ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ AC SOLIDÆ.

Quibus accedunt selecta

EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

Auctore

ANDREA TACQUET
Soc. JESU Sacerdote & Matheseos Professore.

EDITIO NOVA

PRINC

REFER EXITVM

AMSTELÆDAMI,
Apud HENRICUM WETSTENIUM.
CIƆ IƆ C LXXXIII.

AMICE LECTOR.

CUm multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuriâ laboratum eſſet, viſum denique eſt ad uſum ſtudioſæ juventutis, cujus gratiâ hunc laborem qualemcunque ſuſcepi, novam editionem adornare; in qua quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1. Inprimis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerunque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolida; quorum ſummè neceſſaria cognitio eſt.

2. Propoſitionum hypotheſibus & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui: quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeoque idem bis repetendum eſſet: & tamen litteris à reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni univerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conveniet legere primum litteris prætermiſſis; tum ſi non intelligas, te litteræ ad figuram ducent.

3. Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum ferè vel nullus uſus eſt, aut certè non alius, quam ut per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori viâ poteram demonſtrare. Eoſdem tamen propoſitionum re-

tineo numeros, quos Euclides, ordinemque servo quem bis mille annorum usus probavit.

4. Demonstrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodest. Ea siquidem tardiores & hebetiores non juvat, subtilibus autem & ingeniosis molesta est.

5. Quamvis autem brevis esse studuero, existimavi tamen, me à proposito non recedere, si ea adderem, quæ Geometriam discere volentibus futura usui videbantur. Itaque Corollaria & scholia adjunxi non pauca, quæ usu longo didici in elementis desiderari. Geometriæ practicæ fontes indico suis locis. Tum si quid illustre ad rem occurreret, non omisi. Varia deinde in quibus laboratum hucusque fuit, vel explicare vel demonstrare conatus sum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonstratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, sed theorema est, & quidem non nisi difficulter ac longo circuitu demonstrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multum tyrones solent, disposui ad eum fere modum, quo jam analystæ scribunt æquationes suas. Quem si exactè tenere voluissem, fuisset quidem res brevior; sed minus, ut arbitror, tyronibus accommodata.

8. In

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torsêre omnes, ſolvuntur.

9. In quinto libro proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaque primum proportionum elementa, faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri ſextam definitionem, quâ proportionum æqualitas per multiplices explicatur oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile & perobſcurum, cujus etiam demonſtrationem exhibemus, hactenus à nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclidæas quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis fortè illas præ noſtris probationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſigno ac demonſtro indicium univerſale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones demonſtrare potuiſſem ſi hoc conducere diſcentibus judicaſſem. Poſtremò de proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubjungo, ac inprimis demonſtro axioma illud percelebre ſeu potiùs theorema: proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometriâ fuit deſideratum.

10. Librum duodecimum, cujus dif-

ficiles ac prolixæ demonstrationes discentibus terrori esse solent, aliâ viâ plus quam decies breviori demonstravi. Quod ita se habere, qui hæc nostra cum Euclide ejusque commentatoribus contulerit, deprehendet.

11. In libris quarto, sexto, undecimo præstantur ea quæ universim supra indicavimus.

12. Denique selecta ex Archimede theoremata aliâ similiter ac breviori viâ demonstrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac sphæra doctrinam postremis tredecim propositionibus adjectis, ampliavi, quibus inter cætera demonstro sesquialteram proportionem ab eo in cylindro sphæraque repertam, ab æquilatero cono eidem sphæræ circumscripto, tam in soliditate, quàm in superficie continuari. Euclidi porro Archimedæa illa subnexui; non quasi adhuc elementa, sed quia subtilitate pariter atque usu eximia sunt: tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cum maximi Geometræ inventa admiranda assequi sese viderit, nihil in Mathesi futurum tam subtile vel arduum, quod his instructus elementis percipere non possit.

Tu hæc habe; &, si placuerint, lege ac disce: inventurus in his principia nobilissimæ & fortè omnium antiquissimæ scientiæ; quod ostendet tibi, quam subnecto

HISTO-

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progressu Matheseos.

MAthematum elementa tradituro, visum est de illorum origine ac præstantia præfari quædam, ut intelligant Matheseos candidati, cujusmodi ea scientia sit, cui se consecraturi sunt; & planum fiat adversus eos, qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis sint hæ disciplinæ, quas omnium ætatum sapientissimi viri incredibili studio sibi putaverint comparandas. Usui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda Petri Rami diligentia, qui scholarum toto primo libro benè magno Mathematicam Historiam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliisque accuratè copioseque conscripsit.

Prima hominum scientia Mathesis fuit si Josepho credimus. Is lib. 1 cap. 3. scribit Sethi nepotes Cælorum ordinem ac siderum cursus observasse. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus universalem mundi interitum fore prædixisset, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique sua inventa inscripserunt, ut si lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea superstes, hominibus discendi copiam faceret, & quæ inscripta continebat, spectanda exhiberet. Ajunt enim lapideam illam ab ipsis dedicatam: quæ & nostris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides esto.

Post diluvium primos mortalium Assyrios & Chaldæos Mathemata coluisse tradunt idem

Josephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Assyria ad Ægyptios translatæ sunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo jubente ex patrio solo in Palæstinam, ac deinde in Ægyptum profectus esset, cerneretque Ægytios artium bonarum capi studio, atque indole ad discendum egregiâ esse, ut apud eundem Josephum est lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Astronomiamque quam præcedere Geometriam necesse fuit, communicavit. Quibus deinde studijs adeò Ægyptij floruere, ut Aristoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto à sacerdotibus publicâ vacatione fretis inventas esse.

Exinde Mathesis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philosophos pervenit: Thales enim Milesius, qui ante Christum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum venisset, Geometriam inde in Græciam transtulit. Is sanè, præter alia, primi libri propositiones, 5, 15, 26. invenit. Eidem debentur 2, 3, 4, 5, l. 4. cujus inventi lætitiâ elatus bovem immolasse dicitur. Idem Æquinoctia & solstitia observare cœpit Laertio teste; & solis eclipsim, ut scribunt Hippias & Aristoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipsim lunæ Regi Cyro prænunciasse. Quapropter hîc primus in Græcia Mathematicæ scientiæ parens atque Auctor fuit.

Post hunc Pythagoras Samius ille philosophorum antiquissimus, Mathematicas disciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis propè illi ratio philosophandi ex numeris duceretur. Geometriam verò, ut refert Laer-

tius

tius à materia abſtraxit primus: in qua mentis elatione invenit 32, 44, 47, 48, lib. 1. Sed inprimis ob inventas 32. & 47. lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitiâ tantâ affectus eſt, ut teſte Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impensè & docuit & exercuit. Neque ſolùm acutè & ſubtiliter multa invenit, ſed etiam, ludum primus aperuit, in quo juventus tam honeſtas, tamque nobiles artes addiſceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles, & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo ſolem Peloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula,) eundemque, de habitationibus in lunâ nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12. & 23, l. 1. Hos excepêre Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentatâ circuli quadraturâ, ab Ariſtotele reprehenſi pariter & celebrati. Sed hos inter longè clariſſimus Hippocrates fuit, ille è mercatore Philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam, ut ſingularem & unicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quod Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophia ſolum, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit; ejus tum phyſica, tum fortè etiam Mathematica monumenta perierunt invidiâ, (ut quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam, Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyreneus, licet ejus inventa Mathematica non extent, vel eo nomine magnus eſt, quod Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philoſophia eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; *nullus Geometriæ expers accedito*: illuſtri ſanè argumento quam non aliena ſed propria, quamque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certè Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia propè innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; à quibus Mathemata egregiè ſunt amplificata. Leodamas Analyſim à Platone acceptam exercuit, ejuſque ope

in-

inveniſſe multa à Laertio dicitur. Theætetum tum inventa ſua, inter quæ Elementa ab eo ſcripta & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Archytas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos uſus traduxerit ferè primus; unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti Dædalus, aliique artifices fabulis poëtarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis copiis civium ſuorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior quam inventis ſuis. Leon ſanè Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Eudaxus Gnidius ſuperiorum æqualis in Arithmeticis magnus &(ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus. Elementa item conſcripſit, & generaliora effecit, & ſectiones à Platone inchoatas auxit; inſuper aſtronomicarum hypotheſium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut ſupra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracleotes & Menechmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Mendæus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem ſectiones

coni-

Theudius & Hermotimus elementa fecerunt universaliora & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philosophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Aristotelis magister, ipseque Aristoteles cognitione Mathematum clari fuêre. Illius cum auditor quidam esse vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, ansas enim Philosophiæ non habes.

De *Aristotele* verò quid dicam, libri illius omnes locis Mathematicis sunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Aristotelis schola duo præcipuè celebrantur Eudemus & Theophrastus. Hic scripsit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum; ille historiam Mathematicam condidit, ex quo Proclus aliique sua mutuati sunt. Arysteo, Isidoro, Hypsicli Geometris subtilissimis solidorum libros maximè debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonstravitque accuratiùs, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus instituitur. Obiit anno ante Christum 284. Euclidem secuti sunt centum ferè post annis Eratosthenes & Archimedes. Eratosthenis clarum inprimis nomen fuit, sed ejus scripta periêre. Archimedis habemus multa, multa amisimus.

Sed Archimedem cum nomino, apicem quendam humanæ subtilitatis, totiusque Mathematicæ disciplinæ absolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidêre Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Astroſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14 & 15, ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo hic 6, ille 12 libros primi conſcripsêre, pro quo invento tam utili & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum excipias, ante Chriſtum vixêre omnes.

Anno poſt Chriſtum 70 venit in lucem Claudius Ptolemæus, Aſtronomorum princeps, vir planè mirabilis, ſupraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is verò non Aſtronomiæ tantùm, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6, Hipparchi verò 12, ab illo ad 5 theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocij Aſcalonitæ erudita in Archimedem commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquam excellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur; Et Heronis quidem tam in mechanicis, quam in Geometricis excellens ingenium

genium fuit. Cubi certè duplicatio ab eo tradita a Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Ctesibii Alexandrini, cui antlias debemus nostras, admiranda opera à Virtuvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen est, quem Euclidi ipsi Proclus in quibusdam præposuit.

Diophantus, & ipse Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides, verè totius numericæ subtilitatis magister; à quo reperta sit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hisce temporibus à Francisco Vieta, & Renato Cartesio multò perfectior & universalior effecta est. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Musicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri sectione libris Geometris notissimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus ex doctissimis ejus in Euclidem commentariis, aliisque scriptis manifestum est. Atque hic opinor ille est, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, sub annum Christi 514, Vitaliani classem Constantinopolim obsidentis, optico speculorum artificio combussit. Theonis laudes verè magnus mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros, quos Euclidi hactenus adscripsêre omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus, neque ullo solido nixus fundamento, hic audiendus non erit. Ut finis aliquando sit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres postremus, ut qui vixerit circa annum 400, sed nominis claritudine, omnique laude Mathema-

tum

tum primis adnumerandus. Quæ ante Hypsiclem, Ctesibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheseos dedit. Scripsit collectionum Mathematicarum libros septem, è quibus duo primi perierunt. Reliqui quinque tam multis abundant, tamque variis, ex omni propè genere Mathematum nobilissimis inventis, ut inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus censeantur.

Habetis originis ac progressionis Mathematicæ historiam brevem. Ex qua Matheseos antiquitas, præstantia, ac dignitas apparet. Sanè Reip. litterariæ principes, iidem qui Philosophiam, etiam Mathematicam genuêre, gemellas sorores partu velut uno, quas qui distrahere ab invicem violentè velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum insigni injuria crudelis sit; quando, quod fieri in gemellis solet, uno vel loco vel morte sublato, languere, quin & contabescere alterum necesse sit.

APPROBATIO CENSORIS.

Elementa Geometriæ R. P. Andreæ Tacquet Societ. JESU, *ad instructionem illorum, qui scientiam illam sectantur, utiliter imprimentur. Actum 9. Aprilis 1654.*

GUILLIELMUS BOLOGNINO
S. Th. L. Canon. & Lib.
Censor Antv.

FA-

FACULTAS

R. P. PROVINCIALIS.

EGo infrascriptus Societatis JESU per Flandro-Belgicam Præpositus Provincialis, potestate mihi factâ ab admodum R. P. N. Gosuwino Nickel Præposito Generali eiusdem Societatis, facultatem concedo, ut Elementa Geometriæ planæ ac solidæ, demonstratæ brevi ac facili methodo, & tyronum captui magis accomodatâ, unà cum selectis ex Archimede Theorematis, aliisque novis demonstrationibus, Auctore P. ANDREA TACQUET: omnia ab aliquot Societatis nostræ Mathematicis approbata, typis mandentur: in quorum fidem has manu nostra subscriptas, & solito officii sigillo munitas dedimus. Antverpiæ 18. Martii 1654.

JOANNES BAPTISTA ENGELGRAVE.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

SCientiæ proprium munus est, ex notionibus quibusdam simplicissimis, rationali naturæ à conditore Deo impressis, elicere aliquid, quod priùs ignorabatur, atque inde rursum aliud ex alio; ut prior cognitio semper ad ulteriorem sit gradus. Quæ ratio si accuratè teneatur, ex minimis, & per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque scientiæ, præ omnibus amplexæ sunt eæ disciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione versantur. Quo fructu id factum sit sciunt omnes, qui hisce studiis imbuti sunt. Et sanè Geometria (ut de aliis Matheseos partibus jam nihil dicam) mirum est, quam brevi ex apertissimis ad obscurissima trahat, & ex humillimis ad altissima statim assurgat. Statuuntur primò simplicissima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus dissentire possit. Deinde nihil asseritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non sit de-

 ductum.

ductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu & cognitione remota; incredibili certitudine ac evidentiâ innoteſcunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis derivatur, ſunt tria, Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

1. PUnctum eſt ſignum in magnitudine individuum.

Hoc eſt, quod dividi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut unitas numeri.

2. Linea eſt magnitudo tantùm longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. tabulâ 1.

4. Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interjicitur.

Velut Archimedes : Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium; ſive eſt omnium breviſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Velut Plato : Recta linea eſt, cuius extrema obumbrant omnia media.

Unus omnium ſenſus eſt: Inſtrumentum quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt: quæ utrum recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Juxta regulam deſcribatur linea, tum regulam inverſam,

inversam, sicut extremitas priùs dextra, jam sit sinistra, rursum applica lineæ priùs descriptæ, si planè cum illa congruat, recta est regula; si non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies est magnitudo tantùm longa & lata.

Duas ergo habet dimensiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema sunt lineæ.

7. Planum, sive superficies plana est, quæ ex æquo inter suas extremas lineas jacet.

Vel ut Hero: superficies plana est, cujus omnibus partibus recta linea accommodari potest.

Generatur enim superficies plana ex fluxu lineæ rectæ.

Vel: plana superficies est, cujus extrema obumbrant omnia media.

Vel: plana superficies est minima omnium eosdem terminos habentium. *Idem sensus est omnium.*

Non definivit hic corpus sive solidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem desideret; corpus est magnitudo longa, lata, & profunda. Tres igitur dimensiones habet corpus, superficies duas, linea unam, punctum nullam.

8. Angulus planus est duarum linearum,

in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Fig. 2. 4. *Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A ſe mutuo tangentes in A, ſic ut non exiſtant ſibi mutuo in directum; hoc eſt; non efficiant unam lineam.*

9. Latera ſeu crura anguli, ſunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuo occurrunt.

Fig. 2. 4. *Cum angulus eſt unicus, unâ litterâ ad verticem poſitâ deſignatur. Cum plures ad unum punctum exiſtunt, deſignantur tribus literis, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde unicâ lateribus propè verticem interpoſitâ. Sic in figura 5. angulus qui fit à lineis B A, C A deſignatur vel literis tribus B A C, vel unicâ O.*

Fig. 5. 11. Anguli æquales, vel potiùs ſimiles dicuntur; ſi, cum ſibi invicem vertices imponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. *Ad hoc non requiritur, ut latera ſint æquè longa.*

Fig. 2. 3.

12. Inæquales, ſeu diſſimiles dicuntur anguli, cum vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. *Sic angulus B A E major eſt angulo B A C.*

Fig. 5. *Angulus non minuitur, vel augetur, licet crura minuas vel augeas.*

Porro

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione consistit, inclinatio autem linearum quantitas non est, neque angulus ullus quantitas erit. Et sanè eodem jure curvitas esset quantitas, quo angulus, cum ab invicem non magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, alijsque geometris angulos æquales esse dicimus, nihil aliud, quam inclinationum similitudo, hoc est, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi sumus post propositionem 16. l.3.

13. Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. *Fig. 2. 4.*

14. Cum recta (CA) super rectam (BF) consistens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrimque facit æquales (CAB) & CAF) rectus est uterque æqualium angulorum: Recta autem (CA) alteri insistens dicitur perpendicularis, seu perpendiculum. *Fig. 6.*

Angulus rectus sic etiam definiri potest. *Fig. 6.*

Rectus angulus is est (BAC) cui a parte altera æqualis oritur (CAF,) si unum latus (BA) produxeris.

Duæ regulæ sic compactæ ut angulum rectum contineant, instrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius c.2. l.9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis est in rebus omnibus construendis, dimetiendis formandis & firmandis, ut nihil ferè effici sine illo possit. Norma *mæ Examen ſic inſtituitur. Eius latus A E applica rectæ lineæ A F, & juxta latus alterum deſcribatur recta C A. Converſa deinde norma verſus B, ſi utroque ſuo latere congruat rectis C A, A B, ſcito eſſe legitimam & exactam. Ratio patet ex ipſa def. 14.*

Fig. 7. 15. Obtuſus angulus eſt (B A C,) qui recto (F A C) major eſt.

Fig. 8. 16. Acutus angulus eſt (L A I) qui recto (F A I) minor eſt.

17. Figura plana, eſt ſuperficies plana, unâ vel pluribus lineis undiq; terminata.

Fig. 9. 18. Circulus eſt plana ſuper ficies, unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, à qua ad aliquod punctum intra contentum (A) omnes, quæ duci poſſunt rectæ lineæ, ſunt æquales.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

Fig. 9. 20. Diameter circuli eſt recta per centrum ducta, (B C,) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens.

Fig. 9. 21. Semidiameter, ſive radius eſt recta (AF,) ex centro ad circumferentiam ducta.

Fig. 9. 22. Semicirculus eſt figura (B L C) comprehenſa à diametro (B C) & dimidia circumferentia (B L C.)

Fig. 9. *Circulus ita generatur: ſi recta linea (A B) uno extremo ſuo (A) manente fixo, in orbem circumagatur,*

tur, recta ipsa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Porro mira circuli indoles vel in ipso exortu suo apparet. Ad ejus namque geneesim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur & ejus extremum quiescit. Dein lineæ generanti puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos absolvant, diversa celeritate moventur.

Tertio peripheria circulum ambiens, constat quodammodo ex contrariis, & extremis sine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium est, ut æquale inter magnum & parvum; idque eo mirabilius est, quod eæ contraria insint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Aristoteli visa sunt admiranda, ex quo illa depromsimus. At prodigia circuli longè majora aperuimus in dissertatione physico-Mathematica, quam una cum Cylindriis & angularibus in lucem emisimus anno 1652 isthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri solent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: semicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura est superficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, sive trilaterum, est plana superficies tribus rectis comprehensa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac simplicissima est, in quam ceteræ omnes resolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum, est quod *Fig. 10.*

 tria

Fig. 11. 12. tria latera habet æqualia.

26, Triangulum Isosceles, seu æqui-
Fig. 13. crure, quod duo tantùm latera habet
Fig. 13. æqualia.

27. Scalenum, quod tria latera inæqua-
Fig. 12. lia habet.

28. Rectanguium triangulum est, quod
Fig. 10. 11. unum angulum habet rectum.

29. Obtusangulum triangulum est, quod
Fig. 14. 15. unum angulum habet obtusum.

30. Acutangulum triangulum est, quod tres habet acutos angulos.

Fig. 15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum est, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales: *sive latera æqua-*
Fig. 16. *lia sint, sive non.*

32. Quadratum est, quod æquilate-
Fig. 17. rum, & rectangulum est, *ac proinde æquiangulum.*

Omne quadratum est rectangulum, sed
Fig. 14. 15. 16. 17. *non contra.*

33. Rhombus est, qui æquilaterus, sed non æquiangulus est.

34. Rhomboides, quæ adversa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula est.

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera (AB, FC, & BF, AC) sunt parallela. Quid vero sint parallelæ, dicetur seq. defin.

Omne

Omne rectangulum, & quadratum est parallelogrammum; ut suo loco demonstrabitur. Sed non contra.

36. Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes sunt, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus semper intervallis inter se distant. Fig. 18.

Æqualia intervalla desumuntur penes perpendiculares. Quare si omnes ad unam ex duabus, parallelam A B, perpendiculares Q L æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, si recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B semper perpendiculariter moveatur, tunc enim ejus extremum L. describit parallelam C F.

Euclides definit parallelas esse, quæ utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ simul infinitum productæ licet ad se mutuo appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non sint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujusmodi sunt hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem descriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per se notum esse, duas rectas licet nunquam concurrant, fore semper æquali intervallo dissitas, hoc est æquidistantes: posset enim quispiam objicere, fieri fortassis posse, ut etiam ipsæ, licet ad se mutuo semper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent. Quare Euclidæa definitio parallelismi naturam non satis explicat.

37. Parallelogrammi & cujusvis quadrilateri diameter est recta (A F) per angulos Fig. 17.

los oppositos ducta.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus, quam quatuor comprehensæ, multilateræ seu multangulæ, seu græca voce, polygonæ vocantur.

Fig. 19. 39. Rectilineæ figuræ externus angulus est, qui latere producto extra figuram oritur. *Tales sunt FBC, GCA. HAB. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos.*

Postulata.

POstulatum est, quod facilè fieri posse per se sit manifestum. Postuletur ergo, ut concedatur.

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam in directum & continuum protendere.

3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum describere.

Axiomata.

AXioma est sententia per se manifesta.

1. Quæ eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Et quod uno æqualium majus aut minus est, majus quoque aut minus est altero æqualium; & conversim.

2. Si

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt ineæqualia.

6. Quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia: & quæ ejusdem sunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter se æqualia sunt.

7. Quæ mutuo sibi congruunt, æqualia sunt.

Non rectè Clavius hoc Axioma convertit. Falsum est enim, ea quæ universim inter se æqualia sunt, sibi mutuo congruere: Dissimiles enim magnitudines possunt esse æquales, neque tamen congruent. Quòd si similes & æquales fuerint, valebit conversa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, sibi mutuo congruent: & anguli si æquales fuerint, sibi mutuo congruent.

9. Totum sua parte majus est.

10. Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

Euclidis axioma undecimum est: Si in duas rectas A B C F, incidens recta G I, angulos ad eandem partem interiores BLQ, FQL, fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ, Fig. 20.

ctæ si protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam spectant anguli duobus rectis minores.

Hoc vero non est clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipse demonstrat: videlicet, si anguli BLQ, FQL, fuerint duobus rectis æquales, rectæ AB, CF, nunquam concurrent.

Quare axioma illud è principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliisque Geometris rejecimus: est enim non axioma, sed theorema, idque demonstrabimus post Propositionem 31. hujus libri.

Ex defin. 36. *Ejus loco alia duo sequentia substituo, quorum veritas ex definitione parallelismi statim apparet. Esto igitur axioma.*

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur.

Hoc est, recta, quæ ad parallelarum unam perpendicularis, est quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (LO, QI) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (LI, OQ.)

13. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Ad hoc siquidem opus est ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune: & omnes rectæ punctualiter se intersecant.

Fig. 22. *Recta AX occurrat recta ZD, ea si producatur non perget per DA, sed in E, sic ut rectam XB non nisi punctualiter intersecet. Axioma ex notione*

notione ipsa rectæ lineæ evidentissimum est. Tamen quia nonnulli tam subtiliter philosophantur, ut credant rectas lineas, aliquâ sui parte commisceri posse, lubet in eorum gratiam hoc axioma ampliùs declarare,

Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A X, A Z partem communem A D. Centro A describatur circulus, secans rectas in B, & C, tum accipiatur arcus B F æqualis arcui B C, & intelligatur ducta esse recta F A.

Rectæ igitur C A & F A eundem prorsus situm habent respectu rectæ B A. Sed recta C A cum recta B A habere dicitur commune segmentum D A, ergo etiam recta F A habet cum B A commune segmentum D A.

Tres jam igitur rectæ C A, B A, F A commune D A segmentum habent.

Sumatur rursum arcus F G æqualis prioribus B F, & C B, & intelligatur ducta esse recta G A. Rursum liquet rectas B A, G A, eundem habere situm respectu rectæ F A. Sed jam ostensum est rectam B A habere cum recta F A commune segmentum D A. Ergo etiam recta G A, cum F A commune habet segmentum D A.

Jam ergo recta quatuor C A, B A, G A, F A commune D A segmentum habent, Eodem prorsus modo ostendam si per totam circuli circumferentiam sumantur arcus prioribus æquales, omnes simul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune segmentum D A. Hoc tam immane absurdum sequitur ex eo, quod ponerentur binæ rectæ C A, B A habere segmentum com-

commune. Impossibile est igitur ut duæ rectæ segmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in scholis argumenti, quo demonstratur magnitudinem ex punctis omnino indivisibilibus numero finitis componi non posse: & est ejusmodi. Constent si fieri potest magnitudines ex punctis. Circa idem centrum descriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima seu maxima componi ex centies mille punctis, a quibus singulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum est rectas illas nusquam commisceri, nisi in centro solo. Quare dum omnes medias peripherias pertranseunt, in iis æque multa designant puncta ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æquè multis punctis constant, ac proinde omnes inter se æquales erunt. Atque ita circumferentia, hac in charta descripta æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis propè innumeris demonstrationibus hîc error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quòd passim sit decantata, & ex præsenti axiomate immediate pendeat.

Propositionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur problemata; aliæ in sola contemplatione sistunt, quæ idcirco Theoremata inscribuntur.

PRO-

PROPOSITIONES.

Citationes requisitæ reperiuntur ad marginem. Cum citantur propositiones, primus numerus designat propositionem, littera (L) cum nnmero sequenti librum denotat: ut si occurrat (per 5. l. 3) ita lege (per propositionem quintam libri tertii.) Figura quærenda semper est inter figuras ejus libri, in quo tum versamur: citationes reliquæ facilé intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones, primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propositiones illustriores sunt 32. 35. 37. 41. 44. 45. 47.

PROPOSITIO PRIMA.

Super datâ rectâ (AB) triangulum æquilaterum constituere. *Fig. 23.*

Centro A, intervallo A B *a* describatur circulus F C B, & centro B, intervallo eodem B A describatur circulus A C L, priorem secans in puncto C, ex quo ducantur rectæ C A, C B. a *Per postul.* 3.

Dico triangulum A C B factum esse æquilaterum. Nam recta A C est *b* æqualis rectæ A B, cum sint ejusdem circuli F C B semidiametri; & recta B C etiam æqualis est eidem rectæ B A, cum ambæ sint semidiametri b *Per def.* 18.

c Per axio.1. diametri circuli L C A. Ergo A C, B C *c* sunt æquales inter se: ac proinde omnia latera trianguli sunt æqualia. Ergo triangu-
d Per def.26 lum *d* ACB & æquilaterum est, & super datâ rectâ AB constitutum, quod erat faciendum.

PROPOSITIO II.

Fig.24; *AD datum punctum (A) datæ rectæ (E F) æqualem ponere.*

Accipe circino *a* intervallum E F, &
a Postul. 3. transfer ex A in D, erit recta A D par datæ E F.

PROPOSITIO III.

Fig.24. *DAtis duabus rectis inæqualibus, de majore (G H) minori (E F) parem auferre (G I)*

b Postul. 3. Accipe circino *b* intervallum minoris datæ E F, & transfer in majorem ex G in I.

PROPOSITIO IV.

Fig.25. *SI duorum triangulorum (X Z) latus unum (B A) uni (F L) & alterum (C A) alteri (I L) sit æquale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti, etiam sint æquales; æquabuntur etiam & bases*

ses (B C,F I) & tota triangula (X, Z) & reliqui ad basim anguli (B F, & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur.

Nam si intelligamus triangulum Z triangulo X superponi, latera L F, L I perfectè congruent *a* sibi æqualibus lateribus A B, A C, sic ut puncta tria L, F, I, cadant super tria puncta A, B, C, ergo tum etiam basis F I tota cadet supra totam basim B C: Sed & anguli F, B, itemque I, C totaque triangula sibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia sunt. Quod erat demonstrandum. a *Per axio*8.

Scholium.

Simili ferè ratiocinio, theorema sequens, cujus mox erit usus, licebit demonstrare. Fig. 25.

Si duorum triangulorum X, Z, latera B C, F I æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipsis F, & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipsa, æqualia erunt.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F, & I, si latus F I imponas lateri sibi æquali B C, illi d *congruet. Tum verò ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C etiam* e *F L cadet supra B A, & I L supra C A. Ergo etiam punctum L, incidet in punctum A; (si enim caderet extra A, latera F L, I L, non inciderent in latera B A, C A.) Ergo omnia sunt per axioma 7. æqualia.* d *Per axio.* 8. e *Per axio.* 8.

PROPOSITIO V.

Fig. 26. *TRianguli Isoscelis seu æquicruris ad basim anguli (A, C) æquales sunt.*

Intelligatur triangulum A B C bis positum, sed situ converso *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a*, ex hypothesi æquale est latus A B, lateri *c b*, & latus C B lateri *a b*, & angulus B angulo
b. Per. 4. l. 1. *b*; etiam *b* ad basim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonstrandum, iidem enim sunt anguli C & *c*.

Corollarium.

ÆQuilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum est.

PROPOSITIO VI.

Fig. 26. *SI in triangulo (A B C) duo anguli (A & C) æquales fuerint, etiam latera (AB, CB) iis opposita, æqualia erunt.*

Intelligatur triangulum AB C bis positum, sed situ converso *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a* æquatur latus unum A C, uni lateri *c a*, & angulus A angulo, *c*, & angulus C angulo. *a*; et-
c Per Schol. prop. 4. iam reliqua omnia *c* erunt æqualia, ac proinde

inde latus A B æquabitur lateri *c b*; quod erat demonstrandum, eædem enim sunt lineæ C B & *c b*.

Corollarium.

ÆQuiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum est.

PROPOSITIO VII.

EST propter 8, quæ sine illa seorsim proposita demonstrabitur.

PROPOSITIO VIII.

SI duo triangula habuerint omnia latera sibi mutuo æqualia (A C ipsi E F; C B ipsi F I; A B ipsi E I;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos habebunt æquales (C ipsi F; A ipsi E: B ipsi I.) *Fig. 27.*

Ponatur enim latus AB supra sibi æquale E I. Tum verò punctum C vel incidet in punctum F vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli *a* æquales erunt. a *Per axio. 7.*

Si C, cadat extra F, ducatur F C. Quoniam per hypothesim latera E F, A C æquantur, erit *b* angulus E F C par angulo E C F. ergo I F C major erit, quam E C F ergo I F C multo major erit, quam I C F. Rursum, quia per hypothesim I F, B C, æ- *Fig. 28.* b *Per 5. l. 1.*

 quantur;

c Per. 5, l. 1. quantur, erit I F C c par I C F. Ergo I F C & multò major est quam I C F, & æqualis, quod est impossibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo &c.

Plures casus, quos hoc theorema admittit, consulto prætermisi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonstratio ex demonstratione jam posita elicietur.

Fig. 2. 9.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum (I A L) bifariam secare.

Ex lateribus anguli accipe circino æquales A B, A C; centris B ac C describe duos æquales circulos se secantes in F, ducaturque recta F A. Hæc angulum bisecabit.

Ducantur enim B F, C F; triangula F A B, F, A C sunt sibi mutuo æquilatera; nam latera A B. A C ex constitutione æqualia sunt, & latera B F, C F, quia æqualium circulorum semidiametri, etiam æquantur; & AF utrique triangulo commune est. Ergo anguli B A F, C A F *a* æquales sunt. Bisectus est ergo datus angulus I A L. quod erat faciendum.

a Per. 8. l. 1.

Corollarium.

Hinc patet quomodo angulus secari possit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. singulas nimirum partes iterum bisecando

Scho-

Scholium.

Methodum ſecandi angulos in æquales quotcunque, circino & regulâ hactenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quaſdam lineas, quadratricem videlicet & ſpiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur à Pappo l. 4. prop. 31. præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel choncboidis.

Mechanice datum angulum in quocumque ſecabis æquales angulos, ſi ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumq; dividas in quot placuerit æquas partes; rectæ enim ex A per diviſionum puncta emiſſæ, angulum ſecabunt in partes totidem æquales. *Fig. 30.*

PROPOSITIO XX.

Datam rectam finitam (A B) ſecare bifariam. *Fig. 31.*

Super data A B fac triangulum æquilaterum *a* A G B. Angulum ejus G *b* biſeca per rectam G C. Eadem biſecabit rectam A B datam.

a Per 1. l. 1.
b Per præced.

Nam in triangulis X, Z, latus C G eſt commune, & per conſtructionem G B, G A æqualia, anguliq; iis contenti A G C. B G C æquales. Ergo baſes A C, B C, *c* æ-

c Per 4. l. 1.

B 3 quantur

quantur. Bisecta est ergo data A B Quod erat faciendum.

Pro praxi satis erit centris A & B duos æquales circulos describere, se secantes in G & L, ac ducere rectam G L.

PROPOSITIO XI.

Fig. 32. *EX dato puncto (A) in data recta (L I) perpendicularem excitare.*

Circino cape æquales A C, A F. Centris C, & F describe duos æquales circulos se secantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim C B, F B. Triangula X, & Z, sibi mutuo æquilatera sunt. Ergo anguli C A B, F A B *a* æquales. Ergo B A *b* perpendicularis est. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

a Per 8. l. 1.
b Per defin. 14.

Praxis tam hujus quam sequentis expeditur facillime præsidio normæ,

PROPOSITIO XII.

Fig. 33. *EX dato extra rectam infinitam (L Q) puncto (A) perpendicularem ducere.*

Centro A describe circulum, qui secet datam L Q in C & I. Rectam C I biseca *c* rectâ A B. Ea erit perpendicularis.

c Per 10. l. 1.

Ducan-

Ducantur enim A C, A I. Quoniam per constructionem triangula X & Z sunt mutuo æquilatera; erunt anguli *d* C B A, I B A æquales. Ergo A B perpendicularis *e* est. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum, d *Per.* 8. *l.* 8. e *Per def.*14.

PROPOSITIO XIII.

REcta (B A) super rectam (C F) consistens aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales. *Fig.* 34.

Nam si B A insistat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli B A C, B A F, utrimque recti. Si vero B A insistat oblique, excitetur *a* perpendicularis A L. Quia tum anguli inæquales C A B, F A B eundem locum occupant, quem duo recti C A L, L A F, ac proinde iis congruunt, erunt *b* his illi æquales. Quod erat demonstrandum. a *Per.* 11. *l.* 1. b *Per axio.* 7.

Corollaria.

1. EOdem modo demonstrabitur si plures rectæ, quàm una, eidem rectæ insistant, angulos effici duobus rectis æquales.

2. Duæ rectæ invicem secantes B A C, F A L efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propos. *Fig.* 37.

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. sunt enim quatuor recti in plures partes secti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (X R, Z R) ad idem utrimque punctum rectæ Q R faciant angulos (X R Q, Z R Q) duobus rectis æquales; (X R, Z R) unam rectam efficient.*

b Per 13. l. 1.
c Contra axio. 9.

Si negas faciant X R B R unam rectam. Ergo anguli X R Q, Q R B *b* conficient duos rectos, quod *c* est absurdum, cum ex hyp. X R Q, Q R Z duos rectos efficiant.

PROPOSITIO XV.

Fig. 37 *SI duæ rectæ (B C, F L) se secuerint in (A.) erunt anguli ad verticem (A) oppositi, æquales.*

a Per 13. l. 1.
b Per eand.
c Per axio 1.

Nimirum L A B ipsi C A F, & B A F ipsi L A C. Nam quia B A insistit rectæ L F, erunt L A B, F A B, *a* pares duobus rectis. Et quia F A insistit rectæ B C, erunt *b* quoque F A C, F A B partes duobus rectis. Ergo *c* duo simul L A B, F A B æquantur duobus simul C A F, F A B. Abla-

to

to igitur communi F A B, remanent *d* æquales L A B, C A F. Eodem modo ostendam æquales esse B A F, L A C, d Per axio 3.

PROPOSITIO XVI. XVII.

Continentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

In omni triangulo angulus (A) major est, qui majori lateri (BO) opponitur: (B) minor, qui minori (AO.) Fig. 38.

Nequit A, esse par B, alias *a* latera B O, A O æquarentur contra hypothesim. Nequit etiam A minor esse quam B. Nam si A minor est, B major, poterit intra angulum B per rectam B F fieri angulus A B F æqualis A. Tum vero per 6: æquales erunt B F, A F, & si addas utrique, O F, erunt B F, F O æquales A O. Sed A O per hyp. minor est quàm B O. Ergo etiam B F, F O minores sunt quàm B O, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ est omnium brevissima. Angulus igitur A nec minor est angulo B, nec æqualis. Ergo major; quòd erat demonstrandum. a Per. 6. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Fig. 38. *IN triangulo latus (B O) majus est, quod opponitur majori (A) angulo: (A O) minus, quod minori (B.)*

Est conversa prioris. B O non est minus quam A O, alias per 18. angulus A esset minor angulo B contra hyp. Neq; etiam B O æquale est A O, alias per 5. anguli A, B, æquarentur, rursus contra hyp. Ergo B O majus est quam A O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

OMnis tranguli duo quælibet latera reliquo sunt majora.

Est Archimedi instar axiomatis; immediatè siquidem patet ex definitione Archimedeâ lineæ rectæ, quam vide supra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 39. *SI à terminis unius lateris (A B) intra triangulum duæ rectæ junguntur (A O, B O) hæ lateribus trianguli (A C, B C) minores sunt, majorem vero angulum (A O B) comprehendunt.*

1. Pars.

1. Pars. Produc A O in F. A C, C F sunt *a* majores, quam A F. Additâ ergo communi F B, erunt A C, C B majores quam A F, F B: Rurſum O F, B F ſunt *b* majores, quam O B. Additâ ergo communi A O, erunt A F, F B majores, quam A O, O B. Ergo A C, C B ſunt multò majores, quam A O, O B. a *Per 20. l. 1.* b *Per eand.*

2. Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Eâ interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40.

EX datis tribus rectis (B O, L B, L O) quarum duæ quælibet reliquâ ſint majores, triangulum conſtituere.

Aſſumatur datarum una B L, atque una ejus extremitate B acceptâ pro centro, intervallo alterius datæ B O deſcribatur arcus. Deinde acceptâ pro centro extremitate altera L, intervallo tertiæ L O deſcribatur arcus priorem ſecans in O: ducanturque rectæ B O, L O. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 40.

AD datum in rectâ punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A.)

Ducatur utcunque C F ſecans latera da-

ti

ti anguli A. In data recta ex B accipe B L parem A F. Centro B intervallo A C describe circulum: item alium centro L intervallo F C qui priorem secet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus L B O par dato A.

Nam per constr. triangula sibi mutuo sunt æquilatera, Ergo per 8. anguli B & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum visum est hic non nulla ad praxim angulorum necessaria proponere.

Fig. 41 *Anguli mensura est circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro describitur, ut patebit ex prop. vltima l. 6.*

Itaque quot gradus continebit arcus B C inter anguli B A C crura intereeptus, tot graduum dicetur esse angulus B A C. Et quoniam rectum angulum B A F metitur quadrans peripheriæ B F, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus esse graduum 90. Similiter quia duos rectos mensurat dimidia circumferentia in 180. gradus secta, & quatuor rectos circumferentia tota secta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis praxes angulorum sunt.

Fig. 42. *1. Ad datum in recta punctum B. angulum statuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum describe C F.*

Centro

Centro B puncto dato, describe eodem intervallo arcum L Z: ex quo aufer L O parem C F. Per B & O duc rectam: erit L B O par dato A.

2. *Dati anguli O P Q gradus examinare. Fit hoc facillime per semicirculum corneum transparentem, in 180. gradus divisum: Centrum semicirculi pone supra P verticem anguli, & semicirculi radium P L supra anguli latus P Q. Arcus L O inter anguli crura interceptus ostendet, quot graduum sit datus angulus.* Fig. 43.

3. *Angulum construere datos continentem gradus 42. Duc rectam X Q, in qua signa punctum P. Super P pone semicirculi centrum ejusq; semi diametrum P L supra P Q. Ab L numera gradus 42. usque in O. per O ex P ducta recta dabit angulum O P L graduum 42.*

Horum omnium demonstratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

SI duo triangula (B A C, B A F) duo latera (B A, A C) duobus (B A, A F,) alterum alteri, æqualia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (B A F) majorem habeat altero (B A C;) habebit quoque basim B F majorem basi (B C.) Fig. 44.

Et si basim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

Centro

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo B F cadit ſupra C. Iunge CF. Angulus B CF eſt major angulo ACF; hoc eſt per 5. angulo A F C, hoc eſt multò major angulo B F C. Ergo *a* B F oppoſita majori angulo B C F major eſt, quam B C. oppoſita minori B F C.

a Per 19. l. 1.

2. Pars patet ex prima parte & ex prop. 4.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25.

SI duo triangula (X Z) duos angulos duobus æquales habuerint alterum alteri (B ipſi F & C ipſi I,) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit (ut B C, F I) vel quod uni æqualium angulorum opponitur (ut A C, L I:) reliqua omnia erunt æqualia.

Ponantur primò æqualia eſſe latera B C F I, inter æquales angulos poſita: tum verò reliqua etiam omnia æqualia eſſe demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera A C, LI æqualibus angulis B & F oppoſita, eſſe æqualia. Quia anguli B C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per corol. 8. p. 32. quæ ab hac non dependet.

Ergo

Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXVII.

SI duas rectas (AB, CF) parallelas ſecuerit recta GO: erunt 1. æquales alterni anguli (RLO, QOL, item BLO, COL) 2. externus (GLB) æqualis interno ad eandem partem (LOF) (item GLR ipſi LOC.) 3. Duo ad eandem partem interni ſimul (ALO, COL) æquales duobus rectis: item duo BLO, FOL duobus rectis æquales. Fig. 45.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR, LQ: erunt *a* hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque *b* ex parallelis auferent partes RL, QO. Ergo triangula, X, Z, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo *c* anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppoſiti, sunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos BLO, COL æquales eſſe. Nam quia tam BLO, ALO, quàm COL, FOL æquantur *d* duobus rectis; erunt BLO, ALO æquales ipſis COL, FOL. Ablatis ergo æqualibus RLO,

Fig. 46.
a Per axio. 11.
b Per axio. 12.
c Per 8. l. 1.
d Per 13. l. 1.

RLO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

2. Pars. GLB æquatur ad verticem e opposito RLO. Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF: quod erat alterum.

e Per 15. l. 1.

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL. Atqui FOL cum COL f facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos. Quod erat tertium.

f Per 13. l. 1.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 47.

SI duas rectas (AB, CF) secans recta (GO) alternos angulos (ALO, FOL) æquales fecerit, erunt (AB, CF) parallelæ.

Si negas, sit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parallela.

Ergo a angulus XLO par est alterno FOL; Quod fieri non potest, cum per hyp. ALO par sit eidem FOL.

a Per præc.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 45.
Fig. 46.

SI duas rectas (AB, CF) secans recta (GO) fecerit externum (GLB) æqualem opposito interno (LOF) vel duos ad easdem partes internos ALO, COL. pares

pares duobus rectis, erunt (AB, CF) parallelæ.

Per 15. GLB æquatur ALO opposito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur sibi alterno LOF. Ergo *b* AB, CF sunt parallelæ. *b Per præced.*

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales sunt. Ergo rursum AB, CF *c* sunt parallelæ. *c Per præc.*

Corollarium.

EX secunda parte patet omne rectangulum esse parallelogrammum.

PROPOSITIO XXX.

SI duæ rectæ (AB, CF) sint parallelæ ad eandem rectam (DN) erunt inter se parellelæ. *Fig. 45.*

Patet per se, & ex præcedentibus. Nam si omnes secentur à recta GO, erit *a* angulus externus GLB par interno LDN. est vero LDN externus *b* respectu DOF, ac proinde æqualis. Ergo etiam GLB par est LOF. Ergo AB, CF sunt *c* parallelæ. *a Per 27. l. 1.* *b Per 27. l. 1.* *c Per præc.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 48. *PEr datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (C F.)*

a Per 23. l. 1. Ex A ducatur utcunque A L, secans datam F C. Ad punctum A fiat *a* angulus L A S par angulo A L F. Erit A S parallela ad C F, ut patet ex 28. cum alterni anguli S A L, F L A sint æquales.

Praxis: ducta A L, centro L describe arcum I Q, & centro A eodem intervallo arcum O X; ex quo aufer O B parem I Q. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonstratio pendet ex 29. l. 3.

Fig. 49. *Aliter. Centro quopiam P describe circulum qui transeat per datum punctum A, & secet datam C F in Q & O. Arcui Q A accipe æqualem O N, recta A N erit parallela.*

Demonstratio pendet ex 29. libri 3. & ex 28. hujus.

Scholium.

DEmonstrata jam igitur est parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides, ejusque interpretes assumunt minus rectè; cum non sit axioma, sed theorema, cujus veritas non magis per se appareat, quam ipsius 29. propositionis. Quia tamen deinceps sæpius adhibebitur, id hoc loco jam facilè ex præmissis demonstrabimus.

Theo-

Theorema.

SI recta M A incidens in rectas B C, A D, faciat angulos internos ad easdem partes B A D, A B C, duobus rectis minores, rectæ B C, A D concurrent versus eam partem, quam spectant anguli duobus rectis minores. Fig. 50.

Quoniam per hyp. C B A, D A B duobus rectis sunt minores; fiant C B A, X A B duobus rectis æquales: Eruntque B C; A X a parallelæ. Assumo tanquam axioma per se notum, inter rectas A D, A X in infinitum productas duci posse aliquam ad A M parallelam, puta Z X, quæ major sit quam A B. Accipiatur ipsi Z X æqualis A R; & junge Z R. Quoniam A R, Z X sunt parallelæ, erunt b alterni X Z A, R A Z æquales. Sunt autem & latera X Z, Z A æqualia lateribus R A, A Z, per constr. Ergo etiam c anguli R Z A, X A Z æquales sunt. Ergo R Z, est d parallela ad A X. Sed etiam B C est parallela ad A X. Ergo R Z & B C sunt e paralellæ. Est igitur B C & parallela ad R Z, & inclusa triangulo A R Z. Ergo cum produci in infinitum possit, necessariò occurret aliquando rectæ A Z, nam neque evadere potest per sibi parallelam R Z, neque pertingere in A, aliàs duæ rectæ haberent commune segmentum. Liquet ergo propositum.

a Per 29. l. 1.
b Per 27. l. 1.
c Per 4. l. 1.
d Per 28. l. 1.
e Per 30. l. 1.

Demonstratio Clavis est à parallelis independens, sed prolixissima & multùm operosa: Procli nititur hoc principio, quod recta unam parallelam secans, etiam alteram sectura sit, si producatur. Verum hoc per se notum non est, ob orationem datam ad def. 36.

Corollarium.

Fig. 50. *Hinc patet rectas non parallelas concurrere; de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AZ. Duc AX parallelam ad BC, erunt XAB, CBA*

o Per 27. l. 1. *duobus rectis* o *æquales. Ergo ZAB, CBA sunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonstratum BC, AZ concurrunt.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 51. *OMnis trianguli externus quivis angulus (FBC) duobus internis oppositis (A & C) æqualis est.*

a Per 31. l. 1. Per B duc *a* BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC secat FA, erit ex-

b Per 27. l. 1. ternus angulus FBL interno A *b* æqualis. Et quia easdem parallelas BL, AC secat etiam recta BC, erit LBC sibi alterno C

c Per eand. *c* æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique simul A & C. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

Fig. 51. 1. EXternus angulus (FBC) quolibet internorum oppositorum, A, vel, C, major est.

2. An-

2. Angulorum (C & AOB) eandem basim (AB) habentium, major est (AOB,) qui intra cadit. Fig. 39.

Producatur enim AO, in F. AOB per hanc major est quam OFB; & OFB per hanc eandem major est quàm C. Ergo AOB multò major est quam C.

3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC,) incidant duæ rectæ altera (AO) obliquè, perpendiculariter verò altera (AF;) hæc cadet versus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, si fieri potest, versus obtusum AOC, puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus, respectu recti AQB, ac proinde illo major per coroll. 1, quod est absurdum. Fig. 55.

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

Omnis trianguli tres simul anguli, duobus rectis sunt æquales.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppositis A & C æqualis *a* est. Atqui *b* FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonstrandum. Fig. 52.

a *Per 1 partem hujus*
b *Per 13, l. 1.*

Aliter. Ducatur HM parallela lateri Fig. 53.

C 3 AC.

A C. Anguli alterni tam O, A, quam N, C æquales *c* ſunt. Sed O, Q, N. conficiunt *d.* duos rectos. Ergo etiam A, C. Q duos rectos conficiunt: quod erat demonſtrandum.

c Per 27. l. 1.
d Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4. TRes ſimul anguli cujuſvis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cujuſcunque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus eſt, reliqui ſunt acuti.

6. Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt.

8. Cum ſcitur quot graduum ſit unus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cum ſcitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul, in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit.

10. Cum duo triangula unum angulum æqualem babent, etiam reliquorum ſummæ æquantur.

11. Cum in Iſoſcele angulus æquis cruribus contentus eſt rectus, reliqui ad baſim

ſunt

sunt semirecti. Et Isoscelis ad basim anguli semper sunt acuti.

12, Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem duorum rectorum. Ergo duas tertias unius.

13. Hinc anguli recti (B A C) facillima trisectio; si super A C fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum F A C sint duæ tertiæ unius recti, erit B A F recti una tertia. *Fig. 54.*

14. Perpendicularis A F est brevissima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci possunt. Quoniam enim angulus F rectus est, erit per coroll. 5. A O F acutus. Ergo *f* A F minor quam A O quælibet. *Fig. 55.*

f Per 19. l. 1.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantum una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Scholium.

Hujus pulcherrimi, fæcundissimique theorematis, cujus per Mathesim universam usus prope immensus, inventor est Pythagoras teste Eudemo veteri geometrâ. Frequentissimè eiusdem meminit Aristoteles, qui illud etiam exemplum statuit perfectissimæ demonstrationis: Sed quemadmodum ex hac propositione jam didicimus, quot rectis angulis, ejus anguli æquivaleant, ita ejusdem beneficio cujuslibet figuræ rectilineæ sive interni, sive ex-

terni anguli, quot rectos conficiant, præclarè innotescet tribus sequentibus theorematibus.

Theorema 1.

Fig. 56.

OMnis quadranguli quatuor simul anguli efficiunt quatuor rectos.

Nam si per oppositos angulos ducas rectam B F, *hæc quadrangulum in duo triangula secabit, quorum anguli simul conficiunt* a *rectos quatuor.*

a Per 32. l. 1.

Theorema 2.

OMnes simul anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demtis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Fig. 57.

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ secabunt figuram in tot triangula, quot habet latera. Quare cum singula triangula a *conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa punctum A,* b *conficiunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figuræ.*

a Per 32. l. 1

b Coroll. 3, p. 13. l. 1.

Hinc patet omnes ejusdem speciei rectilineas figuras æquales habere angulorum summas; Quod admiratione dignum est.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: à producto aufer 4. restabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theore-

Theorema 3.

OMnes ſimul externi anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos. Fig. 58.

Nam ſinguli figuræ interni anguli, cum ſingulis externis conficiunt duos c rectos. Ergo interni ſimul omnes, cum omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (ut in præced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ, Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur. c Per 13. l. 1.

Mira ſanè hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt: ex qua illud etiam conſequitur, omnes cujuſcunque ſpeciei rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ; Quæ prorſus admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

SI *duas rectas æquales & parallelas (A B, C F) jungant duæ aliæ (A C, B F) erunt etiam illæ æquales parallelæ.* Fig. 59.

Parallelas A B, C F ſecet A F. Erunt in triangulis Q R alterni anguli B A F, CFA a æquales. Ponitur autem latus A B æquale a Per 27. l. 1.

le lateri C F, & A F utrique triangulo est
b Per 4. l. 1. commune. Ergo *b* bases B F, A C æquantur (quod erat primum.) Et anguli ad basim A F B, F A C sunt æquales: ac proinde A F incidens in rectas A C, B F facit al-
c Per 28. l. 1. ternos A F B, F A C æquales. Ergo *c* A C, B F sunt etiam parallelæ. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 59. *Parallelogrammi opposita latera & anguli æquantur, ipsumque à diametro bisecatur.*

a Per defin. 35. Quoniam A B, C F sunt *a* parallelæ, in easque incidit A F, erunt alterni B A F,
b Per 27. l. 1. C F A *b* æquales. Item quia A C, B F sunt
c Per def. 35. *c* parallelæ, in easque incidit A F, erunt *d*
d Per 27, l. 1. alterni C A F, B F A æquales. Ergo totus B A C toti B F C æqualis est. Eodem modo ostendam B & C æquales esse. Quod erat primum.

Quia verò jam ostendi triangula Q R, quæ unum latus A F commune habent, etjam angulos lateri A F adjacentes habere æquales, nimirum B A F ipsi C F A, &
e Per 26, l. 1. C A F ipsi B F A. Erunt *e* etiam latera A B ipsi F C, & B F ipsi C A, æqualia, itemque ipsa triangula.

Scho-

Scholium.

PArtim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittendâ, facilè elicitur dimensio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum A F, A C. Sit exem. gr. A F pedum 8, AC, 4. Duc 8. in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro area rectanguli. Fig. 60.

Quadrata vero area habetur ex uno latere (F I) per se ipsum multiplicato: ut si latus (F I) sit 5. pedum; duc 5. in se, proveniunt. 25, pedes quadrati pro areà quadrati. Fig. 61.

Demonstratio ex hac prop. patet ductis per laterum divisiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

PArallelogramma super basi eadem (A B) vel æquali, & inter easdem parallelas (C Q, A X) constituta, sunt æqualia. Fig. 62.

Quia A L, B Q *a* sunt parallelæ, easque secat C Q; erit *b* externus C L A par interno F Q B. Deinde quia tam C F quam L Q *c* æquantur eidem A B, erunt C F, L Q, æquales. Adde utrisque F L; erunt totæ CL, F Q æquales. Insuper & A L, B Q *d* æquales

a Per def. 35.
b Per 27. l. 1.
c Per 34. l. 1.

d Per eand. e Per 4. l. 1.

d æquales ſunt. Triangula igitur C L A, F Q B æqualia *e* ſunt. Ergo ablato communi F O L, plana F O A C, Q B O L remanent æqualia. Quibus utriſque adde planum A O B, fiunt parallelogramma tota A C F B, A L Q B æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Obſervent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine productas in infinitam longitudinem extendantur ex eadem baſi A B, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis jam datæ.

Scholium.

Fig. 62.

Ex hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcunque. Illius igitur area producitur ex altitudine Q X ſeu C A ducta in baſim A B.

Nam area rectanguli C B parallelogrammo B L æqualis fit f ex A C ducta in A B. Ergo &c.

f Per ſchol. præced.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 63.

Triangula (A C B, A F B) ſuper baſi eadem (A B) vel æquali inter eaſdem parallelas (C I, A Z) conſtituta, ſunt æqualia.

Lateribus A C, A F duc parallelas B L, B I, BI. Parallelogramma, ACLB, AFIB sunt *a* æqualia. Sed horum triangula data *b* sunt dimidia. Ergo triangula data *c* sunt æqualia.

a Per præc. b *Per 34. l. 1.* c *Per axio. 6.*

Hæc propositio fiet universalis p. 1. l. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare jussimus prop. præced. de parallelogrammis.

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Fig. 64.

T*Riangula æqualia (ACB, AFB) super eadem basi (AB) vel æquali, ad easdem partes constituta, sunt inter easdem parallelas (AB, CF.)*

Si negas, sit CL parallela ad AB, & ducatur BL. Igitur ALB æquatur *a* ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipsi ACB æquale est. Ergo ALB, & AFB æqualia sunt, pars & totum. Quod fieri non potest. Igitur &c.

a *Per præc.*

PROPOSITIO XLI.

Fig. 65.

S*I triangulum (AFB) sit in iisdem parallelis cum parallelogrammo, (AL) & basim eandem habeat (AB) vel æqualem, ipsius dimidium erit.*

Duc CB. Triangula AFB, & ACB *d* æquan-

d *Per 37. & 38. l. 1.*

c Per 34. l.1. quantur. Sed *d* ACB est dimidium parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB est dimidium AL. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Fig. 65. *Ex hac, & ex scholio prop. 35. discimus, aream trianguli (AFB) cujuscunque produci ex dimidia altitudine FI ducta in basim (AB) vel ex dimidia basi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, sive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo opposito ducitur, habetur trianguli dimensio: ut si basis AB sit pedum 100. altitudo FI, 85. multiplica basis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro area trianguli AFB. Porro altitudo sive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari potest, mechanicè innotescit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenietur geometricè altitudo per 12. & 13. l. 2. ut in scholio ibidem docebimus.*

In triangulo rectangulo altitudo est eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo semissis ducta in latus alterum recto adjacens dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 66. *Dato triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere habens angulum parem dato (O.)*

Ba-

Basim A B biseca in F. per C duc C X parallelam A B *a*. Fac *b* angulum B A L parem dato O. Duc F I parallelam A L. *c* Erit A L I F, quod quæritur.

a Per 31. l. 1.
b 23. l. 1.
c Per 31. l. 1.

Ducatur enim F C. Parallelogrammum A I, angulum habet L A F parem dato, O; & est æquale triangulo dato A C B, cum tam *d* triangulum A C B, quàm *e* parallelogrammum A I, dupla sint ejusdem trianguli A C F.

d Per 38. l. 1.
e Per prae.

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, si per C ducatur parallela lateri A B, & bisectâ A B in F, ex B erigatur perpendicularis B Q. Erit enim rectangulum sub F B, & Q B par triangulo ACB.

Fig. 66.

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (*B L*,) *complementa* (*B O, O L*) *eorum, quæ circa diametrum existunt* (*R F & C S*) *sunt æqualia.*

Fig. 67.

Si per diametri A Q, punctum quodvis O ducatur C F parallela lateri A B, & R S parallela lateri B Q; secatur totum B L in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum sunt, R F, C S, duo reliqua B O, O L, sunt horum complementa.

Ea

Ea esse æqualia sic ostenditur. Triangula
a Per 34.l.1. A B Q, A L Q *a* æquantur, similiter A R O,
b Per eand. O C Q *b* æquantur A F O, O S Q. Ergo si ab æqualibus A B Q, A L Q, auferas æqualia, hinc A R O, O C Q, inde A F O, O S Q, æqualia remanent B O, & O L, Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 68.

AD datam rectam (O S) parallelogrammum constituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)

f Per 42.l.1. Fac *f* parallelogrammum R C dato V æquale, habens angulum R O C parem dato X, & pone latus R O in directum datæ O S.
g Per 31.l.1. Per S duc S Q *g* parallelam O C, cui occurrat B C producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat B R protractæ in A. Per A duc A L parallelam ad O S, cui occurrant C O, & Q S productæ in F & L. parallelogrammum O L est quod petitur.
i Per præc. Nam O L, æquatur R C; hoc est per
k Per 15.l.1. constructionem, dato triangulo V: & est ad datam O S, habetque angulum *k* F O S parem angulo R O C, hoc est per const. parem dato X.

PRO-

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo (C B A) æquale parallelogrammum construere ad datam rectam (I Q) & in dato angulo (H.) Fig. 69.

Rectilineam resolve in triangula A, B, C ducendo rectas F.L, F.I.

Ad datam I Q in angulo dato, H, fac *a* parallelogrammum I V æquale triangulo, A. Tum producatur IR infinitè versus P: & ad rectam R V, in angulo V R P fac *b* parallelogrammum R Z æquale trigono B. Rursum ad rectam S Z in angulo Z S P fac parallelogrammum S G æquale trigono C. I G est parallelogrammum quæsitum.

a *Per 44. l. 1*

b *Per eand.*

Nam *c* angulus Z V R par est sibi alterno I R V. Sed *d* Q V R & I R V sunt æquales duobus rectis. Ergo etiam Q V R & ZVR duobus rectis æquantur. Ergo *f* Q V & Z V sunt in directum. Pari modo ostendam Q Z & G Z esse in directum. Ergo tota Q V Z G est vna recta, & quidem parallela ad I X, cum per const. Q V sit ad I P parallela. Est vero etiam *g* X G parallela ad I Q cum X G sit parallela ad S Z, & S Z ipsi R V, & R V ipsi I Q.

c *Per 27. l. 1*

d *Per eand.*

f *Per 14. l. 1.*

g *Per 30. l. 1.*

Ergo *h* I G est paralle logrammum: esse autem quale petitur patet ex constructione

h *Per defin. 35.*

Scholium.

ADjungo problema utile futurum ad praxim propositionis 14. l. 2.

Fig. 70. *Dato quadrangulo B F rectangulum æquale describere.*

Resolve in triangula per rectam AC. Ex oppositis angulis dimitte perpendiculares B O, F I. biseca AC in S. Ex S erige perpendicularem S L parem duabus B O, F I. Rectangulum sub L S, & S A æquatur dato B F. Demonstratio patet ex 41.

PROPOSITIO XLVI.

A Datâ rectâ (A B) quadratum describere.

Fig. 71. Erige duas perpendiculares æquales datæ A B nempe A C, B E, & junge C E. Dico factum.

a Per constr. Cum enim anguli A & B duo sint *a* re-
b Per 29. l. 1. cti, erunt *b* A C, B E: parallelæ sunt verò
c Per. constr. etiam *c* æquales. Ergo C E *d* A B sunt pa-
d Per 33. l. 1. rallelæ & æquales, Ergo figura est parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes sunt recti (cum enim A, & B sint
e Per 34. l. 1. *e* recti, etiam recti erunt *f* oppositi, E, & C.) Ergo figura A E, est quadratum.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (A B C) rectangulo, quadratum lateris (A C) quòd recto angulo opponitur, æquale est duobus simul reliquorum laterum (A B, C B) quadratis. *Fig. 72.*

Ducantur I C, B F, & B E parallela A F. Si angulis I A B, F A C rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis B A C, erunt toti I A C, F A B æquales. Sunt verò in trianguli I A C, F A B etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter se *a* æqualia, nempe, I A, C A, ipsis B A, F A, alterum alteri. Ergo triangula I A C, FAB, *b* æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis A B L I & Z A F E consistunt in ijsdem basibus I A, F A, & in ijsdem parallelis I A, L B C, & A F, E Z B sunt *c* eorum dimidia. Ergo parallelogramma A B L I, Z A F E, vtpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se. Eodem discursu ductis rectis A X, B R ostendam parallelogramma, E C, B X æqualia esse. Totum igitur A R vtrisque I B, & B X æquale erit. Quod erat demonstrandum.

a *Per. defin. quadrati.*
b *Per 4. l. 1.*
c *Per. 41 l. 1.*

Assumtum fuit L B C esse parallelam I A, adeoq; L B, B C esse vnam rectam. Id verò patet ex 14. cum anguli L B A, & C B A ambo recti sint per hypothesim.

Scholium.

Hoc theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras similes extendit) Pythagoricum appellatur passim, ab inventore Pythagora; qui, ut testantur Proclus, Vitruvius, aliique, Musis victimas immolavit; quod se in tam præclaro invento ab iis adiutum putaret. Ignorabat videlicet scientiarum Dominum, verum & unicum omnis sapientiæ auctorem Deum; aut certè si cognovit, non sicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam usus est; ac viam inprimis ad incommensurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ philosophiæ cognoscendas aperit.

Fig. 71. *Quadrati latus esse diametro incommensurabile, celebratissimum est apud veteres Philosophos, Aristotelem præsertim & Platonem, adeo ut qui hoc nesciret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret. Notitia porro hujus mysterii duxisse videtur originē ex hac prop. 47. Nam cum in quadrato angulus A rectus sit, erit quadratum diametri C B æquale quadratis laterum A B, A C ac proinde duplum unius. Quare cum quadratum diametri C B sit 2. & quadratum lateris A B, sit unitas, erit diameter C B radix quadrata, 2. & latus A B radix quadrata unitatis, sive ipsa unitas, quarum proportio (ut suo loco demonstrabitur) numeris ex-*

-plicari

plicari nequit, ac proinde incommensurabiles sunt.

Atque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deficerent, evidentissime conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non posse; alias enim nullæ essent incommensurabiles, omnium quippe mensura communis esset punctum.

His subiungo tria problemata ex eadem propositione deducta, quorum usus frequentior.

Problema I.

Datis quotcunque quadratis, unum omnibus æquale construere. Fig. 73.

Dentur quadrata tria, quorum latera sint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaq; transfer BA, & BC & junge AC. erit ex AC quadratum æquale a quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X: & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & junge EX: erit quadratum ex EX æquale b quadratis ex EB (seu EC) & ex BX: hoc est æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE.

a Per 47. l. 1

b Per eand.

Problema 2.

Datis duabus rectis inæqualibus AB, BC, exhibere quadratum, quo quadratum majoris AB, excedit quadratum minoris BC. Fig. 74.

Centro B intervallo BA describe circulum. Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peri-

pheriæ in E. Quadratum ex C E est excessus quæsitus.

c Per. 47. l. 1. *Ducatur enim B E. quadratum B E, hoc est A B, æquatur c quadrato B C, & quadrato C E. Ergo &c.*

Problema. 3.

Notis duobus quibuscunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Fig. 75. *Latera rectum angulum ambientia sint A C A B, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum sit C B recto oppositum. Duc 6. & 8. in se ipsa: orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum summa est 100. Radix quadrata 100. nempe 10. dat pedes lateris B C quæsiti. Demonst. patet ex 47. Num summa quadratorum B A & AC æquatur quadrato B C. Ergo horum summæ radix eadem est cum radice seu latere B C.*

Nota sint deinde latera A B, B C. hoc 10. pedem, illud 6. Oporteat invenire A C. Lateris A B quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris B C; Residuum 64. erit quadratum lateris A C. Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris A C.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 76. *Si quadratum ab uno trianguli latere (A B) descriptum, sit æquale duobus reliquorum laterum (A C, B C) quadratis; angulus (A C B) quem reliqua latera continent, rectus erit.*

Si negas, erit angulus A C B recto major aut minor. Ergo (ut demonstrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum A B non erit æquale quadratis A C, B C, contra hypothesim.

Vel sic. Duc F C perpendicularem ad A C, & æqualem C B, & junge A F. Quadratum A F æquale est *a* quadratis F C, C A; hoc est *b* quadratis B C, C A; hoc est per hyp. quadrato A B. Ergo rectæ AF, A B æquales sunt. Quoniam igitur trigona X, Z, sunt sibi mutuo æquilatera, anguli ad C *c* sunt æquales. Ergo *d* recti. Quod erat demonstrandum.

a *Per 47. l. 1.*
b *Per construct.*
c *Per 8. l. 1.*
d *Per def. 14.*

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

Hic liber mole parvus; at præstantiâ ac utilitate theorematum planè magnus. Tyrones; scio quod dico, nondum capient, sed esse verissimum ulterius provecti, usu ipso certissimè intelligent.

DEFINITIO.

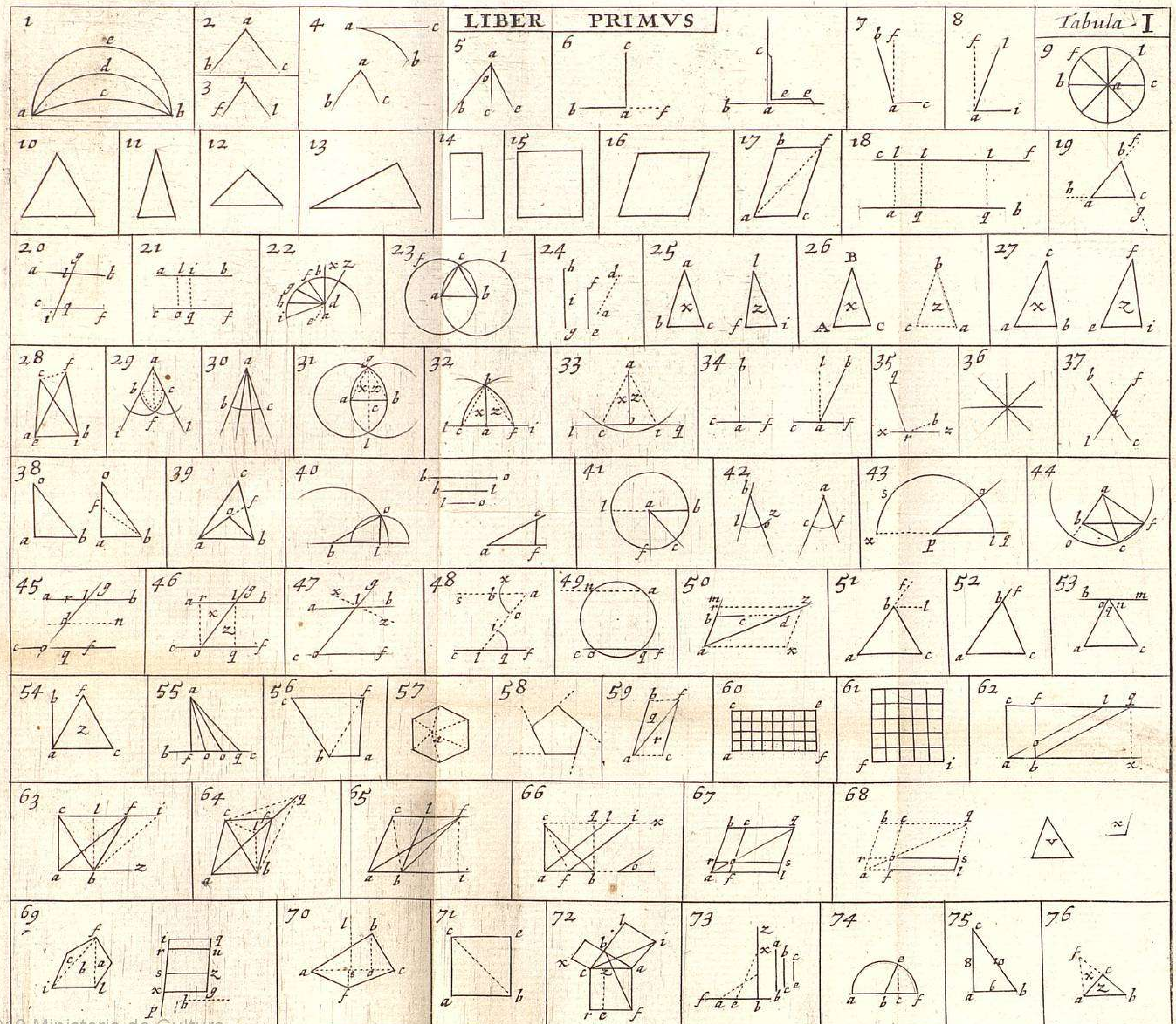
Fig. 60. l. 1. PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum simpliciter sine ullo addito appellari solet) contineri dicitur sub duabus lineis rectis (A C, A F) rectum angulum comprehendentibus.

Nam earum altera A C altitudinem rectanguli, altera A F latitudinem determinat. Deinde si intelligatur latus A C ferri perpendiculariter per totam A F, aut A F per totam A C. producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, seu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig. 2. lib. 2. *Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum sub (vel ex) A C, C B, vel brevitatis causa, rectangulum A C B, designatur rectangulum quod continetur*

LIBER PRIMVS

Tabula I



tinetur sub A C, *&* C B *ad rectum angulum constitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum sub* A B, C B, *vel rectangulum* A B C, *designatur rectangulum contentum sub rectis* A B, *&* B C *rectum angulum comprehendentibus.* Fig. ead.

Rectangulum porro aliud est oblongum, aliud quadratum. Oblongum est quod latera contigua habet inæqualia, sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum est, quod sub duabus æqualibus continetur.

NOTA.

Signum æqualitatis in hoc libro est. Æ.

PROPOSITIO PRIMA.

SI *fuerint duæ* (A B, A C) *quarum altera secta sit in quotcunque partes* (A E, E F, F C:) *erit rectangulum sub illis duabus* (A B, A C) *comprehensum, æquale rectangulis, quæ sub insecta* (A B) *& singulis sectæ partibus* (A E, E F, F C) *continentur.* Fig. 1. lib. 2

Statue A B perpendicularem ad A C, per B duc infinitā B R perpendicularē ad A B. Ex E, F, C erige perpendiculares E I, F L, C Q. Erit B C rectangulum sub AB: & AC, & est æquale rectangulis B E, I F, L C, hoc est (quia tam I E, quàm L F sunt a æquales a Per 29. & 34. l. 1.

les AB) rectangulis sub AB, AE, sub AB, EF, sub AB, FC.

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera sunt in numeris, si ut lineæ dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per seipsum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

SI recta (AB) secta sit utcunque (in C) duo rectangula, sub tota (AB) & partibus (AC, CB) comprehensa, quadrato totius æqualia sunt.

Accipiatur F æqualis AB.

b Per 1. l. 2. Rect. FAB. Æ. b rect. FAC }
rect. FCB }

hoc est, quia F & AB sunt æquales inter se

Quad. ex AB. Æ. rect. BAC }
rect. ABC }

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

SIt recta (AB) utcunq; secta (in C) erit rectangulum sub tota (AB) & partium alterutrâ (BC) comprehensum, æquale rectangulo sub partibus AC, (*AC,CB una cum quadrato prædictæ partis* (*BC.*)

Assume F æqualem CB.

Rect. ABF. Æ d rect. ACF } rect. CBF — d Per 1, l. 2.

hoc est, quia æquales sunt CB & F.

Rect. ABC. Æ. rect. ACB. } quad. CB.

PROPOSITIO IV.

Sit recta (FL) utcunque secta (in O:) erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL) & bis rectangulo sub partibus (FO, OL) contento. Fig. 4.

Quad. FL. Æ. e rect. FLO cum rect. LFO — e Per 2. l. 2.

Atqui rect. FLO. Æ. f rect. FOL } quad. OL — f Per 3. l. 2.

& rect. LFO. Æ rect. LOF } quad. FO

Ergo quad. FL. Æ g rect. FOL } quad. OL } rect. FOL } quad. FO — g Per eand.

Id est quad. FL. Æ. rect. FOL bis } quad. OL } quad. FO.

PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 5. *SI recta (QX) secta fuerit æqualiter (in R) & inæqualiter (in S;) erit rectangulum sub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, unâ cum quadrato partis intermediæ (R S) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

Rect. QSX *b* Æ. { rect. QR, SX
rect. RSX }

b Per 1. l. 2. Atqui ob æqualitatem rectarum QR, RX
Rect. QR, SX Æ. rect. RXS,
id est
c Per 3. l. 2. Æ. *c* { rect. RSX
quad. SX }

Ergo rect. QSX. Æ. { rect. RSX
quad, SX
rect. RSX }

Addatur utrisque quad. RS. habebitur

{ rect. QSX - rect. RSX
e Per. 4. l. 2. quad. RS Æ. quad. SX
rect. RSX
quad. RS } id est equad. RX seu QR

PROPOSITIO VI.

Fig. 6. *SI recta (AB) sit bifariam secta (in C,) eiq; recta quædam adiiciatur (BF:)*

erit

erit rectangulum sub tota composita (AF) & adiecta (BF) contentum, unà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compositæ ex dimidia & adiecta.

Adde indirectum LA, æqualem adjectæ BF. Cum æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF secta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

Ergo { rect. LBF. Æ. d quad. CF / cum quad. CB. } d Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF rect. LBF. Æ. rect. AFB.

{ Ergo rect. AFB. Æ. quad. CF / quad. CB. }

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit utcunque secta (in C) erunt quadrata totius (AB) & segmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento sub tota (AB) & segmento dicto (AC) unà cum quadrato segmenti alterius (CB.) Fig. 7.

Quad. AB, a Æ. rect. BCA bis } a Pep 4. l. 2
quad. AC
quad. BC. }

Adde

Adde vtrisque quad. A C. erunt

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Quad. A B.}\\ \text{quad. A C}\end{array}\right.\ \text{Æ.}\ \left.\begin{array}{l}\text{rect. B C A bis}\\ \text{quad. AC bis}\\ \text{quad. B C}\end{array}\right\}$$

Atqui rect. B C A bis cum quadrato A C
b Per 3. l. 2. bis, æquatur [b] rectangulo B A C bis. Quare si pro B C A bis & quad. A C bis substituamus B A C bis; erit

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Quad. A B.}\\ \text{quad. A C}\end{array}\right.\ \text{Æ.}\ \left.\begin{array}{l}\text{rect. B A C bis}\\ \text{quad. B C}\end{array}\right\}$$

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI recta (L F) fuerit secta bifariam (in I) eique quædam recta adyciatur (F O) erit rectangulum (L I O) quod sub (L I) dimidia, & (I O) composita ex dimidia & adiecta continetur, quater sumtum, unà cum quadrato adiectæ (F O) æquale quadrato totius compositæ (L O.)*

a Per præc.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Quad. I O.}\\ \text{quad. I F}\end{array}\right.\ ^{a}\ \text{Æ.}\ \left.\begin{array}{l}\text{rect. O I F bis}\\ \text{quad. F O}\end{array}\right\}$$

hoc est, quia ex hyp. F I, L I, sunt æquales, ac proinde quad. FI est quad. L I, & rect. O I F est rect. O I L, seu L I O

$$\begin{array}{l}\text{quad. I O.}\\ \text{quad. L I}\end{array}\ \text{Æ}\ \left.\begin{array}{l}\text{rect. L I O bis}\\ \text{quad. F O}\end{array}\right\}$$

Quare si vtrisque æqualibus addas rect. L I O bis. Erit

quad.

{ quad. I O
quad. L I
rect. L I O bis.
id est.

b quad. L O. Æ. rect. L I O bis } *b Per 4. l. 2.*
quad. F O
rect. L I O bis
Id est
Æ. rect. L I O quater }
& quad. F O

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) sit divisa bifariam (in B) & non bifariam (in F:) erunt quadrata partium inæqualium (A F, F C) dupla quadratorum dimidiæ (A B) & partis intermediæ (B F.) *Fig. 9.*

quad. A F. Æ. *a* rect. A B F bis } *a Per 4. l. 2.*
quad. A B
quad. B F

Addito igitur utrisque quad. F C,

{ quad. A F. Æ. rect. A B F bis
quad. F C quad. A B }
quad. B F
quad. F C

Sed rect. C B F est rect. A B F, quia A B. B C sunt æquales ex hyp.

Ergo

$$\text{Ergo}\left\{\begin{array}{l}\text{quad. AF.}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l}\text{rect. CBF bis}\\ \text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right\}$$

b Per. 7. l. 2.

Atqui b C B F bis cum quad. F C æquantur quadrata B C, B F, seu A B, B F: quare si hæc illis substituas, erunt

$$\left\{\begin{array}{l}\text{quad. AF.}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l}\text{quad AB}\\ \text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\\ \text{quad. BF}\end{array}\right\}$$

Id est

$$\left.\begin{array}{l}\text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\end{array}\right\}\text{bis}$$

PROPOSITIO X.

Fig. 10.

SI recta (FI) sit bisecta (in L) eique quædam recta adjiciatur (IO:) erunt quadrata totius compositæ (FO) & adjecta (IO) dupla quadratorum quæ describuntur super dimidiâ (FL) & super (LO) compositâ ex dimidia & adiecta.

Adjiciatur in directum QF, æqualis IO. Quia ergo etiam FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO bisecta est in L, & aliter in I. Ergo

a Per præc.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{quad. QI.}\\ \text{quad. IO}\end{array}\right. \text{Æ}^{a} \left.\begin{array}{l}\text{quad. QL}\\ \text{quad. LI}\end{array}\right\}\text{bis}$$

Sed

Sed quad. QI est quad. FO, & quad. QL est quad. LO, & quad LI est quad. FL

Ergo $\left\{\begin{array}{l}\text{quad. FO.}\\ \text{quad. IO}\end{array}\right.$ Æ $\left.\begin{array}{l}\text{quad. FL}\\ \text{quad. LO}\end{array}\right\}$ bis

PROPOSITIO XI.

Datam rectam (AB) ita secare (in C) ut rectangulum (ABC) sub totâ & unâ parte contentum, æquale sit quadrato partis reliquæ (AC.) Fig. II.

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biseca in X. Duc rectam XB; cui ex FA producta æqualem abscinde XI. Tum abscinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ductâ per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA bisecta est in X, eique adjecta est AI, erit

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. FIA.}\\ \text{quad. XA}\end{array}\right.$ Æ. *d* quad. XI. d Per 6. l. 2.

id est

Æ. *e* quad. XB e Per constr.

Id est

Æ. *f* $\left.\begin{array}{l}\text{quad. BA}\\ \text{quad. XA}\end{array}\right\}$ f Per 47. l. 1.

Auferatur utrimque quad. XA. Erit rect. FIA seu FL. Æ. quad. BA; id est AS

E Quare

Quare ablato rursum communi A O
Erit A L. Æ. C S

Atqui A L est quadratum A C, cum A I, A C ex constr. sint æquales: & C S est rect. A B C cum B S sit par A B. Ergo rectang. A B C æquatur quadrato A C. Datam igitur rectam secuimus, ut petebatur.

Scholium.

Propositiones 10. primæ huius libri veræ sunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non potest. Neque enim vllus numerus ita secari potest, vt productum ex toto in partem vnam, æquale sit quadrato partis reliquæ. Porro mira vis est huius sectionis, de qua vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12, *In trigono obtusangulo (A C B) quadratum lateris (A B) obtuso angulo oppositi, quadrata laterum reliquorum (A C, B C) excedit rectangulo (B C F) bis, quod comprehenditur sub (B C) latere alterutro obtusum angulum (A C B) continentium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis (A F;) & sub (F C) interceptâ exteriùs latera inter perpendicularem & obtusum angulum.*

Quad.

Quad. A B. Æ. *a* quad. A F
quad. B F a *Per 47. l. 1.*

Sed quad. B F est *b* æquale quadratis b *Per 4. l. 2.*
F C, C B, & rect. B C F bis. Ergo si hæc
substituas pro quad. B F; erit

Quad. A B. Æ. quad. A F
quad. F C
quad. C B
rect. BCF bis

Atqui quadrata AF, F C æquantur quadrato *c* AC. Quare hoc pro illis substituto,
erit c *Per 47. l. 1.*

Quad. A B. Æ. quad. A C
quad. C B
rect. BCF bis

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque (A C B) quadratum lateris (A B) acuto angulo (C) oppositi, à quadratis laterum reliquorum (A C, B C) exceditur rectangulo (B C F) bis, quod continetur sub (B C) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (A F) ab opposito (A;) & sub (C F) interceptâ inter perpendicularem (A F) & acutum angulum (C.) Fig. 13. 14.

a Per 4. l. 2.

Quad. BC. Æ. *a* rect. BFC bis, quad. BF, quad. FC

b Per 47. l. 1.

Et quad. AC. *b* Æ. quad. FC, quad. AF.

Quare duo simul { quad. BC. Æ. rect. BFC bis, quad. AC. } quad. BF, quad. FC bis, quad. AF.

c Per 3 l. 2.

Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur *c* rectangulo BCF bis. Ergo hoc pro illis substituto

{ Quad. BC. quad. AC } Æ. rect. BCF bis, quad. BF, quad. AF.

d Per 47. l. 1.

Atqui quadrata AF; BF, sunt *d* quad. AB. Ergo hoc pro illis substituto

{ Quad. BC. quad. AC } Æ. rect. BCF bis, quad. AB

Hoc est, BC, AC quadrata, excedunt quad. AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 15.

VEra est propositio licet perpendicularis cadat extra triangulum. Demonstratio fere eadem est.

Scholium.

EX hac & 47. lib. 1. habetur dimensio cujuscunque trianguli, cujus tria latera sint nota, licet

licet aream habeat inperviam. Horum quippe theorematum beneficio innotescit perpendicularis, etiamsi eam impedimenta loci non sinant designari. Perpendicularis autem multiplicata per semissem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex scholio propos. 41. l. 1.

Esto trigonum quodcunque A C B nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem A F ex dato angulo A in latus oppositum B C. Fig. 13. vel 14.

Quadratum lateris A B acuto C oppositi, aufer ex summâ quadratorum A C, C B. Per 13. residuum erit rectangulum B C F bis. Residui semissem (hoc est rectangulum B C F) divide per notum latus B C. Proveniet recta C F. Quadratum rectæ C F aufer ex quadrato A C. Residuum dabit quadratum b *A F, cujus radix quadrata dabit perpendicularem A F.* b Per Prob. 2 schol. post 47. l. 1.

Obtinere idipsum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. sufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppositum, intra triangulum cadat.

PROPOSITIO XVI.

Dato rectilineo (Q X Z) æquale quadratum construere. Fig. 16.

Rectilineo Q X Z fac æquale *a* parallelogrammum rectang. C I, cujus latera I A, C A, si æqualia fuerint, ipsum erit quadratum, quod petitur: si inæqualia sunt, latus majus I A produc in L, donec A L sit par a Per 45. l. 1.

A C.I L biseca in Z; quo centro per I & L describe circulum, & producatur C A, donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ A B æquale est dato Q X Z.

Ducatur enim recta Z B. Quoniam I L secta est bifariam in Z, & aliter in A: erit

a Per 5. l. 2. $\left\{\begin{array}{l}\text{rect. I A L.}\\ \text{quad. Z A.}\end{array}\right.$ æ. *a* quad. Z L: hoc est

b Per constr. æ. *b* quad. Z B: hoc est

c Per 47. l. 1 æ. *c* $\left.\begin{array}{l}\text{quad. Z A}\\ \text{quad. B A}\end{array}\right\}$

Ablato igitur utrimque quadrato Z A, communi, remanet

rect. I A L. æ quad. B A:

hoc est, quia A C, A L sunt æquales, erit

rect. C I. æ. quad. A B

d Per constr. Id est *d* rectil. Q X Z.

Scholium.

Constructio Euclidæa requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum satis operosa sit, fortasse expeditiùs problema absolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum resoluatur in tot quadrangula (Z, X) quot potest. Tum singulis quadrangulis fac e rectangula æqualia. Si tunc supersit (ut hic contingit) unum triangulum (Q,) illi quoque fac f æquale rectangulum, singulis deinde rectangulis per hanc 14 fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale g fiat. Erit hoc æquale dato Q X Z.

e Per schol. p. 45. l. 1.
f Per coroll. p. 42. l. 1.
g Per prob. 1 schol. p. 47. l. 1.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

PErfectissimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonstrantur. Libri utilitas vel hoc solo innotescit, quod tractet de circulo rerum admirabilium per Mathesim universam fonte uberrimo. Theoremata illustriora sunt 16. 20. 21. 22. 31. 32. 35. 36.

DEFINITIONES.

1. CIrculi æquales sunt, quorum diametri seu semidiametri sunt æquales.

2. Recta (F B) circulum tangere dicitur, quæ circulo sic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non secet. *Fig.* 20. *l.* 3.

3. Circuli tangere se dicuntur, cum sibi sic occurrunt, ut tamen non secent. *Fig.* 13. & 14.

4. In circulo æqualiter à centro (A) distare dicuntur rectæ (B C, F L) cum perpendiculares (AI, A O) quæ ex centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. *Fig.* 18.

5. Segmenta, seu portiones circuli sunt partes, *Fig.* 37.

partes, in quas circulum dividit recta (CE) circulum secans.

Fig. 33. 6. Angulus in segmento est (BQ) qui continetur sub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex segmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 33. 7. Angulus (CQB) insistere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.

Fig. 11. 8. Sector est pars circuli à duobus semidiametris (AB, AF) & arcu (BF vel BCF) quem semidiametri intercipiunt, comprehensa.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. lib. 3. *Dati circuli centrum invenire.*

Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biseca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biseca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum esto O extra rectam FL (nam in FL esse non poterit, cum ubilibet extra A dividatur inæqualiter) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum esse, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ sibi mutuo æquilatera sunt, cum etiam ex constr. BQ & QC, sint pares, & QO communis. Ergo *a* angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC *b* rectus est, ac proinde angulo LQC per constr. recto æquatur, pars toti. Quod est absurdum.

a Per 8. l. 1.

b Per defin. 14. l. 1.

Corol-

Corollarium.

EX demonstratis patet, si in circulo recta (L F) aliam (B C) bifariam & perpendiculariter secat, in secante esse centrum.

Facillimè per normam invenitur centrum; vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta D E jungentem puncta, D & E, in quibus normæ latera peripheriam secant, bisecetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. hujus. *Fig. 2.*

PROPOSITIO II.

SI in circuli ambitu duo puncta sumantur (B, C;) recta, quæ per illa ducitur; intra circulum cadit. *Fig 2.*

Accipiatur in recta B C quodvis punctum O, & ex centro A ducantur A O. A B, A C. Quoniam A B, A C æquantur, etiam *a* anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus A O C *b* major est interno B, major erit quoque quam C. In triangulo igitur O A C, latus A C subtendens majorem angulum A O C, majus est *c* latere A O subtendente minorem C. Cum igitur A C tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, A O non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem ostendetur de quovis alio puncto rectæ B C. Tota ergo B C cadit intra circulum.

a *Per 5. l. 1.*
b *Per corol. 1. p. 32. l. 1.*
c *Per 19. l. 1.*

Ex

Ex ipsa etiam notione lineæ rectæ, & circularis, propositio est manifesta.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

SI in circulo recta per centrum ducta (BL) aliam (CF) non per centrum ductam secet bifariam, secabit quoque perpendiculariter. Et si secet perpendiculariter, secabit bifariam.

1. Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z sibi mutuo æquilatera sunt, nam CO, FO, ex hypothesi, & AC, AF, quia ex centro, æquales sunt: AO verò communis est. Ergo *f* anguli AOC, AOF æquales. Ergo *i* recti. Quod erat primum.

f Per 8. l. 1.
i Per defin. 14. l. 1.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF sunt recti, erit quad. AC *o* æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cum igitur quadrata AC, AF æqualia sint, etiam duo simul AO, CO duobus simul AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato AO, remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO, sunt æquales. Quod erat alterum.

o Per 47. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (BC, FL) non ambæ per centrum ductæ, se secent, non secabunt se mutuo bifariam. Fig. 4. & 5.

Nam si una LF transeat per centrum, patet hanc non bisecari ab altera BC, quæ ex hyp. per centrum A non transit. Fig. 5.

Si neutra per centrum transit, ex A centro duc AO. Si jam ambæ BC, FL forent bisectæ in O, anguli quoque AOC, AOL essent *a* recti, ac proinde æquales, totum & pars quod fieri non potest. Fig. 4. a Per prae.

PROPOSITIO V. & VI.

CIrculi se mutuo secantes, aut interius tangentes non habent idem centrum. Fig. 6. & 7.

Alias enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, essent AC, AF, (pars & totum) æquales, quia ambæ sunt æquales eidem AB.

PROPOSITIO VII.

SI in circulo quodvis aliud à centro (A) accipiatur punctum (C) ex quo rectæ plu- Fig. 8.

plures C B, C L, C O, C F) in circumferentiam cadant.

1. *Maxima erit (C B) quæ per centrum transit.*

2. *Reliqua diametri pars (C F) minima.*

3. *Aliarum verò major est ea, quæ maximæ (C B) propior.*

4. *Neque plures quam duæ ox dicto puncto (C,) quod à centro diversum est, ad circumferentiam duci possunt æquales.*

Pars 1. Ducatur ex A centro recta A L. Quoniam A L, A B æquales sunt, addita communi A C, erunt L A cum A C, & BC æquales. Sed L A, A C sunt majores *b* quam
b *Per 20. l. 1* LC. Ergo etiam BC major, quam LC. Eodem modo B C ostendetur major quavis aliâ.

b *Per eand.* Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc est AF) est minor *b* quàm A C, C O. Ablatâ igitur communi A C, remanet F C minor quam C O. Eodem modo erit C F minor, quavis aliâ.

Pars 3. In triangulis C O A, CLA latera L A, A C æquantur lateribus O A, AC. Angulus vero L A C major est angulo
c *Per 24. l. 1* O A C. Ergo *c* basis LC, major basi O C.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam si tres duci possent æquales, C O, C I, C Q, forent

forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter se æquales. Quod repugnat parti 3.

PROPOSITIO VIII.

SI à puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC, AF) (AO, AQ, AR.) Fig. 9. & 10.

1. Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima est (AB) transiens per centrum (Z.)

2. Aliarum major est ea, quæ maximæ (AB) propior.

3. Extra circulum minima est (AO) quæ producta per centrum transit.

4. Quæ minimæ propior, minor est remotiore.

5. Non plures quam duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci possunt æquales, sive intra circulum, sive extra.

Pars 1. ex centro Z, duc ZC. Quia æquantur ZC, ZB; additâ communi AZ, erunt AZ, ZC ipsi AB æquales. Sed AZ, ZC majores sunt *a* quam AC. Ergo etiam AB major AC. Eodem modo erit AB major quavis aliâ. Fig. 9. a Per 20 l. 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, ZA æquantur lateribus FZ, ZA. Angulus vero

CZA

b Per 24.l.1. CZA major est angulo FZA. Ergo *b* basis CA major basi FA.

Fig. 10.

c Per 20.l.1 Pars 3. Duc ZQ. Duæ AQ, QZ majores sunt *c* quàm AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO remanet AO minor quàm AQ. Eodem modo AO minor erit quavis aliâ.

d Per 21.l.1. Pars 4. Duc ZR. Rectæ AQ & QZ, minores sunt *d* quam AR, RZ. Ablatis ergo æqualibus ZQ, ZR, remanet AQ minor quam AR.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. *SI ab aliquo intra circulum puncto A plures quàm duæ æquales ad ambitum duci possint; Id punctum centrum erit.*

Patet ex 4. parte prop. 7.

PROPOSITIO X.

Fig. 12. *CIrculi in duobus tantum punctis se mutuo secant.*

Secent enim si fieri potest in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ sunt tres æquales ad ejus peripheriam, AB, AC, AF, erit

f Per præc. A *f* centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS se secantes habent idem centrum, quod repugnat propositioni 5.

PRO-

PROPOSITIO XI.

SI duo circuli ſe intus tangant, recta per eorum centra (A, & I) ducta, tranſibit per contactum (B.) Fig. 13.

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, ut recta per illa tranſiens, cadat extra contactum B, ſecans circulos in O, & L, ſintque centra ipſa A, & C; ac iunge AB, CB. Quoniam igitur C B, CO, æquantur, additâ communi A C, etiam A C, C B, æquales erunt A O. Sed *b* A C, C B ſunt majores quàm A B; Hoc eſt *c* quam A L. Ergo etiam A O maior eſt quàm A L pars toto, Qnod eſt abſurdum. b *Per* 20.*l.*1 c *Per defin. circuli.*

PROPOSITIO XII.

SI circuli ſe tangant exterius, recta coniungens centra, per contactum tranſibit. Fig. 14.

Si negas, ſint ſi fieri poteſt centra ita poſita, puta in A & B, ut recta per ipſa tranſiens, per contactum S non incedat, ſed circulos ſecet in O, & Q. iunganturque A S, B S. Erunt igitur *a* A S, S B maiores quàm A B. Sed A S *b* eſt par A O, & B S par B Q. Ergo etiam A O, B Q ſunt maiores quàm tota A B, pars toto. Quod fieri non poteſt. a *Per* 20 *l.* 1 b *Per defin. circuli.*

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Fig. 15. *CIrculi & ſeſe mutuo, & lineam rectam punctualiter tangunt.*

Tangant enim ſe intra(ſi fieri poteſt)duo circuli in parte circumferentiæ C L. Per
b Per 11. l,3. centra A, & B ducta recta *b* tranſibit per contactum puta in C. Ducantur inſuper
c Quia ex centro. A L, B L. Quoniam igitur *c* B L, B C æquantur (ſunt enim ex centro B ad peripheriam O L C,) addita communi A B, erunt A B, B L æquales A C. Sed A C eſt par A L, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam Q L C.) Ergo etiam A B, B L ſunt æquales A L, contra 20. l. 1.

Fig. 16. Tangant ſe deinde exterius duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu O L. Recta A P cen-
d Per 12. l. 3. tra A & P jungens *d* tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper A L, P L. Erunt igitur duo trianguli latera A L, P L æqualia ipſis, A O, P O, ſeu toti A P. Contra 20. l. 1.

Fig. 16. Deniq; recta B F & circulus ſe tangant, ſi fieri poteſt, in parte aliqua CE. Ducantur ad centrum rectæ C A, E A. Erunt igitur C A. E A æquales, ac proinde triangulum C A E eſt iſoſceles. Quare *e* anguli ACE,
e Per coroll. 11. p. 32. l. 1. A E C acuti. Ergo perpendicularis ad B F,
f Per coroll. 8. p. 32. l. 1. ducta ex A centro, cadet inter *f* C & E, puta in D.

Erunt

Erunt igitur tam A C, quam A E æquales perpendiculari A D; quod eſt abſurdum contra Coroll. 14. p. 32. l. 1.

Corollarium.

CIrculi qui habent centra in una recta, eamque ſecant in eodem puncto B. ſe mutuo in puncto illo B, contingunt. *Fig. 17.*

Cæterum hæc propoſitio liquet etiam ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ, aut duæ connexæ, ſecundum ullam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem ſi invicem in tota parte aliquâ tangerent.

PROPOSITIO XIV.

IN circulo æquales rectæ (B C, L F) æqualiter à centro diſtant: & quæ diſtant à centro æqualiter, ſunt æquales. *Fig. 18.*

Ex centro A ducantur A C, A F, item A O, A I ad angulos rectos ipſis B C, F L. Erunt *a* B C, F L biſectæ in O & I. *a Per 3. l. 3.*

Cum ergo totæ B C, F L ponantur æquales, etiam dimidiæ O C, I F, adeoque & quadrata ipſarum æquantur. Jam vero quad. A C *b* æquale eſt quadratis O C. O A: & quadratum A F æquatur quadratis I F, I A: *b Per 47. l. 1.*

F Cum

Cum igitur quadrata A C, A F æqualia sint etiam duo quadrata O C, O A, duobus I F, I A æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis O C, I F (quæ ante ostensa sunt æqualia) quæ remanent, quad. O A, I A æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares O A, I A sunt æquales. Ergo B C, F L æquales, à centro distant *c* æqualiter. Quod erat primum.

c Per defin. 4. l. 3.

E converso si distantiæ O A, I A ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium O A, I A. Eodem discursu ostendetur quadrata reliqua O C, I F fore æqualia, ac proinde & rectas O C, I F æquales esse, quæ cum sint *d* semisses rectarum B C, F L, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

d Per 3. l. 3.

PROPOSITIO XV.

Fig. 19.

R*Ectarum circulo inscriptarum maxima est diameter. Cæterarum ea major, quæ centro propior.*

Sit quævis. R S alia à diametro F L. Ex centro duc A R, A S. Duæ A R, A S, æquantur diametro F L, & sunt *a* majores quam R S. Ergo &c.

a Per 20. l. 1

Sit deinde BI propior centro quam XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ, A Q. Erit A Q *b* maior quam A C. Accipe ergo A O parem A C, & per O duc R S perpendicularem ad A O, quæ *c* par erit B I; junganturque A R, A S, A X, A Z. Quia igitur A centrum est, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem R A S, maior est angulo X A Z. Ergo basis R S hoc est B I, maior *d* est basi X Z. Quod erat demonstrandum.

b *Per defin. 4. l. 3.*
c *Per prac.*
d *Per 24. l. 1.*

PROPOSITIO XVI.

Recta (I F) quæ per (B) extremitatem diametri (C B) perpendicularis est, tota cadit extra circulum, eumque tangit (in B.) Neque inter ipsam & circulum alia recta ad contactum (B) duci potest, quin circulum secet.

Fig. 20.

Pars 1. Accipiatur in recta I B F quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam A L. In trigono LAB quoniam angulus A B L rectus est per hyp. erit A L B *a* acutus. Ergo AL opposita maiori angulo A B L, maior est, *b* quàm A B, quæ minori A L B opponitur. Sed A B tantùm pertingit ad circumferentiam. Ergo A L ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L, extra circulum est. Tota igitur IF extra circulum cadit. Quod erat primum.

a *Per coroll. 5. p. 32. l. 1.*
b *Per 19. l. 1.*

Pars 2. Infra B F (si fieri potest) cadat R B tota extra circulum. Quoniam F B A rectus est per hyp. erit R B A acutus, ac proinde A B non est perpendicularis ad B R. Ducatur igitur ex A centro ad B R perpendicularis A O, quæ cadet *d* versus R, & secabit circulum in Q. Igitur A B opposita majori angulo, nempè A O B recto, major est quam A O, quæ opponitur minori, nempe acuto O B A. Sed A B par est A Q. Ergo etiam A Q major est quam A O, pars toto.

b *Per coroll. 3. p. 32, l. 1.*

Corollaria.

Fig. 20.

1. HInc rursum patet contactum rectæ lineæ & circularis esse punctualem.

Fig. 17.

2. Si centris in eadem lineâ rectâ in infinitum protractâ acceptis describantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores; omnes tangent rectam I F in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quâcunque datâ majorem excrescentes, propius semper ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in unico contactus puncto, conjunguntur: quod quamvis evidentissimum sit, est tamen revera admirabile.

Fig. 17.

4. Ex his manifestum est, lineam quamcunque in infinitum esse divisibilem. Ducatur

catur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta A Q. Infiniti circuli centra habentes in rectâ BA ſine termino productâ rectam I F, per coroll. 2. hic, & ſe mutuo per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto, B, ac proinde nuſquam vel inter ſe, vel cum recta I F, conjunguntur, præterquam in B. Ergo neceſſe eſt ut rectam A Q dirimant in partes infinitas, hoc eſt in non tot, quin plures.

5. Angulum contingentiæ ſeu contactus L B Q (eum nempe qui tangente & peripheriâ continetur) nulla recta linea poteſt dividere. *Fig. 20.*

6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt lineæ rectæ ad Hyperbolam unà ſecum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclarè obſervavit & demonſtrauit Marius Bettinus noſter in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cujus demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate lib. 16. *Fig. 17.*

Scholium.

Demonstratur & solvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci solent.

Atque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta & mira & certa sunt. Quæ verò deduci ex eâdem solent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare suspicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio subtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus asserendis ansam præberet. Et planè; quod suspicatus sum, ita se habere, mihi tandem videor deprehendisse. Paradoxa quæ ex 16 inferri solent ex aliis multis, hæc ferè præcipua sunt.

Fig. 21. 1. *Angulus contingentiæ (O A C) omni acuto minor est. Acutus esto P A C ab hoc auferri potest dimidius, & à residuo iterum dimidius, & sic deinceps sine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor, quantumvis tamen in infinitum minuatur, semper tamen residui anguli, exempli gr. anguli Q A C, latus unum Q A a intra circulum cadet, ac proinde angulus contactus O A C intra acutum continebitur, ejusque pars erit, ideoque illo minor.*

a Per 16. l. 3.

2. *Angulus semicirculi, licet recto minor sit, est omni acuto major. Quia ob eandem causam, acutus quantumvis magnus B A Q, intra*

intra semicirculi angulum B A O *comprehenditur.*

Hæc duo in ipso textu propositionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis *ea sint, an ab aliquo adjecta. Appollonius cert, magnus geometra, cum eandem affectionem in ellipsi, hyperbola & parabola demonstrat, has illationes prætermittit.*

3. *Angulus rectus* C A B (*imo acutus quicumque* C A Q) *continet infinitos æquales angulos contactus; ac proinde infinities illo est major. Nam angulus* C A B *dividi potest in acutos infinitos minores semper & minores, quorum nihilominus singuli sunt majores* b *angulo contactus* O A C. b Per paradox, 1.

4. *Angulus contactus* C A O *est vera pars anguli recti* C A B; *eundem quippe una cum semicirculo angulo* O A B *constituit: nequit tamen ullâ sui multiplicatione suum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia sibi addita non efficiunt infinitum.*

5. *Transitur à minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: sive datur majus aliquò, & datur eôdem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam si recta*, A B, *fixo manente puncto* A, *moveatur, donec congruat cum tangente, describet acutos angulos* B A P, B A Q, *& omnes alios possibiles, qui quamvis semper augeantur, semper tamen erunt minores* c *semicirculi angulo* B A O, *quamprimum vero* A B *congruet tangenti* C A, *immediate habetur rectus* C A B *major angulo semicirculi.* c Per paradox. 2.

Hæc

Hæc & plura alia ex hac 16. propositione deduci solent: quæ profectò, si ita, ut proponuntur sese habeant, merito incomprehensibilia videri possent. Peletarius, ut his paradoxis se expediat, negat angulum contactus esse quantum. Rem confecerat, si dixisset nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cùm inde infert omnes semicirculi angulos esse æquales, quod planè non inferret, si intelligeret, quod de contactus angulo asserverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio nostro in sua illa adversus Peletarium apologetica disputatione assentior. Meâ quidem sententiâ uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem, ille dum omnes, præter angulum contingentiæ. Alii se existimant hâc una responsione omnes difficultates solvere, si dicant, curvilineos angulos & rectilineos esse incomparabiles. Rogati verò, cur sint incomparabiles, respondent, quia angulus contactus quantumcumque multiplicatus nunquam potest æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc est paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, quî nimirum fieri possit, ut angulus contactus anguli recti pars sit, & tamen quotiescumque multiplicatus eundem superare nequeat, respondent angulum contactus non esse partem recti, quia eum non potest adæquare. At paradoxorum assertores replicant, hinc solum sequi non esse partem recti aliquotam: veram tamen esse partem, eo quod cum semicirculi angulo rectum componat. Vnde qui hac via difficultates propositas volebant dissolvere, debuerant ostendere angulum contactus nullo sensu partem esse rectilinei

anguli,

anguli. neque addito sibi semicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos sumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclideæ à definitione anguli pendere. Hæc enim, si penitiùs expendatur, manifestè docet nullum angulum esse quantum, quo uno errore sublato, paradoxa omnia evanescunt. Sentio igitur Def. 8. l. 1.

1. Nullus angulus est quantitas, sed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus est duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non est quantitas, sed modus quantitatis, cum enim curvitas non sit quantitas, cur inclinatio sit, quæ ab illa non magis differt, quam inflexio & fractio? Deinde. Si angulus esset quantus, foret vel linea, vel superficies, vel corpus. Non esse lineam aut corpus patet. Sed neque superficies est, ea enim ablatione partium C, B, minuitur; non angulus. Neque potest dici angulum esse superficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus sit. Fig. 22.

2. Quoniam anguli non sunt quantitas, sed modus quanti, eorum inter se comparatorum relatio non est æqualitas & inæqualitas, sed similitudo & dissimilitudo.

3. Cum igitur anguli inter se comparati æquales dicuntur aut inæquales, non aliud intelligi potest, quàm eos similes esse inter se aut dissimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4. Similes

4. *Similes porro anguli sunt, quorum ambo latera superimposita congruunt. Dissimiles quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil est aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo similes anguli sunt inclinationes linearum similes. Non sunt autem inclinationes linearum similes, nisi ambæ sibi mutuo impositæ congruant. Ergo similes anguli sunt, quorum congruunt latera, dissimiles, quorum non congruunt.*

5. *Itaque manifestum est nullum angulum curvilineum æqualem dari posse ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud est quam similitudo, per conclus. 2 & 3. Similitudo angulorum est sola laterum congruentia per conclusion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus dum descriptis æqualibus semicirculis ita ratiocinatur; æqualium semicirculorum anguli E A D, C A B æquales sunt. Ergo si his addatur communis angulus C A D, erit angulus E A C, curvilineus æqualis rectilineo D A B. Fallitne ergo axioma, si æqualibus addas, vel demas æ-*
Fig. 23. *qualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas solùm pertinet, anguli porro quanti non sunt. Axioma ut in angulis valeat ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, si opponantur similibus angulis, similiterque positis; qui tum orientur, erunt similes. At Proclus comparat angulos similes quidem: sed communis, qui utrisque additur, cum ab una parte habeat latus rectum: ab altera curvum, dissimiliter utrisque additur.*

6. *Quare*

6. *Quare cum tota essentia anguli sit linearum se tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius, una siquidem inclinatio pars alterius inclinationis non est: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio siquidem una auferri nequit ab altera; &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non sunt, sed superficiebus inter latera constitutis conveniunt.*

7. *Postremo ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant, illæ locutionum formæ, quibus geometræ passim, atque ipse inprimis Euclides, utuntur, cum angulos secari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque similia asserunt. Hæc sanè exstimabimus eos non propriè, sed analogicè tantùm angulis tribuere; itaque eos loqui voluisse, quod id commodiùs, & expeditiùs esset, neque tamen obnoxium periculo, modo in angulis rectilineis maneatur. Angulum itaque dividi rectâ D A, non aliud erit, quàm inter latera E A,* Fig. 24. *C A aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc est duos novos angulos efficiat. Angulum vero E A C esse duplum anguli E A D, nihil rursum aliud erit, quam inter lineas rectas E A, C A, aliam interponi, quæ ad utramque similiter inclinetur, unde fiat ut rectæ E A, D A rectis C A, D A, inclinationibus non mutatis, impositæ congruant. Quodsi ita ratiocinentur:* Fig, 24. & *(Angulus E A D est æqualis angulo I L Q. & D A C* 25. *est æqualis Q L R. Ergo totus E A C toti I L R æqualis est. Idem erit, ac si dicatur; inclinatio rectarum E A D similis, seu eadem est inclinationi rectarum I L Q: & inclinatio rectarum D A C*

similis

ſimilis eſt inclinationi rectarum Q L R. Ergo etiam inclinatio rectarum E A C ſimilis erit inclinationi rectarum I L R vel certe (quod recidet in idem, ex aſſertione 4 ſupra) collectionem illam ſic intellige: latera E A D congruunt lateribus I L Q; & latera D A C congruunt lateribus Q L R. Ergo latera quoque E A C congruent lateribus I L R. Quæ quidem conſecutio æquè clara eſt, atque ſi æqualibus addas æqualia, tota æqualia eſſe; Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cum ſint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facilè, veritate theorematum ubique ſalvâ, interpretabimur.

His ita conſtitutis, facilè paradoxa angularia diſſolvemus; quæ ſanè non aliunde enata ſunt, quam quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco: ut igitur ſimul omnia expediam, Dico paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad unum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non conveniunt niſi quanto: anguli autem quanti non ſunt, ut jam oſtendimus.

Itaque angulus contactus neque minor eſt quovis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imò ne ſemel quidem: nihil enim horum linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si verò non propriè, ſed analogicè accipiantur, jam nihil continent, quod à communi ſenſu, ac ratione alienum ſit. Sic enim angulum contactus O A C eſſe minorem quovis acuto, & ſemicirculi angulum O A B acuto omni majorem, non aliud ſignificabit,

bit, quam infra tangentem C A, nullam posse duci rectam ad contactum, quin secet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas est omnino digna, quam homines admirentur; est tamen ejusmodi quam possimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti & quinti sensus erit. Atque ita unius Euclidææ definitionis ductu, ritè perspectâ naturâ anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evanescunt.

PROPOSITIO XVII.

A Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (O Q) tangat. Fig. 26.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta A B, secans peripheriam in O. Centro A describe per B alium circulum, B S, & ex O duc O C perpendicularem ad A B, quæ occurrat circulo B S in C. Duc C A, occurrentem circulo O Q in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum O Q.

Quia latera B A, I A, æquantur lateribus C A, O A, angulusque A communis est in trigonis I A B, O A C, etiam a anguli A O C, A I B

a Per 4. l. 1.

b Per constr. c Per 16. l. 3. AIB æquales sunt, Sed *b* A O C rectus est. Ergo etiam rectus est A I B. Ergo B I, *c* tangit in I.

Scholium.

Fig. 27. E*x 31. sequ. pulchrè ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (B Q)*

Centrum A & datum punctum O jungens recta bisecetur in P. Tum centro P, per A & O describe circulum occurrentem dato in B. Recta O B tanget.

Nam junctâ A B, angulus A B O in semicirculo rectus est per 31; ergo per 16. O B tangit circulum B Q.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28. S*I circulum tangat recta linea (C L,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis est.*

Si negas, sit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta A F: *a* secabit ea circulum in O. Quia ergo angulus A F B rectus ponitur, erit *b* A B F acutus. Ergo A B, (hoc est A O) major *c* quam A F, pars toto.

a Per 1. part. p. 16. l. 3. b Per coroll. 5. p. 32. l. 1. c Per 19. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI recta (BC) circulum tangat. & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI) erit in ea centrum. Fig. 29.

Si negas, ſit centrum extra A I in Z, & ab eo ad contactum ducatur Z A. erit *d* angulus Z A C rectus, ac proinde par angulo I A C, per hypoth. recto, hoc eſt pars toti. d *Per prae.*

PROPOSITIO XX.

ANgulus ad centrum (B A C) duplus eſt anguli (B F C) ad peripheriam, cum idem arcus (B C) eſt baſis angulorum. Fig. 30. 31. 32.

Triplex eſt caſus. In primo latera B A, BF coincidunt. Tum vero quia A F, A C ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F, & C *a* æquales. Sed BAC *b* æqualis eſt duobus F & C. Ergo B A C duplus eſt unius F. Fig. 30. a *Per* 5. *l.* 1. b *Per* 32. *l.* 1.

In caſu ſecundo B A, C A cadunt intra B F, C F. Tum vero ductâ F A X, per caſum primum X A B eſt duplus X F B, & X A C duplus X F C. Ergo totus B A C duplus eſt totius B F C. Fig. 31.

In tertio caſu B F ſecat A C, & anguli Fig. 32.

B A C.

BAC, BFC ſunt extra invicem. Ducatur FAL per caſum 1. totus LAC duplus eſt totius LFC, & ablatus LAB duplus eſt ablati LFB. Ergo & reliquus BAC duplus eſt reliqui BFC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 33. *ANguli (BQC, BFC,) qui in circulo, inſiſtunt eidem arcui (BOC,) ſive qui in eodem ſegmento (BQSC) exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.*

Sit primò ſegmentum BQSC majus ſemicirculo. Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum, duplus eſt ſingulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC ſunt *a* æquales. Quod erat demonſtrandum.

a Per axio. 6

Fig. 34. Sit deinde ſegmentum BQC æquale aut minus ſemicirculo. In triangulis BQI & CFI quia anguli ad verticem I oppoſiti, *b* æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q & R ſummæ reliquorum F & O *c* æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales ſunt, ut pote eidem arcui QF inſiſtentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

b Per 15. l. 1.
c Per coroll. 10, p. 32 l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

QUadrilateri circulo inscripti (A B C F) oppositi anguli duos rectos conficiunt. Fig. 35

Ducantur BF, CA. Angulus ABC, cum duobus O & X facit *a* duos rectos. Sed O est *b* æqualis I, quia insistunt eidem arcui BC; & X *c* est æqualis Z, quia insistunt eidem arcui A B. Ergo A B C, cum duobus etiam, I, Z, hoc est cum toto opposito angulo A F C, facit duos rectos. Quod erat demonstrandum.

a *Per 32. l. 1.*
b *Per 21. l. 3.*
c *Per eand.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

NOn sunt necessariæ: & agitur de segmentis similibus, quæ non possunt sine proportionibus rectè definiri.

PROPOSITIO XXV.

DAtum arcum (A B C) perficere.

Subtendantur utcunque duæ rectæ A B, C B, quas biseca in I, & L. Ex I, & L duc perpendiculares sibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio est arcus A B C. Fig. 36.

G Nam

b Per corol. p. 1. l. 3. Fig. 36. Nam *b* centrum est & in recta IX, & in recta LZ. Ergo in communi ipsis puncto O.

Praxis. Centro B sumto in arcu, describe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, describe duos alios circulos quorum singuli priorem bis secent. Per intersectiones ductæ rectæ sibi mutuo occurrentes in O dabunt centrum.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

Fig. 37.

IN circulis æqualibus rectæ æquales (CE, FI) subtendunt arcus æquales; & si arcus sunt æquales, etiam subtensæ æquales erunt.

1. Pars. Ad centra A & B ducantur CA, EA, FB, IB. Quia triangula CAE, FBI, sibi mutuo æquilatera sunt, etiam erunt sibi mutuo *a* æquiangula. Ergo cum circuli sibi mutuo imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I, in puncta C, E. Cum igitur circuli sint æquales, etiam arcus FLI necessariò congruet arcui CQE, & arcus FOI arcui CSE, ac proinde æquales *b* erunt etiam ipsi.

a Per 8. l. 1.

b Per axio. 7.

Per 2. Quoniam circulorum æqualium, arcus FLI, CQE ponuntur æquales, sibi mu-

mutuo impositi congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & subtensa F I congruet subtensæ C E. Ergo F I, C E *d* æquales sunt. d Per axio. 7.

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig. 38.

SI in circulis æqualibus anguli sive ad centra (B A C, F L I) sive ad ambitum (B O C, F S I) sint æquales, etiam arcus (B X C, F Z I) quibus insistunt, sunt æquales: & si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt.

Pars 1. Quoniam latera A B, A C, æquantur L F, L I, (sunt enim æqualium circulorum semidiametri) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt bases *a* B C, F I æquales. Ergo arcus B X C, F Z I etiam *b* æquales sunt. a Per 4. l. 1. b Per præc.

Ponantur iam anguli B O C, F S I ad ambitum æquales. Quia igitur *c* horum dupli sunt B A C, F L I, etiam illi æquales erunt, ac proinde, ut iam ostensum, etiam arcus B X C, F Z I sunt æquales. c Per 20. l. 3.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum B X C, F Z I habetur per 27. æqualitas subtensarum B C, F I. Ergo, quia etiam B A, A C, æquantur ipsis F L, L I, erunt *e* anguli A & L, ad centrum æquales: & quia *i* anguli O e Per 8. l. 1. i Per 20. l. 3.

& S horum dimidii sunt, erunt etiam ipsi æquales.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 39. DAtum arcum (A B C) bisecare.

Duc A C, quam biseca in O. Ex O perpendicularem duc O B, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Iungantur enim A B, C B. Latera A O, O B per constr. æquantur lateribus, C O, O B. & anguli ad O sunt æquales, quia re-
a Per 4, l. 1. cti. Ergo bases A B, B C *a* æquales. Ergo
b Per 26. l 3. etiam *b* æquantur arcus A B, C B.
Fig. 39. *Praxis. Centris A & C describe pari intervallo arcus se secantes in punctis F, & I, per quæ ducta recta arcum ABC bisecabit.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 40. *ANgulus (B C F) in semicirculo, rectus est: in segmento majore minor recto; in segmento minore recto major.*

a Per 5. l. 1. 1. Pars. Ex centro A duc A C. Quia æquales sunt A B, A C, anguli O, B, *a* æquales erunt. Ob eandem causam æquales erunt
b Per 32. l. 1. I, F. Ergo totus B C F utique B, & F, æqualis est. Cum igitur *b* tres simul conficiant duos rectos, semissis trium, angulus B C F, unus rectus est.

2. Pars.

2. Pars. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo L O B majus, in eoque F O L angulus, & ducatur O B. Angulus FOL minor eſt angulo B O L, qui per 1 partem rectus eſt. Ergo. &c. Fig. 41.

3. Pars. Eſto ſegmentum L O X ſemicirculo L O B minus, in eoque angulus X O L. Erit hic major quàm B O L, qui rectus eſt. Ergo &c. Fig. 41.

PROPOSITIO XXXII.

SI recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem ſecet, erit angulus à tangente & ſecante factus, par angulo, qui fit in ſegmento alterno. Fig. 42. & 43.

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in ſegmento ALQB, & angulus FAB par angulo O, qui fit in ſegmento AOB.

Tranſeat primò ſecans AB per centrum. Per 18. CAB, rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo CAB & L æquales ſunt. Fig. 42.

Tranſeat deinde ſecans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in ſemicirculo rectus eſt, faciet BQA cum BAQ *a* rectum unum. Sed etiam CAQ rectus *b* eſt. Ergo BQA, cum BAQ æquatur CAQ. Fig. 43.

a Per 32 l. 1.
b Per 18. l. 3.

c Per 21. l. 3. C A Q. Ablato igitur communi B A Q, erit B Q A (hoc c est L) æqualis C A B. Quod erat primum.

d Per 13. l 1. e Per 22. l. 3. Deinde, d F A B, C A B, faciunt duos rectos; & in quadrilatero B O A L e oppositi L. & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo F A B, C A B æquantur duobus simul O & L. Ablatis ergo hinc quidem C A B, inde L, quos jam ostendi æquales, erunt æquales reliqui F A B, & O. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 44. *Super data recta (B C) segmentum circuli construere, capiens angulum dato parem.*

Si detur angulus acutus A B F, ex B duc B L perpendicularem ad A B, & ad terminum C datæ rectæ B C, fac angulo C B L a Per 23. l. 1. parem a B C I, cujus latus secabit B L, in I. Centro I, per B, describe circulum, hic transibit per C (quia ob æqualitatem angub Per 5. l. 1. lorum ad C & B etiam latera C I, B I b æqualia sunt) capietque segmentum B Q C angulum parem dato A B F.

Nam quia A B diametro B L perpendicularis est, A B tanget d circulum, quem d Per 18. l. 3. secat B C. Ergo c angulus in segmento c Per præc. B Q C, æquatur angulo A B F.

Quod

Quod ſi detur angulus obtuſus R B C, eadem conſtrue, eritque ſegmentum C O B quæſitum.

PROPOSITIO XXXIV.

A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem. Fig. 45.

Ad circuli diametrum F A duc perpendicularem B A L; ducatur item A C, *f* quæ faciat angulum B A C parem dato. Hæc auferet ſegmentum A Q C capiens angulum parem dato; uti patet ex 32. f Per 23. l. 1.

PROPOSITIO XXXV.

SI in circulo duæ rectæ (C L, B F) ſe ſecuerint, rectangulum (C O L) ſub ſegmentis unius æquale eſt rectangulo (B O F) ſub ſegmentis alterius comprehenſo. Fig. 46. 47. 48.

Si ſe interſecant in centro A, res patet. Fig. 46.

Si una C L tranſit per centrum A, & reliquam B F ſecat bifariam; ſecabit quoque *a* perpendiculariter, ac proinde quad. F O eſt rectangulum F O B. Ducatur A F; Quoniam C L biſecta eſt in A, & aliter in O, erit a Per 3. l. 3.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. COL.}\\ \text{quad. AO}\end{array}\right.$ Æ. *b* quad. A L; hoc eſt b Per 4. l. 2.

 quad.

e Per 47. l. 1.

quad. A F; hoc est e
quad. A O
quad. F O

Demto igitur communi quadrato A O, erit rect. C O L. Æ. quad. F O, hoc est rect. F O B.

Fig. 47. Si una, C L, per centrum transit, & reliquam B F secat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta secet ipsam B F in I bifariam.

d Per 3, l. 3. Igitur angulus AIB d rectus erit. Iam quia C L bisecta est in A & aliter in O, erit

e Per 5. l. 2.
rectang. C O L, Æ. e quad. A L; hoc est
cum quad. A O

f Per 47. l. 1.

quad A B; hoc est f
quad. A I
quad. B I

g Per eand.

Sed quadratum A O æquatur g quadratis O I, A I. Ergo

rectang. C O L. Æ. quad. A I.
quad. O I quad. B I.
quad. A I

Demto igitur communi quadrato AI, remanent

rect. C O L. Æ. quad. B I
quad. O I

Atqui etiam quadratum B I æquatur rectangulo i F O B cum quadrato O I, quia F B

i Per 5. l. 2.

secta est bifariam in I & aliter in O. Ergo

rectang. C O L. rect. F O B
quad. O I Æ. quad. O I.

Demto

Demtoigitur communi quadrato, O I, erit
rect. COL. Æ. rect. F O B.

Quod si neutra rectarum C L, F B per centrum transeat, per communem earum sectionem O per centrum A, ducatur recta XZ. Per modo demonstrata tam rectang. COL quam rectang. F O B æquantur rectangulo Z O X. Ergo etiam COL, F O B æqualia sunt inter se. Fig. 48.

PROPOSITIO XXXVI.

SI à puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF) altera secans (BC;) erit rectangulum (CBO) sub tota secante (CB) & parte (BO) inter punctum & circulum interjectâ comprehensum, æquale quadrato tangentis (BF.) Fig. 49. 50. 51.

Si secans B C transit per centrum A, junge A F, faciet hæc *a* cum F B angulum rectum. Quoniam CO bisecta est in A, eique adjecta O B, erit Fig. 49. a *Per* 18, *l.* 3.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. CBO,}\ b\\ \text{quad. AO}\end{array}\right.$ Æ. quad. A B hoc est *c* $\left.\begin{array}{l}\text{quad. BF}\\ \text{quad. AF}\end{array}\right\}$ b *Per* 6. *l.* 2. c *Per* 47. *l.* 1.

Ablatis ergo quadratis A O, A F, æqualibus, remanet.

rect. C B O. Æ. quad. B F.

Quod

Fig. 50. 51.

Quod si C B non transit per centrum A, ducantur A B, AF, AO, & AL ex centro ducta bisecet O C in L. Ergo angulus ALO *d* rectus erit. Item A F B *e* erit rectus. Quoniam vero CO bisecta est in L, eique adjecta est O B, erit

d Per 3 l. 3.
e Per 18. l 3.
f Per 6. l. 2.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. C B O.}\\ \text{quad, L O}\end{array}\right\}$ Æ. *f* quad. L B.

Addatur utrimque quadratum A L, erit

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. C BO.}\\ \text{quad. L O}\\ \text{quad. A L}\end{array}\right.$ Æ. $\left.\begin{array}{l}\text{quad. L B}\\ \text{quad. A L}\end{array}\right\}$

Sed quadrata L O, AL æquantur quadrato *g* A O seu A F; & quadrata L B, A L *i* æquantur quadrato A B. Ergo

g Per 47, l. 1.
i Per eand.
k Per eand.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect. CBO.}\\ \text{quad. A F}\end{array}\right.$ Æ. quad. AB; boc est *k*

$\left.\begin{array}{l}\text{quad. B F}\\ \text{quad. A F.}\end{array}\right\}$

Ablato igitur communi quadrato A F, remanet

rect. CB O. Æ. quad. B F.

Corollaria.

Fig. 52

1. SI ab eodem extra circulum puncto B. quotvis ducantur secantes BC, omnia rectangula C B O, inter se æqualia sunt. Singula, enim æquantur quadrato tangentis B F.

2. Quæ

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, B F, BQ æquales sunt. Earum quippe quadrata æquantur singula eidem rectangulo C B O.

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum sub C B & O B sit æquale quadrato B F, hæc circulum tanget in F. Fig. 52.

Ex B ducatur tangens B Q, & ex E centro ductis ad Q & F rectis E Q, E F, jungatur B E. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum B Q per 36. hæc inter se æqualia sunt, adeoque & rectæ B Q, B F æquales. Igitur triangula F E B, Q E B sibi mutuo sunt æquilatera. Ergo *b* anguli QF, æquales erunt. Sed Q *c* rectus est. Ergo etiam F rectus est. Ergo B F *d* tangit.

b *Per* 8. *l.* 1.
c *Per* 18. *l.* 3.
d *Per* 16. *l.* 3.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER IV.

HIc liber totus problematicus est; docet, quo artificio figuræ præsertim ordinatæ circulo inscribantur & conscribantur. Amplissimus est illius usus in munitionibus exstruendis & ex illo quasi fonte eximæ illæ sinuum, tangentium, & secantium tabulæ ingenti bono Matheseos fluxêre,

DEFINITIONES.

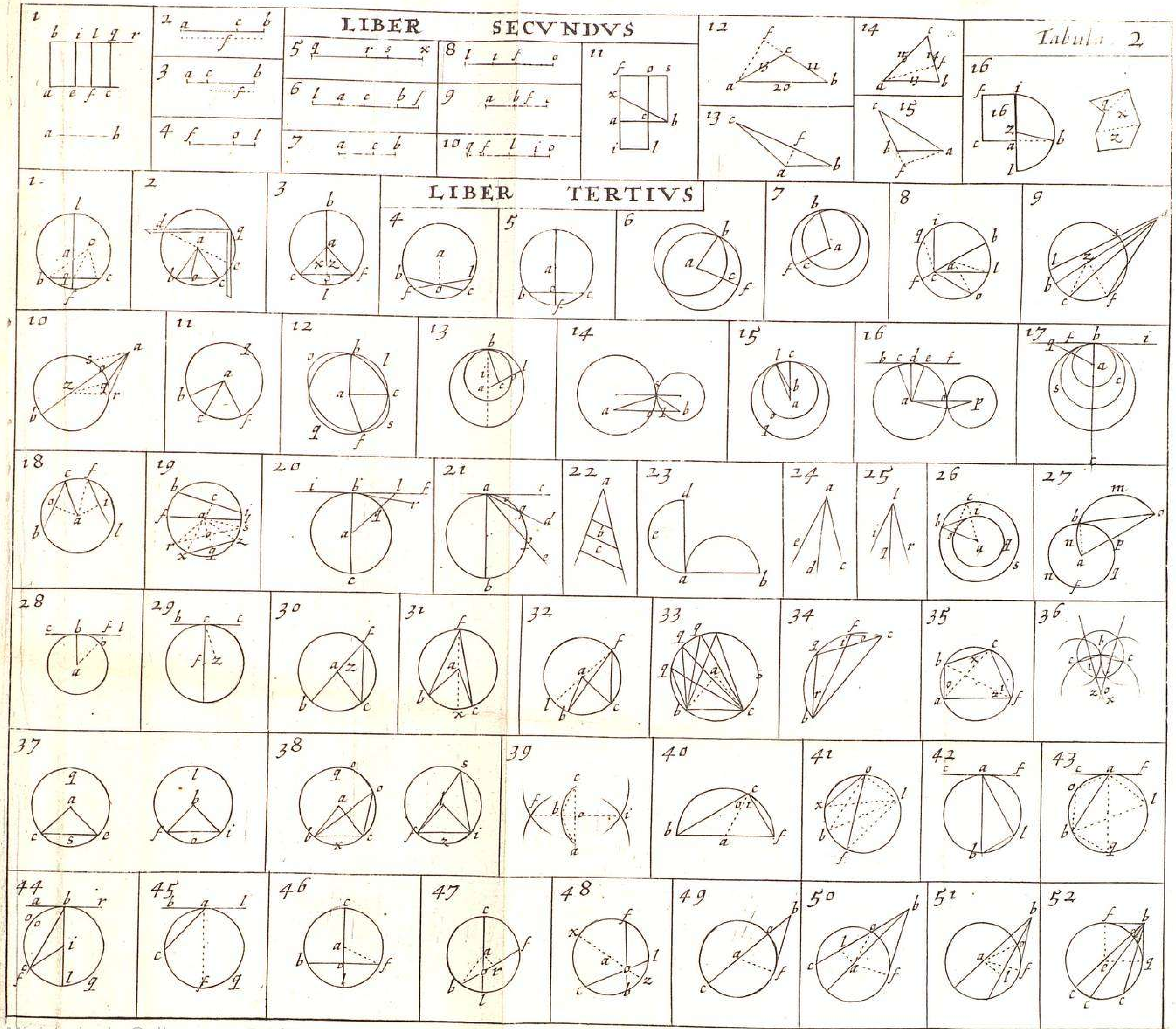
1. FIgura rectilinea circulo inscripta est, vel circulus figuræ circumscriptus, cum singulorum angulorum vertices in circumferentia existunt.

2. Figura rectilinea circulo circumscripta est, vel circulus figuræ inscriptus est. cum singula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata seu regularis est, quæ æquilatera & æquiangula est.

PRO-

118



PROPOSITIO PRIMA.

CIrculo (B D) rectam datam (A) diametro non majorem, inscribere. Fig. l. 1. 4.

Accipe in peripheria quodvis punctum B. Centro B intervallo datæ A describe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam B C. Dico factum.

PROBOSITIO II.

CIrculo triangulum inscribere dato (X) æquiangulum. Fig. 2.

Circulum tangat E F in D. Fiat angulus E D G par *o* angulo C, & F D H par B: jungaturque G H. Dico factum. Nam angulus H, æquatur *a* angulo E D G: hoc est *b* angulo C; & G æquatur *c* F D H; hoc est *d* ipsi B. Ergo etiam G D H *f* æquatur A. Factum est igitur quod petebatur.

o Per 23. l. 1
a Per 32. l. 3
b Per constr.
c Per 32. l. 3.
d Per constr.
f Per corol. 9 p. 32. l. 1.

PROPOSITIO III.

CIrculo circumscribere triangulum æquiangulum dato I L K. Fig. 3.

Latus I K utrimque producatur, ut fiant externi anguli O, & N. Fac in centro A per 23. l. 1. angulos G A B, B A F pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum

tangant

tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum C D E est circulo circumscriptum & æquiangulum dato I L K.

a Per 18. l. 3 In quadrilatero C G A B, anguli G & B
b Per theor. 1. schol. post 32. l. 1. sunt duo *a* recti. Ergo reliqui G A B, & C conficiunt simul etiam duos *b* rectos, ac proinde æquantur duobus simul O, I. Ablatis igitur G A B, & O æqualibus per constr. remanent æquales C, & I. Eodem modo ostenditur E æqualis esse K. Ergo D & L
c Per corol. 9. p. 32. l. 1. *c* etiam æquales erunt. Factum est igitur quod petebatur.

Quod autem tangentes concurrant, sic ostenditur. Anguli O, I, & K, N sunt æqua-
e Per 13. l. 1. les *e* 4. rectis, & I, K sunt minores duobus
f Per 32. l. 1. *f* rectis. Ergo O, N, (hoc est per construct. G A B & B AF) sunt majores duobus re-
g Per corol. 3. p. 13. l. 1. ctis. Ergo GAF est minor duobus *g* rectis. Ergo recta G F cadit inter A & D. Ergo cum A G D, A F D sint recti, erunt DGF,
i Per schol. post 31. l. 1. D F G duobus rectis minores. Ergo *i* C G D, E F D concurrunt versus D. Simili ratione demonstrabis concurrere reliquas.

PROPOSITIO IV.

Fig. 30. *TRiangulo circulum inscribere.*

Duos angulos C & E biseca rectis C A, E A coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares A B, A G, A F. Circulus centro

tro A, per B descriptus, transibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In triangulis enim CAG, & CAB, quia anguli A G C, ABC, itemque GCA, BCA per const. æquantur, & latus quoque A C est commune, etiam A G, A B *a* æqualia erunt. Pari modo ostendam paria esse A B, AF. Circulus ergo descriptus centro A transit per A, G, F: & quia anguli ad B, G, F sunt recti, tangit *b* omnia trianguli latera Fecimus ergo quod petebatur.

a *Per 26. l. 1.*

b *Per 16. l. 3.*

PROPOSITIO V.

Triangulo circulum circumscribere: sive per tria data puncta (B, C, D) non ad unam rectam posita, circulum describere. *Fig. 4.*

Puncta data B, C, D, binis rectis B C, CD connecte, quas biseca perpendicularibus OA, E A concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D transeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ A C, A D, A B. per constr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA, & anguli ad O sunt recti. Ergo AD *a* æquatur A C. Eodem modo A B æquatur A C. Ergo etiam A D, A B *b* æquales. Ergo circulus centro A descriptus per B, transibit etiam per C & D. Quod petebatur.

a *Per 4. l. 1.*

b *Per axio. 1*

Ad

Ad praxim tantum opus centris B, C, D, describere tres æquales circulos se mutuo intersecantes, & per intersectiones ducere rectas, hæ sibi occurrentes dabunt centrum quæsitum.

PROPOSITIO VI. & VII.

Fig. 5.

CIrculo quadratum inscribere, & circumscribere.

Ducantur diametri B D, C E se mutuo secantes perpendiculariter; rectæ, quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inscribunt.

Demonstratio paret ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C. D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura I F G H quadratum est circulo circumscriptum.

Demonstratio patet ex 18. l. 3. ex coroll. 2. p. 36. l. 3. ex 28. & 34. l. 1.

Scholium.

Fig. 5.

QUadratum circumscriptum circulo, duplum est inscripti. Nam quia angulus B C D d Per 31. l. 3 *in semicirculo rectus d est; erit quadratum* e Per 47. l. 1 *ex D B (hoc est quadratum F I) æquale quadratis D C, B C, ac proinde duplum quadrati D C, hoc est quadrati C D E B.*

PRO-

PROPOSITIO VIII. & IX.

QVadrato (BEFC) circulum inscribere & circumscribere. Fig. 6.

Ducantur diametri in quadrato se secantes in A. Centro A per B descriptus circulus transibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc A D perpendicularem ad C B. Centro A per D descriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. C B, E B latera sunt æqualia, erunt anguli B C E, B E C *a* æquales. Angulus autem C B E rectus est per hyp. Ergo B C E, B E C *b* sunt semirecti. Eodem modo ostendam C B F & reliquos esse semirectos, adeoque æquales inter se. Ergo in triangulo B A C cum duo sint æquales anguli C B A, & B C A, erunt AB & AC *c* æquales. Eadem ratione A B, A E, A F æquales erunt. Circulus igitur centro A per B descriptus transibit etiam per E, F, C.

a *Per 5. l. 1.*

b *Per corol, 11. p. 32. l. 1.*

c *Per 6. l. 1.*

Pars 2. Ex A sint perpendiculares insuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA & DBA anguli ad D & G, itemque ad B inter se æquales sunt, latusque AB commune, latera *e* AD, AG æqualia erunt. Eadem ratione æqualia sunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D transiens, transibit etiam

e *Per 26. l. 1.*

f Per 16. l. 3. per G,H,I, tangetque latera *f* omnia quadrati, quia anguli ad D,G,H, I sunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO X.

Fig. 7. *TRiangulum isosceles construere (B A C) in quo angulus ad basim (A B C, vel A C B,) sit duplus anguli ad verticem (A.)*

Sumatur quævis recta A B, quam ita seca *a* in D, ut rectangulum AB C sit æquale quadrato D A. Tum centro A per B describe circulum, cui inscribe B C *b* æqualem D A, & junge A C. Erit triangulum B A C quæsitum.

a Per 11. l. 2.
b Per 1. l. 4.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A describe *c* circulum. Qoniam rectangulum A B D æquatur quadrato A D, hoc est B C, liquet B C tangere *d* circulum D C quem secat C D, Ergo angulus BCD æquatur *e* angulo A in segmento alterno: additoque communi DCA, erit BCA æqualis duobus A, & D C A. Sed quia latera A B, A C æquantur, A B C æqualis *f* est B C A. Ergo etiam ABC æquatur duobus A, & DCA. Sed etiam externus BDC *g* æquatur duobus internis A & DCA. Ergo A B C & B D C æquales sunt. Recta igitur D C æquatur *h* B C, hoc est per const.

c Per 5. l. 4.
d Per 37. l. 3.
e Per 32. l. 3.
f Per 5. l. 1.
g Per 32. l. 1.
h Per 6. l. 1.

conſt. D A. Ergo anguli A & D C A *k* æquantur. Quare angulus A B C, qui duobus oſtenſus eſt æqualis, duplus erit unius A. Factum igitur eſt; qnod petebatur. k Per 5. l. 1.

Corollarium.

ANguli ad baſim ſinguli B & C in triangulo iſoſcelio jam conſtructo ſunt duæ quintæ duorum rectorum, ſeu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A eſt una quinta duorum rectorum ſeu duæ quintæ unius. Patet ex propoſitione hac & ex 32. lib. 1.

PROPOSITIO XI.

CIrculo pentagonum ordinatum inſcribere. Fig. 8. & 7.

Deſcribatur *a* triangulum BAC habens angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum C AD *o* inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & ADC ſeca bifariam rectis C E, D B, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E, rectis lineis connexa dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum. a Per præc. o Per 2. l. 4.

Nam ex conſtructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiam arcus iis ſubtenſi, A E, E D, DC, CB, BA *b* ſunt æquales. Itaque rectæ ſubtenſæ b 28. l. 3.

 arcu-

c Per 27. l. 3. arcubus etiam æquales *c* erunt. Pentagonum igitur æquilaterum est. Est vero etiam
d Per 29. l. 3. æquiangulum *d* quia ejus anguli B A E, AED, &c. insistunt arcubus æqualibus B C D E, A B C D, &c. Factum est igirur quod petebatur.

Corollarium.

Fig. 8. ANgulus Pentagoni ordinati facit sex quintas unius recti, seu tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cùm sint æquales, utpote æqualibus arcubus B C, C D, DE insistentes, & medius per coroll. præced. sit duæ quintæ unius recti, tres simul, hoc est ipse pentagoni angulus, conficient sex quintas unius recti.

Seholium.

INgeniosa est Euclidæa pentagoni inscriptio, sed multò expeditior illa Ptolomæi, quam tradit lib. 1. Almagesti, & est ejusmodi.

Fig. 12. *Ducantur diametri E D, BF se mutuo perpendiculariter intersecantes in A. Radium A D biseca in C. Centro C per B describe arcum, diametro E D occurrentem in G. Recta G B est latus pentagoni, & A G decagoni.*

Demonstratio hic dari nequit, pendet enim à lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clavium in scholio post p. 10. l, 13.

Pro-

Problema.

Super data rectâ (AB) pentagonum ordinatum ita construes. Seca e AB, sicut rectangulum ABC sit æquale quadrato AC. Ex AB utrimque productâ aufer AD BE æquales majori segmento AC. Centris A & D, intervallo AB describe arcus duos se secantes in F: Item centris B & E, eodem intervallo se secantes in G. Rursum centris F & G, intervallo itidem AB, alios se secantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc est æquilaterum, & æquiangulum) super datâ AB. Fig. 9. e Per 11. l. 2.

Æquilaterum esse patet ex constructione: æquiangulum esse sic demonstrabitur. Ducatur DF. Patet ex constructione triangulum AFD esse isosceles. Et basis AD est majus segmentum lateris DF extrema & media ratione secti (est enim DF æqualis AB, & AD, æqualis AC.) Ergo angulus o DAF est duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus FAB est p tres quintæ duorum rectorum sive sex quintæ unius recti: ac proinde est q angulus pentagoni ordinati. Eodem modo ostenditur angulum GBA esse sex quintas unius recti, ac proinde parem FAB. Unde necesse jam est reliquos F, G, I, his æquales esse, ut patet ex 8. l. 1. si concipiatur subtendi recta FG. o Per corol. p. 10. l. 4. p Per 13. l. 1. q Per corol. p. 11. l. 4.

PROPOSITIO XII.

Fig. 10. *Circulo pentagonum ordinatum circumscribere.*

Inscribatur pentagonum ordinatum per præced. G H I K M, ducanturque tangentes in punctis, G,H,I,K, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F. Dico factum.

Ex centro duc rectas A G, A B, A H, A C, AI. Quoniam B G,B H ex uno puncto B, tangunt circulum, æquales *a* erunt. Trigona igitur G A B, H A B, sibi mutuo æquilatera sunt. Æquantur ergo *b* anguli O, P, item Q, S: ac proinde totus B duplus est ipsius P,& totus G A H duplus est S: Eâdem de causâ anguli C & H A I dupli sunt ipsorum T,& N. Sed G A H, & H AI, æquales *c* sunt, quia insistunt arcubus æqualibus GH,HI, per constr. Ergo etiam eorum dimidii S. N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH, duo anguli S,N, æquantur, itemque duo ad H *d* recti, latusque AH est commune, etiam *e* BH,CH, itemque anguli, P, T, æquales erunt. Eodem modo ostendam rectas B G, F G esse æquales. Igitur CB,FB duplæ sunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo ostendam reliqua latera pentagoni circumscripti

a Per corol. 2 p. 36. l. 3.
b Per 8. l. 1.
c Per 29. l. 3.
d Per 18. l. 3.
e Per 26. l. 1.

cumscripti esse æqualia. Illud igitur æquilaterum erit: est vero & æquiangulum, quia cum jam ostensum sit angulos, B, & C, duplos esse æqualium, P, & T; etiam ipsi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumscripsimus. Quod erat faciendum.

Eodem artificio circulo circumscribitur ordinata figura quæcunque, si prius illi similis circulo inscribatur.

PROPOSITIO XIII. XIV.

Pentagono ordinato circulum inscribere, & circumscribere. *Fig. 11.*

Duos pentagoni angulos B, C, biseca rectis B N, C S concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem A L.

Circulus centro A per L descriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus vero descriptus centro A, per B, transibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. In trigonis D C A, B C A, quia latera D C, C A, *a* lateribus B C C A, itemque *b* anguli P, & O æquantur, etiam G, & I, æquales *c* erunt, Sunt vero *a* etiam toti B & D æquales. Quare cum *d* angulus G sit dimidius anguli, B, etiam I, erit dimidius ipsius D. Igitur D quoque bisectus est rectâ DM. Ob eandem causam, reliqui pentagoni an-

a *Per hyp.*
b *Per constr.*
c *Per .l. 1.*
a *Per hyp.*
b *Per constr.*

guli E, F ſunt biſecti; ac proinde omnes dimidii anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares A M, A S, AN, A R. Quoniam igitur in trigonis
e Per corol. 2.p.36.l.3. L B A, M B A, anguli G, & Q æquantur, & latus L B lateri M B *e* æquale eſt, latuſque
f Per 4.l.1. B A commune, etiam *f* A L, AM æquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas A M, AS, AN, AR inter ſe æquari. Circulus ergo centro A tranſiens per L, tranſibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S,
g Per 16.l.3. N, R, recti ſunt per conſtr. tanget *g* quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

Pars 2. in trigono C A B, quia anguli O, & G, jam oſtenſi ſunt æquales, erunt latera
h Per 16.l.1. AC, AB *h* æqualia: eâdemque ratione æquantur etiam A B, AF, AE, A D; ac proinde circulus centro A tranſiens per B, tranſibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus & circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 13.

IN dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere.

Ducatur diameter F A B. Centro B per centrum A, deſcribe circulum, qui datum ſecet in C, & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in, E, & G, ſex

ſex puncta B, C, F, G, D, rectis lineis connexa dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I M, L *a* eſſe æquilatera: deinde quia anguli CAB, EAF, ſinguli *b* efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde ſimul duas tertias, patet *c* E A C etiam eſſe unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales ſunt, ſunt autem & latera E A, A C, æqualia lateribus B A, A C. Ergo *d* baſis E C baſi C B, hoc eſt (ut jam oſtenſum) radio, A C, æqualis eſt. Quare etiam N æquilaterum eſt. Eodem modo oſtenditur æquilaterum eſſe K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L. M, N, æquilatera ſunt. Patet latera ſingula C B B D, DG, G F, F E, E C æquari radio circuli A C, ſeu A B, ac proinde inter ſe. Hexagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero & æquiangulum, cum ſinguli ejus anguli E, C, B, D, G, F conſtent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

a *Ex* 1, *l.* 1.
b *Per corol.* 12. *p.* 32. *l.* 1.
c *Per coroll.* 1. *p.* 13. *l.* 1.
d *Per* 4. *l.* 1.

Corollaria.

1. LAtus hexagoni circulo inſcripti æquale eſt radio.

2. Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertiæ unius recti, conſtat enim ex duobus

bus angulis trianguli æquilateri quorum singuli conficiunt *d* duas tertias unius recti.

d Per corol. 12. p. 32. l. 1.

Fig. 14. 3. Si ducatur insuper diameter PS, perpendicularis alteri F B, & intervallo radii PA, centris P, & S, sectiones fiant in O, & Q, in R, & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C, rectis lineis connexa dabunt duodecangulum ordinatum unâ circini aperturâ circulo inscriptum. Id quod magno est usui in Gnomonica.

Fig. 14. 4. Ex demonstratis elicitur etiam descriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro F B, centro B per A centrum describe arcum C A D. Puncta C, F, D, rectis juncta dant æquilaterum quæsitum.

5. Æquilateri trianguli latus (C X D) â diametro (B F) ad ipsum perpendiculari, quartam partem (BX) abscindit. Nam anguli A CX, BCX, æqualibus arcubus G, D, D B insistentes, æquales *e* sunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Ergo AX, BX *f* æquales sunt. Ergo B X est quarta pars diametri B F.

e Per 29. l. 3

f Per 4. l. 1.

Scholium.

Problema.

Fig. 13. *HExagonum ordinatum super data recta (CB) ita construes. Fac, x triangulum C A B æquilaterum*

x Per 1. l. 1.

laterum supra datam CB. *Centro A per* B, & C *describe circulum. Is capiet hexagonum super datâ rectâ* C B. *Patet ex propos. & corol.* 1.

Theorema.

QUadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum est quadrati ex semidiametro circuli, cui inscriptum est, adeoque ad quadratum diametri est ut 3. *ad* 4.

Ducatur semidiameter A D. Quadratum F D, æquatur quadratis s *F A, D A, & rectangulo F A X bis. Sed rectang. F A X bis est par quadrato semidiametri F A seu D A (nam quia A X, X B æquales* t *sunt rectangulum F A X bis æquatur duobus rectangulis nempe sub F A, A X, & sub F A, X B; hoc est rectangulo* u *F A B; hoc est quadrato F A) Ergo quadratum F D triplum est quadrati ex semidiametro,* Fig. 14. s Per 12. l. 2. t Per coroll. 5. præced. u Per 1. l. 2.

Quia autem quadratum totius diametri F B quadruplum x *est quadrati F A. Patet quadratum F D esse ad quadratum diametri, ut* 3. *ad* 4. x Per 4. l. 2.

Hinc sequitur latus æquilateri trianguli esse ad diametrum, ut radix quadrata ternarii est ad 2. *radicem nempe quadratam quaternarii, ac proinde esse lineas incommensurabiles,*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 15.

IN circulo quindecagonum ordinatum describere.

Cir-

a Per 11. l. 4.
b Per corol. 4. p. 15. l. 4.

Circulo inſcribe *a* latus pentagoni AC & trianguli *b* æquilateri latus A D. Arcum C D biſeca in E. C E eſt latus quindecagoni.

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15. erit arcus A C, 3. & arcus A D, 5. ac proinde arcus C D, 2. ideoque C E unum.

Corollarium.

Fig. 15.

HAc methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera A C, A D circulo ſint inſcripta, arcuum differentia C D continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur.

Vt ſi A D ſit latus quadrati, & A C decagoni. Denominatorum differentia eſt 6. Igitur arcus C D continet 6. latera figuræ novæ. Ea vero eſt 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter ſe multiplicati faciunt 40.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt, quâ ſolo circino & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11. 13, 17. &c. Cum illa inſcriptio figura-

figurarum dependeat à divisione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum desideratur. Licebit tamen, circuli circumferentiâ in 360. partes divisâ, mechanicè figuras quascunque ordinatas circulo inscribere hunc in modum.

Problema 1.

GRadus 360. (*hoc est totam circumferentiam*) *divido per denominatorem polygoni inscribendi (exem. gr. nonanguli) quod unitatibus constat quotiens* (40.) *tot graduum fac in centro angulum* AGK. *AK erit latus figuræ quæsitæ (nonangulæ) circulo inscribendæ.* Fig. 15.

Problema 2.

AT *super data recta quamvis figuram ordinatam describes præsidio tabellæ sequentis Angulus rectus est ad angulum figuræ.* Fig. 15.

					differ.
In Pentagono	*ut*	5	*ad*	6...	1
Hexagono	*ut*	3	*ad*	4...	1
Heptagono	*ut*	7	*ad*	10...	3
Octogono	*ut*	2	*ad*	3...	1
Nonagono	*ut*	9	*ad*	14...	5
Decagono	*ut*	5	*ad*	8...	3
Undecagono	*ut*	11	*ad*	18...	7
Duodecagono	*ut*	3	*ad*	5...	2

Oporteat igitur super data recta XB *heptagonum ordinatum describere. Centro* X *describe circulum* Fig. 15.

culum, à quo abſcinde quadrantem BO. *vide in tabula quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni, reperies, ut* 7. *ad* 10. *& differentia eſt* 3. *Quadrantem igitur partire in* 7. *arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex* O *in* N; *quot unitates habet differentia. Per tria puncta* B X N.
a Per. 5. l. 4. *deſcribe* a *circulum, hic capiet heptagonum datæ rectæ* X B.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. *in ſchol. poſt.* 32. *l.* 1. *quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt anguli cujuſcunque rectilinei, qui numerus diviſus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.*

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6. *triangula æquilatera,* 4. *quadrata,* 3 *hexagona, ſpacium replere poſſunt: Hoc eſt unam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Vt aliqua figura ordinata ſæpius repetita poſſit replere ſpacium, requiritur ut anguli plurium ejus ſpeciei figurarum circa unum punctum compoſiti, poſſint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum poſſunt conſtitui, ut patet ex coroll.* 3. *p.* 13. *l.* 1. *exempli gr. ut triangula æquilatera poſſint replere ſpacium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum*
Fig. 13. N, M L K, I, H, *circa punctum* A *compoſiti efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt,* 6. *anguli trianguli æquilateri (nam unus*

facit

facit duas tertias b *unius recti, ac proinde 6. faciunt, 12, tertias unius recti, hoc est 4. rectos;) item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni (unus enim facit 4. tertias* c *unius recti, ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est rursum 4. rectos.) Ergo &c.*

b Per coroll. 12. p. 32. l. 1.

c Per corol. 2. p. 15. l. 4.

Quod autem id nulla alia figura possit, liquidò constabit si angulum ejus repertum, ut supra, quocunque numero multiplices: semper enim aut deficient à 4. rectis, aut excedent.

ELE.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER V.

QUanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & sexto libro. Sed quamvis illi cæterisque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, desiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, sive duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocunque numero æqualiter multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul majora, vel simul minora a. *Atque ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonstrationes mediatè vel immediatè deducit. Hæc doctrinæ Euclidææ summa: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum est eâ definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur,*

a Hæc definitio declaratur infra. post defin. 6.

citur, vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certò liceat æquales eas esse: vel is sensus illius est, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse, ut ex eâ rationum æqualitas certò possit inferri. Id verò minimè vulgare theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem ullus demonstravit. Si secundum, securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absolutâ rationum æqualitate. Exemplum esto prima sexti. Certi erimus ex Euclidæâ demonstratione rationem triangulorum A B C, & D E F æqualem esse rationi basium A C, & D F, per rationum æqualitatem, solùm intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, basium rationibus verè & absolutè æquales esse, cum demonstratum non sit affectionem illam multiplicium cum absolutâ & verâ rationum æqualitate necessario esse connexam. Quomodocunque igitur illa defintio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonstrationes vacillant, quamdiu demonstratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate semper esse connexam. Denique ut sibi constarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliisque semper displicuit, & tyronibus plurimum semper

Fig. 2. l. 6. tabulâ 4.

facessunt negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quasi medulla, atque anima Geometriæ, & universæ Matheseos est, ab ea labe vindicemus, hæc tria præstare conabimur.

Primò ostendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonstrantur, eo ferè loco habenda esse, quo axiomata, ac proinde declaratione potiùs subinde aliquâ. quam demonstratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus, & perobscuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundo demonstrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æquè multiplices, consequentium quibuslibet æquè multiplicibus vel pariter majores sunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes esse verè æquales, seu similes. Quo stabilito omnes Euclidææ demonstrationes, totaque illius de proportionibus doctrina subsistet, ut qui nostris probationibus contentus non sit, ad Euclidæas quamvis prolixas, jamtamen securas ac solidas se possit convertere. Assignabimus item (ac demonstrabimus,) proportionum æqualium aliud indicium clarissimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propositiones, deducere poterit, qui voluerit.

Tertio. De proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione, tractatum subjungam penitioris Geometriæ studiosis planè necessarium, ubi etiam demonstrabimus axoma illud, seu potiùs thorema hactenus indemonstratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus ſatis erit definitiones & primam partem perlegere.

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. PArs aliquota magnitudinis eſt, quæ aliquoties repetita, magnitudinem metitur, ſive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis eſt pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, eſt pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter, excedit.

2. Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cum minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota eſt; ſive cum major minorem aliquoties continet præcisè.

3. Ratio ſive proportio eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nominatur, sive is qui nominandi casu effertur: alter Consequens.

Cum antecedens & consequens sunt æquales, proportio æqualitatis dicitur, cum inæquales, dicitur esse proportio inæqualitatis.

4. Ratio seu proportio rationalis est, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest. Proportio irrationalis est, quæ existit inter magnitudines in commensurabiles, & nullis numeris explicari potest.

Porro commensurabiles quantitates sunt, quas aliqua communis mensura metitur; incommensurabiles quas nulla metitur mensura communis.

Fig. 1. l. 5. tabulâ 3. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) sunt similes, æquales, eædem; cum unius antecedens (A) æquè seu eodem modo (hoc est nec magis, nec minus) continet suum consequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet suum consequens (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in suo consequente (B,) quo (C) antecedens alterius in suo (D.)

Fig. 3. 6. Duæ rationes sunt dissimiles, sive una ratio est major alterâ, quando unius antecedens (I) magis continet suum consequens

Fig. 4. (L;) quam alterius antecedens (O) contineat

neat ſuum conſequens (Q;) vel quando antecedens unius, minus continetur in ſuo conſequente, quàm antecedens alterum contineatur in conſequente ſuo.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

QUid porro ſit unum antecedens æquè, vel magis continere ſuum conſequens, quàm antecedens alterum contineat ſuum, ſi proportiones ſint rationales, definiri & explicari ulterius poteſt per numeros, ut ſi A ſit triplum B, & C triplum F, perſpicuum erit, quid ſit, A æquè ſeu eodem modo continere B, quo C continet F: vel ſi I ſit triplum L, O verò duplum, Q; conſtabit rurſum, quid ſit I magis continere L, quam O contineat Q. At ſi proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines incommenſurabiles A, B, perſpicuum eſt A non ſolùm majus eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe majus, (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet major minorve quàm A:) neque tamen ulteriùs quæri, aut explicari debet, quis ſit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus non debet ulteriùs quæri, quid ſit unam certo modo continere alteram, ita neque cum dantur quatuor proportionales incommenſurabiles, quæri debet ulteriùs, quid ſit C eodem modo continere D, quo A Fig. 1. Fig. 3. Fig. 5 Fig. 5.

 con-

continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulterius est inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, ulterius inexplicabilis est.

Fig: 5. *Quod verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles sint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diversis terminis constantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, & auferatur B ex A incommensurabili secum quantitate, quoties potest, puta ter: & supersit E F. Sit deinde O tertia pars ipsius C, sit insuper quæpiam X ipsi C incommensurabilis, quæ major sit quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter, C vero continet X minus quam ter (nam C continet præcisè ter O minorem quam X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q, quarta pars C, & quæpiam esto Z, ipsi C incommensurabilis, quæ minor sit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus, quam quater; C vero continet Z plus quam quater (cum C præcisè quater contineat, Q majorem quam Z) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B.*

Fig. 5. *Iam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quam A ad B; & rursum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quam A ad B; manifestum est etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eandem habere rationem quam A ad B. Quod quidem perinde clarum est lumine naturali, atque istud: dabile est majus quam P, & dabile est minus quam P, ergo dabile est æquale aliquod ipsi P.*

Quid

Quid in proportionum æqualium definitione Euclidæâ desideretur.

Quod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales esse dicit, cum antecedentim quæcunque æquè multiplices I, Q, consequentium quibuscunque æquè multiplicibus I, R, vel simul majores sunt, vel simul minores, vel simul æquales; hoc est cum I superante L, etiam Q semper superat R; & cum I superatur ab L, etiam Q semper superatur ab R; & cum I est æqualis L, etiam Q semper est æqualis R. Vbi benè notandum est, Euclidem non assumere æquè multiplicium excessus defectusque proportionales, seu similes, sic enim ineptè idem per idem explicasset; sed excessus & defectus simpliciter. Nihilominus hic aliquid in summo Geometrâ desiderari jam supra declaravimus. Nam vel cupit hisce verbis rationes æquales definire, & sic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; evidens quippe est, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere: vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & sic demonstrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita semper esse connexam, ut hæc ex illâ certò possit inferri. Quæ quidem connexio & perobscura & demonstratu difficilis est: vel denique pe rationum æqualitatem nihil aliu dinte lligit, quam simultaneum illum excessum defectumve multiplicium; Et sic toto Fig. 21.

5. ac 6. libro, cum quatuor magnitudines, proportionales esse demonstrat, nihil sciemus aliud, quàm dictum excessum, & defectum illis competere, incerti planè, utrum magnitudines, de quibus agitur, sint verè proportionales.

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile assignatur.

QUod si rationum æqualium desideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale assignabimus, demonstrabimusque theor. 5. & 6. partis 2 estque ejusmodi.

Fig. 26. Rationes o æquales sunt (A B ad C F; G M ad N Q) quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali semper numero continentur.

o Majoris inæqualitatis.

Ut si una decima ipsius C F contineatur in A B ducenties, una quoque decima N Q contineatur ducenties in G M, & si una centesima C F contineatur millies in A B, etiam una centesima N Q contineatur millies in G M, & sic deinceps in infinitum, erit A B ad C F, ut G M ad N Q.

Inæquales autem rationes sunt, quando aut consequentes ipsæ, aut consequentium aliquæ similes aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur. Et illa ratio major est, cujus vel conse-

quens

quens, vel consequentis aliquota, sæpius continetur in antecedente.

Vt si una centimillesima C F sæpius contineatur in A B, quam una centimillesima N Q, in G M, erit ratio A B ad C F major ratione G M ad N Q, quamvis innumeræ aliæ consequentium C F, N Q similes aliquotæ in antecedentibus A B, G M æquali numero continerentur. Fig. 26.

Porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties possunt, æquali numero sunt ablatæ.

Ex hoc indicio rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuò elucescit, cum sic antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata, consequentibus commensurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes sunt, quæ in suis totis æquè, seu eodem modo continentur, ut qualis pars sui totius est una, talis pars sui totius sit altera. Quod sanè nihil allud est, quam partes ad sua tota eandem habere rationem.

Similes vero partes aliquotæ sunt, quæ sua tota æqualiter metiuntur: ut si utraque sit sui totius una tertia, una decima &c, Fig. 6.

8. Magnitudines (A B C D) continuè proportionales dicuntur, cum medii termini (B, C) bis sumuntur; hoc est cum sunt consequens respectu præcedentis, & antecedens respectu sequentis.

Continuas rationes sic efferimus, A est ad B, ut B ad

B ad C, & B est ad C, ut C ad D, & sic deinceps.

9. Magnitudines disrretim prop rtionales sunt, cum nullus terminus bis accipitur.

Fig. 1. *Discretas rationes sic efferimus A est ad B, ut C ad F. Cum plures fuerint proportionales magnitudines, quam tres, si proportionales dicantur, semper intelligitur discretim.*

Fig. 6. 10. Cum magnitudines (A B C D) fuerint continuè proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad secundam (B;) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam, ejus, quam eadem prima habet ad secundam (B) & sic deinceps.

11. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, consequentes consequentibus.

Fig. 1. Ut si A est ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C, & B, F.

Reliquæ definitiones commodiùs ex ipsis propositionibus intelligentur.

Quintus liber propositiones complectitur 25. Ex his 10. non alium usum babent, quam ut reliquæ earum ope per multiplices demonstrentur. Illis igitur prætermissis, 15. reliquas proponemus solas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theoremata non solis lineis, sed omnibus omnino quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitatis repræsentant.

Axioma.

Axioma.

DAtis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis est quarta Z, ad quam C eam proportionem babet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO I. 2. 3. 4. 5. 6.

IN nostra methodo sunt superfluæ.

PROPOSITIO VII.

SI quantitates A & B fuerint æquales & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B est ad Z. Fig. 7.

& Z erit ad A, ut eadem Z est ad B.

Hæc propositio uti & sequentes quatuor, sunt merissima axiomata, ac proinde nullo modo demonstrari debent.

PROPOSITIO VIII.

SI quantitates (C & F) fuerint inæquales; major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eandem Z. Fig. 8.

Et Z ad majorem (minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F, quæ minor est quam C.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales ſunt A & B.*

Et ſi eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rurſum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8. *SI C ad Z majorem rationem habeat, quam F ad Z, erit C major quam F.*

Et ſi Z ad F majorem rationem habeat, quàm eadem Z ad C, erit F minor quam C.

PROPOSITIO XI.

Fig. 9. *RAtiones, quæ eidem rationi ſunt æquales, eædem, ſimiles, (idem omnia ſignificant) ſunt æquales, eædem, ſimiles inter ſe.*

Ut ſi tam ratio A ad B, quam ratio C ad F, ſint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F æquales inter ſe. Sive ſi A ſit ad B, ut X ad Z, & C ſit ad F, ut X ad Z: erit quoque A ad B ut C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales.

PRO-

PROPOSITIO XII.

SI singulæ magnitudines quotcumque (A, B, C.) eandem habuerint proportionem ad singulas totidem (F, I, L:) quam proportionem habent singulæ ad singulas, sive una (A) ad unam (F;) eandem habebunt omnes (A, B, C) simul sumtæ, ad omnes (F, I, L) simul sumtas. Fig. 10.

Rem per se manifestam exemplo tantum aliquo rationali declaro; ut si singulæ A, B, C, singularum F, I, L, sint triplæ (hoc est si singulæ ad singulas eandem habeant rationem quam 3. ad 1 3) etiam A, B, C simul sumtæ, simul sumtarum F, I, L triplæ erunt, (hoc est, etiam A, B, C simul sumtæ ad F, I, L simul sumtas rationem habent eandem, quam 3 ad 1. In proportione irrationali res æquè clara est.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

IN nostra methodo sunt superfluæ.

PROPOSITIO XV.

ALiquotæ similes (F, I) eandem inter se rationem habent quam tota (A, B.) Fig. 10.

Et

Et universim partes similes (C,F) sunt inter se ut tota (A,B.)

Verè instar axiomatis haberi potest, si rectè intelligatur, quid sint partes similes. Vide defin. 7.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11 vel 1. *SI prima (A) sit ad secundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F;) etiam permutando erit prima (A) ad tertiam (C,) ut secunda (F) ad quartam (F.)*

Ponantur B & F esse minores quam A & C. nam si æquales sint res patet. Quoniam A ponitur esse ad B, ut C ad F, erunt per defin. 7. B & F, totorum A & C partes similes, ac proinde per præced. quam proportionem inter se habent tota A, C, eam quoque habent partes similes B, F; hoc est, A est ad C, ut B ad F.

Scholium.

SI A est ad B, ut C ad F, etiam invertendo erit ut B ad A, sic F ad C. Per se patet.

Apud Euclidem hoc est corollarium prop. 4. quæ cum in nostra methodo tanquam superflua, sit omissa, visum est corollarium illud hoc loco ponere.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) ſit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI;) etiam dividendo erit (AC) exceſſus antecedentis primi ſupra ſuum conſequens, ad idem conſequens (CB,) ut (FL) exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundum, ad ſecundum conſequens (LI.) *Fig. 12.*

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt: ſi tota AB, FI eandem rationem habeant, ad X & Z, etiam ſimilibus partibus mulctata eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc eſt, adhuc AB ſic mulctata erit ad X, ut FI ſic mulctata ad Z. Id vero eſt quod aſſerit propoſitio. Nam quia ponitur AB eſſe ad CB, ut FI ad LI, erunt *a* CB, LI ſimiles partes totorum AB, FI; & AC, FL, erunt tota ſimilibus partibus mulctata. Cum ergo tota habuerint ad CB, LI, eandem rationem, etiam AC, FL, (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eandem inter ſe habere rationem, hoc eſt adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

a *Per def. 7. l. 5.*

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Fig. 12.

SI antecedens unum (A C) ſit ad conſequens unum (C B,) ut antecedens alterum (F L) ad conſequens alterum (L I;) etiam componendo erit (A C cum BC) primum antecedens cum ſuo conſequente, ad idem conſequens (C B,) ut (F L cum L I) ſecundum antecedens cum ſuo conſequente, ad conſequens (L I.)

Rurſum enim inſtar axiomatis aſſumi poterit: ſi duæ quantitates A C, F L, eandem ad X & Z habeant rationem, etiam A C, F L ſimiliter, ſeu proportionaliter auctæ pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc eſt adhuc erit A C ſic aucta ad X, ut F L ſic aucta ad Z. Id verò eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur A C eſſe ad C B, ut, F L, ad L I. Quare ſi ipſis A C, F L, addantur C B, L I; erunt A C, F L proportionaliter, ſeu ſimiliter auctæ. Cum igitur A C, F L eodem modo ſe habeant ad C B, L I, etiam cum ſimiliter fuerint auctæ (hoc eſt ipſæ jam A B, F I) pergent ad eaſdem C B, L I eodem modo ſe habere; hoc eſt adhuc A B erit, ad C B, ut F I ad L I.

Corol-

Corollarium. 1.

SI antecedens unum (A B) fuerit ad consequens (C B) ut antecedens alterum (F I) ad consequens alterum (L I) etiam antecedens primum (A B) erit ad (A C,) excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum (F I) est ad (F L) excessum suum supra consequens alterum (L I.) *Fig 12.*

Cum enim A B sit ad C B, ut F I ad L I, erit dividendo *a* A C ad C B, ut F L ad L I: & inuertendo *b* B C ad C A, ut I L ad L F: & componendo *c* B A ad C A, ut I F ad L F.

a *Per 17. l. 5.*
b *Per schol. p. 16. l. 5.*
c *Per 18. l. 5.*

Hæc argumentatio vocatur conversio rationis.

Corollarium 2.

SI A C est ad A B, ut F L ad F I, erit quoque A C ad C B, ut F L ad L I; & A B ad C B, ut F I ad L I. *Fig. 12.*

Cum enim sit ut A C ad A B, sic F L ad F I, erit invertendo B A ad C A, ut I F ad L F: & diuid. *d* B C ad C A, ut I L ad L F: & rursum invertendo A C ad C B, ut F L ad L I: & compon. *e* A B ad C B, ut F I ad L I.

d *Per 17. l. 5.*
e *Per 18. l. 5.*

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum (A B) est ad totum (F I,) ita ablatum (C B) sit ad ablatum (L I,) *Fig. 12.*

etiam ut totum est ad totum, ita reliquum (AC) erit ad reliquum (FL.)

Omnino clarum est per se. Potest tamen ex præcedentibus sic ostendi: quoniam
a Per 16. l. 5. A B est ad F I, ut C B ad L I, erit permutando *a* A B ad C B, ut F I ad L I. Ergo
b Per corol. 1. præced. per conversionem rationis A B est ad A C, ut *b* F I ad F L. Ergo permutando *c* ut A B
c Per 16. l. 5. ad F I, ita A C ad F L.

PROPOSITIO XX. XXI.

IN nostra methodo sunt superfluæ.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13.

SI fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & sic deinceps: erit ex æquo ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimain R.

Ponantur C, R esse minores quam B, Q: eadem foret ostensio, si majores ponerentur. Quoniam *a* B est ad C, ut Q ad R, erunt
a Per hyp. C, R totorum B, Q, *b* partes similes, Cum
b Per defin. 7. l. 5. igitur A, & O ad B & Q, eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C & R, quæ sunt ipsorum, B, & Q partes similes, eandem rationem. Instar enim axiomatis est, si duæ quantitates ad alias duas eandem inter se habuerint

habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles, eandem inter ſe habere rationem.

Si plures fuerint utrimque qnantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 14.

SI fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam, & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O ; erit ex æquo ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.

Ut B eſt ad C, ita *o* poteſt Q eſſe ad aliam quampiam S. Jam quia ut B ad C, ſic *p* R eſt ad O, & ut B ad C *q* ſic Q eſt ad S; erit R ad O, *a* ut Q ad S. Igitur permutando *b* R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O eſt ad Q, ut *f* A ad B, & Q eſt ad S, *i* ut B ad C; ex æquo erit O ad S ut *c* A eſt ad C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt ad S. Ergo etiam *d* R eſt ad Q, ut A ad C.

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
p *Per hyp.*
q *Per conſtr.*
a *Per 11. l. 5.*
b *Per 16. l. 5.*
f *Per hyp.*
i *Per conſtr.*
c *Per præc.*
d *Per 11. l. 5.*

Vocatur à Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 15.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F.

Quoniam I per hyp. est ad B, ut L ad F, erit quoque *a* invertendo B ad I, ut F ad L. Cum igitur A sit ad B, *b* ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit *c* ut A ad I, sic C ad L. Igitur *d* componendo ut A I est ad I, sic C L est ad L: I verò est ad B, *e* ut L ad F. Rursum igitur *f* ex æquo A I est ad B, ut C L ad F.

a Per schol. p. 10. l. 5.
b Per hyp.
c Per 22. l. 5.
d Per 18. l. 5.
e Per hyp.
f Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16.

SI quatuor magnitudines (A B, C F, I, L) fuerint proportionales, maxima (A B) & minima (L) duabus reliquis (C F I) majores erunt.

Sit A B ad C F, ut I ad L. Ex maxima A B sumatur A Q æqualis I; & ex C F sumatur C R par minimæ L. Erit igitur A B tota ad totam C F, ut ablata A Q ad ablatam C R. Ergo reliqua Q B est ad reliquam *a* R F, ut tota A B ad totam C F. Sed A B major *b* est quam C F. Ergo & Q B major quam R F. Jam vero quia A Q ipsi I, & C R ipsi L, æquales sunt, etiam A Q cum L, ipsi I cum C R æquales erunt. Quare si ad A Q cum L, addatur majus Q B, & ad I cum C R addatur minus R F, erit totum A Q B cum L, majus toto, I, cum C R F. Quod erat demonstrandum.

a Per 19. l. 5.
b Per hyp.

Quæ

Quæ sequuntur non sunt proportiones Euclidis, sed ex Pappo Alexandrino, aliisque desumtæ ob frequentem earum usum Euclidæis subjungi solent.

PROPOSITIO XXVI.

SI prima (A) ad secundam (B) majorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F;) habebit invertendo (B) secunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam, Fig 17.

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam C ad F. Igitur A ad *o* aliquam B X (quæ *a* major erit quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Invertendo igitur erit B X ad A, ut F ad C, ac proinde *b* B ad A in minori ratione erit, quam F ad C.

o *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
a *Per* 10. *l.* 5.
b *Per* 8. *l.* 5.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 17.

SI A habet ad B majorem rationem quam C ad F, etiam permutando A ad C majorem rationem habebit, quam B ad F.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F, erit *o* ratio A ad aliam B X (quæ necessario major est quam *a* B) æqualis

o *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
a *Per* 10. *l.* 5.

b Per 16. l. 5. lis rationi C ad F. Jam igitur *b* permutando A erit ad C, ut B X ad F. Sed B X
c Per. 8. l. 5. ad F est in majori ratione, *c* quam B ad F. Ergo etiam A est ad C in majori, quam B ad F.

Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 18.

SI A B ad B C majorem rationem habet, quam F I ad I L; etiam componendo A C, ad B C majorem rationem habet, quam F L ad I L.

o Per axio. ante 1, l. 5.
a Patet ex 10. l. 5.
b Per 18. l. 5.
c Per 8. l. 5.

Quoniam ponitur A B ad B C esse in majori ratione, quam F I ad I L. Ergo *o* alia O B (quæ necessario erit minor, *a* quam A B) est ad B C, ut F I ad I L. Ergo *b* componendo O C est ad B C, ut F L ad I L. Ergo A C est ad B C in *c* majori, quam F L ad I L.

Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 18.

SI A C ad B C majorem rationem habet, quam F L ad I L; etiam dividendo A B ad B C majorem habet rationem: quam F I ad I L.

Quia

Quia ponitur A C ad B C majorem habere rationem, quam F L ad I L; ergo *o* alia O C (quæ necessario minor erit, *a* quam A C) erit ad B C, ut F L ad I L, Iam igitur erit dividendo *b* O B ad B C, ut F I ad I L. Ergo A B est ad B C in *c* majori, quam F I ad I L.

o *Per axio. ante 1 l. 5.*
a *Per 10. l. 5.*
b *Per 17. l. 5*
c *Per 8. l. 5.*

Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18.

SI *A C ad B C majorem rationem habet, quam F L, ad I L; convertendo habebit A C ad A B minorem, quam F L ad F I.*

Quoniam A C est ad B C in majori quam F L ad I L, erit dividendo *a* A B ad B C in majori, quam F I ad I L. Ergo invertendo *b* C B ad B A, est in minori, quam L I ad I F. Ergo componendo *c* C A est ad B A in minori, quam L F ad I F.

a *Per 29. l. 5.*
b *Per 26. l. 5.*
c *Patet ex 28. l. 5.*

PROPOSITIO XXXI,

Fig. 19.

SI *A B ad C majorem rationem habeat, quam F ad I; & C ad L Q majorem rationem habeat, quam I ad S, & sic deinceps; etiam prima A B ad* *ultimam L Q majorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.*

Quoniam A B est ad C in majori quam
o Per axio F ad I; Ergo alia *o* quæpiam OB (quæ ne-
a Per 10. l. 5. cessario minor *a* erit quam AB) est ad C,
ut F ad I. Et quia C est ad L Q in majori
quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam
c Per 22. l. 5. L R (quæ erit necessario major quam LQ)
est ut I ad S. Igitur ex æquo *c* O B est ad
d Per 8 l. 5. L R ut F ad S. Ergo O B est ad L Q in
e Per eand. majori quam *d* F ad S. Ergo A B est ad
L Q *e* in multo majori, quam F ad S.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 19. *SI A B ad C majorem rationem habet, quam I ad S; & C ad L Q majorem quàm F ad I, etiam ex æquo habebit majorem rationem A B ad L Q, quàm F ad S.*

Demonstratio eadem quæ præcedentis, sed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 12. *SI tota (A B) ad totam (F I) majorem rationem habuerit, quam ablata (C B) ad ablatam (L I,) tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (A C) ad reliquam (F L.)*

Quia

Quia A B est ad F I in majori, quam C B ad L I; erit *a* permutando etiam A B ad C B in majori quam F I ad L I. Ergo convertendo *b* A B est ad A C in minori, quam F I ad F L: Ergo etiam permutando *c* A B est ad F I, in minori, quam A C ad F L.

a Per 27. l. 5.
b Per 30. l. 5.
c Patet ex 27. l. 5.

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) sunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ, aut triplicatæ & sic deinceps, æquales sunt etiam ipsæ. Fig. 10.

Quia ratio A ad C duplicata est rationis A ad B, erit *a* ut A ad B, sic B ad C. Ob eandem causam erit ut E ad F, sic F, ad O. Cum ergo sit ut A ad B, sic per hyp. E ad F; & ut B ad C, sic F ad O (nam ut B ad C, sic A ad B, hoc est E ad F, hoc est F ad O) igitur *b* ex æquo erit, ut A ad C, sic E ad O.

a Per defin. 10. l. 5.
b Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXXV.

RAtiones æquales A ad C & E ad O, sint duplicatæ, aut triplicatæ, et sic deinceps, rationum A ad B, & E ad F; etiam hæ æquales erunt. Fig. 20.

Si negas, sit ut A ad B, sic E ad aliam Z inæqualem ipsi F, & fiat ut E ad Z, sic Z ad c Per defin. 10. l. 5. d Per præc. e Per 9. l. 5.

ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ *c* ſunt rationes A ad C, & E ad X, etiam ratio E ad X, æqualis erit *d* rationi A ad C, hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo *e* æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales eſſe. Ergo A eſt ad B, ut E ad F ſeu Z. Quod erat demonſtrandum.

Ex contradictorio aſſertionis directè illata eſt aſſertio.

PARS SECUNDA.

Euclidæa per multiplices definitio æqualium rationum, demonſtratur, exhibeturque ac demonſtratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

Proportionum elementis methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, ut quod ſecundo loco ſupra promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod à nullo hactenus factum eſt) demonſtrabimus, nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium quælibet æquè multiplices, conſequentium æque multiplicibus, ſemper ſunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cum ſatis ardua, atque prolixa

ſit

sit demonstratio, ut jam reipsa cognoscemus, facilè apparebit præpostere egisse Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium sumi voluit hac multiplicium in demonstratâ hactenus proprietate, cujus tam remota & obscura sit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma 1.

SIt A ad B, ut C ad F; & sint antecedentium, A, C, quælibet æquè multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & sic deinceps. Sint item consequentium B, F quælibet æquè multiplices L, R. Fig. 21.

Erit quoque ut I ad L, sic Q ad R.

Quoniam enim A est ad B, ut C ad F, etiam I dupla ipsius A erit ad B, ut Q dupla ipsius C est ad F: &, I, tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F. Et sic in infinitum. Quod quidem æquè est per se clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I est ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad L duplam ipsius B, ut Q ad R duplam ipsius F; & ut I ad L triplam ipsius B, ita Q ad R triplam F: Et sic in infinitum, quod rursus tam clarum est, quam axioma quodcunque. Liquet ergo propositum.

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem mensuram C; erit A toties sumta, quoties est C in B, æqualis quantitati B toties sumtæ, quoties C est in A. Fig. 22.

Bona-

Ponatur C contineri in B quater; & in A sexies, ac proinde B esse 4. C, & A esse 6. C. Igitur 6. C (hoc est A) ducta in 4. C (hoc est toties sumta quoties C est in B) efficiunt 24. C. Similiter 4. C (hoc est B) ducta in 6. C (hoc est toties sumta quotios C est in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties sumta quoties C in B, æquatur B toties sumtæ quoties C in A.

Theorema I.

Fig. 23. *SI ratio A B ad F I major sit ratione L ad R, tales sumi possunt antecedentium (A B & L) æquè multiplices, tales item æquè multiplices consequentium (F I, & R,) ut multiplâ antecedentis A B rationis majoris excedente multiplam consequentis (F I) multiplex antecedentis L, rationis minoris non excedat multiplicem sui consequentis (R.)*

Sit ratio A B ad F I major ratione L ad R, & sint AB, & L, majores rationum termini. Quoniam igitur A B ad F I majorem habet rationem quàm L ad R; a Per axio. ante 1. l. 5. *alia quædam quantitas Z a habebit ad F I eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad F I æqualis est rationi L ad R, ponitur que ratio A B ad F I major ratione L ad R, erit quo-*

quoque ratio A B ad F I major ratione Z ad F I, ac proinde A B major est quam Z: quæ omnia per se sunt manifesta. Igitur ex *A B sumi poterit A C per Z, eritque etiam A C ad F I, ut L ad R. Auferatur residuum B C ex A C quoties potest, puta ter; tum seca A C in tot æquales partes exem. gr. in 6. donec earum una possit auferri sæpius ex F I, quam B C ex A C, puta quater, & residuum esto O I, quod erit minus unâ particulâ. Hoc quoque fieri posse per se est manifestum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ à proportionibus non dependet.* Particularum vero illarum quantitas *esto Q.*

Quoniam igitur Q est mensura communis quantitatum A C, F O, ergo A C toties sumta, quoties Q est in F O, nempe quater, æquatur F O toties sumtæ, quoties Q est in A C, nempe sexies. Deinde quia *residuum O I est minus unâ particulâ, hoc est quam Q, erit O I toties accepta, quoties Q est in A C, nempe sexies, adhuc minor quam A C.* Ulterius quia *B C minus sæpè auferri potest ex A C, quam Q, ex F I (positum quippe fuit B C ex A C auferri tantum posse ter, Q vero quater ex F I.) Manifestum est B C toties sumtum, quoties Q in F I, nempe quatur, majus fore quam A C, ac proinde multo majus esse quam O I sumtum sexies, quod ostendi supra esse minus quam AC. Atqui ostensum est A C sumtum quater, & F O sumtum sexies esse æqualia. Quare si A C sumto quater addatur B C quater, & ad F O sexies sumtum addatur O I sexies, erunt 4. A C & 4. B C, hoc est 4. A B majora, quam 6. F O & 6. O I, hoc est quam 6. F I.*

6. FI. Quia vero 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur supra L esse ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora sunt quam 6. R. Acceptæ sunt igitur antecedentium AB, & L æquè multiplices, nempe quadruplæ, item æquè multiplices consequentium FI & R, nempe secuplæ, & tamen ostensum est multiplam antecedentis AB (nempe 4. AB) superare multiplicem consequentis FI (nempe 6. FI:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L) non excedere multiplicem consequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonstrandum.

Theorema 2.

Fig. 21. SI antecedentium (A, C) quælibet æquè multiplices, quibuslibet consequentium (B, F) æquè multiplicibus, sint vel simul majores, vel simul minores, vel simul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.

Si negas, sit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C sumi tales æquè multiplices, item tales consequentium B, F æquè multiplices, ut multiplâ antecedentis A excedente multiplam consequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam consequentis F, quod est absurdum, quia evertit hypothesim. Ergo &c.

In hac demonstratione, uti & in sequentibus eæ solum propositiones ex quinto libro adhibentur, quæ per se æquè sunt manifestæ, atque ipsa axiomata.

Theorema 3.

SI sumi possint antecedentium (O, R) tales æquè multiplices, itemque tales æquè multiplices consequentium (Q, S,) ut multiplâ antecedentis unitus (O) superante multiplam consequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam sui consequentis (S;) erit ratio (O ad Q,) cujus antecedentis multiplex superat multiplicem consequentis, major ratione alterâ (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inæquales esse sic ostendo. Si essent æquales; quæcunque antecedentium æquè multiplices (ut patet à fortiori ex lemmate primo) quibuscunque æquè multiplicibus consequentium vel simul majores essent, vel simul minores, quod est absurdum, quia evertit hypothesin.

Quod autem Ratio O ad Q major sit, cujus antecedentis multiplex superat, sic ostendo. Si negas, sit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi possunt antecedentium R & O æque multiplices, talesque item æquè multiplices consequentium S & Q, ut multiplâ antecedentis R rationis

tionis majoris excedente multiplam consequentis S, multipla antecedentis O non excedat multiplam consequentis Q: non autem tales (quod facilè ex 1. lem. ostenditur) ut multipla O excedente multiplam Q multipla R non excedat multiplam S. Quod est absurdum, cum evertat hypothesim.

Theorema 4.

Fig. 25. *CUm proportio irrationalis est, nulla multiplex antecedentis ulli consequentis multiplici æqualis esse potest. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, solummodo multiplicium simultaneus excessus, defectusque spectari debent.*

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties sumta posset fieri æqualis B aliquoties sumtæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z: singulæ A & B essent eidem Z commensurabiles, ac proinde & commensurabiles inter se, contra hypothesim.

Quia tamen secundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales, simultaneo excessui & defectui, æqualitatem simultaneam addidimus cum Euclide.

Demonstratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & sexti libri demonstrationes subsistunt: patetque multiplicium illum excessum defectumque simultaneum, infallibile

bile indicium esse æqualitatis rationum, non quidem per se immediatè, sed demonstratione, quam modo dedimus, priùs ritè intellectâ.

Verum quia indicium per multiplices, quantumvis jam securum, nihilominus remotum est & implexum, hîc aliud clarissimum & proximum, quod promisi supra, demonstrabo.

Theorema 5.

SI consequentes (C F, N Q) & consequentium qualibet aliquotæ similes (puta et decimæ et centesimæ et millesimæ, & ita deinceps sine termino) in antecedentibus (A B, G M) æquali semper numero contineantur; rationes (A B ad C F: & G M ad N Q) æquales erunt. Fig. 26.

Nota æquali numero continuari dicuntur, cum, si auferantur quoties possunt, æqualis est utrimque numerus ablatarum.

Demonst. Si negas, erit ratio alterutra, puta A B, ad C F, major ratione G M ad N Q. Quoniam igitur A B ponitur ad C F majorem habere rationem quam G M ad N Q, manifestum est aliquam (puta A D) minorem quam A B, æqualem habere rationem ad C F, quam G M ad N Q. Manifestum similiter est, aliquam ipsius C F aliquotam (ex. gr.

unam trigesimam) esse minorem differentia D B. *Sit* C E *una trigesima ipsius* C F, & *auferatur ex* A B *quoties potest exemp. gr. milles, totumque ablatum sit* AO. *Quoniam igitur* A O *est* 1000 C E, & C F *est* 30 C E, *erit* A O *ad* C F *ut* 1000 *ad* 30.

Sumatur jam ex N Q *aliquota* N P, *similis alteri* C E, *nempe etiam una trigesima. Quoniam ex hyp.* C E, N P *æquali numero in* A B, G M *continentur, &* C E *ablata ex* A B *quoties potuit, ablata fuit millies, etiam* NP *ex* GM *auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum* G K *est* 1000 N P, & N Q *est* 30 N P, *erit* G K *ad* N Q *ut* 1000 *ad* 30, *hoc est ut* A O *ad* C F. *Quia vero* C E *ablata ex* A B *quoties potuit reliquit* O B, *erit* O B *minus quam* C E. *Sed* C E, *nempè una trigesima* C F, *est minor posita quam* D B. *Ergo* OB *est multò minor quam* D B. *Ergo* A O *est major quam* A D. *Ergo* A O *ad* C F *majorem rationem habet quam* A D *ad* C F. *Sed ponebatur esse* A D *ad* C F, *ut* G M *ad* N Q. *Ergo* A O *ad* C F *majorem rationem habet, quam* G M *ad* N Q: *hoc est multò majorem quam* G K *ad* N Q. *Quod est absurdum, quia ostendi supra* A O *esse ad* C F *ut* G K *ad* N Q. *Non possunt igitur rationes datæ* A B *ad* C F & G M *ad* N Q *esse inæquales. Æquales igitur sunt, Quod erat demonstrandum*

Theorema. 6.

SI aut aut consequentes (CF, NQ) aut consequentium aliquæ similes aliquotæ (ex. gr. decimæ) inæquali numero in antecedentibus (AB , GM) contineantur, rationes (AB ad CF; et GM ad NQ) inæquales erunt, & erit illa major, cujus consequentis aliquota sæpius contineetur. Fig. 26.

Contineatur CE decima una ipsius CF, in AB millies, & sit AO 1000 CE; tum vero residuum OB erit minus quam una CE. Deinde NP una decima NQ, contineatur in GM tantum nongenties nonagies septies, & sit GK 997 NP; patet residuum KM fore minus una NP, ac proinde 1000 NP fore majores quam GM. Sit ergo GR, 1000 NP. Quoniam igitur AO est 1000 CE, & GR, 1000 NP; CF vero 10 CE, & NQ, 10 NP, erit AO ad CF, ut GR ad NQ. Ergo AB est ad CF in majori ratione, quam GR ad NQ; ac proinde in multo majori, quam GM ad NQ. Quod erat demonstrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimũque indicium, ex quo rationes æquales, inæqualesque certò liceat discernere. Et possemus ex illo, omnes, quæ quidem axiomata non ſint, l. 5, propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multò expeditius demonſtrare, niſi magis ex uſu diſcentium putaremus, illas eâ methodo, quâ in primâ parte uſi jam ſumus, proponere.

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione.

I.

Proportionis Diviſio.

Prima diviſio eſt in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. utraque dividitur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem maioris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque ſpecies, quæ ſunt; multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens.

Ratio multiplex eſt quando major minorem aliquotier, continet, ut bis, ter, quater &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio

Ratio superparticularis est, quando major minorem continet semel, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3 ad 2, vel 6 ad 4 quæ dicitur sesquialtera, quia major minorem continet semel & ejus dimidium: ratio 4 ad 3 sive 16 ad 12, quæ dicitur sesquitertia quia major minorem continet semel, & tertiam ejus partem, & sic deinceps.

Ratio superpartiens est, cum major minorem continet simel, & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis est ratio 8 ad 5, vel 14 ad 10, quia 8 continet 5 semel, & insuper 3, hoc est tres quintas ejusdem numeri 5. quæ tamen simul sumtæ non conficiunt unam aliquotam ipsius 5. Similiter 14 continet 10 semel & bis 2, hoc est duas quintas numeri 10, quæ tamen simul sumtæ (nempè 4) non conficiunt unam aliquotam ipsius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, *quia aliàs esset ratio superparticularis.*

Ratio multiplex superparticularis est, cum major minorem aliquoties continet, & insuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5 ad 2, 10 ad 4 &c.

Ratio multiplex superpartiens est, cum major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8 ad 3, 16 ad 6 &c.

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

Denominator proportionis rationalis est qui distinctè & clarè exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; sive qui ita se habet ad unitatem, ut major ad minorem, ac proinde ostendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur à majore. Rationi 27 ad 9 denominator est 3, quia 3 ita est ad unitatem, ut 27 ad 9, ac proinde ostendit quoties consequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cujuscumque rationis denominator invenitur, si major terminus dividatur per minorem, nam quotiens divisionis erit denominator. Ratio est, quia quotiens ita est ad unitatem, ut dividendus ad divisorem, hoc est ut major ad minorem. Exempl. detur ratio 60 ad 6. Divide 60 per 6; quotiens 10 est denominator. Detur rursum ratio 60 ad 16. diviso 60 per 16 fit quotiens $3\frac{3}{4}$ hic est denominator.

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUm rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune consequens habentes, communis consequentis antecedentia, erunt rationum denominatores, & commune consequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, si sola sit, exhiberi potest denominator. At si duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam sensu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum ostendant, quomodo una ratio ad alteram se habeat. Id quod egregiè observavit P. Gregorius à S. Vincentio, operis sui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclarissimis, & propè innumeris inventis Geometriam auxit, tum inprimis libro 8. ejusdem operis de proportionalitatibus ita scripsit, ut novam de proportionalitatibus scientiam condidisse censeri meritò debeat. Datæ sint rationes irrationales A, ad B; & C, ad D, quæ revocentur ad rationes F H, G H, habentes commune consequens, H, sic ut ratio F ad H sit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune consequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc est rationum A ad B, & C ad D,) quia ostendunt quo- Fig. 27.

 modò

modo una ratio sese habeat ad alteram, sicuti enim F est ad G, ita ratio F H est ad rationem G H, hoc est ratio A B ad rationem C D.

IV.

Axiomata.

Fig. 28. AX. 1. *Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes consequens (H) eam inter se proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) est prop. 2. P. Gregorii à S. Vinc. l. 8. quadr.*

Hoc est ratio G, ad H, tanto major est ratione F ad H, quanto G major est quam F.

Fig. 29. *Ax. 2. Rationes (I ad L & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter se habent consequentium proportionem, est propos. 7. P. Gregorii à S. Vinc. lib. 8. quadr.*

Hoc est ratio I ad L est ad rationem I ad M, ut reciprocè est M consequens, ad consequens L: sive ratio I ad L tantò major est ratione ejusdem I ad M, quanto L fuerit minor, quam M; ac proinde quanto M fuerit major quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter se rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12 ad 3, & ratio 15 ad 6, quarum denominatores sunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. a denom. a Num. 2. *ratio 12 ad 3 est eadem cum ratione 4 ad 1, & ratio 15 ad 6 est eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1. Sed ratio 4 ad 1 est ad rationem $2\frac{1}{2}$ ad 1, ut b 4 est ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3 est ad rationem*

b Per axio. 1. huc.

nem

nem 15 ad 6. ut denominator 4 est ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

ADditio perficitur, si rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum summa ad unitatem est rationum datarum summa quæsita. Fig. 30.

Dentur ratio 12 ad 3 & 15 ad 6, earum denominatores 4 & $2\frac{1}{2}$ additi sibi mutuo faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$ ad 1 est par rationi 12 ad 3 & rationi 15 ad 6. Patet ex Ax. 1. & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris à majore, nam ratio residui ad unitatem, est ratio quæ remanet post minorem rationem à majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12 ad 3, & 15 ad 6. Harum denominatores sunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$ à majori 4, remanent $\frac{3}{2}$: ratio $\frac{3}{2}$ ad 1, est ea quæ remanet, ubi rationem 15 ad 6 seu $2\frac{1}{2}$ ad 1 detraxeris ex ratione 12 ad 3, seu 4. ad 1.

VI. Ra-

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 31. RAtiones datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune consequens (H.) Antecedentia F & G: sibi addita sunt F G. Ratio F G ad H est summa rationum F ad H, & G ad H, hoc est rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, si rationes datæ ad commune consequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur à majori F; ratio enim residui ad H, est ea quæ remanet postquam rationem G ad H, seu C ad D subtraxeris à ratione F ad H, seu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium multiplicatio & Divisio.

DEnominatores rationum per invicem multiplicati dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc est ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, est ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex *ex Ax. 1 & 3. Nam multiplicatio rationum est unius ad alteram additio sæpius repetita, Hanc autem perfici repetitâ sæpius antecedentium additione (hoc est multiplicatione) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.*

Sint datæ rationes 9 ad 3. & 20 ad 4, denominatores 3 & 5 multiplicati faciunt 15. Ratio 15 ad 1 est ea, quæ ex multiplicatione rationum 9 ad 3 (seu 3 ad 1) & 20 ad 4 (seu 5 ad 1,) producitur. Fig. 32.

Divisio rationum perficitur, si denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, est ea quæ habetur ex divisione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1 & 3 axiomate. Cum rationis per rationem divisio, sit subtractio unius ab alterâ sæpius repetita.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ sint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B; ita D ad E. Ratio C ad F est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 33.

Hæc operatio est Gregorii à S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipse, nec alius quisquam demonstrat.

Hunc

Hunc igitur in modum demonstrabitur. Ratio C ad E *producitur ex multiplicatione rationum* C ad D, & D ad E, *ut patleit ex demonstratione numeri* 12, *ab his independente. Sed rationes* C ad D, & D ad E *per const. sunt rationes* C ad D, & A ad B. *Ergo ratio* C ad E *est ea quæ fit ex multiplicatione rationum* A ad B, & C ad D. *Quod erat demonstrandum.*

IX.

Divisio rationum irrationalium.

Fig. 33. DAta sit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, sic C ad D. Ratio D ad E est quotiens.

Nam ratio C ad D (*hoc est per const. ratio* A ad B) *multiplicata per rationem* D ad E *producit rationem* C ad E, *ut patebit ex demonstratione num.* 12, *ab his independente. Ergo ratio* D ad E *est quotiens, cum multiplicata in divisorem, qui est ratio* A ad B, *restituat rationem* C ad E, *quæ proponebatur dividenda.*

De Compositione rationum. ejus Definitio.

RAtio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc est denominatores) inter

inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Est definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcunque quarum denominatores sint 2, 3, 1 $\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2 per 3 denom. fit 6 denominator rationis compositæ ex rationibus, quarum denominatores sunt multiplicati. Hoc est ratio 6 ad 1 est composita ex rationibus 6 ad 3. & 12 ad 4. Quod si denominatorem 6 multiplices per denominatorem tertium 1 $\frac{1}{4}$; fit 7 $\frac{1}{2}$ denominator rationis compositæ ex tribus dati rationibus, quarum denominatores sunt 2, 3, 1 $\frac{1}{4}$, Fig. 34.

XI.

Compositio rationum non aliud est, quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iisdem rationibus componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

NAm ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea est, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, seu consequens commune. Atqui etiam per d. fin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea est, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem seu conse-

Scholium.

Ut numeri sequentis demonstratio clarius percipiatur, observandum est multiplicari ac dividi magnitudines per invicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum ut est unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita planè magnitudo per magnitudinem dicetur multiplicari, cum ut quæpiam recta pro unitate assumta se habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur; ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi, quando assumtâ quantitate aliquâ pro unitate, ut una se habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicitur quotiens.

XII.

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, seu magnitudines, seu numeri; ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonstratum est à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonstraret, nemo hactenus inventus est. Unde Gregorius à S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium secundum, censet inter principia numerandum esse, donec alicui demonstratio occurrerit, quâ inter theoremata referri possit.

Universalem igitur hujus rei demonstrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonstratur in magnitudinibus.

DAtæ sint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D. Ostendendum est rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. Fig. 35.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B: B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune consequens B, ac proinde rationum denominatores sunt A, X & consequens commune B a munus explet unitatis, quæ est com- a Per n. 3.

mune

mune consequens respectu omnium denominatorum numericorum.

Itaque si velimus magnitudines *A*, *X* per invicem multiplicare, oportebit b facere ut B unitas est ad *X*, ita *A* ad quartam *Z*, quæ erit productum multiplicationis *A* per X, seu *X* per *A*; planè ac si cupias in vicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum *V*, qui est productum multiplicationis.

b Schol. præced.

Quoniam igitur quantitas Z est productum ex multiplicatione denominatorum *A*, *X*, erit ratio c hujus producti Z ad B unitatem seu commune consequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum *A* ad B; *X* ad B; prorsus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7 ostendimus evenire, in qua si denominatores inter se multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea est, quæ fit ex rationum multiplicatione.

c Per defin. num. 10.

Atqui per constr. ratio X ad B est ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum *A* ad B; B ad C. Quia vero per constr. ut B est ad X, ita *A* est ad Z, etiam inversim Z ad *A*, ut X ad B, hoc est per constr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z est ad B, ita *A* est ad C. Sed jam ostensum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum *A* ad B; B ad C. Ergo etiam ratio *A* ad C producitur ex multiplicatione rationum *A* ad B; & B ad C. Atqui num. XI. ostensum est rationes componi ex iisdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio *A*

ad

ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur in numeris.

EAndem prorſus demonſtrationem valere in numeris jam oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabiletur.

	$\frac{2}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati ſint tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita. 1 ad 2. & ut 4. ad 3. ſic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt a Per 22. l. 5.
igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4. ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter ſe æquales; eritque ex æquo a *etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$.*

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1. ad $\frac{4}{3}$: eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{4}{3}$ (hoc eſt rationes 8 ad 4 & 4 ad 3.) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & b Patet ex num. 2.
$\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conſequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt b *rationum 8 ad 4. & 4. ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$ hoc eſt fiat ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus pro-*

c Patet ex num. .

ducti $\frac{8}{3}$. ad 1. est ea, c quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Iam vero quia per const. ut 1. est ad $\frac{4}{3}$ ita 2. est ad $\frac{8}{3}$. erit etiam inversim $\frac{8}{3}$ ad 2. ut $\frac{4}{3}$ ad 1. Sed rursum per const. $\frac{4}{3}$. sunt ad 1. ut 1. ad $\frac{3}{4}$ Ergo $\frac{8}{3}$. sunt ad 2. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$. sunt ad 1. ut 2. ad $\frac{3}{4}$. Sed jam ostendi rationem $\frac{8}{3}$. ad 1. esse eam quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam ratio 2. ad $\frac{3}{4}$. est ea quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Sed ostensum est supra rationem 2. ad $\frac{3}{4}$. parem esse rationi 8. ad 3. Ergo etiam ratio 8. ad 3. producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Igitur per num. XI. ratio 8. ad 3. ex rationibus 8. ad 4. & 4. ad 3. composita est. Quod erat demonstrandum.

8
4
3
25
73

Eodem modo demonstrabitur si plures dentur numeri quam tres, rationem 8. ad 25 componi ex rationibus 8 ad tria (hoc jam est ex rationibus 8 ad 4. & 4. ad 3) & ex ratione 3 ad 25 : & rationem 8 ad 73 componi ex rationibus 8 ad 25 (hoc jam est ex rationibus 8 ad 4, 4 ad 3; 3 ad 25) & ratione 25 ad 73. & sic in infinitum.

XIII.

XIII.

Si dentur quotcunque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus composita. Fig. 36.

SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H, & ut C ad D, ita H ad I, & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit composita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonstravimus, hoc est per constr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

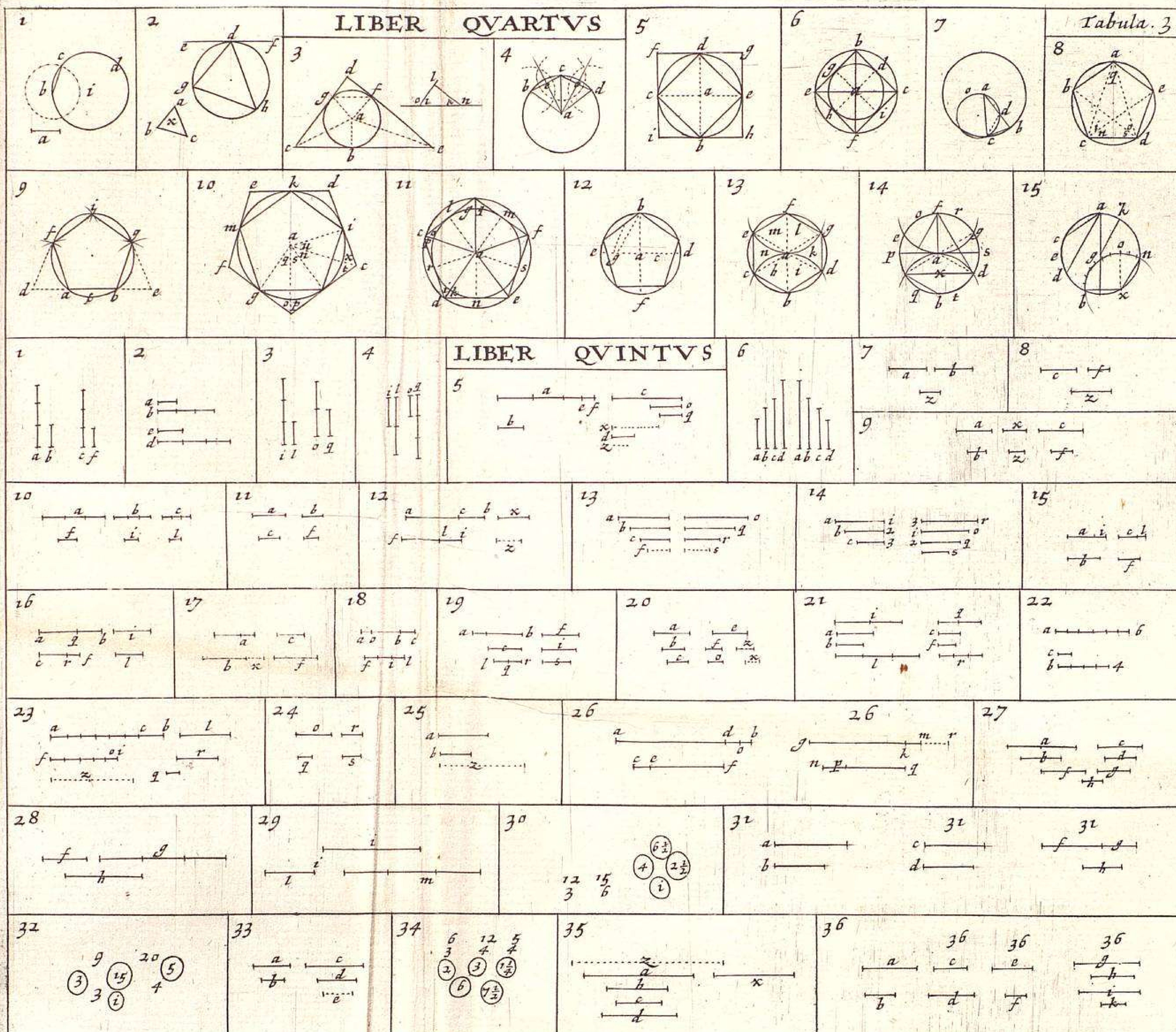
XIV.

Ratio non est æqualis rationibus ex quibus componitur.

INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, sive illæ sint continuè proportionales sive non: ratio primæ G ad ultimam K non est æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis sit composita. Nam ex iis, componi idem est, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut ostensum est num. XI. Cum igitur ratio G ad K sit producta ex rationibus G ad H, H, ad I, I, ad K inter se multiplicatis, ut ex demonstratione num. 12. patet, non possunt rationes G ad H, H ad I, I ad K simul sumtæ æquales esse rationi G Fig. 36.

 ad

ad K, nisi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eandem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ sibi mutuo addendæ, ut traditur num. 5. & 6. ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ ferè semper, ut dixi, erit diversa ab illa, quæ ex earundem rationum compositione, hoc est multiplicatione exsurget.


LIBER QVARTVS
Tabula. 3.
LIBER QVINTVS

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER VI.

Proportionum doctrina libro quinto universim exposita, in sexto figuris planis applicatur. Et sunt quæ hoc libro traduntur adeò scitu necessaria, ut sine illis arcana Geometriæ penetrare, fructusque suaves Matheseos perciperè nemo possit. Ad propositiones propè singulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas est.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos existunt, vel quæ sunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Ut triangula X, Z dicentur similia, si angulus A sit æqualis angulo F, & angulus B, angulo L, & angulus C angulo I: atque insuper si AB sit ad FL, ut BC ad LI: & BC ad LI, ut CA ad IF: & CA ad IF, ut AB ad FL; Comparando semper la- Fig. 7. l. 6. tabula. 4.

 tera

tera æqualibus angulis opposita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium similitudo explicabitur.

Fig. 29. 2. Reciprocæ figuræ sunt, cum in utraque antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
si A C sit ad C B,
ut F C ad C L

antecedentia sunt A C & F C, quorum in utrâque figurâ unum est; & consequentia sunt C B & C L, quorum similiter in quâque figurâ unum est; parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

3. Altitudo figuræ est perpendicularis à vertice ad basim deducta. Est Euclidi. 4.

Fig. 1. *Vt trianguli A B C altitudo est perpendicularis A Q, à vertice cadens in basim B C, vel intra triangulum, vel extra in basim protractam. Basis autem & vertex assumuntur ad libitum.*

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas suas circumferentias rationem.

Vt si ambo sint suæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta &c.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 2. TRiangulo (*A B C, D E F*) *et parallelogramma) A O P C, D Q R F) quæ ean-*

eandem habent altitudinem, sive inter easdem existunt parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases (AC, DF.)

Ab hoc theoremate dependet totus sextus liber, imò quidquid uspiam de figuris sive planis, sive solidis per proportiones demonstratum est. Demonstrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo statim aditu huius libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonstrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis secundæ lib. 5. hunc in modum.

Sumatur baseos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG & triangulum DGE sunt consequentium *a* similes aliquotæ. Auferatur deinde DG ex basi AC quoties potest, puta sexies, ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI &c. æquales sunt singulæ ipsi DG, etiam sex triangula CBH, HBI &c. triangulo DEG æqualia *b* erunt singula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties triangulum DEG continetur in antecedente ABC. Eodem discursu

a *Per defin. 7. l. 5.*

b *Per 38. l. 1.*

ostendam quascunque consequentium (baseos D F & trianguli D E F) similes aliquotas in antecedentibus, (basi A C & triangulo A B C,) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis secundæ lib. 5. ut basis A C ad basim D F, ita triangulum A B C ad triangulum D E F. Quod erat demonstrandum.

c Per. 41.l.1. Quoniam vero parallelogramma A P, D R sunt dupla *c* triangulorum A B C, D E F, etiam illa erunt inter se ut bases.

Corollarium.

Fig. 3. TRiangula (A B C, F I L) & parallelogramma, æquales bases (A C, F L) vel eandem, habentia, eam inter se rationem habent quam altitudines (B O, I Q.)

Fiant enim Q S, O R æquales æqualibus basibus F L, A C. Erunt igitur etiam Q S, O R inter se æquales. Duc S I, R B. Si in triangulis O B R, Q I S accipiantur B O, I Q, tanquam bases, erunt O R, Q S, eorum altitudines: quæ cum sint æquales, erunt triangula O B R, Q I S inter se, ut *a* bases B O, I Q. Sed quia ex constr. O R par est A C, & Q S par F L, triangula O B R, Q I S æquantur *b* triangulis A B C, F I L. Ergo etiam triangula A B C, F I L sunt inter se ut B O ad Q I.

a Per 1. l. 6.

b Per 38. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus (B C) ducta fuerit (F L) parallela, hæc ſecabit proportionaliter latera, (hoc eſt A F erit ad F B, ut A L ad L C.) Fig. 4.

Et ſi recta (F L) ſecuerit latera (B A, C A) proportionaliter, erit ad reliquum latus (B C) parallela.

Pars. 1. Ducantur B, L C F. Quoniam F L ponitur parallela B C, erunt triangula F B L, L C F, eandem baſim F L habentia, inter *a* ſe æqualia. Ergo triangulum X, ad utrumque eandem *b* habet rationem, hoc eſt trianguli X eſt ad triang. F B L, ut triangul. Idem X eſt ad triang. L C F. Sed triangulum X eſt ad triang. F B L, ut *c* A F ad F B: & triangulum X eſt ad triang. L C F, ut *d* A L ad L C. Ergo *o* etiam A F eſt ad F B ut A L ad L C. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 37, l. 1.*
b *Per 7. l. 5.*
c *Per prac.*
d *Per eand.*
o *Per 11. l. 5.*

Pars 2. Ut A F eſt ad F B, ita triangulum X *e* eſt ad triangulum F B L; & ut A L eſt ad L C, ita *f* triangulum X eſt ad triang. L C F. Sed jam ponitur A F ad F B, ut A L eſt ad L C. Ergo triang. X eſt *k* ad triang. F B L, ut idem X eſt ad L C F. Ergo *g* triangula F B L, L C F, eandem habentia baſim, æquan-

e *Per prac.*
f *Per eand.*
k *Per 11. l. 5.*
g *Per 9. l. 5.*

i Per 39. l. 1. æquantur. Ergo F L, B C *i* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Fig. 5.

SI ad unum trianguli latus (B C) ductæ fuerint plures parallelæ(IO,F L,)erunt omnia laterum ſegmenta, proportionalia.

Ducatur F Q parallela A C. Rectæ F S,
o Per 34. l 1. S Q æquantur *o* L O, O C. Sed B I eſt ad
b Per 2. l. 6. I F, ut *b* Q S ad S F. Ergo etiam B I eſt ad I F, ut C O ad O L.

PROPOSITIO III.

Fig. 6.

SI recta (B F) angulum trianguli bifariam ſecans, etiam ſecet baſim (A C,) habebunt baſis ſegmenta (A F, F C) eandem proportionem quam reliqua latera (A B, C B.)

Et ſi baſeos partes (A F, F C) eandem rationem habuerint quam reliqua latera (AB, C B) recta (B F) baſim ſecans, angulum oppoſitum (A B C) biſecabit.

Pars 1. Produc C B, donec B L ſit par B A, & junge A L. Quoniam in triangulo
a Per 5. l. 1. Z, latera L B, A B æquantur, anguli *a* quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus

ternus ABC duobus *b* internis L, O æqualis est; angulus I, qui per hyp. ipsius ABC dimidius est, æquabitur angulo, L. Ergo AL, FB sunt *c* parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF est ad FC, *d* ut LB (hoc est AB) ad BC. Quod erat demonstrandum. b *Per 32. l. 1.* c *Per 29. l. 1.* d *Per 2. l. 6.*

Pars 2. Produc iterum CB donec LB sit par AB. Quoniam ponitur ut AF est ad FC, ita AB (hoc est LB) esse ad BC, erunt AL, FB *e* parallelæ. Ergo externus I, est par *f* interno, L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia LB, AB æquales sunt, anguli *o* L & O sunt æquales. Ergo etiam I & Q æquales sunt. bisectus ergo est ABC. Quod erat demonstrandum. e *Per 2, l. 6.* f *Per 27. l. 1.* o *Per 5. l. 1.*

PROPOSITIO IV.

Triangula sibi mutuo æquiangula, sunt similia; hoc est, o etiam latera æqualibus angulis opposita, habent proportionalia. o *Def. 1. l. 6.*

IN triangulis X, Z, angulus A sit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I. Dico AB esse ad FI, ut AC ad FL; & AC esse ad FL, ut CB ad LI; & CB esse ad LI, ut BA ad FI. *Fig. 7.*

Dem. si angulus F ponatur supra sibi æqualem A, latera FI, FL, cadent supra latera *Fig. 7. & 8.*

tera

a Fig. 8. Schol. tera A B, A C. Et quia s angulus externus
a Per 29. l. 1. A I L per hypoth. par est interno B, erunt
b Per 2. l. 6. a I L, B C parallelæ. Ergo b B I est ad I A,
c Per 18. l. 5. ut C L ad L A. Ergo c componendo B A est ad I F ut C A ad L F. Quod si angulus L imponatur Angulo C, eodem modo ostendam A C esse ad F L, ut B C ad I L: & si angulus I, imponatur angulo B ostendetur pari modo, B C esse ad I L, ut A B ad F I. Liquet ergo propositum.

Corollaria.

Fig. 8. 1. SI in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (L I) erit triangulum L F I simile toti C F B, ac proinde C F est ad L F, ut B C ad L I.

Nam quia L I, B C, parallelæ sunt, erunt
q Per 27. l. 6 q externi F I L, F L I, pares internis B & C: F verò utrique triangulo est communis. Ergo sunt æquiangula. Ergo latera C F, L F opposita æqualibus angulis B & F I L, sunt
r. Per præc. r proportionalia lateribus B C, L I, quæ opponuntur communi angulo F.

2. Si in triangulo parallelas A C, L O
Fig. 9. secet recta B F, ab angulo opposito B ducta, secabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. A F est ad L I ut F B ad I B; & F C quoque est ad I O, ut F B ad
d Per 11. l. 5. I B. Ergo A F est ad L I ut d F C ad I O. Igi-

Igitur permutando A F est ad F C *e* ut L I ad I O. *e Per 16. l 5.*

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera sibi mutuo proportionalia etiam sibi mutuo æquiangula erunt. *Fig. 10.*

Hoc est, si A B sit ad R F, ut A C ad R Q; & ut A C ad R Q, sic C B ad Q F, & ut C B ad Q F, sic A B ad R F: dico angulos antecedentibus oppositos æquari angulis, qui opponuntur consequentibus. Nimirum C ipsi I: B ipsi F, A ipsi O.

Ang.	Antec.	Conseq.	Ang.
C.	A B	R F	I
B	A C	R Q	F
A	C B	Q F	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N, Etiam igitur *b* B & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T, sunt æquiangula, erit *o* A B ad R N, ut A C ad R Q. Sed ex hyp. etiam est A B ad R F, sicut A C ad R Q. Ergo A B est ad R F, ut eadem A B ad R N. Ergo R N, R F *c* æquantur. Pari modo ostendam æquari Q N & Q F. Trianguia igitur T, S, sibi mutuo sunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquan- *b Per coroll. 9. p 32. l 1.* *o Per præc.* *c Per 9. l 5.*

d Per 8. l. 1. æquantur *d* angulis Z, N, X, (hoc eſt per conſtr.) angulis C, B, A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 10.

SI duo triangula (P, S) habeant unum angulum (A) æqualem uni (O) & latera (AB, AC; RF, RQ) quæ æquales angulos continent, proportionalia; triangula erunt ſimilia.

e Per coroll. 9. p. 32. l. 1.

Anguli A, C fiant æquales X, Z, & latera coeant in N. Igitur anguli quoque *e* B & N æquales erunt. Oſtendam, ut in præcedenti, æquales eſſe RF, RN. Eſt vero RQ utriſque triangulis S, T communis; Anguli quoque O & X æquales ſunt, quia æquantur ambo eidem A; X per conſt.: O per hyp. Ergo etiam I & F *o* æquantur ipſis Z & N. Triangulum igitur, S, æquiangulum eſt triangulo T; hoc eſt per conſtr. triangulo P. Ergo S, P *d* ſimilia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

o Per 4. l. 6.

d Per 4. l. 6.

PROPOSITIO VII.

VIx ullius eſt uſus.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo perpendicularis (B C) ab angulo recto in basim ducta secat triangulum in partes toti, & inter se similes.

In triangulis ABF, & L, angulus F communis est, anguli vero A B F, & X per hypothesim sunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam *a* æquales erunt. Ergo *b* triangula ABF & L similia sunt. Eodem modo similia ostendam esse triangula ABF & R, angulumque I, parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R & L similia esse, cum æquales sint anguli I & F : O & A : V & X. Quod erat demonstrandum.

Fig. 11.

a *Per coroll. 9 p. 36. l. 1.*
b *Per 4 l. 6.*

Corollaria.

PRimo BC est media proportionalis inter A C, C F.

Cum enim sint in triangulis R & L

æqu. ang. I. F.	æqu. ang. A. O
lat. opp. A C. CB.	lat. opp. C B. C F.

Patet *c* AC esse ad CB, ut CB est ad CF.

c *Per 4.*

2. BF est media proportionalis inter AF & C F. Item A B est media inter F A, & C A.

Nam in triangulis A B F & L sunt

æqu.

æqu. ang. A B F, X.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. A F. B F.	lat.opp. B F. C F.

d *Per eand.* Ergo A F est *d* ad B F; ut B F ad C F. Similiter quia in triangulis ABF, & R, sunt

æqu. ang. A B F. V.	æqu. ang. F. I.
lat. opp. A F. A B.	lat.opp. A B. A C.

Erit rursum AF ad A B, ut A B ad A C.

PROPOSITIO IX.

Fig. 12. D*Atam rectam (A B) dividere secundum datam proportionem (F I ad I L.)*

Ducatur infinita AZ. Ex qua sume AQ. QR æquales F I, I L. Ex R duc R B. Huic ex Q duc Q C parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. D*Atam rectam (A B) similiter secare, ut altera data (A I) fuerit secta (in F, C.)*

Extremitates sectæ & insectæ jungat recta I B. Huic ex punctis F, C duc parallelas rectæ secundæ A B occurrentes in L; & Q. Dico factum.

Patet ex corollario p. 2. l. 6.

Scho-

Scholium.

Ex hac propositione discemus rectam datam in quotvis æquales partes secare. Cum rectâ secandâ A B, faciat quemvis angulum rectâ quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes A C, C F, F I, in quot secare placuerit A B. Duc rectam I B; eique parallelas F L, C Q. Dico factum. Fig. 13.

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum: Sit A B trisecanda. Duc ad A B parallelam I X infinitam, supra vel infra. Ex I X, si est infra A B; cape circino tres æquales partes I Q, Q R, R S, quæ simul maiores sint quam A B, minores vero si I X est supra. Per I & A, item per S & B duc rectas; quæ concurrant in C. Ex C ad Q & R, ductæ rectæ datam A B trisecabunt. Demonstratio patet ex coroll. 2. prop. 4. Fig. 14.

Rursum cum Maurolyco aliter id ipsum ita obtinebimus. Sit quatrisecanda A B. Duc infinitam A X, eique parallelam B Z etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales A L, L O, O Q, & B V, V S, S R, in singulis nempè una pauciores, quam desiderentur in A B, tum rectæ ducantur L R, O S, Q V. Hæ quatrisecabunt datam A B. Fig. 15.

Nam quia per constr. L O, R S parallelas & æquales, jungunt L R & O S, etiam hæ erunt a parallelæ. Pari modo O S, Q V sunt parallelæ. Ergo cum A Q sit secta in tres æquales partes, etiam erit A I secta b in tres æquales. Similiter erit B C secta

a Per 33. l. 1.

b Per corol. 2. l. 6.

cta in tres æquales, tota igitur AB secta est in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes sunt faciliores Euclidæâ, quia pauciores ducendæ sunt parallelæ.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16. *DAtis duabus rectis (AB, BC) tertiam proportionalem invenire.*

Duc rectam A C. Ex B A producta accipe A F parem B C. Per F ad A C duc parallelam F X infinitam, cui in L occurrat producta B C. Dico A B est ad B C, ut B C ad C L.

c Per 2. l. 6, b Per constr. Nam A B est ad A F, *c* ut B C ad C L. Sed A F est *d* par B C. Ergo AB est ad BC, ut B C ad C L, adeoque C L est tertia proportionalis quæ petebatur.

Aliter.

Fig. 17. STatuantur A B, B C ad angulum rectum. Junge A C. Ex C duc C X perpendicularem ad A C infinitam, cui in L occurrat A B producta; Dico A B est ad B C, ut B C ad B L. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

POterit verò proportio data non solum per tres terminos, sed etiam per infinitos continuari, & tota

tota infinitorum proportionalium terminorum summa exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumque adeò Geometricæ progressionis negotium Gregorius à S. Vincentio prosecutus est toto libro 2. sui operis: Nos in gratiam studiosorum succinctam rei propositæ constructionem, ac demonstrationem hic exhibebimus.

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR semper continuetur, venietur ad quantitatem quâvis datâ majorem. Fig. 18. secunda.

Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur a *invertendo, ut QL ad RL, sic RL ad OL. Ergo divid.* b *QR ad RL, RO, ut RO ad OL: & permut.* c *QR ad RO, ut RL ad OL. Sed RL est major quam OL. Ergo etiam QR major quam RO. Pari modo ostendam IQ esse majorem quam QR & sic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR, ad primam, LO, semper accedunt partes OR, RQ, QI &c. perpetuo crescentes, patet veniri ad quantitatem quâvis datâ majorem. Quod erat demonstrandum.*

a Per schol. p. 16. l. 5

b Per 57. l. 5.

c Per 16. l. 5.

Lemma. 2.

SI ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB ad CB semper continuetur, ad quantitatem venietur quâvis datâ minorem. Fig. 18. utraque.

Data sit LO quantumvis parva. Fiat a *ut BC ad BA, sic LO ad LR. Poterit* d *ratio LO ad LR*

a Per 9. l. 6.

d Per lem. 1.

 toties

toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, puta L I major quam AB. Quoties vero continuata jam est ratio LO ad L R, per totidem terminos CB, EB, FB, continuetur ratio AB ad CB. Erit FB minor quam OL.

Nam ex const. patet IL, QL, RL, OL, esse proportionales ipsis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo, ut e IL ad OL, sic AB ad FB: & permutando f ut IL ad AB, sic OL ad FB. Sed IL est major g quam AB. Ergo etiam data OL, est major quam FB. Quod erat demonstrandum.

e Per 22. l. 5.
f Per 16. l. 5.
g Per constr.

Problema.

Fig. 19.

DAta sit ratio majoris inæqualitatis AC ad BC. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium summam exhibere.

Erigantur perpendiculares AL, BO, æquales datis AB, BC, & per LO ducatur recta concurrens cum ABC productâ, in Z. Dico 1. si ex C erigas perpendicularem CQ; erit CQ tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige ER, erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS, erit hæc quinta: atque ita ratio AB ad BC, hoc est AL ad BO, per terminos AL, BO, CQ, ER, FS &c. sive AB, BC, CE, EF, FI &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex residuo FZ; cum enim LA (hoc est AB) sit minor quam AZ, etiam FS erit b minor quam FZ.

b Patet ex corol. 1 p. 4. l. 6.

Dico

Dico 2. *AZ est æqualis toti summæ infinitarum proportionalium.*

1. *Pars AZ est ad BZ, ut* c *AL ad BO; hoc est ut AB ad BC: Igitur permutando,* o *AB est ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ est ad BZ* d *ut BZ ad CZ. Sed ut AZ est ad BZ, sic LA est ad OB, & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA est ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo ostendam OB esse ad QC, ut QC ad RE, & sic deinceps in infinitum.*

c Per idem corol.
o Per 16. l. 5.
d Per corol. 2. p. 18. l. 5.

2. *Pars; Tota summa infinitorum terminorum, neque minor est quam AZ, neque major; Ergo æqualis. Non est major, quia, cum jam ostenderim supra, QC esse minorem quam CZ, & RE quam EZ, & SF quam FZ, & sic deinceps sine termino, poterunt omnes termini QC, RE, SF &c. sine fine constitui juxta invicem in recta AZ, sic ut nunquam punctum Z attingatur. Non erit etiam minor quam AZ: quia jam ostendi supra AZ, BZ, CZ esse continuè proportionales, & eodem modo idem ostenditur de reliquis EZ, FZ &c. Cum igitur transferendo proportionales QC, ER, FS &c. in CE, EF, FI residua EZ, FZ, IZ &c. semper sint continuè proportionalia, ut jam ostendimus, venietur tandem ad residuum* e *dato minus, ac proinde summa proportionalium superabit quantitatem omnem, quæ minor sit quam AZ, unde ipsa non potest esse minor quam AZ. Quoniam igitur nec major est, nec minor, quam AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonstrandum.*

e Per lem. 2.

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium summa, sunt continuè proportionales.

Fig. 19. In superiori figura ducatur O X parallela ad A Z. Igitur L X erit differentia primi termini A L, seu A B, & secundi B O, seu B C. Quoniam X O est parallela ad A Z. Erit L X ad X O, ut f L A ad A Z. Sed X O est AB, & L A etiam est AB. Ergo L X differentia, est ad A B primum terminum, ut A B primus terminus ad A Z totam summam. Quod erat demonstrandum.

f Per coroll. 1 p. 4. l. 6.

Fig. 20. Idem universaliter & brevissimè demonstrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continuè proportionales quæcunque (etiam numeri) A Z, B Z, C Z &c. quæ transferantur omnes in primam A Z. Erunt igitur A B, B C, C E, E F &c. proportionalium differentiæ, quæ una cum postrema quantitate I Z, æquantur primæ A Z. Quia verò, si proportionales in infinitum continuentur, postrema quantitas per lem. 2. evanescit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ A Z. Deinde, quia est A Z ad B Z, ut B Z ad C Z, & sic deinceps, erit dividendo A B ad B Z, ut B C ad C Z, & p convertendo ut A B prima differentia ad A Z primam quantitatem, ita B C secunda differentia ab B Z, quantitatem secundam, & sic deinceps. Ergo ut AB prima differentia ad A Z

p Per coroll. 1. p. 18. l. 5.

AZ primam quantitatem, q ita omnes differentiæ (hoc est, ut jam ostendi, prima quantitas AZ) ad omnes quantitates, hoc est ad totam summam infinitarum quantitatum. Quod erat demonstrandum. q Per 12. l. 5.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (AB, BC, AF) quartam proportionalem invenire. Fig. 21.

Disponantur datæ rectæ ut figura monstrat, & duc rectam BF: cui parallela fiat CZ infinita. Ipsi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB est ad BC, ut AF ad FL ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL est quarta proportionalis quæsita.

Scholium.

Pulchre Bettinus noster in suo Ærario Mathematicæ philosophiæ. Ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.

Si tres dentur rectæ; secunda CB & tertia CD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B sub quovis angulo. Per puncta C, A, D, describe a circulum, cui AB prima occurrat in Z. BZ est quarta proportionalis. Fig. 22. a Per 3. l. 4.

a Per 35. l. 3. *Cum enim rectangula ABZ, CBD a æqualia sint, erit AB ad BC, ut BD ad BZ per 14. hujus, quæ ab hac, ut dixi non dependet.*

Fig. 23. *Si dentur duæ rectæ AB, BC; secundæ BC apponatur in directum BD æqualis BC. Dein ipsam CB in B tangat prima AB sub quovis angulo. Tum reliqua ut supra. Erit BZ tertia proportionalis quæsita.*

Demonstratio similis est, cum enim rectangula ABZ, CBD sint æqualia, erit AB ad BC ut BD (hoc est ut BC) ad BZ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24. *DAtis duabus rectis (AC, CB) mediam proportionalem invenire.*

Tota composita AB bisecetur in O, & centro O describatur circulus per A & B. ex C erige perpendicularem CF, occurrentem peripheriæ in F.

Dico AC est ad CF, ut CF ad CB.

Ducantur enim AF, BF, triangulum

a Per 31. l. 3 *a* AFB rectangulum est, & à recto angulo ducta est perpendicularis FC in basim.

b Per corol. 1. p. 8. l. 6. Ergo AC ad CF, ut *b* CF ad CB.

Corollarium.

HInc patet si ex quovis peripheriæ puncto (I) ducta sit ad diametrum perpendipendicularis (FC) eam esse mediam proportionalem inter diametri segmenta (AC, CB.)

Scholium.

Hic locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis solutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometræ summo studio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in Archim. varii recensentur subtilissimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menechmi, Eratosthenis, Philonis Bysantii, Heronis, Appollonii Pergæi, Nicomedis, Diocl. Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt, Vernerus, P. Gregorius à S. Vincentio, Renatus Cartesius. Ex omnibus visum est tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

Oporteat inter datas AB, BC, duas medias invenire. Fig. 25.

Ponatur AB, BC ad rectum angulum & producantur infinitè versus X & Z. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noster; Plato enim unicâ normâ utitur, sed a cujus lateri DE inserta sit regula mobilis per DE) & unius normæ angulus D applicetur rectæ BX, eâ lege, ut & latus unum transeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam BZ, applicata normæ secun-

a Vide Fig. 26.

ſecunda, tranſeat per C. Dico B D, B E duas eſſe medias inter datas A B, B C: hoc eſt ut A B eſt ad B D, ſic eſſe B D ad B E, & B E ad B C.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam A D E rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit D B. Ergo per dictum coroll. ut A B ad B D, ſic B D ad B E: Et ob eandem cauſam, ut B D, ad B E, ſic B E ad B C. Inter datas igitur A B, B C repertæ ſunt duæ mediæ B D, B E. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byſantii.

Fig. 27. DUæ datæ A B, B C jungantur ad rectum angulum; tum perficiatur rectangulum A B C D & producantur D A, D C infinitè, ducanturque diametri B D, A C, ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod angulus A B C rectus ſit, tranſibit b per A & C. Tum regula ſic applicetur ad punctum B, ut interceptæ B G, O F, ſint æquales. Dico A F, G C eſſe duas medias inter datas A B, B C; hoc eſt ut A B eſt ad A F, ſic A F eſſe ad G C, & G C ad C B.

b Patet ex 31. l. 3.

Demonſt. Quia G B, O F, c æquantur, etiam O G, B F æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula O G B, B F O, hoc eſt rectangula d D G C, D F A. Ergo eſt ut G D ad D F, e ſic reciprocè A F ad G C. Sed G D, eſt ad D F, f ut B A ad A F. Ergo ut B A eſt ad A F, ſic A F eſt ad G C. Rurſum quia jam oſtendi A F eſſe ad G C, ut B A eſt ad A F, eſt vero

c Per conſtr.

d Per coroll. 1. p. 36. l, 3.

e Per 14. quæ ab hac non pendet.

f Per corol. 1 p. 4. l. 6.

BA ad AF, ut GD ad DF. hoc est ut GC ad CB; erit quoque AF ad GC, ut GC est ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, sunt continue proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ sunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

Hi duo modi quamvis sint ingeniosi & faciles, tamen, quia debita normæ, & regulæ applicatio, non nisi tentando fit, Geometrici non sunt.

Modus Cartesii.

PAretur instrumentum hujusmodi. Duæ regulæ aperiri possint & claudi circa Y. His insertæ sint plures normæ inter se connexæ in B, C, D, E, F, G, eâ lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam GD in regulâ YZ, & norma CD impellat normam DR in regulâ YX. & DE impellat EF, & EF impellat FG, & sic deinceps: Dum vero regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc instrumento inter duas datas non solum duæ, sed etiam quatuor & sex, imo quotvis mediæ reperientur. Quod neque per sectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus supradictis inventos obtineri potest. Fig. 28.

Pro duabus mediis opus est normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & sic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & sit YB; major in regulam alteram YZ, & sit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque

demque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus transeat per E. Dico ΥE, ΥD, esse duas medias inter datas ΥB, ΥE; hoc est ΥB esse ad ΥC, ut ΥC est ad ΥD, & ΥD ad ΥE.

Demonstratio manifesta est ex coroll. 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura instrumenti, in trigono ΥCD angulus ad C rectus est, ab eoque cadit CB perpendicularis in basim ΥD. Ergo per dictum coroll. ut ΥB est ad ΥC, sic ΥC est ad ΥD. Rursum, quia in trigono ΥDE angulus ad D rectus est, ab eoque cadit perpendicularis DC in basim ΥE, erit ut ΥC ad ΥD, sic ΥD ad ΥE. Sunt igitur ΥB, ΥC, ΥD, ΥE quatuor continuè proportionales. Inter datas igitur ΥB, ΥE inventæ sunt duæ mediæ ΥC, ΥD. Quod erat faciendum.

Si inter datas ΥB, ΥG, petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG transeat per G. Erunt ΥC, ΥD, ΥE, ΥF quataor mediæ inter ΥB, ΥG. Demonstratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum sit Platonico illo operosius, planè eximius est, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imò quotcunque medias se extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in data proportione o augentur, vel minuuntur, quemadmodum idipsum in figuris planis efficitur p per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam, ut singularem & unicam, omnis Geometrarum posteritas amplexa est.

o Vide schol. post 18. l. 12.

p Vide corol. 3. p. 20. l. 6

PRO-

PROPOSITIO XIV.

PArallelogramma æqualia (X,Z) quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc est AC est ad CB, ut FO ad OL.) Fig. 29. 30.

Et si latera sic habent reciproca, parallelogramma sunt æqualia.

1. Pars. IL. & SB productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X est ad parall. R ut AC *a* ad CB: & Z est ad *b* R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X & Z æqualia sunt, X est *c* ad R, ut Z est ad R. Ergo etiam AC est ad CB, *o* ut FO ad OL. Quod erat demonstrandum.

a Per 1. l. 6. b Per eand. c Per 7. l. 5. o Per. 11. l. 5.

Dem. 2. pars, ut AC ad CB, sic *d* X est ad R, & ut FO ad OL, sic *e* Z ad R. Sed jam per hyp. AC est ad CB, ut FO ad OL. Ergo X est ad R *o* ut Z est ad R. Ergo X & Z æqualia *q* sunt.

d Per 1. l. 6. e Per eand. o Per. 11. l. 5. q Per 9. l. 9.

PROPOSITIO XV.

ÆQualia triangula (ACL, FCB) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æ- Fig. 31. 32.

quales

quales angulos habent reciproca, (hoc est A C est ad C B, ut F O ad O L.)

Et si latera sic habent reciproca; triangula sunt æqualia.

Ducatur recta L B; reliqua demonstratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

TAm parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant bases & altitudines sunt æqualia. Et è converso.

Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 33. *SI quatuor rectæ (A B, F I, I L, B C) fuerint proportionales (hoc est si A B sit ad F I, ut I L ad B C.) Rectangulum (X) sub extremis (A B, B C) æquale est rectangulo (Z) sub medijs (F I, I L.)*

Et si rectang. sub extremis æquatur rectangulo sub medijs, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. est A B ad F I, ut reciprocè I L ad C B. Ergo *a* X & Z æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

a Per 14. l. 6

2. Pars.

2. Pars. Quoniam X & Z iam ponuntur æqualia; Ergo *b* circa æquales angulos B & I, est A B ad F I, ut reciproce I L ad B C. Quod erat demonstrandum. b *Per eand.*

PROPOSITIO XVII.

SI tres rectæ (AB, F L, B C) fuerint proportionales, rectangulum sub extremis (A B, B C) æquale erit quadrato mediæ (F F.) Fig. 34.

Et si rectangulum sub extremis æquatur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ F L accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. A B est ad F L, ut F L ad B C, estque O par F L. Erit quoque A B ad F L, ut O ad B C. Ergo *o* rectang. sub extremis A B, B C æquatur rectangulo sub mediis F L & O, hoc est quadrato F L. o *Per præc.*

2. Pars. Demonstratur similiter ex secundâ parte præcedentis.

Corollarium.

EX hac & ex 13. patet, si in circulo sit F C perpendicularis diametro, rectangulum A C B æquale esse quadrato F C. Fig. 24.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 35.

SVper data recta (R S) dato polygono B Q ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.

Polygonum datum B Q reſolve in triangula. Super data recta R S fac *a* angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt latera in X. Super XS fac angulos V I, æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum.

a Per 23. l. 1.

Nam quia anguli, R, O æquantur angulis B, A, etiam E, K *b* æquales erunt: & quia etiam *c* V æquatur T; totus E V toti K T æqualis erit. Similiter quia *d* ſinguli O, I æquantur ſingulis A & C, toti O I, A C æquales erunt. Et quia *e* V & I, æquantur T & C, etiam Z & Q æquales *f* ſunt. Polygona igitur R Z, B Q ſibi mutuo æquiangula ſunt. Reliquum eſt ut oſtendatur etjam latera eſſe proportionalia. R S eſt ad B F *g* ut SX ad F L: & rurſum S X eſt ad F L, *h* ut S Z ad F Q. Ergo ex æquo *i* R S eſt ad S Z, ut B F ad F Q. &c.

b Per corol. 9. p. 32. l. 1.
c Per conſtr.
d Per conſtr.
e Per conſtr.
f Per coroll. 9 p. 32. l. 1.
g Per 4 l. 6.
h Per eand.
i Per 22, l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 36-37.

TRiangulorum (X, Z) ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum (A C, F I) æqualibus angulis ſubtenſorum.

Hoc

Hoc est, si *a* fiat ut A C ad F I sic F I ad tertiam A Q; triang. X est ad triang. Z, ut A C prima ad tertiam proportionalem A Q. Vide defin. 10. 5. a Per. 11. l. 6.

Quoniam triangula X, Z sunt similia, erit B A ad L I, *b* ut A C ad I F. Sed per constr. ut A C ad I F, sic I F ad A Q. Ergo etiam B A est ad L I, *c* ut I F ad A Q. Ergo in triangulis Q B A & Z, latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum similium æquales existunt, sunt reciproca. Æquantur igitur *d* Q B A & Z. Atqui triangulum X ad Q B A est ut *e* basis A C ad basim A Q. Ergo etiam X est ad Z, ut A C ad A Q. Quod erat demonstrandum. b Per 4 l. 6. c Per 11. l. 5. d Per 15. l. 6. e Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona (A B C D E, F G H I K) dividuntur (1) in similia triangula (P, S & Q, T, & R, V) numero æqualia: (2) & totis proportionalia (3) & polygonorum proportio duplicata est proportionis laterum (A B, F G) inter æquales angulos (B, G & B A E, G F K) existentium. Fig. 38.

1. Pars. Quoniam polygona sunt similia, erunt *a* sibi mutuo æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli B A E, G F K, & a Per. def. 1. l. 6.

O B, G,

B,G, & B C D,GHI, & C DE, H I K, & E,K. Quia igitur A B est ad B C, *b* ut F G ad G H, anguli que B & G æquales sunt, *c* similia sunt triangula P,S. Similiter demonstrabitur similia esse R & V. Deinde quia toti B C D,G H I,& ablati B C A,G H F æquales sunt, etiam reliqui A C D,F H I æquales erunt, Eodem modo ostendam æquari A D C, F I H, Ergo *d* tertius C A D tertio HFI æqualis est. Quare *e* etiam Q & T triangula similia sunt. Liquet ergo 1. Pars.

b Per eand.
c Per 6. l. 6.
d Per cor. 9. 1. p. 32. l. 1.
e Per 4. l. 6.

Pars 2. Quoniam similia sunt P & S, ratio P ad S duplicata est *f* rationis C A ad H F. Sed ob eandem causam etiam ratio Q ad T duplicata est rationis C A ad H F. Ergo P est ad S ut *g* Q ad T. Eodem modo ostendam ut Q est ad T, ita R esse ad V. Ergo ut *i* unum antecedens P est ad unum consequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R simul sumta, ad omnia consequentia S, T, V simul sumta, hoc est polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

f Per prac.
g Per 34. l. 5.
i Per 12 l. 5.

3. Pars. Ratio P ad S est *k* duplicata rationis A B ad F G. Sed ratto polygoni ad polygonum est eadem cum ratione P ad S, ut jam ostendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum est duplicata rationis A B ad G F. Quod erat tertium.

k Per prac.

Corol-

Corollaria.

1. OMnes figuræ ordinatæ ſeu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata pentagona &c. ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ ſunt ſimiles inter ſe, ut patet ex def. 1. 6.

2. Si figurarum quarumvis ſimilium latera AB, FG inter æquales angulos poſita, ſint nota, etiam proportio figurarum innoteſcet. Sit ex. gr. AB 2. ped. & FG 6. pedum, fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum nempe 18. Figura minor eſt ad majorem, ut 2. ad 18. ſeu ut 1. ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, ſi ſecundus datorum multiplicetur per ſeipſum, & productus per primum dividatur. *Fig. 38.*

3. Ex eadem propoſitione elicitur methodus præclara, figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data: ut ſi velim pentagoni, cujus latus eſt AB, aliud facere quintuplum. Inter terminos rationis datæ A C, B C, inveni *m* mediam proportionalem B X. ſuper hac conſtrue *n* pentagonum ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati. *Fig. 39.* m *Per 13, l. 6.* n *Per 18, l. 6.*

Nam per 20. pentagonum AB eſt ad ſibi ſimile BX, ut A B prima ad B C tertiam.

Porrò cum etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum, (ut ostendetur p.2.l.12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40. *FIguræ (A,B) quæ eidem (C) similes sunt, etiam sibi mutuo similes sunt.*

Patet ex defin. 1.l.6. ex axiom. 1.l.1.& propos, 11.l. 5.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. & 41. *SI quatuor aut plures rectæ (F I, L Q; & O R, S V) proportionales fuerint, figuræ similes, similiterque ab iis descripta (A, B, & E, K) proportionales, erunt. Et è converso.*

a Per 19. & 20. l. 6. Demonstratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim *a* rationes A ad B, & E ad K sunt duplicatæ rationum F I ad L, Q, & O R ad S V, ex hypothesi æqualium, etiam ipsæ æquales erunt.

Pars 2. patet ex 35. l. 5.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 42. *ÆQuiangula parallelogramma (X, Z) inter se rationem habent compositam ex rationibus laterum (A C ad C B, & L C ad C F.)*

Hoc

Hoc eſt, ſi fiat C B ad O, ut L C ad CF; X eſt ad Z, ut A C ad O. Vide quæ demonſtravimus l. 5. parte 3. num. 13.

Concurrant I L, S B in Q. Parallelogrammum X eſt *b* ad parallelogrammum R ut A C ad C B: & R eſt ad Z, *c* ut L C ad C F (hoc eſt ut C B ad O.) Ergo *d* ex æquo X eſt ad Z, ut A C ad O. Quod erat demonſtrandum.

b *Per 1. l. 6.*
c *Per eand.*
d *Per 22. l. 5*

Corollaria.

HInc & ex 34. l. 1. patet primo. Triangula quæ unum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum A C ad C B, & L C ad C F æqualem angulum continentium.

Fig. 43.

Patet 2. rectangula, ac proinde & parallelogramma quæcunque, rationem inter ſe habere compoſitam ex rationibus baſis ad baſim & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratiocinaberis.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorum baſes AC, CB, altitudines CL, CF. fiat *e* ut CL altitudo ad altitudinem C F, ita baſium altera CB ad O, parallelogrammum X eſt ad parallelogram. Z ut A C eſt ad O.

Fig. 43.
e *Per 12. l. 6*

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 43. *IN omni parallelogrammo (SF.) quæ circa (AB) diametrum sunt parallelogramma (CL, OI) & toti & inter se similia sunt.*

Per 27.1. æquales sunt anguli C,S,&,L, F. Per eandem E est par I, hoc est per eandem ipsi A,B verò & toti SF, & parti CL communis est. Igitur totum SF & pars CL æquiangula sunt. Reliquum est, ut etiam latera æqualibus angulis opposita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE, BSA, est CE parallela ad SA, erit *c* BC ad CE, ut BS ad SA; & CE est ad EB, ut *e* SA ad AB. Quia vero in triangulis quoque ELB, AFB, EL est parallela ad AF, erit FB ad EL, ut *i* AB ad AF. Ergo ex æquo *f* CE est ad EL, ut SA ad AF. Igitur *l* CL & totum SF similia sunt. Eodem modo ostendam OI esse simile toti SF. Ergo *n* CL & OI sunt etiam similia inter se. Quæ erant demonstranda.

c Per coroll. 1.p.4.l.6.
e Per idem corol.
i Per 22.i.5.
l Per defin. 1.l.6.
n Per 21.l.6.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46. *POlygonum datum (A) in aliud dato (B) simile transmutare.*

Sive

Sive polygonum constituere æquale dato A, & simile alteri dato B,

Super C F latere polygoni B, cui simile petitur, fac rectangulum Q *a* æquale B. Deinde super F S fac *b* rectangulum R æquale A. Manifestum est C F & F I esse in directum. Inter CF, FI inveni *c* mediam proportionalem F L. Super hac fac *d* polygonum simile dato B, erit hoc etiam æquale dato A.

a *Per 44. l. 1.*
b *Per eand.*
c *Per 13. l. 6.*
d *Per 18. l. 6.*

Nam cum per constr. sint tres proportionales C F, F L, FI, polygonum B est ad simile sibi polygonum super F L factum *e*, ut C F ad F I; hoc est *i* ut Q ad R. Igitur permutando ut polygonum B est ad Q, ita polygonum super F L est ad R. Sed per constr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum super F L, simile ipsi B, æquatur R, hoc est per construct. dato A. Factum est igitur quod petebatur.

e *Per 20. l. 6. & defin. 10. l. 5.*
i *Per 1. l. 6.*

PROPOSITIO XXVI.

Parallelogramma similia B D, F N) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum existunt.

Duc rectas AE, C E, si negas A E C esse diametrum communem parallelogrammorum

Fig. 44.

 rum

rum BD, & F N; ipsius BD diameter esto recta alia A G C secans F E in G, & duc parallelam G H. Parallelogramma igitur F H, B D existent circa communem diametrum A G C, ac proinde *a* erunt similia. Ergo ut B A ad A D, *b* sic F A ad A H. Sed etiam ut B A ad A D, sic F A ad AN, cum B D, F N similia sint per hyp. Ergo F A est ad A H, ut F A ad A N. Quod est absurdum.

a Per 24. l. 6.
b Per defin 1. l. 6.

PROPOS. XXVII. XXVIII. XXIX.

TYronibus facessunt negotium, & nullius ferè sunt usus.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45.

DAtam rectam (A B) ita secare, ut tota (A B) sit ad unum segmentum (A C,) sicut idem segmentum est ad reliquum (C B.)

Hoc est (ut loquuntur Geometræ) lineam extremâ ac mediâ ratione secare.

Per 11. 2. ita seca AB in C, ut rectangulum sub A B, B B, sit æquale quadrato A C. Dico factum.

Erit enim per 17. ut AB ad AC, sic AC ad C B.

Hujus

Hujus sectionis vis admirabilis est in corporum regularium inscriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

SI à lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ similes quæcunque describantur, erit ea quæ opponitur recto angulo duabus simul reliquis (L, R,) æqualis. Fig. 47.

Propositio igitur 47. l. 1. hîc redditur universalis.

Ab angulo recto C demittatur perpendicularis CO. Quoniam AB, BC, BO sunt *a* tres proportionales, erit F ad sibi similem R, *b* ut AB prima ad BO tertiam. Rursum quoniam *c* BA, AC, AO, sunt proportionales, erit F ad sibi similem, L, ut *d* BA prima ad AO tertiam. Quia igitur est F ad R, ut AB ad BO, & F ad L, ut AB ad AO, erit quoque F ad R & L simul sumtas, ut *e* AB ad BO, AO simul sumtas. Sed AB duabus BO, AO æqualis est. Ergo etiam F, duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

a *Per coroll. 2. p. 8 l. 6.*
b *Per 20. l. 6. & per def 10. l. 5.*
c *Per corol. 2. p. 8 l. 6.*
d *Per 20. l. 2. & defin. 10. l. 6.*
e *Per 24. l. 5.*

Corollarium.

EX hac propositione facilè dabitur quotcunque figuris similibus rectilineis quibuscunque

buſcunque una omnibus æqualis & ſimilis, eâdem prorſus methodo, quâ probl. 1. ſcholii poſt 47. l. 1, exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonſtratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6.

PROPOSITIO XXXII.

VIx habet uſum, nec quidquam habet notabile.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 48. *IN æqualibus circulis; vel eodem; anguli, ſive ad centra (ut A B C, F O D) ſive ad peripheriam (ut A R C, F S D) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (A K C, F G D) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus.*

Quod attinet ad angulos centri & ſectores, demonſtrabitur eodem prorſus modo, quo prop. 1. hujus libri demonſtratum eſt triangula æquè alta eſſe ut baſes. Tantum ubi iſthic citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29 lib. 3.

Quoniam verò ad peripheriam anguli R & S dimidii *a* ſunt angulorum ad centrum A B C, F O D, quod de his oſtenſum eſt, liquebit etiam de illis.

a Per 20. l. 3.

Corol-

Corollaria.

1. ANgulus cenrri (B A C) est ad quatuor rectos, ut arcus B C cui insistit, ad totam circumferentiam. *Fig. 49.*

Nam ut B A C est ad rectum B AF, ita per hanc 33. arcus BC ad quadrantem BF. Ergo angulus B A C est ad 4. rectos ut arcus B C est ad 4. quadrantes, hoc est ad totam peripheriam.

2. Inæqualium circulorum arcus I L, B C, qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra ut I A L, & B A C, sive ad peripheriam, sunt similes.

Nam arcus I L est ad suam peripheriam, *b* ut angulus I A L, hoc est ut B A C, ad 4. rectos; & arcus B C est ad suam peripheriam *c*, ut idem angulus B A C ad 4. rectos, Ergo I L est ad suam peripheriam, ut B C ad suam. Ergo *d* sunt similes arcus I L & B C.

b *Per coroll.* 1.
c *Per idem corol.*
d *Per defin.* 4. *l.* 6.

3. Duæ semidiametri (A B, A C) à concentricis peripheriis, arcus auferunt similes I L. B C. Patet ex coroll. 2.

4. Segmenta (BKC, IOL) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) similia sunt.

Nam per coroll. 2. arcus BC, IL, ac proinde etiam arcus BKC, IOL, similes sunt.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS.

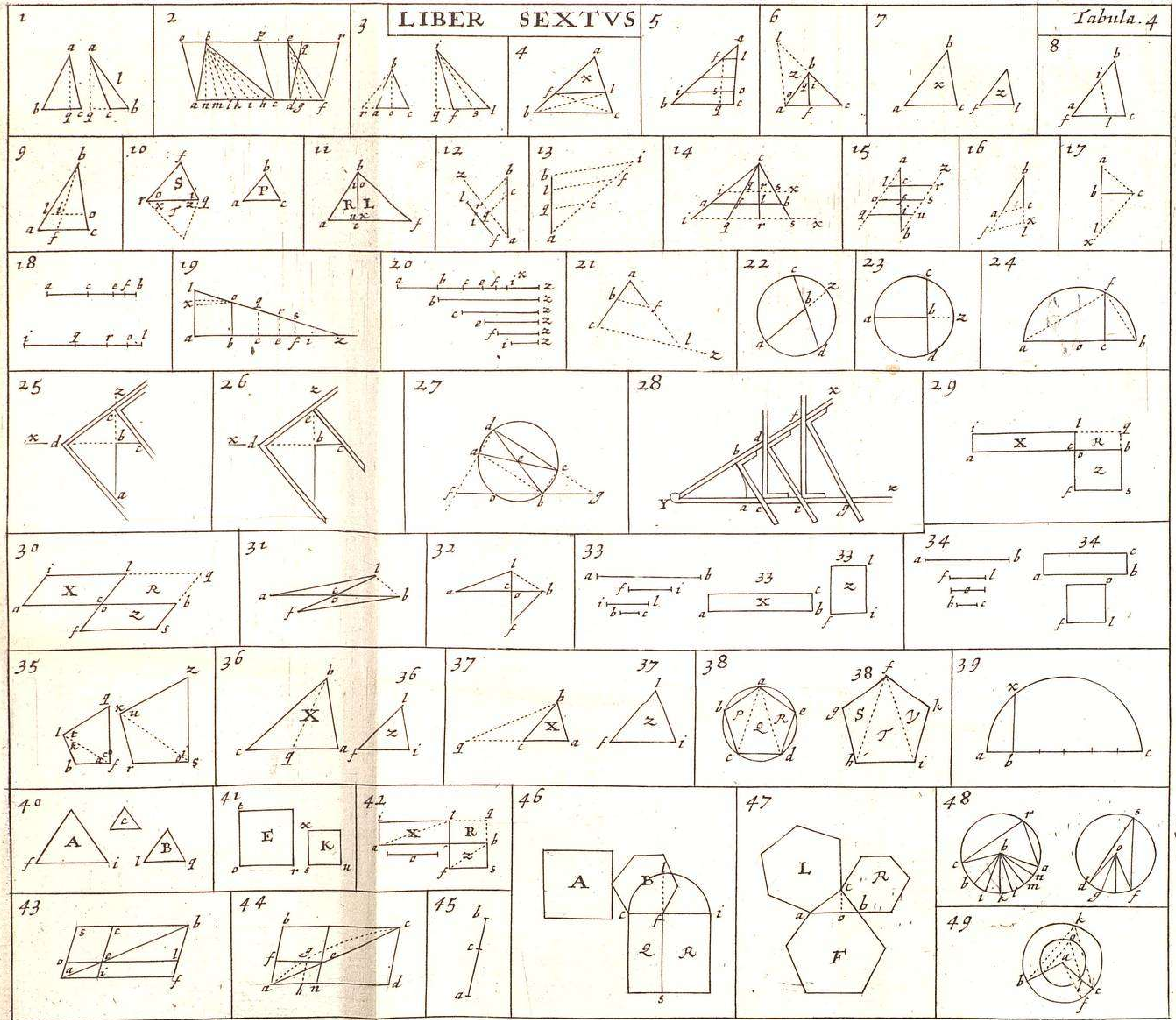
NOBIS SEPTIMUS.

SEx libris primis subjungit Euclides elementa numerorum tribus sequentibus, septimo, octavo & nono comprehensa, quibus etiam decimum de quantitatibus incommensurabilibus adjungit. Nos à planis immediatè transimus ad solida. De numeris seorsum tractaturi. Id, opinor, discentibus commodius erit, si elementa Geometriæ nullâ aliâ tractatione interrupta, simul omnia habeantur. Nihilominus cum citabimus propositiones hujus & sequentis libri, eos non septimum & octavum, sed undecimum & duodecimum appellabimus, ne, si ab ordine Euclidæo ubique recepto discedamus, propositionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima jaciuntur fundamenta, quibus solidorum, hoc est corporum doctrina universa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

DE-

220



DEFINITIONES.

1. SOlidum, sive corpus est, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum est superficies.

3. Linea recta (AB) est ad planum (CC) recta sive perpendicularis, cum ad rectas omnes lineas (C A) in plano (C C) ductas, à quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC. Fig. 1. lib. m. tabulâ. 5.

4. Planum ad planum rectum sive perpendiculare est, cùm omnes rectæ lineæ (L Q,) quæ communi planorum sectioni (X R) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ sunt alteri plano (ABCO.) Fig. 2.

5, Si recta linea (OL) plano insistat non ad rectos angulos, & à sublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP jungaturque P O; angulus L O P dicitur inclinatio lineæ O L ad planum. Fig. 3.

6. Si planum (R E) plano (L Q) non insistat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio est acutus angulus (ABC,) qui continetur à rectis lineis, (AB & BC) quæ in utroque plano ad communem sectionem (O) E ducuntur perpendiculares. Fig. 4.

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum

quando

quando dicti inclinationum anguli sunt æquales.

8. Parallela plana sunt, quæ in omnem partem producta æqualibus semper intervallis distant.

9. Similes figuræ solidæ rectilineæ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

Fig. 5. 10. Angulus solidus rectilineus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis (BAC, CAO, OAB) non in eodem existentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

11. Æquales solidi anguli sunt, qui intra invicem positi congruunt.

Quemadmodum angulus planus est inclinatio linearum, ita solidus angulus est inclinatio superficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Consule scholium post prop. 16. l. 3.

Fig. 6. 7. 8. 12. Prisma est figura solida, planis comprehensa, quorum adversa duo (OFE, ACB) sunt parallela, æqualia & similia.

Fig. 8. 13. Parallelepipedum est solidum sex quadrilateris, ex adverso parallelis comprehensum.

14. Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata, solidum iis comprehensum, cubus erit.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Rectæ lineæ pars una (AC) nequit esse in subjecto plano (OE) altera (CB) extra planum. Fig. 9.

Per se clarum est ex definitione plani, & lineæ rectæ. vide defin. 5. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

OMne triangulum in uno est plano. Et duæ rectæ se mutuo secantes in eodem plano sunt. Fig. 10.

Prima pars per se clara est, cum triangulum nihil sit aliud, quam plana superficies tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

SI duo plana (A B, CD) se mutuo secant; (E F) communis eorum sectio est recta linea. Fig. 11.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen sic demonstrare: si E F sectio communis non est recta linea, ducatur in plano C D recta E O F, & in plano B A recta E Q F. duæ

duæ igitur rectæ E O F, E Q F claudent spacium. Quod est absurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 12.

SI recta (B A) duabus rectis (C A X, F A S) se mutuò secantibus, perpendicularis existat, etiam plano per ipsas ducto perpendicularis erit.

Si negas, alia recta B Q plano rectarum A C, A F sit perpendicularis. Junge A Q, & huic in plano F A C duc perpendicularem Q O. Hæc producta, necessario secabit *o* aliquam rectarum C A X, F A S vel utramque, ubicunque tandem fuerit punctum, Q. secet ergo C A X in O, jungaturque B O, Quoniam ergo angulus B A O per hyp. rectus est.

o Colligitur ex schol. post. 31. l. 1.

a Per 47. l. 1

erit quad. B O. Æ. *a* quad. B A, quad. A O.

sed quia B Q ponitur recta plano F A C, ac proinde *b* rectum facit cum A Q angulum B Q A, est.

b Per defin. 3. l. 11.

c Per 47. l. 1

quad. B A. *c* Æ. quad. B Q quad: A Q.

Et quia angulus A Q O per const. rectus est;

o Per eand.

quad. A O. Æ. *o* quad. O Q quad. A Q.

Ergò

Ergo quad. B O Æ. quad. B Q
quad. O Q
quad. A Q bis.

Ergo quad. B O majus est B Q & O Q, ac proinde *d* angulus B Q O rectus non est. Ergo B Q non est recta *e* plano C A F. Liquet ergo quæsitum.

d Patet ex eádem.
e Patet ex defin 3. l. 11.

Scholium.

Ex eo quod ponebatur B Q esse recta plano F A C; directè est demonstratum B Q non esse rectam plano F A C: ac proinde ex eo quod negaretur assertio theorematis, eadem assertio directè probata est. Hæc demonstratio quoad substantiam est Ioannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

SI tres rectæ (B A, C A, F A) eidem rectæ (A R) ad idem punctum (A) sint perpendiculares; tres illæ erunt in uno plano. Fig. 13.

Sit enim, si fieri potest, earum una BA in alio plano R O, quod secet L Q planum duarum reliquarum C A, F A, rectâ A O. Quoniam R A per hyp. perpendiculariter insistit duabus C A, F A, plano L Q recta *a* erit. Ergo cum A O rectum facit *b* angulum R A O. Sed etiam ex hyp. angulus

a Per præc.
b Per defin. 3. l. 11.

P RAB

RAB rectus est. Ergo anguli, RAB & RAO æquales sunt. Quod est absurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 14. *Lineæ rectæ (AB, CD) quæ eidem plano (EF) sunt perpendiculares, inter se sunt parallelæ.*

Postulari poterat ut per se notum; licebit tamen sic demonstrare.

Iunctâ BD, fac in plano FE; lineam DG normalem ad BD & parem BA, junganturque DA, GA, GB. Rectæ BD, DG æquantur BD, *a* BA, & anguli BDG, *b* DBA sunt recti. Ergo AD, BG *c* sunt æquales. Igitur triangula ABG, GDA sibi mutuo æquilatera sunt, ac proinde anguli ABG, ADG æquales. Sed ABC *o* rectus est. Quare & ADG rectus. Sunt vero & BDG ex constr. & CDG definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD, recta est. Ergo CD cum AD, BD est in uno *i* plano, sed etiam AB cum AD, BD *o* in uno plano est. Ergo AB, CD sunt in uno plano. Ergo cum anguli ABD, CDB, sint *p* recti, erunt AB, CD *q* parallelæ. Quod erat demonstrandum.

a *Per constr.*
b *Per defin.* 3. *l.* 11.
c *Per* 4. *l.* 1.
e *Per defin.* 3. *l.* 11.
i *Per præc.*
o *Per* 2. *l.* 11.
p *Per defin.* 3. *l.* 11.
q *Per* 29. *l.* 1. *& defin.* 36. *l.* 1.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Recta (EF) secans rectas (AB, CD) positas in eodem plano, in uno est cum ipsis plano. Fig. 15.

Postnlari poterat. Qui volet sic demonstret.

Planum rectarum AB, CD secet aliud planum per puncta E, F, si jam EF non est in plano AB, CD, non erit EF communis sectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF *a* est linea recta. Duæ igitur rectæ EF, EGF concludunt spacium. Quod est absurdum. a *Per 3. l. 11.*

Corollarium.

Hinc sequitur si EF secat parallelas AB, CD, in eodem esse cum ipsis plano; omnes enim parallelæ *b* sunt in uno plano. b *Per defin. 36. l. 1.*

PROPOSITIO VIII.

Si parallelarum (AB, CD) una (AB) plano (EF) sit recta, etiam latera (CD) eidem plano erit recta. Fig. 14.

Poterat postulari. Si demonstratio quæritur, ferè similis ea est demonstrationi propositionis 6.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16. *RECTÆ (AB, EF) quæ ſunt eidem rectæ (CD) parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam ſunt inter ſe parallelæ.*

Quamvis poſtulari poſſet, licebit tamen ſic demonſtrare.

In plano parallelarum A B, C D, duc GK normalem ad C D. Item in plano parallelarum EF, C D, duc H K normalem
a Per 4. l. 11. ad C D. Ergo *a* C K recta eſt plano GKH. Ergo cum A G, E H ſint parallelæ ad C K
b Per 8. l. 11. erunt A G, E H *b* rectæ plano G K H. Er-
c Per 6. l. 11. go A G, E H *c* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

Fig. 17. *SI duæ rectæ (A C, B C) ſint parallelæ duabus rectis D F, E F; licet non ſint in eodem plano, æquales angulos (C & F) comprehendunt.*

Fiant C A, C B æquales F D, F E, & ducantur D E, A B, D A, F C, E B. Cum A C, F D ſint parallelæ & æquales, etiam
a Per 33. l. 1. A D, C F *a* parallelæ ſunt & æquales. Similiter

liter ostendam B E, C F esse parallelas & d Per prac.
æquales. Ergo etiam A D, BE sunt *b* parallelæ & *c* æquales. Æquantur *d* ergo AB, DE. Cum igitur triangula B A C, E D F sibi mutuo sint æquilatera, anguli C & F *e* æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

b Per axio. 1
c Per 33. l. 1.
e Per 8. l. 1.

PROPOSITIO XI.

AD planum datum (A B) à dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere. Fig. 12.

Constr. in plano A B, duc quamvis DF, ad quam ex C perpendicularem describe C E. Ad eandem per E, in plano A B perpendicularem duc A E M. Tum ad A M ex C perpendicularem demitte C G. Dico C G plano A B rectam esse.

Per G ponatur H G parallela ad D F.

Per const. D E recta est ad C E, & E M. Ergo D E recta *a* est plano C E M: adeoque & *b* H G. Ergo *c* CG recta est ad HG. Sed & C G ex const. recta est ad E M. Ergo C G *d* recta est plano A B. Quod erat propositum.

a Per 4. l. 11.
b 8. l. 11.
c Per defin. 3. l. 11.
d Per 4. l. 11

PROPOSITIO XII.

EX dato plani (E F) puncto (A) rectam ad datum planum erigere. Fig. 19.

a Per prac. A quovis extra planum E F puncto D, fac DB ad planum *a* EF rectam. Junctaque B A, duc A C parallelam D B. Dico factum. Demonstratio patet ex 8.

Scholium.

PRacticè per datum punctum perpendicularis ducitur dato plano, si norma O K N ad datum punctum applicetur.

Fig. 20.

PROPOSITIO XIII.

LIneæ ex eodem puncto ductæ (D C, E C) nequeunt ambæ ad idem planum (A B) esse rectæ.

Alias enim per 6. forent parallelæ. Quod fieri non potest.

Fig. 21.

PROPOSITIO XIV.

SI eadem recta (A B) ad duo plana (F G, L Q) perpendicularis est. plana erunt parallela.

Sumatur in planorum alterutro F G, quodvis punctum C, ex quo ducatur C E parallela ad A B, occurrens plano L Q in
a Per 8. l. 11. E. Erit C E etiam *a* recta plano utrique F G, L Q. Quare si jungantur rectæ A C,
b Per defin. 3. l. 11. B E, erunt anguli A, B*b* recti. Ergo A C,
c Per 29. l. 1. B E sunt parallelæ. Ergo A C E B parallelogrammum est, ac proinde C E, quam

iam

iam ostendi utrique plano esse perpendicularem; æquatur *d* A B. Eodem modo ostendam omnes utrique plano perpendiculares esse æquales. Ergo plana *e* sunt parallela. Quod erat demonstrandum.

d *Per 34. l. 1.*
e *Per defin. 8. l. 11.*

PROPOSITIO XV.

Fig. 22.

Si rectæ duæ se mutuo tangentes (B A, C A) ad duas alias se mutuo tangentes (E D, F D) sint parallelæ, etiam plana per ipsas ducta erunt parallela.

Ex A ducatur A G recta ad planum E F, ponanturque G H, G I, parallelæ ad D E, D F. Erunt hæ *a* parallelæ etiam ad A B, A C. Cum igitur anguli I G A, H G A, sint *b* recti, erunt etiam *c* C A G, B A G recti. Ergo G A, quæ ad planum E F est recta, etiam recta *d* est plano B C. Ergo plana *e* B C, E F sunt parallela. Quod erat demonstrandum.

a *Per 9. l. 11.*
b *Per defin. 3. l. 11.*
c *Per 27. l. 1.*
d *Per. 4. l. 11.*
e *Per prac.*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23.

Planum (E H F G) secans parallela plana (A B, C D) in iis facit sectiones (E H, G F) parallelas:

Si non: cum sint in eodem plano secante, convenient *o* alicubi in I. Quare cum totæ

o *Per schol. post. 31. l. 1.*

a Per 1.l.11. totæ H E I, FG I sint *a* in planis A B, CD, productis, etiam hæc convenient in I. Quod est absurdum contra definitionem 8. hujus.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 24. *PArallela plana rectas lineas (B D & H G) proportionaliter secant.*

Ducantur in planis PQ, TV rectæ B H, D G, item B G occurrens plano R S in F, junganturque F C, F I. Planum trianguli B G D secans parallela plana, facit sectio-
a Per præc. nes C F, D G *a* parallelas. Ergo est B C ad
b Per 2.l. 6. C D, ut *b* B F ad F G. Rursum triangulum B H G secans parallela plana facit, sectio-
c Per præc. nes *c* B H, FI parallelas. Ergo est HI ad
d Per 2.l. 6. I G, ut *d* B F ad F G; hoc est (quod jam ostendi) ut B C ad C D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 25. *SI recta linea (F E) sit ad planum (A B) recta, omnia, quæ per ipsam ducuntur plana, sunt eidem plano (A B) recta.*

Ductum sit per FE planũ aliquod G C faciens cum A B sectionem C D. In hoc ducantur H K normales ad C D sectionem com-

communem. Cum igitur etiam *o* F E, recta sit ad C D; erunt K H *a* parallelæ ad F E. Sed F E ponitur recta plano A B. Ergo & H K rectæ *b* sunt plano A D. Ergo G C planum *c* plano A B rectum est.

o Per hyp. & defin. 3. l. 11.
a Per 29. l. 1.
b Per 8. l. 11.
c Per defin. 4. l. 11.

PROPOSITIO XIX.

Si duo plana (MF, GD) se secantia, sint ambo recta eidem plano (AB:) erit etiam communis illorum sectio (KL) recta plano (AB.) Fig. 26.

Quoniam planum M F ponitur rectum plano A B; ex def. 4. patet ex puncto L posse in plano M F duci rectam perpendicularem plano A B, eam nempè quæ ex L esset in plano MF perpendicularis ad communem sectionem E F. Similiter, quia planum G D ponitur perpendiculare ad A B, ex def. 4. patet in plano G D posse duci ex puncto L perpendicularem plano A B. Sed ex puncto L tantum *a* una potest duci perpendicularis plano A B. Ergo necesse est, ut recta quæ ex L perpendicularis est plano A B, existat in utroque plano M F & G D, ac proinde sit ipsa planorum M F & G D communis sectio L K. Quod erat demonstrandum.

a Per 13. l. 11.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27. *SI angulus solidus (A) tribus planis angulis (BAC, CAD, DAB) continetur; horum duo quilibet reliquo sunt majores.*

Si tres plani sunt æquales, patet assertio, si inæquales, maximus esto BAD. Hic nihilominus minor est duobus reliquis. Ex maximo enim BAD abscinde BAE parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens ipsis AB, AD in B & D; junganturque BC, DC. Quoniam anguli *o* BAE, BAC æquales sunt, & latera BA, AE, æqualia lateribus BA, AC, etjam bases BE, BC, æquales *a* erunt. Quoniam verò BC, CD *o* majores sunt quam BD, ablatis æqualibus BE, BC, remanet CD major quam ED. Sed latera EA, AD, æquantur lateribus *b* CA, AD. Ergo angulus *c* CAD major est quam EAD. Cum igitur BAC par sit ostensus BAE. Erunt duo simul BAC, CAD majores toto BAD. Quod erat demonstrandum.

o Per const.
a Per 4. l. 1.
o Per 20. l. 1.
b Per constr.
c Per 25. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28.

PLani anguli, ſolidum angulum quemcumque componentes, quatuor rectis ſunt minores.

Eſto ſolidus angulus A, planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in uno plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur pyramis, cujus baſis eſt polygonum BCDEF, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt ſolidum A. Iam vero quia duo anguli ABF, ABC *a* majores ſunt uno FBC, & duo ACB, ACD majores uno BCD & ſic deinceps, erunt triangulorum G, H, I, K, L, circa baſim anguli ſimul ſumti omnibus ſimul angulis baſeos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baſeos una cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, *b* quot ſunt latera, ſive quot triangula. Ergo omnes triangulorum circa baſim anguli, una cum quatuor rectis conficiunt amplius quam bis tot rectos, quot ſunt triangula. Sed iidem anguli circa baſim, una cum angulis qui componunt ſolidum, componunt bis *c* tot rectos quot ſunt triangula. Liquet ergo angulos ſolidum angulum A componentes quatuor rectis eſſe minores. Quod erat demonſtrandum.

a *Per præc.*

b *Per theor. 2. ſchol. poſt 32. l. 1.*

c *Patet ex 32. l. 1.*

Corol-

Corollarium.

Ex hac & præcedenti ſatis colligitur ex tribus angulis, & rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint majores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

Ex hac eàdem propoſitione demonſtratur celebre theorema tres tantùm figuræ planæ ordinatæ, & æquales, corpus continere poſſunt, nimirum æquilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. pentagona 12. Ac proinde quinque tantum ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. Pyramis, quæ 4. Tetraëdrum quod 8. Icoſaëdrum quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaëdrum quod 12. æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicetur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonſt. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus, ad hoc enim ſaltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor, angulus ſolidus octaëdri; ex quinque angulus ſolidus Icoſaëdri, cum æquilateri trianguli anguli tum 3. tum 4. tum 5. ſint 4.

ſint 4. rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam vero tres anguli pentagonici b ſunt 4 rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum nempè Dodecaëdri.

b Colligitur, ex corol. p. 11. l. 4.

A tribus quadratis in unum punctum coëuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos, unus enim facit duas o tertias recti: ac proinde ſex tales efficient 12. tertias recti, hoc eſt rectos 4. Ergo, à ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multo minus à pluribus.

o Per corol. 12. p. 32. l. 1.

A quatuor quadratis, non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multò minus à pluribus per ſe patet.

Anguli pentagonici 4. ſunt 4. rectis majores, ſinguli enim efficiunt 6. quintas e recti. Ergo à quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multò minus à pluribus.

e Per corol. p. 11. l. 4.

Nec ſanè ex aliis figuris quibuſlibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici f ſunt 4. rectis æquales, unus enim facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc eſt 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multò minus à pluribus,

f Per corol. 2. p. 15. l. 4

Cum vero tres anguli hexagonici ſint 4. rectis æquales, tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut ſeptagoni, octagoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifeſtum eſt reliquas figuras ordinatas, omnes eſſe ineptas ut ſolidum angulum

lum constituant, adeoque præter iam dicta 5. nulla ordinata corpora dari posse.

PROPOSITIO XXII. XXIII.

ADmodum prolixæ sunt ac molestæ tyronibus, & ferè usu non veniunt.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 29.

PLana parallelepipedum continentia (1.) sunt parallelogramma. (2.) quæ ex adverso, sunt similia & (3.) æqualia.

1. Pars. Planum A F secans plana B D, FH ex defin. 13. parallela facit *a* sectiones BA, F E parallelas. Rursum planum A F secans plana A H, B G per defin. 13. parallela, facit *b* sectiones A E B F parallelas. Ergo B E F A parallelogrammum est. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana sunt parallelogramma.

a Per 16. l. 11.

b Per eand.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet A B, B C parallelas esse E F, F G, erunt *c* anguli A B C, E F G pares. Quarè cum & latera alternis sint paria, similia sunt parallelogramma adversa B D, F H. Eodem modo probatur de cæteris oppositis.

c Per 10. l. 11.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

SI parallelepipedum (GF DI) aut quodvis prisma plano (NP) secetur adversis planis parallelo; erit ut basis (DCPO) ad basim (OPFE) ita solidum (GP) ad solidum (NF.) Fig. 30.

Demonstrabitur eodem modo, quo 1.6.

Corollarium.

Prisma sectum plano adversis planis parallelo, sectionem habet similem & æqualem planis adversis.

PROPOSIT. XXVI. XXVII.

NOn sunt necessariæ.

PROPOSITIO XXVIII.

PLanum per adversorum planorum diametros (AC, EG) transiens, parallelepipedum secat in duo æqualia prismata. Fig. 29.

Quoniam *a* BG, BE sunt parallelogramma; CG, AE æquidistant eidem BF. Ergo & *b* inter se sunt parallelæ, ac proinde in uno sunt plano. Ergo rectæ A C, E G a *Per 24. l. 11.* b *Per 9. l. 11.*

c in

c Per 7. l. 11. *c* in uno sunt plano: Iam verò planum per illas ductum secare paralelepipedum in duo prismata æqualia. Sic ostendo. Intelligatur prisma A E G C D H supra planum suum E A C G Ita constitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifestum est tum adhuc fore inter parallela plana B A D C, F H G. Tum verò necesse est, ut D cadat in B, & H in F, Cadat enim D extra B, si fieri potest, in N. Angulus B A C

d Per 27. l. 1. æquatur *d* angulo D C A. Sed D C A æquatur N A C (est enim unus idemque angulus.) Ergo B A C & N A C æquales sunt: quod est absurdum. Ergo D incidit in B, &

e Per ax. 7. pari de causa H *e* in F. Ergo prisma A E G C D H congruit prismati A C G E F B ac proinde *e* æqualia sunt.

PROPOSIT. XXIX. & XXX.

Fig. 31.

Parallelepipeda (F E A G K I M C & F E B H L O M I) quæ eandem habent basim (E F I M) & altitudinem eandem, ac proinde existunt inter parallela plana (E F I M, G A O L) æqualia sunt.

Vel enim existunt inter lateralia parallela plana E A O M, & F G L I, vel non. Esto primũ. Ex 24. hujus, & 8. l. 1. patet triangula A E B; C M O, item G F H, K I L sibi mutuò

mutuò æquilatera & æquiangula esse. Quare ut in præcedenti, ostendam prismata CM OLIK, AEBHFG sibi mutuo imposita congruere, ac proinde *a* æqualia esse, *a Per axio. 7.* Quare addito communi solido FEBHK C, MI, tota parallelepipeda FEAGKI MC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat dem.

Sit deinde parallelepipedum FXQE MIPR non inter eadem lateralia plana parallela existens cum parallelepipedo FE AGKCMI. *Fig. 32.* Quoniam ex hypothesi GK, AC, RP, QX sunt in uno plano ad basim EFIM parallelo, RP, QX secent GK in L & H; AC veró in O & B, junganturque EB, MO, FH, IL; facilè ostensu est plana solidum FEBHLOMI continentia parallelogramma esse ex adverso æquidistantia, adeoque solidum illud *c* esse parallelepipedum. *c Per defini. 13. l. 11.* Sed huic per primam partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI, sunt æqualia. Ergo etiam sunt æqualia inter se. Quod erat dem.

Scholium.

HÆc propositio similis est propositioni 35. lib 1. affirmat enim de solidis, quod illa de planis. Quare similis etiam erit reliquorum casuum demonstratio.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 33. *Parallelepipeda super æqualibus basibus (A O & E G) & in eadem altitudine (S) sunt æqualia.*

Habeant parallelepipeda primò latera ad bases normalia. Ad latus F G productum fiat parallelogrammum G M K H æquale ac simile parallelogrammo A O, perfectoque parallelogrammo G M P R, rectæ P M. R G occurrant ipsi K H in Q & L. Iam verò intelligantur super G K, G Q, G P, constitui parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta, altitudo autem, omnium communis sit. S. solidum E G S est ad solidum G P S, ut E G *b* ad G P; hoc est (quia E G, A O per hyp. æquantur) ut A O ad G P; hoc est per constr. ut G K ad G P; hoc est ut *c* G Q ad G P; hoc est *d* ut solidum G Q S est ad idem solidum G P S. Quoniam igitur solida E G S & G Q S eandem habent rationem ad solidum G P S, erit solidum E G S *o* æquale G Q S; hoc est solido *e* G K S; hoc est (quia bases, G K, A O sunt *f* æquales & similes) solido *i* A O S. Quod erat propositum. *Per totum discursum solida accipiuntur recta.*

b Per 25. l. 11.

c Per 35. l. 1.

d Per 25. l. 11.

o Per 9. l. 5.

e Per 29. l. 11.

f Per constr.

i Patet ex 29. l. 11 imò per se.

Habeant deinde parallelepipeda data E G S, EGS, AOS latera ad bases EG & AO obliqua. Fiant super EG, AO parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta in altitudine S, hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem sint paria inter se, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Parallelepipeda quævis æquè alta, sunt inter se ut bases. Fig. 34.

Bases sint GO, & A super CO fac parallelogrammum OE par ipsi A.

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi BEK. Ergo *a* parallelepipedum OEK est ad parallelepipedum BCK, ut basis OE ad basim BC; hoc*b* est ut basis A ad basim BC. Sed quia bases OE & A sunt æquales, parallelepipeda OEK & AK *c* æqualia sunt. Ergo etiam parallelepipedum AK est ad parallelepipedum BCK, ut basis A ad basim BC. Quod erat demonstrandum.

a *Per 25. l. 11.*
b *Per constr.*
c *Per præc.*

Scholium.

QVod hic de parallelepipedis ostensum est, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuslibet prismatibus in corollario 1, post p. 9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 35. *SImilia parallelepipeda (HA & CM) sunt in triplicatâ ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sint parallelepipeda AH, CM similia. Ergo omnia ipsorum plana similia *a* sunt; adeoque AB ad BC *b* est ut EB ad BO; & ut FB ad BG, sic EB ad BO. Insuper & anguli *c* planorum æquales sunt. Collocentur sic igitur solida AH, CM ut æquales anguli CEO, ABE sint oppositi, & latera AB, CB indirectum; tum verò etiam *d* EB, OB indirectum erunt. Cogitentur jam super planis BQ & EC facta solida, sic ut solida KB, HA, sint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum similiter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA est ad solidum KB, ut AE ad BR; hoc est ut *f* AB ad BC; hoc est (ut per hyp. ostendi supra) ut EB ad BO; hoc est ut *g* EC ad BQ; hoc est ut solidum *i* idem KB ad

a Per defin. 9. l. 11.
b Per defin. 1. l. 6.
c Per eand.
d Patet ex 15. l. 1.
e Per 25. l. 11
f Per 1. l. 6.
g Per eand.
i Per 25. l. 11

ad ſolidum P O. Continuant ergo eandem rationem tria ſolida HA,KB,PO. Jam verò ſolidum KB eſt ad ſolidum PO, ut *k* baſis B R ad baſim B Q; hoc eſt ut *l* E B ad BO; hoc eſt ut *m* F B ad B G, hoc eſt, *n* ut planum FC ad planum BS; hoc eſt, ut idem *o* rurſus ſolidum PO ad CM ſolidum. Quatuor ergo ſolida H A, K B, P O, C M, ſunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi H A ad quartum CM eſt *p* triplicata rationis primi H A ad KB ſecundum; hoc eſt rationis *q* A E ad B R; hoc eſt *r* rationis homologorum laterum AB ad B C. Quod erat demonſtrandum.

k *Per eand.*
l *Per 1. l. 6.*
m *Oſtendi ſupra ex hyp.*
n *Per 1. l. 6.*
o *Per 25. l. 11.*
p *per defin. 10. l. 5.*
q *Per 25. l. 11.*
r *Per 1. l. 6.*

Scholium.

QUod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. demonſtrabitur de pyramidibus propoſ. 8. de quibuſlibet priſmatibus, coroll. 2. poſt p. 9. de conis & cylindris p. 12. de ſphæris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

SI parallelepipeda æqualia ſunt (B M, CK,) reciprocant baſes & altitudines (hoc eſt, baſis A M eſt ad baſim FK, *ut reciprocè altitudo F C ad altitudinem AB.)* Fig. 36.

Et ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

 1. Pars

1. Pars. Sint primo latera ad bases recta. Si jam solidorum B M, C K altitudines sint pares, res patet.

Si altitudines sint inæquales, à majori F C abscinde F E parem B A: & per E duc planum E L ad F K parallelum. Basis A M est ad basim F K, ut solidum *b* B M ad solidum E K; hoc est (quod ex hyp. paria sint solida BM, CK) ut solidum C K ad E K. Solidum; hoc est ut *c* C G ad E G; hoc est ut *d* C F ad E F; hoc est ex constr. ut C F reciprocè ad B A. Quod erat demonst.

b Per 32. l. 11.
c Per 25. l. 11.
d Per 1. l. 6.

Sint deinde latera ad bases, obliqua. Erigantur super iisdem basibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua *e* parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent bases & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonstrandum.

e Per 29. & 30. l. 11.

2. Pars. sint altitudines inæquales, lateraque ad bases recta, & ex majori C F ipsi B A sume parem E F. Solidum B M est ad solidum E K, ut *f* A M ad F K: hoc est ex hyp. ut C F; ad BA; hoc est ex constr. ut C F ad E F; hoc est ut *g* C G ad E G; hoc est ut solidum *i* C K ad solidum idem E K. Ergo solida B M & C K eandem habent rationem ad E K. Ergo sunt paria. Quod erat demonstrandum.

f Per 32 l. 11
g Per 1. l6.
i Per 25. l. 11.

Corol.

Corollaria.

QUæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29.30.31.32.33.34. etiam conveniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur.

1. Priſmata triangularia æquè alta ſunt ut baſes A, B. Fig. 37.

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum.

3. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes & altitudines: & ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

Quod hic propoſ. 34. oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus p. 9. de priſmatis quibuſcunque coroll. 3. poſt. p. 9. de conis & cylindris. p. 15

PROPOSITIO XXXV.

VAldè prolixa, ſervit ſequenti, quam ſine illa demonſtrabimus.

PROPOSITIO XXXVI.

PArallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum Fig. 38.

æquatur parallelepipedo (I N) facto à media (B) & æquiangulo priori.

Parallelepipedi D H, basis F D, habeat latus E F æquale A, & latus alterum E D æquale C: latus verò F G basi insistens, æquale mediæ, B. Erit parallelepipedum D H factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde, I N, tria latera L X, I X, X M (ac proinde omnia reliqua) sint æqualia mediæ B; & angulus solidus X sit æqualis angulo solido E. Erit parallelepipedum I N factum ex media B, & priori æquiangulum. Dico etiam esse æquale.

Cum enim per hyp. & constr. sit ut F E ad L X, ita reciprocè I X ad D E, erunt
a Per 14. l. 6 *a* bases D F, I L æquales. Iam quia anguli solidi ad E & X sunt æquales, si ponantur
b Per defin. 11. l. 11. intra invicem, *b* congruent, & ob æqualitatem rectarum E G, X M, puncta M, G, coincident. Quare una erit utriusque solidi altitudo, perpendicularis nempè a punctis M, G, jam congruentibus, in planum baseos
c Per 31. l. 11 demissa. Solida *c* igitur D H, I N, æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Hic porro observabimus, id quod magnum habet usum, ex tribus lineis quomodocunque inter se ductis, ejusdem magnitudinis solidum gigni.

ABC,

ABC. CAB. BCA.

1 2 3

In ſcemate hic appoſito duæ primæ literæ deſignant baſim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo.

Baſis AB eſt ad baſim CA per 2.6. ut B latus ad C latus, hoc eſt reciproce ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per 34.

ABC. Æ. CAB.

Eodem modo oſtendes primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Parallelepipeda ſimilia ſimiliterque à lineis proportionalibus deſcripta, etiam ipſa ſunt proportionalia: & è converſo.

Patet ex 34.15.. Rationes enim parallelepipedorum per 33, hujus erunt duplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ,

Converſa patet ex 35.l. 5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcunque ſimilibus corporibus, quæ patebit l. 12. duplicatam habere laterum rationem.

PRO.

PROPOS. XXXVIII. & XXXIX.

NIhil continent memorabile, & vix ullius ſunt uſus.

PROPOSITIO XL.

Fig. 39. & 40. *SI fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC & IKLPXQ) quorum unum baſim habeat parallelogrammam (OB) duplam baſeos alterius (IKL) quæ triangula ſit; priſmata erunt æqualia.*

Nam ſi perficiantur parallelepipeda KR & CH, erunt hæc æqualia *a* ob baſium CA, MK & altitudinum æqualitatem. Ergo etjam priſmata ipſorum *b* dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 31. l. 11.

b Per 28. l. 11.

Scholium.

EX hactenus demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & quandrangularium, ſeu parallelepipedorum, ſi nimirum altitudo ducatur in baſim, ut ſi altitudo ſit 10. pedum, baſis verò pedum quadratorum 100. (menſurabitur autem baſis per ſchol. p. 36. vel 41. l. 1.) multiplica 10. per 100. proveniunt 1000. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.

De-

Demonſtratio facilis eſt. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in baſim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ducta, cùm E per 31. æquale ſit parallelepipedo recta ſuper eadem baſi ad eandem altitudinem conſtituto.

Deinde cum totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam baſim; ſemiſſis parallelepipedi (hoc eſt priſma triangulare per 28.) producetur ex altitudine ducta in dimidiam baſim; triangulum nempè I L K.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER DUODECIMUS,

NOBIS OCTAVUS.

Quod in libris præcedentibus hactenus præstare conati sumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem ac breviorem methodum revocaremus; id imprimis præstandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cum maximè sit necessaria, demonstrationes adeò sunt prolixæ, ut tyrones in desperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propositum nobis est; ut tamen à rigore Geometricæ demonstrationis non recedamus. Quod utrum simus assecuti, lector intelliget si hæc nostra cum Euclidæâ prolixitate contulerit.

DEFINITIONES.

Fig 2. lib. 12 tabulæ 5.

1. PYramis est solidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehensum ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) constitutis.

Planum Z basis dicitur, & esse potest vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia

alia figura; ex cujus lateribus singulis triangula surgunt in unum punctum L, quod vertex dicitur, coëuntibus.

Vt triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter solidas prima & simplicissima est.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A) adeoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (A C F) redeat, unde moveri cœperat; superficies à recta linea (ACF) descripta, dicitur conica superficies, corpus verò quod hac superficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur. *Fig. 23.*

Vertex coni est A.

Basis coni est circulus C L.

Axis coni est recta (AB) ex vertice ad baseos centrum ducta.

Latus coni est recta (AC) à vertice ad baseos circumferentiam ducta, quam esse totam in coni superficie, ex ejus genesi est manifestum. a *Fig. 2.*

Conus *a* rectus est, cum axis (AB) est basi rectus. b *Fig. 3.*

Conus *b* scalenus, seu obliquus est, cùm axis (A B) non est ad basim rectus.

Fit etiam conus rectus à triangulo rectangulo (C B A) circa unum latus perpendiculare (A B) in orbem ducto vide Fig. 2.

3. Si

Fig. 4. 5. 3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (CL, OQ) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, ſicut mota ſibi ipſi ſemper, parallela maneat; ſuperficies à recta (COF) deſcripta dicitur cylindrica ſuperficies: corpus verò quod hac ſuperficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur.

Baſes cylindri ſunt circuli (CL, OQ.)

Axis cylindri eſt recta (AB) baſium centra connectens.

Latus cylindri eſt recta (OC) in cylindri ſuperficie utramque baſim tangens.

Fig. 4. Rectus cylindrus eſt cum axis ad baſes rectus eſt.

Fig. 5. Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad baſes non eſt rectus.

Fit etiam cylindrus rectus à rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto: vide Fig. 4.

Fig. 20. & 21. 4. Similes coni & cylindri ſunt, quorum axes (AC, ZO) & baſium diametri (BF, QR) ſunt proportionales.

5. Sphæra eſt ſolidum comprehenſum unâ ſuperficie, ad quam omnes rectæ lineæ à quodam puncto intra ipſam poſito ductæ, ſunt æquales.

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per centrum

trum ducta ad superficiem utrimque pertingens.

Generatur sphæra si semicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur. *Fig. 6.*

6. Magnitudines figuræ alicui inscriptæ, aut circumscriptæ, siue figurâ minores vel majores, in figuram desinere dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt quantitate minori quâcunque datâ, seu quantumvis parvâ.

Itaque si ea, quæ figuræ alicui inscribuntur, ab eâ tandem deficiant defectu minori quocunque dato inscripta dicentur in figuram desinere: Et si eæ quæ alicui fiuræ circumscribuntur, excedant eam tandem excessu minori quocunque dato, dicentur sursum circumscripta desinere in figuram.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7.

POlygonorum similium circulo inscriptorum proportio est duplicata proportionis diametrorum (AF, IC.)

Ducantur *a* AO, BE; IR, LC. Quia polygona ponuntur similia, æquales erunt anguli OBA, RLI, & latera OB, BA proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, *b* anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui, iisdem arcubus BA, LI, insistunt, sunt *c* æqua-

a Per defin. 1. l. 6.

b Per 6. l. 6.

c Per 21. l. 3. b Per 31. l. 3. e Per coroll. 9. p. 32 l. 1. f Per 4. l. 6. i Per 20. l. 6

c æquales. Anguli vero F B A, C L I in semicirculis ſunt *d* recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui B A F, L I C *e* æquantur. Quoniam igitur triangula F A B, C I L, ſibi mutuo æquiangula ſunt, erunt *f* ſimilia, eritque B A ad L I, ut A F ad I C. Iam quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum duplicata *i* proportionis laterum B A, L I; hoc eſt ut jam oſtendi duplicata proportionis diametrorum A F, I C. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Fig. 6. & 7.

POlygonorum ſimilium circulo inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe, ut diametri.

Cum oſtenſum jam ſit A B eſſe ad L I, ut A F ad I C, etiam O B, erit ad R L, ut A F ad I C & ſic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera, ad ſimul omnia, hoc eſt ambitus ad ambitum ſunt ut A F ad I C.

Lemma.

Fig. 8.

POlygona circulo inſcripta in circulum deſinunt.

Inſcribe quadratum A C B D. Cum hoc dimidium ſit quadrati *a* circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur è circulo, auferetur plus quã dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis

a Per ſchol. poſt. 6. & 7. l. 4.

in

in E, K, I, H, inscribe octogonum: & in E tangat F G, cui B C, D A occurrant in G & F: erit CF parallelogrammum, cuius cum dimidium sit triangulum *b* C E A, erit hoc plus quam dimidium segmenti C E A. Eodem modo singula triangula A K D, D I B &c. singulorum segmentorum plus sunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium segmentorum plus quam dimidia sunt. Hæc ergo si ex illis, hoc est ex residuo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento si inscribantur circulo polygona duplo semper plurium laterum ostendam è residuo circuli semper auferri plus quam dimidium. Ergo residuum erit tandem *c* minus quocunque dato, ac proinde polygona inscripta tandem à circulo deficient quantitate minori, datâ quâcunque, hoc est in circulum *o* desinent. Quod erat demonstr.

b *Per 41. l. 1.*

c *Patet ex lem. 2. Schol. post. 11. l. 6.*

o *Per defin*

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7.

Circulorum proportio est duplicata proportionis diametrorum.

Polygonorum similium circulo sine fine inscriptorum proportio semper duplicata *a* est proportionis diametrorum. Atqui polygona circulo in infinitum inscripta, in circulum *b* desinunt. Ergo per porisma universale sequens, etiam circulorum proportio,

a *Per. 1. l. 1*

b *Per ler*

duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

Poriſma univerſale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant, quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eandem habent & figuræ.

R
A B X Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarũ A, B, eandem eſſe cum ratione X ad Z, quã ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur, ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B
a Per defin. 6.l.12. inſcripta, quæ ab ipſis deficiant *a* minori quantitate quam R deficiat à figura B. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quam R. Ergo
b Per 8.l. 5. C eſt ad B in *b* majori, quam R ad B; hoc eſt (ut ponebatur) quam X ad Z, hoc eſt per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in majori proportione, quam ad F,
c Per 10.l.5. erit B figura minor *c* ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodem modo oſtendetur rationẽ B ad A, non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X. Er-

X. Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi, X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO. III. & IV.

SVnt Prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent uſum, quàm ut per eas demonſtretur quinta, quam nos ſine illis multò facilius demonſtrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

SI duæ pyramides triangulares ſecentur planis (OSE, RXZ) ad baſes (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL,) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE, RXZ) inter ſe ut baſes (ACB, IQV.) Fig. 9

Quoniam parallela plana OSE, ABC ſecantur à planis BFC, AFB, AFC, erunt, ſectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC *a* parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales *b* ſunt. Quare ſectiones OSE, ABC *c* ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtendam ſectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio ſectionis ABC ad OSE eſt duplicata *d* rationis laterum BC ad SE; & ratio ſectionis IVQ ad RXZ duplicata eſt rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ ſunt eædem (eſt

a Per 16. l. 11.
b Per 10. l. 11.
c Per 4. l. 6.
d Per 19. l. 6.

e Per corol. 1 p. 4. l. 6. enim B C ad S E, ut *e* C F ad E F; hoc est
f Per idem corol. per hyp. ut Q L ad Z L; hoc *f* est ut V Q
ad X Z.) Ergo ratio A B C, ad O S E ea-
i Per 35. l. 5. dem est *i* cum ratione I V Q, ad R X Z.
Quod erat propositum.

II.

Fig. 10. *PYramidi (ZC AF) triangulum habenti basim, prismata in infinitum imscripta, desinunt in ipsam pyramidem.*

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF, & per B, G factis sectionibus G D N & B E P basi ZAC parallelis inscripta intelligantur pyramidi prismata triangularia BE P M A O, & G D N K B Q. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi esse circũscripta prismata C I BA, PXGB, N H F G. Excessus circumscriptorum supra inscripta sunt solida I M, X K, H G, quæ simul sumta æquantur prismati C I
o Per 25. l. 11 BA: nam H G est *o* æquale D B, ac proinde H G cum X K æquatur P X GB, hoc est
p Per eand. *p* M E B A. Ergo tria HG, XK, IM, æquantur toti C I BA. Atqui si A F in plures sine fine partes æquales dividatur, ac proinde
a Collig. ex lem. 2. Schol. post. 11. l. 6. prismatum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet *a* quavis data minor. Ergo etiam *b* prisma C I B A fiet quovis dato
b Patet ex minus. Ergo prismatum circumscriptorum

(simul

(multoque magis pyramidis Z C A F, quæ pars est prismatum sibi circumscriptorum.) Excessus supra inscripta prismata, fiet quovis dato minor. Ergo inscripta prismata in pyramidem *c* tandem desinunt. Quod erat demonstrandum. *c Per defin. 6. l. 11.*

PROPOSITIO V.

Pyramides triangulares æquè altæ, eam inter se proportionem habent, quam bases (A Q R, E S X.) *Fig. 11.*

Pyramidum altitudines æquales referant latera A P, E Z, quibus in quot placuerit, æquales partes, sed æquè multas, vtrimque, diuisis, factisque per diuisionum puncta sectionibus ad bases parallelis, intelligantur utrique pyramidi inscripta esse prismata trigona æquè multa & æquè alta. Iam verò quia prismata L A, I F sunt æquè alta, erit prisma L A ad prisma I E, ut *a* basis L O B ad basim I N K hoc est *b* ut basis Q R A ad basim S X E. Eodem modo ostendam singula prismata pyramidi Q P A R inscripta, esse ad singula inscripta pyramidi, S Z E X, ut basis Q A R ad basim S E X. Ergo etiam *c* simul omnia sunt ad omnia, ut basis ad basim. Quare cum ea tandem desinant *d* in ipsas pyramides, etiam ipsæ erunt *e* ut bases. Quod erat demonstrandum.

a Per coroll. 1. p. 34. l. 11.
b Per lem. 1.
c Per 12. l. 5.
d Per lem. 2.
e Per poris. univers. post p. 2. l. 12.

PROPOSITIO VI.

Fig. 12. & 13.

PYramides quæcunque æquè altæ, eam inter se rationem habent, quam bases (A B, C F O.)

Resolvantur bases in triangula A, B, C, F, O; pyramides verò totæ in pyramides triangulares. Pyramis A X est ad pyramidem O Z, ut *a* A ad O; & pyramis *b* B X est ad pyramidem O Z, ut B ad O. Ergo pyramides simul A X, B X (hoc est tota A B X) sunt ad pyramidem O Z, ut A, B *c* simul ad O. Eodem discursu pyramis A B X est ad pyramidem F Z, ut *d* A B est ad F: Et A B X est ad C Z, ut *e* A B est ad C. Ergo A B X *f* est ad tres simul O Z, F Z, C Z, hoc est ad totam pyramidem O F C Z, ut AB ad O F C. Quod erat demonstrandum.

a Per præc.
b Per eand.
c Per 24. l. 5.
d Per præc.
e Per 24. l. 5.
f Per eand.

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars est prismatis habentis eandem basim & altitudinem.

Fig. 14

Sit primò pyramis trigona B G A C, in eadē basi & altitudine cum prismate B A C F E O, ducantur B F, A O, A F. Triangula B F C, BFC, BFO sunt *a* paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA *b* æqualis est. Ob eandem causam pyramis OEAF par est pyramidi OBAF, hoc est pyramidi BOFA, sunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales sunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, sive BOFA sunt pares. Ergo tres simul unius BFCA triplæ sunt. Atqui tres illæ constituunt prisma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc est *c* BGAC, triplum est. Quod erat demonstrandum.

a Per 34. l. 1
b Per 5. l. 12.
c Per 5. l. 11.

Fig. 15.

Sit deinde pyramis quævis eandem habens basim & altitudinem cum prismate AEFH ductis lineis BC, BO, BE & NI, NG, NH, resolve prisma in triangularia prismata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonstratio ex prima parte. Nam singulæ partes prismatis triplæ erunt singularum partium pyramidis. Ac proinde totum prisma totius pyramidis triplum est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 16.

SImilium pyramidum (OACB, KHIN) proportio est triplicata eius, quam habent homologa latera (AB, HN.)

Sint primo trigonæ; perfectis parallelogrammis AM & HQ, ſuper his conſtitue parallelepipeda AG,HL,in altitudine pyramidum quæ cum pyramides ſint ſimiles, etiam patet ſimilia *a* eſſe. Ducantur jam EF, RP, & per EF, CB, item per RP, IN ſecabuntur *b* parallelepipeda in duo priſmata æqualia: ſingula horum *c* tripla ſunt pyramidum OACB, & KHIN. Utraque ergo ſimul; hoc eſt tota parallelepipeda, AG, HL, ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio *d* triplicata eſt rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonſtrandum.

a *Defin. 9. l. 11.*
b *Per 28. l. 11.*
c *Per præc.*
d *Per 33. l. 11.*

Quod ſi pyramides ſimiles fuerint poligonæ, reſolvantur in triangulares AR, BR, CR, & OK, EK. FK Facilè *e* oſtendes etiam AR ipſi OK, & BR ipſi ER, & CR ipſi FK eſſe ſimiles. Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK eſt triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR & EK triplicata eſt rationis MX ad SZ; hoc eſt denuo per hyp. rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum CR, FK eſt triplicata rationis XQ ad ST, hoc eſt rurſum IM ad PZ. Cum ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis IM ad PZ, etiam ratio *e* omnium ad omnes (hoc eſt ratio totius pyramidis ABCR ad totam

Fig. 17.
e *Ex 20. & 5. l. 6. & ex defin. 9. l. 11.*
e *Per 12. l. 5.*

totam O K F K)triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

Æ Quales pyramides reciprocant baſes, & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æquales. Fig. 18. & 19.

1. Pars. Sint primò pyramides trigonæ B A C O, H K N L: perfectis parallelogrammis B E, H R, ſuper his ſint parallelepipeda BF, H P. Erunt (ut oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines H K, B A, eædem, quæ pyramidum: baſes verò BE, HR duplæ *o* ſunt baſium pyramidalium B C O, H N L, ac proinde iis proportionales. Cum igitur ob parallelepipedorum æqualitatem, ſit ut BE ad HR, ita *a* reciprocè HK ad BA, etiam erit ut baſis BCO ad baſim HNL, ita reciprocè altitudo HK ad altitudinem B A. Quod erat demonſtr.

o *Per 34. l. 1*

a *Per 34. l. 11.*

Quod ſi pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus reducantur ad trigonas eruntque hæ illis æquales per 6. Sed pyramides ſic reductæ per jam demonſtrata reciprocant baſes & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ

gonæ reciprocant bases & altitudines. Quod erat demonstrandum.

2. Pars. Quoniam jam ponitur esse B C O ad H N L, ut H K ad B A, erit quoque B E ad H R, ut H K ad B A. Ergo parallelepipeda B F, H P *h* sunt æqualia, ergo & sextæ eorum partes, nempè pyramides B A C O, H K N L. Quod erat demonstrandum.

h Per 34. l. 11.

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonstrata sunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuscunque prismatis; cùm hæc tripla *c* sint pyramidum eandem basim & altitudinem habentium. Igitur

c Per 7. l. 12.

1. Prismatum æquè altorum eadem est proportio, quæ basium. Id enim ostensum est de pyramidibus p. 6.

2. Similium prismatum proportio est triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim ostensum est de pyram. p. 8.

3. Æqualia prismata reciprocant bases & altitudines, & quæ reciprocant sunt æqualia. Id enim de pyramidibus ostenditur p. 9.

Mirum est hæc ab Euclide prætermissa, cum præcipua sint, quæ de solidis rectilineis tradi possunt.

Scholium.

Scholium.

Ex hactenus demonstratis elicietur dimensio quorumcunque prismatum ac pyramidum.

Prismatis soliditas producitur ex altitudine in basim ductâ, pyramidis verò ex tertiâ altitudinis parte ductâ in basim.

Ut si prismatis altitudo sit 5. pedum, basis vero 25. pedum quadratorum, multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro soliditate prismatis.

Esto enim prisma polygonum AH. Ejus basi AE intelligatur æquale esse triangulum BAC, superque eo prisma BE æquè altum ac AH. Erunt c BE, AH æqualia prismata. Sed BE prisma d producitur ex altitudine sua in basim BAC, hoc est e AE. Ergo etiam prisma AH fit ex altitudine suâ, quæ altitudini prismatis BE æqualis ponitur, in basim AE. Fig. 15. & 14. c Per corol. 1. præced. d Per schol. p. 40. l. 11. e Per constr.

Hinc vero & ex 7. patet demonstratio partis secundæ.

Lemma ad P. 10.

PYramides & prismata, quæ conis & cylindris in infinitum inscribuntur, in conos & cylindros desinunt.

Demonstratur ut lemma propositionis 2. adminiculo propositionis 6. & corollarii 1. post p. 9. si ut istic plana circulo inscripta, ita hîc pyramides & prismata, quæ super planis illis tanquam basibus consistunt, à cono & cylindro auferantur.

PRO-

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem basim & altitudinem habentis.

Fig. 20. BasiCL intelligatur inscribi polygonum regulare quotcunque laterum, & super illo tanquam basi, cono quidem pyramis, cylin-
a Per 7. l. 12. dro autem prisma inscribi. Erit pyramis *a* tertia pars prismatis. Et si rursum inscribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, superque eo inscribatur cono pyramis & cylindro prisma; iterum erit pyramis tertia pars prismatis; Atque hoc sem-
b Per lem, prac. per eveniet. Quare cum pyramides in conum, *b* prismata in cylindrum desinant, e-
c Per Poris. univ post 2. l. 12. tiam *c* conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XI.

Fig. 20. & 21. *Conorum æquè altorum (B A F, QXR) QXR) proportio eadem est, quæ basium (CL, SE.) Idem accidit cylindris æquè altis.*

Pyramides conis æquè altis inscriptæ sunt, *d* ut bases. Atqui *e* pyramides tandem
d Per 6. l 12 in conos desinunt. Ergo etiam *f* coni sunt ut
e Per lem. ante 10. l. 12 bases. Cum verò cylindri conorum eandem
f Per poris. univ. cum ipsis basim & altitudinem habentium sint

ſint tripli, etiam ipſi erunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur etiam priſmata & cylindros æquè alta eſſe inter ſe ut baſes, imò quælibet corpora cylindriformia æquè alta, hoc eſt quæ producuntur ex quibuſcunque planis in eandem altitudinem ductis, eſſe inter ſe ut baſes. Eodem modo de pyramidibus & cono æquè altis, & conicis quibuſcunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

COnorum ſimilium (BAF et QZR) proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BF & QR) quæ ſunt in baſibus. Idem cylindris ſimilibus accidit. Fig. 20. 21.

Similium conorum baſibus inſcribe polygona ordinata, quæ proinde ſimilia erunt. Pyramides ſuper his polygonis inſcriptæ conis, etiam ſimiles ſunt; quod facile oſtenditur. Ergo earum proportio eſt triplicata *a* proportionis laterum BL, QE; hoc eſt *b* proportionis diametrorum BF, QR. Quare cum pyramides *c* in conos deſinant, etiam conorum proportio *d* eſt triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 8. l.12.*
b *Eſt demonſt. in 1. l.12.*
c *Per lem. ante 10. l.12.*
d *Per*

De cylindris patet theorema cum ſint tripli conorum.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 22. *SI cylindrus (B I) ſecetur plano (R L) baſibus (B Q, C I) parallelo; erit pars (B L) ad partem (R I) ut axis ſegmentum (A O) ad ſegmentum axis (O F.)*

Demonſtratur ut prima ſexti.

Theorema eodem modo verum eſt de ſuperficie.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 23. & 24. *CYlindri (AR & CI) baſibus (M Q, G H) æqualibus, ſunt inter ſe ut altitudines (L Z, S F.) idem conis accidit.*

Abſcinde ab altiori cylindro A R cylindrum A O, altitudinis L E ejuſdem cum SF.

a Per 11. l. 12 Igitur cylindri A O, C I *a* æquales ſunt. Cum igitur cylindrus AO ſit ad cylindrum

b Per prac A R, ut *b* LE ad LZ, etiam CI erit ad AR, ut L E ad L Z, hoc eſt (quia L E &

c Per conſtr. S F *c* æquantur) ut S F ad L Z. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

THeorema etiam verum eſt de priſmatis, itemque de pyramidibus, & demonſtratio planè ſimilis. Sed de priſmatis ex

corol. 1.

rol. 1. p. 9. 12, &. 25. l. 11. ejusque coroll. De pyramidibus ex hoc, & ex. 7. l. 12.

PROPOSITIO XV.

ÆQuales cylindri (AR, DF) reciprocant, bases & altitudines; & si reciprocant, æquales sunt. Idem conis accidit. Fig. 2, & 25.

Demonstratur ut P. 34. l. 11. sed pro 32. & 25. isthic citatis, hîc adhibebitur prop. 11. & 13. lib. 12.

Scholium.

CUm nihil attulerit Euclides de ratione composita in corporibus, eam breviter hoc loco demonstrabimus.

1. Cylindrus ad cylindrum, & prisma ad prisma, rationem habent compositam ex rationibus basium & altitudinum.

Sunto cylindri FD, & AR. Ab altiori AR (nam in æquè altis res per se patet) abscinde AO æquè altum ac FD. Sit etiam ut basis VT ad basim MQ, ita FN ad X & ut altitudo ND, seu BO, ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur ostendere cylindrum FD esse ad cylindrum AR, ut FN est ad Z. Cylindrus FD est ad cylindrum AO, ut a basis VT ad basim MQ hoc est b ut FN ad X, cylindrus autem AO est ad cylindrum AR, ut c BO ad BR; hoc est ut d X ad Z. Igitur ex e æquo cylindrus FD est ad cylindrum AR, ut FN ad Z. Fig. 25. & 24.

a Per 11. l. 12
b Per constr.
c Per 13. l. 12
d Per constr.
e Per 22. l. 5.

De prismatis res eodem modo demonstrabitur, sed

sed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2. Etiam conus ad conum & pyramis ad pyramidem rationem habent compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem.

e Per 10. n. 7. l. 12. *Sunt enim e cylindrorum ac prismatum partes tertiæ.*

PROPOSITIO XVI. XVII.

HÆ *propositiones omnium prolixissimæ non alium usum habent, quam ut demonstretur P. 18. quam nos aliâ faciliori viâ demonstrabimus.*

Lemma ad P. 18.

Fig. 26. *CYlindri hemisphærio inscripti in hemisphærium desinunt.*

Sit PZY maximus hemisphærii semicirculus, sitque radius A Z perpendicularis diametro P Y. Seca A Z in aliquot æquales partes A M, M N, N Z; ductisque per divisionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inscribantur semicirculo rectangula O B R K, E D H S, quibus deinde extra circulum continuatis, semicirculo circumscripta intelligantur rectangula F T Y P, L V B O, Q X D E Eruntque omnia æquè alta, excessus autem circumscriptorum supra inscripta, sunt plana FK, L S, X E, V H, T R, quæ simul sumta conficiunt rectangulum F T Y P; nam quia X E æquatur D S, erunt L S, V H, VH, X E ſimul, æqualia rectangulo L B, hoc eſt O R. Quare ſi adjicias utrimque plana F K, T R, erunt ſimul omnia F K, L S; X E, VH, T R æqualia rectangulo F T Y P. Si jam intelligatur ſemicirculus cum rectãgulis circa radiũ immotum A Z, circumagi, inſcripta rectangula E H, O R producent cylindros hemiſphærio inſcriptos, & rectangula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos, ſibi mutuo inſiſtentes; & ſicut rectangulorum circumſcriptorum exceſſus, ſupra inſcripta rectangula erat rectangulorum F Y, ita etiam cylindorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus à rectangulo F Y genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quâvis datâ minor, adeoque etiam ipſe quovis dato *b* evadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diviſo rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptorum, multoque magis ipſius hemiſphærii, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti tandem deſinunt *c* in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

b Patet ex 13. l. 12.

c Per defin. 6. l. 12.

S Corol-

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur cylindros, cono, conoidi, ſphæroidi, &c. inſcriptos, in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27. *SPhærarum proportio eſt triplicata proportionis diametroru m (B K, R Z.)*

Radijs A B, Y R in quot placuerit æquales partes, ſed æquè multas, diviſis, ductiſque per diviſionum puncta perpendicularibus &c. Intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis, inſcripta eſſe rectangula æquè multa, quæ circa radios immotos AB, YR circumacta, inſcribant utrique hemiſphærio cylindros æquè multos, ſibiinuicem
o Per coroll. p. 13. l. 6. inſiſtentes. Quia K C *o* eſt ad CF, ut CF
a Per defin. 10. l. 5. ad CB. Erit ratio K C ad C B duplicata *a* rationis K C ad C F, hoc eſt rationis F G ad C B. Similiter erit ratio Z E ad E R, duplicata rationis X E ad E R. Sed per conſtr. eſt K C ad C B, Z E ad E R. Er-
b Per 35. l. 5. go etiam *b* F C eſt ad B C, ut X E ad E R. Sed B C eſt ad C O per conſtr. ut R E ad
c Per 22. l. 5. E S. Igitur ex æquo *c* F C eſt ad C O, ut
d Per defin. 4. l. 12. X E ad E S. Cylindri igitur *d* FL, X Q ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt
e Per 12. l. 12 triplicata *e* proportionis diametrorum FI, X V,

XV, ſeu ſemidiametrorum FC, XE, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio F C ad X E eadem eſt cum proportione quæ eſt inter diametros ſphærarum BK, RZ, (nam ut jam oſtendi FC eſt ad XE, ut CO ad ES; hoc eſt ut B K ad R Z, ipſarum C O, E S per conſtr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ eſt triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonſtrabimus ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos, ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum B K, R Z. Ergo etiam ratio ſimul omnium, ad omnes ſimul *i* triplicata eſt rationis diametrorum BK, RZ. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria *k* deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit *n* rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum. i *Per 12. l. 9.* k *Per lem. praced.* n *Per poriſ. univerſ.*

Corollarium.

NOtâ igitur proportione diametrorum, etiam ſphærarum proportio innoteſcit ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. ut 1. ad 1000. quartũ terminũ, ita ſphæra minor ad majorẽ.

Conorum, Cylindrorum, ſphæræ dimenſio dabitur libro ſeq. ex Archimede.

Scholium.

Quemadmodum similes planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora similia non nisi per medias duas, in proportione data augentur vel diminuuntur.

Data sit sphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius sive latus sit A. Data item sit proportio quæcunque A ad B ut dupla. Oporteat exhibere corpus, & duplum dati & simile.

Inter terminos rationis datæ A & B; inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z ut docuimus in scholio post 13. l. 6. Sphæra cujus radius est X, sive corpus dato simile, factum super latere X, erit duplum dati.

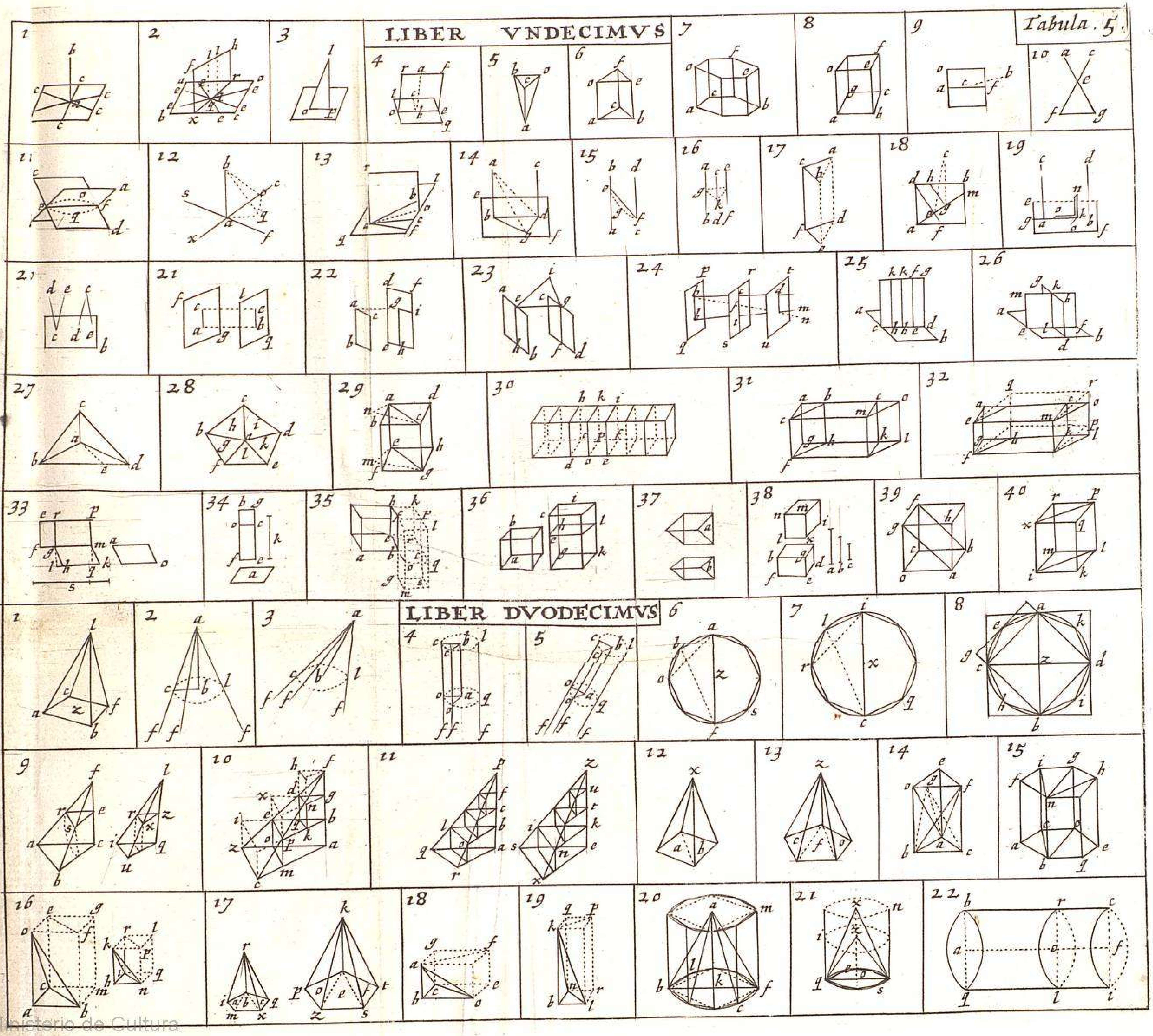
Nam corpora similia quorum radii, seu latera sunt A & X, rationem inter se habent triplicatam i *rationis A ad X, hoc est, eandem,* b *quam A habet ad B.*

i Corol. 2. p. 9. & per 12. ac 18. l. 12.
b Per defin. 10. l. 5.

Atque hoc est celebratissimum illud problema, quod Deliacum à Deliaco Apolline dictum est, quòd is lue sævissimâ Athenas populante consultus respondisset, pestem cessaturam, si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8.

AN-

~~257~~ 276

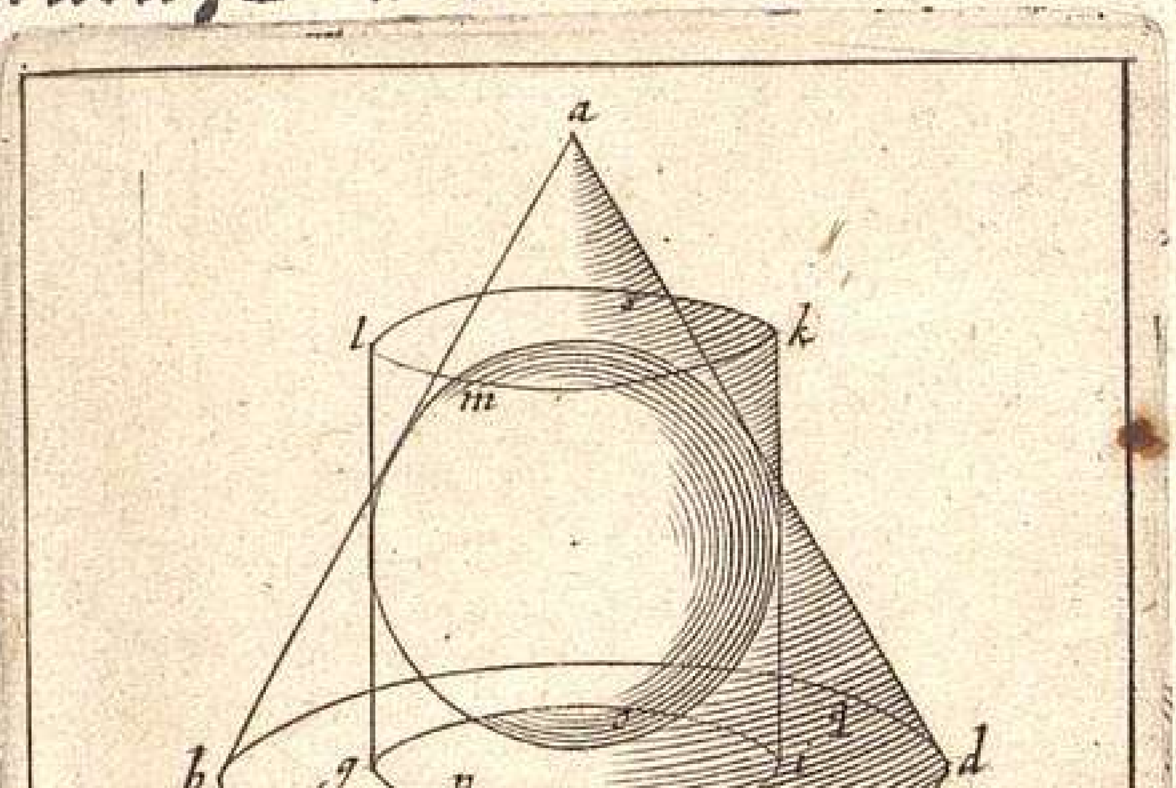


ANDREÆ TACQUET

E SOCIETATE IESU

SELECTA EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

[V]ia faciliori ac breviori demon-[]strata, & novis inventis aucta.



AMSTELÆDAMI,

[S]umtibus HENRICI WETSTENII,

LECTORI.

Quamvis in Mathematicis disciplinis complures summi & admirabiles viri extiterunt; prima tamen gloria communi quodam consensu Archimedi Syracusano delata est. Sed illum plures laudant, quàm legant; admirantur plures, quàm intelligant. Causæ, opinor, sunt exemplarium moles, & raritas, sermonis ex Græco translati obscuritas nonnulla, demonstrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex studiosæ juventutis usu futurum, si elementis jam illustratis, hæc à me selecta ex Archimede theoremata; & viâ multò faciliori ac breviori demonstrata subnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonstrando eam tenui, ut sperem, eum, qui elementa perceperit; hæc summi Geometræ præclarissima inventa negotio haud magno assecuturum. Sub finem adjectis tredecim propositionibus, Archimedis de cylindro & sphærâ doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonstro sesquialteram proportionem in tribus corporibus, sphærâ, cylindro, & æquilatero cono, utroque sphæræ Circumscripto, continuari. Varia insuper sparsim, inter quæ propositio 12. & corollaria prop. 14. præcipua sunt, & scholia omnia adieci. Fruere istis, quisquis Geometriæ candidatus es, & quantùm ex

Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumque in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehique sursum persenseris, mentem ab infimis hisce rebus feliciter jam avulsam attolle etiam altiùs, atque dirige ad veritatem primam æternam, immensam, quæ Deus est; cujus ineffabili visione nos futuros aliquando æternúm beatos confido. Vale.

DE

DEFINITIONES.

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus B E C G, cujus centrum A diameter B C, quam ad rectos angulos secet recta E G non per centrum videlicet in D. Ex centro autem educantur radii A E, A G. His positis. *Fig. 23. tab. 6. ex Archim.*

1. Sector sphæræ est, qui à sectore circulari AECG seu AEBG, circa diametrum B C in orbem acto, producitur.

2. Segmentum seu portio sphæræ, est quæ à circulari segmento EC G, seu EBG, circa eandem diametrum B C in orbem acto, describitur.

3. Portionis sphæricæ (EBG) vertex est diametri immobilis extremitas B: Basis est circulus à rectâ E G descriptus. Axis est diametri pars B D inter verticem B, & D centrum baseos intercepta.

4. Cum sphæricæ portionis aut corporis ei inscripti, aut coni superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & dum cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus; nisi adjungatur (*tota*) tunc enim accipiuntur & bases.

Rur-

Rursum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

Fig. 1. & 16 1. POlygoni circulo inscripti ambitus minor est circuli peripheriâ.

Fig. 1. 2. Polygoni circulo circumscripti ambitus circuli peripheriâ maior est.

Fig. 16. 3. Quod si polygonum circulo inscriptum circa diametrum (AE) unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies minor sphæræ superficie. Et si polygonum circulo circumscriptum circa diametrum unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies major superficie sphæræ.

Fig. 17. 4. Similiter ambitus polygoni inscripti segmento circulari (D A F) minor est peripheriâ segmenti (DAF.) Et si polygonum segmento inscriptum una cum segmento, circa segmenti axem (A O) circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies minor superficie portionis sphæricæ (DAF.)

Fig. 3. & 6. 5. Superficies prismatis cylindro inscripti minor est cylindri superficie; circumscripti verò major.

Fig. 4. & 8. 6. Et superficies pyramidis cono inscriptæ minor est coni superficie; circumscriptæ autem major.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Datæ sint figuræ quæcunque seu planæ seu solidæ, A, B. Sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B semper minùs ac minùs excedendo, in ipsas a desinant, & tamen semper inter se æquales sint. a Defin. 6. l. 12.

Dico etiam figuras, A, & B æquales esse.

Si non, alterutra major erit: sit ergo A major. quam B

E.	F.	
A.	A.	X.

excessu X. Per hypothesim dantur magnitudines, E, F inter se æquales, quæ excedant figuras A, B excessu minori, quam X, quo A ponitur superare B. Ergo F minor est quam A. Sed F per hypothesim est æqualis E. Ergo etiam E minor est quam A, quod est absurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo ostendam B non posse esse majorem quam A. Ergo cum neutra sit major alterâ, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO II.

Datæ ſint figuræ A & B; ſint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ à figuris datis ſemper minùs ac minus deficiendo, in ipſas b *deſinant, & ſemper inter ſe æquales ſint.*

b Defin. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z.
O. P.

Si non, alterutra minor erit. Eſto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypotheſim dari poſſunt magnitudines O, P, inter ſe æquales, quæ deficiant à figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major eſt quàm A. Sed P per hypotheſim eſt æqualis O. Ergo etiam O major eſt quàm A, quod repugnat hypotheſi, quâ ſtatuitur O minor quam A. Eodem modo oſtendam B non eſſe minorem quâm A. Quare cum neutra ſit minor alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumſcriptorum, & inſcriptorum, dè-

desinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipsa in circulum desinunt.

Si nimirum arcubus sine fine bisectis plura semper ac plura latera circulo circumscribantur & inscribantur. *Fig. 1. tab. 6. ex Archim.*

1. Pars. Intelligantur circulo inscripta & circumscripta polygona ordinata; sive ut traditur p. 12. l. 4. sive ut in hac figura, perinde erit. Manifestum est *a* F I esse ad E C (hoc est *b* totum ambitum circumscriptum ad totum ambitum inscriptum) ut I A est ad C A. Atqui I C excessus rectæ I A supra C A, sit tandem quâcumque datâ minor, si plura semper ac plura in infinitum latera circumscribi & inscribi intelligamus. Ergo etiam excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum tandem fiet quovis dato minor. Ergo multò *c* magis excessus ambitus circumscripti supra peripheriã fiet quocunque dato minor. Similiter, quia iam ostendi defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multò *o* magis defectus inscripti ambitus à peripheriâ fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inscripti quam conscripti in peripheriam *d* desinunt. Quod erat primum. Hæc ulteriùs demonstrare operę pretium non est, cum satis sint manifesta.

a *Per corol. 1 p. 4 l. 6.*

b *Per 12. l. 5.*

c *Patet ex axio. 1.*

o *Patet ex axio. 1.*

d *Defin. 6. l. 12.*

2. Pars. Quia iam ostensum est excessum

ſum lateris FI ſupra latus EC fieri tandem quovis dato minorem (eſt enim FI ad EC, ut IA ad CA) etiam exceſſus quadrati FI, ſupra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita *e* polygonum circumſcriptum ad polygonum inſcriptum. Ergo etiam exceſſus polygoni circumſcripti ſupra inſcriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis exceſſus polygoni circumſcripti ſupra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inſcripti defectus à circulo; dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inſcripta quam circumſcripta in circulum *i* deſinunt. Quod erat alterum.

e Per 22. l. 6.

i Defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1.
o Defin. 3. l. 4.

P*Olygonum o ordinatum circulo conſcriptum (FINTR) æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.*

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt polygoni inſcripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

1. *Pars.*

1. Pars. Radius A B ad contactum ductus *a* est perpendicularis ad tangentem IF. Quare si ductis rectis A F, A I, A N &c. polygonum resolvatur in triangula, erit radius AB communis omnium altitudo; adeoque triangula ipsa liquet esse æqualia. Ergo triangulum basim habens parem summæ laterum F I, I N, N T &c. altitudinem verò A B, æquabitur illis *b* omnibus, hoc est toti polygono circumscripto.

a *Per* 18.

b *Patet ex* 1. *l.* 6.

2. Pars. Simili ferè ratiocinio concludetur

PROPOSITIO V.

Fig. 2.

Circulus est æqualis triangulo, cuius basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter.

Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, semper sunt *a* æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumscripta, in circulum *b* desinunt; similiterque triangula (ut mox ostendam) quæ pro basi habent ambitum polygoni circumscripti, pro altitudine verò radium AB, tandem desinunt in triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium A B. Ergo *c* circulus, & triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium A B, æqualia sunt.

a *Per prac.*

b *Per* 3. *huius.*

c *Per* 1. *huius.*

Quod

Quod autem triangula ſub ambitu polygoni, & radio, deſinant in triangulum ſub peripheriâ & radio, ſic oſtendo. Triangula ſub ambitu circumſcripti polygoni & radio AB ſunt ad triangulum ſub peripheria & radio AB, ut *i* baſis ad baſim, nempè ut ambitus polygoni ad peripheriam; cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam *k* deſinit. Ergo & trianguli deſinet in triangulum.

i Per 1. l. 5.

k Per 3. huius.

Corollaria.

1. EX hac & 41. l. 1. patet rectangulum ſub radio & dimidiâ circumferentia eſſe æquale circulo: ſub radio & totâ circumferentiâ eſſe duplum: ſub totâ diametro & totâ circumferentià eſſe quadruplum circuli.

Fig. 5. lib. 4. tabulâ 3.

2. Circulus eſt ad quadratum ſibi inſcriptum ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum; ad quadratum verò circumſcriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum.

Nam rectangulum ſub CDE & radio CA ſeu CF (hoc *d* eſt ipſe circulus) eſt ad rectangulum GFCE nimirum ſub FG & CF; (hoc eſt ad quadratum inſcriptum BCDE) ut *e* CDE dimidia circumferentia eſt ad FG ſeu CE diametrum; quòd erat primum, ac proinde circulus eſt ad duplum

d Per coroll. praced.

e Per 1. l. 6.

duplum rectanguli GFCE (hoc est ad FH quadratum circumscriptum) ut CDE ad duplam diametrum CE, sive ut quadrans CD ad diametrum CE.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quam ter & unam septimam (seu $\frac{10}{70}$) plus vero quam ter & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus theorematis demonstrationem assumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumscriptum, inscriptum alterum, utrumque 96 laterum. Deinde ostendit 96 latera circulo circũscripta continere diametrum minus qnam ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiam quæ ipsis minor est, etiã continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96 circumferentiæ inscripta (ac proinde & circumferentiam quæ ipsis major est) ampliùs cõtinere diametrũ quam ter $\frac{10}{71}$. Porro longior est hujus rei demonstratio quam ut hoc loco adferri debeat. Quod si ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiociniũ velimus extendere, limites jam statutos arctare poterimus, magis magisque sine termino, atq; ita propius in infinitum ad veram proportionem accedere. Præſtitum eſt hoc à Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque. Proportiones præcipuas hactenus inventas hic ſubjicio.

Prima eſt Archimedis hujuſmodi

Diameter 7
Circumfer. 22. major verâ.
Diameter 71
Circumf. 223 minor verâ

Rationes 22 ad 7, & 223 ad 71. Si ad commune conſequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem) rationes orientur 1562 ad 497 & 1561 ad 497.

Poſitâ igitur diametro partium 497 erit circumferentia major verâ 1562 & circumferentia minor verâ 1561

Utraque igitur à vera differt quantitate minori, quam ſit $\frac{1}{407}$ pars diametri. Quod ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens, provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Poſitâ igitur circumferentiâ partium 4906. erit diameter minor verâ 1561. diameter major verâ 1562.

Utraque igitur à verâ diametro differt quantitate minori, quam ſit pars $\frac{1}{4000}$ circumferentiæ.

Proportio tradita à Metio eſt Archimedæâ

medæâ multò accuratior. Iuxta hanc est

Diameter 113,

Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris constantes nulla veræ propinquior: ex hac enim positâ diametro 10,000,000, provenit circumferentia 31,415,929, quæ à verâ solùm penes notam primam 9 differt excessu paulò majore, quam sint duæ particulæ decimillionesimæ diametri.

Sed utrâque multò exactior est gemina illa Ludolphi à Ceulen: prioris termini constant notis 21, posterioris verò notis 36.

Diameter

100000000000000000000

circumf. major verâ

314159265358979323847

circumf. minor verâ

314159265358979323846

Differentia utriusque circumferentiæ est particula una diametri denominata à numero, qui constat unitate & 20 cifris, ac proinde tam hæc quam illa à verâ circumferentiâ differt minori quantitate quam sit diametri particula dicta, videlicet centies millionesies millionesies millionesima.

Diameter

100000000000000000000000000

000000000

Circumf. major verâ

3141592653589793238462643383279502 89.

Circumf. minor verâ.

3141592653589793238462643383279502 88.

Differentia utriusque circumferentiæ, inter quam vera existit, est diametri particula una, denominata à numero, qui constat unitate & 35 cifris, quæ particula ad diametrum minorem habet proportionem, quam arenula una ad orbem terræ. Non enim constat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Frustra igitur sit ulterius progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, si ratiocinium Geometricum, cuius methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

Proportionis jam traditæ fructus eximii, sunt hi qui sequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentiâ.

Majorem terminum uniusè proportionibus jam traditis statue primo loco, minorem secundo, circumferentiam tertio, his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæsita diameter.

Ut si detur circumferentia maximi circuli terræ milliaria

milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæratur terræ diameter, sic stabunt termini

355 —— 113 —— 8640 ——

multiplica jam secundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica 2750 $\frac{14}{71}$ pro diametro orbis terræ.

In ventio circumferentiæ ex Diametro.

Terminus minor unius è proportionibus supra traditis statuatur primo loco: major secundo: Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæsitam circumferentiam.

Ut si detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ 2750 $\frac{14}{71}$, & quæratur ambitus, termini ita stabunt,

113 —— 355 —— 2750 $\frac{14}{71}$ ——

Tunc secundum multiplica per tertium & productum divide per primum: proveniunt milliaria Belgica 8640 pro ambitu orbis terræ.

Quam modicè hæc circumferentia veram excedat, dictum est supra, excessu videlicet paulo majore, quam sint diametri terrestris duæ particulæ decimillionesimæ hoc est 9 circiter aut 10 pedibus Rhynlandicis, quorũ 18000 constituunt milliare horarium. Quod si utamur proportione Ludolphinâ etiam priori, cujus termini constant 21 notis; invenietur circumferentia insensibiliter à verâ differens

 non

non solum diametro datâ milliariorum Belgicorum 2750, qualis est terræ; verum etiam licet diameter ponatur centum millionum eorundem milliariorum, qualis fortasse est diameter firmamenti; hâc enim positâ proveniet circumferentia minori quantitate à verâ differens, quàm una centimillionesimâ particula pedis Rhynlandici. Quod si ad investigandam circumferentiam orbis terræ utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum verâ majoris ac minoris excedet 5 milliaria Belgica. Non est igitur adhibenda Archimedæa proportio, nisi in quantitate parvâ: imò semper expediet Metiano uti, quæ & modicis constat terminis, & plusquam millies exactior est.

Circuli dimensio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll, 1, p. 5. hujus.

Ut si semidiametrum orbis terræ, quæ neglectâ fractione continet milliaria Belgica 1375, multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempè Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5,940,000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ à verâ, habetur, si differentia inventæ circumferentæ dimidiæ, à dimidiâ verâ, ducatur in semidiametrum datam, aut si differentia semidiametri inventæ à verâ, ducatur in datam semicircumferentiam.

Di-

Dimensio cylindrorum & Conorum.

EAm hic appono, quòd à circuli dimensione pendeat.

Cylindrus igitur & prisma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per basim: Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in basim ductâ, sunt enim partes tertiæ cylindrorum ac prismatum, eandem cum ipsis basim & altitudinem habentium, per 10 & 7. l. 12.

Sit basis Cylindri aut coni 50 ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100 in 50; proveniunt 5000 pedes cubici pro soliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50 proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro soliditate coni.

PROPOSITIO VII.

CIrculorum peripheriæ eam inter se proportionem habent, quam diametri. *Fig. 6. l. 12. tab 5.*

Nam polygonorum similium circulo sine fine inscriptibilium ambitus sunt inter se semper ut *a* diametri AF & IC. Sed hi *b* ambitus in peripherias desinunt. Ergo *c* etiam peripheriæ sunt inter se ut diametri. Quod erat demonstrandum.

a Per corol. p. 1. l. 12.
b Per 3. hujus.

PROPOSITIO VIII.

SVperficies prismatis cylindro tam circumscripti, quam inscripti æquatur rectangulo, cuius altitudo est latus cylindri, basis vero æqualis perimetro basis prismaticæ.

Fig. 3. 1. Pars. Prismatis conscripti superficies tangit cylindrum secundùm lineas E A, N F &c. quæ sunt cylindri latera; hæc autem (quod ex hyp. cylindrus sit rectus) ad planum baseos recta sunt, ac proinde etiam

e Per defin. 3. l 11. *c* recta; lineas C G, G M &c. Sunt verò & æqualia inter se. Igitur unum cylindri latus communis est omnium rectangulorum C O, O M, M H &c. altitudo. Conscripti

f Patet ex 1. l. 6. igitur prismatis superficies æquatur *f* rectangulo sub ambitu basis prismaticæ & prismatis seu cylindri latere contento.

Eadem est ratio secundæ partis, nam latus cylindri, communis rursum est altitudo rectangulorum B D I K, K I Q P &c. quæ constituunt superficiem prismatis inscripti.

PROPOSITIO IX.

Fig. 4. *PYramidis ordinatæ, cono recto circumscriptæ superficies, æqualis est triangulo,*

triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia (FHLD) altitudo autem latus coni (BG.)

Et pyramidis ordinatæ cono recto inscriptæ superficies æquatur triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (BO) à vertice in latus baseos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G K M rectæ B G, B K, B M. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA *a* rectus est basis plano FKD, etiam planum *b* G B A plano F K D rectum erit. Atqui H G perpendicularis *c* est ad AG communem sectionem planorum FKD & GBA. Ergo H G etiam *d* recta est plano G B A. ac proinde perpendicularis quoque est ad *e* ipsam B G. Ergo B G latus coni, est altitudo trianguli F B H. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD &c. Igitur triangulum circumferentiâ FH L D, & latere coni comprehensum, æquatur superficiei pyramidis circumscriptæ absque basi. Quod erat primum.

a *Per hyp.*
b *Per 18. l. 11.*
c *Per 18. l. 3.*
d *Collig. ex def. 4. l. 11.*
e *Per defin. 3. l. 11.*

2. Partis similis ferè demonstratio est.

PRO-

PROPOSITIO X.

SVperficies prismatis ordinati cylindro recto circumscripti desinit a in cylindri superficiem: & pyramidis cono recto circumscriptæ superficies in coni superficiem desinit.

a Defin. 6. l. 12.

Fig. 3. & 4.

1. Pars. Prismatum ordinatorum cylindro sine fine conscriptorum & inscriptorum superficies habebunt tandem inter se differentiam datâ minorem, uti facile patebit ex 8 & 3 huius. Multò igitur magis, snperficies circumscripti prismatis à superficie cylindri inter inscriptam, & circumscriptam mediâ, differet differentiâ minori quâcunque datâ, hoc est, *b* desinet in cylindricam superficiem, minùs semper ac minùs ex cedendo.

b Defin. 6. l. 12.

2. Pars. Eodem modo ostenditur ex 9. & 3 huius.

In figuris tantum exhibentur cylindri & coni semisses, ne multitudo linearum confusionem pareret. Cæterum cogitandi sunt cylindrus & conus integri, quos prismata & pyramides circumscriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet planas superficies circumscriptas esse majores ex 3. axiomate.

Lem-

Lemma ad sequen.

Sint AB, CD, EF proportionales, sitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt. Fig. 7.

Recta KB est ad AB, ut EF ad EG. Rectangulum ergo KB, EG æquatur per 16. l. 6. rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD, Ergo & rectangulum KB, EG par est quadrato CD. Ergo per 17. l. 6. KB, CD, EG, sunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) est medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC) & baseos diametrum (BD,) æqualis est superficiei cylindricæ. Fig. 5. & 6

Intelligatur circulis ABN, GPN, circumscripta esse ordinata polygona, adeoque similia NM, RS, & super NM polygono erectum esse prisma, cylindro circumscriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. sunt proportionales, etiam AD (seu AN) GH & dupla BC *o* proportionales erunt. Iam triangulum sub AN & ambitu polygoni MN contentum *a* æquatur polygono conscripto NM: rectangulum verò sub BC

o Per lem.

a Per 4. hujus.

b Patet ex 41. l. 1. c Per 8. hujus. o Per 1. l. 6. d Per defin. 10. l. 5. e Per 9. l. 5. f Per 10. hujus. i Per 5. hujus. k Per 1. hujus.

B C ſeu E F & eodem ambitu N M (hoc eſt *b* triangulum ſub ambitu N M & dupla B C) æquale eſt *c* ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu N M & A N, eſt ad triangulum ſub ambitu N M & dupla B C *o* ut A N ad duplam B C. Ergo etiam polygonum N M eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti ut A N ad duplam B C. Sed quia jam oſtendi A N, G H, duplam B C, eſſe proportionales, ratio A N ad duplam B C eſt duplicata *d* rationis A N ad G H. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam rationis A N ad G H. Sed etiam polygonum N M ad ſimile ſibi polygonum G R Q S, rationem habet duplicatam rationis A N ad G H, ut facilè colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis, & ad polygonum G R Q S eandem habet rationem; quæ proinde æqualia *e* ſunt. Eodem modo oſtendam, priſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo G P H, in infinitum circumſcribi poſſunt. Quare cum & ſuperficies priſmaticæ *f* in cylindri ſuperficiem & polygona *i* in circulum G P H deſinant, etiam cylindri ſuperficies circulo G P H æqualis *k* erit. Quod erat demonſt.

Ex

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

1. *Superficies cylindri recti, æqualis eſt rectangulo ſub latere BC, & baſeos peripheria contento.* Fig. 5. & 6

Dupla BC (ut oſtenſum ſupra) eſt ad GH, ut GH ad BA, ſeu AN; Hoc eſt, ut *n* peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum ſub primâ, nempè duplâ BC, & quartâ, nempè peripheriâ BN æquatur *p* triangulo ſub ſecundâ, GH, & tertiâ, peripheriâ ſcilicet P. Sed triangulum ſub GH & peripheriâ P, æquale *q* eſt circulo GPH, hoc eſt, *r* ſuperficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub dupla BC & peripheriâ BN (hoc eſt *s* rectangulum ſub BC & peripheria BN) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſt.

n Per 7. hujus.
p Patet ex 16. l. 6.
q Per 5. hujus.
r Per 11. hujus.
s Patet ex 41. l. 1.

Ex hoc corollario manifeſtum eſt rectangulorum proprietates, ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe communes. Eſto igitur corollarium.

2. Cylindricæ ſuperficies (BM, QN) æquè altæ, ſunt inter ſe ut baſium diametri (BF, QR.) Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.

Nam rectangula ſub peripheriis CL, SE,

SE, & rectis æqualibus FM, RN compre-
henſa, quibus cylindricæ ſuperficies *d* ſunt æquales, ſunt inter ſe *e* ut baſes peripheriæ videlicet CL, SE; hoc eſt *f* ut diametri BF, QR.

d Per coroll. 1.
e Per 1. l. 6.
f Per 7. huius.
Fig. 23. & 24. l. 12. tab. 6.

3. Cylindricæ ſuperficies (CI, AR) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut altitudines (TI, BR.)

Rectangula enim ſub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus ſuperficies *g* cylindricæ ſunt æquales, ſunt inter *i* ſe ut TI, BR.

h Per coroll. 1.
i Per 1. l. 6.
Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.

4. Similes cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem habent duplicatam eius, quam habent baſium diametri (BF, QR.)

Cum cylindri ponantur ſimiles. erit MF ad IQ, *o* ut BF ad QR, hoc eſt *k* ut peripheria CL ad peripheriam SE. Quare etiam rectangula ſub peripheris CL, SE, & lateribus MF, IQ, contenta, ſimilia erunt, ac proinde rationem inter ſe habebunt *l* duplicatam eius, quam habet MF ad IQ, hoc eſt BF ad QR. Ergo & cylindricæ ſuperficies &c.

o Defin. 4. l. 12.
k Per 7. huius.
l Per 20. l. 6.

5. Cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (FM, IQ) & diametrorum (BF, QR) quæ ſunt in baſibus.

Fig. eadem.

6. Si æquales ſunt cylindricæ ſuperficies (AR, FD) erit ut diameter AB, ad diametrum

Fig. 24. & 25. l. 12. tab. 6.

metrum F N, ita reciprocè altitudo FH ad altitudinem R B: & è converso.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ superficiei dimensio, si nimirum altitudo ducatur in baseos peripheriam, ut si altitudo sit pedum 20, peripheria basis pedum 6; multiplica 20 per 6, proveniunt 120 pedes quadrati pro cylindrica superficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti superficies est ad basim (A B N) ut cylindri latus (C B) ad (B O) quartam partem diametri baseos. *Fig. 6. & 5. tab 6. Archim.*

Sit G H media proportionalis inter B C & B D diametrum basis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter BA seu AN, & duplam B C. Circulus GPH radii G H æquatur curvæ superficiei *b* cylindricæ CD. Sed circulus G P H ad cylindri basim ABN, rationem habet duplicatam *c* rationis GH ad AN: hoc est *d* eandem quam dupla B C ad B A radium, hoc est eandem quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam superficies cylindrica est ad basim ABN, ut B C ad B O quartam partem diametri B D. Quod erat demonstrandum.

a Per lem. ante p. 11. hujus.
b Per 11. hujus.
c Per 2. l 12.
d Per hyp. & defin. 10. l. 5.

Corol-

Corollarium.

SUperficies cylindri habentis latus diametro basis æquale, baseos quadrupla est. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi æqualis erit. Utrumque ex propositione manifestum est.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 9. & 8. *CIrculus, cujus radius (O L) est medius proportionalis inter coni recti latus (B C) & basis radium (A C,) æqualis est superficiei conicæ.*

Intelligantur circulis A C G O P L, circumscripta esse polygona ordinata E F, I N, & super polygono E F erectam esse pyramidem cono circumscriptam.

Quoniam per hyp. A C seu A G est ad O L, ut O L ad B C, erit ratio A G ad B C duplicata *a* rationis A G ad O L. Sed ut A G ad B C ita triangulum sub A G & ambitu E F est ad triangulum sub B C & eodem ambitu E F. Ergo ratio trianguli sub A G, & ambitu E F ad triangulum sub B C & eodem ambitu est etiam duplicata rationis A G ad O L. Sed triangulum sub A G & ambitu E F æquale est *b* polygono E F, & triangulum sub B C & eodem ambitu E F æquale *c* est superficiei pyramidis circumscriptæ

a *Defin.* 10. *l.* 5.

b *Per* 4. *hujus.*

c *Per* 9. *hujus.*

ſcriptæ. Ergo ratio polygoni E F ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis A G ad O L. Atqui etiam ratio polygoni E F ad polygonum ſibi per conſtr. ſimile I N eſt duplicata *d* rationis A G ad O L. d Per 1. l. 12. Ergo polygonum E F, ad ſuperficiem pyramidis & ad polygonum I N eandem habet rationem, quæ proinde æqualia *e* erunt. e Per 9. l. 5. Eodem modo oſtendam ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygonæ circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis quæ circulo O P L poſſunt circumſcribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum *f* ſuperficies in coni ſuperficiem, & polygona in circulum *i* O P L tandem deſinant, etiam coni *k* ſuperficies & circulus O P L erunt æqualia. Quod erat Demonſt. f Per 10. hujus. i Per 3. hujus. k Per 1. hujus.

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

1. **R***ecti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo, ſub coni latere (B C) & baſeos peripheria (C G) comprehenſo.* Fig 8. & 9.

Sit O L radius media proportionalis inter A C & B C. Quia peripheria C G eſt ad peripheriam P ut *a* radius A G ad radium O L; hoc eſt per hyp. ut O L ad B C: erit triangulum ſub prima, nempè peripheriâ C G & a Per 7. hujus.

b Patet ex 16. l. 6. ſub quarta B C *b* æquale triangulo ſub ſecunda, nempè peripheriâ P, & tertiâ OL; o Per 5. hujus. hoc eſt *o* circulo OPL, hoc eſt *d* ſuperficiei conicæ BCD. Quod erat Demonſt. d Per hanc 13.

Ex hoc corollario liquet ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges. Itaque

Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5. 2. Superficies conicæ B A F, Q X R æqualia latera BA, QX, habentes, ſunt inter ſe, ut baſium diametri B F, Q R.

Fig 32. & 24. l. 12. tab. 6. 3. Et (C F T, AZB) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut latera (C F, AZ.)

Fig. 20. & 21. l. 12 tab. 5. 4. Et quæ ſimiles ſunt (B A F, Q Z R) duplicatam habent rationem ejus, quæ eſt inter baſium diametros

Fig. ead. 5. Et quælibet, rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum (BF, QR) quæ ſunt in baſibus.

6. Et quæ æquales ſunt reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1. ut ſupra corollaria de cylindrica ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

Fig. 25. l. 12. tab. 6. 7. Metiemur denique conicam ſuperficiem, ſi latus FC per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut ſi latus ſit pedum 5, peripheria baſeos pedum 20, duc 5. per 10, proveniunt 50. pedes quadratis pro conica ſuperficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Coni recti superficies est ad basim, ut latus (B C) ad basis radium (A C.) *Fig. 8. & 9 Archim. tab. 6.*

Inter latus B C & basis radium A C, sit media proportionalis O L. Ergo ratio B C ad A C est duplicata *e* rationis O L ad A C Iam circulus radii, O L *f* est æqualis superficiei conicæ C B D. Sed hujus ratio ad coni basim A C G est duplicata *g* rationis O L ad A C, ac proinde eadem cum ratione B C ad A C. Ergo etiam ratio superficiei conicæ C B D est ad basim A C G, ut B C ad A C. Quod erat demonst.

e Defin. 10. l. 5.
f Per 13. hujus
g Per 2. l. 12.

Corollaria.

1. *Superficies coni recti à triangulo æquilatero circa perpendicularem K A, circumacto geniti, baseos Q T dupla est.* *Fig. 27.*

Est enim K B latus æquale B D, adeoque duplum semisseos A B, quæ baseos radius est.

2. *Superficies coni à rectangulo triangulo æqui cruri E B D producta est ad basim, ut in quadrato diameter ad latus.* *Fig. 24.*

a Patet ex 26. l. 1.
b Per coroll. 1. p. 32. l. 1.
c Per 6. l. 1.

Ducta enim perpendiculari B A, *a* angulus rectus B bisecatur, adeoque A B D semirectus est, est autem & A D B *b* semirectus. Ergo D A, B A *c* æquales sunt ac proinde B D est diameter quadrati A K latus verò A D. Est verò eadem A D semidiameter baseos P T, cum perpendicularis A B, secet *d* bifariam E D. Ex quibus & hac 14. patet corollarium.

d Patet ex 26. l. 1.

Fig. 24.

3. *Superficies cylindri recti (G K) est ad superficiem coni recti (G B N,) ut cylindri latus ad dimidium latus coni.*

Nam superficies coni G B N est ad basim M I, ut latus B N ad *e* semidiametrum basis Q N; hoc est ut dimidium lateris B N ad quartam partem diametri G N. Est autem basis M I ad superficiem cylindri G K, ut *i* quarta pars diametri ad N K cylindri latus. Ex æquo igitur superficies conica G B N est ad superficiem cylindricam G K, ut dimidium latus coni ad cylindri latus N K. Quod erat demonstr.

e Per 14. huius.
i Per 22. huius.

Lemma ad sequen.

Fig. 10.

IN triangulo N P V, ducta sit Q D parallela ad N V.

Dico rectangulum sub P N & N V, æquari rectangulo sub P Q, Q D, una cum rectangulo sub N Q & duabus simul sumtis N V, Q D.

Duc

Duc lateri N P perpendicularem N A æqualem N V, completoque N O rectangulo, ducatur diameter P A. Tum ex Q parallela Q E ad N A secet P A in B. Per B ducatur CF parallela ad N P. Quoniam A N est par N V; patet etiam *a* Q B esse parem Q D. Igitur rectangulum O N est rectang. P N V, & F Q est P Q D. Restat ut probemus rectangula O B, E C, B N æquari rectangulo sub N Q & duabus N A, Q B, hoc est sub N Q & duabus N V, Q D. Id verò est manifestum: rectangulum enim sub N Q & N A, Q B, æquatur *b* his tribus rectangulis sub N Q & C A (hoc est spacio E C) sub N Q, & N C (hoc est spacio B N) sub N Q & Q B: hoc est rursum spacio B N, ac proinde spacio O B quod ipsi B N *c* æquale est. Liquet ergo propositum.

a *Ex corol. 1. p. 4. l. 6. & ex 11. l. 5.*

b *Per 1. l. 2.*

c *Per 43. l. 1.*

PROPOSITIO XV.

Fig. 11. & 12.

SI conus rectus sectus sit plano Q S R basi N Z O parallelo; Dico circulum G H M, cujus radius G H est medius inter partem lateris N Q & circulorum Q S R, N Z O, radios Q D, N V simul sumtos, æqualem esse superficiei conicæ inter parallelos circulos Q S R, N Z O interceptæ.

Inter P N & N V media ſit G F. Item inter P Q & Q D ſit media G K, deſcribanturque circuli G F L, G K T. Erit hic *b* æqualis ſuperficiei conicæ Q P R, ille ſuperficiei *c* N P O. Rectangulum P N V æquatur *d* rectangulo P Q D, una cum rectangulo ſub N Q & N V, Q D ſimul ſumtis. Sed quia *e* G F media eſt proportionalis inter P N, N V, rectang. P N V eſt æquale *f* quadrato G F, & quia G K eſt *i* media inter P Q, Q D, rectang. *l* P Q D æquatur quadrato G K: & quia G H media *k* eſt inter Q N, & Q D, N V ſimul ſumtas, rectangulum ſub Q N & Q D, N V ſimul ſumtis, æquale eſt *n* quadrato G H. Ergo quad. G F par quoque eſt quadratis G H, G K. Ergo cum circuli ſint inter ſe ut*o* quadrata radiorum, erit quoque circulus G L F æqualis duobus circulis, G K T & G H M. Atqui circulus G L F eſt æqualis *p* ſuperficiei conicæ N P O. Ergo etiam ſuperficies conica N P O æquatur duobus circulis G K T & G H M. Atqui ſuperficiei N P O pars una Q P R *r* æqualis eſt circulo G K T. Ergo reliqua, inter parallelos circulos Z Z, S S comprehenſa, æquatur circulo G H M. Quod erat demonſtrandum.

b Per 13. hujus.
c Per eand.
d Per lem.
e Per conſtr.
f Per 17. l. 6.
i Per conſtr.
l Per 17. l. 6.
k Per hyp.
n Per 17. l. 6.
o Per 2. l. 12.
p Per 13. hujus.
r Per eand.

Lem-

Lemma ad sequent.

Recta (BH, CG) quæ in circulo æquales arcus (BC, HG) intercipiunt, sunt parallelæ. Fig. 13.

Ducatur enim CH. Qnoniam arcus BC, HG per hyp. sunt æquales etiam *a* anguli BHC, GCH alterni æquales erunt. Ergo *b* BH & CG sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

a Per 29. l. 3.
b Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 13.

IN scribatur circulo figura regularis, parilatera et æquilatera; Ducaturque EB ab extremitate diametri ad B, terminum lateris diametro proximi, angulos verò æqualiter distantes ab A, jungant rectæ BH, CG, DF.

Dico rectangulum quod diametro AE, et subtensâ EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inscriptæ (AB, vel BC &c,) & ex omnibus iungentibus BH, CG, DF simul sumtis.

Duc CH, DG: quoniã BH, CG, DF intercipiunt arcus *a* æquales BC, HG; CD, GE; erũt *b* parallelæ. Pari argumẽto parallelæ-

a Per 26. l. 3
b Per lem. præc.

læ sunt B A, CH, D G, E F. Omnia igitur
c Per 27. & 15. l. 1. triangula *c* BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula sunt. Ergo *d* ut
d Per 4. l. 6. BK ad KA, sic HK ad KL; & ut HK ad KL, sic CM ad ML; & ut CM ad ML, sic GM ad MN; & ut GM ad MN, sic DO ad ON; & ut DO ad ON, sic FO
e Per 12. l. 5. ad OE. Ergo *e* ut una antecedentium BK ad unam consequentium KA; sic omnes antecedentes BK, KH, CM, MG, DO, OF; (hoc est omnes jungentes BH, CG, DF) sunt ad omnes consequentes AK, KL,
i Per 8. l. 6. LM, MN, NO, OE, hoc est ad diametrum AE. Sed ut BK ad *i* AK sic EB ad BA. Ergo ut omnes simul BH, CG, DF
k Per 16. l. 6. ad AE, sic EB est ad BA. Ergo *k* rectangulum sub omnibus jungentibus BH, CG. DF, & sub BA æquatur rectangulo sub AE & EB. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 14.

Segmento circuli D A F, cujus basis D F perpendicularis sit diametro A O E, inscribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in præcedenti recta E B.

Dico rectangulum sub E B & parte diametri A O, quæ segmenti axis est, com-

comprehensum, æquari rectangulo sub latere uno figuræ inscriptæ, et omnibus jungentibus B,H, C G una cum D O dimidio basis D F simul sumtis comprehenso.

Demonstratio eadem quæ præcedentis.

Lemma 1. ad sequent.

INscriptâ sit sphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem A E consistens: Quo manente, circulus cum figura circumagatur. Fig. 13.

Dico sphæræ inscriptum iri corpus conicis rectis superficiebus, contentum.

Quod B A, HA, item D E, F E describant integras conorum rectorum superficies manifestum *o* est. Deinde quia lineæ C B, GH, & G F, CD concurrunt producțæ in eodem utrimque puncto diametri A E similiter pertractæ, quæ jungentes secat normaliter: etiam liquet has describere partes superficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quos in sphærica superficie describunt vertices angulorum B, C, D.

o Vide defin. 2. l. 11.

Lemma. 2.

SEgmenti sphæræ, cujus axis AO, sectio maxima esto D A F. Huic inscripta sit figura æquilatera demtâ basi, quæ circa axem A O in orbem convertatur. Fig. 14.

Dico

Dico segmento sphærico inscriptum iri corpus conicis superficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 13.

Ponantur eadem quæ in primo lemmate. Et ducatur recta E B, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi.

Dico omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius (L) potest a *rectangulum A E B, comprehensum videlicet, sub diametro A E, & subtensâ E B.*

a *Potentia recta est quadratum ejus.*

b *Per 17. l. 6.* Hoc est, *b* cujus radius (I) est medius proportionalis inter A E & E B.

Quoniam rectæ B H, C G, D F æquantur rectis B K, C M, D O bis sumtis, erit

c *Per 1. l. 2.* c rectangulum sub latere uno figuræ inscriptæ maximo circulo (videlicet sub AB, vel B C, vel C D, vel D E) & sub omnibus simul jungentibus B H, C G, D F æquale rectangulo sub A B & B K, sub B C & compositâ ex B K & C M, sub C D & compositâ ex C M & D O, sub D E & D O; sic enim rectæ B K, C M, D O singulæ fuerunt bis acceptæ. Atqui rectangulum sub A B

&

& omnibus jungentibus B H, CG, DF simul sumtis æquatur *d* rectangulo A E B, hoc est *e* quadrato I. Ergo quadratum I æquale est rectangulis sub A B & B K, sub BC & compositâ ex BK, CM, sub CD & compositâ ex CM, DO, sub D E & D O. Sint jam inter AB & BK media proportionalis P; inter B C & compositam ex BK, CM media Q; inter C D & compositam ex C M, D O, media R; inter D E & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia *f* rectangulis supradictis. Quare cum quadratum I jam ostenderim iisdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum igitur circuli sint inter se *g* ut quadrata radiorum, etiam circulus radio I descriptus omnibus simul circulis quorum radii, P, Q, R, S æqualis *i* erit. Atqui circuli radiorum, P, & S, æquantur *k* superficiebus conicis, quas produxerunt latera AB, E D, siquidem P est media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium baseos; S verò media est inter E D, & D O; circulus radii Q est æqualis segmento *n* superficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum C G, B H, quia Q media est inter B C, & compositam ex B K, C M; & ob eandem causam circulus radii R æquatur segmento superficiei conicæ inter paralle-

los

d Per 16. hujus.

e Per hyp.

f Per 17. l. 6

g Per 2. l. 12.

i Patet ex 22. l. 6. & 24. l. 5.

k Per 13. hujus.

n Per 15. hujus.

los circulos diametrorum C G, D F interceptæ. Ergo circulus radio I descriptus, æquatur omnibus simul conicis superficiebus sphæræ inscriptis. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 14. *Ponantur eadem quæ in 2. lemmate. & ducatur recta E B ab extremitate diametri A E ad terminum lateris A B diametro proximi.*

Dico omnibus superficiebus conicis segmento sphærico D A F inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius est medius proportionalis inter E B, & segmenti axem A O.

Demonstratio planè eadem, quæ præcedentis: sed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Fig. 15. *Superficies conicæ sphæræ inscriptæ, in sphæræ superficiem desinunt.*

Data sit superficies quantumvis parva X. manifestum est intra sphæricam superficiẽ A C E G dari aliam posse concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quã sit X. Ambarum plano sectarum per centrum

trum maximi circuli ſint ACEG, DPLM. Ducatur diameter A D E, & in D tangat NQ. Si arcus A E biſecetur in C, & reſiduum biſecetur rurſus & ſic deinceps, relinquetur *a* tandem arcus AB minor arcu A N. huic ſi ſubtendatur recta A B, manifeſtum eſt eam non pertingere ad peripheriam P D M L, eſſeque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo C A G E inſcriptæ, cujus nullum latus pertingat ad peripheriam P D M E. Quare ſi circa diametrum A E in orbem agantur omnia, patet ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ includant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illâ ſint *b* majores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies D P L M, deficit à ſuperficie ſphæricâ ACEG quantitate minori quam ſit data X; multò magis ſuperficies conicæ ab eadem ſphæricâ A C E G, deficient quantitate minori quã ſit data X, ac proinde *c* in A C E G ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtrandum.

a Patet ex lem. 2. ſchol. poſt 11. l. 6.

b Per axio. 3. hujus.

c Defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 17.

Conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico D A F. inſcriptæ in ipſam ſegmenti ſphæricam ſuperficiem deſinunt.

Demonſtrabitur eodem ferè ratiocinio quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 16. *Demonstratum est propos. 18, circulum cujus radius est medius proportionalis inter diametrum A E, & rectam E B, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris A B diametro proximi, æqualem esse omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis.*

o Vide defin. 6. l. 12. *Dico hunc circulum desinere o tandem in circulum, cujus radius est A E sphæræ diameter.*

Nam si plura semper ac plura in infinitum latera circulo maximo inscribantur, (quæ deinde circa A E in orbem acta conicas producunt superficies) patet latus AB fieri tandem quavis datâ rectâ minùs, ac proinde subtensam E B, ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit ut differentia ipsarum A E, B E etiam fiat quâvis datâ minor. Ergo multo magis media proportionalis inter A E, BE, quæ semper major est quam BE, differet ab A E tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus cujus semidiameter est media inter A E, & B E, à circulo, cujus radius est A E, tandem diffe-

ret

ret defectu minori, quocunque dato: hoc est in *i* ipsum desinet. Quod erat dem.

Hæc per se satis clara, non est necesse operosiùs demonstrare. i Defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 17.

Demonstratum est propos. 19. circulum, cujus radius est medius proportionalis inter E B & A O segmenti axem, æqualem esse omnibus superficiebus conicis portioni sphæricæ D A F inscriptis.

Dico hunc circulum desinere in circulum, cujus radius est recta A D, à segmenti vertice ducta ad peripheriam circuli D Q F N, qui basis est segmenti.

Nam quia jam ex præced. demonst. liquet E B desinere tandem in A E, patebit quoque mediam proportionalem inter E B & A O, desinere tandem in mediam proportionalem inter A E & A O; hoc *n* est in ipsam A D. Manifestum est igitur & circulum cujus radius est medius proportionalis inter E B & A O etiam desinere in circulum radii A D. Quod erat demonstrandum. n Per coroll. 2. p. 8. l. 6.

Lem-

Lemma ad ſequen.

SI diameter diametri dupla eſt, circulus Circuli, quadruplus erit.

Patet ex propoſ.2.l.12.& defin.10,lib.5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 16. *Cuiuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ.*

HOc nobiliſſimum Archimedis theorema ex jam præmiſſis expeditè demonſtrabimus hunc in modum.

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum A E intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur. Quæ circa AE in orbem ducta, producat conicas ſuperficies, ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturque EB. Demonſtra-
a 18. hujus. tum jam ſupra *a* eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cujus radius poteſt rectangulum AEB, hoc eſt cujus radius eſt medius proportionalis inter AE, & EB. Atque hoc ſemper evenit inſcriptionibus in infinitum continuatis.
b Per 20. Quare cum inſcriptæ conicæ ſuperficies *b*
hujus. tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem, circulus verò cujus radius eſt medius inter
c Per 22. AE, & EB, deſinat *c* in circulũ, cujus radius
hujus. AE,

A E, ipsa quoque sphærica superficies *d* æqualis erit circulo radii A E, hoc est *e* quadruplo maximi circuli A C E G. Quod erat demonstrandum.

d Per 2. hujus.
e Per lem. praeced.

Viam, quâ in theoremate nobilissimo demonstrando hactenus usi sumus, Archimedæâ multò breviorem & clariorem esse sciet, qui Archimedem legerit.

Corollarium.

EX hoc præclaro, atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras consecutus est, exhibetur circulus æqualis superficiei sphæricæ, is nimirum cujus semidiameter est sphæræ diameter, sive cujus diameter dupla est diametri sphæræ.

Scholium.

EXpedita jam erit dimensio superficiei sphæricæ, principis inter omnes curvas. Duplex est modus.

1. *Mensuretur circulus sphæræ maximus (ut traditur in scholio post P, 6. hujus.) Et multiplicetur per 4. Ut si maximus orbis terræ circulus inventus sit continere quadrata milliaria unius horæ sive Belgica 5, 940, 000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica, 23, 760, 000, quæ in superficie orbis terræ continentur.*

2. *Diameter sphæræ multiplicatæ per circumferentiam maximi circuli exhibet sphæræ superficiem. Ut si terræ diametro dentur milliaria unius horæ 2750 $\frac{14}{17}$ atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri rursum quadrata milliaria unius horæ, 23, 760, 000 totam orbis terræ superficiem constituentia.*

Demonstratio patet ex primo corol. p. 5. hujus; rectangulum enim sub diametro sphæræ, & maximi circuli circumferentiâ, per dictum corol. est quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *Cujuscunque portionis sphæricæ (DAF) superficies æqualis est circulo, cujus radius est recta (AD) à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DQFN) qui portionis est basis.*

Portionis maximæ sectioni inscripta cogitetur circa axem A O figura æquilatera & parilatera basi demtâ; quæ, circa A O in orbem acta, portioni inscribet conicas superficies. Ducatur quoque recta E B, ut o supra. Oomnes conicæ superficies segmento sphærico jam inscriptæ æquantur *a* circulo cujus radius est medius proportionalis inter E B, & segmenti axem A O. Atque hoc multiplicatis in infinitum inscriptionibus

o *In 18. & 19. hujus.*
a *Per 19. hujus.*

bus semper continget. Quare cum & conicæ superficies segmento inscriptæ, desinant *b* in sphæricam segmenti superficiem, & circulus cujus radius inter E B & AO medius est, desinat *c* in circulum radii AD; etiam *d* sphærica portionis superficies DAF, circulo radii A D æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

b Per 21. hujus.
c Per 23. hujus.
d Per 2 hujus.

Hoc alterum est ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, viâ multo, quam ipse, breviori ac clariori jam demonstravimus.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti sphæræ circumscripti (H P S V) superficies, æqualis est superficiei sphæræ. Fig. 18.

Et si cylindrus ac sphæra secentur planis ad axem (B G) rectis, erunt singula superficiei cylindricæ segmenta segmentis singulis superficiei sphæricæ æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus H P æquale est *o* P S diametro basis, erit cylindrica superficies H S, quadrupla *a* baseos, hoc est maximi circuli sphæræ cylindro inscriptæ; cujus cum etiam *b* quadrupla sit sphæræ superficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonst.

o Per hyp.
a Per coroll. p. 12. hujus.
b Per 24. hujus.

i Per 31. l. 3.
c Per coroll. 2. p. 8. l. 6.
d Per 11. hujus.
e Per præc.

2. Pars. Ducantur rectæ B O, G O. Quoniam angulus B O G *i* rectus est in semicirculo, ab eoque cadit O C perpendicularis ad B G, erit *c* B O media proportionalis inter G B, & B C, hoc est inter I T & H I. Ergo circulus radii B O *d* æqualis est superficiei cylindricæ H T. Sed idem circulus æqualis *e* est etiam segmento superficiei sphæricæ O B K. Æquales igitur sunt superficies, cylindrica H T, & sphærica O B K.

Deinde quia eodem modo ostenditur cylindrica H X æquari sphæricæ Q B R, etiam reliqua cylindrica I X, reliquæ sphæricæ Q O K R, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de segmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18.

Segmenta superficiei sphæricæ parallelis circulis divisæ eam inter se proportionem habent, quam segmenta diametri (B C, C D, D A, A E, E F, F G) ad circulos parallelos rectæ.

a Per præc.

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim sphæricæ superficiei segmenta O B K, Q O K R, M Q R N, &c. *a* æqualia cylindricis, H T, I X, L N &c, Atque hæc eandem

dem inter se rationem habent, *b* quam axeos segmenta B C, C D, D A &c. Ergo & illa. Quod erat demonst.

b Per 13. l. 12.

Scholium.

Ex hac innotescit proportio zonarum & elimatum inter se. Sunt enim ad invicem ut segmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula sinuum.

Ex eâdem habetur dimensio segmentorum superficiei sphæricæ. Nam quia & tota sphæræ superficies nota est ex scholio prop. 24, & segmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet segmenta singula innotescere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ sequuntur, omnino singularia atque admiranda sunt planeque digna, ad quæ intelligenda Geometriæ studiosi ardenti studio incumbant.

Lemma ad sequent.

SI sphæram tangat planum (Q N in O) recta (A O) ex centro ad contactum ducta est plano tangenti perpendicularis. Fig. 19.

Secentur planum tangens QN & sphæra, per tactum O duobus planis, quæ in sphæra quidem producant circulos O G, O D, in plano autem Q M rectas C O, I O, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18. l. 3. A O perpendicularis est ad utramque

IO, C O, ac proinde per 4. l. 11. recta plano QN. Quod erat demonst.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 20. 22. 21.

Omnis sphæra æqualis est cono (ZO) cujus altitudo (KO) par est radio sphæræ; basis verò (Z) superficiei sphæræ æqualis.

Intelligatur sphæræ circumscriptum esse corpus aliquod poliëdrum, cujus solidi anguli novis planis sphæram tangentibus abscindantur. Quo facto orietur aliud corpus poliëdrum sphæramcontinens, minùs priore, & pluribus constans angulis, & superficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangẽtibus compositam. Si poliëdri hujus solidi anguli novis planis tangentibus iterum abscindantur, & tertii poliëdri inde nati similiter; atque ita in infinitum; fiet tandem ut & poliëdrum excedat sphæram solido minori quocunque dato, & superficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi sine termino & minora, & plura erunt) cõposita, sphæricam superficiem, excedat quoque plano minori, dato quocunque. Quod utrumque, licet demonstrari posset, tamen quia per se satis clarum, postuletur studio brevitatis. His ita constitutis, quæsitum ita concludemus.

Po-

Poliëdrum jam expositum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis est centrum sphæræ, bases vero sunt plana tangentia, quæ poliëdri superficiem constituunt. Et quia rectæ ex centro A ad singulorum planorum contactus ductæ, ad plana *a* singula perpendiculares sunt, erunt omnium pyramidum, quibus constat poliëdrum, æqualis altitudo, ipse nimirum AB radius sphæræ. Si jam igitur planum, X, ponatur æquale superficiei ipsius poliëdri, superque eo erecta sit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem sphæræ radio AB, manifestum est *b* omnes pyramides supradictas, hoc est totum poliëdrum, æquari pyramidi XN. Ad eundem modum reliqua omnia poliëdra sphæram includentia, quæ ex truncatione perpetuâ solidorum angulorum, alia atque alia nascentur in infinitum, semper æqualia erunt pyramidibus (per XN repræsentatis) quarum altitudines (MN) sunt radius sphæræ, bases vero X) æquales superficiebus poliëdrorum sphæram ambientibus. Quare cum tandem, & poliëdra (ut dixi supra) in sphæram, & pyramides XN (ut mox ostendam) in conum ZO desinant, etiam *c* sphæra cono æqualis erit. Quod erat demonst.

a *Per lem. præc.*

b *Per 6. l. 12.*

c *Per 1. hujus.*

Quod autem pyramides XN *d* desinant in conum sic ostendo. Poliëdrorum super-

d *Defin 6. l. 12.*

ficies desinunt in sphæræ superficiem ut postulatum supra. Atqui bases X pyramidum XN, semper æquales ponuntur superficiebus poliëdrorum, & Z basis coni Z O per hyp. æqualis est superficiei sphæræ: ergo etiam bases, X, desinent in basim Z; ac proinde cum pyramides XN sint ad conum ex hyp. æquealtum, ut e basis X ad basim Z, etiam pyramides in conum desinent.

e Per corol. p. 11. l. 12.

Demonstratio jam allata hujus propositionis & sequentis, penitus diversa est ab eâ, quâ usus est Archimedes; quæ quidem valdè subtilis & ingeniosa est, sed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifesta & propositiones undecim, præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipsum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: omnis sphæra quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphæræ, altitudinem verò radium.

Scholium.

Ex hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobilissimæ elicitur dimensio. Nam si diametri sexta pars, sive tertia semidiametri multiplicetur per sphæræ superficiem jam notam per scholium prop. 23. proveniet sphæræ soliditas.

Inventa sit sphæræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliaria 23,760,000, & semidiameter esto milliarium horariorum 1375, cujus tertia pars est $458\frac{1}{3}$. Multiplica 458 omissâ

fractione

fractione per 23, 760, 000 provenient 10;882, 080, 000 cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ.

Cum enim sphæra sit æqualis a cono, cujus altitudo est radius sphæræ; basis verò superficies sphæræ; coni autem soliditas b producatur ex parte tertiâ altitudinis, (hoc est radii sphæræ) ductâ in basim, hoc est in sphæræ superficiem;) etiam sphæræ soliditas obtinebitur ex tertia parte radii ductâ in superficiem.

a Per hanc 28.

b Per schol. p. 6. hujus.

PROPOSITIO XXIX.

Omnis sector sphæræ æqualis est cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis vero sectoris sphærica superficies.

Esto primùm sector (AECG) hemisphærio minor. Intelligatur sectori circumscriptum esse poliëdrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum instituatur, ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæsitum. Id solum oportebit ostendere, ex quo discursus totus dependet, superficiem poliëdri ex planis sphæricam superficiem ECG undequaque tangentibus compositam, esse majorem superficie E C G. Quod ita fiet. Cogitetur superficiei ECG apponi alia Fig. 23.

æqua-

æqualis & ſimilis, planis tangentibus eodem prorſus modo cincta, quo prior. Erit jam tota *c* ſuperficies ex planis compoſita, major totâ ſphæricâ. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita dimidiâ ſphæricâ E C G major erit.

c Per axio. hujus.

Eſto deinde ſector (A E B G) major hemiſphærio. Vterque ſector ſimul ſumtus æqualis *d* eſt cono cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies; hoc eſt *e* duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes vero pares ſupderficiei ſphæricæ ſegmentis E C G, E B G. Atqui ſectorum unus A E C G hemiſphærio minor, per 1 partem æquatur cono, cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies E C G. Ergo alter A E B G æquatur cono reliquo, cuius altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies reliqua E B G. Quod erat demonſt.

d Per præc.
e Patet ex 11. l. 12.

Corollarium.

Cum ſuperficies E C G ſit æqualis *o* circulo radii C G, & ſuperficies E B G æqualis circulo radii B G, erunt ſectòres A E C G, & A E B G æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes vero circuli radiorum C G, & B G.

o Per 25. hujus.

Scho-

Scholium.

Ex his habetur dimensio & sectorum, & segmentorum sphæræ; sectorum quidem, si multiplicetur p tertia pars radij per sphæricam sectorum superficiem, jam notam ex scholio prop. 27, sive per circulum radij C G, vel B G: segmentorum verò, si mensuretur conus E A G, & à sectore, si minor est hemisphærio, auferatur; si major, eadem adjiciatur. Fig. 23. p patet ex schol. p. 6. hujus.

Segmentum (M Q R M) quod inter duos circulos sive parallelos sive non parallelos interjicitur mensurabis, si segmenta Q B R, M B N, jam nota auferantur ab invicem. Fig. 18.

PROPOSITIO XXX.

Hemisphærium (E O B D) coni (E B D) eandem secum basim & altitudinem habentis, duplum est. Fig. 24.

Conus cuius basis est superficies hemisphærica E O B D, altitudo autem radius A B, est ad conum E B D, *a* ut basis ad basim, hoc est ut superficies hemisphærica E O B D ad maximum circulum P T. Ergo cum superficies hemisphærica E O B D dupla *b* sit maximi circuli, etiam conus pro basi habens superficiem E O B D, pro altitudine radium A B, duplus est coni E B D. Atqui hemisphærium æquatur *c* cono ha- a Per 11. l. 12. b Per 24. hujus. c Per 28. hujus.

benti

benti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam E O B D. Ergo etiam hemisphærium coni E B D duplum est. Quod erat demonst.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 25. *SPhæra sit divisa in duo segmenta I L B G, I S K G, plano I Q G T, centrum A non transeunte: diameter autem plano secanti recta sit B O K.*

Ut altitudo O B segmenti I L B G est ad radium sphæræ A B, ita O K altitudo segmenti alterius fiat ad aliam K N.

Pari modo ut O K altitudo segmenti I S K G est ad radium A K seu A B, ita altitudo O B segmenti alterius fiat ad aliam B D.

Dico 1. Coni I N G & I D G quorum altitudines sunt O N, O D, basis vero communis I Q G T, segmentis sphæricis sunt æquales.

2. Segmentorum eadem est proportio, quæ rectarum D O, N O.

3. Segmentum I S K G est ad maximum sibi inscriptum conum I K G, ut N O ad K O, & segmentum I L B G est

ad

ad sibi inscriptum conum maximum I B G, ut D O ad B O.

Pars 1. Sphæra & coni secentur plano per diametrum B K. Producentur in sphærâ circulus maximus B L K G, in conis verò triangula B I G, I K G. Et quia B O K diameter *a* recta est circulo Q T erit angulus I O B *b* rectus. Angulus quoque B I K *c* in semicirculo rectus est. Quoniam igitur in triangulo B I K ab angulo recto ducta est I O perpendicularis in basim B K, erit B I ad I O, ut *d* B K ad K I. Ergo ratio duplicata B I ad I O æqualis est rationi duplicatæ B K ad K I; hoc est (quia B K, K I, K O, *f* sunt tres proportionales) æqualis rationis B K ad K O.

a *Per hyp.*
b *Per defin.* 3. *l.* 11.
c *Per* 31. *l.* 3.
d *Per* 8. *l.* 6.
f *Per coroll.* 2. *p.* 8. *l.* 6.

Deinde quia est ut O K ad radium A B, ita *o* O B ad B D; erit quoque invertendo D B ad B O, ut A B ad O K: & permut. D B ad B A, ut B O ad O K: & compon. D A ad B A, ut B K ad O K. Quoniam igitur jam ostendi rationem B K ad O K duplicitam esse rationis B I ad I O, ac proinde æqualem *p* rationi circulorum radiis B I, I O descriptorum, erit quoque D A ad B A ut circulus radii B I ad circulum radii I O. Igitur conus sub altitudine D A, & basi circulo radii I O, hoc est circulo Q T, æqualis est *g* cono sub altitudine B A, & basi

o *Per hyp.*
p *Per* 2. *l* 12.
g *Per* 15. *l.* 12.

basi circulo radii B I; hoc est sectori sphærico AIBG. Quare si tam *i* sectori AIBG, quam cono sub D A & circulo Q T, addatur idem conus I A G, tota erunt æqualia; videlicet segmentum Sphæricum I L B G æquabitur duobus conis, quorum unus est, qui fit sub basi Q T & altitudine D A, alter I A G, sub eâdem basi Q T, & altitudine O A. Sed hi duo coni *k* conficiunt conum I D G. Ergo segmentum I L B G cono I D G æquale erit. Quod erat demonstrandum.

i *Per coroll. p. 29. hujus.*

k *Patet ex* 14. l. 12.

Eodem discursu erit segmentum ISKG æquale cono I N G, eo solum mutato, ut conus I A G qui priùs addebatur, jam auferatur.

Pars 2. Patet ex primâ. Nam coni IDG & I N G sunt inter se *n* ut D O, & N O, Ergo & segmenta I L B G, I S K G conis illis æqualia, sunt inter se, ut rectæ D O, N O.

n *Per* 14. *l.* 12.

Pars 3. Patet similiter ex primâ. Nam conus I D G est ad conum I B G, *q* ut DO ad B O. Ergo segmentum I L B G, cono I D G E æquale, est ad conum I B G, ut D O ad BO.

q *Per eand.*

Scho-

Scholium.

Ex prima parte hujus theorematis, habetur alia, eaque facillima segmentorum spæricorum dimensio; si nimirum coni I D G, I N G mensurentur; quod fiet si s tertiæ partes rectarum D O, N O ducantur in circulum Q T. s Vide Schol. post 6. hujus.

PROPOSITIO XXXII.

Cylindrus rectus (G K) sphæræ, cui circumscribitur, & soliditate & superficie totâ sesquialter est. Fig. 24.

Communis sphæræ ac cylindri axis esto B Q, conus vero maximus hemisphærio E O B D inscriptus sit E B D. Quia cylindrus (E K semissis totius G K) triplus *a* est coni E B D; hemisphærium vero *b* ejusdem coni duplum, patet cylindrum E K esse ad hemisphærium, ut 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus G K est ad totam sphæram Q E B D, ut 3 ad 2. Quod erat primum. a Per 10. & 12. b. Per 30. hujus.

Deinde quia cylindri latus K N est æquale basis diametro GN, erit ejus superficies absque basibus *c* quadrupla baseos MI, ac proinde cum basibus, hoc est tota cylindri superficies erit secupla baseos M I, quæ par est maximo sphæræ circulo. Atqui sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli. c Per corol. p. 12. hujus.

Ergo

Ergo tota cylindri G K ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6 ad 4, ſive ut 3 ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ & ſoliditate & totâ ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

QUanti hoc theorema fecerit Archimedes argumento eſt, quod tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortaſſe inter alia tam multa & præclara inventa ſua hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque ſuperficies demonſtravimus lib. 4. Cylindricorum & annularium prop; 13. 14. 15. ſed & ipsâ in ſphærâ aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum, ſe ambientem (qui neceſſario æquilaterus erit) eſt tam ſoliditate quam ſuperficie, ut 2 ad 3; ita ſphæram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter & ſuperficie eam habere proportionem quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & ſphæra repertam, in tribus ſolidis, ſphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphæræ natura mirabilis

amplius

amplius innotescet, tredecim sequentibus propositionibus comprehensa, subjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

SUperficies sphæræ dupla est superficiei cylindri quadrati sphæræ inscripti. Fig. 26.

Quadratum maximo sphæræ circulo inscriptum, à quo in orbem ducto describitur quadratus cylindrus, esto A K L, ducaturque A L, diameter quadrato & sphæræ communis. Quoniam quadratum AL par *a* est quadratis æqualibus AK, KL erit duplum unius A K. Ergo etiam circulus diametri AL, duplus *b* est circuli, cujus diameter A K, circuli nempè C N. Atqui superficies sphæræ quadrupla *c* est circuli, cujus diameter A L, is enim est maximus sphæræ circulus, cum A L sit sphæræ diameter. Ergo sphæræ superficies octupla est circuli CN. Sed quia L K, K A, *d* æquales sunt, cylindrica superficies ACL quadrupla *e* est circuli CN. Ergo cum sphæræ superficies ejusdem circuli octupla sit, cylindricæ superficiei dupla erit. Quod erat demonst.

a *Per 47. l. 1.*
b *Patet ex 2. l. 12.*
c *Per 24. hujus.*
d *Per hyp.*
e *Per corol. p. 12. hujus.*

PROPOSITIO XXXIV.

SPhæræ superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 3. Fig. 26.

Ponantur eadem, quæ demonſt. præced. Quoniam cylindri latus L K & baſis diameter A K *f* æquales ſunt, erit ſuperficies cylindrica C L *g* quadrupla baſis C N, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad utramque baſim C N & S L eſt ut 6. ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad utramque ſimul baſim C N, S L ut 8. ad 2. cùm in præced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8. ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad cylindricam C L ſuperficiem ut 8. ad 6. ſive ut 4. ad 3. Quod erat demonſt.

f Per hyp.
g Per coroll. p. 12. hujus.

Corollarium.

TOta cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies, eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2. ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam ut 12. ad 8. per 32. hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 8. ad 6. per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 12. ad 6. ſive ut 2. ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 26. vel 25.

CUiuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (I L B G) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti, eam rationem habet,

habet, quam coni latus (BG) ad basis radium (GO.)

Quoniam portionis I L B G superficies æqualis est circulo radii B G, erit proportio eius ad circulum Q T, basim nempè suam & coni, duplicata *b* rationis B G ad G O; hoc est *c* rationis superficiei conicæ I B G ad basim eandem Q T. Ergo liquet *o* superficiem I L B G esse ad superficiem conicam I B G, ut eadem conica I B G est ad basim Q T. Quare cum conica I B G sit ab basim Q T, *d* ut B G ad G O, etiam portionis superficies erit ad conicam I B G sibi inscriptam ut B G ad G O. Quod erat demonst.

a *Per* 25. *hujus.*
b *Per* 2. *l.* 12
c *Per* 14. *hujus.*
o *Per defin.* 10. *l.* 5.
d *Per* 14. *hujus.*

PROPOSITIO XXXVI.

Hemisphærii superficies (EOBD) ad coni maximi sive recti inscripti superficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad superficiem vero coni similis circumscripti, ut latus in quadrato ad diametrum. Fig. 24.

1. Partis demonstratio ex præcedenti est manifesta; est enim portionis cuiuscunque, ac proinde & hemisphærii superficies E O B D ad conicam inscriptam, ut B D ad

D A. Est autem, B A D K quadratum, cuius diameter est B D, latus D A.

Fig. 6. lib. 4. tab. 3.

2. Pars. Semissis quadrati circulo (cuius centrum A) circumscripti, esto E B C, quâ circa axem AB circumactâ gignatur conus hemisphærio conscriptus. Quoniam quadratum E C duplum *a* est quadrati E B, seu G I, etiam circulus diametri E C duplus *b* est circuli cujus diameter G I, hoc est circuli H G D I. Atqui *c* superficies hemisphærij cono E B C inclusi eiusdem circuli dupla est. Ergo circulus diametri E C superficiei hemisphæricæ æqualis est. Quare cum superficies conica E B C sit ad *d* circulum diametri E C, basim nempè suam, ut latus B E ad basis radium E A, erit quoque ad superficiem hemisphæricam sibi inscriptam ut B E ad E A, hoc est ut diameter in quadrato E B C F, ad suum latus. Quod erat demonst.

a] *Patet ex* 47. *l*. 1.
b *Per* 2. *l*. 12
c *Per* 24. *hujus*.
d *Per* 14. *hujus*.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. eadem cum. Fig. 13. l. 5. tab. 3.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum sibi circumscriptum, & soliditate & superficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum.

Maximo sphæræ circulo H G D I circumscriptum esto quadratum E B C F, à quo circa axem B F in orbem acto, rhombus

bus conicus gignatur ſphæram ambiens. Ut EB quadrati latus (inſpice Fig. 6. l. 4.) ad diametrum E C, ita fiat S ad R (inſpice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4. terminos S, R, Q, O, continetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc eſt, E B ad E C; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q ſive R ad S, hoc eſt E C ad E B, ac proinde *b* O eſt ad R, ut quadratum E C ad quadratum E B; unde O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis, intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi E B C F. Erit igitur ſphæra H G D I ad ſphæram E B C F in *o* ratione triplicata diametri G I, (ſive E B) ad diametrum E C; hoc eſt (quod jam oſtendi) erit ut S ad O. Sphæra autem E B C F eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum *c* ut 2. ad 1; hoc eſt (quod oſtendi ſupra) ut O ad R. Igitur ex æquo ſphæra H G D I eſt ad eundem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus ut S eſt ad R, hoc eſt ut in quadrato latus E B ad diametrum E C. Quod erat primum. Deinde ex ſecundâ parte præcedentis patet hemiſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni E B C, ac proinde & totius ſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi E B C F, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergo ſphæra tam ſoliditate quam ſuperficie eſt ad rhombum quadratum E B C F; ut in quadrato

a Per defin. 10. *l.* 5.

b Per 20. *l.* 6.

o Per 18. *l.* 12.

c Per 30. *hujus*.

drato latus ad diametrum. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 27.

Superficies portionis (B G K D) conum æquilaterum (B K D) capientis dupla est superficiei ejusdem coni.

a Per 35. hujus.

Patet similiter ex 35. Nam superficies portionis B G K D est ad inscriptam conicam, ut *a* B K ad B A. Sed quia conus B K D æquilaterus ponitur, K B est æqualis B D, adeoque dupla B A. Ergo etiam superficies B G K D dupla est inscriptæ conicæ B K D. Quod erat demonst.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27.

Sphæræ superficies ad totam coni æquilateri sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 16. ad 9.

Esto, Z, sphæræ centrum & conus æquilaterus sphæræ inscriptus B K D, axis sphæræ ac cono communis K Z A O. Per hunc si secetur sphæra ac conus, producetur in sphæra circulus maximus OBKD, in cono autem triangulum æquilaterum BKD, cujus unum latns B A D erit diameter baseos conicæ Q T. Et quia axis coni K A rectus

est

est basi Q T, erit angulus B A K *d* rectus. *d Per defin. 3. l. 11.*
Igitur quadratum B A æquale est *e* rectangulo K A O. Jam quia latus æquilateri trianguli abscindit *f* quartam axis partem A O, erit rectangulum KAO, hoc est quadratum BA, triplum quadrati *i* A O. Quare cum quadratum radii Z O *k* quadruplum sit quadrati AO, erit quadratum radii Z O ad quadratum radii BA, ut 4. ad 3. Ergo etiam *m* circulus O B K D est ad circulum Q T ut 4. ad 3. Ergo sunt quatuor circuli O B K D, hoc est *n* tota sphæræ D G superficies, ad circulum Q T, ut 16 ad 3. Atqui *o* superficies coni æqui lateri B K D est ad circulum Q T basim nempè suam, ut 2. ad 1. ac proinde coni B K D tota superficies, unâ cum basi scilicet, est ad basim, nempè circulum Q T, ut 3. ad 1. sive ut 9. ad 3. Ergo cum ostenderim sphæræ superficiem esse ad eundem circulum ut 16. ad 3. eri tsphæræ DG superficies ad totam æquilateri coni superficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonst.

e Per corol. p. 17. l. 6.
f Per corol. 5. p. 15. l. 4.
i Per 1. l. 6.
k Per 4 l. 2. vel 20. l. 6.
m Per 2. l. 12.
n Per 24. hujus.
o Per coroll. 1. p. 14 hujus.

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus B D, abscindit *p* quartam axis partem A O, erit quoque sphærica superficies BOD *q* quarta pars, ac proinde superficies B G K D, tres quartæ superficiei totius sphæræ

p Per coroll. 5. p. 15. l. 4.
q Per 27. hujus.

sphæræ. Quare si superficies tota statuatur esse 16, BGKD superficies erit 12. Atqui superficies BGKD r est dupla superficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam est ut 12 ad 6. Ergo tota sphæræ superficies est ad conicam BKD ut 16 ad 6. Deinde quia superficies coni BKD, (utpote æquilateri) dupla s est baseos QT, liquet superficiem conicam BKD (nimirum absque basi) esse ad totam coni superficiem, ut 2 ad 3, hoc est ut 6 ad 9. Igitur ex æquo tota sphæræ superficies est ad totam æquilateri coni inscripti superficiem, ut 16 ad 9. Quod erat demonstr.

r Per prac.

s Per corol. 1. p. 14. huius.

PROPOSITIO XL.

Fig. 28.

SPhæræ superficies ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem, eam proportionem habet, quam 4 ad 9.

Circulo sphæræ maximo BPM circumscriptum sit triangulum æquilaterũ DOF, à quo circa axem OAB in orbem ducto, productus sit conus æquilaterus sphæræ circumscriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumscriptus etiam sit circulus, NDLOF, quem patet esse concentricum priori; & axis OAB perducatur in N. Quoniam BN est a quarta pars axis ON, patet ON esse duplam KB. Quare cum circu-

a Per corol. 5. p. 15. 14.

circulorum ratio ſit *b* duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM, ad circulum NDLOF ut 1 ad 4. Atqui oſtenſum jam eſt in demonſtratione prima præcedenti, circulum NDLOF eſſe ad circulum QT, baſim coni æquilateri ſphæræ FL inſcripti, ut 4 ad 3. Ex *c* æquo igitur circulus BPM eſt ad circulum QT ut 1 ad 3. Atqui tota coni DOF ſuperficies circuli QT *d* tripla eſt. Ergo tota coni ſuperficies circuli BPM noncupla eſt. Quare cum ſphæræ TP ſuperficies ejuſdem circuli BPM *e* quadrupla ſit, erit tota coni æquilateri DOF ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ, cui circumſcripta eſt, ut 9 ad 4. Quod erat demonſtr.

b *Per 2. l. 12.*
c *Per 22. l. 5.*
d *Per corol. 1. p. 14. hujus.*
e *Per 24. hujus.*

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri coni ſphæræ circumſcripti tota ſuperficies quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæræ. Fig. 28.

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem ut *a* 9 ad 4: & ſphæræ ſuperficies eſt ad coni inſcripti æquilateri SKT ſuperficiem ut *b* 16 ad 9. Ergo ex *c* æqualitate perturbatâ circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies

a *Per præc.*
b *Per 39. hujus.*
c *Per 23. l. 5.*

cies est ad totam superficiem æquilateri inscripti, ut 16 ad 4. siue ut 4. ad 1. Quod erat demonst.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 29.

Sphæra ad inscriptum sibi conum æquilaterum (BKC) eam rationem habet quam 32. ad 9.

Sphæra & conus BKC secentur plano per axem communem K O, faciente in sphærâ circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A ad OK recto, abscindatur hemisphærium F G K I, cui inscriptus intelligatur conus maximus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abscindit OP *d* quartam partem axis OK, erit PK ad A K ut 3. ad 2. hoc est ut 9. ad 6. Basis verò Q T est ad circulum O F K I, hoc est ad basim N D, ut 3. ad 4. hoc est ut 6. ad 8. uti patet ex demonstratis prop 39. Quare cum ratio coni B K C ad conum F K I componatur *e* ex ratione altitudinis P K ad altitudinem AK) hoc est ex ratione 9. ad 6) & ex ratione basis Q T ad basim N D (hoc est ex ratione 6. ad 8.) erit conus B K C ad conum F K I ut 9. ad 8. Quare cum sphæra C G quadrupla *f* sit coni F K I, erit conus æquilaterus BKC ad sphæram

d Per corol. 3. p. 15. l. 4.

e Per schol. p. 15. l. 12.

f Per 30. hujus.

ſphæram C G, ut 9. ad 32. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIII.

Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus coni æquilateri eidem ſphæræ inſcripti octuplus eſt.

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti, & circumſcripti ſint SKT & DOF & axis communis eſto OK B. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quam ſphæra; eruntque ſectiones triangula duo æquilatera, & circulus B P M maximus. Circa triangulum quoque D O F intelligatur deſcriptus eſſe circulus N D O F, & axis O K B producatur in N. Quoniam verò æquilateri trianguli latus D F abſcindit axis O N quartam *a* partem NB, patet N O, eſſe duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus S T abſcindit axeos BK *b* quartam partem B C. erit N O ad B O, ut BK ad CK: & permutando ut N O ad B K ſic B O ad CK. ſed N O dupla eſt BK. Ergo etiam B O dupla eſt CK; Igitur ob ſimilitudinem triangulorum D O F, SK T etiam *c* D F & S T diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione dupla. Quare cum coni D O F, SK T, ſint ſimiles,

Fig. 28.

a Per corol. 5. p. 15. l. 4.

b Per idem corol.

c Per 4. l. 6.

d Per 12. l. 12. miles, ac proinde eorum proportio *d* triplicata sit proportionis diametrorum D F & S T, quæ est 2 ad 1; erit conus D O F ad conum S K T, ut 8 ad 1. Quod erat dem.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 28. *Sphæra ad circumscriptum sibi conum æquilaterum (D O F) & soliditate & superficie, eam proportionem habet, quam 4 ad 9.*

d Per 42. hujus. Sphæra T P est ad inscriptum *d* sibi conum æquilaterum S K T, ut 32 ad 9. Inscriptus autem S K T conus æquilaterus est ad conum æquilaterum circumscriptum

f Per præc. D O F ut *f* 1 ad 8, hoc est ut 9 ad 72. Igitur ex æquo sphæra T P est ad ad conum æquilaterum circumscriptum D O F, ut 32 ad 72; hoc est ut 4 ad 9. Propositione autem 40. demonstravimus etiam sphæræ superficiem esse ad totam æquilateri coni circumscripti superficiem ut 4 ad 9. Ergo sphæra & soliditate & superficie est ad æquilaterum conum sibi circumscriptum ut 4 ad 9. Quod erat demonst.

Quod igitur in sphæra & cylindro sphæram ambiente miratus est Archimedes, idipsum in sphæra & æquilatero cono ambiente sphæram, jam demonstravimus, ut videlicet & soliditatum inter se eadem

eadem proportio rationalis, quæ superficierum, existat. Quemadmodum enim ille reperit sphæram ad cylindrum esse tam soliditate quam superficie, ut 2 ad 3; ita nos docuimus sphæram & soliditate & superficie esse ad conum æquilaterum se ambientem, ut 4 ad 9.

Hinc verò illam ipsam proportionem, nempè sesquialteram, quam existere sphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumscripto & soliditate etiam ac superficie continuari nullo negotio jam demonstrabimus, atque ita huic pariter opusculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, et cylindrus rectus sphæræ similiter circumscriptus, & ipsa sphæra, eandem proportionem continuant, nimirum sesquialteram, tam quoad soliditatem, quàm quoad superficiem totam.

Vide Fig. quæ huic tractatui præfixa est.

Nam per 32 hujus cylindrus rectus GK sphæram ambiens tam soliditate quam totâ superficie est ad sphæram ut 3 ad 2, sive ut 6 ad 4. Per præcedentem verò circumscriptus sphæræ conus æquilaterus B A D, tam soliditate, quàm superficie est ad sphæram ut 9 ad 4. Ergo idem conus est ad cylindrum tam soliditate quam superficie, ut 9 ad ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

Ad majorem Dei Gloriam.

APPENDIX

Qua demonstratur ex falso posse directè deduci verum.

IN thesibus Mathematicis, quas Lovanii sesqui abhinc anno Illustriss. D. Theodorus D'Imerselle, Comes de Bouchove & S. Imperii magnâ ingenii commendatione & auditorum plausu publicè propugnavit, inter cæteras proposui assertionem hujusmodi: *ex falsis posse verum directe elici novis exemplis Geometricis confirmamus*. Hanc assertionem sibi oppugnandam suscepit vir Clarissimus Daniel Lipstorpius in appendice, quam operi suo pererudito, quod Specimina Philosophiæ Cartesianæ inscripsit, hac de causâ adjunxit. Id verò eâ modestiâ & humanitate præstitit, ut facilè appareat, hoc illi unum fuisse propositum, ut veritatem assequeretur. Ne autem videar doctissimi viri judicium parvi facere, hic illi breviter respondebo, & appendici appendicem reponam.

Conclusionem igitur oppugnatam sic demonstro.

Datur assertio quæ directè ex sua contradictoria

tradictoria inferatur. Talis in prop.12.l.9. Eucl.est hæc: *numerus E metitur numerũ A*, quæ demonstratione affirmativa infertur ex suâ contradictoriâ: *E non metitur numerum A*. Quod quidem est æquè certum, ac demonstrationẽ illam esse legitimam? Talis in Elementis hisce nostris prop.4.l.11.est hæc: b *Recta BQ non est perpendicularis plano CAF*, quæ affirmativè deducitur ex sua cõtradictoriâ: c *recta BQ est perpendicularis plano CAF*. Talis in propositione nostra 35.l.5.est hæc: *A est ad B, ut E ad Z*, quæ directè infertur ex sua contradictoriâ: *A non est ad B, ut E ad Z*. Tales denique reperiũtur apud Cardanum l.5.per proport.p.201.apud Theodosium (commentante Clavio) l.1.sph.p.12.& nos plures similes possumus exhibere tum Geometricas tum alias.

b Fig. 12. l. 11 tab. 5.
c Fig. 20. l. 5. tab. 3.

Ecce tibi cosmographicam unam quam in iisdem thesibus disputandã proposui. *Maris, omnisque adeo humidi superficies eo ipso cõcluditur esse sphærica, quo id negas*. Ponatur vera esse ejus contradictoria; *Maris superficies sphærica non est*. Quoniã igitur maris superficies sphærica non est; ergo õnes superficiei maritimæ partes nõ distant æqualiter à centro. Ergo unà est altior altera, (altiorem enim esse non aliud est, quam longiùs à centro recedere.) Ergo eæ quæ altiores sunt, defluunt versus minùs altas seu decliviores;

viores, hanc enim esse humidi naturam experientiâ constat. Ex tali autem defluxu necessariò oritur omnium partium superficiei maritimæ æqualis altitudo, seu distantia à centro. Æqualis verò omnium partium superficiei maritimæ à centro distantia infert sphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris superficies sphærica est.*

Habemus igitur hanc: *Maris superficies sphærica est*, directè & affirmativè ductam ex suâ contradictoriâ, *maris superficies sphærica non est.*

Maneat igitur extra omnem controversiam esse, dari assertiones, quæ dirictè ex suis contradictoriis inferantur. Atqui assertio, quæ ex sua contradictoria directè infertur, necessariò vera est, (cum sit axioma per se clarissimum, id necessariò verum esse quod suum contradictorium destruit; destruit autem suum contradictorium, quod ex suo contradictorio directè sequitur.) Ergo & assertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta est assertio, falsa est. Ergo ex falso directè & affirmativè deductum est verum. Demonstrata igitur est conclusio in thesibus proposita.

Quòd vero ejusmodi demonstratio, quâ assertio ex suâ contradictoriâ falsâ directè infertur verè scientiam pariat, sic ut absque ulteriori vllâ deductione ad impossibile, de assertionis veritate securi esse debeamus, ex jam dictis manifestum est, cum lumine naturæ notissimum sit, id necessariò verum esse, quod suum contradictorium destruit, hoc est quod ex suo contradictorio sequelâ legitimâ & necessariâ infertur. Quod si verum deducatur ex falso quopiam sibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio scientiam pariet, neque enim de veritate assertionis sic deductæ securi esse possumus, cum in ea ratio jam allata deficiat, & proprium falso sciamus esse, ut ex eo falsa deducantur.

His ritè perceptis facilè eruditus Lector perspiciet, nihil opus esse, ut singulis Clarissimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant; vel ex jam dictis soluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clarissimi Viri, visum est singula breviter attingere.

Primùm supponit ex Dialectica quædam de consequentiâ directâ; & dicto (ut vocam) de omni & de nullo. Tum sententiam exponit suam nostræ oppositam. Subjungit deinde: *hanc sententiam meam stabilio eversione omnium illorum, quæ in contrarium afferri posse videntur.*

Primum (inquit) *quod ex falsis verum concludere videatur constituit hujusmodi syllogismus; omnis leo est lapis. Omnis adamas*

mas

mas est leo. Ergo omnis adamas est lapis. In quo &c. Tali syllogismo ad probandam assertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falso non contradictorio, qui proinde etiam, ut ostendi supra, scientiam non parit. Primum istud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *constituunt hypotheses Astronomicæ &c. Quæ licet fictitiæ tantùm sint & falsæ; tamen juxta eas calculum eclipsibus, & aliis observationibus cælestibus convenientem Astronomi exhibent.* Deinde postquam multis contendit, hinc non probari verum ex falso directè elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam instantiam, quam ex regula falsi depromere licet* &c. contenditque rursum hic non elici ex falso verum. Quo quidem in utroque, cum illi ego planè assentiar, neque ullum inde pro assertione meâ argumentum petam, non me magis illa tangunt, quam primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis facessunt, modi demonstrandi ab Euclide 9. elem. p.12. Cardano l. 5. de proport. p. 201, & Theodosio l. 1. sph. p. 12. adhibiti*, quò me digitum intendisse putat, & verè. Ex his siquidem demonstrandi modis, evidenter jam demonstravi supra, ex falso elici directè verum; neque affertur quidquam à Clarissimo Viro, quod demonstrationem nostram infirmet. Veris

Clavii

Clavii ad. p. 12. lib. 9. recitatis, ſubjungit ex eodem Clavio demonſtrationem p. 12. l. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) *ut verum fatear, neſcio ſanè, quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint, qui tamen Logicis valdè familiaris eſt & duobus principiis omnium evidentiſſimis & naturâ notiſſimis nititur, hiſce nempè: quod idem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe, item quodlibet aut ſit aut non ſit.* Quid Clavio, Cardano, & cum iſtis aliiſque etiam mihi in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum quod aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directè ex ſuâ contradictoriâ, (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentiis legitimis ac neceſſariis deducatur. Quod quidem quotieſcunque evenit, admiratione dignum eſt. Tantùm verò abeſt, ut hæc ratio demonſtrandi Logicis valdè familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clariſſ. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed formâ planè diversâ à Clavianâ illâ, quam priùs recitaverat, in quâ vis argumentationis inter nos controverſæ cla iſſimè cernitur. Subjungit denique: *neque ego tam*

lyn-

lynceus ſum ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo verum directe ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demonſtretur non eſſe centrum ſphæræ, (vult, credo dicere, *ponatur*, cum demonſtrari nequeat, quod falſum eſt) *neceſſariò ſit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G ſit centrum ſphæræ.* Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperiùs datam, quâ, opinor, fiet, ut V. C. tametſi, quod eſt maximè, lynceus non eſſet, clarè perſpiciat elici directè ex falſo verum.

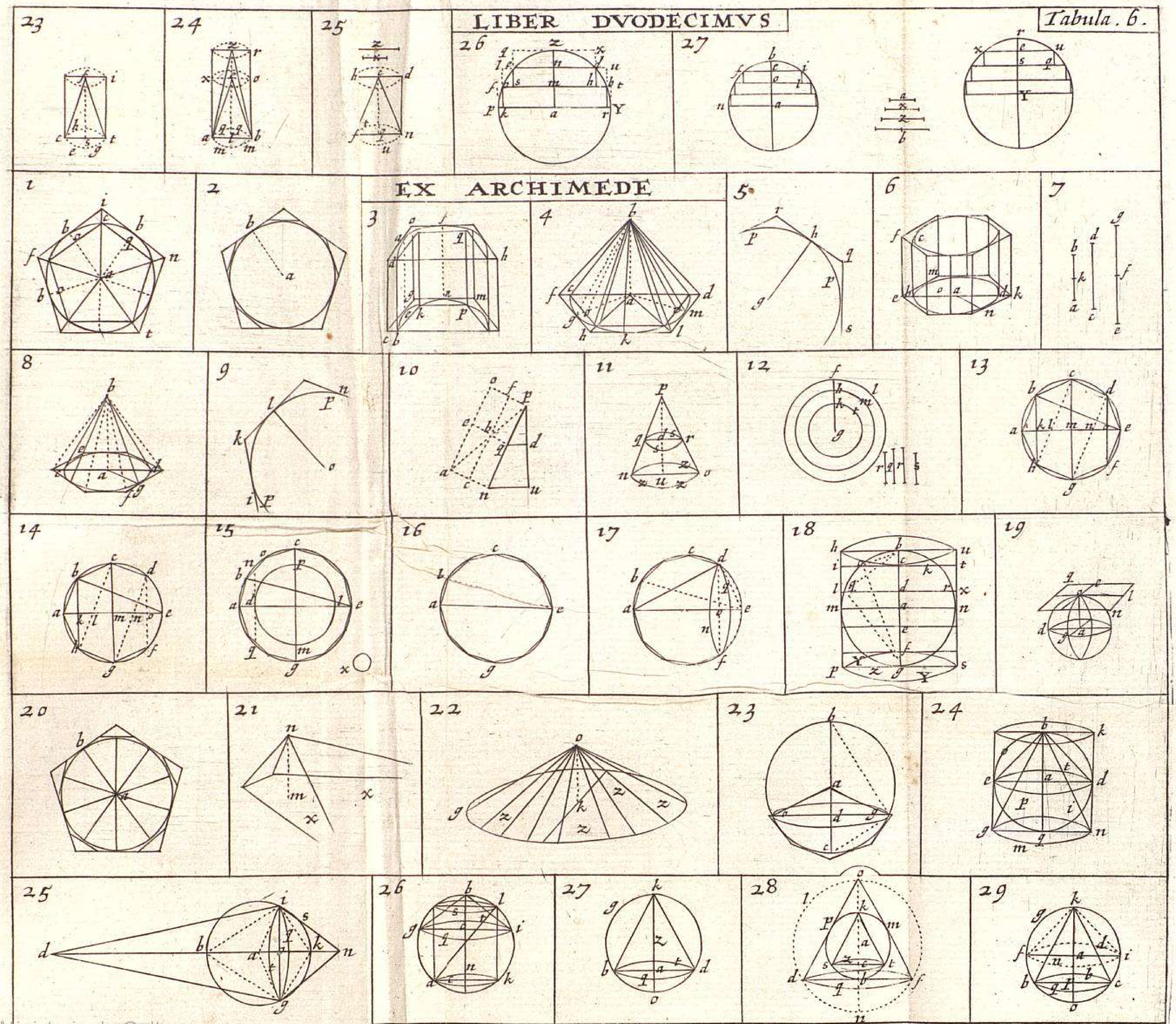
Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſolutâ & formali G eſſe centrum; manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſuâ contradictoriâ, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quod G ſit centrum, cum lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur. Habemus igitur quod ex hac: (G non eſt centrum) directè deducta ſit hæc vera; (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum) falſa eſt, cum jam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum.) Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper

hac quæstione breviter hic putavi apponenda. Cæterùm nihil dubito quin Clarissimus Lipstorpius eâdem animi æquitate responsionem hanc nostram sit accepturus, quâ dedit oppugnationem suam, & ego illam accepi.

FINIS.

AD


LIBER DVODECIMVS
Tabula. 6.
EX ARCHIMEDE

AD COMPACTOREM.

Sex tabulæ figurarum affigentur hoc ordine

Tabula 1. ante pag. 55.
Tab. 2. ante pag. 109.
Tab. 3. ante pag. 181.
Tab. 4. ante pag. 221
Tab. 5. ante pag. 269.
Tab. 6. ante pag. 351

Affigentur autem sic, ut cum explicatæ fuerint, manente intra librum folio albo, figuræ totæ extra librum in conspectum veniant, complicatæ autem intra libri margines præcisè recipiantur. Expediet verò ita complicari, ut figuræ, etiamdum complicatæ fuerint, aspectui patiant.

AU RELIEUR.

Les six planches de figures seront inserées à l'ordre qui suit.

La 1. planche devant la page 55.
2. planche devant p. 109.
3. planche devant p. 181.
4. planche devant p. 221.
5. planche devant p. 269.
6. planche devant p. 351.

Or il faut attacher en sorte, que la planche estant ouverte, toute la figure passe precisement la tranche du livre; & qu'ainsi elle paroisse entierement, bien qu'on referme le livre: il faut pourtant qu'estant pliée elle s'aiu-

s'aiuste avec le reste de feuilles. Il sera aussi à propos, de les plier en sorte, que les figures se voyent, & que le dos en soit caché.

AEN DE BINDER

De ses plaeten salmen op haer plaetse binden als volght.

De 1. plaet voor pag. 55.
2. plaet voor pag. 109.
3. plaet voor pag. 181.
4. plaet voor pag. 221.
5. plaet voor pag. 269.
6. plaet voor pag. 351.

Men sal de platen alsoo binden, dat het blat openghevouwen sijnde, de witte side blyve binnen het boeck, ende d'andere met de figuren geheel daer buyten. Is oock geraeden het blat alsoo toe te vouwen, dat de figuren oock toeghevouwen sijnde, konnen ghesien worden.

TACQV
ELEM
GEOM