M. Hoyos

FIGURAS Y CÁLCULOS

N.º 157.

FIGURAS Y CÁLCULOS

FIGURAS Y CÁLCULOS

POR

MIGUEL HOYOS Y JULIÁ

CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS

EN EL INSTITUTO GENERAL Y TÉCNICO DE LOGROÑO

Miguel Hoyos

LOGROÑO

IMPRENTA Y LIBRERÍA MODERNA

1917

ADVERTENCIAS

Este librito no es una obra científica. Fuera en vano, por tanto, pedirle las cualidades peculiares de éstas, como son: el rigor lógico en el método, la precisión en el lenguaje, la exactitud meticulosa en los raciocinios, etcétera, etc.

Pero, en cambio, es un libro dedicado a principiantes, y habría derecho a exigirle lo que éstos reclaman por boca de la Pedagogía, a saber: claridad en la exposición, sobriedad en las palabras, utilidad práctica en los asuntos, amena variedad en las aplicaciones.

Que hemos pretendido acercarnos a la realización de estas cualidades, es cosa que a cargo de nuestra conciencia queda, pero el estimar si lo hemos o no conseguido, no debe ser apreciación nuestra, sino de los lectores.

Queremos, no obstante, advertir, que cierto aparente desorden en las materias, cierto efectivo desaliño en la expresión, y otros tales, que juzgaría defectos quien no sepa lo que es enseñar a niños, toman cabalmente su raíz en observaciones acumuladas durante la práctica de la enseñanza; de tal suerte que lo que a veces parezca capricho pudiera ser deliberado intento, acaso erróneo, pero no del todo inmotivado.

Al final de la obrita hemos coleccionado bastantes ejercicios sobre cuestiones de Geografía, Física, Agricultura, etc., en los cuales pueden aplicarse las reglas del texto con mayor utilidad que en aquellos otros, de tan escaso provecho, como el de averiguar cuántos saltos tiene que dar un galgo para alcanzar a una liebre, o cuándo la edad de un padre será triple de la de su hijo.

Posible es que algunos de los enunciados de dichos ejercicios adolezcan de falta de rigor científico (que sólo se obtendría con prolijas explicaciones); pero, aun así, pueden servir como primera noción de conocimientos que muchos alumnos perfeccionarán después; y ayudan indirectamente a fijar en la memoria definiciones, hechos y cifras cuyo conocimiento es indispensable a cualquiera persona medianamente culta.

Varios de los ejercicios de que venimos hablando son extremadamente fáciles—aun entre aquéllos cuyo enunciado les da apariencias de dificultad—y por ellos debe comenzarse la resolución. Otros, por el contrario, aunque también sencillos, acaso ofrezcan a la generalidad de los principiantes algún esfuerzo. Cuando así acontezca, puede el Profesor solicitar el auxilio de los alumnos más inteligentes en ayuda de sus compañeros, o intervenir él mismo, limitándose a lo estrictamente necesario.

Nada se pierde, de todas maneras, porque el alumno que no sea capaz de resolver un problema escuche a los que pueden hacerlo. Y en último término queden, si se quiere, para posteriores cursos las cuestiones que parezcan sobrado intrincadas; si bien, repetimos, la mayoría son muy sencillas, y *ninguna* exige otros conocimientos de los que minuciosamente se aclaran en el texto.

Y ahora... que la benevolencia del lector y la aplicación del alumno nos ayuden.

FIGURAS Y CÁLCULOS

PRELIMINARES

1. Fijemos la atención en un objeto conocido: por ejemplo, en una bola de billar. Este objeto es un *cuerpo físico*

Hay otros cuerpos de igual *forma*, v. g.: una pelota, una naranja.(*) Físicamente considerados estos cuerpos son distintos, porque lo es la materia de que están constituídos; pero en Geometría, prescindiendo de la materia y de sus propiedades, nos limitaremos a considerar la *forma*, la *magnitud* y la *posición*.

Atendiendo a la forma, los tres objetos considerados tienen en Geometría el nombre de *esferas*. La bola de billar es, pues, geométricamente, una *esfera*;(**) la pelota, otra esfera, etc. Pero estas esferas pueden ser de distinto *tamaño*, es decir, de diferente *magnitud*; y estar colocadas en distintas *posiciones* (por ejemplo: *tocándose*, sin tocarse, etc.)

(*) Aproximadamente.
(**) Aunque imperfecta.

Resulta de lo dicho, que los *cuerpos geométricos* se diferencian de los cuerpos físicos en que en aquéllos prescindimos de la materia y sólo consideramos su *forma*, su *magnitud* y su *posición*.

2. La bola de billar que nos sirve de ejemplo, aun considerada geométricamente, ocupa cierto lugar en el espacio, es decir, tiene cierta *extensión*, o cierta *magnitud*.

Esta magnitud podría compararse con la de otro cuerpo, por ejemplo: con la de la naranja, y por esta causa se dice que es una *cantidad*. La extensión de la segunda esfera (la naranja) es otra cantidad, pero que se toma como tipo de comparación, y en este sentido se llama *unidad*.

Comparando ambas extensiones, la cantidad con la unidad, *medimos* aquélla con ésta, y al resultado lo llamamos *medida*.

La medida de la extensión de un cuerpo se llama *volumen*.

Conteste el alumno a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es extensión de un cuerpo?

b) La extensión de un cuerpo ¿es una cantidad? ¿Por qué?

c) ¿Qué es unidad (de medida)?

d) ¿Qué es medir una cantidad?

e) ¿Cómo se llama la medida de la extensión de un cuerpo?

3. Para expresar la medida de una cantidad, además de conocer ésta, y otra cantidad de la misma naturaleza que nos sirva de unidad, necesitamos indicar la relación entre ambas, esto es, la manera de formarse la primera cantidad mediante la que sirve de unidad, lo cual se consigue haciendo uso de los *números*. Por eso vamos a

hablar del número, cuyo estudio corresponde a la Aritmética.

Pero antes digamos algo sobre la unidad *abstracta* y la *pluralidad*.

4. La idea de unidad abstracta la posee el alumno desde la infancia.

Un hombre es cosa bien distinta de *un* libro; pero *un* hombre es sólo *uno*, y *un* libro también es sólo *uno*; luego, independientemente de la idea que del hombre o del libro formamos, adquirimos en los dos casos la idea de *uno*, o, más propiamente, la idea de *unidad* (abstracta).

Análogamente, considerando, no uno, sino *varios* hombres o *varios* libros, se despertaría en nosotros la idea de *pluralidad* (*)

5. El número abstracto es una pluralidad; pero no una pluralidad cualquiera, sino una pluralidad *determinada*, limitada y conocida, como la que corresponde a cierto conjunto fijo de hombres, o de libros, etc.

Obsérvese que para que a cierto conjunto de hombres, por ejemplo, y a otro conjunto de libros, les corresponda un mismo *número*, es preciso que a cada hombre de los considerados le corresponda un libro, y viceversa, es decir, que dándole a cada hombre un libro ni sobren libros ni sobren hombres.

Conteste el alumno a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué hay que considerar para formarse idea de la unidad abstracta? ¿Y de la pluralidad?

b) ¿Qué es número abstracto?

c) ¿Cuándo se dirá que dos conjuntos de cosas tienen igual número?

(*) Palabra derivada de *plural*.

6. **Unidad concreta.**—Ya hemos dicho que es la *cantidad* con la cual *comparamos* otras de su misma especie para *medirlas*. Pero el ejemplo de las esferas, que al principio pusimos, no es conveniente para lo que vamos ahora a decir. Elijamos otro.

Supongamos un *dado* de los que se usan en los juegos infantiles (de la Aduana, de la Oca, etcétera).

Este *cuerpo*, y todos los de igual forma, se llaman en Geometría *cubos*.

Sea, pues, un *cubo*. Pongamos cuatro de estos cubos juntos unos a otros, y encima otros cuatro, de modo que los ocho formen un *cubo* más grande. (Hágalo el profesor). Si tomamos por unidad el cubo pequeño, al cual le vamos a llamar *centímetro cúbico*, (*) el grande se compondrá de ocho centímetros cúbicos. Esta expresión, compuesta del nombre de un número (ocho) y del de una unidad concreta (centímetro cúbico), se suele llamar *número concreto*, y expresa, según se ve, la medida de una cantidad, que es el *volumen* del cubo grande. El cubo grande tiene, pues, ocho centímetros cúbicos de volumen.

Preguntas:

a) ¿Qué es número concreto? ¿De qué elementos consta la expresión de la medida de una cantidad?

¿Cuál sería el volumen del cuerpo que se formase poniendo dos filas de cubos de los antes considerados en cada una de las cuales entrasen cinco cubos? Fórmense otros cuerpos con cubos, y dígase su volumen.

7. La bola de billar o el dado de que nos

(*) Procúrese que aproximadamente lo sea.

hemos valido tienen una parte *exterior*, aquélla por la cual se puede pasar la mano. Es su *superficie*, y sirve de límite al cuerpo, que en ella *acaba*.

Podemos, pues, decir: Superficie es el límite de un cuerpo.

Esta superficie no puede, claro está, ser arrancada ni separada del cuerpo; pero podemos considerar dicha superficie prescindiendo del cuerpo a que pertenece. Geométricamente, así se hace con frecuencia.

La extensión de la superficie es también una *cantidad*, que se mide tomando otra superficie por unidad. La medida se llama *área* de la superficie y se expresa por un número concreto. Así, en el cubo, si tomamos por unidad de superficie la de una de sus caras, a la cual llamaremos *centímetro cuadrado*, la superficie total del cuerpo tendría por *área* seis centímetros cuadrados.

Preguntas:

a) ¿Qué es superficie de un cuerpo?

b) ¿Cómo se llama la medida de una superficie?

c) Hallar el área de la superficie que presenta, *por encima*, el cuerpo formado por dos filas de a cinco cubos como los de los ejemplos anteriores.

8. La superficie de la esfera es *continua*, es decir, sin natural separación de partes; pero en el cubo cada cara es una superficie, que se separa de las otras por los bordes de dicha cara, los cuales la limitan.

En general, una superficie se limita por *líneas*, y, teóricamente, se pueden concebir estas líneas aisladas, separadas de la superficie.

La extensión de una línea puede medirse

comparándola con la de otra que sirva de unidad, y la medida es la *longitud* de la línea. Así, en una cara del cubo, si tomamos por unidad uno de los bordes o *lados* de dicha cara, al cual llamamos *centímetro lineal*, la longitud total de los lados de dicha cara sería 4 centímetros lineales.

Preguntas:

a) ¿Qué es línea?

b) ¿Qué es longitud de una línea?

c) Medir las longitudes de líneas formadas con filas de cubos como los de los anteriores ejemplos.

9. La línea que forma un lado de una de las caras del cubo considerado tiene sus extremos o cabos que la limitan. Estos límites se llaman *puntos*, y carecen de extensión mientras no se les considera aislados.

10. Los cuerpos, superficies y líneas se llaman cantidades, aun cuando en rigor la cantidad en ellos considerada es una sola: la extensión.

11. Hay otras cosas cuya magnitud puede medirse, es decir, otras cantidades. Tales son los pesos, las capacidades, los tiempos, etc.

Para medirlas se adoptan unidades fijas, cuyo conjunto (y el de sus mutuas relaciones) forma lo que se llama un sistema de *pesas* y *medidas*. En España es obligatorio el llamado *sistema métrico decimal*.

12. Existen *cosas* cuya magnitud no puede expresarse por medio de números. Por ejemplo: el dolor, la virtud, el cariño. Estas no son cantidades.

13. La *Matemática* se ocupa de la cantidad;

la *Aritmética*, del número; la *Geometría*(*), de los cuerpos, superficies, líneas y puntos, de las combinaciones de estos elementos, llamadas *figuras* geométricas; de las propiedades de estas figuras, y de la medida de la extensión.

(*) Se entiende, la que nosotros vamos a estudiar.

Figuras geométricas planas

14 Un punto se representa *gráficamente* (esto es, en el dibujo) por un punto de escritura, o mejor por dos pequeños trazos que *determinan* el punto por su *intersección* (sitio donde se cortan). Para distinguirlo de otros se coloca cerca de él una letra, mayúscula generalmente, con la cual se nombra. Así se dice: punto A, punto B, etcétera. (Fig. 1).

15. Un hilo delgado tirante es la representación material aproximada de una línea *ideal* que llamamos *recta*. Gráficamente, se representa por la huella o trazo que deja el lápiz (tiralíneas, clarión, etc.) resbalando a lo largo de una regla bien construída, sobre la superficie del papel (pizarra, etc.) en que se dibuja. (Fig. 1) Esta superficie es aproximadamente *plana*. Mejor ejemplo de *plano* o superficie plana es la del agua en reposo (y en pequeña extensión).

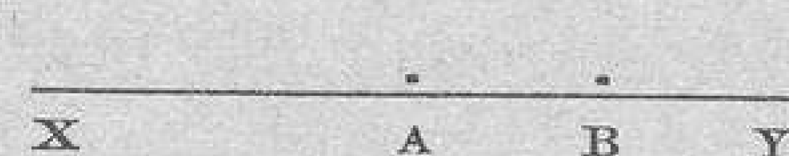


Fig. 1

16. Si en un plano fijamos dos puntos, A y B, por ellos pasa una recta *única*, que se extiende indefinidamente. Esto se enuncia diciendo que *dos* puntos *determinan* una recta.

17. La porción o trozo de recta limitada por los dos puntos A y B se llama *segmento* de recta, y el resto de la recta es la *prolongación* del segmento por ambos lados. (BY; AX).

Los puntos A y B se llaman *extremos* del segmento, y éste se lee AB o BA. Cuando se lee AB, el punto A puede llamarse *origen* del segmento, y el B, *extremo*; porque se supone que un punto recorre el segmento en el sentido de A a B. Si, por el contrario, se lee BA, el origen es B; el extremo, A, y el sentido, de B a A. Nosotros consideraremos ordinariamente los segmentos trazados en el sentido de izquierda a derecha, que llamaremos *positivo*. Cuando se supongan trazados de derecha a izquierda, diremos que lo están en sentido *negativo*.

18. Si a partir de un punto A de una recta consideramos toda la parte de ésta que se extiende sólo hacia la derecha, tendremos una *semirrecta* positiva. La parte de la izquierda es la semirrecta *opuesta*, o negativa. (AY positiva; AX negativa. Fig. 1)

19. Una recta *coincide* con otra, formando entrambas una sola, desde el momento en que tengan dos puntos comunes. Se puede imaginar que la segunda recta resbala sobre la primera sin que cese la coincidencia.

Un segmento de recta puede colocarse sobre una recta cualquiera de modo que coincida con cierta parte de ella.

20. Dos segmentos (de igual sentido) son *iguales* si pueden coincidir, esto es, si colocados juntos sus orígenes y puestos ambos segmentos sobre la misma recta, coinciden también sus extremos; y *recíprocamente*, si se sabe ya que los segmentos son iguales, y se les coloca sobre una misma recta con los orígenes confundidos, se confundirán los extremos. Si los segmentos no son

iguales, aquél cuyo extremo caiga dentro del otro segmento es el *menor*.

Hágase todo prácticamente con segmentos tomados sobre el borde de un objeto (regla, papel, etc).

21. Para *medir* un segmento, es decir, para hallar su longitud, se compara con otro segmento fijo, llamado *metro*, que es la unidad principal de longitud del *sistema métrico decimal de pesas y medidas*. La longitud del metro se señaló sobre una regla de platino llamada *patrón*, que se conserva en París, y de la cual se sacaron para España dos copias.

22. La longitud del metro se estimó, cuando se hizo su medida, como igual a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre de París, definición que se aclarará más adelante.

23. Hay otras unidades de longitud llamadas múltiplos y divisores del metro, a saber:

Múltiplos:	El *decámetro*	=	10 metros.
	El *hectómetro*	=	10 decámetros.
	El *kilómetro*	=	10 hectómetros.
	El *miriámetro*	=	10 kilómetros.

El metro se indica por la inicial *m.;* el decámetro, por Dm.; el Kilómetro, por Km., y el miriámetro, por Mm.

Dividiendo el metro en partes iguales, se obtienen los divisores, que son:

El *decímetro (dm.)* = Décima parte del *metro*.
El *centímetro (cm.)* = Décima parte del *dm.*
El *milímetro (mm.)* = Décima parte del *cm.*

Todas estas son unidades *lineales*, y como cada una contiene 10 veces a la inferior inmediata, el sistema se ha llamado *decimal*.

Para los dibujos que ordinariamente pueden hacerse en un papel, son unidades apropiadas el *cm.* y el *mm.* Para los que pueden hacerse en el tablero, el *dm.* y el *cm.* Para el largo de una habitación o de una calle, el *m.* o el *Dm.* Para las distancias entre pueblos, el *Km.* o *Mm.*

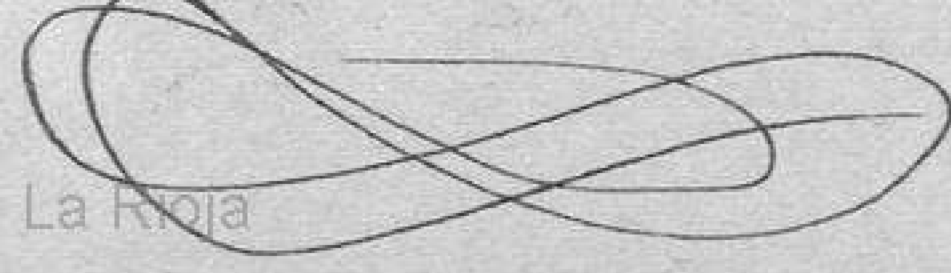
Se construyen metros de madera o de metal, y cintas métricas de tela o acero, para medir por aplicación directa de la unidad sobre el segmento que va a medirse.

24. La *línea* formada por varios segmentos de recta, dispuestos de modo que el extremo del 1.º sea origen del 2.º; el extremo del 2.º, origen del 3.º, etc., y que dos segmentos consecutivos (inmediatos) no estén en línea recta, se llama línea *quebrada,* y sus extremos son el origen del primer segmento y el extremo del último. Estos puntos, y los demás en que se unen cada dos segmentos, se llaman *vértices*, y los segmentos, *lados*. Si los extremos coinciden, la línea quebrada se dirá que es *cerrada*, y si no coinciden, *abierta*. Ordinariamente se lee la línea quebrada nombrando, en orden, las letras correspondientes a sus vértices. (ABCDE en la fig. 2)

Las quebradas que nosotros consideraremos serán aquellas en que prolongando uno *cualquiera* de sus lados, la línea quede *toda* a una misma parte de las dos en que aquella recta (el lado prolongado) divide al plano donde suponemos trazada la línea.

Estas quebradas se llaman *convexas,* pero hay otras, llamadas *cóncavas*, en que no se verifica lo dicho. (La otra de la fig. 2).

25. La porción de plano limitada por una



línea convexa cerrada se llama *polígonc convexo*,

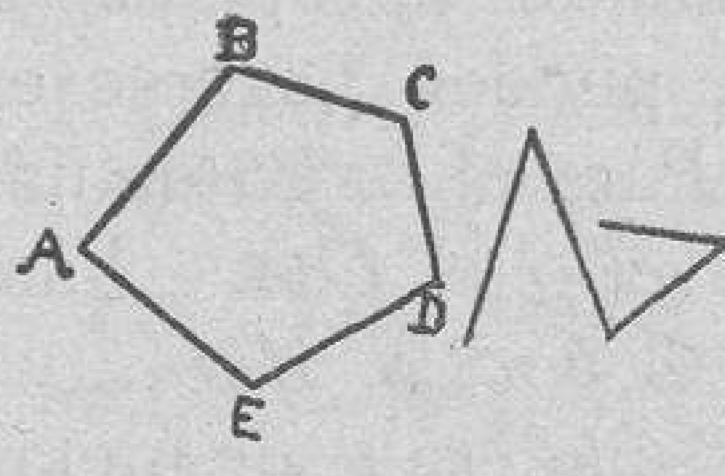


Fig. 2

y la línea que lo limita es su *contorno* o su *perímetro*, si bien esta última palabra se aplica más a la *longitud* del contorno. Alrededor del polígono se extiende otra porción indefinida de plano, que es la *región exterior*.

Vértices y *lados* del polígono son los mismos de la línea quebrada que forma su contorno.

26. *Ángulo* es la figura formada por dos semirrectas que parten de un punto. Este punto se llama *vértice*, y las semirrectas, *lados*.

Para precisar la definición de ángulo, y adquirir idea de su magnitud, se supone que una de las semirrectas *gira* alrededor del vértice, sin salir del plano, desde la posición inicial que constituye uno de los lados, llamado *lado origen*, hasta la final o *lado extremo*, en sentido determinado. (Fig. 3) El lado origen es OA; el extremo, OB, y el sentido, el que indica la flecha. Concebido así, el ángulo es la porción de plano sobre la cual resbala la semirrecta móvil desde su posición inicial a la final.

27. Dos ángulos del mismo sentido son iguales cuando pueden coincidir, para lo cual se les coloca de modo que coincidan los vértices y los lados de origen. Si los ángulos son iguales coincidirán también los lados extremos, y si uno

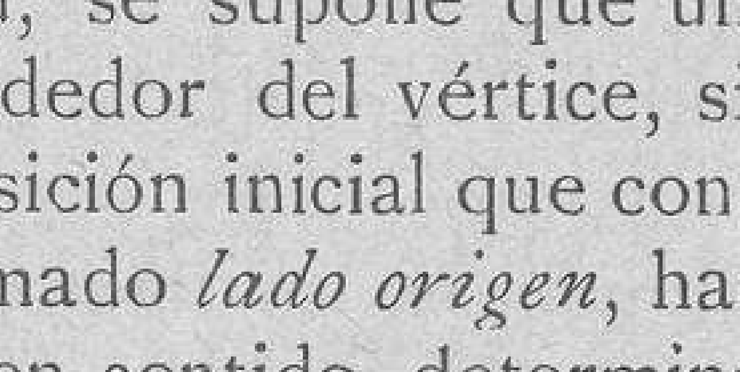


Fig. 3

de éstos queda dentro del otro ángulo, aquél será *menor* que éste, y éste, *mayor* que aquél.

28. *Ángulo llano* es el formado por una semirrecta que gira hasta colocarse opuesta (en prolongación) de la primera. (AOC, fig. 3)

El ángulo llano tiene, pues, los lados formando una recta única. Toda recta en la que haya marcado un punto puede considerarse como un ángulo llano cuyo vértice sea dicho punto.

Todos los ángulos llanos son iguales.

29. En la figura que forman dos semirrectas (no opuestas) que parten de un punto, hay, en rigor, dos ángulos, pero nosotros consideraremos siempre el menor que un llano, llamado entrante.

Los lados de un ángulo deben considerarse como semirrectas, y son, por tanto, indefinidos; pero como en algunas figuras aparecen como *segmentos* limitados, debe tenerse en cuenta que, en este caso, el mayor o menor tamaño de los lados para nada influye en la magnitud del ángulo, que sólo depende de la abertura o giro efectuado para formarle.

30. Un ángulo se designa por tres letras, correspondientes una a cada lado y otra al vértice, leyéndose ésta en medio, v. gr.: ángulo AOB (Fig. 3.)

En la escritura se reemplaza la palabra ángulo por el signo $\wedge$ colocado sobre las letras o número que designan el ángulo.

31. Dos ángulos son *consecutivos* cuando tienen el mismo vértice y (supuesto el mismo sentido), el lado extremo del primero es origen del segundo.

32. *Ángulos adyacentes* son los consecutivos en que el origen del primero y el extremo del segundo forman un ángulo llano, como los AOB y BOC de la fig. 3.

33. *Bisectriz* de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos ángulos iguales.

34. *Ángulo recto* es la mitad de un ángulo llano.

Todos los ángulos rectos son iguales.

35. Una recta es *perpendicular* a otra cuando forma con ella ángulos rectos. Si en una recta se considera un punto, el ángulo llano, cuyo vértice es aquel punto y sus lados caen sobre dicha recta, tiene sólo una bisectriz, luego *por un punto de una recta sólo se le puede trazar una perpendicular*.

36. Ángulo *agudo* es el menor que un recto; y *obtuso*, el mayor que un recto.

37. Ángulos *opuestos por el vértice* son aquellos en que los lados del uno son las semirrectas opuestas a los lados del otro. Ejemplo: 1 y 3 (Fig. 3)

Ejercicio.—Decir qué clases de ángulos forman, al cortarse, dos rectas indefinidas. Dado un ángulo, formar su adyacente y su opuesto por el vértice.

38. Si dos rectas se cortan por otra, llamada *secante*, ésta forma con aquéllas 8 ángulos, de los cuales, en 4 se puede tomar un punto que esté, a la vez, entre las rectas y dentro del ángulo. Estos se llaman *internos*, y los demás, *externos*. (Fig. 4)

Tanto los internos como los externos se llaman *alternos* cuando están a distinto lado de la secante y no son adyacentes.

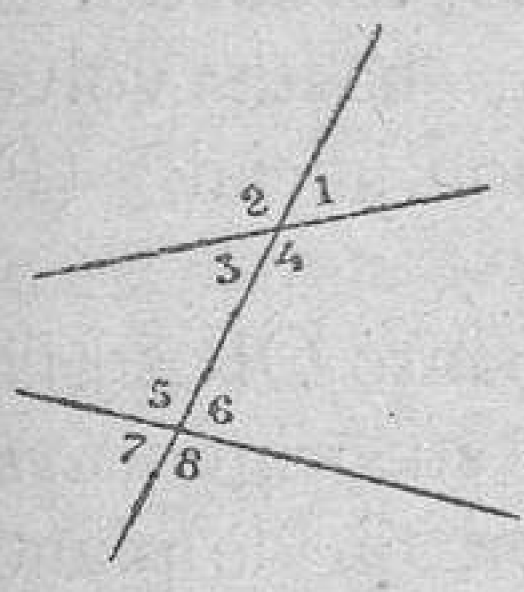


Fig. 4

Ángulos *correspondientes* son uno interno y otro externo, del mismo lado de la secante, y no adyacentes.

Ejercicio.—Buscar en la fig. 4 los ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes.

39. Dos rectas de un plano se llaman *paralelas* cuando no tienen ningún punto común; lo que se conoce en que al cortarlas por una secante, los ángulos alternos internos, los alternos externos o los correspondientes son iguales entre sí.

40. En un polígono cada dos lados consecutivos forman un ángulo, cuyo vértice es el mismo del polígono. Hay, pues, tantos ángulos como vértices y como lados.

41. **Línea curva.**—Así como un hilo tirante daba una imagen de la línea recta, ese mismo hilo, flojo, da idea de la línea *curva*. La línea *curva* no tiene ninguna porción recta. Las líneas que tienen porciones rectas y otras curvas se llaman líneas *mixtas*

42. *Arco* de una curva es la parte de ella limitada por dos puntos, llamados *extremos*.

43. *Cuerda* es el segmento de recta que une los extremos de un arco.

Entre las curvas sólo estudiaremos la circunferencia.

44. *Circunferencia* es la línea curva marca-

da por el extremo de un segmento fijo que gira, en un plano, alrededor de su origen, hasta volver a su posición inicial. (Figura. 5)

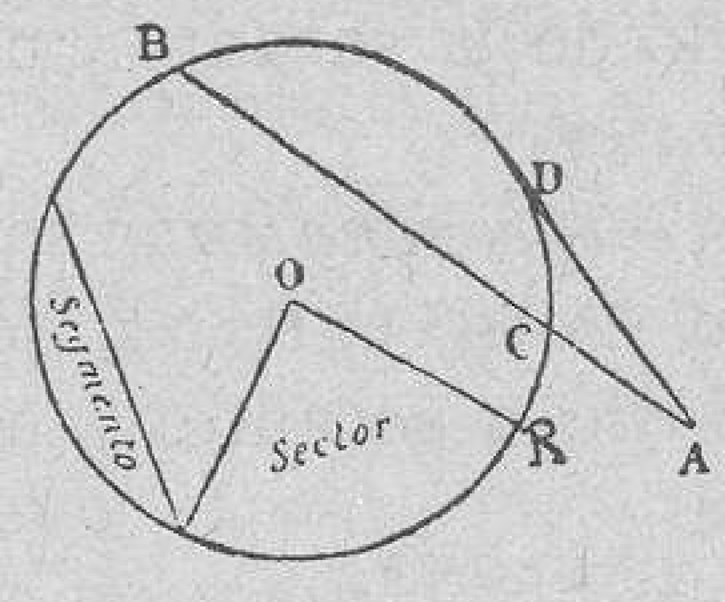


Fig. 5

El segmento OR se llama *radio;* su origen, *centro*, y la porción de plano, sobre la cual resbala al girar, *círculo*.

Ejercicio.—Trazar en el tablero una circunferencia, valiéndose de una cuerda a cuyo extremo se ate el clarión.

Se puede también decir que la circunferencia es una curva, cerrada y plana, cuyos puntos están a igual distancia de otro llamado centro.

Ejercicio. - Marcando en el tablero un punto O, hallar todos los que estén a una distancia de él igual a 1 dm.

45. *Diámetro* de una circunferencia es una cuerda que pasa por el centro.

46. Todos los radios de una circunferencia son iguales; y los diámetros también son iguales entre sí, y cada uno igual a dos radios.

47. *Secante* a una circunferencia es una cuerda prolongada. *Corta* a la circunferencia en dos puntos. ACB, fig. 5

48. Si la secante gira alrededor de uno de los puntos en que corta a la circunferencia (punto de *intersección)* hasta que el otro coincida con él, se convierte en *tangente*, que es la recta que *toca* en un punto a la circunferencia. Dicho punto se llama de *contacto* o de *tangencia*. AD, fig. 5.

49. *Segmento de círculo* es la porción de él comprendida entre un arco y su cuerda. (Figura 5).

50. Si la cuerda es un diámetro, el segmento se llama *semicírculo*, y su arco, *semicircunferencia*. La mitad de una semicircunferencia se llama *cuadrante*.

51. *Sector circular* es la parte de círculo limitada por dos radios y el arco que une sus extremos. (Fig. 5).

52. **Polígonos**.—*Triángulo* es el polígono de tres lados. En él, a cada lado, *se opone* un ángulo, que es el que forman los otros dos; y a cada ángulo, un lado, que es el que no pasa por su vértice. Generalmente se designan los ángulos por A, B, C, y los lados, respectivamente opuestos, por *a*, *b*, *c*. (Fig. 6).

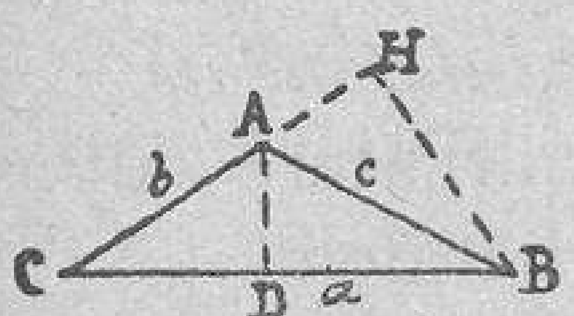


Fig. 6

Altura es la distancia perpendicular entre un vértice y el lado opuesto (prolongado si es necesario). En la fig. 6, la altura AD corta al lado opuesto al vértice, pero la que parte de B, que es BH, corta a la prolongación. El lado opuesto al vértice de que parte la altura se llama *base*, y puede ser cualquiera de los del triángulo.

53. Al triángulo cuyos lados son todos desiguales no es preciso darle nombre especial, aunque suele llamársele *escaleno*; el que tiene dos lados iguales se llama *isósceles*, siendo su base el lado no igual a los otros; y el que tiene sus tres lados iguales se llama *equilátero*.

El triángulo que tiene un ángulo obtuso se-llama *obtusángulo* (como el ABC de la fig. 6); el que tiene un ángulo recto se llama *rectángulo* (CBH de la fig. 6), denominándose *catetos* los lados que forman el ángulo recto (BH y HC), e *hipotenusa* el lado opuesto al ángulo recto, que es el mayor (BC). El triángulo cuyos tres ángulos son agudos se llama *acutángulo.*

54. **Cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. Recorriendo el contorno sin retroceder, el primer lado y el tercero, o el segundo y cuarto se llaman *opuestos*, y el primero y segundo o tercero y cuarto *consecutivos* o *contiguos.*

55. Los cuadriláteros que no tienen lados paralelos suelen llamarse *trapezoides.*

56. *Trapecio* es el cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos y los otros dos no. *Altura* es la distancia entre los lados paralelos, llamados *bases.* La altura se traza desde un punto de una base a la otra, *perpendicularmente.*

57. *Paralelogramo* es el cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son paralelos.

Los paralelogramos se clasifican por la magnitud y posición de dos lados inmediatos del siguiente modo:

Con dos lados inmediatos	oblícuos y desiguales	= *Romboide*
	íd. e iguales	= *Rombo*
	perpendics. y desiguales	= *Rectángulo*
	íd. e iguales	= *Cuadrado*

Ejercicio.—Dibujar *aproximadamente* los paralelogramos, según su definición.

58. El cuadrado de 1 m. de lado se llama *metro cuadrado*, y es la unidad de superficie del sistema métrico decimal. Se indica por la abre-

viatura m.^{2} y tiene los múltiplos y divisores que siguen:

El *decámetro cuadrado* (Dm.^{2}) que es un cuadrado cuyo lado es 1 Dm. lineal. Se llama también *área (a)*.

El *hectómetro cuadrado* (Hm.^{2}) que es un cuadrado cuyo lado es un Hm. lineal. Se llama también hectárea (Ha).

El *Kilómetro cuadrado* (Km.^{2}) que es un cuadrado cuyo lado es 1 Km. lineal.

Son divisores:

El *decímetro cuadrado* (dm.^{2})... ¿qué será?
El *centímetro cuadrado* (cm.^{2})... ¿qué será?
El *milímetro cuadrado* (mm.^{2})... ¿qué será?

El Dm.^{2} o área, y el Hm.^{2} o hectárea se usan para expresar superficies como la de una habitación o de una tierra de labor. El Km.^{2} para la extensión de una provincia o nación. Para superficies como las que ordinariamente se consideran en un papel o tablero se usan los divisores del m^2. Pero las superficies no se miden directamente con estas unidades, sino que se *calcula* el número de ellas midiendo ciertas líneas y haciendo ciertas operaciones con las longitudes, como se verá más adelante.

Se puede medir directamente el área de una figura dibujada en papel cuadriculado. Se vende en el comercio papel cuadriculado milimétrico, es decir, cuyos cuadrados tienen un milímetro de lado. Contando el número de cuadrados contenidos en la figura dada, procurando compensar lo que falte en unos con lo que sobra en otros, se obtiene bastante aproximadamente el área de la figura, en mm^2.

59. *Polígono inscrito* en una circunferencia

es aquel cuyos lados son cuerdas de ella; y *circunscrito* a una circunferencia, aquel cuyos lados son tangentes. (Fig. 7)

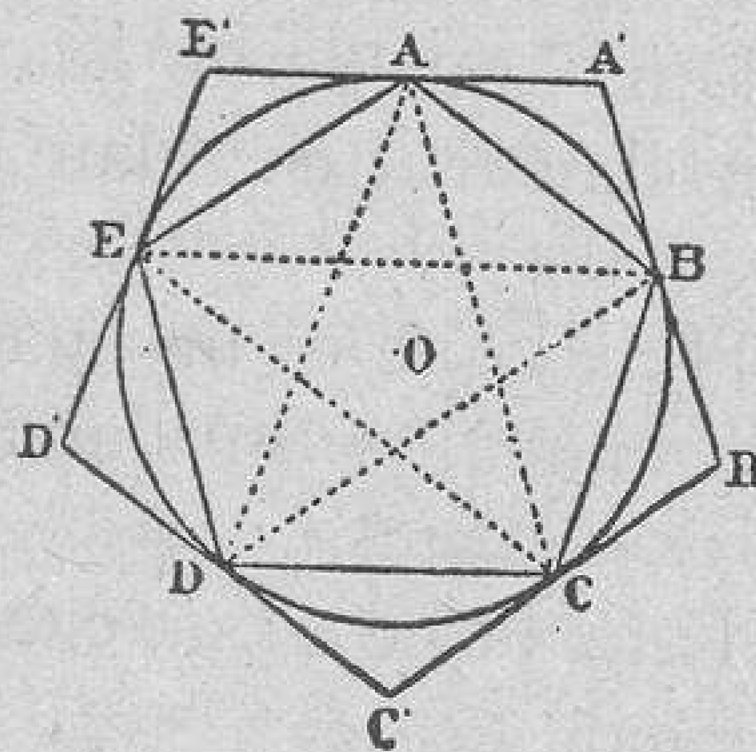


Fig. 7

60. El triángulo inscrito en una circunferencia, uno de cuyos lados sea un diámetro, es siempre *triángulo rectángulo.*

Dibujar un polígono inscrito en una circunferencia.

61. *Polígono regular* es el que tiene todos sus lados iguales, y también sus ángulos. Figura 7. Ejemplos: el triángulo equilátero y el cuadrado.

Problemas gráficos

62. El manejo de la regla, con la ayuda de la cual se trazan rectas, y del compás, que sirve para describir circunferencias, permite resolver problemas *gráficos* o de dibujo, como los que siguen.

63. Trazar la perpendicular a un segmento de recta AB, en su punto medio. (El alumno dibujará el segmento AB e irá haciendo lo que a continuación se expresa).

Poniendo la punta seca (*) del compás en A, y con una abertura o radio a simple vista mayor que la mitad del segmento, se trazan dos arcos, uno por encima y otro por debajo (hacia el medio próximamente). Sin variar la abertura del compás se trazan, desde B, otros dos arcos que cortarán a los anteriores en puntos que llamaremos M y N. La recta MN es la perpendicular a AB en su punto medio, y se llama *mediatriz* de AB. Tiene esta mediatriz la propiedad de que un punto cualquiera tomado en ella dista lo mismo de A que de B.

Los puntos M y N se llaman *simétricos* con relación a la recta AB.

Como se ve, la construcción anterior sirve también para dibujar un ángulo recto.

Resuelva el alumno los siguientes problemas:

a) Hallar el punto medio de un segmento.

(*) La que no lleva el lapiz o tiralíneas.

b) Sobre un segmento dado, considerado como diámetro, trazar una circunferencia.

c) Dividir en dos partes iguales un arco (Se traza la mediatriz de su cuerda).

d) Trazar la bisectriz de un ángulo. (Se divide en dos partes iguales un arco trazado entre sus lados, haciendo centro en el vértice.

e) Trazar una circunferencia que pase por dos puntos A y B. (El centro tiene que estar a igual distancia de A que de B).

f) Trazar una circunferencia que pase por los tres vértices de un triángulo (Se atiende primero a dos vértices y luego a uno de éstos y al tercero).

64. Trazar la perpendicular a una recta AB por un punto C de ella (Vaya haciendo el alumno la figura). A un lado y a otro de C se toman puntos que llamaremos E y F, a igual distancia de él, y luego se traza la *mediatriz* de EF.

Resuelva el alumno los problemas siguientes:

a) Trazar una recta tangente a una circunferencia en un punto A. (Se traza la recta que une el centro con A, y por el punto A la perpendicular a dicha recta).

b) Trazar una circunferencia tangente a una recta en el punto A de ésta.

65. Trazar una perpendicular a una recta AB desde un punto C fuera de la recta (Váyase haciendo la figura). Con la punta seca del compás en C, se traza un arco abriendo el compás lo bastante para que dicho arco corte a la recta en dos puntos que nombramos E y F. Luego se traza la mediatriz de EF.

Resuélvanse los problemas que siguen:

a) Trazar las tres alturas de un triángulo.

b) Trazar la altura de un trapecio.

66. Construir un ángulo igual a otro que

nos den. Entre los lados del ángulo dado trazamos desde el vértice, un arco. Sobre una semirrecta cuyo origen llamamos A (trácese) hacemos centro en A, y con el mismo radio de antes trazamos un arco que arranque de otro punto B de la semirrecta y sea a simple vista mayor que el comprendido entre los lados del ángulo. Tomamos con el compás la distancia entre los extremos del arco trazado en el ángulo, y a partir de B señalamos en el otro arco el punto C. Este punto, unido con el A, nos da el ángulo pedido.

a) Dibujar un triángulo conociendo un ángulo y las longitudes de los dos lados que han de formar ese ángulo en el triángulo pedido.

67. Dibujar un cuadrado conocido su lado. Se dibuja un ángulo recto, y, a partir del vértice, se toman sobre sus lados, con el compás, segmentos iguales al lado que nos dan. Sin variar la abertura del compás se trazan, desde los extremos de los lados ya marcados, arcos que se corten, y el punto en que lo hacen será el cuarto vértice del cuadrado (los otros tres ya se conocían).

a) Dibujar un rectángulo conociendo dos lados inmediatos.

b) Dibujar un rombo conociendo un ángulo y un lado.

68. Otro instrumento útil, además de la regla y el compás, es la escuadra o cartabón, triángulo rectángulo de madera. Sirve, con ayuda de una regla, para trazar rectas paralelas.

Apoyando la regla sobre un cateto de la escuadra, y haciendo resbalar ésta, siempre apretada contra la regla, a lo largo de ella, todas las rectas que se tracen, tomando como guía la hipotenusa de la escuadra, son paralelas.

a) Dibujar un paralelogramo valiéndose de la escuadra

b) Comprobar con la escuadra la propiedad de ser rectángulo el triángulo que se forma uniendo los extremos de un diámetro de una circunferencia con cualquier punto de ésta (59).

Figuras del espacio

69. Se llama *semiplano* cada una de las dos porciones en que queda dividido un plano por una recta trazada en él.

70. *Ángulo diedro* es la figura que forma dos semiplanos que parten de una misma recta, llamada *arista*, como dos paredes de una habitación, dos hojas de un libro entreabierto, etc. Los semiplanos se llaman *caras*. Se supone, para formar idea de la magnitud del diedro, que uno de los *semiplanos* giró alrededor de la arista desde una posición inicial, que es la *cara origen*, hasta otra final o *cara extremo*, en sentido determinado.

El diedro es *llano* si sus dos caras caen en un mismo plano.

Diedro recto es la mitad de un diedro llano.

71. *Plano bisector* de un diedro es el que lo divide en dos partes iguales.

Las denominaciones de agudos, obtusos, consecutivos, adyacentes, y opuestos *por la arista* se aplican a los diedros, como a los ángulos rectilíneos, reemplazando las palabras lado por *cara*, vértice, por *arista*, etc.

Ejercicio.—Definir las clases de ángulos citados.

72. *Planos paralelos* son los que no tienen ningún punto común.

73. **Poliedros.**—Los *cuerpos* en que todas las partes de su superficie son planas (y se llaman

caras) reciben el nombre de *poliedros*. Aquellos en que alguna parte de su superficie, o toda ella es *curva*, es decir, no plana, suelen llamarse *cuerpos redondos*.

74. *Pirámide* es un poliedro que tiene una cara llamada *base*, que puede ser cualquier polígono, y las restantes caras, llamadas *laterales*, son triángulos con un vértice común denominado vértice de la pirámide.

La pirámide de base triangular se llama también *tetraedro*.

Muéstrense al alumno pirámides de madera o cartón.

75. *Prisma* es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas llamadas *bases*, que pueden ser polígonos cualesquiera. Las demás caras (laterales) son paralelogramos.

Muéstrense al alumno prismas materiales.

Cuando *todas* las caras laterales son rectángulos, el prisma se llama *recto*.

Si todas las caras, incluso las bases, son paralelogramos, el prisma recibe el nombre de *paralelepípedo*; y si todas las caras son rectángulos, *paralelepípedo rectangular*.

El paralelepípedo rectangular es una figura muy común. Las habitaciones, las cajas, los ladrillos, etcétera, tienen ordinariamente esta forma.

El paralelepípedo rectangular, cuyas seis caras son cuadrados, se llama *cubo*.

76. El cubo cuya arista es un metro se llama *metro cúbico* y es la unidad de volumen del sistema métrico decimal. Se designa por la abreviatura $m.^3$

Hay múltiplos del metro cúbico, pero apenas se usan. En cambio se utilizan mucho sus divisores, a saber:

El *decímetro cúbico* ($dm.^3$) que es un cubo cuya arista es 1 *dm.* lineal.

El *centímetro cúbico* ($cm.^3$ o también *c.c.*) que es un cubo cuya arista es 1 *cm.* lineal.

El $mm.^3$ (¿qué será?)

77. Una vasija cuyo volumen interior sea 1 dm^3 se dice que tiene la capacidad (o cabida) de un *litro*, y es la unidad de capacidad del sistema métrico decimal.

Hay múltiplos y divisores del litro, a saber:

El *decalitro* (*Dl.*) = 10 litros
El *hectolitro* (*Hl.*) = 10 decalitros
El *kilolitro* (*Kl.*) = 10 hectolitros.

Divisores:

El *decilitro* (*dl.*) = Décima parte del litro
El *centilitro* (*cl.*) = íd. del *dl.*
El *mililitro* (*ml.*) = íd. del *cl.*

Por litros o hectolitros se miden los líquidos (vino, leche etc), los granos (trigo, garbanzos, etcétera).

78. Un *litro* de agua pura pesa aproximadamente un kilogramo (kg.) que es la unidad más corriente de peso en el sistema métrico.

Hay otras unidades de peso, a saber:

El *miriagramo* (*Mg.*) = 10 *kg.*
El *quintal métrico* (*Qm.*) = 100 *kg.*
La *tonelada métrica* (*Tm.*) = 1000 *kg.*

Menores son:

El *gramo* (*g.*) = Milésima parte del *kg.*
El *decagramo* (*Dg.*) = 10 *g.*
El *hectogramo* (*Hg.*) = 10 *Dg.*

Y menores que el gramo:

decigramo (*dg.*) = Décima parte del gramo
centigramo (*cg.*) = íd. del *dg.*
miligramo (*mg.*) = íd. del *cg.*

Ya hemos dicho que la unidad más corriente es el *kg.* Para pesos del carbón, o de otra mercancía que se compre en grande se usan el quintal y la tonelada. Los medicamentos y otras substancias, para cuyos pesos se utilizan balanzas de precisión, suele pesarse en *cg. y mg.* y aun subdividiendo estas unidades.

La peseta, moneda de plata de todos conocida, pesa cinco gramos, lo mismo que la moneda de 5 céntimos.

79. El número de kgs. que pesa un $dm.^3$ o 1 litro de otro cuerpo distinto del agua se llama *peso específico.* Así, decir que el peso específico del aceite es 0'9, querría expresar que un litro de aceite pesa 0'9 kgs.

80. **Superficies de revolución y cuerpos redondos**. Se comprende que una recta puede resbalar sobre un plano sin dejar nunca de estar contenida, esto es, de apoyarse por completo en él. Si la recta se moviese de modo que recorriese todo el plano, se podría considerar esta superficie como resultado del movimiento de aquella recta. Entonces se dice que la recta, mo-

viéndose, puede *engendrar* la *superficie plana*. La recta se llama entonces *generatriz*.

Así consideramos engendradas las superficies que siguen.

81. *Superficie de revolución* es la engendrada por una línea (generatriz) que da vueltas alrededor de una recta llamada *eje*, de modo que cada punto de la generatriz recorre una circunferencia, (fig. 8).

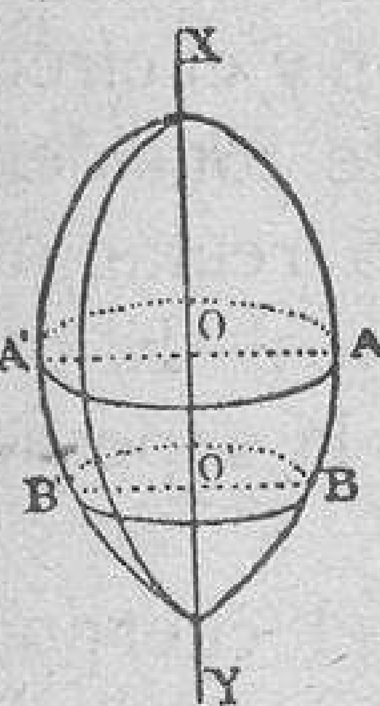


Fig. 8

Si la generatriz es una recta que corta al eje, la superficie se llama *cónica*; si la generatriz es paralela al eje, la superficie es *cilíndrica*; si la generatriz es una semicircunferencia, cuyo diámetro es el eje, la superficie se llama *esférica*.

Muéstrense al alumno estas superficies.

Meridiano de una superficie de revolución es la línea en que la corta un semiplano trazado por el eje. Generalmente, la generatriz es el mismo meridiano. Así, en la superficie cónica y cilíndrica, el meridiano es una recta, y en la superficie esférica es una semicircunferencia. La otra semicircunferencia que completaría una circunferencia se llama *antimeridiano*, pero á veces se llama meridiano la circunferencia completa. La superficie de la Tierra es aproximadamente esférica, y los meridianos pasan por cada punto de ella y por dos puntos fijos, los extremos del eje, que se llaman *polos*.

Ahora se comprenderá lo que quería decirse al afirmar que el metro es la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano de París (21).

La circunferencia que describe cada uno de los puntos de la generatriz de una superficie de revolución se llama *paralelo*, que se puede considerar también como *sección* (corte) de la superficie por un plano.

En la esfera celeste se consideran varios paralelos, y entre ellos el ecuador, los trópicos, etc.

82. *Cono de revolución* es el cuerpo limitado por una superficie cónica de revolución y el círculo de un paralelo llamado *base*. Se puede considerar engendrado el cono por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos. El otro engendra la base, y la hipotenusa, la superficie lateral.

83. *Cilindro de revolución* es el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica de revolución y los círculos de dos paralelos, llamados *bases*.

Se puede considerar engendrado el cilindro por un paralelogramo rectángulo, que gira alrededor de uno de sus lados. El opuesto engendra la superficie lateral y los otros dos las bases.

Tronco de cono o de cilindro es el cuerpo comprendido entre la base y otro plano que corte al cuerpo (y que no sea paralelo a la base si el cuerpo es un cilindro).

84. *Esfera* es el cuerpo limitado por la superficie esférica. Se puede considerar engendrada la esfera por un semicírculo que gira alrededor de su diámetro.

85. *Segmento esférico* es el trozo de esfera que se separa de ella al cortarla por un plano o por dos planos paralelos, llamados bases.

86. La parte de superficie esférica correspondiente al segmento esférico de una base se llama *casquete.*

87. *Cuña esférica* es la porción de esfera separada de ella por dos semiplanos que parten del eje (Como un gajo de naranja). La parte de superficie esférica correspondiente a la cuña se llama *huso.*

De todos estos cuerpos se mostrarán ejemplares al alumno.

CALCULOS

NUMERACIÓN

88. Se supone que el alumno conoce prácticamente la numeración decimal. Sabrá, por consiguiente, que los primeros números se nombran con palabras independientes: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve. El número siguiente, diez, se llama *base* del sistema, y se considera como *unidad colectiva*, esto es, como grupo de unidades simples que, a su vez, puede servir de término de comparación. En este sentido se llama *decena*.

El principio fundamental de la numeración hablada es el siguiente:

Con diez unidades simples se forma una *decena;* con diez decenas, una nueva unidad colectiva llamada *centena;* con diez de éstas, otra nueva unidad llamada *millar;*...y, en general, con *diez* unidades de un orden, otra de orden inmediato superior.

La unidad simple se llama también de primer orden, la decena de segundo, etc.

Todo número es una colección de unidades de diversos órdenes, *sin que lleguen a diez las de cada orden;* y el nombre del número se forma con las palabras que indican cuántas unidades de cada orden le constituyen, comenzando el enunciado por las de orden superior.

El uso ha introducido ciertas modificaciones en la nomenclatura: así, en vez de diez y cuatro se dice catorce, en lugar de dos veces diez decimos veinte, etc., sobre lo cual no insistimos por ser harto conocido.

89. **Numeración escrita.**—A los nueve primeros números corresponden, respectivamente, los siguientes signos, llamados *cifras*.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

El principio fundamental de la numeración escrita es el siguiente:

Toda cifra tiene, además del *valor absoluto* (que es el que por su figura le corresponde), otro valor *relativo*, dependiente del lugar que ocupa.

Toda cifra colocada al lado de otra representa unidades del orden inmediato: superior, si está a la izquierda, e inferior, si a la derecha.

Para aplicar este principio se necesita usar otra *cifra* llamada *cero*, que se escribe: 0, la cual carece de valor absoluto, pero se lo puede prestar relativo a las demás. Así, 1 significa uno, pero al escribir 10, el 1 pasa a la izquierda del cero y representa, por tanto, una decena.

Para escribir un número basta ir representando mediante cifras el número de unidades de cada orden que contiene, cuidando que el lugar en que éstas se coloquen sea el correspondiente a su valor relativo.

Generalmente se comienza por las unidades de orden superior, y se continúa, ordenadamente, escribiendo las cifras de izquierda a derecha.

90. La unidad abstracta no puede dividirse

en partes. Entre los seres u objetos que se toman como unidad en un conjunto de ellos, hay muchos que son por naturaleza indivisibles, vg: un hombre, una silla, etc. Luego los números referidos a estas unidades, esto es, los que indican una pluralidad determinada, o un conjunto de objetos y que, por tanto, resultan de la operación de *contar*, son siempre números *enteros*.

Pero las unidades de medida, tales como el metro, el litro, el kilogramo, etc., pueden concebirse divididas en partes iguales.

Así, el decímetro es una de las diez partes iguales en que puede dividirse el metro; el centímetro resulta de dividir el dm. en diez partes o el metro en cien, etc.

Tratándose del *m.* del *l.* etc., las partes llevan, como sabemos, nombres especiales; *dm. dl.* etcétera.

Pero se puede suponer una unidad *cualquiera*, y, por consiguiente innominada, y entonces las partes llevan nombres *genéricos*, que convienen a todos los casos análogos. Así, siempre que una unidad, sea quienquiera, se divide en 10 partes iguales, cada una de estas se llama *décima*; si la unidad se divide en 100 partes (o la décima en 10) se llaman éstas *centésimas*; si en mil partes, *milésimas,* etc.

Por eso podemos decir: el decímetro es la décima parte del metro; el centímetro, la centésima parte, y el milímetro, la milésima parte.

La décima, la centésima, etc. se llaman unidades de 1.°, 2.°, etc. órdenes decimales.

Dado el nombre de una unidad decimal, se averigua fácilmente su orden por el número de ceros qne sería necesario poner tras el 1 para formar la unidad entera de análoga denominación.

Ejemplo: la *cienmilésima* es de 5.º orden decimal, porque cien mil se escribe con un 1 seguido de 5 ceros.

Póngase otros ejemplos hasta ejercitarse bien.

Inversamente: dado el orden de una unidad decimal se puede averiguar su denominación, observando el nombre del número escrito con un 1 y tantos ceros como aquel orden indicase.

Ejemplo: la unidad de orden 10 es la *diezmilmillonésima*, porque 1 seguido de de 10 ceros se lee diez mil millones.

Pónganse otros ejemplos.

Cada unidad decimal contiene 10 unidades del orden inmediato inferior; lo mismo que ocurre con las unidades enteras, por lo cual rigen para ellas los principios de la numeración antes expuestos, para aplicar los cuales basta distinguir la cifra que representa las unidades por medio de una coma colocada a su derecha, en la escritura, y por medio de la palabra unidades o enteros en la lectura.

De aquí resultan las siguientes reglas:

Para *escribir* un número que tenga parte entera y parte decimal, se escribe primero la parte entera, se pone a su derecha una coma, y, en seguida, la parte decimal como si fuese entera, pero cuidando que la última cifra decimal venga a ocupar el lugar que le corresponda por su orden, para lo cual, si es preciso, se ponen ceros.

Ejemplo: Ciento siete unidades y catorce diezmilésimas.

107'0014

Si no existe parte entera, se pone en su lugar un cero. Ejemplo: Ocho milésimas.

0'008

Como, según hemos advertido, los decímetros, decilitros o decigramos son décimas del m., del litro y del g.; los cm., cl., cg., centésimas, etc., se deduce inmediatamente la siguiente regla:

91. Si una longitud, capacidad o peso se da en unidades de diversos órdenes (pertenecientes al sistema métrico decimal) y se quiere expresar en una sola unidad, basta escribir de derecha a izquierda las cifras que representen las unidades de cada orden, de mayor a menor, poniendo un cero por cada orden que falte, y la coma a la derecha de la cifra que represente unidades del orden de aquella en que queremos expresar la cantidad.

Ejemplos: Expresar 7 Km., 8 Dm., 6 dm., 9 cm., en metros.

7080'69 m.

Referir 4 Tm., 8 Qm. y 5 Kg. a quintales.

48'05 Qm.

Expresar en Hl. la cantidad 6 Dl. y 8 l.

0'68 Hl.

Pónganse nuevos ejemplos hasta hacerlo con rapidez.

Para expresar, inversamente, en unidades de diversos órdenes una longitud, una capacidad o un peso, representados por un número decimal, basta separar de una en una las cifras, a la izquierda y a la derecha de la que tiene la coma, y darle a cada una el nombre que le corresponde en la serie ordenada de unidades mayores o menores que aquella en que venía expresada la cantidad dada.

Ejemplos: Expresar en unidades de distintos órdenes la cantidad

2073'465 Hg.

La cifra 3 representa Hg.	La cifra 4 representa Dg.
La cifra 7 representa Kg.	La cifra 6 representa g.
La cifra 0 representa Mg.	La cifra 5 representa dg.
La cifra 2 representa Qm.	

Luego la cantidad es: 2 Qm., 7 Kg., 3 Hg., 4 Dg., 6 g., 5 dg.

¿Cuántos Hl. hay en 2327'85 litros?

Como la cifra 7 representa litros y la 2 decalitros, serán 23'2785 Hl., esto es: 23 Hl. y 2785 diezmilésimas de Hl.

Conviene resolver muchos ejemplos, para adquirir soltura en ello.

Igualdades y desigualdades

92. Cuando dos cantidades son tales que una puede reemplazar o sustituir a la otra en cierto concepto, se dice que, en ese mismo concepto, son *iguales*, y se expresa escribiendo entre ellas el signo = (igual.)

Ejemplo: Con respecto a la longitud,

1 Hm. = 100 m.

Esta expresión se llama *igualdad* y consta de dos *miembros*: el primero es todo lo escrito antes del signo =, y el segundo, lo escrito después. Así, en la igualdad anterior, el primer miembro es 1 Hm., y el segundo, 100 m.

Se puede invertir la igualdad de este modo:

100 m. = 1 Hm.

93. Si una cantidad reemplaza sólo a una parte de otra, es *menor* que ella, y ella es *mayor*.

Se expresa así:

1 m. > 1 dm. (1 m. *mayor* que 1 dm) o, inversamente, 1 dm. < 1 m. (1 dm. *menor* que 1 m.)

Estas expresiones se llaman *desigualdades*, y constan como la igualdad de dos miembros; pero al cambiarlos, hay que cambiar, como se ve, el sentido del signo, de modo que la abertura del ángulo corresponda siempre a la cantidad mayor.

OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

ADICIÓN

94. *Adición* es la operación de sumar.

Sumar dos números, llamados *sumandos*, es reunirlos en uno solo, llamado *suma*. (*)

Sumar *varios* números, dados en cierto orden, es sumar el primero con el segundo, la suma de ambos con el tercero, etc.

La adición se indica escribiendo entre los sumandos el signo $+$ que se lee *más*.

$$7 + 2 + 5$$

es una adición que comunmente se llama también *suma indicada*. La suma *efectuada* o *total* es el número 14, que resultaría después de realizada la operación; lo cual se expresa por la igualdad

$$7 + 2 + 5 = 14$$

Los sumandos se llaman también *términos* o *datos* de la operación.

95. Sumar dos igualdades *miembro* a *miembro* es sumar los primeros miembros y luego los segundos. Ambas sumas son también iguales, es decir, de

$$\begin{array}{rc} & a = b \\ & c = d \\ \hline \text{deducimos} & a + c = b + d \end{array}$$

(*) Adoptamos esta definición, poco satisfactoria, por ser la que comunmente conocen los niños.

Sumando miembro a miembro una igualdad con una desigualdad resulta una desigualdad del mismo sentido que la empleada. Así:

$$\begin{array}{ccc} a = b & a > b & a < b \\ c > d & c = d & c = d \\ \hline a+c > b+d & a+c > b+d & a+c < b+d \end{array}$$

Dos desigualdades pueden sumarse, miembro a miembro, si son del mismo sentido, y resulta otra también del mismo sentido.

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

Si las desigualdades fuesen de sentido contrario, por ejemplo: $a > b$ y $c < d$ no pueden sumarse miembro a miembro, porque no se puede prever si el resultado será una desigualdad o una igualdad.

Reflexione el alumno acerca de los motivos por los cuales podemos afirmar que son ciertas las propiedades anteriores.

Por las propiedades que anteceden se dice que la suma es una operación *uniforme*.

96. En una suma se puede cambiar el orden de los sumandos sin que cambie el total.

Ejemplo: $7 + 2 + 5 = 7 + 5 + 2$

Por esta propiedad se dice que la suma es *conmutativa*.

97. En una suma indicada se pueden reemplazar dos o más sumandos por su suma efectua-

da. Inversamente, en lugar de un sumando se pueden escribir varios, cuya suma sea igual a aquél.

Ejemplos: $4 + 2 + 5 + 3 = 4 + 7 + 3$

(El 7 ha reemplazado a $2 + 5$.)

$$4 + 7 + 3 = 4 + 2 + 5 + 3$$

(El 7 ha sido reemplazado por $2 + 5$.)

Si no se quiere escribir la suma 7, efectuada, se deja indicada, pero encerrándola en un paréntesis. Así

$$4 + 2 + 5 + 3 = 4 + (2 + 5) + 3$$

Análogamente si ponemos

$$4 + (2 + 5) + 3 = 4 + 2 + 5 + 3$$

diremos que hemos descompuesto el sumando $(2 + 5)$ en los sumandos parciales 2 y 5.

Por estas propiedades se dice que la suma es *asociativa*, directa o inversamente.

Resulta, pues, que en una suma indicada pueden encerrarse en un paréntesis varios sumandos, o sacarlos de él si estuvieren dentro, sin que el resultado varíe.

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 + (3 + 4) + 5 + 6;$$

$$2 + 3 + (4 + 5 + 6) = 2 + (3 + 4 + 5 + 6).$$

Obsérvese que aunque el resultado final sea el mismo, la manera de ejecutar la operación sería diferente. Examínelo por sí mismo el alumno.

98. Un número de varias cifras se pue-

de considerar como suma de sus unidades de diversos órdenes, v. g.:

4.235 = 4 millares + 2 centenas + 3 decenas + 5 unidades; o también: 4.235 = 4.000 + + 200 + 30 + 5.

99. **Reglas para sumar.**—Suponemos que el alumno sabe, prácticamente, sumar números enteros.

Por eso no ponemos aquí la regla correspondiente, que es innecesaria para quien sepa realizar la operación. Conviene, sin embargo, para adquirir facilidad de expresión, que el alumno intente decir correctamente dicha regla.

100. Los números decimales se suman como los enteros; sin más que hacer corresponderse la coma del resultado con las de los sumandos.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 102'35 \\ +\ 71'002 \\ +\ 0'14 \\ \hline =173'492 \end{array}$$

101. La suma de cantidades no tiene sentido si no son de la misma especie. Supuesto esto, se expresan todas en la misma unidad, se suman los números que las representan como si fueran abstractos y se refiere el resultado a la misma unidad que los datos.

Ejemplo: (2 Kl.+7 Dl.+9 dl.)+124'32 l.

Se expresará todo en litros, y saldrá

2070'9 l.+124'32 l.

Ahora sumamos 2070'9 + 124'32 = 2195'22 y el resultado será 2195'22 *litros*.

102. *Se admite* que la suma de un número con cero, o viceversa, es el mismo número.

$$6+0=6 \quad 0+4=4 \quad 0+0=0$$

103. **Sumas geométricas.**—Dos segmentos de recta pueden sumarse midiéndolos con la misma unidad, sumando sus longitudes y tomando después sobre una recta un segmento de longitud igual a dicha suma. Pero también pueden sumarse, sin saber su longitud, tomándolos sobre una recta de modo que, atribuyéndoles el mismo sentido, el extremo del primero sea origen del segundo. La suma es el segmento comprendido entre el origen del primero y el extremo del segundo. Así,

$$AB + BC = AC.$$

104. Sobre una circunferencia se pueden sumar arcos de ella, o de otras iguales, del mismo modo que sobre una recta se suman segmentos.

$$\text{arco } AB + \text{arco } BC = \text{arco } AC.$$

105. Dos ángulos se suman colocándolos sobre un plano con los vértices confundidos y de modo que, atribuyéndoles igual sentido, el lado extremo del primero sea origen del segundo. La suma es el ángulo que forman el lado origen del primero con el extremo del segundo.

106. Los ángulos cuya suma es un ángulo recto se llaman *complementarios;* y aquellos cuya suma es dos rectos, o un llano, *suplementarios.*

Cuando varios ángulos son complementarios o suplementarios, cada uno tiene por complemento o suplemento la suma de todos los demás.

Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

Diga el alumno por qué.

Dos ángulos que tengan el mismo complemento o suplemento son iguales.

107. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Examine el alumno por qué, teniendo presente lo que acaba de decirse.

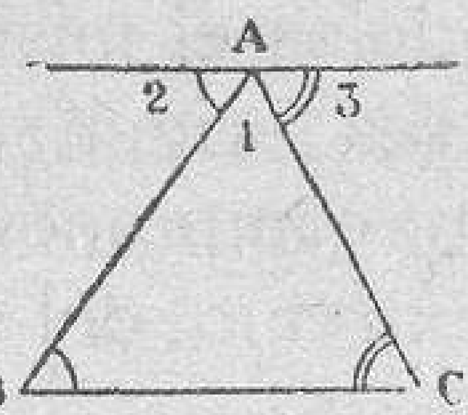


Fig. 9

108.* La suma de los ángulos de un triángulo es igual a un llano.

Admitido lo que se dijo al hablar de las paralelas (39) se demuestra lo que antecede del siguiente modo. En la fig. 9 se ve que

$$\hat{1} = \hat{A} \text{ (evidente)}$$
$$\hat{2} = \hat{B} \text{ (alternos internos; secante AB)}$$
$$\hat{3} = \hat{C} \text{ (íd. íd. íd. AC)}$$
$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$$

Pero la primera suma es igual a un llano, luego también la segunda.

Ahora es fácil contestar a estas preguntas:

¿Cuál es el suplemento de $\hat{A} + \hat{B}$?
¿Cuál es el suplemento del ángulo B?
Si el ángulo A es recto ¿qué son los B y C?
¿Cuál es el complemento de B (siendo A recto)?

109.* La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es cuatro rectos, porque el cuadrilátero se descompone en dos triángulos trazando una *diagonal*, que es una recta que une dos vértices no consecutivos. Hágase la figura.

Sabido esto:

Si un cuadrilátero tiene dos ángulos rectos ¿qué serán los otros dos?

Si un cuadrilátero (cuyos ángulos suman cuatro rectos) tiene los ángulos opuestos iguales ¿cuánto sumarán dos no opuestos, es decir, consecutivos?

¿Qué cuadrilátero será éste?

110.* La suma de los ángulos de un polígono es igual a tantos llanos como lados le queden al polígono después de quitarle dos.

Se prueba descomponiendo el polígono en triángulos por diagonales que parten de un vértice.

¿Cuánto suman los ángulos de un polígono de siete lados?

Substracción

111. Es la operación de restar.

Restar de un número llamado *minuendo* otro llamado *substraendo*, es hallar un tercero, denominado *diferencia*, que sumado con el substraendo dé un resultado igual al minuendo.

El signo es — que se lee *menos*, y se coloca entre el minuendo y el substraendo. Estos son los términos o *datos* de la substracción.

$$8 - 6$$

es una substracción indicada, que suele llamarse también *diferencia indicada*. La diferencia *efectuada* o resultado es el número 2; porque este número, sumado con el substraendo 6, produce el minuendo 8.

112.* Cuando el minuendo es menor que el substraendo es imposible la substracción. Se puede, sin embargo, restar en parte, y averiguar, además, *cuántas unidades faltan de restar*.

Al número de éstas se le llama número *negativo* y se le pone delante el signo —. Así:

$$5 - 8 = -3$$

Esto quiere decir que, como de 5 sólo pueden restarse 5 unidades, quedan 3 sin restar. La diferencia es, pues, el número negativo — 3.

113. Conviene expresar en general, por medio de letras, la relación que liga al minuendo,

substraendo y diferencia. Llamándolos por sus letras iniciales, m, s, d, la *fórmula* del minuendo es

$$m = d + s \quad \text{(I)}$$

y como también

$$m - s = d \quad \text{(II)}$$

se observa que si el número s que está *como sumando* en el *segundo* miembro de la igualdad (I) quiere *pasarse* al *primer miembro*, hay que escribirlo en dicho primer miembro *con signo contrario*, esto es, como *substraendo*. Así, de la igualdad (I) se deduce la (II).

Inversamente: Si el *substraendo* s, que está en el primer miembro de la igualdad (II) se quiere pasar al segundo miembro, pasará como *sumando*, y de la igualdad (II) se deducirá la (I).

En general: todo número que esté en un miembro de una igualdad con el signo $+$, se puede suprimir en este miembro y escribirlo en el otro con el signo $-$ y viceversa.

Ejemplos: De la igualdad $x + 8 = 12$, sacamos $x = 12 - 8$.

De la igualdad $x - 2 = 6$, sacamos $x = 6 + 2$.

Cuando averiguamos por este medio el valor que hay que dar a la letra x para que la igualdad propuesta sea cierta, se dice que *despejamos* x.

114. Si al minuendo y al substraendo se les suma el mismo número, la diferencia no cambia.

Dos igualdades pueden restarse miembro a miembro, y resulta otra igualdad.

Así: si

$$\begin{array}{c} a = b \\ c = d \\ \hline a - c = b - d \end{array}$$

De una desigualdad se puede restar una igualdad u otra desigualdad de sentido contrario, y resulta una desigualdad del mismo sentido que la que sirve de minuendo.

$$\begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a - c > b - d \end{array} \qquad \begin{array}{c} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$$

Si de una igualdad se resta una desigualdad, rêsulta otra de sentido contrario.

$$\begin{array}{c} a = b \\ c > d \\ \hline a - c < b - d \end{array}$$

Examine el alumno el por qué de todas estas propiedades.

115. **Reglas para restar.**—La única dificultad que puede haber en la substracción de dos números enteros o decimales es, que después de colocados de modo que se correspondan las unidades de igual orden, una cifra del substraendo sea mayor que la correspondiente del minuendo. (Si ésta no existe se supone que es cero.) Entonces se aumentan al minuendo 10 unidades de ese orden, y al substraendo una unidad del orden siguiente, que vale lo mismo, con lo cual no se altera la diferencia. (Véase el número 114.)

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 42'83 \\ 13'928 \\ \hline 28'902 \end{array}$$

Encima del 8 nos imaginamos un cero, y decimos: de 8 a 10 van 2. Ahora, a la cifra 2 del substraendo le aumentamos 1, y decimos: de 3 a 3, cero, etc.

116. Para restar cantidades de la misma especie se expresan en la misma unidad, se restan, como abstractos, los números resultantes, y se refiere la diferencia a la misma unidad que los datos.

Pónganse ejemplos.

117. Es evidente que

$$a - a = o, \text{ y } a - o = a$$

118.* **Restas geométricas** — Los segmentos, los arcos de una circunferencia y los ángulos se restan de la misma manera que se sumaban, *pero invirtiendo el sentido del substraendo*. Así, si el minuendo es un segmento positivo, es decir, recorrido de izquierda a derecha, se tomará el substraendo de modo que su origen coincida con el extremo del minuendo, pero en sentido *negativo*, esto es, de derecha a izquierda.

Si el substraendo es mayor que el minuendo, se ve, haciendo lo que queda dicho, que la diferencia sería un segmento negativo (si el minuendo era positivo). Este segmento se podría representar por un *número negativo*.

Multiplicación

119. Es la operación de multiplicar.

Multiplicar un número, llamado *multiplicando*, por otro llamado *multiplicador*, es hallar un tercero, denominado *producto*, igual al resultado de efectuar una suma de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades tenga el multiplicador.

El multiplicando y el multiplicador se llaman también *factores* del producto.

El signo es $\times$, o un punto, y se lee *multiplicado por*, o sólo *por*.

Según la definición

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$$

120. Multiplicar *varios* números o hacer un producto de varios factores, dados en cierto orden, es multiplicar el primero por el segundo, el producto de ambos por el tercero, etc.

121. Se pueden multiplicar dos igualdades miembro a miembro y resulta otra igualdad.

$$\begin{array}{c} a = b \\ c = d \\ \hline a \times c = b \times d \end{array}$$

Si se multiplican una desigualdad y una igualdad o dos desigualdades del mismo sentido, resulta otra desigualdad de este mismo sentido.

$$\begin{array}{ccccc} a = b & & a > b & & a > b \\ \underline{c > d} & & \underline{c = d} & & \underline{c > d} \\ a \cdot c > b \cdot d & » & a \cdot c > b \cdot d & » & a \cdot c > b \cdot d \end{array}$$

Razone el alumno teniendo en cuenta la definición de multiplicar (119).

Por estas propiedades se dice que la multiplicación es uniforme. Se exceptúa el caso de ser *cero* algún factor, como ahora veremos.

122. *Se admite* (*) que el producto de un número por 1 es el mismo número ($7 \cdot 1 = 7$; $3 \cdot 1 = 3$, etc.); y que el producto de un número por cero es cero ($8 \cdot 0 = 0$; $7 \cdot 0 = 0$).

* Luego, aunque dos productos tengan distinto un factor, si el otro es cero serán iguales los productos, y por eso se ha exceptuado este caso al hablar de la uniformidad de la multiplicación.

123. En una multiplicación indicada se puede cambiar el orden de los factores sin que el producto cambie.

Ejemplo: $2 \times 3 = 3 \times 2$.

***Demostración.**—Según la definición, para formar el producto 2×3, basta tomar el número 2, o su igual $1 + 1$, *tres* veces, luego, escribiendo el cuadro

$$\begin{array}{c} 1 + 1 \\ 1 + 1 \\ 1 + 1 \end{array}$$

su número de unidades será, contadas por *filas* o

(*) Por consideraciones que aquí no serían pertinentes.

renglones, 2×3. Pero considerando las unidades dispuestas en *columnas*, vemos que en cada columna habrá tantas unidades como filas había antes, es decir, 3; y como esto se repite dos veces, porque hay dos columnas, el número total de unidades será también 3×2. Luego,

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

La propiedad es cierta aunque los factores fuesen varios, y por ella se dice que la multiplicación es *conmutativa*.

124. En un producto indicado se pueden reemplazar dos o más factores por su producto efectuado, e inversamente, descomponer un factor en varios, cuyo producto sea igual a él.

Ejemplo: $4 \times 2 \times 5 \times 3 = 4 \times \mathbf{10} \times 3$. (El 10 ha reemplazado al 2×5.)

Si no se quiere efectuar el producto 2×5, se deja indicado, pero en un paréntesis; así:

$$4 \times 2 \times 5 \times 3 = 4 \times (2 \times 5) \times 3$$

Por esta propiedad se dice que la multiplicación es *asociativa*. Obsérvese la completa analogía que hay entre lo dicho en estos párrafos y lo expuesto en la suma.

125.—Para multiplicar una suma indicada por un número, o viceversa, se multiplica *cada sumando* de la suma por el número y se suman estos productos parciales.

Ejemplos:

1.° $(2 + 4) \times 3 = 2 \times 3 + 4 \times 3$

2.° $3 \times (2 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 4$

*Como el segundo ejemplo se reduce al primero, cambiando el orden de los factores, explicaremos sólo el primer ejemplo.

Según la definición de multiplicar, el producto $(4 + 2) \times 3$, equivale a sumar tres veces la suma $4 + 2$. Disponiéndola como sigue:

$$\begin{array}{c} 4 + 2 \\ 4 + 2 \\ 4 + 2 \end{array}$$

habrá tres filas y, por consiguiente, caerán en columna tres sumandos iguales, por lo cual en la primera columna se formará el producto 4×3; en la segunda, el 2×3, y en total, la suma de ambos; luego,

$$(4 + 2) \times 3 = 4 \times 3 + 2 \times 3$$

Por esta propiedad se dice que la multiplicación es *distributiva* con relación a la suma.

126. Cuando en vez de $4 \times 3 + 2 \times 3$ se escribe su igual $3 \times (4 + 2)$, se dice que se saca 3, *factor común*.

127. En la propiedad distributiva se funda la multiplicación de un número de varias cifras por otro de una sola, considerando aquél como suma de las unidades de diversos órdenes (98) y multiplicando cada uno de estos sumandos por el multiplicador.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 425 \\ \times 7 \\ \hline = 35 \\ +14 \\ +28 \\ \hline 2975 \end{array}$$

Para multiplicar dos números de varias cifras se multiplica el multiplicando por cada cifra del multiplicador, porque éste se puede considerar como una suma de sus unidades de diversos órdenes.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times\ 624 \\ \hline 972 \\ +\ 486 \\ +\ 1458 \\ \hline 151632 \end{array}$$

128. *Múltiplo* de un número es el resultado de multiplicarle por otro, entero. Este expresa el orden de multiplicidad.

Ejemplo: 12 es un múltiplo de 4, porque $4 \times 3 = 12$; y es el tercer múltiplo, o múltiplo de tercer orden.

Para formar todos los múltiplos de un número se le va multiplicando por 0, 1, 2, 3... etc.

Los múltiplos de 4, p. ej. son 0, 4, 8, 12... resultantes de los productos 4×0, 4×1, 4×2, 4×3, etc.

El múltiplo de segundo orden se llama *doble* o *duplo*; el de tercer orden, *triplo*.

Cuando un número es múltiplo de otro, éste es un *factor* de aquél.

129. **Potencias.**—El producto de un número por sí mismo se llama *cuadrado* del número. Así: $5 \times 5 = 25$ es cuadrado de 5. Abreviadamente se escribe así: 5^2, y se lee: 5 *elevado al cuadrado*, o *cuadrado* de 5.

No debe confundirse el cuadrado con el duplo.

El producto de tres factores iguales a un número se llama *cubo* de ese número.

Así: $5 \times 5 \times 5 = 125$, es el *cubo* de 5 y se escribe 5^3.

Forme el alumno los cuadros y cubos de los nueve primeros números.

Más en general: *Potencia* de un número es un producto de tantos factores iguales a ese número como unidades tiene otro. El número que se repite como factor se llama *base*, y el que indica cuantos factores iguales a la base se toman, *exponente*. Así:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

es igual a una *potencia* de *base* 4 y exponente 5. Abreviadamente se escribe 4^5 y se lee: 4 *elevado* a la quinta potencia. El cuadrado y el cubo son las potencias segunda y tercera.

Cualquiera potencia de 1 es 1. Porque $1 \times 1 \times 1 \ldots = 1$.

Una potencia de 10 se escribe con 1 seguido de tantos ceros como unidades tiene el exponente:

Ejemplos:

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000, \text{ etc.}$$

La primera potencia de un número es el mismo número. Así: $2^1 = 2$; $4^1 = 4$, etc. E inversamente $a = a^1$.

130.* Para *sumar* o restar potencias de igual base es preciso *efectuar* estas potencias;

pero para las demás operaciones pueden darse reglas más breves, siempre que las potencias tengan igual base.

Reglas. *Para multiplicar* potencias de igual base se forma otra también de la misma base y cuyo exponente sea la *suma* de los exponentes.

Ejemplo:

$$2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12}$$

Porque en 2^3 hay 3 factores iguales a 2; en 2^4 hay 4 factores iguales a 2, y en 2^5 hay 5 factores iguales a 2, luego en el producto total habrá $3 + 4 + 5$ factores, todos iguales a 2, y dicho producto equivale, por tanto, a 2^{3+4+5}

Según lo dicho acerca de la primera potencia (129) y la regla anterior, se tiene: $2^4 \times 2 = 2^5$ porque en vez de 2 podemos imaginarnos 2^1 y $2^4 \times 2^1 = 2^{4+1} = 2^5$.

Análogamente: $4 \times 4^6 = 4^1 \times 4^6 = 4^7$ etc.

Para elevar una potencia a otra potencia se forma otra de la misma base y cuyo exponente sea el *producto* de los exponentes.

Ejemplo:

$$(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$$

Porque el *número* 2^4 se eleva a la tercera potencia efectuando el producto $2^4 \times 2^4 \times 2^4$, y éste, según la primera regla, equivale a $2^{4+4+4} = = 2^{4.3}$

Para elevar una *suma* a una potencia **no** se eleva cada sumando, ni tampoco para elevar una diferencia se elevan el minuendo y el substraendo.

$(2 + 5)^4$ *no es igual* a $2^4 + 5^4$

$(9 - 3)^3$ *no es igual* a $9^3 - 3^3$

En cambio:

Para elevar un producto a una potencia se eleva *cada factor* y se multiplican los resultados.

$$(2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$$

Porque según la definición de potencia,

$$(2 \cdot 5)^4 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) =$$
$$= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 2^4 \cdot 5^4$$

131. **Multiplicación de decimales.**—Si en un número decimal se corre la coma un lugar hacia la derecha, se hace diez veces mayor, es decir, queda multiplicado por 10.

Ejemplo: Si en vez de 24'35 escribimos 243'5 este número es diez veces mayor que el primero. Porque cada cifra ha adquirido un valor relativo diez veces mayor; así, la cifra 4, que en el primero representaba unidades simples, en el segundo representa decenas, etc.

Claro es, que si en vez de correr la coma un solo lugar, la corriésemos varios, como esto podría hacerse de uno en uno, el decimal queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se hubiese corrido la coma, y que si ésta se suprime (lo que equivale a ponerla a la derecha de la última cifra) el decimal se convierte en entero y queda, al mismo tiempo, multiplicado por 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales había antes de correr la coma.

Ejemplos: 1.º Si en vez de 0'2435 escribimos 243'5, hemos multiplicado el primer decimal por 1000

2.º Si suprimimos la coma en el decimal

o'2435, queda convertido en el entero 2435, y multiplicado por 10000.

Regla.—Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros sigan a la unidad.

Ejemplo: $0'2435 \times 1000 = 243'5$.

Esto es lo mismo que acaba de decirse, enunciado inversamente.

Observación.—Si por ejemplo queremos multiplicar el decimal o'2 por 1000, deberíamos correr la coma tres lugares a la derecha, y para poder hacerlo, no habiendo más que una cifra, es preciso agregar dos ceros, en esta forma:

$$0'2 \times 1000 = 0'200 \times 1000 = 200$$

Los ceros agregados a o'2 no cambian su valor, porque no se modifica el valor relativo de las cifras, y los ceros agregados carecen de valor absoluto.

132. Para multiplicar un decimal por un entero se efectua la operación sin tener en cuenta la coma, pero se coloca ésta en el pròducto de modo que éste tenga tantas cifras decimales como el multiplicando.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 203'42 \\ \times\ 6 \\ \hline 1220'52 \end{array}$$

Porque multiplicar 203'42 por 6 equivale a sumarlo seis veces, y en una suma se coloca la coma en el mismo lugar en que la tenían los sumandos.

133. Para multiplicar dos decimales se prescinde de las comas, y se coloca la coma del producto de modo que éste resulte con tantas cifras decimales como tenían entre los dos factores.

Ejemplo:

$$0'02 \times 0'003 = 0'00006$$

Observación.—No podemos ahora explicar esta regla, porque la definición de multiplicar que hemos dado (119) sólo se aplica al caso de ser entero el multiplicador; pero como más adelante hemos de dar otra definición de la multiplicación aplicable a este caso, entonces se verá que esta regla es verdadera.

134. Para elevar un decimal al cuadrado se prescinde de la coma y se pone en el resultado de modo que éste tenga *doble* número de cifras decimales. Y *triple*, si se elevase al cubo.

Ejemplos:

$$(0'02)^2 = 0'0004 \,;\, (0'1)^3 = 0'001$$

135. **Problemas de multiplicación.**—Entre las cuestiones prácticas o problemas que se resuelven por una multiplicación, la más frecuente es la que tiene por objeto, conociendo la cantidad que corresponde, en cierto concepto, a una unidad determinada, averiguar la cantidad que, en el mismo concepto, corresponde a varias unidades.

Ejemplo: Si a un terreno de 1 Dm.^{2} de extensión le corresponde, anualmente, 96 Kg. de abono (estiércol) ¿qué cantidad de abono se necesitará para un terreno cuya superficie es de 1 Ha. y 25 a?

Se razonará como sigue: Si a un 1 $Dm.^2$ le corresponden 96 Kg., a 1 Ha. y 25 a. le corresponderán tantas veces 96 Kg. como $Dm.^2$ cuadrados haya en 1 Ha. 25 a.

Averiguaremos, por consiguiente, esto; para lo cual basta expresar la superficie dicha en $Dm.^2$ lo que da 125 $Dm.^2$. Ahora el problema consiste sólo en tomar 96 Kg. 125 veces, es decir en multiplicar 96 por 125 y expresar el producto en Kgs.

Los ejemplos pueden variar mucho; pero como el razonamiento es siempre análogo, y este problema muy frecuente, conviene enunciarlo en general diciendo, abreviadamente:

Para hallar la cantidad que corresponde a *varias* unidades cuando se sabe lo que corresponde a *una*, se multiplica la cantidad que corresponde a la unidad por el número abstracto de unidades iguales a la dada que contenga el otro número concreto que interviene en el problema. Así, en el ejemplo anterior, se ha multiplicado la cantidad de 96 Kg que correspondía a *un* $Dm.^2$, por el número de éstos contenidos en 1 Ha. 25 a. que es el otro número concreto que en el problema figura.

136. Caso particular importante, aunque sencillísimo, de este problema, es el de *reducir* unidades de medida de cierto orden a otro orden *inferior* de la misma especie, vg.: horas, a minutos; quintales métricos, a Kg., etc.

Ejemplo: Reducir 18 horas a minutos.

Como sabemos que a 1 hora corresponden 60 minutos, a 18 horas corresponderán 18 veces tanto; esto es, 60 minutos $\times$ 18. Haciendo la multiplicación de los números abstractos 60×18, o si es preferible cambiando el orden de factores, 18×60, y expresando el resultado en minutos, se tiene resuelto el problema. Luego, en general, para reducir unidades de un orden superior a otro inferior se multiplica el número de dichas unidades por el de veces que la unidad de orden superior contiene a la inferior.

Con ayuda de este problema se resuelve el de referir a una sola unidad una cantidad expresada en varias unidades.

Ejemplo: 2 semanas, 5 días y 6 horas, expresarlo en horas.

Se expresarán las semanas en días y se agregarán los 5 días que hay en la cantidad dada. El número total de días resultante se convertirá en horas, y se agregarán las 6 horas.

$$2 \text{ semanas} = 2 \ . \ 7 \text{ días} = 14 \text{ días}.$$

$$2 \text{ semanas y } 5 \text{ días} = 14 \text{ días} + 5 \text{ días} = 19 \text{ días} = \\ = (19 \ . \ 24) \text{ horas} = 456 \text{ horas}$$

$$2 \text{ sem., } 5 \text{ d., } 6 \text{ h.} = 456 \text{ h.} + 6 \text{ h.} = 462 \text{ horas.}$$

En el sistema métrico decimal se hacen con más facilidad estas transformaciones, según hemos visto ya para las unidades de longitud, capacidad y peso, y veremos después para las de superficie y volumen, de suerte que estas transformaciones, antes muy frecuentes, se aplican hoy casi únicamente a las unidades de tiempo y a las divisiones de la circunferencia, de que ahora vamos a hablar.

137. Para comparar un arco de circunferencia con la circunferencia entera a que pertene-

ce, se supone ésta dividida en 360 partes llamadas *grados*, cada uno de éstos en 60 *minutos*, y cada uno de éstos, en 60 *segundos*.

Se indican estas unidades en la forma del ejemplo siguiente: 25°, 42′, 56″, y se lee: 25 grados, 42 minutos y 56 segundos, cantidad que se llama *amplitud* o *valor gradual* del arco a que corresponda.

Exprese el alumno esta amplitud en segundos solamente.

La amplitud de una semicircunferencia es, pues, de 180° (¿cuántos minutos?...); y la de un cuadrante de 90° (¿cuántos minutos?... ¿cuántos segundos?...)

Que dos arcos tengan igual amplitud o valor gradual no quiere decir que sean iguales, porque esto sólo indica que son la misma parte cada uno de la circunferencia a que pertenece, pero éstas pueden ser de distinto radio.

Se explicará más tarde, pero conviene saber desde ahora que todos los arcos trazados entre los lados de un mismo ángulo, haciendo centro en su vértice, tienen el mismo valor gradual, aunque el radio sea distinto. Así, al ángulo recto le corresponde siempre un arco de 90°; al llano, de 180°, etc. Por eso, se expresan los ángulos por el número de grados de cualquiera de los arcos que pueden trazarse entre sus lados con el vértice por centro y radio arbitrario.

138. La medida de un ángulo en grados se hace por medio de un instrumento llamado *transportador*, que generalmente consiste en un semicírculo construído de una substancia traslúcida,

cuya semicircunferencia va dividida en grados y medios grados.

Haciendo coincidir el centro del transportador con el vértice del ángulo y el radio correspondiente a 0° con un lado del ángulo, la división por la cual pase el otro lado señalará la medida. Inversamente, si después de hacer coincidir el radio del transportador con una semirrecta, se une el punto señalado por cierta división de aquél con el origen, se tendrá construído un ángulo de medida conocida.

Hágase prácticamente.

139. Volviendo al problema de multiplicar a que antes nos referíamos, advertiremos que a veces se enuncia de un modo incompleto, por suponerse ya conocida la cantidad que corresponde a la unidad.

Tal ocurre en el siguiente ejemplo:

Convertir 3 rectos en grados. El problema, enunciado completamente, sería: 1 recto equivale a 90° ¿a cuánto equivalen 3 rectos? —A $90° \times 3$; o a 3×90 expresado en grados. Luego para convertir rectos en grados basta multiplicar el número de aquéllos por 90, y expresar en grados el producto.

DIVISIÓN

140. Es la operación de dividir.

Dividir un número, llamado *dividendo*, por otro, llamado *divisor*, es hallar un tercero denominado *cociente*, que, multiplicado por el divisor, produzca el dividendo.

El signo son dos puntos : colocados entre el dividendo y el divisor, y se lee *dividido por*.

Así, 20 : 5 se lee 20 dividido por 5; y es una división o cociente indicado. El cociente efectuado o resultado es 4, porque este número, multiplicado por el divisor 5, da el dividendo 20. También se indica la división en esta otra forma:

$$\frac{20}{5} = 4$$

y entonces suele leerse 20 *partido* por 5.

No siempre hay un número *entero* que multiplicado por el divisor dé el dividendo. Porque al multiplicar el divisor por 0, 1, 2, 3..., etc., no se obtienen todos los números, sino sólo los múltiplos del *divisor*. Luego para que la división sea posible o *exacta* en números enteros, es preciso que el dividendo sea *múltiplo* del divisor.

Si así sucede, se dice que el dividendo es un número *divisible* por el divisor. Éste se sigue llamando *divisor* de aquél, y también *factor*.

Lo mismo significa decir 20 es *múltiplo* de 5, que 20 es *divisible* por 5; y entonces, al revés, 5 es divisor de 20, ó 5 divide a 20, ó 5 es factor de veinte.

Conviene acostumbrarse a emplear cualquiera de estas expresiones.

Cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, la división de números enteros tiene por objeto: averiguar el mayor entero (llamado cociente), que multiplicado por el divisor dé un producto *contenido* en el dividendo, y la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente. Esta diferencia se llama *resto*.

Ejemplo: La división 17 : 5 es *inexacta* El cociente es 3, porque es el mayor entero cuyo producto por 5 está contenido en 17 (puesto que 4×5 *pasa* ya de 17). El *resto* es la diferencia $17 - 5 \times 3 = 2$.

141*. Designando por D el dividendo, por d el divisor, por c el cociente y por r el resto (que será cero si la división es exacta) se puede expresar por *fórmulas* las relaciones entre estos números.

Si la división es exacta:

$$D = c \times d. \quad \text{(I)}$$

y como también $\frac{D}{d} = c$ (II)

se ve que al pasar el factor d del segundo miembro de la igualdad (que es donde está en la I) al primer miembro (como se ve en la II), pasa como *divisor*, e, inversamente, si de la II deducimos la I, el divisor d del primer miembro pasa a ser *factor* en el 2.°

Esto es en general, luego: todo número que esté en un miembro de una igualdad como factor, puede suprimirse en este miembro y escribirlo en el otro como divisor; y viceversa.

Ejemplos:

De la igualdad $x \times 8 = 24$ sale $x = \frac{24}{8}$.

De la igualdad $\frac{x}{7} = 3$ sale $x = 7 \cdot 3$

Cuando averiguamos por este medio el valor que hay que dar a la letra x para que la igualdad propuesta sea cierta, se dice que *despejamos x*.

Uniendo esto con lo dicho en el número 113, se puede despejar x en igualdades parecidas a la que sigue:

$$\frac{2 . x}{3} + 4 = 8$$

Primero pasamos 4 al segundo miembro, y sale

$$\frac{2 . x}{3} = 8 - 4, \text{ es decir: } \frac{2 . x}{3} = 4$$

Ahora pasamos el divisor 3 al segundo miembro, y obtenemos

$$2 \times x = 4 \times 3, \text{ o bien } 2 \times x = 12$$

y finalmente, pasamos el factor 2 al segundo miembro, y queda *despejado* x, pues

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Si la división es inexacta, la *fórmula* del resto es:

$$r = D - d \times c$$

Aquí se podrá despejar D, según acabamos de ver, pasando el substraendo $d \times c$ del segundo miembro al primero, lo que da

$$r + d \times c = D$$

o invirtiendo la igualdad,

$$D = d \times c + r$$

lo que nos dice que el dividendo es igual *al producto del divisor por el cociente, más el resto.*

143.* Fijados el dividendo y el divisor, sólo hay un cociente y un resto, por lo cual, inversamente, si entre los números D, d, c y r se verifica la igualdad anterior, $D = d \times c + r$, siempre que r sea *menor* que d, al dividir D por d, saldrá de cociente c, y de resto r.

Ejemplo:

$$23 = 4 \times 5 + 3$$

Como $3 < 4$, al dividir 23 por 4, saldrá de cociente 5, y de resto 3.

144. Hay otras definiciones de la división muy útiles para resolver problemas, que son:

1.ª La división tiene por objeto averiguar las veces que el dividendo contiene al divisor.

2.ª La división tiene por objeto descomponer al dividendo en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor.

145.* Si se multiplican el dividendo y el divisor por un número, el cociente no varía, pero el resto viene multiplicado por aquel número.

Ejemplo: Si dividimos 23 por 4, el cociente es 5, y el resto 3. Multipliquemos ahora 23 y 4 por un número, por ejemplo: por 6, con lo que resultan los números 138 y 24. Decimos que, al dividir éstos, resulta un cociente 5 (como antes,) pero el resto será: $3 \times 6 = 18$.

Compruébese.

Explicación—En la división 23 : 4, se verifica:

$$23 = 4 \times 5 + 3$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por 6, valiéndonos para multiplicar el segundo de la regla conocida (125) resulta:

$$138 = 24 \times 5 + 18$$

Y como $18 < 24$, al dividir 138 por 24, saldrá, según hemos dicho antes (143), de cociente 5, y de resto, 18.

146. **Reglas.**—Suponemos que el alumno sabe prácticamente dividir enteros. No ponemos la regla, pero debe hacerse aquí igual advertencia que en el número (99).

147. **Casos particulares.**—1.° Caso en que el divisor termine en ceros. Entonces se prescinde de estos ceros, y de un número igual de cifras tomadas de derecha a izquierda en el dividendo, y se dividen los números resultantes: así se obtiene el cociente, pero para obtener el *resto* se ponen a la derecha del que haya dado la división practicada *las cifras de que se había prescindido en el dividendo.*

Ejemplo: Para hacer la división 27543 : 400 sólo dividimos 275 por 4. El cociente es 68 en ambas divisiones. El resto de la segunda es 3, y el de la primera será 343.

2.° Que el divisor sea de una cifra. Entonces se practica la división como de ordinario, pero reteniendo en la memoria los restos para efectuar mentalmente las divisiones parciales.

Es costumbre escribir el cociente, en este caso, debajo del dividendo, y separar el divisor por una raya vertical.

Ejemplo:	2745	3
cociente	915	

148. Para dividir dos potencias de la misma base se forma otra de igual base cuyo exponente sea la diferencia de los exponentes.

Ejemplo: $2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$

2^3 es el cociente, porque es el número que multicado por el divisor 2^4 da el dividendo 2^7 según sabemos por la regla de la multiplicación (130).

Según lo dicho acerca de la primera potencia de un número (129) y la regla anterior, se tiene: $2^5 : 2 = 2^4$, porque 2 es lo mismo que 2^1, y $2^5 : 2^1 = 2^{5-1} = 2.^4$

Para elevar un cociente a una potencia se elevan el dividendo y el divisor y se dividen los resultados.

Ejemplos: $(9 : 3)^4 = 9^4 : 3^4$ » En otra forma $\left(\frac{9}{3}\right)^4 = \frac{9^4}{3^4}$

149. **División de decimales.**—Para dividir un decimal por un entero, se divide la parte entera (escribiendo, si es menor que el divisor, cero en el cociente), se pone coma en el cociente y se continúa la división como de ordinario.

Ejemplos:

243‘75	8		0‘00781	9
03‘7	30‘46		61	0‘00086
55			7	
7				

El resto que así se obtiene no representa unidades enteras, sino de la misma clase que la última cifra del divisor. (En el ejemplo 1.° 7 centésimas y en el 2.° 7 cienmilésimas.)

Si la división no ha sido exacta, y quiere continuarse, se escribe un cero a la derecha del resto y se prosigue, haciendo esto cuantas veces se quiera, a menos que se obtenga el resto cero.

Este procedimiento se aplica a la división de enteros sin más que poner, al acabar de dividir la parte entera, coma en el cociente.

La división de 34 por 7 da, así, prolongando el cociente hasta las milésimas.

34	7
60	4‘857
40	
50	
1	

150. Para dividir *cualquier número* por un decimal se prescinde de la coma de éste y se multiplica el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tuviere el divisor; para lo cual, si el dividendo es entero, se le agregan otros tantos ceros a la derecha, y si el dividendo es decimal se corre su coma hacia la derecha tantos lugares como cifras decimales tiene el

divisor, añadiendo previamente ceros, si es necesario.

Ejemplos: 24 : 0'006 = 24000 : 6

2'05 : 0'8 = 20'5 : 8

2'05 : 0'0004 = 20500 : 4

Con esto queda siempre reducida la operación a dividir enteros o un decimal por un entero.

El resto representa unidades decimales del mismo orden que la última de la derecha de aquel de los datos que tenga más decimales.

151. **Problemas de división.**—Una de las cuestiones prácticas más frecuentes, entre las que se resuelven por una división, es la que sigue, inversa de la estudiada en la multiplicación.

Conociendo la cantidad que corresponde (en cierto concepto) a *varias unidades* de cierta especie, averiguar la cantidad que corresponde (en el mismo concepto) a *una* sola unidad.

Ejemplo: Si en 3 minutos da una rueda 7200 vueltas ¿cuántas dará por segundo?

Se razonará así: habrá que hacer de 7200 tantas partes iguales como segundos contengan los 3 minutos (que son 180). Y según la definición 2.ª del número 144, esto se consigue con la división:

7200 : 180

cuyo cociente expresa el número de vueltas pedido.

Conviene decir, en general: para hallar la cantidad que corresponde a *una* unidad cuando se conoce la que corresponde a *varias*, se divide ésta por el número de unidades iguales a la dada que contenga el otro número concreto que interviene en el problema.

Compruébese que se ha hecho así en el problema anterior, y compárese esto con lo dicho en la multiplicación.

152. Como ya se advirtió en la multiplicación, a veces se enuncia el problema de un modo incompleto, por suponerse conocidos algunos datos.

Ejemplo: ¿Cuántos kilómetros tiene un grado de meridiano terrestre?

Aquí se supone conocida la definición del metro (22) según la cual el cuadrante de meridiano tiene 10000 km.; y también que al cuadrante le corresponden 90°. Sabido esto, el problema se enuncia ya claramente en estos términos:

Si a 90° corresponden 10000 km. ¿cuánto corresponde a 1°? Ahora se ve que, para averiguarlo, bastaría hacer de 10000 km., 90 partes iguales, lo que se consigue por la división

$$10000 : 90 = 111,11\ldots \text{ (en km.)}$$

153. Otro problema, también frecuente, es el que tiene por objeto dada la cantidad que corresponde a cierta unidad, y otra cantidad, de la misma especie que aquella, correspondiente a cierto número desconocido de unidades, hallar este número.

Ejemplo: Si 1 m.^{3} de gas del alumbrado cuesta 35 céntimos de peseta, y por el consumo de gas hecho por una lámpara hemos pagado 8'50 pesetas ¿cuántos m.^{3} ha consumido la lámpara?

Se razonará así: la lámpara habrá consumido tantos m.^{3} como veces contengan 8'50 pesetas a 35 céntimos.

Para poder comparar estas cantidades es preciso referirlas a la misma unidad, expresando, por ejemplo los céntimos en pesetas, en esta forma: 0'35 pesetas. Y como se trata de ver las veces que un número contiene a otro se averiguará por la división

$$2'50 : 0'35$$

cuyo cociente será el número de m.^{3} pedido.

Enunciando de un modo general, diremos: que dividiendo la cantidad que corresponde a varias unidades, por la que corresponde a una sola, hallaremos el *número de unidades*.

154. **Caso particular**.—Para reducir unidades de cierto orden, a otras de orden superior y de la misma especie, se divide el número de aquéllas por el de veces que la unidad superior contiene a la inferior.

Ejemplo: Reducir 247 días a semanas.

Como 7 días forman 1 semana, el número de semanas que hay en 247 días será el de veces que 247 contiene a 7.

La división 247 : 7 da de cociente 35, que es el número de semanas buscado, pero como la división deja el resto 2, esto indica que

$$247 \text{ días} = 35 \text{ semanas y } 2 \text{ días.}$$

Repitiendo, si es posible, varias veces este problema, se consigue expresar una cantidad referida a una sola unidad, en varias unidades de órdenes superiores.

Ejemplo: El arco de 25348″ ¿cuántos segundos, minutos y grados contiene?

$$\begin{array}{r|ll} 25348 & 60 & \\ \cline{2-2} 13\ \ & 422 & \multicolumn{1}{|l}{60} \\ \cline{3-3} 14\ \ & \ \ 02 & \multicolumn{1}{|l}{7} \\ 28\ \ & & \end{array}$$

$$25348'' = 7^{0}\ 2'\ 28''.$$

155. **Aplicaciones geométricas de la multiplicación y la división.**—La circunferencia, y lo mismo las demás líneas curvas, no pueden compararse *directamente* con el metro, porque éste es un segmento de *recta*.

Por eso la longitud de una circunferencia no se mide directamente, sino que *se calcula*, midiendo su diámetro o su radio, en la forma siguiente:

Para hallar *la longitud* de una circunferencia, se multiplica *la longitud de su diámetro* por un número fijo, llamado *pi*, que se representa por la letra griega π, y cuyo valor aproximado es 3, 14 o más exactamente 3, 1416.

Ejemplo: ¿Qué longitud tendrá una circunferencia de 4 *dm.* de radio?

El diámetro será 8 *dm.* y la longitud será $8 \times 3,14$, expresada en *dm.*

Observación.—Siendo la longitud de la circunferencia el producto de su diámetro por 3'14, *dividiendo* la longitud de la circunferencia por 3'14 se obtendrá el diámetro, y será fácil también hallar el radio.

Ejemplo: Radio de una circunferencia de 1 metro.

El diámetro es 1 : 3'14, y el radio la mitad.

Para recordar la longitud de la circunferencia se escribe $C = d \times \pi$, y esta es su *fórmula.*

156. **Areas.**—El área de un polígono o de otra figura plana no se mide directamente con el metro cuadrado, sino que *se calcula* midiendo ciertas rectas y haciendo las operaciones que se expresan en las reglas que van a seguir, en todas las cuales *téngase muy presente*, para abreviar los enunciados, que, si las longitudes se expresan en metros, las áreas vendrán referidas al *metro cuadrado;* si las longitudes se miden en *decímetros*, las áreas serán $dm.^2$ etc.

Cuadrado. - El área de un cuadrado se halla *elevando su lado al cuadrado.*

Ejemplo: Si el lado es 5 *cm.* el área será $5^2\ cm.^2 = 25\ cm.^2$

*Es fácil darse cuenta de este hecho examinando la fig. 10. En ella se ve que constando el lado AB de cinco segmentos iguales (que podrían imaginarse centímetros) el cuadrado total consta de cinco filas de a cinco cuadrados como el rayado, es decir: de 5×5 cuadraditos, cada uno de los cuales sería 1 $cm.^2$, puesto que su lado (AE) se supuso de 1 cm. lineal.

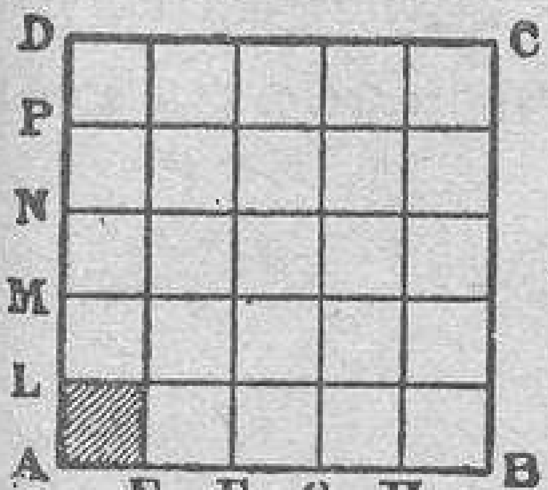


Fig. 10

Consecuencia.—El $Dm.^2$ es un cuadrado cuyo lado es 1 Dm., esto es: 10 metros. Luego el área del $Dm.^2$ será 100 $m.^2$ Como lo mismo ocurre con el $Hm.^2$ respecto al $Dm.^2$, etc., se ve que *cada unidad de superficie del sistema métrico decimal contiene 100 veces a la inferior inmediata.*

Por esto: Para expresar en una sola unidad una superficie referida a varias unidades (del sistema métrico) se escriben unas a continuación de otras las cifras que expresen las unidades de cada orden, si son dos; se pone antes un cero si es una sola; y se colocan dos ceros en cada orden que falte.

Ejemplo: 2 Hm.^{2}, 35 Dm.^{2}, 7 m.^{2}, 12 cm.^{2}, expresarlo en cm.^{2}.

23507001 2 cm.^{2}

Inversamente: Para expresar en unidades de distintos órdenes un número decimal de unidades de superficie, se divide, a partir de la coma, hacia la izquierda y hacia la derecha en grupos de dos cifras, agregando un cero, si fuese preciso, a la derecha de la última cifra decimal; y cada grupo de dos cifras representa unidades de un orden.

Ejemplo: 20005,074 dm.^{2} Como el número de cifras decimales es impar, agregamos un cero, y dividimos en los grupos indicados a continuación por los puntos

2·00·05;07·40

El grupo 05 representa dm.^{2}, luego, el 00 serían m.^{2}, el 2 Dm.^{2} etc. Luego, el número dado equivale a

2 Dm.^{2}, 5 dm.^{2}, 7 cm.^{2}, 40 mm.^{2}

Practique el alumno con varios ejemplos.

Rectángulo.—En esta figura se llama *largo* o *base* un lado, y *ancho* o *altura*, el lado inmediato, perpendicular a aquél. El largo y el ancho se llaman también *dimensiones*.

El área del rectángulo se halla *multiplicando sus dimensiones* (largo por ancho, o base por altura).

Ejemplo: Area de un rectángulo de 1 Dm. de largo y 8 m. de ancho. Se expresarán ambas dimensiones en una misma unidad; por ejemplo, en metros. El área será:

$$10 \times 8 \text{ m.}^2$$

Dése el alumno cuenta de este hecho, por un procedimiento análogo al seguido para el cuadrado.

Compruebe el área en papel cuadriculado.

Paralelogramo (no rectángulo).—En este cuadrilátero se llama *base* un lado, y *altura*, la perpendicular a él desde un punto del lado opuesto.

En la fig. 11 el paralelogramo ABCD tiene por base AB, y por altura, BE. El área es

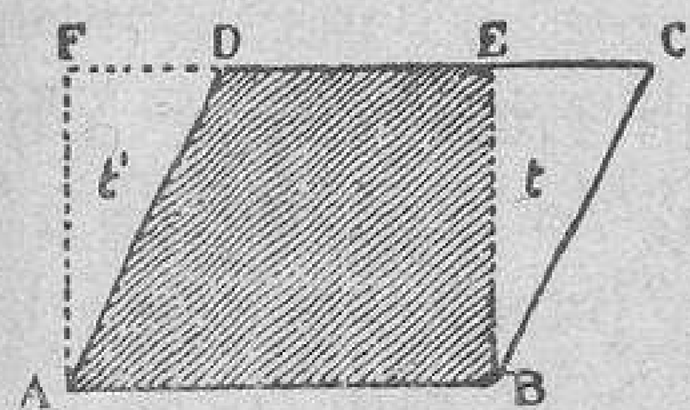


Fig. 11

$$\overline{AB} \times \overline{BE}$$

representando las rayas colocadas sobre AB y BE que lo que se multiplica son los números que miden estos segmentos.

*Para explicarse el motivo de esto, dibuje el alumno en un papel el paralelogramo ABCD. Trace la altura BE, y cortando el papel por ella, separe el triángulo de la derecha BEC y colóquelo a la izquierda, de modo que el lado BC venga a coincidir con AD. Le resultará entonces el rectángulo ABEF. Luego, puesto que con los mismos trozos de papel se puede formar el paralelogramo y el rectángulo, estas figuras serán *equivalentes*, es decir, iguales en área, y siendo la del rectángulo su base por su altura, que son las mismas del paralelogramo, igual expresión tendrá el área de éste.

Observación.—Siendo el área de un rectángulo o de otro paralelogramo un producto de dos factores, *dividiéndola por uno de éstos*, se tiene *el otro*. Así, dividiendo el área por la base se obtiene la altura, y dividiendo el área por la altura se obtiene la base; siempre que las unidades a que se refieren estas cantidades sean correspondientes.

Ejemplo: Un rectángulo de 6 Ha. de superficie y 300 m. de largo (base) ¿qué ancho (altura) tendrá? 6 Ha. = 6 Hm.^{2}; 300 m. = = 3 Hm., luego la altura o ancho será $a = \frac{6}{3} =$ = 2 (en Hm.).

Triángulo.—El área de un triángulo se obtiene *multiplicando la mitad de la base por la altura*. Así, si la longitud de la base es 8 m. y la de la altura 5 m., el área será 4 × 5 m.^{2}

*Para comprenderlo basta observar que de un paralelogramo, cortado por una diagonal, se sacan *dos* triángulos iguales de la misma base y altura que aquél; luego cada uno será mitad del paralelogramo.

Hágalo el alumno en un papel.

Observación.—Como el área es un producto de dos factores, dividiendo por uno, sale el otro. Así, dividiendo el área por la altura se obtiene la mitad de la base (y, por tanto, ésta), y dividiendo el área por la mitad de la base se obtiene la altura.

Ejemplo: ¿Qué base tendrá un triángulo de 5 m. de altura si su área es 30 m.^{2}?

Dividiendo $\frac{30}{5} = 6$ será la mitad de la base, luego, ésta será 12 m.

Trapecio.— En un trapecio se llaman *bases* los dos lados paralelos, y altura, la perpendicular a una base desde un punto tomado en la otra.

El área del trapecio se halla *multiplicando la mitad de la suma de las bases por la altura.*

Ejemplo: Un trapecio cuyas bases sean 8 y 6 metros y 5 m la altura, tiene por área 7×5 m.^{2}

Corte el alumno un trapecio por una diagonal; compruebe que los dos triángulos resultantes tienen igual altura, y por bases uno la mayor y otro la menor del trapecio, y comprenderá que al sumar éstas se obtiene el área en la forma dicha.

También se puede comprobar de otro modo: Córtense de papel dos trapecios iguales, y colóquense sobre un plano. *Sin levantarlo de él,* inviértase uno de los trapecios y póngase al lado del otro, de modo que la base menor del primero caiga en línea recta con la mayor del segundo, y que coincidan dos de los otros lados. Resultará un paralelogramo cuya base es la suma de las bases de los trapecios, y su altura la de éstos, y como cada trapecio es mitad de este paralelogramo, estará comprobada la propiedad.

Polígonos.— En un polígono regular (61) hay un punto interior que está a igual distancia de todos los vértices y de todos los lados. Dicho punto se llama *centro*, y la distancia, perpendicular, desde el centro a un lado, se llama *apotema*.

La longitud de la apotema depende de la del lado, y por eso no pueden darse *a capricho* los valores de ambos segmentos; pero como el *cálculo* de la apotema suele ser difícil, supondremos que medimos el lado y la apotema, y entonces, el área de un polígono regular se obtiene *multiplicando la mitad del perímetro* (25) *por la apotema*.

Si el polígono no es regular, se descompone en figuras cuya área sepa hallarse, y se suman éstas. Un medio que suele ser práctico consiste en trazar la diagonal que une los vértices más distantes y perpendiculares a ella desde todos los otros vértices (fig. 12), con lo que el polígono queda descompuesto en triángulos y trapecios rectángulos, cuyas áreas se hallan midiendo las perpendiculares dichas y los segmentos que determinan en la diagonal.

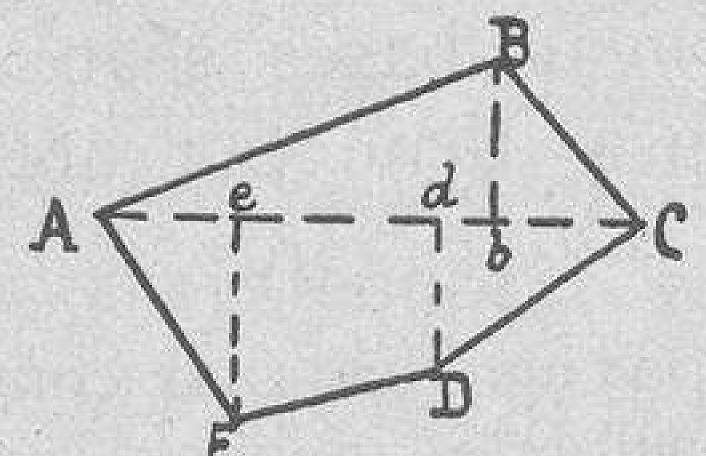


Fig. 12

Hágase en una figura.

Círculo.—El área del círculo se obtiene *multiplicando el cuadrado de su radio por el número* $\pi = 3'14$.

Ejemplo: Area de un círculo de 14 m. de diámetro.

El radio sería 7, su cuadrado, $7 \times 7 = 49$. Multiplicando $49 \times 3'14$ resulta el área en $m.^2$

Véase el error cometido estimando el área en papel cuadriculado milimétrico.

Poliedros.—Para hallar las áreas de estos cuerpos, hallaremos las de cada cara, y las sumaremos. Si hay varias caras iguales, como suele ocurrir, basta hallar el área de una y multiplicarla por el número de ellas, agregando luego las áreas de las caras que fuesen distintas.

Así, por ejemplo, se obtiene para área lateral del prisma recto, la mitad del perímetro de su base por la altura.

Háganse ejercicios de hallar áreas de pirámides o prismas de madera o cartón.

Cuerpos redondos.—El área de la superficie *lateral* de un cono se halla *multiplicando la longitud de la semicircunferencia de su base por el lado o generatriz.*

El área lateral de un cilindro se halla *multiplicando la longitud de la circunferencia de su base por el lado.*

Pónganse ejemplos sobre conos y cilindros materiales.

El área de la superficie esférica se obtiene *multiplicando el cuadrado de su* **diámetro** *por el número* $\pi = 3'14$.

Ejemplo: Area de una superficie esférica de 5 dm. de diámetro: $5^2 \times \pi = 25 \times 3'14$ en dm.^{2}

157. **Volúmenes.**—*Cubo.* El volumen de un cubo se halla *elevando al cubo* su arista.

Según se mida la arista en m., dm., cm., etc., el volumen vendrá expresado en m.^{3}, dm.^{3}, cm.^{3}, etcétera.

Ejemplo: Si la arista es 5 cm., el volumen será $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (en cm.^{3}).

***Explicación.**—Todas las aristas del cubo son iguales y todas sus caras son cuadrados. Si dividimos una arista de la base en 5 partes iguales, que podremos imaginarnos que son centímetros, ya sabemos (156) que el cuadrado de la base tendría 5 . 5 centímetros cuadrados; y como sobre cada uno de estos cuadrados habría que poner, para formar el cubo dado, uno sobre otro 5 cubos de a centímetro cúbico, el número de éstos que el cubo dado contiene será 5 . 5 . 5.

Consecuencia.—El m.^{3} es un cubo cuya arista tiene 1 m., esto es, 10 dm. Luego el volumen del m.^{3} será $10^3 = 1000$ dm.^{3} Como lo mismo ocurre con el Dm.^{3} respecto del m.^{3}, etc., se ve que *cada unidad de volumen del sistema métrico decimal* contiene *1000 veces* a la inferior inmediata.

Por esto: para expresar en una sola unidad un volumen referido a varias unidades del sistema métrico) se escriben a continuación unos de otros los grupos de cifras que representan las unidades de cada orden, si cada grupo tiene *tres* cifras; se pone delante un cero, si el grupo tiene sólo dos cifras; dos ceros, si tiene una sola cifra, y tres ceros, en cada orden que falte.

Ejemplo:

Expresar 2 Dm.^{3}, 143 dm.^{3}, 8 cm.^{3}, 27 mm.^{3} en mm.^{3} 2.000.143.008.027 mm.^{3}

Inversamente: para expresar en unidades de distintos órdenes un número decimal de unidades de volumen, se divide, a partir de la coma, hacia la izquierda y hacia la derecha en grupos de tres cifras, agregando ceros, si es necesario, a la derecha de la última cifra decimal; y cada grupo de *tres* cifras representa unidades de un orden.

Ejemplo: 7 024 000 136, 4 cm.^{3}

Lo dividimos como se indica a continuación:

7 . 024 . 000 . 136, 400

El grupo 136 representa cm.^{3}, luego 000 serán dm.^{3}, etc. El número dado se enunciará.

7 Dm.^{3} 24 m.^{3} 136 cm.^{3} 400 mm.^{3}

Háganse varios ejercicios hasta adquirir costumbre.

Paralelepípedo rectangular.—En este cuerpo, una de las aristas (generalmente la mayor) se llama *largo*, la perpendicular a ella en la misma cara, *ancho*; y la tercera arista que arranca del mismo vértice que las anteriores, *alto*. Y las tres citadas, *dimensiones*.

El volumen de un paralelepípedo rectangular, *es el producto de las tres dimensiones* (largo, por ancho, por alto).

Ejemplo: volumen de una habitación de 4 m. de largo, 3 de ancho y 2,8 de alto.

$4 \times 3 \times 28$, m.^{3}

Explíquelo el alumno por un procedimiento análogo al seguido para el cubo.

Pirámide y cono.—Para hallar el volumen de una pirámide o de un cono, se halla primero el área de la base, y *su tercera parte* se multiplica *por la altura*; que es la distancia del vértice al plano de la base.

Prisma y cilindro.—El volumen de un prisma o cilindro se obtiene *multiplicando el área de* *su base por la altura* (distancia entre las bases).

Esfera.—El volumen de la esfera se obtiene *multiplicando la sexta parte del cubo de su diámetro por el número* π.

158. Para recordar las reglas anteriores de las áreas y los volúmenes, se representan por letras las longitudes de los segmentos que se miden. Estas letras suelen ser las iniciales de los nombres de dichos segmentos, como l, lado; b, base; a, altura; r, radio, etc., y se indican con ellas las operaciones que hay que efectuar. Llamando A siempre al área, y V al volumen, las reglas se expresan por las siguientes igualdades, llamadas fórmulas:

Cuadrado — $A = l^2$.

Rectángulo / Paralelogramo — $A = b \times a$.

Triángulo — $A = \frac{1}{2} . b \times a$.

Trapecio — $A = \frac{1}{2} (B + b) \times a$ (B y b son las bases).

Círculo — $A = r^2 \times \pi$.

Área lateral del cono — $A = (r \times \pi) \times l$ (r el radio de la base).

Área lateral del cilindro — $A = d \times \pi \times l$.

Id. de la sup. esférica — $A = d^2 \times \pi$.

Volumen del cubo — $V = l^3$.

Id. paralelep. rectang. — $V = a \times b \times c$ (a, b y c las dimensiones).

Volumen cono — $V = \frac{1}{3} (r^2 \times \pi) \times l$.

Id. cilindro — $V = (r^2 \times \pi) \times l$.

Id. esfera — $V = \frac{1}{6} \cdot d^3 \times \pi$.

Observación.—Aunque hemos siempre supuesto los datos enteros, las reglas y fórmulas anteriores se aplican lo mismo al caso en que fueran decimales.

Divisores y múltiplos

159. ***Resto de un número.**—A veces se puede averiguar el resto de dividir un número por otro sin hacer la división. Nosotros sólo lo haremos cuando el divisor sea uno de los números 10, 2, 5, 9 y 3.

Reglas.—El resto de dividir un número por 10, es *la cifra de sus unidades.*

Ejemplos: ¿Qué resto dan al dividirlos por 10 los números 748, 250, 121?

El primero da de resto 8; el segundo es *divisible* por 10, porque da de resto 0; el tercero da de resto 1.

¿Qué hace falta para que un número sea divisible por 10?

El resto de dividir un número por 2 o por 5 es *el mismo* que resulta al dividir por 2 o por 5 la cifra de las unidades de aquél.

Ejemplo: Los mismos números del ejemplo anterior, ¿qué restos dan al dividirlos por 2 y por 5?

Por 2: El primero da de resto 0, porque la división 8 : 2 es exacta; el segundo también da de resto cero; el tercero da de resto 1, porque al dividir 1 : 2 el cociente sería cero y el resto, 1.

Por 5: El primero da de resto 3, que es el resto de la división 8 : 5; el segundo da de resto cero, luego es divisible por 5; el tercero da de resto 1.

¿Qué hace falta para que un número sea divisible por 2? ¿Y para que lo sea por 5?

Para hallar el resto de la división de un número por 9, se *suman sus cifras*, rebajando 9 siempre que la suma llegue a este número o pase de él. El número que nos quede al acabar esta operación es el resto.

Ejemplos: ¿Qué resto da, al dividirlo por 9, el número 284425?

Digamos: 2 y 8 son 10, menos 9, queda 1; 1 y 4 son 5, y 4 son nueve, menos 9, queda 0; 2 y 5 son 7. Este número es menor que 9 y la operación se ha terminado. El resto es, por consiguiente, 7.

2.º Resto del número 24327.

$$2+4=6,\ 6+3=9,\ 9-9=0;\ 2+7=9,\ 9-9=0$$

Al hacer la operación, como antes, se obtiene cero. El número es, pues, divisible por 9.

¿Qué hace falta para que un número sea divisible por 9?

Para hallar el resto de la división por 3, se procede como para el 9; pero si el número obtenido al terminar la operación fuese mayor que 3, habría que dividirlo por 3, y el resto de esta división sería el del número dado.

Ejemplos: El número del primer ejemplo anterior daba como número final 7; pero 7 es mayor que 3, luego habrá que dividir 7 por 3, y el resto 1, que se obtendría, es el que da 284425 al dividirlo por 3.

El número del segundo ejemplo es divisible por 3, porque el resto es cero.

160. **Primos.**—Se llama número *primo* el que *sólo* es divisible *por sí mismo* y por 1.

Los primeros números primos que conviene saber son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc.

Los demás números son *compuestos*, por ejemplo: 4, que es divisible por 2; 6, que lo es por 2 y por 3, etc.

Un número compuesto es igual a un producto de factores primos, iguales o distintos.

Ejemplos: $4 = 2 \,.\, 2 = 2^2$; $6 = 2 \,.\, 3$; $8 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 2^3$; $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$; $10 = 2 \,.\, 5$, etc.

Cuando el número es divisible por alguno de aquéllos que antes hemos considerado, 10, 2, 5, 9, 3, podremos *descomponerlo* en factores primos por la siguiente

Regla.—Se divide el número por su menor factor primo (si es posible por 2, si no por 3, etc.,) lo cual se hace por la regla y con la disposición de cálculo del número 147; se procede igual con el cociente, y se continúa así hasta hallar un cociente 1.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

El número 72 es el producto de todos los colocados a la derecha, $72 = 2.2.2.3.3 = 2^3 \cdot 3^2$.

Observación importante.—Para proceder con más rapidez o mentalmente, cuando es fácil descomponer el número en dos factores *aunque* *no sean primos*, se hace así y se descomponen, luego, esos factores, multiplicando los resultados.

En el ejemplo anterior hubiera podido decirse: $72 = 8 \times 9$; pero $8 = 2^3$ y $9 = 3^2$; luego, $72 = 2^3 \times 3^2$.

Esta observación se aplica especialmente al caso en que el número termine en ceros, porque entonces es igual al producto del número que forman las cifras distintas de cero por una potencia de 10, y teniendo en cuenta que

$$10 = 2.5;\ 10^2 = 2^2.\ 5^2;\ 10^3 = 2^3.\ 5^3, \text{ etc.}$$

se obtiene con facilidad el resultado. Así, para 72000 diríamos: $72000 = 72 .\ 10^3 = (2^3.\ 3^2) . (2^3.\ 5^3)$, y por tanto (124) $72000 = 2^6.\ 3^2.\ 5^3$.

Haga el alumno ejercicios con los números 2400, 3150, 82500.

Cuando el número no tiene los factores citados no es fácil que el alumno pueda descomponerlo en factores primos.

161. **Máximo común divisor.**—Máximo común divisor de varios números es (como su nombre indica) el *mayor* divisor *común* de dichos números.

Aclarémoslo con el siguiente ejemplo.

12 tiene los divisores 1, 2, 3, 4, 6, 12
8 tiene los divisores 1, 2, 4, 8.

Se ve que 12 y 8 tienen divisores *comunes* (que pertenecen a ambos) que son: 1, 2, 4. El mayor de estos divisores comunes es 4, y a éste se le llama *máximo común divisor* de 12 y 8, y se indica:

m. c. d. de 12 y 8 = 4

o más brevemente:

D (12» 8) = 4

Hallar el m. c. d. de 30 y 18, siendo los divisores, de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 y los de 18, 1, 2, 3, 6 9, 18.

Obsérvese que los demás divisores comunes, son divisores del m. c . d.

Para hallar el m. c. d. de dos números se divide el mayor por el menor; éste, por el resto de la división si lo hubiere, etc., hasta llegar a una división exacta. El último divisor empleado es el m. c. d.

El cálculo se dispone como indica el siguiente ejemplo, advirtiendo que los cocientes se han escrito *encima* de los divisores, para que no estorben al proseguir la operación.

	3	1	1	1	4	3
328	90	58	32	26	6	2
58	32	26	6	2	0	

D (328» 90) = 2.

Si los números se pueden descomponer fácilmente en factores primos, se descompondrán, y entonces se obtiene el m. c. d. multiplicando los factores primos *comunes*, tomado cada uno con el *menor* exponente de los que lleve en los números dados.

Ejemplos:

1.º $\left.\begin{array}{r} 328 = 2^3 . 41 \\ 90 = 2 . 3^2 . 5 \end{array}\right\}$ D(328»90) = 2 (único factor común.)

2.° $\left.\begin{array}{l} A = 2^2 . 3^3 . 5 \\ B = 2^4 . 3^5 . 7 \end{array}\right\} D(A, B) = 2^2 . 3^3.$

162. **Mínimo común múltiplo.**— Mínimo común múltiplo de varios números es (como indica su nombre) el *menor* múltiplo *común* de aquéllos. Por ejemplo: formemos los múltiplos de 12 y 8.

Múltiplos de 12 son: 12, 24, 36, 48, 60, 72...
Múltiplos de 8 son: 8, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72...

Se ve que 24, 48, 72, etc., son múltiplos comunes. El *menor* de ellos, 24, será el mínimo común múltiplo y se indica

m. c. m. de 12 y 8=24, o también M (12, 8)=24.

Obsérvese que los demás múltiplos comunes son múltiplos del m. c. m.

Halle el alumno el m. c m. de 30 y 18 formando la serie de múltiplos.

Para hallar el m. c. m. de dos números, se hacen las siguientes operaciones: 1.ª Se halla el m. c. d. 2.ª Se divide éste m. c. d. por uno de los números. 3.ª El cociente obtenido se multiplica por el otro número.

Ejemplo: Hallar el m. c. m. de 12 y 8.

1.° $D(12, 8) = 4$ 2.° $8 : 4 = 2$

3.° $2 \times 12 = 24$. $M(12, 8) = 24$.

Hállese así el m. c. m. de 30 y 18.

Si los números pueden descomponerse en factores primos, se descomponen, y el m. c. m.

se forma multiplicando *todos* los factores eligiendo para cada uno el *mayor* exponente.

Ejemplo 1.°:

$$\left.\begin{array}{r} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \end{array}\right\} M(12, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

2.°:

$$\left.\begin{array}{r} A = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \\ B = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 7 \end{array}\right\} M(A, B) = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7$$

Si son varios los números que nos dan para hallar el m. c. d., o el m. c. m., se reemplazan dos de ellos por su m. c. d., o m. c. m., y con esto quedará un número menos y se repite esto hasta que sólo queden dos.

Ejemplo: D (12, 8, 20, 14)

1.° D (12 y 8) = 4. Ya no hay más que considerar los tres números 4, 20 y 14.

2.° D (4, 20) = 4. Solo quedan ya 4 y 14.

3.° D (4, 14) = 2. Este es el m. c. d. buscado.

163. *Números primos entre sí* son los que no tienen otro divisor *común* que 1.

Ejemplo:

8 no es primo, porque tiene los divisores 1, 2, 4, 8.
15 no es primo, porque tiene los divisores 1, 3, 5, 15.

Pero 8 y 15 son primos *entre sí*, porque no tienen más divisor común que 1.

Busque el alumno números primos entre sí.

Cuando dos números se dividen por su m. c. d. los cocientes son primos *entre sí*.

Ejemplo: D (12, 8) = 4; 12 : 4 = 3; 8 : 4 = 2. Y 3 y 2 son primos entre sí.

164. *Máxima unidad común* de dos segmentos de recta es el mayor segmento que puede estar contenido en aquellos dos. Se determina por un procedimiento completamente parecido al seguido para hallar el m. c. d. de dos números, a saber:

Se averigua las veces que el mayor contiene al menor, llevando éste sobre aquél, hasta que quede un resto menor que él. Se averiguan las veces que el menor de los segmentos dados contine a este primer resto, etc., hasta hallar un segmento que esté contenido exactamente en otro, o por lo menos así nos lo parezca. (*) Este último segmento es la unidad común buscada.

Ejecútese tomando los segmentos con el compás, y averígüese las veces que cada uno de los dos segmentos dados contiene a la máxima unidad común.

(*) No consideramos el caso de inconmensurabilidad.

Raíz cuadrada

165. La operación de *extraer* la raíz cuadrada tiene por objeto, dado un número, llamado *radicando*, hallar otro, llamado *raíz*, que elevado al cuadrado produzca el radicando.

Ejemplo: La raíz cuadrada de 81 es 9, porque $9^2=81$. Aquí 81 sería el radicando y 9 la raíz, lo cual se escribe $\sqrt{81}=9$ y se lee: raíz cuadrada de 81 igual a 9.

La extracción de la raíz cuadrada no es siempre posible con números enteros, porque al formar los cuadrados de 0, 1, 2, 3, 4, no salen *todos* los números, sino sólo los 0, 1, 4, 9, 16... llamados *cuadrados perfectos*. Luego si el radicando no es cuadrado perfecto, la raíz no puede ser exacta. Ejemplo: $\sqrt{27}$

En parte podemos realizar la operación resolviendo el siguiente problema:

Averiguar *el mayor* entero (raíz) cuyo cuadrado *esté contenido* en el radicando; y la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz. Esta diferencia se llama *resto*.

Ejemplo: La $\sqrt{31}$ es *inexacta*. El mayor cuadrado contenido en 31 es el cuadrado de 5, puesto que $6^2=36$ excede ya a 31. Luego la raíz es 5. El resto es $31-5^2=31-25=6$.

166. La fórmula del resto llamando N al radicando y a a la raíz entera es

$$r=N-a^2$$

y *despejando* N sale $r+a^2=N$, o bien $N=a^2+r$, que nos dice que el radicando es igual al cuadrado de la raíz más el resto.

Si la raíz de N es exacta y la llamamos x, según la definición será

$$x^2=N \quad (I)$$

y como también

$$x=\sqrt{N} \quad (II)$$

se ve que para *despejar* en la igualdad (I) la letra x basta suprimir su exponente y extraer la raíz cuadrada del otro miembro de la igualdad.

Inversamente, para despejar N en la igualdad (II) basta elevar al cuadrado el primer miembro y suprimir el signo de la raíz.

Ejemplos:

Despejar x en la igualdad $x^2=9$

Despejar x en la igualdad $\sqrt{x}=7$.

167. Para hallar la raíz cuadrada de un número menor que 100 se procede por tanteo, porque se saben los cuadrados de los 9 primeros números y se puede hallar el más próximo inferior al radicando, como hemos hecho en el ejemplo anterior.

Para hallar la raíz cuadrada de un número mayor que 100 se usa la siguiente regla (que el alumno debe ir aplicando a un ejemplo antes de tratar de aprenderla de memoria).

$\sqrt{8'75'42}$	295
47.5	49×9
344.2	585×5
517	

1.° Se divide el radicando en grupos de a dos cifras, empezando por la derecha, y no importando que el último grupo tenga una sola cifra.

En el ejemplo se ha hecho la división por medio de puntos.

2.° Se extrae la raíz del primer grupo de la izquierda determinando también el resto.

(En el ejemplo la raíz de 8, que es 2, y da el resto $8-2^2=4$). La raíz obtenida es la primera cifra de la que vamos buscando.

3.° A la derecha del resto se escribe el grupo siguiente, separando la cifra de sus unidades (en el ejemplo 47.5); y lo que queda a la izquierda se divide por el *doble* de la 1.ª cifra de la raíz, no poniendo nunca más de 9 como cociente. (En el ejemplo había que dividir 47 entre 4, que en rigor es a 11, pero ponemos sólo 9). Así se obtiene una cifra que hay que *comprobar*. Para ello se escribe a la derecha del número que sirvió de divisor, y se multiplica, mentalmente, por la cifra que se comprueba. Si el producto puede restarse del dividendo completado con la cifra separada, la que se comprueba es la verdadera, y se escribirá en la raíz. Si no, se rebaja en 1 y vuelve a comprobarse. (En el ejemplo hay que comprobar la cifra 9. Para ello se ha escrito a la derecha del 4, y el número 49 resultante se multiplica por 9, mentalmente y se resta de 475. Como se puede restar, la cifra 9 es la 2.ª de la raíz).

4.° A la derecha del resto se escribe el grupo siguiente; se separa la última cifra; se divide por el doble de la raíz hallada (que ahora consta ya de dos cifras. En el ejemplo es 29), etc.

Es preciso ejecutar varios ejemplos para retener la regla en la memoria.

168. Si el número es decimal, se hace par el número de cifras decimales; se aplica la regla anterior y se separan en la raíz la mitad de cifras decimales que en el radicando.

Ejemplo : $\sqrt{2'4} = \sqrt{2'40} = 1'5$.

Hágase para verlo.

La raíz de un entero se prolonga por decimales, agregando a la derecha de cada resto *dos* ceros y poniendo coma en la raíz al acabar de extraer la de la parte entera.

$\sqrt{2}$	1'41
10.0	24.4
40.0	281.1
119	

Ejemplo : $\sqrt{2}$. La raíz entera de 2 es 1, y queda el resto 1. A su derecha se han puesto dos ceros, y en la raíz la coma, y se ha continuado la operación como siempre.

169. La raíz de una suma **no** es la suma de las raíces de los sumandos, ni la de una diferencia la diferencia de las raíces del minuendo y del substraendo.

$\sqrt{4+49}$ *no* es igual a $\sqrt{4}+\sqrt{49}$ (ó a $2+7$).

$\sqrt{25-9}$ *no* es igual a $5-3$.

Pero en cambio :

La raíz de un producto se obtiene multiplicando las raíces de los factores.

$$\sqrt{4 \times 49} = \sqrt{4} \times \sqrt{49} = 2 \times 7$$

La raíz de un cociente se obtiene dividiendo las raíces del dividendo y divisor.

$$\sqrt{25:9} = \sqrt{25} : \sqrt{9} = 5 : 3.$$

Para multiplicar raíces cuadradas indicadas, se extrae la raíz cuadrada del producto de los radicandos. Y análogamente para dividir

$$\sqrt{4} \times \sqrt{49} = \sqrt{4 \times 49}; \quad \sqrt{25} : \sqrt{9} = \sqrt{25 : 9}.$$

Si una raíz cuadrada se eleva al cuadrado, resulta el radicando.

$$(\sqrt{8})^2 = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = \sqrt{8 \times 8} = \sqrt{64} = 8.$$

170. **Aplicaciones.**—1.ª Dada el área de un cuadrado, hallar su lado. Sabemos que $A = l^2$ luego l es la $\sqrt{A}$, puesto que es el número que elevado al cuadrado produce A.

Ejemplo: Siendo 2 m.² el área de un cuadrado, ¿cuál será su lado? Hay que extraer la $\sqrt{2}$, que hemos visto que, llegando hasta las centésimas, es 1'41. Esta es la longitud del lado expresada en metros.

2.ª Dada el área de un círculo, hallar su diámetro. El área es $A = d^2 \times \pi$; dividiendo A por π sale d^2, y extrayendo la raíz cuadrada se obtiene d.

Ejemplo: Un círculo tiene de área 78'50 dm.² ¿cuál será su diámetro?

$$78'50 : 3'14 = 25 \quad » \quad \sqrt{25} = 5$$

El diámetro es 5 *dm.*

3.ª Hemos visto que para hallar el volumen de un cono de revolución hay que emplear la altura. Esta es la distancia del vértice a la base, que se mide por la recta que uniría el vértice con el centro de la base.

Pero esta recta cae dentro del cono, y no puede medirse directamente. Puede, no obstante, *calcularse*, y para ello se emplea la siguiente propiedad del triángulo rectángulo conocida en Geometría con el nombre de *Teorema de Pitágoras*.

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Del teorema de Pitágoras son consecuencia las reglas siguientes:

1.ª La hipotenusa de un triángulo rectángulo es la *raíz* cuadrada de la *suma* de los *cuadrados* de los catetos.

2.ª Un cateto es igual a la *raíz* cuadrada del *cuadrado* de la *hipotenusa*, menos el *cuadrado* del otro cateto.

Esta 2.ª propiedad sirve para calcular la altura del cono, que es un cateto del triángulo rectángulo que puede formarse con el lado del cono y el radio de la base.

Ejemplo: Volumen de un cono de 3 m. de radio y 5 de lado.

1.º Área de la base $6^2 \times \pi = 103{,}04$

3.ª parte de esta área $= 34{,}34$

Ahora hay que calcular la altura. Según la regla 2.ª, llamándola a, se tiene:

$$a = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Y multiplicando $34{,}34 \times 4$ sale el volumen (en m.³).

Esas reglas del teorema de Pitágoras tienen otras muchas aplicaciones, puesto que sirven para hallar uno de los tres lados de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

Pondremos un ejemplo en que se aplique la 1.ª regla.

Desde la punta de un poste vertical de 2 m. de altura queremos tender una cuerda, cuyo otro extremo vaya a parar a 4 metros de distancia del pie del poste.

Lo que se pretende equivale, en lenguaje geométrico, a hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos, que son 2 y 4 metros. El teorema de Pitágoras da, llamando x a la longitud desconocida

$$x = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 4{,}4 \text{ (en m.)}$$

Calcule el alumno el área de un triángulo equilátero de 4 dm. de lado, y la diagonal de un cuadrado de 1 m. de lado.

FRACCIONES

171. Ya hemos dicho que las unidades de medida (m., l., kg. m^2, etc) pueden concebirse divididas en partes iguales. Cuando el número de éstas era 10, 100, 1000..., etc., dichas partes se llamaban unidades decimales, y eran respectivamente la décima, la centésima, etc.

Pero se puede hacer, más en general, la división de la unidad en cualquier número de partes iguales.

Si se divide la *unidad entera* en varias partes iguales, cada una de éstas se llama *unidad fraccionaria*. El número de partes en que se dividió la unidad entera se llama *denominador* de la unidad fraccionaria, por llevar ésta un nombre dependiente de aquel número de partes, según se expresa en la siguiente relación:

Si la unidad	se dividió en	2	partes,	cada unidad	fraccionaria es	*un medio*
—	—	3	—	—	—	*un tercio*
—	—	4	—	—	—	*un cuarto*
—	—	5	—	—	—	*un quinto*
—	—	6	—	—	—	*un sexto*
—	—	7	—	—	—	*un séptimo*
—	—	8	—	—	—	*un octavo*
—	—	9	—	—	—	*un noveno*
—	—	n	—	—	—	*un ene-avo*

Un medio, un tercio... un *eneavo*, son, pues, unidades fraccionarias de denominador 2, 3... n.

172 Una unidad entera se compone de tan-

tas unidades fraccionarias de cierto denominador, como indique este denominador.

$$\text{I equivale a} \begin{cases} 2 \text{ medios} \\ 3 \text{ tercios} \\ 4 \text{ cuartos} \\ n \text{ eneavos} \end{cases}$$

Por ejemplo: *un cuarto* resultó de dividir la unidad en *cuatro* partes iguales, luego reuniendo estos 4 cuartos volverá a resultar la unidad entera.

Ejercicios: ¿A cuántos séptimos equivale la unidad entera? ¿A cuántos catorceavos equivale 1? ¿Cuántos *n-avos* tiene 1?

173. *Fracción*, o también *número fraccionario*, es el conjunto de una o varias unidades fraccionarias.

Para expresar una fracción se precisan dos números abstractos: uno que indica de cuántas unidades fraccionarias consta la fracción, y se llama *numerador*; y otro que es el *denominador* de esas unidades fraccionarias, e indica, como sabemos, el número de partes en que se dividió la unidad entera.

Ejemplo: 4 séptimos es una fracción compuesta de 4 unidades fraccionarias de denominador 7.

Se escribe así: $\frac{4}{7}$.

Háganse ejercicios de escritura y lectura de fracciones.

Según lo antes dicho (172) se puede escribir:

$$1 = \frac{2}{2},\quad 1 = \frac{3}{3},\quad 1 = \frac{4}{4} \ldots\quad 1 = \frac{n}{n}.$$

Luego, la unidad entera es igual a una fracción cuyos términos (numerador y denominador) son iguales, y viceversa.

174. Un número entero vale tantas unidades fraccionarias de denominador n como exprese el *producto* de aquel entero por n.

Ejemplo:

$$2 = \frac{14}{7},\quad 3 = \frac{21}{7},\quad 4 = \frac{28}{7},\ \text{etc.}$$

Porque es claro que si 1 tiene $\frac{7}{7}$, 2 tendrá doble; 3, triple, etc.

En forma de regla se puede decir:

Para convertir un entero en fracción de denominador dado, se multiplica aquél por éste, y el producto es el numerador de la fracción cuyo denominador ya se conoce.

Ejemplos:

Convertir 8 en *tercios*. $8 = \frac{8 \times 3}{3} = \frac{24}{3}$

Convertir a en *n-avos*. $a = \frac{a \times n}{n}$.

Recíprocamente: Si una fracción tiene el numerador *divisible* por el denominador, es igual al cociente entero resultante de dividir el numerador por el denominador.

Ejemplo: $\frac{12}{3} = 4,\ \frac{16}{8} = 2,\ \frac{40}{5} = 8,\ \frac{a \cdot n}{n} = a.$

Porque $\frac{12}{3}$ contiene a la unidad (que son 3 tercios) tantas veces como 12 contiene a 3, es decir: 12 : 3. Por eso, en este caso al menos, se comprende que puede usarse como signo de la división lo mismo los dos puntos que la raya de fracción.

175. Si el numerador de una fracción *se multiplica* por un número entero, la fracción queda también *multiplicada*.

Ejemplo $\frac{6}{5}$ es doble que $\frac{3}{5}$; es decir: $\frac{6}{5}=\frac{3}{5}\times 2$.

Porque tomando doble número de unidades fraccionarias, y siendo éstas iguales (quintos) resultará doble fracción

Pónganse otros ejemplos:

Consecuencia.—Para multiplicar una fracción por un entero, basta *multiplicar* el numerador y *conservar* el mismo denominador.

Ejemplo:

$\frac{3}{5}\times 2=\frac{6}{5}$. Porque $\frac{6}{5}$ es doble que $\frac{3}{5}$.

176. Si se toma una unidad fraccionaria de otra unidad fraccionaria (por ejemplo $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{5}$) resulta una nueva unidad fraccionaria cuyo denominador es el producto de los denominadores ($\frac{1}{15}$.)

Ejemplo: $\frac{1}{n}$ de $\frac{1}{q}=\frac{1}{n\cdot q}$.

Recíprocamente: Si el denominador de una unidad fraccionaria se multiplica por un número, la unidad fraccionaria queda dividida por dicho número.

Ejemplo: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}:3$.

177. Como lo mismo que ocurre con una unidad fraccionaria ocurrirá con un conjunto de ellas o fracción, se deduce:

Si el denominador de una fracción se *multiplica* por un entero, la fracción queda *dividida* por él.

178. Para dividir una fracción por un entero basta conservar el mismo numerador y multiplicar el denominador por el entero.

Ejemplos:

$$\frac{4}{9} : 3 = \frac{4}{27} \; ; \; \frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{20} \; ; \; \frac{a}{b} : n = \frac{a}{b.n}$$

179. Mediante las fracciones, todas las divisiones de enteros se pueden hacer exactamente. El cociente de dos enteros es una fracción, cuyo numerador es el dividendo, y el denominador, el divisor.

Porque esta fracción es el número (*) que multiplicado por el divisor produce el dividendo.

Ejemplo:

$4 : 5, = \frac{4}{5}$ porque $\frac{4}{5} \times 5 = \frac{20}{5} = 4$ (que es el dividendo).

180. Se llama *número mixto*, el conjunto de un entero y una fracción. Se indica escribiendo el entero y a continuación la fracción, así: $4\frac{3}{5}$ y se lee 4 *y* $\frac{3}{5}$.

(*) Claro es que aquí se toma la palabra número en un sentido más general que al hablar de los números abstractos; pero ya hemos dicho que a la fracción se le llama también número (fraccionario).

181. Se llama fracción propia la que tiene el numerador menor que el denominador; como $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$.

La fracción propia es menor que 1. Porque por ejemplo: en $\frac{3}{5}$ sólo hay 3 de los 5 quintos que tiene 1.

182. Siendo una fracción igual a un cociente, puede éste prolongarse en decimales según ya vimos, (149) y cuando se hace ésto se dice que se transforma la fracción (ordinaria) en decimal.

Ejemplo :

$$\frac{5}{8} = 0{,}625 \text{ porque } \begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}625 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Al transformar la fracción ordinaria en decimal dividiendo el numerador por el denominador, a veces se acaba esta división, por salir el resto cero, y entonces la fracción decimal obtenida se llama *exacta*, como la 0,625 obtenida en el ejemplo anterior. Pero otras veces el resto cero no sale nunca y la división es inacabable.

Ejemplo: Sea la fracción ordinaria $\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}66\ldots \\ 20 & \\ 2\ldots & \end{array}$$

La división da siempre el resto 2, y por consiguiente, el dividendo parcial, 20, y la cifra 6 del cociente se repiten sin cesar.

La fracción obtenida 0,666... se llama *periódica pura*, y no es igual *exactamente* a $\frac{2}{3}$, pero se aproxima tanto más a este valor cuantas más cifras decimales tomemos. Esto se expresa escribiendo

$$\frac{2}{3} = 0'666...$$

indicando los puntos suspensivos que sólo tomando *infinidad de veces* el 6 sería rigurosamente cierta la igualdad.

Otro ejemplo: 0'13 13 13... es otra fracción *periódica pura*, sólo que en la anterior se repetía únicamente la cifra 6 y en ésta se repite el *grupo* de dos cifras, 13. Este grupo se llama *periodo*.

Al transformar en decimal $\frac{5}{12}$ se obtiene:

$$\begin{array}{l|l} 5 & 12 \\ \cline{2-2} 50 & 0'4166.. \\ \;\;20 & \\ \;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;8 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\vdots & \end{array}$$

Aquí, antes del *periodo* 6, hay un grupo de cifras, 41, que no se repiten Por eso a esta fracción, y a todas las análogas, se les llama *periódicas mixtas*.

Es fácil ver que si al convertir una fracción ordinaria en decimal no se obtiene una decimal exacta, se obtendrá *periódica* (pura o mixta). Porque el resto cero no ha de salir, y como cualquier resto es *menor* que el divisor, al hacer a lo más tantas divisiones como unidades tiene el divisor, algún resto ha de repetirse, y cuando esto suceda se repetirán también el dividendo parcial y la cifra del cociente, y el siguiente resto, etcétera.

Para saber qué clase de decimal resulta al transformar una fracción ordinaria, *que tenga sus términos primos entre sí*, se descompone el denominador en factores primos.

Si *sólo* tiene el factor 2, el 5 ó ambos, resultará decimal *exacta* y de tantas cifras como unidades tenga *el mayor* de los exponentes del 2 ó del 5.

(Si no llevan exponentes se supone el exponente 1).

Si los factores primos del denominador son *distintos* de 2 y 5, la decimal será periódica *pura*.

Si el denominador, *además* del 2 ó 5 tiene *otros* factores, la decimal será periódica *mixta*.

Ejemplos: $\frac{3}{40}$, por ser $40=2^3 . 5$, da decimal exacta de 3 cifras.

$\frac{3}{7}$, da periódica *pura* (de 6 cifras).

$\frac{3}{88}$, por ser $38=2^3 . 11$, da periódica *mixta* (3 cifras no periódicas y una de período).

183. Una fracción impropia (no propia) es igual a un número mixto, cuyo entero es el cociente de dividir el numerador por el denomina-

dor, y cuya fracción se forma tomando por numerador el resto, y por denominador, el mismo de la fracción dada.

Ejemplo : $\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$. Porque como 29 contiene a 6 cuatro veces, 29 *sextos* contienen 4 unidades enteras y sobran 5 *sextos*.

La operación de transformar una fracción impropia en número mixto suele llamarse *extraer los enteros de la fracción.*

Extraer los enteros de $\frac{27}{4}$, $\frac{40}{5}$, $\frac{a.n}{n}$, $\frac{a.n+1}{n}$.

Recíprocamente: Un número mixto se reduce a fracción multiplicando el entero por el denominador, sumando el numerador y poniendo a esta suma por denominador el de la fracción.

Ejemplo : $4\frac{5}{6} = \frac{4.6+5}{6} = \frac{29}{6}$.

Puesto que inversamente $\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$.

184. Si se multiplican los dos términos de una fracción por un mismo número, resulta otra fracción equivalente (de igual valor).

Ejemplo : $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$.

Porque si de $\frac{2}{5}$ formamos $\frac{2 \times 4}{5}$, esta fracción es 4 veces mayor que aquélla; y si de $\frac{2 \times 4}{5}$ formamos $\frac{2 \times 4}{5 \times 4}$, ésta es cuatro veces menor que la anterior, e igual, por tanto, a la primera.

185. Para convertir fracciones en otras equivalentes que tengan todas el mismo denominador

(lo cual se llama **reducir a un común denominador**) se multiplica el numerador de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás, y se pone por denominador el producto de todos los denominadores.

Ejemplo: Si las fracciones son $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, se multiplica 2 por 5×7; 4 por 3×7, y 6 por 3×5 y se pone por denominador común $3 \times \times 5 \times 7 = 105$, con lo que resulta

$$\frac{2}{3} = \frac{70}{105}; \quad \frac{4}{5} = \frac{84}{105}; \quad \frac{6}{7} = \frac{90}{105}$$

La regla es verdadera, porque lo que se ha hecho equivale a multiplicar los dos términos de cada fracción por un mismo número.

Caso particular. Si el denominador de una fracción es múltiplo del de otra, se puede proceder más sencillamente como se ve en el siguiente ejemplo:

Sean las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{15}$. Con sólo multiplicar los dos términos de la primera por 5, sale

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

y esta fracción tiene ya el mismo denominador que $\frac{4}{15}$.

186. Si se dividen los dos términos de una fracción por un mismo número, resulta otra fracción equivalente. A esto se llama *simplificar* la fracción.

Ejemplo: $\frac{20}{40} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Que $\frac{20}{40}$ equivale a $\frac{2}{4}$, se prueba porque si los dos términos de ésta se multiplican por 10, se reproduce $\frac{20}{40}$ y el valor no se altera.

* Para simplificar por completo una fracción (lo que se llama hacerla *irreducible*) basta dividir los dos términos por su m. c. d. La fracción formada por los cocientes tiene sus términos primos *entre sí* y es irreducible. Generalmente, sin embargo, se comienza por dividir ambos términos por los factores que se distingan en ellos fácilmente, y luego se emplea el m. c. d.

Ejemplo: Simplificar $\frac{274500}{981000}$. Desde luego se ve que ambos términos son divisibles por 100. Hecha la división queda $\frac{2745}{9810}$. Se ve que ambos términos son divisibles por 5. Hecha la división queda $\frac{549}{1962}$.

Aún es fácil ver que son divisibles ambos términos por 9, lo que daría $\frac{61}{218}$. Ahora ya no se distinguen divisores comunes. Se hallará el m. c. d. de 218 y 61 y como es 1, la fracción $\frac{61}{218}$ es irreducible, y equivalente a la propuesta.

187. **Adición y substracción de fracciones.** —La suma y la resta de fracciones exigen que éstas se reduzcan a un común denominador, para que las unidades fraccionarias sean iguales.

Para sumar o restar fracciones, después de *reducidas a un común denominador*, se forma otra fracción que tenga por numerador la suma o diferencia de los numeradores, y por denominador el denominador común.

Ejemplos: 1.º $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$

2.° Sumar $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}$.

Deberíamos reducir estas fracciones a común denominador y sumar los numeradores: éstos son respectivamente $2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$, $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$. Luego a la suma de estos números se le pondrá por denominador el denominador común $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

Resulta, en fin,

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{20 + 24 + 15}{30} = \frac{59}{30} = 1\,\frac{29}{30}$$

3.° $\frac{4}{9} - \frac{1}{8} = \frac{32 - 9}{72} = \frac{23}{72}$

4.° $\frac{3}{5} - \frac{4}{15}$.

Según una observación anterior (185)

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{15} = \frac{9}{15} - \frac{4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Para sumar un entero con una fracción, o viceversa, se procede como para reducir un mixto a fracción.

$$2 + \frac{4}{5} = 2\,\frac{4}{5} = \frac{10 + 4}{5} = \frac{14}{5}; \quad \frac{4}{5} + 2 = \frac{4 + 10}{5} = \frac{14}{5}.$$

Para restar de un entero una fracción, o viceversa, se procede como para sumar, pero cambiando el signo + por el —, o sea: se multiplica el entero por el denominador, se resta el numerador (o *del* numerador) y se pone por denominador el mismo.

Ejemplos:

$$2 - \frac{4}{5} = \frac{10 - 4}{5} = \frac{6}{5}; \quad \frac{15}{4} - 3 = \frac{15 - 12}{4} = \frac{3}{4}$$

Para sumar números mixtos, o enteros y fracciones se suman por separado los enteros y las fracciones y se asocian los resultados.

Ejemplo:

$$2\frac{4}{5}+3\frac{1}{8}=5+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{8}\right)=5+\frac{32+5}{8}=5+\frac{37}{8}=5+4\frac{5}{8}=9\frac{5}{8}.$$

Para restar números mixtos se escriben con sus fracciones reducidas a un común denominador, y, si éstas pueden restarse, se restan separadamente los enteros y las fracciones y se reúnen en un número mixto ambos resultados.

Si las fracciones no pudieran restarse, se reducen los mixtos a fracciones y se restan éstas.

Ejemplos:

1.º $4\frac{2}{3}-2\frac{1}{5}=4\frac{10}{15}-2\frac{3}{15}=2\frac{7}{15}$

2.º $4\frac{1}{5}-2\frac{2}{3}=\frac{21}{5}-\frac{8}{3}=\frac{63-40}{15}=\frac{23}{15}=1\frac{8}{15}.$

188. **Multiplicación y división de fracciones.** —La definición de la multiplicación dada para los números abstractos no sirve para las fracciones más que en el caso de ser el multiplicador entero, y en este caso ya se ha dicho (175) la regla que debe seguirse. Cuando el multiplicador sea fraccionario, es necesaria una nueva definición que, sin contradecir la conocida, se aplique a este nuevo caso.

Multiplicar un número (multiplicando) por otro (multiplicador) es hallar un tercero (producto) que sea el resultado de efectuar con el multiplicando las mismas operaciones que se ejecutaron con la unidad entera para obtener el multiplicador.

Ejemplo: Multiplicar $2 \times \frac{3}{5}$. El producto se obtendrá realizando con 2 las mismas operaciones que se practicaron con la unidad entera para obtener sus $\frac{3}{5}$. Estas operaciones fueron: dividir la unidad en 5 partes, y tomar una de ellas 3 veces. Luego para hallar el producto $2 \times \frac{3}{5}$ dividiremos 2 en 5 partes, cada una de las cuales será $\frac{2}{5}$, y repetiremos esto 3 veces, lo que da $\frac{2 \times 3}{5}$

Luego, para multiplicar un número *cualquiera* por una fracción, se le multiplica por el numerador y se le divide por el denominador.

Ejemplo: $4 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$.

Para multiplicar fracciones se forma otra cuyo numerador sea *el producto de los numeradores* y el denominador, *el de los denominadores*.

Ejemplo: $\frac{4}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{4.2}{5.7} = \frac{8}{35}$.

Porque según la regla anterior, para multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{7}$ había que multiplicar $\frac{4}{5}$ por 2, lo que da $\frac{4.2}{5}$, y dividir este resultado por 7, lo que se consigue multiplicando por 7 el denominador 5 (178).

189. La división con términos fraccionarios tiene por objeto, como en los números enteros, hallar el número que, multiplicado por el divisor, produce el dividendo.

Invertir una fracción es poner el numerador por el denominador, y viceversa.

Ejemplo : La fracción inversa de $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$.

El producto de dos fracciones inversas es 1.

Ejemplo : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2.3}{3.2} = 1.$

Para dividir un *número cualquiera* por una fracción se multiplica el dividendo por la fracción que hace de divisor, *invertida*.

Ejemplos : $4 : \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{4.3}{2}.$

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{7} = \frac{5}{8} \times \frac{7}{4} = \frac{5.7}{8.4}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}.$$

Porque, por ejemplo, considerando como un solo número el producto $\frac{5}{8} \times \frac{7}{4}$, y multiplicándole por el divisor $\frac{4}{7}$, sale :

$$\frac{5}{8} \times \frac{7}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{8}, \text{ porque } \frac{7}{4} \times \frac{4}{7} = 1.$$

Luego $\frac{5}{8} \times \frac{7}{4}$ *era el cociente* de la división $\frac{5}{8} : \frac{4}{7}$, puesto que era el número que, multiplicado por el divisor, daba el dividendo.

Para multiplicar o dividir números mixtos se reducen, previamente, a fracciones.

190. **Potenciación.** —Para elevar al cuadrado o al cubo una fracción se elevan sus dos términos.

Ejemplo :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

191. Para extraer la raíz cuadrada de una

fracción, se extrae la del numerador y se parte por la del denominador.

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}.$$

Porque una fracción es igual a un cociente (V. 179).

Si el denominador no tiene raíz exacta, para conseguir que la tenga se multiplica previamente los dos términos de la fracción dada por el denominador.

Ejemplo:

$\sqrt{\frac{17}{8}} = \sqrt{\frac{136}{64}} = \frac{\sqrt{136}}{8}$. La $\sqrt{136}$ está entre 11 y 12, luego la propuesta está entre $\frac{11}{8}$ y $\frac{12}{8}$ de modo que escribiendo $\sqrt{\frac{17}{8}} = \frac{11}{8}$ se comete un *error*; pero este error es menor que $\frac{1}{8}$.

Casi siempre se opta por reducir la fracción a decimal, y así se lleva la aproximación hasta la unidad decimal que convenga.

192. **Observaciones sobre el cálculo de las fracciones.**

1.ª Las reglas ya conocidas para operar con decimales no son, en el fondo, distintas de las dadas aquí para operarse con las fracciones. Hay que tener en cuenta, para comprobarlo, que el numerador de un número decimal es este mismo número considerado como entero; y el denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenía aquél.

Trate el alumno de comprobar que una regla, por ejemplo, la de dividir un entero por un decimal, equivale a la correspondiente de dividir un número por una fracción.

2.ª Los problemas de multiplicación y de división antes estudiados se resuelven del modo dicho, aunque alguno de los términos fuese fraccionario.

3.ª Las propiedades de la multiplicación (uniforme, conmutativa, etc.) son ciertas también para las fracciones.

4.ª Como una fracción equivale al cociente de dividir su numerador por su denominador, se podrá convertir en decimal haciendo dicha división y podrá resultar una decimal exacta o periódica (182).

Igualdades fraccionarias

193. La expresión de que dos fracciones son equivalentes se llama **igualdad fraccionaria**, porque se expresa mediante el signo igual.

Ejemplo: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ es una igualdad fraccionaria.

Los términos son: 2, 3, 4, 6 —en este orden —y se llaman 1.°, 2.°, 3.°, 4.° término, respectivamente.

El 1.° y 4.° se llaman *extremos;* el 2.° y 3.°, *medios.*

Propiedad fundamental.—En una igualdad fraccionaria *el producto de los términos medios* es igual al *producto de los extremos.*

Ejemplo: en la igualdad fraccionaria anterior,

$$2\times 6=4\times 3.$$

Porque reduciendo a denominador las fracciones, salen las

$$\frac{2.6}{3.6} \text{ y } \frac{4.3}{3.6},$$

y para que éstas sean iguales tendrán que serlo sus numeradores.

Recíprocamente: Si el producto de dos números es igual al de otros dos, con los cuatro se pueden formar varias igualdades fraccionarias, tomando como medios los factores de un producto, y como extremos, los del otro.

Ejemplo: De ser $2 \times 9 = 6 \times 3$, sale $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$; $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ etc.

Vea el alumno cuántas igualdades fraccionarias podría obtener.

Porque si $\frac{2}{6}$ no fuese igual a $\frac{3}{9}$, tampoco sería 2×9 igual a 6×3; contra lo que suponíamos cierto.

194. ***Propiedades.**—En una igualdad fraccionaria, la suma de los dos primeros términos partida por el primero es igual a la suma del tercero y cuarto partida por el tercero.

Ejemplo: De $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ sale $\frac{2+3}{2} = \frac{6+9}{6}$

Compruebe el alumno que la segunda igualdad es cierta, viendo que el producto de extremos es igual al de medios.

En toda serie de varias fracciones iguales, la suma de los numeradores, partida por la de los denominadores, es una fracción igual a cualquiera de las dadas.

Ejemplo: De $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ sale $\frac{2+4+8}{3+6+12} = \frac{2}{3}$, o a cualquiera de las otras.

Compruébese para dos fracciones.

195. Cuando una igualdad fraccionaria tiene los dos medios o los dos extremos iguales, es decir, un medio o extremo *repetido*, se llama éste *medio proporcional* entre los otros dos términos, y el cuadrado de aquél es igual al producto de éstos, o lo que es lo mismo, el *medio proporcional es la raíz cuadrada del producto de los otros dos términos.*

Ejemplo: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. 6 es medio proporcional entre 4 y 9; y $6^2 = 4 \times 9$, ó $6 = \sqrt{4 \times 9}$

Ejercicio.—Hallar el medio proporcional entre 0'125 y 0'5.

Tercero proporcional a dos números a y b (dados en este orden) es otro número x, tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Cuarta proporcional a tres números a, b, c (en este orden) es otro número x, tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

196. Para hallar un término de una igualdad fraccionaria; si es un *medio*, se multiplican los *extremos* y se divide el producto por el medio conocido; y si es un *extremo*, se multiplican los *medios* y se divide por el extremo conocido.

Ejemplos:

De $\frac{2}{x} = \frac{6}{9}$ sale $x = \frac{2.9}{6}$; De $\frac{3}{5} = \frac{12}{x}$ sale $x = \frac{12.5}{3}$

Si la igualdad fraccionaria fuese de la forma $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, x sería medio proporcional entre a y b, y se tendría, como sabemos, $x = \sqrt{a . b}$

Proporcionalidad

197. *Razón* o relación de dos cantidades de la misma especie, es el cociente de dividir los *números* que expresan sus medidas, hechas con la misma unidad.

Regla.—Para hallar la razón de dos cantidades: 1.º Se miden con una misma unidad. 2.º Se dividen los números resultantes.

Ejemplo: Hallar la razón de 3 Tm. con 2000 Kg. Estas cantidades ya están medidas, pero no con la misma unidad. Expresando la primera en Kgs. la razón sería $\frac{3000}{2000}$; y expresando los Kgs. en Tm. hubiera resultado para la razón $\frac{3}{2}$. Ambas razones son iguales porque multiplicando los dos términos de esta segunda por 1000 sale la primera.

Halle el alumno la razón de los dos catetos de un triángulo rectángulo que él dibuje, midiendo con el metro.

Las cantidades que se comparan para hallar su razón se llaman *antecedente* (la 1.ª) y *consecuente* (la 2.ª). La razón se expresa, siendo A el antecedente y B el consecuente, en la forma

$$\frac{A}{B}$$

que se lee: razón de A con B.

198. *Proporción* es la igualdad de dos razones.

Ejemplo: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

que se lee A *es* a B *como* C *es* a D.

Reemplazando las cantidades A, B, C, D por los números que expresan sus medidas (hechas, para cada razón con una misma unidad) resultará una igualdad fraccionaria. Nosotros supondremos siempre reemplazadas las cantidades por los números.

199. Dos cantidades son *directamente proporcionales* cuando sus valores particulares se corresponden de tal modo que con dos valores de la primera y sus *correspondientes* de la segunda se forme *una proporción*.

Ejemplos: Si llamamos C a la longitud de una circunferencia, y d a la de su diámetro (medidas con la misma unidad) sabemos que

$$c = d \times \pi$$

Si c' es otra circunferencia y d' su diámetro, será

$$c' = d' \times \pi$$

Luego

$$\frac{c}{c'} = \frac{d \times \pi}{d' \times \pi}$$

y simplificando esta fracción dividiendo por π sus dos términos,

$$\frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

Esto se expresa diciendo que las circunferencias son *proporcionales* a sus diámetros.

También son proporcionales a sus radios, porque dividiendo los diámetros por 2, salen los radios, y se tendrá

$$\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$$

Si r' fuese *doble* que r, sería c' *doble* que c, de modo que al hacerse *doble* el radio, se hace *doble* la longitud de la circunferencia.

Generalmente, esto basta para probar la proporcionalidad; (*) de modo que, para saber si dos cantidades son directamente proporcionales, examinaremos si haciendo *doble* el valor de una se hace *doble* el de la otra.

Ejemplo 2.° Se ve fácilmente, haciendo la figura, que si un ángulo es *doble* que otro, el arco correspondiente al primero es *doble* del correspondiente al segundo. (Estos arcos han de trazarse con igual radio). Por eso decimos que *los ángulos son proporcionales a los arcos correspondientes.*

3.° Si un arco doble que otro *no* le corresponde doble cuerda (véase en una figura) los arcos *no* son proporcionales a sus cuerdas.

4.° La distancia que recorre un tren que lleve siempre la misma marcha, es directamente proporcional al tiempo que tarda en recorrerla.

Porque para recorrer *doble* distancia necesita *doble* tiempo.

5.° * Las áreas de dos cuadrados son directamente proporcionales *a los cuadrados* de las longitudes de sus lados.

Porque si A es el área de un cuadrado (expresada en m^2 p. ej.) y l, la longitud de su lado (en metros)

$$A = l^2$$

Siendo A' otro cuadrado y l' su lado

$$A' = l'^2$$

(*) Por lo menos así ocurrirá en los ejemplos que pongamos.

Luego $\frac{A}{A'} = \frac{l^2}{l'^2}$

Si fuese $l = 1$ y $l' = 2$ se tendría: $\frac{A}{A'} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

Es decir, que A´ sería 4 veces mayor que A; de modo que aquí, al hacerse *doble*, es decir, 2 veces mayor el lado, el área se hace 4 veces mayor (Compruébese empleando el papel cuadriculado).

6.° * Los volúmenes de dos cubos son directamente proporcionales a los *cubos* de sus aristas.

Demuéstrelo el alumno recordando que el volúmen de un cubo es el cubo de su arista; esto es, $V = l^3$.

Los casos de proporcionalidad directa son muy numerosos. En Geometría, en Física, en los convenios comerciales, etc., pueden encontrarse ejemplos, como ya hemos visto.

Busque el alumno ejemplos de proporcionalidad.

200. * En Geometría hay figuras con segmentos de recta proporcionales. Así, si en un triángulo ABC fig. (13) trazamos una paralela DE al lado BC, el triángulo ADE tiene sus lado proporcionales a los del ABC, porque se verifica que las razones

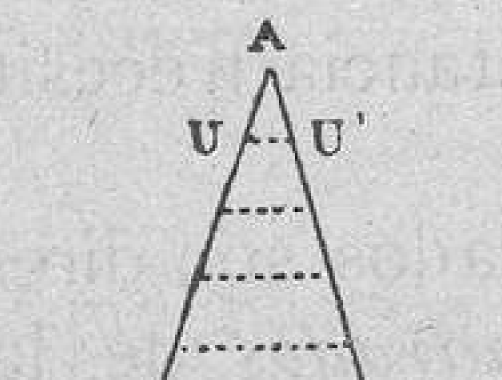


Fig. 13

$$\frac{AB}{AD}, \quad \frac{AC}{AE}, \quad \frac{BC}{DE}$$

son iguales y con ellas se podrían formar propor nes, p. j.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \quad o \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}.$$

Para comprobar que, en efecto, dichas razones son iguales, mediremos los segmentos empleando una misma unidad para los dos términos de una misma razón. Así, si medimos AB y AD con la unidad AU, AB será 9 y AD será 5, luego $\frac{AB}{AD}=\frac{9}{5}$.

Lo mismo pasa con AC y AE si se toma por unidad de medida AU'; luego $\frac{AC}{AE}=\frac{9}{5}$. Y lo mismo ocurre con BC y BE, si la unidad elegida es UU'. De modo que

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{9}{5}$$

Hemos dicho que esto se expresa diciendo que los triángulos ABC y ABD tienen los *tres* lados del uno, proporcionales a los *tres* del otro. Se dice los *tres*, porque son tres las razones iguales, aunque con ellas sólo pueden formarse las dos proporciones *distintas* antes escritas.

Esos triángulos ABC y ADE tienen además iguales sus ángulos, y se llaman *semejantes*.

En general: Dos polígonos se llaman *semejantes* cuando tienen *sus lados* **proporcionales** *y sus ángulos* **iguales**. Se les da ese nombre de *semejantes* porque la *forma* es la misma, aunque no lo sea el tamaño. Así, dos cuadrados siempre son semejantes; dos triángulos equiláteros tam bién, etc.

Pruebe el alumno (consultando la segunda propiedad del número 194), que los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales a sus lados *correspondientes*.

*Mediante la semejanza de triángulos se descubren otras propiedades de las figuras, de las cuales citaremos sólo las que tienen aplicación práctica inmediata, como son las que siguen:

1.ª Si los lados de un ángulo se cortan por rectas paralelas, los segmentos determinados por ellas en uno de los lados, tienen cada uno, con el que está enfrente sobre el otro lado, una misma razón, o, lo que es lo mismo, dichos segmentos *son proporcionales*. Así, en la fig. 14 se verifica $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. De aquí resulta el procedimiento para dividir un segmento en partes proporcionales a otros dados (problema análogo al de dividir un número en partes proporcionales a otros dados, que se estudiará más adelante).

Para ello, si AB (fig. 14) es el segmento que ha de dividirse en partes proporcionales a los a, b, c, se toman éstos unos a continuación de otros sobre la semirrecta AX. Se une el extremo del último segmento con B, se trazan por los otros puntos paralelas a la recta de unión, y a', b', c' serán los segmentos pedidos, puesto que $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

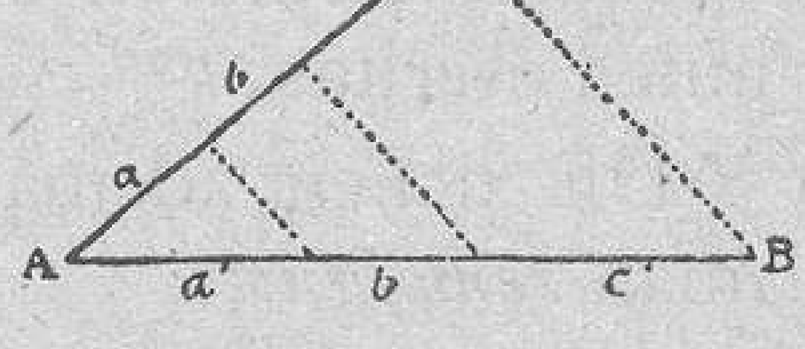


Fig. 14

Observación.—Si a, b, c son iguales, también resultan iguales a', b' y c', por lo cual, esto se emplea para dividir un segmento en partes iguales.

En lugar de comparar cada segmento de un lado con el de enfrente del otro, se pueden comparar dos de un mismo lado entre sí, y tienen igual razón que los dos correspondientes del otro lado, de modo que formarán proporción.

Así; en la figura 15 se verifica

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OX}$$

201. Esto sirve para hallar un segmento cuarto proporcional a otros tres a, b, c.

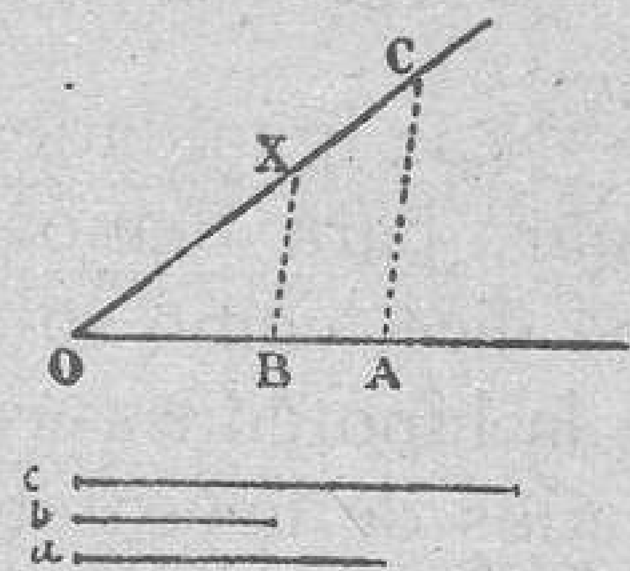


Fig. 15

Regla.—Se toma sobre un lado del ángulo los segmentos OA $= a$ y OB $= b$, y sobre el otro OC $= c$. Uniendo C con A y trazando por B la paralela a CA, que corta en X al lado OC, el segmento OX es el cuarto proporcional, puesto que se tendría

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

Esta construcción es aplicable al problema de hallar el segmento tercero proporcional a otros dos, a y b. Se procede como antes repitiendo, en vez de c, el segmento b.

202. 2.ª Si en un triángulo rectángulo BAC (fig. 16) trazamos la altura AD que parte del vértice del ángulo recto, divide a la hipotenusa BC $=$ $= a$, en dos segmentos DB y DC que llamaremos m y n. Esto sabido, se verifica que un cateto AB es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento m, inmediato al cateto. Es decir que

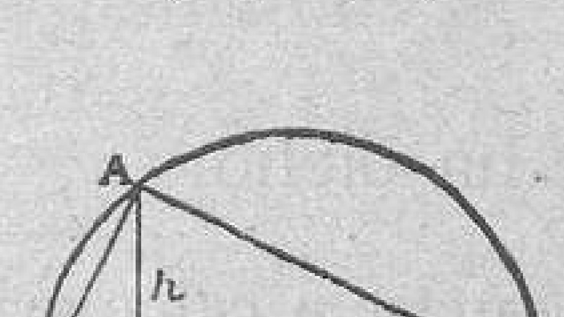


Fig. 16

$$AB^2 = a \times m \ (1) \text{ o } AB = \sqrt{a \times m}$$

y lo mismo

$$AC^2 = a \times n \ (2) \ \text{o} \ AC = \sqrt{b \times n}$$

Las igualdades (1) y (2) sirven, en primer lugar, para demostrar el teorema de Pitágoras que dice, como sabemos (170), que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Porque dando por ciertas dichas igualdades (1) y (2) que pueden escribirse al revés.

$$a \times m = \overline{AB}^2$$

$$a \times n = \overline{AC}^2$$

sumándolas miembro a miembro sale

$$a \times m + a \times n = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

y el primer miembro puede escribirse

$$a \times (m + n) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

Pero a es BC, y $m + n$ también es BC, y $BC \times BC = \overline{BC}^2$, luego

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

que es lo que en el enunciado se ha dicho.

a) Aplicar la propiedad de un cateto a calcularle en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene 25 cm. y el segmento m 6'25 cm.

b) Hallar el otro cateto.

c) Comprobar que se verifica el teorema de Pitágoras.

203. Como AB es medio proporcional en-

tre a y m, si hacemos AB $= x$ se podrá escribir (196)

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{m}$$

Esto nos permite resolver gráficamente el problema de construir un segmento x, medio proporcional a otros dos a y m. (Fig. 16)

Regla: Sobre el mayor segmento a=BC se traza una semicircunferencia; se toma, a partir de un extremo B, el segmento menor m, y por su extremo D se traza la perpendicular DA a a, que corta en A a la semicircunferencia. El segmento AB es el medio proporcional pedido, porque es un cateto del triángulo rectángulo BAC, que será medio proporcional entre a y m, como antes hemos visto.

Ejercicios:

a) Hallar el medio proporcional entre la base y la altura de un rectángulo que nos den.

b) Medir los segmentos para comprobar numéricamente qué error se ha cometido en la construcción, si se admite que las medidas de los segmentos son exactas.

204. **Observación.**—Si al medio proporcional entre la base y la altura del rectángulo dado lo llamamos x, y si designamos por b la base y por a la altura, sabemos que se tendrá

$$x^2 = b \,.\, a$$

Y como x^2 representa el área de un cuadrado de lado x, y $b \times a$, la del rectángulo, resulta que, construyendo un cuadrado de lado x, tendrá igual área, esto es, será *equivalente* al rectángulo.

Construir el cuadrado dicho es hacer la *cuadratura* del rectángulo.

Ejercicios :

a) Hacer la cuadratura de un rectángulo cuyas dimensiones sean 5 cm. de base y $1 \frac{1}{4}$ de altura sobre papel cuadriculado milimétrico. Comprobar numéricamente el error cometido.

b) Hacer la cuadratura de un paralelogramo.

c) *Calcular* el lado de un cuadrado equivalente a un triángulo de 2'88 dm. de altura y 4 dm. de base.

Hacer después, gráficamente, la cuadratura del triángulo, en el tablero, y comparar los resultados.

205. Aunque dos figuras no sean polígonos, *si tienen igual forma*, se llaman *semejantes*. V. g : dos círculos son siempre semejantes. Un mapa de España es una figura semejante a la que verdaderamente forma el suelo de esta nación.

Escala del mapa es la *razón* entre la distancia que hay en el mapa entre dos pueblos y la verdadera distancia de esos dos pueblos en el terreno. Si por ejemplo, la distancia que hay en el mapa entre los pueblos A y B es de 3 cm. y la verdadera distancia entre esos pueblos es 150 km., la *escala* será la razón entre esas cantidades, que se obtendrá como se sabe (197) reduciéndolas a la misma unidad y será

$$\frac{3}{15000000} = \frac{1}{5.000000}$$

Se dirá, pues, que el mapa está en la escala 1. partido por 5 millones.

Como todas las distancias del mapa son proporcionales a las del terreno, llamando *d* a una distancia del mapa y D a la verdadera en el terreno, se tiene la proporción :

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{5000000}$$

de la cual se puede sacar *d* si se conoce D, y al revés.

Ejemplo: En el mapa citado hay entre dos pueblos la distancia $d = 20$ cm. ¿Cuál es la distancia verdadera?

$$D = \frac{d.5.000000}{1} = 20 \text{ cm.} \times 5.000000 = 1000 \text{ Km.}$$

Haga el alumno el ejemplo inverso.

206. Cantidades *inversamente* proporcionales son aquellas que se corresponden, de modo que con la razón de dos valores de la primera y la de los dos correspondientes de la segunda *invertida*, se forma una proporción.

Ejemplo: El tiempo que tarda un tren en recorrer una distancia fija es *inversamente* proporcional a su velocidad.

Supongamos que con la velocidad de 30 Km. por hora, tarda 4 horas. Con una velocidad *doble*, es decir, de 60 Km. sólo tardaría 2 horas. La razón de los tiempos sería $\frac{4}{2}$ y la de las velocidades $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. *Invirtiendo* ésta, se tendría: $\frac{2}{1}$, y como $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ es una proporción, queda comprobado que los tiempos son inversamente proporcionales a la velocidad.

Como regla práctica podemos decir que dos cantidades son inversamente proporcionales si al hacer *doble* el valor de una, el correspondiente de la otra, debe ser *mitad*.

La proporcionalidad inversa es menos frecuente que la directa.

Regla de tres

207. Sirve para resolver el siguiente:

Problema.—*Dado un par de valores particulares de dos cantidades proporcionales, hallar el valor que corresponde en una de las cantidades, a un nuevo valor de la otra.*

Ejemplo: Sabiendo que una circunferencia tiene 2 m. de longitud, ¿qué longitud tendrá un arco de ella de 20°?

La circunferencia tiene 360° y a este número de grados corresponde una longitud de 2 m. A los 20° del arco corresponderá otra longitud, cuyo número de metros, desconocido, lo representamos por la letra x. Se pueden escribir los datos de esta manera clara y cómoda:

Número de grados	*Longitud*
360°	2 m.
20°	x m.

Son valores correspondientes los que están en el mismo renglón. La regla de tres, es la siguiente:

Con la razón de los dos valores de la 1.ª cantidad (número de grados) y la de los dos correspondientes de la 2.ª (longitud), tomados *en el mismo orden* si la proporcionalidad es *directa*, o en orden *inverso*, si es inversa la proporcionalidad; se forma una igualdad fraccionaria, y en ella se halla el término x desconocido.

Para el ejemplo anterior, la proporcionalidad es directa, porque a *doble* número de grados corresponderá *doble* longitud, luego la igualdad fraccionaria será (puesto que los datos están referidos a una misma unidad para cada dos términos de una misma razón):

$$\frac{360}{20} = \frac{2}{X} \text{ De donde } x = \frac{2.20}{360} = \frac{40}{360} = \frac{1}{9} \text{ (de m)}$$

Ejemplo 2.º En 15 minutos anda una persona 1 Km. y 2 Hm. ¿cuánto recorrerá (a igual paso) en $\frac{3}{4}$ de hora?

Disposición de los datos:

Tiempo	*Distancia*
15 mints.	1 Km. 2 Hm.
$\frac{3}{4}$ de hora	x.

El tiempo es directamente proporcional a la distancia (¿por qué?).

Para hallar la razón de los tiempos hay que medirlos en una misma unidad. Tomando el minuto es $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$. Para hallar la razón de las distancias, expresaremos la primera en la unidad en que queramos obtener x.

Si es, por ejemplo, en Km., dicha razón será $\frac{1'2}{x}$.

La igualdad fraccionaria de que habla la regla, será

$$\frac{1}{3} = \frac{1'2}{x}, \text{ de donde } x = \frac{1'2 \times 3}{1} = 3'6 \text{ (en Km.)}$$

Ejemplo 3.º Empleando papel de 80 cm. de ancho se necesitan 2 $\frac{1}{2}$ Dm. para empapelar una habitación. ¿Cuánto se necesitaría si el papel tuviese de ancho $\frac{5}{8}$ de metro?

Hay proporcionalidad inversa (¿por qué?).

Ancho	*Longitud*
80 cm.	$2\frac{1}{2}$ Dm.
$\frac{5}{8}$ m.	x.

Razón de los anchos (tomando por unidad el metro)

$$0{,}80 : \frac{5}{8} = 0{,}80 \times \frac{8}{5} = \frac{6{,}40}{5}$$

Razón de las longitudes (medidas en metros)

$$\frac{25}{x}. \quad \text{Invertida, } \frac{x}{25}.$$

Igualdad fraccionaria

$$\frac{6'40}{5} = \frac{x}{25} \quad x = \frac{6'40 \times 25}{5} = 32 \text{ (metros).}$$

Debe el alumno adiestrarse bien en los problemas de regla de tres, que son muy frecuentes.

Tanto por ciento

208. Ocurre muchas veces tener que hallar cuántas unidades de cierta clase corresponde a un número, sabiendo cuántas corresponden a 100.

Entonces se dice que hay que hallar un *tanto por ciento* de aquel número. Se indica por el signo $^0/_0$, que se lee *por ciento*

Ejemplo: Por pagar *al contado* una factura de 1.200 pesetas, nos rebajan el 4 $^0/_0$ (4 por 100) de la misma. ¿Cuánto importa la rebaja?

Lo que el enunciado anterior expresa, es que si la factura hubiese sido de 100 pesetas, nos hubieran rebajado 4; y admitiendo que la rebaja es proporcional al valor de la factura, se puede plantear la regla de tres.

Facturas	*Rebajas*
100	4
1200	x

que resulta da $x = \frac{1200.4}{100} = \frac{1200}{100} \times 4 = 12 \times \times 4 = 48$.

Como vemos, el problema se resuelve dividiendo el número 1200 por 100, y multiplicando por el tanto, 4. En otro ejemplo se procedería del mismo modo, por lo cual podemos enunciar una regla que sirva para todos los casos, y que es muy útil, porque hay que aplicarla muy amenudo, a saber:

Para hallar el tanto por 100 de un número, *se divide éste por 100*, y el resultado *se multiplica por el tanto.*

Ejemplos:

1.° Hallar el 6 % de 8000 pesetas $= 80 \times \times 6 = 480$.

2.° Hallar el $1 \frac{1}{3}$ % de 245,72 kg.

$$2{,}4572 \times \frac{4}{3} = 3{,}276.$$

3.° Hallar el $\frac{1}{2}$ % de $\frac{2478}{3}$ de l.

$$\frac{2478}{3 \times 100} \times \frac{1}{2} = 4{,}13.$$

Son muchos las cuestiones prácticas en que es necesario hallar un tanto por 100. Citaremos algunas:

Las contribuciones suelen consistir en un tanto por 100 del valor o riqueza gravados con ellas.

Los empleados del Estado reciben su sueldos con un tanto por 100 de rebaja (llamada descuento).

El peso de los embalajes de una mercancía se estima en un tanto por 100 *(tara)* del peso total.

Los *comisionistas*, que venden géneros por cuenta de otra persona o de una fábrica, cobran un tanto por 100 de las ventas; e igual los agentes de negocios

Las estadísticas suelen expresar sus resultados por medio de un tanto por 100, etc., etc.

A veces en lugar de un tanto por 100, se considera un tanto por 1.000, o por otro número, pero estos *tantos por cuanto* se convierten en tanto por 100, si así se desea.

Ejemplo: Si en una población de 30.000 habitantes, mueren al año 782 habitantes, ¿cuál es el tanto por 100 de defunciones?

Habitantes	*Defunciones*
30.000	782
100	x , $x = 2'6$

Es decir, que mueren el 2,6 %.

Regla de interés

209. Generalmente cuando se *presta* dinero, o se *impone*, es decir, se cede a cualquiera persona, Banco, etc., no se hace con la sola condición de que al cabo de cierto tiempo se devuelva a su dueño el dinero prestado, sino que se aspira, además, a obtener cierta ganancia o beneficio. Esta ganancia se llama *interés*.

Capital es la cantidad que se presta o impone; *tiempo*, el que dura el préstamo; y *rédito*, la ganancia correspondiente al capital 100 en la unidad de tiempo (que generalmente es el año).

El rédito es, por consiguiente, un *tanto por* 100 anual.

Se supone:

1.° Que los intereses son directamente proporcionales a los capitales para igualdad de tiempo.

2.° Que para igualdad de capital, los intereses son directamente proporcionales a los tiempos.

Como conviene hallar una *fórmula*, es decir, una expresión general en que se indiquen, por medie de letras, las operaciones que hay que ejecutar para hallar el interés, llamaremos c al capital, expresado en pesetas; t, al tiempo; i, al interés; y r, al rédito. La fórmula es

$$i = \frac{c . r . t}{100} \quad (I)$$

que se puede traducir en esta regla: para hallar el interés *se multiplica el capital por el rédito* y *por el tiempo*, y *se divide por* 100.

Sabida esta fórmula, para resolver un problema particular basta sustituir las letras por los números correspondientes.

Ejemplo: Interés de 8.000 pesetas al 5 % en 4 años.

$$c = 8.000\,;\ r = 5\,;\ t = 4\,;\ i = \frac{8.000 \times 5 \times 4}{100} = 1.600 \text{ pts.}$$

*Para ver cómo nace la fórmula *(I)* de los dos principios de proporcionalidad admitidos, basta tener en cuenta que si llamamos x al interés de c pesetas al año, como el de 100 pesetas es r, según el primer principio

$$\frac{100}{c} = \frac{r}{x}$$

lo cual suele enunciarse en forma de proporción diciendo: 100 *es* al capital, *como* rédito *es* al interés (en 1 año).

De aquí saldría

$$x = \frac{c \times r}{100}$$

Pero si el tiempo, en vez de ser un año, es t años, el interés, según el 2.° principio, será t veces mayor, luego

$$i = \frac{c \times r \times t}{100}$$

que es la fórmula (I).

Fórmulas derivadas.—La fórmula (I) representa un cociente indicado en que el dividendo es $c \cdot r \cdot t$, el divisor 100 y cociente i, luego

$$c \cdot r \cdot t = 100 \times i$$

Para obtener una de las cantidades del primer miembro de esta igualdad basta dividir el segundo por las otras dos, es decir, *despejar* la cantidad que se desée. Así sale

$$c = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t} \text{ (II)}$$

$$r = \frac{100 \cdot i}{c \cdot t} \text{ (III)}$$

$$t = \frac{100 \cdot i}{c \cdot r} \text{ (IV)}$$

fórmulas que sirven para hallar el capital, el rédito, o el tiempo.

Ejemplos: Capital necesario para producir 400 ptas. al 2'5 % en 6 meses.

Se usará la fórmula (II) poniendo

$$i = 400;\ r = 2'5\ t = 0'5 \text{ (años)} \text{ » } c = \frac{100 \cdot 400}{2'5 \times 0'5} = \frac{40000}{1'25}$$

¿A qué rédito se ha impuesto un capital de 20.000 pesetas si en 5 años se ha convertido en 25000?

Decir que el capital de 20000 pesetas se ha convertido en 25000 equivale a decir que la ganancia o interés ha sido de 5000.

La fórmula (III) da

$$r = \frac{100 \times 5000}{20000 \times 5} = \frac{500000}{100000} = 5 \quad \text{Al } 5\,\% \text{ anual.}$$

¿Cuánto tiempo han estado impuestas 6000 pesetas para ganar al $\frac{1}{5}$ % 20 duros?

20 duros son 100 pesetas, y éste el interés. Y $\frac{1}{5} = 0'2$ el rédito

$$t = \frac{100 \times 100}{6000 \times 0'2} = \frac{10000}{1200} = \frac{100}{12} = 8\,\frac{4}{12}\ (\text{de año}) =$$
$=8$ años 4 meses.

Observaciones.—Las fórmulas anteriores se aplican cuando el tiempo está expresado en años. Si estuviera en meses se reemplazaría en todas ellas el número fijo 100 por el número 1200, producto de 100 por 12; y si se diese el tiempo en días, en vez de 100, se pondría 36000, producto de 100 por 360 (que es el número de días del año, contando, para más sencillez, todos los meses de 30 días).

Intente el alumno hallar la explicación de estos cambios.

Repartos proporcionales

210. Tienen por objeto hacer de un número varias partes que tengan cada una con un número dado una misma razón.

Ejemplo: Repartir 400 pesetas entre dos personas proporcionalmente a los números 24 y 16. Llamando x e y a las partes que han de recibir dichas personas, lo que se quiere es que

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{16}$$

Regla.—Para repartir un número en partes proporcionales a otros, se divide aquél por la suma de éstos, y el cociente se multiplica por cada uno de los números para obtener cada una de las partes pedidas.

Para el ejemplo anterior se tendría, por ser $24 + 16 = 40$.

$$1.^{a} \text{ parte, } x = \frac{400}{40} \times 24 \text{ , } x = 10 \times 24 \ (1)$$

$$2.^{a} \text{ parte } y = \frac{400}{40} \times 16 \quad y = 10 \times 16 \ (2)$$

* Así se obtiene lo que se quería, porque de las igualdades (1) y (2) sale

$$\frac{x}{24} = 10 \, , \ \frac{y}{16} = 10 \, ; \text{ luego } \frac{x}{24} = \frac{y}{16}.$$

Observaciones.—1.ª Para repartir un número proporcionalmente a varias *fracciones*, es preferible reducir éstas a un común denominador, y repartir el número proporcionalmente a los numeradores.

Ejemplo: Dividir 500 en partes proporcionales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$. Reducidas estas fracciones a denominador común, sus numeradores serían 15 y 9; luego se repartiría 500 en partes proporcionales a 15 y 9.

2.ª Si una vez que fuese conocida una de las partes, el enunciado nos enseñará a hallar las demás por multiplicaciones o divisiones, se representará por *1* el número correspondiente a aquella parte.

Ejemplo: Repartir 300 pesetas entre tres personas, de modo que la primera reciba *doble* que la segunda y la tercera los $\frac{4}{5}$ de lo que reciba la primera.

Se ve que una vez conocido lo que ha de recibir la segunda persona, sería fácil determinar lo que corresponde a la primera, y enseguida, lo que toca a la tercera.

Por eso designamos por *1* el número relativo a la segunda persona; el relativo a la primera sería 2, y el de la tercera, los $\frac{4}{5}$ de 2; es decir, $2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$.

Se repartirá, pues, 300 proporcionalmente a 2, 1 y $\frac{8}{5}$, o, según la primera observación, a 10, 5 y 8.

3.ª Los repartimientos proporcionales son muy frecuentes: se hacen para distribuir equitativamente gratificaciones, contribuciones, herencias, etc.

Regla de aligación

211. Resuelve las siguientes cuestiones relativas a mezclas de substancias.

Cuestión directa.—Conociendo los precios de dos substancias (referidos a una misma unidad de medida) y las cantidades que de ellas han de mezclarse (expresadas también en igual unidad), averiguar qué precio debe fijarse a la unidad de mezcla para no perder ni ganar (sin tener en cuenta los gastos que la mezcla ocasione).

Ejemplo: Mezclando 8 litros de vino de 40 céntimos el litro, con 30 litros de 20 céntimos el litro, ¿a cómo sale el litro de mezcla?

Regla.—Se multiplican los números que expresan los precios, por los que indican las cantidades, con lo cual se obtienen los *valores* de ellas. Sumando estos valores, se obtiene el *valor de la mezcla*; y dividiendo éste por la suma de las cantidades mezcladas, se obtiene el *precio* de la unidad de mezcla.

Para el ejemplo anterior se disponen los datos del siguiente modo:

Cantidades	Precios	Valores
8 l.	40 cts.	320 cts.
30 l.	20 cts.	600 cts.
38 l.		920 cts.
1 l.		$\frac{920}{38} = 24$ cts.

Como se ve, esta regla equivale a varios problemas de multiplicación y división.

Cuestión inversa.—Hallar *la razón* en que deben hallarse las cantidades de dos substancias mezcladas, cuyos precios se conocen, para que la mezcla pueda venderse, sin pérdida ni ganancia, a un precio dado.

Ejemplo: ¿En qué razón han de estar las cantidades de dos vinos, de 80 y 30 céntimos el litro, para que el precio de la mezcla sea 50 céntimos el litro?

Regla.—Se resta del precio mayor, el de la mezcla; y de éste, el menor. El cociente de las dos diferencias halladas expresa la razón de la cantidad de la substancia más barata, con la de la más cara.

Para el ejemplo anterior:

$$50\begin{cases} 80\text{»} & 80-50=30 \\ 30\text{»} & 50-30=20 \end{cases}\frac{30}{20}=\frac{3}{2}=\frac{\textit{Cantidad de substancia barata}}{\textit{Cantidad de substancia cara}}$$

Es decir, que por *cada* 3 litros de vino barato hay que poner 2 del caro.

* **Comprobación.**—Puesto que un litro del vino caro cuesta 80 céntimos, y se va a vender a 50, se pierde 30 céntimos; luego, en dos litros, se perderá 60.

Por cada litro de vino barato que ha de venderse a 50 céntimos, no costando más que 30, se ganan 20; luego, en tres litros, se ganan 60; lo mismo que antes se perdía. Luego, hecha la mezcla en la razón encontrada, no hay pérdida ni ganancia.

Generalmente, se fija de antemano la cantidad total de mezcla que quiere obtenerse, y, entonces, hay que hacer un reparto proporcional.

Ejemplo: Si en el ejemplo anterior quisiéramos que la mezcla total fuese de 100 litros, repartiríamos esta cantidad proporcionalmente a los números 3 y 2, y resultaría:

Del vino barato $\frac{100}{5} \times 3 = 60$ (litros).

Del vino caro $\frac{100}{5} \times 2 = 40$ (litros).

Así se cumplen todos las condiciones, porque $60 + 40 = 100$, y además

$$\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

Cuestiones útiles

212. Los conocimientos contenidos en el texto, bastan con ser rudimentarios para resolver, por la aplicación de ellos, multitud de interesantes cuestiones referentes, no sólo a la Matemática, sino también a la Geografía, a la Física, a la Estadística, al Comercio y a la Industria, etc.

Ejercitándose en la resolución de los problemitas que siguen, adquirirá el alumno destreza en el cálculo, retendrá mejor en su memoria las reglas aprendidas, y comprenderá la utilidad de ellas conociendo su aplicación a diversas materias, muchas de las cuales estudiará, tal vez, más adelante.

Se podrían proponer miles de ejercicios, pero nos hemos limitado a elegir los más vulgares y sencillos dentro de cada ciencia, para no tener que entrar en muchas explicaciones previas.

De Aritmética y Geometría ya van en el mismo texto incluídos muchos ejemplos y ejercicios, por lo cual, sólo presentamos aquí unos pocos nuevos, a fin de que se presienta la mayor amplitud que podría darse a los cálculos iniciados en esta obrita. Además, los ponemos los últimos, porque, aun siendo fáciles, ofrecen algunos mayor dificultad que los de las otras materias, y éstos le parecerán más amenos al alumno.

Geografía

1. Longitud de la llamada *milla geográfica* de las que entran 60 en un grado de meridiano. (Recuérdese la definición del m.)

2. La luz recorre, aproximadamente, 300.000 kilómetros por segundo. Calcular la distancia de la Tierra al Sol, sabiendo que la luz de éste tarda en llegar a aquélla 8 minutos y 18 segundos.

3. El relámpago y el trueno se producen, en una nube, al mismo tiempo, pero la luz recorre en tiempo despreciable la distancia entre aquella nube y nosotros, mientras que el sonido camina unos 340 metros por segundo. Sabido esto, y suponiendo que nuestro pulso late 75 veces por minuto, calcular la distancia a que se halla la nube si desde que vimos el relámpago hasta oir el trueno contamos 8 pulsaciones.

4. Un tren expreso sale de Madrid a las 10 de la noche y llega a Irún a las 12 $\frac{1}{4}$ de la siguiente mañana. Suponiendo que en las paradas de todo el trayecto se detenga 2 horas y 5 minutos; y siendo la distancia entre Madrid e Irún por la vía férrea de 631 Km., ¿qué velocidad *media* por hora lleva el tren?

5. La montaña Davalaguiri, de Asia, que es de las más elevadas, tiene unos 8.600 m. Tomando como radio de la Tierra 6.375 Km., ¿qué altura debería atribuirse a aquella montaña en un globo terrestre de 30 cm. de radio.

6. Tomando como exactos los siguientes datos:

Radio de la Tierra = 6.375 Km.
Idem del Sol = 109 veces el de la Tierra.
Idem de la Luna = 0'27 del de la Tierra.

Distancia de la Tierra al Sol = 15×10^7 Km.
Idem íden a la Luna = 384×10^3 Km.

Si representamos la Tierra por una esfera de 2 cm. de diámetro, ¿qué diámetro se deberá atribuir a las esferas que representen el Sol y la Luna, y a qué distancias deberán colocarse?

7. El diámetro medio de la Tierra es de unos 12.740 km., y el de la Luna 0'2.725 de aquél. Calcular el área de la superficie de la Luna.

8. Tenemos dos globos terrestres: uno de 21 cm. de radio, y otro de 63 cm. El área de un país es, en el primero, 80'5 $cm.^2$ ¿Cuál será en el segundo?

9. Un trópico dista del ecuador $23^0\ 27'$ de meridiano, y el círculo polar del mismo hemisferio dista $23^0\ 28'$ del polo. Calcular, en kms., la distancia entre el trópico y el círculo polar.

10. Hallar, en kms., la distancia entre dos *antecos* (consúltese la Geografía) teniendo uno de ellos 20^0 15' de latitud N.

11. Albacete y Ciudad Real tienen, próximamente, igual latitud, y sus longitudes con relación al meridiano de Madrid son: Albacete, 1^0 49' 54'' E., y Ciudad Real, 0^0 14' 37'' O. Sabiendo que 1^0 de longitud equivale a 4 minutos de diferencia en las horas, y 1' a 4 segundos, ¿qué diferencia de horas habrá entre ambos pueblos?

12. Teniendo presente el ejercicio anterior, decir qué hora será en Ciudad Real cuando sea mediodía en Albacete.

13. El peso absoluto de un cuerpo depende de la fuerza con que es atraído al centro de la Tierra. Esta atracción es proporcional a las masas de los cuerpos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de atracción. El Sol tiene una masa 333×10^3 veces mayor que la de la Tierra, y su radio es 109 veces el de ésta. Calcular cuánto pesaría (sin tener en cuenta el movimiento de rotación solar) en el Sol la misma masa que pesa en la Tierra 1 Kg.

14. Igual problema para la Luna, cuya masa es 0'012 de la de la Tierra y su radio, 0'27 del de la Tierra.

15. *Paralaje* de un astro es el ángulo que se formaría entre la recta que uniera el centro de aquel astro con el de la Tierra, y la tangente trazada desde dicho centro a la circunferencia que reprensentase la Tierra. La paralaje expresada en segundos de arco es, aproximadamente, igual al cociente de dividir el número 206265 por la distancia del astro a la Tierra expresada en radios terrestres.

La paralaje de la luna es 57'. Calcular la distancia de la Luna a la Tierra.

Cronología

16. La batalla de las Navas de Tolosa, ganada por Alfonso VIII, se dió el 16 de julio de 1212; y la entrada triunfal de los Reyes Católicos en Granada

se verificó en 2 de enero de 1492. ¿Cuántos años, meses y días transcurrieron de uno a otro acontecimiento?

17. Según Varrón, el año 1917 de nuestra era es el 2670 de la fundación de Roma. ¿En que año fué ésta?

18. El descubrimiento de tierra americana por Colón fué en el día 12 de octubre de 1492. Desde este suceso hasta el principio de la actual guerra europea han pasado 421 años, 9 meses y 20 días. ¿Cuándo comenzó la guerra europea?

Estadística

En el segundo semestre del año 1905 ocurrieron en España los siguientes nacimientos mensuales :

En julio.	39.537
En agosto	38.169
En septiembre	38.146
En octubre. . , ...	39.154
En noviembre.	39.855
En diciembre	43.770

¿Cuál fué el término medio de natalidad mensual?

20. Siendo la extensión superficial de Francia 536.464 Km.^{2}, y su población absoluta de 39.252.000 habitantes, y la población relativa de Italia 127 habitantes por Km.^{2} ¿cuál de los dos países tiene mayor población relativa?

21. Tomando como población de España 20 millones de habitantes, y siendo la longitud total de sus líneas de ferrocarriles 15.000 Kms., comparar ésta con la de Portugal, en que hay 2.500 Kms. de ferrocarriles por 5'5 millones de habitantes.

22. Hace algunos años había en España unos 25.000 franceses. Siendo de 20 millones la población de España ¿qué *tanto por mil* de franceses había en España?

23. En julio de 1905 hubo en la provincia de Logroño una natalidad de 2'53 por mil, y una mortalidad de 2'13. La población de la provincia era entonces de

189.376 habitantes. ¿Cuántos más fueron los individuos nacidos que los muertos.

24. En una clase de 48 alumnos resultan *no* aprobados el 25 por 100. El número de sobresalientes es el $16 \frac{2}{3}$ por 100 del número de aprobados. ¿Cuántos sobresalientes hubo?

Física

25. Para dar ligero color rojizo a 2 litros de agua clara, basta 1 cm.^{3} de agua que tenga disueltos 0'02 g. de la substancia llamada *fuschina*. ¿Qué cantidad de fuschina habrá en 1 cm.^{3} del agua coloreada.

26. La punta de un tornillo sube 0'4 mm. por cada 6 vueltas que da la cabeza de aquél. ¿Cuántas vueltas hay que dar al tornillo para que la punta ascienda 6 mm.?

27. Tenemos dos ruedas dentadas que engranan una con otra. La pequeña tiene 12 dientes, y la mayor, 60. Cuándo ésta haya dado 140 vueltas ¿cuántas habrá dado la pequeña?

28. Una rueda dentada de 3 cm. de radio, y que tiene 12 dientes, engrana con otra de 8 cm. de radio. ¿Cuántos dientes tendrá ésta?

29. El termómetro centigrado y el de Reamur se diferencian en que la escala del primero comprende 100 partes (llamadas grados de temperatura), y la del segundo, sólo 80; de modo, que 100° (100 grados centigrados) equivalen a 80° (80 grados Reamur). ¿A cuántos grados centigrados equivalen 25° Reamur?

30. Por qué fracción hay que multiplicar cualquier número de grados centigrados para convertirlos en grados de Reamur? Y para hacer la transformación inversa?

31. 1 Kg. de carbón puede evaporar, al quemarse, 6 Kg. de agua en una hora. Para evaporar 0'3 m.^{3} de agua por hora ¿cuánto carbón es necesario?

32. Si una masa de aire saturado de humedad desciende bruscamente de la temperatura de 30° a la de 15°, expulsa por cada m.^{3} de aire 18'5 g. de agua de lluvia. ¿Cuántos litros de agua de lluvia producirán 2.000 m.^{3} de aire en las condiciones dichas?

33. Al lado de una tira de papel de 9 cm. (numerados 1, 2, ... 9) ponemos otra igual dividida en 10 partes iguales (que numeramos 1, 2, ... 10). Decir:

1.° Qué longitud tiene cada parte de la 2.ª tira.

2.° Cuánto le falta a cada una de estas partes para llegar a 1 cm.

3.° Si ponemos juntos los bordes de la izquierda de ambas tiras ¿cuánto estará retrasada la división 4 de la 2.ª tira respecto del centímetro 4.° de la 1.ª?

4.° Si el borde de la 2.ª tira lo colocamos entre el 4.° y el 5.° centímetro de la 1.ª, y sucede que la división 5 de la 2.ª tira coincide con la del centímetro 9.° ¿qué distancia hay entre el 4.° centímetro de la 1.ª tira y el borde de la 2.ª?

El conjunto de dos reglas análogas a estas tiras constituye lo que en Física se llama un *nonio*. ¿Comprende el alumno para qué puede servir el nonio? (*)

34. Hay *nonios* circulares que se forman, por ejemplo, dividiendo un arco de 29° en 30 partes iguales. ¿Qué fracción de grado se podrá apreciar con un nonio de esta clase?

35. Cuando un cuerpo recorre en tiempos iguales distancias o espacios iguales se dice que tiene movimiento *uniforme*. Representando por e el espacio recorrido con la velocidad v en el tiempo t, la *fórmula* del movimiento uniforme es

$$e = v \cdot t$$

Decir: 1.° ¿Cómo se hallaría t si fuesen conocidos e y v?

2.° ¿Cómo se hallaría v si fuesen conocidos e y t?

3.° Si la velocidad v no cambia y el tiempo se hace *doble*, ¿cómo será el espacio?

4.° Si el tiempo es constante y la velocidad se hace *doble*, ¿qué ocurre con el espacio?

5.° ¿A quién es proporcional el espacio recorrido con movimiento uniforme?

6.° Si el espacio no cambia y la velocidad se hace *doble*, ¿cómo tendrá que ser el tiempo? ¿Cómo se diría

(*) Si es preciso, intervenga el Profesor.

esto de un modo general? (Para espacios iguales la velocidad y el tiempo son...)

33. Se llama *caloría* la cantidad de calor necesaria para que la temperatura de un Kg. de agua suba de 0° a 1°. Siendo el número de calorías proporcional al de grados y al de kilogramos, ¿cuántas calorías se necesitan para elevar a 8 grados 5 litros de agua?

37. Una *palanca* (de primer género) es una barra de hierro en cuyos extremos supondremos colgados pesos, y que se apoya en un punto intermedio. Para que la palanca quede horizontal, es decir, sin inclinarse a un lado ni a otro, es preciso que los pesos sean *inversamente proporcionales* a sus distancias al punto de apoyo. Un peso es de 30 Kg. y está a 20 cm. del punto de apoyo. La palanca tiene 50 cm. ¿Cuál debe ser el otro peso?

38. En la misma *palanca* del problema anterior, de 50 cm. de larga, si de un extremo colgamos un peso de 7'50 Kg., y del otro un peso de 30 Kg. ¿a qué distancia del segundo debemos colocar el punto de apoyo para que la palanca quede horizontal?

39. La distancia (espacio) recorrida por un cuerpo que cae verticalmente (prescindiendo de la resistencia del aire) es *proporcional al cuadrado del tiempo* que dura la caída. Si en 1 segundo recorre el cuerpo 4'9 m., ¿cuánto recorrerá en 3 segundos?

40. Una piedra tarda 2 segundos en caer al fondo de un pozo, ¿cuál es la profundidad de éste? (Véase el problema anterior).

41. ¿Cuánto tiempo emplea un cuerpo que cae en recorrer 78'4. m. (Véanse los problemas anteriores).

42. Si se dispara verticalmente hacia arriba un *proyectil*, alcanza una altura proporcional al cuadrado de la velocidad con que salió disparado. Según esto, si un proyectil sube a 200 m., otro, disparado con velocidad *doble*, ¿a qué altura subirá?

43. La intensidad de iluminación de una pantalla colocada delante de una luz, es *inversamente proporcional* al *cuadrado* de la distancia a que se halla la pantalla. Si a 6 m. de distancia la iluminación es como 1,

¿a la distancia de 2 m., qué iluminación le corresponderá?

44. Cuando un cuerpo se mete por completo en el agua (o en otro líquido) sufre un *empuje*, hacia arriba, equivalente al peso de un volumen de agua igual al del cuerpo. Si el cuerpo tiene 25 cm.^{3} de volumen y pesa 30 g., al meterlo por completo en el agua y dejarlo solo, ¿subirá o bajará? ¿Y si pesase 20 g.?

45. *Peso específico* de un cuerpo es *la razón* entre su peso (relativo) y el peso de un volumen de agua igual al del cuerpo. Si 6 cm.^{3} de cobre pesan 53 g., ¿cuál es el peso específico del cobre?

46. Un trozo de piedra, cuyo peso específico es 2'7, pesa 1 Qm., ¿cuál es su volumen?

47. ¿Cuánto pesan 0'52 m.^{3} de hierro, cuyo peso específico es 7'8?

48. ¿Cuánto pesan 83 litros de espíritu de vino, cuyo peso específico es 0'79?

49. En una vasija de forma de paralelepípedo rectangular cuyo largo es 14 cm., y el ancho 5 cm., echamos 3'78 Kg. de mercurio, cuyo peso específico es 13'5. ¿A qué altura llegará?

50. ¿Cuánto pesará una esfera de plata de 1 cm. de diámetro, siendo 10'5 el peso específico de la plata?

51. Un globo *sube* cuando su peso es menor que el de un volumen de aire igual al del globo. La diferencia entre ambos pesos es la *fuerza ascensional* del globo. Sabido esto: si un globo de 100 m.^{3} se llena de gas *hidrógeno* cuyo peso específico es 0,00009, y el del aire es 0'0013 ¿cuál será la fuerza ascensional del globo (prescindiendo de lo que pesen la cubierta y accesorios)?

52. ¿Cuál será la fuerza ascensional de un globito de 20 cm. de diámetro, lleno de hidrógeno? (veáse el problema anterior).

53. Se pueden obtener hilos de platino cuyo diámetro sea $\frac{1}{1200}$ de mm. Sabiendo que el peso específico del platino de es 21'6 ¿cuánto pesará 1 Km. de aquel hilo?

54. Suponiendo que el sonido recorre 340 m. por segundo y que en 1 s. se pueden pronunciar 4 sílabas

¿a qué distancia debe estar una pared que produce *eco* para que se oiga la primera sílaba del eco al pronunciar nosotros la segunda?

(El sonido tiene que *ir* a la pared y *volver* a nues tro oído).

55. Cuando se *toca* una cuerda de guitarra ésta se agita o *vibra* y estas vibraciones producen el sonido, tanto más *agudo* cuanto mayor es el número de vibraciones. Si la cuerda da la nota *do* con 432 vibraciones por segundo, se pueden calcular las vibraciones que corresponden a las otras notas.

Si se representa por 1 las vibraciones del *do*, las del *re* son $\frac{9}{8}$ y las de las demás notas de la *escala* musical son las siguientes:

do	re	mi	fa	sol	la	sí
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$

¿Cuántas vibraciones corresponderán a la nota *la*?

56. Los carriles de una vía férrea se componen de barras de 5'40 m. de largo a 0;^{0} pero por el calor cada metro de carril se alarga en 0'000012 por cada grado de temperatura. ¿Qué espacio debe dejarse entre cada dos carriles para que no se junten del todo hasta los 80^0 de temperatura?

57. 1 Kg. de carbón produce, al quemarse, 6000 calorías, y 1 Kg. de leña, 3.500 calorías Si 1.500 Kg. de leña valen 70 pesetas y 1 Tm. de carbón 78 pesetas ¿qué tiene más cuenta comprar; carbón o leña?

58. Se mezclan 6 Kg. de mercurio a 20^0 con 4 de mercurio a 50^0 ¿Cuál es la temperatura de la mezcla? (Se resuelve como la regla de aligación directa).

59. 12 Kg. de agua salada contienen 600 g. de sal ¿Cuánta agua dulce hay que agregar para obtener una disolución que tenga el 3$^0/_0$ de sal?

Química

60. Tomando por unidad de pesos específicos el del aire, el del gas llamado *anhidrido carbónico*, que se

produce al quemar el gas del alumbrado, es 1'53. 1 m.^{3} de gas del alumbrado produce 1'5 m.^{3} de anhidrido carbónico. Si un mechero quema 140 l. de gas del alumbrado cada hora, y arde durante 3 $\frac{1}{4}$ ¿cuánto pesará el anhidrido carbónico que se produce, pesando 1'23 g. el litro de aire?

61. En 100 partes de *ácido clorhídrico* (ácido existente en el estómago) hay 97'26 de *cloro* y 2'74 de *hidrógeno*. Siendo 1 el *equivalente* del hidrógeno, ¿cuál será el del *cloro*? Sabiendo que los equivalentes son proporcionales a las cantidades que de cada elemento entran en las 100 partes del compuesto considerado.

62. En 100 partes de alcohol hay 52'18 de *carbono*, 13'04 de *hidrógeno* y 34'78 de *oxígeno*. ¿Qué cantidad de cada uno de estos cuerpos habrá en 13 l. de alcohol?

Agricultura

63. Con un arado de vertedera se puede trabajar 25 áreas por día. ¿Cuánto tiempo se necesitará para labrar un campo rectangular de 2 Hm. de largo y 117'5 m. de ancho?

64. Para regar una finca se precisa tener lleno un depósito de 8 millones de litros. Disponiendo para ello de un manantial que arroja 600 m.^{3} por día, ¿cuánto tardará en llenarse el depósito?

65. En un jardincillo rectangular de 20 m. de largo, por 14 de ancho, queremos poner rosales. Una fila, a 1 m. de cada orilla; y en el centro una circunferencia de 4 m. de diámetro. Los rosales de las filas han de estar a 1'50 m. de distancia, y los de la circunferencia central a 1'57 m. El 100 de plantas de rosal cuesta 60 pesetas. Los gastos de plantación se calculan a 20 céntimos por planta. ¿Cuánto importa la compra y colocación de los rosales?

66. Para combatir el *mildiu* (enfermedad de las vides) se usa el caldo cúprico. Disponemos de 1.750 litros de este caldo para emplearlos en dos viñas: Una de 3'70 Ha., y la otra de forma de trapecio, cuya base

mayor es de 400 m., la menor de 260 m., y la distancia entre ambas (altura) de 100 m. ¿Cuánto caldo corresponde a cada viña?

67. El vinagre de vino contiene próximamente un 7 % de *ácido acético.* ¿Qué cantidad de ácido acético habrá en 60 litros de vinagre?

68. En un terreno de 1 hectárea se echaron 250 kilogramos de abono llamado *nitrato de sosa,* que costó a 32 pesetas el quintal métrico. Otro terreno igual se dejó sin abonar. Del terreno abonado se sacaron 2.580 Kg. de trigo, que se vendieron a 13 pesetas los 43 Kg., y 3.450 de paja, que se vendieron a 0'20 pesetas los 11'5 Kgs. El terreno no abonado produjo una cantidad de trigo y de paja cuya venta ascendió a 467'50 pesetas. ¿Qué beneficio se obtuvo con la aplicación del nitrato?

69. Mezclamos 200 Kg. de un abono que cuesta a 0'30 pesetas el Kg., con 700 Kg. de otro, cuyo precio por Kg. es de 0'22 pesetas. ¿A qué precio resulta el kilogramo de la mezcla?

70. En Castilla la Nueva hay sembradas de garbanzos 29.330 Ha. de terreno y se tiene una producción de 22.467 Tm. En Aragón y Rioja hay sembradas 765 Ha., que producen 514 Tm. Comparar la producción *relativa* en ambas regiones.

71. Sobre un terreno queremos echar al regar, una cantidad de agua que, si no se filtrase formase una capa de 50 mm. de altura. ¿Qué cantidad de agua necesitamos para regar de este modo una finca de forma de triángulo de 400 m. de base y 80 de altura?

72. El peso específico de la leche es de 1'03, y el del agua 1. Una mezcla de agua y leche de 35 litros en total, ha pesado 35'90 Kg. ¿Cuánta agua contenía?

73. ¿Cuánto cuesta una rueda de molino de 0'9 metros de radio y 30 cm. de grueso, al precio de 0'50 pesetas $dm.^3$?

74. Queremos cerrar una huerta con una pared de ladrillos cuyo volumen total es de 36 $m.^3$ Calculando que *la masa* con que pegamos los ladrillos ocupe 63 $cm.^3$ por cada metro de pared, y siendo las dimen-

siones ordinarias del ladrillo 28 cm. de largo, 14 de ancho y 4 de grueso. ¿Cuántos ladrillos necesitaremos?

Comercio e Industria

75. De cada pliego de papel salen 16 páginas de un libro. ¿Cuántas resmas de papel (de 500 pliegos) se necesitan para *tirar* 3.000 ejemplares de un libro de 272 páginas?

76. Si 1 Hl. de trigo vale 24 pesetas y pesa 78 Kg., y por 43 Kg. nos cobran 12'50 pesetas, ¿conviene más comprar por medida o a peso?

77. Próximamente 5 varas = 6 m. Si compramos paño a 3 reales la vara y lo vendemos a 80 céntimos el metro, ¿cuánto ganamos en 40 metros de paño vendido?

78. Un comerciante vende a un establecimiento del Estado mercancías por valor de 475'80 pesetas; pero el Estado descuenta el 1'20 por 100 en sus pagos, ¿cuánto cobrará el comerciante?

79. De 13 Kg. de harina se pueden sacar 17 de pan (por el agua interpuesta). ¿Qué cantidad de agua absorben al convertirse en pan 150 Kg. de harina?

80. Hemos comprado 8.000 naranjas por 320 pesetas. ¿A qué precio hemos de vender la docena de naranjas para ganar un 25 por 100.

81. Un agente de negocios cobra el 0'5 por 1.000 en las ventas de casas que realiza. Nos ha vendido una casa de 52.500 pesetas. ¿Cuánto son los derechos del agente?

82. ¿Qué nos tiene más cuenta para emplear un capital de 40.000 pesetas: comprar una finca que renta al año 1850 pesetas (libre de gastos) o imponer nuestro dinero al 4'5 por 100 de interés anual?

83 Una finca tiene de superficie 2 Ha. y 28 a. Nos pagan una parte de la finca, de 193 áreas, a 45 pesetas el área. Por lo que queda de la finca nos dan 1.750 pesetas. ¿En qué parte obtenemos mayor beneficio?

84. Una tela cuesta a 25 pesetas los 10 m., y tiene de ancho 0'40 m.; y otra vale a 1'80 pesetas el metro de 0'30 m. de ancho. ¿Qué tela es más barata?

85. En un *tío-vivo* de 4 m. de radio cobran 10 céntimos por dar 12 vueltas, y en otro de 6 m. de radio se dan 15 vueltas al precio de 5 céntimos cada 4 vueltas. ¿Cuál es relativamente más barato?

86. Si compramos al contado cristales, resultan a 75 pesetas el 100, pero nos rebajan un 5 por 100. Comprando a plazos, por 250 cristales nos llevan 187'50 pesetas. ¿Qué compra es preferible?

87. Hemos pagado 2.150 pesetas por varias resmas de papel de dos clases: una, de 12'50 pesetas resma, y otra, de 9 pesetas resma. ¿Cuántas resmas de cada clase hemos adquirido?

88. Una cuba cilíndrica de 0'8 m. de radio y 1 m. de altura se llena de vino comprado a 30 céntimos el litro, y se vende después todo el vino en 663'16 pesetas, ¿qué tanto por 100 se gana?

89. Si un vino que vale a 40 pesetas el Hl. quiere venderse a 30 pesetas, y para esto se le añade agua, ¿en qué relación deberán mezclarse ambos líquidos?

Diversos

90. Dos familias compran juntamente 100 libras de chocolate, que les resulta a 1'80 pesetas la libra. Una familia se queda con doble cantidad de chocolate que la otra. ¿Cuánto debe pagar cada una?

91. El oro, en monedas, vale 15'5 veces más que la plata, a igualdad de peso. Según esto, ¿cuánto valdrán 3 gm. de oro hecho moneda? (Recuérdese lo que es la peseta).

92. Un reloj retrasa 7 segundos por hora. Se le puso a la hora justa un lunes a las once, ¿qué hora señalará a las once del jueves de la misma semana?

93. Las ruedas delanteras de un carruaje tienen 50 cm. de diámetro, y las traseras, 80 cm. En una distancia de 12 Km., ¿cuántas vueltas más dan las primeras que las segundas?

94. Cuatro personas alquilan un automóvil en que caben 6, y pagan por él 80 pesetas, con derecho a recorrer 50 Km. Después de haber andado 30 Km., dos

nuevos viajeros solicitan ocupar los puestos vacantes, y siendo admitidos, llegan los 6 al final del recorrido. ¿Cuánto deben pagar cada viajero antiguo, y cuánto cada uno de los nuevos?

95. Después de haber andado los $\frac{2}{3}$ de un camino, aún nos falta la cuarta parte y 6 Km. ¿Cuál era la longitud del camino?

96. Una rueda da 20 vueltas, mientras otra da 32, y, esta última da 12 vueltas por segundo. ¿Cuántas dará la primera en 3 minutos?

97. Un hombre puede llevar, en un saco, un peso de 30 Kg. Si en el saco hay ya en plata 2.000 pesetas, ¿cuántas pesetas en calderilla podrá además llevar el hombre?

Aritmética y Geometría

98. La suma de dos números es 24'08, y el menor es 7'85. ¿Cuál será la diferencia entre ambos números?

99. La diferencia de dos números es $\frac{2}{7}$, y el menor es $\frac{3}{5}$. ¿Cuál será la suma de ambos números?

100. La suma de dos números es $1\frac{1}{4}$, y su diferencia 0'28. ¿Cuál es el número mayor?

101. La diferencia de dos números es $\frac{9}{5}$, y el mayor es igual a 4 veces el menor. ¿Cuáles son los números?

102. El cociente de una división ha sido 0'724; pero advertimos que hemos tomado por divisor el dividendo. ¿Cuál será el verdadero cociente?

103. ¿Cuál es el número que multiplicado por $\frac{2}{5}$ da el mismo producto que 3'5, multiplicado por 0'8?

104. El cociente entero de una división es 8, y el resto 5. Siendo 20 el menor de los números, ¿cuál será el mayor?

105. El producto de dos números es 9.216, y su cociente, 9. ¿Cuáles son los números?

106. Un vaso lleno de agua pesa 2 Kg., 6 Hg., y

si sólo se llena hasta la cuarta parte pesa 1.100 gramos. ¿Cuál es la capacidad del vaso?

107. Una clase tiene 45 m.^{2} de superficie y 10 m. de largo. ¿Cuánto deberá ensancharse para que en ella quepan 40 alumnos y cada uno disponga de 1'25 m.^{2}?

108. El peso específico del oro es 19'50. Una masa de oro que pesa 3'9 Kg. se convierte en láminas de 0'001 m. de espesor. ¿Qué superficie se podrá cubrir con estas láminas?

109. En un plano de una habitación se representa ésta por un rectángulo de 3 dm.^{2} La escala del plano es $\frac{1}{20}$ ¿Cuál es la verdadera superficie de la habitación?

110. Para que en un plano de una habitación la mayor dimensión de ésta, que es de 12 m., venga representada por una longitud de 20 cm., ¿en qué escala debe dibujarse el plano?

111. Cuál es la hipotenusa de un triángulo rectángulo siendo los catetos de 3'8 y 2'5 metros?

112. Un palo de 2 m. proyecta, en cierto momento, una sombra de 80 cm., y una torre inmediata proyecta, en el mismo instante, una sombra de 4'20 m. ¿cuál es la altura de la torre?

113. Un cubo tiene una arista que es $\frac{2}{3}$ de la de otro. ¿Qué fracción será el volumen del primero respecto al del segundo?

114. El volumen de una esfera es 8 veces mayor que el de otra. ¿Cómo será el diámetro de la primera respecto del de la segunda?