JOHANNIS DE WITT

ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheseos
Professoris.

FRANCOFURTI,

Apud JOHANNEM FRIDERICUM KNOCH.

CIↃ IↃC XCV.

Clarissimo, Doctissimoq; VIRO,

D°. FRANCISCO à SCHOOTEN,

JOHANNES DE WITT

S. P. D.

Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem judicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui; ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quælibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, pleniùs planiúsque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis *mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac proinde de iisdē vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum & ineptum semper existimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout à Veteribus tradita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentiùs considerassem, originem earum è solido peti atque inde ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quàm maximè observandus est, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem de causa & propter varias rationum compositiones, quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Propositionum serie Lectoribus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque Artiū doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas solùm, quas vulgò* Coni sectiones *appellârunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujuscunque sint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diversimodè compositorum aut figuratorum sectione gigni; at verò earundem singulas infinitis quoque modis*

dis in plano generari, ipsarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum sectione deduci; ac firmiter mihi persuasum habeo, nullam aliam esse causam, quòd linearum curvarum secundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque essentia, cum exacta specierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonstrata sint, quàm quòd tam in tractatione ortus & generationis, quàm in demonstratione essentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & simplicissima via deflexum sit, utpote cum earundem contemplatio, prout in plano simplicissimè & quidem diversimodè generantur, intellectum & imaginationem ad genesin linearum curvarum secundi generis quasi sponte ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per otium licuit, eò spectantia meditatus sum, tu nunc, amicissime Schooteni, *copiam tibi fieri desideres, en, quantum in me est, desiderio tuo satisfacio; quæque de eodem argumento à me quondam conscripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio; cætera autem, quæ sparsim tantùm annotata sunt, si modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata suo quoque tempore tibi missurus; Vale. Hagæ Com.* VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.

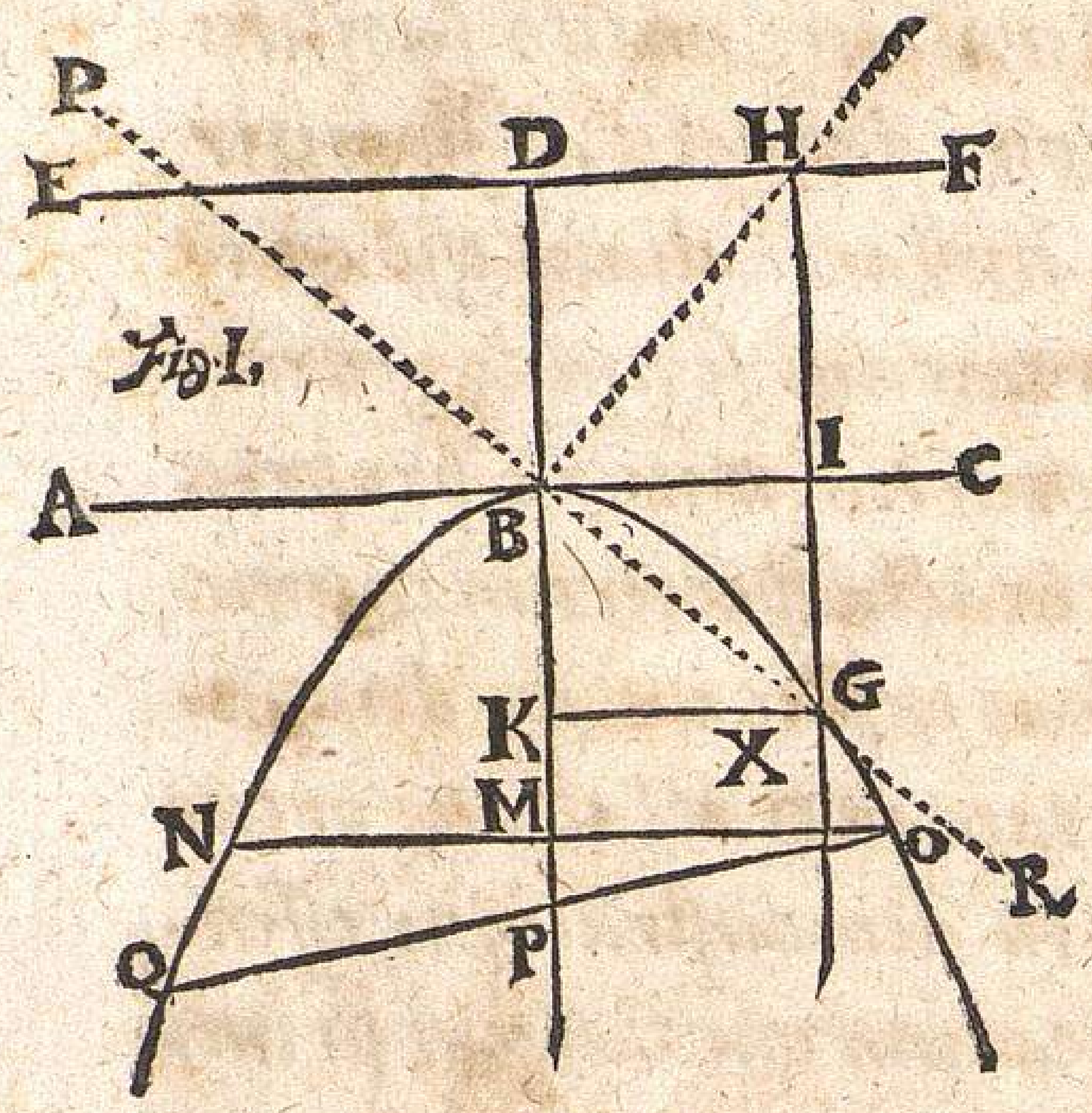


Fig. I.

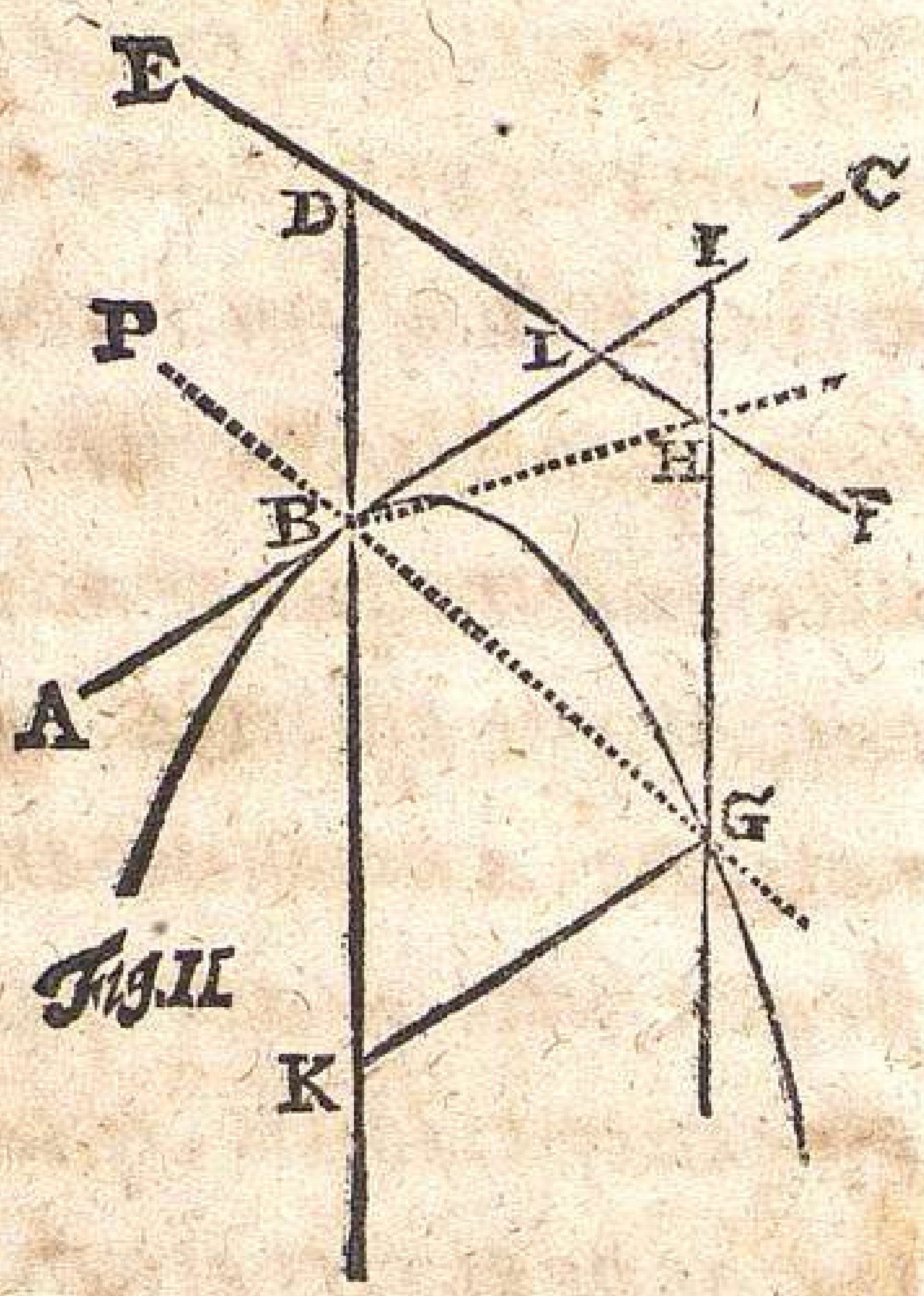


Fig. II.

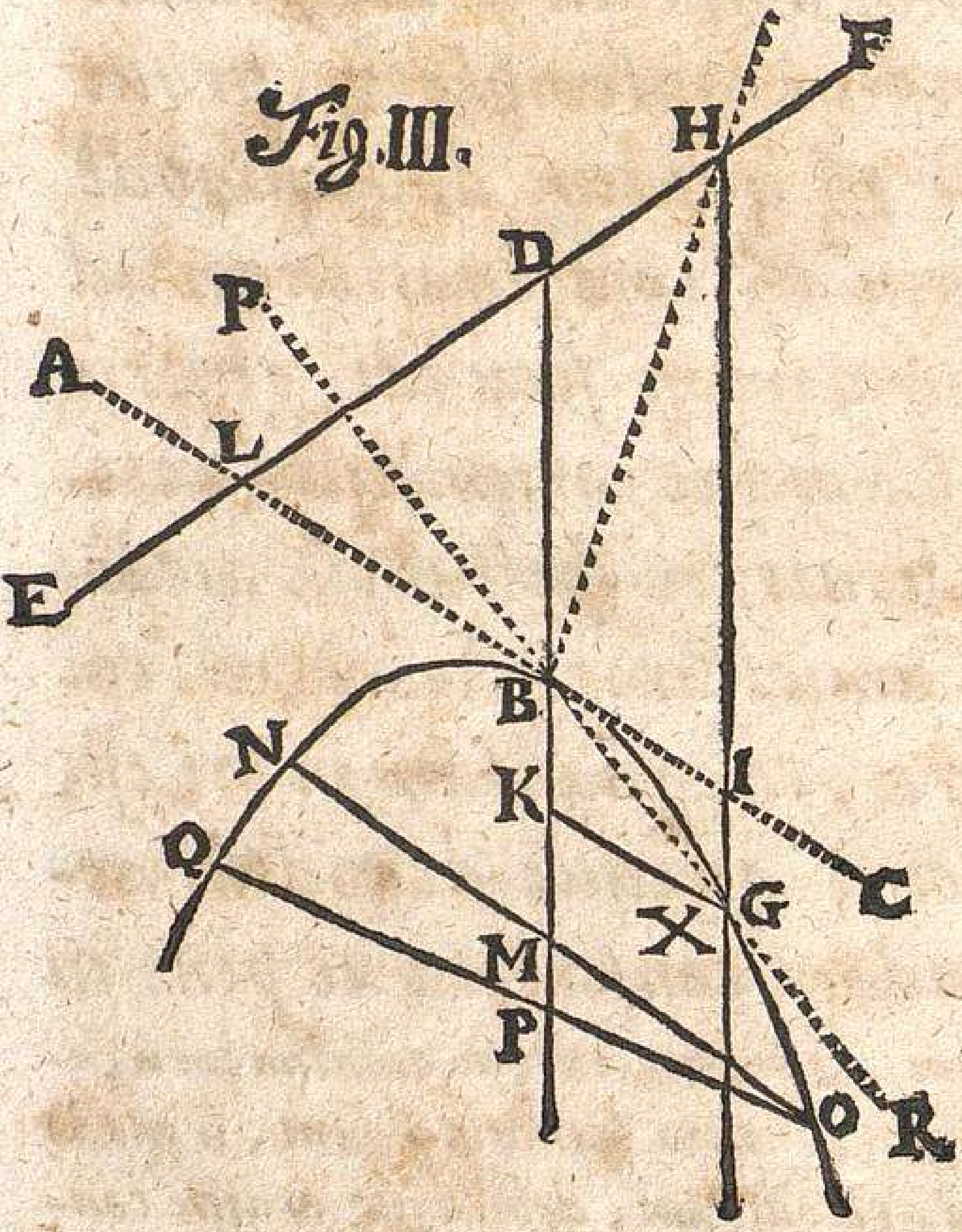


Fig. III.

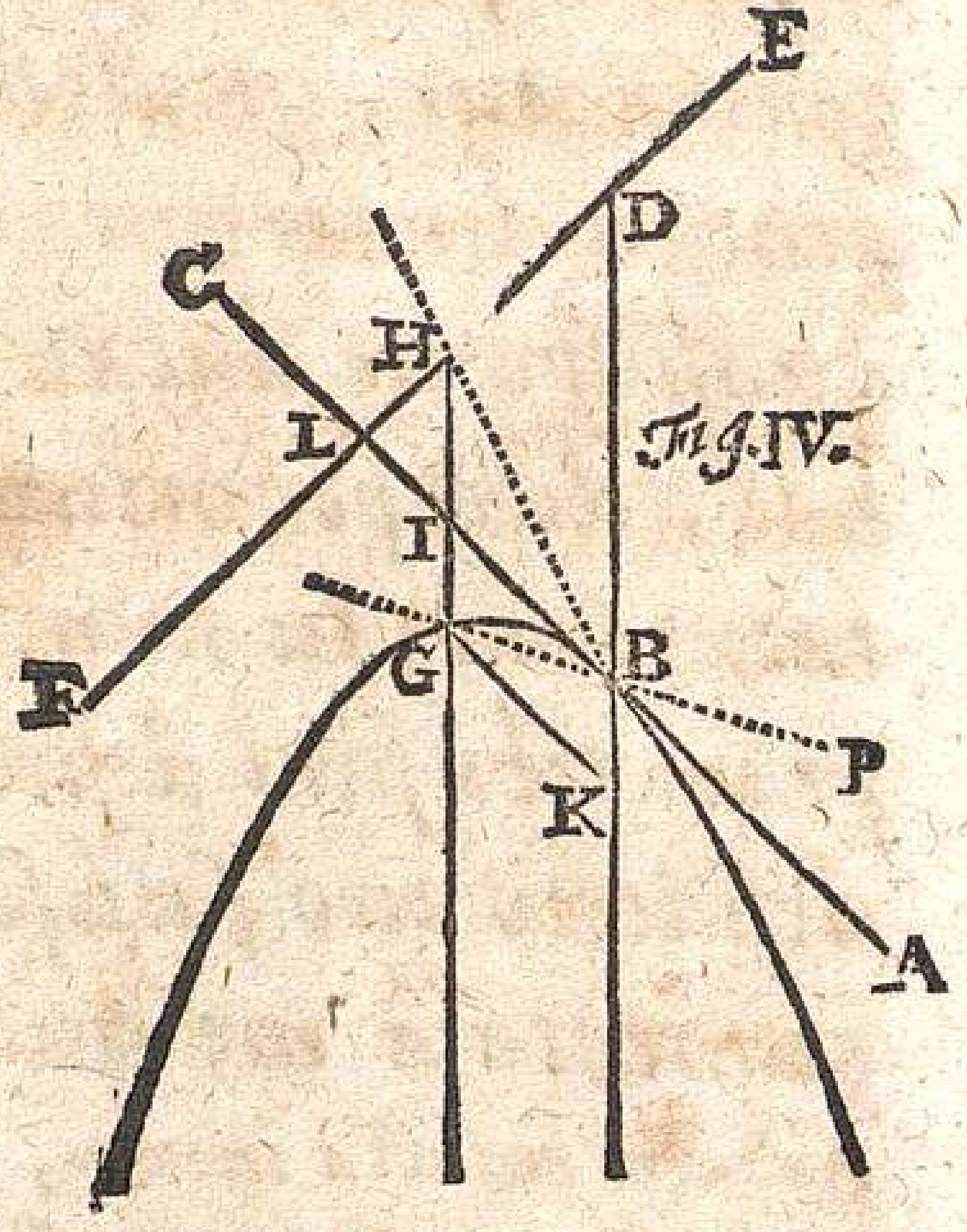


Fig. IV.

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

LIBER PRIMUS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo ſui puncto ſibi ſemper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujuſdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem ſit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum ſemper per prædictum mobile punctum tranſiens ſecum ducat, atque ita ſimul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis interſectione curva deſcribatur linea, recta, quæ, uti prædictum eſt, ſibi ſemper parallela movetur aut incedit, *Deſcribens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei eſt deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IV.

At quos *describens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *describentis* pars, quæ inter *Polum*, & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *describens* secum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *describente* secatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

IX.

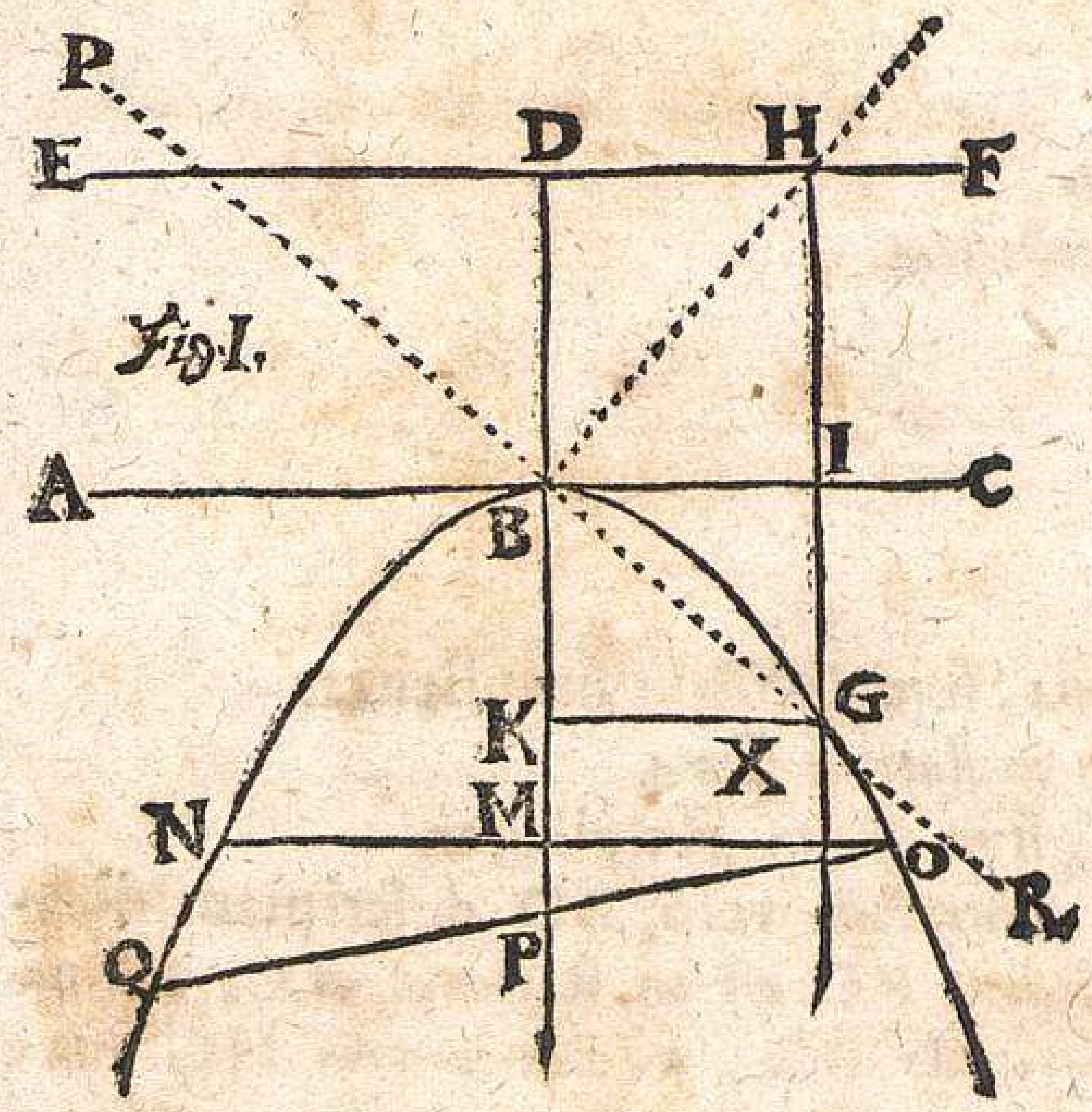
Cùm *describens* per *Polum* transit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, esse tam *describentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *statione prima* constitutum dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit in tali ipsas positione considerabimus.

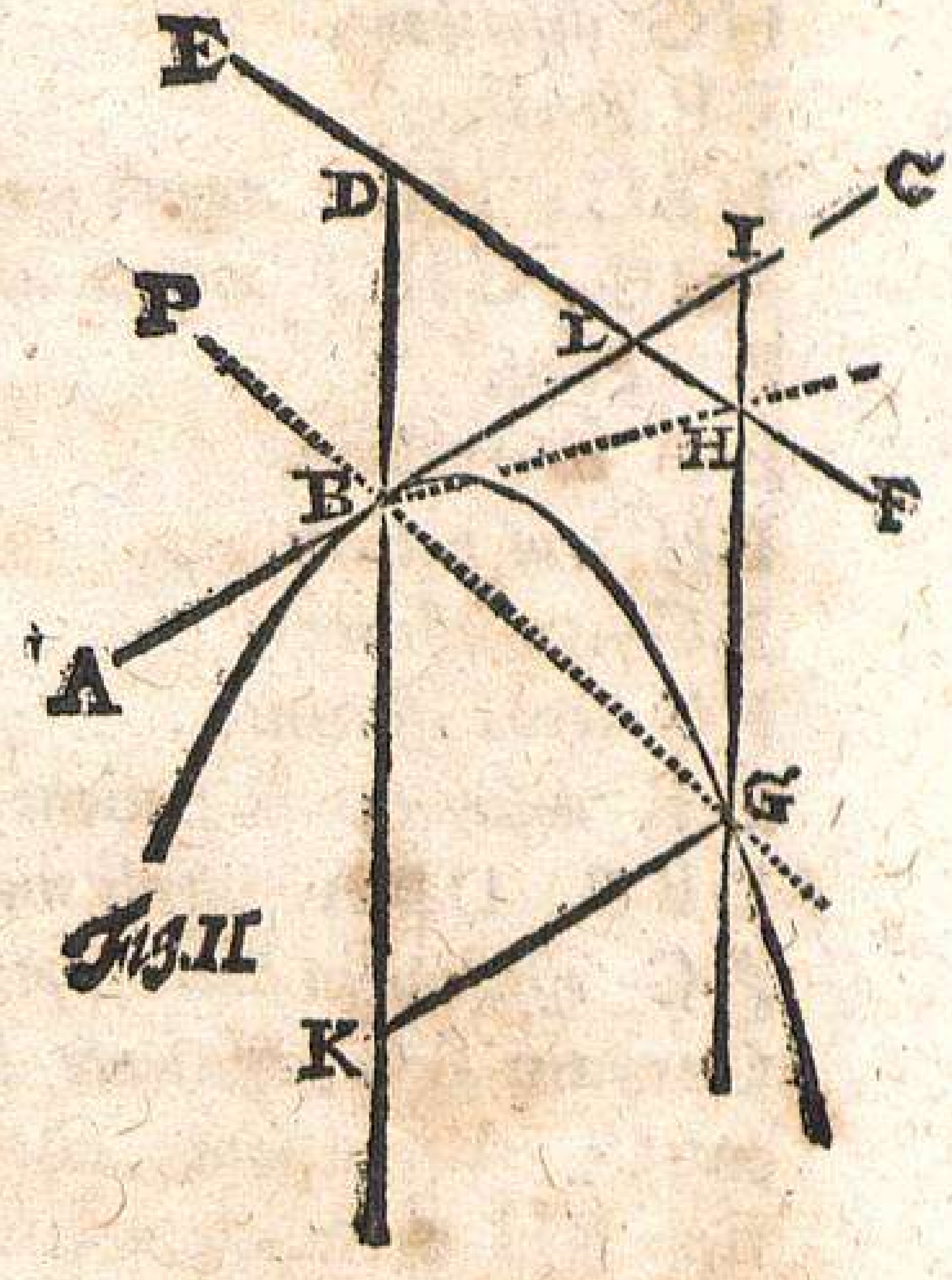
X.

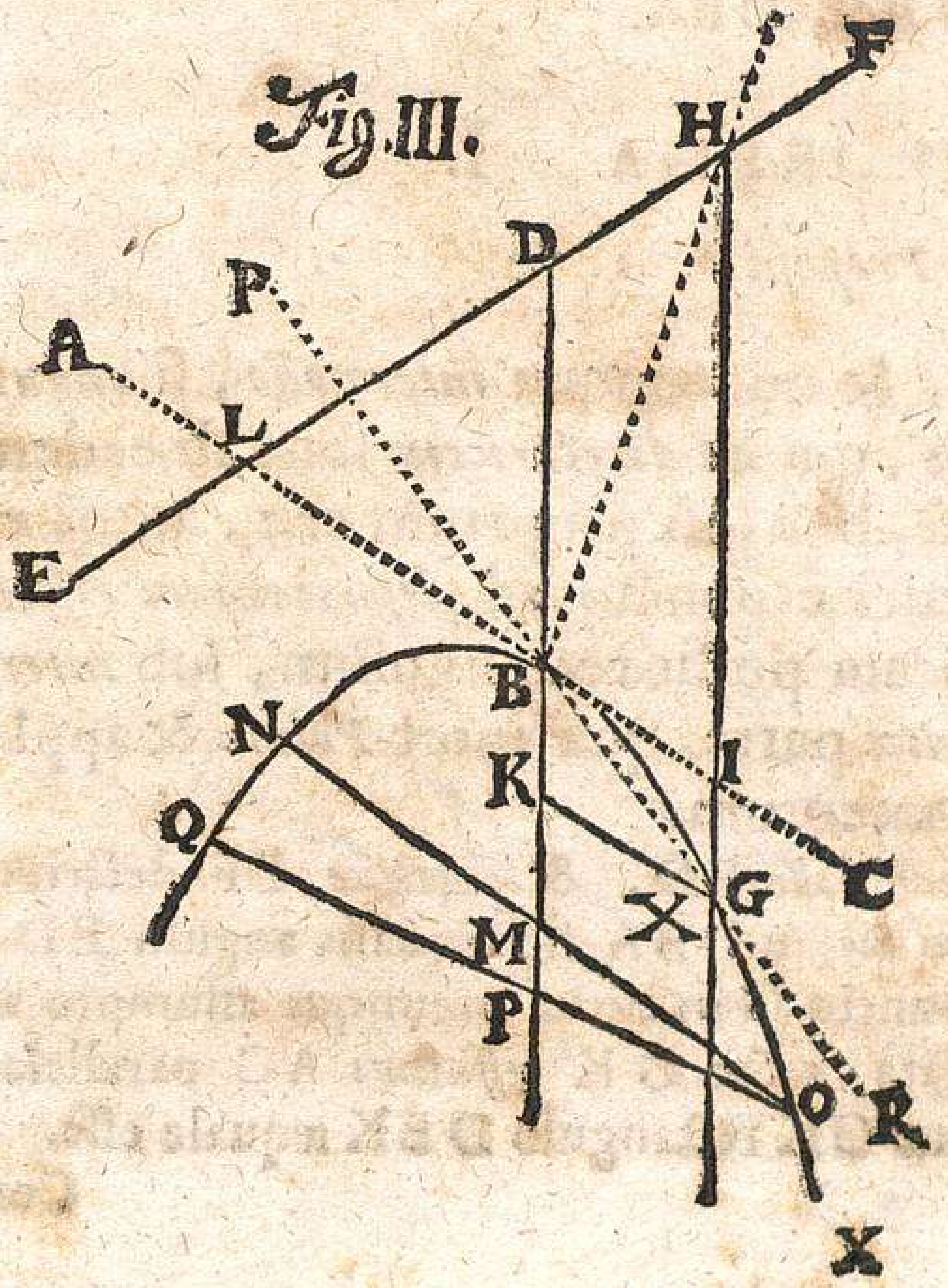
Quamlibet curvam, intersectione, uti prædictum est, in plano genitam, descriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* consideratis, ut exhibentur ac sibi invicem junguntur *in statione prima*; adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipsa *describente* quàm cum *crure patiente* in eadem statione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque constituat.

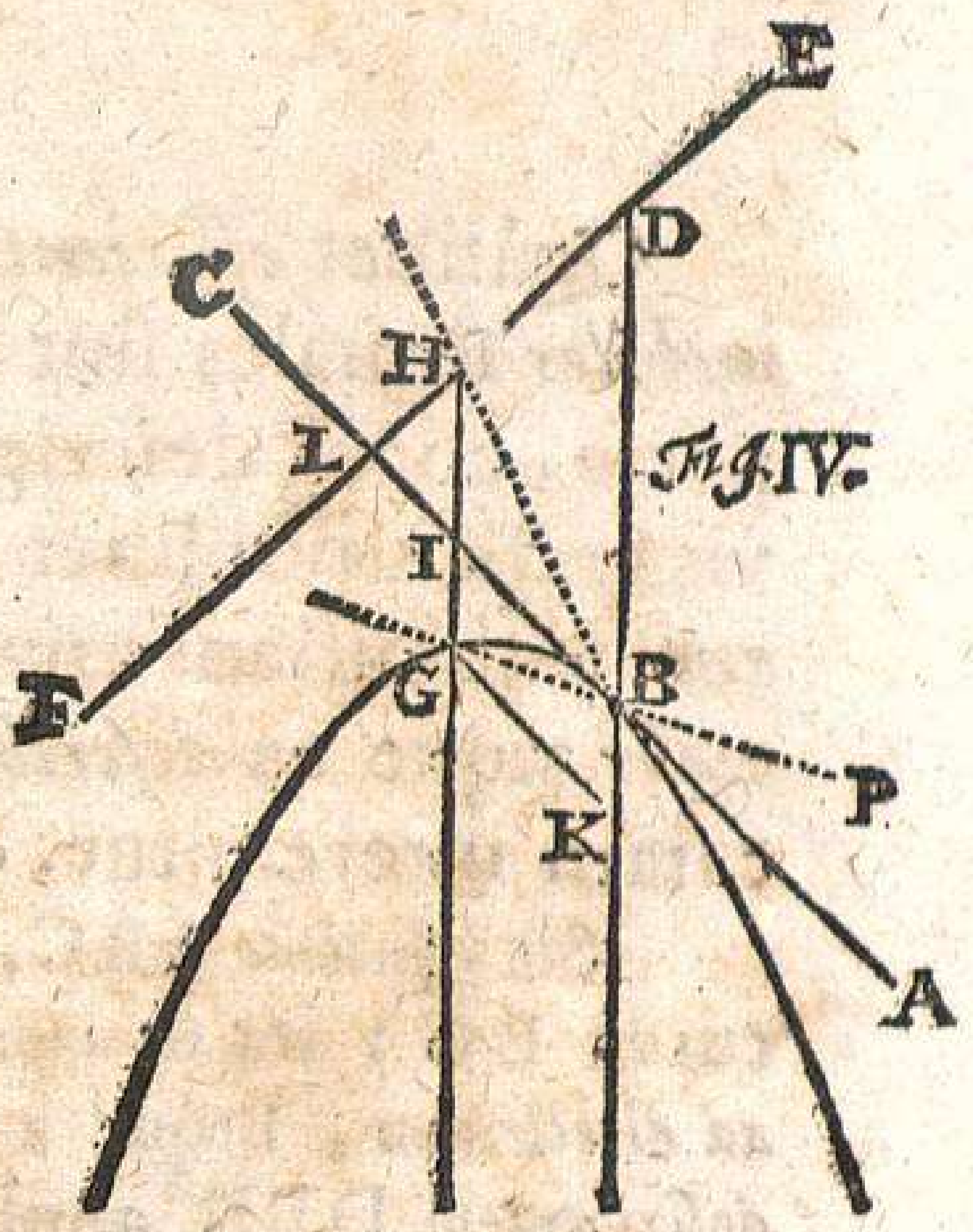
Ut

Ut in appositis figuris, si recta HG sibi semper parallela certo sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam EF, eodemque illo motu secum ducere crus BH anguli HBG, circu-









lariter

lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva linea BG: erunt

HG *describens*.
EF *directrix*.
HBG, HBP *anguli mobiles*.
FHG, EHG *anguli ad directricem*.
B *Polus*.
BD *intervallum*.
BH *crus patiens*.
BG *crus efficiens*.
PG *linea efficiens*.
DK *describens in statione prima*, sive *describens* simpliciter.
DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima*.
AC *efficiens in statione prima*, sive *efficiens* simpliciter.

Curvam BG, *efficiente* AC, *intervallo* verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* PG est in statione AC, *crus patiens* BH coïncidere cum *intervallo* BD; ac *describentem* HG tunc esse in statione DK, atque per *efficientem* & *intervallum* constitui utrinque *angulos mobiles* DBC, DBA.

THEOREMA I.

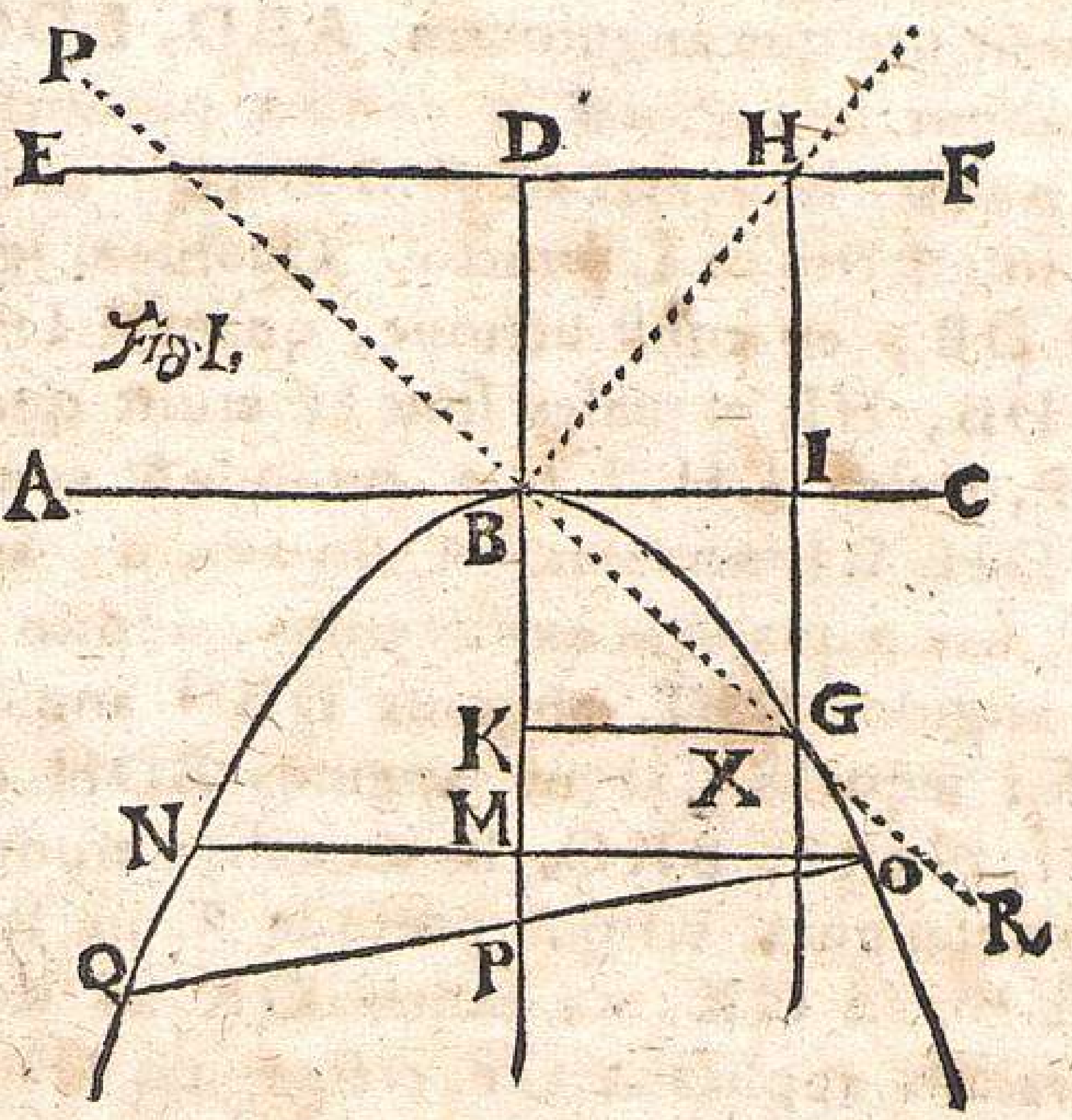
Propositio 1.

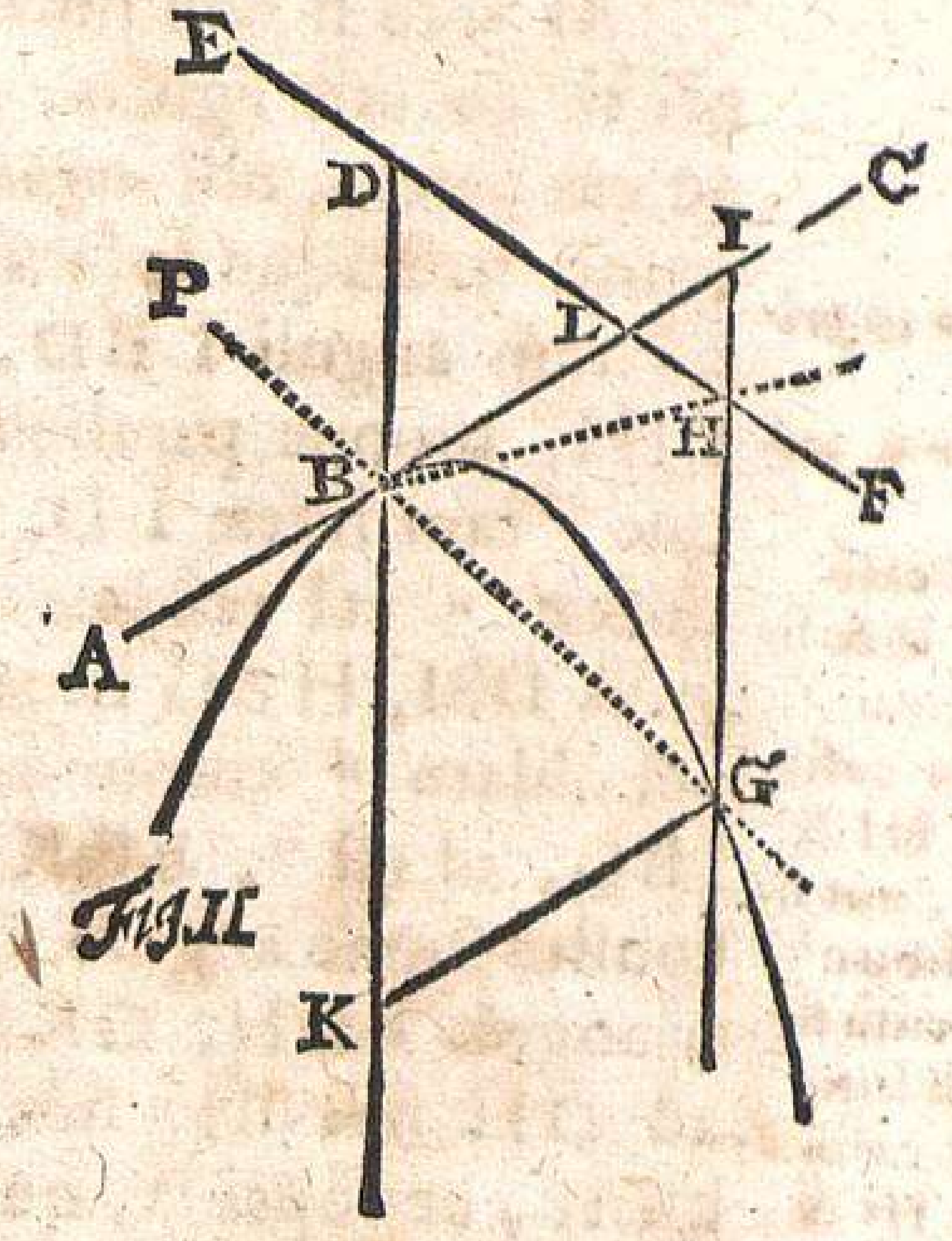
Quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, si *anguli mobiles* æquales sint iis, qui *ad directricem* sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *describentem efficienti* æquidistans applicata possit rectangulum, sub *intervallo* atque ea *describentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

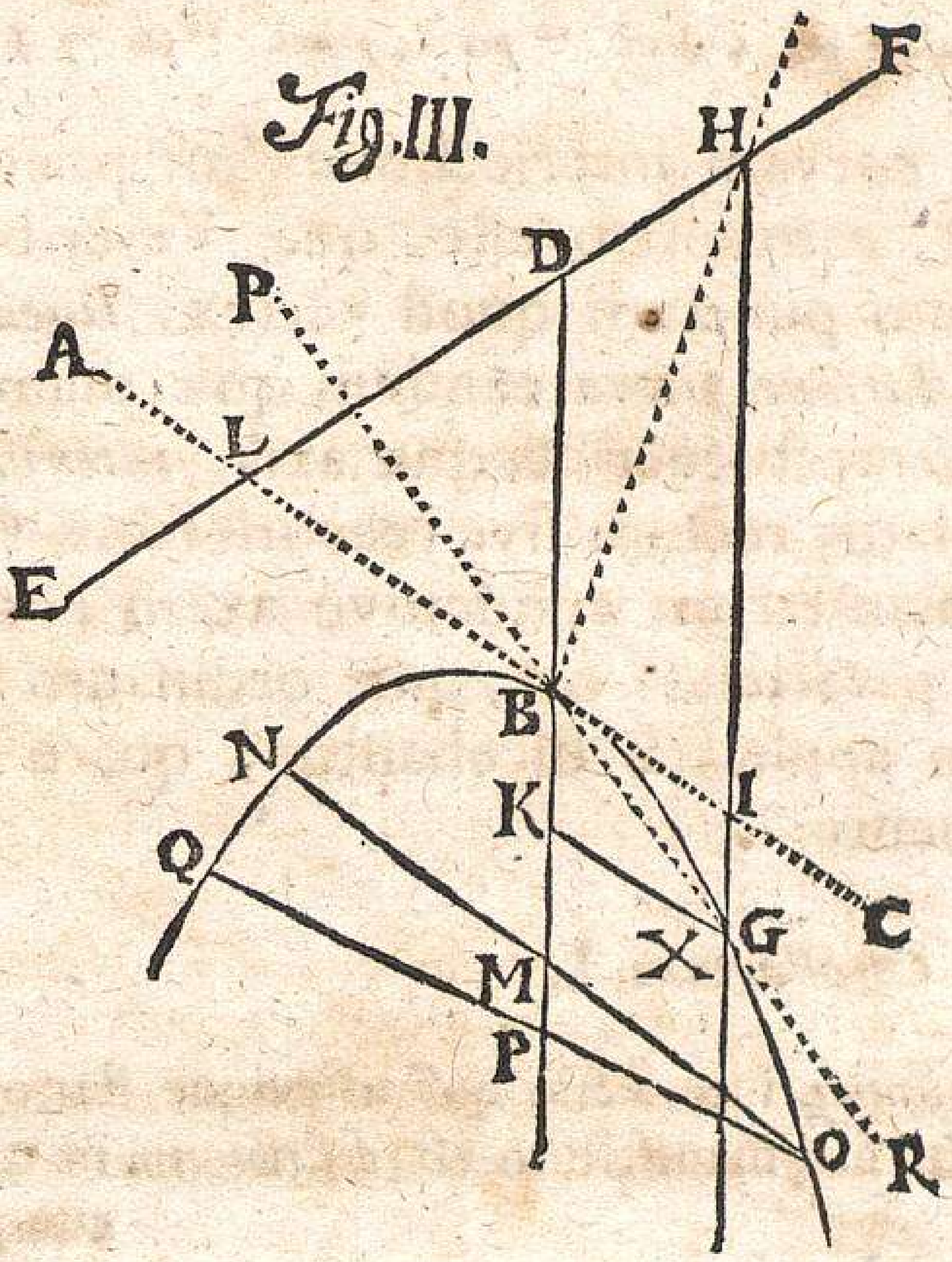
Sit *efficiente* ABC, *intervallo* BD, & *directrice* EF descripta curva BG; ita ut *angulus mobilis* DBA sit æqualis angulo EDB *ad directricem*, sitque à puncto G in curva utcunque assumpto ad *describentem* DBK applicata recta GK *efficienti* AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

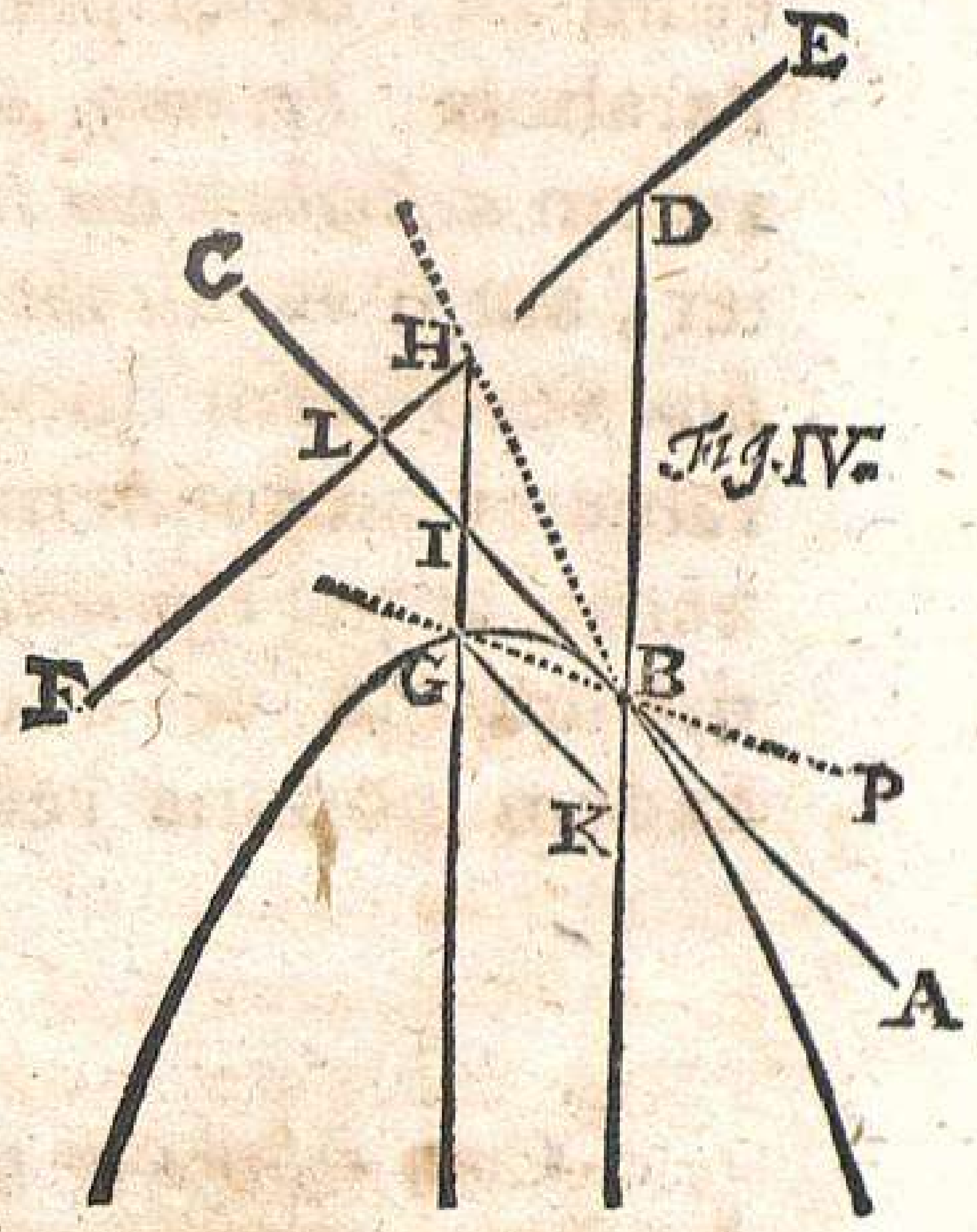
Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is









qui ad *directricem* eſt rectus ſit, uti in prima figura, erit [1] ut HI ad IB, ita IB ad IG, id eſt [2], ut DB ad GK, ita GK ad BK. ac proinde [3] quadratum rectæ GK rectangulo DBK æquale erit.

[1] per Cor. 8 ſexti Eucl. [2] per 34 primi. [3] per 17 ſexti.

At verò ſi obliquus fuerit uterque angulorum ABD, EDB, uti in cæteris figuris, ſecabunt ſeſe *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, iſque qui ad *directricem* eſt, acuti erunt. ſit itaque ipſarum interſectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli LBD, LDB, ex conſtructione, quàm LIH, LHI, propter parallelas DB, HI, æquales ſunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ LD, LB, quàm LH, LI; ac proinde & compoſitæ [a] vel reſiduæ [b] DH, BI æquales. Cum autem, angulis DBI, HBG iiſdem, ſive æqualibus exiſtentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo HBI, angulus DBH angulo IBG, id eſt [6], BGK, fiat æqualis; atque angulus BDH ex conſtructione angulo DBI, id eſt [7], BKG, ſit æqualis: erunt [8] triangula BDH, GKB æquiangula, eritque proinde [9], ut BD ad DH ſive BI, hoc eſt [10], ad GK, ita eadem GK ad KB. quare, ut ſupra [11], quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale erit. Quod eſt propoſitum.

[4] per 29 primi. [5] per 6 primi. [a] in caſu fig. II & ſimilibus. [b] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus. [c] in caſu fig. II & ſim. [d] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus.

[6] per 29 primi. [7] per 29 primi. [8] per 32 primi. [9] per 4 ſexti. [10] per 34 primi. [11] per 17 ſexti.

Conſtat itaque, curvam interſectione, uti prædictum eſt, deſcriptam, eam ipſam eſſe, quæ Veteribus Parabola; *Polumq;* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *deſcribentem in ſtatione prima* eandem quæ diameter, aut ſi *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum ſive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvé axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

Cum *deſcribentis efficientisq;* interſectio quibuſcunque ſtationibus in uno tantùm puncto fiat, manifeſtum eſt, *deſcribentem* in quacunq

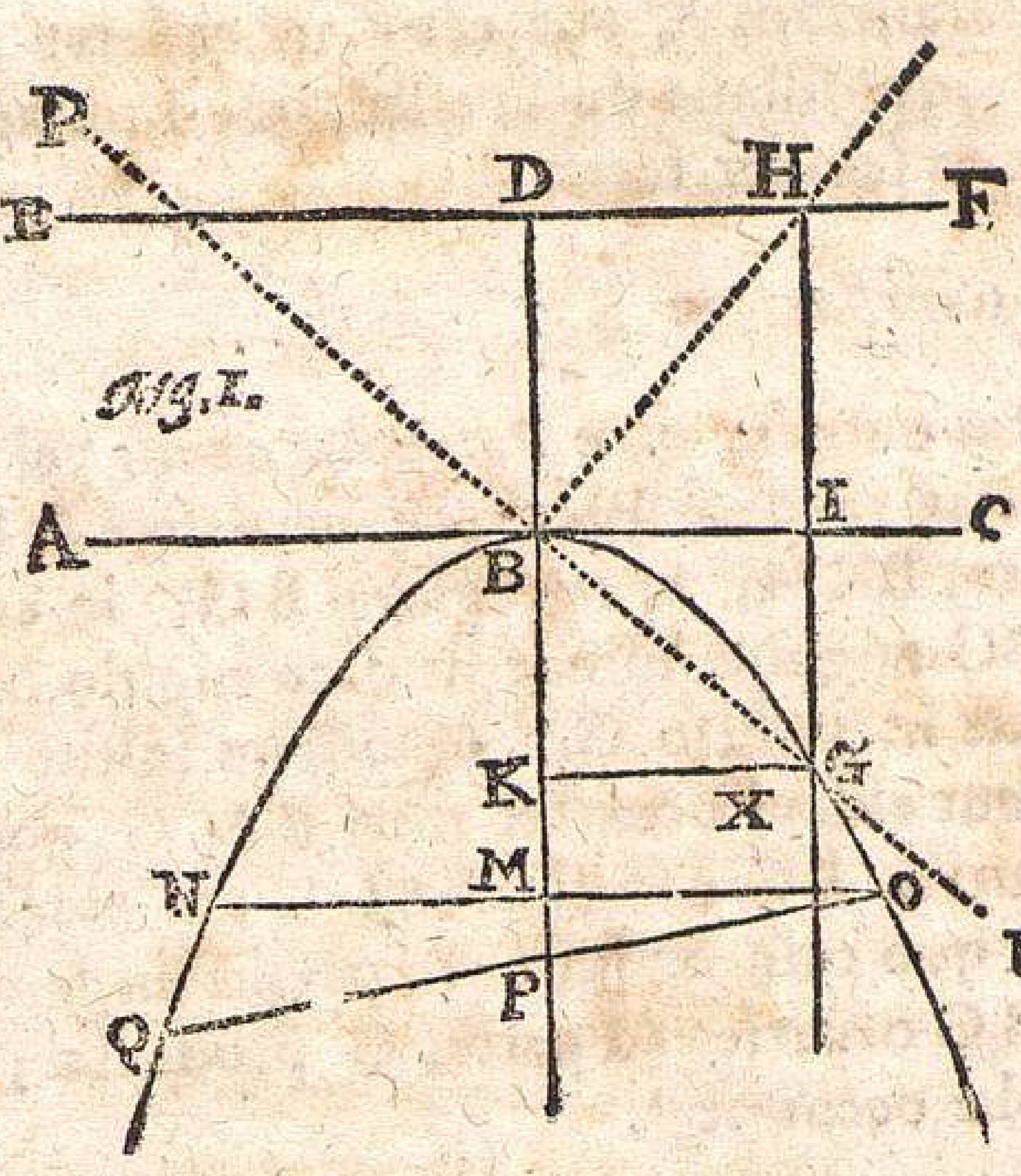


Fig. I.

cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo *describentis* à *Polo* recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad *lineam efficientem in statione prima*, veluti GBI, manifestum est, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvę punctum ductam, ut, ex. gr., BG, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.

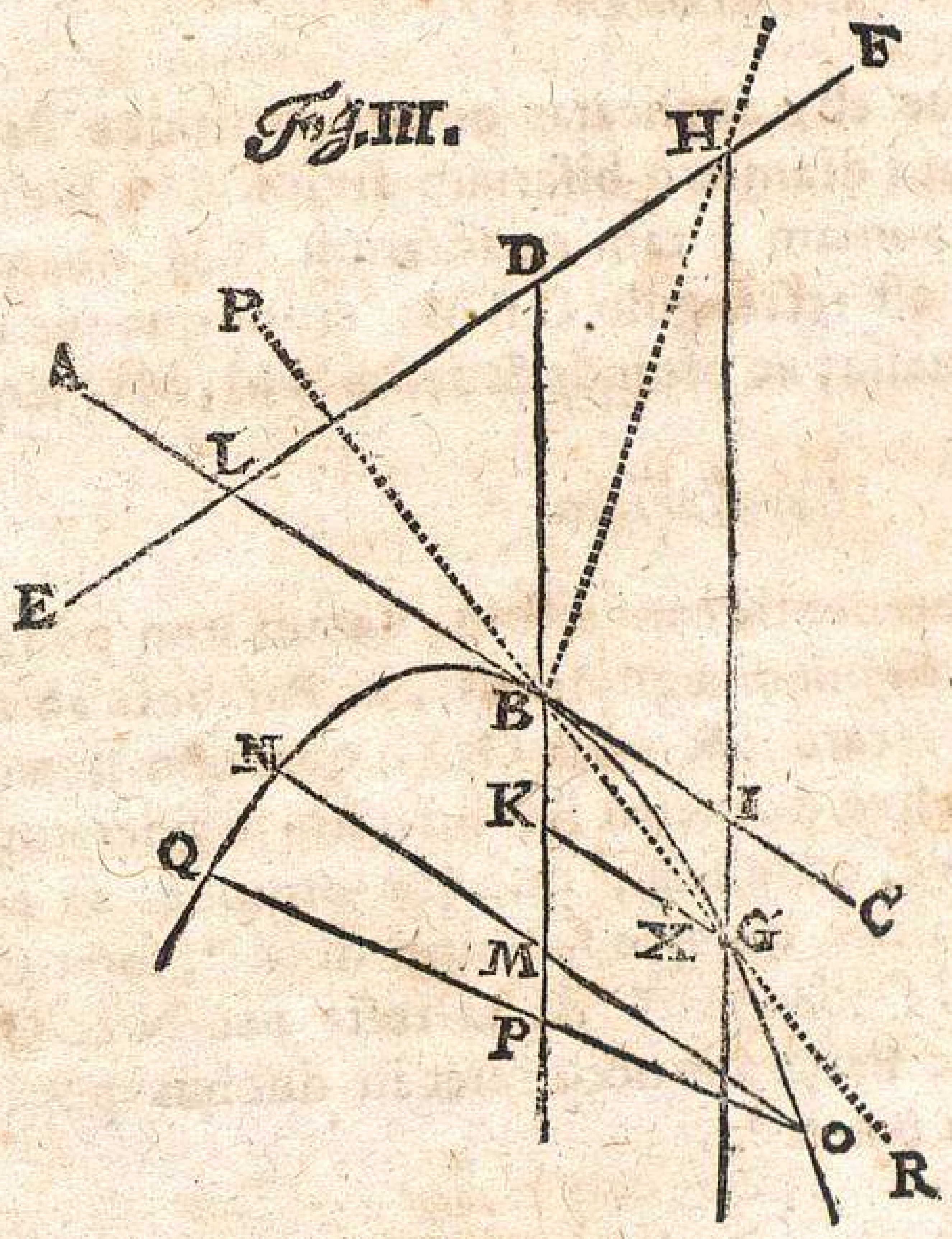


Fig. III.

Corollarium 3.

Constat prǽterea angulum GBK indefinitè quidem diminui, omniq; proposito angulo rectilineo minorē reddi posse; sed *crus* tamen *efficiens* BG nunquam cum *describente* BK coïncidere, multò minùs ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

[1] per 29 primi.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKX [2], per Parabolam transeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est [3], aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu priùs Parabolæ occurret [4].

[2] juxta Cor. præcedens.

[3] per Corol. 2 hujus.

[4] per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Ut, si ducta sit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

[5] per 1 hujus.

Corollarium 6.

Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M [6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest [8].

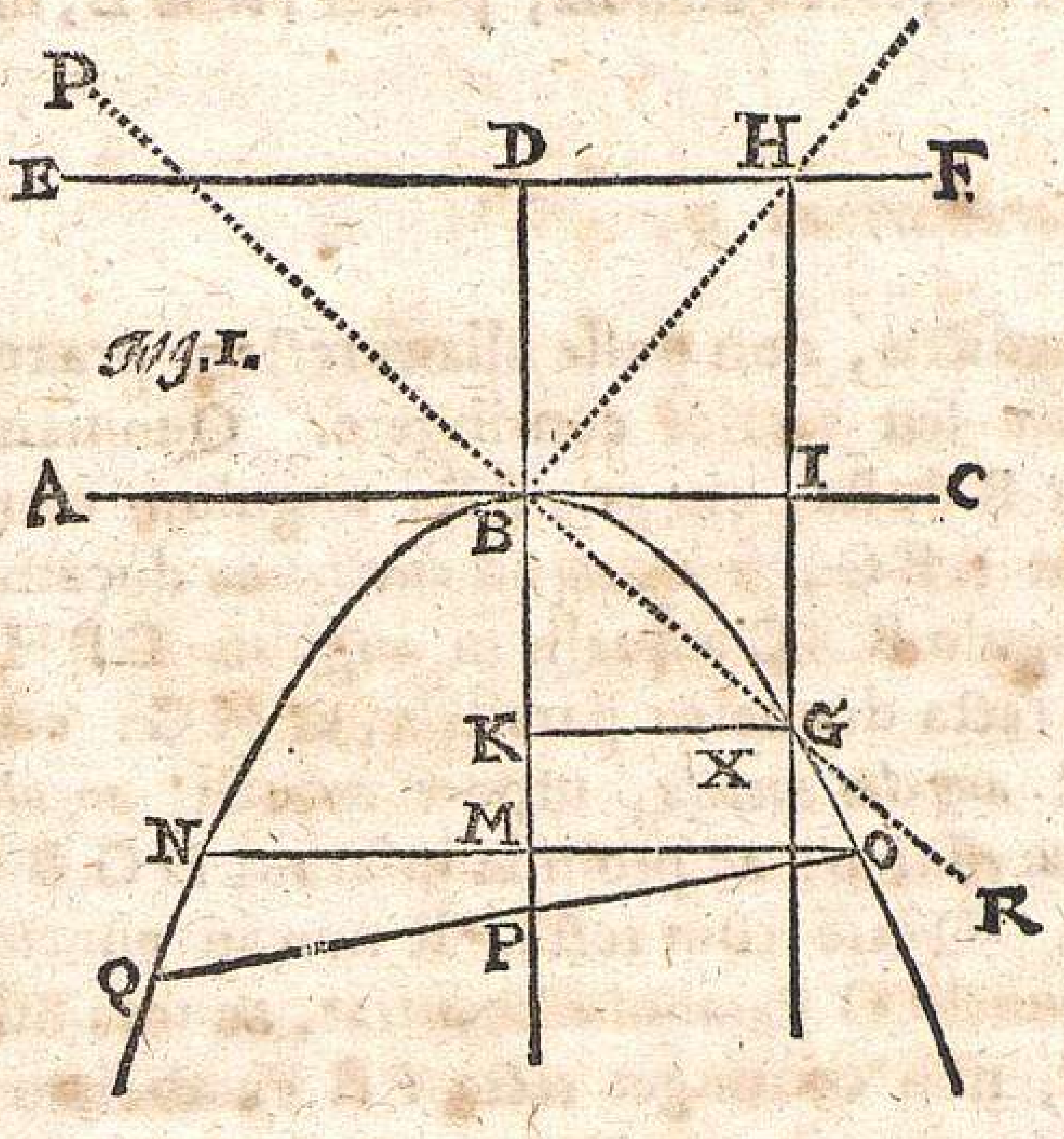
[6] per Corol. præcedens.

[7] per 2 sexti.

[8] juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad ean-

eandem ordinatim applicatæ ſunt: & ſi diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat, omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam ſecabit.

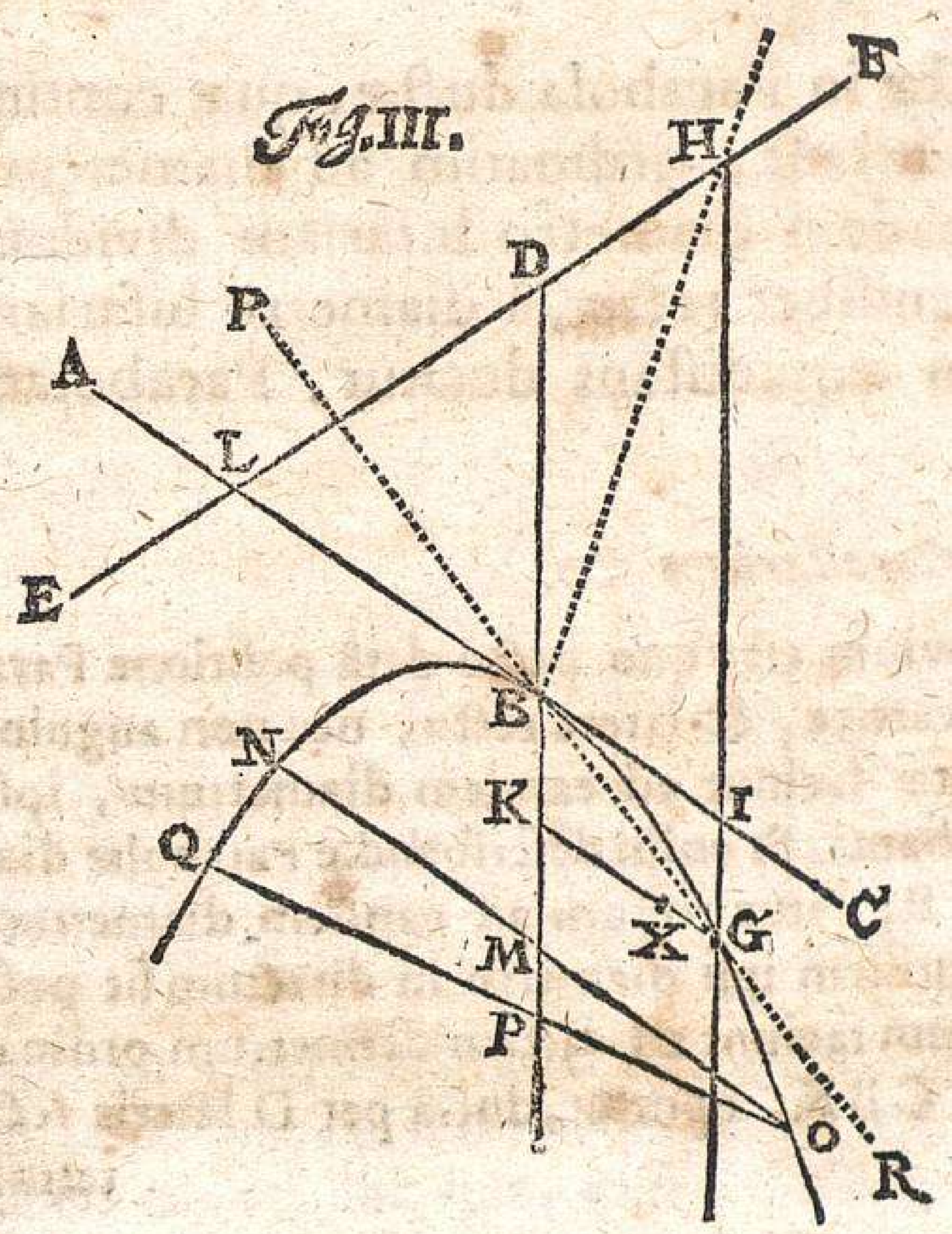


Corollarium 7.

Ex demonſtratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, ſicut ad ſe invicem ſunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Ut, ſi applicatæ ſint GK, NM, erit [1] quadratum rectæ GK ad quadratum ipſius NM, ut rectangulum DBK ad rectangulum DBM, id eſt [2], ut BK ad BM.

[1] per 1 hujus.

[2] per 1 sexti.



Corollarium 8.

Ex ipſa porrò deſcriptione manifeſtum eſt, *efficientem in ſtatione prima*, id eſt, rectam, quæ per *Polum* ſive verticem applicatis æquidiſtans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem ſecare. Sum-re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione BG, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut GBC: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* ABC cadet.

Corollarium 9.

Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., PR, angulum constituit cum *efficiente* AC, ut RBC, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta BH, ita ut eidem angulo RBC æqualis sit angulus DBH, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut HG: erit ea ipsa *describens*, & HBR *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* DBC; BR verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum HG, BR intersectio G in Parabola. Quare cum recta PR non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota BG recta [3] intra curvam cadat, non continget recta PR Parabolam, sed eandem secabit.

[3] per Corol. 1 hujus.

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit BK, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens BD, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ ABK vel CBK: oportet, ductâ per D lateris recti termi-

Fig. I.

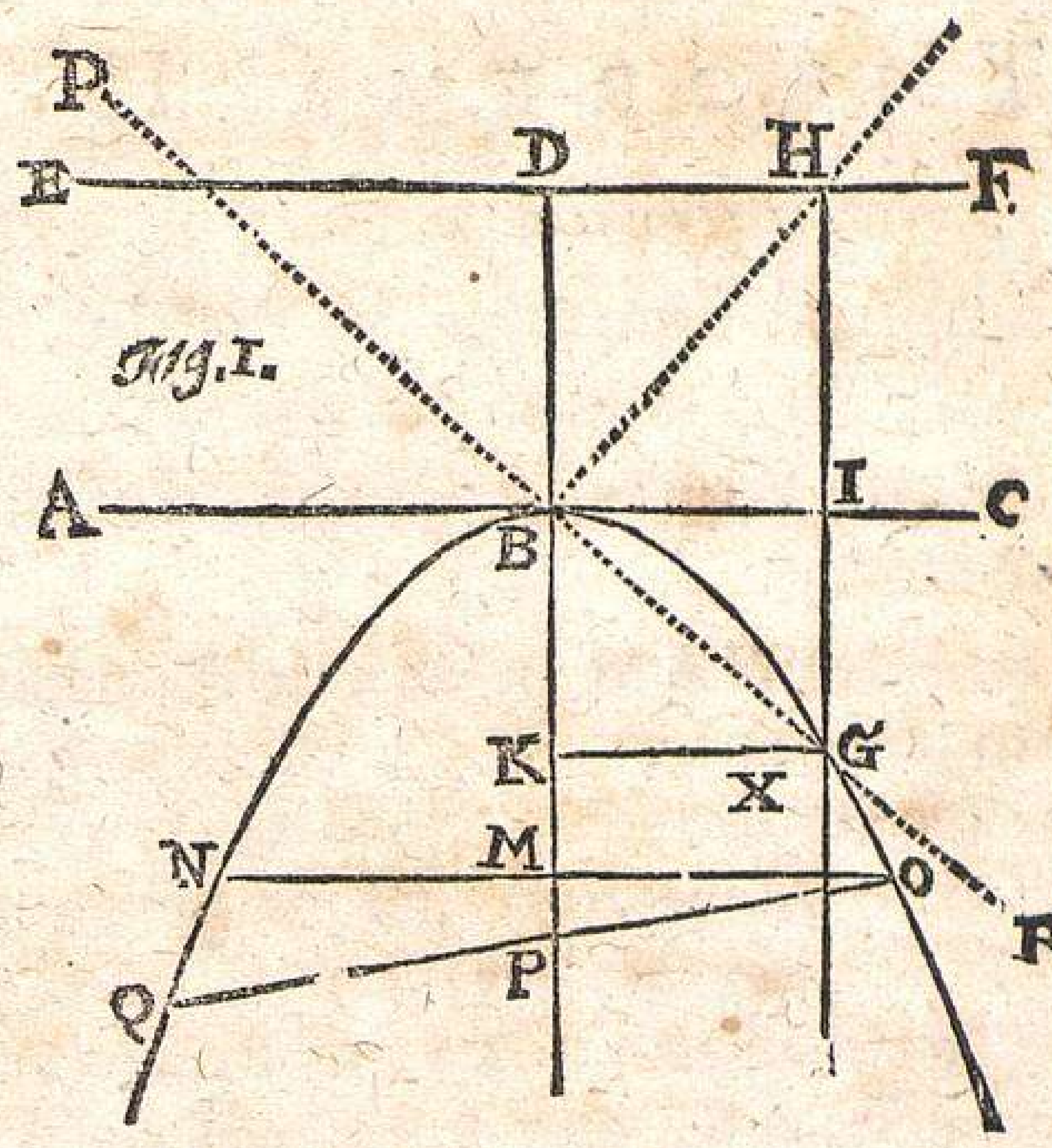
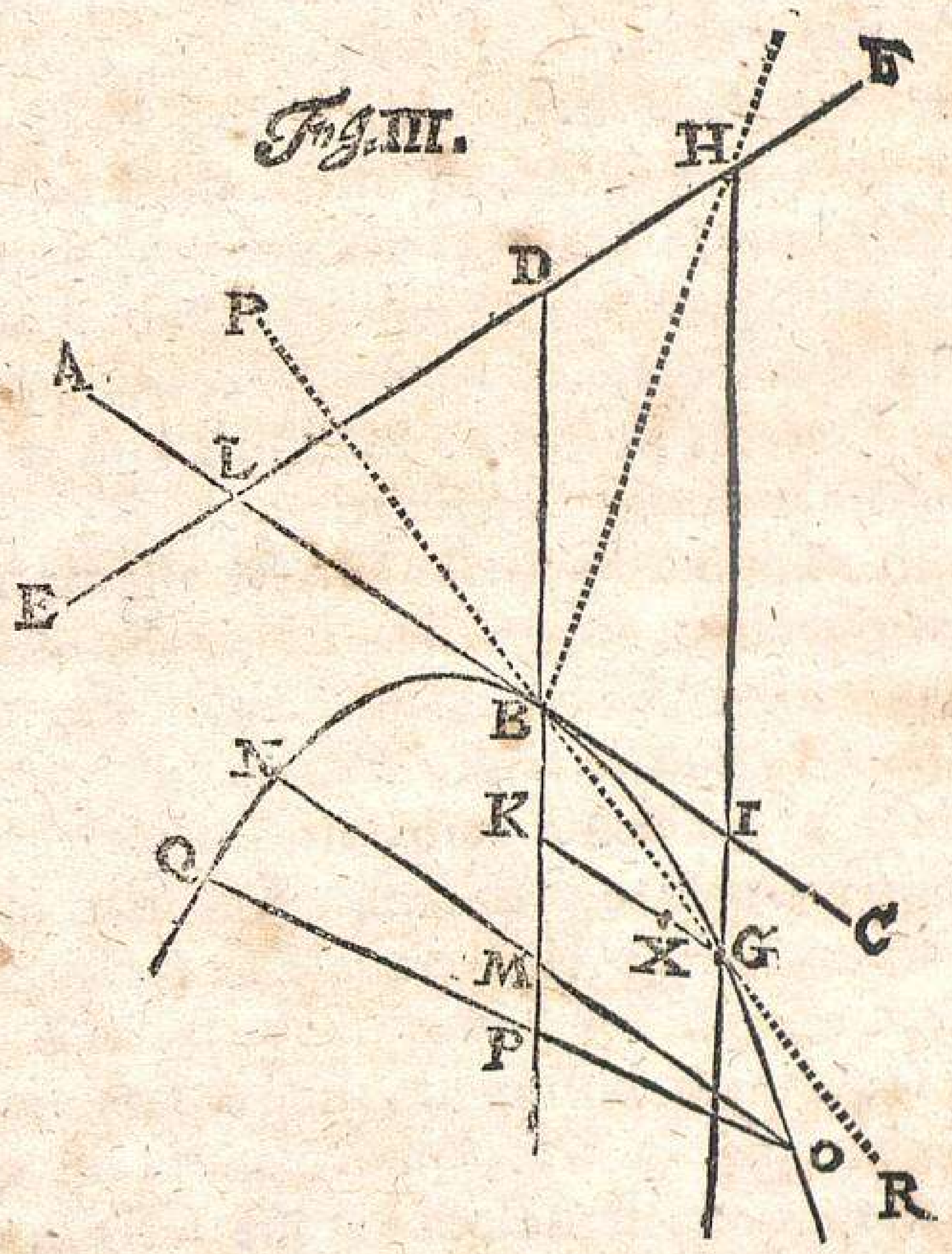


Fig. III.



terminum rectâ EDF in angulo EDB ipsi ABD æquali, *efficiente* AC, & *intervallo* BD, ad *directricem* EF curvam describere, ut NBG: eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per aſſumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi, diametrové parallela, erit quoque aſſumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet HAM, cujus axis diameterve AB, & latus rectum ad eandem pertinens AC; ſitque per punctum M, in curva utcunque aſſumptum, ducta recta MO, axi ſive diametro AB parallela: dico aſſumptum quoque punctum M verticem, dictamque MO diametrum eſſe; imò ſi, ductâ per M rectâ SV, ita ut ab axe ſive diametro AB extra Parabolam abſcindat portionem AI æqualem AB, quæ inter verticem A & applicatam MB intercipitur; productâque OM ad K, ita ut ſit MK ipſis AB vel AI & IM tertia proportionalis, *efficiente* SV *intervallo* verò MK Parabola deſcribatur: dico hanc cum expoſita Parabola HAM eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non ſolùm MO diametrum, atque M verticem fore, ſed & MK latus rectum eſſe ad dictam diametrum MO pertinens, & SV Parabolam in vertice M contingere, omneſque ipſi parallelas in Parabola ductas ab MO bifariam dividi, atque ad hanc ipſam MO ordinatim applicari.

Sit enim in expoſita Parabola HAM aſſumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; ſitque ab eodem ducta HG ad axem ſive diametrum AB ordinatim applicata, nec non HO ipſi SV æquidiſtans, quarum prior, ſi opùs fuerit producta, rectæ KO occurrat in E; poſterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem ſive diametrum AB ſecet in D. Et apparet [1], ſi quadratum rectæ HO æquale ſit rectangulo KMO, Parabolam, quæ *efficiente* SV, *intervallo* verò MK deſcribetur, per punctum quoque H tranſituram. Eſſe autem quadratum rectæ HO æquale rectangulo KMO multifariam id quidem, &, meo ſaltem judicio, breviter ſimpliciterque ſatis in eum qui ſequitur modum demonſtratur.

Quoniam eſt [2] ut CA ad MB, ita MB ad BA, erit, duplicatis

[1] ex 1 hujus

[2] per 1 hujus, & 17 ſexti.

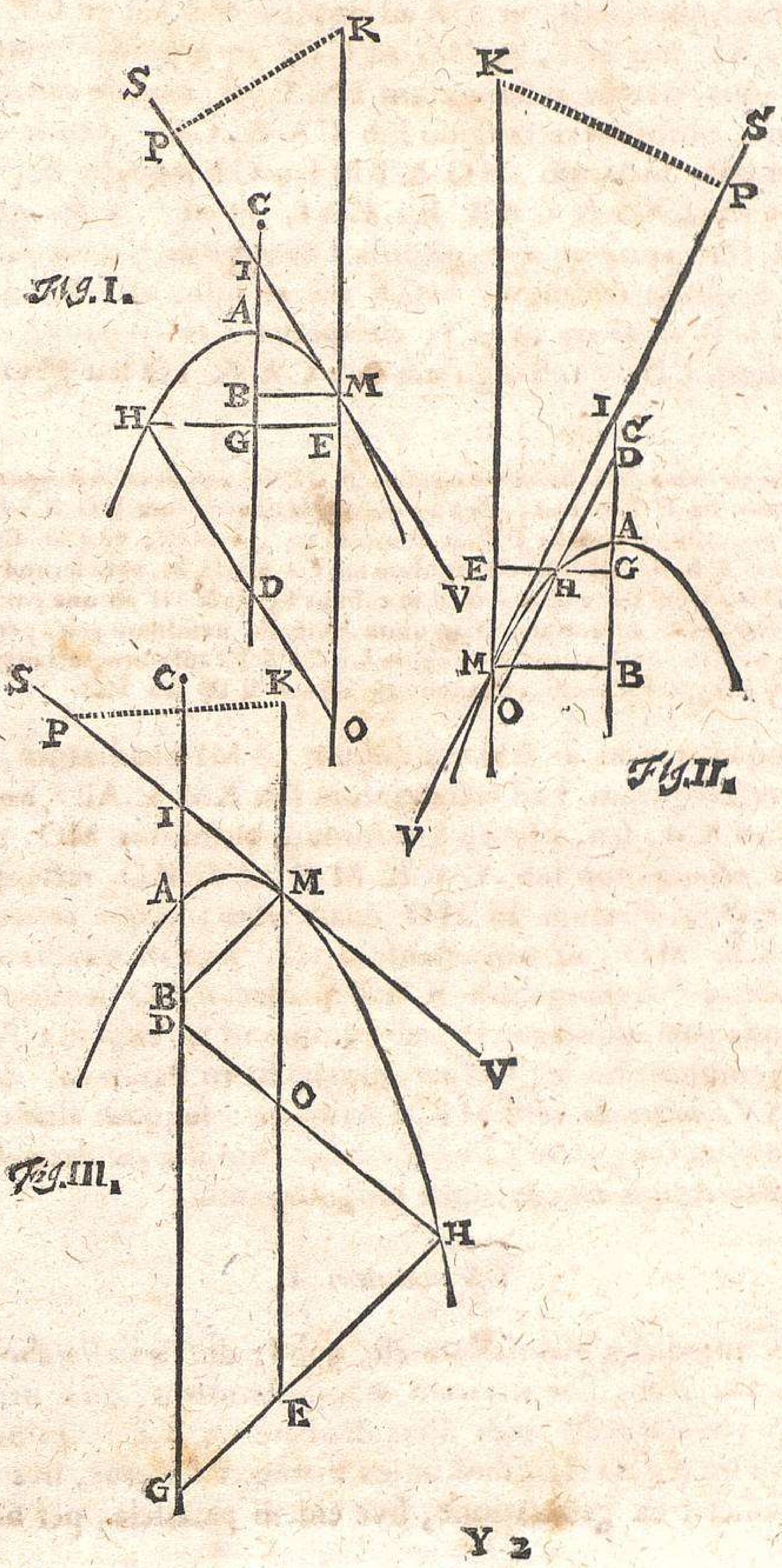


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

catis consequentibus, ut CA ad duplam MB seu ad GE bis, ita MB ad BI, hoc est[3], ita HG ad GD: ac proinde [4] contentum sub mediis, nempe rectangulum HGE bis, æquale contento sub extremis, nimirum rectangulo sub CA & GD. Unde cum bina quadrata rectarum HG & BM seu GE æqualia sint [5] binis rectangulis CAG & CAB seu CAI, id est [6], rectangulo sub CA & IG: erunt quoque, additis [a] demptisve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo HGE bis ab una, ac rectangulo sub CA & GD ab altera parte [7], composita [a] vel residua [b], nempe quadratum EH ac rectangulum sub CA & ID seu MO æqualia [c].

[3] *per 29 primi, & 4 sexti.* [4] *per 16 sexti.* [5] *per 1 hujus* [6] *per 1 secundi.* [a] in casu fig. I. & similibus. [b] in casu fig. II & III ac similibus.

7 *quippe per supra demonstrata rectangulum* HGE *bis æquale est rectangulo sub* CA *&* GD. c in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum HG & GE addatur rectangulum HGE bis, compositum fit EH quadratum, per 4 secundi; ac si ab altera parte ad rectangulum sub CA & IG addatur rectangulum sub CA & GD, fit, per 1 secundi, rectangulum sub CA & ID seu MO. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum HG & GE auferatur rectangulum HGE bis, residuum erit, per 7 secundi, EH quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub CA & IG auferatur rectangulum sub CA & GD, residuum erit, per 1 secundi, rectangulum sub CA & ID seu MO.

Ideoque cum sit ut BM quadratum ad MI quadratum, sive ut CAB rectangulum [8] ad rectangulum sub KM & AB [9], hoc est [10], ut CA ad KM, seu, assumptâ communi altitudine MO, ut prædictum rectangulum sub CA & MO ad KMO rectangulum, ita [11] EH quadratum ad HO quadratum; sitque rectangulum sub CA & MO, ut jam ostensum est, æquale quadrato EH: erit quoque [12] rectangulum KMO quadrato HO æquale.

Unde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola AH assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ *efficiente* SV, *intervallo* verò MK describitur: sequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

[8] *per 1 hujus, & ex hypothesi.* [9] *per 17 sexti, & ex hypothesi.* [10] *per 1 sexti.* [11] *per 4 & 22 sexti.* [12] *per 14 quinti.*

Corollarium I.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis quibuslibet rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium

quo-

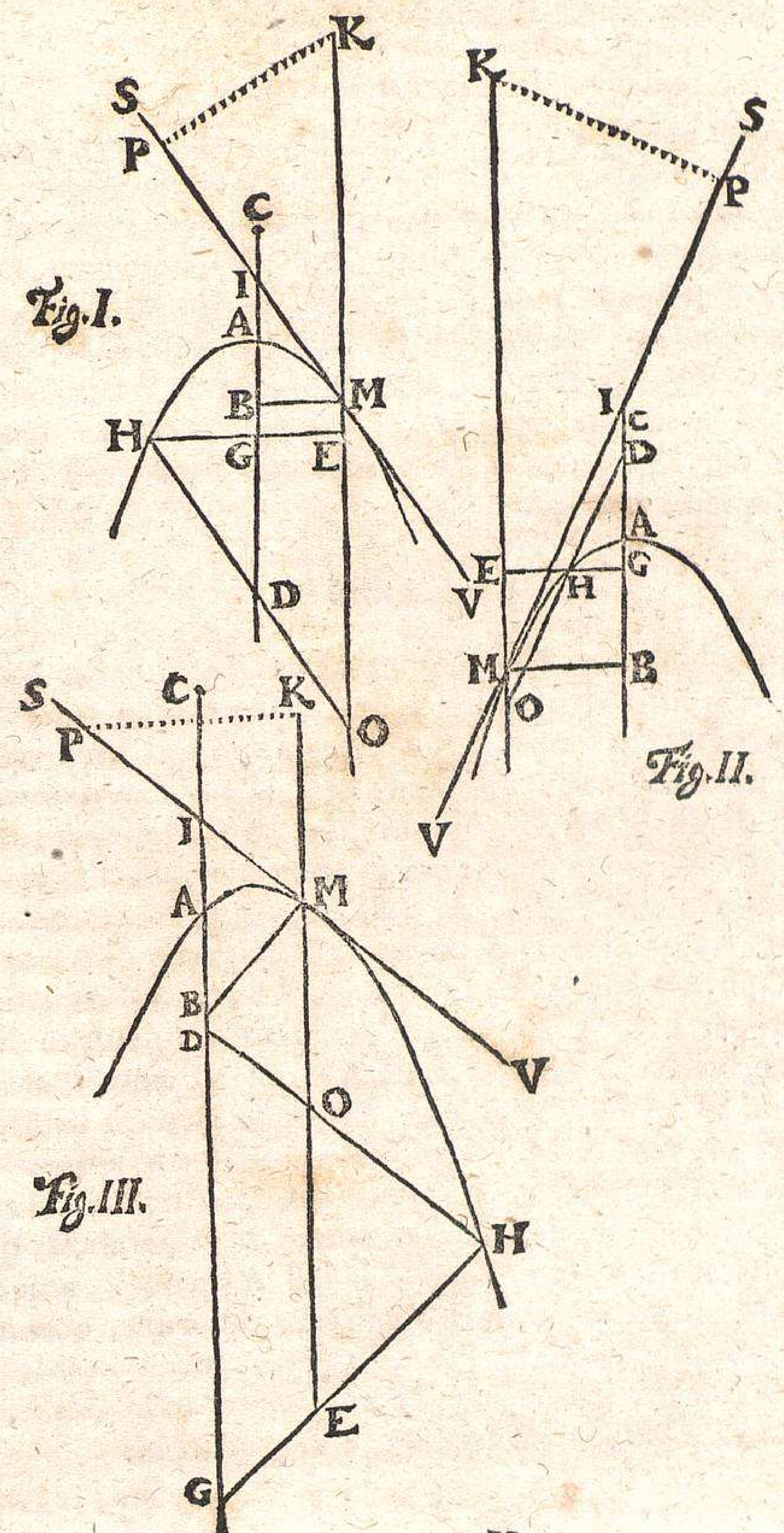


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuslibet Parabolæ diametrum simulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

[1] per conclusionem 6 Cor. 1 hujus.

Corollarium 2.

Patetque porrò, quaslibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abscindere; &, vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abscindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S.V, ex eo quòd æquales sint AI, AB, Parabolam in puncto M utcunque assumpto contingere, nunc [2] demonstratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere posse, superiùs [3] ostensum est.

[2] in 2 hujus.

[3] per 9 Cor. 1 hujus.

Corollarium 3.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, si in ejusdem diametri termino sit datum punctum, notum nunc est [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidistantem, Parabolam ibidem contingere. At si alibi in curva sit punctum datum, veluti M, sitque inventa diameter AD: oportet ductâ ex M rectâ MB ipsi AD applicatâ, sumptâque AI ipsi AB æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ AB ipsi AI æquali, atque BM ordinatim ad AD applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rursus rectam per I & M. At verò si neque in curva neque in diametro producta detur, ut, si inventa diameter sit MO, datumque punctum I: oportet, ductâ ID diametro MO parallelâ, quæ Parabolam secet in A, sumptâque AB ipsi AI æquali, atque ex B ductâ BM ordinatim ad AD applicatâ, nimirum, quæ æquidistans sit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M quippe constat ex antedictis [6], ipsam IM omni casu Parabolam contingere in puncto M.

[4] per 1 Corol. 2 hujus.

[5] per 8 & 9 Corol. 1 hujus.

[6] per 2 hujus, ejusque Cor. 2.

Co-

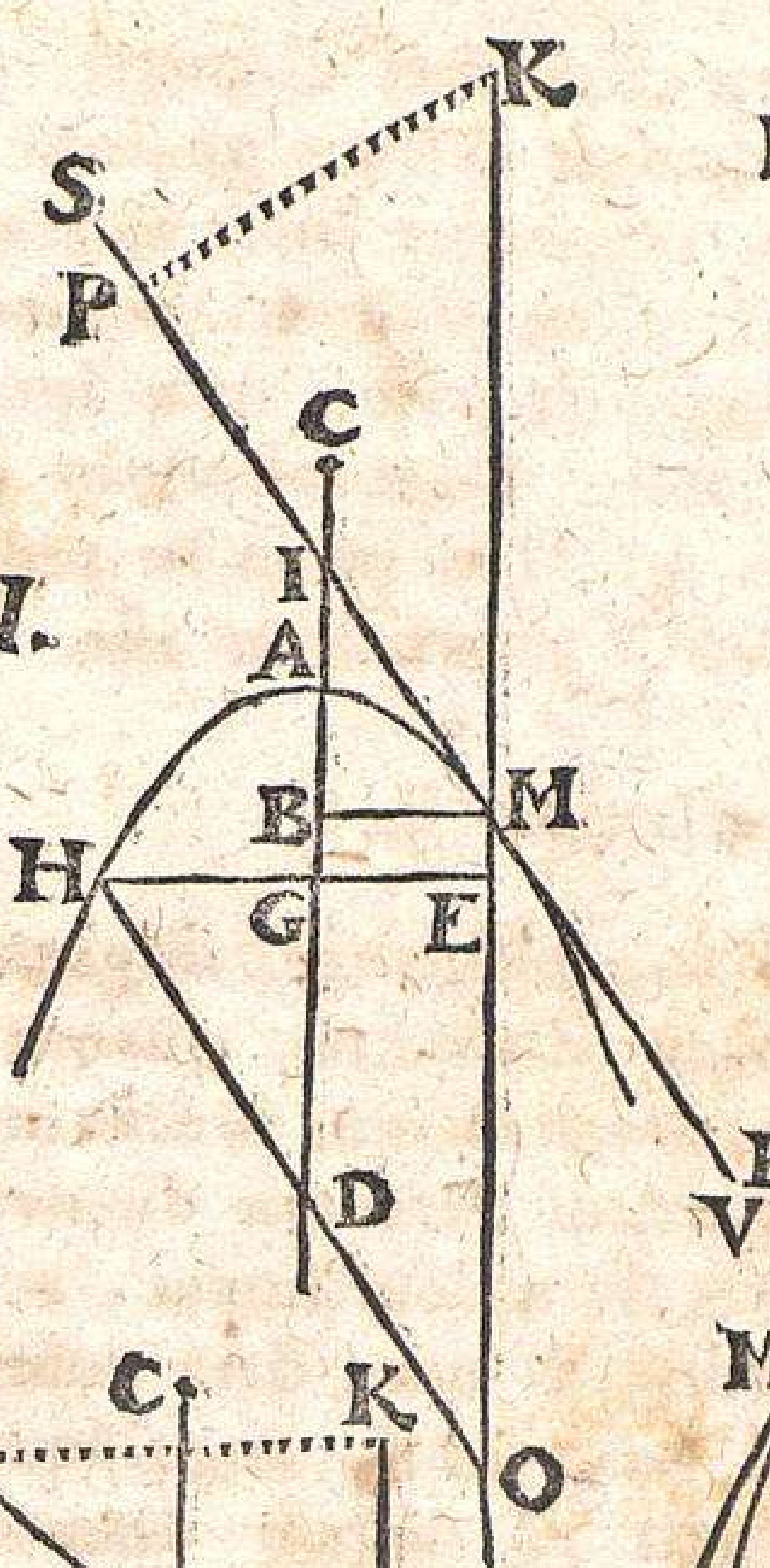


Fig. I.

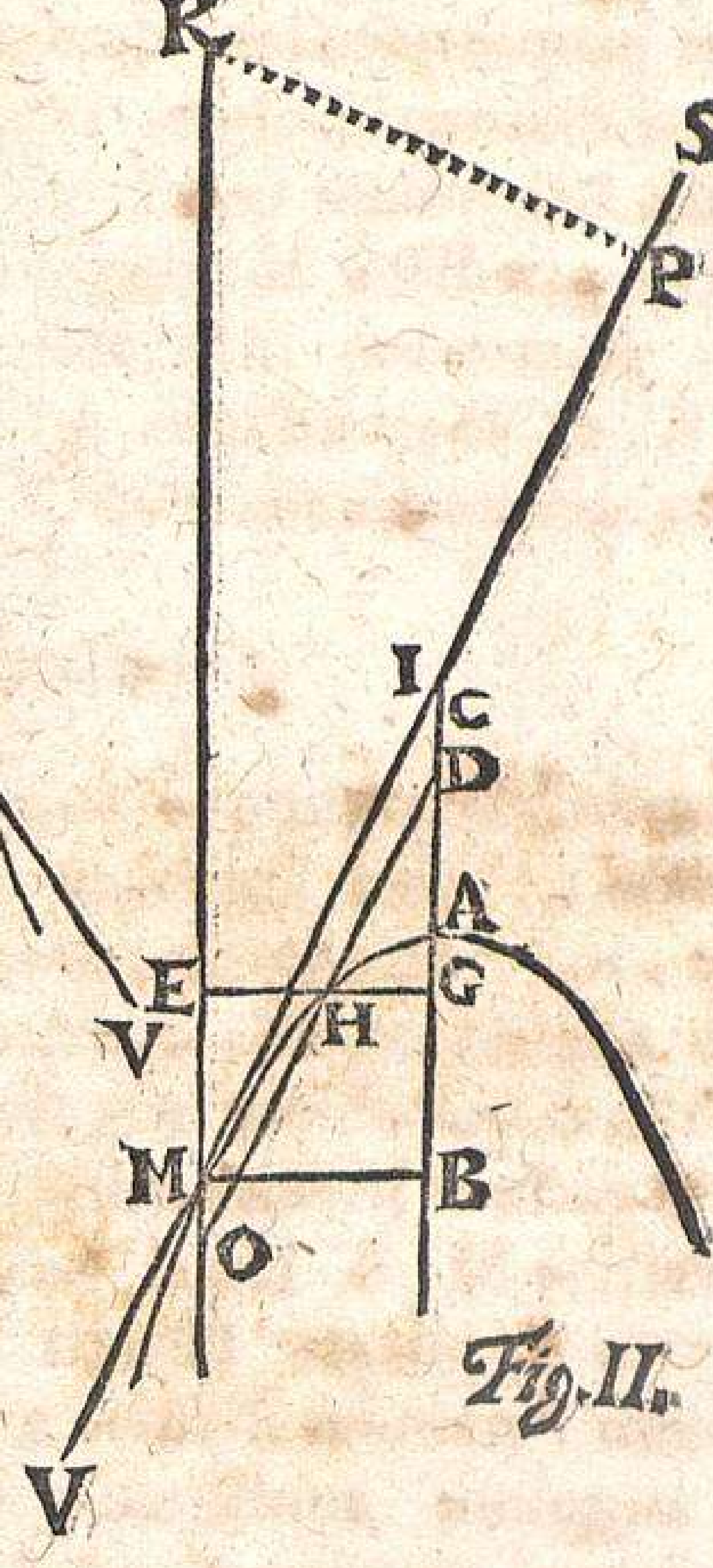


Fig. II.

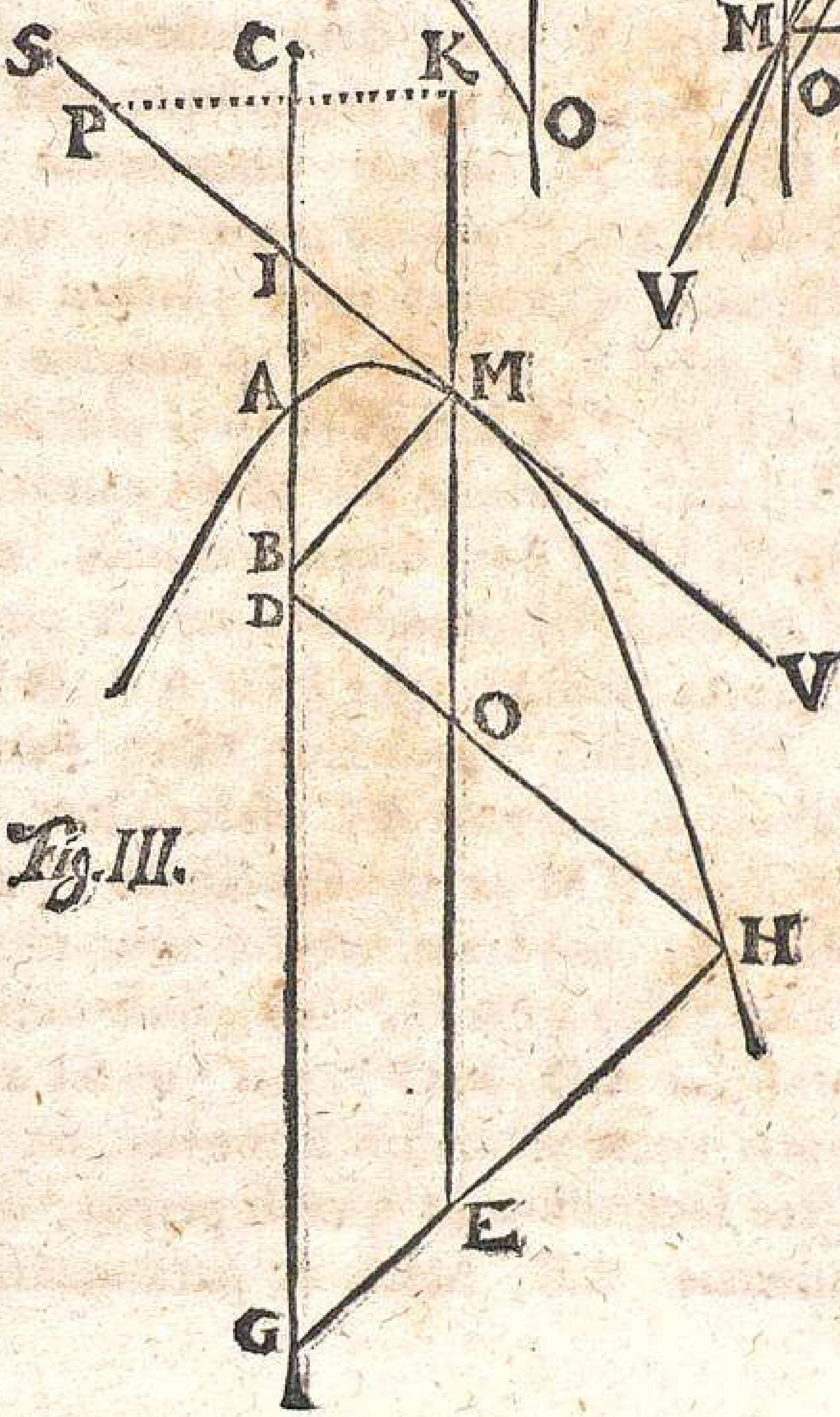


Fig. III.

Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est [1], rectam MK, ex eo quòd ipsis AI, IM tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri MO parametrum esse.

[1] in 2 hujus.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituant, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro MO, vertice M, & latere recto MK, anguloque SMK vel VMK, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum MO, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituant æqualem dato cuilibet angulo ABM: ducatur à termino K ad SV recta KP in angulo KPV ipsi dato ABM æquali, divisâque PM bifariam in I ducatur per I recta IB ipsi MO æquidistans. Deinde ab M ad eandem IB applicetur recta MB in angulo MBI dato angulo æquali, divisâque BI bifariam in A, erit quæsita diameter AB, vertex punctum A, ejusque parameter AC, recta nempe, quæ ipsis AB, BM tertia proportionalis existit. Est enim [2] punctum M in Parabola, quæ *efficiente* ipsi BM parallelâ ac *intervallo* AC describitur, quandoquidem quadratum applicatæ BM ex constructione [3] rectangulo CAB est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula BIM & PMK, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas AD, MO), erit [5] ut BI ad IM, ita PM ad MK. &, sumptis antecedentium dimidiis, ut AI ad IM, ita IM ad MK. Quare secundùm ea quæ superiùs [6] demonstrata sunt, Parabolæ diametris AB, MO, ac parametris AC, MK,

[2] per 1 hujus.
[3] per 17 sexti.
[4] per 29 primi.
[5] per 4 sexti.
[6] in 2 hujus.

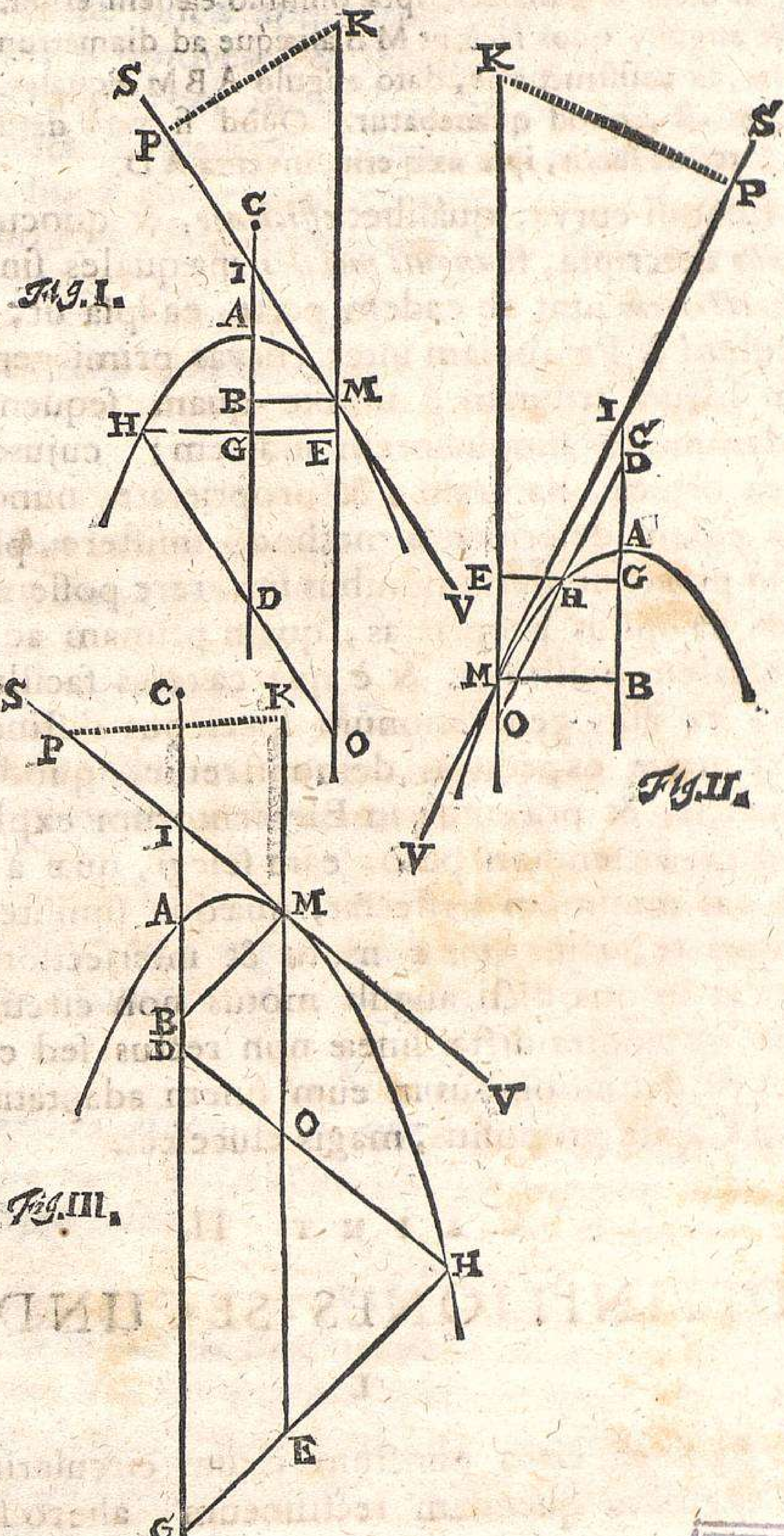


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiamsi curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorem judicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & intersectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

CAPUT II.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quod à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à describente secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *descr ibens eicienti* parallela est ac proinde nulla ipsarum intersectio existit, tam *eicientem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

VIII.

Intervallum autem hîc nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *describentem* interjacet, quàm eam *describentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Ut in apposita figura, si recta ABC [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque suo promovere & secum ducere angulum BEC [a]; ita ut crus EB semper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ KL, ac prædicta ABC mobilis semper transeat per idem punctum cruris EB, ex. gr., per B, simulque alterius cruris EC & dictæ lineæ ABC intersectione C describatur curva linea cC, sitque ducta AD cruri EC parallela; apparet, quò magis recta ABC ad ipsam AD accedit, eò minorem fieri angulum ECB. ac tandem cùm ipsa ABC pervenit ad AD, ita ut cum ipsa coïncidat, eundem angulum ECB tunc penitus evanescere: cum AD, ac proinde & dicta ABC, statione illâ, cruri EC parallela sit; ita ut tunc dictum crus EC sive recta CEM eadem sit cum linea GFH, nimirum suppositâ DF ipsi BE, æquali, eruntque

[a] quæ quidem recta ABC, ut & angulus BEC in figura quatuor distinctis stationibus exhibentur.

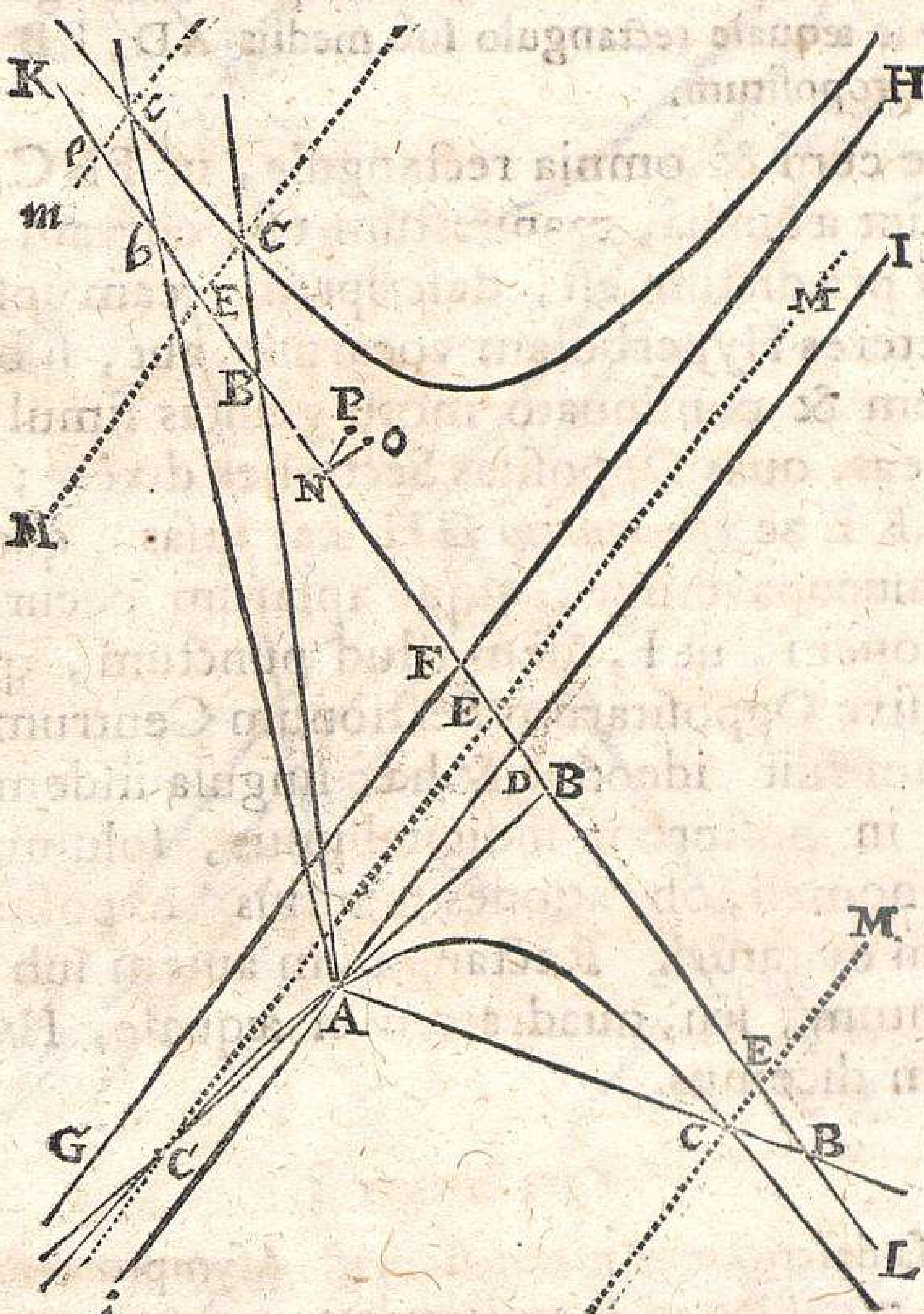
ABC *describens* in stationibus diversis.
KL *directrix*.
BEC, BEM, sive DFH & DFG *anguli mobiles*.
A *Polus*.
EB *crus patiens*.
EC *crus efficiens*.
MC *linea efficiens*.
GFH *efficiens in statione prima*, seu *efficiens* simpliciter.
ADI *describens in statione prima*, seu *describens* simpliciter.
EB seu FD & AD utrumque *intervallum*.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Quibuslibet *angulis mobilibus* ac quibuscunque *intervallis*, juxta definitiones præmissas descriptâ curvâ, hoc ipsi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum ſub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale ſit ei, quod ſub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* B E C, & quibuſcunque *intervallis* EB, ſeu FD & AD, *directrice* K D L, deſcripta curva *c* C; ita ut *efficiens* ſit G F H, ſitque à puncto C in curva utcunque aſſumpto ad *directricem* ducta C E *efficienti* G F H, ac proinde & *intervallo* A D parallela: dico rectangulum F E C æquale eſſe A D F rectangulo, ſive ei, quod ſub A D, E B continetur.

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum C, veluti in BEC, & ABC, quoniam æquales sunt rectæ EB, FD, additâ vel ablatâ utrinque FB vel ED: erunt quoque rectæ BD, FE æquales; cumque [1] propter parallelas EC, AD æquiangula sint triangula BDA, BEC: erit [2] ut BD, id est, FE, ad DA, ita BE ad EC: ideoque [3] rectangulum FEC sub extremis æquale rectangulo sub mediis AD, EB seu ADF. Quod erat propositum.

[1] per 29 primi. [2] per 4 sexti. [3] per 16 sexti.

Quare cum & omnia rectangula, ut FEC, inter se quoque sint æqualia, manifestum est, curvam, intersectione uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, si binas curvas eodem & continuato motu genitas simul consideres, esse eas, quas Oppositas Sectiones dixêre; *directricem* verò KL ac *efficientem* GH eas ipsas, quas Asymptotos nuncupaverunt, atque ipsarum occursum sive intersectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ sive Oppositarum Sectionum Centrum ab ipsis appellatum fuit. ideoque & hæc singula iisdem illis nominibus in posterum indigitabimus, solummodo sectionum nomen, ob rationes superiùs [4] expositas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem sub *intervallis* contentum, seu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

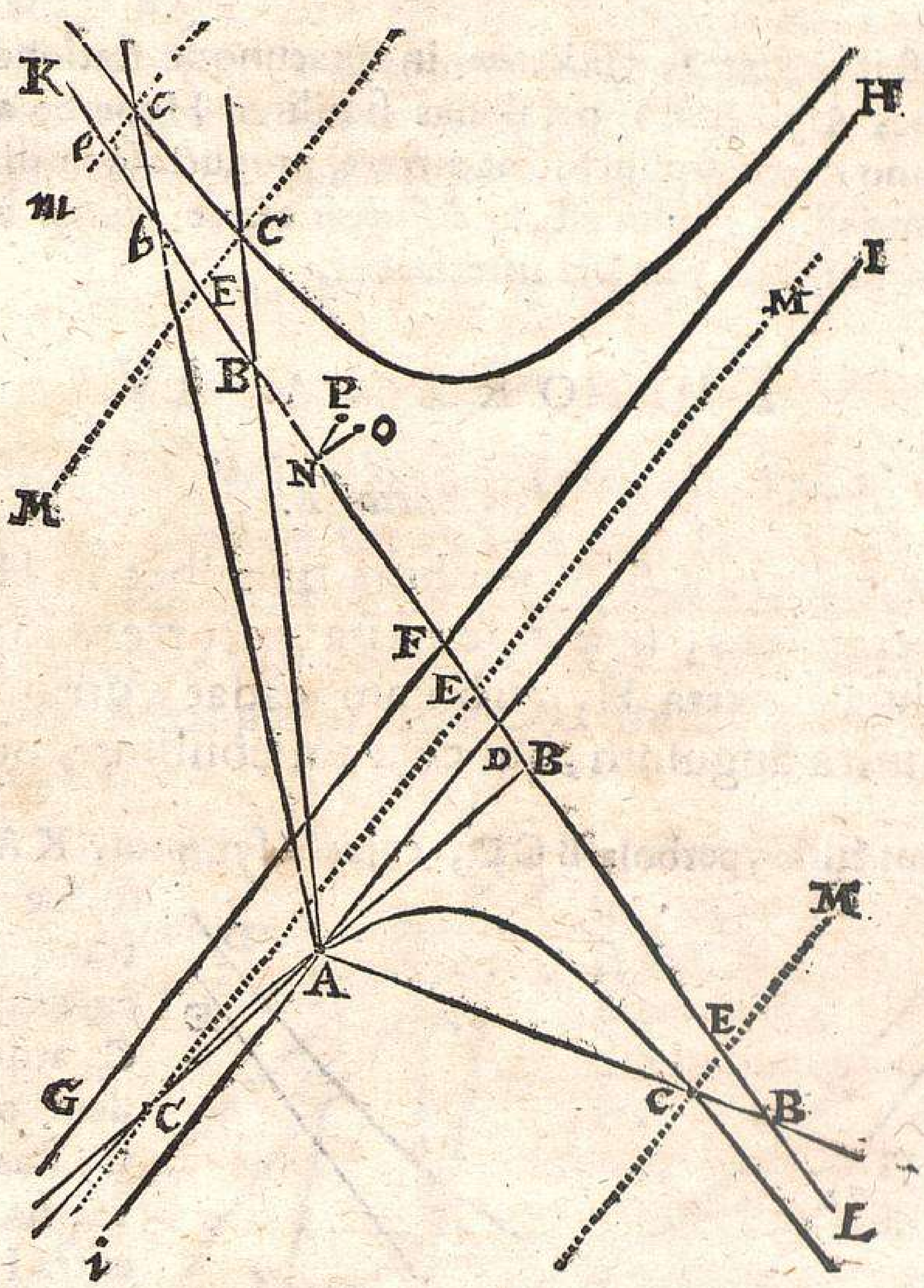
[4] in Epistola ad Schotenium.

Corollarium I.

Ex ipsa descriptione manifestum est, Asymptotos & Hyperbolam magis magisque ad se invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad distantiam, datâ quâlibet distantiâ minorem; cujus tamen, si demonstrationem exactiorem desideres, data distantia sit recta NO, ad Asymptoton FK perpendicularis. Sumptâ igitur NP, quæ eâdem NO minor sit, si fiat ut NP ad AD, ita DF ad F*e*, ac per *e* ducatur *ec* ipsi NP æqualis atque Asymptoto FH æquidistans: erit [5] rectangulum F*ec* Potentiæ ADF æqua-

[5] per 16 sexti.

æquale, ideoque juxta ea, quæ [6] demonstrata sunt, punctum C in Hyperbola. Est autem & ce ipsi PN æqualis, hoc est, datâ di- [6] in 3 hujus.



stantiâ NO minor. Quare & perpendicularis à puncto c ad Asymptoton FK ducta, id est, distantia Hyperbolæ à prædicta Asymptoto, ibidem datâ distantiâ NO multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita simul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem est ei, qui Hyperbolam continet, per centrum transeunt, vel Asymptotorum alterutram secant, Hyperbolæ tandem occurrere, productasque eandem, & in in uno tantùm puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

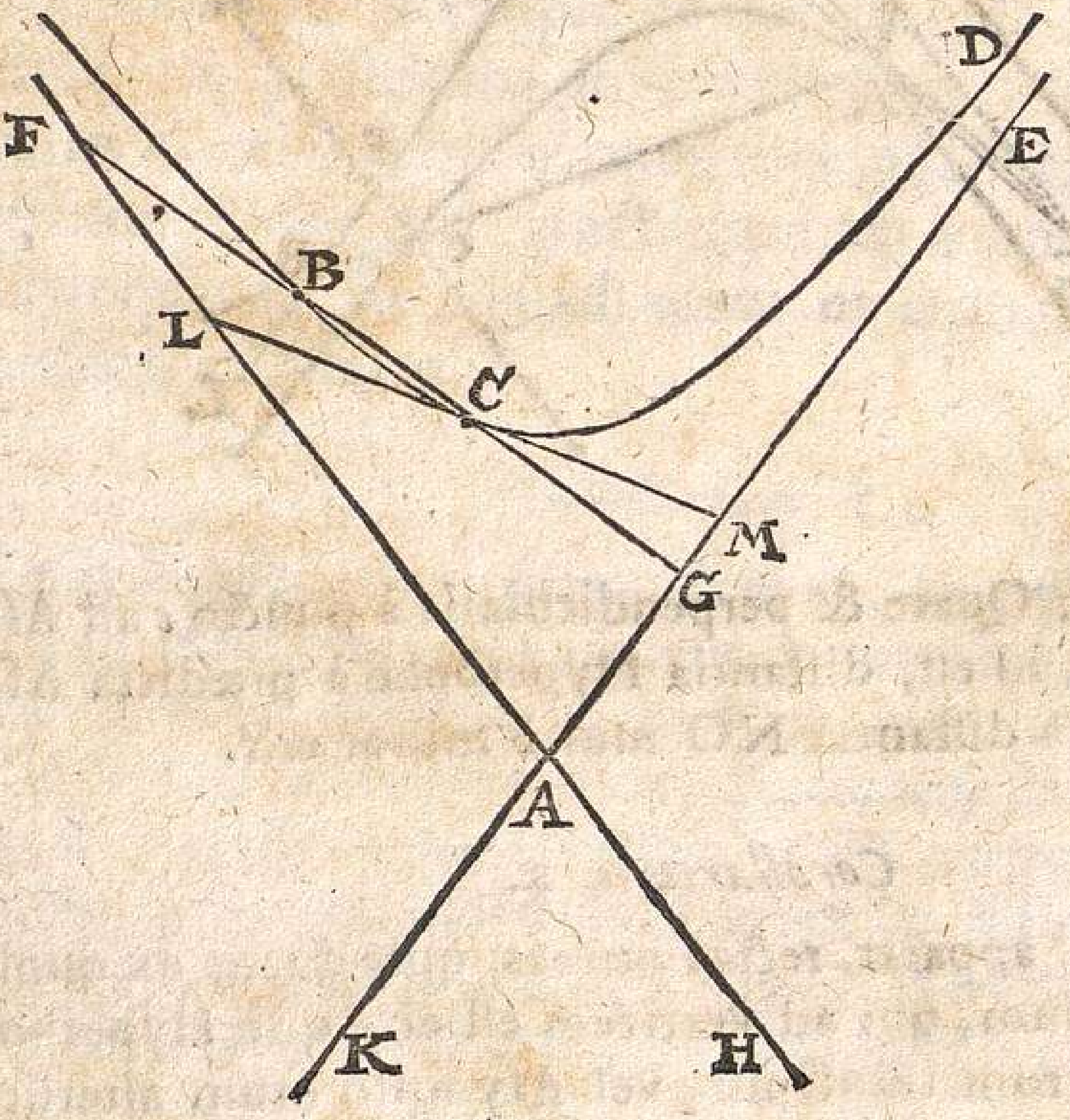
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis intersecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti K A E, H A F, ductæ F B C G, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque M C eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam F B C G quàm rectam M C L utrique Asymptoto K A E & H A F intra angulum E A F occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem F B C G vel M C L aut Asym-



Asymptotorum alterutri parallela esset, aut, si vel huic vel illi Asymptoto extra angulum EAF occurreret, ex puncto intra angulum KAH ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Asymptoton secaret; ideoque [1] curvæ in uno tantùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem secaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde constat propositum.

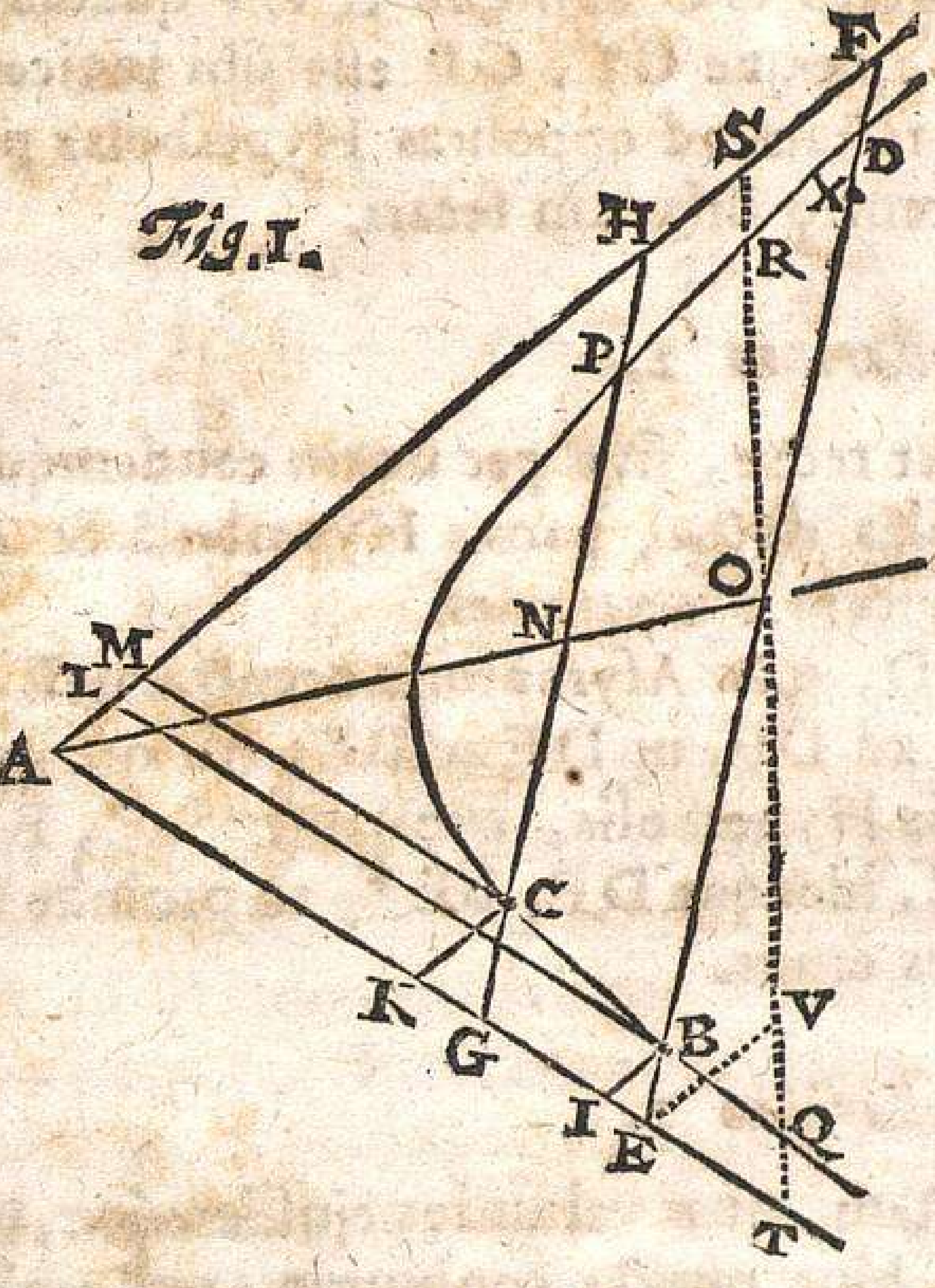
[1] *per 2 & 5 Cor. 3 hujus.*

THEOREMA V.

Propositio 5.

Assumptis, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductisque per eadem sive unâ rectâ sive duabus, sibi mutuò parallelis: erunt rectangula sub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Asymptoto utrinque interceptis, sibi invicem æqualia.

Fig. I.



Sint, vel in eadem, vel in oppositis Hyperbolis BPCD, cujus Asymptoti AE, AF, assumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ BD, CP sibi invicem parallelæ, Asymptotisque occurrentes in punctis E, F, G, H [a]: dico rectangulum EBF rectangulo GCH æquale esse.

[a] qui utique occursus in casu primę figuræ fit intra angulum EAF, per 4. hujus.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Asymptoto parallelis alterâque Asymptoto terminatis, BI, BL, CK, CM: erit [1], propter rectangula IBL & KCM [2] æqualia, ut IB ad KC, hoc est [3], ut EB

[1] *per 16 sexti.*
[2] *per 3 hujus.*
[3] *per 29 primi, & 4 sexti.*

4 per 16 sexti.

ad GC, ita CM ad BL, id est, ita CH ad BF. ac proinde [4] rectangula EBF & GCH æqualia sunt. Quod demonstrandum erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur BC, quæ utrique Asymptoto occurrat in punctis E & F [a], rectangula EBF, FDE sibi invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum transeat, ut CP in tertia figura, eâdem demonstratione comprobatum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqualia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti CGP in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidistans ducatur BD, quæ secet Asymptotos in E & F, rectangulum EBF vel FDE quadrato GC itemque & GP quadrato æquale esse: sequitur, ipsas quoque GC, GP esse sibi invicem æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

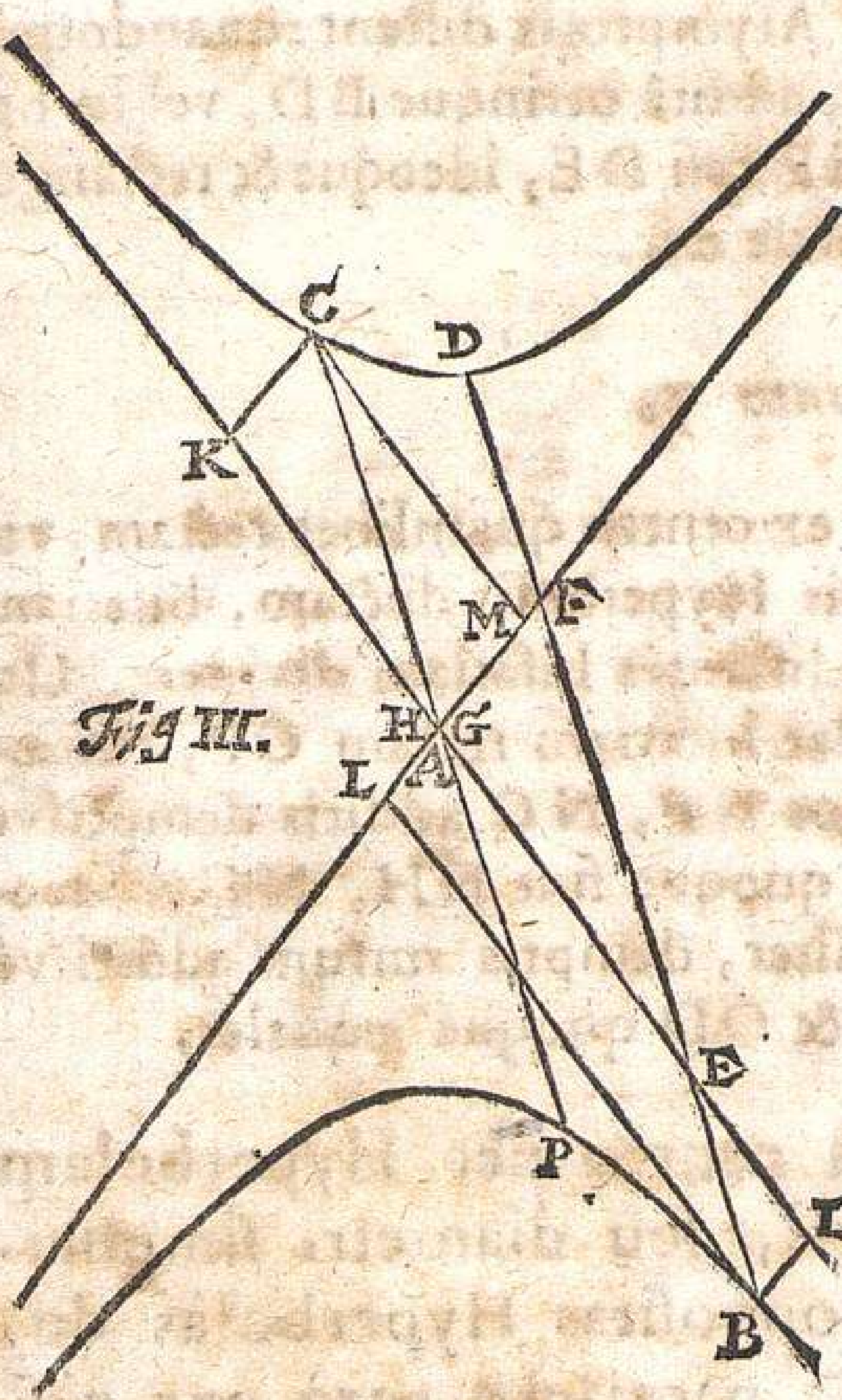
Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque, sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asymptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

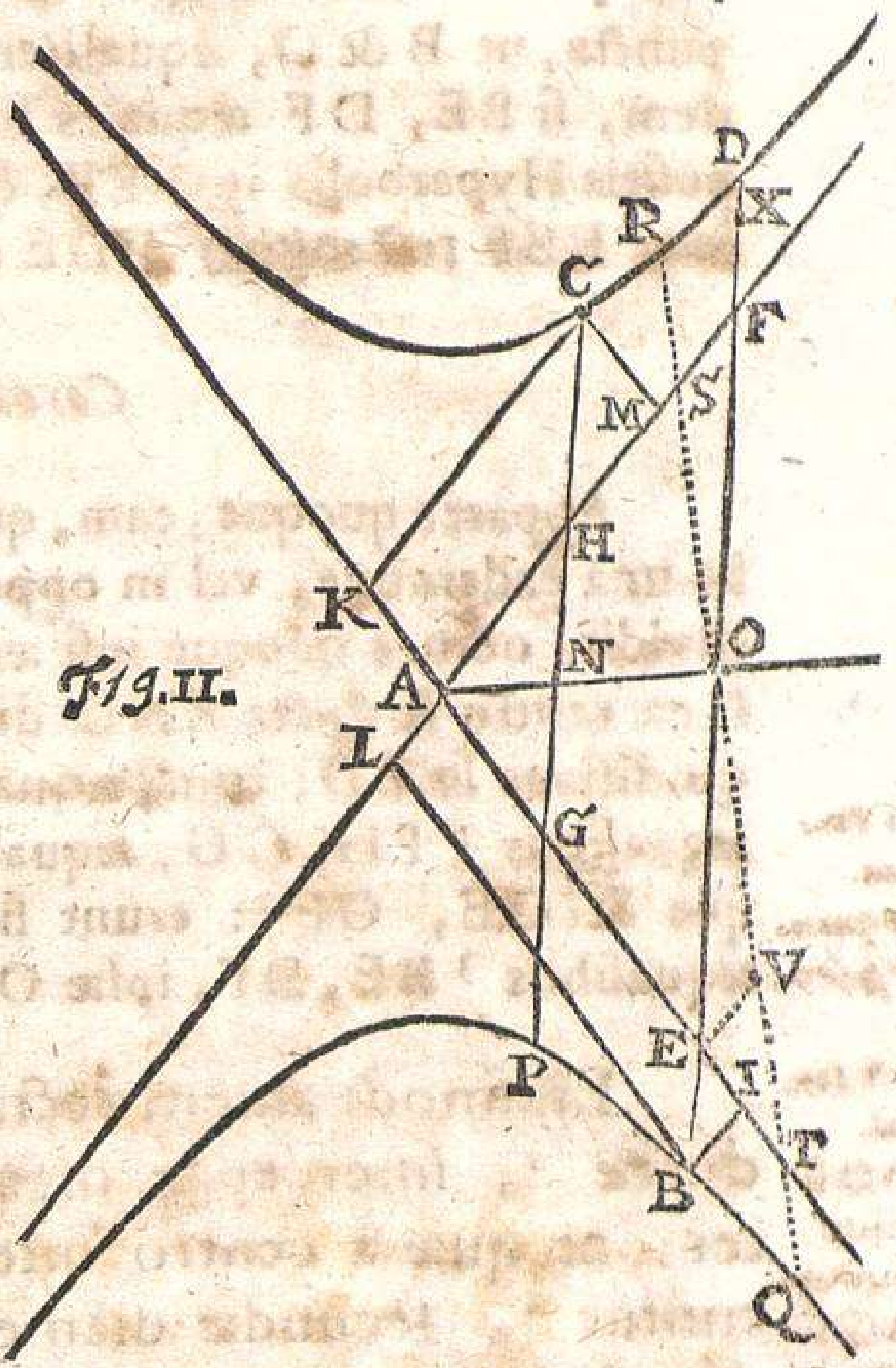
Ductâ enim utcunque BD, quæ Asymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] BF sit ad DF, ut DE ad BE: erit quoque dividendo [6], vel, in oppositis Hyperbolis, componendo [7], BD ad DF, ut eadem BD ad BE, ideoque DF, BE [8], ac proinde & BF, DE sibi invicem æquales erunt.

5 per 5 hujus, & 16 sexti.
6 per 17 Quinti.
7 per 18 Quinti.
8 per 9 Quinti.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio sui





ſui puncto in Hyperbola eſſe. Si enim præter D & B aliud quoddam ipſius DB punctum, ex. gr. X, in Hyperbola foret, eſſet [1] XF ipſi BE ac proinde & ipſi DF æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum. [1] *per Coroll. præced.*

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & converſum quoque propoſitionis verum eſſe: nempe, ſi, iiſdem poſitis, & rectangulis EBF, GCH æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola ſit, & alterum quoque fore in eadem vel oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt AE & AF. Ex eo enim quòd æqualia ſint rectangula EBF & GCH demonſtrabitur æqualia quoque eſſe rectangula AIB & AKC eâdem methodo, quâ converſum ſupra oſtenſum fuit. ideoque ſi punctum B ſit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt AE, AF, & vice versâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum eſto; imò & idem erit in eadem linea, ſi dicta [2] *per 3 hujus.*

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si BE, DF æquales sunt, additâ utrinque BD, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ EF, & BF ipsi DE, ideoque & rectangulum EBF rectangulo FDE æquale erit.

Corollarium 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta ANO dividat bifariam rectam CP, cui æquidistans sit BD; cum, æqualibus NP, NC additis demptisvé æqualibus [1] PH, CG, æquales quoque sint NH, NG, ideoque & OE, OF [2]: erunt similiter, demptis rursum additisvé æqualibus [3] BE, DF, ipsæ OB & OD quoque æquales.

[1] per 2 Cor. 5 hujus.
[2] per 9 quinti, & 4 sexti.
[3] per 2 Cor. 5 hujus.

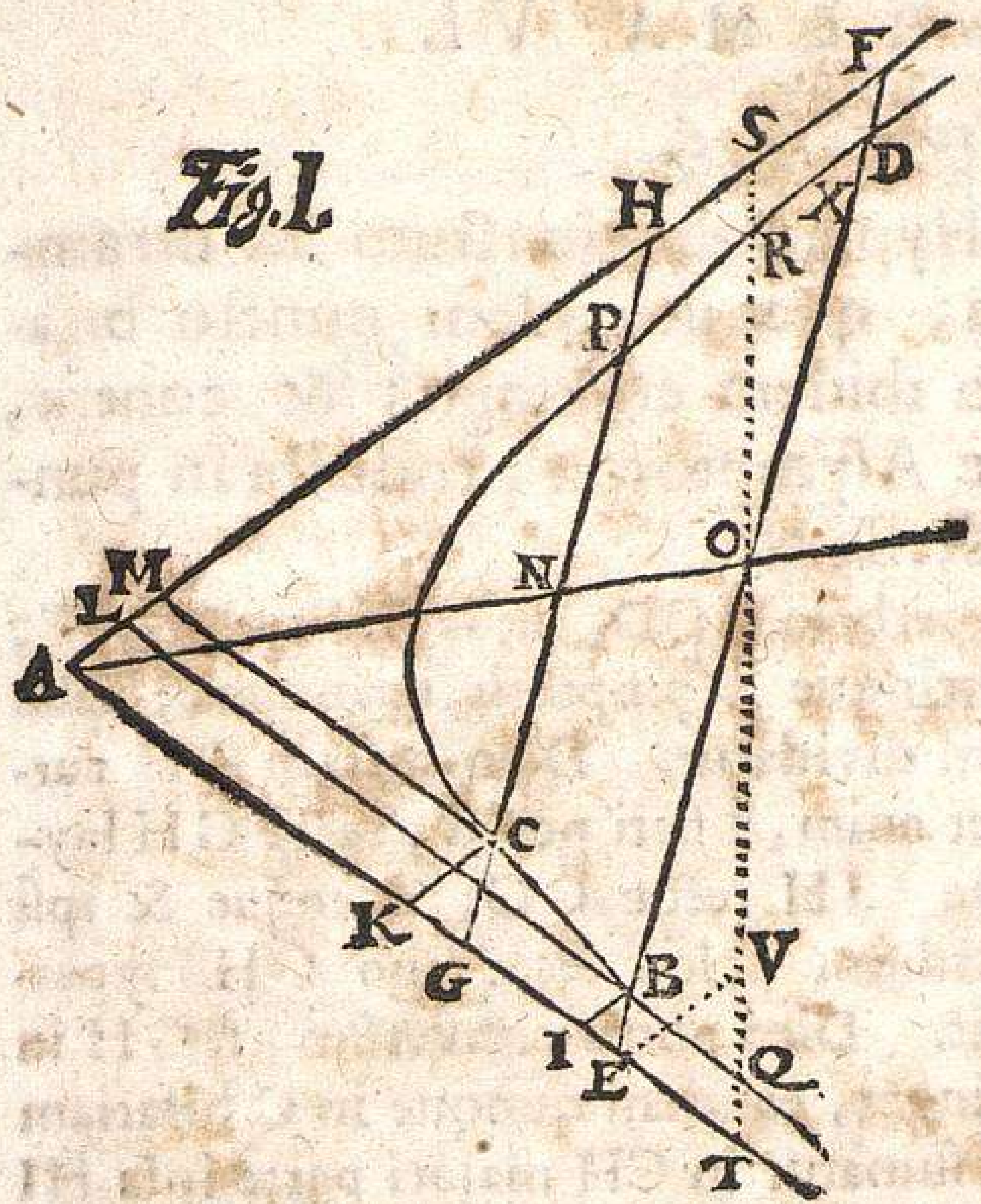
Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [a], interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à centro inter oppositas Hyperbolas ducuntur [b], secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ [c], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

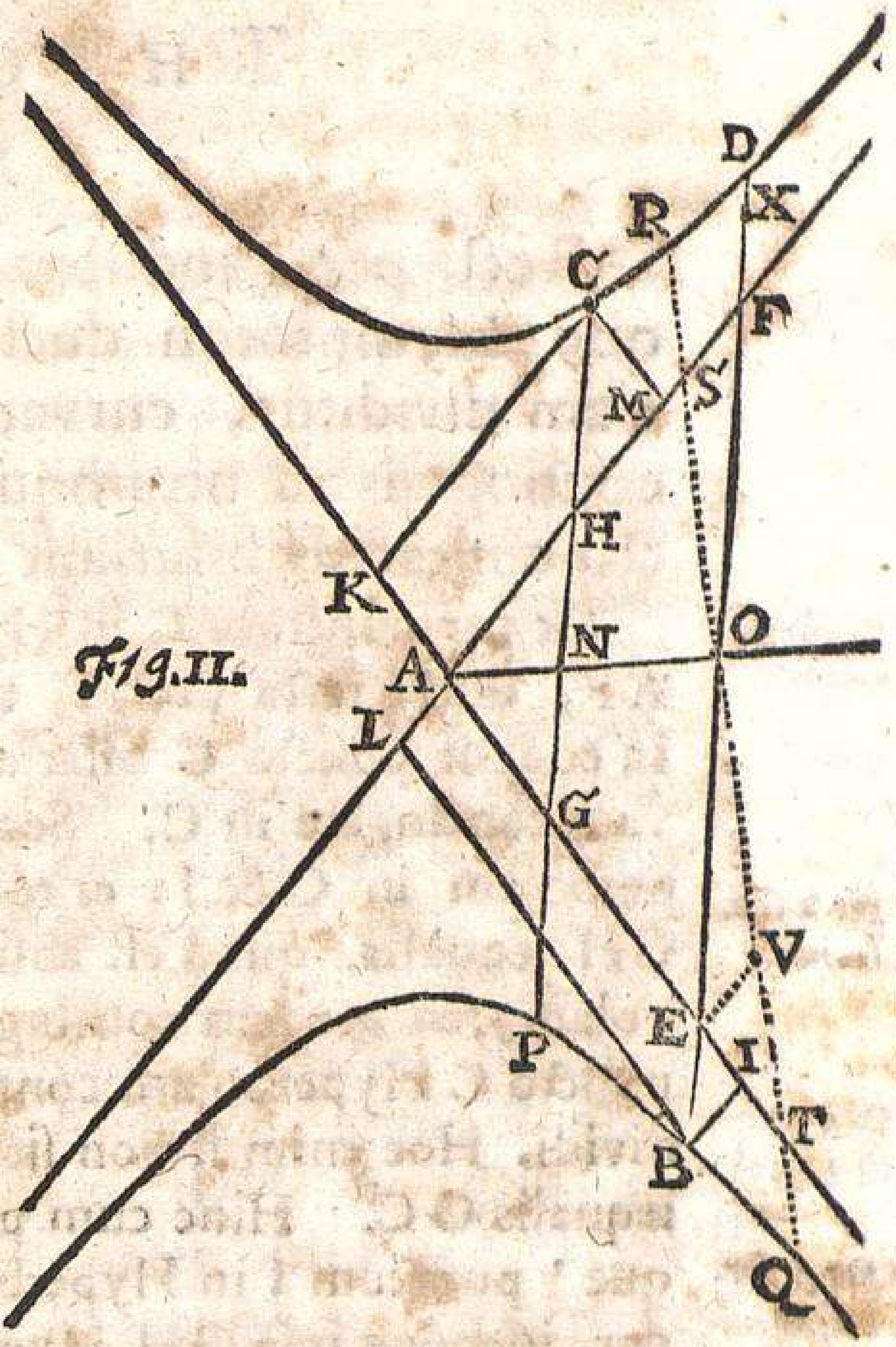
[a] ut AO similesque in I figura.
[b] ut AO similesq; in II figura.
[c] ut PC, DB in utraque figura.

Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro AO bifariam præter applicatas alia recta, ut QR, Asymptotis occurrens in S & T; & sit per O ordinatim applicata BOD, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam EO, FO [4], quàm TO, SO [5]. Quoniam verò, ductâ EV ipsi SF parallelâ [6], æqui-

[4] per 2, & 5 Cor. 5. hujus.
[5] ex hypoth. juncto Cor. 5 hujus.
[6] per 15 & 29 Primi.





æquiangula ſunt triangula EOV & FOS: erit [1] ut EO ad OV, ita FO ad OS. Quare cum EO ipſi FO ſit æqualis, erit & [2] OV ipſi OS, hoc eſt, rectæ OT æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo bifariam ſecatur recta RQ à diametro AO.

[1] per 4 ſexti.
[2] per 14 quinti.

Corollarium 7.

Atque hinc manifeſtum fit, quòd, ſi vel in una eademque vel ad oppoſitas Hyperbolas binæ quælibet rectæ ſibi invicem æquidiſtantes ductæ ſint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum tranſeat ſeu diameter ſit: Quippe quæ per medium unius æquidiſtantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppoſitarum Hyperbolarum diametros quotlibet, ſimulque ordinatim applicatas ad eaſdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumvé diametrorum communis interſectio eſt, reperire liceat.

[3] per 5 Corol. 5 hujus.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

Sit per punctum C in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta recta GCH, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam GH curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta GH Hyperbolam in C & I: eritque [1] IH rectæ CG, ideoque & ipsi CH æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo GH Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porrò conversim, si GH in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in CH majori parte ipsa HI æqualis GC. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque CI [3] intra curvam cadet, ideoque ipsa GH Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo GC ipsi CH inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

1 per 2 Cor. 5 hujus.

2 per 4 Cor. 5 hujus

3 per 3 Cor. 5 hujus.

Corollarium 1.

Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti GCH æquidistans utcunque ducta sit BD, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum EBF sive [4] BFD, ut & FDE sive DEB æquale rectangulo GCH [5], id est, ipsius CH vel CG, dimidiæ tangentis quadrato.

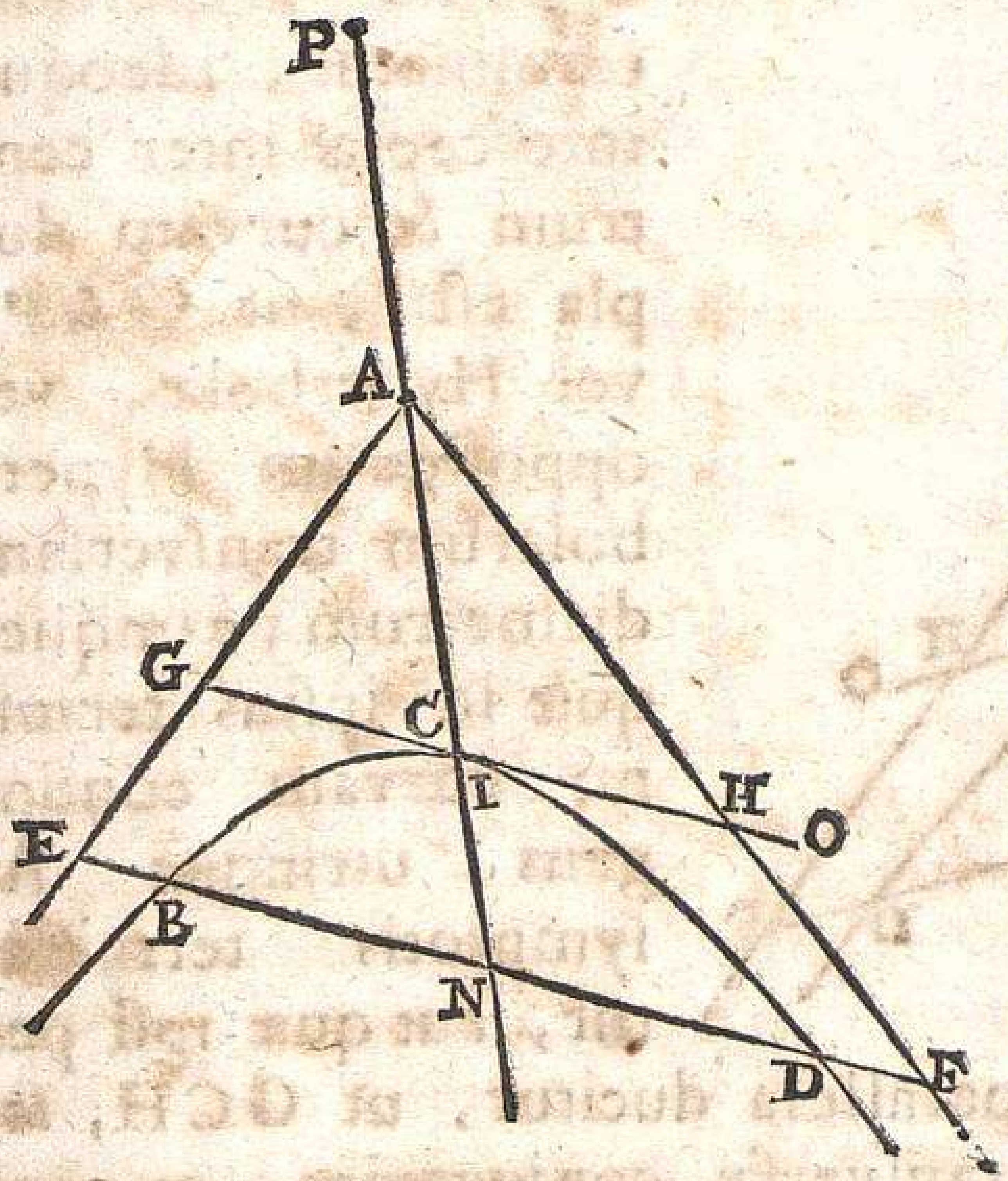
4 per 2 Cor. 5 huus.

5 per 5 huius.

Co-

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad diametrum AN ordinatim applicata sit BND, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta GCH, ipsi BND æquidistans, cum æquales sint NF & NE [1]: erunt [2] quoque CH & CG æquales, ideoque [3] GCH Hyperbolam continget in C.



[1] *per 2 & 5 Corol. 5 hujus.*
[2] *per 9 quinti, & 4 sexti.*
[3] *per 6 hujus.*

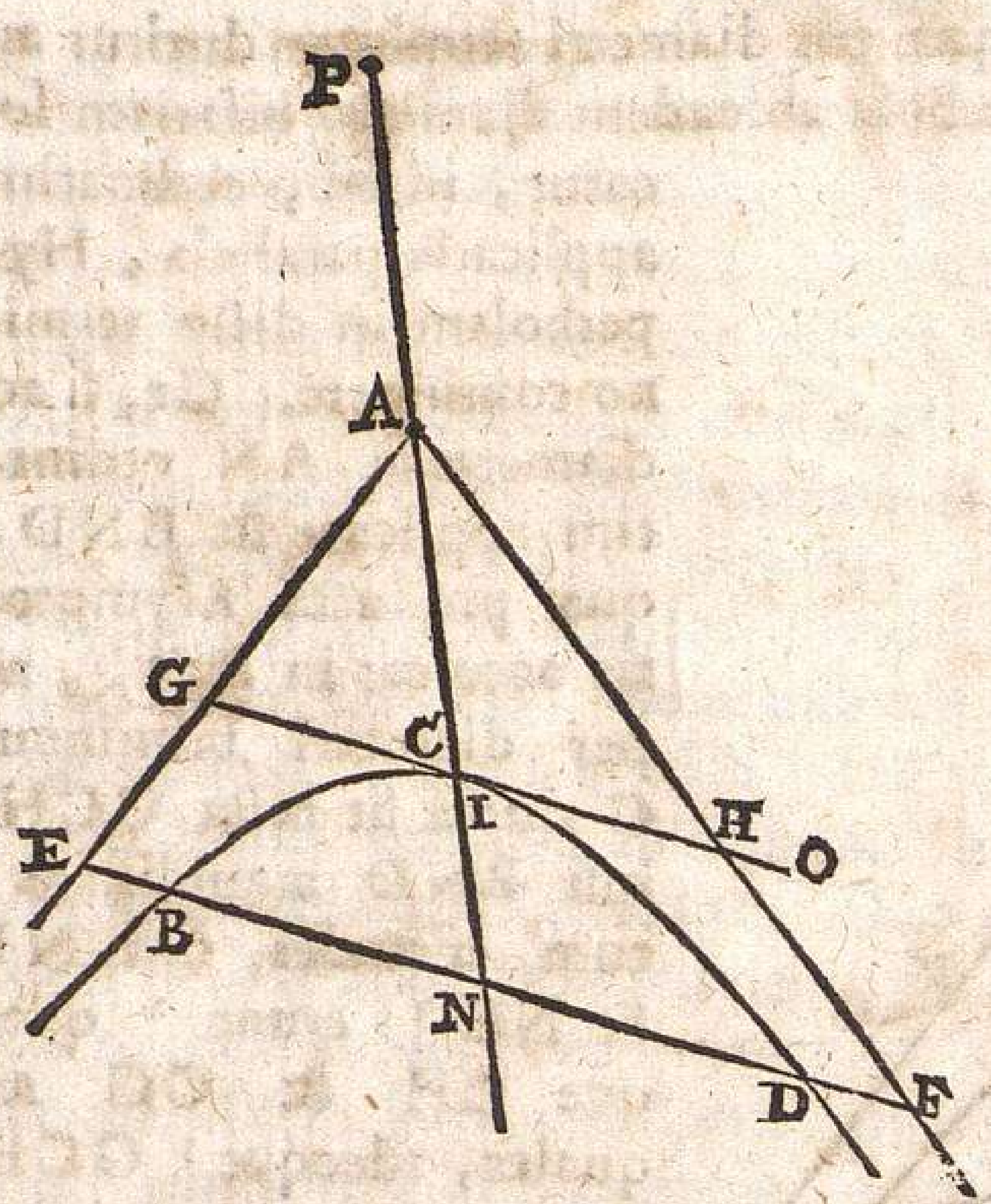
Corollarium 3.

Hinc liquet, non solùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti GH parallela sit BD, Asymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro ACN, quæ ductæ BD occurrat in N: quoniam [4] GC, CH æquales sunt, nec non EN, NF [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] EB, DF,) BN, ND æquales, ideoque & ad dictam diametrum ACN ordinatim applicatæ. At verò non posse aliam rectam præter GH Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7], quod fieri non posse superiùs [8] ostensum est.

[4] *per 6 hujus.*
[5] *per 9 quinti & 4 sexti.*
[6] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[7] *per supra demonstrata.*
[8] *in Cor. 6 5 hujus.*

Cæ-

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque



in Hyperbola puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est [1], ut CAP, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut GCH, secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis PC, GH, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut CO, rectum latus sive Parametrum dici.

[1] per Corol. 1. 5 hujus.

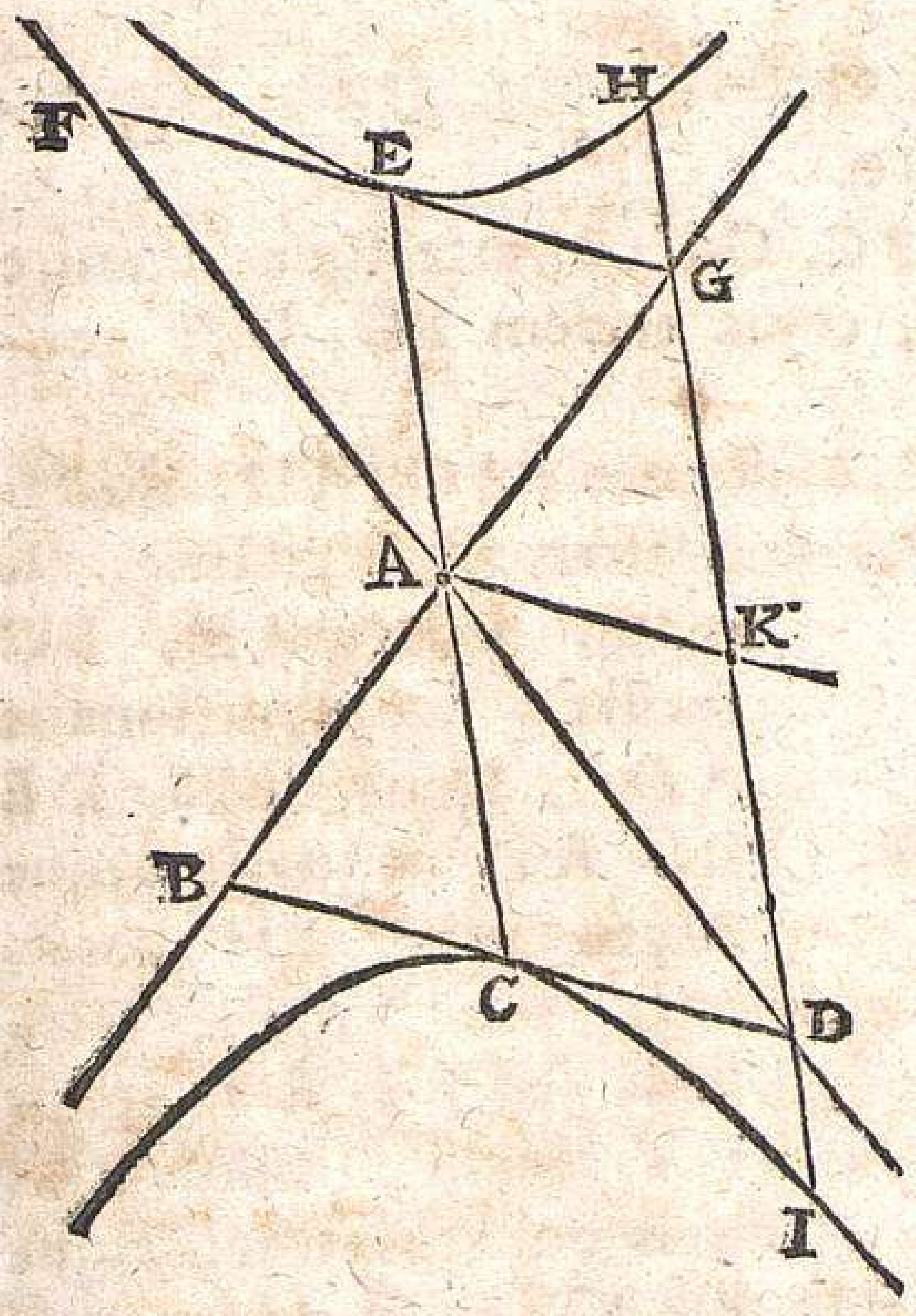
THEOREMA VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum IC, HE, quarum Asymptoti BG, DF, diameter transversa utcunque assumpta CE, perque ejus terminum E ducta recta FEG parallela ipsi BD, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Asymptotis occurrat in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque FEG oppositam Hyperbolam contingere in E; & si per centrum A ducatur secunda diameter AK, diametro CE conjugata, ordinatim ad eandem AK applicatas ipsi CE diametro æquidistare.



Quoniam enim est [1] tam AE ad EG, ut AC ad CB, quàm AE ad EF, ut AC ad CD; & sunt tam AE, AC [2] quàm CB, CD [3] æquales, erit quoque [4] tam EG ipsi CB, quàm EF ipsi CD, ac proinde & EG ipsi EF æqualis. Unde [5] recta FG oppositam Hyperbolam HE continget in puncto E. Quod primo loco propositum fuit. Porrò si per G & D ducatur recta GD, secans secundam diametrum AK in K, oppositisque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ sint EG, CD, erunt & [6] quæ ipsas conjungunt GD, CE parallelæ & æquales. Ideoque cum secunda diameter AK contingentibus BD, FG, id est [7], ordinatim ad diametrum CE applicatis æquidistans sit, utpote ex Hypothesi ipsi CE conjugata: erunt quoque [8] rectæ GK, EA, ut & KD, AC, ideoque & [9] GK, KD æquales. Quibus si addantur æquales [10] GH, DI: erunt similiter rectæ KH, KI sibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad secundam diametrum AK applicata sit recta HI, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem HI ac proinde & diametro CE æquidistabunt. Quod secundo loco propositum erat.

[1] *per 29 primi, & 4 sexti.*
[2] *per 1 Corol. 5 hujus.*
[3] *per 6 hujus.*
[4] *per 14 quinti.*
[5] *per 6 hujus.*
[6] *per 33 primi.*
[7] *per 3 Cor. 6 hujus.*
[8] *per 34 primi.*
[9] *per 1 Cor. 5 hujus.*
[10] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[11] *per 6 Cor. 5 hujus.*
[12] *per 5 & 6 Cor. 5 hujus.*

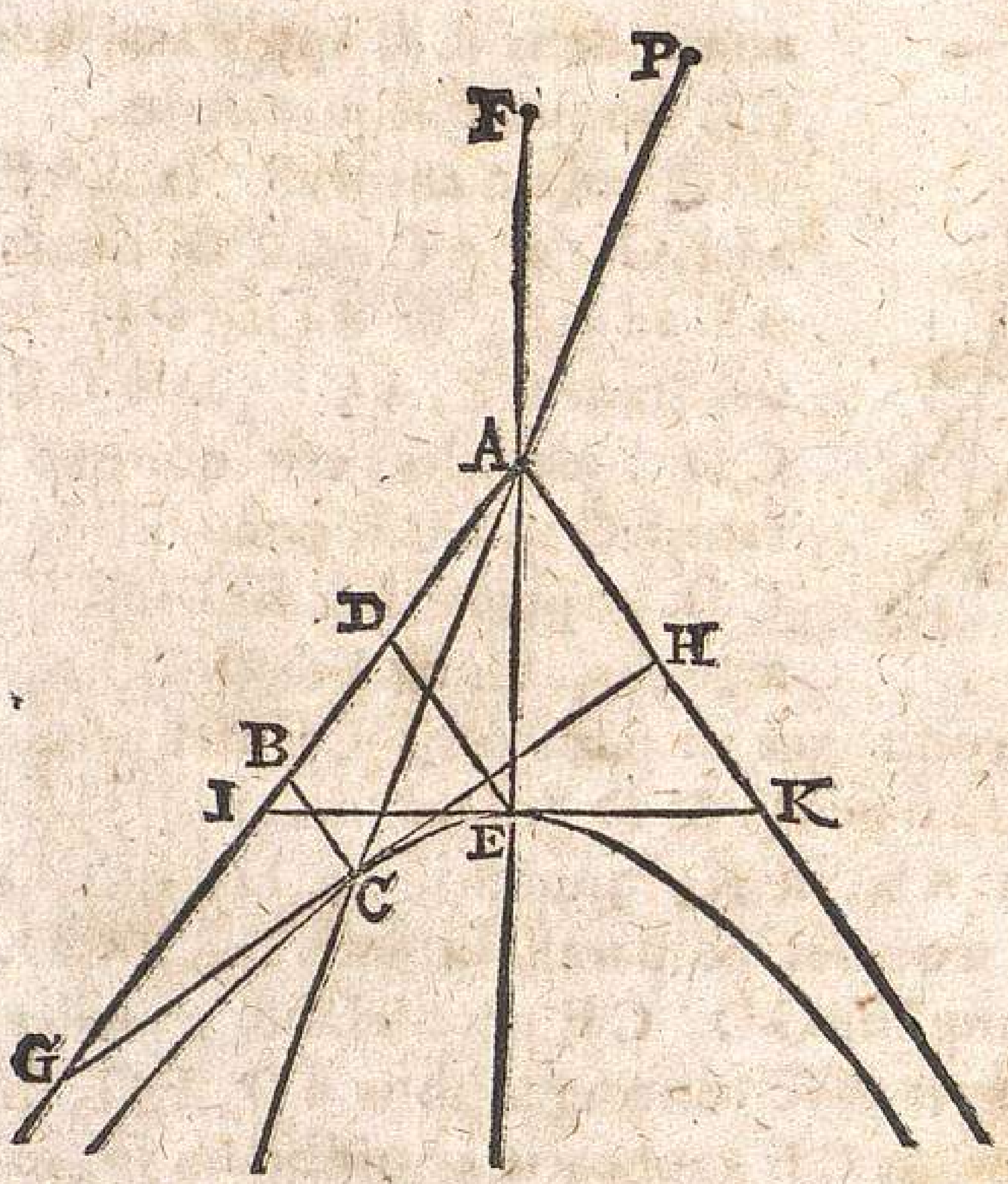
PROBLEMA I.

Propositio 8.

Datis quibuscunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ PC, GH, oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem PC, GH conjugatæ diametri existunt.

Ductis ab A centro per G & H Asymptotis AG, AH, ductâque à C ad eorum alterutram rectâ CB alteri æquidistante, sumatur inter AB, BC media proportionalis AD. Dein ductâ DE ipsi AD æquali, atque Asymptoto AH parallelâ, erit EAF, transiens per E & A ac ipsius EA dupla, transversus axis qui quæritur, atque IEK ad eandem perpendicularis, ac utrinque Asymptotis terminata, axis secundus, priori conjugatus.



Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola est, rectangulumque ADE ipsi ABC æquale [2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas DA, DE æquales [4] æqualis quoque sit DAE angulus ipsi DEA, id est [5], EAK angulo, sintque & anguli AEI, AEK ex constructione æquales: erunt [6] triangula AEI, AEK æquiangula, atque ob latus AE commune [7] etiam æqualia, latusque IE lateri EK æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola existat, dividatque bifariam rectam IK, utrinque Asymptotis terminatam, continget ipsa IK [9] curvam in E; ideoque, & propter angulos FEI, FEK rectos, conjugati axes erunt FE, IK.

1 ex hypothesi.
2 per 17 sexti.
3 per 3 hujus.
4 per 5 primi.
5 per 29 primi.
6 per 32 primi.
7 per 26 primi.
8 per sup. demonstr.
9 per 6 hujus.

THEO-

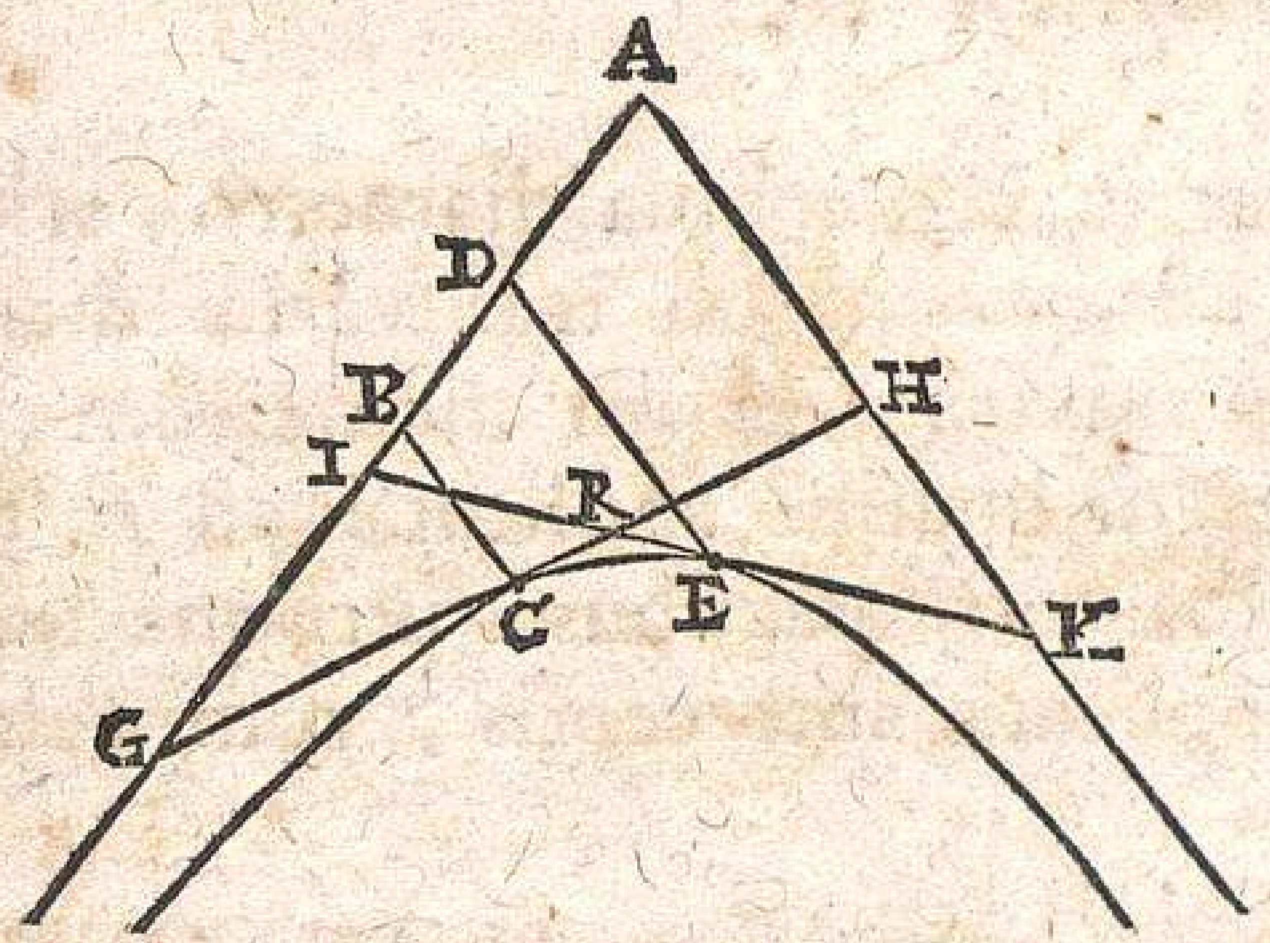
THEOREMA VIII.

Propositio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Asymptotis comprehenso æqualia abscindunt triangula, & rectangula sub eorundem triangulorum lateribus comprehensa invicem quoque æqualia sunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipsæque bases seu contingentes Asymptotis terminatæ, in mutuo occursu, nec non ipsarum partes curvam contingentes inter occursum & Asymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione secantur.

Hyperbolam CE, cujus Asymptoti AG, AK, rectæ GH, IK utrinque Asymptotis terminatæ, ac sibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula GAH, IAK æqualia esse; ac præterea esse GI ad IA, sicut KH ad HA; itemque GR ad RH, sicut KR ad RI; nec non GC ad CR, sicut KE ad ER.

Ductis enim à punctis contactus C & E rectis CB, ED Asymptotorum alterutri, ut AH, parallelis, cum sit ut GC ad GH, ita GB ad GA, & BC ad AH [1]; sitque GH ipsius GC dupla [2]: erit quoque tam GA ipsius GB quàm AH ipsius BC dupla, ideoque [3] rectangulum GAH rectanguli GBC sive ABC quadruplum. Eodem modo rectangulum IAK rectanguli ADE quadruplum ostendetur. Hinc cum æqualia sint rectangula ABC, ADE [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula GAH & IAK æqualia. Quod est primum.

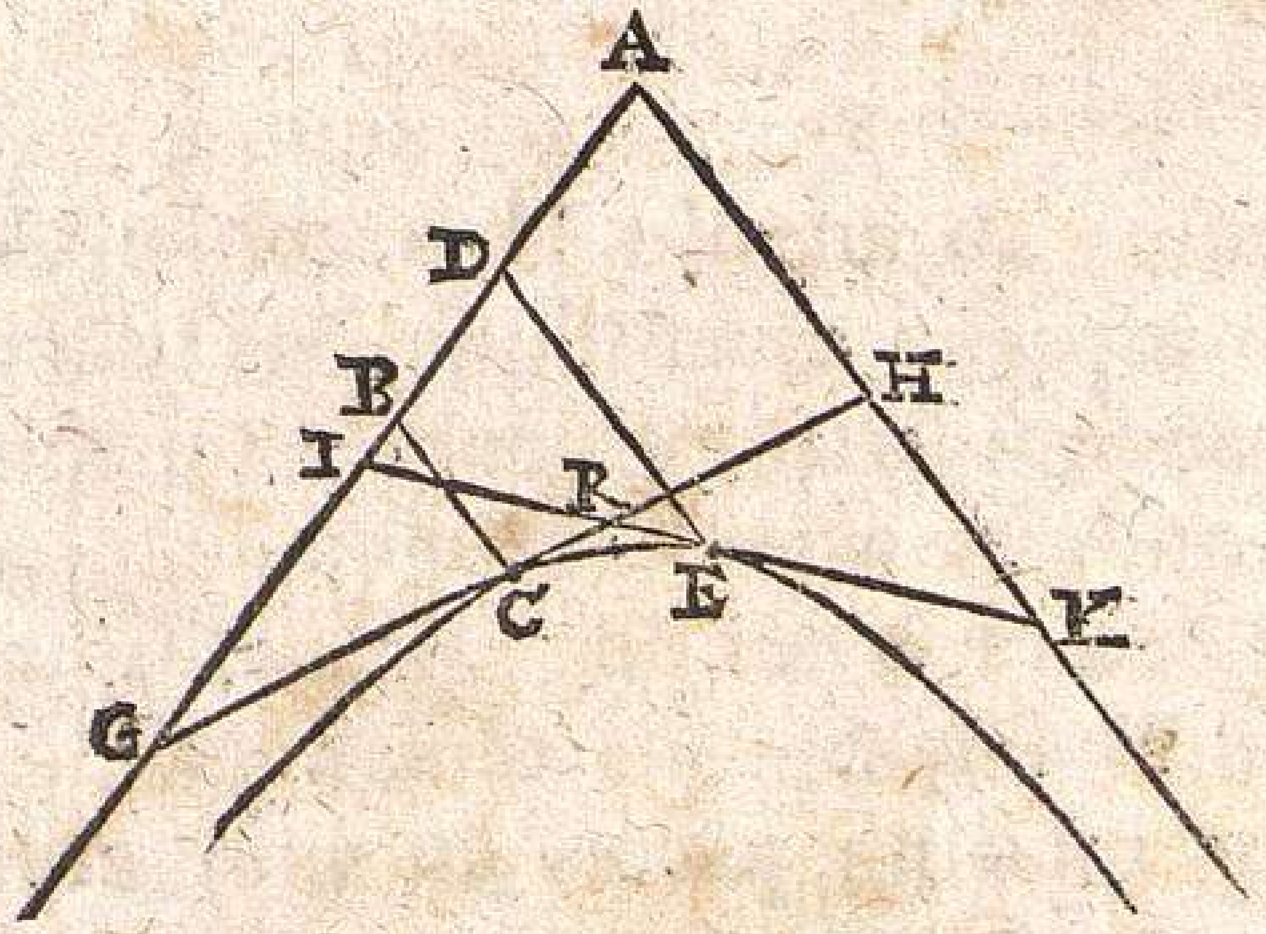


Unde cum [5] sit ut GA ad AK, ita IA ad AH, triangula quoque

[1] per 4 sexti.
[2] per 6 hujus.
[3] per 20 sexti.
[4] per 3 hujus.
[5] per 16 sexti.

[6] per 15. Sexti. [7] per 16. Quinti. [8] per 17. Quinti.

que GAH, IAK æqualia erunt [6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.



Ac cum permutando [7] quoque sit GA ad IA, ut AK ad AH: erit & [8] dividendo GI ad IA, ut KH ad HA. Quod est tertium.

Porrò cùm ab æqualibus triangulis GAH, IAK ablato communi quadrilatero IRHA, residua, nempe triangula GRI & KRH, quoque æqualia remaneant, erunt [9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit GR ad RH, ut KR ad RI. Quod est quartum.

[9] per 15. Sexti.

Unde cum componendo [10] quoque sit GH ad RH, ut KI ad RI, aut, sumptis antecedentium dimidiis, CH ad HR, ut EI ad IR: erit & per conversionem rationis [11] CH sive GC ad CR, ut EI sive KE ad ER. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

[10] per 18. Quinti. [11] per Coroll. 19. Quinti.

THEOREMA IX.

Propositio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum transversæ diametri, sive ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

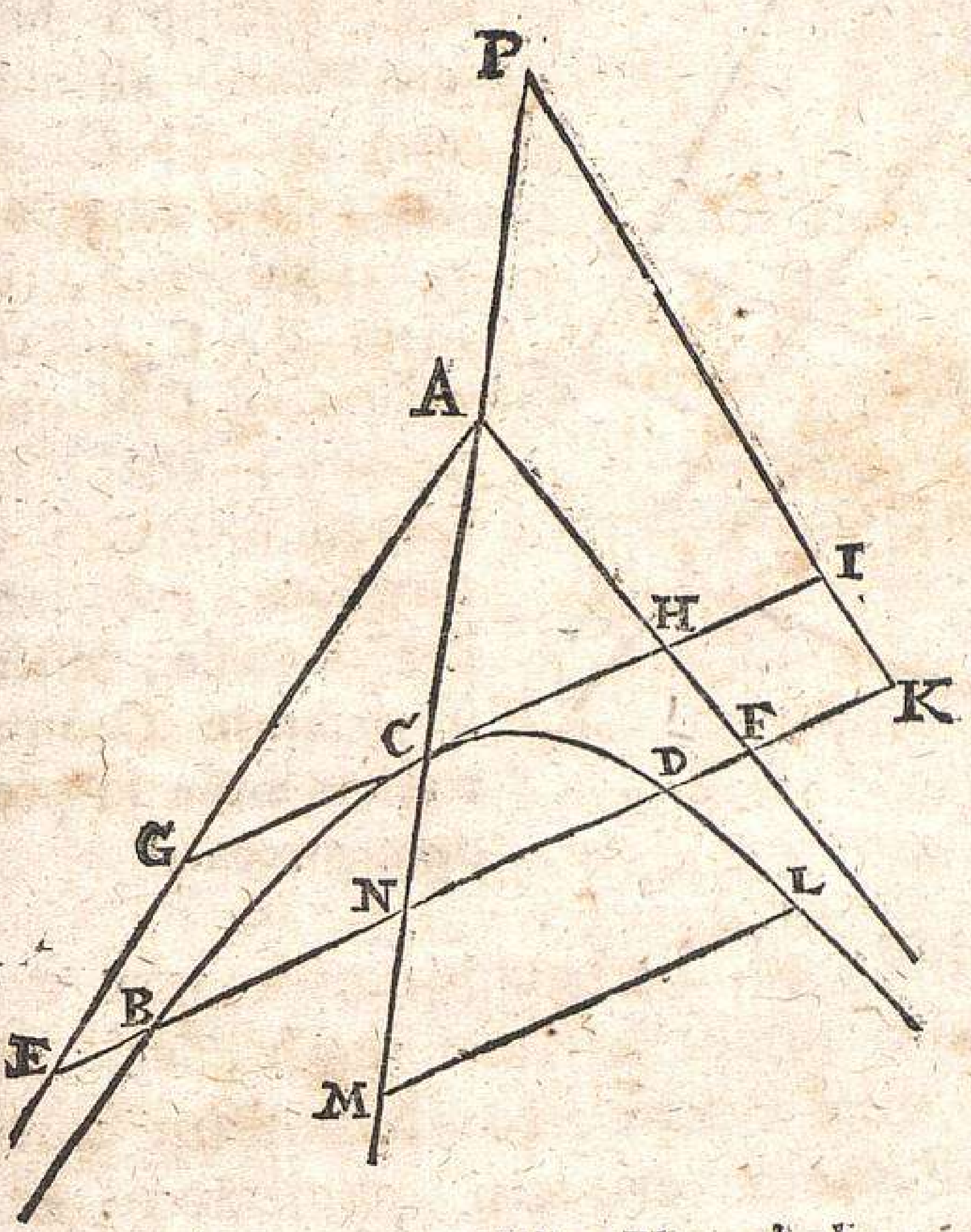
Sit in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta diameter utcunque PACN, cujus secunda diameter transversæ PC conjugata sit GCH, parameter verò CI, ipsis nempe PC, GH tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet DN: dico esse ut GH quadratum ad CP quadratum, aut, quod idem est [1], ut recta IC ad rectam CP, ita quadratum DN ad PNC rectangulum.

[1] per Coroll. 20 sexti.

Productâ enim applicatâ DN utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut EBNDF, cum sit [2] FN quadratum ad HC quadratum, id est [3], ad BFD rectangulum, ut NA quadratum ad CA quadratum: erit dividendo [4] DN quadratum ad HC quadratum, ut PNC rectangulum [5] ad CA quadratum, & permutando [6] DN quadratum ad PNC rectangulum, ut HC quadratum ad CA quadratum, sive [7] ut GH quadratum ad CP quadratum, aut, quod idem est, ut IC ad CP. Quod demonstrandum erat.

[2] per 4, & 22 sexti.
[3] per 1 Coroll. 6 hujus.
[4] per 6 secundi, & 17 quinti.
[5] per 6 secundi.
[6] per 16 quinti.
[7] per 15 quinti.



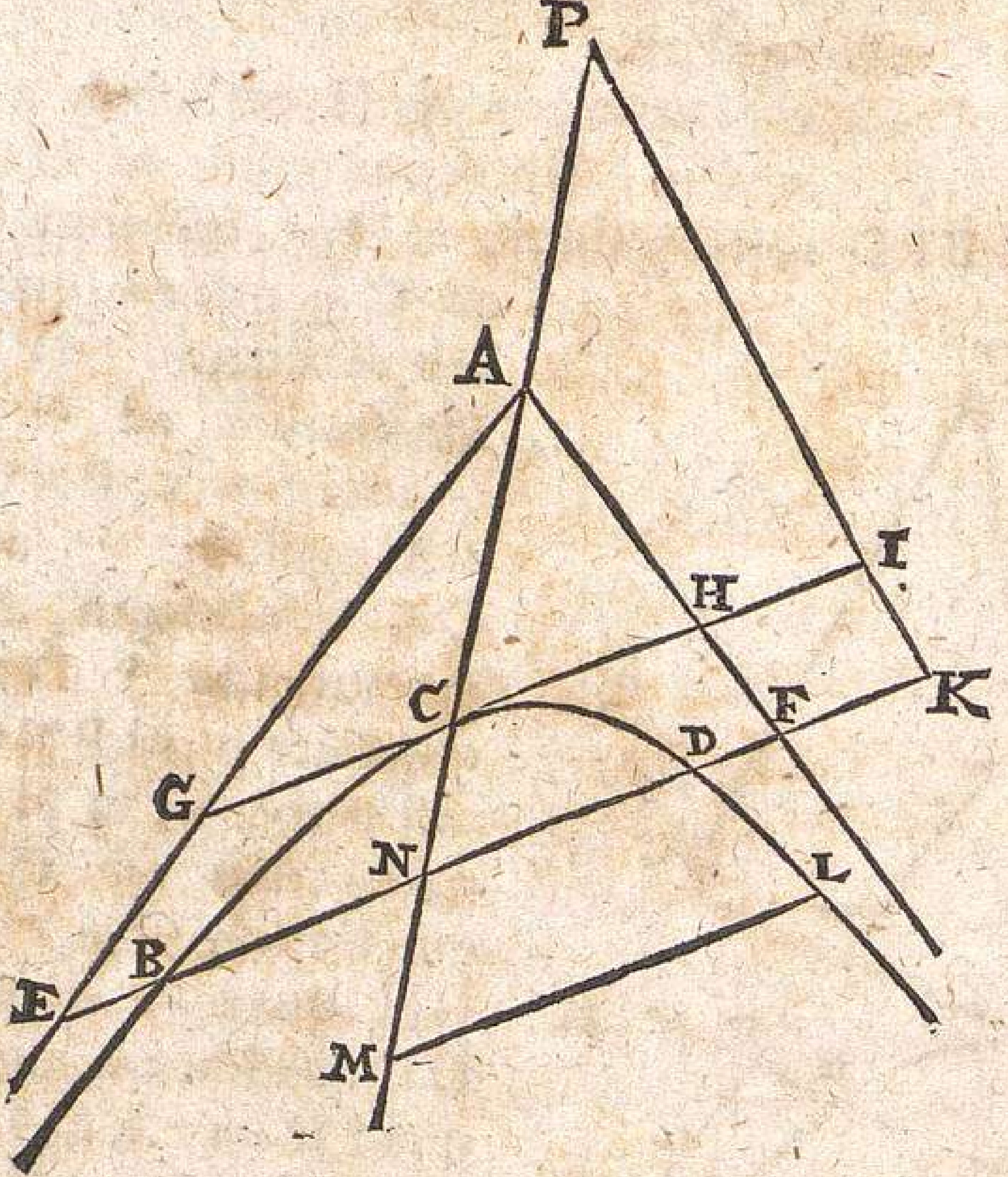
Corollarium 1.

Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuslibet Hyperbolæ, ut BCD, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis [8] centro A, diametro quâcunque AN, quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ BN; si, productâ NA ad P, ut AP ipsi AC sit æqualis, ductâque per C rectâ GCI applicatæ BN parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut sit PNC rectangulum ad BN quadratum, sicut AC quadratum ad quadratum abs CG seu CH: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ AGE & AHF, Asymptoti quæsitæ [9].

[8] per 7 Coroll. 5 hujus.
[9] per conversum 10 hujus.

Corollarium 2.

Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametrique terminos ducatur recta PIK, occurrens cuilibet applicatæ, ut N D, productæ, si opùs fuerit, in K: rectangulum CNK quadrato applicatæ D N æquale esse. Quoniam enim est [1] ut P C ad C I, sive ut P N ad N K [2], id est, (sumptâ N C communi altitudine) ut P N C rectangulum ad C N K rectangulum [3], ita idem P N C rectangulum ad D N quadratum, erit [4] rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale, id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat:



1 per 10 huius conv.
2 per 4 sexti.

3 per 1 sexti.

4 per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abscinditur inter ipsam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ simili similiterque positâ ei, quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est ex demonstratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad se invicem esse, veluti rectangula sub interceptis diametri portionibus, ab utroque transversæ termino sumptis. ut, si applicatæ sint L M, D N, erit ut quadratum L M ad rectangulum P M C, ita quadratum D N ad rectangulum P N C: cum utriusque eadem sit ratio, quæ est parametri ad transversam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim L M quadratum ad D N quadratum, ut P M C rectangulum ad P N C rectangulum.

5 per 10 huius.
6 per 16 quinti.

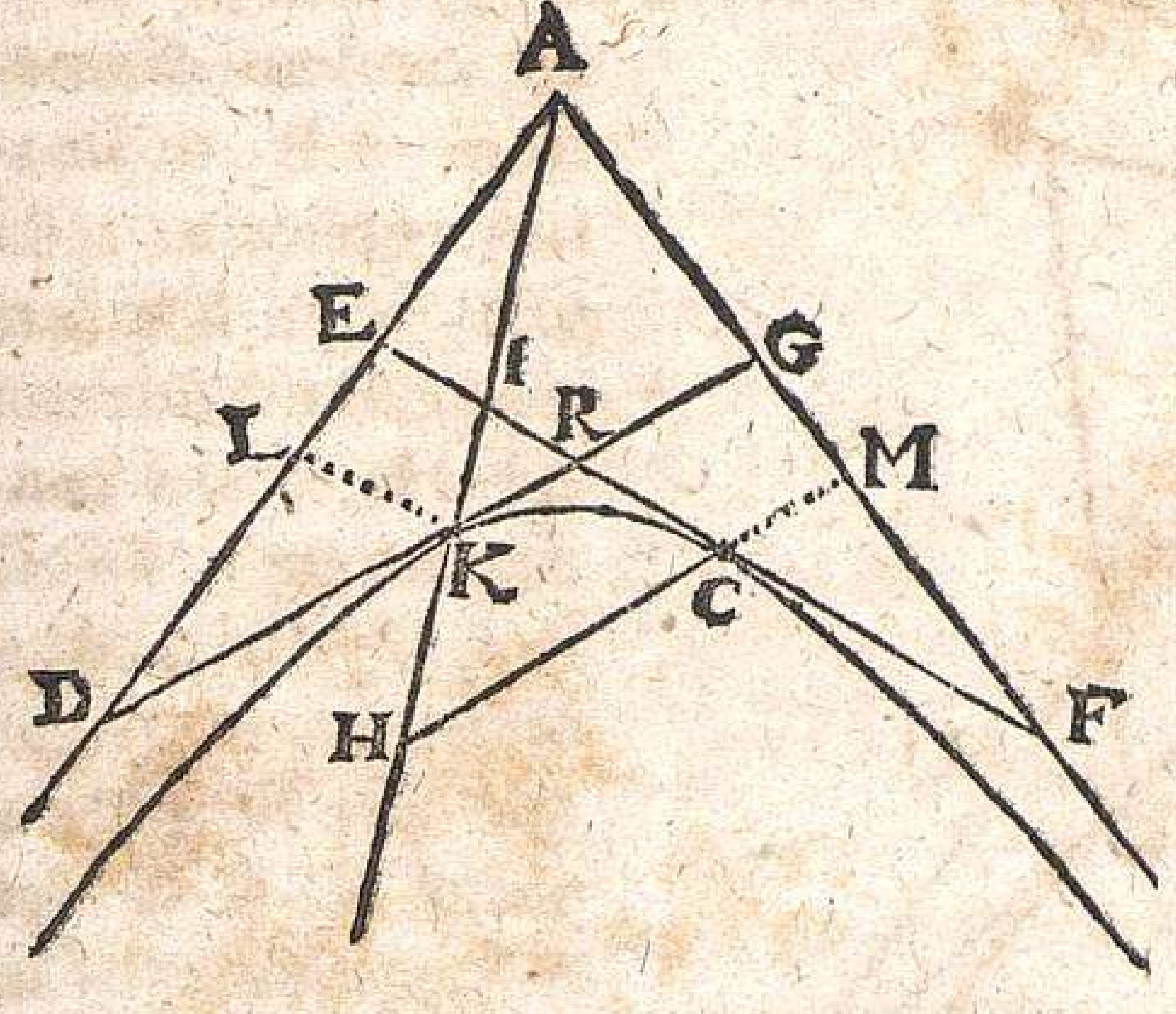
THEO-

Theorema X.

Propositio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale semidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam KC, cujus Asymptoti AD, AF, contingat in puncto C utcunque sumpto recta ECF, Asymptotis occurrens in E & F, diametro autem AH utcunque ductæ



in I; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata sit CH, quæ producta Asymptoto occurrat in M. Dico rectangulum HAI æquale fore quadrato semidiametri KA, sive, quod idem est [1], continuè proportionales esse HA, KA, & IA.

Ductis enim DKG applicatæ CH, & KL contingenti FE parallelis, notatoque intersectionis puncto R, cum sit [2] RC ad CF, ut RK ad KD, hoc est [3], MG ad MF, ut LE ad LD: erit quoque [4] MG ad GF, ut LE ad ED. Quare cum porrò [5] sit FG ad GA, ut DE ad EA: erit [6] ex æquo MG ad GA, id est [7], HK ad KA, ut LE ad EA, hoc est [8], ut KI ad IA: & [9] componendo HA ad KA, ut KA ad IA. Quod demonstrandum erat.

[1] per 17 sexti.

[2] per 2 Cor. sexti, & 9 hujus.

[3] per 2 sexti.

[4] per compositionem rationis contrariam, vide Clavium ad 18 Quinti.

[5] per 9 hujus.

[6] per 22 Quinti.

[7] per 2 Sexti.

[8] per 2 Sexti.

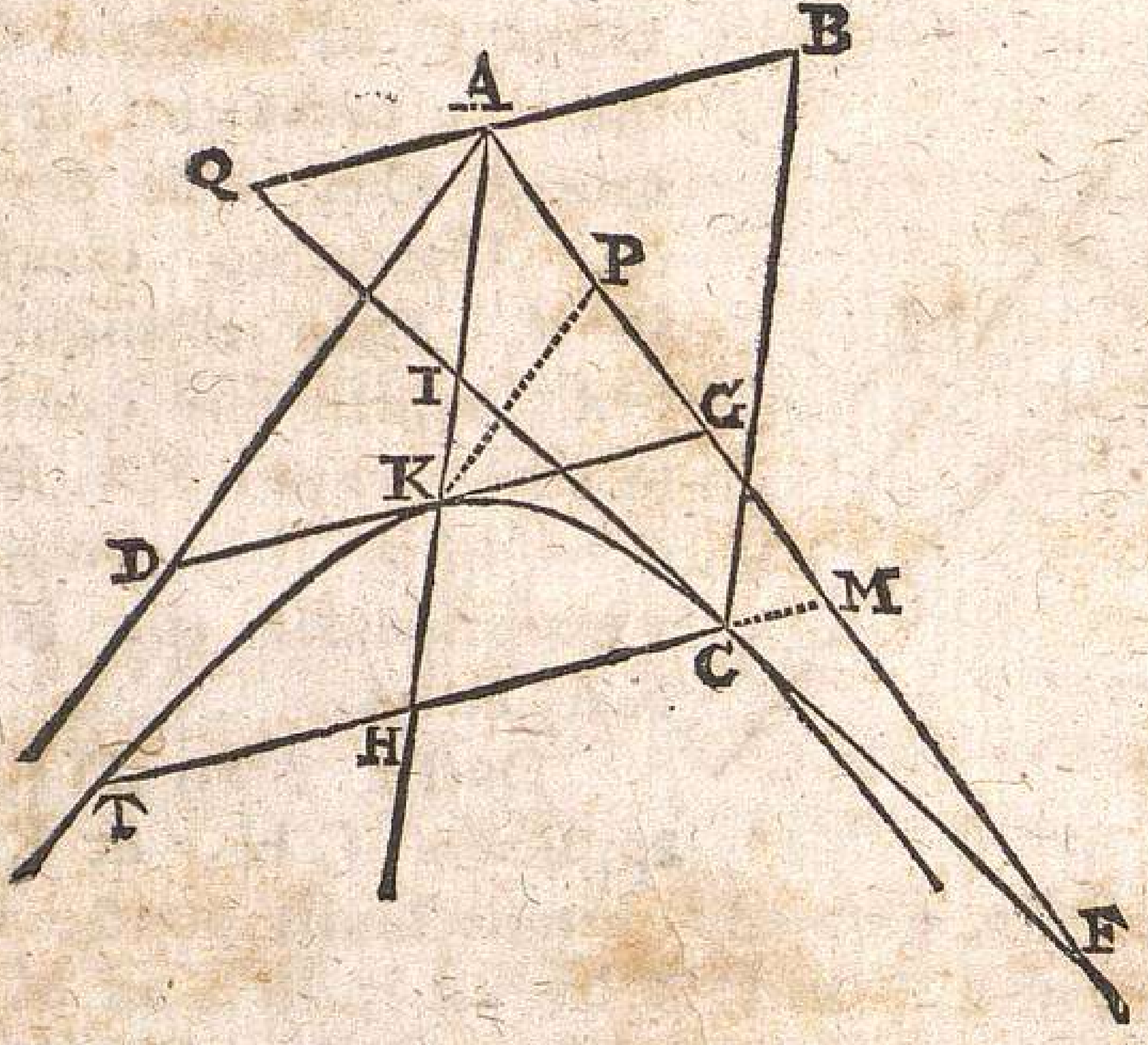
[9] per 18 Quinti.

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque secundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub secundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, æquale semi-secundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam KC, cujus Asymptoti AD, AF, contingat in puncto C, utcunque sumpto, recta FCQ, occurrens secundæ diametro AB, utcunque ductæ in Q: dico, si ex C ad eandem diametrum AB ordinatim applicetur recta CB, & ex A eidem æquidistans ducatur AKH, secans contingentem FCQ in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur DKG ipsi AB parallela, (ita ut [1] AKH diameter sit secundæ diametro AB conjugata, ac semi-secundæ diametri magnitudine sint KG, KD,) fore rectangulum BAQ æquale ipsius KG vel KD semi-secundæ diametri quadrato.



[1] per 7 hujus.

Ductâ enim per C rectâ TCM secundæ diametro AB parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum AKH ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque AH in H, Asymtoto verò AF in M: Quoniam est [2] HA quadratum ad KA quadratum, sive [3] HM quadratum ad KG quadratum seu

[2] per 11 hujus, & Cor. 20 sexti.
[3] per 4 & 22 sexti.

seu [1] ad TMC rectangulum, ut HA seu CB ad IA, id est [2], ut BQ ad AQ; erit dividendo [3] HC quadratum seu BA quadratum ad KG quadratum, ut BA ad AQ. Ac propterea [4] BA, KG, & AQ proportionales erunt, rectangulumque BAQ [5] quadrato KG æquale. Quod demonstrandum erat.

Corollarium ad duas propositiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti K, inventis Asymptotis [6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Asymptoto parallelâ, ut KP, ac sumptâ PG ipsi AP æquali, continget juncta GKD Hyperbolam in K [7], quoniam uti GP ipsi PA, ita GK ipsi KD æqualis est [8].

Eodem modo, si datum punctum sit in Asymptotorum alterutra, veluti G, divisâ AG bifariam in P, ductâque PK alteri Asymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat [9] in K: continget juncta GKD [10] Hyperbolam in puncto occursus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Asymptotis comprehensum, veluti I: ductâ à centro [11] per I diametro, ut AIH, quæ curvæ occurrat in K, sumptâque AH ipsis AI, AK tertiâ proportionali, si per H agatur ordinatim applicata HC (nimirum, quæ contingenti in K æquidistet [12]), occurrens curvæ in C, continget juncta IC [13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps sunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A secundâ diametro QAB, transversâque ipsi conjugatâ AKH (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbola ductam ipsi QAB æquidistantem bifariam dividat), nec non tangente KG vel KD, Asymptoto terminatâ; si fiat quadrato KG vel KD æquale rectangulum QAB, ac per B ad secundam diametrum AB applicetur recta BC, nempe ipsi AK æquidistans [14], quæ curvæ occurrat in C: juncta QC [15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifestum porrò est, si datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet: fieri non posse [16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non secet.

1 per 1 Cor. 6 hujus.
2 per 4 sexti.
3 per 17 quinti.
4 per Cor. 20 sexti.
5 per 17 sexti.
6 per 1 Cor. 10 hujus.
7 per 6 hujus.
8 per 2 sexti.
9 per 2 Cor. 3 hujus.
10 per 2 sexti, & 6 hujus.
11 invento per 7 Coroll. 5 hujus.
12 per 3 Cor. 6 hujus.
13 per 11 hujus
14 per 7 hujus.
15 per 12 hujus.
16 juxta 1 Cor. 3 hujus.

Caput III.

DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

Si quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opus fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

Cum de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, si opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* sumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

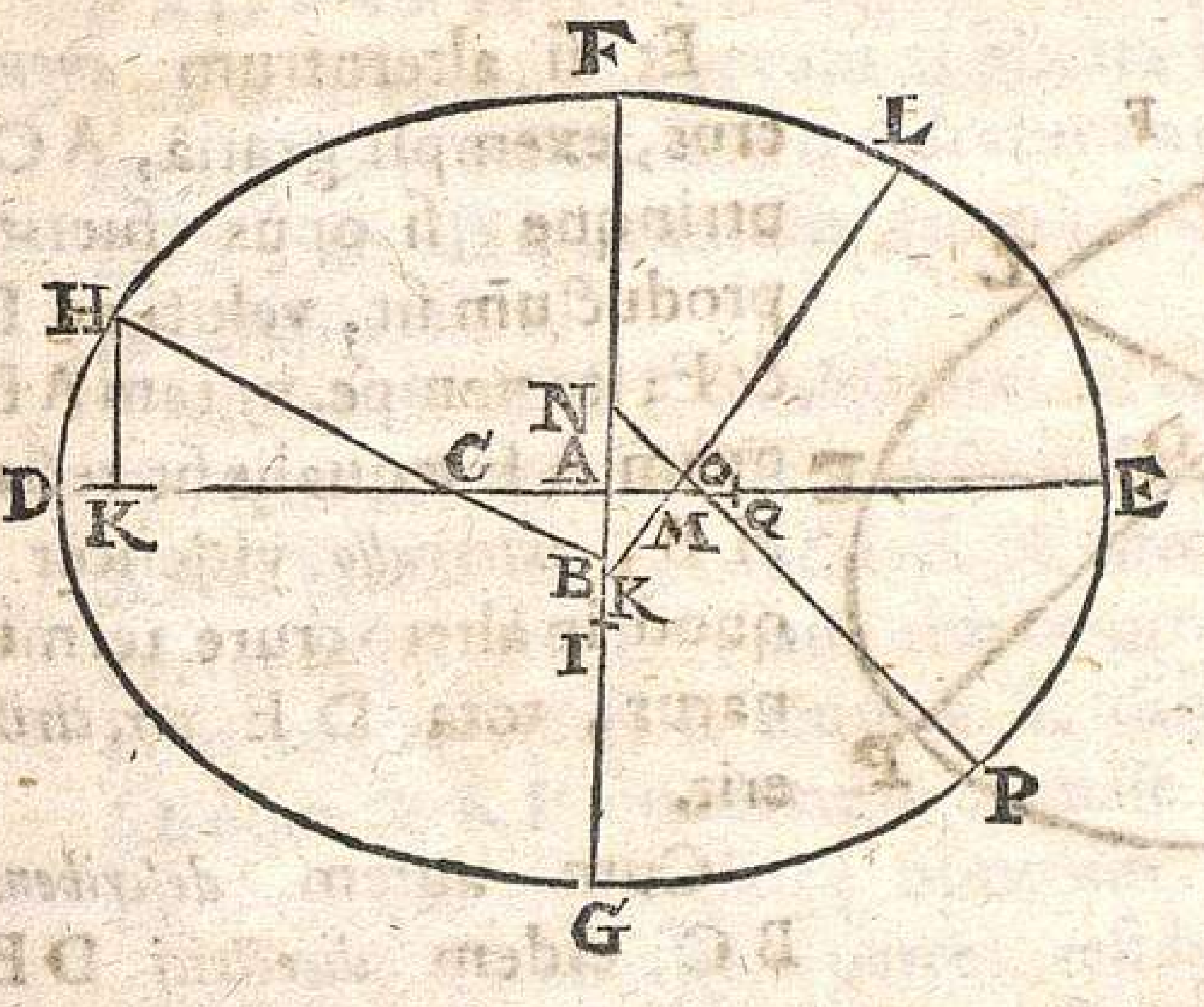
Describentem in statione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* est perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum esto, ac cùm de iis simpliciter sermo erit in ea statione considerabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

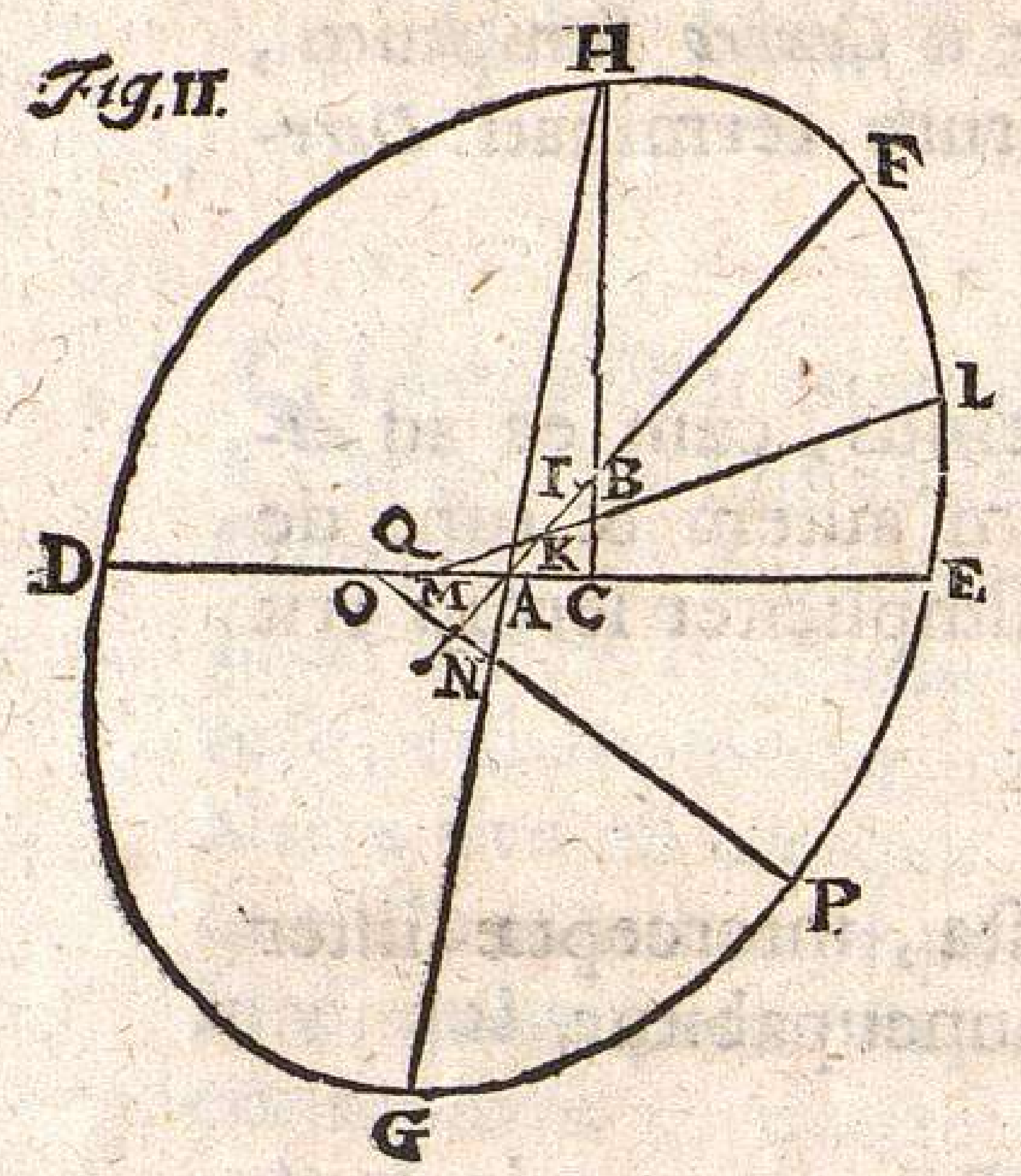
Ut si trianguli rectanguli A B C latus B C moveatur in *angulo* B A C, ex gr., ut terminus C tendat ad A, simulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C semper sint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuère, nempe B in latere A B, ac C in latere A C, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet sui puncto, ex. gr., H, assumpto, prout placuerit, sive in ipsa B C, sive in eadem producta, (ut à nobis plerumque assumetur, cum id naturæ quodammodo convenientius videatur,) describat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, simulque H processerit ad F, descripta sit per motum puncti H cur-

Fig. I.



H curvæ portio HF: deinde puncto C promoto per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, descriptus sit arcus FL: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, descriptus sit arcus LE: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus EP: atque si porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva HFLEPGD: erunt

Fig. II.



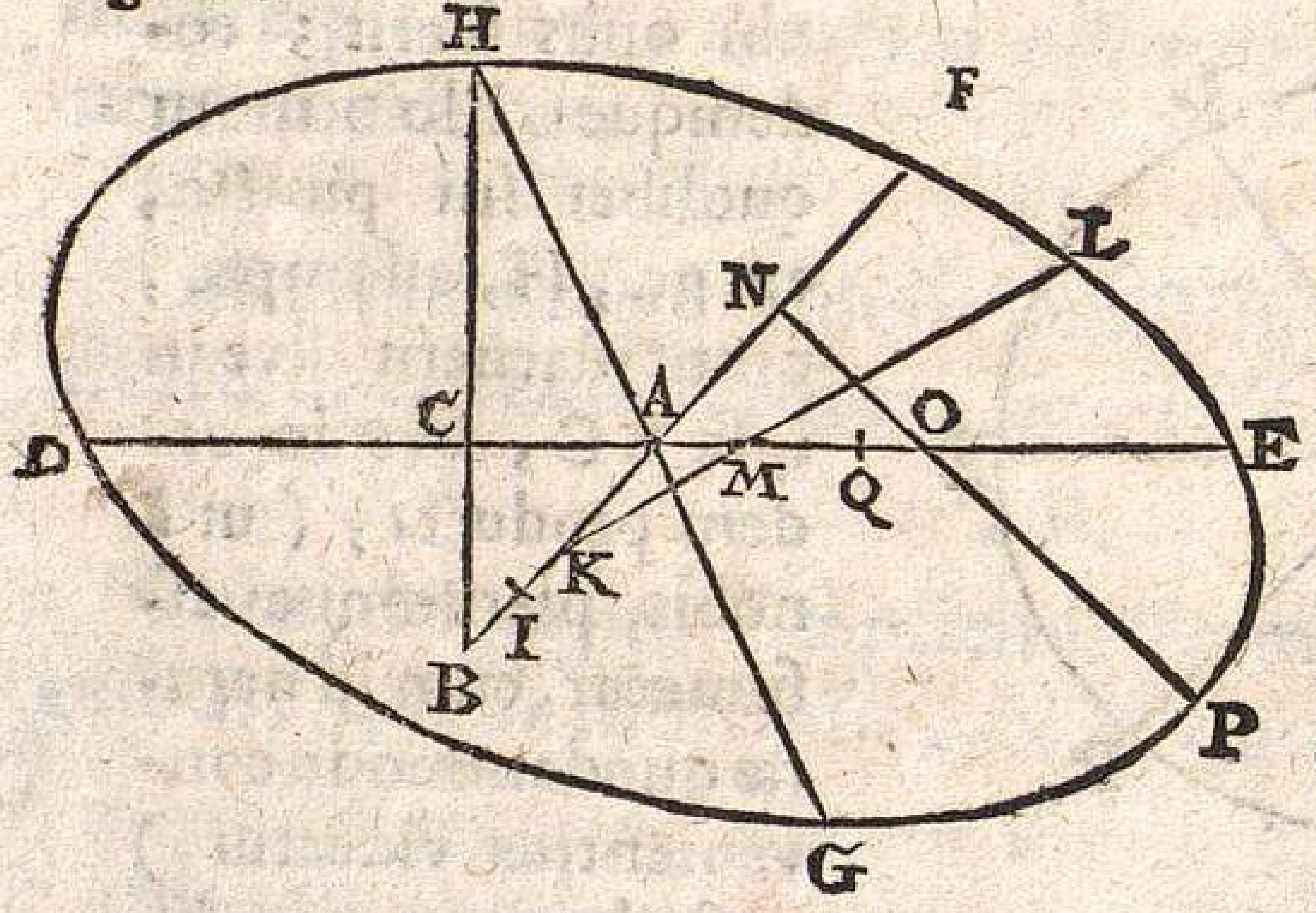
BC, quæ & in aliis stationibus est IA, KM, AQ, NO, &c. *linea describens.*

H *punctum efficiens.*

HC & HB utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, AC, utrinque, si opùs fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam AD quàm AE æqualis sit rectæ HB, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota DE *directrix* erit.

Cum autem *describens* BC eidem *directrici* DE est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure AB, uti AI, *angulo* nempe existente recto, ut in ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione BC, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit IA, casu primo, & BC, casu altero, *describens in statione prima* seu *describens* simpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum* simpliciter.

Ac proinde FAG [a] vel HAG [b], nempe ab eodem *puncto* per *centrum* A ducta atque ipsius FA sive HA dupla, *secantem* repraesentat.

a in casu fig. I & similib.
b in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* BAC, *intervallis* quibuslibet HC, HB, descripta curva DHEG, cujus *directrix* DAE, *secans* FAG [a] vel HAG [b]; atque à puncto I in *directrice* DE utcunque assumpto, ad curvam applicata IL *secanti* FAG [a] vel HAG [b] æquidistans: dico fore quadratum applicatæ LI ad rectangulum DIE, ut est quadratum *Secantis* FG [a] vel HG [b] ad quadratum *directricis* DE.

a in casib. fig. I, II, & similibus.
b in casib. cæterarum fig. & similibus.

Sit enim recta KM *describens* in ea statione, uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* BAC rectus sit [a], ductâ KN *directrici* DE parallelâ, quæ occurrat applicatæ LI, aut eidem productæ, si opùs fuerit, in N: cum *intervallum* KL æquale sit dimidiæ *directrici* AE vel AD, ideoque & KL quadratum æquale AE vel AD quadrato, ablatis utrinque æqualibus, nimirum [1], quadrato KN ab una, & quadrato AI ab altera parte, residua quoque, nempe LN quadratum & DIE rectangulum [2], æqualia erunt. Unde cum [3] sit ut LI quadratum ad LN quadratum, id est [4], ad DIE rectangulum

1 *per* 34 *primi.*
2 *per* 47 *primi*, & 5 *secundi.*
3 *per* 4 & 22 *sexti.*
4 *per supra demonstr.*

Fig. I.

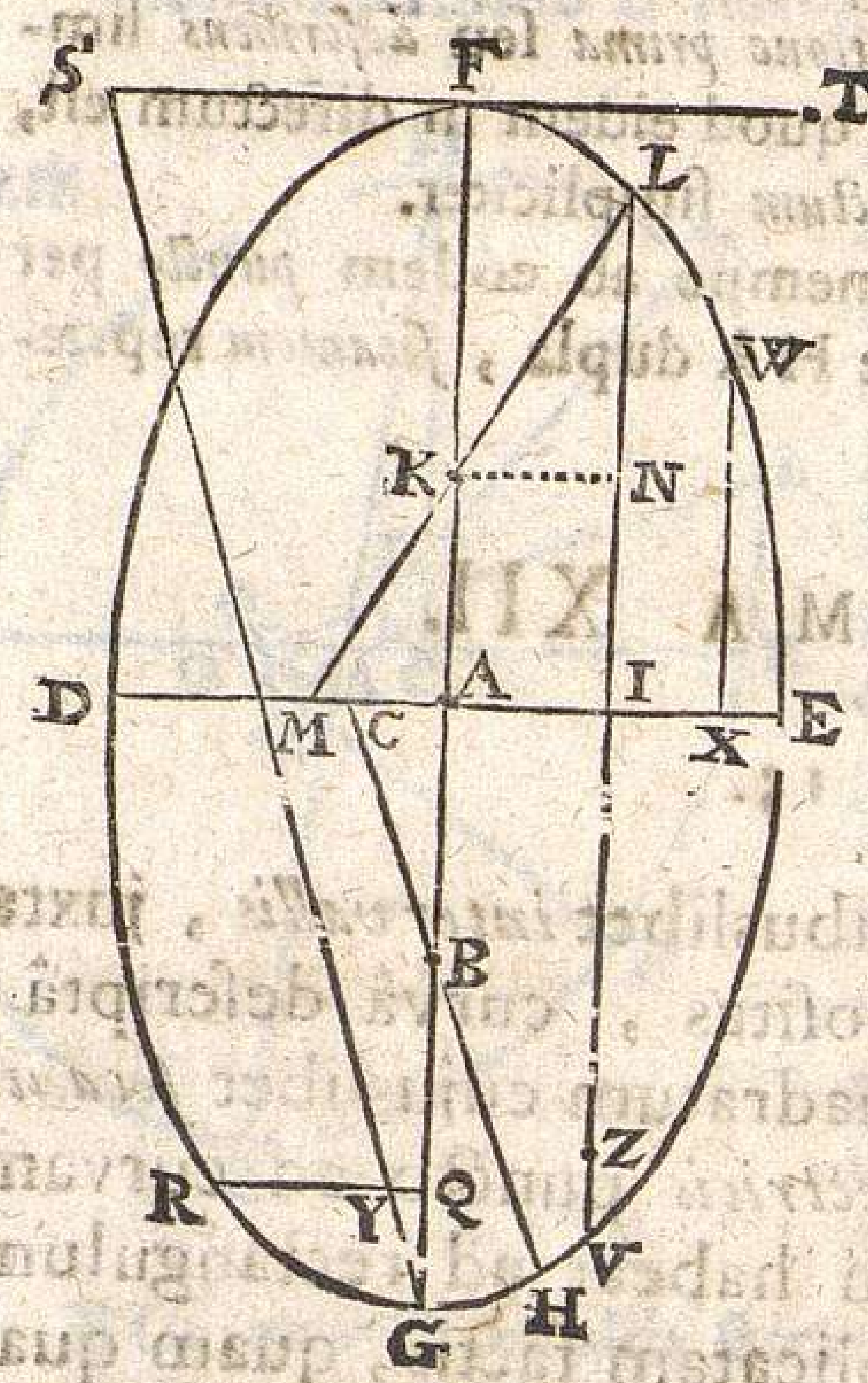
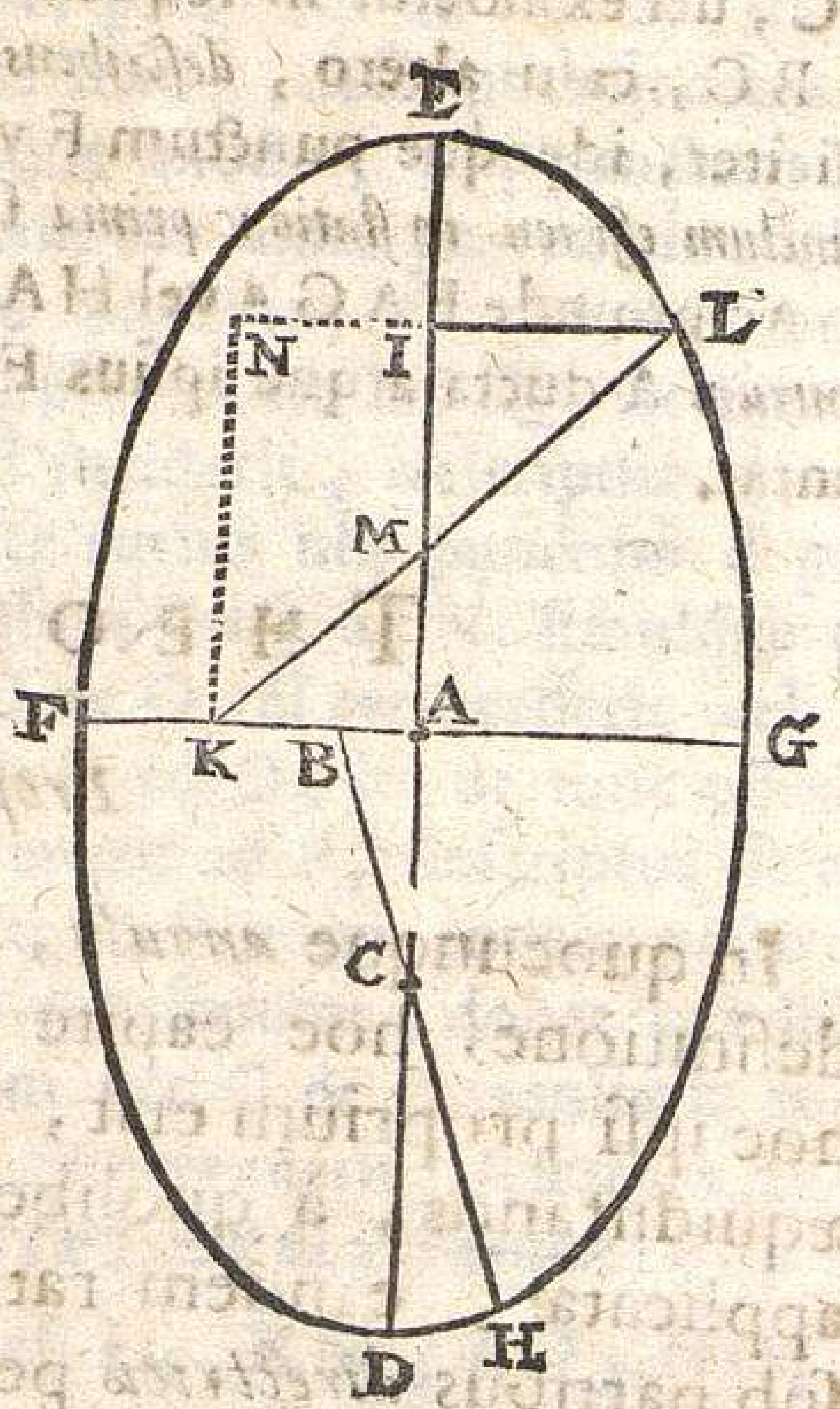


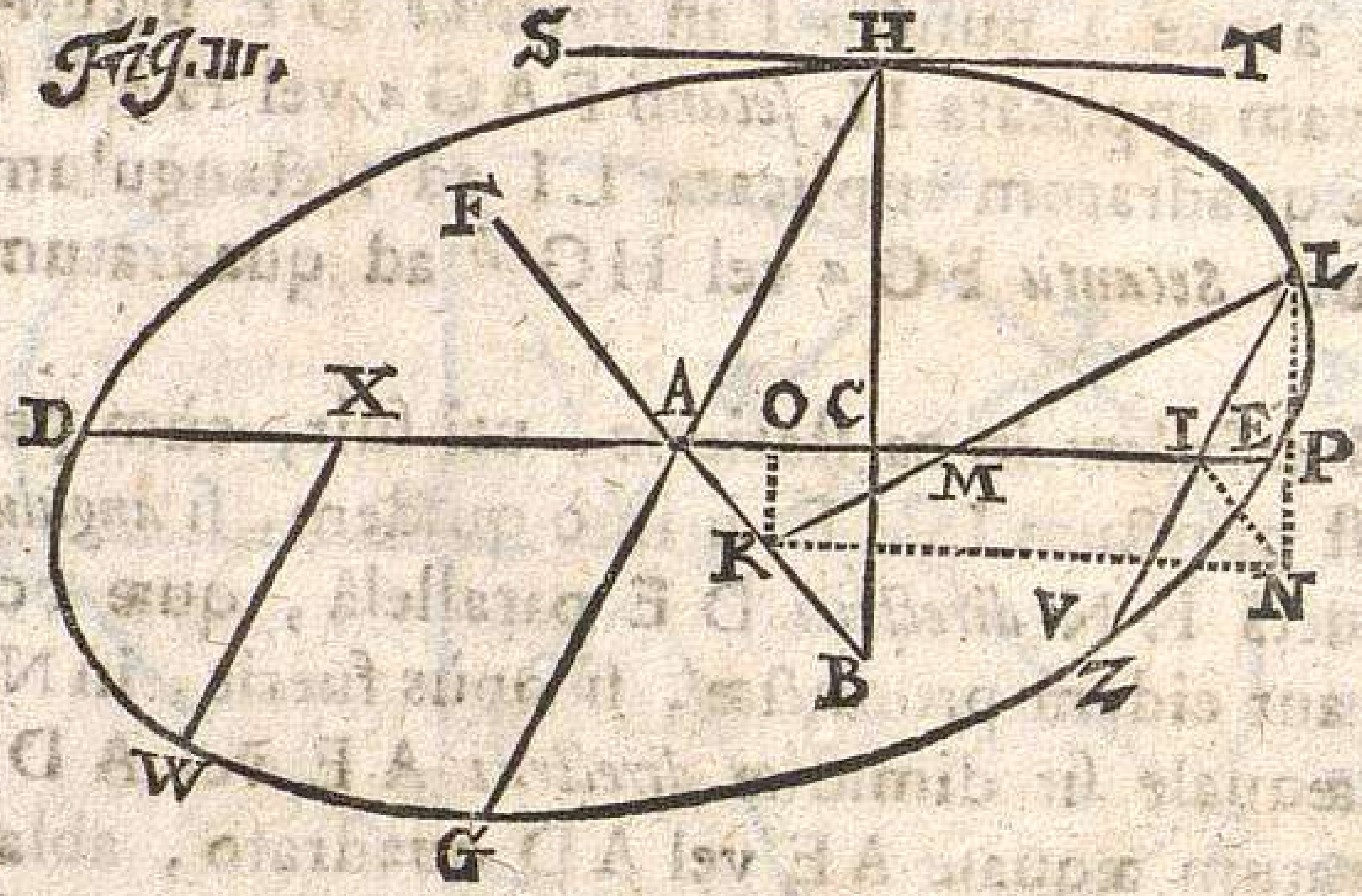
Fig. II.



gulum, ita L M quadratum ad L K quadratum, hoc est, ita F A quadratum ad A E quadratum, sive [1] ut F G quadratum ad D E

[1] per 15 quinti.

Fig. III.



quadratum, constat priori casu propositum.

Non sit deinde *angulus* B A C rectus [b], ducanturque ad *directricem*, eamvé productam, si opùs fuerit, rectæ K O, L P *describenti* B C parallelæ, ideoque ad *directricem* D E perpendiculares, ut & I N lateri A B parallela, quæ ipsi L P, eidemvé productæ, si opùs fuerit, occurrat in N; ita ut [2] similia sint triangula A H C & I L P, itemque

[2] per 29 primi.

Fig. IV.

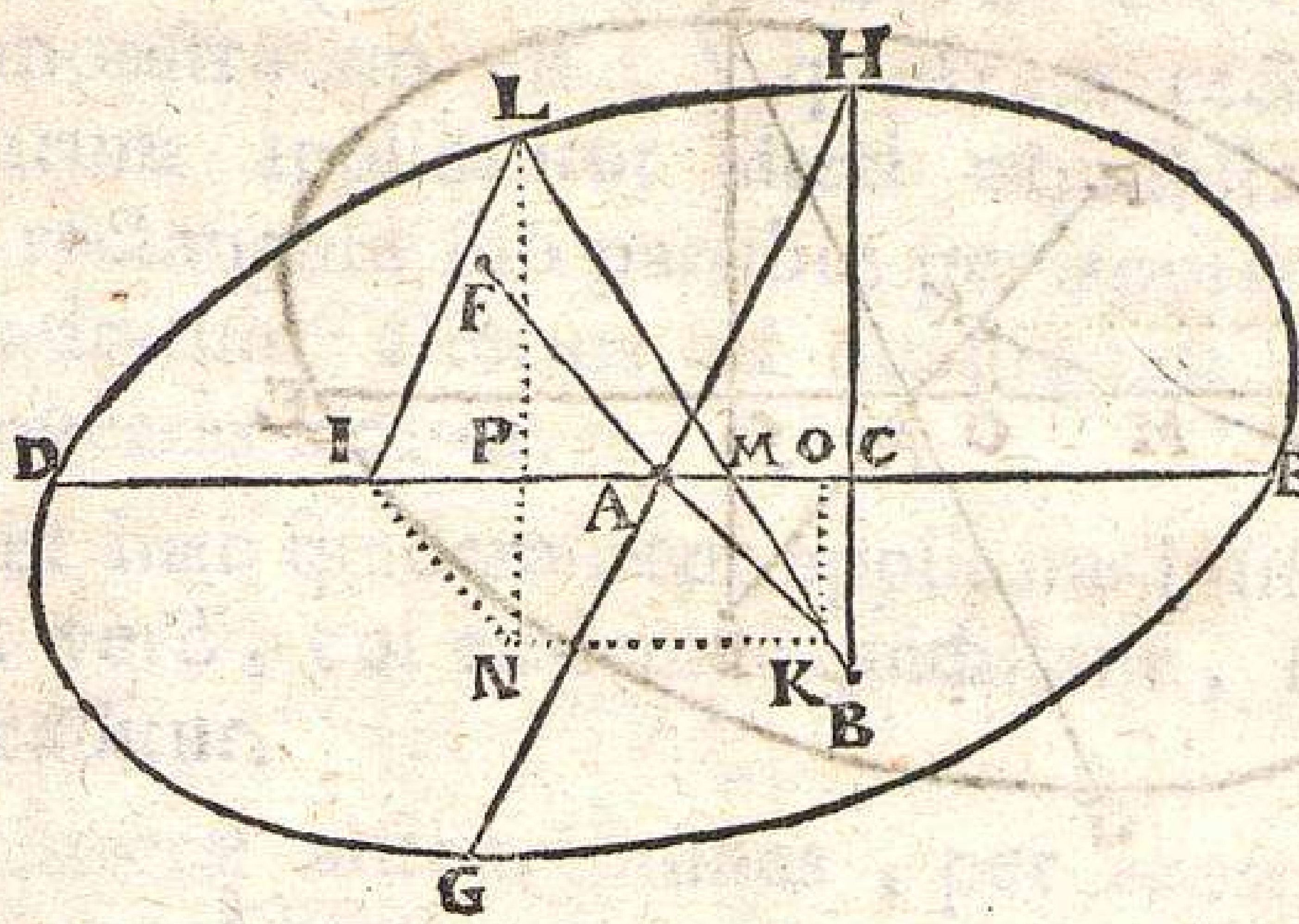


Fig. V.

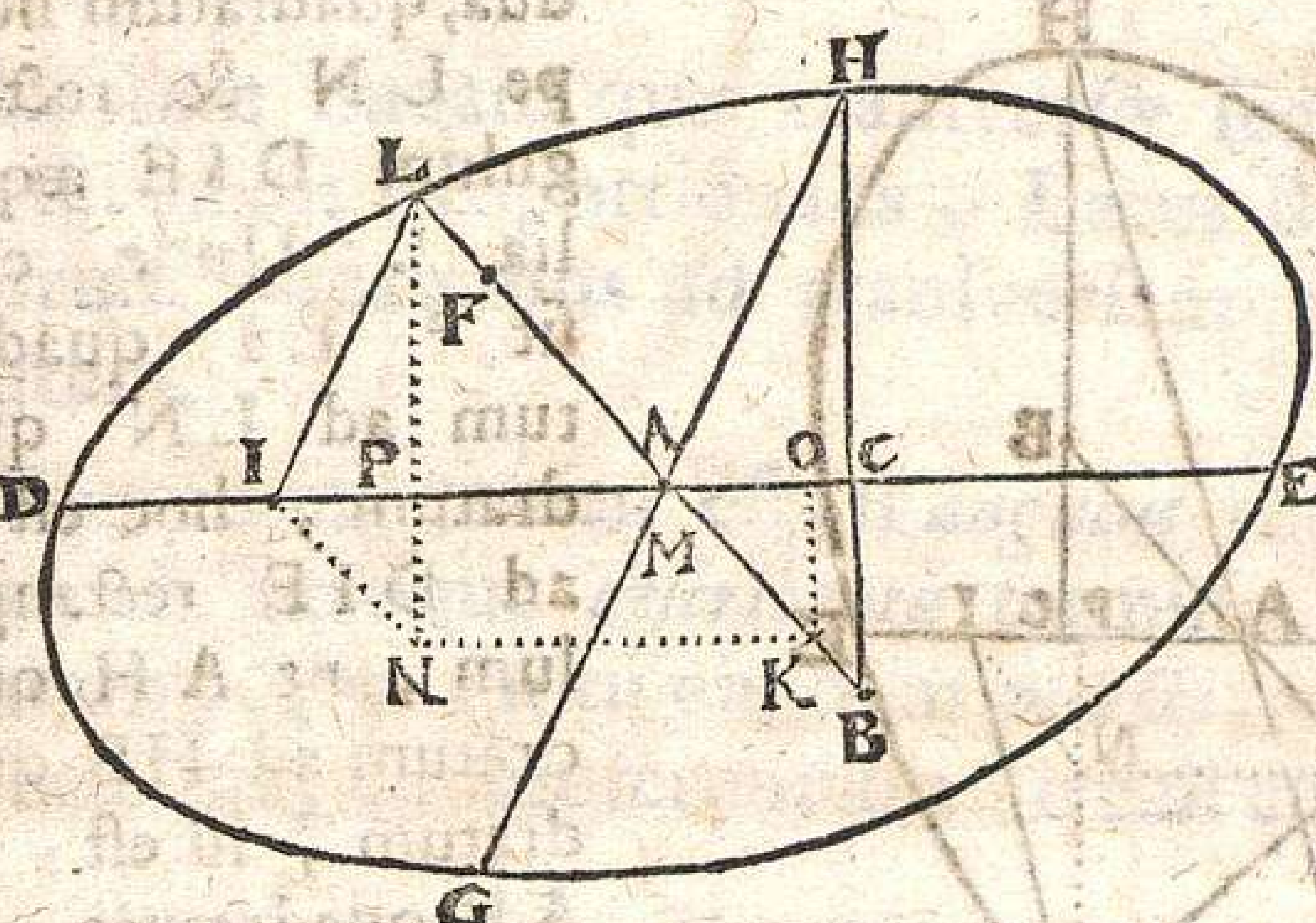
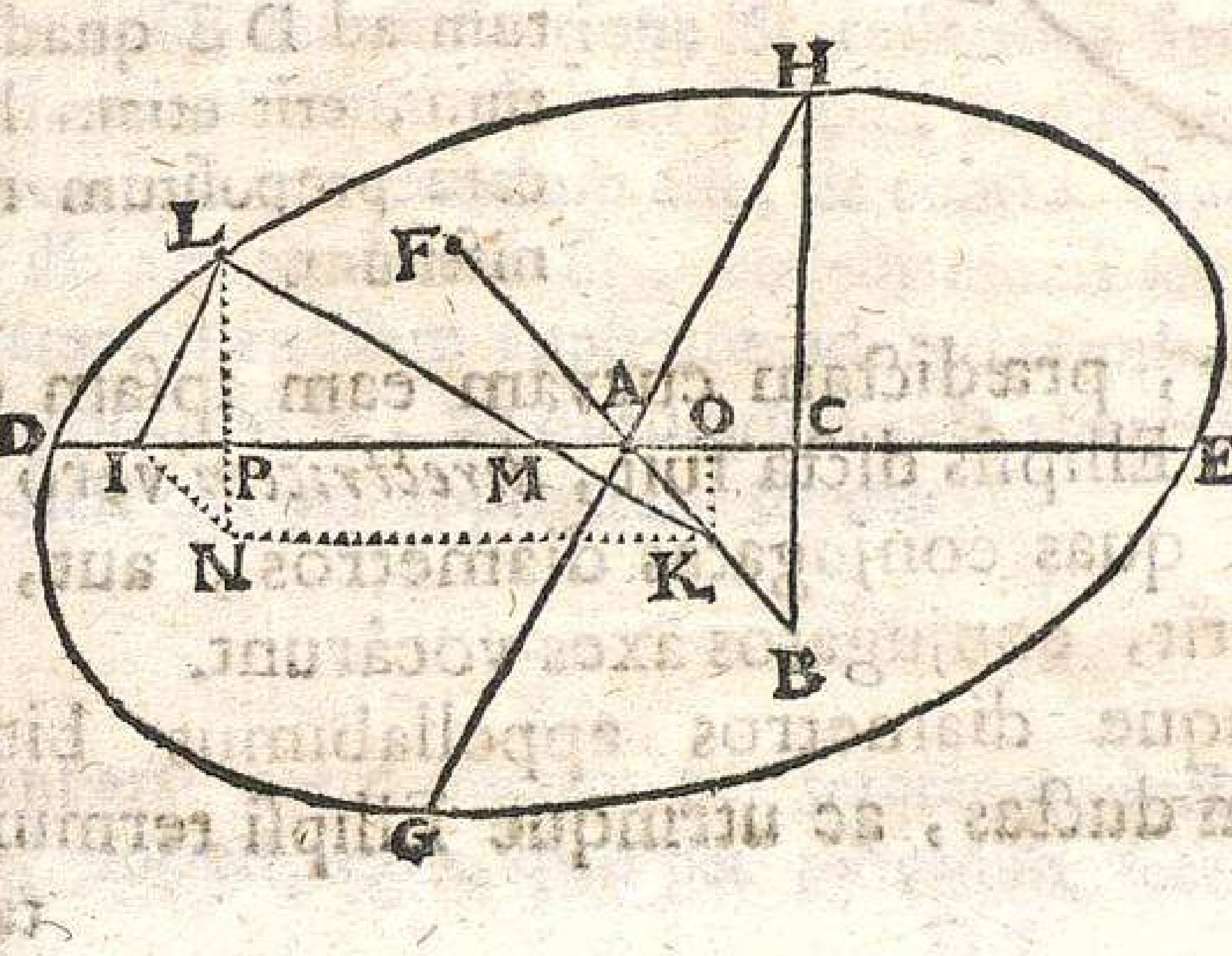


Fig. VI.



que AHB & ILN, ac denique jungatur KN. Quoniam itaque eſt [1], ut BA ad KA, ſive ut BC, id eſt, MK, ad KO, ita ML, hoc eſt, HC, ad LP; ut autem HC ad LP, ita HA ad LI, & ita BA ad NI, ac per conſequens BA ad KA, ut eadem BA ad NI: erit [2] KA ipſi NI æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypotheſi. Quare & AI, KN æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales ſint rectæ KL & AE vel AD, ideoque & ipſarum quadrata, hinc ſubductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum KN ab una, ac quadrato AI ab altera parte, erunt

[1] per 4 ſexti.

[2] per 9 quinti.

[3] per 33 primi.

Fig. VII.

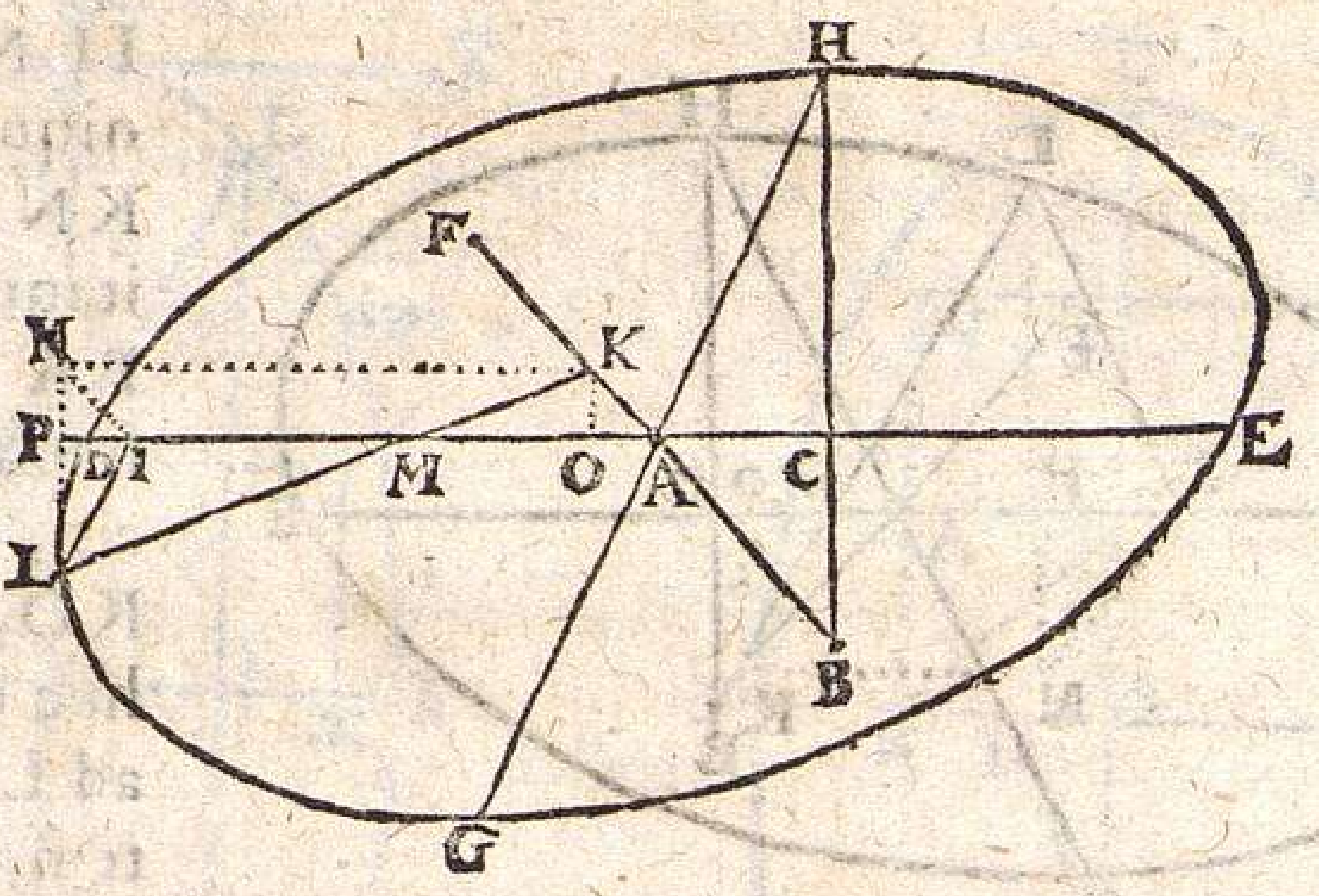
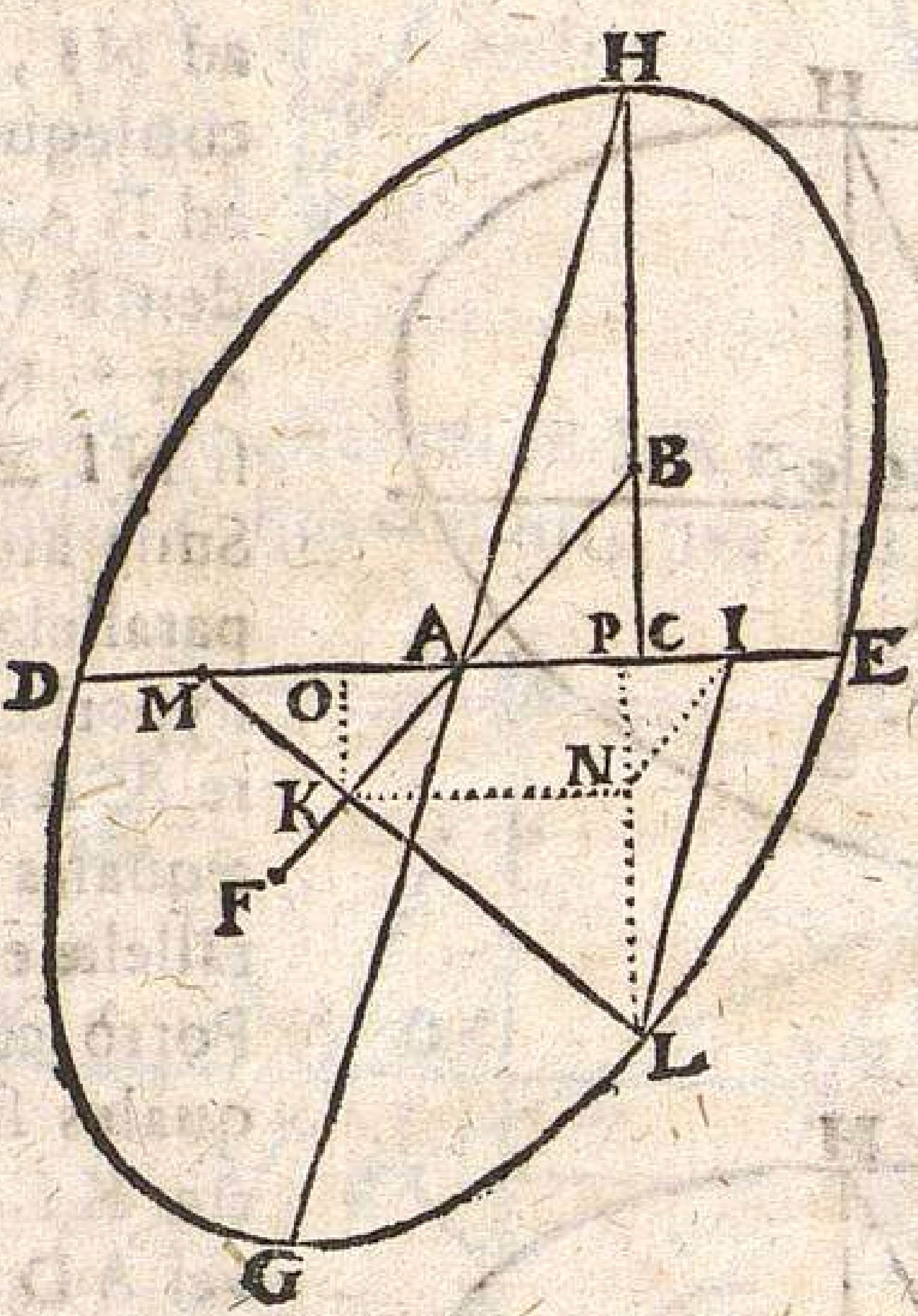


Fig. VIII.



erunt quoque residua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum sit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc est [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id est, ad A E quadratum, sive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

[1] *per 47 primi, & 5 secundi.*
[2] *per 4 & 22 sexti.*
[3] *per supra demonstr.*
[4] *per 15 quinti.*

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

tas ; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est ,) quadrata rectarum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectangula sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem , cui applicatæ insistunt , transversa; illa verò , cui eædem æquidistant , secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes , per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ , diametri simpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis , Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit , ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam , quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

Corollarium 1.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est : in Ellipsi , conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim LI vel huic vel illi axi applicata sit , eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectangulum sub partibus axis cui applicatio fit , ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri transversæ æquidistans ducitur, Ellipsin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minùs eandem seca-

Fig. I.

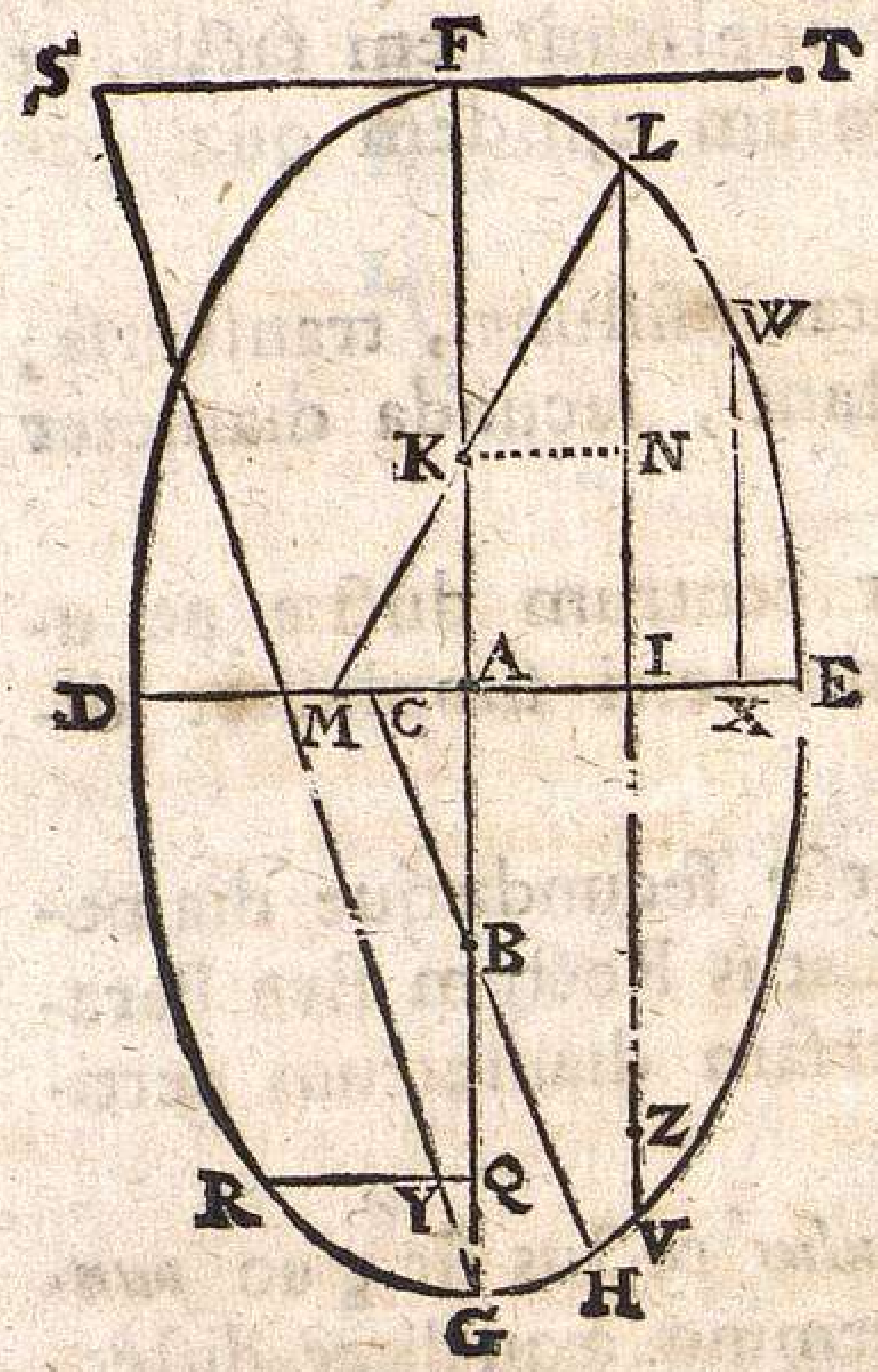
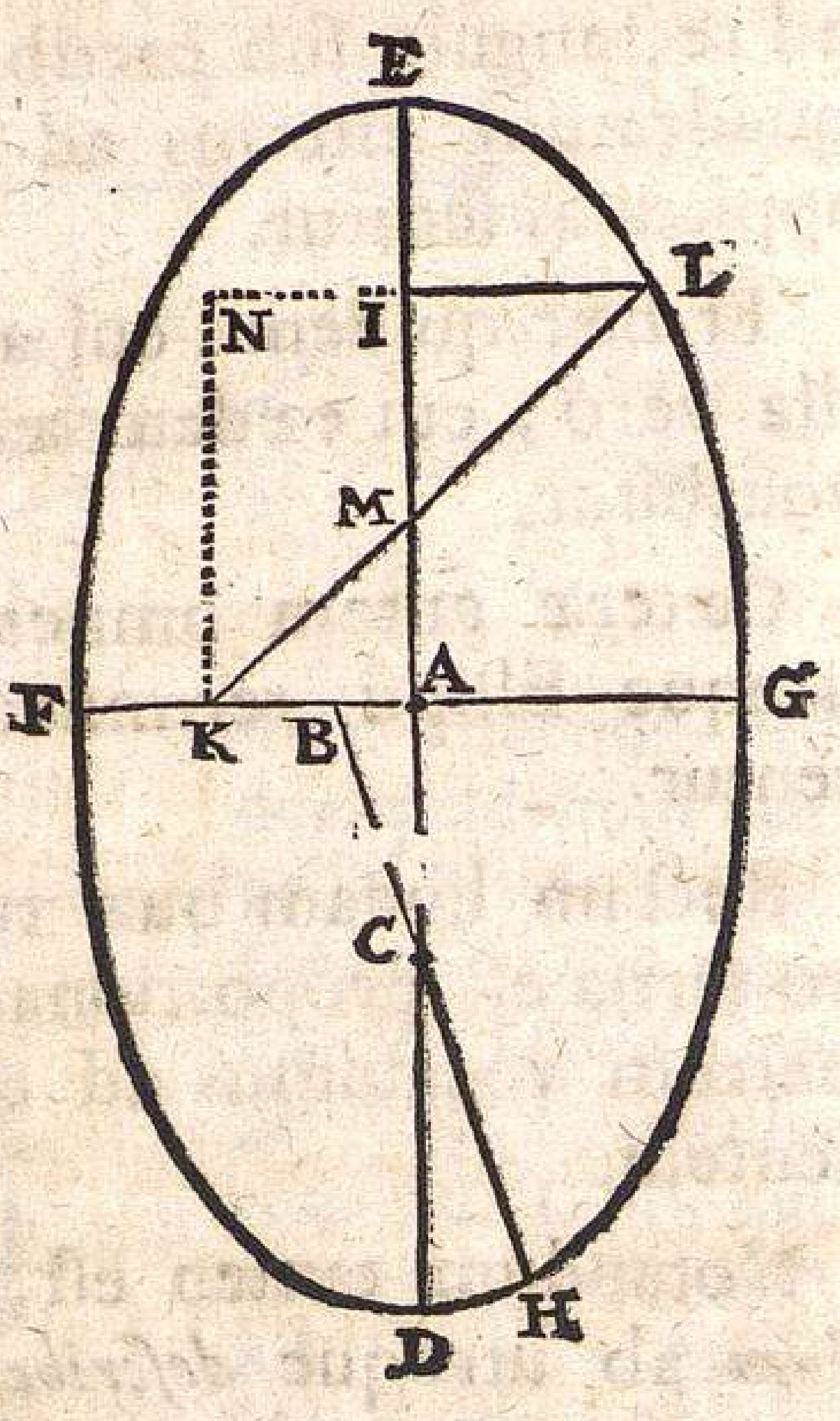


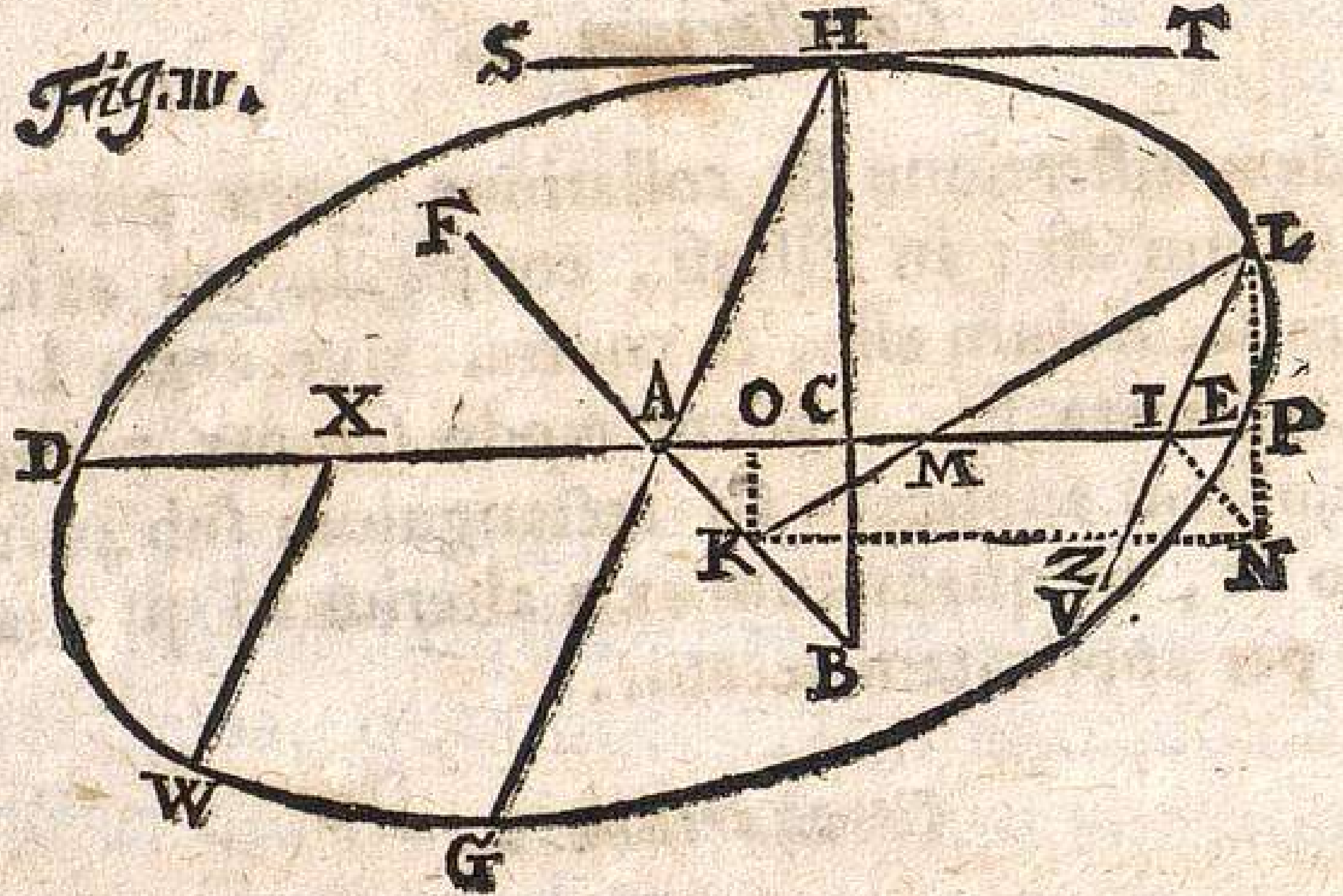
Fig. II.



re. Si enim per F[a] aut H[b] terminum secundæ diametri GF[a] vel GH[b] ductâ rectâ ST, transversæ diametro DE paralle-

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. III & similib.

Fig. III.



lâ, assumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod descriptum sit *describente* in statione KM, ducaturque

LI

LI [a] vel LP [b] ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut in triangulo MLI [a] vel MLP [b] recta ML, id est, perpendicularis FA [a] vel HC [b], major sit [1] quàm LI [a] vel LP [b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F [a] aut H [b] punctum, infra ductam ST, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

a in casu fig. I & similib. b in casu fig. III & similib. 1 per 18 primi.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum [2] utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG [a] vel HG [b] ad quadratum DE, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

2 per 18 hujus.

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est [3] quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum, erit [4] quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

3 per Cor. præced. 4 per 9 quinti.

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ [5], ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

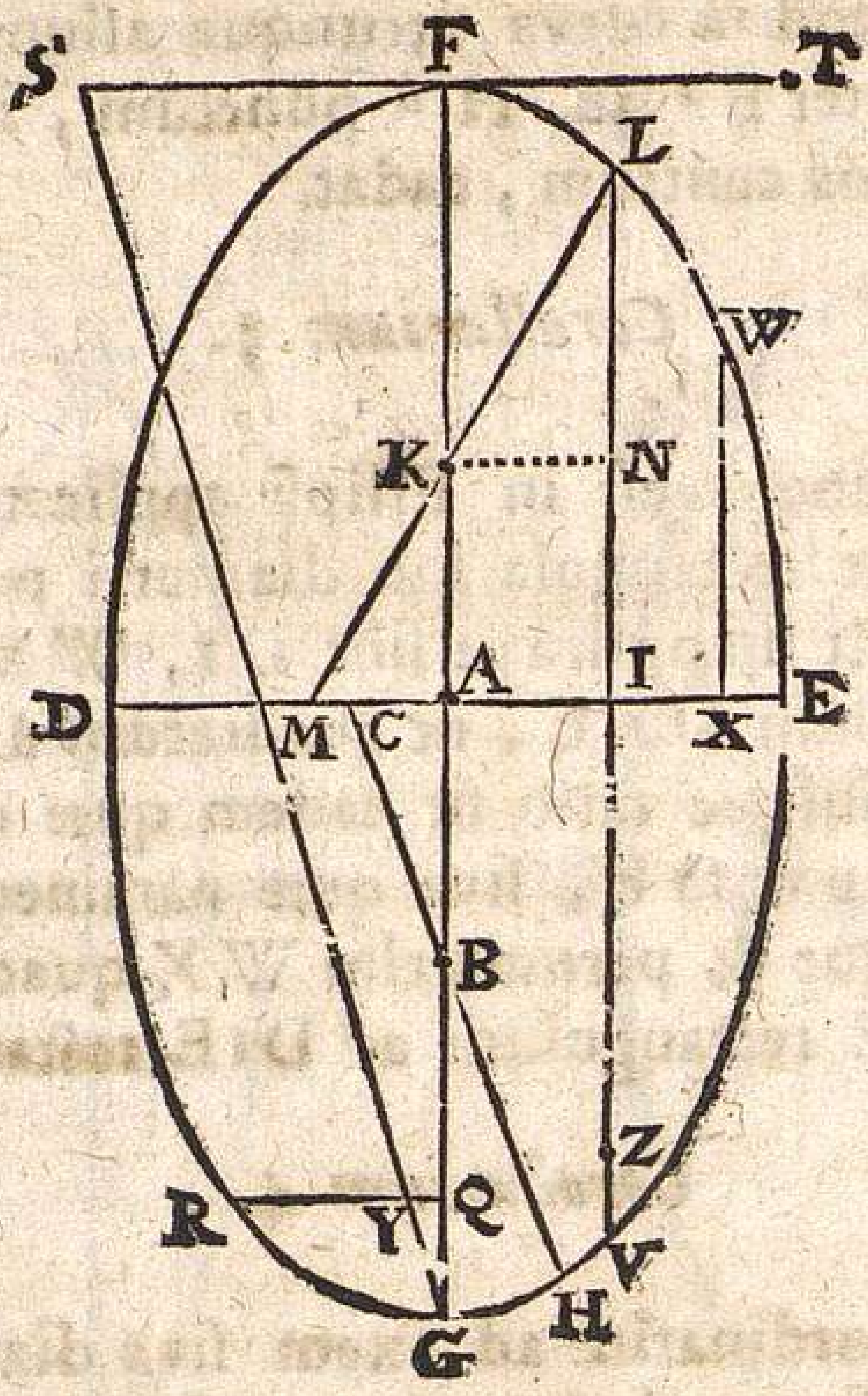
5 per Cor. præcedens.

Corollarium 6.

Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ diaa in casu fig. I & similib.

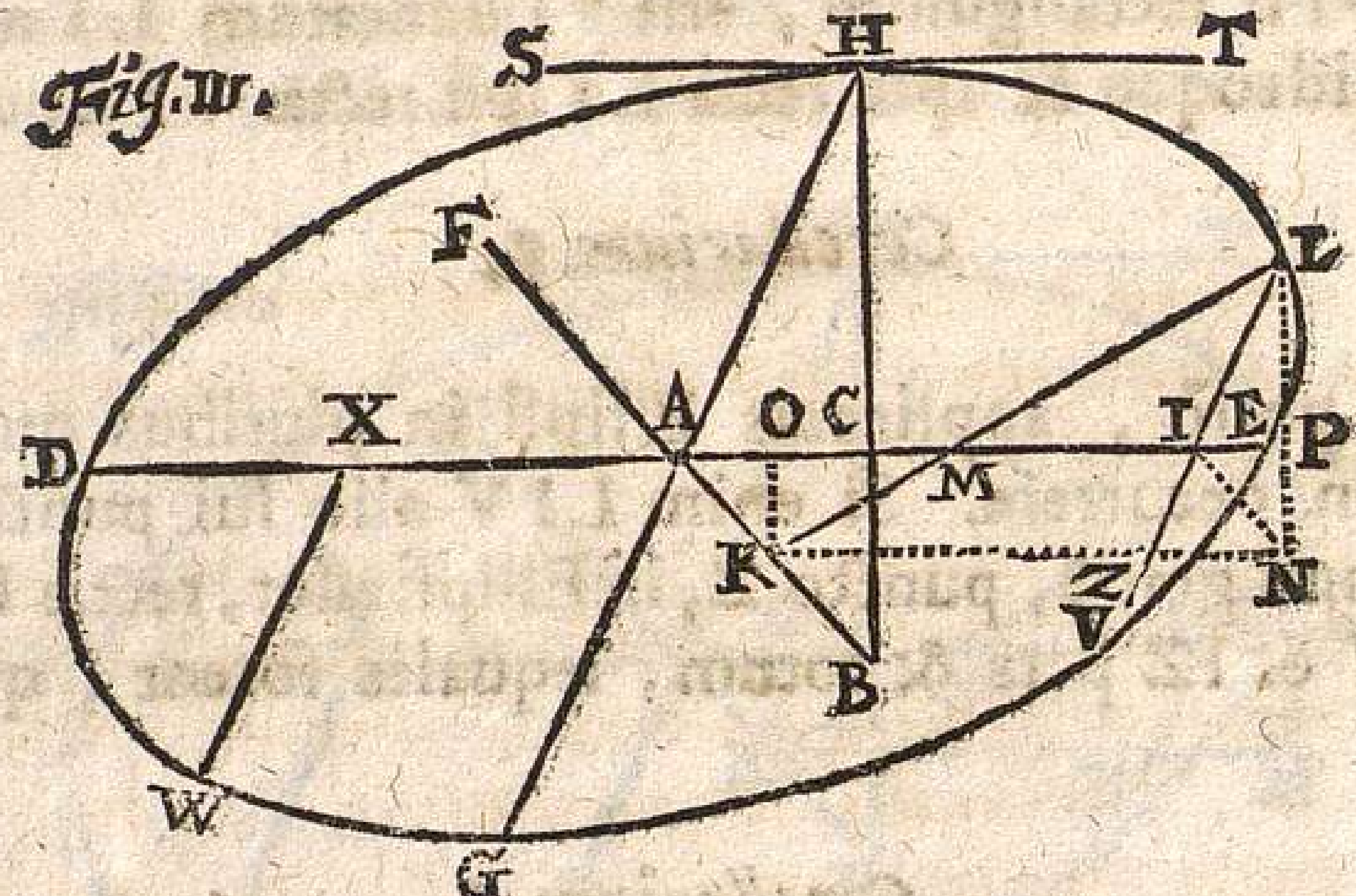
metri, ut puta FG a, eductâ parametro FS secundæ diametro DE parallelâ, jungatur SG, atque ad eandem diametrum recta

Fig. I.



quælibet ordinatim applicetur, ut RQ, quæ secet junctam SG in Y: fore rectangulum FQY quadrato applicatæ RQ æquale.

Fig. II.



1. per 19. hujus.
2. per Cor. 20 sexti.
3. per 1. sexti.

Quoniam enim est [1] GF quadratum ad DE quadratum, id est [2], GF ad FS, sive GQ ad QY, hoc est [3], GQF rectangulum ad YQF

YQF rectangulum, ut [1] idem GQF rectangulum ad RQ quadratum, æqualia erunt [2] YQF rectangulum & RQ quadratum: id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat. [1] per 15 hujus. [2] per 9 quinti.

Quæ ab Ellipsi ad diametrum applicatur potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipsam applicatam & diametri verticem abscinditur, deficiensque figurâ simili similiterque positâ ei quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuslibet diametris conjugatis, Ellipsis in plano describatur.

Ut si conjugatis axibus DAE & FAG [a] Ellipsis sit describenda, *describente* BC, quæ semi-axium AD, AF differentia sit, *intervallis* verò HC, HB, ipsis AF, AD utroque utrique æqualibus, in *angulo* DAG, curva describatur, eritque hæc ipsa Ellipsis quæsita. [a] in casu fig. I & similib.

At si aliis quibuslibet conjugatis diametris, obliquè sese intersecantibus, ut DE, HG [b], Ellipsis sit describenda: demissâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut HC, sumptâque in eadem seu in ipsa producta, si opùs fuerit, rectâ HB ipsi DA vel AE æquali, & per B & A ductâ rectâ BAF, si *describente* BC, *intervallis* verò HC, HB, in *angulo* BAC Ellipsis describatur, erit hæc ea ipsa quæ quæritur. [b] in casu fig. III & similib.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipsam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ sint: simul quoque innotescit, quo pacto & illis datis Ellipsis describatur.

THEOREMA XIII.

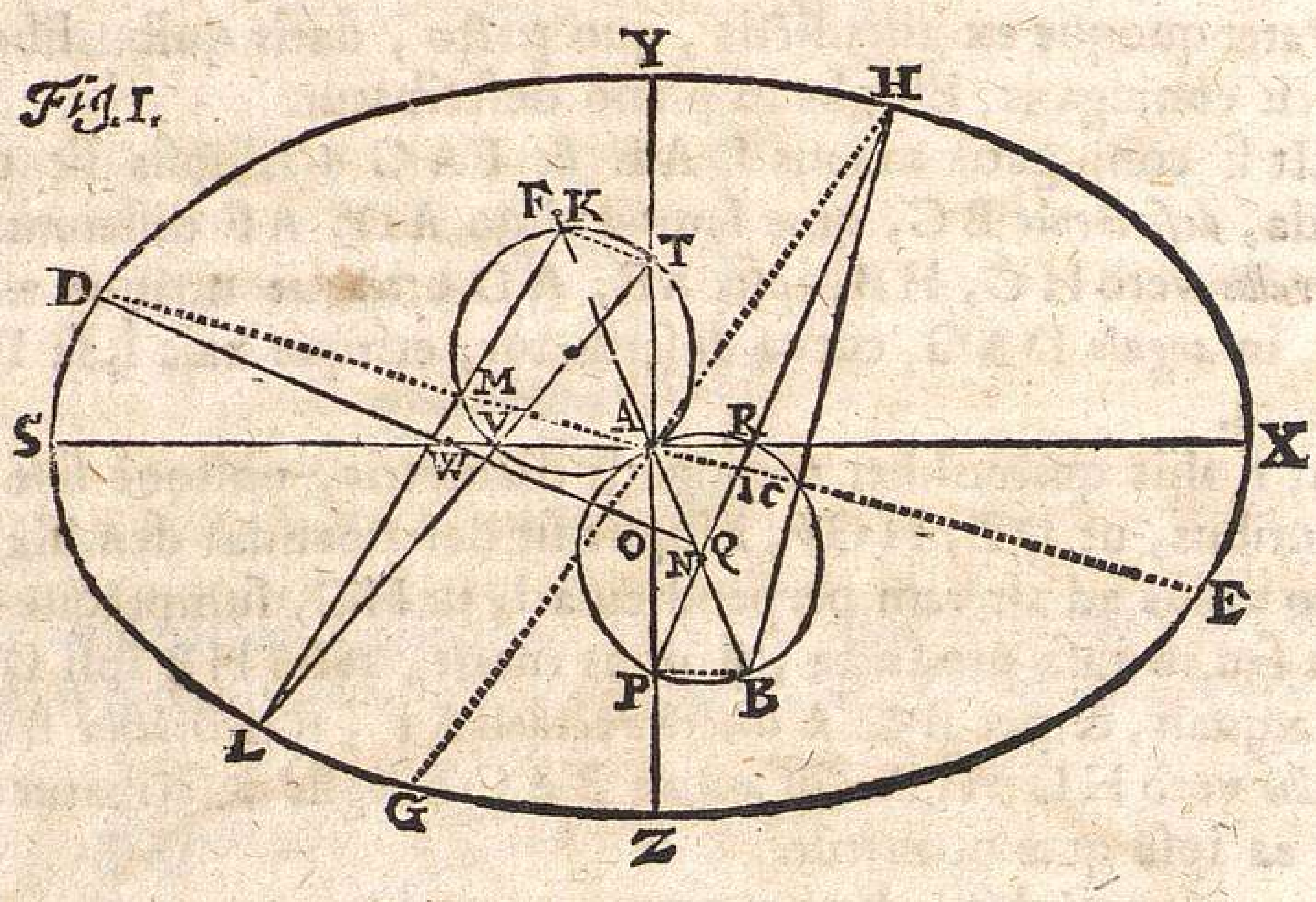
Propositio 14.

In Ellipsi circa quoscunque axes descriptâ, ductâ quælibet diameter transversa est, habetque secundam sibi conjugatam.

Sit in Ellipsi SYXZ, cujus centrum A, axes verò SX, YZ, ducta quælibet diameter DAE; & sic describens OW in ea statione, uti fuit cùm descriptum est punctum D vel E, ita ut intervalla sint DW, DO. Deinde applicatâ eâdem describente in statione reciproca, hoc est, in alterutro angulorum qui ipsi WAO deinceps sunt, veluti PR, ita ut rectæ AR, AP ipsis AW, AO reciprocè sint æquales, nimirum AR ipsi AO, & AP ipsi AW, ac proinde triangulum WAO [1] simile & æquale triangulo PAR, ab Ellipseos puncto H, quod describenti PR in directum est, ducta sit diameter altera HAG. Dico diametrum DE transversam esse, HG autem secundam ipsi DE conjugatam: id est, si, ductâ HC ad DE perpendiculari, in eadem HC, produ-

[1] per 4 primi.

Fig. I.



ctâ, si opùs fuerit, sumatur HB ipsi DA æqualis; ductâque per B & A rectâ BAF, in angulo BAC, intervallis verò HC, HB, Ellipsis describatur, cujus utique conjugatæ diametri sunt in DE, & HG [2]: dico illam cum exposita Ellipsi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

[2] per 13 hujus ejusque Coroll. 7.

Assumpto enim in exposita Ellipsi alio quopiam puncto L, quod quidem descriptum sit describente in statione TV, diametro TV circulus describatur, qui, propter angulum TAV rectum [a], necessariò quoque per A transibit [3], lineasque BAF & DAE

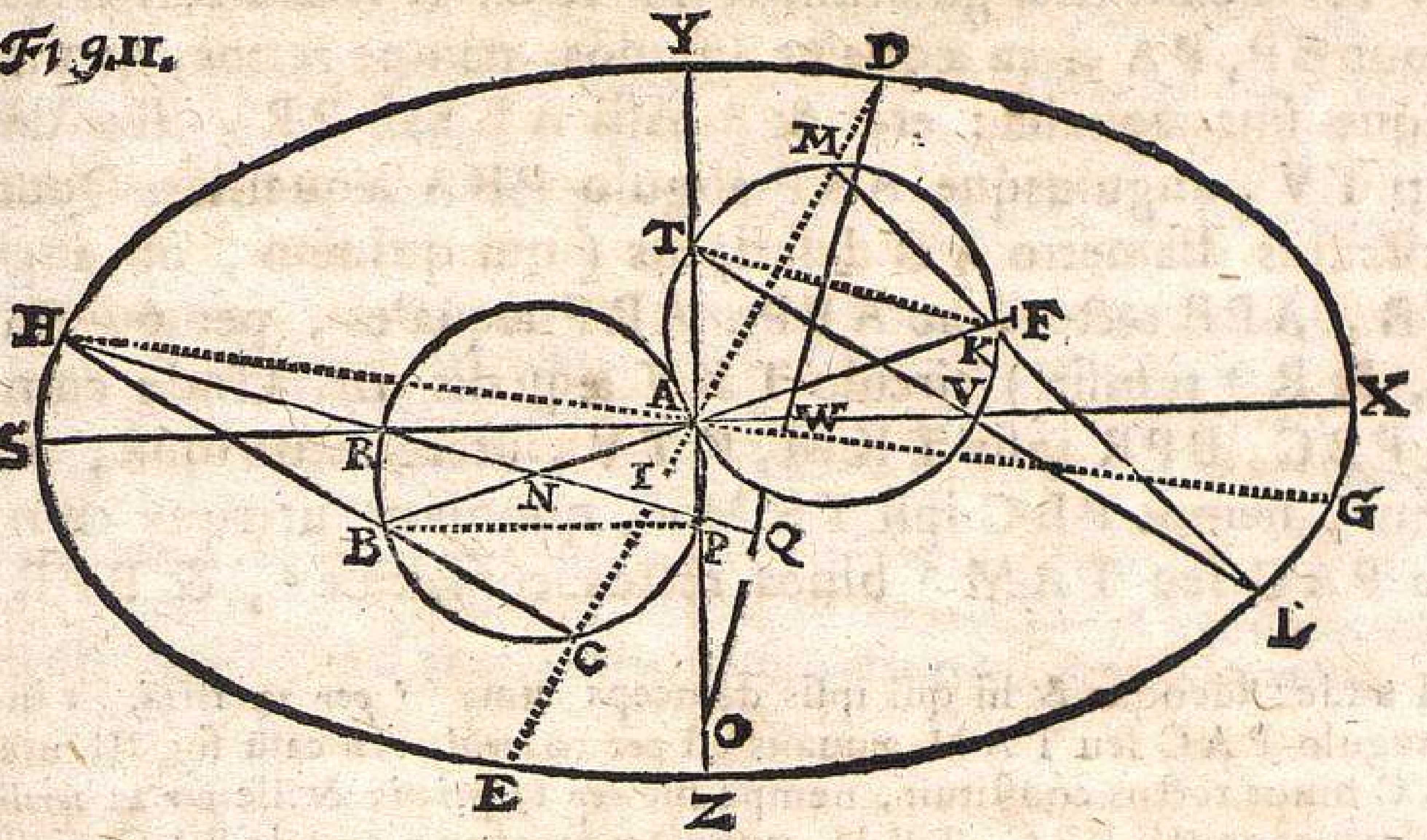
[a] aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coïncidit, uti est casus in fig. VI.

[3] per conversam 31 tertii.

DAE alibi etiam ſecabit [b], uti in K & M. Deinde juncta KM, eaque productâ versùs L, agantur TK, PB.

[b] aut illarum alteram continget, alteram verò ſecabit, ut in caſib. fig. III & IV.

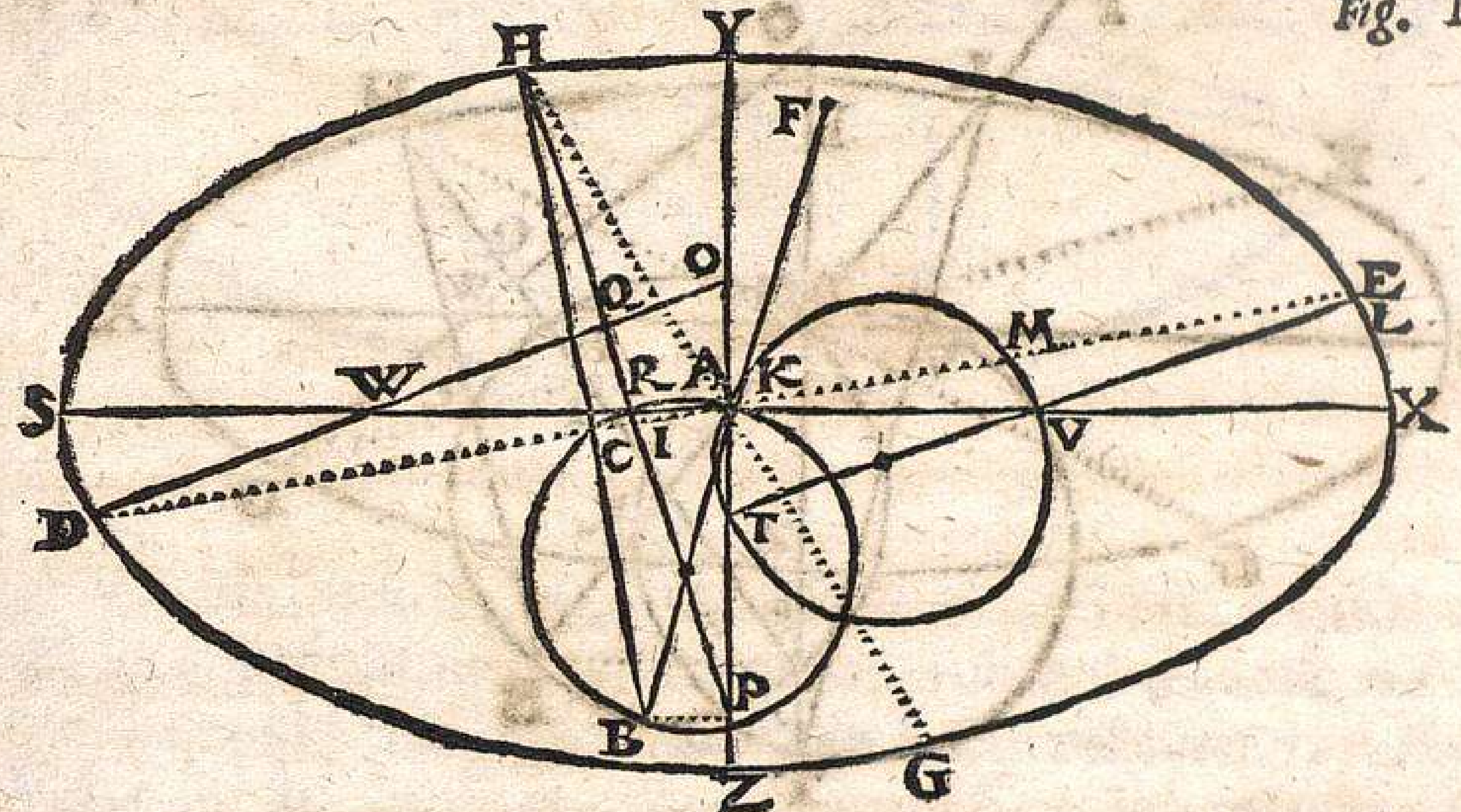
Fig. II.



Cum igitur ipſarum DO, HP, productarum, ſi opùs fuerit, interſectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob ſimilitudinem trianguli OQP cum utroque triangulorum OAW, RAP [c], notato ipſarum DE, PH interſectionis puncto I, erunt triangula

[c] vel, ſi puncta O & P coincidant, ob angulos AOW, APR ſemi rectos.

Fig. III.



IQD, ICH æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula ODA, PHB latera OD, DA lateribus PH, HB, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant: erit & [1] baſis OA

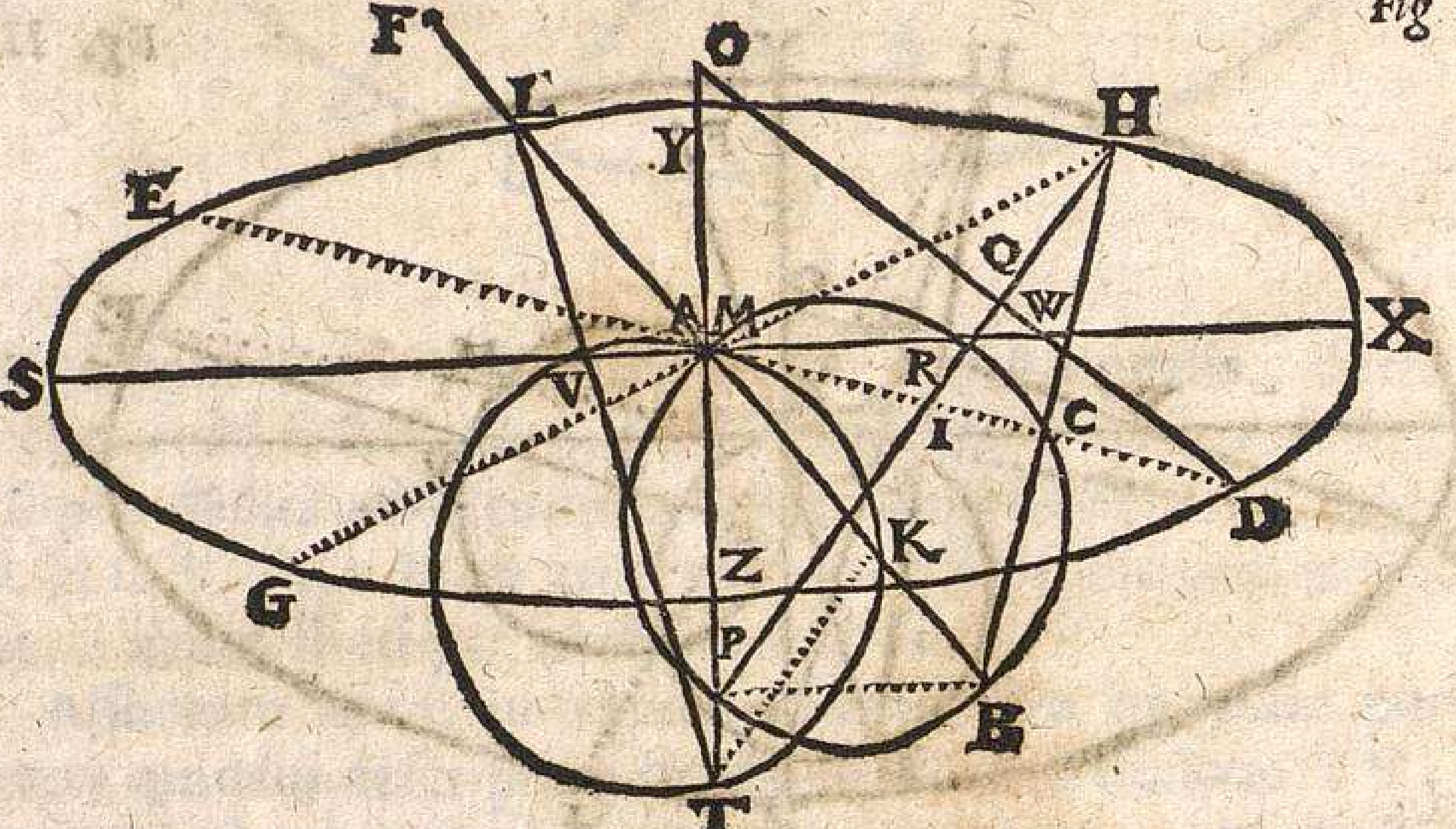
[1] per 4 primi.

OA, sive recta AR, basi PB, angulusque DOA, id est PRA, angulo HPB æqualis; ac propterea [1] recta PB ipsi RA parallela. Hinc cum triangulorum RAP & BPA latera RA, AP lateribus BP, PA circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique sint æqualia: erit & [2] basis AB basi PR, seu describenti TV, angulusque ARP angulo PBA æqualis. Quocirca & circulus diametro AB descriptus (qui quidem, ob angulos ACB, APB rectos, ac ABP, ARP æquales, per puncta C, P [3], & R [4] transit) circulo TKV æqualis erit. Unde cum anguli PBC, BPR ipsis TKM, KTV, uterque utrique, æquales sint, nempe PBC ipsi TKM [d], quoniam uterque cum angulo PAC seu TAM [5] binos rectos constituit [e], & BPR ipsi

[1] per 27 primi.
[2] per 4 primi.
[3] per conversam 31 tertii.
[4] per conversam 21 tertii.

[d] pro casu fig. II adde: ideoque & hi qui ipsis deinceps sunt. [5] *per 22 tertii.* [e] in casu fig. II uterque angulo PAC seu TAM æqualis est *per 20 tertii.* In casu fig. III uterque cum angulo PAC binos rectos constituit, nempe hic *per 13 primi*, & ille *per 22 tertii.* In casu fig. IV æquales sunt anguli PBC, TKM, quoniam prior cum angulo PAC, posterior verò cum angulo TVA (qui quidem PAC, TVA æquales sunt *per 32 tertii*) binos rectos constituit *per 22 tertii.* In casu fig. V. TKM sive TAM æqualis est angulo PBC, quia uterque cum angulo PAC duos rectos constituit *per 13 primi & 20 ac 22 tertii.* In casu fig. VI æquales sunt anguli PBC, TKM, quoniam angulus PAC æqualis est ei, qui in segmento AVM constitueretur *per 32 tertii*, quorum quidem prior cum angulo PBC, posterior verò cum angulo TKM binos rectos constituit *per 22 tertii.*

Fig. IV.



KTV, propterea quòd uterque [6] angulo BAR seu KAV sive FAV æqualis est [f]; sintque porrò, ob æquales angulos PAB, TAK [7], tam peripheriæ PB, TK, quàm earum subtensæ, nempe,

[6] *per 20 tertii*, atque in casu fig. III per eadem & 32 *tertii.*
[f] In casibus fig IV & V tam angulus BPR seu BAR, quàm angulus KTV cum angulo KAV duos rectos constituit *per 13 primi, & 22 tertii.* [7] *per 26 & 29 tertii.*

pe latera PB, TK dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia *g*: apparet ſicuti rectæ BC, PR productæ concurrunt in H, ita quoque rectas KM, TV productas, & quidem, cum ipſi PH æqualis ſit TL, in ipſo puncto L concurſuras. quippe ex antedictis [1] ſimilia atque in totum æqualia ſunt triangula BPH, KTL, adeoque & latus KL lateri BH æquale. Eſt autem [2] & ſubtenſa KM ſubtenſæ BC æqualis *h*, ob æquales an-

g In caſu fig. III, ubi recta BAF tangit circulum TKV, æqualia ſunt latera BP, TK ob angulos BAP, TVK æquales *per 32 tertii.* In caſu fig. VI, ubi recta PAY contingit circulum TKV, æquales ſunt ſubtenſæ BP, TK ob angulos PAB, TMK æquales *per 32 tertii.*

[1] *per 26 primi.* [2] *per 26 & 29 tertii.* *h* In caſu fig. III. KM ipſi BC eſt æqualis, quandoquidem angulus qui conſiſteret in ſegmento KTM æqualis foret angulo FAM ſeu BAC *per 32 tertii.* In caſu fig. IV. KM ipſi BC eſt æqualis, quandoquidem angulus KTM æqualis eſt angulo KAC ſeu BAC *per 32 tertii.* In caſu fig. V. KM ipſi BC eſt æqualis, quandoquidem angulus in ſegmento BC æqualis foret angulo KAM, utpote cum tam hic quàm ille cum angulo CAB duos rectos conſtitueret *per 13 primi & 22 tertii.*

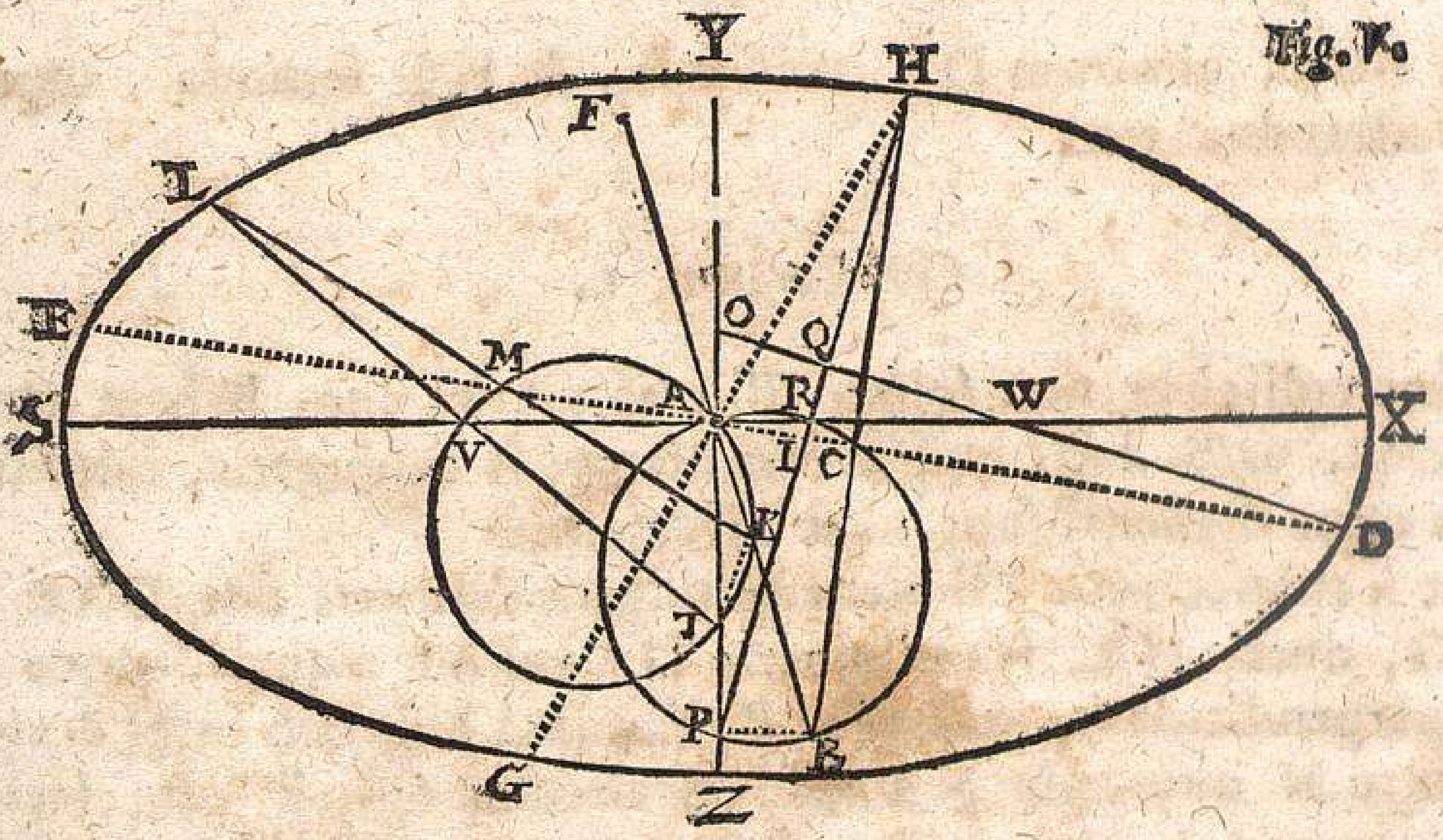


Fig. V.

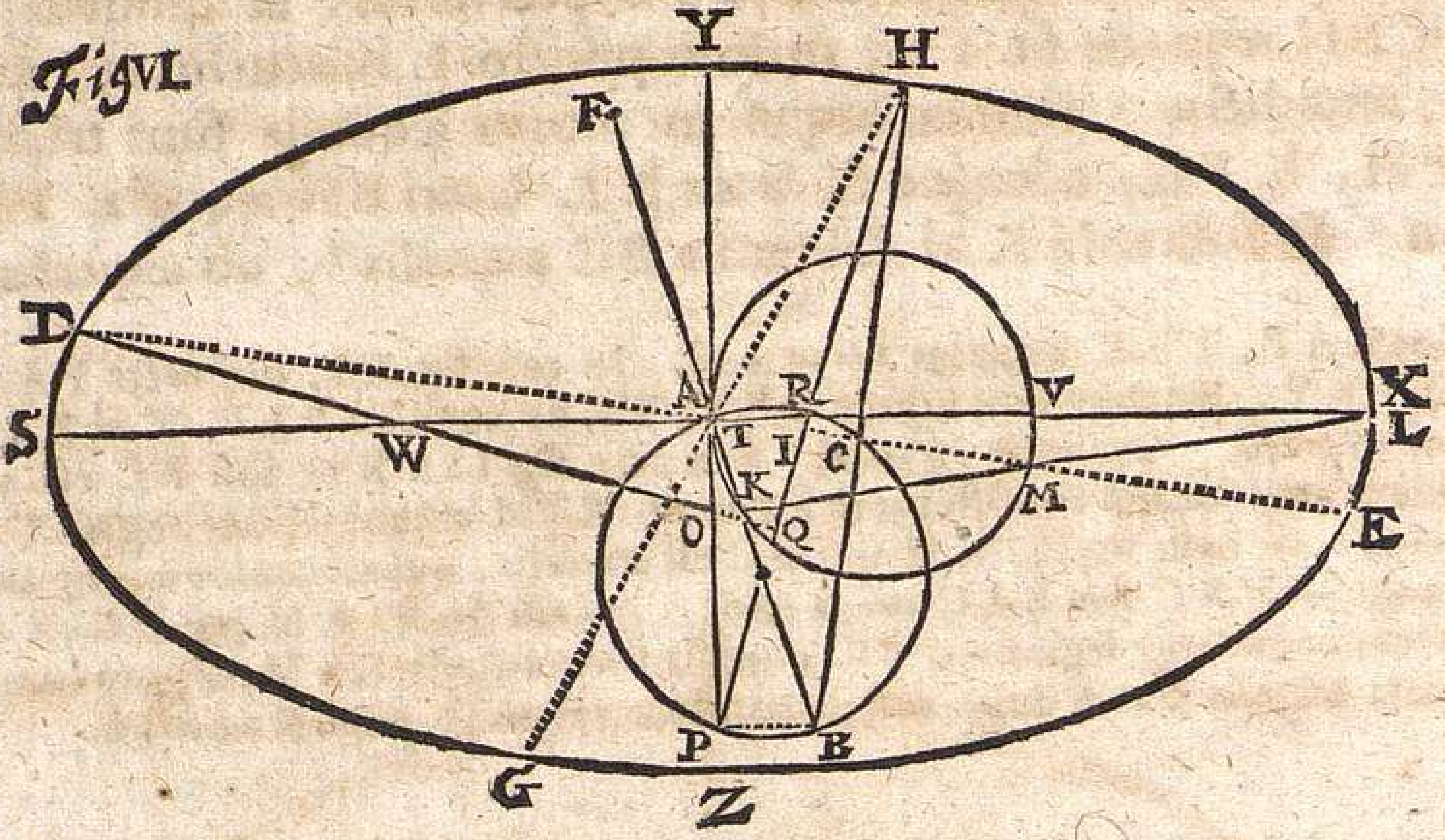
gulos KAM, BAC. Quocirca & LM ipſi HC æqualis erit. Unde cum deſcribens ſit KM, utpote ipſi BC æqualis, ac conſtituta in angulo KAM (qui cum ipſo BAC vel idem *i*, vel ei ad verticem *k*, vel denique ipſi deinceps eſt *l*) aut certè cum alterutro crurum coïncidens *m*, atque ex demonſtratis æqualia quoque ſint intervalla HB, HC intervallis LK, LM: ſequitur punctum L, in expoſita Ellipſi utcunque ſumptum, id eſt, totam Ellipſin SYXZ, eſſe in Ellipſi, quæ in angulo BAC, intervallis HB, HC, deſcribitur, ideoque alteram alteri per

i ut in caſu fig. VI.
k ut in caſibus fig. I, & II.
l in caſu fig. V.
m ut in caſibus fig. III & IV.

[1] per 13 hujus, ejusque Cor. 7.

omnia congruere. Sunt autem [1] hujus conjugatæ diametri DE, HG. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-

Fig. VI.



metri erunt, nimirum DE transversa, & HG secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 1.

Hinc colligitur non solùm Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuslibet diametris conjugatis, ejus Ellipseos cujus diametri sunt, axes inveniantur.

Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint DAE & HAG, ductâ HB, semidiametro DA vel AE æquali, atque ad DE perpendiculari, junctâque BA ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo NA vel NB circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ HP, HR semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ SX & YZ, exhibebunt magnitudine ac positione quæsitos axes ejusdem Ellipseos, cujus DAE & HAG conjugatæ diametri existunt.

[2] per 4 primi.

Ductâ enim PB, sumptâque AO ipsi AR, ideoque [2] & ductæ PB æquali, agatur DO, occurrens ipsi SX in W. Cum itaque ob angulum ACB rectum descriptus circulus etiam per C

[3] per 3 tertii.

transeat [3], erunt anguli PBH & OAD æquales, quoniam uterque

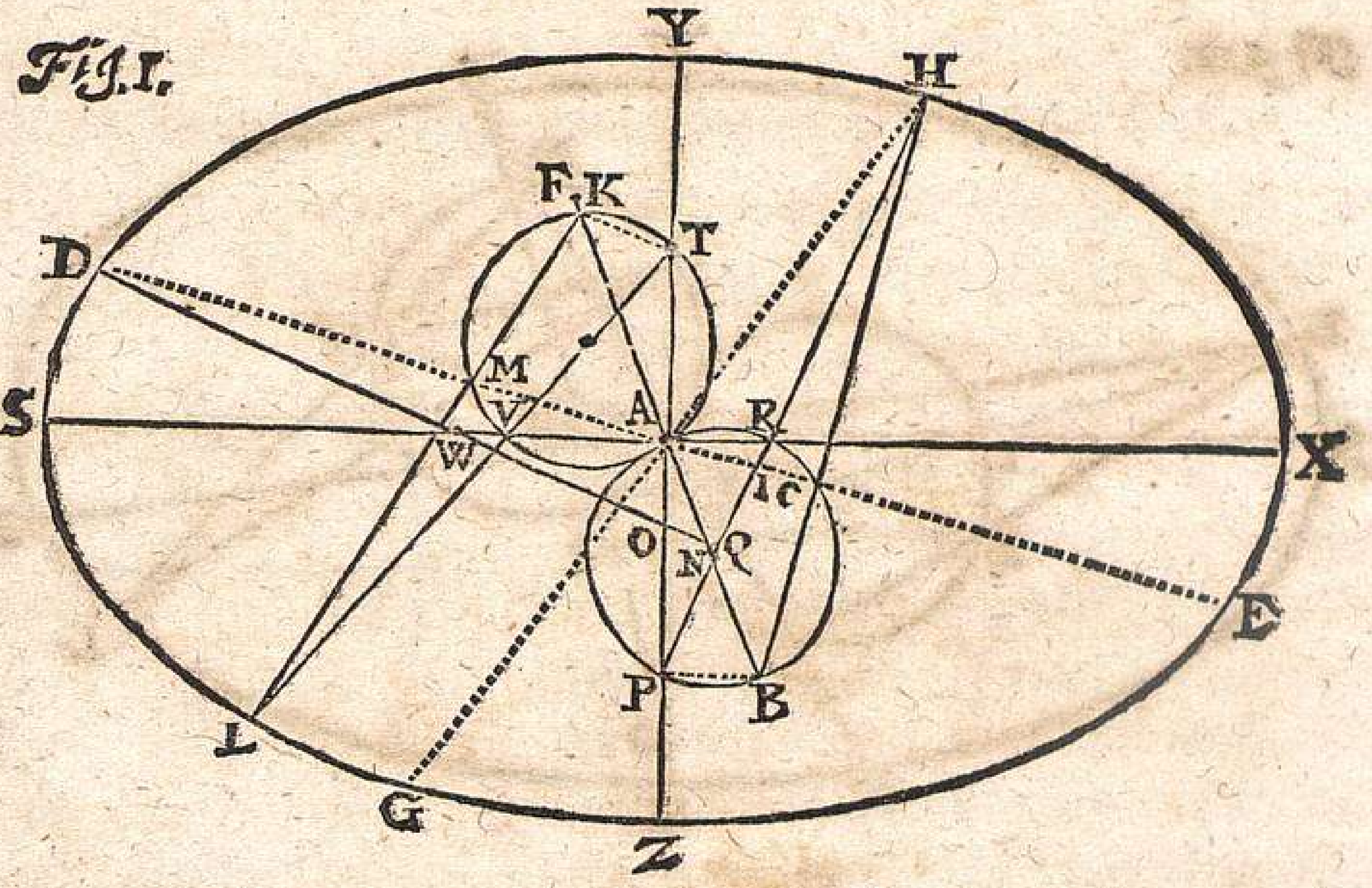
que cum angulo [a] PAC seu PBC duos rectos constituit [1]. Unde cum triangula OAD, PBH latera OA, AD lateribus PB, BH, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] basis OD basi PH, id est, rectæ SA vel AX, ut & angulus AOD angulo BPH seu [3] PRA æqualis. Hinc cum æqualia sint triangula RAP, OAW, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] RAP, OAW rectos, nec non latera RA & OA æqualia: erit etiam [5] latus AW lateri AP, ut & latus OW ipsi PR æquale. Quocirca cum [6] *describentes* sint

[a] nimirum *cum angulo* PAC in casu fig. I & similibus, & *cum angulo* PAC *seu* PBC, in casu fig. II & similibus.

[1] *per 13 primi & 22 tertii.*

[2] *per 4 primi.* [3] *per 29 primi.* [4] *per 31 tertii & 13 primi.* [5] *per 26 primi.* [6] *per 13 hujus.*

Fig. I.



OW, PR ejus Ellipseos, cujus axes sunt SX, YZ, & quidem in statione reciproca constitutæ, *punctaq; efficientia* D & H: manifestum est ex superiori demonstratione, Ellipsin, quæ axibus SX, YZ describitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ sunt DE & HG, omnino eandem esse:

Atque ita, quæ de Ellipsi, circa quoscunque axes descripta, superiori Theoremate proposita ac demonstrata sunt, etiam cuilibet Ellipsi, & circa quascunque diametros conjugatas descriptæ, convenire, manifestum est.

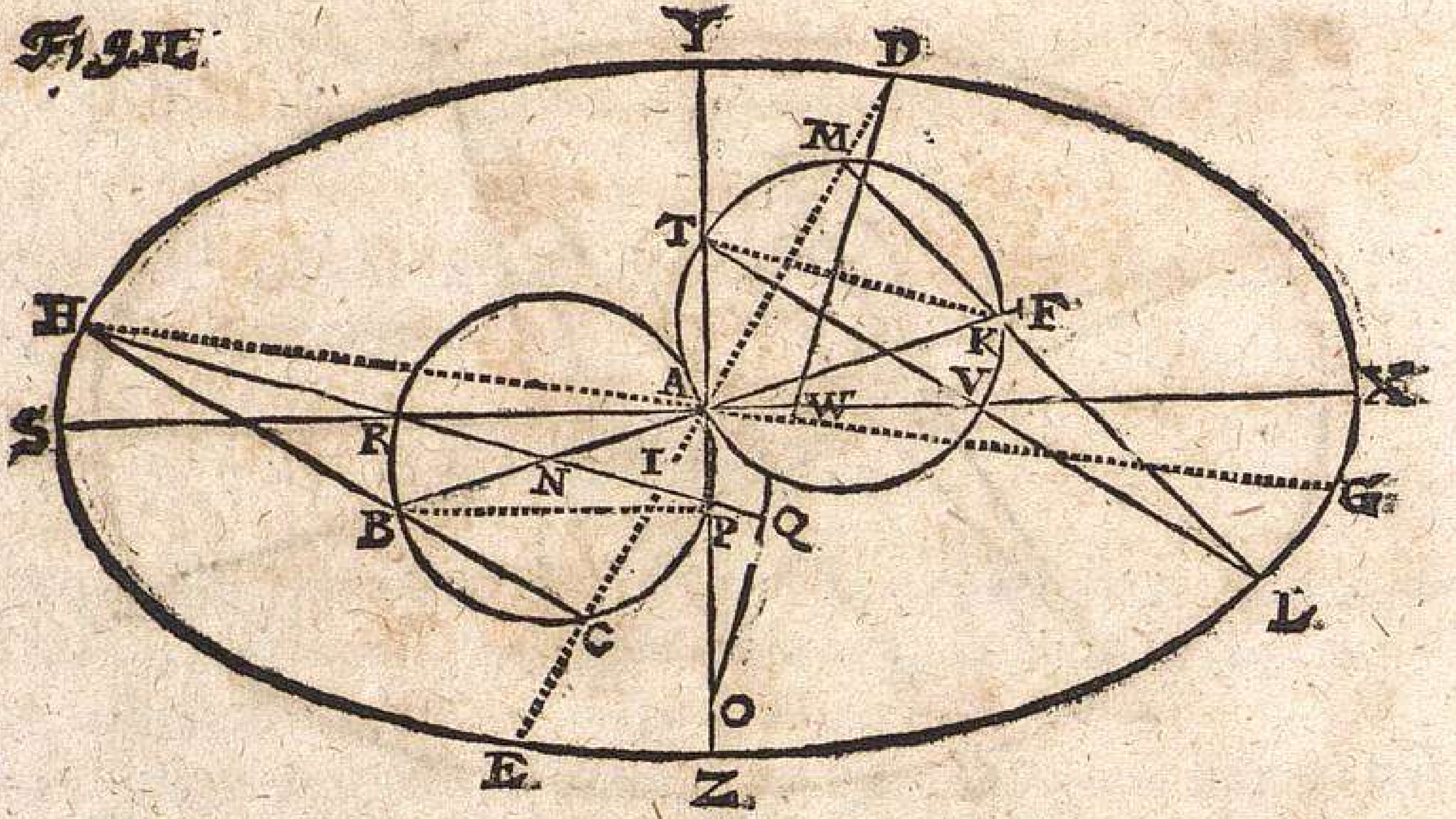
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonstratione ejusdem Theorematis, in Ellipsi diametros omnes à centro bifariam secari. demonstratum enim est, in diametro DE, utcunque ductâ, partem AE parti DA æqualem esse, cum utraque *intervallo* HB æqualis sit.

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum DE, HG transversa sit DE, & HG se-

Fig. II.



[1] per 14 hujus ejusque Corol. 1.

cunda; cum in Ellipsi ducta quælibet diameter [1] transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque HG transversa. At verò & DE secundam esse ipsi HG conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II transpositis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

Corollarium 4.

Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit [2].

[2] per 2 Cor. 13. & 3 Cor. 14 hujus.

Co-

Corollarium 5.

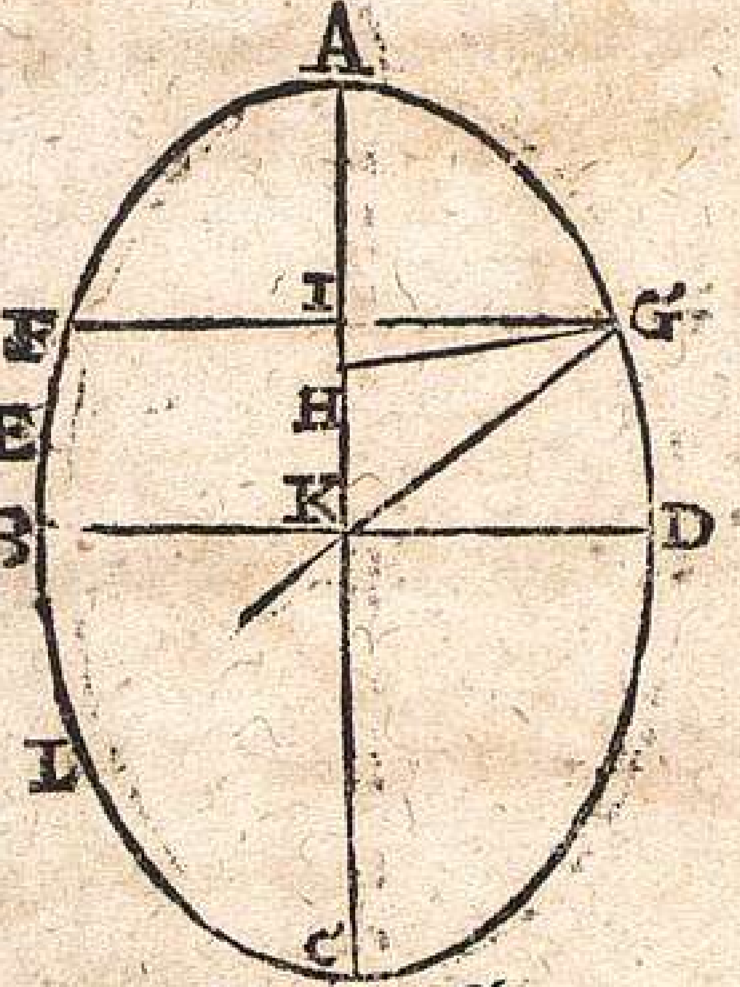
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipseos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipsin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipsin cadere [1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere [2] possit.

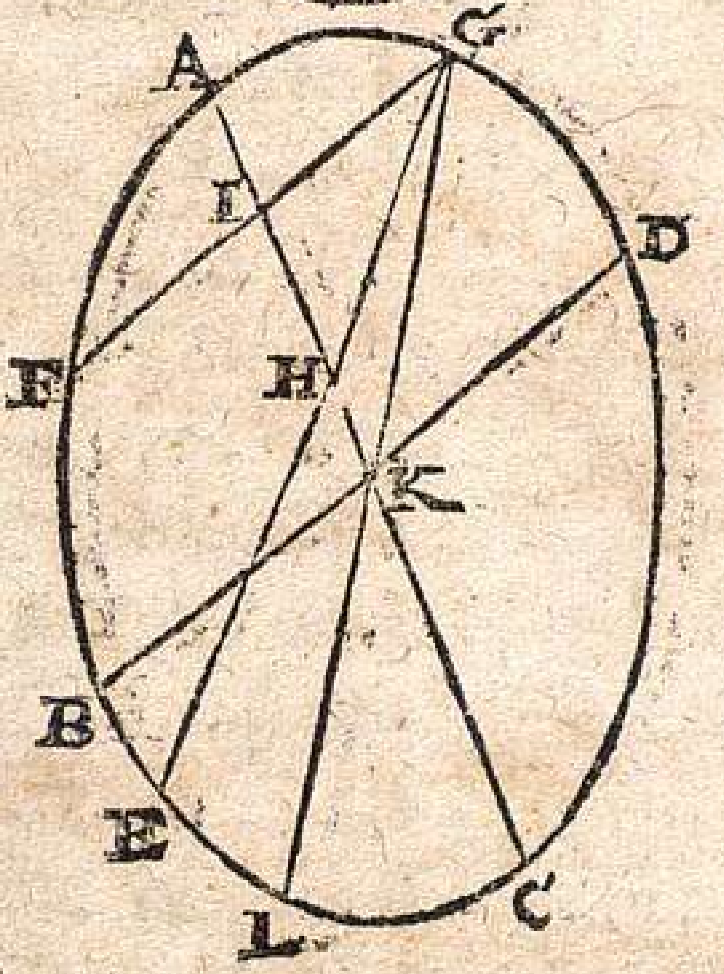
[1] per Cor. præcedens. [2] per 5 Cor. 13 hujus.

THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Quæ bina quælibet Ellipseos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc est, conjugatæ diametro æquidistans.





Si enim in Ellipsi ABCD, cujus centrum K, à diametro AKC bifariam divideretur recta EHG, quæ neque per centrum transeat, neque conjugatæ diametro BD æquidistans sit; applicatâ ordinatim GIF, ductâque per centrum rectâ GKL: Quoniam esset, ut GH ad HE, ita tam GI ad IF [3]; quàm GK ad KL [4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque AC parallela [5]; ideoque ad alteram ipsi conjugatam, nempe ad BD, ordinatim applicata [6], atque Ellipsi in tribus punctis occurreret; quod fieri non posse supra [7] ostensum est.

[3] per 4 Cor. 13 hujus. [4] per 2 Cor. 14 hujus. [5] per 2 sexti. [6] per 13 & 3 Cor. 14 hujus. [7] in 5to Coroll. 13 hujus.

Corollarium 1.

Ideoque si diameter rectam quamlibet in Ellipsi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit [8].

[8] per 4 Cor. 13, & 15tam hujus.

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumvé diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque [2] invenire liceat.

[1] per 1 Cor. 15 hujus.

[2] per 1 Cor. 14 hujus, aliterve, ut cuilibet obvium est.

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere [3]: utpote cum ipsa [4] vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

[3] per 5 Cor. 14 hujus.

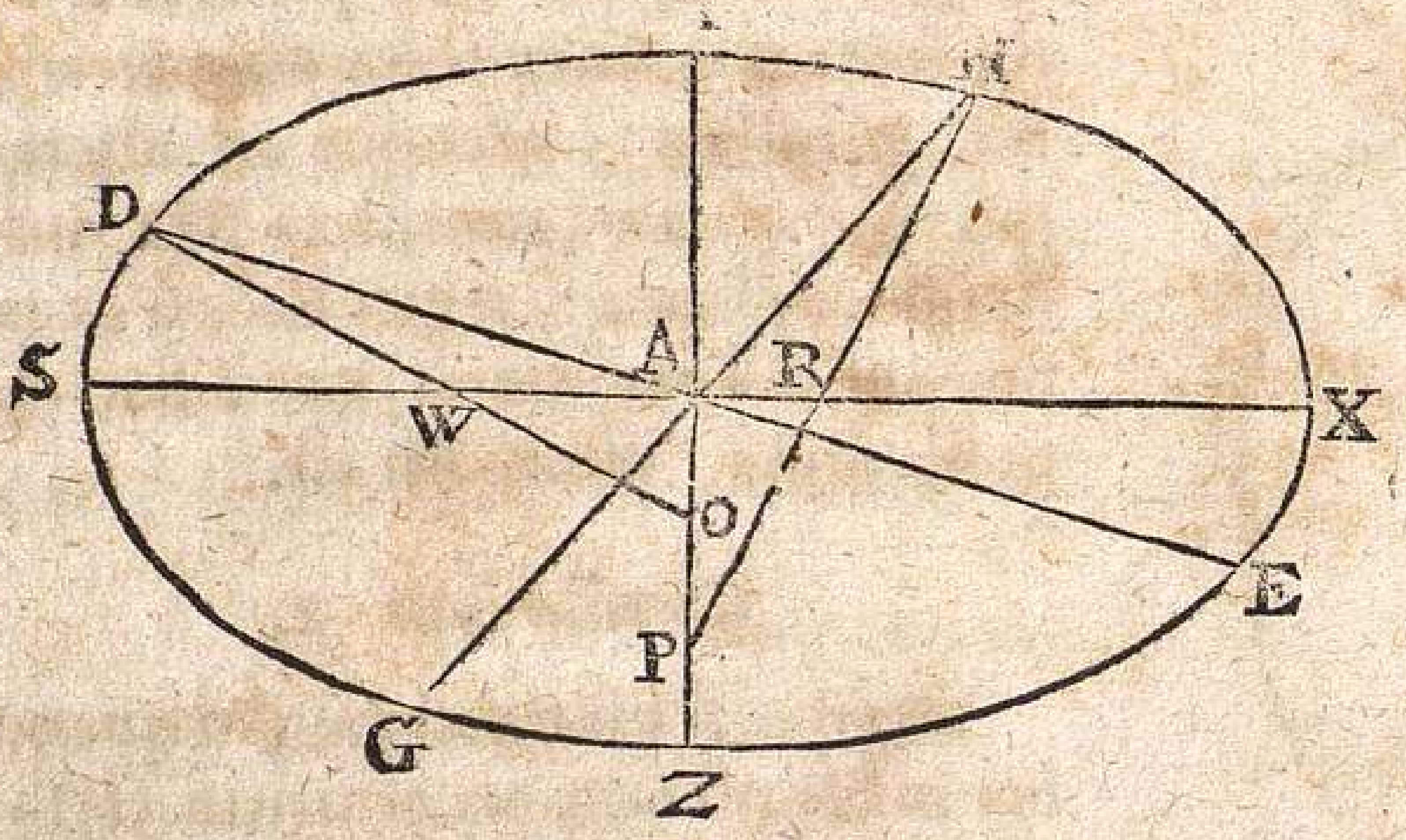
[4] per 15 hujus ejusque Cor. 1.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi SYXZ ductæ utcunque diametro DAE altera conjugata invenienda sit. Inventis [5] axibus SAX & YAZ, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad YAZ, applicatâ rectâ, ut DO, semi-axi alteri



SA æquali, quæ producta, si opùs fuerit, secet eundem axem alte-

[5] per 2 Cor. 15 hujus.

alterum, uti in W, applicetur in ſtatione reciproca ipſi OW, eidem æqualis recta PR, nempe ut AP, AR ipſis AW, AO ſingulæ ſingulis æquales ſint, ac producta PR Ellipſi occurrat in puncto H, à quo ſi per centrum A ducatur recta HAG, Ellipſi terminata: conſtat, per ea, quæ ad Propoſitionem 14tam hujus libri demonſtrata ſunt, eandem HAG eſſe diametrum ipſi DE conjugatam.

Atque ita ſimul apparet, ſingulis diametris ſuas quoque diſtinctas conjugatas diametros eſſe, eidemque diametro unam tantùm conjugatam duci poſſe.

Corollarium.

Unde porrò perſpicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipſi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipſi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidiſtans; erit eadem recta [2] contingens quæſita.

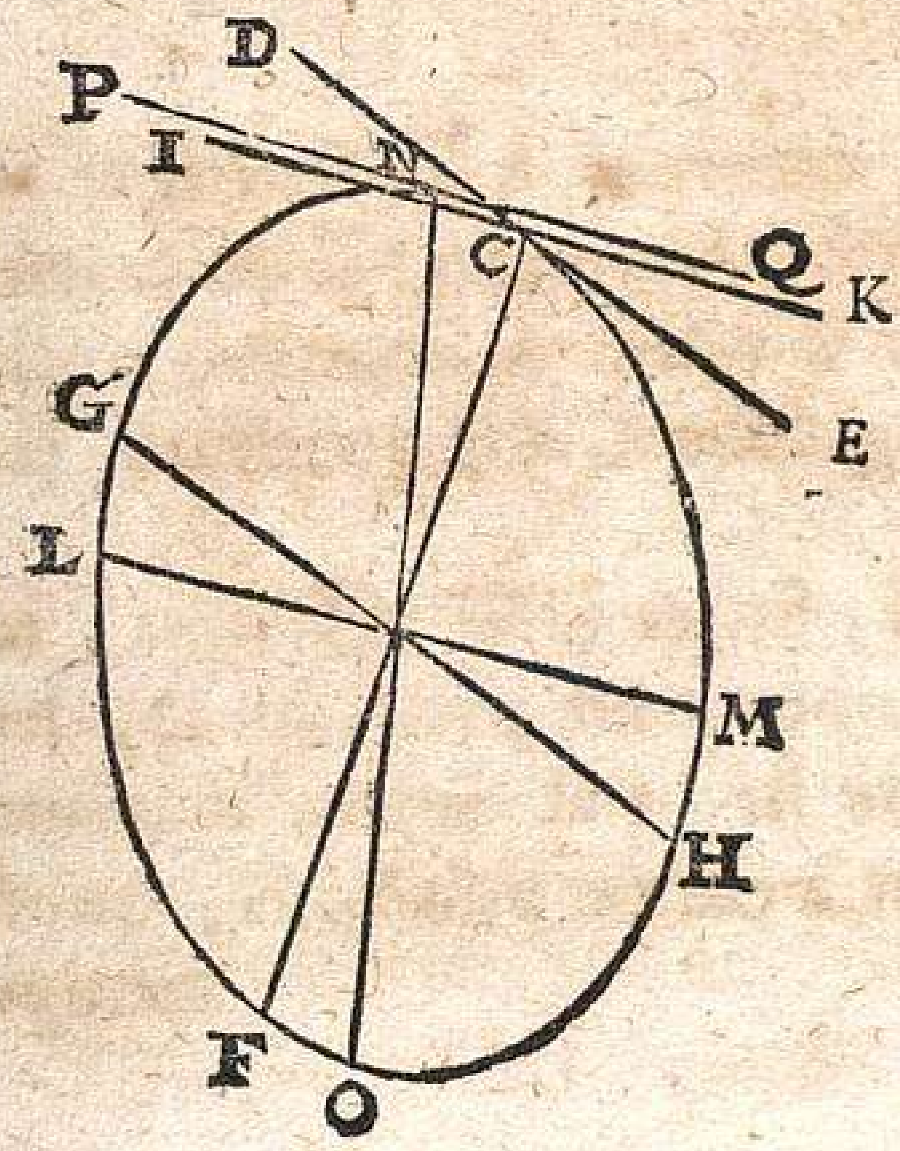
[1] *per 16 hujus.*

[2] *per 4 Cor. 14 hujus.*

THEOREMA XV.

Propoſitio 17.

Ellipſin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela eſt diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipſin CHFG in puncto C recta DCE, parallela diametro GH, quæ conjugata ſit diametro CF, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipſin non contingere.

Si enim fieri poteſt, contingat eandem quoque in puncto C recta ICK, diametroque LM, eidem ICK æquidiſtanti, altera conjugata ducatur NO, (quæ cum à priori CF

[1] per 4 Cor. 14 hujus. [2] per 2 Cor. 13 hujus. [3] per idem Coroll.

CF diversa sit [1], punctum N cum puncto C non coincidet,) ac per N ipsi LM, ideoque & contingenti ICK, æquidistans ducta sit PQ. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta ICK infra rectam PNQ: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta PNQ, infra contingentem ICK: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo ICK Ellipsin. Eadem de omnibus aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

Corollarium.

[4] per Coroll. præcedens. [5] per 4 Cor. 18 hujus.

Constat itaque [4] in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi [5]. & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

THEOREMA XVI.

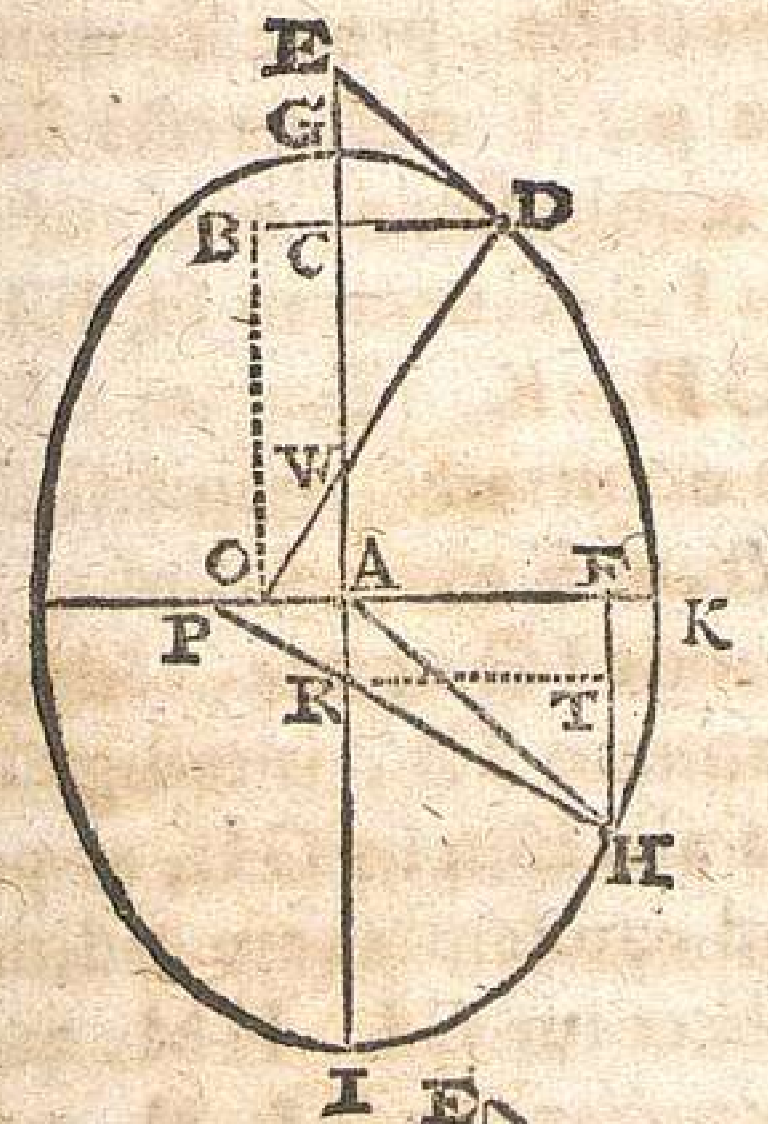
Propositio 18.

Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

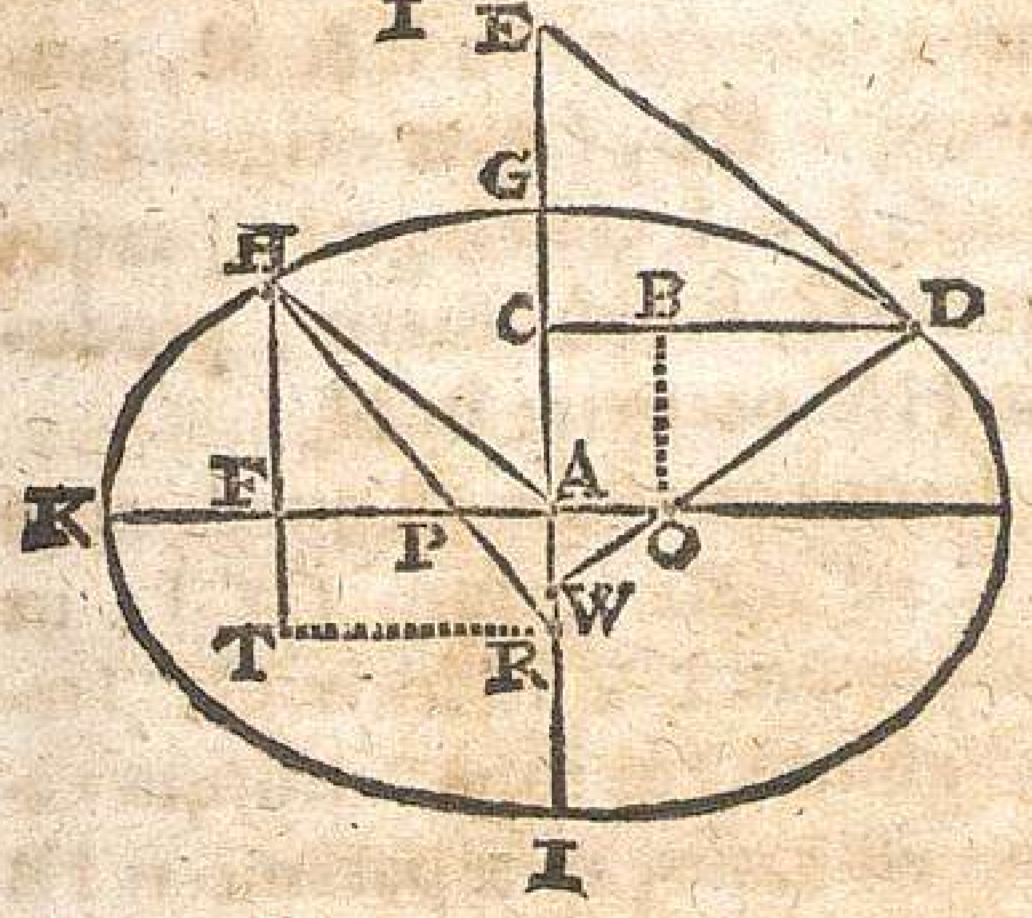
Quamcunque Ellipsin GD, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta DE, diametro IG occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit DC: dico rectangulum CAE quadrato semidiametri AG æquale esse.

Sit enim primùm axis diameter IG, sitque OW *describens*, in statione uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum D; ita ut OD *intervallum* semi-axi AG æquale sit, PR autem *describens* in statione, ipsi OW reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod nempe

nempe *deſcribenti* PR in directum eſt, ducta diameter HA conjugata ſit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti DE parallela [2]. Sitque porrò ad ſecundum axem AK applicata HF, ducanturque OB, RT ipſis AG, AK æquidiſtantes, quæ applicatis DC, HF, productis, ſi opùs fuerit, occurrant in B & T.



Itaque cum ſimilia ſint triangula OAW & RAP [3], erunt quoque triangula WCD & RTH, nec non OBD & PFH [4] ſimilia. At verò & latera WD & RH, nec non OD & PH [5] æqualia ſunt. Quare & latera WC & RT ſive AF, nec non DB, & HF [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula EDC & HAF æquiangula; unde ex antedictis erit [8] DC ad CW ſive AF, id eſt [9], EC ad HF ſive DB, uti eadem DB ad BO [10]. Unde cum proportionales ſint EC, DB, BO, erit [11] ut EC ad BO ſive CA, ita DB quadratum ad BO quadratum; & componendo [12], ut EA ad CA, ita [13] DO quadratum ad BO quadratum, hoc eſt, GA quadratum ad CA quadratum; ac proinde [14] & rectæ EA, GA, CA proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum CAE quadrato ſemi-axis AG æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipſam DE Ellipſin contingere non poſſit [16], patet converſum quoque verum eſſe: nimirum, ſi rectangulum CAE æquale ſit quadrato ſemi-axis AG, & per C ordinatim applicata Ellipſi occurrat in D, junctam ED eſſe contingentem.

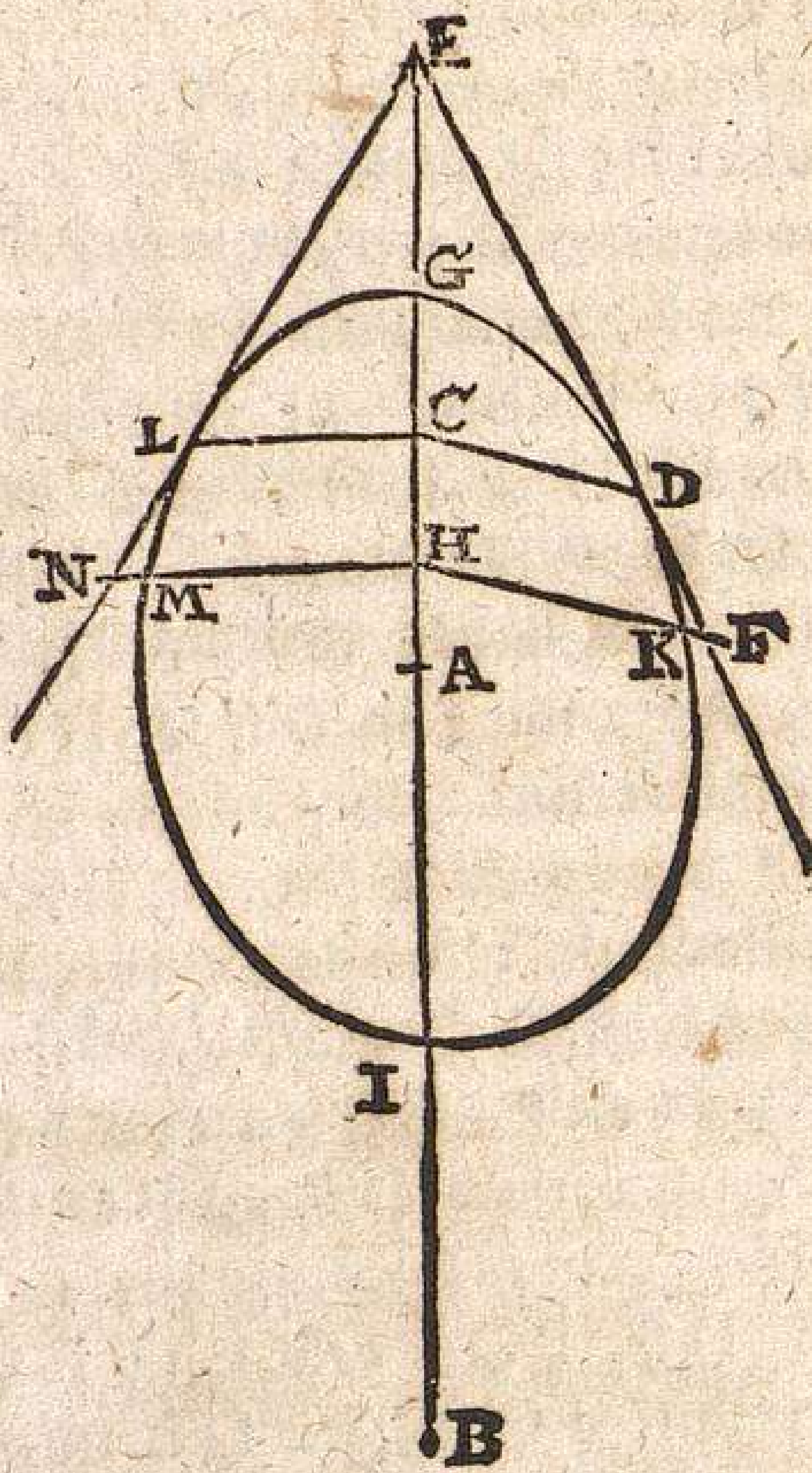


Deinde non ſit recta IG Ellipſeos GD axis, ſed alia diameter quæcunque, cujus parameter IB, atque ab aſſumpto in curva

[1] per 4 Cor. 14 hujus.
[2] per Cor. 17 hujus.
[3] ex constructione.
[4] per 29 primi, & 21 ſexti.
[5] ex conſtructione.
[6] per 26 primi.
[7] per 29 primi.
[8] per 4 ſexti.
[9] propter triangula EDC, HFA æquiang.
[10] propter triangula DCW, DBO æquiangula.
[11] per Cor. 20 ſexti.
[12] per 18. quinti.
[13] per 47 primi.
[14] per Cor. 20 ſexti.
[15] per 17 ſexti.
[16] per 17 hujus.

utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, sitque quadrato semidiametri A G æquale rectangulum C A E: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcunque punctum F, sitque per F ducta recta F H ipsi C D æquidistans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H, Ellipsi verò G D in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissimè punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde I G ut axe, eâdemque parametro I B, intelligatur descripta alia Ellipsis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipsin G L in L continget[1],) eaque producta, si opùs fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] per sup. demonstr.

Itaque quoniam est quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri I B ad diametrum sive axem I G[2]:) erunt[3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectas K H, M H æquales esse, demonstrabitur. At verò cum sit C D ad H F, ut C L ad H N, (siquidem[4] utriusque eadem est ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque[5] H F & H N æquales. Est autem H N major applicatâ H M, cum contingens sit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque sumptum, hoc est, tota E D F, extra Ellipsin G D cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter E D F alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere[6], manifestum quoque est conversum: si nempe E D Ellipsin G D in

[2] per 13 hujus, & Cor. 20 sexti.
[3] per 9 quinti.
[4] per 4 sexti.
[5] per 14 quinti.
[6] per 17 hujus.

in D contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C, rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra[1] ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam[2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale, jungaturque E D.

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum[3] rectâ E A, quæ Ellipsin secet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ[4] æquidistet contingenti quæ per G duceretur[5], occurratque Ellipsi in D, jungatur E D: eritque hæc ipsa tam priori quàm posteriori casu[6] contingens quæsita.

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse duci rectam, quæ eandem contingat, manifestissimum est.

[1] in Cor. 16 hujus.
[2] per 2 Cor. 15 hujus.
[3] inventum per 2 Coroll. 15 hujus.
[4] juxta Cor. 17 hujus.
[5] per præcedentia, aut 5 Coroll. 14 hujus.
[6] per 18 hujus.

Atque ita me compendiosè viâ satis planâ ac maximè naturali, absque ulla solidi consideratione, Elementa proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni sectiones* appellavêre, tradidisse confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per se ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hisce diutiùs inhærere supervacuum putem, præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia supersit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifestum est; quæque tam ab iisdem quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* ſive *Compoſitio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæteriſque Geometris ea præcipuè conſcripta eſſe, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis ſuperaddidère, omnino credibile eſt. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac diſtinctionem, ut & diſtributionem in ſua genera & ſpecies, cum ſegregatione earum, quæ verè Geometricæ non ſunt, ab iis quæ in Geometriam ſunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam exiſtimem; è re fore duxi, eandem tractationem hîc ſubjungere, non quidem eâ methodo, ſicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem ſufficeret, ſi vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id eſt, quæ vel *Recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipſis*, ſive *circuli circumferentia* exiſtunt, (quorumque Locorum Compoſitioni eos ſolummodo intentos fuiſſe invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immenſum excreſceret, ſi ad Loca, quæ ſunt lineæ curvæ ſecundi generis, uti nobis propoſitum eſt, extenderetur; ſed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino caſus poſſibiles reſolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis eum ordinem ſumus obſervaturi, ut jam poſt explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipſis, (ſuppoſitâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ ſunt vel ex prædictis curvis conſtant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumque* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantùm descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi; operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus facilè experietur, vel illos saltem hîc adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

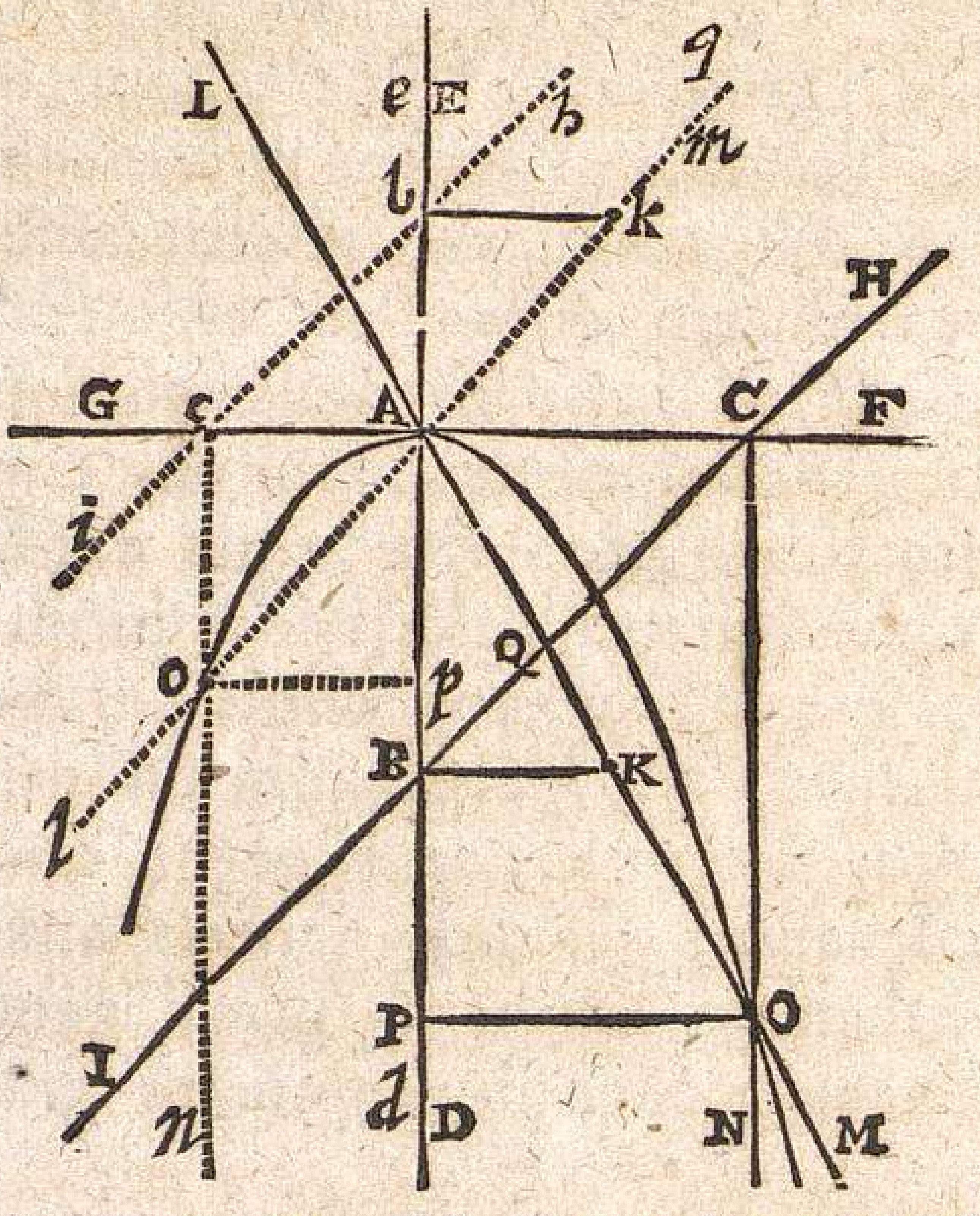
Caput IV.

Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano delineandi Methodus.

Sit triangulum quodcunque isosceles A B C, & tam æqualia crura A B, A C, quàm basis B C utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non H I; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito crurì æquidistans, ut B K, & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti L A K M; ac denique rectæ F G insistens C N ipsi D E parallela transeat per ipsarum F G & H I intersectionem C. Dico, si angulus E B H atque ipsi ad verticem D B I cum recta B K moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus A B semper applicatum maneat rectæ D E, simulque recta H I huc atque illuc promoveat rectam C N, sibi ipsi semper æquidistan-

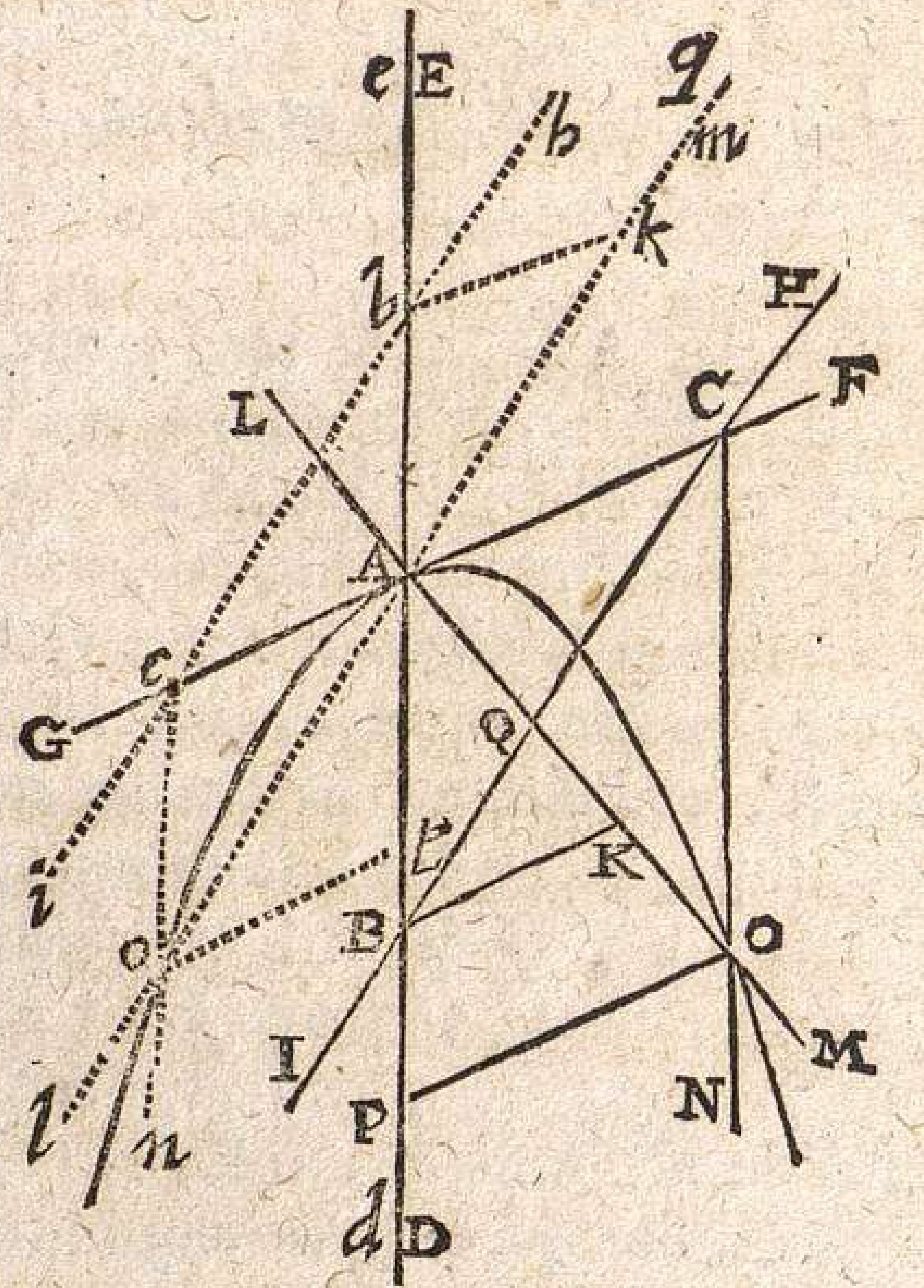
 tem,

tem, ac recta BK ad polum A circulariter moveri faciat prædictam LM, per punctum K semper transeuntem, intersectionem ipsarum CN, LM, quæ fit ad O, Parabolam describere, cujus diameter est AD, parameter KB, ac FG eandem contingens in vertice A.



In quacunque enim statione constitutus fuerit angulus EBH seu DBI, si intersectio rectarum FG, HI designetur per C, atque ab intersectionis puncto O ad diametrum applicata sit OP ipsi FG æquidistans: erit semper KB ad BA, hoc est, ad AC, uti eadem AC ad CO [1]: ac proinde [2] rectangulum sub KB, CO, id est [3], sub KB, AP quadrato rectæ AC, hoc est [4], ipsius OP æquale. Unde si BAC angulus rectus fuerit, erit AD axis, sin minùs diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipsi BAC vel BAG angulo æquales.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 17 sexti.
[3] per 34 primi.
[4] per eandem.



In transitu etiam hîc notandum est, eodem illo motu per intersectionem ipsarum HI, LM, puta Q, Hyperbolam sive oppositas

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum BAC isosceles non foret, nec etiam recta BK ex angulari puncto B sed ubivis in recta AD educta esset, nihilominus tamen curvam AO Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* IG, *intervallo* AL, & *directrice* KLO, angulis autem IAL & KLA inæqualibus, descripta curva DAM: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ AK, ita ut angulus LAK angulo LAG æqualis sit, centro A & intervallo AK circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ac *directricem* in K & Q[a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ IK, GQ, sibi mutuò occurrentes in F, rectas FI, FG Asymptotos esse[b].

Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut OAD, quàm *describens*, ut OD, in statione uti fuêre, cùm per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli AIK, AKI inter se[1], nec non simul sumpti angulo KAG, (quippe tam posterior quàm priores[2] cum angulo IAK binos rectos constituunt): erunt quoque anguli AIK seu AIF & GAL, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea[3] rectæ IKF & AL parallelæ[c]; ideoque sicut IKF rectæ FG occurrit, ita & eidem FG occurrent

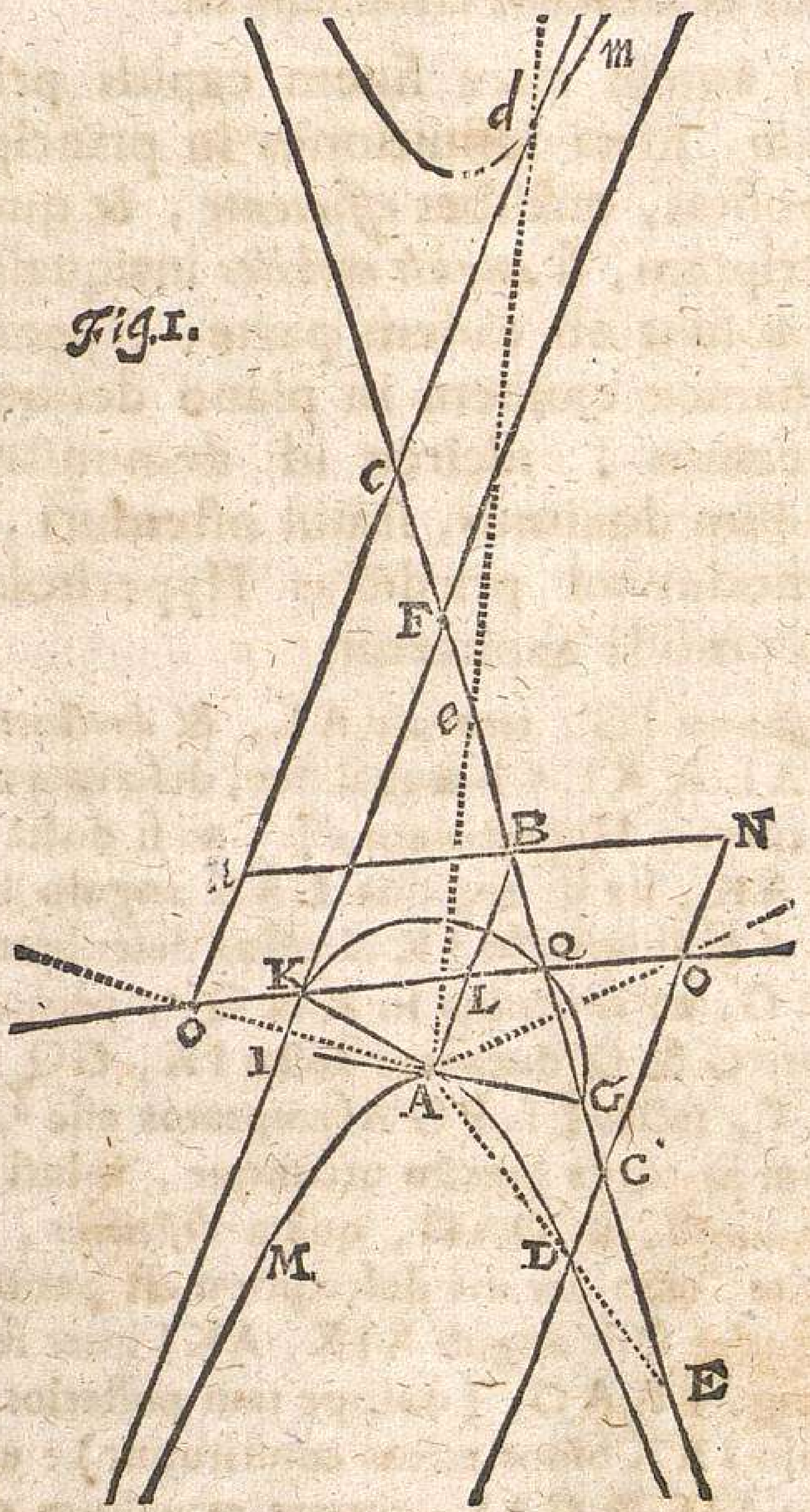
[a] aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V exhibito.

[b] si verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV fig. tangat ibidem circulum recta, ut IF, in priori, & GF in posteriori eum contingere cernitur. [1] per 5 primi. [2] per 13 & 32 primi. [3] per 28 primi. [c] in casu fig. III, quoniam uterque angulorum AIF & GAL rectus est, rectæ IF, AB parallelæ erunt.

rent describentes A L & O D, utpote ipsi IKF æquidistantes. Sint itaque ipsarum occursus in B & C, ac per B agatur recta BN directrici KO æquidistans, occurrensque describenti D O in N: eritque ut G A ipsi A I, ita [1] G B ipsi B F æqualis. Cum

[1] per 2 sexti, & 14 quinti.

Fig. I.



autem in triangulis L A K, O Q C æquales sint anguli ad L & O, (propter [2] A L, C O parallelas,) sitque & angulus L A K sive G A L, id est, G I F, æqualis angulo O Q C, (quippe tam hic quàm ille cum angulo K Q G, vel K Q E duos rectos constituit

[2] per 29 primi.

tuit [1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC sive [2] NBC. Porrò, quoniam angulus AGE angulo IKO seu ALO æqualis est, (quippe tam hic quàm ille cum angulo IGQ sive IGF [3] binos rectos constituit [e],) atque angulis LAG, OAD vel OAE iisdem sive æqualibus addito vel ablato comuni OAG [f], compositi vel residui LAO, GAD vel GAE æquales quoque sunt, ac LO, AO sibi mutuò occurrant; GE quoque & AD sibi mutuò occurrant necesse est; sit itaque ipsarum occursus E punctum; & æquiangula erunt triangula, AGE, ALO, eritque propterea [4] AL ad AG, ut LO sive NB ad GE. At verò (ob

Fig. II.

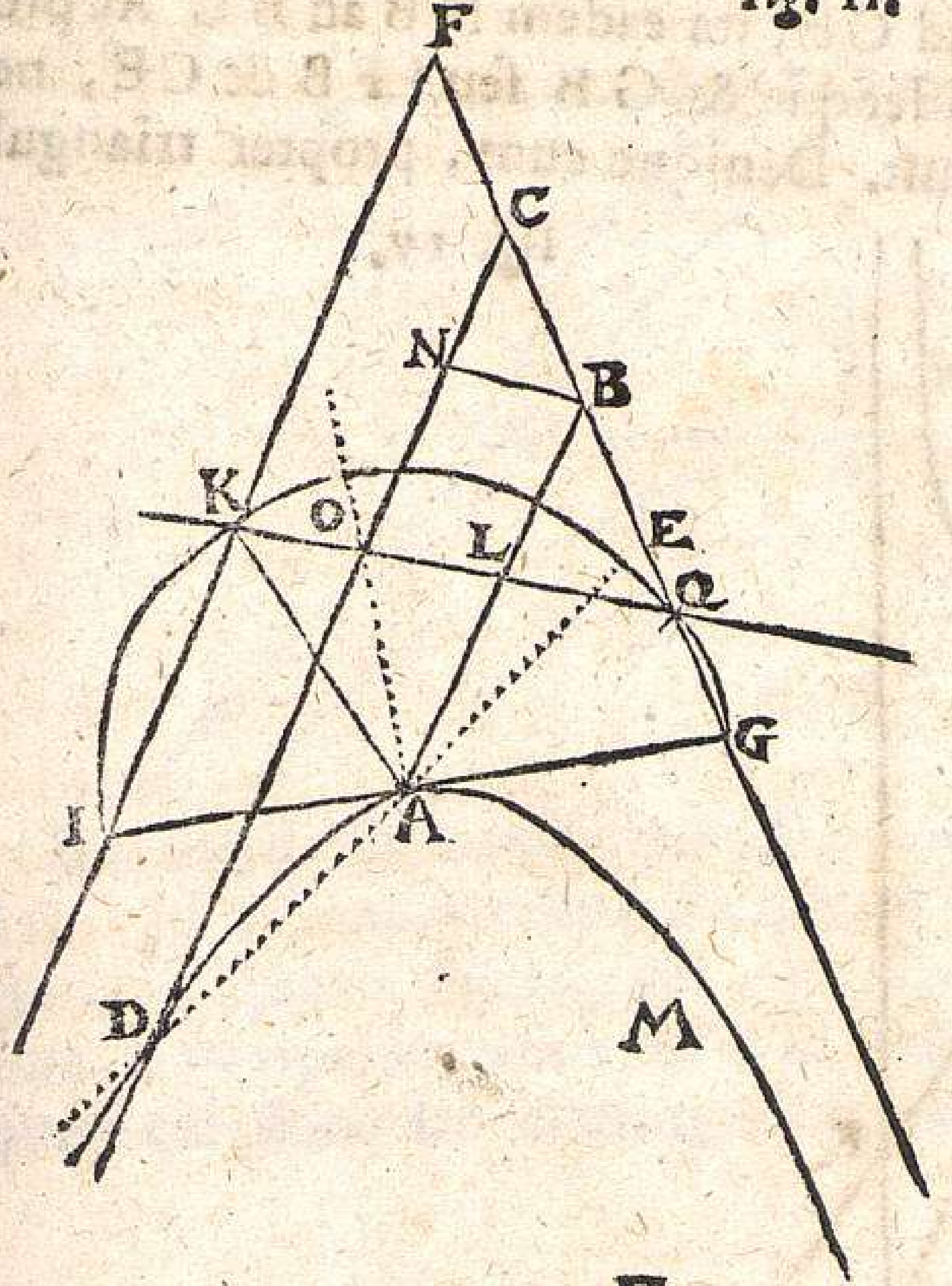
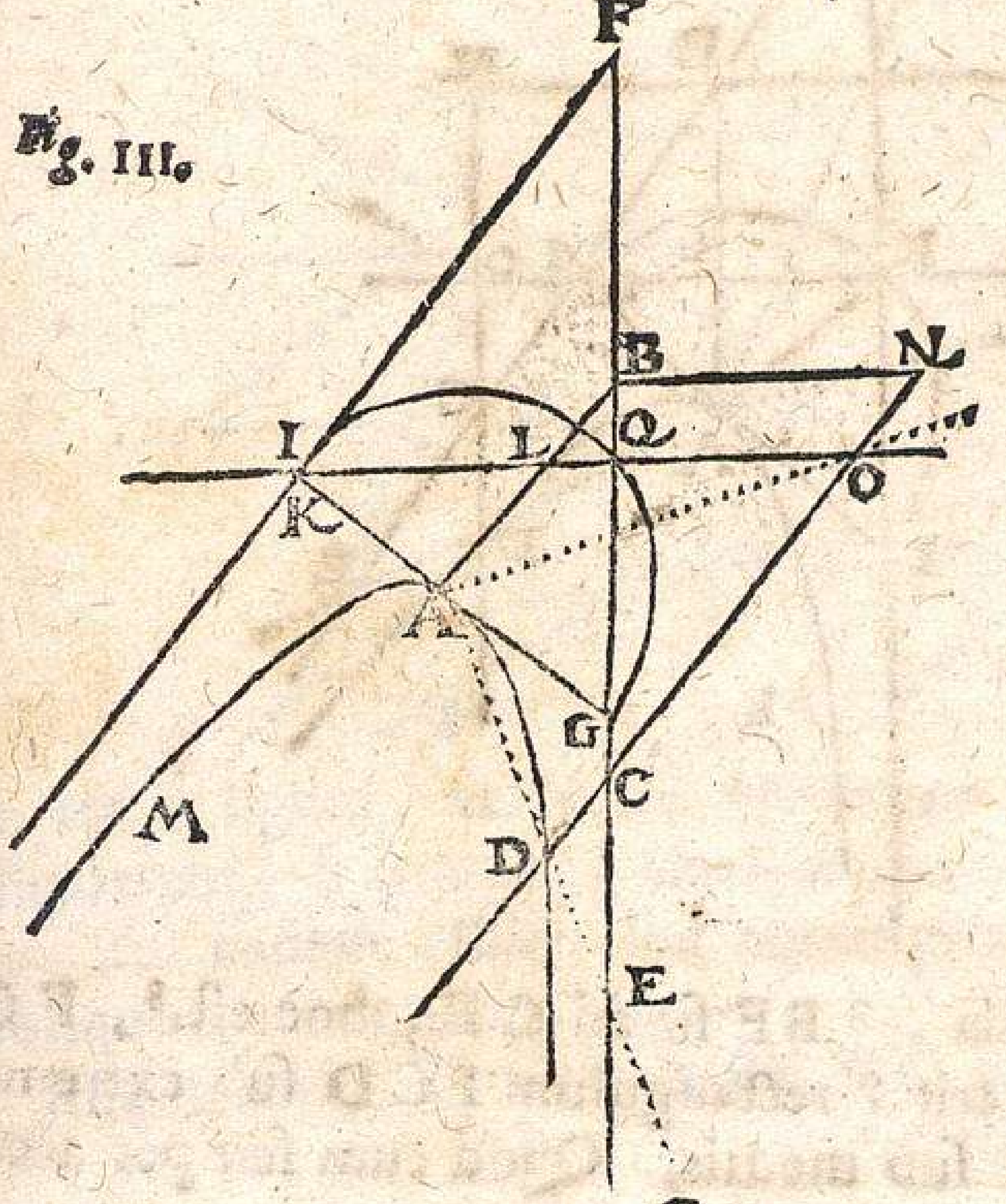


Fig. III.



[1] *in I & II fig. per 13 primi, & 22 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.*

[d] in casu fig. III apparet, tam angulum OQC quàm LAK rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.

[2] *per 29 primi.*

[3] *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii; in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo IGQ æqualis est IKQ per 21 tertii.*

[e] in fig. II angulus AGE angulo ALO est æqualis, quia uterque cum angulo IKQ duos rectos constituit, per 29 primi & 22 tertii.

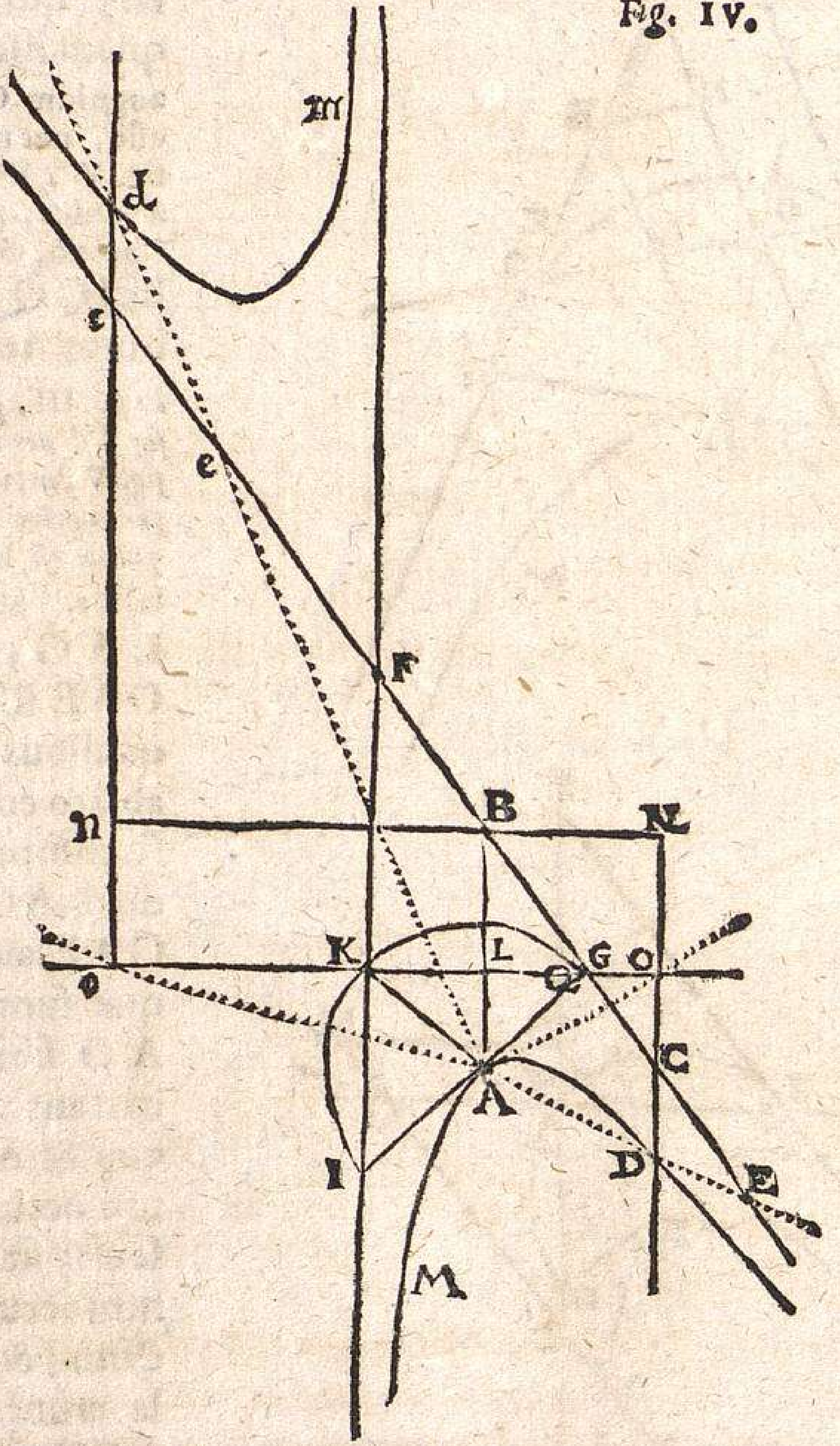
[f] vel, in casu fig. II & similibus, BAE.

[4] *per 4 sexti permut.*

(ob triangula L A K & N B C [1] similia) est quoque [2] eadem A L ad A K, hoc est, ad eandem A G, ut N B ad B C. Unde per consequens erit [3], ut N B ad G E, ita eadem N B ad B C. Ac proinde [4] rectæ G E & B C, ideoque & G B seu [5] F B & C E, nec non B E & F C æquales erunt. Denique cum, propter triangula

1 per sup. dem.
2 per 4 sexti.
3 per 11 quinti.
4 per 9 quinti.
5 per sup. demonstr.

Fig. IV.



ABE & DCE [6] similia, [7] BE sit ad CE, hoc est [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

6 per 29 primi.
7 per 4 sexti.
8 per sup. demonstr.
9 per 16 sexti.

ubicunque in curva assumptum fuerit D punctum, sequitur [1] curvam D A M Hyperbolam esse, cujus Asymptoti F I, F G. Quod erat ostendendum.

[1] per 3 hujus.

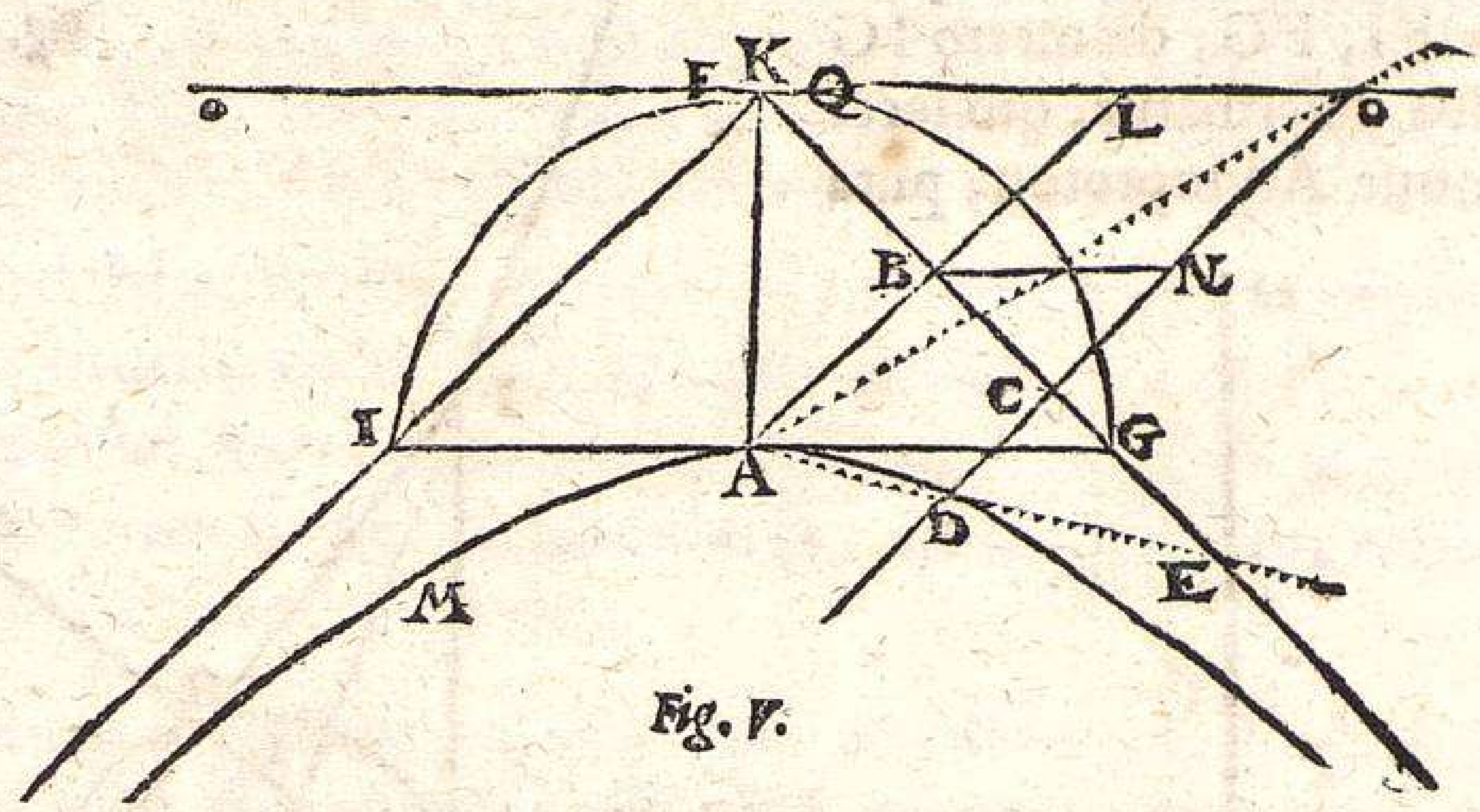


Fig. V.

Ex antedictis manifestum est, si *efficiens* seu [2] contingens, ut I G, ad Asymptotorum alterutram perpendicularis sit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, si nempe *intervallum*, ut A L, æquidistans ductum sit ei Asymptoto cui *efficiens* seu contingens I G ad angulos rectos occurrit, ut

[2] per 6 hujus.

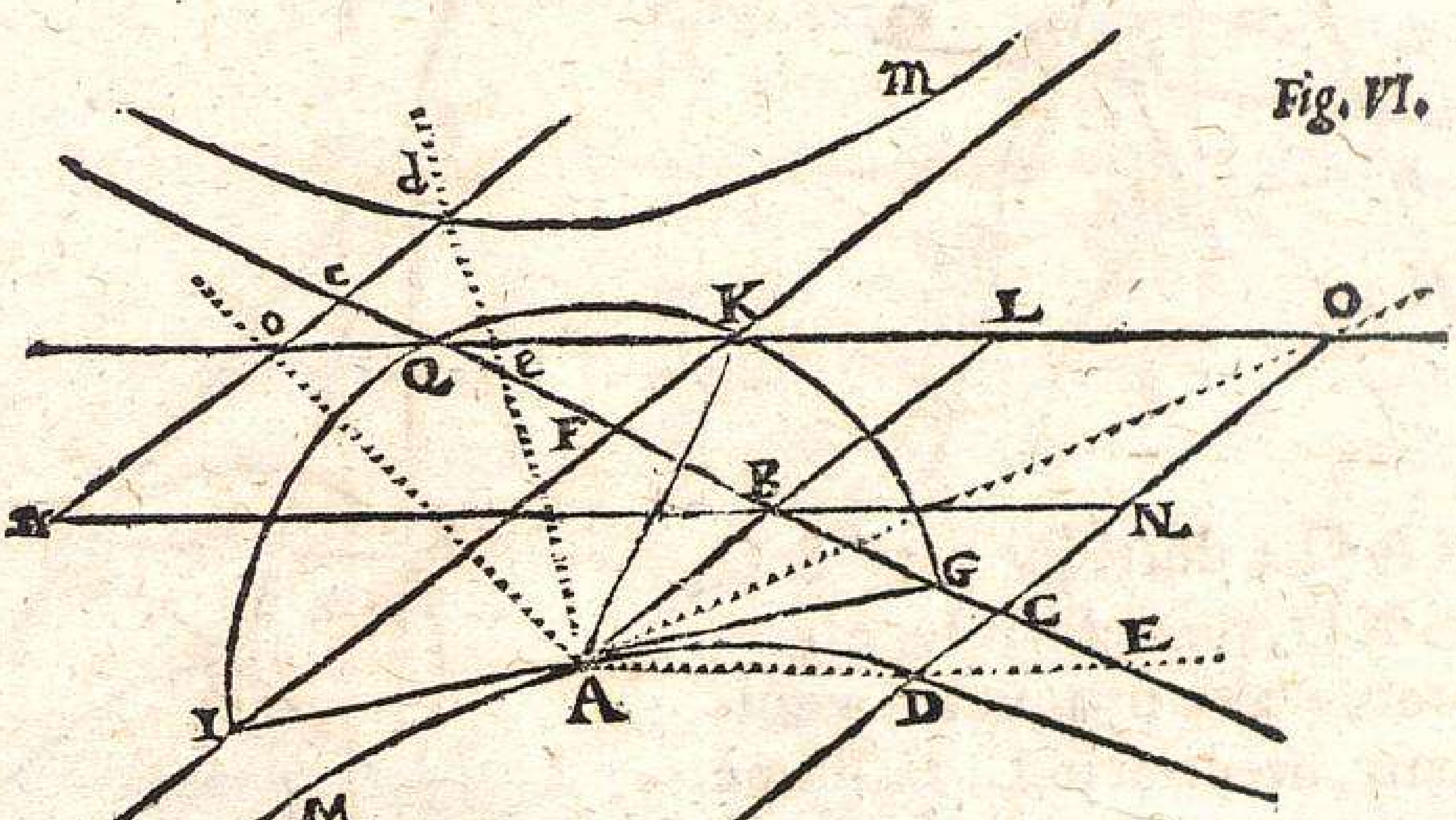


Fig. VI.

in tertia figura, vel certè *describentem* ad *directricem* fore perpendicularem, si nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Asymptoto, cui eadem *efficiens* seu contingens G I occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

Itaque si vel Asymptotis F I, F G, & contingente I G; vel diametris conjugatis H A, I G, Hyperbola sit describenda, ductis in casu posteriore Asymptotis F I, F G, diametro I G circulus describatur, qui secet utramque Asymptoton, puta

Fig. I.

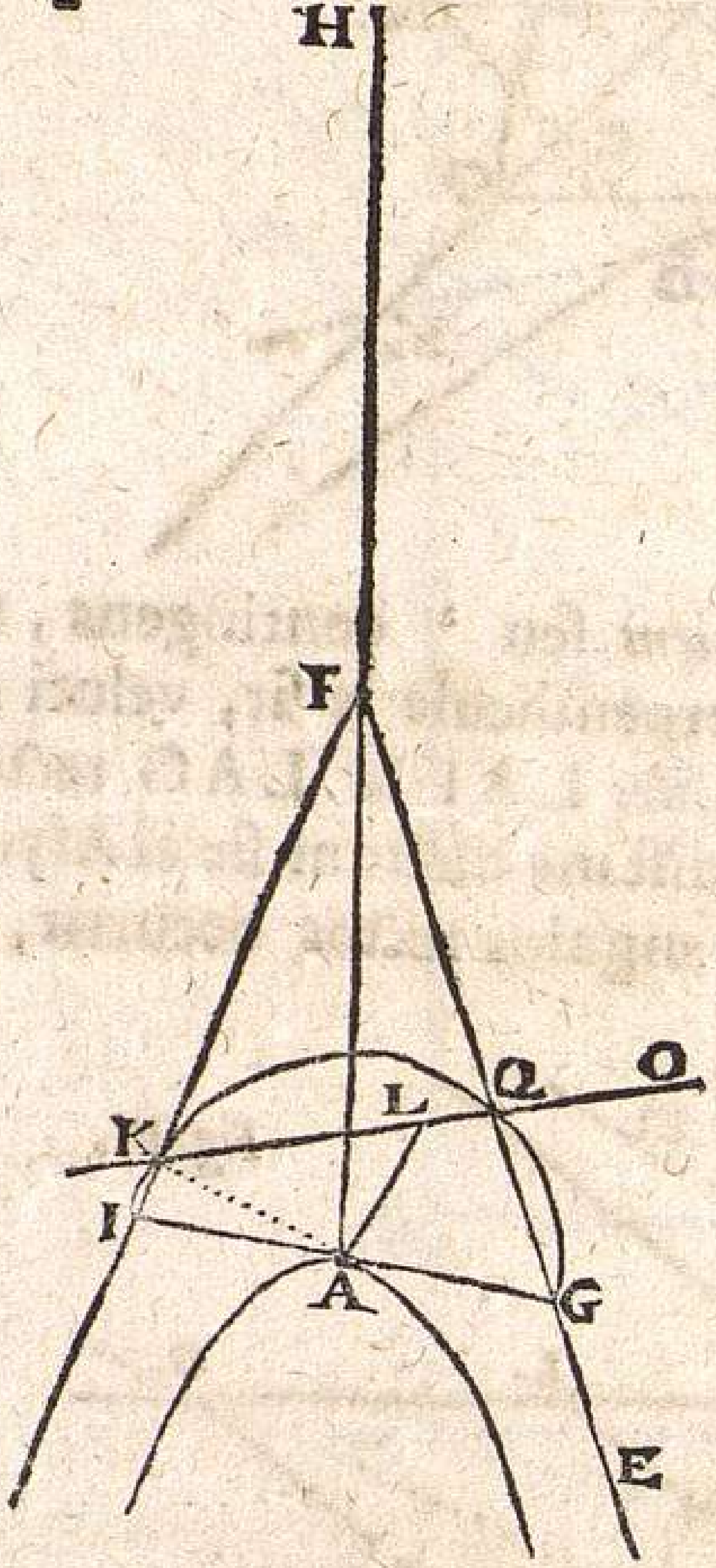


Fig. II.

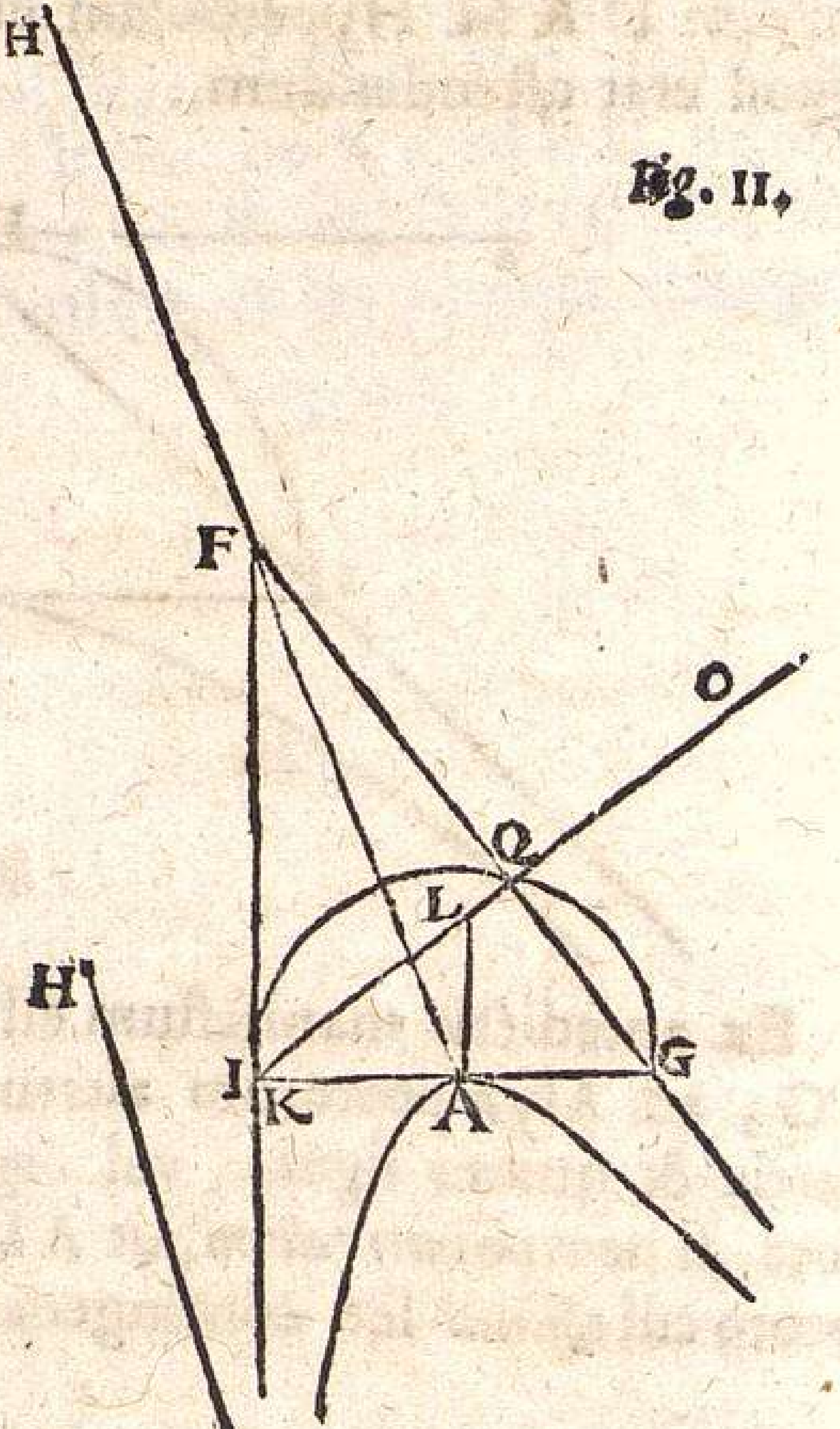
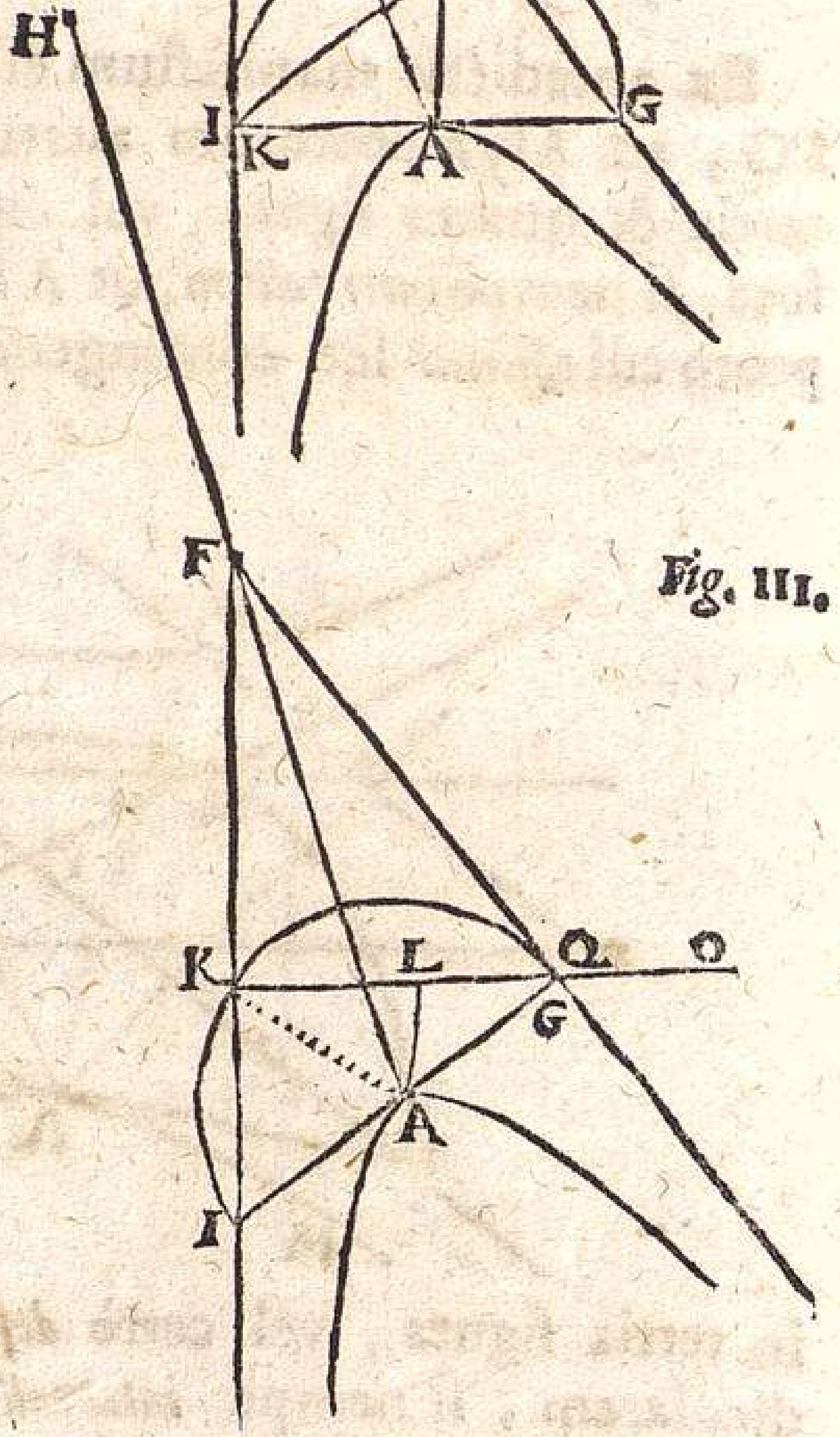


Fig. III.



in K & Q a, ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Asymptotorum alterutri, ut F I, æquidistans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmissis, si, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva describatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

a aut alteram tãgat, & alteram secet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

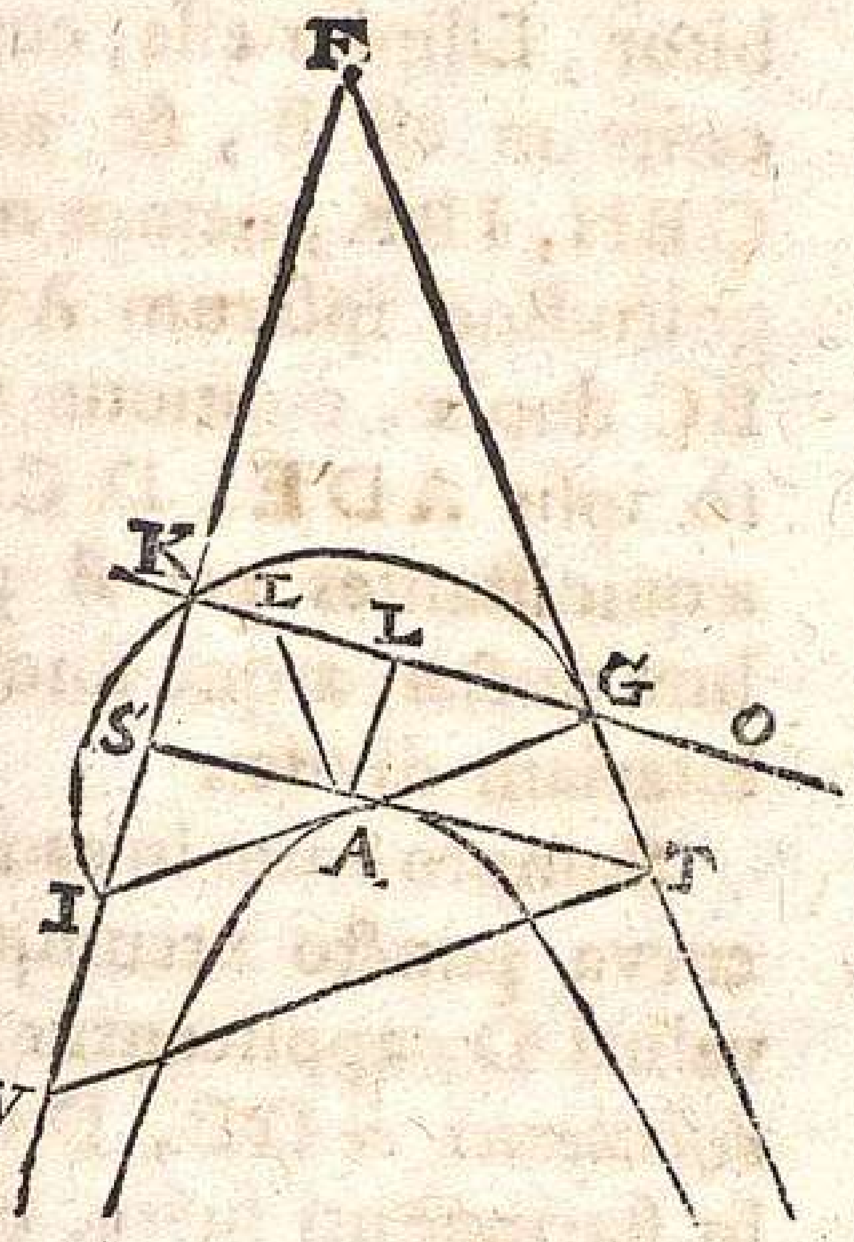
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occursus evitemus, hæc eadem absque Circuli descriptione efficere expediet.

Ita-

Itaque si, ductâ AL Asymptotorum alterutri, ut FI, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur AK, ita ut LAK angulus angulo LAG æqualis sit, & per K recta KO secans prædictam AL in L, ita ut angulus FKO angulo FGI æqualis sit: erit curva, *efficiente* IG, *intervallo* AL, ac *directrice* KO descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint FS, FT, quamque contingat recta ST, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti TV, quam ad FT angulos rectos efficere supponimus, eidem TV per punctum I (nempe ita sumptum ut IF inter VF & SF media sit proportionalis) agatur æquidistans IG, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam [1], propterea quòd sit VF ad IF, hoc est [2], IF ad SF, uti [3] TF ad GF. Ideoque descripto super eandem IG circulo IKG, qui tangat Asympton FT in G [4], atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta KGO, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis IG, recta AL in L, quæ quidem AL vel ad eandem IG, vel ad ductam KO sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* IG, *directrice* KO, atque *intervallo* AL, ad eandem *efficientem*, dictamvé *directricem* perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.

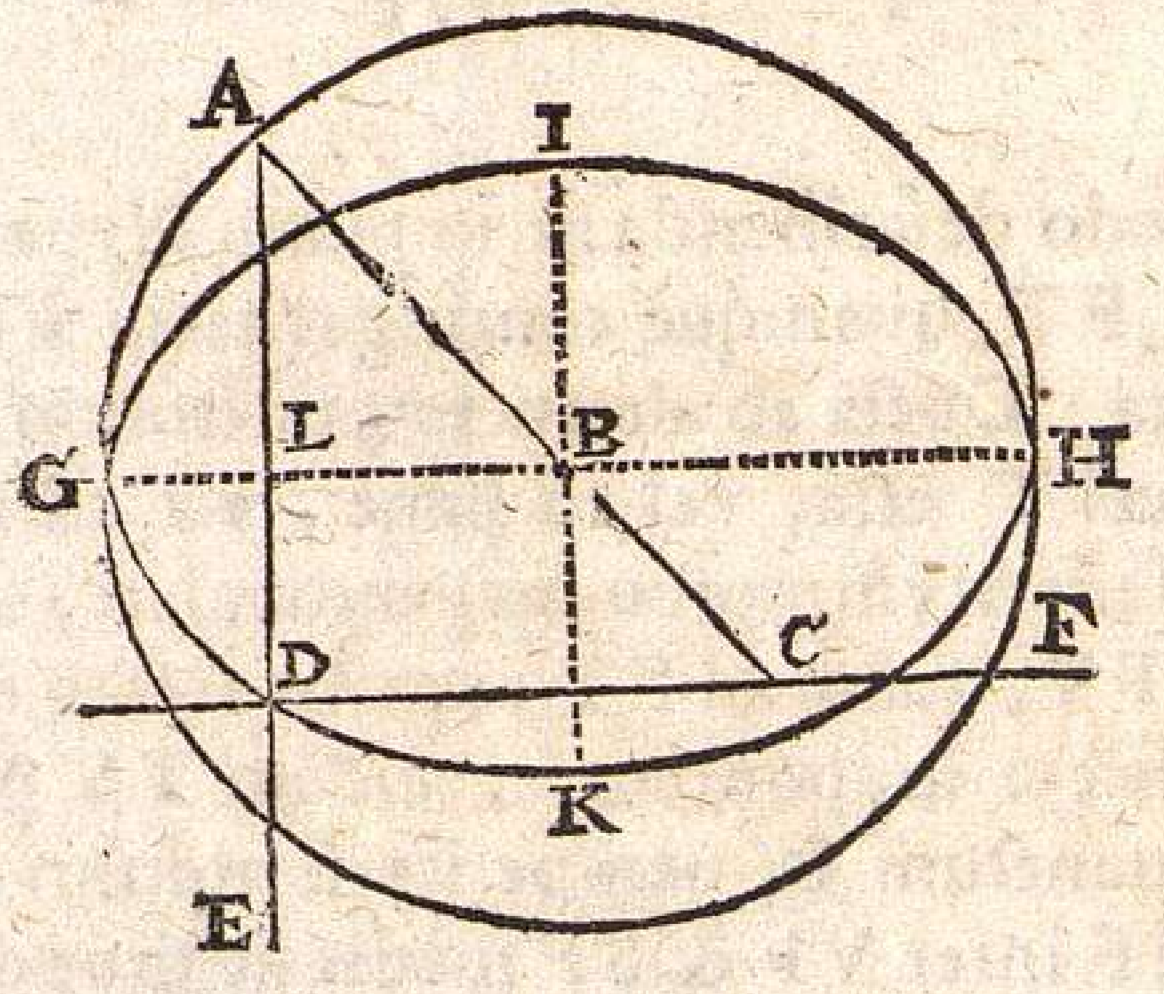


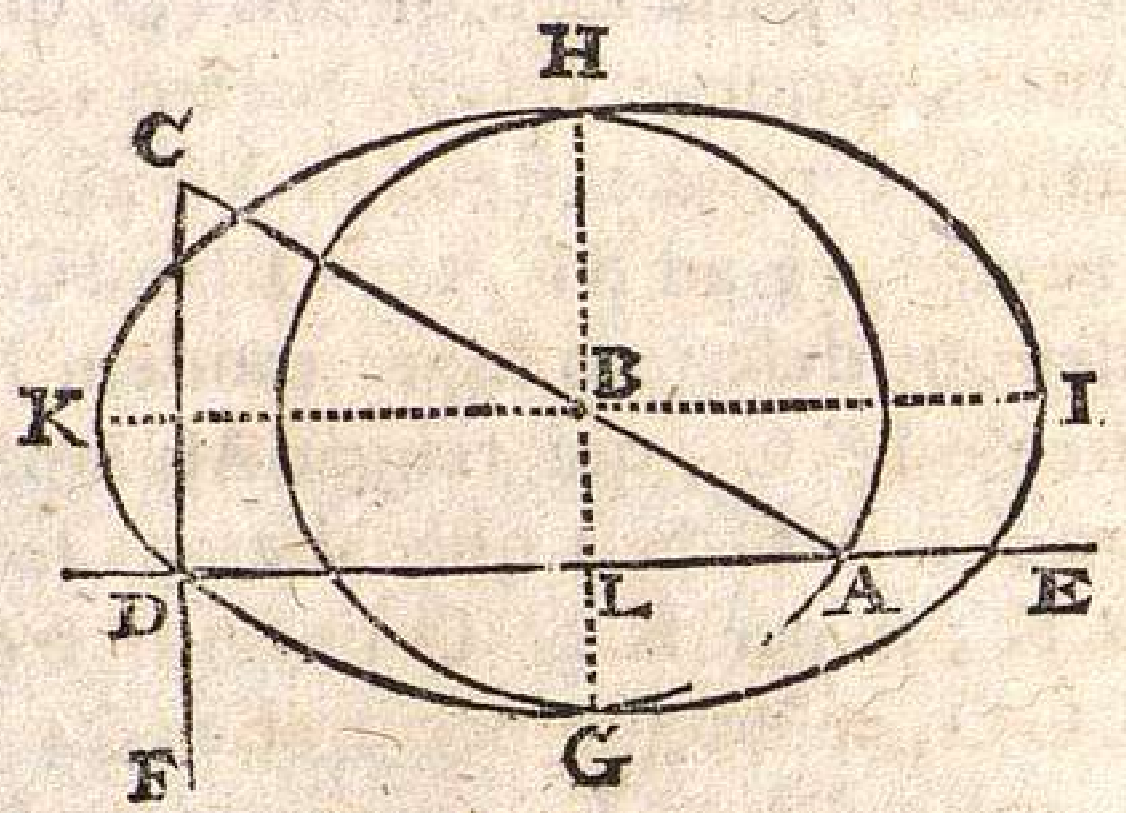
[1] per 9 hujus.
[2] ex hypothesi.
[3] per 2 sexti, & componendo per 18 quinti.
[4] per Cor. 16 tertii.

Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hîc adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut ABC, ad polum B circulariter mota binis sui punctis A & C, in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C, sive C sit inter A & B,) promoveat rectas ADE, DCF, sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos intersecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D, describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B, & axes GBH, IBK, nempe magnitudine ipsarum AB, BC duplæ, positione verò ipsis ADE, DCF, æquidistantes per B polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.





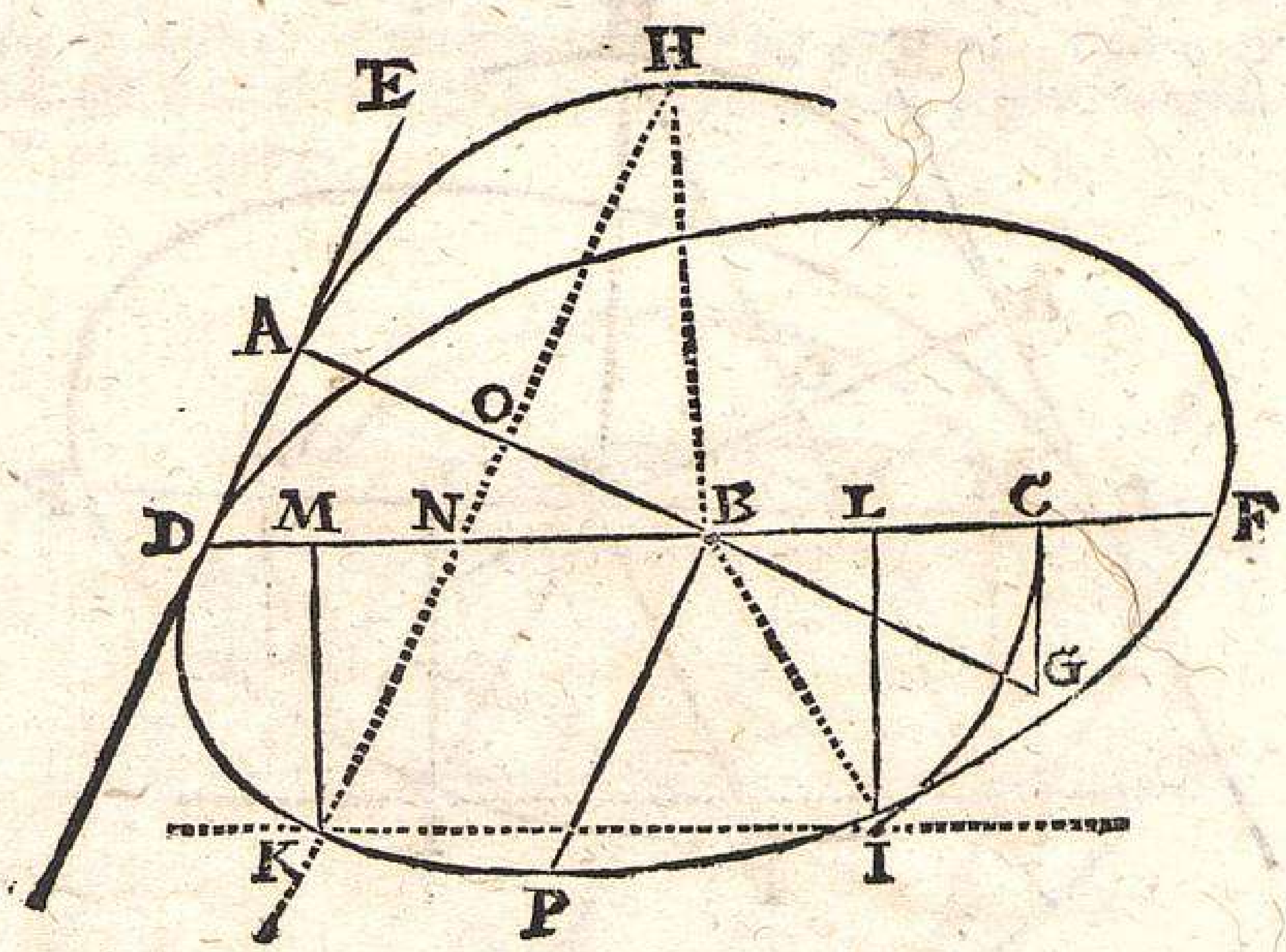
Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipsi *describentes* ADE, DCF in statione uti fuêre, cùm per illarum intersectionem descriptum est punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti ADE, vel hanc vel illam ductarum GH, IK, ex. gr., ipsam GH, secat, ut in L & sit GAH circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est [1] AB quadratum ad BC quadratum, hoc est, GB quadratum ad BK quadratum, ut AL quadratum sive [2] GLH rectangulum ad LD qua-

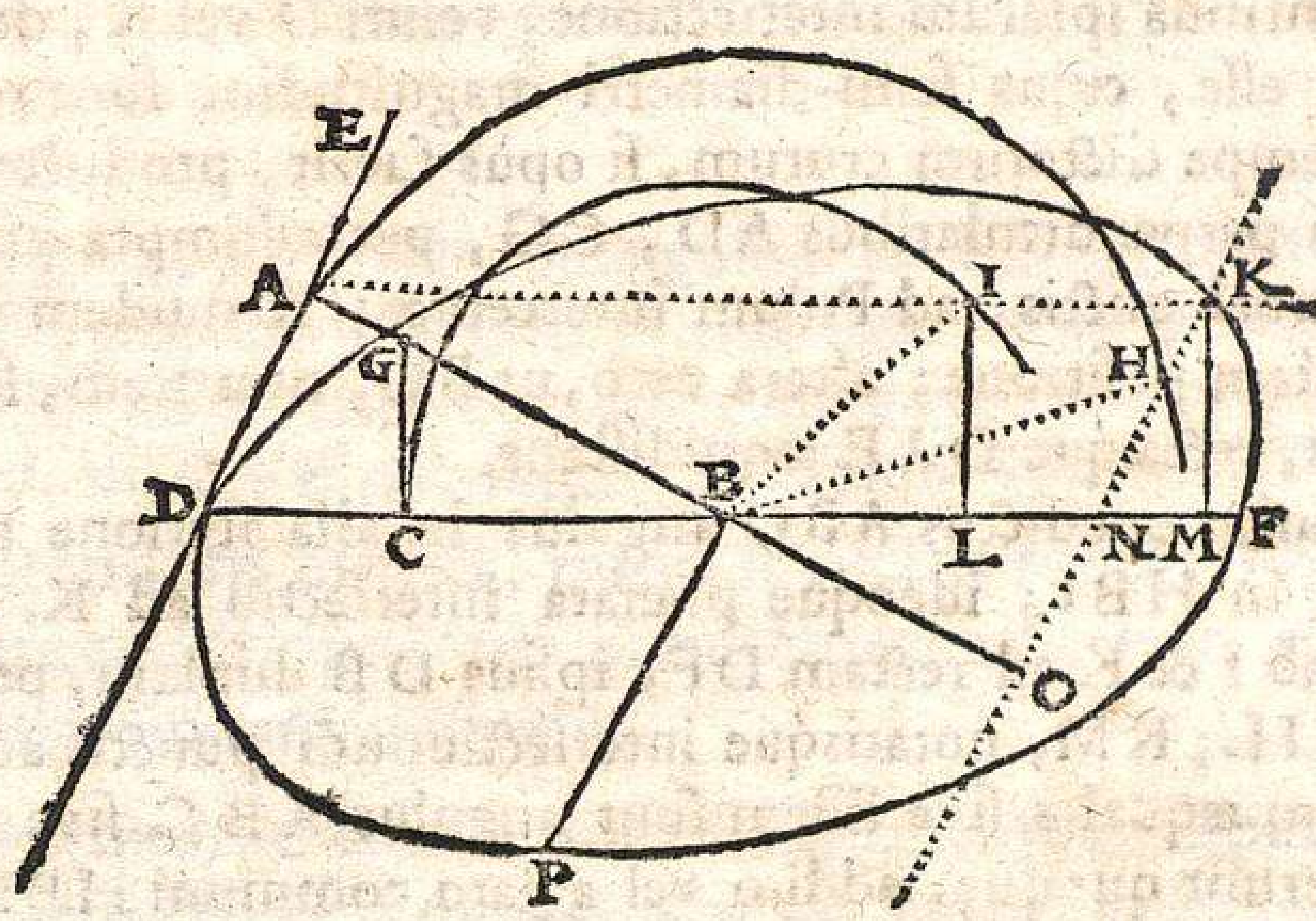
[1] *per 2 & 22 sexti.*
[2] *per 14 secundi, vel 35 tertii.*

quadratum: constat [1], curvam GKH, ut prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt GH, IK.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

Non sit deinde ABC una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus ABC, sintque prædictæ rectæ DAE,



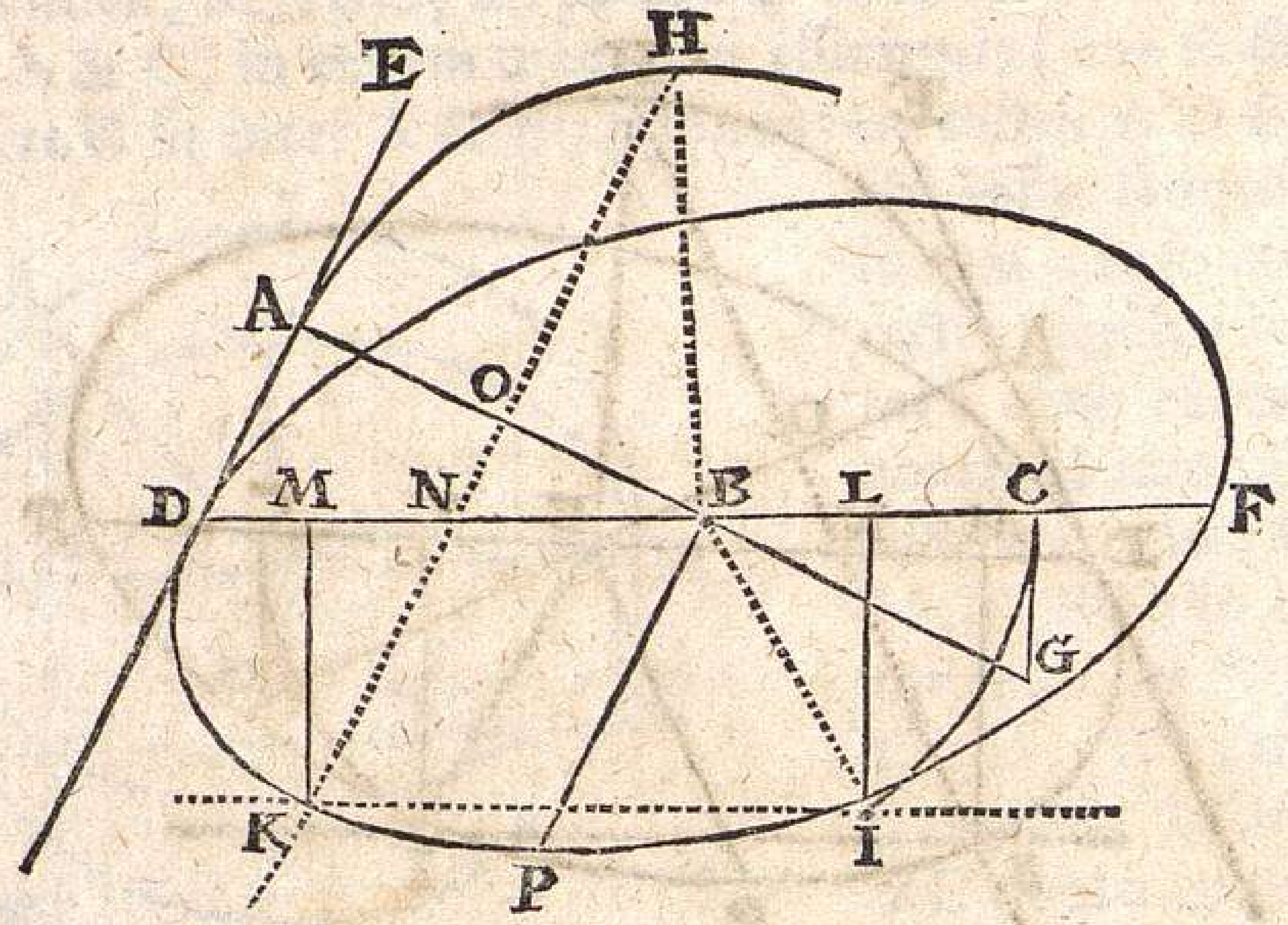


DCF in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni

cuii

[1] per 13 hujus.

cruri coïncidit, (quemadmodum in statione ABC recta DCF coïncidit cruri BC,) altera ad reliquum crus sit perpendicularis, (sicut in eadem statione recta DAE ad crus AB perpendicularis est:) dico iterum, si angulus ABC circa Polum B circulariter motus punctis A & C in utroque crure utcunque assumptis promoveat rectas DAE & DCF sibi ipsis semper æquidistantes, cur-



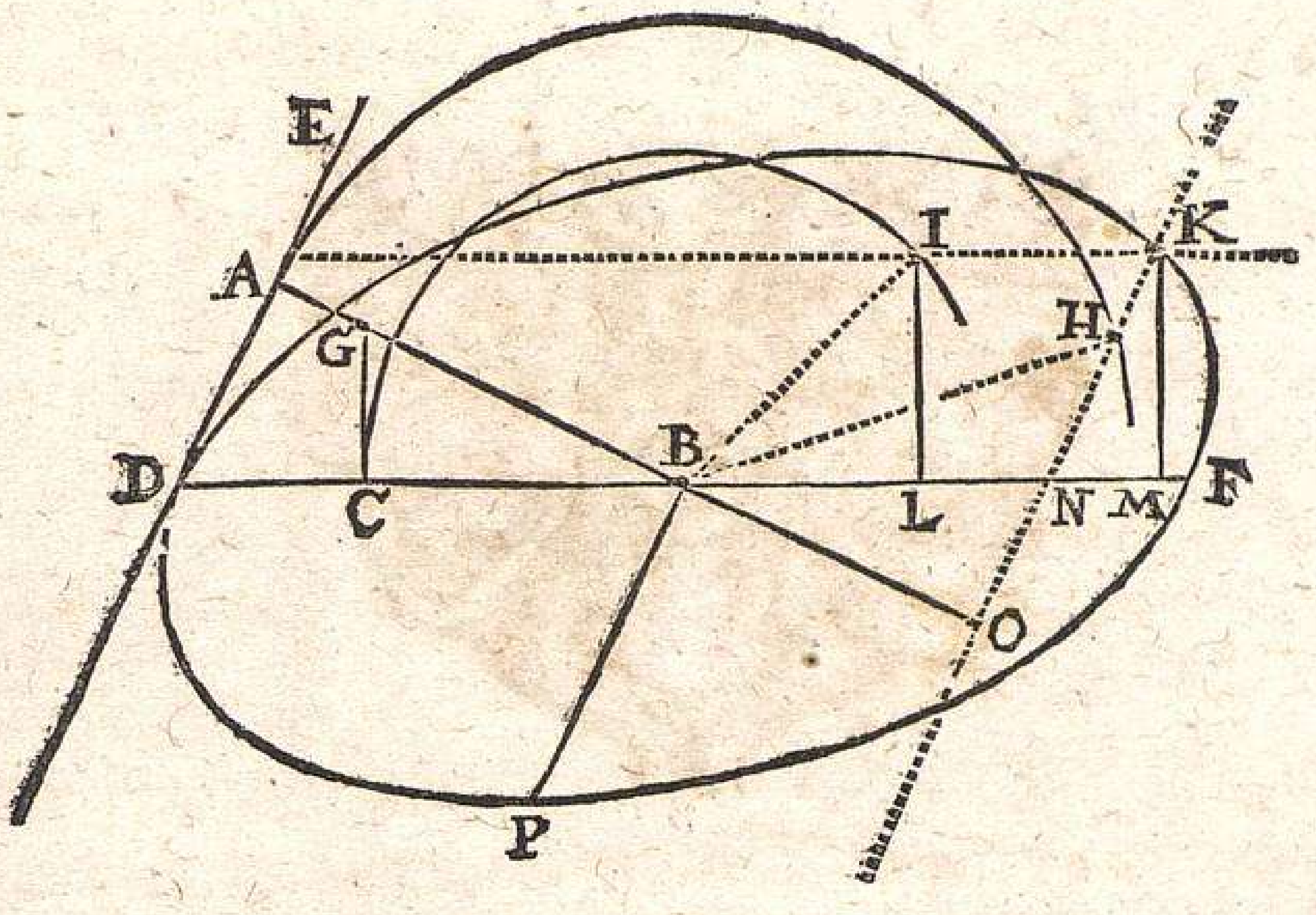
vam, continuâ ipsarum intersectione, veluti D vel K, descriptam, Ellipsin esse, cujus semi-diametri magnitudine sunt rectæ DB, BG, nempe dictorum crurum, si opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus AD, CG, per assumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti DB, etiam positione; altera verò, ut BG, non item, sed BP ipsi æqualis, rectæque DAE æquidistans.

Sit enim prædictus ABC angulus in alia statione utcunque, ex. gr., in HBI; ideoque præfata intersectio ad K. Demissis autem ab I & K ad rectam DF, ipsius DB duplam, perpendicularibus IL, KM, notatisque intersectionum punctis ad N & O, quoniam æquales sive iidem sunt angulus ABC sive OBL & HBI, erunt quoque, addito vel ablato communi HBF, anguli HBO & IBL æquales; ideoque triangula HBO & IBL, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2] &

[1] *ex hypothesi, & per 29 primi.*
[2] *per 21 sexti.*

& æquiangula triangula CBG & MNK, cum tam hoc quàm illud triangulo OBN simile sit [1]: quare cum sit [2] DB quadratum ad NB quadratum, ut AB quadratum, id est [3], HB quadratum, ad OB quadratum, erit [4] per conversionem rationis DB quadratum ad DNF [5] rectangulum, sicut HB quadratum ad HO [6] quadratum, id est [7], uti BI quadratum ad IL quadratum, vel uti BC quadratum ad KM quadratum [8], id est [9], uti BG sive BP quadratum ad KN quadratum, & permutando [10] DB quadratum ad

[1] ob angulos ad C, O, & M rectos, ad B verò & N sive eosdem sive ad verticem. [2] per 4 & 22 sexti. [3] ex hypothesi. [4] per Cor. 19 quinti. [5] per 5 secundi. [6] per 47 primi. [7] per 4 & 22 sexti. [8] æqualis est enim BC ipsi BI, & IL ipsi KM. [9] per 4 sexti, propter triangula CBG & MKN æquiangula. [10] per 16 quinti.



BP quadratum, ut DNF rectangulum ad KN quadratum. Ac proinde Ellipsis est curva DKPF, intersectione uti prædictum est descripta [11], cujus semi-diametri conjugatæ DB, BP; ideoque B centrum, ac DAE contingens Ellipsin in vertice D [12].

[11] per 13 hujus. [12] per 2 Cor. 13 hujus.

Notandum hîc est, quòd si rectus foret ABC angulus, intersectione, uti prædictum est, non curvam, sed rectam lineam describi.

Quemadmodum autem Ellipsin, quæ superiùs per motum puncti in una eademque recta descripta fuit, nunc per duarum rectarum intersectionem delineavimus,

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes solummodo per similes intersectiones in præcedentibus exposuimus, per motum puncti in una eademque recta describi possunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ sunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propositas existimamus, hisce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumq;* inventiones ac determinationes progredimur.

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

LIBER SECUNDUS.

CAPUT I.

PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæstione, ubi indagandus proponitur Locus, sive is sit ad lineam rectam, sive ad curvam, suppositis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel assumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, assumptum quodlibet quæsiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, postquam ad simplicissimos terminos erit reducta, si neutra incognitarum ad duas pluresve dimensiones assurgat, hoc est, si neque in se, neque in alteram incognitam ducta seu multiplicata reperiatur, quæsitus Locus erit linea recta: At si earundem incognitarum altera ad quadratum ascendat, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram incognitam ducta sit, erit Locus quæsitus Parabola. Quòd si verò utraque ad quadratum ascendat, sive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non assurget, si de loco Plano Solidové quæstio sit): erit Locus quæsitus vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia.

Quorum quidem omnium particularis determinatio, descriptio, & demonstratio variis modis fieri potest; at verò ex simplicissimis, generalissimisque aliquem annotasse suffecerit.

Ac primo quidem casu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimensiones ascendit, si earum una exprimatur per x, atque altera per y, potest æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

I. $y \propto \frac{bx}{a}$, sive (posito $a \propto b$) $y \propto x$.

II. $y \propto \frac{bx}{a} + c$, sive, posito, ut supra, $y \propto x + c$.

III. $y \propto \frac{bx}{a} - c$, sive $y \propto x - c$.

IV. $y \propto - \frac{bx}{a} + c$, sive $y \propto - x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum secundùm regulam talis assumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipsius x, certum sit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta positione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis lineæ priori in extremitate incerta in dato vel assumpto angulo conjungi. Quibus quidem suppositis, ea, quæ prædicta sunt, sequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonstrari posse videntur.

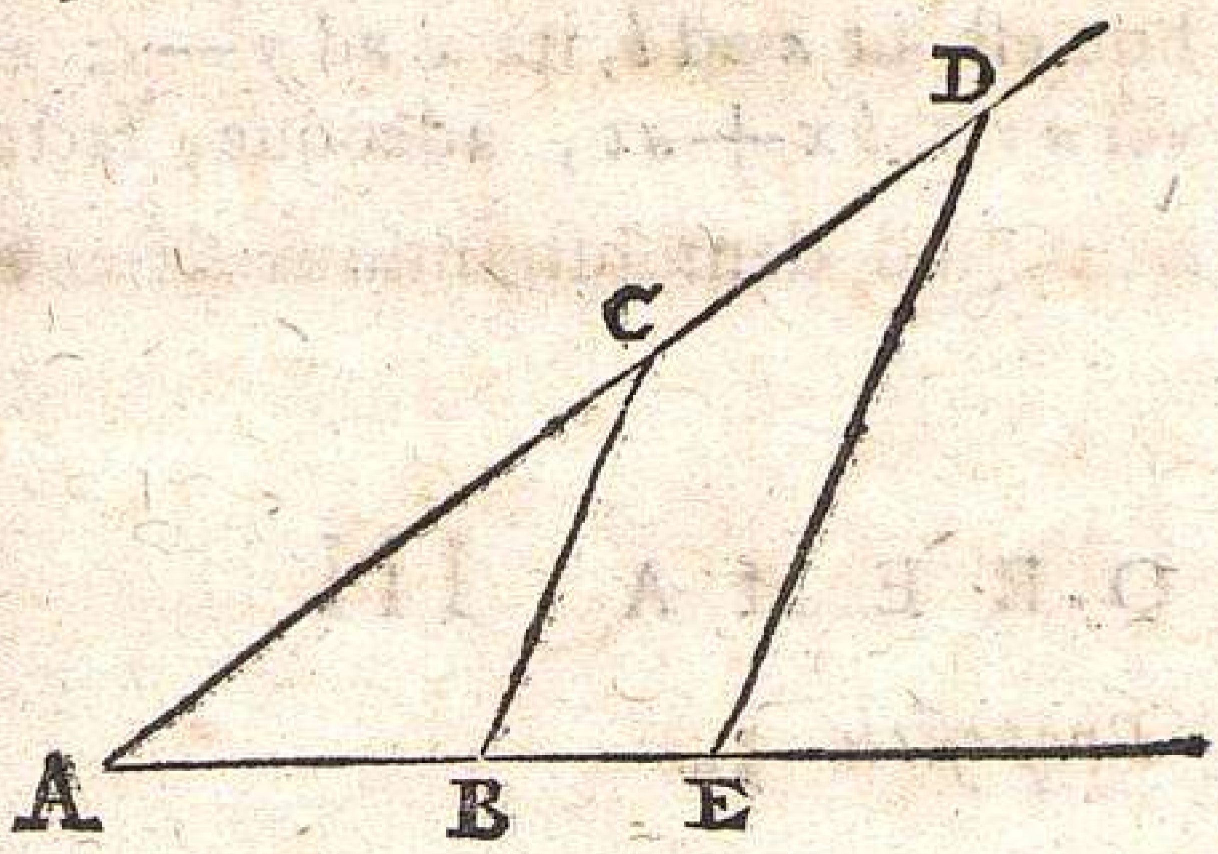
THEOREMA I.

Propositio I.

Si æquatio sit $y \propto \frac{bx}{a}$, erit locus quæsitus linea recta.

Sit enim ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Dein, sumpto in eadem AB puncto utcunque, veluti B, agatur BC in angulo

angulo ABC, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ AB ad ductam BC, quæ est a cognitæ ad b cognitam. hoc est, ut sit uti a ad b, ita AB ad BC. Denique per puncta A & C ducatur recta AC, indefinitè extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.



Etenim assumpto in AC puncto utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo DEA, dato vel assumpto æquali, si eadem DE vocetur y, erit [1] ut AB ad BC, hoc est, ut a ad b, ita AE ad ED, hoc est, ita x ad y. Et sit [2] $ay \propto bx$, hoc est, dividendo utrinque per a, erit $y \propto \frac{bx}{a}$.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.

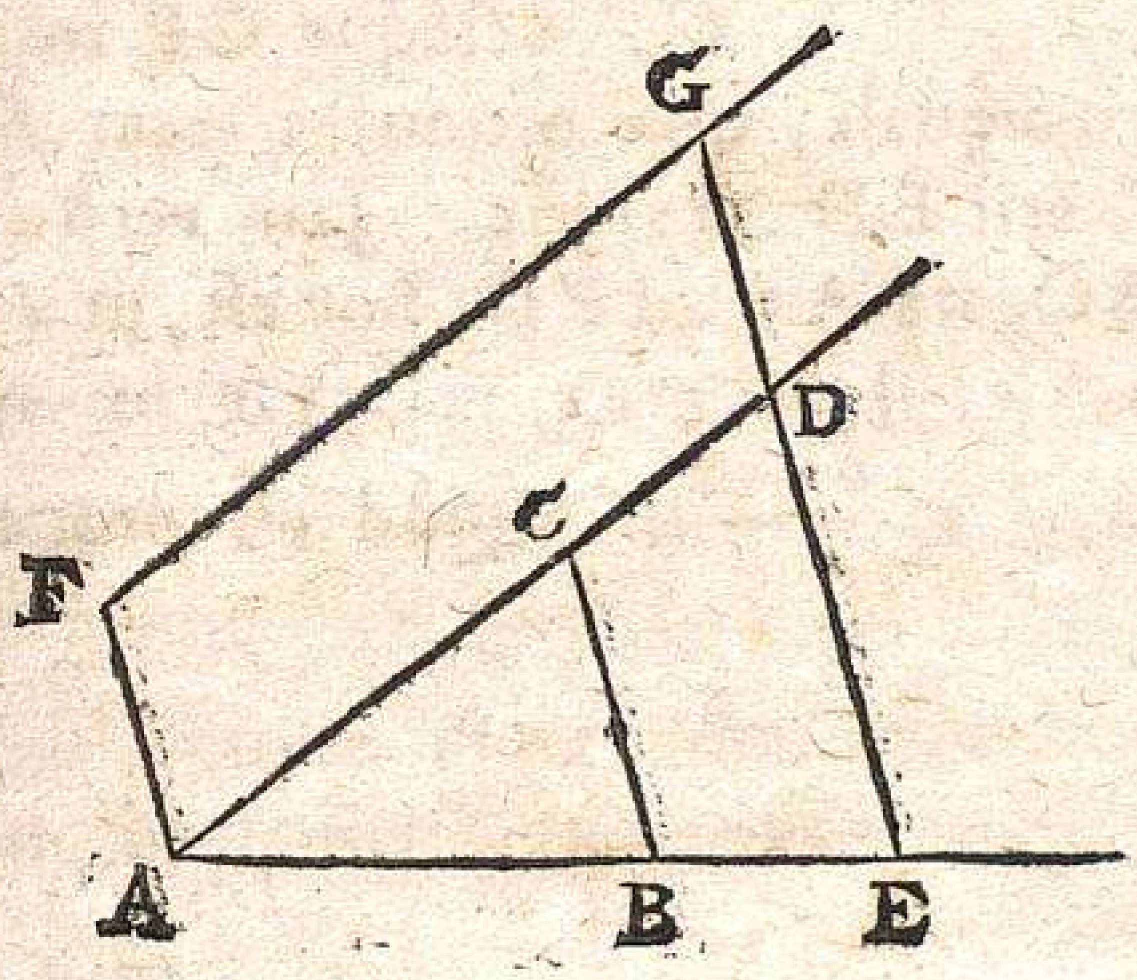
[2] per 16 sexti.

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea AC, erit eadem de omnibus aliis lineæ AC punctis demonstratio, ac proinde ipsa AC locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

Theorema II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \propto \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta AF ipsi BC parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ FG parallelâ AC, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

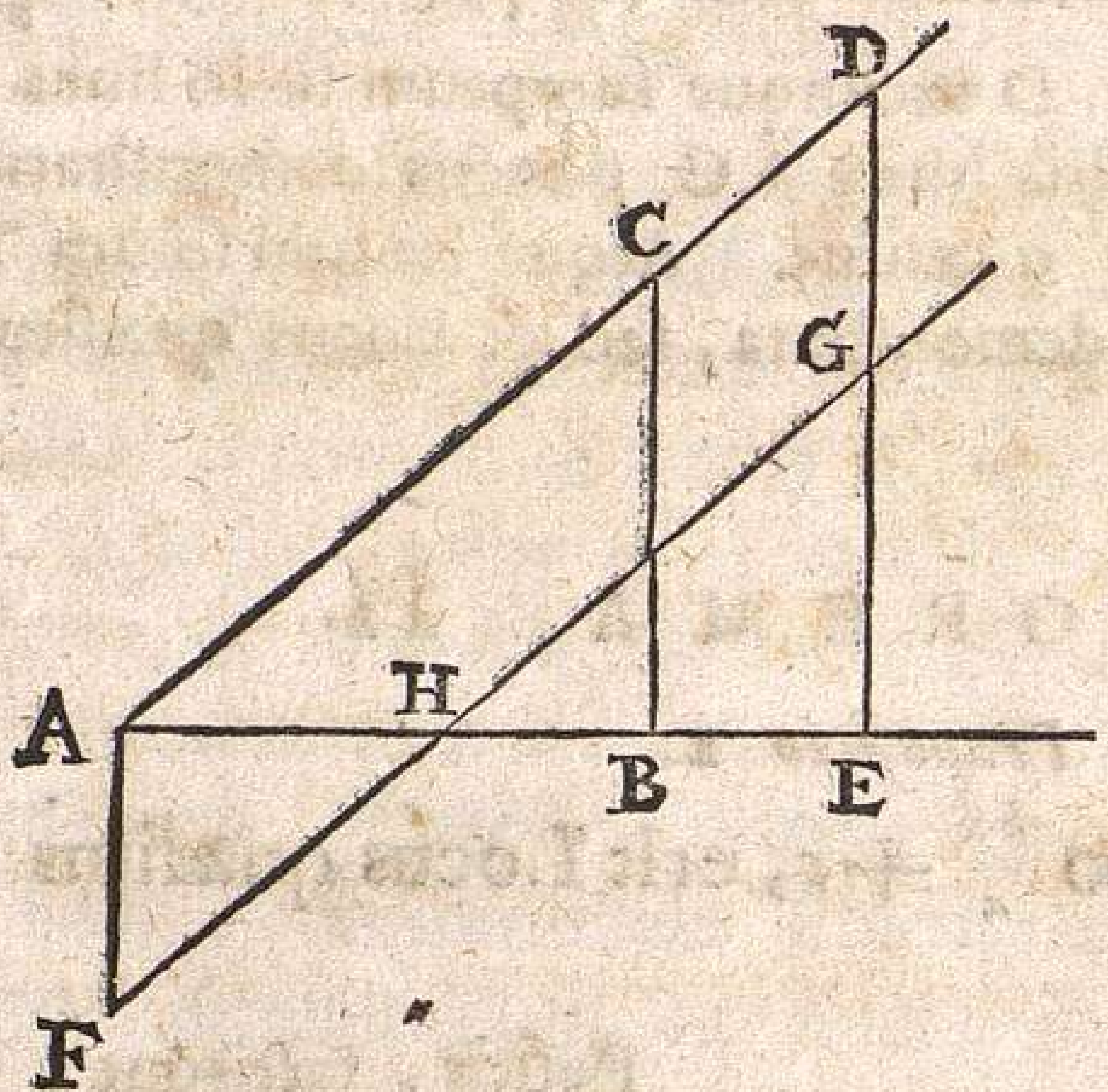
Sumpto enim in FG puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato

dato vel assumpto æquali, quæ secet rectam AC in D, si eadem
[1] per 29 primi, & 4 sexti. GE vocetur y, erit ED $\infty\, y - c$. At verò est, ut supra [1], uti AB
ad BC, ita AE ad ED, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac pro-
[2] per 16 sexti. pterea [2] $ay - ac \infty bx$, vel $ay \infty bx + ac$, adeoque, factâ divi-
sione per a, $y \infty \frac{bx}{a} + c$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

THEOREMA III

Propositio 3.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis factisque ut in Theoremate 1mo, agatur insuper ex A recta AF, ipsi BC parallela, atque ad oppositas cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum FG ipsi AC parallelâ, secante rectam AB in H, dico HG esse Locum quæsitum.

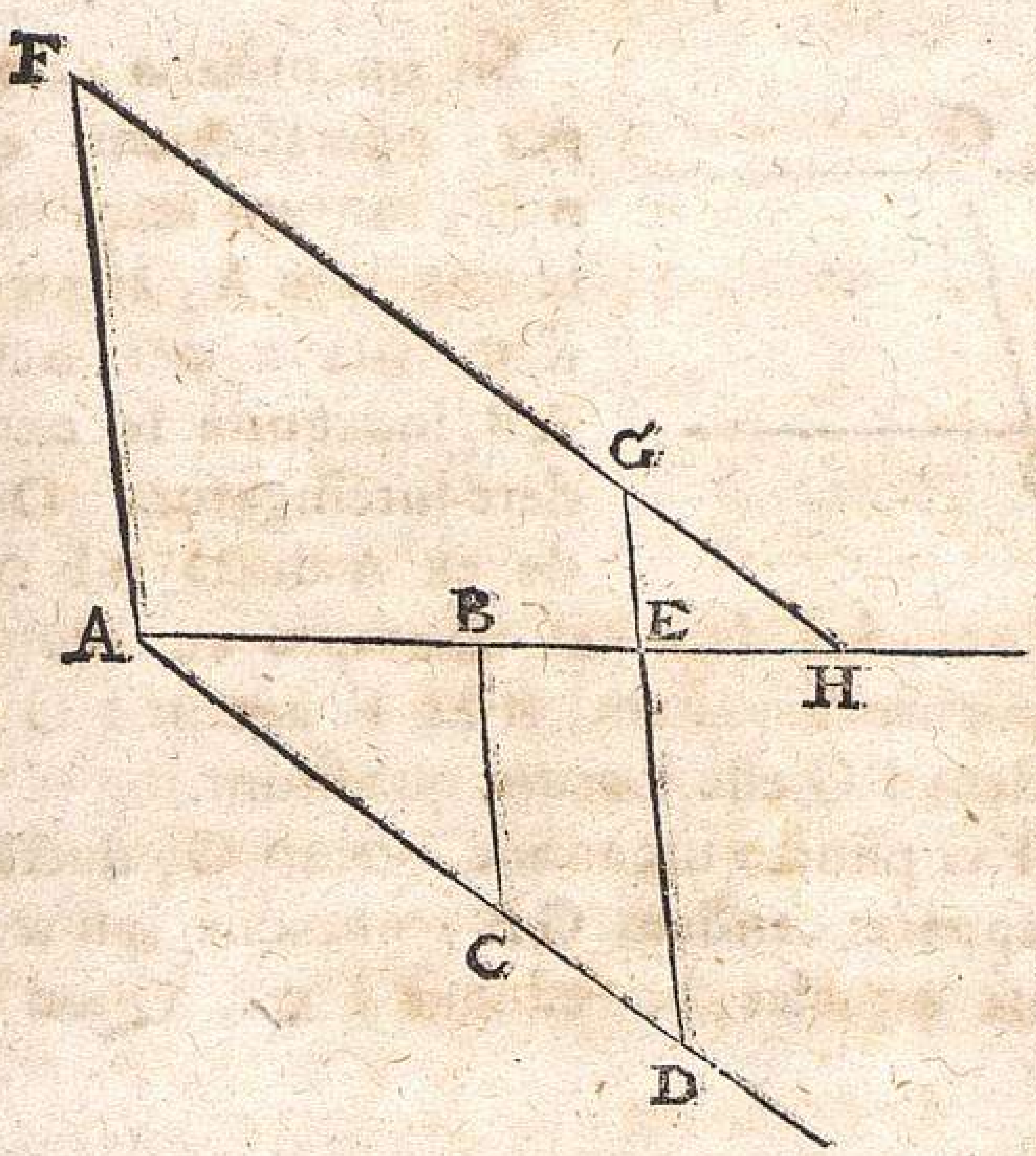
Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet AC
[3] per 29 primi, & 4 sexti in D, si eadem GE vocetur y, erit ED $\infty\, y + c$. Jam verò est [3]
ex constructione, ut AB ad BC, ita AE ad ED, hoc est, ut a ad
[4] per 16 sexti. b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac \infty bx$, vel $ay \infty bx - ac$,
adeoque, factâ divisione per a, $y \infty \frac{bx}{a} - c$. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Si æquatio sit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab opposita parte ipsius AB cadat, quodque angulus ABC æqualis sit dati vel assumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta FG ipsi AC parallela, occurrens rectæ AB in H: dico FH esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in FH puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet AC in D, si eadem GE vocetur y, erit ED ∞ $c - y$. Cumque sit [1] ex constructione, ut AB ad BC, ita AE ad ED, hoc est, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \infty bx$, vel $ay \infty ac - bx$, id est, dividendo utrinque per a, $y \infty c - \frac{bx}{a}$. Quod erat propositum.

[1] *per 13 & 29 primi, & 4 sexti.*
[2] *per 16 sexti.*

At verò fieri etiam potest, ut per operationem, priusquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evanescat, alteraque sola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

exinde binæ insuper formulæ nascuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

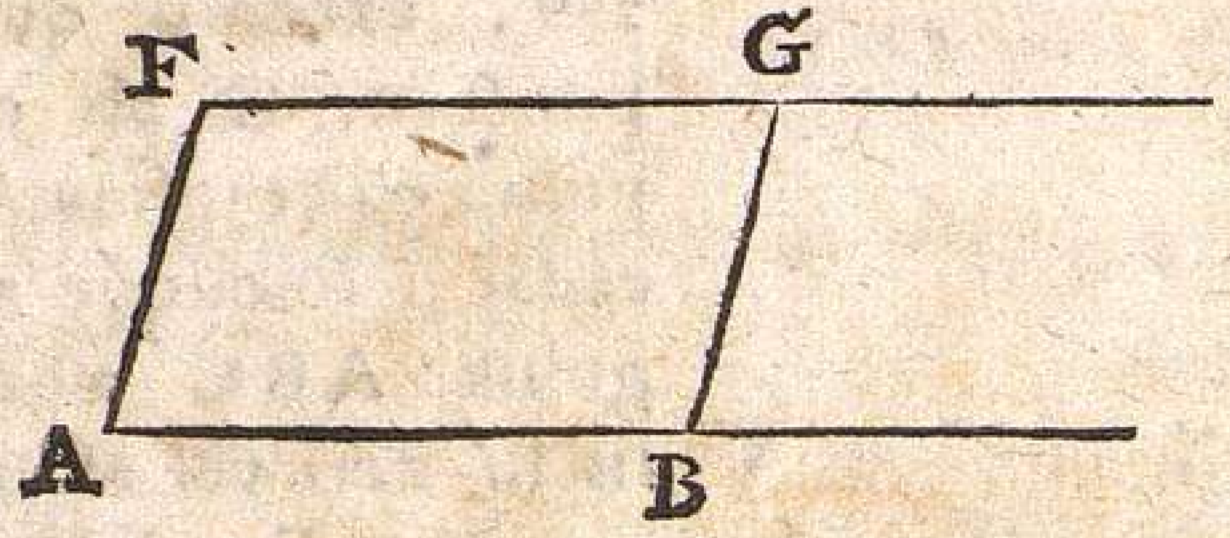
1. $y \propto c$, vel

2. $x \propto c$.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \propto c$, Locus quæsitus est linea recta.



Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ AF $\propto c$, faciente cum AB angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ab binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur FG ipsi AB parallela, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

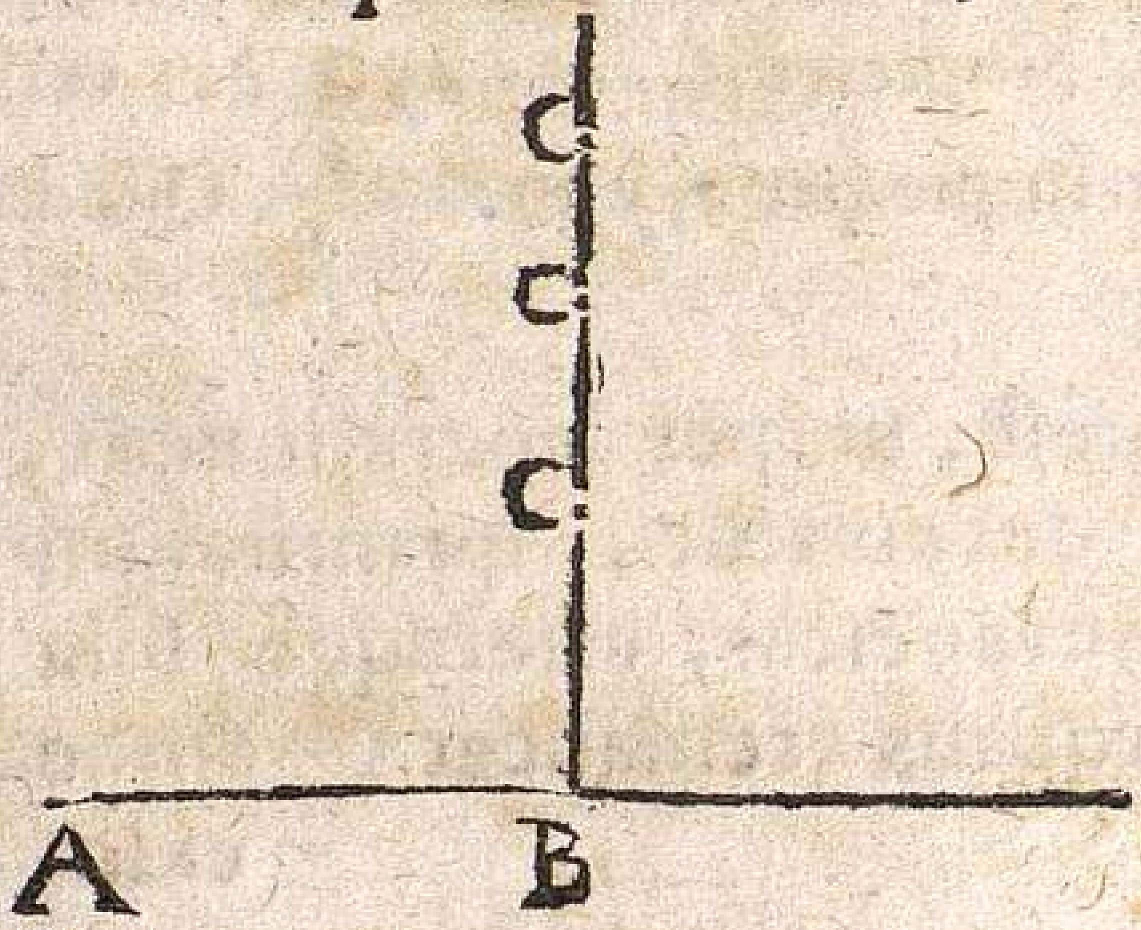
Etenim assumpto in FG puncto utcunque, veluti G, ductâque GB ipsi AF parallelâ, apparet eandem GB omnesque ipsi æquidistantes [1] rectæ AF fore æquales, hoc est, esse $y \propto c$. Quod erat demonstrandum.

[1] *per 34 primi.*

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \propto c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea AB, quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo AB æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur recta BC. dico eandem BC, indefinitè productam, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto

ēto utcunque, veluti C, erit ex hypothesi CB cum priore AB comprehendens angulum ABC dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem CB vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper AB, hoc est, $x \infty c$. Quod est propositum.

CAPUT II.

Porrò secundo casu, supra expresso, cùm nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & yy \infty \quad ax \\ \text{II.} & yy \infty \quad ax + bb \\ \text{III.} & yy \infty \quad ax - bb \\ \text{IV.} & yy \infty - ax + bb \end{array}\right\} \text{vel conversim} \left\{\begin{array}{l} ay \quad\quad \infty\, xx \\ ay + bb \infty\, xx \\ ay - bb \infty\, xx \\ bb - ay \infty\, xx. \end{array}\right.$$

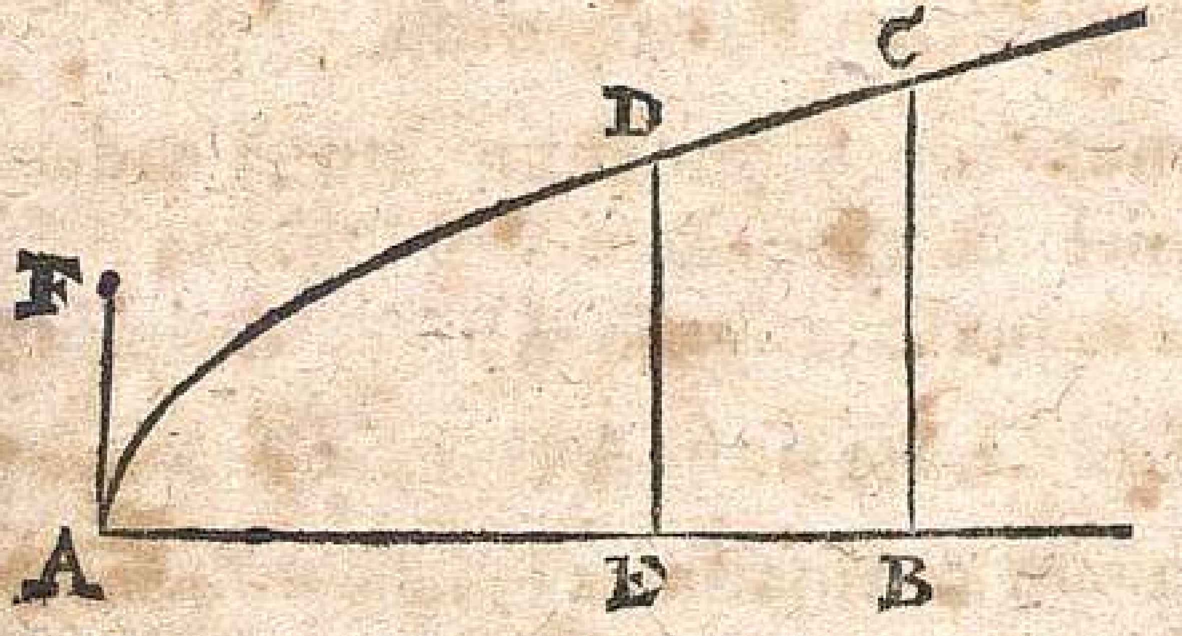
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \infty ax$, vel conversim $ay \infty xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo ABC; Assumatur primò eadem AB ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo ABC, cujusque latus rectum AF

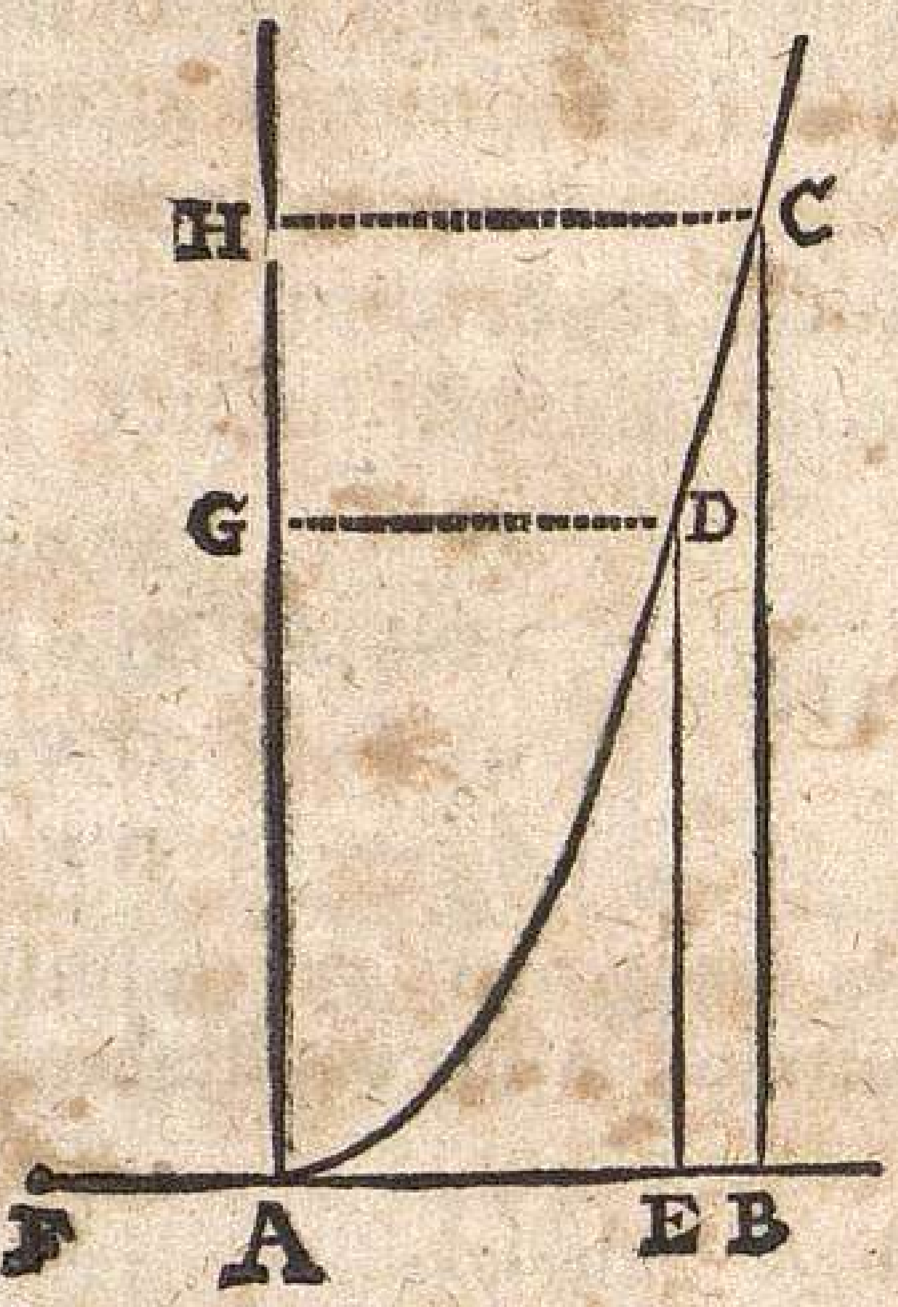


sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam ADC, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞a, esse Locum quæsitum.

[1] per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. secundi hujus.

Sit enim in eadem curva ADC assumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED dato vel assumpto æquali, si ipsa DE vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2], quadratum ex ED ∞ FAE rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.

[2] per 1 primi hujus.



Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta AH ipsi BC parallela, atque eadem AH assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABC seu AHC æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola ADC Locus quæsitus.

Est enim [3] quadratum ex GD sive AE quadratum æquale rectangulo sub FA & AG, seu FA & ED, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

[3] per 1 primi hujus.

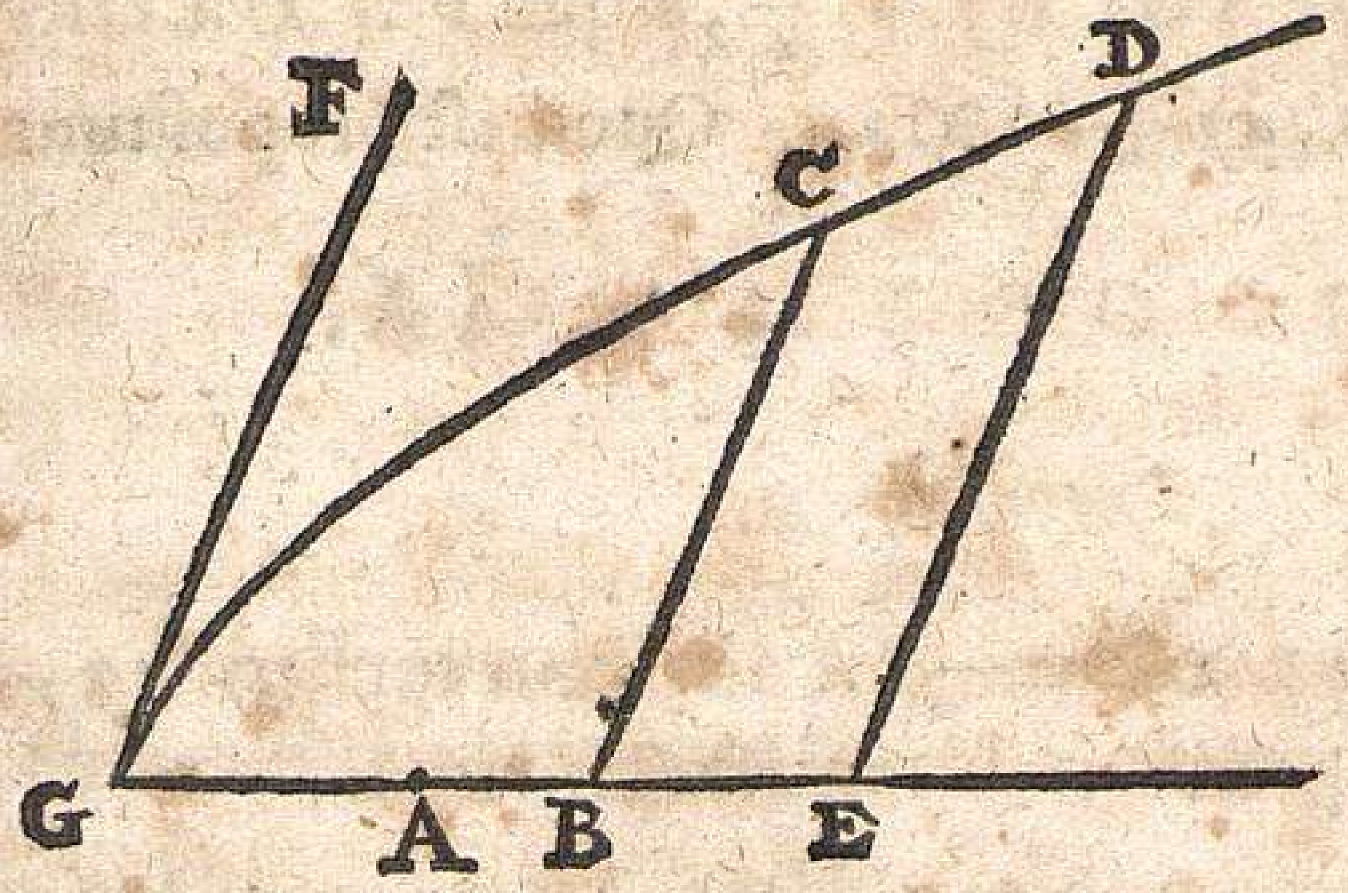
THEOREMA VIII.

Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo ABC. Deinde producatur AB versùs A usque ad G, ita ut sit AG $\infty \frac{bb}{a}$; assumptâque GB pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo ABC, cujusque latus rectum

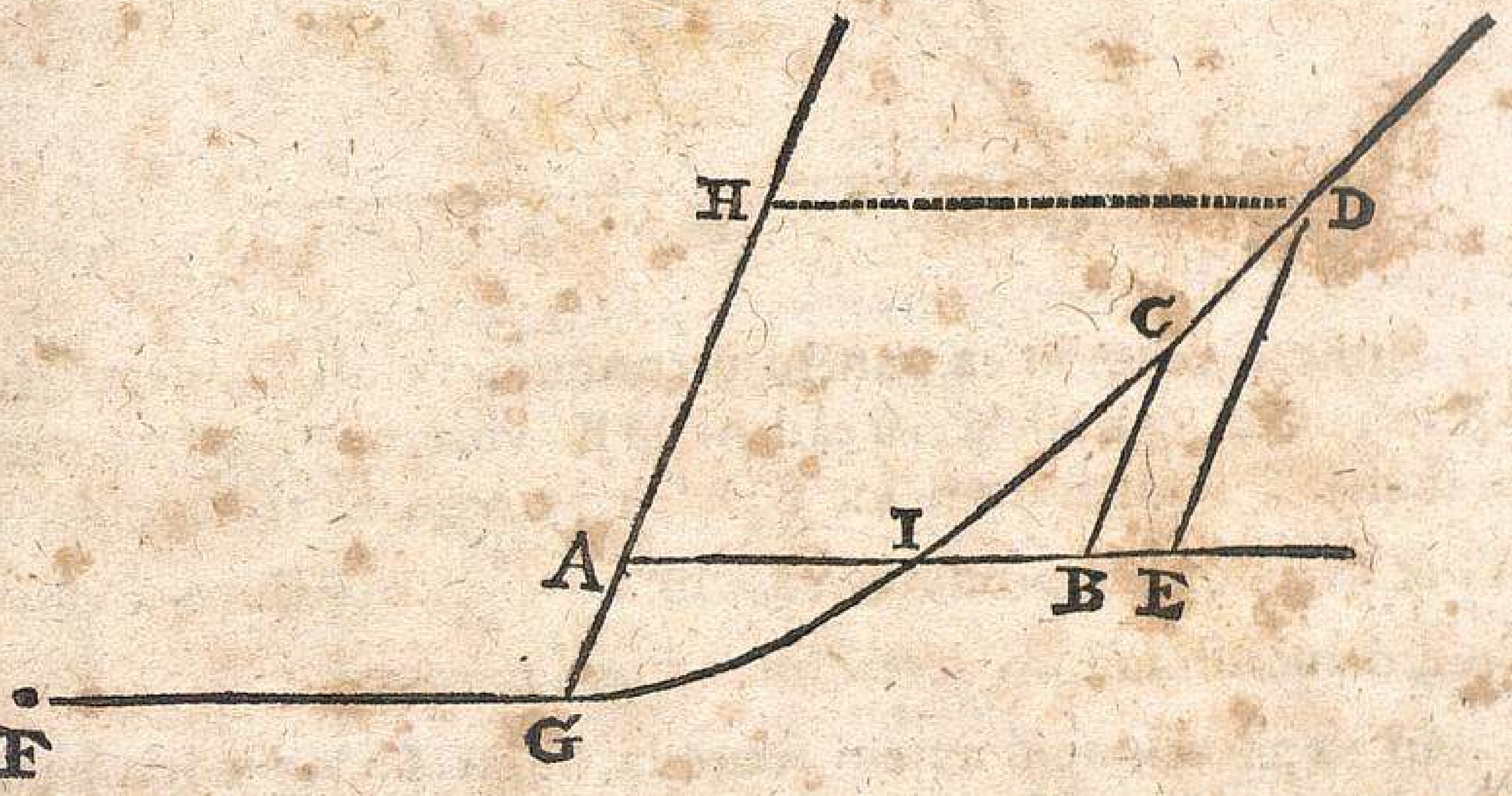
rectum GF sit æquale a cognitæ: dico Parabolam GCD, quæ per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\infty\, a$, esse Locum quæsitum.



Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED, dato vel assumpto æquali, si ipsa DE vocetur y, quoniam GE sive AE + AG est $\infty\, x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex ED ∞ rectangulo sub FG & GE, erit $yy \infty\, ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut AG sit $\infty\, \frac{bb}{a}$, di-



co, si ad GH diametrum latere recto GF $\infty\, a$ Parabola describatur ut GC, quæ secet rectam AB in I, curvam ID esse Locum quæsitum.

Est enim [2] ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH con-

[2] per 1 primi hujus.

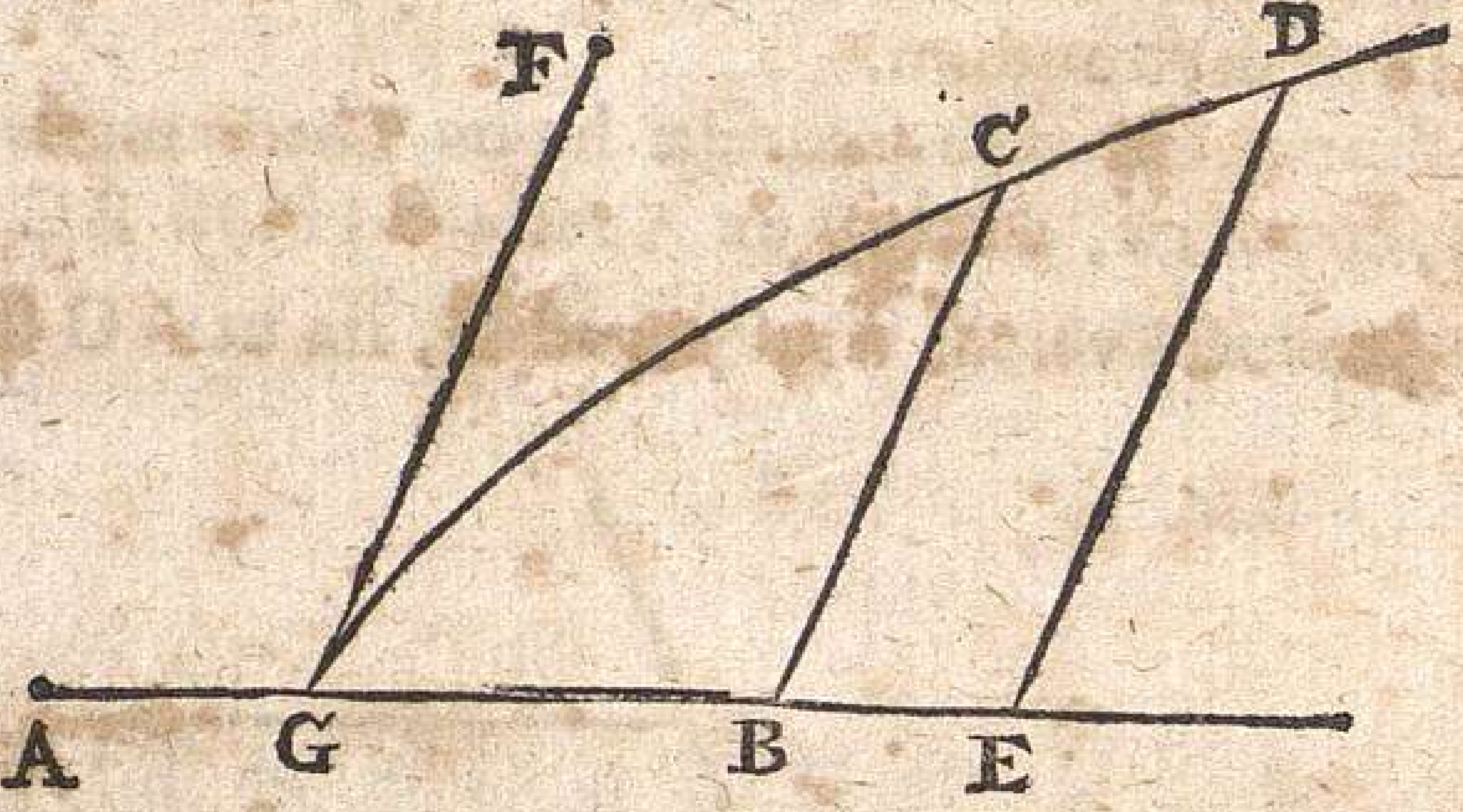
contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ac proinde, quoniam GH, sive $DE + AG, \infty\, y + \frac{bb}{a}$, atque $FG \infty\, a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \infty\, xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \infty\, ax - bb$ aut conversim $ay - bb \infty\, xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab AB recta $AG \infty\, \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam GCD esse Locum quæsitum.

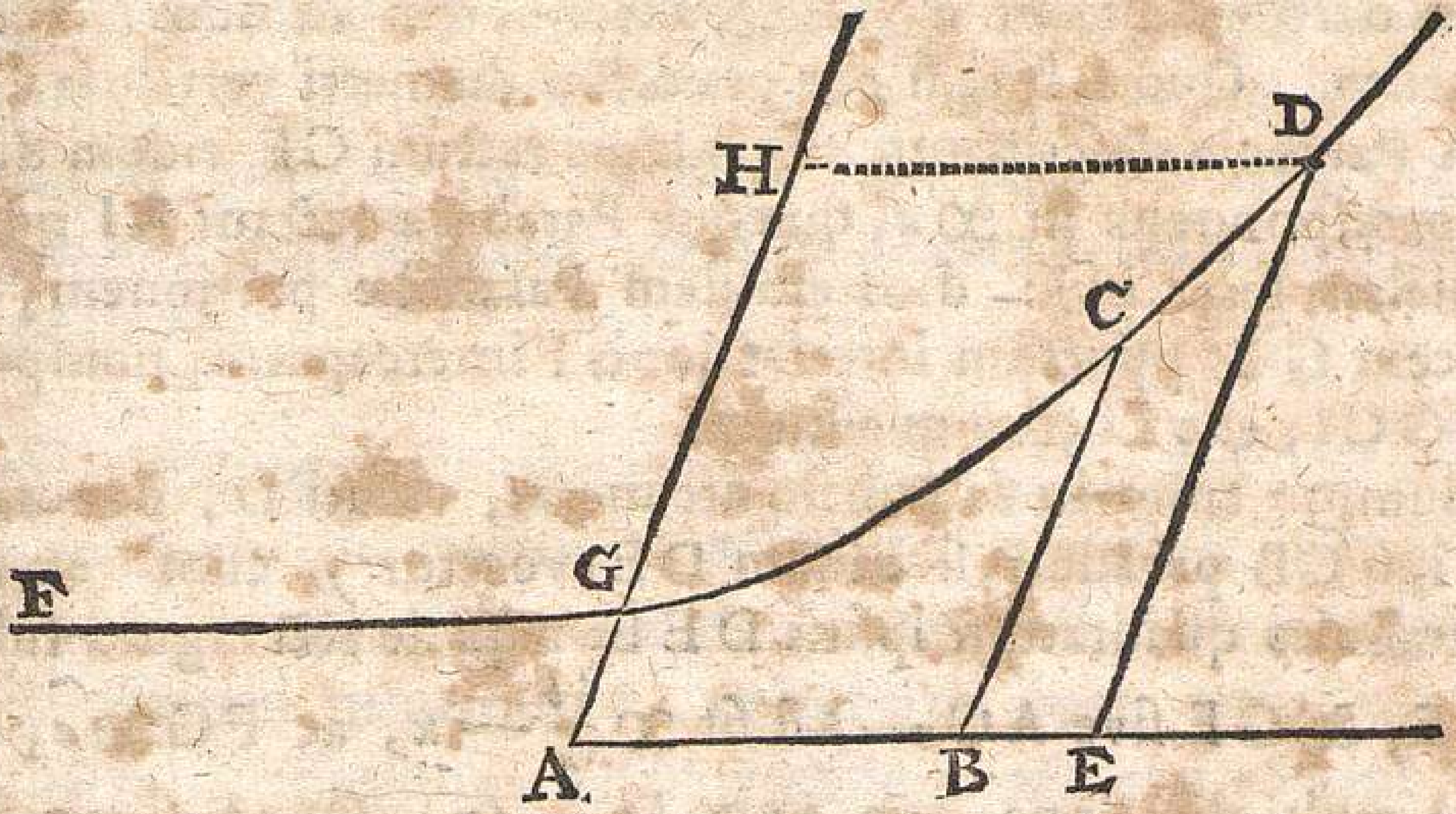


Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y, erit ex natura Paraboles [1] quadratum ex ED seu yy æquale rectangulo sub FG & GE, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela, atque ab ea subductâ $AG \infty\, \frac{bb}{a}$, sumatur GH pro diametro, &c. ut supra, dico curvam GCD fore Locum quæsitum.

Est



Est enim [1] ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH, contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ideoque, quoniam GH sive DE — AG æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque FG ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb \infty xx$. Quod erat propositum.

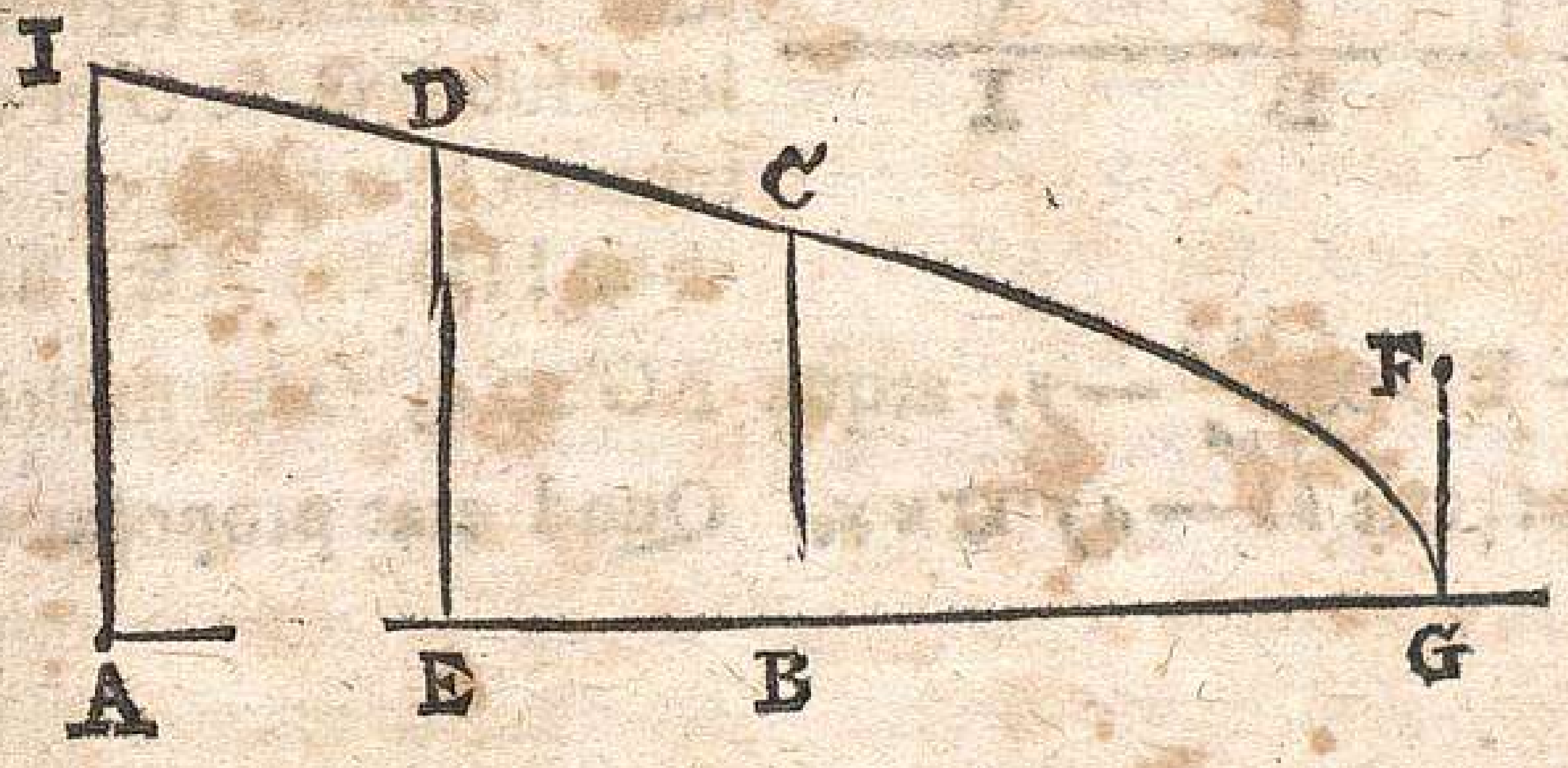
[1] per eandem.

THEOREMA X.

Propositio 10.

Si æquatio sit $yy \infty bb - ax$ aut conversim $bb - ay \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

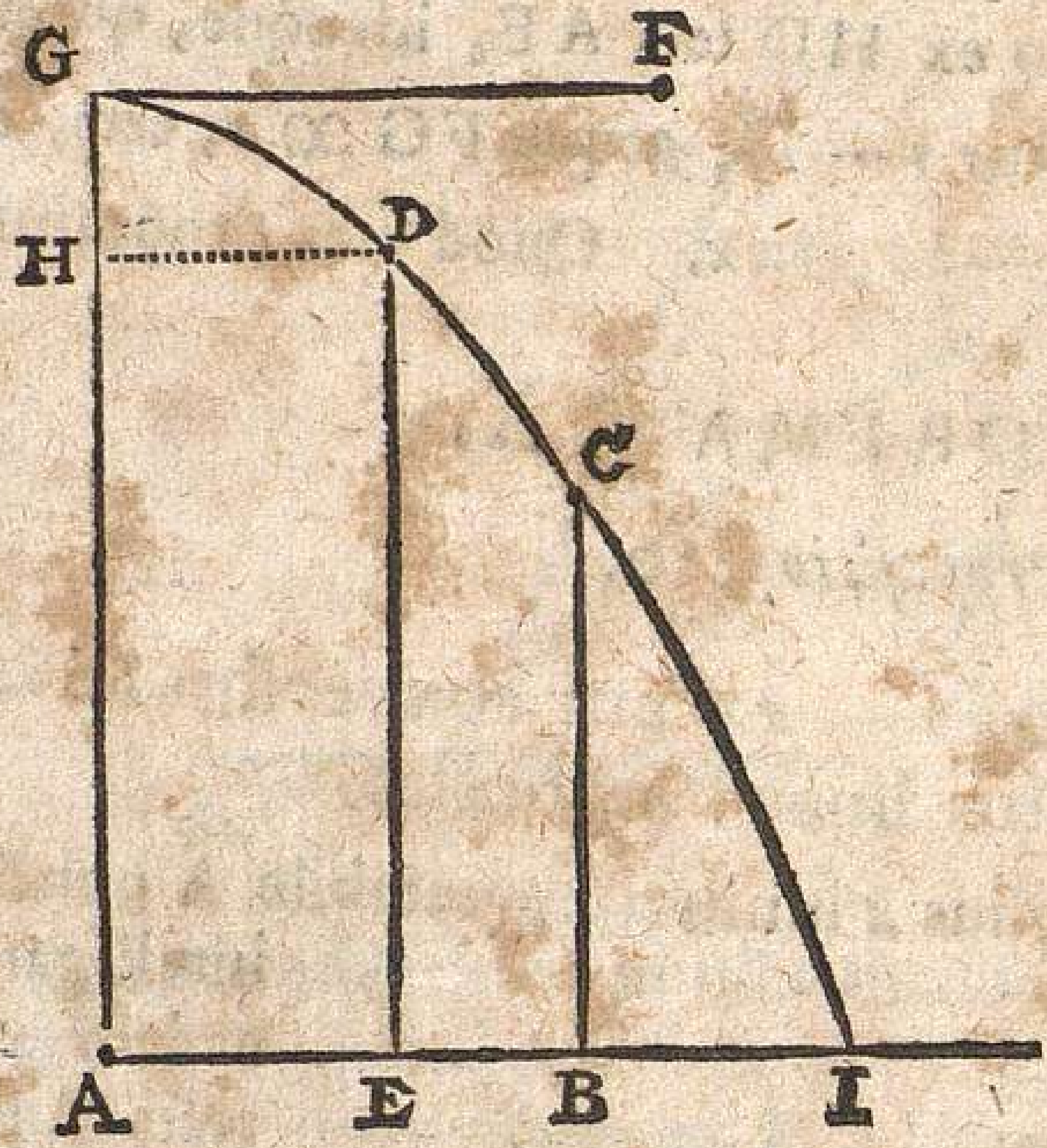
Sit enim, ut supra, ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturq; eadem x in recta AB indefinitè se ab A extendere versùs B; angulus verò datus vel assumptus esto æqualis angulo ABC. Deinde ab A versùs B assumptâ AG ∞ $\frac{bb}{a}$ sumatur GA



pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto ABC, aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo facto, si per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola describatur, cujus latus rectum GF eidem diametro correspondens sit ∞a, quæque Parabola rectam AI ipsi BC parallelam secet in I: dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam GCI, esse Locum quæsitum.

[1] per 1 primi hujus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipsius DE sit æquale rectangulo sub FG & GE, & GE sive AG — AE sit $\infty \frac{bb}{a} - x$, ac FG∞a, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \infty bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.



Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur AG ipsi BC parallela atque $\infty \frac{bb}{a}$, assumaturque GA pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quòd punctum intersectionis I sit in recta AE.

[2] per eandem.

Cum enim ductâ DH ipsi AB parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH contentum sit æquale quadrato ex HD seu AE, sitque GH sive AG — ED$\infty \frac{bb}{a} - y$, atque FG∞a, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \infty xx$. Quod erat propositum.

Regula

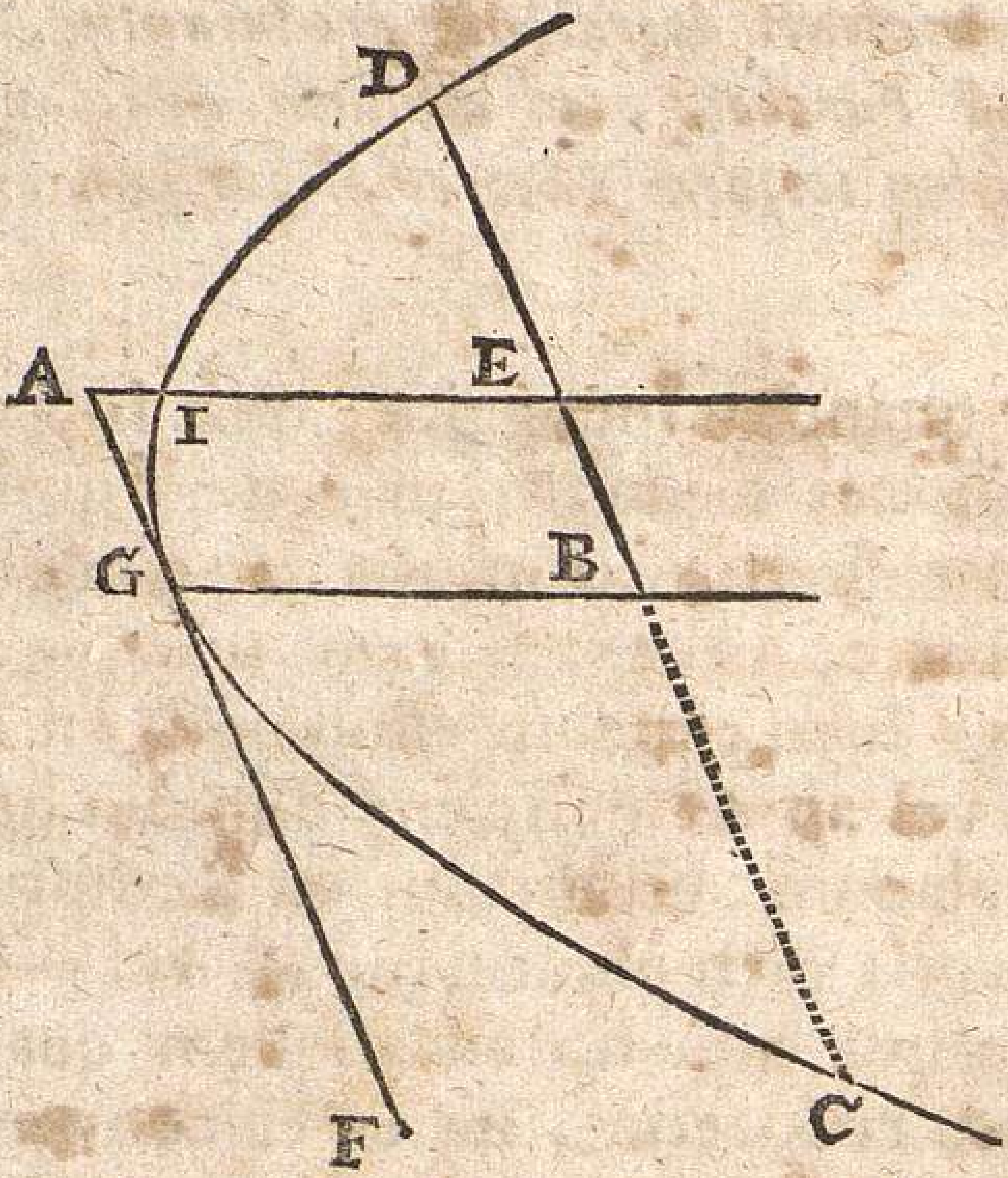
Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæsitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniatur unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constituese reperitur, pro diversa dicti plani signo + vel — affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superiùs sunt explicata, haud difficile sit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio sit $yy + 2ay \infty bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \infty y + a$, erit $z - a \infty y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy: habebitur $zz - 2az + aa$, $+ 2az - 2aa \infty bx - aa$, hoc est, omissis iis quæ sese mutuò tollunt, erit $zz \infty bx$. Unde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinitè extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z est $\infty y + a$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsi AE parallela, ita

ita ut pars rectæ AF, omniumque ipsi parallelarum, intercepta inter AE & GB, veluti AG, æquetur a cognitæ. Porrò prædicta GB assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente GF latere recto, ipsi diametro GB correspondente, $\infty\, b$ Parabola describatur, secans rectam AE in I: dico curvam ID indefinitè versùs D productam esse Locum quæsitum.



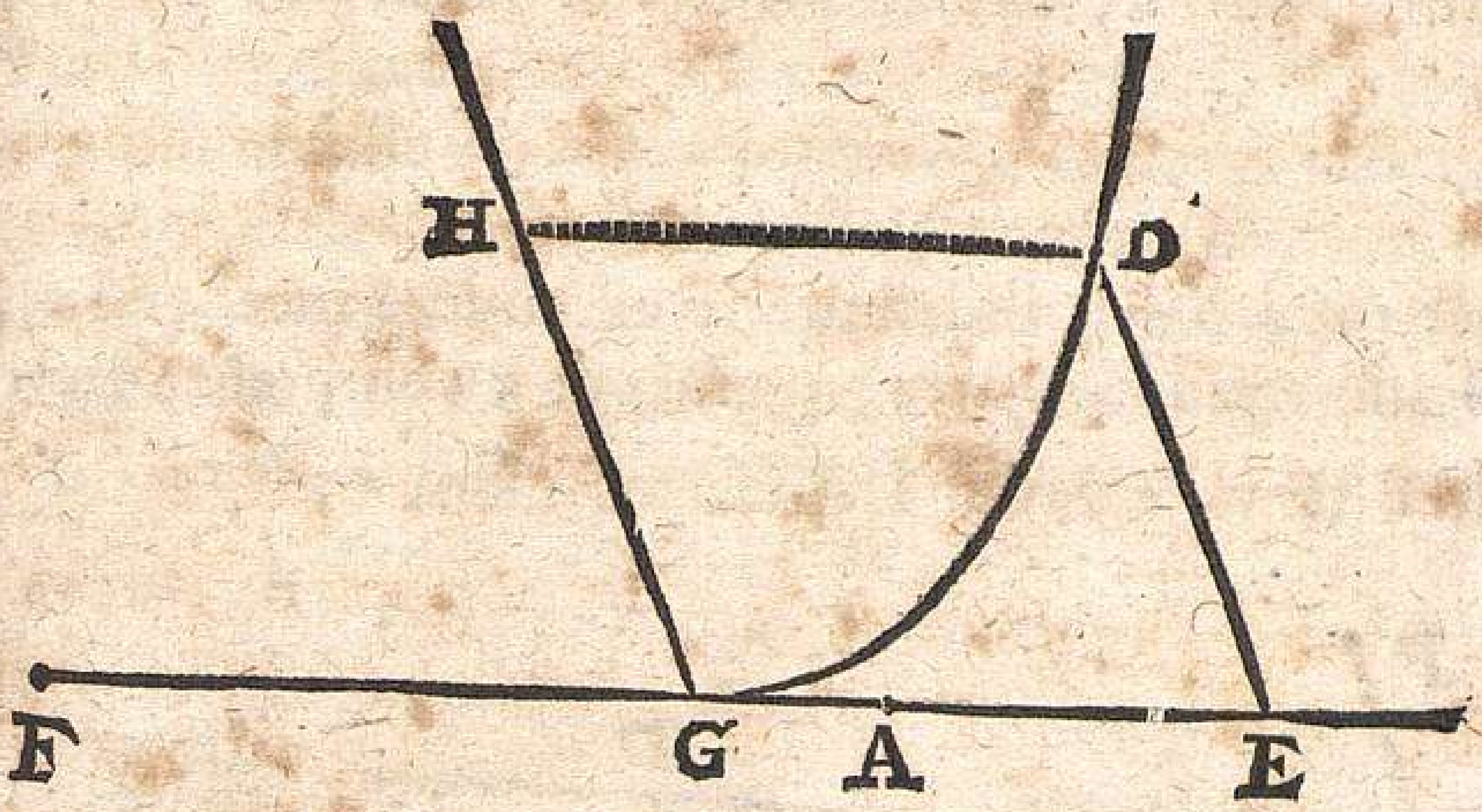
Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AF parallelâ, si eadem DE vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro GB occurrat in B: erit ex constructione intercepta EB $\infty\, a$, ac proinde tota DB $\infty\, y + a$, hoc est, z. Quare cum ex natura Paraboles quadratum ex DB æquetur rectangulo sub FG & GB, vel FG & AE: erit quoque $zz \infty bx$, sive, restituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \infty bx$, id est, $yy + 2ay \infty bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2ay \infty bx - aa$, factâ assumptione secundùm Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $zz \infty bx$. Sed quoniam z eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\infty\, y - a$, idcirco quoque diameter GB (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam AE cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \infty xx + 2ax$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + a$, erit $v - a \infty x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque hujus

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \infty vv - 2av + aa, + 2av - 2aa$, hoc eſt, omiſſis iis, quæ ſe mutuò tollunt, erit $by \infty vv$.

Unde ſtatim apparet, reductam eſſe æquationem ad formulam prædicti Theorematis ſeptimi converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A,

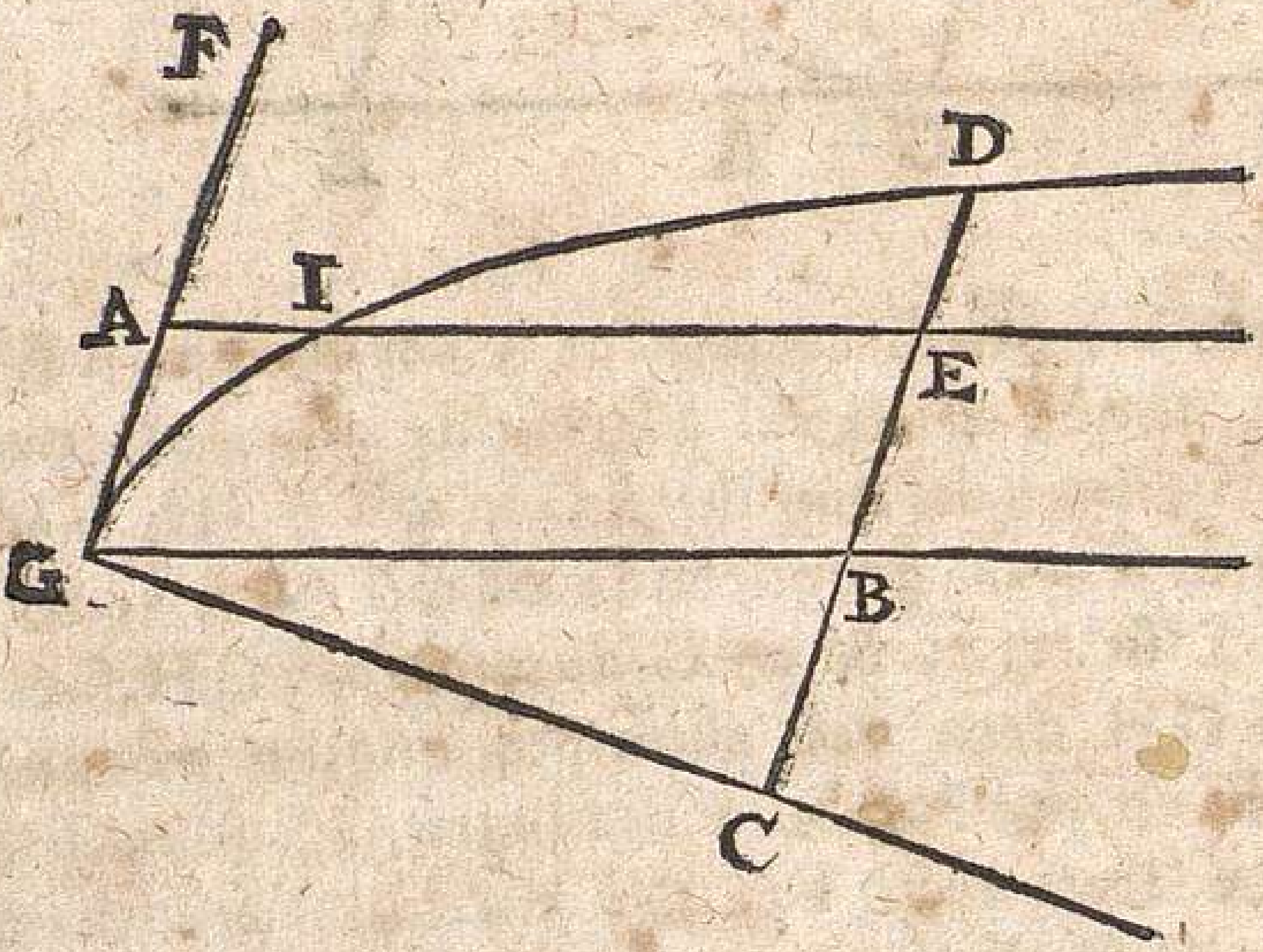


intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam AE indefinitè ſe extendere, ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo AGH vel FGH. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda eſt recta AE versùs A uſque ad G, ita ut AG ſit ∞a; & ex G ducenda eſt GH, faciens angulum EGH vel FGH dato vel aſſumpto angulo æqualem, ipſaque GH ſumenda eſt pro Parabolæ diametro, ad quam ſi per ejus verticem G atque latere recto FG ∞b Parabola deſcribatur, ut GD: dico curvam GD eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipſi HG parallelâ, ſi eadem DE vocetur y, cum GE ſit $\infty x + a$ ſeu v, atque ex natura Paraboles FGH rectangulum ∞ quadrato ex HD ſive GE, erit $by \infty vv$, ſive, reſtituto $x + a$ loco v, $by \infty xx + 2ax + aa$, ſeu $by - aa \infty xx + 2ax$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Quòd ſi æquatio fuiſſet $by - aa \infty xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis ſecundùm Regulam inſtituenda fuiſſet operatio, cecidiſſetque eo caſu punctum G inter A & E.

Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, assumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a} x + bx$, aut $zz \infty dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d. Unde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF vel EAG. Deinde quoniam z est $\infty y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, veluti ED, ducenda primùm est infra eandem recta GB ipsi parallela, ita ut partes rectæ FG omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & GB interceptæ, veluti AG, EB, æquentur c cognitæ. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y, ad rectam GB producta, ut, exempli gratiâ, DB, sit $\infty y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ. Quare, cum GB seu AE indefinitè sumpta sit ∞x, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem GB recta ducatur, ut GC; ita ut omnium ipsi GF parallelarum partes inter GB & GC interceptæ, veluti BC, ad partes ipsius GB inter G & dictas parallelas

rallelas interceptas, veluti B G, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a. Quod ipsum ut fiat, statuatur ut a ad b, ita G B ad B C: eritque B C $\infty \frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipsi B C parallelæ, quæ à G B ad G C ducuntur, erunt $\infty \frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet supra A E exsurgens, quæ possit esse y, postquam ad rectam G C erit producta, ut, exempli gratiâ, D C, erit $\infty\, y + c + \frac{bx}{a}$ seu z. Hujus igitur quadratum cum debeat esse $\infty\, dx$, statim inde apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum G C, cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula, sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent $\infty\, dx$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C, aliarumque similium, cognita sit, nempe, ut a ad b; sitque itidem notus angulus G B C, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A F: erit propterea quoque [1] nota ratio G B ad G C, aliarumque similium, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum G B seu A E indefinitè sumpta exprimatur per x, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty \frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx, idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est: ac proinde per eandem divisionem cognoscitur quæsitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo G F $\infty \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A E in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

Atque hic, ut & in aliis similibus exemplis obiter notandum, si Parabola descripta prædictam A E non secaret, id certo indicio fore, quæstionem propositam, per quam legitimâ operatione ad supra expressam æquationem perventum fuerit, ejus esse conditionis, ut Locus ad indagandum propositus sui quidem naturâ linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

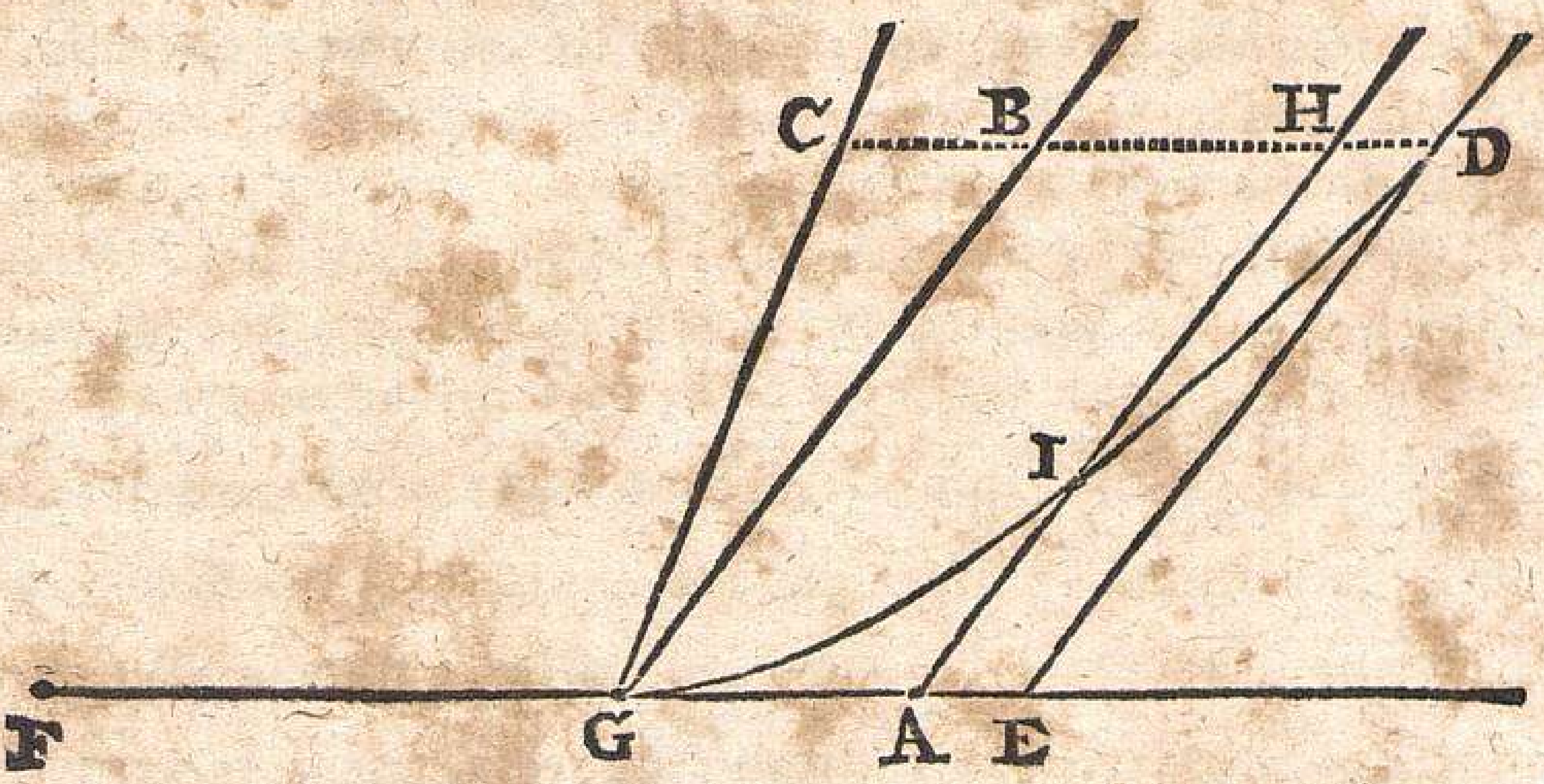
Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, sumatur in curva ID punctum utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, quæ protracta secet rectam GB in B, occurratque diametro GC in C, si DE vocetur y, cum EB seu AG sit $\infty\, c$, & BC $\infty\, \frac{bx}{a}$, erit tota DC $\infty\, y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex DC ∞ FGC rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz \infty dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam z juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ GB non infra sed supra rectam AE, ut & GC non infra sed supra eandem GB ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} - c$. Unde substituto hoc valore in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \infty vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $dy \infty vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematis VII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad

Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in ſequenti figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam AE indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque da-



tus vel aſſumptus angulus EAH vel FAH. Deinde, quoniam ex ſecunda parte Theorematis VII conſtat, prædictam Parabolam ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum ſint ipſi AE parallelæ, debeantque juxta æquationem propoſitam æquales eſſe quantitati aſſumptæ v, hoc eſt, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm eſt recta GB ipſi AH parallela, ita ut pars rectæ EA, verſùs A productæ, ut & omnium ipſi æquidiſtantium, velut AG vel HB ſit ∞ c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ poſſit eſſe ipſi AE æquidiſtans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, DH, ad rectam GB producta; uti DB, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, ſecundùm ea, quæ in præcedentibus explicata ſunt, conſtituenda eſt Parabolæ diameter ab adverſa parte ipſius GB, quàm eſt punctum E in recta GC, ut, ſi GB indefinitè vocetur y, BC, aliarumque omnium ipſi AE parallelarum inter eandem GC & rectam GB interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipſi AE parallela, quæ poſſit eſſe x ad rectam GC producta, veluti DC, ſit ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Cujus quidem quadratum cum æquale eſſe debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: ſtatim apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum GC, cujus latus rectum GF ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent $\propto dy$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ GB ad rectam BC aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto EAH: erit quoque [1] ratio ipsius GB ad GC aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si GB sive ED indefinitè sumpta exprimatur per y, erit GC itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\propto \frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eadem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ GF $\propto \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum GC inventam, ut supra dictum est, describatur Curva Parabolica GID, secans rectam AH in I: dico curvam ID fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

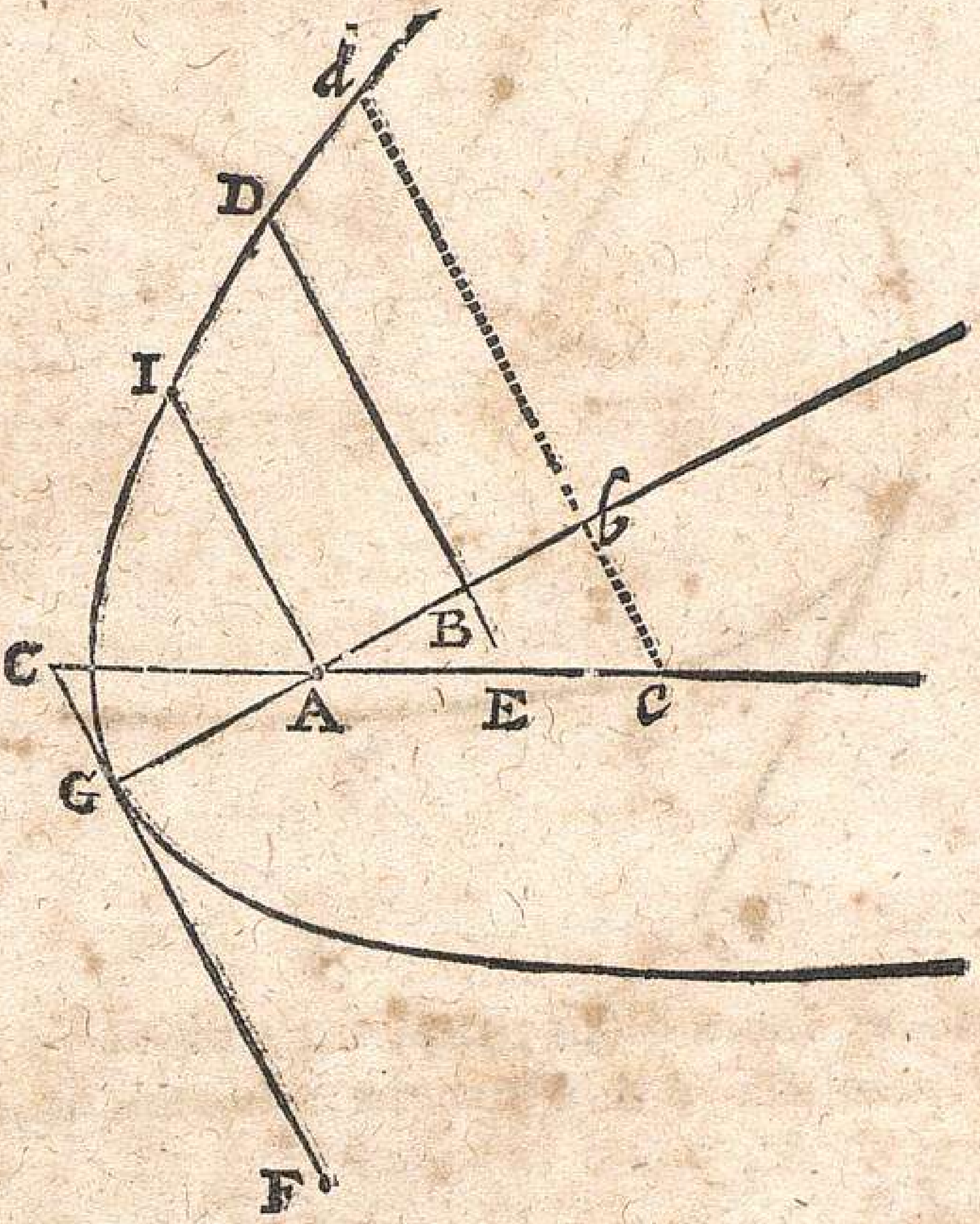
Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AH, ut & DC ipsi AE parallelâ, quæ quidem DC secet rectas AH & GB in punctis H & B, occurratque diametro GC in puncto C: erit AE $\propto x \propto$ DH; ED $\propto y \propto$ GB; AG & HB $\propto c$; BC $\propto \frac{by}{a}$, ideoque tota DC $\propto x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum FGC sit æquale quadrato DC: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \propto vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \propto xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè expli-

explicari, determinari, ac demonstrari queant; observatâ solummodo diversâ linearum positione, quæ ex signorum + & — differentia oriri debet, cumque omnes similium locorum casus mox per generalem Regulam sim exhibiturus.

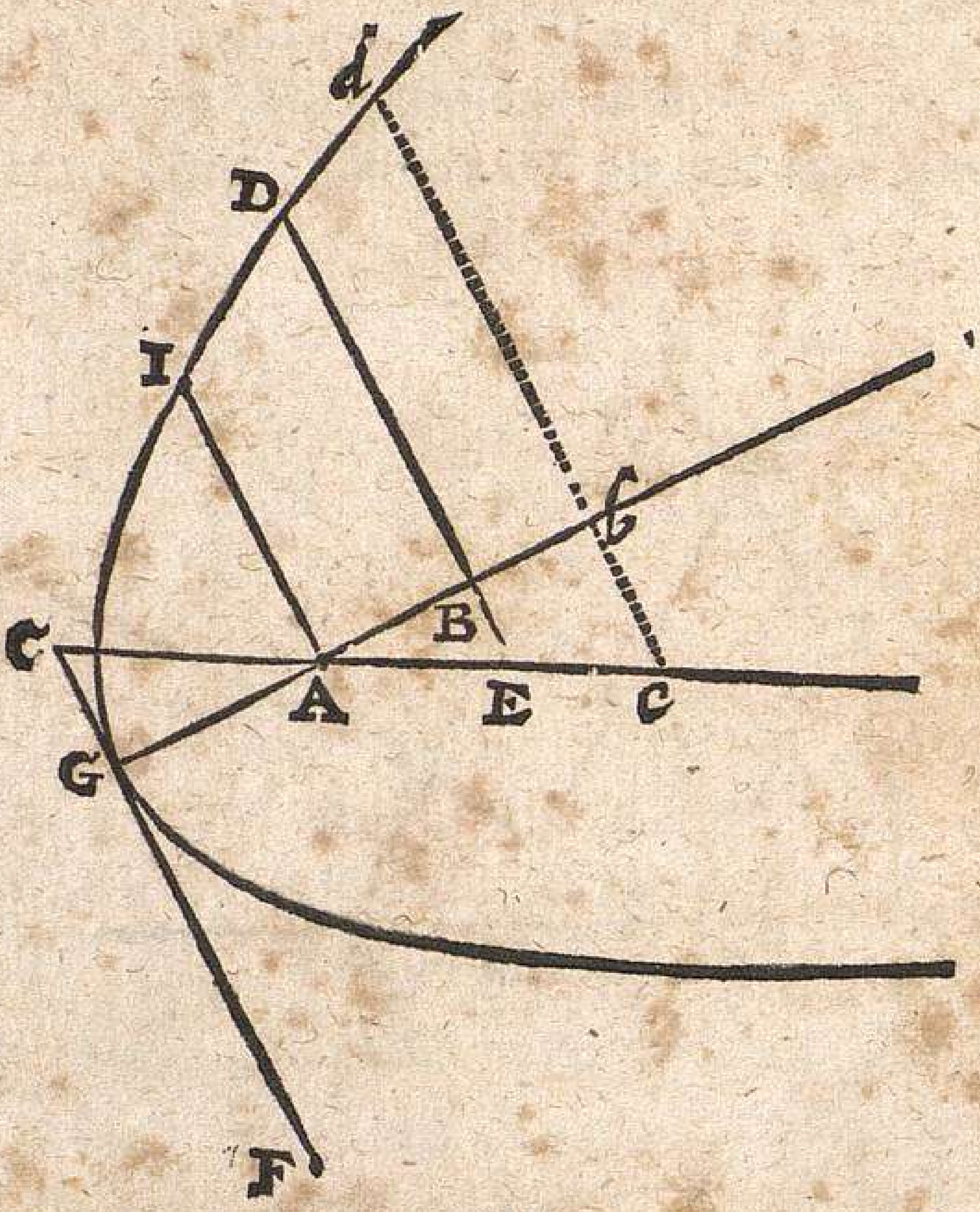
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

Si æquatio sit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, omissisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.



Unde apparet, eandem esse reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus particularem descriptionem esto in adjuncta figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A per

per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AED. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, veluti ED, ducenda quoque est supra lineam AE ex puncto A recta AB, ita ut eadem sit ratio AE ad EB, quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b, ita AE seu x ad EB, eritque EB $\infty \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi EB parallelis, atque inter AE & AB interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta AB Parabolæ diameter foret, ejusque vertex punctum A, &, positâ ratione AE ad AB, ut $2a$ ad e, latus rectum ipsi correspondens esset $\infty \frac{2ab}{e}$. Jam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$: manifestum est, si, iisdem positis, diameter

AB

AB verſùs A producatur ad G, ita ut rectangulum ſub prædicto latere recto & parte GA contentum ſit $\propto dd$, rectam GB quæſitam fore diametrum, ejuſque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc eſt, per $\frac{2ab}{e}$, diviſum æquari longitudini GA, ideoque GA fore $\propto \frac{dde}{2ab}$. Quare ſi diametro GB & latere recto GF $\propto \frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola deſcribatur GDd, ſecans AI ipſi ED parallelam in I: dico curvam IDd fore Locum quæſitum.

Verùm obiter hîc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: ſi nempe EA producatur ad C, ita ut AC ſit $\propto \frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipſi DE parallela ducatur CG, occurrens productæ AB in G: erit enim in eodem illo concurſus puncto vertex quæſitus.

Demonſtratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED, dato vel aſſumpto æquali, ſecante diametrum GB in B: erit, ex conſtructione, BE $\propto \frac{bx}{2a}$; ideoque, ſi ED vocetur y, erit DB $\propto y - \frac{bx}{2a}$ ſeu z; FG $\propto \frac{2ab}{e}$, GA $\propto \frac{dde}{2ab}$; AB $\propto \frac{ex}{2a}$, totaque GB $\propto \frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ DB quadratum ſit æquale rectangulo FGB, erit, factâ multiplicatione ipſius z in ſeipſam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \propto dd + bx$. Unde ſubſtituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z, obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \propto bx + dd$, id eſt, $yy - \frac{bxy}{a} \propto - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonſtrandum.

Quomodo autem pro caſu hujus exempli converſo Parabola deſcribenda ſit, ex comparatione ejuſdem cum antedictis facile eſt colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \propto xx + \frac{2byx}{a} - cx$, assumpto juxta Regulam $v \propto x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \propto v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quae se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, aequatio superior sequenti formâ erit induta

$$by + \frac{1}{2}cc \propto vv.$$

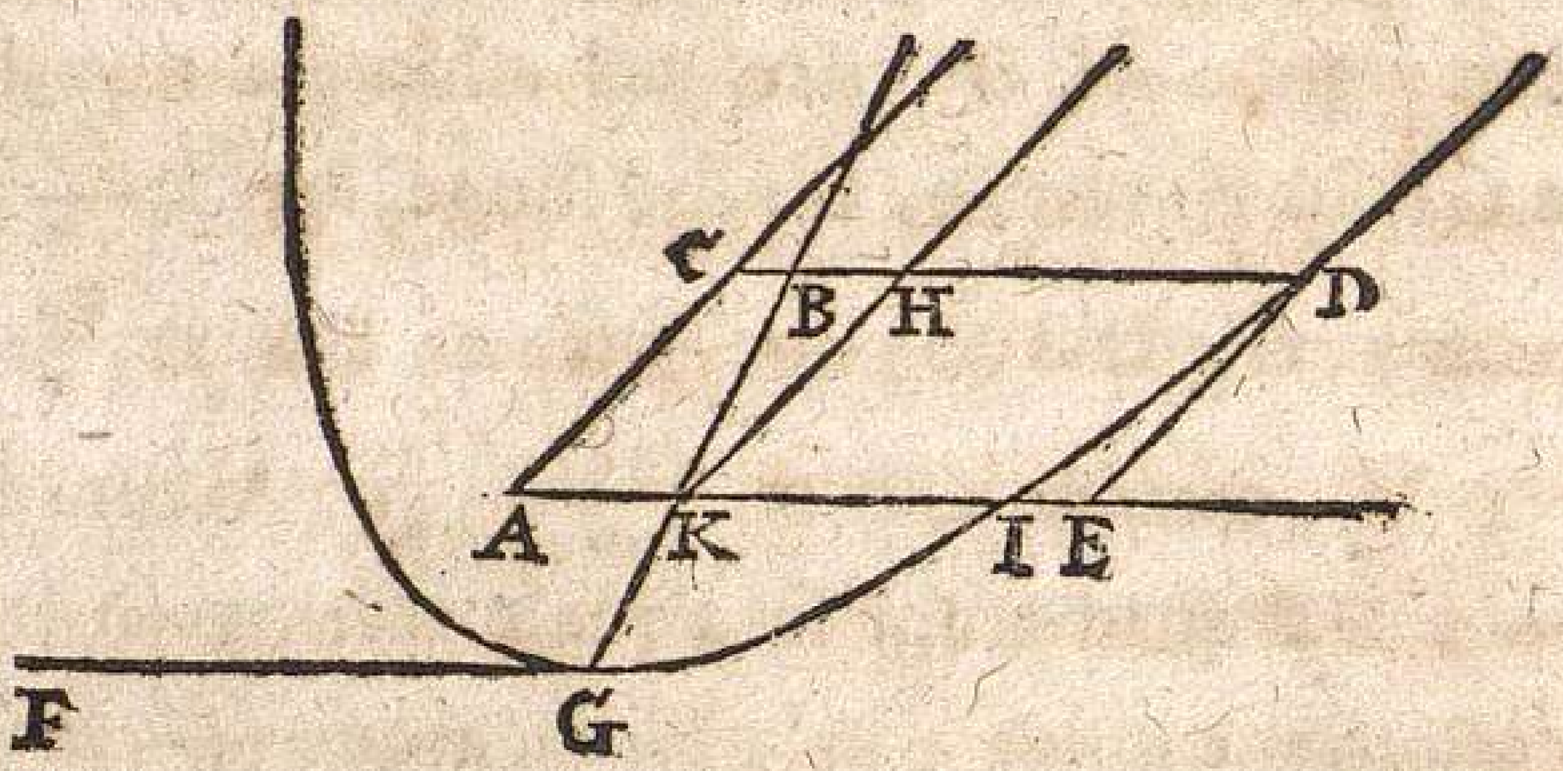
Unde apparet eandem esse reductam ad formulam praedicti Theorematis VIII conversim, ac proinde Locum quaesitum esse Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjuncta figura, AE indefinitè assumptam esse quantitatem incognitam x, atque cum altera y constituere angulum aequalem angulo EAC vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

AE indefinitè $\propto x$.

ED omnesque ipsi parallelae $\propto y$.

AK $\propto \frac{1}{2}c \propto$ CH, quia KH parallela AC.



Ut a ad b, ita KH seu y ad HB: unde HB fit $\propto \frac{by}{a}$, & DB $\propto x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \propto v$.

Ut a ad e, ita KH seu y ad KB: unde KB (in qua diameter) fit $\propto \frac{ey}{a}$.

by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum FG fit $\propto \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{2}cc$, nempe terminus aequationis in totum cognitus, divisus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{c}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{cce}{2ab}$: unde KG fit $\infty \frac{cce}{2ab}$, atque GB $\infty \frac{cce}{2ab} + \frac{ey}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum FGB ∞ BD quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \infty vv$, vel $by \infty vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \infty xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc$
$- \frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

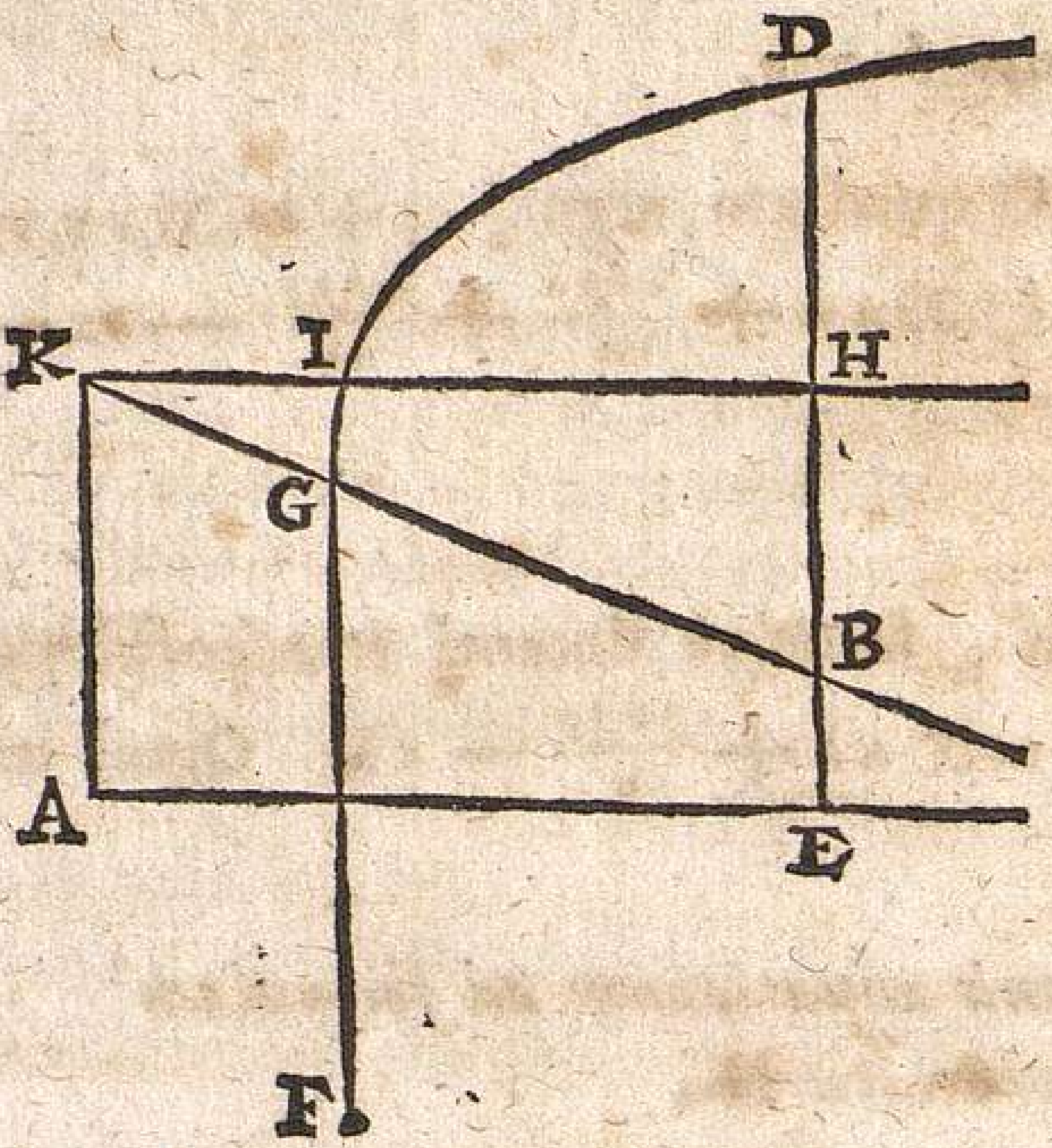
Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \infty z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut sequitur: $zz \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d, supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quam ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.
AE indefinitè ∞x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞y.
EAK vel AED, angulus quem x & y comprehendere debent.

AK $\infty \frac{1}{2}c$.
KH parallela ipsi AE.

Ut $2a$ ad b, ita KH seu x ad HB: unde HB erit $\infty \frac{bx}{2a}$.



Ut $2a$ ad e, ita KH seu x ad KB: unde KB (in quâ diameter) $\infty \frac{ex}{2a}$.

dx divisum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod sit FG, erit $\infty \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ divisum per $\frac{2ad}{e}$, reddit $\frac{3cce}{8ad}$: unde KG fit $\infty \frac{3cce}{8ad}$, atque GB $\infty \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc si GB diametro & latere recto FG per verticem G descripta sit Parabola, secans KH in I, erit ID Locus quæsitus.

Demonstratio.

Esto punctum D utcunque sumptum in ID, & DE ducta parallela ipsi AK, quæ si vocetur y; erit HD $\infty y - \frac{1}{2}c$, ac DB $\infty y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc est, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo FGB, erit $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$, hoc est, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, si utrinque demantur æquales, terminique ritè transponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propositum.

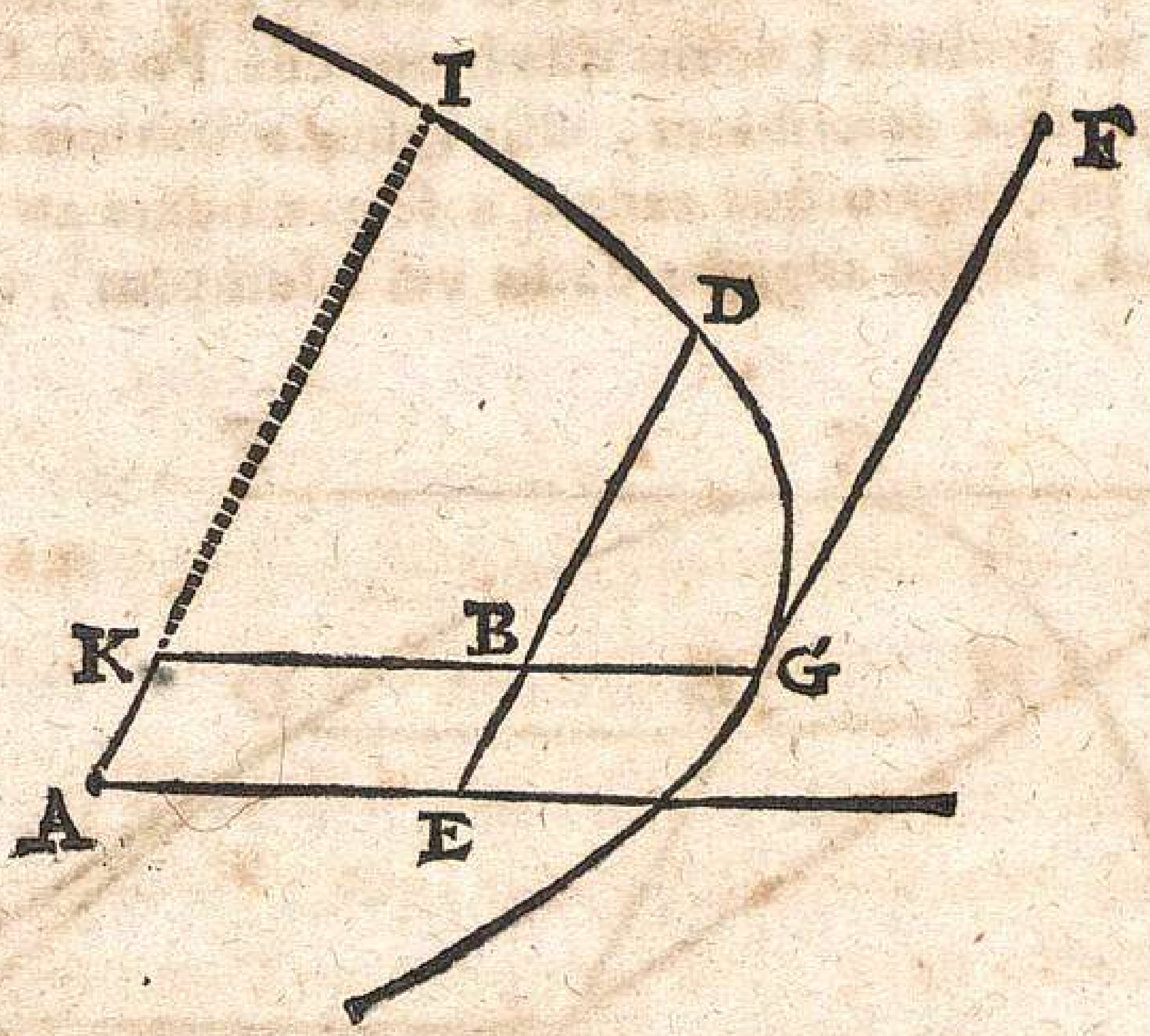
Atque hujus quidem exempli conversum, ut & cæteros casus huc spectantes, ex iis, quæ jam dicta sunt, simili modo reducere atque resolvere non difficile erit.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio ſit $ay - yy \propto bx$, ſive, quod idem eſt, $yy - ay + bx \propto 0$, aſſumpto juxta Regulam $z \propto y - \frac{1}{2}a$, erit $y \propto z + \frac{1}{2}a$. Quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejuſdem quadrato loco yy, remanebit $zz \propto \frac{1}{4}aa - bx$. Unde apparet, eandem eſſe reductam ad caſum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem ſunt demonſtrata, Locum quæſitum eſſe Parabolam.

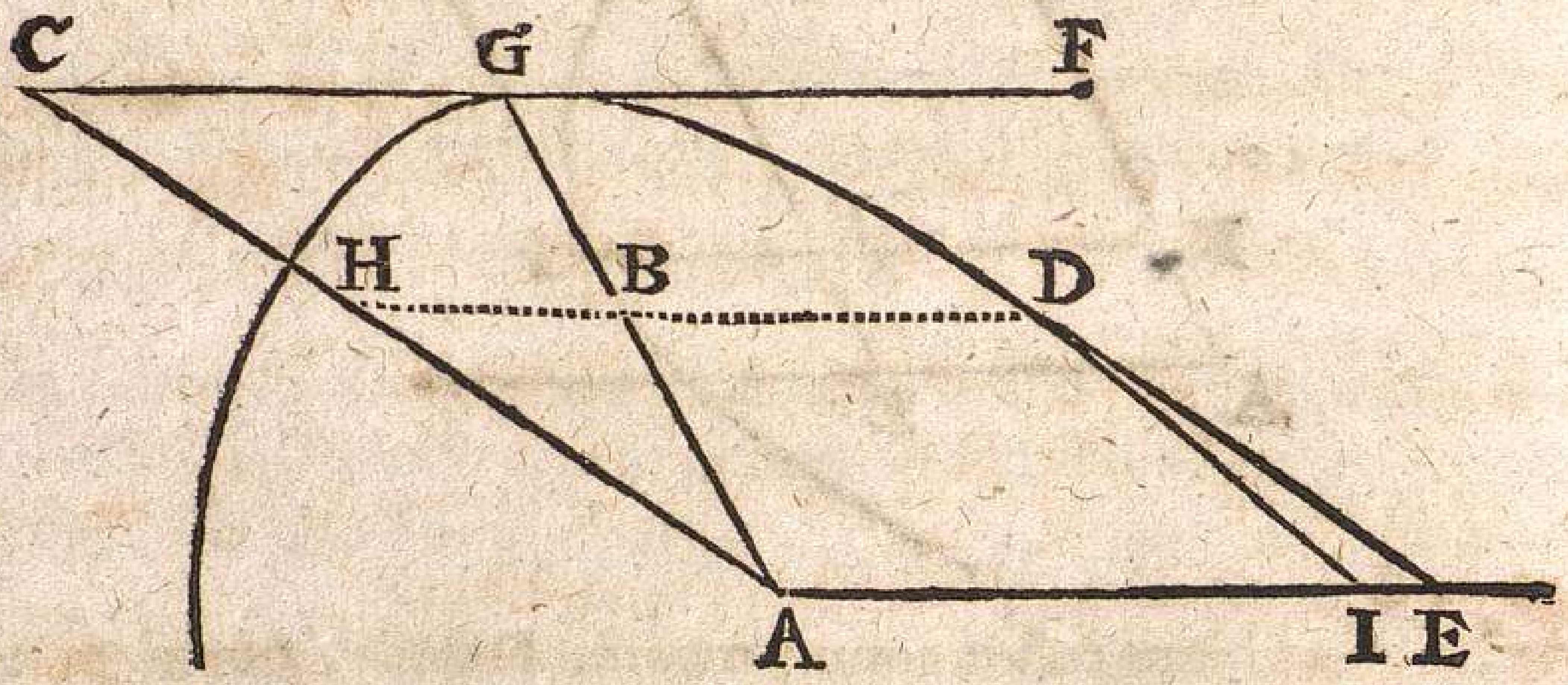
Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A, eademque x ſe indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; ſit autem datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK,



aut ipſius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z aſſumpta eſt $\propto y - \frac{1}{2}a$, ſi y ſupra rectam AE exurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta KG ipſi AE parallela; ita ut AK omneſque ipſi æquidiſtantes inter AE & KG interceptæ ſint $\propto \frac{1}{2}a$. Quo facto, ſi juxta Regulam fiat KG $\propto \frac{aa}{4b}$, eademque ſumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi AK parallelæ, cujusque latus rectum FG ſit $\propto b$: erit ipſius portio deſcripta GDI, quæ inter verticem G & productam AK intercipitur, Locus quæſitus.

Etenim assumpto in curva GDI puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, quæ secet diametrum KG in B, si eadem DE vocetur y: erit DB $\infty\ y - \frac{1}{2}a$ seu z, ac GB sive GK — KB $\infty\ \frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex BD sit æquale rectangulo FGB, erit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bx$, sive $yy - ay + bx \infty 0$, sive etiam $ay - yy \infty bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod idem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty 0$: assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \infty vv$. Unde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versùs E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x



comprehendunt, æqualis angulo EAH aut ipsius ad duos rectos complemento. Deinde sumatur in AH recta AC $\infty \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta CF ipsi AE parallela, atque in eadem sumptâ CG, quæ se habeat ad CA, ut cognita b ad a cognitam, hoc est, ut sit uti a ad b, ita AC ad CG, agatur AG, eaque pro diametro Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versùs A erit describenda. Porrò cum in triangulo ACG ob rationem cognitam laterum

AC,

AC, CG, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel assumpto aut ejusdem ad duos rectos supplemento æqualem, cognita item sit ratio, quam habet AC ad AG, quæ sit ut a ad e; erit, AC existente $\infty \frac{cc}{d}$, AG $\infty \frac{cce}{ad}$. Per quam si terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde si fiat GF $\infty \frac{ad}{e}$, erit GF latus rectum quæsitæ Parabolæ, diametro GA correspondens; atque idcirco si ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola describatur, ut GDI, secans AE in I, dico IDG curvam esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque DE ipsi AH, ac DBH ipsi AE parallelis, si eadem DE exprimatur per y, erit quoque AH ∞y. Cumque sit ut AC ad CG, id est, ut a ad b, ita AH ad HB: erit HB $\infty \frac{by}{a}$, ideoque cum DH seu AE sit ∞x, erit DB $\infty x - \frac{by}{a}$ seu v. Similiter cum sit ut AC ad AG, hoc est, ut a ad e, ita AH seu y ad AB: erit AB $\infty \frac{ey}{a}$, & GA — AB seu GB $\infty \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum FGB sit æquale quadrato ex BD, erit, factâ multiplicatione ipsius FG seu $\frac{ad}{e}$ in GB seu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipsius BD seu v in se ipsam, $cc - dy \infty vv$. Hoc est, restituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \infty xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Obiter autem & hîc notandum, ut ex antedictis quoque facile est colligere, aliter etiam diametrum GA atque latus rectum GF indagari potuisse, hoc modo:

Cum AH indeterminatè sit ∞y, juxta primum Theorema hujus ita ducatur AG, ut recta HB, quemadmodum & quælibet alia ipsi AE parallela, quæ inter AH & AG intercipitur, sit $\infty \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ est inter AH & AB similesque, ut a ad e: ideoque cum AB indeterminatè sit $\infty \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis FG $\infty \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{e}$ divisus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæsita AG.

Plura hîc exempla subjungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothesi non illustraverimus, neque etiam id aut hîc aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuslibet propositis exemplis seu casibus in hypothesi facilè applicare valeat; quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hîc & sub finem sequentis capitis subjiciemus.

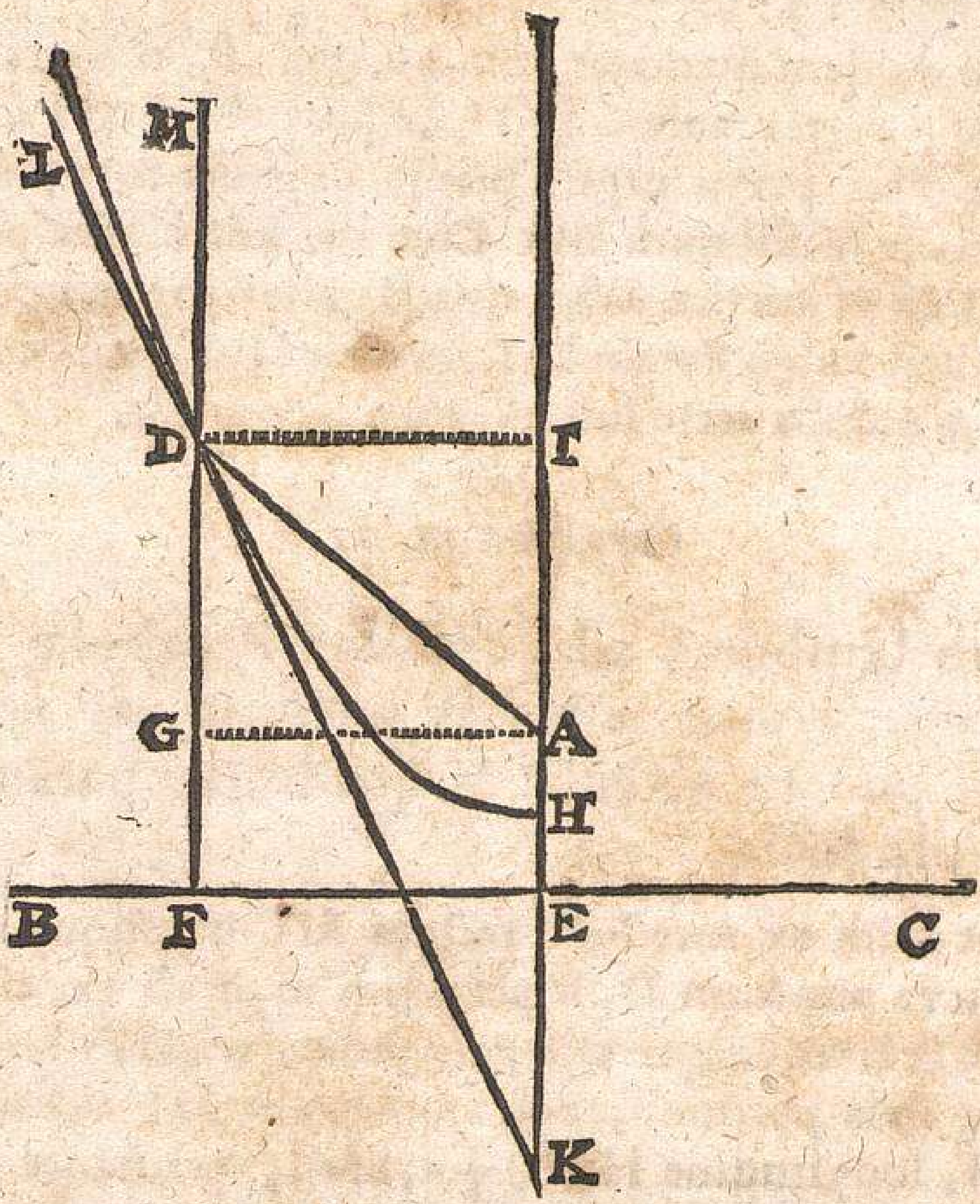
PROBLEMA I.

Propositio II.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quæstioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data positione recta linea BC, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ DA, DF, quarum hæc ad datam BC intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari AE, quæ vocetur a, ac suppositis juxta Regulam binis lineis EF, FD incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum EFD comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior EF vocetur x, ac posterior FD nominetur y; si ducta præterea intelligatur AG ipsi EF æquidistans, erit in triangulo rectangulo AGD basis AD ∞y, utpote ∞ ductæ DF; latus verò AG seu recta EF ∞x, & GD, sive (si punctum G cadat inter D & F) FD—AE, aut (si punctum D inter F & G cadat) AE—FD $\infty y - a$. Unde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit $yy \infty xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa \infty xx$. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta ea, quæ ibidem exposita sunt, ex E ducatur recta EI indefinitè extensa atque ipsi FD æquidistans; & ab eadem auferatur recta EH $\infty \frac{aa}{2a}$, id est, $\frac{1}{2}a$: erit describendæ Parabolæ diameter in dicta EI, (quæ quidem diameter axis quoque est, propter angulum EFD rectum) vertex autem in H, ac parameter $\infty 2a$. Unde, per ea quæ libri primi capite primo exposita sunt, Parabolam ipsam describere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice distat quartâ ipsius parametri parte, id ipsum sit, quod vulgò Parabolæ Focus seu Umbilicus nuncupatur, apparet ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Umbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur, æqualis est axis portioni per applicatam ab eodem puncto abscissæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Constat enim ex antedictis rectam AD, utcunque assumptum fuerit in curva punctum D, si per idem illud ad axem ordinatim applicata sit DI, æqualem esse perpendiculari DF, hoc est, rectæ IE, nempe axis portioni, per applicatam DI abscissæ, & per verticem H, longitudine HE $\infty \frac{1}{2}a$, id est, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifestum quoque est ex antedictis, si positis quæ supra, & productâ FD, uti ad M, per assumptum punctum D contingens ducta sit, ut LDK, angulum FDK sive MDL angulo ADK æqualem esse.

Occurrat enim contingens LDK axi producto in K, eritque [1] recta IH ipsi HK, ideoque (æqualibus HE, AH utrinque additis) recta IE, hoc est, AD, ipsi AK æqualis; ac proinde [2] & angulus ADK angulo AKD, hoc est, angulo FDK sive MDL æqualis sit necesse est.

[1] *per 1 Cor. 2 primi hujus.*
[2] *per 5 primi.*

CA-

Caput III.

Tertio autem casu supra expresso, cùm nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

I. $yx \infty ff.$

II. $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff.$

III. $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}.$

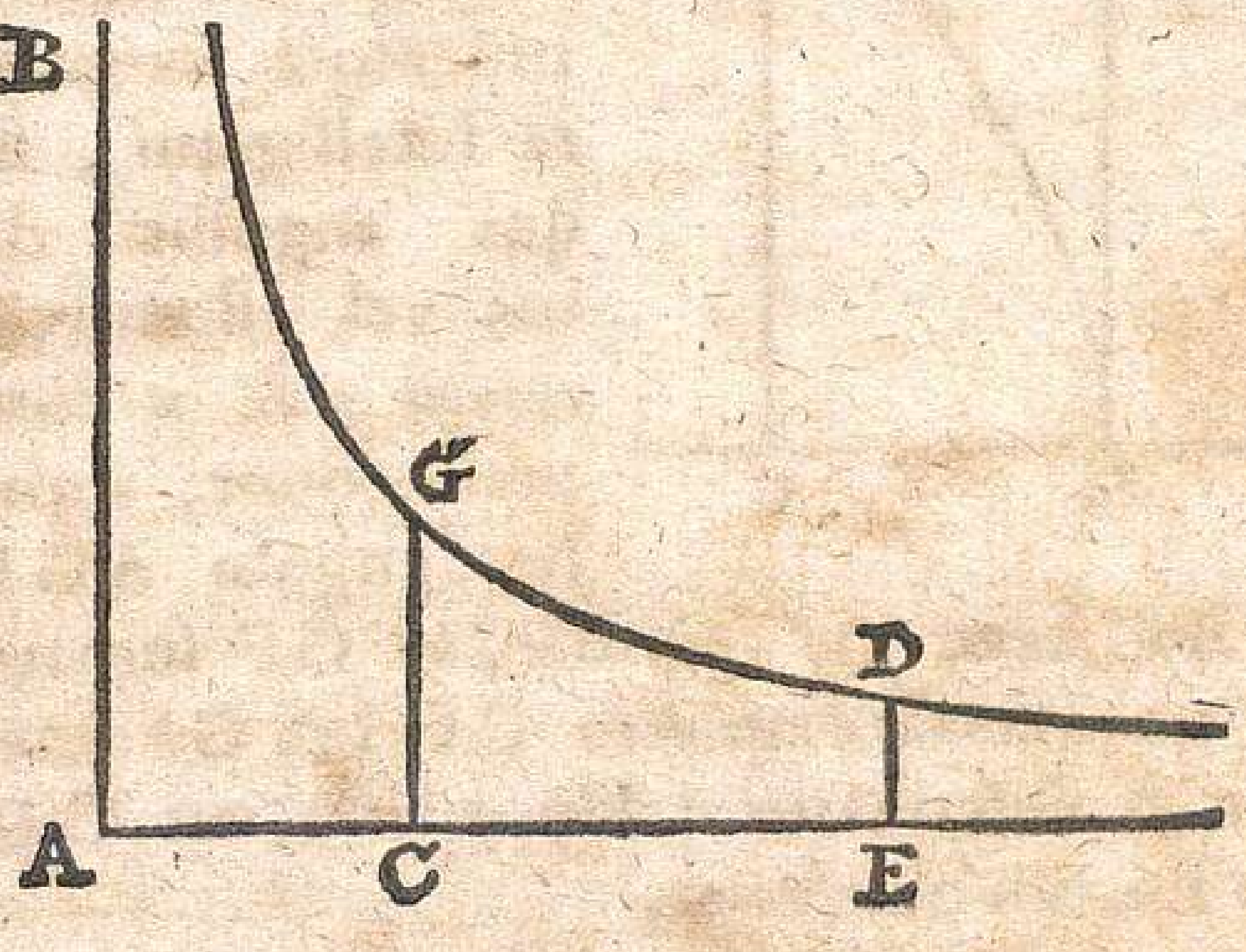
IV. $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx.$

Theorema XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \infty ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAB, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in AE recta AC ∞f, ducaturque CG eidem æqualis ac ipsi AB parallela, descriptâque [1] per punctum G atque



[1] per ea quæ in Corol. ad 11 & 12, nec non cap. ult. lib primi hujus tradita sunt.

que Asymptotis AE, AB Hyperbolâ GD: dico curvam GD esse Locum quæsitum.

Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AB parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum AED rectangulo ACG, hoc est, quadrato ex AC æquale. Hinc, cum AE sit assumpta pro incognita quantitate x, si ED vocetur y, erit $yx \infty ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

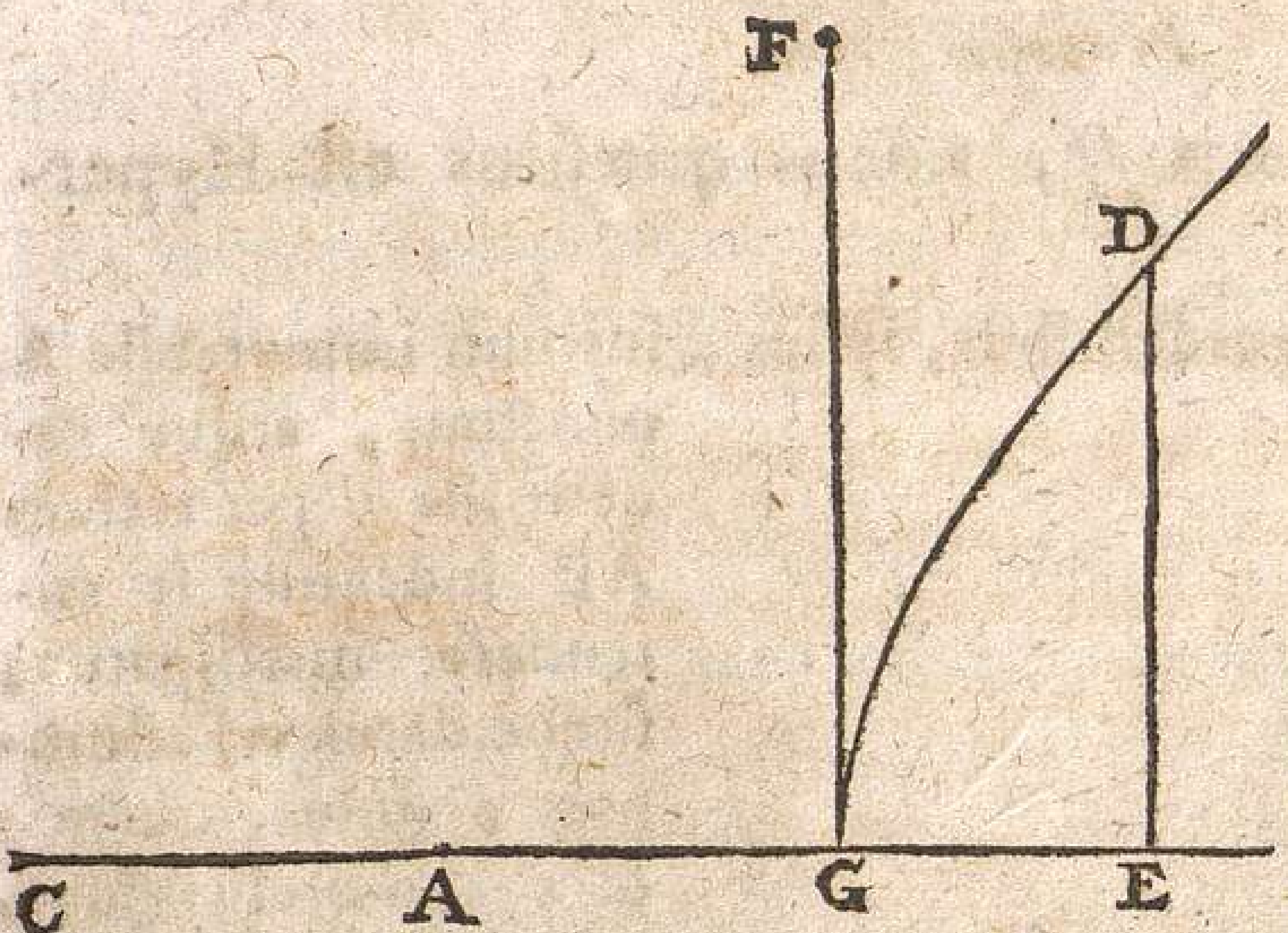
[1] *per 3 primi hujus.*

THEOREMA XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipsi g æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \infty xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac facilè apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea AE ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF,



quòd si tam AG quàm AC fiant ∞f cognitæ, ac GF sumatur ∞ GC, centroque A, & transversâ diametro CG ipsi GF lateri recto sive parametro æquali describatur [2] Hyperbola, ut GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.

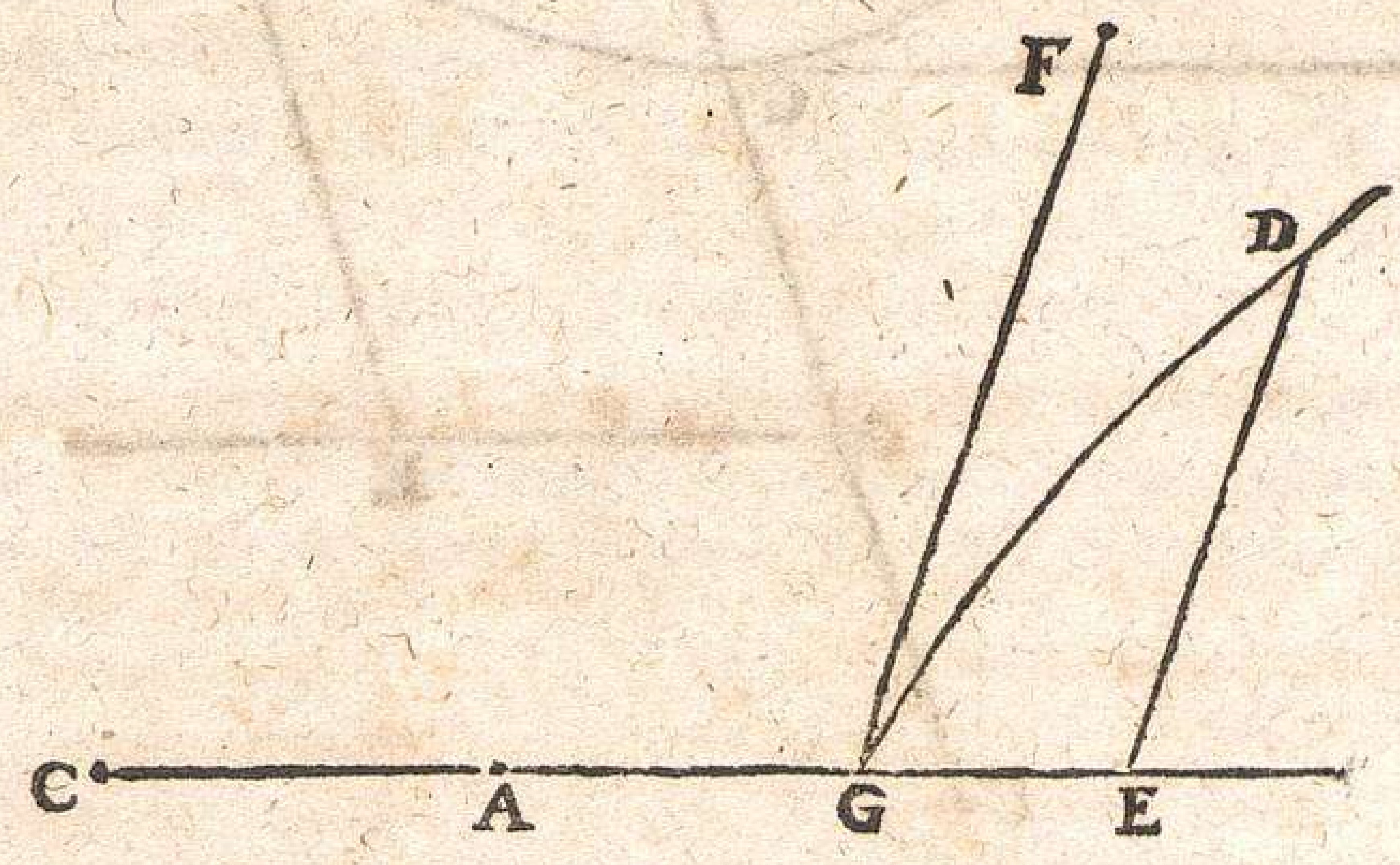
Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductaque DE ipsi FG parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm CG & GF supponantur æquales, quadratum ex DE æquale rectangulo CEG.

[2] *per ea quæ cap. ult. primi hujus ostensa sunt.*

[3] *per 10 primi hujus.*

CEG. Hinc, si DE vocetur y, cum ex hypothesi CE seu $AE + AC$ sit $\infty x + f$, & GE sive $AE - AG \infty x - f$, erit $yy \infty xx - ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut l ad g, ita $xx - ff$ ad yy. Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut l ad g,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem modo quæsito erit satisfactum.

Est enim [1] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l, ita yy ad $xx - ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \infty gxx - gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

[1] per 10 primi hujus.

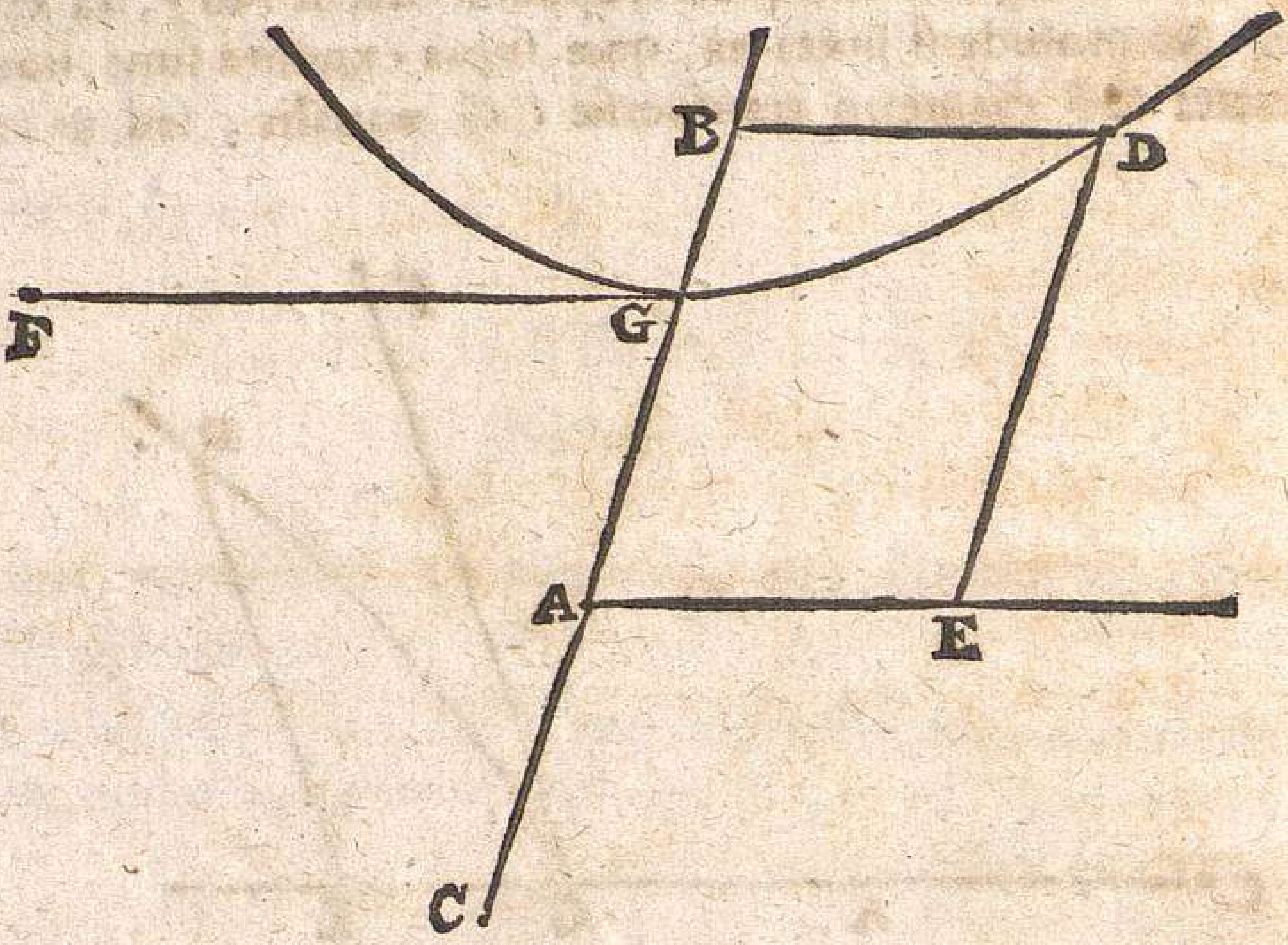
THEOREMA XIII.

Propositio 14.

Si æquatio sit $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x se ab A versus

E in linea AE indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo EAG aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, cum sit ut l ad g, ita $yy - ff$



ad xx, statim apparet, si tam AG quàm AC sumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita CG ad GF (quæ quidem GF sit ipsi AE parallela), ac postea centro A, transversâ diametro CG, & parametro GF Hyperbola describatur GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AG, ac DB ipsi AE parallelâ, si eadem DE vocetur y, erit CB, hoc est, DE + AC, $\infty\, y + f$; & BG, sive DE — AG, $\infty\, y - f$, ideoque CBG rectangulum $\infty\, yy - ff$. Dein cum [a] ex natura Hyperbolæ sit ut CG ad GF, hoc est, ex hypothesi ut l ad g, ita rectangulum CBG ad DB sive AE quadratum, id est, ita $yy - ff$ ad xx: erit $gyy - gff \infty\, lxx$, hoc est, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$. Quod demonstrandum, determinandumque erat.

[a] per 10 primi hujus.

THEO-

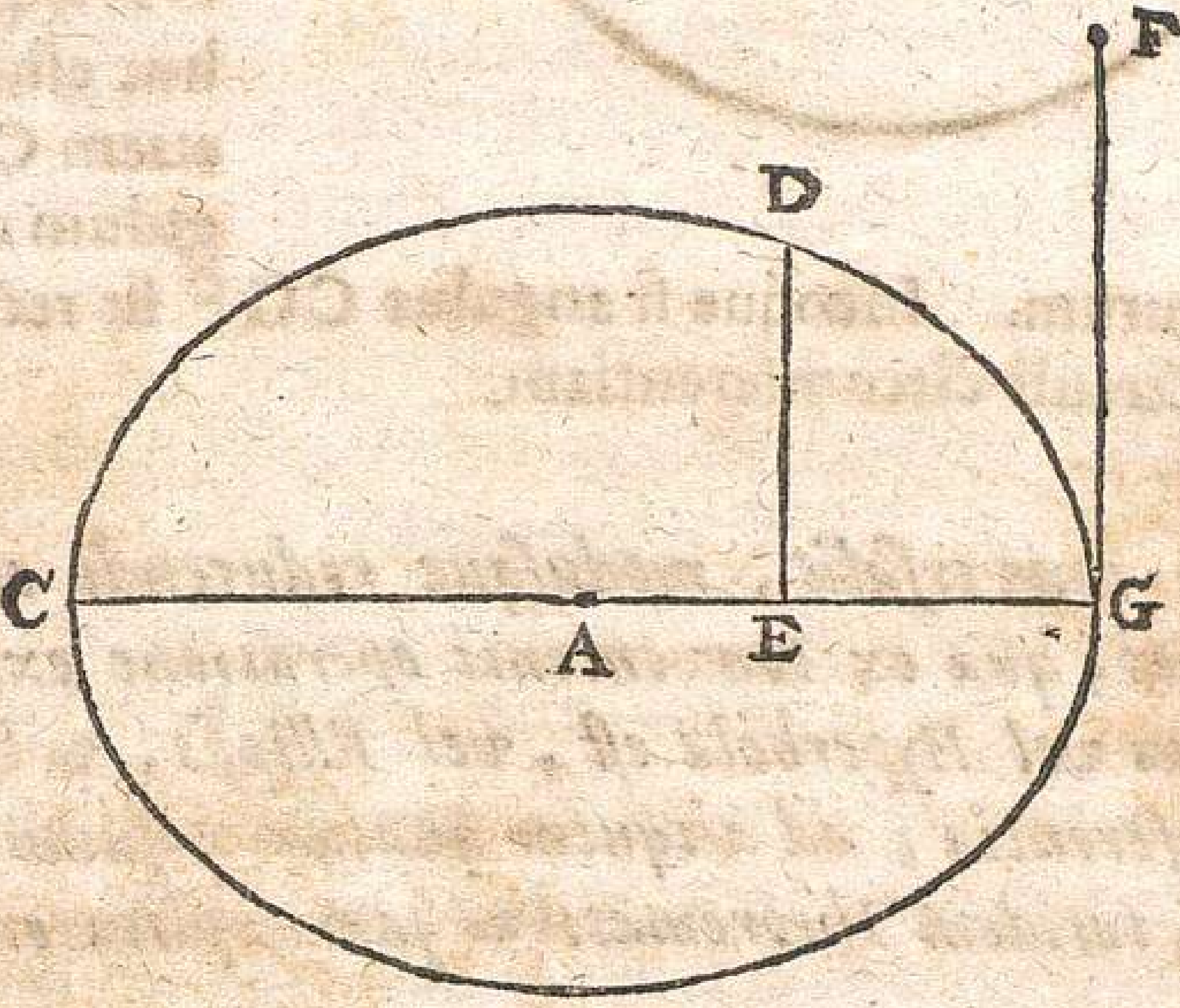
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$, erit Locus quæsitus Ellipsis.

At verò cum Ellipseos species, quæ latera rectum & transversum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, sit Circuli circumferentia: palam fit casu proposito Locum quæsitum etiam Circuli peripheriam esse posse.

Hinc ad prædicti Loci determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se per lineam AE ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



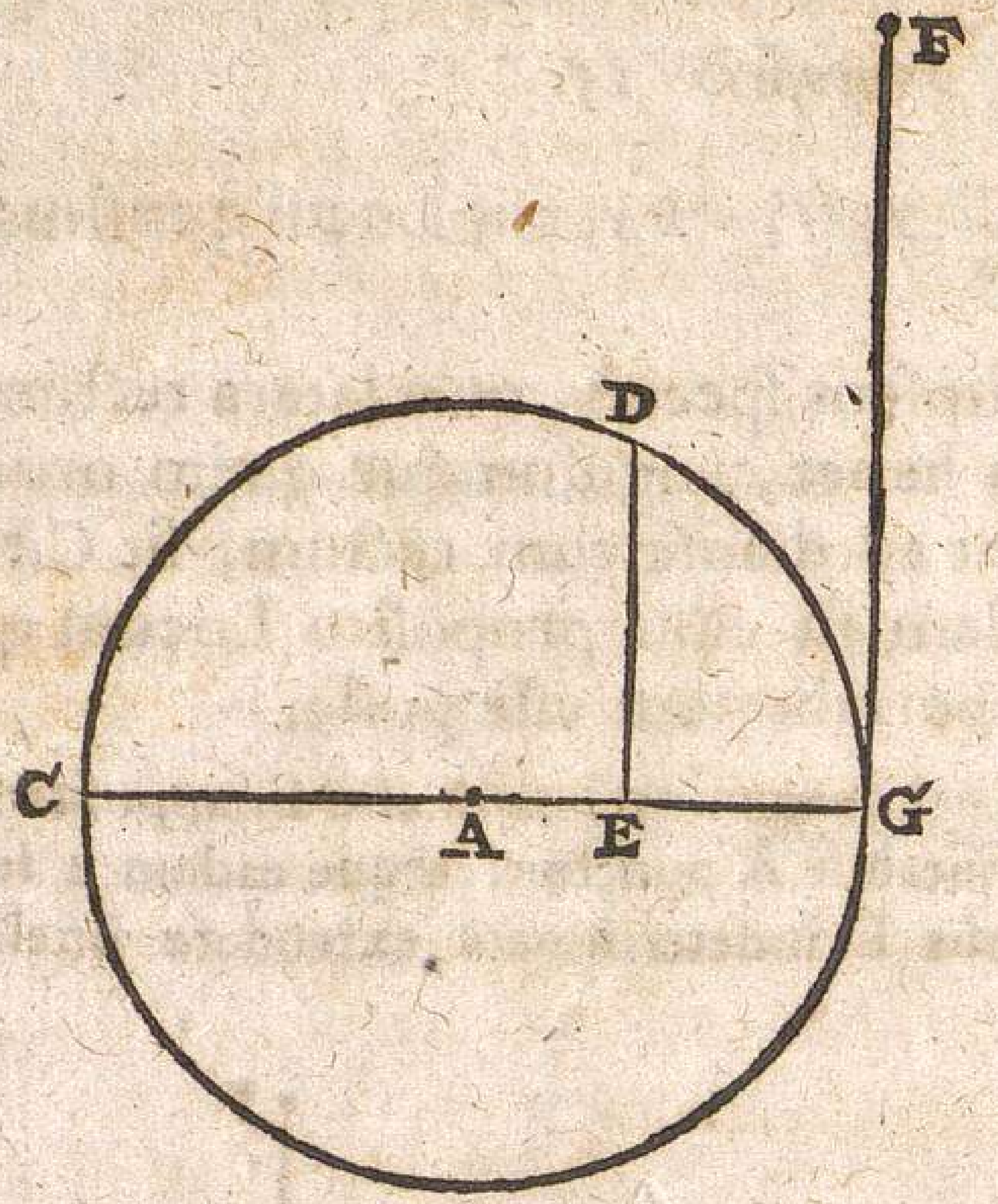
tur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF. Porrò cum sit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, si tam AG quàm AC sumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita CG ad GF, ac centro A, transversâ diametro CG, & parametro GF [a] Ellipsis describatur GDC, eandem curvam GDC fore Locum quæsitum.

[a] *per 7 Coroll. 13 & 1 Cor. 14 primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejusdem lib. tradita sunt.*

Sum-

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, erit [1] ex natura Ellipseos ut FG ad GC, ita ED quadratum ád CEG rectangulum. Hoc est, si ED vocetur y, cum CE sit $\infty f + x$, & EG $\infty f - x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff - xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod erat propositum.

[1] per 13 primi hujus.



Cæterùm liquidò constat, si CG & GF æquales fuerint, hoc est, si $l \infty g$, quòd etiam CEG rectangulum quadrato ED æquale sit futurum. Ideoque si angulus CGF sit rectus, curvam GDC fore Circuli circumferentiam.

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione existunt, cùm Locus vel Hyperbola est, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor casuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

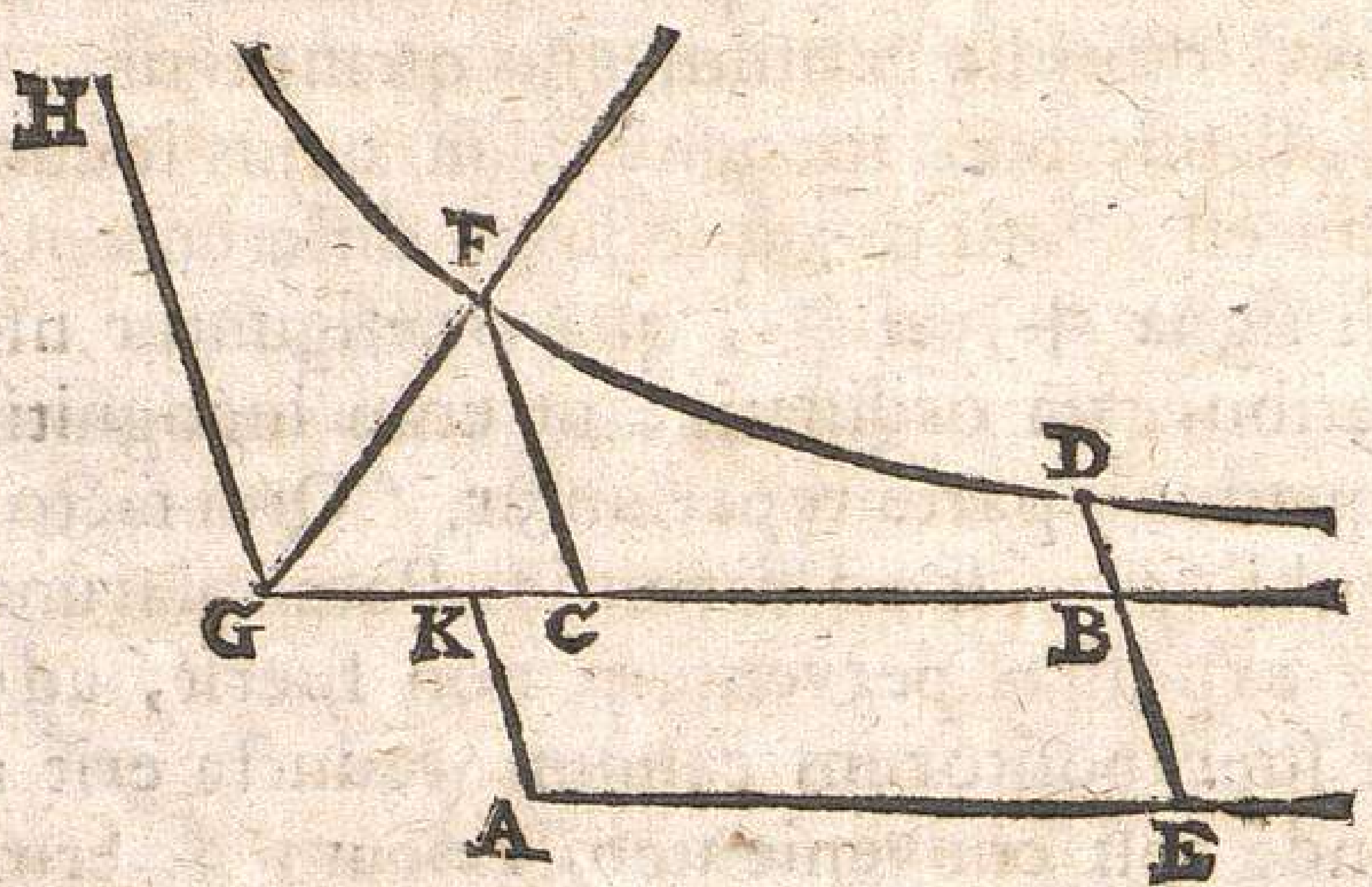
Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimensionis in æquatione reperiatur, constituens planum cum aliâ, sive cognitâ sive incognitâ, tâ, ſive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate; oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, aſſumere alias vel aliam, quæ ipſas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non eſt aſſumpta, planum conſtituere reperitur, ſi nempe incognitarum neutra in ſe ipſam in æquatione ducta ſit; ſin ſecus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum conſtituit cum incognita, in cujus locum aſſumptio facta eſt, caſu utroque juxta differentem affectionem per ſigna + vel —, quæ præfiguntur iiſdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reïterato, ubi opùs, ſi ad formulas Parabolarum, capite ſecundo expoſitas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor ſuprapoſitorum caſuum reducta erit æquatio, ac proinde ipſi convenientem Locum determinare ac deſcribere, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt, haud difficile erit.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + hy \infty ee$: aſſumpto $z \infty y - c$, & $v \infty x + h$, erit $z + c \infty y$, & $v - h \infty x$.

Unde ſi ſecundùm Regulam ubique in æquatione loco y ſubſtituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + hz + hc \infty ee$, ſive $zx + hz + hc \infty ee$; ac rurſus ſi loco ipſius x ſubrogetur $v - h$, erit $zv - hz + hz + hc \infty ee$, id eſt, $zv \infty ee - hc$. aut, (ſi loco termini $ee - hc$, qui in totum cognitus eſt, ſcribatur ff) $zv \infty ff$. Et apparet æquationem reductam eſſe ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæſitum eſſe Hyperbolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura initium ipſius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam AE indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, quoniam z est $\propto y - c$, si y supra lineam AE exsurgere concipiatur, ducenda quoque est supra eandem recta KB ipsi AE parallela; ita ut pars rectæ AK, omniumque ipsi æquidistantium, inter AE & KB intercepta, veluti AK, æquetur c cognitæ. Porrò, quoniam v est $\propto x + h$, producenda est ipsa BK per K usque ad G, ita ut KG sit



$\propto h$. Quo facto, erit G centrum ipsius curvæ, & GB una Asymptotωn, eritque altera ipsi AK parallela, ut GH. Unde si juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta GB sumatur GC æqualis f cognitæ, ducaturque CF eidem GC æqualis, ac parallela rectæ AK vel GH, atque per punctum F, Asymptotis GB & GH, sive Asymptoto GB atque ad axem GF, Hyperbola describatur FD: dico curvam FD fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, quæ secet rectam KB in B, si eadem DE vocetur y, erit DB sive DE — EB $\propto y - c$, id est, z. Est autem & GB sive AE + GK $\propto x + h$, hoc est, v. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum GBD æquetur GC quadrato, erit quoque $zv \propto ff$. aut restitutis $y - c$ loco ipsius z, & $x + h$ in locum ipsius v, atque $ee - ch$ loco ff, erit $yx - cx + hy - ch \propto ee - ch$, hoc est, $yx - cx + hy \propto ee$. Quod erat propositum.

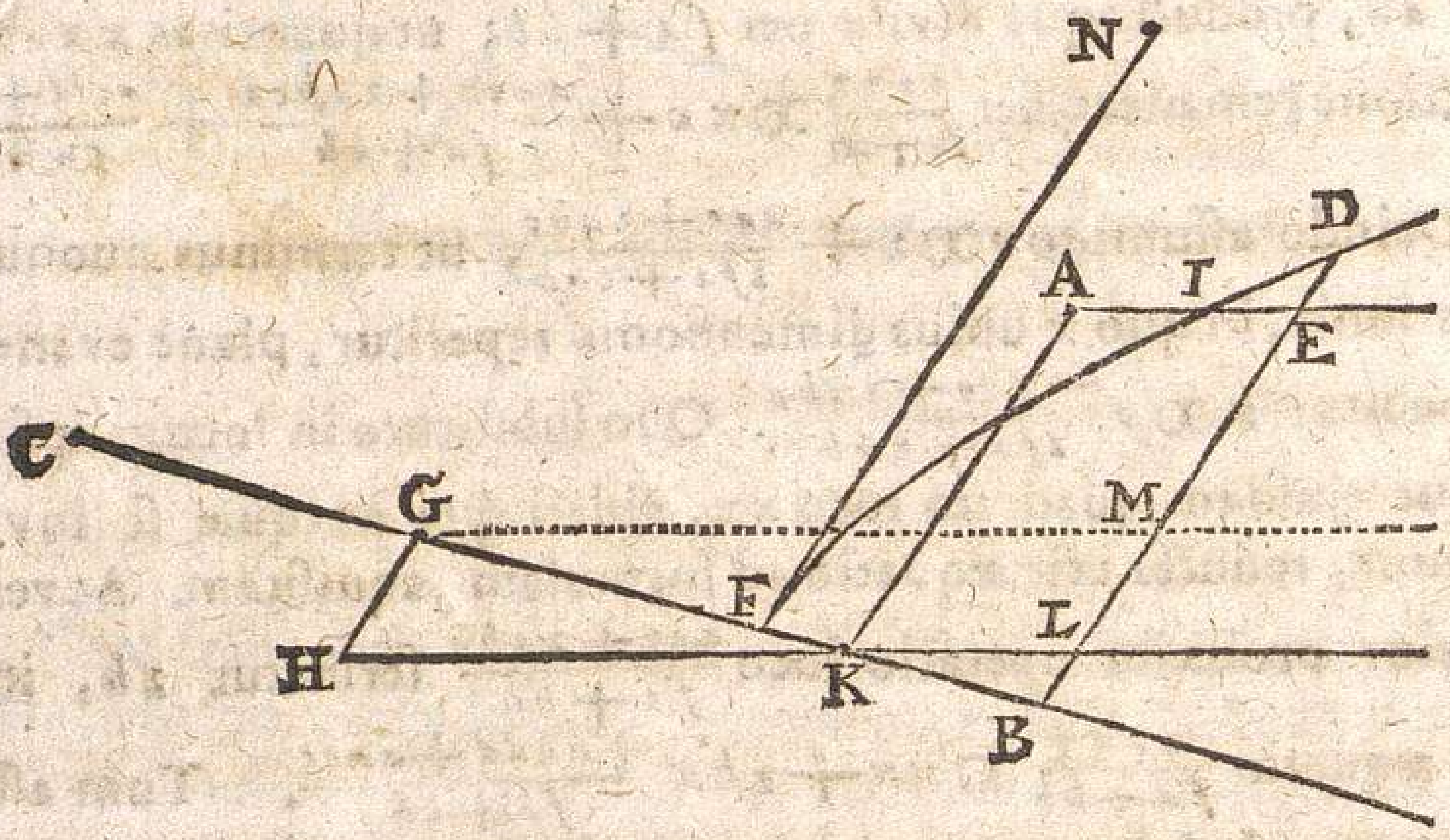
Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII *&* XIII.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$, assumpto $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$, eoque substituto in locum ipsius y, atque ejusdem quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ transpositione, $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $fa + bb$; ut quantitas xx absque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{aaex + 2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$.

Deinde assumpto $v \infty x + \frac{aae + 2abc}{2fa + 2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimensionis reperitur, planè evanescat, habebitur $x \infty v \frac{-aae - 2abc}{2fa + 2bb}$. Quo substituto in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, ablatisque iis quæ se invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requisitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae + 2abc}{fa + bb}$ scribatur $2h$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + 2hx \frac{+aadd + aacc}{fa+bb}$. Tum assumpto $v \infty x + h$ seu $x \infty v - h$, eoque substituto loco x in æquatione, ac ejusdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Unde apparet, ante omnia hic esse considerandum, utrum hh sit majus quàm $\frac{aadd + aacc}{fa+bb}$, an contra. si enim majus sit, erit casus Theorematis XII; sin contra, erit casus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII. Et constat exinde Locum quæsitum Hyperbolam esse.

Ad cujus peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea AE ab A versùs E indefinitè se extendere intelligatur; sitque angulus quem x & y comprehendunt æqualis angulo EAK aut ipsius ad duos rectos supplemento. Porrò quoniam $z \infty y + c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ut ED, ducenda primùm est infra eandem AE recta KL ipsi AE parallela; ita ut pars rectæ AK omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & KL intercepta, veluti AK, EL, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ LK usque ad H, ita ut KH sit ∞b, ideoque HL indefinitè sumpta $\infty x + b$, hoc est, v, ducatur per H punctum recta HG ipsi AK parallela, ita ut KH ad HG sit, ut a ad b. Quo facto, si per puncta G & K recta agatur linea GKB, habebunt omnium ipsi AK parallelarum partes, quæ inter KL & KB in-



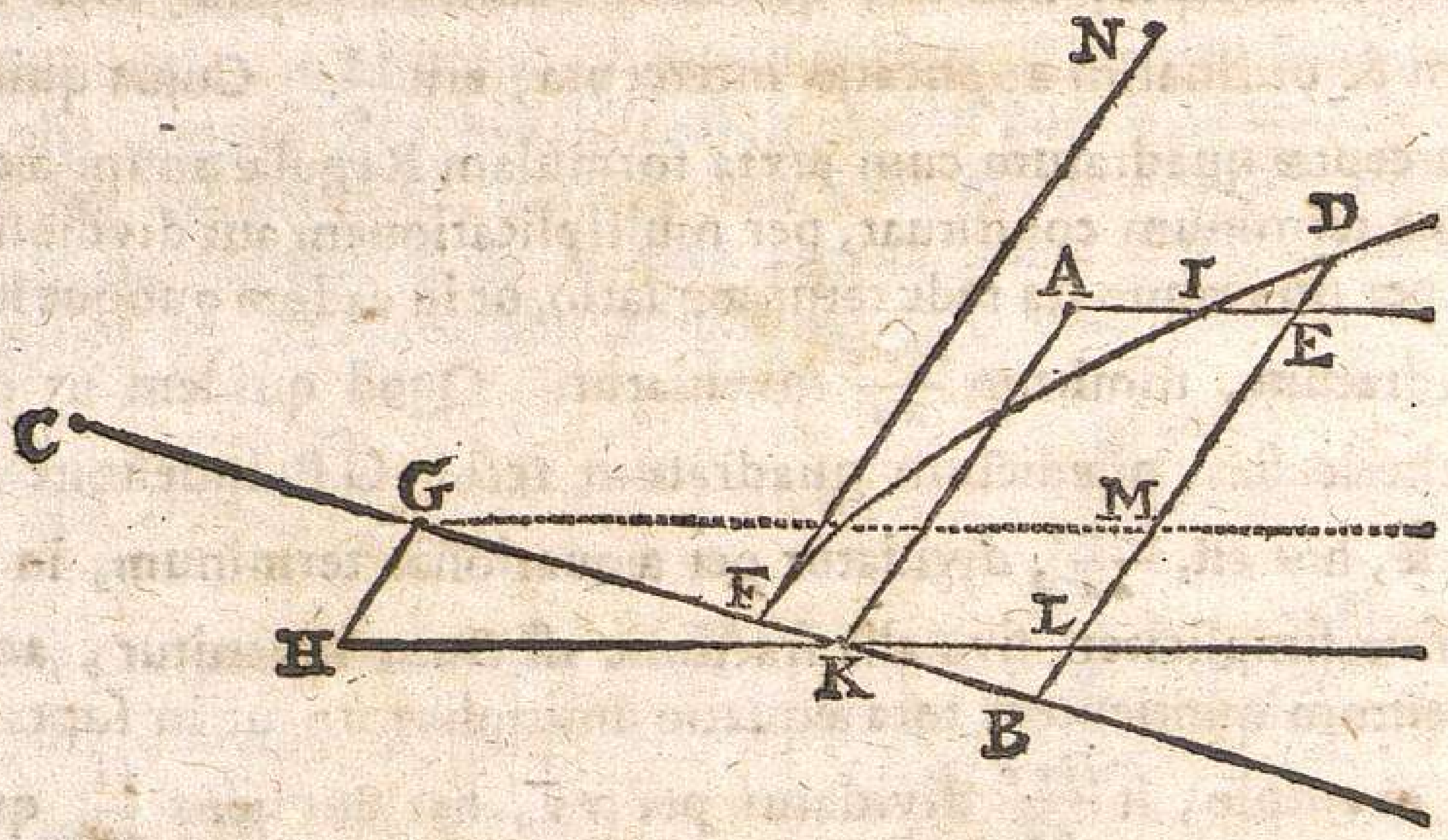
tercipiuntur (ut, exempli gratiâ, LB), ad partes ipsius KL, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, LK) eandem rationem, quæ est inter b & a: hoc est, erit ut a ad b, ita KL ad LB, cum utraque sit ut KH ad HG. Ideoque cum KL sive AE indefinitè sumpta sit ∞x, erit LB, ut & quælibet ipsi parallela, inter KL & KB intercepta, $\infty \frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea supra AE rectam exsurgens, quæ possit esse y incognita, ad rectam KB producta, veluti DB sive DE + EL + LB erit $\infty y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Unde apparet, juxta Regulam lineam GB sumendam esse pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi AK seu DB parallelæ: eritque ejusdem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i. Quare cum GM seu HL indefinitè sit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur, ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$, quare tota æquatio multiplicanda est per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Unde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut secet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB ∞ z. Est autem, ut jam annotatum, GB ∞ $\frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, Ideoque BC ∞ $\frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ac BF ∞ $\frac{iv}{a} -$

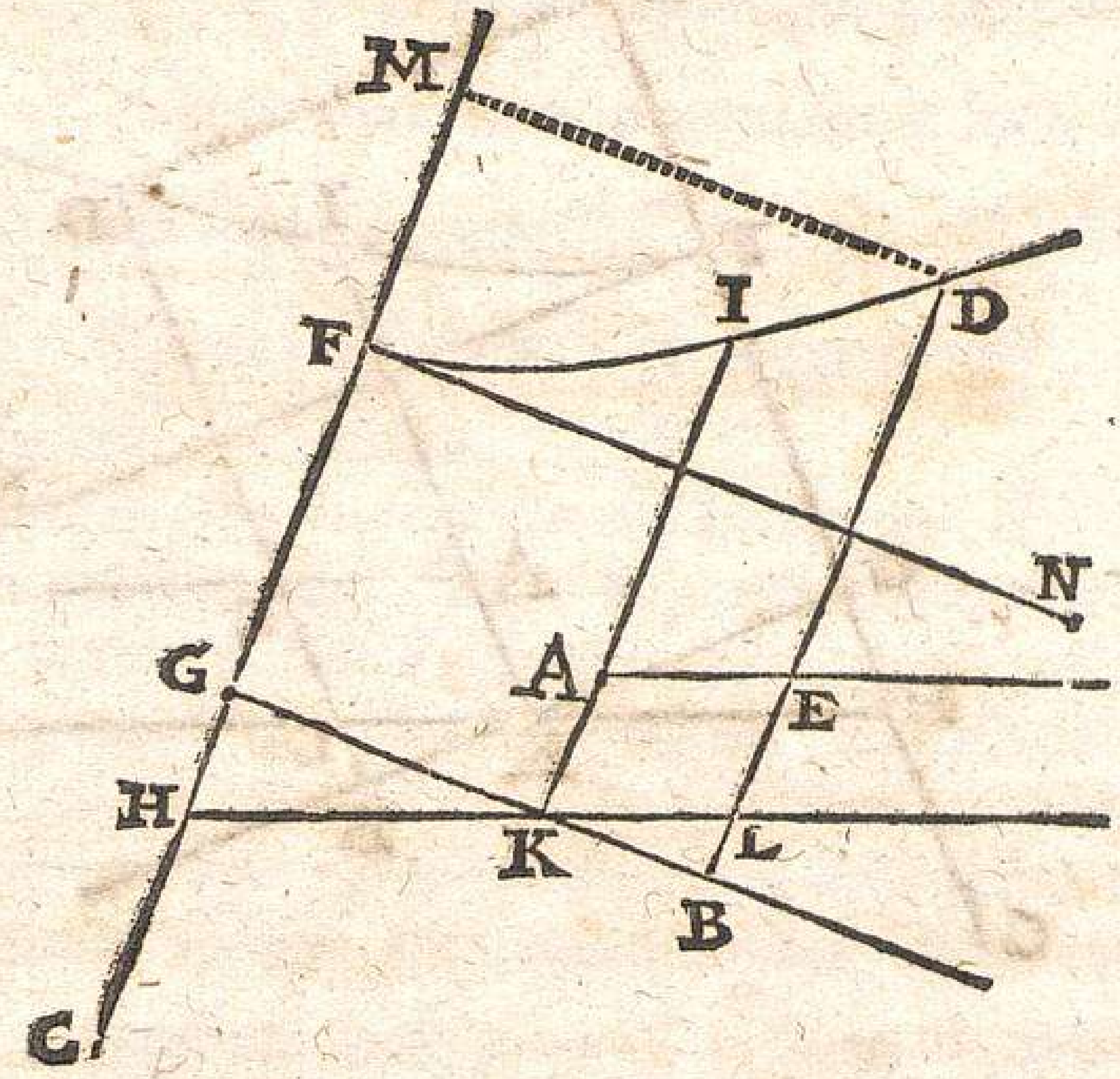
 $\sqrt{\frac{iibb}{aa}}$

$\sqrt{\frac{iihh}{aa} - \frac{iidd - iicc}{fa+bb}}$, & rectangulum CBF $\infty\ \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles NF ad FC, seu $fa+bb$ ad ii sit, ut DB quadratum, hoc est, zz, ad prædictum rectangulum CBF: erit $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$.



Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - hh + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Dein restituto $x+h$ loco v, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + 2hx + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$; itemque $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{eaax+2bcax}{fa+bb} + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa+bb$ iisque divisis per aa, habebitur $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò hh minus quàm $\frac{ddaa+ccaa}{fa+bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{ddii+ccii}{fa+bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa+bb$, ac producto diviso divifo per ii, factâque decenti transpositione, eadem cum sequenti $zz - dd - cc + \frac{fabb + bbbb}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac divis. per ii, id est, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæsitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus specificam determinationem & descriptionem, postquam ut in præcedenti figura ductæ sunt lineæ AE, AK, KL, KH, HG, & GKB: erit quidem, ut supra, G centrum, at verò non erit diameter in linea GK, sed, juxta Regulam, in linea HG producta

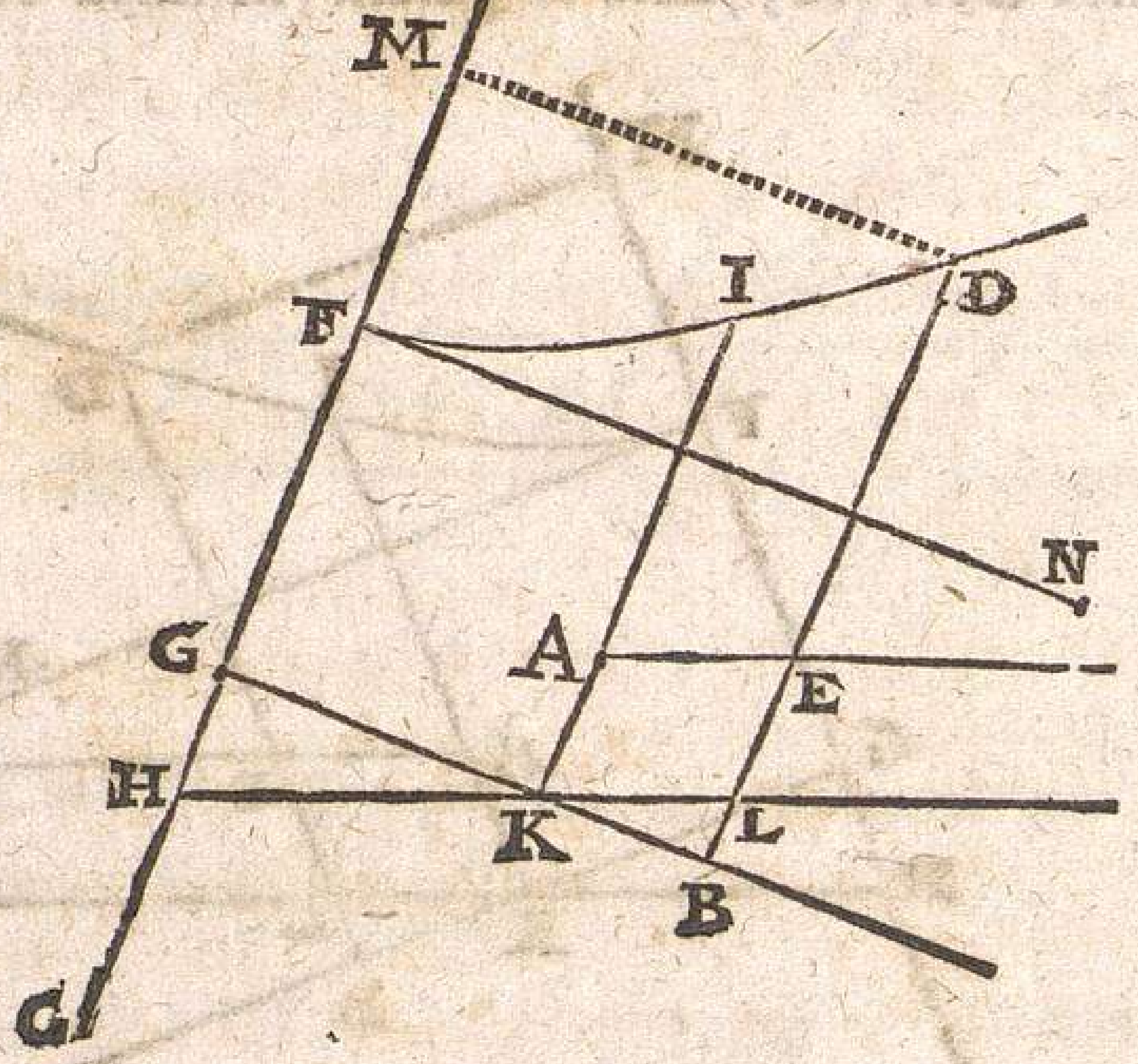


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi GKB parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium transversæ diametri, nempe GF vel GC, æquale $\sqrt{dd + cc \frac{-fabb - bbbb}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare si fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita CF ad FN, quæ quidem FN ipsi GKB æquidistans sit, erit FN parameter: ac proinde si centro G transversâ diametro CF & parametro FN Hyperbola describatur FD, secans ipsam AE vel KA productam in I, erit ID curva Locus quæsitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DB ipsi AK (sive GF), & DM ipsi GB parallelâ, si

ED

ED vocetur y, erit, ut supra, DB sive MG $\infty\ z$, & BG sive DM $\infty\ \frac{iv}{a}$. Cumque sit GF vel GC $\infty\ \sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbhh}{aa}}$, erit CM $\infty\ z + \sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbhh}{aa}}$, & MF $\infty\ z - \sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbhh}{aa}}$, ac propterea rectangulum CMF ∞ $zz - dd - cc \frac{+fahh + bbhh}{aa}$. Est autem DM quadratum $\infty\ \frac{iivv}{aa}$.



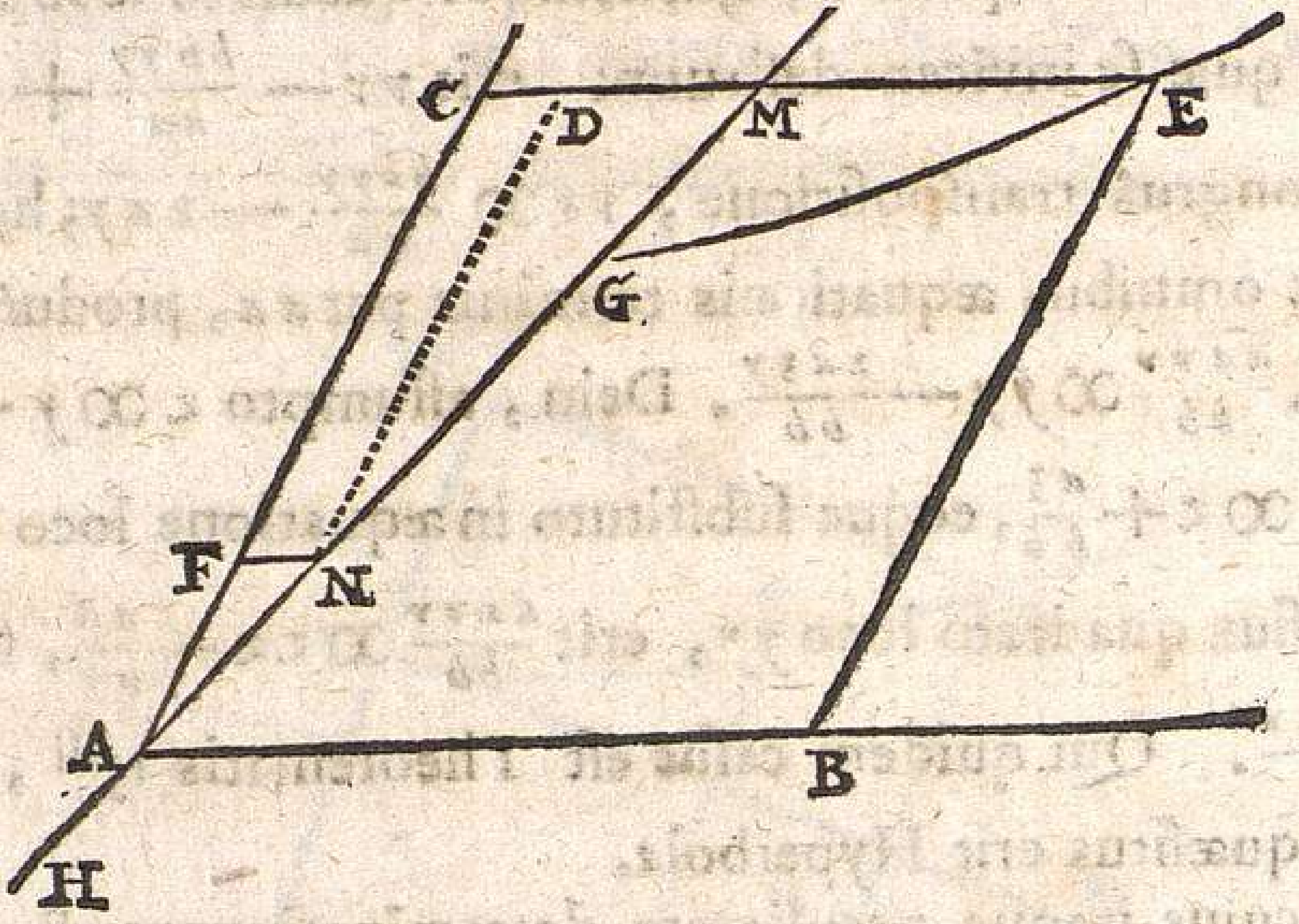
Quare cum ex natura Hyperboles sit ut FN ad FC, ita DM quadratum ad CMF rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa + bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz - dd - cc \frac{+fahh + bbhh}{aa}$: erit quoque $zz - dd - cc \frac{+fahh + bbhh}{aa}$ $\infty\ \frac{favv + bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per $fa + bb$, factâque transpositione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa + bb}\ \infty\ vv - hh \frac{+ddaa + ccaa}{fa + bb}$. Dein restitutis $x + h$ loco v, $\frac{eaz + 2bca}{fa + bb}$ loco $2h$, atque $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy\ \infty\ \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Si

Si æquatio sit $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \infty 0$. Assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$, eoque substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, sublatisque iis quæ se invicem destruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \infty 0$. &, factâ congruâ transpositione, $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per bb, $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, assumpto $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \infty z + \frac{a^3}{bb}$, eoque substituto in æquatione loco ipsius y, atque ipsius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$, sive $zz - \frac{a^6}{b^4} \infty \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem casus est Theorematis 13tii, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea AB ab A versùs B indefinitè sese extendere intelligatur, sitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo ABE. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc casu & similibus ita esse describendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ sint ipsi AB æquidistantes, ductâ rectâ AC ipsi BE parallelâ, quoniam $v \infty x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò est recta AM; ita ut omnium ipsi AB parallelarum partes, inter AC & AM interceptæ, veluti CM, ad partes ipsius AC inter A & dictas parallelas interceptas, veluti AC, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a; hoc est, ut sit quemadmodum a ad b, ita AC ad CM. Unde si AC seu BE indefinitè sumpta vocetur y, erit CM & similes $\infty \frac{by}{a}$, ac describendæ Hyperboles diameter in dicta AM. Porrò, quoniam $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, si ab AC auferatur AF $\infty \frac{a^3}{bb}$: erit FC indefinitè sumpta ∞z, & ductâ FN ipsi AB parallelâ, N centrum. Ac proinde, cùm ratio ductæ ND ipsi FC æquidistantis & æqualis ad rectam DM aliarumque similium sit cognita, nempe ut a ad b, sitque itidem notus angulus

NDM, ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto angulo ABE, erit quoque ratio ND ad NM aliarumque ſimilium nota, quæ ſit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum ND ſeu FC indefinitè ſumpta exprimatur per z, erit NM itidem indefinitè ſumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum conſtituere debeat, multiplicanda eſt ſupraſcripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum fiat NG vel NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iiſdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole deſcribatur GE: dico curvam GE eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque EB in angulo ABE, dato vel aſſumpto æquali, nec non EC ipſi AB parallelâ, ſecante diametrum AM in M; ſi eadem EB, hoc eſt, AC, vocetur y, erit, ut ſupra, CM $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde ME, ſive AB — CM, $\infty\, x - \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Eſt autem, ut ſuperiùs annotatum, NM $\infty \frac{ez}{a}$, atque ex hypotheſi NG ſeu NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque HM $\infty \frac{ez}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & MG $\infty \frac{ez}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

gulum HMG $\infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles sit ut latus rectum ad transversum, sive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id est, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviso, $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein restituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipsius z, exurget $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviso per aa, habebitur $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique restituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipsius v, expunctisque iis quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propositum.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

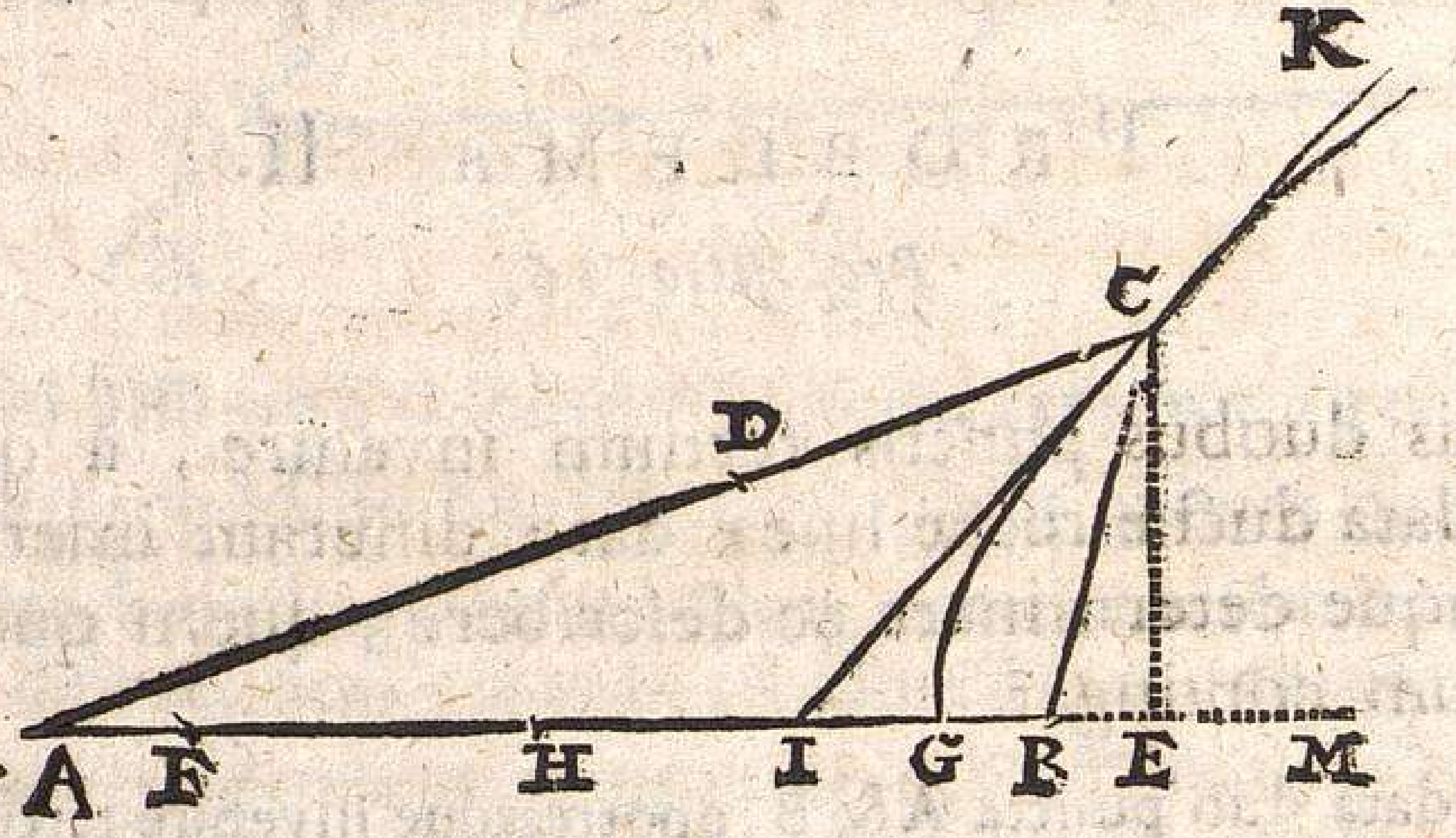
Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG seu AD.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit, intelligatur demissa perpendicularis, ut CE; tum, suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, assumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac posterior, nempe EC, nominetur y, ipsa autem AB, seu datorum punctorum cognita distantia, vocetur a, & data FG sive AD exprimatur per b. Hinc cum BE sive (si punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (si punctum E inter A & B cadat) AB — AE sit

$\infty\, x = a$, & AC $\infty \sqrt{xx+yy}$, at BC $\infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$, sitque AC — AD ∞ BC: æquatio erit
$\sqrt{xx+yy} - b \infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit
$4bbyy \infty 4aaxx - 4bbxx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + b^4$.
Unde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invi-

Fig. I.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12mi hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur AH $\infty \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta HG ab una, & HF ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad diametrum HE perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\infty\, b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Unde per ea quæ libri primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porrò cum quadratum semidiamediametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Atqui cum FB sive BH + HF sit $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG sive BH — HG $\infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, nempe ∞ quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò oppositarum Hyperbolarum Foci sive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Si ab assumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine transversi axis superabit.

Etiamsi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino constet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribusvé, quod sciam, non nisi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonstratum sit: id ipsum hîc demonstratione unicâ, & quidem breviore satisque simplici, aliter ostendisse non inutile fortè judicabitur.

Esto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, transversus axis FG, atque Umbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF semi-secundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab assumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Unde cum sit [2], ut

HFq ad GAF, ita FEG ad CEq; erit quoque, per compos. rationis contrariam, ut

HFq ad (HFq + GAF, id est [3], ad) HAq; ita FEG ad FEG + CEq; adeoque [4] ut

HFq ad HAq, ita (HFq + FEG sive [5]) HEq ad HAq + FEG + CEq. Est autem quoque [6], ut

HFq ad HAq, ita HEq ad HMq. Quocirca [7]

HMq ∞ HAq + FEG + CEq; hoc est, addito utrinque HFq seu HGq, erit

[1] per 16 sexti.
[2] ex hypoth. & per 10 primi hujus.
[3] per 6 secundi.
[4] cum sit ut una antecedentium ad unam conseq., ita omnes antecedentes ad omnes conseq. per 12 quinti.
[5] per 6 secundi.
[6] ex constructione & per 22 sexti.
[7] per 9 & 11 quinti.

[1] per 6 secundi.

$$HMq + \left\{\begin{array}{l} HFq \\ \text{seu} \\ HGq \end{array}\right. \infty \left\{\begin{array}{l} HAq \\ \text{seu} \\ HBq \end{array}\right. + (HFq + FEG, \text{i.e.}^{1})\, HEq, + CEq.$$

Hinc additis vel sublatis ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum $\left\{\begin{array}{l} FHM \\ \text{seu} \\ GHM \end{array}\right.$ bis ab una, & $\left\{\begin{array}{l} AHE \\ \text{seu} \\ BHE \end{array}\right.$ bis ab altera parte: erit [2]

[2] per 4 secundi.
[3] per 47 primi.
[4] per 7 secundi.
[5] per 47 primi.

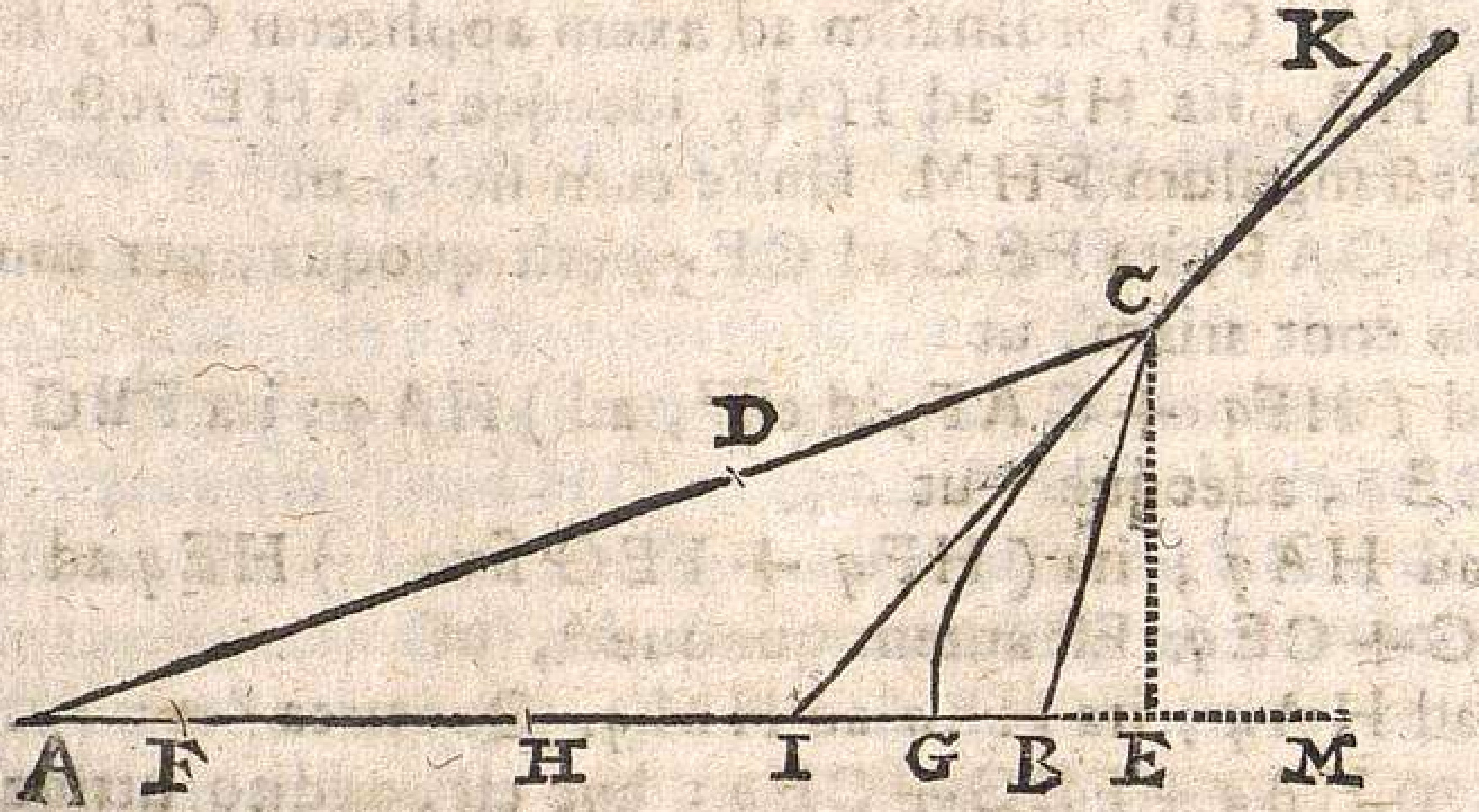
$FMq \infty (AEq + CEq$, id est [3]$)\ ACq$; itemque [4] $GMq \infty (BEq + CEq$, id est [5]$)\ BCq$. Cumque propterea FM sit ∞ AC; & GM ∞ BC; sitque ipsarum FM & GM differentia FG, manifestum est ipsarum quoque AC & BC majorem superare minorem, ejusdem FG, nempe axis transversi, longitudine. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Umbilicum rectis, quæ angulum iis comprehensum bifariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & conversim.

Si enim quæ angulum ACB bifariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, secet eandem, si fieri potest,

Fig. 1.

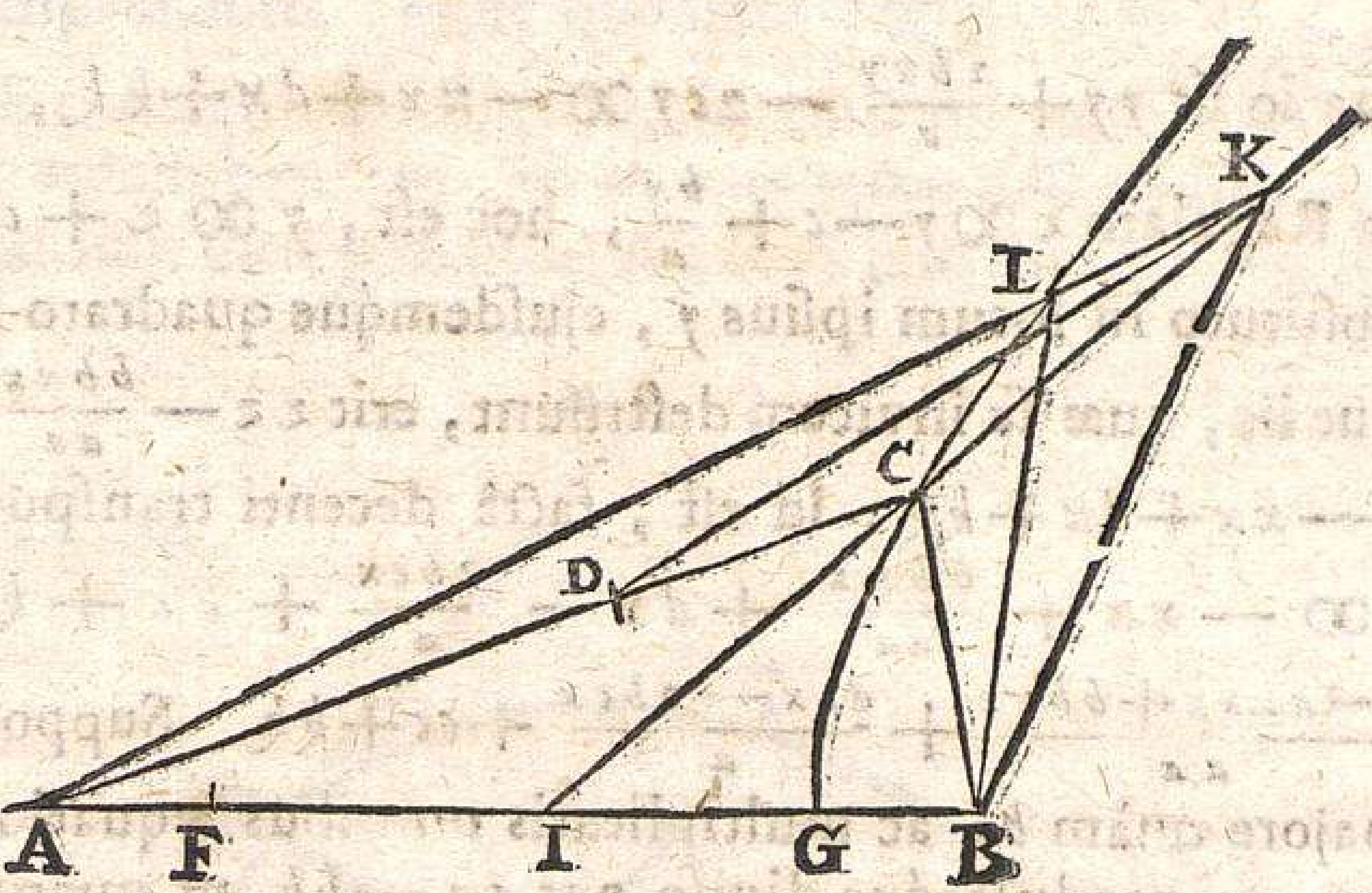


atque ita saltem aliquo sui puncto, veluti K, intra Hyperbolam sit.

Tum

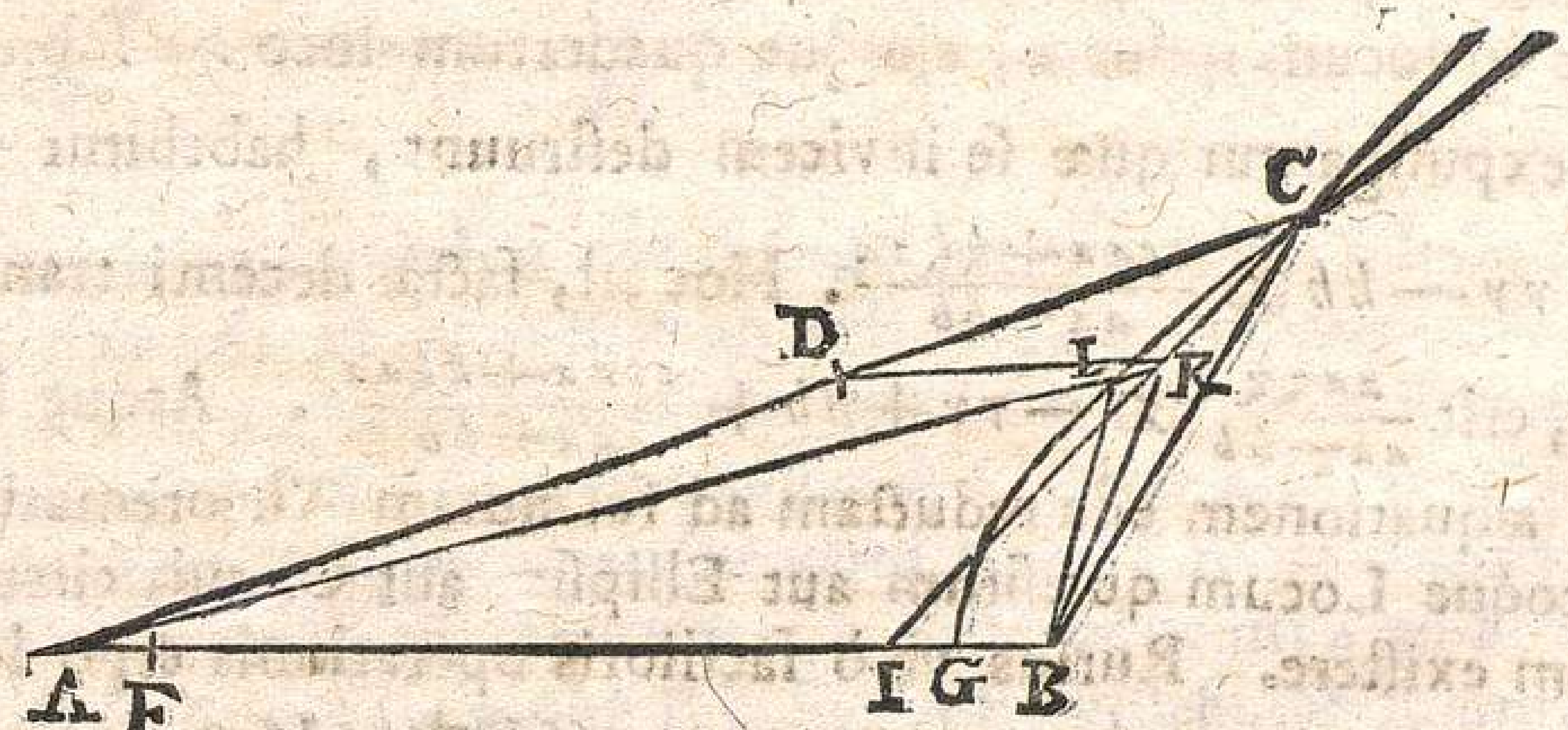
Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

Fig. II.



circa [1] æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK basi BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas, superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL, LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD majori longitudine quàm est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

Fig. III.



ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit [2], non secat Hyperbolam recta ICK, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia recta

[1] Cum enim ex hypothesi anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

[2] per 20 primi.

[1] per 3. Cor. 6 primi hujus.

recta Hyperbolam contingere quàm ICK [1], manifestum est conversim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque ABC bifariam dividere.

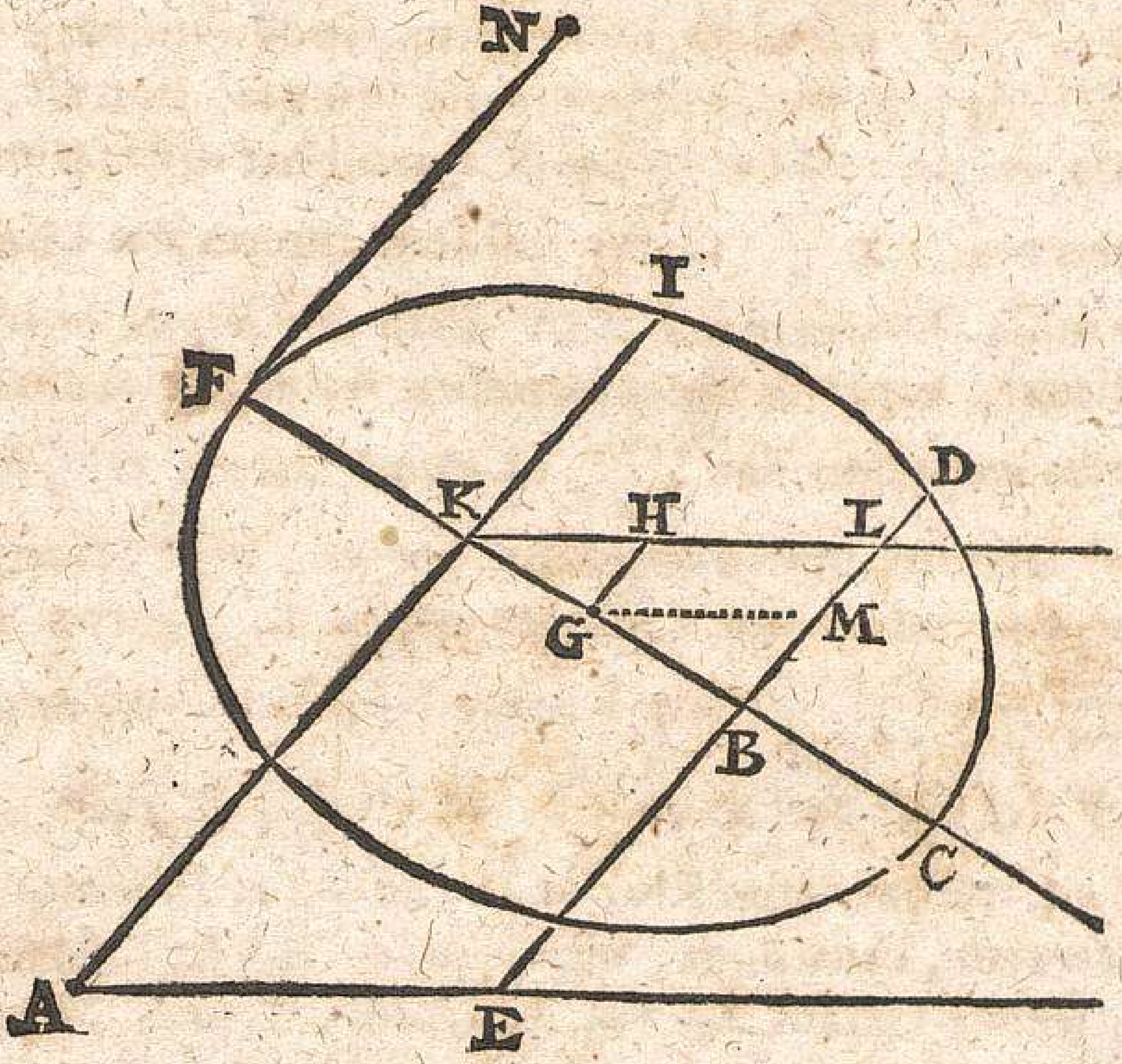
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \infty z + c - \frac{bx}{a}$, eoque substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \infty - xx + dx + kk$; id est, factâ decenti transpositione, erit $zz \infty - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$, sive $zz \infty \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx absque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx \frac{+ daax - 2bacx}{aa - bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Jam verò si facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa - bb}$ substituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx + 2hx + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, aut $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \infty x - h$, sive $x \infty v + h$, atque hoc in locum ipsius x, ejusque quadratum loco xx substituatur, ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa - bb} + vv - hh \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositione, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - vv + hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Atque ita apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferentiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa - bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ scribatur ff, ita ut æquatio sit talis $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$.

Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac descriptionem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se in linea AE ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK vel ejusdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta KL eidem parallela, ita ut pars rectæ AK omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & KL intercepta, veluti AK,

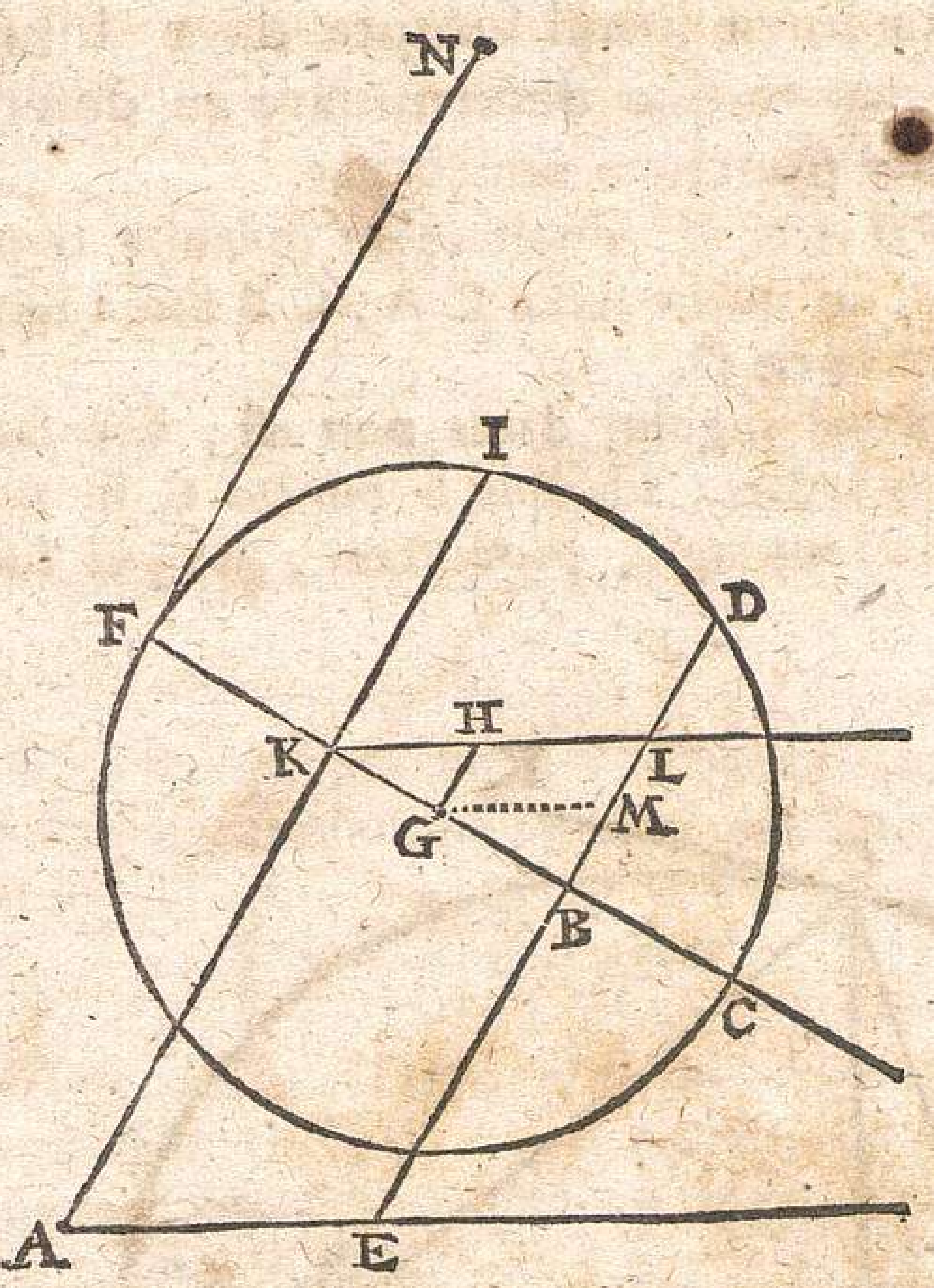


EL, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam KL ducenda est recta KB in tali angulo, ut rectarum omnium ipsi AK parallelarum partes, quæ inter KL & KB intercipiuntur (veluti LB) ad partes ipsius KL, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ LK) eandem habeant rationem, quæ est inter b & a, hoc est, ut sit uti a ad b, ita KL ad LB. Atque ita positâ KL sive AE, indefinitè sumptâ, $\propto x$, LB omnesque ipsi parallelæ inter KL & KB interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Unde ex prædictis constat diametrum fore in recta KB, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi AK æquidiſtantes. Jam verò cum v ſit $\infty\, x - b$, à recta KL ſive AE auferenda eſt KH, ita ut eadem KH ſit $\infty\, b$, ideoque HL indefinitè quoque ſumpta $\infty\, x - b$ ſeu v. Deinde per punctum H ducenda eſt HG ipſi AK parallela, ſecans inventam diametrum in G, eritque idem interſectionis punctum G quæſitæ Ellipſeos centrum. Porrò quoniam ſimilium triangulorum KHG & KLB nota eſt ratio lateris KH ad HG ſive KL ad LB, ut & angulus ſub iiſdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel aſſumpto EAK, erit quoque nota ratio lateris KH ad latus KG ſive KL ad KB, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum HL ſive GM, quæ ipſi HL parallela intelligitur, indeterminatè ſumpta ſit $\infty\, v$, erit GB, ſimiliter indeterminatè ſumpta, hoc eſt, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\infty\, \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum conſtituat, æquatio ſupra expoſito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, ſi ſinguli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim ſequenti modo ſe habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum GF vel GC fiat $\infty \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id eſt, $\frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris CF ad rectum latus FN, ut lee ad gaa, iiſdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipſis deſcribatur FDC, ſecans rectam AE vel AK productam in I: erit curva IDC Locus quæſitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipſi AK parallelâ, ac ſi opus ſit productâ ut ſecet rectas KL & KB in L & B, ſi eadem DE vocetur y, erit DB, hoc eſt, DE $-$ EL $+$ LB $\infty\, y - c + \frac{bx}{a}$ ſeu z. Eſt autem ut jam annotatum eſt GB $\infty\, \frac{ev}{a}$, atque ex conſtructione GF vel GC $\infty\, \frac{ef}{a}$, ideoque FB $\infty\, \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & BC $\infty\, \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum FBC $\infty\, \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipſis ſit ut NF ad FC, hoc eſt,

ut

ut gaa ad lee, ita DB quadratum, hoc est, zz ad prædictum rectangulum FBC; erit $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$, ideoque restituto $x - h$ loco v, atque $bb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty bb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc est, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò restituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$, fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{- daax + 2bcax}{aa - bb} \infty$



$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divisione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \infty cc + kk$. Ac denique loco z factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonstrandum erat.

Notandum porrò hîc est, quòd si angulus AKB foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut DB, KI, &c. ad diametrum KB perpendiculares, ac simul FN æqualis FC, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

PROBLEMA III.

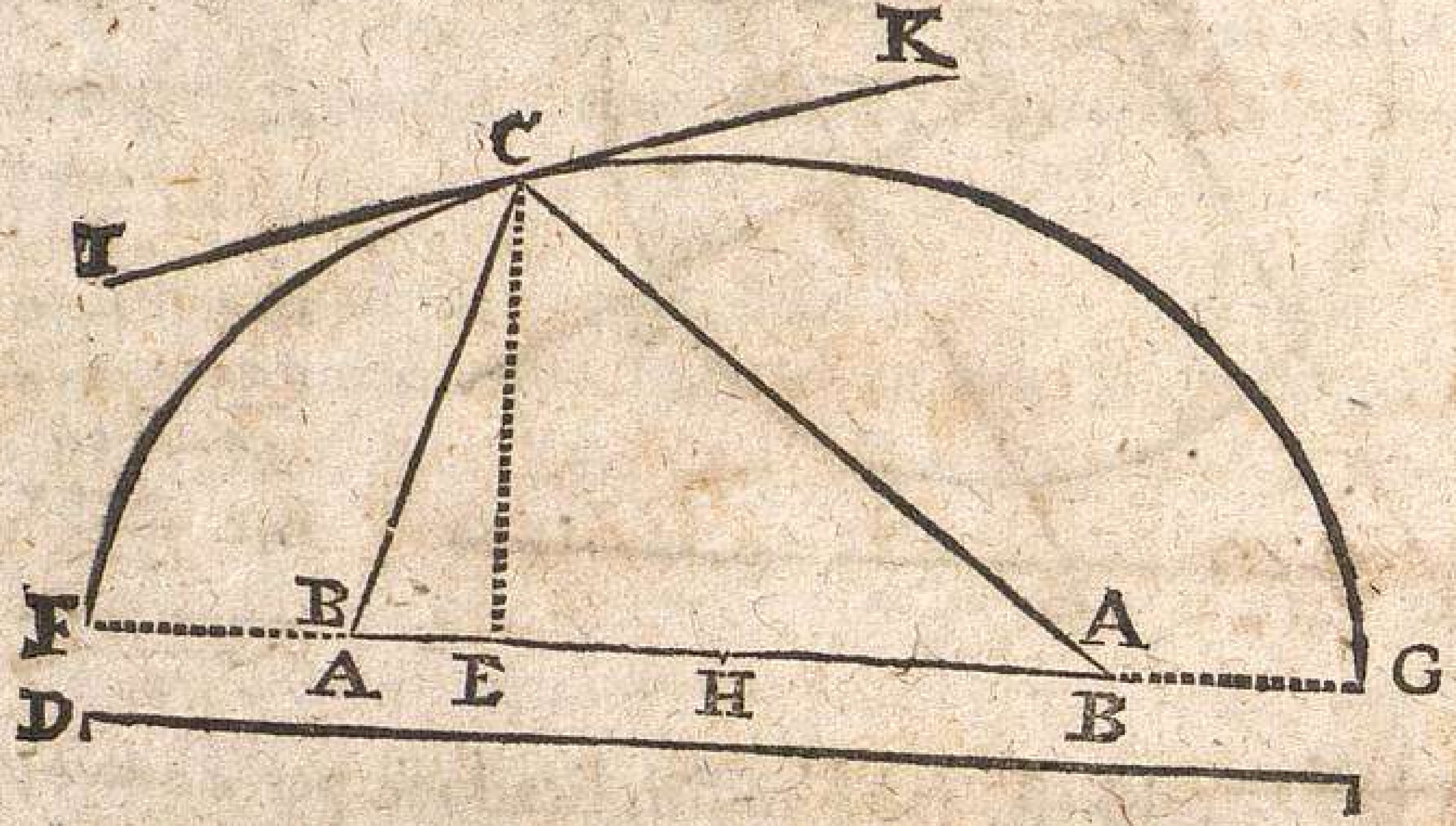
Propositio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ simul sumptæ datæ longitudini æquales sint; locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utpura C; ita nempe, ut ductæ rectæ C A, C B simul sumptæ æquales sint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit,

Fig. I.



intelligatur demissa perpendicularis, ut CE. Tum suppositis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis assumptum angulum rectum A E C comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac posterior, nempe E C, nominetur y; ipsa autem A B seu datorum punctorum distantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum B E sive (si punctum E cadat inter A & B) A B — A E, aut (si punctum B inter A & E cadat) A E — A B sit $\propto a = x$; atque A C $\propto \sqrt{xx+yy}$; & C B $\propto \sqrt{aa-2ax+xx+yy}$: sitque D — A C $\propto$ C B: æquatio erit $b - \sqrt{xx+yy} \propto \sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; factâque operatione

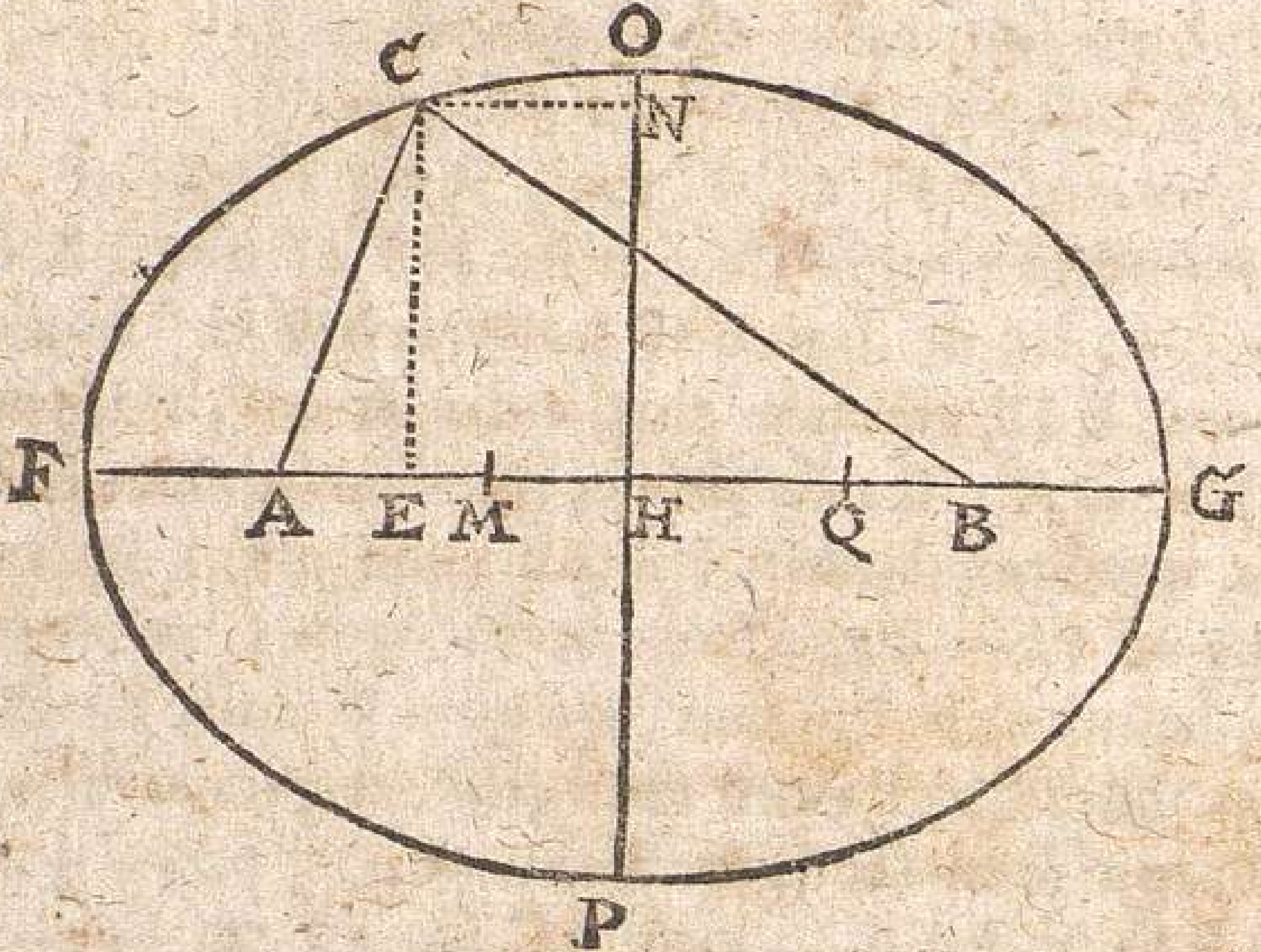
ne decenti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit
$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$, hoc est, factâ divisione per $4bb - 4aa$, erit
$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb-aa}$. Assumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, eâque substitutâ in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invicem destruunt: erit $vv \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb-aa}$, sive $\frac{bbyy}{bb-aa} \infty \frac{1}{4}bb - vv$. Qui quidem casus est Theorematis 14[ti], ac proinde Locus quæsitus Ellipsis. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur AH $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & semi-diameter transversa (velut HF ab una, & HG ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad eandem perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit ∞b. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Unde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi exposita sunt, quæsita Ellipsis facillimè describetur. Porrò cùm quadratum semi-diametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum FB seu GA sit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & BG seu AF $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum FBG seu GAF $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò Ellipseos Foci sive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur,

Corollarium I.

Quæ à quolibet in Ellipsi puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducuntur, simul sumptæ transverso axi æquales sunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola superiùs demonstratum est, ductarum CA, CB differentiam transverso axi FG æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem transverso axi æquale esse ostendetur, nempe, si non per additionem & compositionem, ut ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituatur. Quod ipsum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto quælibet Ellipsis FCG, cujus centrum H, axis major FG, minor OP, atque Umbilici A & B; adeoque rectangulum FBG ut & GAF æquale quadrato semi-secundæ diametri HO.



Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis CA, CB, ordinatim ad utrumque axem applicentur CE, CN; & fiat ut HF ad HA, ita HE ad HM; adeò ut [1] AHE rectangulo æquale sit rectangulum FHM; sumaturque HQ æqualis ipsi HE. Hinc cum sit [2] ut HFq ad HAq, ita HEq ad HMq, erit quoque per conversionem rationis ut HFq ad GAF seu [3] HOq, id est [4], ut CNq sive HEq ad ONP, ita idem HEq ad EMQ; ac proinde [5] æqualia sunt rectangula ONP & EMQ. Quocirca cum [6] HMq unà cum EMQ, id est, cum ONP rectangulo, æquale sit HEq; sitque & HFq [7] æquale quadratis rectarum HA & (HO [8] seu [9]) CE unà cum rectangulo ONP: erunt HMq + ONP + HFq æqualia HEq + HAq + CEq + ONP. Ac proinde si utrinque auferatur ONP rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum HM & HF seu HG simul æqualia tribus quadratis rectarum HE, HA seu HB, & CE. Hinc

[1] per 16 sexti. [2] per 22 sexti. [3] ex hypothesi. [4] per 13 primi hujus ejusque Corol. 1. [5] per 9 quinti. [6] per 5 secundi. [7] per 5 secundi. [8] quippe quadr. ex HO æquale est GAF rectang. ex hypoth. [9] per 5 secundi.

Hinc additis ablatisvé ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum FHM seu GHM bis ab una, & AHE seu BHE bis ab altera parte: erit [1] FMq æquale ($AEq + CEq$, id est [2],) ACq: itemque [3] GMq æquale ($BEq + CEq$, id est [4],) BCq. Cumque propterea recta FM æquetur ipsi AC, & GM ipsi BC: erit ipsarum AC & BC aggregatum transverso axi FG æquale. Quod demonstrandum erat.

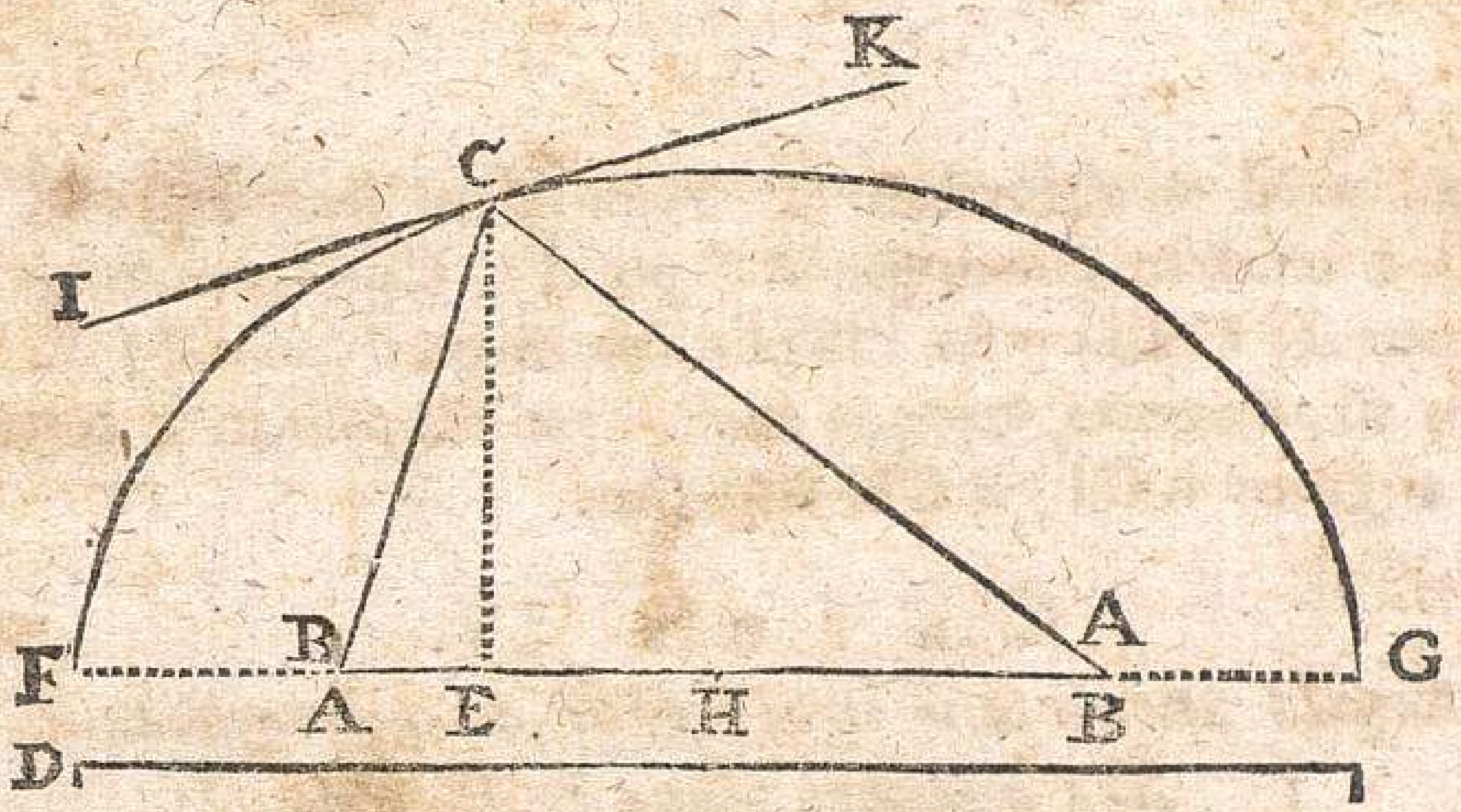
[1] per 7 secundi. [2] per 47 primi. [3] per 4 secundi. [4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Umbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta ICK ita ducta, ut æquales sint anguli ACI, BCK, non contingat Ellipsin in C puncto, secet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde productâ AC ad L, ita ut tota AL

Fig. 1.

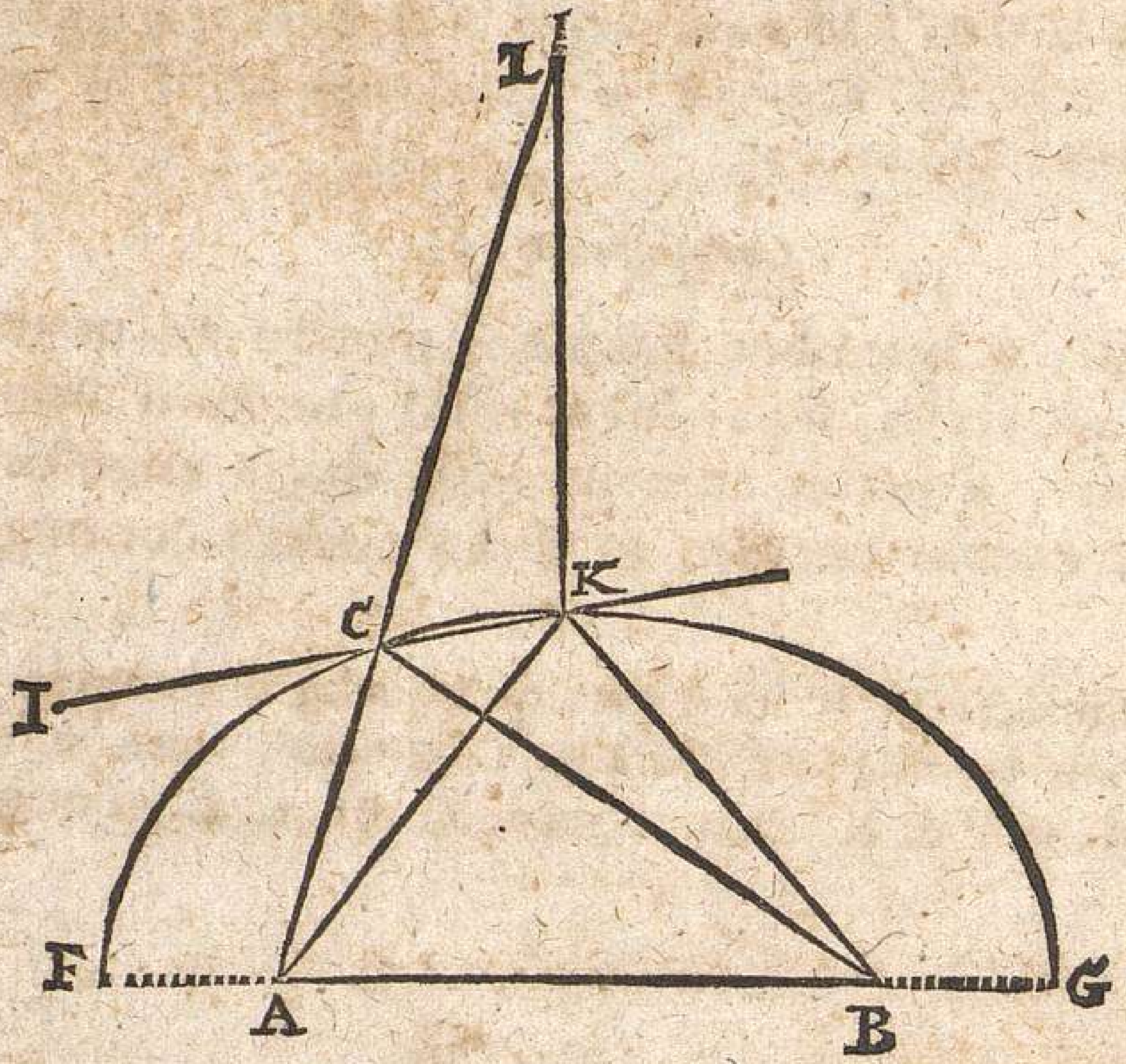


axi FG, ideoque [5] adjecta CL ipsi CB æqualis sit, jungantur AK, BK, LK. Cum igitur, in triangulis LCK, BCK latera LC, CK lateribus BC, CK, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis LK basi BK æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt, per

[5] per Corol. 1 hujus.

per Corollarium præcedens, rectæ AK, KB, hoc est, latera AK, KL simul sumpta transverso axi FG, ideoque & basi AL

Fig. 11.



[1] per 20 primi.
[2] per 17 primi hujus.

æqualia, quod est absurdum [1]. Non igitur secat recta ICK Ellipsin, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia recta Ellipsin contingere quàm ICK [2], manifestum est, è contra quoque eam, quæ Ellipsin in C contingit, efficere angulos ACI, BCK æquales.

CAPUT IV.

Regula universalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & solida.

Jam verò his omnibus ita præmissis, pro generali Regula concludi potest, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere possunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in se ducta, neque factum sub iisdem ad solidum

lidum excurrat, sed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua sequentium formularum constare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci posse; nimirum,

$$1^{m\grave{o}}.\begin{cases} y \infty \frac{bx}{a}, \text{ sive, quod idem est, } y \infty x; \text{ cum supponi} \\ \quad \text{possit esse } a \infty b. \\ y \infty \frac{bx}{a} \pm c, \text{ vel } y \infty c - \frac{bx}{a}. \end{cases}$$

Signum $\pm$ significat $+$ vel $-$.

Sed hîc notandum, fieri etiam posse, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evanescat, alteraque sola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, sicut superiùs expositum est.

$$2^{d\grave{o}}.\begin{cases} yy \infty dx, \text{ aut conversim } dy \infty xx. \\ yy \infty dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \infty xx. \\ zz \infty dx, \text{ aut conversim } dy \infty vv. \\ zz \infty dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \infty vv. \end{cases}$$

$$3^{ti\grave{o}}.\begin{cases} yy \infty \frac{lxx}{g}.ff. \\ zz \infty \frac{lxx}{g}.ff. \\ yy \infty \frac{lvv}{g}.ff. \\ zz \infty \frac{lvv}{g}.ff. \end{cases} \Bigg| \text{ sive etiam } \begin{matrix} yx \infty ff. \\ zx \infty ff. \\ yv \infty ff. \\ zv \infty ff. \end{matrix}$$

Supponendo ubique y & x esse quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z esse quantitatem assumptam, & quæ composita sit ex $y \pm$ aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta sit; atque v quidem assumptam quoque esse, sed eo casu constare solummodo ex $x \pm$ aliâ quantitate cognitâ, absque ulla ipsius y incognitæ quantitatis permixtione; aut contra v esse $\infty x \pm$ aliâ quâdam quantitate, cui & y incognita permixta esse possit atque eo quidem casu z ex y 8 aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

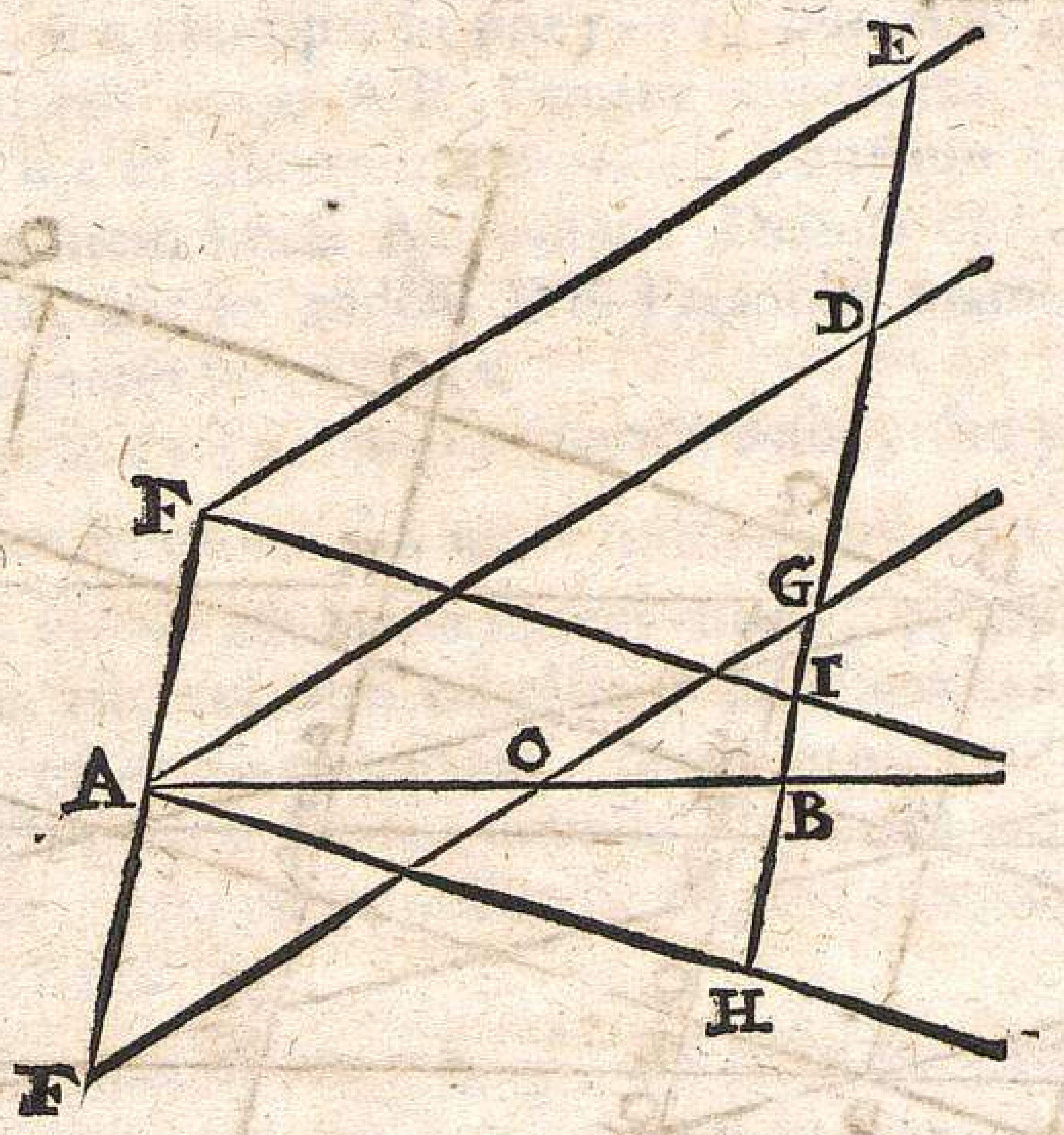
Ut autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituant in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus A B E, quem faciunt quantitates y & x, in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \infty x$ vel $y \infty \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea A B punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut H B E, ita ut angulus A B E præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut A B & B D sint æquales, vel ut A B sit ad B D, sicut a ad b, atque ex A per punctum D ducatur recta A D: erit eadem A D indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c, ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ A B quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta A F ipsi H B E parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque F E vel F G, quæ rectam A B secet in O, ipsi A D parallelâ: erit F E vel O G indefinitè producta Locus quæsitus.

Sed

Sed si æquatio sit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea HBE sumendum est ab altera parte lineæ AB, quâ datus vel assumptus angulus ABE existit, punctum H, ita ut AB ad BH sit, sicut a ad b; ductâque AH, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ AB, quâ sum-



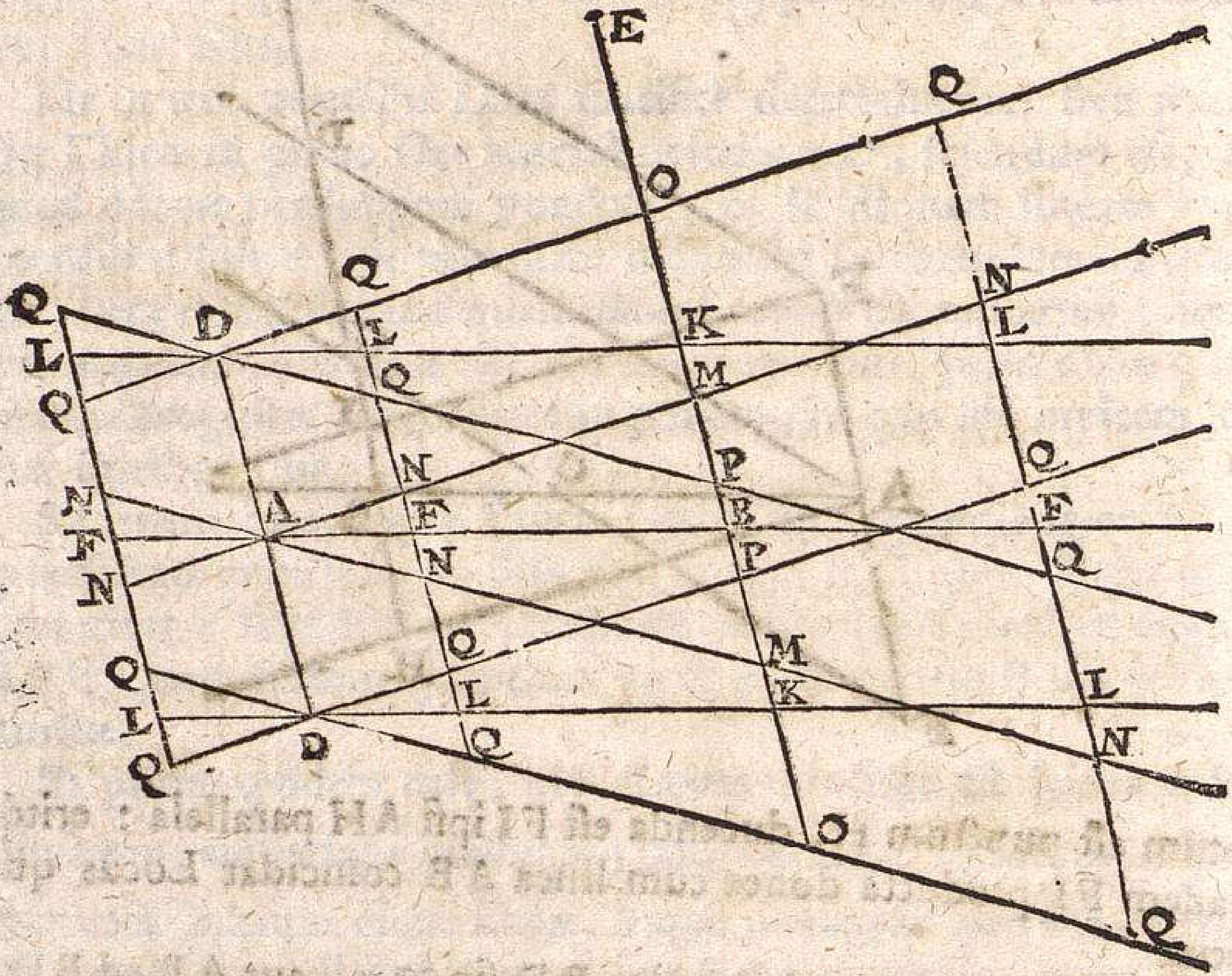
ptum est punctum H, ducenda est FI ipsi AH parallela: eritque eadem FI producta donec cum linea AB coïncidat Locus quæsitus.

Etenim, cum tam AB quàm BD sit ∞x, aut AB ad BD ab una, ut & AB ad BH ab altera parte, sit ut a ad b; ac proinde BD vel BH $\infty \frac{bx}{a}$: itemque, cum AF seu DE vel DG ut & HI sint æquales c cognitæ: erit BE sive BD + DE $\infty \frac{bx}{a} + c$, & BG sive BD − DG $\infty \frac{bx}{a} - c$, ac BI sive HI − HB $\infty c - \frac{bx}{a}$. Unde cum punctum B sumptum sit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea AB, prædictisvé locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas AD, FE, FG, & FI esse Loca quæsita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

At

At verò si juxta formulas sub N°. 2 exhibitas Locus quæsitus sit linea Parabolica, erit

I. Primo casu, quando æquatio est $yy \infty dx$, ipsa AB Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales, atque ejusdem vertex A punctum.



II. Secundo casu positâ æquatione $yy \infty dx.\ ff$, manente diametro in eadem linea AB, sumptâque, ut in sequenti figura, AF $\infty \frac{ff}{d}$, erit ejusdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, si uterque terminus tam dx quàm ff signo + sit affectus, ab altera parte puncti A, quâ est punctum B, sumendum est; sed si vel terminus dx, vel terminus ff signo — affectus sit, ab eadem parte puncti A, quâ est punctum B, sumi debet: & quidem si terminus dx signo + affectus sit, ab A versùs B Parabola describenda est; sin contra terminus dx signo — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, describi debet.

At

At ſi æquatio ſit $zz \infty dx$, vel $zz \infty dx\; ff$, cum z non ſit quantitas primò concepta ſed aſſumpta, vel aſſumpta erit pro $y \; 8 \; c$, vel pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$.

III. Et ſi quidem z aſſumpta ſit pro $y \; 8 \; c$, qui ſit caſus tertius, ducenda eſt per punctum A recta A D ipſi B E parallela atque $\infty \, c$; ita ut, ſi z aſſumpta ſit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ A B, quam conceptus eſt angulus ABE: Et, ſi z ſit aſſumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ AB cadat. Deinde ductâ DK ipſi AB parallelâ, erit in eadem DK Parabolæ diameter, & D vertex, ſi æquatio ſit $zz \infty dx$.

IV. Sed ſi ſit $zz \infty dx. ff$, qui ſit quartus caſus, ſumptâ DL ∞ $\frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per $+$ vel $-$ affectione eodem modo, ut ſupra de puncto F dictum eſt, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx ſigno $+$ vel $-$ adfectus fuerit, ipſa Parabola, ut ſupra notatum eſt, deſcribi debet: eritque omnibus & ſingulis prædictis quatuor caſibus Parameter $\infty \, d$.

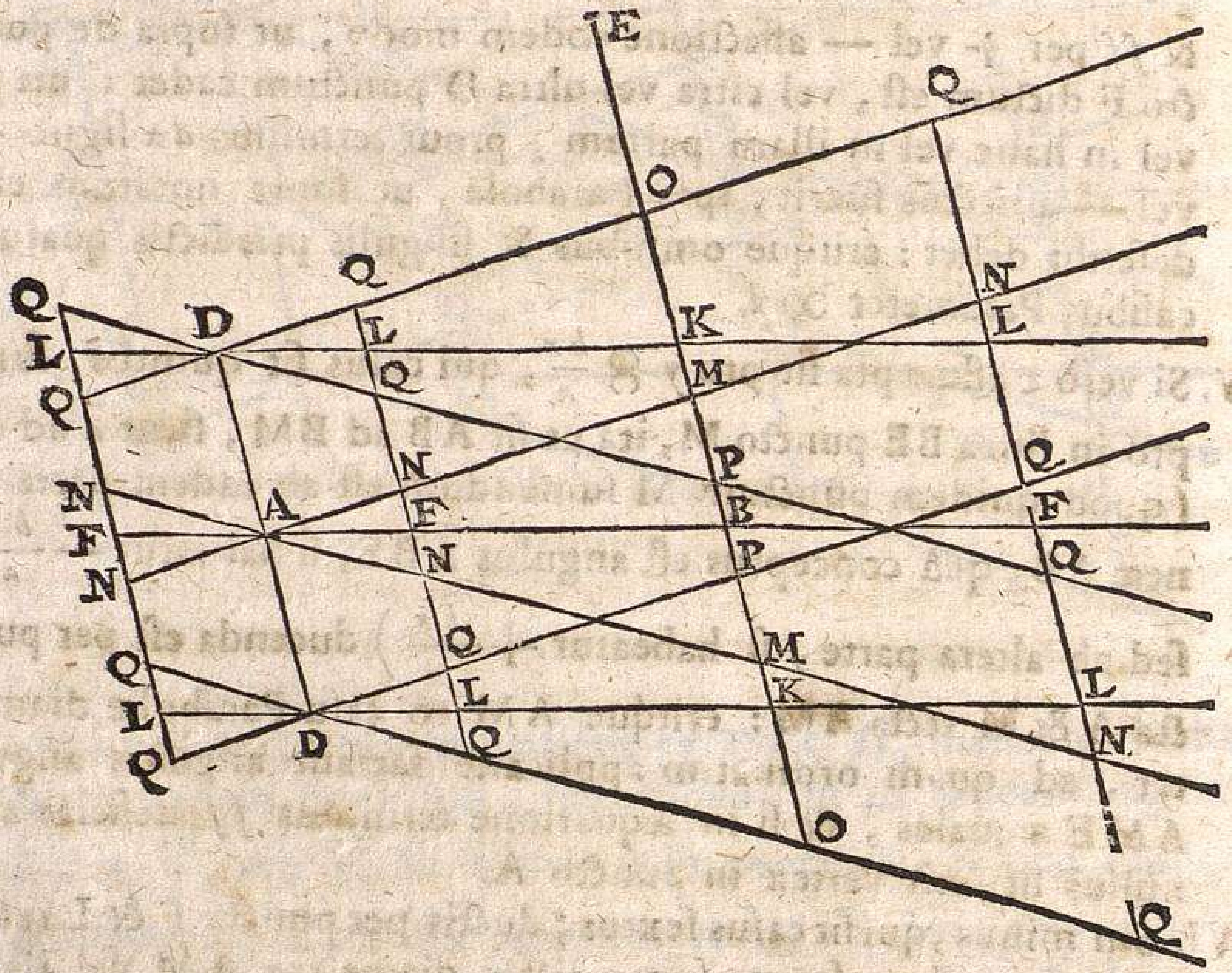
V. Si verò z aſſumpta ſit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, qui caſus ſit quintus, ſumpto in linea BE puncto M, ita ut ſit AB ad BM, ſicut a ad b, (quod quidem punctum M ſumendum eſt ab eadem parte lineæ AB, quâ conceptus eſt angulus ABE, ſi habeatur $-\frac{bx}{a}$, ſed ab altera parte, ſi habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda eſt per puncta A & M recta AM: eritque AM eo caſu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo AME æquales, & ſi in æquatione terminus ff deficiat aut nullus ſit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui ſit caſus ſextus, ductis per puncta F & L rectis LFL, quæ interſecent ſupra dictas diametros AM vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel ſigno $+$ vel ſigno $-$ affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipſa Parabola pro varia termini dx affectione, ut ſupra notatum eſt, deſcribenda erit.

Si denique z assumpta sit pro $y \infty \frac{bx}{a} \infty c$, ducta, ut modò expositum fuit, AD ∞ c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum + vel — affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ AB sumi debet) ducenda est recta DO ipsi

VII. AM, quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta DP parallela ipsi AM, quæ est ab adversa parte lineæ AB, atque eadem DO vel DP sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo DOE vel DPE æquales: eritque vertex punctum D, si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum DO vel DP diametrorum & linearum LFL communis intersectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut AB ad AM, hoc est, erit ut AM ad AB, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta OE utcunque sumpta, & supponatur easdem Parabolas prædictam applicatam secare in E puncto: & primo casu, cum pars diametri AB inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti AB, concipiatur, ut x, ac singulæ illæ applicatæ, ut y; sitque Parameter $\propto d$, atque [1] per 1 primi hujus.
ex natura Parabolæ [1] rectangulum sub dicta Parametro & recta AB contentum sit $\propto$ BE quadrato: erit $dx \propto yy$.

I. Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \propto dx \pm ff$, punctum B in linea FB ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \propto ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse; id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \propto ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \propto dx$, terminus ff major est quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum secundùm Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ AF, & $x \propto$ rectæ AB, erit similiter recta AF major quàm AB; ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet; id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porrò quoniam AF est $\propto \frac{ff}{d}$, erit FB (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, AB $\pm$ AF, atque etiam AF — AB) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale eſt quadrato applicatæ BE
2. ſive yy, ac proinde $yy \infty dx \; 8 \; ff$, atque $yy \infty ff - dx$.

Tertio caſu, ubi vertex eſt in puncto D, ac diameter in recta DK, quoniam AD ſeu BK eſt ∞c: erit KE, hoc eſt, BE — BK $\infty y - c$; & KBE, hoc eſt, BE + BK $\infty y + c$. Cumque eo caſu z aſſumpta ſit pro $y \; 8 \; c$, erit KE & KBE ∞z. Eſt autem DK ſeu AB ∞x, parameterque ∞d, & rectangulum ſub dicta Parametro & recta DK contentum ∞ quadrato ex KE vel KBE. Quare cum hoc quadratum ſit ∞zz, atque
3. rectangulum illud ∞dx, erit $zz \infty dx$.

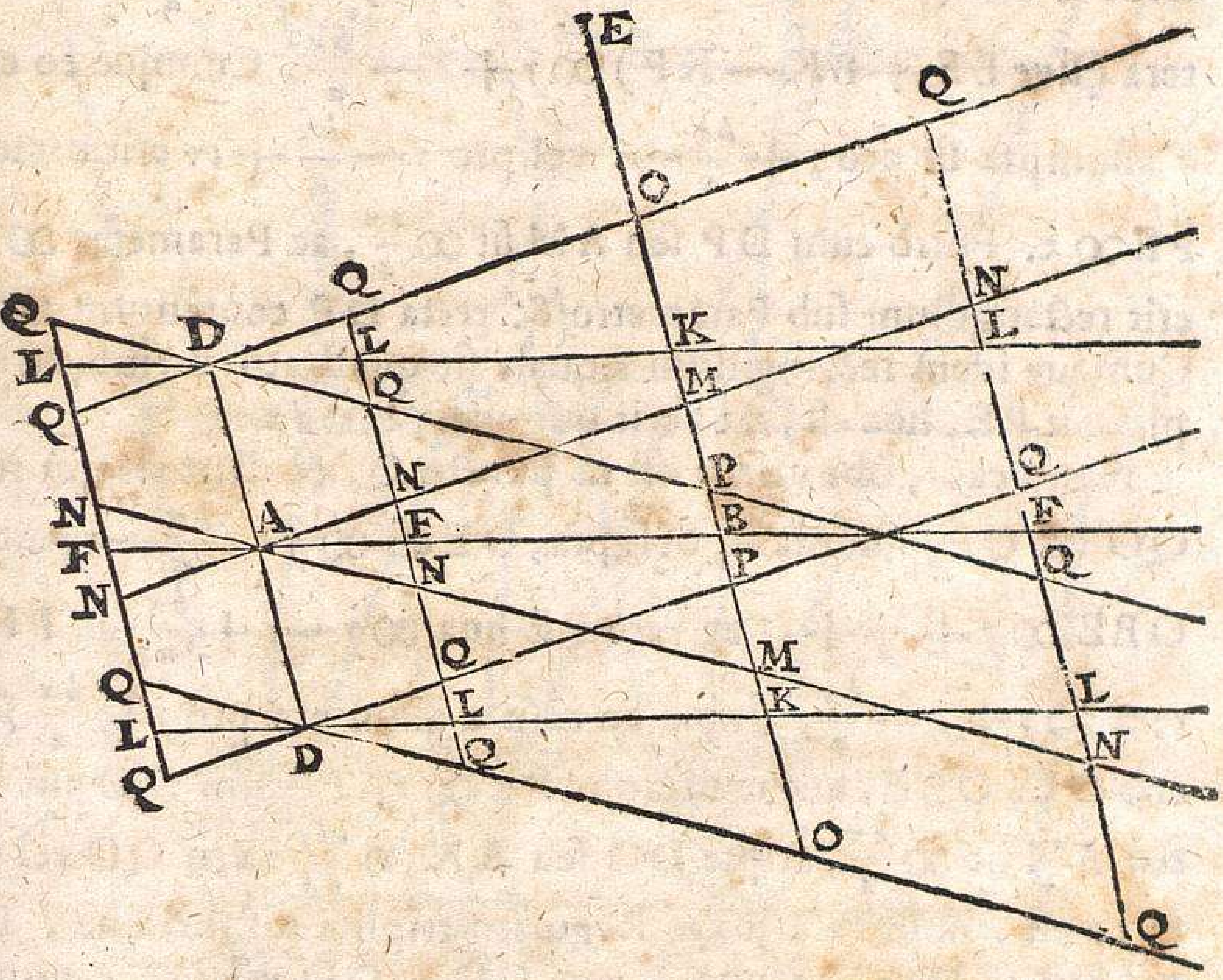
Quarto caſu, ubi manente diametro in recta DK vertex eſt in puncto L, quoniam DL ſive AF eſt $\infty \frac{ff}{d}$, erit LK (hoc eſt, obſervatâ triplici diſtinctione juxta Regulam, DK 8 DL, atque etiam LD — DK) æqualis $x \; 8 \; \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum $dx \; 8 \; ff$, atque etiam $ff - dx$. quod æquale eſt quadrato applicatæ KE vel KBE, hoc eſt, zz: eritque proinde $zz \infty dx \; 8 \; ff$, atque
4. $zz \infty ff - dx$.

Quinto caſu, ubi vertex eſt in puncto A, diameterque in recta AM, cum ſit ut a ad b, ita AB, hoc eſt, x, ad BM: erit BM $\infty \frac{bx}{a}$, ideoq; ME, hoc eſt, BE — BM $\infty y - \frac{bx}{a}$, & MBE, hoc eſt, BE + BM $\infty y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo caſu z aſſumpta eſt pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, erit ME & MBE ∞z. At cum in triangulo ABM cognita ſint & angulus ABM, & ratio laterum AB, BM, dictum angulum comprehendentium, nota quoque eſt [a] ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in ſpecie etiam lateris AB ad AM, quæ ſit ut a ad e. Ac proinde cum ſit ut a ad e, ita AB, h.e., x ad AM: erit AM $\infty \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo caſu ſit ut AM ad AB, hoc eſt, ut e ad a, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per AM ſeu $\frac{ex}{a}$, fiet rectangulum ∞dx. Quod æquale eſt quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc eſt, zz; ac proin-
5. de eſt $zz \infty dx$.

[a] per 6 ſexti.

Sexto

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in recta NM, quoniam est ut AB ad AM, ita AF ad AN, hoc est, ut a ad e, ita $\frac{ff}{d}$ ad AN: erit AN $\infty \frac{eff}{ad}$, & NM (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, AM $\pm$ AN, atque etiam NA — AM) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, zz: erit
6. $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in recta DO, quoniam AD seu MO est ∞c, erit OE (sive BE — BM — MO) $\infty y - \frac{bx}{a} - c$, & OBE (sive BE + BM + MO) $\infty y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - c$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + c$: erit OE & OBE ∞z. Porrò cum DO seu

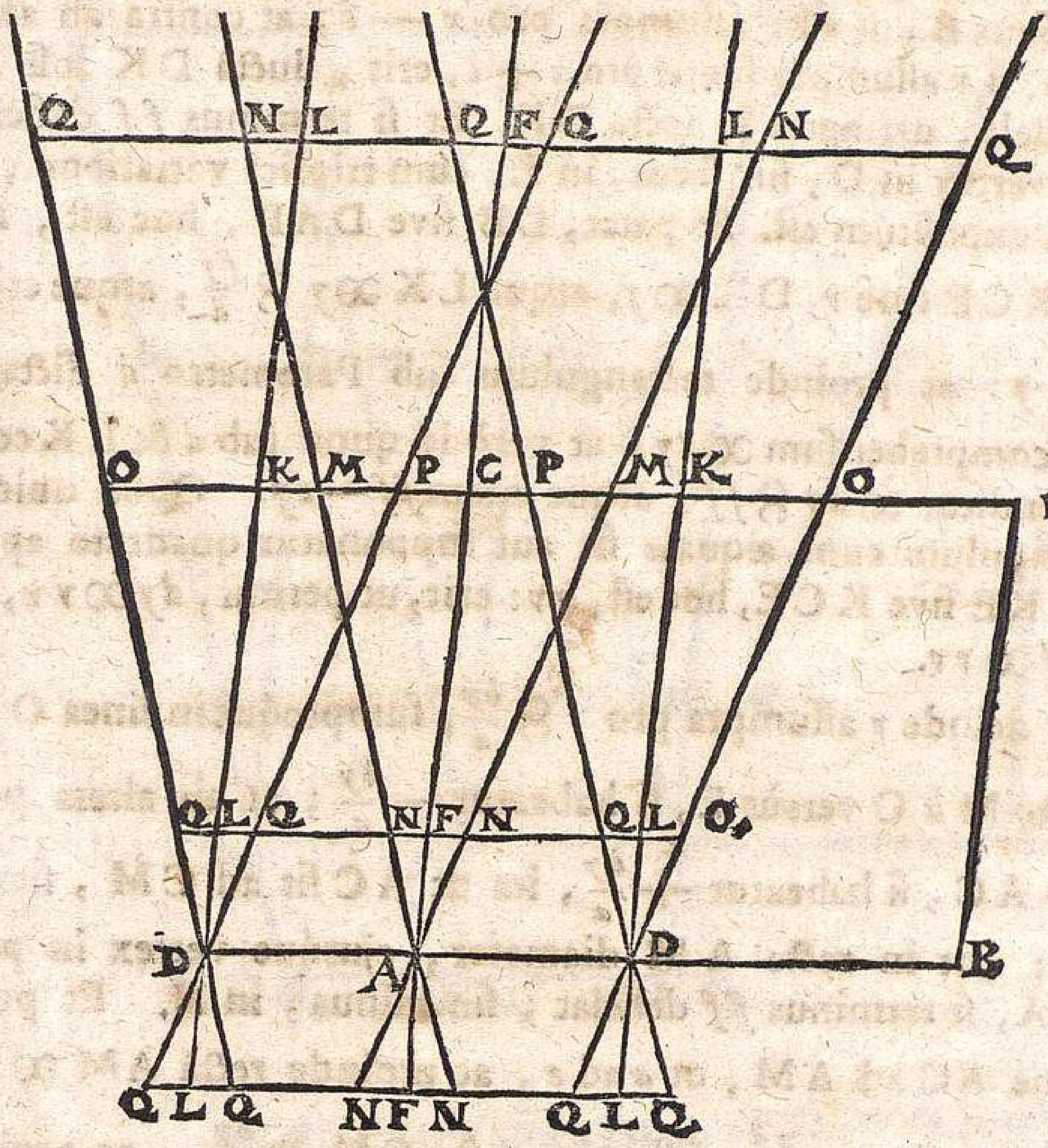
seu AM sit $\infty \frac{ex}{a}$, Parameterque sectionis $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta DO contentum $\infty\ dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ OE vel
7. OBE, id est, zz: erit $zz \infty dx$.

Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter est in recta DP, quoniam AD seu BK est $\infty\ c$, & KP $\infty \frac{bx}{a}$, erit PE una (sive BE — BK + KP) $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, & PE altera (sive BE + BK — KP) $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque PE $\infty\ z$. Porrò cum DP seu AM sit $\infty \frac{ex}{a}$, ac Parameter $\infty \frac{ad}{e}$: erit rectangulum sub Parametro & recta DP contentum $\infty\ dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque ap-
8. plicatæ PE, hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q, & diameter in recta QO vel QP, quoniam, ut supra, OE est $\infty\ y - \frac{bx}{a} - c$, atque OBE $\infty\ y + \frac{bx}{a} + c$; at verò PE una $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, ac PE altera $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$: erit OE, OBE, atque utraque PE $\infty\ z$. Et cum DO aut DP seu AM sit $\infty \frac{ex}{a}$, atque DQ seu AN $\infty \frac{eff}{da}$: erit QO vel QP (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, DO vel DP $\pm$ DQ, atque etiam QD — DO vel DP) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Unde si eadem QO vel QP multiplicetur per Parametrum $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\infty\ dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ OE, OBE, aut utriusque PE,
9. hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$. Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæsita: positis iisdem, ut supra, per punctum

punctum A ducenda est recta AC ipsi BE parallela, ac deinde ipsa AC, ubique consideranda, ut considerata fuit recta AB in superiori figura. Porrò sumpto in eadem AC puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipsi AB parallelâ, velut OCE, erit similiter hæc OCE ubique consideranda, sicut considerata fuit recta OBE in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ, si æ-
I. quatio sit $dy \propto xx$, erit AC diameter, A vertex, & Parame-



ter $\propto d$. Cum enim AC seu BE sit concepta ut y, & CE seu AB ut x, rectangulumque sub Parametro & AC contentum, hoc est, dy, æquetur quadrato rectæ CE seu AB, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy \propto xx$.

II. Si æquatio sit $dy. ff \propto xx$, sumptâ AF $\propto \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta FC, atque Parametro $\propto d$. Est

 enim

enim pro triplici juxta Regulam distinctione FC $\infty y \, 8 \, \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro ac eadem FC contentum $\infty \, dy \, 8 \, ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ CE, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy . ff \infty xx$.

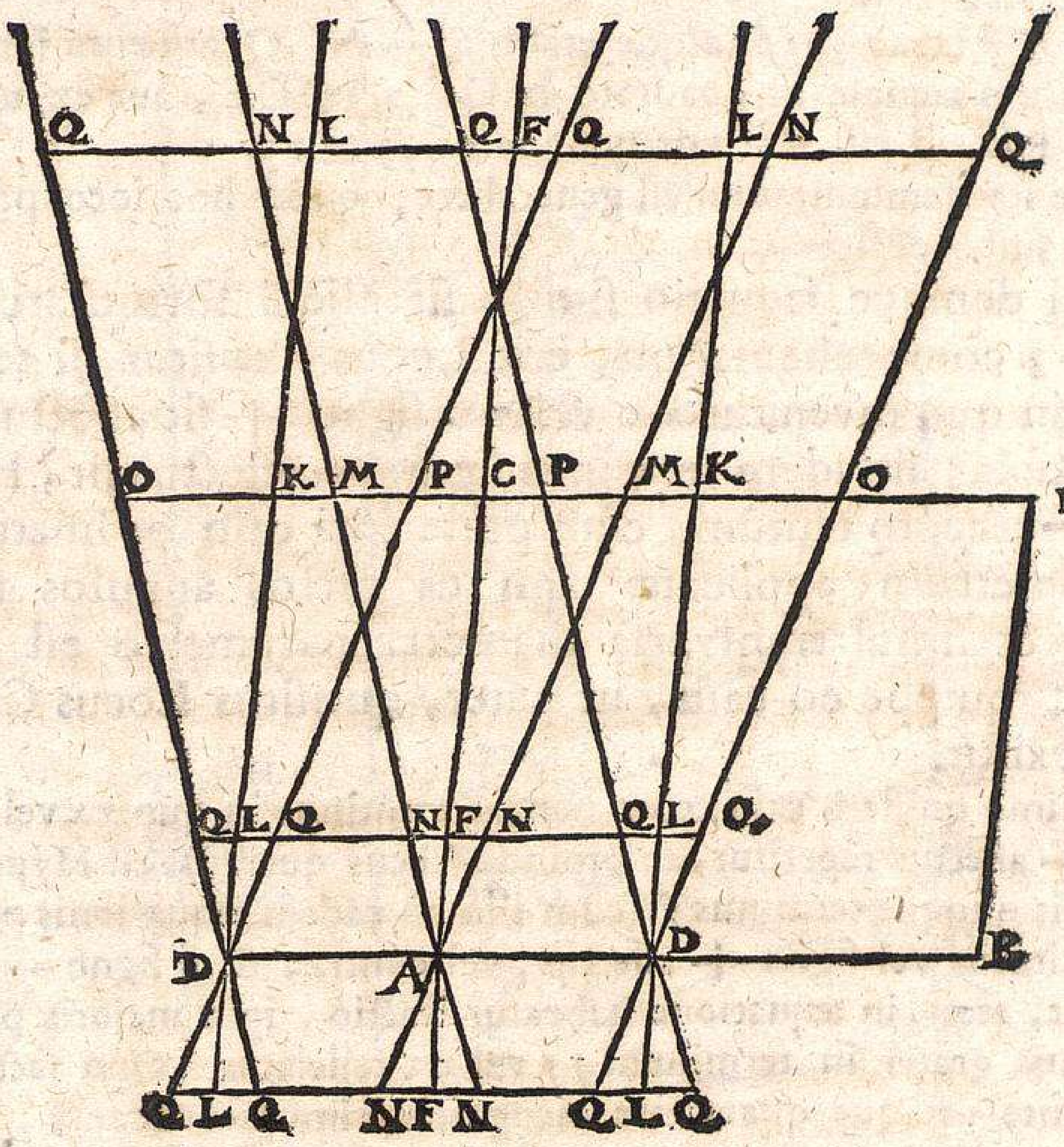
III. Si æquatio sit $dy \infty vv$, vel $dy . ff \infty vv$, atque v primùm assumpta sit pro $x \, 8 \, c$, factâ AD $\infty \, c$, sumptoque puncto D ab A versùs B, si v sit assumpta pro $x - c$; at contra ab altera parte, si v assumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ DK ipsi AC parallelâ, diameter in recta DK. Et si terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; sin secus, in L, cum triplici variatione, ut supra expositum est. Et patet, DB sive DAB, hoc est, KE sive KCE fore v, DK $\infty \, y$, atque LK $\infty \, y \, 8 \, \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictaque DK comprehensum $\infty \, dy$; at verò id quod sub d & LK comprehenditur $\infty \, dy \, 8 \, ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato applicatæ KE sive KCE, hoc est, vv: erit, ut petitur, $dy \infty vv$, vel $dy . ff \infty vv$.

V. Sit deinde v assumpta pro $x \, 8 \, \frac{by}{a}$, sumptoque in linea OCE puncto M à C versùs E, si habeatur $- \frac{by}{a}$; at ab altera parte lineæ AC, si habeatur $+ \frac{by}{a}$, ita ut AC sit ad CM, sicut a ad b: erit in recta AM diameter, ejusque vertex in pun-
VI. cto A, si terminus ff deficiat; sin minus, in N. Et posita ratione AC ad AM, ut a ad e, ac proinde rectâ AM $\infty \, \frac{ey}{a}$, erit Parameter $\infty \, \frac{ad}{e}$. Est enim recta CM $\infty \, \frac{by}{a}$, ac proinde ME $\infty \, y - \frac{by}{a}$, atque MCE $\infty \, y + \frac{by}{a}$, id est, ME vel MCE $\infty \, x$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum sub dicta Parametro & recta AM contentum ∞ quadrato ex ME vel MCE, erit $dy \infty vv$.

Porrò cum NA sit $\infty \, \frac{ffe}{da}$, erit NM $\infty \, \frac{ey}{a} \, 8 \, \frac{ffe}{da}$, atque

etiam

etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum sub Parametro & recta NM contentum $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum sit ∞ quadrato ex ME vel MCE, hoc est, vv; erit quoque $dy, ff \infty vv$.



Sit denique v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: eritque, sup-
VII. VIII. positis iisdem quae supra, diameter in DO, vel in DP;
IX. &, si terminus ff deficiat, vertex in D; sin minus, in Q.
Et positâ ratione DK ad DO, ut & DK ad DP, sicut a ad e, ac proinde rectâ DO, ut & DP $\infty \frac{ey}{a}$; erit parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Est enim OE $\infty\ x - \frac{by}{a} - c$, atque

OCE $\infty\, x + \frac{by}{a} + c$; itemque PE una $\infty\, x - \frac{by}{a} + c$, ac PE altera $\infty\, x + \frac{by}{a} - c$, hoc est, OE, OCE, & PE una vel altera erit $\infty\, v$. Estque QO vel QP (sicut supra NM) $\infty\, \frac{ey}{a}\ 8\ \frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum sub Parametro & QO vel QP $\infty\, dy\ 8\ ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale sit quadrato ex OE vel OCE, aut ex una alteravé PE, id est, vv: erit quoque $dy.ff \infty vv$.

Atque ita demonstratum est generaliter, quod hoc loco propositum fuit.

At si denique æquatio similis sit alicui formularum sub N° 3 comprehensarum, erit Locus quæsitus, si terminus in quo invenitur xx vel vv signo + sit affectus, Hyperbola; sin idem terminus signo — affectus sit, Ellipsis: excepto tantùm, cùm posteriori casu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & simul transversa diameter parametro est æqualis: quippe eo casu, ut patet, quæsitus Locus Circulus existit.

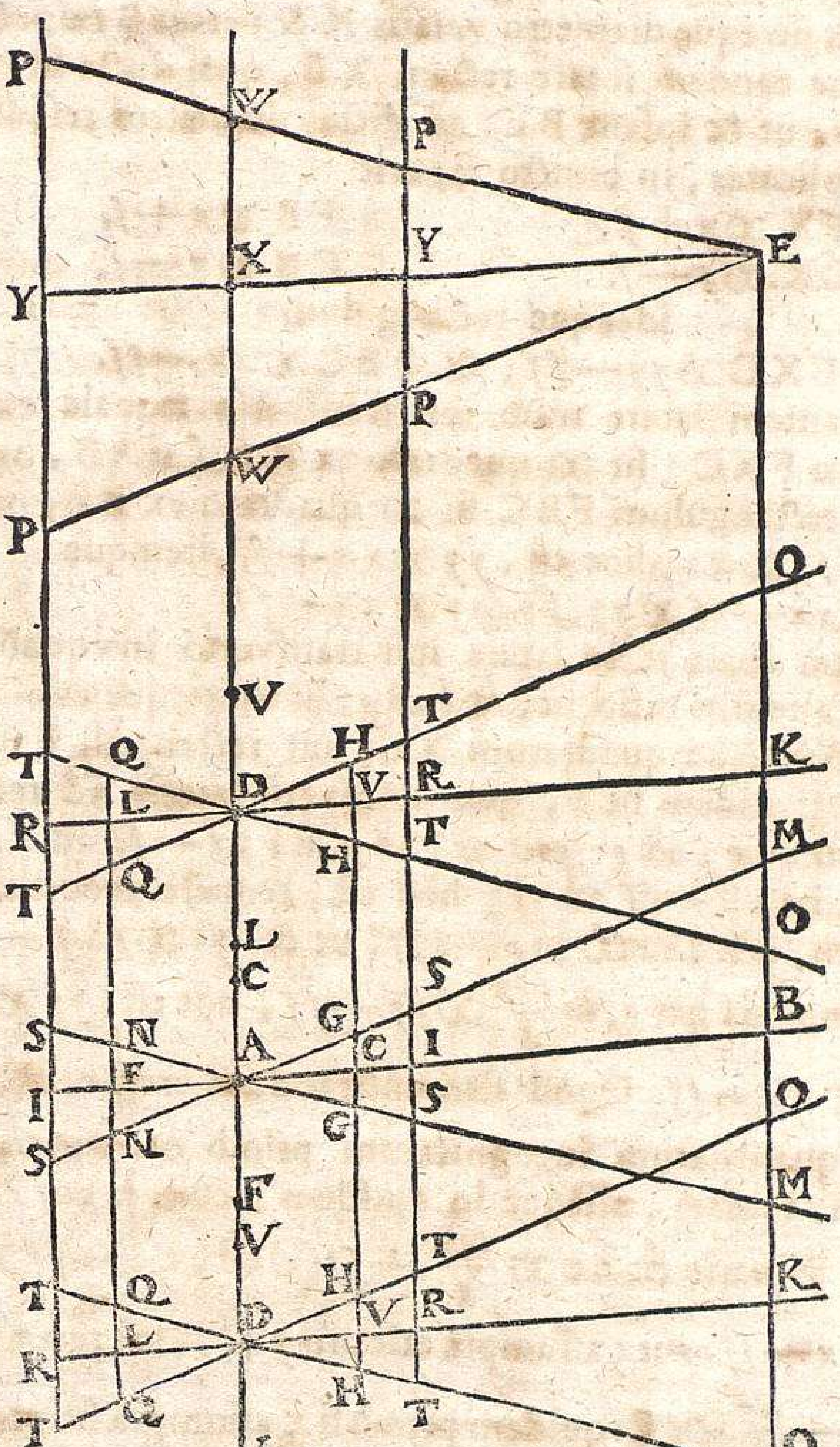
Et primo quidem casu, cùm nempe terminus in quo xx vel vv signo + affectus reperitur, ac proinde Locus quæsitus est Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte constitutus vel signo + affectus, vel contra; & si signo — affectus sit, atque in æquatione habeatur fractio, ipsa majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto,

Casus 1mus, cùm Locus est Hyperbola.

remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, sequenti formâ se exhibebit æquatio: $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$: eritque, ut in sequenti figura, casu primo, nempe si terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem constituens signo + affectus sit, diameter Hyperbolæ describendæ in recta AX, quæ ducitur per punctum A positione datæ BE parallela. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, uti casu secundo, erit diameter in data positione recta AB, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad

easdem

easdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo A B E æquales: eritque casu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & semi-latus transversum ∞f, quod in



dictis diametris respectivè per lineas AC vel A F exprimatur. Porrò si l sit ∞g, vel, quod idem est, si termino xx vel yy nulla adhæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g.

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam XE, quæ ducta sit ipsi AB æquidistans, ut & ipsam BE, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$FX \infty y + f, \qquad FB \infty x + f,$$
$$CX \infty y - f. \qquad CB \infty x - f;$$

ideoque rectangulum

$$FXC \infty yy - ff, \ \& \ FBC \infty xx - ff.$$

Cum autem latere recto ipsi transverso æquale existente rectangulum FXC[1] sit ∞ quadrato ex XE seu AB, hoc est, xx: itemque rectangulum FBC sit ∞ quadrato ex BE, hoc est, yy: erit $yy - ff \infty xx$, hoc est, $yy \infty xx + ff$, itemque

$$xx - ff \infty yy, \text{ sive } yy \infty xx - ff.$$

1 per 10 primi hujus.

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g; similiterque etiam ratio rectanguli FXC ad quadratum XE, aut rectanguli FBC ad quadratum BE eadem sit[2], quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy - ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad yy; hoc est, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \infty gyy - gff$, ut & $lyy \infty gxx - gff$. Unde divisis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \infty yy - ff$, hoc est, $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$; & $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$. Quod demonstrandum erat.

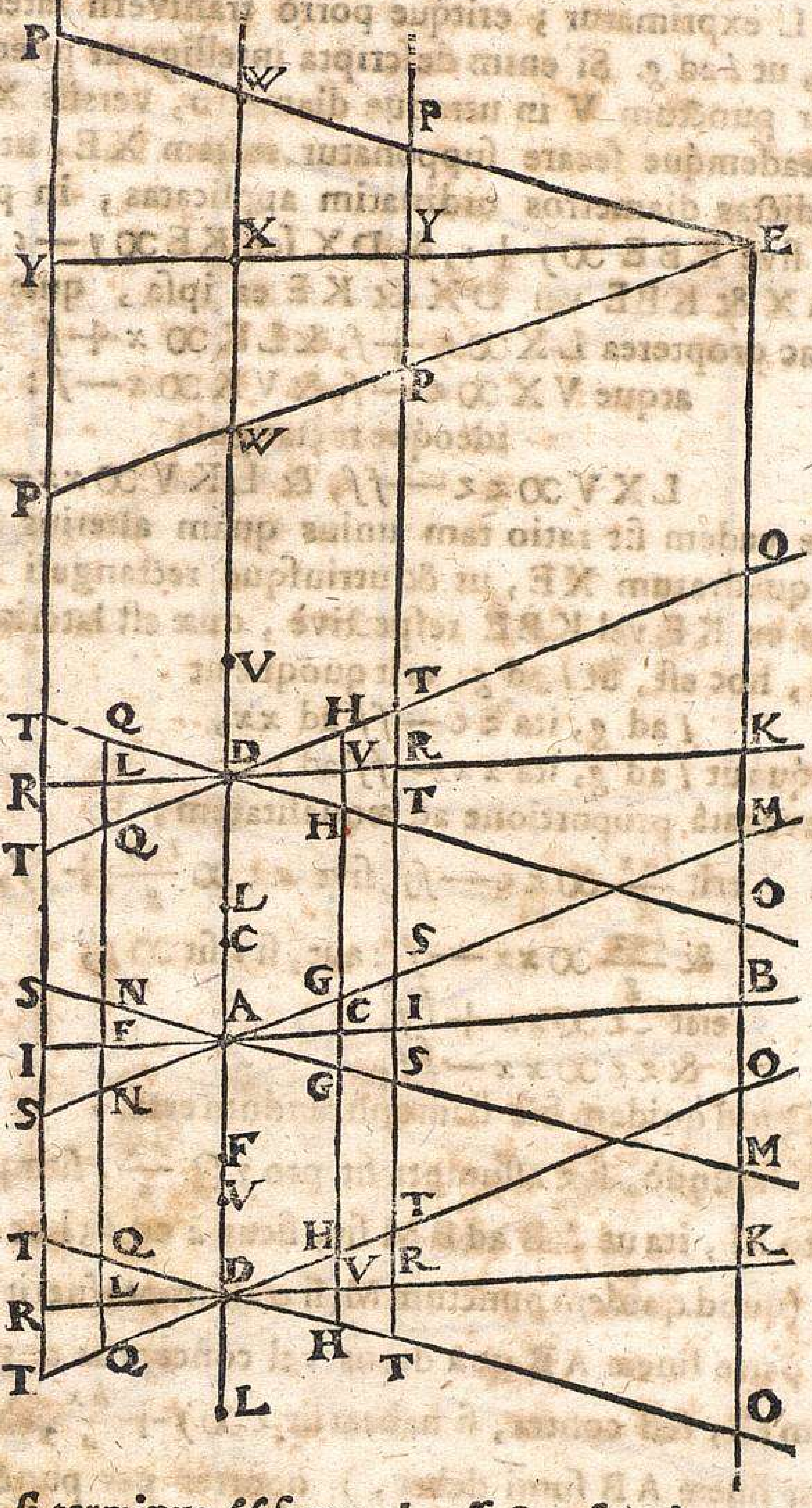
2 per 10 primi hujus.

Casus 2dus, cùm Locus est Hyperbola.

At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio fit $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$ (id est, $zz - ff \infty \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$: aut z assumpta erit pro y 8 c, vel pro y 8 $\frac{bx}{a}$, aut

§.1. pro y 8 $-\frac{bx}{a}$ 8 c. Et quidem primò si z assumpta sit pro y 8 c, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela & ∞c; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE. Sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ AB. Deinde per punctum D ductâ rectâ DK ipsi AB parallelâ, quæ secet rectam BE productam, si opus fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus ff signo $+$ affectus sit, in recta DX. sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ affectus sit, in prædicta recta DK; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE vel DKE sive DXE æquales. Eritque casu utroque D centrum, & semi-latus transversum ∞f, quod in dictis diametris respectivè per lineas DV vel DL exprimatur; eritque porrò transversi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versùs X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam XE, ut & ipsam KE, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit DAX sive KBE $\infty\, y + c$, & DX seu KE $\infty\, y - c$; ideoque eadem DAX & KBE vel DX & KE ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea LX $\infty\, z + f$, & LK $\infty\, x + f$

atque VX $\infty\, z - f$, & VK $\infty\, x - f$:

ideoque rectangula

LXV $\infty\, zz - ff$, & LKV $\infty\, xx - ff$.

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli LXV ad quadratum XE, ut & utriusque rectanguli LKV ad quadratum ex KE vel KBE respectivè, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz - ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad zz:

hoc est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \infty\, zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$,

& $\frac{lzz}{g} \infty\, xx - ff$: aut, si l sit $\infty\, g$,

erit $zz \infty\, xx + ff$,

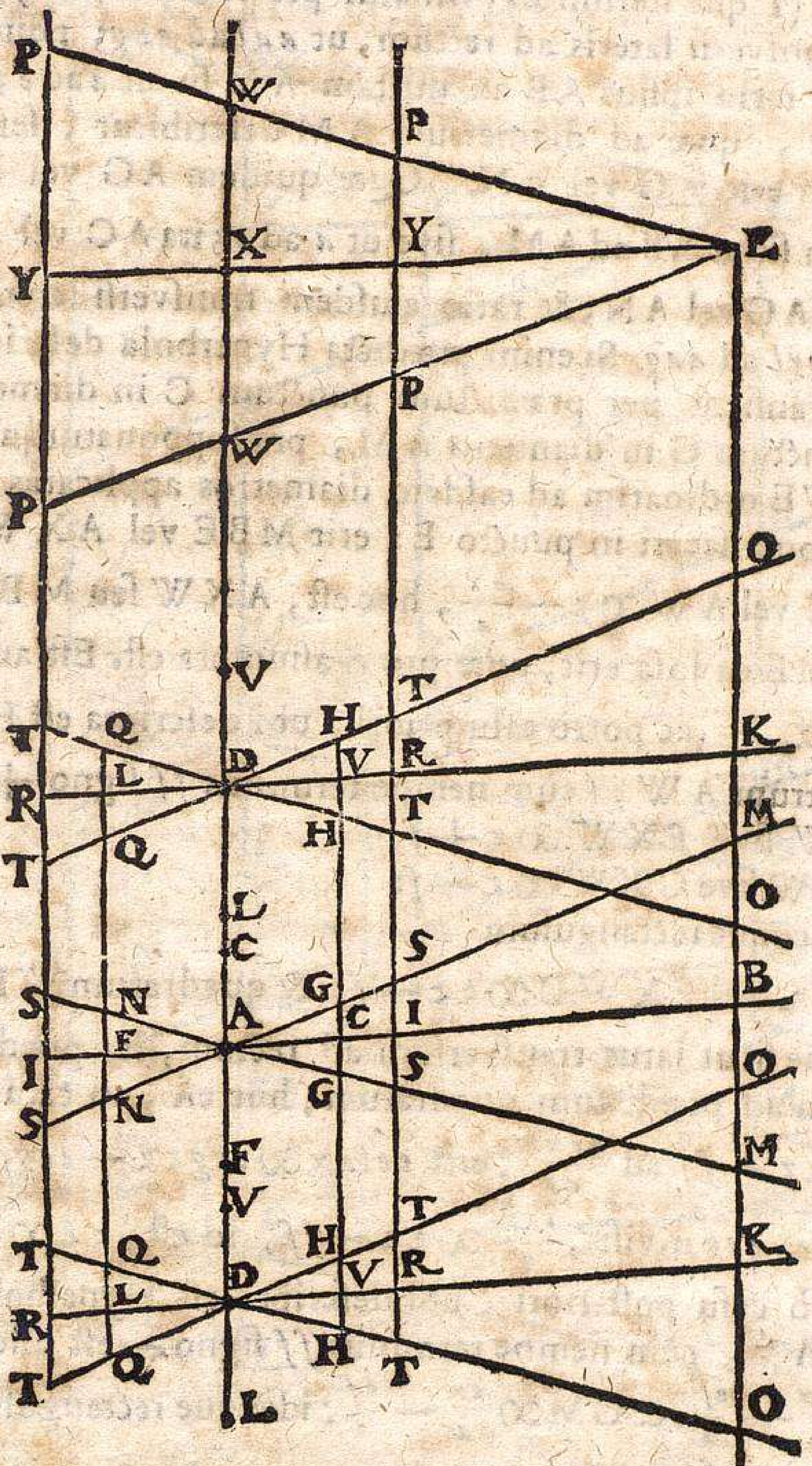
& $zz \infty\, xx - ff$.

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

§. 2. At verò secundò, si z assumpta sit pro $y \pm \frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE puncto M, ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b; hoc est, ut BM sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB quâ datus vel conceptus angulus ABE sumendum est; sed contra, si habeatur $z \infty\, y + \frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ AB sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere AM, secantem HCH & QFQ per prædicta puncta C & F ductas ipsi BE parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, si terminus ff signo $+$ affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta AW ipsi BE parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut EW, sunt ipsi AM æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus ff signo $-$ sit affectus, erit diameter in prædicta recta AM, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa faciant angulos angulo AME vel AMBE æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantum ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW describitur, semi-latus transversum ∞f (idque iterum exprimatur per AC vel AF), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; posito nimirum quòd ratio ipsius AB ad ductam AM sit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM describitur, semi-latus transversum erit AG vel AN. Quæ quidem AG vel AN erit $\infty \frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e; ita AC vel AF, hoc est, f, ad AG vel AN; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM, præsupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit MBE vel AXW $\infty y + \frac{bx}{a}$, & ME vel AW $\infty y - \frac{bx}{a}$, hoc est, AXW seu MBE, uti & AW seu ME ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem AM seu WE $\infty \frac{ex}{a}$, ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AW, (cùm nempe terminus ff signo $+$ est affectus) FW sive FXW $\infty z + f$,

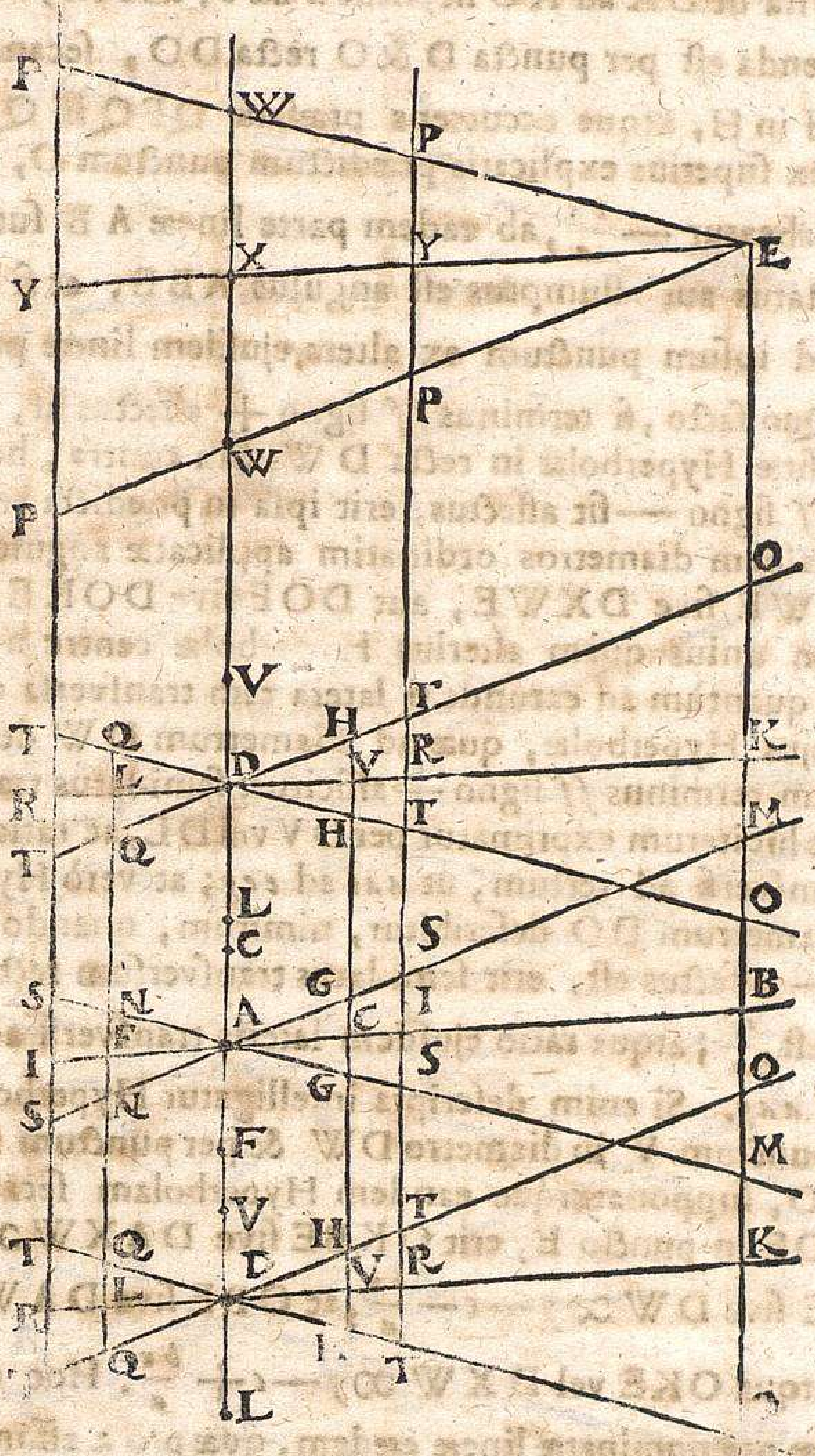
& CW sive CXW $\infty z - f$:

ideoque rectangulum

FWC vel FXWC $\infty zz - ff$, & quadratum WE $\infty \frac{eexx}{aa}$.

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg, ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, id est, $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AM, cùm nempe terminus ff signo $-$ est affectus, erit NM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & GM $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum NMG ad ad ME vel MBE quadratum, hoc est, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$.

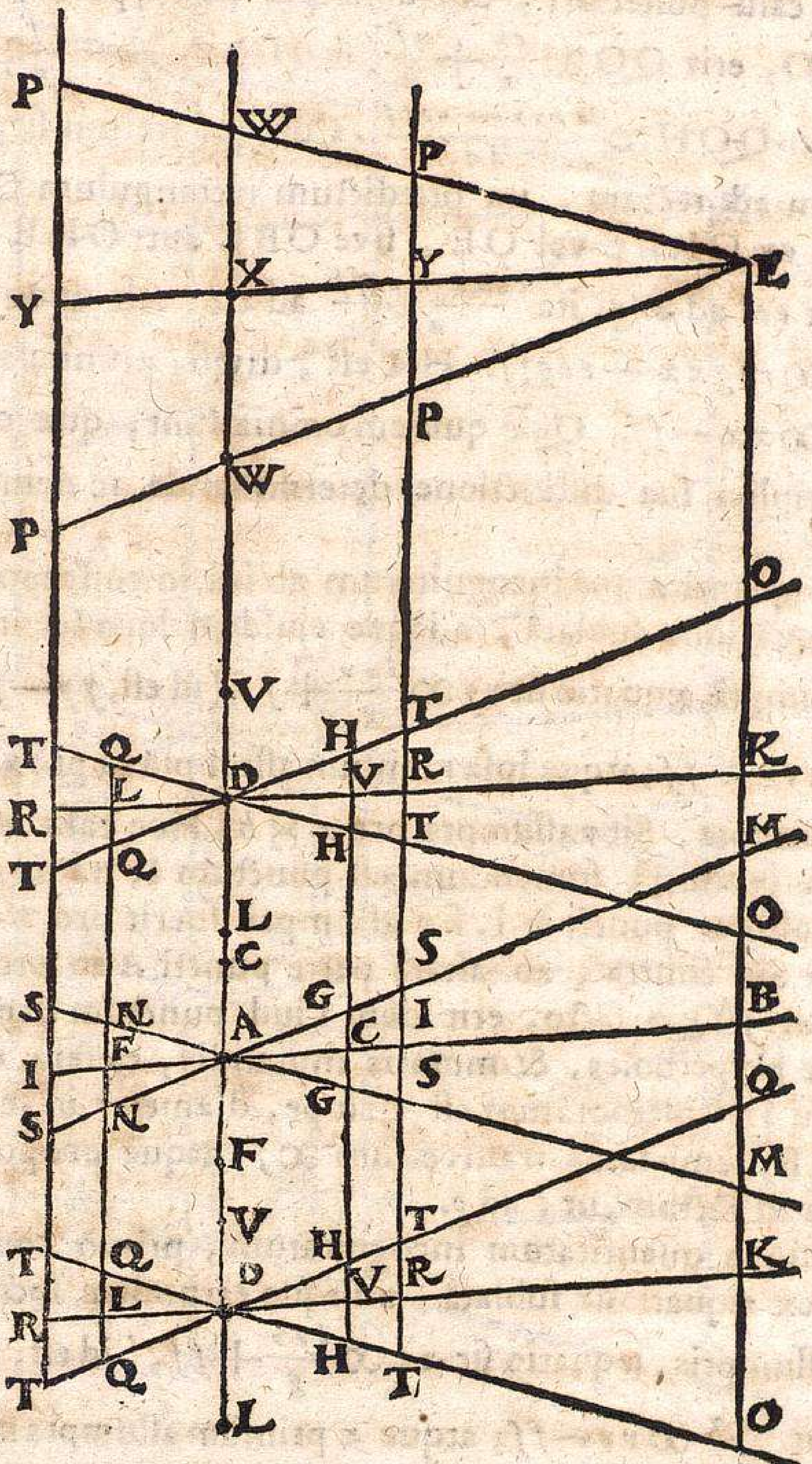


Hoc est, factâ divisione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quod hîc demonstrandum erat.

§. 3. Si denique tertiò z assumpta sit pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, ductâ, ut supra, $AD \propto c$, & DK ipsi AB parallelâ, sumptoque in linea KE puncto O; ita ut DK ad KO sit, sicut a ad b, hoc est, ut KO sit $\propto \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta DO, secans prædictam HCH in H, atque occurrens præfatæ QFQ in Q. (Constat autem ex superiùs explicatis prædictum punctum O, si in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus ABE; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo $+$ affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta DW. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ sit affectus, erit ipsa in prædicta recta DO; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo DWE sive $DXWE$, aut DOE sive $DOKE$ æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum DW describitur, hoc est, cùm terminus ff signo $+$ afficitur, semi-latus transversum $\propto f$ idque hîc iterum exprimatur per DV vel DL, ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum DO describitur, nimirum, quando terminus ff signo $-$ affectus est, erit semi-latus transversum recta DQ vel DH, id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro DW & per punctum H in diametro DO, supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam WE vel OE in puncto E, erit $OKBE$ sive $DAXW \propto y + c + \frac{bx}{a}$, & OE sive $DW \propto y - c - \frac{bx}{a}$, ac OBE sive $DAW \propto y + c - \frac{bx}{a}$, atque OKE vel $DXW \propto y - c + \frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z assumptæ sunt. Est autem DO seu $WE \propto \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum $WE \propto \frac{eexx}{aa}$: ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum

DW,

DW, cùm nempe terminus ff signo $+$ afficitur, LW sive LXW $\infty\ z+f$, & VW sive VXW $\infty\ z-f$: ideoque rectangulum LWV sive LXWV $\infty\ zz-ff$. Cumque sit ut latus



transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad WE quadratum, hoc est, eo casu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

$eexx$

$\frac{eex}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum DO, erit QO $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & HO $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum QOH $\infty \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum QOH ad quadratum ex OKBE vel OE, sive OBE aut OKE: id est, eo casu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

Casus 3tius, cùm Locus est Hyperbola.

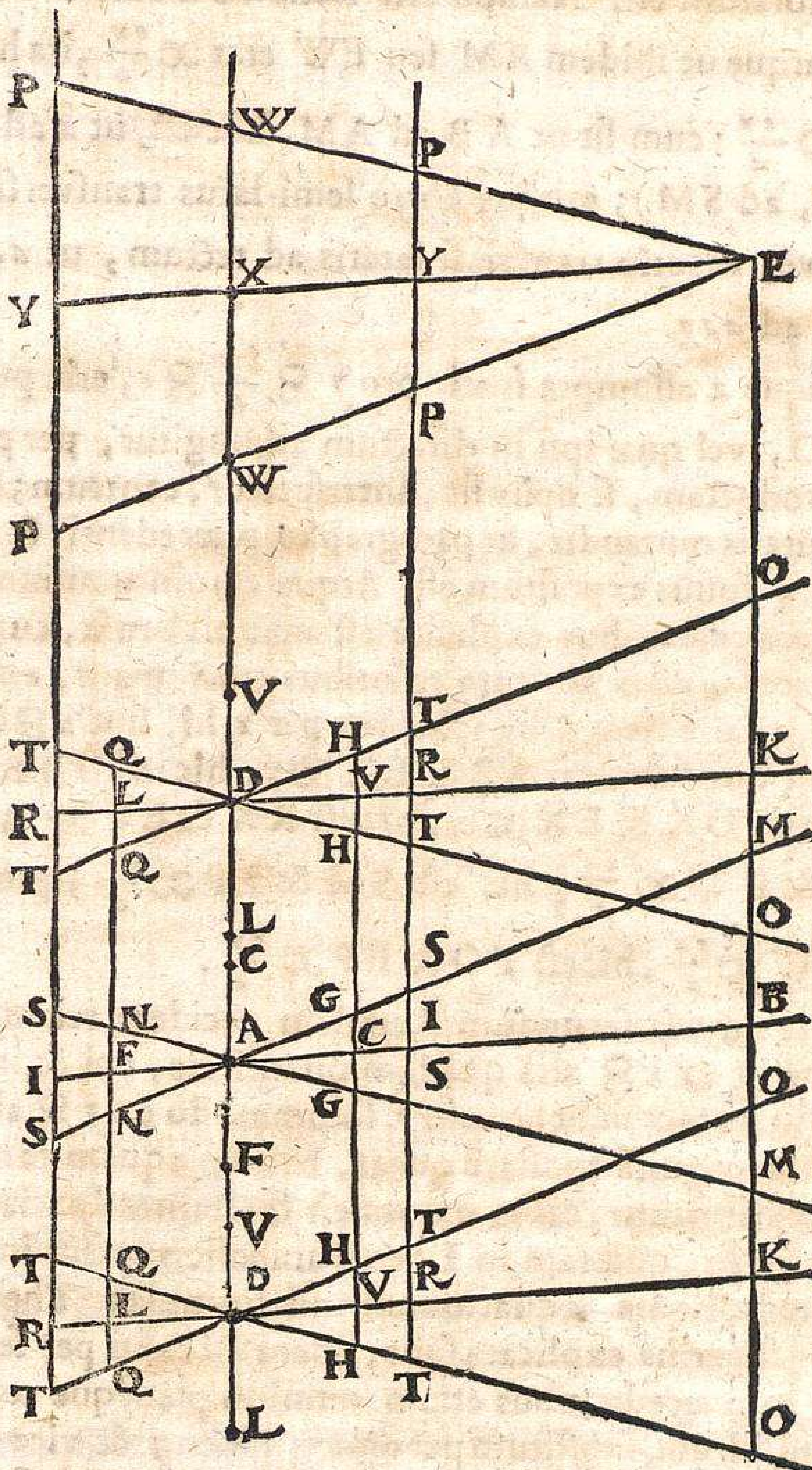
Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x 8 h; Hoc casu in linea AB vel eâdem productâ sumendum est punctum I, ita ut AI sit ∞h (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta BA sumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, & mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1mo memoratum est, nempe, diameter in recta IY vel in recta IB, semi-latus transversum ∞f, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cum Locus est Hyperbola.

Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \infty \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \infty vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque IR parallela BE, & ∞c: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta RY

vel

vel RK, ejusque ſemi-latus tranſverſum ∞ f, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, caſu ſecundo §. 1. fuſiùs explicata ſunt.



§. 2. At ſi z aſſumpta fuerit pro $y \,\infty\, \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in quo M A, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel eandem productam, si opùs sit, intersecatur, centrum sectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SP vel SM (atque ut ibidem AM seu EW erat $\infty \frac{ex}{a}$, ita hic SM seu EP erit $\infty \frac{ev}{a}$: cum sit ut A B ad AM, hoc est, ut a ad e, ita BI, hoc est, v, ad SM); eritque porrò semi-latus transversum ∞f & $\frac{ef}{a}$ respectivè, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg, vel ut eel ad aag.

§. 3. Si denique z assumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, erit punctum T, in quo DO, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel productam, si opùs sit, intersecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & supra casu secundo §. 3. fusiùs expositum est. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem designabantur per x, hîc sint $x \pm b$, hoc est, v. Ita enim quod ibi erat AB & EX ∞x, hîc est IB & EY ∞v; quod ibi erat DK & EX ∞x, hîc est RK & EY ∞v; quod ibi erat AM & EW $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est SM & EP $\infty \frac{ev}{a}$; quod ibi erat DO & EW $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est TO & EP $\infty \frac{ev}{a}$.

Quamvis autem secundùm Regulam accidere etiam possit, ut v composita sit ex $x \pm$ aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta sit; ita tamen, ut eo casu z solummodò ex $y \pm$ aliâ quantitate in totum cognitâ constare queat, haudquaquam tamen operæ pretium existimamus, casus omnes eò spectantes speciatim persequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in posteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12mi & 13tii superiùs explicata sunt, iidem illi casus per se manifesti sint atque in præcedentibus etiam omnino plenéque comprehendantur; si nimirum, substituto per omnia x loco y & vice versâ, eadem x non per rectam AB sed per eam, quæ ex A ipsi BE parallela ducta sit, atque y non per BE sed per rectam ipsi AB æquidistantem, designetur. Quòd hîc generaliter monuisse suffecerit.

Alii

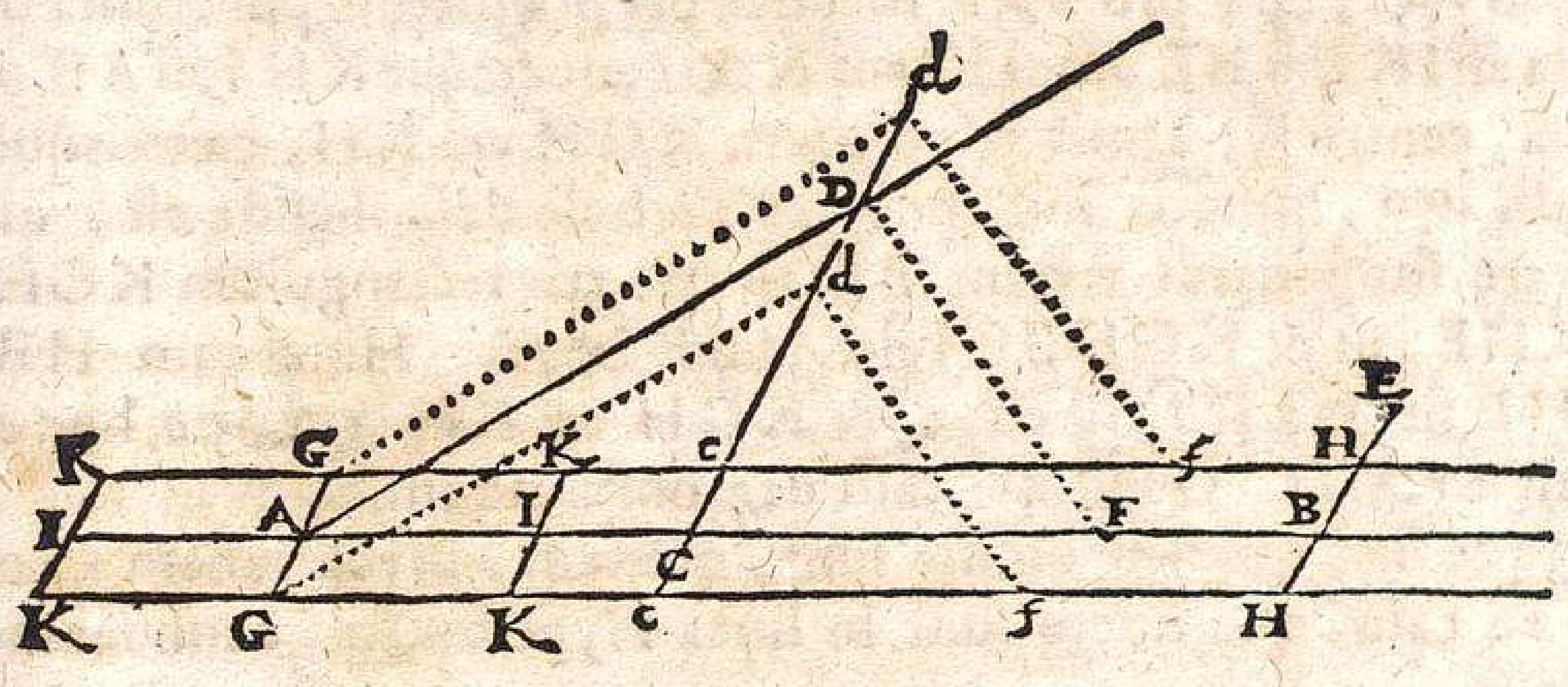
Alii quatuor casus, cùm Locus est Hyperbola.

Jam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

$$1.\ yx \infty ff,$$
$$2.\ zx \infty ff,$$
$$3.\ yv \infty ff,$$
$$4.\ zv \infty ff;$$

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta A B sumatur A C ∞f, atque ex puncto C eductâ rectâ C D, quæ ipsi B E sit æquidistans & æqualis priori A C, hoc est ∞f, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta A D, & punctum D vertex, atque A B asymptotos. sive (ductâ rectâ D F ad A D perpendiculari ac in A B terminata) erit A D semi-latus transversum, & ratio transversi ad rectum, ut A D quadratum ad D F



quadratum. Si namquè prædicta Hyperbole secare supponatur rectam B E in puncto E, erit [1] rectangulum A B E ∞ quadrato ex A C vel C D. Quare cum A B sit ∞x, B E ∞y, & A C ∞f: erit $xy \infty ff$. Quod primo casu erat demonstrandum. [1] *per 3 primi hujus.*

Secundo casu, cùm nempe æquatio est $zx \infty ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumpta pro y 8 notâ quâdam quantitate. Esto

 itaque

itaque assumpta pro $y \, 8 \, c$, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta AG ipsi BE parallela, ac $\infty \, c$: sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ AB, prout c quantitas signo $+$ vel $-$ fuerit affecta; ductâque porrò GH ipsi AB parallelâ, centro G, Asymptoto GH, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbola describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam BE in puncto E, erit rectangulum GcCd, vel GcDd $\infty \, ff$. Unde cum sit GH $\infty \, x$, & HE vel HBE $\infty \, y \, 8 \, c$, id est, z: erit GHE vel GHBE rectangulum $\infty \, zx$, ac propterea $zx \infty ff$. Quod 2do casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit $yv \infty ff$: v quoque tantùm pro $x \, 8$ notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro $x \, 8 \, b$. Ideoque ad inventionem Loci quæsiti, in recta AB vel in ipsâ productâ sumenda est AI $\infty \, b$, ac porrò centro I, atque Asymptoto IAB vel IB, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam BE secare supponatur in E: erit rectangulum IABE vel IBE $\infty \, ff$. Quare cum IAB vel IB sit $\infty \, x \, 8 \, b$, hoc est, v, & BE $\infty \, y$: erit $yv \infty ff$. Quod 3tio casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit $zv \infty ff$: erit z assumpta pro $y \, 8 \, c$, & v pro $x \, 8 \, b$. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est IK ipsi BE æquidistans & $\infty \, c$; ductâque KH ipsi AB parellelâ, centro K, atque Asymptoto KGH vel KH, cæterisque, ut casu 1mo, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam BE in E: erit rectangulum KGHE vel KHE, ut & KGHBE vel KHBE $\infty \, ff$. Hinc cum HBE vel HE sit $\infty \, y \, 8 \, c$, id est, z, & KGH vel KH $\infty \, x \, 8 \, b$, hoc est, v: erit $zv \infty ff$. Quod 4to casu demonstrandum erat.

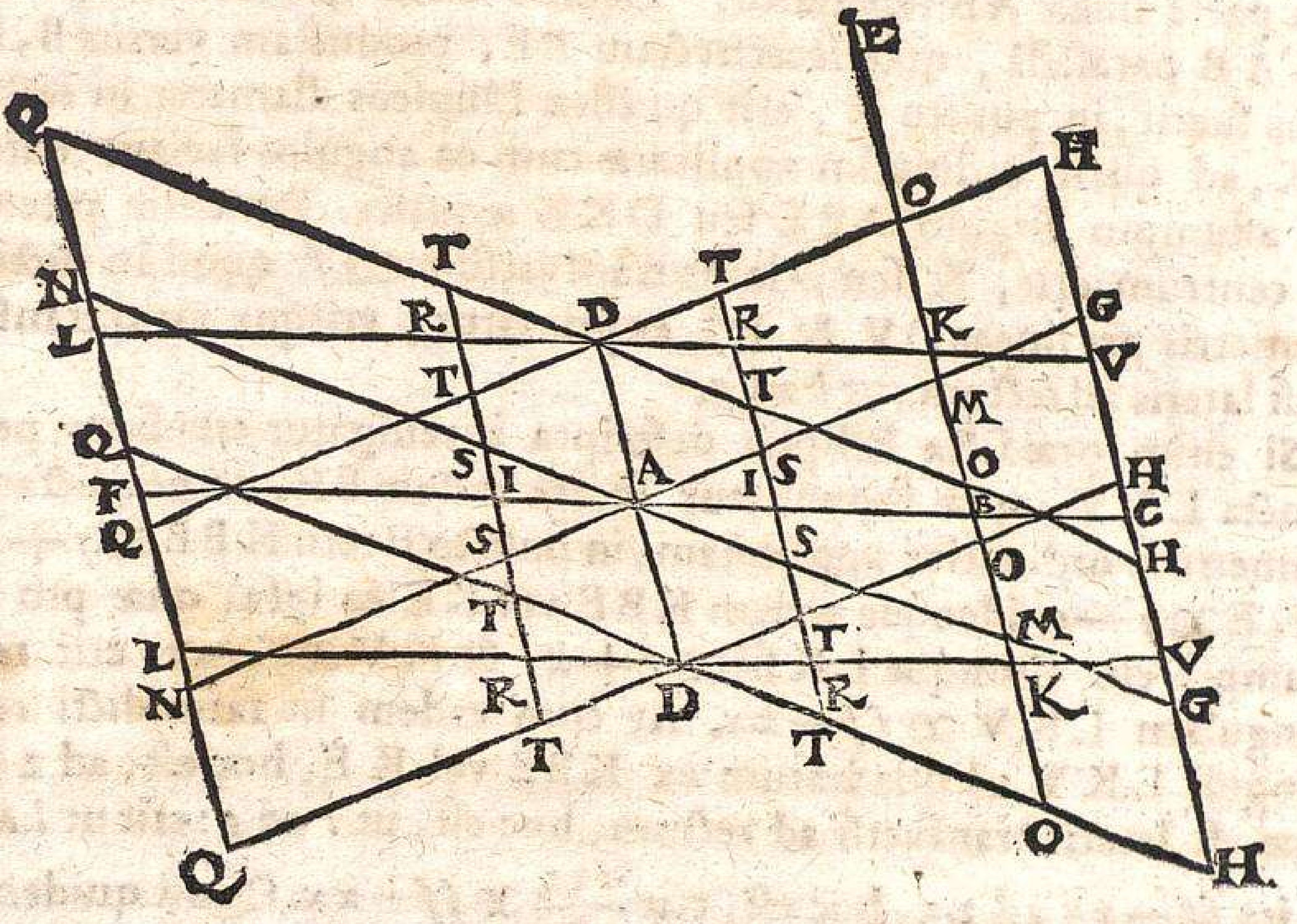
Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub Nro 3. comprehensarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur xx vel vv signo $-$ sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate incognitâ ab initio conceptâ, ſequenti formulâ ſe exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$: eritque, ut in ſequenti figura, deſcribendæ Ellipſeos diameter in recta A B, quæ pro x indeterminatè eſt concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales; ac centrum in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum ∞f. id quod in dicta diametro per lineam A C vel A F exprimatur, eritque ratio ejuſdem tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g.

Caſus 1mus, cùm Locus vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit.

Si enim deſcripta intelligatur prædicta Ellipſis, tranſiens per puncta C & F, ſecansque applicatam B E in puncto E: erit F B $\infty f + x$, & B C $\infty f - x$: ideoque rectangulum F B C $\infty ff - xx$. At cum ex natura Ellipſeos, lateribus recto tranſverſoque æqualibus, prædictum rectangulum F B C [1] ſit ∞ quadrato ex B E, hoc eſt, yy; erit quoque proinde eo caſu $yy \infty ff - xx$. Et facilè

[1] *per 13 primi hujus.*



apparet, ſi, iiſdem poſitis, B E ſuper rectam F C foret quoque perpendicularis, hoc eſt, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum ſit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus tranſverſo rectoque inæqualibus

[1] per 13 primi hujus.

atque in ratione ut l ad g, eadem sit ratio [1] rectanguli FBC ad BE quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: ex prædictis palàm est fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

Casus 2dus, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia.

At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z assumpta erit pro $y \mathbin{8} c$, aut pro $y \mathbin{8} \frac{bx}{a}$, aut pro $y \mathbin{8} c \mathbin{8} \frac{bx}{a}$.

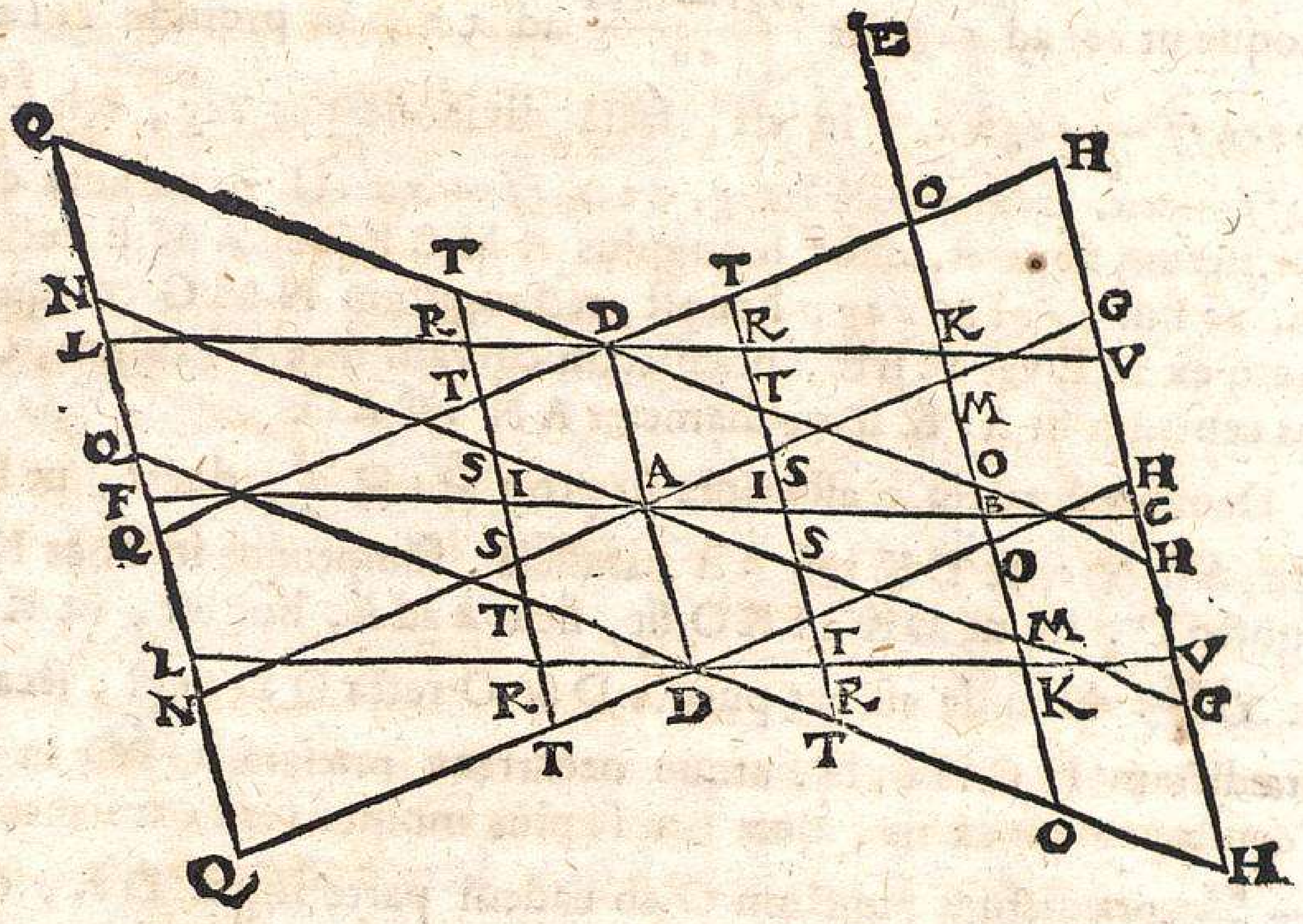
§. 1. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro $y \mathbin{8} c$, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela ac ∞c, ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE; sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ AB reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ DK ipsi AB parallelâ, quæ secet rectam BE, productam versùs B, si opùs fuerit, in puncto K, erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta DK, ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE seu DKE æquales. Punctum autem D centrum erit, & semi-latus transversum ∞f. quod in dictis diametris per lineas DV & DL exprimatur, eritque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per puncta L & V, quæ supponatur secare rectam BE, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit KBE $\infty y + c$, & KE $\infty y - c$, ideoque eadem KBE vel KE ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque LK sit $\infty f + x$, & KV $\infty f - x$: erit rectangulum LKV $\infty ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli LKV ad quadratum ex KBE vel KE, hoc est, ad zz, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc est, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, si l sit ∞g, idem est ac $zz \infty ff - xx$. Atque hìc iterum facilè apparet, quòd, existente angulo DKBE vel DKE recto, & $l \infty g$, hoc est, rectangulo LKV ∞ KE quadrato, prædicta curva Circulus sit futura.

§. 2. At verò, si z assumpta fuerit pro $y \mathbin{8} \frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE,

pro-

productâ versùs B, si opùs fuerit, puncto M; ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b, hoc est, ut BM sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE, sumi debet; sin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ assumpta fuerit, ab altera ejusdem lineæ AB parte sumendum est) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere NAMG, secantem rectam HCH, atque occurrentem ipsi QFQ, quæ per prædicta puncta C & F ipsi BE ductæ sunt æquidistantes, in G & N. Quo facto, erit quæsitæ Ellipseos diameter



in recta NG, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo AME vel AMBE æquales. Porrò centrum ejusdem erit in puncto A, & semi-latus transversum erit recta AN vel AG. (quæ quidem AN vel AG, si ratio AB ad AM supponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e, ita AC, hoc est, f, ad AG.) Denique ratio transversi lateris ad rectum erit ut eel ad aag, id est, si l sit

∞g,

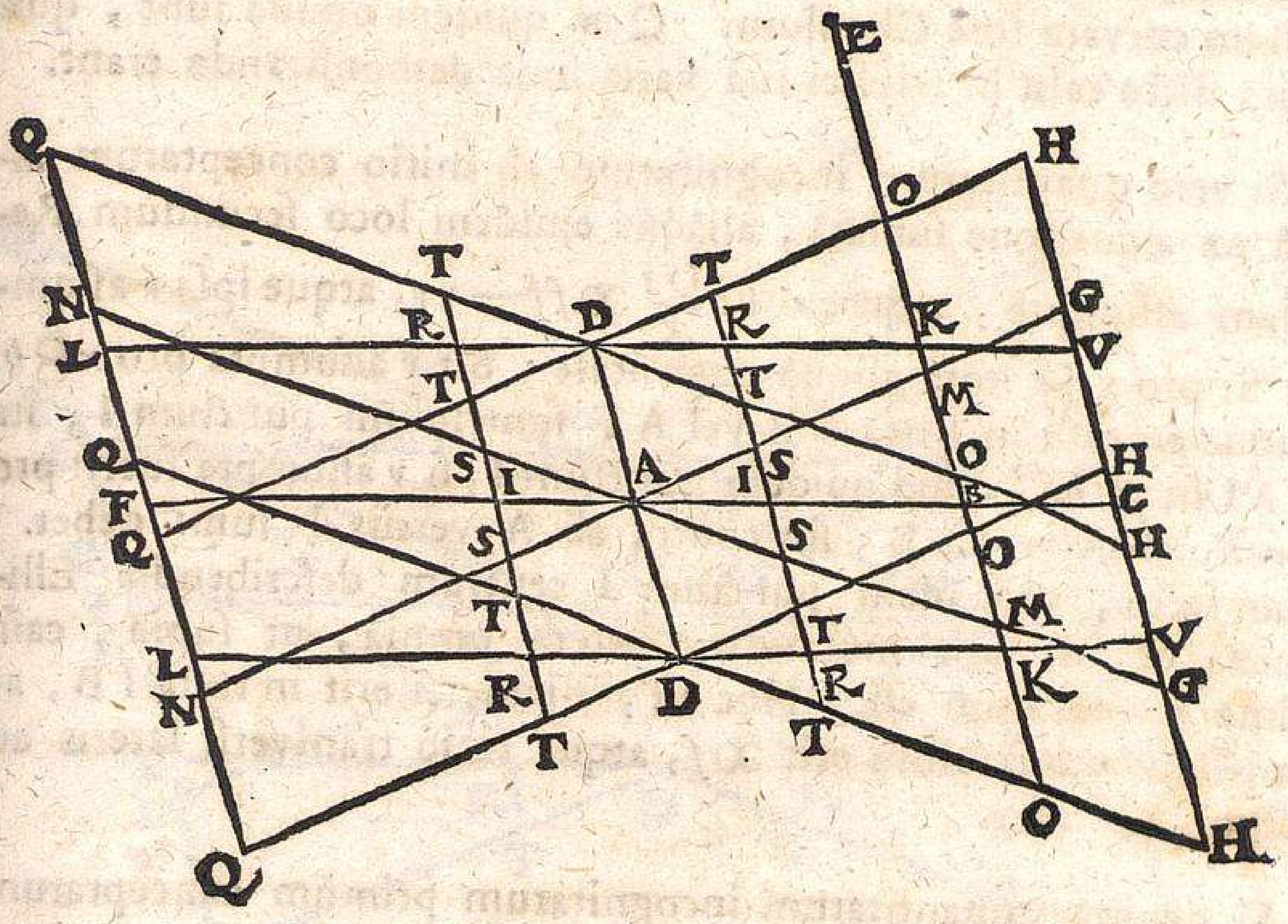
∞g, five, quod idem eſt, ſi termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc eſt, ut A M quadratum ad quadratum AB.

Etenim ſi prædicta Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per N & G, ſupponaturque eandem ſecare rectam M E vel M B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem M E $\infty y - \frac{bx}{a}$, & MBE $\infty y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipſa, quæ pro z aſſumpta eſt. Cumque A M ſit $\infty \frac{ex}{a}$, erit NM $\infty \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & M G $\infty \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli NMG ad quadratum ex M B E vel M E, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, eadem quæ eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz \infty eegff - eegxx$. id eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. ſive, poſitâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Unde ex ante dictis iterum apparet, quòd ſi angulus A M B E vel A M E rectus ſit, ac ſimul $eel \infty aag$, hoc eſt, rectangulum N M G ∞ quadrato ex M E vel M B E, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum ſit A, & ſemi-diameter A N vel A G.

§. 3. Denique ſi tertiò z aſſumpta ſit pro $y \pm e \pm \frac{bx}{a}$, ductâ, ut ſupra, AD ∞c, & DK ipſi AB parallelâ, ſumptoque in linea KE puncto O, ita ut DK ad KO ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut KO ſit $\infty \frac{bx}{a}$: ducenda eſt per puncta D & O recta QDOH, ſecans prædictam HCH in H, atque occurrens præfatæ QFQ in Q. (conſtat autem ex iis, quæ jam ſæpiùs monita ſunt, ſi habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ DK, quâ datus vel aſſumptus eſt angulus DKE, ſumendum eſſe; at ſi habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipſum ab altera ejuſdem lineæ parte ſumi debere.) Quo facto, erit deſcribendæ Ellipſeos diameter in prædicta recta QDH, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ cum ea anguloſ faciant, angulo DOKE vel DOE æquales. Porrò centrum erit in D, & ſemi-latus tranſverſum DQ vel DH ∞ AN ſeu $\frac{ef}{a}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

Si enim quæſita Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per puncta Q & H, eademque ſecare ſupponatur rectam OE vel OKE in puncto E: erit OKBE $\infty\; y + c + \frac{bx}{a}$, OE ∞



$y - c - \frac{bx}{a}$, OBE $\infty\; y + c - \frac{bx}{a}$, & OKE $\infty\; y - c + \frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro z. aſſumptæ ſunt. Cumque porrò ſit DO ſeu AM $\infty\; \frac{ex}{a}$, ideoque QO $\infty\; \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & OH $\infty\; \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: erit rectangulum QOH $\infty\; \frac{eeff - eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli QOH ad quadratum ex OKBE vel OE, aut ad quadratum ex OBE vel OKE, quæ est transversi lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \infty eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$, id est, si l sit ∞g, erit $zz \infty ff - xx$.

Atque hîc iterum facilè apparet, si angulus DOKBE, DOE, DOBE, vel DOKE rectus foret, & simul $eel \infty aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

Casus 3tius, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum altera ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x 8 h, eritque eo casu in linea AB vel AF sumendum punctum I; ita ut AI sit ∞h. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta IB, ac semi-latus transversum erit ∞f, atque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

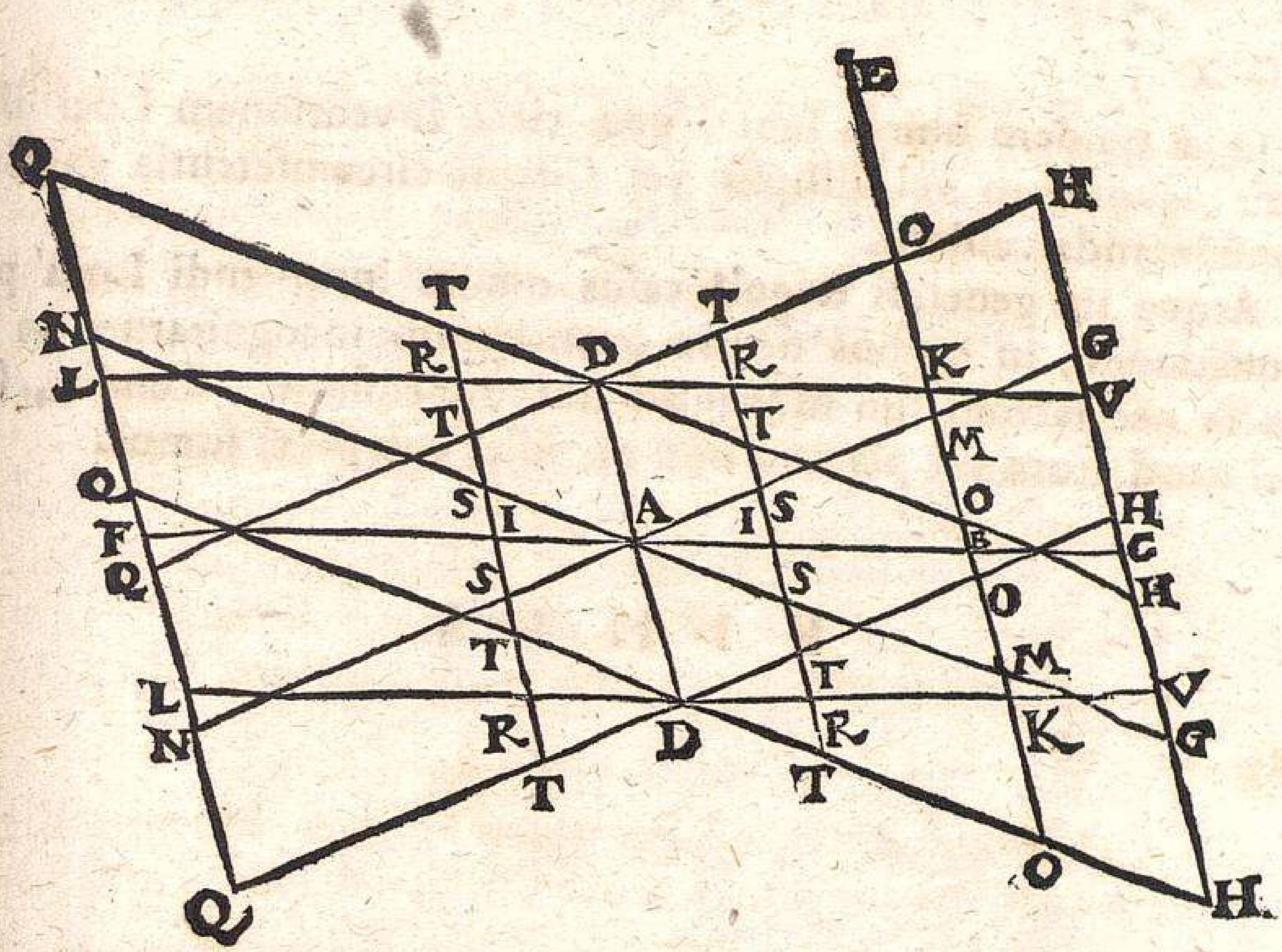
Casus 4tus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.

Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utraque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque IR, parallela ipsi

§. 1. BE, ac ∞c. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos, & diameter ejus in recta RK vel RL, eritque ejus semilatus transversum ∞f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. Quemadmodum ea omnia Casu 2do §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi MA, vel,

vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2 memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat $AM \infty \frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum ſit ut BA ad AM, hoc eſt, ut a ad e, ita BI, id eſt, v, ad SM:) eritque porrò ſemi-latus tranſ-



verſum $\infty \frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel, ad aag.

§. 3. Denique ſi z aſſumpta fuerit pro $y \; 8 \; c \; 8 \; \frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac ſupra caſu ſecundo §. 3 fuſiùs

fusiùs explicatum est. Nempe erit diameter in recta TO, & semi-latus transversum $\infty \frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem designabantur per x, hîc designentur per $x \otimes h$, hoc est, v. Ita enim quòd ibi erat AB $\infty\ x$, hîc est IB $\infty\ v$; quod ibi erat DK $\infty\ x$, hîc est RK $\infty\ v$; quod ibi erat AM $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est SM $\infty \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat DO $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est TO $\infty \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, consideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitatum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

F I N I S.