OPUSCULUM PRIMUM.

SOLUTIO
PROBLEMATIS
PROPOSITI ANNO MDCCXCVII.

IN LUCEM EDITA

A SUBSCRIPTORUM SOCIETATE LITERARIA.

Verùm hujusmodi appropinquationes, et si in Geometria practica utiles, nihil tamen exhibent, quod menti veritatis avidae satis faciat. WALLISIUS, ...

MATRITI
Ex Typographia Regii Arbitrii Beneficentiae.
1805.

EXCELLENTISSIMO VIRO

PETRO CEVALLOS,

PRIMO REGIS CATHOLICI Á SECRETIS MINISTRO.

Beneficia, vir Excellentissime, quae et Regis Catholici, et potentissimi Principis Pacis et tua extant erga nos hujusque Opusculi auctorem, ea sunt, ut, ni in apertum proferimus, ingratissimi *omnium esse videamur. Satis vero nobis nunc sit profiteri, vestris sub auspiciis hoc opus incoeptum, Regiaque verè munificentia ad finem esse perductum. Quapropter infrascripti Subscriptores nomine auctoris, et quotquot ad calcem insequentis Notitiae Historicae apponuntur, enixè à te petimus, ut haec nostri grati animi memoria ad Regis, Pacisque Principis aures perveniat, eamque typis excudere, atque hujus operis fronte praefigere concedas; eo consilio ut vestrum patrocinium erga hoc facinus literarium omnibus sit cognitum, penitusque perspectum.*

Ludovicus Vera. Raymundus Lopez. Franciscus Xaverius Jáureguí.

NOTITIA HISTORICA

DE PROBLEMATE PROPOSITO ANNO 1797 Á SUBSCRIPTORUM LITERARIA SOCIETATE PERVULGATA.

Cum nonnulli nostrum, ut rem ex alto repetamus, necessitudine cum Problematis auctore conjuncti, sermones ac coetus habere coepimus, nequi ejus in Mathematicis disciplinis magni momenti progressus perpetua oblivione obruerentur; primum nostrum consilium hoc fuit, aliquot viros scientiarum amantiores ad nos allicere, eorumque quandam stabilire societatem, qui quidem huic nostro negotio nobilique facinori auctoritatem, necessariaque praestarent auxilia. At quam magna nos cepit voluptas, cum brevissimo temporis spatio quotquot subscriptores ad calcem hujus notitiae apponuntur, nostris, ut erat in votis, faverunt studiis! Hac constituta societate Augustinum Pedrayes, id nomen auctoris est, quoddam Problema sua methodo solvendum in publicum proferre peropportunum duximus, ut, si id nemo solveret, uti revera accidit, hanc novam fore methodum, pro comperto haberemus.

Cognita vero Auctoris indole, qui mirum in modum atque vehementi quadam propensione toto pectore in Mathematicas incumbit scientias, plurimumque exudat ad ea studia penetranda; minimè autem ad de his scribendum atque agendum, ut famam magnumque nomen sibi anquirat ac paret:

animo nostro prospeximus, quantum ipse his nostris connatis esset obstiturus; itaque susceptum nostrum consilium eum celavimus, donèc, occasione data, huic obsistere jam non posset facilemque se necessario nostris optatis praeberet.

His difficultatibus superatis, alia major ad nostra connata perficienda nobis erat difficultas, mala scilicet auctoris valetudo. Electus enim á Carolo Tertio Rege equitibus suis asseclis (vulgo Caballeros Pages del Rey) in Mathematicis disciplinis erudiendis, assiduo hujus muneris labore defessus, per longum septemdecim annorum spatium producto, atque in Regium Nobilium Seminarium tempore utriusque domus consociationis eodem munère translatus, novisque molestiis aliorum quinque circiter annorum curriculo defatigatus, tanto succubuit oneri, viribusque fractus in Patriam, annuente Rege emeritisque suis cum omnibus stipendiis, secessit, ibique permansit; donec tandem quiete à labore atque aegritudine recreatus quinque aliorum annorum intervallo, vires refecit suas pristinamque valetudinem aliquanto recuperavit.

Tunc igitur auctoris in Matritum reditu, Regisque praesidio muniti; suas ad Mathematicas scientias progressiones in vulgus indicare, decrevimus; ipseque auctor, et si invitus, et sua modestia quasi coactus, calculatorum tamen auxilio, eorumque sumptibus ex arca atque subscriptionis fundo depromptis, opus tandem suis facultatibus, non suis optatis impar, aggredi in se suscepit; sub ea tantum conditione, se partem mere geometricam, seu pure analyticam suscepturum, pro suaque virili absolutam daturum; caetera vero quae ad hoc negotium conficiendum spectarent, Subscriptorum societatem fore expleturam.

His positis ad potentissimi Principis Pacis patrocinium confugimus, qui ea tempestate secundus à Rege erat, primumque regni gerebat Ministerium: isque consilium nostrum adeo benignè excepit, ut ex eo die hoc negotium Regis sub auspiciis positum auctoritateque sua revera perductum fuisse existimetur. Summa igitur animi gratitudine ob tanti beneficii magnitudinem affecti, id uno ore profitemur, plenioreque evulgamus; est enim testimoniis monumentisque inconcussis fultum, deinde secundo consilii exitu, atque prospero ejus eventu roboratum.

Programmate Matriti anno 1796 typis excusso complura ejus exemplaria hic, Berolini Lutetiaeque Parisiorum distributa sunt; typis vero iterum in hac postrema urbe id excudere necesse fuit; centum enim exemplaria antea ad eam missa cum aliis amplius quadringentis hujus postremae editionis brevi tempore insumpta fuere. Tria praemia quinque millium argenti nummorum in singula Regis Catholici nomine sunt etiam constituta, unumquodque obtinendum ei, qui primum tempore unius anni praefinito post ejus promulgationem Problema Galliae, Germaniae Hispaniaeque solverit atque discusserit; Institutum vero Nationale in se ultro suscepit, scripta, seu Memorias, quae ad se mitterentur perpendere, eorumque judicium adhibere.

Praefinitum tempus, quoad Galliam spectat, calendis sextilibus anni 1797 volvi coepit, eodemque die insequentis anni 1798 expletum est, uti extat in Monitore num.° 345, quo in opere inter alia haec sunt verba: "Rex Catholicus ad incitan-
„dos sapientum animos, qui in hujus Problematis
„solutionem inveniendam incumbere gratum acce-
„ptumque habeant, Marchioni del Campo suo ad
„Parisios Legato quinquaginta nummos aureos, quos
„Gallice luises vocant, in praemium constituere
„atque evulgare injunxit, concedendum ei qui pri-
„mus judicio atque sententia Nationis Gallicae In-
„stituti praedicti Problematis solutionem praesti-
„terit."

Regia Berolinensis Academia eandem promulgationem, idem praemium quinquaginta auri nummorum, quos vocant federicos, iisdem verbis, sub eisdemque ac in Gallia conditionibus proposuit die primo Novembris anni 1797, quo ex die praefinitum tempus volvi incoepit, usque ad calendas Novembris anni insequentis 1798. Meriam, ejusdem Academiae perpetuus à Secretis vir, unicam tantum Memoriam ad se missam accepit, in cujus secundo tegmine haec erat Gallico sermone inscriptio: *Ad Augustinum Pedrayes*, *Matheseos Matriti Professorem*: eamque Marchioni de Muzquiz, Regis Catholici Berolini Legato tradidit.

In supplemento Matriti novitatum historico (vulgo la Gazeta de Madrid) Martis die, Maii vero decimoquinto ante calendas, Problema ad Hispaniae Matheseos professores indictum evulgatumque est; tempus igitur praefinitum ad in ea solutionem inveniendum evolvi coepit à calendis Maii 1798 usque ad calendas ejusdem mensis 1799, eodem praemio sub iisdemque conditionibus ac Parisiis Berolinique fuerat propositum. Unus ex Subscriptoribus nomine omnium in se suscepit Programmatis exemplaria, quae ex Provinciis peterentur, mittendum, uti id munus explevit magnum erga ea expetentium numerum, ut ejus solutionis inventioni operam darent: curam item in se assumpsit scriptis, seu Memoriis ad se missis, diem suae acceptionis consignandi. Matriti apud Antonium de Baylo quotquot Problematis exemplaria sunt expetita, tot gratis data interque viros literatos distributa. In ipso historico novitatum supplemento enuntiatum est, Memorias in Hispania seu per hujus gentis Matheseos professores, sive per aliquod harum scientiarum corpus atque collegium, aut per exterorum Academias perpendendas atque aestimandas, eorumque judicio atque sententiae standum fore. Denique anno 1798 Programma iterum prelo commissum fuit; nè consumpta prima ejus editione, exemplaria expetentibus deesent.

Attento igitur Regio erga hoc negotium praesidio precibusque eorum, qui id munus in se susceperant, Rex Catholicus Augustinum Pedrayes, ut in Parisios pro primo regni Ministerio proficisceretur, designavit, uti à rei Nauticae Ministro electus fuerat Gabriel Ciscar, navis Praefectus, et cum eo adesset conventibus ea in urbe habendis inter membra ab Instituto Gallicae Nationis electa, aliosque exterarum gentium sapientes viros, consilio unitatis fundamenta in ponderibus et mensuris defigendi; quibus omnibus literariis adfuit comitiis, ibique tanto affectus honore biennio permansit.

Datum praeterea fuerat negotium laudato Augustino Pedrayes à primo regni Ministro, ante oculos Instituti Gallici hominum obversandi omnia scripta, seu Memorias praemium appetentes, et ad se vel ex Berolino vel ex Matrito missas; itemque suam ipsius Problematis datam solutionem, ut comparatione inter eas facta, judicium ferri posset, utra earum rem expediret, Programmatis conditiones expleret, propositumque promereretur praemium.

Praefinito tempore Hispaniae ante jam confecto, cum nemo ad id praemium concursum fecisset, excepto Memoriae illius auctore qui eam Berolinum miserat, supradictus Pedrayes suam, simul cum hac à Legato nostro Berolinensi missa, complicata obsinataque, Instituto Nationali tradidit solutionem, idque quinque elegit viros delegatos, ad hoc negotium perpendendum atque conficiendum.

Augustinus Pedrayes usque ad calendas Octobris Parisiis perstitit, quo in tempore magno in honore habuit quod nemo ex illius Instituti membris, ad in trutinam suam solutionem revocandum designatis, animadversionem aut difficultatem aliquam sibi afferret.

Hoc vere dictum comprobat atque testatur officium nostro Parisiis Legato traditum à Delambre, uno ex classe scientiarum Phisices ac Mathematices à Secretis perpetuo, qui inter alia: "Memoria, in- „quit, num.° 1. notata ex Berolino missa, diligen- „ter existimata ponderataque est; cunctique ad id „delegati uno omnium consensu pronuntiarunt, eam „satis nullo modo facere problemati, seu proposi- „tae quaestioni: qua de causa delegatio neque „Instituto sententiam suam de eo dare, neque prae- „mium propositum suo auctori addicere potuit. „Quod enim attinet ad duo scripta à Pedrayes tra- „dita, eo praemium non appetente, uti id ipse „professus fuerat Delegati suum judicium publicum „facere non debuerunt:::" officium igitur Delambre explicit, apertum faciens quantum voluptatis Instituto ex hac quaestionis decissione, à Rege Catholico suae sententiae atque judicio commendata, accesserat.

Hoc tandem negotium literarium novae discussioni Matriti objicere placuit; itaque viro Excellentissimo Petro Cevallos preces adhibuimus, ut gratum acceptumque haberet id Regio Cosmographorum corpori commendare: morem nostris precibus hic primus Minister gessit; septimoque calendas sextiles anni 1803 id munus Salvatori Ximenio, hujus corporis moderatori, ut id exequeretur detulit; isque quinto calendas sextiles anni 1804 Pedrayes solutionem cum sententia atque illorum judicio remissit. Ad ma-

jorem publici satisfactionem haec tantum quae sequuntur ad verbum excribemus: "Infrascripti (hi
»sunt quatuor sapientes Corporis Professores) vi com-
»misionis ac de mandato Salvatoris Ximenii Coro-
»nado Regii Observatorii Astronomici Matritensis
»Praefecti, Memoriam ab Augustino Pedrayes exhi-
»bitam circa solutionem Problematis, à se superiori-
»bus annis ad Europae Mathematicos propositi, at-
»tentè legimus, eaque sedulo examine perpensa, con
»cors omnium nostrum sententia est, Problematis so-
»lutionem ex methodis hactenus notis deduci non
»posse, et ab auctore propositam esse exactam ri-
»gidamque attestamur, quod nihil arbitrarii in suppo-
»sitis, nihil inexâcti in calculis, nihil illegitimi in
»consequentiis in ea invenitur; immo ad solutionem
»quaerendam perducet; sed cum haec methodus cu-
»jusdam speculationis, seu theoriae pars sit, cui au-
»ctor eam applicare sibi pollicetur, ut in publicum
»proferat, erit optandum."

Vi hujus sententiae atque judicii Rex Catholicus licentiam ad primam operis partem Augustini Pedrayes, Matheseos Professoris, typis excudendam concessit, quoad Problematis Mathematici à se multos annos ad sapientes Europae viros propositi solutionem expectat; quamque Subscriptores nunc evulgamus. Publicum judex rectus atque incorruptus operum, quae in apertum proferuntur, eum locum honoris atque aestimationis sibi promeritum, huic adtribuet Opusculo.

SUBSCRIPTORES.

Excelentísimo Señor Duque de Osuna por sí.

Por su Biblioteca.

Ilustrísimo Señor Don Juan de Llano Ponte.

Excelentísimo Señor Conde de Cabarrús.

Señor Don Luis Fernandez de Córdoba Pimentel.

Excelentísimo Señor Marques de Villena.

Excelentísimo Señor Marques de Villafranca.

Excelentísimo Señor Marques de la Romana.

Señor Don Francisco Xavier de Jáuregui.

Señor Don Manuel Francisco de Jáuregui.

Señor Don Manuel de Zuaznavar.

Padre Maestro Fr. D. Bernardo Foyo, Benedictino.

Señor Don Mateo Santiago Toro.

La Real Sociedad de Amigos del Pais de Asturias.

Excelentísimo Señor Don Gaspar Melchor de Jovellanos.

Real Instituto de Gijon.

Señor Don Francisco Solano.

Señor Don Tomás de Jáuregui.

Señor Don Ramon de Lopez Angulo.

Señor Don Tadeo Bravo de Rivero.

Señor Don Pedro Bayon Cachero.

Padre Fr. Luis Pedrosa, Benedictino.

Señor Don Francisco Remirez de Estenóz.

La Excelentísima Señora Condesa de Lalaing.

Señor Don Francisco Mayorga.

Excelentísimo Señor Don Gonzalo O-Farrill.

Señor Marques Don Ignacio Muzquiz.

Señor Don Fernando Casado de Torres.

Señor Don Vicente Aguilar Jurado.
Señor Don Esteban Porlier.
Señor Don Manuel de la Peña.
Señor Marques de Nevares.
Señor Don Cárlos Altamirano.
Señor Don Francisco de Acedo y Torres.
Señor Don Rafael de Echabúru.
Señor Don Luis de Vera.
Señor Don Mariano García de Zamora.
Señor Don Rafael Josef de Amandi.
Señor Don Agustin Vitorero.
Señor Don Bernardo de Riega.
Señor Don Ramon de Rivera.
Señor Don Joaquin Mendez de Vigo.
Señor Don Miguel Antonio de Amandi.
Señor Don Manuel Guerra y Marchan.
Señor Don Josef Luis de Amandi.
Señor Don Pedro Manuel de Ayala.
Señor Don Pedro Joaquin de Cifuentes.
Señores Don Alvaro Valdés y Don Josef Alvar Gonzalez Zarracina.
El Conde de Marcel de Peñalva.
Señor Don Domingo Enrique de Puertas.
Señor Don Juan Ignacio de Guell.
Señor Don Francisco Antonio de Amandi.
Señor Don Antonio Castilla.
Señor Don Tadeo Galisteo y Manrique.
Señor Don Manuel Sixto de Espinosa.
Señor Don Miguel de Ochoa.

INTRODUCTIO AUCTORIS.

Hoc Opusculo comprehenditur Problematis solutio anno 1797 propositi in Programmate Matriti primum edito anno 1796.

Quaestio eo tendit, ut inveniantur aequationes duae

$$x = F. (\phi)$$
$$u = F.' (\phi)$$

in quibus functiones $F. (\phi) \ldots F' (\phi)$ inter se differant, atque per eas Problematis solutio exhibeatur, stando omnibus conditionibus, quae Programmate enumerantur, cujus in fine introductionis excriptum è fide datur exemplum. Munus igitur erit sapientis lectoris super solutione data aequum judicium ferre: sit nè principiis mathematicis congruens, aut assignari possit conditio in Programmate praescripta, cui satis non fiat. Id pro certo inveniet omissionem solam terminorum, praescribentium arcus ellipticos et hyperbolicos, Problema adducere in aliud dissimile simplicioris formae, quae proponi possit, cujus Problematis solutio, et calculus omnino absolvitur. Id etiam evidenter concluditur, non solvi Problema propositum una tantum conditione praetermissa, nec circumstantiam omitti, unde quaestio uti vaga inspicienda sit, et ex datis praefixis non possit colligi solutio.

Pars calculi ab Opusculo separata exhibetur, ut, quae ex illo sequuntur ad demonstrandum conducentia, lector in conspectu habeat, atque ita melius in ipsius potestate sit calculos comprobare, et in eis exercitationem capere, si velit, quae ad similia Problemata solvenda oportet scire.

Omnia ita sunt exposita, ut mente facile ea comprehendi possint à majore lectorum numero; nec quidquam sine demonstratione relinquitur, aut obscure proponitur, insistendo vestigiis veterum Geometrarum, quibus etiam complures inhaesere recentiorum. Neque hoc minimè obstabit primorum ordinum Geometris, qui, bene perscrutatis combinationibus, quae sunt fundamenta methodi, caetera leviter percurrendo, ad perfectam intelligentiam pervenient.

Solutionis methodus tribus articulis continetur. In primo praescribuntur functiones algebricae et rationales variabilis (ϕ) cum constante (r) combinatae. Has si pro certo ponitur esse valores (x) et (u), Problema solvitur omnibus conditionibus expletis, quae in Programmate assignantur. Demonstrantur etiam proprietates, quibus functiones praedictae Problema solvunt, et quomodo sint inventae exponitur: sicque palam fit applicatio Analiseos Diophanti sublimiori parti calculi integralis.

Articulo secundo demonstratur terminos Problematis per functiones assignatas eandem assumere expressionis formam; et terminorum summam aequalem fieri posse differentiali depromptae ex functione algebrica variabilis (ϕ); ac denuo Problematis terminos vere referri ad curvas in Programmate enuntiatas.

Articulus tertius est continuatio secundi, et in eo demonstratur aequationem inveniri posse inter terminos Problematis et integralem (Y) expressam per functiones, in quibus variabiles (x) (u) permiscentur. Caetera communia sunt, eoque tendunt, ut omnibus sit persuasum, utraque formula Problema solvi expletis conditionibus praefixis. Exponitur etiam methodus inveniendi aequationem rationalem inter variabiles (x) (u) et constantem (r) in qua aequatione continetur vera integralis respondens aequationi differentiali. (N.º 1. Calc. pag. 13.) Potuisset sanè Problema hisce terminis proponi: *Invenire aequationem integralem respondentem aequationi differentiali* (N.º 1. Calc. pag. 13.), nec solveretur nisi per aequationes

$$x = \frac{4 \Gamma r^2}{\Delta^2}$$

$$u = \frac{4 \Gamma r^2}{\Pi^2};$$

sed modus iste proponendi magnopere restringeret generalem methodum, cum Problema, ut propositum fuit, innumeras habeat solutiones, et unicuique respondeat aequatio differentialis quae ab alia discrepat, sicut et ab exhibita (N.º 1. Calc. pag. 13.).

Articulus quartus continet solutionem Problematis supressis arcubus ellipticis, et hyperbolicis: hic forma calculi exponitur pro inveniendis valoribus numerorum afficientium terminos, quae cum sit in omnibus eadem, extra dubium ponitur, eos posse inveniri in primo Problemate, in quo calculus ob nimiam prolixitatem est ad extremum difficilis. Sed assecuta primi Problematis reductione per functiones ex quibus deducuntur series finitae habentes (φ^8) altiorem potentiam variabilis (φ), et cum in illo retineantur arcus circulares cum elliptico et hyperbolico, hoc Problema simplicitate praefertur calculo numerorum ex quo applicationes derivantur.

Cum ad praefata sit perventum, multa opera impenditur, ut sequenti Opusculo publici juris fiant; primum solutio cum calculo, et applicationibus primi Problematis modo praedicto reducti; secundò applicationes Problematis soluti articulo quarto hujus opusculi. Itaque nova hac methodo calculi integralis cum suis applicationibus publico judicio exposita, qua Geometrae plurima alia invenire poterunt, officium auctoris omnino explebitur.

PROGRAMMA.

Quid sciri in animo sit, hoc programmate declaratur: nimirum utrum ex methodis ab inventione calculi differentialis hucusque notis deduci possit sequentis Problematis solutio. Denuo utrum Geometra quisque investigationibus hujusce naturae incumbens, problemata similia solverit erueritque theoremata ad Geometriam sublimiorem promovendam conducentia. Deprehensa enim XVI ab hinc annis methodo qua non solum hoc Problema solvitur, sed et alia ejusdem generis fere infinita quae proponi possunt, hujus methodi Auctor susceptum assecutus consilium, quod nec purae curiositatis seu vanae ingenii ostentationis specimen exhibet, ex nullis scriptis mathematicis quae perlustrare licuit principium inventionis hausit; sed haec circumstantia cum sufficiens haud sit ad legitimam super ejus novitate sententiam ferendam, solutio siqua detur verum judicium ostendet: eandem insistentes viam viri clarissimi Newtonus ac Leibnitzius demonstrarunt, primos fuisse inventores calculi differentialis seu methodi fluxionum, nec ad problemata hac ipsa epocha proposita facilis erat aditus nisi ope hujus calculi.

Methodos mathematicas, quae et ut fontes inventionum aestimari possunt, ex singularium problematum solutione saepius derivari, satis compertum est omnibus in scientiis mathematicis versatis. Problemata isoperimetrica calculo variationum originem et progressionem dedere; plurimaeque extant methodi in Geometria superiori familiares, quae ex solutione problematum particularium ortae, postmodum devenere methodi generales: quod et in aliis planum fiet, si ipsa adinventa sedulo examine perpendantur.

Nec suspicari licet, mentem Auctoris esse Mathematicorum ingenia, quorum illustria nomina obsequio prosequitur, in solutione problematis torquere et fatigare; quin immo ab hac vanitatis labe immunis non mirum dicet, si, quemadmodum ipse, alii etiam ad eandem solutionem analysi ipsa aut sublimiori pervenerint. Seriem combinationum quae methodum conficiunt in operibus mathematicis se non invenisse, ut verissimum Auctor affirmat, et adjungit ipsam esse certa lege comprehensam, nec in solutione problematum ultra certum terminum progredi licere, ut, et si generalis, tanquam limitibus circumscripta methodus habenda sit.

Eandem vero seriem aut aliam in nullis scriptis mathematicis contineri asserere non audet. Quaecumque ergo sit series illa combinationum solutioni Problematis conditionibusque praescribendis satisfaciens, si ante propositionem in Auctore aliquo indicetur, plene demonstrabitur methodum esse etiam ab alio detectam.

Unde et consequens est, ut Auctoris, qui indicetur mentem, si cum proposito quaerentis conveniat, fas sit comperire. Cum enim tam ex hujus Problematis quam ex aliorum simpliciorum solutione applicationes et theoremata eliciantur Geometris, suo quidem judicio, non improbanda; hoc tantum fine ducitur, "ut sciens quae in hac materia sunt inventa, »methodum cum applicationibus, si id concessum fuerit, sa- »pientum judicio submittat; sicque merito inventionis prae- »fixo, ab aliis, quo ipse non potuit, perducatur." Sub hoc aspectu, omnique sublata occasione invidiae, praesens negotium ad universos spectat.

PROBLEMA.

Invenire aequationem integralem respondentem huic differentiali

$$\frac{ar^2dx}{\sqrt{(r-x).x}}+\frac{br^2dx}{\sqrt{(4r-x).x}}+\frac{cr^2du}{\sqrt{(r-u).u}}+\frac{er^2du}{\sqrt{(4r-u).u}}$$

$$+\frac{frdx\sqrt{4r^2-rx}}{\sqrt{(r-x).x}}+\frac{hrdx\sqrt{r^2-rx}}{\sqrt{(4r-x).x}}+\frac{krdu\sqrt{4r^2-ru}}{\sqrt{(r-u).u}}$$

$$+\frac{grdu\sqrt{r^2-ru}}{\sqrt{(4r-u).u}}+\frac{lrdx\sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{mrdu\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}}$$

$$+\frac{nrdx\sqrt{r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{prdu\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}}+\frac{qrdx\sqrt{(4r-u).(r-u)}}{\sqrt{rx}}$$

$$+\frac{srdu\sqrt{(4r-x).(r-x)}}{\sqrt{ru}}+\frac{trudx}{\sqrt{rx}}+\frac{zrxdu}{\sqrt{ru}}=dY.$$

Animadversiones de Problematis solutione.

1.ª (r) est recta constans et invariabilis; (x), (u) sunt rectae variabiles; (Y) est etiam quantitas variabilis.

2.ª Sit (ϕ) alia recta variabilis et $F(\phi)$, $F'(\phi)$ functiones algebraicae et rationales ejusdem variabilis (ϕ) cum constante (r) combinatae: ex conditione in solutione problematis servanda erit $x=F(\phi)$; $u=F'(\phi)$.

Functiones istae ut quantitates incognitae haberi debent, atque inter omnes functiones variabilis (ϕ) cum constante (r)

combinatae illae tantummodo exhibebunt valores (x) et (u) per quas solutio problematis obtineatur.

Ex functionibus $F(\phi)$, $F'(\phi)$ deducetur valor ipsius $Y = F''(\phi)$, quae functio est etiam algebraica, sed involvens partem rationalem cum quantitate radicali.

3.ª Ulterius exigitur aequatio numero terminorum finita inter rectas variabiles (x) (u) et constantem (r) qua ratio istarum rectarum determinetur.

Ex expositis itaque consequitur quaestionem his terminis etiam posse proponi: *si rectae variabiles* (x) (u) *per functiones algebraicas et rationales alterius variabilis* (ϕ) *cum constanti* (r) *combinatae designentur, illas invenire quae solutioni problematis satisfaciant.*

4.ª Factores (a) (b) &c. (t) (z) terminorum sunt numeri constantes determinati, eorumque valores ex solutione problematis habentur.

5.ª Termini integrales respondentes terminis aequationis differentialis praefatae idem habent originis punctum ex quo initium incrementorum computari debet, ut evanescente (x) omnes hi termini evanescant atque etiam variabiles (u) (Y): posita ergo hac aequatione differentiali $ar\,dA + br\,dB + cr\,dC + er\,dE + fr\,dF + hr\,dH + kr\,dK + gr\,dG + l\,dL + m\,dM + n\,dN + p\,dP + q\,dQ + s\,dS + t\,dT + z\,dZ = dY$ identica aequationi problematis, ejusdem integralis $arA + brB + crC + erE + frF + hrH + krK + grG + lL + mM + nN + pP + qQ + sS + tT + zZ = Y$ consequitur omnes valores veros possibiles inter limites $x = 0$ $x = r$ et inter limites $u = 0$ $u = r$. Cum $x = 0$ aut $u = 0$, $arA + brB$ &c. $+ tT + zZ = Y = 0$; et quando $x = r$ aut $u = r$ terminus quisque valorem sortitur determinatum.

6.ª Termini $arA = ar^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(r-x).x}}$, ...

$$brB = br^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(4r - x).x}}, \quad crC = cr^2 \int \frac{du}{\sqrt{(r-u).u}},$$

$$erE = er^2 \int \frac{du}{\sqrt{(4r-u).u}}$$ referunt sectores ejusdem circuli ejusdemque radii $= r$, discrimenque eorum petitur ex arcu tantum quo quisque sector insistit. Ponantur arcus isti (A) (B) (C) (E): ex solutione problematis eruentur valores factorum (a) (b) (c) (e) per quos termini multiplicantur.

7.ª Termini $frF = fr \int \frac{dx \sqrt{4r^2 - rx}}{\sqrt{(r-x).x}}$, ...

$$krK = kr \int \frac{du \sqrt{4r^2 - ru}}{\sqrt{(r-u).u}}$$ à rectificatione Ellipsis pendent, et si in primo termino repraesentetur per F recta arcui elliptico aequalis, in secundo autem per K: ex ipsa solutione eruentur factores (f) (k) arcus multiplicantes.

8.ª Sed termini $hrH = hr \int \frac{dx \sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{(4r-x).x}}$, ...

$$grG = gr \int \frac{du \sqrt{r^2 - ru}}{\sqrt{(4r-u).u}}$$ à rectificatione Hyperbolae pendent insuper continentes integralem finitam. Sit in primo termino (H) et in secundo (G) recta ex arcu hyperbolico et integrali finita procedens, non absimili modo factores (h) (g) deducentur.

9.ª Termini sequentes arearum curvilinearum formam apte exhibent: sit $lL = lr \int \frac{dx \sqrt{4r - u}}{\sqrt{x}}$, ...

$$nN = nr \int \frac{dx \sqrt{r-u}}{\sqrt{x}}, \quad qQ = qr \int \frac{dx \sqrt{(4r-u).(r-u)}}{\sqrt{rx}},$$

$tT = tr\int\frac{u\,dx}{\sqrt{rx}}$: posita abscissa communi $= \sqrt{rx}$ facillime determinabitur coordinata orthogonalis in unoquoque termino: et si per (L) (N) (Q) (T) designantur areae, factores numerici (l) (n) (q) (t) ut superius eruentur.

Eadem ut dicta intelligantur de terminis............

$$mM = mr\int\frac{du\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}},\ pP = pr\int\frac{du\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}},$$

$$sS = sr\int\frac{du\sqrt{(4r-x).(r-x)}}{\sqrt{ru}},\ zZ = zr\int\frac{x\,du}{\sqrt{ru}}$$

in quibus abscissa communis est $= \sqrt{ru}$.

10.[a] Ex differentialibus dA, dB &c. dT, dZ, nulla seorsum est integrabilis serie numero terminorum finita per methodos saltem quas calculus hucusque demonstratas suppeditat.

Augustinus Pedrayes.

ARTICULUS I.

I

In hoc articulo (x), (u) per functiones rationales variabilis (φ) determinantur, earumque functionum demonstrantur proprietates.

2

Sit $x = \frac{4\,\Gamma\,r^2}{\Delta^2}$, (Γ), (Δ) *designatis per valores rationales in aequationibus* (N.° 1. pag. 1. Calc.), *erit* $(r - x)$ *quadratum perfectum, et exprimere licebit* $\left(\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}}\right)$ *per functionem rationalem.*

Ex hac hypothesi habebitur

$$r - x = \frac{(\Delta^2 - 4\,\Gamma\,r).\,r}{\Delta^2}$$

et substitutione valorum (Γ), (Δ) obtinebuntur aequationes (N.° 2.) atque deducetur

$$\Delta^2 - 4\,\Gamma\,r = \Lambda^2$$

$$\frac{r - x}{r} = \frac{\Lambda^2}{\Delta^2}$$

$$\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}} = \frac{\Lambda}{\Delta}$$

Erunt ergo (Λ) et $\left(\frac{\Lambda}{\Delta}\right)$ functiones rationales variabilis (φ) cum constanti (r) combinatae.

3

Repraesentabitur etiam $\left(\frac{\sqrt{4r-x}}{2\sqrt{r}}\right)$ *per functionem rationalem variabilis* (ϕ).

Ex eadem hypothesi deducitur

$$4r-x=\left(\frac{\Delta^2-\Gamma r}{\Delta^2}\right).\,4r$$

substitutionibusque eruentur aequationes (N.° 3. Calc. pag. 1.), unde $(\Delta^2-\Gamma r)$ oritur quadratum perfectum. Habetur enim

$$\Delta^2-\Gamma r=O^2$$

$$\frac{4r-x}{4r}=\frac{O^2}{\Delta^2}$$

$$\frac{\sqrt{4r-x}}{2\sqrt{r}}=\frac{O}{\Delta};$$

et functiones (O), $\left(\frac{O}{\Delta}\right)$ sunt pariter functiones rationales variabilis (ϕ) cum constanti (r) combinatae.

4

Posita $u = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Pi^2}$, *notata que* ($\Pi$) *valore rationali in aequatione* (N.° 1. Calc. pag. 2.) *quantitas* $\left(\frac{\sqrt{r-u}}{\sqrt{r}}\right)$ *repraesentabitur per aliam functionem rationalem.*

Erit enim ut antea

$$\frac{r-u}{r} = \frac{(\Pi^2 - 4\,\Gamma\, r)}{\Pi^2}$$

et substitutionibus eruentur aequationes (N.° 2. Calc. pag. 2.) ex quibus habetur

$$\Pi^2 - 4\,\Gamma\, r = \Phi^2$$

$$\frac{r-u}{r} = \frac{\Phi^2}{\Pi^2}$$

$$\frac{\sqrt{r-u}}{\sqrt{r}} = \frac{\Phi}{\Pi}$$

et prodeunt novae functiones rationales (Φ), $\left(\frac{\Phi}{\Pi}\right)$.

5

$\left(\frac{4r - u}{4r}\right)$ *erit etiam quadratum perfectum.*

Cum sit $4r - u = \frac{(4\Pi^2 - 4\Gamma r).r}{\Pi^2}$

$$\frac{4r - u}{4r} = \frac{\Pi^2 - \Gamma r}{\Pi^2}$$

et ex aequationibus (N.° 3. Calc. pag. 2.) colligatur esse $(\Pi^2 - \Gamma r)$ quadratum perfectum, eruetur aequatio

$$\frac{\sqrt{4r - u}}{2\sqrt{r}} = \frac{\Psi}{\Pi},$$

proditque nova functio rationalis (Ψ).

6

Formula differentialis pro (x) per functiones (Γ), (Δ) explicita continetur in aequatione

$$dx = 4r^2.\frac{(\Delta d\Gamma - 2\Gamma d\Delta)}{\Delta^3}$$

Ponatur $D = \frac{\Gamma}{\Delta^2}$

$$\text{erit } \Delta^2 D = \Gamma$$

$$2D\Delta d\Delta + \Delta^2 dD = d\Gamma$$

$$\frac{2\Gamma d\Delta}{\Delta} + \Delta^2 dD = d\Gamma$$

$$dD = \frac{\Delta d\Gamma - 2\Gamma d\Delta}{\Delta^3}$$

cumque habeatur (2.), $x = 4\, D\, r^2$, deducetur aequatio proposita.

7

Consequens est determinare valorem functionis rationalis (X) ex differentiatione prodeuntis.

Pagina tertia calculi valores, et operationes analiticas ordine exhibet

$$\begin{array}{l} (\text{N.° 1.}) \\ (\text{N.° 2.}) \text{ valorem} \\ (\text{N.° 3.}) \end{array} \left\{\begin{array}{l} (\Delta\, d\, \Gamma) \\ (-\, 2\, \Gamma\, d\, \Delta) \\ (\Delta\, d\, \Gamma - 2\, \Gamma\, d\, \Delta) \end{array}\right\}$$

Quod si ponatur $\Delta\, d\, \Gamma - 2\, \Gamma\, d\, \Delta = 2\, X\, d\, \phi$, (N.° 3.) habetur functio rationalis (X).

8

Functio (X) *tribus factoribus componitur.*

Hi factores exhibentur (N.° 1. Calc. pag. 4.)

Erit ergo $\left(\frac{X}{\Lambda}\right)$ functio integra ut habetur (N.° 2.), et divisionem probanti constabit.

Erit etiam $\left(\frac{X}{\Lambda\, O}\right)$ functio integra ut ostenditur (N.° 3.)

et ex aequatione $\frac{X}{\Lambda\, O} = \Sigma$, deducitur $X = \Lambda\, O\, \Sigma$.

9

Hinc consequitur esse

$$d\,x = \frac{\Lambda\,\mathrm{O}\,\Sigma.\ 8\,r^2\,d\,\phi}{\Delta^3}$$

et repraesentatur differentialis praefata per ($d\,\phi$) et functiones rationales jam inventas variabilis (ϕ).

10

Sit etiam $D\,1 = \frac{\Gamma}{\Pi^2}$, et habebitur (6)

$$d\,D\,1 = \frac{\Pi\,d\,\Gamma - 2\,\Gamma\,d\,\Pi}{\Pi^3}$$

$$d\,u = 4\,r^2\,d\,D\,1.$$

11

Pagina quinta calculi continet valores ex differentiatione deductos, et functionem rationalem (X 1) differentialis ($d\,u$).

$$\begin{array}{l} (\text{N.° 1.}) \\ (\text{N.° 2.})\ \text{Habetur valor} \\ (\text{N.° 3.}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Pi\,d\,\Gamma \\ -\,2\,\Gamma\,d\,\Pi \\ \Pi\,d\,\Gamma - 2\,\Gamma\,d\,\Pi \end{array} \right\}$$

Fiat $\Pi\,d\,\Gamma - 2\,\Gamma\,d\,\Pi = 2\,\mathrm{X}\,1\,d\,\phi$.

(N.° 3.) invenietur functio rationalis (X 1).

12

Functio rationalis (X 1) *est etiam tribus factoribus rationalibus composita.*

Pagina calculi sexta exhibet (N.° 1.) factores istos, quorum duo sunt functiones rationales jam notae, et tertius ex differentiatione prodit.

Id ergo calculo palam fit, dividi (X 1) per (Φ) nullo residuo relicto. Quotus designatur (N.° 2.). Ulterius demonstratur $\left(\frac{X\,1}{\Phi}\right)$ dividi per (Ψ) absque ullo residuo; quotusque etiam ostenditur (N.° 3.), undè eruitur aequatio

$$X\,1 = \Phi\,\Psi\,\Omega.$$

13

Eruitur pariter aequatio

$$d\,u = 4\,r^2\,d\,D\,1 = \frac{\Phi\,\Psi\,\Omega.\,8\,r^2\,d\,\phi}{\Pi^3}.$$

14

Hae sunt proprietates hucusque demonstratae de variabilibus (x), (u) per functiones rationales (Γ), (Δ), (Π) explicitas, unde aliae rationales functiones procedunt, quas omnes recolligere oportet sequentibus aequationibus

$$x = \frac{4\,\Gamma\,r^2}{\Delta^2}; \quad \frac{\sqrt{x}}{2\,r} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Delta};$$

$$\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}} = \frac{\Lambda}{\Delta}; \quad \frac{\sqrt{4r-x}}{2\sqrt{r}} = \frac{O}{\Delta};$$

$$dx = \frac{\Lambda O \Sigma.\ 8r^2 d\phi}{\Delta^3};$$

$$u = \frac{4\Gamma r^2}{\Pi^2}; \quad \frac{\sqrt{u}}{2r} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Pi};$$

$$\frac{\sqrt{r-u}}{\sqrt{r}} = \frac{\Phi}{\Pi}; \quad \frac{\sqrt{4r-u}}{2\sqrt{r}} = \frac{\Psi}{\Pi};$$

$$du = \frac{\Phi\Psi\Omega.\ 8r^2 d\phi}{\Pi^3}$$

Methodus qua inventae sunt functiones istae est applicatio quaedam analyseos Diophanti, ut ex dictis jam colligere licet.

Sit $x = \frac{\Gamma r}{\Delta^2}$

$$r-x = \frac{(\Delta^2-\Gamma).r}{\Delta^2} = \frac{(\Delta-K)^2 r}{\Delta^2}$$

$$4r-x = \frac{(4\Delta^2-\Gamma).r}{\Delta^2} = \frac{(2\Delta-H)^2 r}{\Delta^2}$$

erit $\Delta = \frac{K}{2} + \frac{\Gamma}{2K}$

$$\Delta = \frac{H}{4} + \frac{\Gamma}{4H}$$

$$\Gamma = \frac{KH(2K-H)}{K-2H}$$

Ponatur etiam $u = \frac{\Gamma r}{\Pi^2}$

$$r-u = \frac{(\Pi^2-\Gamma).r}{\Pi^2} = \frac{(\Pi-F)^2 r}{\Pi^2}$$

$$4r-u=\frac{(4\Pi^2-\Gamma).r}{\Pi^2}=\frac{(2\Pi-N)^2r}{\Pi^2}$$

$$\text{erit } \Pi=\frac{F}{2}+\frac{\Gamma}{2F}$$

$$\Pi=\frac{N}{4}+\frac{\Gamma}{4N}$$

$$\Gamma=\frac{FN.(2F-N)}{F-2N}$$

deduceturque $\frac{KH.(2K-H)}{K-2H}=\frac{FN.(2F-N)}{F-2N}$

pro cujus solutione plurimae possunt fieri suppositiones: haec si praefertur $K-2H=F-2N$

colligetur $F=K-2H+2N$

$$KH.(2K-H)=N.(K-2H+2N).(2K-4H+3N)$$

$$\begin{array}{l} 2N(K^2)+7N^2(K)+6N^3-14HN^2+8HN=0 \\ -2H \quad\quad\; -8HN \\ \quad\quad\quad\quad +H^2 \end{array}$$

et dividendo per $(N-H)$

$$\begin{array}{l} 2K^2+7N(K)+6N^2-8NH=0 \\ \quad -H \end{array}$$

quae solutionem exhibet per valores

$$H=\frac{2K^2+7NK+6N^2}{K+8N}=\frac{(K+2N).(2K+3N)}{K+8N}$$

$$F=\frac{(K+2N).(-3K+2N)}{K+8N}$$

$$2H-K=2N-F=\frac{3(K^2+2NK+4N^2)}{K+8N}$$

$$2K-H=\frac{3N.(3K-2N)}{K+8N}$$

$$2F - N \quad = \frac{-3K.(2K + 3N)}{K + 8N}$$

Itaque si fit $K = \phi$, $N = r$, prodibunt functiones (Γ), (Δ), (Π) propositae, et quae ex ipsis derivantur. Aliis etiam modis procedi poterit ad inveniendas functiones quibus Problema similiter solvitur; ex quo sequitur Problema propositum esse indeterminatum, et infinitas habere solutiones.

ARTICULUS II.

15

Hoc secundo articulo demonstrabitur terminos aequationis differentialis propositae ob proprietates enuntiatas functionum assumere formam, qua comparabiles inter se redduntur, et ex eorum summa elici potest formula integralis finita.

Termini etiam ad classes reducentur; alii nempe ad arcus circulares, ellipticos, et hyperbolicos, reliquos per areas curvilineas repraesentare fas erit.

16

Sit (S) arcus circularis respondens abscissae (y) ex origine diametri ($2r$) computatae;

$$erit\ dS = \frac{r\,dy}{\sqrt{(2r - y).y}}$$

Id est elementis calculi differentialis constat.

17

Supponatur in formula praecedenti $S = A$; $y = 2x$; ex substitutione valorum habebitur

$$dA = \frac{2 r\, dx}{\sqrt{(2r - 2x) . 2x}} = \frac{r\, dx}{\sqrt{(r - x) . x}}$$

18

Ponatur etiam $y = \frac{1}{2} x$; $S = B$;

deducetur $dB = \dfrac{\frac{1}{2} r\, dx}{\sqrt{(2r - \frac{1}{2} x) . \frac{1}{2} x}} = \dfrac{r\, dx}{\sqrt{(4r - x) . x}}$

19

Si fit $y = 2u$; $S = C$;

erit $dC = \dfrac{r\, du}{\sqrt{(r - u) . u}}$

20

Fiat denique $y = \frac{1}{2} u$; $S = E$, et eruetur

$$dE = \frac{r\, du}{\sqrt{(4r - u) . u}}$$

21

Sunt ergo (A), (B), (C), (E) arcus ejusdem circuli qui inter se differunt, ut pote ad abscissas $(2x)$, $(\frac{1}{2}x)$, $(2u)$, $(\frac{1}{2}u)$ inter se diversas relati.

22

Differentiales arcuum suscipiunt transformationes sequentibus aequationibus indicatas

$$1.^a \quad \frac{dA}{4r\sqrt{r}} = \frac{\mathrm{O}\,\Sigma\, d\phi}{\Delta\sqrt{\Gamma}}$$

$$2.^a \quad \frac{dB}{2r\sqrt{r}} = \frac{\Lambda\,\Sigma\, d\phi}{\Delta\sqrt{\Gamma}}$$

$$3.^a \quad \frac{dC}{4r\sqrt{r}} = \frac{\Psi\,\Omega\, d\phi}{\Pi\sqrt{\Gamma}}$$

$$4.^a \quad \frac{dE}{2r\sqrt{r}} = \frac{\Phi\,\Omega\, d\phi}{\Pi\sqrt{\Gamma}}$$

Cum sit (17.) $dA = \dfrac{r\,dx}{\sqrt{(r-x).x}}$

$$dx = \frac{\Lambda\,\mathrm{O}\,\Sigma.\,8r^2\,d\phi}{\Delta^3}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2r} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Delta}$$

$$\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}} = \frac{\Lambda}{\Delta}$$

ex substitutione valorum deducitur aequatio prima.

$$dB = \frac{r\,dx}{\sqrt{(4r - x).x}}$$

$$\frac{\sqrt{4r - x}}{2\sqrt{r}} = \frac{O}{\Delta}$$

et ex substitutione valorum deducitur secunda.

$$dC = \frac{r\,du}{\sqrt{(r - u).u}}$$

$$du = \frac{\Phi\,\Psi\,\Omega.\ 8\,r^2\,d\phi}{\Pi^3}$$

$$\frac{\sqrt{r - u}}{\sqrt{r}} = \frac{\Phi}{\Pi}$$

$$\frac{\sqrt{u}}{2\,r} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Pi}$$

et ex substitutione deducitur tertia.

Postremò $dE = \frac{r\,du}{\sqrt{(4r - u).u}}$

$$\frac{\sqrt{4\,r - u}}{2\sqrt{r}} = \frac{\Psi}{\Pi}$$

et ex substitutione deducitur quarta.

23

Designetur in Ellipsi semi-axis major per .... (e)
semi-axis minor.................................. (f)
abscissa ex centro computata...................... (t)
semi ordinata.................................... (y)
arcus ellipticus................................. (S)

$$\text{erit } dS = \sqrt{dy^2 + dt^2} = \frac{dt\sqrt{e^2 + \left(\frac{f^2 - e^2}{e^2}\right).\, t^2}}{\sqrt{e^2 - t^2}}$$

Ex aequatione ad Ellipsim $y^2 = \frac{f^2}{e^2}(e^2 - t^2)$
eruuntur sequentes

$$e^2 y\, dy = -f^2 t\, dt$$

$$e^4 y^2\, dy^2 = f^4 t^2\, dt^2$$

$$e^4 y^2\, dt^2 = -f^2 e^2 t^2\, dt^2 + f^2 e^4\, dt^2$$

$$e^2 y\sqrt{dy^2 + dt^2} = f\, dt\sqrt{e^4 + (f^2 - e^2).\, t^2}$$

$$dS = \sqrt{dy^2 + dt^2} = \frac{f\, dt}{e y}\sqrt{e^2 + \left(\frac{f^2 - e^2}{e^2}\right).\, t^2}$$

ac postremò aequatio proposita.

24

Determinatis valoribus rectarum in formula praecedenti per aequationes $e^2 = 4r^2$, $f^2 = 3r^2$, $t^2 = 4rx$, $S = F$, invenietur $dF = \frac{dx\sqrt{4r^2 - rx}}{2\sqrt{(r - x).\, x}}$

est enim $d\,t = \dfrac{d\,x\,\sqrt{r}}{\sqrt{x}}$

$$\frac{\sqrt{e^2 + \left(\frac{f^2 - e^2}{e^2}\right).\,t^2}}{\sqrt{e^2 - t^2}} = \frac{\sqrt{4\,r - x}}{2\sqrt{r - x}}$$

ex quibus deducitur aequatio prima.

25

Ergo si fit $t^2 = 4\,r\,u$, $S = K$, prodibit etiam aequatio

$$d\,K = \frac{d\,u\,\sqrt{4\,r^2 - r\,u}}{2\,\sqrt{(r - u).\,u}},$$

ac propterea termini (F), (K) inspiciendi sunt ut arcus elliptici respondentes abscissis $(2\,\sqrt{r\,x})$, $(2\,\sqrt{r\,u})$ computatis ex centro ejusdem ellipseos cujus semi-axis major $= 2\,r$, et semi-axis minor $= r\,\sqrt{3}$.

26

In aequationibus

$$\frac{d\,F}{4\,r\,\sqrt{r}} = \frac{\text{O}^2\,\Sigma\,d\,\phi}{\Delta^2\,\sqrt{\Gamma}}$$

$$\frac{d\,K}{4\,r\,\sqrt{r}} = \frac{\Psi^2\,\Omega\,d\,\phi}{\Pi^2\,\sqrt{\Gamma}}$$

exprimuntur differentiales praedictae per $(d\,\phi)$ *et functiones jam notatas.*

In aequatione $d\,F = \dfrac{d\,x\ \sqrt{4\,r^2 - r\,x}}{2\,\sqrt{(r - x).\,x}}$

substituatur $\frac{\Lambda O \Sigma . 4 r^2 d\phi}{\Delta^3} = \frac{dx}{2}$

$$\frac{2 r \Lambda \sqrt{\Gamma r}}{\Delta^2} = \sqrt{(r - x) . x}$$

$$\frac{2 O r}{\Delta} = \sqrt{4 r^2 - r x}$$

et prodibit aequatio prima.

In $dK = \frac{du \sqrt{4 r^2 - r u}}{\sqrt{(r - u) . u}}$

substituatur etiam $\frac{\Phi \Psi \Omega . 4 r^2 d\phi}{\Pi^3} = \frac{du}{2}$

$$\frac{2 r \Psi}{\Pi} = \sqrt{4 r^2 - r u}$$

$$\frac{2 r \Phi \sqrt{\Gamma r}}{\Pi^2} = \sqrt{(r - u) . u}$$

et prodibit aequatio secunda.

27

Sit semi-axis primus hyperbolae..................... $= e$
semi-axis secundus............................... $= f$
abscissa ex centro computata......................... $= t$
semi ordinata respondens.......................... $= y$
arcus hyperbolicus................................. $= S$

erit $dS = \frac{dt \sqrt{\left(\frac{e^2 + f^2}{e^2}\right) . t^2 - e^2}}{\sqrt{t^2 - e^2}}$

Ex aequatione ad hyperbolam $y^2 = \frac{f^2}{e^2} (t^2 - e^2)$

sequentes oriuntur

$$e^2 y\,dy = f^2 t\,dt$$

$$e^4 y^2\,dy^2 = f^4 t^2\,dt^2$$

$$e^4 y^2\,dt^2 = f^2 e^2 t^2\,dt^2 - f^2 e^4\,dt^2$$

$$e^2 y^2 (dy^2 + dt^2) = f^2 t^2\,dt^2.\left(\frac{e^2 + f^2}{e^2}\right) - e^2 f^2\,dt^2$$

$$y\,dS = y\sqrt{dy^2 + dt^2} = \frac{f}{e}\,dt\sqrt{\left(\frac{e^2+f^2}{e^2}\right).t^2 - e^2}$$

undè colligitur aequatio proposita.

28

Fiat $e = 2r$, $f = 2r\sqrt{3}$, $t = \dfrac{r\sqrt{4r - x}}{\sqrt{r - x}}$, $S = 9$,

habebitur $\left(\dfrac{e^2 + f^2}{e^2}\right).\,t^2 - e^2 = 4t^2 - 4r^2$

$$4t^2 - 4r^2 = \frac{16r^3 - 4r^2 x}{r - x} - 4r^2 = \frac{12r^3}{r - x}$$

$$t^2 - e^2 = \frac{4r^3 - r^2 x}{r - x} - 4r^2 = \frac{3r^2 x}{r - x}$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{e^2+f^2}{e^2}\right).\,t^2 - e^2}}{\sqrt{t^2 - e^2}} = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{x}}$$

Denuò ex aequatione $t^2.(r - x) = 4r^3 - r^2 x$,

habetur $2t\,dt.(r - x) = t^2\,dx - r^2\,dx$

$$2\,dt.(r - x).\sqrt{(4r - x).(r - x)} = 3r^2\,dx$$

$$dt = \frac{3r^2\,dx}{2.(r - x).\sqrt{(4r - x).(r - x)}}$$

ex quibus colligitur differentialis arcus hyperbolici

$$d\vartheta = \frac{3\, r^2\, d\,x \sqrt{r}}{(r - x).\, \sqrt{(4\,r - x).\,(r - x).\,x}}$$

29

Sit $\beta = \dfrac{2\sqrt{(4\,r - x).\,r\,x}}{\sqrt{r - x}}$

deducetur $(d\,\beta)$ sequentibus aequationibus

$$\beta.^2\,(r - x) = 16\,r^2\,x - 4\,r\,x^2$$

$$2\,\beta\,d\,\beta.\,(r - x) = \beta^2\,d\,x + 16\,r^2\,d\,x - 8\,r\,x\,d\,x$$

$$d\,\beta.(r - x).\sqrt{(4\,r - x).(r - x).r\,x} = (r - x)^2.\,r\,d\,x + 3\,r^3\,d\,x$$

$$d\,\beta = \frac{d\,x\sqrt{r^2 - r\,x}}{\sqrt{(4\,r - x).\,x}} + \frac{3\,r^2\,d\,x\sqrt{r}}{(r - x)\sqrt{(4\,r - x).(r - x).\,x}}$$

30

In Programmatis octava animadversione ponitur

$$d\,H = \frac{d\,x\sqrt{r^2 - r\,x}}{\sqrt{(4\,r - x).\,x}}$$

$$d\,G = \frac{d\,u\sqrt{r^2 - r\,u}}{\sqrt{(4\,r - u).\,u}}$$

est ergo $d\,H = d\,\beta - d\,\vartheta$

$$d\,G = d\,\beta' - d\,\vartheta'$$

et terminus (H) sicut et (G) erit differentia arcus hyperbolici à recta finita.

31

Procedendum est ut (26.) et prodibit

$$\frac{dH}{2r\sqrt{r}} = \frac{\Lambda^2 \Sigma\, d\phi}{\Delta^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$\frac{dG}{2r\sqrt{r}} = \frac{\Phi^2 \Omega\, d\phi}{\Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

32

Si abscissa curvae repraesentetur per (ϑ), ordinata respondens per (β), differentialis areae per ($\beta\, d\vartheta$), abscissae et ordinatae in reliquis terminis Problematis facile determinantur.

Posita $\beta\, d\vartheta = dL = \dfrac{r\,dx\sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}$

erit $\vartheta = 2\sqrt{rx}$

$\beta = \sqrt{4r^2 - ru}$

prodibit enim $d\vartheta = \dfrac{dx\sqrt{r}}{\sqrt{x}}$

$\beta\, d\vartheta = \dfrac{r\,dx\sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}$

ponatur $\beta\, d\vartheta = dS = r\,du\,\dfrac{\sqrt{(4r-x).(r-x)}}{\sqrt{ru}}$

erit $\vartheta = 2\sqrt{ru}$

$d\vartheta = \dfrac{r\,du}{\sqrt{ru}}$

$$\beta = \sqrt{(4r - x).(r - x)}$$

In termino $dZ = \dfrac{rx\,du}{\sqrt{ru}}$, erit $\beta = x$, eodemque modo in caeteris proceditur.

33

Termini praefati exprimuntur per $(d\phi)$ et functiones (ϕ) sequentibus aequationibus

$$1.^{a} \quad \frac{dL}{8r^2\sqrt{r}} = \frac{\Lambda O \Sigma \Psi\, d\phi}{\Delta^2 \Pi \sqrt{\Gamma}}$$

$$2.^{a} \quad \frac{dM}{8r^2\sqrt{r}} = \frac{\Phi \Psi \Omega O\, d\phi}{\Delta \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$3.^{a} \quad \frac{dN}{4r^2\sqrt{r}} = \frac{\Lambda O \Sigma \Phi\, d\phi}{\Delta^2 \Pi \sqrt{\Gamma}}$$

$$4.^{a} \quad \frac{dP}{4r^2\sqrt{r}} = \frac{\Phi \Psi \Omega \Lambda\, d\phi}{\Delta \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$5.^{a} \quad \frac{dQ}{8r^2\sqrt{r}} = \frac{\Lambda O \Sigma \Phi \Psi\, d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$6.^{a} \quad \frac{dS}{8r^2\sqrt{r}} = \frac{\Phi \Psi \Omega \Lambda O\, d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$7.^{a} \quad \frac{dT}{16r^2\sqrt{r}} = \frac{r \Gamma \Lambda O \Sigma\, d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$8.^{a} \quad \frac{dZ}{16r^2\sqrt{r}} = \frac{r \Gamma \Phi \Psi \Omega\, d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

Methodo substitutionum jam probata, praecedentes aequationes adjunxisse satis erit.

34

AEquatio quae hic ut integrabilis ponitur, eadem est cum proposita in Programmate.

AEquatio haec exhibetur (N.° 1. Calc. pag. 7.)

Eadem aequatio exprimitur (N.° 2.) per functiones (φ), et termini respondentes in utraque sunt omnino aequales ut ex antecedentibus liquet.

Denique termini repraesentantur (N.° 3.) reducti ad communem denominatorem.

Ut aequatio (N.° 1.) cum aequatione Programmatis conferatur, illius factores numerici ex solutione noti designentur per (a'), (b'), (c'), &c.ª et aequatione per ($r^2 \sqrt{r}$) multiplicata, deducetur

$$a\,r\,d\,A = \frac{a'\,r\,d\,A}{4}$$

$$a = \frac{a'}{4}$$

$$b\,r\,d\,B = \frac{b'\,r\,d\,B}{2}$$

$$b = \frac{b'}{2}$$

&c.ª

atque ex inde earum perfecta aequalitas patebit.

35

Sit $X\,1 = a\,O\,\Sigma\,\Delta\,\Pi^2 + b\,\Lambda\,\Sigma\,\Delta\,\Pi^2 +$ &c.ª (N.° 5.)

erit $dY = \dfrac{X\,1\,d\phi}{\Delta^2\,\Pi^2\,\sqrt{\Gamma}}$ (N.° 4.)

36

Functio (X 1) *exprimi potest per series finitas, et homogeneas variabilis* (ϕ).

Valores functionum (Δ), (O), (Σ), (Π^2) in se ducantur, et habebitur primus terminus, sicque de caeteris, ut ostenditur (pag. 8. Calc. N.° 1.)

Comparatione concluditur series esse homogeneas; cumque forma calculi et methodus perspicuè exhibeatur, prolixitatis vitandae causa series non complentur.

37

Posita (V) *aequali functioni* (ϕ), (Δ) *et* (Π) *homologae, erit* $Y = \dfrac{2\,V\sqrt{\Gamma}}{\Delta\,\Pi}$ *integralis finita aequationis differentialis propositae.*

Fiat $\Delta\,\Pi = R$, deducentur sequentes aequationes

$$Y^2 R^2 = 4 V^2 \Gamma$$

$$R^2 Y dY + Y^2 R dR = 4 \Gamma V dV + 2 V^2 d\Gamma$$

$$R^2 dY \sqrt{\Gamma} + 2 V \Gamma dR = 2 R \Gamma dV + V R d\Gamma$$

$$d\,Y = \frac{2\,R\,\Gamma\,d\,V + V\,R\,d\,\Gamma - 2\,V\,\Gamma\,d\,R}{R^2\sqrt{\Gamma}}$$

sed (Γ), (Δ), (Π) sunt functiones (ϕ) jam determinatae (Calc. pag. 1. et 2.)

Si supponitur (V) functio ejusdem formae, prodibit aequatio $d\,Y = \frac{X\,d\,\phi}{\Delta^2\,\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$ et comparatione instructa inter eandem aequationem et praecedentem $d\,Y = \frac{X\,1\,d\,\phi}{\Delta^2\,\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$ (35.) habetur $X = X\,1$.

Functio igitur quae ex integrali finita, per differentiationem eruitur, eadem debet esse cum deducta ex congerie serierum.

38

Functio (V) determinatur per aequationem

$$V = \varepsilon\,\phi^4 + \delta\,r\,\phi^3 + \rho\,r^2\,\phi^2 + \pi\,r^3\,\phi + \omega\,r^4$$

in qua (ε), (δ), (ρ), &c.ª sunt numeri indeterminati.

Ex suppositione deducitur

$$X = 18\,\varepsilon\,\phi^{18} + 342\,\varepsilon\,r\,(\phi^{17})\ \&c.^a \quad \text{(Calc. pag. 8. N.° 2.)}$$
$$+\ 54\,\delta\,r$$

Rursus si in aequatione

$$X\,1 = a\,O\,\Sigma\,\Delta\,\Pi^2 + b\,\Lambda\,\Sigma\,\Delta\,\Pi^2\ \&c.^a$$

termini, multiplicatis factoribus exprimantur per functiones variabilis (ϕ) ut ostenditur (N.° 1.) erunt series finitae (X) $(X\,1)$ omninò homogeneae. Ergo instituta comparatione inter terminos, ut habeatur $X = X\,1$, invenietur integralis finita $Y = \frac{2\,V\sqrt{\Gamma}}{\Delta\,\Pi}$.

39

Series finita (X) *deducitur ex formula*

$$dY = \frac{2\Gamma R\,dV + VR\,d\Gamma - 2\Gamma V\,dR}{R^2\sqrt{\Gamma}}$$

Substitutis valoribus functionum (V), (Γ), (Δ), (Π), (dV), $(d\Gamma)$, $(d\Delta)$, $(d\Pi)$ obtinentur aequationes tres (Calc. pag. 9.) quarum summa exhibet seriem finitam (X) (Calc. pag. 8. N.° 2.)

40

Fit X = X 1 *per aequationes inter numeros indeterminatos.*

AEquatio (N.° 1. Calc. pag. 10.) reddit aequales primos terminos utriusque seriei; aequatio (N.° 2.) reddit secundos aequales, (N.° 3.) tertios, (N.° 4.) quartos, et sic deinceps.

Cum ergo habeantur aequationes unde-vicenae numeros indeterminatos unum et viginti continentes, eliminatis ex ordine (ε), (δ), (ρ), (π), (ω); (a), (b), (c), &c.ª pervenietur ad aequationem finalem inter numeros (s), (t), (z) ut habeatur X = X 1, et exinde eruatur integralis finita (Y).

41.

Ex his concluditur expositam integrandi methodum simplicem esse, et principiis analyticis plenè conformari. Utque generalis demonstretur ultimò afferetur exemplum, cujus calculus omnino absolvitur. Magna difficultas et prolixitas calculi in Problemate proposito ex natura functionum (Γ), (Δ), (Π) petitur, ita ut, si possibile foret has functiones ad simpliciorem formam reducere, calculus aeque reduceretur.

ARTICULUS III.

42

Integralis finita (Y) exprimi etiam potest per functiones (x), (u), ut in sequentibus demonstrabitur.

43.

AEquatio

$$d.\frac{\sqrt{(r-x).u}}{2r\sqrt{r}} = \frac{-4r\Gamma\Pi\mathrm{O}\Sigma d\phi + \Delta\Lambda\Phi\Psi\Omega d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$$

exhibet differentialem $\left(\frac{\sqrt{(r-x).u}}{2r\sqrt{r}}\right)$ *expressam per* $(d\phi)$ *et functiones* (ϕ).

Fiat $D = \sqrt{(r-x).u}$; habebitur

$$2DdD = -udx + du.(r-x)$$

$$2dD = \frac{-udx}{\sqrt{(r-x).u}} + \frac{du\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}}$$

et substitutione valorum (u), (dx), (du), &c.ª (14.) prodibit aequatio proposita.

44

Hoc ordine servato invenitur differentialis $\left(\sqrt{(r-u).x}\right)$ ut ostenditur sequenti aequatione

$$d.\ \frac{\sqrt{(r-u).x}}{2r\sqrt{r}} = \frac{-4r\Gamma\Delta\Psi\Omega d\phi + \Pi\Phi\Lambda O\Sigma d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}.$$

45

Differentialis $\left(\sqrt{(4r-x).u}\right)$ *determinatur aequatione*

$$d.\left(\frac{\sqrt{(4r-x).u}}{4r\sqrt{r}}\right) = \frac{-r\Gamma\Pi\Lambda\Sigma d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}} + \frac{\Delta O\Phi\Psi\Omega d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}.$$

Sit $D = \sqrt{(4r-x).u}$, deducetur

$$2\,d\,D = \frac{-u\,d\,x}{\sqrt{(4r-x).u}} + \frac{d\,u\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}},$$

et substitutione valorum instructa, habetur aequatio proposita.

46

Ex analogia factorum habetur etiam aequatio

$$d.\left(\frac{\sqrt{(4r-u).x}}{4r\sqrt{r}}\right) = \frac{-r\Gamma\Delta\Phi\Omega d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}} + \frac{\Pi\Psi\Lambda O\Sigma d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}.$$

47

Inventitur ulterius aequatio

$$d.\left(\frac{\sqrt{x}}{2r}\right)=\frac{\Pi^2 \Lambda \mathrm{O} \Sigma d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

Sit $D=\sqrt{x}$; erit $2\,d\,D=\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\dfrac{\Lambda \mathrm{O} \Sigma.\,4\,r\,d\phi}{\Delta^2 \sqrt{\Gamma}}$

$$d.\left(\frac{\sqrt{x}}{2r}\right)=\frac{\Pi^2 \Lambda \mathrm{O} \Sigma.\,d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

48.

Habetur similiter $d.\left(\dfrac{\sqrt{u}}{2r}\right)=\dfrac{\Delta^2 \Phi \Psi \Omega\, d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$

49

Differentialis partialis quaecumque ex praedictis habet formam qua integralis finita (Y) exprimi possit per functiones (x), (u).

Ex aequatione differentiali

$$dY=\frac{\mathrm{X}\,d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}=\frac{\mathrm{X}\,1\,d\phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

praescripta (37.) deducitur $\mathrm{X}=\mathrm{X}\,1$.

Sit etiam $Y=\dfrac{\varepsilon\sqrt{x}}{2r}+\dfrac{\delta\sqrt{u}}{2r}+\rho\left(\dfrac{\sqrt{(4r-x).u}}{4r\sqrt{r}}\right)$ &c.ª

N.° 5. pag. 10.)

erit $X = \varepsilon \Pi^2 \Lambda O \Sigma + \delta \Delta^2 \Phi \Psi \Omega - \rho r \Gamma \Pi \Lambda \Sigma$
$+ \rho \Delta O \Phi \Psi \Omega +$ &c.ª (N.° 6.)

Sed ductis in se hisce factoribus, series prima quae inde producitur, habet in primo ejus termino (ϕ^{18}), et in ultimo (r^{18}); est ergo comparabilis cum seriebus functionis (X 1) modo jam explicato. (40.)

Id ipsum de seriebus ex reliquis differentialibus deductis demonstratur.

50

Haec integralis per functiones (x), (u) *determinatur, ut prima, aequationibus inter numeros indeterminatos.*

$$Y = \frac{\varepsilon \sqrt{x}}{2r} + \frac{\delta \sqrt{u}}{2r} + \frac{\rho \sqrt{(4r - x).u}}{4r\sqrt{r}} \text{ \&c.}^a$$

erit $X = \varepsilon \Pi^2 \Lambda O \Sigma +$ &c.ª

Eliminatis ex ordine numeris (ε), (δ), (ρ), &c.ª (a), (b), (c), &c.ª ut habeatur X = X 1, deducetur etiam aequatio finalis inter (s), (t), (z), per quam determinari poterunt caeteri numeri cum integrali finita (Y).

51

Devenire poterit $Y = 0$, *variabili* (ϕ) *remanente indeterminata.*

Substitutione valorum, habetur

$$\frac{\varepsilon \sqrt{x}}{2r} = \frac{\varepsilon \Pi \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi}$$

$$\frac{\delta \sqrt{u}}{2r} = \frac{\delta \Delta \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi}$$

$$\frac{\rho\sqrt{(4r-x).u}}{4r\sqrt{r}} = \frac{\rho\,\mathrm{O}\sqrt{\Gamma}}{\Delta\,\Pi}$$

$$\frac{\pi\sqrt{(4r-u).x}}{4r\sqrt{r}} = \frac{\pi\,\Psi\sqrt{\Gamma}}{\Delta\,\Pi}$$

$$\frac{\omega\sqrt{(r-x).u}}{2r\sqrt{r}} = \frac{\omega\,\Lambda\sqrt{\Gamma}}{\Delta\,\Pi}$$

$$\frac{\mu\sqrt{(r-u).x}}{2r\sqrt{r}} = \frac{\mu\,\Phi\sqrt{\Gamma}}{\Delta\,\Pi}$$

sed esse potest

$$\varepsilon\Pi + \delta\Delta + \rho\mathrm{O} + \pi\Psi + \omega\Lambda + \mu\Phi = 0$$

functiones enim istae sunt quarti gradus, et habentur sex coeficientes, quorum determinatione oritur aequatio

$$3\Pi + 3\Delta + 4\mathrm{O} - 4\Psi - \Lambda - \Phi = 0$$

et in ea variabilis (ϕ) manet indeterminata.

52

Cum ergo in aequationibus eliminantur numeri (ε), (δ), (ρ), (π), (ω), eliminatur etiam (μ), solumque relinquuntur aequationes inter (a), (b), (c), &c.ª quibus ut antea pervenitur ad aequationem finalem inter (s), (t), (z).

53

Integralis (Y) deducta vel per functionem (ϕ), vel per functiones (x), (u) semper est quantitas realis; nec objici sapienter potest numeros praedictos nullos valores reales nancisci, quod sequentibus propositionibus demonstratur, ne calculus nimis prolixus exigatur, ut utraque solutio vera pronuncietur.

54

In differentiali prima $dY = \frac{X\,d\phi}{R^2\sqrt{\Gamma}}$ *invenitur terminus, qui dividi non potest sine residuo per* (Δ), *et alter, qui dividi non potest sine residuo per* (Π).

In aequatione differentiali

$$dY = \frac{2R\Gamma\,dV + VR\,d\Gamma - 2V\Gamma\,dR}{R^2\sqrt{\Gamma}} \quad (\S.\ 37.)$$

continetur haec

$$dY = \frac{2\Gamma\,dV}{R\sqrt{\Gamma}} + \frac{V\,d\Gamma}{R\sqrt{\Gamma}} - \frac{2V\Gamma\,dR}{R^2\sqrt{\Gamma}}$$

cumque sit $R = \Delta\Pi$

$$dR = \Pi\,d\Delta + \Delta\,d\Pi$$

substitutione prodit

$$\frac{-2V\Gamma\,dR}{R^2\sqrt{\Gamma}} = \frac{-2V\Gamma\,d\Delta}{\Delta^2\Pi\sqrt{\Gamma}} - \frac{2V\Gamma\,d\Pi}{\Delta\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$$

et colligitur terminum $\left(\frac{-2V\Gamma\,d\Delta}{\Delta^2\Pi\sqrt{\Gamma}}\right)$ non esse divisibilem sine residuo per (Δ), nec $\left(\frac{-2V\Gamma\,d\Pi}{\Delta\Pi^2}\right)$ per (Π).

55

In functione (X I) sunt etiam termini

$(q\Phi\Psi\Lambda O\Sigma)$, $(s\Lambda O\Phi\Psi\Omega)$, $(tr\Gamma\Lambda O\Sigma)$, $(zr\Gamma\Phi\Psi\Omega)$, qui dividi non possunt sine residuo per (Δ) et (Π).

56

In functione (X I) non invenitur factor communis omnibus terminis.

Nulla etenim ex functionibus (Λ), (O), (Σ), (Φ) est factor communis, nec functiones istae habent inter se communem factorem.

57

In functione (X) deducta secundo modo sunt termini qui dividi non possunt sine residuo per (Δ) et alii qui non possunt dividi per (Π).

Primus terminus (Calc. pag. 10. N.° 6.) non est divisibilis sine residuo per (Δ), secundus non est divisibilis per (Π), &c.ª

58

Pars functionis (X I) *deduci non potest ex integrali finita.*

Si haec deductio foret possibilis, termini reliqui excluderentur, numerique illis adjuncti nullius essent valoris. Sed comparata functione (X I) cum (X) quae habetur (N.° 6. Calc. pag. 10.) omnes utriusque functionis termini inveniuntur ita dissimiles, ut non possit obtineri $X = X1$, nisi per series finitas variabilis (ϕ), et calculo supra explicato.

Observatur quaedam species similitudinis in terminis sequentibus

$$\frac{\rho \text{ dif. } \sqrt{(4r-x).u}}{4 r d\phi \sqrt{r}} = \rho \Delta \mathrm{O} \Phi \Psi \Omega - \rho r \Gamma \Pi \Lambda \Sigma$$

$$\frac{\omega \text{ dif. } \sqrt{(r-x).u}}{2 r d\phi \sqrt{r}} = \omega \Delta \Lambda \Phi \Psi \Omega - 4 \omega r \Gamma \Pi \mathrm{O} \Sigma$$

$$\text{et parte } (X1) = m \Delta \mathrm{O} \Phi \Psi \Omega + t r \Gamma \Lambda \mathrm{O} \Sigma$$
$$+ p \Delta \Lambda \Phi \Psi \Omega$$

non est autem vera haec similitudo cum sit impossibilis aequatio

$$- \rho \Pi \Lambda - 4 \omega \Pi \mathrm{O} = t \Lambda \mathrm{O}.$$

Apparet etiam similitudo in terminis

$$\frac{\pi \text{ dif. } \sqrt{(4r-u).x}}{4 r d\phi \sqrt{r}} = \pi \Pi \Psi \Lambda \mathrm{O} \Sigma - \pi r \Gamma \Delta \Phi \Omega$$

$$\text{et parte } (X1) = l \Pi \Psi \Lambda \mathrm{O} \Sigma + z r \Gamma \Phi \Psi \Omega$$

sed insuficiens; est enim impossibilis aequatio

$$- \pi \Delta = z \Psi.$$

Ut sit igitur $X1 = X$, (ε), (δ), (ρ), &c.ª (a), (b), (c), &c.ª veris valoribus numericis et rationalibus componi, necessum est.

59

Est itaque essentialis character functionis ($X1$) ejus forma terminorum ob quam dividi non potest sine residuo in omnibus terminis per (Δ) et (Π), atque etiam ita pendet à valoribus specialibus aliarum functionum (Δ), (Π), (Λ), &c.ª

ut non aliter quam per series variabilis (ϕ), integralis finita (Y) eliciatur.

Conditionibus his servatis, numeroque sufficienti terminorum stabilito, integralis necessario invenienda est duobus modis praefatis.

60

Infinitus est Problematum numerus quae solvi possunt.

Mutentur tantummodo termini nempe ultimus et penultimus in aequatione differentiali, et loco

$$t\,dT = \frac{t\,r\,u\,dx}{\sqrt{r\,x}}\,;\quad z\,dZ = \frac{z\,r\,x\,du}{\sqrt{r\,u}}$$

ponatur

$$1.^{\circ}\quad t\,dT = \frac{t\,u^2\,dx\sqrt{r\,x}}{r^2}\,;\quad z\,dZ = \frac{z\,x^2\,du\sqrt{r\,u}}{r^2}$$

$$2.^{\circ}\quad t\,dT = \frac{t\,u^3\,x\,dx\sqrt{r\,x}}{r^4}\,;\quad z\,dZ = \frac{z\,x^3\,u\,du\sqrt{r\,u}}{r^4}$$

$$3.^{\circ}\quad t\,dT = \frac{t\,u^4\,x^2\,dx\sqrt{r\,x}}{r^6}\,;\quad z\,dZ = \frac{z\,x^4\,u^2\,du\sqrt{r\,u}}{r^6}$$

et sic deinceps usque ad infinitum.

In unaquaque suppositione differet integralis finita (Y); differet etiam aequatio finalis inter numeros (s), (t), (z), et consequenter different valores omnium aliorum, qui ex ista deducuntur.

61

Per functiones assignatas solvitur Problema servatis omnibus conditionibus in Programmate praescriptis.

Functiones istae ut datae et formantes Hypothesim inspici debent; idque demonstrandum est (licet multis inutile videatur) per functiones

$$x = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Delta^2}\,; \quad u = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Pi^2}$$

propositum complete obtineri.

62

(x), (u) sunt functiones algebricae et rationales, et satisfit huic primae conditioni.

63

Integralis (Y) est etiam functio algebrica involvens quantitatem radicalem.

Satisfit huic secundae conditioni duabus formulis. (art. 2. et 3.)

64

Elici potest eliminatione variabilis (ϕ) aequatio algebrica et rationalis determinans relationem inter (x), (u), (r).

Haec est tertia conditio cui satisfieri posse demonstratur in sequentibus.

65

Valores factorum (a), (b), (c), &c.ª ipsa solutione determinari possunt.

Huic quartae conditioni satisfieri constat (art. 2. et 3.)

66

Idem est originis punctum variabilium.

Cum ex valore variabilis (ϕ) habetur $\Gamma = 0$, erit etiam $x = 0$, $u = 0$, $Y = 0$; omnesque termini (A), (B), (C), (E), &c.ª evanescunt: et haec est quinta conditio pariter observata.

67

AEquatio $a\,r\,A + b\,r\,B + c\,r\,C + e\,r\,E$, &c.ª $= Y$ *habet valores omnium terminorum veros et reales inter limites* $x = 0$, $x = r$, *et inter limites* $u = 0$, $u = r$.

Variabiles (x), (u) crescere possunt à (o) usque ad (r): ex valore enim majore termini multi devenient imaginarii. Solum ergo inter hos limites habet aequatio omnes terminos reales, quae est sexta conditio.

68

Nulla ex differentialibus $(d\,A)$, $(d\,B)$, $(d\,C)$, &c.ª $(d\,S)$, $(d\,T)$, $(d\,Z)$ *habere potest integralem finitam.*

De terminis à $(d\,A)$, usque ad $(d\,G)$ compositis una sola variabili cum ejus differentiali, id satis compertum. Caeteri à $(d\,L)$ usque ad $(d\,Z)$ in quibus variabiles sunt permixtae pendent à primis connexione necessaria, ut tantum ex eorum summa erui possit integralis finita; et haec septima et ultima conditio cui satisfit.

69

Ex praedictis igitur abunde liquet in solutione data Problemmatis satisfieri omnibus conditionibus observandis, et in Programmate praescriptis.

70

Potest deduci eliminatione (ϕ) aequatio algebrica et rationalis inter variabiles (x), (u), (r), ut sequentibus demonstratur.

71

Ex aequatione $x = \frac{4 \Gamma r^2}{\Delta^2}$

eruitur $\Delta^2 x - 4 r^2 \Gamma = 0$.

72

AEquatio haec eadem est cum ea quae habetur (N.° 1. Calc. pag. 11.) substitutione valorum (Δ^2) et (Γ).

73

Si aequatio praecedens eadem cum sequenti supponatur,

$$a = x$$
$$b = 8 r x + 24 r^2$$
$$c = 22 r^2 x + 308 r^3.$$

erit $a = x$, $b = 8 r x + 24 r^2$, $c = 22 r^2 x + 308 r^3$. &c.ª

74

Similiter ex aequatione $u = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Pi^2}$ deducitur aequatio (N.° 3.) qua posita aequali cum aequatione (N.° 4.) habebitur

$$A = 9\,u$$
$$B = 48\,r\,u + 24\,r^2$$
$$E = 46\,r^2\,u + 308\,r^3.$$
&c.[a]

75

Ex aequationibus (N.° 2. et 4.) deducitur aequatio (N.° 5.) eliminatione primi termini.

76

AEquatio antecedens ponatur eadem cum sequenti (N.° 6.)

$$\text{erit } A\,1 = b\,A - a\,B$$
$$B\,1 = e\,A - a\,E$$
$$E\,1 = f\,A - a\,F$$
&c.[a]

77

Ex aequationibus (N.° 2. et 6.) prodit aequatio (N.° 7.) eadem cum (N.° 8.)

AEquatio (N.° 6.) multiplicetur per (ϕ), ut eliminetur primus terminus et habeatur aequatio (N.° 7.), quae si ponatur eadem cum (N.° 8.)

$$\begin{aligned} \text{erit } A\,2 &= b\,A\,1 - a\,B\,1 \\ B\,2 &= e\,A\,1 - a\,E\,1 \\ E\,2 &= f\,A\,1 - a\,F\,1 \\ &\text{\&c.}^{a} \end{aligned}$$

78

Hoc eodem ordine adhibito ex aequationibus (N.° 6. et 8.) prodit aequatio (N.° 9.) eadem cum (N.° 10.); itidem ex aequationibus (N.° 6. et 10.) prodit (N.° 11.) eadem cum (N.° 12.); ex aequationibus (N.° 10. et 12.) prodit (N.° 13.) eadem cum (N.° 14.); sicque procedendo possibile est pervenire usque ad eliminationem termini continentis potestatem primam variabilis (ϕ), quod ut clarius perspiciatur comparetur aequatio

$$A\,5\,\phi^5 + B\,5\,\phi^4 + E\,5\,\phi^3 + \text{\&c.}^a = 0$$

cum aequatione $A\,3\,\phi^6 + B\,3\,\phi^5 + E\,3\,\phi^4 + \text{\&c.}^a = 0$ prodibit

$$\left\{\begin{matrix} B\,3.A\,5\,(\phi^5) + E\,3.A\,5\,(\phi^4) + F\,3.A\,5\,(\phi^3) + \text{\&c.}^a \\ -A\,3.B\,5 \qquad -A\,3.E\,5 \qquad -A\,3.F\,5 \end{matrix}\right\} = 0$$

eadem cum aequatione

$$A\,6\,(\phi^5) + B\,6\,(\phi^4) + E\,6\,(\phi^3) + \text{\&c.}^a = 0$$

Ex aequationibus $A\,5\,(\phi^5) + B\,5\,(\phi^4) + \text{\&c.}^a = 0$

$$A\,6\,(\phi^5) + B\,6\,(\phi^4) + \text{\&c.}^a = 0$$

orietur $\left\{\begin{matrix} B\,5.A\,6\,(\phi^4) + E\,5.A\,6\,(\phi^3) + \text{\&c.}^a \\ -A\,5.B\,6 \qquad -A\,5.E\,6 \end{matrix}\right\} = 0$

eadem cum $A\,7\,(\phi^4) + B\,7\,(\phi^3) + \text{\&c.}^a = 0$

Lex functionum hisce aequationibus exhibetur

$$A1 = bA - aB$$
$$A2 = bA1 - aB1$$
$$A3 = B1.\,A2 - A1.\,B2$$
$$A4 = B1.\,A3 - A1.\,B3$$
$$A5 = B3.\,A4 - A3.\,B4$$
$$A6 = B3.\,A5 - A3.\,B5$$
$$A7 = B5.\,A6 - A5.\,B6$$
$$A8 = B5.\,A7 - A5.\,B7$$
&c.ª

$$B1 = eA - aE$$
$$B2 = eA1 - aE1$$
$$B3 = E1.\,A2 - A1.\,E2$$
$$B4 = E1.\,A3 - A1.\,E3$$
$$B5 = E3.\,A4 - A3.\,E4$$
$$B6 = E3.\,A5 - A3.\,E5$$
$$B7 = E5.\,A6 - A5.\,E6$$
$$B8 = E5.\,A7 - A5.\,E7$$
&c.ª

$$E1 = fA - aF$$
$$E2 = fA1 - aF1$$
$$E3 = F1.\,A2 - A1.\,F2$$
$$E4 = F1.\,A3 - A1.\,F3$$
$$E5 = F3.\,A4 - A3.\,F4$$
$$E6 = F3.\,A5 - A3.\,F5$$
$$E7 = F5.\,A6 - A5.\,F6$$
$$E8 = F5.\,A7 - A5.\,F7$$
&c.ª

et in eis progressio calculi uniformis clarè demonstratur.

80

Valores functionum $(A\,1)$, $(B\,1)$, $(E\,1)$, &c.ª ex datis (a), (b), (e), &c.ª (A), (B), (E), &c.ª eliciuntur; valores $(A\,2)$, $(B\,2)$, $(E\,2)$, &c.ª ex $(A\,1)$, $(B\,1)$, $(E\,1)$, &c.ª et sic deinceps, erit itaque

$$\begin{aligned}
A\,1 &= bA - aB \\
B\,1 &= eA - aE \\
E\,1 &= fA - aF \\
F\,1 &= gA - aG \\
G\,1 &= hA - aH
\end{aligned}$$

&c.ª

et hinc deducetur

$$\begin{aligned}
A\,2 &= b^2(A) - ab(B) + a^2(E) \\
&\quad - ae \\
B\,2 &= be(A) - ae(B) + a^2(F) \\
&\quad - af \\
E\,2 &= bf(A) - af(B) + a^2(G) \\
&\quad - ag \\
F\,2 &= bg(A) - ag(B) + a^2(H) \\
&\quad - ah
\end{aligned}$$

&c.ª

Elicietur etiam ex his

$$\begin{array}{lllll}
A3 = -ae^2(A^2) & + abeB(A) & - a^2e(B^2) & + a^2bE(B) & - a^3(E^2) \\
\quad + abf & - a^2fB & & + a^3F & \\
 & + 2a^2eE & & & \\
 & - ab^2E & & & \\
 & - a^2bF & & &
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
B3 = & -aef(A^2) + abfB(A) - a^2f(B^2) + a^2bF(B) - a^3F(E) \\
& +abg \quad - a^2gB \qquad\qquad + a^3G \\
& \qquad\quad + a^2fE \\
& \qquad\quad + a^2eF \\
& \qquad\quad - ab^2F \\
& \qquad\quad - a^2bG
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E3 = & -aeg(A^2) + abgB(A) - a^2g(B^2) + a^2bG(B) - a^3G(E) \\
& +abh \quad - a^2hB \qquad\qquad + a^3H \\
& \qquad\quad + a^2gE \\
& \qquad\quad - ab^2G \\
& \qquad\quad + a^2eG \\
& \qquad\quad - a^2bH
\end{aligned}
$$

&c.ª

81

Calculi progressus formam aliorum valorum demonstrabit et ex inventis facile elici potest $(F3)$, $(G3)$ &c.ª

82

Sint primae aequationes

$$a\phi + b = 0$$

$$A\phi + B = 0$$

aequatio deducta inter (x), (u), (r) *erit*

$$A1 = bA - aB = 0$$

Erit etiam $\left\{ \begin{array}{l} e = 0,\ f = 0,\ \&c.^a \\ E = 0,\ F = 0,\ \&c.^a \end{array} \right\}$

83

Sint aequationes secundi gradus

$$a\phi^2 + b\phi + e = 0$$

$$A\phi^2 + B\phi + E = 0$$

Deducetur ex eis 1.° $\left\{\begin{array}{l} A\,1\,\phi + B\,1 = 0 \\ A\,2\,\phi + B\,2 = 0 \end{array}\right\}$

2.° $A\,3 = B\,1 . A\,2 - A\,1 . B\,2 = 0$

quae est aequatio finalis inter (x), (u), (r) eritque etiam

$$\left\{\begin{array}{l} f = 0 \ldots\ldots g = 0,\ \&c.^a \\ F = 0 \ldots\ldots G = 0,\ \&c.^a \end{array}\right\}$$

84

Si aequationes primae sunt tertii gradus erit aequatio finalis $A\,5 = B\,3 . A\,4 - A\,3 . B\,4 = 0$, ut ex antecedentibus liquet.

85

In aequationibus propositis quae sunt octavi gradus, aequatio finalis deducta est $A\,15 = 0$.

Continuetur eliminatio variabilis (ϕ) (78) et elicietur

$$1.^{\circ} \left\{\begin{array}{l} A\,9\ (\phi^3) + B\,9\ (\phi^2) + \&c.^a = 0 \\ A\,10\,(\phi^3) + B\,10\,(\phi^2) + \&c.^a = 0 \end{array}\right\}$$

$$2.^{\circ} \left\{\begin{array}{l} A\,11\,(\phi^2) + B\,11\,(\phi) + \&c.^a = 0 \\ A\,12\,(\phi^2) + B\,12\,(\phi) + \&c.^a = 0 \end{array}\right\}$$

$$3.^{\circ}\begin{Bmatrix} A\,13\,(\phi) + B\,13 = 0 \\ A\,14\,(\phi) + B\,14 = 0 \end{Bmatrix}$$

atque exinde $A\,15 = B\,13 . A\,14 - A\,13 . B\,14 = 0$

86

Maximus gradus ad quem evehuntur potestates variabilium (x), (u) exhibetur in tabula sequenti:

In A 1 .... habetur	u
A 2	u
A 3	u^2
A 4	u^3
A 5	u^5
A 6	u^7
A 7	u^{12}
A 8	u^{17}
A 9	u^{29}
A 10	u^{41}
A 11	u^{70}
A 12	u^{99}
A 13	u^{169}
A 14	u^{239}
A 15	u^{408}

Haec tabula construitur per demonstrata. (§. 79.) In $(A\,1)$, $(A\,2)$ maximus gradus (u) est primus. (§. 80.)

Ex $(A\,1.)$, $(A\,2)$ eliciuntur exponentes (u) in $(A\,3)$ $(A\,4)$ hisce aequationibus

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

Ex ($A\,3$), ($A\,4$) eliciuntur in ($A\,5$), ($A\,6$) aequationibus

$$2 + 3 = 5$$
$$2 + 5 = 7$$

Ex ($A\,5$), ($A\,6$) in ($A\,7$), ($A\,8$) aequationibus

$$5 + 7 = 12$$
$$5 + 12 = 17$$

similique modo proceditur in sequentibus.

Cum functiones (x) et (u) sint homogeneae, eumdem gradum obtinebunt in functione quacumque ex ipsis composita. Propterea in ($A\,3$) $=$ o, (u) et (x) evehuntur ad secundum gradum; similiter in ($A\,5$) evehuntur ad quintum; in ($A\,7$) ad gradum duodecimum, et in ($A\,15$) ad gradum (408.)

87

AEquatio rationalis, et algebrica inter (x), (u), (r) *ex valoribus praefixis deprompta, et octavo gradu valdè superior, sequenti forma exprimi poterit*

$$A\,15 = P\,(u^{408}) + Q\,r\,x\,(u^{407}) + R\,r^2\,x^2\,(u^{406}) + \ldots$$
$$+ S\,r^{407}\,x^{407}\,(u) + t\,r^{408}\,x^{408} = 0$$

Ex hucusque demonstratis propositio consequitur; etenim 1.° si supponitur $x = 0$, semper debet esse $u = 0$; quod solum in aequatione praedicta verum est, cum reducatur ad istam $P\,(u^{408}) = 0$.

2.° Hanc formam sortiri debent functiones

$$P = a\,(x^{408}) + b\,r\,(x^{407}) + \ldots\ldots + m\,(r^{408})$$
$$Q = c\,(x^{407}) + e\,r\,(x^{406}) + \ldots\ldots + n\,(r^{407})$$
$$R = f\,(x^{406}) + g\,r\,(x^{405}) + \ldots\ldots + p\,(r^{406})$$
$$S = h\,x + q\,r$$

in quibus literae minusculae denotant factores pure numericos.

Termini namque aequationis principalis sunt ex calculi legibus homogenei; quod ut obtineatur, functiones (P), (Q), &c.ª talem formam habere necesse est.

3.° AEquatio principalis uniformis est etiam in quacumque hypothesi; qua propter pro functionibus (x), (u) in quibus (ϕ) ad quartum gradum elevatur, erit

$$A\,7 = P\,(u^{12}) + Q\,r\,x\,(u^{11}) + R\,r^2\,x^2\,(u^{10}) + \ldots\ldots + S\,r^{11}\,x^{11}\,(u) + t\,r^{12}\,x^{12} = 0$$

$$P = a\,x^{12} + b\,r\,x^{11} + \ldots\ldots\ldots + m\,r^{12}$$
$$Q = c\,x^{11} + e\,r\,x^{10} + \ldots\ldots\ldots + n\,r^{11}$$
$$R = f\,x^{10} + g\,r\,x^{9} + \ldots\ldots\ldots + p\,r^{10}$$
$$S = h\,x + q\,r$$

ac tandem ex functionibus (ϕ) secundi gradus deducetur aequatio $A\,3 = P\,u^2 + Q\,r\,x\,(u) + R\,x^2 = 0$, eritque

$$P = a\,x^2 + b\,r\,x + m\,r^2$$
$$Q = c\,x + e\,r$$
$$R = t\,r^2$$
$$S = 0$$

Hic observare oportet functiones (P), (Q), (R), &c.ª ex valoribus (Γ), (Δ), (Π) oriri, et consequenter infinitas admittere variationes.

88

AEquatio $\dfrac{3\,r}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\,r\sqrt{4\,r - x}}{\sqrt{r\,x}} - \dfrac{r\sqrt{r - x}}{\sqrt{r\,x}}$

$$= -\frac{3\,r}{\sqrt{u}} + \frac{2\,r\sqrt{4\,r - u}}{\sqrt{r\,u}} + \frac{r\sqrt{r - u}}{\sqrt{r\,u}}$$

ab irrationalitate liberatur per aequationem praecedentem inter (x), (u), (r) *et in illa continetur.*

Quo pacto aequatio haec ab irrationalitate possit liberari per methodos hucusque notas non apparet; sed si fiat

$$x = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Delta^2};\quad u = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Pi^2},$$

aequatio ista certissima invenietur. (51.) Cumque eliminata (ϕ) aequatio rationalis eliciatur inter (x), (u), (r) in hac continebitur et illa involvens quantitates radicales; undè innotescit via perducendi ad formam rationalem aequationes propositae similes.

89

Integratio aequationis differentialis designatae (N.° 1. Calc. pag. 13.) *pendet etiam ab aequatione rationali praedicta, et in ipsa continetur.*

In aequatione differentiali proposita, variabiles (x), (u) earumque differentiales ($d\,x$), ($d\,u$) ita sunt permixtae, et combinatae, ut nec earum separatio possibilis videatur, nec assignari possit aequatio integralis finita respondens.

In sequentibus autem demonstrabitur aequationem differentialem ex aequationibus

$$x = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Delta^2};\quad u = \frac{4\,\Gamma\, r^2}{\Pi^2}$$

oriri, sicuti et ex eis deducitur aequatio rationalis finita inter (x), (u), (r). Haec igitur applicatio methodi enunciatae vana et inutilis non judicabitur.

90

Functio (Σ) per functiones (Δ), (Λ), (O), (Π), (Φ) determinatur (N.° 2. Calc. pag. 12.)

Valores functionum designati (pag. 1.ª et 2.ª Calc.)

substituuntur (N.° 1. Calc. pag. 12.) hoc ordine

1.° valor functionis $\Delta \times - 3.\ 4225$

2.° .... $\Lambda \times \quad 2197$

3.° .... $O \times - 4.\ 2704$

4.° .... $\Pi \times - 3.\ 3.\ 507$

5.° .... $\Phi \times \quad 3.\ 3.\ 2873$

et elicietur valor functionis $\Sigma\, r^2 \times 3.\ 4.\ 2197.$

91

Habebitur etiam in aequatione (N.° 5.) valor functionis (Ω).

In (N.° 4.) substituuntur eodem ordine valores functionum (Δ), (Λ), &c.ª proditque valor functionis

$$\Omega\, r^2 \times 3.\ 4.\ 2197.$$

92

Invenientur praeterea aequationes. (N.° 3. et 6.)

Si aequationes (N.° 2. et 3.) dividuntur per $\sqrt{\Gamma}$ substituendo

$$1.^{\circ}\ \frac{2\,r}{\sqrt{x}} \text{ pro } \frac{\Delta}{\sqrt{\Gamma}}$$

$$2.^{\circ}\ \frac{2\sqrt{r^2 - r\,x}}{\sqrt{x}} \ldots\ldots \frac{\Lambda}{\sqrt{\Gamma}}$$

$$3.^{\circ}\ \frac{\sqrt{4\,r^2 - r\,x}}{\sqrt{x}} \ldots\ldots \frac{O}{\sqrt{\Gamma}}$$

$$4.^{\circ}\ \frac{2\,r}{\sqrt{u}} \ldots\ldots \frac{\Pi}{\sqrt{\Gamma}}$$

$$5.^{\circ}\ \frac{2\sqrt{r^2 - r\,u}}{\sqrt{u}} \ldots\ldots \frac{\Phi}{\sqrt{\Gamma}}$$

eruentur aequationes praedictae.

93

Ex his demonstratur aequatio (N.° 1. Calc. pag. 13.)

Substituendi sunt valores (x), (dx), $(\sqrt{r-x})$......
$(\sqrt{4r-x})$, $(\sqrt{x})$, valores etiam (u), (du), $(\sqrt{r-u})$
$(\sqrt{4r-u})$, $(\sqrt{u})$, ut videtur (N.° 2. et sequentibus) prodibuntque aequationes

$$\frac{dx}{\sqrt{(4r-x).(r-x).x}} = \frac{2\,d\phi.\,\Sigma}{\sqrt{\Gamma}}$$

$$\frac{du}{\sqrt{(4r-u).(r-u).u}} = \frac{2\,d\phi.\,\Omega}{\sqrt{\Gamma}}$$

Dividantur aequationes istae, prima per aequationem (N.° 3. Calc. pag. 12.) et secunda per aequationem (N.° 6. Calc. pag. 12.); multiplicatisque per $\sqrt{xu}$ numeratoribus, et denominatoribus in primis membris utriusque, habentur aequationes (N.° 5. et 6. Calc. pag. 13.), quarum secunda membra cum sint omninò eadem, deducitur aequatio proposita.

ARTICULUS IV.

94

Suprà asseruimus (§. 41.) summam difficultatem calculi ex functionibus provenire, per quas solutio Problematis propositi obtinetur, et nullo modo ex methodo pro integrali invenienda. Ulterius cum ex ipsa propositione conjicere liceat, integrationem aequationis ex quatuor arcubus circularibus compositae cum duobus ellipticis, duobusque hyperbolicis opus non esse simpliciori calculo exequendum; satis erit ut veritas solutionis et methodi stabiliatur, Problema aliud simile solvere, et calculum perficere demptis arcubus ellipticis, et hyperbolicis.

95

Hoc pacto, Problema ad simplicem formam reducitur, numeri afficientes terminos per aequationes habentur, methodus qua infinita alia solvi possunt demonstratur, et via ostenditur ad applicationes consequentes eliciendas.

96

Quaeritur solutio Problematis

$$\frac{a r^2 dx}{2.\sqrt{(r-x).x}} + \frac{b r^2 dx}{2.\sqrt{(4r-x).x}} + \frac{e r^2 du}{2.\sqrt{(r-u).u}}$$

$$+ \frac{f r^2 du}{2.\sqrt{(4r-u).u}} + \frac{tu}{r} dx\sqrt{(4r-u).u}$$

$$+ \frac{zx}{r} du\sqrt{(4r-x).x} = dY.$$

Fiat $x = \frac{\Gamma}{\Delta}$; $u = \frac{\Gamma}{\Pi}$

$$\Delta = -2\phi + 3r;\ \Pi = 2\phi + 7r$$

$$\Gamma = -\phi^2 - 2r\phi + 3r^2 = (\phi + 3r).(-\phi + r)$$

et eruetur solutio hujus Problematis omnibus conditionibus servatis quae in Programmate praescribuntur.

97

Quantitates radicales terminorum exprimuntur per functiones rationales, $(\sqrt{\Gamma})$ unicè radicali permanente.

Habetur enim

$$1.^{\circ}\ +\sqrt{(r-x).x}=\frac{\Lambda\sqrt{\Gamma}}{\Delta}=\frac{\phi.\sqrt{-\phi^2-2r\phi+3r^2}}{-2\phi+3r}$$

$$2.^{\circ}\ +\sqrt{(4r-x).x}=\frac{\mathrm{O}\sqrt{\Gamma}}{\Delta}=\frac{(-\phi+3r).\sqrt{-\phi^2-2r\phi+3r^2}}{-2\phi+3r}$$

$$3.^{\circ}\ +\sqrt{(r-u).u}=\frac{\Phi\sqrt{\Gamma}}{\Pi}=\frac{(+\phi+2r).\sqrt{-\phi^2-2r\phi+3r^2}}{+2\phi+7r}$$

$$4.^{\circ}\ +\sqrt{(4r-u).u}=\frac{\Psi\sqrt{\Gamma}}{\Pi}=\frac{(+\phi+5r).\sqrt{-\phi^2-2r\phi+3r^2}}{+2\phi+7r}$$

quod demonstratur ut in Art. I.

Notari tamen debet (ϕ), $(\phi+2r)$ esse quantitates negativas ex puncto originis $(3r+\phi)=0$, ubi $x=0$, $u=0$; et esse positivas ex puncto originis $(r-\phi)=0$, ubi etiam $x=0$, $u=0$.

98

Sunt etiam functiones derivatae ex (Γ), (Δ), (Π), ut ex §. antecedenti liquet, quae sequentibus aequationibus designantur

$$\Lambda=\phi$$

$$\mathrm{O}=-\phi+3r$$

$$\Phi=\phi+2r$$

$$\Psi=\phi+5r$$

eumque sint primi gradus functiones praefatae, Problema ad simpliciorem formam reduci non potest.

99

Differentiales (x), (u) *habentur per aequationes*

$$1.^a \; dx = \frac{\Lambda O . 2 d\phi}{\Delta^2}$$

$$2.^a \; du = \frac{\Phi \Psi . 2 d\phi}{\Pi^2}$$

Cum sint $x = \frac{\Gamma}{\Delta}$; $u = \frac{\Gamma}{\Pi}$, deducetur

$$dx = \frac{\Delta d\Gamma - \Gamma d\Delta}{\Delta^2}$$

$$du = \frac{\Pi d\Gamma - \Gamma d\Pi}{\Pi^2}$$

ex quibus prodeunt aequationes superiores substitutionibus peractis ut Art. I.

Rursusque notandum quantitates (Λ), (Φ) esse negativas crescentibus (x), (u) ex puncto originis $3r + \phi = 0$, et contrario esse positivas ex puncto originis $r - \phi = 0$.

100

Functiones (Γ), (Δ), (Π) *per analysim Diophanti inveniuntur, sicuti et illae quae habentur.* (14.)

Sit $x = \frac{\Gamma r}{\Delta}$

erit $\frac{r - x}{r} = \frac{\Delta - \Gamma}{\Delta} = \frac{\Lambda^2}{\Delta}$

$$\frac{4r - x}{r} = \frac{4\Delta - \Gamma}{\Delta} = \frac{O^2}{\Delta}$$

Sit etiam $u = \frac{\Gamma r}{\Pi}$

erit $\frac{r - u}{r} = \frac{\Pi - \Gamma}{\Pi} = \frac{\Phi^2}{\Pi}$

$$\frac{4r - u}{r} = \frac{4\Pi - \Gamma}{\Pi} = \frac{\Psi^2}{\Pi}$$

Hinc deducere licet aequationes

$$\Delta - \Gamma = \Lambda^2$$
$$4\Delta - \Gamma = O^2$$
$$\Pi - \Gamma = \Phi^2$$
$$4\Pi - \Gamma = \Psi^2$$

rursusque istas

$$\Gamma = \Delta - \Lambda^2$$
$$\Gamma = 4\Delta - O^2$$
$$\Gamma = \Pi - \Phi^2$$
$$\Gamma = 4\Pi - \Psi^2$$
$$3\Delta = -\Lambda^2 + O^2$$
$$\Delta = \Pi + \Lambda^2 - \Phi^2$$
$$\Delta = 4\Pi + \Lambda^2 - \Psi^2$$
$$3\Pi = -4\Lambda^2 + O^2 + 3\Phi^2$$
$$3\Pi = -\Phi^2 + \Psi^2$$

et ultimo deducitur aequatio finalis

$$-4\Lambda^2 + O^2 + 4\Phi^2 - \Psi^2 = 0$$

ut ultima aequatio vera obtineatur, inter plurimas haec hypothesis praefertur

$$\Lambda = \phi + \delta r$$
$$O = \phi + \varepsilon r$$
$$\Phi = \phi + \omega r$$
$$\Psi = \phi + \pi r$$

et habebitur

$$-4\Lambda^2 = -4\phi^2 - 8\delta r\phi - 4\delta^2 r^2$$
$$+O^2 = +\phi^2 + 2\varepsilon r\phi + \varepsilon^2 r^2$$
$$+4\Phi^2 = +4\phi^2 + 8\omega r\phi + 4\omega^2 r^2$$
$$-\Psi^2 = -\phi^2 - 2\pi r\phi - \pi^2 r^2$$

AEquatio ergo finalis per sequentes vera obtinebitur

$$\varepsilon = 4\delta - 4\omega + \pi$$
$$\varepsilon^2 - 4\delta^2 + 4\omega^2 - \pi^2 = 0$$

primae ad quadratum elevatae addatur secunda

$$\begin{array}{l} -\varepsilon^2 + 16\delta^2 - 32\,\omega(\delta) + 16\,\omega^2 - 8\,\pi\omega + \pi^2 = 0 \\ \qquad\qquad + 8\,\pi \end{array}$$

$$+\varepsilon^2 - 4\delta^2 + + * \quad + 4\omega^2 + \quad * - \pi^2 = 0$$

et deducentur aequationes

$$3\delta^2 - 8\omega\delta + 5\omega^2 + (2\delta - 2\omega).\,\pi = 0$$

$$\pi = \frac{5\omega^2 - 8\omega\delta + 3\delta^2}{2.(\omega - \delta)} = \frac{5\omega}{2} - \frac{3\delta}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{5\delta}{2} - \frac{3\omega}{2}$$

Nunc verò si fit $\omega = 2$, $\delta = 0$, prodeunt valores praefixi functionibus (Γ), (Δ), (Π).

101

Termini aequationis differentialis (96.) exprimi possunt per ($d\,\phi$) et functiones (ϕ) quemadmodum et illi aequationis differentialis. (Art. II.)

Elicietur enim per substitutiones

$$1.^{\circ}\ \frac{+\,a\,r^3\,O\,d\,\phi}{\Delta\,\sqrt{\Gamma}} = +\,a\,r\,d\,A = \frac{+\,a\,r^3\,d\,x}{2\,\sqrt{(r-x)\,.\,x}}$$

$$2.^{\circ}\ \frac{+\,b\,r^3\,\Lambda\,d\,\phi}{\Delta\,\sqrt{\Gamma}} = +\,b\,r\,d\,B = \frac{+\,b\,r^3\,d\,x}{2\,\sqrt{(4\,r-x)\,.\,x}}$$

$$3.^{\circ}\ \frac{+\,e\,r^3\,\Psi\,d\,\phi}{\Pi\,\sqrt{\Gamma}} = +\,e\,r\,d\,E = \frac{+\,e\,r^3\,d\,u}{2\,\sqrt{(r-u)\,.\,u}}$$

$$4.^{\circ}\ \frac{+\,f\,r^3\,\Phi\,d\,\phi}{\Pi\,\sqrt{\Gamma}} = +\,f\,r\,d\,F = \frac{+\,f\,r^3\,d\,u}{\sqrt{(4\,r-u)\,.\,u}}$$

$$5.^{\circ}\ \frac{+\,t\,\Gamma\,\Lambda\,O\,\Psi\,d\,\phi\,\sqrt{\Gamma}}{\Delta^2\,\Pi^2} = \frac{+\,t\,r\,d\,T}{2} = \frac{+\,t\,u\,d\,x\,\sqrt{(4\,r-u)\,.\,u}}{2}$$

$$6.^{\circ}\ \frac{+\,z\,\Gamma\,\Phi\,\Psi\,O\,d\,\phi\,\sqrt{\Gamma}}{\Delta^2\,\Pi^2} = \frac{+\,z\,r\,d\,Z}{2} = \frac{+\,z\,x\,d\,u\,\sqrt{(4\,r-x)\,.\,x}}{2}$$

Quatuor termini $d\,A$, $d\,B$, $d\,F$, $d\,E$ sunt differentiales sectorum circularium, qui ex origine ejusdem diametri ($2\,r$) computati referuntur ad abscissas ($2\,x$), ($\frac{1}{2}\,x$), ($2\,u$), ($\frac{1}{2}\,u$) inter se valde diversas.

Termini (T), (Z) repraesentantur ut areae curvilineae. In prima (T), abscissa est (x), ordinata ..... $\frac{u}{r}\ \sqrt{(4\,r-u)\,.\,u}$. In secunda ($Z$), abscissa est ($u$), ordinata $\frac{x}{r}\ \sqrt{(4\,r-x)\,.\,x}$.

102

Termini ordine ostenduntur (pag. 14. Calc. N.° 1. et 2.) ita ut, terminus quicumque in (N.° 2) aequalis sit respondenti in (N.° 1.).

103

Cum esse debeat $dY = \frac{X\,1\,d\phi}{\Delta^2\,\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$

habetur (N.° 3.)

$$X\,1 = a r^3\, O\, \Delta\, \Pi^2 + b r^3\, \Lambda\, \Delta\, \Pi^2 + \&c.^a$$

et haec est functio deducta ex primo membro aequationis differentialis.

104

Si $Y = \frac{2V\sqrt{\Gamma}}{\Delta\,\Pi}$ exprimatur per functiones (ϕ),

erit $V = \varepsilon\,\phi^4 + \delta\, r\,\phi^3 + \rho\, r^2\,\phi^2 + \pi\, r^3\,\phi + \omega\, r^4$.

Ex demonstratis (Art. II.) colligitur

$$1.^{\circ} + dY = \frac{+VRd\Gamma + 2R\Gamma dV - 2V\Gamma dR}{\Delta^2\,\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$$

$$2.^{\circ} + dY = \frac{X\,d\phi}{\Delta^2\,\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$$

$$3.^{\circ}\ X = VR.\frac{d\Gamma}{d\phi} + 2R\Gamma.\frac{dV}{d\phi} - 2V\Gamma.\frac{dR}{d\phi}$$

$$4.^{\circ}\ X = X\,1$$

Functio igitur (X) ex secundo membro aequationis differentialis deducta eadem fieri debet cum functione (X 1) per aequationes inter numeros indeterminatos.

Hoc autem obtineri calculo constat; etenim (N.° 4. 5. 6.) habentur valores $\left(+ V R . \frac{d \Gamma}{d \phi}\right)$, $\left(+ 2 R \Gamma . \frac{d V}{d \phi}\right)$, $\left(- 2 V \Gamma . \frac{d R}{d \phi}\right)$, ex quorum summa depromitur functio (X). (N.° 7.)

Ulterius (pag. 15.) termini functionis (X 1) exprimuntur per series finitas variabilis (ϕ).

Ultima denique series est functio (X) quacum anteriores sunt comparandae.

105

Comparatione instituta oriuntur aequationes octo inter numeros indeterminatos.

Habentur aequationes istae pag. 16. Calculi.

AEquatio prima notata ($1.^a\ \varepsilon$) oritur ex terminis primis serierum, dempto factore communi (ϕ^7), (pag. 15. Calc.) AEquatio secunda per (2) divisa notatur $\left(\frac{2.^a\ \varepsilon}{2}\right)$ et nascitur ex secundis terminis serierum comparatis, factore communi ($r\ \phi^6$) sublato.

AEquationes reliquae originem similiter trahunt ex comparatione sequentium terminorum; ut facile quisque per (pag. 15. Calc.) comprobabit.

106

Eliminatione (ε) *octo aequationes ad septem reducuntur.*

Eliminatio (ε) ostenditur pag. 17. Calculi.

AEquatio prima (δ) divisa per (2) et notata $\left(\frac{1.^a\,\delta}{2}\right)$ transcribitur ex (pag. 16.).

AEquatio secunda designata ($2.^a\,\delta$) deducitur ex $\left(\frac{2.^a\,\varepsilon \times 6 - 1.^a\,\varepsilon \times 13}{2}\right)$: simili artificio pervenitur usque ad aequationem ($5.^a\,\delta$).

Habentur ergo quinque aequationes cum (δ) duaeque ($1.^a\,\rho$), $\left(\frac{1.^a\,\pi}{3}\right)$ in pag. 16; sunt itaque aequationes septem.

107

Eliminatione (δ) *habentur aequationes sex.*

Eliminationes (δ) pag. 18. exhibentur.

AEquatio prima ($1.^a\,\rho$) ex pag. 16. transcribitur. Secunda ($2.^a\,\rho$) profluit ex aequationibus $\left(\frac{1.^a\,\delta \times 16 - 2.^a\,\delta \times 63}{2}\right)$; sicque habentur quinque aequationes pro (ρ), et una pro (π) in pag. 16. scripta.

108

Eliminata (ρ) *quinque tantum aequationes remanent.*

Pag. 19. continet quatuor aequationes pro (π) et unam pro (a).

AEquatio $\left(\frac{1.^a\,\pi}{3}\right)$ transcripta est ex pag. 16.

109

Ex eliminatione (π) *quatuor eruuntur aequationes.*

In pag. 20. Calc. continentur pro (ω) aequationes tres, et prima pro (a) habetur pag. 19.

110

Eliminatio (ω) *producit aequationes tres continentes* (a).

Hoc totum ostenditur pag. 20.

AEquatio $\left(\frac{1.^a\,a}{6}\right)$ transcribitur ex pag. 19. divisa per (6). AEquationes reliquae ($2.^a\,a$), ($3.^a\,a$) ex eliminatione (ω) nascuntur.

111

Ex tribus aequationibus pro (a), *duo pro* (b) *proveniunt.*

Haec reductio ostenditur pag. 21. cum eliminatione (a).

112

Elicitur denique aequatio finalis pro (e).

Ostenditur etiam (pag. 21.) aequatio $\left(\frac{1.^a\,e}{9}\right)$.

Haec aequatio producitur eliminatione (b), nec simplicioribus terminis exprimi potest. AEquatio finalis (e) appellatur, et notatur pag. 23. (1.ª e F); est enim unica ad quam calculo pervenire liceat, triplexque valor pro (e) elici poterit cum numeri (f), (t), (z) remaneant indeterminati.

113

Elicitur aequatio finalis pro (b), *si eliminatur* (e) *in una ex illius aequationibus.*

Calculus pag. 22. instituitur ubi post reductiones exhibetur aequatio notata (1.ª b F).

114

AEquatio finalis pro (a) *concluditur eliminatione* (e) *et* (b).

Calculo instituto pag. 22. habetur aequatio (1.ª a F) simplicissima forma expressa.

115

Sic etiam invenitur aequatio finalis de (ω).

Pag. 22. eliminantur (e), (b) per earum aequationes finales.

Eliminatur denique (a), proditque aequatio (1.ª ω F).

116

Deducitur similiter pag. 23. aequatio (1.ª π F).

117

In eadem pag. ordinatim continentur omnes aequationes finales.

Hic notandum: aequationem ($1.^a\ \rho\ F$) eamdem esse cum ($3.^a\ \rho$) (pag. 18.): aequationem ($1.^a\ \delta\ F$) eamdem esse cum ($2.^a\ \delta$) pag. 17.: aequationem ($1.^a\ \varepsilon\ F$) eamdem esse cum ($1.^a\ \varepsilon$) pag. 16.

118

Ex his colligitur systema calculi expositum et aequationibus finalibus terminatum universale esse ad omnia Problemata persolvenda quae methodo subjiciuntur, et calculi dificultatem in primo ex functionibus oriri, ut supra observatum.

119

AEquatio integralis differentiali respondens continet omnes terminos praeter ($f\ r\ F$) qui excludi poterit.

AEquatio praedicta quae ex differentiali (N.° 1. pag. 14.) deducitur, ostenditur (N.° 1. pag. 24.), valorque (Y) et ipsius factorum habetur (N.° 2.).

Numeri (a), (b), (e), (ε), (δ), (ρ), &c.^{a} determinantur per (t), (z). Solum ergo potest fieri $f = 0$, et excludi terminus ($f\ r\ F$); caeteri vero sunt partes componentes aequationem integralem.

120

Ut in Problemate primo, continetur etiam in isto aequatio differentialis determinans relationem inter rectas (x), (u), (r), *quae appellari potest aequatio conditionis.*

AEquatio haec notatur (N.° 5. pag. 24.), ejusque integratio plana fiet, supponendo $x = \frac{\Gamma}{\Delta}$, $u = \frac{\Gamma}{\Pi}$; deducuntur enim aequationes prima et secunda (N.° 3.), quod demonstratur (99.) cum tertia et quarta ut colligitur (97.).

Ex his procedunt aequationes (N.° 4.) et ultimo aequatio conditionis (N.° 5.).

121

Invenitur insuper aequatio algebrica et rationalis determinans relationem inter rectas (x), (u), (r), *atque ideo inspicienda est ut continens integralem respondentem differentiali conditionis.*

AEquatio enunciata notatur (N.° 10.) et ex aequationibus $x = \frac{\Gamma}{\Delta}$, $u = \frac{\Gamma}{\Pi}$, ut supra (70. et sequent.) eliminatione variabilis (ϕ) concludi potest; sed ad eam perventum est calculo breviori.

Ex aequationibus 1.ª 2.ª et 3.ª (N.° 6.) eruitur 4.ª

Termini hujus aequationis divisi per $\sqrt{\Gamma}$ in aequatione (N.° 7.) sunt aequales respondentibus in inferiori 1.ª (N.° 8.), quae ad quadratum elevata eadem est cum

2.ª (N.° 7.), et ex hac colliguntur 2.ª (N.° 8.) et inferior 3.ª ejusdem (N.°).

AEquatione 3.ª (N.° 8.) ad quadratum elevata prodit aequatio (N.° 9.) et ultimo habetur aequatio (N.° 10.).

122

Calculi institutio in secundo Problemate demonstrat illius possibilitatem in primo, et ex consequenti veritatem solutionis. Est simul exemplar ad omnia, quae hac methodo solvi possunt.

123

Problema secundum solvi potest ulterius per sequentes functiones

$$x = \frac{64\, r^2\, \Gamma}{\Delta}\,;\quad u = \frac{16\, r^2\, \Gamma}{\Pi}$$

$$\Gamma = \phi$$

$$\Delta = (4\phi + 3r).(12\phi + r)$$

$$\Pi = (\phi + 3r).(3\phi + r)$$

Supponatur in hoc exemplo

1.° $\phi = 0$; erit $x = 0$, $u = 0$

2.° $\phi = \infty$; erit $x = 0$, $u = 0$

crescet igitur variabilis (ϕ) à limite $(\phi = 0)$, usque ad limitem $(\phi = \infty)$.

124

Haec subjicere visum est pro demonstrandis solutionibus datis primi Problematis in Programmate propositi.

PEDRAYES

SOLUCION DEL PROBLEMA