onti Finaci D. Rch

mate

Del Colleg.o dela Comp.a de Jesus

ORONTII FINAEI, DELPHINATIS, REGII MATHEMATICARVM PROFESSORIS,

Colleg.o dela Comp.a de Jesus dela Concepcion de Segovia

De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII.

¶ Quibus inter cætera, Circuli quadratura Centum modis, & suprà, per eundem Orontium recenter excogitatis demonstratur.

LVTETIAE PARISIORVM.
Anno Christi Seruatoris,
M. D. LVI.

Ex officina Michaëlis Vascosani, uia Iacobæa ad insigne Fontis.

Cum Priuilegio Regis.

ORONTII FINAEI, DELPHINATIS, REGII MATHEMATICARVM PROFESSORIS,

De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII.

¶ Quibus inter cætera, Circuli quadratura Centum modis, & suprà, per eundem Orontium recenter excogitatis demonstratur.

LVTETIAE PARISIORVM.
Anno Christi Seruatoris,
M. D. LVI.

Ex officina Michaëlis Vascosani, uia Iacobæa ad insigne Fontis.

Cum Priuilegio Regis.

CHRISTIANISSIMO GALLIARVM REGI HENRICO II. ANTONIVS MIZALDVS MONLVCIANVS, S. P. D.

QVVM nullum præstantius bonum à Deo Opt. Max. hominibus sit concessum, HENRICE Rex Christianissime, quàm doctrinarum κοινωνία, & rerum pulchrarum ingeniosa atq; utilis disquisitio: præclare de Republica, imò uerò de uniuerso mortaliũ genere mihi mereri semper sunt uisi, quicunque ad disciplinarum communicationem, usum & illustrationem, animum strenuè conuerterunt: ac omnem operam, studium, laborem, & industriam in id sedulò contulerunt. Quod cùm optimus idémque doctissimus uir ille Orontius iam olim prudenter animaduertisset, tota uita conquiescere non potuit, donec lectionibus cùm publicis, tùm priuatis, adhæc multis libris editis, in id incubuisse, & tandẽ succubuisse palàm testaretur. Quam rem, tuo, & Christianiss. patris tui FRANCISCI, fauore & auspicio gnauiter aggressus, ad extremum usque uitæ actum fœlicissimè perduxit. Deo in omnibus & per omnia aspirante: qui ut humanæ infirmitati succurrat, & infirmæ humanitati prospiciat, quæ suapte natura uix infima assequi potest, in aliquibus Heroicis uiris præstantes animorum motus, latentésque igniculos excitare subinde solet, qui postea quasi diuinitus afflati, & cœlitus agitati, ad rerũ magnarum inuentionem, & difficilium explicationem, mira feruntur industria: summo certè patrocinantis Dei miraculo, & ingenti talium uirorum laude, immortalíque patriæ illorum ornamento: ob præclara monimenta quæ ueluti publicum urbium peculium, & regnorum insigne decus memoriæ posteritatis consecratum, à tantis uiris relinquuntur. Hinc nimirum celebre adhuc est Syracusarũ nomen: non ob præstantissima signa & pretiosas tabulas, quibus olim abundabant Syracusæ, sed ob unius

Archimedis Mathematici clarissimi, eximia & adhuc uiuentia opera, perpetuóque uictura, & Syracusas ubique celebratura. Quod de tua Lutetia Galliarum metropoli, idem aliquando futurum, certò tibi polliceri debes: nó tam quòd syncera religione, & legibus æquissimis illam optimè constitutam uideas, ad hæc opum magnitudine & splendore egregiè ornatam, quàm quòd in ea eloquentiæ, philosophiæ, medicinę, mathematωn, ac omnium optimarum artium & linguarum publicum habeas gymnasium, tua & illustrissimi patris tui liberalitate, multis iam annis florentissimum, & uigilantissimorum ac doctissimorum professorum duodecim (quotus est musarum & charitū numerus) quotidianis interpretationibus, proposito cuique honesto stipendio, gloriosè illustratum. Quorum omnium industria ac monimentis, immortalitatem tibi & regno tuo iamiam comparatam esse, quis non uidet? Quis nescit priscos Reges de literis & literatis bene merendo, posteritatem sui memorem fecisse? Quis hodie non celebrat Alfonsum Castiliæ Regem, quòd liberaliter contulerit quadringenta milia aureorum, doctis aliquot uiris ex Iudæa & Aphrica accersitis, ad constructionem Astronomicarum tabularū, quæ hodie omnibus sunt in manu? Quis Alexandrum Macedonem multis ante illum seculis non prędicat, quòd octingenta talenta, hoc est quadringenta & octoginta milia coronatorum, Aristoteli pręceptori dederit ad naturæ animantium inquisitionem? Sunt hæc magna & celebria, sed, meo iudicio, maiora ac celebriora quæ facis. Qui regia motus liberalitate, & hæreditaria imbutus uirtute, magnam pecuniam nō uni tantùm numeras, ut Alexander, aut tribus uel quatuor, ut Alfonsus, quin potius duodecim, ut dixi, præclaris ac selectis uiris, hinc inde ad Lutetianam tuam Academiam publicè uocatis. Quorum pars quotidie fœliciter interpretando, pars doctè scribendo, pars utrumque exactè faciendo, per uniuersam Europam, nedum Galliam, artium omnium & disciplinarum, linguarúmque fœcunda semina, longè ac latè spargit. Quæ ubi ætatem tulerūt, suauissimos fructus edunt ad communem regnorum utilitatem, & tutam Rerumpubl. conseruationem. In quorum ordinem cùm optimus, idémque doctiss. uir ille Orontius,

omnium

omnium primus à Christianissimo patre tuo cooptatus fuisset, & à tua Maiestate postea confirmatus ac probatus: cùm ibi totos uiginti quinque annos,& docendo,& multa scribendo,magna laude uersatus fuisset: cùm ea in prouincia se pro dignitate semper gessisset,atque aliis dies ac noctes sudando sese macerasset,imò uerò & corpore & animo neglecta familia, quã numerosam & pauperem habebat,funditus exhausisset: canus & sexagenarius uitam cum morte ibi nuper mutauit:morte, inquam, illi summè acerba & molesta,non quòd eam grauiter ferret, qui se mortalem agnoscebat, & legibus fati obnoxiũ: sed quòd doleret populosam & benè natam sobolem, in tanta rerum inopia relinquere: adhæc, Mathematica aliquot opera, quæ in manu uixdum ex dimidio elaborata habebat, imperfecta & impolita uidere.Sibi tamen ac doctis omnibus impensè gratulabatur, & Deo Opt.Max.summas gratias agebat,quòd librũ istum, in quo totum septennium indefesso sudore consumpserat, ad colophonem duxisset. Quem accuratè impressum,ut Maiestati tuæ offerrem, qua ualebat in me auctoritate, moriens, semel atque iterum imperauit:cùm ob alia, tum ut suorum laborum præsens haberes μνημόσυνον,& subleuandæ suorum inopiæ, positum ob oculos pium monimentum. Addebat,æquissimum esse ut hanc suarum lucubrationum postremam acciperes manum, cùm ter maximus pater tuus primam regali alacritate,& dextra summè liberali, annis abhinc triginta quinque plus minus ultrò accepisset. Quod me & libenter,& ex animo facturum cùm illi fuissem pollicitus,ubi in fata concessit, librum unà cum figuris,quas paulò antè quàm abiret, ingeniosa manu ad unguẽ pinxerat, Michaëli Vascosano typographo diligentissimo ac doctissimo,statim committere nihil sum cũctatus: nullo prorsus mutato uerbo,nec item sensu: ne auctori & parenti iniuriã facerem. Reliqui itaque posthumum opus suæ integritati & origini.Quod quale quale est, diuinum sanè & eruditum, Maiestati tuæ, HENRICE Rex potentissime, hodiè hilariter offero: cùm ut postremis tanti uiri mandatis ingenuẽ paream, tum ut rerum mathematicarum studiosis,iamdiu desideratam sementem,sub tuo nomine,ubique terrarum dispergam. Cuius campus, præterquam quòd multa, à nemine adhuc, quod utique ſciam, tentata habet: etiam circuli τετραγωνισμὸν ſeu quadraturam, totos bis mille annos, uel ampliùs, à ſummis & excellentiſſimis uiris quæſitã, ſed non inuentã, omnipotentis Dei beneficio, uiis & demõſtrationibus infinitis, uerè (niſi fallor) cõcludit ac aperit. Reliqua de catalogo ad calcem operis deſcripto, unicuique facilè patebunt. Hoc poſtremum erit. Multæ admirabiles machinæ omnibus ætatibus apud eas gentes, in quibus Geometriæ & Arithmetices ſtudia uiguerunt (ut apud Phœnices, Aegyptios, Chaldæos, deinde apud Græcos, Siculos & Latinos) ratione & proportione Geometrica extructæ fuerunt, munitæ arces, factæ columnæ, pyramides item ac turres, erecti pontes & arcus, compoſitæ naues, excogitati portus, fabricata bellica tormenta, conſtructa ædificia, theatra ac templa, & alia huius picturæ innumera, Geometrica, ut dictum eſt, ratione & proportione elaborata, quæ Orontiani huius operis adminiculo, & facilè & commodè perfici deinceps poterunt. Sed hæc ſatis. Vereor enim ne Maieſtatem tuam, cui populi commiſſi, & magna negocia curæ, uerboſa epiſtola offendam. Itaque, bene ac feliciter Vale, Regum omnium Rex optime: & pauperculæ Orontianæ familiæ, pietate tua, ſuccurrere dignare: ut tibi & regno tuo, paterna imitatione, aliquando uſui ac ornamento eſſe poſsit. Lutetiæ Pariſiorum, Idibus Aprilis. Anno Virginei partus, M. D. LVI.

AD ILLVSTRISSIMVM LOTHARINGIAE CARdinalem & Principem, Ioannes Finæus, & Orontius eius frater, dolentes ac mœsti.

QVI Mathemata nunc colunt, amántque,
Gratias & agunt, habéntque miras,
Pro tuis in Orontium parentem
Nostrum tot meritis, benigne Princeps,
Splendor pontificum, & sacri Senatus:
Iidem te quoque ter rogant, quatérque,
Nobis ut pater & patronus esse
Velis: qui ingenuè fatemur, ex te
Et stare, & cadere ut libet: secundum
Cœli numina, Gallicúmque Regem.
Eia, respice, Cardinalis ample,
Nos: nostræque domus, dies & horas
Omneis asiduo in dolore uerè
Versantis, lachrymabiles, piásque
Exaudito preces: & has referto
Ad Regem, pietate cuique notum:
Mercedem Dominus dabit perennem.

Iidem ad ornatissimum Cardinalem à Castellione.

VT gemit erepto uiduatus compare turtur,
Et sterili mœrens fronde sedere solet:
Vtque altore suo catulus priuatus oberrat,
Donec fautorem uiderit esse sibi:
Sic nos, ô dolor! extincto genitore, miselli
In lachrymis nocteis ducimus, atque dies:
Sedibus errantes dubiis, uictúque carentes,
Dum detur qui nos rite fouere petat.
Hoc tanto dono, Præsul uenerande, parénsque
Castalidum, si nos fortè beare uoles,
Aut unum saltem numeroso de grege fratrum,
Rem gratam doctis feceris usque uiris.
Et si sunt aliquid manes, ut credimus, & sunt:
Hoc à te factum sentiet esse pater:
Qui te dilexit uiuens, moriénsque uocauit
Auxilium in nostrum sæpè, diúque. Vale.

ΕἸΣ ὈΡΏΝΤΙΟΝ.

Οὐράνιον ἐς γῆν εἷλκες Ὀρώντιε, σοῖσι μαθηταῖς
    Ἄγχι παραστήσας ἀμφαδὸν ἄστρα βλέπειν.
Νῦν πάλιν αὐτὸς ἐς ἄστρα καὶ οὐρανὸν ἀστερόεντα
    Γῆθεν ἀνειλκύσθης μοιριδίῃ δυνάμει.
Καὐτὸς μὲν πάθες, ὧν ἦς ἄξιος, ἀλλὰ μαθηταὶ
    Σοῦ τείροντο πόθῳ, σῶν τε μαθηματικῶν.
Ἀμφὶ δέ σοι μέγα πένθος ἀέξετο ἦμαρ ἐπ' ἦμαρ,
    Οὐδὲ πλουτή τις ἔσκεν ὀδυρομένοις.
Αὐτὰρ ὁ κηδεμόνων σοῦ ὁ πιστότατος καὶ ἄριστος
    Μίζαλδος ταύτην εὗρε παρηγορείην.
Ὑστατίην βίβλον σοῦ ἀνέκδοτον εἰσέτ' ἐοῦσαν,
    Τὴν ἔτι κρυπτομένην παρθένον ὡς θαλάμῳ·
Ἣν σὺ πατὴρ ἐφίλεις σέο παίδων ἔξοχα πάντων,
    Οἷα γέρων τις ἀνὴρ υἱέα τηλύγετον.
Τὴν δὲ φίλος σοι ἑταῖρος ἅπασι φίλοις σοι ἑταίροις
    Πένθεος ἀσβέστου ἄλκαρ ἔδωκεν ἔχειν.
Νῦν δ' ἡμεῖς σέο βίβλον Ὀρώντιε τήνδ' ἀγαπῶντες
    Ἀντὶ σοῦ, ἧττον μὲν σ', ἀλλὰ ποθοῦμεν ὅμως.

Ἰω. Αὐράτου.

VITA ET TVMVLVS ORONTII, PER ANTONIVM MIZALDVM.

LIcet, Viator, concito properes gradu,
Vnum hoc amicè te precor, dum hâc commeas
Tantisper hære, dum quod est uerum intelligas.
Ter ille summus, & ter illustris ORONTIVS,
Præceptor, hospes charus, ac amicus meus,
Hoc in tumulo dormit, sepultus ibi iacet:
Delphinas patriâ, in oppido Briansonio
Natus, generoso & nobili uerè patre,
Doctore medico, ac philosopho admirabili:
Necnon Mathematico eximio, ut libri docent.
Quo mortuo, cùm iuuenis esset magni animi,
Lutetiam uenit: ubi perfectis studiis
Fœliciter, & sacro fauente Mercurio,
Sociam sibi fecit, pariterque coniugem
DIONYSIAM, cognomine & re CANDIDAM,
Formâ speciosâ, ac immaculatis moribus:
Cum qua decies bis uixit annos, plùs minùs.
Atque ex ea suscepit innumeram, & probam,
Ac egregiam sobolem: sed ex qua sunt hodie
Tantùm superstites (nisi fallor bene)
Sex: masculi quinque, & puellula unica.
Ille est ORONTIVS, ille ORONTIVS meus
Præceptor, hospes charus, ac amicus bonus:
Cunctis abundans dotibus cùm corporis,
Tum mentis, & raris Deæ cæcæ bonis:
Orbis columen, & Galliæ excellentissimum
Miraculum, lumen, decus, spectaculum:
Candore uitæ, moribus integerrimis,
Turbæ fugâ, domestico silentio,
Amore recti, charitate proximi,
Seræque noctis lucubratiunculis,
Bene cognitus suis domi, necnon foris.
Perpauca multis, multa paucis disserens

F estiuiter, salseque dictis plurimùm
G audens, & ingenuos iocos referens libens:
P ræceps ad iram, cætera prorsum candidus.
C ui Lutetiana debet Academia
V el id, quòd illic maxima cum gloria
M athematicæ artes bene docentur: quas omnium
P rimus, sepultas misit in lucem, ac docuit,
A nnos, ut aiebat, decies ter, ac ampliùs:
A Regibus duobus acceptis annuis
S tipendiis, ob ídque professor publicus:
P ro dignitate se gerens prouinciæ:
Q uam lectionibus uariis, & doctissimis
A c aureis libris ad usque miraculum,
D um uixit, illustrauit, ut notum est omnibus
T um literatis, tum probis, tum candidis:
Q uêis adfuit, quêis profuit, fauit, contulit,
Q uantùm licebat pro modulo, & pro uiribus:
N unquam ociosos esse sustinens suos:
S ed uerè honestis occupans negociis:
A matus omnibus, omnibúsque amabilis.
H uic animus usque, huic unicus fuit scopus,
H uic summa cura, huic propria semper functio,
B onas ut horas collocaret non malè:
N ullius æquè, ac temporis, parcus rei:
N imio proinde ut se studio, noctes, dies
Conficeret, imò funditus se perderet:
S ic compositus, ut nominatim quempiam
N ulla inficeret labecula, uel incommodo:
L icet impudenter prouocarent sæpius
M ali, φίλαυτοι, gloriosuli, liuidi,
D iris notandi iure Iambis optimo.
C asus per omneis, omnibúsque exercitus
M alis & aduersis, patiens semper fuit:
T uam usque præstans, Socrates, constantiam:
P rudentiámque simplicem præ se gerens:
S empérque satagens pro malis bona ut redderet.

Non

Non arcuato Scorpionis uulnere
Mordens, lacessens, conficiens, & enecans:
Is captiosa & pestilentia dogmata
Explosa sanctos per patres olim, quibus
Vbique uulgus imperitum fluctuat,
Certò ut uenena exhorruit præsentia,
Omneis in hoc neruos & omnem industriam
Tendens, & adhibens, contrahens ac explicans,
Vt Christianismum referret purissimum.
Is Regibus tantùm fuit mirabilis,
Vt eius ædes ingredier sæpissimè
Non sint recusati: pariter multi Duces,
Et Cardinales, & numerosi nobiles,
Necnon Legati gentium atque Principum,
Vt cum uiro tanto loqui percommodè
Possent: adhæc uidere quæ manu propria
Vel pinxerat, uel sculpserat, uel descripserat,
Non dico chartas, aut libros, sed mille organa
Mathematica, uel alterius artificij.
Ille est ORONTIVS, *ille* ORONTIVS, *meus*
Præceptor, hospes charus, ac amicus bonus:
Qui hoc in tumulo dormit, sepultus ibi iacet:
Docti quod omnes nunc ferunt ægerrimè:
Extincta siquidem sunt μαθήματα *omnia,*
Necnon sepulta cum uiro tanto: prô dolor!
Acumen illud, illud ingenium periit,
Dignum quod omni permaneret sæculo.
Sed cesso plura conqueri: Viator, uale:
Hæc ego uolebam tibi referre: iterum uale:
Et manibus sepulti ORONTII *faue.*

Obiit Lutetiæ in suis ædibus, pridie nonas Octobris, Anno reparatæ salutis hominum, M. D. LV. Hora à meridie quarta, qua ille in lucem uenerat, natus annos LXI. ferè: iacet in cœnobio Carmelitarum.

SVMMA EORVM, QVAE IN SEQVENTIBVS libris, de rebus Mathematicis hactenus desideratis, pertractantur.

LIBER PRIMVS, INVENTIONEM DVARVM REctarum inter datas extremas continuè proportionalium, pluribus & hactenus inauditis modis exponit: Idem quoque de oblatis quibuscunque efficiẽs numeris. Vnà cum rationũ cõpositione, atque regulæ sex quãtitatũ origine notãda, ex ipsis lineis suborta proportionalibus.

LIBER SECVNDVS, RATIONEM CIRCVNFERENTIæ ad circuli diametrum exprimit: rectámque in circũferentiam uertere docet: necnon circulum in quadratum æquale, atque è diuerso, multifariam, & uiis hactenus intentatis, reuocat.

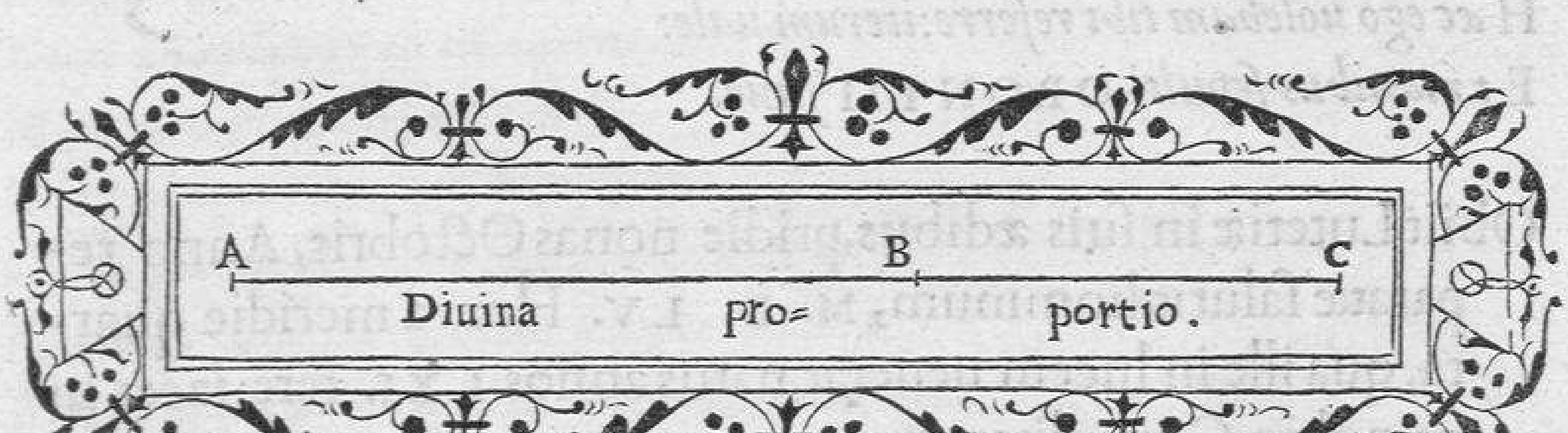
LIBER TERTIVS, CONTINET INVENTIONEM lateris cuiuslibet polygoni regularis in dato circulo descripti: reductionémque figurarum rectilinearum in circulum, & ipsius circuli in figuram rectilineam æqualem, etiam regularem: Et horum omnium augmẽntum, seu decrementũ, sub quauis ratione data, propria uniuscuiusque specie remanente.

LIBER QVARTVS ET VLTIMVS, OMNIMODAM solidorum transmutationem, cum ipsa sphæræ cubicatione, & uersione cubi in sphæram æqualem: Illorúmque augmẽtationem, seu diminutionem, atque tam ipsius sphæræ quàm circuli sectionem, sub ratione data comprehendit.

DE DIVINA PROPORTIONE, QVAE IN LINEA recta per mediam & extremam rationem diuisa continetur,

AVTHORIS DISTICHON.

Si quid diuinum condebat pulchra Mathesis,
Quod Geometra colat: hæc tibi sola dabit.



ORONTII FINAEI DELPHINATIS, REGII MATHEMATICARVM LVTETIAE PROFESSORIS, DE REBVS MATHEMATICIS HACTENVS DESIDERATIS, LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO I.

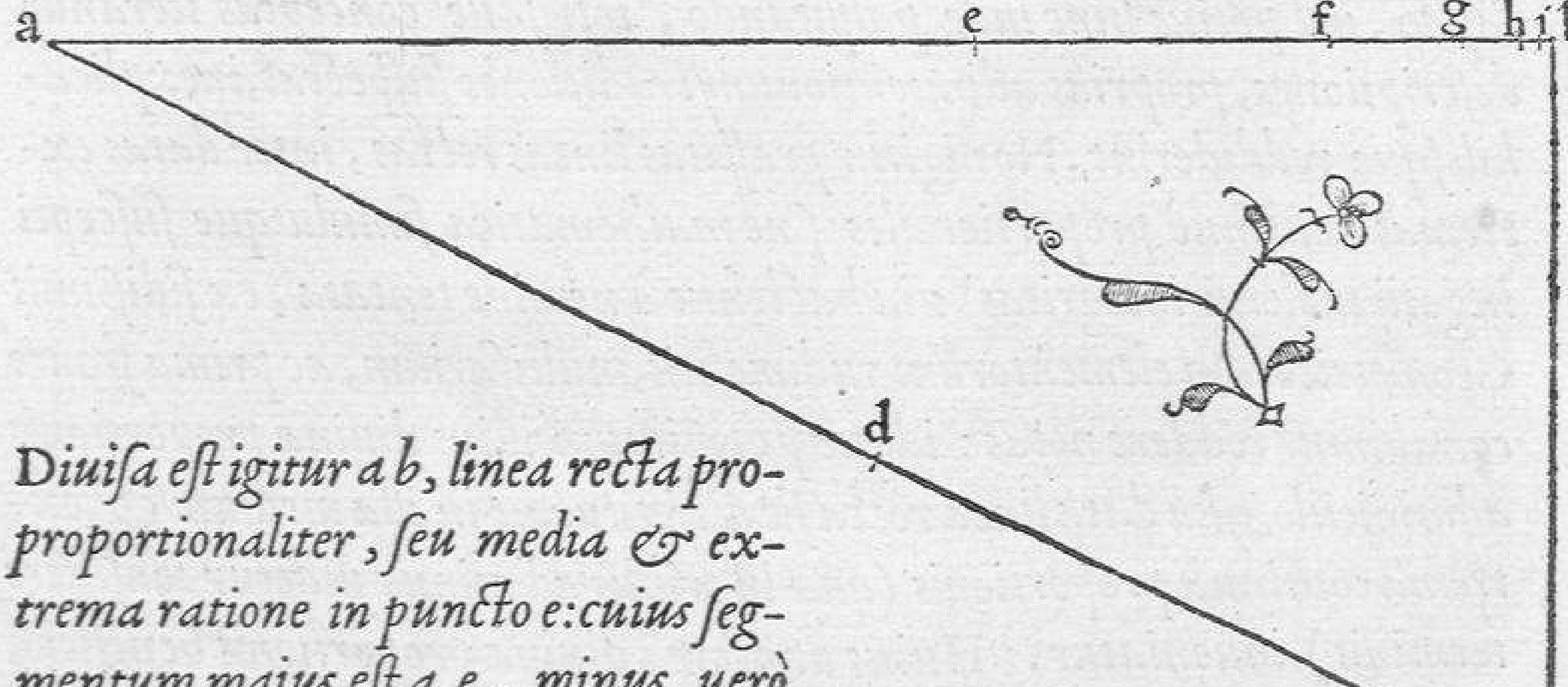
OBlatis duabus lineis rectis inæqualibus: duas medias lineas rectas, sub eadem ratione continuè proportionales, in primis reddere notas.

1 ¶ QVA RATIONE MATHEMATICA *hoc dignissimum ac utile problema dissoluatur, nemo hactenus sufficienter tradidisse uidetur: tametsi Græcorum quamplurimi, nō aspernandi philosophi atque mathematici, ut illud explicarēt problema, quod cubi duplicatio dicitur, uariis ac subtilibus admodum inuentis, easdem lineas proportionales tentarint exprimere. Quemadmodum ex* Eutocio *Ascalonita* Archimedis *interprete, &* Georgio Valla *Placentino, qui singulorum exposuerunt adinuentiones, colligere haud difficile est.* Nullus *siquidem eorundem Græcorum authorum offendetur, qui in disquirendis eiuscemodi lineis proportionalibus, uiam aliquam certam obtinuerit: utpote, qui regulamentorum quorundam adminiculo, tentando, uel potius hinc inde palpitando, totiésque conceptas iterando descriptiones, proprias adinuentionum traditiones suspectas, inexplicabilésque reddiderint.* Nos *igitur præfatas lineas rectas, inter datas extremas continuè proportionales (ne mathematica simulatque suscepti negotij uioletur integritas) uia hactenus à nemine tentata, ex fidissimis* Geometricorum *elementorum rudimentis, multifariam, ac prima fronte conabimur reddere notas: idque potissimum illius diuinæ proportionis adminiculo, qua data linea recta sic diuiditur, ut in illa medium & extrema continuæ proportionis (quæ in tribus ad minus uidetur consistere terminis) inueniatur.* Huius *præ tereà diuinæ proportionis beneficio, ut quinque regularium corporum ab* Euclide *conciliata est harmonia: sic & nos bonam partem eorum, quæ in ipsis desiderabantur* Mathema-

ticis, tandem absoluimus, ut ex iis quæ sequuntur fiet manifestum. Admirabiles etenim rationum compositiones, similitudinésue, data linea recta in sese complecti uidetur, quæ proportionaliter, seu media & extrema ratione diuiditur. Priùs quàm igitur ad propositam rectarum linearum, inter datàs extremas continuè proportionalium, deueniamus inuentionem: operæpretium esse uidetur exprimere, qualiter data quæuis linea recta, in quotcunque segmenta inuicem proportionalia diuidatur, iuxta uidelicet trigesimæ sexti elementorum traditionem.

¶ Qualiter data quæuis linea recta, in quotcunque segmenta inuicem proportionalia diuidenda sit.

¶ SIT IGITVR DATA LINEA RECTA, SVprascripto modo diuidenda, a b: & à puncto b, illius uidelicet extremo limite, in quem minora expediuerit finire segmenta, ipsi a b, perpendicularis excitetur b c, per undecimam primi elementorum, quæ dimidio eiusdem a b, sit æqualis. Et connectatur a c, linea recta: à qua secetur recta c d, eidem c b, æqualis, atque reliquæ d a, æqualis a e, per tertiam ipsius primi elementorum. Aio rectam a b, diuisam esse proportionaliter in puncto e: sicut quidem a b, tota ad segmentum a e, sic idem segmentum a e, ad reliquum e b. Contentum enim sub a b, & b e, rectangulum, æquum est ei quod ex a e, quadrato describitur, per undecimam secundi elementorum: & per decimamseptimam sexti eorundem elementorum, est ut a b, ad segmentum a e, sic idem segmentum a e, ad reliquum c d. 2



Diuisa est igitur a b, linea recta proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto e: cuius segmentum maius est a e, minus uerò segmentum e b.

Cùm

Cùm autem præfata segmenta proportionalia, sub discretis operæpretium fuerit habere quantitatibus (saltem quantum ars ipsa patitur numerorum) ducenda erit a b in seipsam, & dimidium eiusdem a b, cuiusmodi est b c, per seipsum itidem multiplicandum, & ambo quadrata in unum componenda numerum: cuius radix quadrata, erit ipsius a c longitudo, per 47 primi elementorum. Ex qua quidem a c, demenda erit b c, hoc est, ipsius a b dimidia: relinquetur enim segmentum maius a e. Idem porrò segmentum a e, subductum ex tota a b, relinquet segmentum minus e b. Et quoniam si recta linea proportionaliter diuidatur, & segmentum illius maius toti lineæ in directum componatur: consurgit linea itidem proportionaliter diuisa, cuius segmentum maius est ipsa linea à principio data, minus uerò segmentum idem segmentum maius ita compositum, per quintam tredecimi elementorum. Igitur à conuersa ratione, cuiuslibet lineæ rectæ proportionaliter diuisæ segmentum minus, est segmentum maius proportionale segmenti maioris ipsius lineæ datæ: Et quod per subtractionem eiusdem segmenti minoris ab ipso maiori segmento relinquitur, est maius segmentum proportionale eiusdem segmenti minoris. Et proinde si à maiori segmento a e, ipsius a b, lineæ datæ, auferatur cohærens segmentum minus e b, relinquetur segmentum maius e f, ipsius segmenti minoris e b: Quo detracto ab eodem segmento minori e b, relinquetur segmentum minus f b, præfati segmenti minoris e b. Et si idem segmentum minus f b tollatur ex maiori segmento e f, relinquetur, segmentum maius f g: Quod detractũ ex ipso f b, relinquet segmentũ minus g b. Et deinceps in hunc modum quantum libet: ut de reliquis segmentis proportionalibus g h, h b, & h i, i b, periculum facere licet. Hoc igitur artificio, data quæuis alia linea recta, in quotcunque segmenta proportionalia pendenter diuidetur.

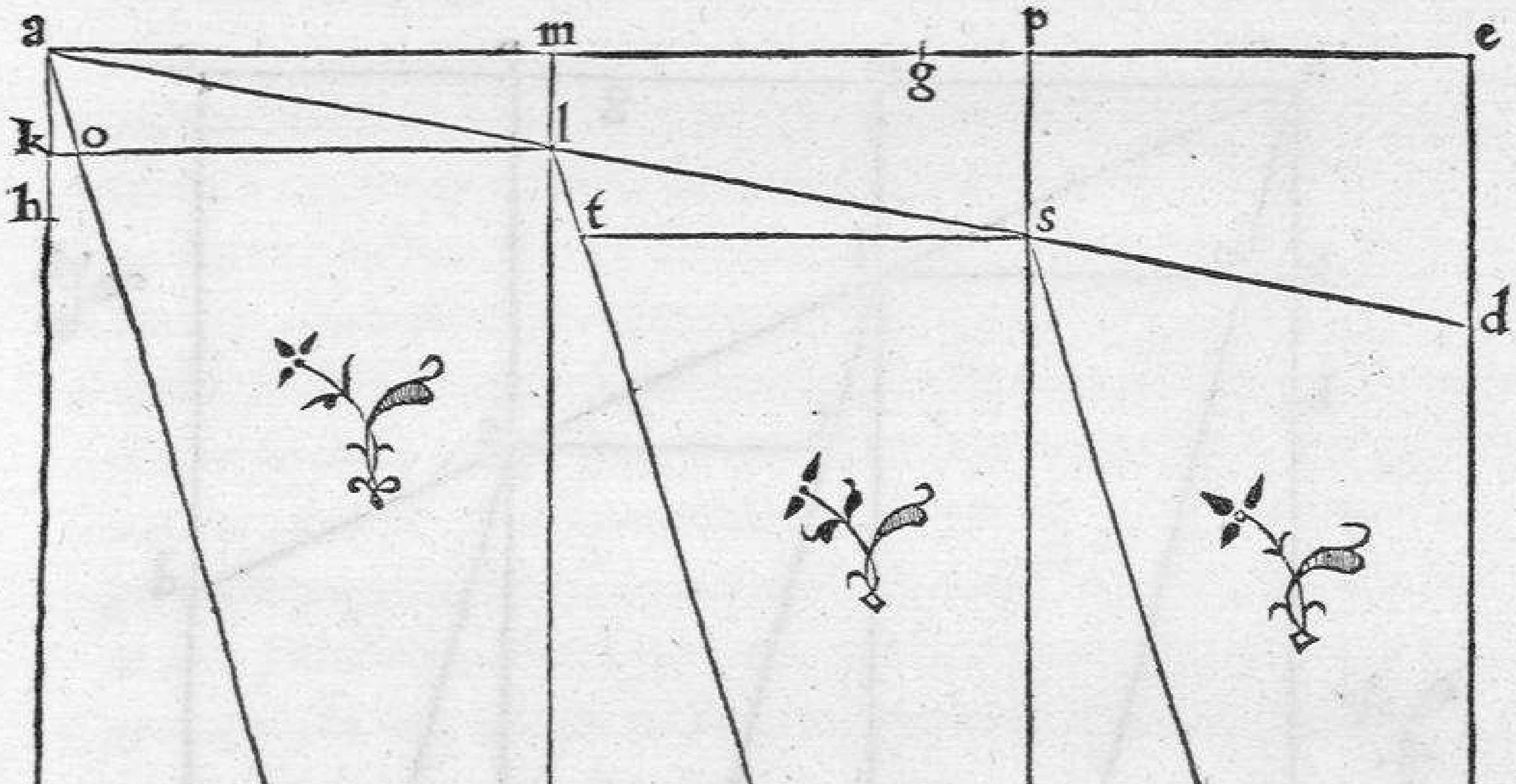
¶ Pars prima constructionis, ubi datarum linearum minor, dimidium maioris superauerit.

3 ¶HIS IN HVNC MODVM PRAELIBATIS, *post innumeras, ac penè incredibili studio, assiduáque meditatione excogitatas prædictarum linearum adinuentiones, aliquot demum tibi*

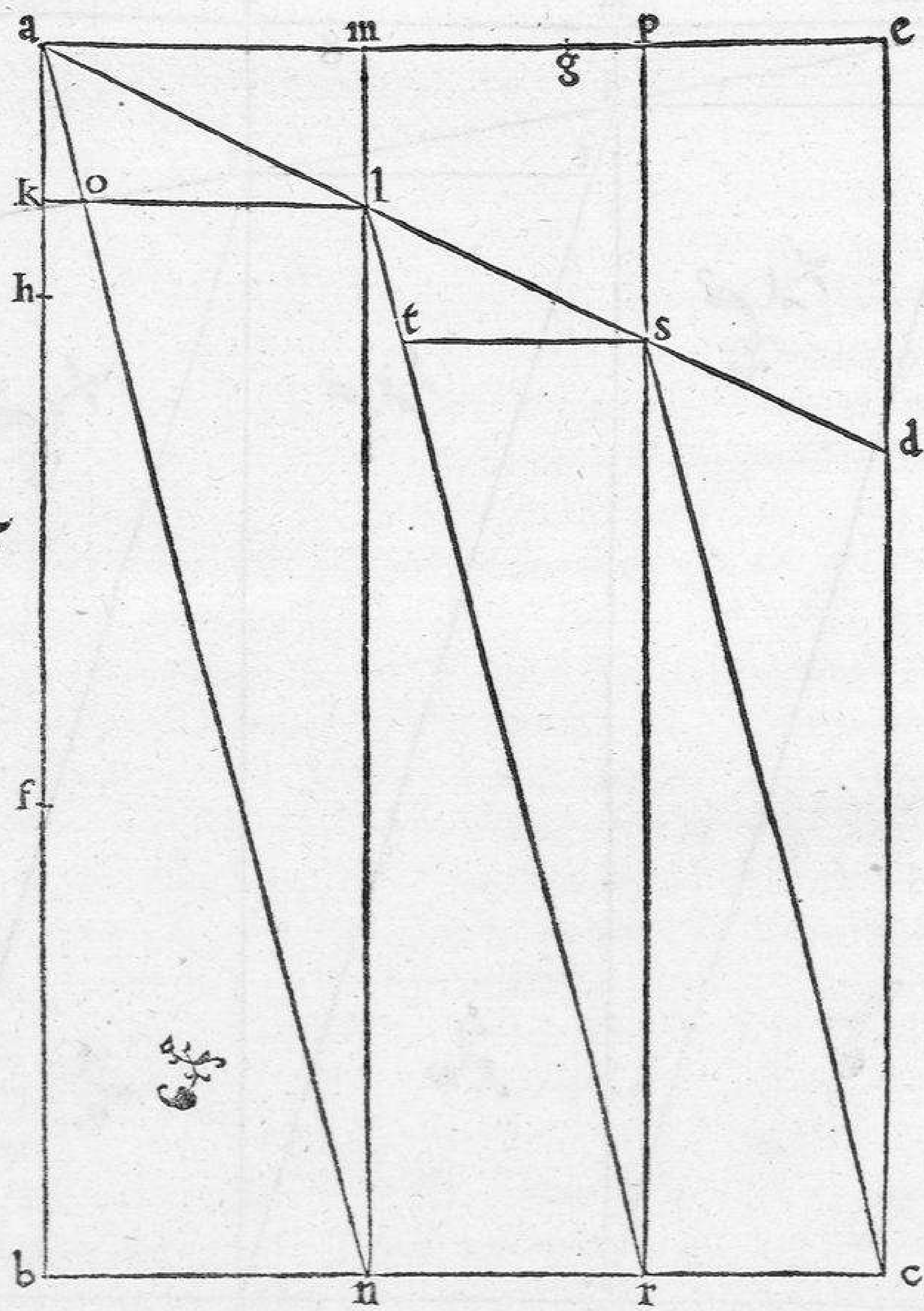
ſelegimus, cæteris omnibus tum conſtructionis facilitate, tum demonſtrationis certitudine præſtantes. Vt *igitur rem ipſam acu tangamus, & à particularibus ad uniuerſalia deſcendamus præcepta, animaduertenda eſt minoris oblatarum linearum ad maiorem habitudo, ſiue relata quantitas: nam prout ipſa minor linea uariam partem quotam ipſius maioris effecerit à numero pariter pari denominatam, utpote, ſecundam ſiue dimidiam, quartam, uel octauam, aut ſimilem, uel inter earundem partium quotarum diſtinctiones limitata ceciderit, uariandum erit utcunque ipſius inuentionis ſiue conſtructionis artificium: quanquam ipſa demonſtrationis reſolutio uno & eodem diſcurſu indifferenter proſequenda uideatur. Sit itaque datarum & inæqualium linearum maior a b, minor uerò c d ipſius maioris in primis ſuperans dimidium: & ipſas medias quæ inter datas extremas futuræ ſunt continuè proportionales, in eo doceamus colligere rectangulo, quod ſub ipſis datis lineis rectis continetur. Sit autem rectangulum ſub eiſdem a b & c d comprehenſum a b c e: & diuidatur a b proportionaliter, ſeu media & extrema ratione in puncto f, cuius ſegmentum maius ſit a f: ſimiliter & ipſa a e proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius ſegmentum maius ſit a g, per 30 ſexti elementorum, aut nuper expreſſum documentum. Et quoniam a b maior eſt ipſa a e, per hypotheſin: maius eſt propterea ſegmentum a f, ipſo a g.* A *maiori itaque a f, ipſi a g minori æqualis ſecetur f h: & reſidua h a proportionaliter diuidatur in puncto* k, *cuius ſegmentum maius ſit a* k, *minus uerò* k *h.* Per *punctum deinde* k, *ipſi a e parallela ducatur* k *l, per 31 primi elementorum, quæ ſecet connexam a d lineam rectam in ipſo puncto l.* Per *idem rurſum punctum l, ipſi a b parallela ducatur m l n: & connectatur a n linea recta, quæ ſecet ipſam* k *l in puncto o.* I*pſi poſtmodum l o æquales ſecentur m p & n r: & connectatur p r linea recta, quæ ſecet ipſam a d rectam in puncto s.* Connexa *poſt modum l r linea recta, per ipſum punctum s eidem a e parallela ducatur s t, quæ ſecet l r in ipſo puncto t.* Per *idem rurſum punctum s, ipſi t r parallela ducatur s c: cadet enim præfata parallela, eritque recta s t ipſi r c æqualis, ut ipſa naturalium linearum (quæ mathematicarum ſunt imagines) te docebit experientia: dum modo exactè diligentérque adimpleueris ſingula, tam in conſtruendo rectangulo a b c e, quàm diuidendo præ-*

fatas

fatas lineas a b, a e & a h proportionaliter: minimus nanque defe-ctus in principio, maximum tandem procreabit errorem. His ita con-*structis, aio rectas l n & s r, inter datas a b & c d lineas re-ctas, sub eadem ratione fore continuè proportionales: sicut quidem a b ad ipsam l n, sic eadem l n ad ipsam s r, atque eadem s r ad minorem c d, quemadmodum infra manifestum efficiemus.*

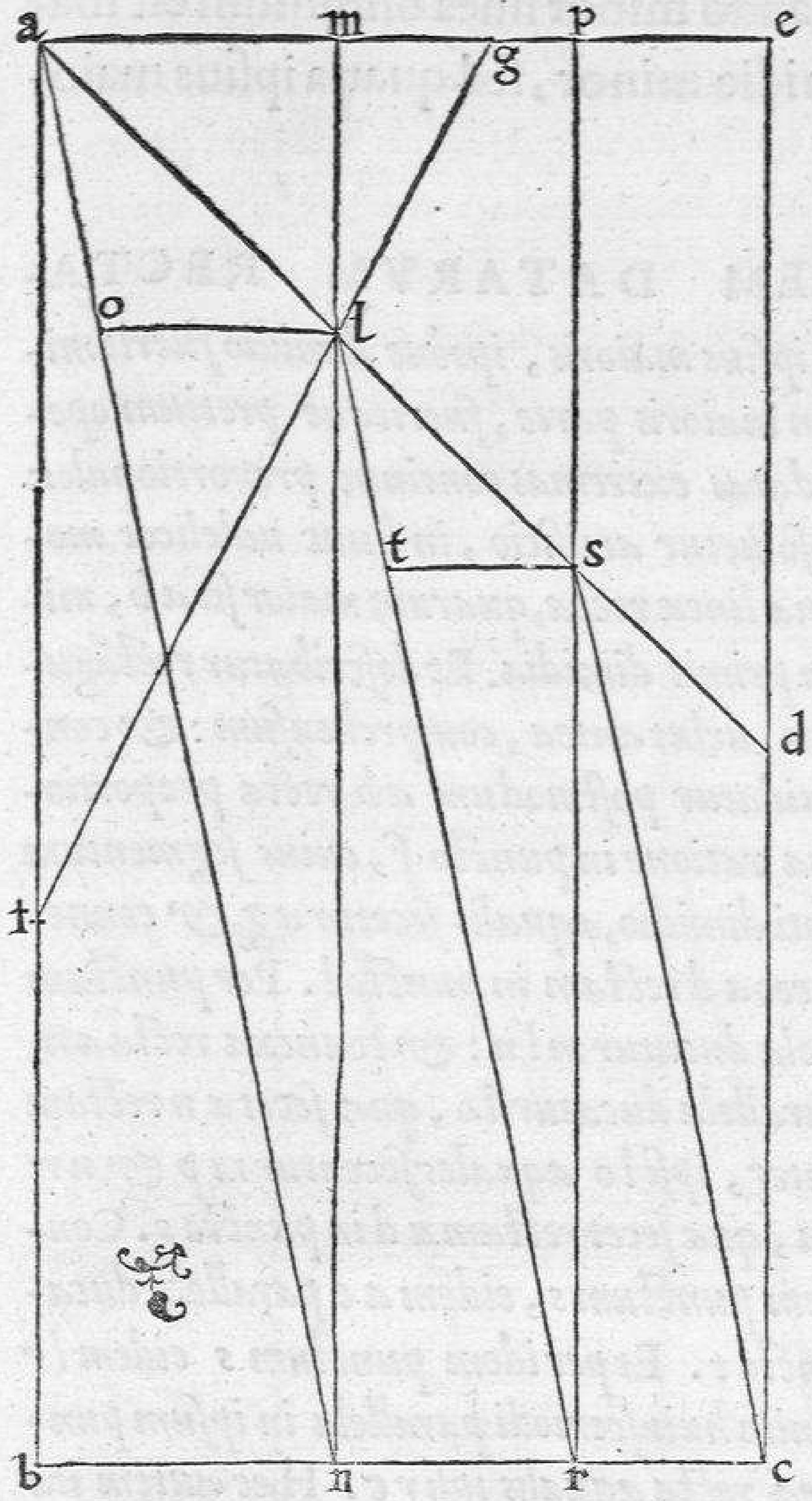


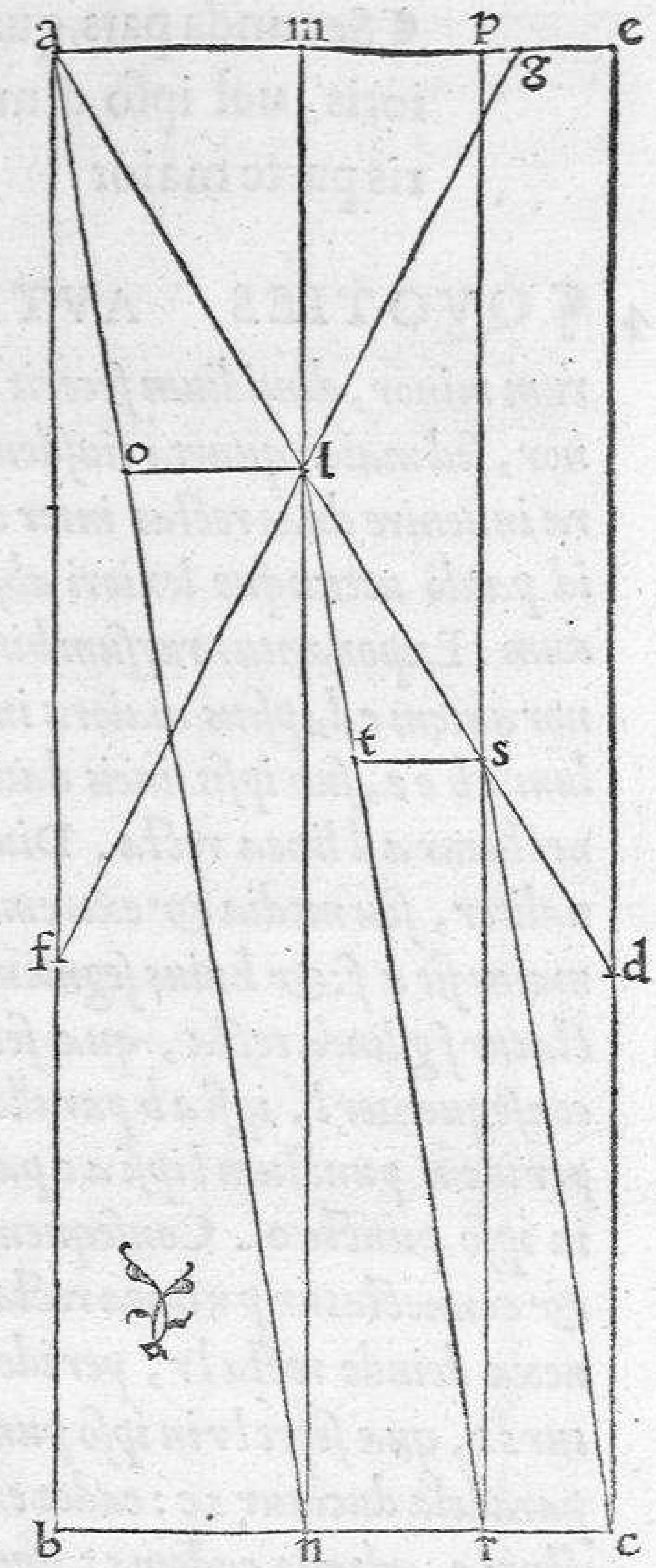
In maiorem autem huiusce primæ partis confirmationem, sequentem iuuat superaddere descriptionem: in quà minor datarum rectarum, utpote c d, ab ea quæ in prima figura sensibiliter uidetur esse diuersa. Qualium enim partium maior a b est 6, talium minor c d in præcedenti figura est 5, in hac uerò sequenti 4. Variatis nanque sensibiliter datarum linearum quantitatibus, & in unam coincidentibus descriptionis formulam: fieri non potest, quin præmissæ traditionis ueritas ex omni parte subsequatur.



¶ Secunda pars, quando minor linea dimidium est maioris, uel ipso dimidio minor, sed quarta ipsius maioris parte maior.

4 ¶ QVOTIES AVTEM DATARVM RECTArum minor, dimidium fecerit ipsius maioris, ipsóue dimidio fuerit minor, sed maior quarta eiusdem maioris parte, fueritque pretium operæ inuenire duas rectas inter datas extremas continuè proportionales: id paulò utcunque leuiori absoluetur artificio, in hunc uidelicet modum. Exponantur rursum binæ lineæ rectæ, quarum maior sit a b, minor autem c d, ipsius maioris in primis dimidia. Et describatur rectãgulum a b c e, sub ipsis lineis datis, uelut antea, comprehensum: & connectatur a d linea recta. Diuidatur postmodum a b recta proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto f, cuius segmentum maius sit a f: & huius segmenti dimidio, æqualis secetur a g, & connectatur f g linea recta, quæ secet a d rectam in puncto l. Per punctum consequenter l, ipsi a b parallela ducatur m l n: & connexa recta a n, per idem punctum l ipsi a e parallela ducatur l o, quæ secet a n rectam in ipso puncto o. Consequenter, ipsi l o æquales secentur m p & n r: & connectatur p r linea recta, quæ secet rectam a d in puncto s. Connexa deinde recta l r, per idem punctum s, eidem a e parallela ducatur s t, quæ secet l r in ipso puncto t. Et per idem punctum s eidem l r parallela ducatur s c: cadet enim huiuscemodi parallela in ipsum punctum c, eritque eadem s t linea recta æqualis ipsi r c. Hæc autem ita se habere, ocularis te docebit experientia: dummodo in ipsius a b c e rectanguli constructione, atque proportionali diuisione supradictæ lineæ a b, nullum commiseris errorem. Erit itaque rursum l n secunda proportionalis, & s r tertia, inter a b & b c lineas datas: sicut uidelicet maior a b ad ipsam l n, sic eadem l n ad ipsam s r, atque eadem s r ad minorem c d. Quod unà cum reliquis huiusce propositionis partibus uniuersaliter ostendemus. In clariorem autem huiusce partis elucidationem, & confirmatio nostræ traditionis, alteram placuit annectere figuram: in qua minor datarum rectarum, utpote c d, continet tres partes, qualium maior a b est 8. Ex iteratis nanque oblatarum linearum diuersitatibus, in eandem constructionis coincidentibus harmoniam, præcepti ueritas elucescit.



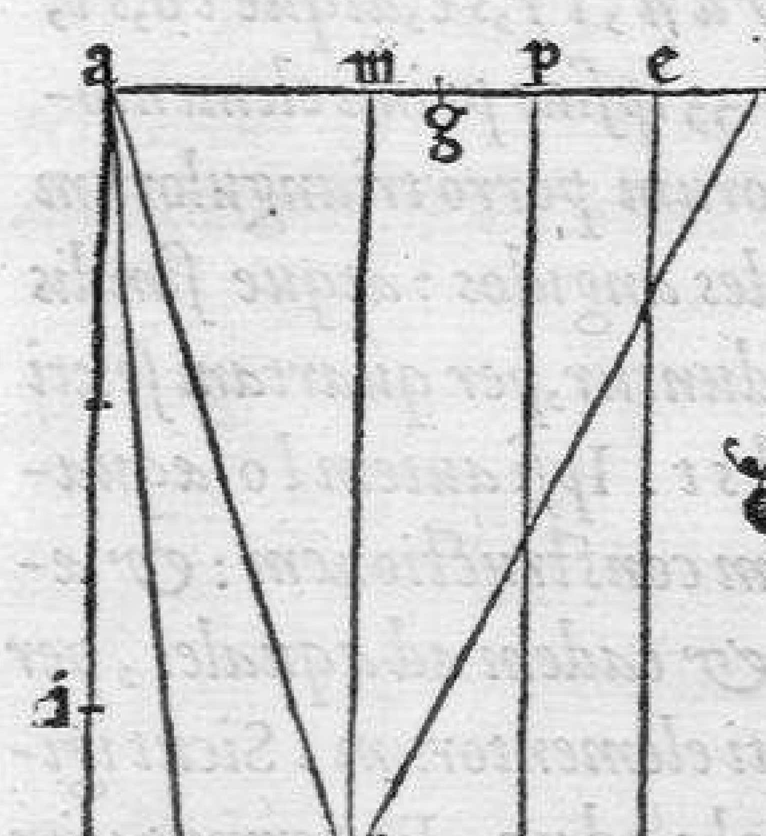


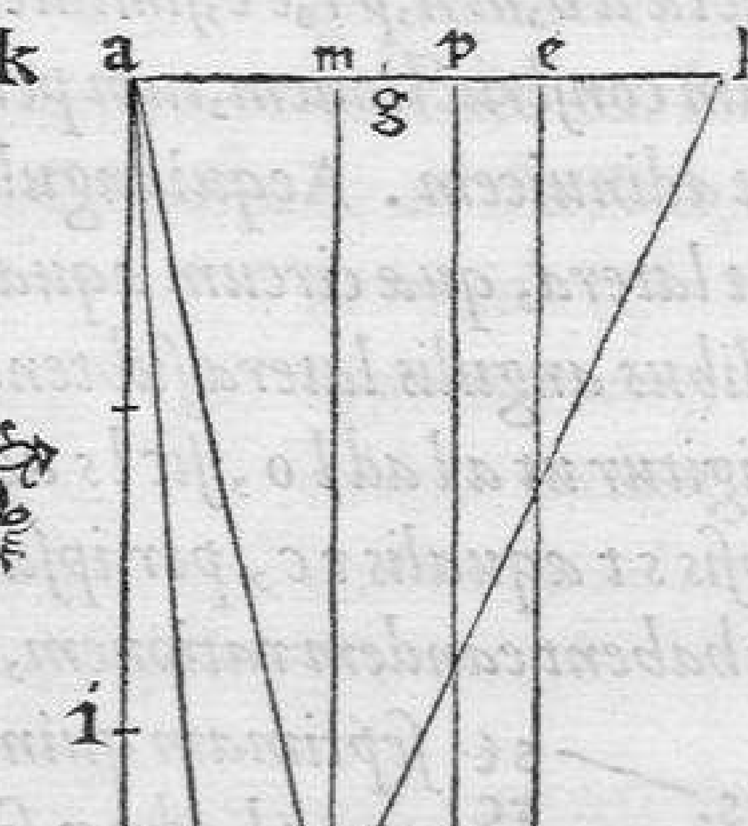
¶ Tertia pars constructionis, cùm data linea minor est quarta, uel ipsa quarta minor, sed maior 8 parte maioris.

¶AT SI MINOR EARVNDEM OBLATA- 5
rum, rectarum quartam partem fecerit eiusdem maioris, uel ipsa quarta minus, sed plus octaua eiusdem maioris parte: hac uia procedendum est. Esto rursum datarum rectarum maior a b, minor uerò c d, sub data hypothesi proportionata: & describatur a b c e rectangulum, sub ipsis lineis datis comprehensum, connectatúrque a d linea recta. Diuidatur consequenter a b proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit a f: similiter & ipsa a e proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit a g. Secetur postmodum ipsi a g æqualis

f h:

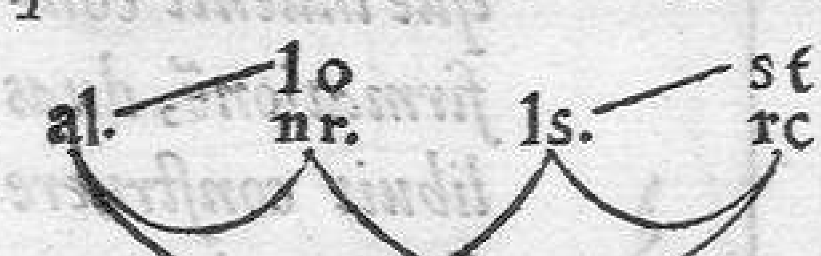
fh: & residua h a proportionaliter diuidatur in puncto i, cuius segmentum maius sit a i. Huius autem segmenti maioris dimidio æqualiter secetur e k: producta a e in directum, ad partes e uersus k. Et connectatur f k linea recta, quæ secet a d rectam in puncto l. Per punctum igitur l ipsi a b parallela ducatur in l n: & connexa a n recta, per idem punctum l ipsi a e parallela describatur l o. Deinde ipsi l o æquales secentur m p & n r: & connectatur p r linea recta, quæ secet a d in puncto s. Per punctum autem s ipsi a e parallela ducatur s t: ipsi uerò l r parallela s c. Cadet enim rursum s c in ipsum punctum c, ut in proximis dictum atque obseruatum est descriptionibus: eritque l n secunda proportionalis, s r uerò tertia, inter a b & b c lineas datas. Veluti quamprimùm mathematica deductione manifestum efficiemus. Huius itaque præcepti, in maiorem omnium fidem, nostríque inuenti confirmationẽ, duas libuit construere figuras: in quarum prima, datarum rectarum minor c d est quarta pars ipsius maioris a b: in secunda uerò figura, eadem minor c d est trium partium, qualium ipsa maior a b est 8. Haud aliter de cæteris facito, atque indicato.



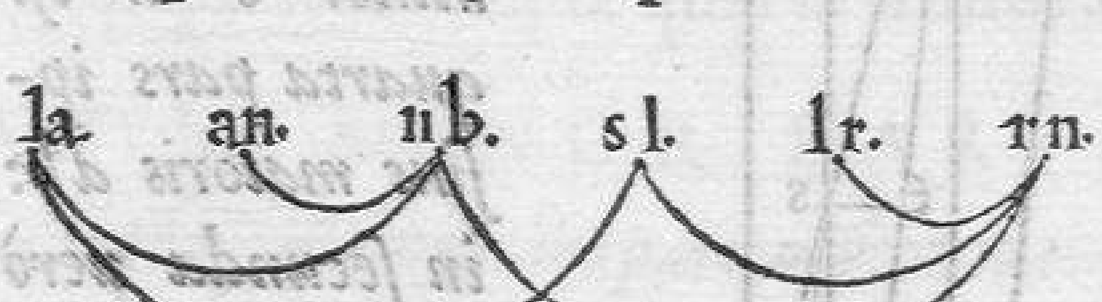


¶ Trium antecedentium descriptionum, siue partium demonstratio.

¶QVOD AVTEM IN VNAQVAQVE TRIVM *antecedentium partium siue descriptionum, recta l n, sit secunda proportionalis, & s r tertia, inter datas extremas a b & c d, sicut uidelicet a b ad ipsam l n, sic eadem l n ad præfatam s r, atque eadem s r ad minorem c d: in hunc qui sequitur modum demonstratur. In primis enim triangula a b n, l n r, s r c sunt inuicem æquiangula, similiter & triangula a l n, l s r, s d c, necnon triangula a l o, l s t: quemadmodum ex uigesima nona & trigesimasecunda primi elementorum, fit apertè manifestum cùm lineæ rectæ a b, m n, p r, e c, similiter a n, l r, s c, atque l o, s t, & b c, tum per ipsam constructionem, tum per 33 ipsius primi elementorum, parallelæ sint adinuicem. Aequiangulorum porrò triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: atque similis rationis quæ æqualibus angulis latera subtenduntur, per quartam sexti elementorum. Est igitur ut a l ad l o, sic l s ad s t. Ipsi autem l o æqualis est n r, atque ipsis s t æqualis r c, per ipsam constructionem: & æquales ad eandem habent eandem rationem, & eadem ad æquales, per*

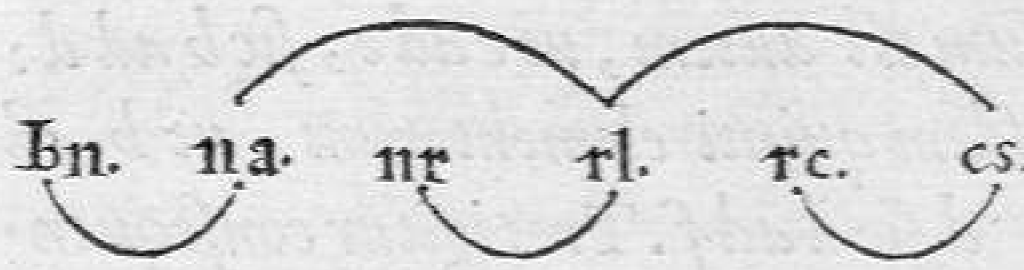


septimam quinti elementorum. Sicut igitur a l ad n r, sic l s ad r c. Et permutatim quoque per sedecimam eiusdem quinti elementorum, ut a l ad ipsam l s, sic n r ad r c. Est prætereà ut a n ad n b, sic l r ad r n: atque sicut l a ad a n, sic s l, ad l r. Et ex æqua igitur ratione, per 22 eiusdem quinti elementorum, ut l a ad n b, sic l s ad r n. Et

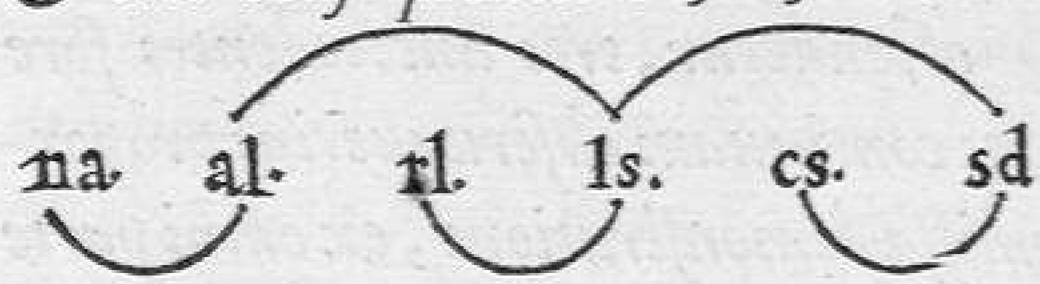


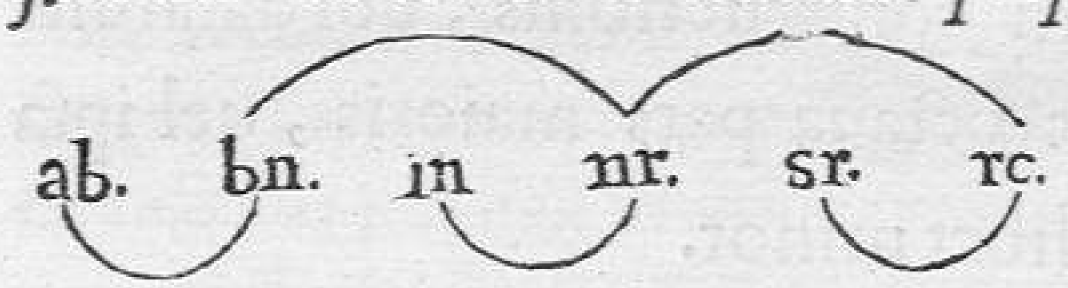
permutatim rursum per sedecimam ipsius quinti, ut a l ad l s, sic b n ad n r. Ostensum est autem, ut a l ad l s, sic n r ad r c: & quæ eidem sunt eædem rationes, adinuicem sunt eædem, per undecimam eiusdem quinti elementorum. Est igitur, ut b n ad n r, sic eadem n r ad r c: & proinde tres lineæ rectæ b n, n r, r c, continuè sunt proportionales. Insuper, cùm sit ut b n ad n a, sic n r ad r l, & r c ad c s, & tres antecedentes b n, n r, r c continuè sunt proportionales: igitur & consequentes

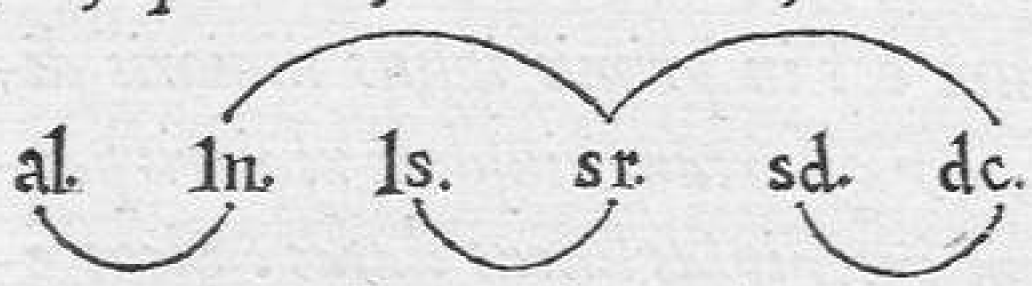
n a,



n a, r l, c s, sicut quidem n a ad r l, sic eadem r l ad c s. Item cùm sit ut n a ad a l, sic r l ad l s, & c s ad s d, & tres antecedentes n a, r l, c s sunt continuè proportionales: igitur & tres consequentes a l, l s, s d continuè itidem proportionales erunt, sicut uidelicet a l ad l s, sic eadem l s ad ipsam s d. Cæterũ cùm sit ut a b ad b n, sic l n ad n r, & r s ad s c, & tres consequentes b n, n r, r c continuè sunt proportionales: erunt similiter antecedentes continuè proportionales, sicut uidelicet a b ad l n, sic eadem l n ad r s. Tandem cõstat esse ut a l ad l n, sic l s ad s r, & s d ad d c, & tres rursum antecedentes a l, l s, s d continuè proportionales existunt: igitur & tres consequentes, sicut l n ad s r, sic eadem s r ad d c. Præostensum est autem, ut l n ad s r, sic a b ad eandem l n. Quatuor itaq; a b, l n, s r, d c, sub eadem ratione continuè proportionantur: sicut uidelicet a b ad l n, sic eadem l n ad s r, atque eadẽ s r ad ipsam d c. Quod oportuit demonstrasse.

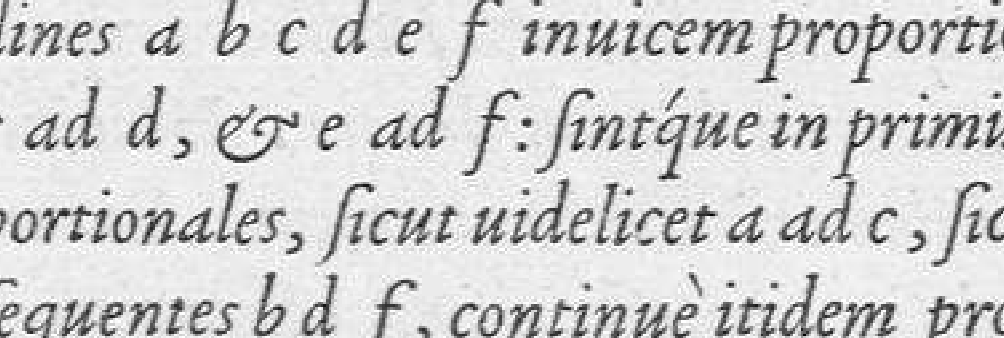






¶ Assumpti in præmissa demonstratione confirmatio.

7 ¶QVOD AVTEM SEX MAGNITVDINIBVS *inuicem proportionalibus datis, si tres antecedentes fuerint continuè proportionales, tres consequentes continuam itidem cogantur obseruare proportionem, & è conuerso: sic confirmatur. Sint datæ sex magnitudines a b c d e f inuicem proportionales, sicut quidem a ad b, sic c ad d, & e ad f: sintque in primis antecedentes a c e continuè proportionales, sicut uidelicet a ad c, sic eadem c ad e: dico quod ipsæ consequentes b d f, continuè itidem proportionales erunt, sicut b ad d, sic d ad f. Cùm enim sit ut a ad b, sic c ad d: erit permutatim, per sedecimã quinti elementorum, ut a ad c, sic b ad d. Vt autem a ad c, sic c ad e, per hypotesin: & sicut igitur per undecimam quinti elementorum, b ad d, sic c ad e. Cùm sit rursum, ut c ad d, sic e ad f: erit quoque permutatim, per eandem sedecimam quinti elemento-*



rum, ut c ad e, sic d ad f. Ostensum est autem, ut c ad e, sic b ad d: & sicut igitur per undecimam eiusdem quinti elementorum, ut b ad d, sic d ad f. Tres igitur consequentes d, e, f, sub continua proportione colligantur. Haud dissimiliter ostendetur, tres antecedentes fore proportionales: ubi tres consequentes continuam obseruauerint proportionem. Assumptum igitur in præmissa demonstratione, ex omni parte uerum.

b. d. c. e. d. f

¶ Quarta pars eiusdem constructionis, ubi datarum rectarum minor fuerit octaua pars maioris, uel ipsa octaua parte quantumlibet minor.

¶PORRO DVM MINOR LINEA FVERIT 8
præcisè pars octaua maioris, clarum est in primis ipsius maioris dimidium efficere lineam secundam, & quartam eiusdem maioris partem conficere tertiam proportionalem inter ipsas lineas datas. Sicut enim maior ad dimidiam eius partem, sic dimidia ad quartam, & ipsa quarta ad octauam: ubique enim ratio dupla continuatur.

Pro lineis autem minoribus ipsa octaua parte maioris, unicum tantum uelim accipias documentum, etiam cuiuscunque quantitatis fuerit ipsa minor infra octauam partem maioris. Sumenda est igitur ipsius datæ lineæ minoris octupla, & inter illam & maiorem lineam secunda proportionalis elicienda, per aliquod uidelicet trium antecedentium documentorum, pro ipsius octuplæ contingente magnitudine: nam dimidium eiusdem secundæ proportionalis, erit secunda proportionalis inter maiorem & ipsam minorem lineam datam. Hinc per tredecimam sexti elementorum, facile erit inuenire tertiam. Exemplaris huiusce documenti ueritas, desumi potest ex ipsa octaua parte maioris. Vtpote, si maior fuerit partium (uerbi gratia) 60: illius pars octaua habebit partes 7 & $\frac{1}{2}$, quæ multiplicata per 8, reddunt 60. Atqui inter 60 & 60, media proportionalis est pariter 60: nempe sub æqualitatis ratione. Et 30 sunt dimidium ipsorum 60: & simul faciunt secundam proportionalem inter 60 partes maioris, & 7 partes cum $\frac{1}{2}$ octauæ partis eiusdem maioris, uti suprà dictum est.

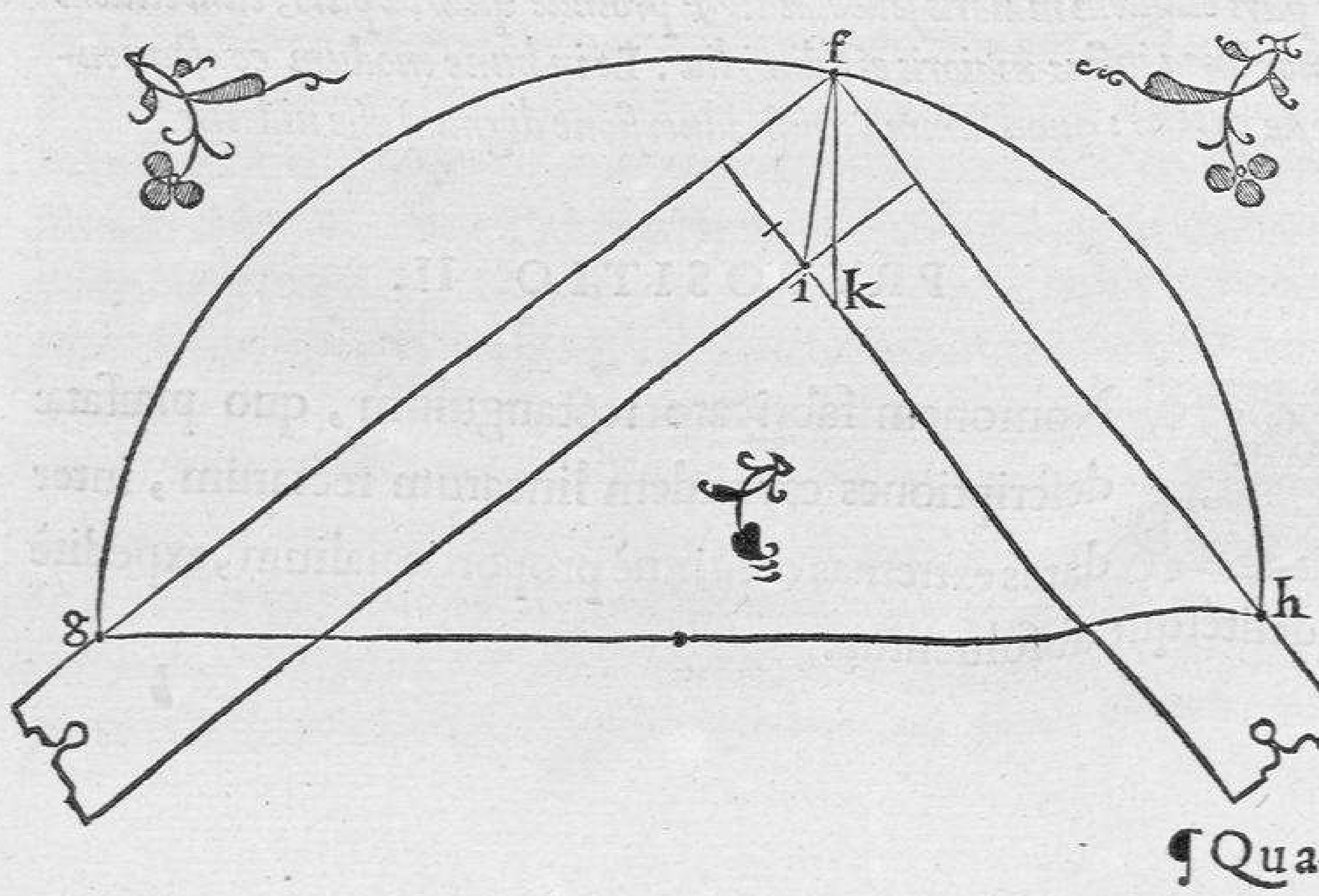
Haud

Haud aliter uelim ſubintelligas, de cæteris lineis ipſa octaua parte minoribus. Verùm hæc ad eas tantummodo uidentur ſpectare lineas, quarum octuplæ ipſam octauam partem maioris excedunt. Nam ſi octupla minoris lineæ datæ, minor fuerit octaua parte maioris, ſumenda eſt ipſius minoris ſedecupla, & inter illam & maiorem lineam colligenda ſecunda proportionalis, uti ſupra dictum extitit: illius enim quarta pars, erit ſecunda proportionalis optata. Et in hunc modum pendenter de cæteris, obſeruata multiplicatione minoris per numeros pariter pares ſupra octonarium numerum: donec conſurgat linea recta, quæ ſit maior octaua parte ipſius maioris lineæ datæ. Si ea igitur per 32 multiplicetur, octaua pars inuentæ ſecundæ proportionalis erit ſecunda proportionalis deſiderata: & ſi per 64, ſedecima: & ſic in infinitum. Et proinde ſi linea minor, fuerit ſedecima pars maioris: dimidium ſecundæ proportionalis, quando ipſa minor eſt dimidia maioris, erit ſecunda proportionalis optata. Et ſi eadem minor fuerit ipſius maioris trigeſimaſecunda pars: dimidium ſecundæ proportionalis, dum minor eſt quarta pars eiuſdem maioris, erit ſecunda proportionalis inter maiorem & ipſam lineam datam. At ſi eadem minor, fuerit pars ſexageſimaquarta maioris: tunc ſecunda proportionalis optata, erit dimidium ſecundæ proportionalis, dum ipſa minor facit octauam eiuſdem maioris partem. Si denique minor fuerit centeſima uigeſima octaua pars eiuſdem maioris lineæ: ſecunda proportionalis erit dimidium ſecundæ proportionalis, dum ipſa minor eſt pars eiuſdem maioris ſedecima: & proinde quarta pars, cùm eadem minor linea ipſius maioris eſt dimidia. Et in hunc modum conſequenter de cæteris: quod ſumma animaduerſione dignum eſſe uidetur.

PROPOSITIO II.

GNomonem fabricare rectangulum, quo præfatæ deſcriptiones earundem linearum rectarum, inter datas extremas continuè proportionalium, expeditè fideliterque abſoluentur.

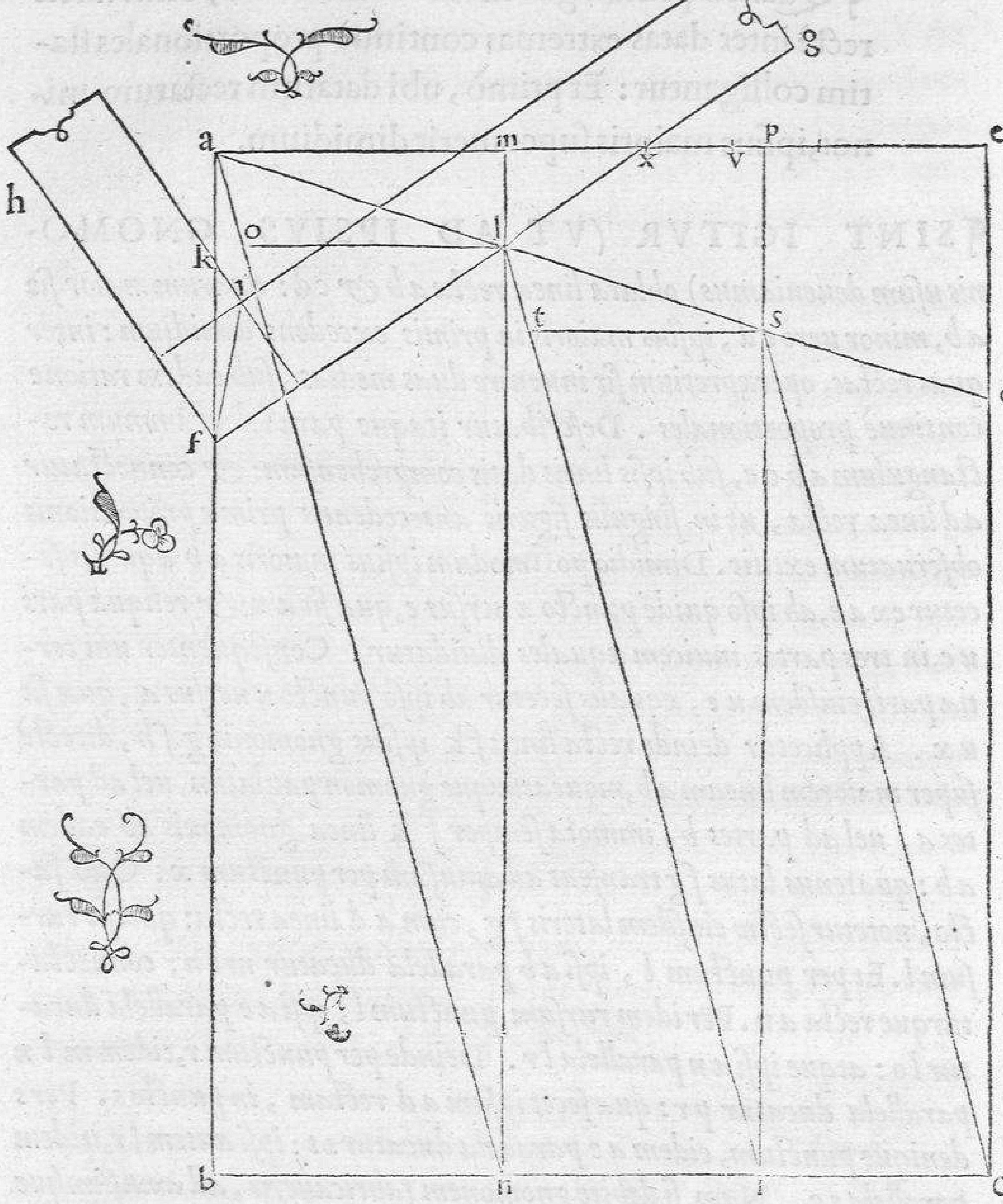
¶ FABRICETVR ERGO EX SOLIDA QVA- 1
piam & electa materia, ueluti cupro uel aurichalco, gnomon rectangulus g f h, sub duobus regulamentis g f & f h, altera parte longioribus, & pro futurarum linearum magnitudine proportionatis comprehensus. Quorum regulamentorum craßitudo sit mediocris, & latitudo prorsus eadem: alterius tamen longitudo, utpote ipsius g f, alterius scilicet g h longitudine utcunque maior existat. Ad angulum autem rectum qui ad f, quadratum figuretur, cuius diameter sit f i: & unumquodque latus prædictorum regulamentorum, siue brachiorum latitudini adamußim coæquetur. Vnum deinde laterum eiusdem quadrati (nec refert quale) proportionaliter, seu per mediam & extremam rationem diuidatur: & segmento minori eiusdem lateris, æqualis secetur i k, in interiori scilicet minoris brachij latere. Connectatur demum recta linea f k, totius rei thesaurus: & absolutum erit propositum gnomonis instrumentum, quod (citra affectionem) futura admirabuntur secula. Cum illo nanque, nedum propositarum linearum inter datas extremas continuè proportionalium inuentionem promptißimè poteris absoluere: sed & datum quemuis circulum in quadratum æquale, aut è conuerso (ut infrà docebitur) non minus facilè conuertes. Dignoscetur autem an angulus g f h sit rectus, si descripto semicirculo, & posito f uertice in illius periphæria, duo latera f g & f h per dimetientis extrema siue limites transierint: quoniam angulus qui in semicirculo rectus est, per 31 tertij elementorum.



¶ Qua-

¶ Qualiter præfati gnomonis adminiculo, binæ lineæ rectè inter datas extremas continuè proportionales statim colligantur: Et primò, ubi datarum rectarum minor, ipsius maioris superauerit dimidium.

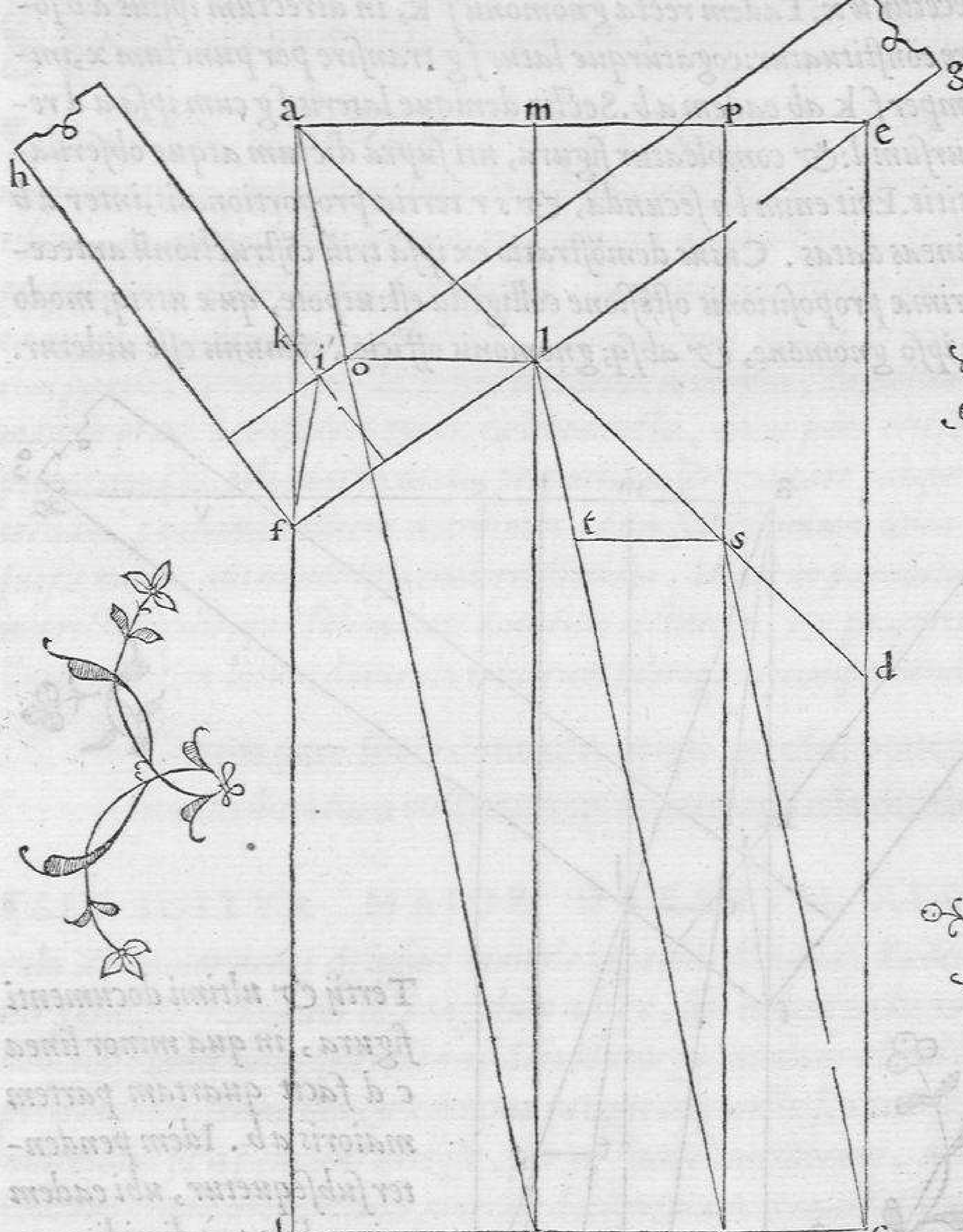
2 ¶ SINT IGITVR (VT AD IPSIVS GNOMO-*nis usum deueniamus) oblatæ lineæ rectæ a b & c d: quarum maior sit a b, minor uerò c d, ipsius maioris in primis excedens dimidium: inter quas rectas, operæpretium sit inuenire duas medias, sub eadem ratione continuè proportionales. Describatur itaque parallelogrammum rectangulum a b c e, sub ipsis lineis datis comprehensum: & connectatur a d linea recta, ut in singulis figuris antecedentis primæ propositionis obseruatum extitit. Dimidio postmodum ipsius maioris a b æqualis secetur ex a e, ab ipso quidē puncto a uersus e, quæ sit a u: & reliqua pars u e, in tres partes inuicem æquales diuidatur. Consequenter uni tertiæ parti eiusdem u e, æqualis secetur ab ipso puncto u uersus a, quæ sit u x. Applicetur deinde recta linea f k ipsius gnomonis g f h, directè super maiorem lineam a b, moueatúrque gnomon paulatim, uel ad partes a, uel ad partes b, immota semper f k linea gnomonis ab eadem a b: quatenus latus f g transeat ad amussim per punctum x. Quo facto, notetur sectio eiusdem lateris f g, cum a d linea recta: quæ sit rursum l. Et per punctum l, ipsi a b parallela ducatur m l n: connectatúrque recta a n. Per idem rursum punctum l, ipsi a e parallela ducatur l o: atque ipsi a n parallela l r. Deinde per punctum r, eidem m l n parallela ducatur p r: quæ secet ipsam a d rectam, in puncto s. Per s denique punctum, eidem a e parallela ducatur s t: ipsi autem l r, itidem parallela s c. Nam si debitè gnomonem fabricaueris, ad amussimque obseruaueris singula quæ nunc expressimus, coincidet eadem ultima parallela in punctum c: eritque l n secunda, s r autem tertia proportionalis, inter a b & b c lineas datas. Quod per æquiangula triangula non aliter ostendetur, quàm de præfatis ipsius antecedentis primæ propositionis conclusum est figuris: ueluti sequens descriptio monstrat, in qua minor c d est trium partium, qualium maior a b est quatuor. Idem quoque subsequetur, ubi eadem minor sub quacunque ratione ipsius maioris superauerit dimidium.*



¶ Cùm minor linea, præcisè facit ipsius maioris dimidium.

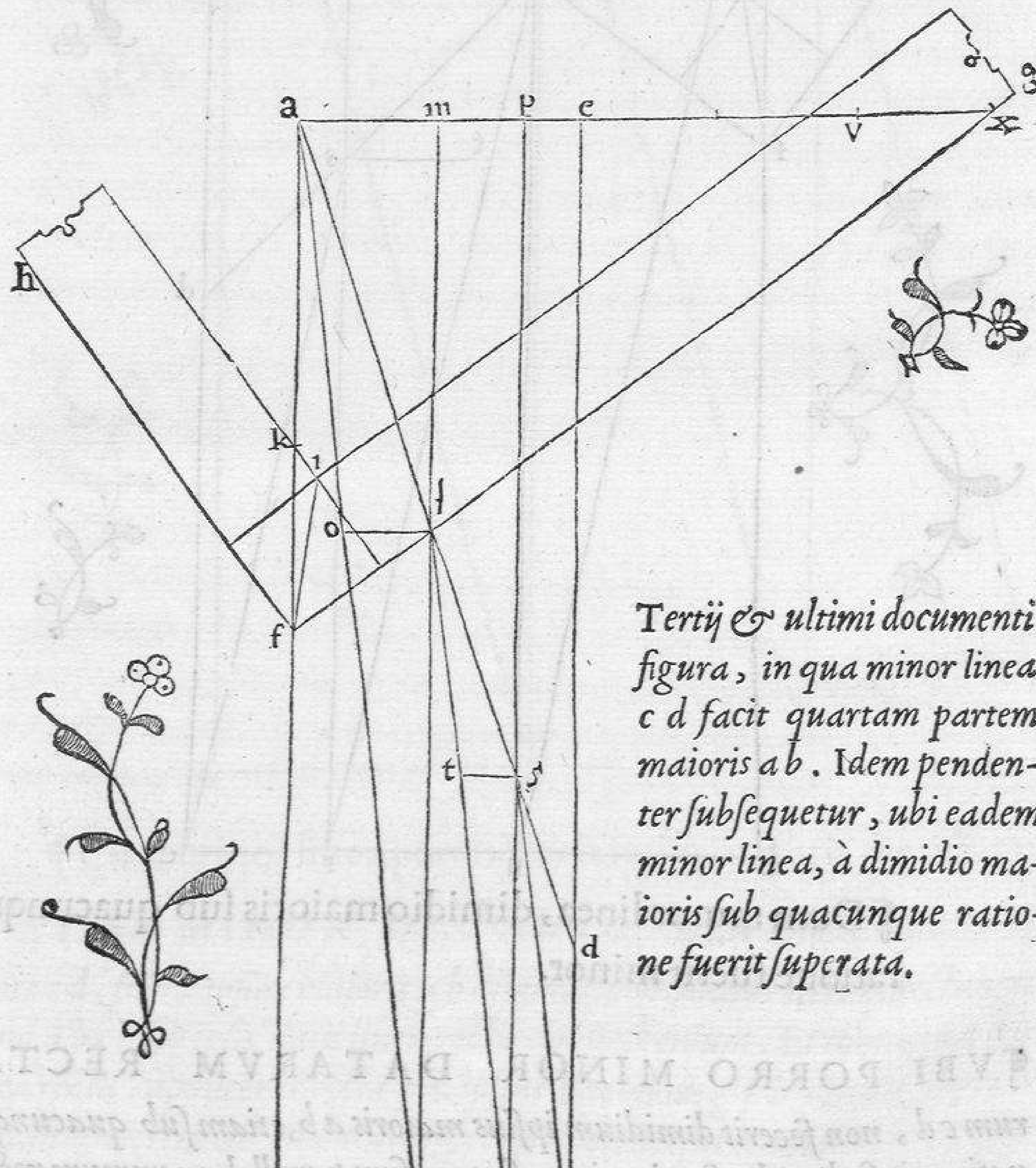
¶ AT SI MINOR DATARVM LINEARVM VT- 3
pote c d, fuerit ipsius maioris a b dimidia: describatur iterum rectangulum a b c e sub ipsis datis lineis rectis comprehensum. Et connexa *a d linea recta, applicetur recta f k ipsius gnomonis g f h directè super lineam maiorem a b: moueaturque gnomon uersus a aut uersus b, quatenus latus f g coincidat in punctum e: noteturque sectio eiusdem lateris f g cum ipsa a d linea recta, quæ sit rursum in puncto l*. Compleatur *denique*

denique figura, uti nuper traditum est, & subscripta delineatio mõstrat. Habebis enim rursum l n secundam, & s r tertiam proportionalem inter a b & c d lineas à principio datas.



¶ Dum minor linea, dimidio maioris sub quacunque ratione fuerit minor.

¶ VBI PORRO MINOR DATARVM RECTArum *c d, non fecerit dimidium ipsius maioris a b, etiam sub quacunque ratione ipso dimidio fuerit minor: fiat rursum parallelogrammum rectãgulum sub ipsis a b & c d comprehensum, una cum subtensa a d linea* recta. Producatur consequenter latus a e in directum & continuum ad partes e, uersus u: & dimidiæ parti ipsius maioris a b, æqualis secetur a u. Differentia autem e u, bifariam diuidatur: & dimidio ipsius e u, æqualis secetur u x. Tãdem recta gnomonis f k, in directum ipsius a b solito more constituatur: cogatúrque latus f g transire per punctum x, immota semper f k ab eadem a b. Sectio denique lateris f g cum ipsa a d recta sit rursum l: & compleatur figura, uti suprà dictum atque obseruatum extitit. Erit enim l n secunda, & s r tertia proportionalis, inter a b & c d lineas datas. Cuius demõstratio ex ipsa triũ cõstructionũ antecedentis primæ propositionis ostẽsione colligẽda est: utpote, quæ utriq; modo & cum ipso gnomone, & absq; gnomonis officio, cõmunis esse uidetur.



Tertij & ultimi documenti figura, in qua minor linea c d facit quartam partem maioris a b. Idem pendenter subsequetur, ubi eadem minor linea, à dimidio maioris sub quacunque ratione fuerit superata.

PRO-

PROPOSITIO III.

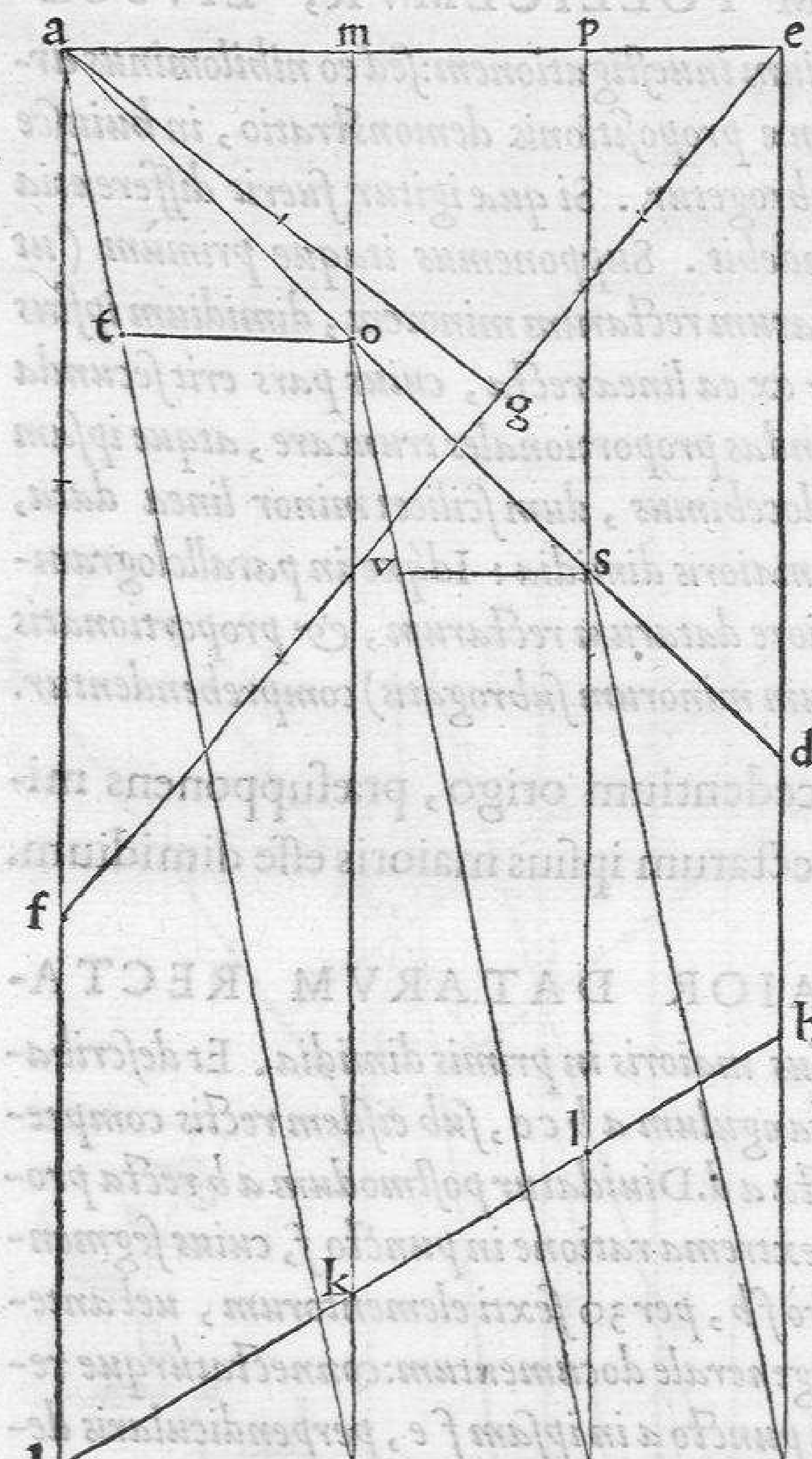
EAsdem lineas medias, inter datas extremas continuè proportionales, aliter inuenire.

1 ¶ALITER QVIDEM POLLICEMVR, EIVSCE-*modi linearum proportionalium inuestigationem: sed eo nihilominus artificio, ut antecedentis primæ propositionis demonstratio, in huiusce propositionis ostensionem subrogetur. Si quæ igitur fuerit differentia ea ex ipsa constructione pendebit. Supponemus itaque primùm (ut rem paucis expediamus) datarum rectarum minorem, dimidium ipsius maioris præcisè conficere: & ex ea linea recta, cuius pars erit secunda proportionalis, reliquas secundas proportionales truncare, atque ipsam tertiam pendenter elicere docebimus, dum scilicet minor linea data, fuerit maior, aut minor ipsa maioris dimidia: Idq́ue in parallelogrammis rectangulis, quæ sub maiore datarum rectarum, & proportionatis lineis rectis (in locum datarum minorum subrogatis) comprehendentur.*

¶Prima pars succedentium origo, præsupponens minorem datarum rectarum ipsius maioris esse dimidium.

2 ¶SIT IGITVR MAIOR DATARVM RECTA-*rum a b, minor uerò c d, ipsius maioris in primis dimidia. Et describatur parallelogrammum rectangulum a b c e, sub eisdem rectis comprehensum: connectatúrque recta a d. Diuidatur postmodum a b recta proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto f, cuius segmentum maius sit a f, minus uerò f b, per 30 sexti elementorum, uel antecedentis primæ propositionis generale documentum: connectatúrque recta a d, atque f e. Deinde à puncto a in ipsam f e, perpendicularis deducatur a g, per 12 primi elementorum. Et quoniam rectangulum est triangulum f a e: erit a g media proportionalis inter f g & g e segmenta basis f e, per corollarium octauæ sexti elementorum. Dimidio consequenter segmenti maioris a f, æqualis secetur c h: & connectatur b h linea recta. Dimidio autem ipsius f g æqualis secetur b k, & dimidio ipsius a g æqualis k l, atque dimidio ipsius g e æqualis l h: erit enim reliqua l h dimidio ipsius g e (res profectò mira) ad amussim æqualis.*

Per puncta igitur k l, *ipsi a b parallelæ ducantur m n & p r, per 31 primi elementorum: secétque m n ipsam a d lineam rectam in puncto o, & p r in punctos. Erunt itaque o n & s r, mediæ proportionales inter a b & c d lineas datas: sicut uidelicet a b ad ipsam o n, sic eadem o n ad ipsam s r, & eadem s r ad minorem c d.*



¶ Quæ spectant ad huiusce constructionis demonstrationem.

¶ CONNECTAN- 3
tur itaque a n, o r, s c lineæ rectæ: & per puncta o & s, ipsi a e parallelæ ducantur o t & s u, secétque o t ipsam a n in ipso puncto t, & s u ipsam o r in ipso puncto u. Cum enim tres lineæ rectæ f g, g a, g e, continuè (ut prædictum est) sint proportionales, erunt ipsarum dimidiæ b k, k *l, l h, continuè itidem proportionales: partes enim & æquè multiplices, eandem rationem habẽt sumptæ adinuicẽ, per 15 quinti elementorum. Sicut igitur b* k *ad ipsam* k *l, sic eadem* k *l ad ipsam l h. In triangulo autem b c h, ad latus c h actæ sunt parallelæ* k *n, l r, per constructionem: sunt igitur ipsius trianguli latera b c & b h diuisa proportionaliter per secundam sexti elementorum. Si intelligantur porrò a d & b c lineæ rectæ, in continuum & directum productæ, ad partes quidem c d: illæ de necessitate conuenient tandem adinuicem, faciéntque triangulum, ad cuius latus a b aguntur rursum parallelæ o n, s r, d c: secant*

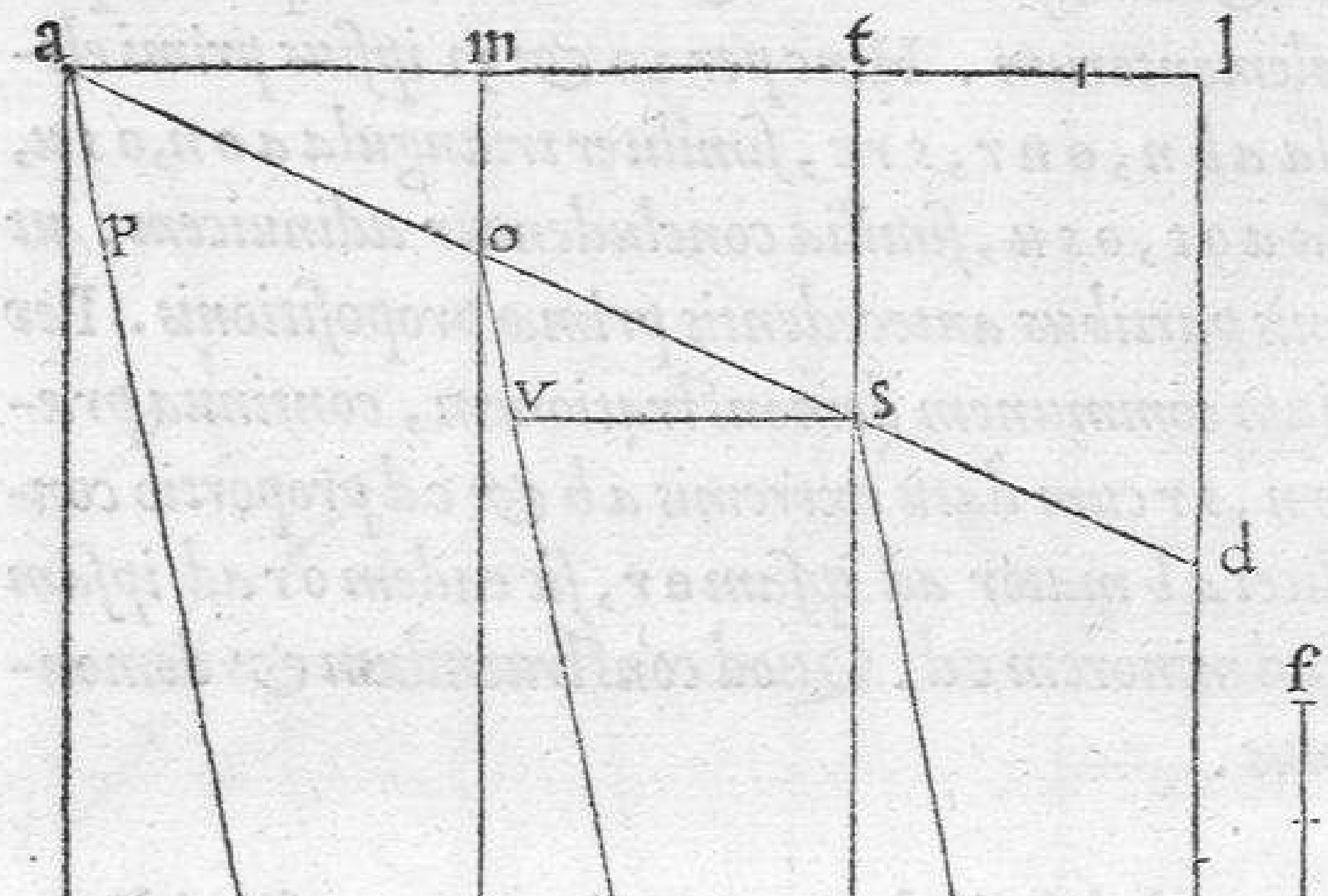
igitur

igitur proportionaliter ipsius trianguli latera, per eandem secundam sexti elementorum. Est igitur ut a o ad o s, sic b n ad n r: sicut prætereà o s ad s d, sic n r ad r c. Est autem ut b n ad n r, sic eadem n r ad r c: & sicut igitur per undecimam quinti elementorum a o ad o s, sic n r ad r c. Trianguli igitur, quod ex concursu ipsarum a d & n c in continuum & directum productarum cum ipsa a n efficitur, latera a d & n c diuiduntur proportionaliter in punctis o s & r c: Ad segmenta igitur connexæ lineæ rectæ o r & s c, parallelæ sunt ad reliquum latus a n, per secundam partem eiusdem secundæ sexti elementorum. Et proinde o t n r & s u r c quadrilatera, sunt parallelogramma: & latera consequenter o t & n r, similiter s u & r c inuicem æqualia, per 34 primi eorundem elementorum. Hinc per 29 & 32 ipsius primi elementorum, triangula a b n, o n r, s r c, similiter triangula a o n, o s u, s d c, atque triangula a o t, o s u, similia concludentur adinuicem: ut in tribus constructionis partibus antecedentis primæ propositionis. Per ipsarum itaque partium communem demonstrationem, continua prædictarum linearum o n, s r cum datis extremis a b & c d proportio concludetur: sicut uidelicet a b maior ad ipsam o r, sic eadem o r ad ipsam s r, atque eadem s r ad minorem c d. Quod construendum & demonstrandum susceperamus.

¶Secunda pars de lineis datis, quarum minor dimidium maioris excedit.

4 ¶CVM AVTEM LINEA MINOR, DIMIDIVM *ipsius maioris superauerit: duæ proportionales intermediæ, in hunc qui sequitur modum colligentur. Esto rursum maior datarum rectarum a b, minor autem c d, trium (uerbi gratia) partium qualium eadem a b est quatuor. Sit præterea differentia, qua minor c d excedit ipsius maioris dimidium, recta d e: quæ proportionaliter diuidatur, & inter illius segmenta media proportionalis inueniatur, quæ sit f g. Ipsius deinde maioris dimidiæ parti, utpote b h, in directum constituatur h c, dimidiæ parti eiusdem mediæ proportionalis f g ad amussim æqualis: compleatúrque rectangulum a b c l sub ipsis a b & b c comprehensum, & connectatur a d linea recta. Fiat postmodum rectangulum, sub eadem a b & illius medietate contentum: eliciatúrque ipsius*

a m seu b n longitudo, ut in prima huius parte traditum est: quibus æquales secentur ex a l & b c, à punctis uidelicet a & b, uersus l & c, quæ a m atque b n itidem uocitentur. Connectantur insuper a n & m n lineæ rectæ: secétque m n ipsam a d rectam in puncto o. Per punctum consequenter o, ipsi a l parallela ducatur o p, quæ secet a n in signo p: ipsi autem a n parallela itidem agatur o r, quæ cadat in punctum r ipsius rectæ b c. Rursum, per punctum r, ipsi m n parallela ducatur r s t, quæ secet eandem a d rectam in puncto s. Tandem, per punctum s eidem a l parallela ducatur s u, quæ secet o r in puncto u: ipsi autem o n parallela itidem agatur s c. Hæc enim parallela, cadet semper in punctum c,

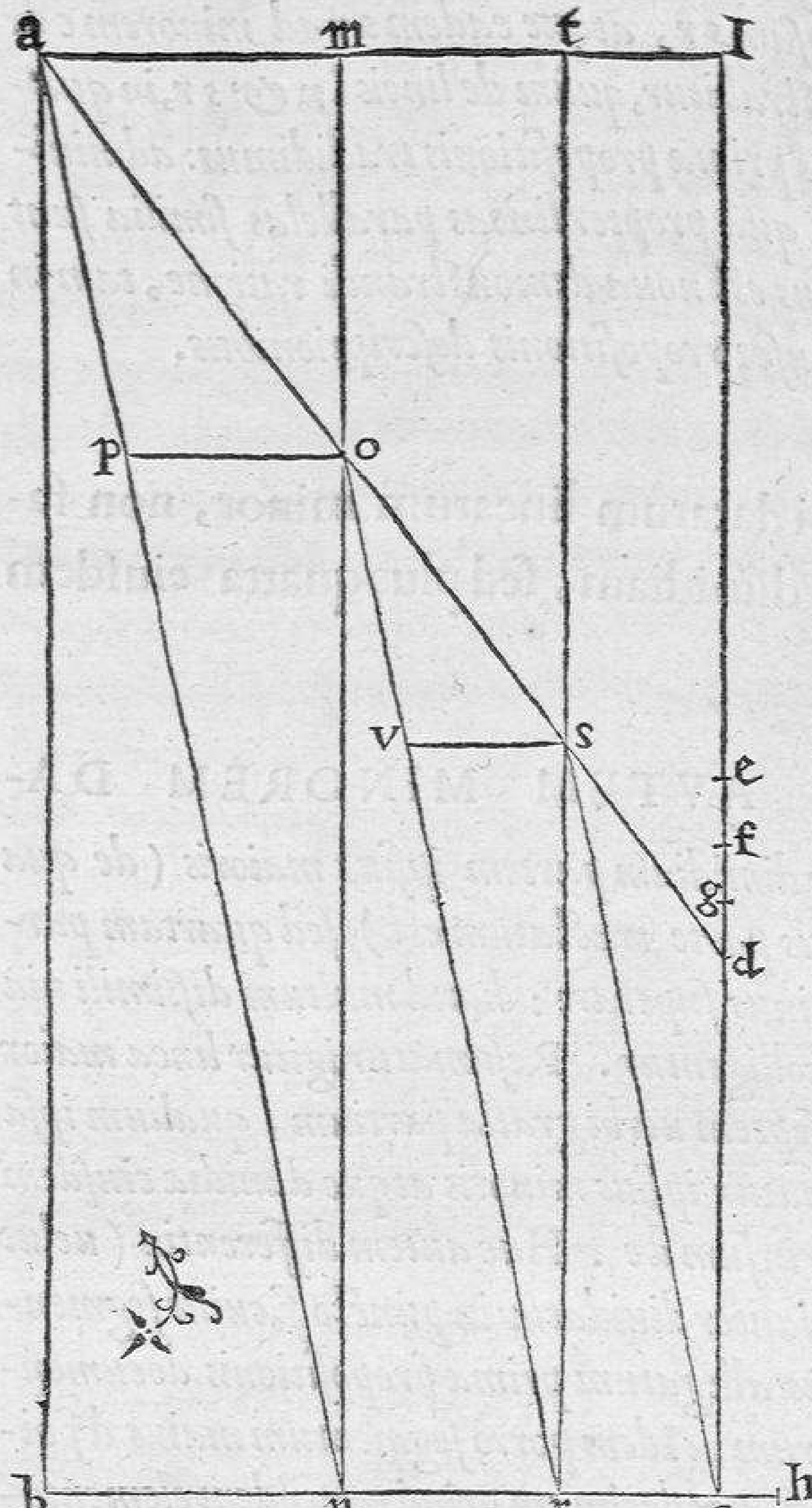


quemadmodũ ipsius primæ atque secundæ propositionis prędiximus accidere descriptionibus: dummodò neque in rectangulorum cõstructione, neque in sumendis lineis proportionalibus, nullus error, quãtumuis etiam modicus, committatur. His in hunc modum constructis, aio rursum o n & s r lineas rectas, fore medias proportionales inter a b atque c d lineas datas: sicut uidelicet maior a b ad ipsam

ipsam o r, sic eadem o r ad ipsam s r, atque eadem s r ad minorem c d. Hoc autem non aliter demonstrabitur, quàm de lineis l n & s r, in quali trium partium antecedentis primæ propositionis tradidimus: adminiculo uidelicet triangulorum, quæ propter lineas parallelas similia sunt adinuicem. Nulla igitur opus est noua demonstrandi ratione, tam in hac quàm in sequentibus huiusce propositionis descriptionibus.

¶ Tertia pars, ubi datarum linearum minor, non facit ipsius maioris dimidiam, sed plus quarta eiusdem maioris parte.

5 ¶ SI CONTINGAT AVTEM MINOREM DAtarum rectarum, non facere dimidiam partem ipsius maioris (de qua maioris dimidia, prima huius parte tractatum est) sed quartam partem eiusdem maioris nihilominus superare: haud multum dissimili uia ipsæ mediæ proportionales colligentur. Resumatur igitur linea maior a b, unà cum minore c d, septem uerbi gratia partium, qualium ipsa maior est sedecim. Et sumatur ipsius minoris atque dimidiæ eiusdem maioris differentia: quæ sit rursum d e. Hæc autem differentia (uelut antea dictum est) proportionaliter diuidatur in puncto f, cuius segmentum maius sit d f, per sæpiùs allegatum primæ propositionis documentum, uel 30 sexti elementorum. Idem porrò segmentum maius d f bifariam diuidatur in puncto g, per decimam primi eorundem elementorum. Ab ipsa deinde maioris dimidia, quæ sit rursum b h ad rectum angulum cum a b constituta, secetur ipsi d g siue g f, hoc est, dimidio segmenti maioris æqualis h c: & compleatur solito more parallelogrammũ rectangulum a b c l. Tandem absoluantur reliqua omnia lineamenta, quemadmodum in duabus proximis dictum atque obseruatum est figuris siue descriptionibus. Hoc est, desumatur ex maiore a b & dimidia illius parte, ipsius a m seu b n longitudo, iuxta primæ partis huiusce propositionis traditionem: & connectãtur a d, a n & m n lineæ rectæ, ducantúrque parallelæ o p & o r, denique r s t, s u & s c. Nam ipsa parallela s c, cadet rursum in punctum c: ut ipsa figuræ delineatio ad amussim obseruata te docebit. Hinc rectas ipsas o n & s r, inter datas extremas a b & c d medias esse proportionales non aliter concludemus: quàm de lineis



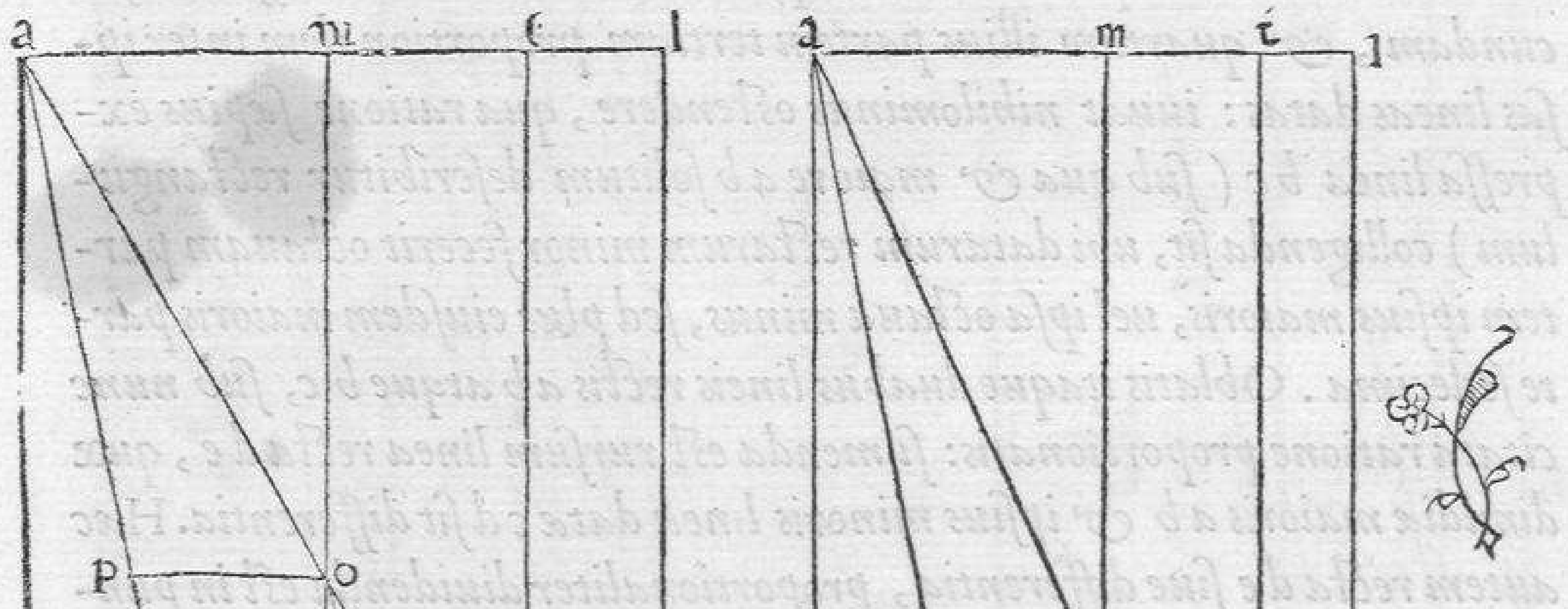
l n & s r, iuxta primæ propositionis traditionem adinuentis conclusum extitit, & in proximis descriptionibus obseruatum: per similia uidelicet triangula, cuiusmodi sũt a b n, o n r, s r c, atque a o n, o s r, s d c, necnõ a o p & o s u. Haud alienũ uelim habeas iudiciũ de cæteris minoribus lineis, inter ipsius maioris dimidiam & quartam eius partem cõprehensis.

¶ Quarta pars, cùm linea minor quartam partem ipsius maioris fecerit, uel ipsa quarta minus, sed plus octaua eiusdem maioris parte.

¶ QVOD SI PRAEDICTARVM RECTARVM *minor, quartam ipsius maioris partem præcisè fecerit, fueritue ipsa quarta minor, sed maior octaua parte eiusdem maioris: tunc uniuersum constructionis artificium, in colligenda h c iuxta ipsius minoris quantitatẽ proportionata solummodo uersabitur: cætera enim omnia, ut in præmissis descriptionibus siue figuris ueniunt prorsus imitãda. Sit itaque rursum datarum rectarũ maior a b, minor autem c d, ipsius maioris præcisè quarta, uel triũ partium qualiũ ipsa maior est sedecim (ut simul utrique parti satis faciamus) cuius differentia ab eiusdem maioris dimidia, sit rursum d e. Hæc igitur proportionaliter diuidatur, in puncto quidem f, cuius segmentum maius sit d f, quod rursum bifariam diuidatur, ut in proxima descriptione: sed inter segmentum minus f e, &* 6

dimidium

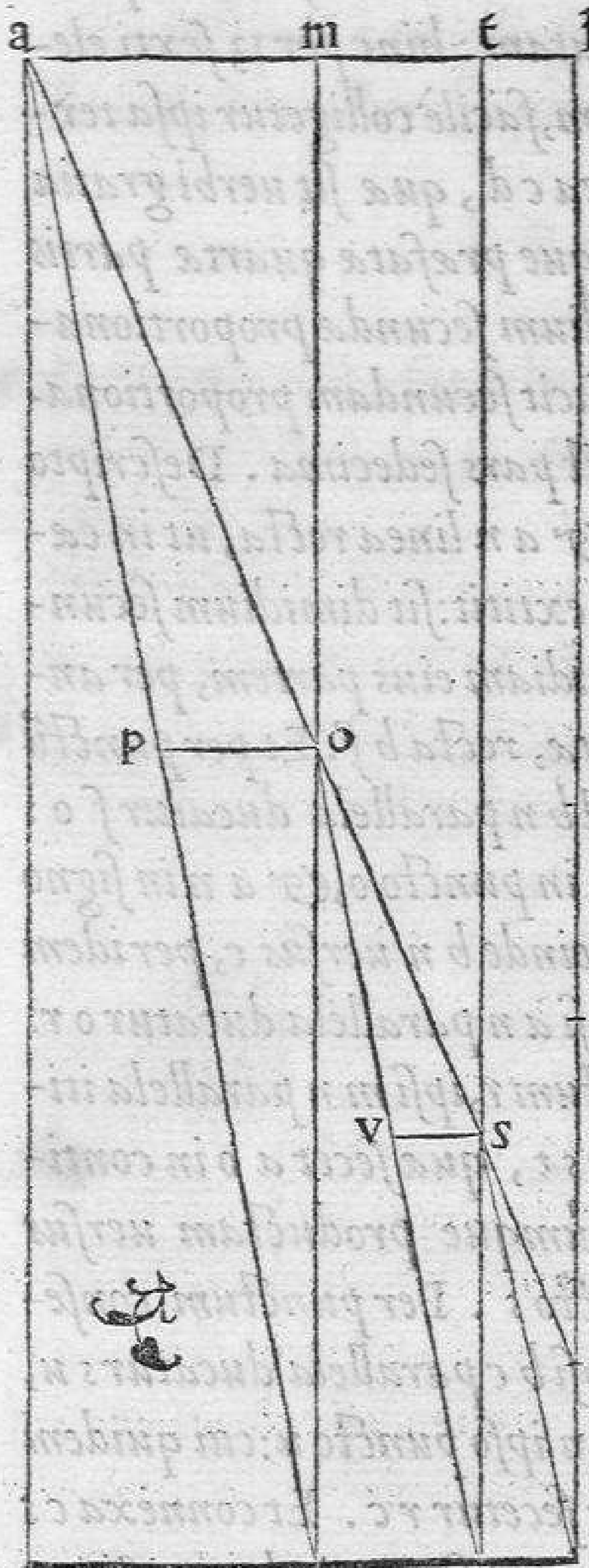
dimidium segmenti maioris f d media proportionalis accipiatur, per 13 sexti elementorum, quæ sit g i. Huic itaque mediæ proportionali, æqualis secetur h c: compleatúrque rectangulum a b c l, sub a b & b c comprehensum. Tandem absoluantur reliqua figuræ lineamenta, mediante a m seu b n, iuxta primæ partis traditionem adinuenta: ut in præmissis omnibus obseruatum extitit partibus. Si enim fideliter atque diligenter obseruentur singula, offendetur tandem in utraque figura, ultima parallelarum r c coincidere in punctum c: & proinde consurgere tot triãgula, quot in præcedentibus figuris, similia adinuicem. Quorum adminiculo, concludetur rursum fore, ut a b ad o n, sic o n ad s r, & eadem s r ad d c: ut in prima parte ipsius primæ propositionis demõstratũ extitit. Omnes etenim partes harũ triũ propositionũ, eadẽ uia prorsus ostẽdũtur.

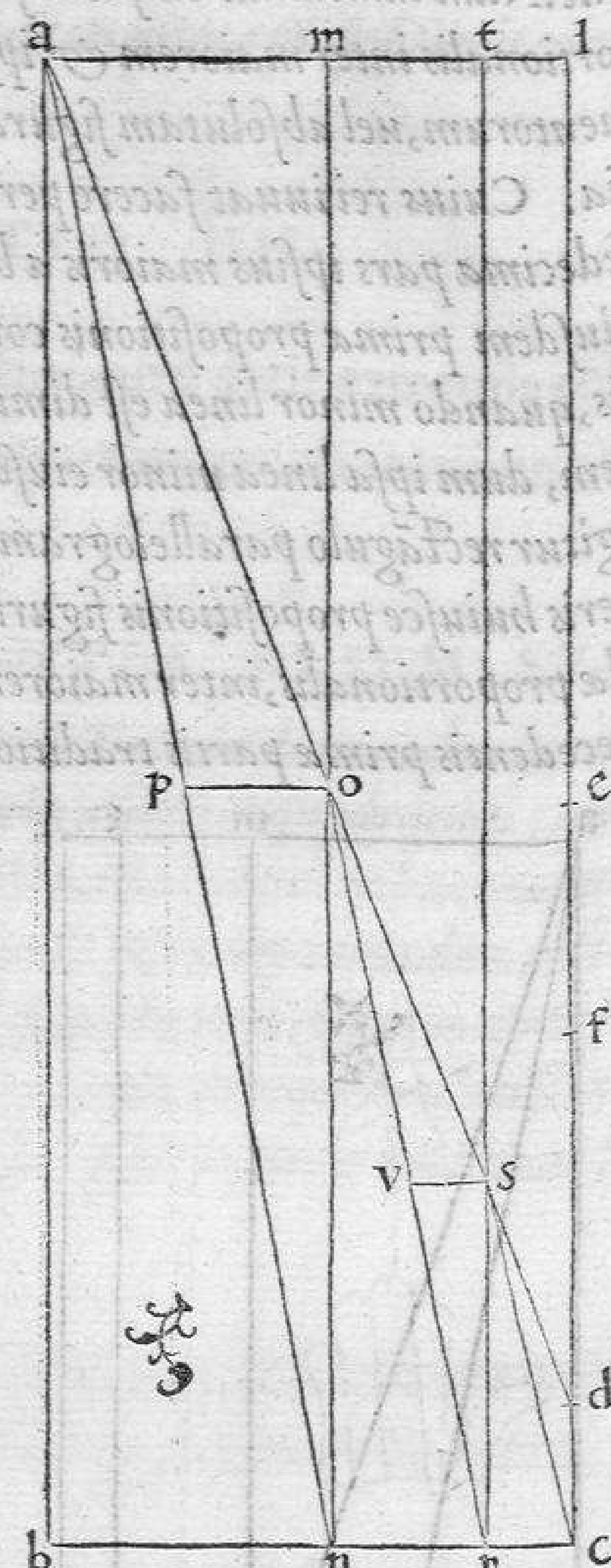


¶ Quinta pars, de lineis quarum minor octauam partem maioris efficit, uel ipsa octaua minorem, sed maiorem parte sedecima.

¶ HVIVSCE CONSTRVCTIONIS ARTIFIcium minorem utcunque patitur confusionem, ubi lineæ minores infra octauam partem ipsius maioris comprehenduntur, quàm per ipsius primæ propositionis traditionem exponatur: Vtpote, quoniam interuallum a m seu b n in omnibus huiusce propositionis differentiis semper manet idem, unde cætera interualla m t & t l, seu m r & r c minus coartantur. Quanquam igitur ex supra dictis sit manifestum, dum minor linea data est octaua pars maioris, ipsius maioris dimidium efficere secundam, & quartam illius partem tertiam proportionalem inter ipsas lineas datas: iuuat nihilominus ostendere, qua ratione sæpius expressa linea b c (sub qua & maiore a b solitum describitur rectangulum) colligenda sit, ubi datarum rectarum minor fecerit octauam partem ipsius maioris, uel ipsa octaua minus, sed plus eiusdem maioris parte sedecima. Oblatis itaque duabus lineis rectis a b atque b c, sub nunc citata ratione proportionatis: sumenda est rursum linea recta d e, quæ dimidiæ maioris a b & ipsius minoris lineæ datæ c d sit differentia. Hæc autem recta d e siue differentia, proportionaliter diuidenda est in puncto f, cuius segmentum maius sit d f, minus uero f e. Nam si à maioris dimidia c e auferatur segmentum minus f e, atque ipsi c f æqualis fiat b c, & compleatur de more parallelogrammum rectangulum a b c l, sub ipsa maiore a b & eadem b c, comprehensum, absoluantúrque cætera figuræ lineamenta, ut in præmissis obseruatum atque sæpiùs iteratum fuit descriptionibus: cadet semper ultima parallelarum, quæ per punctum s ducitur, in ipsum punctum c. Hinc quæsita linearum o n & s r cum datis extremis a b & c d proportio concludetur: Vt ex iis quæ sequuntur licet intueri figuris. In quarum prima, linea minor c d est octaua pars ipsius maioris a b: in secunda uerò figura, trium partium, qualium eadem maior est sedecim. 7

¶ Sexta

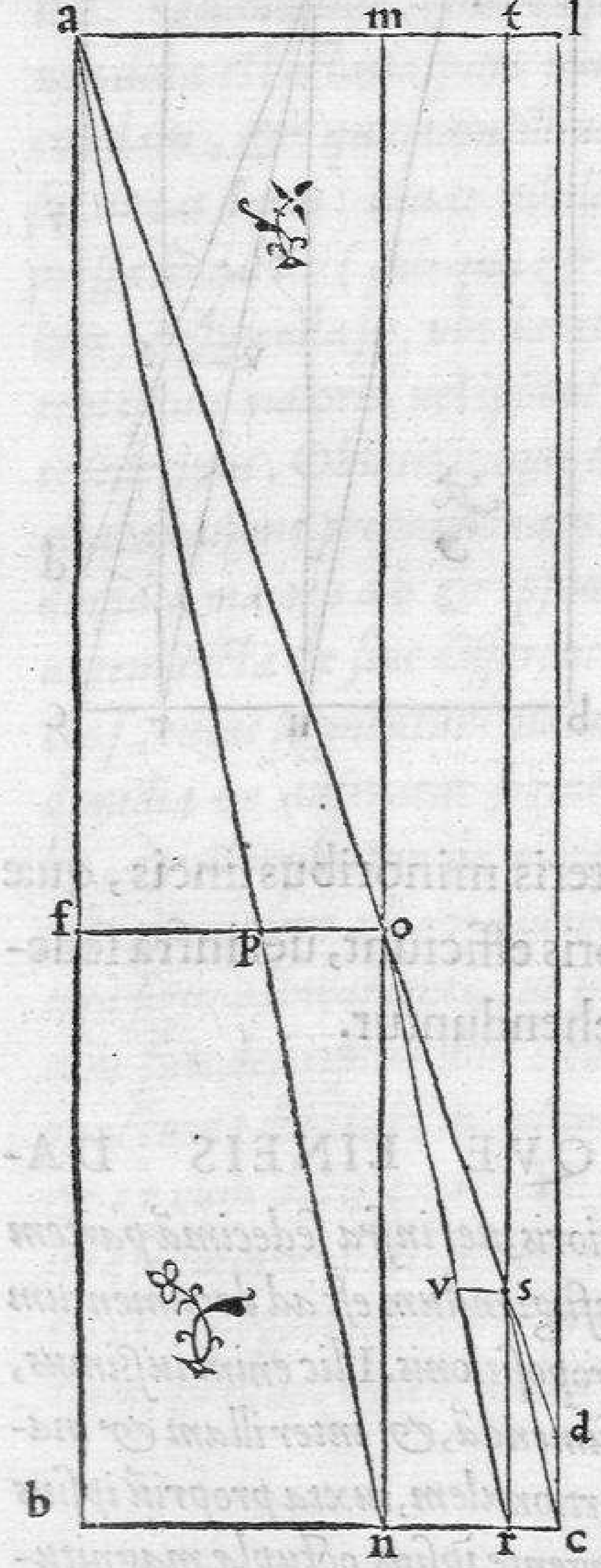




¶ Sexta & ultima pars, de cæteris minoribus lineis, quæ uel ſedecimam partem maioris efficiunt, uel infra ſedecimam indifferenter comprehenduntur.

8 ¶PRO RELIQVIS DENIQVE LINEIS DAtis, *quarum minor eſt ſedecima pars maioris, uel infra ſedecimã partem ſub quacunque ratione comprehenſa: confugiendum eſt ad documentum quartæ partis ipſius antecedẽtis primæ propoſitionis.* Illic enim iuſsimus, *eiuſcemodi lineæ minoris octuplam eſſe ſumendã, & inter illam & maiorem lineã colligendã eſſe ſecundã proportionalem, iuxta propriũ ipſius datæ propoſitionis artificium, pro contingente ipſius octuplæ magnitu-*

dine. Nam dimidium eiusdem secundæ proportionalis, erit secunda proportionalis inter maiorem & ipsam lineam datam : hinc per 13 sexti elementorum, uel absolutam figuræ descriptionem, facilè colligetur ipsa tertia. Cuius rei iuuat facere periculum de linea c d, quæ sit uerbi gratia sedecima pars ipsius maioris a b. Ex ipso itaque præfatæ quartæ partis eiusdem primæ propositionis corollario, dimidium secundæ proportionalis, quando minor linea est dimidia maioris, facit secundam proportionalem, dum ipsa linea minor eiusdem maioris est pars sedecima. Descripto igitur rectãgulo parallelogrammo a b n m, & a n linea recta, ut in cæteris huiusce propositionis figuris obseruatum extitit: sit dimidium secundæ proportionalis, inter maiorem a b, & dimidiam eius partem, per antecedentis primæ partis traditionem adinuentæ, recta b f. Et per punctũ f, ipsi a m uel b n parallela ducatur f o: quæ secet m n in puncto o, & a n in signo p. Producta deinde b n uersus c, per idem punctum o ipsi a n parallela ducatur o r: & per punctum r, ipsi m n parallela itidem agatur r s t, quæ secet a o in continuum directúmque productam uersus d, in ipso puncto s. Per punctum consequenter s, ipsi b c parallela ducatur s u, quæ secet o r in ipso puncto u: cui quidem s u æqualiter secetur r c. Et connexa c s linea recta, quæ ipsi o r erit de necessitate parallela, per punctum c, eidem r s t, parallela, tandem agatur c d l: in cuius punctum d sedecimæ partis limitem, producta a o s tandem coincidet, eritque c d ipsius maioris a b pars sedecima. Quemadmodum ex ipsa deprehenditur figura, sub lineis (ut uocant) naturalibus, quæ mathematicarum sunt imagines, comprehensa: cuius eadem erit demonstratio, quæ de cæteris ipsius antecedẽtis primæ propositionis constructionis tradita est. Reliqua porrò linearum intermedia-



rum

rum discrimina, ex ipso quartæ partis eiusdem primæ propositionis corollario desumenda relinquimus.

PROPOSITIO IIII.

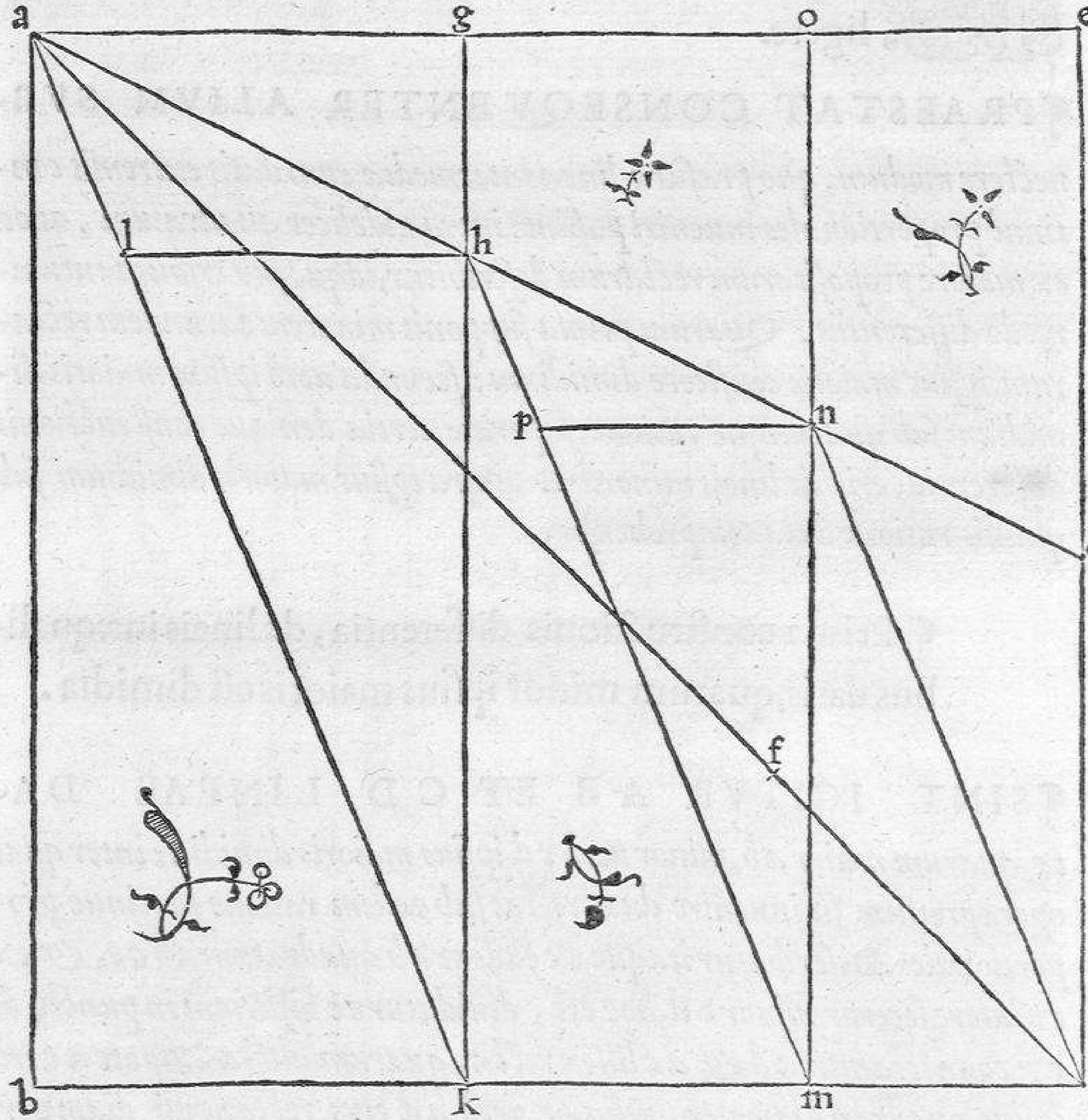
PRæfatas lineas intermedias, cum datis extremis continuam obseruantes proportionem, alia ratione colligere.

1 ¶PRAESTAT CONSEQVENTER ALIVM SVBnectere modum, *quo præfatæ lineæ intermediæ cum datis extremis continuè proportionales inueniri possint: intra uidelicet quadratum, quod ex maiore propositarum rectarum describitur, idq́ue sub tribus tantummodo differentiis. Quarum prima supponit minorem earundem rectarum, ipsius maioris conficere dimidium: secunda uerò ipsum maioris dimidium sub quacunque ratione superare: tertia denique constructionis differentia, erit de lineis minoribus, infra ipsius maioris dimidium sub quauis ratione data comprehensis.*

¶ Prima constructionis differentia, de lineis inæqualibus datis, quarum minor ipsius maioris est dimidia.

2 ¶SINT IGITVR AB ET CD LINEAE DAtæ, *quarum maior a b, minor uerò c d ipsius maioris dimidia: inter quas operæpretium sit inuenire duas rectas sub eadem ratione continuè proportionales. Describatur itaque ex eadem a b quadratum a b c e, & ex c e latere secetur minor c d, hoc est, diuidatur c e bifariam in puncto d: & connectantur a d & a c lineæ rectæ, quarum altera, utpote a c erit ipsius quadrati diameter, reliqua uerò a d eius rectanguli diameter, quod sub eadem maiore & illius dimidia c d continetur. Ab ipso postmodum a c dimetiente, ipsi a b maiori secetur ęqualis a f: ipsi autem f c ęqualis a g, per tertiam primi elementorum. Per punctum deinde g ipsi a b parallela ducatur g h k, quę secet a d rectam in puncto h: & connectatur recta a k. Consequenter, per punctum h ipsi a e parallela ducatur h l: ipsi uerò a k, itidem parallela h m, per 31 primi elementorum. Per punctum insuper m, ipsi g k parallela ducatur m n o, quæ secet præfatam*

rectam a d in ipso puncto n. Et per ipsum punctum n, eidem a e parallela ducatur n p: ipsi uerò h m, parallela itidē agatur n c. Coincidet enim huiuscemodi parallela (dummodo constructionem ipsam fideliter adimpleueris) in punctum c: ut in supradictis omnibus uisum est accidisse descriptionibus: eritque recta h k secunda, n m uerò tertia proportionalis inter a b & c d lineas datas. Quod non aliter ostendetur, quàm de præcedentium trium propositionum constructionibus demonstratum extitit.

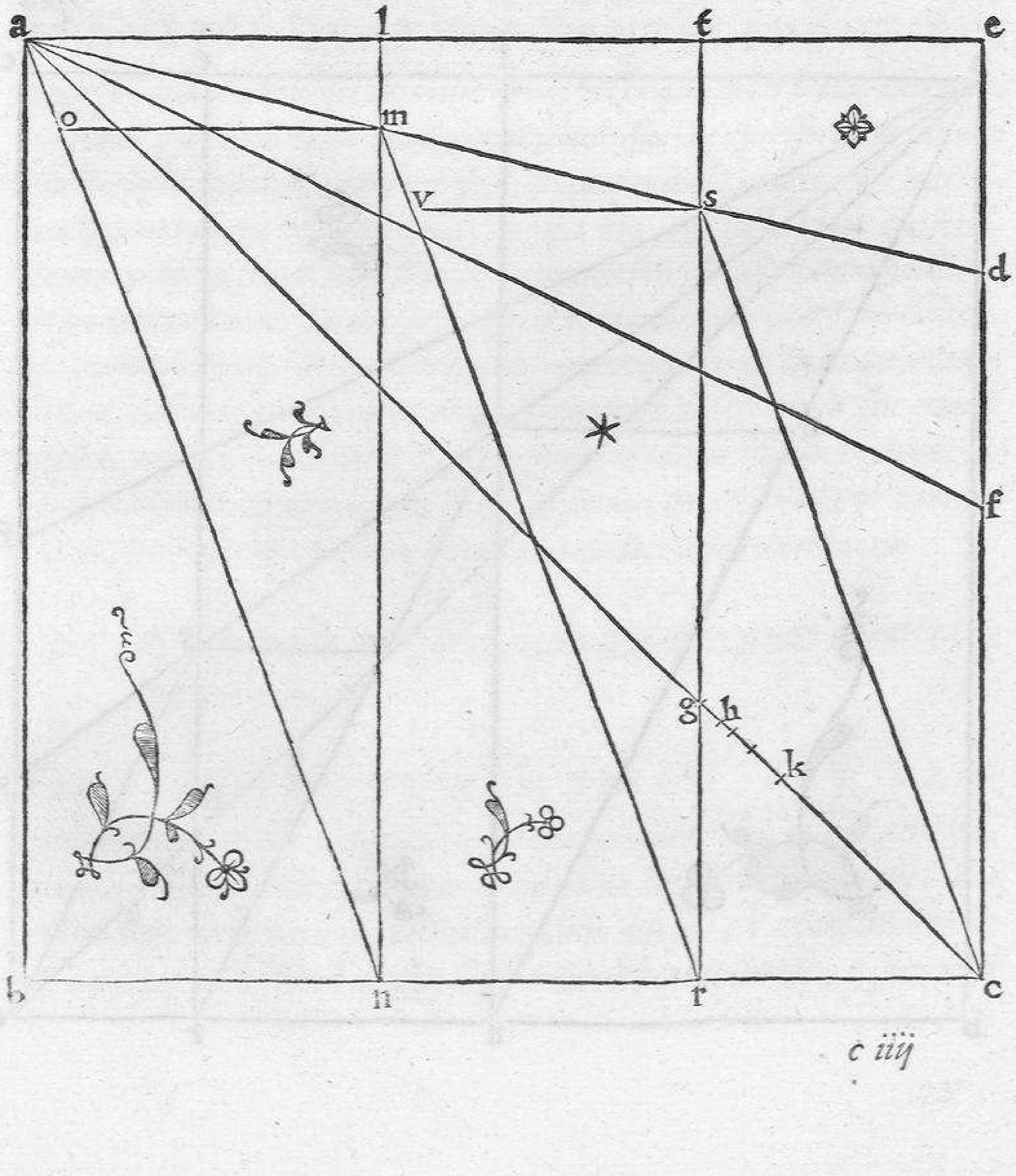


¶ Secunda differentia, quando linea minor dimidium ipsius maioris quouis modo superat.

¶VBI PORRO LINEA MINOR C D, IPSIVS 3
maioris a b superauerit dimidium, etiam sub quacunque ratione id acciderit: describēdum est rursum ex eadem maiore a b quadratum a b c e,

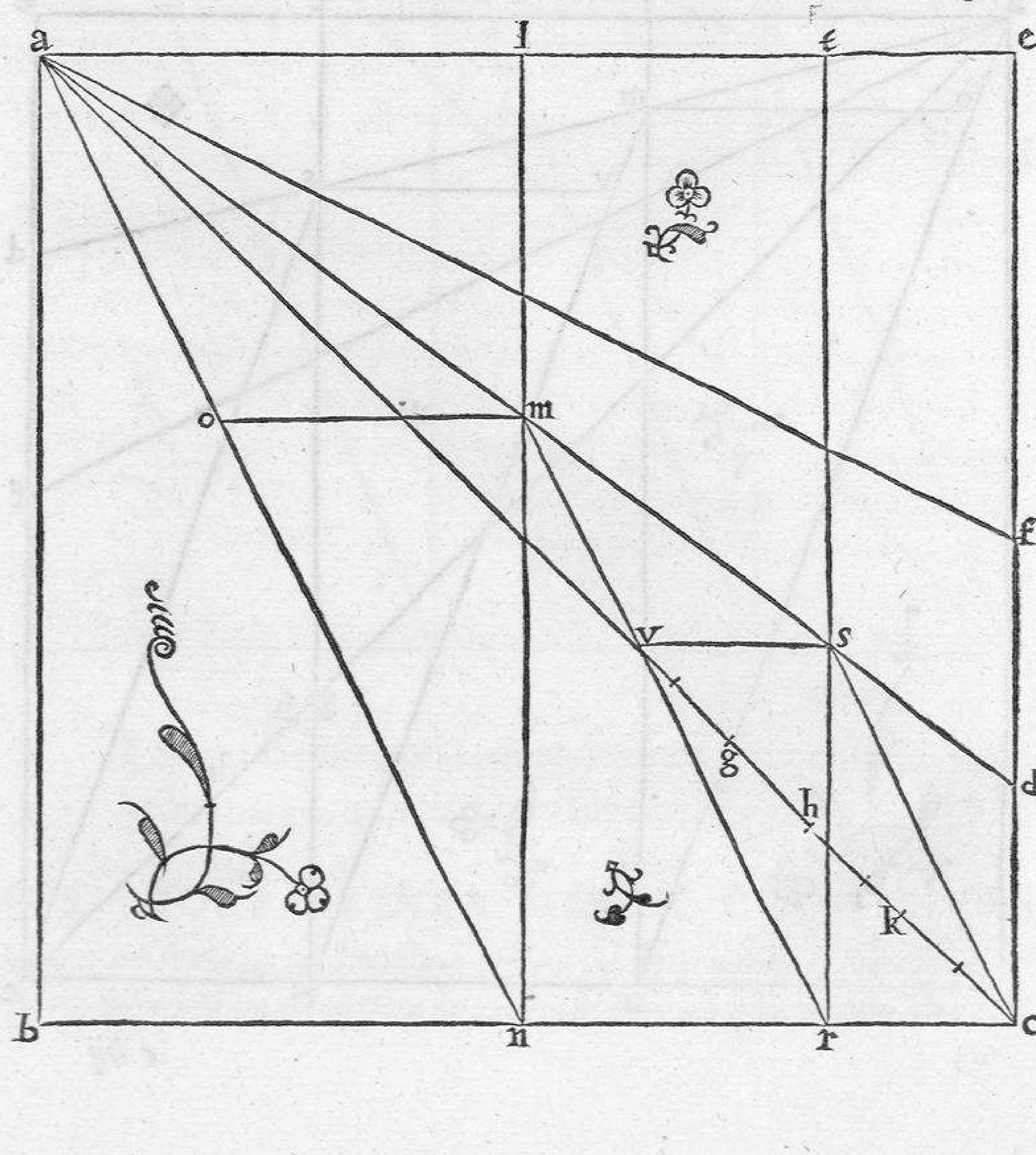
&

& ipsi minori secanda æqualis c d, & latus c e bifariam diuidendum in puncto f. & connectendæ a d, a f & a c lineæ rectæ. Secãda est postmodum ex a c dimetiente, ipsi a b æqualis a g: ipsi autem a d, æqualis a h: & ipsi a f, æqualis a k. Et differentia h k bifariam diuidenda, illiúsque dimidium auferendum ex g c: & residuæ tandem secanda æqualis a l. Quibus absolutis, ducatur per punctum l ipsi a b parallela l m n, quę secet a d rectam in puncto m: & connectatur a n linea recta. Compleãtur tandem cætera constructionis lineamenta, uti suprà dictum atque obseruatum sæpius extitit, & subscripta figura continetur. Cadet enim ultima parallelarum s c, in ipsum punctum c: eritque m n secunda proportionalis, s r uerò tertia, inter a b & c d lineas datas. Cuius demonstratio, à præallegata antecedentium constructionum demonstratione non discrepat.



¶ Tertia differentia, de lineis minoribus, quæ non faciunt ipsius maioris dimidium, sed infra dimidiam sub quacunque ratione comprehenduntur.

¶ AT SI CONTINGAT EANDEM MINOREM 4
c d, non conficere dimidium maioris a b, etiam sub quacunque rationis differentia id acciderit: describatur rursum ex eadem maiore a b quadratum a b c e, sitque rursum data linea minor c d, & dimidia maioris c f. Connectantur postmodum a f, a d & a c lineæ rectæ: seceturque ex ipso quadrati dimetiente a c, ipsi maiori a b æqualis a g, & ipsi a f æqualis a h, atque ipsi a d æqualis a k. *Sed differentia h* k *proportionaliter diuidenda est, & segmentum maius addendum ipsi c g: atque inde resultantis lineæ rectæ, æqualis secunda a l.* Deinde *absoluantur reliqua*



qua omnia constructionis lineamenta, ut in ipsa prima differentia declaratum extitit, & obiecta uidetur indicare figura, prioribus haud dissimili. Eadem itaque resolutione demonstrationis ostendetur, rectam m n fore secundam, & s r tertiam proportionalem inter datam maiorem a b, & minorem c d: quemadmodum in supradictis omnibus constructionũ differentiis, sæpiùs fuit declaratum. De his ergo particularibus supradictarum linearum inuentionibus, hæc sint satis: ad uniuersales earundem linearum inuestigationes, transeundum esse uidetur.

PROPOSITIO V.

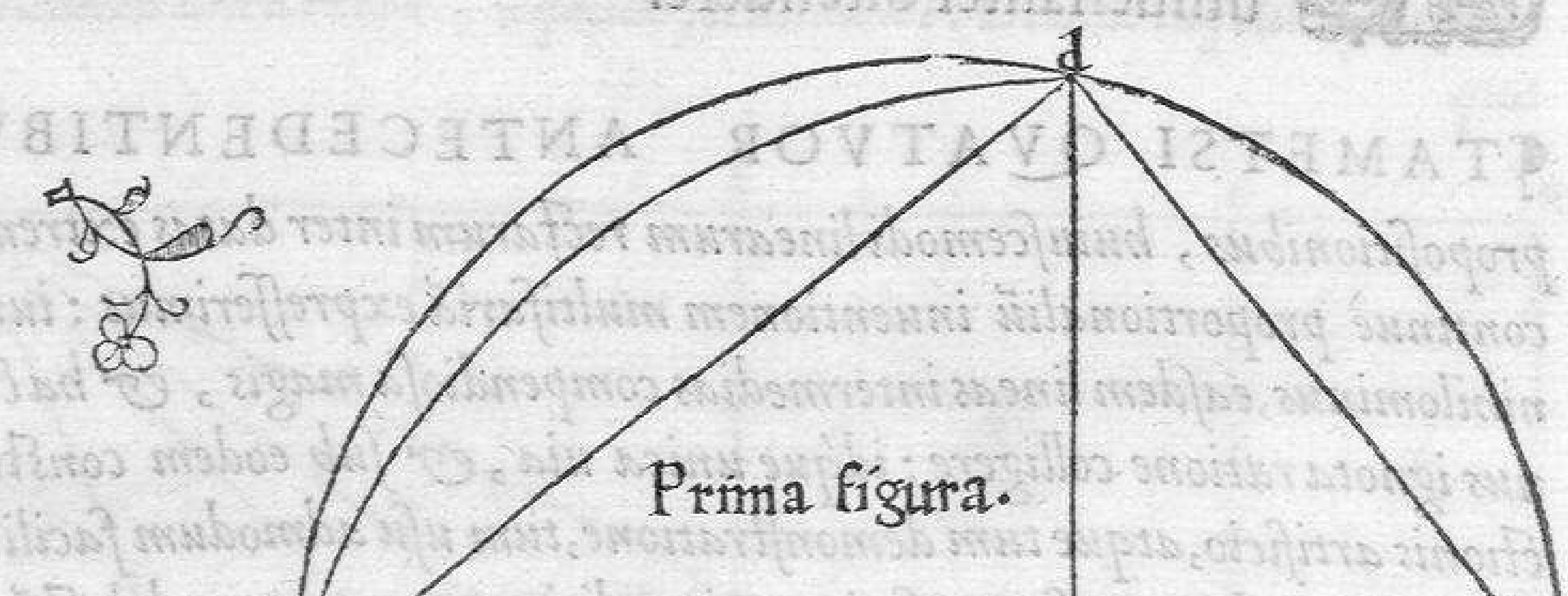
INuentionem supradictarum linearum, continuam proportionem inter datas extremas obseruantium, uniuersaliter ostendere.

1 ¶TAMETSI QVATVOR ANTECEDENTIBVS *propositionibus, huiuscemodi linearum rectarum inter datas extremas continuè proportionaliũ inuentionem multifariã expresserimus: iuuat nihilominus, easdem lineas intermedias compendiosa magis, & hactenus ignota ratione colligere: idque unica uia, & sub eodem constructionis artificio, atque tum demonstratione, tum usu admodum facili. Vt iis partim ualeamus facere satis, qui traditionum uarietate delectãtur, & compendiosas probare uidentur adinuentiones: partim etiam, ut tam utilem, hactenúsque desideratam mathematicæ partem, totis (ut aiunt) uiribus explicemus. Hanc igitur perquirendi rationem, sola 13, atque 30 sexti elementorum opitulante perstringemus: & ex corollario tantum octauæ propositionis eiusdem sexti uniuersaliter demonstrabimus.*

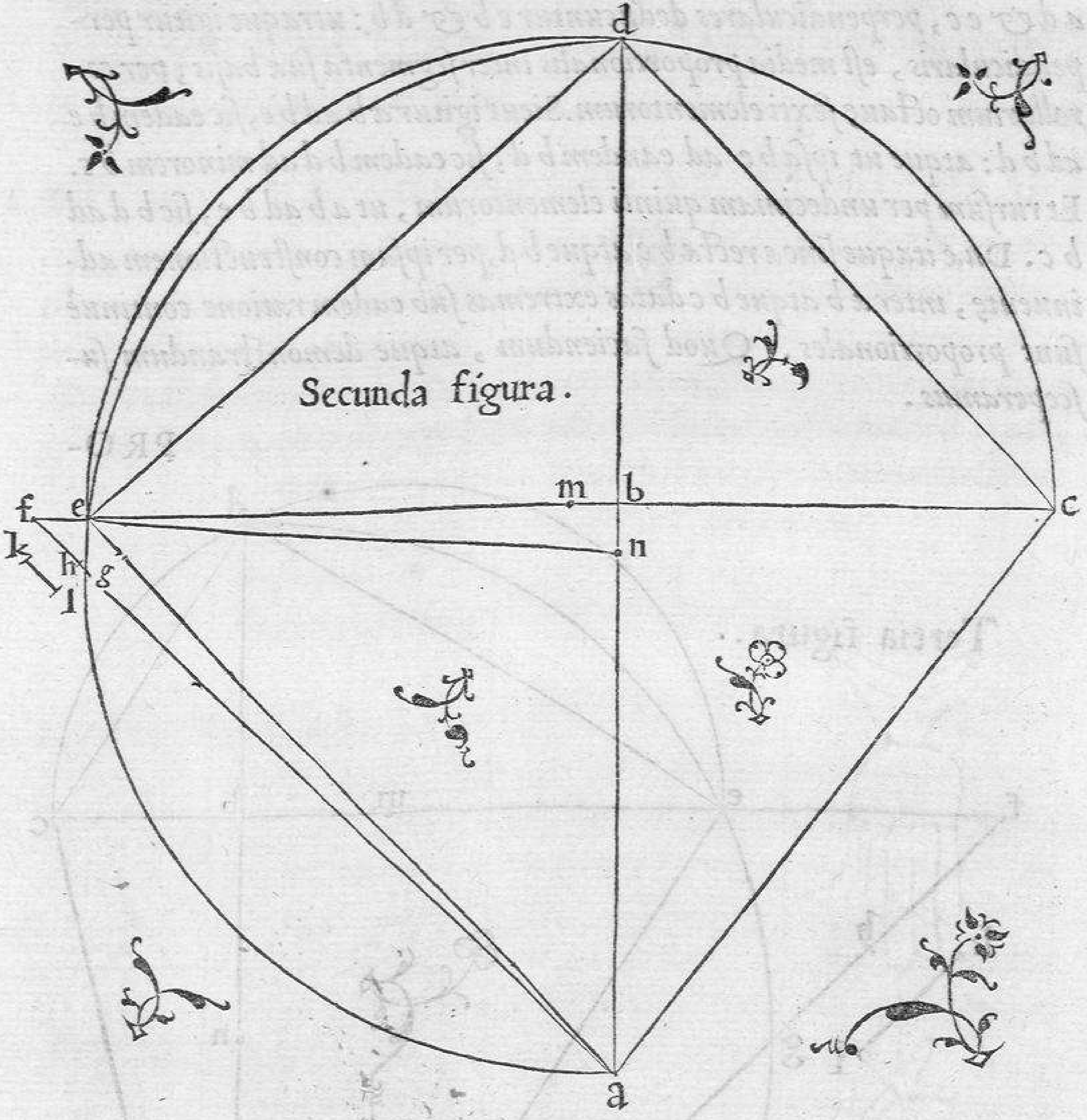
¶Constructio figuræ, omnibus linearum differentiis communis.

2 ¶SIT IGITVR (VT REM IPSAM ACV TANGAMVS) *datarum & inæqualium linearum maior a b, minor uerò b c, etiam sub quauis data rationis habitudine inuicem se habentes. Hæ postmodum lineæ datæ in rectum angulum qui sub a b c constituantur: & utraque ad partes b uersus d & e directè continuetur. Assumatur*

consequenter diameter quadrati, quod ex a b maiore describitur, utpote a f: & connexa a c linea recta, quæ erit diameter rectanguli sub ipsis lineis datis comprehensi, secetur illi æqualis a g. Residua autem g f proportionaliter diuidatur in puncto h, cuius segmentum maius sit f h, minus uerò h g, per 30 sexti elementorum, respondénsue primæ propositionis huius documentum. Et per 13 eiusdem sexti, inter f h & h g segmenta, media proportionalis inueniatur k l: cui æqualis secetur b m. Et centro m, interuallo autem m c, semicirculus describatur e d c. Diuidatur tandem a d recta bifariam in puncto n: & centro n, interuallo autem n a, uel n d, semicirculus rursum describatur a e d. Transibit enim indubitanter huius semicirculi periphæria per punctum e, ut ipsa te docebit experientia, & sequentes uidentur indicare figuræ, sub naturalibus lineis, quæ mathematicarum sunt imagines comprehensæ. Quarum prima



ma habet minorem lineam c d dimidium ipsius maioris a b, secunda uerò figura, ipso dimidio maiorem, tertia denique minorem: ut ex figurarum diuersitate, præfatæ constructionis ueritas magis elucescat.



His ita constructis, aio rectam b e fore secundam proportionalem, & b d tertiam, inter a b & b c lineas datas, sicut quidem a b ad b e, sic eadem b e ad b d, atque eadem b d ad minorem b c.

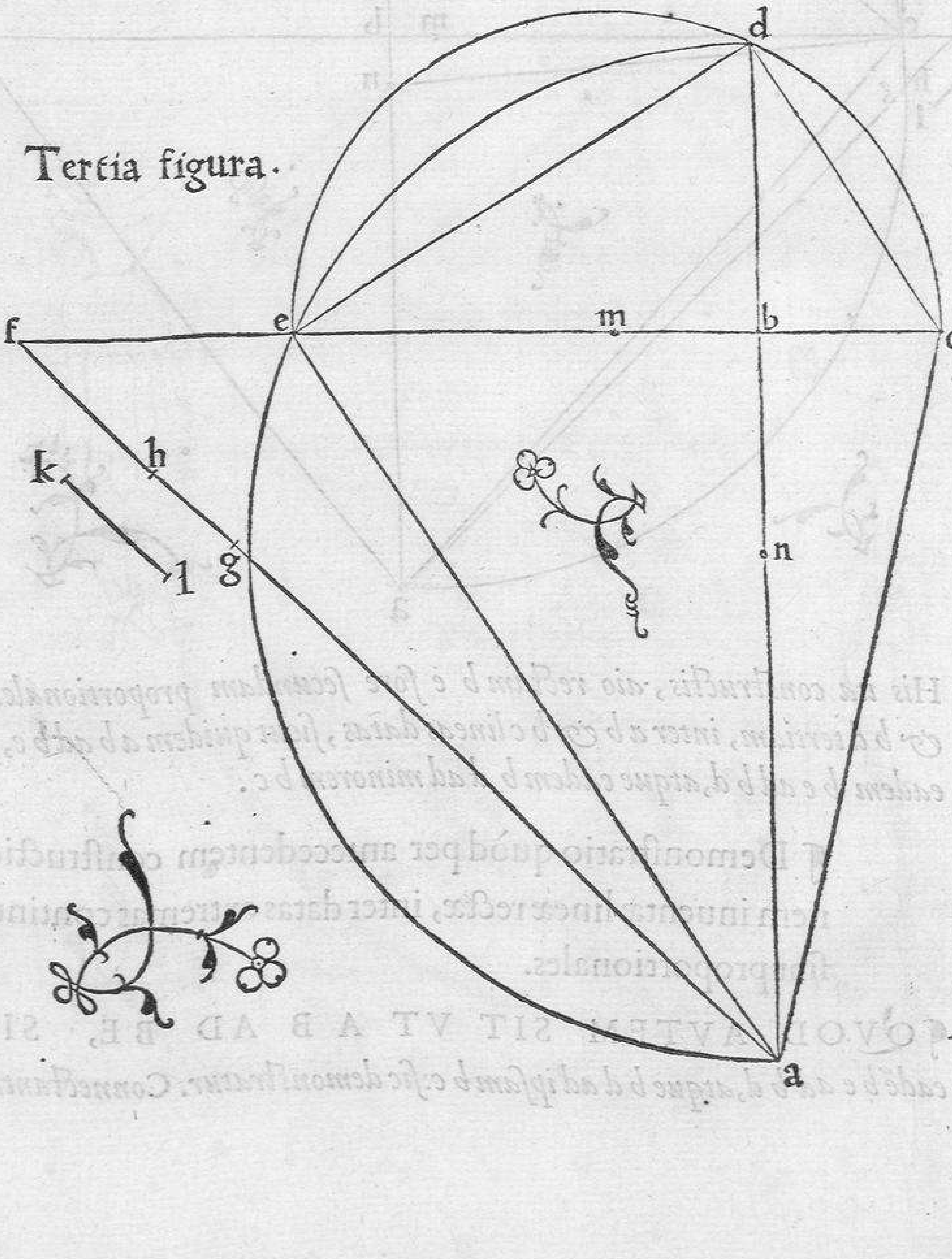
¶ Demonstratio quòd per antecedentem constructionem inuentæ lineæ rectæ, inter datas extremas continuè sint proportionales.

3 ¶QVOD AVTEM SIT VT A B AD BE, SIC *eadẽ b e ad b d, atque b d ad ipsam b c: sic demonstratur. Connectantur*

enim a e, e d & d c lineæ rectæ. Et quoniam angulus qui sub a e d, est in semicirculo, similiter & angulus e d c: uterque igitur rectus est, per 31 tertij elementorum. Ab ipsis autem angulis rectis a e d, e d c, in bases a d & e c, perpendiculares deducuntur e b & d b: utraque igitur perpendicularis, est media proportionalis inter segmenta suæ basis, per corollarium octauę sexti elementorum. Sicut igitur a b ad b e, sic eadem b e ad b d: atque ut ipsa b e ad eandem b d, sic eadem b d ad minorem b c. Et rursum per undecimam quinti elementorum, ut a b ad b e, sic b d ad b c. Duæ itaque lineæ rectæ b e atque b d, per ipsam constructionem adinuentę, inter a b atque b c datas extremas sub eadem ratione continuè sunt proportionales. Quod faciendum, atque demonstrandum susceperamus.

PRO-

Tertia figura.



PROPOSITIO VI.

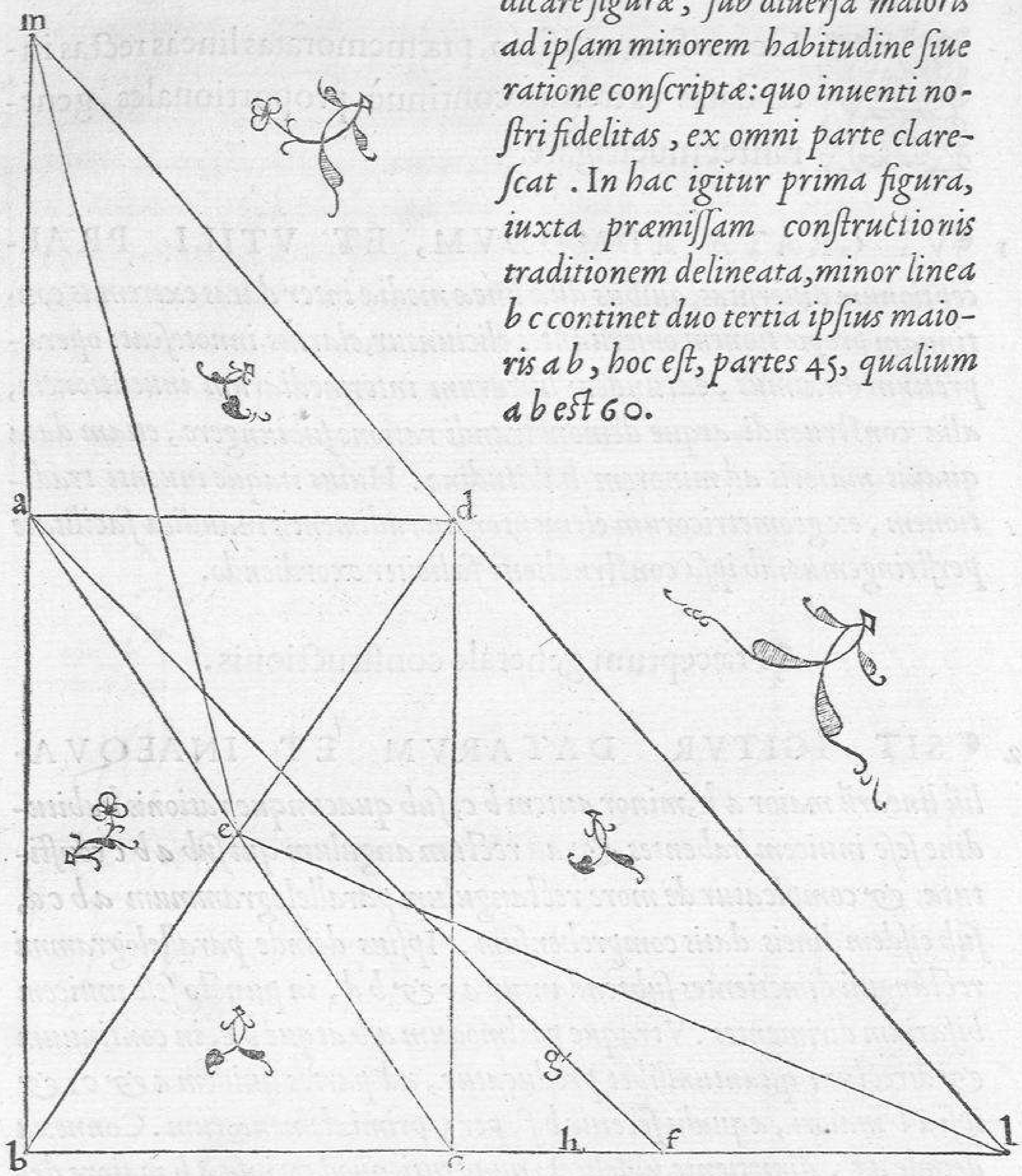
ALio rursum artificio, præmemoratas lineas rectas inter datas extremas continuè proportionales, generaliter inuestigare.

1 ¶VT GRATA ADMODVM, ET VTILI PRAE- *ceptionum diuersitas, quibus duæ lineæ mediæ inter datas extremas continuam proportionem obseruantes eliciuntur, clariùs innotescat: operæpretium duximus, earundem linearum intermediarum inuentionem, alia construendi atque demonstrandi ratione subiungere, etiam data quauis maioris ad minorem habitudine. Huius itaque inuenti traditionem, ex geometricorum elementorum rudimentis inaudita facilitate perstringemus: ab ipsa constructione fœliciter exordiendo.*

¶Præceptum generale constructionis.

2 ¶SIT IGITVR DATARVM ET INAEQVA- *liũ linearũ maior a b, minor autem b c, sub quacunque rationis habitudine sese inuicem habentes, & ad rectum angulum qui sub a b c constitutæ: & compleatur de more rectangulum parallelogrammum a b c d, sub eisdem lineis datis comprehensum. Ipsius deinde parallelogrammi rectanguli dimetientes subtendantur a c & b d, in puncto sese inuicem bifariam dirimentes. Vtraque postmodum a b atque b c, in continuum & directum quantumlibet producatur, ad partes quidem a & c: & ipsi a b maiori, æqualis secetur b f, per 3 primi elementorum. Connexa deinde a f, dimetiente uidelicet quadrati quod ex ipsa a b maiore describitur, ipsi b d uel a c dimetienti æqualis secetur a g: & residuæ g f (quæ est excessus, siue differentia dimetientis a f, super ipsum dimentem a c) æqualis secetur c h: ipsi porrò b c, æqualis itidem secetur h l. Connectatur insuper recta l d: quæ directè producta ad partes d conueniat tandem cum a b itidem producta in puncto m. Connectantur demum e l & e m lineæ rectæ, quæ de necessitate (ut ipsa te docebit experientia) æquales erunt ad inuicem. Quòd si priùs connexa fuerit e l, & illi æqualis subtensa e m: si connectatur l m, eadem uersa uice transiet per punctum d, & proinde constructio permanebit eadem.*

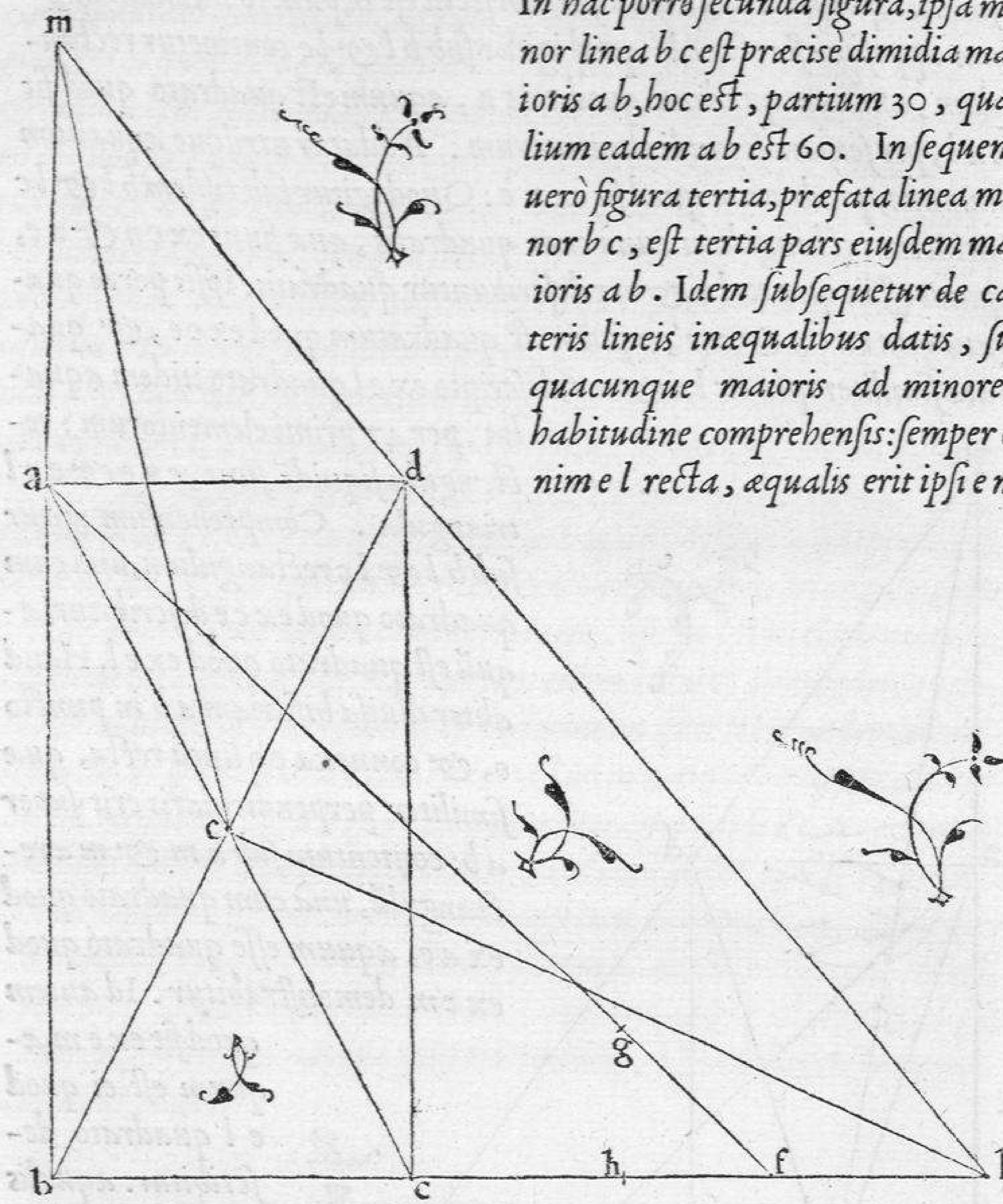
Vt ipsæ quæ sequuntur, uidetur indicare figuræ, sub diuersa maioris ad ipsam minorem habitudine siue ratione conscriptæ: quo inuenti nostri fidelitas, ex omni parte clarescat. In hac igitur prima figura, iuxta præmissam constructionis traditionem delineata, minor linea b c continet duo tertia ipsius maioris a b, hoc est, partes 45, qualium a b est 60.



His in hunc modum constructis, aio lineam rectam c l fore secundam, m a uerò tertiam proportionalem inter a b atque b c lineas datas: sicut uidelicet a b maior ad ipsam lineam c l, sic eadem c l ad ipsam m a, atque eadem m a ad minorem b c. Cadit igitur tam secunda quàm tertia proportionalis, extra rectangulum sub datis rectis comprehensum.

¶ Demonstratio, quod præfatæ lineæ rectæ per antecedentem constructionem adinuentæ, continuam inter datas extremas proportionem obseruent.

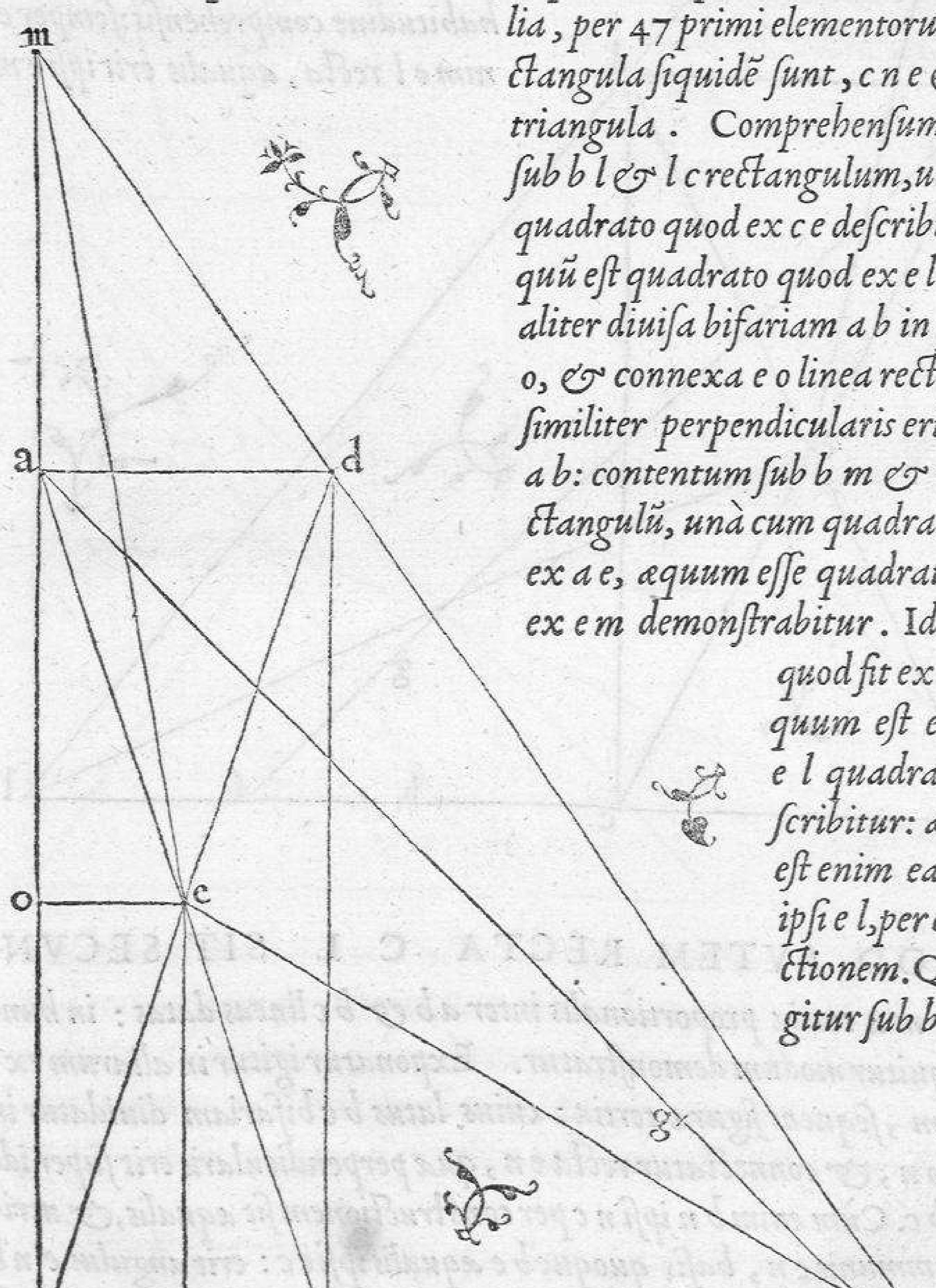
In hac



In hac porrò ſecunda figura, ipſa minor linea b c eſt præciſè dimidia maioris a b, hoc eſt, partium 30, qualium eadem a b eſt 60. In ſequenti uerò figura tertia, præfata linea minor b c, eſt tertia pars eiuſdem maioris a b. Idem ſubſequetur de cæteris lineis inæqualibus datis, ſub quacunque maioris ad minorem habitudine comprehenſis: ſemper enim e l recta, æqualis erit ipſi e m.

3 ¶QVOD AVTEM RECTA C L SIT SECVN- *da, & m a tertia proportionalis inter a b & b c lineas datas: in hunc qui ſequitur modum demonſtratur.* Exponatur igitur in aliarum exemplum, ſequens figura tertia: *cuius latus b c bifariam diuidatur in puncto n, & connectatur recta e n, quæ perpendicularis erit ſuper idē latus b c. Cùm enim b n ipſi n c per conſtructionem ſit æqualis, & utrique communis e n, baſis quoque b e æqualis ipſi e c: erit angulus e n b æqualis angulo e n c, per octauam primi elementorum, & ipſa proinde e n ſuper eadem b c perpendicularis, per decimam diffinitionem eiuſdem*

primi. Et quoniam recta b c bifariam secta est in puncto n, cui in directum apposita est recta c l: quod igitur sub b l & l c continetur rectangulum, unà cum quadrato quod ex c n, æquum est quadrato quod fit ex n l, per sextam secundi elementorum. Addatur utrisque æqualium commune, quadratum quod fit ex n e: Quod igitur sub eisdem b l & l c continetur rectangulum, unà cum quadratis, quæ fiunt ex c n & n e, æquum est iis quæ ex l n & n e describuntur quadratis. Ipsis porrò quadratis quæ ex c n & n e, æquum est quadratum quod ex c e, & quadrata similiter quæ ex l n & n e, descripto ex e l quadrato itidem æqualia, per 47 primi elementorum: rectangula siquidẽ sunt, c n e & e n l triangula. Comprehensum igitur sub b l & l c rectangulum, unà cum quadrato quod ex c e describitur, æquũ est quadrato quod ex e l. Haud aliter diuisa bifariam a b in puncto o, & connexa e o linea recta, quæ similiter perpendicularis erit super a b: contentum sub b m & m a rectangulũ, unà cum quadrato quod ex a e, æquum esse quadrato quod ex e m demonstrabitur. Id autem quod fit ex e m, æquum est ei quod e l quadrato describitur: æqualis est enim eadẽ e m ipsi e l, per cõstructionem. Quod igitur sub b m & m a cõtinetur rectangulũ unà cum



cum quadrato quod ex a e, æquum est comprehenso sub b l & l c rectã-gulo, & ei quod ex c e fit quadrato : quæ enim æqualibus sunt æqualia, & adinuicem sunt æqualia. Quod autem ex a e fit quadratum, æquum est ei quod ex e c: sunt enim a e & e c, adinuicem æquales. Detractis igi-*tur quæ ex a e & e c fiunt quadratis: reliquum sub b m & m a compre-hensum rectangulum, reliquo sub b l & l c contento rectangulo erit æ-quale: si enim ab æqualibus auferantur æqualia, quę relinquuntur sunt æqualia adinuicem. Aequalium porrò, & unum uni æqualem haben-tium angulum parallelogrammorum (sunt enim rectangula omnia pa-rallelogramma, atque inuicem ęquiangula) latera quę circum ęquales angulos sunt reciprocè proportionalia, per 14 sexti elementorum. Sicut igitur b m ad b l, sic c l ad m a. Vt autem b m ad b l, sic m a ad ipsam a d, atque d c ad c l, per quartam ipsius sexti elementorum: triangula enim m b l, m a d, d c l, per ipsam constructionem, & 29 primi elementorum, sunt inuicem æquiangula. Quę autem eidem rationi sunt eędem ratio-nes, & adinuicem sunt eędem, per undecimam quinti eorundem elemẽ-torum. Sicut igitur d c ad c l, sic eadem c l ad m a atque eadem m a ad ip-sam c d. Atqui d c ipsi a b est ęqualis, similiter & a d ipsi b c, per 34 primi elementorum: & æquales ad eandem, eandem habent rationem, & ea-dem ad æquales, per septimam quinti ipsorum elementorum. Est igitur ut a b maior ad c l, sic eadem c l ad ipsam m a, atque eadem m a ad mi-norem b c. Duæ itaque lineæ rectæ c l & m a, inter a b & b c datas extremas, sub eadem ratione proportionantur. Quod demonstrare fue-rat operæpretium.*

PROPOSITIO VII.

EAsdem iterum geminas rectas cum datis extremis continuè proportionales, etiam quæcunque inter illas acciderit habitudo, alia ratione perquirere.

1 ¶ CVM IPSA DVARVM INTERMEDIARVM *rectarum, cum datis extremis continuam proportionem obseruantium adinuentio, à tot tantísque uiris, potissimum Græcis, támque diuer-sis cogitationibus fuerit dudum perquisita, & hactenus nihilominus*

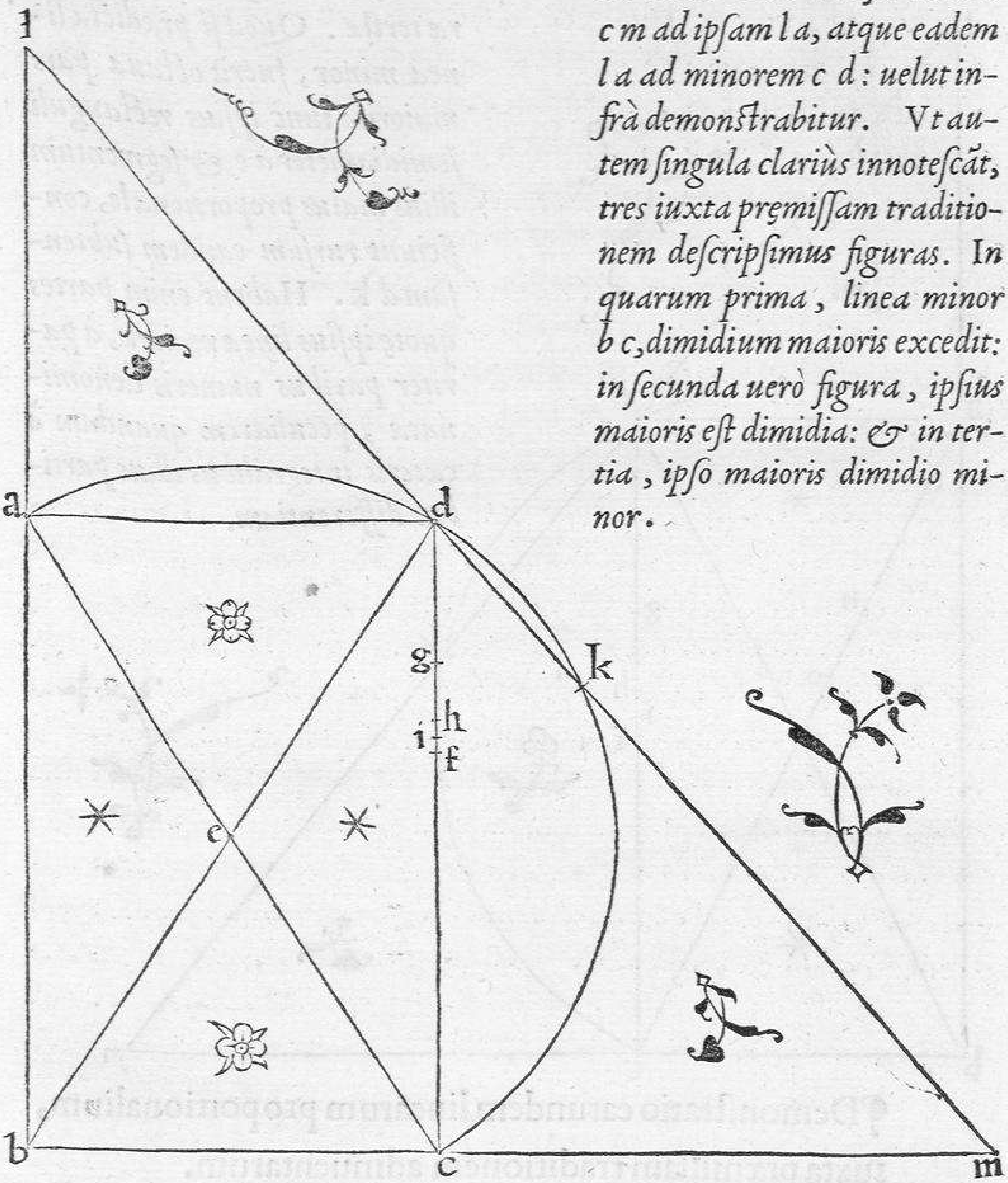
incerta : nemo ibit inficias, si aliam superaddamus uiam uniuersalem, qua præfatæ lineæ proportionales illico fient manifestæ, etiam ignota maioris ad minorem habitudine. Tum in primis, ut ipsius artis mathemathicæ, atque diuinæ illius proportionis declaremus amplitudinem: tum etiam, ut iis conemur facere satis, qui nostris inuentis & laboribus, atque eiuscemodi rerum ubertate delectantur.

¶ Constructio generalis ipsius inuenti propositi.

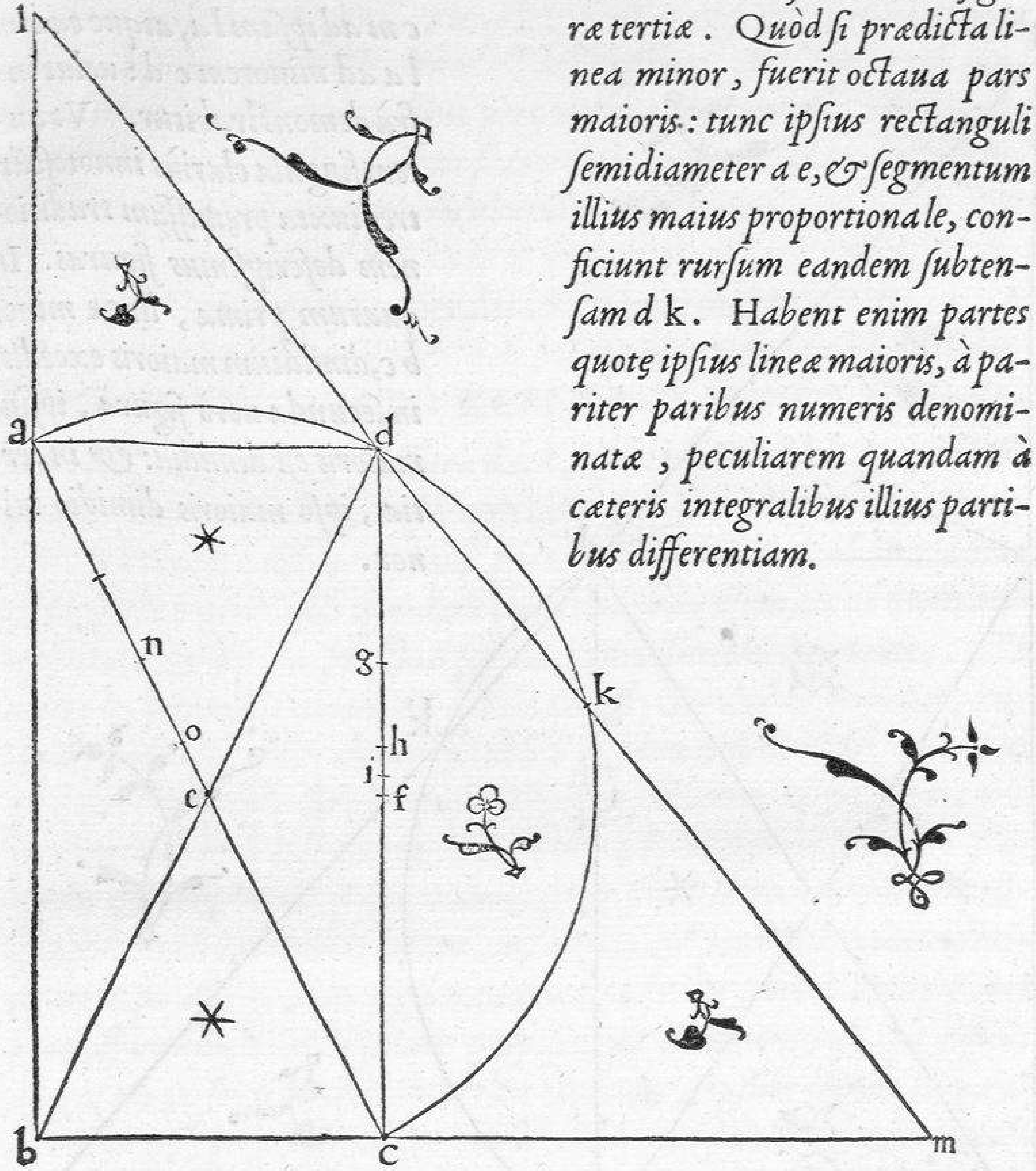
¶VT IGITVR AD REM IPSAM DEVENIA- 2
mus, sint rursum a b & b c lineæ datæ, & a b ipsa b c sub quauis data ratione maior: inter quas operæpretium sit, duas medias inuenire rectas, sub eadem ratione continuè proportionales. Describatur igitur rectangulum a b c d, sub ipsis datis lineis comprehensum, cuius dimetientes sint a c & b c, in puncto e sese inuicem bifariam dirimentes. Et centro e, interuallo autem e a uel e c aut e d, circulus describatur, cuius dimidium sit a d c, dimetiens uerò a c, idem uidelicet qui & ipsius a b c d rectanguli. Secetur postmodum ex c d latere (quod per 34 primi elementorum, ipsi maiori lineæ datæ a b est æquale) recta c f æqualis ipsi minori b c, per tertiam eiusdem primi elementorum. Reliqua autem f d, proportionaliter, seu media & extrema ratione diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit d g, minus uerò g f, per præmissum antecedentis primæ propositionis documentum, aut sæpiùs allegatam 30 sexti prædictorum elementorum. Ipsum deinde segmentũ minus g f, proportionaliter itidẽ diuidatur in puncto h, cuius segmẽtum maius sit g h, minus uerò h f: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto i, cuius segmentum maius sit h i, minus autem i f. Ipsi consequenter lineæ rectæ d i, ex tribus segmentis maioribus d g, g h, h i resultanti, æqualis subtendatur, coaptetúrue d k, per primam quarti elementorum: quæ ad utrasque partes in directum continuata, conueniat tandem cum ipsis a b & b c lateribus, siue lineis datis, ad partes a & c in directum & continuum itidem productis, in punctis l & m. His in hunc modum constructis, æqualis erit l d ipsi k m: quemadmodum ocularis te docebit experientia, & ad iustam circini rationem obseruata dimensio. Erit præterea recta c m secunda, & ipsa l a tertia proportionalis, inter a b & b c lineas à principio datas: sicut uidelicet

a b

a b maior ad c m, ſic eadem c m ad ipſam l a, atque eadem l a ad minorem c d: uelut infrà demonſtrabitur. Vt autem ſingula clariùs innoteſcāt, tres iuxta premiſſam traditionem deſcripſimus figuras. In quarum prima, linea minor b c, dimidium maioris excedit: in ſecunda uerò figura, ipſius maioris eſt dimidia: & in tertia, ipſo maioris dimidio minor.



3 ¶ *Nec te prętereat, cùm minor b c eſt dimidium maioris a b, eandem ſubtenſam d k reſultare ſimiliter ex ſegmento maiori ſemidiametri a e uel e c ipſius rectanguli a b c d, & maiori ſegmento ipſius ſegmenti minoris eiuſdem ſemidiametri, proportionaliter ſeu per mediam & extremam rationem diuiſi, utpote ex a o: ut ex eadem ſecunda licet deprehendere figura. Si autem pręfata linea minor, fecerit quartam partem ipſius maioris prædicta ſubtenſa d k, conſtabit ſimiliter ex eodem ſemidiametro, & minori ſegmento proportionali eiuſdem ſemidiame-*



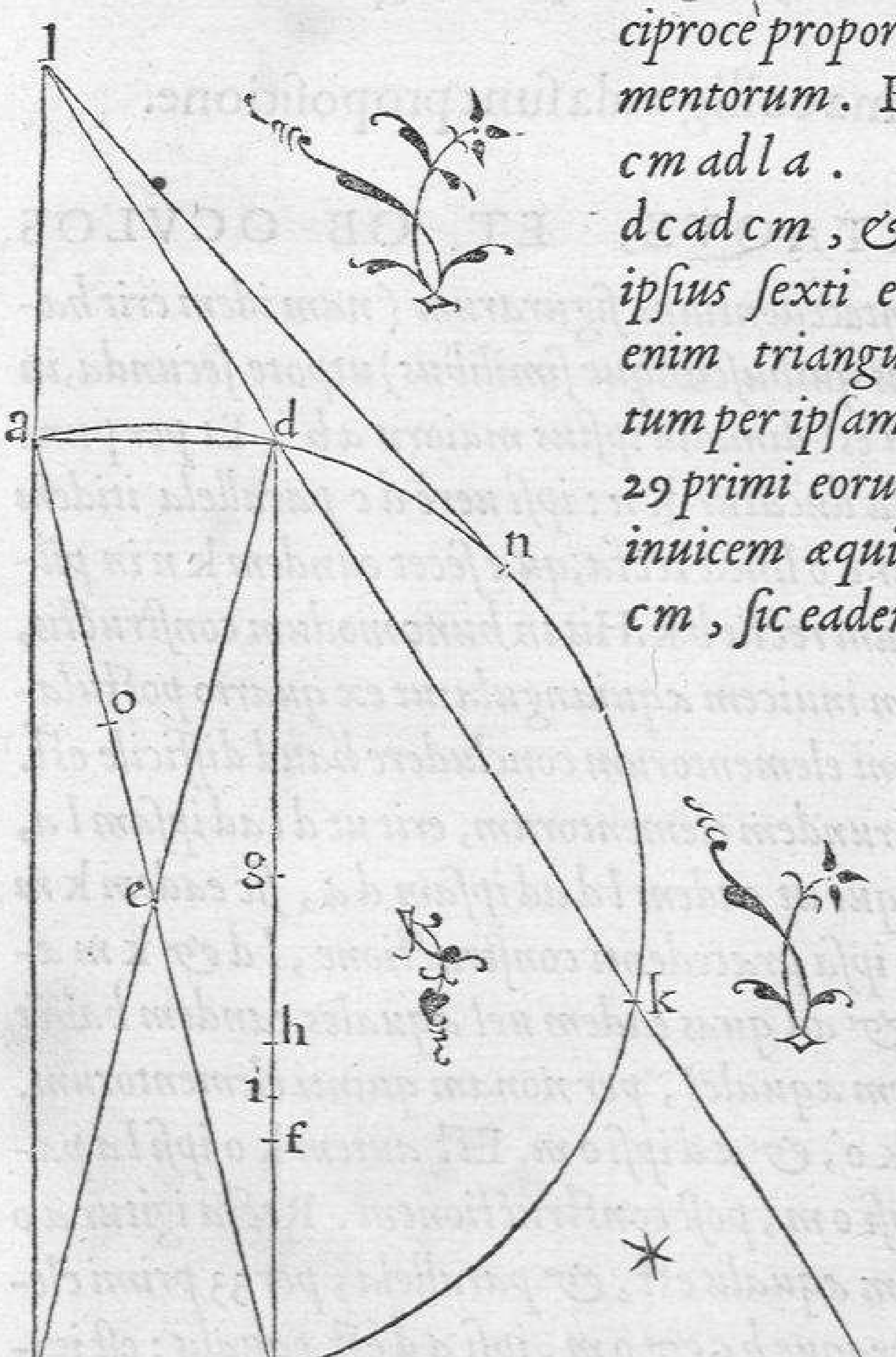
tri: uelut ex c o succedentis figuræ tertiæ. Quòd si prædicta linea minor, fuerit octaua pars maioris: tunc ipsius rectanguli semidiameter a e, & segmentum illius maius proportionale, conficiunt rursum eandem subtensam d k. Habent enim partes quotę ipsius lineæ maioris, à pariter paribus numeris denominatæ, peculiarem quandam à cæteris integralibus illius partibus differentiam.

¶Demonstratio earundem linearum proportionalium, iuxta præmissam traditionem adinuentarum.

¶QVOD AVTEM RECTA C M SIT SECVN- 4
da proportionalis, & ipsa l a tertia, inter a b & b c lineas datas: sic demonstratur. A dato puncto l, in circunferentiam ipsius a b c d circuli, contingens linea recta ducatur l n, per 17 tertij elementorum. Cùm igitur l d recta, sit æqualis ipsi k m, per ipsam constructionem: erit consequenter l k, æqualis ipsi d m. Porrò sub æqualibus rectis æqualia continentur rectangula: quod igitur sub k l & l d continetur rectangulum, æquum est ei quod sub ipsis d m & m k rectangulo continetur.

Compre-

Comprehensum autem sub k l & l d rectangulum, æquum est quadrato quod fit ex tangente l n: cui rursum quadrato, æquum est rectangulum sub ipsa b l & l a contentum, per 36 tertij elementorum. Quod igitur sub b l & l a continetur rectangulum, æquum est comprehenso sub k l & l d rectangulo: & proinde ei, quod sub d m & m k rectangulo continetur. Haud aliter eidem rectangulo, quod sub d m & m k rectis continetur, æquale demonstrabitur comprehensum sub b m & m c rectangulum: utrunque enim æquum erit quadrato a b ea linea recta descripto, quæ ducta ex puncto m eundem circulũ tanget. Quod igitur sub b l & l a continetur rectangulum, comprehenso sub b m & m c rectangulo est æquale: nam utrunque æquale ei, quod sub d m & m k rectangulo cõtinetur. Omne autem rectangulum, simul est parallelogrammum: & omnes anguli recti æquales sunt adinuicem. Aequiangulorum porrò, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum, latera quæ circum æquales angulos sunt reciprocè proportionalia, per 14 sexti elementorum. Est igitur ut l b ad b m, sic c m ad l a. Vt autem l b ad b m, sic d c ad c m, & l a ad ipsam a d, per 4 ipsius sexti elementorum: rectangula enim triangula l b m, l a d & d c m, tum per ipsam constructionem, tum per 29 primi eorundem elementorum, sunt inuicem æquiangula. Vt igitur d c ad c m, sic eadem c m ad ipsam l a, atque eadem l a ad ipsam a d. Ipsi porrò d c æqualis est a b linea data maior, & ipsi a d æqualis minor b c, per 34 primi elementorũ: & æquales ad eadem uel æquales, eandẽ habẽt rationẽ, per septimã quinti elemẽtorũ. Est igitur, ut maior datarũ rectarum a b ad rectam c m, sic eadem c m ad ip-



ſam l a, atque eadem l a ad minorem b c: quod fuerat oſtendendum.

PROPOSITIO VIII.

ALium tandem conſtruendi, atque demonſtrandi eiuſcemodi lineas proportionales intermedias, ſubiungere modum, ex proximo corollarium.

¶VT NIHIL OMITTAMVS, QVOD AD PRAE- 1
dictarum linearum inter datas extremas continuè proportionalium inueſtigationem atque oſtenſionem facere uideatur: adiunximus demum aliam & conſtruendi & demonſtrandi rationem, ex iis quæ proxima tradita ſunt propoſitione corollariè depromptam. In primis igitur, quæ ex ipſa propoſitione colligēda ſunt refricabimus: poſtea eiuſdem conſtructionis atque demonſtrationis abſolutionem perſtringemus.

¶Quæ ex proxima colligenda ſunt propoſitione.

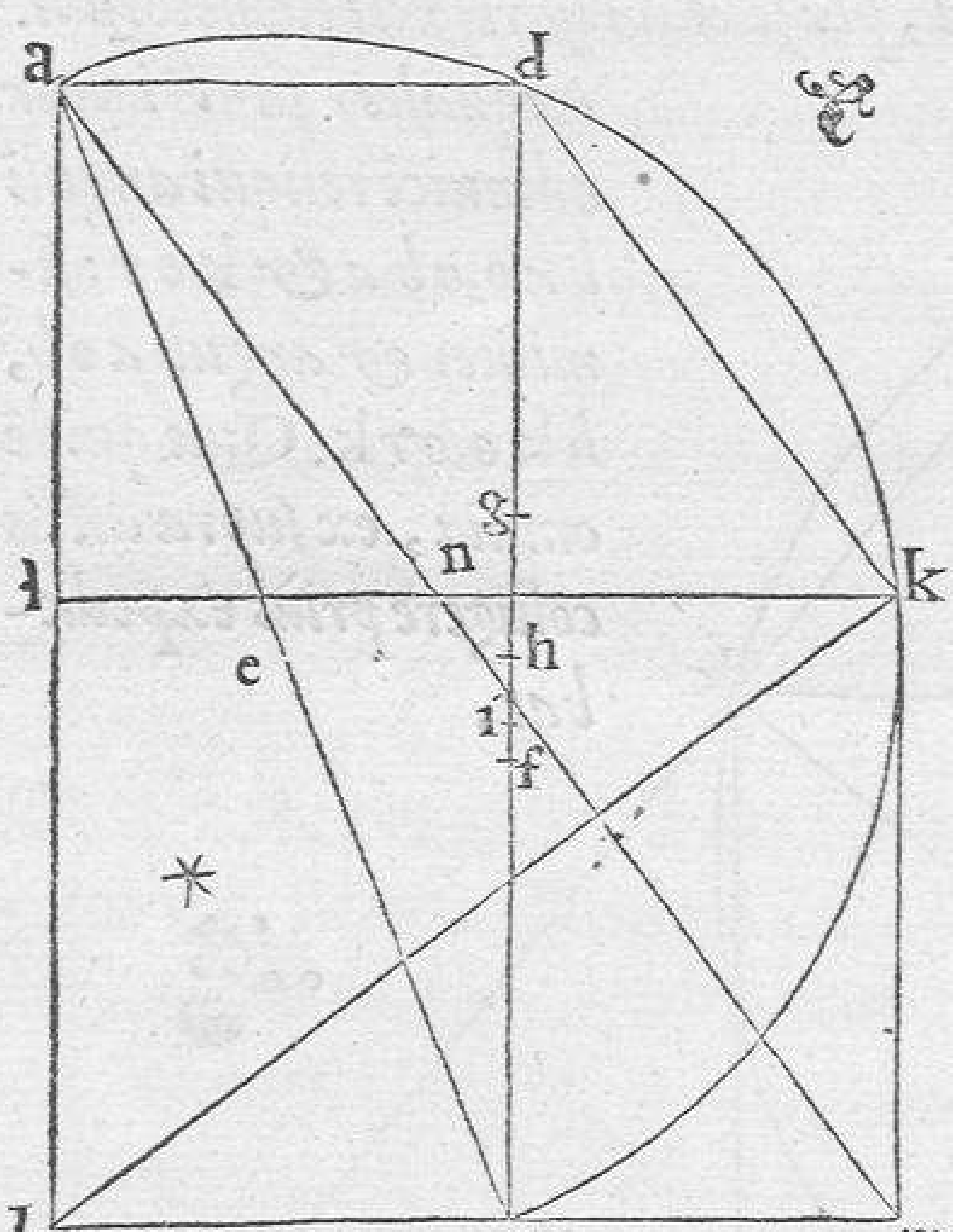
¶RESVMATVR ITAQVE, ET OB OCVLOS 2
exponatur aliqua trium antecedentium figurarum (nam idem erit habendum iudicium de cæteris quibuſcunque ſimilibus) utpote ſecunda, in qua minor linea b c ſumpta eſt dimidia ipſius maioris a b. Et per punctum k, *ipſi b m parallela ducatur* k *n: ipſi uerò d c parallela itidem agatur* k *o. Et connectatur a o linea recta, quæ ſecet eandem* k *n in pūcto r: connectatúrque demum recta b* k. *His in hunc modum conſtructis, erunt triangula l a d,* k *o m inuicem æquiangula: ut ex quarto poſtulato geometrico, & 29 primi elementorum concludere haud difficile eſt.* Hinc *per quartam ſexti eorundem elementorum, erit ut d l ad ipſam l a, ſic m* k *ad ipſam* k *o: atque ut eadem l d ad ipſam d a, ſic eadem* k *m ad ipſam m o. Atqui ex ipſa præcedenti conſtructione, l d &* k *m æquales ſunt adinuicem: & ad quas eadem uel æquales eandem habēt rationem, ipſæ ſunt inuicem æquales, per nonam quinti elementorum.* Aequalis *eſt igitur l a ipſi* k *o, & a d ipſi o m. Eſt autem* k *o ipſi l a parallela, ſimiliter & a d ipſi o m, poſt conſtructionem. Recta igitur a o utrique ipſarum l* k *& d m æqualis eſt, & parallela, per 33 primi elementorum. Et quoniam utraque b c & o m, ipſi a d eſt æqualis: eſt igitur*

tur ipsa b c æqualis eidem o m, & tota proinde b o toti c m æqualis: & triangulum consequenter a b o, triangulo d c m æquilaterum & æquiangulum. Præostensum est autem, ut d c ad c m, sic eadem c m ad l a, atque eadem l a ad ipsam a d. Est igitur per septimã quinti elementorũ ut a b ad b o, sic eadẽ b o ad o k, atque eadẽ o k (quæ ipsi o m, & proinde ipsi b c est æqualis) ad ipsam k r. Triangula itaque a b o, b o k, o k r, habent unum angulum uni angulo æqualem, utpote rectum recto, & circum eosdem æquales angulos latera proportionalia: æquiangula sunt propterea ipsa a b o, b o k, o k r triãgula, per sextam libri sexti elemẽtorum. Aequales sunt igitur adinuicẽ reliqui anguli b a o, o b a & k o r: similiter & anguli a o b, b k o, o r k. Quæ quidẽ omnia, ex supra dictis colligere priùs expediebat.

¶Summaria propositionis executio, cũ illius demonstratione.

¶OBLATIS ITAQVE DVABVS LINEIS RE-
3 *ctis inæqualibus, a b quidem maiore, & minore b c (ut ad propositam construendi atque demonstrandi rationem deueniamus) describatur rectangulum a b c d sub eisdem lineis datis comprehensum, unà cum illius dimetiente a c bifariam diuiso in puncto e. Et centro e, interuallo*

autem e a uel e c, semicirculus describatur a d c. Eliciatur postmodum, & subtendatur recta d k, ueluti proxima traditum est propositione: secta uidelicet ex c d (quæ ipsi maiori a b est æqualis) minori b c æquali, quæ sit c f, & residua f d in quatuor segmenta proportionalia distributo, in ipsis quidem punctis g h i, minoribus segmentis in punctum f terminatis: quorum segmentorum tria maiora d g, g h, h i, conficiant ipsam d k subtendendam. Deinde per punctum k, ipsi b c parallela ducatur k l: ipsi autem a b siue d c, parallela k m quam attingat b c in directum producta uersus m, in ipso puncto m. Tandem, connectatur b k & a m lineæ rectæ, secétque eadem a m ipsam k l in puncto n ut in obiecta continetur figura, in qua minor linea b c non facit dimidium maioris a b, sed quartam illius partem superat.



¶HIS ITA CON- 4
structis, manifestum est ex præmissa deductione, triangula a b m, b m k, m k n, esse inuicem æquiangula: & proinde a b rectam se habere ad b m, ut eadem b m ad m k, atque eadem m k ad ipsam k n, quæ est æqualis ipsi minori b c: parallelogrammum siquidem est a d k n quadrilaterum, & proinde utraque b c & k n ipsi a d est æqualis, & altera pendenter æqualis alteri. Recta itaq; linea b m est secunda proportionalis, & m k tertia, inter maiorem a b, & minorem b c lineas à principio datas. Haud alienũ uelim habeas iudicium, de similibus quibuscunque figuris, atque lineis inæqualibus datis. His itaque finem imponẽtes, è lineis proportionalibus, ad ipsos numeros nostrum iuuat conuertere sermonem.

PROPOSITIO IX.

DVobus numeris inæqualibus datis, duos medios numeros, sub eadem ratione continuè proportionales, pendenter supputare.

¶PRAESTAT CONSEQVENTER IDEM IN NVmeris, quod & in ipsis absoluere lineis rectis: tum ut fidem eorum faciamus, quæ de præfatis lineis rectis partim tradita, partim uerò in sequentibus libris tradenda sunt: tum etiam ut eorum quæ sequuntur demonstrationes (cùm nobis uisum fuerit operæpretium) familiariter elucidemus.

¶ De ui, atque potestate numerorum.

1 ¶ *Nulla siquidem fidelior uidetur esse uia perueniendi ad incommensurabilium magnitudinum latentes habitudines, quàm proximarum & commensurabilium magnitudinum, & ipsorum proinde numerorum auxilio. Quoniam numerus nihil aliud esse uidetur quàm mensurarum siue partium commensurabilium magnitudinum determinata multitudo. Et commensurabiles magnitudines adinuicem rationem habent, quam numerus ad numerum, per quintam decimi elementorum. Quanquam enim irrationales, incommensurabilésue magnitudines, numeris ad unguem exprimere sit impossibile: fieri tamen non facilè potest, quin numeri sub adeò proximam coincidentes rationem, fidem apertam faciant easdem magnitudines non aliter sese inuicem habere, quàm iidem polliceantur uel ostendant numeri: tanta est inter continua atque discreta, hoc est, inter ipsas magnitudines in diuisibilia semper diuisibiles, atque numeros in infinitum progredientes amicitia siue concordia. Quod igitur de lineis rectis, proximis tradidimus propositionibus: hic de numeris, ad numerósue relatis magnitudinibus, pendenter eo docere, congruum nobis uisum fuit, atque non incommodum. Oblatis porrò duobus inæqualibus numeris, duo medij numeri sub eadem ratione continuè proportionales, non usque adeò præcisa ratione colligentur, qua & ipsæ lineæ rectæ. Quamuis enim ars numerorum sit omnium clarissima, in multis tamen à doctrina continuorum superari uidetur: ob scilicet numerorum non quadratorum, aut minimè cuborum radices (quibus frequenter uti cogimur) quæ sunt surdæ, & numeris ad amussim exprimi non possunt. Satis erit tamen, quantum ad rem nostram spectare uidetur (ubi non quadrati, aut minimè cubi producentur supputando numeri) si eiuf-*

cemodi numeros intermedios, cum datis extremis continuè proportionales, aut alios quosuis similes ueritati admodum propinquos, quantum uidelicet ars ipsa patitur numerorum, supputare docuerimus.

¶ Regula propositionis executiua.

¶ EX IRRATIONALIVM ITAQVE 2 *magnitudinum praxi, quæ paucis admodum uidetur esse nota: hanc generalem & ueluti corollariam tibi collegimus, & tandem conscripsimus regulam, ipsius propositionis executiuam.* Propositis itaque *duobus inæqualibus numeris, inter quos oporteat duos inuenire numeros, sub eadem ratione continuè proportionales: secundus in primis eorundem proportionalium numerorum, hoc artificio colligendus est. Multiplicentur ipsi dati numeri adinuicem, hoc est, alter datorum extremorum ducatur in reliquum: & productus inde numerus, per ipsum primum iterum multiplicetur. Vel (& idem obtinebis) ipse numerus primus ducatur in seipsum: & procreatus inde numerus, multiplicetur per reliquum extremum. Consurgentis demum alterutro duorum modorum numeri, cubica radix extrahatur: nam ipsa radix, erit optatus numerus proportionalis, ordine secundus.* Hanc *dissimiliter, si numerus ex eorundem extremorum multiplicatione resultans, ducatur in eum qui futurus est quartus, uel idem numerus quartus per seipsum multiplicetur, & productus inde numerus ducatur in ipsum primum, atque resultantis alterutro modo numeri cubica radix supputetur: ea erit tertius proportionalis numerus.* Poterit *& idem numerus tertius, obtento (ueluti nunc expreßimus) secundo numero, aliter obtineri: ducendo uidelicet eundem secundum numerum in quartum, & prosilientis inde numeri quadratam extrahendo radicem. ipsa namque radix, eundẽ tertium exprimet numerum.* Si *tres enim numeri, continuè fuerint proportionales: qui sub extremis, æqualis est ei qui à medio fit numero, per uigesimam septimi elementorum.* Verùm *ubi supradicto modo procreati numeri non fuerint aut quadrati, aut cubi, & surdas (ut uocant) habuerint radices: habebis saltem, quorum numerorũ ipsi medij ꝓportionales*

sunt

sunt radices. Qui si in usum ueniant reuocandi: sumendæ tunc erũt radices cubicæ, uel quadratæ, ad ueras & surdas radices quàm maximè fieri poterit accedentes. quemadmodum septimo & octauo capitibus libri primi Arithmeticæ nostræ practicæ tradidimus.

¶ Supradictæ supputationis exempla.

3 ¶ *Proponantur in regulæ confirmationem, hi duo numeri 32, 4, inter quos oporteat duos medios inuenire numeros, sub eadem ratione continuè proportionales. Duc igitur 32, in 4, fient 128: quæ rursum per 32 multiplicata, reddunt 4096. Aut (si libuerit) duc 32 in sese, producentur 1024: hæc rursum multiplicata per 4, restituunt eadem 4096. quorũ radix cubica, est 16: tantus est igitur numerus secundus proportionalis optatus. Quòd si multiplicaueris eundem numerum 128, ex ductu 32 in 4 procreatum, per ipsa 4, producentur 512: aut 4 in sese, fient 16, & hæc in 32, consurgent eadem 512. quorum radix cubica est 8: tantus est igitur ipse tertius & proportionalis numerus. Ipsi nãque numeri 32, 16, 8, 4, sub ratione dupla continuè proportionantur. Eundem quoque numerũ tertium obtinebis, si multiplicaueris 16 per 4, fient enim 64: quorum radix quadrata est 8, idem uidelicet qui priùs inuentus est numerus.*

Sint rursum oblati numeri 36, & $10\frac{2}{3}$, inter quos reperiendi sint duo numeri, continuam cum ipsis extremis proportionem obseruantes. Multiplicabis ergo 36, per 10 & $\frac{2}{3}$, producentur 384: quæ rursum ducta in 36, conficiunt 13824. Vel ducito 36, in sese, fient 1296: & hæc rursum in 10 & $\frac{2}{3}$, restituentur eadem 13824. Quorum radix cubica, est 24: tantus est igitur secundus numerus proportionalis. Porrò si eundem numerum 384, ex ductu 36 in 10 & $\frac{2}{3}$ procreatũ, per ipsa 10 & $\frac{2}{3}$ multiplicaueris: uel eadem 10 & $\frac{2}{3}$ duxeris in sese, & productũ numerum (scilicet $113\frac{7}{9}$) multiplicaueris per ipsum numerum 36: resultabunt utroque modo 4996. Quorum radix cubica est 16: tantus est ipse tertius & proportionalis numerus. Quoniã ipsi numeri 36, 24, 16, 10 $\frac{2}{3}$, sub ratione sesqualtera cõtinuè proportionãtur. Eundẽ præterea numerũ tertiũ impetrabis, si multiplicaueris 24 per 10 & $\frac{2}{3}$: producẽtur enim

256. *Quorũ radix quadrata, est 16, idẽ qui prius collectus est numerus.*

¶ Corollarium primum, de duobus nnmeris proportionalibus, inter datum numerum & unitatem.

¶ SI IGITVR INTER DATVM NVMErum *& unitatem, duo medij proportionales occurrãt numeri: minor ipsorũ intermediorũ, erit cubica radix ipsius numeri dati, & quadrata radix reliqui numeri intermedij. Si enim ab unitate, quatuor numeri fuerint inuicẽ proportionales: tertius ab ipsa unitate quadratus erit, quartus uerò cubus, per octauam noni elementorum. Quoties igitur secũdus ab unitate numerus, eandem continet unitatem: toties numerus tertius eundem secundum, & quartus ipsum tertium comprehendit numerum.* Ex *ductu itaque secundi numeri ab unitate in seipsum, fit tertius: & ex ductu ipsius tertij in eundem secundum, quartus resultat numerus.* Per *ipsius ergo quadratæ, atq; cubicæ radicis diffinitionẽ: præfatus numerus secũdus est radix quadrata tertij, & simul cubica radix ipsius quarti numeri. Quemadmodum ex subiectis numerorum colligitur formulis.* 4

Numeri dupli.	*Tripli.*	*Quadrupli.*	*Quintupli.*
1. 2. 4. 8.	1. 3. 9. 27.	1. 4. 16. 64.	1. 5. 25. 125.

¶ Corollarium secundum, quòd primo 4 proportionalium numerorũ existente cubo, oportet quartũ esse cubũ.

¶ *Hinc rursum sequitur, datis quatuor numeris continuè proportionalibus: si alter extremorum fuerit cubus, reliquus extremus itidem erit cubus. Nam si duorum numerorum, duo medij proportionales fuerint numeri: ipsi extremi numeri solidi erunt, atque inuicem similes, per 21 octaui elementorum. Si igitur inter quatuor numeros cõtinuè proportionales, unus extremorum fuerit cubus: reliquus extremus itidem cubus erit. Vt ex subscriptis numerorum clarescit formulis.* 5

Numeri dupli.	*Tripli.*	*Quadrupli.*	*Quintupli.*
8. 16. 32. 64.	8. 24. 72. 216.	8. 32. 128. 512.	8. 40. 200. 1000.

¶ Incidens notandum, de duorum proportionalium numerorum inter duos cubos inuentione peculiari.

9 ¶ *Poterunt autem & ipsi duo medij numeri, inter duos oblatos cubos continuè proportionales, alia ratione in hunc qui sequitur modum supputari. Duc radicem cubicam unius, in cubicam alterius radicem, & inde productum numerum duc tandē in radicē maioris numeri cubi: fiet enim maior numerus proportionalis intermedius. Quòd si eundem productum numerum, ex mutua radicum multiplicatione procreatum, multiplicaueris per radicem numeri cubi minoris: consurget eorūdem intermediorum & proportionalium numerorum minor. Eosdem quoq; numeros intermedios rursum obtinebis, si utriusque dati cubi radicem cubicam in seipsam duxeris, & quadratū unius radicis numerū, per alterius radicē alternatim multiplicaueris. Quadratus enim maioris radicis numerus, per minorem radicē multiplicatus, dabit maiorem: quadratus uerò minoris in ipsam maiorem radicem uersa uice ductus, ipsum minorem prædictorum intermediorum restituet numerum. Quemadmodum subscripta demonstrare uidentur exempla. Id autem non in rationalibus tantummodo numeris: sed & in surdis, hoc est, irrationales habentibus radices, indifferenter obseruandum esse uelim non ignores.*

Exemplum iuxta primum modum.	*Exemplum secundi modi.*
Cubus 8. 16. 32. 64. *Cubus.*	*Cubus.* 8. 16. 32. 64. *Cubus.*
℞ *cubi* 2 < 8 > 4 ℞ *cubi*	℞ *cubi.* 2. 4 ℞ *cubi.*
productus radicum.	*Quadratus radicis* 4. 16 *Quadrat⁹ radicis.*

¶ Corollarium tertium, de successione quatuor numerorum continuè proportionalium.

7 ¶ *Sequitur consequenter, inter unitatem & primum octonariū numerum scilicet 8, atque inter binarium & 16 octonarium secundum, inter ipsum quoq; ternariū & octonarium tertiū scilicet 24, & cōsequenter inter quaternariū & succedentē octonariū quartū, utpote 32, & deinceps in hūc modū obseruato extremorū ordine: duos rationales occurrere numeros, sub eadē ratione (nempe dupla) continuè proportionales. Vt obiecta tabella demonstrat. Porrò inter ipsam unitatem, & numeros primum octonarium antecedentes, atque inter binarium & septem numeros*

1	2	4	8
2	4	8	16
3	6	12	24
4	8	16	32
5	10	20	40
6	12	24	48
7	14	28	56
8	16	32	64

præcedẽtes 16, necnõ inter ipsum ternariũ & septem numeros præcedẽtes 24, & deinceps in hunc modum facta comparatione: duos itidem coincidere numeros continuè proportionales, sed surdos, utpote, non cubicorum numerorum radices, quæ irrationales & surdæ nuncupantur.

¶ Corollarium quartũ, de solidis extremos quatuor proportionalium admittentibus numeros.

¶ *Tandem colligitur, solidum numerum rectangulum, cuius basis est* 8
quadratus primi quatuor proportionalium numerorũ continuè proportionalium, altitudo uerò quartus: æquari cubo ipsius secundi numeri. Haud dissimiliter elicitur, solidum & rectangulum numerũ, cuius basis est quadratus numeri quarti eorundem quatuor proportionalium, altitudo uerò ipse numerus primus: æquari cubo ipsius tertij numeri. Quẽadmodum ipse numerorum calculus te docebit.

¶ Exempla.

Exponantur ergo hi numeri 3, 6, 12, 24, sub ratione dupla continuè proportionati. Quadratus igitur primi numeri, est 9: per quem si multiplicaueris 24, fient 216. Tantus est igitur solidus numerus rectangulus, cuius basis est quadratus numeri primi, altitudo uerò quartus proportionalis numerus. Huic æquatur cubus secundi numeri, qui est 6: nam sexies 6, efficiunt 36, & rursum sexies 36, conficiunt 216. Fiat autem *quadratus ex numero 24, is erit 576: quẽ si per 3 multiplicaueris, prodibit solidus numerus rectangulus 1728, cuius basis est quadratus numeri quarti, altitudo uerò primus proportionalis numerus. Huic rursum æqualis est cubus numeri tertij, ipsius uidelicet numeri 12: quoniã duodecies 12 faciunt 144, & rursum duodecies 144, restituunt 1728.*

¶PROPOSITIO X.

QVAE ex ipsis quatuor numeris continuè proportionalibus suboriantur proportiones, paucis colligere.

¶EX PRAEDICTIS AVTEM QVATVOR NVMEris, *sub eadem ratione continuè proportionalibus, sequentes deducuntur*

sub-

ſubinferunturue numerorum proportiones: quarum adminiculo, una regula ex ipſa quatuor numerorũ proportionalium harmonia data, multæ & admodum utiles regulæ pendenter elici poſſunt.

De quatuor proportionalium numerorum differentiis.

1 ¶ *In primis ipſorum quatuor numerorum continuè proportionaliũ differentiæ: itidem ſub eadem ratione continuè ſunt proportionales.* Reſumantur enim hi quatuor numeri 32, 16, 8, 4, ſub ratione dupla cõtinuè proportionales. Clarum eſt ipſorum numerorum differentias, eſſe 16, 8, 4: quæ ſub ratione dupla, quemadmodum & ipſi dati numeri, continuè proportionantur.

¶ De ipſorum quatuor proportionalium æquè multiplicibus, aut ſubmultiplicibus.

2 ¶ *Datis inſuper quatuor numeris continuè proportionalibus: illorum æquè multiplices aut ſubmultiplices numeri, continuè itidem erunt proportionales.* Nam ſi prædictorum numerorum continuè proportionalium 32, 16, 8, 4, triplos (uerbi gratia) acceperis numeros, utpote, 96, 48, 24: 12, offendes illos in eadẽ ratione, qua & ipſos numeros datos, continuè itidem proportionari. Aut ſi eorundem numerorum 32, 16, 8, 4, ſubduplos ſiue dimidios ſumpſeris numeros: utpote, 16, 8, 4, 2: hi erunt ſub ratione dupla, quemadmodum & ipſi dati numeri continuè proportionati. Partes enim, & æquè multiplicia, eandem rationem habent ſumpta adinuicem, per 15 quinti elementorum.

¶ Alia proportionis illatio notanda.

3 ¶ *Eiſdem præterea quatuor numeris proportionalibus datis, ſi ex ipſis quatuor adgregatus numerus, per quemlibet eorundem numerorum ordine diuidatur: quoti ex diuiſionibus ſingulatim procreati numeri, erunt pariter continuè proportionales.* Repetãtur enim præaſſumpti numeri 32, 16, 8, 4, qui ſimul iuncti conficiunt 60. Si diuidantur ergo 60, in primis per 4, deinde per 8, poſtmodum per 16, tandem per 32: procreabuntur hi numeri 15, $7\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$, ſub eadẽ ratione qua & ipſi dati numeri continuè proportionales.

¶ De permutata ſupradictorum numerorum proportione.

4 ¶ *Præter ſupradictas, alias etiam quamplurimas, ex eiſdem quatuor numeris proportionalibus, licebit elicere proportiones: tum maximè, ex ſedecima quinti elementorum permutatim arguendo.*

Eandem nanque rationem habent (ut priùs assumptis utamur numeris) 32, ad 8, quam 16, ad 4: nempe quadruplam. Idem habendum est *iudicium, de datis quibuscunque numeris sub continua aut discontinua proportione colligatis.*

¶ De eorundem numerorum proportione, quæ composita, atque diuisa nuncupatur.

¶ *Oblatis rursum præfatis numeris continuè proportionalibus* 32, 16, 5
8, 4, *si componantur* 32, & 16, *fient* 49: *numeri autem* 8, & 4, *simul iuncti efficiunt* 12. *Eandem itaque rationem habent* 48, *ad* 16, *quam* 12, *ad* 4: *utrobique enim tripla ratio comperitur. Quapropter à diuisis ad compositos numeros facta relatione, proportio suboritur: tametsi ab alio denominata numero. Haud dissimiliter proportionem inferre licebit, à compositis ad diuisos arguendo numeros: quemadmodum ex præassumptis numeris, uel facilè colligitur. Hæc autem ex* 17 & 18 *quinti elementorum fiunt manifesta.*

¶ Conditio quatuor proportionalium numerorum ualde notanda.

¶ *Nec prætermittenda est eorundem quatuor proportionalium nume-* 6
rorum ex decimanona septimi elementorum deprompta conditio: ut scilicet tantus sub extremis, quantus sub intermediis inuicem multiplicatis, producatur numerus. Quemadmodum ex supradictis 4 *numeris* 32, 16, 8, 4, *uel facilè colligitur. Siue enim multiplicentur* 32 *per* 4, *aut* 16 *per* 8: *idem nascetur numerus, utpote* 128. *Haud alienum uelim habeas iudicium, de cæteris numeris datis continuè uel discontinuè proportionalibus.*

LIBRI PRIMI FINIS.

RERVM MATHEMATICARVM HACTENVS DESIDERATARVM LIBER SECVNDVS.

¶PROPOSITIO I.

QVAM rationem habeat circunferentia circuli ad diametrum, consequēter inuestigare: rectámue lineam eidem circunferentiæ æqualem, ex ipso colligere diametro.

1 ¶ABSOLVTA LIBRO PRIMO DVARVM RE*ctarum, inter datas extremas continuè proportionalium, inuentione diuersa, atque simul ostenso, qualiter inter duos oblatos numeros inæquales, duo medij numeri continuè itidem proportionales colligantur: Consentaneum esse uidetur, ut hoc libro secundo, rationem quam habet circunferentia ad circuli diametrum ostendamus, saltem quantum fieri poterit uero proximam ipsiue circunferentiæ uel datæ eius parti, rectam æqualem asſignemus, & è converso.* Deinde circulum *ipsum metiri, & tandem in quadratum æquale, datúmue quadratū in æqualē circulū, pluribus modis reuocare doceamus.* Hæc enim *sunt, quæ unà cum præfatis lineis proportionalibus, in re mathematica potisſimū desiderari uidebātur: utpote, à quibus cętera omnia, quę duobus sequentibus libris (*Deo fauente*) trademus, pendere fit manifestum.*

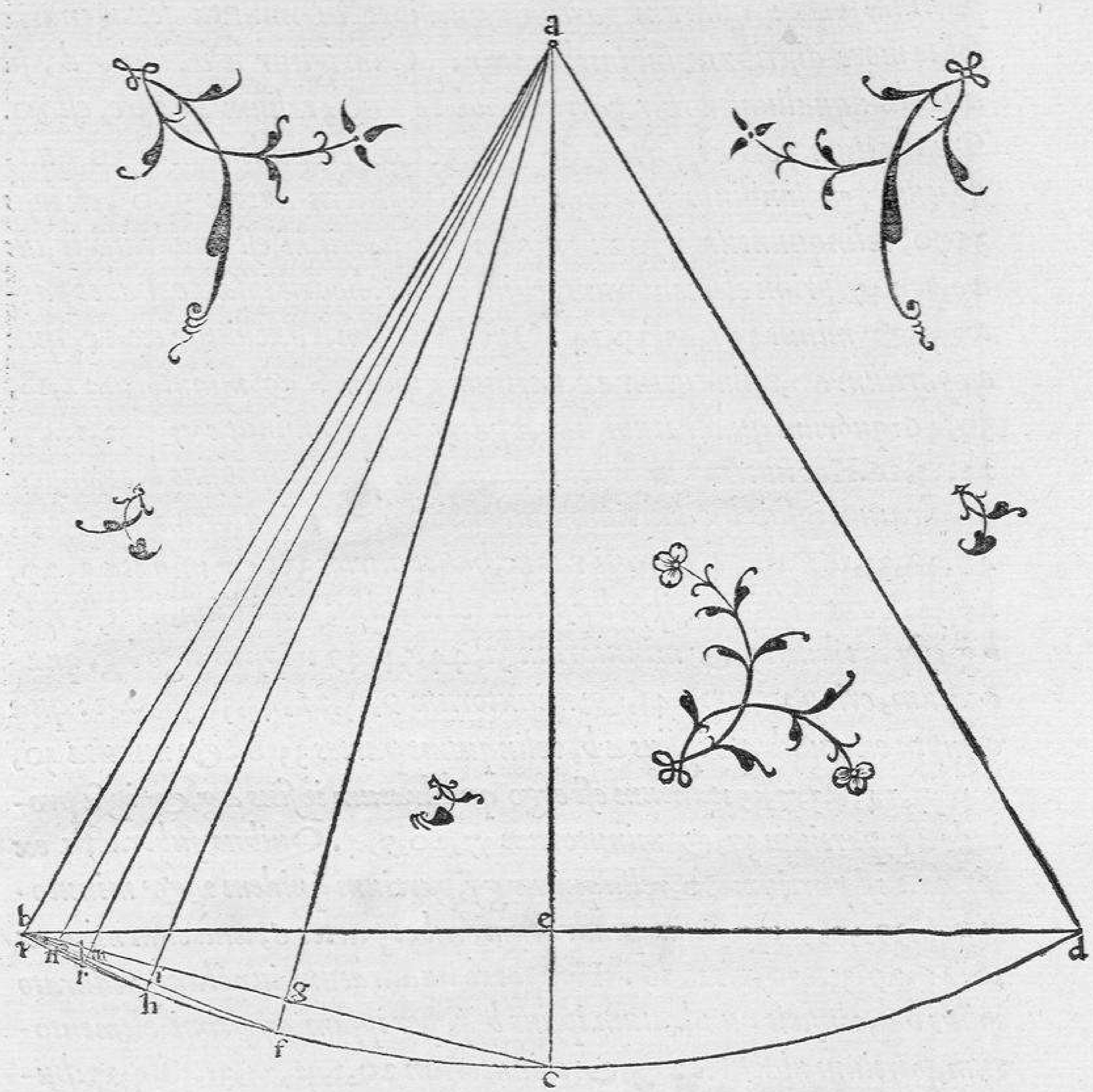
¶ Constructio figuræ generalis.

2 ¶SIT IGITVR SEXTA PARS CIRCVLI *a b c d, sub æquilatero & æquiangulo triangulo a b d, & sectione b c d, comprehensa. Ipsum enim triangulū æquilaterum a b d, est sexta pars hexagoni regularis in dato circulo descripti: cuius unumquodque latus, æquum est eiusdem circuli semidiametro, per corrolarium* 15 *quarti elementorum. Diuidatur itaque arcus b c d, bifariam, in ipso quidem puncto c, per* 30 *tertij eorundem elementorum: & connectatur semidiameter a c, qui secet ipsam b d, rectam in puncto e. Secabit igitur a c, eandem rectam b d, bifariam, atque ad*

rectos angulos. Cùm *enim arcus b c, arcui c d, sit æqualis, per ipsam constructionem: æqualis est propterea angulus b a c, angulo c a d, per 27 ipsius tertij elementorum.* Et *quoniam a b, ipsi a d, est æqualis, & utrique communis a e: æqualis est basis b e, trianguli b a e, ipsi basi e d, trianguli e a d, per quartam primi elementorum: & angulus consequenter a e b, æqualis angulo a e d, & proinde uterque rectus.* Se*cat igitur a c, recta, eandem b d, rectam bifariam, & ad rectos angulos, in ipso puncto e.* Diuidatur *consequenter arcus b c, bifariam in puncto f: & connectantur a f, & b c, lineæ rectæ.* Secabit *itaque a f recta, ipsam b c rectam, bifariam, & ad rectos angulos: sit illarum communis intersectio, punctum g.* Arcus *deinde b f, diuidatur bifariam in puncto h: & connectantur a h, atque b f, lineæ rectæ.* Ip*sa igitur a h, bifariam secabit eandem b f, atque ad rectos simul angulos: secent sese igitur adinuicem in puncto i.* Haud *dissimiliter arcus b h, diuidatur bifariam in puncto l, per ipsam 30 tertij elementorum: & cõnectantur a l, & b h, lineæ rectæ, sese inuicem intersecantes in puncto m.* Diuidatur *tandem arcus b l, bifariam, in puncto n: & connectatur a n, linea recta, quæ secet rectã b l, in puncto o.* Secabit *ergo a l, ipsam b h, bifariam, & ad rectos angulos in ipso puncto m: & a n, ipsam b l, in eodem pũcto o: quemadmodum de rectis a c, atque b d, fuit demonstratum.* Postremò, *per datum punctum n, ipsi b l, parallela ducatur p n r, per 31 primi elementorum: quæ unà cum a b, & a l, directè productis, conueniat in ipsa puncta p & r.*

¶ Summaria constructorum recollectio.

¶ His *constructis, clarum est in primis omnia triangula, ad uertices e, g, i, m, o, consistentia, fore rectangula.* Rectam *insuper b d, subtendere sextam circunferentiæ partem: b c uerò, duodecimam: & b f, uigesimãquartam: ipsam deinde b h, quadragesimãoctauam: atque b l, eiusdem circunferentiæ partem nonagesimamsextam.* Et *proinde ipsam b l, rectam, esse latus polygoni æquilateri & æquianguli, in dato circulo (cuius centrum est a) descripti, habentis latera 96: ipsam uerò p r lineam rectam, esse latus polygoni æquilateri, & æquianguli, laterum similiter 96, circa eundem circulum descripti.*



¶Quòd ratio circunferentiæ, ad ipsius circuli diametrum, est maior tripla decupartiente septuagesimas primas.

¶AIO ITAQVE PRIMVM, AMBITVM SI-
4 *ue circunferentiam propositi circuli, cuius centrum est a, ad ip-*
sius circuli diametrum rationem habere, tripla decupartiente se-
ptuagesimas primas utcunque maiorem. Sit enim ab, uel ac, se-
midiameter partium 60, qualium uidelicet totus diameter est

partium 120: quarum partium quælibet in minuta sexagenaria solito more distributa subintelligatur. Cùm igitur a b, ipsi b d, sit æqualis: qualium igitur partium a b. est 60, talium ipsa b e, est 30. Quadratum porrò ipsorum 60, est 3600: eorundem uerò 30 quadratum, est similium partium 900. Subtractis autem 900, ex ipsis 3600, relinquuntur 2700: totidem ergo partium est quadratũ ipsius a e, per 47 primi elementorum, cuius radix, hoc est ipsa a e, habet partes 51, & minuta 57,41,29,14. Quòd si eadem a e, tollatur ex a c, quæ est partium 60, relinquetur e c, partium quidem 8, & minutorum 2,18, 30,46: quorum quadratum, habet partes 64, & minuta 37,1,32,1,47, 22,35,16. Hoc autem quadratum, iunctum quadrato ipsius b e, conficit quadratum ipsius b c, partium quidem 964, & minutorum 37,1,32,1, 47,22,35,16: cuius quadrati radix, habet partes 31, & minuta 3,29, 49,38. Tanta est igitur ipsa b c, linea recta, cuius dimidium, hoc est, ipsa b g, est partium 15, & minutorum 31,44,54,49. Ipsius ergo b g, quadratum, erit partium 241, & minutorum 9,15,22,45,51,56,52,1: quæ dempta ex quadrato ipsius a b, relinquunt partes 3358, & minuta 50, 44,37,14,8,3,7,59: tantum est ergo quadratum ipsius a g, & ipsa proinde a g, partium 57, & minutorum 57,20,9,4. Quibus subtractis ex a f, quæ est partium 60, relinquitur g f, partium quidem 2, & minutorum 2,39,50,56: quorum quadratum, habet partes 6, unà cum minutis 10,46,29,35, 40,1, 12, 16. Hoc porrò quadratum, iunctum quadrato ipsius b g, conficit quadratum ipsius b f, per ipsam 47 primi elementorum, partium uidelicet 245, & minutorum 20,1,52,21,31,58,4,17: huius autẽ quadrati radix, habet partes 15, & minuta 39,47,17,32. Tãta est igitur ipsa b f: & ipsius propterea b f dimidium, erit partium 7, & minutorum 49,53,38,46. Quorum quadratum habet partes 61, & minuta 20,0,28,1,2,18,51,16: quæ dempta ex 3600 partibus quadrati ipsius a b, relinquunt quadratum ipsius a i, partium quidem 3538, & minutorum 39,59,31,58,57,41,8,44. Huius porrò quadrati radix, hoc est ipsa recta a i, habet partes 59, & minuta 29,12,5,29: quibus detractis ex a h, quæ est partium 60, relinquitur i h, recta, partium 0, sed minutorum 30,47,54,31. Horũ autem quadratum, habet itidem 0, sed minuta tantùm 15,48,32,46,14, 16,4,1. Hoc autem quadratum, si componatur

ponatur quadrato ipsius b i, consurget quadratum ipsius b h, per sæpiùs allegatam 47 primi elementorum, partium quidem 61, & minutorum 35, 49, 0, 47, 16, 24, 55, 17: quorum radix habet partes 7, & minuta 50, 54, 8, 25, 16. Tanta est igitur ipsa b h: cuius dimidium, hoc est ipsa b m, est partium 3, & minutorum 55, 27, 4, 12, 38. Eiusdem itaque b m quadratũ, habet partes 15, & minuta 23, 57, 15, 11, 45, 19, 55, 43, 36, 4: quæ subducta ex 3600 partibus quadrati ipsius a b, relinquunt quadratum ipsius a m, partium uidelicet 3584, & minutorum 36, 2, 44, 48, 14, 40, 4, 16, 23, 56. Horum porrò quadrata radix, siue recta a m, habet partes 59, & minuta 52, 17, 31, 40, 3: reliqua igitur m l, erit partium 0 (cùm tota a l sit partium 60) & minutorum 7, 42, 28, 19, 57. Ipsius porrò m l quadratum, erit partium itidem 0, sed minutorum 0, 59, 24, 40, 32, 36, 31, 50, 0, 9: quæ iuncta ipsi quadrato quod ex b m, conficiunt quadratum ipsius b l, partium 15, & minutorũ 24, 56, 39, 52, 17, 56, 27, 33, 36, 13. Horum denique radix, habet partes 3, & minuta 55, 34, 53, 34: tanta est igitur ipsa b l, hoc est, latus polygoni regularis habentis latera 96. Harum autem linearum & quadratorum supputationes, subscripta perstrinximus tabella.

	Supradictæ lineæ rectæ.							*Earumdem rectarum quadrata.*									
	ptes	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	partes	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.	8̃.	9̃.	10̃.
ab.	60	0	0	0	0	0	3600	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
be.	30	0	0	0	0	0	900	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ae.	51	57	41	29	14	0	2700	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ec.	8	2	18	30	46	0	64	37	1	32	1	47	22	35	16	0	0
bc.	31	3	29	49	38	0	964	37	1	32	1	47	22	35	16	0	0
bg	15	31	44	54	49	0	241	9	15	22	45	51	56	52	1	0	0
ag.	57	57	20	9	4	0	3358	50	44	37	14	8	3	7	59	0	0
gf.	2	2	39	50	56	0	4	10	46	29	35	40	1	12	16	0	0
fb.	15	39	47	17	32	0	245	20	1	52	21	31	58	4	17	0	0
bi.	7	49	53	38	46	0	61	20	0	28	1	2	18	51	16	0	0
ai.	59	29	12	5	29	0	3538	39	59	31	58	57	41	8	44	0	0
ih.	0	30	47	54	31	0	0	15	48	32	46	14	6	4	1	0	0
bh.	7	50	54	8	25	16	61	35	49	0	47	16	24	55	17	0	0
bm.	3	55	27	4	12	38	15	23	57	15	11	45	19	55	43	36	4
am.	59	52	17	31	40	3	3584	36	0	44	48	14	40	4	16	23	56
ml	0	7	42	28	19	57	0	0	59	24	40	32	36	31	50	0	9
96. bl.	3	55	34	53	34	0	15	24	56	39	52	17	56	27	33	36	13

Porrò si partes 3, & minuta 55, 34, 53, 34, ipsius b l, multiplicentur per 96, consurget ambitus ipsius polygoni regularis, partium 376, & minutorum 55, 49, 42, 24: Et proinde ambitus eiusdem polygoni regularis laterum 96, & in dato circulo descripti, ad ipsius circuli diametrum eam uidetur habere rationem, quam partes 376, & minuta 55, 49, 42, 24, ad partes 120. Atqui præfatus semidiameter circuli triplicatus efficit partes 360: & $\frac{10}{71}$ eiusdem diametri, conficiunt partes 16, & minuta 54, 5, 55 (nam $\frac{1}{71}$ primum diametri partium 120, habet partem 1, & minuta 41, 24, 35, 30) quæ simul iuncta, reddunt partes 376, & minuta 54, 5, 55. Hæc autem minora sunt eodem ambitu polygoni, minutis 1, 43, 47, 24. Inæqualium porrò quantitatum maior, ad eandem quantitatem maiorem rationem habet, quàm minor, per octauam quinti elementorum. Ambitus propterea ipsius pentagoni regularis, laterum 96, & in dato circulo descripti, ad ipsius circuli diametrum maiorem rationē habet tripla decupartiente septuagesimas primas. Et cùm circunferentia ipsius circuli, eodem ambitu inscripti polygoni sit maior: eadē propterea circunferentia, ad ipsum diametrū maiorem à fortiori rationem obtinere uidetur eadem tripla decupartiente septuagesimas primas. Quod in primis demonstrare fuerat operæpretium.

	ptes.	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.
Diameter circuli.	120	0	0	0	0
Triplum diametri.	360	0	0	0	0
$\frac{1}{71}$ *ipsius diametri.*	1	41	24	35	30
$\frac{10}{71}$ *eiusdem diametri.*	16	54	5	55	0
Terdiameter, cum $\frac{10}{71}$.	376	54	5	55	0
Ambitus polygoni.	376	55	49	42	24
Differentia.	0	1	43	47	24

¶ Quòd ratio eiusdem circunferentiæ ad ipsius circuli diametrum, minor est tripla sesquiseptima.

¶ DICO SECVNDO, QVO EADEM CIRCVN- 5
ferentia circuli, ad ipsius circuli diametrum rationem obseruat tripla sesquiseptima minorem. Id autem ex eodem figuræ contextu, præmissáque numerorum supputatione, uel facilè colligemus. Cùm enim recta b l, inuenta sit partium 3, & minutorum 55, 34, 53, 34, qualium partium ipse diameter circuli est 120: dimidium ipsius b l, recta uidelicet b o, habebit partem 1, & minuta 57, 47, 26, 47. Horum autem quadratum,

est

est partium 3, & minutorum 51, 14, 39, 58, 27, 35, 20, 49: quæ dempta ex quadrato ipsius a b partium 3600, relinquunt quadratum ipsius a o, partes scilicet 3596, & minuta 8, 45, 20, 1, 32, 24, 39, 11. Horum *autem radix quadrata, habet partes 59, & minuta 58, 4, 20, 48: tanta est igitur ipsa a o linea recta.* Et *quoniam triangula a o b, a n p, tum ex ipsa constructione, tum ex 29 primi elementorum, sunt inuicem æquiangula: erit per quartam sexti eorundem elementorum, ut a o recta ad ipsam o b, sic a n ad ipsam n p.* Atqui *tres primæ, iam notæ sunt: nota erit igitur & ipsa quarta, per uulgatam quatuor proportionalium numerorum regulam.* Multiplicabis *igitur partem 1, & minuta 57, 47, 26, 47, ipsius o b, per 60 partes ipsius a n, fient partes 117, seu 1, 57, & minuta 47, 26, 47: traductis læuorsum singulis numerorum ordinibus, per unicum limitem.* H*æc autem diuisa per 59 partes, & minuta 58, 4, 20, 48, ipsius a o, dant pro quoto numero partem 1, & minuta 57, 50, 23, 55: tanta est igitur eadem recta p n, quæ duplata conficit totum latus p r (sunt enim p n & n r, inuicem æquales) partium quidem 3, & minutorum 55, 40, 47, 50.* H*æc igitur per 96 multiplicata, producunt ambitum ipsius circunscripti polygoni regularis habentis latera 96, partiū uidelicet 377, & minutorum 5, 16, 32:* V*ti subscripta numerorum uidetur indicare formula, quæ reliquas lineas à prima supputatione comprehendit.*

	¶Reliquæ lineæ rectæ.							¶Earundem rectarum quadrata.								
	ptes.	m.	2.	3.	4.	5.		partes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
bo.	1	57	47	26	47	0		3	51	14	39	58	27	35	20	49
ao.	59	58	4	20	48	0		3596	8	45	20	1	32	24	39	11
np.	1	57	50	23	55	0		117	47	26	47.	Rectangulū ex b o, in a n.				
pr.	3	55	40	47	50	0										
	377	5	16	32	0	0	*Ambitus circunscripti polygoni regularis laterum 96.*									

Præfatus igitur ambitus circunscripti polygoni regularis, habentis latera 96, ad circuli diametrum eam uidetur habere rationem, quam partes 377, & minuta 5, 16, 32, ad partes 120. Atqui *triplatus diameter partium 120, efficit partes 360: & septima pars ipsius diametri, est 7 partium similium, & minutorum 8, 34, 17, 8: quæ simul iuncta, conficiunt partes 377, & minuta 8, 34, 17, 8.* H*æc autem superant ambitum eiusdem circunscripti polygoni, minutis 3, 17, 45, 8.* Idem *igitur ambitus circunſcripti polygoni regularis habentis latera 96, rationem habet ad circuli diametrum tripla ſeſquiſeptima minorem. Et quoniam circunferentia ipſius circuli, minor eſt ipſo ambitu eiuſdem circunſcripti polygoni: à fortiori itaque præfata circunferentia circuli, rationem habet ad ipſum diametrum tripla ſeſquiſeptima minorem. Quod ſecundo loco demõſtrandum ſuſceperamus.*

Supradictorum formula.	ptes.	m̄	2̄	3̄	4̄
Diameter circuli.	120	0	0	0	0
Triplum circuli.	360	0	0	0	0
$\frac{1}{7}$ *ipſius diametri.*	17	8	34	17	8
Terdiameter cum $\frac{1}{7}$.	377	8	34	17	8
Ambitus polygoni.	377	5	16	32	0
Differentia.	0	3	17	45	8

¶Circunferentiam circuli, ad ipſum diametrum rationem habere triplam undecupartientem ſeptuageſimas octauas.

¶EX SVPRADICTIS TANDEM COLLIGI- 6
tur, rationem circunferentiæ circuli ad ipſum diametrũ, inter ipſam triplam decupartientem ſeptuageſimas primas, & triplam ſeſquiſeptimam de neceſsitate uerſari. Vera itaque ratio eiuſdem circunferentiæ ad diametrum circuli, ex ipſis duabus uel facilè componetur: addendo uidelicet adinuicem fractas earundem rationum quantitates, utpote $\frac{1}{7}$, *&* $\frac{10}{71}$, *numeratorem quidem numeratori, & denominatorem denominatori. Conſurgent enim* $\frac{11}{78}$, *mediam quãdam rationem inter rationes ſupradictas exprimentia: minorem uidelicet tripla ſeſquiſeptima, & maiorem tripla decupartiente ſeptuageſimas primas: & proinde omnium fideliſsimam. Quemadmodum ex ſubſcriptis numerorum elicitur formulis. In quarum prima,* $\frac{1}{7}$ *&* $\frac{11}{78}$ *reducuntur ad* $\frac{155}{546}$: *quorum 78 fiunt ab* $\frac{1}{7}$, *& 77 a b ipſis* $\frac{11}{78}$. *In ſecunda uerò formula, præfata* $\frac{11}{78}$ *&* $\frac{10}{71}$ *reducũtur ad* $\frac{1561}{5538}$: *quorum 781 procreãtur ab ipſis* $\frac{11}{78}$, *& 780 ab eiſdem* $\frac{10}{71}$. *Et quemadmodum 78, ipſa 77 ſola unitate ſuperant: ſic & ipſa 781 eadem 780 ſuperare uidentur. Circunferentia itaque circuli, ad ipſum, diametrum rationem obtinet triplam undecupartientem ſeptuageſimas octauas: qualem propemodum obſeruant partes 376, & minuta 55, 23, 4, 36,*

	155.			1561.	
78.		77.	781.		780,
$\frac{1}{7}$.	×	$\frac{11}{78}$.	$\frac{11}{78}$.	×	$\frac{10}{71}$.
	546.			5538.	

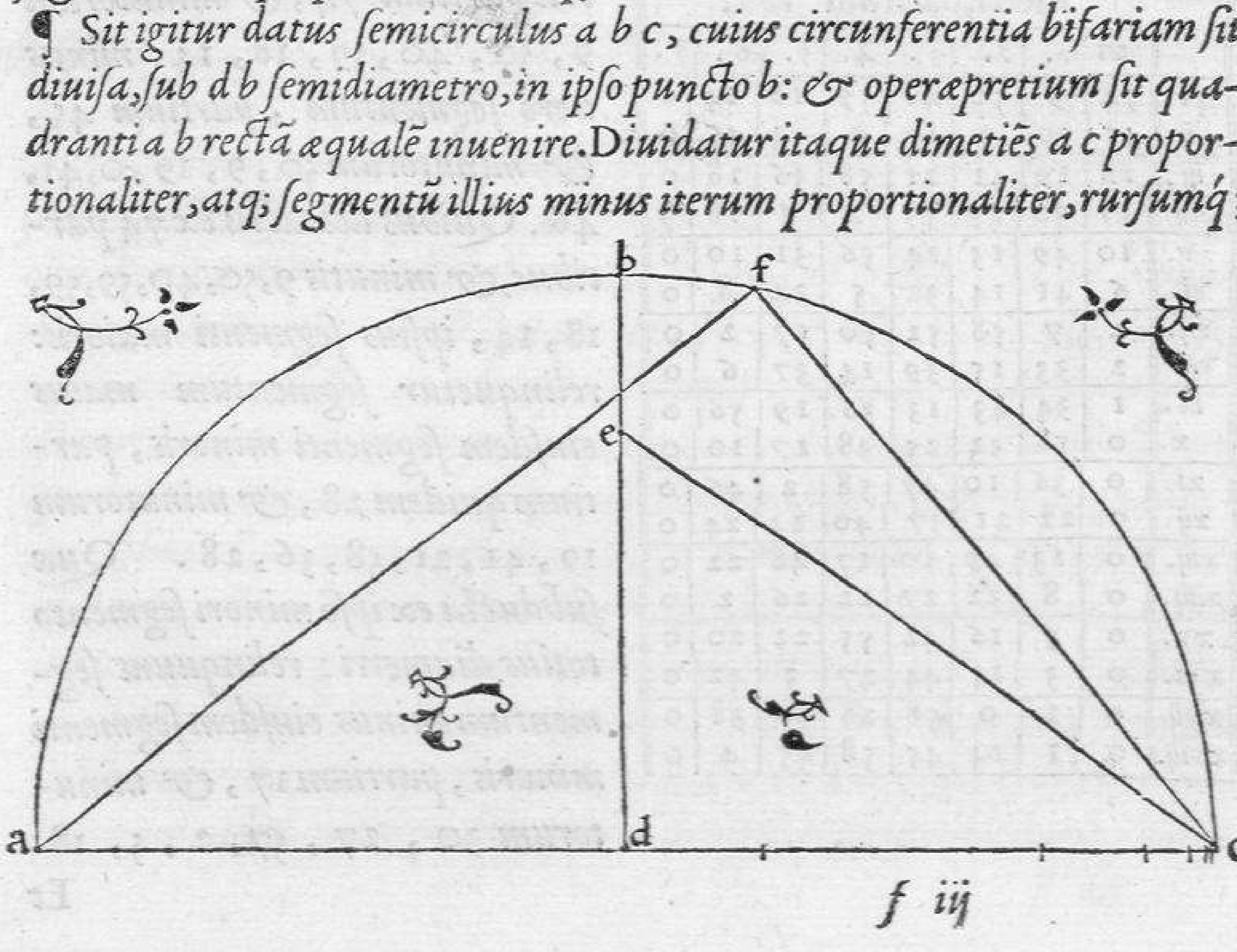
4,36,52, ad partes 120. Quadrans uerò eiusdem circunferentiæ ad semidiametrum eam pendenter uidetur obseruare rationem, quam partes 94, & minuta 13,20,46,9,13, ad partes 60. Ter igitur diameter unà cum $\frac{11}{78}$ ipsius diametri, conficiunt rectam lineam æqualem circunferentiæ dati circuli: qua ratione, uix speramus à quopiam mortalium posse dari fideliorem. De hac igitur hæc sint satis.

PROPOSITIO II.

QVadranti circunferentiæ dati cuiuslibet circuli rectam lineam æqualem, aliter quàm per rationem ipsius circunferentiæ ad diametrum, pluribus modis designare.

¶ TAMETSI EX ANTECEDENTI PRIMA *propositione apertum fecerimus, circunferentiæ quadrantem ad ipsum diametrum rationem propemodum obseruare, quam partes 94 & minuta 9,50,46,9,13, ad partes 120: iuuat nihilominus, eidem quadranti circunferentiæ rectam lineam æqualem alia ratione colligere, nempe segmentorum proportionalium ipsius dimetientis adminiculo.*

1 ¶ *Sit igitur datus semicirculus a b c, cuius circunferentia bifariam sit diuisa, sub d b semidiametro, in ipso puncto b: & operæpretium sit quadranti a b rectã æqualẽ inuenire. Diuidatur itaque dimetiẽs a c proportionaliter, atq; segmentũ illius minus iterum proportionaliter, rursumq;*



ſegmentum minus proportionaliter, & deinceps in hunc modum, per 30 ſexti elementorum, minoribus ſegmentis in punctum c continuè terminatis: quatenus in toto dimetiente a c nouem occurrant proportionalium ſegmentorum diſtinctiones, nouem maiora, totidémque minora ſegmenta diſtribuentes, quæ numeris ſuo annotentur ordine. Secetur poſtmodum ex d b ſemidiametro, recta quædam linea d e: quæ conſtet ex dimidio ſegmenti maioris ipſius dimetientis a c, & dimidio ſegmenti ordine quinti, atque dimidio octaui ſegmenti, unà cum ſegmento decimo ſexto, & quarta parte ſegmenti quindecimi, atque demum unius octauæ partis ſegmenti ordine decimiſeptimi parte ſexageſima. Connectatur deinde linea recta c e: cui æqualis coaptetur c f, per primam quarti elementorum. Tandem connectatur a f linea recta: quam aio æqualem eſſe quadranti circunferentiæ a b. Hoc autem per ipſorum proportionalium ſegmentorum numeros, fiet illico manifeſtum: coadiuuante præoſtenſa ratione circunferentiæ ad diametrum. ¶ *Supponatur ergo dimetiens a c partium inuicem æqualium 120: quantum uidelicet ad imitationem C. Ptolemæi, in cæteris noſtris ſupputationibus expoſuimus. Per ea igitur quæ numero ſecundo primæ propoſitionis antecedentis libri primi declarata ſunt, ſegmentum maius ipſius dimetientis a c, erit partium 74, & minutorum 9, 50, 40, 59, 18, 14: minus uerò ſegmentum, partium 45, & minutorum 50, 9, 19, 0, 41, 46. Quibus detractis ex 74 partibus, & minutis 9, 50, 40, 59, 59, 18, 14, ipſius ſegmenti maioris: relinquetur ſegmentum maius eiuſdem ſegmenti minoris, partium quidem 28, & minutorum 19, 41, 21, 58, 36, 28. Quæ ſubducta ex ipſo minori ſegmento totius diametri: relinquunt ſegmentum minus eiuſdem ſegmenti minoris, partium 17, & minutorum 30, 27, 57, 2, 5, 18. Et*

Segmenta proportionalia diametri, partium 120.								
	ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
i.	74	9	50	40	59	18	14	0
ij.	45	50	9	19	0	41	46	0
iij.	28	19	41	21	58	36	28	0
iiij.	17	30	27	57	2	5	18	0
v.	10	49	13	24	56	31	10	0
vi.	6	41	14	32	5	34	8	0
vij.	4	7	58	52	50	57	2	0
viij.	2	33	15	39	14	37	6	0
ix.	1	34	43	13	36	19	56	0
x.	0	58	32	25	38	17	10	0
xi.	0	36	10	47	58	2	46	0
xij	0	22	21	37	40	14	24	0
xiij.	0	13	49	10	17	48	22	0
xiiij.	0	8	32	27	22	26	2	0
xv.	0	5	16	42	55	22	20	0
xvi.	0	3	15	44	27	3	42	0
xvij.	0	2	0	58	28	18	38	0
xviij.	0	1	14	45	58	45	4	0

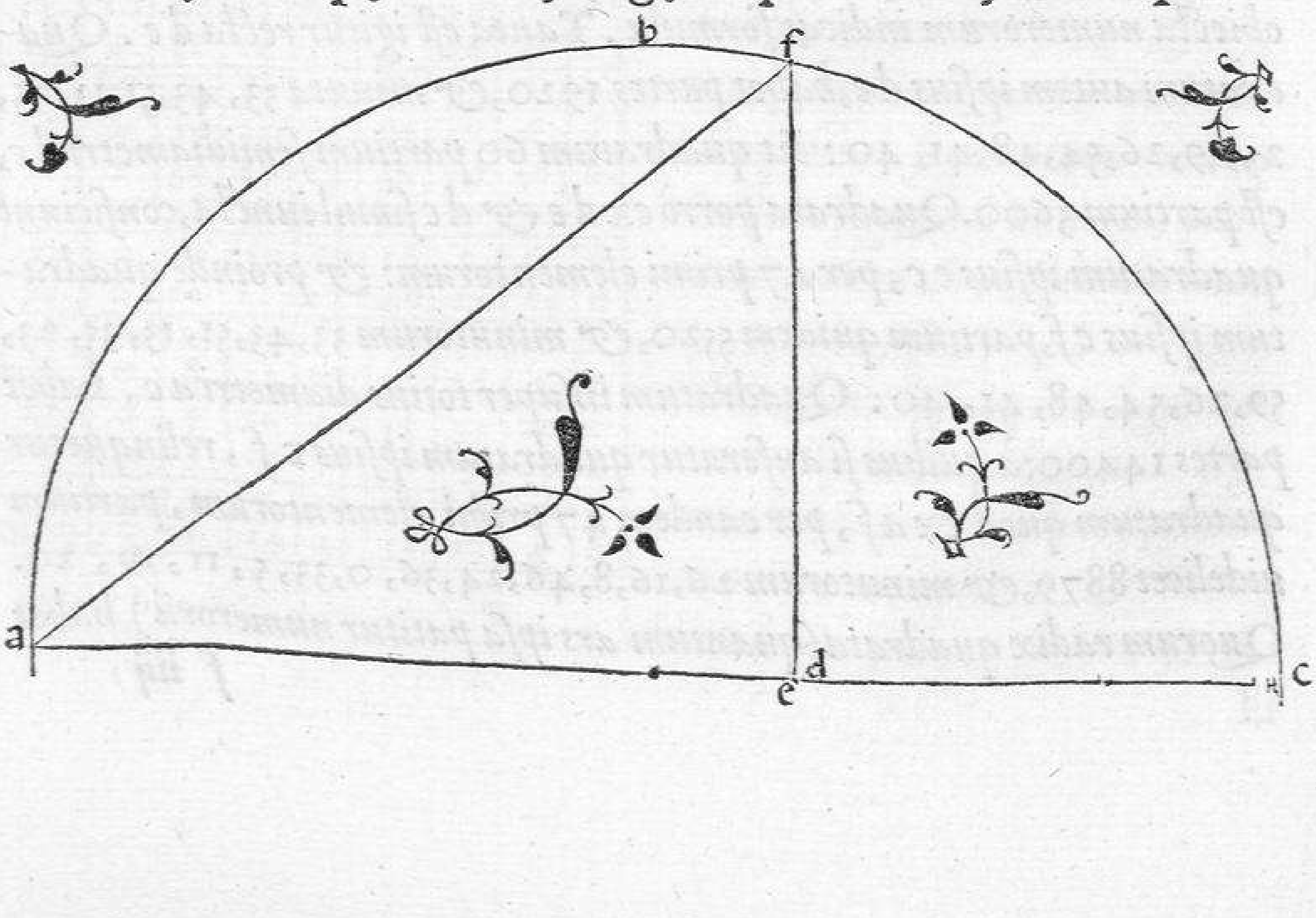
Et deinceps in hunc continuando modum, hoc est, succedentia diametri segmenta, ab immediatè præcedentibus subducendo segmentis: reliqua segmenta proportionalia ipsius dimetientis a c, suo colligentur ordine, sub ipsis quidem partibus & minutis, qualium præfatus diameter est 120, & pars quęlibet minutorum 60 comprehensa. Vt in obiecta numerorum tabella continetur. ¶ *Dimidium itaque segmenti maioris habet partes 37, & minuta 4, 55, 20, 29, 39, 7: & dimidium quinti segmenti partes 5, & minuta 24, 36, 42, 28, 15, 35. Dimidium insuper octaui segmenti, habet partem 1, & minuta 16, 37, 49, 37, 18, 33. Segmentũ porrò decimumsextum, hæc minuta comprehendit 3, 15, 44, 27, 3, 42. Et segmentum ordine quindecimum, sub his continetur minutis 5, 16, 42, 55, 22, 20: quorum pars quarta, habet minuta 0, 1, 19, 10, 13, 20, 35. Segmentum denique decimumseptimum, sub his comprehenditur minutis 2, 0, 58, 28, 18, 38: quorum octaua pars, est minutorum 0, 15, 7, 18, 32, 20: & horum pars sexagesima, eisdem minutorũ exprimitur numeris, sed mutata singulorum denominatione in proximè sequentẽ dextram uersus ordinem, in hunc uidelicet modum 0, 0, 15, 7, 18, 32, 20. Hæc autem omnia simul iuncta efficiunt partes 43, & minuta 49, 27, 11, 19, 48, 49, 55: ut obiecta numerorum indicat formula. Tanta est igitur recta d e. Quadratum autem ipsius d e, habet partes 1920, & minuta 33, 43, 51, 13, 35, 23, 59, 26, 54, 48, 41, 40: Et quadratum 60 partium semidiametri d c, est partium 3600. Quadrata porrò ex d e & d c simul iuncta, conficiunt quadratum ipsius e c, per 47 primi elementorum: & proinde quadratum ipsius c f, partium quidem 5520, & minutorum 33, 43, 51, 13, 35, 23, 59, 26, 54, 48, 41, 40. Quadratum insuper totius diametri a c, habet partes 14400: à quibus si auferatur quadratum ipsius c f, relinquetur quadratum quod ex a f, per eandem 47 primi elementorum, partium uidelicet 8879, & minutorum 26, 16, 8, 46, 24, 36, 0, 33, 5, 11, 19, 20. Quorum radix quadrata (quantum ars ipsa patitur numerorũ) habet*

	ptes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.
$\frac{1}{2}$ *segmenti maioris.*	37	4	55	20	29	39	7	0
$\frac{1}{2}$ *quinti segmenti.*	5	24	36	42	28	15	35	0
$\frac{1}{2}$ *octaui segmenti.*	1	16	37	49	37	18	33	0
xvi *segmentum.*	0	3	15	44	27	3	42	0
$\frac{1}{4}$ *segmenti* xv.	0	0	1	19	10	13	20	35
$\frac{1}{60}\frac{1}{8}$ *segmenti* xvij.	0	0	0	15	7	18	32	20
¶ *Recta d e.*	43	49	27	11	19	48	49	55

partes 94, & minuta 13, 50, 46, 5, 42. Tanta est igitur *recta a f*. Atqui *totidem partium atque primorum, secundorum & tertiorum minutorum, est quadrans circunferētiæ eiusdem circuli, cuius diameter est partium 120, sed quartorum minutorum 9, & quintorum 13 per antecedentem primam propositionem.* Differt itaque *recta a f ab ipso quadrante a b, tribus quartis minutis, & 30 ferè quintis : quæ faciunt* $\frac{1}{20}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$, *unà cum* $\frac{1}{2}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$, *& reducuntur propemodum ad* $\frac{1}{3702857}$, *unius integræ partis, imperfectis irrationalium segmentorum, radicúmue non quadratorum numeris (ex quibus conflatur recta d e) iure deputandū: contrahit enim de necessitate recta e c uel c f, ineuitabile peccatum ipsius d e.* Cùm igitur *præmemorata differentia* $\frac{1}{3702857}$ *unius integræ partis adeò sit exigua, & uitari nullo modo posit : concludemus rectam ipsam a f, æqualem esse quandranti circunferentiæ a b, cuius dimidium est a b c.* Quod *faciendum receperamus.*

¶ Idem aliter.

¶ EIDEM RVRSVM QVADRANTI CIRCVN- 2
ferentiæ, rectam lineam æqualem, ex præfatis segmentis proportionalibus diametri, aliter describere licebit. Resumatur *ergo semicirculus a b c, cuius circunferentia bifariam diuisa sit in puncto b : diameter autem a c diuisus proportionaliter in puncto d, sitque a d segmentum maius, minus uerò d c. quod rursum in tot segmenta proportionalia, eodem ordine atque numero distributa partiatur, ut in prima huius parte tradidimus.* Auferatur *postmodum sexagesima pars unius sedecimæ partis*



ſegmenti ordine decimioctaui, ex quinta parte ſegmenti quindecimi: & reſiduum tollatur conſequenter ex dimidio ſegmenti ordine duodecimi. Ei *autem quæ inde relinquetur lineolæ, æqualis ſecetur d e*. Et *à puncto e, ſuper a c diametrum perpendicularis excitetur e f, per undecimam primi elementorum*. Connec*tatur demum recta a f, quam aio fore æqualem quadranti a b ipſius circunferentiæ dati circuli: quod uia numerorũ oſtendere iuuat*. ¶ Manife*ſtum eſt itaque ex præmiſſo ſegmentorum proportionalium calculo, decimumoctauum ſegmentum proportionale ipſius dimetientis a c, continere unius partis minuta ſexagenaria* 1, 14, 45, 58, 45, 4: *quorum pars ſedecima, habet minuta* 0, 4, 40, 22, 19, *ferè: quæ diuiſa per* 60, *dant minuta* 0, 0, 4, 40, 22, 19. Q*uindecimum porrò ſegmentum, ſub his continetur minutis* 5, 19, 42, 55, 22, 20: *quorum pars quinta eſt minutorũ* 1, 3, 20, 35, 4, 28. A *quibus ſi auferantur minuta* 0, 0, 4, 40, 22, 19 *relinquentur in primis minuta* 1, 3, 15, 54, 42, 9: *quæ dempta ex dimidio ſegmenti duodecimi, ex minutis uidelicet* 11, 10, 48, 50, 7, 12, *relinquunt minuta* 10, 7, 32, 55, 25, 3. T*anta eſt igitur lineola d e: quæ ſubducta ex* 74 *partibus, & minutis* 9, 50, 40, 59, 18, 14, *ipſius ſegmenti maioris a d, relinquunt a e partium* 73, *& minutorum* 59, 43, 8, 3, 53, 11. E*t proinde reliqua e c habebit partes* 46, *& minuta* 0, 16, 51, 56, 6, 49. *Si ducatur autem a e recta, in reliquam e c: fiet quadratum ipſius e f, partiũ quidem* 3404, *& minutorum* 7, 52, 9, 26, 43, 59, 5, 47, 57, 45, 31, 59. E*ſt enim e f media proportionalis inter a e & e c, per* 13 *ſexti elementorũ: & quod ſub ipſis a e & e c continetur rectãgulum, æquale ei quod ab ipſa e f fit quadrato, per* 17 *eiuſdem ſexti elementorum*. Q*uadratũ porrò ipſius a e, habet partes* 5475, *& minuta* 18, 23, 58, 19, 28, 0, 54, 12, 2, 14, 28, 1. Ex *quadratis autem ipſarũm a e & e f, conſurgit quadratum ipſius a f, per* 47 *primi eorundem elementorum: partiũ quidem* 8879, *& minutorum* 26, 16, 7, 46, 22, 0. *tanta eſt recta a f*. Totidem *autem partium, atque primorum, ſecundorum, & tertio-*

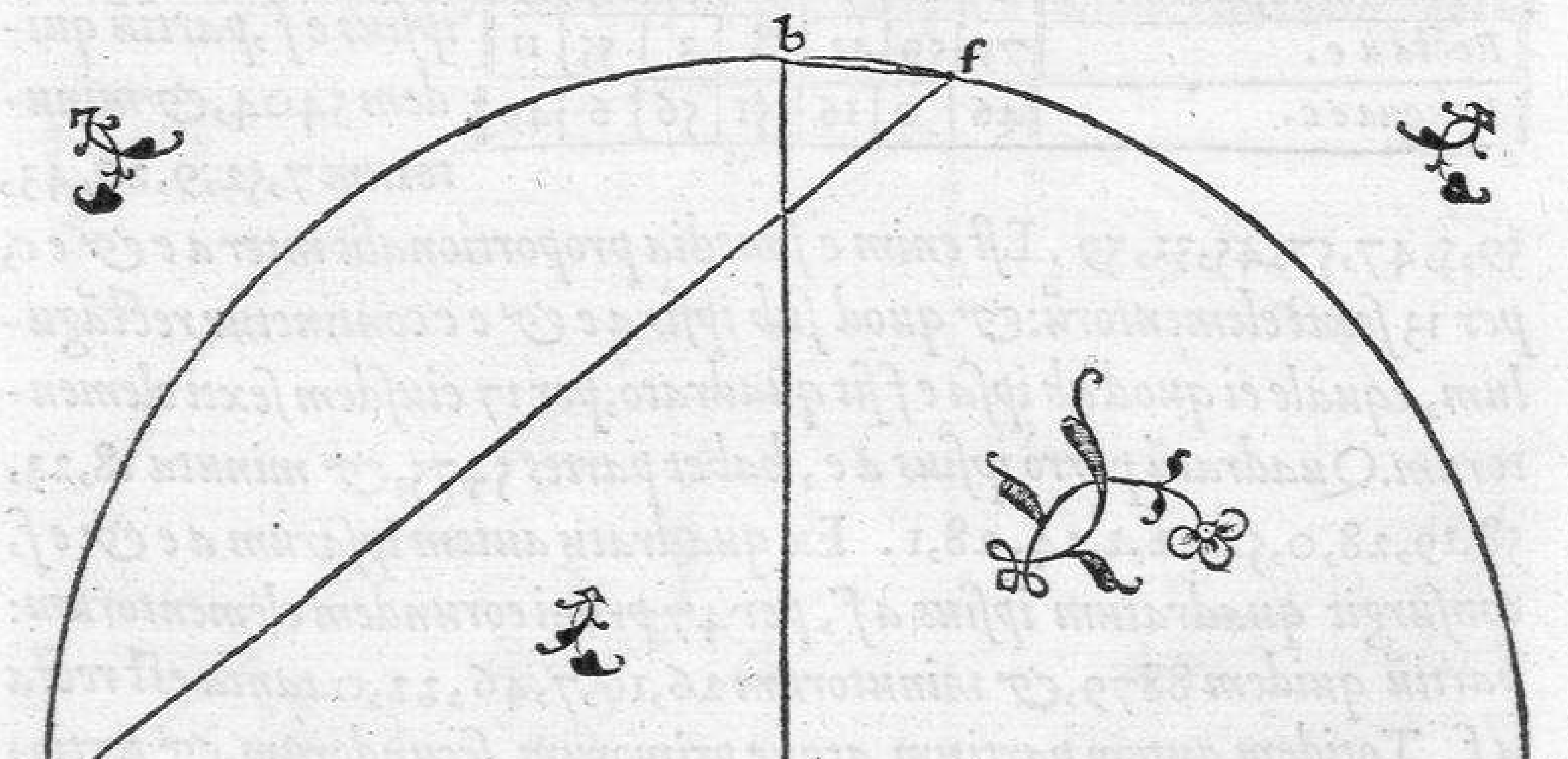
	ptes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.
Segmentum maius a d.	74	9	50	40	59	18	14
$\frac{1}{2}$ *ſegmenti* xij.	0	11	10	48	50	7	12
$\frac{1}{5}$ *ſegmenti* xv.	0	1	3	20	35	4	28
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{16}$ *ſegmenti* xvij.	0	0	0	4	40	22	19
Primum reſiduum.	0	1	3	15	54	42	9
Secundum reſiduum.	0	10	7	32	55	25	3
Recta a e.	73	59	43	8	3	55	11
Reliqua e c.	46	0	16	51	56	6	49

rum minutorum, est recta quadranti circunferentiæ æqualis, per primæ propositionis huiusce libri secundi demonstrationem: sed quartorum minutorum 9, & quintorum 13. Differt itaque præsens calculus, ab ipsius primæ propositionis calculo, tribus minutis quartis, & quintis minutis 50: quæ faciunt $\frac{1}{20}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$, *&* $\frac{5}{6}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$, *& reuocantur propemodum ad* $\frac{1}{3380870}$ *unius integræ partis. Hac itaque differẽtia non obstãte (cùm sit adeò minuta, ut animaduersione censeatur indigna) ex solito irrationalium segmentorum, atque radicum non quadratarũ contracta peccato: concludemus, ueluti supra, rectam a f æqualem esse quadranti a b propositæ circunferentiæ circuli. Quod rursum fecisse oportuit.*

¶ Idem rursum aliter.

¶POTERIT INSVPER EIDEM CIRCVNFE- 3
rentiæ quadranti, dari recta æqualis: in hunc qui sequitur modum. Exponatur uelut antea semicirculus a b c, super a c diametro consistens cuius segmentum maius proportionale sit a e, minus uerò e c: quod rursum in tot segmenta proportionalia, & eodem ordine distributa partiatur, ut in prima parte huiusce propositionis dictum atque obseruatum extitit. Excitetur postmodum semidiameter d b super a c diametro perpendicularis. Coaptetur insuper recta quædã linea b f, quæ constet ex dimidio segmẽti proportionalis ordine tertij, aut ex ipsa d e, subtracto prius dimidio segmẽti decimiquarti, minus sexagesima parte unius sextæ partis ipsius decimiquarti segmenti: & connectatur demum a f linea recta.

Aio

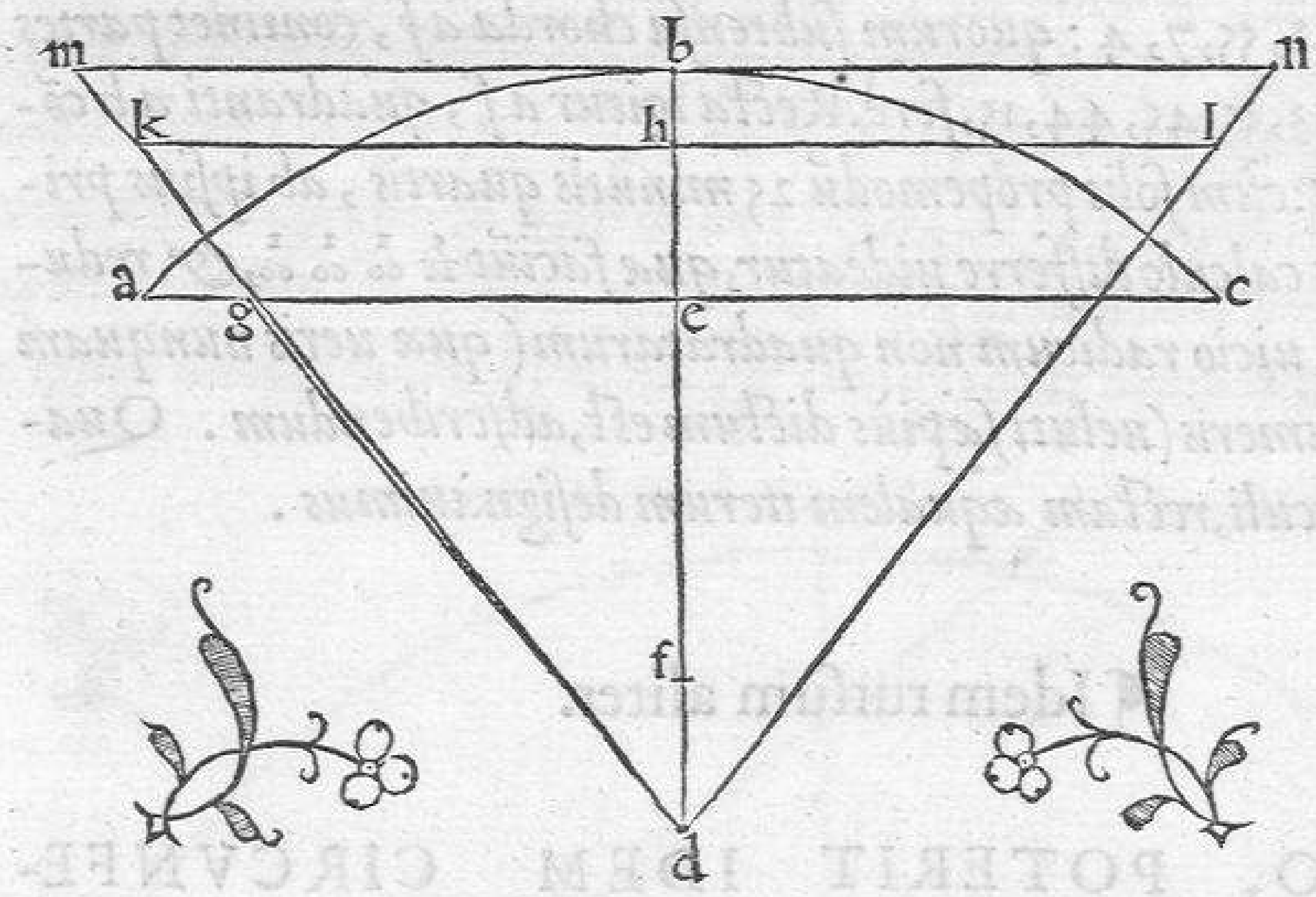


Aio itaque, rectam a f æqualem esse circunferentiæ quadranti a b. ¶ *Per ea etenim, quę prima huius parte tradita atque supputata sunt, ęqualiũ partium diameter a c est* 120, *talium segmentum proportionale ordine tertium est* 28, *&* *minutorum* 19, 41, 21, 58, 36, 28 : *quorum dimidium, habet partes* 14, *& minuta* 9, 50, 40, 59, 18, 14. *Totidem etiã partium, atque minutorum, est ipsa d e: nam si ex maiori segmento a e, auferãtur* 60 *partes ipsius a d semidiametri, idem partium atque minutorũ relinquetur numerus. Dimidium autẽ decimi quarti segmenti proportionalis, sub his continetur minutis* 4, 16, 13, 41, 13, 1, *& sexta illius segmenti pars, hæc minuta cõtinere uidetur,* 1, 25, 24, 33, 44, 20: *quorũ pars sexagesima, eisdem exprimitur numeris, sed mutatis sedibus per unum ordinem uersus dextrã, in hũc modũ,* 0, 1, 25, 24, 33, 44, 20. *Hæc autẽ subducta ex minutis* 4, 16, 13, 41, 13, 1, *relinquunt minuta* 4, 14, 48, 16, 39, 16, 40: *quæ si detrahãtur ex præfatis* 14 *partibus, & minutis* 9, 50, 40, 59, 18, 14, *relinquent tandem partes* 14, *& minuta* 35, 52, 42, 38, 57, 20. *Totidem itaque partium & minutorum est ipsa b f: cuius arcus, per ea quę de rectis in circulo subtensis tradidimus, habet gradus* 13, *& minuta* 29, 21, 10, 21, 55, 7, 4, *qualium graduum (uelim intelligas) tota circuli peripheria est* 360. *Totus proinde arcus a b f, est graduum* 103, *& minutorum* 29, 21, 10, 21, 55, 7, 4: *quorum subtensa chorda a f, continet partes* 94, *& minuta* 13, 55, 45, 44, 15, *ferè. Recta igitur a f, quadranti a b cõuincitur æqualis: cùm solis propemodũ* 25 *minutis quartis, ab ipsius primæ propositionis calculo differre uideatur, quæ faciũt* $\frac{5}{12}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$, *& reducuntur ad* $\frac{1}{518400}$, *uicio radicum non quadratarum (quæ ueris nunquam exprimuntur numeris (ueluti sæpiùs dictum est, adscribendum. Quadranti igitur circuli, rectam æqualem iterum designauimus.*

¶ Idem rursum aliter.

4 ¶ QVARTO, POTERIT IDEM CIRCVNFErentiæ *quadrans, in lineam rectam hoc modo reuocari. Sit igitur oblatus circuli quadrans a b c, bifariam diuisus in puncto b per* 30 *tertij elementorum: & per* 25 *ipsius tertij, inueniatur centrum circuli, cuius datus arcus est quarta pars, sitque illud d: cõnectantúrq; a c & b d lineę rectę, quę sese inuicẽ secent in puncto e. Diuidatur postmodũ semidiameter d b*

proportionaliter, seu media & extrema ratione, atque segmentum illius minus iterum proportionaliter, & deinceps in hunc modum, per 30 sexti elementorum: donec in toto semidiametro d b, octo maiora, totidémque minora segmenta colligantur, omnibus segmentis minoribus in unum commune punctum scilicet d uel b terminatis: ut in prima huius parte, de segmentis proportionalibus diametri dictũ atque obseruatum extitit. Secetur consequenter ex ipso d b semidiametro, recta quædam linea b f, quæ resultet ex duplo segmenti minoris ipsis d b semidiametri, & octauo, atque duodecimo segmento proportionali, unà cum septem trigesimis segmenti ordine quindecimi. Sicut autem d b ad ipsam b f, sic fiat a e ad ipsam e g, per decimam sexti elementorum: & connectatur d g linea recta, cui æqualis secetur d h. Deinde, per punctum h ipsi a c lineæ rectæ parallela ducatur k *l, per 31 primi elementorum: secetúrque h* k *& h l ipsi a e uel e c æquales. Tangat autem recta quædam linea m n ipsum datum quadrantis arcum a b c in puncto b, utrique ipsarum a c &* k *l parallela. Et connexis d* k *& d l lineis rectis, utraque in directum continuetur uersus* k *& l: donec conueniant ipsam m n, in eisdem punctis m & n. Erit enim recta m n inter d m atque d n comprehensa, æqualis ipsi dato quadranti a b c: quod numerorum officio, in hunc qui sequitur modum demonstratur.*



¶ *Sit ueluti sæpius dictũ est, semidiameter d b partium 60. Huius itaque semidiametri segmenta proportionalia illico fient nota, si proportionalium segmentorum totius diametri, in prima huius parte descriptorum, acceperis dimidium. Minus itaque segmentum proportionale ipsius d b, habet partes 22, & minuta 55, 4, 39, 30, 20, 53: quæ duplata, efficiunt partes 45, & minuta 50, 9, 19, 0, 41, 49. Octauum porrò segmentum*

habebit

habebit partem 1, & minuta 16,37,49,37,18,33 : & duodecimum segmentum, sub his tantùm continebitur minutis 11,10,48,50,7,12. Quindecimum denique segmentum proportionale, hæc minuta comprehendet 2,38,21,27,41,10 : quorum pars trigesima, est minutorum 0,5,10, 20,55,22,20, quę septies sumpta reddũt minuta 0,36,57,27,36,20. Hęc autem 7 trigesima, unà cum duplo secundi segmenti proportionalis, & octauo, atque duodecimo segmento, in unum conflata numerum, reddũt partes 47, & minuta 18, 34, 54, 28, 35, (cætera enim absque iactura calculi reiici uel facilè possunt) tanta est igitur ipsa b f, linea recta :

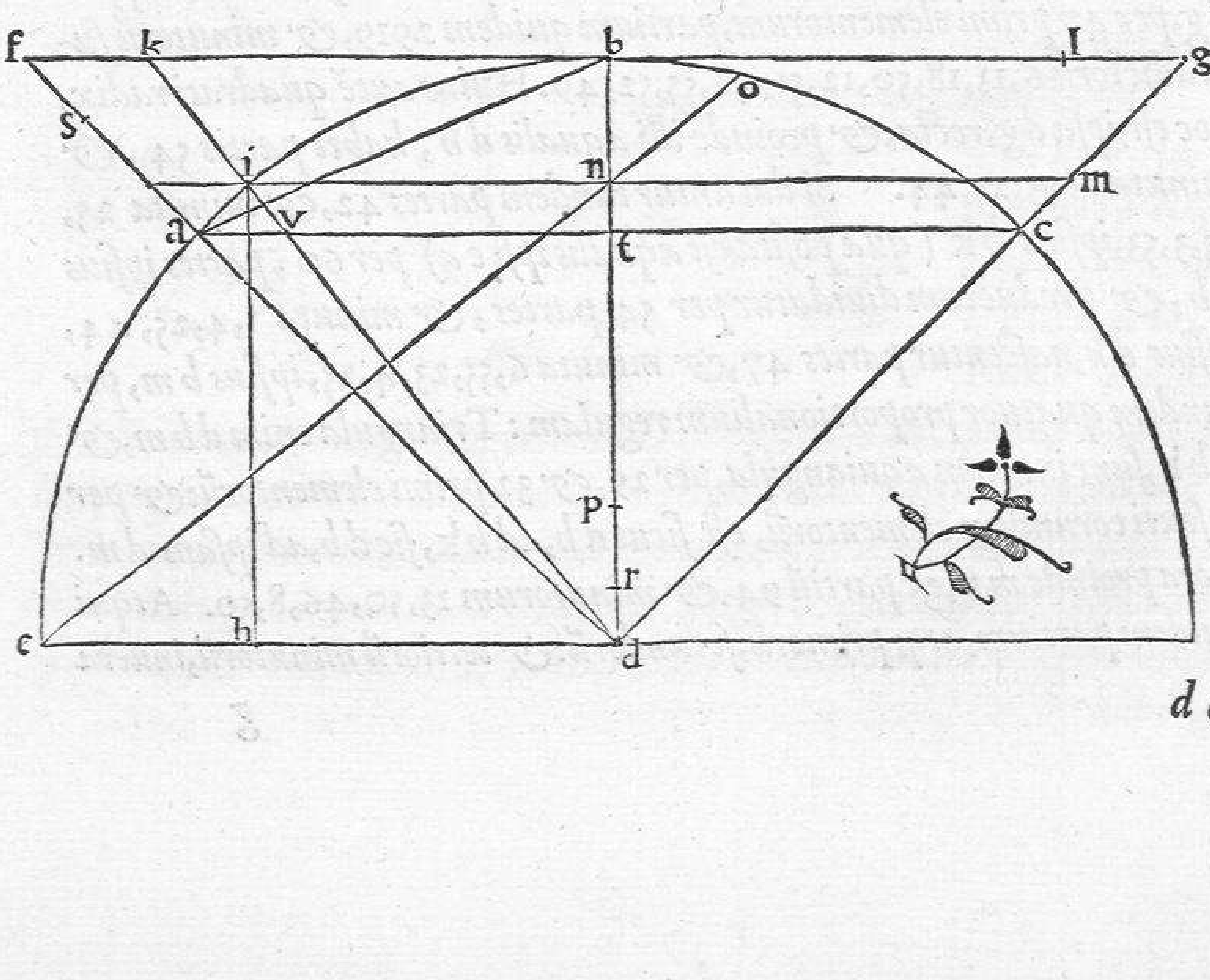
	ptes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.
Duplũ segmenti, ij.	45	50	9	19	0	41	46	0
Segmentũ { viij.	1	16	37	49	37	18	33	0
xij.	0	11	10	48	50	7	12	0
$\frac{7}{30}$ *segmenti,* xv.	0	0	36	57	0	27	36	20
¶ *Recta,* b f.	47	18	34	54	28	35	7	20

quam si multiplicaueris per rectam a e, quę est partiũ 42, & minutorum 25,35,3,53, (nẽpe dimidium lateris inscripti quadrati) consurgent partes 33,27, & minuta 10, 49, 34,47,20,48,57,59,55 : quæ diuisa per 60 partes ipsius d b, reuocantur in partes 33, & minuta 27,10,49,34,47 (cæteræ nanque minutiores fractiones, absque iactura calculi reiici possunt) tãta est igitur recta e g, per uulgatam quatuor proportionalium numerorum regulã : cuius quadratũ habet partes 1119, & minuta 6,13,18,50,12,51,48,55,52,49. Quadratum porrò ipsius d e, quæ est æqualis ipsi e a, sub his tãtùm continetur partibus 1800 : quæ simul iuncta, conficiunt quadratum ipsius d g, per 47 primi elementorum, partium quidem 2919, & minutorũ supradictorũ 6,13,18,50,12,51,48,55,52,49. Huius autẽ quadrati radix, hoc est, ipsa d g, recta, & proinde illi æqualis d h, habet partes 54, & minuta 1,43,25,44. Si ducantur tandem partes 42, & minuta 25, 35,3,53, ipsius h k (quæ posita est æqualis ipsi e a) per 60, partes ipsius d b, & productum diuidatur per 54 partes, & minuta 1,4,25, 44, ipsius d h, nascentur partes 47, & minuta 6,55,23,4,25, ipsius b m, per eandem quatuor proportionalium regulam : Triangula enim d b m, & d h k, sunt inuicem æquiangula, per 29, & 32 primi elementorũ: & per 4 sexti eorundem elementorũ, est sicut d h, ad h k, sic d b, ad ipsam d m. Tota proinde m n, est partiũ 94, & minutorum 13,50,46,8,50. Atqui totidem partium, atq; primorũ, secundorũ: & tertiorũ minutorũ, inuẽta *est recta ipsi quadranti æqualis, per demonstratam circunferentiæ rationem ad ipsum diametrum: sed quartorum minutorum 9, & quintorum 13. Quorum differentia est quintorum minutorum 23, quæ faciunt* $\frac{23}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{1}{60}$, *& reducuntur propemodum ad* $\frac{1}{338086968}$ *unius integræ partis, nihili prorsus existimandum, si irrationalium segmentorum, atque non quadratarum radicum (quæ præcisis nunquam exprimuntur numeris) natura consideretur. Recta igitur m n, æqualis est circunferentiæ quadranti a b c: quod numeris confirmandum susceperamus.*

¶ Idem rursum pluribus modis.

PLACET TANDEM, ALIQVOT SVBNECTERE *modos conuertendi præfatum circunferentiæ quadrantem in lineam rectam, à nobis (dum hoc scriberemus) obiter excogitatos: nullis quidem aliis in præsentiarum, quàm ocularibus demõstrationibus (euitandæ prolixitatis gratia) præmunitos. Sit igitur rursum datus circunferentiæ quadrans a b c, bifariam diuisus in ipso puncto b: cuius chorda, sit a c, linea recta. Et compleatur semicirculus, cuius centrum sit punctum d, & dimidium ipsius diametri d e: connectatúrque d b, semidiameter super ipso diametro perpendicularis. Tangat insuper eundem semicirculum e b c, in ipso quidem puncto b, latus circunscripti quadrati f b g, eidem chordæ a c, atque diametro parallelum: & connectantur d a f, & d c g, lineæ rectæ, eiusdem circunscripti quadrati semidiametri.* ¶ *His in hunc modum constructis, diuidatur in primis*

A



d e

d e, ſemidiameter per extremam & mediam rationem, ſeu proportionaliter in puncto h, cuius ſegmentum maius ſit d h, per ſæpiùs allegatā 30 ſexti ele mentorum. Et à puncto h, perpendicularis excitetur h i, cadens in circunferentiæ punctum i. Connexa nanq; d i, linea recta, directéq; producta in punctū k, ipſius f g, lineæ rectæ: erit recta b k, æqualis dimidio quadrātis a b c, & proinde dupla ipſius b k, utpote k l, eidē quadrāti

B *coæqualis.* ¶ *Idem habebis, ſi per idem punctū i, utrique ipſarum a c, & f g, parallela ducatur i m, per 31 primi elementorū, inter d f, & d g, rectas cōprehenſa: erit enim eadē parallela, æqualis ipſi dato circunferen-*

C *tiæ quadranti a b c.* ¶ *Item, ſi per ſectionem eiuſdē parallelæ cum d b, ſemidiametro, quæ ſit in puncto n, recta ducatur e n, in directúmq; producatur uſque ad circunferentię punctum o: erit rurſum e o, linea recta,*

D *eidem quadranti æqualis.* ¶ *Aut ſi inter d f, & d b, rectas, duæ mediæ lineæ rectæ ſub eadem ratione continuè proportionales inueniantur, illarum maior & ordine ſecunda, erit æqualis ipſi d k: unde rurſum b k, recta limitabitur, dimidio quadranti a b c (ut ſuprà dictum eſt) æqualis.*

E ¶ *Adde, quòd ſi connectatur a b, recta, & illi æqualis ſecetur b p, reſiduáque p d, proportionaliter diuidatur in puncto r, cuius ſegmentū maius ſit p r, atque ipſi p r, æqualis ſecetur f s: erit rurſum d s, recta, æqualis ipſi d k, unde prodibit recta b k, æqualis (ut dictum eſt ſuprà) dimidio*

F *quadrantis a b c.* ¶ *Tandem ſi d b, ſemidiameter, diuiſerit rectam a c, in puncto t, & d k, linea recta in puncto u: atque inter a, & d t, rectas, duæ mediæ lineæ rectæ ſub eadem ratione continuè proportionales inueniantur: illarū maior & ordine ſecunda, erit æqualis ipſi d u, & in directum producta coincidet in punctum k, limitabítque rurſum eandem*

G *b k, dimidio præfati quadrantis æqualem.* ¶ *Nota demum, quòd g m, eſt æqualis ipſi b t: hinc ducta per m, punctum ipſi f g, parallela, coincidet in punctum i, eritque æqualis ipſi quadranti a b c.*

¶ Corollarium I.

¶ *Vnius itaque circuli quadrante, in rectam lineam conuerſo: dati cuiuſlibet alterius circuli quadrans, in rectam itidem lineam uel facilè reducetur. Quam enim rationē habet diameter ipſius circuli, cuius quadrāti data eſt æqualis linea recta, ad ipſam lineam rectam: eandē obſeruat alterius circuli diameter ad eam lineam rectam, quæ quadranti eiuſdē circuli coæquatur. Atqui tres primæ lineæ, notæ ſupponuntur: nota* *erit igitur & ipsa quarta proportionalis, per 12 sexti elementorum.*

¶Corollarium II.

¶ *Toti prӕterea circunferentiӕ circuli, ac cuilibet ordinatӕ eiusdem circunferẽtiӕ parti, à dato quouis numero denominatӕ, dabitur ęqualis linea recta. Quadrupla enim eius rectӕ, quӕ circunferentiӕ quadranti est ӕqualis, toti circunferentiӕ de necessitate coӕquatur. Et ab eadem recta toti circunferentiӕ ӕquali, pars ordinata potest abscindi, etiam à dato quouis denominata numero, per 9 sexti elementorum: quӕ ipsi ordinatӕ atque simili parti circunferentiӕ erit ӕqualis. Sunt enim partes ӕqualium & ӕquè multiplicium, similes adinuicem: & proinde ipsis ӕquè multiplicibus proportionales, per 15 propositionem libri quinti elementorum: & ӕquales propterea adinuicem.*

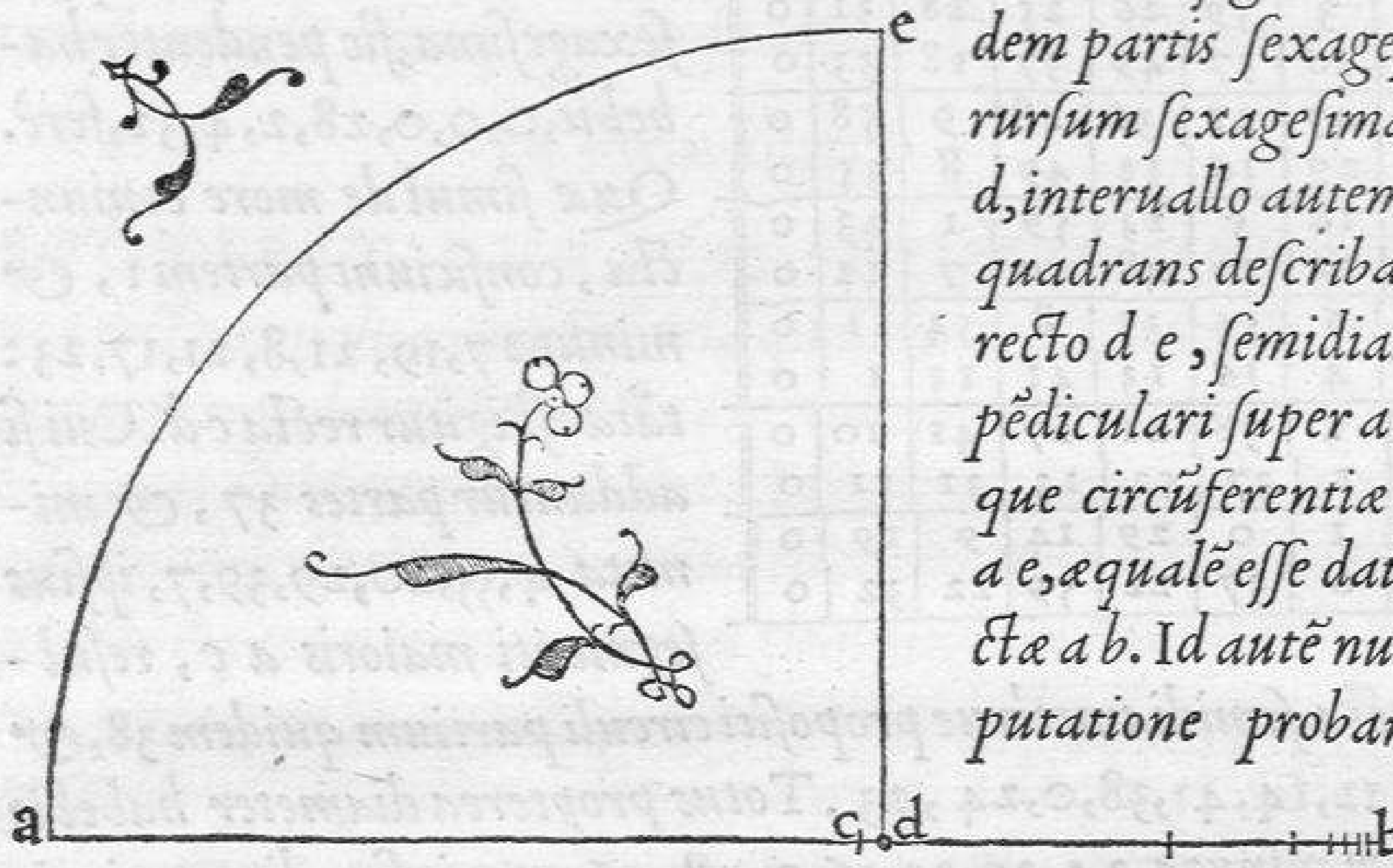
Corollarium III.

¶ *Ratio insuper circunferentiӕ circuli, ad eius diametrum, uel semidiametrum: quӕ lineӕ rectӕ, ad lineam rectam data erit. Datur enim lineӕ recta ipsi circunfęrentiӕ ӕqualis, per antecedentem primã propositionẽ, uel immediatum corollarium: & ӕquales ad eandem uel ӕquales, eandem habent rationem, per septimam quinti elementorum. Quam igitur rationem habebit linea recta circunferentiӕ ӕqualis, ad ipsum diametrum uel semidiametrũ: eandem obseruabit & prӕfata circunferentia.*

PROPOSITIO III.

DATA linea recta, describere circulum, cuius circũferentiæ quadrans eidem lineæ rectæ sit æqualis.

¶HANC PROPOSITIONEM, TRIBVS MODIS *absoluemus: in primis adminiculo segmentorum proportionalium ipsius datӕ lineӕ rectӕ, in hunc qui sequitur modum. Sit igitur data linea recta a b, quӕ per mediam & extremam rationem, proportionaliterue diuidatur in puncto c, cuius segmentum maius sit a c, minus uerò c b: quod rursum in tot segmenta proportionalia subdiuidatur, eo quidem modo & ordine distributa, ut de circuli diametro proxima dictum atque obseruatum fuit propositione: donec uidelicet in tota linea data,* 1 *data, ſint nouem maiora, totidémque minora ſegmenta proportionalia, omnibus ſegmentis minoribus in ipſum punctum b terminatis. Secetur poſtmodum ex c b, minori ſegmento, addatúrue ſegmento maiori a c, rectā quædam lineola c d: quæ conſtet ex dimidio quinti ſegmenti proportionalis, & tertia parte tredecim, necnon ſeptima parte ſegmenti ordine decimioctaui, unà cum ſexageſima parte trium quartorum ipſius decimioctaui ſegmenti, atque eiuſdem partis ſexageſimæ parte rurſum ſexageſima. Et centro d, interuallo autem d a, circuli quadrans deſcribatur a e d, erecto d e, ſemidiametro perpēdiculari ſuper a b. Aio itaque circūferentiæ quadrantē a e, æqualē eſſe datæ lineæ rectæ a b. Id autē numerali ſupputatione probandum eſſe duximus.*



¶ *Supponatur igitur data linea recta a b, partium inuicem æqualium* 60. *Et quoniam proxima, & ordine ſecunda, huius ſecundi libri propoſitione, diameter circuli coaſſumptus eſt partium inuicem æqualium* 120, *& in* 18 *ſegmenta proportionalia diſtributus, quorum numeri propria tabella ibidem ſunt expreſsi: ſi dimidij propterea eorundem ſegmētorum proportionalium aſſumantur numeri, proſilient illico ſegmenta proportionalia eiuſdem numeri ſexagenarij, cum is ſit dimidius eorundem* 120. *Sicut enim totum, ad totum: ſic pars ſimilis, ad partem ſimilem. Hæc igitur ſegmenta proportionalia ipſius a b, lineæ datæ (quam ſupponimus eſſe partium* 60) *iuxta præſcriptum ordinem diſtributa, in eam quæ ſequitur redegimus tabellam, tum in gratiam huius, tum aliarum ſimilium demonſtrationum paratiſsimam. Conſtat igitur (ut ad ſuſceptam perueniamus demonſtrationem) dimidium quinti ſegmenti habere partem* 1, *& minuta* 4,55,20,29,39,7: *& unum tertium ſegmenti decimitertij, hæc cōtinere minuta* 2,18,11,42,58,3,40. *Vnum porrò ſeptimum decimioctaui ſegmenti, his tādem uidetur reſultare minutis* 0,5,20,25,37,30,17. *Et tria ipſius decimioctaui ſegmenti quar-*

Segmenta proportionalia lineæ partium 60.								
	ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
i.	37	4	55	20	29	39	7	0
ij.	22	55	4	39	30	20	53	0
iij.	14	9	50	40	59	18	14	0
iiij.	8	45	13	58	31	2	39	0
v.	5	24	36	42	28	15	35	0
vi.	3	20	37	16	2	47	4	0
vij.	2	3	59	26	25	28	31	0
viij.	1	16	37	49	37	18	33	0
ix	0	47	21	36	48	9	58	0
x.	0	29	16	12	49	8	35	0
xi.	0	18	5	23	59	1	23	0
xij.	0	11	10	48	50	7	12	0
xiij.	0	6	54	35	8	54	11	0
xiiij.	0	4	16	13	41	13	1	0
xv.	0	2	38	21	27	41	10	0
xvi.	0	1	37	52	13	31	51	0
xvij.	0	1	0	29	14	9	19	0
xviij.	0	0	37	22	59	22	32	0

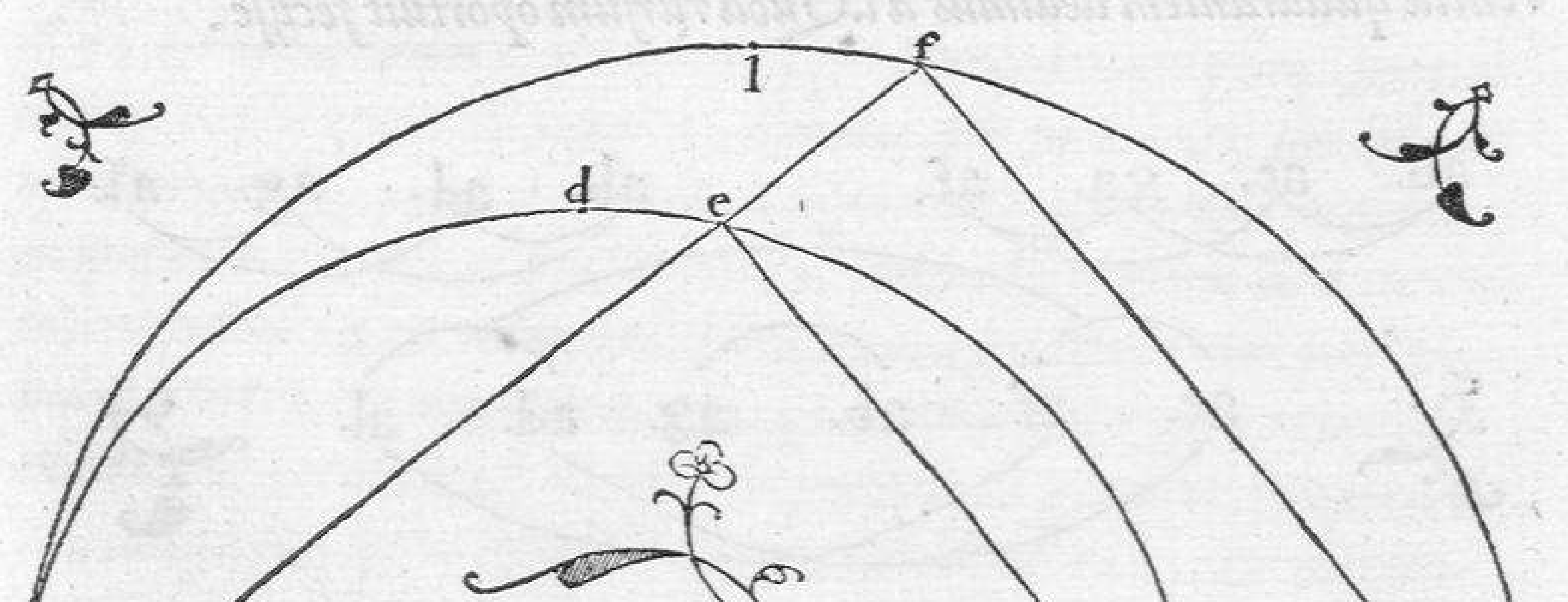
ta, continent minuta 0,28,2,4,31,54 : *quorum pars sexagesima prodibit, si singuli numeri per unicum ordinẽ dexteam uersus reuocentur, in hunc modum* 0,0,28,2,4,31,54 : *& horum rursum pars sexagesima, sic pendenter habebit,* 0,0,0,28,2,4,32, *ferè. Quæ simul de more coniuncta, conficiunt partem* 1, *& minuta* 7,19, 21,8, 21,17,23 : *tãta est igitur recta c d. Cui si addantur partes* 37, *& minuta* 4,55,20,29,39,7, *ipsius segmenti maioris a c, resultabit a d, recta, semidiametérue propositi circuli partium quidem* 38, *& minutorum* 12,14,41,38,0,24, 23. *Totus propterea diameter habebit partes* 76, *& minuta* 24,29,23,16,0,48,46 : *& ipsius diametri triplum, partes* 229, *& minuta* 13,28,9,42,2, 26, 18. *Eiusdem porrò dimetientis pars septuagesimaoctaua, continet minuta* 58, 46,31,50, 12, 19,5: *quæ undecies sumpta, reddunt partes* 10, *& minuta* 46,31,50,12,15,29,55. *Atqui triplum diametri, unà cum ipsis undecim septuagesimis octauis : restituunt circunferẽtiam circuli, per primam huius secundi libri propositionem : partium quidem* 240,

	ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$\frac{1}{2}$ *quinti segmenti.*	1	4	55	20	29	39	7	0
$\frac{1}{3}$ *segmenti xiij.*	0	2	18	11	42	58	3	40
$\frac{1}{7}$ *segmenti xviij.*	0	0	5	20	25	37	30	17
$\frac{1}{60}\frac{3}{4}$ *eiusdem.*	0	0	0	28	2	4	31	54
$\frac{1}{60}\frac{1}{60}\frac{3}{4}$ *eiusdem.*	0	0	0	0	28	2	4	32
Horũ summa, c d.	1	7	19	21	8	21	17	23
Segmentum, a c.	37	4	55	20	29	39	7	0
Semidiameter, a d.	38	12	14	41	38	0	24	23
Diameter.	76	24	29	23	16	0	48	46
Triplum diametri.	229	13	28	9	48	1	13	9
$\frac{11}{78}$ *diametri.*	10	46	31	50	12	15	29	55
Circunferentia.	240	0	0	0	0	16	43	4
Quadrans, a e.	60	0	0	0	0	4	10	46

240, & *minutorum* 0,0,0,0, 16,43,4. *Et proinde quarta pars eiusdem circunferentiæ, quæ est a e, continebit partes* 60, & *minuta* 0,0,0, 0,4, 11, *ferè: quæ repræsentāt* $\frac{1}{15}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}$, & $\frac{11}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}$, & *ad simplicem fractionem reuocata, conficiunt* $\frac{1}{185880478}$ *unius integræ partis, quod animaduertatur (nedum obiiciatur) prorsus indignum nempe ex irrationalium segmentorum, radicúmue nō quadratarum imperfecto calculo de necessitate procreatū*. *Datæ igitur lineæ rectæ a b, datus est æqualis circunferentiæ quadrans a e. Quod facere oportebat.*

¶ Idem aliter.

2 ¶POTERIT RVRSVM, EIDEM OBLATAE LI*neæ rectæ æqualis circunferentiæ quadrans, alia ratione designari. Resumatur ergo data linea recta a b: quæ per decimam primi elementorū, bifariam diuidatur in puncto c. Et centro c, interuallo autem c a, semicirculus describatur a d b: cuius circunferentia bifariā diuisa sit in ipso puncto d, per* 30 *tertij eorundem elementorum. Inueniatur postmodū linea recta, quæ sit æqualis quadrāti a d, uel d b, per antecedentē secundā propositionē: utpote a e, eidem semicirculo a d b, per primā quarti elemētorū coaptata.* & *connectatur e b, linea recta. Angulus igitur a e b, rectus erit, per* 31 *tertij elementorū. Recta consequenter a e, in continuū directúmq; producatur, ad partes quidē e:* & *ipsi a b, lineæ datæ, æqualis secetur a f, per tertiam primi eorundē elementorum. Deinde per punctū f, ipsi e b, parallela ducatur f g, per* 31 *ipsius primi elemētorū. Rectus erit igitur angulus a f g, per* 29 *eiusdem primi elementorū,* & *b a f, angulus*



recto minor: conuenient propterea a b, & f g, in directum productæ, per quintum postulatum geometricum. Conueniant igitur in punctum g: triangulum propterea a f g, erit rectangulum, & proinde in semicirculo constitutum, per ipsius 31 tertij elementorum cõuersionẽ. Diuidatur ergo a g, recta bifariam, in puncto h, per decimam primi eorundem elementorum. Et centro h, interuallo autẽ h a, uel h g, semicirculus describatur a f g: cuius circunferentia bifariam diuidatur in puncto l, per ipsam 30 tertij elementorum. ¶ *His in hunc modum constructis, aio circunferentiæ quadrantem a l, aut l g, æqualem esse datæ a b, lineæ rectæ. Triangula enim a e b, & a f g, sunt inuicem æquiangula: quoniam angulus qui ad a, utrique triangulo communis est, & is qui ad e, ei qui ad f, æqualis (nempe rectus recto) & proinde reliquus angulus a b e, æqualis reliquo a g f. Per quartã igitur sexti elemẽtorũ, erit ut b a, ad a e: sic g a, ad a f. Et permutatim igitur per 16 quinti eorundẽ elementorum, ut b a, dimetiens, ad dimetientem a g: sic a e recta, ad rectam a f. Sicut rursum dimetiens a b, ad circunferentiæ quadrantem a d: sic dimetiens a g, ad circunferentiæ quadrantem a l. Vt autem dimetiens a b, ad dimetientem a g: sic præostensa est a e, recta, ad rectam a f, Et sicut igitur per undecimã quinti elemẽtorum a e, recta, ad rectam a f, sic a d, quadrans ad quadrantem a l. Et permutatim denique, per eandem sedecimam quinti elementorum, ut a e, recta, ad quadrantem a d: sic a f, recta, ad quadrantem a l, sed a e recta, æqualis est quadranti a d, per ipsam constructionem: & recta igitur a f, & proinde a b, linea data, æqualis est quadranti a l. Datę igitur lineæ rectæ a b, æqualem circunferentiæ quadrantem dedimus a l. Quod rursum oportuit fecisse.*

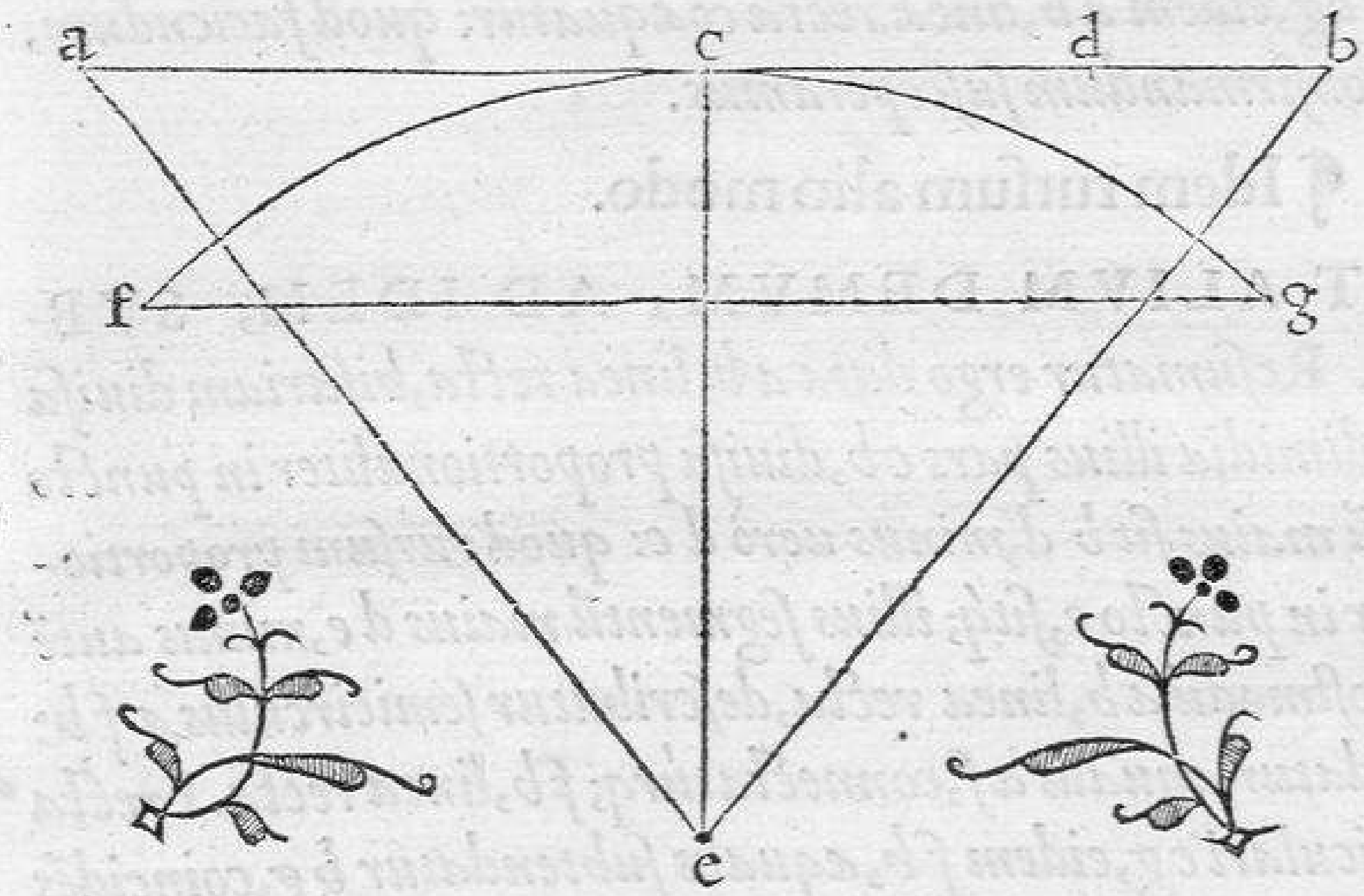
ab. ac. ga. af. ab. ad. ag. al.

ac. af. ab. ag. ad. al.

¶ Idem rursum aliter.

ALIA

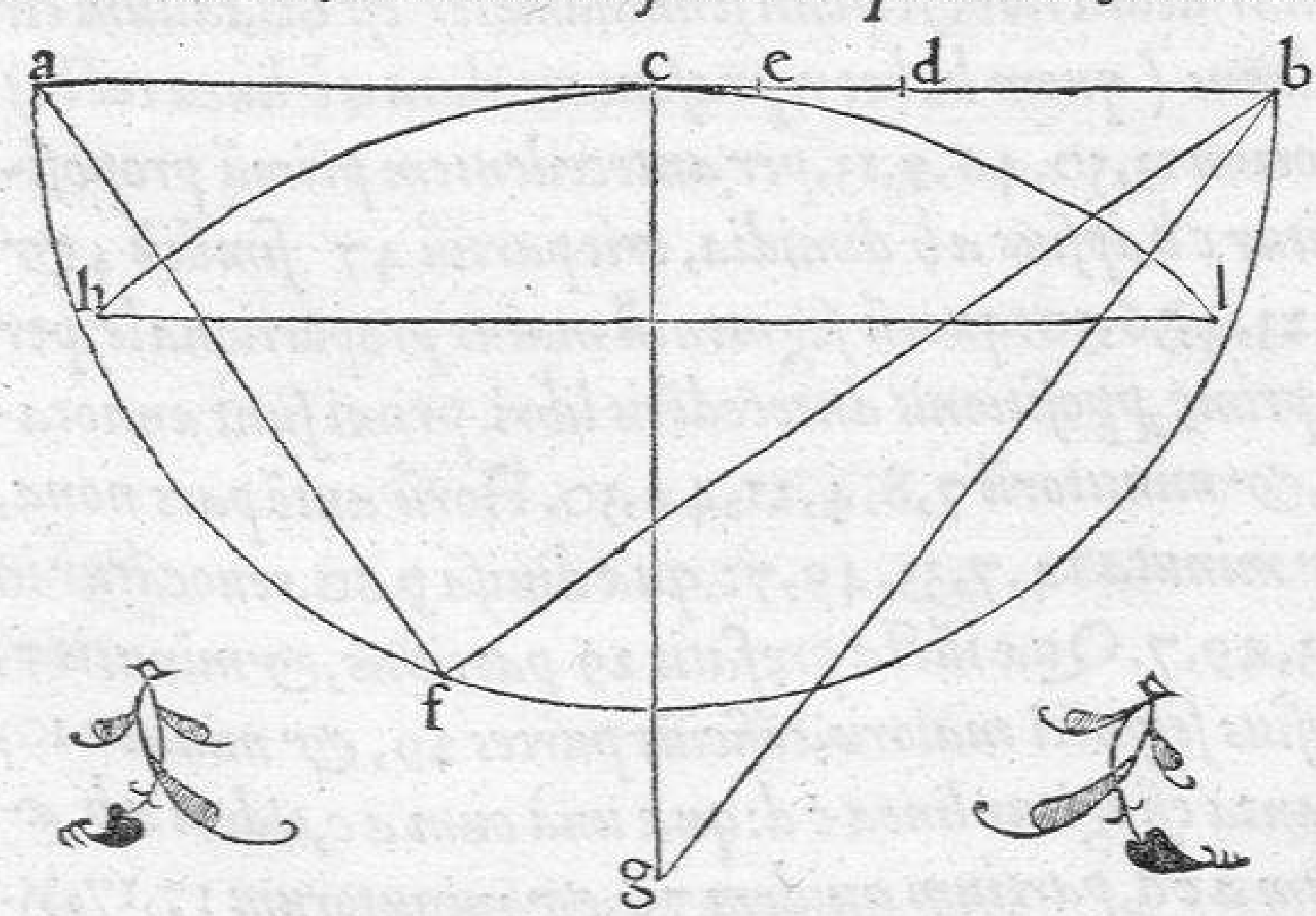
3 ¶ ALIAM INSVPER VIAM EXCOGITAVIMVS, eámque duplicem, qua data, linea recta, in circunferentiæ quadrantem promptiſsimè reuocatur. Sit igitur rurſum data linea recta a b: quæ bifariam in primis diuidatur, in puncto quidem c. Illius autē dimidia c b, proportionaliter diuidatur: cuius ſegmentum maius, unà cum unius nonæ partes eiuſdem ſegmenti maioris parte ſexageſima (quæ facit $\frac{1}{540}$ unius integri) esto c d. Ipſi poſtmodum a d, æquales ſubtendantur a e, atque b e, ſeſe inuicem contingentes in ipſo puncto e: & connectatur c e, linea recta, quæ per 8 propoſitionem, & 10 diffinitionem primi elementorum, perpendicularis erit ſuper a b. Centro igitur e, interuallo autem e c, deſcribatur circuli quadrans f c g: quem per 16 tertij elementorum, tange ipſa a b, linea data. Hunc igitur circunferentię quadrantem, aio æqualem



eſſe eidem a b, lineæ datæ. ¶ Qualium enim partium (ut ſolita numerorum utamur deductione) circuli ſemidiameter eſt 60, talium circunferentiæ quadrans (quem habet repræſentare data a b linea recta) eſt 94, & minutorum 13, 50, 46, 9, 13, per antecedentem primā propoſitionem. Recta igitur c b, ipſius a b dimidia, erit partiū 47 ſimiliū, & minutorum 6, 55, 23, 4, 36, 30: quorū ſegmentū maius proportionale, per ea quę numero 2 primę ꝑpoſitionis antecedētis libri primi ſunt annotata, erit partiū 29, & minutorū 7, 8, 4, 21, 44, 30. Horū autē pars nona, habet partes 3, & minuta 14, 7, 33, 49, 7: quæ diuiſa ꝑ 60, reuocātur in minuta 3, 14, 7, 33, 49, 7. Quæ iūcta pręfatis 29 partibus, & minutis 7, 8, 4, 21, 44, 30, ipſius ſegmēti maioris, cōficiūt partes 29, & minuta 10, 22, 11, 55, 33, 23. Tanta eſt igitur linea c d: quæ unà cum a c, eidem a b æquali, cōficit rectam a c d, partium quidem 76, & minutorum 17, 17, 35. Totidē itaq; partium & minutorū, eſt ipſa a e, uel e b: cuius quadratū *habet partes 5819, & minuta 53,31,42,59,10,25. A quibus subducto quadrato ipsius a c, quod est partium 2219, & minutorum 51,34,4,57, 33,37: relinquitur quadratū ipsius e c, per 47 primi elemētorū (rectus est enim angulus a c e) partium uidelicet 3600, & minutorum 1,57,38,1, 36,58: quorū radix quadrata habet partes 60, & 1 ferè minutū primū, ex irrationaliū segmentorum, surdarúmue radicū ineuitabili defectu cō tractum, & proinde nihili faciendum.* Recta *igitur e c, est partium 60: & quadrans propterea circunferentiæ f c g (uti supra diximus) erit similium partium 94, & minutorum 13,50,46,9,13.* Atqui *totidem partium atque minutorum, supposita est a b, linea recta.* Quradrans *igitur circunferentiæ f c g, eidem a b, lineæ rectæ coæquatur: quod faciendum, atque numeris confirmandum susceperamus.*

¶ Idem rursum alio modo.

¶IVVAT ET ALIVM DEMVM, AD IDEM, SVB- 4
nectere modum. Resumatur ergo data a b, linea recta, bifariam diuisa in puncto c: & dimidia illius pars c b, diuisa proportionaliter in puncto d, cuius segmentū maius sit b d, minus uerò d c: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto e, sitq; illius segmentū maius d e, minus autē e c. Super data postmodū a b, linea recta, describatur semicirculus a f b: & ipsi a e, subtēdatur æqualis a f, connectatúrq; f b, linea recta. Erecta demum perpendiculari c g, eidem f b, æqualis subtendatur b g, coincidēs in c g, perpendicularem ad ipsum punctū g. Erit enim recta g c, semidiameter circuli, cuius circunferentiæ quadrans, ueluti h c l, eidem a b, lineæ rectæ est æqualis. Huiusce autem traditionis fidem facit, cōueniēs ad amussim ipsius c g, semidiametri, cum proxima descriptione magnitudo.



¶ Corollarium.

¶Ex

¶ *Ex supradictis fit manifestum, quàm facile sit, data quauis linea recta in circunferentiæ quadrantem in primis resoluta, oblatæ cuicunque lineæ rectę, æqualem circunferentiæ quadrantem, tãquam ex archetypo describere.* Nam *si eadem linea recta à principio data, posita fuerit in primo ordine: & semidiameter circuli, cuius circunferentiæ quadrans æquatur ipsi lineæ datæ, in secundo: tertium porrò locum poßideat ipsa linea proposita, cui uidelicet quadrãs circunferẽtiæ desideratur æqualis: & per 12 sexti elemẽtorũ, quarta proportionalis inueniatur: ea erit diameter circuli, cuius circunferẽtiæ quadrans, eidem propositæ lineæ rectæ coæquatur. Sunt enim præfatæ lineæ, atque semidiatri, inuicem proportionales.*

PROPOSITIO IIII.

CVILIBET insuper lineæ rectæ, liberas quotcunque diuersarum circunferentiarum partes, à datis quibusuis numeris denominatas, integrámue circunferentiam æqualem delineare.

1 ¶VT SI DATA FVERIT LINEA RECTA, AB: *illi in primis dabitur circunferentiæ quadrans æqualis, per antecedẽtem tertiam propositionem, cuiusmodi est arcus a c, eius quæ sequitur descri-*

2 *ptionis.* ¶ *Et si eadem a b, linea data, in tres partes inuicem æquales diuidatur, & duo illius tertia in circunferentiæ quadrantem resoluãtur per ipsam antecedentem tertiã propositionem: idem circunferentiæ quadrans, unà cum dimidia eius parte (ueluti arcus a d, eiusdem sequentis*

3 *descriptionis) eidem oblatæ lineæ rectæ coæquabitur.* ¶ *Item si dimidiæ parti eiusdem a b, lineæ datæ, per antecedentem tertiam propositionem quadrans æqualis describatur, ísq; geminetur, hoc est, compleatur semicirculus: erit ipsa dimidia circunferentia (cuiusmodi est a e f) æqualis*

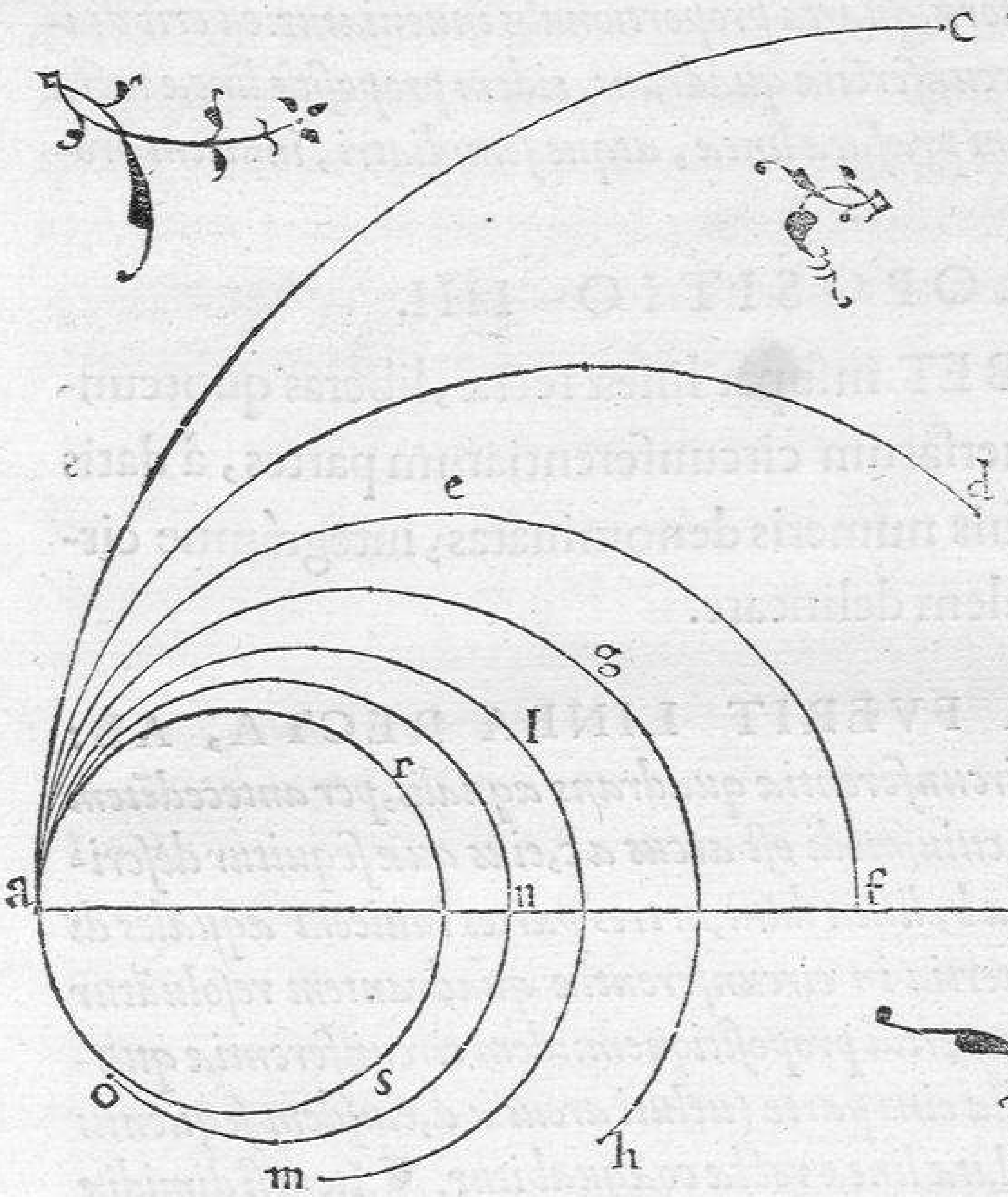
4 *ipsi a b, lineæ datæ.* ¶ *Præterea, si præfata linea data in quinque partes inuicem æquales diuidatur, & duo illius quinta in circunferentiæ quadrantem, per ipsam antecedentem propositionem tertiam resoluantur: gemini quadrantes, & dimidium quadrantis eiusdem circunferentiæ (quos repræsentat arcus a l m) ipsi toti lineæ datæ a b erunt æquales.*

5 ¶ *Quòd si eadem linea data, in septem partes inuicem æquales fuerit distributa, & duobus illius septimis æqualis circunferentiæ quadrans,*

per eandem tertiam propositionem describatur: tres huiuscemodi quadrantes, unà cum ipsius quadrantis dimidio (cuiusmodi est arcus a n o, subscriptæ delineationis) coæquabuntur eidem a b, lineæ datæ.

¶ *Consequenter, ubi quartæ parti eiusdẽ lineæ datæ, circunferẽtiæ qua-* 6
drans descriptus fuerit æqualis, per sæpius allegatam propositionem tertiam: erit idem quadrans quater sumptus, hoc est, integra circunferentia (qualis est arcus a r s) eidem lineæ datæ ad amussim ęqualis.

¶ *Et deinceps, in hũc* 7
modum quantumlibet progrediendo: ex diuersis partibus quotis ipsius a b, lineæ datæ in circunferentiæ quadrantẽ resolutis, diuersæ colligentur circunferẽtiarũ partes, eidem lineæ datæ pendenter æquales.



¶ Corollarium.

¶ *Et proinde fit manifestum, dari posse diuersarum circunferentiarum arcus, tum inuicem, tum integris circunferentiis æquales.* Per ea etenim *quæ nunc expressa sunt, arcus a c, a d, a e f, a g h, a l m, a n o, atque integra circunferentia a r s (quorum diuersitas est euidẽtissima) eidem a b, lineæ datæ sunt æquales: & proinde æquales adinuicem.*

¶ Incidens notandum.

¶ *Qualiter autem data linea recta, in quotcunque partes inuicem æquales diuidatur: alibi sufficienter edocuimus.* Id etiam ex nona sexti *elementorum, uel facilè colligitur:* Docet enim *à quauis linea recta ordi-*

ordinatam partem, hoc est, à dato quouis numero denominatã abſcindere. Hinc per tertiam primi eorundem elementorum, reſidua pars ipſius lineæ datæ, in reliquas partes ſimiles tandem ſubdiuidi poterit: donec oblatus earundem partium abſoluatur numerus.

PROPOSITIO V.

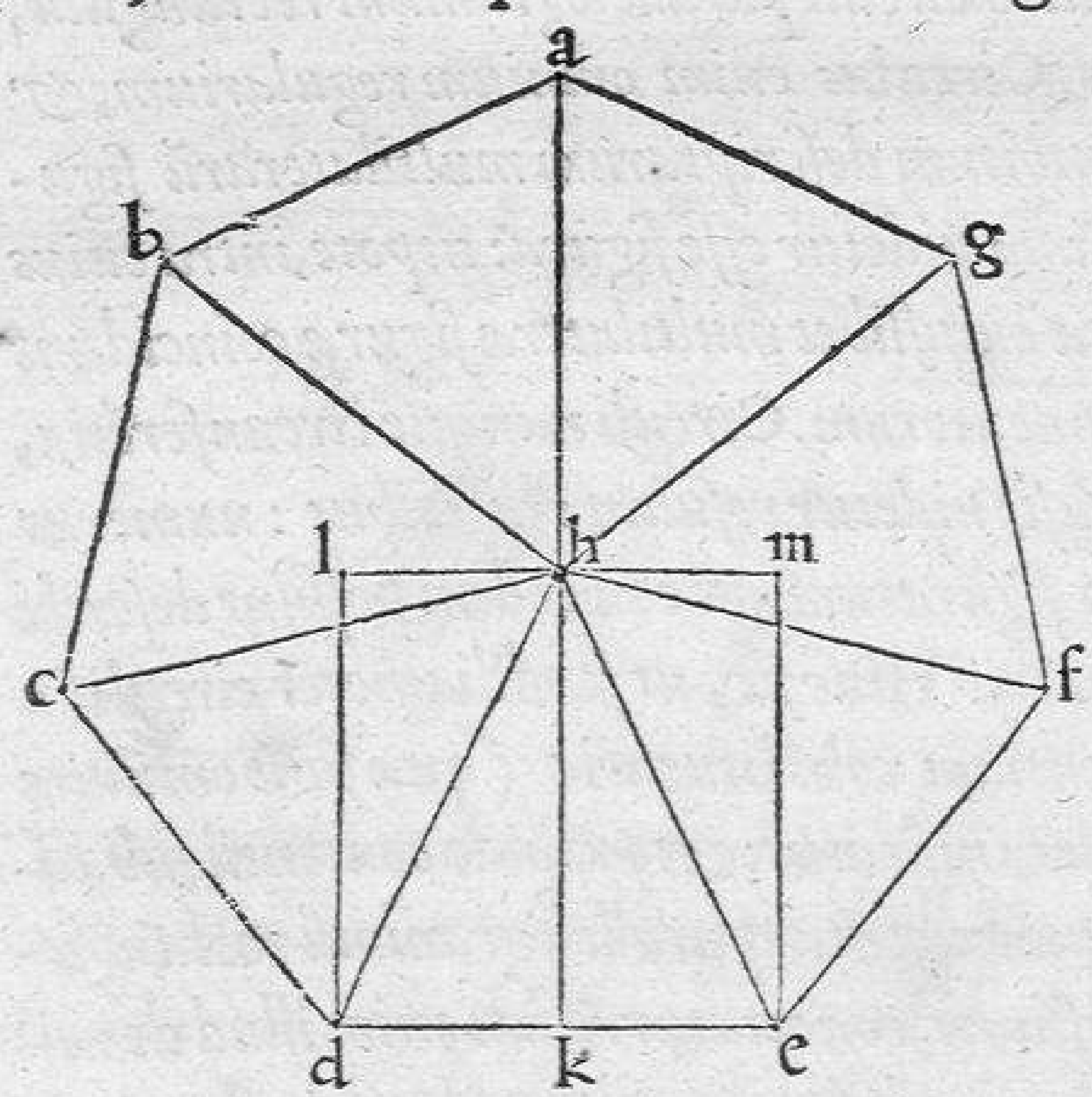
QV A ratione circulus ſub dimenſionem cadat, illiúſue colligatur area, pendenter reddere certum.

1 ¶CVM AREA DATAE CVIVSLIBET REGVLA*ris atque multilateræ figuræ, ſit æqualis parallelogrammo rectangulo, quod ſub perpendiculari quæ ex centro inſcripti aut circunſcripti circuli, in latus ipſius multilateræ figuræ cadit, & dimidio eiuſdẽ multilateræ continetur ambitu: fit conſequenter, ut comprehenſum ſub dimidia circunferentia, & ea quæ ex centro circuli parallelogrãmum rectangulũ, areæ ipſius circuli ſit æquale. Circulus enim omnium regularium, & intra eundem orbicularem ambitum deſcriptarum multilaterarũ figurarum, maxima atq; capaciſsima uidetur eſſe figura: utpote, intra cuius circunferentiam, ſingula datæ cuiuſlibet multilateræ figuræ coincidant latera, per ſecundam tertij elementorum. Circuli nanque circunferẽtia, ex infinitis, atque inuicem cõfuſis uidetur reſultare lateribus: numerus ſiquidem laterum regularium figurarum, quæ in eodem poſſunt deſcribi circulo, in infinitum progreditur. Hinc fit, ut ſemidiameter circuli, in ſingula latera illius circunferentiam conſtituentia (quæ ſunt omnium minima) indifferenter coincidere uideatur: & proinde contentũ ſub dimidia circunferentia, & ea quæ ex centro parallelogrammũ rectangulum, areæ ipſius circuli de neceſsitate coæquatur. Cum enim illud de minima, atque intermediis omnibus multilateris & regularibus figuris uerificetur: neceſſum eſt conſequenter, idem habere uerum de ipſo circulo, omnium multilaterarum, & intra eundem orbicularẽ ambitum (uti ſupra dictum eſt) deſcriptarum maximo atque regulariſsimo.*

¶ Aſſumptum, de multilaterarum atque regularium figurarum dimenſione.

2 ¶QVOD AVTEM RECTANGVLVM SVB PRAEFATA

perpendiculari, & dimidio cuiuslibet multilateræ regularis ambitu cõprehensum, aream habeat ipsi multilateræ figuræ æqualem: in hunc modum cõfirmatur. Sit clarioris intelligentiæ gratia, datũ heptagonũ æquilaterũ & æquiangulũ a b c d e f g, cuius cẽtrũ sit h: à quo in singulos angulos ipsius heptagoni, rectæ ducantur lineæ h a, h b, h c, h d, h e, h f, h g, idem heptagonum in septem isoscelia & inuicem æqualia triangula diuidentes. In latus porrò d e, perpendicularis incidat h k *: sitque sub eadem perpendiculari h* k*, & ipso latere d e, contentum rectangulũ parallelogrammum d l m e. Constat igitur, per 41 primi elementorũ, ipsum d l m e, rectangulũ duplum esse trianguli d h e: sunt enim in eadem basi d e, atq; in eisdem parallelis d e, & l m, cõsistentia. Quod igitur sub h* k *perpendiculari, & latere d e cõtinetur rectangulũ, duplum est ipsius trianguli d h e. Haud aliter concludemus, quod sub præfata perpẽdiculari h* k*, & quolibet eiusdẽ heptagoni latere continetur rectangulũ, duplum esse trianguli quod super eodẽ latere ad centrum h constituitur. Quotuplex est autẽ unum prædictorum rectangulorũ unius trianguli, utpote d l m e, ipsius d h e: totuplicia sunt & omnium triangulorum omnia rectangula, per primã quinti elementorum. Quæ igitur sub h* k*, perpẽdiculari, & omnibus eiusdem heptagoni lateribus continentur rectangula, dupla sunt omnium triangulorum, super eisdem lateribus ad centrum h, consistentium: & ipsius propterea heptagoni dupla, utpote, quòd ex eisdem resultet triangulis.*

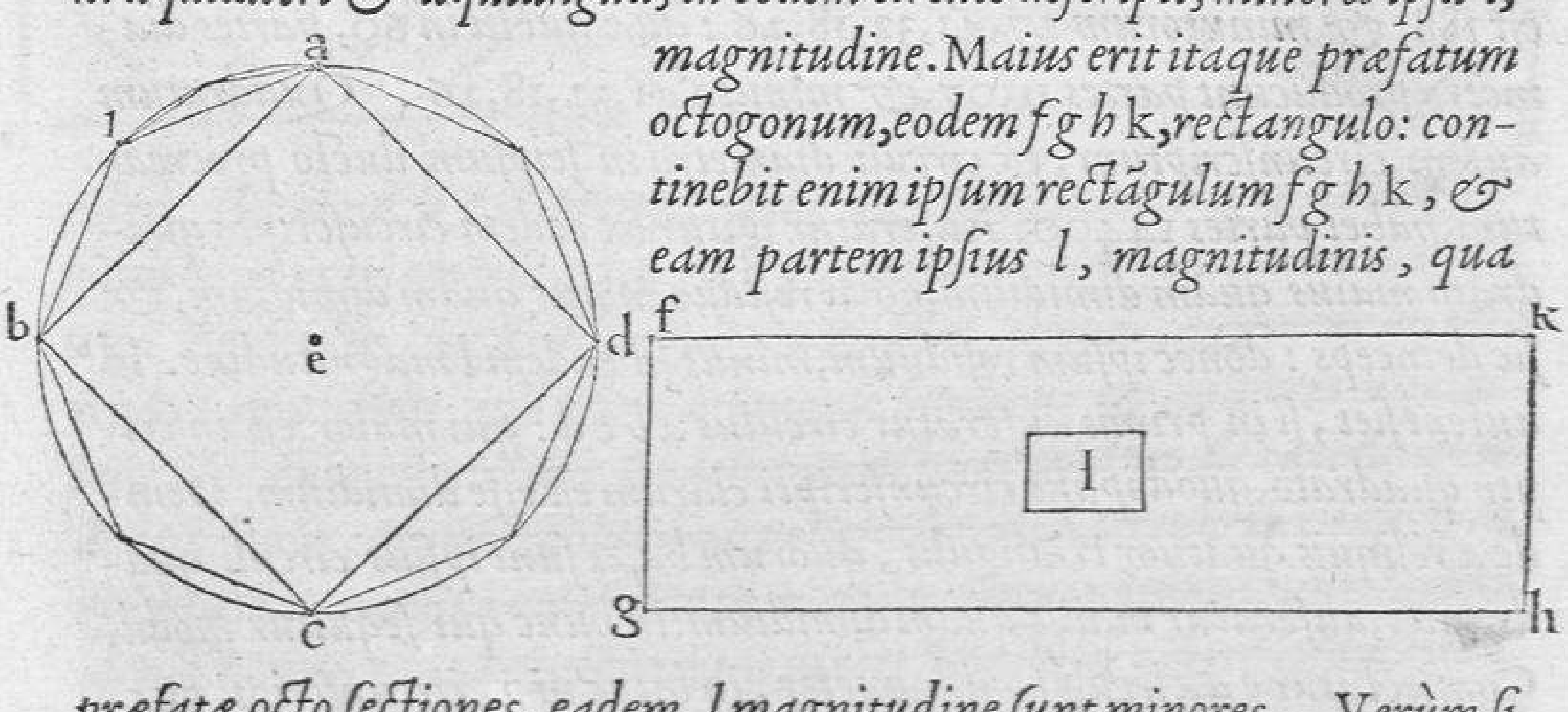


Rectangulum itaque parallelogrammum, sub h k*, perpendiculari, & dimidio laterum ambitu comprehensum, æquum est areæ ipsius heptagoni a b c d e f g. quod fuerat ostendendum. De cæteris quibuscũq; regularibus, & in infinitum progredientibus figuris multilateris, siue polygonis, haud alienum habendũ est iudicium. Area itaque circuli, & dati cuiuslibet polygoni regularis, eadem uia colligitur.*

¶Quòd

¶ Quòd circulus non est maior rectangulo, sub dimidia circunferentia, & semidiametro comprehenso.

3 ¶EANDEM QVOQVE CIRCVLI DIMENSIOnem, *ab impoßibili confirmare licebit. Sit igitur datus circulus a b c d, cuius centrum e: rectangulũ uerò sub dimidia illius circunferentia, & ea quæ ex centro contentum, f g h k. Itaque si a b c d circulus, ipsi rectangulo f g h k, non fuerit æqualis: erit igitur uel eo maior, aut minor. Sit in primis (si poßibile fuerit) maior: & excessus eiusdem circuli, super ipsum rectangulum, magnitudo l. Erit igitur magnitudo l, eodem circulo a b c d, minor. Auferatur itaque à circulo a b c d, maius quàm dimidium, & à residuo maius quàm dimidium, & sic deinceps: quatenus id quod relinquetur, sit maius ipsa l magnitudine. Id autem fiet, tollendo in primis quadratum a b c d, in dato circulo per sextam quinti elemẽtorum descriptum: illud enim dimidium est quadrati eidem circulo circũscripti, & proinde maius quàm dimidiũ ipsius circuli. Deinde, à relictis quatuor circuli sectionibus, quatuor isoscelia & inuicem æqualia auferendo triangula, à limitibus cuiuslibet lateris in medium punctum subtensi arcus insurgentia (cuiusmodi est triangulum a i b) erit unũquodq; triangulum, dimidium parallelogrammi, quod sub eisdem lateribus & sagittis sectionum cõprehenditur, & proinde ipsius sectionis dimidio maius. Sint igitur (uerbi gratia) octo circuli sectiones, super latera octogoni æquilateri & æquianguli, in eodem circulo descripti, minores ipsa l, magnitudine. Maius erit itaque præfatum octogonum, eodem f g h k, rectangulo: continebit enim ipsum rectãgulum f g h k, & eam partem ipsius l, magnitudinis, qua*



præfatæ octo sectiones, eadem l magnitudine sunt minores. Verùm si ex centro e, in unum ipsius octogoni latus perpendicularis intelligatur: contentum sub ipsa perpendiculari, & dimidio laterum ambitu rectã-

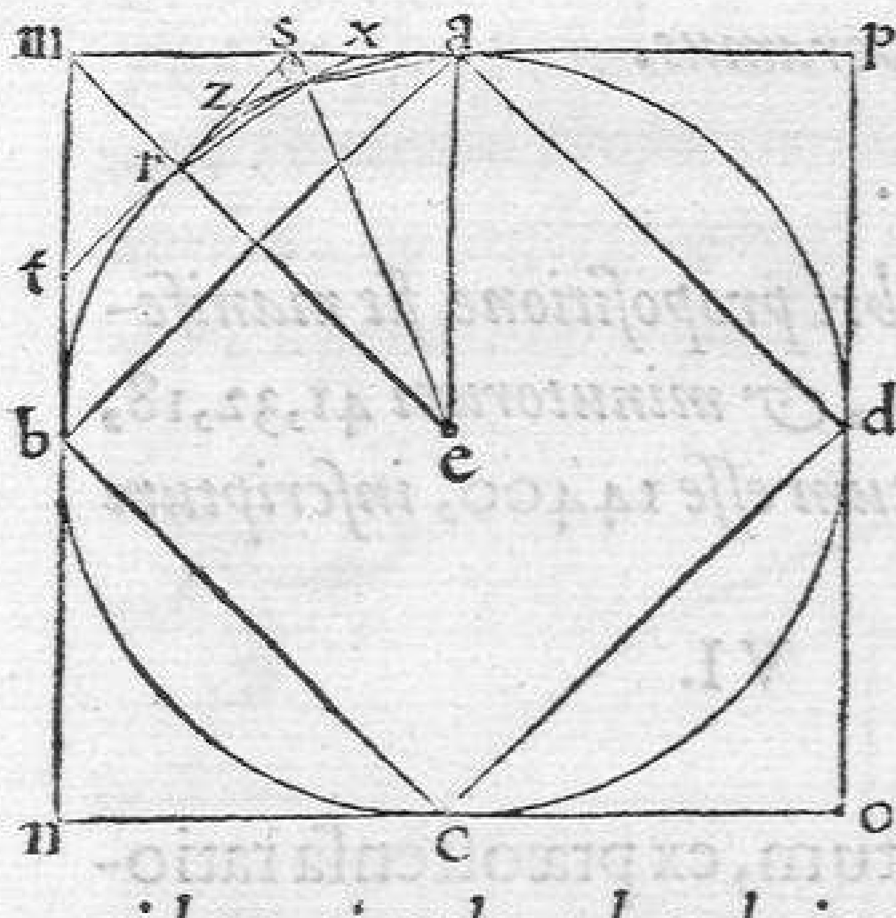
gulum, eidem octogono, per antecedentis lẽmatis demonstrationem, erit æquale. Atqui perpendicularis ipsa minor est circuli semidiametro, & dimidius laterum ambitus ipsius octogoni, dimidia circũferentia itidem minor: idem propterea octogonum, sub eadem perpendiculari, & dimidio laterum ambitu comprehensum, minus erit eodem f g h k, *rectangulo, quod sub circuli dimidia circunferentia & illius semidiametro continetur. Sequebatur autem ex præmissis, quòd & maius: quæ simul impossibilia sunt. Non est igitur circulus a b c d, ipso f g h* k, *rectangulo maior.*

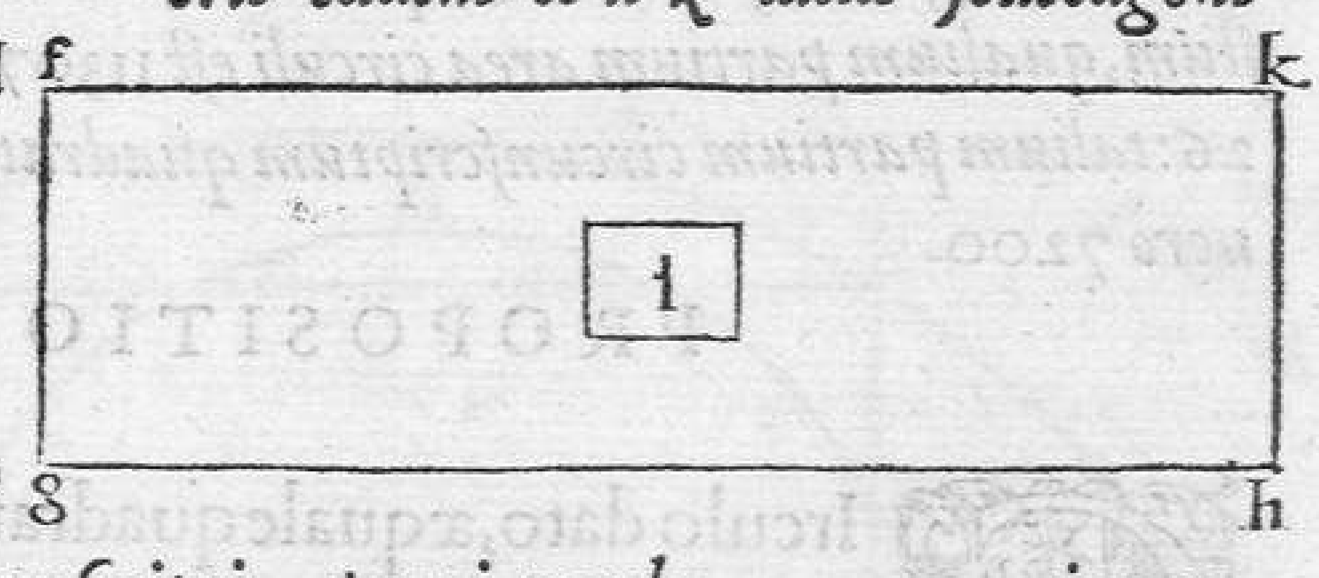
¶ Quòd circulus non est minor ipso rectangulo, quod sub dimidia circunferentia & semidiametro continetur.

¶ AIO CONSEQVENTER, QVOD NEQVE MI- 4
nor est circulus eodem rectangulo sub dimidia circunferentia & semidiametro comprehenso. Sit enim rursum (si possibile fuerit) differentia ipsius a b c d circuli, atque rectanguli f g h k, *præfata magnitudo l. Et eidem circulo a b c d, circunscribatur quadratum m n o p, ipsius inscripti quadrati contingens angulos, per septimam quinti elemẽtorum. Ipsum ergo quadratum m n o p, eodem rectangulo f g h* k, *maius erit. Nam per antecedentem primam propositionem huius secundi libri, qualium partium diameter circuli est* 120, *talium dimidia circunferentia est* 188, *& minutorum* 27, 41, 32, 18, 26 : *quæ ducta in* 60, *partes diametri, producunt partes* 11307, *& minuta* 41, 32, 18, 26. *Quadratum autem circunscriptum, ex circuli diametro in seipsum ducto procreatum, habet partes* 14400. *Auferatur igitur ex eodem circũscripto quadrato maius quàm dimidium, & à residuo maius quàm dimidium, & sic deinceps: donec ipsum residuum, minus sit eadem l magnitudine. Id autem fiet, si in primis auferatur circulus a b c d: qui maior est inscripto quadrato, quod ipsius circunscripti clarum est esse dimidium. Deinde à reliquis quatuor triangulis, quorum bases sunt ipsius circuli quadrantes, auferatur maius quàm dimidium: in hunc qui sequitur modũ. Connectatur e a, circuli semidiameter, in latus m p, circunscripti quadrati perpendicularis: postea e m eiusdem circunscripti quadrati semidiameter, qui circunferentiæ quadrantem a b, secet in puncto r. Et per*

punctum

punctum r, ipsi a b lateri parallela ducatur s r t, per 31 primi elementorum. Recti erunt igitur anguli qui circa uerticem r, per 29 & 15 ipsius primi elementorum. Tanget itaque recta s t ipsum a b c d circulum, in ipso quidem puncto r, per corollarium sedecimæ tertij eorundem elementorum. Connexa tandem a r, quæ est latus octogoni regularis in dato circulo descripti: eadem s t erit latus octogoni regularis, descripti circa eundem circulum a b c d: & r s æqualis ipsi a s, per ea quæ 12 quarti elementorum demonstrantur. Et cùm angulus m r s, sit rectus: maior erit m s, ipsa r s, per 19 primi elementorum: & proinde maior eadem s a. Triangula porrò m r s & s r a, se habent adinuicem, ut bases m s & s a, per primam sexti elementorum. Maius est itaque triangulum m r s, ipso rectilineo triangulo r s a: & proinde longè maius triangulo r s a, cuius basis est arcus a r. Et totum consequenter triangulum m s t, maius erit duobus triangulis r s a, r t b, quorum bases sunt arcus a r, r b. Subducto itaque triangulo m s t quater sumpto, à relictis quatuor triãgulis, quorum bases sunt circunferentiæ quadrantes: auferetur plus quàm dimidium. Eodem modo connexa e s linea recta, quæ secet arcum a r in puncto u, & per ipsum punctum u, ipsi a r descripta parallela x u z: erit eadem x u z latus sedecagoni





eidem circulo a b c d circunscripti, & triangulum s x z maius reliquis duobus triangulis a x u, u z r, quorum bases sunt arcus a u & u r. Subducto itaque triangulo s u z octies sumpto, auferetur ab octo residuis triangulis, ipsi a s r u triangulo similibus & inuicem æqualibus, plus quàm dimidium. Et deinceps in hunc modum, de cæteris agendo triangulis, atque regularibus polygonis eidem circulo circunscriptis, & à pariter paribus numeris denominatis. Supponantur igitur, facilioris intelligentiæ causa, octo triangulares superficies, inter ipsum circulum & circũscriptũ polygonũ regulare cõprehensæ, ipsa l magnitudine fore minores. Erit igitur idem octogonum, præfato rectangulo f g h k *minus: cùm datum a b c d triangulum, & residuum ipsa l magnitudine minus comprehendat. At quoniam dimidius ambitus ipsius octogoni circunscripti, maior est dimidia circunferentia circuli, & perpendicularis in latus eiusdem cadens octogoni, semidiametro eiusdem circuli aequalis, atque per antecedentis assumpti siue lemmatis demonstrationem, sub ipsa perpendiculari & dimidio laterum ambitu, rectangulum comprehendatur ipsi octogono aequale: Maius erit propterea idem circūscriptum octogonū, ipso f g h* k *rectangulo, sub dimidia circūferentia & semidiametro comprehenso. Inferebatur autem ex supradictis, quò & minus: quae simul stare non possunt. Non est igitur circulus a b c d, eodem f g h* k *rectangulo minor. Ostensum etiam, quòd neque maior. Aequalis est igitur idem circulus a b c d, ipsi rectangulo f g h* k, *quod sub dimidia circunferentia, & semidiametro continetur.*

¶Conclusio propositionis.

¶*Resultat igitur area circuli, ex ductu semidiametri in dimidiam circunferentiam. Quod demonstrandum susceperamus.*

¶Corollarium.

¶*Ex hac igitur quinta, & prima huius libri propositione fit manifestum, qualium partium area circuli est* 11307, *& minutorum* 41,32,18,26: *talium partium circunscriptum quadratum esse* 14400, *inscriptum uerò* 7200.

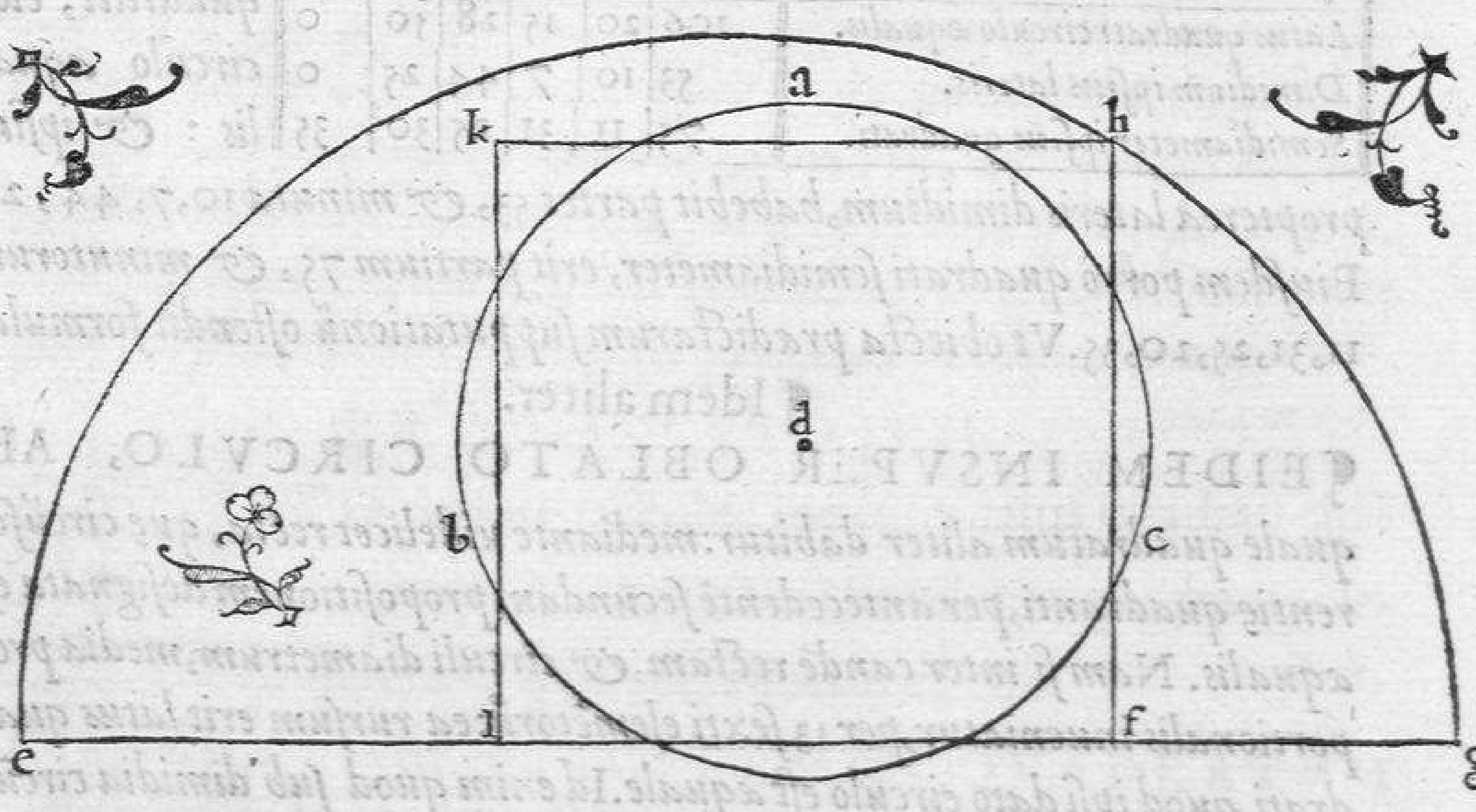
PROPOSITIO VI.

CIrculo dato, aequale quadratum, ex praeostensa ratione circunferentiae ad ipsius circuli diametrum atque uersione quadrantis in lineam rectam, in primis describere.

¶PRIMA ET OMNIVM SIMPLICISSIMA *circuli quadratura, ex praeostensa ratione circunferentiae ad diametrū, & ipsius circuli dimensione, in succedentiū tetragonismorum circularium confirmationem, in hunc qui sequitur modum uenit in primis colligenda. Constat igitur ex prima huius secundi libri propositione, cir-* 1

cunferentiam

cunferentiam circuli, ad ipsum diametrum rationem obtinere triplam undecupartientem septuagesimas octauas: qualem propemodum habere uidentur partes 376, & sexagenaria minuta 55, 23, 4, 36, 52, ad partes 120 (qua ratione præcisiorem aliquando inueniri posse, omnino diffidimus: quemadmodum ex ipsius primæ propositionis demonstratione fit manifestum.) Ex immediata porrò quinta propositione colligitur, rectangulum sub dimidia circunferentia, & semidiametro comprehensum, æquum esse dato circulo: cuius radix quadrata, est latus quadrati quod eidem circulo coæquatur. Si igitur inter rectam quæ dimidiæ circunferentiæ sit æqualis, & ipsius circuli semidiametrum, media proportionalis inueniatur, per 13 sexti elementorum: ea erit latus quadrati, ipsi dato circulo æqualis. Cùm enim tres lineæ rectæ fuerint proportionales, quod sub extremis continetur rectangulum, æquum est ei quod à media fit quadrato, per 17 eiusdem sexti elementorum. ¶ Vt si datus fuerit (uerbi gratia) circulus a b c, cuius centrum d, & dimidiæ illius circunferentiæ æqualis sit e f linea recta, semidiametro autem recta f g, & super tota e g linea recta semicirculus describatur e h g, excitetúrque à puncto f perpendicularis f h, per undecimam primi elementorum: erit ipsa f h media proportionalis inter a f & f g, per ipsam 13 sexti elementorum, & descriptum ex eadem f h quadratum f h k l, eidem circulo a b c d pendenter æquale.



¶ Si iuuet autem in numeris facere periculum, assumatur circuli diameter partium inuicem æqualium 120 (qualem secunda huius libri pro-

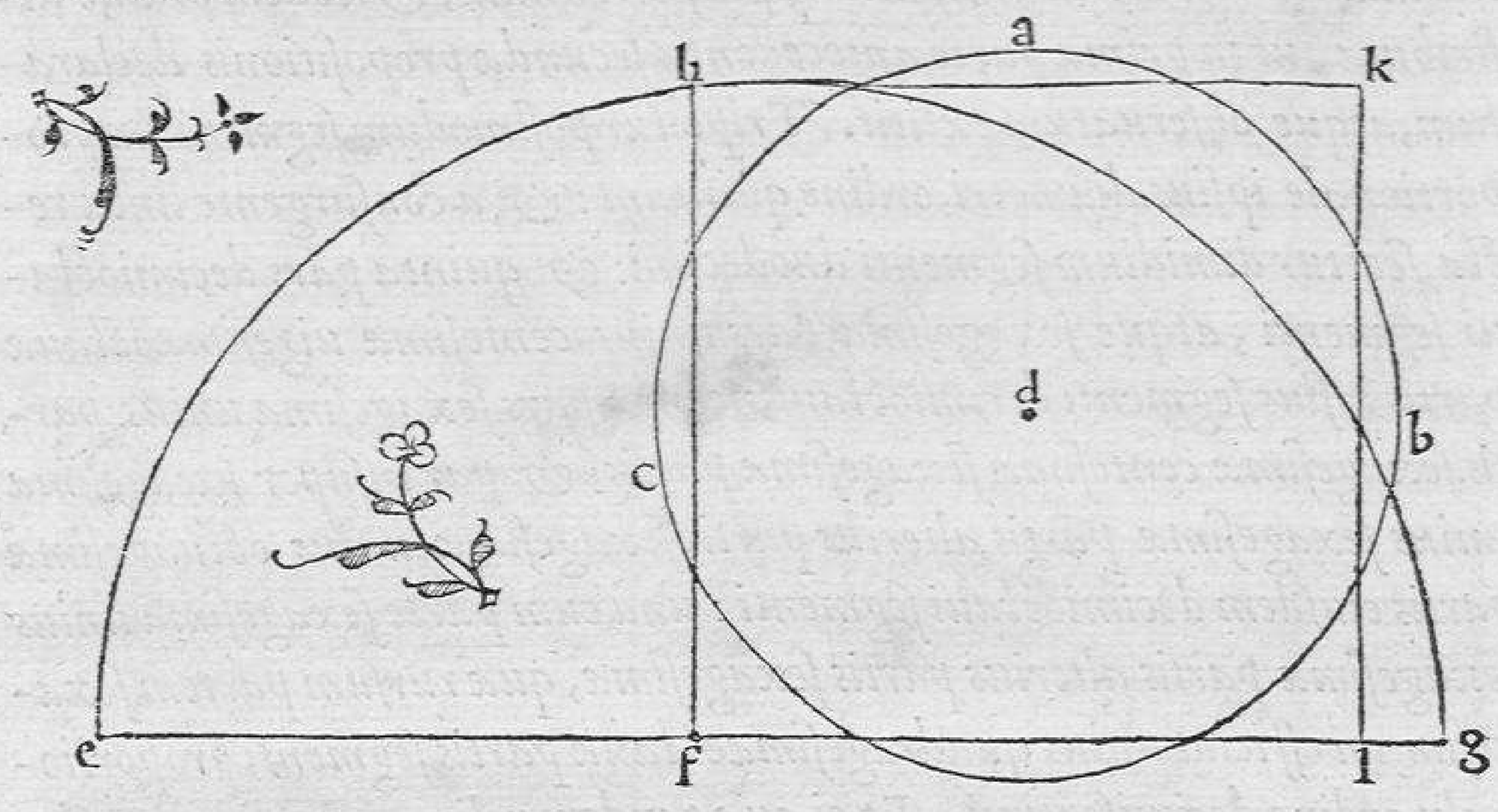
positione suppoſuimus) ſemidiameter igitur, erit partium 60 : & triplū conſequenter ipſius diametri, partium 360. Vnum porrò ſeptuageſimumoctauum eiuſdem diametri, habebit partem 1, & minuta ſexagenaria 32, 18, 27, 41, 32 : & proinde undecim ſeptuageſimaoctaua, continebunt partes 16, & minuta 55, 23, 4, 36, 52. Hæc autem undecim ſeptuageſimaoctaua, iuncta præfatis 360 partibus triplati dimetientis conficiunt circunferentiam ipſius circuli, partium quidem 376, & minutorum 55, 23, 4, 36, 52. Dimidia itaque circunferētia, erit partium 188, *& minutorum 27, 41, 32, 18, 26: quæ ducta in 60, partes ſemidiametri, reddunt partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26.* Tanta eſt igitur area *ipſius circuli, per antecedentem quintam propoſitionem.* Huius autem *areę radix quadrata, uero (quantum ars ipſa patitur numerorum) proxima, habet partes 106, & minuta 20, 15, 28, 50. Tātum eſt itaque latus quadrati, eidē circulo æqualis : & ipſius propterea lateris dimidium, habebit partes 53, & minuta 10, 7, 44, 25.* Eiuſdem porrò quadrati ſemidiameter, erit partium 75, & minutorum 11, 31, 25, 20, 35. V*t obiecta prædictarum ſupputationū oſtendit formula.*

	partes.	m.	2.	3.	4.	5.
Diameter circuli.	120	0	0	0	0	0
Semidiameter.	60	0	0	0	0	0
Triplum diametri.	360	0	0	0	0	0
$\frac{1}{78}$ *ipſius diametri.*	1	32	18	27	41	32
$\frac{11}{78}$ *eiuſdem diametri.*	16	55	23	4	36	52
circunferentia.	376	55	23	4	36	52
Dimidia circunferentia.	188	27	41	32	18	26
Semidiameter, per quem dimidia	60	/	/	/	/	/
circunferentia multiplicatur.	27	41	32	18	26	0
Numeri producti.	11280					
¶ *Area dati circuli.*	11307	41	32	18	26	0
Latus quadrati circulo æqualis.	106	20	15	28	50	0
Dimidium ipſius lateris.	53	10	7	44	25	0
Semidiameter ipſius quadrati.	75	11	31	25	30	35

¶Idem aliter.

¶EIDEM INSVPER OBLATO CIRCVLO, AE- 2
quale quadratum aliter dabitur: mediante uidelicet recta, quę circūferentię quadranti, per antecedentē ſecundam propoſitionem deſignata eſt æqualis. Nam *ſi inter eandē rectam, & circuli diametrum, media proportionalis inueniatur, per 13 ſexti elemētorū: ea rurſum erit latus quadrati, quod ipſi dato circulo eſt æquale.* Id enim quod *ſub dimidia circūferentia, & ſemidiametro continetur rectangulū, ipſi dato circulo eſt æquale: igitur & illud ꝙ ſub quadrāte, & toto cōprehenditur diametro.*

¶ *In exemplarem huiusce partis confirmationē, describatur figura priori haud dißimilis: hoc solùm excepto, quòd recta e f, quadranti circunferentiæ sit æqualis, f g autem dati a b c d, circuli diametro. Sítque rursum media proportionalis inter e f, & f g, recta f h: cuius quadratum f h k l, æquum est contento sub e f, & f g rectangulo, & proinde ipsi dato circulo a b c d.*



¶ *Si iuuet autem, numerali supputatione periculum facere: sit uelut antea, circuli diameter partium 120. Erit igitur recta e f, quæ ipsi uidelicet circunferentiæ quadranti est æqualis, similium partium 94, & minutorum 13, 50, 46, 9, 13. per antecedentem primam, aut secundam propositionem: quæ ducta in 120 partes ipsius f g, seu diametri circuli, procreāt rursum partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26: quanta uidelicet per antecedentem primam partem, inuenta est area ipsius dati circuli. Hinc latus quadrati eidem circulo æqualis, hoc est, recta f h, atque ipsius quadrati semidiameter, à præmissa quantitate non discrepabunt.*

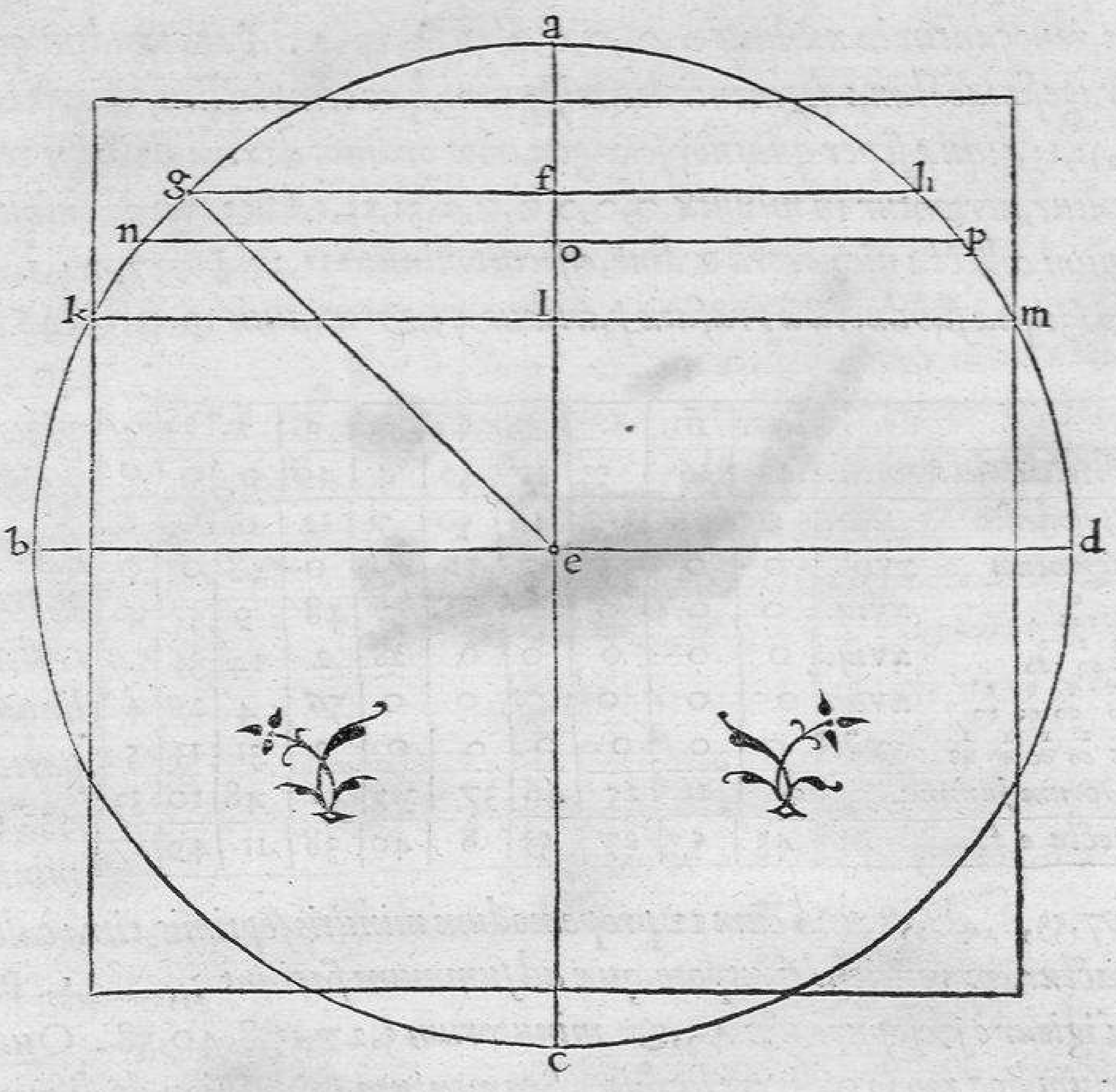
PROPOSITIO VII.

DATO rursum circulo, inuenire latus quadrati eidē circulo æqualis: & rectam simul, quæ quadranti circunferentiæ ipsius coæquetur circuli.

1 ¶ QVANQVAM CIRCVLVM IN QVADRATVM *æquale, & tum ex præostensa ratione circūferētiæ ad ipsius circuli diametrū, tum ex uersione quadrātis eiusdem circunferentiæ in lineā rectā, proxima docuerimus reuocare propositione: iuuat nihilominus hoc præ-*

clarum & hactenus desideratum problema, pluribus modis à nobis recẽs excogitatis & adinuentis, hoc loco pertractare: idq́ue in primis beneficio duarum rectarum, inter datas extremas continuè proportionalium. Sit igitur datus circulus a b c d, cuius centrum e, in quo dimetientes a c, & b d, ad rectos sese inuicem diuidant angulos. Et discindatur diameter b e d, in tot segmenta proportionalia, & eodem ordine distributa, ut in prima parte antecedentis secundæ propositionis declaratum, atque obseruatum extitit. Tripletur postmodum segmentum proportionale ipsius diametri, ordine quintum: & à consurgente linea recta, secetur dimidium segmenti duodecimi: & quinta pars decimioctaui segmenti, atque sexagesima pars unius centesimæ uigesimæoctauæ partis ipsius segmenti decimioctaui, necnon pars sexagesima unius partis sexagesimæ centesimæ sexagesimæ partis, & par insuper sexagesima unius sexagesimæ partis alterius partis sexagesimæ unius octuagesimæ partis eiusdem decimioctaui segmenti: unà cum parte sexagesima unius sexagesimæ partis alterius partis sexagesimæ, quæ rursum partem sexagesimam efficiat unius quadragesimæoctauæ partis segmenti proportionalis ordine decimiseptimi. Et ei quæ tandem relinquetur lineæ rectæ, æqualis secetur e f, per tertiam primi elementorum. Aut (si uelis) ex quarto segmento proportionali ipsius diametri b e d, auferatur segmentum ordine undecimum: & inde relictæ lineæ rectæ, addatur par quinta decimioctaui segmenti, unà cum nuper expreßis fragmentis ipsius decimioctaui atque decimiseptimi segmenti proportionalis eiusdem diametri. Et inde resultanti lineæ rectæ, æqualis secetur a f. Per punctum insuper f, altero duorum modorum designato, ipsi dimetienti b e d, parallela ducatur g f h, per 31 primi elementorum, utrinque suos applicans limites in circunferentiam a b c d. Inter ipsum consequenter b e d, dimetientem, & rectam g f h, duæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniantur, per aliquam antecedentis primi libri propositionem: quarum maior & ordine secunda sit k l m, minor uerò siue tertia proportionalis n o p. His in hunc modum constructis, aio rectam k l m, esse latus quadrati, quod ipsi dato circulo est æquale: rectam porrò n o p, æqualem esse quadranti circunferentiæ eiusdem circuli dati, utpote ipsi a b, uel a d. Quod numerorum officio, in hunc qui sequitur modum, fiet manifestum.

¶Resu-



¶ *Resumantur igitur ex secunda huius libri propositione, segmentorum proportionalium ipsius diametri b e d supputatæ, & in numeralem tabellam redactæ quantitates, in partibus uidelicet qualium idem circuli diameter est* 120: *Et cõnectatur e g, semidiameter. Clarum est itaq; segmentum proportionale ordine quintum triplatum, efficere partes* 43, *& minuta* 16, 53, 39, 46, 4, 40. *Dimidium porrò segmẽti duodecimi, sub his continetur minutis*, 11, 10, 48, 50, 7, 12. *Et pars quinta decimioctaui segmenti, habet minuta* 0, 14, 57, 11, 45, 0, 48. *Centesima deinde uigesimaoctaua pars ipsius decimioctaui segmenti, hæc minuta comprehendit,* 0, 0, 35, 2, 48, 9, 52, 30: *quorum pars sexagesima eisdem exprimitur numeris, sed mutatis sedibus per unicum ordinẽ uersus dextram, in hũc modũ,* 0, 0, 0, 35, 2, 48, 9, 52, 30. *Eiusdẽ præterea decimioctaui segmenti pars centesima sexagesima, sub his cõprehẽditur minutis* 0, 0, 28, 2, 14, 35, 54: *quę bis per* 60 *solito more distributa, uertuntur in minuta* 0, 0, 0, 0, 28, 2, 14, 35, 54. *Ipsius præterea segmenti decimioctaui pars octuagesima, est minutorum* 0, 0, 56, 4, 29, 4: *quæ ter per* 60, *dextram uersus distribu-*

ta, reuocantur in minuta 0,0,0,0,0,56,4,29,4. P*ars tandem quadragesimaoctaua segmenti decimiseptimi, hæc complectitur minuta,* 0,2,31,13,5: *quæ si per quatuor sexagenarios ordines dextram uersus reuocentur, uertentur in minuta,* 0,0,0,0,0,2,31,13,5. *Hæc autem omnia in unum collecta numerorũ ordinẽ, efficiũt minuta* 11,25,46,37,24,1,48,10,33: *quæ subducta à præfatis partibus* 43, *&* *minutis* 19,53,39,46,4,40, *ipsius quinti segmẽti triplicati, relinquũt partes* 43, *&* *minuta*

	ptes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.	8̃.	9̃.
Triplũ quĩti segmẽti.	43	16	53	39	46	'4	40	0	0	0
$\frac{1}{2}$ *segmenti* xij.	0	11	10	48	50	7	12	0	0	0
$\frac{1}{5}$ *segmenti* xvij.	0	0	14	57	11	45	0	48	0	0
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{128}$ xvij.	0	0	0	0	35	2	48	9	52	30
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{160}$ xvij.	0	0	0	0	0	28	2	14	35	54
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{80}$ xvij.	0	0	0	0	0	0	56	4	29	4
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{48}$ xvij.	0	0	0	0	0	0	2	31	13	5
Horum summa.	0	11	25	46	37	24	1	48	10	33
Recta e f.	43	5	27	53	8	40	38	11	49	27

5,27,53,8,40,38, *unà cum* 12 *propemodum minutis septimis, citra calculi iacturam reiiciendis, utpote quæ ad summum faciant* $\frac{1}{2332800000000}$. *Recta igitur e f, est partium* 43, *&* *minutorum* 5,27,53,8,40,38. Q*uam rursum hoc modo colligere licebit. Segmentum proportionale diametri ordine quartũ, habet partes* 17, *&* *minuta* 30,27,57,2,5,18: *&* *segmẽtum undecimum, minuta* 36,10,47,58,2,46. Q*uibus detractis ex præfato segmẽto quarto, relinquũtur partes* 16, *&* *minuta* 54,17,9,4,2,32. His *autem si addantur præfata, &* *singulatim expressa decimioctaui, atque decimiseptimi segmẽti fragmenta: consurgẽt partes* 16, *&* *minuta* 54,32,6,51,19,21,48,10,33. *Tãta est*

	ptes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.	8̃	9̃
Segmentum iiij.	17	30	27	57	2	5	18	0	0	0
Segmentum xi.	0	36	10	47	58	2	46	0	0	0
Residuum.	16	54	17	9	4	2	32	0	0	0
$\frac{1}{5}$ *segmenti* xviij.	0	0	14	57	11	45	0	48	0	0
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{128}$ *segmẽti* xviij.	0	0	0	0	35	2	48	9	52	30
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{160}$ xviij.	0	0	0	0	0	28	2	14	35	54
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{80}$ xviij.	0	0	0	0	0	0	56	4	29	4
$\frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{48}$ xvij.	0	0	0	0	0	0	2	31	13	5
Horum summa a f.	16	54	32	6	51	19	21	48	10	33
Reliqua f e, seu e f.	43	5	27	53	8	40	38	11	49	27

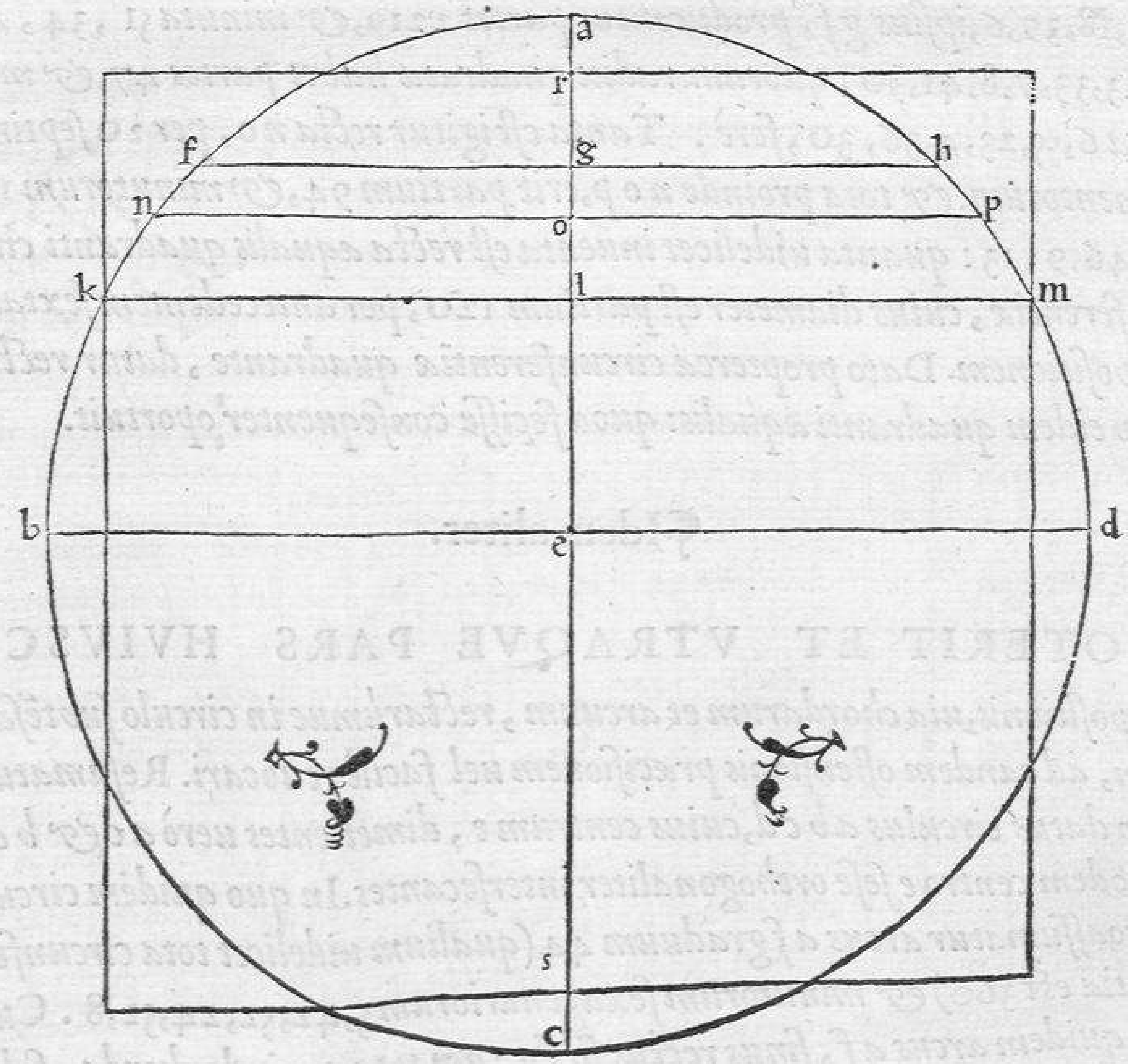
igitur recta a f: quæ subducta ex a e semidiametro, relinquit e f, partiũ 43, *&* *minutorũ* 5,27,5,8,40,38. C*uius quadratũ habet partes* 1856, *et minuta*

minuta 50,28,2,15,,18,7,15,14,25,39,4,4. Quadratũ porrò semidiametri e g, est partiũ 3600: à qbus si auferatur idẽ quadratũ quod fit ex e f, relinquetur quadratum ipsius f g, per 47 primi elementorum, partium quidem 1743, & minutorum 9, 31, 57,44,41,52,44,45,34,20,55,56. Quorum radix quadrata, habet partes 41, & minuta 45,4,9,18,39,6: tanta est igitur recta f g. Hæc autem ducta in 60 partes ipsius b e semidiametri, & productum iterum multiplicatum per easdem 60 partes, efficiunt partes 150304, & minuta 9,18,39, 6 : quorum radix cubica, est partium 53, & minutorum 10,7,44, 25. Tanta est itaque recta k l, per nonam propositionem antecedentis libri primi. Et proinde tota k l m, habet partes 106, & minuta 20,15,28, 50 : quantum uidelicet per antecedentem propositionem sextam inuentum fuit latus quadrati ipsi dato circulo æqualis, cuius diameter est partium 120. Dato itaque circulo a b c d, datum est latus quadrati eidem circulo æqualis: quod in primis faciendum fuerat. ¶ Quòd autem recta n o p, sit æqualis quadranti circunferentiæ a b uel a d, fit æquè manifestum. Nam si partes 53, & minuta 10,7,44,25, ipsius k l, ducantur in partes 41, & minuta 45, 4,9,18,39,6, ipsius g f, producentur partes 2219, & minuta 51, 34, 4, 57,33,33,7,8,41,30 : quorum radix quadrata habet partes 47, & minuta 6,55,23,4,36, 30, ferè. Tanta est igitur recta n o, per 20 septimi elementorum: & tota proinde n o p, erit partium 94, & minutorum 13, 50,46,9, 13 : quanta uidelicet inuenta est recta æqualis quadranti circunferentiæ, cuius diameter est partium 120, per antecedentem sextam propositionem. Dato propterea circunferentiæ quadrante, datur recta n o p eidem quadranti æqualis: quod fecisse consequenter oportuit.

¶ Idem aliter.

2 ¶POTERIT ET VTRAQVE PARS HVIVSCE *propositionis, uia chordarum et arcuum, rectarúmue in circulo subtẽsarum, ad eandem ostensionis præcisionem uel facilè reuocari. Resumatur ergo datus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro e sese orthogonaliter intersecantes. In quo quidem circulo, coassumatur arcus a f graduum 44 (qualium uidelicet tota circunferentia est 360) & minutorum sexagenariorum 5,42,52,24,52,8. Cuius quidem arcus a f, sinus rectus sit f g: & tota proinde chorda, sub-*

tendens arcum duplum, esto recta f g h. Inter ipsum postea dimetientem b e d, & chordam siue rectam f g h, duæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniantur, per quam libuerit ipsius antecedentis primi libri propositionem. Quarum maior & ordine secunda, sit rursum k l *m: minor uerò, siue tertia proportionalis, n o p. His ita constructis, aio rursum eandem* k l *m esse latus quadrati ipsi dato circulo æqualis: rectam uerò n o p, æqualem esse quadranti a b ipsius datæ circunferentiæ a b c d. ¶ Per ea etenim, quæ de rectis in circulo subtensis conscripsimus, & nostram sinuum rectorum tabulam minutim fideliterque supputatam, sinus rectus f g ipsius propositi arcus a f, habet partes 41 (qualium semidiameter est 60) & minuta 45, 4, 9, 18, 39, 6: quantam uidelicet proximo calculo offendimus ipsam g f. Et quoniam semidiameter b e supponitur partium 60, erit rursum* k l *partium 53, & minutorum 10, 7, 44, 25: recta uerò n o similium partium 47, & minutorum 6, 55, 23, 4, 36, 30. Cùm enim extrema sint eadem quæ priùs: & ipsa media proportionalia* k l *& n o, à priùs inuenta partium & minutorum*



nutorum quantitate non discrepabunt. To*ta igitur* k *l m*, *erit rursum partium* 106, *&* *minutorum* 20, 15, 28, 50: Re*cta uerò n o p similium partium* 94, *&* *minutorum* 13, 50, 46, 9, 13. *Et proinde recta* k *l m*, *est latus quadrati ipsi dato circulo æqualis, ipsa uerò n o p, æqualis quadrāti circunferentiæ eiusdem circuli, per ea quæ nuper deducta sunt, & antecedenti sexta propositione confirmata*. V*traque igitur pars huiusce propositionis, fit rursum euidentissima.*

¶ Idem rursum aliter.

3 ¶ IDEM QVOQVE LATVS QVADRATI DA*to circulo æqualis, utpote* k *l m obtinebitur: si arcus a* k *sumptus fuerit graduum* 62 (*qualium, uelim intelligas, tota circunferentia est* 360) *& minutorum sexagenariorum* 23, 25, 28, 50. *Quoniam huiuscemodi arcus sinus rectus* k *l, per nostram de rectis in circulo subtensis traditionem, est partium* 53 *& minutorum* 10, 7, 44, 25: *quæ duplata, efficiunt partes* 106, *& minuta* 20, 15, 28, 50: *quantum uidelicet nuper inuentum fuit idem latus* k *l m*. ¶ *Et si coassumptus fuerit arcus a n graduum* 51, *& minutorum* 44, 40, 35, 30, 10, *sinus rectus n o ipsius arcus a n, ex præallegato sinuum rectorum calculo, constat partibus* 47, *& minutis* 6, 55, 23, 4, 36, 30: *quæ duplata, conficiunt totam n o p quadranti æqualem, partium* 94, *& minutorum* 13, 50, 46, 9, 13. *Quàm facilis igitur, & methodica sit utriusque harum duarum rectarum adinuentio, cuilibet dextro lectori relinquimus diiudicandum*. ¶ *Chorda itaque arcus* 124 *graduum, & minutorum* 46, 50, 57, 40, *est latus quadrati ipsi dato circulo æqualis: quæ autem subtendit arcum* 103 *graduum, & minutorum* 29, 21, 11, 0, 20, *quadranti circunferentiæ eiusdem circuli coæquatur*. *Hinc fit, ut ex unaquaque harum trium partium, quemadmodum ex proxima colligitur propositione, gemina suboriatur circuli quadratura*. *Nam si ex recta* k *l m uno trium modorum adinuenta, describatur quadratum r* k *m s, illud erit æquale dato circulo a b c d*. *Aut si inter dimetientem b e d & rectam n o p, media proportionalis eliciatur: ea erit latus quadrati, quod eidem æquatur circulo.*

PROPOSITIO VIII.

CIrculo iterum dato, latus quadrati eidem circulo æqualis, ex segmentis proportionalibus ipsius colligere diametri.

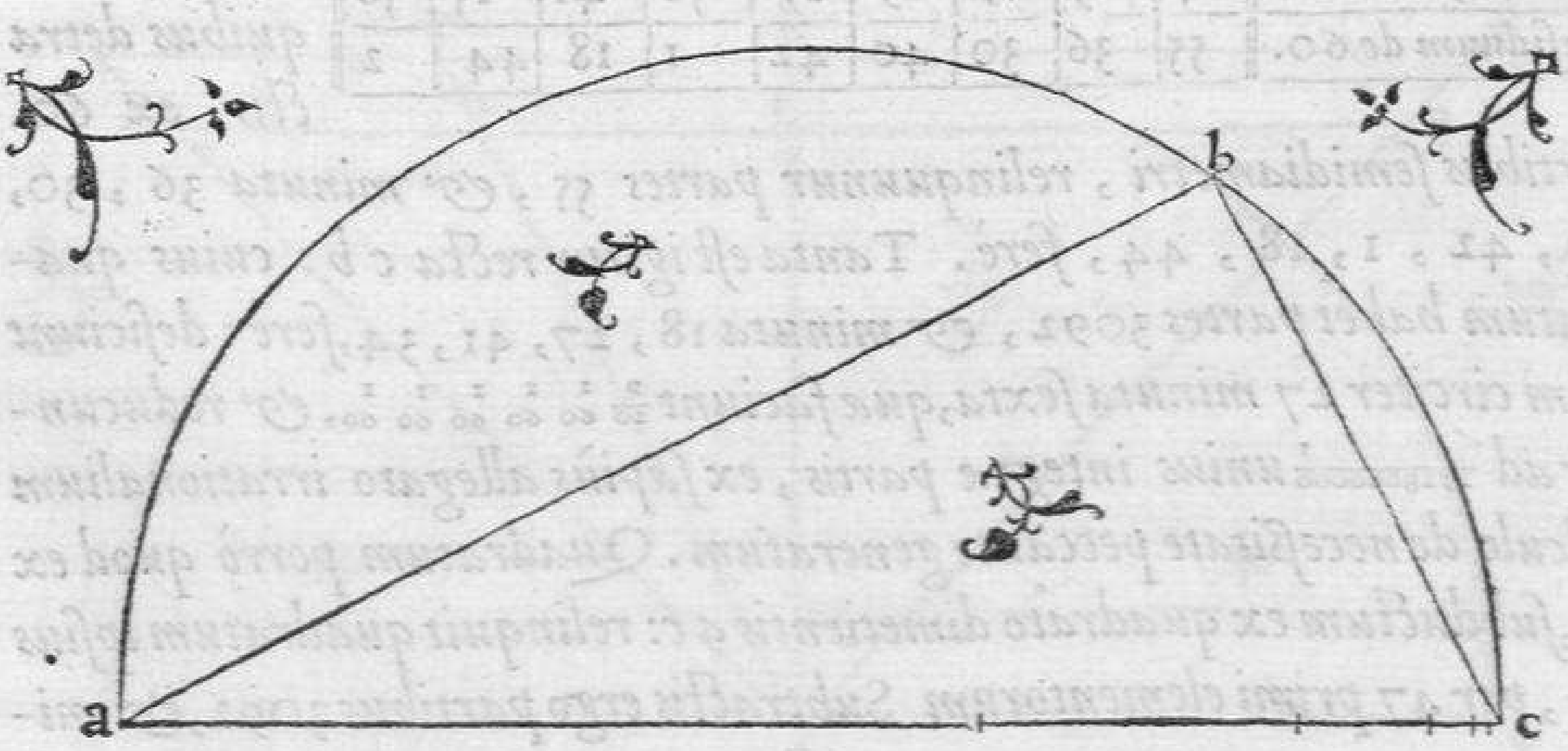
¶IN PRIMIS IDEM QVADRATI LATVS, *per solam proportionalium segmentorum dimetientis ipsius circuli elicietur compositionem. Nam si primo & maiori segmento, iungatur tertium, unà cum dimidio sexti, atque dimidio segmenti decimi, necnon & quarta parte segmenti ordine sedecimi, & parte sexagesima dimidij segmenti desimiseptimi, atque centesimæ nonagesimæsecundæ partis decimioctaui segmenti parte sexagesima, & parte demum sexagesima alterius sexagesimæ unius nonagesimæsextæ partis eiusdem segmenti decimioctaui: conflabitur tandem recta quædam linea, cuius quadratum æquum est ipsi dato circulo.* ¶ Resumatur enim ob oculos, tabella *segmentorum proportionalium ipsius dimetientis, quam in demonstrationem antecedentis secundæ propositionis supputauimus: ne sufficienter expressam ipsius dimetientis partitionem, toties inculcare uideamur.* Clarum est *igitur ex ipsa tabella, segmentum maius & ordine primũ, constare partibus 74 (qualium ipse diameter est 120) & minutis sexagenariis 9, 50, 40, 59, 18, 14: tertium uerò segmentum, habere partes 28, & minuta 19, 41, 21, 58, 36, 28.* Dimidium *consequenter segmenti ordine sexti, continet partes 3, & minuta 20, 37, 16, 2, 47, 4: & ipsius decimi segmenti dimidium, hæc tantum minuta comprehendit, 29, 16, 12, 49, 8, 35.* Vnum *porrò quartum segmenti decimisexti, est minutorum 0, 48, 56, 6, 45, 55, 30.* Et *dimidium segmenti decimiseptimi, hæc complectitur minuta 1, 0, 29, 14, 9, 19: quorum pars sexagesima, reuocatur in minuta 0, 1, 0, 29, 14, 19, 9. Pars deinde sexagesima nonagesima secunda segmẽti decimioctaui, sub his cõtinetur*

		ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Segmentum maius,	*i.*	74	9	50	40	59	18	14	0	0
Segmentum ordine	*iij.*	28	19	41	21	58	36	28	0	0
Dimidiũ segmẽti	*vi.*	3	20	37	16	2	47	4	0	0
	x.	0	29	16	12	49	8	35	0	0
Quarta pars	*xvi.*	0	0	48	56	6	45	55	30	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{2}$ *segmenti*	*xvij.*	0	0	1	0	29	14	9	19	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{192}$	*xviij.*	0	0	0	0	23	21	52	6	35
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{96}$	*xviij.*	0	0	0	0	0	46	43	44	13
Latus quadrati.		106	20	15	28	49	59	1	39	48

tinetur minutis 0,0,23,21,52,6,35: quorum sexagesima pars eisdem exprimitur numeris, sed per unicum ordinem uersus dextram reuocatis. Nonagesima denique sexta pars ipsius decimioctaui segmenti, hæc habet minuta 0, 0, 46,43,44,13: quæ bis dextram uersus per 60 distributa, uertuntur in minuta 0, 0, 0, 0, 46, 43, 44, 13. Hæc autem omnia simul iuncta, in unúmue coadunata numerorum ordinem, conficiunt partes 106, & minuta 20, 15, 28, 50: deest enim solummodò 1 minutum quintum, repræsentans $\frac{1}{7776000000}$ unius integræ partis, ex uicioso irrationalium segmentorum, radicúmue non quadratarum calculo de necessitate procreatum, relatione (nedum aliquid fiat) prorsus indignum. Atqui totidem partium atque minutorum, repertum est latus quadrati, ipsi dato circulo (cuius dimetiens est partium 60) æqualis, per antecedentis sextæ propositionis demonstrationem. Satis igitur huic propositioni factum esse uidetur.

¶Idem aliter.

2 ¶IDEM PRAETEREA LATVS QVADRATI *ipsi dato circulo æqualis, ex præfatis segmẽtis proportionalibus diametri, in hunc modum colligetur. Sit itaque datus semicirculus a b c: cuius diameter a c in tot segmenta proportionalia & eodẽ ordine distributa partiatur, ut in prefata secũda propositione luculẽter expressimus, & ꝓpria eorundem segmentorũ tabella continetur. Subtẽdatur postmodum recta quedã linea c b, quæ constet ex residuo semidiametri: subtracta in primis quarta parte segmẽti proportionalis ordine quarti, & dimidio noni segmẽti, atq; sexagesima ꝑte dimidij segmẽti decimiquarti, & parte insuper sexagesima unius tertiæ ꝑtis segmẽti decimiseptimi, & sexagesima itidẽ*



pte unius quadrageſimę partis ſegmẽti decimiočtaui, unà cũ ſexageſima pte unius partis ſexageſimę alterius ſexageſimę unius decimę ptis ſegmẽti ordine ſedecimi. Et cõnectatur demũ a b linea recta: quã aio fore latus quadrati, quod ipſi dato æquum eſt circulo. ¶ Clarũ eſt enim (ut id ſolito numerorũ probemus examine) ex ſæpiùs allegato ſegmentorũ proportionalium ipſius dimetientis calculo, unum quartum ſegmenti proportionalis ordine quarti, habere partes 4, & minuta 22, 36, 59, 15, 31, 19, 30: & dimidium ſegmenti noni, hæc ſolùm minuta continere 0, 47, 21, 36, 48, 9, 58. Dimidium autem ſegmenti decimiquarti, habet minuta 4, 16, 13, 41, 13, 1: quorum pars ſexageſima, eoſdem complectitur numeros, ſed per unicum ordinem dextram uerſus reuocatos, in hunc modum 0, 4, 16, 13, 41, 13, 1. Vnum porrò tertiũ ſegmenti decimiſeptimi, ſub his continetur minutis, 0, 40, 19, 29, 26, 12, 40: & horum pars ſexageſima ſub his 0, 0, 40, 19, 29, 26, 12, 40. Quadrageſima deinde pars ſegmenti decimiočtaui, hæc uidetur habere minuta 0, 1, 52, 8, 58, 7, 36: quæ diſtributa ſemel per 60, reſtituunt minuta 0, 0, 1, 52, 8, 58, 7, 36. Ipſius denique ſedecimi ſegmenti pars decima, his minutis exprimitur 0, 19, 34, 26, 42, ferè: quæ ter uerſus dextram per 60 diſtributa, reuocantur in minuta 0, 0, 0, 0, 19, 34, 26, 42. Hæc autem omnia ſolito more in unum compoſita numerorum ordinẽ, efficiũt partes 4, & minuta 23, 29, 19, 17, 58, 41, 15, 58: quibus detractis ex 60.

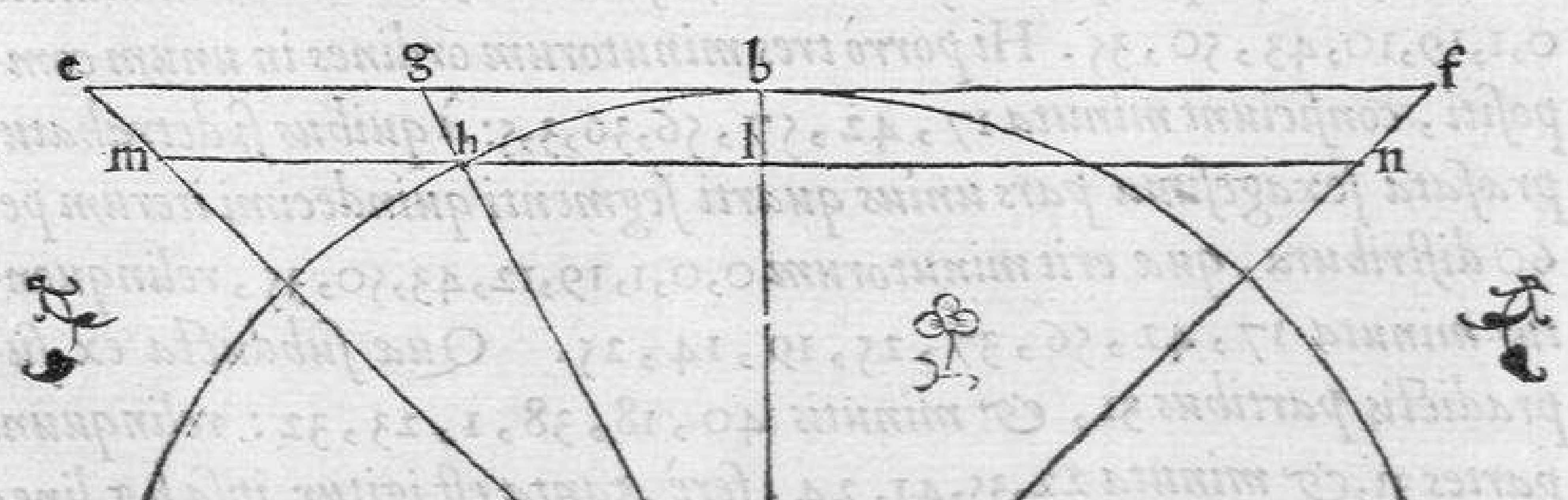
	ptes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.	8̃.
$\frac{1}{4}$ ſegmenti iiij.	4	22	36	59	15	31	19	30	0
$\frac{1}{2}$ ſegmenti ix.	0	0	47	21	36	48	9	58	0
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{2}$ xiiij.	0	0	4	16	13	41	13	1	0
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{3}$ xvij.	0	0	0	40	19	29	26	12	40
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{40}$ xviij.	0	0	0	1	52	8	58	7	36
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{10}$ xvi.	0	0	0	0	0	19	34	26	42
Horum ſumma.	4	23	29	19	17	58	41	15	58
Reſiduum de 60.	55	36	30	40	42	1	18	44	2

partibus ſemidiametri, relinquunur partes 55, & minuta 36, 30, 40, 42, 1, 18, 44, ferè. Tanta eſt igitur recta c b: cuius quadratum habet partes 3092, & minuta 18, 27, 41, 34, ferè: deficiunt enim circiter 27 minuta ſexta, quæ faciunt $\frac{9}{20}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$, & reducuntur ad $\frac{1}{1728000000}$ unius integræ partis, ex ſæpiùs allegato irrationalium calculo de neceſſitate peccante generatum. Quadratum porrò quod ex c b, ſubductum ex quadrato dimetientis a c: relinquit quadratum ipſius a b, per 47 primi elementorum. Subtractis ergo partibus 3092, & minutis

nutis 18, 27, 41, 34, præfati quadrati quod ex c b, de 14400 partibus quadrati ipsius dimetientis a c: relinquuntur partes 11307, & minuta 41,32,18,26. Tantum est igitur quadratum, quod ex a b recta describitur. Atqui totidem partium atque minutorum inuẽta est area circuli, cuius diameter est partium 120, per antecedentem sextam propositionem. Manifestum est igitur, rectam a b esse latus quadrati, quod dato æquum est circulo. Quod rursum susceperamus inueniendum.

¶Idem rursum aliter.

3 ¶ESTO RVRSVM DATVS SEMICIRCVLVS *a b c, cuius centrum d, & diameter a d c, in quem perpendicularis incidat semidiameter d b: sitque latus circunscripti quadrati e b f, illiusque semidiametri d e atque d f. Et diuiso a d c diametro in tot segmenta proportionalia, & eodem ordine distributa, ueluti secunda huius libri propositione dictum atque obseruatum extitit: secetur ex ipsa b e recta quædam linea b g, quæ sit æqualis dimidio segmenti minoris ipsius diametri, & dimidio segmenti proportionalis ordine quarti: aut segmento tertio, & dimidio sexti segmenti proportionalis eiusdem diametri: minus tamen sexagesima parte ipsius segmẽti proportionalis ordine quarti, atque parte itidem sexagesima medietatis segmenti duodecimi, & parte insuper sexagesima unius quartæ partis quindecimi segmenti, detracta priùs eiusdem sexagesimæ partis parte rursum sexagesima. Et connectatur d g linea recta, quæ secet circunferentiam ipsius circuli in puncto h. Consequenter, per punctum h dimetienti a c atque ipsi e f parallela ducatur h l, quæ utrinque producta, contingat d e,*



atque d f semidiametros in punctis m & n. Erit enim m n recta, latus quadrati ipsi dato circulo æqualis. ¶ *Resumantur nanque ex secunda huius propositione, segmenta proportionalia dimetientis, in partibus qualium ipse diameter est* 120: *uelut obiecta tabella continetur. Dimidium itaque segmenti minoris ipsius dimetientis, habet partes* 22, *& minuta* 55,4,39, 30, 20, 53: *& dimidium segmenti ordine quarti, partes* 8, *& minuta* 45, 13,58,31,2,39. *Quæ simul iuncta, efficiunt partes* 31, *& minuta* 40,18,38,1, 23, 32. *Idem etiam colligetur, si* 28 *partes, & minuta* 19,41,21, 58,36, 28, *segmenti ordine tertij, componantur dimidio sexti segmenti, partibus uidelicet* 3, *& minutis* 20, 37,16, 2,47,4: *consurgent enim rursum partes* 31, *& minuta* 40, 18, 38, 1,23,32. *Quartum porrò segmentum proportionale, est partium* 17, *& minutorum* 30,27,57,2,5,18: *quorum pars sexagesima solis uidetur constare minutis, in hunc modum,* 0,17,30,27,57,2,5, 18. *Dimidium autem segmenti ordine duodecimi, habet minuta* 11,10, 48, 50,7, 12. *Vnum insuper quartum quindecimi segmenti, est minutorum* 1, 19, 10,43, 50, 35: *quæ per* 60 *solito more distributa, uertuntur in minuta* 0,1,19,10,43, 50, 35. *Hi porrò tres minutorum ordines in unum compositi, conficiunt minuta* 17, 42, 57, 56,36,3,5: *à quibus si detrahatur præfata sexagesima pars unius quarti segmenti quindecimi iterum per* 60 *distributa, quæ erit minutorum* 0,0,1,19,12,43,50,35, *relinquentur minuta* 17, 42, 56, 37, 25, 19, 14, 25. *Quæ subducta ex supradictis partibus* 31, *& minutis* 40, 18, 38, 1, 23, 32: *relinquunt partes* 31, *& minuta* 22,35,41, 24, *ferè. tanta est igitur ipsa b g linea recta: cuius quadratum habet partes* 984, *& minuta,* 29, 23, 18, 23, 22, 33, 57, 36. *Quadratum autem ipsius d b semidiametri, est partium*

Segmenta proportionalia diametri, partium 120.								
	ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
i.	74	9	50	40	59	18	14	0
ij.	45	50	9	19	0	41	46	0
iij.	28	19	41	21	58	36	28	0
iiij.	17	30	27	57	2	5	18	0
v.	10	49	13	24	56	31	10	0
vi.	6	41	14	32	5	34	8	0
vij.	4	7	58	52	50	57	2	0
viij	2	33	15	39	14	37	6	0
ix.	1	34	43	13	36	19	56	0
x.	0	58	32	25	38	17	10	0
xi.	0	36	10	47	58	2	46	0
xij.	0	22	21	37	40	14	24	0
xiij.	0	13	49	10	17	48	22	0
xiiij.	0	8	32	27	22	26	2	0
xv.	0	5	16	42	55	22	20	0
xvi.	0	3	15	44	27	3	42	0
xvij.	0	2	0	58	28	18	38	0
xviij.	0	1	14	45	58	45	4	0

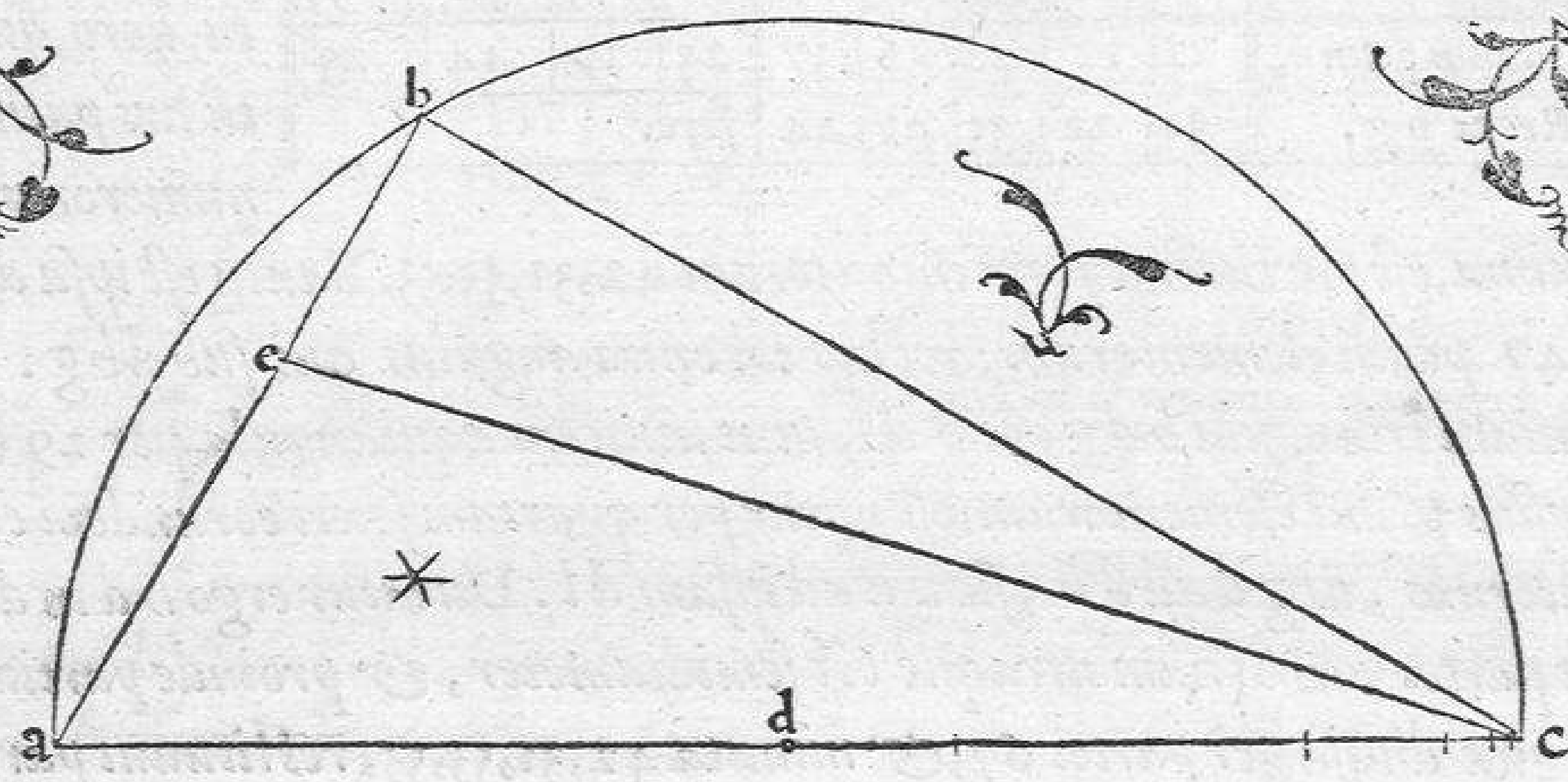
	ptes	m̄.	2̄.	3̄.	4̄.	5̄.	6̄.	7̄.	8̄.
$\frac{1}{2}$ ſecundi ſegmēti.	22	55	4	31	30	20	53	0	0
$\frac{1}{2}$ quarti.	8	45	13	58	31	2	39	0	0
Horum ſumma.	31	40	18	38	1	23	32	0	0
Segmentum iij.	28	19	41	21	58	36	28	0	0
$\frac{1}{2}$ ſegmenti vi.	3	20	37	16	2	47	4	0	0
Horum ſumma.	31	40	18	38	1	23	32	0	0
$\frac{1}{60}$ ſegmenti iiij.	0	17	30	27	57	2	5	18	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{2}$ ſegmenti xij.	0	0	11	10	48	50	7	12	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{4}$ ſegmenti xv.	0	0	1	19	10	43	50	35	0
Horum ſumma.	0	17	42	57	56	36	3	5	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{4}$ xv.	0	0	0	1	19	10	43	50	35
Reſiduum primū.	0	17	42	56	37	25	19	14	25
¶ Recta b g.	31	22	35	41	24	ferè.			

partiū 3600. Hæc autē ſimul iuncta, conficiūt partes 4584, & minuta 29, 23,18,23,22, 33, 57, 36: quorum radix quadrata, uero, quātū ars patitur numerorum, proxima, eſt partium 67, & minutorum 42,31,53,53. Tanta eſt ipſa d g, per 47 primi elementorum: rectus eſt enim angulus qui ſub d b g. Et quoniam triangula b d g & h d l, ſunt inuicem æquiangula, per 29 & 32 ipſius primi elementorum: eſt igitur per quartam ſexti eorundem elementorum, ut g d ad d b, ſic h d ad ipſam d l. Ducatur ergo h d in d b, fient partes 3600 (nam utraque eſt ſemidiameter, & proinde partium 60) quæ diuiſa per partes 67, & minuta 42,31,53,53, reſtituunt partes 53, & minuta 10,7,44,25. Tanta eſt ipſa d l, per uulgatam 4 proportionalium regulam: cui utraque & m l & l n eſt æqualis. Et tota propterea m n eſt partium 106, & minutorum 20,15,28,50: quantum uidelicet inuentum eſt latus quadrati circulo æqualis, cuius diameter eſt partium 120, per antecedentem ſextam propoſitionem. Eſt igitur recta m n latus quadrati ipſi dato circulo, cuius dimidium eſt a b c, æqualis.

¶Iterum idem aliter.

4 ¶IDEM PRAETEREA LATVS QVADRATI *ipſi dato circulo æqualis, in hunc rurſum poterit inueniri modum. Reſumatur ipſius dati circuli dimidium a b c, cuius centrum d, & dimetiens a d c. Et ſubtendatur ipſi a d ſemidiametro æqualis a b, hoc eſt, latus hexagoni æquilateri & æquianguli in dato circulo deſcripti: & cōnectatur recta b c, quę eſt latus trianguli æquilateri ſimiliter & æquiāguli in eodem circulo deſcripti. Diuiſo poſtmodum a c dimetiente in totidem ſegmenta proportionalia, & eodem prorſus ordine diſtributa,*

ut ſecunda huius libri propoſitione dictum extitit, atque proxima circuli quadratum reſumptum: ſecetur ex a b latere recta quædam linea b e, quæ conſtet ex duplo ſegmenti proportionalis ipſius diametri ordine quinti, & dimidio noni, & quarta parte duodecimi, atque octaua parte decimiſeptimi, unà cum parte ſexageſima quarta ſegmenti ordine decimioctaui, uniúſque trigeſimæ ſecundæ partis eiuſdem decimioctaui ſegmenti parte ſexageſima (quæ ſimul efficiunt $\frac{31}{1920}$) & connectatur demum recta e c, quæ erit latus quadrati ipſi dato circulo æqualis. Quod ſolito numerorum examine, duximus eſſe confirmandum.



¶ Reſumantur enim ſæpiùs expreſſa ipſius dimetientis ſegmenta proportionalia, in partibus qualium præfatus diameter eſt 120: ut in proximæ partis tabella continetur. Segmentum itaque proportionale ordine quintum, habet partes 10, & minuta 49, 13, 24, 56, 31, 10: quæ duplata, efficiunt partes 21, & minuta 38, 26, 49, 53, 2, 20. Dimidium autem noni ſegmenti, ſub his tantum comprehenditur minutis 47, 21, 36, 48, 9, 58: & quarta pars ſegmenti duodecimi, habet minuta 5, 35, 24, 25, 3, 36: & pars octaua decimiſexti, minuta 0, 30, 14, 37, 4, 39, 30. Pars uerò ſexageſima quarta ſegmenti decimioctaui: his exprimitur minutis 0, 1, 10, 5, 36, 19, 45: & unius trigeſimæſecundæ partis eiuſdem decimi-

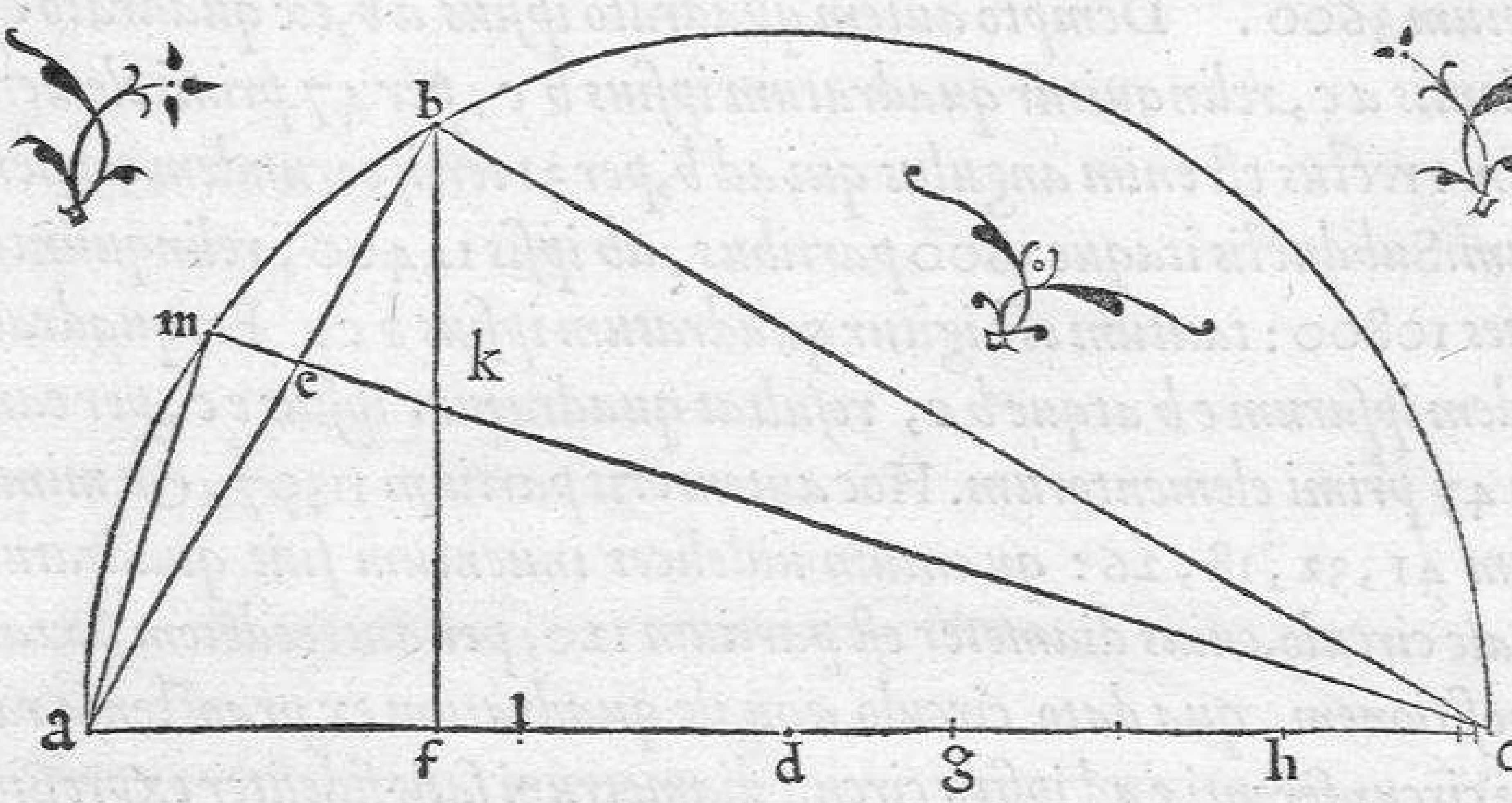
		ptes.	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.	8̃.
Duplum	v.	21	38	26	49	53	2	20	0	0
Dimidium	ix.	0	47	21	36	48	9	58	0	0
$\frac{1}{4}$ ſegmenti	xij.	0	5	35	24	25	3	36	0	0
$\frac{1}{8}$ ſegmenti	xvij.	0	0	30	14	37	4	39	30	0
$\frac{1}{64}$	xviij.	0	0	1	10	5	36	19	45	0
$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{32}$	xviij.	0	0	0	2	20	11	12	39	30
¶ Recta b e.		22	31	55	18	9	8	5	54	30

decimioctaui segmenti pars sexagesima, hæc solùm uidetur continere minuta, 0,0,2,20,11,12,39,30. Quæ in unum composita numerum, efficiunt partes 2, & minuta 31,55,18,9,8,6, ferè. Tanta est igitur ipsa b e: cuius quadratum habet partes 507, & minuta 41,32,18,26, propemodum: deest enim solummodo $\frac{1}{4}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}$ unius integræ partis quæ reuocantur ad $\frac{1}{51840000}$, relatione prorsus indignum, si irrationalium segmentorum, surdarúmue radicum perpendatur calculus. Qualium autem partium diameter a c est 120, talium a b est 60. Quadratum porrò ipsorum 120, est partium 14400: & quadratum ipsorum 60, partium 3600. Dempto autem quadrato ipsius a b, ex quadrato dimetientis a c, relinquitur quadratum ipsius b c, per 47 primi elementorum: rectus est enim angulus qui ad b, per 31 tertij eorundem elementorum. Subductis itaque 3600 partibus, ab ipsis 14400, relinquuntur partes 10800: tantum est igitur quadratum ipsius b c. Ex quadratis tandem ipsarum e b atque b c, resultat quadratum ipsius e c, per eandem 47 primi elementorum. Hoc autem erit partium 11307, & minutorum 41,32,18,26: quantum uidelicet inuentum fuit quadratum æquale circulo, cuius diameter est partium 120, per antecedẽtem sextam propositionem, qua dato circulo æquale quadratum ex præostensa ratione circunferentiæ ad ipsius circuli diametrum satis fideliter expreßisse uidetur. Est igitur e c recta latus quadrati, quod ipsi dato æquum est circulo.

¶ Aliter rursum idem.

5 ¶ ADDE QVOD IDEM LATVS E C, ALIA *ratione promptißimè colligi poterit. Nam resumpta priori figura, si ex puncto b in basim a c trianguli rectanguli a b c, perpendicularis deducatur b f, per duodecimam primi elementorum: & segmẽto proportionali dimetientis ordine tertio, hoc est, segmento maiori segmenti minoris totius dimetiẽtis a c (ipsi uidelicet g h) æqualis secetur f* k, *& connectatur c* k *linea recta: coincidet eadem c* k *in directũ continuata uersus* k, *in punctum e ipsius lateris a b: eritque rursum eadem e c latus quadrati, quod ipsi priùs dato circulo coæquatur.*

¶AVT, SI VELIS, DIVIDATVR SEGMENTum a g bifariam, in puncto quidem l, per decimam primi elementorum: & ipsi a l seu l g, æqualis subtendatur, aut coaptetur a m, per primam quarti eorundem elementorum, quæ tangat circunferentiam a b c in pūctis a & m. Nam si connectatur c m linea recta, transibit indubitanter eadem c m, per ipsum punctum e præfati lateris a b: eritque propterea illius pars e c, propositum quadrati latus, quod ipsi dato circulo est æquale.



Nec hîc alia opus esse reor demonstratione, cùm utroque modo latus ipsum coincidat in rectam e c: quam fore latus propositi quadrati, numerali supputatione fuit præostensum.

PROPOSITIO IX.

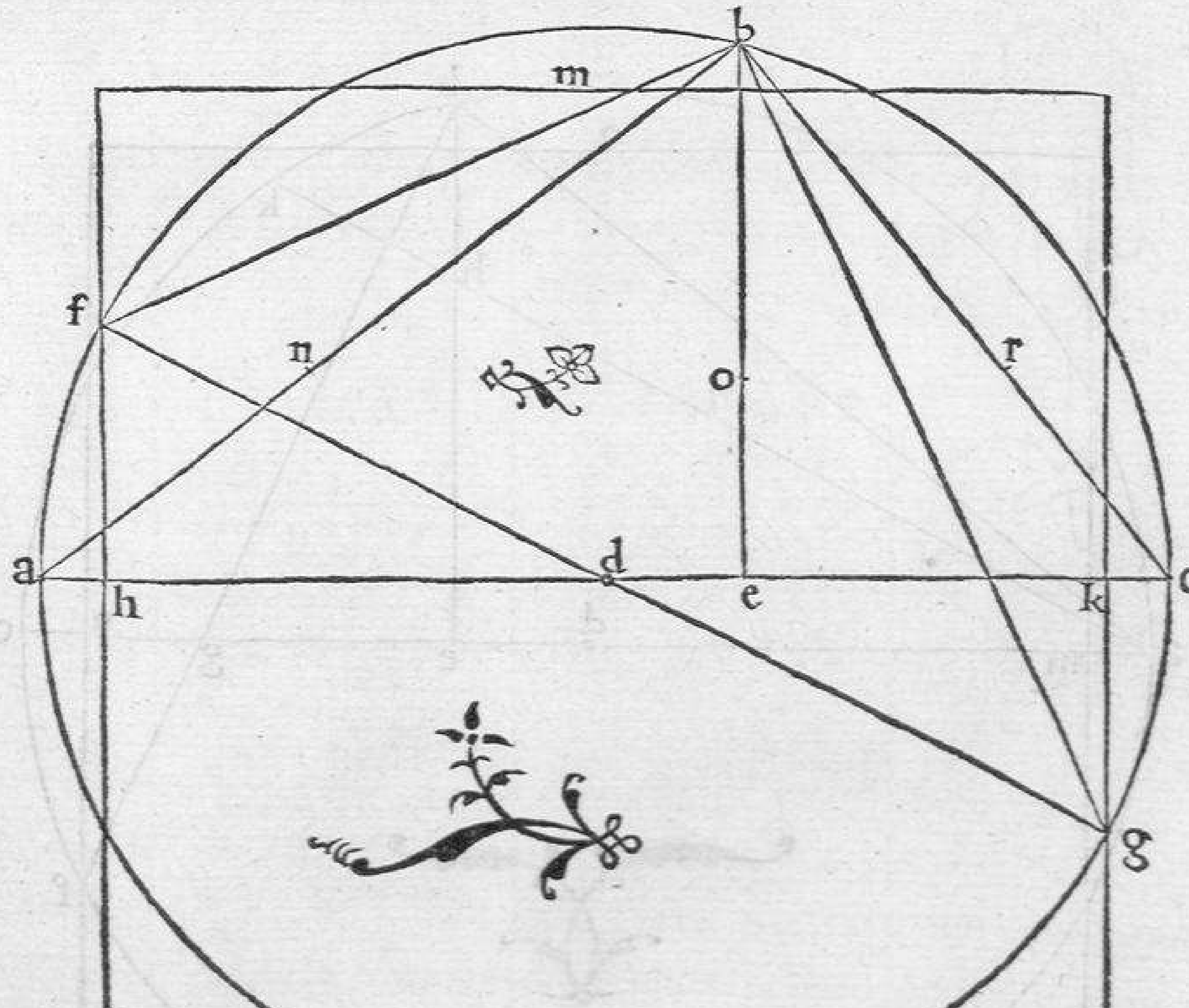
COmpendiarias aliquot circuli quadraturas, tū priùs ostensis, tum inuicem ad amussim conuenientes, pendenter elucidare.

¶QVANQVAM EX SVPRADICTIS MVLTIfariam colligi uel facilè poßit, qua ratione circulus in quadratum æquale reuocetur: perutile nihilominus duximus, & studiosis omnibus futurum non ingratum, si compendiarias aliquot, à nobis recèns adinuentas circuli quadraturas, priùs demonstratis, atque inuicem (si diligenter examinentur) conuenientes, familiariter elucidemus. Quas nul-

lis

lis prorſus aliis, quàm ocularibus oſtenſionibus in præſentiarum confirmabimus: ne præſens uolumen in iniuſtam molem producere cogamur, néue illorum confundamus ingenia, qui talibus inuentis ſolent utcunque delectari.

1 ¶SIT IGITVR IN PRIMIS DATVS CIRCVLUS *a b c, cuius cētrum d, diameter uerò a c: cui quidem circulo expediat quadratum æquale deſcribere.* Diuidatur itaque *diameter a c proportionaliter in puncto e, per 30 ſexti elementorum, cuius ſegmentum maius ſit a e, minus autem e c.* Excitetur deinde *perpendicularis e b, per undecimam primi elementorum: quæ per 13 ipſius ſexti elementorum, erit media proportionalis inter ſegmenta a e & e c.* Connexis *poſtmodū a b atque b c lineis rectis, ſubtendatur, coaptetúrue ipſi b c æqualis b f, aut ipſi a b æqualis b g, per primam quarti eorundem elementorum: hoc eſt, inuertatur triangulum rectangulum a b c.* Nam *ſi per punctum f, ipſi b e parallela ducatur f h, quæ ſecet diametrum a c in ipſo puncto h: aut per punctum g, eidem b e parallela g k, quæ ſecet eundem a c dime-*



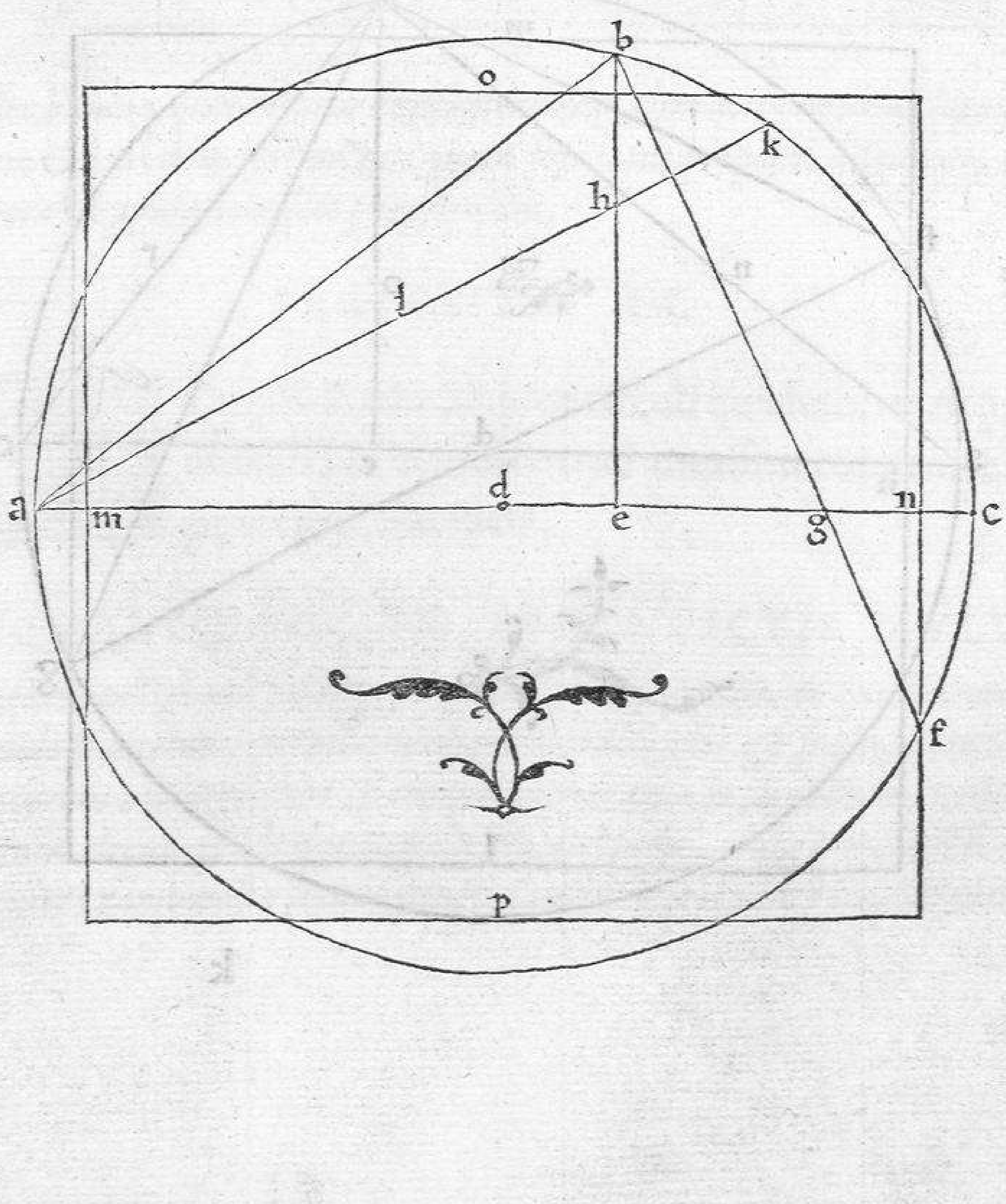
k

tientem in ipso puncto k: *erit utraque d h & d* k, *semilatus quadrati quod ipsi dato æquum est circulo, & proinde tota h* k *eiusdem quadrati latus*. Describatur igitur ex ipsa h k, quadratum h l k m.

¶ Nec te ignorare uolumus, si a b proportionaliter diuidatur in puncto n, & b e in puncto o, atque b c in puncto r: segmentum maius b n esse æquale perpendiculari b e, & n a segmentum minus æquum esse segmẽto maiori b o, atque b r segmentum maius coæquari segmento minori e c: nec non ipsam b c æqualem esse segmẽto maiori a e ipsius dimetiẽtis a e c. Mirabilis profecto in a b c triangulo, proportionalium segmentorum reciprocatio.

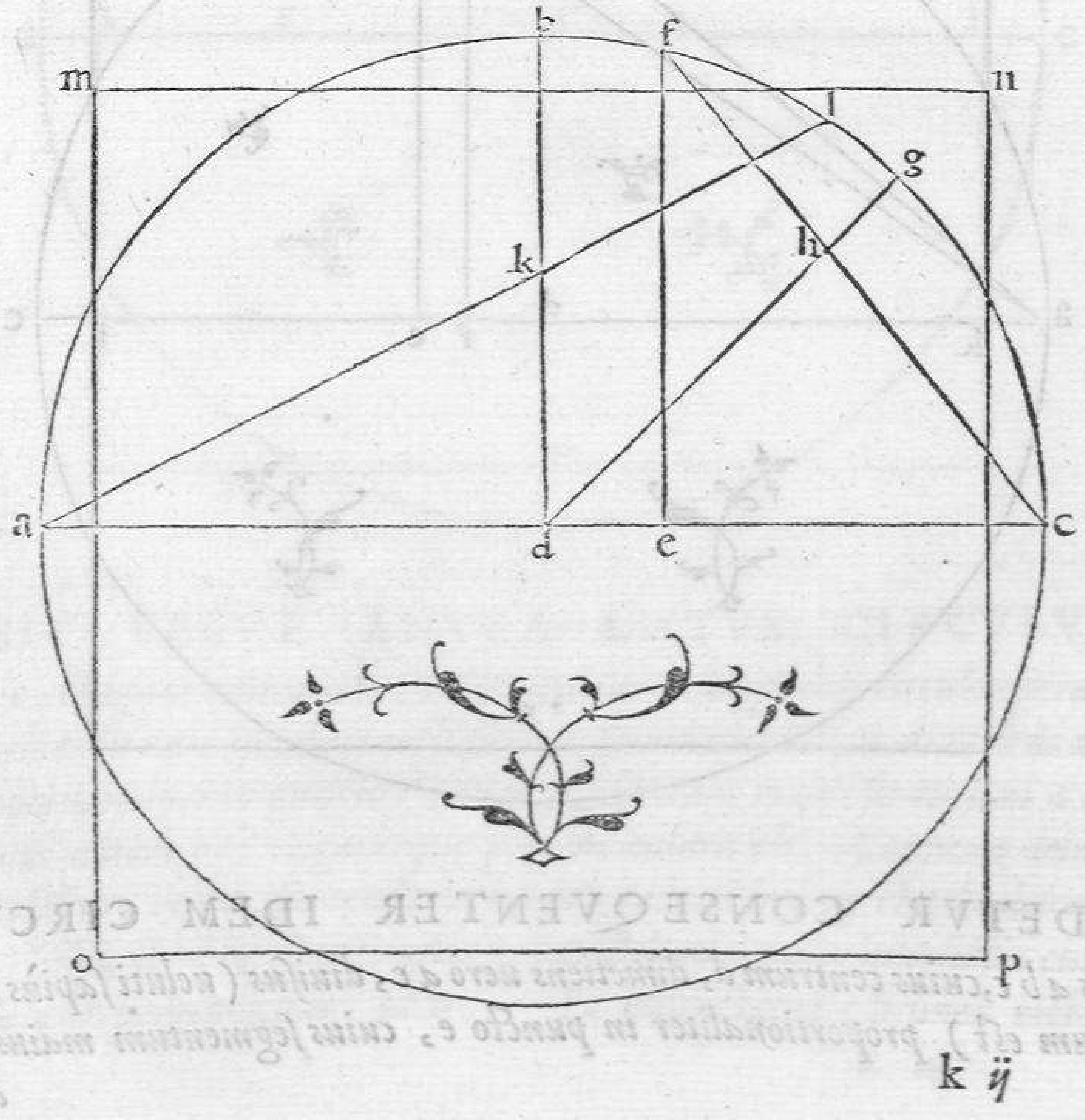
¶SIT RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C, 2
cuius centrum d, & diameter a c diuisus proportionaliter in puncto e, cuius segmentum maius sit a e, minus uerò e c. Et erecta perpendiculari e b, connectatur a b linea recta: cui æqualis subtendatur aut in ipso coaptetur circulo, quæ sit b f, ut in proxima dictum est circuli quadratura. Secet autem recta b f semidiametrum d c m, puncto g: & segmento g c æqualis secetur ex e b, quæ sit b h, per 3 primi elementorum. Connecta-

tur

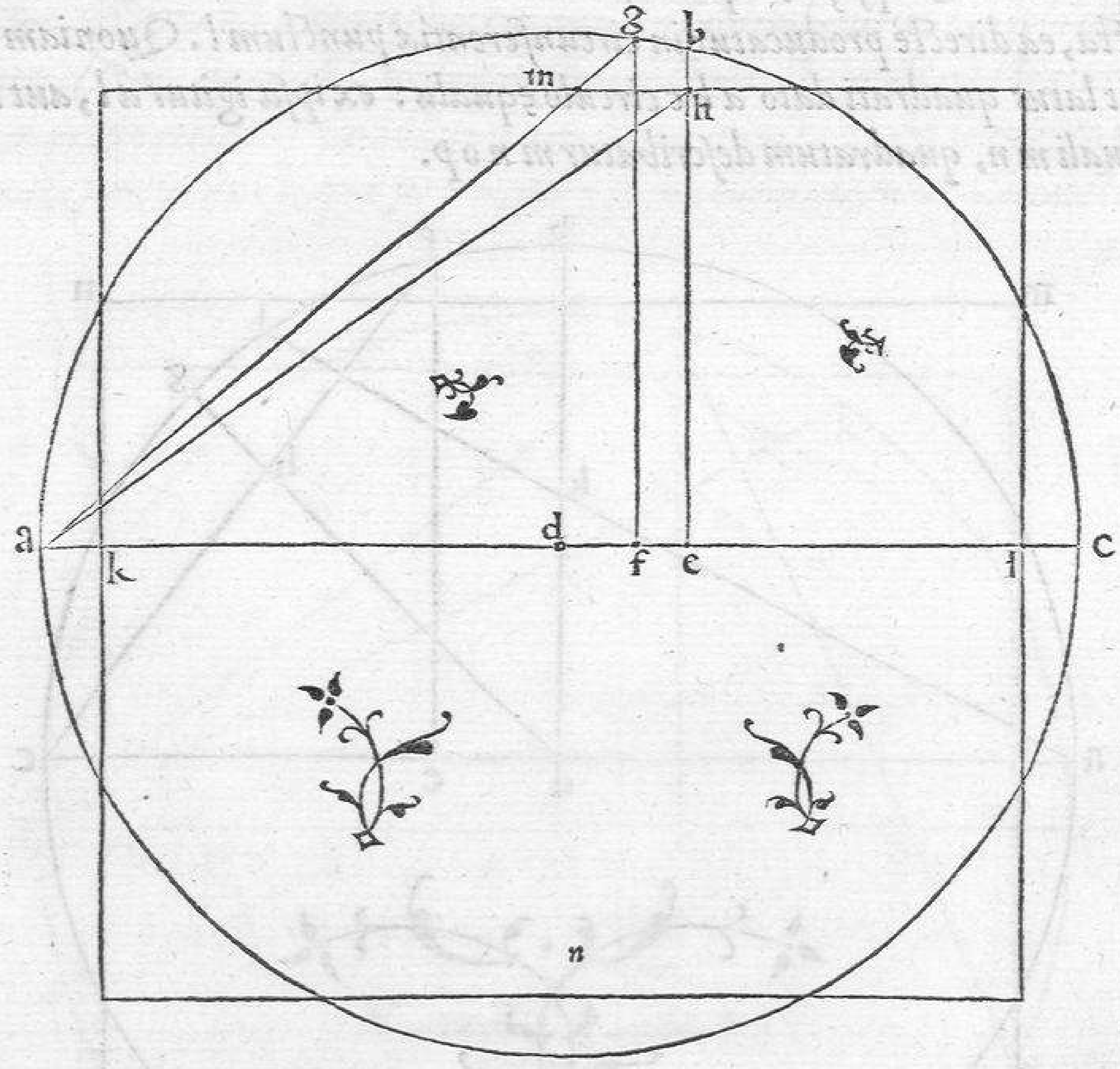


tur demum recta a h, quæ directè producta ad partes h, cadat in circunferentiæ punctum k. *Erit enim a h* k *linea recta, latus quadrati ipsi dato circulo æqualis.* H*æc igitur bifariam diuidatur in puncto l, & dimidiæ illius parti l a aut l* k, *secentur æquales d m & d n: atque ex tota m n (quæ ipsi a* k *est æqualis) quadratum describatur m o n p eidem circulo a b c æquale.*

3 ¶ RESVMATVR ITERVM DATVS CIRCVLVS *lus a b c, cuius centrum d, diameter autem a c diuisus (ueluti supradictum est) proportionaliter in puncto e. Et erectis d b & e f lineis rectis, super a c diametro perpendicularibus, connexáque f c linea recta: diuidatur quadrans circunferentiæ b c bifariam in puncto g, per 30 tertij elementorum. Connectatur postmodum recta d g, quæ secet f c rectam in puncto h: & ipsi f h, æqualis secetur d* k. *Connexa tandem a* k *linea recta, ea directè producatur in circunferentiæ punctum l. Quoniam a l erit latus quadrati dato a b c circulo ęqualis: ex ipsa igitur a l, aut illi ęquali m n, quadratum describatur m n o p.*

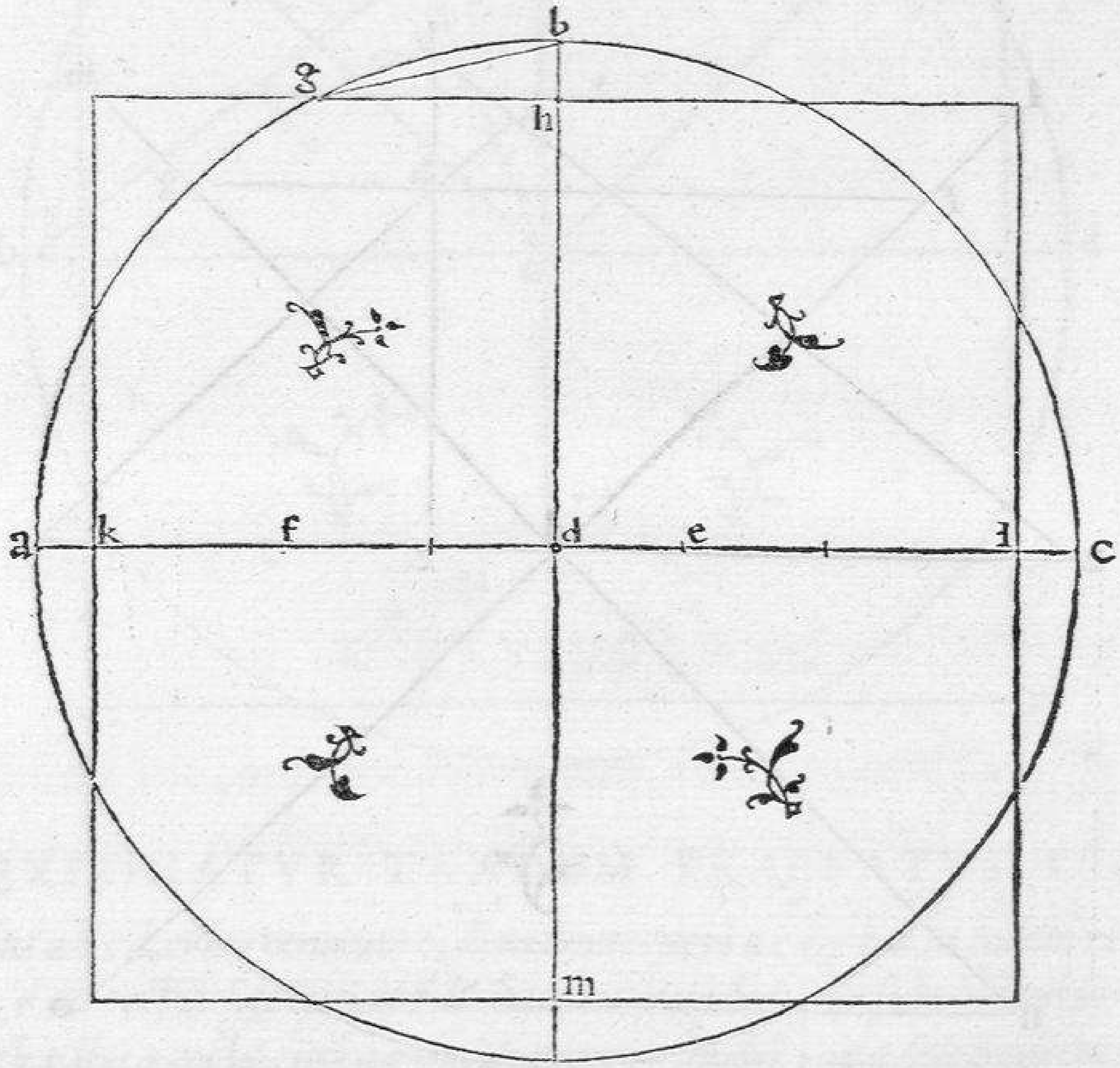


¶ESTO RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C, 4
cuius centrum d, & diameter a c diuisus proportionaliter in puncto e, unà cum e b perpendiculari super a c: ut in præcedentibus dictum atque obseruatum fuit circuli quadraturis. Et diuidatur segmentum d e proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit d f, minus uerò f e, per sępiùs allegatam 30 sexti elementorum. Et per f punctum, ipsi e b parallela ducatur f g, per 31 primi eorundem elementorum. Connexa tandem a g linea recta, subtendatur illi æqualis a h, quæ secet e b rectam in ipso puncto h. Quoniam e h recta, erit dimidium lateris eius quadrati, quod ipsi dato æquum est circulo. Secentur itaque d k & d l, eidem e h æquales: & ex ipsa k l quadratum ipsum describatur, quod sit k m l *n.*



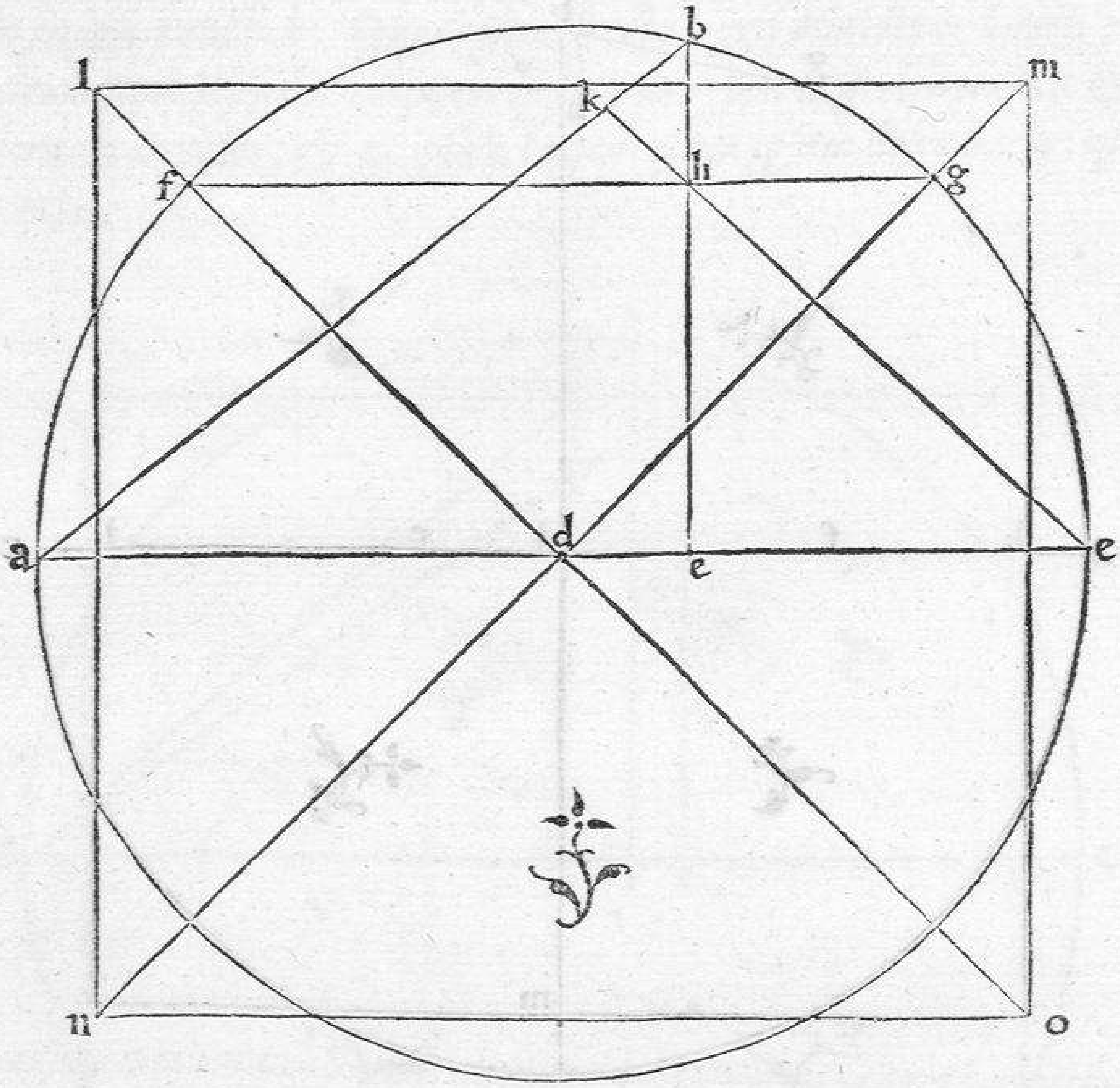
¶DETVR CONSEQVENTER IDEM CIRCV- 1
lus a b c, cuius centrum d, dimetiens uerò a c, diuisus (ueluti sæpiùs dictum est) proportionaliter in puncto e, cuius segmentum maius sit a e,

a e, minus uerò e c: cui æqualis ſecetur e f. Et erecto d b ſemidiametro ſuper a c perpendiculari, ipſi a f æqualis ſubtendatur, coaptetúrue b g. Per punctum deinde g, ipſi dimetienti a c parallela ducatur g h, quæ ſecet d b ſemidiametrum in pũcto h. Nã d h erit ſemilatus quadrati, quod ipſi dato coæquatur circulo. Fiat igitur utraque d k & d l æqualis ipſi d h: & ab ipſa k l deſcribatur ipſum quadratum h k m l eidem circulo a b c æquale.



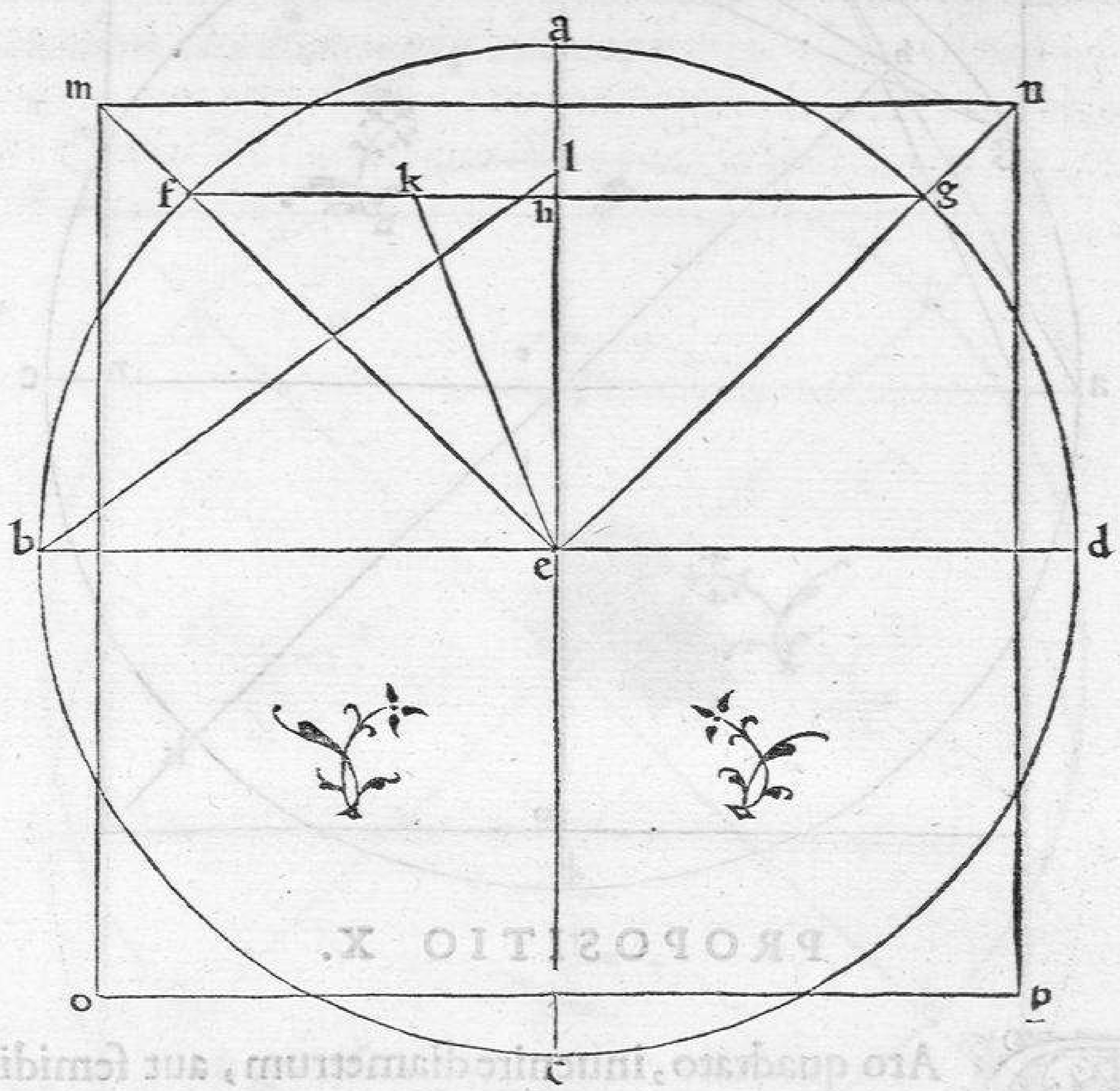
6 ¶SIT VELVT ANTEA DATVS CIRCVLVS *a b c, illiúſque centrum d, & diameter a c: cui quidem circulo operæpretium ſit dare quadratum æquale. Diuidatur itaque dimetiens a c proportionaliter in puncto e, cuius ſegmentum maius ſit rurſum a e, minus autem e c: erigatúrque perpendicularis e b. Connexa deinde a b linea recta, ſubtendatur latus quadrati in dato circulo deſcripti, ſitque illud f g dimetienti a c parallelum: cuius interſectio cum ipſa e b perpendiculari ſit h. Et connectatur c h linea recta,*

quæ in directum producta ad partes h, cadat in punctum k *ipsius a b lineæ rectæ. Connexis postmodum d f & d g semidiametris, & in continuum directúmque productis uersus l & m, rectum comprehendentibus angulum qui sub l d m: secentur d l & d m æquales ipsi c* k. *Connectatur tandem recta l m, ex qua describatur quadratum l m n o: illud enim æquabitur dato circulo a b c. quemadmodum per aliquam antea demonstratam circuli quadraturam, confirmari uel facilè potest.*

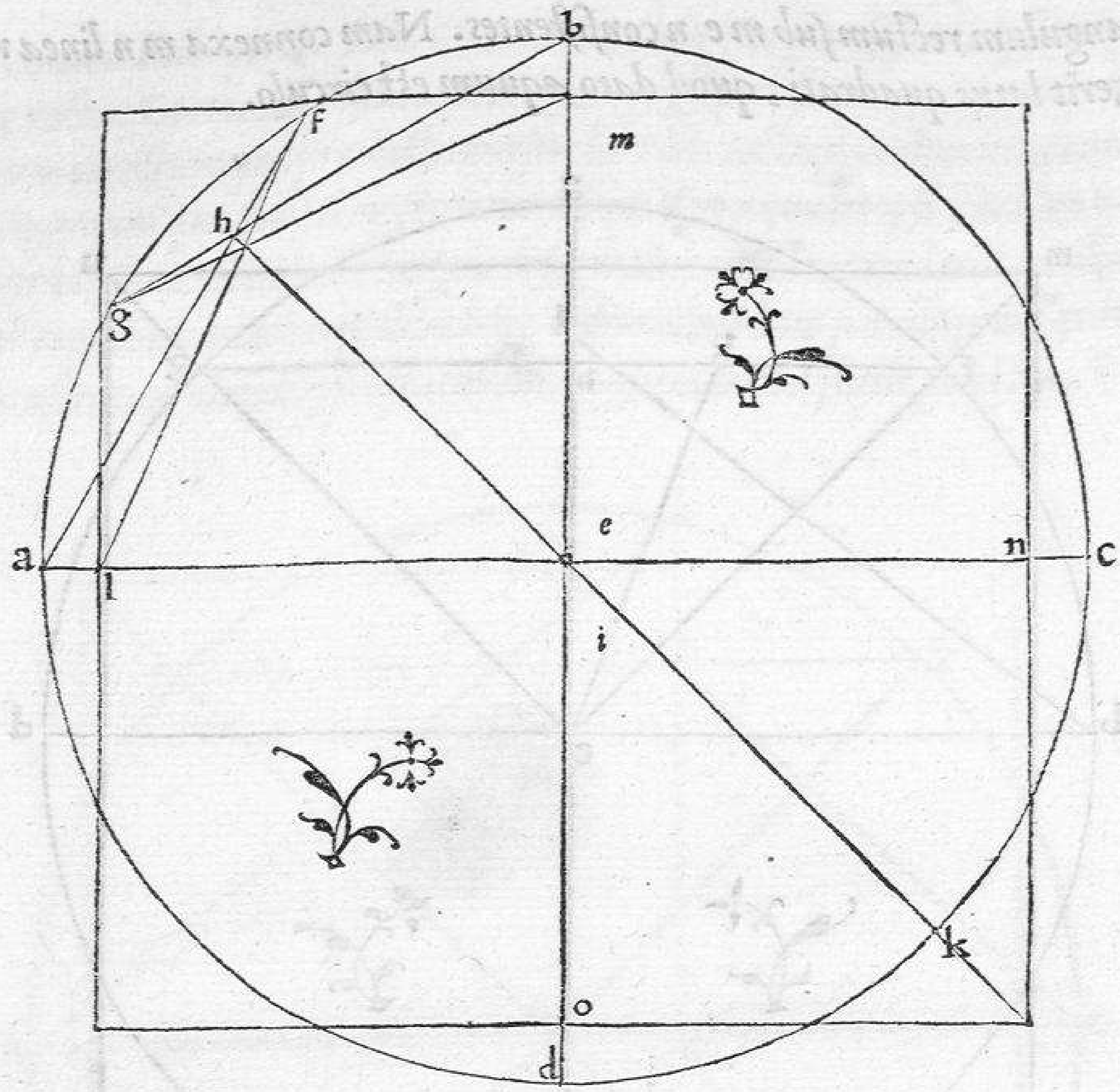


¶RESVMATVR ITERVM CIRCVLVS A B C, 7
cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, ad rectos angulos circa idem centrum e, sese inuicem bifariam dispescentes. Subtendatur itaque latus quadrati in eodem circulo descripti f g, ipsi diametro b d parallelum: quod secet a e semidiametrum in puncto h. Et diuidatur f h proportionaliter in puncto k, *cuius segmentum maius sit f* k, *minus uerò* k *h. Connexa post modum e* k *linea recta, secetur illi æqualis e l: & connectatur demum recta b l. Ipsi autem b l æquales secētur e m & e n, ad*

ad angulum rectum sub m e n consistentes. Nam connexa m n linea recta, erit latus quadrati, quod dato æquum est circulo.



8 ¶EXPONATVR TANDEM PRAEFATVS CIRculus *a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro e ad rectos sese inuicem dirimentes angulos. Et subtendantur a f & b g lineæ rectæ, ipsi a e semidiametro æquales: quæ sese inuicem secent in puncto h. Connectatur deinde h e linea recta, quæ directè producta ad partes e, uersus i &* k, *contingat circunferentiam in ipso puncto* k. *Recta post modum h* k *bifariam diuidatur in ipso puncto i: & dimidiæ parti h i uel i* k, *æquales subtendantur f l atque g m, in semidiametros a e & e b coincidentes. Erit enim utraque e l & e m, dimidium lateris propositi quadrati, quod ipsi dato æquatur circulo. Secentur igitur e n & e o, utrique ipsarum e l & e m æquales: & ex ipsa l n aut m o quadratum describatur l m n o: quod ipsi dato circulo a b c d, ex præostensis circuli quadraturis æquum esse conuincetur.*



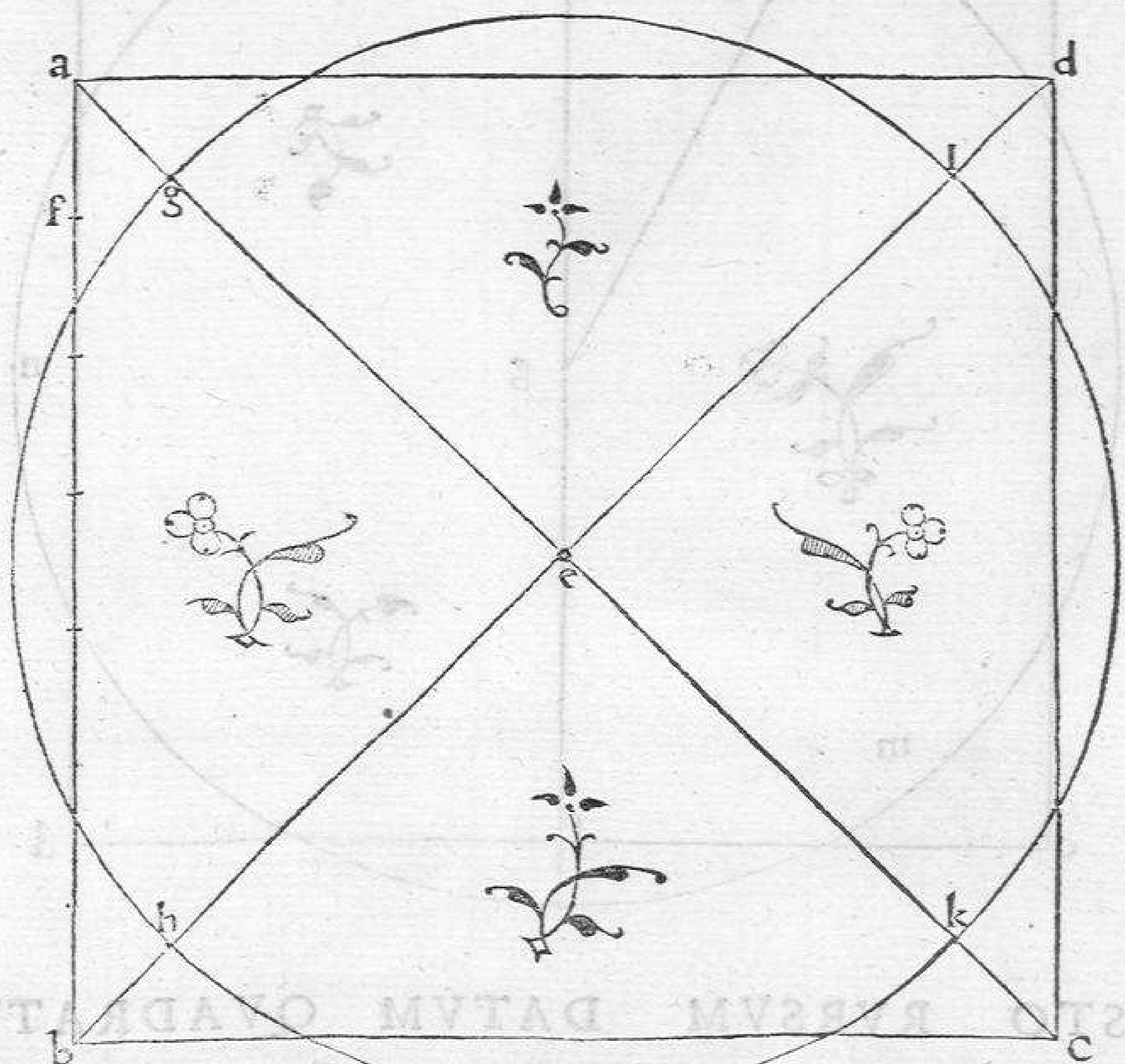
PROPOSITIO X.

DAto quadrato, inuenire diametrum, aut ſemidiametrum circuli, qui eidem quadrato uerſa uice ſit æqualis.

¶QVEMADMODVM CIRCVLVM, IN QVA- *dratum æquale multifariam reuocare docuimus, ſic dato quadrato circulum æqualem uerſa uice nitemur deſcribere: ídque compendiaria rurſum, atque per ſeſe manifeſta traditione, ut in proximis dictum atque obſeruatum fuit circuli quadraturis.* ¶*Sit igitur in primis datum quadratum a b c d, cuius diameter a c & b d, ſe diuidant bifariam in pun-* 1
cto e. Et abſcindatur ex a b latere pars illius ſeptima, per nonam ſexti elementorum, quæ ſit a f. Ipſi poſtmodum a f, æqualis ſecetur a g, per tertiam primi eorundem elementorum. Et centro e, interuallo autem e g, circulus deſcribatur g h k l: quem aio æqualem eſſe dato quadrato a b c d. Huius autem quadrati circulaturæ probationem, aut nume-

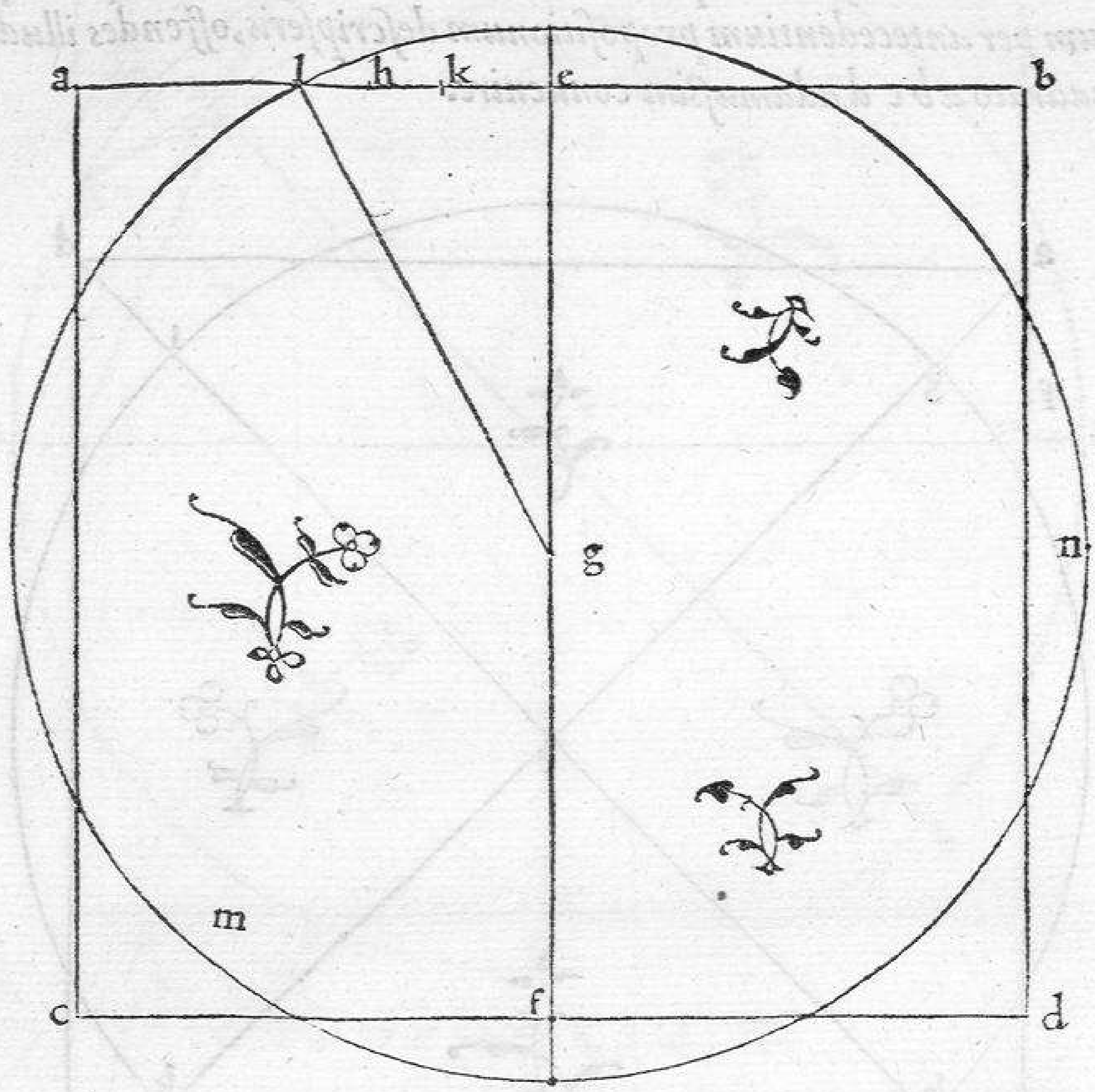
ris

ris examinandam, aut priùs demonstratis circuli quadraturis conferendam breuitatis causa relinquimus. Si enim circulo g h k l, æquale quadratum per antecedentium propositionum descripseris, offendes illud dato quadrato a b c d adamussim conuenire.



2 ¶SIT RVRSVM DATVM QVADRATVM A *b c d, cuius utrunque latus a b & c d bifariam diuidatur, per decimam primi elementorum: a b quidem in puncto e, & c d in puncto f. Et connexa e f linea recta (quæ erit æqualis unicuique laterum, & ipsis a c & b d parallela) ea rursum bifariam diuidatur in puncto g. Dimidium consequenter lateris a b, hoc est a e, diuidatur proportionaliter, seu per mediam & extremam rationem in puncto h, cuius segmentum maius sit a h, minus uerò h e: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto k, cuius segmentum maius sit e k, minus uerò segmentum k h: cui æqualis secetur h l. Nam connexa g l linea recta, erit semidiameter circuli, qui dato æqualis est quadrato. Centro itaque g, interuallo autem*

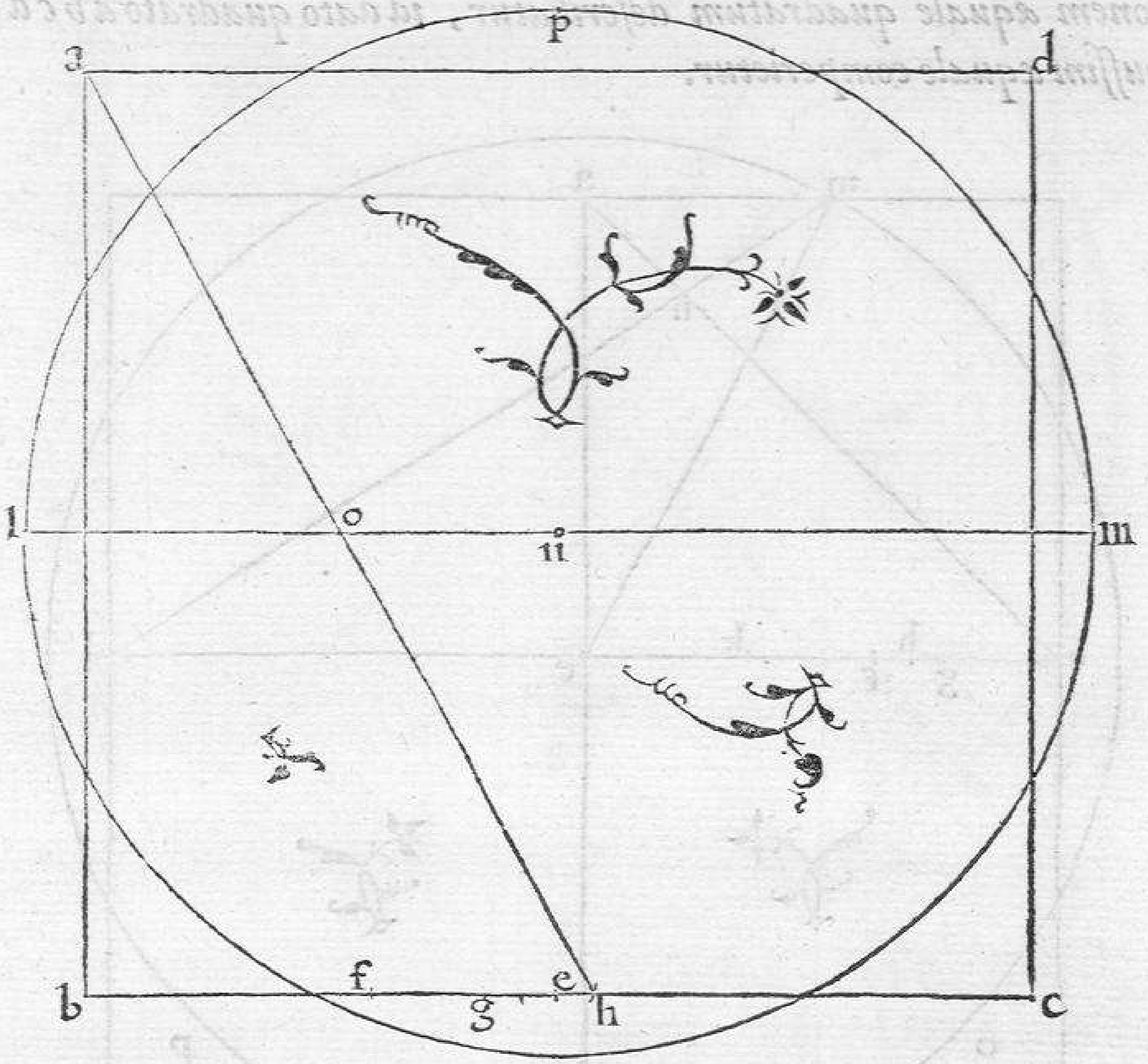
gl, circulus describatur lm n, quadrato a b c d æqualis.



¶ESTO RVRSVM DATVM QVADRATVM 3
a b c d: & diuidatur b c latus bifariam in puncto e. Postea dimidium latus b e proportionaliter diuidatur in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, minus uerò f e: quod rursum diuidatur proportionaliter in puncto g, cuius segmentum maius sit f g, minus uerò segmentum g e. Dimidio tandem ipsius g e, æqualis secetur e h: & connectatur a h linea recta, quam aio esse diametrum circuli, qui dato quadrato est æqualis. Ducatur igitur per media puncta ipsorum a b & c d laterum, recta quædam linea l m, ipsis a d & b c lateribus parallela: cuius pars inter præfata a b & c d latera comprehensa, bifariam diuidatur in puncto n, secétque n l ipsam a h in puncto o. Secentur tandem n l & n m dimidio ipsius a h æquales, hoc est, ipsi a o uel o h: nam eadem l m, diuidet bifariam eandem a h in ipso puncto o. Et centro n, interuallo autem n l aut n m, circulus describatur l p m: quem dato quadrato a b c d, per

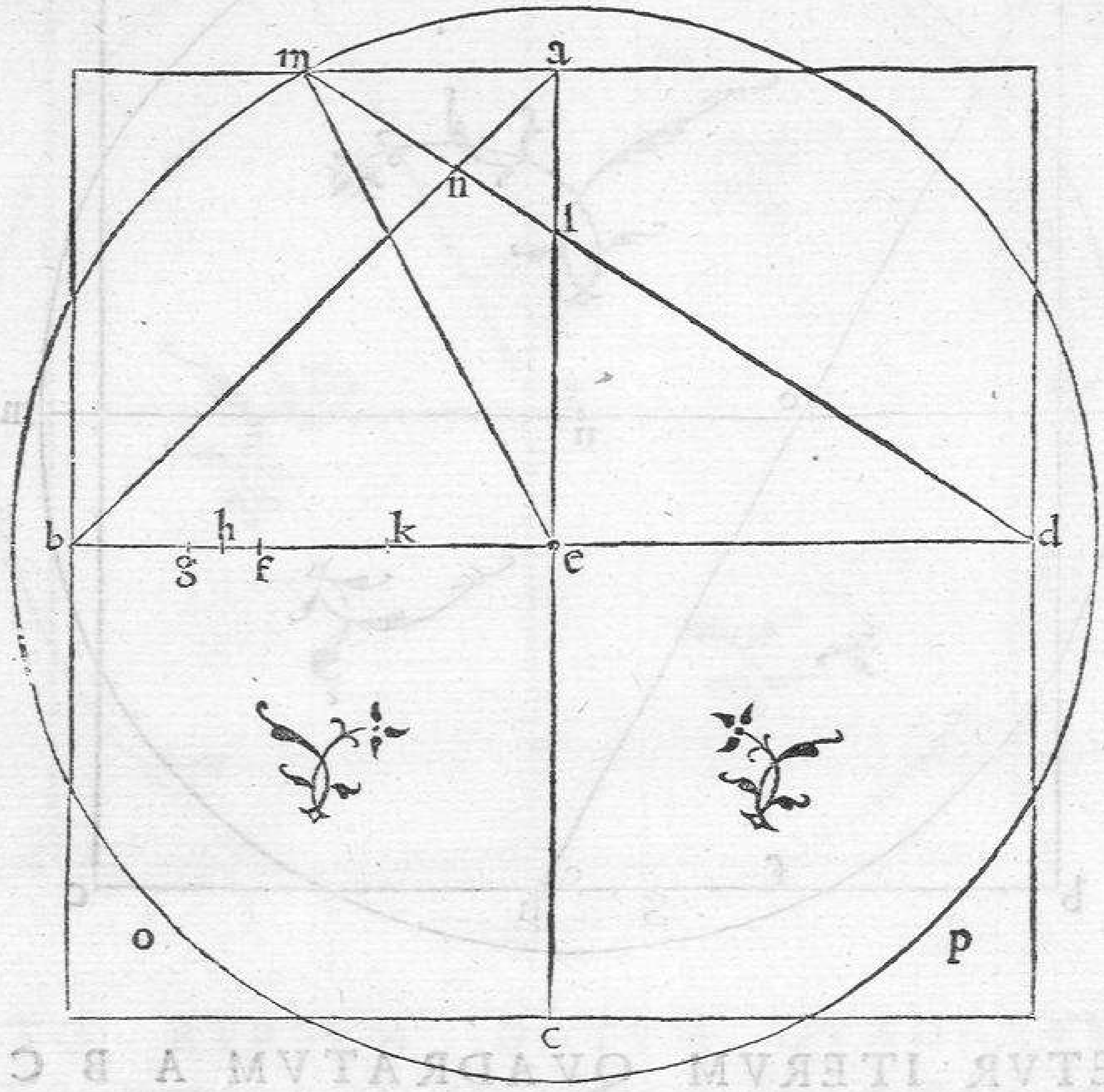
antea

anteà demonstratas circuli quadraturas, haud dubiè offendetur æqualis.



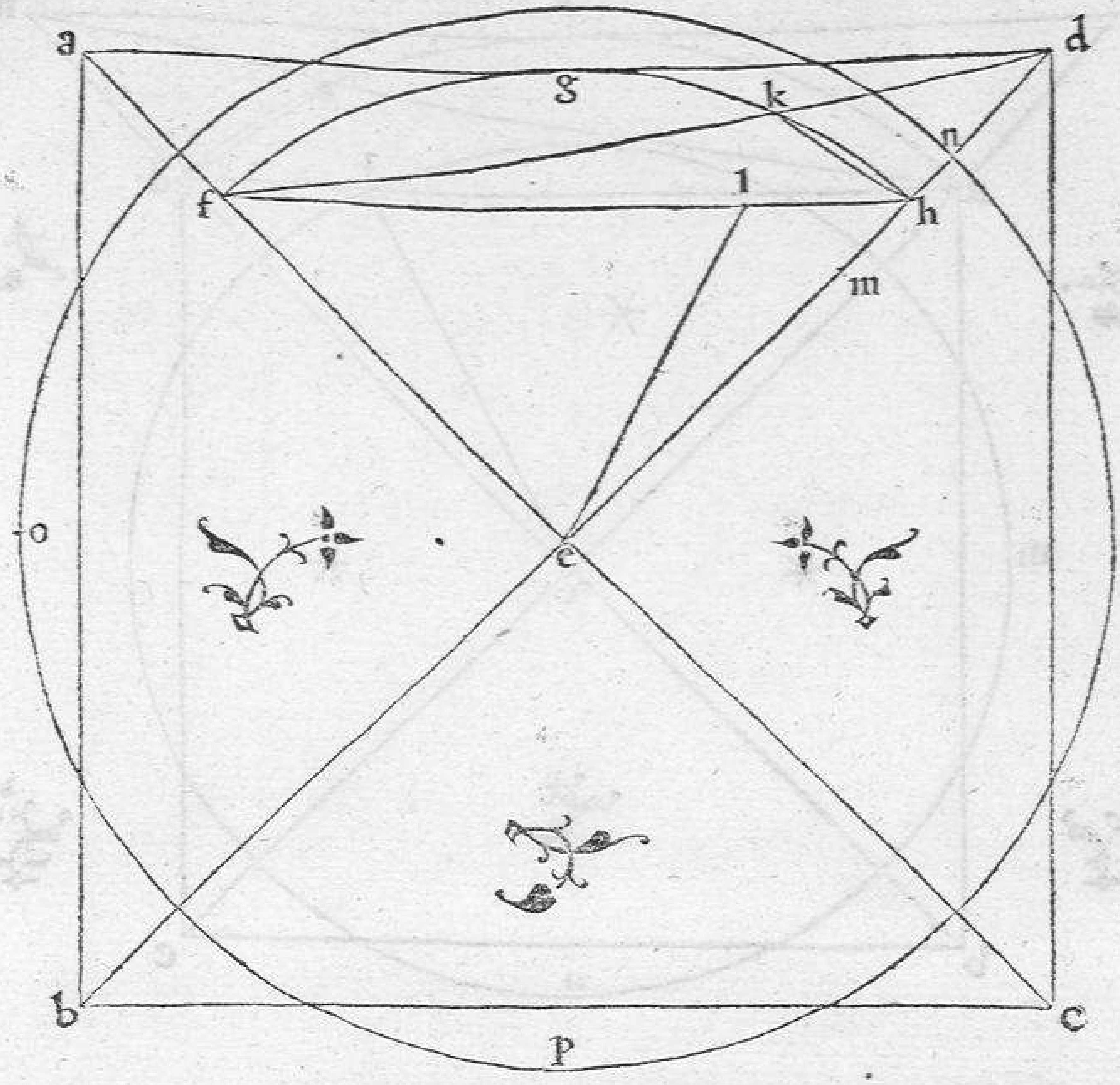
¶DETVR ITERVM QVADRATVM A B C D
4 *in circulum æqualem reducendum. Ipsum ergo quadratum a b c d, in quatuor quadrata inuicem æqualia, sub rectis a c & b d subdiuidatur: subtendatúrque latus quadrati in eodem quadrato descripti, scilicet a b. Diuidatur consequenter e b recta (quæ est æqualis dimidio lateri eiusdem quadrati) proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit e f, minus uerò segmentum proportionale f b: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit b g, minus uerò segmentum g f: quod bifariam diuidatur in pũcto h. Dimidiæ postmodum ipsius e h, utpote ipsi e* k, *aut* k *h, æqualis secetur a l: & connectatur d l linea recta, quæ in directum producta uersus l, cadat in lateris punctum m, secétque rectam a b in puncto n. Si connectatur ergo tandem recta e m, illa offendetur æqualis ipsi b n: & utraque erit semidiameter circuli, qui eidem oblato quadrato coæquatur. Centro*

igitur e, interuallo autem e m, ad quantitatémue ipsius b n, circulus describatur m o p: cui si per sextam, septimam, uel octauam propositionem æquale quadratum describatur, id dato quadrato a b c d ad amussim æquale comperietur.

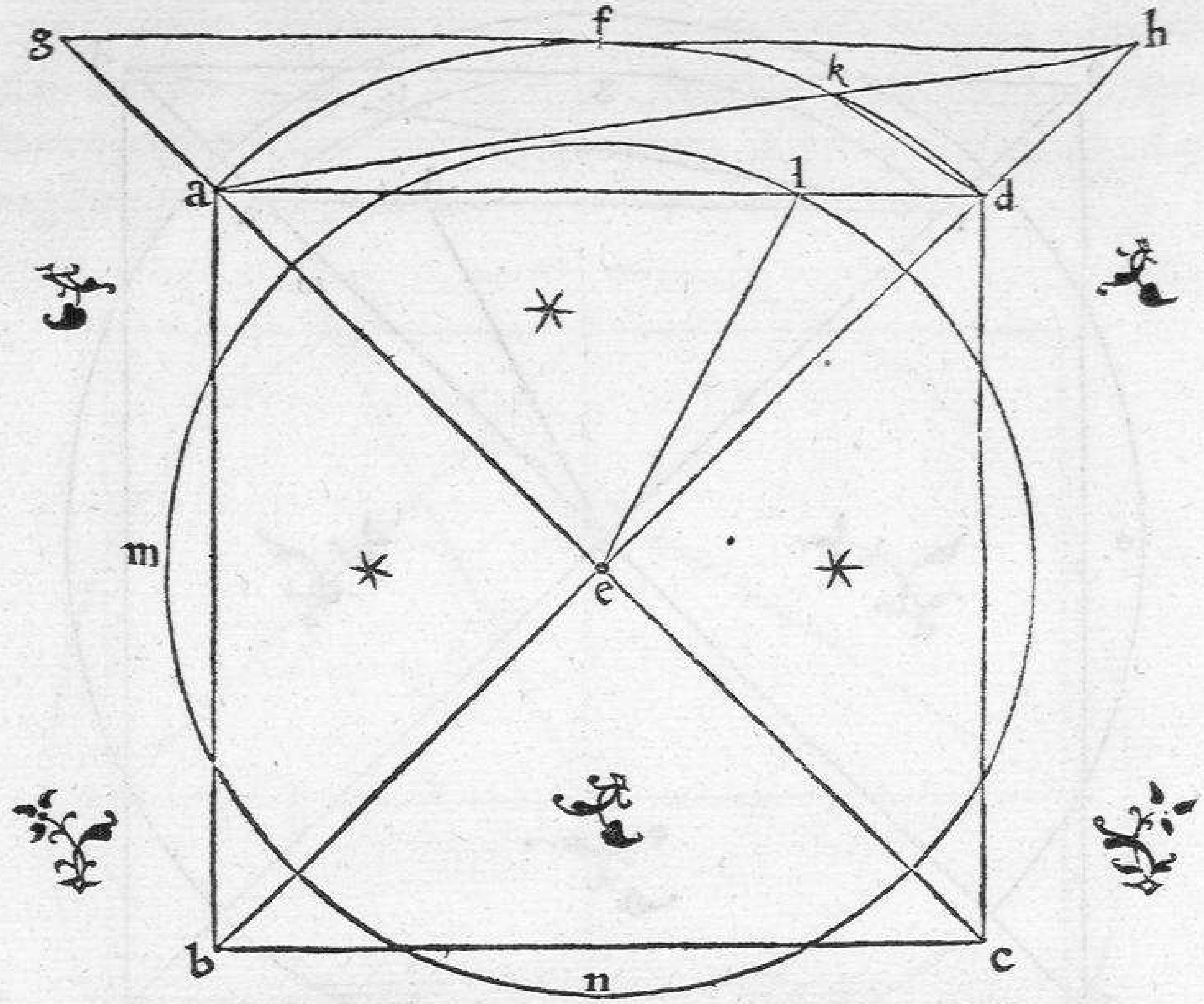


¶EXPONATVR RVRSVM IDEM QVADRA- 5
tum a b c d, cuius dimetientes a c & b d sese inuicem bifariam & ad rectos angulos diuidant in puncto e. Et describatur quadrans circunferentiæ inscripti circuli, qui sit f g h: connectatúrque f h linea recta, quæ erit latus quadrati in eodem circulo descripti. Subtendatur postmodum recta f d, quæ secet eundem circunferentiæ quadrantem in puncto k: & connectatur h k linea recta. Ipsi deinde h k, æqualis secetur h l: & connectatur recta e l, cui æqualis secetur e m. Eidem rursum h k, seu h l, æqualis abscindatur m n, per sæpiùs allegatam tertiam primi elementorum. Erit enim e m semidiameter circuli, qui dato quadrato est æqualis. Centro igitur e, interuallo autem e n, describatur ipse circulus, qui sit n o p: ut in ipsa continetur figura.

Poterit



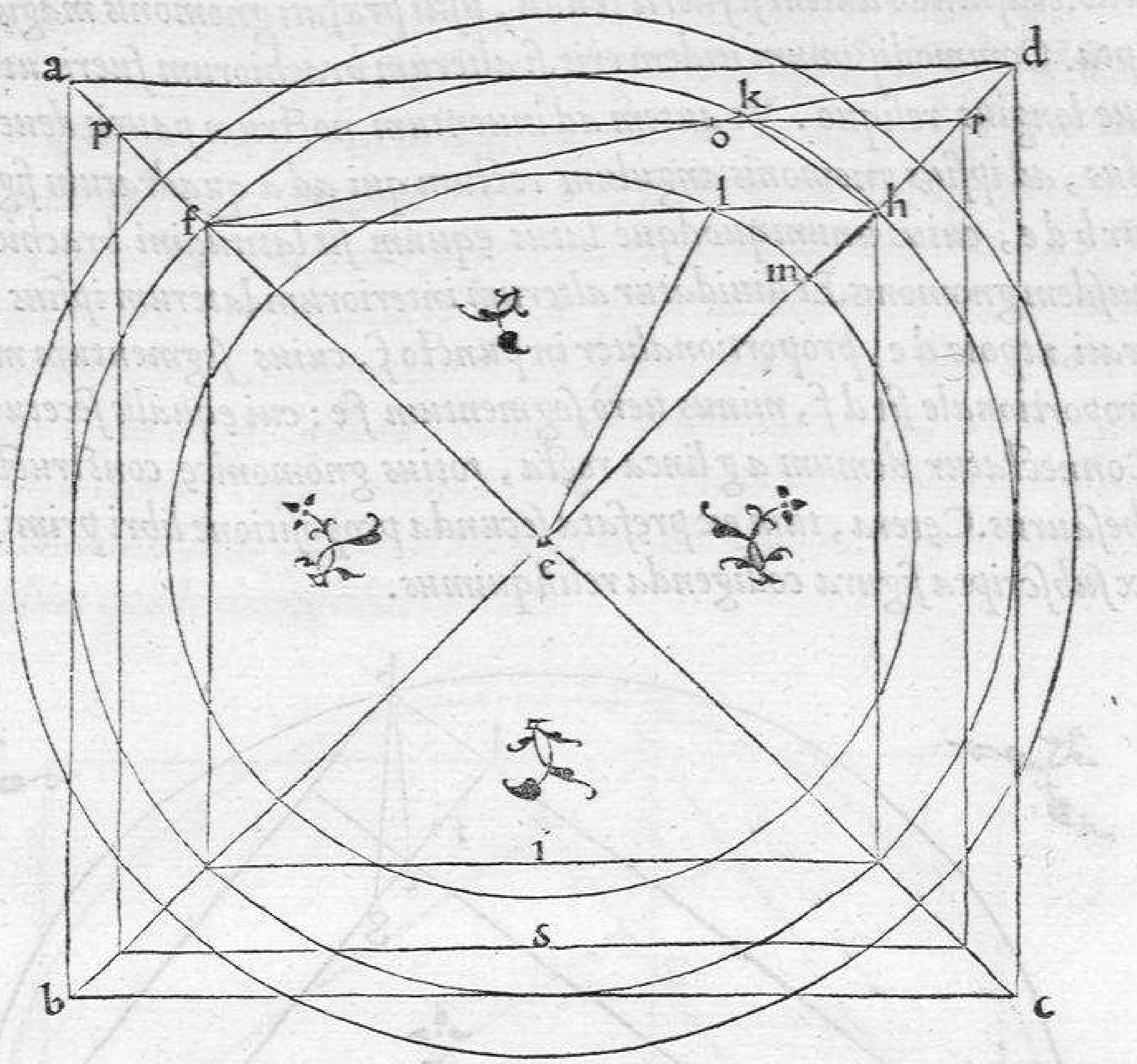
6 ¶POTERIT ET IDEM SEMIDIAMETER *circuli, qui dato quadrato eſt æqualis, aliter rurſum obtineri. Sit igitur oblatum uelut antea quadratum a b c d, cui expediat æqualem deſignare circulum. Circunſcribatur igitur ipſi quadrato a b c d circunferentiæ quadrans a f d, unà cum eidem circulo uel circunferentiæ quadranti circunſcripti quadrati latere g f h ipſi a d lateri parallelo: in quod quidem latus g f h, dati quadrati ſemidiametri e a & e d, conueniant in ipſa puncta g & h. Connectatur poſtmodum recta a h, quæ ſecet eundem circunferentiæ quadrantem a f d in puncto k: & connectatur recta d k, cui æqualis ſecetur d l. Nam connexa demum recta e l, erit ſemidiameter circuli, qui ipſi dato quadrato eſt æqualis. Centro igitur e, interuallo autem e l, circulus ipſe deſcribatur, qui ſit l m n. Vt igitur proxima quadrati circulatura, per inſcripti circuli quadrantem abſoluitur: haud diſſimiliter hæc, à quadrante circunſcripti circuli pendere uidetur.*



¶Corollarium, de duobus quadratis, quorum alterum in dato circulo describitur, alterum uerò eidem circunscribitur circulo.

¶DATIS IGITVR DVOBVS QVADRATIS, 7
quorum alterum in dato circulo describitur, alterum uerò eidem circunscribitur circulo: utrique quadrato, una eadémque uia æqualis circulus promptissimè describetur. Vt ex sequenti potes elicere figura: *in qua circulo f g h circunscribitur quadratum a b c d, & ut in penultima dictum est quadrati circulatura, semidiameter circuli eidem quadrato æqualis, est e n: In eodem porrò circulo descriptum quadratum e f h i, & ueluti proxima quadrati circulatura dictum est, semidiameter circuli eidem quadrato æqualis est e l.* ¶*Adde quòd si rectæ f l æqualis secetur f o, & per ipsum punctum o ipsis a d & f h parallela ducatur p r: erit eadem p r latus quadrati, quod ipsi prius dato æquum est circulo. Et proinde nedum utrique quadrato, æqualis circulus describitur: sed eidem circulo, quadratum æquale simul designatur.*

PROPO-

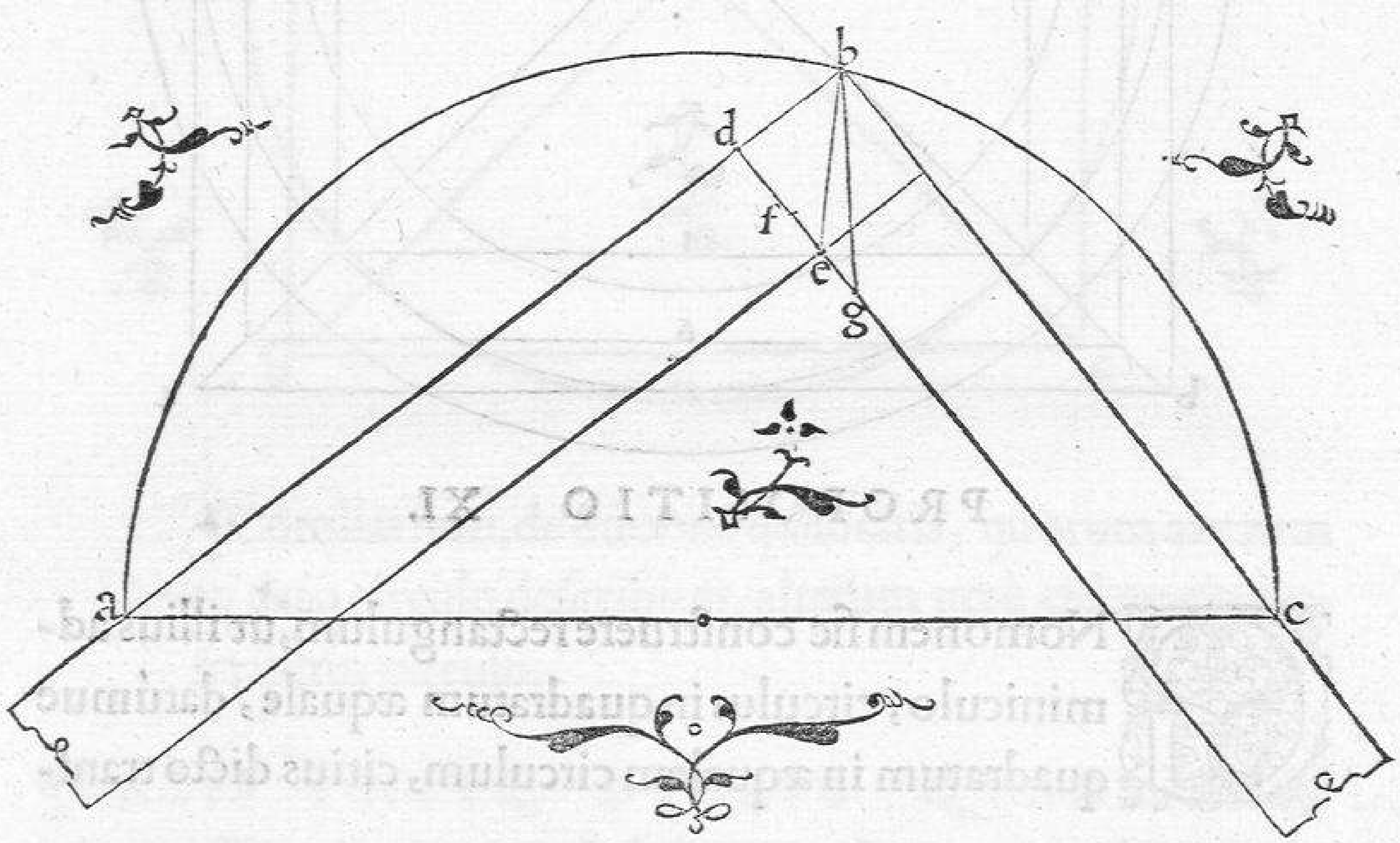


PROPOSITIO XI.

GNomonem sic construere rectangulum, ut illius adminiculo, circulus in quadratum æquale, datúmue quadratum in æqualem circulum, citius dicto transmutetur.

1 ¶ PROPOSITI GNOMONIS COMPOSITIO*nem, secunda propositione libri primi sufficienter expreßimus : cum quo uidelicet datis duabus lineis rectis inæqualibus, duas medias lineas rectas sub eadem ratione continuè proportionales simul inuenire docuimus*. Debet igitur ipse gnomon *(ut totum illius artificium hoc loco perstringamus) construi ex materia quapiam solida, utpote aurichalcea, aut alia simili, & huic artificio congrua. Sit autem brachiorum ipsius gnomonis latitudo libera, sed unius latitudo alterius latitudini adamussim æqualis : & longitudo tanta, quantam oblatorum circulorum & quadratorum inuicem transmutandorum uidebitur indigere magnitu-*

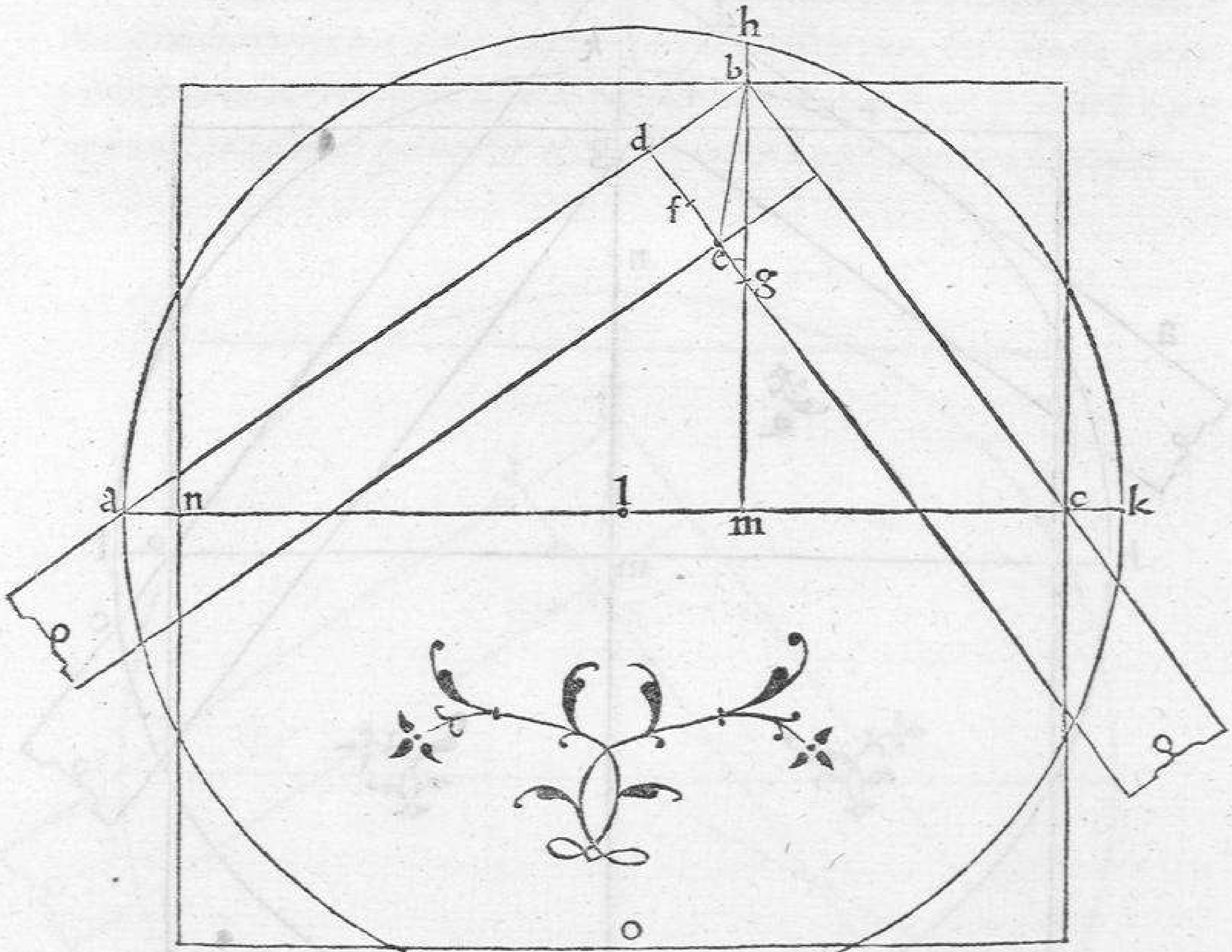
tudo: crassitudo autem si fuerit tenuis, usui præfati gnomonis magis erit apta. Commodissimum itidem erit, si alterum brachiorum fuerit utcunque longius reliquo. Vt autem ad inuentum nostrum paucis deueniamus, ad ipsius gnomonis angulum rectum qui ad a quadratum figuretur b d e, cuius unumquodque latus ęquum sit latitudini brachiorum eiusdem gnomonis. Et diuidatur alterum interiorum laterum ipsius quadrati, utpote d e, proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius proportionale sit d f, minus uerò segmentum f e: cui ęqualis secetur e g. Connectatur demum a g linea recta, totius gnomonicę constructionis thesaurus. Cętera, tum ex pręfata secunda propositione libri primi, tum ex subscripta figura colligenda relinquimus.



¶*Ex hac gnomonis constructione, atque illius usu multiplici: ex iis similiter, quæ tum libro primo, de inuentione duarum rectarum, inter datas extremas continuè proportionalium: tum hoc secundo libro, de uersione quadrantis circunferentiæ in lineam rectam, & è conuerso: atque ipsius circuli quadraturis, circulationibúsue quadrati, tam uariè à nobis adinuentis, fit manifestum: quàm diuina sit illa proportio, quæ sub linea data per mediam & extremam rationem diuisa continetur.*

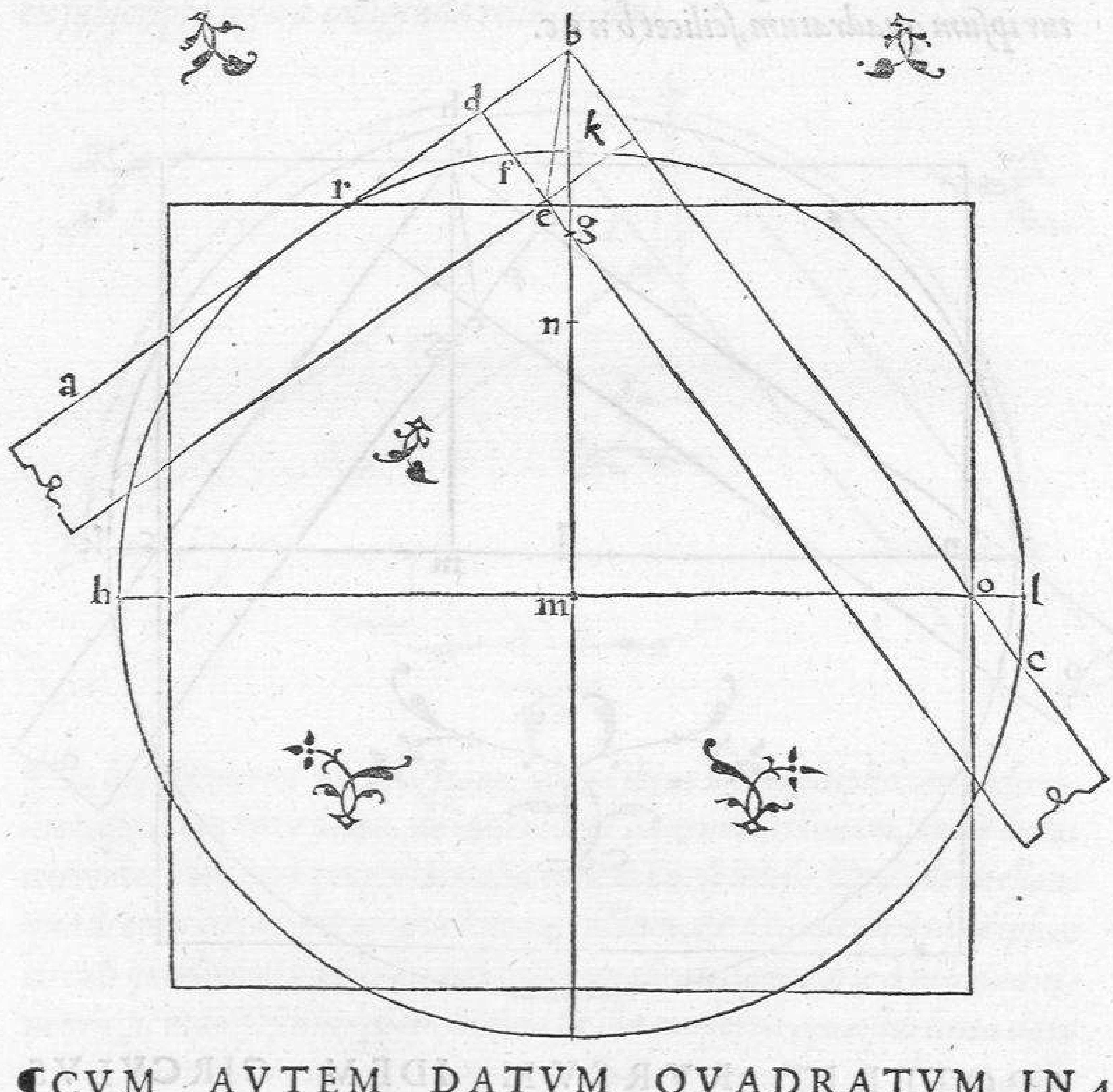
¶CVM HOC ITAQVE GNOMONE, CIRCV- 2
lum in primis in quadratum æquale, hoc modo conuertes. Esto datus circulus a h k, cuius centrum l, dimetiens uerò a k. Hunc itaque dimetientem,

tem, proportionaliter diuidere oportet in puncto (uerbi gratia) m, cuius segmentum maius sit a m, minus uerò segmentum m k: deinde suscitare perpendicularem m h. His in hunc modum præparatis, applicetur longiùs gnomonis latus, utpote a b, puncto a ipsius dimetientis, segmentiue maioris extremo: & eleuetur, deprimatúrue paulatim angulus a b c, donec recta linea b g coincidat in ipsam perpendicularem h m, nusquàm dimoto longiori brachio gnomonis a b ipso puncto a. Quibus absolutis, notetur casus anguli qui ad b in ipsa perpendiculari h m, atque sectio brachij minoris b c cum semidiametro a k. Nam recta b m, aut recta l c erit dimidium latus quadrati ipsi dato circulo æqualis. Describatur igitur ipsum quadratum, scilicet b n o c.



3 ¶POTERIT RVRSVM IDEM CIRCVLVS, ipsius gnomonis adminiculo, aliter quàm supra dictum sit, in quadratũ æquale reuocari. Sit enim datus circulus h k l, cuius centrum m, dimetientes uerò h l & k m, ad rectos in centro m sese inuicem dispescentes angulos. Diuidatur itaque semidiameter m k proportionaliter in pun-

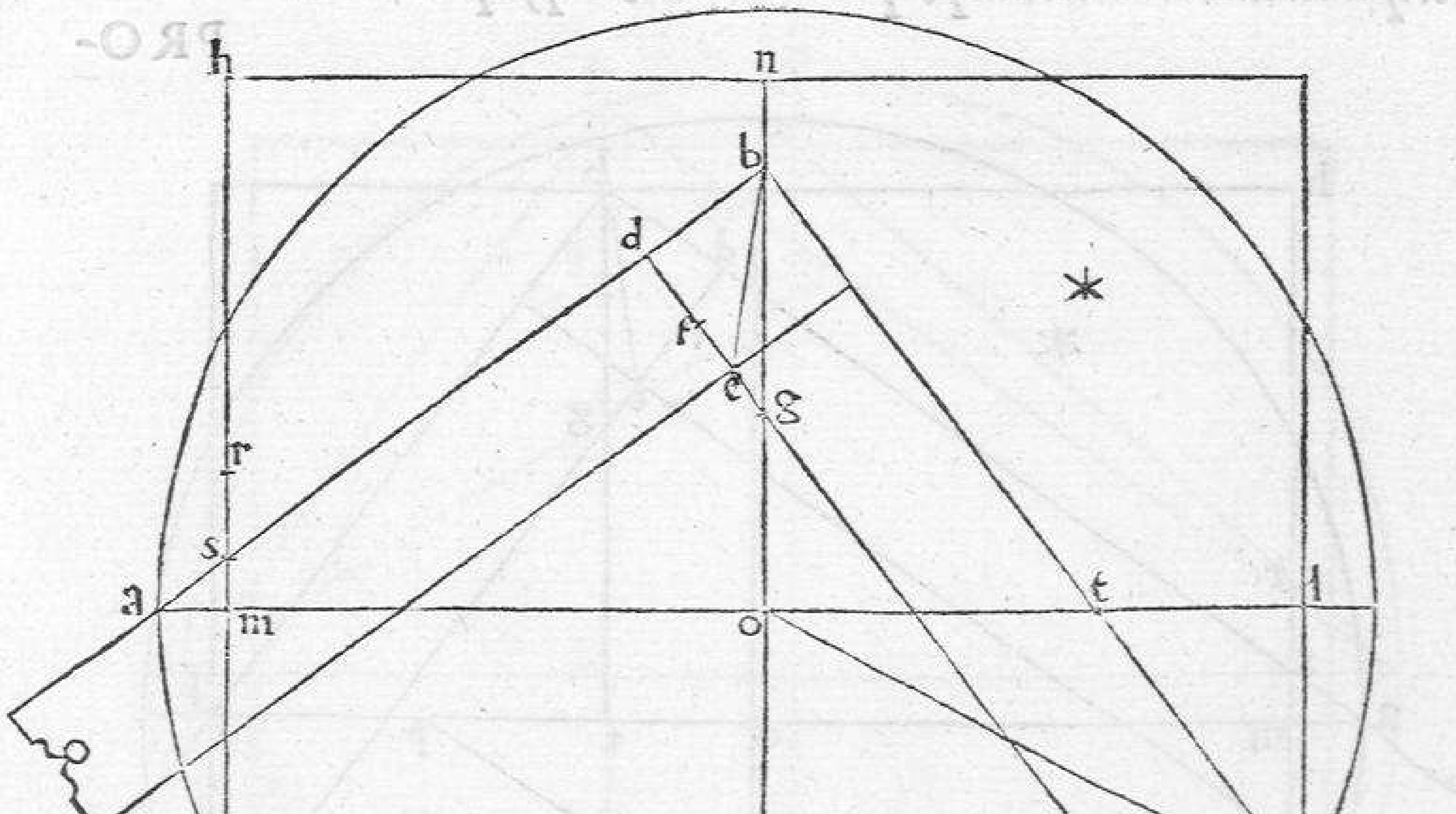
cto n, cuius segmentum maius sit m n, cui æqualis secetur ex m k *in directum producta uersus b, quæ sit n b. In ipso deinde puncto b collocetur angulus rectus a b c diuertatúrque hinc & inde gnomon, donec recta b g coincidat in rectam seu perpendicularem b* k *m. Túncque notetur sectio lateris b c cum semidiametro m l, quę fiat in puncto o: erit enim recta m o, dimidium latus quadrati, quod dato ęquum est circulo. Adde quòd sectio lateris a b ipsius gnomonis a b c, cum circuli periphęria, scilicet punctum r, est transitus lateris ipsi h l diametro paralleli, eiusdem quadrati ipsi dato circulo ęqualis.*



¶CVM AVTEM DATVM QVADRATVM IN *circulum ęqualem reuocare fuerit operępretium, sic facito. Esto datum quadratum h* k *l, sub binis rectis l m & n o, sese inuicem ad punctum o bifariam dispescentibus, in quatuor quadrata distributum. Et diuidatur latus h* k *proportionaliter in puncto r, cuius segmentum maius sit* k *r:* 4

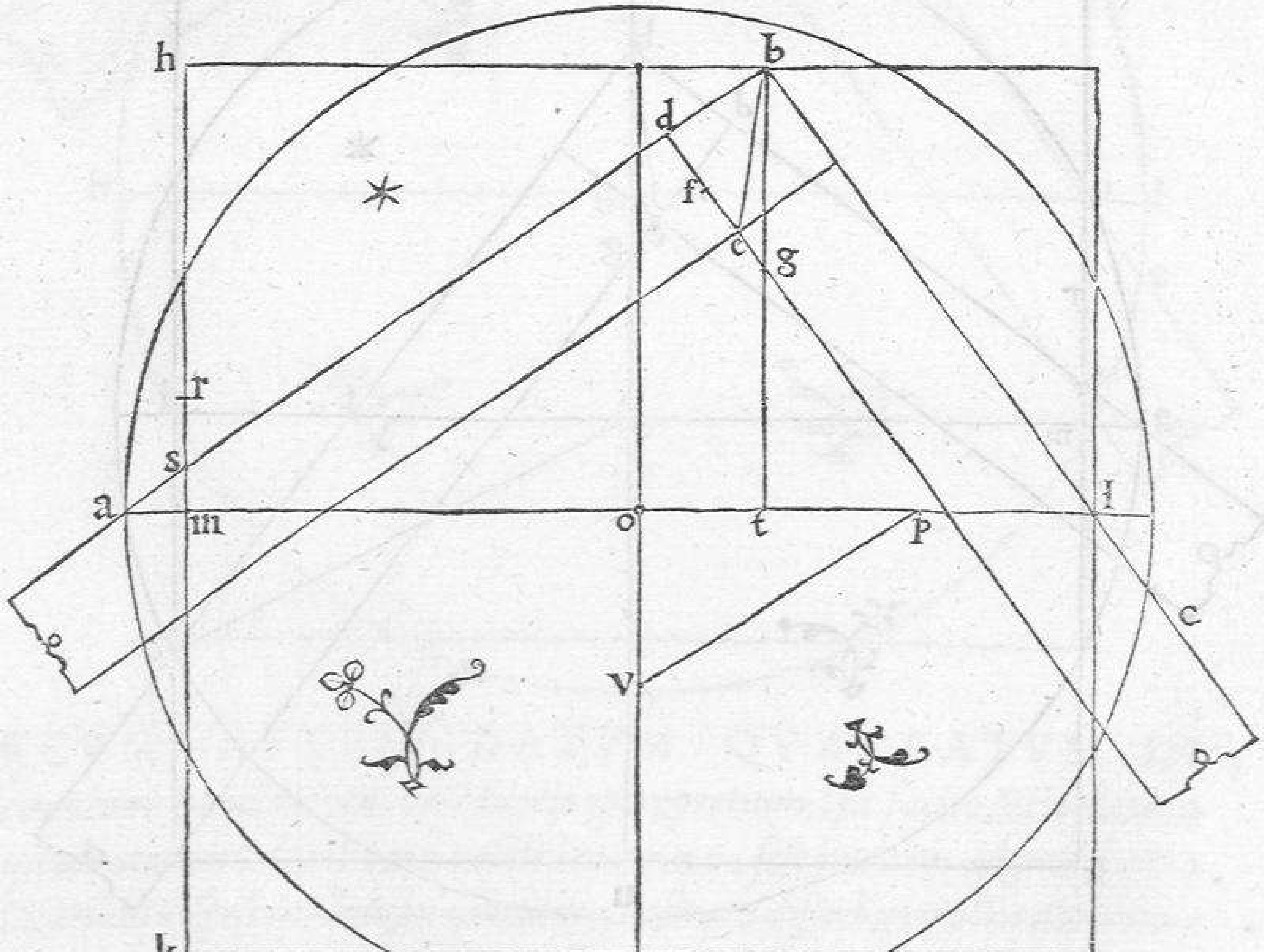
&

& ipsa m r iterum proportionaliter diuidatur in puncto s, cuius segmẽtum maius sit r s, minus uerò segmentum proportionale s m, per sæpiùs allegatam trigesimam propositionem sexti elementorum. His ita præparatis, applicetur latus a b ipsius gnomonis a b c ipsi puncto s, & eleuetur paulatim angulus qui ad b, donec recta b g coincidat solito more in rectam n o, immoto semper a b latere ab ipso puncto s. Quibus absolutis, notetur tandem sectio lateris a b, cum o m in directum producta uersus a: quæ sit in ipso puncto a. Quoniam o a erit semidiameter circuli eidem quadrato æqualis: Centro igitur o, interuallo autem o a, describatur idẽ circulus, qui sit a u c. Adde, quod ubi reliquum latus gnomonis, scilicet b c, secat latus ipsius dati quadrati, in ipso uidelicet puncto c: extensa o c linea recta, est eiusdem propositi circuli semidiameter. ¶ Vterque præterea semidiameter o a & o c, longè facilius colligetur, si o l diuisa fuerit proportionalium in signo t, cuius segmentum maius sit o t: si latus b c per signum t transire cogatur, & recta b g super n o pendenter collocetur.



¶IDEM RVRSVM OBTINEBITVR, SI RE- 5
sumpto priori quadrato h k l, & latere h k in segmenta proportionalia uelut antea distributo, latus a b ipsi puncto s, reliquum uerò latus b c puncto l simul applicetur, & eleuetur paulatim angulus rectus qui ad b, immotis semper lateribus gnomonis ab eisdem punctis s & l: donec idem angulus qui ad b, cadat in supremum quadrati latus quod per n punctum ducitur. Nam sectio lateris a b cum recta o m in directum producta uersus m, quæ sit rursum a limitabit propositi circuli semidiametrum o a. ¶*Quòd si recta o l proportionaliter diuidatur in signo p, cuius segmentum maius sit o p, & minori segmento p l æqualis fiat o u, connectatúrque p u linea recta, cui rursum æqualis fiat l t, & ab ipso puncto t perpendicularis excitetur t b: erit eadem perpendicularis t b, supra quam directè locanda est b g linea recta gnomonis a b c, & ipsius gnomonis latus b c per punctum l simul traducendum.* T*unc enim latus a b secabit (uelut antea) præfatum circuli semidiametrum o a: nec opus erit aliquo modo diuidere latus h k. diuidet autem ipsa perpendicularis, descripti circuli diametrum proportionaliter, in ipso puncto t.*

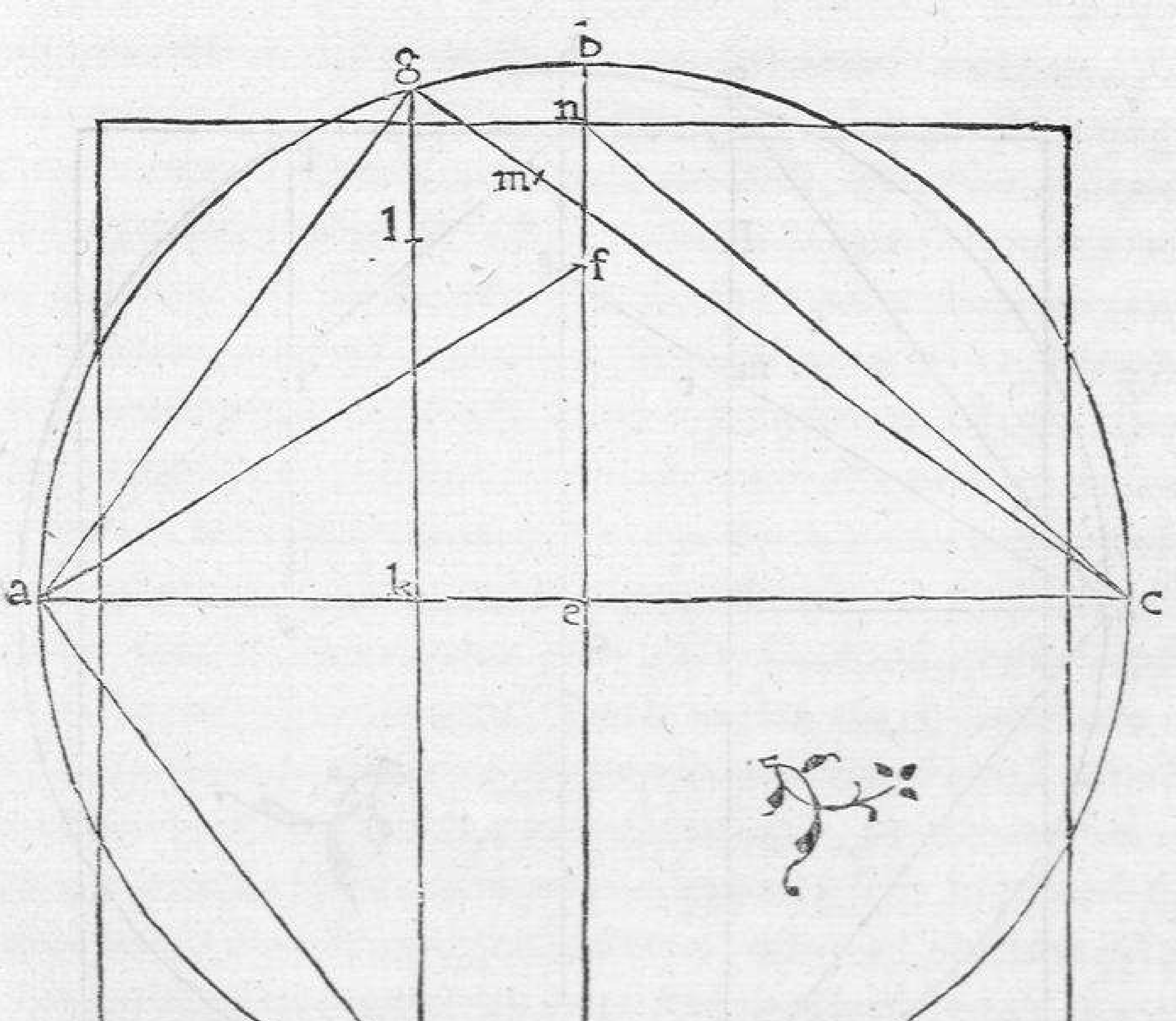
PRO-



PROPOSITIO XII.

Beneficio lateris pentagoni, atque heptagoni regularis, in dato circulo descripti, quadratum eidem circulo æquale, modis hactenus inauditis colligere.

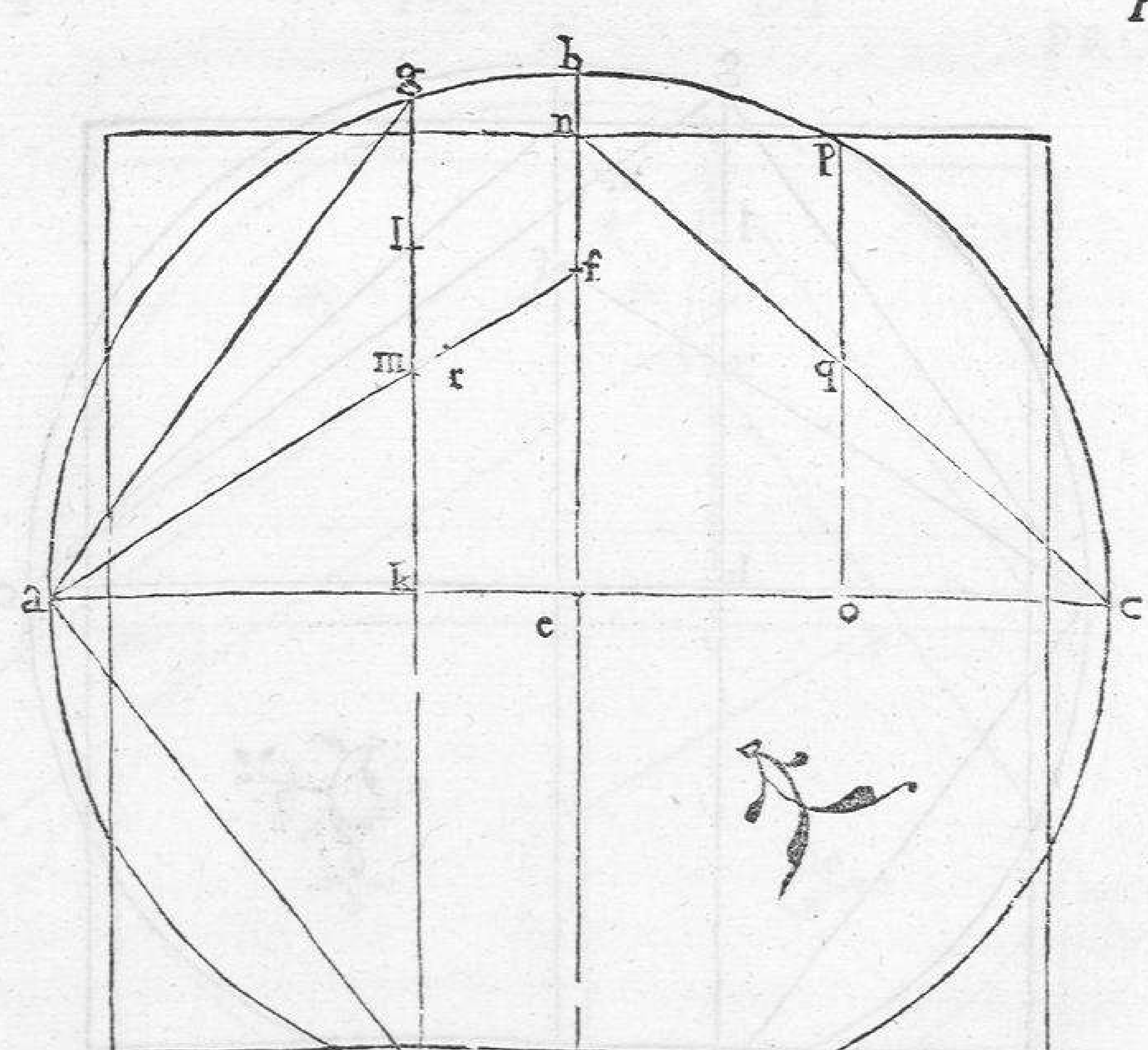
¶QVANQVAM PRAEOSTENSAE CIRCVLI *quadraturæ, unicuique rerum mathematicarum studioso (quantumuis etiam difficili) satis esse uideantur: alias nihilominus excogitauimus adinuentiones, quibus rursum datus circulus in quadratum æquale multifariam reuocatur. Quas huic secundo libro, commodissimè censuimus annectendas: utpote, quæ studiosis omnibus delectationem cum admiratione causabunt, & nostræ tum diligentiæ, tum dexteritatis fidem si-*
1 *mul facere poterunt.* ¶ *Sit igitur in primis datus circulus a b c, cuius centrum e, in quo dimetientes a c & b d sese orthogonaliter intersecent.*



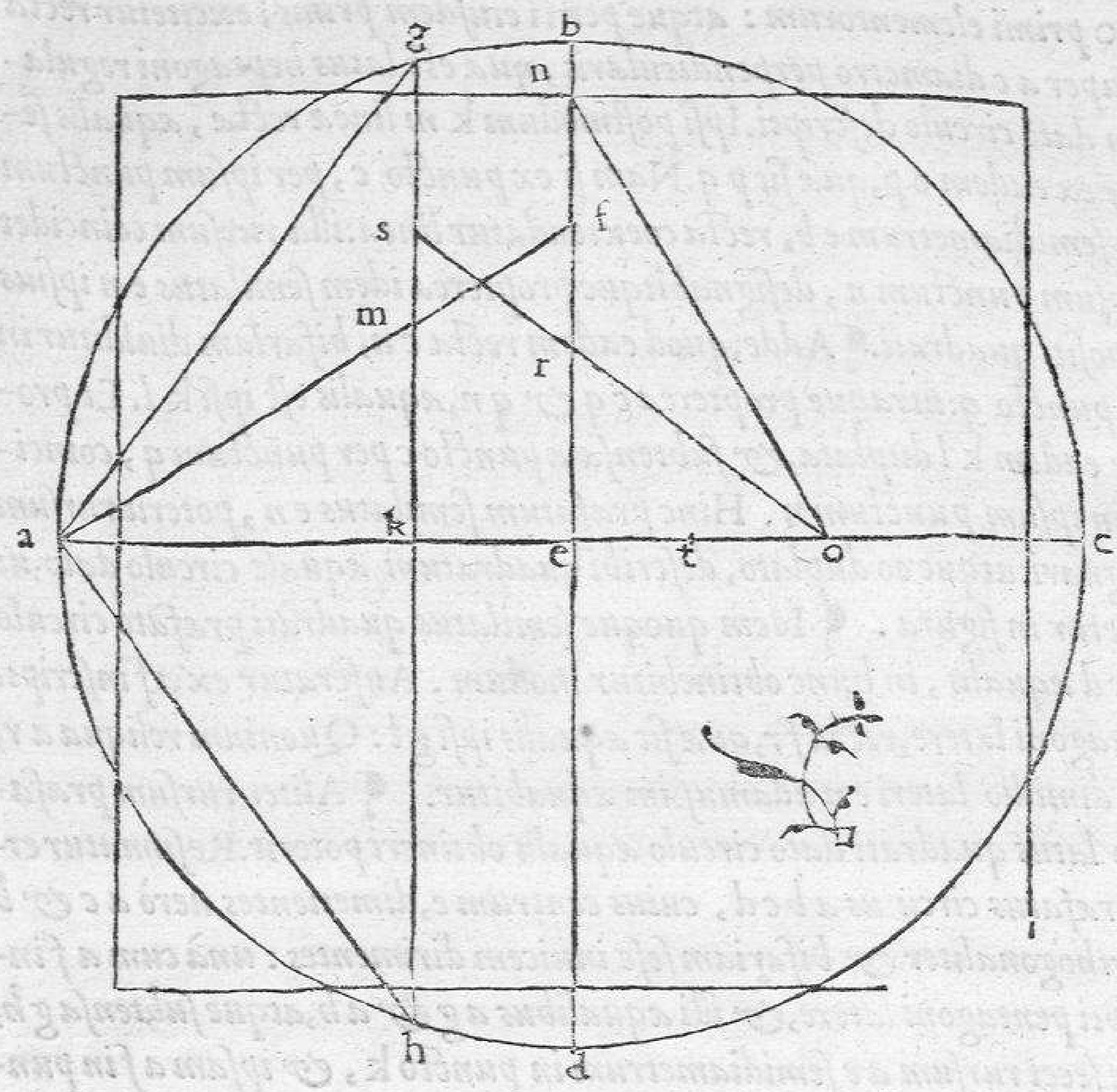
Diuidatur ergo semidiameter e b proportionaliter, seu media & extrema ratione, in puncto f, cuius segmentum maius sit e f, per 30 sexti elementorum: & connectatur a f linea recta, quæ est latus pentagoni regularis in dato circulo descripti. Ipsi deinde a f æquales subtendantur, coaptentúrue a g & a h, per primam quarti elementorum: & connectatur recta g h, quæ secet diametrum a c in puncto k. *Connectatur insuper recta g c: cui æqualis secetur ex ipsa g h, per 3 primi elementorum, quæ sit h l. Reliquæ postmodum l g ęqualis secetur ex ipsa g c, quę sit g m. Residuę tandem m c, ęqualis subtendatur ex pũcto c in semidiametrum e b, quę sit c n. Nam recta e n erit dimidium lateris ipsius quadrati, quod dato ęquum est circulo. Dupletur ergo e n, & describatur ipsum quadratum, ut in figura continetur.*

¶POTERIT ET IDEM SEMILATVS E N, IN *hunc qui sequitur modum obtineri. Resumantur singulæ partes ipsius antecedentis figuræ, dempta g c linea recta: sitque sectio ipsius a f cum recta g h, punctũ m. Et diuidatur semidiameter e c bifariam in puncto o,* 2

per



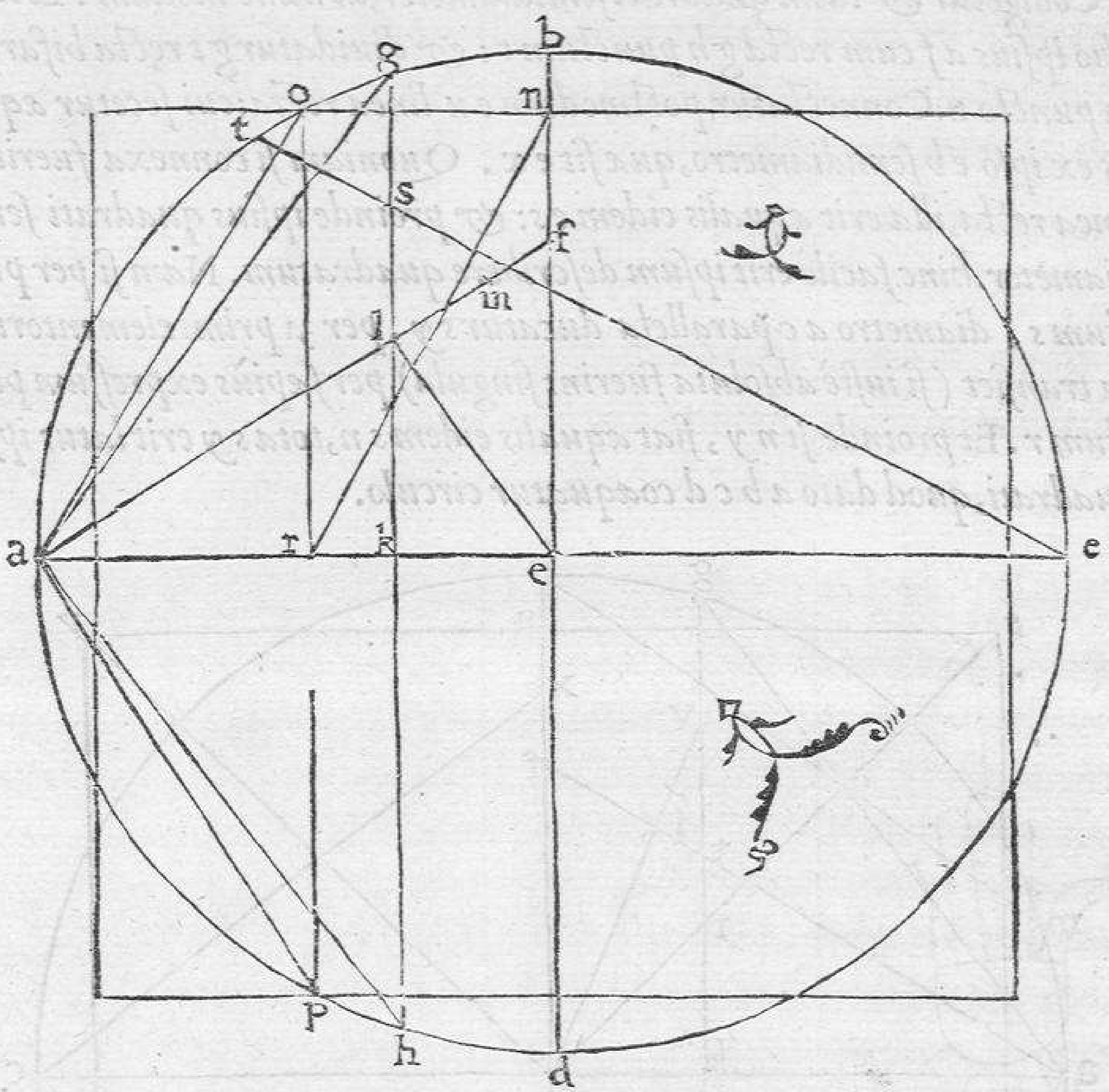
per 10 primi elementorum: atque per 11 eiusdem primi, excitetur recta o p super a c diametro perpendicularis, quæ est latus heptagoni regularis in dato circulo descripti. Ipsi postmodum k *m lineæ rectæ, æqualis secetur ex eadem o p, quæ sit p q. Nam si ex puncto c, per ipsum punctum q, in semidiametrum e b, recta coextendatur linea: illa rursum coincidet in ipsum punctum n, designabitque propterea idem semilatus e n ipsius*
3 *propositi quadrati.* ¶ *Adde, quòd eadem recta c n, bifariam diuiditur in ipso puncto q: utraque propterea c q & q n, æqualis est ipsi* k *l. Et proinde eadem* k *l duplata, & subtensa à puncto c per punctum q, coincidet in ipsum punctum n. Hinc præfatum semilatus e n, poterit rursum designari: atque eo duplato, describi quadratum æquale circulo dato, ut*
4 *habetur in figura.* ¶ *Idem quoque semilatus quadrati præfato circulo a b c d æqualis, in hunc obtinebitur modum. Auferatur ex a f inscripti pentagoni latere, recta f r, quæ sit æqualis ipsi g l: Quoniam reliqua a r,*
5 *ipsi dimidio lateri e n adamussim æquabitur.* ¶ *Aliter rursum præfatum latus quadrati dato circulo æqualis obtineri poterit. Resumatur ergo præfatus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, orthogonaliter & bifariam sese inuicem dirimentes: unà cum a f inscripti pentagoni latere, & illi æqualibus a g & a h, atque subtensa g h, quæ secet rursum a e semidiametrum in puncto* k*, & ipsam a f in puncto m: sitque semidiameter e c bifariam diuisus in puncto o, ut in proxima descriptione. Et diuidatur e b semidiameter per mediam & extremam rationem, in puncto r, cuius segmentum maius sit b r, per ipsam 30 sexti elementorum. Ex puncto deinde o, per ipsum punctum r, in rectam g h, extendatur o s linea recta. Nam si ab eodem puncto o, in semidiametrũ e b, recta subtendatur ipsi o s æqualis: coincidet rursum eadem recta in ipsum punctum n, eritque propterea recta e n semilatus ipsius quadrati propositi. Describatur igitur ipsum quadratũ, ex dupla ipsius*
6 *e n: ut in sequenti figura cõtinetur.* ¶ *Alia rursum uia, & admodum cõpẽdiosa, præfatum semilatus e n efficietur manifestum. Nam si ex recta, segmentóue diametri o* k*, tertia pars abscindatur, per nonam sexti elementorum, quæ sit o t: erit eadem pars o t, æqualis ipsi f n. Et proinde segmentum maius proportionale semidiametri, utpote e f, iunctum ipsi o t, conficit dimidium latus quadrati, quod dato circulo est æquale, hoc est, ipsam e n: & cuius dupla, idem quadratum (uelut in figura obseruatur) describendum esse uidetur.*



¶HAVD MINVS FACILE, SAEPIVS EX- 7
pressum latus quadrati æqualis ipsi dato circulo, ex iam descriptis fiet manifestum. Resumatur enim præfatus circulus a b c d, unà cum suis dimetientibus a c & b d, atque rectis a f, a g, a h, atque subtensa g h, quæ secet rursum a e semidiametrum in puncto k, *ipsam uerò rectam a f in puncto l. Et diuidatur f l proportionaliter, seu per mediam & extremã rationem, in puncto m, cuius segmentum maius sit l m. Ipsi autem a m æquales subtendantur a o & a p. connectatúrque recta o p, quæ secet a e semidiametrum in puncto r. Erit enim o p recta, latus quæsiti quadrati dato circulo æqualis: & utraque o r & r p, æqualis ipsi dimidio lateri e n. Describatur igitur ex ipsa o p recta quæsitum quadratum, ut in figura. ¶ Idem quoque latus rursum obtinebitur, si connexa e l linea recta, eidem æqualis secetur ex a e semidiametro, à puncto quidem a uersus e, quæ sit a r: & per punctum r, ipsi diametro b d parallela ducatur o p, per 31 primi elementorum. Aequalis est enim e l ipsi a r. ¶ Adde rursum, quòd à puncto r, alterutro duorum modorum adinuento, in se-* 9
midiametrum

midiametrum e b ſubtenſa linea recta, quæ ſit æqualis eidem ſemidiametro: illa coincidet adamuſsim in ſæpiùs deſignatum punctum n, limitabítque propterea præfatum ſemilatus optati quadrati e n.

10 *¶Item ſi g l bifariam diuidatur in puncto s, & à puncto c, per s, in circunferētiam,*



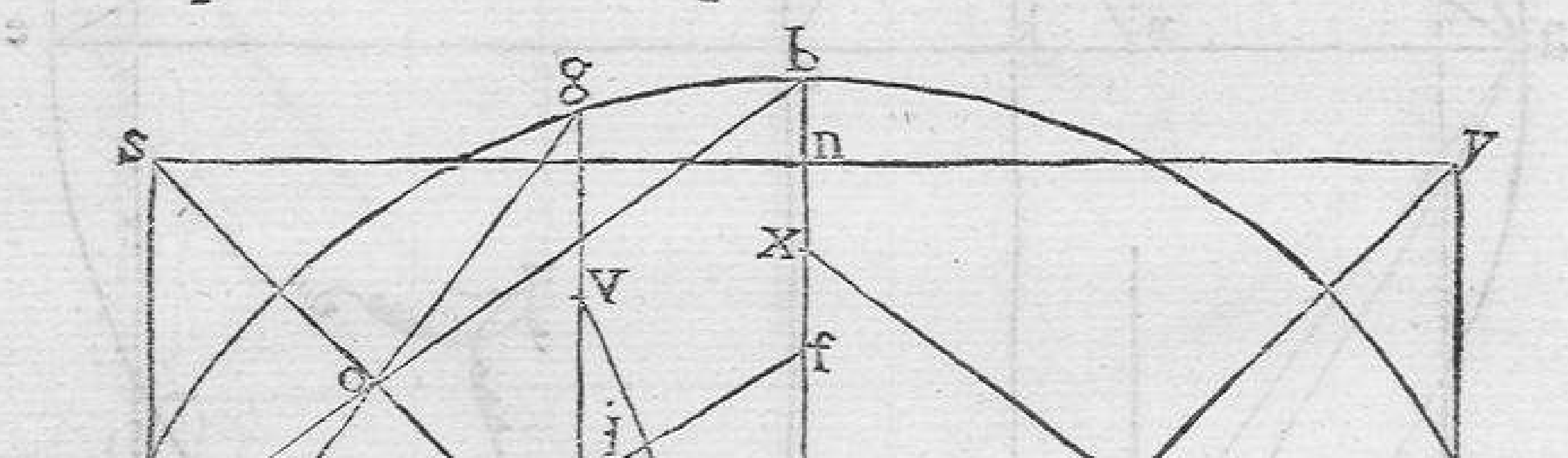
recta coextendatur linea c t: illa erit æqualis ipſi o p, & proinde latus eiuſdem quadrati.

11 *¶Si iuuet tandem, adminiculo ipſius lateris inſcripti pentagoni, ſemidiametrum eiuſdem habere quadrati dato circulo æqualis: reſumatur datus à principio circulus a b c d, præfatis dimetientibus a c & b d in quatuor quadrantes ſolito more diſtributus, unà rurſum cum a f, a g, a h lineis rectis inuicem æqualibus, atque ſubtenſa g h, quæ ſecet ſemidiametrum a e in ipſo puncto k. His ita paratis, auferatur in primis ex a f inſcripti pentagoni latere recta f l, quæ ſit æqualis ipſi e k. Reſidua enim l a, eſt latus heptagoni regularis in dato circulo deſcripti. Subtendatur poſtmodum recta b m, ipſi a f, & proinde a g æqualis, quæ ſecet eandem a g in puncto o: & connectatur e o linea recta,*

m

quæ secet g h rectam in puncto r. Producatur consequenter ipsa e o in directum & continuum uersus s: secetúrque o s linea recta, quæ sit æqualis ipsi o r, dimidióue ipsius a l, hoc est, ipsius lateris inscripti heptagoni. Erit enim e s linea recta, semidiameter ipsius propositi quadrati.

¶ *Colligetur & idem quadrati semidiameter, in hunc modum. Esto se-* 12
ctio ipsius a f cum recta g h punctum t: & diuidatur g t recta bifariam in puncto u. Connectatur postmodum e u linea recta: cui secetur æqualis ex ipso e b semidiametro, quæ sit e x. Quoniam si connexa fuerit c x linea recta, illa erit æqualis eidem e s: & proinde ipsius quadrati semidiameter. hinc facilè erit ipsum describere quadratum. Nam si per punctum s, diametro a c parallela ducatur s y, per 31 primi elementorum, ea transiet (si iustè absoluta fuerint singula) per sæpiùs expressum punctum r. Et proinde si n y, fiat æqualis eidem s n, tota s y erit latus ipsius quadrati, quod dato a b c d coæquatur circulo.



¶ *Habes igitur, candide ac studiose lector, duodecim modos inueniendi latus quadrati dato æqualis circulo, omnésq; ab eodem fonte scaturiētes:*

nempe

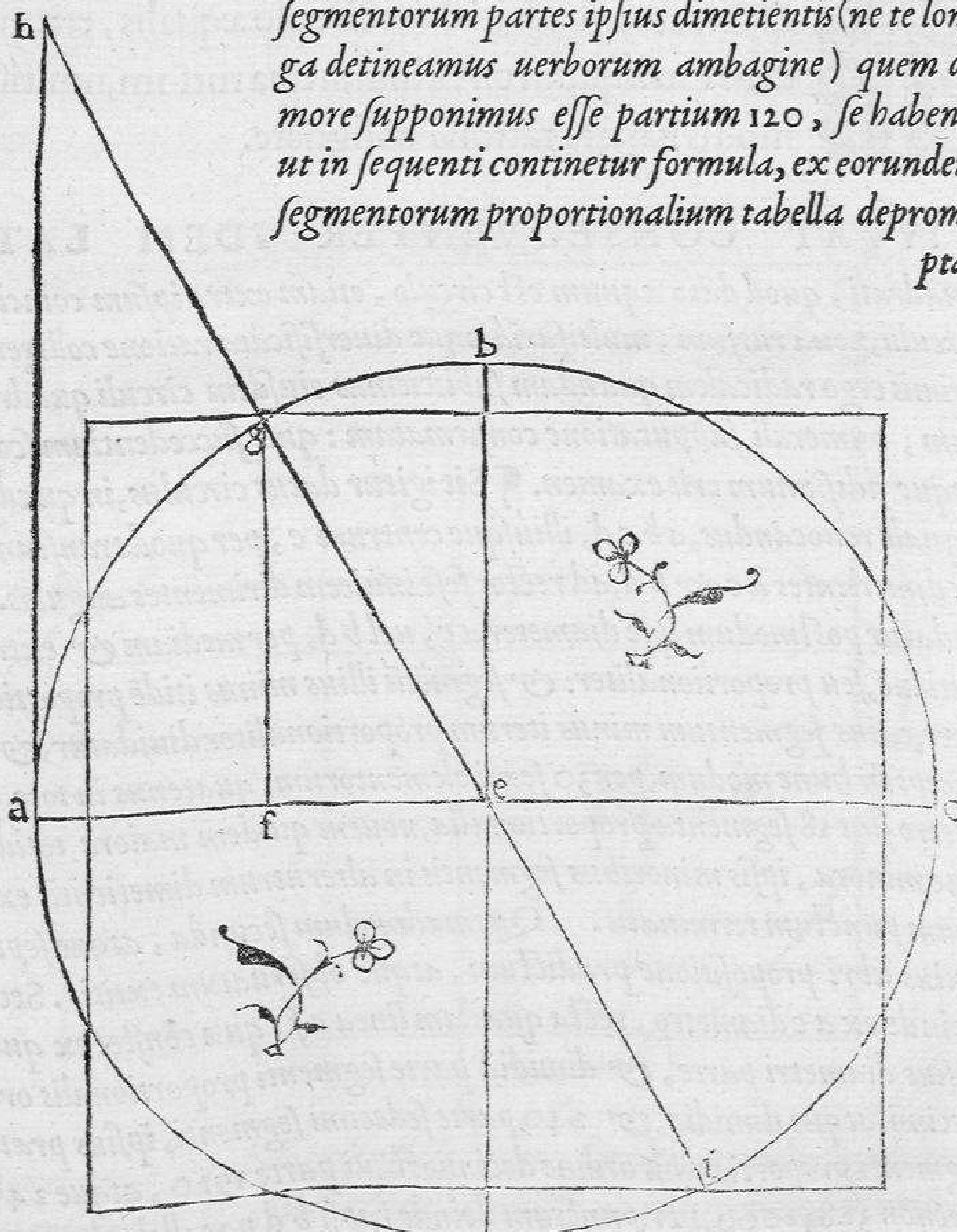
nempe ex lateris pentagoni atque heptagoni regularis in dato circulo descripti admirando beneficio. Qui quàm pulchrè ac utiliter in unum conueniant, tibi relinquimus diiudicãdum. Poterant enim ſinguli, ſub unica figuræ deſcriptione comprehendi: ſed clarioris intelligentiæ gratia, illos in quinque diſtinximus. Nec in præſentiarum aliam ſuperaddemus confirmationem (ne uolumen hoc in immenſam ac inutilem molem producamus) quàm ipſorum duodecim modorum tum inuicem, tum cum prius demonſtratis circuli tetragoniſmis euidentiſsimam concordiam.

PROPOSITIO XIII.

IDem latus quadrati dato circulo æqualis, etiam cadens extra ipſum circulum, noua rurſum, multíſque modis uariata ratione deſignare.

¶ IVVAT CONSEQVENTER IDEM LATVS *quadrati, quod dato æquum eſt circulo, etiam extra ipſum coincidens circulũ, noua rurſum, multifariámque diuerſificata ratione colligere. In primis ergo radicalem quandam ſubiiciemus eiuſdem circuli quadraturam, numerali ſupputatione confirmatam: quæ ſuccedentium ſcopus,*
1 *atque fidiſsimum erit examen.* ¶ *Sit igitur datus circulus, in quadratũ æquale reuocandus, a b c d, illiúſque centrum e, per quod tranſeant bini dimetientes a c & b d, ad rectos ſeſe inuicem dirimentes angulos. Diuidatur poſtmodum ipſe diameter a c, uel b d, per mediam & extremã rationẽ, ſeu proportionaliter: & ſegmẽtũ illius minus itidẽ proportionaliter, cuius ſegmentum minus iterum proportionaliter diuidatur, & deinceps in hunc modum, per 30 ſexti elementorum: quatenus in toto diametro ſint 18 ſegmenta proportionalia, nouem quidem maiora, totidémque minora, ipſis minoribus ſegmentis in alterutrum dimetientis extremum punctum terminatis. Quemadmodum ſecunda, atque ſeptima huius libri propoſitione prædictum, atque obſeruatum extitit. Secetur deinde ex a c diametro, recta quædam linea a f, quæ conſtet ex quarta ipſius diametri parte, & dimidia parte ſegmenti proportionalis ordine decimi, atque dimidia, & 240 parte ſedecimi ſegmenti, ipſius præterea ſegmenti proportionalis ordine decimioctaui parte 1920, atque 24576, necnon 32832000. Per punctum deinde f, ipſi b d parallela ducatur f g,*

per 31 primi elementorum: quæ per 29 eiusdem primi, & decimam illius diffinitionem, perpendicularis erit super a e semidiametrum. Connectatur insuper e g semidiameter, in directúmque producatur ad utrasque illius partes, uersus h & i. Per punctum consequenter a, utrique ipsarũ e b & f g parallela ducatur a h, quæ per quintum postulatum geometricum, cõueniet tandem cum ipsa h i, ad ipsum uidelicet punctum h: eritque angulus e a h rectus, per 29 primi elementorum. Et proinde recta a h tangit circulum in ipso puncto a, per corollarium 16 tertij eorundem elementorum. His ita constructis, aio rectam a h esse latus quadrati, quod ipsi dato circulo est æquale. Hoc autem uia numerorum, in hunc qui sequitur modum fit manifestum. Præfata nanque proportionalium segmentorum partes ipsius dimetientis (ne te longa detineamus uerborum ambagine) quem de more supponimus esse partium 120, se habent, ut in sequenti continetur formula, ex eorundem segmentorum proportionalium tabella deprompta,



pta, quam præallegata secunda, atque septima huius libri propositione conscripsimus.

ptes.	m̄	2̃	3̃	4̃	5̃	6̃	7̃	8̃	9̃	10̃	11̃	12̃	
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Quarta pars diametri.
0	29	16	12	49	8	35	0	0	0	0	0	0	Dimidia pars segmenti decimi.
0	1	37	52	13	31	51	0	0	0	0	0	0	Dimidia pars segmenti xvi.
0	0	0	48	56	6	45	55	30	0	0	0	0	Pars 240. eiusdem segmenti xvi.
0	0	0	2	20	11	12	39	30	0	0	0	0	Pars 1920.
0	0	0	0	1	5	35	15	18	31	52	30	0	Pars 24576. Segmenti
0	0	0	0	0	0	26	17	6	7	24	22	30	Pars 32832000. xvij.
30	30	54	56	20	4	26	7	24	39	16	52	30	Recta a f.
29	29	5	3	39	55	33	52	35	20	43	7	30	Reliqua f e.

Qualium igitur partium diameter a c est 120, talium recta a f est 30, & minutorum sexagenariorum 30, 54, 56, 20, 4, 26, 7, 24, 39, 16, 52, 30: & proinde reliqua pars semidiametri, utpote f e, habet partes 29, & minuta itidem sexagenaria 29, 5, 3, 39, 55, 33, 52, 35, 20, 43, 7, 30. Et quoniam in triangulo a h e, ad latus a h acta est parallela f g, secat igitur eadem f g reliqua ipsius trianguli latera proportionaliter, per 2 sexti elementorum: sicut uidelicet e f ad f a, sic e g ad g h. Atqui tres primæ e f, f a, e g notæ sunt (nam ipsa f g est partium 60) quarta proinde g h, per 4 proportionalium regulam innotescet: ducendo uidelicet a f in e g, & productum diuidendo per f e. Erit autem ipsa g h partium 62, & minutorum 5, 49, 25, 10, 42, 12. Et cùm punctum h extra ipsum cadat circulum, & ab illo geminæ procidant lineæ rectæ h a & h i, quarum altera, scilicet h i circulum ipsum dispescit, altera uerò, utpote h a, eundem circulum tangit. Quod igitur sub i h & h g continetur rectangulum, æquum ei quod ex a h tangente fit quadratum, per 36 tertij elementorum. Tota porrò h i, est partium 182, & minutorum 5, 49, 25, 10, 42, 12 (nam diameter h i habet partes 120) quæ ducta in partes 62 & minuta itidem 5, 49, 25, 10, 42, 12, ipsius h g, efficiunt partes 3, 8, 27, seu 11307, & minuta 41, 32, 18, 25, 42, ferè. Totidem itaque partium, & minutorum, est quadratum ipsius h a. Sed per antecedentem sextam propositionem, quadratum æquale circulo, cuius diameter est partium 120, habet itidē partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26. Huiusce propterea calculi, & ipsius sextæ propositionis differentia, est quintorum minutorum 18, quæ faciunt $\frac{1}{43200000}$ unius integræ partis. Toleranda proculdubio, & quæ reprehendatur indigna calculi differentia: si tum illius adeò exigua quan-

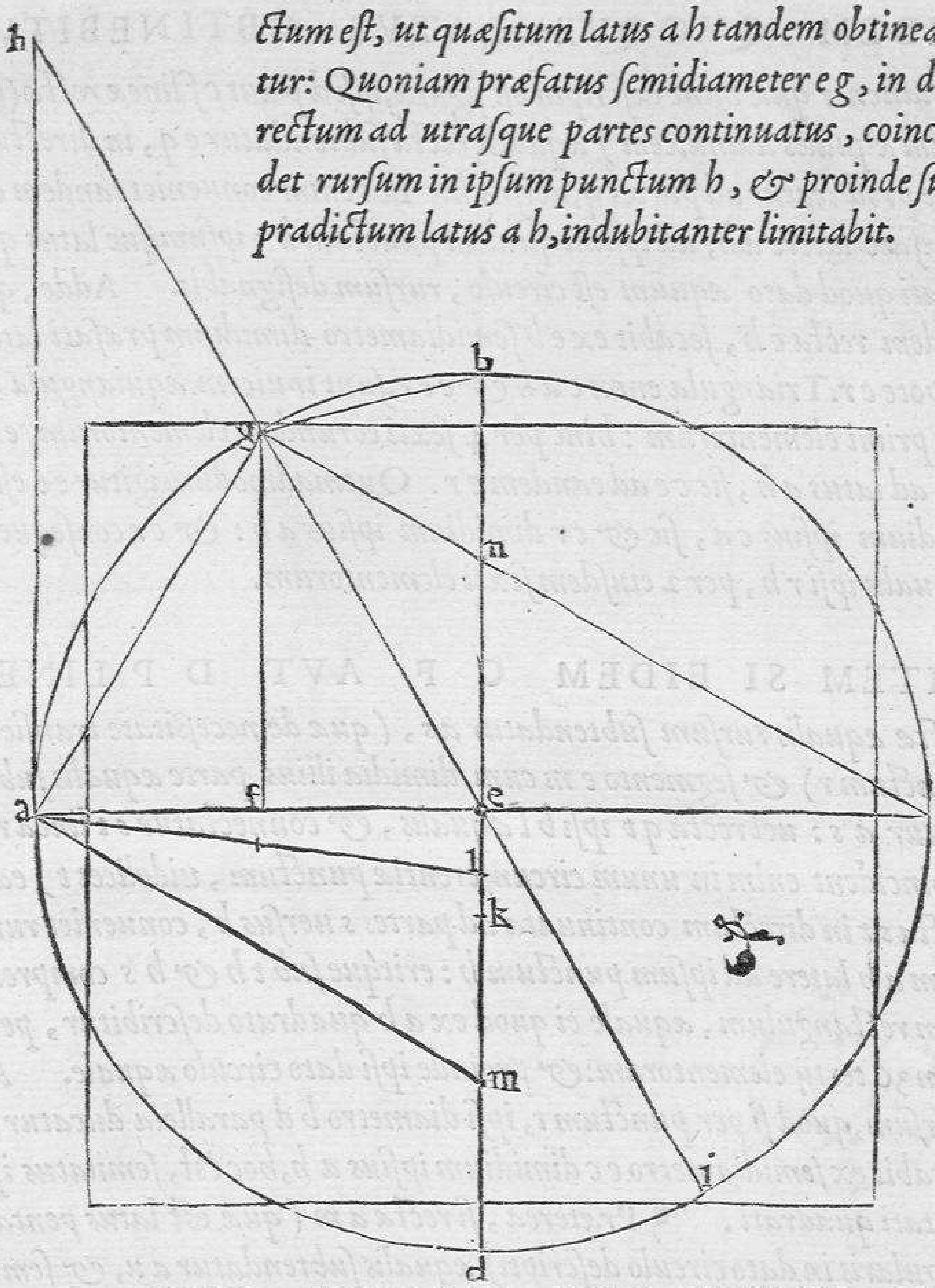
titas, tum irrationalium segmentorum proportionalium, surdarúmue radicum natura consideretur, quæ ueris nunquàm exprimuntur numeris. Re*cta igitur a h, est latus quadrati, quod dato æquum est circulo.*

¶ Idem aliter, ídque 9 modis admodum compendiosis.

¶ POTERIT ET IDEM LATVS A H, MVL- 2
tifariam, summatímque recolligi. Exponatur *itaque rursum præfatus circulus a b c d, cuius centrum e, unà cum binis dimetientibus a c & b d, in eodem centro sese orthogonaliter dispescentibus.* Et *excitetur latus quadrati eidem circulo æqualis a h, per nunc traditum artificium, aut aliquam antecedentium propositionum adinuentum, super a c quidem diametro consistens ad perpendiculum.* Diuidatur *insuper diameter b d proportionaliter in puncto* k, *cuius segmentum maius sit b* k, *minus uerò* k *d, per* 30 *sexti elementorum.* Segmentum *præterea e* k *itidem proportionaliter diuidatur in puncto l, cuius segmentum maius sit e l, minus autem l* k. Conne*ctatur postmodum a l linea recta, cui æqualis subtendatur a g: & connectatur rursum e g semidiameter, in directúmque ad utrasque partes continuetur.* Nam *idem semidiameter e g (ut ipsa te docebit experientia) cadet adamussim in ipsum punctum g, supra scripto modo designatum: & ipsum propterea latus a h, ut in proxima descriptione limitabit.* Idem *obtinebitur, si b g recta subtendatur, quæ sit æqualis dimidio ipsius a l, & connectatur rursum e g semidiameter, absoluantúrque reliqua, ueluti nunc expressimus.* Coincidet *enim præfatus semidiameter e g, ad partes g directè cōtinuatus, in ipsum punctū h.* Tota *igitur a l, unà cum dimidia illius parte, subtendent quadrantem a b: ipsumq́ue punctum g indifferenter notabunt.*

¶ *Idem rursum punctum g, & ipsum pendenter quadrati latus a h, in hunc modum colligetur.* Diuidatur *semidiameter e d proportionaliter in puncto m, cuius segmentum maius sit e m, minus uerò m d, per ipsam* 30 *sexti elementorum: & connectatur a m linea recta.* Secetur *postmodum ex e b semidiametro, recta e n, quæ sit æqualis dimidiæ parti ipsius a m: & connectatur c n linea recta.* Nam *si eadem recta c n, in directum & continuum producatur ad partes quidem n, uersus g: probabis illam coincidere in ipsum punctum g.* Connexo *itaque rursum e g semidiametro, cætera non aliter ueniunt absoluenda, quàm supradictum*

ctum est, ut quæsitum latus a h tandem obtineatur: Quoniam præfatus semidiameter e g, in directum ad utrasque partes continuatus, coincidet rursum in ipsum punctum h, & proinde supradictum latus a h, indubitanter limitabit.



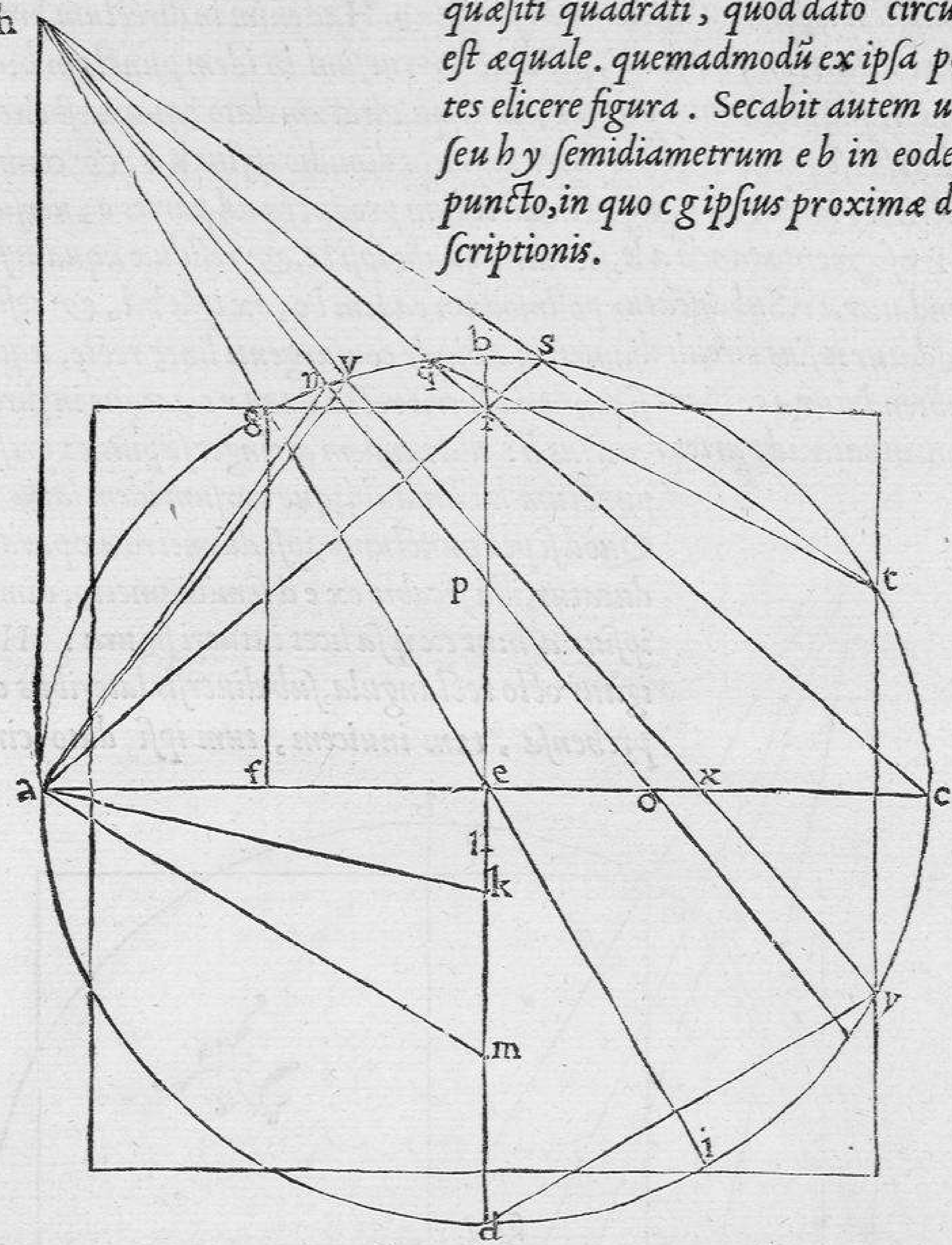
4 ¶RESVMATVR ITERVM IPSA NVPER DE-*scripta figura, demptis a g, g b, g c, & a l lineis rectis, manente tamen ipso puncto l: & subtendatur in primis recta a n, quæ sit æqualis ipsi b l. Diuidatur postmodum semidiameter e c proportionaliter in puncto o, cuius segmentum maius sit c o, minus uerò o e, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum: & connectatur recta n o, quæ secet e b semidiametrum in signo p. Quoniam eadem recta n o, ad utrasque partes in directum continuata, cadet rursum in punctum h, ipsius lateris seu perpendicularis a h: Et proinde sæpiùs expressum quadrati latus a h, uelut antea dictum est, notificabit.*

¶IDEM QVOQVE LATVS OBTINEBITVR, 5
si manente quæ nunc descripta est figura, ipsi d p aut c f lineæ rectæ (sunt enim æquales adinuicem) æqualis recta subtendatur c q, in directúmque producatur ad partes q, uersus h. Illa enim conueniet tandem cum præfato latere a h, ad ipsum quidem punctum h: ipsumque latus quadrati quod dato æquum est circulo, rursum designabit. Adde, quòd eadem recta c h, secabit ex e b semidiametro dimidium præfati lateris: utpote e r. Triangula enim c a h & c e r, sunt inuicem æquiangula, per 29 primi elementorum: hinc per 4 sexti eorundem elementorum, est ut c a ad latus a h, sic c e ad eandem e r. Quemadmodum igitur c e est dimidium ipsius c a, sic & e r dimidium ipsius a h: & c r consequenter æqualis ipsi r h, per 2 eiusdem sexti elementorum.

6

¶ITEM SI EIDEM C F AVT D P LINEAE
rectæ æqualis rursum subtendatur a s, (quæ de necessitate transiet per punctum r) & segmento e m cum dimidia illius parte æqualis subtendatur a s: uel recta q t ipsi b l æqualis, & connectatur s t linea recta (coincident enim in unum circunferentiæ punctum, uidelicet t) eadem recta s t in directum continuata ad partes s uersus h, conueniet rursum cum a h latere ad ipsum punctum h: eritque sub t h & h s comprehensum rectangulum, æquale ei quod ex a h quadrato describitur, per ipsam 36 tertij elementorum: & proinde ipsi dato circulo æquale. Adde rursum, quod si per punctum t, ipsi diametro b d parallela ducatur, illa secabit ex semidiametro e c dimidium ipsius a h, hoc est, semilatus ipsius optati quadrati. 7
¶ Præterea, si rectæ a m (quæ est latus pentagoni regularis in dato circulo descripti) æqualis subtendatur a u, & semidiameter e c bifariam diuidatur in puncto x, & connectatur u x linea recta: eadem recta u x in directum ad utrasque partes continuata, uersus h & y, coincidet rursum in ipsum iampridem designatum punctum h, atque in circunferentiæ punctum y. Erit itaque rursum quod sub dispescente y h, & extrinsecus sumpta h u continetur rectangulum, æquale ipsi quadrato quod ex tangēte h a describitur: & ipsum tandem quadratum, dato circulo equale. Idem quoque obtinebis, si subtendas rectam d y, quæ sit æqualis ipsi lineæ rectæ a k, & connexa u y, absoluas reliqua uti nunc expressum est: secabit enim u y semidiametrum e c bifariam, in ipso quidem pūcto x. Adde insuper, quòd si per punctum y, ipsi

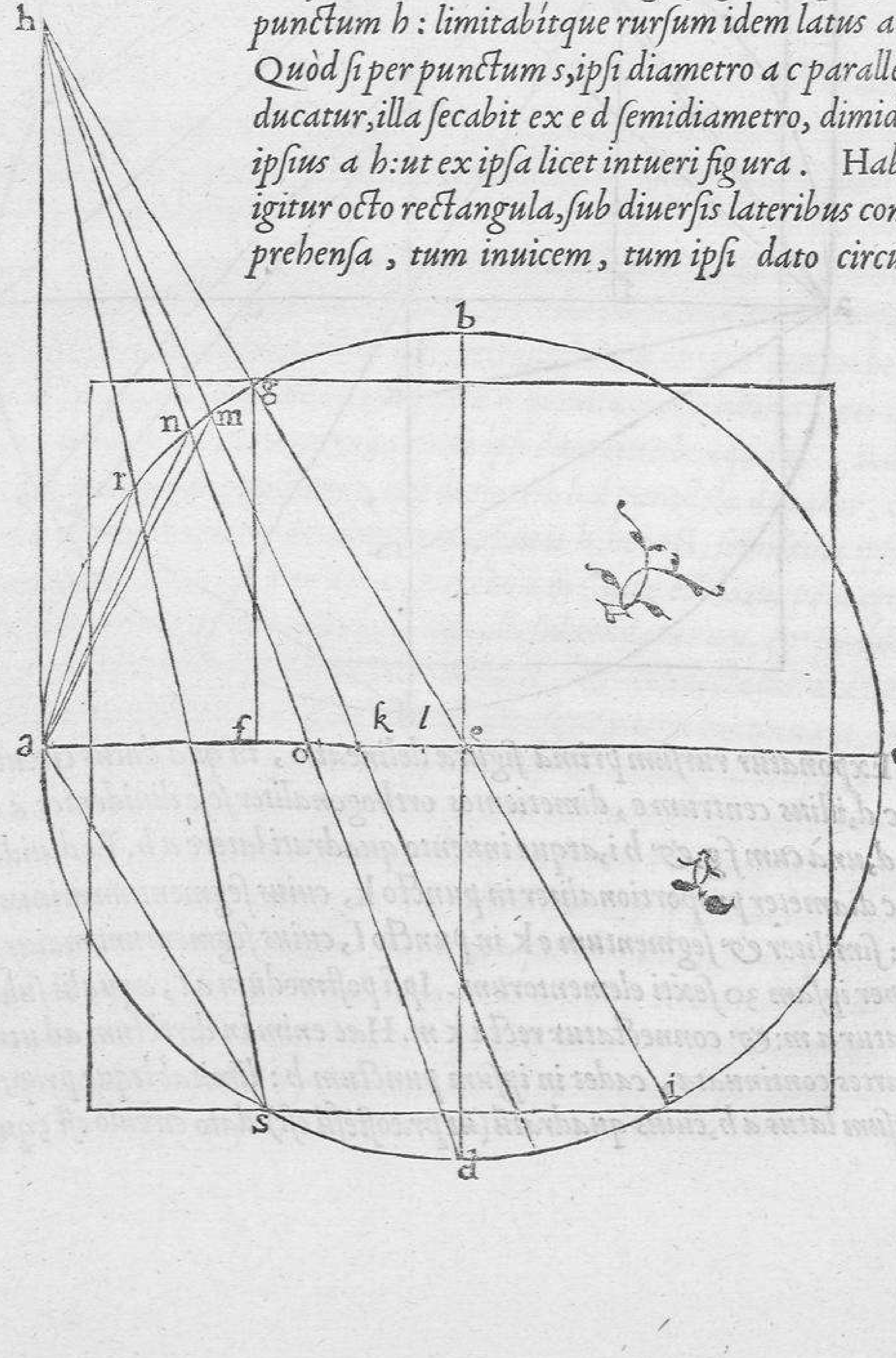
ipsi diametro b d parallela ducatur, illa transiet per punctũ t: secabitque rursum ex semidiametro e c dimidium ipsius a h, hoc est lateris eiusdem quæsiti quadrati, quod dato circulo est æquale. quemadmodũ ex ipsa potes elicere figura. Secabit autem u x seu h y semidiametrum e b in eodem puncto, in quo c g ipsius proximæ descriptionis.



8 ¶ *Exponatur rursum prima figuræ delineatio, in qua datus circulus a b c d, illius centrum e, dimetientes orthogonaliter sese diuidentes a c & b d, unà cum f g, & h i, atque inuento quadrati latere a h. Et diuidatur a c diameter proportionaliter in puncto* k, *cuius segmentum minus sit a* k: *similiter & segmentum e* k *in puncto l, cuius segmentum maius sit* k *l, per ipsam* 30 *sexti elementorum. Ipsi postmodum a l, æqualis subtendatur a m: & connectatur recta* k *m. Hæc enim in directum ad utrasq; partes continuata, cadet in ipsum punctum h: limitabitque propterea ipsum latus a h, cuius quadratũ (ut præostẽsũ est) dato circulo est ęquale.*

¶ Manente praeterea eadem figurae dispositione, subtendatur recta a n, continens k e ter, & dimidiam eius partem: & connectatur recta d n, quae secet a e semidiametrum in puncto o. Haec enim in directum producta ad partes n, uersus h, perducetur rursum in idem punctum h: designabitque pręfatum latus a h, cuius quadratum dato ęquum est circulo. Idem subsequetur, ubi k o fuerit aequalis dimidio ipsius k e: & connexa fuerit d o linea recta, atque in directum producta ad partes o, uersus h. 9

¶ Ex segmento tandẽ a k, secetur aequalis ipsi l e, & residuae aequalis subtendatur a r. Subducatur postmodum eadem l e, ex ipsa k l, & residua addatur ipsius circuli diametro: ac inde consurgenti lineę rectę, aequalis subtendatur a s. Nam si connexa fuerit recta linea r s, atque in directũ continuata ad partes r, uersus h: illa tandem attinget saepiùs expressum punctum h: limitabitque rursum idem latus a h. Quòd si per punctum s, ipsi diametro a c parallela ducatur, illa secabit ex e d semidiametro, dimidiũ ipsius a h: ut ex ipsa licet intueri figura. Habes igitur octo rectangula, sub diuersis lateribus comprehensa, tum inuicem, tum ipsi dato circulo 10



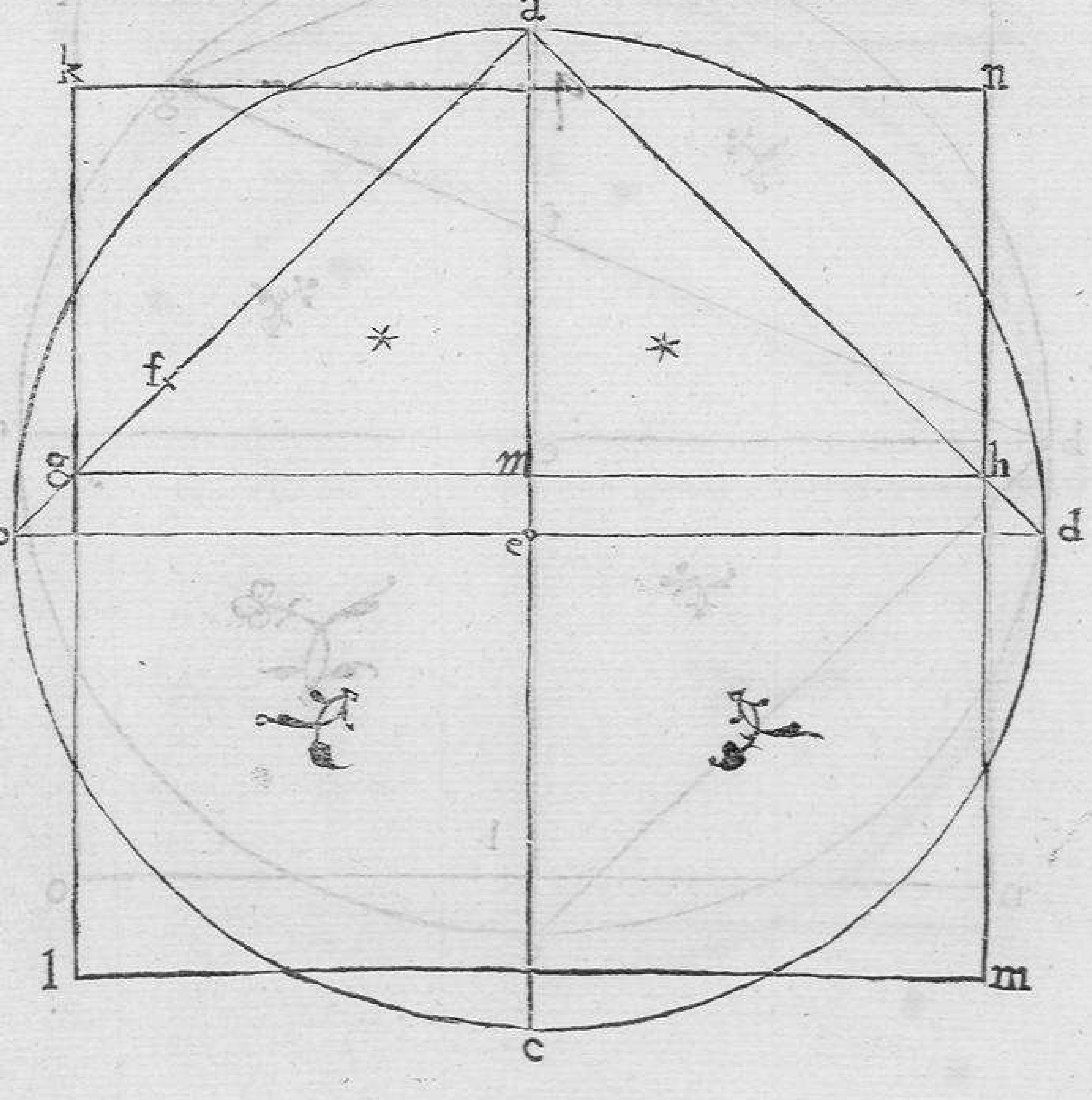
æqualia: quorum laterum, media proportionalis eidem a b coæquatur, cuius quadratum ipsi dato æquum est circulo.

PROPOSITIO XIIII.

ALiquot rursum circuli quadraturas admodum cōpendiosas, recens itidem adinuentas, paucis consequenter exprimere.

¶DVM HAEC SCRIBEREMVS (AMICE LEctor) *succurrerunt nobis adhuc in mentem aliquot quadrandi circulum non aspernandæ, admodúmque compendiosæ adinuentiones, paucis quidem lineamentis expressæ: quas hoc loco pendenter annectere placuit.*

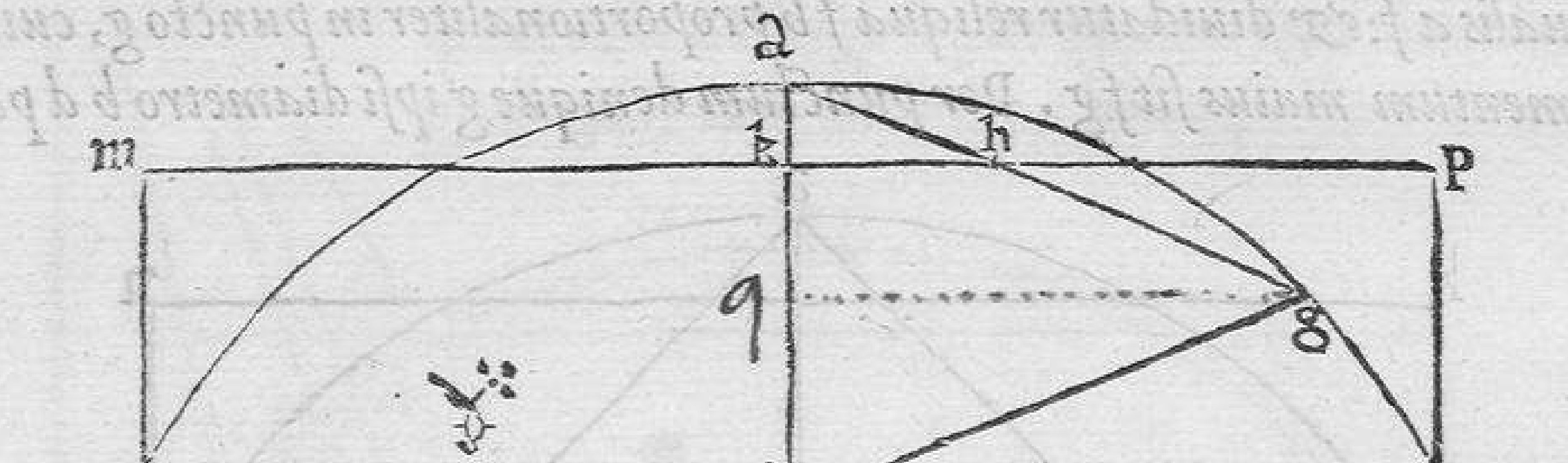
1 ¶ *Sit igitur datus circulus in quadratum æquale reuocandus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro e ad rectos sese inuicem dirimentes angulos: & connectantur inscripti quadrati latera a b & a d. Secetur postmodum ex a b latere, ipsi a e semidiametro æqualis a f: & diuidatur reliqua f b proportionaliter in puncto g, cuius segmentum maius sit f g. Per punctum denique g ipsi diametro b d pa-*



rallela ducatur g h, per 31 primi eorundem elementorum. Si enim ex ipsa g h, quadratum describatur k l m n, per 46 primi elementorũ. Illud enim quadratum k l m n, ipsi dato circulo a b c d indubitanter erit æquale.

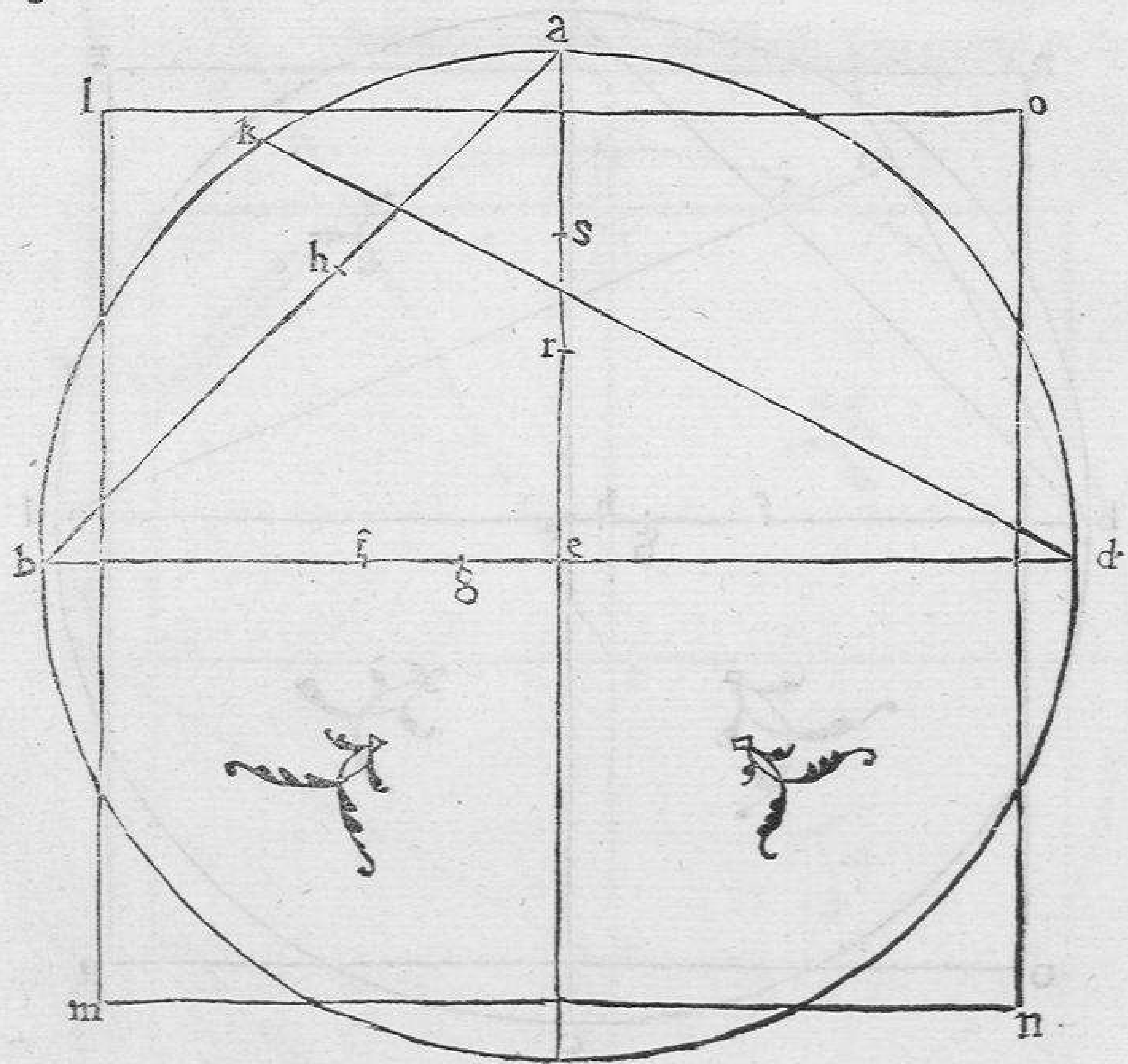
¶ Esto rursum datus circulus, in quadratum æquale reuocãdus, a b c d, 2
cuius centrum e, atque diametri a c & b d, in eodem centro ad rectos angulos sese inuicem dispescentes: ut in proxima dictum est figura: Sit præterea latus inscripti quadrati b c. Huic itaque b c, æqualis secetur c f, per tertiam primi elementorum. Et ex puncto b, per punctum f, recta subtendatur b f g, & connectatur a g linea recta: quæ proportionaliter diuidatur in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, per 30 sexti elementorum. Deinde per punctum h, ipsi dimetienti b d parallela ducatur h k, per 31 primi eorundem elementorum: quæ secet a e semidiametrum in ipso puncto k. Ipsi postmodum e k, æqualis secetur e l: & ex ipsa k l, describatur quadratum m n o p, per 46 ipsius primi elementorum. Erit enim ipsum quadratum m n o p, rursum æquale eidẽ circulo dato a b c d.

Adde



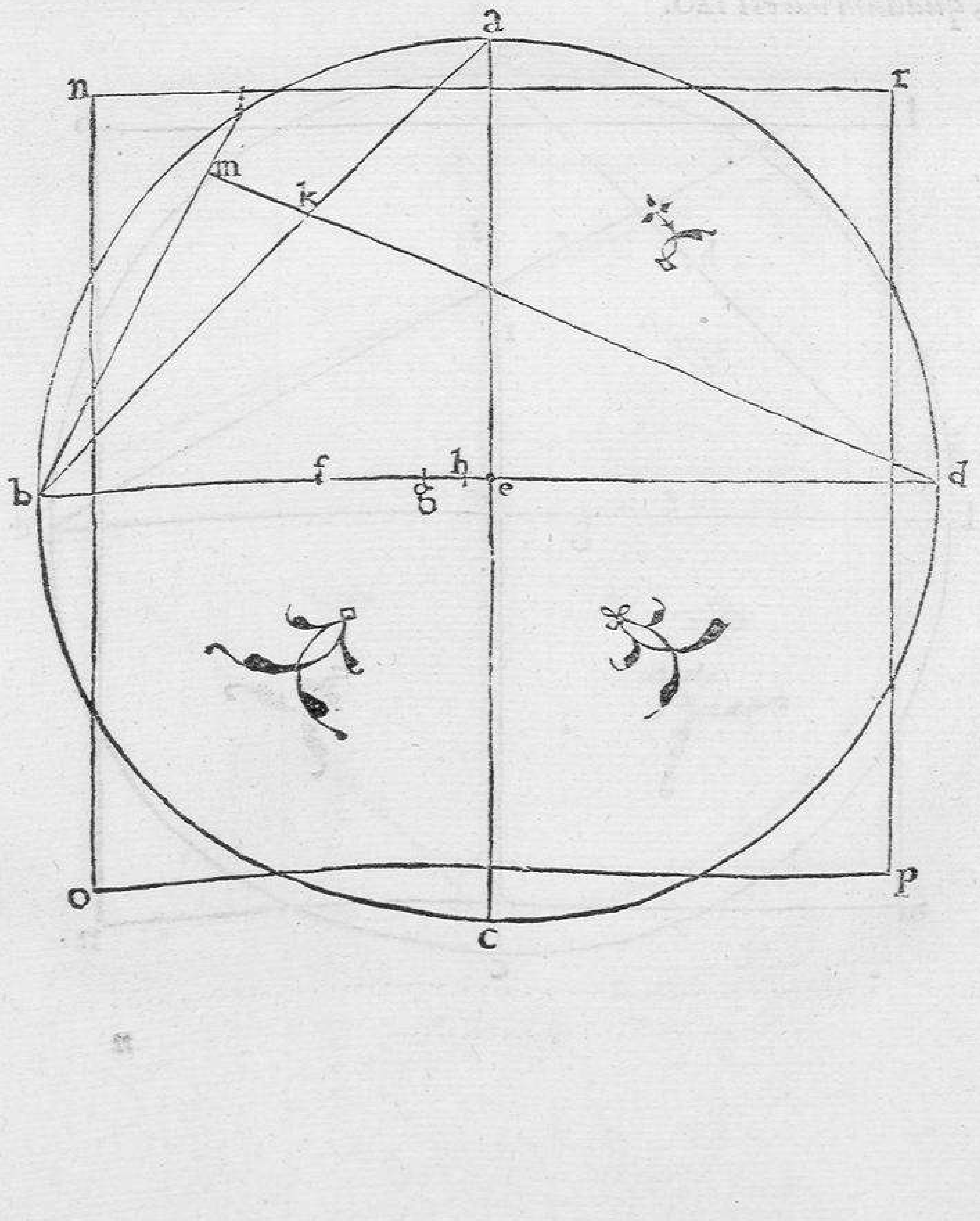
Adde quòd recta b f g diuidit circunferentiæ quadrantem a g d bifariã in ipso puncto g: & proinde a g recta est latus octogoni regularis in eodem circulo descripti.

3 ¶SIT DATVS ITERVM CIRCVLVS A B C D, *cuius centrum e, unà cum præfatis dimetientibus a c & b d, orthogonaliter sese inuicem dirimentibus, & inscripti quadrati latere a b. Diuidatur postmodũ semidiameter a e proportionaliter, seu media & extrema ratione, in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, minus uerò f e: quod bifariam diuidatur in puncto g. Ipsi postmodum b g, æqualis secetur b h: & reliquæ a h, æqualis subtendatur, coaptetúrue a k, per primam quarti elementorum. Connectatur demum recta d k: ex qua si quadratum describatur l m n o, illud rursum dato coæquabitur circulo. Cõtinet autem a k (si ad iustam numerorum illam uolueris habere rationem) eam rectam, quæ subtracto inscripti quadrati latere ex dimetiente a c relinquitur, scilicet a r, & sexagesimam partem dupli segmenti maioris eiusdem a r, utpote ipsius a s: hoc est, partes 35, & minuta 52, 16, 31, 45, 16, qualium b d est 120.*

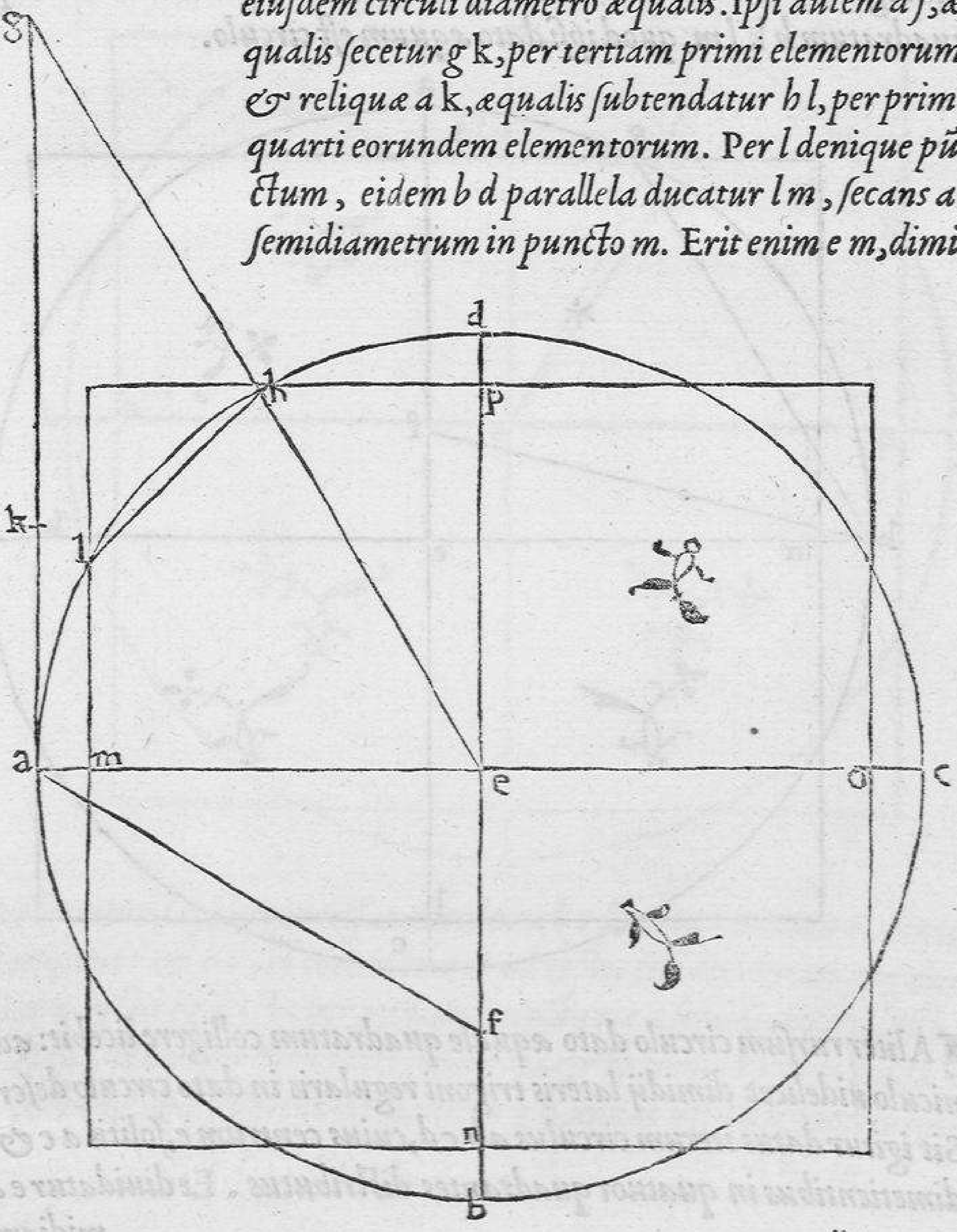


¶SIT RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C D, cuius centrum sit e, atque dimetientes a c & b d, inuicem orthogoni: unà cum inscripti quadrati latere a b. Et diuidatur b e semidiameter per mediam & extremam rationem, seu proportionaliter in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, minus uerò f e: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit f g, minus autem g e: quod iterum proportionaliter diuidatur in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, minus porrò segmentum proportionale h e, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum. His ita paratis, secetur ipsi b g æqualis b k: ipsi autem b h æqualis subtendatur b l. Connectatur demum recta d k: quæ in continuum & directum producatur ad partes k, uersus rectam b l, quam secet in puncto m. Nam si ex ipsa d m, aut illi æquali, quadratum describatur n o p r: illud æquum erit dato circulo a b c d. Horum porrò 4 tetragonismorum circularium fidem faciet ocularis experiẽtia: & cum præostensis circuli quadraturis euidentissima cõcordia.

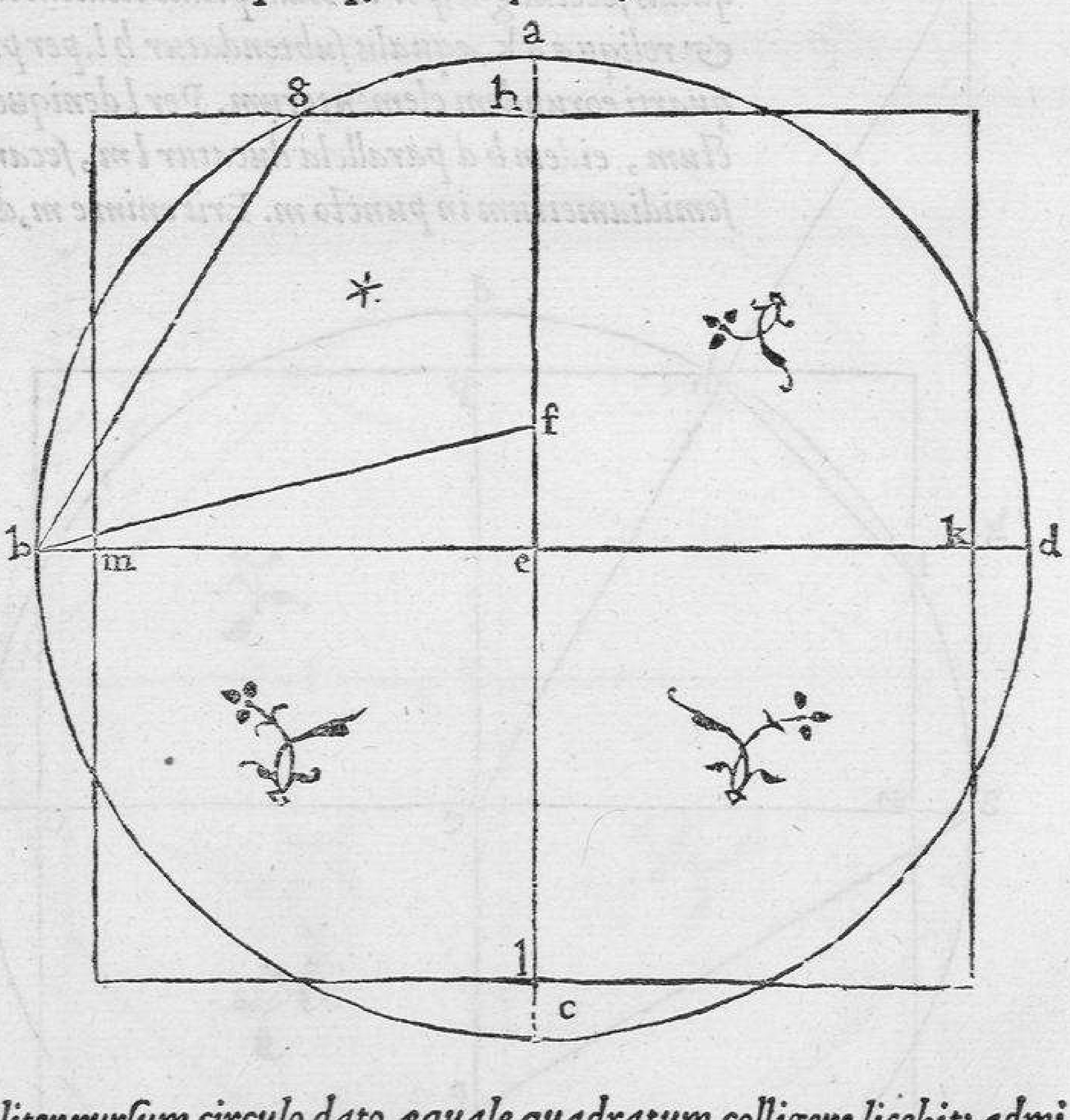
Resumatur



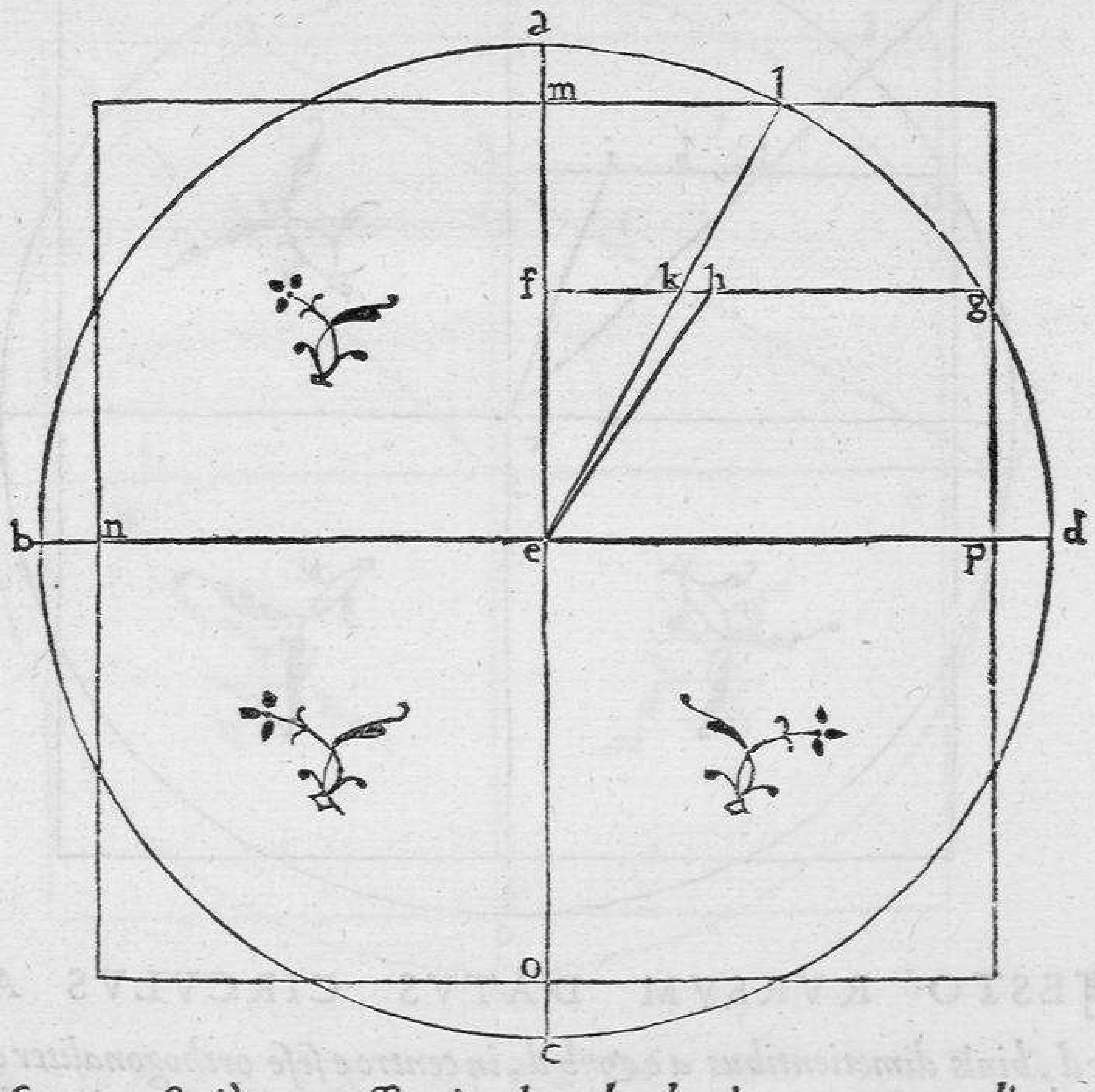
5 ¶RESVMATVR CIRCVLVS A B C D, CVius centrum e, semidiametri uerò a c & b d, in eodem cētro ad rectos sese dirimentes angulos. Et diuidatur semidiameter e b proportionaliter in puncto f, cuius segmētum maius sit e f, minus autem f b, per 30 sexti elementorum: & connectatur a f linea recta, quæ est latus pentagoni regularis in dato circulo descripti. Per punctum insuper a, ipsi b d parallela ducatur a g, per 31 primi ipsorum elementorum: sitque arcus a h sexta circunferentiæ pars, subtendens dati circuli semidiametrum. Connectatur postmodum semidiameter e h, in directumque producatur ad partes h, uersus g: donec conueniat cum a g recta, in ipsum quidem punctum g. Erit autem a g, latus trigoni regularis in dato circulo descripti: e g autē, eiusdem circuli diametro æqualis. Ipsi autem a f, æqualis secetur g k, per tertiam primi elementorum: & reliquæ a k, æqualis subtendatur h l, per primā quarti eorundem elementorum. Per l denique pūctum, eidem b d parallela ducatur l m, secans a e semidiametrum in puncto m. Erit enim e m, dimi-



dium latus quadrati ipsi dato circulo æqualis. Fiant itaque e n, e o, e p, eidem e m æquales, & describatur ipsum quadratum m n o p, eidem circulo dato a b c d æquale. ¶ *Poterit & idem quadratum, dato circulo æquale, alia ratione colligi, admodum compendiosa atque facili. Exponatur itaque rursum præfatus circulus a b c d, cuius centrum e, & diametri sese in eodem centro orthogonaliter diuidentes a c & b d. Et abscindatur ex a e semidiametro pars 4, per nonam sexti elementorum, quæ sit e f. Connectatur deinde recta b f, cui æqualis subtendatur, coaptetúrue b g, per primam quarti ipsorũ elementorũ. Et per punctũ g, ipsi diametro b d parallela ducatur g h, per 31 primi eorundem elementorum. Quoniã e h recta, erit dimidiũ latus quadrati, quod ipsi dato circulo est æquale: fiant igitur e k, e l, e m eidem e h æquales, & compleatur de more ipsum quadratum h k l m, quod ipsi dato æquum est circulo.* 6

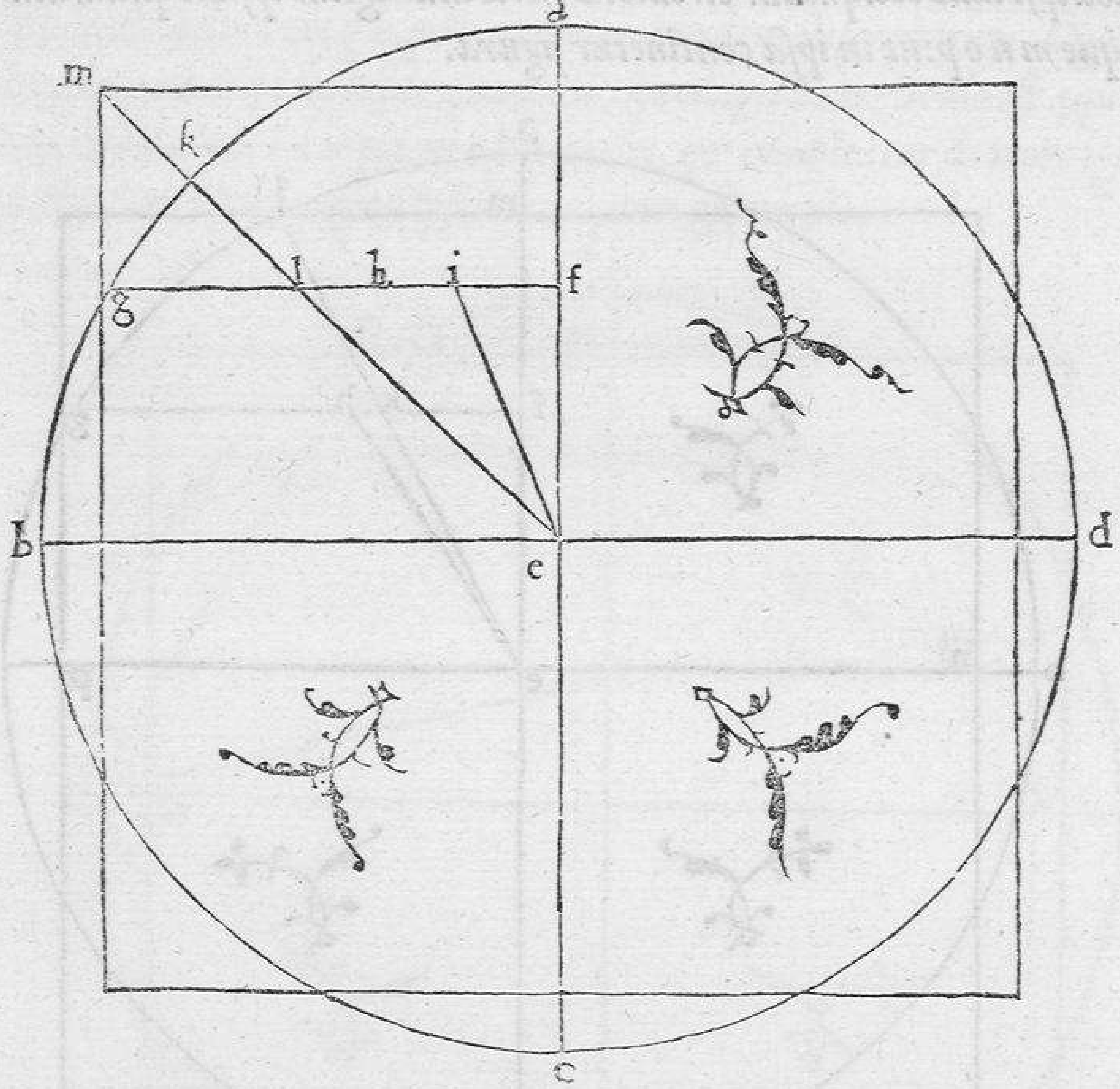


¶ *Aliter rursum circulo dato æquale quadratum colligere licebit: adminiculo uidelicet dimidij lateris trigoni regularis in dato circulo descripti. Sit igitur datus iterum circulus a b c d, cuius centrum e, solitis a c & b d dimetientibus in quatuor quadrantes distributus. Et diuidatur e a semidiameter* 7 *midiameter bifariam in puncto f, per 10 primi elementorum. Per punctum deinde f, ipsi diametro b d parallela ducatur f g, per 31 primi elementorum: quæ est dimidium latus trianguli regularis in dato circulo descripti. Diuidatur consequenter f g recta proportionaliter in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, minus uerò h f, per 30 sexti elemẽtorum. Et cõnectatur e h linea recta: cui æqualis seceturg k, per 3 primi eorũdẽ elementorũ. Per k deinde punctum, educatur semidiameter e k l. Nam si per punctum l, ipsi diametro b d parallela ducatur l m, quæ secet e a semidiametrum in puncto m: erit rursum e m dimidium latus quadrati, quod ipsi dato coæquatur circulo. Describatur igitur ipsum quadratum, sitque m n o p: ut in ipsa continetur figura.*



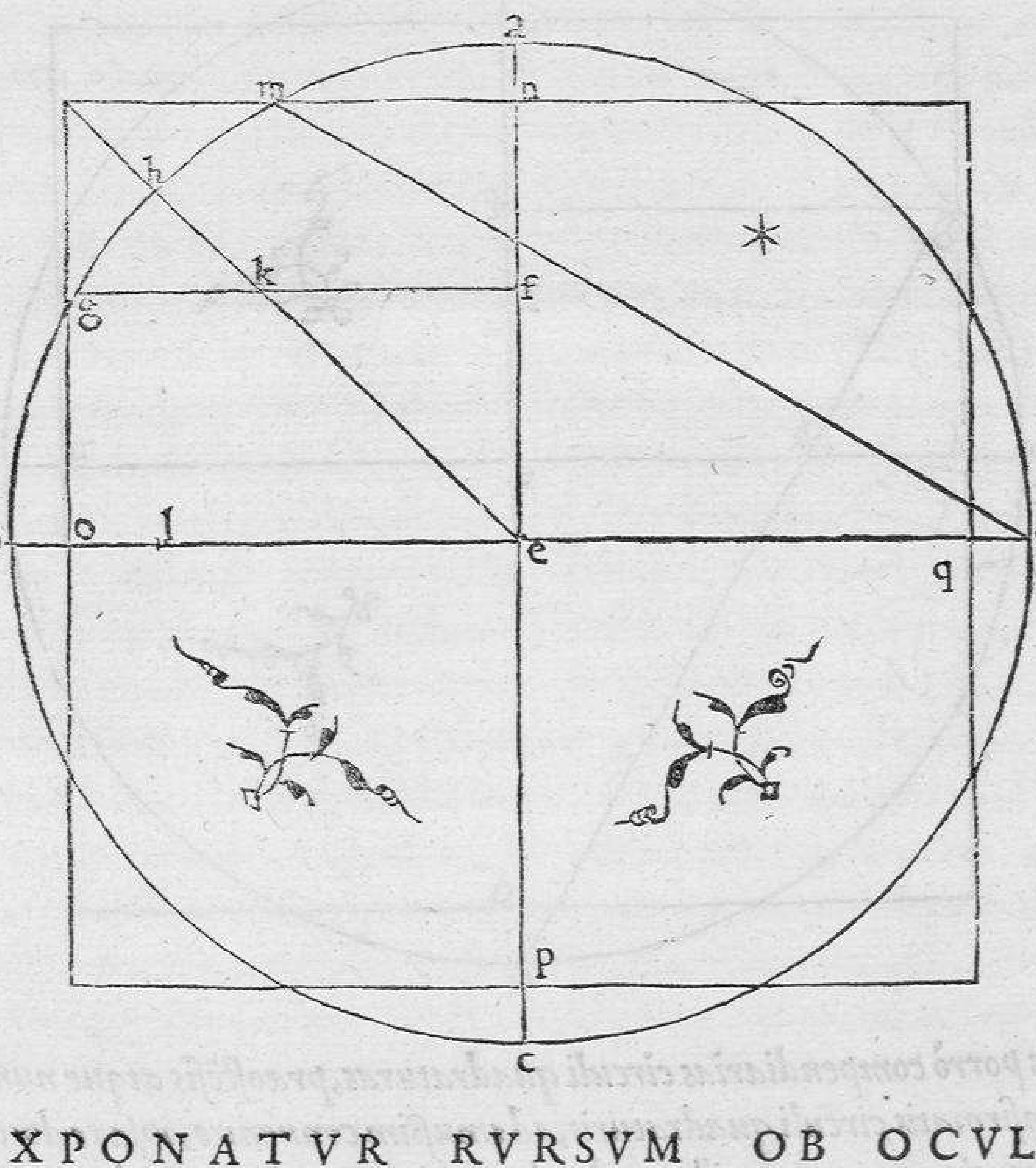
8

¶ *Resumatur sæpiùs expressus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientésque a c & b d, in eodem centro ad rectos sese diuidentes angulos: unà cum recta f g ducta per medium punctum e a semidiametri, ipsi b d parallela, quæ proportionaliter seu media & extrema ratione diuisa sit in puncto h, cuius segmentum maius sit g h, minus uerò h f: quod rursum* *proportionaliter diuidatur in puncto i, cuius segmẽtum maius sit f i, per 30 sexti elementorum. Sit præterea circunferentiæ quadrans a b diuisus bifariam in puncto* k, *per 30 tertij eorundem elementorum.* Et connectatur e k *semidiameter, intersecans f g in puncto l.* Connexa *postmodũ e i linea recta, & producto e* k *semidiametro in directum & continuũ uersus m: secetur eidem e i lineæ rectæ, æqualis l m.* Erit enim *recta e m semidiameter quadrati, quod ipsi dato circulo a b c d est æquale.* Compleatur *ergo solito more ipsum quadratum, sitque illud m n o p: ut in figura continetur.*



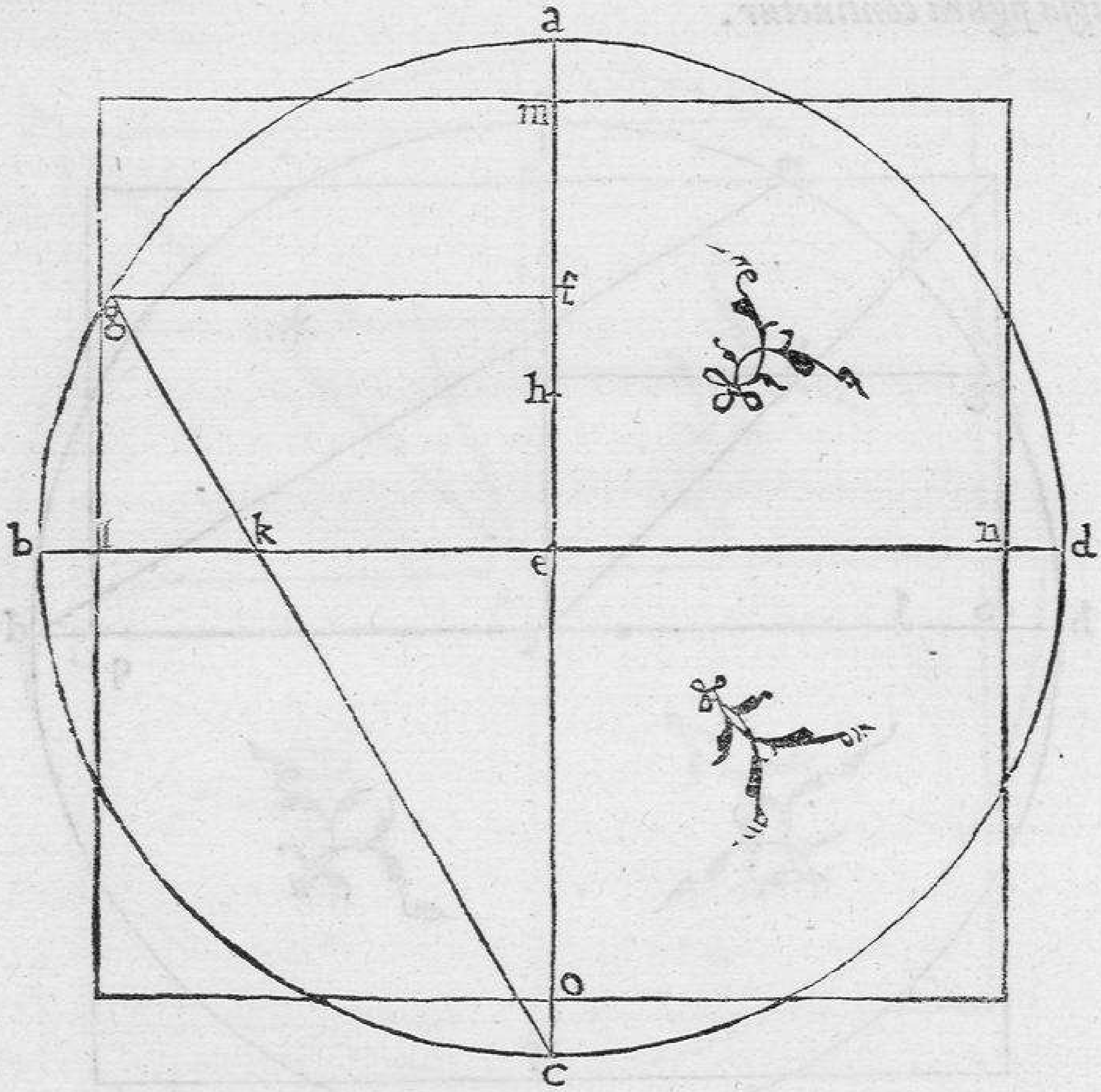
¶ESTO RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B 9
c d, binis dimetientibus a c & b d, in centro e sese orthogonaliter dirimentibus, in quatuor quadrãtes solito more distributus. Et discindatur e a semidiameter bifariam in puncto f, per decimam primi elemẽtorum: à quo quidem puncto f, perpendicularis excitetur f g, per undecimam ipsius primi elementorum, quæ (uti supra diximus) est dimidium latus æquilateri trigoni in dato circulo descripti. Diuidatur *consequenter arcus*

cus a b bifariam in puncto h, per 30 tertij eorundem elementorum: & connectatur e h semidiameter, secans ipsam f g in puncto k. Ipsi autem e k æqualis secetur e l, per 3 ipsius primi elementorum: & toti d l æqualis subtendatur d m, per primam quarti ipsorum elementorum. Per punctum deinde m, dimetienti b d parallela ducatur n o, per 31 primi supradictorum elementorum: quæ secet ea semidiametrum in puncto n. Nam recta e n, erit rursum dimidium latus quadrati, quod ipsi dato circulo a b c d est æquale: Describatur igitur ipsum quadratum, ut in præmissis obseruatum est circuli quadraturis, sitque illud rursum n o p q: ut in ipsa figura continetur.



10 EXPONATVR RVRSVM OB OCVLOS *datus circulus a b c d, unà cum sæpiùs expreßis dimetientibus a c & b d, in centro e ad rectos sese inuicem dirimentibus angulos: & ipsa perpendiculari f g, per medium punctum ipsius e a semidiametri, ipsi b d parallelicè descripta. Et diuidatur e f quarta pars diametri a c, per*

mediam & extremam rationem, seu proportionaliter in puncto h, cuius segmentum maius sit e h, minus uero h f, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum. Connectatur deinde recta g c, latus uidelicet trianguli æquilateri in dato circulo descripti, diuidens semidiametrum e b in puncto k. Ipsi postmodum segmento e h, æqualis secetur k l, per 3 primi eorundem elementorum. Erit nanque recta e l dimidium latus quadrati, quod ipsi dato æquum est circulo. Fiant igitur e m, e n, e o, eidem e l atque inuicem æquales, & describatur ipsum quadratum l m n o: ut in ipsa licet intueri figura.



¶Has porrò compendiarias circuli quadraturas, præostẽsis atque numeris confirmatis circuli quadraturis, adamußim conuenire, ipsa te docebit experientia: quapropter illas quàm breuißima potuimus traditione perstringere libuit, absque uidelicet ampliori demonstrationis examine: id enim in iniustum atque odiosum uolumen producere foret operæpretium. Si quis autem morosus Orontiomastix, his minimè contentus fuerit, aut ferat, aut meliores (si poßit) excogitet.

Propositio

PROPOSITIO XV.

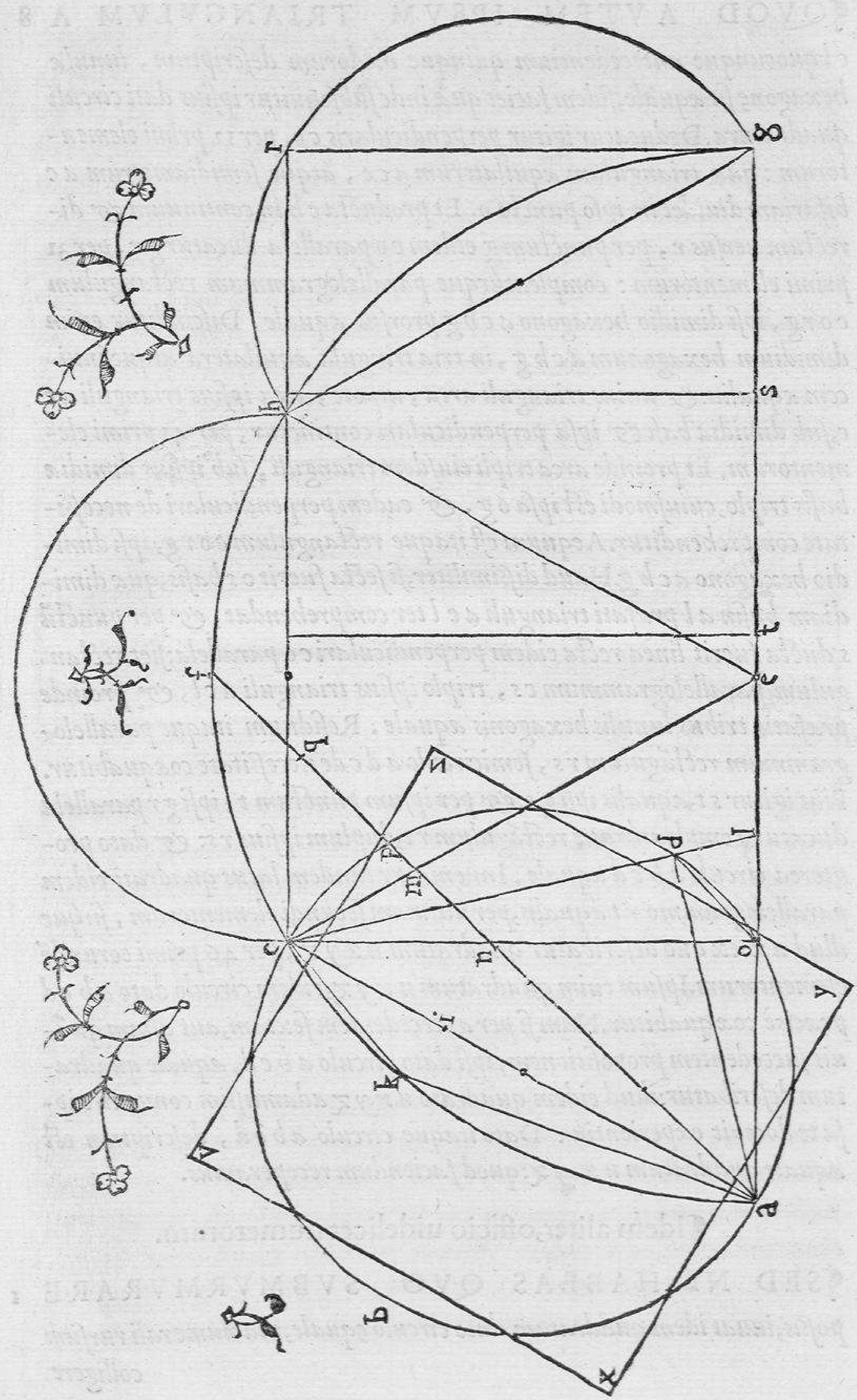
PRæfatum circulum, in quadratum æquale, adminiculo trium lunularum hexagonarum, multifariam reuocare.

1 ¶LVNVLA HEXAGONA DICITVR, FIGV-
*ra curuilinea, sub sexta circunferentiæ dati circuli parte, & dimidia
circunferentia eius circuli, qui describitur super hexagoni latus, com-
prehensa. Haud aliter diffinienda est trigona, atque tetragona lunula.
Sit igitur datus circulus a b c d, cuius dimetiens sit a c: & super ipso di-
metiente, triangulum æquilaterum describatur a c e, per primam libri
primi elementorum. Producto insuper a e latere in directum & conti-
nuum, ad partes quidem e, circum e centrum, ad interuallum autem ip-
sius e a, semicirculus describatur a f g, cuius dimetiens sit a g. Ipsi post-
modum a e uel a c, æquales subtendantur c h & h g: super quibus descri-*
2 *bantur semicirculi, ipsi a b c dimidio circulo æquales. ¶His ita constru-
ctis, manifestum est rectilineum a c h g, fore dimidium hexagoni regu-
laris, in circulo cuius dimetiens est a g descripti. Aio itaque primùm, ip-
sum rectilineum a c h g, æquum esse tribus lunulis hexagonis, extra
circunferentiam a f g comprehensis: & ipsi præterea semicirculo a d c.
Quadratũ enim quod ex a g describitur, quadruplum est eius quadra-
ti, quod fit ex a c, uel a e semidiametro. Vt quadratum autem ad qua-
dratum, sic circulus ad circulum, per 2 duodecimi elementorum: atque
per 15 quinti eorundem elementorum, semicirculus ad semicirculum.
Quadruplus est igitur semicirculus a f g, ipsius semicirculi a b c: & pro-
inde quatuor semicirculis, super a c, c h & h g lineis rectis descriptis æ-
quale. Quorum partes utrisque, & a c h g rectilineo, & tribus semi-
circulis communes, sunt tres circuli sectiones, sub a c, c h, h g lineis rectis,
& sexta circunferentiæ parte comprehensæ: quibus ablatis, relinque-
tur dimidium hexagonum a c h g, tribus lunulis super a c, c h, h g cir-
cunferentiis descriptis, & dimidio circulo a d e æquale. Subducta
ergo trium lunularum quantitate, ex ipso dimidio hexagono: quod inde
relinquetur, æquum erit ipsi dimidio circulo a d c. ¶Reliquum est itaque*
3 *inuenire rectilineum, quod uni trium prædictarum lunularum sit*

æquale. Hoc autem multiplici, & planè diuino colligere docebimus ar-
tificio. In primis enim si ex a c dati circuli dimetiente, tertia pars abscin-
datur, per nonam sexti elementorum, quæ sit c i, cui æqualis subtenda-
tur c k, & connectatur a k linea recta: ipsi postmodum a k æqualis se-
cetur a l, & connectatur c d l linea recta: Erit triangulum a c l, æquũ
lunulæ hexagonæ a b c, cuius basis est arcus a b c, sexta uidelicet pars
circunferentiæ. ¶ Vel in hunc modum colligi poterit eadem a l. Sub- 4
tendatur latus quadrati, in dato circulo cuius dimetiẽs est a g descripti,
sitque illud a f, cuius intersectio cum latere c e trianguli æquilateri a c e,
sit punctum m. Ipsi deinde e m lineæ rectæ, æqualis coaptetur, subtenda-
turue c d, per primam quarti elementorum. Nam eadem c d in directum
continuata, ad partes quidem ipsius d, cadet in ipsum punctum l: effi-
ciétque rursum triangulum præmemoratum a c l, ipsi lunulæ hexagonæ
a b c æquale. ¶ Aut (si libuerit) ipsi e m æqualis secetur f n, residuæ 5
postmodum a n, æqualis subtendatur a d, per ipsam primam quarti ele-
mentorum. Nam connexa c d linea recta, & in directum producta ad
partes ipsius d, coincidet rursum in ipsum punctum l: eritque propterea
triangulum a c l, præfatæ lunulæ hexagonæ (ueluti supradictum est) æ-
quale. ¶ Adde, quòd notata sectione a e semidiametri, cum periphæ- 6
ria dati circuli a b c d, quæ sit punctum o: si pars lateris a f, extra præ-
fatum circulum a b c d reperta, utpote f p, bifariam diuidatur in pun-
cto q, & dimidiæ parti f q æqualis subtendatur o d, & connectatur re-
cta c d, in directúmque (uelut antea) producatur ad partes d: coinci-
det rursum eadem c d in sæpiùs memoratum punctum l.

¶NEC PRAETEREVNDVM EST, TERTIAM 7
partem ipsius a m lineæ rectæ, efficere adamussim rectam e l, quæ est supplementum ipsius a l. Abscindatur ergo ex ipsa a m pars tertia, per nonam sexti elementorum: cui postmodum ex a e semidiametro æqualis secetur e l, & connectatur c l efficiens triangulum a c l. Vnoquoque igitur horum quinque modorum, colligetur recta a l, ipsumúe triangulum a c l, idque sub eadem figuræ contextura, ex ipsis nempe lateribus a c uel c e, & a f: artificium profecto admiratione non indignum. Hinc manifestum est rectam a f, latus uidelicet inscripti quadrati, continere præcisè a d & d c latera, rectum angulum qui ad optatum punctum d conficientia.

¶Quod


g
r
h
s
t
e
f
q
z
l
p
d
m
c
n
o
y
i
k
u
a
b
x

¶QVOD AVTEM IPSVM TRIANGVLVM A c l quocunque antecedentium quinque modorum descriptum, lunulæ hexagonę sit æquale, fidem faciet quæ inde subsequitur ipsius dati circuli quadratura. Deducatur igitur perpendicularis c o, per 12 primi elementorum: quæ triangulum æquilaterum a c e, atque semidiametrum a c bifariam diuidet in ipso puncto o. Et producta c h in continuum & directum uersus r, per punctum g eidem c o parallela ducatur g r, per 31 primi elementorum: compleatúrque parallelogrammum rectangulum c o r g, ipsi dimidio hexagono a c h g prorsus æquale. Discinditur enim dimidium hexagonum a c h g, in tria tringula æquilatera atque inuicem æqualia: & unius trianguli area, utpote, area ipsius trianguli a c e, sub dimidia basi & ipsa perpendiculari continetur, per 41 primi elementorum. Et proinde area tripli eiusdem trianguli, sub ipsius dimidiæ basis triplo, cuiusmodi est ipsa o g, & eadem perpendiculari de necessitate comprehenditur. Aequum est itaque rectangulum c o r g, ipsi dimidio hexagono a c h g. Haud dissimiliter, si secta fuerit o s basis, quæ dimidiam basin a l præfati trianguli a c l ter comprehendat, & per punctũ s ducta fuerit linea recta eidem perpendiculari c o parallela: fiet rectangulum parallelogrammum c s, triplo ipsius trianguli a c l, & proinde præfatis tribus lunulis hexagonis æquale. Residuum itaque parallelogrammum rectãgulum r s, semicirculo a d c de necessitate coæquabitur. Fiat igitur s t, æqualis ipsi g s: & per ipsum punctum t, ipsi g r parallela ducatur, compleatúrque rectãgulum r t, duplum ipsius r s: & dato propterea circulo a b c d æquale. Inueniatur tandem latus quadrati eidem parallelogrammo r t æqualis, per ultimam secundi elementorum, sitq́ue illud u x: ex quo describatur quadratum u x y z, per 46 primi eorundẽ elementorum. Ipsum enim quadratum u x y z, eidem circulo dato a b c d præcisè coæ quabitur. Nam si per antecedentem sextam, aut aliam quãuis succedentem propositionem, ipsi dato circulo a b c d, æquale quadratum describatur: illud eidem quadrato u x y z adamussim conuenire ipsa te docebit experientia. Dato itaque circulo a b c d, descriptum est æquale quadratum u x y z: quod faciendum receperamus.

¶Idem aliter, officio uidelicet numerorum.

¶SED NE HABEAS QVO SVBMVRMVRARE possis, iuuat idem quadratum dato circulo ęquale, uia numerali rursum colligere. 1

colligere. Fiat igitur recta a l, quæ basis est trianguli a c l, partium 41, & minutorum 51, 55, 0, 28, 53, 21, qualium uidelicet partium diameter a g est 120, & pars quælibet minutorum 60: Coincidet enim finis huiuscemodi partium, atque minutorum, in ipsum punctum l, quinque modis antea declaratis adinuentum: ut ipsa te docebit experientia, & ea quæ inde subsequetur dati circuli quadratura confirmabit. Colligitur autem præfata basis a l ipsius trianguli a c l, ex segmentis proportionalibus semidiametri a e uel a c (eo quidem modo, & ordine distributis, ut antecedenti propositione tertia huiusce libri secundi tradidimus) quemadmodum in subscripta numerorum tabella continetur.

		ptes.	m.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Segmentũ maius semidiametri	i.	37	4	55	20	29	39	7	0	0	0	0
Dimidium segmenti	iiij.	4	22	36	59	15	31	19	30	0	0	0
Dimidium segmenti	ix.	0	23	40	48	24	4	59	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$ segmenti ordine	xv.	0	0	39	35	21	55	17	30	0	0	0
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{2}$ segmenti	xiiij.	0	0	2	8	21	27	41	10	0	0	0
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{2}$ segmenti	xvi.	0	0	0	8	9	21	7	39	15	0	0
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{6}$ segmenti	xv.	0	0	0	0	26	23	34	36	51	40	0
$\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{60}\,\frac{1}{2}$ segmenti	xvij.	0	0	0	0	0	30	14	37	4	39	30
¶ Horum summa, seu recta	a l.	41	51	55	0	28	53	21	3	11	19	30

2 ¶AREA ITAQVE CIRCVLI, CVIVS DIAMETER *est partium 120, habet partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26, per antecedentem sextam propositionem: & proinde semicirculus a f g, erit partium 5653, & minutorum 50, 46, 9, 13. Sexta uerò pars eiusdem circuli, utpote a k c e, habet partes 1884, & minuta 36, 55, 23, 4, 20. Perpendicularis autem c o, offenditur esse partium 51, & minutorum 57, 41, 46, 4: qualium partium unumquodque latus trianguli a c e suppositum est 60. Et proinde area ipsius trianguli a c e, habet partes 1558, & minuta 50, 44, 37. Quibus detractis ex sexta circunferentiæ parte a k c e, relinquitur sectio eiusdem circuli, cuius sectionis basis est a c, partium quidem 325, & minutorum 46, 10, 46, 4, 20. Et quoniam semicirculus a f g, præostensus est quadruplus ipsius semicirculi a b c, & proinde quartæ partis semicirculi a f g, quæ est partium 1413, & minutorum 27, 41, 32, 18, 15: Si auferatur sectio a k c, cuius basis est a c, ex præfato semicirculo a b c, relinquetur lunula hexagona a b c, cuius basis*

est a k c, partium quidem 1087, & minutorum 41, 30, 46, 13, 55. Tantum quoque aio fore triangulum a c l. Cùm enim triangula a c e, a c l, sub eodem sint uertice: se habent igitur ut bases a e & a l, per primam sexti elementorum. Sicut igitur basis a e ad basin a l, sic triangulum a c e ad triangulum a c l. Ducendo itaque secundum in tertium, & productum diuidendo per primum, hoc est, multiplicando partes 1558, & minuta 50, 44, 37, ipsius trianguli a c e, per partes 41, & minuta 51, 55, 0, 28, 53, 21 ipsius basis a l, & productum diuidendo per 60 partes ipsius a e: fiet quartum, hoc est, triangulum a c l, partium quidem 1087, & minutorum 41, 30, 46, 13, 55: desunt enim tantummodo sexta minuta circiter 20, quæ faciunt $\frac{1}{2454400000}$ unius partis integræ, uicio non quadratarum radicum, irrationaliúmue segmentorum ipsius a e semidiametri, de necessitate tribuendum. Ter autem 1087 partes, & minuta 41, 30, 46, 13, 55, quæ tres præfatas lunulas hexagonas repræsentant, efficiunt rectangulum c s, partium quidem 3263, & minutorum 4, 32, 18, 41, 45. Quibus subductis ex triplo trianguli a c e, aut (si mauis) ex rectangulo c o r g, ex partibus uidelicet 4676, & minutis 32, 13, 51. relinquentur partes 1413, & minuta 27, 41, 32, 18, 15 ipsius rectanguli r s: quæ duplata, conficiunt rectangulum r t, partium 2826, & minutorum 55, 23, 4, 36, 30. Sed totidem partium, atque minutorum, est datus circulus a b c d: facit enim quartam partem totius circuli, cuius diameter est a g partium 120, qui præostensus est habere partes 11307, & minuta 41, 32, 18, 26. Radix porrò quadrata ipsarum 2826 partium, & minutorum 55, 23, 4, 36, 30, offenditur esse partium 53, & minutorum 10, 7, 44, 25. Tantum est latus u x, ipsius quadrati u x y z: quod ipsi dato circulo a b c d prædiximus æquale. Est autem u x, dimidium latus quadrati, quod circulo dati circuli a b c d quadruplo coæquatur. Quod quidem latus, inuentum est habere partes 106, & minuta 20, 15, 28, 50: quæ bis continent ipsas partes 53, & minuta 10, 7, 44, 25. Id porrò nullo modo posset euenire, ni supradictum triangulum a c l, ipsi lunulæ hexagonæ esset æquale. Dato itaque circulo a b c d, descriptum est æquale quadratum u x y z: ídque trium lunularum hexagonarum adminiculo. Quod numeris confirmandum fuerat.

Supradicta-

¶ *Supradictarum supputationum compendiosa formula.*		
	partes.	m̄ . 2̃ . 3̃ . 4̃ . 5̃ . 6̃ . 7̃.
Diameter a e g.	120	0. 0. 0. 0. 0. 0.0
Semidiameter a e , uel a c.	60	0. 0. 0. 0. 0. 0.0
Area circuli, cuius diameter est a g.	11307	41. 32. 18. 26. 0. 0.0
Semicirculus a f g.	5653	50. 46. 9. 13. 0. 0.0
Eiusdem circuli pars Quarta.	2826	55. 23. 4. 36. 30. 0.0
Eiusdem circuli pars Sexta.	1884	36. 55. 23. 4. 20. 0.0
Eiusdem circuli pars Octaua.	1413	27. 41. 32. 18. 15. 0.0
Perpendicularis c o.	51	57. 41. 29. 14. 0. 0.0
Basis c l trianguli a c l.	41	51. 55. 0. 28. 53. 21.0
Triangulum æquilaterum a c e.	1558	50. 44. 37. 0. 0. 0.0
Sectio circuli a k c.	325	46. 10. 46. 4. 20. 0.0
Lunula hexagona a b c.	1087	41. 30. 46. 13. 55. 0.0
Triangulum a c l.	1087	41. 30. 46. 13. 55. 0.0
Rectilineum a c h g, seu rectangulũ c o r g.	4676	32. 13. 51. 0. 0. 0.0
Tres lunulæ, seu rectangulum c s.	3263	4. 32. 18. 41. 45. 0.0
Rectangulum residuum r s.	1413	27. 41. 32. 18. 15. 0.0
Rectangulum r t, dato circulo æquale. ¶	2826	55. 23. 4. 36. 30. 0.0

PROPOSITIO XVI.

IDem rursum quadratum dato circulo æquale, unica hexagona, cum trigona lunula opitulante, multis itidem modis reddere notum.

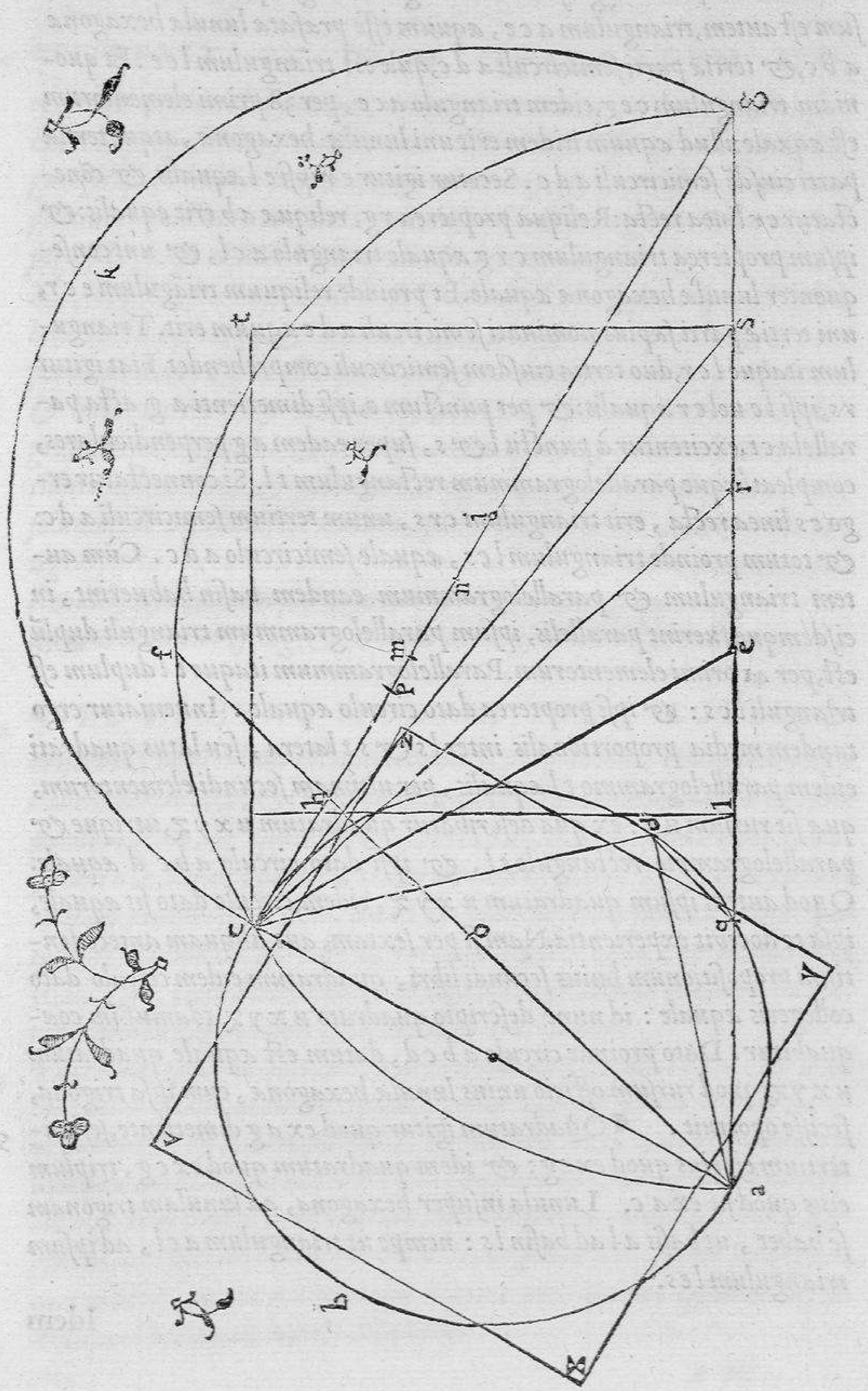
1 ¶SIT RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B C, *cuius diameter a c: super quo fiat triangulum æquilaterum a c e, & compleatur semicirculus a f g, cuius diameter sit a g, unà cum inscripti quadrati latere a f: ueluti proxima obseruatum fuit propositione. Connectatur postmodum recta c g, quæ secet eandem a f in puncto h. Erit itaque diameter a c, latus hexagoni: c g uerò latus trigoni regularis, in dato circulo (cuius dimetiens est a g) descripti. Diuidatur ergo c g bifariam in puncto i: & centro i, ad interuallum i c uel i g, describatur semicirculus c k g.*

2 ¶HIS ITA CONSTRVCTIS, MANIFESTVM *est in primis, quadratum quod fit ex a g, æquum esse duobus quadratis,*

*quæ fiunt ex a c & c g, per 47 primi elementorum : rectus est enim an-
gulus qui sub a c g, per 31 tertij eorundem elementorum . Sicut porrò se
habent dimetiētium quadrata, sic & circuli, per 2 duodecimi prædicto-
rum elementorum: & ipsi pendenter semicirculi adinuicem, per 15 quin-
ti eorundem elementorum. Semicirculus itaque a f g, duobus semicirculis
a b c & c k g est æqualis. Detractis porrò sectionibus, eisdem semicircu-
lis communibus, remanent duæ lunulæ super sextam, atque tertiam cir-
cunferentiæ partem descriptæ, æquales triangulo rectilineo a c g . Vtri-
que igitur prædictarum lunularum, æquale triangulum ex ipso a c g,
triangulo separetur.*

¶IN PRIMIS QVIDEM IPSI LVNVLAE HE- 3
*xagonæ triangulum æquale describatur a c l, per aliquem sex antecedē-
tium modorum proxima propositione declaratorum: nam reliquū triā-
gulum l c e, ipsi lunulæ trigonę de necessitate coæquabitur.* ¶ *Vel in* 4
*hunc modum . Diuidatur h i recta bifariam in puncto m , per 10 pri-
mi elementorum : & ipsi h m uel m i æqualis secetur e l , connectatúr-
que recta c l. Fiet enim præfatum triangulum a c l, lunulæ hexagonæ
a b c indubitanter æquale.* ¶ *Aut si libuerit, auferatur semidiameter* 5
*e g ex ipso latere trigoni g c : & residuæ utpote c n, æqualis subtendatur
c d. Producta nanque eadem c d, ad partes d in continuum & dire-
ctum, cadet in ipsum priùs inuentum punctum l .*

¶IDEM QVOQVE SVBSEQVETVR, SI EX 6
*a f, eidem c n æqualis secetur f o : atque residuæ a o, æqualis subten-
datur a d. Nam connexa c d linea recta, in directúmque producta, coin-
cidet rursum in punctum l: fiétque præfatum triangulum a c f, æquale
eidem lunulæ hexagonæ.* ¶ *In idem quoque redibit, si diuisa fuerit h i* 7
*proportionaliter in signo p , cuius segmentum maius sit p i , minus uerò
p h : cui si æqualis subtendatur d q , ab ipso uidelicet puncto in quo cir-
cunferentia dati circuli a b c d secat a e semidiametrum. Quoniam si cō-
nexa fuerit c d linea recta, & in directum continuata , coincidet rur-
sum in ipsum punctū l.* ¶ *Habes itaque non sine perpetua admiratione,* 8
*unūquemque horum quatuor modorum colligendi basin a l ipsius triā-
guli a c l, cum unoquoque sex modorum ipsius antecedentis xiij propo-
sitionis adamussim conuenire. Reliquum itaque triangulum l c e, ut re-
deamus*



deamus unde ſumus digreſsi, lunulæ trigonæ c k g, æquum erit. Præoſtẽſum eſt autem, triangulum a c e, æquum eſſe præfatæ lunulæ hexagonæ a b c, & tertiæ parti ſemicirculi a d c, quæ eſt triangulum l c e. Et quoniam triangulum c e g, eidem triangulo a c e, per 38 primi elementorum eſt æquale: illud æquum itidem erit uni lunulæ hexagonæ, atque tertiæ parti eiuſdẽ ſemicirculi a d c. Secetur igitur e r ipſi e l æqualis, & cõnectatur c r linea recta: Reliqua propterea r g, reliquæ a b erit ęqualis: & ipſum propterea triangulum c r g æquale triangulo a c l, & uni conſequenter lunulæ hexagonæ æquale. Et proinde reliquum triãgulum e c r, uni tertiæ parti ſæpius nominati ſemicirculi a d c æquum erit. Triangulum itaque l c r, duo tertia eiuſdem ſemicirculi comprehendet. Fiat igitur r s, ipſi l e uel e r æqualis: & per punctum c, ipſi dimetienti a g acta parallela c t, excitentur à punctis l & s, ſuper eadem a g perpendiculares, compleatúrque parallelogrammum rectangulum t l. Si connectatur ergo c s linea recta, erit triangulum c r s, unum tertium ſemicirculi a d c: & totum proinde triangulum l c s, æquale ſemicirculo a d c. Cùm autem triangulum & parállelogrammum eandem baſin habuerint, in eiſdémque fuerint parallelis, ipſum parallelogrammum trianguli duplũ eſt, per 41 primi elementorum. Parallelogrammum itaque t l duplum eſt trianguli l c s: & ipſi propterea dato circulo æquale. Inueniatur ergo tandem media proportionalis inter l s & s t latera, ſeu latus quadrati eidem parallelogrammo t l æqualis, per ultimam ſecundi elementorum, quæ ſit rurſum u x: ex qua deſcribatur quadratum u x y z, utrique & parallelogrammo rectangulo t l, & ipſi dato circulo a b c d æquale. Quod autem ipſum quadratum u x y z, eidem circulo dato ſit æquale, ipſa te docebit experientia. Nam ſi per ſextam, aut aliquam antecedentium propoſitionum huius ſecundi libri, quadratum eidem circulo dato collegeris æquale: id nunc deſcripto quadrato u x y z adamuſsim coæquabitur. Dato proinde circulo a b c d, datum eſt æquale quadratum u x y z: quod rurſum officio unius lunulæ hexagonæ, cum ipſa trigona, feciſſe oportuit. ¶Quadratum igitur quod ex a g dimetiente, ſeſquitertium eſt eius quod ex c g: & idem quadratum quod ex c g, triplum eius quod fit ex a c. Lunula inſuper hexagona, ad lunulam trigonam ſe habet, ut baſis a l ad baſin l s: nempe ut triangulum a c l, ad ipſum triangulum l c s. 9

Idem

¶Idem uia numerorum confirmare.

1 ¶POTERIT ET IDEM QVADRATVM DAto circulo æquale alia ratione, nempe uia numerorum (ut proxima factum est propositione) confirmari. Cùm enim basis a l trianguli a c l, præostensa sit habere partes 41, & minuta 51, 55, 0, 28, 53, 21, qualium partium semidiameter a e est 60, totúsue diameter a g 120: Reliqua propterea l e, basis uidelicet trianguli c l e, erit partium 18, & minutorum 8, 4, 59, 31, 6, 39. Et proinde basis l s trianguli c l s (quæ tripla est ipsius l e) habebit partes 54, & minuta 24, 14, 58, 33, 19, 57: quæ ducta in perpendicularem s t, quæ est æqualis ei quę ex uertice c in basin a e ducitur, & habet partes 51, & minuta 57, 41, 29, 14, faciunt aream parallelogrammi rectanguli t l, & proinde aream ipsius a b c d circuli dati: partium quidem 2826, & minutorum 55, 23, 4, 36, 30 ferè: abundant enim solummodo 2 quinta ferè minuta, quæ reuocantur ad $\frac{1}{3888000000}$ unius integræ partis, ex calculi diuersitate contractum, & nihili propterea faciendum. Sed totidem partium atque minutorum est quarta pars circuli, cuius diameter est a g: & proinde area ipsius a b c d circuli dati.

2 ¶VEL IN HVNC MODVM, IDEM COLLIGEre licebit. Præostensum est antecedenti 13 propositione, triangulum a c e habere partes 1558, & minuta 50, 44, 37: Triangulum uerò a c l, fore partium 1087, & minutorum 41, 30, 46, 13, 55. Reliquum itaque triangulum c l e, habebit partes 471, & minuta 9, 13, 50, 46, 5, quæ faciunt tertiam partem semicirculi a d c: & proinde sexies sumpta, conficiunt totum circulum datum a b c d, partium quidem 2826, & minutorum 55, 23, 4, 36, 30 præcisè: quantum uidelicet offendimus eundem circulũ, per trium hexagonarum lunularum subtractionem.

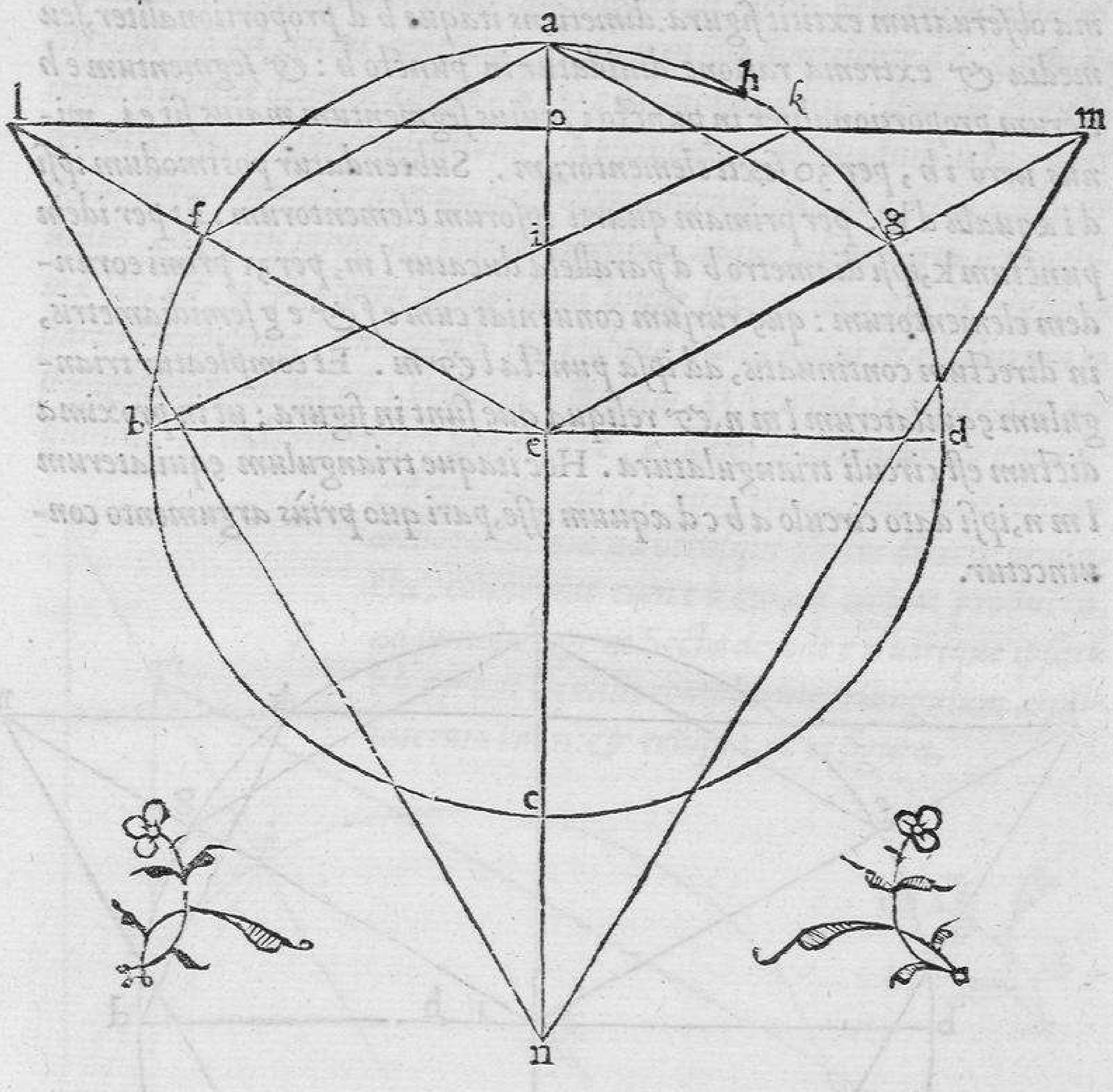
3 ¶Vtroque igitur modo, habetur area ipsius dati circuli a b c d: & proinde latus quadrati eidem circulo æqualis. Quod præfata 13 propositione, inuentum est habere partes 53, & minuta 10, 7, 44, 25: dimidium uidelicet lateris eius quadrati, quod æquum est circulo, cuius diameter est a g. Hæc autem prædictarum supputationum concordia, per triangulum uidelicet a c l, aut per ipsum triangulum c l e, fidem facit apertam exactæ, atque multifariam traditæ descriptionis ipsius trianguli a c l, quod hexagonę lunulę adęquetur.

¶ *Antecedentis calculi summaria formula.*								
	partes	m̃.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.
¶ *Semidiameter a e.*	60	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0
Basis a l trianguli a c l.	41	51.	55.	0.	28.	53.	21.	0
Reliqua basis l e.	18	8.	4.	59.	31.	6.	39.	0
Basis l s trianguli c l s.	54	24.	14.	58.	33.	19.	57.	0
Perpendicularis s t.	51	57.	41.	29.	14.	0.	0.	0
¶ *Rectangulum t l, æquale circulo a b c d.*	2826	55.	23.	4.	36.	30.	0.	0
Triangulum a c e.	1558	50.	44.	37.	0.	0.	0.	0
Triangulum a c l, hexagonæ lunulæ æquale.	1087	41	30.	46.	13.	55.	0.	0
Triangulum c l e, sexta pars circuli dati.	471	9.	13.	50.	46.	5.	0.	0
¶ *Sextuplũ eiusdẽ trianguli, seu rectang. t l.*	2826	55.	23.	4.	36.	30.	0.	0
Triangulum a c g, duabus lunulis æquale.	3117	41.	29.	14.	0.	0.	0.	0
Triangulum c l g, lunulæ trigonæ æquale.	2029	59.	58.	27	46.	5.	0.	0
Lunula autem tetragona habet.	1800	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0

PROPOSITIO XVII.

CIrculum datum in triangulum æquilaterum eidẽ circulo æquale tribus modis reducere: & triangulum demum, in quadratum.

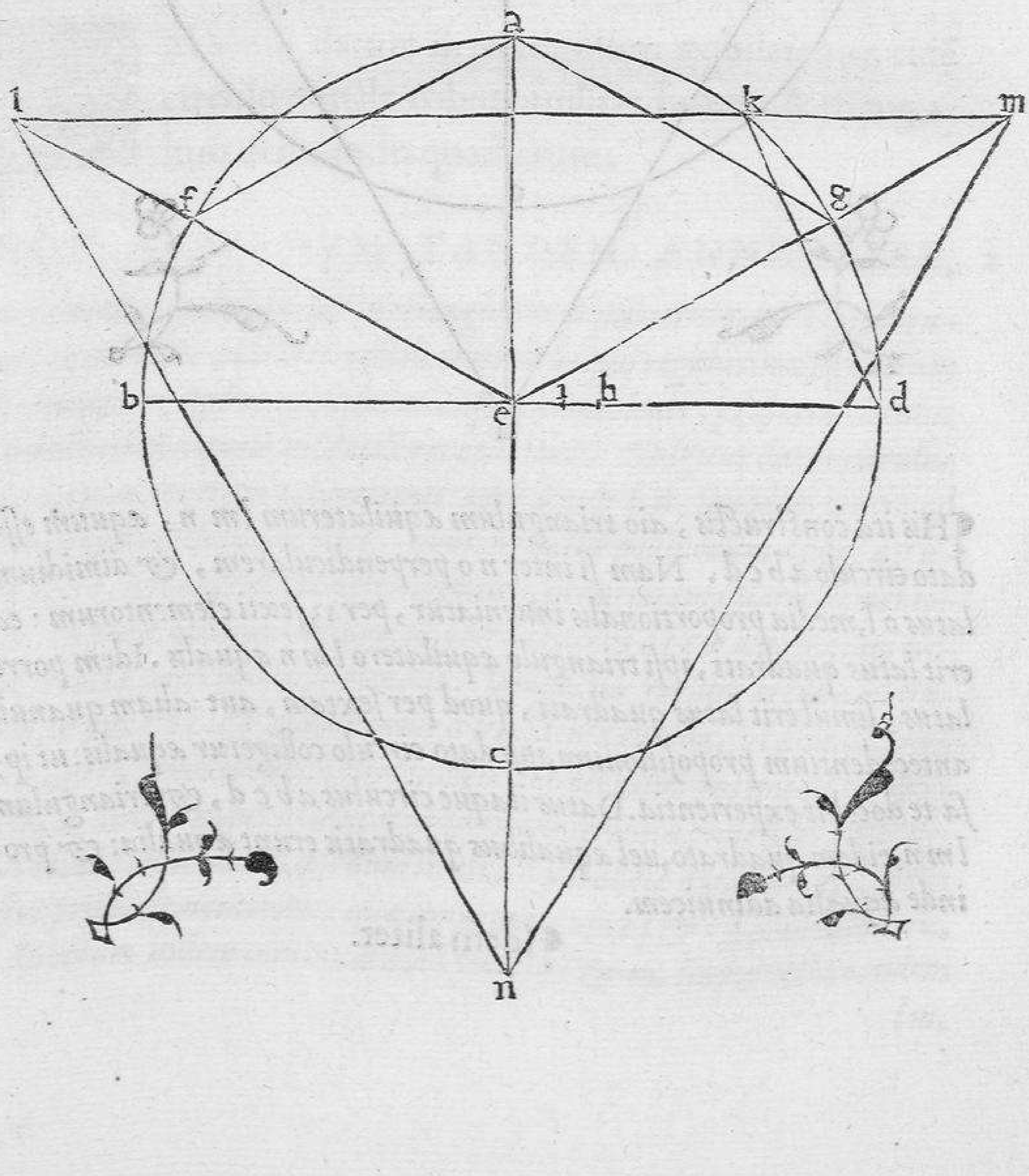
¶NON ABSVRDVM TANDEM ANNECTERE, 2 *qua ratione circulus datus in triangulum æquilaterum & æquiangulum, in primam uidelicet rectilinearum atque regularium figurarum transmutetur. Ipsius nanque trianguli adminiculo, præfatus circulus in quadratum æquale uel facilè reuocabitur. Sit igitur datus circulus a b c d, cuius centrum e, dimetientes uerò a c & b d, in eodem centro ad rectos angulos sese dirimentes. Subtendantur postmodum a f & a g lineæ rectæ, ipsi a e semidiametro æquales, per primam quarti elementorum: in hunc quidem modum, ut uterque arcus a f & a g, sextam circunferentiæ partem comprehendat. Diuidatur rursum arcus a g bifariam, in puncto h: & connectatur a h subtensa chorda, cui æqualis secetur a i, per 3 primi eorundẽ elementorũ. Connectatur postmodũ b i linea recta, in directúmque producatur ad circunferentiæ punctum* k. *Per ipsum deinde punctum* k, *ipsi dimetienti b d parallela ducatur l m, per 31 ipsius primi elementorum: quæ conueniat cum e f & e g semidiametris, in directum itidem continuatis, ad puncta l & m. Super recta tandem l m,* *l m, triangulum æquilaterum deſcribatur l m n: per primam ipſius primi elementorum: producto e c ſemidiametro in punctum n, notatáque ſectione lateris l m cum a e ſemidiametro, quæ ſit o.*



¶*His ita conſtructis, aio triangulum æquilaterum l m n, æquum eſſe dato circulo a b c d. Nam ſi inter n o perpendicularem, & dimidium latus o l, media proportionalis inueniatur, per 13 ſexti elementorum: ea erit latus quadrati, ipſi triangulo æquilatero l m n æqualis. Idem porrò latus, ſimul erit latus quadrati, quod per ſextam, aut aliam quanuis antecedentium propoſitionum, ipſi dato circulo colligetur æqualis: ut ipſa te docebit experientia. Datus itaque circulus a b c d, & triangulum l m n, eidem quadrato, uel æqualibus quadratis erunt æqualia: & proinde æqualia adinuicem.*

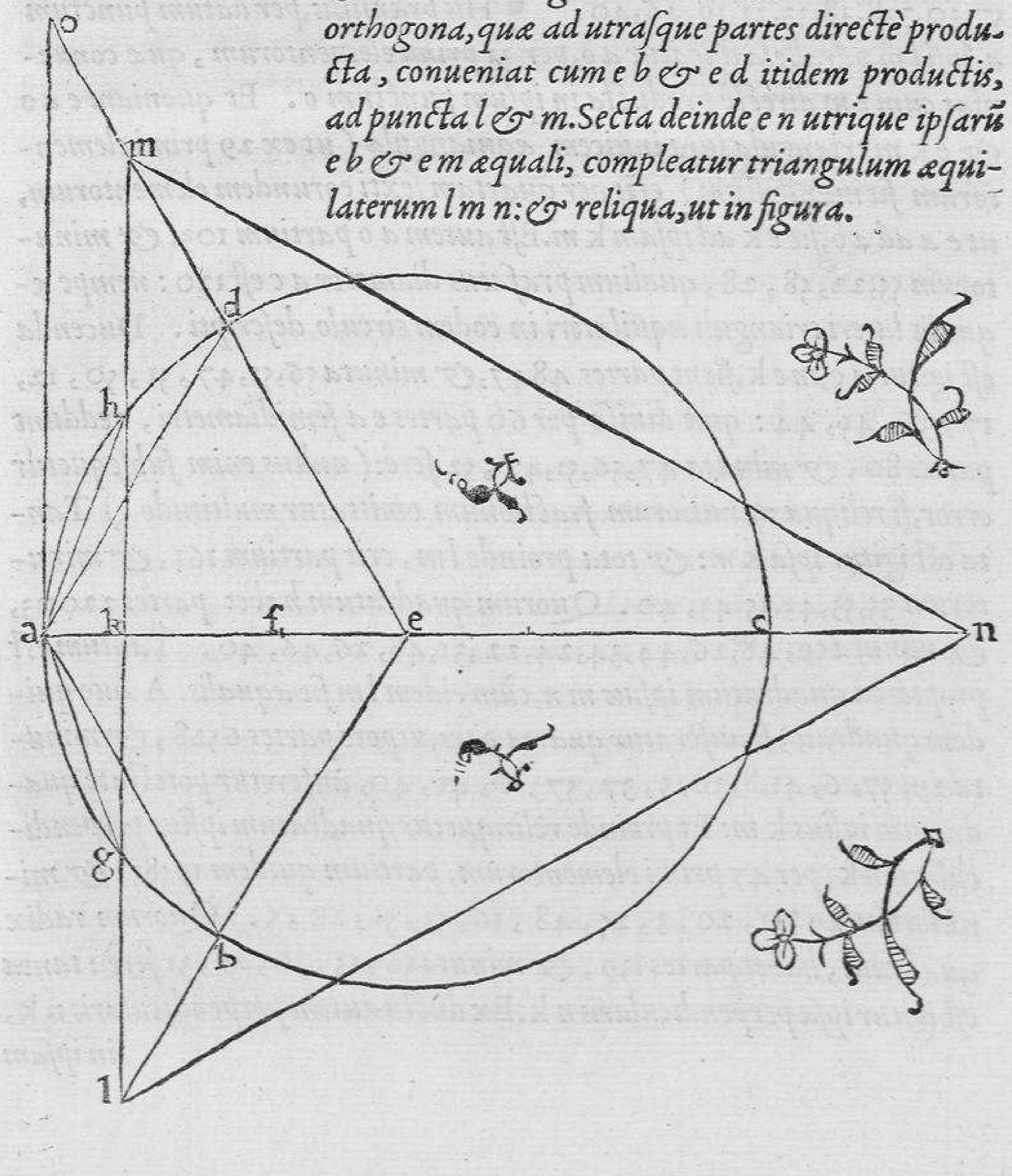
¶Idem aliter.

¶ESTO RVRSVM DATVS CIRCVLVS A B 2
c d, cuius centrum e, unà cum subtensis chordis a f & a g, ipsi a e semidiametro æqualibus, & connexis e f & e g semidiametris: ut in proxima obseruatum extitit figura. dimetiens itaque b d proportionaliter, seu media & extrema ratione diuidatur in puncto h: & segmentum e h iterum proportionaliter in puncto i, cuius segmentum maius sit e i, minus uerò i h, per 30 sexti elementorum. Subtendatur postmodum ipsi d i æqualis d k, per primam quarti ipsorum elementorum. Et per idem punctum k, ipsi diametro b d parallela ducatur l m, per 31 primi eorundem elementorum: quę rursum conueniat cum e f & e g semidiametris, in directum continuatis, ad ipsa puncta l & m. Et compleatur triangulum ęquilaterum l m n, & reliqua quę sunt in figura: ut in proxima dictum est circuli triangulatura. Hoc itaque triangulum ęquilaterum l m n, ipsi dato circulo a b c d æquum esse, pari quo priùs argumento conuincetur.



¶Idem rursum aliter, beneficio numerorum.

3 ¶QVOD SI IVVET IDEM TRIANGVLVM *æquilaterum, uia numerorum inuestigare, sic facito. Esto rursum datus circulus a b c d, cuius centrum e, unà cum solo dimetiente a c, & subtensis a b & a d, connexísque e b & e d semidiametris, sextam circunferentiæ partem subtendentibus. Abscindatur postmodum tertia pars ipsius dimetientis, per nonam sexti elementorum, quæ sit a f: cui addatur unius 40 partis ipsius a f pars sexagesima, atque ipsius partis sexagesimæ $\frac{11}{20}$, & 13 præterea sexagesima unius sexagesimæ partis eiusdem partis sexagesimæ, unà cum $\frac{2}{3}$ sexagesimæ partis unius prædictarum 13 sexagesimarum: hoc est 1 primum minutum, 33 secunda, 13 tertia, & 40 quinta. Et inde resultanti lineæ rectæ, æquales coaptentur a g & a h: & connectatur g h linea recta, cum diametro a c orthogona, quæ ad utrasque partes directè producta, conueniat cum e b & e d itidem productis, ad puncta l & m. Secta deinde e n utrique ipsarũ e b & e m æquali, compleatur triangulum æquilaterum l m n: & reliqua, ut in figura.*



¶HIS ITA CONSTRVCTIS, AIO IPSVM triangulum æquilaterum l m n, æquum esse dato circulo a b c d. Sit enim de more diameter a c partium 120: erit igitur a f similium partium 40, quæ unà cum præfatis minutis efficiunt 40,1,33,13,0,40. Tanta est igitur utraque ipsarum a g & a h. Secet autem g h aut l m, dimetientẽ a c in puncto k. Et quoniam g k perpendicularis est super a c: erit igitur a g recta, media proportionalis inter c a & a k, per corollarium 8 sexti elementorum. Si ducatur ergo a g in seipsam, & productum diuidatur per a c: nascetur a k. Quadratum porrò ipsius a g, habet partes 1602, & minuta 4,19,45,42,42,53,17,20,26,40: quæ diuisa per 120 partes ipsius a c, dant pro quoto numero partes 13, & minuta 21,2, 9,52,51,21,26,38,40,13,20. Tanta est igitur eadem a k: & residua proinde semidiametri, uidelicet e k, habebit partes 46, & minuta 38, 57,50,7,8,38,33,21,19,46,40. ¶His præmissis, per datum punctum a, ipsi l m parallela ducatur a o, per 31 primi elementorum, quæ conueniat cum e m directè producta in ipsum punctum o. Et quoniam e a o & e k m triangula sunt inuicem æquiangula (ut ex 29 primi elementorum fit manifestum) erit per quartam sexti eorundem elementorum, ut e a ad a o, sic e k ad ipsam k m. Est autem a o partium 103, & minutorum 55,22,58,28, qualium præfatus diameter a c est 120: nempe æqualis lateri trianguli æquilateri in eodem circulo descripti. Ducenda est igitur a o, in e k, fient partes 4847, & minuta 56,51,47,51,50,12, 17,36,45,44: quæ diuisa per 60 partes e a semidiametri, reddunt partes 80, & minuta 47,56,51,47,52 ferè: (nullus enim subsequetur error, si reliqua minutiorum fractionum omittatur multitudo.) Tanta est igitur ipsa k m: & tota proinde l m, erit partium 161, & minutorum 35,53,43,35,43,40. Quorum quadratum habet partes 220513, & minuta 59,48,26,44,34,24,22,31,48,26,46,40. Tantum est propterea quadratum ipsius m n, cùm eidem l m sit æqualis. A quo quidem quadrato, si auferatur quarta pars, utpote partes 6528, & minuta 29,57,6,41,8,36,5,37,57,6,41,40, àuferetur potestate quadratum ipsius k m: Et proinde relinquetur quadratum ipsius perpendicularis n k, per 47 primi elementorum, partium quidem 19585, & minutorum 29,51,20,3,25,48,16,53,51,20,5. Quorum radix quadrata, habet partes 139, & minuta 56,53,30,21,31 ferè: tanta est igitur ipsa perpendicularis n k. Ex ductu autem perpendicularis n k, in ipsam *in ipsam* k m, *sit area trianguli l m n, per* 41 *primi elementorum: partiū quidem* 11307, & *minutorum* 41, 32, 18, 25 *ferè. Atqui totidem partiū, atque primorum, secūdorum, & tertiorum minutorum, reperta est area circuli, cuius diameter est partium* 120, *per sextam propositionem huius secundi libri: sed quartorum minutorum* 26. *Differentia est igitur, unius propemodum quarti minuti: quod ad* $\frac{1}{12960000}$ *unius integræ partis reuocatur, nihili prorsus faciendum, si calculi diuersitas, atque irrationalium radicum natura debitè consideretur.* ¶ Radix porrò quadrata *ipsarum partium* 11307, & *minutorum* 41, 32, 18, 26, *est media proportionalis inter ipsam perpendicularem n* k & *dimidium latus* k *m*, & *simul latus quadrati eidem æquilatero triangulo l m n*, & *ipsi propterea circulo dato æqualis*. *Hæc autem offendetur esse partium* 106, & *minutorum* 20, 15, 28, 50, *quanta uidelicet ex antecedentis* & *præallegatæ sextæ propositionis inuenta est calculo.* Dato itaque circulo *a b c d*, non *modo triangulum æquilaterum, sed* & *quadratum æquale simul describitur*. Quod oportuit fecisse.

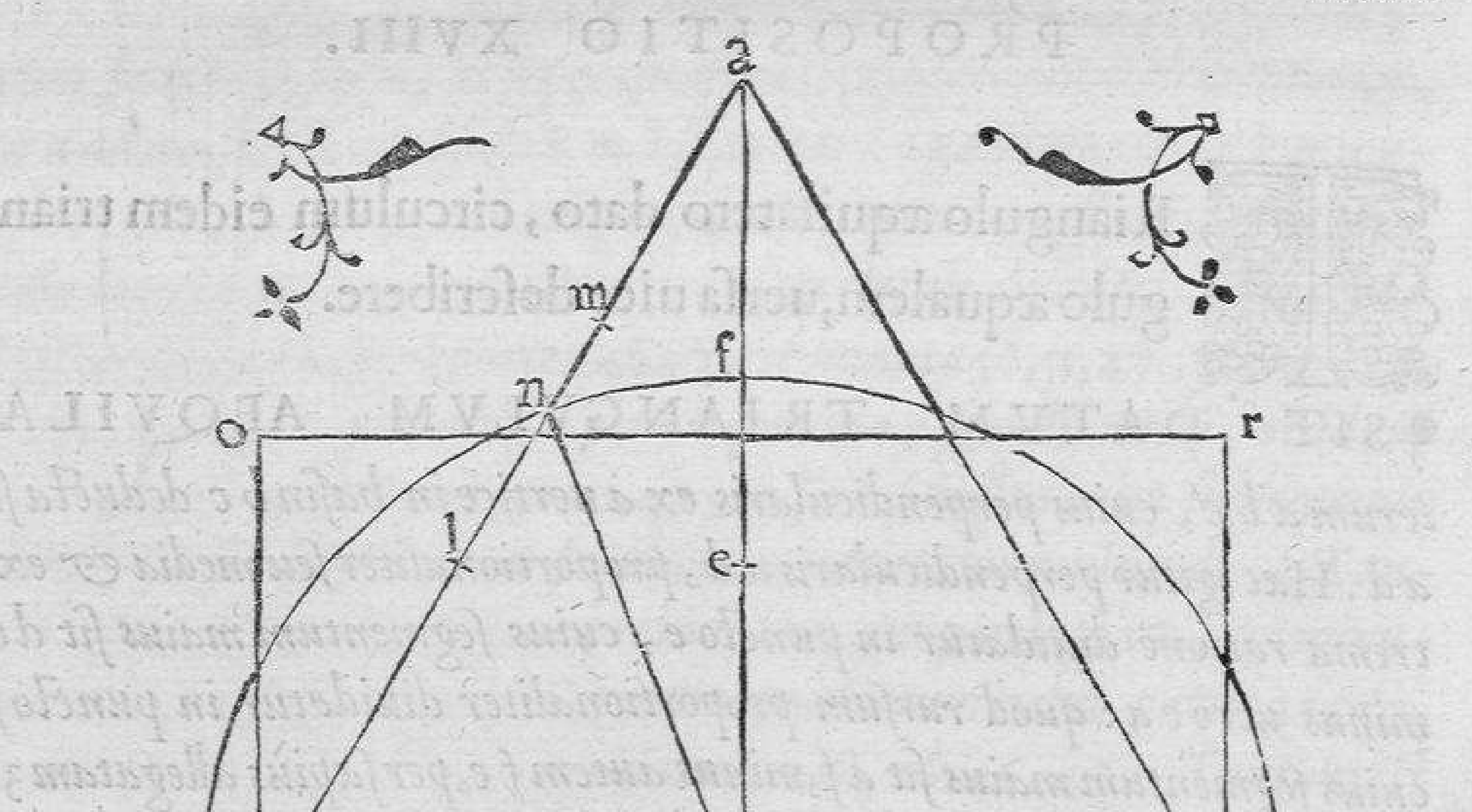
PROPOSITIO XVIII.

TRiangulo æquilatero dato, circulum eidem triangulo æqualem, uersa uice describere.

1 ¶SIT DATVM TRIANGVLVM AEQVILA*terum a b c, cuius perpendicularis ex a uertice in basin b c deducta sit a d. Hæc igitur perpendicularis a d, proportionaliter seu media* & *extrema ratione diuidatur in puncto e, cuius segmentum maius sit d e, minus uerò e a: quod rursum proportionaliter diuidatur in puncto f, cuius segmentum maius sit a f, minus autem f e, per sæpiùs allegatam* 30 *sexti elementorum.* Ab*scindatur postmodum ex ipsa perpēdiculari pars tertia d g, per nonam ipsius sexti elementorum: aut diuidatur angulus a b d bifariam sub recta b g, per nonam primi eorundem elementorum: coincidet enim b g recta, in ipsum punctum g.* Centro *itaque g, ad interuallum autem ipsius g f, circulus describatur f h* k: Is *enim circulus, dato triangulo æquilatero a b c erit æqualis.* Nam *si per antecedentem* 15 *propositionem, triangulum æquilaterum eidem circulo æquale describatur: illud ipsi dato triangulo a b c ad amussim coæquari reperietur.*

¶Idem aliter.

¶*Licebit & eundem circulum, ipsi dato triangulo æquilatero a b c æqualem, alia ratione colligere. Resumatur itaque datum triangulũ a b c, unà cum a d perpendiculari: & puncto g alterutro duorum antecedentiũ modorum adinuento. Et diuidatur latus a b proportionaliter in puncto l, cuius segmentum maius sit b l, minus uerò l a, quod bifariam diuidatur in puncto m: & dimidia l m proportionaliter diuidatur in puncto n, cuius segmentum maius sit m n, minus autem n l: & connectatur recta g n. Centro rursum g, interuallo autem g n, circulus describatur n h* k *f. Is enim circulus, eidem æquilatero triangulo a b c duobus argumentis conuincitur æqualis. In primis enim, quoniam semidiameter g n, ipsi g f semidiametro, iuxta præcedentem modum adinuento, offenditur æqualis. Secundò, si dato circulo n h* k *f, æquale triangulum æquilaterũ per antecedentẽ propositionem describatur: illud rursum eidem æquilatero triangulo dato coæquabitur: adeò ut descriptio unius, reciprocã alterius fidem efficiat.* ¶*Quòd si inter a d perpendicularem, & basin d b, media* 2



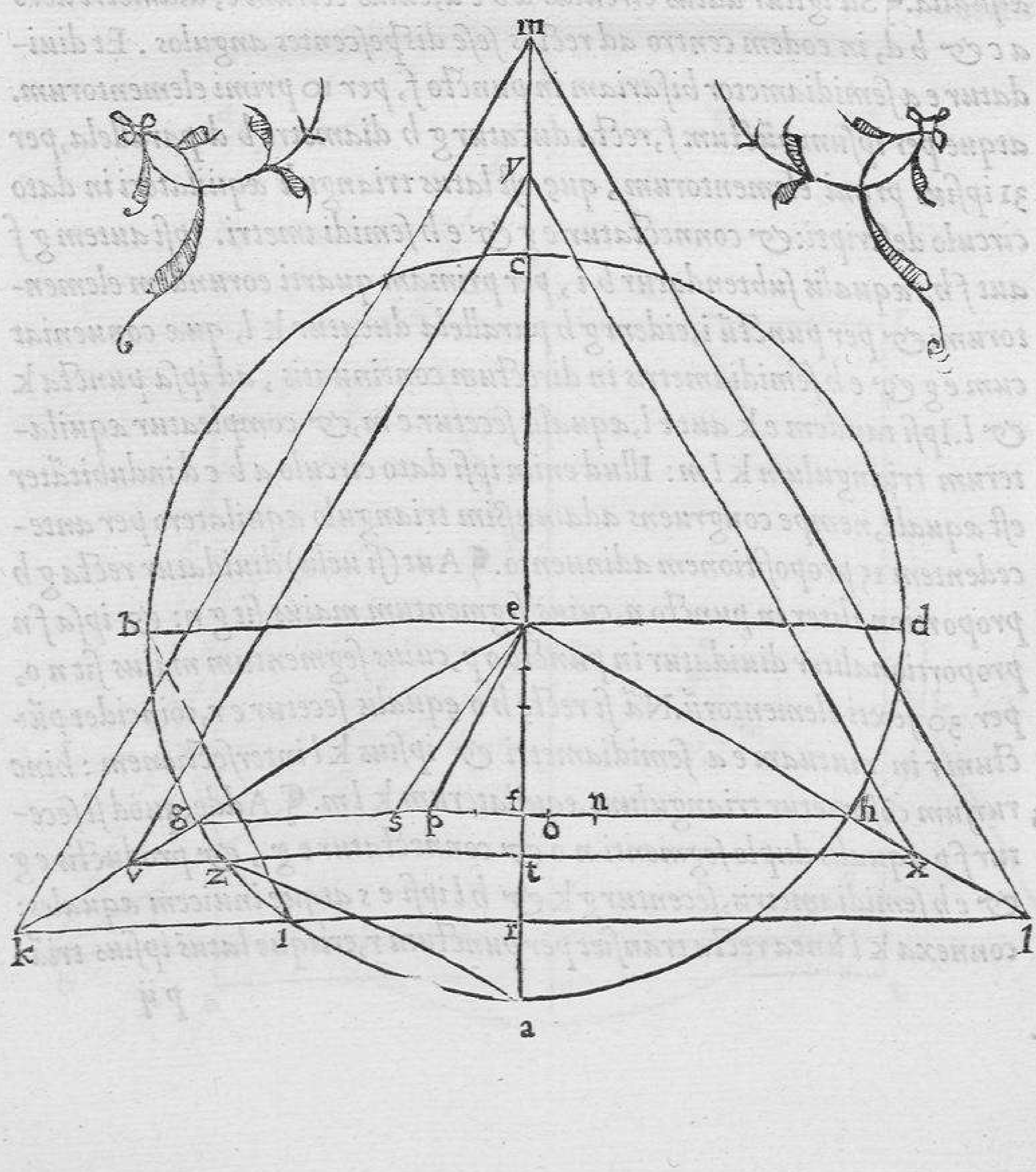
media proportionalis inueniatur o r, ex qua describatur quadratum o r s t: illud utrique & dato triangulo a b c, & eidem circulo n h k ſ rurſum coæquabitur. Quot igitur modis circulo dato æquilaterum triangulum describitur, uel ipſi triangulo circulus æqualis: totidẽ modis quadratum utrique conſcribitur æquale. De his ergo ſatis.

PROPOSITIO XIX.

OBlato tandem circulo, duo ſimul deſcribere triãgula æquilatera: quorum alterum ipſi dato circulo ſit æquale, alterius uerò latera circunferentiæ eiuſdem circuli coæquentur.

¶*In maiorem tandem artis mathematicę amplitudinẽ, antecedentiúmque propoſitionum confirmationem, iuuat tãdem multis oſtendere modis, ut duo ſimul conſtruantur æquilatera triangula: quorum alterum ſit æquale dato circulo, alterius uerò latera circunferẽtiæ eiuſdem circuli ſint*
1 *æqualia.* ¶ *Sit igitur datus circulus a b c d, cuius cẽtrum e, diametri uerò a c & b d, in eodem centro ad rectos ſeſe diſpeſcentes angulos. Et diuidatur e a ſemidiameter bifariam in puncto f, per 10 primi elementorum. atque per ipſum pũctum f, recta ducatur g h diametro b d parallela, per 31 ipſius primi elementorum, quę eſt latus trianguli æquilateri in dato circulo deſcripti: & connectatur e g & e h ſemidiametri. Ipſi autem g f aut f h, æqualis ſubtendatur b i, per primam quarti eorundem elementorum: & per punctũ i, eidem g h parallela ducatur k l, quæ conueniat cum e g & e h ſemidiametris in directum continuatis, ad ipſa puncta k & l. Ipſi tandem e k aut e l, æqualis ſecetur e m, & compleatur æquilaterum triangulum k l m: Illud enim ipſi dato circulo a b c d indubitãter eſt æquale, nempe congruens adamuſsim triangulo æquilatero per ante-*
2 *cedentem 15 propoſitionem adinuento.* ¶ *Aut (ſi uelis) diuidatur recta g h proportionaliter in puncto n, cuius ſegmentum maius ſit g n: & ipſa f n proportionaliter diuidatur in puncto o p, cuius ſegmentum maius ſit n o, per 30 ſexti elementorũ. Nã ſi rectę h o ęqualis ſecetur e r, coincidet pũctum r in mutuam e a ſemidiametri & ipſius k l interſectionem: hinc*
3 *rurſum cõſtruetur triangulum æquilaterum k l m.* ¶ *Adde, quòd ſi ſecetur f p æqualis duplo ſegmenti n o & connectatur e g, & productis e g & e h ſemidiametris, ſecentur g k & h l ipſi e s atque inuicem æquales: connexa k l linea recta tranſiet per punctum r, eritque latus ipſius triã-*

guli æquilateri, quod eidem circulo dato coæquatur. ¶ *Secũda pars non* 1
minus leuiter, atque totidem modis absoluetur. Subtendatur ergo ipsi h o æqualis b t: & per punctum t, ipsi g h parallela ducatur u x, contingens ipsas e k & e l in punctis u & x. Ipsi autem e u uel e x, æqualis secetur e y: & compleatur triangulum æquilaterum u x y. Nam tria illius latera simul iuncta, circunferentiæ eiusdem circuli dati sunt æqualia: quoniam si per aliquam antecedentium propositionum, recta suscipiatur æqualis quadranti circunferentiæ ipsius dati circuli, ea offendetur continere $\frac{3}{4}$ *præcisè unius lateris ipsius trianguli u x y: & proinde 4 eiusdẽ circunferẽtiæ quadrantes, tribus lateribus adamussim coæquãtur.* ¶ *Po-* 2
terit & idẽ triangulũ u x y, dato circulo isoperimetrũ, in hunc fabricari modum. Connectatur recta e s: & illi æqualis abscindatur ex e a semidiametro, quæ sit e z: & per punctum z, ipsi g h parallela ducatur u x, compleaturque rursum triangulum æquilaterum u x y. Est enim e z quę ex centro dati circuli, uel ipsius trianguli isoperimetri, in latus eiusdem perpendiculariter incidit. ¶ *Item, si recta f r proportionaliter diuidatur* 3



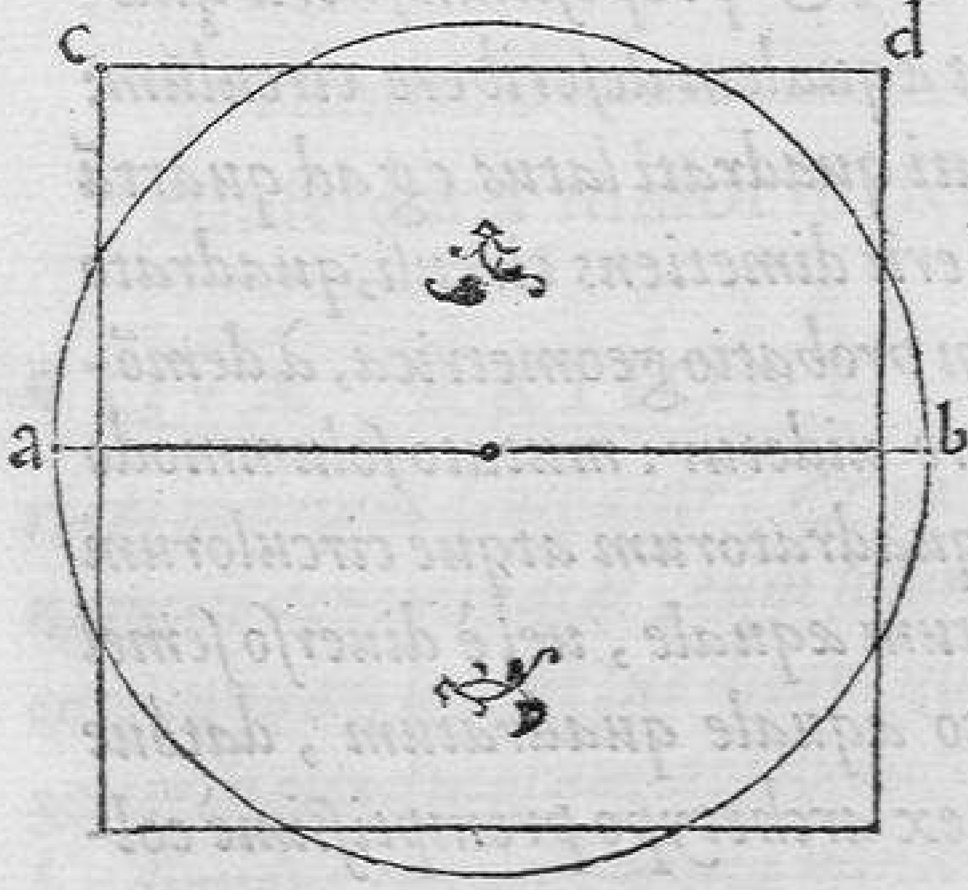
in ipso puncto t, cuius segmentũ maius sit r t, minus uerò t f: erit rursum punctum t, per quod trãsit præfatum latus u x, ipsius trianguli æquilateri u x y dato circulo isoperimetri. ¶Corollarium.

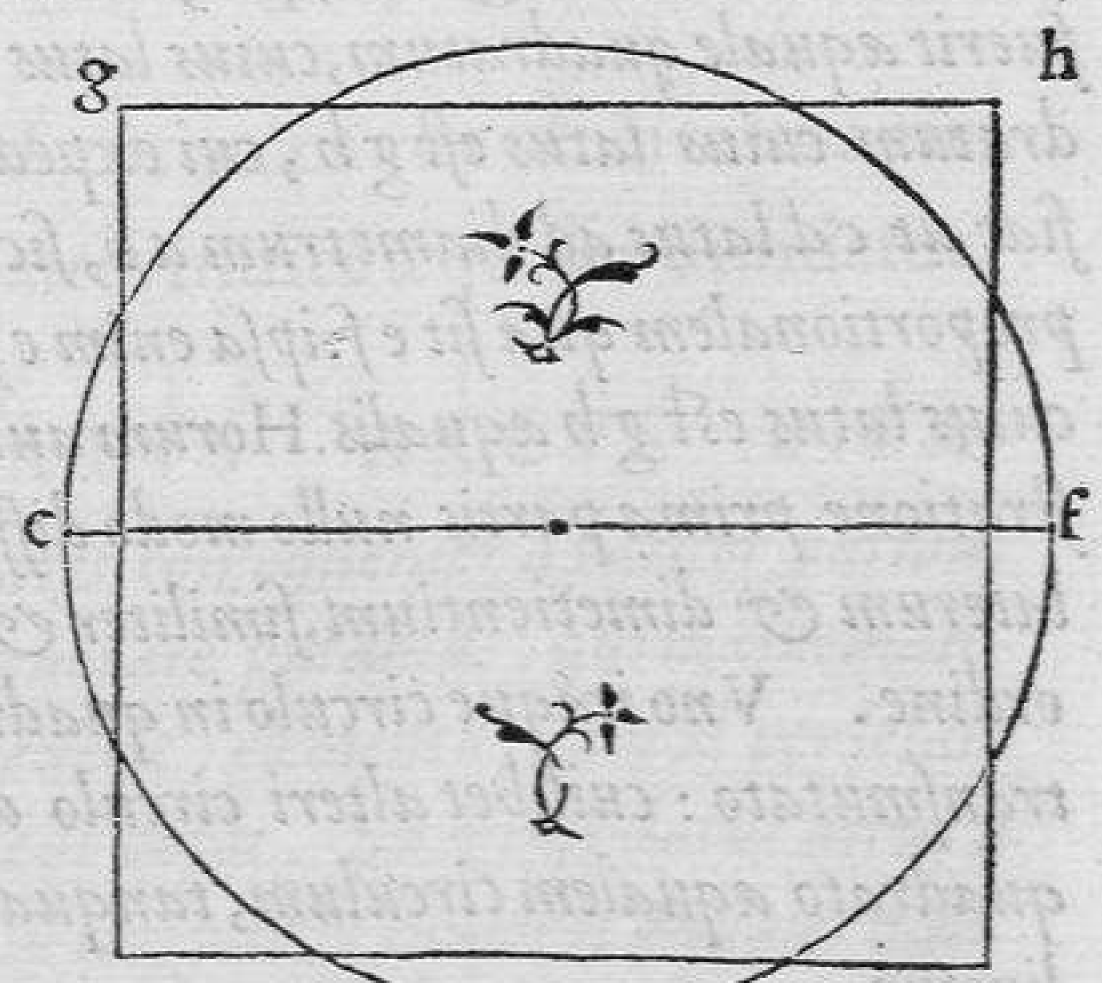
¶Ex *præfatis triãgulorũ descriptionibus, gemina suboritur circuli quadratura: nam media proportionalis inter m r & r* k, *est latus quadrati ipsi triangulo* k *l m, & proinde ipsi dato circulo a b c d æqualis.* Et *si inter rectam, unum latus & dimidium ipsius trianguli u x y comprehendentem, & dati circuli semidiametrum, media itidem proportionalis suscipiatur, per 13 sexti elementorum, ea erit latus eiusdem quadrati, quod dato æquum est circulo.* Sed *de his hæc sunt satis.*

PROPOSITIO XX.

EX dato quopiã circulo, in quadratum æquale trãsmutato, cuiuis oblato quadrato circulum æqualem promptissimè colligere: atque è diuerso.

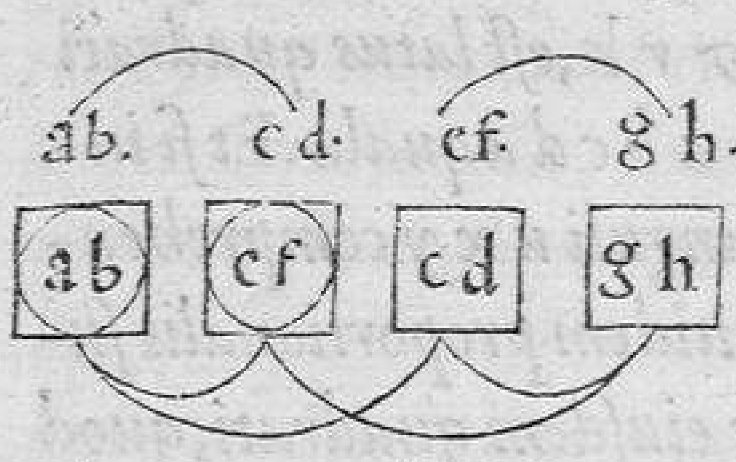
¶ *Sit in primis dato cuipiam circulo, cuius diameter sit a b descriptum æquale quadratum, cuius latus sit c d, per sextam, septimam, uel octauam propositionem: dati uerò circuli diameter, cui sit operæpretiũ æquale quadratum pariter describere, sit recta e f.* Ordinetur *itaque dimetiẽs a b linea prima, latus uerò c d linea secunda, & diameter e f tertia: & inueniatur quarta proportionalis, per duodecimam sexti elementorum, quæ sit g h, ex qua describatur quadratum: ipsum enim quadratum, dato circulo, cuius dimetiens est e f, coæquabitur.*





2 ¶ *Cùm enim ipsę quatuor lineę rectę a b, c d, e f, g h, proportionales sint adinuicem, ut a b quidem ad ipsam c d, sic e f ad ipsam g h: permutatim*

quoque proportionales erunt, per 16 quinti elementorum, sicut a b ad ipsam e f, sic c d ad ipsã g h. Et quadrata igitur a b ipsis quatuor lineis proportionalibus descripta, proportionalia erunt adinuicẽ, per 22 sexti eorundem elemẽtorũ. Vt igitur quadratũ quod ex a b, ad quadratũ ipsius e f: sic quadratum quod ex c d, ad quadratum ipsius g h. Circuli porrò sese adinuicẽ habent, ut ea quæ ex illorum dimetiẽtibus fiunt quadrata, per secundã duodecimi elementorũ: & quæ eidem sunt eędem rationes, adinuicẽ sunt eædem, per undecimam quinti prędictorum elementorũ.



Circulus igitur cuius dimetiens est a b, ad circulũ cuius dimetiens est e f, se habet, ut quadratũ quod ex c d ad quadratũ quod fit ex g h: Et permutatim rursum, per eandem 16 quinti elemẽtorum, ut circulus cuius dimetiens est a b ad quadratum, cuius latus est c d, ita circulus cuius dimetiẽs est e f ad quadratum cuius latus est ipsa g h. Circulus porrò cuius dimetiens est a b, quadrato cuius latus est c d, per hypothesis constructionẽ est ęqualis: & circulus igitur, cuius dimetiẽs est e f, ipsi quadrato cuius latus est g h pẽdenter coæquatur. ¶ *At si uersa uice oblato quadrato circulum æqualem* 3
promptißimè colligere iuuet: latus quadrati ipsi dato circulo æqualis ponatur linea prima, & dimetiens eiusdem circuli linea secunda, tertia uerò linea latus quadrati propositi in circulum æqualem reuocandi. Inueniatur postmodum quarta proportionalis, per ipsam 12 sexti elementorum: nam illa erit dimetiens circuli, qui eidem exposito quadrato coæquatur. Vt si (uerbi gratia) præfato circulo, cuius dimetiens est a b, datũ fuerit æquale quadratum, cuius latus est c d, & propositum fuerit quadratum cuius latus est g h, cui expediat æqualem describere circulum: fiat ut c d latus ad diametrum a b, sic dati quadrati latus c g ad quartã proportionalem quæ sit e f. ipsa enim e f, erit dimetiens circuli, quadrato cuius latus est g h æqualis. Horum autem probatio geometrica, à demõstratione primæ partis nullo modo differre uidetur: mutato solummodo laterum & dimetientium, similiter & quadratorum atque circulorum ordine. Vno itaque circulo in quadratum æquale, uel è diuerso semel transmutato: cuilibet alteri circulo dato æquale quadratum, datóue quadrato æqualem circulum, tanquam ex archetypo promptißimè colligetur.

SECVNDI LIBRI FINIS.

LIBER TERTIVS RERVM MATHEMATICARVM HACTENVS DESIDERATARVM.

PROPOSITIO I.

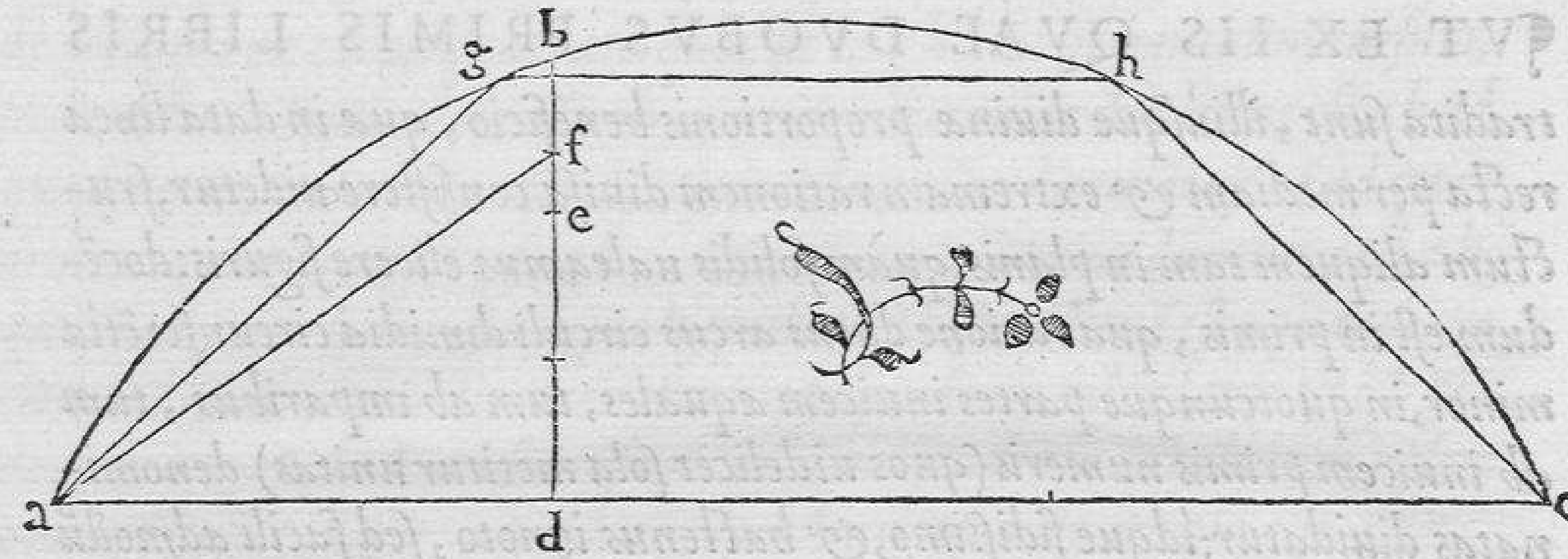
DAtum quemlibet arcum circuli dimidia circunferentia minorem, in quotcunque partes inuicem æquales in primis diuidere.

1 ¶VT EX IIS QVAE DVOBVS PRIMIS LIBRIS *tradita sunt, illiúsque diuinæ proportionis beneficio, quæ in data linea recta per mediam & extremam rationem diuisa consistere uidetur, fructum aliquem tam in planis, quàm solidis ualeamus elicere figuris: docẽdum est in primis, qua ratione datus arcus circuli dimidia circunferẽtia minor, in quotcunque partes inuicem æquales, tum ab imparibus, tum ab inuicem primis numeris (quos uidelicet sola metitur unitas) denominatas diuidatur: idque fidissimo, & hactenus ignoto, sed facili admodũ traditionis artificio. Quo tum ad inuentionẽ lateris dati cuiuslibet regularis polygoni, à quouis numero denominati, quod in dato circulo describendũ proponetur: tum ad cętera non minus utilia, quã iucũda mathematicę rudimenta, tandẽ peruenire ualeamus. Id autẽ peculiaribus aliquot præceptis siue documentis, deinde uniuersali præstare nitemur.*

¶Primum documẽtum, ut datus arcus circuli dimidia circunferentia minor in tres partes inuicẽ æquales diuidatur.

2 ¶QVA RATIONE DATVS ARCVS BIFA*riam in primis diuidatur, & in partes consequenter à pariter paribus numeris denominatas, eum solum ignorare putamus, qui mathematica nunquam legerit (ne dicam intellexerit) elementa: cùm id per solam 30 tertij elementorum absolui uel facilè possit. Sit igitur datus arcus a b c dimidia circunferentia minor, in tres partes inuicem æquales diuidendus: cuius subtensa chorda sit a c. Abscindatur itaque ab eadem a c recta, pars tertia quæ sit a d, per nonam sexti elemẽtorum: suscitetúrque*

recta d b, super eadem a c perpendicularis, per undecimam primi eorundem elementorum. Ab ipsa deinde perpendiculari d b, abscindatur rursum tertia pars, quæ sit b e, per eandem nonam sexti elementorum. Diuidatur postmodum recta b e proportionaliter, seu media & extrema ratione in puncto f, cuius segmentum maius sit b f, per 30 ipsius sexti elementorum. Connectatur demum a f linea recta: nam eadem a f, erit chorda subtendens tertiam partem ipsius dati arcus a b c. Coaptentur igitur ipsi a f æquales a g, g h, h c: coincidet enim h c recta, in ipsum pūctum c (ut ipsa te docebit experientia) erúntque propterea arcus a g, g h, h c æquales adinuicem, per 28 tertij elementorum.



¶Haud dissimili uia colligetur recta subtendens tertiam partem dimidiæ circunferentiæ ipsius circuli, quæ alioqui ex semidiametro satis innotescit: similiter dati cuiuslibet arcus eadem semicircunferētia maioris.

¶Secundum documentum, qualiter idem arcus circuli, dimidia circunferentia minor, in quinque partes inuicem æquales diuidi possit.

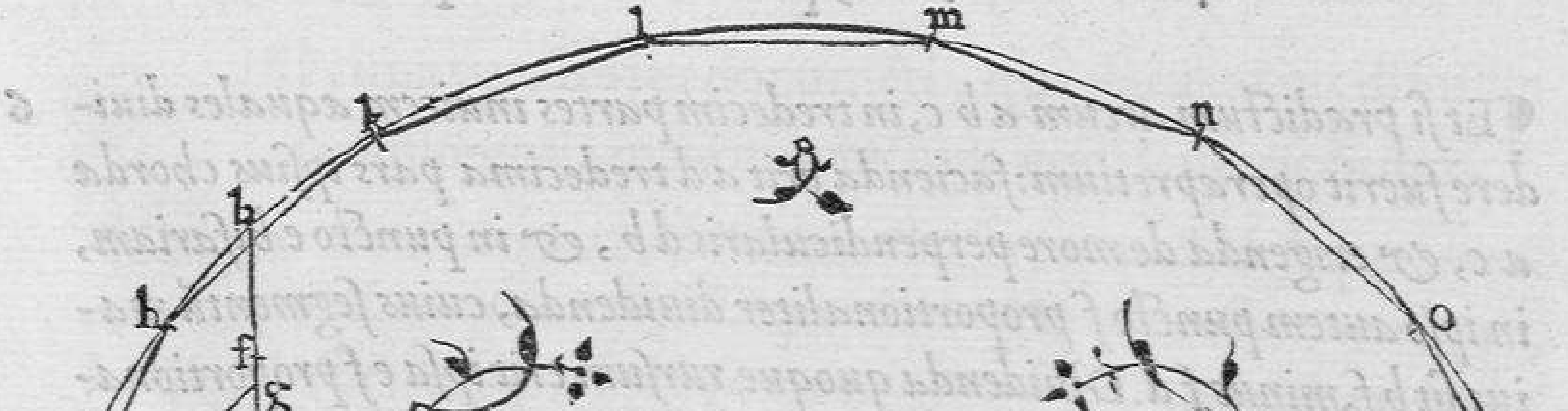
¶QVOD SI DATVS ARCVS CIRCVLI, 3
præfata semicircunferentia minor, in quinque partes inuicem æquales proponatur diuidendus: sic facito. Esto huiuscemodi datus arcus a b c, cuius subtensa chorda sit rursum a c. Abscindatur igitur ab eadem a c, pars illius quinta per nonam sexti elementorum, quæ sit a d. Et erigatur à puncto d, perpendicularis d b: quæ per 30 ipsius sexti elementorum, proportionaliter diuidatur in puncto e, cuius segmentum maius proportionale sit d e. Connectatur tandem a e linea recta: hæc enim erit chorda, subtēdens quintam partem ipsius dati arcus a b c. Coaptentur igitur

eidem

eidem a e æquales a f, f g, g h, h l, l c: quoniam l c coincidet in ipsum punctum c, eritque præfatus arcus a b c diuisus in quinque partes adinuicem æquales, per ipsam 28 tertij elementorum.

¶ Tertium documentum, qua ratione præfatus arcus circuli, eadem semicircunferentia minor, diuidatur in septem partes æquales adinuicem.

4 ¶VBI PORRO DATVS ARCVS DIMIDIA *circuli periphæria minor, in septem partes inuicem æquales sese offeret diuidendus: hac procedendum erit uia. Sit rursum datus arcus a b c, & subtensa illius chorda a c: à qua abscindatur pars septima per ipsam nonam sexti elementorum, quæ sit a d. Ab ipso autem puncto d, perpendicularis excitetur d b: quæ proportionaliter diuidatur in puncto e, similiter & in ipso puncto f, cuius segmenta maiora sint b e atque d f. Consequenter e f, itidem proportionaliter diuidatur in puncto g, cuius segmentum maius sit e g, per sæpiùs allegatam 30 sexti elementorum. Con-*



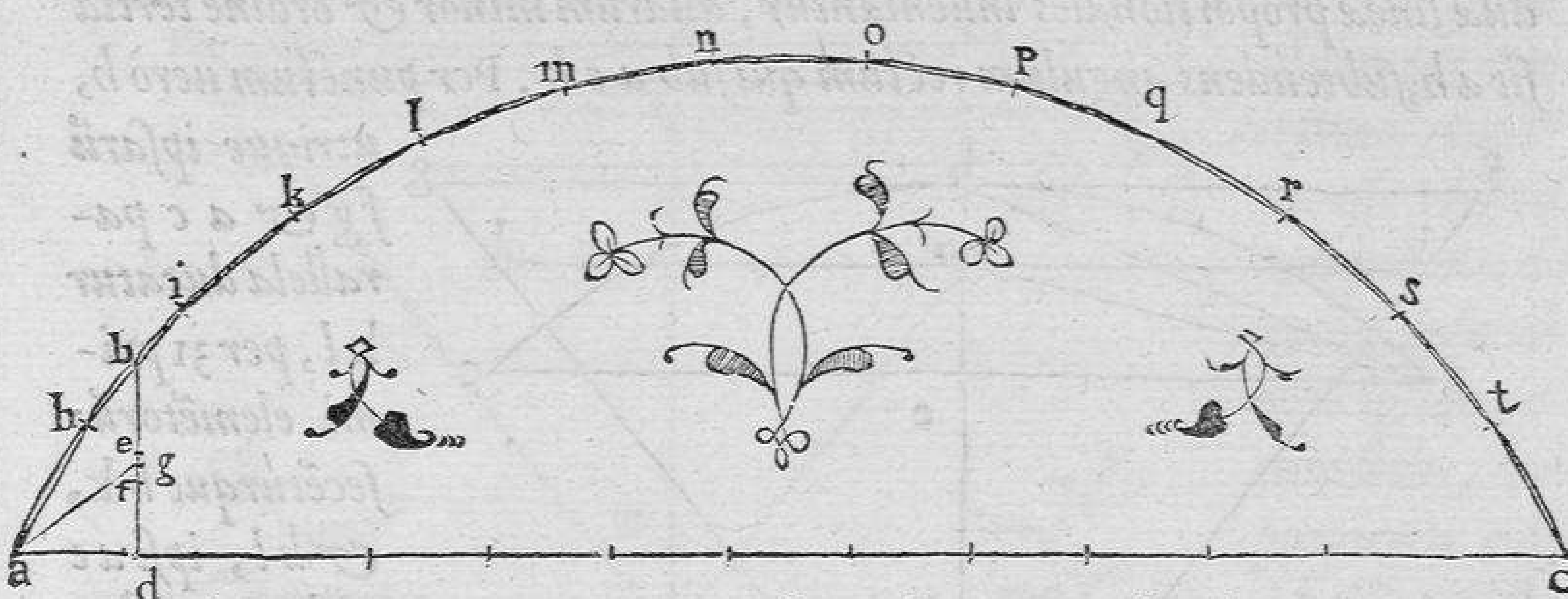
nectatur demum recta a g : nam illa erit chorda subtendens septimam partem ipsius dati arcus a b c. Coaptentur igitur, *per primam quarti elementorum, eidem a g æquales a h, h k, k l, l m, m n, n o, o c, præfatum arcum a b c in septem partes inuicem æquales, per eandem 28 tertij elementorum diuidentes.*

¶ Quartum documentum, de diuisione præfati arcus dimidia circunferentia minoris, in undecim partes inuicem rursum æquales.

¶NEC MINVS FACILE DATVS ARCVS A *b c, præfata semicircunferētia minor, in undecim partes inuicem æquales diuidetur. Secta nāque parte undecima ipsius chordæ a c, quæ sit rursum a d, & erecta perpendiculari d b : sufficit eandem perpendicularem bifariam diuidere in puncto e, & connectere a e lineam rectam, atque illi æquales subtendere a f, f g, g h, h k, k l, l m, m n, n o, o p, p r, r c, quæ præfatum arcum a b c, in undecim partes inuicem æquales diuident.* 5

¶Quintum documentum, qualiter idē arcus dimidia circunferentia minor, in 13 partes inuicē æquales diuidatur.

¶*Et si prædictum arcum a b c, in tredecim partes inuicem æquales diuidere fuerit operæpretium: facienda erit a d tredecima pars ipsius chordæ a c, & erigenda de more perpendicularis d b, & in puncto e bifariam, in ipso autem puncto f proportionaliter diuidenda, cuius segmentū maius sit b f, minus f d. Diuidenda quoque rursum erit ipsa e f proportionaliter in puncto g, cuius segmentum maius sit f g. Nam si connectatur a g linea recta, & illi subtendantur æquales numero 13 : erit datus arcus a b c,* 6 *b c, in tredecim partes inuicẽ æquales distributus. Vt ea quæ sequitur uidetur ostẽdere figura, iuxta præscriptũ documẽtum solito more delineata.*



¶ *Habes igitur uiam apertam colligendi cæteras chordas, quæ partes eiuscemodi arcuum dimidia circunferentia minorum, à reliquis tum imparibus, tum primis adinuicem numeris denominatas: quas ob contingentem earundem rectarum cum periphæriæ partibus confusionem, ulteriùs prosequi consultò supersedemus.*

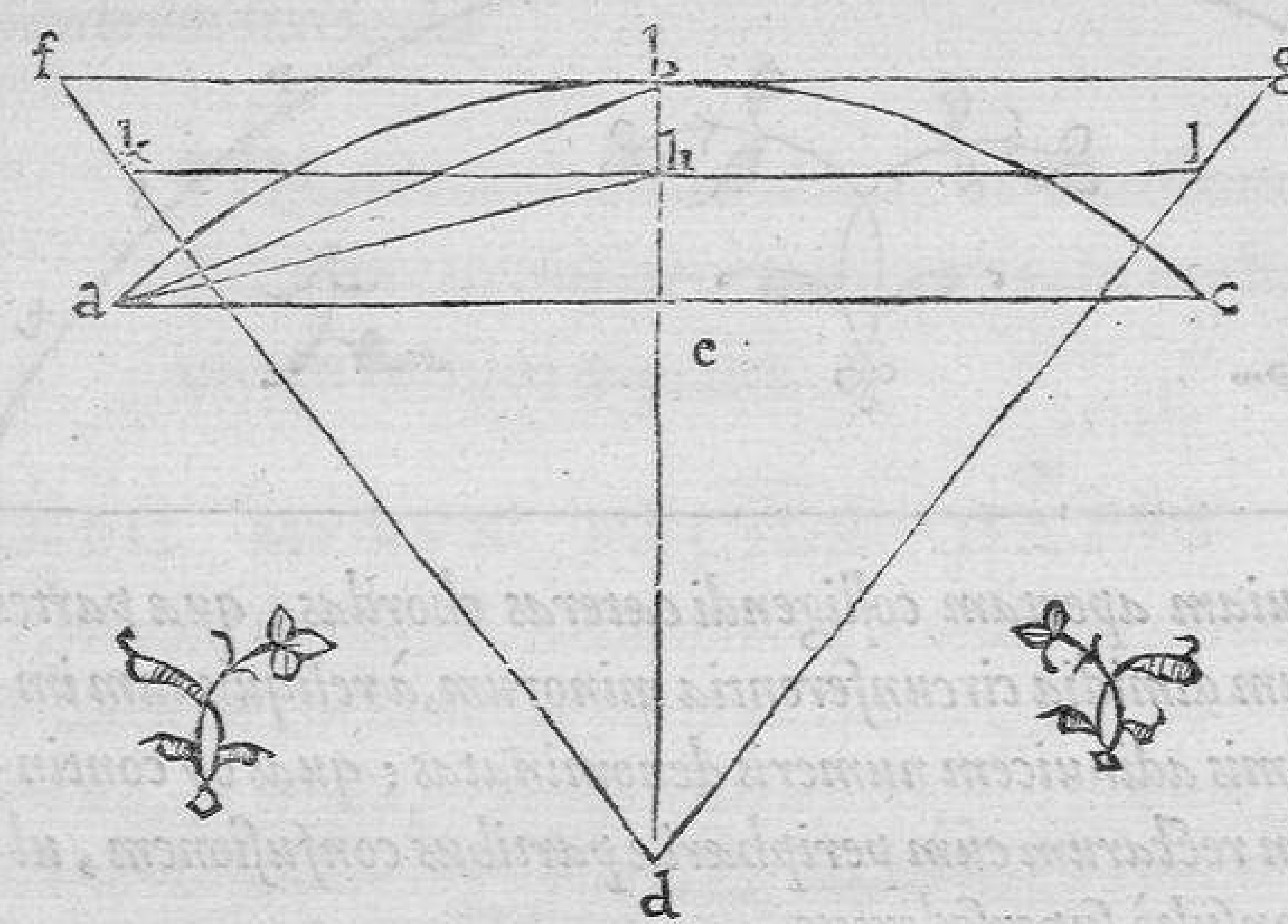
¶Sextum, & generale documentum, quo datus arcus dimidia circunferentia minor, in quotcunque partes inuicem æquales diuiditur.

¶*Iuuat documentum tradere generale, quo datus arcus circuli dimidia circunferentia minor, in quotcunque partes inuicem æquales indifferẽter diuiditur. Id autem adimplere non erit difficile, ubi propositum arcũ in rectam æqualẽ in primis resoluere docuerimus: & arcũ uersa uice colligere, oblatę cuiuis lineæ rectæ, ipsa dimidia circũferentia minori ęqualem. Vtrunque porrò, una eadémq; uia, compẽdiosa quidem & admiratione non indigna, absolui posse tandem comperimus: in hunc modum.*

¶Prima pars huius documẽti, qua datus arcus dimidia circunferentia minor, in rectam æqualem resoluitur.

¶*Sit igitur datus arcus a b c, bifariam diuisus in puncto b: sitque centrũ circuli, cuius datus arcus est sectio, punctum d. Et connectantur a b, a c, b d lineæ rectæ: secétque b d ipsam a c, in puncto e. Secabit autem b d eandem a c bifariam, & ad rectos angulos: cùm bifariam diuidat eundem arcum a b c. Tangat insuper recta quædam linea f g eundem ar-*

cum a b c, in ipso quidem puncto b, eidē a c parallela: & ad rectos proinde consistēs angulos cum ipsa b d. Inter a b consequenter & a e rectas, duæ lineæ proportionales inueniantur, quarum minor & ordine tertia sit a h, subtendens angulum rectum qui sub a e h. Per punctum uerò h,

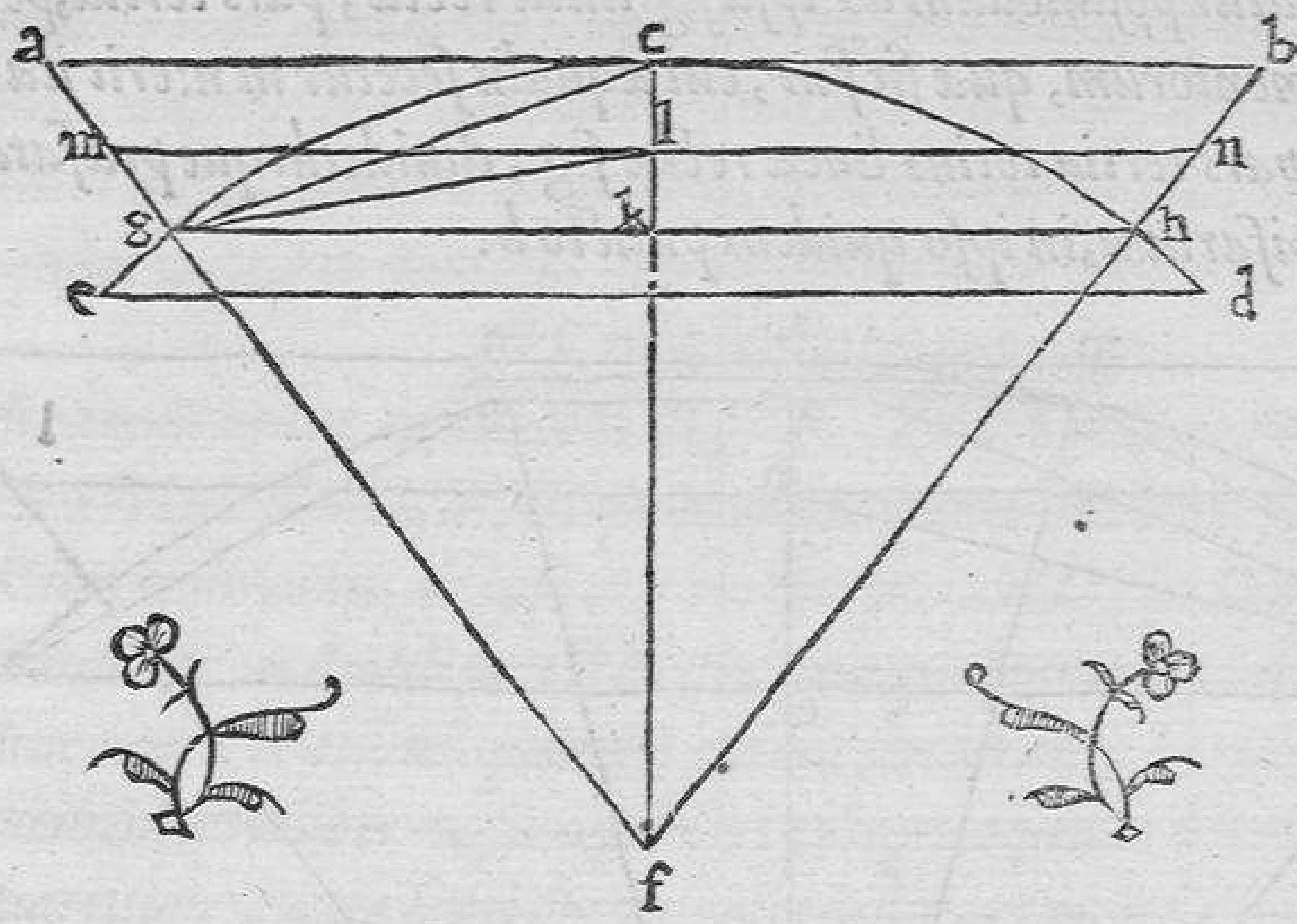


utrique ipsarū f g & a c parallela ducatur k l, per 31 primi elemētorū: secētúrque h k, & h l, ipsi a e uel e c ęquales. Connectantur demumd k & d h lineæ rectę: quæ in directū productæ uersus k & l, contingant rectam f g, in ipsis quidem punctis f & g. Quoniam recta f g, inter d f & d g comprehensa, est æqualis dato arcui a b c.

¶Secunda pars, ut data linea recta in arcum circunferentiæ, eidem rectæ æqualem, uersa uice reducatur.

¶*At si uersa uice, datam lineam rectam, in arcum eidem lineæ rectæ æqualem, reuocare fuerit operæpretium: haud dissimili uia procedendum erit. Sed hīc de rectis uelim intelligas, quæ datæ circunferentiæ partem efficiunt ipsa dimidia circunferētia minorem. Sit igitur data linea recta a b, bifariam diuisa in puncto c: tangénsque circuli sectionem d c e (cuius centrum f) in ipso puncto c: & connectantur a f, c f, b f, lineæ rectæ. Erit igitur a b, cum eadem c f ad angulos rectos constituta. Et si connectantur g c & g h lineæ rectæ, secabitur eadem g h ab ipsa c f bifariam, & ad rectos angulos: eritque g h ipsi a b parallela, quemadmodum ex 4 & 28 primi elementorum concludere haud difficile est. Inter ipsas postmodum g c & g k, duæ lineæ proportionales inueniantur, quarum minor & ordine tertia sit g l, subtendens angulum rectum qui sub g k l. Per punctum denique l, utrique ipsarum a b & g h parallela ducatur m n, per 31 primi eorundem elementorum. Aio itaque, rectam m n esse*

chordam

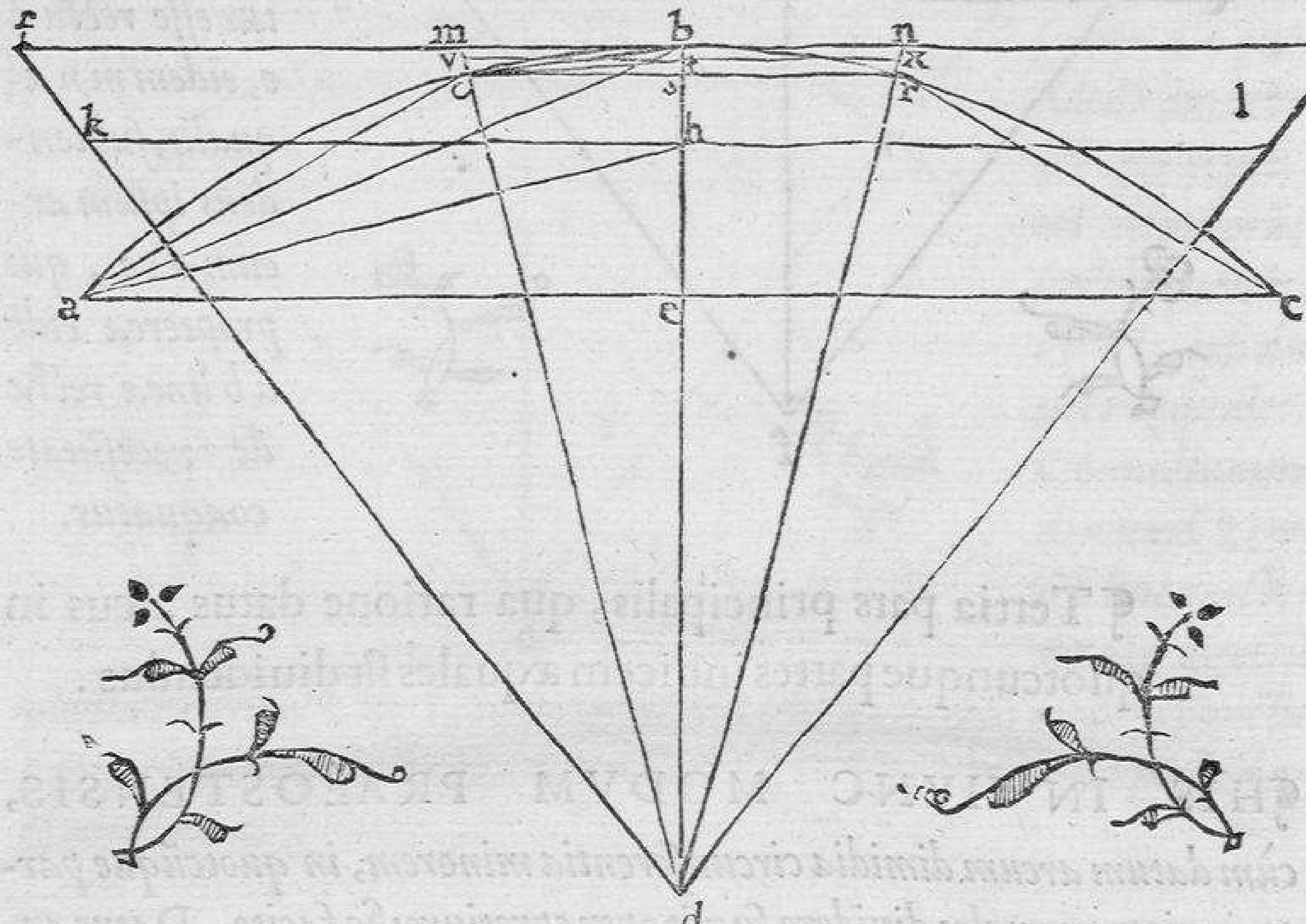


chordam illius arcus, qui datæ a b lineæ rectæ est æqualis: cuiusmodi uidetur esse recta d e, eidem m n æqualis, subtendens ipsum arcum d c e, qui propterea eidẽ a b lineæ rectæ de necessitate coæquatur.

¶ Tertia pars principalis, qua ratione datus arcus in quotcunque partes inuicem æquales sit diuidendus.

¶HIS IN HVNC MODVM PRAEOSTENSIS, *cùm datum arcum dimidia circunferentia minorem, in quotcũque partes inuicem æquales diuidere fuerit operæpretium: sic facito. Datus arcus in lineam rectam, per antecedentem primam partem resoluatur: & ab ipsa linea recta, abscindatur quota siue ordinata pars, ab eo denominata numero, per quem propositus arcus sese offeret diuidendus. Eadem insuper quota pars, in arcum æqualem uersa uice reducatur, per secundam huiusce documenti partem: hoc est, inueniatur chorda, quæ eundẽ particularem subtendit arcum.* Nam *huiuscemodi chorda, toties ipsi arcui dato coaptabitur, quot fuerint unitates in ipso partium exposito numero.* Hæc *autem clariùs dignoscentur, si familiari & ob oculos exposita descriptione, de more fuerint elucidata.*

¶ *Sit igitur datus arcus circunferentiæ circularis a b c, cuius centrum d, chorda autem a e c, bifariam quidem partitus in puncto b, ab ipso uidelicet semidiametro d b: quem arcum a b c, in tres partes inuicẽ æquales (exempli gratia) diuidere sit operæpretium.* Inueniatur *igitur in primis recta linea eidem arcui æqualis, per primam partem huiusce documenti, quæ sit f g, tangens ipsum arcum a b c, atque bifariam diuisa in ipso puncto b: adminiculo uidelicet proportionalis a h, inter a b & a e,* *lineas rectas adinuentæ, & ipsius k l parallelæ, quæ chordæ a e c est æqualis. Abscindatur postmodum ab ipsa f g linea recta, pars tertia, per nonam sexti elementorum, quæ sit f m, cui æqualis secetur m n: erit itaque n g reliqua pars tertia totius lineæ rectæ f g, diuidetúrque præfata m n tertia pars bifariam, in ipso quidem puncto b.*



His in hunc modum absolutis, connectantur d m atque d n lineæ rectæ, quæ secent datum arcum a b c in punctis o & r: & connectatur b o linea recta, unà cum ipsa o r (quæ secet d b semidiametrum in puncto s) inter b o atque o s lineas rectas, duæ lineæ proportionales inueniantur, per doctrinam primi libri, quorum minor & ordine 3 sit o t, subtendens angulum rectum o s t. Et per punctum t, ducatur recta u x, ipsi f g parallela, per 31 primi eorundem elementorum, atque inter d m & d n rectas comprehensa. Erit enim recta u x, chorda quæ subtendit tertiam partem ipsius dati arcus a b c. Hinc igitur u x, tres subtendantur æquales: ut in ipsa cõtinetur figura. Haud aliter faciendum esse uelim intelligas, de cæteris ipsius dati arcus, uel alterius cuiuscunque partibus, tam ab imparibus, quàm à primis adinuicem numeris denominatis. ¶ Horũ porrò documentorum traditiones, in præsentiarum nullo alio quàm oculari, & ad iustam circini rationem obseruato, confirmauimus demonstrationis examine: ne uolumen hoc, alioqui satis amplum, ob uarias atque difficiles rectarum supputationes, in iniustum contingat foliorum produ-

producere numerum. Quæ si quis forsitan Orötiomastix, & ad calumniam potius, quàm ad frugem natus homuntio, minus probauerit: præstet (dummodo id concedatur) meliora, & consideret quantum intersit inter improbum obtrectatorem, & eum qui aliquid non minus gratum quàm utile, pro concessa ingenij dexteritate molitur.

¶Corollarium primum.

8 ¶*Omnis igitur rectilineus angulus, & proinde angulus rectus ab ipso quadrante dimensus, in quotcunque partes inuicem æquales diuidetur. Cùm enim arcus ab ipso angulo comprehensus, sit dimidia circunferentia minor, is diuidi potest in quotcunque segmenta adinuicem æqualia: siue antecedentibus quinque primis documentis (unamquanque sectionem, in quotlibet rursum partes inuicem æquales diuidendo) seu generali partitione, iuxta sexti documenti traditionem, uti libuerit.*

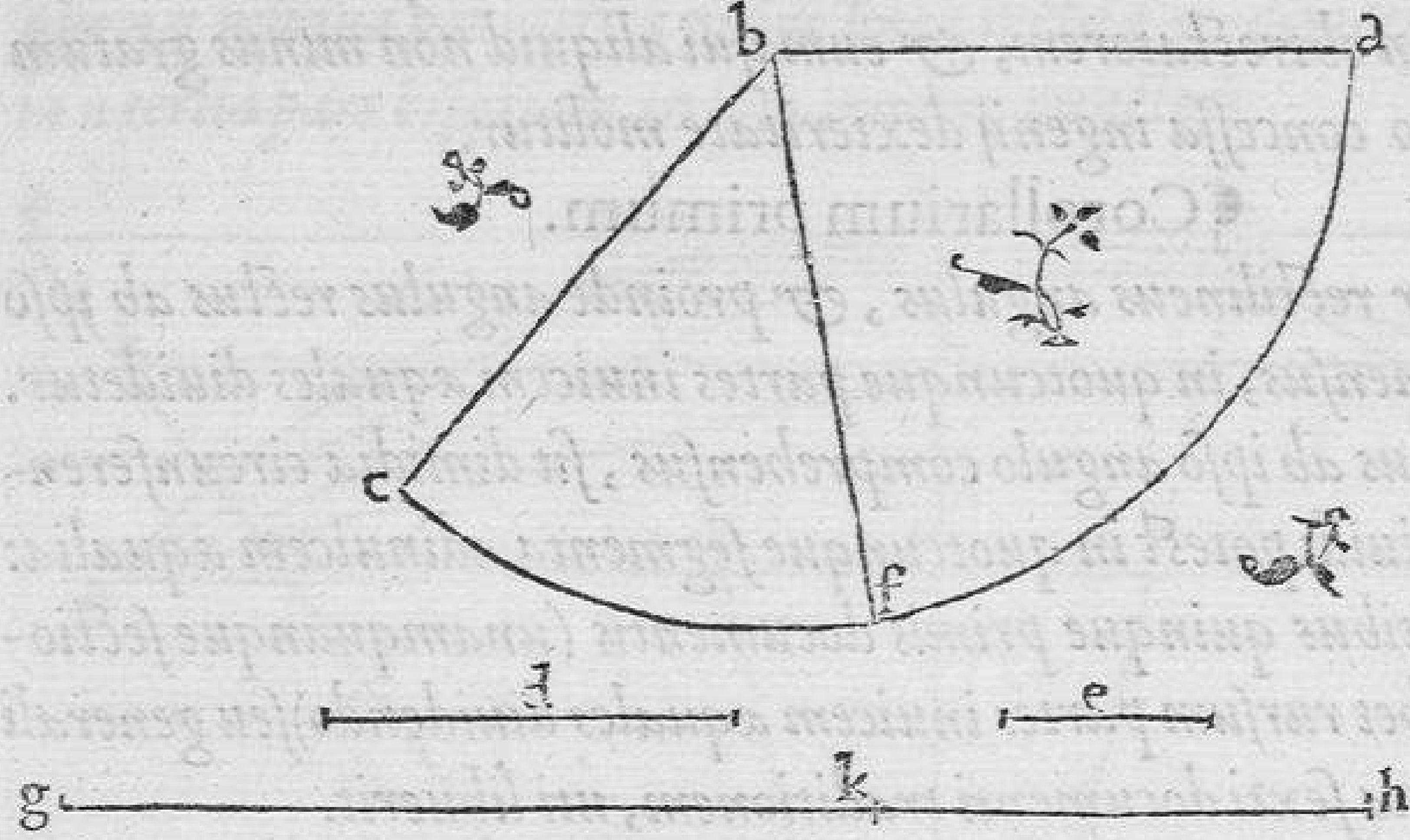
¶Corollarium secundum.

9 ¶*Circunferentia insuper dati cuiuslibet circuli, in quotcunque partes inuicem æquales pendenter diuisibilis erit. Diuiso enim ipsius circuli quadrante, in liberas partes adinuicem æquales: quadruplum uniuscuiusque partis, efficiet totius circunferentiæ partem similem: ipsáue quadrantis pars eiusdem circunferentiæ restituet à quadruplo numero denominatam. Vtpote, si quadrans diuisus fuerit in septem partes adinuicem æquales, quadruplum septimæ partis illius, erit totius circunferentiæ pars septima: uel eadem pars septima, eiusdem circunferentiæ pars uigesimaoctaua. Et in hunc modum de cæteris.*

¶Corollarium tertium.

10 ¶*Omnis præterea rectilineus angulus, sub quauis ratione data proportionaliter diuidetur. Sit enim datus angulus rectilineus a b c, sub a b & b c rectis comprehensus: data uerò ratio, sub qua idem angulus diuidi iubeatur, quæ d ad e. Circa igitur punctum b, ex alterutra duarum a b uel a c, circunferẽtia describatur a f c: quæ ipsius anguli a b c, ueram & ad centrum relatam exprimet quantitatem. Conuertatur itaque, per primam partem antecedentis sexti documenti, arcus a f c in lineam rectam, quæ sit g h. Deinde fiat ut d ad e, sic g h recta, ad quartam proportionalem h k, per 12 sexti elementorum. Ipsa postmodum h k linea recta, in arcum ipsius reuocetur circuli (cuius centrum b) per secundam partẽ eiusdem sexti documenti: utpote, in arcum c f. Erit igitur, ut arcus a f c ad arcum c f, sic recta g h ad rectam h k: & proinde ut d ad e, per undecimam quinti eorundem elementorum. Connectatur ergo recta b f. An-*

gulus itaque a b c, ad angulum c b f eandem rationem obtinebit, quam arcus a f c ad arcum c f, per ultimam ipsius sexti elementorum: & consequẽter quã d ad e.



¶ Subcorollarium.

¶ Sector igitur b c a, sub eadem ratione quæ d ad e, diuisus erit: se habent enim sectores adinuicẽ, ut ipsi arcus ab eisdem sectoribus comprehẽsi, per eandem ultimam sexti elementorum.

¶ Corollarium quartum.

¶ Vnaquæque præterea multangula atque regularis figura rectilinea, in dato circulo describi consequenter uel facilè poterit. Regulares enim appellantur figuræ rectilineæ, quę æqualia habent latera, & angulos pariter adinuicem æquales. Hæ autem in circulo describi dicuntur, quãdo unusquisque figuræ angulus circunferẽtiam ipsius circuli tangit, per tertiam quarti libri elementorum diffinitionem. Diuisa autem circunferentia in tot partes inuicem æquales, quot sunt latera uel anguli in data figura rectilinea, & ad singula proxima diuisionum puncta applicata linea recta, cadent singulæ lineæ rectæ intra circulum, & per secundam tertij elementorum: concursus autem laterum ipsos angulos continentium, in eadem circunferentia de necessitate consistent. 11

PROPOSITIO II.

EX triangulo isoscele, cuius unusquisque angulus, qui ad basin duplus sit reliqui: cætera isoscelia colligere triãgula, quorum uterque angulus qui ad ipsam basin, eas rationes ordine seruet ad reliquum, quam dati numeri super binarium ad unitatem.

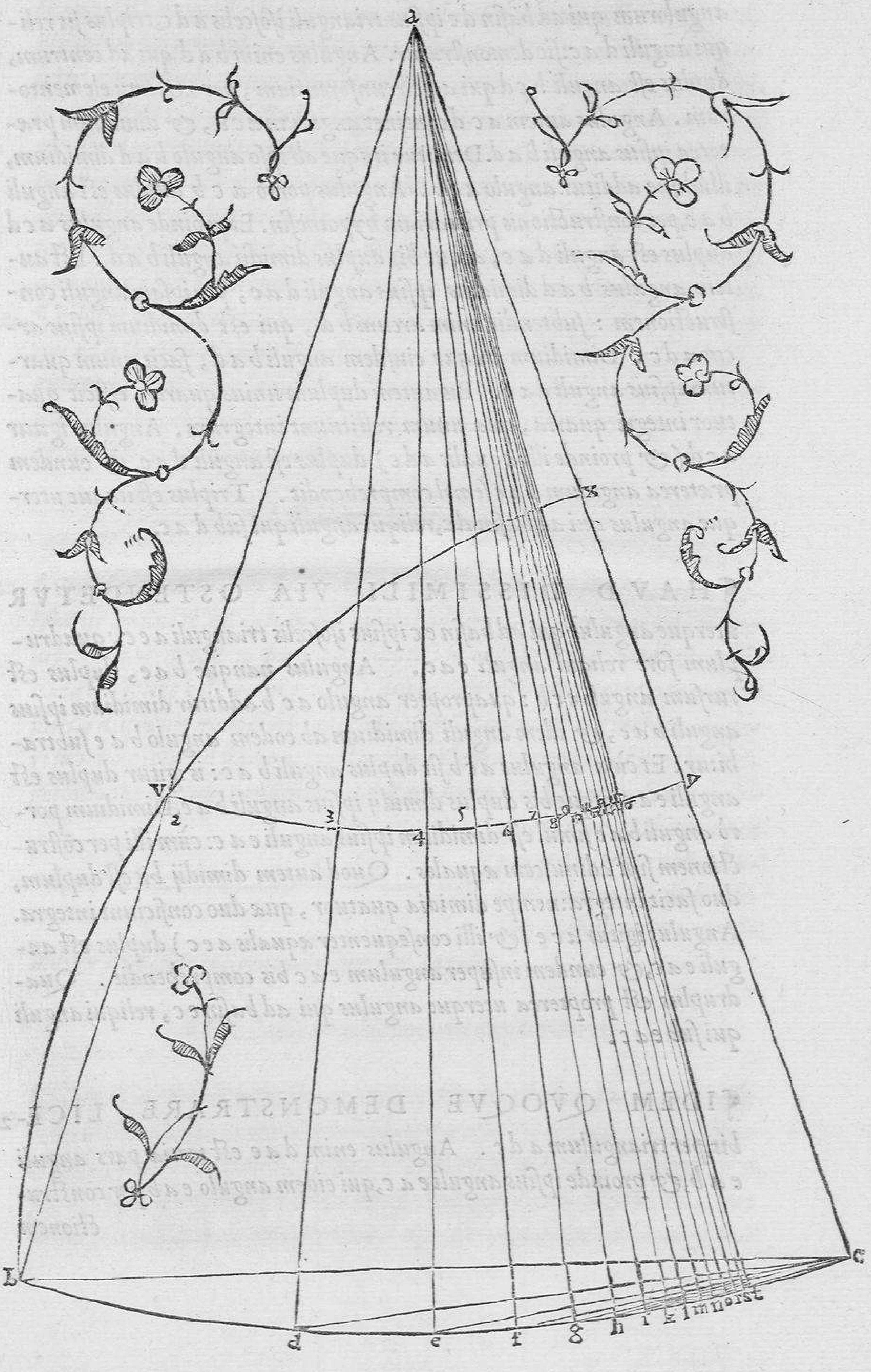
¶ Describatur igitur in primis triangulum isosceles a b c, cuius uterque angulus qui ad basin b c duplus sit reliqui anguli qui sub b a c, per decimam 1

2 mam quarti elementorum. ¶ Fit autem huiuscemodi triangulũ isosceles
(ut illius perstringamus artificium) si latus a b uel a c proportionaliter,
seu media & extrema ratione diuidatur, & segmento maiori æqualis
fiat basis ipsa b c. Centro postmodum a, interuallo autem a b uel a c, de-
scribatur arcus circuli b d c, subtendens ipsam rectam siue basin b c triã-
3 guli a b c. ¶ His in hunc modum præparatis, diuidatur in primis arcus a
d c in tres partes inuicem æquales, per primum, aut sextum documentum
antecedentis primæ propositionis, cuius tertia pars sit b d: & connectã-
tur a d & d c lineæ rectæ. Triangulum enim a d c erit isosceles, & ha-
4 bebit unumquemque angulum qui ad basin d c triplum reliqui. ¶ Diui-
datur consequenter præfatus arcus b d c, bifariam in puncto e, per 30
tertij elementorum: & connectantur a e & e c lineæ rectæ. Quoniam
triangulum a e c, erit rursum isosceles: & uterque illius angulus qui ad
5 basin e c, quadruplus reliqui anguli qui sub e a c. ¶ Diuidatur insuper
arcus e c in quinque partes inuicem æquales, per secundum uel sextum
ipsius antecedentis primæ propositionis documentum, cuius quinta pars
sit e f: connectantúrque a f, & f c lineæ rectæ. Trianguli nanque isoscelis
a f c, uterque angulus qui ad basin f c quintuplus erit reliqui, quarta
6 uidelicet parte quadruplum excedens qui sub a e c. ¶ Et si arcus d c bifa-
riam diuidatur in puncto g, per ipsam 30 tertij elementorum, & conne-
ctantur a g & g c lineæ rectæ: erit consequenter triangulum a g c isosce-
les, habens unumquemque angulum qui ad basin g c sextuplum reliqui,
7 bis enim triplus efficit sextuplum. ¶ Præterea, si arcus g c in septem par-
tes inuicem æquales diuidatur, per tertium aut sextum documẽtum eius-
dẽ primæ propositionis, cuius septima pars sit g h, cõnectãtúrque a h &
h c lineæ rectæ: uterque angulus qui ad basin h c ipsius isoscelis trianguli
a h c, reliqui anguli septuplus erit, nempe sextuplum qui sub a g c una
8 sexta superans. ¶ Consequenter, si arcus e c bifariam diuidatur in pun-
cto i, per 30 tertij elementorum, & connectantur a i & i c lineæ rectæ:
triangulum a i c erit pendenter isosceles, & habebit utrumque angulum
qui ad basin i c octuplũ reliqui, quadrupli uidelicet qui sub a e c duplũ.
9 ¶ Item si arcus d c in tres partes inuicem æquales diuidatur, per ipsum
primum aut sextum antecedentis primæ propositionis documentũ, cuius
tertia pars sit c k, & connectantur a k & k c lineæ rectæ: fiet rursum
triangulum isosceles a k c, cuius uterque angulus qui ad basin k c nonu-
10 plus erit reliqui, hoc est, tripli qui sub a d c triplus. ¶ Diuidendo post-
modum ipsum arcum f c bifariam in puncto l, per sæpiùs allegatam 30

tertij elementorum, & connexis de more a l & l c lineis rectis: trianguli isoſcelis a l c quilibet angulus qui ad baſin l c reliqui anguli decuplus erit, ſiue quintupli qui ſub a f c duplus. ¶ Inſuper, ſi arcus l c in decẽ par- 11
tes inuicem æquales diuidatur, hoc eſt in duas, & quælibet in quinque, cuius decima pars ſit l m, connectantúrque a m & m c lineæ rectæ: triãgulum isoſceles a m c, habebit unũquemque angulũ qui ad baſin m c undecuplũ reliqui, hoc eſt decuplũ qui ſub a l c una decima parte ſuperãtẽ.
¶ Diuidatur præterea arcus g c bifariã in puncto n, per ipſam 30 tertij 12
elementorũ, & connectantur a n & n c lineæ rectæ: fiet enim triangulũ isoſceles a n c, cuius uterque angulus qui ad baſin n c dodecuplus, ſeu bis ſextuplus erit reliqui. ¶ Quòd ſi arcus n c in duodecim partes inuicem æ- 13
quales diuidatur, primò quidem in duas, & quelibet rurſum in duas, & tandem quælibet in tres, cuius pars duodecima ſit n o, & connectantur a o & o c lineæ rectæ: fiet rurſum triangulũ isoſceles a o c, habens utrũque angulum qui ad baſin o c tredecuplum reliqui, hoc eſt, dodecuplum, qui ſub a n c una duodecima parte ſuperantem. ¶ Haud diſsimili uia, ſi 14
arcus h c bifariam diuidatur in puncto r, per ipſam 30 tertij elementorum, & connectantur a r & r c lineæ rectæ: unuſquiſque angulus qui ad baſin r c ipſius trianguli isoſcelis a r c, eam rationem habebit ad reliquum, quam 14 ad unitatem: erit enim bis ſeptuplus qui ſub a h c contitur. ¶ Adde, quòd ſi arcus f c in tres partes inuicem æquales diuidatur, 15
cuius tertia pars ſit c s, & connectantur a s & s c lineæ rectæ: conſurget rurſum triangulum isoſceles a s c, cuius uterque angulus qui ad baſin s c eam rationem habebit ad reliquum, quam 15 ad 1, nempe ex quintupla ratione ipſius anguli a f c ad ſuum reliquum ter ſumpta reſultantem.
¶ Poſtremò, ſi arcus i c bifariam diuidatur in puncto t, connectantúrque 16
a t & t c lineæ rectæ: cauſabitur isoſceles triangulum a t c, cuius uterque angulus qui ad baſin t c, ſedecuplus eſt reliqui, hoc eſt, octupli qui ſub a i c duplus: quanto enim minuitur arcus baſis, tanto uidetur augeri contentus ad ipſam baſin angulus. ¶ Et deinceps in hunc modum de 17
cæteris isoſcelibus triangulis faciendum, ac pendenter cõtinuandum eſſe uelim intelligas: quorum deſcriptiones particulares, tum propter laterũ atque baſium eorundem triangulorum confuſionem, tum ob infinitum illorum progreſſum, ulterius exprimere iure ſuperſedemus.

¶ Supradictorum demonſtratio.

¶ QVOD AVTEM IN PRIMIS VTERQVE 18
angulorum


a
x
y
v
2
3
4
5
6
7
8
b
c
d
e
f
g
h
i
k
l
m
n
o
r
s
t

angulorum qui ad basin d c ipsius trianguli isoscelis a d c, triplus sit reliqui anguli d a c: sic demonstratur. Angulus enim b a d qui ad centrum, duplus est anguli b c d qui ad circunferentiam, per 20 tertij elementorum. Angulus autem a c d continet angulum a c b, & dimidium præterea ipsius anguli b a d. Demitur itaque ab ipso angulo b a d dimidium, illúdque additur angulo a c b. Angulus porrò a c b duplus est anguli b a c, per constructionis primariam hypothesin. Et proinde angulus a c d duplus est anguli d a c, atque bis duplus dimidii anguli b a d. Est autem angulus b a d dimidius ipsius anguli d a c, per ipsam anguli constructionem: subtendit enim arcum b d, qui est dimidium ipsius arcus a d c. Dimidium itaque eiusdem anguli b a d, facit unum quartum ipsius anguli d a c. Bis autem duplum unius quarti, efficit quatuor integri quarta, quæ unum restituunt integrum. Angulus igitur a c d (& proinde illi æqualis a d c) duplus est anguli d a c, & eundem præterea angulum d a c semel comprehendit. Triplus est itaque uterque angulus qui ad basin d c, reliqui anguli qui sub d a c.

¶HAVD DISSIMILI VIA OSTENDETVR 19
uterque angulus qui ad basin e c ipsius isoscelis trianguli a e c, quadruplum fore reliqui anguli e a c. Angulus nanque b a e, duplus est rursum anguli e c b: quapropter angulo a c b additur dimidium ipsius anguli b a e, & idem anguli dimidium ab eodem angulo b a e subtrahitur. Et cùm angulus a c b sit duplus anguli b a c: is igitur duplus est anguli e a c, atque bis duplus dimidij ipsius anguli b a e. Dimidium porrò anguli b a e simul est dimidium ipsius anguli e a c: cùm illi per cõstructionem sint adinuicem æquales. Quod autem dimidij bis est duplum, duo facit integra: nempe dimidia quatuor, quæ duo conficiunt integra. Angulus igitur a c e (& illi consequenter æqualis a e c) duplus est anguli e a c, & eundem insuper angulum e a c bis comprehendit. Quadruplus est propterea uterque angulus qui ad basin e c, reliqui anguli qui sub e a c.

¶IDEM QVOQVE DEMONSTRARE LICE- 20
bit, per triangulum a d c. Angulus enim d a e est tertia pars anguli e a b, & proinde ipsius anguli e a c, qui eidem angulo e a b per constru-

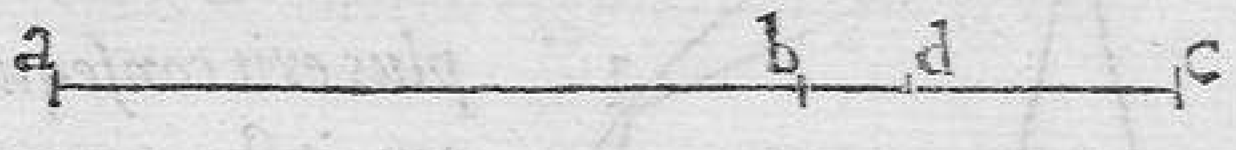
ctionem

ctionem est æqualis. Et quoniam angulus d a e duplus est anguli e c d, per ipsam 20 tertij elementorū: erit idem angulus e c d dimidium unius tertij, & proinde unum sextum anguli e a c. Angulus porrò a c d, ostensus est triplus anguli d a c: angulus igitur a c e triplus est anguli e a c, & simul bis triplus unius sexti eiusdem anguli e a c. Bis autem tria sexta, efficiunt sexta sex, quæ unum ualent integrum. Angulus igitur a c e (& illi consequenter æqualis a e c) triplus est anguli e a c, & illū prætere a semel comprehendit. Quadruplus est itaque angulus uterque qui ad basin e c, reliqui anguli qui sub e a c. Quæ ostendenda susceperamus.

21 ¶*Eisdem quoque argumentis demonstrare licebit, propositas angulorum qui ad bases reliquorum isoscelium triangulorum rationes, ad eum angulum qui sub ipsis æqualibus lateribus continetur: comparatis tum inuicem, tum cum ipso a e c triangulo, cęteris isoscelibus triangulis, atque eorundem triangulorum angulis.*

¶Assumpti confirmatio.

22 ¶*Quòd autem duabus inæqualibus quantitatibus datis, si tantum auferatur à minore, quantum ipsi maiori additur, augmentetur ipsa maior supra minorem eadem parte bis sumpta: sic confirmatur. Sit enim recta linea a b ipsius c d (uerbi gratia) dupla: & detrahatur ex ipsa minore pars b d, ipsique maiori a b superaddatur. Clarum est a b rectam, augeri super d c ipsa b d parte detracta: quæ eidem a b rursum adiuncta, auget quoque rursum eandem a b, præfata parte b d. Quare recta b d augetur super d c, bis sumpta parte d b. Idem uelim habeas iudicium, de similibus quibuscunque, & similiter propositis magnitudinibus, & angulis.*



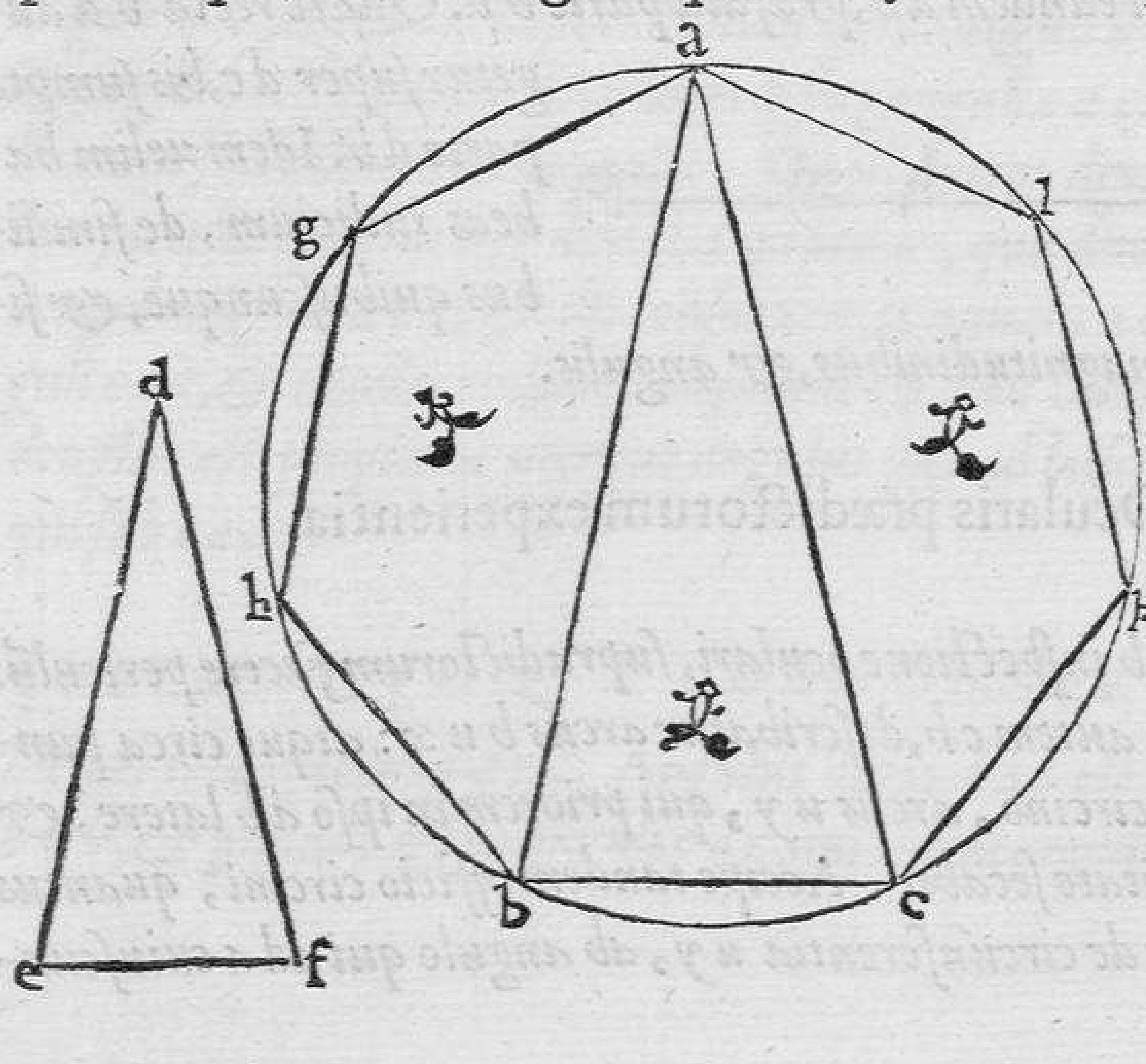
¶Ocularis prædictorum experientia.

23 ¶*Si iuuet autem ab inspectione oculari, supradictorum facere periculū: centro c, interuallo autem c b, describatur arcus b u x: atque circa punctum a, inuariato circino, arcus u y, qui priorem in ipso a b latere, & puncto u de necessitate secabit. Accipe tandem officio circini, quantus arcus subtendatur de circunferentia u y, ab angulo qui ad a cuiuscun-*

que uolueris iſoſcelis trianguli: nam toties idem arcus cõtinebitur in circunferentia b u x, quoties uterque angulus qui ad baſin dicitur cõtinere reliquum.

¶Corollarium, de regularium polygonorum deſcriptione, in dato circulo, per iſoſcelia triangula.

¶DATVM IGITVR QVODVIS POLYGONVM *æquilaterum & æquiangulum, in dato circulo uel facilè deſcribetur. Vt enim undecima quarti elementorum Euclidis, officio trianguli iſoſcelis, cuius uterque angulus qui ad baſin duplus eſt reliqui, pentagonũ æquilaterum & æquiangulum in dato circulo deſcribitur: haud diſsimili uia cætera polygona æquilatera & æquiangula, adminiculo reliquorum iſoſcelium triangulorum, quorum anguli qui ad baſin eam rationem ordine ſeruant ad reliquum, quam cæteri numeri ſupra binarium ad ipſam unitatem, deſcribi uel facilè poterunt.* ¶ *Vt ſi propoſitum fuerit (exempli gratia) heptagonum regulare, hoc eſt, æquilaterum & æquiangulum, in dato circulo a b c deſcribendum: conſtruendum erit in primis triangulum iſoſceles d e f, cuius uterque angulus qui ad baſin e f triplus ſit reliqui, ut in hac propoſitione traditum eſt. Huic poſtmodũ triangulo d e f æquiangulum triangulum in dato circulo a b c deſcribatur, per ſecundam quarti elementorum, utpote triangulum eiſdem literis a b c deſignatum. Et quoniam uterque angulus qui ad baſin e f, triplus eſt reliqui: uterque ſimiliter angulus qui ad baſin b c, reliqui triplus erit. Et proinde uterq; arcus a b & a c, triplus erit conſequẽter ipſius arcus b c, ſubtendẽtque de neceſsitate ter baſin ſiue rectã b c, quæ eſt latus ipſius heptagoni regularis. Si coaptẽtur igitur ipſi b c lineæ rectæ æquales a g, g h, h b, c k, k l,* 24



k l, l a, per primã quarti elementorũ : descriptũ erit in dato circulo a b c, heptagonum a g h b c k l. Quod in primis constat esse æquilaterum: illius nanque latera, eidem basi seu rectæ b c sunt æqualia, & proinde æqualia adinuicem. Et eadem latera subtendentes arcus, inuicem pariter æquales: quoniam in eodem circulo, æquales rectæ lineæ æquales auferunt arcus, per 28 tertij elementorum. ¶ Poterit & uterque arcus a b & a c, in tres partes inuicem æquales prima fronte diuidi, per primum aut sextum antecedentis primæ propositionis documentum : a b quidem in punctis g & h, & a c in punctis k & l. Nam connexis a g, g h, h b, c k, k l, l a lineis rectis, idem heptagonum æquilaterum a g h b c k l in eodem circulo descriptum erit: horum siquidem arcuum quilibet ipsi b c, & omnes proinde inuicem sunt æquales. In eodem porrò circulo, sub æqualibus arcubus æquales rectæ lineæ subtenduntur, per 29 tertij elementorum. ¶ Aequilaterum est igitur ipsum a g h b c k l heptagonum: aio quòd & æquiangulum. Quilibet enim angulus ipsius heptagoni a g h b c k l, subtendit quinque partes inuicem æquales, qualium tota circunferentia est septem : & anguli qui super æquales deducuntur arcus, sibi inuicem sunt æquales, siue ad centrum, siue ad circunferentiam deducti fuerint, per 27 ipsius tertij elementorum. Aequiangulum igitur, & æquilaterum, præfatum heptagonum a g h b c k l, & in dato circulo promissa facilitate descriptum. ¶ Haud dissimili uia cum triangulo isoscele, cuius uterque angulus qui ad basin quadruplus fuerit reliqui, nonagonum æquilaterum & æquiangulum, in ipso describetur circulo: Similiter & undecagonum, coadiuuante triangulo isoscele, cuius uterque angulus qui ad basin quintuplus fuerit reliqui. Et deinceps in hunc modum, de cæteris regularibus polygonis.

¶ Notandum.

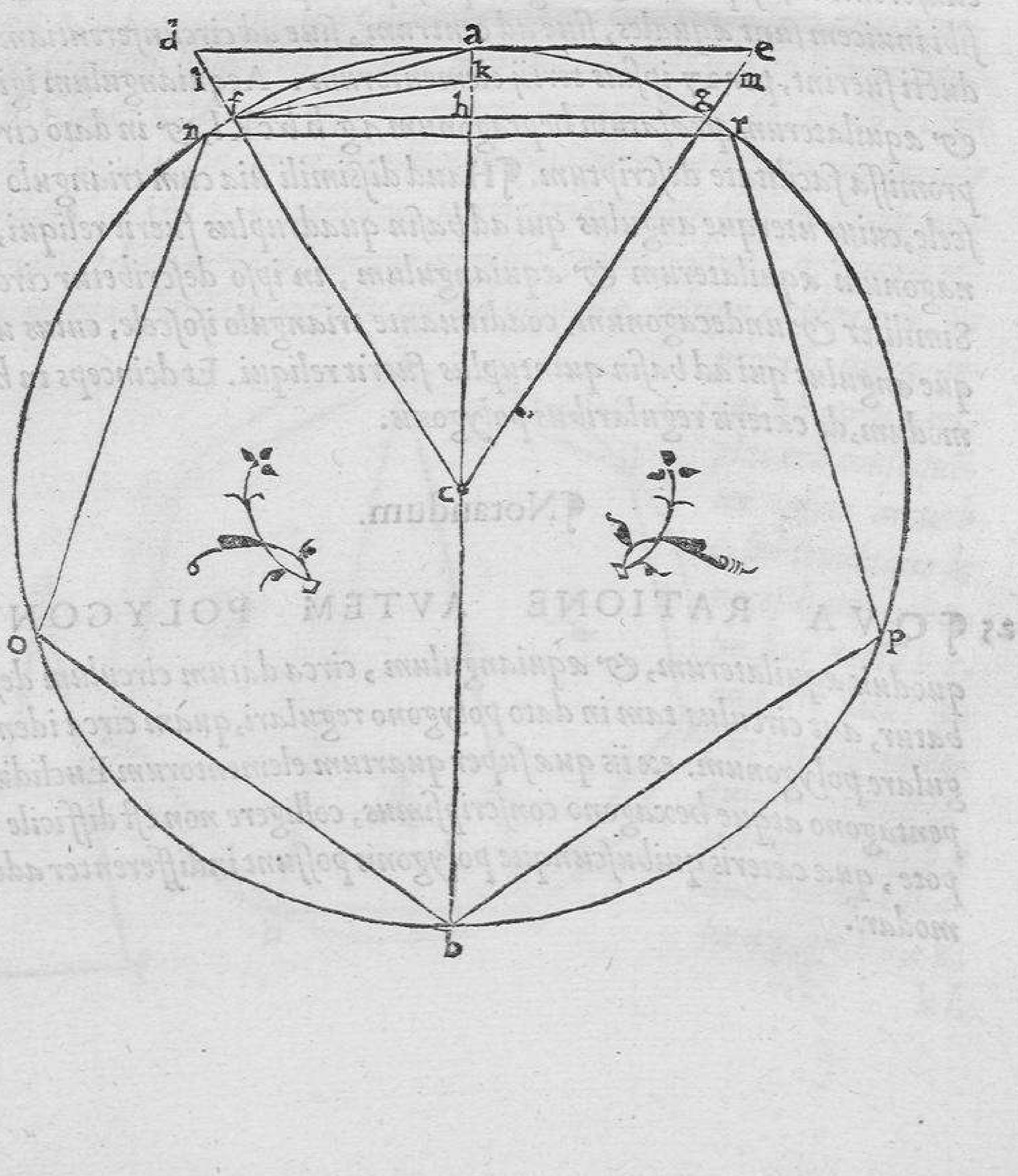
25 ¶ QVA RATIONE AVTEM POLYGONVM *quoduis æquilaterum, & æquiangulum, circa datum circulum describatur, aut circulus tam in dato polygono regulari, quàm circa idem regulare polygonum: ex iis quæ super quartum elementorum Euclidis, de pentagono atque hexagono conscripsimus, colligere non est difficile : utpote, quæ cæteris quibuscunque polygonis possunt indifferenter adcommodari.*

PROPOSITIO III.

Latus datę cuiuslibet multangulæ atque regularis figuræ, quæ in dato circulo describenda proponetur, alia ratione colligere.

¶*Id in primis uniuersaliter absoluemus, per secundam uidelicet partem sexti documenti antecedentis primæ propositionis: inueniendo quippe lineam rectam, quæ datam circunferentiæ partem, à qua propositum denominatur polygonum, subtendere uidetur. Sit igitur datus circulus, cuius diameter a b, centrum uerò c: in quo quidem circulo, operæpretium sit describere pentagonum (uerbi gratia) æquilaterum & æquiangulum. Vertenda erit igitur in primis ipsius dati circuli peripheria, circunferētiáue, in lineam rectam, per primam aut secundam propositionem antecedentis secundi libri. Ab ipsa deinde linea recta, secanda erit quota siue* 1

ordinata



ordinata pars, per eum expressa numerum, à quo datum & inscribendum polygonum denominatur, utpote quinta, per non im sexti elementorum. Hinc igitur quintæ parti circunferentiæ, æqualis esto recta d e, tangens ipsum datum circulum, atque bifariam diuisa in ipso puncto a, & ad rectos angulos cum a b semidiametro constituta. Connectantur postmodum c d atque c e lineæ rectæ, quæ secent circuli periphæriam in punctis f & g: & connectātur a f & f g lineæ rectæ, secētque f g ipsum diametrum a b in puncto h. Erit igitur f g ipsi d e parallela: & bifariam diuisa ab eodem circuli dimetiente, in puncto h. Inter a f consequenter & f h rectas, duæ lineæ rectę continuè proportionales inueniātūr, per doctrinam antecedentis libri primi: quarum minor, & ordine tertia, sit f k, subtendens angulum rectū qui sub f h k. Et per punctū k, utrique ipsarum d e atque f g parallela ducatur l m, per 31 primi elementorum, inter c d atque c e rectas comprehensa. His in hunc modum constructis, erit recta l m latus pentagoni æquilateri & æquianguli in eodem circulo descripti: nempe subtendens arcum n r, ipsi d e quintā circunferentiæ partem repræsentanti æqualē. Subtendantur ergo eidem l m æquales, n o, o b, b p, p r, & o r, regulare pentagonum n o b p r comprehendentes. Haud aliter heptagonum, aut datum quoduis aliud polygonum regulare, in eodem circulo describere licebit.

2 ¶*Quòd autem ipsa l m sit latus pentagoni, & ipsa proinde secunda pars præallegati sexti documenti antecedentis primæ propositionis fidelis & uera: solito numerorum examine, in hunc modum confirmatur. Supponatur itaque, circuli diameter a b fore partium 120: & proinde semidiameter a c similiū partiū 60. Qualium autē partiū diameter est 120, talium circunferentia est 376, & minutorum 55, 23, 4, 36, 52, per ostensam circunferentiæ rationem ad ipsum diametrū. Quinta pars igitur circunferentiæ, habet partes 75, & minuta 27, 4, 36, 55, 22, 24: tāta est igitur ipsa d e, & illius dimidia d a similium partium 37, & minutorum 41, 32, 18, 27, 41, 12. Horum autem quadratum, habet partes 1420, & minuta 42, 36, 12, 46, 26, 19, 10, 17, 45: quæ iūcta 3600 partibus quadrati semidiametri a c, cōficiunt quadratū ipsius d c, per 47 primi elementorum, partiū quidem 6020, & minutorū 42, 36, 12, 46, 26, 19, 10, 17, 45. Quorū radix quadrata, hoc est, ipsa d c recta, habet partes 70, & minuta 51, 25, 5, 18, 32, 30. Et quoniā triangula c d a & c f h, sunt inuicem æquiangula, per 29, & 32 primi elementorum: erit per quartam sexti eorundem elementorum, ut c d ad ipsam d a, sic c f ad*

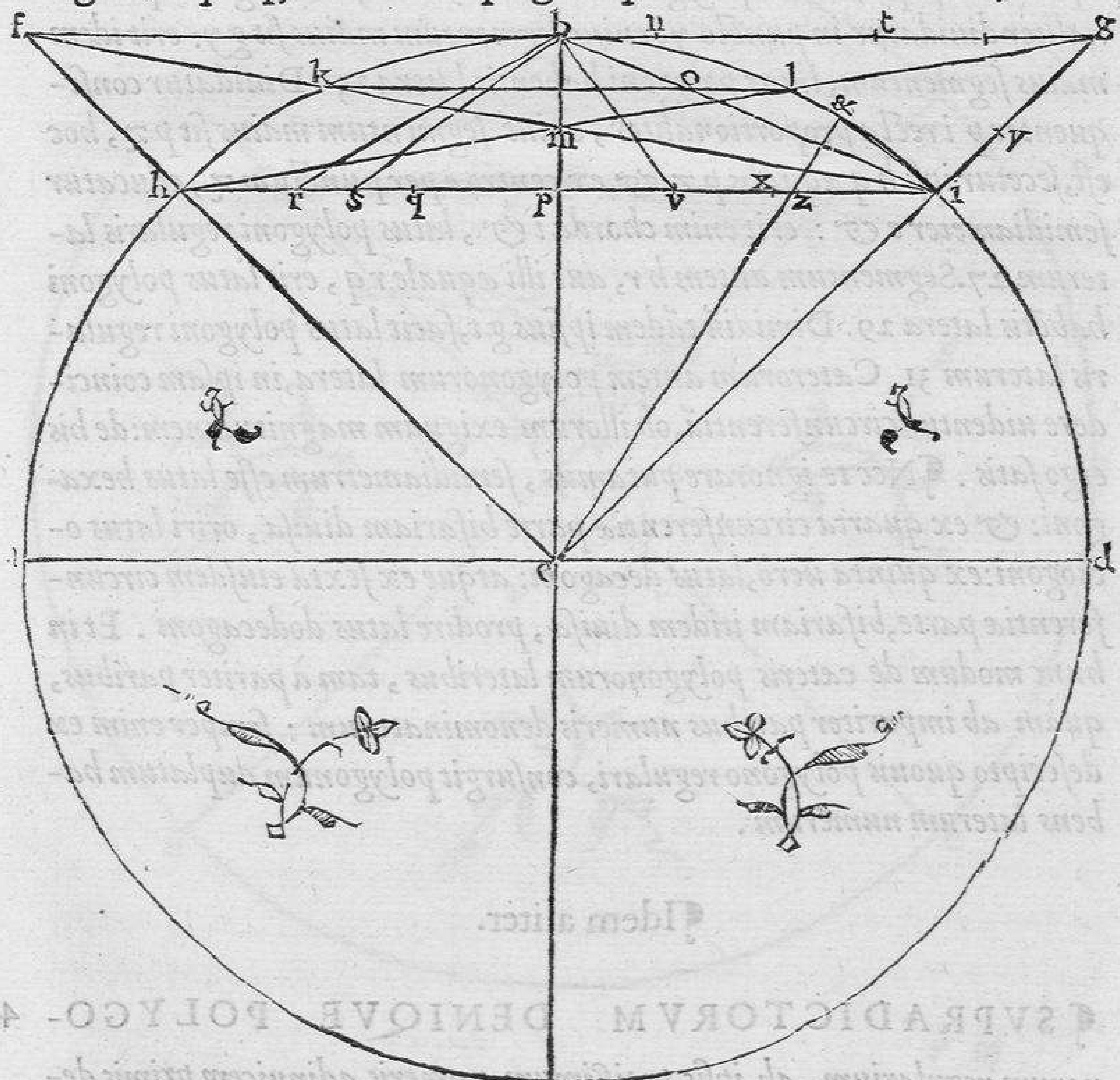
ipsam f h. Per uulgatam igitur quatuor proportionalium numerorum regulam, prodibit f h notæ longitudinis, partium quidem 31, & minutorum propemodum 55: quorum quadratum habet partes 1018, & minuta 40, 25. Horum autem radix quadrata, hoc est, ipsa c h, continet partes 50, & minuta 48, 24, 19, 9: & proinde reliqua h a, erit partium 9, & minutorum 11, 35, 40, 51. Quadratum ergo ipsius h a habebit partes 84, & minuta 30, 56, 41, 29, 49, 18, 43, 21: quæ iuncta quadrato ipsius f h, conficiunt quadratum ipsius f a, per ipsam 47 primi elementorum, partium quidem 1103, & minutorum 11, 21, 41, 29, 49, 18, 43, 21. Horum autem quadrata radix, seu recta f a, habet partes 33, & minuta 12, 51, 27, 37, ferè. Per nonam itaque propositionē libri primi, tertia proportionalis f k habebit partes 32, & minuta 20, 36: & horum quadratum partes 1046, & minuta 5, 28, 21, 36. A quibus si detrahatur quadratum ipsius f h, relinquetur quadratum ipsius h k, partium quidem 27, & minutorum 25, 3, 21, 36: quorum radix quadrata, siue recta h k, habet partes 5, & minuta 14, 10, 15, 16. Et proinde tota c k erit partium 56, & minutorum 2, 34, 34, 25. Atqui propter ipsa triangula c a d & c k l inuicem æquiangula, est per quartam sexti elementorum, ut c a ad ipsam a d, sic recta c k ad ipsam k l. Tres autem primæ notæ sunt, nota erit igitur quarta proportionalis k l, offendetúrque habere partes 35, & minuta 13, 45, 15, 28, 18: quæ duplata, efficiunt totam k l lineam rectam partium 70, & minutorum 27, 30, 31, ferè. Tantum est itaque latus pētagoni, in dato circulo descripti: nam tantum quoque, ex Ptolemæi deprehenditur calculo: paucis duntaxat minutis exceptis, ex toties iterata quadratæ radicis, & cubicæ pariter inuentione non præcisa, tantáque supputationum multitudine, bono iure deperditis, & proinde nihili faciendis. Idem pendenter ostendere licebit, de dato cuiusuis alterius polygoni æquilateri & æquianguli latere.

¶Laterum insigniorum aliquot polygonorum regularium, in dato circulo describendorum, particularis adinuentio.

¶Iuuat insuper electorum aliquot, insigniorúmue polygonorum regularium, in dato itidem circulo describendorum, à numeris potissimum adinuicem primis denominatorum latera, peculiaribus, recénsque à nobis excogitatis adinuentionibus reddere nota: non alio quidem, quàm ocu- 3

lari,

lari, & ad iustam circini rationem examinato discursu confirmare: id enim præsens cogeretur excedere uolumen. Exponatur igitur datus circulus a b c d, binis dimetientibus a c & b d in illius centro e ad rectos sese inuicem dirimentibus angulos, in quatuor quadrantes distributus. Sit præterea circunscripti quadrati latus f g, bifariã diuisum, & ipsum contangens circulum in puncto b, atque ad rectos angulos cum b e semidiametro constitutum: unà cum eiusdem circunscripti quadrati semidiametris e f & e g, circunferentiam in punctis h & i secantibus. Connectantur postmodum f i & g h lineæ rectæ, eandem circunferentiam in punctis k & l intersecantes, atque b e semidiametrum in communi puncto m. Et connexis h i & k l lineis rectis, ipsi b m æqualis secetur b n. In primis igitur, utraque f i & g h erit latus trigoni regularis in dato a b c d circulo descripti: recta uerò h i latus quadrati, & f n latus pentagoni, atque ipsa k l latus heptagoni quod in eodem circulo describi-

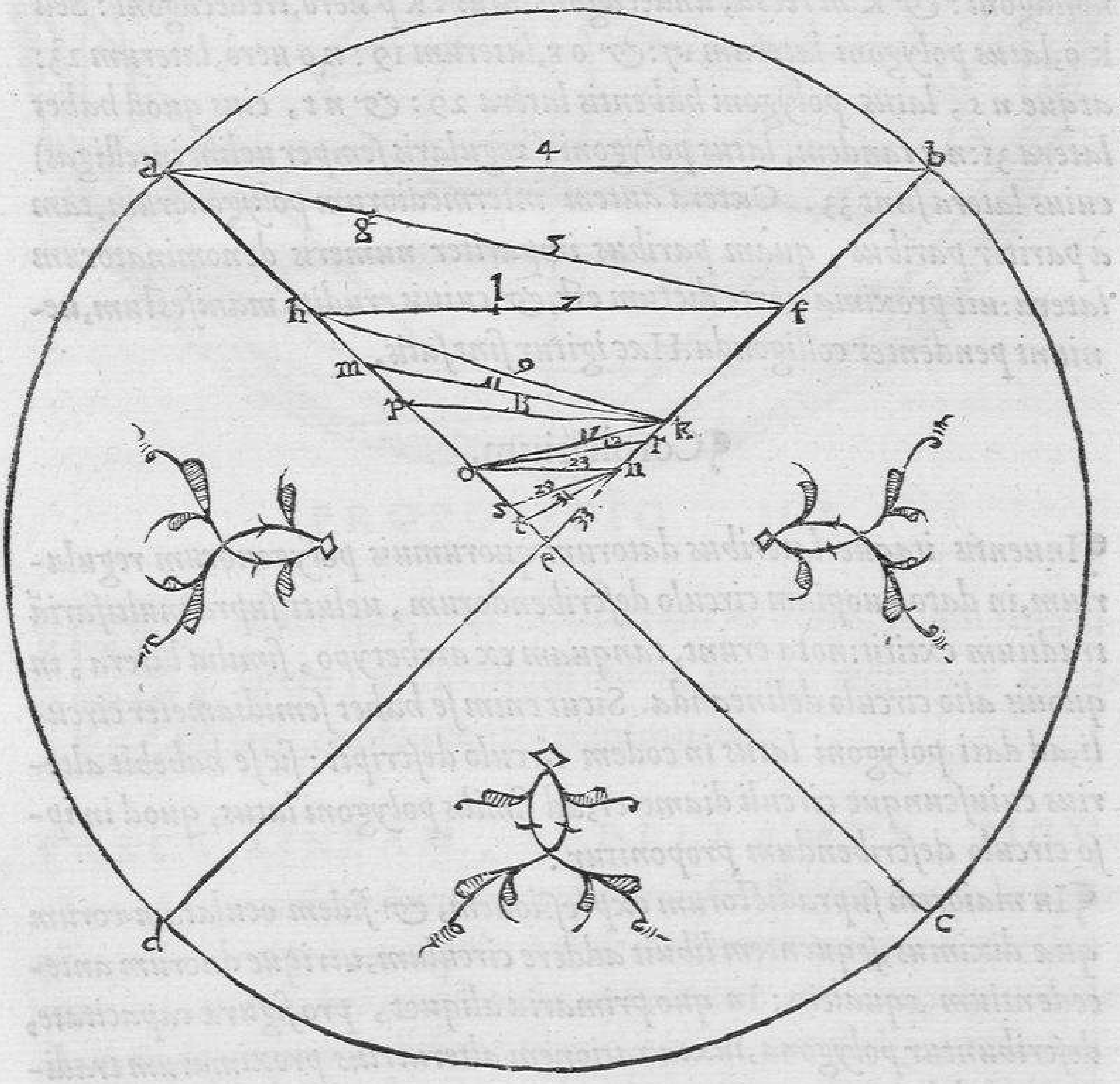


tur, cui æqualis est dimidia utriusque f i & g h. Latus porrò nonagoni itidem regularis, continet bis subtensam h k: cuiusmodi est ipsa h o. Secet autem h i ipsum e b semidiametrum in signo p, & ipsa h p diuidatur proportionaliter in puncto q, cuius segmentum maius sit h q, quod bifariam diuidatur in puncto r: connexa etenim recta b r, erit latus undecagoni. Item si r q bifariam diuidatur in puncto s, & connectatur b s linea recta: ea erit latus tredecagoni. Quòd si n g bifariam diuidatur, in signo t: erit n t uel t g recta, latus quintidecagoni. Si autem ipsi h r uel r q, æqualis secetur p u, & connectatur b u linea recta: illa erit latus polygoni regularis habentis latera 17. Latus autem polygoni laterum 19, erit segmentum h s. Et si u i proportionaliter diuidatur in pũcto x, cuius segmentum maius sit i x: erit idem segmentum maius latus polygoni regularis habentis latera 21. Segmentum insuper minus ipsius h p, hoc est p q, est latus polygoni laterum 23. At si recta g i proportionaliter diuidatur in puncto y, cuius segmentum maius sit g y: erit idem maius segmentum, latus polygoni habentis latera 25. Diuidatur consequenter p i recta proportionaliter, cuius segmentum maius sit p z, hoc est, secetur ipsi h q æqualis p z, & ex centro e per punctum z, educatur semidiameter e &: erit enim chorda i &, latus polygoni regularis laterum 27. Segmentum autem h r, aut illi æquale r q, erit latus polygoni habẽtis latera 29. Dimidiũ tãdem ipsius g t, facit latus polygoni regularis laterum 31. Cæterorum autem polygonorum latera, in ipsam coincidere uidentur circunferentiã, ob illorum exiguam magnitudinem: de his ergo satis. ¶Nec te ignorare putamus, semidiametrum esse latus hexagoni: & ex quarta circunferentiæ parte bifariam diuisa, oriri latus octogoni: ex quinta uerò, latus decagoni: atque ex sexta eiusdem circunferentiæ parte, bifariam itidem diuisa, prodire latus dodecagoni. Et in hunc modum de cæteris polygonorum lateribus, tam à pariter paribus, quàm ab impariter paribus numeris denominatorum: semper enim ex descripto quouis polygono regulari, consurgit polygonum duplatum habens laterum numerum.

¶Idem aliter.

¶SVPRADICTORVM DENIQVE POLYGO- 4
norum regularium, ab ipsis potissimum numeris adinuicem primis denominatorum

nominatorum latera, ſequenti poterunt artificio colligi. Reſumatur ergo circulus a b c d, cuius centrum e, binis dimetientibus a c & b d orthogonaliter ſeſe inuicem dirimentibus in quatuor quadrantes diſtributus: eligatúrque unus ipſorum quadrantum in futuram laterum inuentionem, utpote a e b. Diuidatur poſtmodum e b ſemidiameter per mediam & extremam rationem, ſeu proportionaliter in puncto f, cuius ſegmentum maius ſit e f: & connectantur a b & a f lineæ rectæ. Abſcindatur inſuper ex a f tertia pars, quæ ſit a g, cui æqualis fiat a h: & connectatur f h linea recta. Conſequenter e f bifariam diuidatur, in ipſo quidem puncto k: & connectatur recta h k. Diuidatur præterea f h recta proportionaliter in puncto l, cuius ſegmentum maius ſit f l,



cui æqualis secetur a m: & connectatur k m linea recta. Diuidatur consequenter recta e k proportionaliter in puncto n, cuius segmentum maius sit e n, cui æqualis secetur e o: & connectātur k o & o n lineæ rectæ. Ipsi deinde k o, æqualis secetur o p: & connectatur k p linea recta. Diuidatur prætereа n k recta proportionaliter, in puncto uidelicet r, cuius segmentum maius sit n r: & connectatur o r linea recta. Cæterum diuidatur e o recta bifariam, in puncto quidem s: & connectatur recta n s. Tandem recta e s proportionaliter diuidatur, in puncto scilicet t, cuius segmentum maius sit e t: & connectatur n t linea recta.

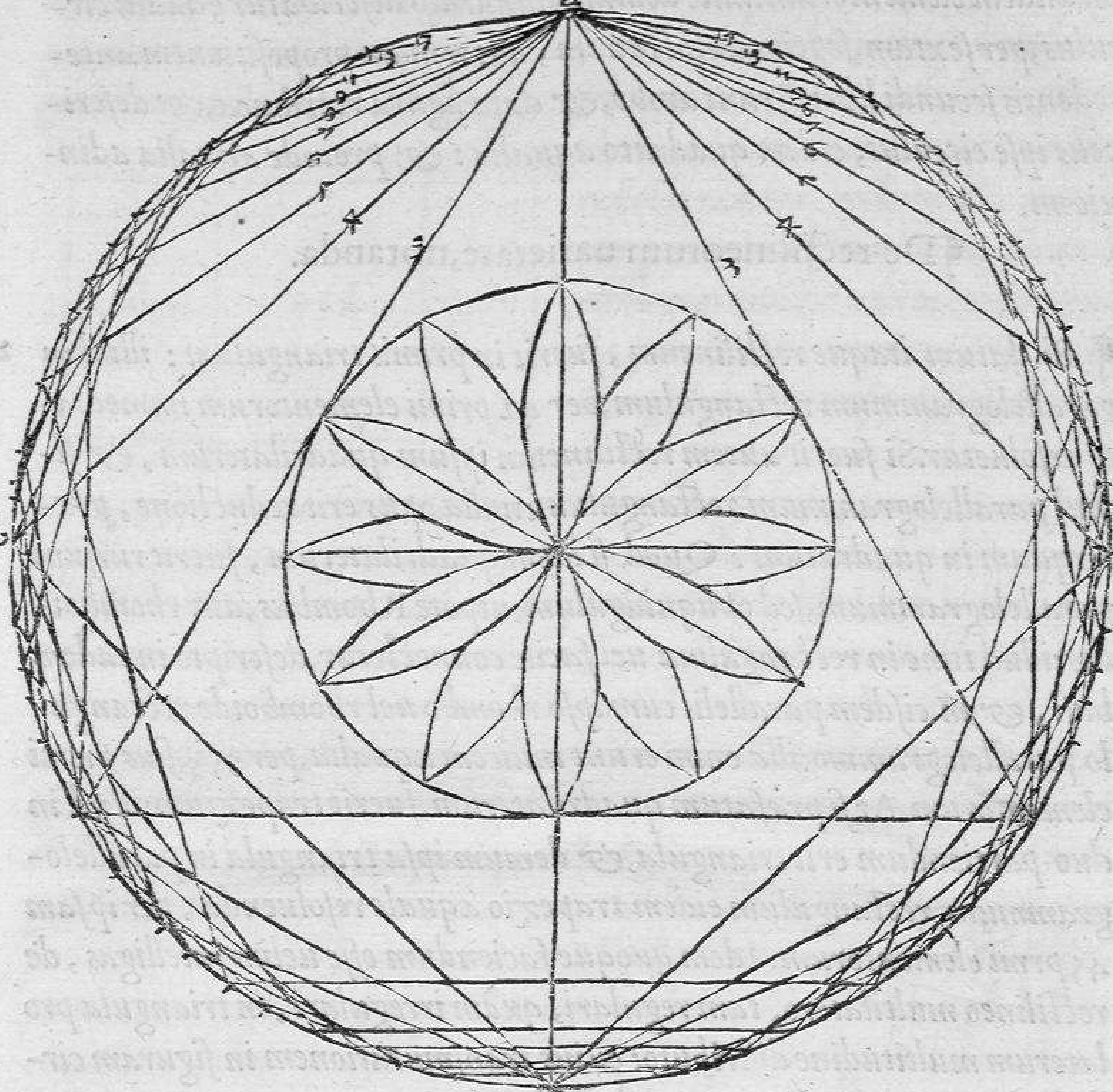
¶His in hunc modum constructis, duplum in primis ipsius f h erit latus trigoni regularis in dato circulo descripti: a b uerò, latus quadrati: a f autem, pentagoni latus: & ipsa f h, latus heptagoni: deinde h k, latus nonagoni: & k m recta, undecagoni latus: k p uerò, tredecagoni: Sed k o, latus polygoni laterum 17: & o r, laterum 19: n o uerò, laterum 23: atque n s, latus polygoni habentis latera 29: & n t, eius quod habet latera 31: n e tandem, latus polygoni (regularis semper uelim intelligas) cuius latera sunt 33. Cætera autem intermediorum polygonorum, tam à pariter paribus, quàm paribus impariter numeris denominatorum latera: uti proxima parte dictum est, & cuiuis erudito manifestum, ueniunt pendenter colligenda. Hæc igitur sint satis.

¶Corollarium.

¶Inuentis itaque lateribus datorum quorumuis polygonorum regularium, in dato quopiam circulo describendorum, ueluti supra multifariã traditum extitit: nota erunt, tanquam ex archetypo, similia latera, in quouis alio circulo delineanda. Sicut enim se habet semidiameter circuli, ad dati polygoni latus in eodem circulo descripti: sic se habebit alterius cuiuscunque circuli diameter, ad similis polygoni latus, quod in ipso circulo describendum proponitur.

¶In maiorem supradictorum expressionem, & fidem oculatam eorum quæ diximus, sequentem libuit addere circulum, utrique duorum antecedentium æqualem: In quo primaria aliquot, pro figuræ capacitate, describuntur polygona, iuxta rationem alterutrius proximarum traditionum delineata.

PROPO-



PROPOSITIO IIII.

DAtam quamuis rectilineam figuram, etiam irregularem, in circulum eidem figuræ rectilineæ æqualem, consequenter transmutare.

1 ¶RECTILINEAM APPELLAMVS FIGVrã, quæ sub quotcũque lineis rectis cõtinetur: siue illa fuerit regularis, hoc est, æquilatera & æquiangula: siue de earum numero, quæ neque laterum, neque angulorum obseruant æqualitatem, & irregulares dictæ sunt. Si datæ igitur rectilineæ figuræ æquale parallelogrammum rectangulum describatur, per 45 primi elementorum, & ipsi rectangulo parallelogrammo quadratum figuretur æquale, per ultimam secundi

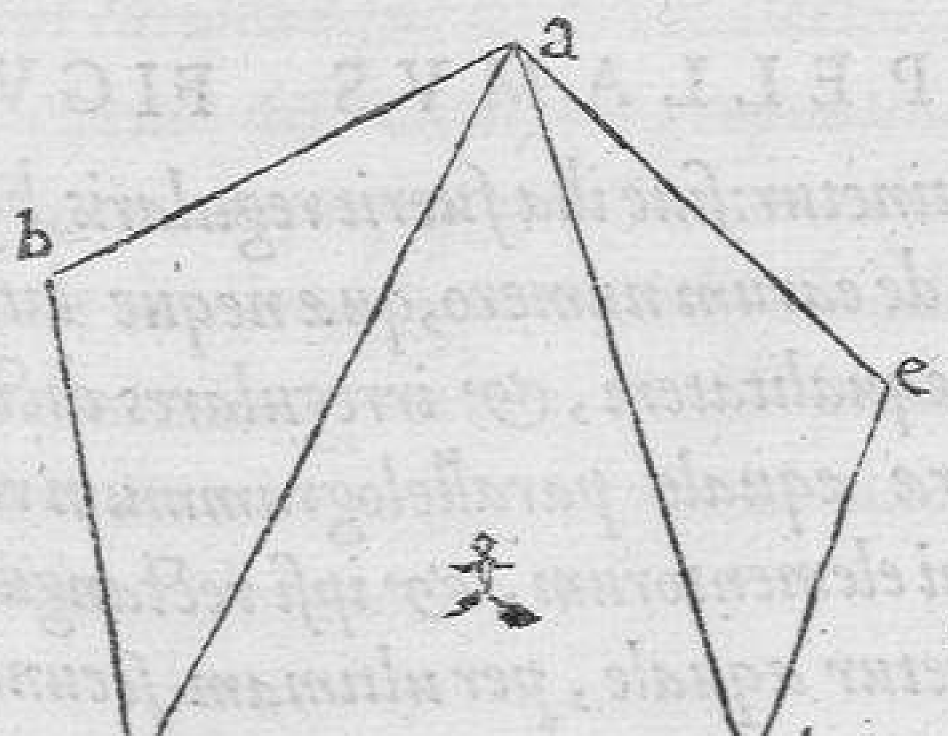
eorundem elementorum: huic demum quadrato describatur ęqualis circulus, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem antecedentis secundi libri: Erunt ambo, & data figura rectilinea, & descriptus ipse circulus, eidem quadrato æqualia: & proinde æqualia adinuicem.

¶De rectilineorum uarietate, notanda.

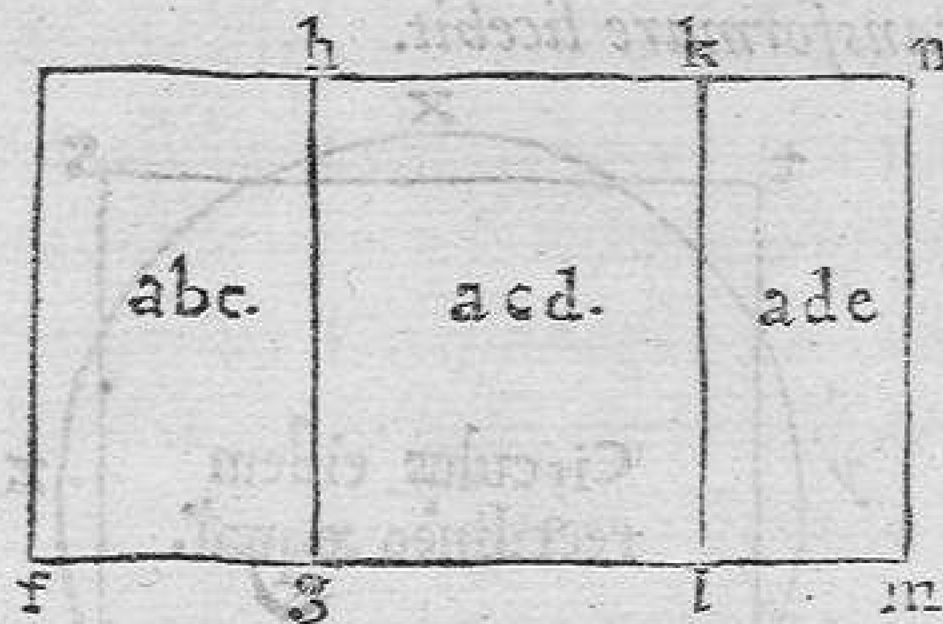
¶ *Si datum itaque rectilineum, fuerit in primis triangulum: illud in parallelogrammum rectangulum, per 42 primi elementorum immediatè resoluetur. Si fuerit autem rectilineum ipsum quadrilaterum, & simul parallelogrammum rectangulum: nulla opus erit reductione, præterquam in quadratum. Quòd si idem quadrilaterum, fuerit rursum parallelogrammum, sed obliquiãgulum, utpote Rhombus, aut rhomboides: illud tunc in rectangulum uel facilè connectetur, descripto in eadem basi, & in eisdem parallelis cum ipso rhombo uel rhomboide rectangulo parallelogrammo: illa enim erunt inuicem æqualia, per 35 ipsius primi elementorum. At si præfatum quadrilaterum, fuerit trapezium: illud in duo partiendum erit triangula, & demum ipsa triangula in parallelogrammum rectangulum eidem trapezio æquale resoluenda, per ipsam 45 prmi elementorum. Idem quoque faciendum esse uelim intelligas, de rectilineo multilatero, tam regulari, quàm irregulari, in triangula pro laterum multitudine distributo: cuius transmutationem in figuram circularem, sequenti placet exemplo declarare.* 2

¶Exemplum de rectilineo pentagono irregulari.

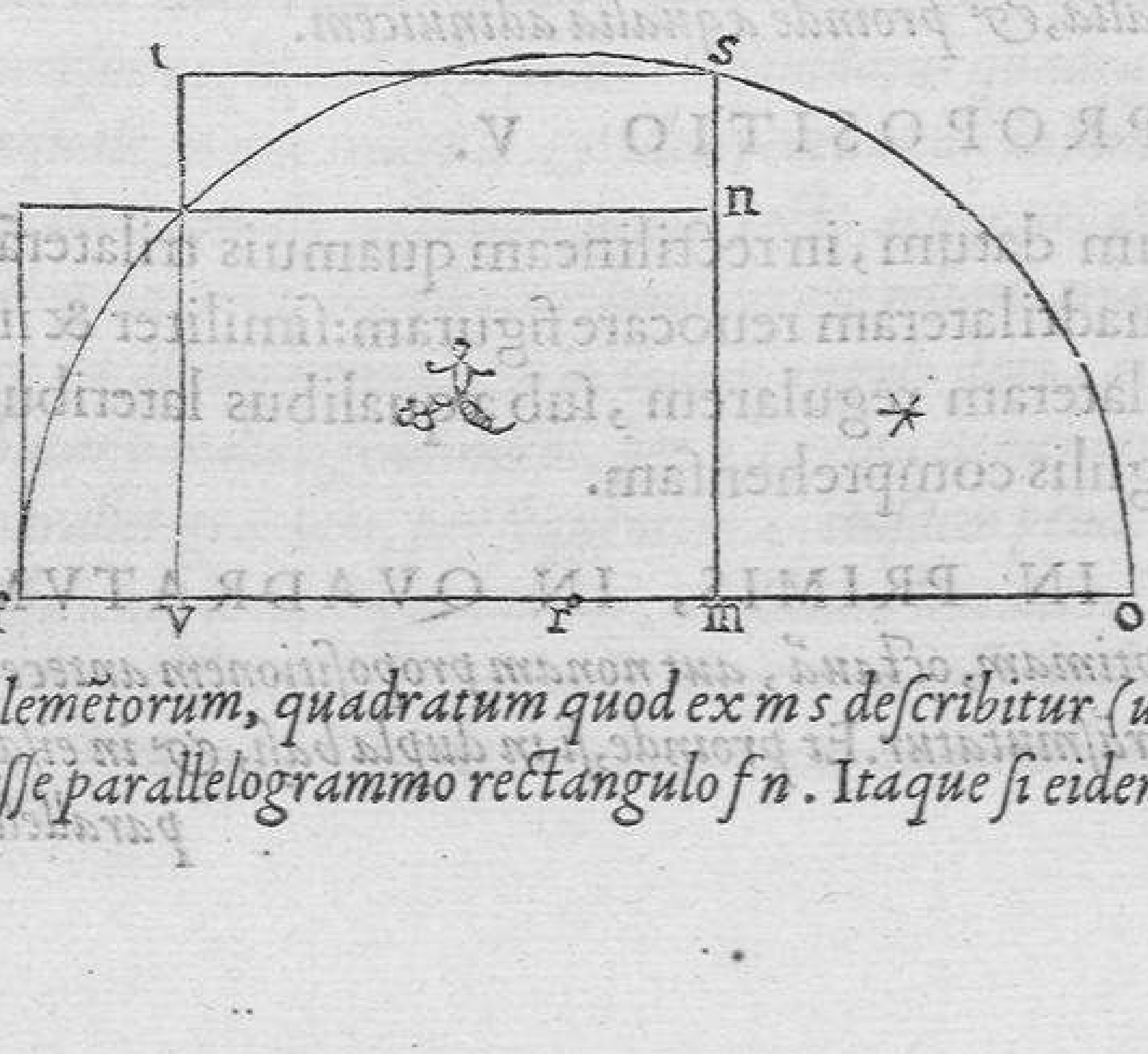
¶SIT IGITVR DATVM IRREGVLARE PENtagonum, *a b c d e, cui oporteat circulum æqualem describere. Resoluatur ergo idem pentagonum a b c d e, in parallelogrammum rectangulũ, in hunc qui sequitur modum. Connectantur a c & a d lineæ rectæ: & dato triangulo a b c, æquale parallelogrammum cõstruatur f g h, in dato angulo recto qui ad f, per 42 primi elemẽtorum. Ad latus deinde g h ipsius descripti f g h parallelogrammi, & in dato angulo recto qui ad g, dato triangulo a c d, æquale parallelogrammum* 3



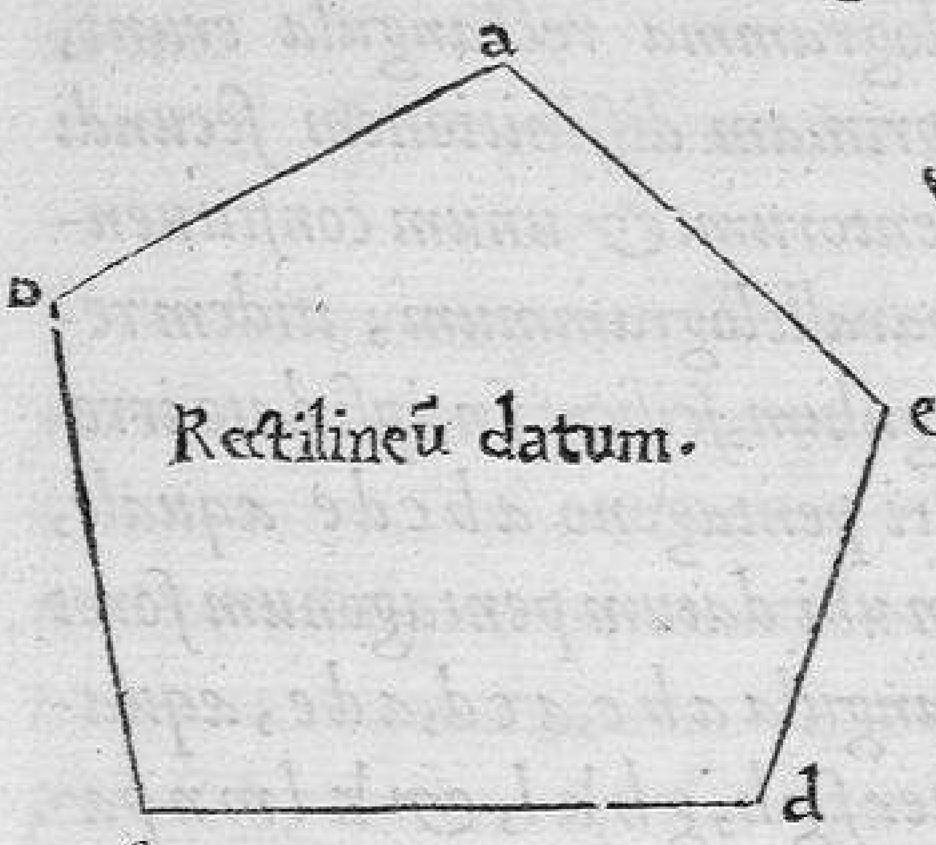
logrammum construatur g h k l: atque rursum ad latus k l ipsius g h k l parallelogrammi, dato triangulo a d e, æquale fabricetur parallelogrammum k l m n, in dato angulo recto qui ad l, per 44 eiusdem primi

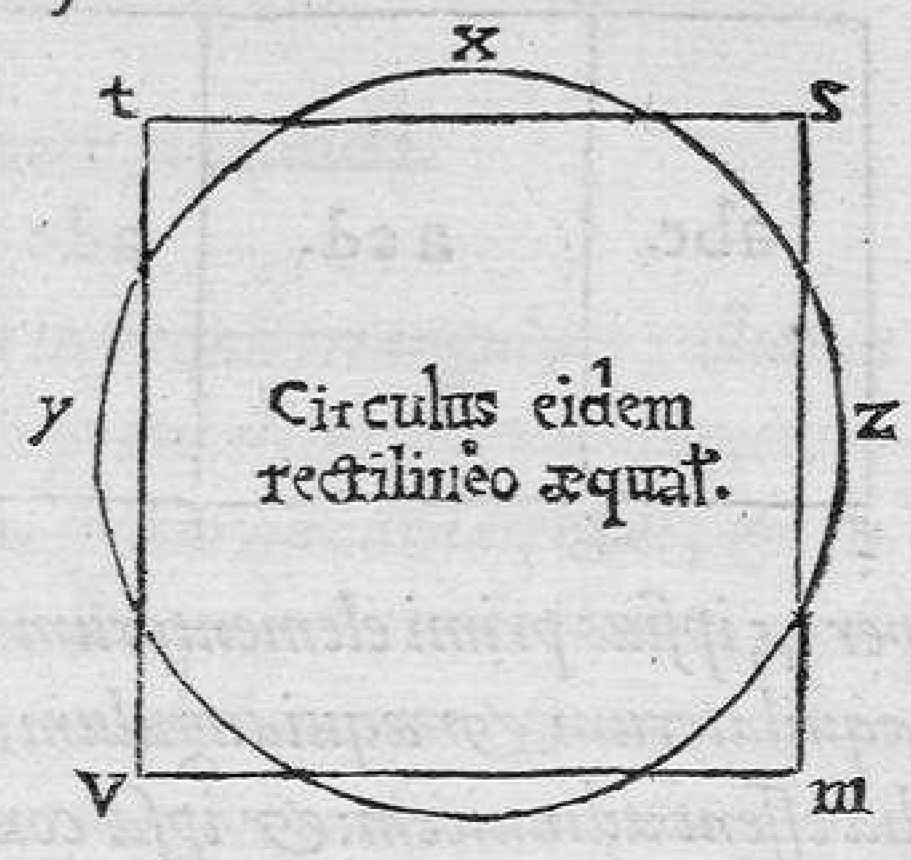


elementorum. Hæc itaque tria parallelogramma rectangula erunt, per primam diffinitionem secundi elementorum: & unum constituentia parallelogrammum, itidem rectangulum, scilicet f n, ipsi dato irregulari pentagono a b c d e æquale, per 45 ipsius primi elementorum. Verùm ubi datum pentagonum foret æquilaterum, & æquiangulum, ipsa triangula a b c, a c d, a d e, æqualia essent adinuicem: & ipsa consequenter f g h, g h k l, & k l m n parallelogramma: Sufficeret itaque unicum describere parallelogrammũ rectangulum, uni prædictorum triangulorum æquale: atque illo ter sumpto, conficere præfatum rectangulum parallelogrammum f n. Hoc igitur rectangulum parallelogrammum f n, erit aut quadratum, uel altera parte longius. Si contingat illud esse quadratum, expeditè magis absoluetur propositionis intentio. Si uerò altera parte longius (ut præassumpto accidisse uidetur exemplo) illud in quadratum æquale resoluendum erit, in hunc qui sequitur modum. Producatur igitur f m, alterum uidelicet longiorum laterum ipsius parallelogrammi rectanguli f n, in directum & continuum uersus o: seceturque ipsi m n æqualis m o, per tertiam primi elementorum. Tota postmodum f o, bifariam diuidatur in puncto r, per decimam ipsius primi elementorum.



Et centro r, interuallo autem r f aut r o, semicirculus describatur f s o: producatúrque recta m n, in circunferentiæ punctum s. Clarum est igitur ex ultima secundi prædictorũ elemẽtorum, quadratum quod ex m s describitur (utpote m s t u) æquũ esse parallelogrammo rectangulo f n. Itaque si eidem quadrato m s t u, *æqualis describatur circulus, per decimam, uel undecimam propositionem antecedentis secundi libri, utpote x y z: is erit æqualis ipsi dato pẽtagono irregulari a b c d e. Haud aliter, dato quouis alio multangulo rectilineo, illud in circulum æqualem transformare licebit.*





¶Corollarium.

¶*Dabitur itaque circulus, pluribus & diuersis rectilineis figuris simul iunctis æqualis. Quælibet enim rectilinea figura, diuisibilis est in triangula: & omnibus illarum triangulis, construi potest æquale rectãgulum parallelogrammum, per 42, 44, & 45 primi elementorum. Cui quidem rectangulo parallelogrammo, dabitur æquale quadratum, per ultimam secundi eorundem elementorum: & ipsi demum quadrato, æqualis circulus describetur, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem antecedentis libri secundi. Hic ergo circulus, eisdem figuris rectilineis in ipsum generale rectangulum parallelogrammum coadunatis, de necessitate coæquabitur: utrunque enim, & præfatum rectangulum singula datarum figurarum referens triangula, & circulus ipse, eidem quadrato erunt æqualia, & proinde æqualia adinuicem.* 4

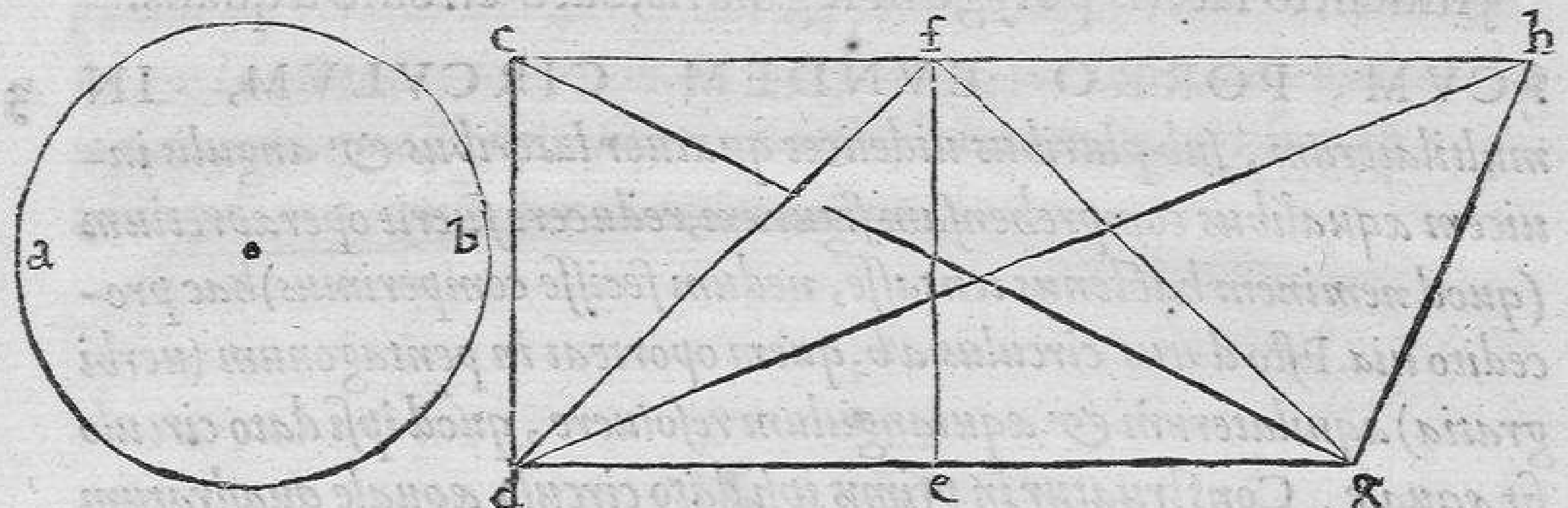
PROPOSITIO V.

CIrculum datum, in rectilineam quamuis trilaterã, aut quadrilateram reuocare figuram: similiter & in multilateram regularem, sub æqualibus lateribus & angulis comprehensam.

¶CIRCVLVS IN PRIMIS, IN QVADRATVM *æquale, per sextã, septimam, octauã, aut nonam propositionem antecedentis secundi libri trãsmutatur. Et proinde, si in dupla basi, & in eisdẽ*

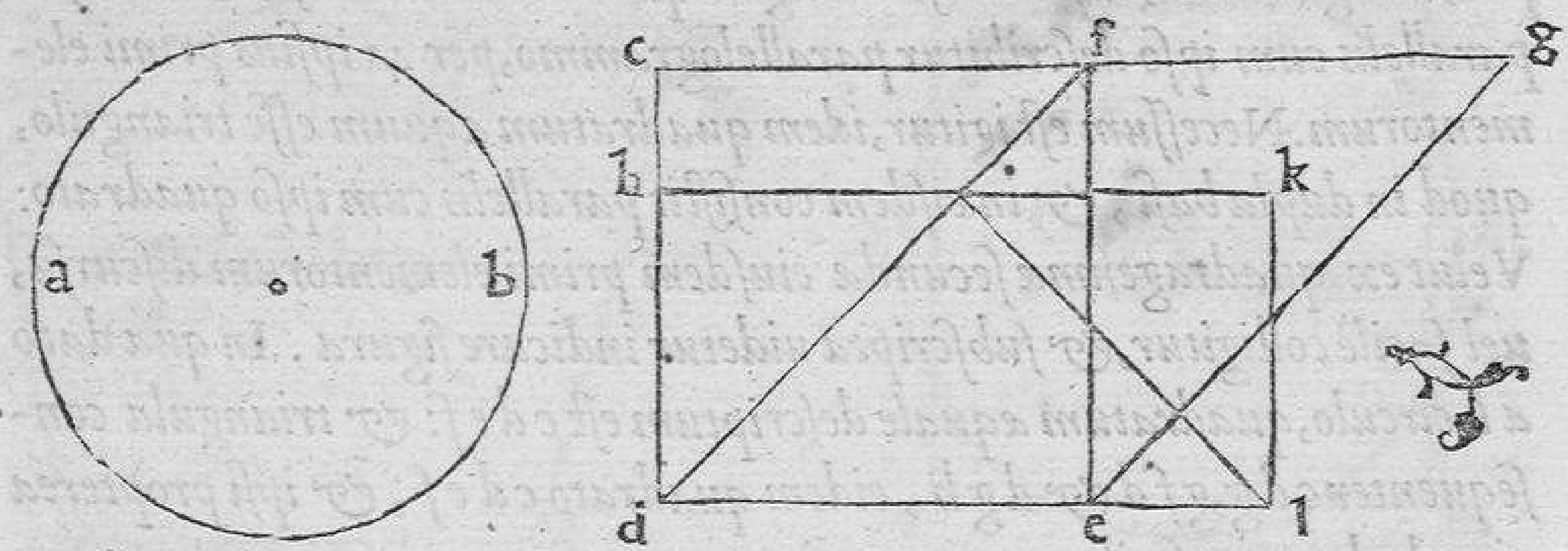
parallelis

parallelis cum ipso quadrato eidem circulo æquali, triangulum rectangulum, obtusiangulúmue, seu acutiangulum describatur: Ipsum triangulum erit in primis eidem quadrato æquale, & ipsi consequenter dato circulo. Omne siquidem quadratum, est parallelogrammum: & omne parallelogrammũ, duplum est trianguli quod in eadem basi, & in eisdē parallelis cum ipso describitur parallelogrammo, per 41 ipsius primi elementorum. Necessum est igitur, idem quadratum æquum esse triangulo, quod in dupla basi, & in eisdem consistit parallelis cum ipso quadrato: Velut ex quadragesimæ secundæ eiusdem primi elementorum discursu, uel facilè colligitur, & subscripta uidetur indicare figura. In qua dato a b circulo, quadratum æquale descriptum est c d e f: & triangula consequenter c d g, g f d & d g h, eidem quadrato c d e f, & ipsi propterea circulo dato, conscribuntur æqualia.



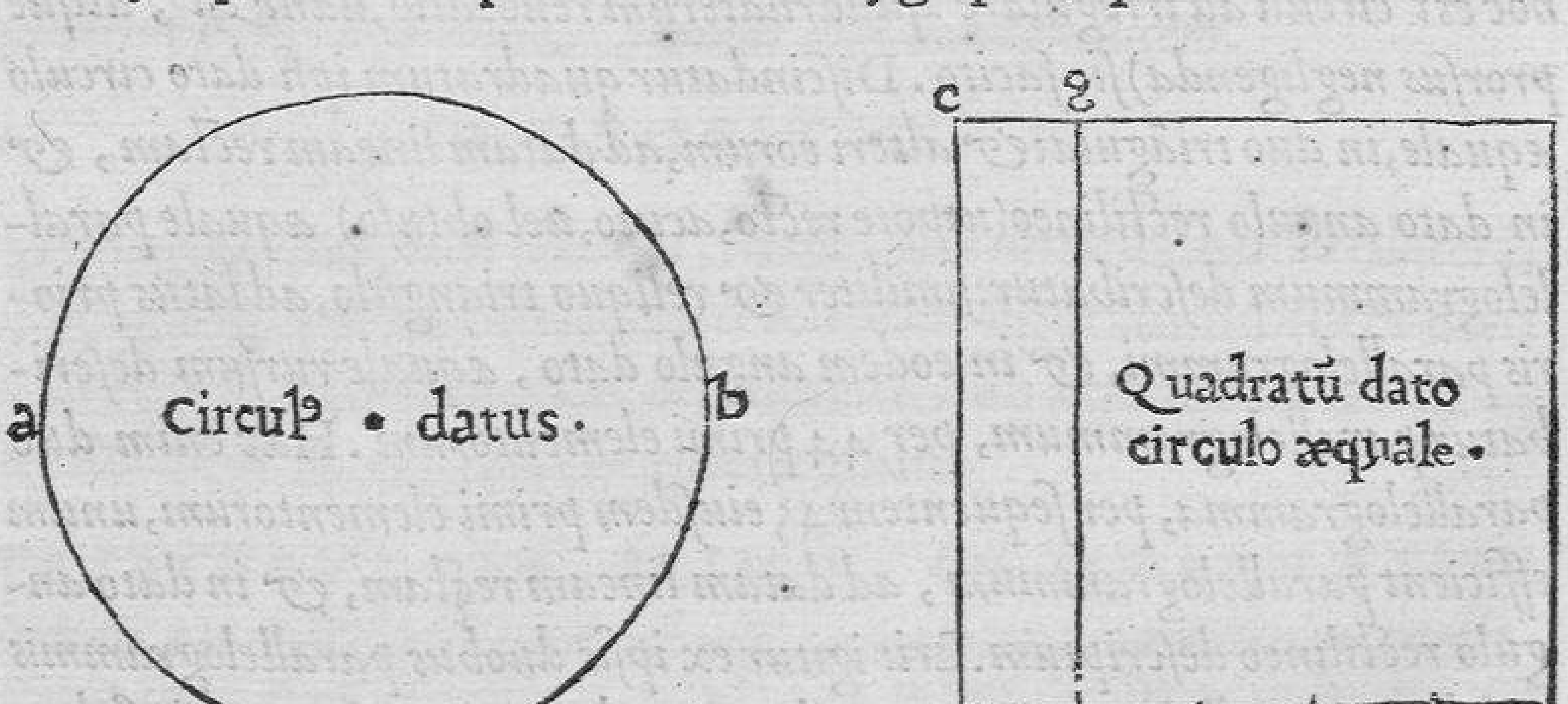
2 ¶QVOD SI PRAEFATVM CIRCVLVM, IN *liberum quoduis libuerit transmutare quadrilaterum, quod simul (uelim intelligas) sit parallelogrammum (quoniam perfecti ad imperfectũ, hoc est circuli ad irregulare quadrilaterum reuocatio, uana est, atque prorsus negligenda) sic facito. Discindatur quadratum ipsi dato circulo æquale, in duo triãgula: & alteri eorum, ad datam lineam rectam, & in dato angulo rectilineo (utpote recto, acuto, uel obtuso) æquale parallelogrammum describatur: similiter & reliquo triangulo, ad latus prioris parallelogrammi, & in eodem angulo dato, æquale rursum describatur parallelogrammum, per 44 primi elementorum. Hæc enim duo parallelogramma, per sequentem 45 eiusdem primi elementorum, unum efficient parallelogrammum, ad datam lineam rectam, & in dato angulo rectilineo descriptum. Erit igitur ex ipsis duobus parallelogrammis resultans parallelogrammum, eidem quadrato æquale: & ipsi dato*

propterea circulo. In quorum exemplum, subscripta cõtempletur figura: in qua dato rursum a b circulo, & quadrato c d e f eidem circulo ęquali, bina describuntur parallelogramma f d e g & h d l k, eidem quadrato c d e f, & ipsi consequenter dato circulo a b, atque inuicem æqualia.

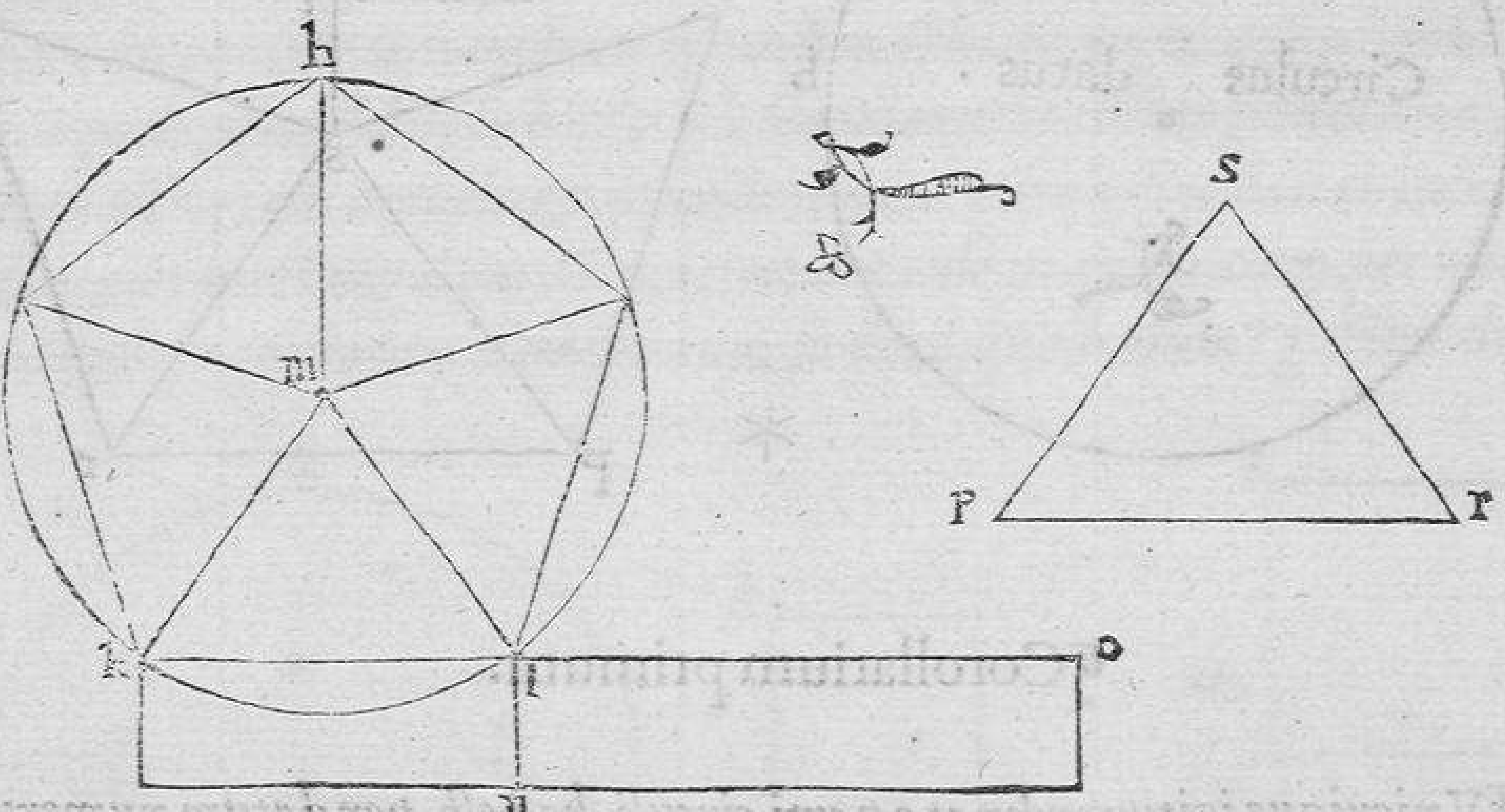


¶Inuentio lateris polygoni regularis, dato circulo æqualis.

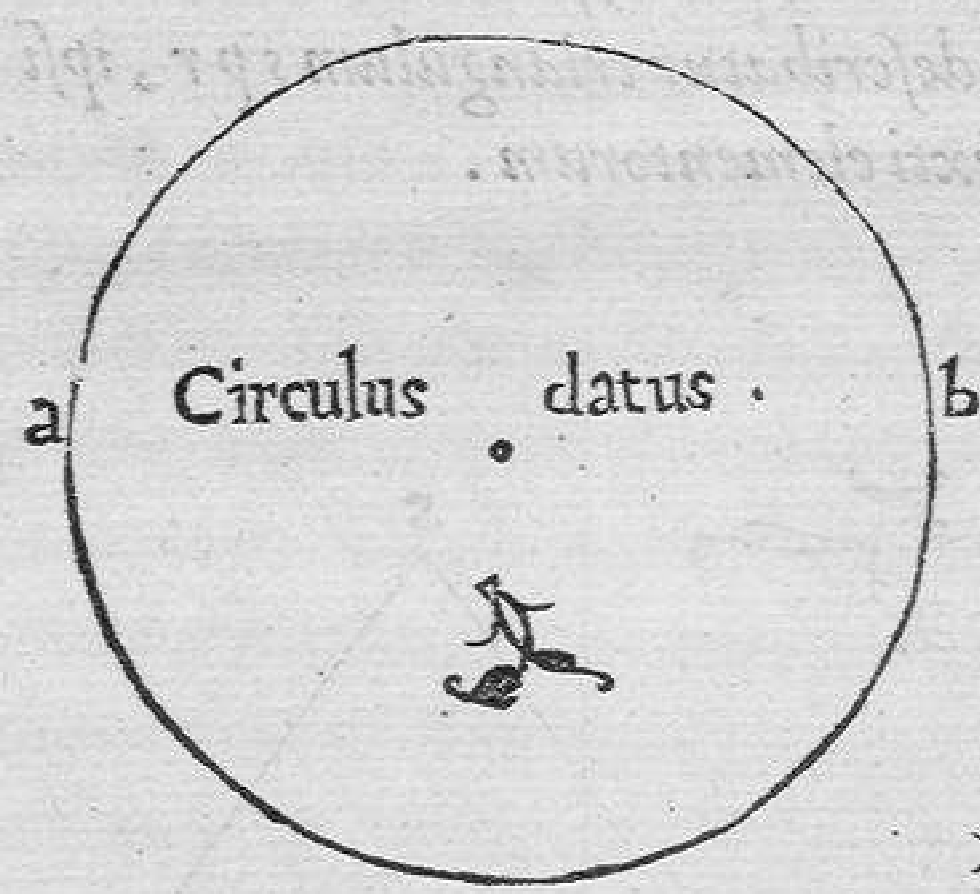
¶CVM PORRO EVNDEM CIRCVLVM, IN 3 *multilateram, sub pluribus uidelicet quatuor lateribus & angulis inuicem æqualibus comprehensam figuram, reducere fuerit operæpretium (quod neminem hactenus tentasse, nedum fecisse comperimus) hac procedito uia. Esto datus circulus a b, quem oporteat in pentagonum (uerbi gratia) æquilaterum & æquiangulum resoluere, quod ipsi dato circulo sit æquale. Construatur in primis ipsi dato circulo æquale quadratum c d e, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem antecedentis secundi libri. Et a b ipsius quadrati latere, utpote d e, quinta pars abscindatur, per nonam sexti elementorum, quæ sit d f: atque per punctum f, ipsi lateri c d parallela ducatur f g, per 31 primi eorundem ele-*

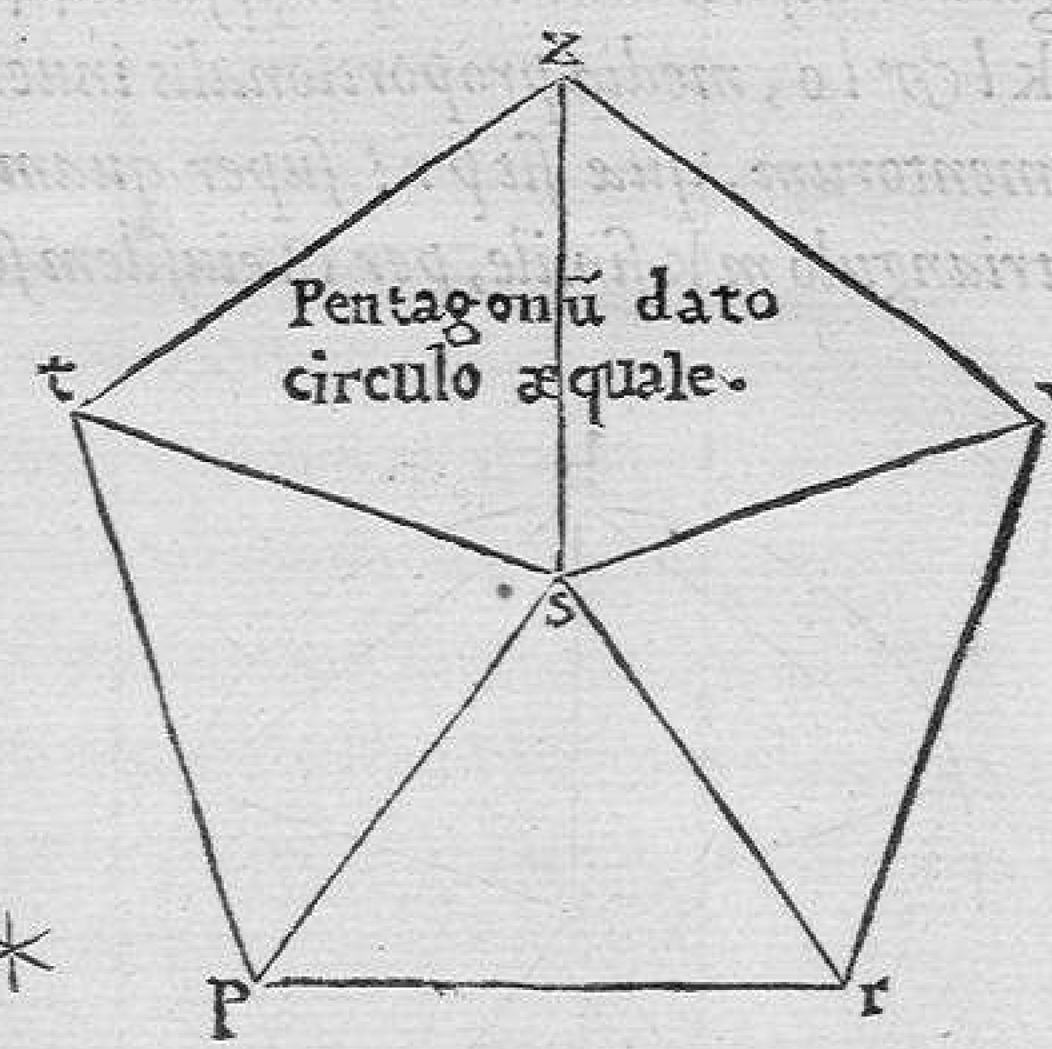


mentorum. Erit ergo d f g rectangulum parallelogrammũ, quinta pars ipsius quadrati c d e: & proinde quinta itidem pars ipsius dati circuli a b. Parallelogramma enim c d e & d f g, sub eodem uertice g constituta, se habent ut bases d e atque d f, per primam sexti elementorum. His præmissis, exponatur pentagonum aliquod æquilaterum & ęquiangulum h k l, in dato circulo (cuius centrum m) per antecedentem secundam aut tertiam propositionem descriptum: & quinque eiusdem circuli semidiametris, in quinque isoscelia & inuicem æqualia triangula distributum, quorum unum sit m k l. Describatur consequenter ipsi d f g parallelogrammo rectangulo æquale rectilineum, & ipsi triangulo m k l simile: in hunc uidelicet modum. Ad datam lineam rectam k l (quæ latus est assumpti pentagoni) ipsi triangulo m k l, æquale parallelogrãmum rectangulum describatur k l n. Deinde ad latus l n, ipsi parallelogrammo rectangulo d f g, æquale parallelogrammum itidem rectangulum describatur n l o, per ipsam 44 primi elementorum. Tãdem inter k l & l o, media proportionalis inueniatur, per 13 sexti eorundem elementorum, quæ sit p r: super quam describatur triangulum s p r, ipsi triangulo m k simile, per 18 eiusdem sexti elementorum.



Erit igitur rectilineum s p r triangulum, & æquiangulum ipsi triangulo m k l: atque unum eius latus, scilicet p r, similis rationis cum ipso k l: atque reliqua duo latera p s & r s inuicem æqualia, & similia lateribus k m & m l inuicem pariter æqualibus. Idem præterea triangulum s p r, æquum est ipsi rectangulo parallelogrammo n l o: quod ipsi d f g, *hoc est, quintæ parti tam quadrati c d e, quàm dati a b circuli, per ipsam æquatur constructionem.* Triangulum itaque s p r *est quinta pars, &* p r *latus ipsius pentagoni æquilateri & æquianguli, quod ipsi dato æquum est circulo. Est autem (uti supradictum est) ipsi triangulo m* k *l simile: & ex similibus rectilineis, numero æqualibus, & eodem modo sumptis, similia consurgunt rectilinea. Si describantur igitur super latera p s & s r, triangula p s t & r s u: & rursum ad latera s t, & s u, triangula, s t x & s u x, eidem triangulo s p r, atque inuicem similia, per 18 sexti elementorum, cum ipso triangulo s p r quinarium triangulorum adimplentia numerum:* Conflabitur *ex ipsis quinque triangulis, pentagonum æquilaterum & æquiangulum p t x u r, ipsi pentagono h* k *l ex omni parte simile, atque ipsi quadrato c d e, & dato consequenter circulo a b æquale.* ¶ Haud aliter, *eidem circulo dato, aliud quoduis polygonum æquilaterum & æquiangulum, à quocunque libuerit numero denominatum, æquale describetur.*



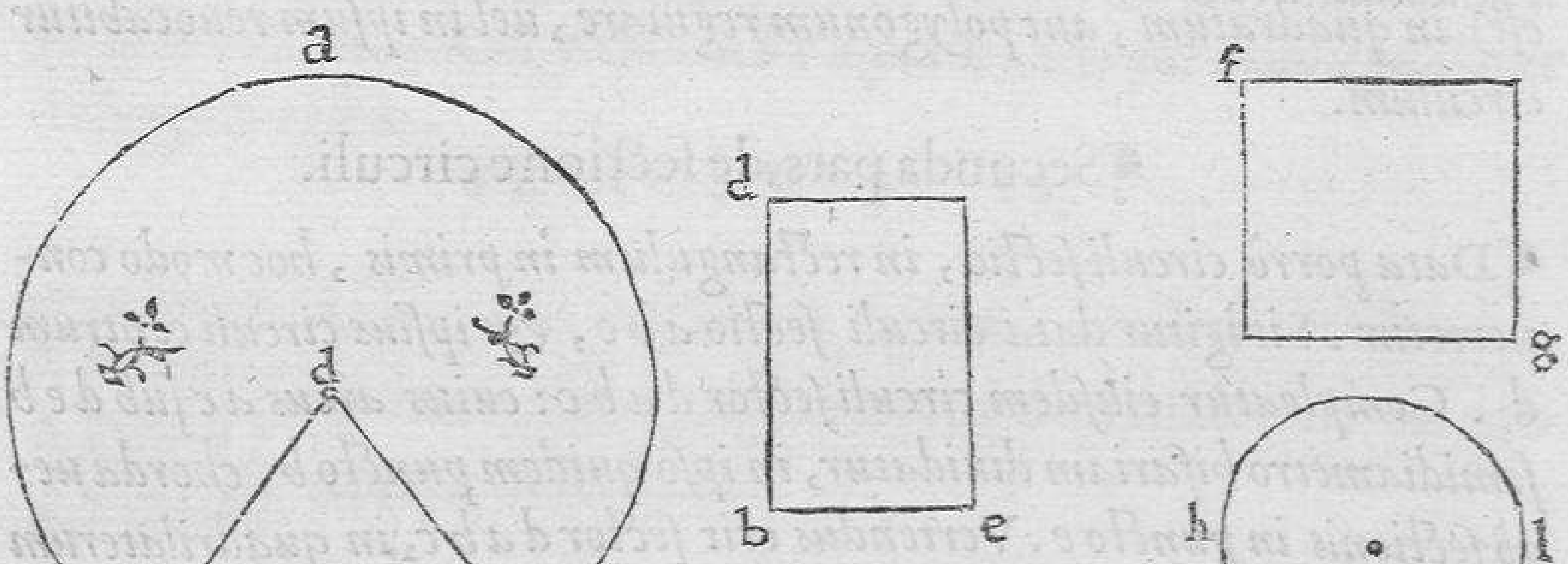


¶Corollarium primum.

¶V*nicuique igitur ordinatæ parti circuli, hoc est, per datum numerum expressæ, quemadmodum & toti circulo: liberū & æquale rectilineū, pendenter describi poterit.* Cùm enim *per primam aut secundam propositionem antecedentis secundi libri, circunferentiæ dati cuiuslibet circuli æqualis recta describatur, à qua, per nonam sexti elementorum ordinata pars abscinditur: Si dimidium ipsius ordinatæ partis in rectam lineā priùs conuersæ, ducatur in semidiametrū eiusdē circuli, fiet rectāgulum* 4 *gulum æquale ſectori, ipſam datam circuli partem ordinatam exprimẽti. Nam quemadmodum ex dimidia circunferentia in ſemidiametrum, fit rectangulum ipſi dato circulo æquale: ſic ex dimidia baſi, dimidióue ſectoris arcu, in eundem ſemidiametrum, conſurgit rectangulum eidem ſectori, ſiue ordinatæ parti circuli æquale. Huic autem rectangulo æquale quadratum deſcribitur, liberúmue triangulum, aut parallelogrãmum, ſeu datum quoduis æquilaterum & æquiangulum polygonum æquale, per ea quæ nuper fuere demonſtrata. Corollarium igitur, ex omni parte uerum.*

¶Corollarium ſecundum.

5 *¶Eidem rurſum ordinatæ parti, datóue ſectori circuli, dabitur & circulus itidem æqualis. Vtpote, ſi dati circuli a b c abſcindatur ſector b d c, ſub duobus ſemidiametris b d & d c, & arcu b c comprehenſus, qui ſit quinta (uerbi gratia) circunferentiæ pars: clarum eſt, ipſum ſectorem b d c quintam itidem circuli partem continere. Quòd ſi idem arcus b c diuidatur biſariam in puncto e, per 30 tertij elementorum: utraque pars b e uel e c, erit decima pars eiuſdem circunferentiæ. Si tota igitur circũferentia, uertatur in lineam rectam, per primam, aut ſecundam propoſitionem antecedentis ſecundi libri: & ab eadem recta abſcindatur pars decima, per nonam ſexti eorundem elementorum, quæ uocetur b e: comprehenſum ſub ipſa b e & d b ſemidiametro rectangulum d b e, eidem ſectori erit æquale, & proinde quintæ parti ipſius dati circuli. Ipſum porrò rectangulum d b e, uertetur facilè in quadratum, per ultimã ſecundi prædictorum elementorum: ſit illud, quadratum f g. Huic demũ*



quadrato f g, æqualis circulus describatur h l, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem eiusdem antecedentis secundi libri. Is enim circulus h l, æqualis erit ipsi b d e rectangulo: & ipsi propterea sectori b d c. Quatuor enim, utpote sector b d c, rectangulum d b e, quadratum f g, & circulus h l, æqualia sunt adinuicem: & unumquodque pars quinta, ipsius dati circuli a b c.

¶Subcorollarium.

¶*Hinc rursum fit manifestum, circulum posse discindi in quotlibet circulos æquales adinuicem. Cùm enim circunferentia diuidi posit in quotcunque partes inuicem æquales, per secundum corollarium antecedentis primæ propositionis: circulus proinde diuidetur in quotcunque libuerit sectores, & demum in totidem æquales circulos, per ea quæ nuper fuere demonstrata.* 6

¶Corollarium tertium.

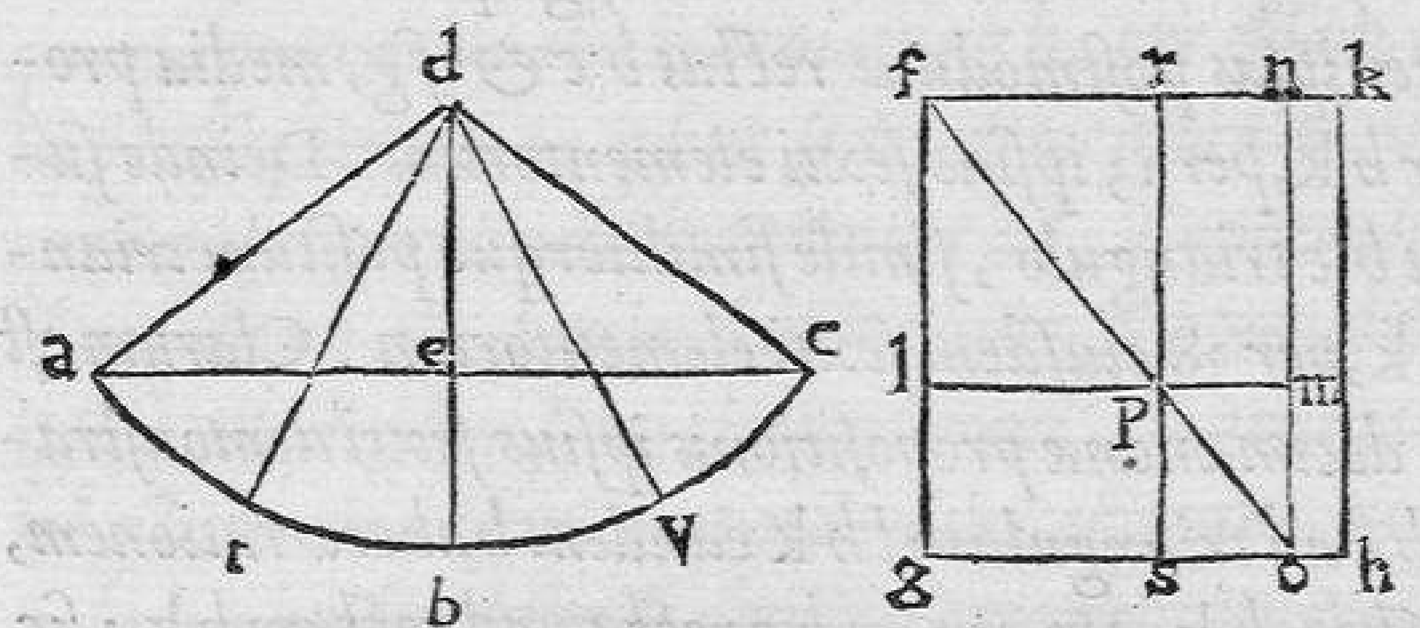
¶*Omnis denique sector, similiter & sectio data circuli, in rectangulum quoduis, seu polygonum regulare, uel in circulum æqualẽ transmutabitur. In primis enim, si sector fuerit pars quota, siue ordinata circuli: patuit ex proximo corollario, qualiter idem sector in rectangulum transmutatur, & ipsum rectãgulum in quadratum, & quadratum demum in datum polygonum regulare, aut in æqualem circulum. Porrò si datus sector fuerit contingenter assumptus, non existens quota siue ordinata pars circuli: dimidius arcus ipsius sectoris, in rectam lineam conuertatur, per primam partem sexti documenti antecedentis primæ propositionis: & comprehensum sub ipsa linea recta, & semidiametro circuli rectangulum, eidem sectori coæquabitur. Quod (ueluti nuper ostensum est) in quadratum, aut polygonum regulare, uel in ipsum reuocabitur circulum.* 7 a

¶Secunda pars, de sectione circuli.

¶*Data porrò circuli sectio, in rectangulum in primis, hoc modo conuertetur. Sit igitur data circuli sectio a b c, & ipsius circuli centrum d. Compleatur eiusdem circuli sector d a b c: cuius arcus a c sub d e b semidiametro bifariam diuidatur, in ipso quidem puncto b, chorda uerò sectionis in puncto e. Vertendus erit sector d a b c, in quadrilaterum rectãgulum, per primam partem huius corollarij: utpote, in rectangulũ f g h k. Deinde, triangulum isosceles d a c, in rectangulum itidem uenit conuertendum, sub d e perpendiculari & dimidia basi e c cõprehensum:* b

cui

cui æquale sit f l m n. Erit igitur rectãgulum f l m n, minus ipso f g h k: cùm triangulum d a c, sit pars sectoris d a b c. Producatur ergo n m, ad partes quidem m, in punctum o ipsius lateris g h: & connectatur dimetiens f o, cuius intersectio cum latere l m, sit p. Per punctũ denique p, utrique ipsarum f g & n o, parallela ducatur r p s, per 31 primi elementorum. Erit igitur f g s r rectangulum, æquale ipsi f l m n (supplementum enim g p, æquum est supplemento p n, per 43 ipsius primi elementorum, & utrique commune l r) & proinde æquale ipsi triangulo d a c. Et quoniam totum rectangulum f g h k, æquum est toti sectori d a b c: reliquum ergo rectangulum r s h k, reliquæ parti eiusdem sectoris, utpote, sectioni a b c de necessitate coæquatur. Hoc autem rectangulum r s h k, uertetur aut in quadratum, & postmodum in circulum: aut in polygonum quoduis æquilaterum, & æquiangulum: ueluti supradictum est.



¶Sectionis in sectorem reductio.

c ¶Adde, quòd si latus s h, in arcum eiusdem reuocetur circuli, per secundam partem sexti documenti antecedentis primæ propositionis, cui æqualis fiat uterque b t & b u, & cõnectantur d t & d u semidiametri: fiet sector d t b u, eidem sectioni a b c æqualis: uterque enim æquabitur rectangulo r s h k.

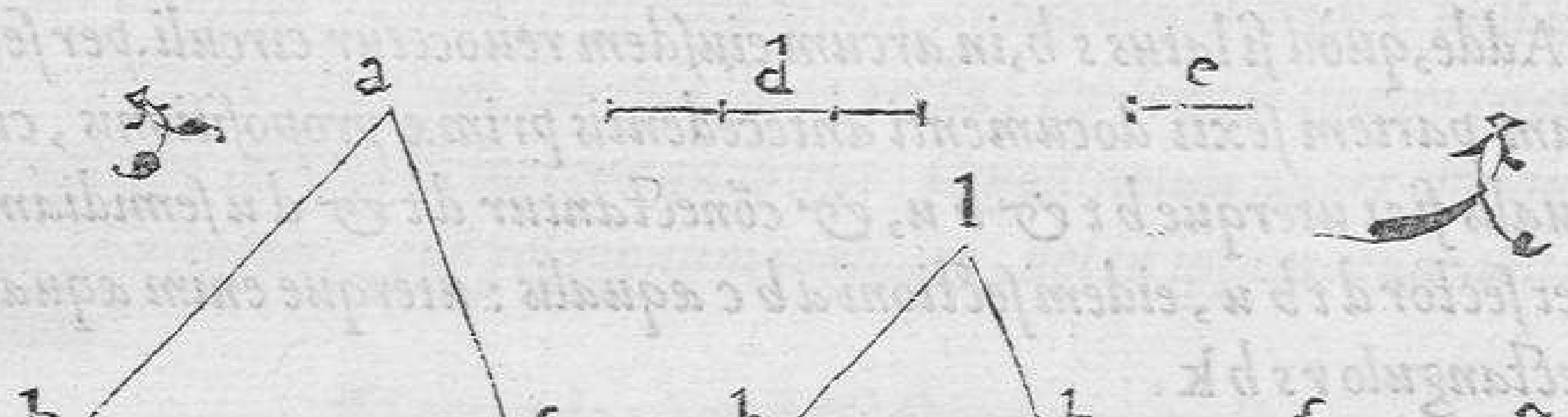
PROPOSITIO VI.

DAtæ cuiuis rectilineæ figuræ, similem rectilineam figuram, sub quauis ratione data maiorem uel minorem describere.

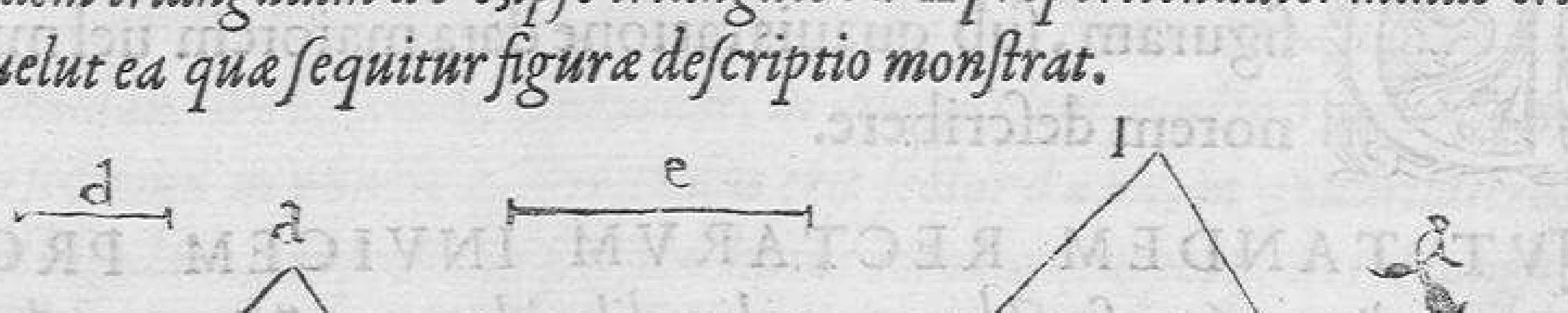
¶VT TANDEM RECTARVM INVICEM PROportionalium usum, fructúmue amplius dilucidemus: nõ incommodum duximus hoc loco demonstrare, qualiter unicuique figuræ planæ rectilineæ, dein circulari, similis figura, sub quauis ratione data maior aut *minor describenda sit. Id enim multarum, tum subtilium, tum utilium rerum adinuentionibus, haud parum poterit inseruire.*

¶Prima pars, de triangulo.

¶*Ab ipso itaque triangulo, rectilineorum primo, fœliciter exordiamur.* 1
Sit igitur datum triangulum a b c, cui expediat simile, similitérque positum describere triangulum: in ea quidem ratione maius, aut minus, quam habet linea d ad lineam e. Suscipiatur itaque liberum aliquod ipsius trianguli latus, utpote b c: & datis tribus lineis rectis, d scilicet, & e, atque b c, quarta proportionalis inueniatur f g, per duodecimam sexti elementorum. Inter ipsas postmodum rectas b c & f g, media proportionalis inueniatur h k, *per 13 ipsius sexti elementorum. Deinde super eadem h* k, *dato a b c triangulo, simile similitérque positum triangulum describatur l h* k, *per 18 eiusdem sexti elementorum. Clarum est igitur, ex succedentis decimænonæ propositionis ipsius sexti demonstratione, triangulum a b c ad triangulum l h* k *eandem habere rationem, quam b c recta, ad rectam h* k. *Vt autem b c recta, ad rectam h* k*: sic, per constructionem, d ad e. Et triangulum igitur a b c, ad simile similitérque positum triangulum l h* k *eandem rationem obtinebit, quam d recta, ad rectam e, per undecimam quinti elementorum. Si igitur d recta, ad e rectă maioris inæqualitatis rationem habuerit: triangulũ a b c, proportionaliter maius erit ipso triangulo l h* k*: ut in subscripta figura.*

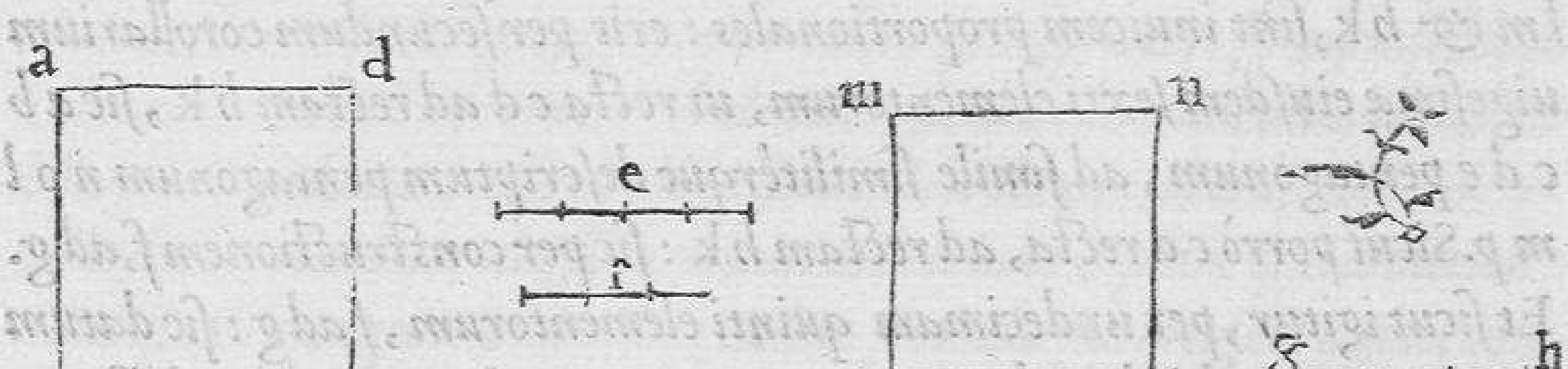


Si autem ratio ipsius d rectæ, ad e rectam, minoris fuerit inæqualitatis: idem triangulum a b c, ipso triangulo l h k *proportionaliter minus erit: uelut ea quæ sequitur figuræ descriptio monstrat.*

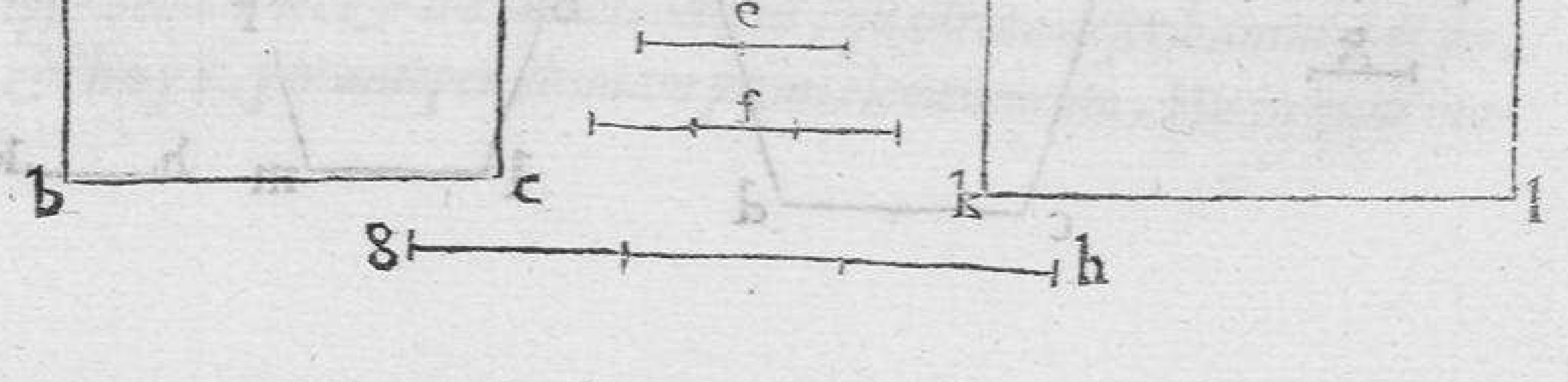


¶Secunda pars, de quadrangularibus figuris.

2 ¶DE QVADRANGVLARIBVS AVTEM, TAM *rectangulis, quàm obliquiangulis figuris, quæ parallelogramma nuncupantur, utpote quadrato, altera parte longiore, rhombo, atque rhomboide: idem pendenter esse faciendum, uelim non ignores. Vt si dato in primis quadrilatero rectangulo a b c d, simile, similitérque positum rectangulum describere fuerit operæpretium, in ea quidem ratione, quam habet e magnitudo, ad f magnitudinem: uno ipsius rectanguli electo latere, utpote b c, & in tertiam magnitudinem post e & f coassumpto, quarta proportionalis, inueniatur g h, per ipsam 12 sexti elementorum.* Et *per sequentem 13 ipsius sexti elementorum, inter b c & g h media rursum proportionalis inueniatur* k *l*. Tandem *super ipsa* k *l, dato rectangulo a b c d, simile, similitérque positum describatur m* k *l n, per ipsam 18 eiusdem sexti elementorum.* Et *quoniam tres lineæ rectæ b c,* k *l, g h, continuè sunt proportionales: est igitur, ut b c ad g h, sic rectangulum a b c d, ad simile similitérque positum rectangulum m* k *l n, per ipsius 19 sexti elementorum corollarium. Sicut porrò b c ad c h, sic per constructionem e ad f.* Et *sicut igitur e ad f, sic per undecimam quinti eorundem elementorum rectangulum a b c d, ad ipsum rectangulum m* k *l n*. Itaque *si magnitudo e, sit maior f magnitudine, rectangulum a b c d, ipso m* k *l n rectangulo proportionaliter erit maius: ut subscripta prædictorum uidetur ostendere figura.*



Si autem præfata magnitudo e, ipsa f minor extiterit, idem rectangulum a b c, ipso m k *l n rectangulo sub eadem ratione minus erit: quemadmodum ex ea quæ sequitur potes elicere descriptione.*

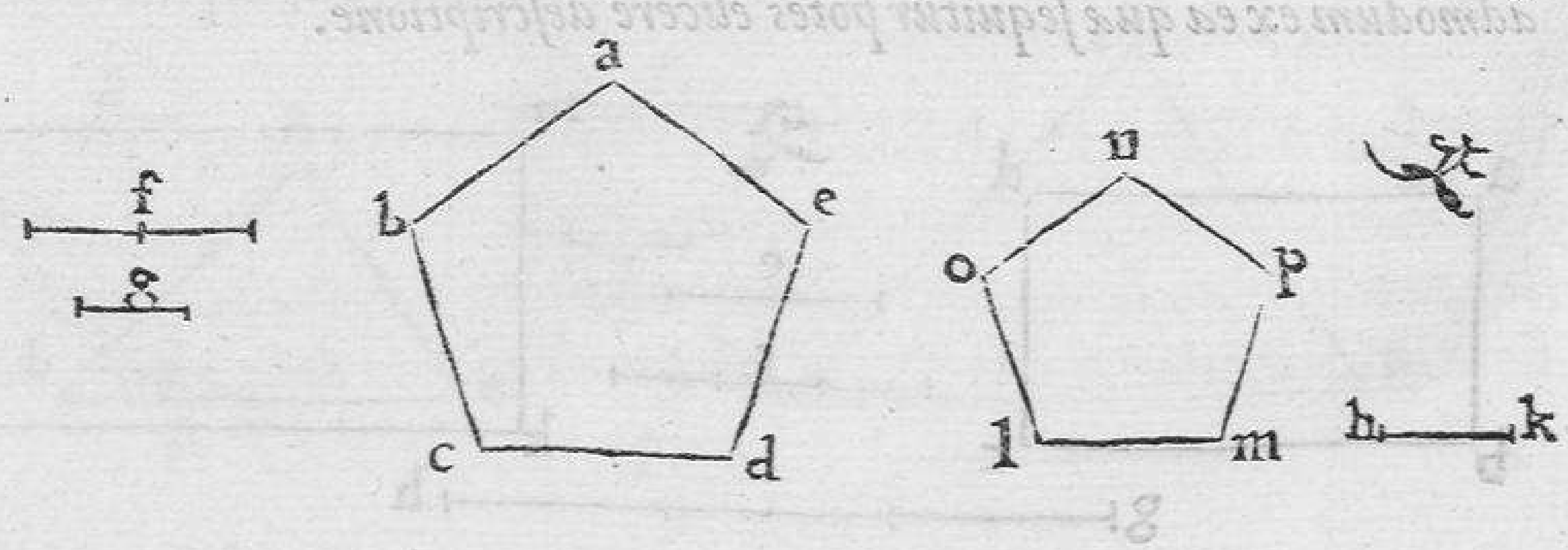


¶*Haud dissimili uia, cætera quadrilatera, & obliquiangula parallelogramma, rhombus uidelicet, atque rhomboides, nec non & ea quæ trapezia nuncupantur: pro data ratione proportionaliter augentur, minuunturue. Quæ cùm ex iis, quæ de quadrangulis rectangulis nuper ostensa sunt, uel facilè deprehendantur: de ipsorum obliquiangulorum, & irregularium quadrilaterorum augmento, uel decremento, uerbum addere consultò supersedemus.*

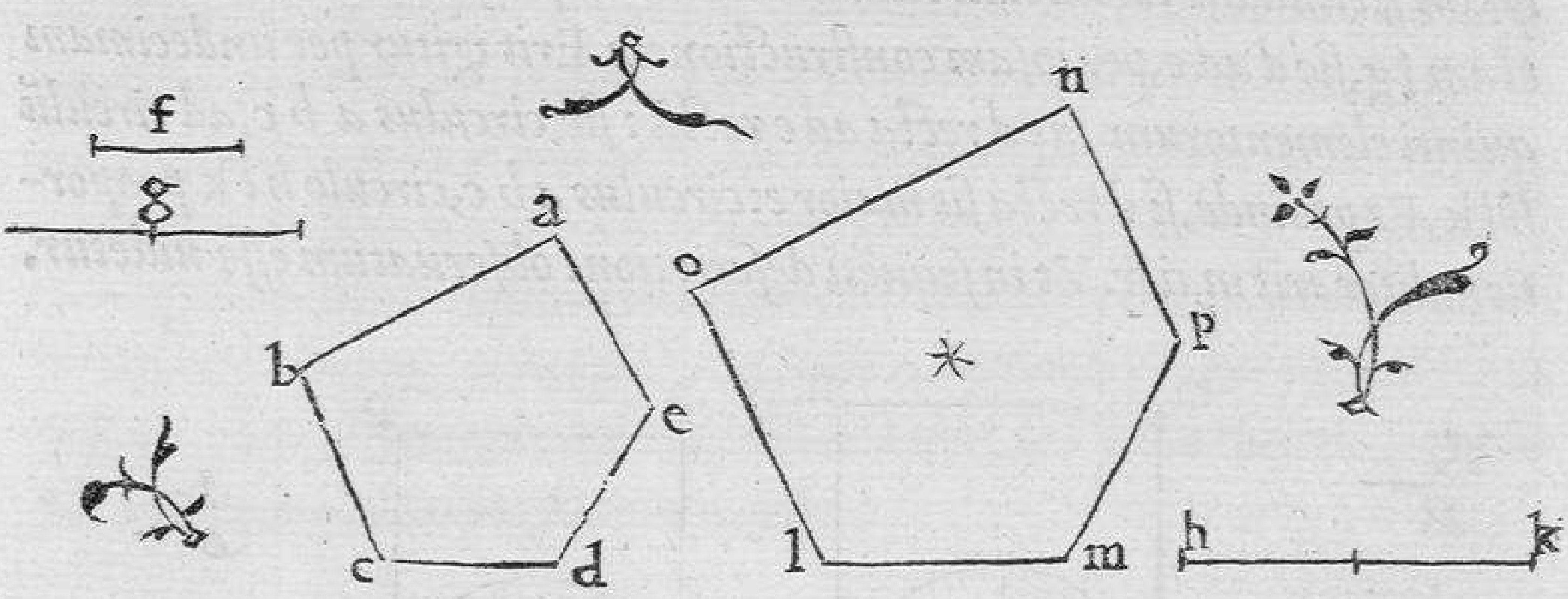
¶Tertia pars, de figuris quæ multilateræ dicuntur.

¶OMNES TANDEM MVLTILATERAE, TAM 3
regulares, quàm etiam irregulares figuræ rectilineæ, haud dissimili uia sub quauis ratione data ueniunt augendæ uel minuendæ. Vt si fuerit (exempli gratia) datum pentagonum a b c d e, cui oporteat simile similitérque positum pentagonum describere: in ea quidem ratione, quam habet recta linea f, ad g lineam rectam. Sumpto igitur uno eiusdem pentagoni latere, utpote c d, quarta proportionalis inueniatur h k, per ipsam 12 sexti elementorum: sicut uidelicet f ad g, sic latus c d ad ipsam h k. Et rursum per 13 ipsius sexti, inter c d & h k, media proportionalis inueniatur l m. Tandem, super ipsam l m, dato pentagono a b c d e, simile similitérque positum pentagonum describatur n o l m p, per sæpiùs allegatam 18 sexti elementorum. Cùm igitur tres lineæ rectæ c d, l m & h k, sint inuicem proportionales: erit per secundum corollarium uigesimæ eiusdem sexti elementorum, ut recta c d ad rectam h k, sic a b c d e pentagonum, ad simile similitérque descriptum pentagonum n o l m p. Sicut porrò c d recta, ad rectam h k: sic per constructionem f, ad g. Et sicut igitur, per undecimam quinti elementorum, f ad g: sic datum pentagonum a b c d e, ad ipsum pentagonum n o l m p. Et proinde si f recta, fuerit maior ipsa g: datum pentagonum a b c d e, proportionaliter maius erit ipso n o l m p. Vt in subscripta figura uides obseruatum.

Et si



Et si f magnitudo, minor fuerit eadem g: minus erit proportionaliter idem a b c d e pentagonum, ipso pentagono n o l m p. Vt ea quæ sequitur uidetur ostendere figura: in qua pentagonum irregulare a b c d e, sub data ratione quæ f ad g, proportionaliter est augmentatum.



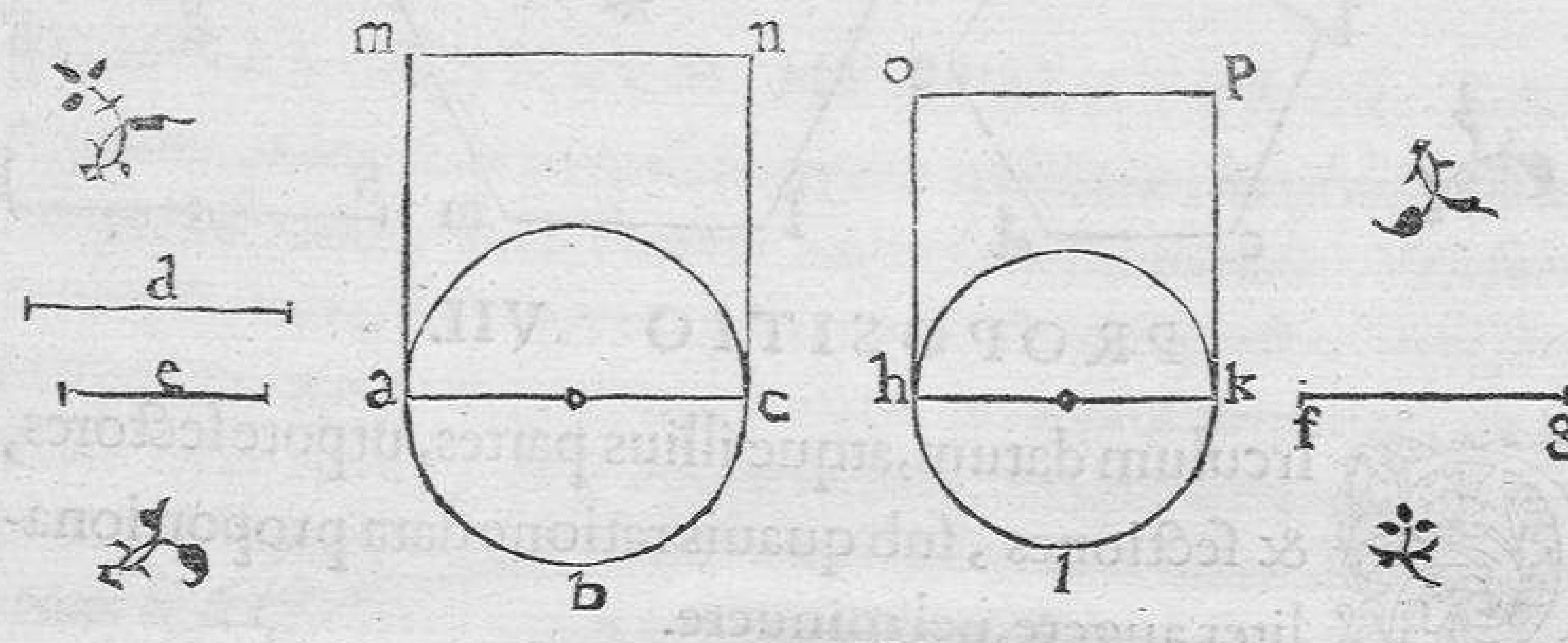
PROPOSITIO VII.

Circulum datum, atque illius partes, utpote sectores, & sectiones, sub quauis ratione data proportionaliter augere, uel minuere.

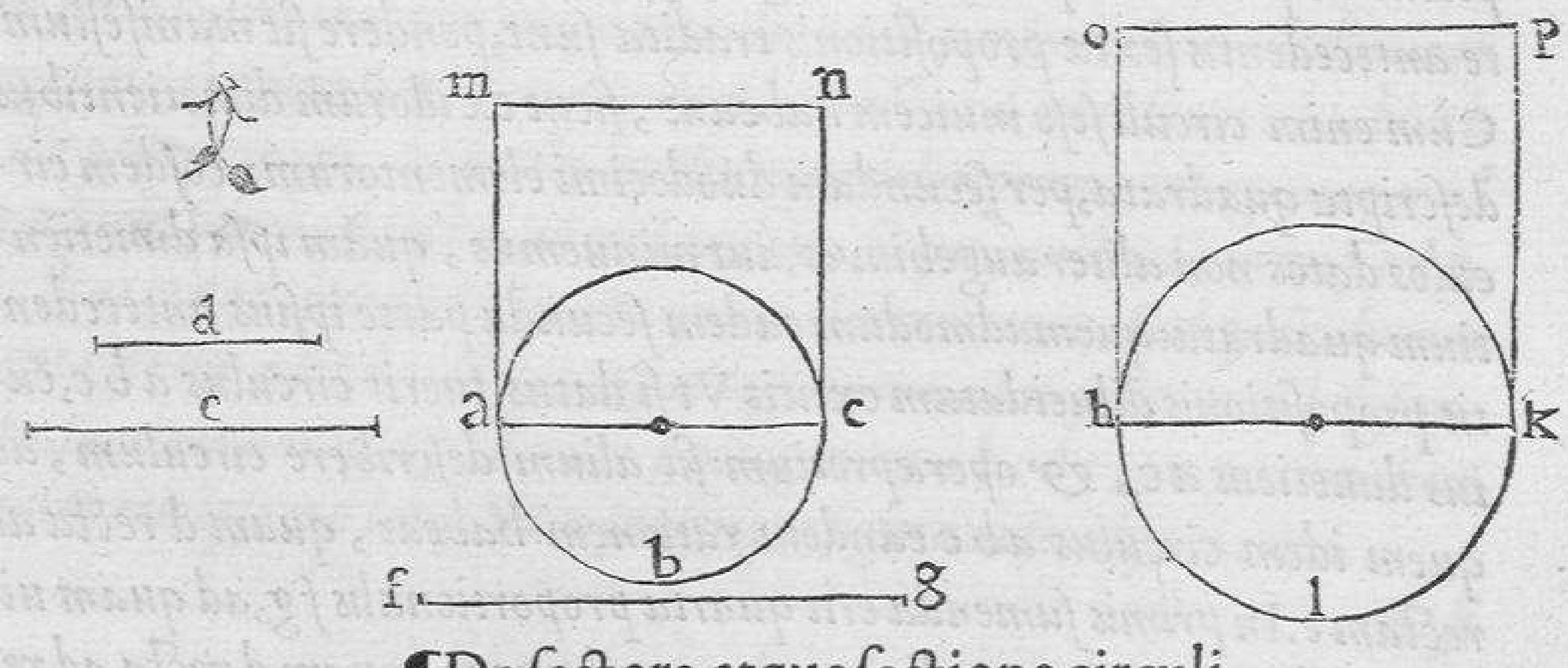
1 ¶RELIQVVM EST TANDEM, AD CIRCVLO-*rum sub ratione data augendorum uel minuendorum peruenire descriptionem: quã ex iis, quæ de rectangulis parallelogrammis, secunda parte antecedentis sextæ propositionis tradita sunt, pendere sit manifestum. Cùm enim circuli sese inuicem habeant, sicut ex illorum dimetientibus descripta quadrata, per secundam duodecimi elementorum: eosdem circulos datos non aliter augebimus, aut minuemus, quàm ipsa dimetientium quadrata: quemadmodum eadem secunda parte ipsius antecedentis propositionis dilucidatum extitit. Vt si datus fuerit circulus a b c, cuius dimetiens a c, & operæpretium sit alium describere circulum, ad quem idem circulus a b c eandem rationem habeat, quam d recta ad rectam e. In primis sumenda erit quarta proportionalis f g, ad quam uidelicet dimetiens a c eandem rationem obtineat, quam d recta ad rectam e, per ipsam 12 sexti elementorum. Deinde, per 13 ipsius sexti, media proportionalis inueniatur h k: quæ fiat diameter circuli h l k. Ex ipsis demum a c & h k dimetientibus, quadrata describantur a m n c, & h o p k, per antepenultimam primi elementorum. His in hunc mo-*

2

dum constructis, cùm tres lineæ rectæ a c, h k, f g, sint per constructionẽ continuè proportionales: erit per corollarium ipsius 19 sexti elementorum, ut a c recta, ad rectam f g, sic quadratum a m n c, ad quadratum h o p k. Sed ut quadratum ad quadratum, sic circulus ad circulum, per ipsam secundam duodecimi elementorum: atque sicut a c recta, ad rectam f g, sic d ad e, per ipsam constructionem. Erit igitur per undecimam quinti elementorum, ut d recta ad e rectã: sic circulus a b c, ad circulũ h l k. Et proinde, si d recta sit maior e: circulus a b c, circulo h l k proportionaliter erit maior. Vt in sequẽti descriptione obseruatum esse uidetur.



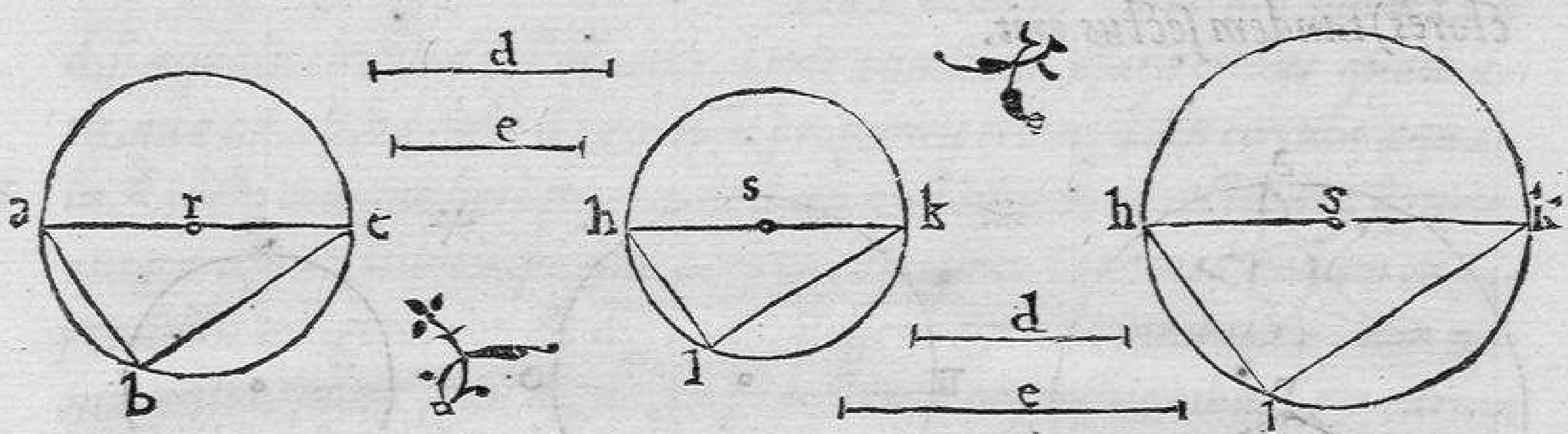
Si autem ipsa d recta, fuerit minor eadem e: minor erit proportionaliter circulus a b c, præfato circulo h l k. Quemadmodum subscripta figuræ delineatio, fidem facit apertam. De cæteris quibuscunque circulis, idem habeto iudicium.



¶De sectore, atque sectione circuli.

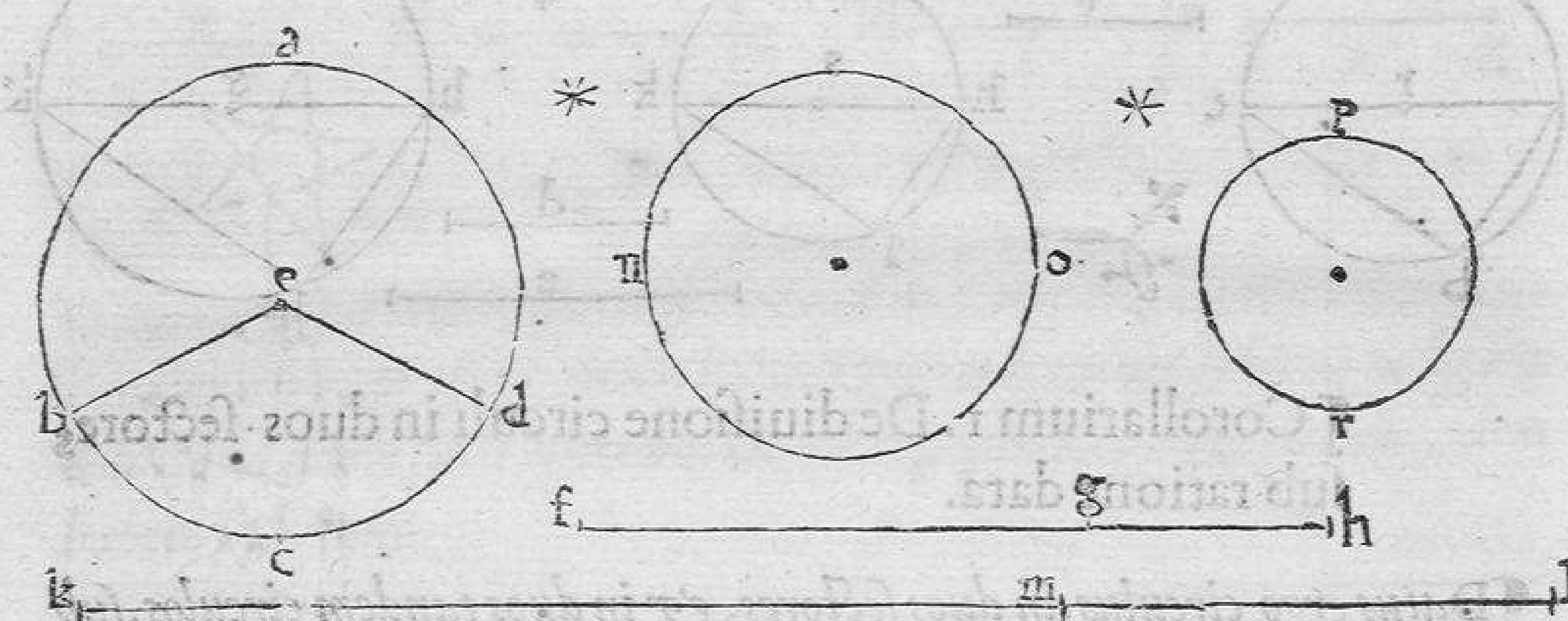
¶De circuli autem sectore, atque sectione, idem pendenter obseruandũ esse uidetur. Quoniam aucto uel diminuto pro ratione data circulo: illius sector, aut sectio data, fit proportionaliter maior, aut minor, dum modo similis describatur. Vt enim totus circulus, ad totum se habet circulum: 2

culum: sic pars quælibet similis, ad partem similem. Resumantur, exempli gratia, proximarum descriptionum circuli a b c, & h l k: sitque centrum dati circuli a b c punctum r, & ipsius h l k circuli centrum punctum s. Producto igitur b r semidiametro, connectatur recta b c. Deinde ad centrum s ipsius h l k circuli, dato angulo rectilineo b r c, æqualis angulus rectilineus constituatur l s k, per 23 primi elementorum: & connectatur chorda, seu linea recta l k. Erunt itaque tum sectores, tum sectiones eorũdem circulorum inuicem similes: aio quòd & ipsis circulis proportionales. Quemadmodum uidelicet circulus ad circulum, sic sector ad sectorem, atque sectio ad sectionem similem: & proinde tum sectores, tum sectiones eorundem circulorum, sub data ratione (qualis fuit d ad e) inuicem proportionantur.



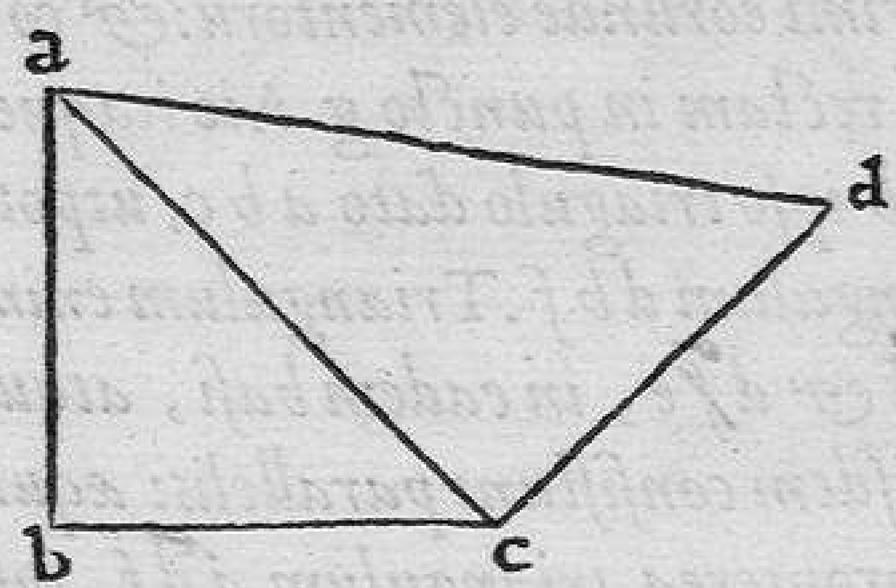
¶ Corollarium 1. De diuisione circuli in duos sectores sub ratione data.

a ¶*Datus ergo circulus, in duos sectores, & in duos tandem circulos, sub data ratione proportionatos diuidetur. Vt si datus fuerit (exempli gratia) circulus a b c d, cuius centrum e, data uerò ratio, quæ f g ad g h: uertenda erit in primis circunferentia circuli in lineã rectã, per primã, aut secundam propositionem antecedentis secundi libri, quæ sit k l. Ipsa postmodum k l recta, eidem f g, secte in puncto g, similiter secanda est, in puncto uidelicet m, per decimam sexti elementorum: sicut quidem f g ad g h, sic k m ad m l. Alterutrum præterea segmentorum ipsius k l, utpote m l, in arcum ipsius dati circuli reuocetur, per sextum documentum antecedentis primæ propositionis: sitque idem arcus b c d, & connectantur e b & e d semidiametri. Reliquus igitur arcus b a d, reliquo segmento k l erit æqualis. Vt autem arcus ad arcum, sic se habet sector ad sectorẽ. Sector igitur e b a d, ad sectorem e b c d eam rationem habet, quam arcus b a d ad arcum b c d: & proinde quam e f, ad f g. Diuisus est itaque* *datus circulus a b c d, in duos sectores sub data ratione proportionatos.* ¶ *Comprehensum autem sub eiusdem circuli semidiametro (ut ad secundam partem huiusce corollarij deueniamus) & dimidio segmento k m rectangulum, æquum erit sectori e b a d: & sub eodem semidiametro, & dimidio reliqui segmenti m l contentum rectangulum, reliquo sectori e b c d coæquabitur: per tertium corollarium antecedentis quintę propositionis. Omne insuper rectangulum, facilè uertitur in quadratũ, per ultimam secundi elemẽtorum: & quadratum tandem in circulum, per decimam, uel undecimam propositionem antecedentis libri secundi. Sit igitur circulus n o, æqualis sectori e b a d: ipsi uerò sectori e b c d, æqualis circulus p r. Datus ergo circulus a b c d: in duos circulos n o & p r, sub data ratione proportionatos (nempe sub eadem, qua & ipsi sectores) tandem sectus erit.* b



¶Corollarium 2, Quòd pluribus circulis, dabitur unus circulus æqualis.

¶*Ex duobus tandem, uel pluribus circulis, unicus poterit confici circulus, ipsis datis circulis adamussim æqualis. Sint (uerbi gratia) duo circuli, in unum circulum in primis reuocandi. Vterque igitur circulus, per sextam, septimam, octauam, aut nonam propositionem ipsius antecedẽtis libri secundi, uertetur in quadratum: & ipsis duobus quadratis, unum æquale quadratum, ex penultima primi elementorum uel facilè colligetur. Cui si per decimam eiusdem secundi libri propositionem circulus describatur æqualis: is erit ęqualis præfatis duobus circulis, à principio datis.* ¶ *Idem subsequetur, ubi plures duobus oblati fuerint circuli,* b *utpote* a *utpote tres. His enim in quadrata conuersis, si duorum primorum quadratorum latera, quæ sint (uerbi gratia) a b & b c, in rectum angulum qui sub a b c constituantur, & connectatur recta a c: clarum est ex ipsa penultima primi elementorum, quadratum quod ex a c describitur, æquum esse descriptis ex a b & b c quadratis. Cõstituatur rursum latus*



tertij quadrati, utpote c d, in rectum angulum cum a c: & connectatur a d linea recta. Huius itaque quadratum, eis quæ ex a c & c d, & proinde eis quæ ex a b, b c & c d quadratis describuntur, erit ęquale. Huic demum quadrato quod ex a d, si æqualis circulus describatur, is erit æqualis præfatis tribus quadratis, quæ ex a b, b c & c d: & ipsis propterea tribus datis circulis æqualis.
c *¶ Idem quoque fieri poterit de datis quibuscunque rectilineis figuris: aut partim rectilineis, partim uerò circularibus. Quemadmodum ex supradictis colligere, non est difficile. Possent & alia innumera, non minus utilia, quàm scitu digna, ex præostensis propositionibus, & earum corollariis subinferri: quæ studiosis rerum mathematicarum (cùm hæc in præsentiarum satis esse uideantur) prosequẽda, data relinquimus opera.*

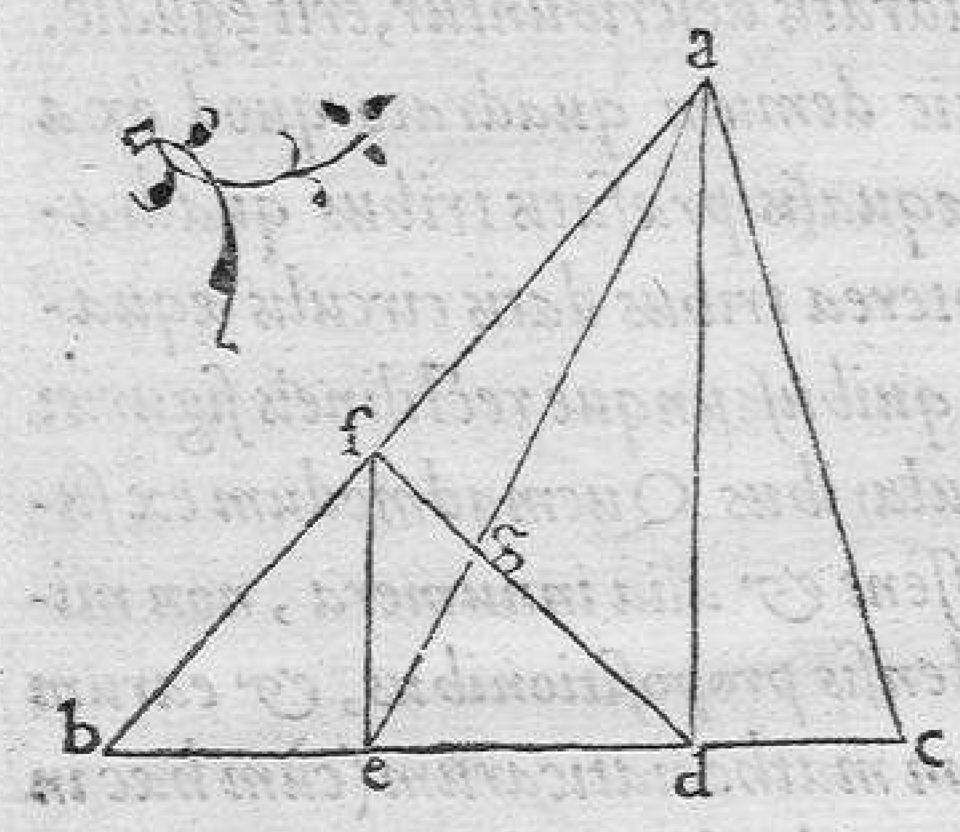
PROPOSITIO VIII.

A Dato cuiusuis lateris oblati trianguli puncto, rectã ducere lineam, quæ ordinatam partem ab ipso triangulo discindat.

a *¶ VT HVIC LIBRO TERTIO GRATVM FInem imponamus, iuuat tandem nonnulla de triangulo omnium rectilineorum primo, & in quod cæteræ omnes resoluuntur figuræ rectilineæ, superaddere problemata, non minus quidem utilia, quàm iucunda. Ordinatam itaque partem appellamus, quæ ab aliquo denominatur numero: utpote, dimidiam quæ à binario, tertiam quæ à ternario, quartam quæ à quaternario uidetur accipere denominationem: & in hunc modum de cæteris in infinitum progredientibus numeris, & partibus quotis ab eisdem numeris denominatis. Sit igitur datum triangulum*

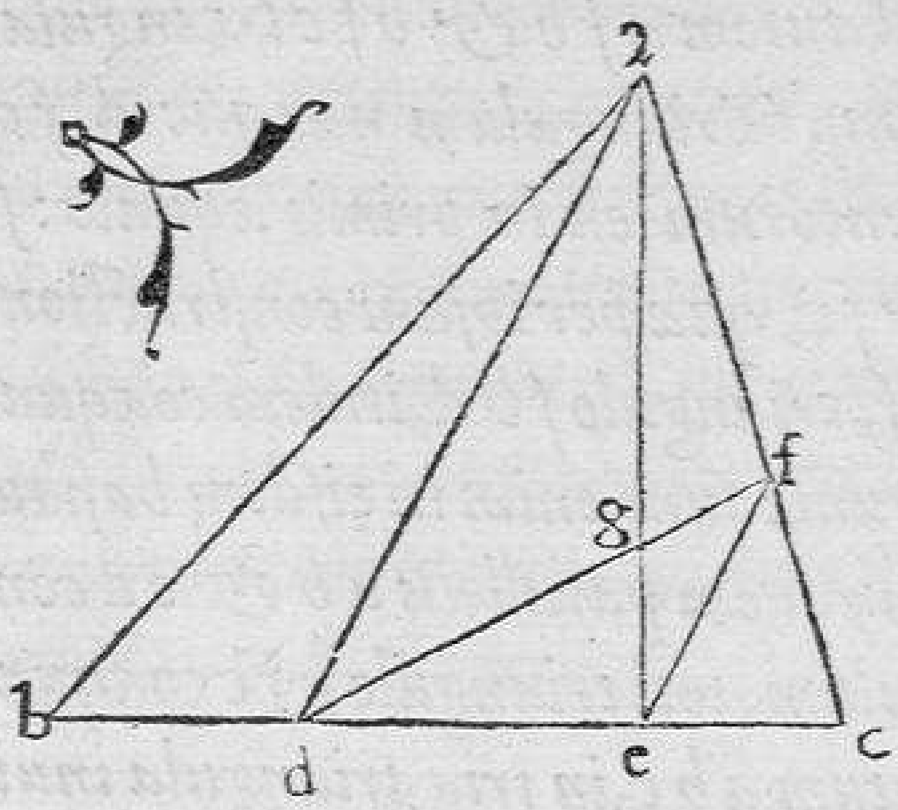
t

a b c, & in aliquo ipsius trianguli latere, utpote b c, designatum punctum d: sitque propositum tertiam (uerbi gratia) partẽ ab eodem abscindere triangulo, sub recta uidelicet, quæ per d punctum fuerit delineata. Secetur itaque ab ipso latere b c, pars tertia b e, per nonam sexti elementorum. Et connexis a d & a e lineis rectis, per datum punctum e, recta ducatur ipsi a d parallela, per 31 primi eorundẽ elementorũ: & cõnectatur demum recta d f, quæ secet a d rectam in puncto g. Aio itaque, rectam d f abscindere tertiam partem ab ipso triãgulo dato a b c, utpote triangulum d b f. Triangulum enim a d f & d f e, in eadem basi, atque in eisdem consistunt parallelis: æquũ est propterea triangulum a d f, ipsi triangulo d f e, per 37 ipsius primi elementorum. Subducto igitur communi triangulo a g d, reliquum triãgulum a f g, reliquo g e d est æquale. Quòd si utrique æqualium triangulorum, addatur commune trapezium f g e b, consurget triangulum d f b æquale triangulo a b e. Et quoniam a b c & a b e triangula, sub eodem sunt uertice: se habent igitur ut bases, per primam sexti elementorum. Basis porrò b e, est tertia pars ipsius b c, per ipsam constructionem: & triangulum igitur a b e, est tertia pars ipsius trianguli a b c. Et proinde triangulum d f b, eiusdem trianguli a b c pars itidem est tertia: quæ enim sunt inuicem æqualia, eiusdem sunt æquè minora, per septimæ communis sententiæ conuersionem. Recta igitur linea d f, abscindit tertiam partem d f b ab ipso triangulo dato a b c. Quod oportuit fecisse.



¶ Haud aliter datam quamuis aliam partem ordinatam, ex eodem a b c triangulo dato, sub ipsa recta d f discindere licebit: etiam ubi datum punctum d, inter b & e puncta fuerit designatum. Vt ex ea quæ sequitur figuræ dispositione, uel facilè deprehenditur: in qua punctum datum in latere b c est rursum d, & c e recta, eiusdem lateris pars quarta. Descriptis enim, ueluti suprà traditum est, a d, d f, f e & e a lineis rectis, manifestum est rursum triangula a g f & d g e, fore inuicem æqualia: & triangulum consequenter a e c, triangulo b

d f e

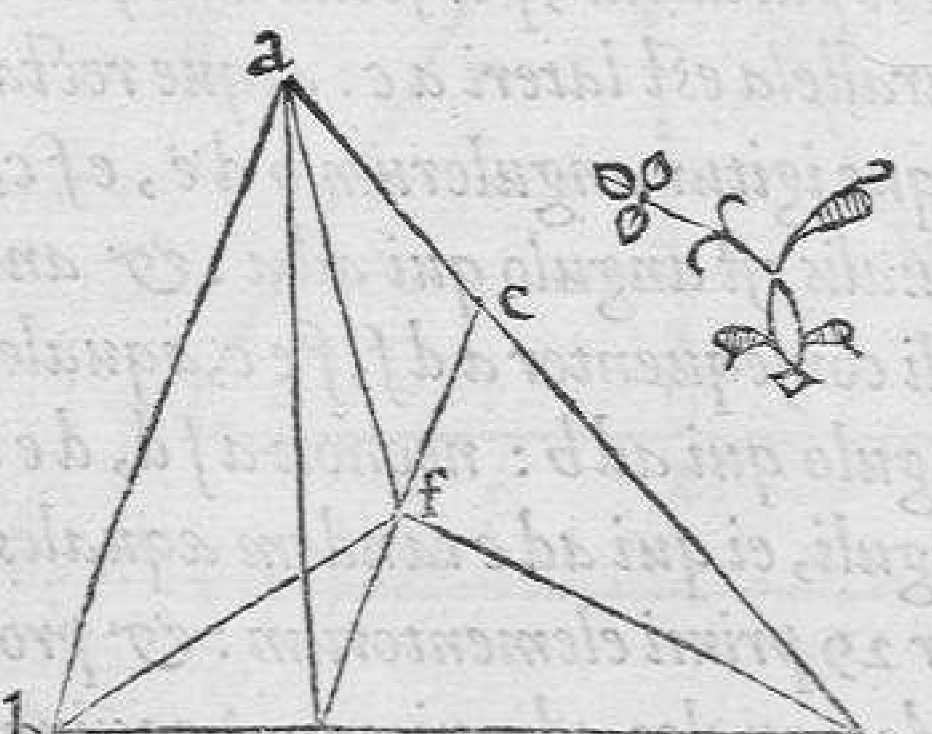


d f e æquale, iuncto uidelicet communi trapezio f g e c. Et cùm triangulum a e c, sit quarta pars ipsius dati a b c trianguli: erit propterea triangulum d f c, eiusdem trianguli a b c pars itidem quarta.

PROPOSITIO IX.

INtra datum triangulum punctum inuenire, à quo in singulos ductæ lineæ rectæ, triangulum ipsum in tria & inuicem æqualia diuidant triangula.

¶SIT OBLATVM TRIANGVLVM A B C, *& ab uno illius latere, utpote b c, tertia pars abscindatur b d, per nonā sexti elementorum. Consequenter per ipsum punctum d, ipsi a b lateri parallela ducatur d e, per 31 primi eorundem elementorum: quæ bifariam diuidatur in puncto f, per decimam eiusdem primi elementorum. Aio itaque, punctum f esse illud quod quærebatur. Connectantur enim a d, a f, f b, f c lineæ rectæ: erunt igitur a b d, a f b triangula in eadem basi a b, atque in eisdem parallelis a b & e d: & proinde inuicem æqualia, per 37 primi elementorum. Triangulum porrò a b d, se habet ad totum triangulum datum a b c, ut b d basis ad basin b c, per primam sexti eorundem elementorum. Atqui b d basis, est tertia pars ipsius b c, per ipsam constructionem: & triangulum igitur a b d, atque ipsum pēdenter a f b triangulum, tertia itidem pars est eiusdem trianguli dati a b c.*

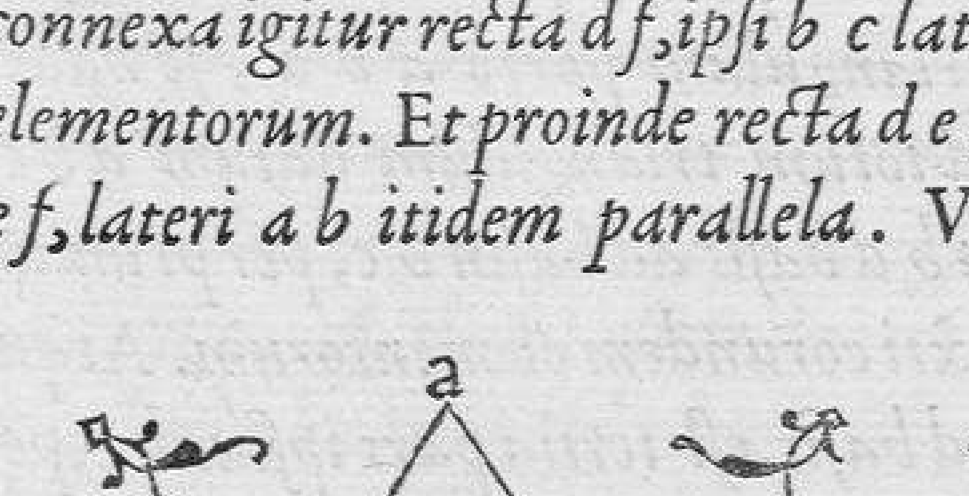


Reliqua proinde triāgula a f c, b f c, reliqua duo tertia eiusdem a b c trianguli comprehendunt: quæ cùm sint inuicem æqualia, quodlibet eorundem triangulorum unum tertium *efficit ipsius dati trianguli a b c. Quòd autem a f c & b f c triangula, sint adinuicem æqualia, fit manifestum. Triangulum nanque d f c, triangulo c f e, per primam sexti elementorum est in primis æquale: se habent enim adinuicem, ut bases d f & f e, quæ per ipsam constructionẽ sunt æquales. Triangulum insuper a e f, triangulo f b d, itidem coæquatur, per 37 primi eorundem elementorum: sunt enim in eisdem basibus inuicem æqualibus d f & f e, atque in eisdem parallelis a b & e d consistentia. Totum propterea a f c triangulum, toti triangulo b f c coæquatur. Diuisum est itaque triangulum datum a b c, in tria triangula inuicem æqualia, sub tribus rectis lineis, à puncto f in singulos prodeuntibus angulos. Quod faciendum receperamus.*

PROPOSITIO X.

DAtum insuper triangulum, in quatuor æqualia, atque inuicem æquiangula, diuidere triangula.

¶ ESTO RVRSVM DATVM TRIANGVLVM *a b c, cuius unumquodque latus bifariam diuidatur, per decimam primi elementorum: a b quidem in puncto d, & b c in puncto e, atque c a in puncto f. & connectantur d e, d f & f e lineæ rectæ. Diuiditur itaque triangulum a b c, in quatuor triangula a d f, f d e, b d e, e f c: quæ aio in primis esse inuicem æquiangula. Cùm enim a b & a c latera, proportionaliter sint diuisa in punctis d & f: (nempe utrumque bifariam) connexa igitur recta d f, ipsi b c lateri est parallela, per secundam sexti elementorum. Et proinde recta d e, parallela est lateri a c: atque recta e f, lateri a b itidem parallela. Vterque igitur angulorum b d e, e f c, æqualis est angulo qui ad a: & anguli consequenter a d f, f e c, æquales angulo qui ad b: necnon a f d, d e b anguli, ei qui ad c tandem æquales, per 29 primi elementorum: & proinde æquales adinuicem. Aequiangula sunt itaque a d f, b d e, e f c triangula: & unicuique ipsorum triangulorum, æquiangulum triangulum*

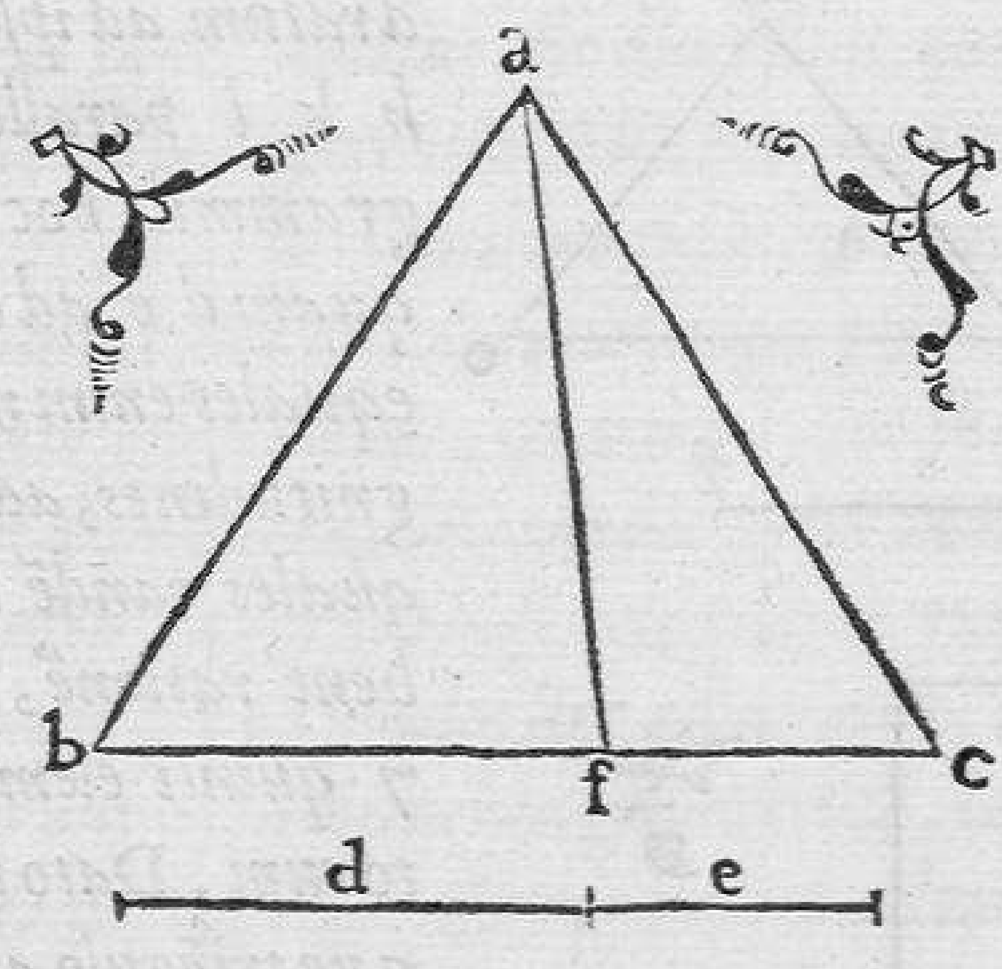


gulum d e f, tum per ipsam 29, tum per 34 primi elementorũ. Aio quòd & præfata triangula quatuor, sunt adinuicem æqualia: quod ex sola 34 primi elementorum, fit manifestum. Parallelogramma enim sunt a d e f, b d f e, d e c f quadrilatera: unumquodque propterea triangulum a d f, b d e, e f c, æquum est ipsi triangulo d e f, quod cuiuslibet trium supradictorum parallelogrammorum est dimidium. Triangulum itaque a b c, in quatuor triangula inuicem æqualia, & æquiangula diuiditur. Quòd faciendum erat.

PROPOSITIO XI.

DAtum triangulum in duo partiri triangula, sub data ratione consistentia.

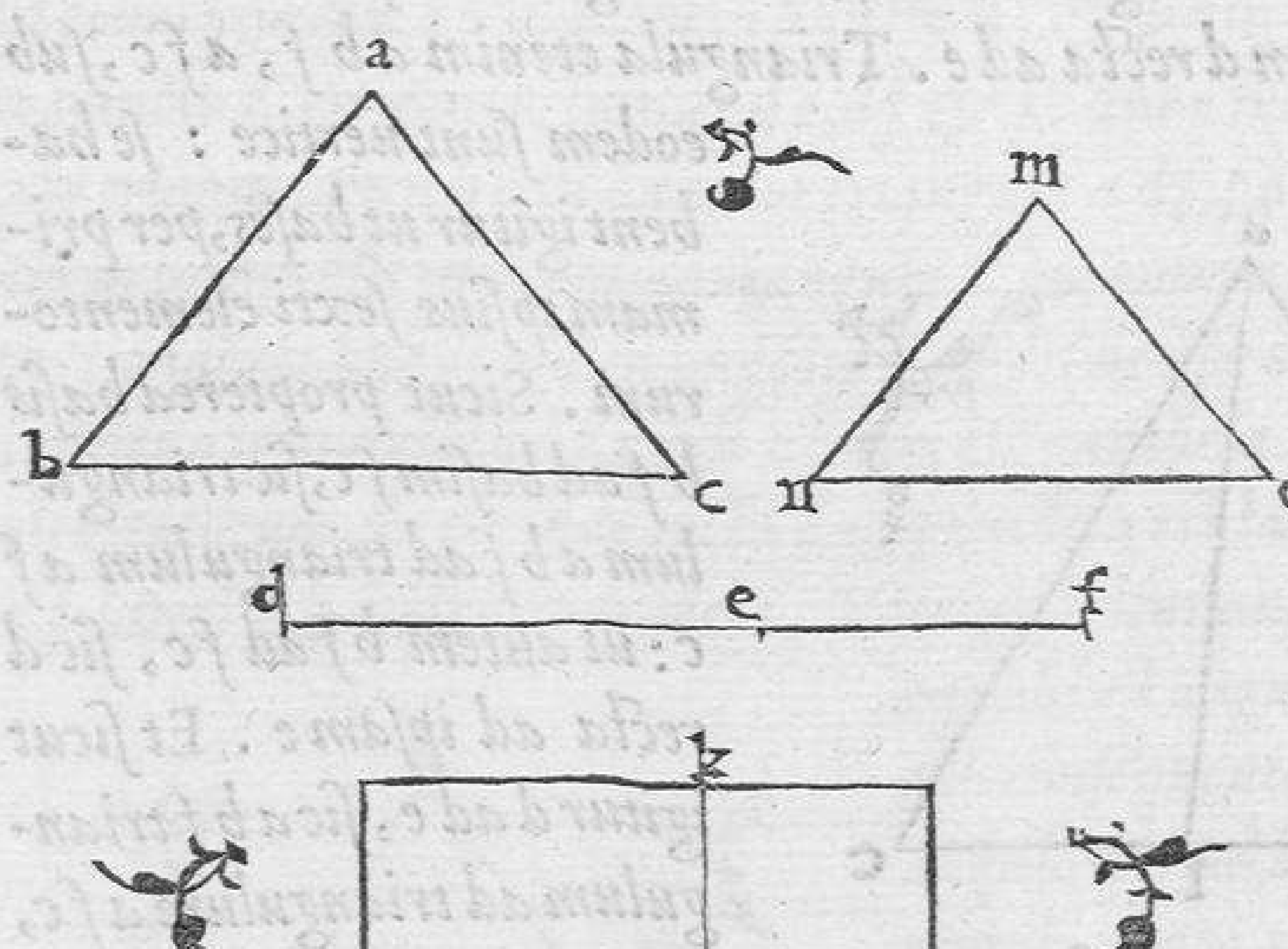
¶SIT DATVM TRIANGVLVM A B C, QVOD *expediat in duo partiri triangulā, sub ratione quæ est d ad e se habentia. Liberum itaque ipsius trianguli latus, utpote b c, sicut data linea recta, quæ ex d & e resultat, per decimā sexti elementorum diuidatur: in puncto quidem f, ut d scilicet ad e, sic b f ad f c. & connectatur a f linea recta. Aio itaque triangulum a b f, ad triangulum a f c eandem habere rationem, quam d recta ad e. Triangula etenim a b f, a f c, sub eodem sunt uertice: se habent igitur ut bases, per primam ipsius sexti elementorum. Sicut propterea basis b f ad basim f c, sic triangulum a b f ad triangulum a f c: ut autem b f ad f c, sic d recta ad ipsam e. Et sicut igitur d ad e, sic a b f triangulum ad triangulum a f c, per undecimam quinti elementorum. Diuisum est itaque triangulum a b c, in duo triangula sub data ratione consistentia: quod oportebat facere. Idem quoque fiet de parallelogrammis.*



¶PROPOSITIO XII.

OMni triangulo dato, simile similitérque positum triangulum, sub ratione data, aliter quàm superiùs traditum sit, constituere.

¶HOC EST, DATVM TRIANGVLVM, SVB *ratione data, non mutata illius specie, proportionaliter augere, uel minuere. Sit igitur rursum datum triangulum a b c: data uerò ratio, quæ d e ad e f. Reuocetur in primis ipsum a b c triangulum, in quadratum æquale, per ultimam secundi elementorum, sitque illud g h k: & producatur latus g h in directum & continuum, ad partes quidem h uersus l. Tribus deinde lineis datis d e, e f, g h, quarta proportionalis assumatur h l, per 12 sexti elementorum, sicut uidelicet d e ad e f, sic g h ad h l: & compleatur h k l parallelogrammum. Se habebit igitur quadratum g h k ad ipsum h k l parallelogrammum, ut basis g h ad basin h l, per primam sexti elementorum: & proinde ut d e ad e f, per undecimam quinti eorundem elementorum. Dato postmodum triangulo a b c simile, ipsi autem h k l parallelogrammo æquale triangulum constituatur m n o, per 25 eiusdem sexti elementorum. Et quoniam triangulum a b c, ipsi quadrato g h k est æquale, & triangulum m n o æquale parallelogrãmo h k l: triangulum propterea a b c, ad triangulum m n o eandem rationem habebit, quam g h k quadratum ad ipsum h k l parallelogrammũ, hoc est, quam d e ad e f: ęquales enim magnitudines, ad æquales eandẽ habent rationẽ, per 7 quinti elementorum. Dato itaque triãgulo a b c, sim ile similitérque positum triangulum m n o descriptum est, sub data quidem ratione, quæ d e ad e f: quod oportuit fecisse.*



RERVM MATHEMATICARVM, HACTENVS DESIDERATARVM, LIBER QVARTVS.

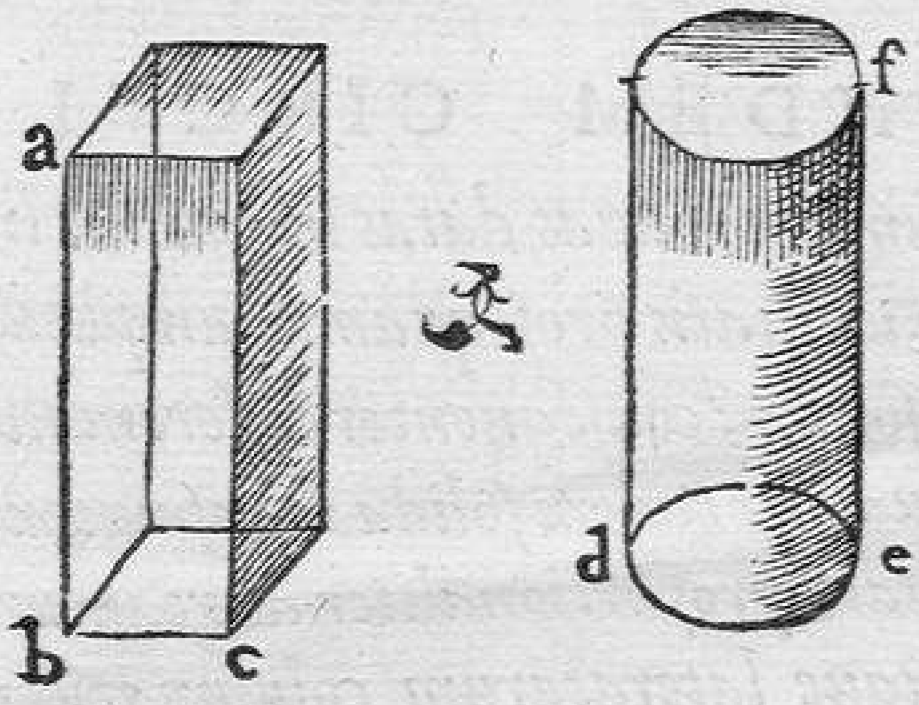
PROPOSITIO I.

OMnem columnam, atque pyramidem lateratam, in rotundam eidem lateratæ æqualem: atque è diuerso, in primis transmutare.

1 ¶VT INVENTAE TANDEM CIRCVLI *quadraturæ, duarum quoque rectarum inter duas datas inæquales lineas rectas continuè proportionalium, utilitatis prosequamur amplitudinem: de cubo, & sphera, cæterísque solidis, consequenter differendum esse uidetur: & simul ostendendum, qualiter eadem solida transmutentur adinuicem, & sub quauis ratione data proportionaliter augeantur, uel diminuantur. ¶ Ab ipsarum itaque lateratarum columnarum, & pyramidum, in columnas, seu pyramides rotundas permutatione, atque è diuerso, exordiendum esse censuimus.* Lateratas igitur *appellamus columnas, atque pyramides, quæ rectilineas habent bases: quarum tanta uidetur esse diuersitas, quanta & ipsarum figurarum rectilinearum differentia. Aliæ namque triangulares sunt, aliæ quadrangulares, aliæ uerò multangulæ: quæ ueluti numeri, in infinitum progrediuntur. Sed de columnis, atque pyramidibus lateratis, quæstio potissimum esse uidetur, quarum bases sunt regulares, hoc est, æquiangulæ & æquilateræ. Rotundæ porrò tam columnæ, quàm pyramides uocitantur, quarum bases circulares existunt: quæ sola quantitate (cùm omnes circuli similes sint adinuicem) inter sese differre uidentur. Euclides autem in elementis geometricis, lateratas columnas prismata indifferenter appellat: & rotundam columnam, cylindrum atque ipsam pyramidem rotundam, conum specialiter nominare solitus est, sub ipsius pyramidis diffinitione, lateratas solummodò pyramides comprehendens. Quemadmodum ex diffinitionibus undecimi elementorum, colligere haud difficile est.*

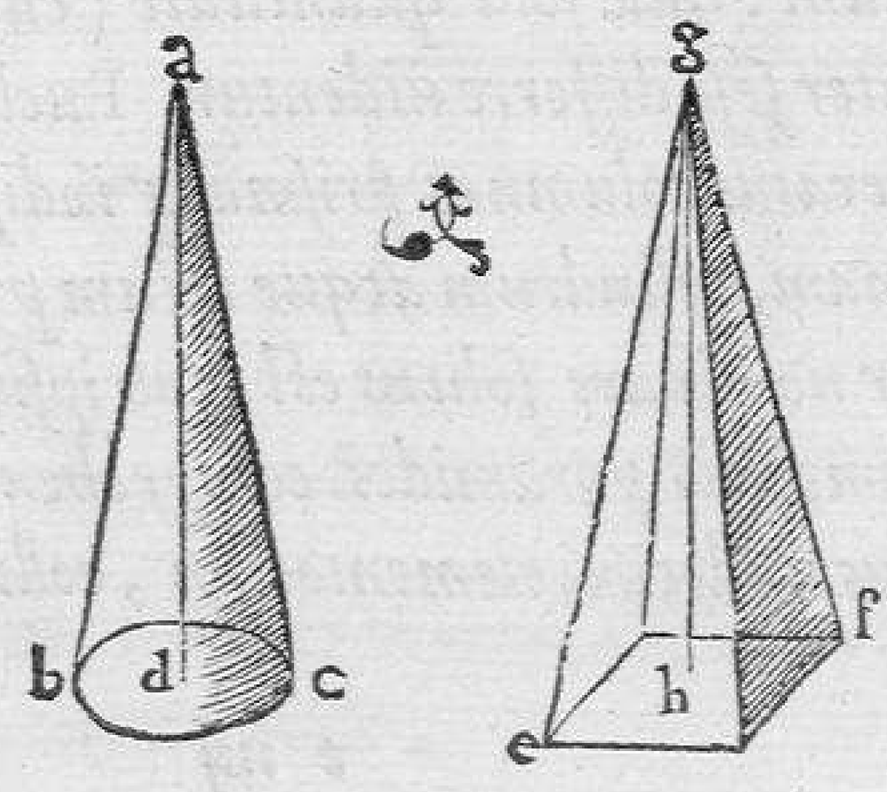
¶Prima pars, de columnæ atque pyramidis lateratæ in rotundam permutatione.

¶CVM IGITVR COLVMNAM ALIQVAM, *uel pyramidem lateratam, in rotundam eidem lateratę æqualem transmutare fuerit operæpretium: uertenda erit basis laterata in circulum, eidem basi æqualem, per quartam propositionem antecedentis libri tertij, & super eodem circulo, columna, uel pyramis ad eandem altitudinem erigenda. Nam ea erit rotunda, & ipsi lateratæ columnæ uel pyramidi æqualis.* ¶ *Vt si quadrangularem columnam a b c, in rotundam libuerit uertere columnam, hoc est, ipsi lateratæ dare rotundã æqualem, quæ eandem obseruet altitudinem: conuersa basi quadrilatera b c, in circularem d e, excitetur columna rotunda d e f, ad altitudinem quidẽ e f quæ ipsi a b sit æqualis. Nam præfata columna d e f, eidem lateratæ a b c erit æqualis.* 2



¶Secunda pars, de rotundæ tam columnæ quàm pyramidis in lateratam reductione.

¶SI IVVET AVTEM ROTVNDAM CO- *lumnam, quæ cylindrus dicitur, aut rotundam pyramidem, quæ conus uocitatur, in lateratam eidem rotundæ æqualem, uersa uice reducere: conuerso procedendum erit ordine. Vertenda etenim erit basis circularis ipsius columnæ uel pyramidis rotundæ, in liberam quamuis rectilineam figuram, eidem circulari æqualem, per quintam propositionem antecedentis libri tertij: & super ipsa figura rectilinea, construenda columna, uel pyramis laterata, ad ipsius rotũdæ columnæ uel pyramidis altitudinem. Nam eadem laterata columna, uel pyramis, ipsi rotũdæ coæquabitur.* 3



bitur. ¶ *Vt si uertenda fuerit (uerbi gratia) rotunda pyramis a b c, in quadrilateram: reuocandus erit in primis circulus b c, in quadratum e f, & super ipso quadrato suscitanda pyramis e f g, sub quatuor isoscelibus inuicem æqualibus comprehensa, ad altitudinẽ quidem g h, quæ ipsi a d sit æqualis. Quoniam ipsa pyramis quadrilatera e f g, æquabitur ipsi rotundæ a b c.*

¶ Supradictorum ratio mathematica.

4 ¶ *Quòd autem hæc ita se habeant, fit manifestum.* In primis enim quod *columnæ in basibus æqualibus, & sub eadem altitudine constitutæ, sint æquales adinuicem, nulli dubium esse uidetur: cùm ex ductu æqualium planorum, in ęquales altitudines, siue rectas procreentur.* Nam *sub ęqualibus planis, per ęquales altitudines ęqualiter multiplicatis, ęqualia procreantur solida.* ¶ *De pyramidibus autem, certum est illas efficere tertiam partem suarum columnarum, eandem basin & altitudinem cum ipsis pyramidibus habentium: lateratę quidem, per corollarium septimę, rotundę uerò, per decimam duodecimi elementorum.* Eiuscemodi *autem columnę, ęquales sunt adinuicem, uti nunc ostensum est: & quę ęqualium sunt dimidium, uel teriiũ, aut quouis modo ęquè minora, ęqualia sunt adinuicem.* Fit *igitur, ut pyramides, ęquales bases, & altitudines habentes, sint inuicem ęquales.*

PROPOSITIO II.

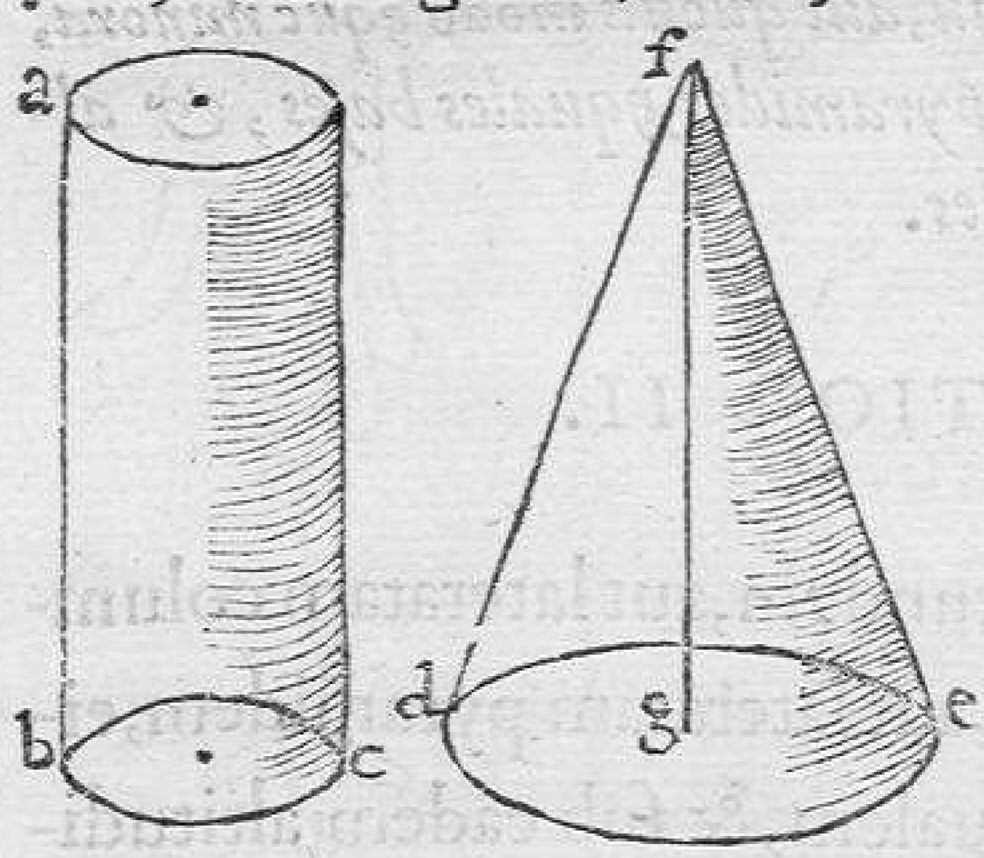
DAtam quamuis rotundam, aut lateratam columnam, in rotundam, aut lateratam pyramidem, eidem columnæ æqualem, & sub eadem altitudine comprehensam reducere: & è conuerso.

1 ¶ PRAEOSTENSO QVA RATIONE OMNIS *columna, atque pyramis laterata, in columnam, atque pyramidem rotundam transmutetur, & è diuerso: hic locus expostulare uidetur, ut mutuam ipsarum columnarum, atque pyramidum conuersionem, pendenter edoceamus.* Et *in primis qualiter oblata columna, iam rotunda, quã etiam laterata, in pyramidem ęqualem, & sub eadem altitudine comprehensam reuocetur: idem consequenter facturus, de datę cuiuscunque pyramidis, in columnam ęqualem conuersione.*

¶Prima pars, de columnæ in pyramidem æqualem, & eiusdem altitudinis conuersione.

¶CVM IGITVR OMNIS PYRAMIS, SIT *tertia pars columnæ eandem basim & altitudinem habentis cum ipsa pyramide, ueluti proxima traditum est propositione: si illius columnæ, cui expedit æqualem & eiusdem altitudinis dare pyramidem, basis tripletur, hoc est, sub ratione tripla augeatur, per sextam, uel septimã propositionem antecedentis libri tertij, & super eadem basi triplicata, ad altitudinem ipsius oblatæ columnæ, pyramis erigatur: ea erit tripla illius pyramidis, quæ eandem basin, & altitudinem habet cum data columna. Sub eodem enim fastigio subsistentes pyramides, adinuicem se habent sicut bases, per quintam, sextam, & undecimam duodecimi elementorum. Quæ autem eiusdem triplicia sunt, ea sunt æqualia adinuicem. Data igitur columna, & in hunc modum constructa pyramis, eiusdem pyramidis erunt triplices: & proinde inuicem æquales.* 2

¶*Vt si (uerbi gratia) data fuerit columna rotunda a b c, quam oporteat in rotundam similiter, & eiusdem altitudinis mutare pyramidem, eidem columnæ datæ æqualem: ipsius columnæ basi circulari b c, triplo maior describatur, quæ sit d e, per septimam antecedentis libri tertij propositionem. Et super eodem circulo d e, ad altitudinem f g, æqualem ipsi a b, pyramidis fabricetur d f e: hæc enim, ueluti nuper ostensum est, eidem oblatæ columnæ a b c, de necessitate erit æqualis.*



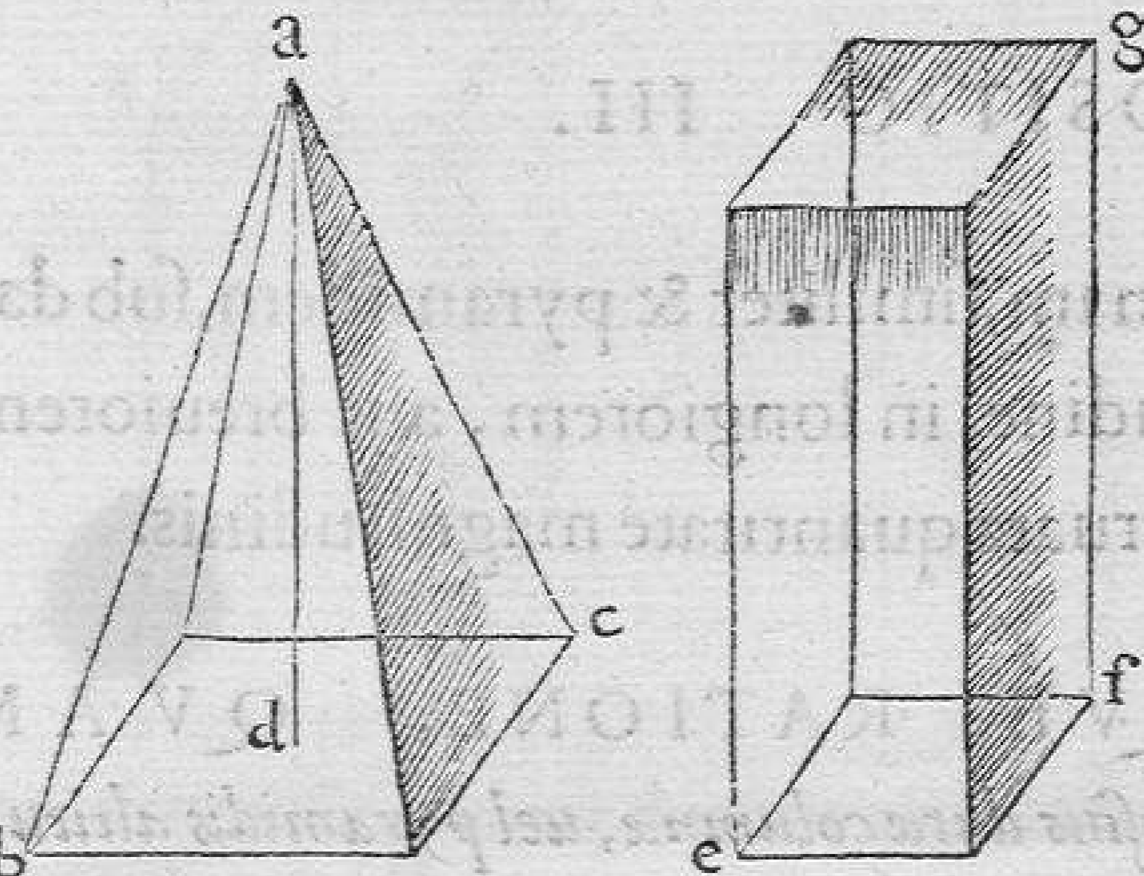
¶Secunda pars, de pyramide in columnam æqualem, eiusdémque altitudinis reuocanda.

¶QVOD SI VERSA VICE DATA PYRAMIS, *in columnam æqualem, similem basin, eandémque altitudinem habentem, transmutanda proponatur: minuenda erit basis ipsius datæ pyramidis, sub præfata ratione tripla, per superiùs allegatam sextam,*

uel

uel septimam propositionem antecedentis libri tertij: & super eadem basi subtripla, erigenda columna, ad ipsius datæ pyramidis altitudinem. Vtraque enim & data pyramis, & in hunc modum constructa columna, tripla rursum erit illius pyramidis, quæ eandem basin & altitudinem cum ipsa columna: & proinde altera alteri æqualis.

¶Vtpote, si datam pyramidem quadrilateram a b c, cuius altitudo sit a d, in columnam itidem quadrilateram, & ipsi pyramidi æqualem, uertere fuerit operæpretium: accipiendum erit quadratum subtriplum ipsius basis, siue quadrati b c, per sextã propositionem ipsius antecedẽtis libri tertij, utpote e f: & super eodem quadrato e f, erigenda columna quadrilatera e f g, cuius altitudo f g, ipsi altitudini a d sit æqualis. Erit enim præfata columna e f g, datæ pyramidi a b c, ueluti supradictum est æqualis.



¶Notandum.

4 ¶Et quoniam omnis columna, similiter & pyramis laterata, in rotundam eidem lateratæ æqualem conuertitur, & è conuerso per primam huius propositionem: fit propterea, ut omnis columna data in pyramidem, uel pyramis quælibet in columnam, aut rotundam, aut lateratam indifferenter transmutetur.

¶Corollarium, de uertenda columna, seu pyramide, in solidum rectangulum, cuius basis sit quadrata.

5 ¶OMNIS ERGO COLVMNA, SIMILITER & pyramis, in solidum rectangulum, sub æquidistantibus planis, & in quadrata basi comprehensum, eidem columnæ uel pyramidi æquale, uel facilè reducetur. Per hanc etenim secundam propositionem, omnis pyramis uertitur in columnam æqualem: & è conuerso. Et per antecedentem primam propositionem, omnis columna, similiter & pyramis

rotunda, in lateratam reuocatur, & è diuerso. Et proinde in rectangulum solidum, super quadrata basi constitutum tandem reducetur: transmutando uidelicet rectilineam, aut circularem basin ipsius datæ columnæ, in quadratam, per ea, quæ tum secundo libro, tum quarta, & quinta propositione libri tertij tradita sunt. Hîc inter columnas, annumeramus etiam omnia rectangula solida, sub æquidistantibus planis comprehensa, quæ parallelepipeda uocitantur.

PROPOSITIO III.

OMnem columnam, similiter & pyramidem, sub data quauis altitudine, in longiorem, aut breuiorem transmutare, seruata quantitate magnitudinis.

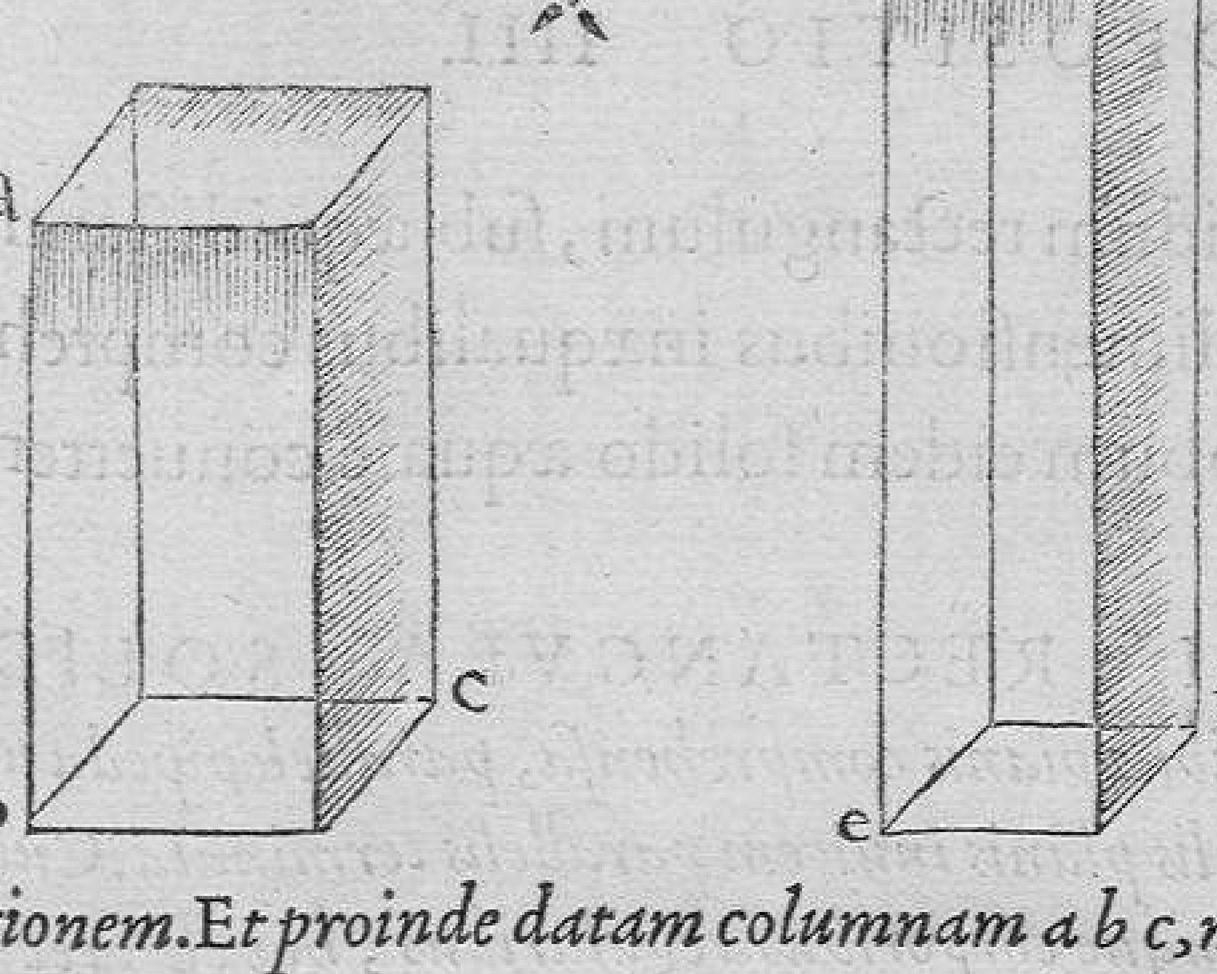
¶SVB EA ITAQVE RATIONE, QVAM *habet altitudo proposita, ad ipsius datæ columnæ, uel pyramidis altitudinem, basis eiusdem columnæ, uel pyramidis proportionaliter augeatur, uel minuatur, per sextam, uel septimam propositionem antecedentis libri tertij: & super huiuscemodi basi, ad ipsam altitudinem propositam, columna, seu pyramis erigatur: Nam ea erit æqualis ipsi datæ columnæ, uel pyramidi.* ¶ *Bases etenim (ut singula mathematicè dilucidemus) suis altitudinibus erunt reciprocè proportionales: & tam columnæ, quàm pyramides rotundæ, quarum bases suis altitudinibus sunt reciprocè proportionales, æquales sunt adinuicem, per 15 duodecimi elementorum. Ipsis porrò columnis, atque pyramidibus rotundis, lateratæ describuntur æquales, & sub eadem altitudine comprehensæ, per primam huius propositionem Et æquales magnitudines ad easdem, uel æquales, eandem habent rationem, per septimam quinti elementorum. Idem itaque uidetur esse iudicium de lateratis, quod de rotundis tam columnis, quàm etiam pyramidibus.* 1

¶Primum exemplum, de columnis.

¶ *Sit in exemplum data columna laterata, utpote quadrilatera, quam oporteat in longiorem reuocare columnam, ad altitudinem uidelicet d e, quæ maior est a b ipsius datæ columnæ altitudine. Sub ea itaque ratione,* 2

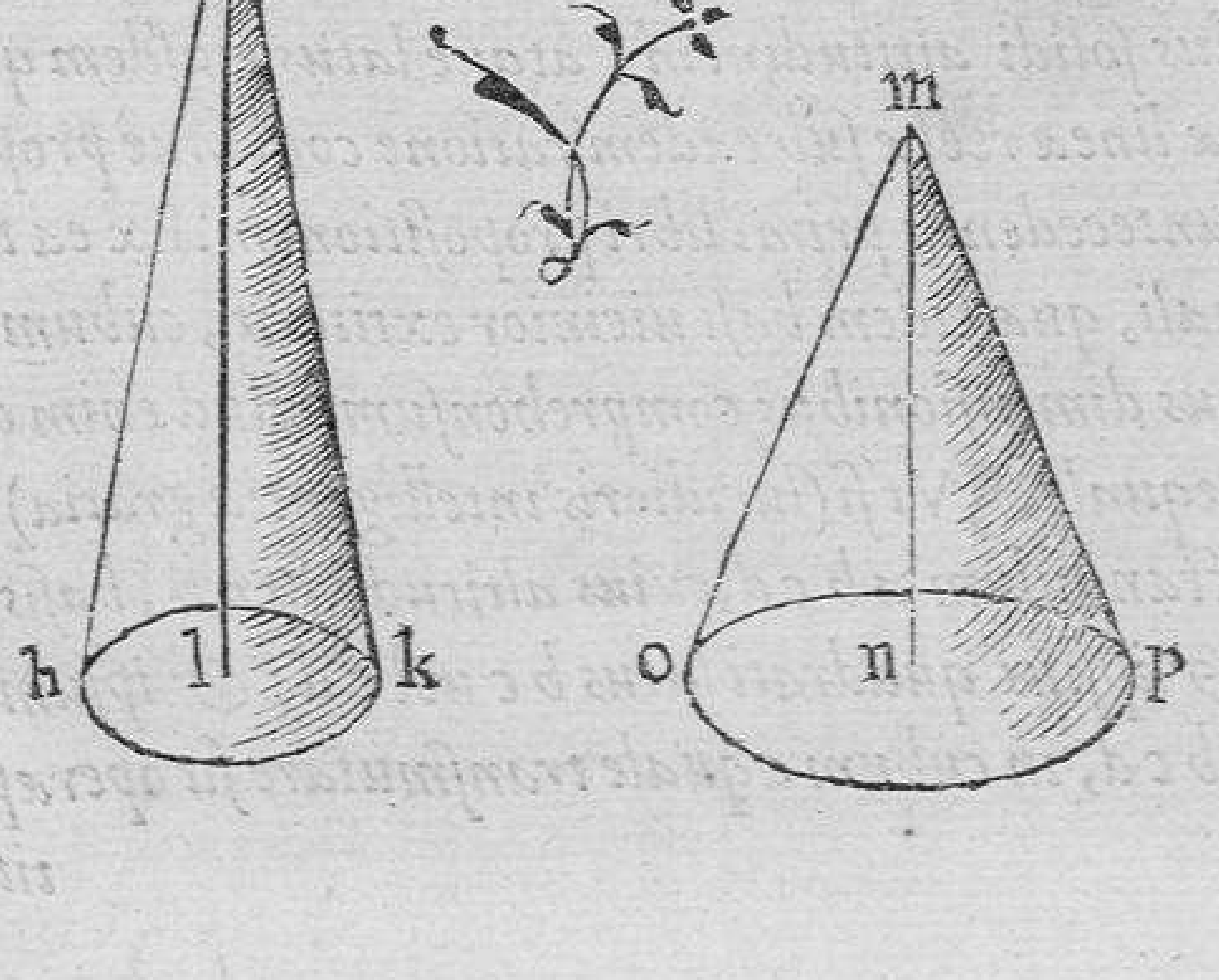
ne,

ne, quam habet altitudo d e ad ipsam altitudinem a b, proportionetur basis b c ad basin e f, per sextam antecedentis libri tertij propositionem: sicut quidem d e ad ipsam a b, sic basis b c ad basin e f. Et super ipsa basi e f, pro data altitudine d e, columna suscitetur d e f. Erit enim ipsa d e f, æqualis datæ columnæ a b c, per ea quæ proximè fuere demonstrata. ¶Poterit & eadẽ columna d e f, *in rotundam uel facilè transmutari, per primam huius propositionem. Et proinde datam columnam a b c, non solùm altitudinẽ, sed & ipsam simul mutare posse figuram, relinquitur manifestum: seruata nihilominus propriæ quantitatis magnitudine.*



¶Secundum exemplum, de pyramidibus.

3 ¶E*sto rursum data pyramis rotunda g h* k, *cuius altitudo g l, in breuiorem coartanda pyramidem, ipsi g h* k *nihilominus æqualem: sub data quidem altitudine m n, quæ ipsa g l utcunque minor existat. Basis itaque circularis h* k, *sub ea ratione in primis adaugeatur, quam habet altitudo g l, ad datam altitudinem m n, per septimam propositionem antecedentis libri tertij: sitque (uerbi gratia) o p, sicut quidem altitudo g l ad ipsam m n, sic basis o p ad basin h* k. Et *super eadem basi o p, pro data altitudine m n, pyramis erigatur m o p. Erũt itaque rursum ipsarum pyramidũ bases, suis altitudinibus reciprocè proportionales: & pro-*



u

inde pyramides ipſæ æquales adinuicem, per ipſam nuper allegatam 15 duodecimi elementorum. ¶ *Poterit & ipſa pyramis rotunda m o p, in lateratam mutari pyramidem, per ipſam antecedentem primam propoſitionem. Hinc datæ pyramidis rotundæ g h k, tum altitudo, tum figura ipſa ſimul uariari poterit, ipſius quantitatis permanente magnitudine.*

PROPOSITIO IIII.

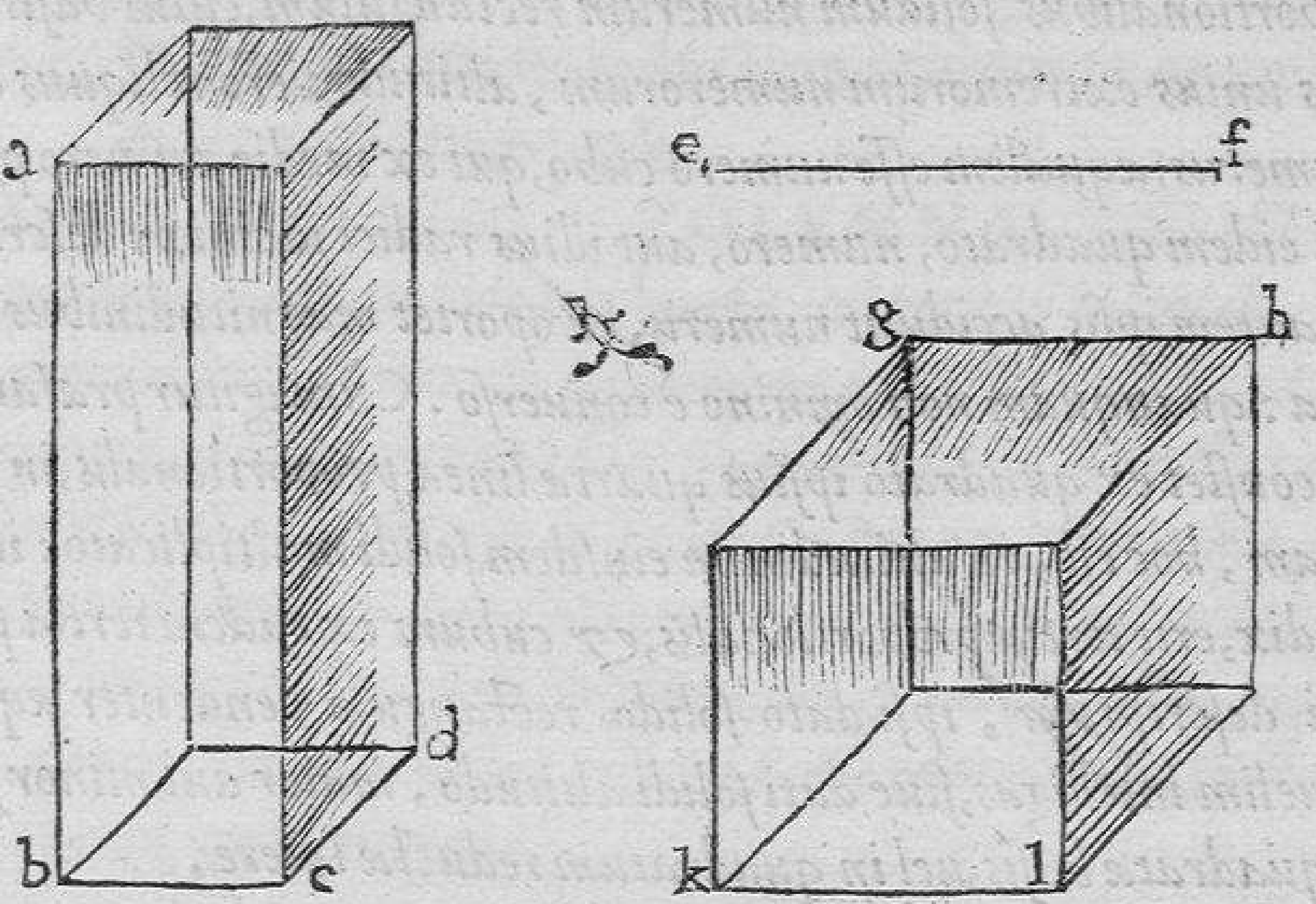
DAtum ſolidum rectangulum, ſub æquidiſtantibus planis, & dimenſionibus inæqualibus comprehenſum, in cubum eidem ſolido æquale conuertere.

¶HVIVSCEMODI RECTANGVLA SOLIDA, 1
ſub inuicem æquidiſtantibus planis comprehenſa, parallelepipeda uocitantur, hoc eſt rectangulis planis inuicem parallelis terminata. Cubum autem, eſt unum de quinque corporibus regularibus, hoc eſt, rectangulum ſolidum, ſex quadratis ſuperficiebus, inſtar taxilli figuratum. Omne autem ſolidum rectangulum, ſimul eſt parallelepipedum, at non è diuerſo: multa enim ſunt parallelepipeda, amblygonia nuncupata, partim rhombis, aut rhomboidibus, partim uerò rectangulis terminata. ¶ *Conſiderandum igitur (ut ad propoſitionis executionem deueniamus) an dati ſolidi rectanguli, in cubum æquale reducendi, baſis fuerit quadrata, nec ne: quoniam utcunque diſsidens ſubſequetur operandi ratio.*

¶Prima pars, de ſolido rectangulo, cuius baſis eſt quadrata.

¶ *Si datum itaque rectangulum ſolidum, baſin habuerit quadratam:* 2
inueniantur inter ipſius ſolidi altitudinem, atque latus eiuſdem quadratæ baſis, duæ mediæ lineæ rectæ ſub eadem ratione continuè proportionales, per aliquam antecedentis primi libri propoſitionem. Ex ea tandem media proportionali, quæ eidem baſi uicinior extiterit, cubum deſcribatur, ſub æqualibus dimenſionibus comprehenſum: illud enim dato ſolido rectangulo erit æquale. ¶ *Vt ſi (lucidioris intelligentiæ gratia) datum fuerit ſolidum rectangulum a b c d, cuius altitudo ſit a b, baſis uerò quadratum b c d, & ipſius quadrati latus b c uel c d: & ipſum rectangulum ſolidum a b c d, in cubum æquale tranſmutare ſit operæpretium.*

tium. Inter ipsam igitur altitudinem a b, & latus quadratæ basis c d, duæ mediæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniātur, quæ sint e f, & g h: sicut quidem a b ad e f, sic eadem e f ad g h,



atque ipsa g h ad præfatum latus c d. Ex *ipsa demum g h, media uidelicet proportionali quæ eidem lateri c d uicinior est, hoc est, proximè maior, cubum describatur g h k l. Ipsum nanque cubum g h k l, æquum erit dato solido rectangulo a b c d: quemadmodum infra mathematicè deducetur.*

¶Secunda pars, de solido rectangulo, basin minimè quadratam habente.

3 ¶*Vbi autem datum solidum rectangulum, basin habuerit minimè quadratam, sed altera parte longiorem: inueniendum erit tunc latus quadrati eidem basi æqualis, per ultimam secundi elementorum.* Deinde, *inter altitudinem ipsius rectanguli solidi, & idem latus quadrati, duæ mediæ continuè proportionales erunt (ueluti suprà diximus)* colligendæ. Cubum enim *solidum, quod ex ea mediarum proportionalium describetur, quæ eidem lateri uicinior extiterit, ipsi dato rectangulo solido erit æquale: nempe ipsi rectangulo solido æquale, quod sub eadem altitudine, & super eadem quadrata basi (quæ eiusdem solidi basi coëquatur) constituitur.* Solida *nanque parallelepipeda, super æqualibus basibus, & sub eadem altitudine consistentia, sunt adinuicem æqualia, per 31 undecimi elementorum.*

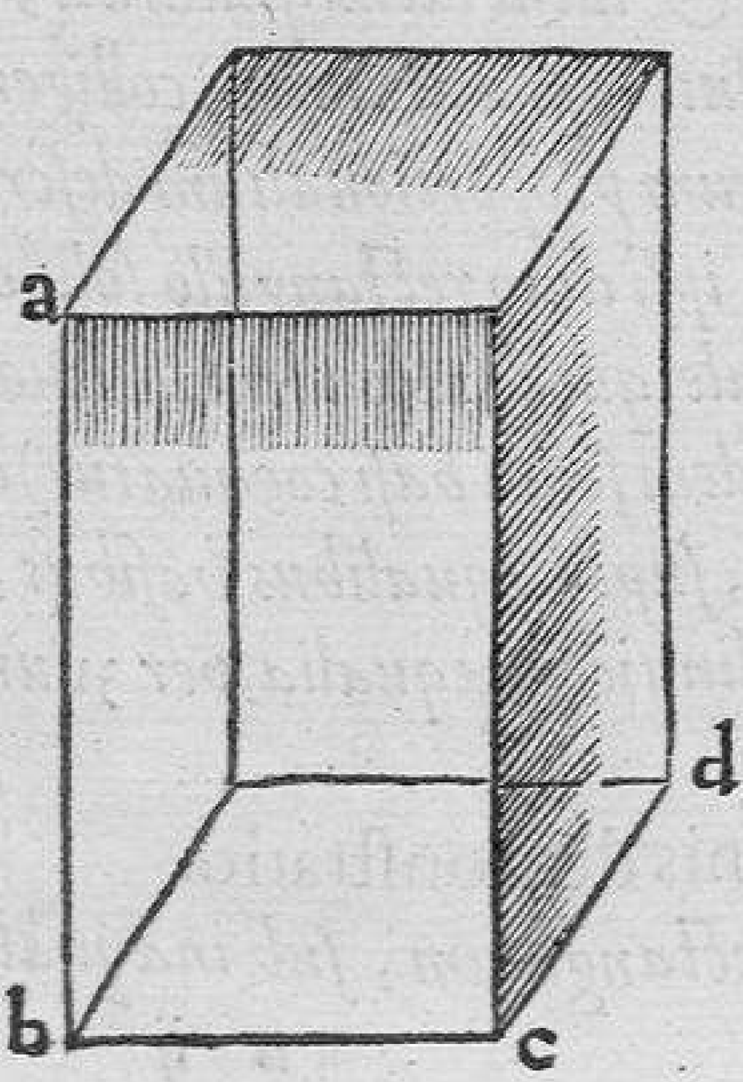
¶Supradictæ conuersionis demonstratio.

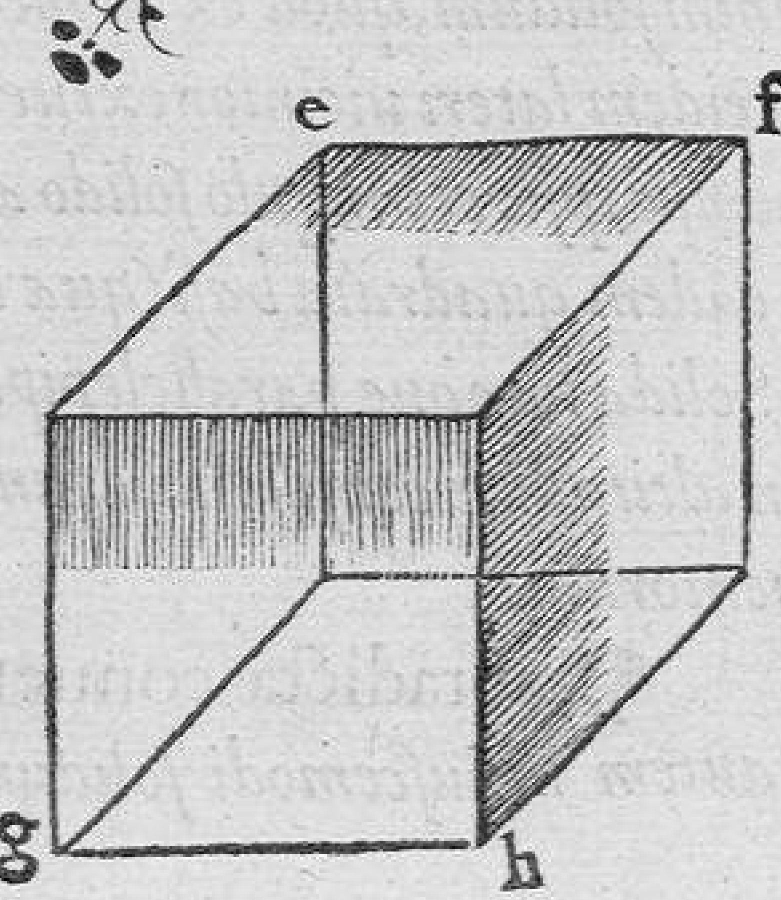
4 ¶ *Quòd autem huiuscemodi solidum rectangulum, sub inæqualibus*

dimensionibus comprehensum, in cubum eidem solido æquale suprascripto modo reducatur: ex quarto corollario nonæ propositionis, antecedentis libri primi, fit manifestum. Patuit enim, datis quatuor numeris continuè proportionalibus, solidum numerum rectangulum, cuius basis est quadratus unius extremorum numerorum, altitudo uerò reliquus extremus numerus: æqualem esse numero cubo, qui ex medio numero proportionali eidem quadrato, numero, aut illius radici uiciniori describitur. Quæ autem ipsis accidunt numeris, ea oportet magnitudinibus esse communia: quanquam non omnino è conuerso. Cùm igitur præfatum solidum, constet ex quadrato ipsius quartæ lineæ proportionalis, in primam lineam, hoc est, in altitudinem eiusdem solidi multiplicato: illius cubica radix, erit tertia proportionalis, & cubum ex eadem tertia proportionali descriptum, ipsi dato solido rectangulo pendenter æquale. Idq́ue uelim intelligas, siue dati solidi altitudo, maior aut minor fuerit ipsius quadratæ basis, uel in quadratum reductæ latere.

¶Incidens notandum, de solido cuius dimensiones sunt proportionales.

¶Quòd si forsitan acciderit, ut tres ipsius dati solidi rectanguli dimensiones, continuè sint proportionales: tunc cubum ex ipsa media proportionali descriptum, ipsi dato solido rectangulo, sub eisdem tribus dimensionibus continuè proportionalibus comprehenso erit æquale, per 36 undecimi elementorum. Vtpote, si datum fuerit solidum rectangulum a b c d, cuius altitudo a b ad illius longitudinem b c eandem rationem habeat, 5





beat, quam eadem b c ad ipsam latitudinem c d: & ex e f ipsi b c æquali, cubum describatur e f g h: illud erit æquale dato solido rectangulo a b c d, sub eisdem tribus dimensionibus a b, b c, c d continuè proportionalibus comprehenso.

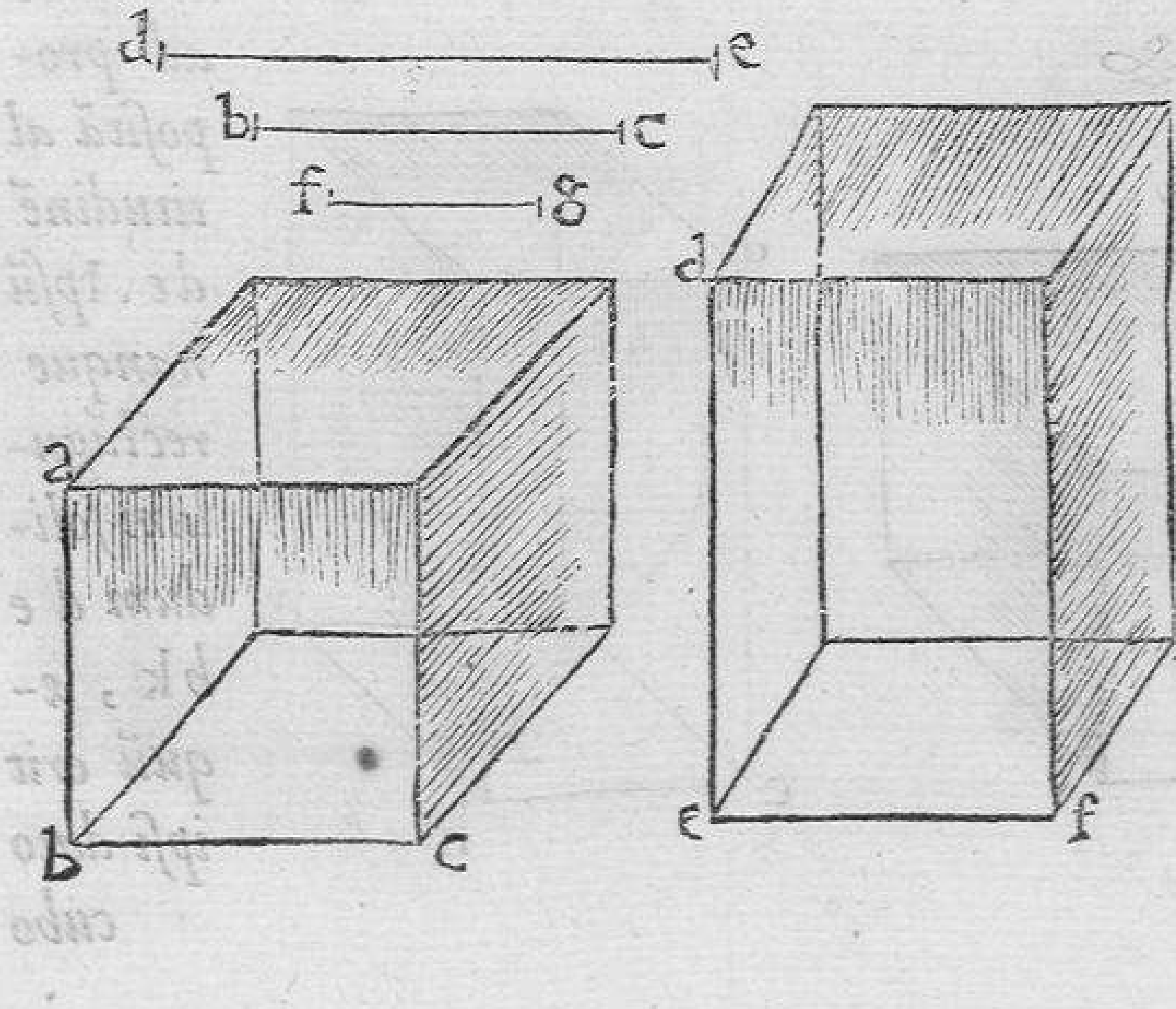
¶Corollarium, de reductione columnæ, atque pyramidis, in cubum æquale.

6 ¶OMNIS ERGO COLVMNA, SIMILITER *& pyramis, in cubum eidem columnæ uel pyramidi æquale, uel facilè transmutabitur. Nam per corollarium antecedentis secundæ propositionis, tam columna, quàm etiam pyramis, in solidum rectangulum, sub æquidistantibus planis, & in quadrata basi comprehensum, eidem columnæ, uel pyramidi æquale transformatur. Et ipsum rectangulum solidum super quadrata basi consistens, per ipsam quartam propositionem (uti quamprimum ostensum est) uel facilè reuocatur. Corollarium igitur, ex omni parte uerum.*

PROPOSITIO V.

DAtum cubum, in datæ altitudinis solidum rectangulum: aut in parallelepipedum, super data basi comprehensum reducere.

1 ¶*Sit in primis datum a b c, cui expediat æquale solidum rectangulum, sub altitudine data, quæ sit d e, fabricare. Ponatur igitur ipsa altitudo d e linea prima, latus uerò dati cubi, utpote b c, linea secunda: & inueniatur tertia proportionalis, quæ sit f g, per undecimam sexti elementorum. Fiat deinde planũ rectangulum e f g, sub e f (quæ ipsi b c sit æqualis, & ipsa f g) comprehensum. Tandem super ipso plano e f g, pro da-*

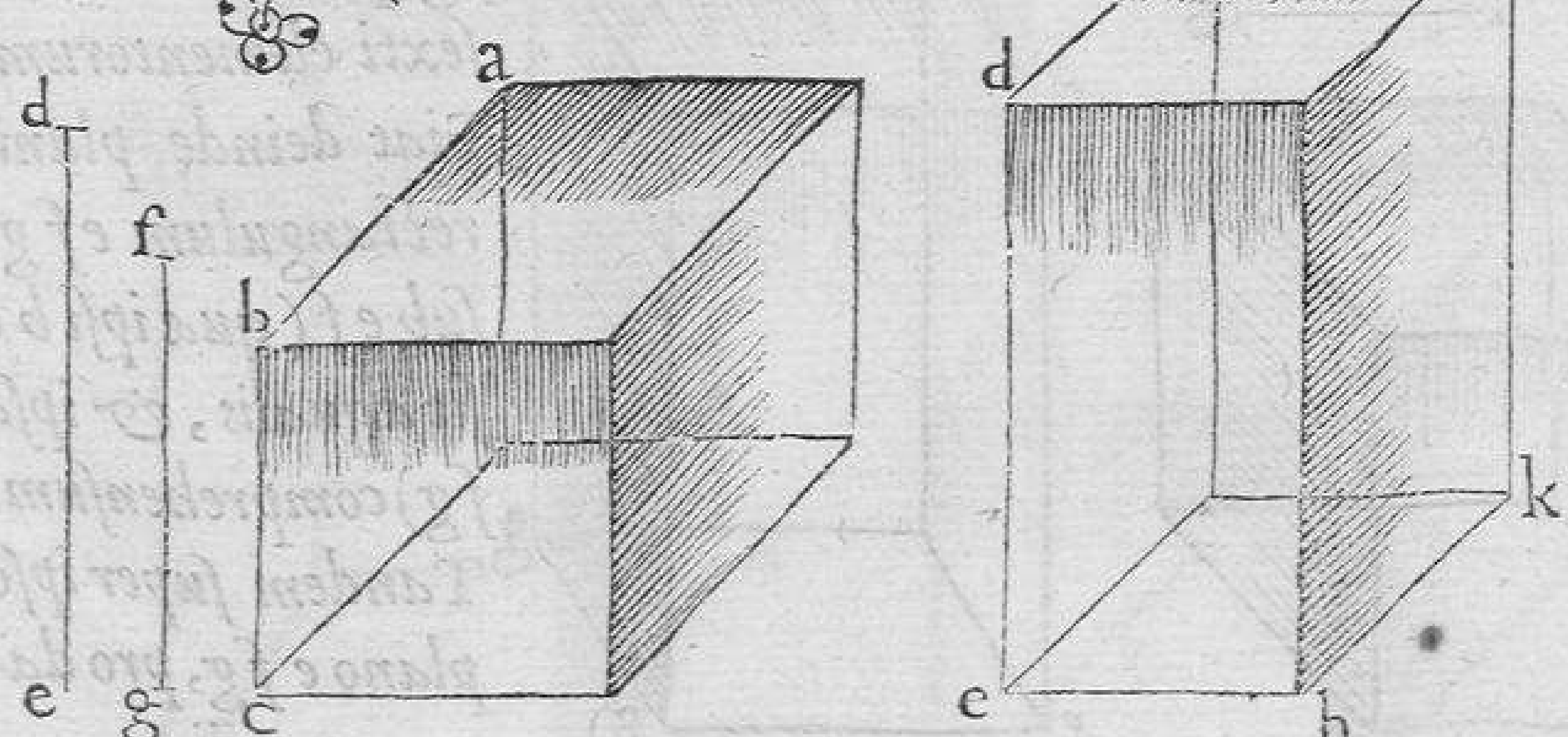


u iij

ta altitudine d e, solidum erigatur d e f g, sub eisdem tribus lineis inuicem proportionalibus contentum. Erit igitur solidum rectangulum d e f g, æquale ipsi dato cubo a b c, quod ex media proportionali descriptum est, per 36 undecimi elementorum.

¶ Vt idem cubum, in datæ altitudinis solidum, sed in quadrata basi consistens reuocetur.

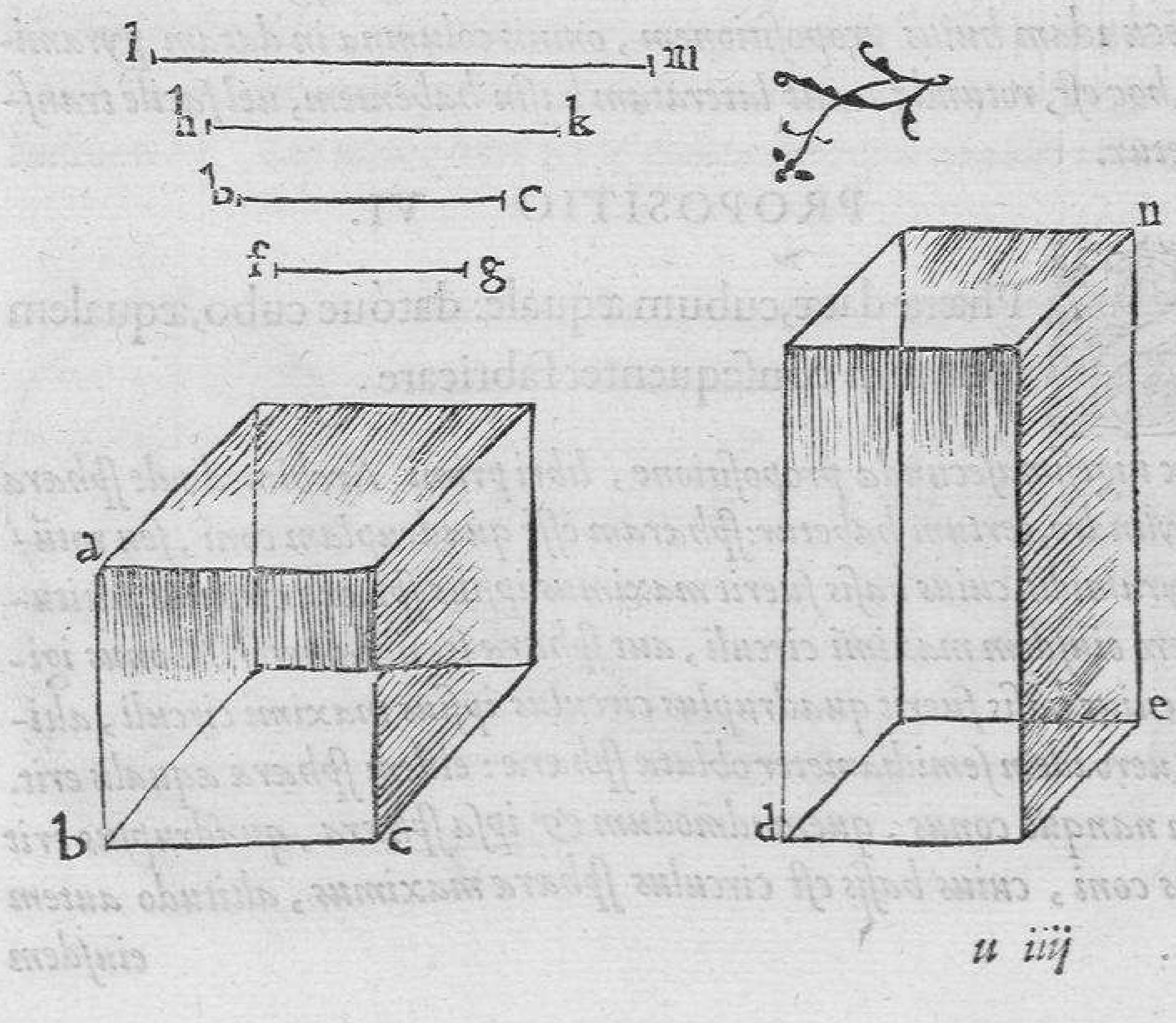
¶ Quòd si libuerit ipsum datum cubum, in propositæ rursum altitudinis 2
solidum rectangulum, sed cuius basis sit quadrata, immediatè transmutare: inueniẽda erit media proportionalis, inter datam altitudinem, & ipsius cubi latus: deinde quarta proportionalis post latus eiusdem cubi, per 12, & 13 sexti elementorum. Tandem faciendum erit quadratum ex ipsa linea quarta: & super ipso quadrato, erigendum solidum rectangulum, ad propositam altitudinem siue lineam primam pro portionalem. Illud enim solidum, æquum erit ipsi dato cubo, per contrariam antecedentis quartæ propositionis operationem. Datis enim quatuor lineis rectis continuè proportionalibus, præostensum est, rectangulum solidum, cuius basis est quadratum unius extremarum linearum, altitudo uerò reliqua: illud rectangulum æquum esse cubo, quod ex ea mediarum proportionalium describitur, quæ lateri ipsius quadratæ basis uicinior existit. ¶ Vt si rursum fuerit datum cubum a b c, & ipsa altitudo proposita d e: sumenda erit media proportionalis inter d e atque b c, quæ sit f g: deinde quarta itidem proportionalis h k. Erũt itaque quatuor lineæ rectæ, sub eadem ratione continuè proportionales: sicut uidelicet d e ad f g, sic eadem f g ad latus b c, atque idem latus b c ad rectã h k. Fiat igitur quadratum, ex ipsa h k: & demum rectangulum solidũ d e h k, ad propositã altitudinẽ d e. Ipsũ nanque rectãgulum solidum d e h k, æquũ erit ipsi dato cubo



cubo a b c, per ipsius antecedētis quartæ propositionis demonstrationem.

¶Secunda pars, ut eidem cubo æquale solidum parallelepipedum, super oblata basi rectilinea fabricetur.

3 *¶Sed esto data basis rectilinea d e, super qua receptum sit erigere solidum parallelepipedum, eidem oblato cubo ęquale. Assumatur ergo latus quadrati, eidem basi rectilineæ (si non fuerit quadrata) æqualis, per 45 primi, & ultimam secundi elementorum: sitque illud f g. Idem porrò latus f g statuatur linea prima, latus uerò cubi, utpote b c, linea secunda: & inueniatur tertia proportionalis h k, per ipsam undecimam sexti elementorum. Fiat deinde, ut f g ad h k, sic latus c d ad rectam l m, per duodecimam eiusdem sexti elementorum. Et quoniam tres lineæ rectæ f g, c d, h k, sunt continuè proportionales: quadratum igitur ipsius f g, ad quadratum ipsius c d eandem habet rationem, quam ipsa f g prima linea ad tertiam h k, per corollarium decimænonæ sexti elementorum: & proinde quam b c ad ipsam l m. Ipsi autem quadrato quod ex f g, æquum est rectilineum d e, per cōstructionis hypothesin: & æquales magnitudines, ad eandem magnitudinem eandem habent rationem, per septimam quinti eorundem elementorum. Sicut igitur rectilineum d e ad quadratum ipsius b c, sic eadem b c ad rectam l m. Si describatur itaque super eodem plano rectilineo d e, ad altitudinem e n, quæ ipsi l m sit æqualis, solidum parallelepipedū d e n: illud erit æquale dato cubo a b c,*



per 34 undecimi elementorum. Habent enim *bases suis altitudinibus reciprocè proportionales : quadratum enim ipsius b c est basis dati cubi, & ipsa b c eiusdem cubi sublimitas, nempe æqualis ipsi a b eiusdem cubi lateri.*

¶Idem fieri posse de quocunque solido rectangulo, non cubo.

¶*Idem quoque fieri poterit, de dato quouis rectangulo solido non existente cubo: accipiẽdo uidelicet illius altitudinem, loco altitudinis ipsius dati cubi : & latus quadrati propriæ basi æqualis, loco lateris eiusdem cubi: atque sicut f g ad h k, sic faciendo ipsam altitudinem ad rectam l m.* Erit *enim rursum eadem l m, altitudo solidi parallelepipedi super oblato plano descripti, & ipsi dato solido rectangulo æqualis. Assumendæ sunt igitur duæ lineæ, loco lateris ipsius cubi, utpote, in locum ipsius lateris b c, quod est latus quadratæ basis, & eiusdem cubi supplebat altitudinem.* 4

¶Corollarium bipartitum, notatu dignum.

¶ D*atum ergo cubum, pro datæ altitudinis, aut ipsius planæ basis diuersitate, in multiformia reuocabitur solida, aut rotundam, aut lateratam basin habentia: quæ generali nomenclatura, columnæ uocitantur.* O*mnis siquidem rectilinea basis, in circulum æqualem, per quartam propositionem antecedentis libri tertij reuocatur.* ¶ M*utabitur tandem ipsum oblatum cubum, in rotundam, aut lateratam pyramidem : cùm per secundam huius propositionem, omnis columna in datam pyramidem, hoc est, rotundam aut lateratam basin habentem, uel facilè transmutetur.* 5

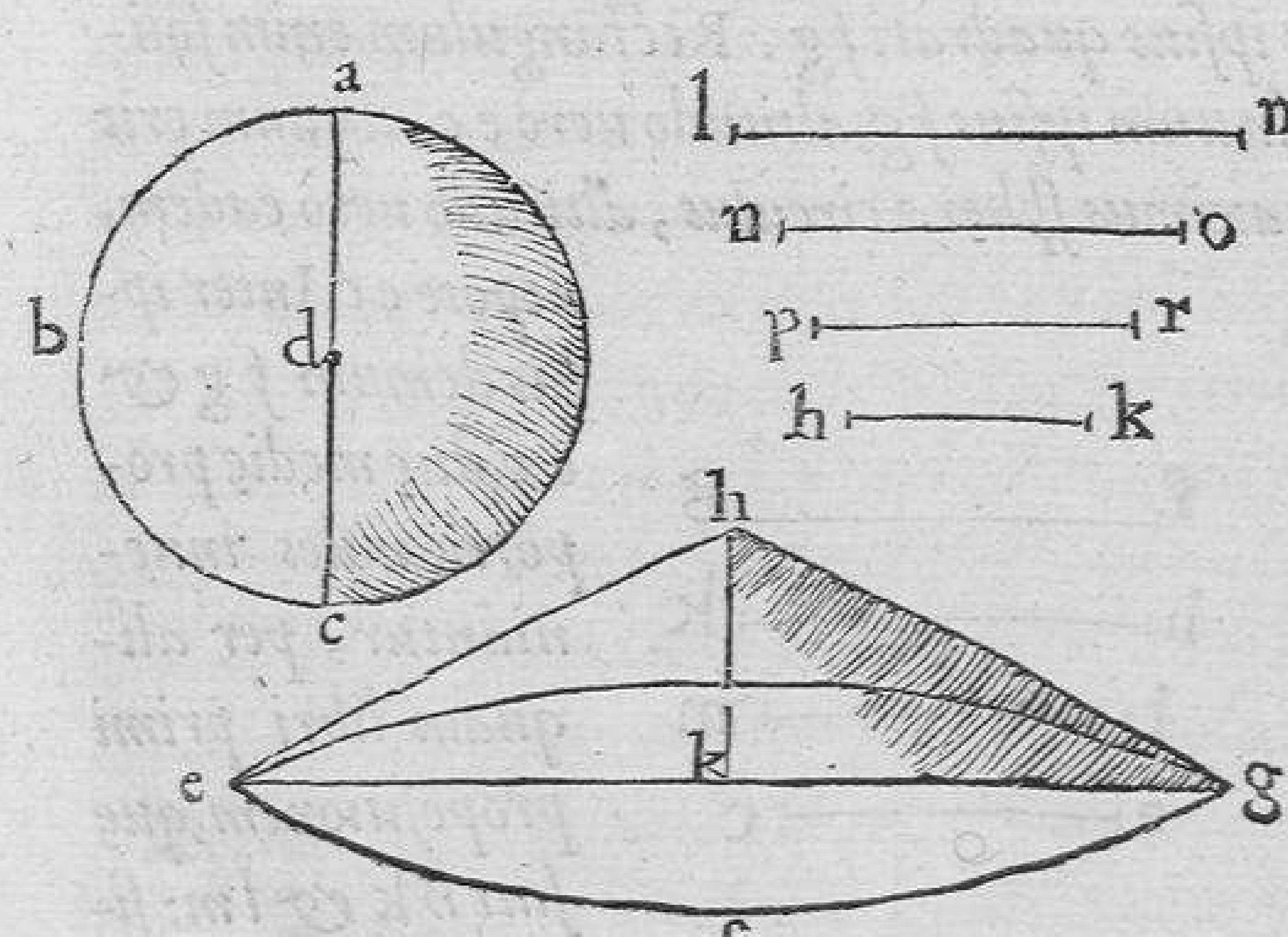
PROPOSITIO VI.

SPhæræ datæ, cubum æquale: datóue cubo, æqualem sphæram consequenter fabricare.

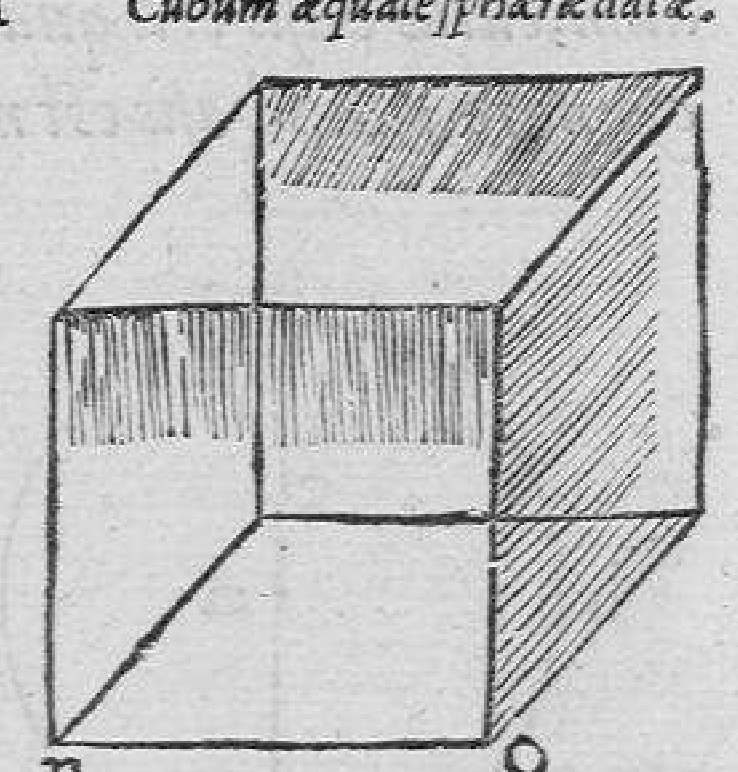
¶ E*x uigesimasecunda propositione, libri primi Archimedis de sphæra & cylindro, certum habetur: sphæram esse quadruplam coni, seu rotũdæ pyramidis, cuius basis fuerit maximus ipsius sphæræ circulus, altitudo uerò eiusdem maximi circuli, aut sphæræ semidiameter.* C*onus igitur, cuius basis fuerit quadruplus circulus ipsius maximi circuli, altitudo uerò idem semidiameter oblatæ sphæræ : eidem sphæræ æqualis erit.* I*dem nanque conus, quemadmodum & ipsa sphæra, quadruplus erit ipsius coni, cuius basis est circulus sphæræ maximus, altitudo autem* 1

eiusdem

eiusdem sphęræ semidiameter. Sub eodem nanque fastigio existentes coni, adinuicem se habent sicut bases, per undecimam duodecimi elementorum. Descriptus autem ex ipsius sphærę diametro circulus, quadruplus est maximi eiusdem sphæræ circuli: atque superficiei sphæricæ æqualis, per 31 præallegati libri ipsius Archimedis. *Conus igitur, super huiuscemodi circulo ex diametro sphæræ descripto, ad præfatam altitudinem semidiametri sphęræ constitutus: eidem sphęræ de necessitate coequatur.* Huic *autem cono, datur æquale cubum, per antecedentis quartæ propositionis corollarium: & proinde ipsi sphærę datę cubum æquale describitur.* ¶Sit, *in supradictorum exemplum, data sphæra, in qua maximus circulus a b c, cuius centrum d, dimetiens uerò a c: & describatur in primis ex ipso dimetiente circulus e f g, cuius centrum* k, *dimetiens autem e g, ipsius a c duplus. Super eodem postmodum circulo e f g, conus erigatur h e f g, ad altitudinem quidem h* k, *quæ ipsi d a semidiametro sit æqualis. Hic autem conus h e f g, in cubum æquale, iuxta ipsius antecedentis quartæ propositionis traditionem, & eius corollarium, in hunc qui sequitur modum reducatur.* Quadretur *in primis idem circulus e f g, per aliquam propositionum antecedentis secundi libri: & ipsius quadrati assumatur pars tertia (quod factu uidetur admodum facile) quę reducatur in quadratum, per ultimam secũdi elementorum.* Solidum *enim rectangulum, super eodem quadrato, & sub altitudine h* k *comprehensum, ipsi cono h e f g, & proinde ipsi sphærę datę erit ęquale. Inter latus consequenter huiusce quadrati, quod sit l m, & altitudinem h* k, *duę medię lineę rectę continuè proportionales inuenian-*



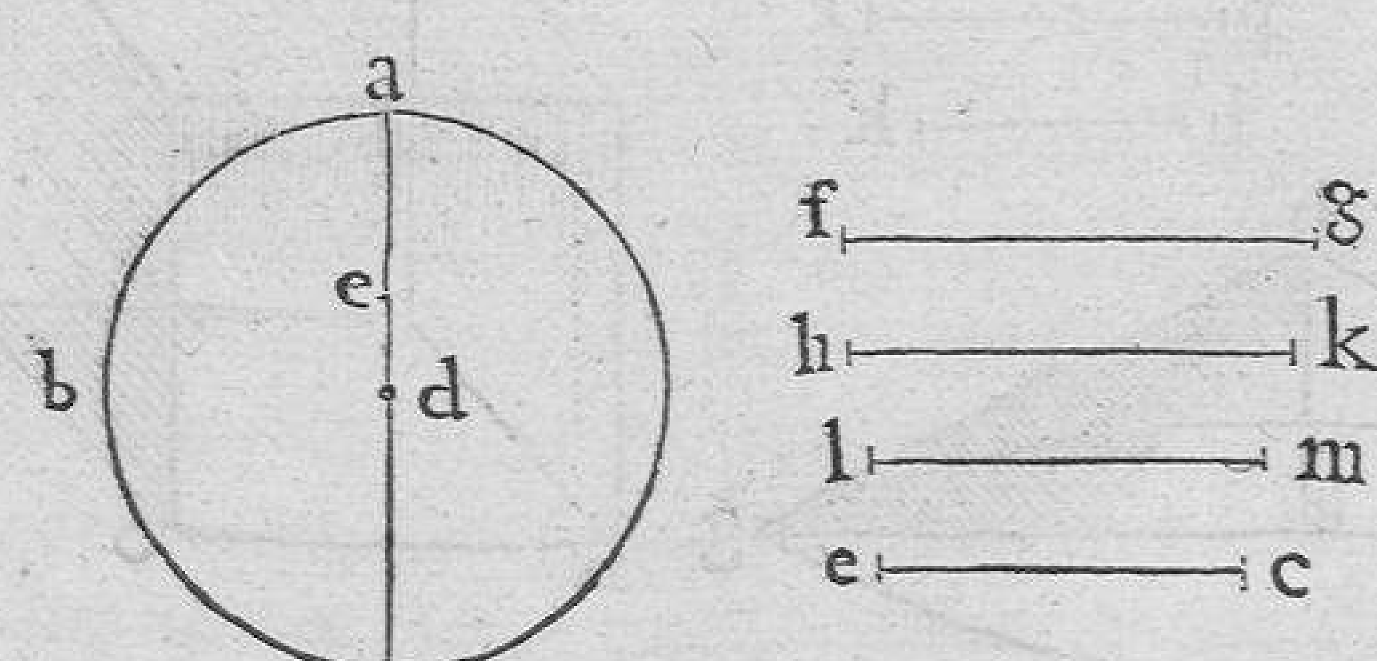
Cubum æquale sphæræ datæ.



tur, per aliquam propositionum antecedentis libri primi, quæ sint n o & p r: sicut quidem l m ad n o, sic eadem n o ad p r, & ipsa p r ad altitudinem h k. Cubum enim descriptum ex ipsa n o, ipsi sphæræ datæ coæquabitur.

¶Altera sphæræ cubicatio.

¶IDEM QVOQVE LICEBIT ALITER AB- 2
soluere. Nam per eandem 32 propositionem, libri primi de sphera & cylindro ipsius Archimedis: *cylindrus, cuius basis est maximus sphæræ circulus, altitudo uerò eiusdem maximi circuli aut sphæræ diameter, ad ipsam sphæram rationem habet sesqualteram.* Et *proinde fit, ut cylindrus, cuius basis est idem maximus sphæræ circulus, altitudo uerò duo ipsius diametri tertia, eidem sphęrę sit æqualis:* Continebit *enim, quemadmodum & ipsa sphæra, duo tertia præfati cylindri, cuius altitudo est totus sphęræ diameter. Quoniam in basibus æqualibus existentes cylindri, adinuicem sese habent sicut illorum altitudines, per 14 duodecimi elementorum.* Hic *demum cylindrus, seu columna rotunda, ipsi sphæræ æqualis: facilè uertetur in cubum, per ipsius antecedentis quartę propositionis corollarium: quod quidem cubum eidem sphærę coæquabitur.* Sit *enim rursum data sphera, cuius maximus circulus a b c, & centrum d, dimetiens autem a c.* Ex *ipso itaque dimetiente a c, abscindatur pars tertia, per nonam sexti elementorum, quæ sit a e:* Residua *igitur e c, continebit reliqua duo tertia. Quadretur postmodum circulus maximus a b c ipsius sphæræ datæ, per aliquam propositionum antecedentis libri secundi: sitque latus ipsius quadrati f g.* Rectangulum *enim solidum, cuius basis erit quadratum ipsius f g, altitudo uerò e c, æquum erit cylindro, cuius basis est maximus sphęræ circulus, altitudo uerò eadem, utpote e c.* Inter *ipsas demum f g & e c, duę medię proportionales inueniantur, per aliquam libri primi propositionem, quę sint h k & l m: sicut quidem f g ad h k, sic*



h k, sic eadem h k ad l m, atque ipsa l m ad altitudinem c e. Cubum enim quod ex ipsa h k describetur, ipsi datæ sphæræ erit æquale: Et proinde eadem h k, ipsi n o prioris demonstrationis coæquabitur.

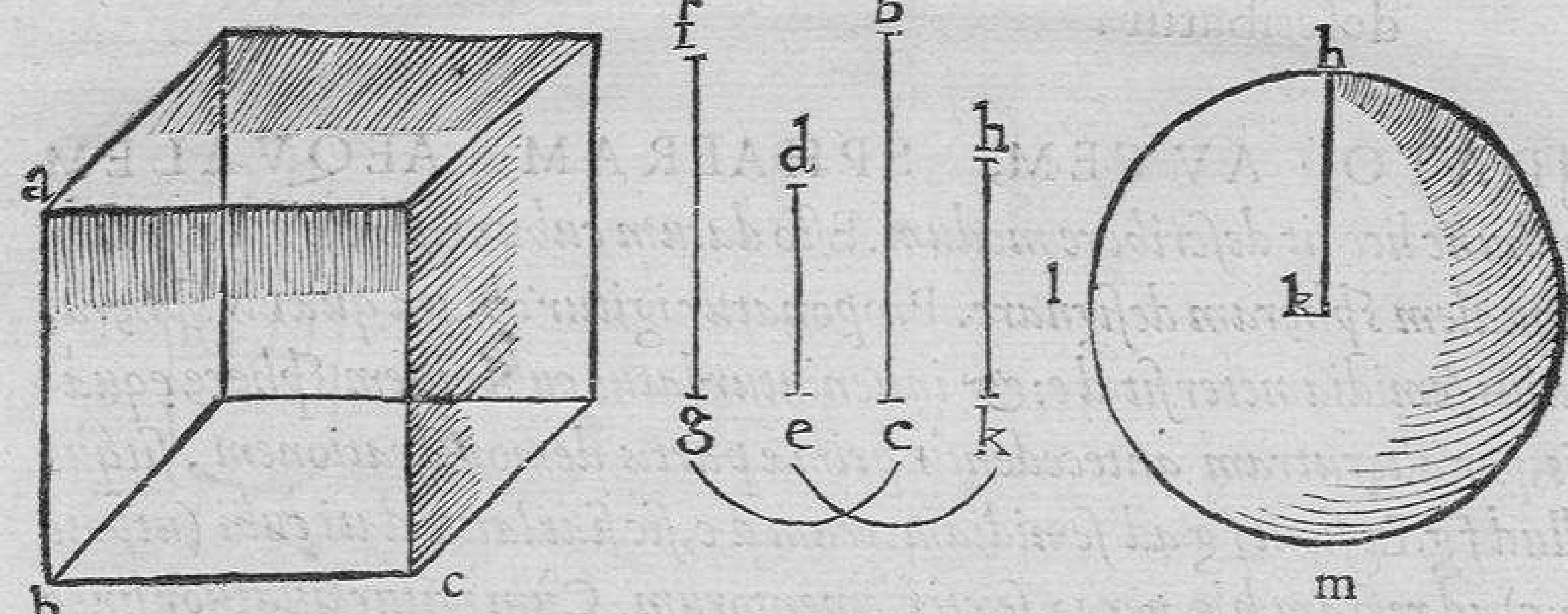
¶Illatio notanda.

3 ¶*Non est igitur cubum, ex latere quadrati descriptum, quod maximo ipsius sphæræ æquatur circulo, eidem sphæræ æquale: ut plærique tradiderunt, à quorum nominibus nostro more abstinemus. Cùm enim f g sit latus quadrati eidem maximo circulo æqualis, & ipsa f g maior h k, quæ est latus cubi datæ sphæræ æqualis, nempe æqualis cylindro qui eidem sphæræ coæquatur, per ipsius antecedentis quartæ propositionis demonstrationem: Euidens relinquitur, cubum ex ipsa f g descriptum, eadem sphæra sensibiliter esse maius.*

¶Secunda pars, ut dato cubo æqualis sphæra uersa uice describatur.

4 ¶DATO AVTEM, SPHAERAM AEQVALEM *in hunc licebit describere modum. Esto datum cubum a b c, cui expediat æqualem sphæram designare. Proponatur igitur oblata quæuis sphæra, cuius semidiameter sit d e: & inueniatur latus cubi eidem sphæræ æqualis, per alterutram antecedentis primæ partis demonstrationem, sitque illud f g. Et sicut f g ad semidiametrum d e, sic fiat latus dati cubi (utpote b c) ad rectam h k, per 12 sexti elementorum. Cùm igitur quatuor lineæ rectæ f g, d e, b c, h k, sint inuicem proportionales: permutatim quoque proportionales erunt, per sedecimam sexti elementorum, sicut quidem f g ad b c, sic d e ad ipsam h k. Si autem quatuor lineæ rectæ, proportionales fuerint: & quæ ex ipsis solida parallelepipeda similia, similitérque descripta, proportionalia erunt: & è conuerso, per 37 undecimi eorundem elementorum. Cubum igitur quod f g describitur, ad cubum quod ex b c eandem habet rationem, quam sphæra cuius semidiameter est d e, ad sphæram cuius semidiameter est h k. Vt enim cubum simile est cubo, sic & sphæra sphæræ similis esse uidetur: utpote, quæ omnium solidorum regularissima est, & omnifariam parallelepipeda: nempe cuius superficies, ex infinitis inuicem æquidistantibus & confusis su-*

perficiebus cōstare uidetur. Praeterea non oportet ipsa quatuor solida, similia esse adinuicem: sed ea tantummodo, quorum proxima uel immediata fit comparatio. Cùm sit igitur ut cubum quod ex f g ad cubum quod ex b c describitur, sic sphęra, cuius semidiameter est d e, ad sphęrā cuius semidiameter est h k: erit quoque permutatim, per eandem sedecimam libri sexti elementorum, ut cubum quod ex f g, ad sphaeram cuius semidiameter est d e, sic datum cubum quod ex b c ad spheram cuius semidiameter est h k. Sed cubum quod ex f g describitur, aequatur sphęrae cuius semidiameter est d e, per constructionis hypothesin: datum igitur cubum quod fit ex b c, aequum erit sphaerę cuius semidiameter est h k. Describatur igitur ex h k circulus, & ad ipsius circuli quantitatem, sphęra h l m: ea enim aequalis erit ipsi dato cubo a b c. Datae igitur sphaerę, cubum aequale describitur & è conuerso. Quod faciendum receperamus.



¶Corollarium 1. De reductione sphaerae in columnam, aut pyramidem aequalem: & è conuerso.

¶DATAE IGITVR SPHAERAE, LATERATA seu rotunda columna, uel pyramis describetur aequalis: & è conuerso, cuilibet oblatae columnae, seu pyramidi, rectilineam uel circularem basin habenti, aequalis sphęra designabitur. Prima pars corollarij fit manifesta. Sphaera enim, uertitur in cubum aequale, per primam partem huius sextę propositionis: & omne cubum, in datę altitudinis solidum rectangulum, aut in parallelepipedum super data basi

consistens

consistens reuocatur, per quintam huius propositionem. Idem autem rectangulum solidum, aut parallelepipedum, in columnam cuius basis est quadrata reducitur. Hanc porrò columnam, facile est transmutare in rotundam, per primam huius propositionem: & columnam demum rotundam, in lateratam aut rotundam pyramidem, per secundam huius propositionem. ¶ Secunda uerò pars corollarij, non minus euidens est. Omnis etenim columna, similiter & pyramis, reducitur in cubum, eidem columnæ uel pyramidi æquale, per corollarium antecedentis quartæ propositionis. Cuilibet autem cubo, æqualis sphæra describitur, per secundam huius sextæ propositionis. Data igitur columna, uel pyramis, atque huiuscemodi sphæra, eidem cubo erunt æqualia: & proinde æqualia adinuicem. Vtraque propterea corollarij pars, uera.

¶ Corollarium 2. Quòd unumquodque cæterorum regularium corporum, in cubum, aut sphæram reuocatur.

6 ¶MANIFESTVM EST PRAETEREA, VNVMquodque *cæterorum regularium corporum, in cubum, atque demum in sphæram reduci uel facilè posse. Corpora autem regularia, hoc est, sub æquiangulis ac inuicem æqualibus planis (quorum quodlibet, basis indifferēter dicitur) cōprehensa, sunt tantūmodo quinque. Primū corpus*
1 *regulare, quatuor basibus triangularibus terminatur: & tetrahedrum dicitur. Secundum uerò, sex quadratis clauditur basibus: & uocatur hexhadrum, siue cubum. Tertium autem, sub octo regularibus triangulis continetur: & octahedrum propterea nuncupatur. Quartum dicitur icosahedrum, uiginti basibus itidem triangularibus terminatum. Quintum denique regulare corpus, sub duodecim pentagonis basibus comprehensum: dodecahedrum uocitatur. Quæ quidem regularia corpora, tum inuicem, tum ipsi sphæræ sunt inscriptibilia. Vnumquodque igitur supradictorum quinque regularium corporum, ex tot resultat pyramidibus inuicem æqualibus, quot sunt in illo triangulares, quadratæ, uel pentagonæ bases: quarum pyramidum altitudo, est linea perpendicularis, quæ est centro cuiuslibet regularis corporis, in basin quamlibet educitur. Ex præostensis autem, atque geometricorum elementorum propositionibus fit manifestum, ipsas cuiuslibet regularis corporis*

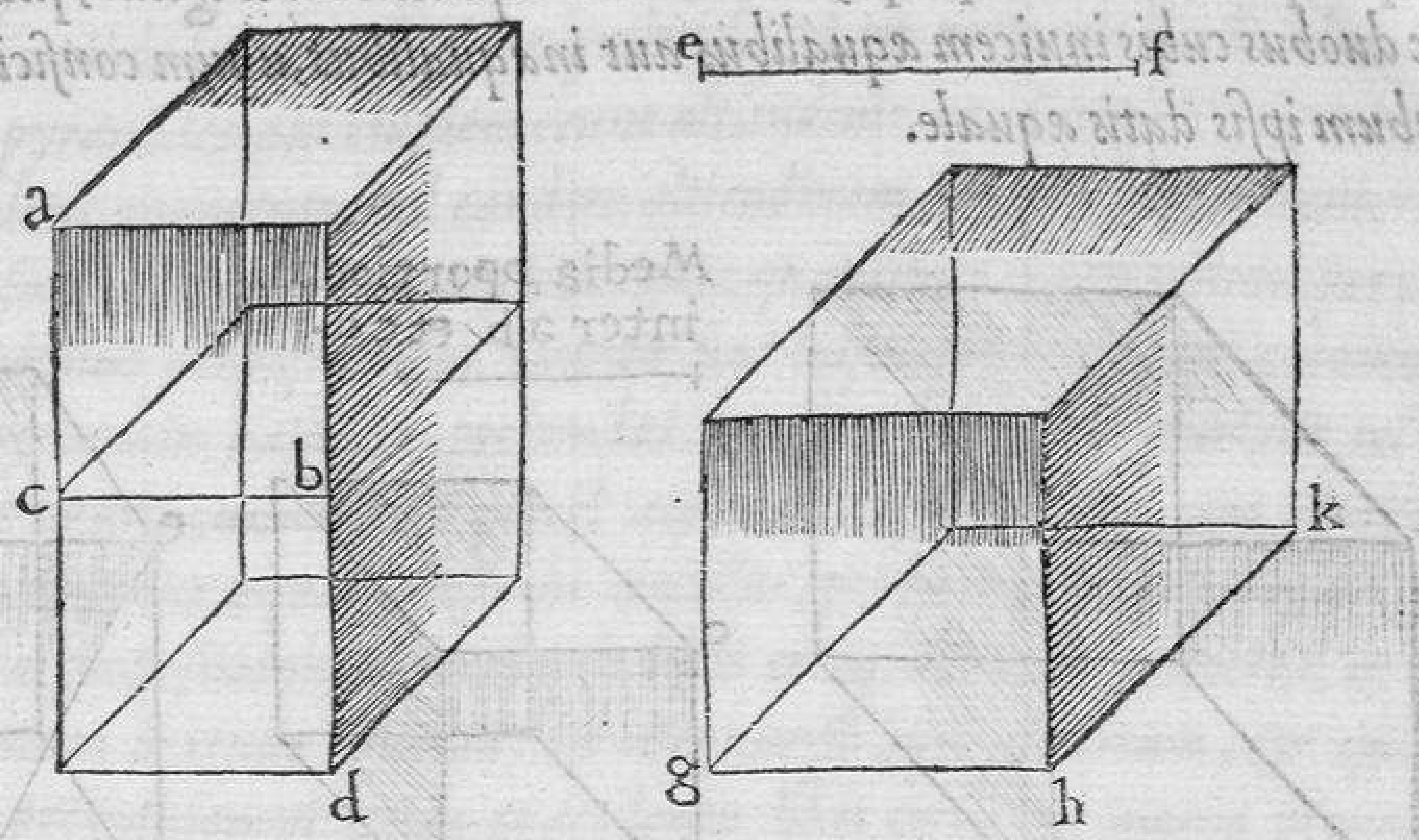
bases, in unam posse reuocari superficiem, etiam regularem. Super qua uniuersali superficie, si ad præfatæ perpendicularis altitudinem pyramis erigatur: ea erit æqualis omnibus ipsius dati corporis regularis pyramidibus, & eidem propterea regulari corpori æqualis. Ipsa nanque pyramis, ad unamquamque singularem pyramidem eam rationem obtinebit, quam basis ad basin. Quoties igitur basis ipsius uniuersalis pyramidis, cuiuslibet pyramidis particularis basin continebit: toties eadem uniuersalis pyramis, unamquanque singularem pyramidem, & totum propterea regulare corpus comprehendet. Omnis autem pyramis, in solidum rectangulum, per corollarium antecedentis secundæ propositionis uel facilè transmutatur: & solidum quodlibet rectangulum, in cubum æquale reducitur, per ipsam quartam propositionem. Ipsi tandem cubo, æqualis sphæra, per hanc sextam propositionem describitur. Corollariũ igitur ex omni parte uerum.

PROPOSITIO VII.

CVbum cubo iungere: ex duobús ue cubis æqualibus, aut inæqualibus, unum conficere cubum ipsis datis cubis æquale.

¶IN PRIMIS IGITVR, SI CVBVM CVBO FVE- 1
rit æquale, alterum alteri directè suprapositum, efficiet rectangulum solidum altera parte longius: quod per antecedentem quartam propositionem, facilè uertetur in cubum, eidem rectangulo solido, & ipsis proinde cubis datis æquale. ¶*Vt si (uerbi gratia) datum fuerit cubum a b, cubo c d, æquali componendum: conficiatur ex ipsis duobus cubis, rectangulum solidum a c d, cuius basis erit quadrata, altitudo uerò ex utrisque datorum cuborum consurgens lateribus. Inuentis ergo duabus lineis rectis, inter a c, atque c d, continuè proportionalibus, per aliquam propositionum antecedentis libri primi, quæ sint e f, & g h, sicut quidem a c, ad e f, sic eadem e f, ad ipsam g h, atque eadem g h, ad ipsam c d: describatur ex ipsa g h, cubum g h k. Illud enim erit æquale præfato solido rectangulo a c d, & æquale propterea ipsis datis cubis a b, & c d.*

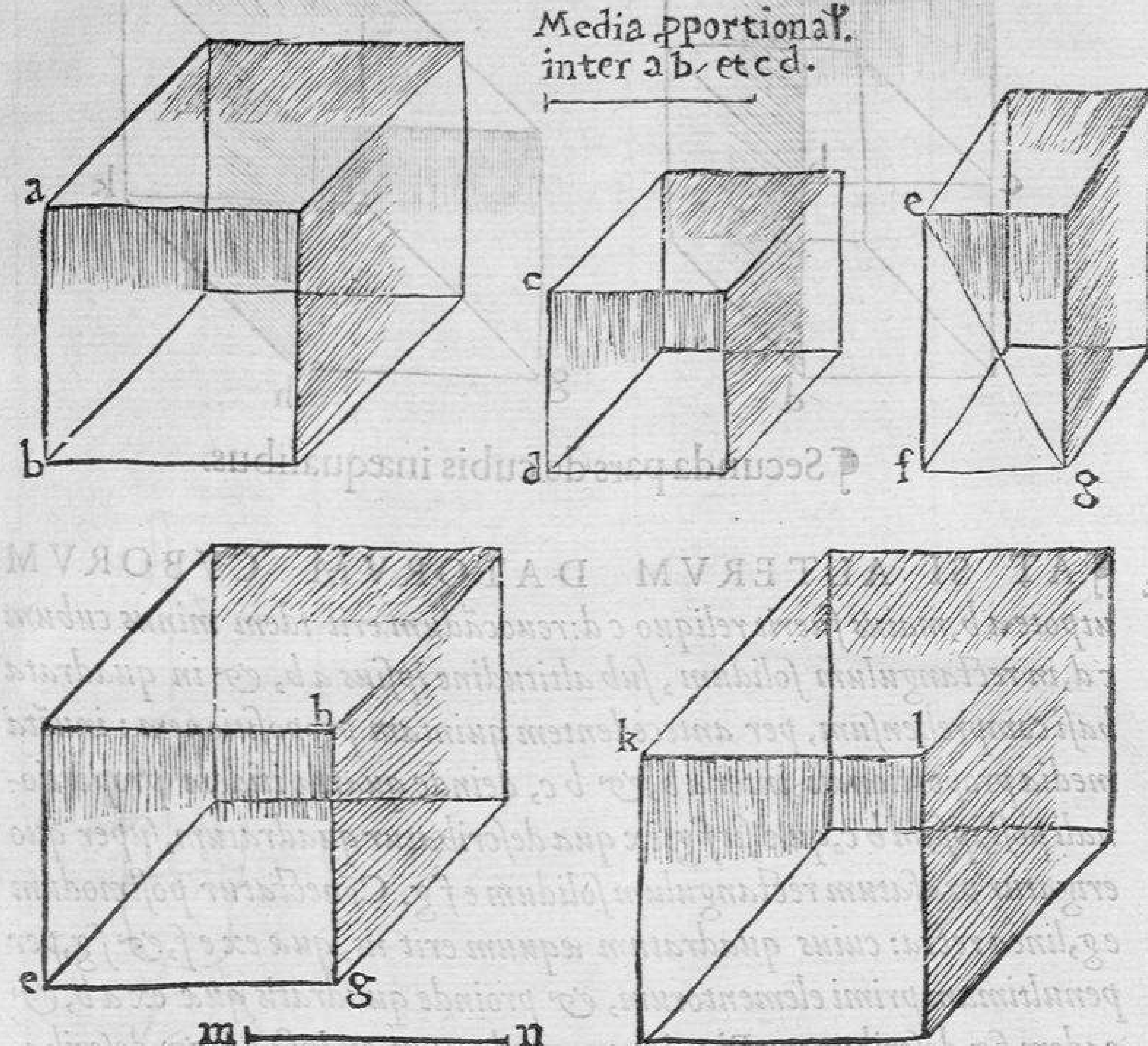
¶Secunda



¶ Secunda pars de cubis inæqualibus.

2 ¶AT SI ALTERVM DATORVM CVBORVM *utpote a b, maius fuerit reliquo c d: reuocãdum erit idem minus cubum c d, in rectangulum solidum, sub altitudine ipsius a b, & in quadrata basi comprehensum, per antecedentem quintam propositionem: inuẽta media proportionali inter a b, & b c, deinde quarta itidem proportionali post ipsam b c, quæ sit f g: ex qua describatur quadratum, super quo erigatur præfatum rectangulum solidum e f g. Cõnectatur postmodum e g, linea recta: cuius quadratum æquum erit iis, quæ ex e f, & f g, per penultimam primi elementorum, & proinde quadratis quæ ex a b, & eadem f g, describuntur. Fiat igitur quadratum, ex ipsa e g: & describatur super illo rectangulum solidum e g h, ad præfatam altitudinem cubi maioris, scilicet a b. Illud enim rectangulum solidum e g h, æquum erit eidem maiori cubo a b, atque rectangulo solido e f g: & proinde datis cubis a b, & c d, pendenter æquale. Sub eadem enim altitudine existentia solida parallelepipeda, adinuicem sunt sicut bases, per trigesimam secundam undecimi elementorum. Operæpretium est tandem, inter latus e g, quadratæ basis, & altitudinem g h (quæ minor est ipso latere) duas inuenire rectas continuè proportionales, per aliquam propositionum antecedentis libri primi: quæ sint (uerbi gratia) k l, & m n, sicut quidem e g, ad k l, sic eadem k l, ad ipsam m n, atque eadem m n, ad præfatam altitudinem g h. Cubum enim quod ex ipsa k l, describetur, eidem solido rectangulo e g h, & ipsis consequenter datis cubis a b, &*

c d,per quartam huius propositionem erit æquale.Habes igitur,qua uia ex duobus cubis inuicem æqualibus aut inæqualibus,unum conficiatur cubum ipsis datis æquale.



¶Notandum.

¶ *Idem fiet consequenter de tribus,aut pluribus cubis, in unum cubum eisdem cubis æquale componendis. Nam reductis duobus primis cubis, in unum cubum ipsis duobus æquale : illud, cum sequenti cubo ordine tertio,in unum cubum (quod tribus primis erit æquale) reuocandum erit:& illud rursum, cum succedenti quarto. Et deinceps in hunc modum,pro data cuborum in unum reuocandorum multitudine.* 3

¶ Corollarium 1. De duabus columnis,aut pyramidibus,in unam componendis.

¶ *Idem quoque fiet,de columnis, & pyramidibus inuicem æqualibus aut inæqualibus. Hîc inter columnas lateratas, annumeramus omnia solida* 4 *solida rectangula minimè cubica, sub æquidistantibus planis & dimensionibus inæqualibus comprehensa.* Nam *eiuscemodi columnæ, atque pyramides, aut eiusdem erunt altitudinis, aut diuersæ.* Si *secundum acciderit, reuocentur ad eandem altitudinem, longiorem in breuiorem transmutando: aut è conuerso, seruata quantitate magnitudinis, per tertiam huius propositionem.* Deinde *fiat basis, quæ utriusque columnæ, uel pyramidis basin comprehendat.* Duabus *enim, aut pluribus rectilineis figuris, unica dari potest æqualis, atque duobus, aut pluribus circulis, unus æqualis describi circulus, per secundum corollarium septimæ propositionis antecedentis libri tertij.* Circulus *præterea, in rectilineam uertitur figuram: & è conuerso, per quartam, & quintam propositionem ipsius præcedentis libri tertij: ut omnia proposito compositionis tibi citemus adminicula.* Super *hac igitur basi, quæ datarum eiusdem altitudinis columnarum, siue pyramidum basibus est æqualis, si ad eandem altitudinem columna, uel pyramis erigatur: ea erit æqualis ipsis columnis, siue pyramidibus: quemadmodum ex prædictis, & trigesima secunda undecimi, atque sexta, & undecima duodecimi elementorum uel facilè colligitur.*

¶ Notandum.

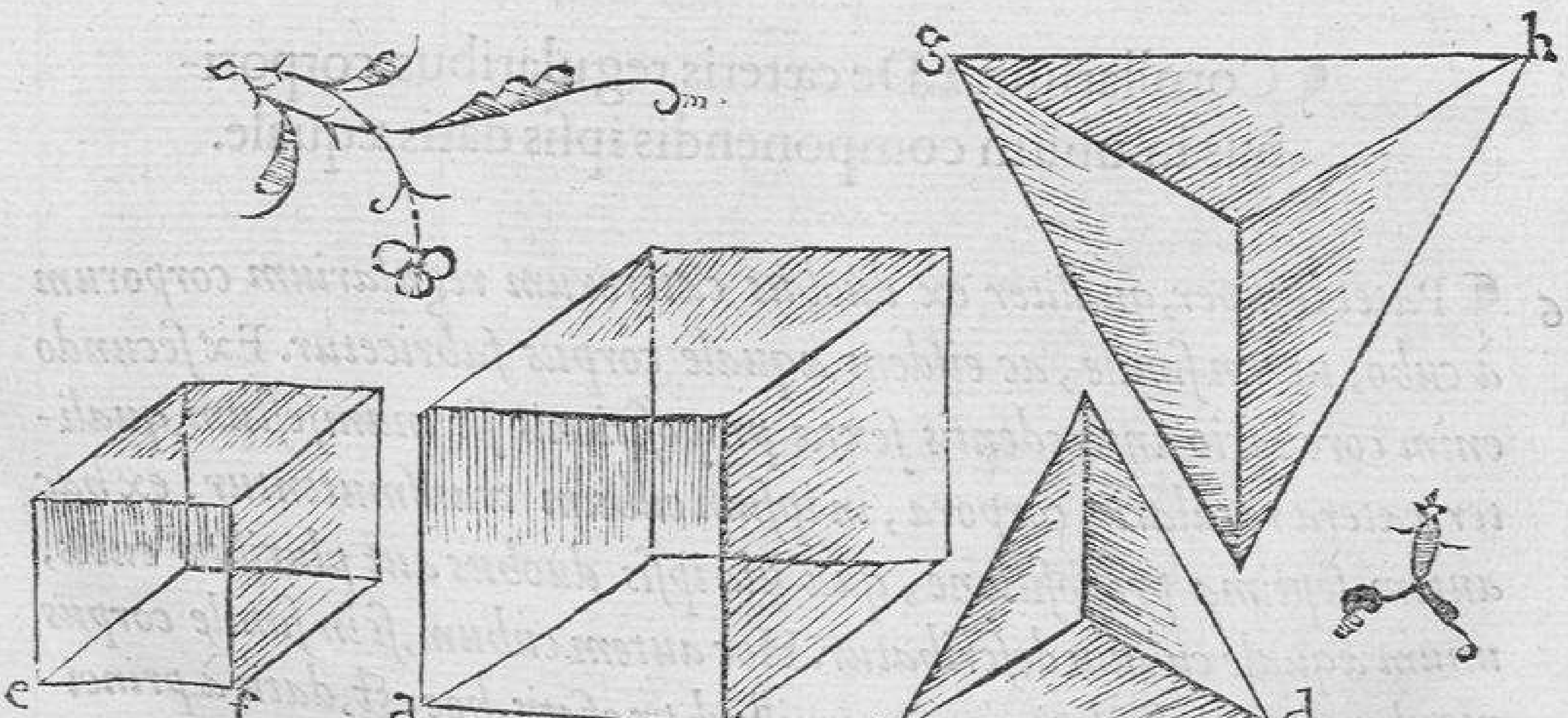
5 ¶ Et *proinde fit, ut duæ columnæ, uel pyramides, aut simul rotundæ, aut simul lateratæ, unáue existente laterata, & altera rotunda: in unam aut rotundam, aut lateratam columnam, seu pyramidem, ipsis datis æqualem, uel facilè reducatur.*

¶ Corollarium 2. De cæteris regularibus corporibus in unum componendis ipsis datis æquale.

6 ¶ Patet *insuper, qualiter ex duobus cæterorum regularium corporum à cubo, unum simile, ac eisdem æquale corpus fabricetur.* Ex *secundo enim corollario antecedentis sextæ propositionis fit manifestum, qualiter cætera regularia corpora, in ipsum cubum transmutentur: ex hac autem septima propositione, qua uia ipsis duobus aut pluribus cubis, unum æquale cubum describatur.* Hoc *autem cubum, si in simile corpus regulare cum ipsis datis reuocetur: illud præfatis, hoc est, datis à principio regularibus corporibus, de necessitate coæquabitur.*

¶ Inuentio lateris oblati corporis regularis, ipsi dato cubo æqualis.

¶ *Reliquum est ergo, demonstrare qualiter inueniendum sit latus dati* 7
corporis regularis, eidem cubo æqualis. Esto itaque propositum in cæterorum exemplum, inuenire latus tetrahedri, dato cubo æqualis, cuius latus sit a b. Assumatur ergo tetrahedrum quoddam liberæ magnitudinis, cuius unum latus sit c d, & per secundum corollarium antecedentis sextæ propositionis, illud in cubum æquale transmutetur, cuius latus sit e f. Datis consequenter tribus lineis rectis, e f, a b, c d, quarta proportionalis inueniatur g h, per 12 sexti elementorum. Erit enim recta g h, latus tetrahedri ipsi dato cubo æqualis. Quoniam ipsæ quatuor lineæ rectæ, e f, a b, c d, g h, sunt per constructionem inuicem proportionales: sicut uidelicet e f, ad ipsam a b, sic c d, ad ipsam g h. Est igitur ut cubum quod ex e f, ad cubum quod ex a b, describitur: sic tetrahedrum cuius latus est c d, ad tetrahedrum cuius latus est g h, hoc est, simile solidum, ad simile similitérque descriptum, per 37 undecimi elementorum. Et permutatim erit igitur, per sedecimam quinti eorundem elemẽtorum, ut cubum quod ex e f, ad tetrahedrum cuius latus est c d: sic cubũ descriptũ ex a b, ad tetrahedrũ cuius latus est g h. Atqui primum æquatur secũdo, per constructionis hypothesin: igitur & tertium, ipsi quarto. Cubum igitur, cuius latus est a b, æquum est tetrahedro cuius latus est g h. Idem uelim intelligas de cæteris regularibus corporibus.

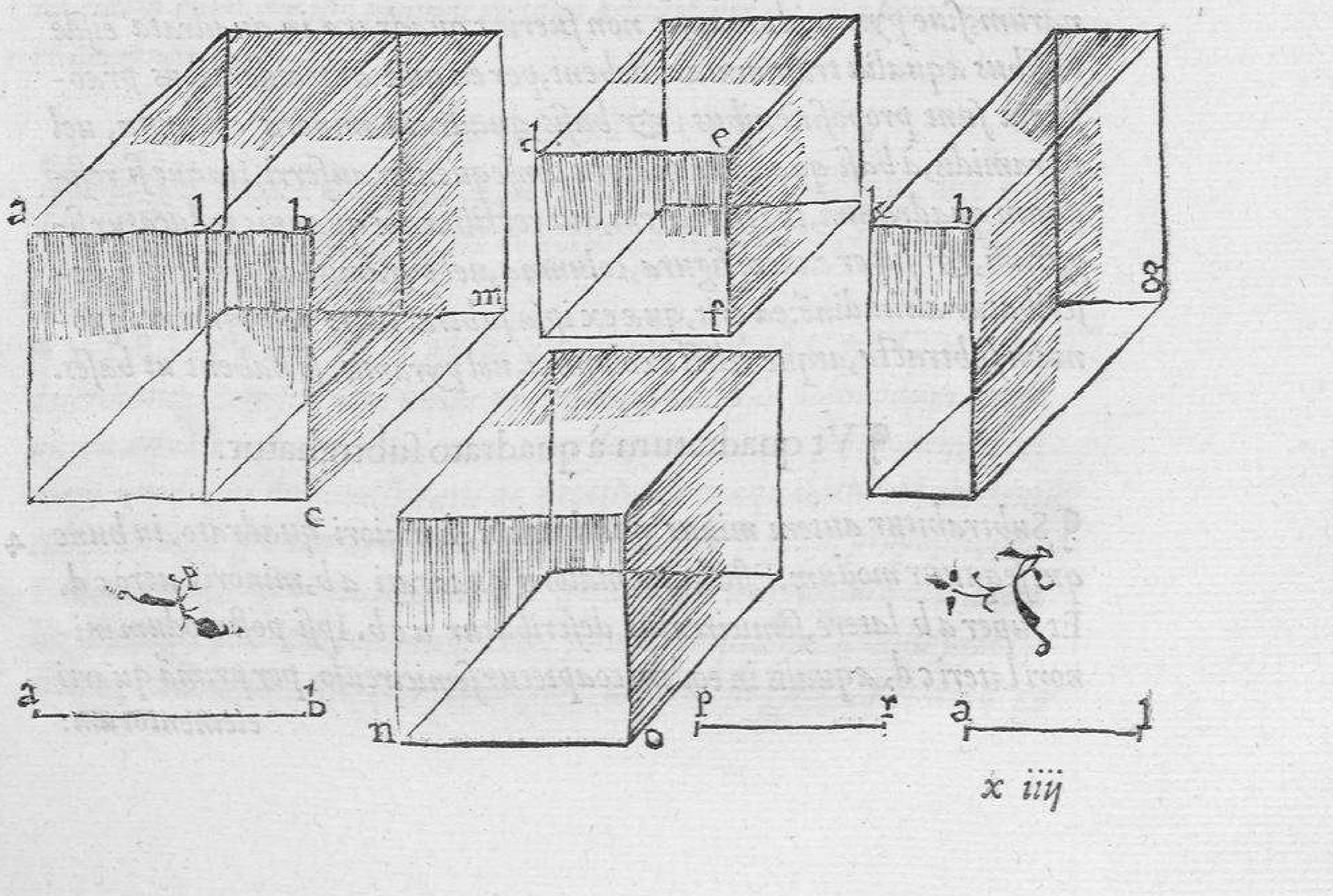


PROPO-

PROPOSITIO VIII.

A Maiori cubo detracto minori, residuũ exprimere cubum: Idémque de rectangulo solido non cubo respondenter obseruare.

1 ¶ESTO, CLARIORIS INTELLIGENTIAE GRAtia, *propositum, à maiori cubo quod sit a b c, detracto minori d e f, residuum cubum exprimere. Fiat igitur in primis quadratum, uni quadratorum ipsius cubi maioris æquale: cuius latus sit g h. Et super ipso quadrato g h, dato cubo d e f, æquale solidum rectãgulum describatur g h* k, *per secundam partem antecedentis quartæ propositionis. Secetur postmodum ex dati cubi maioris latere a b, ipsi h* k, *æqualis, utpote b l, per tertiam primi elemẽtorum. Et per punctum l, diuidatur idem cubum a b c, sub plano l m. Detrahetur itaque ex ipso maiori cubo a b c, solidum rectangulum l m, ipsi rectangulo solido g h* k, *equale: & proinde æquale ipsi minori cubo d e f. Residuum porrò rectangulum solidum a m, sub inæqualibus dimensionibus, & in quadrata basi continebitur: quod in cubum, eidem solido rectangulo æquale, per quartam propositionem uel facilè reducetur: inuentis inter latus ipsius quadratæ basis a b, & altitudinem a l, duabus lineis rectis continuè proportionalibus, per aliquam propositionum antecedentis libri, quæ sint n o, & p r. Cubum*



enim quod ex ea media linea proportionali describetur, quæ eidẽ quadratæ basis lateri uicinior erit, ipsi residuo a m, erit æquale: ueluti cubum, cuius latus est n o, ipsius figuratæ descriptionis.

¶ De rectangulis solidis, minimè cubis.

¶ *Idem quoque faciendum esse uelim intelligas, de rectangulis solidis minimè cubis. Nam super quadrata basi maioris solidi rectanguli, describi poterit solidum rectangulum, ipsi minori æquale, per ea quæ propositione quinta prædocuimus. Deinde facienda erit subtractio minoris solidi rectanguli, ab ipso maiori, non aliter quàm de subtractione minoris cubi à maiori cubo, nuperrimè dictum extitit.* 2

¶ Corollarium 1. De mutua columnarum, uel pyramidum subtractione.

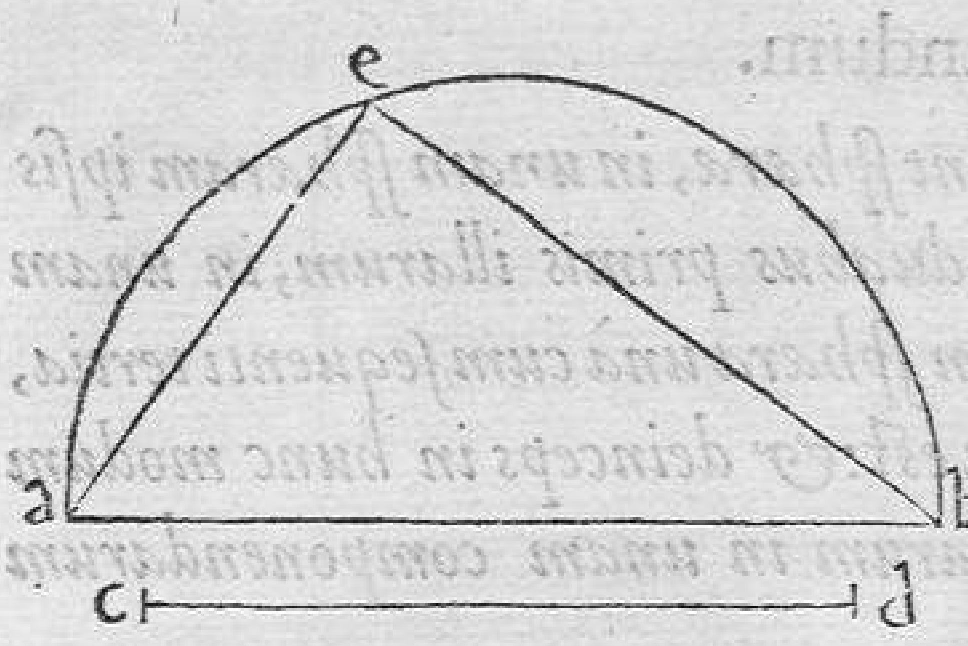
¶ AB OMNI IGITVR COLVMNA, SEV PYRA- 3
mide maiori, minor columna, siue pyramis, detrahi consequenter poterit: & residuum in similem uel columnam, uel pyramidem pendenter reuocari. Nam si datæ columnæ, oblatæue pyramides, inæqualis fuerint altitudinis: minor illarum in altitudinem maioris, aut è diuerso reducẽda erit, per tertiam huius propositionem. Deinde bases earundem colũnarum, siue pyramidum, quæ non fuerint quadratæ, in quadrata eisdẽ basibus æqualia transmutari debent, per ea quæ antecedentibus præostensa sunt propositionibus: & basis quadrata minoris columnæ, uel pyramidis, à basi quadrata maioris consequenter auferri. Itaque si residuum quadratum, in circularem, aut rectilineam quanuis reducatur figuram, & super eadem figura, columna, uel pyramis, ad præfatam describatur altitudinẽ: ea erit, quæ ex ipsa subtractione relinquetur. quoniam subtracta, atque relicta columna, uel pyramis, se habent ut bases.

¶ Vt quadratum à quadrato subtrahatur.

¶ *Subtrahitur autem minus quadratum, à maiori quadrato, in hunc qui sequitur modum. Esto latus maioris quadrati a b, minoris uerò c d. Et super a b latere, semicirculus describatur a e b. Ipsi postmodum minori lateri c d, æqualis in eodem coaptetur semicirculo, per primã quarti* 4

elementorum:

elementorum: & connectatur a e, linea recta. Erit enim a e recta, latus quadrati residui: quoniam angulus qui ad e, rectus est, per trigesimam primam tertij eorundem elementorum. Et proinde quæ ex a e, & e b, rectis quadrata describũtur, æqualia sunt ei quod fit ex a b, per quadragesimam septimam primi supradictorum elementorum.



¶ Corollarium 2. De subtractione regularis corporis, à simili regulari corpore.

5 ¶PATET RVRSVM, QVAM FACILE VNVM*quodque cæterorum regularium corporum à cubo, detrahi possit à maiori & simili corpore regulari: atque latus residui corporis, ipsis datis similis tandem exprimatur. Vtrunque enim regulare corpus, in cubum æquale reduci uel facilè poterit, per secundum corollarium antecedentis sextæ propositionis: & cubum minoris corporis, à cubo maioris pendenter auferri, per hanc octauam propositionem. Residuum tandem solidum rectangulum, reuocari poterit in cubum, per antecedentem quartam propositionem: atque demum inueniri latus similis corporis regularis, eidem cubo, & ipsi proinde residuo æquale, per ea quæ proximè fuere demonstrata.*

PROPOSITIO IX.

OBlatis duabus sphæris inuicem æqualibus, aut inæqualibus, unam describere sphæram, ipsis datis æqualem.

1 ¶VTRIQVE SPHAERAE CVBVM AEQVALE *describatur, per sextam huius propositionem. Ipsis postmodum cubis, unum æquale cubum fabricetur, per sequentem propositionem septimam: quod ipsis duabus sphæris de necessitate coæquabitur. Huic demũ cubo, æqualis sphæra construatur, per eandem sextam propositionem. Eadem nanque sphæra, ipsis dũabus sphæris à principio datis erit æqualis: utpote, quæ eidem communi cubo simul adæquantur. Huius propositionis, nullo opus esse reor exemplo: ni uelis singula, proximis &*

nuper allegatis propositionibus sufficiẽter expressa, in uanum resumere.

¶ Notandum.

¶ *Quod si plures duabus oblatæ fuerint sphæræ, in unam sphæram ipsis datis æqualem reducendæ: reductis duabus primis illarum, in unam sphæram ipsis duabus æqualem, eadem sphæra unà cum sequenti tertia, in unam rursum sphæram colligenda est: & deinceps in hunc modum quantumlibet, pro datarum sphærarum in unam componendarum multitudine.* 2

PROPOSITIO X.

A Maiori sphæra, minorem sphæram auferre: & residuam sphæram, uersa uice reddere notam.

¶ *Conuertatur in primis utraque sphæra in cubum æquale: & minus cubum, à maiori cubo auferatur, per sextam, & octauam huius propositionem. Residuum tandem solidum rectangulum, in cubum æquale, per quartam huius propositionem rursum transmutetur: & ipsi cubo æqualis, sphæra tandem describatur, per nunc citatam sextam huius propositionem. Nam ipsa ultima sphæra, erit ea, quæ ex proposita subtractione relicta est.* 1

¶ Idem efficere de columnis & pyramidibus.

¶ IDEM QVOQVE FIERI POTERIT DE CO- *lumnis, & pyramidibus, in cubum æquale, per corollarium ipsius quartæ propositionis, in primis reuocatis. Ipsum nanque residuum solidum rectangulum, in prioris speciei columnam, aut pyramidem, per corollariũ succedentis quintæ propositionis huius, transmutari uel facilè poterit: quæ relictam columnam, uel pyramidem, ex proposita columnarum, uel pyramidum subtractione tandem propalabit.* 2

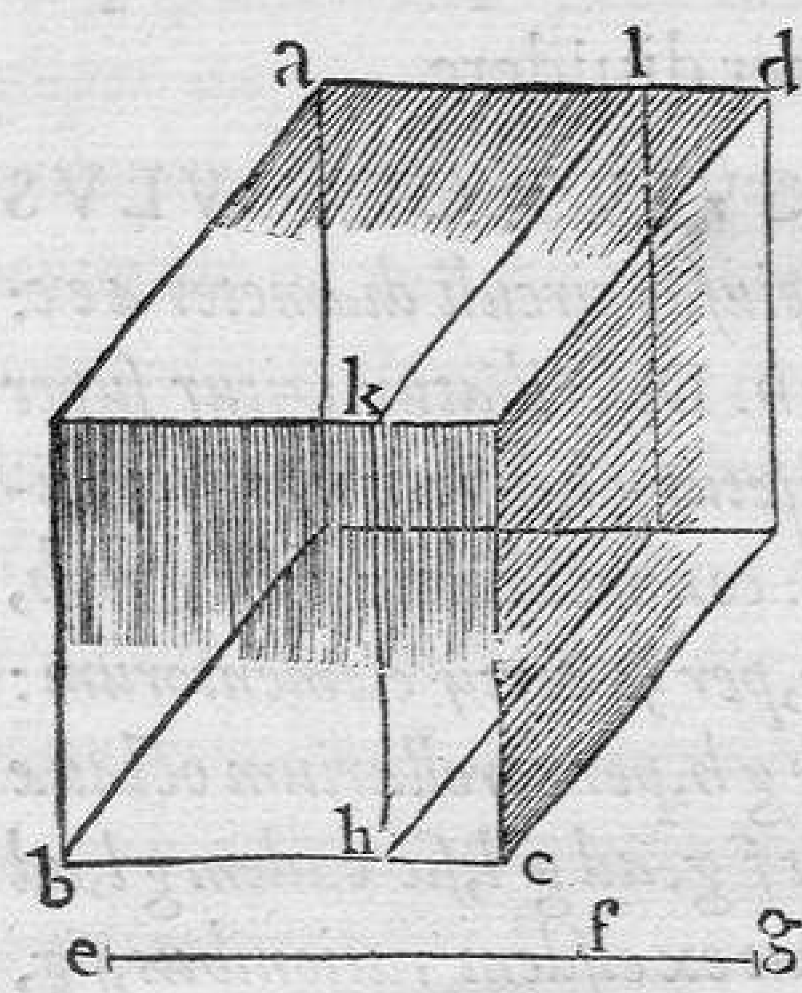
PROPOSITIO XI.

CVbum, ac unumquodque solidum, sub æquidistantibus planis cõprehensum, pro data ratione secare.

¶ SIT DATVM IN PRIMIS CVBVM (VT AR- *tem cũ exemplo simul edoceamus) pro data ratione secandũ a b c d. ipsa uerò ratio data, quæ e f, ad ipsam f g. Datum itaque latus cubi, utpote* 1

b c,

b c, datæ rectæ lineæ e g, sectæ in puncto f, similiter secetur in puncto h, per decimam sexti elementorum: sicut quidem e f, ad ipsam f g, sic b h, segmentum ad reliquum h c. Et *per ipsum punctum h, utrique plano quadrato a b, & c d, æquidistans & æquale planum quadratũ describatur h* k *l.* Aio *itaque, planum h* k *l, datum cubum a b c d, sub data ratione secare.* Parallelogramma *enim sunt,*



atque rectangula b h k, & k *h c, quadri-*
1 *latera, atque sub eodem uertice constituta: se habent igitur ut bases b h, & h c, per primam sexti elementorum.* Parallelogrammũ *igitur b h* k, *ad ipsum* k *h c, parallelogrãmum se habet, ut basis b h, ad basin h c: & proinde ut e f, ad f g.* Sicut *porrò parallelogrammum b h* k, *ad ipsum* k *h c, parallelogrammum, sic solidum rectãgulum a b h l, ad rectangulum solidum l h c d, per 32 undecimi elementorum: sunt enim sub eadem altitudine, quæ est ipsius dati cubi latus.* Solidum *itaque rectangulum a b h l, ad solidum rectangulum l h c d, eandem rationem habet, quam e f, ad f g, per undecimam quinti eorundem elementorum.* Datum *propterea cubum a b c d, plano h* k *l, dissectum est: atque sub data ratione, quæ e f, ad f g.*

De solidis parallelepipedis, non cubis.

2 ¶ *Haud alienum habeto iudicium de quouis rectangulo, solido minimè cubo: aut alio solido parallelepipedo, sub æquidistantibus planis comprehenso.* Vno *etenim ex longioribus, aut breuioribus lateribus, instar ipsius e f g, aut sub quauis alia ratione, similiter diuiso: reliqua omnia, ut in præmissa cubi diuisione, ueniunt pendenter obseruanda.*

¶ Corollarium, de diuisione cylindri, sub quauis ratione data.

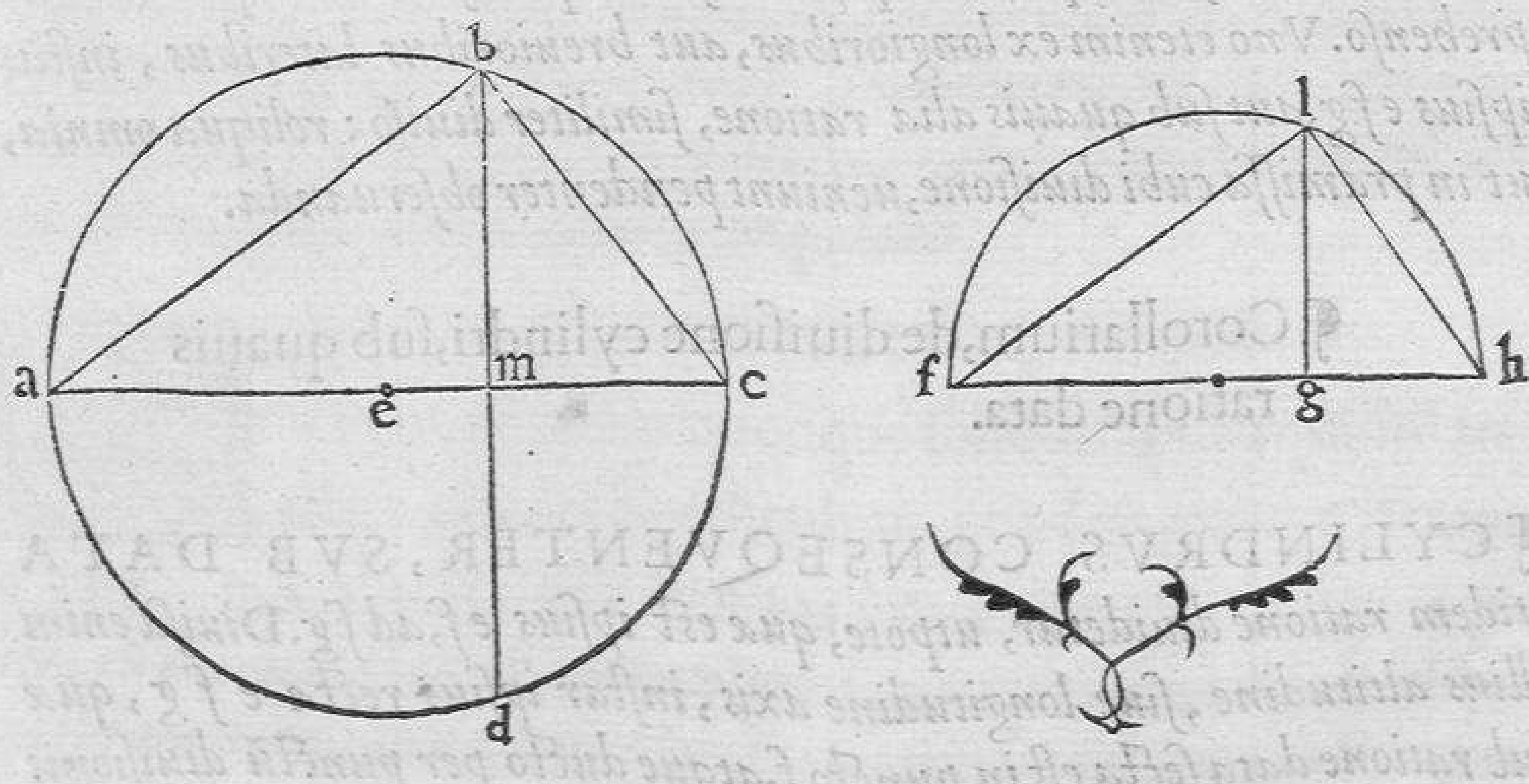
3 ¶ CYLINDRVS CONSEQVENTER, SVB DATA *itidem ratione diuidetur, utpote, quæ est ipsius e f, ad f g.* Diuisa *enim illius altitudine, siue longitudine axis, instar ipsius rectæ e f g, quæ sub ratione data secta est in puncto f, atque ducto per punctũ diuisionis*

circulari plano: se habebunt ipsius cylindri segmenta, ueluti partes axis, per 14 duodecimi elementorum, & proinde sicut partes lineæ rectæ, quæ sub data ratione in primis diuisa proponetur.

PROPOSITIO XII.

Datam sphærā, in duas sectiones inæquales, sub quauis ratione data consequenter diuidere.

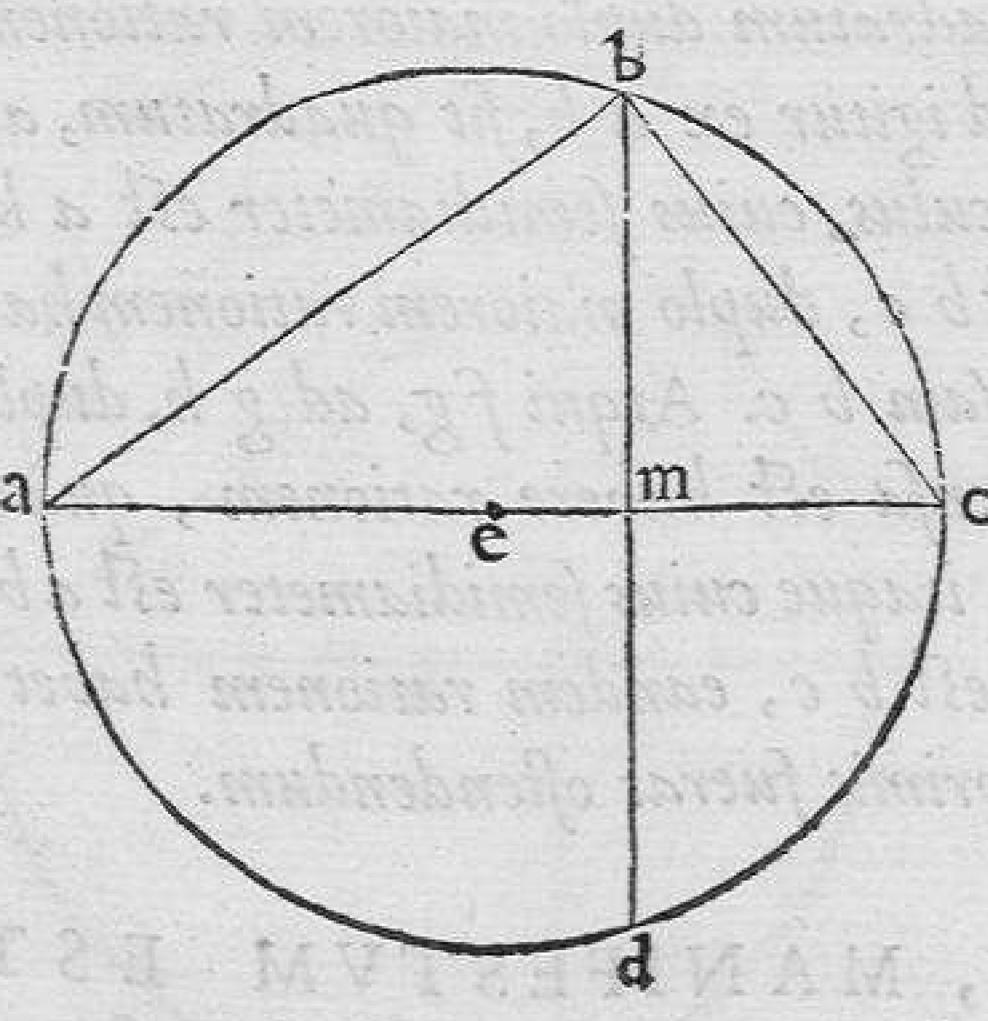
¶ ESTO DATA SPHAERA, CVIVS CIRCVLVS *maior sit a b c d, illiúsque centrum e, atque eiusdē circuli diameter a e c: data uerò ratio, quæ f g, recta, ad ipsam g h. Describatur igitur super f g h, linea recta, semicirculus f l h: & excitetur g l, super f h, perpendicularis, per undecimam primi elementorum: connectātúrque f l, & l h, lineæ rectæ. Rectus erit igitur angulus f l h, per 31 tertij elementorum: atque g l, media proportionalis, inter f g, & g h, per corollarium octauæ sexti eorundem elementorum: sicut uidelicet f g, ad g l, sic eadem g l, ad ipsam g h. Ratio autem ipsius f g, ad g h, cōstat ex eisdem rationibus, f g, inquam ad g l, & ipsius g l, ad g h, per ea quæ super decimam diffinitionem libri quinti, & quintam diffinitionem libri sexti elemētorum conscripsimus. Constabit igitur ex alterutra prædictarum rationum duplicata, hoc est, in seipsam ducta: utpote, ipsius f g, ad g l. Duplo maiorem itaque rationem habet f g, ad g h, quàm eadem f g, ad ipsam g l. Fiat igitur consequenter, ut l f, ad ipsam f g, sic diameter c a, ad rectam a b, per 12 sexti elementorum. Et connectatur recta b c: ducatúrque recta b d, super eodem a c, dimetiente perpendicularis, siue orthogona.* 1

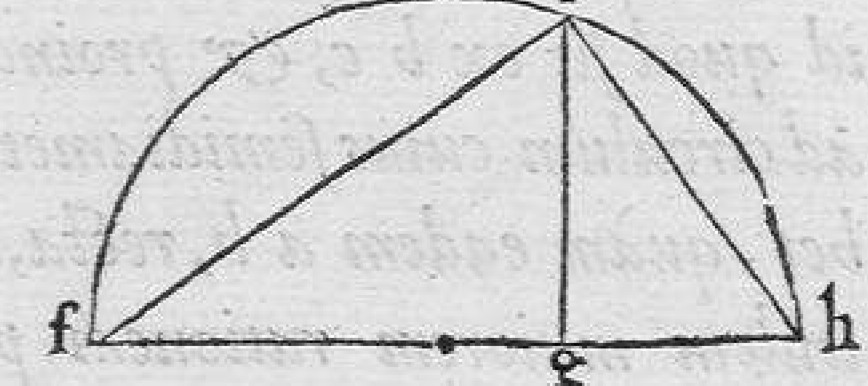


2 ¶HIS PRAEMISSIS, AIO CIRCVLVM, CVIVS *dimetiens est b m d, datam sphæram a b c d, sub data ratione quæ f g, ad g h, dispescere.* Angulus enim in primis *a b c, rectus est, per 31 tertij elementorum: & proinde æqualis recto f g l.* Præterea, *circum angulos b a c, & l f g, consistentia latera, sunt per constructionem inuicem proportionalia: sicut uidelicet c a, ad a b, sic l f, ad f g.* Reliquorum *insuper angulorum b c a, & f l g, uterque simul recto minor est.* Aequiangula *itaque sunt a b c, & f l g, triangula, per sextam sexti elementorum.* Et *per quartam eiusdem sexti, latera quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt adinuicem: atque similis rationis, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur.* Sicut *igitur f g, ad g l, sic a b, ad b c.* Atqui *f g, ad ipsam g h, præostensa est duplo maiorem obtinere rationem, quàm eadem f g, ad ipsam g l.* Eadem *propterea f g, ad ipsam g h, duplo maiorem rationem habebit, quàm eadem a b, ad ipsam b c.* Et *quoniam circuli sese adinuicem habent, sicut quæ ex illorum dimetientibus fiunt quadrata, per secundam duodecimi elementorum: se habent igitur inuicem, sicut quadrata quæ ex eorundem circulorum describuntur semidiametris, quæ subquadrupla sunt eorundem quadratorum, quæ ex ipsis fiunt diametris.* Partes *enim eodem modo multiplicium, eandem rationem habent sumptæ adinuicem, per quindecimam quinti eorundem elementorum.* Circulus *igitur, cuius semidiameter est a b, ad circulum, cuius semidiameter est b c, se habet, ut quadratum quod fit ex eadem a b, ad quadratum quod fit ex ipsa b c.* Sed *quadratum, ad quadratum duplo maiorem rationem habet, quàm latus ad latus.* Quod *igitur ex a b, fit quadratum, ad id quod fit ex b c, & proinde circulus, cuius semidiameter est a b, ad circulum cuius semidiameter est b c, duplo maiorem rationem habet, quàm eadem a b, recta, ad ipsam b c.* Atqui *f g, ad g h, duplo itidem maiorem rationem præostensa est habere rationem, quàm eadem a b, ad ipsam b c.* Circulus *itaque cuius semidiameter est a b, ad circulum cuius semidiameter est b c, eandem rationem habet, quam f g, ad ipsam g h.* Quod *in primis fuerat ostendendum.*

3 ¶HIS PRAEOSTENSIS, MANIFESTVM EST *ex 40, & 41 secundi libri* Archimedis *de sphæra & cylindro, superficiem sectionis maioris b a d, ipsius datæ sphæræ a b c d, æquari circu-*

lo, cuius semidiameter est a b: atque superficiem minoris sectionis b c d, æqualem similiter esse circulo, cuius semidiameter est b c. Hoc igitur *modo, utraque superficies in circulum resoluitur.* Per *ipsius autem libri secundi de sphæra & cylindro* 42 *propositionem, datæ sectioni sphæræ æqualis est conus, cuius basis æquatur superficiei eiusdem sectionis, altitudo uerò ipsius sphæræ semidiametro.* Conus *igitur, cuius basis fuerit circulus ex a b, descriptus, altitudo uerò semidiameter a e, æquabitur ipsi sectioni b a d:* Conus *similiter, cuius basis fuerit circulus descriptus ex ipsa b c, æquabitur sectioni b c d.* Hi *proinde coni, eandem habebunt altitudinem.* Sub *eodem porrò fastigio existentes coni, adinuicem se habent sicut bases, per undecimam duodecimi elementorum.* Conus *itaque, cuius basis est circulus ex a b, descriptus, altitudo uerò semidiameter a e, ad conum cuius basis est circulus ex b c, delineatus, & altitudo idem semidiameter a e, uel e c, eandem rationem habet, quam circulus qui ex a b, ad circulum qui ex b c, describitur: & proinde, quam f g, ad ipsam g h.* Et *ipsæ demum sectiones b a d, & b c d, eisdem conis æquales, eandem rationem habebunt adinuicem, quam eadem f g, ad ipsam g h.* Data *ergo sphæra a b c d, sub plano circulari, cuius diameter est recta b m d, in duas sectiones inæquales, datam rationem quæ f g, ad g h, obseruantes, dissecta est.* Quod *faciendum, atque demonstrandum receperamus.*





¶ Corollarium

¶ Corollarium 1. Quòd sphæra in duas sphæras, sub data ratione proportionatas diuidatur.

4 ¶ *Sphæra itaque in duas sphæras sub data itidem ratione proportionatas diuidi poterit. Per ea enim quæ proximè demonstrata fuere, sphæra in duas partitur sectiones datam rationem obseruantes: & cuilibet sectioni, conus æqualis describitur, per allegatam 42 propositionem secundi libri Archimedis de sphæra & cylindro. Omnis autem conus, in cubum æquale transmutatur, per corollarium antecedentis quartæ propositionis: & cubum in sphæram, per octauam huius propositionem tandem reducitur.*

¶ Corollarium 2. Quòd circulus in duas sectiones sub ratione data partibilis est.

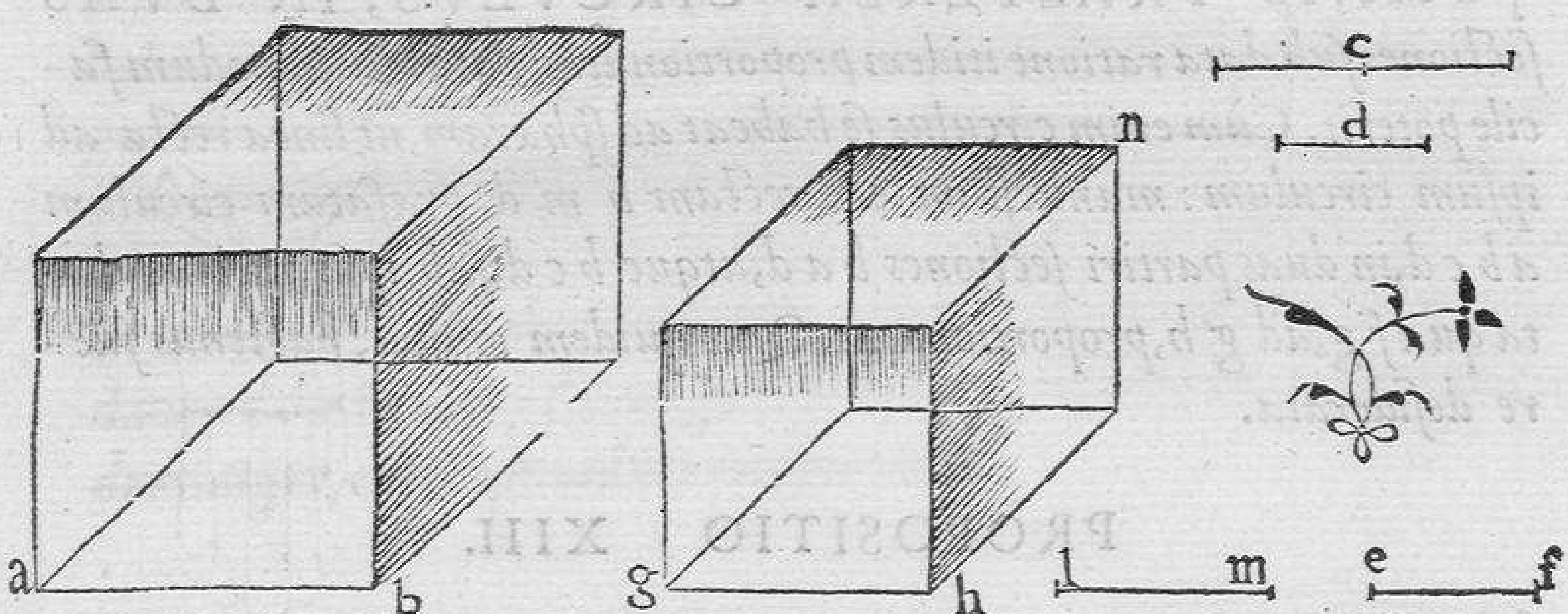
5 ¶ OMNIS PRAETEREA CIRCVLVS, IN DVAS *sectiones sub data ratione itidem proportionatas, diuidi admodum facile poterit. Cùm enim circulus se habeat ad sphæram, ut linea recta ad ipsum circulum: manifestum est rectam b m d, præfatum circulum a b c d, in duas partiri sectiones b a d, atque b c d, sub ipsa ratione data quæ f g, ad g h, proportionatas. Quæ quidem omnia, hactenus fuere desiderata.*

PROPOSITIO XIII.

CVbo, ac unicuique rectãgulo, aut regulari solido sub æqualibus planis comprehenso: simile solidum, sub ratione data maius, aut minus construere.

1 ¶ FACIAMVS IN PRIMIS DE CVBO PERICVLUM: *sitque propterea datum cubum, cuius latus sit a b, data uerò ratio, quæ c ad d. Et operæpretium sit simile, similitérque positum cubum describere, sub ipsa ratione data quæ c ad d, proportionatum: hoc est, ad quod datum cubum ex a b, latere descriptum eandem habeat rationem, quam c recta, ad rectam d. Sicut igitur c ad d, sic fiat a b, latus, ad rectam e f, per duodecimam sexti elementorum. Consequenter inter a b, & e f, duæ mediæ lineæ rectæ sub eadem ratione continuè proportionales inueniantur, per ea quæ primo libro tradita sunt:*

quæ sint g h, & l m, sicut quidem a b, ad g h, sic eadem g h, ad l m, atque eadem l m, ad ipsam e f. Ex data postmodum linea recta g h, dato cubo quod ex a b, simile, similitérque positum cubum describatur g h n, per 27 undecimi elementorum. Aio itaque, datum cubum quod ex a b, latere descriptum est, eandem habere rationem ad ipsum g h n, quod ex ipsa g h, describitur, quam c recta, ad ipsam d. Cùm enim quatuor lineæ rectæ a b, g h, l m, e f, continuè sint proportionales: est igitur sicut prima a b, ad quartam e f, sic datum cubum, cuius latus est a b, ad ipsum cubum g h n, quod ex secunda proportionali g h, descriptum est, per corollarium trigesimætertiæ undecimi elementorum. Vt autem a b, ad e f, sic c, ad ipsam d, per cõstructionem: Sicut propterea c, ad d, sic per undecimam quinti eorundem elementorum, datum cubum quod ex a b, ad ipsum cubum g h n.

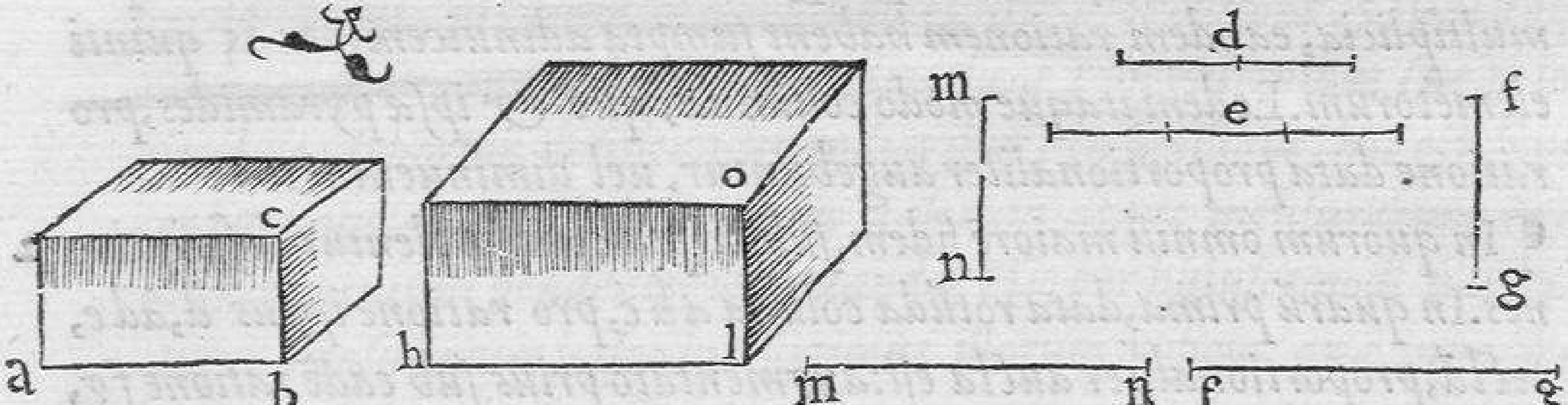


¶ De solidis parallelepipedis minimè cubis.

¶ HAVD ALITER DATVM QVODVIS ALIVD 2
solidum non cubum, altera uidelicet parte longius & rectangulum, tantummodóue parallelepipedum: pro data ratione augere, uel minuere licebit. Quanquam autem huiuscemodi solida, diuersas & inæquales habeant dimensiones: poterit nihilominus unaquæque prædictarum dimensionum, pro prima linea proportionali indifferenter usurpari. Cætera porrò, ueluti suprà demonstrauimus, pendenter ueniunt absoluenda. ¶ Esto in maiorem omnium elucidationem, datum solidum parallelepipedum a b c: data uerò ratio, quæ d recta, ad ipsam e. Et sicut d, ad ipsam e, sic fiat latus a b, ad ipsam f g: atque inter ipsas a b, & f g, duæ

duæ mediæ colligantur proportionales, per aliquam antecedentis primi libri propositionem, quæ sint h l, & m n: sicut uidelicet a b, latus ad ipsam h l, sic eadem h l, ad ipsam m n, atque eadem m n, ad ipsam f g. Describatur postmodum ex ipsa h l, solidum parallelepipedum h l o, ipsi a b c, simile, atque similiter positum, per ipsam 27 undecimi elementorum. Erit *igitur, per idem corollarium 33 ipsius undecimi, ut d, ad e, sic a b c, solidum parallelepipedum, ad simile similitérque positum siue descriptum parallelepipedum h l o.* Poterit *quoque à principio fieri, ut d, ad e, sic latus b c, ad ipsam f g. atque duæ rursum inueniri medio loco proportionales l o, & m n, inter idem latus b c, & ipsam f g: tandémque absolui reliqua omnia, quemadmodum nuper demonstratũ extitit.*

3 ¶ *Haud alienum uelim habeas iudicium, de quolibet cæterorũ quatuor regularium corporum à cubo: ea enim pro ratione data non aliter augebis, quàm de ipso cubo, aut quouis alio solido parallelepipedo tradidimus.*



¶ Corollarium, De augenda, uel minuenda sphæra, pro ratione data.

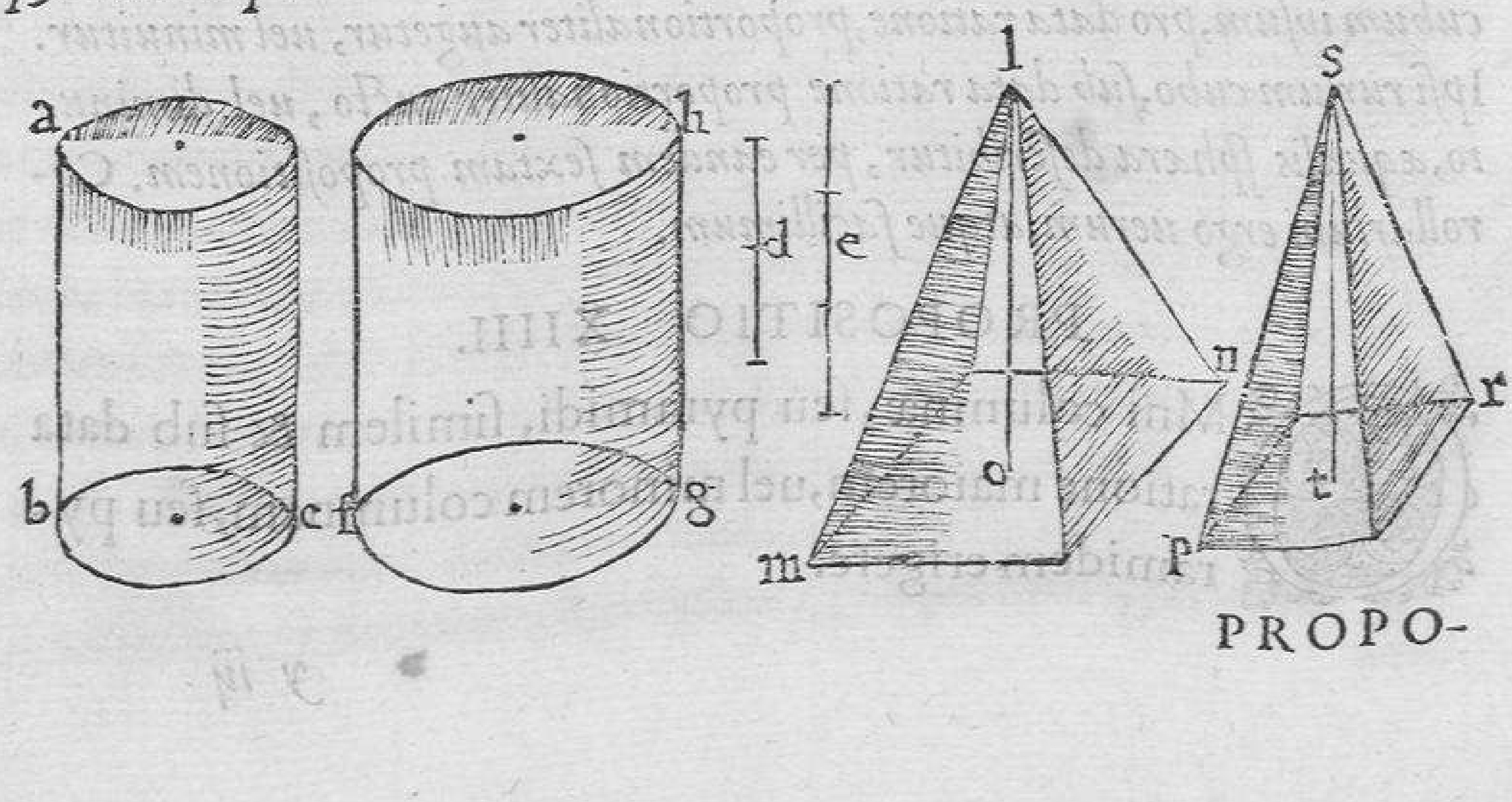
4 ¶ *Data igitur sphæra, sub quauis ratione data, proportionaliter augeri, uel minui consequenter poterit.* Nam *per antecedentem sextam propositionem, sphæra uertitur in cubum: & per hanc decimam tertiam, cubum ipsum, pro data ratione, proportionaliter augetur, uel minuitur.* Ipsi *rursum cubo, sub data ratione proportionaliter aucto, uel diminuto, æqualis sphæra describitur, per eandem sextam propositionem.* Co*rollarium ergo uerum, atque facillimum.*

PROPOSITIO XIIII.

OMni columnæ, seu pyramidi, similem & sub data ratione maiorem, uel minorem columnam, seu pyramidem erigere.

¶ EX SEXTA PROPOSITIONE LIBRI TERTII 1
notum relinquitur, qualiter omnis figura rectilinea, & proinde basis tam colũnæ quàm pyramidis lateratæ, sub quauis ratione data proportionaliter augeatur, uel diminuatur: Ex *ſequẽti uerò propoſitione ſeptima eiuſdẽ libri tertij, idem præoſtenſum eſt de circulo.* Igitur *ſi pro data ratione, baſis oblatæ columnæ, uel pyramidis, proportionaliter augeatur, uel minuatur, & ſuper huiuſcemodi baſi, ſimilis columna, uel pyramis excitetur, ad ipſius datæ columnæ uel pyramidis altitudinem: fiet columna, ſiue pyramis, eadem oblata columna, pro ratione data maior, aut minor.* Sub *eodem nanque faſtigio exiſtentes pyramides, ſe habent adinuicem ſicut baſes: lateratæ quidem per quintam & ſextam, rotũdæ uerò per undecimam duodecimi elementorum.* Et *quoniam ipſæ columnæ, eandem baſin & altitudinem habentes cum ipſis pyramidibus, triplam rationem habent ad ipſas pyramides: neceſſum eſt idem præfatis accidere columnis, quod & ipſis pyramidibus.* Partes *enim, & æquè multiplicia, eandem rationem habent ſumpta adinuicem, per 15 quinti elemẽtorum.* Eodem *itaque modo columnæ, quo & ipſæ pyramides, pro ratione data proportionaliter augebuntur, uel diminuentur.*

¶ *In quorum omniũ maiorẽ fidem, ſubſcriptæ contemplentur deſcriptiones.* In *quarũ prima, data rotũda colũna a b c, pro ratione ipſius d, ad e, rectã, proportionaliter aucta eſt: augmentato prius ſub eadẽ ratione f g, circulo, & ſuper illo deſcripta colũna f g h, ad altitudinẽ g h, quæ ipſi a b, ſit æqualis.* In *ſecunda uerò deſcriptione, laterata pyramis l m n, pro ratione ipſius e, ad rectã d, proportionaliter eſt diminuta: facta in primis rectilinea baſi p r, ipſa baſi m n, ſub præfata ratione minori, atque ad altitudinem l o, æqualem, utpote s t, deſcripta ſimili ſimilitérque poſita pyramide s p r.* 2



PROPO-

PROPOSITIO XV.

VAsorum tandem capacitates, tormentorúmque bellicorum uires, & pondera, atque his similia, sub data ratione proportionaliter augere, uel minuere.

1 ¶DE VASIS HIC POTISSIMVM INTELLIGImus, *quæ regularia sunt, & quibus similia transformari uel facilè possunt: cuiusmodi uidentur esse liquidorum, aut granorum uulgatæ mensuræ, & quæ his similia sunt. Augmentandæ sunt igitur in primis, aut minuendæ, pro data ratione geometrica, eiuscemodi uasorum siue mensurarum bases: per ea quæ sexta, atque septima propositione antecedentis libri tertij tradita sunt. Fabricanda sunt deinde, super huiuscemodi proportionaliter auctis uel diminutis basibus, similia similitérque posita uasa, seu mensurarum instrumenta: quemadmodum de columnis, & pyramidibus, proxima declaratum extitit propositione. Quæcunque enim de solidis, antecedentibus tradita sunt propositionibus (ne te longioribus uerborum detineamus ambagibus) in similibus, hoc est, similiter figuratis, atque similiter positis uasorum atque mensurarum excauaturis, ueniunt pendenter obseruanda. Hìc per huiuscemodi uasorum, atque mensurarum bases, intelligimus illorum orificia: quæ inuerso uase, siue mensura, bases esse uidentur.*

¶ De tormentis bellicis.

2 ¶ *Non aliter de tormentis bellicis, ac illorum emissariis globis censendum, atque faciendum esse uelim existimes. In primis enim emissarij talium machinarum globi, figuræ sunt sphæricæ: idcirco non aliter augendi, uel minuendi, pro data ratione uidentur esse, quàm ipsum corpus sphæricum. De cuius proportionato incremento, uel decremento, antecedentis decimætertiæ propositionis traditum est corollario. Ipsa porrò machina bellica, duobus modis augenda, uel minuenda, pro data uidetur esse ratione. In primis quidem, seruata eiusdem machinæ longitudine: & basi, simul cum illius capacitate aucta, uel diminuta. Secundò, eadem crassitudinis basi inuiolata permanente: sed aucta, uel diminuta longitudine, unà cum ipsa capacitate. Hìc de tota mole uelim non in-*

elligas ipsius machinæ: sed de illius tantùm excauatura, quæ globum recipit emissarium, & ui pulueris in ignem conuersi, atque supra loci capacitatem rarefacti, uiolenter eiicit. Quæ quidem excauatura, cùm cylindri, seu rotundæ columnæ uideatur habere figuram: & ipsarum columnarum propositæ sub quauis ratione data augmentationes, atque diminutiones, unà cum illarum transmutationibus, suis propositionibus & corollariis sufficienter sint elucidatæ: de his ulterius uerbum addere, ne eadem sæpius, ac inutiliter repetere uideamur, consulto supersedemus.

QVARTI, ET VLTIMI LIbri rerum Mathematicarum hactenus desideratarum Orontio Finæo Delphinate, Regio Mathematico, authore,

FINIS.

Virescit uulnere uirtus.