-m)\ldots\ldots 3\times2\times1 \text{ (*)}$$

(*) La TEORIA DE LAS COMBINACIONES se aplica tambien con ventaja al CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES, cuyo objeto es comparar entre sí las diferentes hipótesis que pueden hacerse sobre un suceso futuro, ó sobre las causas de un hecho conocido.

Llámase *Probabilidad de un hecho* la relacion del número de casos favorables al número de casos posibles, cuando todos son posibles igualmente. Así la probabilidad de sacar una bola blanca de una urna que contiene 7 blancas y 5 negras, es $\frac{7}{12}$, y la de que sea negra $\frac{5}{12}$

Siendo 10 en los ambos, el número de casos favorables al jugador de la loteria primitiva, y el de casos posibles $\frac{90.89}{2}=4005$; la probabilidad del jugador será $\frac{10}{4005}$ y la del Estado $\frac{3990}{4005}$

En los ternos, la probabilidad del jugador resulta $\frac{1}{11748}$, y la del Estado $\frac{11747}{11748}$.

Fórmula del binomio de Newton.

93. Si multiplicamos varios factores binomios, cuyo primer término a es comun, el producto sigue una ley constante, sea cualquiera el número de ellos.

$$(a+b)(a+c)=\ldots\ldots\ \begin{array}{l|l} a^2+b & a+bc \\ +c & \end{array}$$

$$(a+b)(a+c)(a+d)=\ldots\ \begin{array}{l|l|l} a^3+b & a^2+bc & a+bcd \\ +c & +bd & \\ +d & +cd & \end{array}$$

$$(a+b)(a+c)(a+d)(a+e)=\begin{array}{l|l|l|l} a^4+b & a^3+bc & a^2+bcd & a+bcde \\ +c & +bd & +bce & \\ +d & +be & +bde & \\ +e & +cd & +cde & \\ & +ce & & \\ & +de & & \end{array}$$

La ley de todos estos productos es la siguiente: El número de términos de cada uno es igual al número de factores binomios mas uno. La letra comun a tiene en el primer término un exponente igual al número de factores, y en los demás va disminuyendo una unidad, hasta que desaparece en el último. En cuanto á los *coeficientes*, el del primero es la unidad; el del segundo es la suma de los términos no comunes de los factores; el coeficiente del tercero es la suma de los productos binarios de los mismos términos; el del cuarto la suma de los productos ternarios, y así sucesivamente. El último término es igual al producto de los términos no comunes de todos los factores.

Por consiguiente $(a+b)(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)\ldots$ hasta n factores será....

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^n+b & a^{n-1}+bc & a^{n-2}+bcd & a^{n-3}+bcde & a^{n-4}+\ldots\ldots\ bcdefg\ldots\ldots \\ c & bd & bce & bcdf & \\ d & be & bcf & bcdg & \\ e & bf & bcg & bcdh & \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array}$$

y llamando A,B,C etc., á los coeficientes de la letra comun a, tendremos....

$(a+b)(a+c)\ldots\ldots$ hasta n factores$=a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots\ldots Za+K$

*Para convencernos de la exactitud de esta ley, vamos á demostrar que si se verifica en un número cualquiera n de factores, se verificará tambien para el producto de $n+1$ factores.

Supongamos $a+\alpha$ el nuevo factor, y tendremos.....

$$(a^n+Aa^{n-1}+\ldots\ldots Za+K)(a+\alpha)=a^{n+1}+Aa^n+Ba^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots Za^2+aK$$

$$\alpha a^n+A\alpha a^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha K$$

$$(a^n+Aa^{n-1}+\ldots Za+K)(a+\alpha)=a^{n+1}+(A+\alpha)a^n+(B+A\alpha)a^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+\alpha K$$

Donde se vé que el número de términos del producto es uno mas que el número de factores. El exponente de a, en el primer término es $n+1$, en el segundo es n, en el tercero $n-1$ etc. El coeficiente del primer término es la unidad; el coeficiente del segundo es $A+\alpha$, y como A es la suma de los términos no comunes anteriores, $A+\alpha$ será la suma de los términos no comunes, considerando el nuevo factor $a+\alpha$; el coeficiente del tercero es $B+A\alpha$ ó sea la suma de los productos binarios de los segundos términos de todos los factores; y últimamente el término αK es el producto de todos los segundos términos de los $n+1$ factores.

94. Reconocida como verdadera y general para cualquiera número de factores binomios con un término comun la ley establecida en los productos anteriores, propongámonos hallar el producto de n factores iguales á $a+b$ ó sea la potencia del grado n del binomio $a+b$. La sustitucion de $b=c=d=$etc. en la fórmula del producto $(a+b)(a+c)(a+d)$..... nos dará.....

$$(a+b)(a+b)\ldots \text{ hasta } n \text{ veces}=a^n+\begin{array}{r|r|r|l} b & a^{n-1}+b^2 & a^{n-2}+b^3 & a^{n-3}+\ldots\ldots\ldots+b^n \\ b & b^2 & b^3 & \\ b & b^2 & b^3 & \\ \text{etc.} & \text{etc.} & b^3 & \end{array}$$

luego la potencia del grado n del binomio $a+b$ ó sea la fórmula de Newton, será :

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots\ldots\ldots b^n \quad (*)$$

El objeto de la fórmula de Newton es hallar una potencia cualquiera de un binomio, sin conocer las potencias precedentes.

Observaciones generales acerca de la fórmula de Newton.

95. TERMINO GENERAL. Llámase *término general de la fórmula de Newton* el que sirve para determinar á todos los demas, sustituyendo por m (número de términos que anteceden al que se busca) valores particulares enteros y positivos.

Luego si observamos que el exponente de b en un término cualquiera es el que expresa el número de términos que hay antes de él; 2.º que la suma de los exponentes de a y b es igual al exponente n de la potencia; y 3.º que el coeficiente de un término cualquiera equivale al número de productos diferentes de n letras entrando en cada uno tantas letras como términos le anteceden; tendremos

$$\text{Término general de la fórmula de Newton} \quad \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots m}a^{n-m}b^m$$

donde la sustitucion $m=1$ nos dá el segundo término de dicha fórmula; suponiendo $m=2$, resulta el tercer término; haciendo $m=3$, tendremos el cuarto; siendo $m=4$, el quinto; y así sucesivamente los demás.

Del estudio de la formacion de cada término de la *fórmula del binomio* se deduce el modo de calcular uno cualquiera de ellos, conociendo el anterior. En efecto, conviniendo en llamar primera parte á a y segunda á b, el exponente de la primera *parte* en un término, tiene una unidad menos que en el término anterior, y el de la *segunda* una unidad mas. Luego si un término es a^5b^2, el siguiente será a^4b^3, el otro a^3b^4 y así sucesivamente. Para formar el coeficiente, basta multiplicar el coeficiente del término anterior por el exponente de la primera parte en dicho término, y dividir el resultado por el número de términos que anteceden al que se busca. El número de términos que hay antes de otro cualquiera es igual al exponente de la segunda parte en este término.

Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos en la fórmula del binomio son iguales (**92.** 2.º); y por consiguiente, calculada la mitad ó mas de la mitad del número de términos de la potencia de un binomio, se hallarán los restantes, sin necesidad de nuevo cálculo.

(*) Newton, matemático inglés y uno de los hombres mas eminentes de su siglo, publicó la fórmula que lleva su nombre en octubre de 1676. Está grabada sobre su sepulcro, en la abadia de Westminter, panteon de los reyes de Inglaterra.

Deducida la fórmula para el binomio $a+b$, tendremos el desarrollo de la potencia n de $a-b$ con solo sustituir $-b$ por $+b$ en todos los términos de la primera. Los signos, resultarán alternativamente positivos y negativos.

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \pm b^n$$

Si en las fórmulas de la potencia n de los binomios $a+b$ y $a-b$ sustituimos 1 por a, resulta.....

$$(1\pm b)^n=1\pm nb+\frac{n(n-1)}{1.2}b^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm b^n$$

Suponiendo en esta última fórmula b igual 1, se deducirán las dos importantes consecuencias siguientes: 1.ª La suma de todos los coeficientes de la fórmula de Newton es igual á una potencia de 2 cuyo grado es n. 2.ª La suma de los coeficientes de los términos, que ocupan lugares pares, es igual á la suma de los coeficientes de los términos, que ocupan lugares impares.

*Hallar la suma y la diferencia de las expresiones $(a+b\sqrt{-1})^n$ y $(a-b\sqrt{-1})^n$

96. Triángulo de Pascal. Llamando A, B, C., etc., los coeficientes de los términos de la fórmula de Newton, tendremos.....

$$(a+b)^n=a^n+Aa^{n-1}b+Ba^{n-2}b^2+Ca^{n-3}b^3+Da^{n-4}b^4+ \ldots\ldots\ldots\ldots +b^n$$

y multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $a+b$, resulta.......

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}=a^{n+1}&+Aa^nb+Ba^{n-1}b^2+Ca^{n-2}b^3+Da^{n-3}b^4+ \ldots\ldots\ldots +ab^n\\ &+a^nb+Aa^{n-1}b^2+Ba^{n-2}b^3+Ca^{n-3}b^4+ \ldots\ldots\ldots\ldots +b^{n+1}\end{aligned}$$

de donde se deduce que el coeficiente de un término cualquiera de la potencia del grado $n+1$ del binomio $a+b$, es la suma de los coeficientes del mismo término y del término anterior en la potencia del grado n.

Fundados en esta proposicion, fácilmente se puede formar una tabla de los coeficientes de las potencias sucesivas de $a+b$, ó sea el número de los diferentes productos binarios, ternarios, cuaternarios, etc. que se pueden formar con dos letras, tres, cuatro, cinco, etc. Esta tabla dispuesta como se vé á continuacion, se llama *triángulo de Pascal*, y los números que la componen desde la segunda línea horizontal en adelante se llaman *números figurados* como veremos mas adelante (**127**).

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1.....
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8.....
		1,	3,	6,	10,	15,	21,	28.....
			1,	4,	10,	20,	35,	56.....
				1,	5,	15,	35,	70.....
					1,	6,	21,	56.....
						1,	7,	28.....
							1,	8.....
								1.....

Los números de cada línea vertical, señalan los coeficientes de una de las potencias del binomio ó sea el número de productos diferentes del grado ó índice de la potencia. Así los números de la columna séptima expresan los coeficientes de la sexta potencia de un binomio y tambien los diferentes productos binarios (6), ternarios (15), cuaternarios (20), etc. de seis letras.

De la composicion del triángulo se deduce que el término n de una línea horizontal, es la suma de los n primeros términos de la línea horizontal precedente ó anterior. Así el término tercero 10 de la cuarta línea es igual á la suma de los tres primeros $1+3+6$ de la línea anterior.

97. Para mayor facilidad en las aplicaciones de la fórmula de Newton, conviene tener presente la siguiente transformacion donde A, B, C, etc. representan los coeficientes de los términos respectivos.

$$(a+b)^n=a^n+\mathrm{A}a^{n-1}b+\mathrm{B}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots..b^n$$

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{\mathrm{A}b}{a}+\frac{\mathrm{B}b^2}{a^2}+\frac{\mathrm{C}b^3}{a^3}+\ldots\ldots..\frac{b^n}{a^n}\right)$$

Aunque Newton no ha demostrado la generalidad de su *fórmula*, no obstante esa generalidad existe, sea cualquiera el exponente, como veremos mas adelante. Sustituyendo pues, en la fórmula ya conocida (94) ó bien en esta última transformacion $-n$ en vez de n, si el exponente de la potencia es entero y negativo, ó bien $\pm\frac{n}{m}$, si es fraccionario positivo ó negativo; tendremos...

$$(a+b)^{-n}=\frac{1}{a^n}\left(1-\frac{nb}{a}+\frac{n(n+1)b^2}{2\times a^2}-\frac{n(n+1)(n+2)b^3}{2\times3\times a^3}+\text{ etc.}\right)$$

$$(a+b)^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{n}{m}}\left(1+\frac{n}{m}\times\frac{b}{a}+\frac{n(n-m)}{2m^2}\times\frac{b^2}{a^2}+\frac{n(n-m)(n-2m)}{2.3.m^3}\times\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}\right)$$

Aplicaciones á varios ejemplos:

$$\frac{a}{a+b}=a\times\frac{1}{a+b}=a(a+b)^{-1}=a\times\frac{1}{a}(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\text{etc.})=1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\ldots$$

$$(a+b)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m}}\left(1+\frac{1}{m}\times\frac{b}{a}-\frac{m-1}{2m^2}\times\frac{b^2}{a^2}+\frac{(m-1)(2m-1)}{2.3.m^3}\times\frac{b^3}{a^3}-\text{etc.}\right)$$

Esta última fórmula puede aplicarse á la extraccion de raices de un número cualquiera, con solo sustituir en lugar de a y b dos números cuya suma sea igual al número propuesto. Conviene siempre que el valor de a sea una potencia exacta del grado que indique el índice de la raiz.

Para hallar la raiz del quinto grado de 40, supondremos $a=32$, $b=8$ y $m=5$, y será...

$$\sqrt[5]{40}=2\left(1+\frac{1}{20}-\frac{1}{200}+\frac{3}{4000}-\frac{21}{160000}+\text{etc.}\right)=2{,}0912\ldots$$

A continuacion presentamos otras fórmulas deducidas de las anteriores y de un uso frecuente en la práctica...

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}\left(1+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^2}+\frac{b^3}{16a^3}-\frac{5b^4}{128a^4}+\frac{7b^5}{256a^5}-\text{etc.}\right)$$

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{a}\left(1+\frac{b}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}+\frac{5b^3}{81a^3}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{22b^5}{729a^5}-\text{etc.}\right)\ (*)$$

(*) Las fórmulas de las raices cuadrada y cúbica de $a-b$, se obtienen cambiando en las correspondientes de $a+b$ los signos de aquellos términos que contengan las potencias impares de b; puesto que para transformar un resultado hallado bajo la suposicion de que uno de sus elementos es positivo, en el correspondiente á dicho elemento negativo, basta cambiar el signo á las potencias impares de la cantidad ó elemento que varió de signo.

Aplicaciones de la fórmula de Newton á la elevacion á potencias y extraccion de raices de los polinomios.

Elevacion á potencias de los polinomios.

98. Por medio de la fórmula de Newton se puede hallar directamente una potencia cualquiera de un binomio, sustituyendo en lugar de a, b y n los valores particulares del binomio propuesto.

Para hallar una potencia de un polinomio, se le considera como un binomio, tomando uno, dos ó mas términos como primera parte, y los demas como segunda.

La fórmula de Newton es la siguiente:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+b^n$$

Suponiendo $n=2$, tendremos.....

$$(a+b)^2=a^2+2a^{2-1}b+\frac{2(2-1)}{1.2}a^{2-2}b^2+\text{cero}=a^2+2ab+b^2$$

cuyo resultado es el mismo que hemos deducido anteriormente.

Suponiendo $n=3$; $n=5$ y despues $n=6$; tendremos.....

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

$$(\mathrm{M}-\mathrm{N})^6=\mathrm{M}^6-6\mathrm{M}^5\mathrm{N}+15\mathrm{M}^4\mathrm{N}^2-20\mathrm{M}^3\mathrm{N}^3+15\mathrm{M}^2\mathrm{N}^4-6\mathrm{M}\mathrm{N}^5+\mathrm{N}^6$$

Para formar estas potencias no es necesario sustituir en la fórmula, pues sabida ya la ley que siguen todos sus términos, nos basta conocer uno para deducir el siguiente. Conocido el término $15\mathrm{M}^4\mathrm{N}^2$ de la última potencia, se halla el siguiente diciendo: el coeficiente es igual $\frac{15\times4}{3}=20$; el exponente de M es una unidad menos que en el anterior y el de N una unidad mas; luego el término que se pide será $20\mathrm{M}^3\mathrm{N}^3$

Pasemos á la elevacion de polinomios, y propongámonos hallar la potencia del quinto grado de $a+b+c-d$.

Suponiendo la primera parte $a+b$ y $c-d$ la segunda, la sustitucion de la fórmula ó la ley de su formacion en otro caso, nos dará.... $(a+b+c-d)^5=\ldots$

$$(a+b)^5+5(a+b)^4\times(c-d)+10(a+b)^3\times(c-d)^2+10(a+b)^2\times(c-d)^3+\ldots\ldots$$
$$+5(a+b)\times(c-d)^4+(c-d)^5$$

Hallando ahora separadamente los valores de cada uno de estos términos, la suma algebráica de todos los resultados nos dará la potencia pedida del polinomio propuesto.

Del mismo modo, tendremos que $(\mathrm{A}x^4+\mathrm{B}x^3-\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x-\mathrm{E})^7$ es igual á

$$(\mathrm{A}x^4+\mathrm{B}x^3-\mathrm{C}x^2)^7+7(\mathrm{A}x^4+\mathrm{B}x^3-\mathrm{C}x^2)^6\times(\mathrm{D}x-\mathrm{E})+21(\mathrm{A}x^4+\mathrm{B}x^3-\mathrm{C}x^2)^5\times(\mathrm{D}x-\mathrm{E})^2+$$
$$35(\mathrm{A}x^4+\mathrm{B}x^3-\mathrm{C}x^2)^4\times(\mathrm{D}x-\mathrm{E})^3+35(\mathrm{A}x^4+\mathrm{B}x^3-\mathrm{C}x^2)^3\times(\mathrm{D}x-\mathrm{E})^4+\ldots(\mathrm{D}x-\mathrm{E})^7$$

Esc. Siempre puede reducirse una potencia indicada de un binomio á la forma $(1\pm\alpha)^n$, pues....

$$(a+b)^n=\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=a^n(1+\alpha)^n$$

y por consiguiente, para elevar un binomio cualquiera á una potencia del grado n, se puede tambien reducir á la forma $a^n(1\pm\alpha)^n$, desenvolver $(1\pm\alpha)^n$ por la fórmula de Newton, y multiplicar el resultado por a^n

Extraccion de raices de los polinomios.

*99. Sea A+B+C+D+.... un polinomio ordenado con respecto á la letra a.
Suponiendo por ahora que su raiz del grado n es el binomio $a+b$ ordenado tambien por a, tendremos.... $A+B+C+D+.....=(a+b)^n$
y por consiguiente, en virtud de la fórmula de Newton será

$$A+B+C+D+.....=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\text{etc.}$$

Considerando al segundo miembro formado por el producto de $a+b$ por sí mismo, hasta n factores, el primer término a^n será igual á A (17. Esc.) luego $a=\sqrt[n]{A}$ de donde se deduce que...

Si de dos polinomios P y R ordenados con respecto á una misma letra, el primero es la potencia del grado n del segundo; el primer término de R será la raiz del grado n del primero de P. Luego *el primer término de la raiz se obtiene extrayendo la raiz del grano* n *del primer término de la potencia* (*).

De las observaciones de la multiplicacion se infiere tambien que el segundo término del producto A+B+C+..... es igual al segundo de la fórmula, y por consiguiente..... $na^{n-1}b=B$ de donde se deduce $b=\frac{B}{na^{n-1}}$ luego.....

El segundo término de la raiz se halla dividiendo el segundo término de la potencia por n *veces la potencia* n—1 *del primer término de la raiz.*

Elevada la raiz hallada $a+b$ á la potencia del grado n, necesariamente el resultado será igual al polinomio propuesto.

Cuando los términos de la raiz son mas que dos, restando del polinomio propuesto la potencia del grado n de la raiz hallada, el resíduo nos dirá el modo de calcular el término siguiente. En efecto.....

$$[(a+b)+c]^n=(a+b)^n+n(a+b)^{n-1}\times c+\text{etc.}$$

y restando del segundo miembro, ó sea el polinomio cuya raiz se busca, el valor de $(a+b)^n$; tendremos.....

$$n(a+b)^{n-1}\times c+\frac{n(n-1)}{1.2}(a+b)^{n-2}\times c^2+\text{etc.}$$

de donde se deduce que, si dividimos el primer término de esta resta por n veces la potencia del grado $n-1$ de la raiz hallada, el cociente será el término siguiente de la misma raiz; y como para dividir dos polinomios se divide únicamente el primer término del dividendo por el primero del divisor, aqui dividiremos tambien el primer término del *resto* por n veces la potencia del grado $n-1$ del primer término de la raiz, supuesto que.... $n(a+b)^{n-1}=na^{n-1}+....$ luego.....

Para hallar la raiz del grado n *de un polinomio despues de ordenado, se extrae la raiz del mismo grado de su primer término, y tendremos el primero de la raiz. Conocido este, los demas se hallan restando del polinomio propuesto la potencia del grado* n *de la raiz hallada, y dividiendo el primer término de la resta por* n *veces la potencia del grado* n—1 *del primero de la raiz.*

(*) Por la misma razon, el último término de la raiz, es la raiz del grado n del último término del polinomio propuesto.

Hallar la raiz del quinto grado de $1+5a+10a^2+20a^3+40a^4+a^5$

$$\sqrt[5]{1+5a+10a^2+20a^3+40a^4+a^5}=1+a+2a^3+\text{etc.}$$

$-(1+a)^5=-1-5a-10a^2-10a^3-5a^4-a^5$	5	(divisor constante.)
resto. . . . . $10a^3+35a^4$. . .	a	2.° término de la raiz
	$2a^3$	3r. término de la raiz

elevando ahora la raiz hallada á la potencia del quinto grado, y restando el resultado del polinomio propuesto, se dividirá el primer término del nuevo resto por el *divisor comun* 5, es decir, por cinco veces la potencia de 4.° grado del primer término de la raiz, y el cociente será el cuarto término de la raiz; y así sucesivamente.

***100.** Un polinomio ordenado *no tiene raiz exacta* del grado n en los casos siguientes:

1.° Cuando su primero y último término no son potencias perfectas del mismo grado. 2.° Cuando el segundo término del polinomio ó el primero de los restos sucesivos no son divisibles por n veces la potencia del grado $n-1$ del primer término de la raiz. 3.° Si uno de los términos de la raiz tiene la letra ordenatriz con un exponente menor ó mayor que el correspondiente á la raiz del grado n del último ó primer término del polinomio propuesto.

Ejercicios para la fórmula de Newton y sus aplicaciones.

101. Formar las permutaciones y productos binarios, ternarios, cuaternarios, etc., de las diez primeras letras del alfabeto; número de estas permutaciones y productos en cada caso. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse ocho personas al rededor de una mesa? [40320] ¿Cuántos números pueden formarse con cinco cifras significativas, diferentes en nuestro sistema de numeracion? [15120]. Hallar el número de anagramas que pueden hacerse con las letras de cada una de las palabras *Algebra* y *Matemáticas* [2520 y 1663200]. Si se escriben en columna todos los números de cinco cifras que se pueden formar con 1, 2, 3, 4 y 5 ¿cuál es la suma de cada columna vertical? [360]. ¿Cuál es el número de ambos y de ternos que pueden formarse con los 90 números de la loteria antigua? [4005 ambos y 117480 ternos]. Fórmulas generales para determinar el número de permutaciones y productos diferentes de x letras, tomando z en cada coleccion (*). Fórmula de Newton para el binomio $y+x$, y formacion de un término cualquiera sin el auxilio de las combinaciones. ¿Cuál es la suma de los coeficientes de la fórmula de Newton para las potencias $(a+b)^5$ y $(a-b)^8$? Hallar la suma y la diferencia de $(a+b)^n$ y $(a-b)^n$: ¿la suma es mayor ó menor que $2a^n$? Comprobar la igualdad $(3-2\sqrt{-1})^6=828\sqrt{-1}-2035$. *Proposicion fundamental del triángulo de Pascal. Deducir la fórmula de la potencia del grado n del trinomio $a+b+c$ y demostrar que el número de sus términos es $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Aplicar la fórmula de Newton á los ejemplos que siguen:

$$\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^4 \qquad \left(\frac{1}{2}a+2b\right)^7 \qquad \left(\frac{a}{b}-b\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\sqrt{ab}\right)^5$$

¿Cuál es el quinto término del desenvolvimiento de $(a-b)^{20}$ y los dos términos medios de $(a-b)^{19}$? Determinar el coeficiente del término a^2bcd en el desarrollo de $(a+b+c+d)^5$

(*) Hallar la suma de las permutaciones y repeticiones binarias; la de las ternarias, cuaternarias, etc., que pueden hacerse con las 27 letras del alfabeto. [Las binarias son 27^2, las ternarias 27^3, las cuaternarias 27^4; y así sucesivamente].

COMPARACION ALGEBRAICA.

Comparacion de igualdad.

Ecuaciones de primero y segundo grado. Análisis. Logaritmos.

Comparacion de desigualdad.

Inecuaciones de primero y segundo grado. Análisis. Progresiones.

COMPARACION DE IGUALDAD.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Preliminares. Resolucion y discusion de una ó mas ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas. Resolucion y discusion de un sistema de ecuaciones con menor ó mayor número de incógnitas.

Preliminares.

102. Llámase *identidad* la relacion que existe entre dos expresiones iguales de una misma cantidad.

$$a+b=a+b \qquad 1+a=a+1$$

Igualdad ó *equivalencia* (segun se atienda á la representacion del valor absoluto ó del valor y la forma) es la relacion que existe entre dos expresiones diferentes de una misma cantidad.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad \sqrt{1-2a+a^2}=1-a$$

Se llama ECUACION la igualdad establecida para determinar alguno de sus elementos en valores de los demás. Las letras que representan los valores desconocidos se llaman *incógnitas*: estas letras son generalmente las últimas del alfabeto.

Se llama *ecuacion numérica* la ecuacion en que todos sus elementos conocidos son números particulares; y *ecuacion literal* la ecuacion en que uno ó mas elementos conocidos están representados por letras.

Resolver una ecuacion es hallar los valores de las incógnitas. Estos valores se llaman *raices de la ecuacion* y deben ser tales que, puestos en la ecuacion en vez de las incógnitas, la transformen en una igualdad.

Dos ecuaciones son *equivalentes* en el caso de que todos los valores de las incógnitas, que satisfacen á una de ellas, satisfacen tambien á la otra. Es evidente que se puede sustituir ó reemplazar por una ecuacion otra equivalente.

Grado de una ecuacion es la suma de los exponentes de las incógnitas en el término en que esta suma sea mayor, no hallándose las incógnitas ni por denominador, ni debajo de ningun signo radical. Si la ecuacion no contiene mas que una incógnita, su *grado* es igual al mayor exponente de esta (*).

Una ecuacion se llama *pura* con respecto á una incógnita cuando todos los exponentes de esta son iguales: en caso contrario se llama *mista*. Ecuacion *completa* del grado n, con relacion á una incógnita, es la que contiene á esta, elevada á las potencias de los grados sucesivos 0, 1, 2, 3, 4, etc., hasta n. Si falta algun término se llama *incompleta*. La suma de los términos, que no tienen incógnita ó que la tienen con exponente cero, se llama *término absoluto*.

(*) Los exponentes negativos y fraccionarios equivalen á considerar la incógnita por denominador ó debajo de un radical.

Una ecuacion es *imposible* ó *absurda* cuando no se transforma en igualdad por ningun valor de la incógnita ó incógnitas, que contiene. Por el contrario, una ecuacion se dice *indeterminada* cuando admite una infinidad de raices. Si la ecuacion contiene dos ó mas incógnitas, cada sistema de valores particulares, que transforma la ecuacion en igualdad, forma una solucion de la ecuacion.

$Ax+B=1-x$ es una ecuacion de primer grado con una incógnita.
$Ax-B=2x^3$ de tercer grado con una incógnita.
$Ax+By=1-x$ de primer grado con dos incógnitas.
$Ax^2y^3-2z+y^4-1=0$ de quinto grado con tres incógnitas.
$Ax^2-Bx^2+1=x^2$ pura de segundo grado con una incógnita.
$Ax^3+Bx^2+Cx=D$ completa de tercer grado con una incógnita.

De las ecuaciones, cuyas incógnitas están por denominador, debajo de algun signo radical ó llevan exponentes negativos ó fraccionarios, hablaremos mas adelante.

Las ecuaciones en general tienen propiedades cuyo conocimiento facilita la resolucion de las de grados superiores; pero no debiendo ocuparnos en el álgebra elemental mas que de las de primero y segundo grado, dejaremos para mas adelante el estudio de dichas propiedades suponiendo desde ahora como evidente la proposicion fundamental admitida por todos los autores, que dice: *Toda ecuacion tiene al menos una raiz* (*).

103. La resolucion de las ecuaciones se funda en el siguiente axioma: Una ecuacion se transforma en otra equivalente, es decir, los valores de sus incógnitas permanecen los mismos, aun cuando á los dos miembros se les añada una misma cantidad, se multipliquen por un mismo factor, ó se eleven á la misma potencia (**).

De esta proposicion se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª Si en los dos miembros de una ecuacion hay términos iguales y precedidos del mismo signo, se simplifica la ecuacion, suprimiendo dichos términos.

Asi la ecuacion $5ax+a-1=a+b-1$ es lo mismo que $5ax=b$

2ª. Una ecuacion no se altera ó bien se transforma en otra equivalente trasladando uno ó mas términos de un miembro al otro con signo contrario, ó mudando los signos á todos los términos.

Sea la ecuacion $Ax+B=C-x$

restando la cantidad B ó añadiendo $-B$ á uno y otro miembro; tendremos....

$Ax+B-B=C-x-B$ ó lo que es lo mismo $Ax=C-x-B$

Del mismo modo se deduce $Ax+x=C-B$ [Δ]

La traslacion de todos los términos del primer miembro al segundo y la de los de este al primero, ó lo que es lo mismo, el resultado de multiplicar todos los términos de la ecuacion propuesta por -1; nos dará..... $-Ax-B=-C+x$

La transformacion de una ecuacion en otra, cuyas incógnitas se hallen todas en un miembro, se llama *transposicion* (véase la ecuacion Δ)

(*) Entre las propiedades generales de las ecuaciones es muy notable la siguiente: *Toda ecuacion tiene tantas raices como unidades tiene su grado.*

(**) Cuando la ecuacion transformada resulta de grado superior al de la propuesta, se habrá aumentado el número de sus raices, pero no se alterará el valor de las comunes á ambas ecuaciones.

3.ª Si todos los términos de una ecuacion tienen uno ó mas factores comunes, se simplifica, suprimiendo estos.

La ecuacion de primer grado..... $10ax-2x=4-6a$
dividiendo todos sus términos por el factor comun 2, se transforma en.....

$$5ax-x=2-3a$$

4.ª Ultimamente, cuando uno ó mas términos de la ecuacion son fraccionarios, se reduce esta á otra de términos enteros, multiplicando los que ya lo sean por el producto de todos los denominadores, y el numerador de cada fraccionario por el producto de los denominadores de los demas (*).

De este modo se multiplican todos los términos de la ecuacion por un mismo número, que es el producto de todos los denominadores; y por consiguiente la ecuacion no se altera.

Sea la ecuacion propuesta $ab^5-x+\frac{x}{2a}=1-\frac{5}{x}$

multiplicando ambos miembros por el producto $2ax$ de todos los divisores, será

$$2a^2b^5x-2ax^2+\frac{2ax^2}{2a}=2ax-\frac{10ax}{x}$$

y simplificando los términos fraccionarios, resulta la ecuacion

$$2a^2b^5x-2ax^2+x^2=2ax-10a$$

que se obtiene directamente, multiplicando los términos enteros por $2ax$, el numerador x del primer término fraccionario por el denominador x del segundo, y el numerador 5 de este, por el denominador $2a$ de aquel.

Si la ecuacion dada es $3ax-\frac{1-x}{a}+1=\frac{4ax}{5}-b$

transformada en otra sin denominadores ó de términos enteros será.....

$$15a^2x-5+5x+5a=4a^2x-5ab$$

La regla anterior se puede abreviar cuando los denominadores tienen uno ó mas factores comunes, reduciendo todos los términos enteros y fraccionarios al menor denominador comun y suprimiendo luego este. Sirvan de ejemplos, los siguientes:

En la ecuacion $\frac{3x}{5}-2y+\frac{x}{10}=\frac{3}{4}y-100$ el mínimo múltiplo de sus denominadores es 20, y por consiguiente multiplicando todos los términos por este número, resulta $12x-40y+2x=15y-2000$

2.º $$\frac{a+b}{a-b}x-\frac{2a}{a+b}=\frac{2b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}x$$

$$(a+b)^2x-2a(a-b)=2b(a+b)-(a-b)^2x$$

3.º $$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{x-1}-2x \quad \Big| \quad 1=2x-2x^2$$

4.º $$\frac{7x^n}{x-1}+\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}=\frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1}$$

$$7x^n(x+1)+3x^n+6x^{n+2}=(6x^{n+1}+x^n)\times(x-1) \quad \text{ó bien} \quad 7x+10=-5x-1$$

(*) La operacion por la que se hacen desaparecer los denominadores de una ecuacion, se llamaba antiguamente *isomeria*.

Resolucion y discusion de una ó mas ecuaciones de primer grado con igual número de incognitas.

Resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita.

104. Toda ecuacion de primer grado con una incógnita se puede reducir á la forma..... $Ax=B$

En efecto, de la ecuacion $5ax+m-bx-1=\frac{x}{2}$

se deducen las siguientes... $10ax+2m-2bx-2=x$

$$10ax-2bx-x=2-2m$$

ó bien $x(10a-2b-1)=2-2m$

y llamado $10a-2b-1=A$ y $2-2m=B$; tendremos $Ax=B$

Esto supuesto; como de $Ax=B$ se deduce $x=\frac{B}{A}$; es evidente que.....

Para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, se hacen desaparecer los denominadores; se verifica la *transposicion*; se descompone el primer miembro en dos factores (uno la incógnita y el otro la suma de sus coeficientes); y últimamente se divide el segundo miembro por el coeficiente total de la incógnita.

Se supone que, antes de aplicar la regla anterior, se han efectuado las operaciones indicadas en la ecuacion propuesta, suprimiendo ademas de ambos miembros los sumandos ó factores que tuvieren comunes.

Hallar los valores de las incógnitas de las ecuaciones que siguen.....

Ecuaciones numéricas.

1.ª $10+x=50$

$x=50-10$

(*) $x=40$ raiz de la ecuacion dada

2.ª $10-\frac{x}{2}=100$

$20-x=200$

$-x=200-20$

$x=-200+20$ $x=-180$

3.ª $\frac{x+1}{10}+10x-\frac{1}{5}=x+\sqrt{2}$

$x+1+100x-2=10x+10\sqrt{2}$

$x+100x-10x=2-1+10\sqrt{2}$

$91x=1+10\sqrt{2}$

$x=\frac{1+10\sqrt{2}}{91}$

Ecuaciones literales.

1.ª $3a+x+b=m-a$

$x=m-a-3a-b$

$x=m-4a-b$

2.ª $a-\frac{x}{a-1}=1+a$

$a^2-a-x=a^2-1$

$-x=a^2-1-a^2+a$

$x=1-a$

3.ª $2b-\frac{x}{m}-1+x=\frac{1+x}{2}$

$4bm-2x-2m+2mx=m(1+x)$

$2mx-2x-mx=3m-4bm$

$mx-2x=3m-4bm$

$x=\frac{3m-4bm}{m-2}$

Otros ejemplos:

$10=10M^5-(10M-10)x$ nos dá para la incógnita $x=M^4+M^3+M^2+M+1$

$(a+x)(b+x)-a(b+c)-x^2=\frac{a^2c}{b}$ $x=\frac{ac}{b}$ (**)

$\frac{x}{2a^2}-\frac{x-b}{a+b}=\frac{bx-b^2}{a^2-b^2}-\frac{x}{4a}$ $x=\frac{4a^3b}{3a^3-2a^2+ab^2+2b^2}$

(*) Para comprobar la exactitud de este resultado se le sustituye en la ecuacion propuesta en vez de la incógnita, y si resulta una igualdad, el valor hallado será la verdadera raiz de la ecuacion; como en efecto, así sucede, pues $10+40=50$

(**) En algunos casos aunque la incógnita se halle elevada á la segunda potencia, no por eso la ecuacion es de segundo grado, pues tal vez la reduccion de términos semejantes destruya todos los que contienen el cuadrado de la incógnita. Tal sucede en el ejemplo del texto.

105. Uua ecuacion, cuya incógnita se halla por denominador ó debajo de un signo radical, se puede en ciertos casos transformar en otra equivalente de primer grado.

Resolver la ecuacion $\frac{10}{x+10}-\frac{5}{x+2}=0$

Reducida á otra de términos enteros, será $10x+20-5x-50=0$

de donde se deduce $5x=30$ que dá $x=6$

Si la ecuacion fuese $\frac{3a+x}{x}-5=\frac{6}{x}$ nos daria $x=\frac{3a-6}{4}$

Del mismo modo, la ecuacion $\frac{a}{x-m}-\frac{b}{x-n}=0$

equivale á esta otra $ax-bx=an-bm$ de donde $x=\frac{an-bm}{a-b}$

Sea la ecuacion irracional numérica $\sqrt{6+x}=3-\sqrt{x}$

elevando ambos miembros al cuadrado, resulta la nueva ecuacion irracional

$6+x=9-6\sqrt{x}+x$ ó lo que es lo mismo $6\sqrt{x}=3$

y elevando nuevamente al cuadrado esta última ecuacion, tendremos.....

$36x=9$ de donde se deduce el valor de x, es decir $x=\frac{1}{4}$

Del mismo modo la ecuacion $\sqrt{4+x}=4-\sqrt{x}$ nos da $x=\frac{9}{4}$

*Siendo la ecuacion dada $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

si elevamos ambos miembros al cuadrado, resulta.....

$1+\sqrt{x^4-x^2}=x^2-2x+1$

suprimiendo la unidad de ambos miembros de esta última ecuacion, y elevando los resultados nuevamente al cuadrado, tendremos.....

$x^4-x^2=x^4-4x^3+4x^2$

dividiendo ahora todos los términos por x^2, será.....

$x^2-1=x^2-4x+4$ de donde se deduce $x=\frac{5}{4}$

*De la ecuacion $a+\frac{1}{x}=\sqrt{a^2+\sqrt{x^{-2}+x^{-4}}}$

se deduce $\frac{4a^2}{x^2}+\frac{4a}{x^3}+\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$ ó bien $4a^2x+4a=x$

y por consiguiente el valor de la incógnita será..... $x=\frac{4a}{1-4a^2}$

*Ultimamente $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

nos dará para el valor de x el número misto $1\frac{9}{16}$

Discusion de una ecuacion de primer grado con una incógnita.

***106.** Llámase *discutir una ecuacion*, determinar é interpretar los diferentes valores de sus raices en todas las hipótesis posibles que pueden recibir los datos.

Esto supuesto; una vez que, segun hemos dicho atrás, la ecuacion general de primer grado con una incógnita se puede reducir á la forma.....

$$Ax=B \qquad \text{de donde se deduce} \qquad x=\frac{B}{A} \qquad (\Delta)$$

veamos ahora los diferentes valores de la incógnita, cuando A y B no son cero, cuando uno es cero y otro no, y finalmente cuando ambos son cero.

Si A y B *no son cero*, la ecuacion propuesta admite siempre una raiz; pues no siendo A igual á cero, la fórmula (Δ) queda satisfecha indudablemente por el cociente único de B por A, que será la raiz de la ecuacion $Ax=B$ Esta raiz puede ser positiva, negativa ó imaginaria, segun los signos y la forma de las cantidades A y B (*).

Suponiendo B *igual á cero*, de la imposibilidad en valores finitos de la fórmula (Δ) se deduce la imposibilidad, en el mismo supuesto, de la ecuacion propuesta, que seria $Ax=0$

La raiz en este caso es evidentemente igual á cero.

Siendo A *igual á cero*, la imposibilidad en valores finitos de la fórmula (Δ) nos dará la imposibilidad, bajo el mismo punto de vista, de la ecuacion propuesta ó sea de $0\times x=B$

La imposibilidad en este caso y en el anterior no es absoluta, sino relativa á valores finitos de la incógnita.

Suponiendo A *y* B *iguales á cero*, el cociente indicado de la fórmula (Δ) tomará la forma $\frac{0}{0}$ y por consiguiente será una cantidad cualquiera puesto que, el producto de toda cantidad por cero es siempre cero (**).

Luego la ecuacion propuesta que resulta satisfecha por todos los valores de la incógnita que se quiera, será indeterminada.

La ecuacion en este caso será $0\times x=0$

Reciprocamente. Si admitimos una raiz única en una ecuacion de primer grado con una sola incógnita, dicha ecuacion será de la forma $Ax=B$ cuando A y B no sean cero, porque de lo contrario, la ecuacion propuesta no seria posible en valores finitos ó seria indeterminada.

Suponiendo una ecuacion imposible en valores finitos de la incógnita, será de la forma $Ax=B$ cuando una de las cantidades A ó B sea cero, pues de otro modo la ecuacion tendria una raiz única, ó seria indeterminada, segun que A y B fuesen ó no cantidades asignables.

Por último, una ecuacion indeterminada con una sola incógnita se reduce siempre á la forma $Ax=B$ cuando A y B son nulas á la vez, pues de lo contrario dicha ecuacion tendria una raiz única ó seria imposible en valores determinados. Luego se puede admitir que

Toda ecuacion de primer grado con una incógnita y posible en valores finitos no admite mas que una raiz ó un número indeterminado de raices.

(*) Suponiendo que las raices de la ecuacion propuesta $Ax=B$ son dos, por ejemplo α y α'; tendremos evidentemente las igualdades..... $A\alpha=B$ $\quad A\alpha'=B$ de donde se deduce despues de restarlas ordenadamente que $A(\alpha-\alpha')=0$ y como A no puede ser cero existiendo la ecuacion dada, el producto del primer miembro será cero, únicamente cuando sea cero el factor $\alpha-\alpha'$: luego es evidente la igualdad $\alpha=\alpha'$

(**) Véase sin embargo en el número siguiente, la verdadera interpretacion de este simbolo, llamado de *indeterminacion*.

107. La interpretacion de las diferentes expresiones ó símbolos algebráicos, que aparecen por raices de una ecuacion de primer grado, forma parte de la discusion de estas mismas ecuaciones; por eso vamos á tratar ahora de la verdadera significacion de los resultados, que se presentan bajo la forma....

$$\frac{A}{0},\ \frac{A}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty$$

Interpretacion de $\frac{A}{0}$. Suponiendo que el denominador D de $\frac{A}{D}$ disminuye hasta acercarse á cero cuanto se quiera, la cantidad fraccionaria aumentará tanto mas, cuanto menor sea el valor del denominador.

Si los valores sucesivos de D, son 1, 0,1, 0,01, 0,000001, etc. los de la expresion fraccionaria serán A, 10A, 100A, 1000000A etc.; luego disminuyendo convenientemente el denominador D, dicha expresion fraccionaria será mayor que cualquiera otra cantidad, y por lo tanto la expresion, que nos proponemos interpretar, es infinitamente grande ó *infinita*.

Una expresion infinitamente grande ó sea el *infinito* se expresa por este signo ∞; de modo que $\frac{A}{0}$ y ∞ son equivalentes (*). El ∞ se puede considerar positiva ó negativamente. Si el valor de una expresion algebráica aumenta hasta el infinito, permaneciendo constantemente positiva, se dice que su valor indefinido es el infinito positivo ó $+\infty$; permaneciendo constantemente negativa, su valor indefinido será $-\infty$ ó el infinito negativo.

El valor infinito hallado para la incógnita indica que la ecuacion es absurda, ó al menos que no puede ser satisfecha por ningun valor limitado de la incógnita.

Interpretacion de $\frac{A}{\infty}$. Suponiendo $D=0$ en la expresion $A:\frac{1}{D}=A\times D$, el primer miembro se convierte en $\frac{A}{\infty}$ y el segundo en $A\times 0=0$; luego $\frac{A}{\infty}=0$ y por consiguiente, podemos considerar al símbolo $\frac{A}{\infty}$ como equivalente á cero. Luego una fraccion algebráica puede reducirse á *cero* de dos maneras diferentes; suponiendo cero el numerador ó considerando infinito el denominador (**).

El valor cero hallado por la incógnita indica que la ecuacion es absurda, ó al menos que no puede ser satisfecha por ningun valor finito ni infinito.

Interpretacion de $\frac{0}{0}$. El valor de esta expresion ha de ser tal que multiplicado por el divisor cero, produzca el dividendo que tambien es cero; y como toda cantidad cumple con esta condicion, resulta que en general.....

El valor $\frac{0}{0}$ hallado para la incógnita indica que la ecuacion de donde provino admite para la misma incógnita infinitos valores.

Para hallar, sin embargo, el verdadero valor de una expresion fraccionaria, que por cierta hipótesis se presenta bajo esta forma, se transforma en otra cuyos términos no se anulen á la vez en la misma hipótesis, suprimiendo en el numerador y denominador todos los factores que tuvieren comunes.

Hallar en el supuesto $a=b$, el valor de la expresion $\frac{a^3-b^3}{2(a-b)}$

(*) Sin embargo, este resultado no es mas que simbólico, pues no pudiendo ser infinita la cantidad mientras sea cantidad, el signo ∞ rigorosamente hablando no representa cantidad ninguna.

(**) Los símbolos cero y ∞, son los límites generales de las cantidades reales positivas, así como $-\infty$ y $-$cero, lo son de las negativas.

Luego los límites de las expresiones imaginarias serán $\pm\infty\sqrt{-1}$ y $\pm 0\sqrt{-1}$

Siendo $a=b$ el numerador y el denominador se reducen á cero; luego uno y otro serán divisibles por $a-b$ (**30**) : suprimiendo pues este factor comun en ambos términos, tendremos $\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)$; y por consiguiente el verdadero valor de la expresion propuesta, cuando $a=b$, será $\frac{a^2+a^2+a^2}{2}=\frac{3}{2}a^2$

Suponiendo $a=b$ en $\frac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a^2-b^2}$, tendremos $\frac{0}{0}$ pero si se suprime en ambos términos el factor comun a^2-b^2, resulta $a-b$; luego si $a=b$, el verdadero valor de la expresion propuesta, será *cero*.

Del mismo modo, el verdadero valor de $\frac{x^2-25}{25-10x+x^2}$ cuando $x=5$, es el ∞

Luego si una hipótesis particular reduce á cero los dos términos de una expresion fraccionaria, *el símbolo* $\frac{0}{0}$ *no expresa siempre su indeterminacion*, pues segun acabamos de ver, el valor verdadero de la cantidad propuesta puede ser determinado, nulo ó infinito.

Interpretacion de $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$ y $\infty-\infty$

Si en las expresiones $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=\frac{b}{a}$, $a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ y $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ se supone que a y b llegan á ser cero, los primeros miembros se transforman en los símbolos cuya interpretacion se busca, y como los segundos se presentan bajo la forma $\frac{0}{0}$ dichos símbolos pueden y deben considerarse, en general, como *símbolos de indeterminacion.*

Esc. Sea cero, finito, infinito ó indeterminado el valor hallado para la incógnita, si se sustituye en la ecuacion que le produce, la transforma en una igualdad ó identidad (*).

***108.** Ultimamente, *cuando los términos de una expresion fraccionaria aumentan indefinidamente con el valor variable de una letra, conviene en ciertos casos determinar su límite*, dividiendo ambos términos por una potencia tal de la variable, que ninguno de ellos resulte infinito, ni los dos resulten cero, aun cuando la variable aumente indefinidamente. Una vez transformada así la expresion dada, es muy fácil determinar su límite.

Hallar el límite de las expresiones que siguen, cuando las variables x ó y aumentan indefinidamente.

El *límite* de $\frac{x^3+5x^2-x}{5x^3+x}=\frac{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}$ será evidentemente $\frac{1}{5}$, puesto que, si x aumenta indefinidamente hasta llegar al ∞, todas las fracciones del numerador y denominador se reducirán á cero.

Los límites de $\frac{10+2x+x^2}{10+x^2+x^3}$ y $\frac{\sqrt[3]{y^6+2y+7}}{y+1}$ son respectivamente 0 é ∞ como se deduce fácilmente dividiendo los dos términos de la primera expresion fraccionaria por x^3, y los de la segunda por y^2.

(*) Si una ecuacion es absurda ó indeterminada sin que se haga ninguna hipótesis en los datos, la *imposibilidad* se manifiesta antes de llegar al valor final de la incógnita, por la expresion $0=A$ y la *indeterminacion* por $0=0$.

Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

109. Así como una ecuacion de primer grado con una incógnita se puede reducir á la forma $Ax=B$; toda ecuacion de primer grado con dos incógnitas despues de quitar los denominadores, efectuar las operaciones indicadas y hacer la transposicion y reduccion estará bien representada por $Ax+Bz=C$ donde A, B y C pueden ser cantidades positivas, negativas ó imaginarias.

En efecto, sea la ecuacion $x+\frac{bz}{5}+a\sqrt{-1}=\frac{z-x}{a}$; y tendremos

$5ax+abz+5x-5z=5a^2\sqrt{-1}$ ó bien $x(5a+5)+z(ab-5)=5a^2\sqrt{-1}$

y llamando $5a+5=A$, $ab-5=B$ y $5a^2\sqrt{-1}=C$; resulta $Ax+Bz=C$

Se llama *sistema de ecuaciones* la reunion de dos ó mas ecuaciones que deben verificarse ó ser satisfechas simultáneamente.

Solucion de un sistema de ecuaciones es el conjunto de valores de las incógnitas, que verifican ó satisfacen á todas las ecuaciones del sistema.

Se llama *sistema determinado* aquel que solo admite un número limitado de soluciones, é *indeterminado* en el caso contrario.

Resolver un sistema cualquiera de ecuaciones es hallar todas sus soluciones.

Un sistema de ecuaciones es equivalente á otro, cuando toda solucion del primero lo es tambien del segundo y al contrario. Por consiguiente siempre se posible sustituir por un sistema de ecuaciones otro equivalente.

Eliminar una incógnita en dos ecuaciones es deducir de ellas por medio de operaciones que no alteren á los valores de las incógnitas, una tercera ecuacion, que no contenga la incógnita, que se desea eliminar.

Los métodos de eliminacion mas conocidos son el de *sustitucion*, el de *igualacion* y el de *reduccion*, que se llama de *adicion ó sustraccion*, y tambien de *coeficientes idénticos* (*).

Para resolver por *sustitucion* dos ecuaciones con dos incógnitas, se despeja en una de ellas la incógnita, que se desea eliminar, y sustituyendo su valor en la otra ecuacion, nos resultará una sola ecuacion con una sola incógnita, cuyo valor nos será fácil determinar.

Para resolver por *igualacion* dos ecuaciones con dos incógnitas, se despeja en ambas ecuaciones la incógnita, que se quiera eliminar, é igualando luego sus valores, la ecuacion final que resulte, nos dará el valor de la otra incógnita.

Para resolver por *reduccion* dos ecuaciones con dos incógnitas, se transforman en otras dos, en que sean iguales los coeficientes de la incógnita que se elimina, se suman ó se restan las ecuaciones asi transformadas, y el resultado será la ecuacion final.

Conocido el valor de una incógnita, para hallar el valor de la otra, basta sustituir el valor de la primera en cualquiera ecuacion, que contenga ambas incógnitas.

(*) *Eliminar en general una incógnita entre* n *ecuaciones* es deducir de ellas, por medio de operaciones que no alteren los valores de las incógnitas, $n-1$ ecuaciones, que no contengan á la incógnita que se desea eliminar. Llámase tambien á esta operacion, *reducir un sistema de ecuaciones*, puesto que se convierte en otro que tiene una ecuacion menos y una incógnita menos, y en el que las incógnitas restantes tienen los mismos valores que en el primitivo.

110. Resolver las ecuaciones $\left\{x-y=10 \quad [A] \quad 5x+3y=130 \quad [B]\right\}$

Sustitucion. De la ecuacion [A], se deduce $x=10+y$ [C]
y sustituyendo este valor de x en la [B], será $5(10+y)+3y=130$ [D]
ó lo que es lo mismo $50+5y+3y=130$ de donde $y=10$
Conocido ya el valor de y, se hallará el de x, sustituyendo el primero en la ecuacion [C], y tendremos $x=20$

El sistema de las ecuaciones [C] y [D] equivale al sistema propuesto.

Igualacion. De las ecuaciones dadas, se deduce $x=10+y \quad x=\frac{130-3y}{5}$

é igualando estos valores, será $10+y=\frac{1}{5}(130-3y)$ y por consiguiente $y=10$
El valor de x, se hallará como hemos dicho anteriormente.

Reduccion. Multiplicando por 5 los dos miembros de [A], tendremos.....

$\left\{\begin{array}{l}5x-5y=50\\5x+3y=130\end{array}\right\}$ de donde se deduce $3y+5y=130-50$ que dá $y=10$

El valor de la otra incógnita, se determina como anteriormente.

2.° Resolucion del sistema de ecuaciones $\left\{\frac{x}{8}+\frac{z}{4}=1 \qquad 5x-10z=30\right\}$

Despejando á x en la segunda, tendremos $x=6+2z$ [α]
cuyo valor sustituido en la primera, nos dá $\frac{6+2z}{8}+\frac{z}{4}=1$ de donde $z=\frac{1}{2}$

Sustituyendo en la ecuacion [α] el valor conocido de z, tendremos $x=7$

3.° Hallar los valores de las incógnitas del sistema de ecuaciones que sigue:

$$\frac{ax}{2}-10z-m=o \qquad 2az+\frac{x}{10}=x+1$$

Despejando á z en una y otra ecuacion, tendremos $z=\frac{ax-2m}{20} \quad z=\frac{9x+10}{20a}$
de donde se deduce $\frac{ax-2m}{20}=\frac{9x+10}{20a}$ y por consiguiente $x=\frac{10+2am}{a^2-9}$
El valor de z, se halla sustituyendo el de x en una de las ecuaciones anteriores.

4.° Sean las ecuaciones dadas $\left\{x+b=y+a \qquad \frac{x+a}{y-b}=\frac{m}{n}\right\}$
ó sus equivalentes $x-y=a-b \qquad nx-my=-na-mb$
multiplicando los dos términos de la primera por m, tendremos.....

$\left.\begin{array}{l}mx-my=ma-mb\\nx-my=-na-mb\end{array}\right\}$ de donde $mx-nx=ma+na \qquad x=\frac{a(m+n)}{m-n}$

Conocido el valor de x, el de y será $\frac{a(m+n)}{m-n}-y=a-b \qquad y=b+\frac{2an}{m-n}$

Otros ejemplos que pueden servir de ejercicios al lector:

		Incógnitas.
$x-a=y+a$	$x+a=2(y-a)$	$7a$ y $5a$
$\frac{5x}{2}-10+\frac{z}{4}+6x=x-z+\frac{15x}{8}$	$\frac{x-z}{5}+5x=20+9z-\frac{2}{5}$	2 y -1
$(b+c)(x-c+b)+a(y+a)=2(a^2+b^2-c^2)$	$\frac{ay}{(b-c)x}=\frac{(b+c)^2}{a^2}$	$\frac{a^2}{b+c}$ y $\frac{b^2-c^2}{a}$

Discusion de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

111. Dos ecuaciones son *distintas* cuando no se deduce la una de la otra sin alterarla. Una ecuacion es *consecuencia* de otra, cuando se deduce de ella por medio de operaciones, que no la alteran. Dos ecuaciones de esta especie forman un sistema indeterminado.

Dos ecuaciones son *contradictorias* ó *incompatibles*, cuando no pueden verificarse por unos mismos valores finitos de las incógnitas. Dos ecuaciones de este especie forman un sistema imposible. Cuando una ó las dos ecuaciones son absurdas, con mas razon el sistema será imposible.

Examinemos las dos ecuaciones generales de primer grado con dos incógnitas

$$Ax+Bz=C \quad [\alpha] \qquad A'x+B'z=C' \quad [\beta]$$

donde A, A', B, B', C y C' pueden ser positivas, negativas, incomensurables, etc.

La resolucion de estas ecuaciones nos dá para valores de las incógnitas.....

$$x=\frac{CB'-BC'}{AB'-BA'} \qquad z=\frac{AC'-CA'}{AB'-BA'} \qquad [\Delta]$$

De la analogía de estas dos expresiones y de su relacion con las cantidades conocidas del sistema de ecuaciones dado se puede deducir una regla, que sirva para resolver inmediatamente todos los sistemas semejantes (*).

Los valores de ambas incógnitas, como se deducen de resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, podrán ser positivos, negativos, cero, ∞, etc.

*Sentado esto, veamos los diferentes valores de las incógnitas en los supuestos siguientes:

1.° *Si el denominador de las fórmulas* (Δ) *no es cero,* ó lo que es lo mismo las razones $\frac{A}{A'}$ y $\frac{B}{B'}$ son desiguales, las incógnitas x y z admiten un valor determinado y único, que podrá ser positivo, nulo ó negativo. En este caso el sistema de ecuaciones dado tendrá una solucion única.

2.° *Si el denominador* AB'—BA' *es cero,* ó las razones A : A' y B : B' son iguales, los valores de las incógnitas serán $x=\frac{CB'-BC'}{0}=\infty$ y $z=\frac{AC'-CA'}{0}=\infty$ y por consiguiente las ecuaciones dadas, en el caso de no ser cero los numeradores de las fórmulas [Δ], serán *incompatibles* en valores finitos.

En efecto, de [α] y [β] se deducen $AB'x+BB'z=CB'$ y $A'Bx+BB'z=BC'$, pero $AB'=A'B$; luego los segundos miembros de estas ecuaciones serán iguales, que es contrario al supuesto de no ser cero los numeradores de [Δ]

3.° *Siendo cero el denominador* AB'—BA' *y cero tambien el numerador de una de las incógnitas,* ó bien que las razones A:A', B:B' y C:C' sean iguales; el numerador de la otra incógnita será tambien cero y tendremos $x=\frac{0}{0}$, $z=\frac{0}{0}$; en cuyo caso el sistema de ecuaciones propuesto será *indeterminado.*

En efecto, si $AB'-BA'=o$ y $CB'-BC'=o$; tendremos $B'=\frac{BA'}{A}$ y por consiguiente $AC'-CA'=o$. Ademas, si multiplicamos la ecuacion [α] por B' y la [β] por B, se deducirá fácilmente que ambas ecuaciones son una sola: y por consiguiente que el sistema propuesto es indeterminado.

(*) Esta regla es la siguiente:
Los valores de ambas incógnitas son dos expresiones fraccionarias cuyo denominador comun es la diferencia de los productos diferentes AB' y BA' de los coeficientes de una y otra incógnita en ambas ecuaciones. El numerador se deduce del denominador sustituyendo por los coeficientes de la incógnita respectiva los términos absolutos C y C'

4.° Suponiendo $A=o$, $B=o$, tendremos $x=\infty$ y $z=-\infty$
y si ademas $C=o$, resultará fácilmente $x=\frac{0}{0}$ y $z=\frac{0}{0}$
Siendo $A=o$, $A'=o$, las incógnitas serán $x=\infty$, $z=\frac{0}{0}$ (*)
$A=o$, $B'=o$, los valores de x y z, serán $x=\frac{C'}{A'}$ $z=\frac{C}{B}$

Ultimamente, la resolucion de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, cuando una de las ecuaciones tiene una sola incógnita, se deduce de las fórmulas generales (Δ), suponiendo *cero* el coeficiente de dicha incógnita.

Sean las ecuaciones $5y=50$ y $3x+10y=101$
suponiendo $A=o$ en las fórmulas (Δ), tendremos $x=\frac{CB'-BC'}{-BA'}$ $y=\frac{C}{B}$
y sustituyendo por A', B, B', C, etc., los valores particulares 3, 5, 10, 50, etc. resultará para las incógnitas $x=\frac{1}{3}$ $y=10$

Resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas.

112. Asi como una ecuacion de primer grado con una incógnita se puede reducir á $Ax=C$; y una de primer grado con dos incógnitas está bien representada por $Ax+Bz=C$; una de primer grado con tres incógnitas se podrá reducir á $Ax+Bz+Cy=D$

En efecto, de la ecuacion $\frac{5x}{m}-2z\sqrt{-1}+3x=\frac{x-y}{5}-2z+1$
se deducen las siguientes: $25x-10mz\sqrt{-1}+15mx=mx-my-10mz+5m$
$x(25+15m-m)+z(10m-10m\sqrt{-1})+my=5m$
y llamando A al coeficiente de x, B al de z, C al de y, y D al segundo miembro; tendremos..... $Ax+Bz+Cy=D$

Eliminar una incógnita en un sistema de tres ó mas ecuaciones es deducir de ellas, por medio de operaciones que no alteren los valores de las incógnitas, otro sistema, que no contenga la incógnita, que se desea eliminar.

Para resolver por *sustitucion* tres ecuaciones con tres incógnitas, se despeja en una ecuacion la incógnita, que se quiere eliminar, y se sustituye su valor en las otras dos. De este modo resultará un nuevo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se resolverá como hemos dicho anteriormente.

Para resolver el mismo sistema por *igualacion*, se despeja la incógnita, que se desea eliminar, en las tres ecuaciones dadas, se igualan luego estos valores dos á dos, y la cuestion queda reducida á resolver dos ecuaciones con dos incógnitas.

El mismo sistema se resuelve por *adicion ó sustraccion* eliminando una misma incógnita, primero en dos ecuaciones y luego en otras dos, resultando así dos solas ecuaciones con dos incógnitas, cuya resolucion hemos explicado anteriormente.

(*) Este resultado parece contradictorio con lo demostrado anteriormente, á saber, que si una de las incógnitas es $\frac{0}{0}$ ó ∞, la otra lo será tambien; no obstante, son verdaderos ambos resultados, pues las ecuaciones dadas en el supuesto $A=o$ y $A'=o$ quedan reducidas á $Bz=C$ y $B'z=C'$ dejando por lo tanto de ser un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

113. Propongámonos resolver el sistema de ecuaciones que sigue.....

$x-2y+3z=6$ [A] $\quad 2x+3y-4z=20$ [B] $\quad 3x-2y+5z=26$ [C]

Sustitucion. De la primera ecuacion se deduce $x=6+2y-3z$ [D]

y sustituyendo este valor en las otras dos, será $\left\{\begin{array}{l}2(6+2y-3z)+3y-4z=20\\3(6+2y-3z)-2y+5z=26\end{array}\right\}$

de cuyas ecuaciones resultan $y=4 \quad z=2$

Sustituyendo ahora estos valores en [D]; téndremos $x=8$

Igualacion. De las ecuaciones dadas se deducen los valores siguientes:

$$x=6+2y-3z \qquad x=\frac{20-3y+4z}{2} \qquad x=\frac{26+2y-5z}{3}$$

y por consiguiente, el nuevo sistema de dos ecuaciones entre y, z será.....

$$6+2y-3z=\frac{1}{2}(20-3y+4z) \qquad 6+2y-3z=\frac{1}{3}(26+2y-5z)$$

Conocidos los valores de y, z; el de x se hallará como anteriormente.

Reduccion. De las ecuaciones [A] y [B], se deduce $7y-10z=8$

y eliminando nuevamente á x en las ecuaciones [A] y [C]; será $4y-4z=8$

De este sistema de ecuaciones, se deducen fácilmente los valores de y, z: el de x se obtiene como llevamos dicho.

2.° $\left\{ x+z+y=100 \qquad \frac{x}{5}-z-10y=35 \qquad 2x-z-5y=145 \right\}$

Despejando á y en la primera ecuacion, será $y=100-x-z$

y sustituyendo este valor en las otras dos, tendremos.....

$$\left\{\frac{x}{5}-z-1000+10x+10z=35 \qquad 2x-z-500+5x+5z=145\right\}$$

luego los valores de las tres incógnitas, serán..... 75, 30, y —5

3.° Sean las ecuaciones $x-z+y=M \quad x+z+2y=N \quad x-4z-y=P$

Despejando á x en cada una, tendremos.....

$$x=M+z-y \qquad x=N-z-2y \qquad x=P+4z+y$$

y por consiguiente $M+z-y=N-z-2y \qquad M+z-y=P+4z+y$

luego $z=2N-3M+P \qquad y=5M-3N-2P \qquad x=5N-7M+3P$

4.° $\frac{x+z}{y+1}=\frac{3}{4} \qquad \frac{x+y}{z-1}=4 \qquad \frac{y+z}{x+1}=2{,}5$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l}4x+4z-3y-3=0 & 20z-7y-19=0 & 2z-4=0 & z=2 \quad y=3 \quad x=1\\x-4z+y+4=0 & 7y-18z+15=0 & & \\5x-2z-2y+5=0 & & & \end{array}\right\}$$

114. Si en una ó mas ecuaciones no se hallan todas las incógnitas, la resolucion es mucho mas sencilla; sirvan de ejemplo los sistemas que siguen.....

$$\begin{array}{l|l|l}x+y=a & y-z=a-b & \\x+z=b & y+z=c & \text{de donde} \quad y=\frac{a+c-b}{2} \quad z=\frac{b+c-a}{2} \quad x=\frac{a+b-c}{2}\\y+z=c & & \end{array}$$

2.° $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c$

Restando la tercera ecuacion de la suma de las dos primeras, tendremos el valor de x: y por consiguiente $x=\frac{2}{a+b-c} \qquad z=\frac{2}{b+c-a} \qquad y=\frac{2}{a+c-b}$

Discusion de un sistema de tres ecuaciones con igual número de incógnitas.

*115. Sean las ecuaciones propuestas las siguientes:

$Ax+Bz+Cy=D$ [1] $A'x+B'z+C'y=D'$ [2] $A''x+B''z+C''y=D''$ (3)

Eliminando á x en $\begin{cases} (1) \text{ y } (2), \text{ será } & z(A'B-AB')+y(A'C-AC')=A'D-AD' \\ (1) \text{ y } (3), & z(A''B-AB'')+y(A''C-AC'')=A''D-AD'' \end{cases}$

despejando á z en las dos últimas é igualando sus valores se deducirá.....

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{AB'D''-AD'B''+BD'A''-BA'D''+DA'B''-DB'A''}{AB'C''-AC'B''+BC'A''-BA'C''+CA'B''-CB'A''} \\ z&=\frac{AD'C''-AC'D''+DC'A''-DA'C''+CA'D''-CD'A''}{AB'C''-AC'B''+BC'A''-BA'C''+CA'B''-CB'A''} \\ x&=\frac{DB'C''-DC'B''+BC'D''-BD'C''+CD'B''-CB'D''}{AB'C''-AC'B''+BC'A''-BA'C''+CA'B''-CB'A''} \end{aligned}\right\} [\Delta]$$

De la analogía de estas expresiones y de su relacion con las cantidades conocidas del sistema propuesto se deduce fácilmente una regla, para resolver inmediatamente todos los sistemas semejantes (*).

Como los valores de las incógnitas se deducen de la resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita, podrán ser positivos, negativos, ∞, cero, etc.

Si el denominador de las fórmulas Δ *no es cero,* las incógnitas x, z, y admiten un valor determinado y único, que podrá ser positivo, nulo ó negativo. En este caso el sistema de ecuaciones dado tendrá una solucion única.

Si el denominador es cero, el numerador de x lo será tambien; pero los de z, y podrán ser diferentes. En efecto, para que sea cero el denominador.....

$AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A''=.....$
$A(B'C''-C'B'')+A'(CB''-BC'')+A''(BC'-CB')=.....$
$B(C'A''-A'C'')+B'(AC''-CA'')+B''(CA'-AC')=.....$
$C(A'B''-B'A'')+C'(BA''-AB'')+C''(AB'-BA')$

basta que sean iguales á cero las diferencias $B'C''-C'B''$ y $CB''-BC''$ en cuyo caso tambien se verificaria la igualdad $BC'-CB'=0$; y por consiguiente el numerador de x, que se forma del denominador comun con solo cambiar D, D', D'' por A, A', A'' será tambien cero. Respecto á los numeradores de z, y nada nos autoriza á suponerlos *cero,* aunque así se verifique en muchos casos.

Segun esto, si el valor de x es $\frac{0}{0}$, los de z, y serán de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{N}{0}=\infty$ como asi se verifica en el siguiente sistema de ecuaciones;

$$Ax+Bz+Cy=D, \quad A'x+Bz+Cy=D', \quad A''x+Bz+Cy=D''$$

No siempre los resultados anteriores indican que x es indeterminada, y las ecuaciones propuestas incompatibles, pues deduciéndose de estas últimas, las nuevas ecuaciones..... $D-Ax=D'-A'x$ y $D-Ax=D''-A''x$; es evidente que, si un mismo valor de x verifica la una y la otra, las ecuaciones dadas serán idénticas y el valor determinado de x reducirá el sistema á solo una ecuacion con dos incógnitas.

Una de estas incógnitas dependerá necesariamente de los valores arbitrarios que reciba la otra.

(*) Cramer ha sido el primero que observó la ley de formacion de las raices de tres ecuaciones con tres incógnitas. A Laplace se debe la demostracion general de esta ley, para cualquiera número de ecuaciones con igual número de incógnitas.

Ultimamente, *si suponemos los términos absolutos* D, D′ y D″ *iguales á cero*, y llamamos M al denominador de las incógnitas, tendremos como única solucion del sistema propuesto $x=o,\ z=o,\ y=o$.

Añadiendo á esta suposicion $M=o$, todas las incógnitas tomarán la forma $\frac{0}{0}$ verificándose en general, no solo la indeterminacion del sistema, sino tambien que los valores de las incógnitas conservan siempre razones constantes.

Esc. Si la aplicacion de las fórmulas generales, en la resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, nos dá para valores de una ó mas incógnitas, símbolos de la forma $\frac{0}{0}$ ó ∞, se resolverán directamente dichas ecuaciones, y los resultados así obtenidos, serán los verdaderos y propios de la cuestion (*).

Sirvan de ejemplos: $5x-12y+9z=16,\quad 11x-8y+6z=49,\quad 4x-20y+15z=15$

$$2x+2y+2z=6,\quad 2x+2y+2z=7,\quad 2x+2y+2z=8$$

$$8x+y+4z=26,\quad x+y+z=7,\quad 5x-2y+z=5$$

Resolucion de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual núm. de incógnitas (**).

***116.** *Para resolver un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas*, se van eliminando estas, hasta hallar una ecuacion con una sola incógnita; y la resolucion de la última ecuacion, llamada *ecuacion final*, nos dará fácilmente los valores de las demás incógnitas.

Hallar los valores de las incógnitas del sistema siguiente:

Ecuaciones dadas.	Sistema reducido.	Nueva reduccion.	Ecuacion final.	Incógnitas.
$x+2z+3y+4u=30$ (A)	$z+y+3u=17$ (E)	$y+16u=67$ (H)	$100u=400$	$u=4$
$2x+3z+5y+5u=43$ (B)	$8z+7y+8u=69$ (F)	$20u-5y=65$ (L)		$y=3$
$3x-2z+2y+4u=21$ (C)	$9z+14y+7u=88$ (G)			$z=2$
$4x-z-2y+9u=32$ (D)				$x=1$

Eliminando á x en el sistema dado, entre la primera ecuacion y cada una de de las restantes, se ha deducido el sistema reducido. La eliminacion de z en este sistema, nos dió las ecuaciones (H) y (L), de las que se dedujo la final, y por consiguiente el valor de la incógnita u. De la ecuacion (H) resulta el valor de y, de la (E) el de z, y la (A) determina el de x. Tambien se puede obtener la reduccion del sistema propuesto eliminando la incógnita x entre (A) y (B), (A) y (C), (C) y (D); entre (A) y (B), (B) y (C), (C) y (D) etc.; pero si la eliminacion se hiciera sin contar con una ó mas ecuaciones, como sucederia eliminando á x entre (A) y (B), (A) y (C), (B) y (C), el nuevo sistema seria indeterminado y las incógnitas no tendrian los mismos valores que en el sistema propuesto.

En el ejemplo anterior, se pueden hallar 20 sistemas reducidos de diferente forma, de los cuales 4 serian inadmisibles, resultando equivalentes los demas.

En el caso de que no se hallen todas las incógnitas en cada ecuacion, la resolucion es mas sencilla.

1.° $\{3x-2y=11,\quad x+3u=8,\quad 2x-5u=5,\quad 3u+4z=7\ \{x=5,\ y=2,\ z=u=1$

2.° $\{2x+5y-z=3,\quad 3x-3y+5u=4,\quad u+t-4z=5,\quad 5t-9y=6,\quad 3x+5u=7\}$

$$x=-1,\ z=o,\ y=1,\ u=2,\ t=3$$

(*) En la discusion de las fórmulas (Δ) puede ademas ocurrir que dos ecuaciones sean incompatibles entre si, que lo sea una con las dos restantes, ó que una se deduzca de otra ó de las otras dos.

(**) O lo que es lo mismo: *dadas* n *ecuaciones de primer grado entre* n *incógnitas, hallar los valores de estas, que verifiquen simultáneamente todas las ecuaciones*. Un sistema de esta naturaleza puede tener una solucion, ninguna ó un numero indeterminado de soluciones. Para que sea posible y determinado, ninguna de las ecuaciones ha de ser absurda, ni una identidad, expresando además cada ecuacion una condicion distinta, sin ser contradictorias entre sí.

Resolucion de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con menor ó mayor número de incógnitas.

117. *Para resolver dos ó mas ecuaciones con menor número de incógnitas* (*) se despejan estas en igual número de ecuaciones y se sustituyen los valores hallados en las otras. El sistema de ecuaciones dado será determinado ó imposible, segun que los valores de las incógnitas verifiquen ó no las ecuaciones excedentes.

Las ecuaciones, ó mejor dicho, las igualdades, que resultan de sustituir los alores de las incógnitas en las ecuaciones excedentes, se llaman *igualdades de condicion*, por cuanto fijan las condiciones á que deben satisfacer los datos, para la posibilidad de la cuestion.

Sean las ecuaciones $x+z=S$ $x-z=D$ y $x:z=Q$ de las dos primeras se deduce $x=\frac{1}{2}(S+D)$ $z=\frac{1}{2}(S-D)$; y sustituyendo estos valores en la tercera nos dará la *igualdad de condicion* $\frac{S+D}{S-D}=Q$ la cual será satisfecha por las cantidades conocidas del sistema de ecuaciones propuesto, si los valores hallados de las incógnitas son los verdaderos, ó lo que es lo mismo, si verifican todas las ecuaciones. En otro caso, las ecuaciones serán incompatibles.

118. *Para resolver una ecuacion de primer grado con dos, tres ó mas incógnitas*, se despeja una de ellas, y dando á cada una de las otras un valor arbitrario, estos valores y el correspondiente de la incógnita despejada, formarán una solucion.

Sea la ecuacion indeterminada propuesta $x-5y=20$ que dá $x=20+5y$ suponiendo y igual cero, 1, 2, 10, etc.; x será igual á 20, 25, 30, 70, etc.

Los números cero y 20 forman una solucion; 1 y 25 otra, y así sucesivamente se pueden hallar cuantas soluciones se quiera.

En la ecuacion de tres incógnitas $x+2y-z=1$, se deduce $x=1+z-2y$ y dando ahora valores arbitrarios á las incógnitas independientes z, y, tendremos las correspondientes de x. Despejando en la ecuacion dada á otra incógnita z; de los valores variables de x, y, deduciriamos los de la funcion z.

El número de soluciones de una ecuacion con dos ó mas incógnitas disminuye considerablemente, si se añade por condicion que los valores de las incógnitas sean números enteros y positivos.

***119.** En general, *para resolver un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas* (**), se despejan tantas incógnitas como sean las ecuaciones dadas, considerando como conocidas las restantes. Los valores arbitrarios de estas, y los correspondientes de las incógnitas despejadas, formarán cuantas soluciones se quiera.

Sean las ecuaciones propuestas $\{x+z+u-y=10 \quad 2x+3z-4u=30\}$

Despejando á x, y z, tendremos $x=3y-7u$ $z=10+6u-2y$

luego los valores arbitrarios de u, y y los correspondientes, que se deduzcan de las últimas ecuaciones, nos darán las soluciones que se quiera.

(*) Es decir: *Dadas* n *ecuaciones entre* n—m *incógnitas, hallar los valores de estas, que verifiquen al mismo tiempo todas las ecuaciones.*

(**) O lo que es lo mismo: *Dadas* n *ecuaciones entre* n+m *incógnitas, hallar los valores de estas, que verifiquen al mismo tiempo todas las ecuaciones.* Un sistema de n ecuaciones entre $n+m$ incógnitas, ó admite un número indeterminado de soluciones ó no admite ninguna.

Ejercicios para la resolucion de las ecuaciones de primer grado.

120. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$9+\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}x+\frac{3}{4}x-\frac{7}{8}x=0 \qquad \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{5+x}{6}=1+\frac{x+1}{3} \qquad \frac{a+b}{a-b}x-\frac{2a}{a+b}=\frac{2b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}x$$

$${}^*2y+2\sqrt{b^2+y^2}=\frac{5b^2}{\sqrt{b^2+y^2}} \qquad {}^*\sqrt{a+y}+\sqrt{\frac{a^2}{a+y}}=\sqrt{2a+y}$$

Los valores de las incógnitas de estas seis ecuaciones son los siguientes:

$$40\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ \frac{3}{4}b\ ,\ -\frac{2a}{3}$$

*Demostrar que, eliminando una incógnita entre dos ecuaciones de primer grado con cualquiera número de incógnitas, la ecuacion que resulta es de primer grado; y en general que, eliminando $n-1$ incógnitas entre n ecuaciones de primer grado con n incógnitas, la ecuacion final es tambien de primer grado.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas:

$$1.^\circ \left\{\begin{aligned} ax-by&=0\\ x+y&=5 \end{aligned}\right\} \qquad 2.^\circ \left\{\begin{aligned} bx+2b-y&=0\\ b^2y+\frac{a(1-b^3)}{b}&=2b^3+x \end{aligned}\right\}$$

$$3.^\circ \left\{\frac{x-3}{y-3}=\frac{1}{4} \quad \frac{x+5}{y+5}=\frac{1}{2}\right\} \qquad 4.^\circ \left\{\begin{aligned} (x+5)(y+7)&=(x+1)(y-9)+112\\ 2x+10&=3y+1 \end{aligned}\right\}$$

Valores de las incógnitas.

$$5.^\circ \left\{ x+y=11 \quad x+z=101 \quad y+z=110 \right\} \qquad 1\ ,\ 10\ \text{y}\ 100$$

$$6.^\circ \left\{ x+y-z=0 \quad 2x+3y=10 \quad z+x=6 \right\} \qquad 2\ ,\ 2\ \text{y}\ 4$$

$$7.^\circ \left\{ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3} \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{8}{15} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{6}{5} \right\} \qquad 1\ ,\ 3\ \text{y}\ 5$$

$$8.^\circ \left\{ \frac{x+6}{y+6}=\frac{2}{3} \quad \frac{x+5}{z+5}=\frac{7}{11} \quad \frac{y-36}{z-36}=\frac{6}{7} \right\} \qquad 30\ ,\ 50\ \text{y}\ 48$$

$$9.^\circ \left\{ x-y=y-z \quad \frac{100z+10y+x}{z-y+x}=144 \quad 100z+x-198=100x+z \right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} x+3y+2z+u&=2\\ 16x+6y+4z+2u&=11\\ 27x+9y+2z+u&=17\\ 14x-6y-8z-u&=3 \end{aligned}\right| \begin{aligned} x+3y-6z-6u&=7\\ 2x+y-4z-2u&=15\\ 4x-y-5z+5u&=30\\ 5x+10y-22z-20u&=39 \end{aligned} \left|\begin{aligned} x+3y-6z-6u&=8\\ 2x+5y-10z-9u&=12\\ 2x+4y-8z-9u&=14\\ 5x+12y-24z-24u&=34 \end{aligned}\right\}$$

$$11.^\circ \left\{ x+2y=7 \quad z+3y=11 \quad u+4z=8 \quad y+5v=5\frac{1}{2} \quad x+z+y+u+v=6\frac{1}{2} \right\}$$

Resolucion de dos ó mas ecuaciones con menor ó mayor número de incógnitas:

$$\begin{aligned} x+y&=S\\ x-y&=D\\ x\times y&=P \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x+y&=100\\ x-y&=40\\ 3x\pm5y&=260 \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x+y+z&=100\\ x-y-z&=10 \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x+z+y+u&=36\\ x-z-y+u&=6\\ x+z-y-u&=24 \end{aligned} \quad (*)$$

(*) Los valores de las incógnitas del sistema 9.º son los números 4, 3 y 2
En uno de los ejemplos que siguen se verifica la notable particularidad de que $x=y=z=u=\infty$
Ultimamente, los valores de las incógnitas del sistema 11.º, son 0, 1/2, 1, 2 y 3

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE PRIMER GRADO.

Preliminares. Problemas de primer grado con igual número de ecuaciones que incógnitas. Problemas de primer grado con mayor ó menor número de ecuaciones que incógnitas.

Preliminares.

121. El ANÁLISIS ALGEBRÁICO es una aplicacion del cálculo literal, que tiene por objeto *resolver* las cuestiones particulares en fórmulas generales, que expresan, ó las propiedades de la cantidad, ó un sistema de operaciones, que conducen al resultado que se busca. La resolucion algebráica de las cuestiones matemáticas es siempre analítica, porque partiendo de los casos particulares que se dan en cuestion bajo el nombre de *problemas*, la resolucion se eleva á fórmulas finales, que abrazan en su inmensa generalidad todas las relaciones posibles entre las cantidades dadas y las incógnitas.

La resolucion analítica de todo problema consta de dos partes: traduccion del problema en ecuaciones, que se llama *plantear el problema*, y resolucion de estas ecuaciones. La traduccion ó planteo del problema consiste en expresar por una ó mas ecuaciones las relaciones entre los datos y las incógnitas enunciadas como condiciones de la solucion. Esta se consigue, indicando con las incógnitas y los datos la série de operaciones, que debieran efectuarse para comprobar los valores de las incógnitas, si fueran conocidos.

El enunciado ó propuesta del problema determina el número y la forma de las ecuaciones, que lo traducen algebráicamente. Si el problema tiene tantas incógnitas como ecuaciones independientes resultan de su traduccion algebráica, se llama *determinado*: cuando no se puede traducir en tantas ecuaciones como incógnitas, se llama *indeterminado*: y por último, cuando del planteo resulten mas ecuaciones que incógnitas, el problema se llama *mas que determinado*.

Las ecuaciones no ofrecen siempre una traduccion completa de todas las condiciones del problema. Tal sucede cuando el enunciado de la cuestion exije implícitamente que los valores de las incógnitas sean positivos, enteros ó comprendidos entre ciertos límites; en estos casos los valores de las incógnitas, que satisfacen á las ecuaciones, pueden no ser propios para resolver la cuestion.

Los problemas llevan tambien la denominacion del *grado* de sus ecuaciones.

Sentados estos preliminares, vamos á resolver los siguientes problemas:

Problemas de primer grado con una ecuacion y una incógnita.

122. SOLUCIONES POSITIVAS. La suma de los capitales de dos personas es igual á 500 duros, y el capital de la una escede al de la otra en 2000 reales. *¿Cuál es el capital de cada una?*

Llamando x al capital menor, el mayor será igual al menor mas la diferencia entre ambos, esto es $x+100$. Y como en el enunciado del problema se nos dice que la suma de uno y otro capital ha de ser de 500 duros; tendremos traducido, y por consiguiente planteado el problema en la ecuacion....

$$x+x+100=500$$

cuya resolucion nos dará fácilmente la solucion de la cuestion propuesta.

Despejando, pues, la incógnita x, tendremos $x=200$ que será el capital *menor*; y como el *mayor* ha de escederle en 100 duros, este será igual á 300.

Suponiendo y el capital mayor, tendriamos $y+y-100=500$

2.° La guarnicion de una plaza, compuesta de infantería y artillería, es de 4000 hombres: cada soldado de infantería recibe 20 rs. mensuales y 40 cada artillero, el gasto diario de la guarnicion asciende á 3000 rs. *¿Cuántos soldados hay de cada arma?*

Llamando x el número de soldados de infanteria, los artilleros serán $4000-x$ y como por el enunciado de la cuestion cada uno de los primeros recibe mensualmente 20 rs., y cada uno de los segundos 40, el gasto total de la guarnicion será al cabo de un mes $20x+40(4000-x)$; pero, segun el mismo enunciado, el gasto total diario asciende á 3000 rs.; luego la igualdad entre 30 veces 3000 rs. y la expresion anterior, nos dará la traduccion algebráica del problema...

$$20x+40(4000-x)=90000 \quad \text{de donde se deduce} \quad x=3500$$

siendo, pues, el número de soldados de infantería 3500; los artilleros serán 500.

3.° Si el capital de un individuo y sus intereses á 4,5 por 100 produce al cabo de un año 12500 duros, *¿cuál será dicho capital?*

Llamando x el capital, sus intereses, serán $0,045\times x$; y por consiguiente tendremos $x+0,045x=12500$ de donde se deducirá el valor de x

4.° *Se pregunta el camino recorrido por cada uno de dos correos* que salen á un mismo tiempo á encontrarse desde dos puntos A y B distantes entre si 1000 kilómetros, suponiendo que el primero anda 3 kilómetros por hora y el segundo 2.

La eleccion de la incógnita es de una grande importancia para la facilidad de los razonamientos y la sencillez de los cálculos, pues, en este problema, si en lugar de tomar por incógnitas las distancias recorridas por cada uno de los correos, que son las que parece indicar el enunciado, tomamos otra incógnita de la cual se deduzcan las anteriores, á saber el tiempo durante el cual los correos estuvieron en el camino, se facilitará y abreviará notablemente la resolucion del problema. En efecto, llamando x el número de horas que los correos estuvieron en el camino, tendremos la ecuacion.....

$$3x+2x=1000 \quad \text{de donde se deduce} \quad x=200 \text{ horas};$$

luego el primer correo habrá caminado 600 kilómetros y el segundo 400

5.° Siendo en un reloj las 12 en punto, y estando por consiguiente el minutero sobre el horario *¿qué hora será cuando el minutero vuelva á colocarse sobre el horario.*

Tomando por unidad de camino la dozava parte de la circunferencia del reloj, y llamando x el camino que anda el horario hasta que le alcance el minutero despues de la una, este andará evidentemente $1+x$; y como en tiempo igual el minutero camina doce veces mas que el horario, tendremos $1+x=12x$ de donde resulta $x=\frac{1}{11}$ de hora, es decir que la hora pedida será la 1 y $\frac{1}{11}$ ó bien la 1 y $5\frac{5}{11}$ minutos. Al cabo de igual tiempo ó sea á las 2 y $\frac{2}{11}$, 3 y $\frac{3}{11}$ etc., se encontrarán de nuevo, repitiéndose lo mismo hasta las 12 en punto.

De otro modo: tomando la hora por unidad y llamando x el tiempo que se busca, tendremos $x=1+\frac{5x}{12}$ y $x=1$ hora... 5 minutos... $27\frac{3}{11}$ segundos.

6.° Dispuso uno en su testamento que del capital que dejaba se diesen al *mayor* de sus hijos 1000 duros y la décima parte del resto; que al *segundo* se diesen 2000 duros y la décima parte del resto; al *tercero* 3000 duros y la décima parte del resto, y asi sucesivamente. Hecha la distribucion se vió que todas las partes eran iguales. Se pregunta *¿cuánta era la herencia total, cuántos los hijos, y cuánto recibió cada uno?*

Llamando x el total de la herencia, al hijo mayor le debe corresponder.....

$$1000+\frac{x-1000}{10}=\frac{10000+x-1000}{10}=\frac{9000+x}{10}$$

y por consiguiente el resto de la herencia será $x-\frac{9000+x}{10}=\frac{9x-9000}{10}$

Entregando de esta cantidad 2000 duros al hijo segundo, quedará... $\frac{9x-29000}{10}$

luego al segundo le pertenecen $2000+\frac{9x-29000}{100}=\frac{171000+9x}{100}$

y como todos los hijos llevaron una misma cantidad, tendremos la ecuacion.... $\frac{9000+x}{10}=\frac{171000+9x}{100}$ de donde se deduce $x=81000$ duros.

Conocida la herencia total, fácilmente se averigua lo que corresponde á cada uno de los hijos y el número de estos.

123. Soluciones negativas. *Hallar el número de personas de una reunion suponiendo que, si hubiese 100 menos, habría tres veces la diferencia entre el número que se busca y 10.*

Llamando x el número que se pide, será $x-100=3(x-10)$ de donde $x=-35$

La naturaleza del enunciado de esta cuestion no admite solucion alguna negativa, pues en el número de personas de una reunion no existe la diferencia de cualidad propia de las cantidades positivas y negativas, y por consiguiente el problema es *imposible*. No obstante, una ligera modificacion en el enunciado será suficiente para hacer desaparecer esta imposibilidad, verificándose además que el número 35 satisface á la cuestion rectificada. Esta rectificacion se consigue con solo escribir $-x$ por x en la ecuacion dada, y traducir al lenguaje vulgar la ecuacion que resulte. Asi tendremos.....

$-x-100=3(-x-10)$ ó lo que es lo mismo $x+100=3(x+10)$

en cuyo caso, el problema se podrá enunciar diciendo: *Hallar el número de personas de una reunion*, suponiendo que si hubiese 100 mas, habria tres veces la suma del número que se busca y 10. La solucion de esta cuestion es 35.

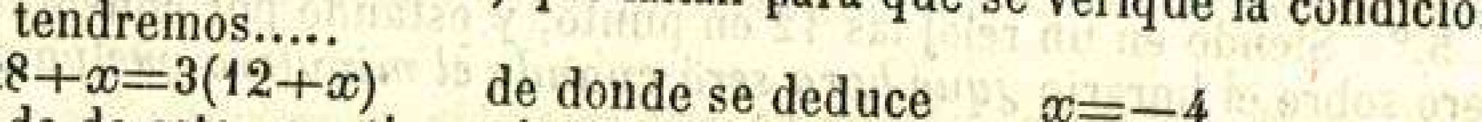
2.° Dos hermanos han nacido el uno en 1829, y el otro en 1845, y se desea averiguar, á contar desde hoy (1857), *¿en qué tiempo la edad del primero será el triplo de la que entonces tuviere el segundo?*

Llamando x el número de años, que faltan para que se verique la condicion del problema, tendremos.....

$28+x=3(12+x)$ de donde se deduce $x=-4$

El enunciado de esta cuestion admite evidentemente la solucion negativa -4; pues el tiempo en que sucede un fenómeno cualquiera puede considerarse anterior ó posterior á una época determinada. Habiendo, pues, considerado positivamente los años posteriores á 1857, serán negativos los anteriores, y por consiguiente, 4 años antes de 1857 ó sea en 1853 se habrá verificado la condicion propuesta en el problema.

3.° Dos correos salen á la vez de dos puntos A y B caminando en la direccion de C distante 200 leguas de A, y 140 de B. *Se pregunta á qué distancia del punto C se encontrarán*, andando el primero 40 leguas por dia y 30 el segundo.



Suponiendo E el punto en que se encuentran, y llamando x á la distancia CE, deduciremos fácilmente, por traduccion del problema, la ecuacion.....

$\frac{200-x}{40}=\frac{140-x}{30}$ de donde resulta $x=-40$

La posibilidad de la cuestion es evidente, y como por otra parte su enunciado admite soluciones negativas, porque la distancia desde C se puede contar á la izquierda ó á la derecha, el valor -40 se traduce diciendo, que los correos A y B cumpliendo con las condiciones del problema, deberán encontrarse 40 leguas ála derecha de C, es decir, en E′.

En la resolucion de este problema se hubiera evitado la solucion negativa generalizando mas la determinacion de la incógnita. En efecto, supuesto que los dos correos deben encontrarse precisamente á la derecha del punto B, llamando x al camino corrido por el correo A, el otro correría $x-60$, en cuyo caso el valor de la incógnita, deducido de una ecuacion análoga á la anterior, nos dará $x=240$; es decir, 40 leguas á la derecha de C, una vez que la distancia desde A á C es de 200 leguas.

Las dos últimas cuestiones manifiestan bien claramente la utilidad de representar por las mismas letras lo mismo las cantidades positivas que las negativas, una vez que esta generalizacion no cambia en nada el mecanismo de las operaciones algebráicas, ni tampoco las transformaciones que sirven de base á la resolucion de las ecuaciones.

125. SOLUCION ∞. Dos correos salen á la vez de dos puntos A y B distantes entre sí 100 leguas, caminando en la direccion ABC. *Se pregunta el punto donde podrán encontrarse*, caminando cada uno 40 leguas diarias.

Llamando x el camino corrido por el que va delante, el otro andará $100+x$ y tendremos... $\frac{100+x}{40}=\frac{x}{40}$ de donde se deduce $x=\frac{100}{1-1}=\infty$ cuyo resultado indica la imposibilidad del problema en valores finitos, pues si ambos correos caminan con igual velocidad y en una misma direccion, ya sea á la derecha de B ó á la izquierda de A, no se encontrarán sino en el ∞, donde desaparece toda distancia (*).

126. SOLUCION 0. *Hallar el capital de una persona*, suponiendo que la suma de su tercera y cuarta parte es igual á cinco veces la sesta parte del mismo capital.

Llamando x el capital que se busca, será....

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{4}x=\frac{5}{6}x \quad \text{y por consiguiente} \quad x=0$$

Este resultado manifiesta la imposibilidad numérica del problema, pues no es posible hallar un número cuya tercera y cuarta parte sea igual á cinco-sestos del mismo número: solo la *nada*, representada por $x=0$, puede cumplir con las condiciones del problema.

127. SOLUCION $\frac{0}{0}$. *¿Cuál será la edad de una persona*, suponiendo que la suma de la mitad de sus años, mas la tercera parte, mas 10, sea igual á cinco sestas partes de la suma del número que se busca mas 12 años?

Llamando x al número de años que se pide, será $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+10=\frac{5}{6}(x+12)$ de donde se deduce la identidad $5x+60=5x+60$ ó bien $x=\frac{0}{0}$

Este resultado, símbolo de la indeterminacion de la incógnita, indica que todo número, sea el que quiera, satisface las condiciones del enunciado del problema (**). La ecuacion es una verdadera identidad, y exacta por consiguiente, para cualquier valor de la incógnita.

(*) La solucion ∞ responde sin embargo de una manera evidente á ciertos problemas geométricos, tales son, *hallar la distancia á que se encuentran dos rectas perpendiculares á otra; y el punto de interseccion de la línea de los centros de dos circunferencias iguales con las tangentes exteriores y comunes de una y otra.*

(**) No siempre el símbolo $\frac{0}{0}$ indica que el valor que representa es indeterminado (**107**).

128. SOLUCIONES GENERALES. Dada la suma S de dos cantidades y su diferencia D, *hallar la mayor y la menor.*

Llamando x la menor, la mayor será igual á la menor mas la diferencia entre ambas, esto es, igual á $x+D$. Y como en el enunciado del problema se nos dice que la suma de la mayor y menor ha de ser igual á S, tendremos traducido y por consiguiente planteado el problema en la ecuacion..... $x+x+D=S$ cuya resolucion nos dará fácilmente la solucion general de la cuestion propuesta.

$$x=\frac{S-D}{2}=\frac{S}{2}-\frac{D}{2} \quad (\Delta) \quad \text{y por consiguiente } x+D=\frac{S+D}{2}=\frac{S}{2}+\frac{D}{2}$$

cuyos resultados, traducidos al lenguaje vulgar, quieren decir que: Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, la *mayor* es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y la *menor* es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.(*)

En esta solucion general principia á verse prácticamente la grande excelencia del álgebra: las fórmulas finales, á que conduce el análisis, no solo satisfacen como solucion al problema propuesto, sino que conducen tambien á inventar un gran número de nuevos problemas, cuya solucion está comprendida en la fórmula final. Para hallar estos problemas basta considerar como nueva incógnita cualquiera de las cantidades, que figuran en la fórmula, contando entre los datos á la incógnita anterior. Los problemas serán siempre tantos como cantidades independientes entren en la fórmula. Así, por ejemplo, si nos propusiéramos hallar la diferencia de dos cantidades dada la suma y una de ellas, la nueva incógnita seria D, cuyo valor $S-2x$ se deducirá de la ecuacion (Δ)

2.° Dos correos salen á la vez de dos puntos diferentes A y B caminando con movimiento uniforme en la direccion C. La distancia entre los puntos A y B es D, el primer correo anda a kilómetros por hora, y el segundo b: *se desea averiguar á qué distancia del punto A se deberán encontrar* (**)

C′——E′——A — Distancia=D — B——E——C

Suponiendo E el punto en que se encuentran y llamando x el camino corrido por A, el corrido por B será evidentemente $x-D$; y la igualdad del tiempo empleado por uno y otro nos dará la ecuacion del problema: luego tendremos...

$$\frac{x}{a}=\frac{x-D}{b} \quad \text{de donde se deduce} \quad x=\frac{aD}{a-b} \qquad [\Delta]$$

Suponiendo $a>b$ el valor de x será positivo y mayor que D, verificándose además que el punto E estará mas distante de A, ó lo que es lo mismo que el valor de x será mayor, á medida que disminuye la velocidad a del primer correo.

Suponiendo $a<b$ el valor de x será negativo é igual á $-\frac{aD}{b-a}$

El signo — del valor de la incógnita indica que los dos correos se encontrarán á la izquierda y á una distancia absoluta de A igual á $\frac{aD}{b-a}$ ó sea $\frac{aD}{a-b}$

pero como este resultado no puede acomodarse al enunciado del problema, *que dice que los correos salen en direccion de* C, envuelve aquel una condicion imposible de satisfacer, pues es evidente que, si el correo A lleva menos velocidad que B y ambos caminan en direccion de C, jamás se encontrarán. Variando, pues, convenientemente ó suprimiendo esta condicion imposible, el resultado

(*) Aunque este problema tiene dos incógnitas se plantea como si tuviera una sola, puesto que la relacion entre ellas es tal que, del valor de una se deduce inmediatamente el de la otra.

(**) En el movimiento uniforme, el espacio es proporcional al tiempo; luego se hallará este dividiendo el espacio por la velocidad. *Velocidad* es el espacio recorrido en la unidad de tiempo.

obtenido será solucion legítima. En efecto; suponiendo que la marcha de los correos sea en direccion de C′, llamaremos x á la distancia AE′ y tendremos...

$$\frac{x}{a}=\frac{x+D}{b} \quad \text{de donde se deduce} \quad x=\frac{aD}{b-a}$$

Suponiendo $a<b$ el valor de x será positivo y mayor que D, verificándose que el punto E′ estará mas ó menos distante de A, ó lo que es lo mismo que el valor de x será mayor ó menor, segun aumente ó disminuya la velocidad del correo A.

Omitiendo ahora la circunstancia de la direccion de los correos, el enunciado sería: *Dos correos salen á la vez de dos puntos diferentes* A *y* B, *caminando con movimiento uniforme sobre la recta* AB *ó sus prolongaciones. La distancia* AB *es* D, *el primer correo, etc.*

Suponiendo E el punto en que se encuentran, AE será x y tendremos...

$$\frac{x}{a}=\frac{x-D}{b} \quad \text{de donde se deduce} \quad x=\frac{aD}{a-b}$$

Cuando $a>b$ el valor de x será positivo encontrándose por consiguiente los dos correos á la derecha de A. Cuando $a<b$ el valor de x será negativo, encontrándose los dos correos á la izquierda de A. Vemos, pues, que la solucion negativa satisface tan cumplidamente al enunciado como la positiva, y además que el valor absoluto de la incógnita es el mismo, ya se rectifique el enunciado variando las condiciones no satisfechas por el resultado negativo (*), ya generalizando el problema por la supresion de dichas condiciones.

Siendo $a=b$; el valor de x será $\frac{aD}{0}$ ó ∞ y por consiguiente los correos no podrán encontrarse sino en el ∞ donde desaparece toda distancia y toda cantidad.

Añadiendo á las condiciones $a>b$ ó $a<b$, que D es cero, ó bien que los dos correos salen de un mismo punto, el valor de la incógnita será $+$*cero* ó $-$*cero*; y por consiguiente los correos desde el momento de partir no se volverán á encontrar, como efectivamente se deduce del enunciado mismo de la cuestion; pues si salen de un mismo punto, en una misma direccion y con velocidades distintas, el único punto en que estarán unidos será el punto de partida.

Si la condicion $D=o$ tiene lugar en el supuesto $a=b$, el valor de la incógnita será $\frac{0}{0}$ y por consiguiente los correos se encontrarán á todas las distancias que se quiera, y el problema será indeterminado. En efecto, si los dos correos salen de un mismo punto, en una misma direccion y con velocidades iguales, irán siempre juntos. Un problema indeterminado se hace determinado añadiendo nuevas condiciones á la propuesta, de modo que esta se particularice, y no admita mas que una solucion.

Hagamos notar por último que además de esta interpretacion, en que hemos discutido el significado de todos los valores de la incógnita, podemos idear aun muchos problemas comprendidos en el propuesto. Puede pedirse en efecto, hallar sucesivamente la velocidad de cada correo, conocidos los puntos de partida y el de encuentro, y tambien la distancia de los puntos de partida, dado el de encuentro y las velocidades. La resolucion de estos problemas se obtiene despejando á la nueva incógnita en la fórmula final [Δ] (**).

(*) Esta rectificacion (que consiste en escribir $-x$ por x en la ecuacion del problema, traduciendo la que resulte al lenguaje vulgar), se hace necesaria cuando siendo imposible generalizar el problema, el espíritu del enunciado no admite los resultados negativos.

Es evidente que si la raiz de $A\times+x=B$ es R, la de $A\times-x=B$ será $-$R.

Si las condiciones físicas impiden hacer esta rectificacion, el problema será imposible ó absurdo.

(**) Aun mas, *las fórmulas de todo problema general sirven para resolver otros que solo se distingan del primero en que ciertas cantidades que antes se tomaban en sentido determinado, despues se consideran en sentido contrario*, con tal que se mude el signo á las cantidades que cambien de cualidad ó afeccion.

Problemas de primer grado con dos ecuaciones y dos incógnitas.

129. Una persona ha recibido 1440 reales en 80 monedas entre duros y pesetas, y *se desea averiguar cuantas recibió de cada clase.*

Suponiendo x el número de duros y z el de las pesetas, una de las condiciones del problema estará bien traducida por la ecuacion $x+z=80$; y como de la otra condicion se deduce que la suma de los x duros, ó $20x$ reales, mas el valor de las pesetas ó sea $4z$, deben componer 1440 reales, la ecuacion que expresa esta condicion será $20x+4z=1440$; y por consiguiente la traduccion algebráica de la cuestion propuesta, será el sistema de ecuaciones.....
$x+z=80$ $\quad 20x+4z=1440$ de donde se deduce $x=70$ $\quad z=10$
que son la verdadera y única solucion del enunciado.

Este problema se puede tambien resolver por medio de una sola ecuacion y una sola incógnita, pues llamando x el número de duros, el número de las pesetas estará bien representado por $80-x$, y por consiguiente tendriamos la ecuacion $20x+4(80-x)=1440$.

2.° Siendo el capital de dos comerciantes el uno mitad del otro, y la diferencia de sus intereses al cinco por ciento igual á 1000 duros, se *desea saber cuáles serán estos capitales.*

Suponiendo y el menor y x el mayor, las ecuaciones serán
$x=2y$ $\quad \frac{x}{20}-\frac{y}{20}=1000$ de donde resulta $x=40000$ $\quad y=20000$

3.° Con agua cuya temperatura es de 30° se quiere mezclar agua *á 10° ¿cuántos litros de una y otra se deben tomar para que resulte un kilólitro* á 25°,5?
$x+z=1000$ $\quad 4,5x=15,5z$ y por consiguiente $x=775$ $\quad z=225$

4.° Resolver por medio de dos ecuaciones y dos incógnita el problema 2.° (**122**)

5.° Un sugeto ha prestado su capital de 100000 rs. á dos personas, recibiendo de la una 4 por ciento y de la otra 5 por ciento de interés. *Se desea saber la parte prestada á cada una,* suponiendo que el interés total anual asciende á 230 ds.

$$x+z=100000 \qquad \frac{x}{25}+\frac{z}{20}=4600$$

luego, las cantidades prestadas serán 40000 rs. y 60000 rs.

6.° Se han distribuido 300 reales entre varios pobres dando 40 á cada hombre y 10 á cada niño; *se pregunta el número de unos y otros* suponiendo que la diferencia entre los hombres y el duplo de los niños es 12.

Llamando x el número de hombres y z el de los niños, las ecuaciones serán...
$40x+10z=300$ $\quad x-2z=12$ de donde se deduce $x=8$ $\quad z=-2$
Como esta ecuacion no admite soluciones negativas, el valor -2 indica alguna condicion (relativa á los niños) imposible de satisfacer; escribiendo por lo tanto $-z$ por z en las ecuaciones, que constituyen la traduccion algebráica del problema, y traduciendo nuevamente el sistema de ecuaciones que resulte, los números 8 y 2 serán solucion verdadera del problema rectificado, el cual será: Habiendo distribuido cierta cantidad de dinero entre varios pobres dando 40 á cada hombre y 10 á cada niño, se desea averiguar el número de unos y otros, suponiendo que la diferencia entre el total recibido por los primeros y el recibido por los segundos es 300 rs., y además que el número de hombres mas el duplo del número de niños es 12.

7.° *Hallar el número de militares y paisanos, que hay en una reunion,* suponiendo que los militares son 20, menos tres veces los paisanos; y que el cuádruplo de los primeros, mas doce veces los segundos componen 100.

De las ecuaciones $x=20-3y$ $\quad 4x+12y=100$ se deduce $y=\infty$, $\quad x=\infty$
y por consiguiente las ecuaciones son incompatibles en números determinados, y el problema no tiene solucion en cantidades finitas.

8.° *¿Cuáles serán las edades de dos personas*, suponiendo que la suma de 5 años y el triplo de la edad de la primera, mas tres cuartas partes de los años de la segunda, igualen al exceso de 5 años sobre la edad de esta; y además que si la segunda contase un año menos tendria la quinta parte de nueve veces la edad de la primera menos 5 años?

De las ecuaciones $5+3x+\frac{3}{4}z=5-z$ $\quad 5(z-1)=9x-5$ se deduce para valores de las incógnitas $x=o$ y $z=o$; luego las ecuaciones son incompatibles en números determinados, y el problema no tiene ninguna solucion.

9.° Siendo el triplo del capital de una persona, menos 2 unidades, igual al cociente, que resulta de dividir por 5 el duplo del capital de otra menos una unidad; y la quinta parte del capital de esta, mas nueve décimas de la unidad, igual á 21 veces la catorce-ava parte del capital de la primera, *¿cuáles serán uno y otro capital?*

$3x-2=\frac{1}{5}(2z-1)$ $\quad \frac{z}{5}+\frac{9}{10}=21\times\frac{x}{14}$ de donde se deduce $x=\frac{0}{0}$ $\quad z=\frac{0}{0}$

luego las ecuaciones no son distintas y el problema será indeterminado.

Aunque al número de soluciones es ilimitado, no obstante el valor de una de las incógnitas depende siempre del valor arbitrario de la otra (*).

10.° *Hallar dos números tales*, que el tercio del primero sea igual á la mitad del segundo, menos 1, y que el segundo sea igual á los dos tercios del primero, menos 2 unidades. (Las condiciones de este problema son incompatibles.)

130. Soluciones generales. *Hallar dos cantidades cuya suma sea* S *y su diferencia* D.

$$\left.\begin{array}{l} x+z=S \\ x-z=D \end{array}\right\} \quad 2x=S+D \text{ y por consiguiente } x=\frac{S+D}{2} \text{ y } z=\frac{S-D}{2}$$

2.° *Hallar dos cantidades cuya suma sea* S *y su razon ó cociente* Q.

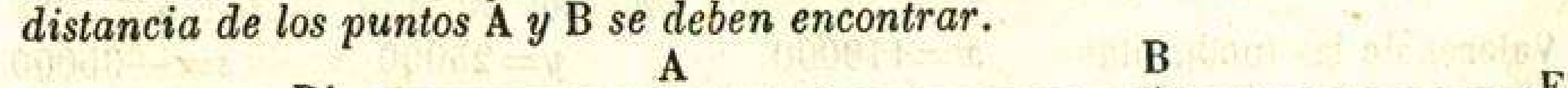
$$\left.\begin{array}{l} x+z=S \\ \frac{x}{z}=Q \end{array}\right\} \quad z+zQ=S \quad \text{de donde} \quad z=\frac{S}{Q+1} \text{ y } x=\frac{SQ}{Q+1}$$

3.° *Si la diferencia de dos cantidades es* D *y su cociente* Q; tendremos.....

$$x=\frac{DQ}{Q-1} \text{ y } z=\frac{D}{Q-1}$$

En estos tres últimos problemas, como en todos los generales, se comprenden otros nuevos enunciados, cuya solucion nace de las respectivas fórmulas finales.

4.° Dos correos salen á la vez de dos puntos diferentes A y B de una misma línea, dirigiéndose con movimiento uniforme á la derecha. El correo que sale de A anda a kilómetros por hora y el que sale de B anda b. *Se pregunta á qué distancia de los puntos* A *y* B *se deben encontrar.*



Suponiendo que se encuentren en E; si llamamos D la distancia AB, x á la distancia AE y z á BE, las ecuaciones del problema serán.....

$$\left\{ x-z=D \text{ y } \frac{x}{a}=\frac{z}{b} \right\} \quad \text{de donde se deduce} \quad x=\frac{aD}{a-b} \quad z=\frac{bD}{a-b}$$

(*) En esta clase de cuestiones, las incógnitas se llaman *variables*: las que reciben valores arbitrarios *variables independientes*, y funcion á la incógnita cuyo valor depende de las variables independientes.

En general se llama *funcion* á una expresion algebráica, que contiene una ó mas letras, que representan cantidades variables. Así la expresion $5x^2+10x-100$ es una funcion entera de la variable x

Suponiendo $a>b$ los valores de ambas incógnitas serán positivos y mayores ó menores, segun la mayor ó menor velocidad del correo B.

Suponiendo $a<b$, los valores de x y z serán ambos negativos, y como el enunciado expresa que se deben encontrar á la derecha, el problema será imposible. No obstante, si variamos ó suprimimos la condicion, que fija la direccion determinada de los correos, el problema será posible, y los valores negativos de las incógnitas determinarán el punto E' en que deben encontrarse.

Suponiendo $a=b$ los valores de x y z son $x=\infty$ y $z=\infty$ cuyos resultados indican que los correos nunca se encontrarán mientras no se salga de los límites de toda cantidad, es decir en el ∞

Añadiendo á la suposicion $a>b$ ó $a<b$ que D es cero; los valores de las incógnitas serán $x=o$ y $z=o$, que indican la imposibilidad de asignar un punto en que se encuentren los correos fuera del punto de partida.

Suponiendo $a=b$ y además $D=o$ los valores de x y z son $x=\frac{0}{0}$ $z=\frac{0}{0}$ y por consiguiente las ecuaciones y el problema serán indeterminados. En efecto, las ecuaciones toman la forma $x-z=o$ y $x-z=o$ que no son dos ecuaciones, sino una sola; y respecto al problema es evidente que, si la distancia AB es cero, y las velocidades de ambos correos son iguales, continuarán unidos desde el momento de partida, luego el número de soluciones será ilimitado.

Problemas de primer grado con tres ó mas ecuaciones é igual número de incógnitas.

131. Un oficial mandando tres batallones de franceses, ingleses y españoles quiere dar el asalto á una plaza con una parte de sus tropas, prometiendo 80 rs. á cada soldado que gane la muralla y repartiendo el resto hasta 3604 duros de que podia disponer entre los demás soldados. Si los franceses dan el asalto, á cada uno de los otros corresponde 40 rs.; si lo dan los ingleses recibe cada uno de los demas la tercera parte de lo que lleva cada inglés, y finalmente, dando el asalto los españoles, corresponde á cada uno de los otros un duro: *¿cuántos hombres habia en cada batallon?*

Llamando x los españoles, y los ingleses, z los franceses, las ecuaciones serán

$$\frac{3604-4z}{x+y}=2 \qquad \frac{3604-4y}{x+z}=\frac{4}{3} \qquad \frac{3604-4x}{z+y}=1$$

y por consiguiente, los españoles serán 689, los ingleses 583; y los franceses 265.

2.° Una persona que tiene 100000 duros ha prestado una parte al 5 por 100, otra al 10 por 100 y lo restante al 20 por 100. Los réditos de la primera y segunda partida ascienden anualmente á 2000 duros, y los de la segunda y tercera á 30000 rs. *Se pregunta el valor de cada una de las cantidades prestadas.*

Ecuaciones $\quad x+z+y=100000 \quad \frac{x}{20}+\frac{z}{10}=2000 \quad \frac{z}{10}+\frac{y}{5}=1500$

Valores de las incógnitas $\quad x=110000 \quad y=25000 \quad z=-35000$

Luego para que el problema sea posible se debe enunciar así: una persona ha prestado una cantidad al 5 por 100, otra al 10 por 100 y otra al 20 por 100. Los réditos de la segunda partida han sido 2000 duros menos que los de la primera y 30000 rs. menos que los de la tercera: las partidas primera y tercera son tanto como la segunda mas 100000 duros. *Hallar el valor de cada una de las cantidades prestadas.*

3.° La suma de las edades de dos hermanos es igual á 56 años; la del padre mas la del mayor componen 80, y la del padre menos la del menor 30: *se pregunta la edad de cada uno.*

Llamando x la edad del padre, y la del hijo mayor, z la del menor, las ecuaciones serán..... $y+z=56 \quad x+y=80 \quad x-z=30$ de cuya resolucion se deduce la imposibilidad del problema.

Problemas del primer grado con mayor número de ecuaciones que incógnitas.

132. *Hallar dos números cuya suma sea* S, *su diferencia* D *y su cociente* Q.

Llamando x y z los números que se piden, tendremos las ecuaciones

$$x+z=S \qquad x-z=D \qquad \frac{x}{z}=Q$$

De las dos primeras se deduce $x=\frac{1}{2}(S+D)$ $z=\frac{1}{2}(S-D)$, y sustituyendo estos valores en la tercera, nos dará la *igualdad de condicion*

$$S:D=(Q+1):(Q-1)$$

luego, para que la cuestion sea posible, se necesita que la razon de la suma y la diferencia de los números, que se piden, sea igual al cociente de $Q+1$ por $Q-1$ Siendo $S=100$, $D=20$ y $Q=4$ el problema es imposible; pero si $Q=\frac{3}{2}$ los valores propios de las incógnitas serán los números 60 y 40.

*2.° Una persona cuyo capital nominal es de 100000 duros en papel del 3 por 100 español, ha negociado una parte á 43, otra al 40, otra á 42 y el resto á 41; resultando de la venta un total efectivo de 914000 rs. *Se desea saber cuánto papel ha negociado á cada uno de estos precios*, suponiendo que los valores efectivos son los siguientes: el papel de 43 y 40, 22750 duros; el de 43 y 42, 27550 duros; y la diferencia entre el de 40 y 41, 117000 rs.

Este problema es imposible, pues las incógnitas 25000, 30000, 40000 y 15000 duros; no cumplen la igualdad de condicion $x+z+y+u=100000$.

Problemas de primer grado con menor número de ecuaciones que incógnitas.

133. En una comida de campo se gastaron 40 duros; cada hombre pagó 100 rs. y cada muger 60: *se pregunta el número de hombres y el de mugeres que asistieron á la reunion.*

Llamando x el número de hombres y z el de mugeres; será $z=\frac{40-5x}{3}$

Suponiendo ahora x igual á	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
z será	$11\frac{2}{3}$,	10,	$8\frac{1}{3}$,	$6\frac{2}{3}$,	5,	$3\frac{1}{3}$,	$1\frac{2}{3}$,	0,	$-1\frac{2}{3}$

Para valores mayores de x, resultan negativos para la *funcion*, y como las soluciones 1.ª, 3.ª, 4.ª, 6.ª, 7.ª no son admisibles, el número de hombres será 2 y 10 las mugeres ó bien 5 los unos y 5 las otras.

2.° *Hallar el número de vapores, navíos y corbetas de vela de una escuadra*, suponiendo que perdidos la mitad de los vapores, el total de buques ascenderá á 40.

Llamando x los navíos, y las fragatas y z los vapores; tendremos $x+y+\frac{z}{2}=40$ dando ahora valores arbitrarios á dos cualesquiera de las incógnitas, cada sistema de estos valores y el correspondiente á la otra incógnita, nos dará una solucion del problema.

Suponiendo	$x=1$,	2,	10,	12,	20,	20,	21,	21
	$y=1$,	2,	5,	12,	15,	18,	18,	19
z será	76,	72,	50,	32,	10,	4,	2,	0

y así sucesivamente pudiéramos hallar todas las soluciones del problema.

El número de soluciones se disminuye mucho, añadiendo por condicion del enunciado alguna otra circunstancia, como por ejemplo que no haya un mismo número de cada clase, que los navíos sean la mitad de los vapores, etc.

Ejercicios para la resolucion de problemas de primer grado.

131. Distribuyendo 10000 duros entre tres hermanos de modo que el primero lleve la mitad que el segundo, y el tercero tanto como los otros dos *¿cuánto corresponderá á cada uno?* $x+2x+3x=10000$

2.° *¿Cuánto vale actualmente una letra de* 100000 rs. que vence dentro de 5 meses, siendo 6 el tanto por 100 anual? $x+\frac{x}{40}=100000$

3.° Un caño llena una vasija en 12 horas, y otro la llena en 7. Se pregunta *cuánto tiempo emplearán para llenar la vasija corriendo juntos.* $\frac{x}{12}+\frac{x}{7}=1$ y por consiguiente $x=4$ horas.... 25 minutos.... 16 segundos.

Resolver el mismo problema, siendo tres los caños y suponiendo que el primero llena la vasija en 3 horas, el segundo en 4 y el tercero en 5.

4.° ¿Qué número se deberá añadir á los dos términos de la fraccion $\frac{2}{7}$ para que se convierta en dos tercios? [$x=8$]

5.° Un regimiento sale de A en la direccion B y anda 3 leguas cada dia; 10 dias despues otro regimiento sale de B para el punto A y camina 5 leguas cada dia. *Se desea saber el dia en que deben encontrarse*, suponiendo que la distancia total entre A y B es de 80 leguas. $3x+5(x-10)=80$

6.° Si dos correos A y B marchan en una misma direccion, y A camina con una velocidad diez veces mayor que B, *¿á qué distancia se encontrarán* suponiendo que B lleva 10 leguas de ventaja? $\frac{x}{10}=x-10$

7.° Un comerciante separa al principio de cada año 1000 duros para los gastos de su casa y aumenta su capital negociable en 50 por 100. Al cabo de tres años ha triplicado su capital primitivo *¿cuál era este?* $\frac{27x-57000}{8}=3x$

Si en este problema suponemos que las ganancias anuales son la tercera parte del capital, que los 1000 duros se separen al fin de cada año, y que al cabo de tres años se ha duplicado el capital primitivo, este será igual á 11100 duros.

8.° Si tenemos 80 kilógr. de salitre y azúfre en la razon de 7 : 3, *cuántos de salitre se deberán mezclar para que la razon sea de* 11 : 4 [$x=10$kg.]

9.° *Descomponer el número* 90 *en otros cuatro*, de modo que añadiendo 2 unidades al primero, restando dos del segundo, multiplicando por 2 el tercero y dividiendo el cuarto por 2, todos los resultados sean iguales. [18, 22, 10, 40]

10. Segun Vitruvio, la corona del rey Hieron, pesaba 7465 gramos y perdia en el agua 467. Supuesto que el oro pierde en el agua 0,052 de su peso y 0,095 la plata, *hallar las cantidades de oro y plata que entraron en la construccion de la corona.* $0{,}095x+0{,}052(7465-x)=467$

11. ¿Cuántos años deben trascurrir para que de dos personas, que tienen la una 66 años y la otra 12, tenga la primera el cuádruplo de la segunda? [$x=6$]

12. A y B poseen juntos 5000 rs.: si tuvieran el uno el triplo y el otro el quíntuplo de lo que realmente tienen, tendrian entonces 6000 duros *¿cuánto tiene cada uno?* Rectificacion. $3x+5(250-x)=6000$

13. *Hallar una fraccion tal* que, si restamos 3 de sus dos términos, se convierta en $\frac{1}{4}$, y añadiéndoles 5 resulte igual á $\frac{1}{2}$ [$x=\frac{7}{19}$]

14. Un fabricante tiene dos clases de hierro y sabe que los cinco sextos de la primera partida pesan 54 kilógramos mas que los tres cuartos de la segunda, y que los cinco octavos de esta pesan tanto como los cuatro novenos de la primera: *¿cuál es el peso total de una y otra partida?* [180 y 128]

15. *¿Cuántas fanegas de trigo de* á 60 rs. y *de* á 50 *se han de mezclar* para tener trigo á 52 rs., escediendo el primer número al segundo en 40 fanegas?

$x-y=40 \qquad 8x=2y$

16. *Hallar dos cantidades cuya suma es* S, *y* C *el cociente que resulta de dividir la una por la otra.*

Resolver el mismo problema conociendo la diferencia D y el cociente C.

17. Tres sócios compran una finca en 1000000 de reales: al primero le faltaba, para comprarla solo, la mitad del capital del segundo, á este le faltaba el tercio del capital del primero, y al tercero la cuarta parte del primero *¿cuál era el capital de cada uno?*

$x+\frac{z}{2}=1000000 \qquad z+\frac{x}{3}=1000000 \qquad y+\frac{x}{4}=1000000$

18. *Dividir el número* 83 *en tres partes tales* que restando 7 de las dos primeras, la razon de los resíduos sea como 5 : 3, y restando 3 de las dos últimas, la razon de estas sea como 11 : 9 [37, 25, 21]

19. *Determinar el número de tres cifras* tales que formen una equidiferencia contínua, segundo que el cociente de este número por la suma de su primer y última cifra sea igual á 72 y tercero que restando de él 198 resulte el mismo número escrito en órden inverso.

$x-y=y-z \qquad \frac{100x+10y+z}{x+z}=72 \qquad 100x+10y+z-198=100z+10y+x$

20. *Hallar tres cantidades, que sumadas dos á dos, den por sumas* A, B y C

$x+z=\mathrm{A} \qquad x+y=\mathrm{B} \qquad z+y=\mathrm{C}$

21. Corren en un estanque tres fuentes, las dos primeras dan 175 litros de agua en tres horas y media; la primera y la tercera 280 litros en cuatro horas; la segunda y la tercera 375 en seis horas y cuarto. Suponiendo la capacidad del estanque igual á 18 métros cúbicos *¿en cuánto tiempo le llenarán las tres fuentes corriendo juntas?* [$x=200$ horas].

22. *Hallar cuatro números cuya suma sea* 100 y además que, añadiendo 1 al primero y segundo, tengan la razon de 2:3; añadiendo 2 al primero y tercero tengan la razon de 3:1; y restando 3 del tercero y cuarto, su razon sea de 4:5

23. *¿Cuántos napoleones y pesetas componen* 1280 rs. siempre que el número total de monedas sea 80 y ademas que las pesetas sean cuatro veces mas que los napoleones?

$19x+4y=1280$ rs. $\qquad x+y=80 \qquad y=4x$

24. *Hallar dos números* cuyo cociente sea 10, la razon de la suma y la diferencia 3 : 2; y la razon de la suma y el producto 3 : 5

$\frac{x}{y}=10 \qquad \frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2} \qquad \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{5}$

25. *Hallar dos números divisibles el uno por* 9 *y el otro por* 44 *y cuya suma sea* 142 $\qquad 9x+44y=142$

26. *Hallar dos números cuya suma sea igual á su producto.*

27. Un artillero apuesta á tirar al blanco siempre que por cada tiro que acierte haya de recibir 5 rs. y desembolsar 3 por cada uno que pierda. Despues de cierto número de tiros gana 28 rs. y *se pregunta los tiros que dió en el blanco y los que dió fuera.* $\qquad 5x-3z=28$

28. *Hallar tres números que formen una equidiferencia contínua y cuya suma sea igual á* 105. $\qquad x-z=z-y \qquad x+z+y=105$

29. Se ha comprado una librería compuesta de 100 volúmenes en 300 duros: los en fólio se han vendido á 6 duros, los en 4.° á 3 duros y los demas á 30 rs. *¿cuántos volúmenes habia de cada tamaño?*

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Resolucion y discusion de una ecuacion de segundo grado con una incógnita. Resolucion de un sistema de ecuaciones de primero y segundo grado, ó solo de segundo grado, con igual, mayor ó menor número de incógnitas.

Resolucion y discusion de una ecuacion de segundo grado con una incógnita.

135. Ecuaciones incompletas ó puras. La forma general de estas ecuaciones, despues de quitar los denominadores y hacer la transposicion y reduccion, es $Ax^2=B$ donde A representa la suma de los coeficientes de x^2 y B la suma de todos los términos independientes de x.

Para resolver una ecuacion *pura* ó *incompleta* de segundo grado se reduce á la forma $Ax^2=B$; se dividen ambos miembros por el coeficiente de la incógnita, y extrayendo de uno y otro la raiz cuadrada, el resultado será el valor de la incógnita.

$$Ax^2=B \qquad x^2=\frac{B}{A} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{B}{A}} \quad (*)$$

Al extraer la raiz cuadrada de ambos miembros, no escribimos el signo $\pm$ antes de la x; pues de otro modo tendriamos $\pm x=\pm R$ es decir $+x=\pm R$ y $-x=\pm R$ ó $+x=\mp R$

pero las raices de $+x=\pm R$ son $+R$ y $-R$
y las raices de $+x=\mp R$ son $-R$ y $+R$ } luego ambas ecuaciones no serán mas que una, que estará bien representada por $+x=\pm R$

Si el cociente de B por A es positivo y ademas tiene raiz cuadrada exacta, será $x=\pm R$; es decir, que la ecuacion dada queda satisfecha por dos cantidades reales comensurables é iguales, pero de signo contrario.

Si la cantidad subradical es positiva y no tiene raiz cuadrada exacta, las raices de la ecuacion serán incomensurables é iguales, pero de diferente signo.

Finalmente si la cantidad subradical es negativa, ambas raices serán imaginarias é iguales, una positiva y otra negativa. Luego.....

Toda ecuacion incompleta de segundo grado tiene dos raices iguales, una positiva y otra negativa. Estas raices pueden ser enteras, fraccionarias incomensurables ó imaginarias.

Suponiendo $B=0$, las raices de la ecuacion dada serán ± 0

Cuando A es cero, los valores de x serán $\pm\infty$. Si $A=0$, $B=0$, serán $x=\pm\frac{0}{0}$

La interpretacion de estas raices es la misma que dejamos apuntada para las ecuaciones de primer grado.

Resolver la ecuacion $\frac{1}{3}x^2-3+\frac{5}{12}x^2=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}$

sin denominadores, será $8x^2-72+10x^2=7-24x^2+299$ ó bien $42x^2=378$
de donde se deduce $x^2=9$; y por consiguiente $x=\pm 3$

2.° Sea la ecuacion $x^2-25t^4a^2+m^2x^2=2mx^2$ y tendremos.....

$x^2(1-2m+m^2)=25t^4a^2$ de donde $x^2=\dfrac{25t^4a^2}{1-2m+m^2}$ $x=\pm\dfrac{5at^2}{1-m}$

De $\frac{1}{2}(x^2-26)=(x^2+1)5$ se deduce $x=\pm 2\sqrt{-1}$

(*) De otro modo: de $Ax^2=B$ se deduce $x^2-\frac{B}{A}=0$ ó $\left(x+\sqrt{\frac{B}{A}}\right)\times\left(x-\sqrt{\frac{B}{A}}\right)=0$

y como para que un producto sea cero, se necesita y basta que lo sea uno de sus factores, tendremos $x+\sqrt{\frac{B}{A}}=0$ ó bien $x-\sqrt{\frac{B}{A}}=0$ de donde se deducen las raices anteriores.

136. Ecuaciones completas ó mistas La forma de estas ecuaciones, despues de quitar los denominadores y hacer la transposicion y reduccion, es $Ax^2+Bx=C$ donde A representa la suma de los coeficientes de x^2, B la suma de los coeficientes de x, y C la suma de los términos independientes de x

Esto supuesto; si dividimos ambos miembros de la ecuacion anterior por el coeficiente A de la incógnita de mayor exponente, tendremos la nueva ecuacion...

$x^2+\frac{B}{A}x=\frac{C}{A}$ la cual, suponiendo para mayor sencillez $\frac{B}{A}=S$ y $\frac{C}{A}=P$

quedará reducida á la forma $\qquad x^2+Sx=P \qquad [\Delta]$

El primer miembro de esta última ecuacion se puede considerar compuesto de los dos primeros términos del cuadrado del binomio $x+\frac{1}{2}S$. Añadiendo pues á uno y otro miembro el cuadrado de $\frac{1}{2}S$ ó sea el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término; el primer miembro será un cuadrado exacto, y por consiguiente, la extraccion de la raiz cuadrada de ambos miembros nos dará el valor ó valores de la incógnita, ó sean las raices de la ecuacion propuesta.

En efecto; de la ecuacion anterior resulta.....

$$x^2+Sx+\frac{1}{4}S^2=\frac{1}{4}S^2+P \qquad [\alpha]$$

ó lo que es lo mismo $\qquad (x+\frac{1}{2}S)^2=\frac{1}{4}S^2+P$

de donde se deduce $\qquad x+\frac{1}{2}S=\pm\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P}$

y por consiguiente $\qquad x=-\frac{1}{2}S\pm\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P} \qquad$ (*)

y separando las dos raices, tendremos.....

$$x=-\frac{1}{2}S+\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P} \quad \text{y} \quad x=-\frac{1}{2}S-\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P}$$

La comparacion de estos resultados con la ecuacion $x^2+Sx=P$ nos dá la siguiente regla:

Las raices de una ecuacion mista ó completa de segundo grado, reducida á la forma $x^2+Sx=P$, son iguales á la mitad del coeficiente del segundo término con signo contrario, $\pm$ la raiz cuadrada de la suma del cuadrado de dicha mitad y el último término de la ecuacion (**).

Una ecuacion de la forma $x^2+Sx=P$ se llama *ecuacion preparada.*

(*) De otro modo; De la ecuacion (α) se deduce $\left(x^2+Sx+\frac{1}{4}S^2\right)-\left(\frac{1}{4}S^2+P\right)=0$

ó lo que es lo mismo $\left(x+\frac{1}{2}S+\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P}\right)\left(x+\frac{1}{2}S-\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P}\right)=0$

y como, para que un producto sea cero, se necesita y basta que lo sea uno de sus factores, tendremos $\quad x+\frac{1}{2}S+\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P}=0 \quad$ ó bien $\quad x+\frac{1}{2}S-\sqrt{\frac{1}{4}S^2+P}=0$

de donde se deducen fácilmente las mismas raices que apuntamos en el texto.

(**) Esta regla es aplicable á las ecuaciones incompletas, suponiendo cero el coeficiente de la incógnita de menor exponente.

137. Esto supuesto, propongámonos resolver las ecuaciones que siguen:

1.ª $\frac{x^2+x}{5}+a-\frac{x^2}{a}=\frac{1}{a}+x$ ó bien $ax^2+ax+5a^2-5x^2=5+5ax$

transponiendo..... $ax^2-5x^2+ax-5ax=5-5a^2$

reduciendo..... $x^2(a-5)-4ax=5-5a^2$

ecuacion preparada..... $x^2-\frac{4ax}{a-5}=\frac{5-5a^2}{a-5}$

raices de la ecuacion propuesta $x=\frac{2a}{a-5}\pm\sqrt{\frac{4a^2}{(a-5)^2}+\frac{5(1-a^2)}{a-5}}$

2.ª Hallar las raices de la ecuacion $\frac{a}{x+1}+\frac{3}{x-1}=10a$

sin denominadores, transponiendo y reduciendo, será $10ax^2-(a+3)x=9a+3$ y dividiendo ambos miembros por el coeficiente de la incógnita de mayor exponente, tendremos.....

$x^2-\frac{a+3}{10a}x=\frac{9a+3}{10a}$ de donde se deduce $x=\frac{a+3}{20a}\pm\sqrt{\frac{(a+3)^2}{400a^2}+\frac{9a+3}{10a}}$

3.ª De la ecuacion $x^2-8x+12=0$ se deduce fácilmente.....

$x=4\pm\sqrt{16-12}$ ó bien $x=6$ y $x=2$

Otros ejemplos:

1.º Las raices de $100x^2-100x+41=0$ son $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\sqrt{-1}$ y $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\sqrt{-1}$

2.º La ecuacion $ax^2+b^2+c^2=a^2+2bc+2(b-c)x\sqrt{a}$ nos da $x=\frac{b-c\pm a}{\sqrt{a}}$

*3.º De $a^2+b^2-2bx+x^2=\frac{m^2x^2}{n^2}$ resulta $x=\frac{n}{n^2-m^2}(bn\pm\sqrt{a^2m^2+b^2m^2-a^2n^2})$

*4.º Ultimamente, $+\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ son raices de $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}$

Luego las ecuaciones completas de segundo grado, tienen siempre dos raices reales ó imaginarias, iguales ó desiguales, positivas ó negativas, ó una positiva y otra negativa; y reducidas estas ecuaciones á la forma $x^2+Sx+P=o$ (*) la *suma* de sus raices es igual al coeficiente S del segundo término con signo contrario, y su *producto* es igual al tercer término P.

En efecto, siendo a una de las raices de la ecuacion $x^2+Sx+P=o$ tendremos $a^2+Sa+P=0$ de donde se deduce $P=-a^2-aS$ y sustituyendo este último valor en la ecuacion propuesta, resulta.....

$x^2+Sx-a^2-Sa=0$ | $(x+a)(x-a)+S(x-a)=0$ | $(x-a)(x+a+S)=0$

pero esta última ecuacion puede ser satisfecha, si $x-a=0$ ó $x+a+S=0$; es decir, siendo $x=a$ ó $x=-a-S$; luego las raices de la ecuacion propuesta serán $+a$ y $-a-S$; y por consiguiente.....

$+a-a-S=-S$ y $a\times(-a-S)=-a^2-aS=P$

(*) Los signos de los coeficientes S y P pueden ser positivos, negativos, ó uno positivo y otro negativo.

138. Veamos ahora las condiciones, que debe reunir una ecuacion completa de 2.° grado, para que sus raices sean precisamente reales ó imaginarias, iguales ó desiguales, etc.

La ecuacion general de segundo grado $x^2 \pm Sx \pm P=0$ puede reducirse á las cuatro siguientes (*):

$x^2+Sx-P=0$ cuyas raices son $-\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$ y $-\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$

$x^2-Sx-P=0$ » $\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$ y $\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$

$x^2+Sx+P=0$ » $-\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$ y $-\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$

$x^2-Sx+P=0$ » $\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$ y $\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$

Las raices de la primera son reales, y como el radical es mayor que $\frac{S}{2}$, la una será positiva y la otra negativa.

Las de la segunda son igualmente reales, y por la misma razon que anteriormente, una será positiva y otra negativa. Luego.....

La ecuacion $x^2 \pm Sx-P=0$ *tiene dos raices reales, una positiva y otra negativa.*

Las raices de la tercera ecuacion si P es igual á $\frac{1}{4}S^2$ son reales, negativas é iguales á $-\frac{S}{2}$. Suponiendo $P<\frac{1}{4}S^2$ tambien serán reales, y como el radical en este caso es menor que $\frac{1}{2}S$, las dos serán negativas. Finalmente siendo $P>\frac{1}{4}S^2$ la cantidad subradical será negativa y las dos raices serán imaginarias.

Las raices de la ecuacion última, si P es igual á $\frac{1}{4}S^2$ son reales, positivas é iguales á $\frac{S}{2}$: suponiendo $P<\frac{1}{4}S^2$ serán reales y positivas; y siendo $P>\frac{1}{4}S^2$ serán imaginarias. Luego.....

La ecuacion $x^2 \pm Sx+P=0$ *tiene dos raices reales, positivas ó negativas iguales, positivas ó negativas desiguales, ó dos raices imaginarias* (**).

Suponiendo P igual á cero en la ecuacion general $x^2 \pm Sx \pm P=0$, sus raices serán la una cero y la otra $\mp S$; es decir, que toda ecuacion de segundo grado cuyo término absoluto es cero, tiene una raiz igual á cero, y otra igual al coeficiente del segundo término con signo contrario.

Suponiendo $S=0$, las raices serán $+\sqrt{\mp P}$ y $-\sqrt{\mp P}$ (**135**)

Ultimamente, si $S=0$ y $P=0$, ambas raices serán cero.

Aplicacion á varios ejemplos:

$x^2+10x-100=0$ ambas raices son reales; una positiva y otra negativa.

$x^2+10x+25=0$ las dos raices son reales, negativas é iguales.

$x^2+x+1=0$ ambas raices son imaginarias.

$x^2-3x+2=0$ ambas raices son reales positivas y desiguales.

(*) Los coeficientes S y P se suponen reales.

(**) Estas últimas, tienen siempre la forma $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$

Resolucion de un sistema de ecuaciones de segundo grado con igual número de incógnitas.

***139** La fórmula de las ecuaciones de 2.° grado con dos incógnitas, es.....

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+K=o$$

y cuando falta algun término se supone que su coeficiente es cero.

La resolucion general de un sistema de ecuaciones de primero y segundo grado, ó solo de segundo grado con igual número de incógnitas, pertenece al álgebra superior; no obstante vamos á resolver aquí algunos sistemas particulares de dos ecuaciones, distinguiendo al efecto cuando una de las ecuaciones es de primer grado con respecto á una incógnita, y cuando las dos ecuaciones son de segundo grado con respecto á ambas incógnitas.

***140.** *Para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, cuando una de las ecuaciones es de primer grado, con respecto á una incógnita*, se despeja esta y sustituyendo su valor en la otra ecuacion, el resultado será la ecuacion final, de donde se deducirán fácilmente los valores de ambas incógnitas.

Sean las ecuaciones $ax+by+c=o$ y $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+K=o$

De la primera se deduce $x=-\frac{by+c}{a}$ cuyo valor sustituido en la segunda nos dará una nueva ecuacion de segundo grado con una sola incógnita.

Llamando α y δ las raices de esta ecuacion; de la sustitucion de estos valores en $ax+by+c=o$ se deducirán los α' y δ', que corresponden á x, y por consiguiente el sistema propuesto tendrá las dos soluciones.....

$$y=\alpha,\quad x=\alpha' \qquad\qquad y=\delta,\quad x=\delta'$$

Aplicando el mismo procedimiento á varios ejemplos, tendremos.....

Ecuaciones dadas.	Ecuacion final.	Soluciones.
$\begin{cases} x-y+1=o \\ x^2-xy+10=o \end{cases}$	$y-11=o$	$y=11 \quad x=10$
$\begin{cases} x-y+1=o \\ x^2+y^2+y-x-14=o \end{cases}$	$y^2-y-6=o$	$y=3 \quad x=2$ $y=-2 \quad x=-3$
$\begin{cases} x^2-y+1=o \\ x^2+4xy+x-10=o \end{cases}$	$4x^3+x^2+5x-10=o$	La resolucion de estas ecuaciones pertenece á la parte superior del Algebra.
$\begin{cases} x^2-y+1=o \\ x^2-y^2+xy=10 \end{cases}$	$x^4-x^3+x^2-x+11=o$	
$\begin{cases} x^2+2y-2x-1=o \\ x^2+y^2-2xy+y-x-10=o \end{cases}$	$x^4-4x^2-37=o$	Véase la NOTA III, pág. 149.

***141** *Para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, siendo una y otra de segundo grado, con respecto á ambas*, se elimina el cuadrado de una misma incógnita, y la cuestion quedará reducida al caso anterior.

Sean las ecuaciones generales de 2.° grado con dos incógnitas.....

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+K=o \qquad A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+K'=o$$

eliminando por sustraccion el cuadrado de la incógnita x, tendremos.....

$$[(AB'-BA')y+AD'-DA']x+(AC'-CA')y^2+(AE'-EA')y+(AK'-KA')=o$$

Si despejamos en esta ecuacion la incógnita x y sustituimos su valor en una de las ecuaciones dadas, tendremos la ecuacion final, cuya resolucion nos dará las soluciones del sistema propuesto. La *ecuacion final*, es de 4.° grado.

Sean las ecuaciones $x^2-y^2-9=o$ y $x^2-y^2+2x-19=o$

Eliminando á x^2, tendremos $2x-10=o$ ó bien $x=5$; luego $y=\pm4$

2.° Eliminando á x^2, en $x^2-y^2-9=o$ y $x^2-2y^2+2y-10=o$ resultará $y^2-2y+1=o$ de donde se deducen las soluciones del sistema.

La eliminacion en $5x^2-y^2+x-509=o$ y $10x^2-2y^2-100x-5y-3=o$ nos dá $102x+5y-1015=o$. Con esta ecuacion y una de la dadas se puede continuar la resolucion como en el caso anterior.

Resolucion de un sistema de ecuaciones de 2.° grado con menor ó mayor número de incógnitas.

***142**. *Para resolver una ecuacion de segundo grado con dos ó mas incógnitas*, se despeja una de ellas y dando á las otras valores arbitrarios, estos y los correspondientes á las incógnitas despejadas formarán una solucion.

Sea la ecuacion general $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+K=0$

de donde se deduce $y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+E^2-4CK}$

y por consiguiente, para cada valor que se dá á x, resultarán dos para y.

En la ecuacion $\frac{1}{2}xy=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ resulta $y=\frac{4x-8}{x-4}$

Suponiendo ahora	$x=0$	$x=1$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=8$	$x=12$ etc.
tendremos.........	$y=2$	$y=1\frac{1}{3}$	$y=\infty$	$y=12$	$y=8$	$y=6$	$y=5$ etc.

En las ecuaciones de tres incógnitas se dan valores arbitrarios á dos de ellas y, si la ecuacion es de segundo grado relativamente á la tercera incógnita, cada suposicion de las primeras nos dará dos para la última. De todos modos el número de soluciones es siempre indefinido, aunque se limita considerablemente cuando entra por condicion que los valores de las incógnitas sean enteros y positivos.

143**. *En un sistema de dos ó mas ecuaciones con mayor número de incógnitas* se consideran tantas incógnitas como ecuaciones; y, *si el sistema tiene menos incógnitas que ecuaciones*, basta considerar tantas ecuaciones como incógnitas. En el primer caso los valores arbitrarios de las incógnitas *excedentes* y los correspondientes de las incógnitas despejadas formarán cuantas soluciones se quiera; y en el segundo, la sustitucion de los valores de las incógnitas en las ecuaciones sobrantes, nos darán las ***igualdades de condicion del sistema propuesto.

Del sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=\frac{1}{2}xy \\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right\}$ se deduce $y=4+\frac{8}{x-4}$ $z=x+\frac{8}{x-4}$

dando ahora valores arbitrarios á la incógnita x, tendremos las diferentes soluciones de la cuestion. Las únicas soluciones en números enteros y positivos, son las siguientes.....

$x=5,\ y=12,\ z=13$ | $x=6,\ y=8,\ z=10$ | $x=8,\ y=6,\ z=10$ | $x=12,\ y=5,\ z=13$

2.° Sea el sistema $\left\{ x^2+y^2=S \quad x^2-y^2=D \quad xy=P \quad x^2:y^2=C \right\}$
de las dos primeras ecuaciones, se deducen las fórmulas

$$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2(S+D)} \qquad y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2(S-D)}$$

y de las dos últimas las *igualdades de condicion* $P=\frac{1}{2}\sqrt{S^2-D^2}$ $C=\sqrt{\frac{S+D}{S-D}}$

La resolucion general de esta cuestion pertenece lo mismo que la del número **139** á la parte superior del álgebra (*)

(*) Muchas veces se abrevia y facilita la resolucion de un sistema de dos ó mas ecuaciones, introduciendo una ó mas incógnitas auxiliares. Sirvan de ejemplo las ecuaciones.....

$$2(ab+xy)+(a+b)(x+y)=0 \quad \text{y} \quad 2(cd+xy)+(c+d)(x+y)=0$$

en las que, podemos suponer $xy=u;\ x+y=z$

Ejercicios para la resolucion de las ecuaciones de segundo grado.

*144 Resolver las ecuaciones que siguen:

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}=3x^2-\frac{4}{9} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}-1}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=x^{-2}$$

Formar la suma de los cuadrados, la de los cubos y la de las cuartas potencias de las raices de la ecuacion $x-x^{-1}+1=o$

$$\frac{x+3}{10-x}+3\frac{2}{5}=\frac{5x}{15-2x} \qquad \frac{20+8x}{4(3-x)}=\frac{10x+2}{6-4x}-\frac{5}{3-x}$$

$$*\frac{1}{x-\sqrt{5-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{5-x^2}}=1 \ (*) \qquad ax^2-2ax\sqrt{b}=bx^2-ab$$

$$*\frac{(5a+10ab^2)x^2}{9b^2-3a^2b^2}-\left(\frac{5\sqrt{a+b}}{3b^3}+\frac{(2b^2+1)mn\sqrt{m}}{3-a^2}\right)x=\frac{mn}{ab}\sqrt{(a+b)m}$$

Las raices de algunas de estas ecuaciones son:

$$\pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}),\ 5 \text{ y } 11\frac{16}{49},\ 1 \text{ y } 27,$$

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}},\qquad \frac{(3-a^2)\sqrt{a+b}}{ab(2b^2+1)} \quad \text{y} \quad \frac{3b^2mn\sqrt{m}}{5a}$$

¿Las raices de la ecuacion $x^2\pm Sx\pm P=o$ pueden ser la una real y la otra imaginaria? Condiciones, que deben tener los coeficientes S y P, para que las raices sean reales ó sean imaginarias; y las reales sean iguales ó desiguales (positivas ó negativas). ¿Las imaginarias pueden ser iguales? ¿Las reales pueden ser la una racional y la otra irracional, siendo racionales los coeficientes S y P? (**) ¿y si estos no son racionales ó lo es uno solo? Ejemplos de aplicacion á varias ecuaciones, cuyas raices ofrezcan todas las variaciones posibles.

Formar las ecuaciones cuyas raices son 1 y $-\sqrt{2}$ las de la una, y $1\pm\sqrt{-1}$ las de la otra. ¿Conocida una de las raices, se puede determinar inmediatamente la otra en todos los casos? Siendo el último término negativo y las raices reales, ¿tendrán estas un mismo signo ó signos contrarios? Cuál de las dos tendrá mayor valor absoluto? ¿Y si el último término es positivo?

*Resolver los sistemas de ecuaciones de primero y segundo grado ó solo de segundo grado, que van á continuacion.....

$$\left\{\begin{matrix} 2x+5y=45 \\ 5x^2-2y^2=450 \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} 4y^2+2x-y-4=o \\ \frac{5x}{y}-(y-1)5=o \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} x+y=x^2-y^2 \\ x+y=xy \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+x+y=a & x^2-y^2+x-y=b \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{2a+2b+1}}{2} & y=\frac{-1\pm\sqrt{2a-2b+1}}{2} \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y} \\ x^2+y^2=34 \quad (**) \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{ y^2=xz \qquad \frac{100x+10y+z}{x+y+z}=17\frac{5}{7} \qquad 100x+10y+z+594=100z+10y+x \right\} \ 2,4,8$$

$$\left\{1-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2=o\right\} \qquad \left\{x^2-\frac{1}{y}=z-10\right\} \qquad \left\{x^2+y^2+z^2=S \qquad x^2-z^2=R\right\}$$

(*) O bien $4x^4-16x^2+5=o$ cuya resolucion se obtiene, suponiendo $x^2=y$ (pág. 149).

(**) Multiplicando los dos miembros de la primera ecuacion por $x+y$, y llamando z á la diferencia x^2-y^2, tendremos para z, los valores 25 y 16. Y como la suma x^2+y^2 es conocida, fácilmente se hallarán los valores de las incógnitas x y y.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO.

Problemas de segundo grado con una ecuacion y una incógnita. Problemas de segundo grado con igual número de ecuaciones que incógnitas. Problemas de segundo grado con mas ó menos ecuaciones que incógnitas.

Problemas de segundo grado con una ecuacion y una incógnita.

145. Se han repartido 75 reales entre varios pobres llevando cada uno un número de reales triplo del número total de pobres, *¿cuántos eran estos y cuanto recibió cada uno.*

De la ecuacion $\frac{75}{x}=3x$ resulta $75=3x^2$ que dá $x=5$ y $x=-5$ luego el número de pobres es 5, y 15 los reales que recibió cada uno.

2.° *Hallar el capital de una persona*, suponiendo que el cociente de 1000 duros por la cantidad que se busca es doble del 5 por 100 de la misma cantidad.

De la ecuacion $\frac{1000}{x}=10$ por 100 de x se deduce $x=\pm100$ y por consiguiente, la cantidad 2000 rs. ya se considere como *debe ó haber*, verifica las condiciones del problema propuesto, generalizado en cuanto á la significacion de la palabra *capital*. El problema así generalizado debiera enunciarse diciendo: *Hallar el capital ó las deudas de una persona*, suponiendo que etc.

3.° Suponiendo que tres móviles parten desde el punto comun O, el uno en la direccion A, el segundo en la opuesta B, y el tercero en una direccion desconocida, *se desea averiguar la posicion de este último* siempre que se verifique que su distancia al punto O es media proporcional en magnitud y en direccion entre las distancias de los otros dos al mismo punto. La distancia total AB es de 29 kilómetros y la diferencia entre las recorridas por A y B es igual á 21.

B————————————————O————————————A

Siendo O el punto de orígen y considerando positiva la posicion de A, será negativa la de B; llamando pues x la distancia del punto desconocido hasta O; tendremos traducido el problema en la siguiente ecuacion

$x\times x=4\times-25$ de donde se deduce $x=\pm10\sqrt{-1}$ kilómetros; luego el punto que se busca debe hallarse en la perpendicular á la recta AB levantada en el punto O y distante de este 10 kilómetros. El signo $\pm$ nos dá dos soluciones, una por la parte superior de AB y la otra por la inferior, ambas equidistantes de O.

La perpendicular $\pm10\sqrt{-1}$ es en efecto de las infinitas rectas que pueden pasar por el punto O, la única media proporcional en magnitud y posicion entre la positiva OA y la negativa OB.

4.° *Hallar el número de kilógramos de una barra de hierro*, suponiendo que el triplo del cuadrado de dicho número mas 1 quintal métrico es igual á 7 veces su cuadrado, mas 200 kilógramos.

$3x^2+100=7x^2+200$ de donde se deduce $x=\pm5\sqrt{-1}$

Los resultados numéricos imaginarios representan generalmente cantidades extrañas á los problemas y no son por lo tanto verdaderas soluciones de ellos; sin embargo la rectificacion del enunciado, consiguiente al cambio de signo de las cantidades no afectas de la incógnita, nos dará por solucion resultados reales, que, si cumplen las condiciones explícitas é implícitas del problema, serán verdaderas y propias para su resolucion. En efecto, la rectificacion del problema propuesto deducida del cambio de signo en la cantidad no afecta de la incógnita, nos dará el nuevo enunciado: *hallar el número de kilógramos de una barra*, suponiendo que el triplo de su cuadrado menos 1 quintal métrico, es igual á 7 veces su cuadrado menos 200 kilógramos. La solucion de este problema es 5.

Muchas otras cuestiones podriamos presentar, en que los resultados imaginarios son rectificables de la manera explicada en la cuestion anterior. Los problemas geométricos son los que mejor se prestan á una interpretacion de su imaginarismo; los aritméticos son mas difíciles de enunciar porque el lenguaje ordinario no siempre admite calificaciones de la cantidad, que no sea ni positiva ni negativa. No se sabe por ejemplo, como ha de figurar en un problema un capital, que ni es activo, ni pasivo, sino depositado y neutral en el balance. Además la teoría completa de las cantidades imaginarias es inseparable de consideraciones de filosofía trascendental, que serian inoportunas en estos elementos.

5.° Siendo el cuadrado del precio de un libro, mas 9 reales, igual á diez veces el mismo precio, *¿cuál será este*?

La ecuacion $x^2+9=10x$ nos dará $x=9$ y $x=1$ cuyos resultados satisfacen las condiciones del problema; y por consiguiente, el precio del libro puede ser 1 ó 9 reales.

6.° Una persona reparte 60 rs. entre varios pobres; si los pobres fuesen tres mas, cada uno recibiria un real menos, *¿cuántos son los pobres*?

$\frac{60}{x}=\frac{60}{x+3}+1$ de donde $x=12$ y $x=-15$; luego el número de pobres es 12.

La solucion -15 no es propia de la cuestion propuesta; sin embargo tomada positivamente será la solucion única y verdadera del problema así modificado «si los pobres fuesen tres menos, cada uno llevaria un real mas.»

En efecto; escribiendo $-x$ por x en la ecuacion primitiva y cambiando los signos á todos los términos de la ecuacion que resulte, tendremos

$\frac{60}{x}=\frac{60}{x-3}-1$ cuyas raices son 15 y -12

7.° Comprado un objeto cualquiera y vendido despues en 144 duros, *se pregunta su precio primitivo*, suponiendo que el tanto por 100 de ganancia del número que se busca, es igual á este mismo número.

$x+\frac{x}{100}\times x=144$ de donde se deduce $x=80$ y $x=-180$

La interpretacion de estos resultados es análoga á la del problema anterior.

8.° *Se desea saber el número de alumnos de una clase* suponiendo que, si hubiese 40 alumnos mas, habria el cociente de dividir el duplo del número que se busca, menos 261, por el mismo número.

$x+40=\frac{2x-261}{x}$ de donde se deduce $x=-9$ y $x=-29$

El enunciado de esta cuestion no admite números negativos para valores de la incógnita, y bajo este supuesto el problema es imposible. La rectificacion correspondiente del enunciado, deducida de la transformacion de la ecuacion despues de escribir en ella $-x$ por x; nos dará la posibilidad de la cuestion, satisfecha por los números ambos positivos 9 y 29.

9.° Una liebre perseguida por un galgo se halla 77 saltos distante de él: pero 12 saltos del galgo valen por 17 de la liebre, y durante el tiempo que el galgo dá un número de saltos igual á los de la liebre, esta dá 216 mas. *¿Cuántos saltos dará la liebre hasta que la alcanze el galgo*?

Llamando x el número pedido, mientras la liebre dá un salto, dará el galgo $\frac{x}{x+216}$

y por consiguiente, durante x saltos de la liebre dará el galgo $\frac{x^2}{x+216}$

pero 12 del galgo valen tanto como 17 de la liebre; luego tendremos la ecuacion

$\frac{17x^2}{12(x+216)}=x+77$ de donde se deduce $x=756$

Tambien se puede resolver este problema, llamando x los saltos del galgo.

148. Soluciones generales. *Hallar dos cantidades cuya suma es* S *y su producto* P.

$$x\times(S-x)=P \qquad Sx-x^2=P \qquad x^2-Sx+P=0 \qquad x=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$$

y por consiguiente, las soluciones de este problema serán reales únicamente cuando P sea igual ó menor que el cuadrado de la mitad de S.

2.° *Hallar dos números cuya diferencia es* D *y su producto* P.

$$x(x+D)=P \qquad x^2+Dx-P=0 \qquad x=-\frac{D}{2}\pm\sqrt{\frac{D^2}{4}+P}$$

luego conocida la diferencia y el producto de dos cantidades, se pueden hallar siempre estas, exacta ó aproximadamente, sin obtener nunca resultados imaginarios, si los datos son positivos.

3.° *Hallar en la línea, que une dos focos luminosos* A *y* B *de intensidades diferentes, el punto en que la intensidad es una misma.*

Llamando D la distancia AB, a la intensidad de la luz A, b la intensidad de B (ambas á la misma unidad de distancia), E el punto pedido, x la distancia AE, y $D-x=BE$; tendremos la ecuacion..... (*)

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(D-x)^2} \quad \text{ó bien} \quad \frac{D-x}{x}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{de donde se deduce.....}$$

$$D\sqrt{a}-x\sqrt{a}=\pm x\sqrt{b} \quad \text{y por consiguiente} \quad x=\frac{D\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$$

$$\left\{\text{El valor de } x=\frac{D\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{nos da para} \quad D-x=\frac{D\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right\} \quad (\alpha)$$

$$\left\{\text{y el valor } x=\frac{D\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \quad \text{nos da} \quad D-x=\frac{-D\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right\} \quad (\beta)$$

*Suponiendo la intensidad $a>b$, la solucion (α) responde directamente al enunciado con los dos valores de x y $D-x$, ambos positivos. El punto pedido estará entre los puntos dados y mas lejos de A que de B, por ejemplo en E, pues la distancia AE igual á x será mayor que la mitad de D, y por consiguiente la $EB=D-x$ será menor.

La solucion β, á pesar del valor negativo que contiene, nos da otro punto con todas las condiciones impuestas en el enunciado de la cuestion, pues, si las luces alumbran con intensidades desiguales, es consiguiente que habrá dos puntos donde la intensidad sea una misma, ambos mas inmediatos al foco menos luminoso, uno á un lado y otro al opuesto.

La determinacion de este segundo punto puede hacerse por medio del valor de x ó bien por el de $D-x$. En el primer caso nada tenemos que advertir, porque siendo x positiva y mayor evidentemente que D, el punto que se busca se hallará á la derecha de B, por ejemplo en E'. En el segundo caso, como $D-x$ es negativo, su valor absoluto se contará á la derecha de B, supuesto que hemos considerado positivamente la distancia BE.

(*) En *física* se demuestra que la intensidad relativa de una misma luz á distancias diferentes está en razon inversa de los cuadrados de dichas distancias. Así, llamando a la intensidad de A á la unidad de distancia, su intensidad á la distancia *dos unidades*, será $a:4$; á *tres unidades* $a:9$; y á x unidades será $a:x^2$

Luego en el supuesto $a>b$, los focos luminosos brillan con una misma intensidad en los puntos E y E', ambos mas cerca de B que de A.

Suponiendo $a<b$, la solucion α responde como antes al enunciado de la cuestion. El punto pedido estará entre los puntos dados y mas cerca de A que de B, por ejemplo en E'', pues la distancia $AE''=x$ resulta menor que la mitad de D y la distancia BE'' resulta mayor.

La solucion β determina un segundo punto E''' ya se considere el valor negativo de x ó el positivo $D-x$. En el primer caso el valor absoluto de x se contará á la izquierda de A, y en el segundo á la izquierda de B, segun la convencion admitida desde el principio de la cuestion.

Luego en el supuesto $a<b$ los focos luminosos brillan con una misma intensidad en los puntos E'' y E''', ambos mas cerca de A que de B.

Suponiendo $a=b$, la solucion α tomará la forma $x=\frac{D}{2}=D-x$ cuyos valores satisfacen evidentemente al problema, pues, si las intensidades son iguales, forzosamente el punto medio de AB será el punto que se busca.

La solucion β en este supuesto se presenta bajo la forma del *infinito*, pues los denominadores de x y $D-x$ son cero. Segun esto, el segundo punto, deterinado en los supuestos anteriores, no cabe en el actual, á no ser que se diga que se pierde en el infinito.

Siendo $a>$ ó $<b$ y $D=0$; el problema es imposible en ambas soluciones.

Suponiendo $a=b$ y $D=0$, la solucion α nos da $x=0$ y $D-x=o$; luego, el punto en que se encuentren ambas luces, será el punto pedido.

De la solucion β se deduce $x=\frac{0}{0}$; y $D-x=\frac{0}{0}$; luego, el problema es indeterminado; y por consiguiente en cualquiera punto brillarán ambas luces con igual intensidad. La solucion α se puede considerar como una de las infinitas que ofrece β.

Problemas de segundo grado con igual número de ecuaciones que incógnitas.

1.º Si dos caños llenan juntos una vasija en 12 minutos *¿cuánto tiempo empleará cada uno, tardando el primero 10 minutos menos que el segundo?*

Llamando x los minutos que tardaria el primero en llenar solo la vasija, y los que tardaria el segundo; tendremos.....

$$x+10=y \qquad \frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1 \quad \text{de donde se deduce} \quad x=20 \quad y=30$$

2.º *Hallar dos cantidades cuya suma sea* S *y su producto* P.

De las ecuaciones $x+y=S$ $\quad xy=P$ se deduce $x^2-Sx+P=0$ luego las cantidades pedidas, serán $\frac{1}{2}(S+\sqrt{S^2-4P})$ y $\frac{1}{2}(S-\sqrt{S^2-4P})$

3.º *Los números, cuyo producto es* P *y su cociente* Q, son $\sqrt{PQ}$ y $\sqrt{\frac{P}{Q}}$

*4.º *Hallar dos números cuya suma sea igual á su producto y tambien á la diferencia de sus cuadrados.*

De las ecuaciones $x+y=xy$ $\quad x+y=x^2-y^2$ ó bien $x+y=xy$ $\quad 1=x-y$ se deduce $x^2-3x+1=0$ y por consig. las soluciones del problema serán....

$$x=\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \quad y=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad \Big| \quad x=\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \quad y=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

5.° *Hallar un número de dos cifras* cuya diferencia sea igual á la diferencia de los cocientes de dividir dicho número y el que resulta de escribir sus cifras en órden inverso, por la suma de sus cifras; y 2.° que el producto de estos cocientes sea igual al número que se busca.

$$x-y=\frac{10x+y}{x+y}-\frac{10y+x}{x+y} \qquad \frac{10x+y}{x+y}\times\frac{10y+x}{x+y}=10x+y$$

De la ecuacion primera se deduce fácilmente $x+y=9$ cuya sustitucion en la segunda nos dá $y=8$; luego el número que se busca es 18.

*6.° *Hallar dos números enteros y positivos* tales que su diferencia sumada con la diferencia de sus cuadrados sea igual á 108, y que la suma de dichos números y la de sus cuadrados sea 112.

De las ecuaciones $x-y+x^2-y^2=108$ $\quad x+y+x^2+y^2=112$ se deduce para los valores de las incógnitas $x=10$ $\quad y=1$

7.° *Dividir el número* S *en dos partes cuyo producto sea igual á* P.

Las ecuaciones de este problema serán $x+y=S$, $xy=P$; pero en virtud del número **137**, los valores de una y otra incógnita son precisamente las raices de la ecuacion $x^2-Sx+P=0$; luego tendremos.....

$$x=\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P} \qquad x=\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P}$$

cuyos resultados serán reales únicamente en el supuesto $\frac{1}{4}S^2>$ ó $=P$; de donde se deduce que, el mayor producto que se puede formar con dos partes de un número, es el cuadrado de su mitad.

En efecto, siendo S la suma de dos números, P su producto y D su diferencia, el valor de $P=\frac{1}{4}(S^2-D^2)$ será el mayor posible cuando D es cero.

*8.° *Hallar tres números que reunan las siguientes condiciones*: que el producto del primero x por el segundo y sea A; el producto del primero por el tercero z sea B; y la suma de los cuadrados del segundo y el tercero sea C.

Las ecuaciones son:	y las incógnitas serán:
$xy=A,\quad xz=B,\quad y^2+z^2=C$	$\sqrt{\frac{A^2+B^2}{C}},\quad A\sqrt{\frac{C}{A^2+B^2}},\quad B\sqrt{\frac{C}{A^2+B^2}}$

*9.° *Hallar tres cantidades tales* que, dividiendo sus tres productos binarios por el tercer número, los cocientes sean A, B y C.

Ecuaciones $\frac{xy}{z}=A\quad \frac{xz}{y}=B\quad \frac{yz}{x}=C$	Incógnitas $\sqrt{AB},\quad \sqrt{AC}\quad$ y $\sqrt{BC}$

Problemas de segundo grado con mayor ó menor número de ecuaciones que incógnitas.

***148.** *Hallar dos números enteros y positivos, tales que el esceso de su producto sobre el doble de su diferencia sea igual á* 100.

Llamando x, y á los números que se buscan; tendremos.....

$$xy-2(x-y)=100 \quad \text{de donde se deduce} \quad x=\frac{100-2y}{y-2}$$

Suponiendo ahora $y=1$, 2, 3 etc., hallaremos por únicas soluciones del problema, las siguientes 10 y 10, 14 y 8, 22 y 6, 30 y 5, 46 y 4, 94 y 3.

2.° *Hallar tres números cuya suma sea* S, *y la de sus cuadrados* S′.

Ecuaciones: $x+z+y=S$ $\quad x^2+z^2+y^2=S'$

Los valores arbitrarios de una de las incógnitas, y los correspondientes de las otras dos, nos darán las diferentes soluciones de la cuestion.

Ejercicios para la resolucion de problemas de segundo grado.

149. *¿Cuál es el número, que sumado con su raiz cuadrada, dá 100 unidades, y cuál el que escede á su raiz cuadrada en el mismo número?*

$x+\sqrt{x}=100 \quad | \quad x-\sqrt{x}=100$

2.° Dos viajeros A y B salen á encontrarse á un mismo tiempo de dos lugares C y D: hasta el punto en que se encuentran A habia andado 30 miriámetros mas que B, y solo le faltaban 4 dias de camino para llegar á D, y á B, 9 para llegar á C. *¿Cuál es la distancia entre C y D?*

Siendo a el tiempo que falta á A para acabar su camino, b el que falta á B, y d la distancia, que A habia caminado mas que B; *hallar el valor de x.*

$\frac{4(x+30)}{x}=\frac{9x}{x+30} \quad | \quad \frac{d\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$

3.° Un comerciante tiene dos clases de té; el peso de la 1.ª es al de la 2.ª como 4 : 3; el kilógramo de la primera cuesta tantos reales como indica la mitad de su peso, y el kilógramo de la segunda 6 rs. menos que el de la primera: el valor total es de 262 duros: *¿cuántos kilógramos tiene de cada clase?* [80 y 60]

4.° Dos personas forman compañia: la 1.ª pone 100 reales y la segunda gana 40; la suma de capitales y ganancias es 270 *¿cuánto ganó el primero y cuanto puso el segundo?* $x+y+100+40=270$ $100 : x :: y : 40$ luego el primero ganó 80 y el segundo puso 50, ó viceversa.

Suponiendo a lo que puso el primero, b la ganancia del segundo y S la suma de capitales y ganancias; tendremos

$$x=\frac{S-a-b\pm\sqrt{(S-a-b)^2-4ab}}{2} \qquad y=\frac{S-a-b\mp\sqrt{(S-a-b)^2-4ab}}{2}$$

5.° *Hallar tres números en proporcion continua,* cuya suma sea 31 y su producto 125. $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ $x+y+z=31$ $xyz=125$ | 1, 5 y 25 ó 25, 5 y 1

6.° Si la suma de los medios de una proporcion es A, la suma de los extremos es B y la suma de los cuadrados de los cuatro términos es S *¿cuál es esta proporcion?*

Llamando y, x á los dos primeros términos, los otros dos serán $A-x$, $B-y$;

$$\tfrac{1}{2}(B-\sqrt{S-A^2}) : \tfrac{1}{2}(A-\sqrt{S-B^2}) :: \tfrac{1}{2}(A+\sqrt{S-B^2}) : \tfrac{1}{2}(B+\sqrt{S-A^2})$$

7.° *Hallar tres números cuya suma sea* S, *y la de sus cuadrados* S′, verificándose ademas que la suma de los dos primeros es igual al cuadrado del segundo, y que la diferencia entre el 2.° y el 3.° sea igual á la mitad del primero.

$x+z+y=S \qquad x^2+z^2+y^2=S' \qquad x+z=y^2 \qquad z-y=\frac{1}{2}x$

8.° *Hallar un número de tres cifras tales,* que la suma de estas sea 12, la de sus cuadrados 62, el cuadrado de la cifra media tenga 37 unidades mas que el doble producto de las otras, y que, sumando dicho número con 99, la suma sea el mismo número escrito en órden inverso.

$x+y+z=12 \qquad x^2+y^2+z^2=62 \qquad y^2=37+2xz$

$100x+10y+z+99=100z+10y+x$

9.° *Hallar los cuatro términos u, x, z, y de una equidiferencia,* con las condiciones siguientes:

$u+x+z+y=S \qquad ux=S' \qquad xz=S'' \qquad u^2+x^2+z^2+y^2=S'''$

LOGARITMOS.

Preliminares. Definicion y propiedades de los logaritmos. Construccion de las tablas. Incomensurabilidad de los logaritmos. Logaritmos negativos. Identidad de los logaritmos considerados aritmética ó algebráicamente. Aplicaciones.

Preliminares.

150. Las potencias (cuyos exponente son enteros positivos ó negativos) de la unidad, son siempre la misma unidad.

Las potencias cuyos exponentes son positivos, de un número mayor que la unidad son mayores, y aquellas cuyos exponentes son negativos son menores que la unidad. Siendo $a>1$ son evidentes las desigualdades que siguen:

$$a^2>1\,,\ a^n>1\,,\ a^{\frac{1}{2}}>1\,,\ a^{\frac{1}{n}}>1 \quad\Big|\quad a^{-2}<1\,,\ a^{-n}<1\,,\ a^{-\frac{1}{2}}<1\,,\ a^{-\frac{1}{n}}<1$$

Lo contrario se verifica en las potencias de un número menor que la unidad.

Esto supuesto: 1.° *Siendo* b *mayor que* 1, *la expresion* b^x *aumentará de una manera continua desde* 1 *al* ∞, *si* x *aumenta tambien de una manera continua desde cero al* ∞ (*)

*En efecto; si llamamos m y $m+\frac{1}{n}$ dos valores consecutivos de x, tan inmediatos como se quiera (n es entero y positivo), los valores respectivos de b^x, serán b^m y $b^{m+\frac{1}{n}}$ cuya diferencia $b^{m+\frac{1}{n}}-b^m=b^m\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)$ es positiva; [Δ] y por consiguiente, si x crece, b^x crecerá tambien; pero el exponente puede aumentar cuanto se quiera, luego llegará un caso en que la potencia sea mayor que otra cantidad susceptible de apreciacion, pues, si suponemos $b=1+y$, será

$$b^x=(1+y)^x=1+xy+\frac{x(x-1)}{2}y^2+\ldots\ldots+y^x$$

y como, sea cualquiera el valor de y, el producto xy es mayor que cualquiera otra cantidad dada cuando x es suficientemente grande; con mas razon lo será $(1+y)^\infty$; luego tendremos $b^\infty=\infty$ es decir, que la potencia infinita de una cantidad mayor que 1, es infinitamente grande ó es igual al infinito.

Es evidente, que, si x crece por diferencias infinitamente pequeñas, lo propio sucederá á b^x; una vez que la fórmula (Δ) de la diferencia entre dos valores consecutivos puede acercarse á cero cuanto se quiera con solo aumentar suficientemente el valor de n.

2.° *Siendo* b *mayor que* 1, *la expresion* b^x *disminuirá de una manera continua desde* 1 *á cero, si* x *disminuye tambien de una manera continua desde cero á* $-\infty$.

*De la igualdad $b^{-x}=\frac{1}{b^x}$ se deduce que, si aumenta negativamente el exponente $-x$ del primer miembro, aumentará positivamente el exponente x del denominador del segundo, y por consiguiente, uno y otro miembro pasarán por todos los estados de magnitud desde 1 hasta cero, y será $b^{-\infty}=0$.

Esc. *Si la cantidad* b *es positiva y menor que la unidad, se verifica lo contrario de lo que acabamos de apuntar en los dos teoremas anteriores*, así tendremos..... $\left(\frac{1}{b}\right)^0=1 \quad \left(\frac{1}{b}\right)^\infty=0 \quad \left(\frac{1}{b}\right)^{-\infty}=\infty$

(*) *Una cantidad variable crece ó decrece de una manera continua*, cuando desde un valor á otro vá pasando por todos los valores intermedios con aumentos ó disminuciones infinitamente pequeñas; como sucede por ejemplo al tiempo. Una funcion es *continua* cuando á una alteracion infinitamente pequeña de la variable, corresponde una variacion infinitamente pequeña de la funcion.

*De las proposiciones anteriores es fácil deducir que:

La raiz de cualquier grado de una cantidad mayor que 1 es mayor que 1; menor que la cantidad; disminuye creciendo el indice; y tiene por límite 1.

Definicion y propiedades de los logaritmos.

151. Si llamamos y el valor de b^x; será $b^x=y$, donde se verifica que, ya sea b (siempre positiva) mayor ó menor que 1, á cada valor positivo ó negativo de x corresponde otro positivo para y, y para cada valor positivo de y, otro positivo ó negativo de x. Los valores particulares de x son los *logaritmos* de los correspondientes de y: la cantidad constante b, es la *base*. Luego.....

Logaritmo de un número es el exponente á que se eleva otro positivo y diferente de 1, llamado *base*, para que la potencia sea igual al número dado.

Sistema de logaritmos es la reunion de los logaritmos de igual base de todos los números. La base es arbitraria; luego un número positivo cualquiera puede tener varios logaritmos (*).

En todos los sistemas de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero; el logaritmo de la base es 1; y los números negativos no tienen logaritmos.

Si la base es mayor que la unidad		Si la base es menor que la unidad	
1.° $b^0=1$	luego log. $1=0$	$\left(\frac{1}{b}\right)^0=1$	luego log. $1=0$
2.° $b^1=b$	luego log. $b=1$	$\left(\frac{1}{b}\right)^1=\frac{1}{b}$	luego log. $\frac{1}{b}=1$

3.° Todas las potencias de b son *positivas*, luego es imposible $b^x=-y$, sea x positivo ó negativo y b mayor ó menor que la unidad.

De los teoremas demostrados en el número anterior, se deduce que.....

En el sistema cuya base es mayor que la unidad, los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos; á mayor número corresponde mayor logaritmo: el logaritmo del ∞ es ∞. Los logaritmos de los números menores que 1 son negativos: cuanto menor es el número, tanto mayor será el valor absoluto del logaritmo: el logaritmo de cero es $-\infty$.

$b^m=\text{A}$	$b^{m+n}=\text{A}+a$	$b^\infty=\infty$
log. $\text{A}=m$	log. $(\text{A}+a)=m+n$	log. $\infty=\infty$
$b^{-m}=\frac{1}{\text{A}}$	$b^{-m-n}=\frac{1}{\text{A}+a}$	$b^{-\infty}=\frac{1}{\infty}=0$
log. $\frac{1}{\text{A}}=-m$	log. $\frac{1}{\text{A}+a}=-m-n$	log. $\frac{1}{\infty}=$ log. $0=-\infty$

**En el sistema, cuya base es menor que la unidad, se verifica que* los logaritmos de los números menores que 1 son positivos; á menor número corresponde mayor logaritmo; el logaritmo de cero es ∞. Los logaritmos de los números mayores que 1 son negativos; cuanto mayor es el número, tanto mayor es el valor absoluto del logaritmo, y el logaritmo del ∞ es $-\infty$.

Estas proposiciones son consecuencias de las anteriores.

(*) La base debe de ser diferente de 1, pues de otro modo b^x seria 1 cualquiera que fuese el valor de x Ademas debe ser *positiva*, ya porque esta consideracion nos basta para todas las aplicaciones de los logaritmos, ya tambien porque siendo las diferentes potencias de un número negativo, números positivos, negativos ó imaginarios, no podriamos deducir si, aumentando la variable x de una manera continua, aumentaba del mismo modo la funcion.

152. Propiedades generales de los logaritmos.

Sea b la base del sistema general, que nos proponemos estudiar, y, y' dos números cualesquiera, enteros, fraccionarios ó incomensurables, x, x' sus logaritmos respectivos; y tendremos.....

$$b^x=y \qquad b^{x'}=y'$$

de donde $b^x \times b^{x'}=yy'$ ó bien $b^{x+x'}=yy'$ que dá $\log. yy'=x+x'$ ó lo que es lo mismo $\log. yy'=\log. y+\log. y'$; luego.....

El *logaritmo de un producto* de dos ó mas factores es igual á la suma de sus logaritmos.

De las mismas ecuaciones $b^x=y$ $b^{x'}=y'$ se seduce $b^x : b^{x'}=y : y'$ ó bien $b^{x-x'}=\frac{y}{y'}$ que dá $\log.\frac{y}{y'}=x-x'$ ó lo que es lo mismo $\log.\frac{y}{y'}=\log. y-\log. y'$ y por consiguiente...

El *logaritmo de un cociente* es igual á la diferencia de los logaritmos del dividendo y divisor.

Elevando á la potencia n (positiva ó negativa) los dos miembros de $b^x=y$ tendremos... $b^{nx}=y^n$ que dá $\log. y^n=nx$ ó bien $\log. y^n=n \log. y$; luego.....

El *logaritmo de una potencia* de un número es igual al logaritmo de este número, multiplicado por el exponente de la potencia.

Extrayendo la raiz n (positiva ó negativa) de ambos miembros de $b^x=y$, sera $b^{\frac{x}{n}}=\sqrt[n]{y}$ de donde $\log.\sqrt[n]{y}=\frac{x}{n}$ ó bien $\log.\sqrt[n]{y}=\frac{\log. y}{n}$ luego.....

El *logaritmo de la raiz* de un número es igual al logaritmo de este número, dividido por el índice de la raiz.

Ultimamente: si N y $N+n$ son dos números cualquiera, la diferencia de sus logaritmos será.....

$$\log. (N+n)-\log. N=\log.\frac{N+n}{N}=\log.\left(1+\frac{n}{N}\right)$$

y como aumentando N disminuye la fraccion $\frac{n}{N}$, se deduce que.....

Si la diferencia de dos números es constante, la diferencia de sus logaritmos será *menor*, cuanto mayores sean dichos números (*).

(*) Fundándonos en la imposibilidad de que se verifique $b^x=-y$; hemos dicho en la página anterior que los números negativos no tienen logaritmos: sin embargo, si consideramos los valores algebráicos de las potencias fraccionarias de b, como por ejemplo $+\sqrt{b}$ y $-\sqrt{b}$ para el exponente $\frac{1}{2}$, fácilmente se deduce que los números negativos tienen tambien logaritmos; pero las dificultades que presenta la discusion de estos casos particulares y su ninguna aplicacion en la práctica, nos autoriza (por ahora) á considerar como verdadera la proposicion del texto, y á aplicar por lo tanto los logaritmos solo á los valores absolutos de los números, determinando separadamente los signos del resultado conforme á las reglas establecidas en las primeras lecciones del álgebra.

Asi; tendremos $\log. (a \times -b)=-(\log. a+\log. b)$ $\log. (-5)^4=4 \log. 5$

Construccion de las tablas de logaritmos y su incomensurabilidad.

*153. Para formar unas tablas de logaritmos, basta resolver la ecuacion $b^x=y$ para todos los valores enteros de y desde 1 hasta el número mayor de las tablas. En el sistema cuya base es 10, se hallará el logaritmo de 2 resolviendo la ecuacion $10^x=2$, en la cual fácilmente se advierte que el valor de x está comprendido entre 0 y 1. Suponiendo pues, $x=\frac{1}{y}$, tendremos $10=2^y$

El valor de y está comprendido entre 3 y 4, y por consiguiente llamando $y=3+\frac{1}{z}$, resultará $(1,25)^z=2$ y, como el valor de z aqui está tambien comprendido entre 3 y 4; será $z=3+\frac{1}{u}$ cuya sustitucion, en la ecuacion última, nos dará para u, 9 y una fraccion. El valor aproximado de x será pues una fraccion contínua, cuya aproximacion será tanto mayor cuanto se calcule mayor número de fracciones integrantes. (Véase la Nota I, al final del Algebra).

El valor de la incógnita x con menos error que una unidad fraccionaria $\frac{1}{n}$, se puede hallar tambien del modo siguiente.....

$\text{Log. } 2=\frac{n\times\log. 2}{n}=\frac{\log. 2^n}{n}$ y llamando f al número de cifras de 2^n, será

$2^n>10^{f-1}$ y $2^n<10^f$ luego $\log. 2^n>\log. 10^{f-1}$ y $\log. 2^n<\log. 10^f$

y por consiguiente $\log. 2>\frac{f-1}{n}$ y $\log. 2<\frac{f}{n}$

$\frac{f-1}{n}$ es, pues, el logaritmo del número 2 con menos error que la fraccion $\frac{1}{n}$;

Luego, *para hallar el logaritmo de un número entero en el sistema decimal, con menos error que una unidad fraccionaria*, se eleva dicho número á la potencia que indica el denominador de esta fraccion, y el número de cifras del resultado, disminuido en una unidad, se divide por el mismo denominador.

*154. La comensurabilidad ó incomensurabilidad de los logaritmos depende de la comensurabilidad ó incomensurabilidad de los valores de x para todos los números enteros de y, en la ecuacion $b^x=y$

Los números de los logaritmos comensurables tienen los mismos factores primos que la base del sistema, verificándose además que las razones de los exponentes de un mismo factor son iguales.

En efecto, siendo la base b un número *entero*, y representando el valor de x por el número comensurable $\frac{m}{n}$; tendremos $b^m=y^n$, donde y forzosamente será entero, y ademas tendrá los mismos factores primos que b, puesto que cualquiera factor primo de b, lo será de b^m y por consiguiente de y^n y de y; luego $(\alpha^p\beta^q)^m=(\alpha^{p'}\beta^{q'})^n$ ó bien $\alpha^{pm}\beta^{qm}=\alpha^{np'}\beta^{nq'}$

de donde se deduce $pm=np'$ $qm=nq'$ y por consiguiente $\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}$

Recíp. Supongamos $b=\alpha^p\beta^q$, $y=\alpha^{p'}\beta^{q'}$ y demas $p':p::q':q$

Siendo $x=p':p$, será $px=p'$ y $qx=q'$

luego $b^x=\alpha^{px}\beta^{qx}=\alpha^{p'}\beta^{q'}=y$; de donde se deduce que, para que x sea comensurable, se necesita y basta que los factores primos de b y de y sean los mismos, y que las razones de sus exponentes sean iguales.

Esc. Suponiendo $b=10=2\times5$, será $y=2^{p'}\times5^{q'}$ y $p'=q'$; luego $y=10^p$ y por consiguiente en el sistema decimal, todos los logaritmos son incomensurables escepto los de las potencias enteras de 10.

Una demostracion análoga se puede emplear cuando b sea fraccionario y x negativo. Cuando x es entero, basta suponer $n=1$.

Observaciones acerca de los diferentes sistemas de logarítmos.

155. La variacion de la base b en la ecuacion $b^x=y$ nos dá tantos sistemas diferentes de logaritmos como se quiera. Un mismo número puede tener por lo tanto muchos logaritmos; pero es tal la relacion que existe entre todos ellos, que, construidas una tablas para una base determinada, se obtienen los logaritmos de los mismos números para otra base, por medio de simples multiplicaciones, como vamos á ver, resolviendo el problema siguiente:

Dado el logaritmo del número N *en el sistema cuya base es* B, *hallar el logaritmo del mismo número en el sistema de base* b.

Llamando x el logaritmo pedido, será $b^x=$N ; y por consiguiente....
log. $b^x=$log. N ó bien x log. $b=$log. N de donde $x=\frac{\text{log. N}}{\text{log. } b}$
luego, conocido el logaritmo de un número en un sistema, se hallará el logaritmo del mismo número en otro sistema, dividiendo el logaritmo del número dado en el sistema primitivo por el logaritmo de la nueva base en el mismo sistema.

Cor. De la igualdad $x=\frac{\text{log. N}}{\text{log. } b}$ se deduce $x=\text{log. N}\times\frac{1}{\text{log. } b}$ y por consig. *Conocido un sistema de logaritmos se puede calcular otro sistema cuya base sea* b, *multiplicando los logaritmos del primero por el número constante* $\frac{1}{\text{log. } b}$

Este número constante se llama *módulo relativo* del segundo sistema con respecto al primero.

Esc. *En todos los sistemas de logaritmos se verifica que, la razon de los logaritmos de dos números cualesquiera es una misma.*

En efecto; sean los números dados M y N, cuyos logaritmos en dos sistemas diferentes cualesquiera llamaremos; y, y' los del primero y x,x' los del segundo. En este supuesto, y siendo b la base del segundo sistema, tendremos...
$y'=y\times\frac{1}{\text{log. } b}$ y $x'=x\times\frac{1}{\text{log. } b}$ ó bien $y=y'\times\text{log. } b$ $x=x'\times\text{log. } b$
de donde fácilmente se deduce la proporcion $y:x::y':x'$

***156.** La consideracion del ∞ en la fórmula $b^x=y$ y sus transformaciones legítimas dá los resultados notabilísimos, que vamos á apuntar:

$$b^x=y \qquad \left(\sqrt[n]{b}\right)^x=y^{\frac{1}{n}} \qquad \text{ó lo que es lo mismo} \qquad \left[1+\left(\sqrt[n]{b}-1\right)\right]^x=y^{\frac{1}{n}}$$

Aplicando ahora la fórmula del binomio de Newton, suponiendo $n=\infty$ y despreciando los términos infinitamente pequeños, resulta la nueva igualdad.....

$$y^{\frac{1}{\infty}}-1=x\left(\sqrt[\infty]{b}-1\right) \qquad \text{ó bien} \qquad \text{log. } y=\frac{y^{\frac{1}{\infty}}-1}{\sqrt[\infty]{b}-1} \qquad [\Delta]$$

que es la fórmula general del logaritmo de y en el sistema cuya base es b.

Esta expresion será lo mas simple posible, si el valor de b es tal que reduce el denominador á la unidad, lo cual es muy fácil multiplicado el numerador y denominador por el ∞; pues en este supuesto, resulta.....

$\text{log. } y=\infty\left(y^{\frac{1}{\infty}}-1\right)$ fórmula general del logaritmo de y en el sistema mas simple de todos ó sea el neperiano, cuya base 2,718281828459 es el valor de b que verifica la igualdad $\infty\left(\sqrt[\infty]{b}-1\right)=1$

Expresando los logaritmos neperianos que tambien se llaman *naturales* por la inicial l. y por log. los logaritmos de otro sistema diferente, la fórmula [Δ] nos dará la misma del número anterior, para hallar el logaritmo de un número en un sistema conocido el logaritmo natural ú otro cualquiera del mismo número.

Logaritmos ordinarios negativos.

157. Los logaritmos de los números menores que la unidad son siempre *negativos*.

En la ARITMÉTICA hemos indicado un medio expedito para evitar los logaritmos negativos, que consiste en añadirles 10 de característica, cuidando al final de la operacion, de hacer las correcciones convenientes.

Ahora se pueden someter al cálculo considerados bajo su forma negativa, ó bien transformándolos en otros de característica negativa y mantisa positiva.

Para transformar un logaritmo *negativo* en otro de característica negativa y mantisa positiva, se halla el complemento del logaritmo dado, considerado positivamente, y de la característica del resultado se restan 10 unidades (*).

El signo — se escribe encima de la caristerítica negativa, en esta forma $\bar{3}$.

Transformar el logaritmo negativo -0.397940 en otro de característica negativa y mantisa positiva.

$$-0.397940=-0.397940+10-10=10-0.397940-10=9.602060-10=\bar{1}.602060$$

Del mismo modo $\quad -3.267641=6.732359-10=\bar{4}.732359$

Recip. Un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva se convierte en otro todo negativo, hallando la diferencia entre el valor absoluto de la característica y el de la mantisa.

$$\bar{1}.602060=-1+0.602060=-0.397940$$

Al ejecutar una operacion cualquiera con esta clase de logaritmos, se deben considerar compuestos de dos partes, una positiva y otra negativa; y por consiguiente, un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva no se altera aunque á esta y al valor absoluto de aquella se añada un mismo número.

Propongámonos, por ejemplo, efectuar las operaciones siguientes:

$$\bar{2}.240128\times5=(-2+0.240128)\times5=-10+1.200640=\bar{9}.200640$$
$$\bar{4}.725372:2=(-4+0.725372):2=-2+0.362686=\bar{2}.362686$$
$$\bar{1}.778151:5=(-5+4.778151):5=-1+0.955630=\bar{1}.955630$$

En este último ejemplo, hemos añadido 4 unidades al valor absoluto de la característica del dividendo, para hacer posible la division; y 40 décimas á la primera cifra de la mantisa, para que el logaritmo total no sufra alteracion.

158. Para hallar el logaritmo (cuya característica sea negativa), de una fraccion, se resta el logaritmo del denominador, del logaritmo del numerador, aumentando este con las unidades necesarias para hacer posible la sustraccion. Estas *unidades* serán la característica negativa del resultado.

$$\log.\frac{2}{5}=0.301030-0.698970=1.301030-0.698970-\bar{1}=\bar{1}.602060$$

$$\log.0{,}4=\log.4-1=\bar{1}.602060 \qquad \log.0{,}000015=\bar{5}.176091$$

luego *el logaritmo de una fraccion decimal* tiene por *característica negativa* tantas unidades como indique el órden decimal de su primera cifra significativa, y por *mantisa* la misma que el logaritmo de estas cifras consideradas como un número entero. Así, $\log.0{,}001859=\bar{3}.269279$ y $\log.0{,}00000144=\bar{6}.158362$

(*) O bien: Se aumenta la característica en una unidad, se escribe sobre ella el signo —, y se restan de 9 todas las cifras de la mantisa dada excepto la última significativa que se resta de 10.

Conocido el cálculo de las cantidades negativas, en vez de emplear en las aplicaciones logarítmicas el *complemento á* 10, que es lo que generalmente se practica, debe preferirse el *complemento á cero*, evitando así corregir el resultado, por la introduccion de los logaritmos complementarios.

El complemento á cero del log. de 5, se expresa así: $C_0 \log.5=-0{,}698970=\bar{1}.301030$.

Identidad de los logaritmos considerados aritmética ó algebráicamente.

159. *Los logaritmos, considerados aritméticamente ó definidos por medio de dos progresiones, son los mismos que acabamos de considerar definidos por los exponentes de un número constante, llamado* base *del sistema de logaritmos.*

En efecto, sean las dos progresiones..... $\begin{cases} \div\div\ 1,\ R,\ R^2,\ R^3.....R^n \\ \div\ 0,\ d,\ 2d,\ 3d.....nd... \end{cases}$

Suponiendo $nd=1$ y $R^n=B$, será $R=B^{\frac{1}{n}}=B^d$; luego las progresiones anteriores, tomarán la forma $\begin{cases} \div\div\ 1,\ B^d,\ B^{2d},\ B^{3d}.....B^{nd} \\ \div\ 0,\ d,\ 2d,\ 3d......nd \end{cases}$
donde se vé que el *logaritmo* de un término cualquiera de la progresion geométrica es el exponente de la potencia á que se eleva el número constante B, para reproducir dicho término.

El número constante B ó sea la base del sistema de logaritmos es igual á la raiz del grado que indique la diferencia de la segunda progresion, de la cantidad que expresa la razon de la primera;

pues si $nd=1$ será $n=\frac{1}{d}$ y por consiguiente B ó $R^n=R^{\frac{1}{d}}=\sqrt[d]{R}$

De este modo, aun cuando en la progresion aritmética ó por diferencia no se halle el término 1, será siempre fácil determinar la base del sistema.

Inversamente, la definicion algebráica de los logaritmos es la misma que hemos considerado en la aritmética deducida de las progresiones, pues si en la ecuacion $B^x=y$ damos á x valores en progresion aritmética ó por diferencia, tales como..... $0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ 4d$, etc.,
tendremos para y, los siguientes $B^0,\ B^d,\ B^{2d},\ B^{3d},\ B^{4d}$, etc.,
y como todos estos números forman una progresion por cociente cuyos términos se corresponden con los de la anterior, verificándose lo mismo aun cuando dieramos á x valores negativos $-d$, $-2d$, $-3d$, etc.; es evidente que, si tenemos dos progresiones una por cociente, que tenga entre sus términos al 1, y otra por diferencia, que tenga entre los suyos al 0, y las colocamos de modo que se correspondan los términos 1 y 0; cada término de la segunda progresion es el logaritmo del correspondiente de la primera.

Aplicacion de los logaritmos al cálculo algebráico ó literal.

160. Sea la fórmula $x=A\times(1+r)^t$
tomando los logarit. de ambos miembros, será..... log. x=log. A+t log. $(1+r)$

Suponiendo $x=\frac{a^2-b^2}{a+m}$; tendremos.....

$$\text{log. } x=\text{log. }(a+b)+\text{log. }(a-b)+\text{comp. log. }(a+m)-10$$

2.° De la fórmula $\frac{2a}{m}\sqrt[7]{\frac{(a+b)^2\times(a-b)}{m\sqrt{a-1}}}=x$, se deduce..... Log. x=

log. $2a$+c.^{to} l. $m+\frac{1}{7}[2\text{ l. }(a+b)+\text{l. }(a-b)+\text{c}^{to}\text{ l. }m+\text{c.}^{to}\ \frac{1}{2}\text{ l. }(a-1)]-12\frac{6}{7}$

3.° Ultimamente, propongámonos aplicar los logaritmos, á la fórmula $\sqrt{a^2+b^2}$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; llamando $z^2=2ab$ será $z=\sqrt{2ab}$ y log. $z=\frac{\text{log. }2ab}{2}$
y por consiguiente $a^2+b^2=(a+b)^2-z^2=(a+b+z)(a+b-z)$
de donde se deduce log. $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{2}[\text{log. }(a+b+z)+\text{log. }(a+b-z)]$

Aplicacion de los logaritmos á la resolucion de las ecuaciones exponenciales.

161. Llámase *ecuacion exponencial*, la que tiene la incógnita por exponente.

Algunas ecuaciones exponenciales se pueden resolver por medio de los logaritmos. Sirvan de ejemplos los siguientes:

1.° $A^x=B$ de donde $\log. A^x=\log. B$ ó bien $x\log. A=\log. B$

y por consiguiente, el valor de x, será $\frac{\log. B}{\log. A}$

2.° $\frac{2am^x}{1+m}=(1-m)a^{x-1}$

$\log. 2am^x-\log. (1+m)=\log. (1-m)a^{x-1}$

$\log. 2a+x\log. m-\log. (1+m)=\log. (1-m)+(x-1)\log. a$

$x\log. m-x\log. a=\log. (1-m)-\log. a-\log. 2a+\log. (1+m)$

de donde se deduce $x=\frac{\log. (1+m)+\log. (1-m)-2\log. a-\log. 2}{\log. m-\log. a}$

3.° Dividiendo por 12^{x+1} la ecuacion $12^{x-1}+12^{x+1}=12$; fácilmente se deduce para la incógnita $x=2-\frac{\log. 145}{\log. 12}$

4.° Resolver la ecuacion exponencial de segundo grado $1:m\sqrt{2a^x}=m^{(a-x)^2}$

$-\log. m-\frac{1}{2}\log. 2-\frac{x}{2}\log. a=(a^2-2ax+x^2)\log. m$

$2x^2\log. m+x(\log. a-4a\log. m)=-2a^2\log. m-2\log. m-\log. 2$

$x^2+\frac{\log. a-4a\log. m}{2\log. m}x=-\frac{2(a^2+1)\log. m+\log. 2}{2\log. m}$

de donde se deduce fácilmente el valor de la incógnita.

5.° La ecuacion exponencial de segundo grado $12^{x^2-4x+5}=600$

equivale á $(x^2-4x+5)\log. 12=\log. 600$; luego $x=2\pm\sqrt{\frac{\log. 50}{\log. 12}}$

*6.° Las raices de las ecuaciones simultáneas

$\log. x-\log. y=\log. A$ $ax+by=C$ son $x=\frac{AC}{Aa+b}$ $y=\frac{C}{Aa+b}$

*7.° Las raices de $\left\{\begin{array}{l}\log. x+\log. y=\log. A\\ 2\log. x-2\log. y=\log. n\end{array}\right\}$ son $x=\sqrt[4]{nA^2}$ $y=\sqrt[4]{\frac{A^2}{n}}$

***162.** Dado el logaritmo de una expresion literal, se puede hallar en muchos casos el valor de dicha cantidad ó de otra equivalente.

De $\log. x=\frac{1}{2}\log. a-\frac{1}{4}\log. b$ se deduce $x=\sqrt{a}:\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}}$

$\log. x=2+\frac{1}{5}\left[\log. (a+b)+\log. (a-b)-\log. 1,5\right]$ $x=100\sqrt[5]{\frac{a^2-b^2}{1,5}}$

La expresion log. log. A quiere decir, el logaritmo del logaritmo de A, ó sea el logaritmo del número decimal, que representa al logaritmo de A.

Ejercicios para la teoría de los logaritmos y sus aplicaciones.

163. ¿Los logaritmos algebráicamente considerados son diferentes de los que hemos deducido en la Aritmética de la analogía de dos progresiones una por diferencia y otros por cociente? ¿Cuál es la base de los logaritmos neperianos? Suponiendo negativa la base b de un sistema de logaritmos, deducir los valores que recibirá la funcion b^x, cuando x sea $\frac{2m}{2n+1}$, $\frac{2m+1}{2n+1}$ ó bien $\frac{2m+1}{2n}$. ¿Qué ventajas tiene la base 10 sobre las demás, que pudieran haberse adoptado para la formacion de las tablas? ¿Por qué las tablas de logaritmos no tienen los de los números fraccionarios? La comensurabilidad de los logaritmos de 10, 100, 1000, etc., en el sistema ordinario ¿es general y se verifica lo mismo en cualquiera otra base? ¿Cuál es la razon de dos números cuyos logaritmos ordinarios tienen igual mantisa y cuyas características son 2 y 5? ¿Cuál es la característica negativa del logaritmo de la fraccion 0,00000000007; y la característica del mismo logaritmo considerado totalmente negativo?

Hallar la base de un sistema de logaritmos en el que se verifique que el logaritmo de 81 es el número 4:

$4=\log. 81 \mid 2=\frac{1}{2}\log. 81=\log. \sqrt{81}=\log. 9 \mid 1=\frac{1}{2}\log. 9=\log.\sqrt{9}=\log. 3$

Aplicar los logaritmos á la resolucion de las diferentes cuestiones numéricas y algebráicas, que siguen, sirviéndose en los logaritmos negativos de los que tienen característica negativa y mantisa positiva.

$$\log. \sqrt[3]{\tfrac{2}{5}\sqrt{6}}=\tfrac{1}{3}\left(\log. 2+\tfrac{1}{2}\log. 6+\text{comp.} \log. 5-10\right)=\bar{1}.997045$$

$$\log. \sqrt[5]{\frac{0,365\times\sqrt{2}}{788}}=\frac{1}{5}\left[\log. 0,365+\tfrac{1}{2}\log. 2+\text{c.}^{\text{to}} \log. 788-10\right]$$

$$\frac{(1-5\sqrt[3]{1,5})^5\times\sqrt[7]{3\sqrt{1858}}}{0,00012\sqrt{0,12}} \qquad \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{(a-b)^2\times\sqrt{1-a}}{(1+a)\sqrt{(a+b)^3}}}$$

Resolver las ecuaciones exponenciales, que siguen:

Sea la primera $\left(\frac{3}{4}\right)^x=51,5$ de donde se deduce $x=-13,70117$

De $\left(\frac{2}{81}\right)^{3-x}=18\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x}{2}}$ resulta $(3-x)\log. \frac{2}{81}=\log. 18+\frac{3x}{2}\log. \frac{1}{2}$

¿Cuáles son las raices de $10^{x^2-x-1}=1000$ ó sea $x^2-x=4$?

Dividiendo por 2^x todos los términos de la ecuacion.....

$$2^{x+1}+2^{x-2}-2^{x-3}+2^{x-4}=1850$$

quedará reducida á $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1850}{2^x}$ y por consig. $x=4+\frac{\log. 1850-\log. 35}{\log. 2}$

$^*(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=\frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2} \qquad (1-a)^{x^2-2x+10}=m+n$

$^*\left\{2\log. (x+y)=\log. x+\log. 5-\log. S \qquad x-y=D\right\}$

*Ultimamente, hallar las ecuaciones de las cuales se han deducido las fórmulas logarítmicas siguientes:

$\log. x=m\log. a+n\log. b+2 \qquad \frac{x}{100}=a^m b^n$

$n+\log. (a+x)=p\log. y+m \qquad x+a=y^p\times B^{m-n}$ (B la base de los log.)

INECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO.

Preliminares. Resolucion de una inecuacion de primer grado con una incógnita. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita. Observaciones generales.

Preliminares.

164. Llámase *desigualdad* la relacion que existe entre las expresiones de dos cantidades diferentes.

$$(a+b)(a-b)<2a^2-b^2 \qquad 1+a>a-1$$

La desigualdad se llama INECUACION cuando está establecida para determinar algunos de sus elementos en valores de los otros, ó mejor dicho, para determinar los *límites* superiores ó inferiores de estos elementos.

Resolver una inecuacion es hallar los límites de los valores de las incógnitas que contiene.

La resolucion de las inecuaciones se funda en las proposiciones siguientes:

1.ª *Añadiendo á los dos miembros de una inecuacion, ó en general de una desigualdad, una misma cantidad, el resultado será otra desigualdad con el mismo signo que la primitiva* (*).

Siendo $A>B$, será $A-B>$cero ó positivo, y como un resíduo no se altera aunque se añada ó se quite un mismo número al minuendo y al sustraendo, tendremos.....

$$(A\pm n)-(B\pm n)>\text{cero} \qquad \text{y por consiguiente} \qquad A\pm n>B\pm n$$

De aquí se deducen las siguientes consecuencias.....

En toda desigualdad se puede trasladar un término de un miembro al otro con signo contrario, sin alterar el *signo* de la primera desigualdad.

Si se cambian los signos $+$ ó $-$ á todos los términos de una desigualdad, se deberá mudar el *signo* $>$ ó $<$ de esta.

Si sumamos ordenadamente dos ó mas desigualdades de una misma especie, el resultado conservará el mismo *signo* de las desigualdades dadas (**).

2.ª *Multiplicando los dos miembros de una desigualdad por una cantidad positiva, la desigualdad conservará el mismo* signo, *y si se multiplican por una cantidad negativa, el resultado llevará el* signo *contrario al de la primera desigualdad.*

Si tenemos $A>B$ ó bien $A-B>0$; se verificará tambien.....

$$A\times n>B\times n \qquad A\times\frac{1}{n}>B\times\frac{1}{n}$$

$$A\times -n<B\times -n \qquad A\times-\frac{1}{n}<B\times-\frac{1}{n}$$

De donde se deduce que.....

(*) Recuérdese que *signo* de una desigualdad es el $>$ ó $<$ que separa el primero del segundo miembro.

(**) Dos desigualdades se dicen de una misma especie ó en un mismo sentido, cuando tienen un mismo *signo*, y en sentido opuesto ó inverso cuando la una tiene el *signo* $>$ y la otra el *signo* $<$. Si los dos miembros de una desigualdad son positivos, la desigualdad se llama *positiva* y, si negativos, *negativa*.

En toda desigualdad se puede pasar un factor positivo de un miembro, á divisor del otro, sin alterar el *signo* de la primera desigualdad. Si el factor es negativo, la desigualdad resultante llevará *signo* contrario.

Todos los términos de una desigualdad se pueden multiplicar por la unidad negativa, estableciendo la nueva desigualdad en sentido inverso de la primera.

Si se multiplican ordenadamente dos ó mas desigualdades *positivas* y de un mismo signo, el resultado es otra desigualdad con el mismo signo que el de las desigualdades dadas.

3.ª *Las potencias del mismo grado de una desigualdad positiva son otra desigualdad de la misma forma.* Las potencias impares, tambien de un mismo grado, de una desigualdad positiva ó negativa son otra desigualdad de la misma forma.

Las raices impares, y las pares positivas del mismo grado de una desigualdad son otra desigualdad con el mismo signo.

Cuando decimos potencia ó raiz de una desigualdad, entiéndase potencia ó raiz de ambos miembros.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita.

165. Una inecuacion con una incógnita se dice de primer grado, cuando puede reducirse á la forma $Ax \pm B > 0$ ó $Ax \pm B < 0$

Transponiendo el término conocido B y dividiendo ambos miembros por A, tendremos en ambos casos $x > \mp \frac{B}{A}$ $x < \mp \frac{B}{A}$

Luego todo valor de la incógnita, mayor ó menor que un cierto límite, verificará la inecuacion propuesta. Este *límite* es precisamente el valor de x que transforma la inecuacion en igualdad.

Resolver la inecuacion $3x - \frac{x}{2} > 45 - 2x$

multiplicando todos los términos por 2, y transponiendo, será.....

$6x - x + 4x > 90$ de donde se deduce $x > 10$; es decir que, para verificar la inecuacion propuesta, es preciso que el menor valor de x sea mayor que 10, y como el límite superior queda indeterminado, cualquiera número mayor que 10 verificará la inecuacion dada.

La sustitucion del número 10 nos da la igualdad.....

$$3 \times 10 - \frac{10}{2} = 45 - 2 \times 10$$

La inecuacion $\sqrt{3y - 5} < 5$ nos da $y < 10$

de donde se deduce que el valor mayor de la incógnita debe ser menor que el límite 10: el límite inferior queda indeterminado.

La sustitucion del límite 10 nos dará la igualdad $5 = 5$

Si dos ó mas inecuaciones contienen á la misma incógnita formando parte de una cuestion, el número de soluciones disminuye notablemente.

Hallar el número de personas de una reunion, bajo los supuestos siguientes:

El triplo del número que se pide es mayor que su duplo mas 11 unidades; añadiendo 100 unidades al número que se busca y dividiendo la suma por 9, el cociente es mayor que dicho número.

$$3x > 2x + 11 \qquad \frac{x + 100}{9} > x$$

de donde se deducen respectivamente los valores siguientes:

$$x>11 \qquad 12\tfrac{1}{2}>x$$

y por consiguiente los valores, que pueden satisfacer las condiciones de desigualdad expresadas por las inecuaciones anteriores, son números mayores que 11 y menores que $12^1/_2$; mas como la naturaleza de la cuestion no considera como solucion los números fraccionarios, es evidente que el número 12 es el único que cumple con las condiciones del enunciado.

¿Cuál es el número de cañones de una batería, suponiendo que dos quintas partes menos 7 dan un residuo mayor que 5, y que añadiendo 2 á la tercera parte del número total de cañones, resulta una suma mayor que la mitad del número que se busca, menos 4?

Las soluciones de esta cuestion son los números 31, 32, 33, 34 y 35.

Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

***166.** Una inecuacion con una incógnita se dice de segundo grado, cuando puede reducirse á la forma $Ax^2+Bx+C>$ ó $<$cero

Dividiendo ambos miembros por A y llamando S y P los cocientes $\frac{B}{A}$ y $\frac{C}{A}$ tendremos..... $x^2+Sx+P>o$ ó $x^2+Sx+P<o$ en el primer caso, el trinomio x^2+Sx+P será positivo, y en el segundo negativo. Veamos las condiciones que verifican uno y otro resultado.

Llamando y', y'' las raices desiguales de la ecuacion $x^2+Sx+P=o$ tendremos (**137**) $\qquad x^2+Sx+P=(x-y')(x-y'')$

En este supuesto, para que el trinomio x^2+Sx+P sea *positivo,* basta que $x-y'$ y $x-y''$ tengan un mismo signo, es decir, que x sea mas grande que la mayor de las dos raices ó menor que la mas pequeña; asi la desigualdad $2x^2-5x+2>o$ quedará satisfecha por todos los valores de x que se quieran mayores que 2 y menores que $\frac{1}{2}$ que son las raices de $2x^2-5x+2=o$

Suponiendo iguales á y', las raices de la ecuacion $x^2+Sx+P=o$; será...

$$x^2+Sx+P=(x-y')^2$$

y, como el segundo miembro no puede ser negativo, la desigualdad $x^2+Sx+P<o$ es imposible; y por lo mismo la $x^2+Sx+P>o$ será satisfecha por todos los valores diferentes de y' que se quiera.

Ultimamente, cuando la ecuacion $x^2+Sx+P=o$ tiene sus raices imaginarias, se debe verificar $S^2-4P<o$ ó bien $P-\frac{S^2}{4}>o$

pero $\qquad x^2+Sx+P=x^2+Sx+\frac{S^2}{4}+P-\frac{S^2}{4}=\left(x+\frac{S}{2}\right)^2+P-\frac{S^2}{4}$

y los sumandos $\left(x+\frac{S}{2}\right)^2$ y $P-\frac{S^2}{4}$ son mayores que cero ó positivos; luego $x^2+Sx+P>o$ resulta satisfecha por cualquiera valor de la incógnita, y $x^2+Sx+P<o$ es imposible.

Observaciones generales.

167. Dos ó mas inecuaciones con igual, mayor ó menor número de incognitas se resuelven por las mismas reglas que si fueran ecuaciones, cuidando no obstante de conservar ó cambiar convenientemente el signo $>$ ó $<$ de los resultados, conforme á los teoremas preliminares de esta teoría. La facilidad y poca aplicacion de estas cuestiones nos dispensa de entrar en consideraciones análogas á las que hemos expuesto en la comparacion de igualdad.

PROGRESIONES.

Fórmulas de las progresiones por diferencia (*). Fórmulas de las progresiones por cociente. Suma de las potencias de un mismo grado de todos los términos de una progresion. Números figurados. Pilas de balas.

Progresiones por diferencia.

$$\div A,\ b,\ c,\ d\ldots\ p,\ q,\ r,\ s\ldots\ U$$

168. FORMULA PARA HALLAR UN TÉRMINO CUALQUIERA $U=A+(n-1)D$

De la definicion de la progresion por diferencia se deduce

$$b-A=\pm D,\quad c-b=\pm D,\quad d-c=\pm D$$

y por consiguiente..... $b=A\pm D,\quad c=b\pm D,\quad d=c\pm D$ etc.;

luego cada término es igual á la suma algebráica del anterior y la diferencia. Sustituyendo ahora en la fórmula de cada término, la del anterior, tendremos...

2.° término $b = A\pm D$

3.r término $c = b\pm D = A\pm D\pm D = A\pm 2D$

4.° término $d = c\pm D = A\pm 2D\pm D = A\pm 3D$

y en general, el término que ocupa el lugar n, será $A\pm(n-1)D$; es decir, la suma algebráica del primero y tantas veces la *diferencia* (positiva ó negativa) como términos le anteceden.

Cor. Considerando como incógnita en la fórmula anterior cada una de las cuatro cantidades U, A, n y D; tendremos.....

$$U=A+(n-1)D \qquad A=U-(n-1)D \qquad D=\frac{U-A}{n-1} \qquad n=\frac{U-A}{D}+1$$

Si entre cada dos términos de una progresion por diferencia interpolamos un mismo número de medios, todas las nuevas progresiones formarán una sola y única progresion, pues, interpolando m medios entre cada dos términos de la progresion general, las diferencias de las progresiones parciales serán.....

$\frac{b-A}{m+1},\ \frac{c-b}{m+1},\ \frac{d-c}{m+1}$ etc. y como todos estos números fraccionarios tienen iguales numeradores é iguales denominadores, es evidente que uno cualquiera de ellos será la diferencia comun ó única para todas las progresiones.

169. FORMULA PARA HALLAR LA SUMA DE TODOS LOS TÉRMINOS $S=(A+U)\times\frac{n}{2}$

La demostracion de esta fórmula, que hemos dado en aritmética, es general, sea la progresion creciente ó decreciente.

Cor. Conocidas tres de las cuatro cantidades S, A, U y n, se determina la cuarta por medio de una de las fórmulas que siguen.....

$$S=(A+U)\times\frac{n}{2} \qquad A=\frac{2S}{n}-U \qquad U=\frac{2S}{n}-A \qquad n=\frac{2S}{A+U}$$

Esc. La fórmula de la *suma* de todos los términos de una progresion por diferencia en funcion del primer término, del número de ellos y de la diferencia de la progresion, es la siguiente:

$$S=(A+U)\times\frac{n}{2}=\left(A+A+(n-1)D\right)\frac{n}{2}=\left(2A+(n-1)D\right)\times\frac{n}{2}$$

Tres de las cuatro cantidades S, A, n y D determinan la cuarta, así tendremos...

$$S=\frac{[2A+(n-1)D]\times n}{2} \qquad A=\frac{S}{n}-\frac{(n-1)D}{2}$$

$$n=\frac{1}{2D}\left(D-2A\pm\sqrt{(2A-D)^2+8SD}\right) \qquad D=\frac{2(S-An)}{n(n-1)}$$

(*) Las propiedades de las diferencias, equidiferencias, razones y proporciones demostradas en la ARITMÉTICA son generales, y se verifican sean cualesquiera las cantidades que se comparen.

*170. Problemas generales. Conocidas tres de las cinco cantidades A, D, n, U, S, que entran en las fórmulas del último término y de la suma de todos los de una progresion por diferencia, la determinacion de las otras dos es un problema determinado, que se resolverá fácilmente.

Las cinco cantidades A, D, n, U, S se pueden combinar de tres en tres de diez modos diferentes; y por consiguiente la cuestion general anterior dá lugar á los diez problemas que siguen:

	Datos.	Incógnitas.	Fórmulas generales.	
1.°	A, D, U	n, S	$n=\frac{U-A+D}{D}$	$S=\frac{(A+U)(U-A+D)}{2D}$
2.°	A, D, n	U, S	$U=A+(n-1)D$	$S=\frac{n(2A+nD-D)}{2}$
3.°	A, D, S	U, n	$U=A+(n-1)D$	$n=\frac{1}{2D}\left(D-2A\pm\sqrt{(D-2A)^2+8DS}\right)$
4.°	A, U, n	D, S	$D=\frac{U-A}{n-1}$	$S=\frac{(A+U)n}{2}$
5.°	A, U, S	D, n	$D=\frac{U^2-A^2}{2S-A-U}$	$n=\frac{2S}{A+U}$
6.°	A, n, S	D, U	$D=\frac{2(S-An)}{n(n-1)}$	$U=\frac{2S}{n}-A$
7.°	D, U, n	A, S	$A=U-(n-1)D$	$S=(2U-nD+D)\times\frac{n}{2}$
8.°	D, n, S	A, U	$A=\frac{1}{2n}\left[2S-n(n-1)D\right]$	$U=\frac{1}{2n}\left[2S+n(n-1)D\right]$
9.°	D, U, S	A, n	$A=U-(n-1)D$	$n=\frac{1}{2D}\left(2U+D\pm\sqrt{(2U+D)^2-8DS}\right)$
10.°	U, n, S	A, D	$A=\frac{2S}{n}-U$	$D=\frac{2(nU-S)}{n(n-1)}$

Aplicaciones:

¿Cuál es el número de términos de una progresion cuya diferencia es $1\frac{1}{2}$, *el último término* 100, *y la suma de todos* 1785?

Sustituyendo en la fórmula segunda del problema 9.° los valores de S, U y D; resultará 21 para el número n de términos de la progresion.

Suponiendo $\frac{1}{3}$ la diferencia de una progresion, 100 el número de términos, y 1900 la suma de estos, *hallar la suma de los extremos.*

Las fórmulas del problema 8.° nos darán la solucion de este problema; pues

$$A=\frac{1}{200}\left(3800-9900\times\frac{1}{3}\right)=2\frac{1}{2}\quad U=\frac{1}{200}\left(3800+9900\times\frac{1}{3}\right)=35\frac{1}{2}\ \Big|\ A+U=38$$

Hallar este mismo resultado sin conocer la diferencia de la progresion, y fundándonos únicamente en que la suma de los extremos es igual á la de cada dos medios equidistantes de aquellos.

Un cuerpo al caer en la atmósfera anda en el primer segundo 4,9 metros, en el siguiente segundo $3\times4{,}9$ metros; en el tercer segundo $5\times4{,}9$ metros y así sucesivamente, *¿cuántos segundos necesitará para recorrer* 500 *metros?* Aquí tenemos una progresion por diferencia cuyo primer término A es 4,9 metros, la diferencia $D=2\times4{,}9$ ó sea 2A, y la suma S=500 metros; y deseamos hallar el número de términos. Sustituyendo, pues 2A por D en la fórmula segunda del problema 3.° de los generales, y dando luego á S y D los valores respectivos, tendremos.....

$$n=\frac{1}{2D}\left(D-2A\pm\sqrt{(D-2A)^2+8DS}\right)=\frac{1}{2D}\sqrt{8SD}=\sqrt{\frac{2S}{D}}=\sqrt{\frac{500}{4{,}9}}=10,''1$$

Progresiones por cociente.

$\div\!\div$ A, b, c, d..... p, q, r, s..... U

171. FORMULA PARA CALCULAR UN TERMINO CUALQUIERA $U=A\times Q^{n-1}$

La demostracion de esta fórmula puede verse en la aritmética; Q representa la razon, que será mayor ó menor que la unidad, segun que la progresion sea creciente ó decreciente.

Cor. La resolucion de la fórmula anterior, si consideramos como incógnita á cada una de las cantidades U, A, Q y n, nos dará las fórmulas siguientes.....

$$U=A\times Q^{n-1} \qquad A=\frac{U}{Q^{n-1}} \qquad Q=\sqrt[n-1]{\frac{U}{A}}\ (*) \qquad n=\frac{\log.\ U-\log.\ A}{\log.\ Q}+1$$

Si entre cada dos términos de una progresion por cociente interpolamos un mismo número de medios, todas las nuevas progresiones formarán una nueva y única progresion.

Interpolando m medios entre cada dos términos de la progresion general las razones de las progresiones parciales, que constarán de $m+2$ términos, serán las raices del grado $m+1$ de los cocientes $\frac{b}{A}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{c}$, etc., y como todos estos resultados son iguales, uno cualquiera de ellos será la razon comun ó única para todas las progresiones.

172. FORMULA PARA CALCULAR LA SUMA DE TODOS LOS TERMINOS $S=\frac{UQ-A}{Q-1}$

En efecto; de la igualdad $S=A+AQ+AQ^2+AQ^3+.......+AQ^{n-1}$
se deduce $S=A+Q(A+AQ+AQ^2+.......+AQ^{n-2})$

pero la suma, que está dentro del paréntesis, es la de todos los términos de la progresion menos el último, luego tendremos

$$S=A+Q(S-U) \quad \text{y por consiguiente} \quad S=\frac{UQ-A}{Q-1}$$

Cor. De esta fórmula se deducen otras para calcular una de las cantidades S, U, Q ó A, conocidas las otras tres: estas fórmulas son las siguientes:

$$S=\frac{UQ-A}{Q-1} \qquad A=UQ+S(1-Q) \qquad Q=\frac{S-A}{S-U} \qquad U=\frac{S(Q-1)+A}{Q}$$

Esc. La fórmula de la suma de todos los términos de una progresion por cociente en funcion del primer término, del número de ellos y de la razon de la progresion es la siguiente.....

$$S=\frac{AQ^{n-1}\times Q-A}{Q-1}=\frac{AQ^n-A}{Q-1}=\frac{A(Q^n-1)}{Q-1}$$

Tres de las cuatro cantidades S, A, Q y n determinan la cuarta; así tendremos

$$S=\frac{A(Q^n-1)}{Q-1} \qquad A=\frac{S(Q-1)}{Q^n-1} \qquad n=\frac{\log.\ (A+SQ-S)-\log.\ A}{\log.\ Q}$$

La fórmula para determinar á Q, conocida la suma S, el primer término A, y el número de términos n, depende de la siguiente ecuacion del grado $n-1$, que no podemos resolver en la parte elemental del álgebra

$$Q^{n-1}+Q^{n-2}+Q^{n-3}+.....+Q^2+Q+1=\frac{S}{A}$$

(*) De donde se deduce $\log.\ Q=\frac{1}{n-1}\left(\log.\ U-\log.\ A\right)$

173. Limites superiores de la suma de todos los terminos. ∞ y $\frac{A}{1-Q}$

La suma de todos los términos de una progresion creciente aumenta á medida que se considera mayor número de términos. Luego su límite superior será evidentemente el ∞. Si la progresion es decreciente, y suponemos el número de términos mayor que cualquiera otro, el valor Q^n en la fórmula.....

$$\frac{A-AQ^n}{1-Q}=\frac{A}{1-Q}-\frac{AQ^n}{1-Q}$$

se acercará á cero tanto como se quiera (*) y por consiguiente $\frac{A}{1-Q}$ será el límite superior de la suma de todos los términos que se quiera de una progresion geométrica decreciente (**).

Cor. De la aplicacion de esta fórmula á diferentes casos particulares se deduce que, un término cualquiera de una progresion geométrica indefinidamente decreciente puede ser igual, mayor ó menor que la suma de todos los que le siguen.

Sirvan de ejemplo las progresiones que siguen.....

$\div 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},$ etc. $\quad \div 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},$ etc. $\quad \div 1,\ \frac{3}{5},\ \frac{9}{25},\ \frac{27}{125},$ etc.

Hallar el límite de la suma de todos los términos de la progresion indefinida $\div 0{,}3,\ 0{,}03,\ 0{,}003,$ etc. ó sea la fraccion periódica $0{,}3333.....$

Límite de $0{,}333.....=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{1}{3}$ como efectivamente se verifica.

***174.** Formula para hallar el producto de todos los terminos $P=\sqrt{(A\times U)^n}$

En efecto; de las igualdades $\begin{cases} P=A\times b\times c\times d\times .....p\times q\times r\times s\times U \\ P=U\times s\times r\times . . . . c\times b\times A \end{cases}$

resulta $\quad P^2=A.U\times b.s\times c.r\times . . .$ hasta n productos.

y como de la definicion de la progresion por cociente se deduce que el producto de los extremos es igual al de cada dos medios equidistantes de los extremos, será..... $P^2=(A\times U)^n$

y por consiguiente $\quad P=\sqrt{(A\times U)^n}\quad$ ó bien $\log. P=\frac{n}{2}(\log. A+\log. U)$

Cor. De esta fórmula se deducen otras para calcular una cualquiera de las cantidades A, U, n, ó P en funcion de las otras tres.

$$\log. A=\frac{2\log. P-n\log. U}{n}\qquad \log. U=\frac{2\log. P-n\log. A}{n}\qquad n=\frac{2\log. P}{\log. A+\log. U}$$

Hallar el número de términos de una progresion por cociente, conociendo el primero, el último y el producto de todos.

Siendo $P=128,\ A=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad U=\sqrt{32}$; el valor de n será $\frac{2\log. 128}{\log. 4\sqrt{2}-\log. \sqrt{2}}=7$

(*) En las progresiones decrecientes la razon ó el cociente Q es una fraccion. La potencia infinita de una fraccion se considera igual á *cero*.

(**) La verdad de esta fórmula se puede deducir á *posteriori*, pues, dividiendo el numerador por el denominador, resulta por cociente una progresion geométrica decreciente de infinito número de términos.

*175 **Problemas generales.** De las fórmulas del último término y de la suma de todos los de una progresion geométrica se deduce la resolucion de los diez problemas siguientes:

	Datos.	Incógnitas.	Fórmulas generales.	
1.°	A, Q, U	n, S	$n=1+\frac{\log. U-\log. A}{\log. Q}$	$S=\frac{UQ-A}{Q-1}$
2.°	A, Q, n	U, S	$U=AQ^{n-1}$	$S=\frac{1}{Q-1}(AQ^n-A)$
3.°	A, Q, S	n, U	$n=\frac{\log. (SQ-S+A)-\log. A}{\log. Q}$	$U=\frac{A+S(Q-1)}{Q}$
4.°	A, U, n	Q, S	$Q=\sqrt[n-1]{\frac{U}{A}}$	$S=\frac{U\sqrt[n-1]{U}-A\sqrt[n-1]{A}}{\sqrt[n-1]{U}-\sqrt[n-1]{A}}$
5.°	A, U, S	Q, n	$Q=\frac{S-A}{S-U}$	$n=1+\frac{\log. U-\log. A}{\log. (S-A)-\log. (S-U)}$
6.°	A, n, S	Q, U	$Q^{n-1}+Q^{n-2}\ ...Q+1=\frac{S}{A}$	$U=AQ^{n-1}$
7.°	Q, U, n	A, S	$A=\frac{U}{Q^{n-1}}$	$S=\frac{(Q^n-1)U}{(Q-1)Q^{n-1}}$
8.°	Q, U, S	A, n	$A=UQ-S(Q-1)$	$n=1+\frac{\log. U-\log. (UQ+S-SQ)}{\log. Q}$
9.°	Q, n, S	A, U	$A=\frac{S(Q-1)}{Q^n-1}$	$U=SQ^{n-1}\times\frac{Q-1}{Q^n-1}$
10.°	U, n, S	A, Q	$A=\frac{U}{Q^{n-1}}$	$U=(U-S)Q^n+SQ^{n-1}$

Tambien las tres ecuaciones $U=AQ^{n-1}$ $P=\sqrt{(A\times U)^n}$ $S=\frac{UQ-A}{Q-1}$ sirven para resolver todos los problemas en los que, dadas tres de las seis cantidades A, U, n, P, Q, S, se piden las otras tres.

Aplicaciones:

Interpolando 9 medios proporcionales entre 1 y 10 *¿cuál es el segundo término, el penúltimo, la suma y el producto de todos?*

De la sustitucion de estos datos en las fórmulas respectivas resulta.....

$$AQ=1\times Q=\sqrt[10]{10} \qquad AQ^{n-2}=\frac{U}{Q}=\frac{10}{\sqrt[10]{10}} \qquad S=\frac{10\sqrt[10]{10}-1}{\sqrt[10]{10}-1} \qquad \log. P=\frac{11 \log. 10}{2}$$

cuya determinacion numérica puede servir de ejercicio á los lectores.

Hallar la suma de los 7 términos de una progresion, cuyo primer término es la unidad, y el producto de todos 2097152

De la fórmula $P=\sqrt{(A\times U)^n}$ se deduce para este caso $\log. U=\frac{2 \log. P}{7}$ y por consiguiente, la fórmula segunda del problema 4.° de los generales, nos dará el valor de S que resulta igual á 127.

¿Cuál es el límite de una progresion decreciente cuyo primer término es 10 *y la razon* $\frac{5}{7}$? El límite que se busca es igual al cociente de 10 por la diferencia entre la unidad y la razon; es decir $17\frac{1}{2}$

Suma de las potencias de un mismo grado de los términos de una progresion.

*176. Si se elevan á una misma potencia todos los términos de una progresion por cociente, resultará otra nueva progresion por cociente. Si se elevan los términos de una progresion por diferencia, resultará una *série* (*) de términos, cuya suma se puede determinar por las fórmulas siguientes:

Sea la progresion por diferencia $\div A, b, c, d.......... t, U$ llamando D la diferencia; segun la fórmula del binomio de Newton, tendremos...

$$b^{n+1}=(A+D)^{n+1}=A^{n+1}+(n+1)A^nD+\frac{n(n+1)}{2}A^{n-1}D^2+......+D^{n+1}$$

$$c^{n+1}=(b+D)^{n+1}=b^{n+1}+(n+1)b^nD+\frac{n(n+1)}{2}b^{n-1}D^2+......+D^{n+1}$$

. . . .

$$U^{n+1}=(t+D)^{n+1}=t^{n+1}+(n+1)t^nD+\frac{n(n+1)}{2}t^{n-1}D^2+......+D^{n+1}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, suprimiendo los términos comunes de uno y otro miembro, y llamando S_1, S_2, S_3.....S_n, la suma de las primeras potencias, segundas, terceras, etc., de los términos de la progresion dada, será:

$$U^{n+1}=A^{n+1}+(n+1)D(S_n-U^n)+\frac{n(n+1)}{2}D^2(S_{n-1}-U^{n-1})+\text{etc.}$$

de donde se deduce la fórmula general que se busca...

$$S_n=U^n+\frac{U^{n+1}-A^{n+1}}{(n+1)D}-\frac{n}{2}D(S_{n-1}-U^{n-1})-\frac{n(n-1)}{2.3}D^2(S_{n-2}-U^{n-2})-\text{etc.}$$

Suponiendo que la progresion dada sea la que forman los números naturales $\div 1, 2, 3, 4.....U$; la fórmula anterior será....

$$S_n=U^n+\frac{U^{n+1}-1}{n+1}-\frac{n}{2}(S_{n-1}-U^{n-1})-\frac{n(n-1)}{2.3}(S_{n-2}-U^{n-2})-\text{etc.}$$

y sustituyendo cero, 1, 2, 3, 4 etc. en lugar de n; tendremos.....

$$S_0=U \qquad S_1=\frac{U(U+1)}{2} \qquad S_2=\frac{U(U+1)(2U+1)}{6} \qquad S_3=\frac{U^2(U+1)^2}{4}$$

La primera de estas fórmulas $S_0=U$ es evidente, segun hemos convenido en el número 22; la segunda es la ya conocida, de la suma de todos los términos de la progresion por diferencia $\div 1, 2, 3$, etc. cuyo número de términos es U, (169). La tercera se obtiene directamente, de este modo.....

$$2^3=1+3+3+1$$
$$3^3=2^3+3.2^2+3.2+1$$
$$4^3=3^3+3.3^2+3.3+1$$
. . . .
$$(U+1)^3=U^3+3.U^2+3.U+1$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y llamando S_2 á la suma $1^2+2^2+3^2+$etc.; como $1+2+3+4+$etc. equivale á $\frac{U(U+1)}{2}$ tendremos $3S_2=U\left(U+\frac{1}{2}\right)(U+1)$ de donde fácilmente se deduce la fórmula 3.ª

La fórmula 4.ª se puede obtener tambien directamente por un procedimiento análogo al anterior, y es muy notable, puesto que su traduccion nos dice que; la suma de los cubos de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, etc. es igual al cuadrado de la suma de los mismos números. Así, siendo la suma de los diez primeros igual á 55, la suma de sus cubos será igual á $55\times55=3025$.

Esc. De cada una de las fórmulas anteriores se puede deducir otra, para hallar el número de términos de la série, conocida la suma de todos ellos.

(*) Si la suma de los términos de una série se acerca á un límite finito y determinado, la série se llama *convergente*, y en el caso contrario, se llama *divergente*. Una progresion por cociente es convergente, si la razon es menor que la unidad, y divergente, si es mayor que la unidad.

Números figurados.

*177. Los términos de una progresion aritmética ó por diferencia cuyo primer término es 1 y la diferencia es un número entero y positivo, se llaman *números figurados de primer órden*:

$\div 1,\quad 1+x,\quad 1+2x,\quad 1+3x\ldots\ldots 1+(n-1)x \qquad (\alpha)$

Los números formados por la adicion sucesiva de los términos de la progresion anterior se dicen *números figurados de segundo órden*:

$1,\quad 2+x,\quad 3+3x,\quad 4+6x, \qquad (\beta)$

La adicion sucesiva de los términos de esta última série nos dá los *números figurados de tercer órden.*

$1,\quad 3+x,\quad 6+4x,\quad 10+10x \qquad (\Delta)$

y así sucesivamente se definen los números figurados de los órdenes siguientes.

Números figurados de primer órden. Suponiendo $x=0$, la progresion (α) se reduce á una série de números iguales á 1. Estos números se llaman *constantes.*

Suponiendo x igual á 1, 2, 3, 4, etc., las séries correspondientes y todos los números figurados, que se deducen de ellas, forman la primera clase, la segunda, la tercera, etc., de los números figurados de este órden.

Números figurados de segundo órden. Suponiendo $x=0$, la série (β) se reduce á la progresion por diferencia que sigue:

$\div 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,$ etc.

Suponiendo $x=1$, la misma série nos dará.....

$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad 21,\quad 28\ldots\ldots\frac{N^2+N}{2}$

Estos números se llaman *triangulares*; porque con las unidades que contiene cada uno puede formarse un triángulo equilátero.

Suponiendo $x=2$, se deduce la nueva série.....

$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad 25,\quad 36,\quad 49\ldots\ldots N^2$

Estos números se llaman *cuadrados*; porque con sus unidades, puede formarse la figura llamada cuadrado.

Suponiendo $x=3$, resulta la série que sigue.....

$1,\quad 5,\quad 12,\quad 22,\quad 35,\quad 51,\quad 70,$ etc.

Estos números se llaman *pentágonos*, puesto que con las unidades de cada uno puede formarse un polígono de cinco lados ó sea un pentágono.

Del mismo modo, suponiendo x igual á 4, 5, 6 etc. resultarán los números *exágonos*, *eptágonos*, *octógonos*, etc.

Todos los números de este órden se llaman en general *números polígonos.*

Números figurados de tercer órden. Suponiendo x igual á 1, 2, 3, 4, etc. en la série (Δ) los números, que resultan, se llaman *números piramidales.*

Nota. En el triángulo de Pascal (98) los números de la segunda línea, ó sean los números naturales, son *figurados de primer órden*, los de la siguiente son *figurados de segundo órden*, y así sucesivamente.

Antes del descubrimiento de la fórmula de Newton, se aplicaba la teoría de los números figurados á la determinacion de los coeficientes numéricos de la potencia de un binomio, pero hoy que por dicha fórmula se desenvuelven todas las cuestiones relativas á la elevacion á potencias de la manera mas completa y general, los números figurados, han perdido casi toda su importancia. No obstante es muy digna de notarse la conformidad de sus resultados y los de la fórmula de Newton en el triángulo de Pascal.

Descartes, Fermá y Montmort han descubierto las relaciones de todos los números polígonos con los cuadrados y la forma de la raiz de estos en todos los casos. La fórmula para convertir los triangulares en cuadrados es.. $\frac{1}{2}(N^2+N)\times 8+1$

Número de balas que forman las pilas de los parques de artillería.

*178. En los parques de artillería se disponen las balas en pilas, cuyas capas horizontales son triángulos equiláteros, cuadrados ó rectángulos.

Pila triangular (ó sea una pirámide triangular equilátera). Todas las capas horizontales de esta pila son triángulos equiláteros, cuyos lados van disminuyendo sucesivamente en una bala, desde la base hasta la capa superior, que consta de una sola bala. Es evidente que cada bala está sostenida por tres de la capa inferior, y el número de capas es igual al número de las balas del lado de la base.

Esto supuesto, el número de balas, en el caso de suponer N capas, será la suma de los números triangulares siguientes:

1.ª capa... 1 bala

2.ª......... $1+2$ balas

3.ª.......... $1+2+3$ balas

la........ N, $1+2+3+...N$

Luego la suma total, será

$$\frac{1^2+1}{2}+\frac{2^2+2}{2}+\frac{3^2+3}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{N^2+N}{2}$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{12}+\frac{N(N+1)}{4}=\frac{N(N+1)(N+2)}{6}$$

Pila cuadrangular (ó pirámide cuya base es un cuadrado). Todas las capas horizontales de esta pila son cuadrados, cuyos lados van disminuyendo sucesivamente en una bala desde la base hasta la capa superior, que consta de una sola bala. Es evidente que cada bala está sostenida por cuatro de la capa inferior, y el número de capas es igual al número de las balas del lado de la base.

Segun esto, el número total de balas en el caso de suponer N capas será la suma de los números cuadrados que siguen:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.+N^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Pila rectangular (ó prisma triangular que descansa sobre una cara lateral). Todas las capas horizontales de esta pila son rectángulos, cuyos lados van disminuyendo en una bala desde la base hasta la capa superior, que consta de una línea de balas. Cada bala está sostenida por cuatro de la capa inferior, y el número de capas es igual al número de balas del lado menor de la base.

De aquí se deduce, que, si la capa superior de una pila rectangular está compuesta de $d+1$ balas, la segunda tendrá $2(d+2)$, la tercera $3(d+3)$.... y la base (suponiendo N el número de capas) tendrá $N(d+N)$. Luego el número total de balas de esta pila será $d(1+2+3+\ldots.N)+1^2+2^2+3^2+\ldots.N^2$

ó lo que es lo mismo $\frac{Nd(N+1)}{2}+\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

donde N expresa las balas del lado menor de la base y $N+d$ las del lado mayor.

*179. Propongámonos ahora resolver la cuestion inversa, ó lo que es lo mismo, *conocido el número S de balas de una pila, hallar las que debe tener uno de los lados de su base.* Llamando N el número que se busca en la *pila triangular*, tendremos $S=\frac{N(N+1)(N+2)}{6}$ ó $6S=N(N+1)(N+2)$

y como el segundo miembro de esta última igualdad está comprendido entre N^3 y $(N+1)^3$ se deduce fácilmente que N será igual á la raiz cúbica entera de 6S.

Siendo la pila *cuadrangular*, resulta $3S=N^3+\frac{3}{2}N^2+\frac{1}{2}N$ y por consiguiente N será igual á la raiz cúbica entera de 3S.

Siendo la pila *rectangular*, la ecuacion... $6S=3Nd(N+1)+N(N+1)(2N+1)$ contiene dos incógnitas y la cuestion seria indeterminada; pero siendo arbitraria la relacion entre el lado mayor y el menor de la base, d será conocida, la ecuacion será determinada y su resolucion nos dará como antes el valor de N.

Ejercicios para las cuestiones relativas á la comparacion de desigualdad.

*180. *Hallar la edad de una persona* en el supuesto de que, disminuyendo 8 años de los dos tercios, el resto será mayor que cuatro; y de que, si al tercio de dicho número se añade 1 año, la suma será mayor que la diferencia entre la mitad del número de años que se pide y 4. [Mas de 18 años y menos de 30]

Resolver las inecuaciones de segundo grado que siguen:

$-3(x^2-6x+8)<0$ que dá $x<2$ y $x>4$ | $x^2-3x+7>0$ resulta para x, $\frac{0}{0}$

Hallar los valores de x, que conviertan el trinomio $6x-x^2-9$ en un número positivo ó negativo, es decir, mayor ó menor que cero. (Esta expresion no puede ser nunca positiva; pero será negativa para todo valor de x diferente de 3).

Siempre se verifica la desigualdad $3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2$ ó bien la $3(1+x^2+x^4)-(1+x+x^2)^2>o$ sean cualesquiera los valores positivos ó negativos de x.

¿Siendo positivos ó negativos los valores de x, y, se verificará siempre la igualdad $x^5+y^5-x^4y-y^4x>0$ ó bien $x^4(x-y)-y^4(x-y)>0$?

Demostrar que si $A'=\sqrt{AB}$ y $B'=\frac{2AB}{A+A'}$ se verificará que $\frac{B'-A'}{B-A}<\frac{1}{2}$

Suponiendo que desde el 17 al 30 de noviembre de un año cualquiera, el termómetro sube á las doce medio grado cada dia, y que el medio aritmético ó llámese diferencial de todas las observaciones es igual $12^\circ\frac{1}{4}$, *¿qué temperatura señalará el termómetro los dias* 17, 25, y 30? [9, 13 y $15\frac{1}{2}$ grados].

Si la diferencia de una progresion de cuatro términos es D, *y el producto de estos es* P; *hallar el primero.* Llamando x el primer término, y el producto de los extremos, será $x^2+3Dx=y^2$ $y^2+3D^2y=P$ de donde se deducirán cuatro valores para x.

La poblacion de un pais aumenta en la misma razon por espacio de cuatro años; suponiendo que en este tiempo haya aumentado en 4641 habitantes y que tuviese al principio 10000 *se pregunta la razon del aumento anual.* [1 : 10]

Si la suma de la términos de lugar par de una progresion por cociente de cuatro términos es S y la suma de los de lugar impar es s; determinar la progresion

$$\left[1.^\circ=\frac{s^3}{S^2+s^2} \quad \text{y} \quad Q=\frac{S}{s}\right]$$

Demostrar que el límite de la suma de las fracciones $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+$etc. cuyos numeradores van en progresion aritmética, ó por diferencia, y sus denominadores en progresion por cociente, es 2. (Se descompone esta série en otras cuyos numeradores son la unidad).

¿Cuál es el número de balas de tres pilas, la una triángular, la otra cuadrangular, y la tercera rectangular, suponiendo 20 el número de capas de cada una y 25 las balas del lado mayor de la última? [1540, 2870 y 3920]

La suma de las potencias de cuarto grado de la série de los números naturales, llamando U el último término ó sea el número de ellos es la siguiente:

$$\frac{1}{30}(6U^5+15U^4+10U^3-U)$$

NOTAS DEL ALGEBRA.

Aplicaciones aritméticas.

Propiedades de los números. Fracciones continuas. Reglas de tres, compañía, interés, etc.

Ecuaciones de primer grado.

Eliminacion por el método de Bezout. Resolucion en números enteros de la ecuacion $Ax+By=C$

Ecuaciones de segundo grado.

Otra discusion de $x^2+Sx+P=o$ Resolucion y discusion de las ecuaciones de la forma $Ax^2+Bx+C=o$ y $Ax^{2n}+Bx^n+C=o$. Máximos y mínimos de las expresiones algebráicas.

Ecuaciones binomias.

Resolucion de algunas de estas ecuaciones.

NOTA I. APLICACIONES ARITMÉTICAS.

Propiedades de los números. Fracciones continuas. Reglas de tres, compañía, interés, etc.

Propiedades de los números.

***181.** La representacion algebráica ó general de un número entero cualquiera N en el sistema de numeracion cuya base es B, siendo sus cifras a, b, c, d, etc.; será el polinomio siguiente:

$$a+bB+cB^2+dB^3+\ldots\ldots \text{ etc.} \quad \text{ó bien} \quad a+B(b+cB+dB^2+eB^3+\ldots\ldots \text{ etc.})$$

de donde fácilmente se deduce la regla dada en aritmética para expresar un número en dos sistemas diferentes de numeracion; y tambien las condiciones de divisibilidad del mismo número por otro cualquiera.

Si se dividen dos números A *y* B *por un tercero* D, *el producto de los restos, dividido por* D, *dará el mismo resto que el producto de los números dados.*

Pues, si Q y Q′ son los cocientes, y R, R′ los restos de dividir A y B por D;

$$\text{tendremos} \quad A=DQ+R \quad \text{y} \quad B=DQ'+R'$$

de donde se deduce $AB=D^2QQ'+RDQ'+DQR'+RR'$

El producto de dos números es 864 *y su mayor divisor comun es* 6 *¿cuáles son estos números?*

De la ecuacion $6x\times6y=864$ se deduce $x\times y=24$; y por consiguiente los números, que se piden, serán 18 y 48 ó bien 144 y 6.

Dividir el número 144 *en otros tres desiguales cuyo* m. c. d. *sea* 12.

$$12x+12y+12z=144 \quad \text{ó bien} \quad x+y+z=12$$

dando ahora á x, y, valores arbitrarios pero desiguales y primos entre sí; tendremos los correspondientes de z, formando de este modo las seis soluciones que resultan de multiplicar por 12, los números de la siguiente tabla.....

$x=1$	$x=1$	$x=1$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$	$y=3$	$y=4$
$z=9$	$z=8$	$z=7$	$z=6$	$z=7$	$z=5$

Hallar dos números cuya suma sea 240 y su mínimo múltiplo comun 1768.

$D\times Q\times Q'=1768$ $x+y=240$	$x=D\times Q,\quad y=D\times Q'$	$\frac{x}{1768}=\frac{1}{Q'},\quad \frac{y}{1768}=\frac{1}{Q}$
$\frac{30}{221}=\frac{Q+Q'}{Q\times Q'}$	$Q+Q'=30$ y $QQ'=221$	luego $z^2-30z+221=0$ (**137**)

de donde resulta $Q=13,\quad Q'=17,\quad D=8,\quad x=104,\quad y=136$

***182**. *Determinar si el número entero N es primo ó compuesto.*

Si N es primo y se suma con los cuadrados de los números naturales 1, 2, 3..... etc., el resultado solo será un cuadrado perfecto añadiéndole el cuadrado de la mitad de $(N-1)$

En efecto, si se ha de verificar $N+A^2=B^2$ ó bien $N=(B+A)\times(B-A)$ y N es primo; necesariamente $B-A$ será 1, lo que dá $N=B+A$ y $A=\frac{N-1}{2}$ El cuadrado de este número es pues el único que sumado con N produce un cuadrado perfecto.

Luego, para saber si un número es ó no es primo, se suma sucesivamente con los cuadrados de los números naturales desde 1 hasta $\frac{1}{2}(N-1)$ y si únicamente la última suma es cuadrado perfecto, el número dado será primo; en otro caso no lo será.

En la práctica se abrevia la operacion añadiendo sucesivamente, la diferencia de los cuadrados de los números naturales ó sea la série de los números impares 1, 3, 5, 7, 9, etc.

El número 17 es primo, puesto que en la suma de 17 y los cuadrados de 1, 2, 3, etc. hasta 8, únicamente esta última es un cuadrado. Por el contrario, 91 no es primo, porque $91+3^2=100=10^2$ Los factores de 91 se determinan así $91=10^2-3^2=(10+3)\times(10-3)=13\times7$

Inútiles han sido hasta ahora todos los esfuerzos de los matemáticos para hallar la fórmula general de los números primos; sin embargo, son notables entre otras las siguientes:

$$x^2+x+17 \qquad 2x^2+29 \qquad x^2+x+41$$

pues suponiendo en ellas $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, etc..... la primera nos dá 17 números primos, la segunda 29 y 40 la tercera.

Fermá creyó que la fórmula 2^x+1, suponiendo x igual á los términos de la série 1, 2, 4, 8, 16, etc. daba siempre números primos; pero Euler obtuvo para $x=32$, el número 4294967297 que es múltiplo de 641. El número primo mayor conocido hasta ahora, segun el mismo Euler, es el valor de $2^{31}-1$

Fermá, Wilson, Legendre y otros han escrito muchos volúmenes sobre las propiedades de los números en general y muy particularmente sobre los números primos, descubriendo teoremas y fórmulas muy importantes bajo el punto de vista de los adelantos y del progreso de la ciencia, pero de poca utilidad en sus aplicaciones. Vamos á exponer sin embargo, siquiera sea brevemente, algunas de estas fórmulas y teoremas, mas bien como objeto de curiosidad que por las ventajas que resulten de su estudio.

Si n *es un número primo* y x *un número cualquiera no divisible por* n, *la expresion* $x^{n-1}-1$ *será divisible por el número* n (Fermá).

Si n *es un número primo, el producto* 1.2.3..... $(n-1)+1$ *será divisible por* n (Wilson).

En la série de los números naturales 1,2,3..... *hasta* N *se hallan comprendidos los números primos, que expresa la siguiente fórmula.....*

$$x=\frac{N}{2{,}302585.\ \log.\ N-1{,}08366} \quad \text{(Legendre).}$$

Si 2^n-1 *es primo, el producto* $2^{n-1}(2^n-1)$ *será un número perfecto. El número perfecto mayor conocido es* $2^{30}(2^{31}-1)$ *ó sea* 2305843008139952128

*183. La forma general de las expresiones conocidas bajo el nombre de FRACCIONES CONTÍNUAS es la siguiente.....

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

donde a, b, c, d..... son números enteros y positivos que se llaman *cocientes incompletos*. El valor de a puede sin embargo ser cero (*).

Las fracciones contínuas se aplican generalmente á la determinacion de los valores aproximados de las fracciones ordinarias irreducibles, y tambien sirven para hallar los valores aproximados de algunas expresiones incomensurables.

Propongámonos hallar en fraccion continua el valor de una expresion X *comensurable ó incomensurable.*

Siendo a el número de unidades que contiene x, será $x=a+\frac{1}{y}$ (y es >1)

Llamando b las unidades contenidas en y, será $y=b+\frac{1}{z}$ (z es >1)

Siendo c las unidades de z, resulta $z=c+\frac{1}{u}$; y así sucesivamente.

Sustituyendo pues en vez de y, z, u, etc. sus valores respectivos, tendremos la fraccion contínua equivalente á x, que es la siguiente:

$$x=a+\frac{1}{y}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{z}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{u}}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

APLICACIONES:

1.ª *Hallar la fraccion continua equivalente á* $\frac{M}{N}$

Llamando C el cociente y R el resto de dividir M por N; y C′ el cociente y R′ el resto de dividir N por R; tendremos.....

$$\frac{M}{N}=C+\frac{R}{N}=C+\cfrac{1}{\cfrac{N}{R}} \qquad \frac{N}{R}=C'+\frac{R'}{R}=C'+\cfrac{1}{\cfrac{R}{R'}}$$

Dividiendo R por R′ y llamando C″ al cociente y R″ al resto; y dividiendo despues R′ por R″, y llamando C‴ al cociente y R‴ al resto; resultará.....

$$\frac{R}{R'}=C''+\frac{R''}{R'}=C''+\cfrac{1}{\cfrac{R'}{R''}} \qquad \frac{R'}{R''}=C'''+\frac{R'''}{R''}=C'''+\cfrac{1}{\cfrac{R''}{R'''}}$$

Continuando las divisiones del mismo modo, es evidente que, se llegará á un resto cero, puesto que, estos van disminuyendo en una unidad ó en mas de una unidad. Suponiendo $R'''=o$ y sustituyendo en $\frac{M}{N}$ el valor de $\frac{N}{R}$, y en este el de $\frac{R}{R'}$ etc.; tendremos las fraccion contínua equivalente á la fraccion propuesta.

$$\frac{M}{N}=C+\cfrac{1}{C'+\cfrac{1}{C''+\cfrac{1}{C'''}}}$$

Luego, para reducir una fraccion ordinaria á fraccion contínua, se halla el m. c. d. de sus dos términos, y los cocientes de esta operacion son los cocientes incompletos de la fraccion contínua que se busca.

Si la fraccion dada es mayor que la unidad, el primer cociente será la parte entera de la fraccion contínua; y si es menor que la unidad, la fraccion continua no tendrá parte entera.

(*) Cada uno de los cocientes incompletos con el resto de la fraccion continua, se llama *cociente completo*.

El m. c. d. de los dos términos de $\frac{381}{266}$ nos dá los cocientes 1, 2, 3, 5 y 7; luego

$$\frac{381}{266}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\frac{1}{7}}}}$$

El m. c. d. de los dos términos de $\frac{25}{261}$ nos dá los cocientes 10, 2, 3, 1 y 2;

$$\frac{25}{261}=\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

Para efectuar las operaciones indicadas en los segundos miembros de estas expresiones ó, lo que es lo mismo, para hallar el valor de una fraccion contínua limitada, como por ejemplo la primera de las dos anteriores, se suma 5 y $\frac{1}{7}$, se divide la unidad por esta suma, se añade 3 al cociente, se divide nuevamente la unidad por esta suma y asi se continúa, hasta llegar á la fraccion ordinaria que se busca.

2.ª *Reducir á fraccion contínua la expresion irracional* $\sqrt{2}$

Suponiendo $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$ resulta $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}=2+\frac{1}{y}$ (siendo $y>1$) luego $\sqrt{2}=1+\frac{1}{y}$ y por consiguiente $x=y$ de donde $x=2+\frac{1}{x}$

Sustituyendo ahora en el quebrado $\frac{1}{x}$ en vez de x su valor $2+\frac{1}{x}$; y haciendo lo mismo en este último resultado etc., tendremos reducida á fraccion contínua la cantidad incomensurable $\sqrt{2}$, siendo infinito el número de cocientes incompletos.

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

$$\sqrt{10}=3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\dots}}}}$$

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\dots}}}$$

3.ª *Reducir á fraccion continua el valor de* x *en la expresion* $b^x=y$ *en el caso particular* $10^x=2$

El valor de x se halla entre 0 y 1; luego $x=\frac{1}{y}$ (siendo $y>1$) y por consiguiente, de $10^x=2$ se deduce $10=2^y$

El valor de y se halla entre 3 y 4; luego $y=3+\frac{1}{z}$ y sustituyendo este valor en $10=2^y$; tendremos fácilmente $\left(\frac{5}{4}\right)^z=2$ pero z se halla comprendido nuevamente entre 3 y 4, luego será $z=3+\frac{1}{u}$

La sustitucion de este valor en la fórmula anterior, nos dará $\left(\frac{128}{125}\right)^u=\frac{5}{4}$ de donde resulta $u=9+\frac{1}{t}$; y así sucesivamente: luego.... la fraccion contínua que expresa el log. de 2 será

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\dots}}}$$

De lo que llevamos dicho se deducen las consecuencias siguientes:

La fraccion contínua equivalente á un número comensurable es limitada, y la equivalente á un número incomensurable es ilimitada; y recíprocamente.

184. Las unidades fraccionarias, cuyos denominadores son los cocientes incompletos de una fraccion contínua, se llaman *fracciones integrantes*, y las fracciones ordinarias equivalentes á las fracciones contínuas con uno, dos, tres..... ó en general un número determinado de cocientes incompletos, se llaman *fracciones reducidas* y tambien *fracciones convergentes.*

Las propiedades mas notables de las fracciones reducidas son las siguientes:

1.ª *Una cualquiera de las fracciones reducidas se forma multiplicando los dos términos de la anterior por el cociente incompleto correspondiente, y añadiendo respectivamente á estos productos, los dos términos de la reducida, que le precede en dos lugares.*

En efecto, si la fraccion contínua es $N=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots\ldots}}}$ tendremos para sus reducidas:

$$1.^a\quad a=\frac{a}{1}\qquad 2.^a\quad a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}\qquad 3.^a\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$$

$$4.^a\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}=\frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b}$$

Falta probar ahora que esta ley de formacion de las reducidas es general

Si suponemos $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, $\frac{S}{S'}$ cuatro reducidas consecutivas cualesquiera, cuyos cocientes incompletos llamaremos p, q, r, s, y admitimos que la tercera se forme con arreglo á la propiedad enunciada arriba, vamos á demostrar que tambien la cuarta se formará del mismo modo.

En efecto, siendo $\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$ para formar la reducida $\frac{S}{S'}$ bastará añadir al cociente incompleto anterior r, la fraccion $\frac{1}{s}$ correspondiente á la reducida que buscamos, en cuyo caso tendremos

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{\left(Qr+P\right)s+Q}{\left(Q'r+P'\right)s+Q'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'}$$

Luego, si el teorema es cierto para las tres reducidas primeras (segun hemos visto arriba), lo será tambien para la 4.ª y por consiguiente para la 5.ª, 6.ª etc.

Sustituyendo en una de las reducidas en vez del cociente incompleto el cociente completo, que le corresponde, se tendrá el valor exacto de la fraccion contínua total, ó sea del número N.

Las fracciones reducidas de la contínua equivalente á 3,14159, cuyos cocientes incompletos son 3,7,15,1,25,1,7 y 4 son las siguientes:

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{9208}{2931},\ \frac{9563}{3044},\ \frac{76149}{24239},\ \frac{314159}{100000}$$

2.ª *La diferencia de dos reducidas consecutivas es igual á una unidad fraccionaria positiva ó negativa, cuyo denominador sea el producto de sus denominadores.*

Siendo $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ tres reducidas consecutivas, resulta $\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{Q'P'}$

$$\text{y tambien}\quad \frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{(Q'r+P')Q'}=\frac{PQ'-QP'}{R'Q'}$$

luego, si los numeradores de dos diferencias consecutivas son iguales y de signo contrario, y la diferencia entre las reducidas primera y segunda es $\frac{1}{b}$, la diferencia entre las reducidas segunda y tercera tendrá por numerador -1, la diferencia siguiente tendrá $+1$; y así sucesivamente. El denominador es siempre igual al producto de los denominadores de las reducidas propuestas (*).

Cor. De la igualdad $PQ'-QP'=\pm 1$ se deduce que P y P' son números primos entre sí, lo mismo que P y Q, y tambien P' y Q'; luego...

Las fracciones reducidas son siempre irreducibles;

Los numeradores de dos reducidas consecutivas son números primos entre sí, verificándose lo mismo respecto de los denominadores;

Si una fraccion contínua es igual á otra fraccion ordinaria, que no sea irreducible, la última reducida de la fraccion contínua es la fraccion ordinaria completamente simplificada ó sea irreducible.

3.ª *El valor* N *de una fraccion continua está comprendido entre dos reducidas consecutivas cualesquiera.*

En efecto; conservando la notacion anterior, es evidente que la primera reducida $\frac{a}{1}$ es menor que N pues se desprecia la cantidad $\frac{1}{b+\ldots\ldots}$. La segunda reducida $a+\frac{1}{b}$ es mayor que N, porque el denominador b es menor que el denominador completo $b+\frac{1}{c+\ldots\ldots}$; luego N está comprendido entre las reducidas primera y segunda. Lo mismo demostrarémos que se halla entre la segunda y tercera; y así sucesivamente (**).

Otra demostracion de este mismo teorema:

Siendo $\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$ y sustituyendo por r el cociente completo $r+\frac{1}{s+\ldots}=y$ tendremos $N=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}$ | $y(Q'N-Q)=P-P'N$ | $Q'y\left(N-\frac{Q}{Q'}\right)=P'\left(\frac{P}{P'}-N\right)$ (Δ)

luego si N es mayor que $\frac{Q}{Q'}$ será menor que $\frac{P}{P'}$ y al contrario, pues de otro modo resultarian los dos miembros de la última igualdad con signos diferentes.

De este teorema se deducen las nuevas propiedades siguientes:

Una reducida cualquiera se aproxima mas á la fraccion contínua que la reducida anterior; y por consiguiente, las reducidas de lugar par son mayores y las de lugar impar son menores que la fraccion contínua.

Pues siendo $y>1$ y $Q'>P'$ será $Q'y>P'$; luego para que la igualdad [Δ] sea exacta, es preciso que el valor absoluto de $N-\frac{Q}{Q'}$ sea menor que el de $\frac{P}{P'}-N$

Y por consiguiente, las reducidas de lugar par forman una série decreciente y las de lugar impar otra creciente.

Tomando una reducida por valor de la fraccion contínua, el error es menor que 1 *dividido por el producto de los denominadores de dicha reducida y la siguiente*; pues la diferencia entre la fraccion contínua y cualquiera de las dos reducidas será siempre menor que la diferencia entre estas que es $\frac{1}{PQ}$

Siendo $Q'>P'$ y por consiguiente $P'Q'>P'^2$ se deduce què, *el error que se comete tomando por valor de una fraccion continua una reducida cualquiera es menor que* 1 *dividido por el cuadrado del denominador de esta reducida*; luego, para hallar una reducida que se diferencie de la fraccion continua en menos de $\frac{1}{\alpha}$ se continúa la formacion de las reducidas hasta hallar una cuyo denominador sea igual ó mayor que $\sqrt{\alpha}$

(*) El numerador será $+1$, si la reducida minuendo ocupa el lugar par, y -1 si el impar.

(**) Si la fraccion continua es limitada, entonces la última reducida es igual á dicha fraccion

*185. Fracciones continuas periódicas. Se llaman así las fracciones contínuas en las cuales se repiten periódica é indefinidamente uno ó mas cocientes incompletos. El número de estos cocientes es el *periodo*, y la fraccion se llama *pura*, si el periodo empieza desde el primer cociente incompleto, y *mista* en otro caso.

Toda fraccion continua periódica es una de las raices de una ecuacion de segundo grado de coeficientes comensurables.

Llamando x la fraccion contínua periódica pura y $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ las reducidas correspondientes á los dos últimos cocientes incompletos d y e del primer periodo; tendremos $x=\frac{Ex+D}{E'x+D'}$ de donde se deduce $E'x^2+(D'-E)x-D=0$

Si la fraccion continua es periódica mista; y llamamos $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$ las reducidas anteriores al primer periodo que supondremos el mismo que anteriormente, resultará $y=\frac{Qx+P}{Q'x+P'}$ y tambien segun el caso anterior $x=\frac{Ex+D}{E'x+D'}$

Eliminando á x en estas dos ecuaciones, resulta otra de segundo grado y con coeficientes racionales.

La recíproca de esta importante proposicion es tambien verdadera, y por consiguiente *las raices inconmensurables de una ecuacion de segundo grado de coeficientes racionales se pueden expresar por una fraccion continua periódica* (*).

Reglas de tres, compañia etc., aligacion é interés. Problemas sobre las poblaciones.

---

186. Regla de tres. Siendo A, B, C, D, E los valores numéricos de varias cantidades de las cuales depende otra K, y cuyo valor V es conocido; las fórmulas para determinar un nuevo valor x de la cantidad K correspondiente á las valores a, b, c, d, e de que depende, serán las dos siguientes;

$$x=\frac{V\times a.b.c.d.e}{A\times B\times C\times D\times E} \qquad x=\frac{V\times D\times E\times a.b.c}{d.e\times A.B.C}$$

suponiendo en la primera que la cantidad K es directamente proporcional á cada una de las otras; y en la segunda que K es directamente proporcional con A, B y C, é inversamente proporcional con D y E.

Seis hombres en 8 dias trabajando 10 horas al dia han transportado 100 fanegas; 12 hombres en 2 dias trabajando 15 horas al dia. *¿cuántas fanegas transportarán?* 2.° Un correo caminando 15 horas diarias anda 65 miriámetros en 12 dias, *se pregunta cuántas horas necesita emplear cada dia para andar* 80 *miriámetros en* 20 *dias*.

$$x=\frac{100\times 12\times 2\times 15}{6\times 8\times 10}=75 \text{ fanegas} \qquad x=\frac{15\times 12\times 80}{20\times 65}=11 \text{ horas... } 5 \text{ minutos.}$$

187. Regla de compañía. *Dividir el número* N *en partes proporcionales á los números* a, b, c etc.

Llamando x, y, z etc., las incógnitas del problema, tendremos

$a+b+c+\ldots : x+y+z+\ldots :: a : x :: b : y :: c : z$ de donde se deduce

$$x=\frac{a\times N}{a+b+c+\ldots} \qquad y=\frac{b\times N}{a+b+c+\ldots} \qquad z=\frac{c\times N}{a+b+c+\ldots}$$

(*) Véase su demostracion debida á Gérono en los Nouvelles Annales de Mathématiques (t. 1.°, pág. 13). Lagrange ha sido el primero que ha demostrado este teorema.

De otro modo:

$x+y+z+.....=N \qquad \frac{x}{y}=\frac{a}{b}, \frac{x}{z}=\frac{a}{c}$ ó bien $y=\frac{b}{a}x, \quad z=\frac{c}{a}x$

cuya sustitucion, en la ecuacion primera, nos dá para x la fórmula hallada antes.

Otro modo: Los números que se buscan son entre sí como los números dados $a, b, c...$; es decir que equivalen á estos multiplicados por α; en cuyo supuesto tendremos.....

$a\alpha+b\alpha+c\alpha+...=N$ de donde se deduce para x, la misma fórmula anterior.

Dividir el número G *en otros tres* x, z, y *directamente proporcionales á los productos* $A\times a$, $B\times b$ y $C\times c$

$$x=\frac{A\times a\times G}{Aa+Bb+Cc} \qquad z=\frac{B\times b\times G}{Aa+Bb+Cc} \qquad y=\frac{C\times c\times G}{Aa+Bb+Cc}$$

Suponiendo conocidos los valores de x, z, y; tendremos...

$$A=\frac{x(Bb+Cc)}{a(G-x)} \qquad B=\frac{z(Aa+Cc)}{b(G-z)} \qquad C=\frac{y(Aa+Bb)}{c(G-y)}$$

Del mismo modo se deducen las fórmulas, que determinan los valores de a, b, c en funcion de A, B, C, x, z, y

188. Regla de aligacion. Suponiendo mezcladas A, B, C unidades de una sustancia cualquiera y cuyos precios son a, b, c; el *precio medio* se determinaá por la fórmula:

$$m=\frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C} \text{ de donde se deduce } A=\frac{B(b-m)+C(c-m)}{m-a} \quad a=\frac{m(A+B+C)-Bb-Cc}{A}$$

Se han mezclado 20 litros de vino, cuyo precio no se conoce, con 10 de á 12 reales, y *se desea saber el precio de los primeros* vendida la mezcla á 15 reales. La sustitucion correspondiente en la última fórmula nos dará el número $16^1/_2$.

189. Interés simple. La fórmula para resolver todas las cuestiones de interés simple es la siguiente $\quad$ *interés total*$=\frac{\text{Capital}\times\text{tanto}\times\text{tiempo}}{100}$

Llamando C al capital, R su interés, $100r$ el tanto p°/₀ ó sea r el interes de la unidad, y t el tiempo, deducirémos con facilidad las siguientes fórmulas, cuya expresion logarítmica y su traduccion al lenguaje ordinario, son muy convenientes en la práctica

$$R=C\times r\times t \quad \Big| \quad C=\frac{R}{r\times t} \quad \Big| \quad 100r=\frac{100R}{C\times t} \quad \Big| \quad t=\frac{R}{C\times r}$$

Suponiendo que 1800 pesos de capital han producido durante 2 años y 3 meses 8545 reales; averiguar el tanto por 100 de utilidades.

La fórmula, log. $100r$=log. R+c.^{to} log. C+c.^{to} log. t—18

nos dará por solucion de este problema el número 10 y medio, aproximadamente.

190. Interes compuesto. El verdadero interés que produce una cantidad prestada durante un tiempo determinado t, no puede ser simple, puesto que cada unidad de dinero produce interés durante todos los instantes del tiempo t, y por consiguiente, se comprende con facilidad que el interés verdadero ó compuesto es menor que el llamado interés simple, cuando el tiempo es menor de 1 año; y mayor cuando el tiempo es mayor que 1 año.

La fórmula $C=c(1+r)^t$ deducida en la Aritmética para el caso en que t fuese un número entero, es general sea cualquiera el valor de t, como lo vamos á demostrar suponiendo t igual á un número fraccionario, por ejemplo $\frac{m}{n}$

Llamando x el interés de la unidad en el tiempo $\frac{1}{n}$, el interés de c en el mismo tiempo será cx, y el capital c se convertirá en $c+cx=c(1+x)$

Si el tiempo es $\frac{2}{n}$ ó duplo del anterior, el valor de c será $c(1+x)^2$; si es triplo, tendremos $c(1+x)^3$; si es cuádruplo $c(1+x)^4$ y en general al cabo del tiempo $\frac{m}{n}$, resultará $C=c(1+x)^m$ (α)

Pero el capital c en el tiempo $\frac{n}{n}$ ó sea un año se convierte en $c(1+x)^n$; y por otra parte el mismo capital en el mismo tiempo vale $c(1+r)$ supuesto que, r es el interés de la unidad durante un año; luego tendremos

$$c(1+x)^n=c(1+r) \quad \text{de donde se deduce} \quad 1+x=(1+r)^{\frac{1}{n}}$$

cuya sustitucion en (α) nos dará la generalidad de la fórmula deducida en la Aritmética para un número exacto de años.

De la fórmula general $C=c(1+r)^t$ (*), se deducen las siguientes:

$$C=c(1+r)^t \qquad c=\frac{C}{(1+r)^t} \qquad 1+r=\sqrt[t]{\frac{C}{c}} \qquad t=\frac{\log. C-\log. c}{\log. (1+r)}$$

$$\log. C=\log. c+t \log. (1+r) \qquad \log. c=\log. C-t \log. (1+r)$$

Una persona, que ha adelantado 12000 duros al 10 p°/₀ sobre una finca, se queda dueño de ella á los 5 años: *¿cuál es su valor efectivo?*

191. *Añadiendo á las condiciones ordinarias de las cuestiones sobre interés compuesto, que el capital total sea duplo, triplo, cuádruplo ó en general* n *veces el primitivo*, la fórmula primera de las anteriores, nos dará las siguientes:

$$n=(1+r)^t \qquad \log. n=t \log. (1+r) \qquad t=\frac{\log. n}{\log. (1+r)} \qquad \log. (1+r)=\frac{\log. n}{t}$$

De la aplicacion de la tercera de estas fórmulas á la determinacion del tiempo necesario para que un capital, sea el que quiera, se duplique al 5°/₀, se deduce por solucion general 14 años..... 2 meses..... 14 dias.

2.° *Si á un capital, que gana interés compuesto, se añade anualmente otro igual durante un tiempo determinado, la fórmula que determina la suma total de todos los capitales y sus intereses compuestos, será.....*

$$\log. C=\log. c+\log. (1+r)+\log. [(1+r)^t-1]+\text{comp. } \log. r-10$$

En efecto; el capital primitivo durante t años, nos dará. . . . $c(1+r)^t$; el 2.° durante un año menos $c(1+r)^{t-1}$; el 3.° $c(1+r)^{t-2}$ y así sucesivamente; luego el total será la suma de todos estos resultados, es decir.....

$$C=c(1+r)^t+c(1+r)^{t-1}+c(1+r)^{t-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots c(1+r)$$

ó bien $\quad C=c(1+r)\left[1+(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+\ldots\ldots (1+r)^{t-1}\right]$

de donde se deduce fácilmente la fórmula final.

Conociendo tres cualesquiera de las cantidades C, c, r, t, se determina la cuarta, resolviendo la ecuacion correspondiente; no obstante, el valor de r no es posible hallarlo con solo el auxilio de los logaritmos.

Una persona compra una finca en un millon de reales con la condicion de hacer el pago en 5 años por partes iguales, pero de tal modo que la suma de las cinco anualidades y sus intereses compuestos sea 1000000 rs. Se *desea averiguar la cantidad, que debe entregar anualmente durante los cinco años.*

Sustitúyanse en la fórmula siguiente los valores respectivos de C, r y t.

$$\log. c=\log. C+\log. r+\text{comp. } \log. (1+r)+\text{comp. } \log. [(1+r)^t-1]-20$$

(*) Capitalizando los intereses cada seis meses, esta fórmula se transforma en $C=c\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$

3.° *Se desea amortizar un capital* C, *que gana interés compuesto, pagando durante un tiempo determinado una cantidad anual* a.

La anualidad entregada el primer año, ó sea $t-1$ años antes de la amortizacion total del capital, vale al fin $a(1+r)^{t-1}$; la segunda $a(1+r)^{t-2}$ y así sucesivamente; y como el valor del capital C al cabo de t años, es igual á $C(1+r)^t$; tendremos..... $C(1+r)^t=a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+.....\ a(1+r)+a$

de donde se deduce la fórmula final..... $C=\dfrac{a(1+r)^t-a}{r(1+r)^t}$

$$\log. C=\log. a+\log. \left((1+r)^t-1\right)+\text{comp. log. } r+\text{comp. } t \log. (1+r)-20$$

En esta fórmula tiene lugar la misma observacion, que hemos hecho en la anterior, relativamente á la determinacion de cualquiera de las cantidades C, a, r y t, conocidas las demas.

Si un sugeto debe 10000 duros y se compromete á pagarlos con sus intereses compuestos en diez anualidades; *¿cuál será el valor de una anualidad suponiendo* 5 *el tanto por* 100?

La fórmula logarítmica de a deducida de la fórmula general anterior, nos dará el valor de cada anualidad.

Una persona deposita anualmente en una casa de comercio 4000 reales durante 20 años y *desea saber la renta, que le corresponde disfrutar durante los doce siguientes*, por las anualidades entregadas y sus intereses compuestos al 10 por ciento.

192. Regla de descuento. Supuesto que los intereses son proporcionales á los capitales en tiempos iguales, se puede establecer la siguiente proporcion....

$1 : (1+r)^t :: x : c$ de donde se deduce $x=c(1+r)^{-t}$

ó sea la fórmula que sirve para determinar el valor actual de una cantidad x, que al cabo de t años (sea t entero ó fraccionario) vale el capital c.

¿Qué suma se debe prestar hoy para recibir 7843 *duros dentro de* 14 *años, siendo el interés* 3,88? De la fórmula $\log. x=\log. 7843-14 \log. 1,0388$ resulta $x=4602$ duros.....18 rs..... 8 dec.

Hallar el descuento de 100 *rs. al* 5 $p^o/_o$ *siendo un año el plazo.*

De $x=100(1,05)^{-1}$ resulta $x=95,238$; luego el descuento será 4,762 reales.

Este mismo resultado se obtiene de la fórmula deducida en la Aritmética: de la cual resultan las siguientes para calcular el tanto, el tiempo, etc.

$$D=\frac{N\times Rt}{100+Rt}\qquad N=\frac{D(100+Rt)}{Rt}\qquad R=\frac{100\,D}{t(N-D)}\qquad t=\frac{100D}{R(N-D)}$$

Problemas sobre el aumento de la poblacion de un pais.

193. Siendo la poblacion de España de 16 millones de habitantes, y aumentando en $\frac{1}{30}$ todos los años *¿cuántos habitantes contará despues de un siglo?*

Llamando P á los 16 millones de habitantes, la fórmula que sigue nos dará la solucion del problema.....

$$P\times\left(\frac{31}{30}\right)^{100}=x \quad \text{ó bien} \quad \log. x=\log. P+100\,(\log. 31-\log. 30)$$

2.° Si la poblacion de dos estados es, de 20 millones de habitantes la del uno, y de 30 millones la del otro, suponiendo que la primera crece en $\frac{1}{200}$ cada año y la segunda en $\frac{1}{300}$ *¿en cuántos años las dos poblaciones serian iguales?*

$$20000000\times\left(\frac{201}{200}\right)^n=30000000\times\left(\frac{301}{300}\right)^n \quad \Big| \quad n=244 \text{ años y una fraccion.}$$

NOTA II. ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Resolucion de varias ecuaciones con igual número de incógnitas por el método de Bezout. Resolucion en números enteros de la ecuacion $Ax+By=C$

Resolucion de varias ecuaciones por el método de Bezout.

*194. Sean las dos ecuaciones generales $Ax+By=C$ y $A'x+B'y=C'$

Multiplicando los dos miembros de una de ellas por la cantidad indeterminada m, y restando la otra de la ecuacion que resulte, tendremos.....

$$(Am-A')x+(Bm-B')y=Cm-C' \qquad (\Delta)$$

Suponiendo en esta ecuacion que el valor de m sea tal que el coeficiente de la incógnita, por ejemplo y, que se desea eliminar, sea cero; tendremos.....

$Bm-B'=0$ de donde $m=\frac{B'}{B}$ cuyo valor sustituido en $(Am-A')x=Cm-C'$ nos dará $(AB'-BA')x=CB'-BC'$ y por consiguiente $x=\frac{CB'-BC'}{AB'-BA'}$

Conociendo el valor de x, una sencilla sustitucion en cualquiera de las ecuaciones dadas nos dará el valor de y; que tambien pudiera obtenerse directamente suponiendo en la ecuacion Δ, $Am-A'=o$ ó bien $m=\frac{A'}{A}$

2.° Propongámonos resolver las ecuaciones.....

$$Ax+Bz+Cy=D, \qquad A'x+B'z+C'y=D', \qquad A''x+B''z+C''y=D''$$

Multiplicando los dos miembros de la primera ecuacion por la cantidad indeterminada m, los de la segunda por n, sumando luego ambos resultados y restando de esta última ecuacion la tercera; resulta.....

$$(Am+A'n-A'')x+(Bm+B'n-B'')z+(Cm+C'n-C'')y=Dm+D'n-D''$$

El valor de cualquiera de las incógnitas de esta ecuacion se obtiene dando á m y n valores tales que reduzcan á cero los coeficientes de las otras dos. Proponiéndonos despejar á x; tendremos...

$$Bm+B'n-B''=o \qquad y \qquad Cm+C'n-C=o$$

de donde se deducen los valores de m y n cuya sustitucion en la ecuacion..... $(Am+A'n-A'')x=Dm+D'n-D''$ nos dará el valor de x.

Del mismo modo se pueden hallar los valores de las otras incógnitas, sustituyendo por m y n las fórmulas respectivas.

Ejemplos: Siendo las ecuaciones dadas $2y+10x=15$ $\quad 5y+4x-48=o$ tendremos $(2m-5)y+(10m-4)x=15m-48$

y eliminando á x, será $10m-4=o$ ó bien $m=\frac{2}{5}$

luego la ecuacion anterior tomará esta forma $\left(\frac{4}{5}-5\right)y=6-48$

de donde se deduce $y=10$ y por consiguiente $x=-\frac{1}{2}$

2.° Si las ecuaciones son $3x-5z-y=2$ $\quad 5x+z-10y=25$ $\quad z-2x=y-18$ y combinamos el método de Bezout con el de reduccion, el cálculo puede disponerse del modo siguiente:

$$(3m+5n+2)x+(n-5m)z+(1-m-10n)y=2m+25n+18$$

$$3m+5n+2=o \qquad\qquad 1-m-10n=o$$

$$\underline{-3m-30n+3=o}$$

$$-25n+5=o \quad \text{ó bien} \quad n=\frac{1}{5} \quad \text{de donde se deduce} \quad m=-1$$

cuya sustitucion en la ecuacion $(n-1-5m)z=2m+25n+18$ nos dará $z=5$

Del mismo modo, se hallarán lo valores 10 y 3 de las otras dos incógnitas.

Resolucion en números enteros de la ecuacion indeterminada $Ax+By=C$

*195. Suponiendo A, B y C números enteros positivos ó negativos y primos entre sí; vamos á demostrar los teoremas siguientes:

1.° *Si* A *y* B *no son primos entre sí, la ecuacion* $Ax+By=C$ *no tiene solucion en números enteros*; pues en otro caso, suponiendo α el factor comun de A y B, tambien lo seria de Ax y By; y por consiguiente de C; lo cual es contrario á la condicion de ser A, B y C números primos entre sí.

2.° *Si* A *y B son primos entre sí, la ecuacion* $Ax+By=C$ *tiene una solucion entera.*

En efecto, sustituyendo en $x=\frac{C-By}{A}$ en vez de y, los valores cero, 1, 2, 3... hasta A—1, y efectuando la division en cada caso, resultarán A restos diferentes y menores que A (*); luego uno de ellos será cero y por consiguiente tendremos un valor de y menor que A, que dá otro entero para x

3.° *Si* $Ax+By=C$ *tiene una solucion entera, tiene cuantas se quiera.*

Suponiendo α y β la solucion conocida, tendremos $A\alpha+B\beta=C$ y tambien $A(x-\alpha)+B(y-\beta)=o$ de donde resulta $x-\alpha=\frac{B(\beta-y)}{A}$ y como está última expresion no será entera si $\beta-y$ no es divisible por A (B y A son números primos); podemos suponer $\beta-y=A\varphi$ en cuyo caso seria $x-\alpha=B\varphi$: luego cualquiera que sea el valor entero positivo, nulo ó negativo de φ, los valores correspondientes de x, y, tambien enteros, verificarán la ecuacion propuesta. Si los valores consecutivos de φ, son 0, 1, 2, 3... etc., los de x formarán una progresion por diferencia (cuya diferencia será el coeficiente de y), y los valores de y formaran otra cuya diferencia negat. será el coeficiente de x.

Esto supuesto, propongámonos hallar las soluciones enteras de $5x-17y=103$

Despejando á la incógnita de menor coeficiente $x=\frac{103+17y}{5}=20+3y+\frac{3+2y}{5}$

y para que esta expresion sea entera supondremos.....

$\frac{3+2y}{5}=t$ ó bien $y=\frac{5t-3}{2}=2t-1+\frac{t-1}{2}$ | $\frac{t-1}{2}=t'$ ó sea $t=2t'+1$ y sustituyendo este valor de t en la fórmula de y, y el que resulte para y, en la fórmula de x; tendremos..... $y=5t'+1$ $x=17t'+24$ donde suponiendo t' igual 0, 1, 2, 3, 4... etc., resultarán cuantas soluciones se quiera para la ecuacion propuesta.

Soluciones positivas. Sean cualesquiera los signos positivos ó negativos de A, B, y C, la ecuacion indeterminada de primer grado con dos incógnitas tendrá siempre la forma $Ax+By=C$ (Δ) ó $Ax-By=C$ (Δ')

Suponiendo α y β una solucion entera de (Δ), las demas dependerán de $x=\alpha-B\varphi$ $y=\beta+A\varphi$; resultados positivos siempre que φ sea menor que $\frac{\alpha}{B}$ y mayor que $\frac{-\beta}{A}$; ó lo que es lo mismo siempre que los valores de φ estén comprendidos entre $-\frac{\beta}{A}$ y $-\frac{\beta}{A}+\frac{C}{AB}$

Si entre estos límites no hay ningun número entero la ecuacion propuesta no admite soluciones enteras positivas.

Siendo ahora α, β una solucion de (Δ'); las demas dependerán de $x=\alpha+B\varphi$, $y=\beta+A\varphi$ resultados positivos, si φ es mayor que $\frac{-\alpha}{B}$ y $\frac{-\beta}{A}$ luego la ecuacion $Ax-By=C$ admite infinitas soluciones positivas.

(*) Siendo iguales dos restos, resulta..... | $B(y'-y'')=A(Q'-Q)$
$C-By'=AQ+r$, $C-By''=AQ'+r$
y por consiguiente $B(y'-y'')$ seria divisible por A, lo que es absurdo, puesto que, B y A son primos entre si, y el factor $y'-y''$ es menor que A

NOTA III. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Discusion de la ecuacion $x^2+Sx+P=o$ sin conocer la forma de sus raices. Resolucion y discusion de $Ax^2+Bx+C=o$ en funcion de A, B, y C. Resolucion y discusion de $Ax^{2n}+Bx^n+C=o$. Máximos y mínimos de las expresiones algebráicas.

Discusion de la ecuacion general $x^2+Sx+P=o$, sin conocer la forma de sus raices.

***196.** La discusion de una ecuacion general tiene por objeto determinar la naturaleza y los signos de sus raices, segun los valores y signos de los coeficientes de la ecuacion.

En las ecuaciones de segundo grado reducidas á la forma $x^2+Sx+P=0$ y cuyos coeficientes S y P pueden ser positivos ó negativos, ó uno positivo y otro negativo, se verifican las propiedades siguientes:

1.ª *La* suma *de sus raices es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario*; *y el* producto *de las mismas raices es igual al tercer término.*

Llamando a una de las raices de la ecuacion $x^2+Sx+P=0$ y dividiendo el primer miembro por $x-a$, tendremos.....

$$(x^2+Sx+P):(x-a)=x+(a+S) \text{ cociente entero} \quad \text{resto } a^2+Sa+P \qquad (30)$$

pero a es raiz de la ecuacion, luego a^2+Sa+P será cero, y en tal caso la division anterior será exacta.

Recíprocamente, si el primer miembro x^2+Sx+P es divisible por $x-a$, $+a$ será raiz de la ecuacion.

Esto supuesto, siendo el primer miembro de la ecuacion dada, divisible por $x-a$, lo será tambien por el cociente $x+(a+S)$ de esta division, y por consiguiente, si $+a$ es raiz de la ecuacion, $-a-S$ tambien lo será.

Luego, si las dos raices de la ecuacion propuesta, son $+a$ y $-a-S$ la suma $+a-a-S=-S$ demuestra la primera parte del teorema, y el resto $a^2+aS+P=o$ que dá $a(-a-S)=P$ demuestra la segunda parte.

Esc. De la division anterior se deduce $x^2+Sx+P=(x-a)(x-a-S)$; es decir, que el primer miembro de una ecuacion de la forma $x^2+Sx+P=o$ es igual al producto de dos factores binomios, cuyo término comun es x, y el no comun cada una de las raices con signos contrarios.

Segun esto, la ecuacion cuyas raices son 6 y 2, será.....

$$(x-6)(x-2)=o \quad \text{ó bien} \quad x^2-8x+12=o$$

Suponiendo las raices 5 y $-\sqrt{2}$; la ecuacion seria.....

$$(x-5)(x+\sqrt{2})=o \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad x^2-5x+x\sqrt{2}-\sqrt{50}=o$$

Además, si las raices x' y x'' de una ecuacion de segundo grado son reales, se puede determinar el signo de cada una por los signos de los coeficientes de los términos de la ecuacion: Si el último término es negativo, las raices tienen signos contrarios, pues no de otro modo se verifica la condicion $x'\times x''=P$

El valor absoluto de la positiva será menor ó mayor que el de la negativa, segun que S sea positivo ó negativo, pues, de lo contrario, la suma..... $(+x')+(-x'')$ no seria igual á $-S$ en el primer caso y á $+S$ en el segundo.

Si el último término es positivo, ambas raices tienen un mismo signo, pero contrario siempre al que lleve el coeficiente S.

De la descomposicion del trinomio x^2+Sx+P en dos factores $(x-a)(x-a-S)$ se deducen los signos de los valores de un trinomio de la misma forma, cuando se dan valores particulares á la variable x. En efecto, siempre que los valores de x que reducen á cero el trinomio, son reales y desiguales, todo valor de x

comprendido entre ellos, dá para el trinomio un resultado de signo contrario al del coeficiente de su primer término; y todo valor de x no comprendido entre los dos anteriores, dá para el trinomio, un resultado del mismo signo que el del coeficiente de su primer término. 2.° Si los valores de x, que reducen á cero el trinomio, son iguales ó imaginarios, el trinomio será constantemente del mismo signo que el del coeficiente del primer término.

El trinomio $2x^2-5x+2=o$ que se reduce á cero siendo $x=2$ y $x=\frac{1}{2}$; será positivo para todos los valores de x mayores que 2 y menores que $\frac{1}{2}$; y será negativo para los valores de x menores que 2 y mayores que $\frac{1}{2}$

Del mismo modo, los trinomios x^2-4x+4 y x^2+3x+3 serán siempre positivos ó mayores que cero, sean cualesquiera los valores de x.

2.ª *Si la ecuacion* $x^2+Sx+P=o$ *tiene sus dos raices reales y desiguales, el tercer término será menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, y su primer miembro será la diferencia de dos cuadrados. Si las raices son reales é iguales, el tercer término será igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo y su primer miembro será un cuadrado.*

En efecto, si llamamos R y R′ las dos raices reales y desiguales; en virtud del teorema anterior, tendremos $R+R'=-S$ y $RR'=P$, cuya sustitucion en la ecuacion propuesta nos dará.....

$$x^2-(R+R')x+RR'=o \qquad (\alpha)$$

pero $4RR'=(R+R')^2-(R-R')^2$ luego tambien $RR'<\frac{1}{4}(R+R')^2$

Sustituyendo ahora en la ecuacion (α) en lugar de RR′ su valor, deducido de la igualdad última, quedará transformado su primer miembro en la diferencia de los cuadrados de $x-\frac{1}{2}(R+R')$ y $\frac{1}{2}(R-R')$

Siendo las raices reales iguales á R, será $2R=-S$ y $R^2=P$ y por consiguiente, la ecuacion primitiva tomará la forma..... $x^2-2Rx+R^2=o$ donde evidentemente se verifican las condiciones del enunciado en este supuesto.

3.ª *Si la ecuacion* $x^2+Sx+P=o$ *tiene la raiz imaginaria* $a+b\sqrt{-1}$, *tambien tiene la raiz* $a-b\sqrt{-1}$ *conjugada de la primera. En este caso, el tercer término será mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, y su primer miembro será la suma de dos cuadrados.*

Siendo $a+b\sqrt{-1}$ raiz de la ecuacion, se verificará la igualdad

$$(a+b\sqrt{-1})^2+S(a+b\sqrt{-1})+P=o$$

ó bien $(a^2-b^2+Sa+P)+(2ab+Sb)\sqrt{-1}=o$

de donde se deducen $a^2-b^2+Sa+P=o$ y $2ab+Sb=o$

Sustituyendo en la misma ecuacion $a-b\sqrt{-1}$ ó sea $a+b\times-\sqrt{-1}$ en vez de x, tendremos..... $(a^2-b^2+Sa+P)-(2ab+Sb)\sqrt{-1}=o$ y como a^2-b^2+Sa+P es cero y tambien $2ab+Sb$; el último resultado es cero, y la cantidad $a-b\sqrt{-1}$, que satisface á la ecuacion, será su raiz.

Lo mismo se demuestra que, si $a-b\sqrt{-1}$ es raiz de la ecuacion, lo será igualmente su conjugada $a+b\sqrt{-1}$

Siendo ahora $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$ las dos raices imaginarias de la ecuacion; será $2a=-S$ y $a^2+b^2=P$; luego la ecuacion tomará la forma $x^2-2ax+a^2+b^2=o$ donde se verifica la segunda parte del teorema.

Esc. general. Las proposiciones ó teoremas recíprocos de los anteriores son verdaderos y fáciles de demostrar por reduccion al absurdo; por consiguiente...

Segun que el tercer término de la ecuacion $x^2+Sx+P=o$ *sea menor, igual ó mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, así las raices de la ecuacion serán reales y desiguales, reales é iguales, ó imaginarias.*

*197. La discusion de la ecuacion general $x^2 \pm Sx \pm P=o$ sin el conocimiento de la forma de sus raices, que nos daria la resolucion de la ecuacion, presenta los mismos resultados, que hemos deducido anteriormente (**138**).

En efecto, la ecuacion general, puede reducirse á las cuatro siguientes:

$$x^2+Sx-P=o \qquad x^2-Sx-P=o \qquad x^2+Sx+P=o \qquad x^2-Sx+P=o$$

Discusion de la 1.ª Siendo evidentemente $-P<\frac{1}{4}S^2$, las dos raices son reales y desiguales; y como su producto es negativo, una será positiva y otra negativa; y como la suma de las dos es $-S$, la negativa tendrá mayor valor cuantitativo ó absoluto.

Discusion de la 2.ª Siendo $-P<(-\frac{1}{2}S)^2$, las dos raices son reales y desiguales; verificándose como en el caso anterior que una será positiva y otra negativa; y como la suma de las dos es $+S$, la positiva tendrá mayor valor cuantitativo.

Discusion de la 3.ª Si $P<\frac{1}{4}S^2$ las raices son reales y desiguales. Como su producto es positivo, las dos tendrán un mismo signo; pero la suma de ellas es $-S$, luego las dos serán negativas.

Si $P=\frac{1}{4}S^2$ las raices son reales é iguales, y como la suma es $-S$, cada una será igual á la mitad de S

Si $P>\frac{1}{4}S^2$ las dos raices son imaginarias de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$

Discusion de la 4.ª Siendo $P<\frac{1}{4}S^2$ las dos raices serán reales y desiguales, pero positivas.

Si $P=\frac{1}{4}S^2$ las dos serán iguales á $\frac{1}{2}S$; y si $P>\frac{1}{4}S^2$ las dos serán imaginarias de la misma forma que anteriormente.

Aplicacion á varios ejemplos:

$x^2+3x-10=o$ { sus dos raices son reales, una positiva y otra negativa, teniendo la negativa mayor valor cuantitativo.

$x^2-3x-10=o$ { aqui ambas raices son reales, una positiva y otra negativa teniendo la positiva mayor valor cuantitativo.

$x^2+3x+2=o$, $x^2-3x+2=o$ { raices reales; negativas las de la 1.ª y positivas las de la 2.ª

$x^2+3x+\frac{9}{4}=o$, $x^2-3x+\frac{9}{4}=o$ { raices reales é iguales, negativas las de la primera ecuacion y positivas las de la segunda.

$x^2+3x+3=o$, $x^2-3x+3=o$ { las raices de estas ecuaciones son ambas imaginarias. (*)

(*) Es muy notable el siguiente teorema y su recíproco: Toda fraccion continua periódica es una de las raices de una ecuacion de segundo grado de coeficientes comensurables, y recíprocamente las raices incomensurables de una ecuacion de segundo grado de coeficientes racionales se expresan con fracciones continuas periódicas. (Véase la pag. 139.)

Resolucion de $Ax^2+Bx+C=o$ en funcion de A, B y C.

*198. Multiplicando los dos miembros de la ecuacion propuesta por 4A y añadiendo luego B^2 á los dos miembros de la que resulte, tendremos.....

$$(2Ax+B)^2=B^2-4AC \quad \text{ó bien} \quad 2Ax+B=\pm\sqrt{B^2-4AC}$$

(α) que dá $\quad x=\frac{1}{2A}\left(-B\pm\sqrt{B^2-4AC}\right)$ luego.....

Las raices de toda ecuacion de la forma $Ax^2+Bx+C=o$ *son iguales al coeficiente del segundo término con signo contrario* $\pm$ *la raiz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicho coeficiente y el cuádruplo del último término por el coeficiente del primero, dividido todo por el duplo del coeficiente del mismo primer término.*

La resolucion de las ecuaciones de esta forma se obtiene tambien empleando el mismo procedimiento, que nos ha servido para resolver la ecuacion general $x^2+Sx+P=o$; pues suponiendo que Ax^2 y Bx son los dos primeros términos del cuadrado de un binomio, completando este cuadrado y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, tendremos las raices de la ecuacion propuesta.

Ax^2 es el cuadrado de $x\sqrt{A}$, y siendo Bx el producto de $2x\sqrt{A}$ por un segundo término, este será forzosamente $\frac{B}{2\sqrt{A}}$ cuyo cuadrado es $\frac{B^2}{4A}$

Esto supuesto, la ecuacion dada nos dará sucesivamente.....

$$Ax^2+Bx+\frac{B^2}{4A}=\frac{B^2}{4A}-C \quad \Bigg| \quad x\sqrt{A}+\frac{B}{2\sqrt{A}}=\pm\sqrt{\frac{B^2}{4A}-C} \quad \Bigg| \quad x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

ó tambien las transformaciones que siguen:

$$Ax^2+Bx+\frac{B^2}{4A}-\frac{B^2}{4A}+C=o \qquad \left(x\sqrt{A}+\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2-\left(\frac{B^2}{4A}-C\right)=o$$

$$\left(x\sqrt{A}+\frac{B}{2\sqrt{A}}-\sqrt{\frac{B^2}{4A}-C}\right)\times\left(x\sqrt{A}+\frac{B}{2\sqrt{A}}+\sqrt{\frac{B^2}{4A}-C}\right)=o$$

de donde fácilmente se deducen los mismos resultados que anteriormente, suponiendo cero cada uno de los factores del primer miembro de esta ecuacion.

Si los coeficientes A, B y C son reales, se verifica que.....

$$\left.\begin{array}{lr}\text{Las raices son reales y desiguales para} & B^2-4AC>o \\ \text{reales é iguales para} & B^2-4AC=o \\ \text{imaginarias cuando} & B^2-4AC<o\end{array}\right\}\text{; y recíprocamente.}$$

Igualmente, de $Ax^2+2Bx+C=o$ se deduce $x=\frac{1}{A}\left(-B\pm\sqrt{B^2-AC}\right)$

Esc. La fórmula (α) fácilmente se transforma en esta otra $x=\frac{-2C}{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}$

donde, si $A=o$, resulta $x=-\frac{C}{B}$ y $x=-\infty$ para la ecuacion $Bx+C=o$

La raiz $-\infty$ quiere decir que, si el coeficiente del término Ax^2 disminuye aproximándose á cero, el valor numérico de una de las raices aumenta indefinidamente y puede ser mayor que cualquiera otra cantidad.

Siendo $A=o$ y $B=o$, tendremos $x=\mp\infty$

Si $A=o$, $B=o$ y $C=o$, es evidente que la ecuacion será satisfecha por cualquiera valor de la incógnita, y las fórmulas anteriores se presentarán bajo la forma indeterminada ya conocida.

Estos mismos resultados se obtienen tambien multiplicando los dos términos de la fórmula (α) por $-B\mp\sqrt{B^2-4AC}$ y suprimiendo los factores comunes que se reducen á cero, en cada supuesto.

Resolucion y discusion de $Ax^{2n}+Bx^n+C=o$

*199. La resolucion de las ecuaciones de esta forma se deduce de la resolucion de una ecuacion completa de segundo grado, sustituyendo por x^n la nueva incógnita y

En efecto, suponiendo reducida la ecuacion propuesta á $x^{2n}+Sx^n+P=o$ si llamamos $x^n=y$ será $x^{2n}=y^2$ y la ecuacion anterior tomará la forma..... $y^2+Sy+P=o$ de donde se deduce

$$y=-\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-P} \quad \text{y por consiguiente} \quad x=\sqrt[n]{-\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P}}$$

Suponiendo n par, cada valor positivo de y nos dará dos reales y de signo contrario para x; y cada valor negativo de y nos dará dos imaginarios para x.

Del mismo modo, si n es impar, cada valor real de y, positivo ó negativo, nos dará otro real para x.

APLICACIONES á varios ejemplos:

1.° Sea la ecuacion $\frac{1-x^5}{10}=\frac{10+x^{10}}{1-x^5}$ ó bien $x^{10}+\frac{2}{9}x^5+11=o$

suponiendo $x^5=y$; será $y=-\frac{1}{9}\pm\sqrt{\frac{1}{81}-11}$; luego $x=\sqrt[5]{\frac{-1\pm\sqrt{-890}}{9}}$

2.° Suponiendo $\sqrt{x}=y$ en la ecuacion $x+\sqrt{x}=210$

tendremos $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+210}$ de donde se deduce $x=225$, $x=196$

3.° Las cuatro raices de la ecuacion $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20$,

son las siguientes $+8$, -8, $-\frac{5\sqrt{-10}}{4}$, $+\frac{5\sqrt{-10}}{4}$

*200. De todas las ecuaciones de la forma indicada arriba, las mas importantes son las *bicuadradas*, es decir las de cuarto grado, cuando solo contienen las potencias de grado par de la incógnita; por ejemplo $x^4+Sx^2+P=o$

Segun el procedimiento general, las raices de esta ecuacion estan comprendidas en la forma $x=\pm\sqrt{-\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P}}$ y serán por consiguiente

$$1.^a \ +\sqrt{-\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P}} \qquad 2.^a \ -\sqrt{-\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P}}$$

$$3.^a \ +\sqrt{-\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P}} \qquad 4.^a \ -\sqrt{-\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}S^2-P}}$$

La suma de estas raices es siempre cero y su producto es igual P.

Siendo $\frac{1}{4}S^2-P<o$ todas las raices son imaginarias.

$\frac{1}{4}S^2-P>o$ y P *negativo*, dos raices serán reales y otras dos imaginarias; pero, si P es *positivo*, todas las raices serán reales ó imaginarias, segun que S sea negativo ó positivo

$\frac{1}{4}S^2-P=o$ y S *positivo*, las raices serán imaginarias; si S es *negativo*, las raices serán reales; y nulas, si S es cero.

$S=o$ las cuatro raices son imaginarias, si P es *positivo*; y dos reales y otras dos imaginarias, si P es *negativo*.

$P=o$ dos raices son nulas y las otras dos son imaginarias ó reales, segun que S sea positivo ó negativo.

De la ecuacion $Ax^4+Bx^2+C=o$ se deduce $x=\pm\sqrt{\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}$ cuyos cuatro valores ofrecen una discusion análoga á la que hemos indicado en la página 148.

Las raices de la ecuacion $x^4-(2bc+4a^2)x^2+b^2c^2=o$ son las cuatro comprendidas en la fórmula que sigue.....

$$x=\pm\sqrt{bc+2a^2\pm2a\sqrt{a^2+bc}}$$

Hallar dos números cuya suma sea 2S *y la suma de sus cuartas potencias* 2P.

Suponiendo $S+x$ uno de ellos y $S-x$ el otro; tendremos.....

$x^4+6S^2x^2+S^4=P$ de donde $x=\pm\sqrt{-3S^2\pm\sqrt{8S^4+P}}$

y por consiguiente los números que se buscan, serán.....

$$S+x=S\pm\sqrt{-3S^2\pm\sqrt{8S^4+P}} \qquad S-x=S\mp\sqrt{-3S^2\pm\sqrt{8S^4+P}}$$

Aplicacion de las ecuaciones bicuadradas á la transformacion de $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

*201. Para averiguar en qué casos es posible la transformacion de la expresion $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ en otra mas sencilla de la forma $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ suponiendo x, y comensurables, supondremos que efectivamente se verifica la igualdad

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y} \qquad (\alpha)$$

de donde se deduce $A\pm\sqrt{B}=x+y\pm2\sqrt{xy}$

ó bien $\pm2\sqrt{xy}=A-x-y\pm\sqrt{B}$

y elevando nuevamente al cuadrado los dos miembros de la última ecuacion, tendremos...... $4xy=(A-x-y)^2+B\pm2(A-x-y)\sqrt{B}$

y como el primer miembro es comensurable, lo será tambien el segundo, condicion que no puede satisfacerse sino en el supuesto de que

$$A-x-y=o \quad \text{ó bien} \quad A=x+y$$

luego la ecuacion anterior quedará reducida á $4xy=B$ ó $xy=\frac{1}{4}B$

y por consiguiente, los valores de las incógnitas x, y serán las raices de la ecuacion completa de segundo grado $z^2-Az+\frac{1}{4}B=o$

verificándose $z=\frac{1}{2}(A+\sqrt{A^2-B})$ $z=\frac{1}{2}(A-\sqrt{A^2-B})$

cuya sustitucion en la ecuacion (α) nos dará.....

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (\Delta)$$

Es evidente que esta transformacion será posible bajo la forma sencilla, que se desea, siempre que A^2-B sea un cuadrado perfecto, por ejemplo C^2; en cuyo caso, tendremos

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(A+C)}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(A-C)}$$

Suponiendo B negativo, los resultados anteriores serán imaginarios.
Lo mismo se verifica, siendo A negativo y B positivo.

Máximos y mínimos de las expresiones algebráicas.

*202. *Máximo* de una funcion es uno de sus valores particulares mayor que los que le anteceden y siguen inmediatamente.

Mínimo de una funcion es uno de sus valores particulares menor que los que le anteceden y siguen inmediatamente.

La teoría de los *máximos* y *mínimos* en general, es solo propia del CÁLCULO DIFERENCIAL, aquí nos ocuparemos solamente de las cuestiones, que se pueden resolver por medio de las ecuaciones de segundo grado.

Descomponer la cantidad A *en dos sumandos cuyo producto sea un* máximo.

Llamando x el primero, el producto de los dos será $(A-x)x$; é igualando esta expresion á M, tendremos $M=(A-x)x$ de donde $x=\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-M}$ y como el mayor valor que puede tener M, siendo real el radical y por consiguiente la variable x, es $\frac{1}{4}A^2$ que dá $\frac{1}{2}A$ por valor de x; se deduce que, cuando x es igual á la mitad de A, hay un *máximo* igual á $\frac{1}{4}A^2$

Luego el mayor producto, que se puede formar con dos cantidades cuya suma es conocida, es el cuadrado de la mitad de esta suma.

Cor. El producto de varios números positivos es un *máximo* cuando todos las factores son iguales.

Lo mismo se resuelve este otro problema: *Dividir un número dado en dos sumandos tales, que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.*

2.° *Descomponer una cantidad* A *en dos factores, cuya suma sea un* mínimo.

Llamando x uno de los factores, y, representando por m la suma de los dos; tendremos $x+\frac{A}{x}=m$ de donde se deduce $x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4A}}{2}$

Esta expresion será imaginaria siempre que m^2-4A sea negativa y por consiguiente, para que x sea real, es preciso y basta que m^2-4A sea cero ó lo que es lo mismo que $m=2\sqrt{A}$. Luego cuando $x=\sqrt{A}$ el valor de m es un mínimo; de donde se deduce que, para descomponer un número dado en dos factores, cuya suma sea un *mínimo*, basta que ambos factores sean iguales.

Cor. Conocido el producto P de n números positivos, el *mínimo* de la suma de todos ellos será $n\sqrt[n]{P}$ y el valor de cada uno $\sqrt[n]{P}$

Esc. De los dos ejemplos anteriores se puede deducir la siguiente regla: *Para hallar el máximo ó el mínimo de una funcion* y *de una variable* x, *se despeja la variable y discutiendo despues la fórmula final, se hallará fácilmente el máximo, el mínimo, ó el máximo y mínimo valor, que puede tener la funcion, siendo real el valor de la variable.*

Sea la funcion $y=\frac{a}{b}\sqrt{x^2+c^2}$ que dá para $x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{b^2y^2-a^2c^2}$ y como el valor de x será real, cero, ó imaginario, segun que b^2y^2 sea mayor, igual ó menor que a^2c^2; y ademas de $b^2y^2=a^2c^2$ se deduce $y=\pm\frac{ac}{b}$, es evidente que el *mínimo* valor de la funcion y, será $+\frac{ac}{b}$ ó $-\frac{ac}{b}$ correspondiente á $x=o$

El *máximo* de $\sqrt{y}+\sqrt{10-y}$ es $2\sqrt{5}$ para $y=5$

La funcion $\frac{a}{b}\sqrt{x^2-c^2}$ que dá $x=\frac{1}{a}\sqrt{b^2y^2+a^2c^2}$ no tiene *máximo* ni *mínimo* porque y puede recibir todos los valores particulares que se quiera.

NOTA IV. RESOLUCION DE LAS ECUACIONES BINOMIAS.

*203. La forma general de las ecuaciones binomias es la siguiente:
$Ax^n \pm B = o$ ó $x^n \pm \frac{B}{A} = o$ que llamando $\frac{B}{A} = K$, será $x^n \pm K = o$

Para hacer aun mas sencilla esta expresion, podemos trasladar K al segundo miembro, extraer de ambos miembros la raiz del grado n, y llamar Δ al valor absoluto de la raiz n de K; en cuyo supuesto tendremos $x^n = \mp \Delta^n$

Sustituyendo ahora en esta ecuacion Δy en lugar de x y dividiendo por Δ^n, resultará la nueva ecuacion $y^n \pm 1 = o$
cuya resolucion nos dará las raices de la ecuacion propuesta, con solo multiplicar por Δ los valores de y

La resolucion general de las ecuaciones binomias corresponde al álgebra superior; en esta nota resolveremos solo los casos particulares siguientes:

$$y^2 \pm 1 = o \qquad y^3 \pm 1 = o \qquad y^4 \pm 1 = o \qquad y^5 \pm 1 = o \qquad y^6 \pm 1 = o$$

Para mayor claridad dividirémos cada uno de estos casos en otros dos, segun se tome el signo positivo ó el negativo entre los dos términos de las ecuacion.

$y^2 = +1$ ó bien $y^2 - 1 = o$ tiene por raices reales á $+1$ y -1

$y^2 = -1$ ó $y^2 + 1 = o$ tiene por raices $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$

$y^3 = +1$ es lo mismo que $(y^2 + y + 1)(y - 1) = o$
y como esta última ecuacion se verifica igualando á cero uno de sus factores en el supuesto $y - 1 = o$ tendremos $y = +1$;
y suponiendo $y^2 + y + 1 = o$ resulta $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ (*)
luego las raices de $y^3 = +1$ son $+1$, $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ y $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

$y^3 = -1$ ó bien $y^3 + 1 = o$ es lo mismo que $-y^3 = +1$ ó $(-y)^3 = +1$
y por consiguiente, las raices de la ecuacion anterior despues de mudados los signos, serán los de la propuesta. Asi tendremos que
las raices de $y^3 = -1$ son -1, $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$ y $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$

$y^4 = +1$ ó bien $y^4 - 1 = o$ es lo mismo que $(y^2 + 1)(y^2 - 1) = o$
de donde fácilmente se deducen sus cuatro raices que son las siguientes:

$$+1 \qquad -1 \qquad +\sqrt{-1} \qquad -\sqrt{-1}$$

$y^4 = -1$ ó bien $y^4 + 1 = o$ es lo mismo que $(y^2 + \sqrt{-1})(y^2 - \sqrt{-1}) = o$
cuyas raices son $+\sqrt{\sqrt{-1}}$ $-\sqrt{\sqrt{-1}}$ $+\sqrt{-\sqrt{-1}}$ $-\sqrt{-\sqrt{-1}}$
que tambien pueden tomar la forma siguiente, segun el número 20

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 \pm \sqrt{-1}) \qquad \text{y} \qquad -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 \pm \sqrt{-1})$$

$y^5 = +1$ es lo mismo que $(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)(y - 1) = o$
pero si llamamos $y + \frac{1}{y} = z$ será $y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$
y suponiendo cero el factor $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ ó bien $y^2 + \frac{1}{y^2} + y + \frac{1}{y} + 1 = o$
tendremos la ecuacion completa de 2.° grado $z^2 + z - 1 = o$
de donde se deducirán cuatro de las cinco raices que se buscan.

(*) En efecto; $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$

La quinta resulta de suponer cero el factor $y-1$ (*). Todas estas raices son....

$$+1 \quad \tfrac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\sqrt{-1}\right) \quad \tfrac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times\sqrt{-1}\right)$$

$y^5=-1$ equivale á $(-y)^5=+1$ y por consiguiente sus raices serán las de la ecuacion anterior despues de cambiados los signos: es decir.....

$$-1 \quad \tfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\mp\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\sqrt{-1}\right) \quad \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\mp\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times\sqrt{-1}\right)$$

Del mismo modo, las seis raices de la ecuacion $y^6-1=o$ son las siguientes:

$$+1 \quad -1 \quad \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

y las de la ecuacion $y^6+1=o$ despues de dividirla por y^3, llamar $y+\frac{1}{y}=z$ y resolver la ecuacion $z^3-3z=o$, que dá $z=o$, $z=\sqrt{3}$ y $z=-\sqrt{3}$; son las seis que siguen.....

$$\pm\sqrt{-1} \qquad \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2} \qquad \frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$$

Ultimamente, las ocho raices de $y^8-1=o$, son.....

$$+1 \quad -1 \quad \sqrt{-1} \quad -\sqrt{-1} \quad \sqrt{\sqrt{-1}} \quad -\sqrt{\sqrt{-1}} \quad \sqrt{-\sqrt{-1}} \quad -\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

Esc. De $x^n\pm K=0$ $y^n\pm 1=0$ se deduce $x=\sqrt[n]{\mp K}$ $y=\sqrt[n]{\mp 1}$ y por consiguiente, las diferentes soluciones de la primera ecuacion son otros tantos valores de la raiz del grado n de la cantidad $\pm K$. Esto supuesto, es evidente que, conocidas las raices cuadradas, cúbicas, etc., de la unidad, se hallarán las del mismo grado de una cantidad, por ejemplo K, multiplicando las de la unidad por el valor absoluto de la raiz de K.

Entre otras muchas propiedades de las raices del grado n de la unidad, que se demuestran en la parte superior del álgebra, son muy notables las siguientes:

1.ª *Las raices de un grado cualquiera de la unidad son tantas como unidades tiene el indice de la raiz.*

2.ª *La suma de todas las raices de la unidad es siempre cero.*

3.ª *El producto de las mismas raices de la unidad es igual* $+1$ ó -1.

4.ª *Siendo* α *una de las raices imaginarias de la unidad positiva, todas las potencias enteras, positivas ó negativas, de* α, *serán tambien raices de la unidad,* y por consiguiente si n es primo se hallarán todas las raices de $y^n-1=o$ formando las potencias de una imaginaria cualquiera de ellas.

5.ª *Siendo* m *y* n *primos entre si, se hallarán todas las raices de* $y^{mn}-1=o$ *multiplicando las de* $y^m-1=o$ *por las de* $y^n-1=o$.

Aplicaciones. *Hallar las raices de la ecuacion binomia* $x^3-a^3=o$

Las raices de $y^3-1=o$ son 1 $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ y $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ luego las de la ecuacion propuesta, serán.....

$$+a \quad \frac{a}{2}(-1+\sqrt{-3}) \text{ y } \frac{a}{2}(-1-\sqrt{-3})$$

Las raices de 4.º grado del número 256 ó sean los valores de $\sqrt[4]{256}$ son los siguientes $+4$, -4, $+4\sqrt{-1}$, $-4\sqrt{-1}$

y las *raices cúbicas* de $-8a^6b^3$, son $-2a^2b$, $a^2b(1-\sqrt{-3})$ y $a^2b(1+\sqrt{-3})$

(*) Las ecuaciones, que no se alteran sustituyendo $\frac{1}{x}$ por x, se llaman *reciprocas*: $y^4+y^3+y^2+y+1=o$ es una ecuacion recíproca.

CUESTIONARIO

PARA LOS EXAMENES DE FIN DE CURSO.

ARITMETICA Y ALGEBRA.

Preliminares.

I. Nociones de lógica preliminares al estudio de las ciencias exactas.

II. Objeto de las matemáticas. Cantidad y unidad. Número y extension. Division de las matemáticas en puras y mixtas: tratados en que se subdivide cada una de estas partes.

ARITMETICA.

III. 1. Aritmética: su definicion. Unidad y número entero. Números abstractos. Division de la Aritmética. Signos matemáticos. Igualdad y desigualdad aritmética.

Cálculo aritmético.

Definiciones de las operaciones ordinarias del cálculo aritmético. Consecuencias de estas definiciones.

IV. 10. Numeracion decimal de los números enteros. Observaciones acerca de los diferentes sistemas de numeracion. Numeracion romana.

V. 16. Adicion y sustraccion de los números enteros. Observaciones generales acerca de una y otra operacion.

VI. 29. Multiplicacion de los números enteros. Productos de varios factores.

VII. 45. Division de los números enteros. Observaciones generales.

VIII. 62. Elevacion á potencias de los números enteros. Cuadrado y cubo de la suma y diferencia de dos números.

IX. 70. Extraccion de raices cuadrada y cúbica de los números enteros.

X. 86. Principios fundamentales de la divisibilidad de los números en general. Caracteres de divisibilidad de un número por otro.

XI. 99. Máximo comun divisor de dos ó mas números.

XII. 105. Números primos. Nuevos teoremas sobre la divisibilidad. Descomposicion de un número en factores primos.

XIII. 115. Determinacion de todos los divisores de un número.

XIV. 117. Mínimo múltiplo comun de dos ó mas números.

ALGEBRA.

LI. 1. Definicion del Álgebra. Cantidades literales y su consideracion cualitativa. Cálculo y comparacion literal ó algebráica. Notacion algebráica. Clasificacion de las expresiones literales. Fórmulas.

Cálculo algebráico.

LII. 5. Objeto del cálculo algebráico. Adicion y sustraccion de las cantidades algebráicas enteras.
LIII. 13. Multiplicacion de las cantidades algebráicas enteras.
LIV. 20. Division de las cantidades algebráicas enteras.
LV. 32. Elevacion á potencias de las cantidades algebráicas enteras.
LVI. 36. Extraccion de raices de las cantidades algebráicas enteras.
LVII. 45. Cálculo de las cantidades fraccionarias literales. Preliminares, adicion, sustraccion, multiplicacion y division de estas expresiones.
LVIII. 51. Elevacion á potencias y extraccion de raices de las cantidades fraccionarias literales. Observaciones generales y aproximacion de los cocientes y raices inexactas.
LIX. 55. Cálculo de las cantidades fraccionarias literales bajo la forma de enteras con exponentes negativos.
LX. 60. Cálculo de las cantidades radicales literales. Preliminares, adicion, sustraccion, multiplicacion y division de estas expresiones.
LXI. 66. Elevacion á potencias y extraccion de raices de las cantidades radicales. * Transformacion de $\sqrt{A+\sqrt{B}}$
LXII. 69. Cálculo de las cantidades radicales bajo la forma de cantidades racionales con exponentes fraccionarios.
LXIII. 73. Cálculo de las cantidades imaginarias. Preliminares, adicion, sustraccion, multiplicacion y division de estas expresiones.
LXIV. 77. Elevacion á potencias y extraccion de raices de las expresiones imaginarias. * Transformacion de $\sqrt{A+B\sqrt{-1}}$
*LXV. 80. Observaciones generales acerca de las expresiones imaginarias.

Complemento del cálculo algebráico.

LXVI. 84. Teoría de las combinaciones.
LXVII. 93. Fórmula del binomio de Newton y observaciones generales acerca de la misma. Triángulo de Pascal.
LXVIII. 98. Aplicaciones de la fórmula de Newton á la elevacion á potencias y extraccion de raices de las cantidades polinomias.

Comparacion algebráica.

LXIX. 102. Ecuaciones de primer grado. Preliminares para su resolucion.
LXX. 104. Resolucion y discusion de una ecuacion de primer grado con una incógnita.
LXXI. 107. Interpretacion de los símbolos $\frac{A}{0}$ $\frac{A}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ $0\times\infty$ y $\frac{\infty}{\infty}$ en la determinacion de las raices de una ecuacion. *Límites de las expresiones fraccionarias con una variable.
LXXII. 109. Resolucion de dos ecuaciones del primer grado con dos incógnitas.
*LXXIII. 111. Discusion de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
LXXIV. 112. Resolucion de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas.
*LXXV. 115. Discusion de un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas.

ELEMENTOS
DE
MATEMATICA