PROBLEMATA GEOMETRICA SEXAGINTA.

Circà Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasquè præcipuè versantia.

A F. STEPHANO ANGELI VENETO,

Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, in Veneta Prouincia Definitore Prouinciali, elaborata.

CVM PRIVILEGIO.

VENETIIS, M DC LVIII.

Apud Iohannem La Nou.

DE CONSENSV SVPERIORVM.

Illuſtriſſimo & Excellentiſſimo

D. D.

MARCO ANTONIO,

Illuſtriſſimiſque

ANTONIO, ac LAVRENTIO

Fratribus Corrarijs.

FR. STEPHANVS ANGELI,

Ieſuatorum Ordinis in Veneta Prouincia Definitor Prouincialis P. P. P.

EX Geometrica arbore hos fructus ſelegi, primogenita ſanè laborum meorum indoles, ac elucubratio, Veſtræ benignitatis, Illuſtriſſimi Proceres, Numini, ac Tutamini, dicandos fore decreui. Hac etenim feliciter e culti, erupuerunt in germina, & vſque ad maturitatis pignora ſuccreuere. Par in omnes obſequium attraxit animum, nàm æquè meritò præſtatis eximij. Nec Paris ille qui potiora diuinitatis inſignia diſcreuit, cuinam deberetur oblatio, maieſtatis, probitatis, ac Virtutis ſingulum ex vobis, magiſquè dignum ſpecimen ſeligeret. Ergo ſingularis deuictiſſimæ meæ propenſionis, veſtrum ſtemmati, ac Nomi-

ni pariter hæc arrha sacretur. Beneficijs adstringi, an angustius, vel augustius dixerim, nequibam. Trina me humanitatis vix deuixit. Vos, qui gratiarum munus triplex, ac numerum refertis, allexistis suauiter calamum, compullistis ingenium, vt opellulæ huius verticem vestro Nomine, & titulis coronarem. Addidit ad hæc calcaria, quod semper vobis studium impendi. Vobis itaquè, qui inter cælticos Veneti Emporij Heroas auitæ Nobilitatis radijs corruscatis, & indiuiduæ præstantiæ fulgetus insignibus, hoc excelsiori omnium omine ductus, primogenitè elaborata monimenta, appendo. Profectò, Nobilissimæ vestrum progeniei Maiestatem, infulatas trabeas, purpuras præclarissimas, quibus honorem auxit ANTONIVS ille CORRARIVS, vitæ sanctimonia, magis quam cognomento Eminentissimus, morum suauitate, & innocentia, potius quam Nomine FLORIDVS: Qui Jesuati amictus candorem sua purpura decorauit, vt proindè non rectè Rosa superbiat Veneris cruoribus depicta in purpuream: summum, ac Diuinum in terris Jmperium, cuius, in GREGORIO XII. Pontificatù, ac præclarissimis operibus verè Maximo, diademate semel exornastis comas, sed millies promeruistis decus, perterrita mei venerabatur seruitus, tenuisquè muneris oblatam vilitatem aspernabatur animus. Sed timorem correxit impauidus; ditauit namquè munusculi inopiam summa vouentis deuotio, quæ Bruti illius quondam alumna, siluestribus tectum inuolucris, prætiosiorem exhibuit venerabundi affectus enixum. Excipite igitur hilares hoc qualecumque Votum, vestrumque dignum; cùm nec minimum spondeat, qui totum promit quod habet. Parcant vobis Parcæ, qui æternitati viuitis.

AD
LECTOREM.

LIBELLVM hunc Geometricum tibi propono, Benigne Lector. Versatur equidem circa res, ætate nostra, neglectas; at si alius, quam Geometricus extaret, nequaquam his temporibus ad eo bonis artibus aduersis illum tibi exhiberem. Haud ignoro, ferreo hoc sæculo, quo Mars, & Bellona vbiq; triumphant, exigi non animi, sed corporis vires. Verùm solius Mathesis, inter alias facultates, peculiare agnoscitur, non minus paci, quam bello inseruire. Forsitan conclamabis. Quid boni in reb. tam vilibus? in meris nugis? in tuis Problematibus. Fateor equidem Problemata hoc Libello comprehensa, nugas esse, sed nugas Geometricas, proindeq. rebus etiam in alijs facultatibus eminentibus, nequaquam post habendas. Etenim Mathesi euenit, quod in nobiliori, perfectiorique specie, respectu ignobilioris agnoscitur. Ignobilius enim inuiduum speciei superioris, præstat perfectiori

ctiori

ctiori speciei inferioris. Sic Geometria, adeo super cæteras humanas facultates sua extollitur certitudine, vt Geometricę nugę à Viris, qui propriè Viris, & non sues sint, margaritæ pretiosæ censeantur. Hæc conscribo putans aliquos meæ indolis Geometras forsitan adinueniri. Etenim res Geometricas sic esurio, vt libenter perlegam ea omnia, quæ Geometriam aliqualiter redolent. Sic puto, aliquos faciliter esse reperiendos, qui hæc, quæcumque sint libenter percurrent, obseruentque illud Doctoris gentium pronuntiatum. Omnia probate, quod bonum est tenete. Hæc tibi communico cupiens laborum meorum aliqualiter periculum facere. Etenim, si aliquando mihi compertum erit, hæc tibi haud displicuisse, forsitan alia in non modica quantitate, vel his pulchriora, vel his turpiora, aliquando communicabo.

Verùm antequam opus præcipuum aggrediar, de duobus velem te monitum esse. Primum est; Euclidianorum Elementorum citationes in hoc Libello nunquam afferri. Secundum est; Sectiones per axem in Conis, Sphæris, alijsque solidis, quamuis necessariæ pro solutione Problematum, frequenter, passimque omitti. Causa primi est: Quia cum Problemata hæc circa Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasque præcipuè versentur, ac proinde supponant Lectorem in doctrinis Apollonij Pergæi, & Archimedis versatum, ipsum multò magis requirunt Euclidis Elementa peroptimè callere. Præterquam quod, cùm ferè nullum verbum proferatur, quòd ab Elementis non dependeat, & attamen omnia loca afferre labor

im-

immensus censeatur, malui omnia prætermittere, quàm aliqua dumtaxat adducere. Secundum consimilem causam agnoscit, nimirum hæc conscripta esse pro Lectore aliqualiter perito, cui Sectiones per axem necessariæ, sunt obuiæ. His ergo præmissis, omissisque parergis, ad erga deueniamus. Vale.

FACVLTAS
Reuerendissimi Patris Generalis.

LAVDETVR IESVS CHRISTVS.

OPVS *inscriptum*, Sexaginta Problemata Geometrica, *compositum ab Admodum Reu. P. Stephano de Angelis Veneto professo Nostri Ordinis Iesuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat necessarias licentias, & approbationes, quæ de iure sunt necessariæ &c. In quorum fidem præsentes manu propria subscripsimus, ac proprio Nostri Officij sigillo muniuimus.*

Datum Brixiæ in Nostro Monasterio Corporis Christi, die quarta Nouembris 1657.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Iesuat.

Locus Sigilli.

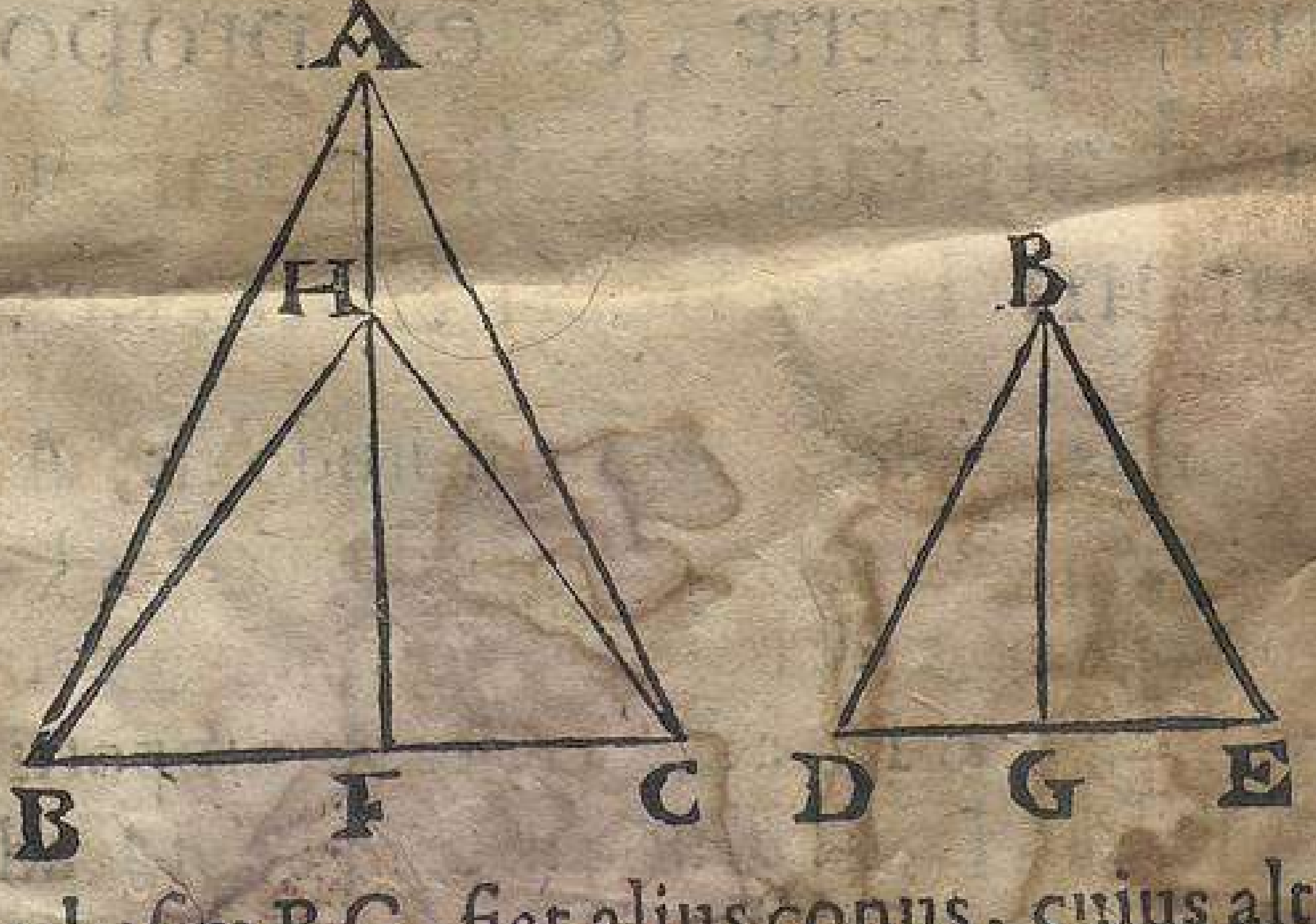
LEM-

LEMMA PRIMVM.

PROPOSITIO PRIMA.

Coni habent inter se proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum.

SINT duo coni, BAC, DBE, quorum axes, seù altitudines sint AF, BG. Dico proportionem coni ABC, ad conum BDE, componi ex proportione AF, ad BG, & ex proportione basis BFC, ad basim DGE.



Super basim BC, fiat alius conus, cuius altitudo sit

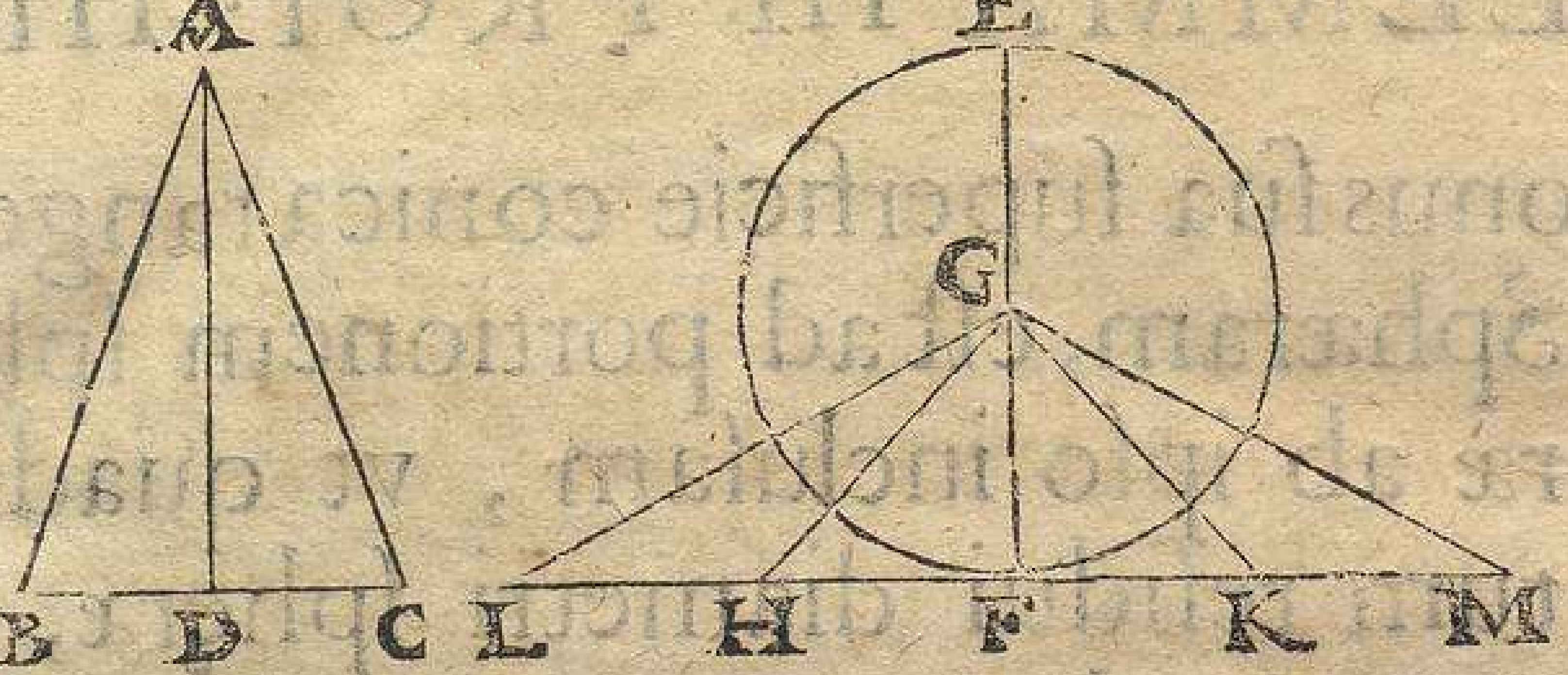
FH, ęqualis altitudini BG. Iam conus ABC, ad conum BDE, de foris sumpto cono BHC, habet proportionem compositam ex proportione coni ABC, ad conum HBC, & ex proportione coni HBC, ad conum DBE: Sed vt conus ABC, ad conum HBC, sic (propter eandem basim BFC,) altitudo AF, ad altitudinem HF, seù ad BG, ei ęqualem: & vt conus HBC, ad conum DBE, sic (propter æquales altitudines HF, & BG,) basis BFC, ad basim DGE. Ergo proportio coni BAC, ad conum DBE, componitur quoque ex proportione AF, ad BG, & ex proportione basis BFC, ad basim DGE. Quod ostendere oportebat.

LEMMA II. PROP. II.

Conus ad Sphæram habet proportionem compositam ex proportione altitudinis coni ad Semidiametrum Sphæræ, & ex proportione quadrati radij basis coni, ad quadratum Diametri Sphæræ.

SIT conus, ABC, cuius altitudo sit, AD, & sit sphæra, cuius centrum, G, diameter, EF. Dico, conum ad sphæram habere proportionem compositam, ex proportione, AD, ad, FG, & ex proportione quadrati, BD, (si, D, sit centrum basis coni) ad quadratum, EF.

Intel-



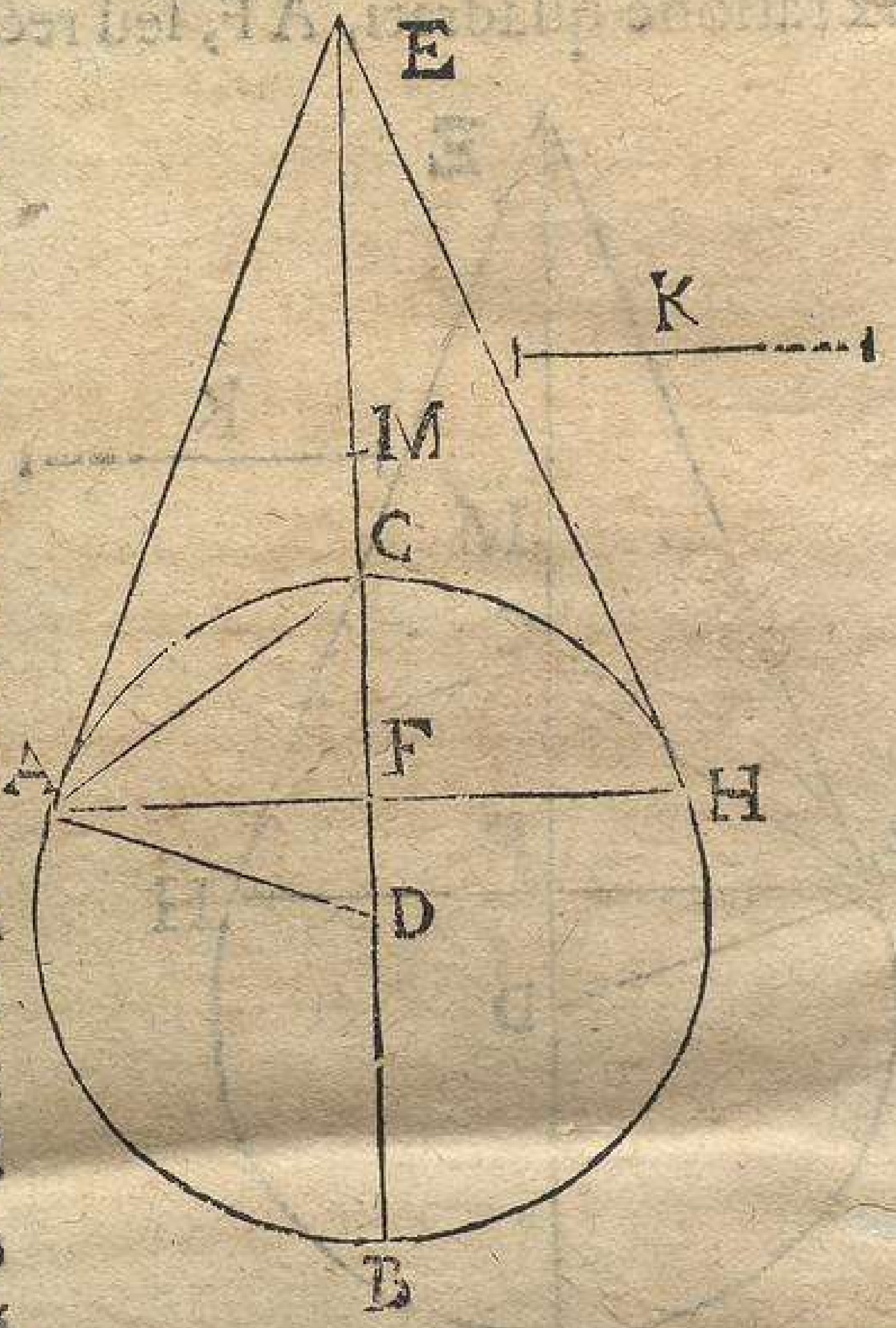
Intelligantur duo coni, quorum altitudo sit, GF, semidiameter sphæræ, & sint, GHK, cuius basis diameter sit HK, æqualis, EF, & GLM, cuius basis diameter sit, LM, ipsius EF, dupla. Iam probatum est ab Archim. 1. de Sphær. & Cylindro Prop 32. conum, HGK, esse quartam partem sphæræ, cuius diameter, EF; sed etiam est quarta pars coni, LGM, quia, & eo basis est quarta pars basis; ergo sphæra, & conus, LGM, sunt æquales. Ergo conus, ABC, ad hæc duo solida habet eandem proportionem. Sed proportio coni ABC, ad conum, LGM, componitur ex proportione, AD, ad, GF, & ex proportione basis, BDC, ad basim, LFM, nempè ex proportione quadrati, BD, ad quadratum, LF, seù ad quadratum EF. Ergo etiam proportio coni, ABC, ad sphæram componetur ex proportione, AD, ad, GF, & ex proportione quadrati, BD, ad quadratum, EF. Quod erat ostendendum.

LEMMA III. PROP. III.

Conus ſua ſuperficie conica tangens Sphæram, eſt ad portionem ſphęræ ab ipſo incluſam, vt quadratum reſidui diametri ſphęræ, ad rectangulum comprehenſum ſub dicto reſiduo, & ſub ſegmento diametri intercepto inter centrum ſphæræ, & baſim coni; vna cum rectangulo ſub ſemidiametro ſphærę, & ſub prædicta intercepta.

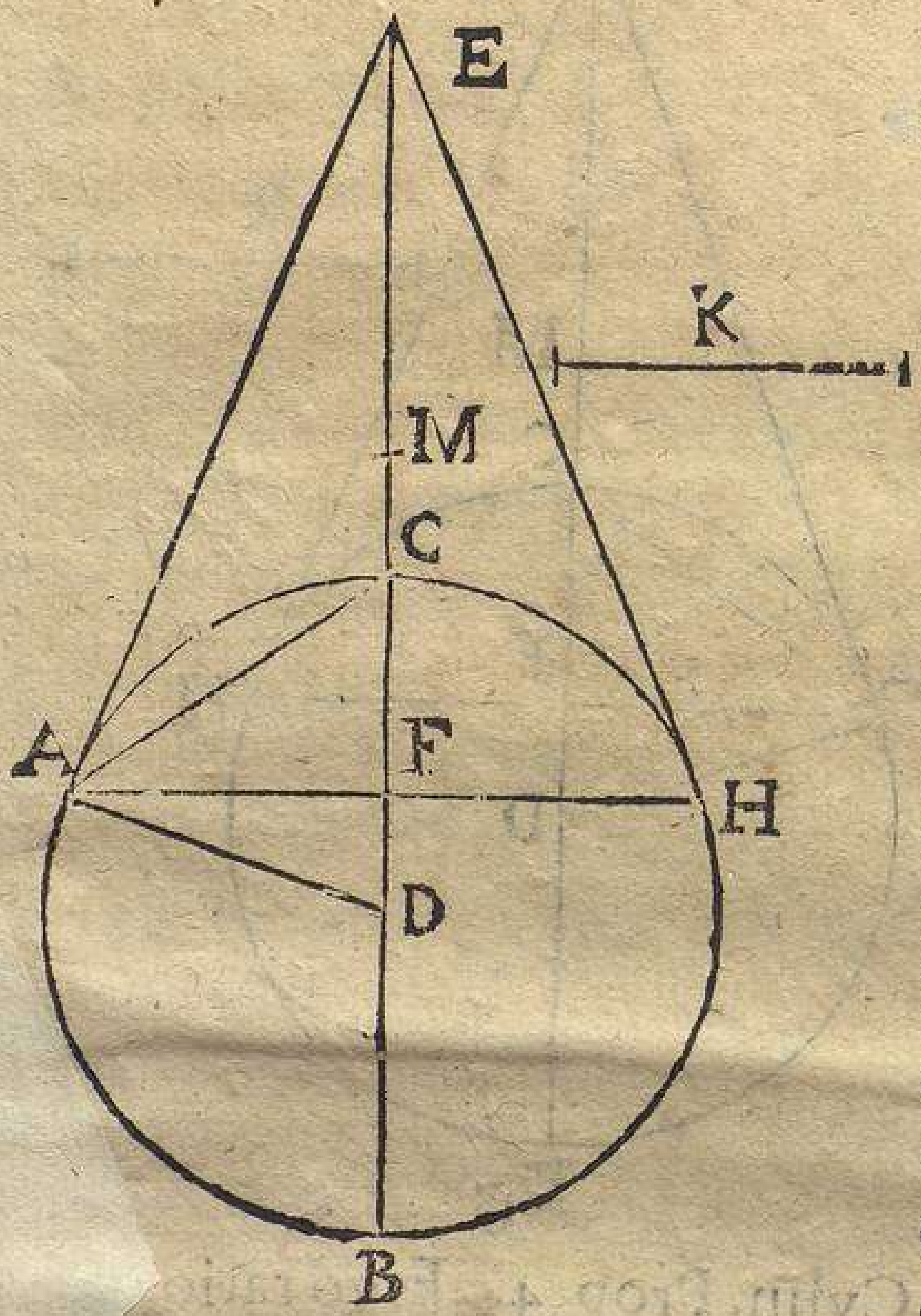
SIT Sphæra, ABHC, & ſit conus rectus, EAH, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram; & omnia intelligantur ſecta per axim, adeò vt, ABHC, ſit circulus maximus; D, centrum; EA, EH, latera trianguli per axim; AFH, diameter baſis coni; BFCE, diameter circuli, & axis coni. Dico conum, EAH, ad portionem ſphæræ, ACH, ab ipſo comprehenſam, eſſe vt quadratum BF, ad rectangulum, BFD, cum rectangulo, BDF.

Coni ad portionem proportio componitur ex proportione coni ad ſphæram, & ſphæræ ad portionem: proportio coni ad ſphæram componitur ex proportione, EF, ad DB, & ex proportione quadrati, AF, ad quadratum, CB, ex Propoſ. antec. & pariter proportio ſphæræ ad portionem componitur ex proportione quadrati, BC, ad quadratum, CF, & ex proportione, DB, ad FB, continuatam, BD, vt deducitur ex Archi. 2. de ſphæra, & Cylin. Prop 4. Ergo ratio quoque coni, AEH, ad portionem, ACH, componetur ex quatuor rationibus; nempè ex ratione, EF, ad DB, DB, ad, FB, continuatam, BD; ex ratione quadrati, AF, ad, ad quadratum, CB; & quadrati, CB, ad [illegible]dratum, CF. Sed duæ rationes, EF, ad DB, & DB, ad FB, continuatam, BD, faciunt rationem, EF, ad FB, continuatam, DB. Et pariter duæ rationes quadrati, AF, ad quadratum, CB, & quadrati, CB, ad quadratum, CF, faciunt rationem quadrati, AF, ad quadratum, CF. Ergo proportio coni ad portionem, componetur



netur

netur ex ratione, EF, ad, FB, continuatam, DB, & ex ratione quadrati, AF, ſeù rectanguli, BFC, ei æqualis, ad quadratum, FC, hoc eſt (propter eandem altitudinem, FC,) ex ratione, BF, ad, FC. Sed vt, EF, ad, FB, continuatam, BD, ſic (ſumpta, FD, communi altitudine) rectangulum, EFD, ſeù ei æquale, CFB, (nam ducta, AD, ob tangentem, EA, & angulum rectum, EAD, quadrato, FA, eſt æquale rectangulum, EFD, cui etiam quadrato, AF, eſt æquale rectágulum,



CFB,) ad rectangulum ſub, FD, in, FB, continuatam, BD. Ergo proportio coni ad portionem componetur ex ratione, BF, ad, FC, & ex ratione rectanguli, CFB, ad rectangulum ſub, FD, in FB, continuatam, BD. Rurſùm proportio rectanguli, CFB, ad rectangulum ſub, FD, in, FB, continuatam, BD, componitur ex ratione, CF, ad, FD, & ex ratione, FB, ad, FB, continuatam, BD. Ergo à primo ad vltimum, proportio coni ad portionem componitur ex proporti one, BF, ad FC; FC, ad, FD (quæ duæ faciunt

ratio-

rationem, BF, ad, FD,) & ex ratione, BF, ad, FB, continuatam, BD. Sed istæ duæ rationes componunt rationem quadrati, BF, ad rectangulum sub, FD, in FB, continuatam, BD; quod rectangulum est postea æquale duobus rectangulis, BFD, BDF. Ergo conus ad portionem est, vt quadratum, BF, ad duo rectangula, BFD, BDF. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

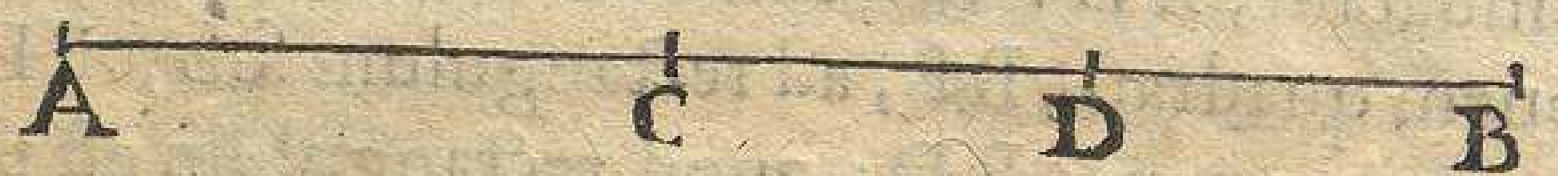
EX dictis infertur, quod diuidendo erit excessus coni supra portionem ad portionem, vt quadratum, BD, ad duo rectangula, BFD, BDF. Nam quadratum, BD, est excessus quadrati, BF, supra duo rectangula, BFD, BDF, vt consideranti patet.

LEMMA IV. PROP. IV.

Sit recta linea, AB, secta bifariam in C, & non bifariam in, D. Dico quadratum, AD, maius esse quã sexquitertium duorum rectangulorum, ADC, ACD.

QVoniam enim duo rectangula, ADC, ACD, sunt minora duobus rectangulis, ACB, ABC: & quadratum, AC, est tertia pars rectangulorum,

lorum, ACB, ABC; ergo erit maius quam tertia



pars rectangulorum, ACD, ADC. Ergo componendo, quadratum, AC, cum duobus rectangulis, ACD, ADC, nempè totum quadratum, AD, erit maius quam sexquitertium rectangulorum, ACD, ADC. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

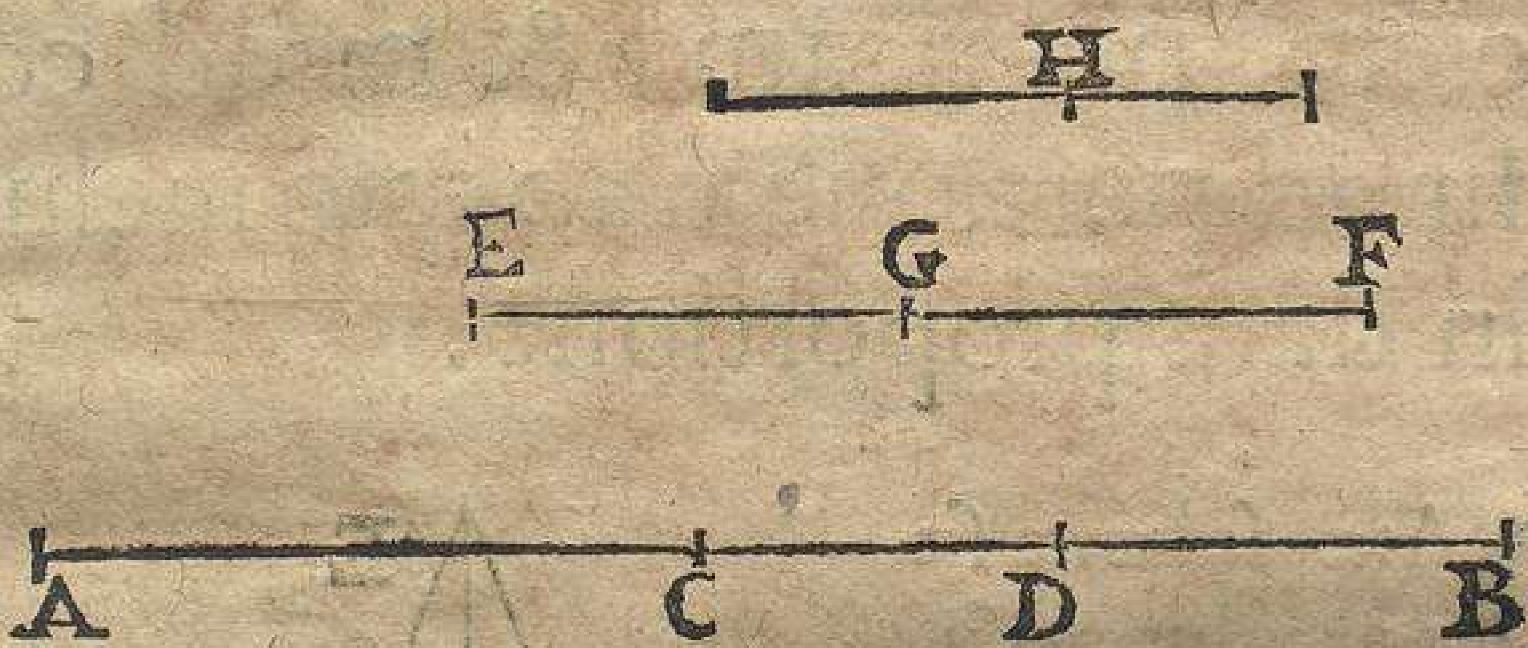
Ex dictis infertur in figura Propos. 3. conum EAH, ad portionem, ACH, habere proportionem maiorem sexquitertia. Nam in eadem propositione, ostensum est conum ad portionem habere rationem quadrati, BF, ad duo rectangula, BDF, BFD. Et iam patet, BC, secari bifariam in, D, & non bifariam.

LEMMA V. PROP. V.

Datam AB, sectam bifariam in C, rursùm secare in D, inter CB, vt quadratum AD, ad duo rectangula ACD, ADC, sit in data proportione.

Data

Data proportio sit, quam habet, E F, ad F G; quam patet debere esse excessus, sed ex Lemmate anteced. minorem sexquitertia. Inter E G, E F, sit media proportionalis H. Cùm ergo E F, sit maior quam sexquitertia F G; ergo E G, erit maior subquadrupla E F; ergo erit etiam maior subdupla H. Si ergo fiat, vt E G, ad H, sic A C, ad A D, punctum D, cadet inter

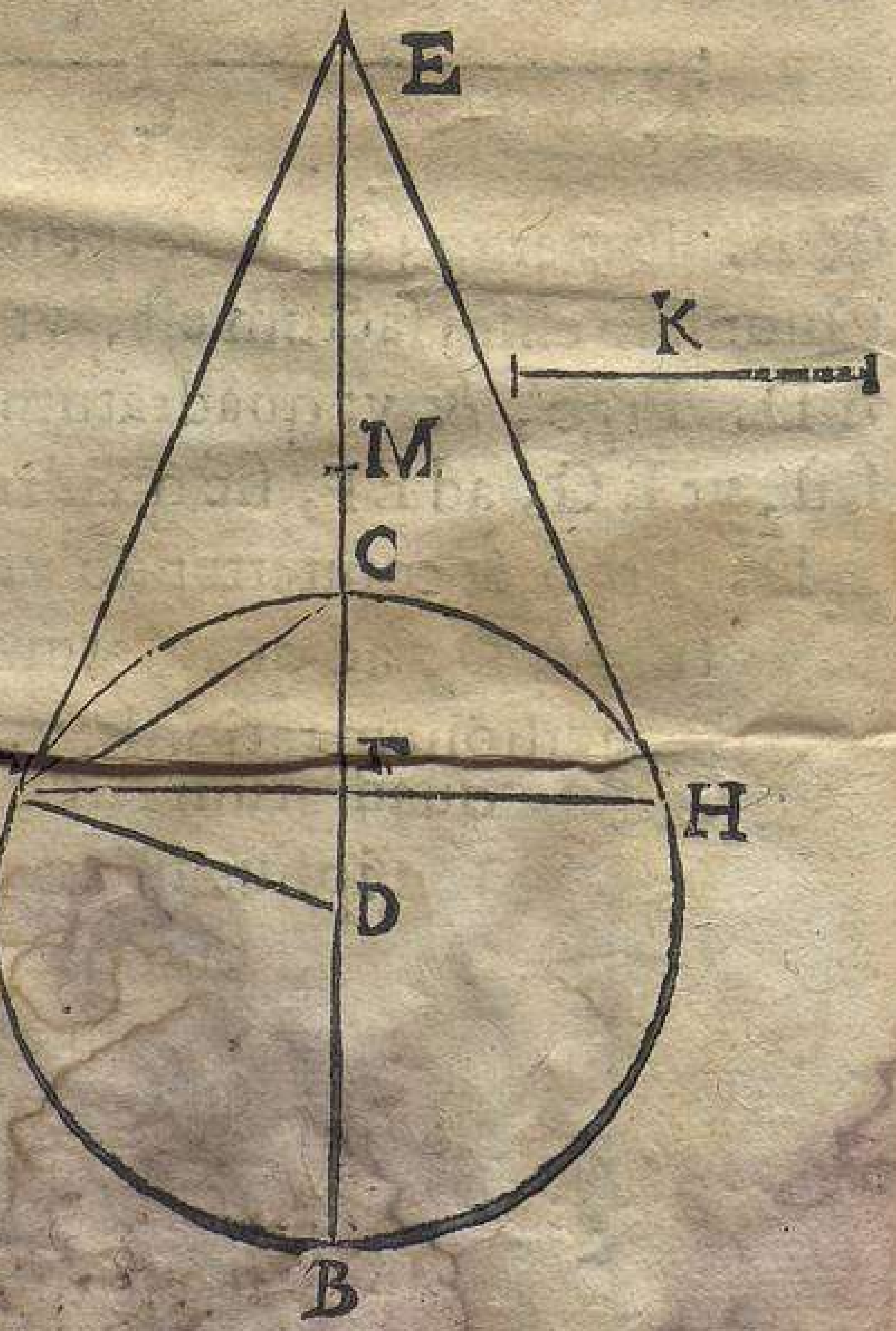


C, B. Fiat ergo; & assero punctum D, esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt E G, ad H, sic A C, ad A D. Ergo, & vt quadratum E G, ad quadratum H, seù, vt E G, ad E F, sic quadratum A C, ad quadratum A D. Ergo, & conuertendo, vt F E, ad E G, sic quadratum A D, ad quadratum A C. Et per conuersionem rationis, vt F E, ad F G, sic quadratum A D, ad excessum ipsius super quadratum A C, nempè ad duo rectangula A C D, A D C. Quod erat faciendum.

PROBLEMA I. PROP. VI.

Circa datam sphęram describere conum rectum includentem aliquam sphæræ portionem, cuius superficies conica tangat superficiem sphæricam, & quod conus sit ad portionem ab ipso inclusam in data proportione.

Datæ sphæræ sit circulus maximus A B H C, cuius centrum D, diameter BC, & data proportio sit, quam habet DC, ad K, quàm ex superioribus patet, maiorẽ esse sexquitertia. Tunc datam rectam CB, diuisam bifariá in D, diuidamus rursùm in F, inter C, D, vt quadratum BF, sit ad duo rectangula BDF, BFD, vt BC, ad K, ex Lem-



mate

mate antecedenti; à puncto F, erigatur perpendicularis F A, vſque ad circumferentiam, & à puncto A, ducatur A E, tangens circulum, occurrens diametro productæ in E; & intelligantur omnia reuolui circa axim E B, more geometrico, donec redeant ad principium motus. Iam patet à circulo reſtitui ſphæram datam, & à triangulo rectangulo E A F, fieri conum rectum E A H, includentem portionem A C H, & ſua ſuperficie conica tangentem ſuperficiem ſphæricam. Dico talem conum eſſe quæſitum. Non immoror circa demonſtrationem, quia ex præmiſſis eſt nimis clara.

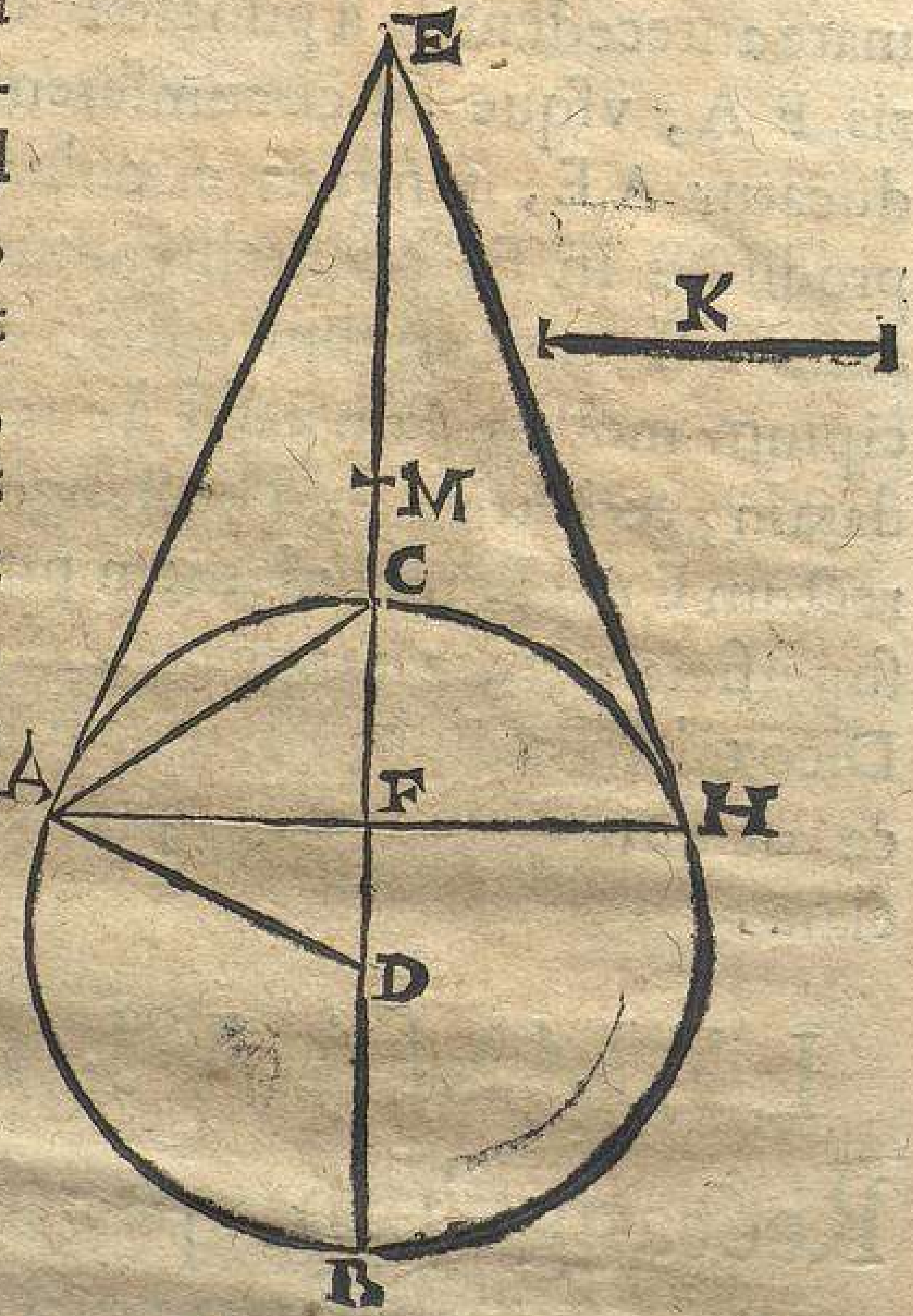
LEMMA VI. PROP. VII.

Rectangulum, quod fit ſub tangente, & ſub ſinu recto alicuius arcus, eſt maius quadrato chordæ eiuſdem arcus.

SIT circulus, cuius diameter ſit B C, centrum D. A E, ſit tangens arcus A C, occurrens diametro productæ in E; A F, ſit ſinus rectus; & A C, ſit chorda eiuſdem arcus. Dico rectangulum E A F, maius eſſe quadrato A C.

Ducatur A D; & quoniam propter angulum rectum E A D, duo triangula E A D, A D F, ſunt ſimilia. Ergo erit, vt E D, ad D A, ſeu ad D C, ei æqualem,

 ſic



ſic D A, ſeù D C, ad D F. Ergo, & diuidendo, erit vt E C, ad C D, ſic C F, ad F D. Et permutando, erit vt E C, ad C F, ſic C D, ad D F. Sed C D, eſt maior D F; ergo, & E C, erit maior C F. Ergo componendo, tota E F, erit maior dupla F C. Ergo rectangulum ſub D A, E F, maius erit rectangulo ſub D A, in duplam C F. Sed rectangulo ſub D A, in duplam C F, eſt æquale rectangulum ſub dupla D A, nempè ſub diametro B C, in C F; & huic rectangulo eſt æquale quadratum A C. Ergo rectangulum ſub D A, in E F, erit maius quadrato A C. Sed quoniam propter ſimilitudinem triangulorum D A F, E A F, rectangulum ſub D A, in E F, eſt æquale rectangulo E A F; (nam eſt, vt A E, ad E F, ſic D A, ad A F;) ergo rectangulum E A F, erit maius quadrato A C. Quod erat oſtendendum.

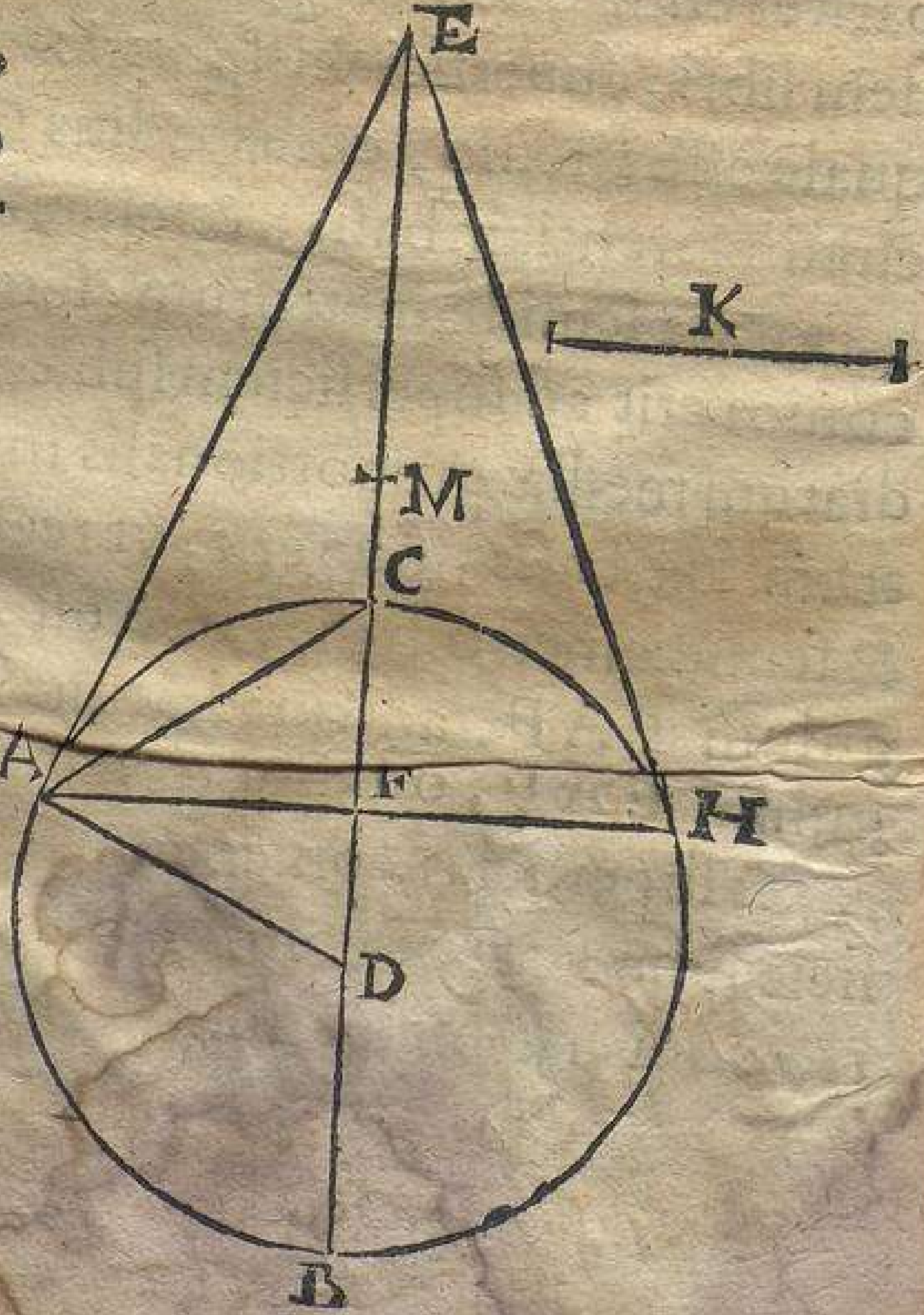
SCHOLIVM.

ELicitur ex dictis, & ex ostensis ab Archi., quod si tàm circulus, quàm triangulum E A F, intelligantur volui circa B E, donec redeant ad initium motus, adeò vt à circulo generetur sphæra, & à triangulo conus E A H; elicitur inquam, quod superficies conica erit maior superficie sphærica portionis ab ipso inclusa. Nam cum ostendat Archi. 1. de Sphæra, & Cylindro prop. 14. cuiuslibet coni recti superficiem esse æqualem circulo, cuius radius sit media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum circuli basis; & pariter cum ostendat propositionibus 40. & 41. eiusdem libri, superficiem sphæricam portionis sphæræ æquale esse circulo, cuius radius sit linea ducta à polo ad circumferentiam basis; & circuli sint ad se inuicem vt quadrata semidiametrorum; sequitur, quod superfic[illegible] conica erit ad superficiem sphæricam portionis, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus, & semidiametrum suæ basis, siue erit, vt rectangulum sub latere [illegible] & semidiametro basis; hoc est in præsenti, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C. Iam verò rectangulum E A F, ostensum est maius quadrato A C, [illegible]re, & superficies conica coni E A H, erit maior superficie sphærica portionis A C H; & insuper totus perimetro coni erit maior toto perimetro portionis.

LEMMA VII. PROP. VIII.

Dati circuli diametrum producere, vt ab aliquo puncto eiuſdem diametri ductis tangente, ſinu recto, & chorda alicuius arcus; rectangulum ſub tangente, & ſinu recto, ſit ad quadratum chordæ in data ratione poſſibili.

SIT datus circulus, cuius diameter, BC; centrum D; oportet producere diametrum, puta in E, vt ductis tangente EA, ſinu recto AF, & chorda AC; rectangulum EAF, ſit ad quadratum AC, in data proportione.



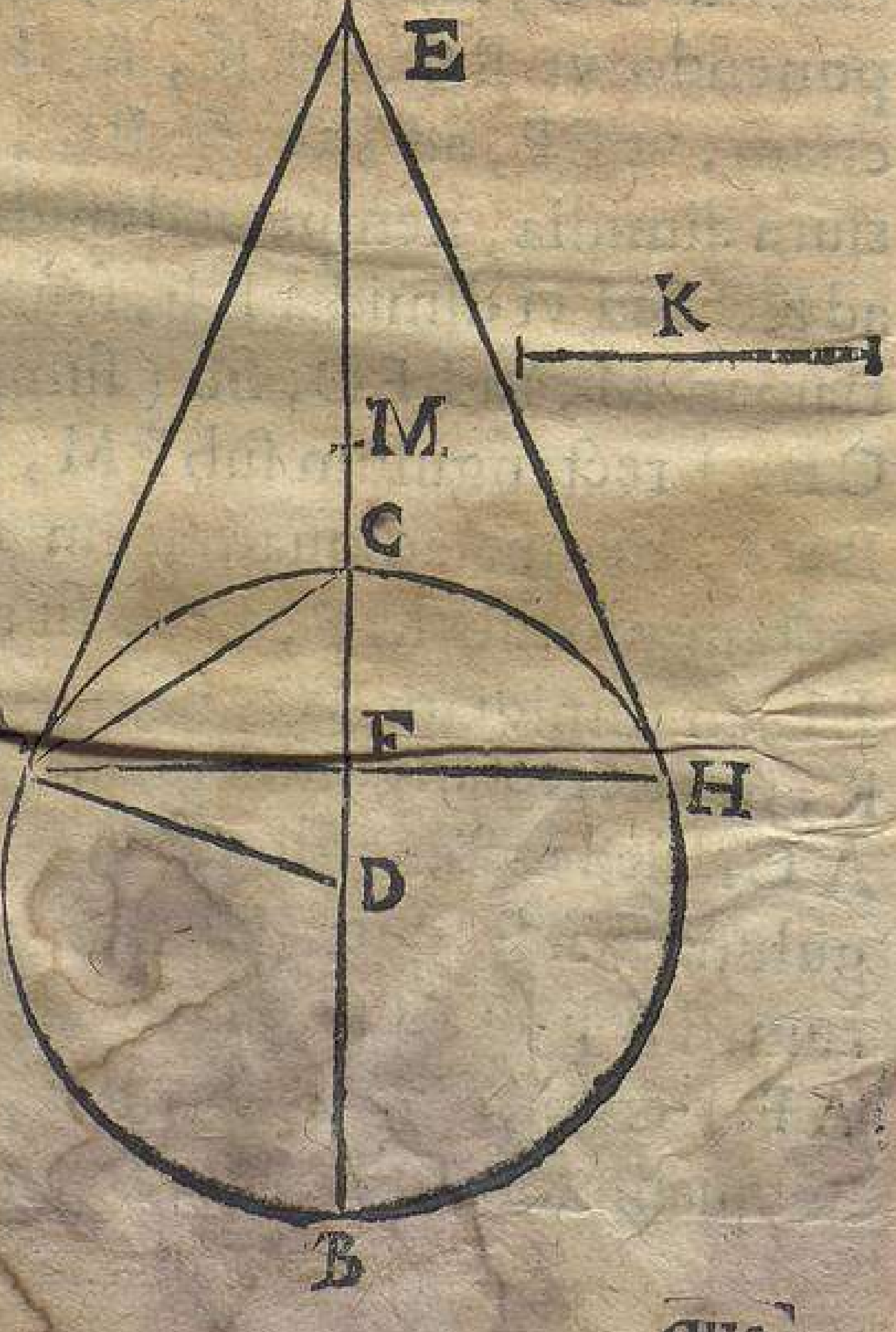
Ex dictis patet oportere proportionem datam eſſe maioris inæqualitatis. Sit ergo ea, quàm habet DC, ad

K; fiat

K; & fiat, vt excessus B C, super K, ad K, sic B D, ad D F. patet D F, minorem esse D C; nam, cum D C, sit maior K; ergo excessus duplæ D C, super K; nempè excessus B C, super K, erit multò maior K; quare, & D C, seù B D, erit maior D F. A' puncto ergo F, erigatur perpendicularis F A, & à puncto A, ducatur tangens A E, occurrens diametro in E, & iungatur A C. Dico factum esse, quod imperebatur. Eodem processu, quo factum est in Lemmate anteced. ostendetur esse, vt E C, ad C F, sic C D, ad D F; & componendo, vt E F, ad F C, sic C D, cum D F, nempè B F, ad F D. Est autem vt B F, ad F D, sic B C, ad K; (nam cum factum sit, vt excessus B C, super K, ad K, sic B D, ad D F; erit componendo vt B C, ad K, sic B F, ad F D.) Ergo erit etiam, vt E F, ad F C, sic B C, ad K; & vt antecedentium dimidia, nempe vt dimidia E F, ad F C, sic D C, ad K. Sed vt dimidia E F, seù vt F M (diuisa F E, bifariam in M,) ad F C, sic (sumpta communi altitudine C B,) rectangulum sub F M, in C B, ad rectangulum B C F; nempe ad quadratum A C, ei æquale; & cum rectangulo sub M F, B C, sit æquale rectangulum sub E F, in dimidiam B C, nempe in A D, ergo vt D C, ad K, sic erit rectangulum sub E F, in D A, ad quadratum A C. Sed rectangulo sub E F, D A, est æquale rectangulum E A F, quia (propter similitudinem triangulorum E A F, D A F, est, vt A E, ad E F, sic D A, ad A F.) ergo, & vt D C, ad K, sic rectangulum E A F, ad quadratum A C. Quod erat faciendum.

PROBLEMA II. PROP. IX.

Circa datam sphæram describere conum rectum includentem aliquam sphæræ portionem, & tangentem sua superficie conica superficiem sphæricam, adeò vt superficies conica sit ad superficiem sphæricam portionis ab eo inclusam in data proportione.



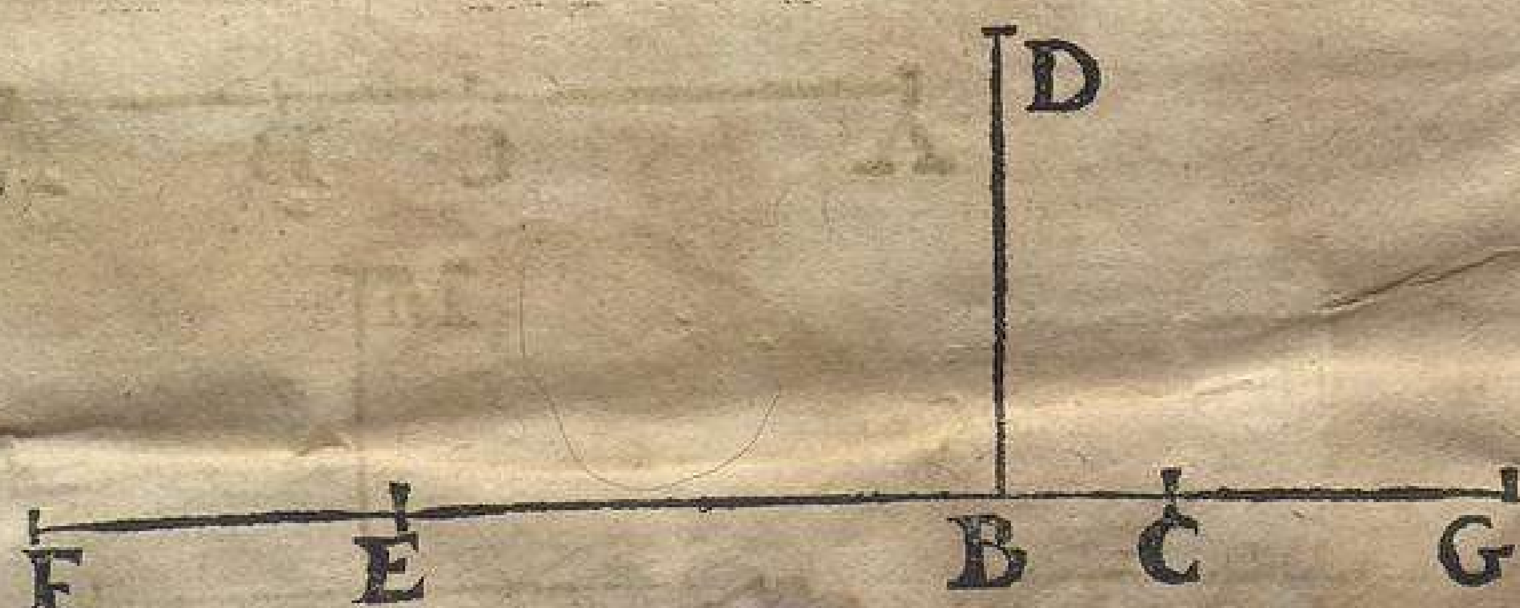
Patet ex Scholio Propositionis 7. oportere proportionẽ datam esse maioris inęqualitatis. Sit ergo datæ sphęræ circulus maximus, cuius centrum D, diameter B C, & data proportio sit ea, quã habet D C, ad K. Diameter B C, producatur taliter in E, vt factis ijsdem, quæ in anteced. Lemmate, rectãgulum E A F, sit ad

qua-

quadratum A C, in data proportione D C, ad K. Et intelligantur, consueto modo, omnia reuolui circa B E. Dico factum esse, quod imperebatur. Deducitur enim ex Arch. supra citato, superficiem coni, E A H, ad superficiem portionis A C H, esse, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C; seù, ex factis, vt D C, ad K. Quod erat faciendum.

LEMMA VIII. PROP. X.

Sint E B, B D, B C, tres lineæ continue proportionales; & F B, sit maior B E; & producatur F C, in G, taliter, vt rectangulum F G C, sit æquale quadrato B D. Dico E B, maiorem esse C G.

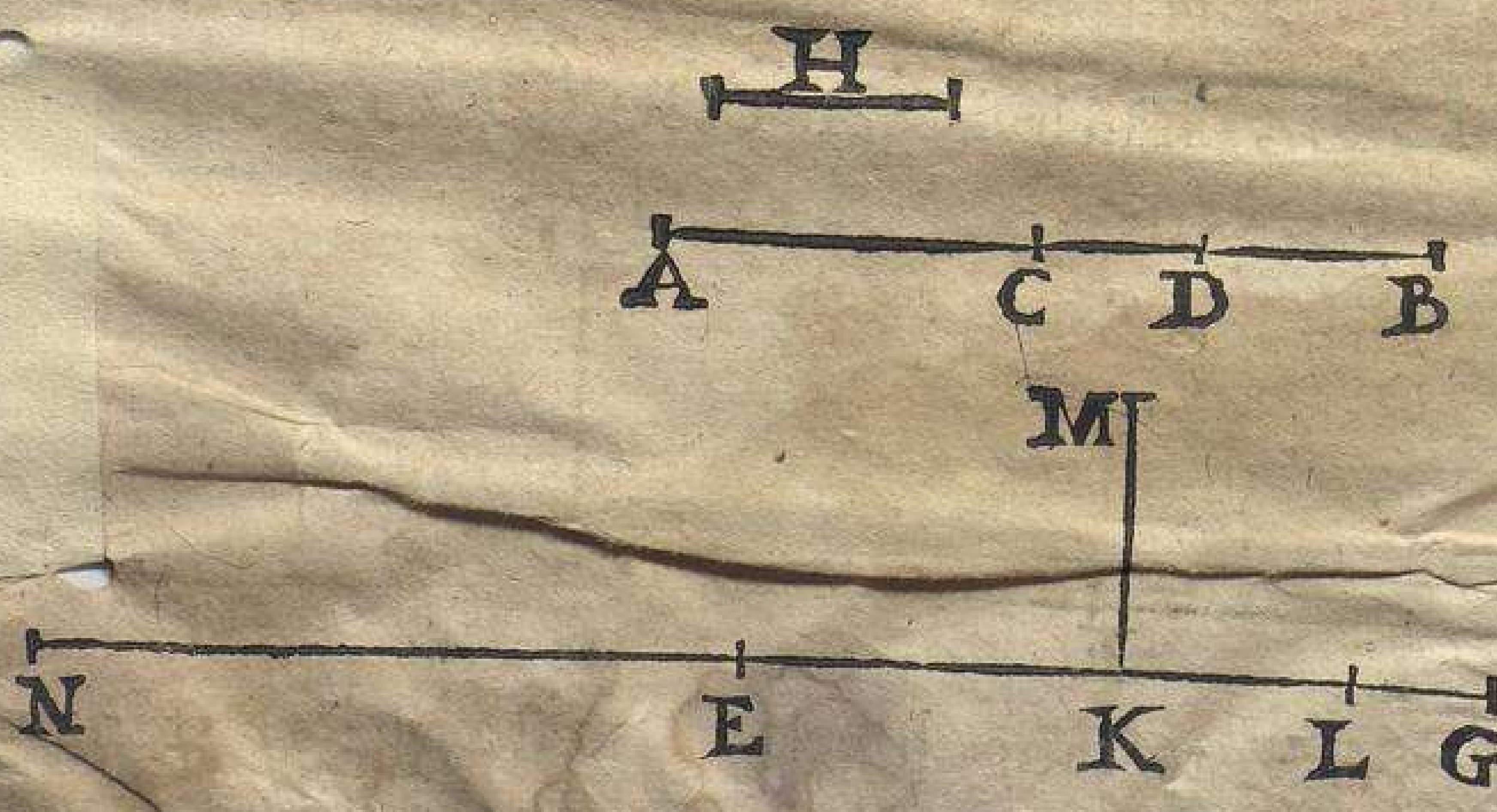


NAM rectangulum F G C, est æquale rectangulo E B C, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato D B. Ergo erit, vt F G, maior ad B C, minorem sic E B, maior ad C G, minorem. Ergo C G, est minor E B. Quod ostendere oportebat.

LEMMA IX. PROP. XI.

Datam rectam A B, sectam in puncto C, bifariam, rursùm in D, inter C, B, taliter diuidere, vt rectangulum ABD, sit ad rectangulum ADC, cum rectangulo sub AB, in CD, in data proportione.

DAta ratio sit, quam habet A B, ad H. Ob euitandam verò confusionem, exponatur EK, æqualis A C, quæ ex vna parte continuetur in N, vt N K, sit tripla E K; & ex alia parte continuetur in L, vt K L,



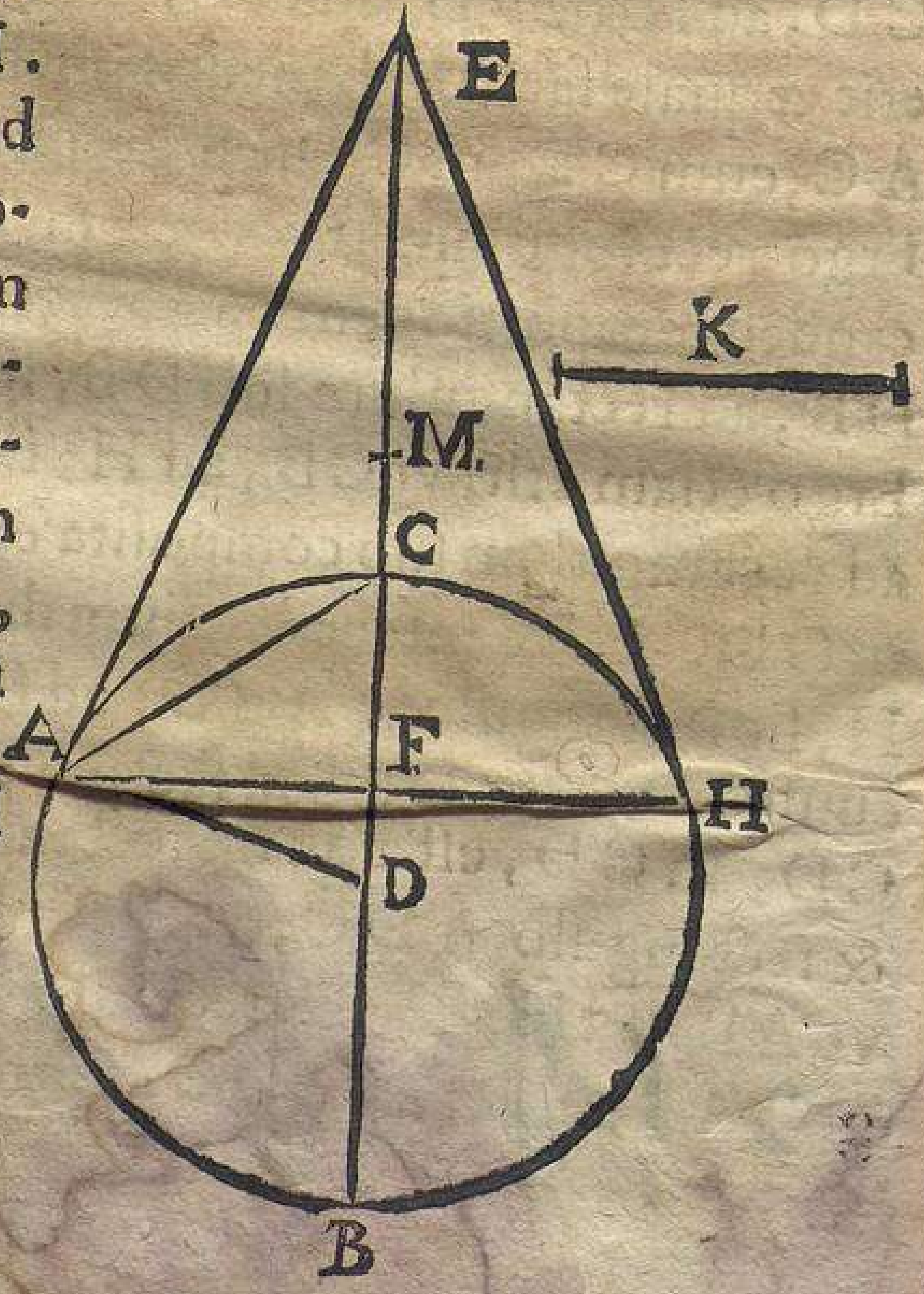
sit æqualis H; & inter E K, K L, sit media M K. Tunc (per ab alijs facta) data media proportionali MK, & data differentia extremarum N L, in ordine trium continue

tinue proportionalium, inueniantur extremæ, quæ ſint N G, GL; & ipſi G L, fiat æqualis C D, quæ per Lemma, antecedens erit minor E K, ſeù C B. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

Quoniam enim duo rectangula EKL, NGL, ſunt æqualia, quia ambo ſunt æqualia eidem quadrato MK; ergo eſt vt N G, ad K L, ſic E K, ad L G. Sed E K, eſt æqualis A C; K L, eſt æqualis H; L G, eſt æqualis C D; & N G, eſt æqualis triplæ A C, C D, & H; ergo, & vt tripla A C, cum C D, & H, ad H, ſic A C, ſeù ei æqualis C B, ad C D. Et diuidendo, vt tripla A C, cum C D, ad H, ſic B D, ad D C. Ergo factum ſub extremis, erit æquale facto ſub medijs; nempe factum ſub tripla A C, cum C D, in C D, erit æquale facto ſub D B, in H. Ergo rectangulum ſub C B, in D B, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum ſub C B, in D B, ad rectangulum ſub D B, in H, eſt, vt C B, ad H. Ergo etiam erit, vt C B, ad H, ſic rectangulum C B D, ad rectangulum ſub compoſita ex tripla A C, cum C D, in C D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, ſic rectangulum A B D, ad factum ſub tripla A C, cum C D, in C D. Sed factum ſub tripla A C, cum C D, in C D, eſt æquale rectangulo ſub A B, in C D, & rectangulo A D C, vt conſideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, ſic erit rectangulum A B D, ad rectangula A B, C D, & A D C. Quod erat faciendum.

LEMMA X. PROP. XII:

Sit datus circulus, cuius centrum ſit D, & diameter eius BC, ſit producta in E, & à puncto E, ducantur tangens EA, & ſinus rectus AF. Dico dimidiam EF, maiorem eſſe ſinu verſo FC.



Diuidatur EF, bifariam in M. Patet enim, quod ducta AD, propter angulum rectum EAD, & propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum EAD, DAF, erit, vt ED, ad AD, seù ad DC, ei æqualem, ſic AD, ſeù DC, ad DF. Et diuidendo, erit vt EC, ad CD, ſic CF, ad DF. Et permutando, vt EC, ad CF, ſic CD, ad DF. Sed CD, eſt maior

DF;

DF; ergo, & EC, erit maior CF. Et consequenter, dimidia totius EF, nempe MF, erit maior CF. Quod ostendere oportebat.

LEMMA XI. PROP. XIII.

Datis ijsdem, quæ in superiori propositione, & diuisa EF, bifariam in M. Dico esse, vt MC, ad CF, sic dimidiam CF, ad FD.

QVoniam enim duo rectangula EFD, BFC, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato AF; ergo erit, vt EF, ad FC, sic BF, ad FD. Et antecedentium dimidia, nempe erit, vt MF, ad FC, sic dimidia BF, ad FD. Et diuidendo, erit, vt MC, ad CF, sic excessus dimidiæ BF, super FD, ad FD; hoc est, ita erit dimidia CF, ad FD; quia excessus dimidiæ BF, super FD, est æqualis dimidiæ CF. Quod patet, quia dimidia BF, est dimidia CD, cum dimidia DF; excessus autem dimidiæ CD, cum dimidia DF, super DF, est idem, ac excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF; cùm verò CF, sit excessus totius CD, super totam DF. Ergo, & dimidia CF, erit excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF. Quare patet propositum.

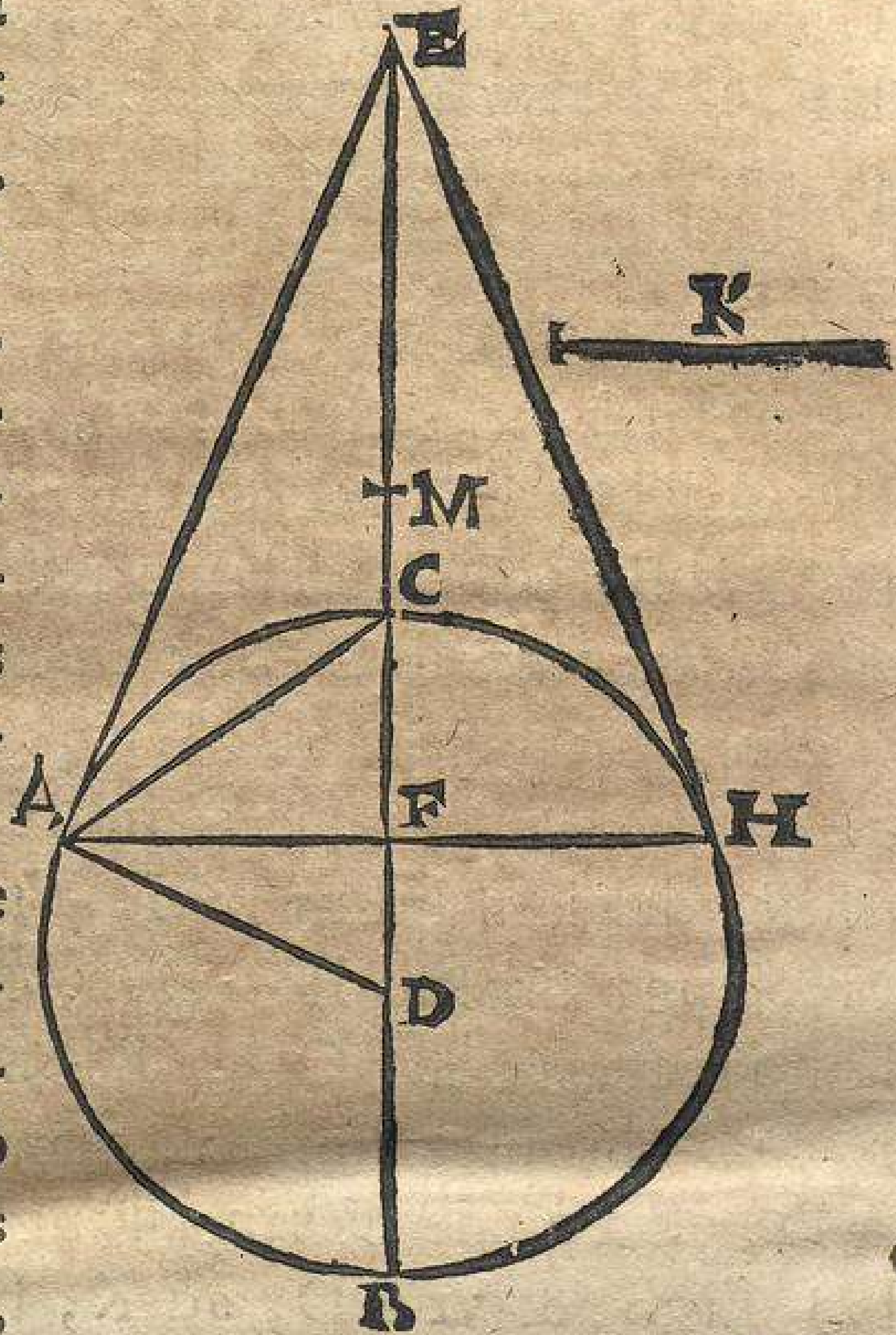
LEMMA XII. PROP. XIV.

Dati circuli diametrum taliter producere, vt ductis tangente, ſinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum ſub tangente, & ſinu recto, vna cum quadrato ſinus recti, ſit ad quadrata chordæ, & ſinus recti, in data proportione.

SIT datus circulus, cuius centrum D; diameter ſit BC. Oportet ipſam diametrum taliter continuare in E, vt ductis tangente EA, ſinu recto AF, & chorda AC; rectangulum EAF, cum quadrato AF, ſit ad duo quadrata CA, AF, in data proportione.

Iam in propoſitione 7. patuit proportionem datam debere eſſe exceſſus. Quia, cum rectangulum EAF, oſtenſum ſit maius quadrato AC; etiam addito communi quadrato AF, rectangulum EAF, cum quadrato AF, erit maius duobus quadratis CA, AF. Sit ergo proportio data ea, quam habet BD, ad K; & data recta BC, ſecta bifariam in puncto D, rurſum taliter diuidatur in pũcto F, inter C, D, vt rectangulum BCF,

ſit



ſit ad duo rectangula BC, FD, & BFD, vt duplus exceſſus DB, ſuper K, ad K, per propoſitionem vndecimã. Tunc à puncto F, erigatur diametro perpẽdicularis FA; & à puncto A, ducatur tangens AE, occurrens diametro in E; & ducatur AC. Dico iuſſum eſſe adimpletum. Diuidatur EF, in M, biſariam. Quoniam verò factum eſt, vt duplus exceſſus BD, ſuper K, ad K, ſic rectangulum BCF, ad rectangula BC, FD, & BFD; ergo, & vt antecedentium dimidia; nempe, vt exceſſus BD, ſuper K, ad K, ſic rectangulum ſub BC, in dimidiam CF, ad rectangula BC, FD, & BFD, nempe ad rectangulum ſub compoſita ex CB, BF, in FD. Sed, vt rectangulum ſub BC, in dimidiam CF, ad rectangulum ſub compoſita ex BC, BF, in FD, ſic rectangulum BCM, ad rectangulum ſub compoſita ex BC, BF, in FC. Ratio eſt, quia proportiones horum rectangulorum componuntur ex iiſdem proportionibus. Nam ex Lemmate antecedenti, eſt, vt dimidia CF, ad FD, ſic

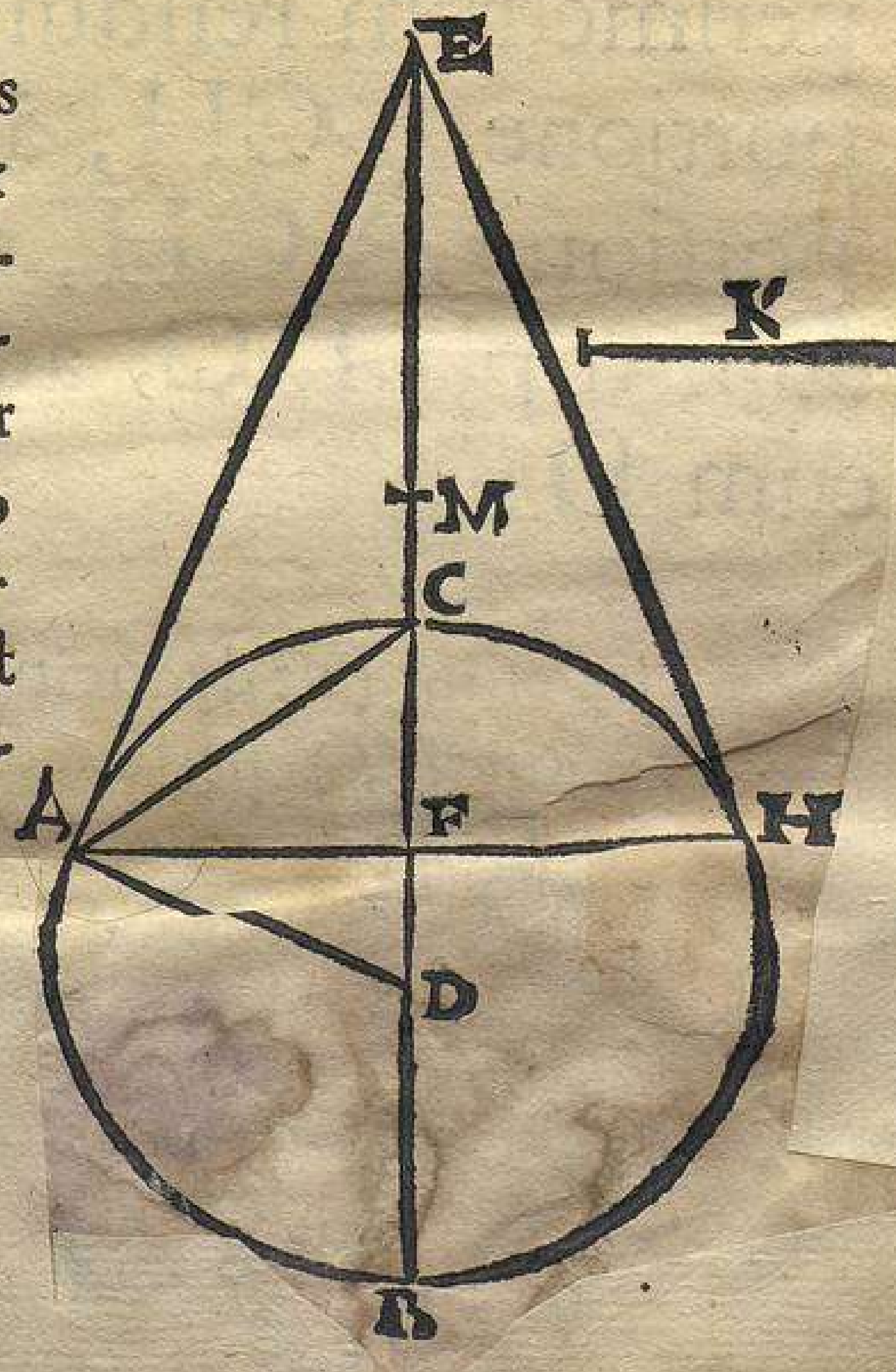
MC,

MC, ad CF; & proportio B C, ad compositam ex B C, & B F, est eadem in vtroque antecedenti ad suum consequens. Ergo, & vt excessus B D, super K, ad K, sic rectangulum B C M, ad rectangulum sub composita ex B C, B F, in F C. Ergo, & componendo, vt B D, ad K, sic rectangulum B C M, cum rectangulo sub cōposita ex B C, B F, in F C, nempe cum duobus rectangulis B C F, B F C, ad duo rectangula B C F, B F C. Sed rectangulum B C M, cum rectangulo B C F, facit vnicum rectangulum sub B C, in M F, cui postea est æquale rectangulum sub dimidia B C, nempe sub D A, in E F, duplam ipsius F M. Ergo, vt B D, ad K, sic est rectangulum sub E F, D A, cum rectangulo B F C, ad duo rectangula B C F, B F C. Sed rectangulo sub E F, D A, propter similitudinem triangulorum E A F, E A D, est æquale rectangulum E A F (vt sæpè dictum est.) Ergo, & vt B D, ad K, sic rectangulum E A F, cum rectangulo B F C, ad duo rectangula B F C, B C F. Sed rectangulum B F C, est æquale quadrato A F, & rectangulum B C F, est æquale quadrato A C. Ergo, & vt B D, ad K, sic rectangulum E A F, cum quadrato A F, ad duo quadrata A C, A F; hoc est, ex Archimede supra citato, sic superficies conica, & basis, nempe totus perimeter coni, ad superficiem sphæricam portionis, & ad basim, hoc est ad totum perimetrum portionis. Quod erat faciendum.

PROBLEMA III. PROP. XV.

Datis iiſdem, quæ in ſuperioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, adeò vt totus perimeter coni, ſit ad totum perimetrum portionis ab eo incluſam in data proportione.

Problema ex antecedentibus Lemmatibus, & ex Archimede ſupra citato, eſt facilis ſolutionis; quapropter in eius ſolutione non eſt amplius immorandum, ſed eſt relinquenda induſtriæ Lectoris.

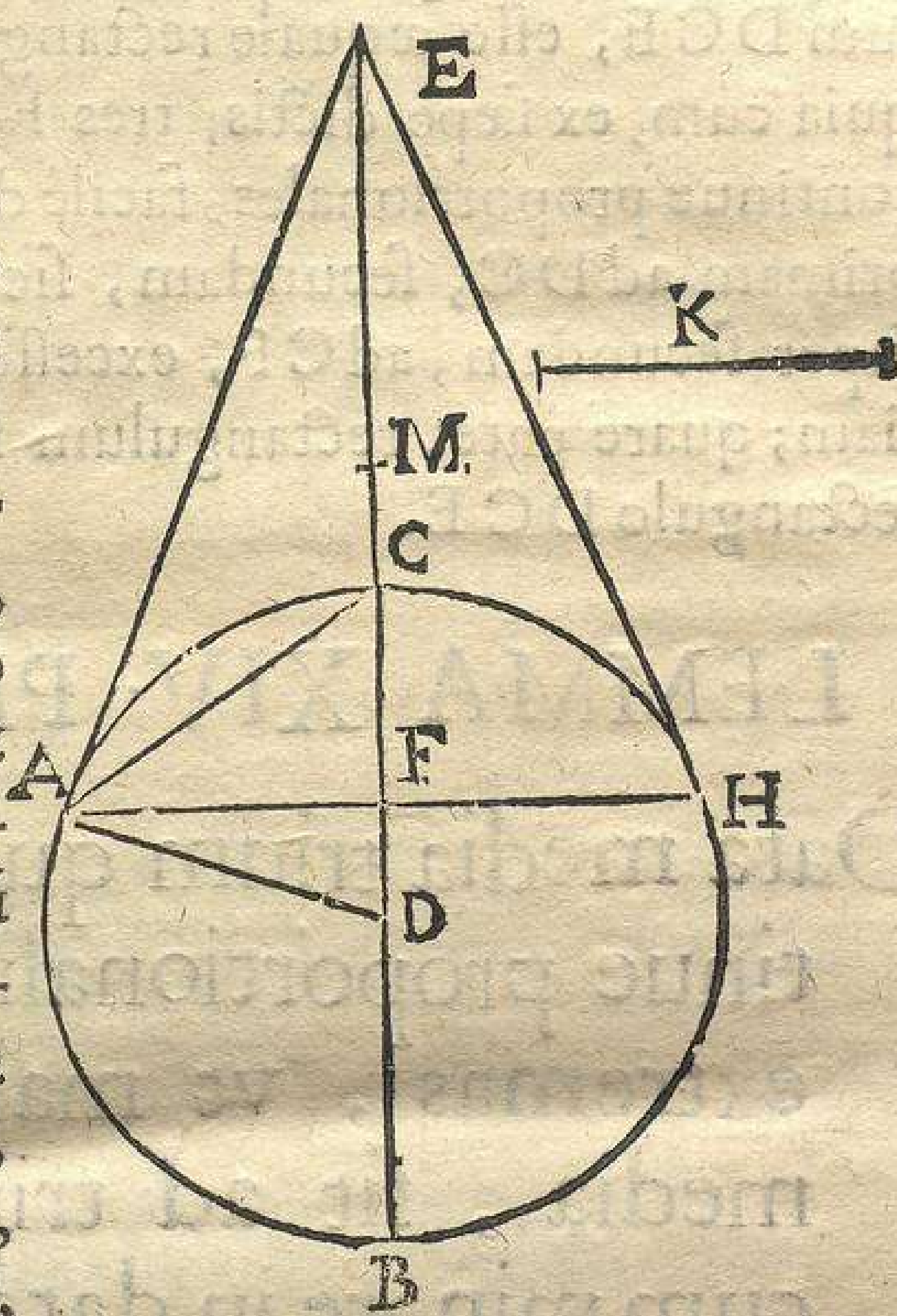


LEMMA XIII. PROP. XVI.

Sit conus E A H, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram ACHB, modo ſupradicto; & ECFB, ſit axis coni, & diameter ſphæræ; & diametro BC, ſit normalis A F, & D, ſi ſit centrum ſphæræ. Dico perimetrum reſidui coni, dempta portione A CH, ad perimetrum portionis A CH, eſſe, vt E D, cum tripla DC, ad triplam D C, cum DF.

QVoniam enim (vt deducitur ex Archimede locis ſupra citatis,) perimeter ſolidi excauati, ſeù reſidui coni, dempta portione, eſt ad perimetrum portionis, vt rectangulum E A F, cum quadrato A C, ad quadrata A C, A F; & cum, propter ſimilitudinem triangulorum E A F, A F D, rectangulum E A F, ſit æquale rectangulo ſub A D, ſeù D C, in EF; & pariter, cum quadrato A F, ſit æquale rectangulum B F C; & quadrato A C, ſit æquale rectangulum B C F. Ergo, & vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis,

nis, ſic erit rectangulum DC, EF; cum rectangulo BCF, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulum DC, EF, diuiditur in duo rectangula DCF, & DCE; & rectangulum DCE, eſt æquale rectangulo ſub ED, in CF, (vt poſtea oſtendetur;) ergo, & perimeter ſolidi excauati erit ad perimetrũ portionis, vt rectangulum ED, CF, vna cum rectangulo DCF, & cũ rectangulo BCF, ad rectangulum BCF, cum rectangulo BFC. Sed rectangula ED, CF; DCF, & BCF, faciunt rectangulum ſub compoſita ex ED, cum tripla DC, in CF; & pariter rectangula BCF, & BFC, faciunt rectangulum ſub compoſita ex CB, BF, in FC, nempe ſub tripla CD, cum DF, in FC. Ergo erit, vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis, ſic rectangulum ſub ED, cum tripla DC, in CF, ad rectangulum ſub tripla CD, cum DF, in CF, nempe (propter eandem altitudinem FC,) ſic ED, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF. Quod erat oſtendendum.



Quòd verò supra assumptum est, nempe rectangulum DCE, esse æquale rectangulo, ED, CF, patet; quia cum, ex sæpè dictis, tres ED, DC, & DF, sint continue proportionales, facilè deducitur esse, vt ED, primam ad DC, secundam, sic EC, excessum primæ super secundam, ad CF, excessum secundæ super tertiam; quare patet rectangulum ED, CF, esse æquale rectangulo DCE.

LEMMA XIV. PROP. XVII.

Data media trium quantitatum continue proportionalium, inuenire extremas, vt maior cum tripla media, sit ad triplam mediam cum minore in data proportione.

DAta media sit AB, & data ratio sit, quam habet AB, ad BE, quam patet esse excessus; & inter AB, BE, sit media proportionalis H; & producatur BA, B A, in F, vt F B, sit tripla B A; & ab ipsa F B, auferatur F K, æqualis triplæ B E (vbicumque cadat punctum K:) deinde data media H, & differentia extremam B K, in ordine trium continue proportionalium, inueniantur extremæ B L, L K. Patet L K, esse minorem A B, nam etiam media H, est minor ea. Fiat ergo A D, æqualis L K, & fiat, vt A D, ad A B, sic A B, ad A C. Dico tres C A, A B, A D, esse quæsitas.

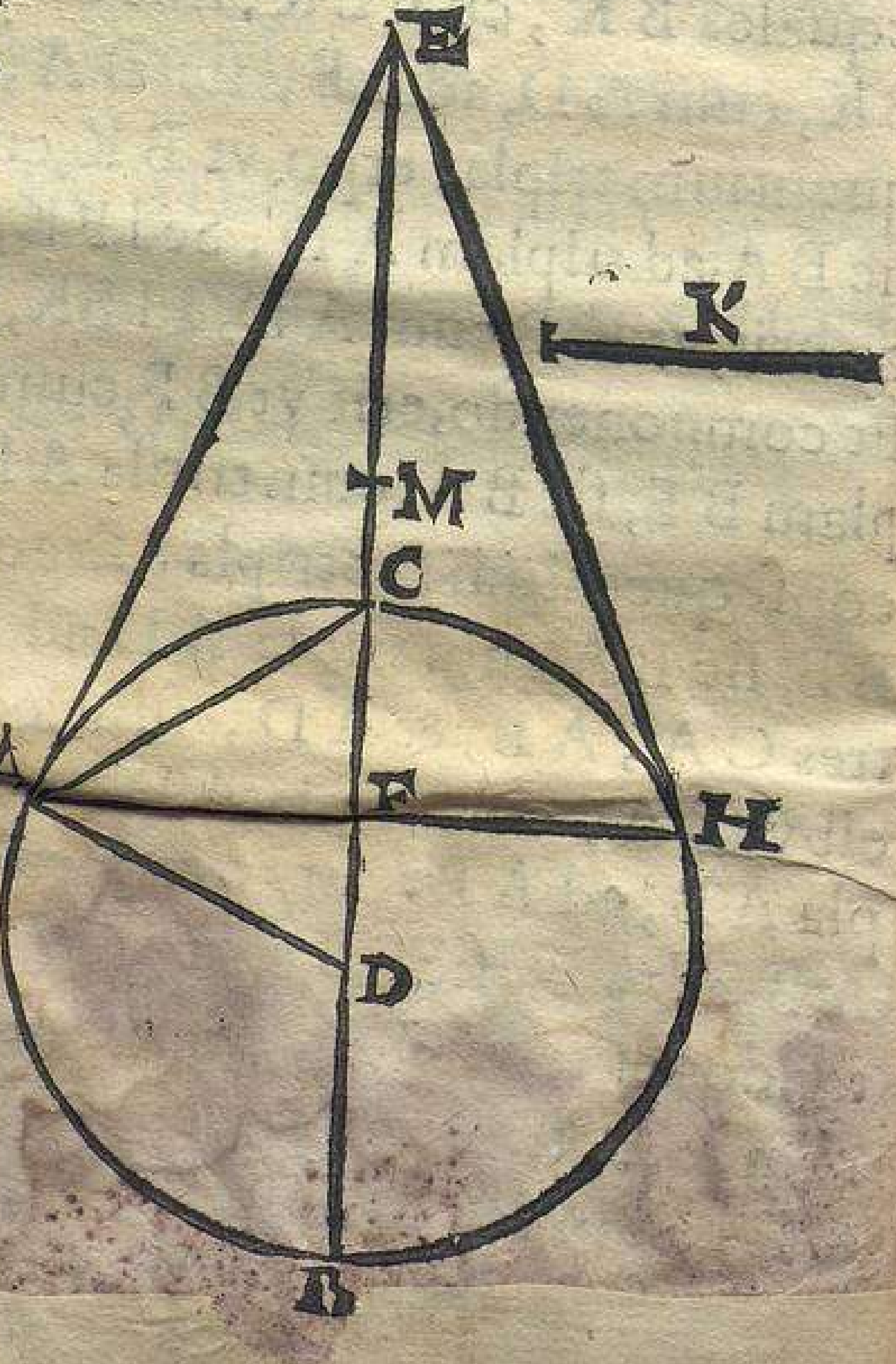
Quoniam enim quadrato H, sunt æqualia ambo rectangula B L K, & A B E; ergo ista rectangula sunt æqualia inter se; quare erit, vt B L, ad B E, sic B A, ad L K, seù ad A D, quæ L K, facta fuit æqualis. Sed B L, sunt æquales B K, cum L K, hoc est cum A D. Quare, & vt B K, cum A D, ad B E, sic B A, ad A D. Et ad consequentium tripla; ergo, vt B K, cum A D, ad triplam B E, sic B A, ad triplam A D. Sed F K, facta fuit tripla B E; ergo erit, vt K B, cum A D, ad F K, sic A B, ad triplam A D. Et componendo, erit vt B F, cum A D, ad F K, seù ad triplam B E, sic B A, cum tripla A D, ad triplam A D. Et ad consequentium subtripla. Ergo erit, vt F B, cum A D, ad B E, sic B A, cum tripla A D, ad A D. At verò, quoniam tres C A, A B, & A D, sunt continue proportionales, est vt B A, cum tripla A D, ad A D, sic C A, cum tripla A B, ad A B. Ergo erit etiam, vt C A, cum tripla A B, ad A B, sic F B, cum A D, ad B E. Ergo, & permutando, erit, vt C A, cum tripla A B, ad F B, cum A D, nempe ad triplam B A, cum A D, sic A B, ad B E. Sed C A, est maior; B A, est media data, & D A, est minor. Quare factum est, quod imperabatur.

PRO-

PROBLEMA IV. PROP. XVIII.

Datis ijſdem, quæ in ſuperioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter ſolidi excauati, nempe reſidui coni ablata portione, ſit ad totum perimetrum portionis in data proportione.

DAta ratio ſit, quàm habet BD, ad K: & data DC, media in ordine trium continue proportionalium inueniantur extremæ DF, minor, & DE, maior tali lege, vt ſit ſicut B D, ad K, ſic DE, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF; per propoſitionem antecedentem. A' puncto autem F, erigatur perpendicularis diametro FA, & iungatur EA, quam patet tangere circulũ, & ſphæram; quia du-



cta DA, cum ſit, vt ED, ad DC, ſeù ad DA, ſic DC, ſeù DA, ad DF; ergo triangula EAD, ADF, ſunt ſimilia. Vnde cum angulus AFD, ſit rectus, etiam angulus EAD, erit rectus, & proinde EA, erit tangens. Cùm verò EA, tangat circulum; ergo, & ſuperficies coni facti à triangulo EAF, tanget ſphærã. Reliqua ſunt nimis clara, ideò ex induſtria omittuntur.

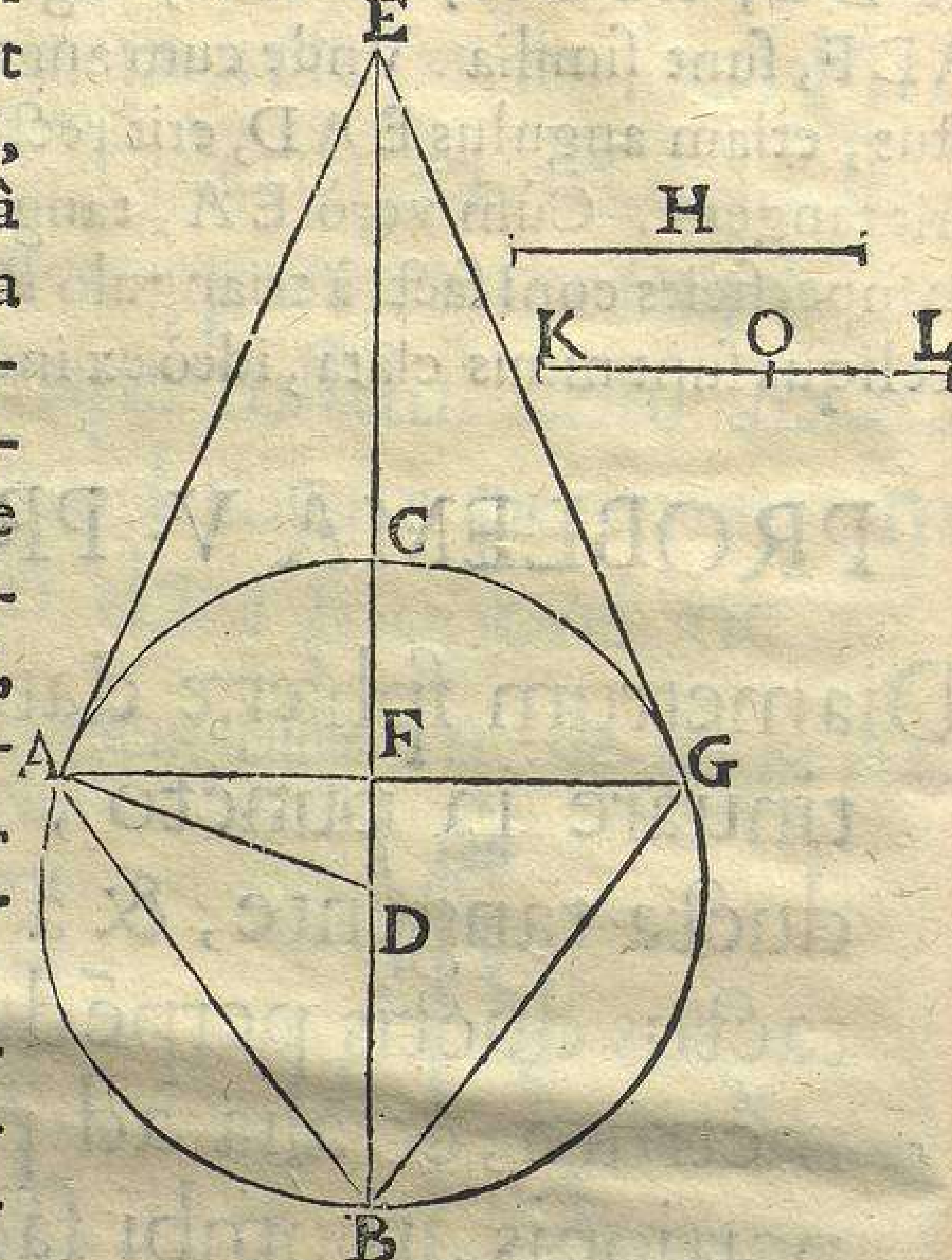
PROBLEMA V. PROP. XIX.

Diametrum ſphæræ datæ taliter continuare in puncto, vt à puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpẽdiculari ad diametrum, & alia ad polum alterius portionis, rhombi facti ex reuolutione circa diametrum, conus tangens ad reliquum conum ſit in data proportione.

DAtæ ſphæræ ſit diameter BC, centrum D; oportet autem diametrum BC, taliter continuare in E, vt ducta tangente AE, dimiſſa perpendiculari AF, & iuncta AB, & reuoluto triangulo EAB, adeò vt fiat rhombus EABG; conus EAG, ſit ad conum

ABG,

ABG, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet BD, ad H. Secetur DC, taliter in F, vt ſit ſicut BD, ad H, ſic CF, ad FD; & à puncto F, erecta normali FA, & ductis AB, & tangente AE, occurrente diametro in E; & intellectis conis EAG, BAG, ortis ex conſueta reuolutione. Dico eſſe quæſitos.

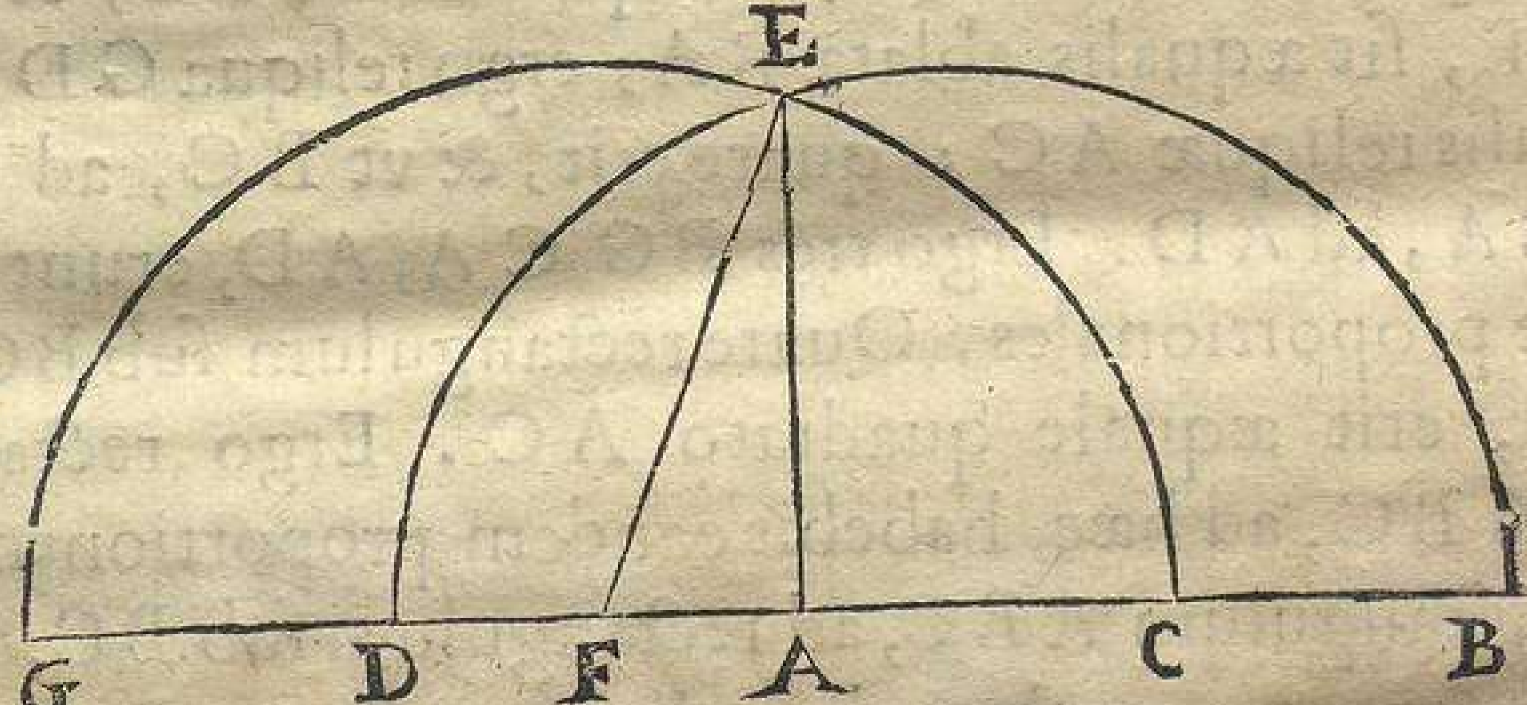


Nam, propter eãdem baſim AG, conus EAG, ad conum BAG, eſt, vt axis EF, ad axim BF. Quoniam autem rectangula EFD, BFC, ſunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato AF; eſt, vt EF, ad FB, ſic CF, ad FD; & CF, ad FD, facta eſt, ſicut BD, ad H. Ergo, & vt BD, ad H, ſic conus EAG, ad conum BAG. Quod erat faciendum.

LEMMA XV. PROP. XX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum ſub tota, & ſub vna parte, ſit ad quadratum alterius partis in data proportione.

SIT data recta linea AB, & proportio data ſit ea, quam habet BA, ad AD, ei poſitam in dire-

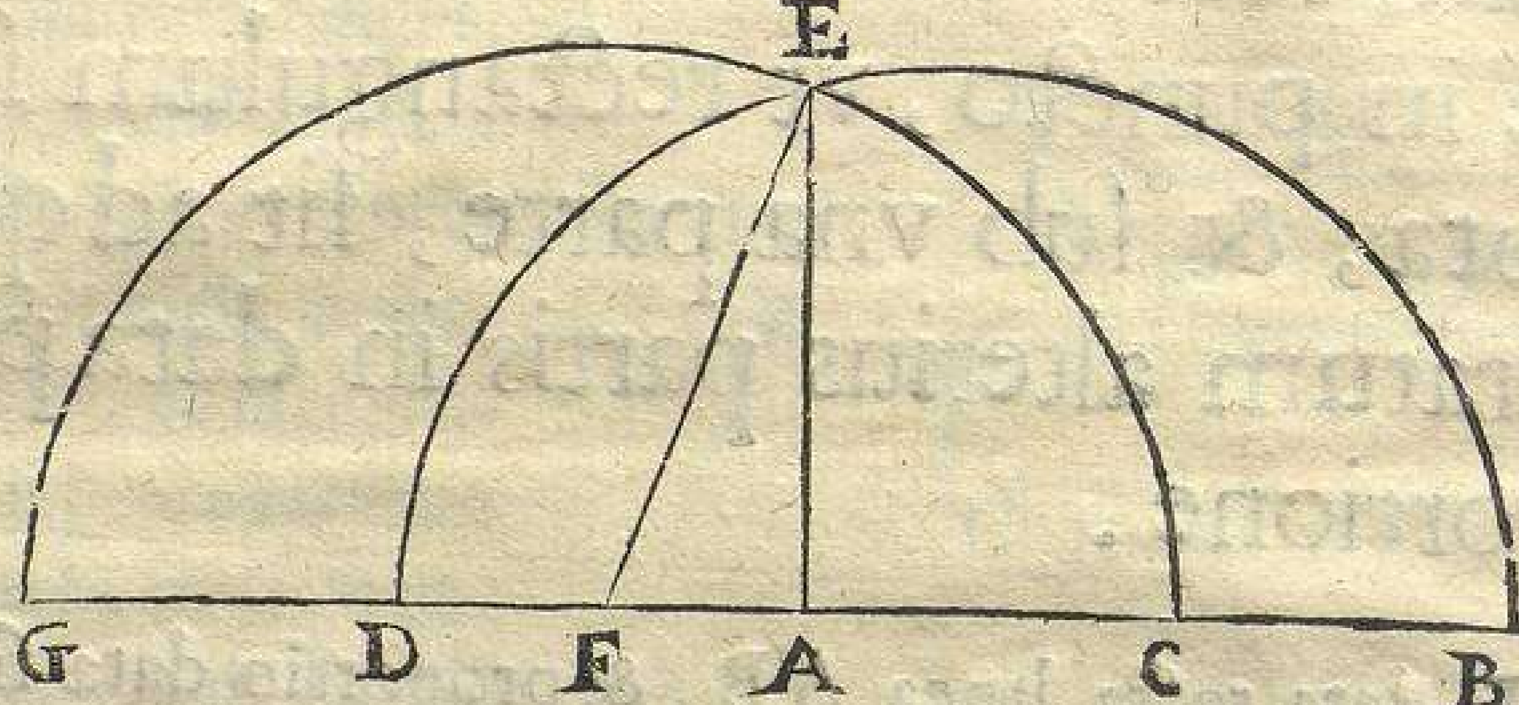


ctum. Oportet diuidere AB, in C, vt rectangulum ABC, ſit ad quadratum AC, in data proportione. Super DB, tanquam ſupra diametrum fiat ſemicirculus; & à puncto A, erigatur diametro perpendicularis AE; diuiſaque DA, bifariam in F, & iuncta FE, centro F, interuallo FE, fiat ſemicirculus GEC, ſecans AB, in C. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

Duo enim rectangula GAC, BAD, ſunt æqualia

E inter

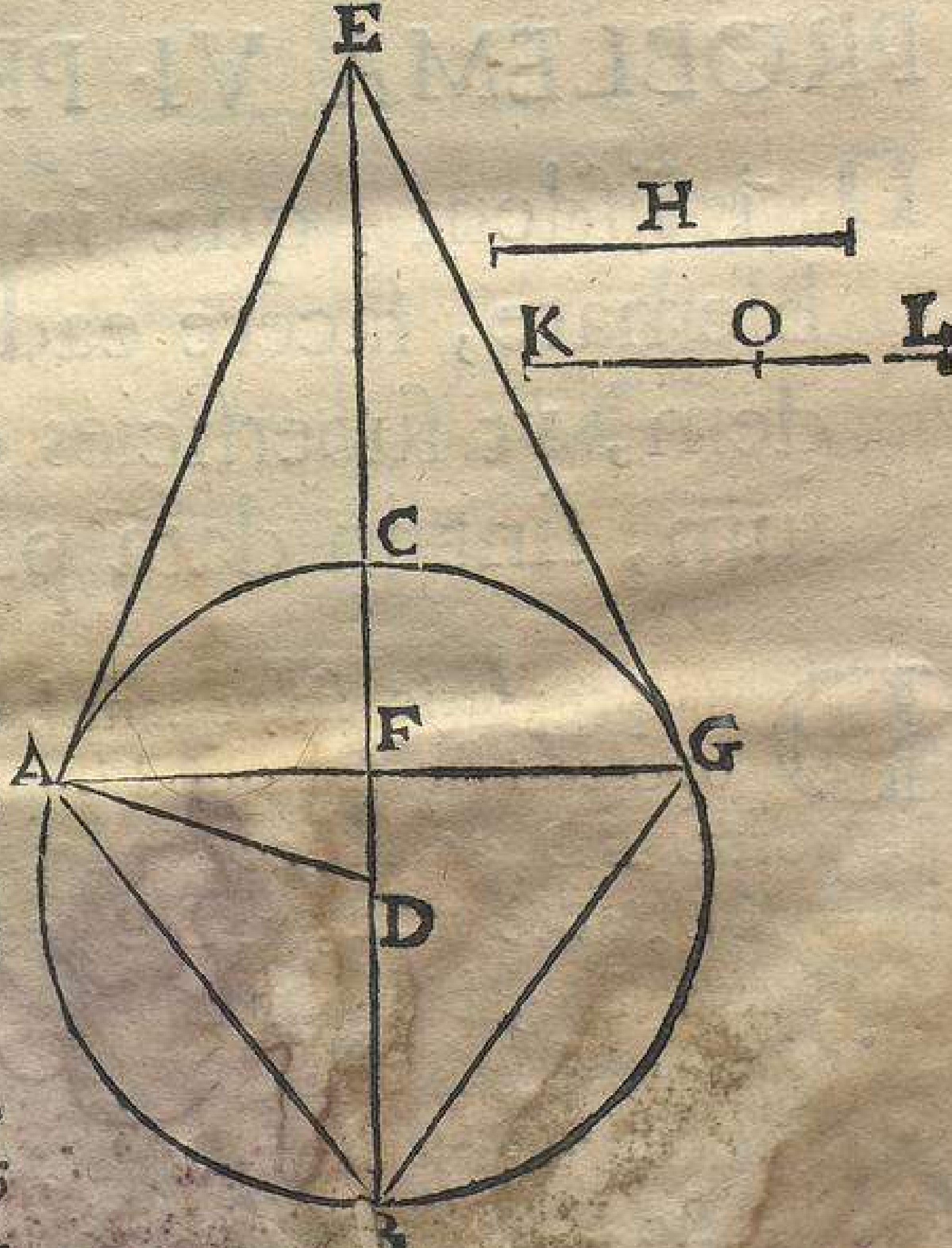
inter ſe, quia æqualia eidem quadrato A E. Ergo erit, vt B A, ad A C, ſic G A, ad A D. Et diuidendo, vt



B C, ad C A, ſic G D, ad D A. Sed G D, eſt æqualis A C, quia cum tota G F, ſit æqualis totæ F C, & ablata D F, ſit æqualis ablatæ F A; ergo reliqua G D, erit æqualis reliquæ A C; quare erit, & vt B C, ad C A, ſic C A, ad A D. Ergo tres B C, C A, A D, erunt continue proportionales. Quare rectangulum ſub B C, in D A, erit æquale quadrato A C. Ergo rectangulum A B C, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum A B C, ad rectangulum ſub B C, D A, eſt (propter eandem altitudinem B C,) vt B A, ad A D. Ergo, & vt B A, ad A D, ſic rectangulum A B C, ad quadratum A C. Quod erat faciendum.

LEMMA XVI. PROP. XXI.

Sit circulus, cuius centrum D, diameter BC, continuata in E; EA, sit tangens, & AF, sit sinus rectus arcus AC. Dico esse, vt rectangulum DCF, ad rectangulum sub dupla DF, in DF, sic rectangulum BEC, ad rectangulum CBF.



PAtet; quia proportiones horum rectãgulorũ componũtur ex ijsdem proportionibus. Nam proportio DC, ad DF, est eadem cum proportione EB, ad BF; & proportio CF, ad duplam DF, est eadem cũ proportione EC, ad CB, vt statim patebit; quare patet propositum.

Primum ergo, nempe, quod, vt DC, ad DF, sic sit EB, ad BF; patet, quia, cum, vt sæpè dictum est, sit, ob æqualitatem rectangulorum EFD, BFC, vt EF, ad FB, sic CF, ad FD, erit componendo, vt EB, ad BF, sic CD, ad DF.

Secundum, nempè, quod sit, vt CF, ad duplam FD, sic EC, ad CB, pariter est clarum; quia cum pariter, vt sæpè dictum est, sit, vt ED, ad DC, sic DC, ad DF, erit diuidendo, vt EC, ad CD, sic CF, ad FD. Et ad consequentium dupla. Ergo vt EC, ad CB, sic CF, ad duplam FD.

PROBLEMA VI. PROP. XXII.

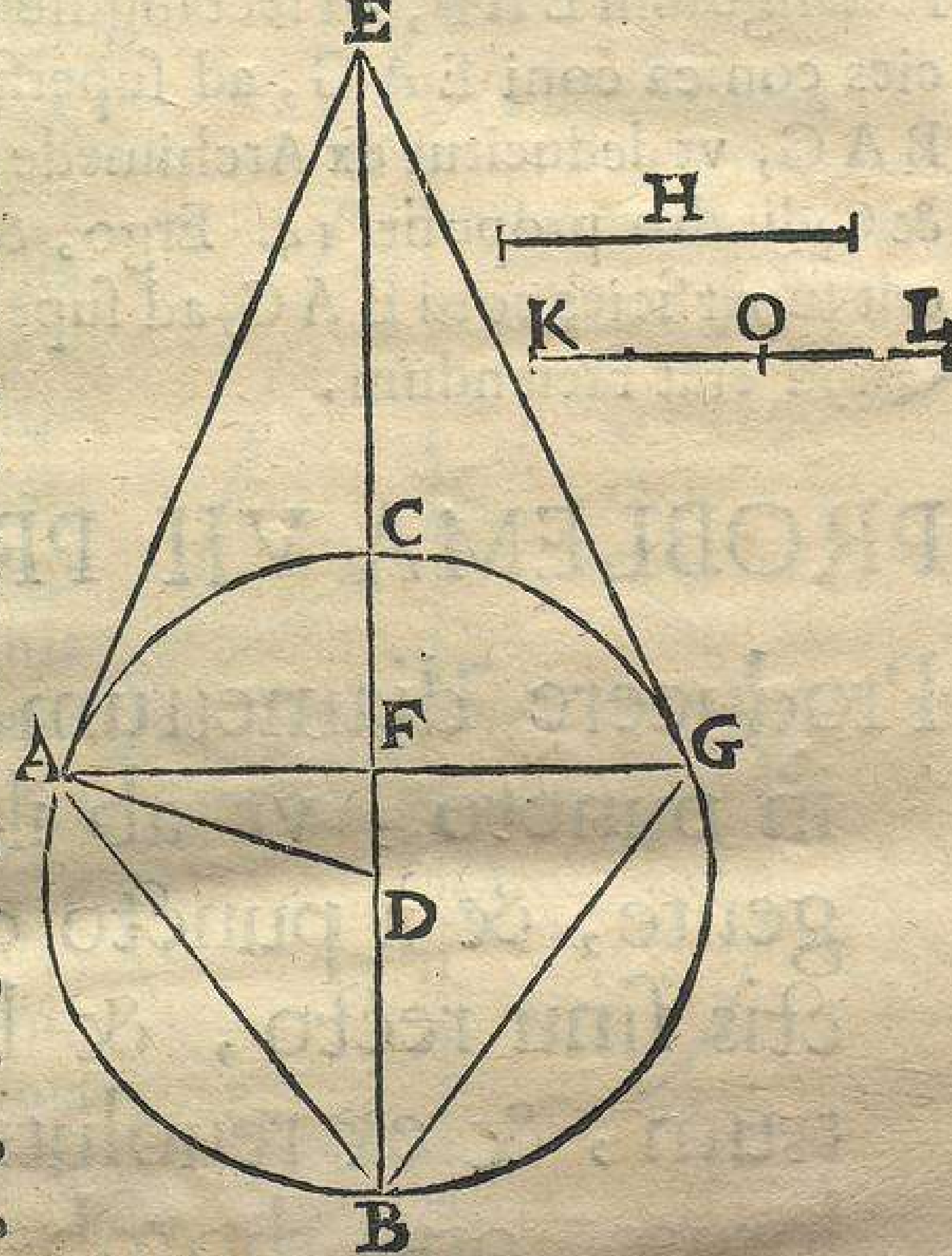
Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet BD, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Data proportio BD, ad H, continuetur ad tertium terminum KL, adeò vt sit, vt BD, ad H, sic H, ad KL; diuisaque KL, bifariam in O; diuidatur etiam, per Lemma antecedens, DC, in F, adeò vt sit, sicut BD, ad KO, sic rectangulum DCF, ad quadratum DF; & à puncto F, erecta normali AF, ducta tangente

A,

EA, & factis conis EAG, BAG. Dico eſſe quæſitos nimirùm eſſe, vt BD, ad H, ſic ſuperficiem coni EAG, ad ſuperficiem coni BAG.

Nam, cùm ſit, vt BD, ad KO, ſic rectangulum DCF, ad quadratum DF. Ergo, & vt BD, ad KL, duplam KO, ſic rectangulum DCF, ad duo quadrata DF, ſeù ad rectágulum ſub dupla DF, in DF. Sed, vt rectágulum DCF, ad rectangulum ſub dupla DF, in DF, ſic rectangulum BEC, ad rectangulum CBF; ex Lemmate antecedenti. Ergo, & vt BD, ad KL, ſic rectangulum BEC, ad rectangulum CBF. Sed rectangulo BEC, eſt æquale quadratum tangentis EA, & rectangulo CBF, eſt æquale quadratum BA. Ergo, & vt BD, ad KL, ſic quadratum EA, ad quadratum AB. Sed, vt BD, ad KL, ſic eſt quadratum BD, ad quadratum H. Ergo, & vt BD, quadratum, ad quadratum H, ſic eſt quadratum EA, ad quadratum AB. Quare,



&

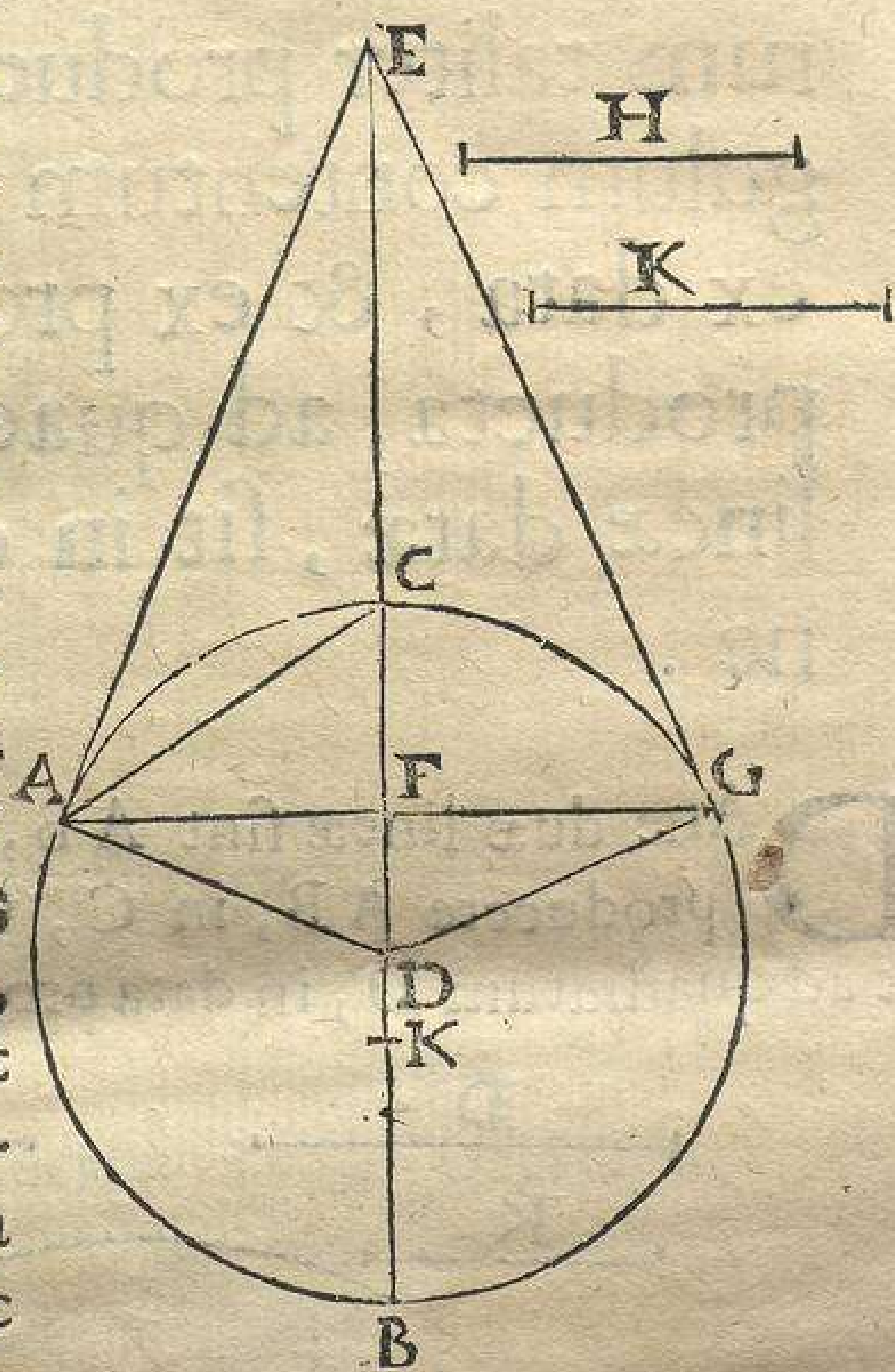
& vt linea BD, ad H, ſic E A, ad A B. Sed (ſumpta communi altitudine A F,) vt E A, ad A B, ſic eſt rectangulum E A F, ad rectangulum B A F; vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum B A F, ſic ſuperficies conica coni E A G, ad ſuperficiem conicam coni B A G, vt deducitur ex Archimede primo de Sphæra, & Cylindro propoſit. 14. Ergo, & vt B D, ad H, ſic erit ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni B A G. Quod erat faciendum.

PROBLEMA VII. PROP. XXIII.

Producere diametrum datæ ſphæræ in puncto, vt ab illo ducta tangente, & à puncto contactus ductis ſinu recto, & linea ad centrum, & ex reuolutione triangulorum, orto rhombo; coni rhombi ſint in data proportione.

SI data ſphæra, cuius centrum D, & data ratio ſit, quàm habet B D, ad H. Oportet producere B C, diametrum datæ ſphæræ in E, vt ductis tangente E A, ſinu recto A F, & ſemidiametro A D, & facto rhombo E A D G, conus E A G, ſit ad conum A D G, vt B D, ad H.

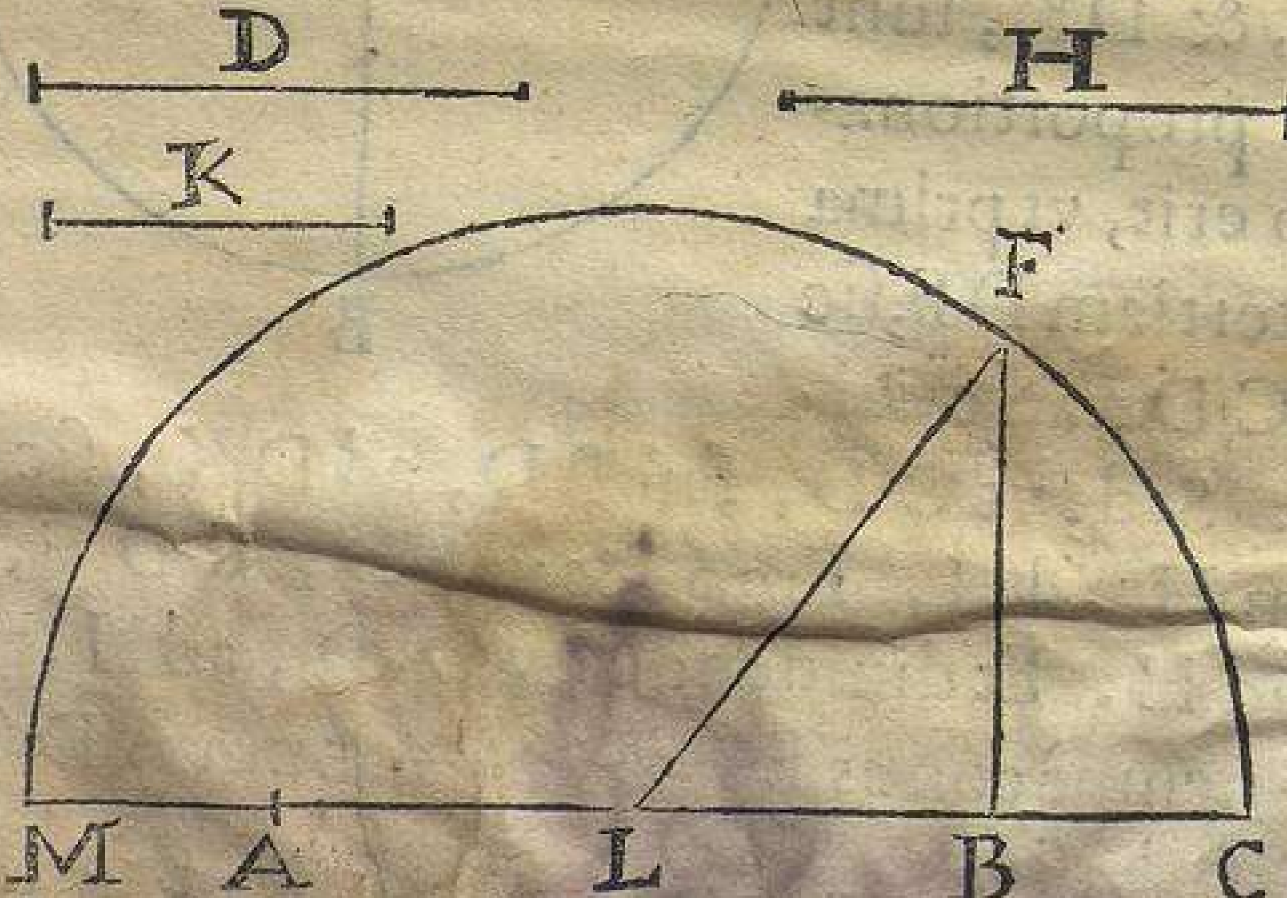
Fiat, vt B D, simul cum H, ad H, sic B D, ad D K; & inter B D, D K, inueniatur media, cui sit æqualis D F; & per F, excitetur A F G, normalis B C; & à puncto A, agatur tangens A E, occurrens diametro in E; & iuncta A D, intelligatur rhombus, E A D G. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim, vt sæpè dictum est, tres E D, D C, D F, sunt continuè proportionales; & quia F D, est media inter B D, seù C D, & D K; ergo, quatuor E D, D C, D F, & D K, sunt continue proportionales. Ergo erit, vt prima E D, ad tertiam D F, sic secunda C D, ad quartam D K. Sed, vt C D, seù B D, ad D K, sic est B D, simul cum H, ad H. Ergo, & vt E D, ad D F, sic B D, cum H, ad H. Et diuidendo, vt B D, ad H, sic E F, ad F D; nempè conus E A G, ad conum A D G, propter eandem basim A F G. Factum est ergo, quod erat faciendum.



LEMMA XVII. PROP. XXIV.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt rectangulum contentum ſub compoſita ex data, & ex producta, & ſub producta, ad quadratum alterius lineæ datæ, ſit in data proportione.

Datæ duæ lineæ ſint AB, & D. Oportet taliter producere AB, in C, vt rectangulum ACB, ſit ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea,



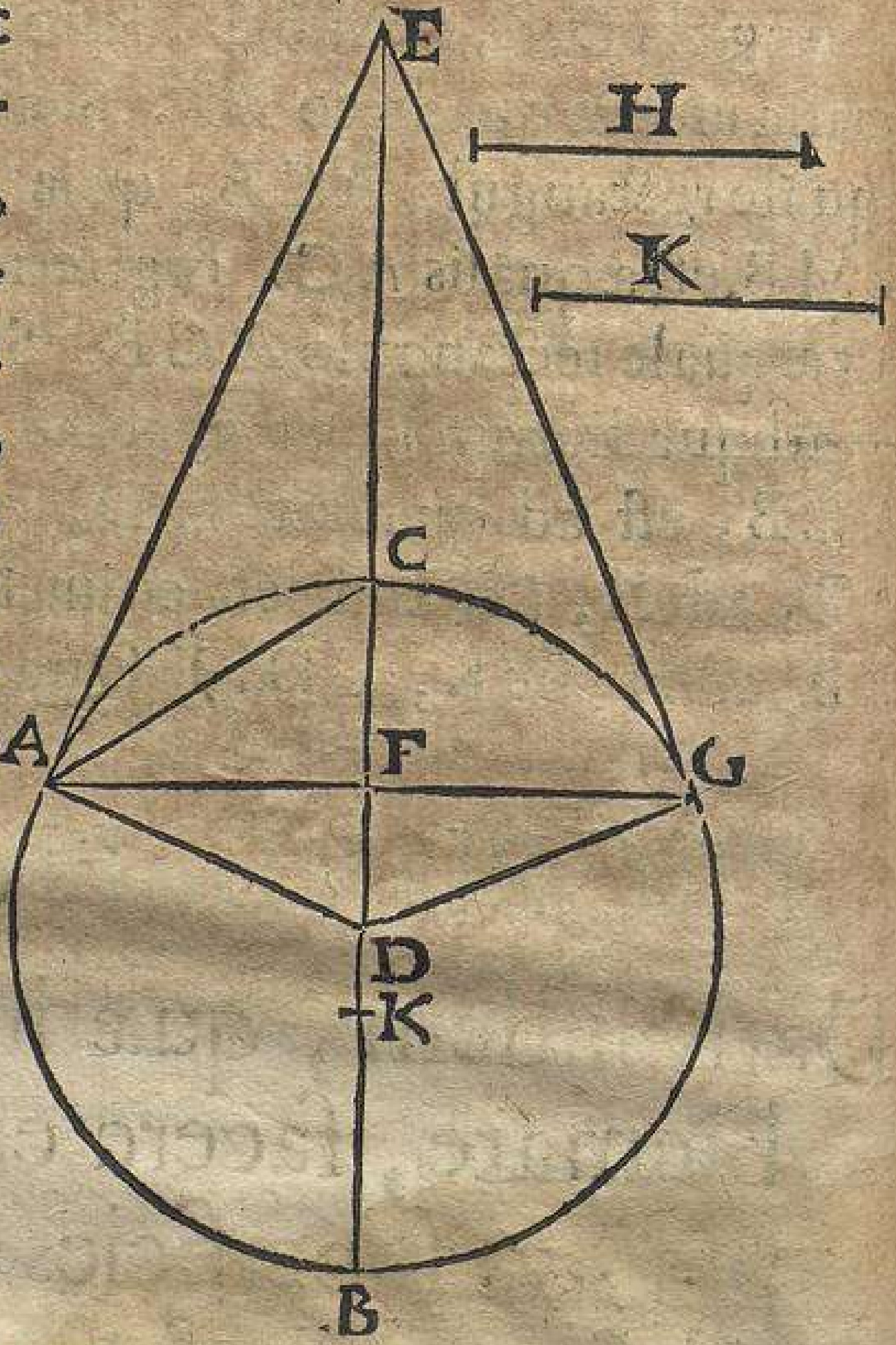
quam habet AB, ad H. Fiat ergo, vt H, ad AB, ſic D, ad K; & inter D, K, inueniatur media BF, quæ excitetur normaliter ſuper BA, à puncto B; & diuiſa AB, bifa-

bifariam L; & ducta L F, centro L, interuallo L F, describatur semicirculus; & A B, protrahatur hinc inde, donec occurrat semicirculo in punctis M C. Dico punctum C, vel punctum M, esse quæsitum. Duo enim rectangula D, K, & M B C, sunt æqualia, quia sunt æqualia eidem quadrato B F. Sed rectangulũ M B C, est æquale rectangulo A C B, quia M A, est æqualis B C, & M B, est æqualis A C. Ergo etiam rectangulum D, K, erit æquale rectangulo A C B. Sed rectangulum D, K, est ad quadratum D, vt K, ad D. Ergo, & rectangulum A C B, est ad quadratum D, vt K, ad D; nempè, vt A B, ad H, (factum est enim supra conuertendo, vt A B, ad H, sic K, ad D.) Quod erat faciendum.

PROBL. VIII. PROP. XXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ supra, vt superficies coni E A G, sit ad superficiem coni A D G, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet B D, ad H, quæ continuetur ad K, adeò vt sit, vt B D, ad H, sic H, ad K. Per Lemma autem antecedens, data B C, taliter continuetur in E, vt rectangulum B E C, sit ad quadratum semidiametri A D, vt B D, ad K; & à puncto E, ducatur tangens E A, & à puncto contactus A, ducatur A F G, normalis C B; & intelligantur coni E A G, A D G, vt in ſchemate. Aio iſtos eſſe quæſitos.

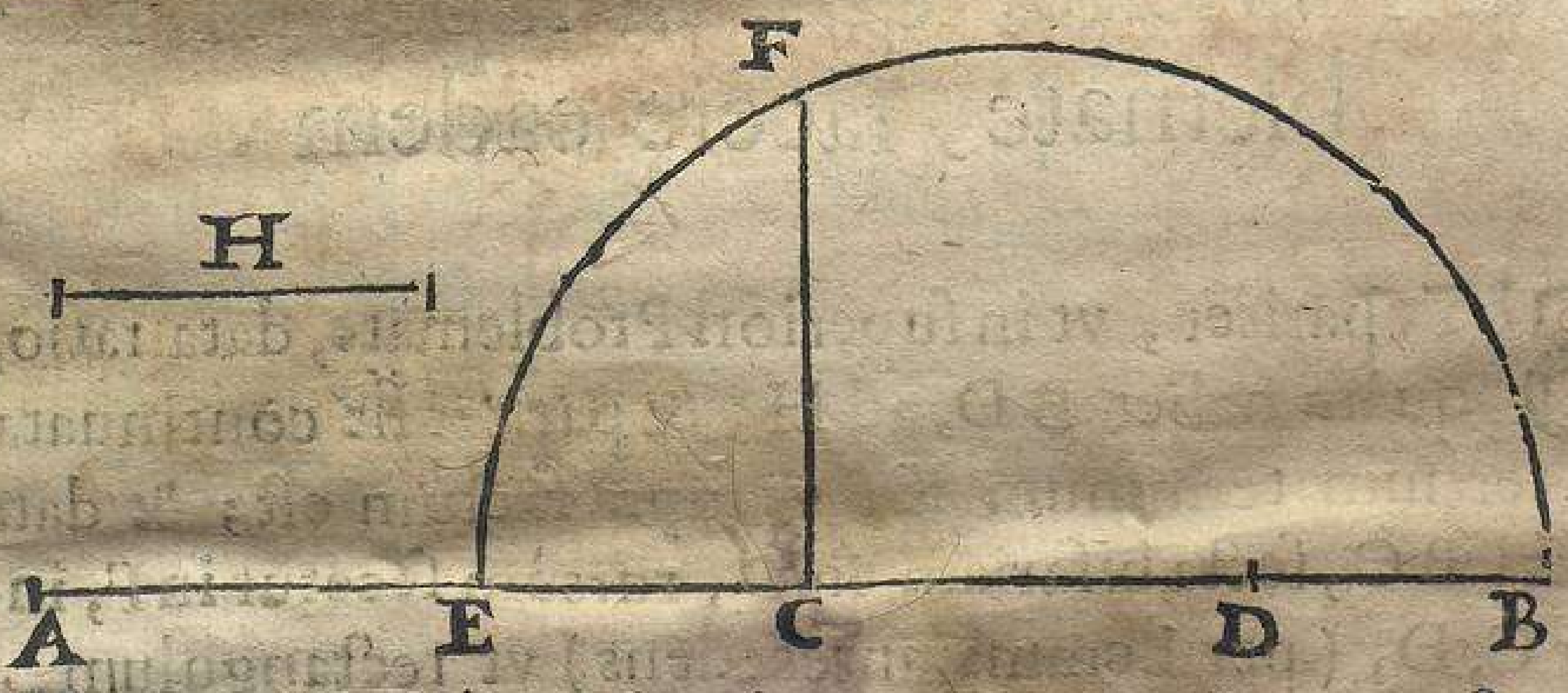


Quoniam enim, vt B D, ad K, ſic rectangulum B E C, nempè, quadratum E A, ei æquale, ad quadratum A D; & , vt B D, ad K, ſic quadratum B D, ad quadratum H; quare, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, ſic quadratum E A, ad quadratum A D. Vnde, & vt B D, ad H, ſic erit E A, ad A D. Sed vt E A, ad A D, ſic (ſumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectangulum D A F; & vt rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, ſic, ex Archimede, ſupra citato, ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G; quare, & vt B D, ad H, ſic ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

LEMMA XVIII. PROP. XXVI.

Datam rectam lineam ſectam in duas partes æquales, rursùm ipſam ſecare in partes inæquales, vt rectangulum ſub inæqualibus totius partibus contentum ; ad quadratum ſegmenti intermedij, ſit in data proportione.

DAta recta linea ſit A B, ſecta bifariam in puncto C, & data proportio ſit, quam habet AC, ad H.



Oportet ipſam taliter diuidere in puncto D, vt rectangulum A D B, ſit ad quadratum D C, vt A C, ad H. Fiat vt A C, cum H, ad H, ſic A C, ad C E; & ſuper diametro E B, facto ſemicirculo, à puncto C, erigatur perpendicularis C F, quæ erit minor C B. Fiat ergo C F, æqualis CD. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

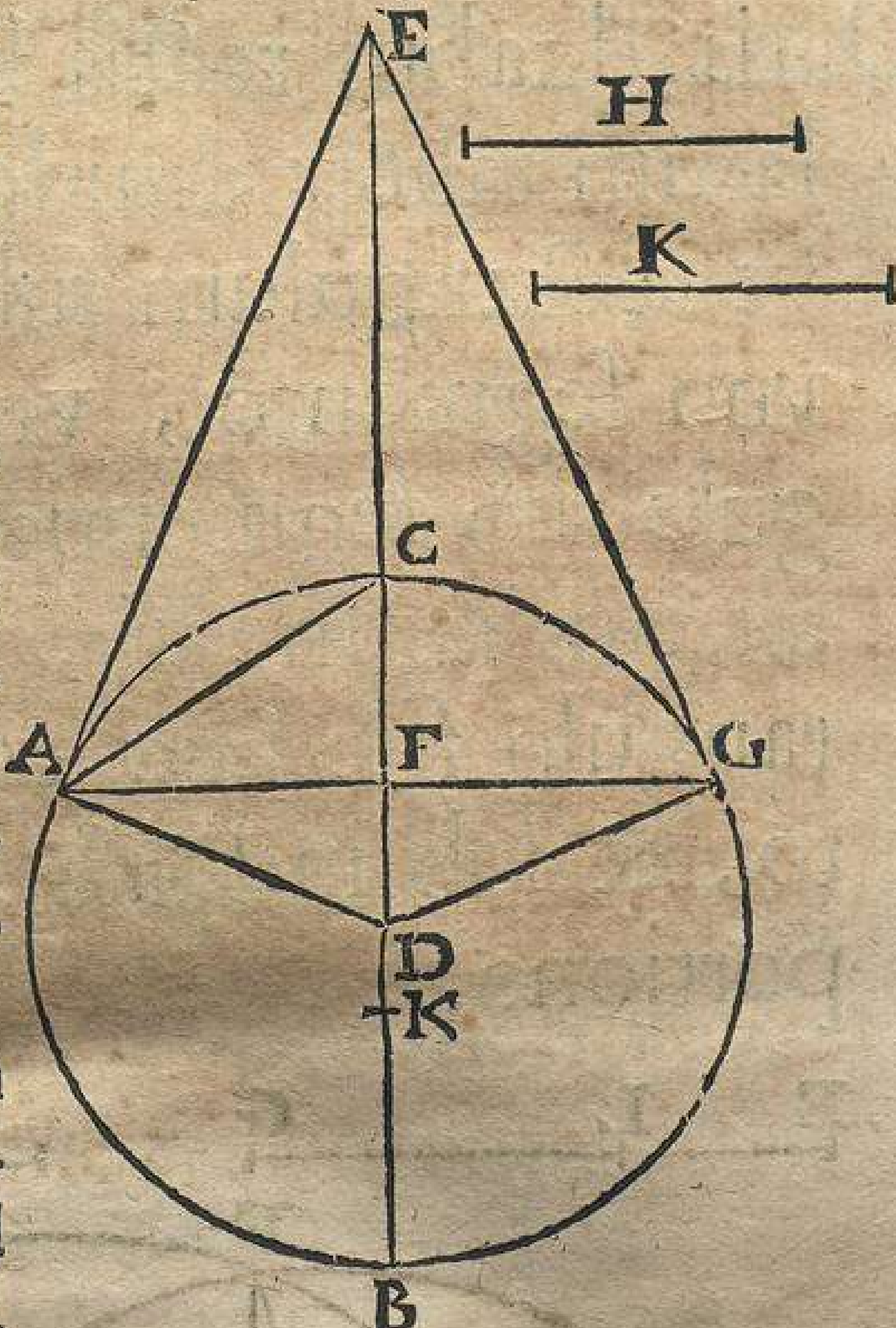
Quoniam enim factum est, vt A C, cum H, ad H, sic A C, seù ei æqualis B C, ad C E; & vt B C, ad C E, sic quadratum B C, ad quadratum C F, seù ad quadratum C D, ei æquale. Ergo, & vt A C, cum H, ad H, sic quadratum B C, ad quadratum C D. Et diuidendo, vt A C, ad H, sic excessus quadrati B C, super quadratum C D, ad quadratum C D. Sed talis excessus est æqualis quadrato D B, & duobus rectangulis C D B, quæ omnia faciunt rectangulum A D B. Ergo, & vt A C, ad H, sic rectangulum A D B, ad quadratum D C. Quod erat faciendum.

PROBLEMA IX. PROP. XXVII.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem.

SIT pariter, vt in superiori Problemate, data ratio, quàm habet B D, ad H; & pariter sit continuata ad tertium terminum K, vt suprà factum est; & data recta B C, secta bifariam in D, rursùm secetur in F, inter C, D, (per Lemma antecedens) vt rectangulum B F C, sit ad quadratum F D, vt D B, ad K; & à puncto F, acta, more solito, normali A F G, & à puncto A, tangente A E, & intellectis conis E A G, A D G. Dico istos esse quæsitos. Nam cùm factum sit, vt B D, ad K, sic rectangulum B F C, seù quadratum A F, ei æquale, ad quadratum F D; & cum sit, vt B D, ad K, sic qua-

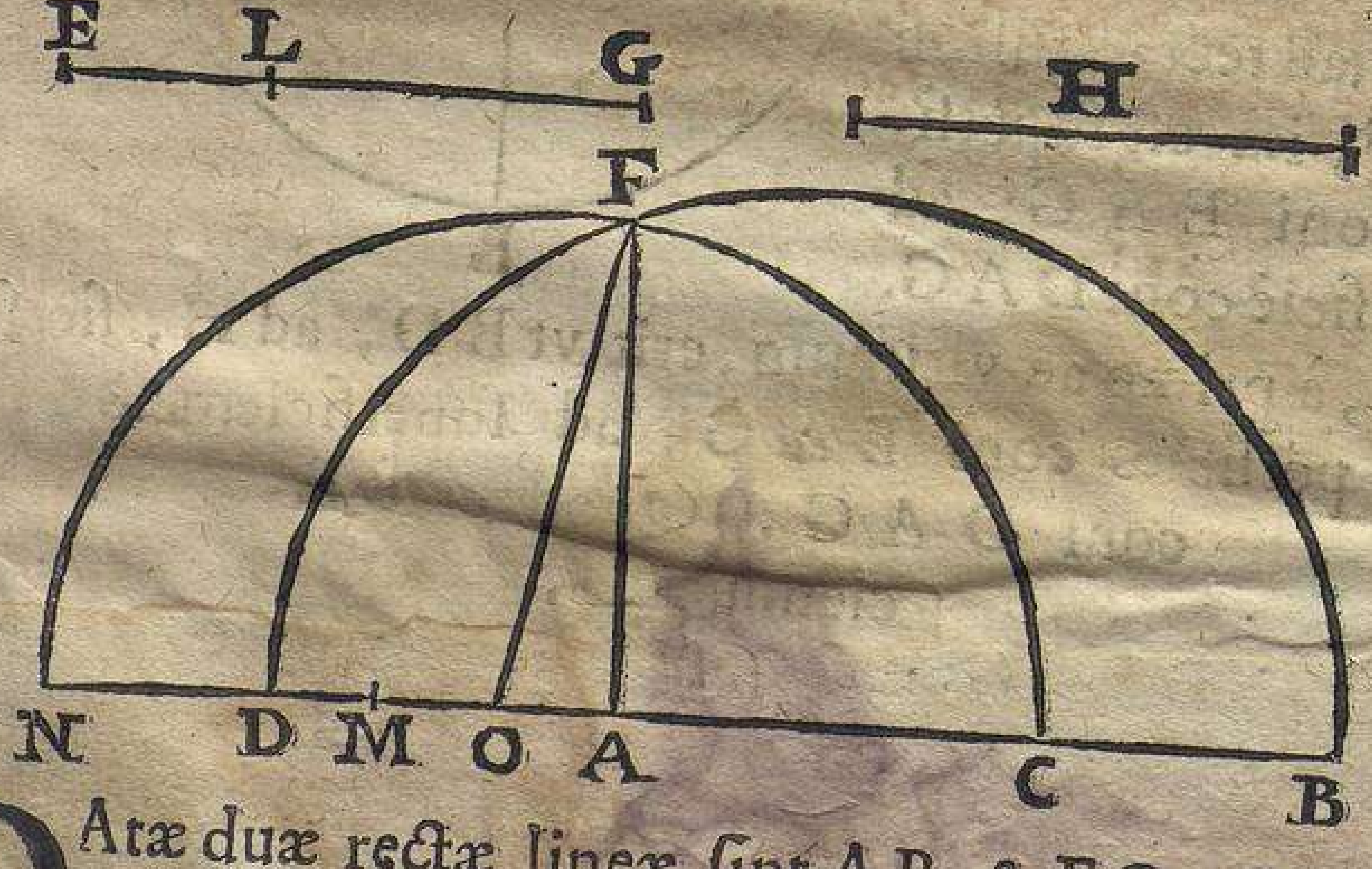
quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt quadratum B D, ad quadratum H, ſic quadratum A F, ad quadratum F D; & vt linea B D, ad lineam H, ſic A F, ad F D. Sed vt A F, ad F D, ſic (propter ſimilitudinẽ triangulorum E A F, A F D,) E A, ad A D. Et vt E A, ad A D, ſic (ſumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectãgulum D A F. Vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, ità eſt ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiẽ coni D A G.



Ergo, à primo ad vltimum, erit vt B D, ad H, ſic ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

LEMMA XIX. PROP. XXVIII.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter diuidere in puncto, vt rectangulum ſub tota, & ſub vno ſegmento; vna cum rectangulo ſub ſegmentis, ad quadratum alterius ſegmenti, vna cum rectangulo ſub hoc eodem ſegmento, & ſub indiuiſa, ſit in data proportione.

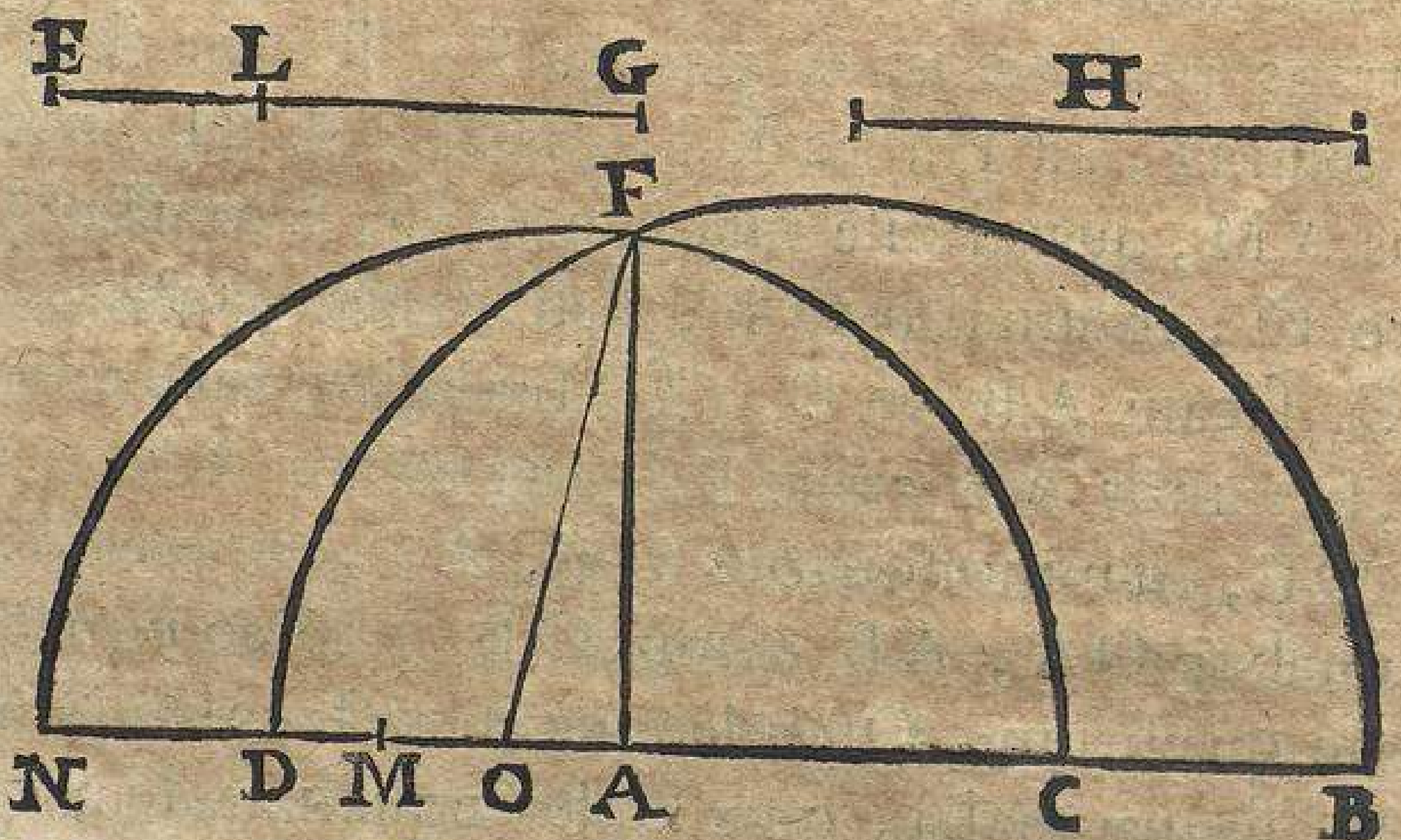


Datæ duæ rectæ lineæ ſint AB, & EG. Oportet AB, taliter diuidere in C, vt rectangulum ABC, cum rectangulo ACB, ſit ad quadratum AC, vna cum rectangulo contento ſub AC, & ſub EG,

ſit

ſit in data proportione, quæ ſit ea, quàm habet A B, ad H. Fiat ergo, vt A B, cum H, ad H, ſic B A, ad A D, ei poſitam in directum; & ſuper diametrum D B, fiat ſemicirculus; & à puncto A, erigatur A F, occurrens periphæriæ in puncto F. Pariter fiat, vt B A, cum H, ad H, ſic E G, ad G L; & E L, fiat æqualis A M, quæ diuiſa bifariam in O, & iuncta O F; centro O, interuallo O F, deſcribatur ſemicirculus N F C, ſecans A B, in C, (ſecabit enim, quia cum D A, ſit minor A B, etiam F A, erit minor A B. Cùm verò O F, ſit minor duabus O A, A F, erit multò minor duabus O A, A B, nempè O B.) Dico punctum C, eſſe quæſitum. Quoniam enim rectangula N A C, B A D, ſunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato A F; & rectangulo N A C, eſt æquale rectangulum M C A, quia N M, A C, ſunt æquales; & rectangulum M C A, eſt æquale rectangulo M A C, & quadrato A C; ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo M A C, & quadrato A C. Sed, cum M A, facta ſit æqualis E L; ergo rectangulum M A C, erit æquale rectangulo contento ſub E L, & A C. Ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo ſub E L, in A C, & quadrato A C. Quare communi addito rectangulo ſub L G, in A C; rectangulum B A D, cum rectangulo ſub L G, in A C, erit æquale rectangulo ſub E G, in A C, vna cum quadrato A C. Quod ſeruetur.

Verùm, quoniam factum eſt, vt B A, cum H, ad H, ſic B A, ad A D; & cum ſit, vt B A, ad A D, ſic quadratum B A, ad rectangulum B A D, (sumpta eadem altitudinem A B.) Ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic quadratum B A, ad rectangulum B A D.



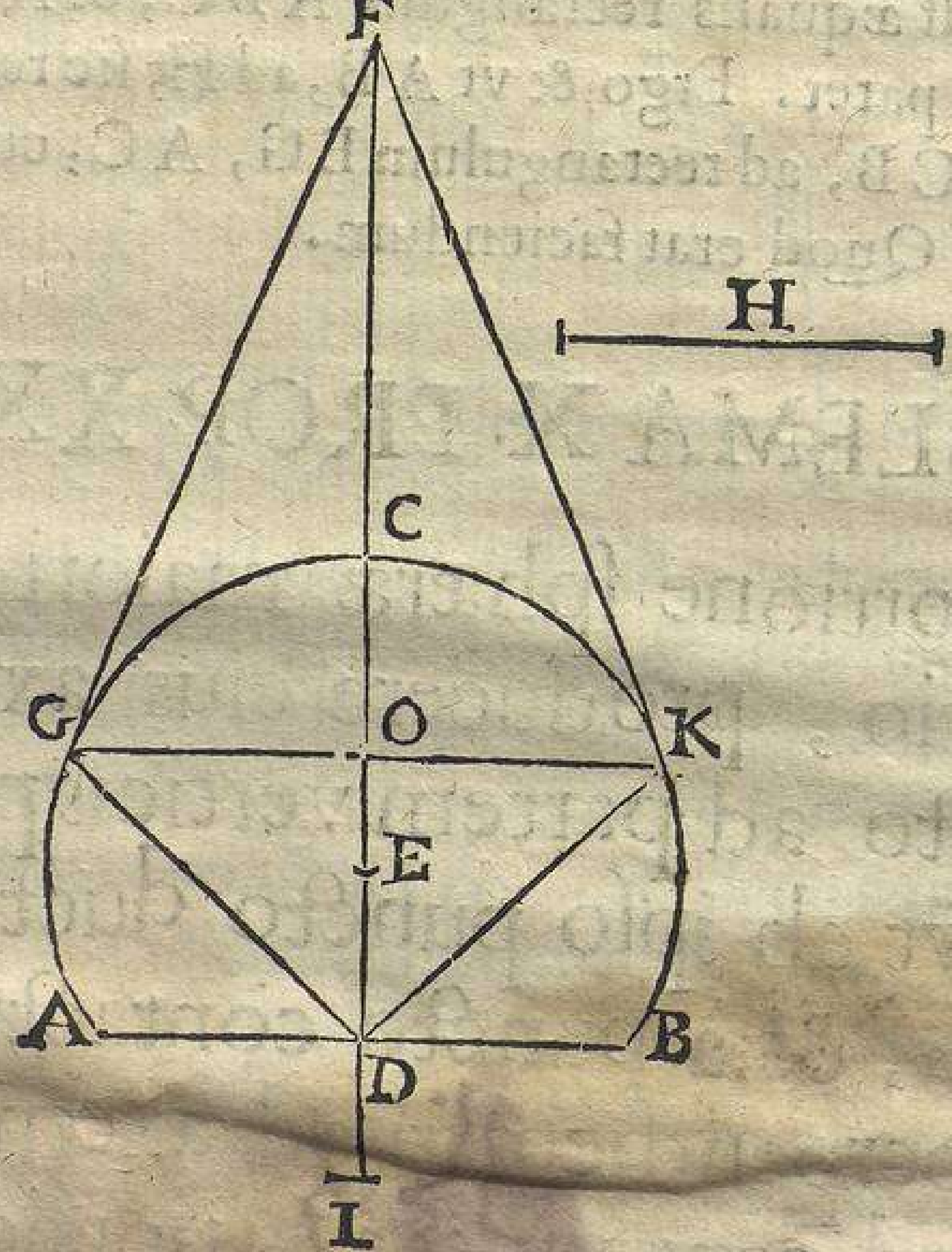
Pariter cum factum sit, vt B A, cum H, ad H, sic E G, ad G L; & vt E G, ad G L, cum ita sit (sumpta communi altitudine A C,) rectangulum E G, A C, ad rectangulum G L, A C; ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Ergo in eadem proportione B A, cum H, ad H, habemus, tàm quadratum A B, ad rectangulum B A D, quàm rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Quare, & vt B A, cum H, ad H, sic erunt ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum A B, cum rectangulo E G, A C, ad rectangulum B A D, cum rectangulo L G, A C. Sed cum rectangulis B A D, & L G, & A C, ostensa sint æqualia rectangulum E G, A C, & quadratum A C. Ergo quadratum B A, cum rectangulo E G, A C, ad hæc habe-

habebit eandem proportionem. Quare, & vt BA, cum H, ad H, ſic quadratum BA, cum rectangulo EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quare, & diuidendo, erit vt AB, ad H, ſic exceſſus quadrati BA, & rectanguli EG, AC, ſuper quadratum AC, & ſuper rectangulum EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Sed talis exceſſus eſt æqualis rectangulis ABC, & ACB, vt conſideranti patet. Ergo, & vt AB, ad H, ſic rectangula ABC, ACB, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quod erat faciendum.

PROBLEMA X. PROP. XXIX.

Data portione ſphæræ maiori hemiſphærio, producere eius axim in puncto ad partem verticis portionis, vt ab ipſo puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpendiculari ad axem, & linea ad centrum baſis portionis, & ex iſtis triangulis reuolutis circa axim, facto rhombo, coni rhombi ſint ad inuicem in data proportione.

DAta portio ſit A C B, maior hemiſphærio, cuius axis ſit C D, centrũ ſphæræ E; data verò proportio ſit, quàm habet C D, ad H. Oportet producere D C, in F, vt à puncto F, ducta tangente F G, & à puncto G, ductis perpendiculari G O, & G D, ad centrum baſis portionis, & ex reuolutione, facto rhombo F G D K; conus F G K, ſit ad conum G D K, vt C D, ad H. Sit



C L, diameter ſphæræ, & datis C E, ſemidiametro, & E D, diuidatur taliter C E, in O, per Lemma antecedens, vt rectangula E C O, E O C, ſint ad rectangulum D E O, cum quadrato O E, nempè ad rectangulum D O E, vt D C, ad H, & per punctum O, erecta perpendicudiculari G O K, & à puncto G, ducta tangente G F, intelligantur coni facti consueto modo, F G K, G D K. Dico istos esse quæsitos.

Conus F G K, ad conum G D K, ob eandem basim G O K, est, vt F O, ad O D. Sed ratio F O, ad O D, de foris sumpta O E, componitur ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed vt F O, ad O E, sic quadratum G O, ad quadratum O E, seù rectangulum L O C, æquale quadrato G O, ad idem quadratum O E. Ergo ratio quoque coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione rectanguli L O C, ad quadratum O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed ratio rectanguli L O C, ad quadratum O E, componitur ex rationibus C O, ad O E, & L O, ad O E. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex rationibus C O, ad O E, L O, ad O E, & O E, ad O D. Sed duæ rationes L O, ad O E, & O E, ad O D, faciunt rationem L O, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione C O, ad O E, & ex L O, ad O D. Sed istæ duæ rationes faciunt rationem rectanguli L O C, ad rectangulum D O E; & rectangulo L O C, sunt æqualia rectangula E C O, E O C, (vt consideranti patet.) Ergo, vt rectangulum E C O, cum rectangulo E O C, ad rectangulum D O E, nempè, vt D C, ad H, sic conus F G K, ad conum D G K, Quod erat faciendum.

LEMMA XX. PROP. XXX.

Sit recta linea A B, secta in duobus punctis C, D. Dico rectangulum A B C, cum rectangulo A C, B D, excedere rectãgulum A D C, rectangulis A B D, A D B.

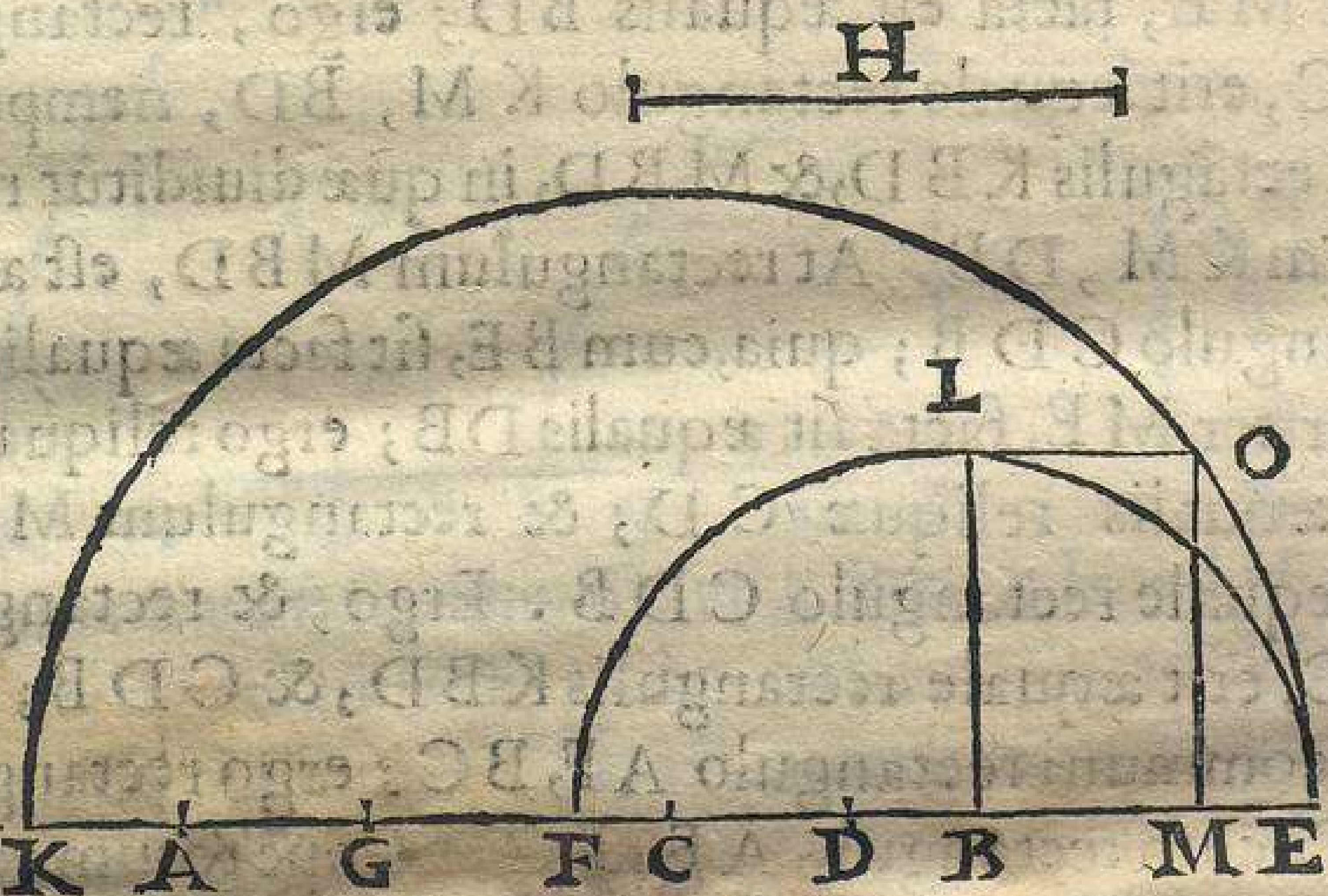
NAM rectangulum A B C, est æquale duobus rectangulis A B D, & A B, C D; rectangulum verò A B, C D, est æquale duobus rectangulis A D C, & B D C. Ergo rectangulum A B C, excedit rectangu-

lum A D C, rectangulo A B D, & rectangulo B D C. Sed rectangulum C D B, cum rectangulum A C, D B, facit rectangulum A D B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo A C, D B, excedit rectangulum A D C, duobus rectangulis A B D, & A D B.

Quod erat ostendendum.

LEMMA XXI. PROP. XXXI.

Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm ipsam secare in puncto D, inter C, B, vt rectangulum A B D, cum rectangulo A D B, sit ad rectangulum A D C, in data proportione.

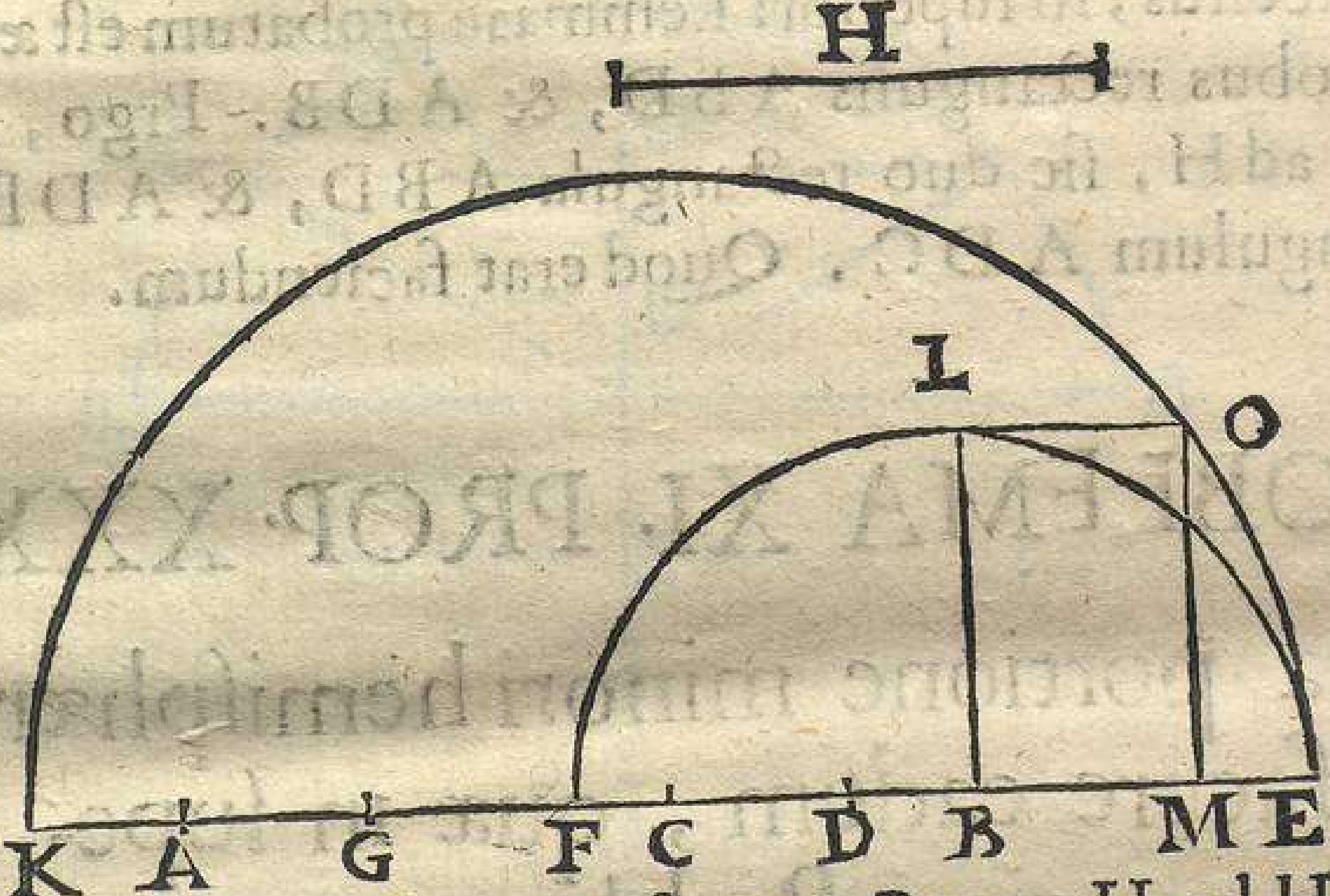


Data proportio sit, quàm habet A B, ad H; & producatur A B, in E, vt B E, sit æqualis B C; & fiat vt A B, cum H, ad H, sic A B, ad A F; & pariter sic B C, ad A G. Rursùm producatur B A, in K, vt K A, sit æqualis G F: Tunc super diametros F E, & K E, fiant semicirculi ad eamdem partem, & à puncto B, erecta B L, perpendiculari occurrente periphæriæ circuli minoris in L; per punctum L, ducatur L O, parallela KE, occurrens periphæriæ circuli maioris in O; à quo puncto O, dimittatur diametro K E, perpendicularis O M, & ipsi M E, fiat æqualis B D. Dico punctum D. esse quæsitum.

Nam, quoniam quadrata L B, & O M, sunt æqualia, etiam rectangula K M E, & F B E, istis quadratis æqualia, erunt æqualia. Sed rectangulo F B E, est æquale rectangulum F B C, quia B E, facta est æqualis B C; & rectangulo K M E, est æquale rectangulum K M, B D, quia M E, facta est æqualis B D; ergo, rectangulum F B C, erit æquale rectangulo K M, B D, nempè duobus rectāgulis K B D, & M B D, in quæ diuiditur rectangulum K M, D B. At rectangulum M B D, est æquale rectangulo C D B; quia, cum B E, sit facta æqualis C B; & pariter M E, facta sit æqualis D B; ergo reliqua B M, erit æqualis reliquæ C D; & rectangulum M B D, erit æquale rectangulo C D B. Ergo, & rectangulum F B C, erit æquale rectangulis K B D, & C D B; & addito communi rectangulo A F, B C; ergo rectangulum F B C, cum rectangulo A F, B C, nempè totum rectangulum A B C, erit æquale rectangulis K B D, C D B, & A F, C B. Sed rectangulum A B C, diuiditur in duo rectangula, nempè A B D, & A B, C D; & pariter rectangulum K B D, diuiditur in rectangula K A, D B, & A B D. Ergo communi hinc inde ablato rectangulo A B D, remanet ex vna parte rectangulum A B, C D, æquale rectangulis K A, D B, C D B, & A F, C B. Sed quia K A, facta est æqualis G F, rectangulum K A, D B,

erit

erit æquale rectanguto GF, DB; quare rectangulum AB, CD, erit æquale rectangulis GF, DB; CDB, & AF, CB. Rursùm rectangulum AB, CD, diuiditur in rectangula BDC, & ADC; ergo rursùm, communi ablato rectangulo BDC, rectangulum ADC, erit æquale rectangulis GF, DB, & AF, CB. Quod seruetur.



Quoniam verò factum est, vt AB, cum H, ad H, tàm tota BA, ad totam AF, quàm ablata BC, ad ablatam AG; ergo, & reliqua CA, erit ad reliquam FG, vt tota ad totam, seù vt BA, cum H, ad H: at verò, vt BA, ad AF, sic (sumpta communi altitudine BC,) rectangulum ABC, ad rectangulum AF, BC; & vt CA, ad FG, sic (sumpta communi altitudine DB,) rectangulum AC, DB, ad rectangulum GF, DB; ergo, & vt BA, cum H, ad H, sic est tàm rectangulum ABC, ad rectangulum AF, CB, quàm rectangulum AC, DB, ad rectangulum GF, DB. Ergo, & vt BA, cum H, ad

H, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo rectangula ABC, & AC, DB, ad duo rectangula AF, CB, & GF, DB, nempe ad rectangulum ADC, quod supra, istis duobus rectangulis probatum est æquale. Ergo, & diuidendo, vt AB, ad H, sic excessus duorum rectangulorum ABC, & AC, DB, super rectangulum ADC, ad rectangulum ADC. Sed iste excessus, in superiori Lemmate probatum est æquale duobus rectangulis ABD, & ADB. Ergo, & vt AB, ad H, sic duo rectangula ABD, & ADB, ad rectangulum ADC. Quod erat faciendum.

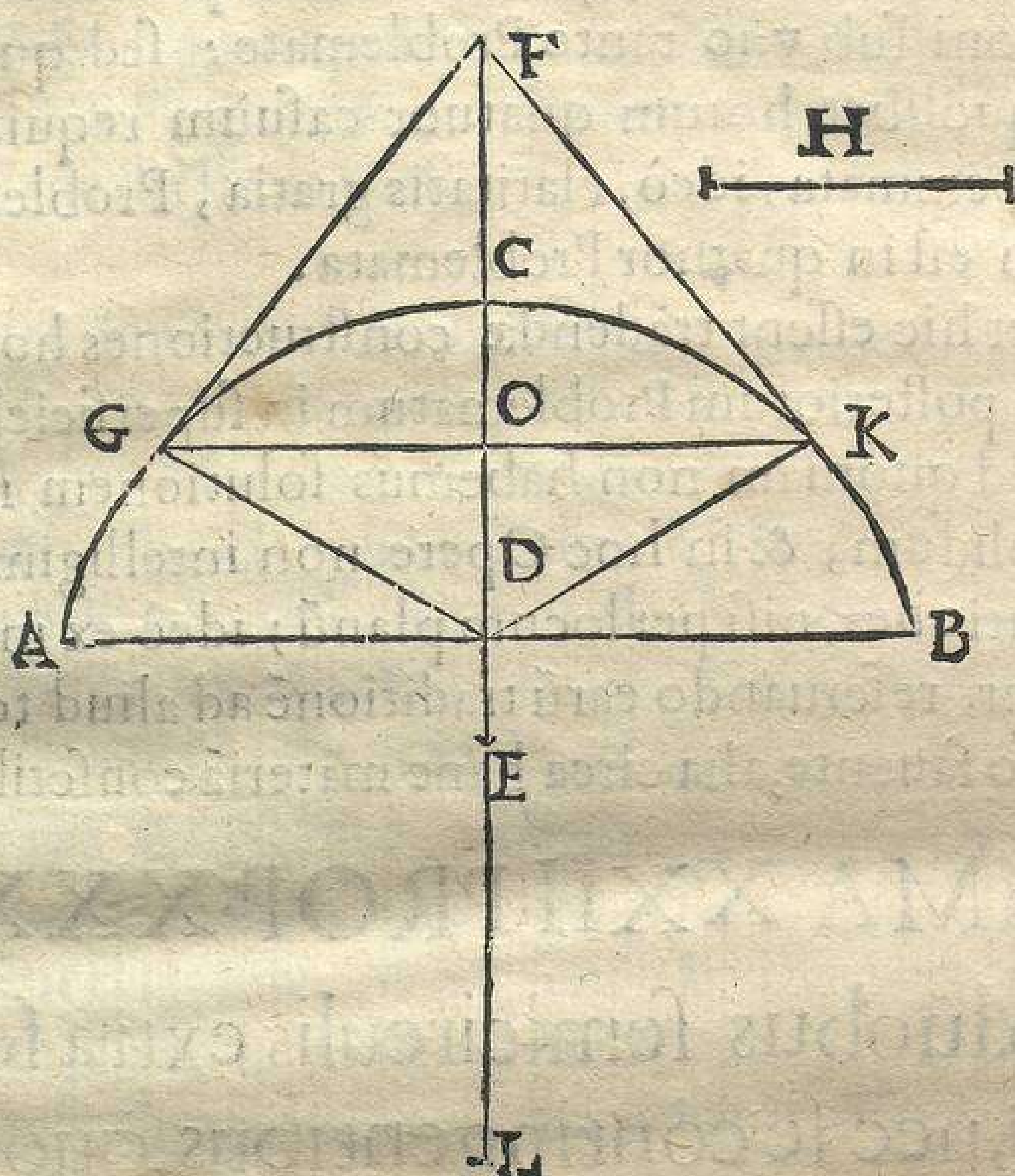
PROBLEMA XI. PROP. XXXII.

Data portione minori hemisphærio, facere eadem, quæ in superiori Problemate.

SINT data omnia, quæ in superiori Problemate, sed portio ACB, sit minor hemisphærio. Data EC, secta in puncto D, rursùm diuidatur in O, inter C, D, vt rectangula ECO, EOC, sint ad rectangulum EOD, vt EC, ad H; & à puncto O, erecta normali GOK, & à puncto G, tangente GF, intelligantur, (prius ducta GD,) coni FGK, DGK. Quos dico esse quæsitos.

Nam eodem discursu, quo factum est in superiori Pro-

Problemate, de foris sumpta O E, probabitur conum FGK, ad conum GDK, habere rationem compositam



ex ratione rectanguli LOC, ad quadratum OE, & ex ratione OE, ad OD. Et eodem modo probabitur, ex istis rationibus componi rationem rectanguli LOC, ad rectangulum EOD. Sed rectangulum LOC, est æquale rectangulis ECO, EOC. Ergo &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVatuor antecedentia Problemata potuissent proponi sub vno tanto Problemate: sed quia in quolibet horum quatuor casuum requiruntur diuersa Lemmata, ideò, claritatis gratia, Problema distinctum est in quatuor Problemata.

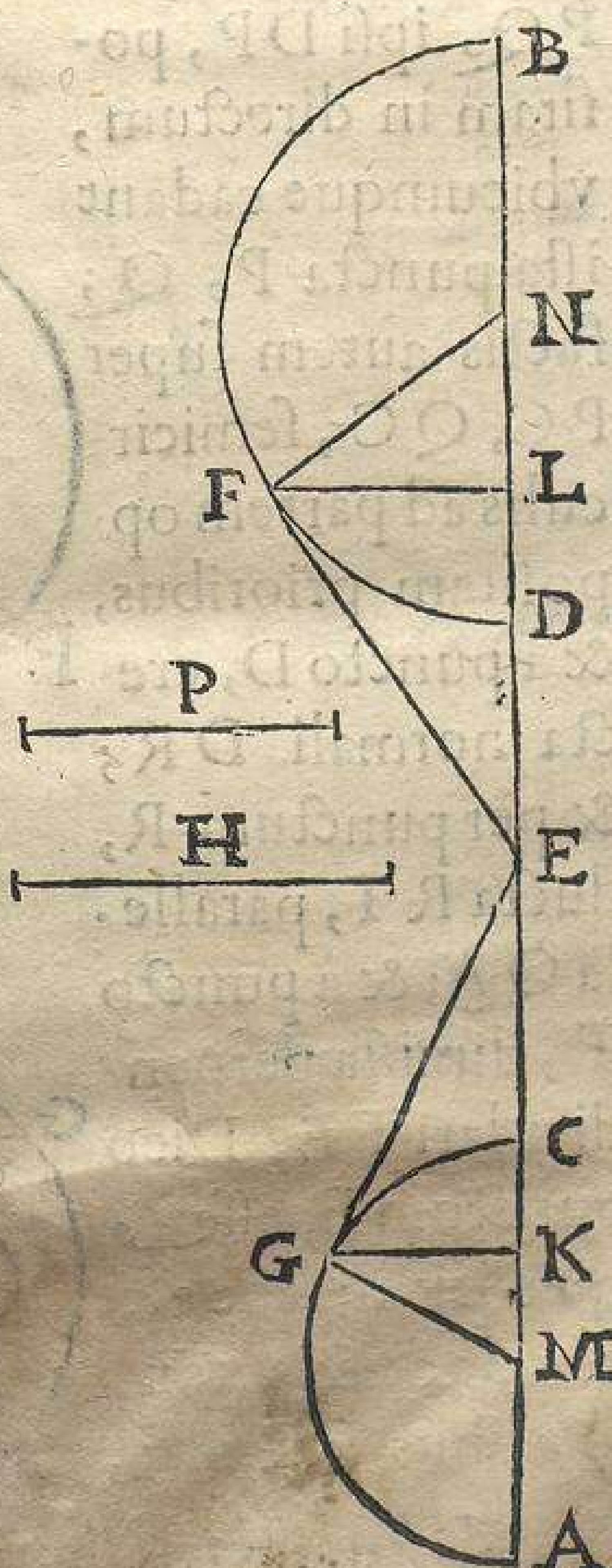
Pariter hic essent tradendæ constructiones horum duorum posteriorum Problematum in superficiebus conicis; sed quoniam non habemus solutionem nisi per locum solidum; & in hoc Opere non intelligimus tradere solutiones, nisi per locum planũ; ideò ex industria omittũtur; reseruando earũ traditionẽ ad aliud tempus, quo, Deo fauente, alia circa hanc materiã conscribemus.

LEMMA XXII. PROP. XXXIII.

Datis duobus semicirculis extra se positis, nec se contingentibus, quorum diametri sint sibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos semicirculos punctum, à quo ductis tangentibus semicirculos, & à punctis cõtactus ductis sinibus rectis, abscindant isti sinus versos, seù sagittas, in data proportione.

Sint

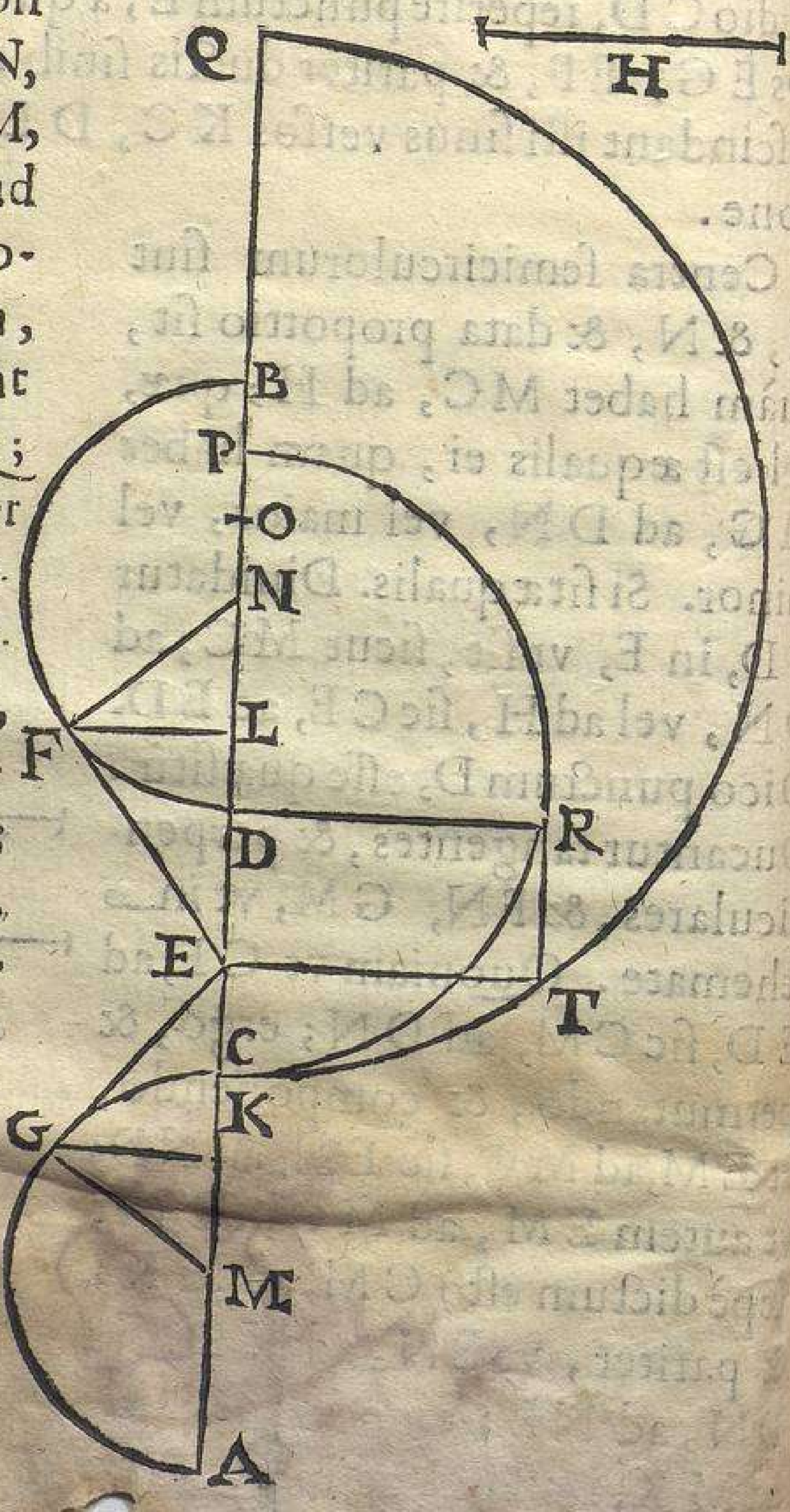
SINT dati duo semicirculi B F D, C G A, extra se positi, nec se contingentes, quorum diametri B D, C A, sint vna linea cõtinuata. Oportet in segmẽto intermedio C D, reperire punctum E, à quo ductis tangentibus E G, E F, & pariter ductis sinibus rectis G K, F L, abscindant isti sinus versos K C, D L, in data proportione.



Centra semicirculorum sint M, & N, & data proportio sit, quàm habet M C, ad H; quæ, vel est æqualis ei, quam habet M C, ad D N, vel maior, vel minor. Si sit æqualis. Diuidatur C D, in E, vt sit, sicut M C, ad D N, vel ad H, sic C E, ad E D. Dico punctum D, esse quæsitũ. Ducantur tangentes, & perpendiculares, & F N, G M, vt in schemate. Quoniam vt C E, ad E D, sic C M, ad D N; ergo, & permutando, & componendo, vt E M, ad M C, sic E N, ad N D; vt autem E M, ad M C, sic (vt sæpè dictum est) C M, ad M K; & pariter, vt E N, ad N D, sic D N, ad N L; ergo, & vt C M, ad M K, ita D N, ad N L. Ergo & per conuersionem rationis, vt C M, ad C K, sic N D, ad D L. Et permutando, vt

CM, ad ND, seù ad H, sic CK, ad DL.

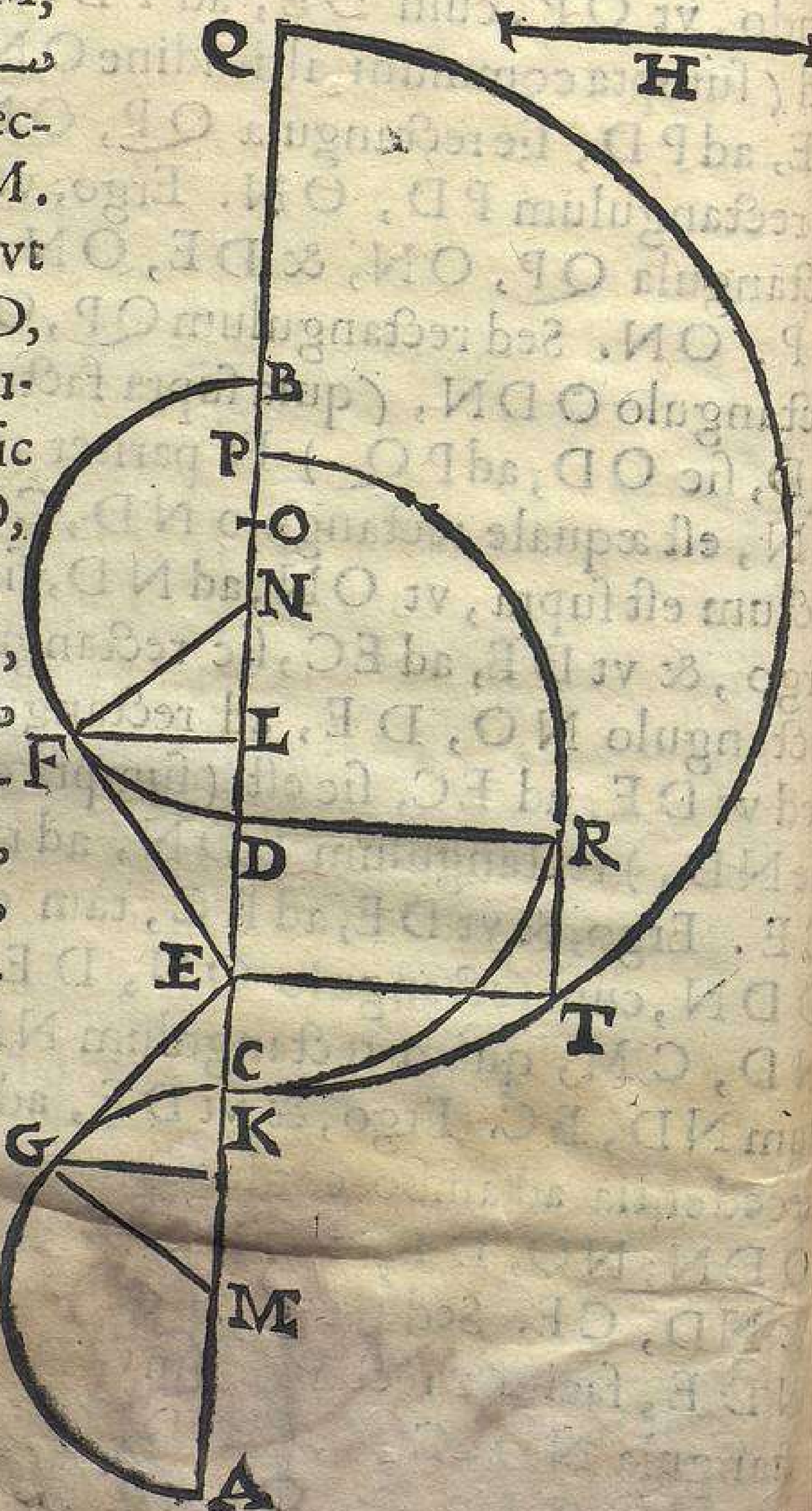
Si verò proportio MC, ad H, sit minor EA, quàm habet MC, ad DN, nempè si H, sit maior ND; fiat DO, æqualis ipsi H; & fiat vt ON, ad ND, sic CM, ad DP, & OD, ad PQ, ipsi DP, positam in directum, vbicumque cadant ista puncta P, Q; factis autem super PC, QC, semicirculis ad partem oppositam prioribus, & à puncto D, erecta normali DR; & per punctum R, ducta RT, parallela QA; & à puncto T, dimissa perpendiculari TE. Dico punctum E, esse quæsitum; hoc est, quod ductis tangentibus EG, EF, & perpendicularibus GK, FL, erit, vt MC, ad H, sic KC, ad DL.



Iam quilibet faciliter proprio Marte potest cognoscere,

ſcere, quadrata D R, E T, eſſe æqualia; ac proinde, æquale quoque eſſe rectangulum Q E C, rectangulo P D C. Ergo, vt Q E, ad P D, ſic D C, ad C E. Et diuidendo, vt Q P, cum D E, ad P D, ſic D E, ad E C. Sed (ſumpta communi altitudine O N,) vt Q P, cum D E, ad P D, ſic rectangula Q P, O N, & D E, O N, ad rectangulum P D, O N. Ergo, vt D E, ad E C, ſic rectangula Q P, O N, & D E, O N, ad rectangulum D P, O N. Sed rectangulum Q P, O N, eſt æquale rectangulo O D N, (quia ſupra factum eſt, vt O N, ad N D, ſic O D, ad P Q.) Et pariter rectangulum D P, O N, eſt æquale rectangulo N D, C M, (quia pariter factum eſt ſupra, vt O N, ad N D, ſic C M, ad D P.) Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum O D N, cum rectangulo N O, D E, ad rectangulum N D, C M. Sed vt D E, ad E C, ſic eſt (ſumpta communi altitudine N D,) rectangulum E D N, ad rectangulum N D, C E. Ergo, & vt D E, ad E C, tàm eſt rectangulum O D N, cum rectangulo O N, D E, ad rectangulum N D, C M, quàm rectangulum N D E, ad rectangulum N D, E C. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe rectangula O D N; N O, D E, & N D E, ad rectangula N D, C M, & N D, C E. Sed rectangula O D N; N O, D E, & N D E, faciunt rectangulum O D, N E. Et pariter rectangula N D, C M, & N D, C E, faciunt rectangulum N D, E M. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, E M. Quod ſeruetur.

Rursùm vt DE, ad EC, sic (sumpta cōmuni altitudine MC,) rectangulum DE, MC, ad rectangulum ECM; ergo & vt rectangulum OD, NE, ad rectangulum ND, EM, sic rectangulum DE, CM, ad rectangulum ECM. Et permutando, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulum DE, CM, sic rectangulum ND, EM, ad rectangulum ECM. Sed, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulū DE, CM, sic rectangulum ODN, ad rectangulum DL, MC, (vt statim ostendetur.) Et vt rectangulum ND, EM, ad rectangulum ECM, sic rectangulum ND, MC, ad rectangulum MCK, (vt pariter statim ostendetur.) Ergo, & vt rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM, sic rectangulum



gulum

gulum N D, C M, ad rectangulũ M C K. Et permutando, vt rectangulũ O D N, ad rectangulũ D N, C M, nempe, vt O D, ad C M, sic rectangulum D L, C M, ad rectágulum M C K, nempè, D L, ad C K. Ergo, & conuertendo, vt M C, ad D O, seù ad H, sic K C, ad D L. Quod &c.

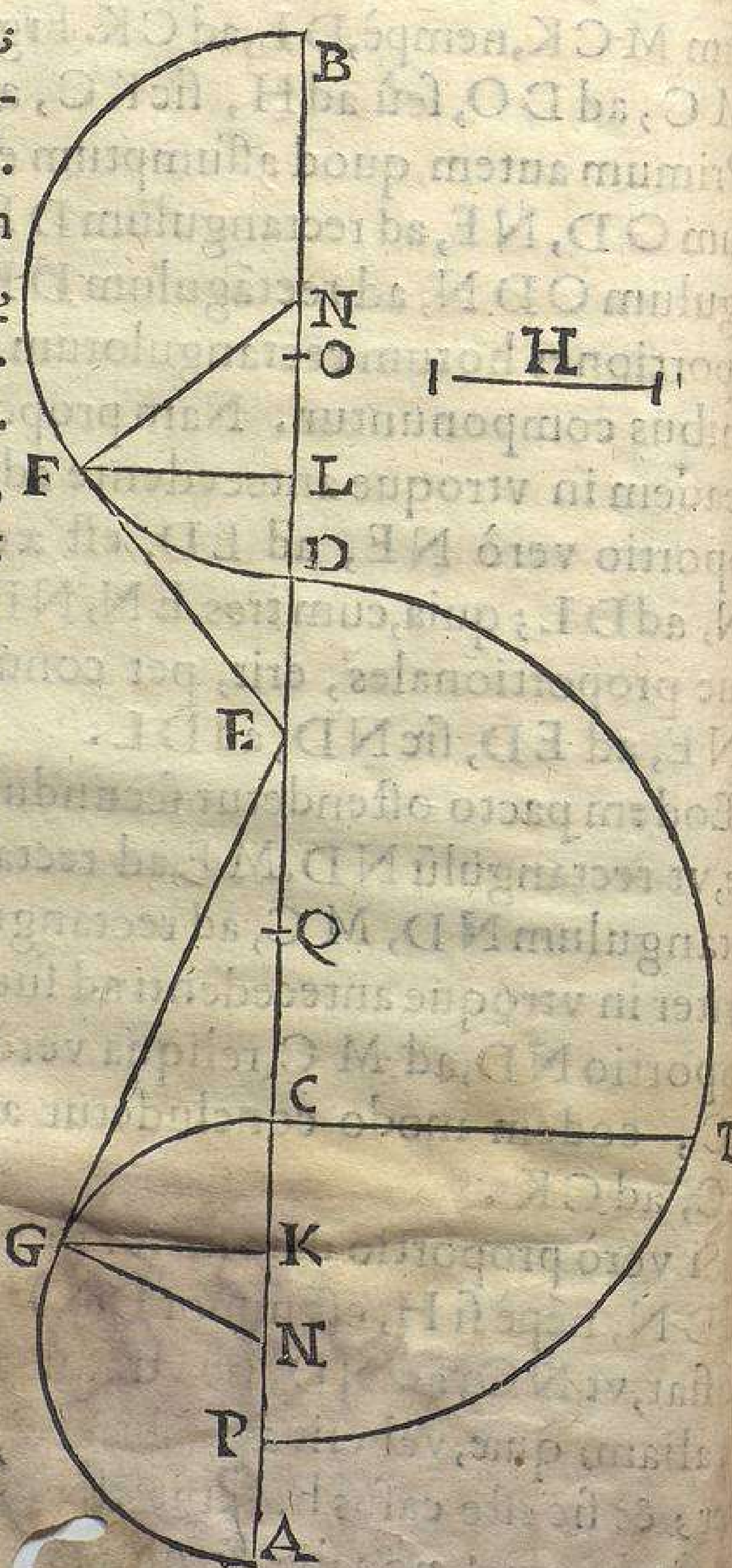
Primum autem, quod assumptum est, nempè rectangulum O D, N E, ad rectangulum D E, C M, esse, vt rectangulum O D N, ad rectágulum D L, C M: patet, quia proportiones horum rectangulorum ex ijsdem proportionibus componuntur. Nam proportio D O, ad C M, est eadem in vtroque antecedente ad suum consequens. Proportio verò N E, ad E D, est æqualis proportioni D N, ad D L; quia, cum tres E N, N D, & N L, sint continue proportionales, erit, per conuersionem rationis, vt N E, ad E D, sic N D, ad D L.

Eodem pacto ostendetur secundum assumptũ, nempe esse, vt rectangulũ N D, M E, ad rectangulum E C M, sic rectangulum N D, M C, ad rectangulum M C K. Nam pariter in vtroque antecedenti ad suum consequens, est proportio N D, ad M C, reliqua verò proportio M E, ad E C, eodem modo concludetur æqualis proportioni M C, ad C K.

Si verò proportio data maior sit ea, quam habet M C, ad D N; nẽpè si H, est minor D N. Fiat ei æqualis D O; & fiat, vt N O, ad N D, sic vtraque simul O D, & C M, ad aliam; quæ, vel erit æqualis D C, vel maior, vel minor; & sic iste casus habebit tres casus.

Sit primum æqualis; & diuidatur D C, in Q, in partes consequentes proportionis; nẽpè sit, vt N O, ad N D.

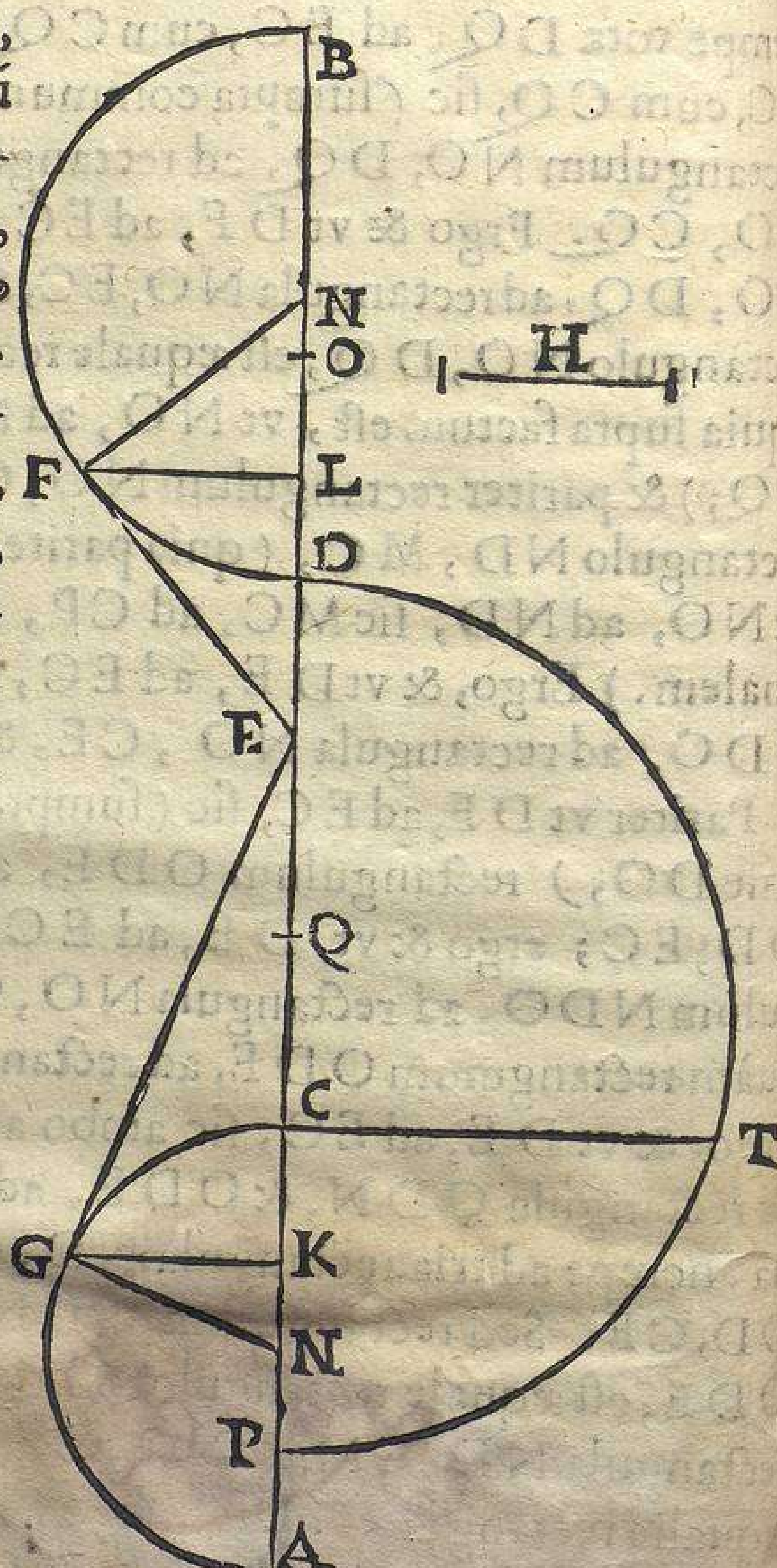
ſic MC, ad CQ, & DO, ad DQ; & ipſi CQ, fiat æqualis CP; & ſuper diametro DP, fiat ſemicirculus DTP, ad partem oppoſitã prioribus; ac à pũcto C, erigatur normalis CT. Patet CT, maiorem eſſe CP, ſeù CQ, & minorem CD. Fiat ei æqualis CE. Dico punctum E, eſſe quæſitum. Sint ergo ductæ tangentes, & perpendiculares, vt in ſchemate. Quoniam tres PC, CT, & CD, ſunt continue proportionales. Ergo, & tres CQ, CE, & CD, eis æquales, erunt continue proportionales. Quare erit, vt DC, ad CE, ſic CE, ad CQ. Et diuidendo, vt DE, ad EC, ſic EQ, ad QC. Et vt vnum ante-



cedentium ad vnum consequentium, nempè vt D E, ad E C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe tota D Q, ad E C, cum C Q. Sed vt D Q, ad E C, cum C Q, sic (sumpta communi altitudine N O,) rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Ergo & vt D E, ad E C, sic rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Sed rectangulo N O, D Q, est æquale rectangulum N D O, (quia supra factum est, vt N O, ad N D, ita D O, ad D Q;) & pariter rectangulum N O, C Q, est æquale rectangulo N D, M C, (quia pariter supra factum est, vt N O, ad N D, sic M C, ad C P, seù ad C Q, ei æqualem.) Ergo, & vt D E, ad E C, sic rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M.

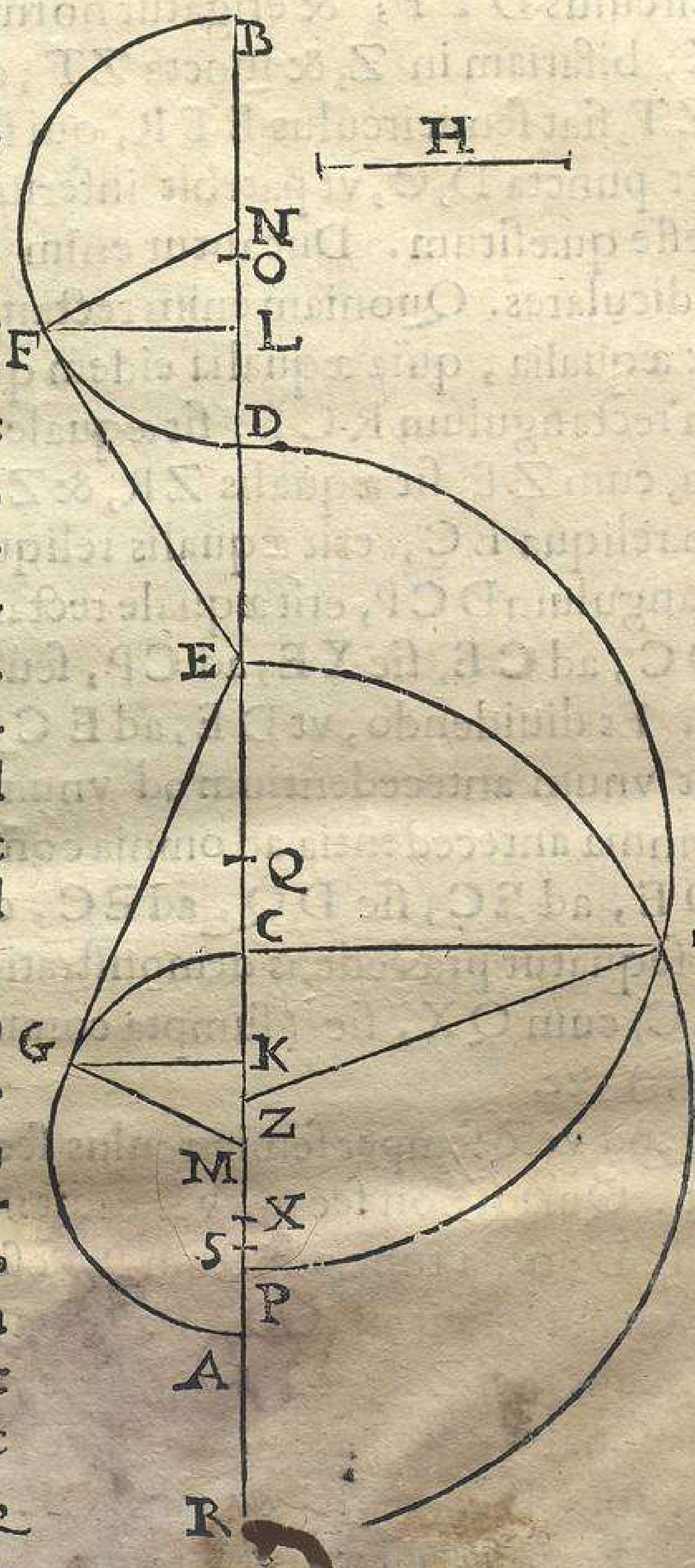
Pariter vt D E, ad E C, sic (sumpta communi altitudine D O,) rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C; ergo & vt D E, ad E C, sic est tàm rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M, quàm rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C. Ergo, & vt D E, ad E C, sic ambo antecedentia, nempe rectangula O D N, & O D E, ad ambo consequentia, nempe ad tria rectangula N D, C M; N O, C E, & O D, C E. Sed rectangulum O D N, cum rectangulo O D E, est æquale rectangulo O D, N E; & pariter tria rectangula N D, C M, & N O, C E, & O D, C E, sunt æqualia rectangulo N D, M E. Ergo, & vt D E, ad E C, sic rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, M E.

Rursùm, vt D E, ad E C, sic (sumpta communi altitudine CM,) rectangulum DE, CM, ad rectangulum ECM. Ergo, & vt rectangulũ OD, NE, ad rectangulũ ND, ME, ſic rectangulũ DE, MC, ad rectangulum ECM. Et permutando, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulũ DE, CM, ſic rectangulum ND, ME, ad rectangulũ ECM. Sed, vt rectangulũ OD, NE, ad rectangulũ DE, CM, ſic rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM, vt patet ex probatione ſuperiori primi aſſumpti; & vt rectangulum ND, ME, ad rectangulum ECM, ſic rectangulum ND, MC, ad rectangulum MCK, vt patet ex probatione ſecundi aſſumpti.



Ergo

Ergo, & vt rectangulum O D N, ad rectangulum D L, C M, sic rectangulum N D, C M, ad rectangulũ M C K. Et permutando, vt rectangulũ O D N, ad rectãgulũ N D, M C, nempe, vt D O, ad M C, sic rectangulum D L, C M, ad rectangulum M C K, nempè sic D L, ad C K. Quare, & conuertendo, vt M C, ad D O, seù ad H, sic K C, ad D L. Quod erat faciendum.

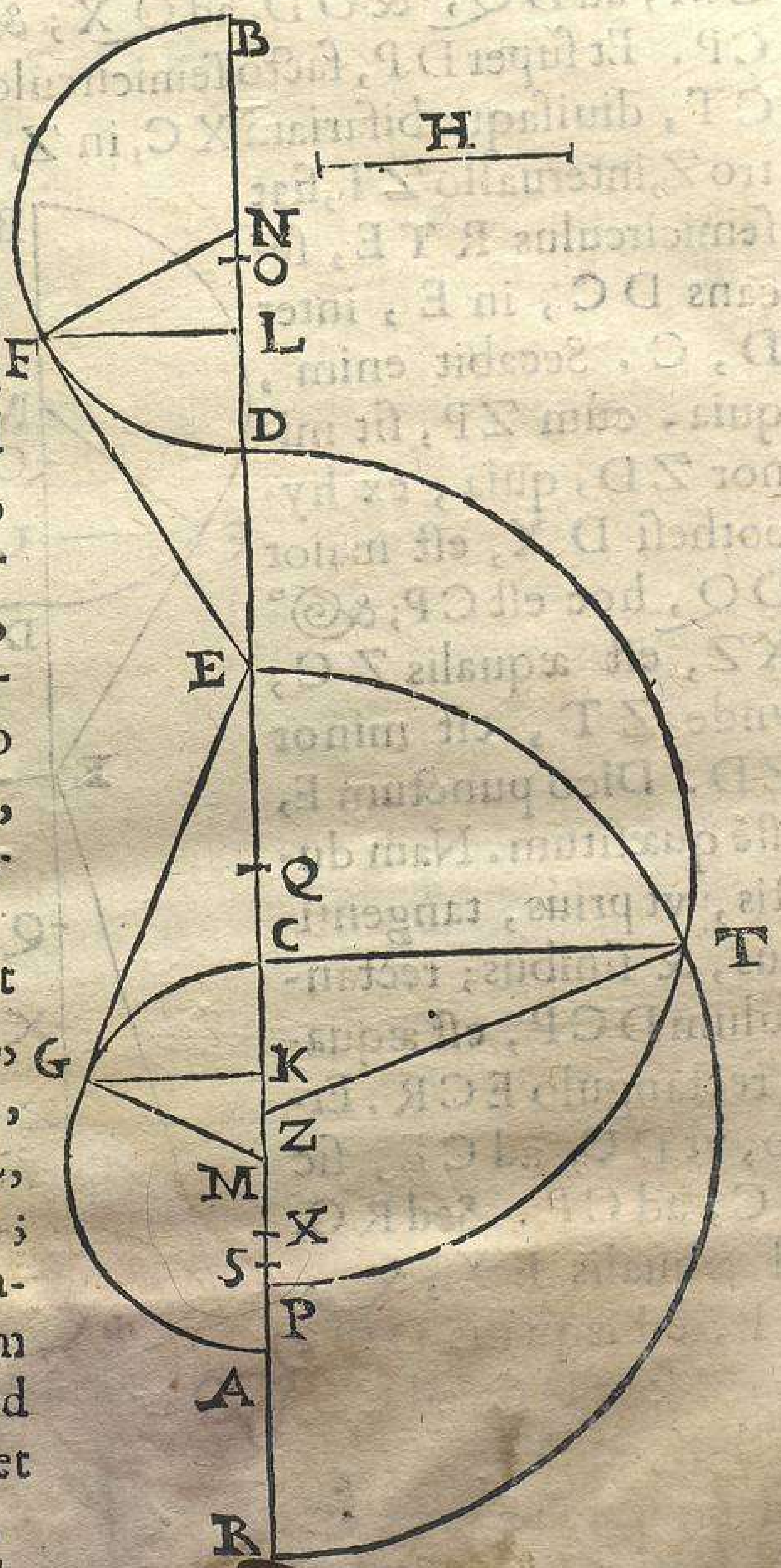


SI autem illa alia sit maior D C. Sit hæc D X; & pariter D X, distinguatur in Q, in partes proportionales, nempè fiat, vt N O, ad N D, sic tàm O D, ad D Q, quã M C, ad Q X. & ipsi Q X, fiat æqualis C P, vbicumq; cadant tria puncta Q, X, P. Deinde ſuper diametrum D P, fiat ſemicirculus D T P; & erigatur normalis C T, ac diuiſa C X, bifariam in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat ſemicirculus E T R, qui ſemper ſecabit D C, inter puncta D, C, vt patebit inferius. Dico punctum E, eſſe quæſitum. Ducantur enim tangentes, & perpendiculares. Quoniam enim rectangula D C P, E C R, ſunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato C T; & cùm rectangulum R C E, ſit æquale rectangulo X E C, quia, cum Z E, ſit æqualis Z R, & Z X, ſit æqualis Z C, ergo reliqua E C, erit æqualis reliquæ X R. Ergo, & rectangulum D C P, erit æquale rectangulo X E C. Ergo vt D C, ad C E, ſic X E, ad C P, ſeù ad Q X, ei æqualem. Et diuidendo, vt D E, ad E C, ſic E Q, ad Q X. Et vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia; nempè, vt D E, ad E C, ſic D Q, ad E C, cum Q X. In reliquis ſequatur præcedens demonſtratio, nempe, vt D Q, ad E C, cum Q X, ſic (ſumpta communi altitudine O N,) &c.

Quòd verò ſemper ſemicirculus ſecet D C, inter C, D, patet. Quia ſi non ſecat, vel cadit in D, vel vltra D. Non in D; quia tunc punctum R, eſſet idem, ac P; & eſſet idem ſemicirculus D T P. Cùm ergo tota Z D, eſſet æqualis toti Z P; & Z C, Z X; ergo, & reliqua D C, eſſet æqualis reliquæ X P. Quare, addita communi C X, tota D X, eſſet æqualis C P. Quod implicat; quia C P, facta eſt æqualis tantum Q X, quæ eſt pars D X. Maius abſurdum concluderetur ſi punctum E,

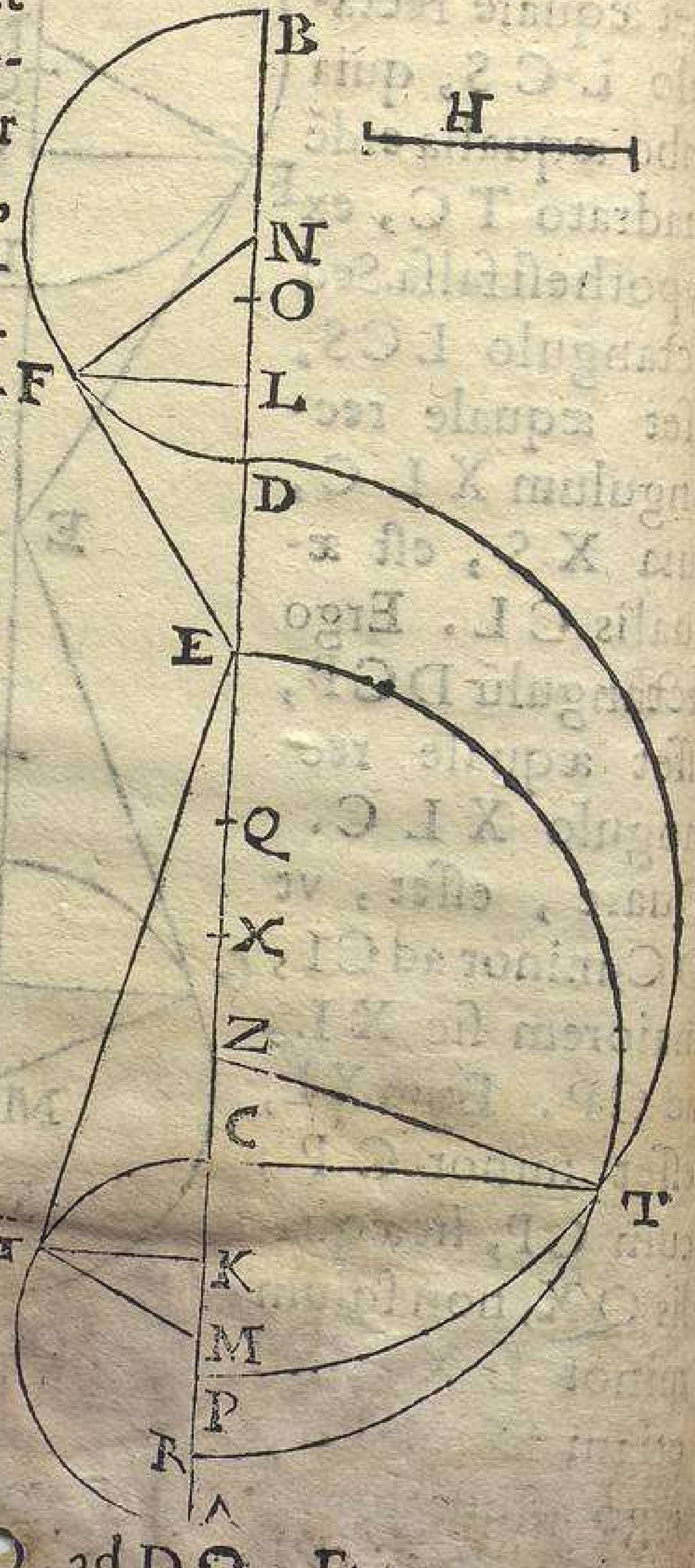
cade-

caderet vltra D, v. b. in L; quia tunc punctum R, caderet vltra P, putà in S; & tunc rectangulum D C P, esset æquale rectâgulo L C S, quia ambo æqualia eidẽ quadrato T C, ex hypothesi falsa. Sed rectangulo L C S, esset æquale rectangulum X L C, quia X S, est æqualis C L. Ergo rectangulũ D C P, esset æquale rectangulo X L C. Quare, esset, vt D C, minor ad C L, maiorem sic X L, ad C P. Ergo X L, esset minor C P; cum C P, sit æqualis Q X, non solùm minor L X, sed etiam D X. Patet ergo assumptum.



SI tandem illa alia sit minor D C. Sit hæc D X; & distinguatur in

Q in partes proportionis, vt sit sicut NO, ad ND, sic CM, ad DQ; & OD, ad QX; & DQ, fiat æqualis CP. Et super DP, facto semicirculo, & erecta normali CT, diuisaque bifariam XC, in Z, & iuncta ZT; centro Z, interuallo ZT, fiat semicirculus RTE, secans DC, in E, inter D, C. Secabit enim, quia, cùm ZP, sit minor ZD, quia, ex hypothesi DX, est maior DQ, hoc est CP; & XZ, est æqualis ZC; vnde ZT, est minor ZD. Dico punctum E, esse quæsitum. Nam ductis, vt prius, tangentibus, & sinibus; rectangulum DCP, est æquale rectangulo ECR. Ergo, vt DC, ad CE, sic RC, ad CP. Sed RC, est æqualis EX, & CP, est æqualis DQ. Ergo, & vt DC, ad CE, sic EX, ad DQ. Et diuidendo, vt DE, ad EC, sic excessus XE, super DQ, ad DQ. Et vt vnum antecedentium, ad vnum consequentium, ita omnia antece-



tece-

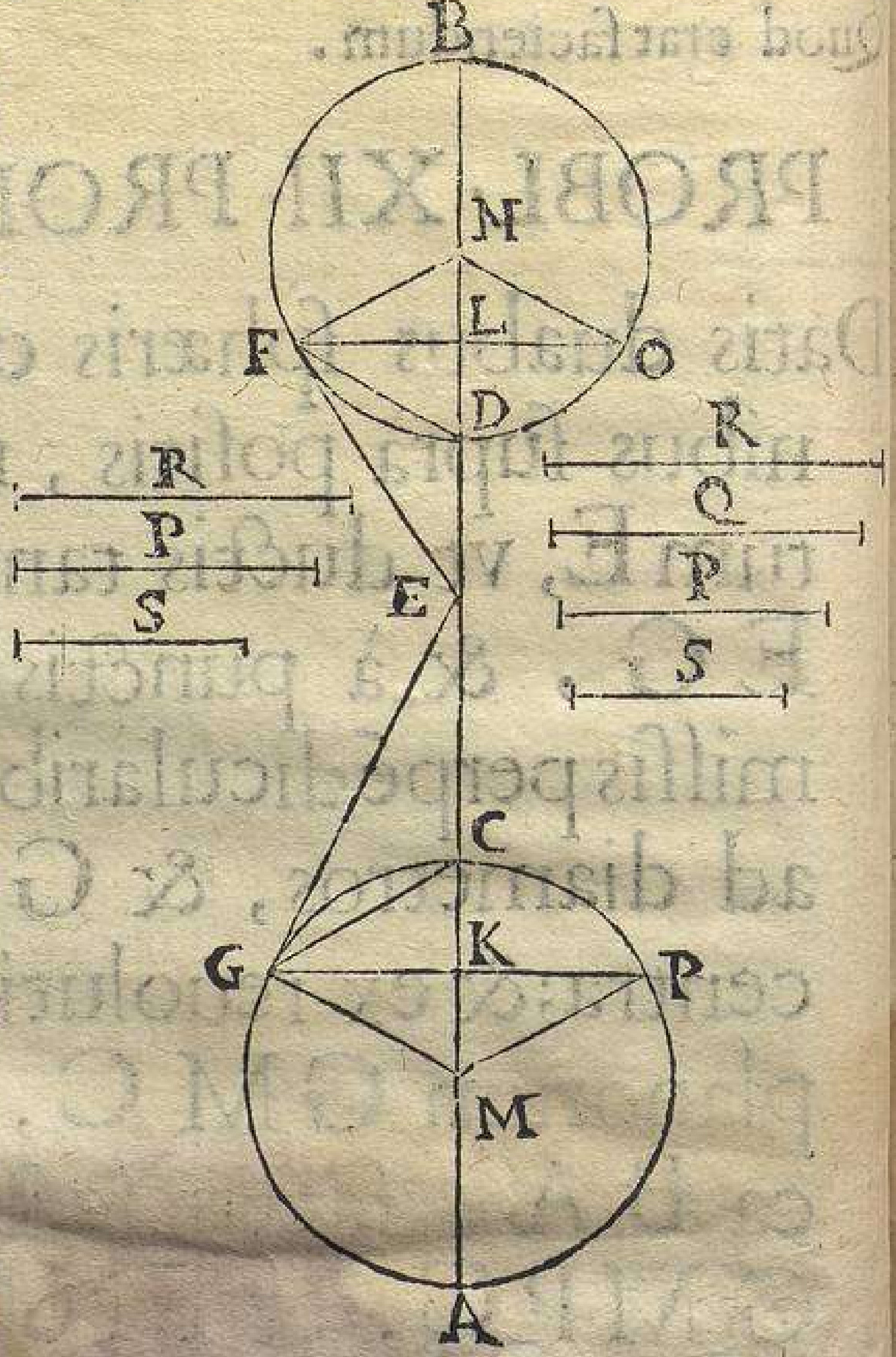
tecedentia, ad omnia consequentia; nempe, vt DE, ad EC, sic excessus DX, super DQ, nempè QX, ad DQ, cum EC. Sed, vt QX, ad DQ, cum EC, sic (sumpta communi altitudine ON,) &c. vt suprà factum est, & concludetur propositum. Factum est ergo in omnibus casibus, vt MC, ad H, sic KC, ad DL. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROP. XXXIV.

Datis duabus sphæris cum conditionibus suprà positis, reperire punctum E, vt ductis tangentibus EF, EG, & à punctis contactus dimissis perpēdicularibus FL, GK, ad diametros, & GM, FN, ad centra; & ex reuolutione sectorum planorum GMC, FDN, circa BA, factis sectoribus solidis GMPC, & FNOD; isti sint ad inuicem in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt CM, ad DN, sic R, ad Q; & pariter fiat, vt R, ad Q, sic Q, ad P. Deinde (intellectis prius sphæris

ris sectis per axem more solito) per Lemma antecedens, inueniatur punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & perpendicularibus GK; FL, sit, vt P, ad S, sic KC, ad DL; & intelligantur sectores, vt in schemate. Dico punctum E, esse quæsitum. Cùm enim factum sit, vt R, ad Q, sic MC, ad DN; ergo, vt quadratum R, ad quadratum Q, nempe, vt R, ad P, sic quadratum MC, ad quadratum DN. Verùm, cùm proportio R, ad S, componatur ex proportione R, ad P, & P, ad S; & vt R, ad P, sic sit quadratum MC, ad quadratum DN; & vt P, ad S, sic KC, ad DL. Ergo proportio R, ad S, componetur quoq; ex proportione quadrati



MC, ad quadratum DN, hoc est ex dupla proportione MC, ad DN, & ex proportione KC, ad DL. Sed vt vna proportio MC, ad DN, sic AC, dupla CM, ad DB, duplam DN. Ergo proportio R, ad S, componetur ex triplici proportione, nempe ex proportione

MC,

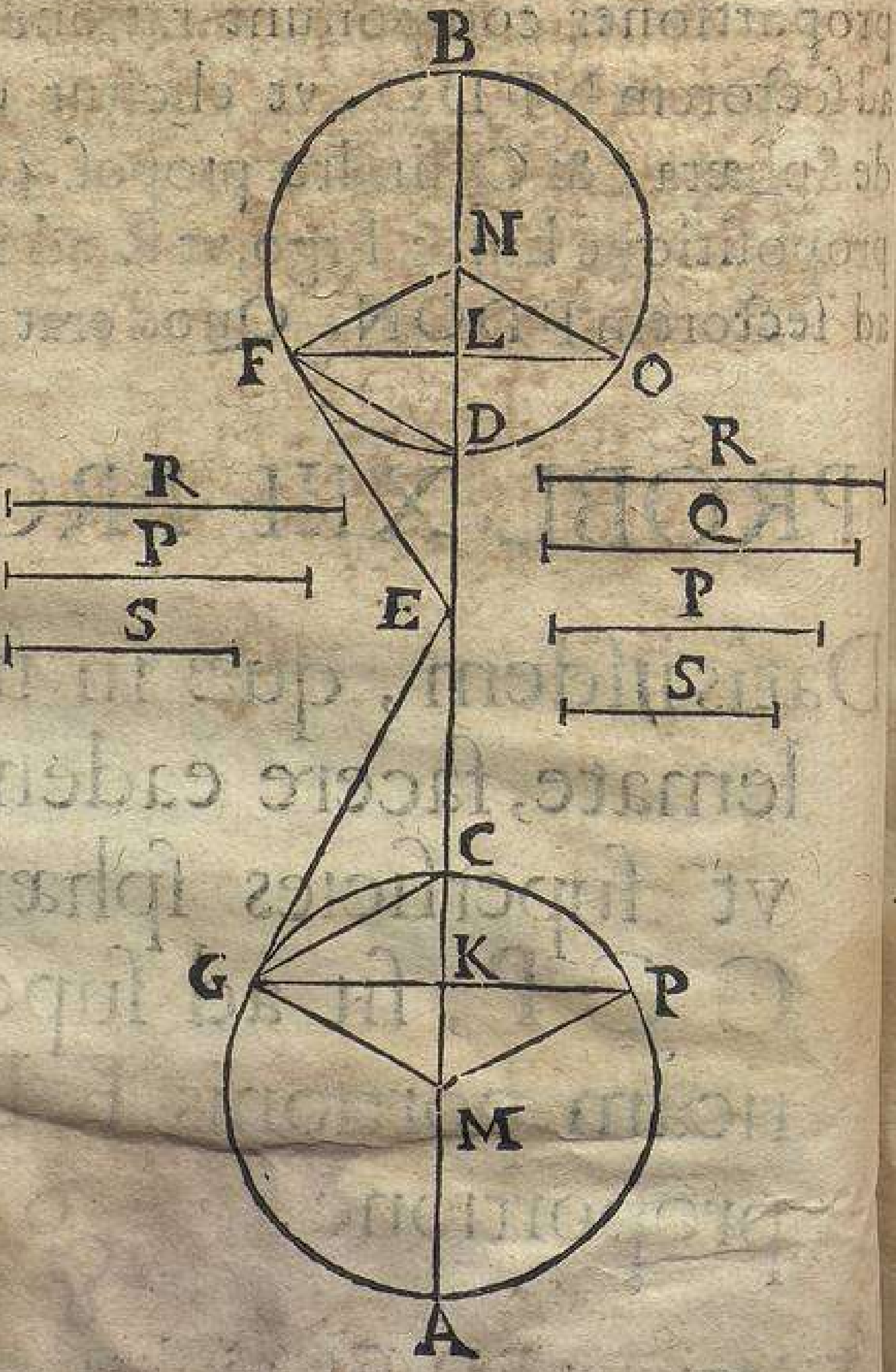
MC, ad DN, ex proportione AC, ad DB, & ex proportione KC, ad DL. Sed proportiones AC, ad DB, & KC, ad DL, faciunt rationē rectanguli ACK, ad rectangulum BDL; nempe (ductis GC, FD) quadrati GC, ad quadratum FD. Ergo proportio R, ad S, componetur ex proportione quadrati GC, ad quadratum FD, & ex proportione MC, ad DN. Sed hæ duę proportiones componunt rationem sectoris GMPC, ad sectorem NFDO, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de Sphæra, & Cylindro propos. 42. & ex nostra prima propositione huius. Ergo, vt R, ad S, sic sector GMPC, ad sectorem FDON. Quod erat faciendum.

PROBL. XIII. PROP. XXXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis GCP, sit ad superficiem sphæricam portionis FDO, in data proportione.

IVngantur FD, GC; & data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt AC, ad DB, sic R, ad P, &, per propositionem 33. diuidatur CD, in E, vt factis omnibus, quæ ibidem, sit, vt P, ad S, sic KC, ad DL;

& reuolutis omnibus, & factis portionibus G C P, F D O. Dico esse quæsitas. Nam proportio R, ad S, componitur ex proportione R, ad P, & ex proportione P, ad S; vt autem R, ad P, sic A C, ad D B; & vt P, ad S, sic K C, ad D L; ergo quoque proportio R, ad S, componetur ex proportione A C, ad D B, & K C, ad D L, nempe, ex proportione rectanguli A C K, ad rectangulum B D L, (cum proportiones horũ rectãgulorum componantur ex ijsdem proportionibus) ergo, vt R, ad S, sic rectãgulum A C K, ad rectangulum B D L, nempè, sic quadratũ G C, ad quadratum F D; nempè, sic superficies sphærica portionis G C P, ad superficiem sphęricã portionis F D O; vt elicitur ex Archimede primo, de Sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Ergo factum est, quod faciendum erat.



SCHO-

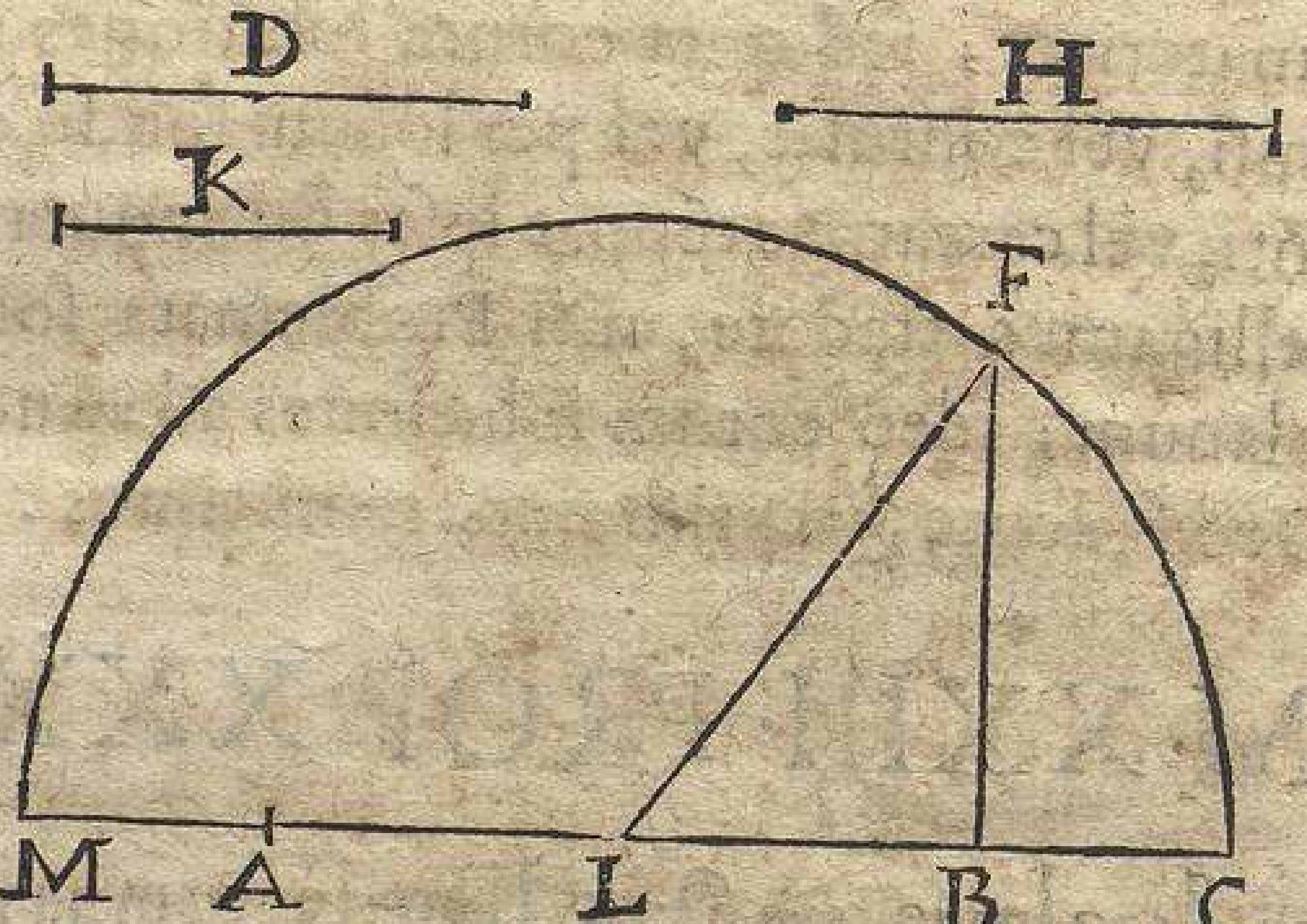
SCHOLIVM.

MVlta alia Problemata essent soluenda circa hanc materiam; sed quia eorum solutiones non tenemus, nisi, vel confusas, vel per locum solidũ; & cùm in præsenti, vel careamus tẽpore ipsas distinguendi, vel non intelligamus tradere, nisi Problemata soluta per locum planum; ideò eorum solutiones ad aliud opus, quod, Deo fauente, imprimetur, remittimus.

LEM. XXIII. PROP. XXXVI.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data cum producta, vna cum quadrato productæ, & cum rectangulo contento sub tota cum producta, & sub producta, sit ad quadratum alterius datæ lineæ in data proportione.

DAtæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; & data proportio sit, quàm habet A B, ad H; oportet producere A B, in C, vt quadratum A C, cum quadrato C B, & cum rectangulo A C B, sit ad quadratum D, vt A B, ad H. Patet proportionem A B, ad H, debere esse maiorem ea, quàm habet quadratum AB, ad quadratum D. Fiat, vt H, ad tertiam partem AB, sic quadra-



tum D, ad quadratum K. Patet faciliter, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius esse tertia parte quadrati AB. Erigatur ergo à puncto B, linea BF, perpendiculariter super AB, quæ possit excessum quadrati K, super tertiam partem quadrati AB; & secta AB, bifariam in L, & iuncta LF; centro L, interuallo LF, fiat semicirculus, cui occurrat AB, hinc inde producta in punctis M, C. Dico punctum C, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula MBC, & ACB, sunt æqualia, & rectangulum MBC, est æquale quadrato FB; ergo rectangulum ACB, erit æquale quadrato BF. Et addita communi tertia parte quadrati AB, ergo rectangulum ACB, cum tertia parte quadrati AB, erit æquale quadrato BF, cum tertia parte quadrati AB, nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem rationem. Sed quadratum D, factum

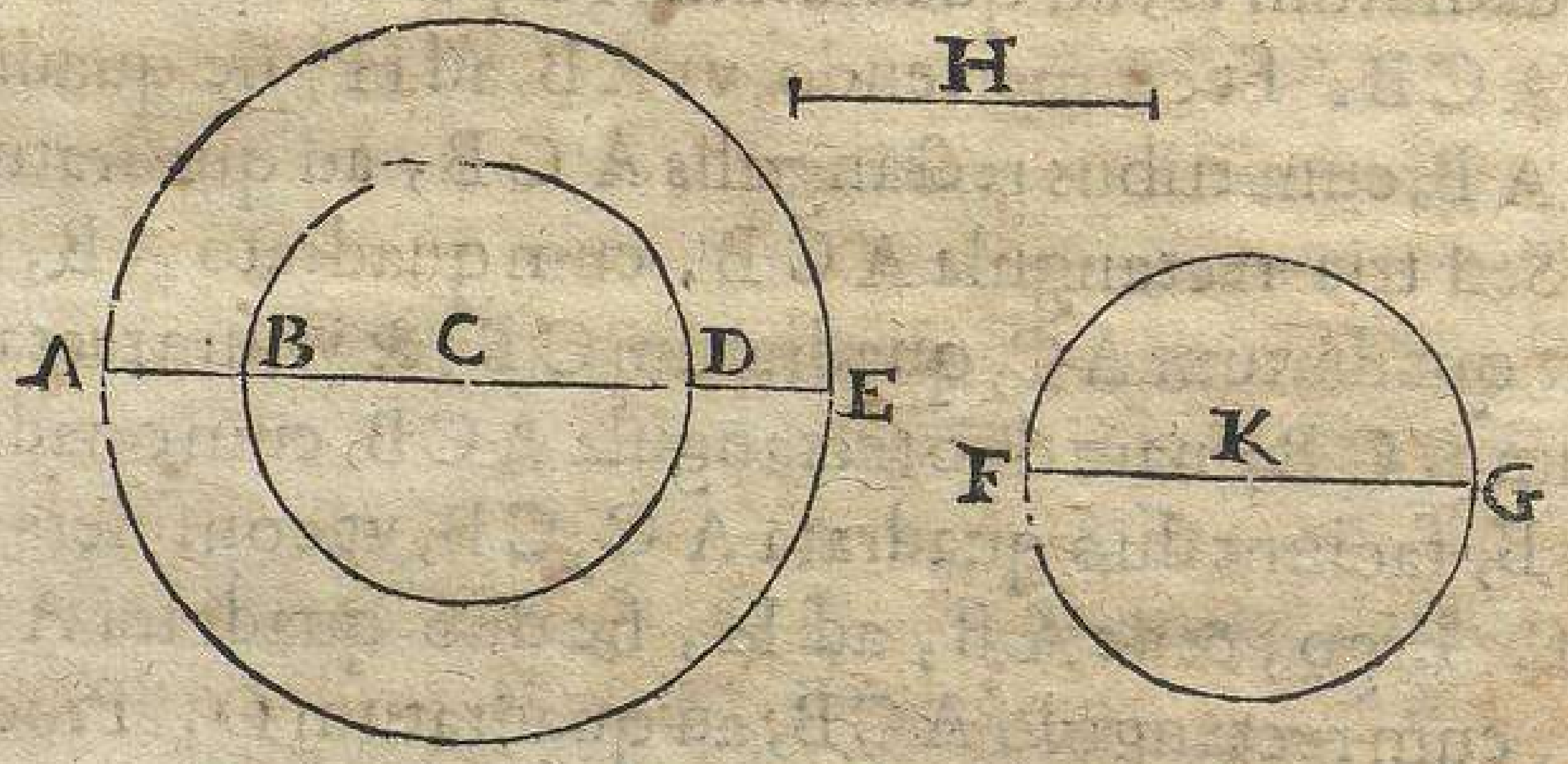
est

est ad quadratum K, vt H, ad tertiam partem A B. Ergo, & vt H, ad tertiam partem A B, sic quadratum D, ad rectangulum A C B, cum tertia parte quadrati A B. Ergo, & ad consequentium tripla, nempe, vt H, ad A B, sic quadratum D, ad quadratum A B, & ad tria rectangula A C B. Et conuertendo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum tribus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed tria rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt quadratum A C, quadratum C B, & vnum rectangulum A C B; nam duo rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt duo quadrata A C, C B, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Producta est ergo A B, in C, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XIV. PROP. XXXVII.

Data sphæra, & data recta linea, describere orbem solidum, cuius crassities sit data linea, qui ad spheram datam, sit in data proportione possibili.

HOC Problema est determinatum, & determinatio, quæ patebit ex processu demonstrationis, est, quod proportio data sit maior ea, quam habet cubus datæ lineę, ad cubum ſemidiametri ſphæræ datæ. Sit data ergo ſphæra, cuius ſemidiameter F K, & data recta linea ſit A B, & oporteat facere, quod proponitur. Data proportio ſit, quàm habet A B, ad



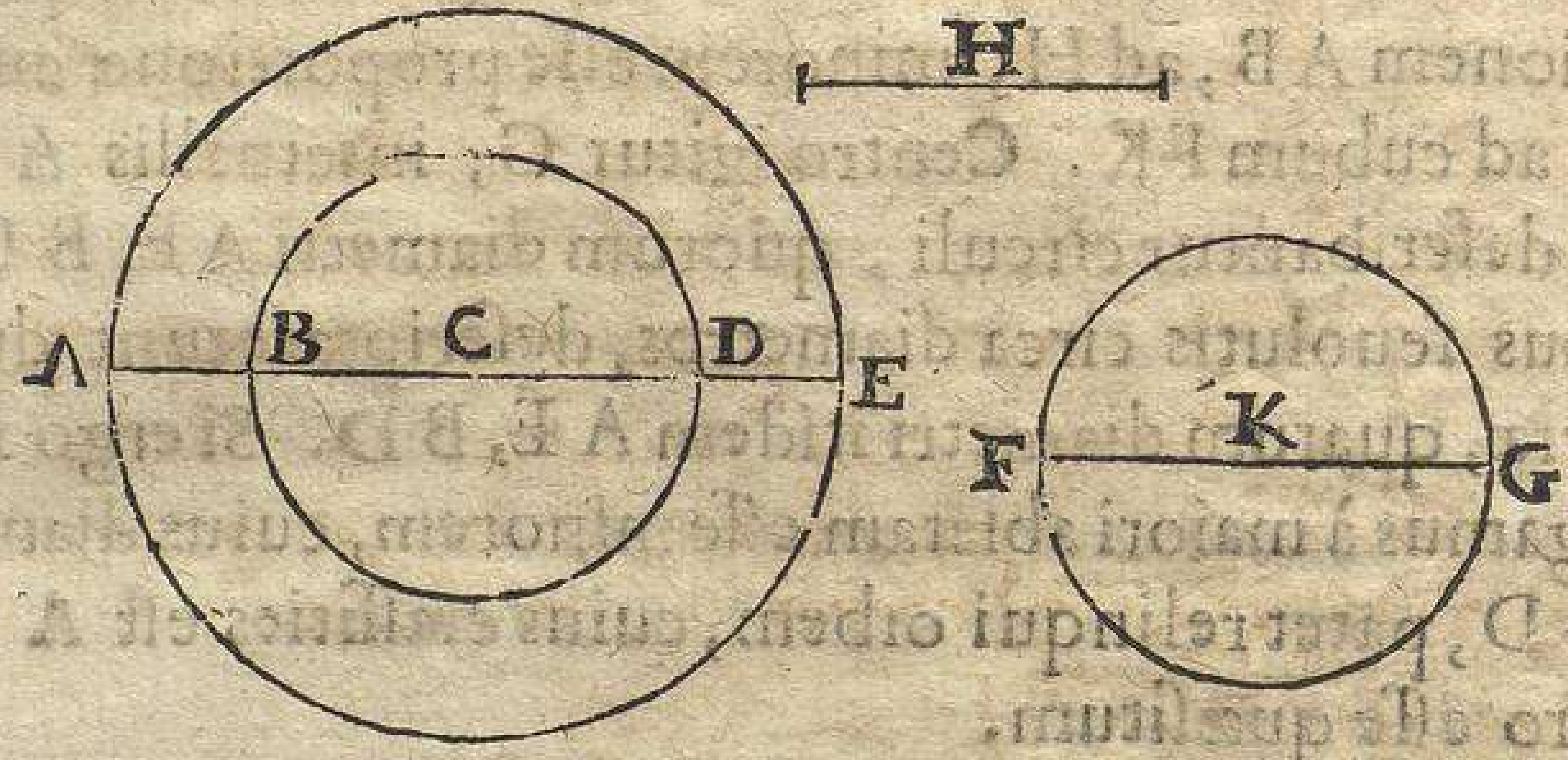
H; & data linea A B, taliter producatur in C, vt ſit, ſicut F K, ad H, ſic quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Patet enim, ex determinatione Problematis, quod A B, poterit produci, cum proportio F K, ad H, maior ſit ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Nam ſi eſſet æqualis; cum proportio A B, ad H, componatur ex proportione A B, ad F K, & F K, ad H; vt autem F K, ad H, cum ſic ſit, ex ſuppoſitione, quadratum A B, ad quadratum F K. Ergo proportio A B, ad H, componeretur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadrati A B, ad quadratum F K, quæ duæ faciunt rationem cubi A B, ad cubum F K: quod eſt contra determinationem Problematis; quia proportio A B, ad H, ſtatuitur maior ea, quàm habet cubus A B, ad cubum F K.

Et

Et multò maius absurdum concluderetur, si proportio esset minor. Nam, eodem discursu, concluderetur proportionem A B, ad H, minorem esse proportione cubi A B, ad cubum F K. Centro igitur C, interuallis A C, C B, describantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus reuolutis circa diametros, descriptæ erunt duæ sphæræ, quarum diametri itidem A E, B D. Si ergo intelligamus à maiori ablatam esse minorem, cuius diameter B D, patet relinqui orbem, cuius crassities est A B. Assero esse quæsitum.

Etenim proportio A B, ad H, vt dictum est, de foris sumpta F K, componitur ex proportione A B, ad F H, & F K, ad H. Vt autem F K, ad H, sic facta sunt duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Ergo quoque, proportio A B, ad H, componetur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Sed istæ proportiones componunt proportionem excessus cubi A C, super cubum B C, ad cubum F K, (vt statim patebit.) Vt autem excessus cubi A C, super cubum C B, ad cubum F K, sic orbis, cuius crassities A B, ad sphæram, cuius semidiameter F K. (Nam, vt cubus A C, ad cubum B C, sic sphæra A E, ad sphæram B D. Et diuidendo, vt orbis ad sphæram, sic excessus cubi A C, super cubum B C, ad cubum B C. Vt autem cubus B C, ad cubum F K, sic sphæra B D, ad sphæram F G. Ergo, ex æquali, vt excessus cubi A C, super cubum B C, ad cubum F K, sic orbis, cuius crassities A B, ad sphæram F G.) Ergo, & vt A B, ad H,

ſic orbis ad ſphæram F G. Quod faciendum propo-
nebatur.



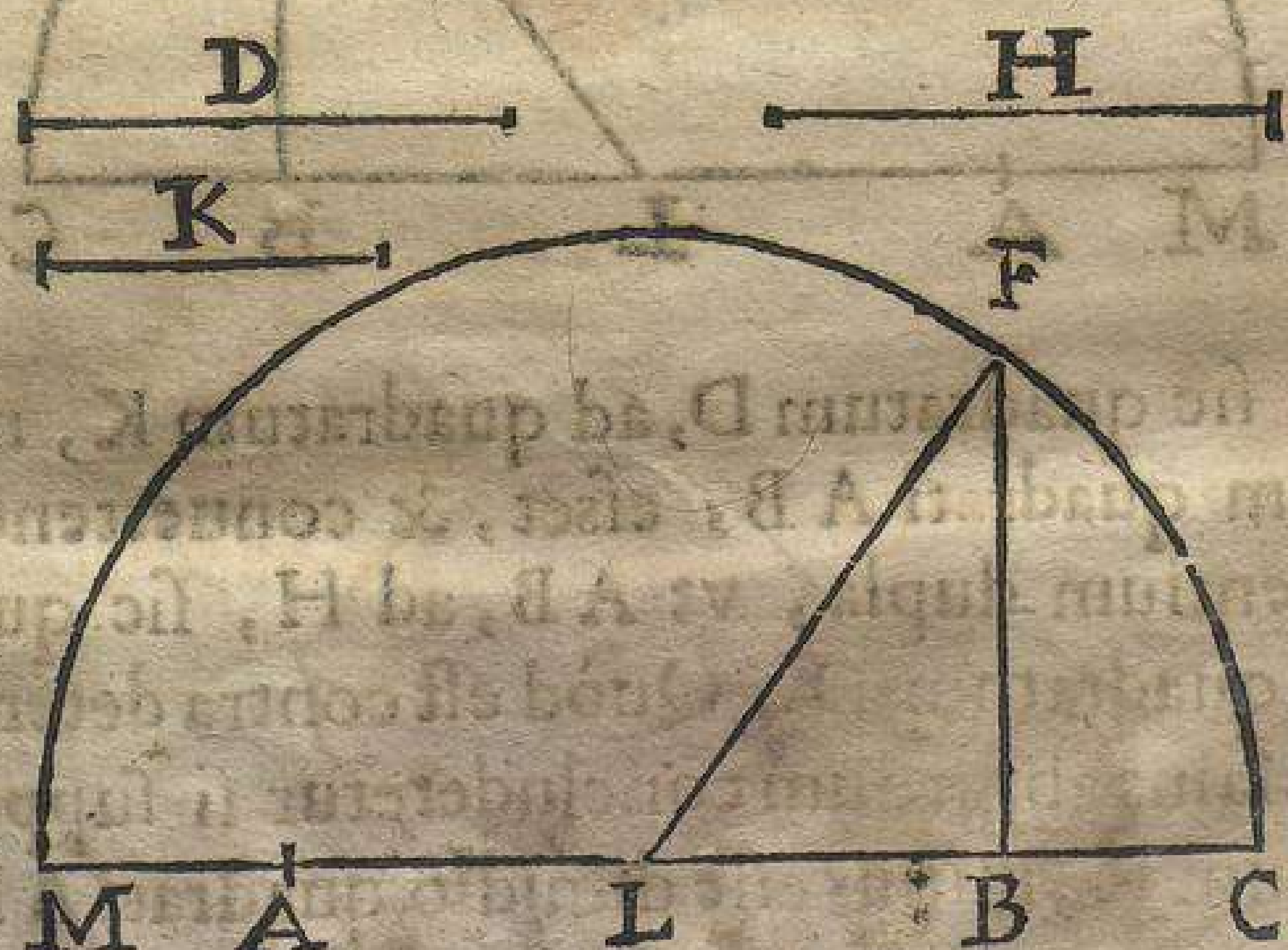
Quòd verò illæ duæ proportiones A B, ad F K, & duorum quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K, componant rationem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K; ſeù, quod factum ſub A B, in duo quadrata A C, C B, & in rectangulum A C B, ſit æquale exceſſui cubi A C, ſuper cubum B C; patet. Quia, duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, diuiduntur in quadratum A B, in tria rectangula A B C, & in tria quadrata B C; in quæ omnia ſi ducatur A B, fient, cubus A B, tria facta ſub A B, in quadratum B C, & tria facta ſub B C, in quadratum A B; nempè exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C. Oſtenſum eſt enim ab alijs, ſed præcipuè ab incomparabili Viro Bonauentura Caualerio Præceptore meo amantiſſimo, libro ſecundo Geometriæ indiuiſibilium Propoſit. 38. quod ſi recta linea ſecta ſit in puncto, cubus totius æquatur cubis partium, & tribus factis ſub qualibet partium in quadratum reliquæ.

Quod

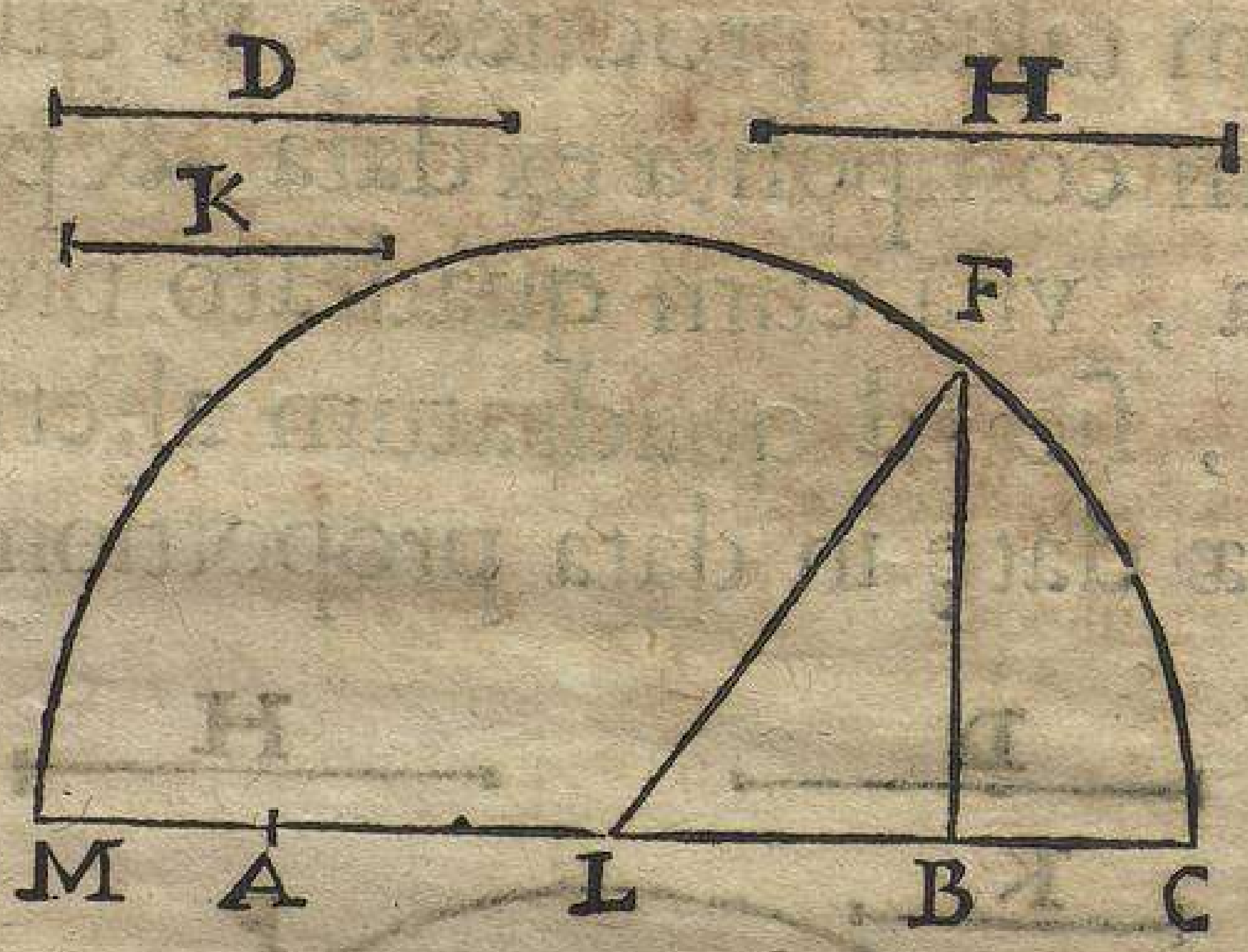
Quòd verò oporteat proportionem datam maiorem eſſe ea, quam habet cubus A B, ad cubum F K, patuit ex proceſſu Problematis, alioquin non potuiſset conſtrui.

LEM. XXIV. PROP. XXXVIII.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compoſitæ ex data, & producta, vna cum quadrato productæ, ſic ad quadratum alterius lineæ datę in data proportione.



Datæ duæ rectæ lineæ ſint A B, & D; oportet producere A B, in C, vt duo quadrata A C, C B, ſint ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet A B, ad H. Patet oportere hanc maiorem eſse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum D. Diuidatur A B, biſariam in L, & fiat, vt H, ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K. Patet, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius eſse dimidio quadrati A B. Nam, ſi non eſſet maius, vel eſset æquale, vel minus. Non æquale; quia, cùm ſit, vt H



ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K, nempe ad dimidium quadrati A B; eſset, & conuertendo, & vt antecedentium dupla, vt A B, ad H, ſic quadratum A B, ad quadratum D. Quòd eſt contra determinationem. Maius abſurdum concluderetur ſi ſupponeretur quadratum K, minus eſſe dimidio quadrati A B. Ergo cùm quadratum K, maius ſit dimidio quadrati A B, linea potens exceſſum quadrati K, ſuper dimidium quadrati A B, ducatur normaliter ſuper A B, à puncto B,

&

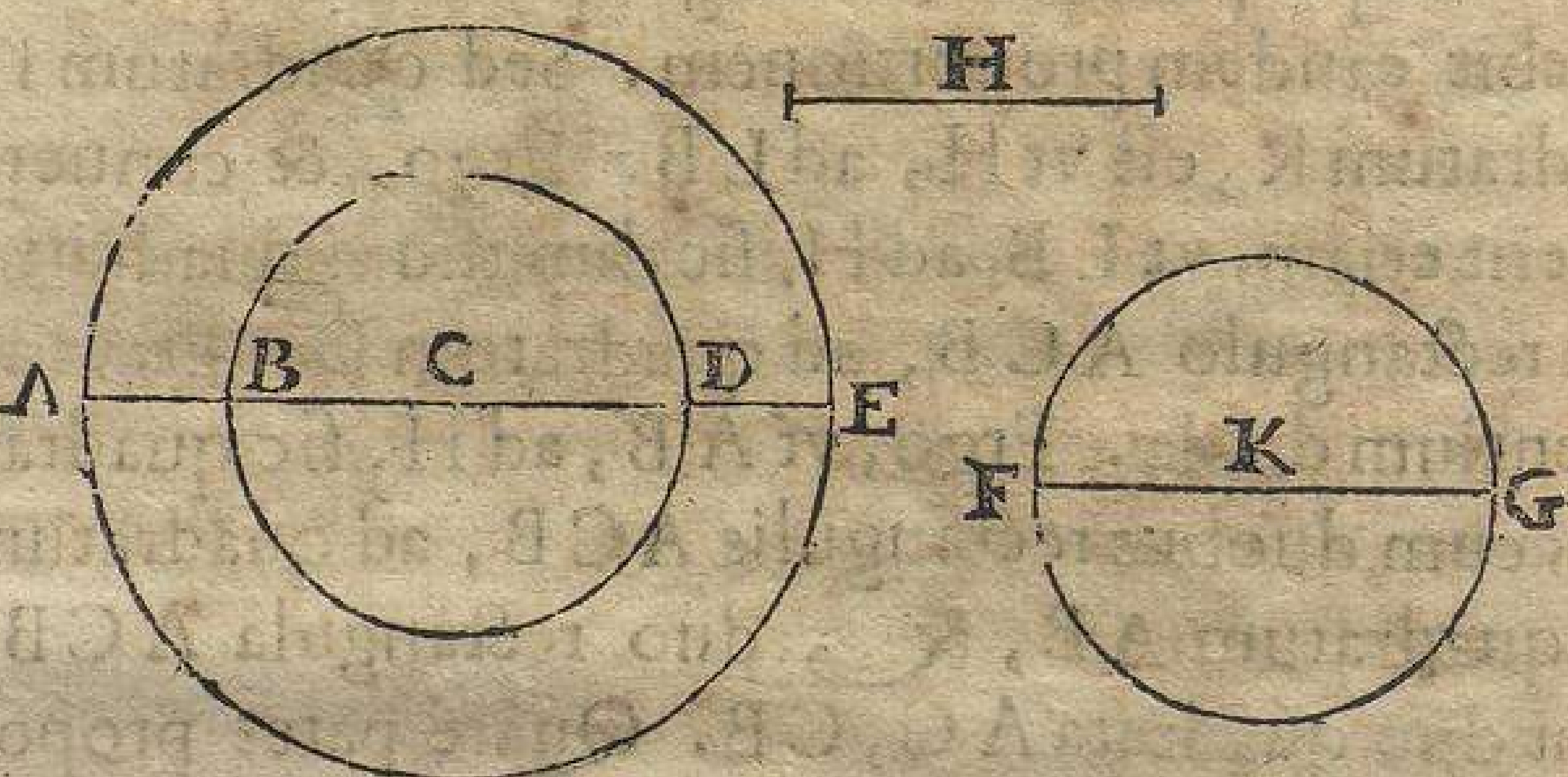
& sit B F; & iuncta L F, centro L, interuallo L F, fiat semicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in M, & C. Dico punctum C, esse quæsitum.

Cùm enim rectangulum M B C, seù A C B, ei æquale, sit æquale quadrato F B, addito dimidio quadrati A B; ergo rectangulum A C B, cum dimidio quadrati A B, erit æquale dimidio quadrati A B, & quadrato F B; nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed quadratum D, ad quadratum K, est vt H, ad L B. Ergo, & conuertendo, erit etiam, vt L B, ad H, sic dimidium quadrati A B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum duobus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed quadratum A B, & duo rectangula A C B, faciunt duo quadrata A C, C B. Quare patet propositũ.

PROBL. XV. PROP. XXXIX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter orbis, sit ad superficiem sphærę, in data proportione.

Data proportio sit, vt suprà, quam habet A B, ad H; quàm patebit, ex processu demonstrationis, debere maiorem esse ea, quam habet quadratum AB, ad quadratum FK. Producatur AB, in C, vt duo quadrata AC, CB, sint ad quadratum FK, vt AB, ad H. Vnusquisque, ex dictis in superiori Problemate, & ex determinatione huius, potest elicere, AB, posse produci. Tunc centro C, interuallis AC, CB, describantur circuli, quorum diametri AE, BD; quibus

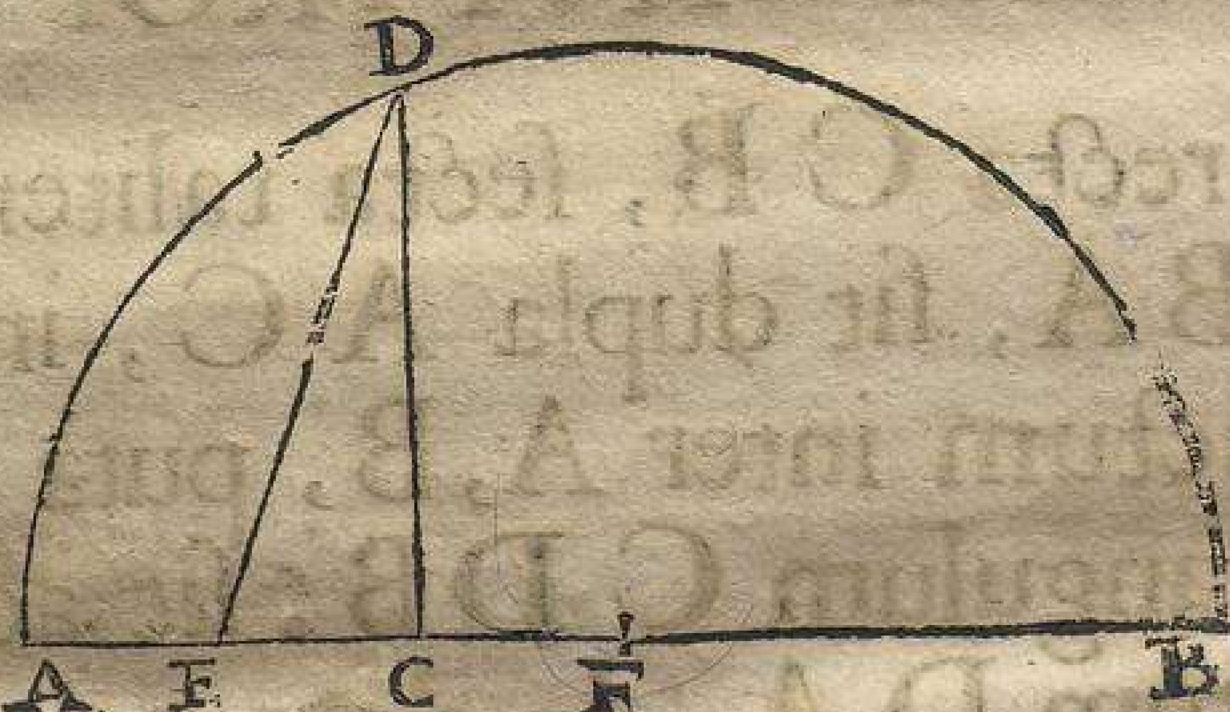


reuolutis circa AE, & intellectis omnibus, vt in superiori Problemate. Aio factum esse propositum. Nam cùm perimeter talis orbis sint duæ superficies sphæricæ, nempè interior, & exterior; superficies verò sphæricæ sint inter se, vt quadrata diametrorum, seù semidiametrorum, vt facilè elicitur ex Archimede primo de sphæra, & Cylindro proposit. 31. erit perimeter orbis, cuius crassities AB, ad superficiem sphæræ, cuius semidiameter FK, vt duo quadrata AC, CB, ad quadratum FK, nempe, vt AB, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XXV. PROP. XL.

Diameter A B, semicirculi A D B, cuius centrum F, sit diuisa taliter in C, vt BC, sit dupla C A; & erecta à puncto C, perpendiculari CD, ac diuisa A C, bifariam in E, iunctaque E D. Dico E D, esse æqualem F B; & A E, cum E D, esse ęqualem toti C B.



QVoniam enim B A, est tripla A C, nempe est ad ipsam, vt 6, ad 2; ergo A F, dimidia A B, erit sexquialtera A C, nempe erit ad ipsam, vt 3, ad 2. Ergo FC, est æqualis, tàm C E, quàm E A. Pariter, quoniam B C, est dupla C A; ergo, & quadratum C D, duplum erit quadrati A C, & erit octuplum quadrati C E. Ergo quadratum D E, erit nonuplum quadrati E C. Sed pariter quadratum A F, seù F B, est nonuplum quadrati E C; ergo quadratum E D, erit æquale quadrato F B, & linea lineæ. Et quia pariter A E, est æqualis C F. Ergo A E, cum E D, erit æqualis C B. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Ex dictis deducitur faciliter, quod si B C, sit maior dupla A C, & fiant reliqua vt suprà; deducitur inquam, duas A E, E D, minores esse C B.

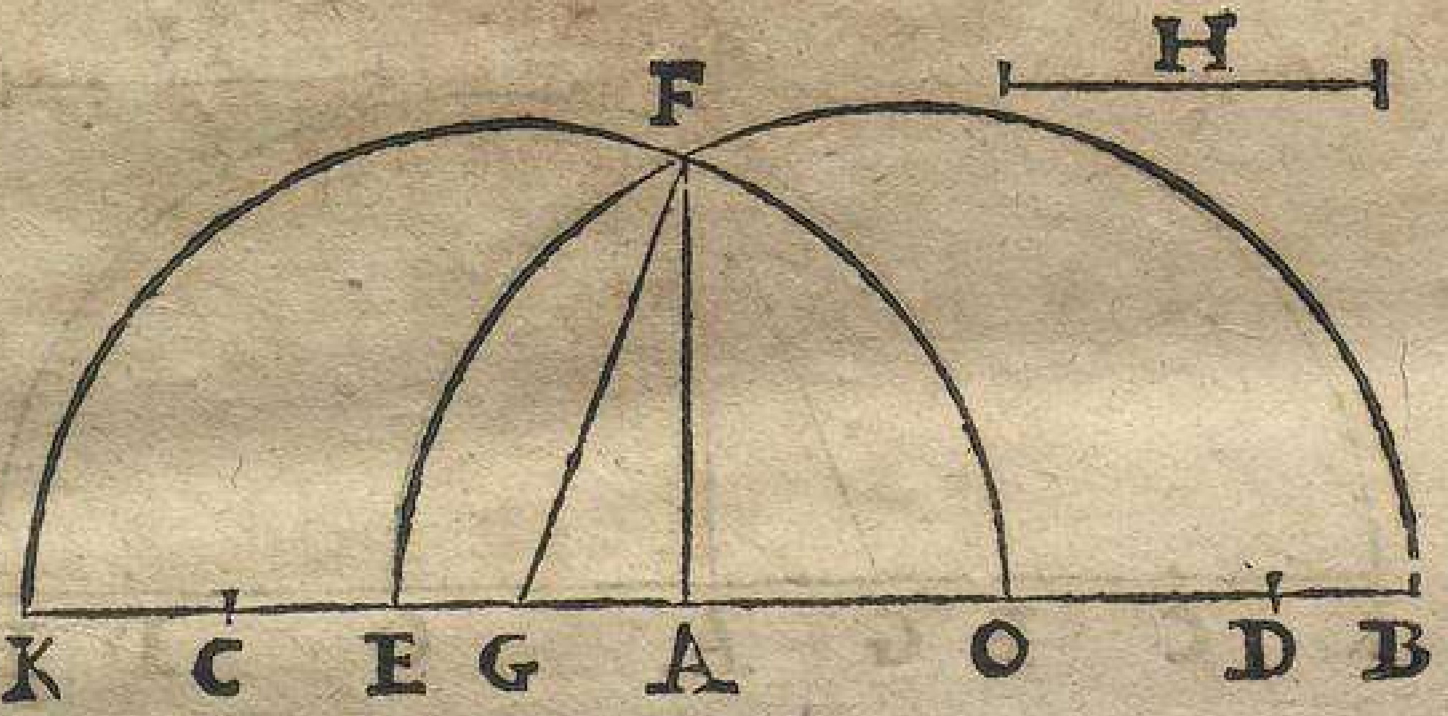
LEMMA XXVI. PROP. XLI.

Data recta C B, secta taliter in A, vt B A, sit dupla A C, inuenire punctum inter A, B, putà D, vt rectangulum C D B, sit ad quadratum D A, in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet A B, ad H; & fiat vt dupla A B cum dupla H, ad H, sic B A, ad A E, quam patet esse minorem dimidia A B, hoc est C A. Facto autem semicirculo super E B, & erecta à

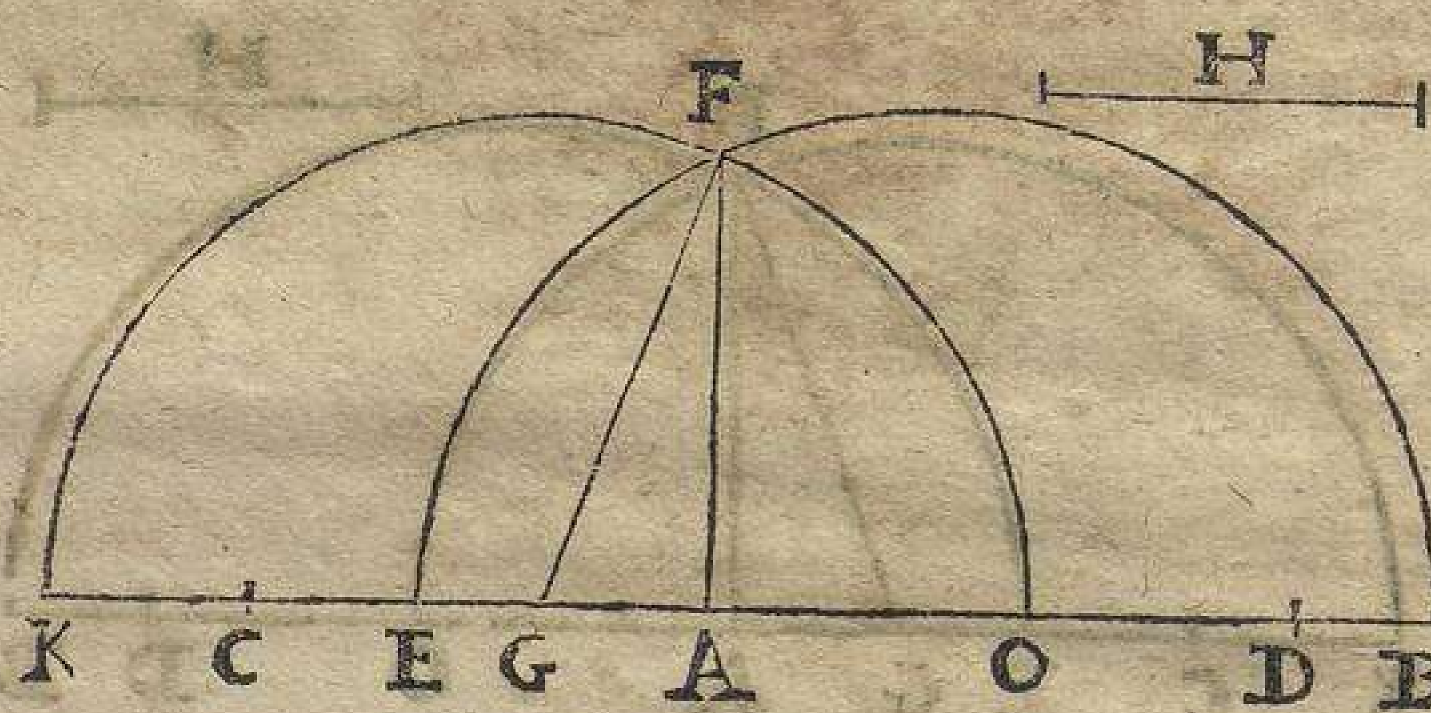
pun-

puncto A, perpendiculari A F, ac diuisa E A, bifariam in G, iunctaque G F; centro G, interuallo G F, describatur semicirculus K F O, producta A C, vsque ad K. Quoniam B A, est maior dupla A E, & ducta est perpendicularis A F, & diuisa est E A, bifariam in G, iunctaque est G F; ergo, per Scholium antecedentis Lemmatis, duæ E G, G F, hoc est E O, erit minor A B. Fiat ergo ipsi E O, æqualis A D. Dico punctum D, esse quæsitum; nimirum esse, vt A B, ad H, sic rectangulum C D B, ad quadratum D A.



Quoniam enim duo rectangula K A O, E A B, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato A F; ergo communi addito rectangulo K A E, duo rectangula K A O, & K A E, nempe rectangulum sub K A, in E O, erit æquale duobus rectangulis E A B, & K A E. Sed rectangulum sub K A, in E O, est æquale quadrato K A, seù E O, quia duæ K A, & E O, sunt æquales; & quia E O, facta est æqualis A D, quadratum E O, est æquale quadrato A D; ergo quadratum A D, erit æquale rectangulo E A B, & rectangulo

K A E. Sed rectangulum K A E, est æquale rectangulo A E O, quia, vt dictum est, K A, est æqualis E O. Ergo quadratum A D, erit æquale rectangulis E A B, & A E O, nempe rectangulo sub A E, in compositam ex B A, E O, seù in compositam ex B A, A D. Ergo quadratum B A, simul cum rectangulo D A B, hoc est rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad rectangulum sub E A, in compositam ex B A, A D, est, vt B A, ad A E; & B A, ad A E, facta est, vt dupla A B, cum dupla H, ad H. Ergo, & vt dupla A B, cum dupla H, ad H, sic rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad quadratum A D, nempe sic quadratum A B, cum rectangulo B A D, (quia rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, diuiditur in quadratum B A, & in rectangulum B A D,) ad quadratum A D. Et diuiden-

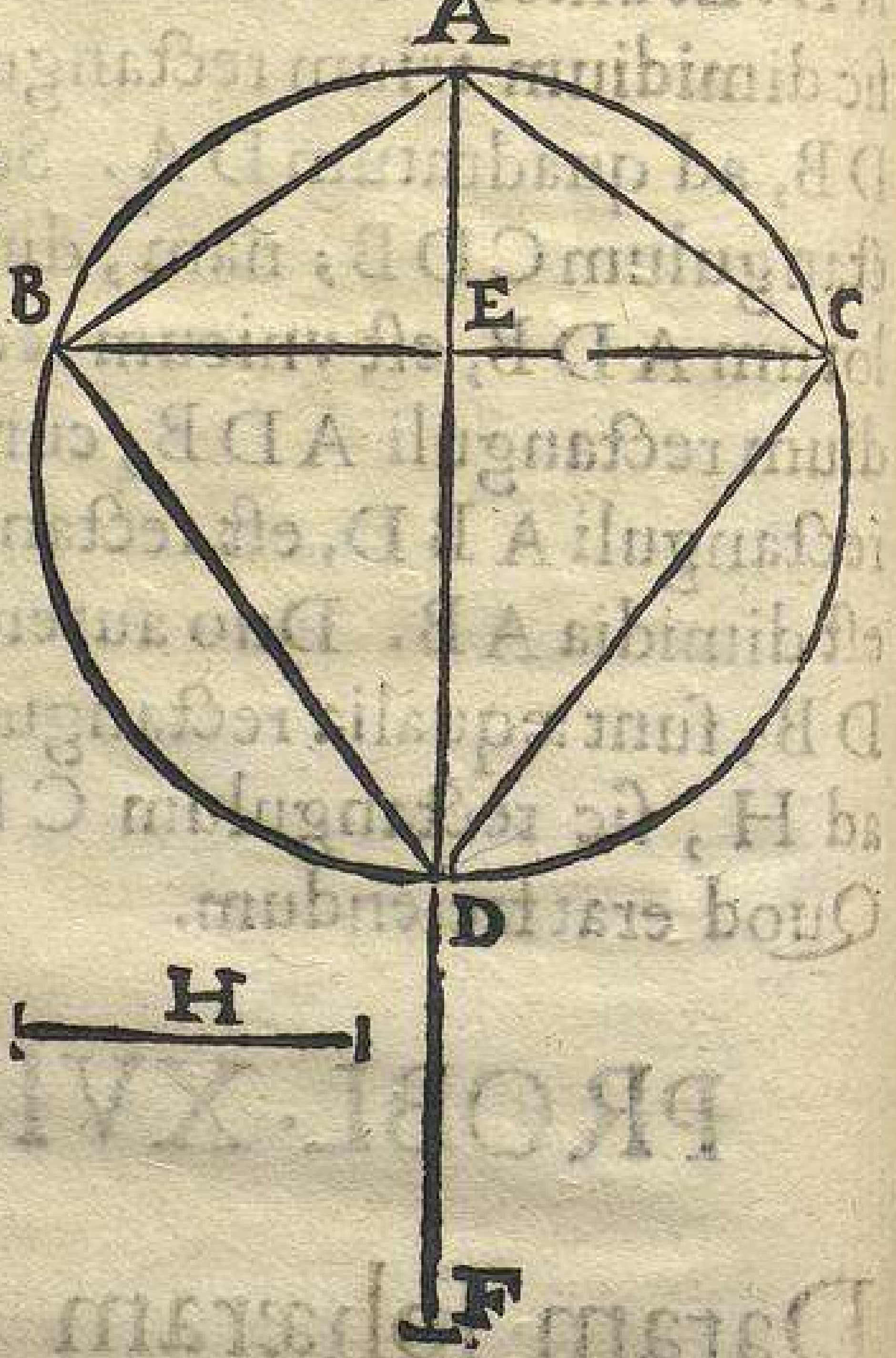


uidendo, vt dupla B A, cum H, ad H, sic quadratum B A, cum rectangulo B D A, ad quadratum D A. Et rursùm diuidendo, vt dupla B A, ad H, sic tria rectangula B D A, cum quadrato D B, ad quadratum A D. Et antecedentium dimidia. Ergo, vt A B, ad H, sic dimidium trium rectangulorum A D B, & quadrati D B, ad quadratum D A. Sed horum dimidium est rectangulum C D B; nam, dimidium duorum rectangulorum A D B, est vnicum rectangulum A D B; & dimidium rectanguli A D B, cum quadrato D B, nempe rectanguli A B D, est rectangulum C A, D B, quia C A, est dimidia A B. Duo autem rectangula A D B, & C A, D B, sunt æqualia rectangulo C D B. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum C D B, ad quadratum A D. Quod erat faciendum.

PROBL. XVI. PROP. XLII.

Datam sphæram, aliquo plano taliter diuidere, vt vna illius portio, ad conum super eamdem basim cum portionibus, cuius vertex sit vertex alterius portionis, sit in data proportione.

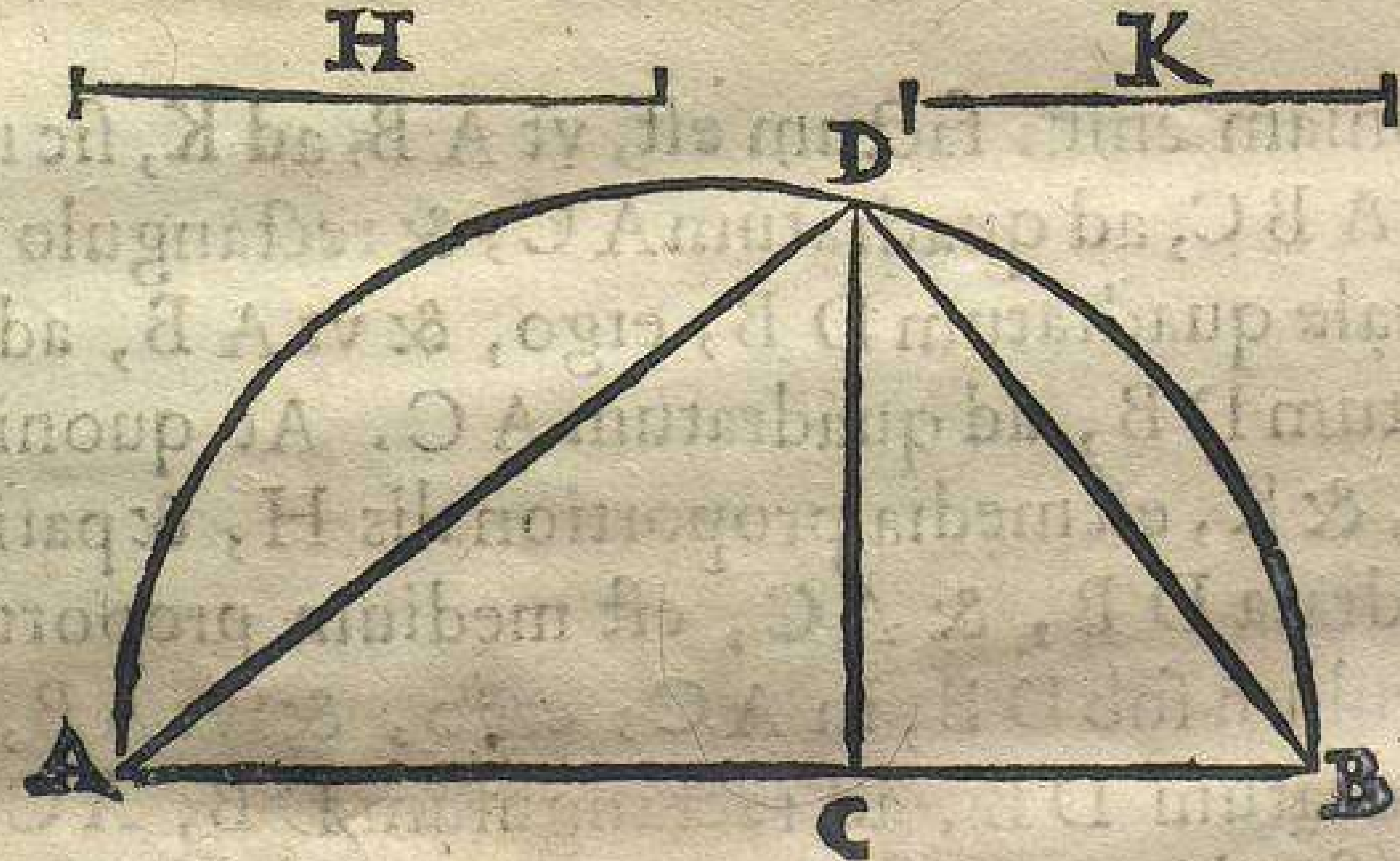
SIT data sphæra, cuius diameter A D. Oportet ipsam secare plano B E C, cui diameter sit perpendicularis, adeò vt, facto cono, cuius basis sit B E C, &c. vertex D, portio B A C, sit ad conum B D C, in data proportione. Sit hæc, quam habet A D, ad H, & producta A D, in F, vt A D, sit dupla D F, diuidatur, per propositionem antecedentem A F, in E, vt rectangulum F E A, sit ad quadratum E D, vt A D, ad H; & per punctum E, acto plano B E C, cui A D, sit normalis, &c., facto cono B D C, vt moris est. Dico factum esse propositum. Intelligatur etiam conus B A C. Portio B A C, ad conum B D C, (de foris sumpto cono B A C,) habet rationem compositam ex ratione portionis ad conum B A C, & coni B A C, ad conum B D C; sed portio B A C, est ad conũ B A C, vt F E, ad D E, vt ostenditur ab Archimede 2. de Sphæra, & Cylindro proposit. 7. & conus B A C, ad conum B D C, est, vt A E, ad E D; ergo proportio portionis B A C, ad conum B D C, componetur quoque ex proportione F E, ad E D, & A E, ad E D. Sed hæ duæ rationes componunt rationem rectanguli F E A, ad quadratum E D. Ergo portio B A C, erit ad conum B D C, vt rectangulum F E A, ad quadratum E D, seù, vt D A, ad H. Quod erat faciendum.



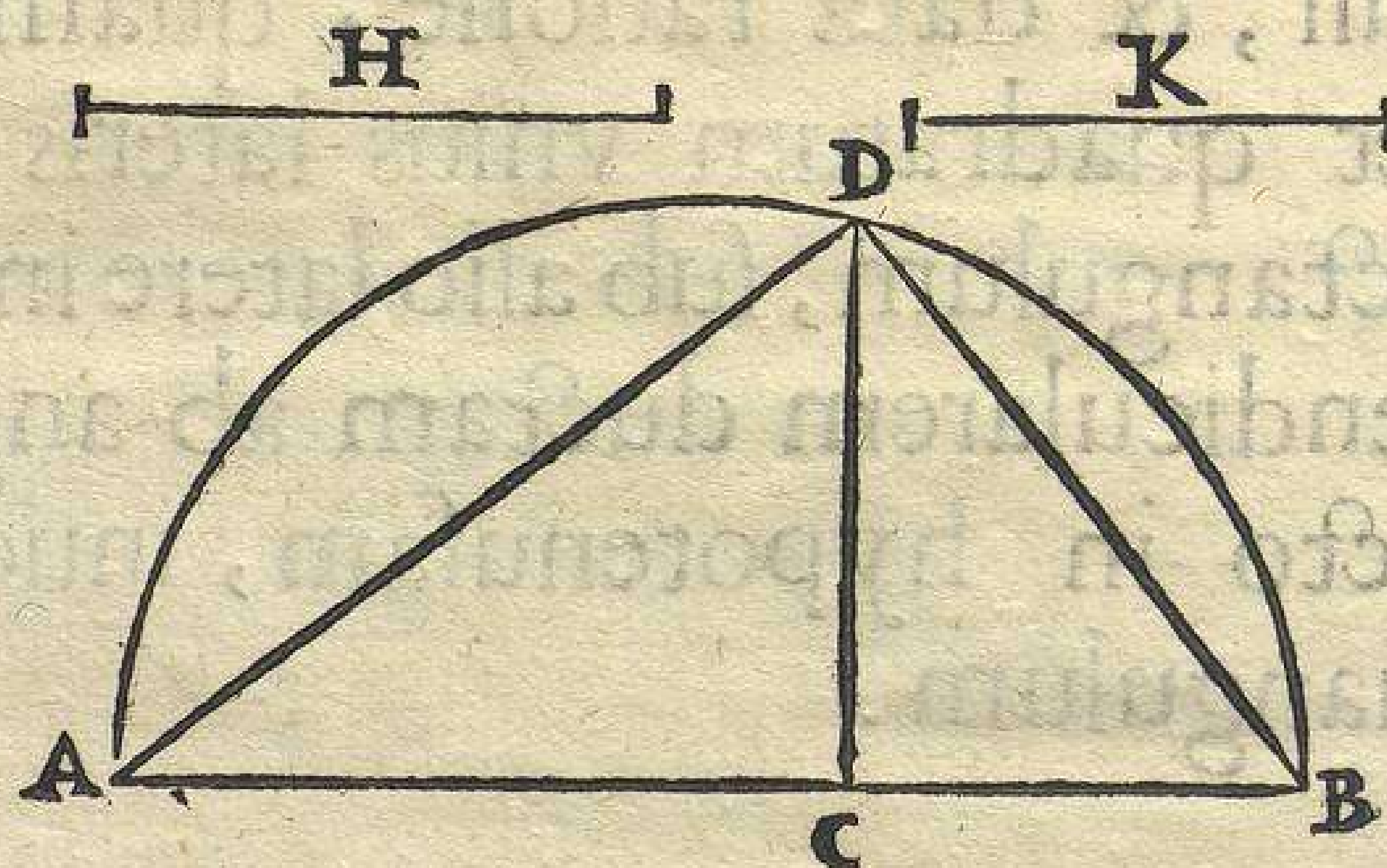
LEM-

LEMMA XXVII·PROP·XLIII·

Data hypotenuſa trianguli rectanguli, & data ratione, quam habet quadratum vnius lateris, ad rectangulum, ſub alio latere in perpendicularem ductam ab angulo recto in hypotenuſam, inuenire triangulum.



DAta hypotenuſa ſit A B, & data ratio ſit, quam habet A B, ad H. Fiat, vt A B, ad H, ſic H, ad K; deinde ſuper A B, fiat ſemicirculus, & per propoſ. 20. huius, taliter diuidatur A B, in C, vt rectangulum A B C, ſit ad quadratum A C, vt A B, ad K; & à puncto C, erecto perpendiculo C D, fiat triangulum A D B. Quod affirmo esse quæsitum; nempè esse, vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C.

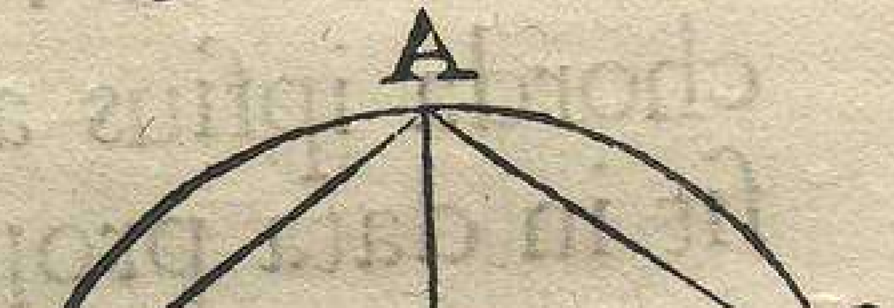


Quoniam enim factum est, vt A B, ad K, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C; & rectangulo A B C, est æquale quadratum D B; ergo, & vt A B, ad K, sic quadratum D B, ad quadratum A C. At quoniam inter A B, & K, est media proportionalis H, & pariter inter quadrata D B, & A C, est medium proportionale rectangulum sub D B, in A C; ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum D B, A C. Sed, propter similitudinem triangulorum D B C, A D C, rectangulo D B, A C, est æquale rectangulum A D C. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C. Factum est ergo, quod proponebatur.

PROBL. XVII. PROP. XLIV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis B A C, sit ad superficiem conicam coni B D C, in data proportione.

Data proportio sit pariter, quam habet A D, ad H. Data ergo diametro D A, sphæræ datæ, tamquam hypotenusa trianguli rectanguli, inueniatur triangulum rectangulum A D B, vt quadratum A B, sit ad rectãgulum D B E, vt D A, ad H, & intelligantur, portio B A C, & conus B D C. Dico plano B C, sectam esse sphæram, vt superficies portionis B A C, sit ad superficiem coni B D C, vt A D, ad H. Res est clara, quia ex Archimede sæpe, sæpius citato, vt quadratũ A B, ad rectãgulum D B E, seù, vt D A, ad H, sic superficies portionis, ad superficiem coni.



SCHO-

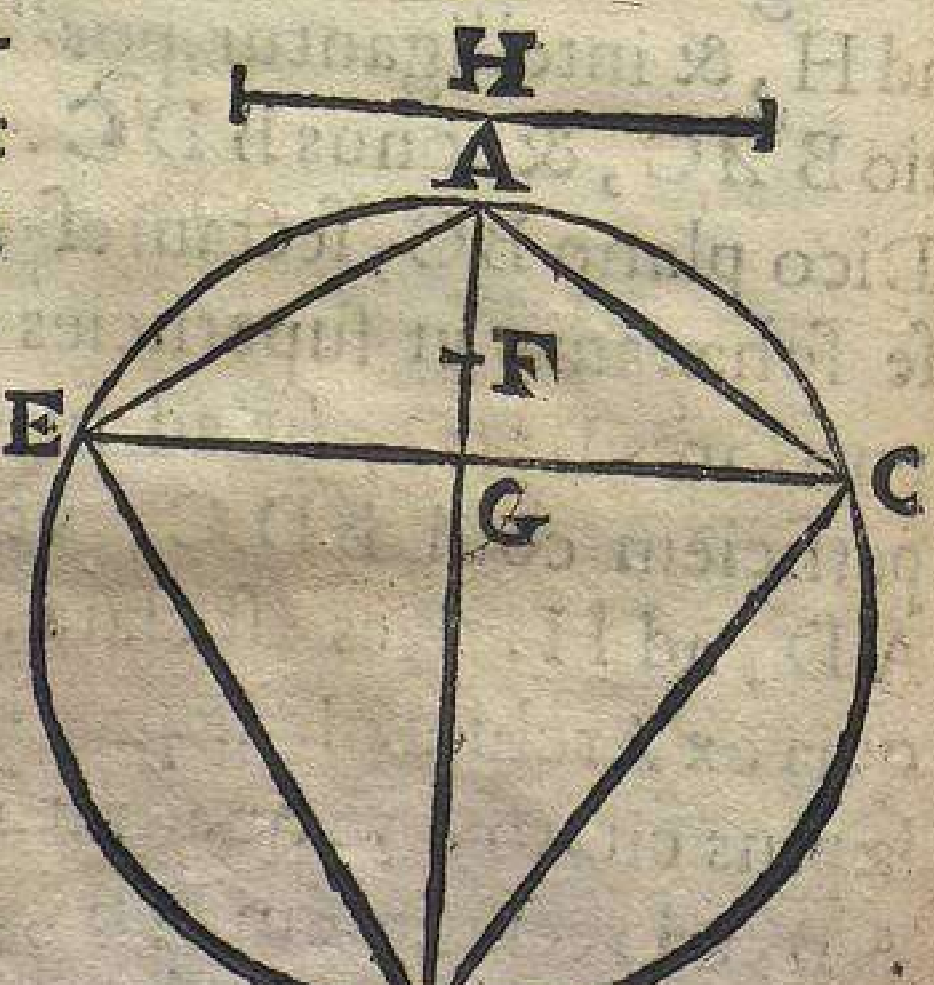
SCHOLIVM.

ARchimedes libro 2. de sphæra, & Cylindro pro. posit. 7. soluit hoc Problema. A' data sphæra portionem abscindere, quæ ad conum super eamdem basim, & in eadem altitudine cum ipsa, habeat datam proportionem. Arbitror non esse inutile soluere Problema etiam quoad superficies.

LEMMA XXVIII. PROP. XLV.

In dato circulo inuenire arcum, vt chorda ipsius ad sinum rectum, sit in data proportione.

SIT datus circulus, cuius diameter AD; oportet inuenire arcum AE, vt chorda AE, ad sinum rectũ EG, sit in data proportione, quæ sit ea, quam habet AD, ad H. Patet oportere hanc esse excessus, cum chorda alicuius arcus, sit semper maior sinu recto. Fiat ergo, vt DA, ad H, sic H, ad aliam, quæ vtique erit minor AD; sit hæc



DG; & à puncto G, ducantur GE, normalis DA, & chorda EA. Quas aſſero eſſe quæſitas. Nam DA, H, & DG, ſunt tres continue proportionales. Ergo, vt DA, ad DG, ſic quadratum DA, ad quadratum H. Sed pariter, vt DA, ad DG, ſic (ſumpta GA, communi altitudine,) eſt rectangulum DAG, nempe quadratum AE, ad rectangulum DGA, nempe ad quadratum EG; ergo, & vt quadratum DA, ad quadratum H, ſic quadratum AE, ad quadratum EG. Ergo, & vt DA, ad H, ſic AE, ad EG. Quod erat faciendum.

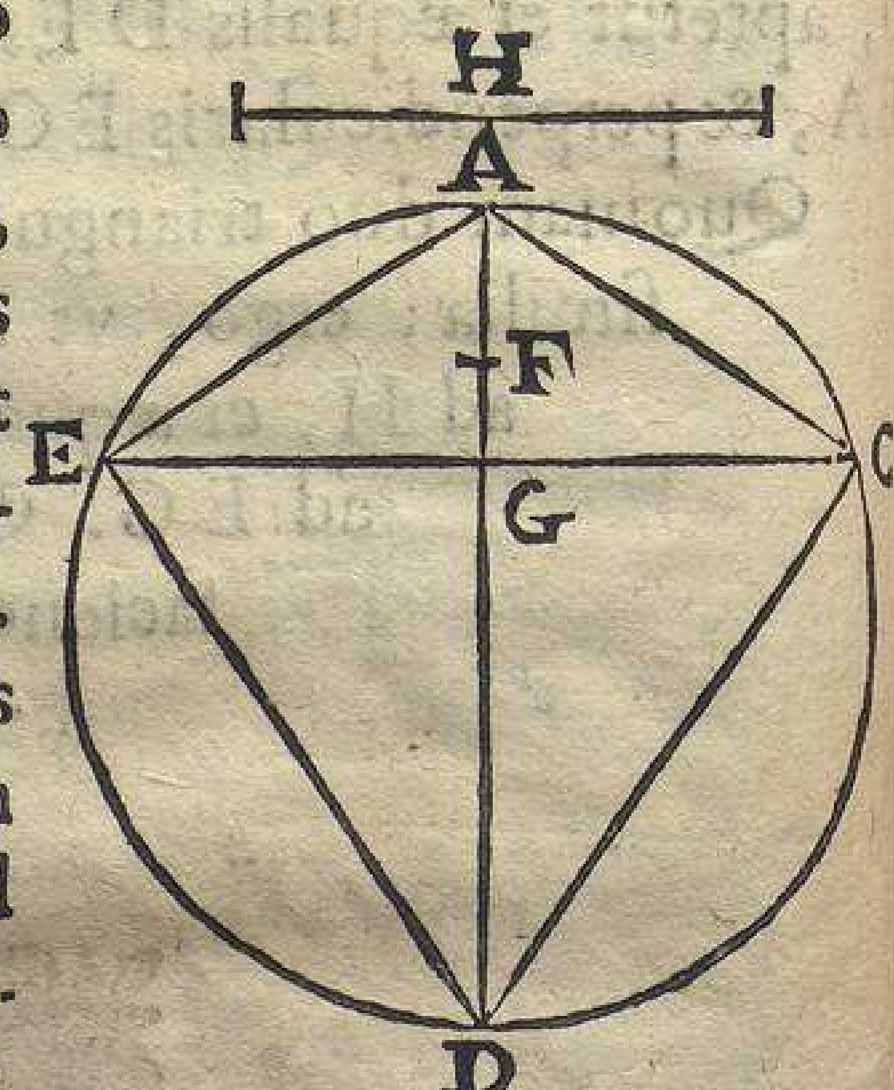
Vel ſic. Quoniam H, eſt minor DA, ex hypotheſi, aptetur ei æqualis DE, à puncto D, & ducantur EA, & perpendicularis EG, ſuper diametrum DA.

Quoniam duo triangula ADE, AEG, ſunt ſimilia; ergo, vt AD, ad DE, ſeù ad H, ei æqualem, ſic AE, ad EG. Quod erat faciendum.

PROBLEMA XVIIII. PROP. XLVI.

A data ſphæra portionẽ abſcindere, cuius ſuperficies ſphærica, ad ſuperficiem conicam coni in eadem baſi, & altitudine cum portione, ſit in data proportione.

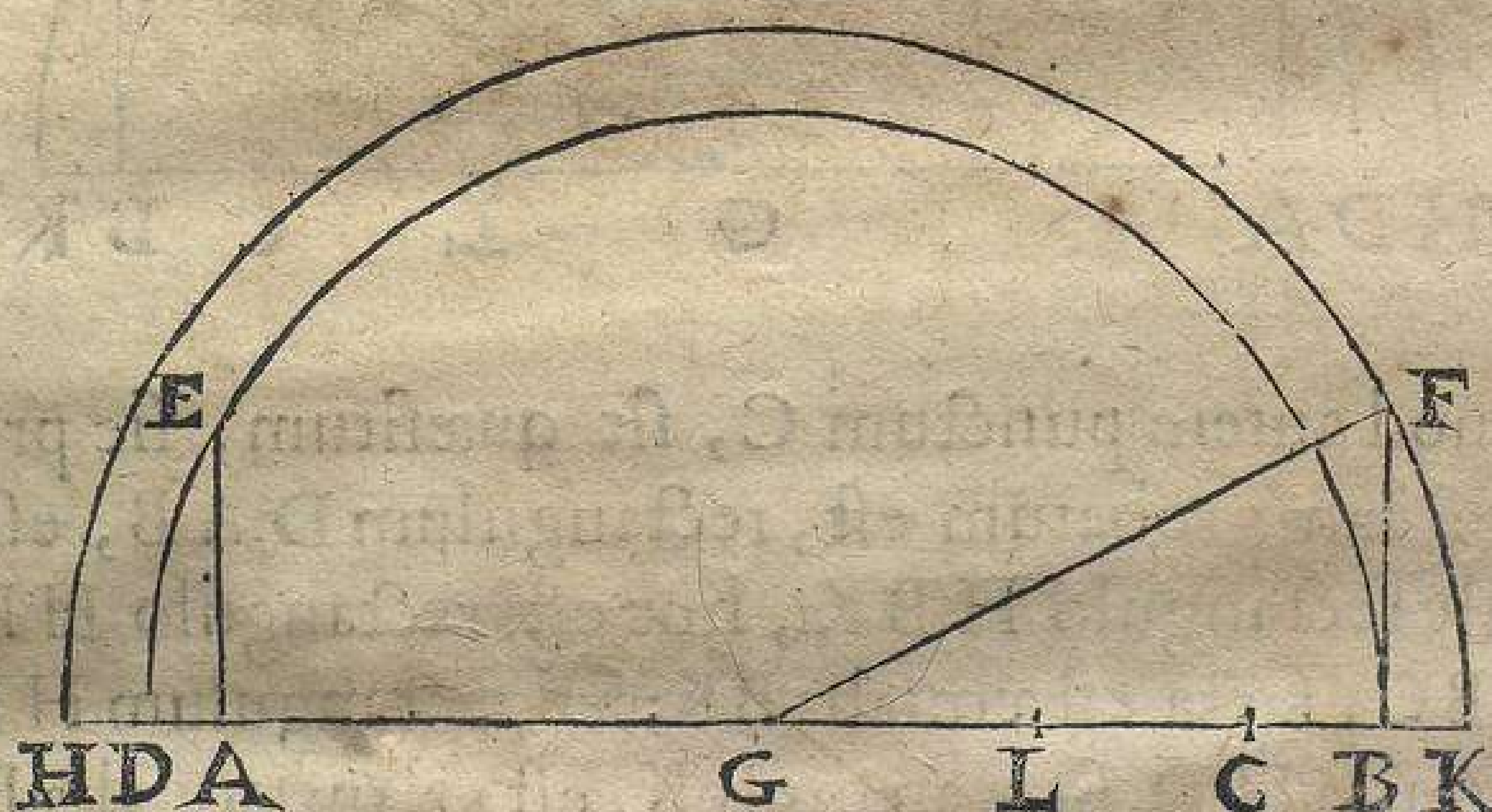
DAtæ ſphæræ, & eius circuli maximi ſit diameter DA, & data proportio ſit, quam habet DA, ad H. Per alteram verò duarum propoſitionum antecedentiũ, aptetur AE, & ducatur perpendicularis EG, vt AE, ſit ad EG, vt DA, ad H; & intelligantur portio, & conus EAC. Dico &c. Nam ſuperficies portionis eſt ad ſuperficiem coni, vt quadratum AE, ad rectangulum AEG, nempe, vt AE, ad EG; nempe, vt AD, ad H. Quod erat faciendum.



LEMMA XXIX. PROP. XLVII.

Datam AB, taliter ſecare in puncto C, vt duo quadrata AB, BC, ſint ad rectangulum ABC, cum quadrato BC, in data proportione.

DAta proportio ſit, quam habet AB, ad BL, quàm patet debere eſſe maioris inæqualitatis. Fiat, vt AL, ad LB, ſic BA, ad AD, ei poſitam in di-

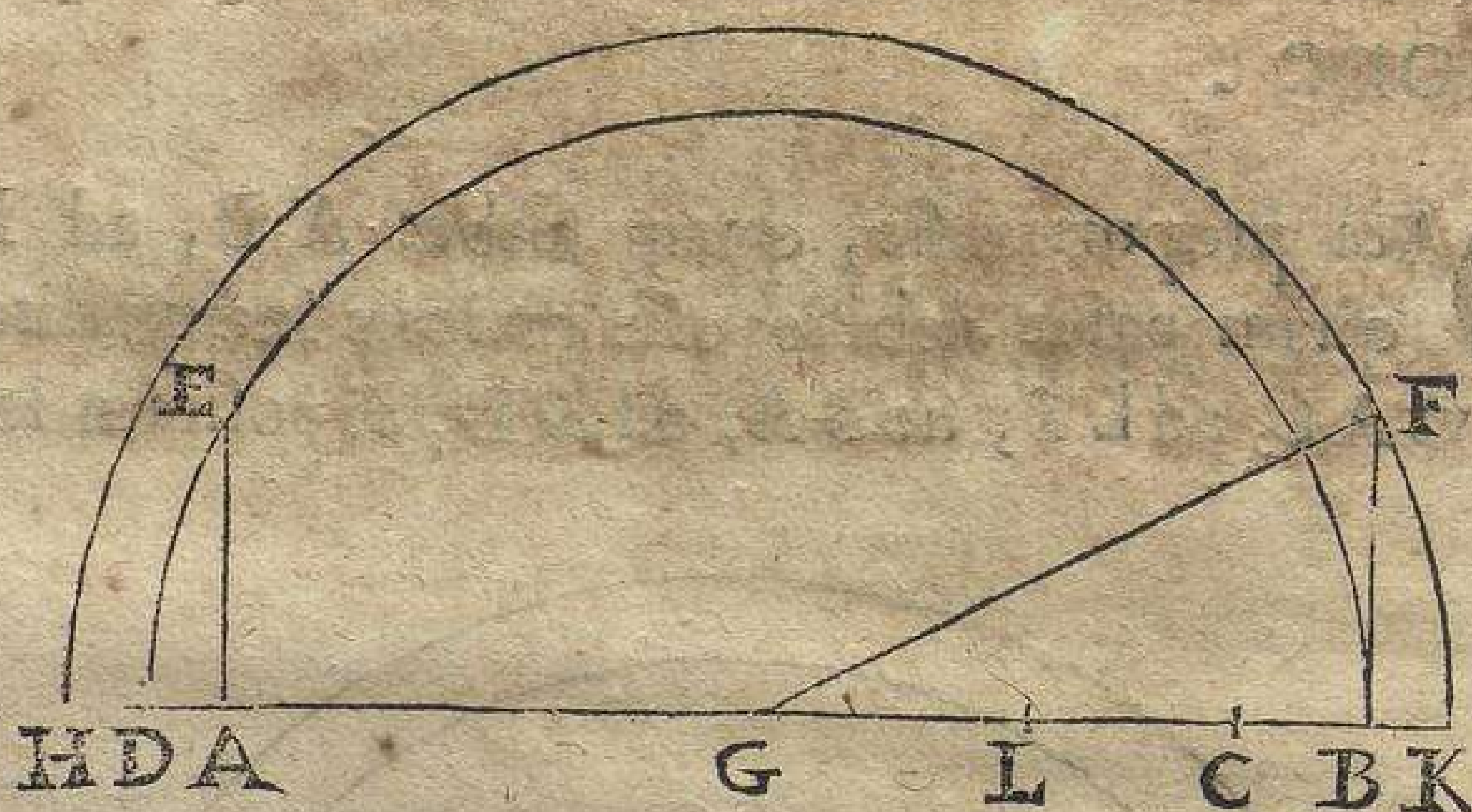


rectum; & ſuper diametro DB, fiat ſemicirculus, cuius centrum G; & à puncto A, ducatur AE, normalis ſuper AB, & à puncto B, erigatur pariter normalis BF, æqualis ipſi AE, & ducta GF, centro G, interuallo GF, fiat ſemicirculus, cuius diameter ſit HK, & ipſi BK,

N fiat

fiat æqualis BC, (cum BK, sit minor BA, vt ostendetur.) Dico punctum C, esse quæsitum.

In primis, quod BK, sit minor BA, patet; quia, cum duæ AE, BF, sint æquales, erunt æqualia, & illarum quadrata: quare, & rectangula HBK, DAB, erunt æqualia; & ideò erit, vt maior HB, ad minorem DA, sic maior AB, ad minorem BK.



Quòd autem punctum C, sit quæsitum, sic probabitur. Iam probatum est, rectangulum DAB, esse æquale rectangulo HBK, hoc est rectangulo HBC, quia BC, facta est æqualis BK; sed rectangulum HBC, quia (cùm HD, sit æqualis BK, est etiam æqualis BC,) est æquale rectangulo DBC, & quadrato CB; ergo rectangulum DAB, erit æquale rectangulo DBC, & quadrato BC. At rectangulum DAB, est æquale rectangulis DAC, & DA, CB; ergo, & duo rectangula DAC, & DA, CB, erunt æqualia rectangulo DBC, & quadrato BC. Pariter rectangulum DBC, est

est æquale rectangulo sub D A, in B C, & rectangulo A B C; ergo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D A, C B, rectangulo A C B, & quadrato B C. Quare communi ablato rectangulo sub D A, in C B; rectangulum D A C, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato C B. Ergo ad hæc plana æqualia, rectangulum B A C, habebit eandem proportionem. At rectangulum B A C, ad rectangulum D A C, est vt B A, ad A D, & B A, ad A D, facta est, vt A L, ad L B; ergo, & vt A L, ad L B, sic rectangulum B A C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quare, & componendo, vt A B, ad B L, sic erit rectangulum B A C, cum rectangulo A B C, & cum quadrato B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Sed duo rectangula B A C, & A B C, faciunt quadratum B A. Ergo, & vt A B, ad B L, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C.

Quod erat faciendum.

(:)

LEMMA XXX. PROP. XLVIII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione. Quàm proportionem habebit factum quodcumque ſub quibuslibet magnitudinibus primæ ſeriei, ad factum ſub alijs magnitudinibus eiuſdem ſeriei, ſic factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei antecedentibus homologis, ad factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei homologis conſequentibus, exiſtentibus omnibus factis homogeneis.

REM exemplifico. Sint duæ ſeries; in prima ſint quotcumque magnitudines A, B, C, & in ſecūda aliæ iſtis numero æquales D, E, F, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione, nempe ſit, vt A, ad B, ſic D, ad E; & vt B, ad C, ſic E, ad F. Intelligo ergo, quod v. g. quadratum A, cum rectangulo A, B, ſit ad quadratum

dratum C, vt quadratum D, cum rectangulo D, E, ad quadratum F; & sic in altioribus potestatibus, & in factis diuersimode. Res est facilis probatu; quia proportio primi facti ad secundum factum, componitur ex ijsdem proportionibus, ex quibus componitur proportio tertij facti ad quartum factum.

SCHOLIVM.

Ex dictis infertur, quod etiam permutando, vt primum factum in prima serie, ad primum factum in secunda serie, sic secundum factum in prima serie, ad secundum factum in secunda serie, dummodo hæc omnia facta, sint homogenea.

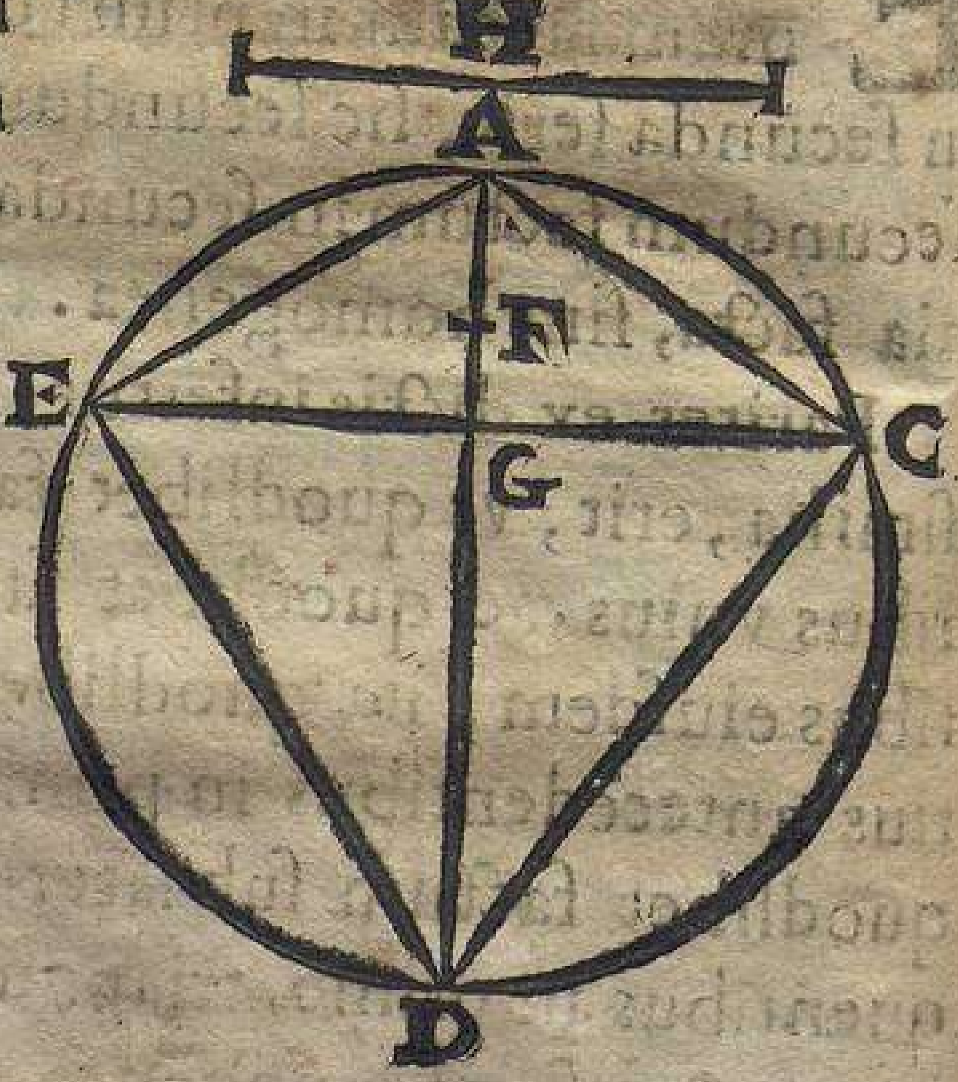
Pariter ex dictis infertur, quod si sint duo triangula similia, erit, vt quodlibet factum sub quibuslibet lateribus vnius, ad quodlibet factum sub quibuslibet lateribus eiusdem, ita quodlibet factum sub lateribus alterius antecedentibus in primo triangulo homologis, ad quodlibet factum sub lateribus alterius, itidem consequentibus in primo triangulo homologis; dummodo hæc facta, sint homogenea. Res est euidens, quia latera duorum triangulorum similium, sunt duæ series trium magnitudinum dispositæ secundum conditionem Lemmatis.

PRO-

PROBL. XIX. PROP. XLIX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

Datæ sphæræ sit circulus maximus, cuius diameter AD, & data ratio sit, quam habet AD, ad H, quæ debet esse excessus. Diuidatur AD, in F, vt quadratum AD, cum quadrato DF, sit ad rectangulum ADF, cum quadrato DF, in data ratione AD, ad H, per propositionem 47. Deinde à puncto D, aptetur DE, æqualis DF, & dimissa perpendiculari EGC, & iunctis EA, facta consueta reuolutione, intelligantur portio, & conus EAC. Dico hæc solida esse quæsita.



Cùm enim factum sit, vt DA, ad H, sic duo quadrata AD, DF, ad rectangulum ADF, cum quadrato DF, DF, nempe, (propter æqualitatem DF, DE,) duo quadrata AD, DE, ad rectangulum ADE, cum quadrato DE; & cùm (propter similitudinem triangulorum AED, AEG) sit, vt duo quadrata AD, DE, ad rectangulum ADE, cum quadrato DE, sic duo quadrata AE, EG, ad rectangulum AEG, cum quadrato EG, per Propos. anteced., nempe, ex Archimede sæpe citato, perimeter portionis EAC, ad perimetrum coni EAC. Ergo, & vt AD, ad H, sic perimeter portionis, ad perimetrum coni. Factum est ergo, quod proponebatur.

LEMMA XXXI. PROP. L.

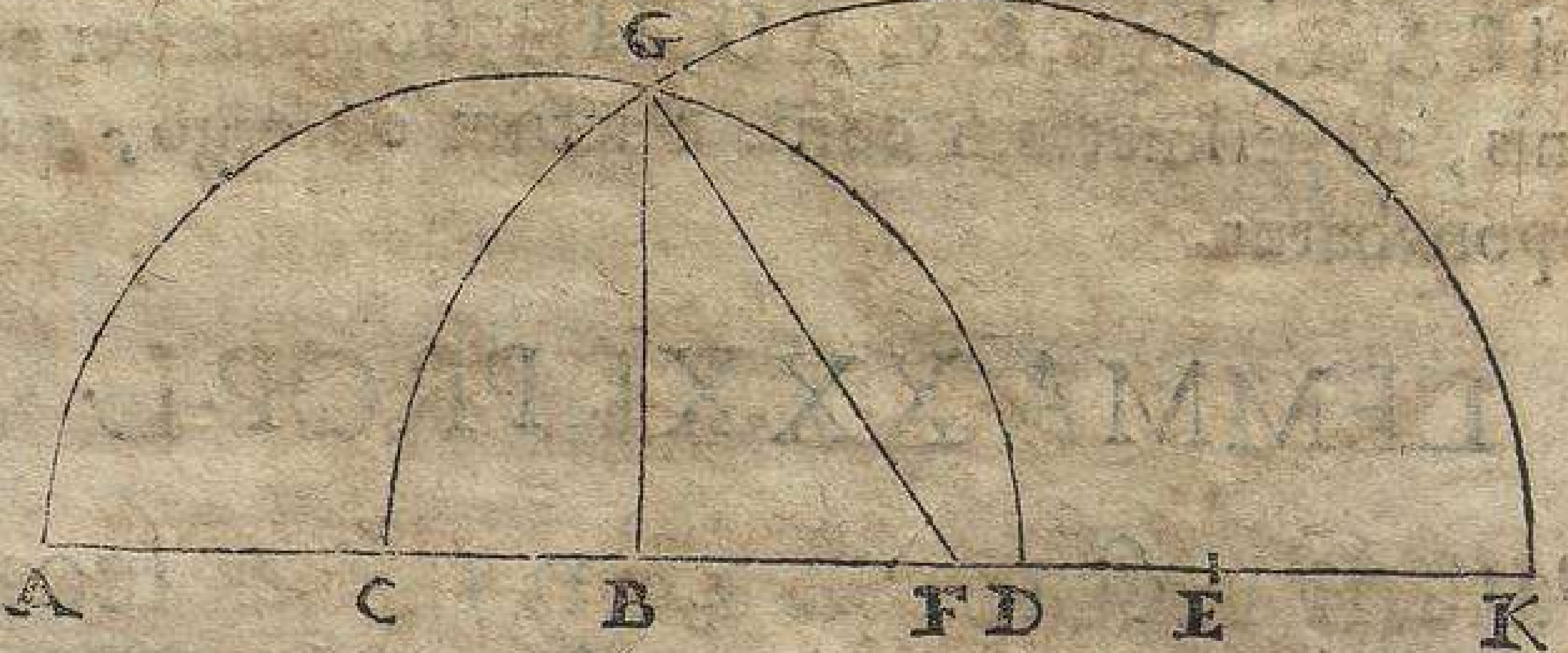
Datam rectam lineam taliter secare in puncto, vt quadratum totius, ad rectangulum sub tota, & sub vno segmento, cum quadrato eiusdem segmenti, sit in data proportione.

Data recta linea sit AB, & data proportio sit, quam habet AB, ad BD, ei positam in directum. Patet proportionem datam debere esse talis conditionis, vt AB, sit maior subdupla BD, quia semper quadratum AB, est maius subduplo rectanguli ABC, & quadrati BC. Fiat BE, æqualis AB, quæ secetur

bifa-

bifariam in F; deinde ſuper AD, fiat ſemicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis BG; & à puncto F, ducatur linea ad punctum G; centro autem F, interuallo FG, deſcribatur ſemicirculus CGK, qui ſemper ſecabit AB, vt patebit inferius. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

Quoniam enim rectangulum ABD, & rectangulum



KBC, ſunt æqualia inter ſe, quia æqualia eidem quadrato GB; & quia KE, eſt æqualis CB, rectangulum KBC, eſt æquale rectangulo ECB; ergo rectangulum ABD, eſt æquale rectangulo ECB, nempe rectangulo EBC, & quadrato CB. Sed quoniam EB, eſt æqualis AB, ergo rectangulum EBC, eſt æquale rectangulo ABC. Quare, & rectangulum ABD, erit æquale rectangulo ABC, & quadrato BC. Quare, quadratum AB, ad hæc habebit eãdem proportionem. Sed quadratum AB, ad rectangulum ABD, eſt vt AB, ad BD. Ergo & vt AB, ad BD, ſic quadratum AB, ad rectangulum ABC, cum quadrato BC. Quod erat faciendum.

Quod

Quòd verò assumptum est, nempe semicirculum CGK, secare AB; seù FG, minorem esse FA, patet; quia, cùm DB, sit minor dupla BA, ergo, & quadratum GB, erit minus duplo quadrati AB. Ergo quadratum GB, ad quadratum AB, erit in ratione minori, quam 8, ad 4. Et quia BF, cum sit dimidia BA, est eius quadratum subquadruplum quadrati AB. Ergo duo quadrata GB, BF, nempe quadratum GF, erit ad quadratum AB, in ratione minori, quam 9, ad 4. Sed quadratum AF, est ad quadratum AB, vt 9. ad 4. Ergo quadratum FG, est minus quadrato FA; & consequenter FG, erit minor FA.

PROBLEMA XX. PROP. LI.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis EAC, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Pariter data ratio sit, quam habet AD, ad H, quam infra patebit, debere esse maiorem subdupla. Diuidatur, per Lemma antecedens, AD, in F, vt quadratum AD, sit ad rectangulum ADF, cum quadrato DF, vt AD, ad H. Et pariter, vt supra factum est, aptetur à puncto D, DE, æqualis DF, & fiant omnia, vt in antecedenti Problemate, & arguatur congruenti argumentatione, vt ibidem. Tandem cõcludemus, quadratum A E, ad rectangulũ A E G, cum quadrato E G, esse, vt A D, ad H. Quare patet etiam, superficiem sphæricam portionis E A C, esse ad perimetrum coni E A C, vt A D, ad H.

Quòd verò ratio A D, ad H, debeat esse subdupla. Patet, quia quadratum A E, est maius subduplo rectanguli A E G, cum quadrato E G.

SCHOLIVM.

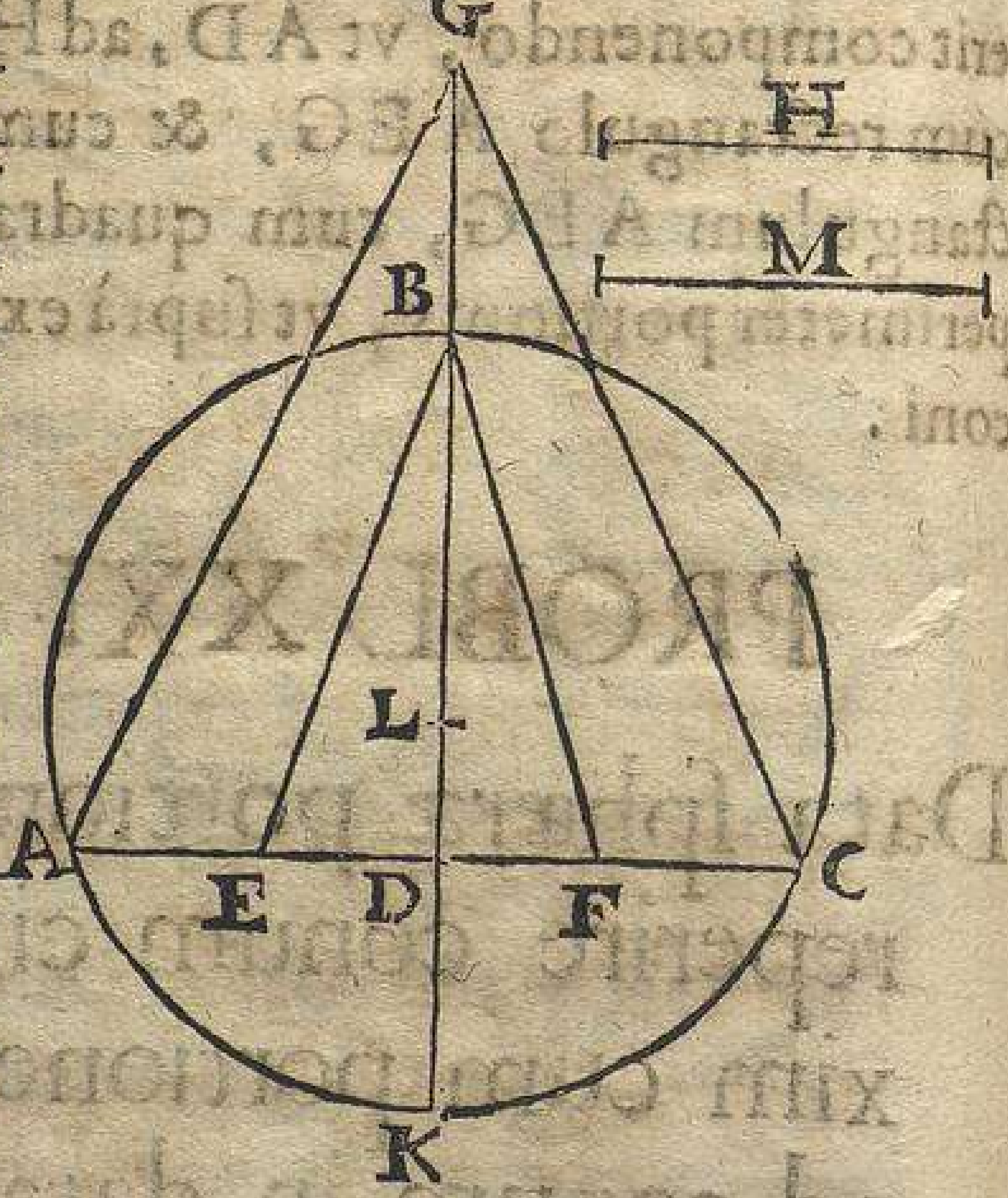
Ex dictis habemus modum, quo soluamus Problema, in gratiam cuius traditum est præsens; nempe. Datis ijsdem, quæ in tribus superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis E A C, intus, & extra, dempto cono E A C, ad perimetrum coni E A C, sit in data proportione. Nam perimeter talis portionis extra, constaret superficie sphærica portionis, & circulo basis; intra verò, superficie conica, supponendo ablato cono, remanere basim. Si ergo fiat, vt excessus A D, super H, ad H, (quia in tali casu proportio data debet esse excessus) sic quadradratum E A, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; erit componendo, vt A D, ad H, sic quadratum A E, cum rectangulo A E G, & cum quadrato E G, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; nempe, totus perimeter portionis, vt suprà expositæ, ad perimetrum coni.

PROBL. XXI. PROP. LII.

Data sphæræ portione quacumque, reperire conum circa eamdem axim cum portione, vt portio sit ad conum in data proportione.

LIcet solutio huius Problematis possit haberi facilissimè ex Archimede, vt patebit; quia tamen possumus ipsum soluere, quamuis difficiliori modo, per quandam propriam propositionem vniuersalem, quam censemus non spernendam; ideò cùm nesciamus hanc aptiori loco collocare; in gratiam nostræ propositionis, soluimus hoc Problema, primò facilissimè ex Archimede postea præmisso proprio Lemmate vniuersali.

Sit ergo datæ sphæræ, cuius diameter B K, centrum L, data portio A B C, cuius axis B D, & data sit proportio, quam habet K B, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiat, vt K D, ad eandem K D,



cum KL, ſic D B, ad DG. Ergo, ex Archimede 2. de ſphæra, & Cylindro propoſ. 2. ſi fiat conus A G C, hic erit æqualis portioni A B C. Fiat ergo, & fiat, vt G D, ad D B, ſic K B, ad M; & fiat, vt M, ad H, ſic quadratum A D, ad quadratum D E. Facto ergo cono E B F. Dico hunc eſſe quæſitum.

Nam conus A G C, ad conum E B F, habet rationem compoſitam ex ratione G D, ad D B, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E, per propoſitionem primam huius. Sed, vt G D, ad D B, ſic facta eſt K B, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum, D E, ſic M, ad H. Ergo conus A G C, ſeù portio A B C, ei æqualis, ad conum E B F, habet rationem compoſitam ex ratione K B, ad M, & M, ad H. Sed iſtæ duæ rationes K B, ad M, & M, ad H, faciunt rationem K B, ad H. Ergo, &c. Quod &c.

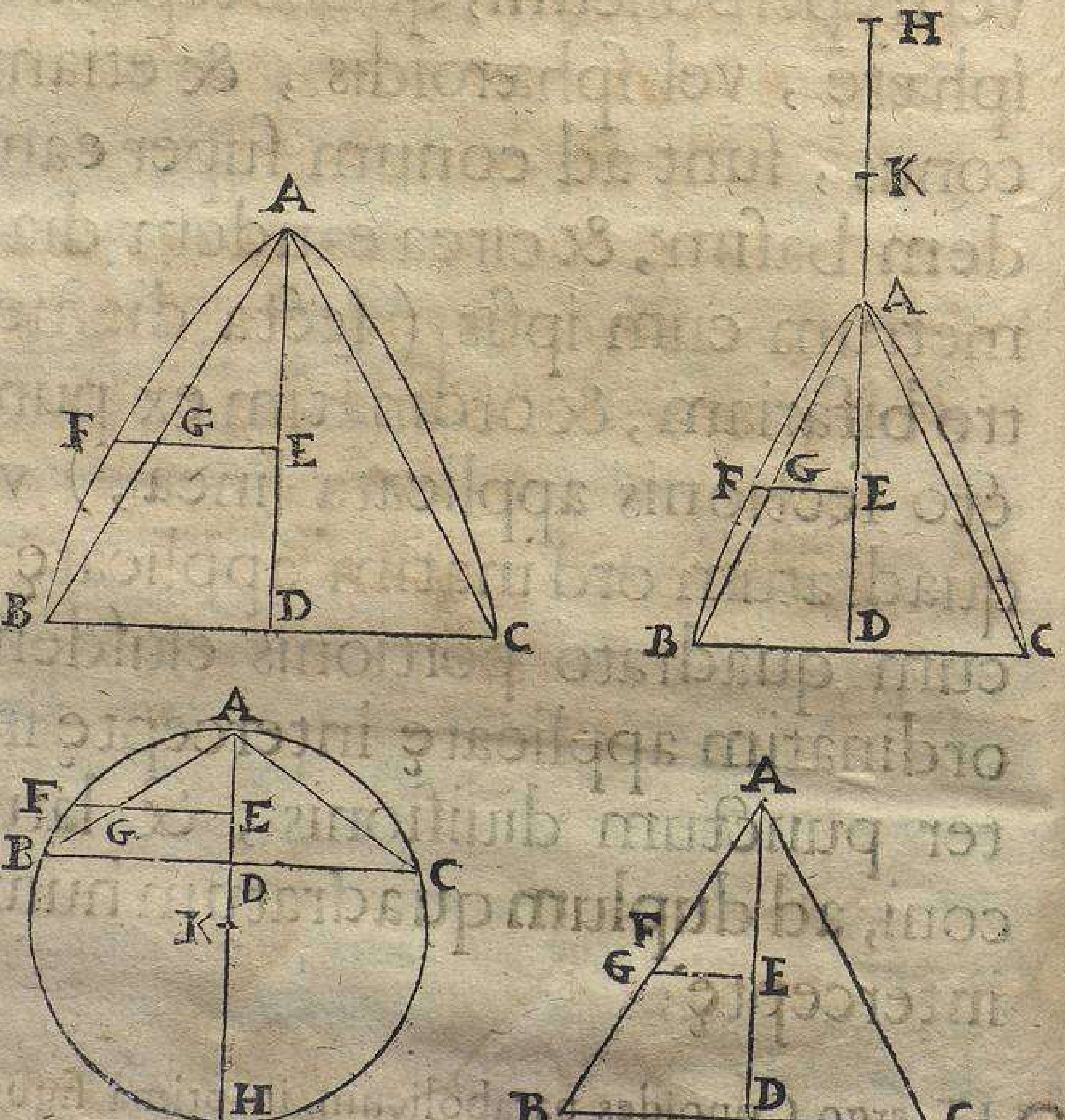
LEM-

LEMMA XXXII. PROP. LIII.

Quodlibet Conoides parabolicum, vel hyperbolicum; quælibet portio sphærę, vel sphæroidis, & etiam conus, sunt ad conum super eandem basim, & circa eandem diametrum cum ipsis (secta diametro bifariam, & ordinatim ex puncto sectionis applicata linea,) vt quadratum ordinatim applicatę, cum quadrato portionis eiusdem ordinatim applicatę interceptę inter punctum diuisionis, & latus coni, ad duplum quadratum huius interceptę.

SIT ergo Conoides parabolicum in prima figura, vel hyperbolicum, vt in secunda, vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vt in tertia, vel conus, vt in quarta A B C, cuius diametrum A D; & circa diametrum A D, & super eandem basim B C, sit, in vnaquaque figura, conus B A C, & diameter D A, sit diuisa,

uisa bifariam in E, & per E, sit ducta EF, parallela BD, secans AB, latus coni in G. Dico solidum BAC, esse ad conum BAC, vt duo quadrata FE, EG, ad duo quadrata G, E.



In cono res est euidens, quia est proportio æqualitatis. In portione sphæræ, vel sphæroidis, sit diameter totius sphæræ, vel sphæroidis AH. In conoide hyperbolico, AH, sit diameter transuersa, & in omnibus istis sit centrum K.

Tunc in Conoide parabolico. Quoniã ex prim. conic. prop. 20. quadratum B D, est duplum quadrati F E, cum sit ad ipsum, vt D A, ad A E, & est quadruplum quadrati G E; ergo quadratum F E, erit duplum quadrati G E; & duo quadrata F E, E G, erunt sexquialtera duorum quadratorum G E; nempe, vt Conoides B A C, est coni B A C, ex Archimede lib. de Conoid. & Sphæroid. prop. 23.

In Conoide verò hyperbolico, & in portione sphæræ, vel sphæroidis. Quoniam quadratum F E, est ad quadratum B D, ex primo conic. prop. 21. vt rectangulum H E A, ad rectangulum H D A; & vt quadratum B D, ad quadratum G E, sic rectangulum H D A, ad rectangulum sub H D, in dimidiam ipsius A E, nempe ad rectangulum sub dimidia H D, in A E. Ergo ex æquali, vt quadratum F E, ad quadratum G E, sic rectangulum H E A, ad rectangulum sub dimidia H D, in E A, nempe (propter eandem altitudinem A E,) vt H E, ad dimidiam H D, quæ est K E, vt consideranti patet. Ergo, & componendo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad quadratum E G. sic H E, cum E K, ad E K. Et ad consequentium dupla. Ergo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad duo quadrata E G, sic H E, cum K E, ad H D. Sed E H, cum K E, facit dimidiam A H, cum H D, vt consideranti patet; & ex Archimede de Conoid. & sphæroid. prop. 31. & 33. Portio B A C, vel conoides hyperbolicum, est ad conum B A C, vt dimidia H A, cum H D, ad H D. Ergo portio, vel conoides, est ad conum, vt duo quadrata E G. Quod &c.

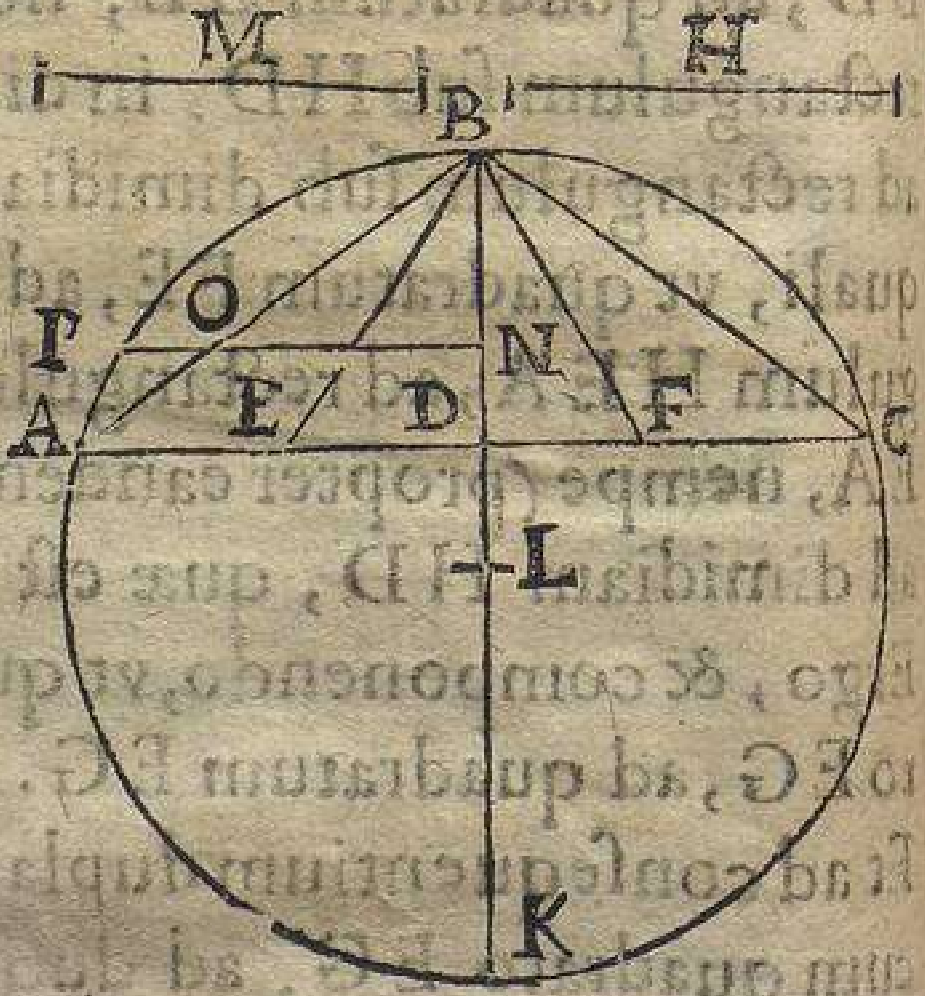
In

In Conoide enim hyperbolico, patet, quod dimidia H A, cum H D, facit sexquialteram H A, cum A D.

PROBL. XXII. PROP. LIV.

Idem.

Diuidatur B D, bifariam in N, & ducatur per punctum N, N O P, parallela A D, secans B A, latus coni in O; & fiat, vt duo quadrata P N, cum duobus quadratis N O, ad quadratum A D, sic K B, ad M; deinde fiat, vt M, ad H, sic quadratum A D, ad quadratum D E, vbicunque cadat punctum E, & fiat conus E B F. Dico portionem A B C, esse ad conum E B F, vt K B, ad H.



Quoniam enim ratio portionis A B C, ad conũ E B F, de foris sumpto cono A B C, componitur ex ratione portionis ad conum A B C, & coni A B C, ad conum E B F; & vt portio ad conum A B C, sic, per propositionem antecedentem, duo quadrata P N, & N O, ad duo quadrata N O; & vt conus A B C, ad conum E B F, sic quadratum A D, ad quadratum D E.

Ergo

Ergo proportio portionis A B C, ad conum E B F, componetur quoque ex proportione quadratorũ P N, N O, ad duo quadrata N O, & ex proportione quadrati A D, ad quadratum D E. Sed proportio quadratorum P N, N O, ad duo quadrata N O, est eadem cum proportione duorum quadratorum P N, cum duobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, quia, vt dimidium, ad dimidium, sic duplum ad duplum. Ergo proportio portionis ad conum E B F, componetur quoque, ex proportione duorum quadratorum P N, cum duobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, seù ad quadratum A D, eis æquale, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E. Sed vt duo quadrata P N, cum duobus quadratis N O, ad quadratum A D, sic facta est B K, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum E D, sic M, ad H. Ergo proportio portionis A B C, ad conum E D F, cõponetur ex proportionibus K B, ad M, & M, ad H. Sed ex ijsdem proportionibus componitur ratio K B, ad H. Ergo, vt K B, ad H. Sic portio A B C, ad conum E B F. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

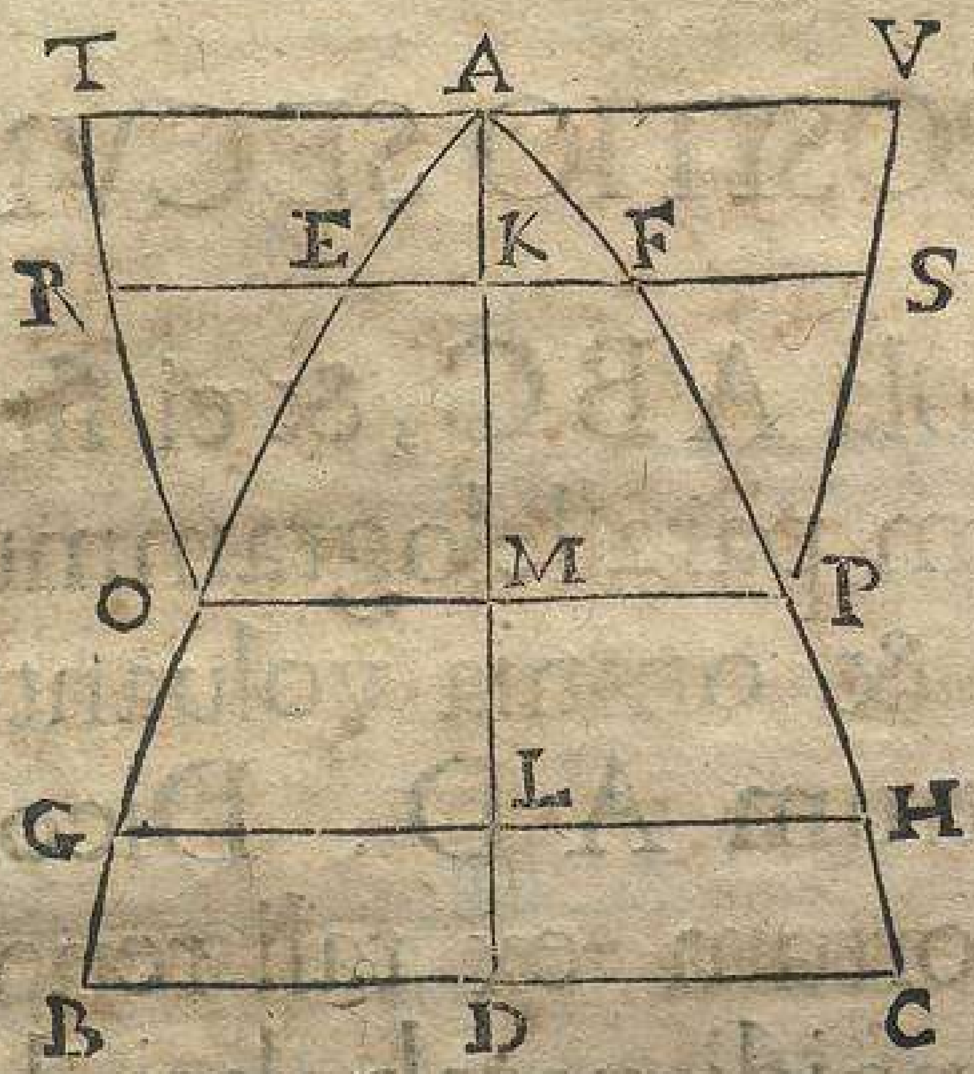
CVM hæc huius Libelli imprimerentur, occasione, qua Proposit. 53. vsi sumus Archimede libro de Conoid. & Sphæroid. prop. 23. in qua demonstrat. Conoides parabolicum ad conum in eadem basi, & circa eandem diametrum cum ipso, esse in proportione sexquialtera, incidimus in modum hoc idem demonstrãdi, Sed per auream methodum indiuisibilium, quam qui aspernantur, aliam non merentur pænam, quàm priuari fructu ex tali methodo colligendo. Visum est ergo peroptimum, huncmodum hoc loco explicare, qui vtique est diuersus ab his, quibus vtuntur columnæ herculeæ Geometrarum Italorum nostri sæculi, nimirum Bonauentura Caualerius lib. 4. Geometriæ indiuisibilium, prop. 21. & Euangelista Torricellius in exemplis pro indiuisibilibus curuis, exemplo 14. Ne ergo nostrum ordinem incæptum variemus, trademus hunc modum per duas sequentes propositiones extra ordinem sumptas.

PROPOSITIO PRIMA.

Esto parabola B A C, cuius diameter D A, basis BDC, & in diametro D A, sint sumpta duo puncta K, & L, æque remota à punctis A, & D, per quæ sint ductę ordinatim applicatæ E K, G L. Dico duo quadrata E K, G L, esse æqualia quadrato BD.

QVoniam enim quadratum EK, est ad quadratum BD, vt K A, ad A D; & pariter quadratum

tum G L, est ad quadratum B D, vt L A, ad A D, ex 20. prim Conic. Ergo, & duo quadrata E K, G L,



erunt ad quadratum B D, vt K A, seù L D, simul cum A L, nempe, vt tota A D, ad A D. Quare æqualia.

SCHOLIVM.

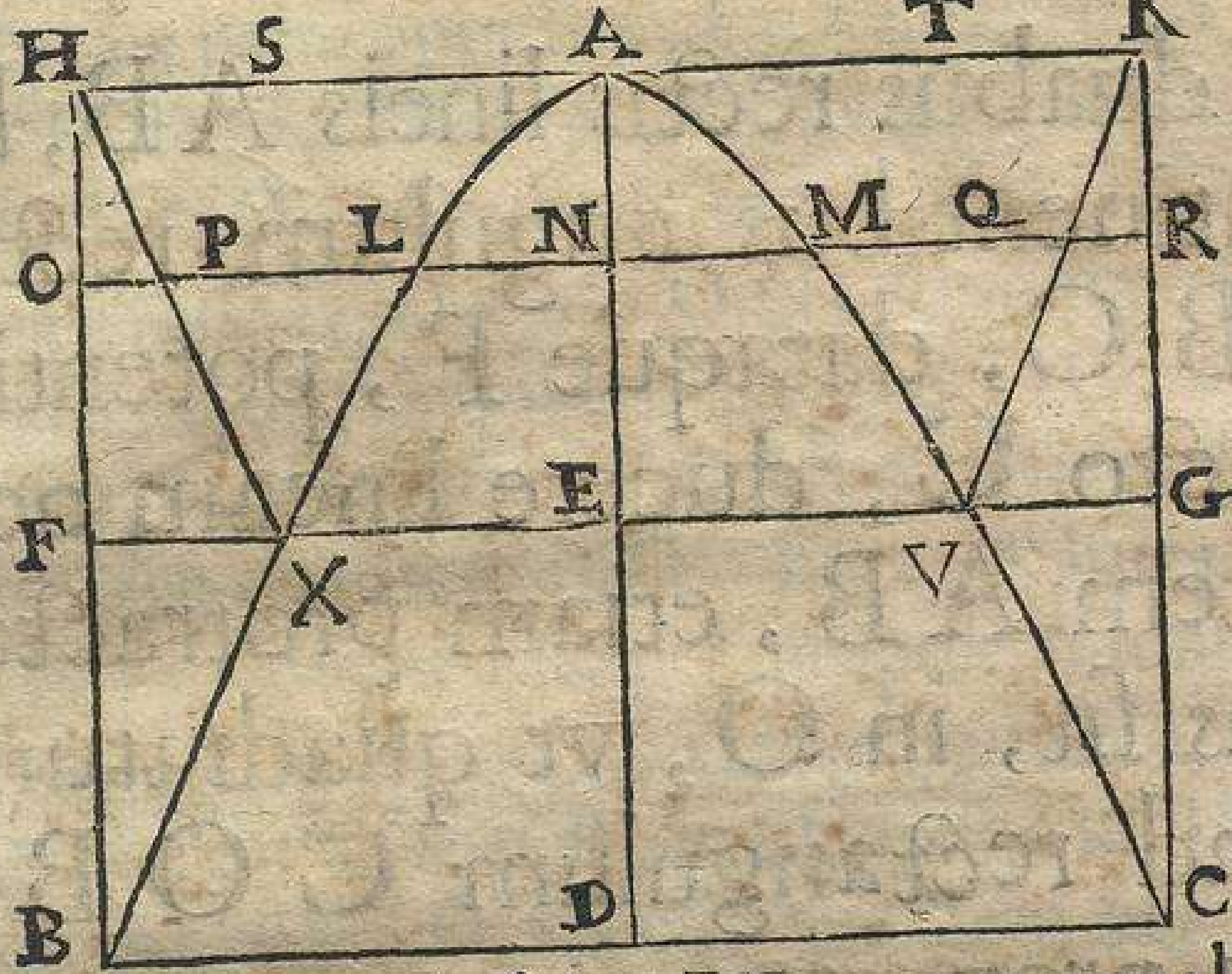
FAcilè elicitur ex dictis, quod si A D, diuisa bifariam in M, & per M, ordinatim applicata O M P, mente concipiamus, frustrum B O P C, parabolæ, rotari super O P, veluti super cardinem, donec collocetur super O A P, adeò vt B D C, sit in T A V, & D M, congruat A M, & punctum D, congruat ipsi A; puncta verò B, C, congruant ipsis punctis T, V; infertur inquam, quod si in A M, sumatur quodlibet punctum K, per quod ordinatim applicetur R E K F S; semper duo quadrata R K, K E, erunt æqualia quadrato N M. Res est euidens.

PROPOSITIO SECVNDA.

Sit parabola A B C, & ei sit circumscriptum parallelogrammum H B C K, & omnia voluantur circa diametrum A D. Dico Cylindrum ortum ex tali reuolutione, esse conoidis parabolici duplum.

SEcetur A D, bifariam in E, & per punctum E, agatur planum F X E V G, parallelum planis H K, B C, & mente concipiamus frustum parabolicum B X V C, locari, adeò vt basis B D C, sit in H A K, punctum D, sit in puncto A, & linea D E, sit super E A, & sumatur in A E, quodlibet punctum N, per quod agatur planum O P L N M Q R, faciens in Cylindro circulum, cuius radius O N, in portione conoidis X A V, circulum, cuius radius L N, & in frusto X H K V, circulum, cuius radius P N. Quoniam enim quadratum H A, seù O N, est æquale quadratis P N, & N L, ex Scholio Propositionis antecedentis. Ergo, & circulus, cuius radius O N, erit æqualis circulis, quorum radij

radij PN, NL; & punctum L, sumptum est vtcumque. Ergo omnes circuli Cylindri HFGK, sumpti iuxta



regulam planũ HAK, seù FEG, erunt æquales omnibus circulis frusti HXVK, & portionis XAV, sũptis iuxta eandem regulam. Quare & Cylinder HFGK, erit æqualis frusto HXVK, seù BXVC, & portioni XAV, nempe erit æqualis toti conoidi BAC. Sed Cylinder HBCK, est duplus Cylindri HFGK. Ergo talis Cylinder est duplus conoidis BAC. Quod erat ostendendum.

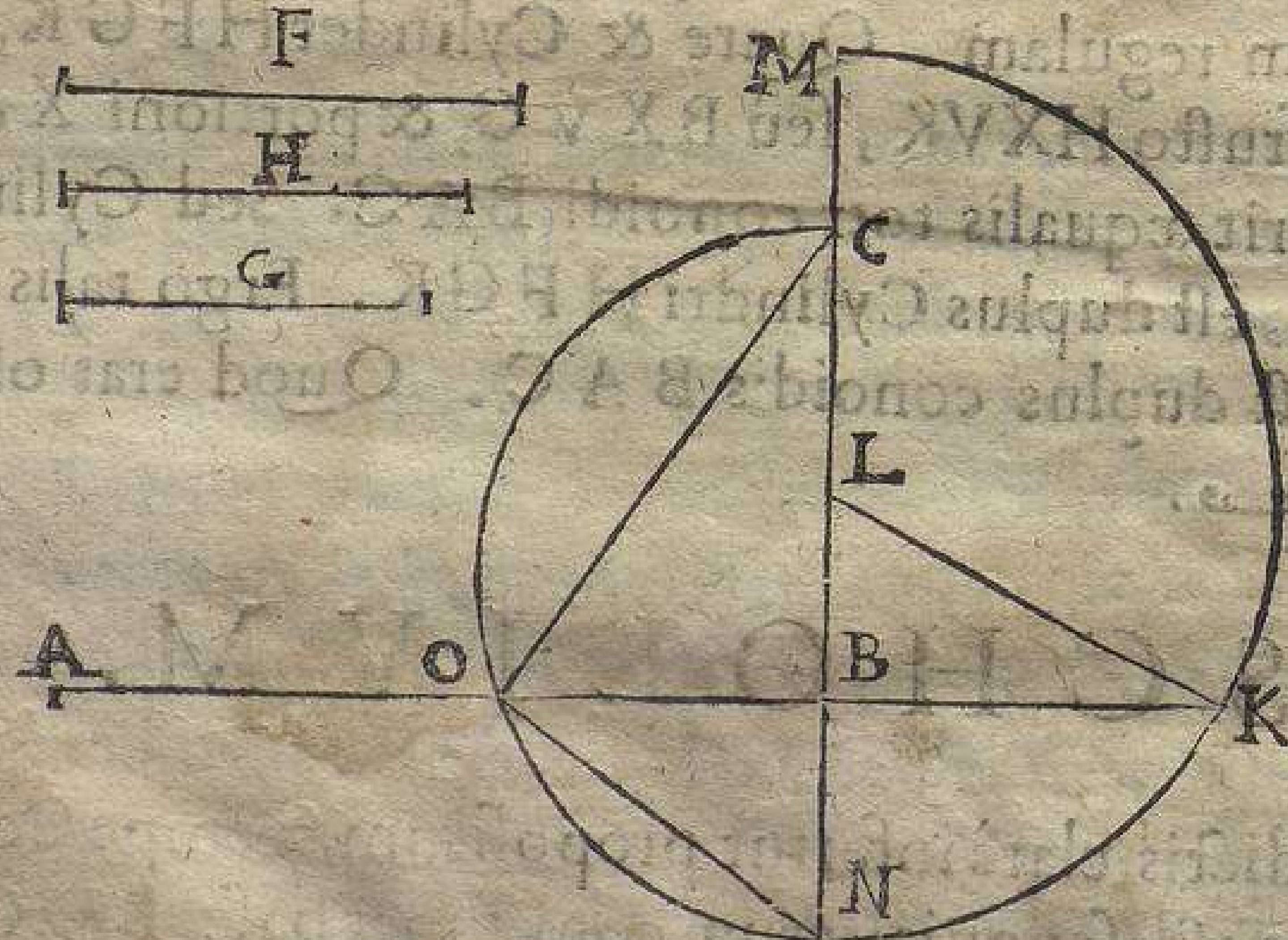
SCHOLIVM.

Ex dictis clarè infertur propositum, nempe Conoides esse sexquialterum coni super base BDC, & circa diametrum AD. Ratio est, quia conus est subtriplus Cylindri, vnde, quorum Cylindrus est sex, & conoides tria, conus erit duo.

LEM-

LEMMA XXXIII. PROP. LV.

Datis duabus rectis lineis AB, BC, continentibus angulum rectum, ABC, dataque F, potentia, à puncto C, ducere lineam occurrentem AB, etiam protractæ, si opus sit, in O, vt quadratum F, sit ad rectangulum COB, in data proportione.



SIT hæc, quàm habet F, ad G; & inter F, & G, sit media proportionalis H; & fiat, vt BC, ad H, sic H, ad BK, positam in directum ipsi AB; sectaque

BC,

BC, bifariam in L, & ducta LK; centro L, interuallo LK, fiat semicirculus, cuius diameter sit MN; & super CN, ex parte opposita, fiat semicirculus NOC, secans AB, in O. Dico punctum O, esse quæsitum, nempe ducta CO, esse quadratum F, ad rectangulum COB, vt F, ad G. Ducatur ON. Quoniam LC, est æqualis LB, & ML, ipsi LN; ergo & MC, est æqualis BN. Ergo quadratum BK, est æquale rectangulo CNB, nempe quadrato NO. Ergo, & linea BK, est æqualis NO. Cùm autem (propter similitudinem triangulorum COB, NOB) rectangulum COB, sit æquale rectangulo sub CB, in ON, seù in BK; & rectangulum CBK, sit æquale quadrato H. Ergo & rectangulum COB, erit æquale quadrato H. Sed quadratum F, ad quadratum H, est, vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum COB. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

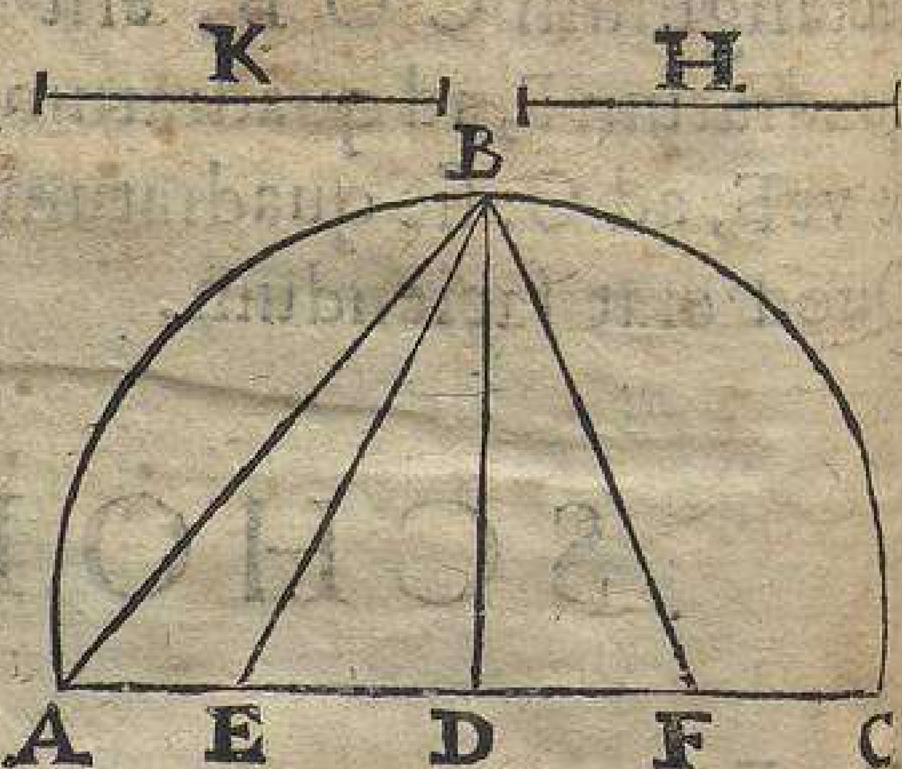
LEmma antecedens reducitur ad Problema Vieteum, Data base trianguli rectanguli, & media proportionali inter hypotenusam, & perpendiculum, inuenire triangulum.

PRO-

PROBL. XXIII. PROP. LVI.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies portionis, sit ad superficiem coni, in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet D B, ad H, & ducta B A, oporteat facere, quòd imperatum est. Datis ergo duabus AD, D B, continentibus angulum rectum A D B, ducatur à puncto B, per propositionem antecedentem, B E, vt quadratum datæ B A, sit ad rectangulum B E D, vt B D, ad H; & fiat ex triangulo B E D, conus E B F. Quem dico esse quæsitum. Demonstratio ex Archimede est facilissima, quapropter ad alia transeamus.



LEMMA XXXIV. PROP. LVII.

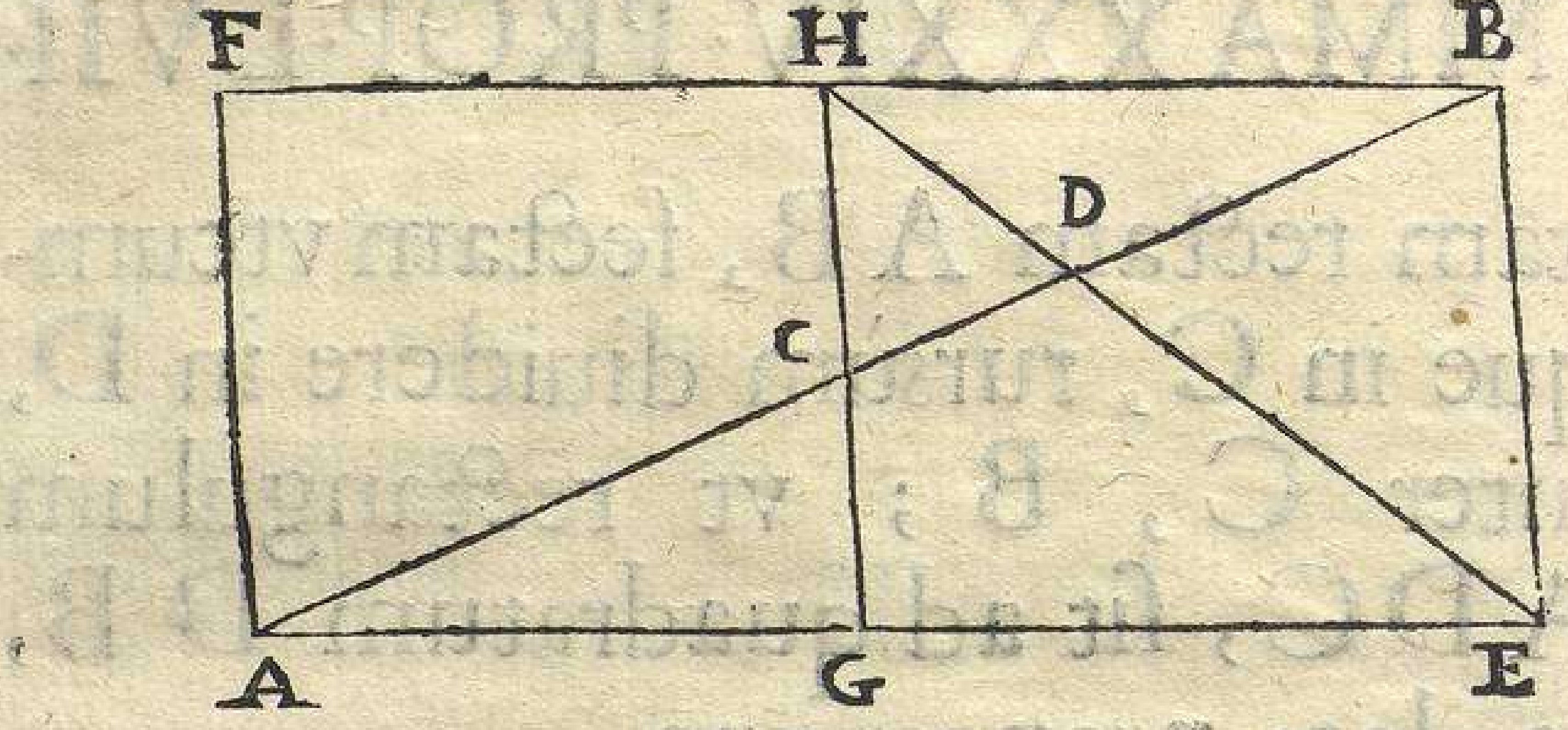
Datam rectam A B, ſectam vtcumque in C, rursùm diuidere in D, inter C, B; vt rectangulum A D C, ſit ad quadratum D B, in data proportione.

HOC Lemma triplicem habet caſum, ſecundùm quod proportio data eſt, vel æqualitatis, vel exceſſus, vel defectus. Si ſit æqualitatis, ſoluetur ſic.

Diuidatur B C, in D, vt ſit, ſicut A B, ad B C, ſic B D, ad D C. Nam cùm ſit, vt A B, ad B C, ſic B D, ad D C; ergo permutando, erit, vt A B, ad B D, ſic B C, ad C D. Ergo, & diuidendo, erit, vt A D, ad D B, ſic D B, ad D C. Quare rectangulum A D C, erit æquale quadrato D B.

VEL ſic. Fiat A B, diameter cuiuſcumque parallelogrammi F E, & per punctum C, agatur H C G, paralella F A, vel B E, & iungatur H E, ſecans B A, in D. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

Quoniam enim triangulum A D E, eſt ſimile triangulo



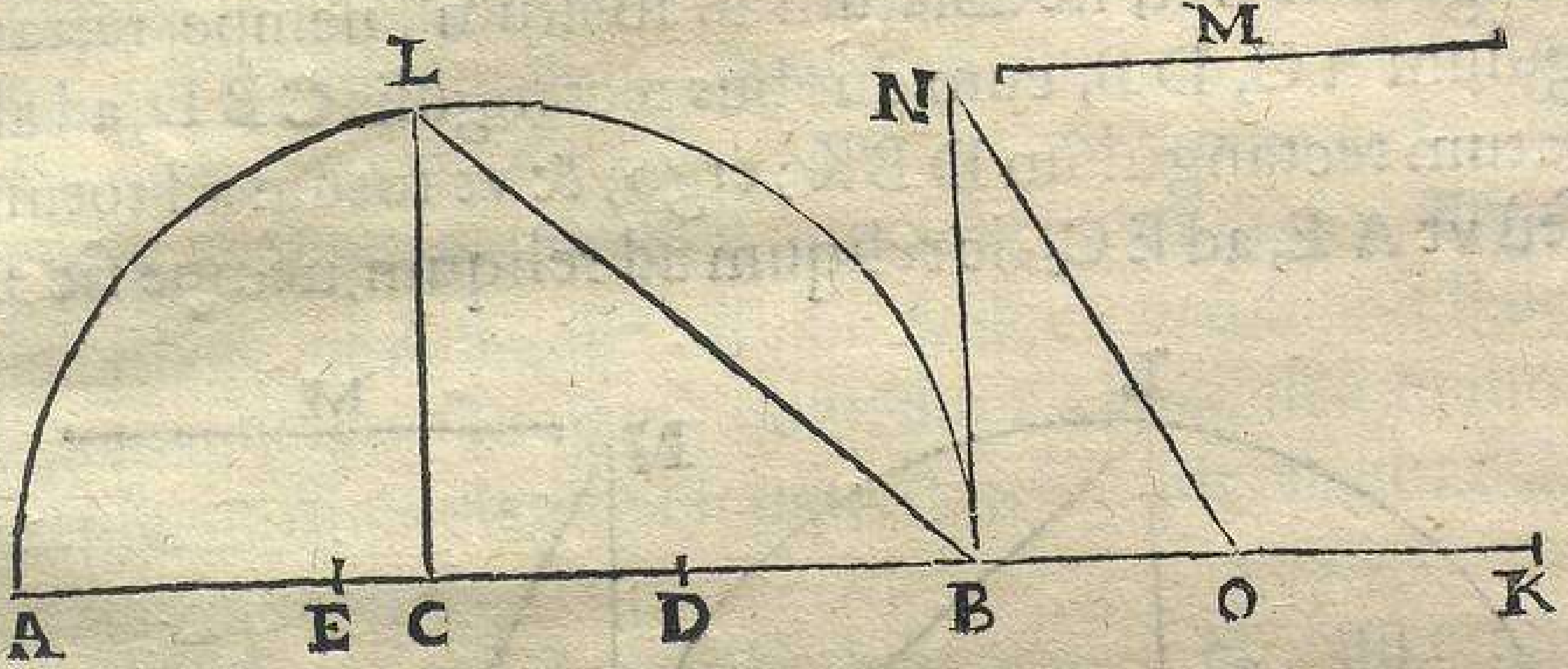
gulo HDB, & pariter triangulum EDB, eſt ſimile triangulo HDC. Ergo, vt AD, ad DB, ſic ED, ad DH. Vt autem ED, ad DH, ſic BD, ad DC; ergo & vt AD, ad DB, ſic DB, ad DC. Quare rectangulum ADC, erit æquale quadrato DB.

SI autem proportio data ſit exceſſus, ſit ea, quam habet AC, ad CE, & fiat, vt AE, ad EC, ita compoſita ex AB, & CB, ad BK, poſitam in directum ipſi AB; deinde facto ſemicirculo ſuper AB, & à puncto C, erecta perpendiculari CL, & iuncta LB, fiat, vt AE, ad EC, ſic LB, ad M, & inter LB, & M, inueniatur media proportionalis, cui ſit æqualis BN, erecta perpendiculariter ſuper AB, à puncto B; ſectaque BK, bifariam in O, & iuncta ON, fiat OD, ipſi ON, æqualis (infra enim patebit, punctum D, cadere inter C, B.) Dico punctum D, eſſe quæſitum.

Quoniam enim duo quadrata NB, BO, ſunt æqualia quadrato NO, nempe quadrato OD (quia OD, facta eſt æqualis NO;) & quadratum DO, eſt æquale duobus quadratis DB, BO, & duobus rectangulis

DBO,

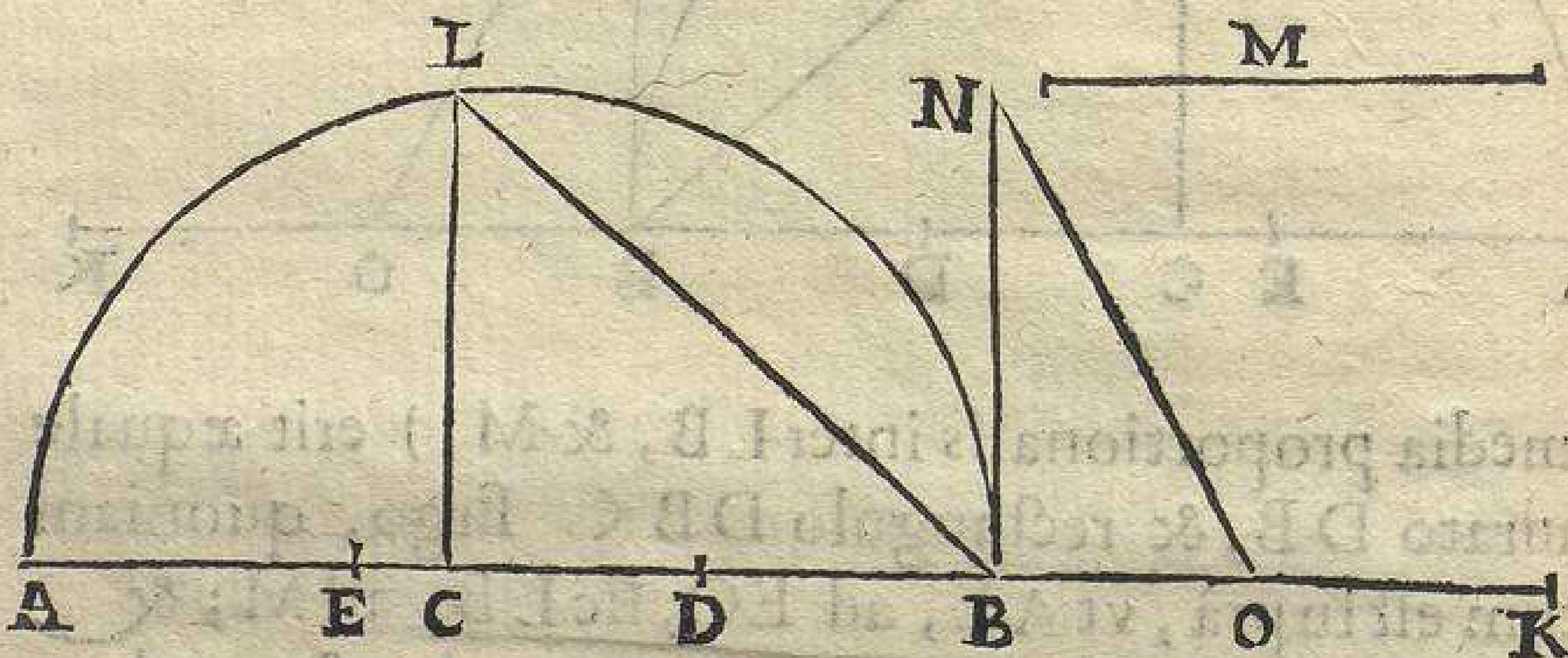
DBO, nempe vnico rectangulo DBK,) quia KB, dupla est BO.) Ergo duo quadrata NB, BO, erunt æqualia duobus quadratis DB, BO, & rectangulo DBK. Et communi ablato quadrato BO; quadratum NB, nempe rectangulum sub LB, & M, (quia NB,



est media proportionalis inter LB, & M,) erit æquale quadrato DB, & rectangulo DBK. Ergo, quoniam factum est suprà, vt AE, ad EC, sic LB, ad M; & est, vt LB, ad M, sic quadratum LB, ad rectangulum sub LB, in M, & quadrato LB, est æquale rectangulum ABC; & pariter rectangulo sub LB, & M, probatum est æquale quadratū DB, cum rectangulo DBK; ergo erit etiam, vt AE, ad EC, sic rectangulum ABC, ad quadratum DB, cum rectangulo DBK. Sed quoniam supra factum est, vt AE, ad EC, sic composita ex AB, BC, ad BK; & vt composita ex AB, BC, ad BK, sic (sumpta communi altitudine BD,) rectangulum sub tali composita in DB, ad rectangulum DBK; & rectangulum sub composita ex AB, BC, in BD, diditur in duplum rectangulum CBD, & in rectangu-

 lum

lum ſub A C, in D B. Ergo, & vt rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, ſic rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad rectangulum D B K. Cùm ergo ſit, vt totum rectangulum A B C, ad totum, nempe ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, ſic ablatum ad ablatum, nempe rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad ablatum rectangulum D B K; ergo, & vt totum ad totum, ſeù vt A E, ad E C, ſic reliqum ad reliqum, nempe ſic ex-

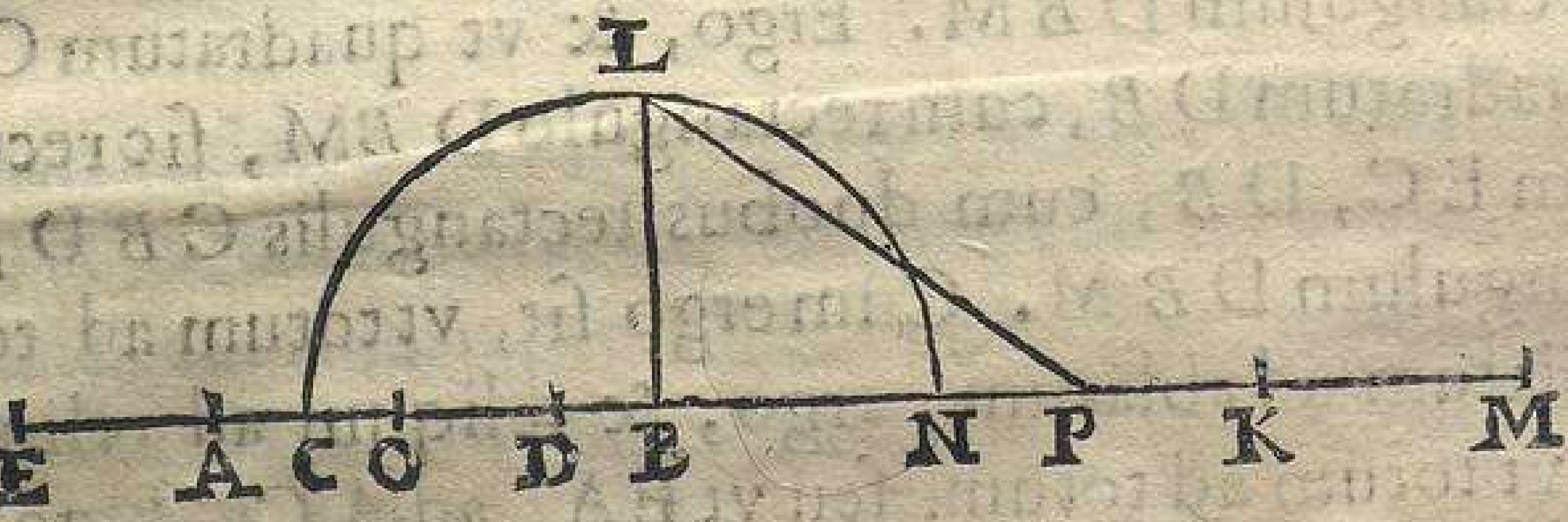


ceſſus rectanguli A B C, ſuper rectangulum A C, D B, & ſuper duo rectangula C B D, ad quadratum D B. Ergo, & componendo, vt A C, ad C E, ſic talis exceſſus, cum quadrato D B, ad quadratum D B. Sed talis exceſſus, cum quadrato D B, facit rectangulum A D C. Nam, duo quadrata C B, B D, excedunt duo rectangula C B D, quadrato C D; & rectangulum A C B, excedit rectangulum A C, D B, rectangulo A C D, quod cum quadrato C D, facit rectangulum A D C. Ergo, & vt A C, ad C E, ſic rectangulum A D C, ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd

Quòd verò assumptum est, nempe punctum D, ca-
dere inter C, B, patet ex processu demonstrationis. Quia
non in C. Nam, cùm probatum sit, vt A E, ad E C, sic
rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangu-
lo D B K, nempe ad rectangulum K D B, nempe, ex sup-
positione, ad rectangulum K C B; & cùm sit, vt rectan-
gulum A B C, ad rectangulum K C B, sic A B, ad K C;
erit vt A E, ad E C, sic A B, ad C K. Sed pariter factū
est, vt A E, ad E C, sic A B, cum B C, ad B K. Ergo
esset etiam, vt A B, ad C K, sic A B, cum B C, ad B K,
minorem C K. Quod est absurdum. Et multò maius
absurdum concluderetur si punctum D, caderet vltra C.
Ergo cadit inter C, B.

SI Verò proportio data sit defectus, sit ea, quam
habet A C, ad C E; & fiat, vt E A, ad A C, sic, & du-



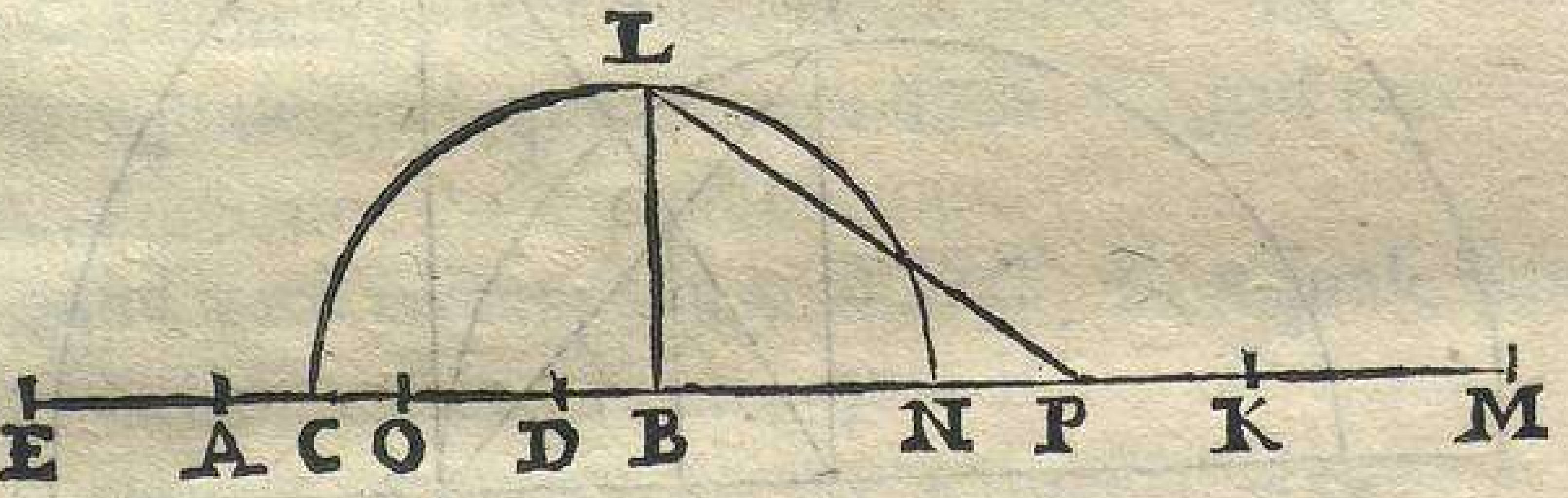
pla C B, ad B K; & E C, ad K M, positas in directum,
tùm inter se, tùm ipsi A B, & diuisa B K, bifariam in N,
super C N, fiat semicirculus, & à puncto B, erigatur
perpendicularis B L. Pariter secetur B M, bifariam in
P, & iuncta L P, fiat ei æqualis P D, (ostendetur infe-
rius punctum D, cadere inter C, B,) & ipsi D B, fiat
æqualis C O. Dico punctum O, esse quæsitum.

Eodem

Eodem enim modo, quo factum est suprà, ostendetur, quadratum L *B*, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M, ac proinde etiam rectangulũ C *B* N, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M. Sed quoniam factum est, vt E A, ad A C, sic dupla C *B*, ad *B* K, seù C *B*, ad B N; & vt C *B*, ad *B* N, sic quadratum C *B*, ad rectangulum C *B* N, seù ad ei æquale quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Ergo, & vt E A, ad A C, sic quadratum C B, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Rursùm, quoniam supra factum est, vt E A, ad A C, sic tam E C, ad K M, quàm dupla C *B*, ad B K; ergo erit, vt E A, ad A C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe E C, cum dupla C *B*, ad totam *B* M. Sed vt E C, cum dupla *B* C, ad *B* M, sic (sumpta communi altitudine D *B*,) rectangulum sub E C, in D *B*, cum duplo rectangulo C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Ergo, & vt quadratum C *B*, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B*M, sic rectangulum E C, D *B*, cum duobus rectangulis C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Cùm ergo sit, vt totum ad totũ, sic ablatum ad ablatum; ergo, & reliqum ad reliqum erit, vt totum ad totum, seù vt E A, ad A C. Ergo, & vt E A, ad A C, sic excessus quadrati C *B*, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Ergo, & componendo, vt E C, ad C A, sic excessus duorum quadratorum C *B*, *B* D, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Et conuertendo, vt quadratum D *B*, seù, vt quadratum C O, (quia C O, facta est æqualis

D *B*,

DB,) ad excessum quadratorum CB, BD, vel CO, super rectangulum EC, DB, seù ECO, & super duo rectangula CBD, seù BCO, sic AC, ad CE. Sed,& vt AC, ad CE, sic rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Ergo, & vt AC, ad CE, tàm est quadratum CO, ad excessum duorum quadratorum CB, CO, super rectangulum ECO, & super duo rectangula BCO, quàm rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Quare, & vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, seù, vt AC, ad CE, sic ambo ante-



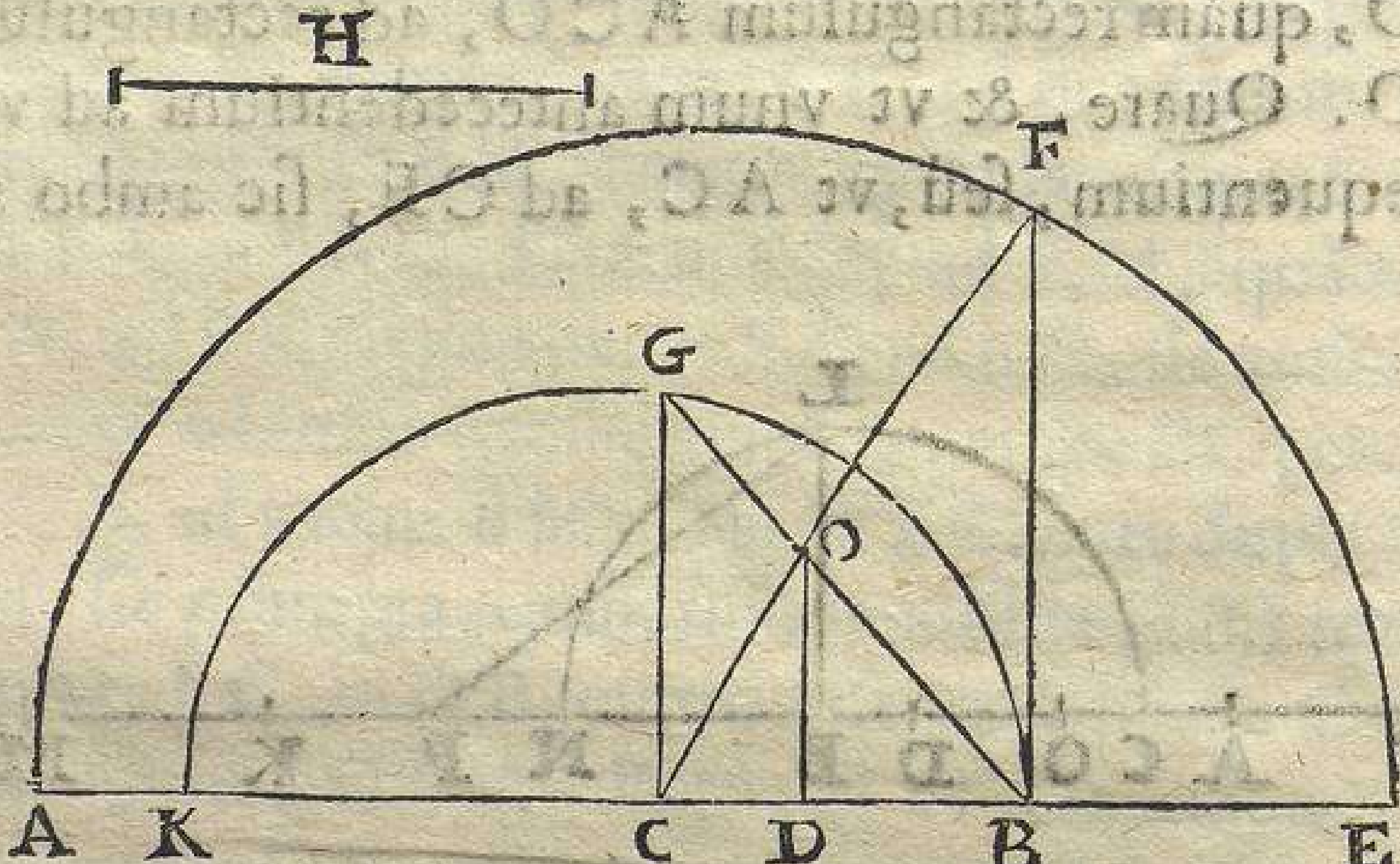
cedentia ad ambo consequentia, nempe sic quadratum CO, cum rectangulo ACO, nempe rectangulũ AOC, ad excessum duorum quadratorum BC, CO, solum, super duo rectangula BCO, nempe ad quadratum OB. Quod erat faciendum.

Quòd autem assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet. Quia non in C; nam cùm probatum sit, esse, vt EA, ad AC, sic quadratum CB, ad rectangulum MDB, nempe in tali casu, ad rectangulum MCB; & cùm sit, vt quadratum CB, ad rectangulum MCB, ita CB, ad CM; esset, & vt EA, ad AC, sic CB, ad CM. Quòd est absurdũ, quia supra

factum

factum eſt, vt E A, ad A C, ſic C B, ad ſolam B N. Et maius abſurdum concluderetur, ſi punctum D, caderet vltra C. Ergo patet propoſitum.

SED præſens Lemma poteſt vnica demonſtratione comprehendente omnes caſus facilius ſolui, ſed per locum ſolidum, quàm non erit inutile hic ſubingere.



Sit ergo data A B, diuiſa in C, vt ſupra, & data ratio ſi, quam habet A C, ad H. Producatur A B, in E, vt C B, B E, ſint æquales; & facta A E, diametro ſemicirculi, erigatur à puncto B, perpendicularis B F; & circa axim C B, diametro tranſuerſa A C, per prop. 53. primi conicorum, deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum F, cuius vertex ſit C; deinde fiat, vt H, ad A C, ſic C B, ad C K, vbicumque cadat punctum K, & ſuper K B, fiat ſemicirculus ad eandem partem cum priori, ac à puncto C, erecta perpendiculari C G, ducatur G B, ſecans hyperbolam in puncto O; demiſſa

ergo

ergo à puncto O, perpendiculari O D, ſuper A B, ſecante ipſam in D. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

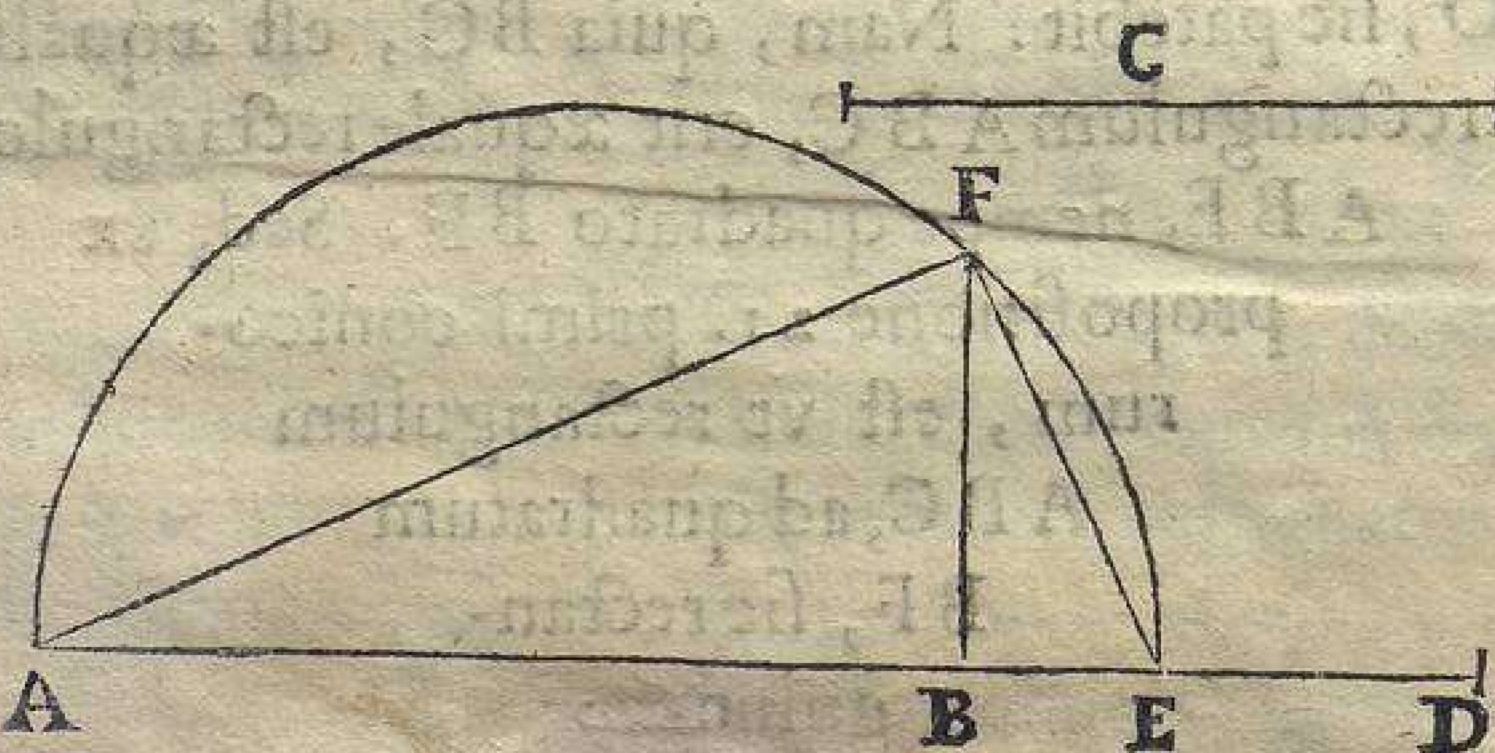
Etenim, propter ſimilitudinem triangulorum G B C, O D B, eſt, vt G C, ad C B, ſic O D, ad D B; & pariter eſt, vt quadratum G C, ad quadratum C B, ſic quadratum O D, ad quadratum D B. Sed, vt quadratum G C, ad quadratum C B, ſic K C, ad C B, nempe A C, ad H, (factum eſt enim ſupra, vt H, ad A C, ſic B C, ad C K; quare conuertendo, erit, vt K C, ad C B, ſic A C, ad H.) Ergo, vt A C, ad H, ſic quadratum O D, nempe rectangulum A D C, (quod ei oſtendetur æquale) ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd verò rectangulum A D C, ſit æquale quadrato D O, ſic patebit. Nam, quia B C, eſt æqualis B E, rectangulum A B C, erit æquale rectangulo A B E, nempe quadrato B F. Sed, ex propoſitione 21. primi conicorum, eſt vt rectangulum A B C, ad quadratum B F, ſic rectangulum A D C, ad quadratum D O. Quare patet propoſitum.

LEM. XXXV. PROP. LVIII.

Data base trianguli rectanguli, & data media proportionali inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inuenire triangulum.

Data basis sit A B, & data media proportionalis sit C, & oporteat inuenire triangulum. Fiat, vt A B, ad C, sic C, ad B D, positam in directum ipsi A B; deinde data A D, secta in B, rursùm secetur in E, vt re-



ctangulum A E B, sit æquale quadrato D E, per propositionem antecedentem, & super A E, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur perpendicularis B F, & ducantur A F, F E. Dico triangulum A F B, esse quæsitum.

Quo-

Quoniam enim rectangulum A E B, est æquale tàm quadrato E D, quàm quadrato E F; ergo, & duo quadrata E D, E F, pariter duæ lineæ E D, E F, erunt æquales. Tunc; quoniam rectangulū A B D, est æquale quadrato C, per constructionem, & pariter est æquale rectangulis A B E, & A B, E D; ergo, & quadratum C, erit æquale rectangulo A B E, nempe (quadrato B F,) & A B, E D, nempe A B, F E, quia duæ D E, F E, ostensæ sunt æquales. Sed, propter similitudinem triangulorum rectangulorum A B F, B F E, rectangulo A B, F E, est æquale rectangulum A F B. Ergo quadratum C, erit æquale quadrato F B, & rectangulo A F B, nempe rectangulo sub composita, ex hypotenusa A F, & perpendiculo F B, & sub perpendiculo F B. Quare patet propositum.

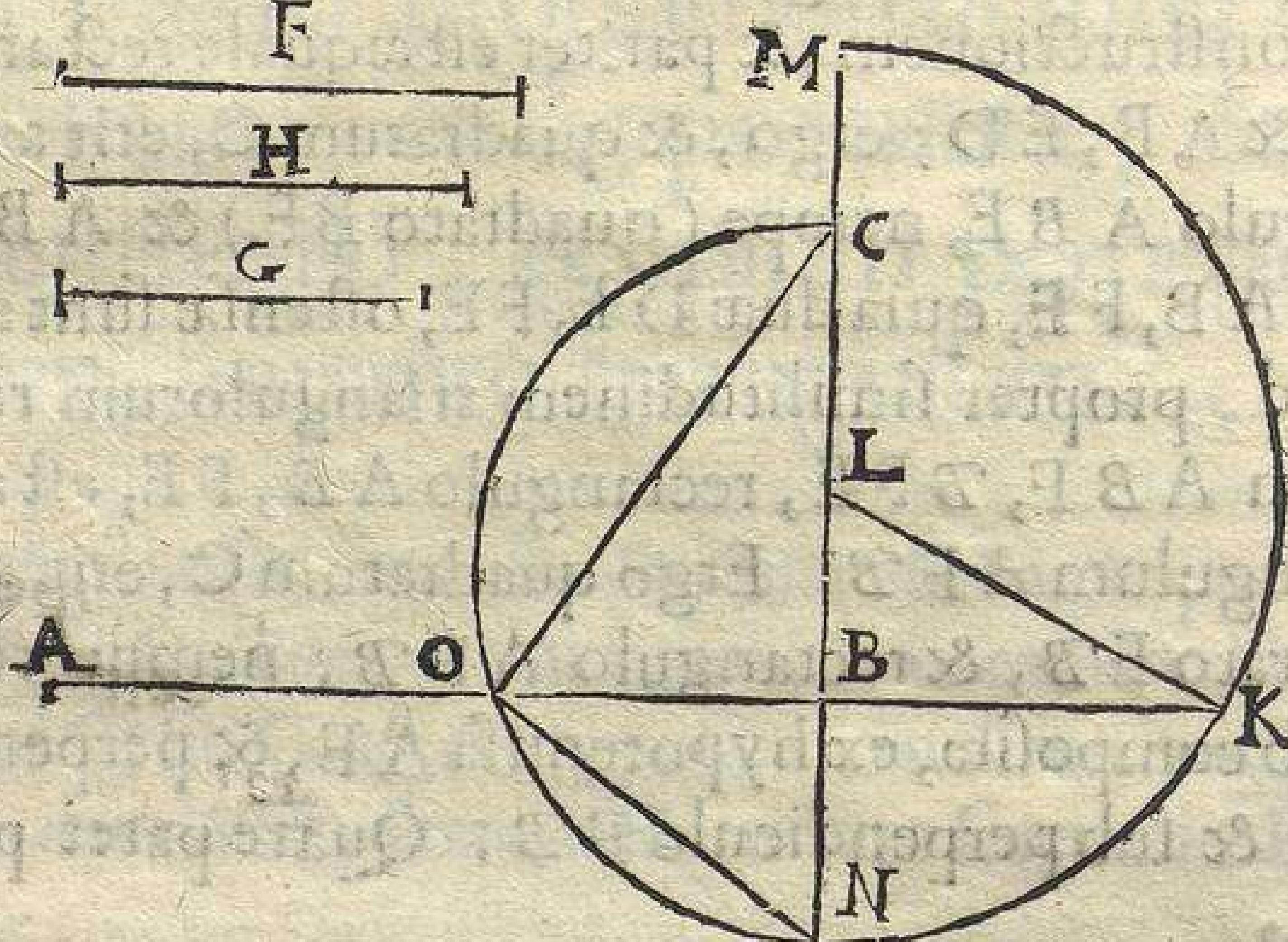
LEM. XXXVI. PROP. LIX.

Datis ijsdem, quæ in propositione 55. facere eadem, quæ ibidem, vt quadratum F, sit ad rectangulum C O B, cum quadrato O B, in data proportione.

SIT data proportio, quàm habet F, ad G, & inter F, G, inueniatur media H. Data autem B C, base trianguli rectanguli, & data H, media proportionali

 inter

inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inueniatur triangulum COB. Dico factum esse, quod proponebatur.

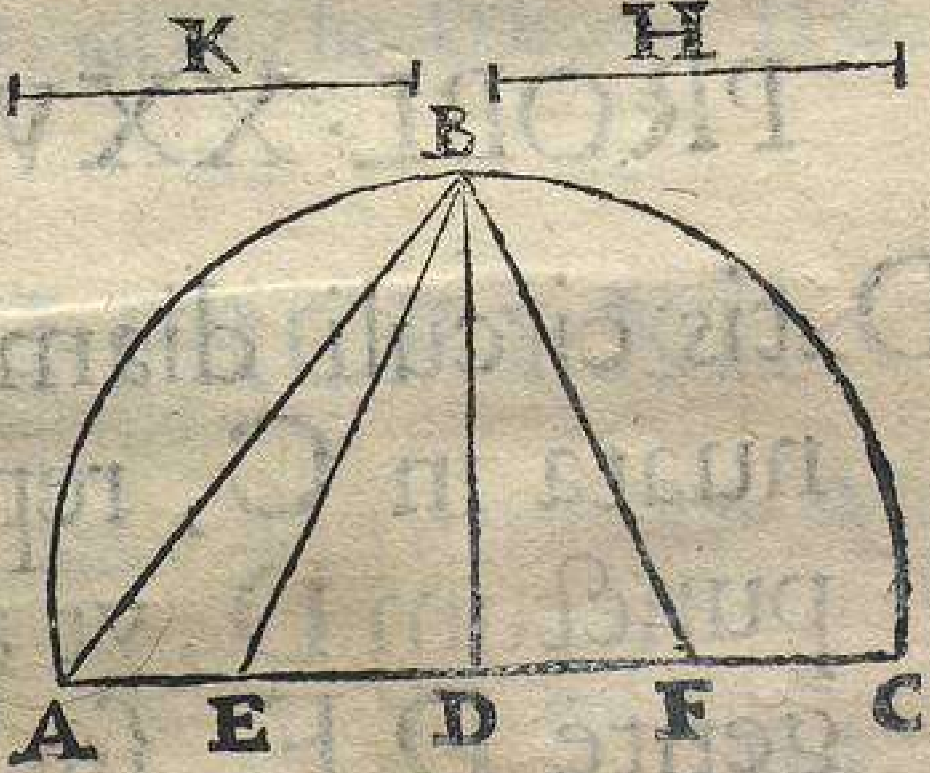


Quoniam enim rectangulum sub composita ex CO, & OB, & sub OB, est æquale quadrato H; ergo quadratum F, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed quadratum F, ad quadratum H, est vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum sub composita ex CO, OB, in OB, nempe ad rectangulum COB, cum quadrato OB. Quod erat faciendum.

PROBL. XXIV. PROP. LX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

EXponatur linea K, potens simul duo quadrata BA, AD; & data ratio sit, quàm habet AD, ad H. Datis autem duabus AD, DB, continentibus angulum rectum ADB, ducatur à puncto B, linea BE, vt sit, vt AD, ad H, sic quadratum K, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, per antecedentem propositionem, & fiat conus EBF. Quem dico esse quæsitum.



Quia, vt AD, ad H, sic quadratum K, nempe duo quadrata BA, AD, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, nempe, ex Archimede, totus perimeter portionis ABC, ad totum perimetrum coni EBF. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

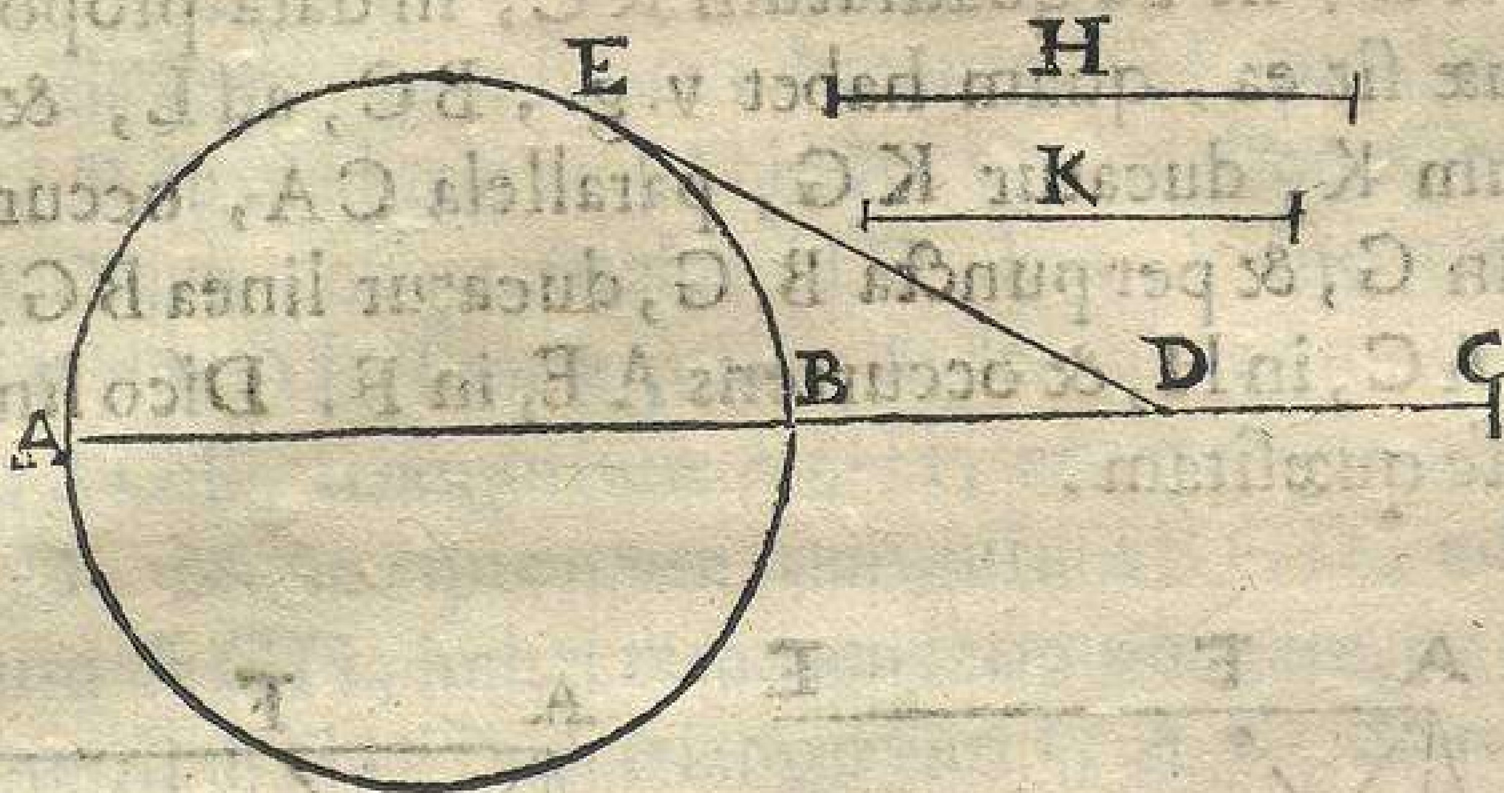
QVamuis Propositione 57. propositum sit Lemma sic vniuersaliter, attamen, vt patuit Propositione 58. non indigebamus ipso ad solutionem antecedentis Problematis, sic vniuersaliter proposito, sed tantùm in proportione æqualitatis. Verùm ad vberiorem scientiam, & quia ex ipso dependent alia Problemata, quamuis non pertinentia, nec ad conos, neque ad sphæras, nec ad superficies conicas, nec ad superficies sphæricas; proposuimus ipsum vniuersaliter. Vt ergo capiamus fructum ex ipso manantem, soluemus duo sequentia Problemata.

PROBL. XXV. PROP. LXI.

Datis circuli diametro A B, continuata in C, reperire inter B, C, punctum D, vt ab ipso ducta tangente D E, sit hæc ad D C, in data proportione.

DAta ratio sit, quàm habet A B, ad H, quæ continuetur ad tertium terminum K; deinde, per Propositionem 57. data A C, secta in B, taliter secetur in D, inter C, B, vt rectangulum A D B, sit ad quadratum

tum D C, vt A B, ad K; & à puncto D, ducatur tangens D E. Dico factum esse, quod proponebatur.



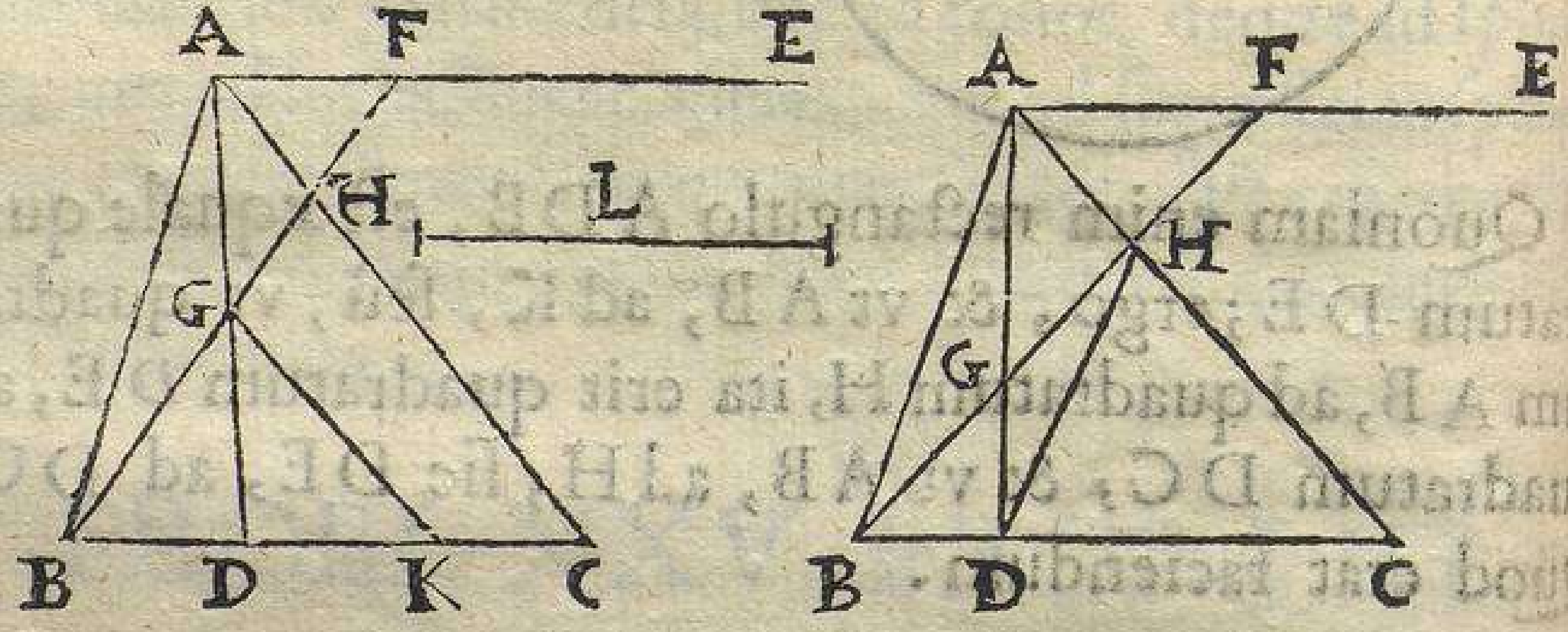
Quoniam enim rectangulo A D B, est æquale quadratum D E; ergo, & vt A B, ad K, seù, vt quadratum A B, ad quadratum H, ita erit quadratum D E, ad quadratum D C; & vt A B, ad H, sic D E, ad D C. Quod erat faciendum.

PROBL. XXVI. PROP. LXII.

In triangulo B A C, à puncto A, sint ductæ duæ lineæ, A D, occurrens B C, inter B, C, & A E, parallela B C, indefinita; à puncto B, ducere B G H F, tali lege, vt quadratum B G, ad rectangulum F G H, sit in data proportione.

Data

DAta recta BC, secta in D, rursùm secetur in K, inter D, C, per propositionem 57. vt rectangulum BKD, sit ad quadratum KC, in data proportione, quæ sit ea, quam habet v. g., BC, ad L, & per punctum K, ducatur KG, parallela CA, occurrens AD, in G, & per puncta B, G, ducatur linea BGHF, secans AC, in H, & occurrens AE, in F. Dico lineam BF, esse quæsitam.



Quoniam enim rectangulum BKD, ad quadratum KC, habet rationem compositam ex rationibus BK, ad KC, & DK, ad KC; ergo, & ratio BC, ad L, componetur ex istis proportionibus. Sed vt BK, ad KC, sic (ob parallelas GK, AC,) BG, ad GH; & pariter, vt DK, KC, sic DG, ad GA, & (ob parallelas AF, BD,) vt DG, ad GA, sic BG, ad GF. Ergo, & BC, proportio ad L, componetur ex duplici proportione, nempe BG, ad GH, & BG, ad GF, quæ duæ faciunt rationem quadrati BG, ad rectangulum FGH. Quare patet propositum.

Quamuis verò hoc Problema sit sic vniuersale, attamen

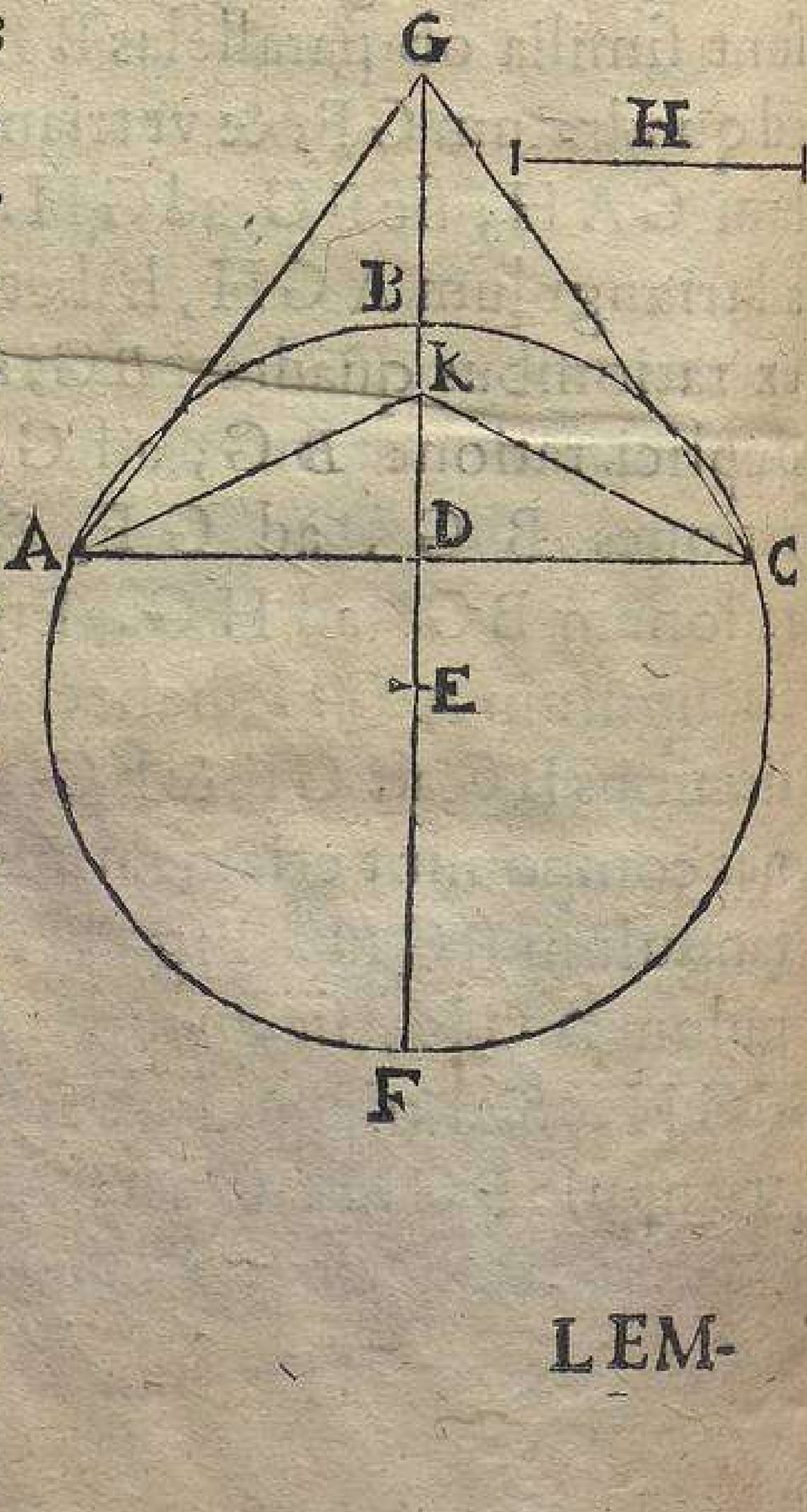
men non erit inutile tradere aliam propositionem in proportione æqualitatis, quæ non supponet propositionem 57.

Datis ergo, quæ supra, ducatur D H, parallela A B, & per B, & H, ducatur B G H F. Quàm dico esse quæsitam. Nam (ob parallelas H D, B A,) duo triangula A H B, A D B, sunt æqualia; & dempto communi triágulo A G B, triangulum A G H, erit æquale triangulo B G D. Nunc; quoniam triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam, ex ratione trianguli B G D, ad triangulum G A F, & trianguli G A F, ad triangulum G A H; vt autem triangulum B G D, ad triangulum G A F, sic (quia ista triangula sunt similia ob parallelas B D, A F,) quadratum G B, ad quadratum G F; & vt triangulum G A F, ad triangulum G A H, sic F G, ad G H. Ergo triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam ex rationibus quadrati B G, ad quadratū G F, nempe ex duplici ratione B G, ad G F, & G F, ad G H. Sed rationes B G, ad G F, & G F, ad G H, faciunt rationem B G, ad H G. Ergo triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam, ex rationibus B G, ad G F, & B G, ad G H. Sed istæ duæ rationes componunt etiam rationem quadrati B G, ad rectangulum F G H. Ergo vt triangulum B G D, ad triangulum A G H, sic quadratum B G, ad rectangulum F G H. Sed triangulum B G D, probatum est æquale triangulo F G H. Quare &c. Quod &c.

PROBL. XXVII. PROP. LXIII.

Data ſphæræ portione, conſtituere conum ſuper eamdem baſim portionis, vt portio ſit ad conum in data proportione.

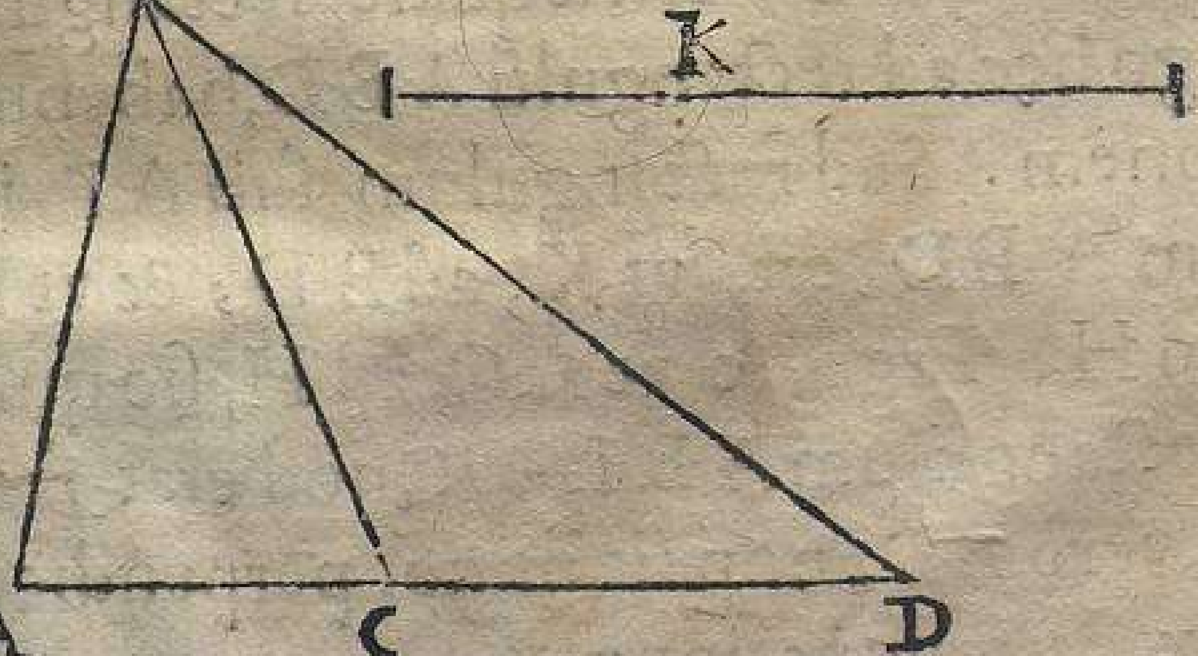
SIT data portio A B C, ſphæræ, cuius diameter F B, centrum E, & data proportio ſit, quam habet F D, ad H. Oportet facere &c. Fiat, vt F D, ad F D, cum F E, ſic D B, ad D G, & fiat conus A G C, cuius axis ſit G D. Ergo conus A G C, ex Archimede ſupra citato, eſt æqualis portioni A B C. Fiat ergo, vt F B, ad H, ſic G D, ad D K, vbicumque cadat K, & fiat conus A K C. Quem dico eſſe quæſitum. Nam conus G A C, ſeù portio A B C, eſt ad conũ A K C, vt G D, ad D K; ſeù vt F B, ad H. Quod erat faciendum.



LEM. XXXVII. PROP. LXIV.

Dato quolibet triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineam B D, occurrentem lateri A C, etiam producto, vt quadratum vnius lateris, putà B C, sit ad rectangulum sub alio latere in ductam, nempe ad rectangulum A B D, in data proportione possibili.

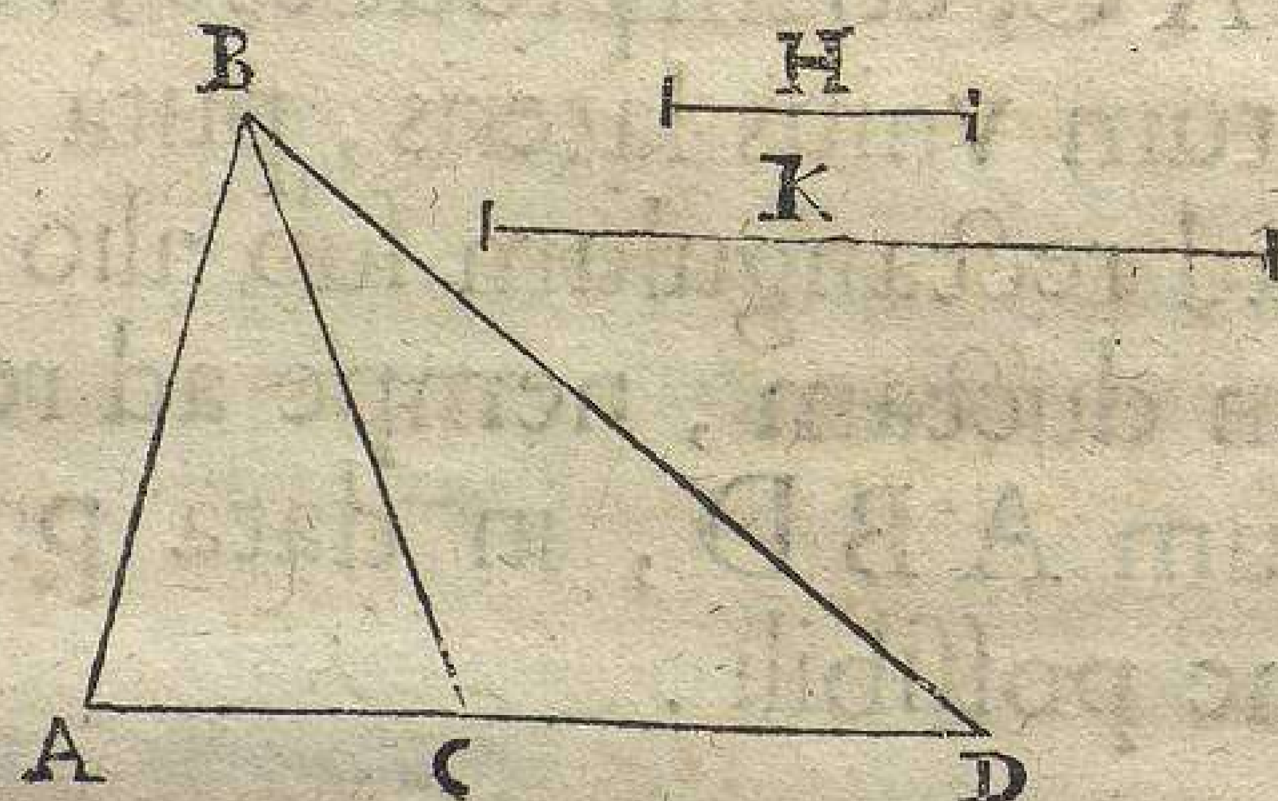
PRoportio possibilis est, quod si proportio sit excessus sit, non maior ea, quàm habet quadratum



B C, ad rectangulum sub B A, in perpendiculum, quia aliter B D, non esset ducibilis, cùm esset minor perpen-

 dicu-

diculo. Data ratio sit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A B, ad B C; sic B C, ad K; & fiat vt A C, ad H, sic K, ad aliam, quæ non erit minor perpendiculo trianguli, vt patebit ex determinatione Lemmatis, ac proinde si ducatur à puncto B, occurret A C; occurrat in puncto D. Dico quadratum B C, esse ad rectan-



gulum A B D, in data proportione A C, ad H. Nam, quoniam factum est, vt A B, ad B C, sic B C, ad K; ergo quadratum B C, erit æquale rectangulo sub A B, & K. Ergo hęc ad rectangulũ A B D, habebunt eandem proportionem. Sed rectangulum sub A B, in K, ad rectangulum A B D, est, vt K, ad B D; & vt K, ad B D, sic A C, ad H. Ergo, & vt A C, ad H, sic quadratum B C, ad rectangulum A B D. Quod erat faciendum.

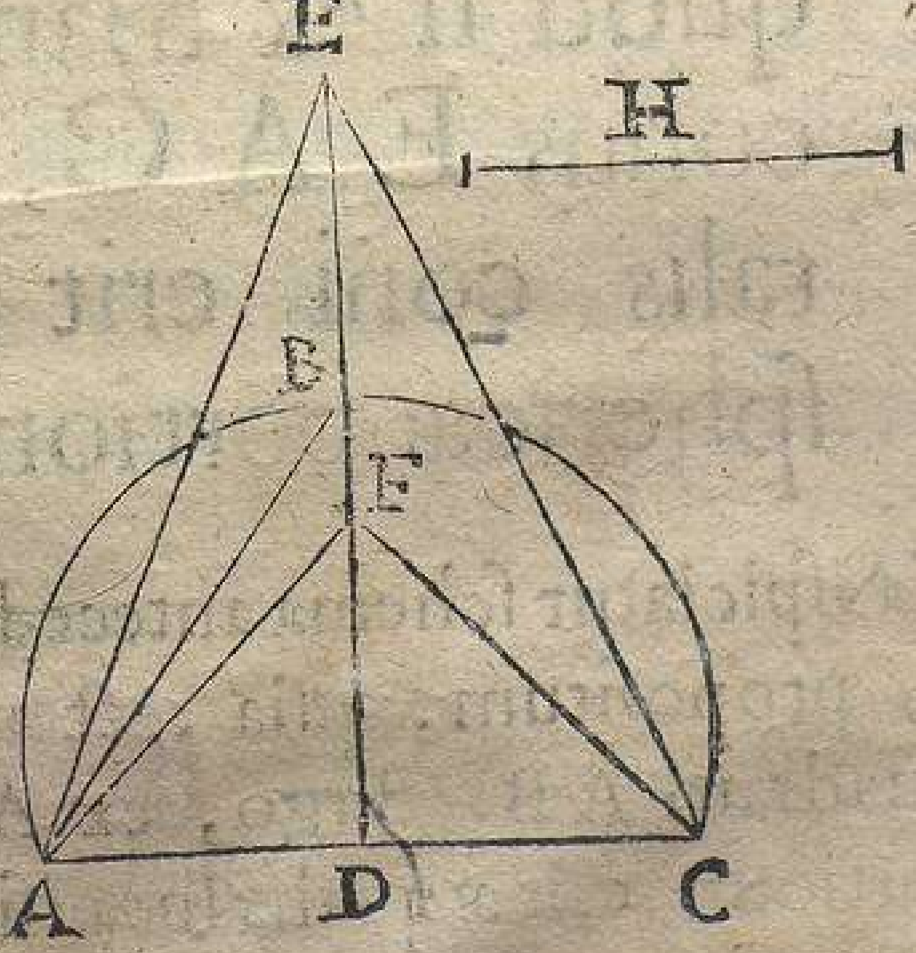
Quòd verò B D, non sit minor perpendiculo, patet, vt dixi, ex determinatione.

PRO-

PROBL. XXVIII. PROP. LXV.

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies ſphærica portionis, ſit ad ſuperficiem conicam coni, in data proportione.

Data portio ſit A B C, & data ratio ſit, quam habet A D, ad H. Oportet facere, quod imperatum eſt. Ducatur B A. Infra patebit oportere proportionem datam minorem eſſe ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum A D. A' vertice ergo A, dati trianguli A D B, ducatur A E, occurrens D B, in E, vt quadratum A B, ſit ad rectangulum E A D, vt A D, ad H; & ex triangulo E A D, reuoluto circa E D, fiat conus A E C. Dico conum A E C, eſſe quæſitum. Patet faciliter; nam ſuperficies portionis A B C, ad ſuperficiem coni E A C, eſt, ex Archimede ſæpè citato, vt quadratum B A, ad rectangulum E A D, nempe vt A D, ad H. Quod erat faciendum.



Quòd

Quòd verò proportio data debeat esse minor ea, quàm habet quadratum B A, ad quadratum A D, patet; quia aliter cùm non possit duci A E, conus E A C, non esset construibilis.

LEM. XXXIIX. PROP. LXVI.

Sit portio A B C, cuius vertex B, axis B D, diameter basis A C, & ducatur A B, fiatque vt D A, ad A B, ita A B, ad aliam, quæ erit ipsa A B, maior, & sit A E, occurrens D B, productæ in E. Dico, quod si ex triangulo E A D, fiat conus E A C, superficies conica talis coni erit æqualis superficiei sphęricæ portionis A B C.

INspiciatur schema antecedentis Propositionis. Patet propositum, quia rectangulum E A D, est æquale quadrato A B. Ergo, ex Archimede, & superficies portionis, erit æqualis superficiei coni.

COROLLARIVM.

EX dictis deducitur, totum perimetrum portionis, esse æquale toti perimetro coni, addita nempe basi communi.

SCHO-

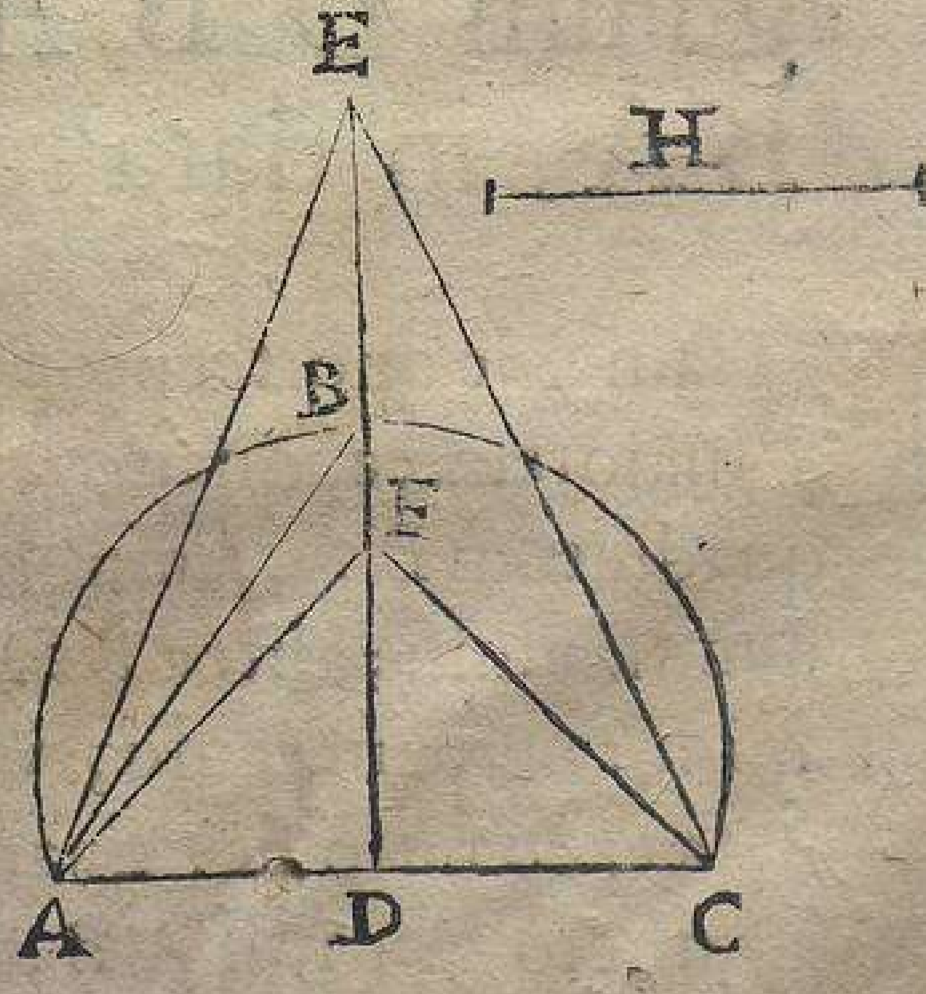
SCHOLIVM.

HIC etiam non erit inutile notasse, quòd si portio sit hemisphærium, latus coni erit æquale diametro sphæræ, quia tunc A B, est media proportionalis inter A D, semidiametrum sphæræ, & diametrum. Notetur etiam, si placet, totum perimetrum coni esse triplum circuli maximi sphæræ; ac proinde se habere ad circulum maximum, seù ad suam basim, vt Cylindrus in eadem basi, & altitudine, ad conum.

PROBL. XXIX. PROP. LXVII.

Idem.

DAta proportio sit A D, ad H; & fiat conus A E C, cuius superficies sit æqualis superficiei sphæricæ portionis. Patet ergo faciliter, quod si Problema debet solui, oportet rationem A D, ad H, esse minorem ea, quam habet rectangulum E A D, ad quadratum A D. Fiat ergo, vt A D, ad H, sic E A, ad aliam, quæ ex determinatione erit maior A D, ac proinde, si ducatur à puncto A, occurret D E, occurrat in F, & fiat conus



AFC.

AFC. Quem aio esse quæsitum. Demonstratio est facilissima; quia vt A D, ad H, sic E A, ad A F, nempe, (sumpta communi altitudine A D,) rectangulũ E A D, ad rectangulum F A D. Nempe quadratum B A, æquale rectangulo E A D, ad rectangulum F A D. Nempe, superficies portionis A B C, ad superficiem coni A F C. Quod erat faciendum.

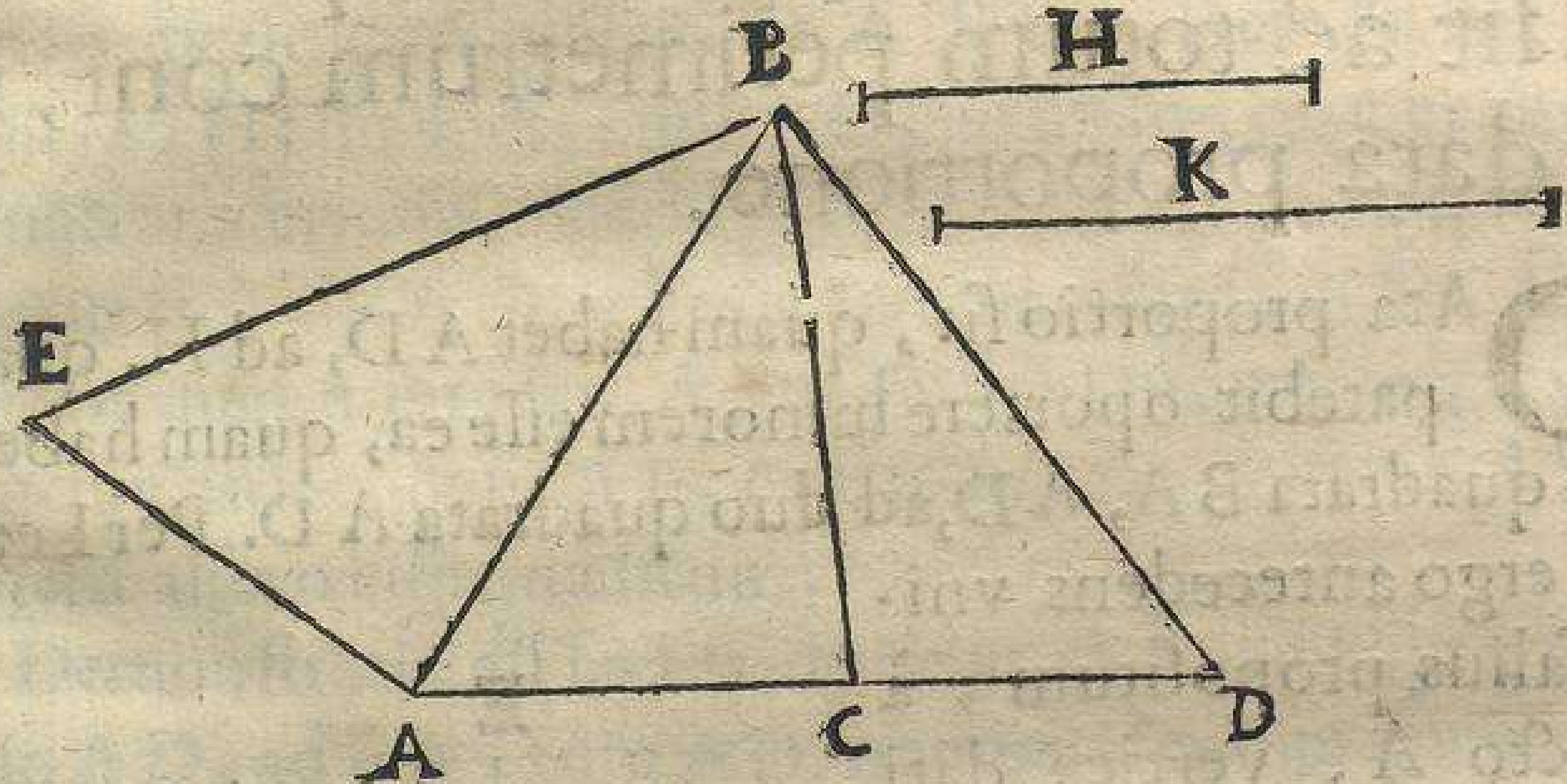
LEM. XXXIX. PROP. LXVIII.

Dato triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineã B D, occurrentem A C, productæ (si opus sit) tali lege, vt duo quadrata C B, B A, sint ad rectangulum D B A, cum quadrato B A, in data ratione possibili.

ETiam hic oportet proportionem datam non esse maiorem ea, quam habent duo quadrata C B, B A, ad quadratum B A, simul cum rectangulo sub B A, in perpendiculum; aliter B D, non posset duci, quia esset minor perpendiculo, vt consideranti patet.

Data ergo ratio sit, quam habet A C, ad H, & erigatur à puncto A, ipsi A B, perpendicularis A E, æqualis ipsi B C; & ducatur B E. Tunc fiat, vt A B, ad B E, sic

sic B E, ad K; deinde fiat vt A C, ad H, sic K, ad aliam, quæ ex determinatione Problematis, non erit minor composita ex A B, & perpendiculo, vt patebit ex processu demonstrationis. Quare si ab ipsa auferatur æqualis A B, & reliqua ducatur à vertice B, vtique occurret A C. Occurrat ergo, & sit B D.

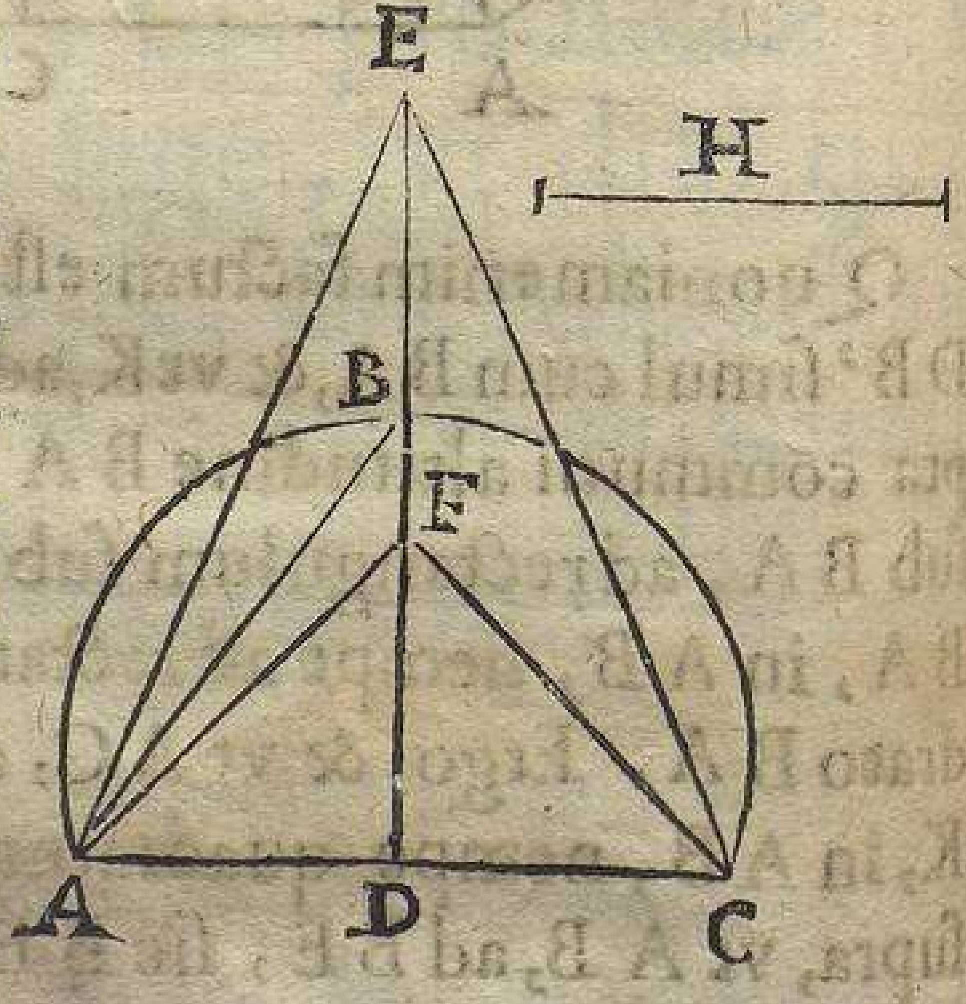


Quoniam enim factum est, vt A C, ad H, sic K, ad D B, simul cum B A, & vt K, ad D B, cum B A, sic (sumpta communi altitudine B A,) rectangulum sub K, & sub B A, ad rectangulum sub composita ex D B, & B A, in A B, nempe ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Ergo, & vt A C, ad H, sic rectangulum sub K, in A B, nempe quadratum B E, (nam factum est supra, vt A B, ad B E, sic B E, ad K,) ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Sed quadrato B E, sunt æqualia duo quadrata B A, A E; & quadrato A E, est æquale quadratum B C, ex constructione. Ergo, & vt A C, ad H, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum D B A, cum quadrato A B. Quod erat faciendum.

PROBL. XXX. PROP. LXIX.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet A D, ad H, quam patebit oportere minorem esse ea, quam habent duo quadrata B A, A D, ad duo quadrata A D. Per Lemma ergo antecedens vniuersalius propositum, à puncto A, vertice dati trianguli B A D, ducatur A F, vt duo quadrata B A, A D, sint ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, vt A D, ad H; & ex triangulo F A D, reuoluto circa F D, fiat conus A F C. Quem dico esse quæsitum.



Nam, vt A D, ad H, sic duo quadrata B A, A D, ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, nempe, ex sæpe dictis, perimeter portionis A B C, ad perimetrum coni A F C. Determinatio est euidens, quia aliter Problema esset insolubile, vt consideranti fiet manifestum.

PRO-

PROBL. XXXI. PROP. LXX.

Idem.

HOC idem Problema soluetur aliter, & facilius. Inueniatur conus E A C, cuius perimeter sit æqualis perimetro portionis A B C. Deinde fiat, vt A D, ad H, sic E A, cum A D, ad aliam, quæ ex determinatione, erit maior dupla A D. Quare, si ex ipsa auferatur æqualis A D, reliqua erit maior ipsa A D. Ergo poterit duci à puncto A, in D B. Ducatur ergo vbicunque cadat, & sit A F; & fiat conus, vt prius, A F C. Quem assero esse quæsitum.

Demonstratio est facilis; quia vt A D, ad H, sic E A, cum A D, ad F A, cum A D, nempe (sumpta communi altitudine A D,) rectangulum E A D, cum quadrato A D; nempe perimeter coni A E C, ad perimetrum coni A F C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

DVo sequentia Problemata, quoad solida ab alijs demonstrantur, ac soluuntur, à nemine verò, quod sciam, quoad superficies; quare ipsos soluemus quoad superficies.

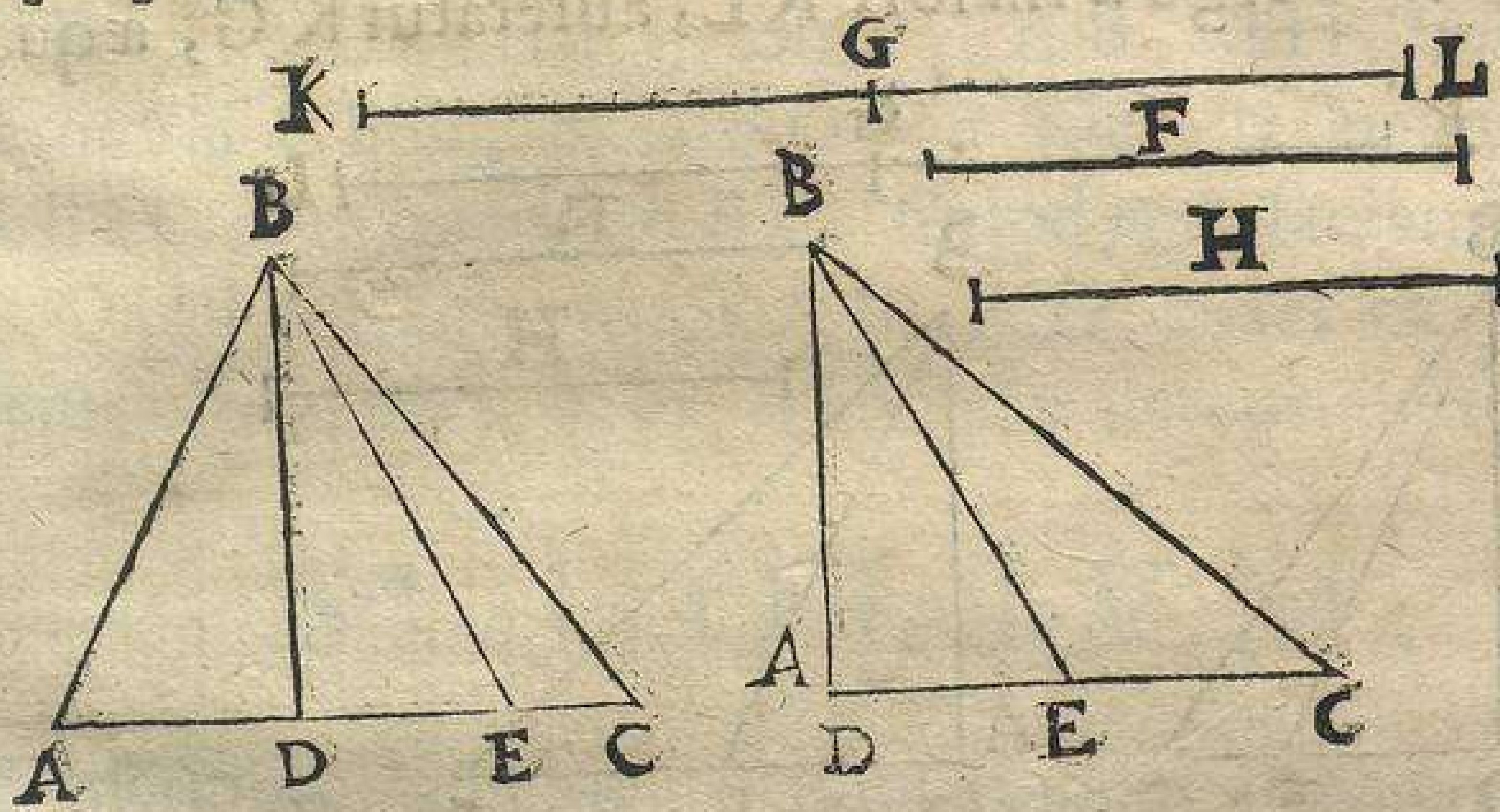
LEM. XL. PROP. LXXI.

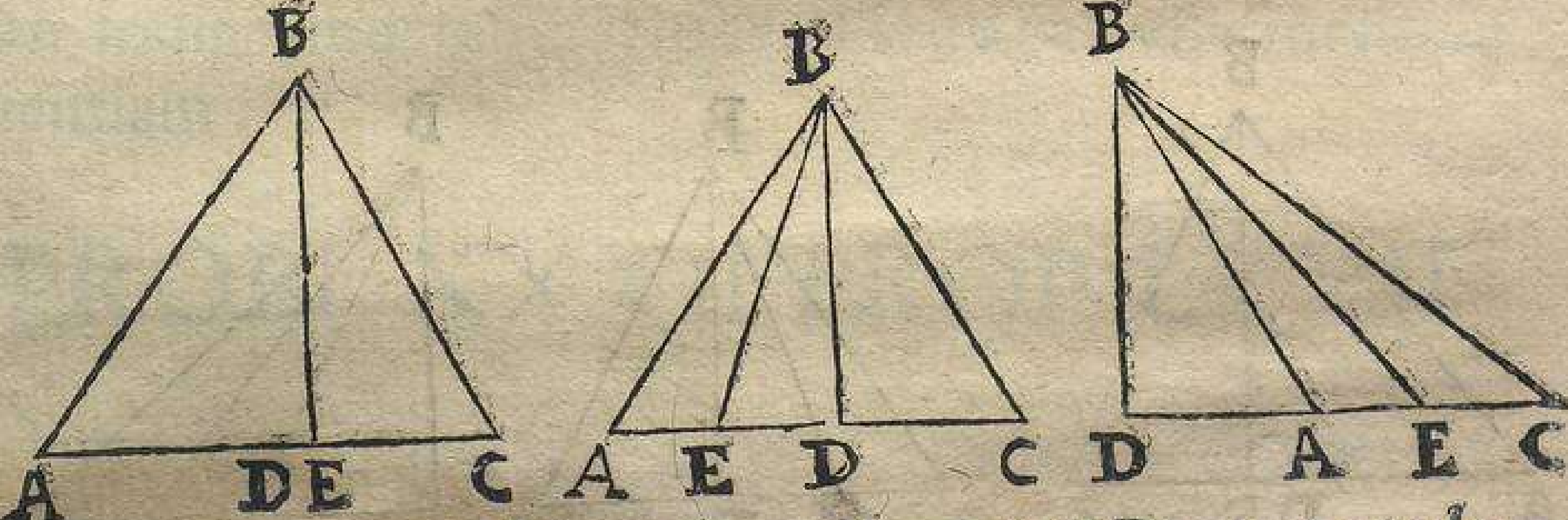
In dato triangulo ducto perpendiculo ab angulo verticis in basim, ducere ab eodem angulo aliam lineã in basim protractam etiam si opus sit, vt rectangulum sub ducta, & sub perpendiculo, vna cum rectangulo sub vno latere, & sub eodem perpendiculo, sit ad hoc idẽ rectangulum, cum quadrato alterius lateris, in data proportione.

DAtum triangulum sit A B E, data verò ratio, quã habet A B, ad H; & sit ducta perpendicularis B D. Oportet à puncto B, ducere B C, vbicunque occurrentem A E, vt rectangulum C B D, cum rectan-A B D, sit ad idem rectangulum A B D, cum quadrato B E, vt A B, ad H.

Patet in primis, Lemma quinque habere casus, secundum diuersitatem anguli verticalis, & diuersum modum casus perpendiculi. Potest enim, vel cadere inter A, E, vt in prima figura; vel in ipso puncto A, vt in secunda, quando scilicet perpendiculum est idem, ac latus B A; vel in ipso puncto E, vt in tertia, quando scili-

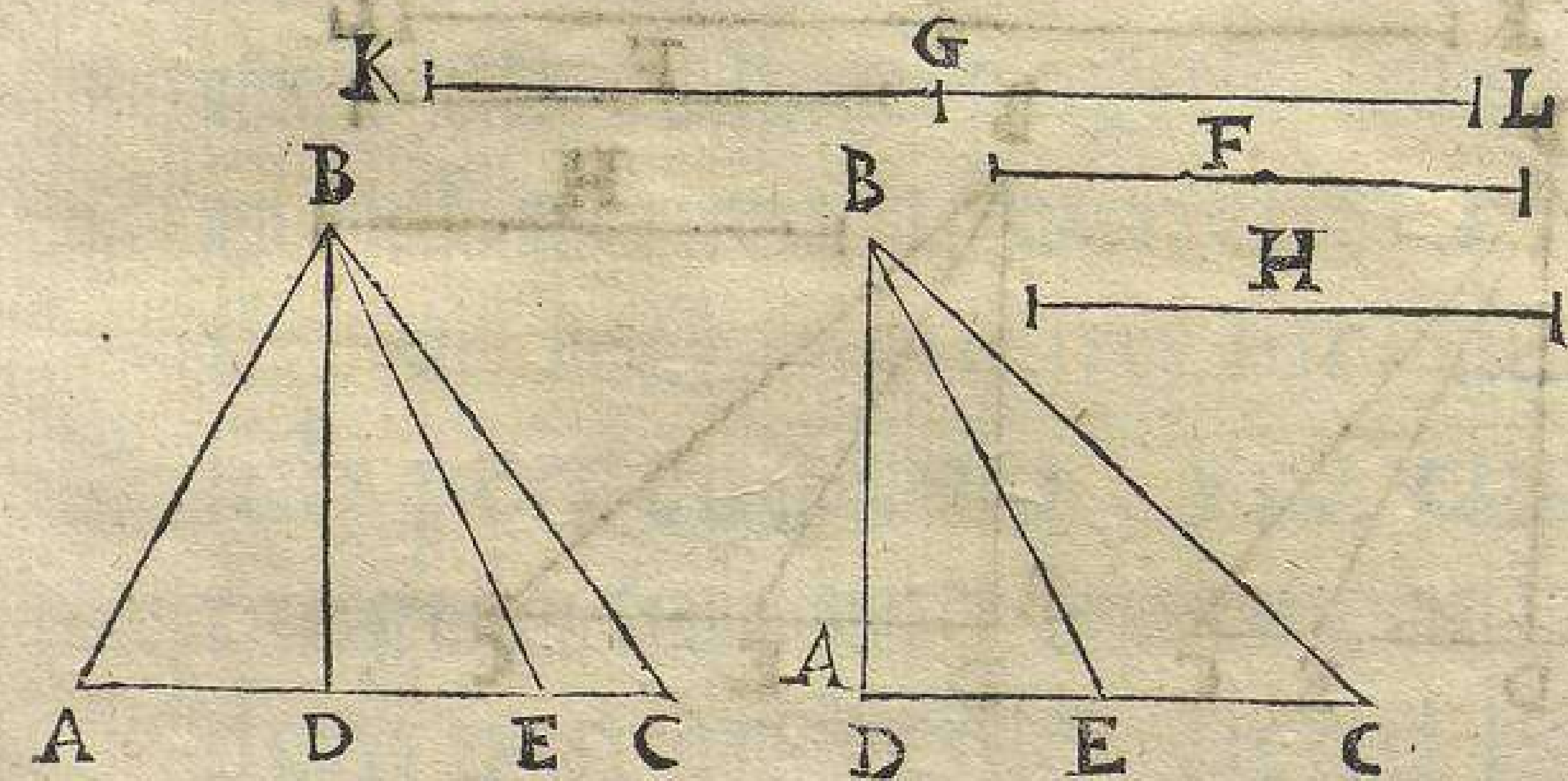
ſcilicet eſt idem, ac latus B E; vel extra A E, ad partes E, vt in quarta; vel tandem extra A E, ad partes A, vt in quinta. In primo, quarto, & quinto caſu, oportet, quod ſi proportio ſit minoris inæqualitatis, tamen ſemper ſit

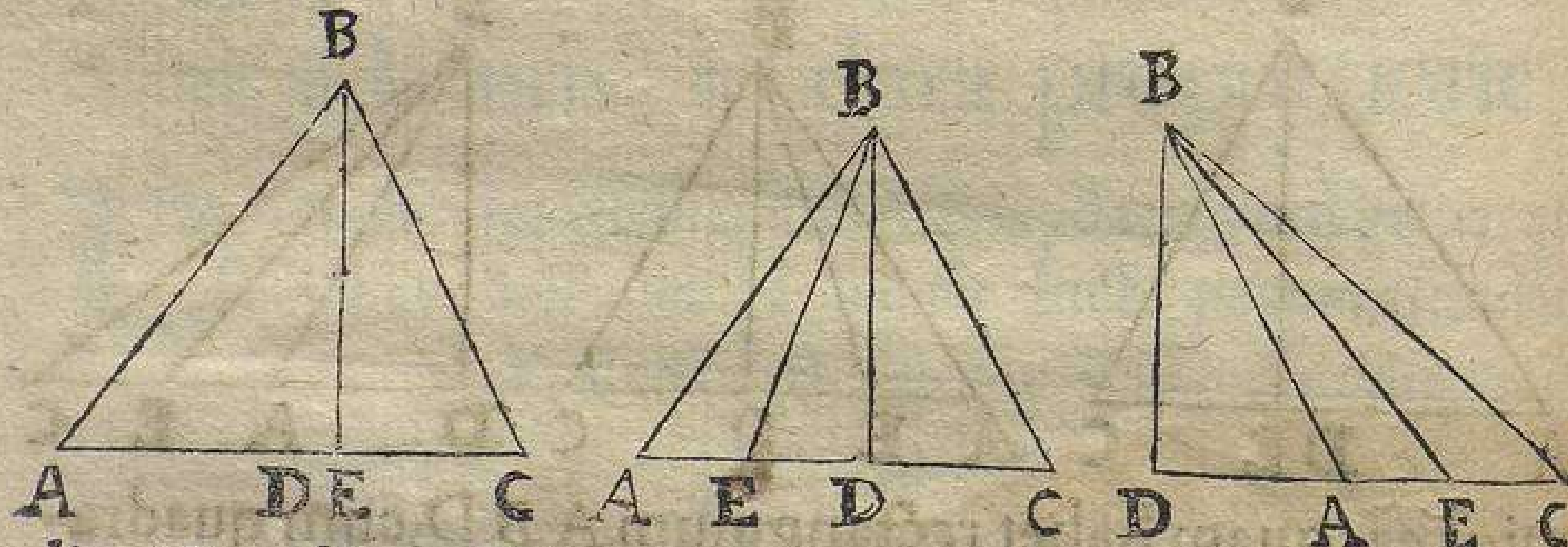




maior ea, quam habet rectangulum A E D, cum quadrato B D, ad rectangulum A B D, cum quadrato BE. In ſecundo caſu oportet eſſe maiorem ea, quam habent duo quadrata B A, ad quadrata B A, & , B E. Tādem in tertio caſu, oportet ſemper eſſe proportionem maioris inæqualitatis. Determinationes facilè erunt manifeſtæ conſideranti; nam, ſi aliter eſſet, quam determinatum eſt, B C, non poſſet duci; nam, vel eſſet æqualis

lis B D, vel minor ea. His præhabitis, Fiat, vt perpendiculum B D, ad latus B E, sic B E, ad F; deinde fiat vt H, ad A B, sic composita ex A B, & F, ad K L, quam aio futuram maiorem ipsis A B, B D, (vt patebit inferius.) Si ergo à maiori K L, auferatur K G, æqua-





lis A B, reliqua G L, erit maior B D. Ergo poterit duci à puncto B, ad aliquod punctum lineæ A E, etiam productæ, si opus sit; ducatur, & sit B C. Dico factum esse, quod proponebatur. Patet. Nam, quoniam factum est, vt H, ad A B, sic A B, cum F, ad K L, nempe ad duas A B, B C; ergo conuertendo, erit vt A B, ad H, sic A B, cum B C, ad A B, cum F. Sed vt C B, cum

BA, ad BA, cum F, sic (sumpta communi altitudine BD,) rectangulum CBD, cum rectangulo ABD, ad idem rectangulum ABD, cum rectangulo sub BD, in F, nempe cum quadrato BE, (quia factum est, vt BD, ad BE, sic BE, ad F.) Ergo vt AB, ad H, sic duo rectangula CBD, & ABD, ad idem rectangulum ABD, cum quadrato BE. Quod erat faciendum.

Quòd KL, sit maior AB, BD, patet ex processu demonstrationis, & ex Lemmatis determinatione.

SCHOLIVM.

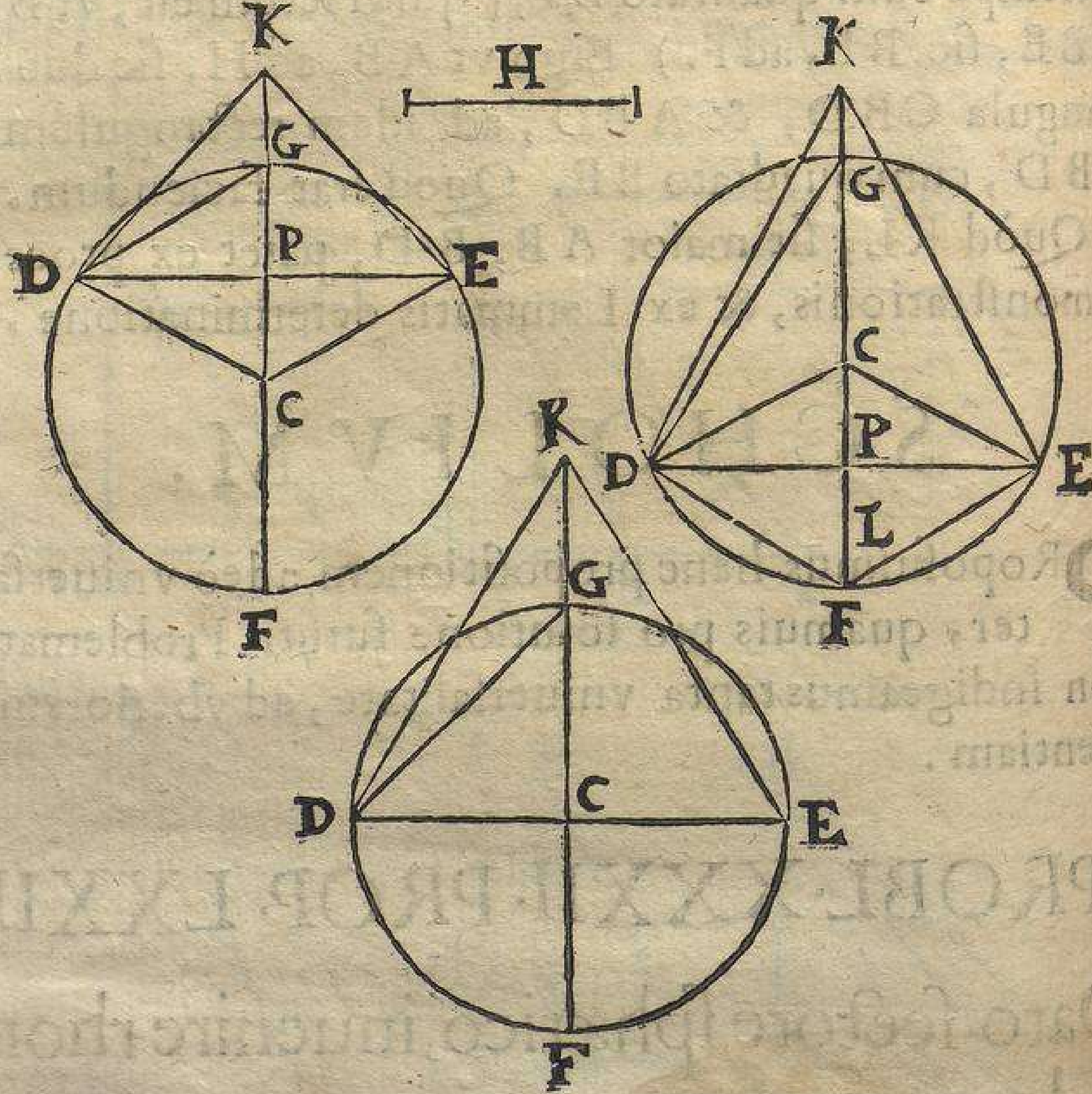
PRoposuimus hanc propositionem adeò vniuersaliter, quamuis pro solutione futuri Problematis, non indigeamus tanta vniuersalitate, ad vberiorem scientiam.

PROBL. XXXII. PROP. LXXII.

Dato sectore sphærico, inuenire rhombum conicum, cuius vnus conus sit idem, ac conus sectoris, & basis conorum sit basis coni sectoris, adeò vt superficies rhombi, sit ad superficiem sectoris, in data proportione.

Hoc

HOC Problema triplicem habet casum, secundùm quod sector, vel est maior, vel minor, vel æqualis hemisphærio, scilicet quando sector degenerat



in hemisphærium; & secundùm diuersos casus, Problema recipit diuersas determinationes. Sit ergo sphæra, cuius diameter GF, centrum C, & sit sector DGEC, vel minor hemisphærio, vt in prima figura, vel maior, vt in secunda, vel æqualis, vt in tertia, (quamuis impropriè hemisphærium dicatur sector, sicut, & rhombus inueniendus, non est rhombus, sed conus, quia hemi-

hemisphærij non est conus) Pariter in secunda figura, sector maior hemisphærio non habet conum, sed est minor portione D G E P, quantitate coni D C E. Intelligatur circulus maximus D G E F, ortus ex sectione, & reliqua, vt moris est; & in omni casu, ducta D G, ac in secunda figura, facta P L, æquali P C, & iunctis D L, L E, ac intellectis conis D C E, D L E, patet istos esse æquales. Data ergo ratio sit, quam habet F C, ad H. Oportet, quod si hæc sit minoris inæqualitatis, sit tamen in primo, & secundo casu, maior ea, quam habet rectangulum C D P, cum quadrato D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G. In tertio verò casu, oportet maiorem esse ea, quam habent duo quadrata C D, ad quadratum C D, cum quadrato D G. Tunc, per antecedēs Lemma, dato triangulo C D G, & ducto perpendiculo D P, ducatur D K, vt rectangulum C D P, cum rectangulo K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, sit vt F C, ad H, & intelligatur rhombus K D C E, in prima, K D L E, in secunda, & conus K D E, in tertia figura. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, in prima figura, proportio rectangulorum C D P, & K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, est eadem cum proportione perimetri rhombi K D C E, ad superficiem sectoris D G C E, ex Archimede sæpe citato. In secunda verò figura, est eadem cum proportione superficiei rhombi K D L E, ad superficiem sectoris D G E C. Quia superficies sectoris constat ex superficie sphærica portionis D G E, & conica coni D C E, cui est æqualis conica coni D L E. In tertia

V figura

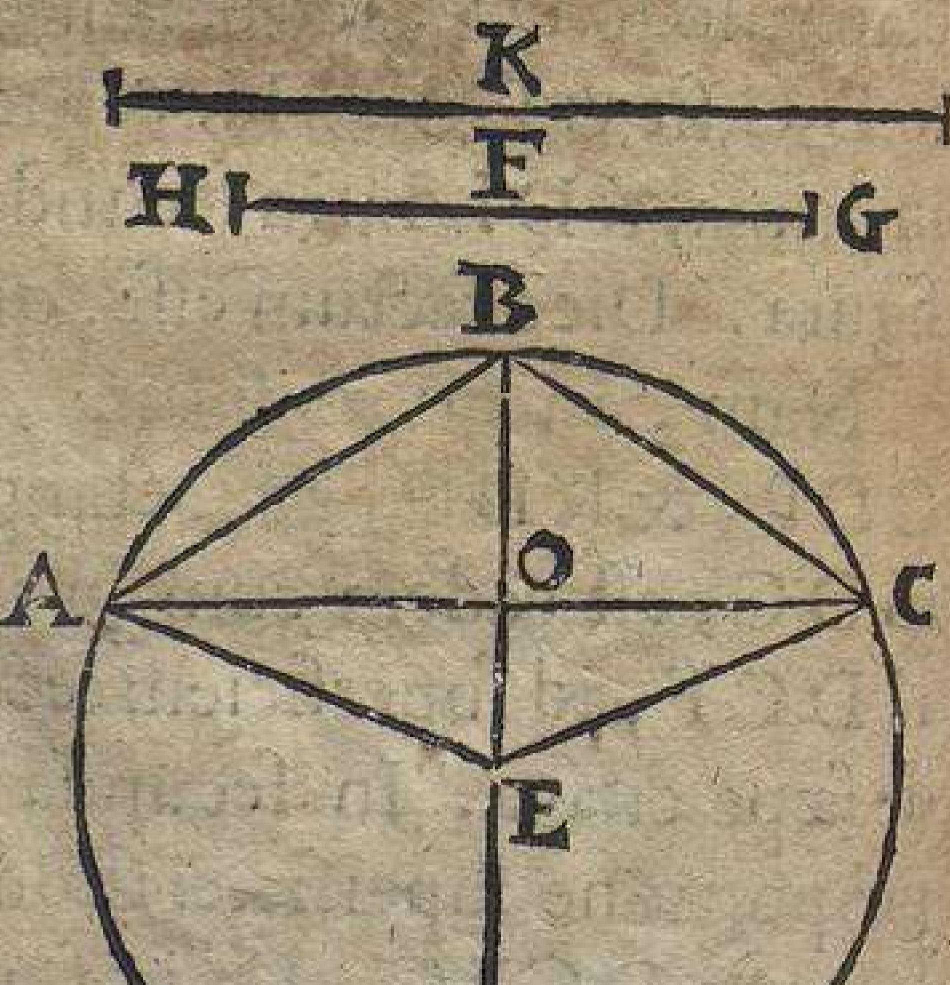
figura autem, eſt eadem cum ea, quam habet totus perimeter coni K D E, ad totum perimetrum hemiſphærij D G E.

Determinationes, & reliqua, petenda ſunt ex antecedenti Lemmate; nam præſens Problema, aliud non eſt, quam antecedens Lemma.

PROBL. XXXIII. PROP. LXXIII.

In data ſphæra reperire ſectorem, cuius ſuperficies ſphęrica, ſit ad ſuperficiem conicam ſui coni, in data proportione.

Datæ ſphæræ ſit diameter D B, centrũ E, & data proportio ſit, quam habet B E, ad H F. Oportet facere, quod imperatum eſt. Sumatur ipſius H F, dupla H G, & fiat, vt E B, ad H G, ſic H G, ad K; deinde diuidatur B D, in O, vt ſit, ſicut B E, ad K, ſic B O, ad O D, vbicunque cadat punctũ O, & per O, duca-



tur

tur perpendicularis A O C, ipsi B D, & reliqua fiant, vt in schemate; & intelligantur solida, &c. Dico inuentũ esse sectorem A B C E, siue maiorem, siue minorem hemisphærio, cuius superficies sphærica A B C, sit ad superficiem conicam coni A E C, vt B E, ad H F. Nam, quoniam factum est, vt E B, ad K, sic B O, ad O D, & proportio B E, ad H G, est subduplicata proportionis B E, ad K, & pariter proportio B O, ad O A, est subduplicata proportionis B O, ad O D. Ergo, & vt B E, ad H G, sic B O, ad O A. Et ad consequentium dimidias. Ergo vt B E, ad H F, sic B O, ad dimidiam A O. Sed, vt B O, ad dimidiam A O, sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum D B O, nempe ei æquale quadratum A B, ad rectangulum sub D B, in dimidiam A O, nempe ad rectangulum sub dimidia B D, nempe sub A E, in totam A O. Ergo vt B E, ad H F, sic quadratum A B, ad rectangulum E A O; nempe superficies sphærica portionis A B C, ad superficiem conicam coni E A C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

VT diximus supra, hoc Problema comprehendit, tàm sectores maiores, quàm minores hemisphærio, & semper punctum O, diuidet B D, vt possit fieri conus, præterquamquod, quando proportio erit dupla, quia tunc, punctum O, cadet in E, nempe in centro.

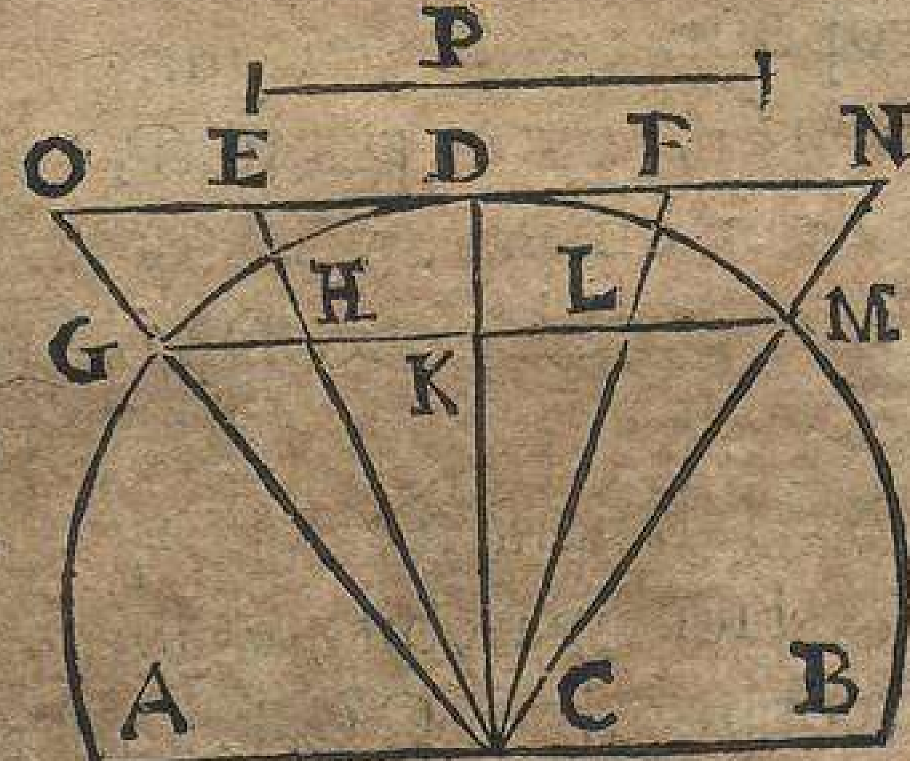
Dominus Ricardus Albius Anglus, Vir nobilitate sanguinis, ac eruditione conspicuus, in suo hemisphærio dissecto propos. 11. soluit, hoc Problema. Conum segmenti, ad conum rectangulum, in quacumque data ratione constituere. Curauimus aliquando, soluere hoc Problema in superficiebus conicis, at animaduertimus, Problema posse proponi vniuersalius, nō solùm in cono rectangulo, sed in omni cono, & non solùm in hemisphærio, sed in quocumque solido rotundo orto ex reuolutione circa axem, cuius basis sit circulus; siue tale solidum sit quodlibet conoides, vel portio sphæræ, sphæroidis, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud.

PROBL. XXXIV. PROP. LXXIV.

Dato quolibet solido rotundo ADB, circa axim DC, cuius basis sit circulus, cuius diameter sit A C B, vertex eius sit punctum D, & dato cono ECF, circa eandē axem CD, cuius basis sit circulus EDF, tangens solidum in vertice D; secare solidum A D B, & conum ECF, plano GM, basi parallelo vt facto cono GCM, sit hic, ad conum HCL, abscisum à cono ECF, in data proportione.

Data

DAta proportio sit, quam habet CD, ad P, & fiat vt P, ad DC, sic quadratum DE, ad quadratum DO, & iuncta OC, per punctum G, vbi CO, secat superficiem solidi, ducatur planũ GHKLM, basi ACB, parallelum, & intelligantur coni GCM, HCL. Quos dico esse quæsitos Est enim, vt CD, ad P, sic quadratum OD, ad quadratum DE; nempe (ob parallelas OD, GK,) sic quadratum GK, ad quadratum HK. Vt autem quadratum GK, ad quadratũ HK, sic circulus, cuius diameter GM, ad circulum, cuius diameter HL, nempe conus GCM, ad conum HCL. Quod erat faciendum.

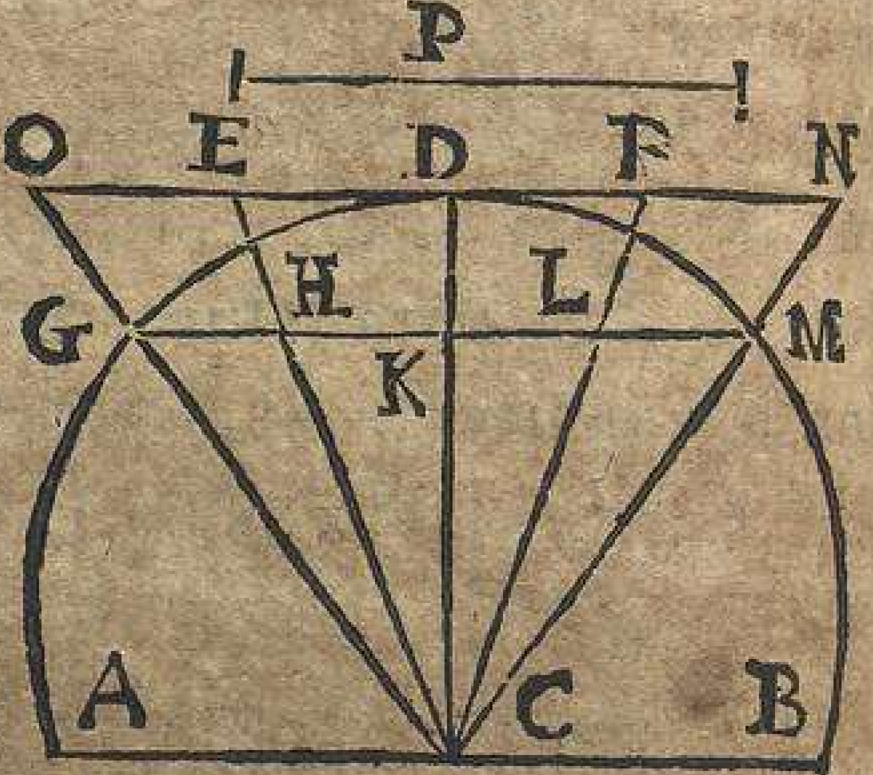


PROBL. XXXV. PROP. LXXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies coni GCM, sit ad superficiem conicam coni HCL, vt CD, ad P.

INtelligantur omnia secta plano consueto modo; & datis duabus rectis lineis CD, DE, continentibus angu-

angulum rectum CDE, ducatur CO, vt rectangulum COD, sit ad rectangulum CED, in data proportione CD, ad P, per proposit. 55. & per punctum G, agatur planum, & fiant omnia, vt in superiori Problemate. Dico &c.



Ná, ob parallelas OD, GK, facilè patebit, esse, vt rectangulum COD, ad rectangulum CED, nempe, vt CD, ad P, sic rectangulum CGK, ad rectangulum CHK, nempe superficiem coni GCM, ad superficiem coni HCL. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXVI. PROP. LXXVI

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidẽ, vt totus perimeter coni CGM, ad totum perimetrum coni CHL, sit vt CD, ad P.

AD soluendum hoc Problema, vtemur prop. 68. nempe, ducemus CO, vt rectangulum COD, cum quadrato OD, sit ad lineam potentem rectangulũ CED, cum quadrato ED, vt CD, ad P; & per punctum

ctum G, ducetur planum, vt prius, & reliqua fient vt prius. Dico perimetrum coni GCM, esse ad perimetrum coni HCL, vt CD, ad P. Demonstratio est facilis, ac proinde omittitur.

LEM. XLI. PROP. LXXVII.

Sit recta linea AB, secta in C, vel bifariam, vel non bifariam, sed adeò vt AC, sit maior CB. Si rursùm CB, secetur in D, & DC, secetur bifariam in E; tria rectangula ACB, erunt maiora tribus rectãgulis AC, EB, tribus rectangulis EDB, & duobus quadratis CE.

Quoniam enim BE, maior est BD, & DE, EC, sunt æquales; ergo tria rectangula BEC, erunt maiora tribus rectangulis BDE. Sed & tria quadrata CE, sunt maiora duobus quadratis CE; ergo tria rectangula BEC, cum tribus quadratis CE; nempe

tria rectangula BCE, erunt maiora tribus rectangulis BDE, & duobus quadratis CE. Sed, si linea AB, secta est bifaria in C, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis A C E; si verò A C, est maior C B, tria rectangula A C E; sunt maiora tribus rectangulis B C E. Ergo, in vtroque casu, tria rectangula A C E, erunt maiora tribus rectangulis B D E, & duobus quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C, E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt maiora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat ostendendum.

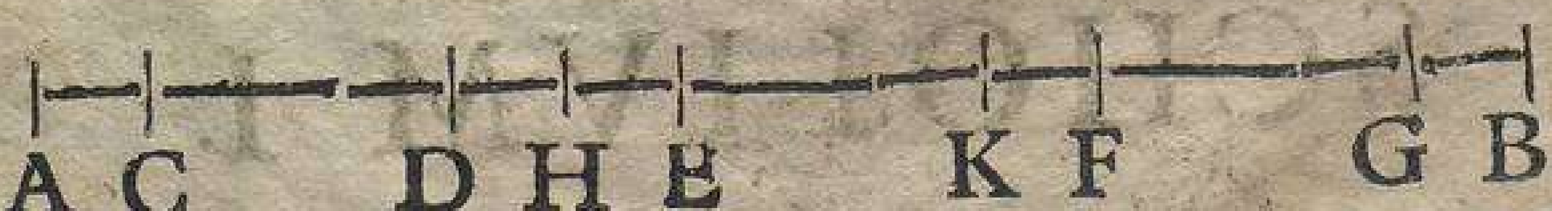
SCHOLIVM.

EX dictis clarè tenetur, quòd, cùm tria rect angula A C, E B, vna cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint minora, quam tripla vnius rectanguli A C B. Si proponatur. Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm secare in puncto D, inter C, B, vt rursùm secta D C, in puncto E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint ad rectangulum A C B, in proportione, vel tripla, vel maiori tripla; tenetur dico, quod semper A C, debet esse minor C B. Et è contra, si proportio sit minor tripla, tenetur, Problema posse solui, siue A C, sit æqualis, siue maior C B.

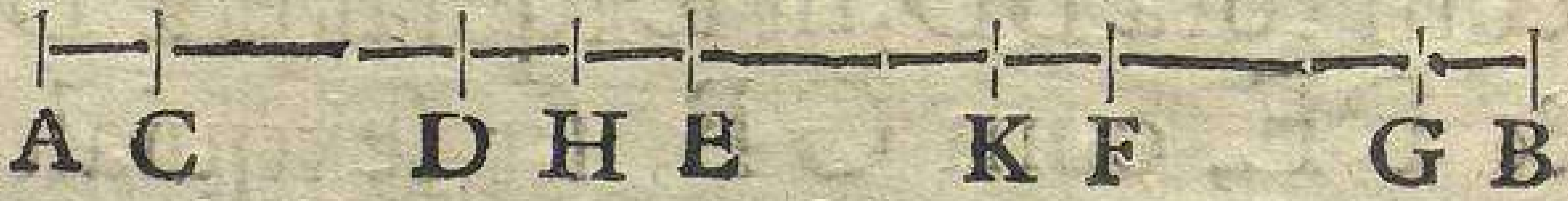
LEM-

LEM· XLII· PROP· LXXVIII·

Sit recta linea A B, ſecta in punctis C, D, E, F, G, ſic, vt D C, ſit dupla A C; D F, ſit dupla F B; & DE, ſit dupla G B. Patet, quod, cum tota BD, ſit ſexquialtera D F, & DE, cum G B, ſit ſexquialtera DE, etiā reliqua E G, erit ſexquialtera E F. Si D E, ſecetur biſariam in H, tria rectangula C D F, cum rectangulo D E B, erunt æqualia, rectangulo A D E, triplo rectangulo C D, H F, triplo rectangulo H E F, & duplo quadrato D H.



QVoniam enim B G, & D H, ſunt æquales, quia dimidiæ eiuſdem D E; ergo rectangulum D E, X G B, G B, erit æquale rectangulo E D H, seù duobus quadratis D H. Communi addito rectangulo D E G. Ergo rectangulum D E G, cum rectangulo D E, G B, nempe totum rectangulum D E B, erit æquale rectangulo D E G, & duplo quadrato D H. Sed rectangulo D E G, est æquale triplum rectangulum H E F, quia G E, est sexquialtera E F, & D E, est dupla H E. Ergo rectangulum D E B, erit æquale triplo rectangulo H E F, & duplo



quadrato D H. Et communibus additis tribus rectangulis C D F. Ergo tria rectangula C D F, cum rectangulo D E B, erunt æqualia tribus rectangulis C D F, (nempe tribus rectangulis C D H, & tribus rectangulis C D, H F,) tribus rectangulis H E F, & duplo quadrato D H. Sed tria rectangula C D H, quia A D, est sexquialtera D C, & D E, est dupla D H, faciunt rectangulum A D E. Ergo tria rectangula C D F, cum rectangulo D E B, erunt æqualia rectangulo A D E, triplo rectangulo C D, H F, triplo rectangulo H E F, & duplo quadrato D H. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

Ex dictis infertur, quod si D F, sit maior D C, vnde, & D B, sexquialtera D F, sit maior A D, sexquialtera C D, & ex D B, auferatur K B, æqualis A D. Inferfertur inquam, quod, cùm tunc, duo rectangula A D E, & D E, K B, ſint æqualia, ſi hæc hinc inde auferantur, etiam reliqua remanebunt æqualia. Vnde, tria rectangula C D F, cum rectangulo D E K, erunt æqualia tribus rectangulis C D, H F, tribus rectangulis H E F, & duobus quadratis D H.

SCHOLIVM II.

INfertur ſecundò, quod ſi imperetur. Datam C F, ſectam in puncto D, rurſùm diuidere in E, vt diuiſa D E, bifariam in H, tria rectangula C D, H F, vna cum tribus rectangulis H E F, & cum duobus quadratis D H, ſint ad rectangulum C D F, in data proportione maiori, quam tripla. Infertur inquam, quod Problema erit determinatum. Et determinatio erit, vt facta D B, ſexquialtera D F, & ab ipſa ablata B K, ſexquialtera C D, proportio data, non ſit maior ea, quam habet triplum rectangulum C D F, cum quadrato dimidiæ D K, ad rectangulum C D F. Nam, cum ſupra probatum ſit, illa plana eſſe æqualia triplo rectangulo C D F, & rectangulo D E K, patet, quod ex omnibus rectangulis factis ſub ſegmentis D K, diuiſæ in puncto, rectangulum ſub partibus æqualibus, ſeù quadratum dimidiæ, eſt maximum.

LEM. XLIII. PROP. LXXIX.

Si recta linea A B, sit taliter secta in C, vt A C, sit, vel minor, vel æqualis tertiæ parti C B; & rursùm C B, secetur in D, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, erunt minora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim B C, est vel tripla, vel maior tripla A C. Ergo rectangulum B C E, erit, vel æquale, vel maius triplo rectangulo A C E. Sed rectangulū

B C E, est æquale rectangulo B D E, & duplo quadrato D E, vel C E, vt consideranti patet. Ergo, & rectangulum B D E, cum duplo quadrato C E, erit absolutè maius, triplo rectangulo A C E. Et communi addito triplo rectangulo A C, E B. Ergo triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duobus quadratis C E, erit maius triplo rectangulo A C E, &

triplo

triplo rectangulo A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

Ex dictis infertur, quod si linea A B, secta in C, proponatur taliter secanda in D, vt secta C D, in E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint, vel tripla; vel minora, quam tripla, rectanguli A C B. Infertur inquam, quod A C, non potest esse, nec minor, nec æqualis tertiæ parti C B, sed maior.

LEM. XLIV. PROP. LXXX.

Si linea A B, secta bifaria in C, rursùm secetur in D, inter C, B, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

Qvoniam enim, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis D E, vel

vel C E, vt consideranti patet; & pariter sunt æqualia tribus rectangulis A C E; ergo tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C,

E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & sex quadratis C E. Et ablatis hinc inde quatuor quadratis C E, quæ sunt æqualia quadrato C D. Ergo tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate habemus, quod tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis B D E, & cum duobus quadratis C E, erunt maiora, quam du pla rectanguli A C B. Nam ostensa sunt æqualia tribus rectangulis A C B, minus quadrato C D. Sed hæc sunt maiora quam dupla rectanguli A C B; quia quadratum C D, est minus quadrato C B, nempe vno rectangulo A C B. Vnde habemus, quod si proponatur: Diuidere lineam A B, sectam bifariam in C, rursùm in D, vt diuisa C D, bifariam in E, tria rectangula A C, E B, cū tribus B D E,

&

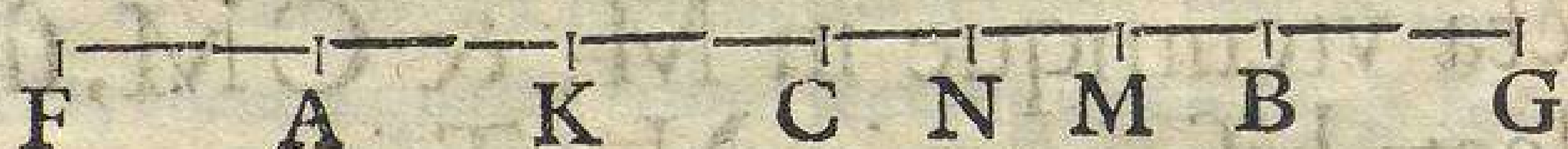
& cum duobus quadratis C E, ſint ad rectangulum A C B, in data proportione minori tripla, hæc tamen proportio debet eſſe maior dupla.

LEM. XLV. PROP. LXXXI.

Sit recta linea A B, taliter ſecta in C, vt A C, ſit maior C B, & C F, ſit ſexquialtera C A, & F K, ſit ſexquialtera C B, quæ C B, ſit ſecta vtcumque in M, & C M, ſit ſecta bifariam in N. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis N M B, & duobus quadratis C N.

Fiat C G, ſexquialtera B C. Quoniam G C, eſt æqualis F K, quia ambæ factæ ſunt ſexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C M, erit æquale rectangulo G C M, nempe rectangulo B C M, & rectangulo G B, M C. Sed rectangulum G B, M C, eſt æquale rectangulum B C N, quia B C, eſt dupla G B, & C N, eſt dimidia

dia C M; & rectangulum B C N, est æquale rectangulo B M N, & duplo quadrato C N, vt consideranti patet; & pariter rectangulum B C M, est æquale quadrato C M, & rectangulo B M C, nempe duplo rectangulo B M N. Ergo rectangulum F K, C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, & quadrato C M. Et communi addito rectangulo K C M. Ergo duo rectangula F K, C M, & K C M, nempe rectangulum F C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, quadrato C M, & rectangulo K C M. Sed quoniam rectangulũ F C M,



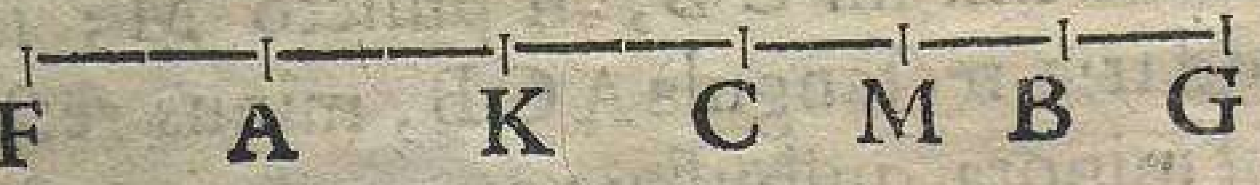
est æquale triplo rectangulo A C N, quia F C, est sexquialtera A C, & C M, est dupla C N; & pariter rectangulum K C M, cum quadrato C M, facit rectangulum K M C. Ergo, & triplum rectangulum A C N, erit æquale triplo rectangulo N M B, duplo quadrato C N, & rectangulo K M C. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectangulis A C, N B. Ergo tria rectangula A C N, cum tribus rectangulis A C, N B, (quæ faciunt tria rectangula A C B,) minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis B M N, & duobus quadratis C N. Quod erat ostendendum.

LEM-

LEMMA XLVI. PROP. LXXXII.

Sit recta linea F B, ſecta in punctis A, K, C, vt in ſuperiori Lem. ſed C B, ſit ſecta tantùm bifariam in M. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M.

FIat G C, ſexquialtera C B. Quoniam F K, & G C, ſunt æquales, quia ambæ ſexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C B, erit æquale rectangulo G C B, nempe rectangulo G B C, & quadrato B C. Sed quia tres G B, B M, & M C, ſunt æquales, rectangulum



G B C, eſt æquale duplo quadrato B M, vel M C. Ergo rectangulũ F K, C B, erit æquale duplo quadrato C M, & quadrato C B. Et communi addito rectangulo K C B. Ergo duo rectangula F K, C B, & K C B, nempe rectangulum F C B, erit æquale duobus quadratis C M, quadraro C B, & rectangulo K C B. Sed rectangulum F C B, eſt æquale tribus rectangulis A C M, quia F C, eſt ſexquialtera C A, & B C, eſt dupla C M; & pariter rectangulum K C B, cum quadrato C B, facit rectangulum K B C. Ergo tria rectágula A C M, erunt æqualia duobus quadratis C M, & rectangulo K BC. Quo hinc inde ablato, & additis tribus rectangulis A C, M B. Ergo tria rectangula A C M, cum tribus rectangulis A C, M B, nempe tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

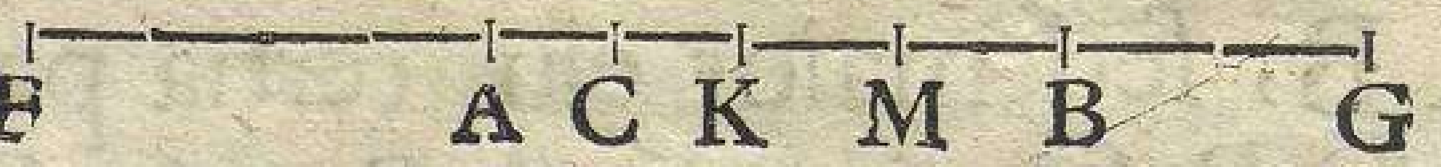
CVM linea F B, sit eadem in duabus propositionibus superioribus, & eodem modo diuisa, præterquam quod in 82 linea C B, tantùm diuiditur bifariam, & in 81. diuiditur prius in M, postea C M, bifariam in N; & cum rectangulum K B C, sit maius rectangulo K M C, & quocumque alio K M C, quod habeatur secando lineam C B, in puncto M; sequitur etiam, quod tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, sint minora quibuscunque tribus rectangulis A C B, minus rectangulo K M C, quod habeatur ex tali sectione. Vnde, si proponatur. Datam lineam A B, sectam in puncto C, adeò vt A C, sit maior C B, rursùm diuidere in M, inter C, B, vt secta bifariam C M, in N, tria rectangula A C, N B, cum tribus rectágulis N M B, & cum duobus quadratis C N, sint ad rectangulum A C B, in data proportione minori, quam tripla; patet, hanc proportionem debere esse adeò minorem tripla,

pla, vt tamen ſit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, facto ex compoſita ex K C, quæ ſit exceſſus ſexquialteræ A C, ſuper ſexquialteram C B, & ex C B, in C B, ad rectangulum A C B; vt conſideranti patet, alioquin C B, non poſſet diuidi.

LEM. XLVII. PROP. LXXXIII.

Sit recta linea F G, ſecta in punctis A, B, & C, vt F A, ſit minor A B, ſed maior eius tertia parte, & G B, ſit dimidia A B, & G C, ſit ſexquialtera F A, & C B, ſit diuiſa in M, & A M, biſariã in K. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A M C, erunt æqualia tribus rectangulis F A, K B, tribus K M B; & duobus quadratis A K.

QVoniam rectangulum M A K, eſt æquale duobus quadratis A K, quia M K, & K A, ſunt æquales. Ergo communibus additis tribus rectãgulis A K, B M, duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulo M A K, & tribus rectangulis B M, A K. Sed rectangulum M A K, cum rectangulo B M, A K, facit rectangulum B A K; & duo rectangula B M, A K, ſunt æqualia rectangulo B M A. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulis B A K, & B M A. Sed rectangulum B A K, eſt æquale rectangulo B G, A M, quia G B, eſt dimidia B A, & M A, eſt dupla A K. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, ſeù B M K, erunt æqualia rectangulo B M A, & rectan-



gulo G B, M A, quæ duo faciunt vnicum rectangulum G M A. Sed quoniam G C, eſt ſexquialtera F A, & A M, eſt dupla A K; ergo tribus rectangulis F A K, erit æquale rectangulum G C, A M. Sed rectangulum G C, A M, eſt æquale rectangulo G M A, & rectãgulo C M A. Ergo ablato rectangulo C M A, tria rectãgula FAK, minus rectangulo C M A, erunt æqualia rectangulo GMA. Sed rectangulo G M A, oſtenſa ſunt, ſupra, æqualia duo quadrata A K, & triplum rectangulum K M B. Ergo tria rectangula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis K M B. Et communibus additis tribus rectangulis F A, K B. Ergo tria rectangula F A K, cum tribus rectangulis F A, K B, nempe tria rectangula F A B, minus

rec-

rectangulo C M A, erunt æqualia, tribus rectangulis F A, K B, & tribus rectangulis K M B, & duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

LEM. III. PROP. LXXXIV.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, C, B, vt in superiori Lemmate, sed A B, tantùm in K, bifariam. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A B C, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis F A, K B.

NAM eodem modo, quo supra probabitur tria rectangula F A K, esse æqualia rectangulo G C, A B, nempe rectangulo G B A, & rectangulo C B A. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectãgulis F A,

K B; patebit, tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, æqualia esse, tribus rectangulis F A, K B, & rectangulo G B A, hoc est, (quia tres G B, B K, & K A, sunt æquales,) duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

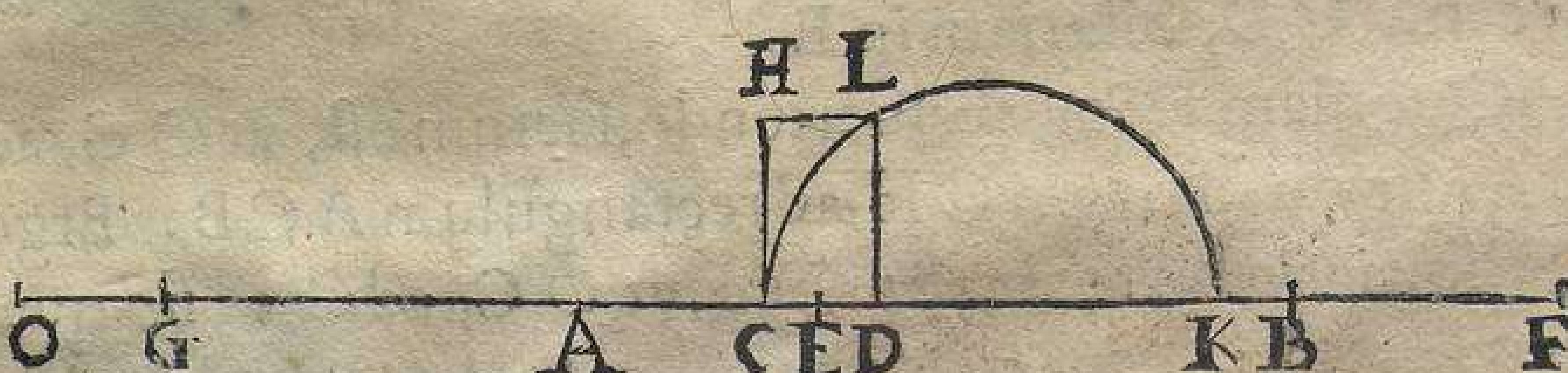
ETiam in duobus superioribus Lemmatibus, patet, lineam F B, diuidi eodem pacto, præterquã quod quando punctum M, cadit in C. Vnde cum rectangulum C B A, sit maius omnibus, quæ habentur, quando punctum M, cadit inter C, B, sequitur etiam, quod tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, sint minora quibuscumque tribus rectangulis F A B, minus rectangulo C M A, quod habeatur ex tali sectione. Vnde si proponatur. Datam rectam F B, sectam in A, vt F A, sit minor A B, sed maior eius tertia parte, & in C, inter A, B, vt facta G A, sexquialtera A B, etiam G C, sit sexquialtera F A; rursùm diuidere ipsam in M, inter C, B, vt secta A M, bifariam in K; tria rectangula F A, K B, cum tribus rectangulis K M B, & cum duobus quadratis A K, sint ad rectangulum F A B, in data proportione minori quam tripla; patet hanc proportionem adeò debere esse minorem tripla, vt tamen sit maior ea, quam habent tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, facto ex A B, in excessum sexquialteræ F A, super dimidiam A B, ad rectangulum F A B. Quod facilè patet consideranti, alioquin non posset diuidi.

LEM-

LEM·IL· PROP·LXXXV·

Datam rectam lineam A B, ſectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt diuiſa C D, bifariam in E, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ſint ad rectangulum A C B, in data proportione.

HOC Lemma quinque habet caſus. Nam, vel proportio data eſt maior, vel æqualis, vel minor tripla; & ſi eſt minor, vel A C, eſt æqualis C B, vel maior, vel minor. In omnibus iſtis caſibus, Lem-

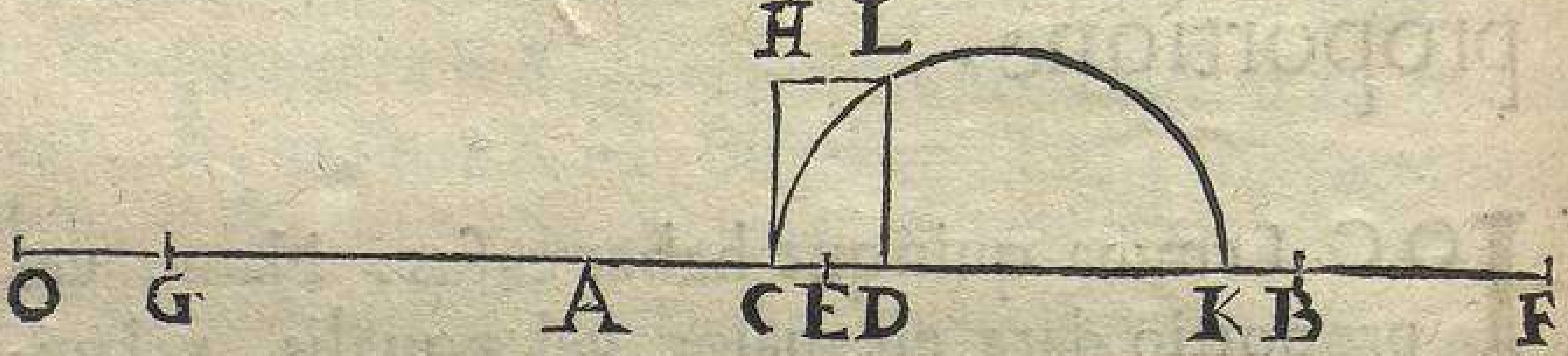


ma recipit aliquas determinationes, quas aſſignabimus vnicuique. Sit ergo proportio data maior quam tripla, & ſit ea, quam habet O C, ad C A. In hoc caſu, Lemma recipit duas determinationes, vna, quæ habe-

tur

tur ex Scholio propositionis 77. est, quod A C, sit minor C B; alia, quæ habetur ex Scholio 2. propos. 78. & est, quod facta F C, sexquialtera C B, & ab ipsa ablata F K, sexquialtera A C, proportio data nō sit maior ea, quam habet triplum rectangulum A C B, cum quadrato dimidiæ C K, ad rectangulum A C B.

Quoniam O C, est maior tripla C A, fiat G C, eius tripla, & super C K, fiat semicirculus, & fiat, vt C A, ad O G, sic rectangulum A C B, ad quadratum C H, lineæ erectæ perpendiculariter à puncto C, super A B. Patebit inferius, hanc non esse maiorem dimidia C K.



Si ergo per punctum H, ducatur H L, parallela A B, hæc occurret semicirculo. Occurrat in L, & dimittatur perpendicularis L D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

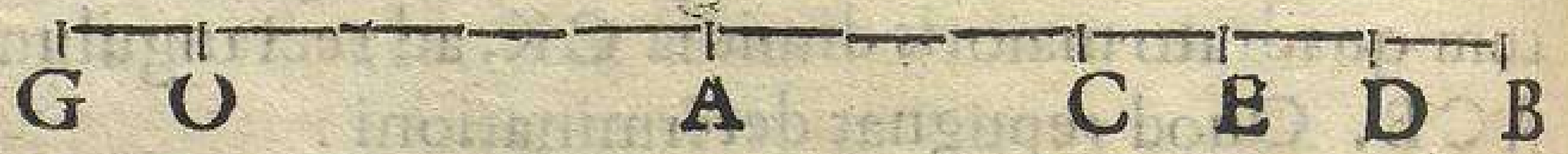
Quoniam enim, conuertendo, factum est, vt O G, ad C A, sic quadratum C H, ad rectangulum A C B. Ergo & tribus vicibus componendo, vt O C, ad C A, sic quadratum C H, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed quadratum C H, est æquale quadrato D L, seù rectangulo C D K. Ergo, & vt O C, ad C A, sic rectangulum C D K, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed triplum rectangutangulum A C B, cum rectangulo C D K, ex Schol. 1. propoſit. 78. eſt æquale triplo rectangulo A C, E B, triplo rectangulo E D B, & duobus quadratis C E. Ergo & vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A C B.

Quòd verò H C, ſit minor dimidia C K, patet ex determinatione, alioquin, eodem progreſſu, probaremus eſſe, vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C B, cum quadrato maioris dimidia C K, ad rectangulum A C B. Quod repugnat determinationi.

SI verò proportio data ſit tripla, ex Scholio propoſitionis 77. habemus, quod A C, debet eſſe minor C B, ſed ex Scholio propoſitionis 79 habetur debere eſſe maiorem eius tertia parte. Fiat ergo B F, æqualis A C, & ex F B, auferatur F D, æqualis dimidiæ C F, quæ ex determinatione poterit auferri. Dico punctum D, eſſe quæſitum. Secetur C D, bifariam in E. Quoniam

A C, F B, ſunt æquales; ergo, & earum triplæ erunt æquales. Vnde tres A C, erunt æquales etiam tribus B D, & tribus D F; nempe D C, quæ eſt tripla D F. Et omnibus ductis in C D; tria rectangula A C D, erunt æqualia tribus rectangulis B D C, & quadrato C D. Et ſubduplatis omnibus, tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & dimidio quadrati C D, nempe duobus quadrati C E. Et additis communibus tribus rectangulis A C, E B; tria rectangula, A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, (nempe tria rectangula A C B,) erunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus E D B, & duobus quadratis C E. Ergo hæc sunt tripla vnius rectanguli A C B, nempe sunt ad ipsum, vt O C, ad C A. Quod erat faciendum.

SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit æqualis C B. Patet ex Scholio propos. 80. debere esse



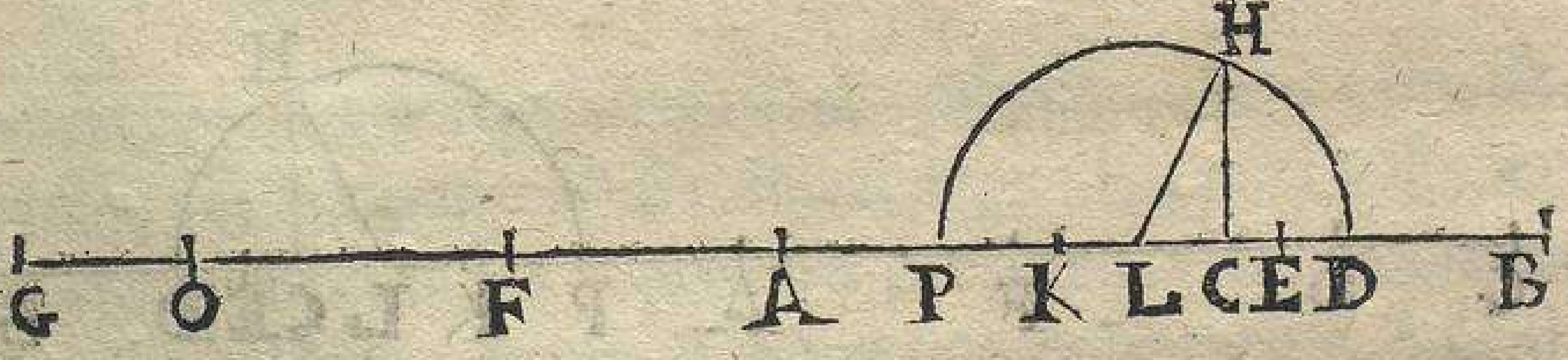
maiorem dupla. Fiat G C, tripla C A. Ergo G O, ex determinatione, erit minor A C, vel C B. Si ergo inter G O, & C B, inueniatur media, erit minor C B. Sit hæc C D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Diuidatur C D, bifariam in E. Quoniam rectangulum G O, C B, est æquale quadrato C D. Ergo cómuni addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe totum rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Sed quoniam G C, est tripla C A, rectangulum G C B, erit æquale triplo rectangulo A C B. Ergo, & triplum rectangulum A C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed vt O C, ad C A, sic rectangulum O C B, ad rectangulum A C B. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus quadrato C D, ad rectangulum A C B. Sed tria rectangula A C B, minus

qua-

quadrato C D, ex propositione 80 sunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis E C. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B.

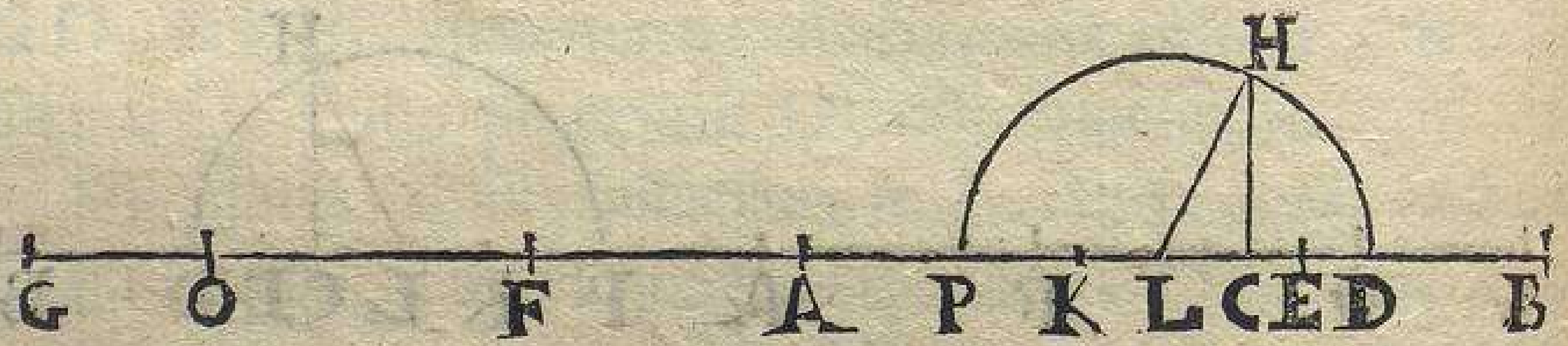
SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit maior C B. Fiat C G, tripla C A, & fiat C F, sexquialtera A C, & ex ipsa auferatur F K, sexquialtera B C. Determinatio huius casus est, ex Scholio propos. 82. quod sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B.



Inter G O, C B, sit media proportionalis C H, erecta normaliter à puncto C, super A B, & diuisa K C, bifariam in L, & iuncta L H; centro L, interuallo L H, fiat semicirculus P H D, qui, vt patebit, secabit C B, in D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Rectangula enim G O, C B, & P C D, sunt æqualia inter se, quia ambo sunt æqualia eidē quadrato H C, ex constructione. Sed rectangulum P C D, est æquale rectangulo K D C, quia P K, est æqualis C D. Ergo rectangulum K D C, erit æquale rectangulo G O, C B.

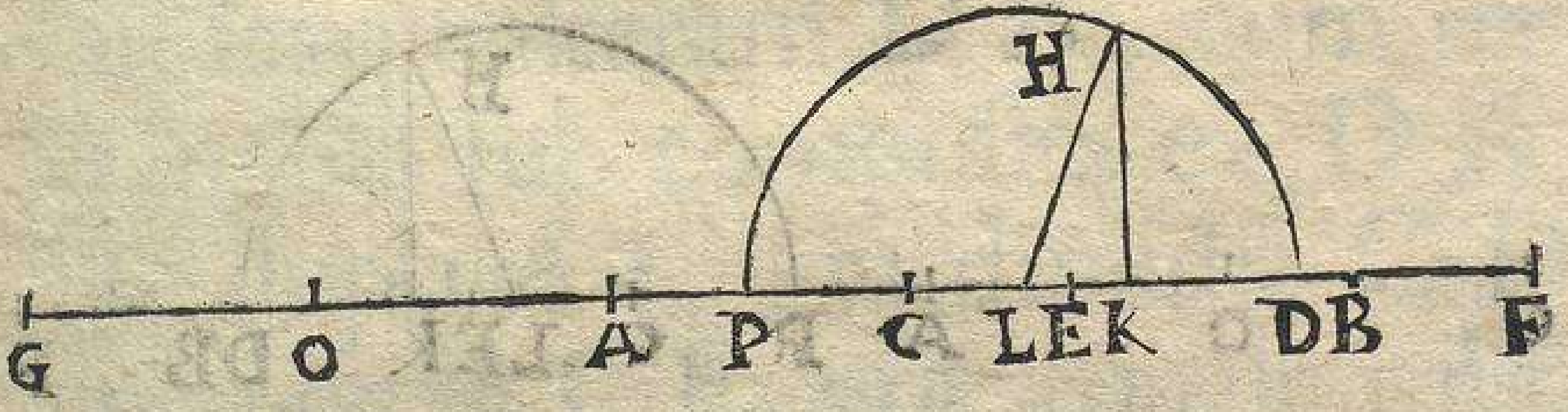
Ergo communi addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo K D C. Sed quia G C, est tripla A C, rectangulum G C B, est æquale tribus rectangulis A C B. Ergo tria rectangula A C B, erunt æqualia rectangulis O C B, & K D C. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus rectangulo K D C, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K D C, ad rectãgulum A C B. Sed, per proposit. 81. tria rectangula



A C B, minus rectangulo K D C, sunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B. Quod erat &c.

Quòd verò semicirculus secet C B, in D, patet ex determinatione, alioquin eodem progressu demonstrabimus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K B C, vel minus maiori eo, ad rectangulum A C B. Quod determinationi aduersatur.

SI tandem proportio data ſit minor tripla, ſed A C, ſit minor C B. In primis, ex Schol. propoſit. 79. patet, oportere A C, eſſe maiorem tertia parte C B. Fiat F C, ſexquialtera C B, & auferatur F K, ſexquialtera A C. Iam punctum K, cadet inter C, B; nam cum A C, ſit maior tertia parte C B; ergo, quorum C B, eſt tria, & B F, eſt vnum cum dimidio, A C, eſt magis, quam

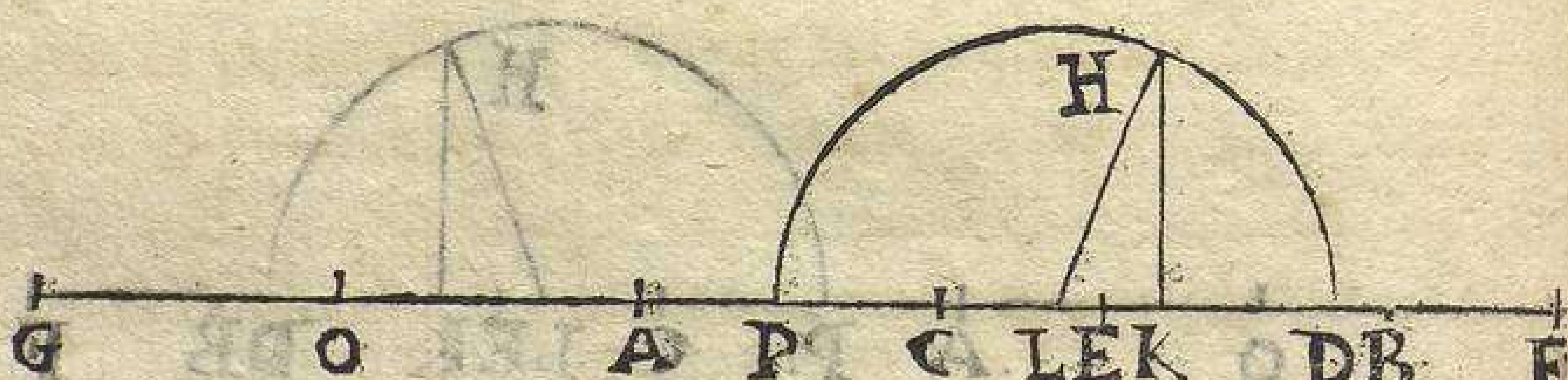


vnum, & eius ſexquialtera F K, eſt maior vno cum dimidio, nempe maior B F. Patet ergo, his præmiſſis, ex Scholio propoſit. 84. oportere proportionem datam maiorem eſſe ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B. Secetur ergo C K, bifariam in L, & inter G O, & C B, ſit media proportionalis K H, erecta normaliter ſuper A B, à puncto K, & iuncta L H, centro L, interuallo L H, deſcribatur ſemicirculus P H D, ſecans K B, in D, (ſecabit enim, vt patebit.) Dico punctum D, eſſe quæſitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam rectangula G O, C B, & P K D, ſunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato K H; & rectangulo P K D, eſt æquale rectangulum C D K. Ergo rectangulum G O, C B, erit æquale rectangulo C D K.

Qua-

Quare, communi addito rectangulo O C B. Ergo duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe vnicum rectangulum G C B, seù triplum rectangulum A C B, quia G C, est tripla C A, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo C D K. Quo hinc inde ablato, triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, erit æquale rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad



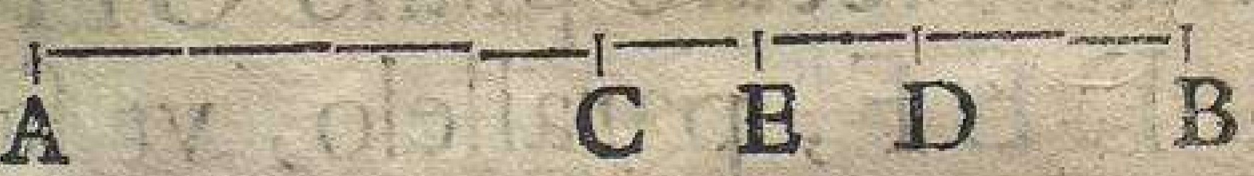
ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, hoc est, ex proposit. 83. tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis E C, ad rectangulum A C B. Quod erat faciendum.

Assumptum patet ex determinatione, & ex processu demonstrationis, & etiam ex his, quæ dicta sunt in alijs casibus.

LEM·L·PROP·LXXXVI·

Sit recta linea AB, secta in punctis C, & D, vtcumque, & CD, sit secta bifariam in E. Rectangulum sub composita ex DA, AC, in sexquialteram DB, cum rectangulo sub composita ex DA, & dupla AC, in dimidiã CD, nempe in CE, erit æquale tribus rectangulis AC, EB, tribus rectangulis EDB, & duobus quadratis CE.

NAM rectangulum sub composita ex DA, AC, in sexquialteram DB, æquatur duobus rectan-



gulis sub AC, in sexquialteram DB, & rectangulo sub CD, in sexquialteram DB. Rectangulum verò sub dupla AC, in sexquialteram DB, æquatur triplo rectangulo AC, DB. Et pariter rectangulum sub CD, in sexquialteram DB, æquatur triplo rectangulo EDB.

Ergo

Ergo rectangulum sub composita ex DA, AC, in sexquialteram DB, æquatur triplo rectangulo AC, DB, & triplo rectangulo EDB.

Pariter, rectangulum sub composita ex DA, & dupla AC, in CE, æquatur triplo rectangulo ACE, & rectangulo DCE, nempe duplo quadrato CE. Ergo rectangulum sub composita ex DA, AC, in sexquialteram DB, cum rectangulo sub composita ex DA, & dupla AC, in CE, æquatur tribus rectangulis AC, DB, tribus rectangulis EDB, tribus rectangulis ACE, siue AC, ED, & duobus quadratis CE. Sed tria rectangula AC, DB, cum tribus rectangulis AC, ED, faciunt tria rectangula AC, EB. Quare patet propositum.

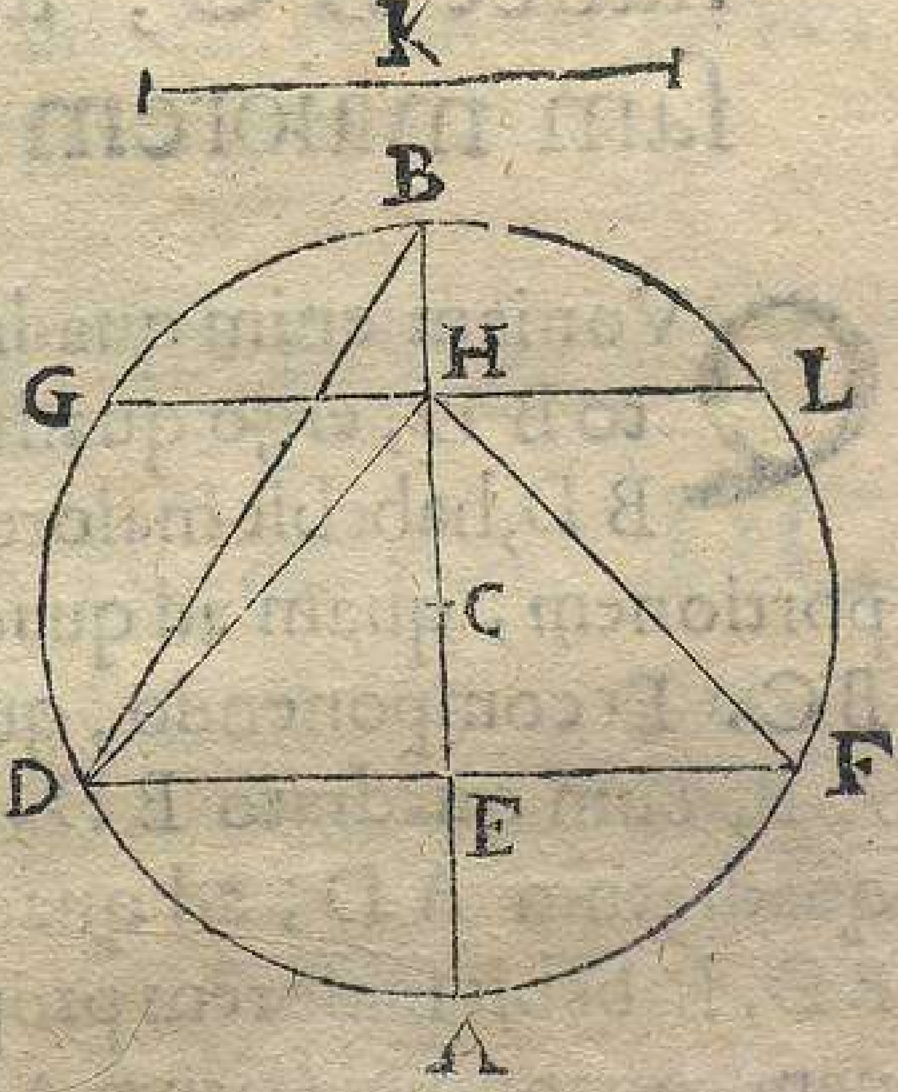
PROBL. XXXVII. PROP. LXXXVII

Datam sphæram, cuius diameter sit AB, sectam plano DEF, cui diameter AB, sit perpendicularis, rursùm secare plano GHL, plano DEF, parallelo, vt facto cono, cuius basis DEF, axis HE, axis etiam segmenti intermedij GBFH; segmentum sit ad conum DHF, in data proportione.

Datam

Data proportio sit, quam habet A B, ad K, & data A B, secta in puncto E, rursùm secetur in H, inter E, B, vt secta E H, bifariam in C, sit, vt A B, ad K, sic triplum rectangulum A E, C B, cum triplo C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B, per propos. 85. & per punctum H, agatur planũ G H L, plano D E F, parallelum, & fiat conus D H F. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, per ab alijs ostensa, præcipuè à Caualerio lib. 3. Geometr. indiuisib. propos. 3. proportio segmenti intermedij G D F L, ad conum D H F, est eadem, cum proportione rectanguli compositæ ex H A, & A E, in sesquialteram B H, vna cũ rectangulo compositæ ex H A, & dupla A E, in E C. Sed, per propos. antecedentem, hæc proportio est eadem cum proportione tripli rectanguli A E, C B, cum

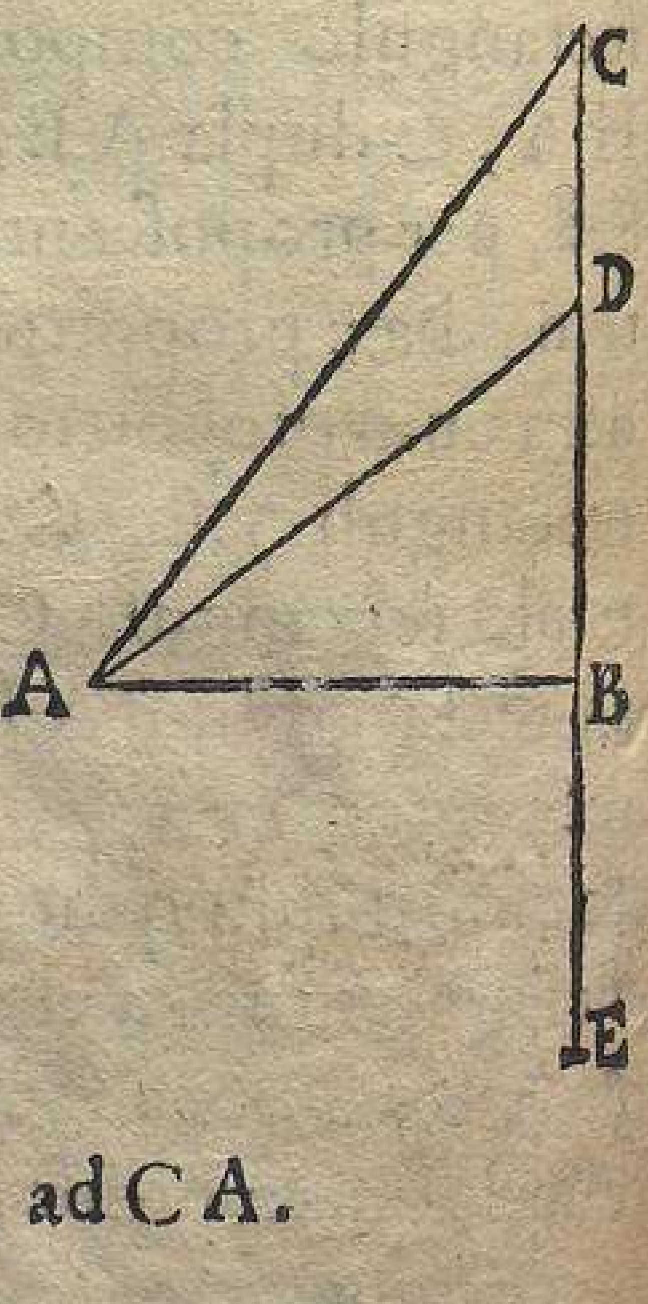


triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B. Sequitur ergo, quod, vt triplũ rectangulum A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B, sic sit segmentum intermedium G D F L, ad conum D H F, & A B, ad K. Vnde cum præsens Problema non sit aliud, quam propos 85. sequitur recipere easdem determinationes cum ipsa. Quare &c.

LEM. LI. PROP. LXXXVIII.

Sint duo triangula rectangula ABD, ABC, quorum angulus rectus, qui ad B. Dico DB, ad DA, hypotenuſam minorem, habere minorem proportionem, quam habet BC, ad CA, hypotenuſam maiorem.

QVoniam enim quadratum BC, maius eſt quadrato B D, ergo quadratum A B, ad quadratum B D, habebit maiorem proportionem, quam ad quadratum BC. Et componendo, quadratũ A B, cum quadrato B D, nempe quadratum A D, ad quadratum B D, habebit maiorem proportionem, quam quadratum A B, cum quadrato B C, nempe quadratum A C, ad quadratum C B. Quare, & linea A D, ad lineam D B, habebit maiorem proportionem, quam A C, ad C B. Et conuertendo B D, ad D A, habebit minorem proportionem, quam B C, ad C A.



SCHOLIVM.

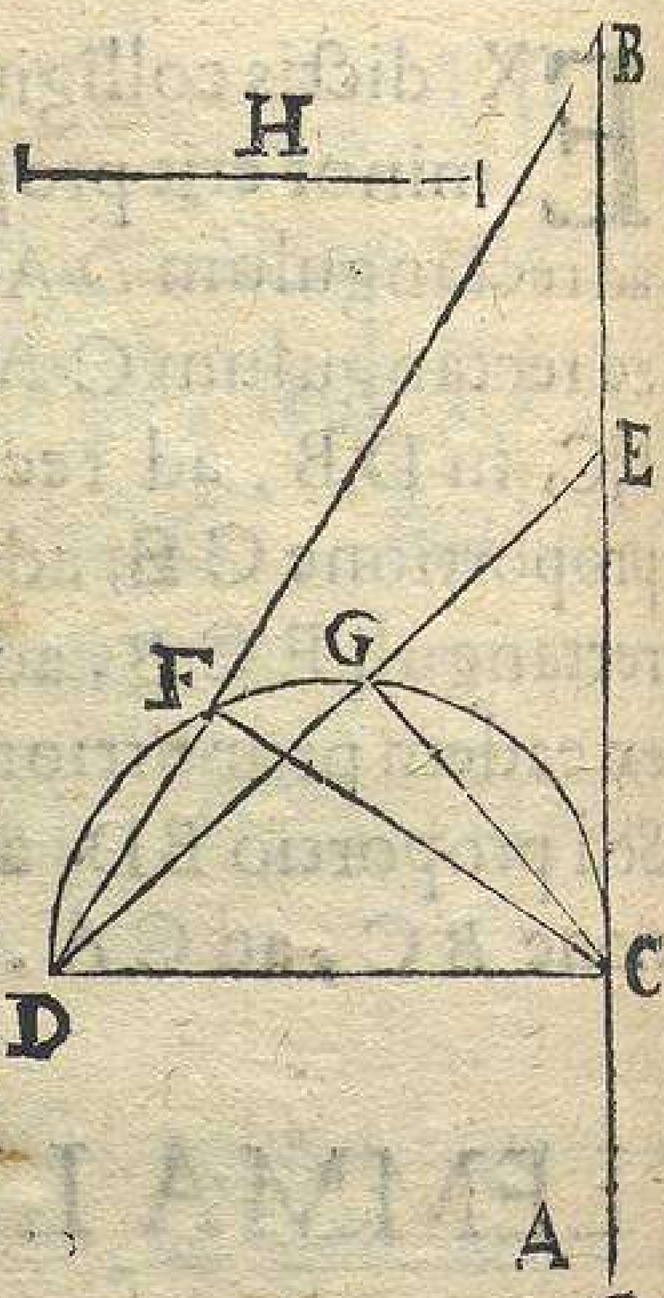
EX dictis colligitur, quod si producatur C B, in E, minor erit proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, proportione rectanguli E C B, ad rectangulum C A B. Nam, proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, componitur ex proportione C E, ad A B, & B D, ad D A; & proportio rectanguli E C B, ad rectangulum C A B, componitur ex eadem proportione E C, ad A B, & B C, ad C A. Sed proportio B D, ad D A, ostensa est minor proportione B C, ad C A. Quare patet propositum.

LEMMA LII. PROP. LXXXIX.

Data recta linea A B, & data D C, ei perpendiculari, ducere à puncto D, D E, occurrentem B C, inter B, C, vt rectangulum sub B A, in E C, sit ad rectangulum E D C, in data proportione.

HOC Lemma est determinatum, & determinatio est, quod ducta B D, proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B C, ad rectangulum B D C. Quæ determinatio patet ex superiori Scholio.

Sit ergo proportio data, quam habet H, ad D C, & super D C, fiat semicirculus ad partes B C, secans B D, in puncto F, & iungatur F C; deinde fiat vt B A, ad H, sic D C, ad aliam, quæ infra ostendetur minor C F; quæ aptetur à puncto C, & sit C G, & per puncta D, G, ducatur D G E, occurrens B C, in E. Dico factum esse, quod imperebatur.



Quoniam enim proportio D C, ad H, componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt B A, ad H, sic facta est D C, ad C G; & propter similitudinem triã gulorum DCG, & D E C, vt D C, ad C G, sic est D E, ad E C. Ergo proportio D C, ad H, componetur quoque ex proportionibus D C, ad A B, & D E, ad E C. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Ergo, & vt D C, ad H, sic rectangulum E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Quare, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub B A, in C E, ad rectangulum E D C. Quod erat faciendum.

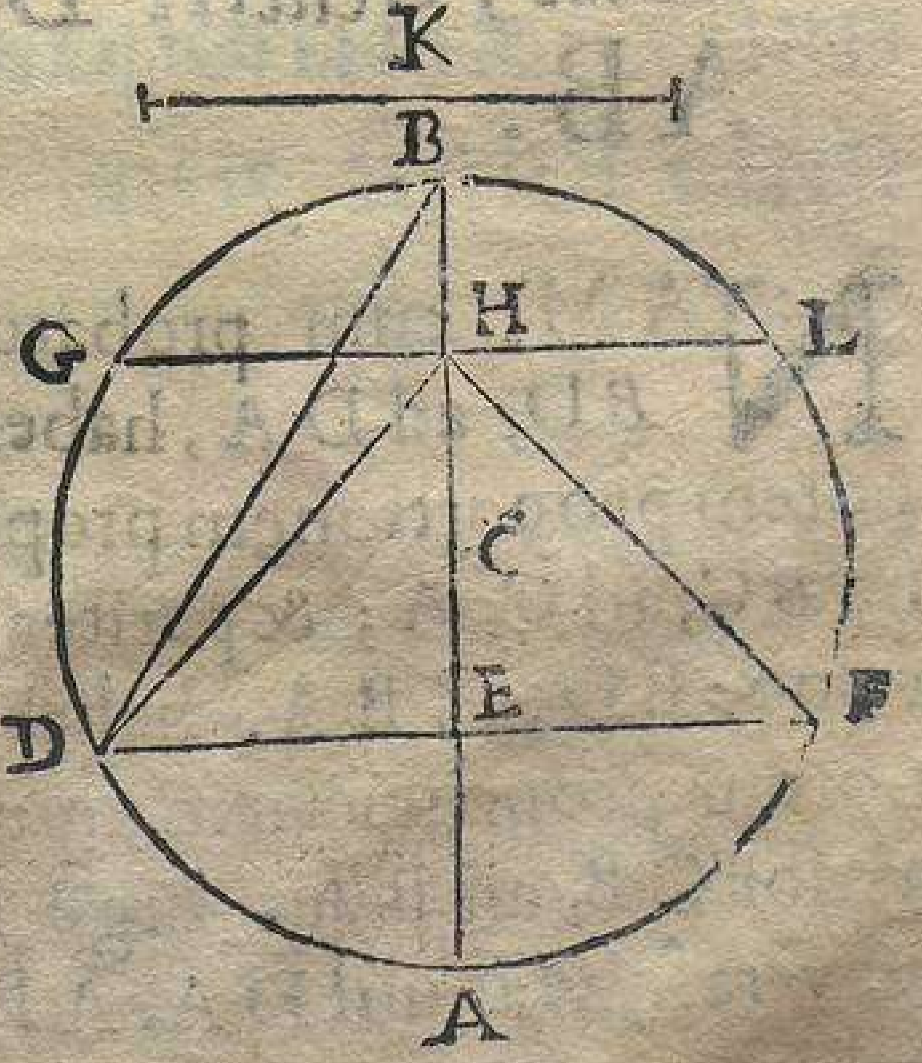
Quòd verò C G, minor sit C F; patet, quia si esset æqualis, vel maior, eodem discursu probaretur esse H, ad D C, vel in æquali, vel in maiori proportione rectanguli A B C, ad rectangulum B D C. Quod est contra propositam determinationem.

PRO-

PROBL. XXXVIII. PROP. XC.

Datis iisdem, quæ in antecedenti Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti G D F L, sit ad superficiem conicam coni HDF, in data proportione.

ETiam hoc Problema est determinatum eadem determinatione, qua determinatum est Lemma antecedens, nempe, est necesse, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, prius ducta B D. Sit proportio data, quam habet A B, ad K, & datis duabus rectis lineis A B, & D E, sibi inuicem perpendicularibus, ducatur à puncto D, linea D H, occurrens E B, inter E, B, per antecedens Lemma, vt sit sicut A B, ad K, sic rectangulum sub A B, in H E, ad rectangulum H D E, & per punctum H, agatur planũ



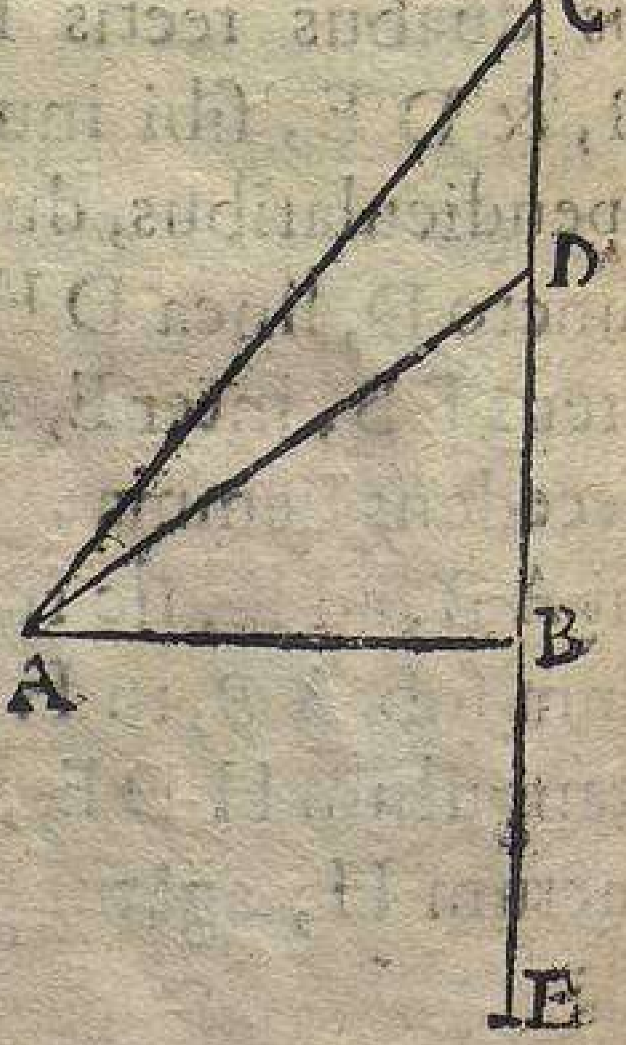
GHL,

GHL, & fiat conus DHF. Dico factum esse, quod imperebatur. Nam, vt rectangulum sub A *B*, in EH, ad rectangulum HDE, seù vt A *B*, ad K, sic superficies sphærica segmenti GDFL, ad superficiem conicam coni DHF, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Quod erat faciendum.

Quod verò determinatio sit ea, quæ assignata est; patet, qui a præsens Problema, non est aliud, quam antecedens Lemma.

LEMMA LIII. PROP. XCI.

Datis ijsdem, quæ in Proposit. 88. Dico, quod BD, ad DA, cum AB, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA, cum AB.



NAM, cum probatum sit BD, ad DA, habere minorem proportionem proportione *B*C, ad C A; & pariter, cùm minor BD, ad BA, habeat minorem proportionem, quam maior C *B*, ad BA. Ergo DB, ad vtrasque simul DA, AB, habebit minorem proportionem,

quam

quam C B, ad vtrasque simul C A, A B. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

ETiam ex Lemmate præsenti elicitur, rectangulum sub E C, in D B, ad rectangulum compositæ ex D A, A B, in A B, nempe ad rectangulum D A B, cum quadrato A B, habere minorem proportionem, quam rectangulum E C B, ad rectangulum C A B, cum quadrato A B. Etenim eodem modo, quo factum est supra, discurretur, & patebit propositum.

LEM. LIV. PROP. XCII.

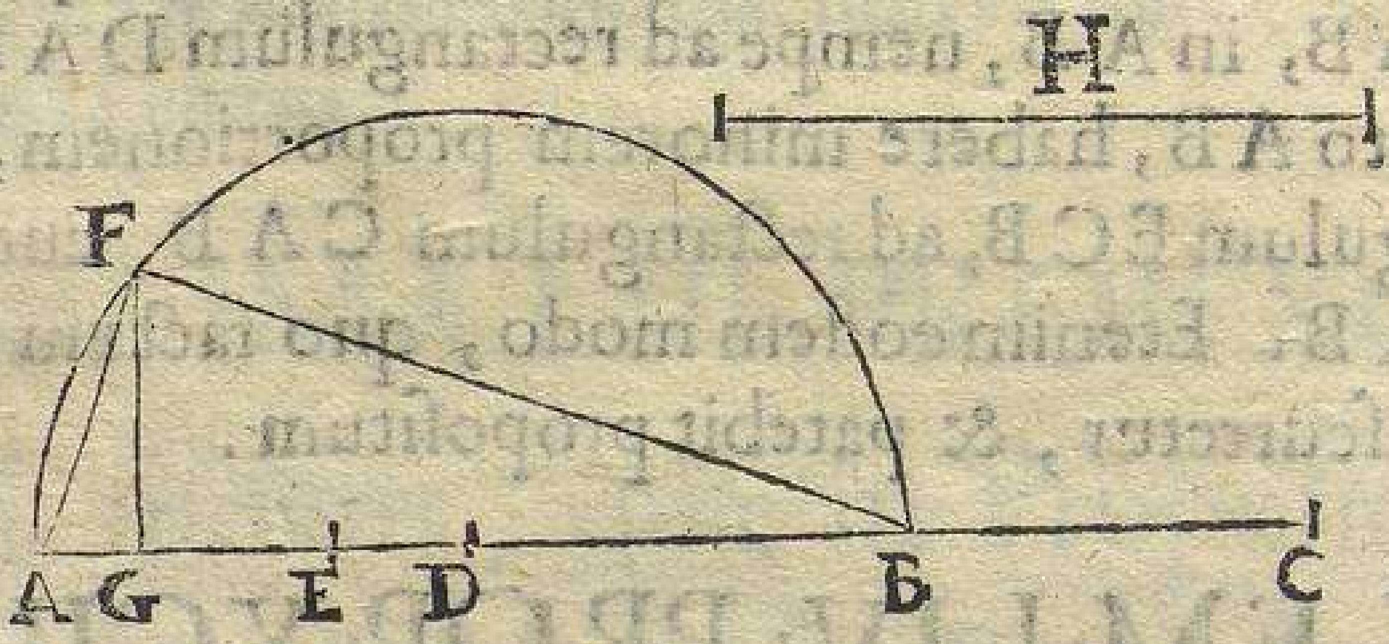
Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione vnius lateris ad aliud latus simul cum hypotenusa, inuenire triangulum.

DAta hypotenusa sit A B, super quam fiat semicirculus, & data ratio sit, quam habet H, ad A B, quam patet oportere esse minoris inæqualitatis. Fiat ergo, vt A B, ad H, sic H, ad B C, positam in directum ipsi A D, cui A B, fiat æqualis B D; deinde fiat, vt A C, ad C D, ita A B, ad B E; & à puncto *A*, aptetur A F, æqualis A E, & ducatur F B. Dico triangulum *A* F B,

esse

esse quæsitum, & in eo esse, vt H, ad A B, sic B F, ad compositam ex B A, A F.

Quoniam enim est vt A B, ad B E, sic (sumpta communi altitudine A B,) quadratum A B, ad rectangulum A B E, & vt quadratum A B, ad rectangulum A B E, sic duo quadrato A B, ad duo rectangula A B E.



Ergo, & vt A B, ad B E, sic erunt duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E Sed pariter vt A B, ad B E, sic (sũpta cõmuni altitudine A E,) est rectangulũ B A E, ad rectangulũ A E B, & duo rectangula B A E, ad duo A E B. Ergo erit vt A B, ad B E, sic tam duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E, quam duo rectangula B A E, ad duo rectangula A E B. Ergo erit, vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, vel vt A B, ad B E, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Sed A B, ad B E, facta est, vt A C, ad C D. Ergo, & vt A C, ad C D, sic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Et ad consequentium dimidia.

Ergo

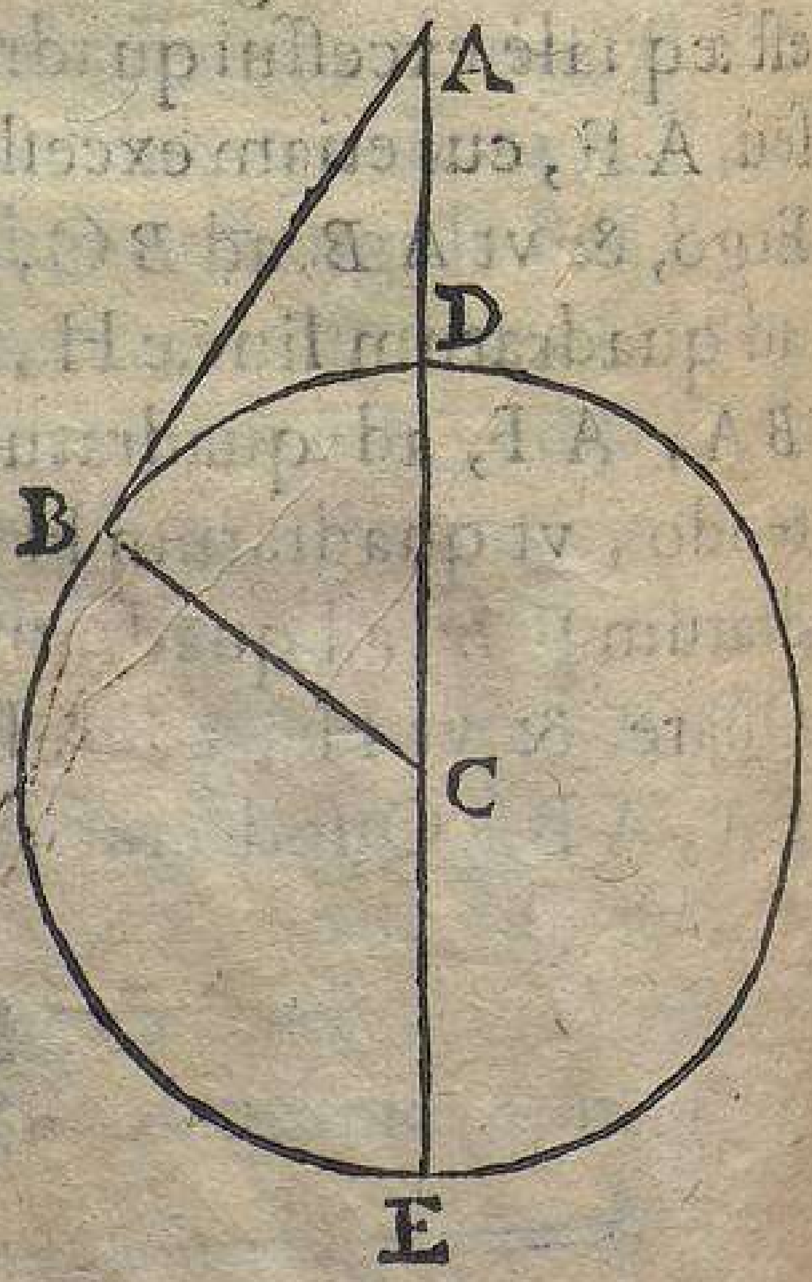
Ergo, vt A C, ad C B, ſic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B. Et diuidendo, vt A B, ad B C, ſic exceſſus duorum quadratorum A B, cum duobus rectangulis B A E, ſuper rectangulum A B E, & ſuper rectangulum A E B, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B, ſimul. Sed talis exceſſus, eſt æqualis vno quadrato *A* B, vno quadrato A E, & duobus rectangulis B *A* E; quia vnicum quadratum A *B*, excedit rectangula A *B* E, & *A* E B, ipſo quadrato A E. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, ſic quadratum A *B*, cum quadrato A E, ſeù cum quadrato A F, quia A E, & A F, factæ ſunt æquales, & cum duobus rectangglis B A E, ſeù B A F, ad rectangulum A *B* E, cum rectangulo A E B. Sed quadratum A B, cum quadrato A F, & cum duobus rectangulis B A F, eſt æquale quadrato compoſitæ ex B A, & A F. Et pariter, rectangulum A *B* E, cum rectangulo A E *B*, eſt æquale exceſſui quadrati A B, ſuper quadratum A E, ſeù A F, cui etiam exceſſui, eſt æquale quadratum F B. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, ſeù vt quadratum lineæ A *B*, ad quadratum lineæ H, ſic quadratum compoſitæ ex *B* A, A F, ad quadratum lineæ F *B*. Quare conuertendo, vt quadratum H, ad quadratum A *B*, ſic quadratum F *B*, ad quadratum compoſitæ ex F A, & A *B*. Quare, & vt H, ad A B, ſic F B, ad compoſitam ex F A, A B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate poteſt etiam ſolui ſequens Problema; nempe triangulum rectangulum conſtituere, vt totus perimeter triãguli, ſit ad vnum duorum laterũ, in data proportione; vt conſideranti patet. Sed hoc Lemma poteſt facilius ſolui præmiſſo Lemmate ſequenti.

LEM. LV. PROP. XCIII.

Quodlibet latus trianguli rectanguli, eſt medium proportionale, inter compoſitam ex hypotenuſa, & ex alio latere, & inter differentiam eorundem.



SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus rectus, qui ad B. Dico, quod v. g. A B, erit media proportionalis inter compoſitam ex A C, C B, & inter differentiam earundem A C, C B. Centro C, interuallo C B, deſcribatur circulus ſecans C A, in D, & A C, producta ei occur-

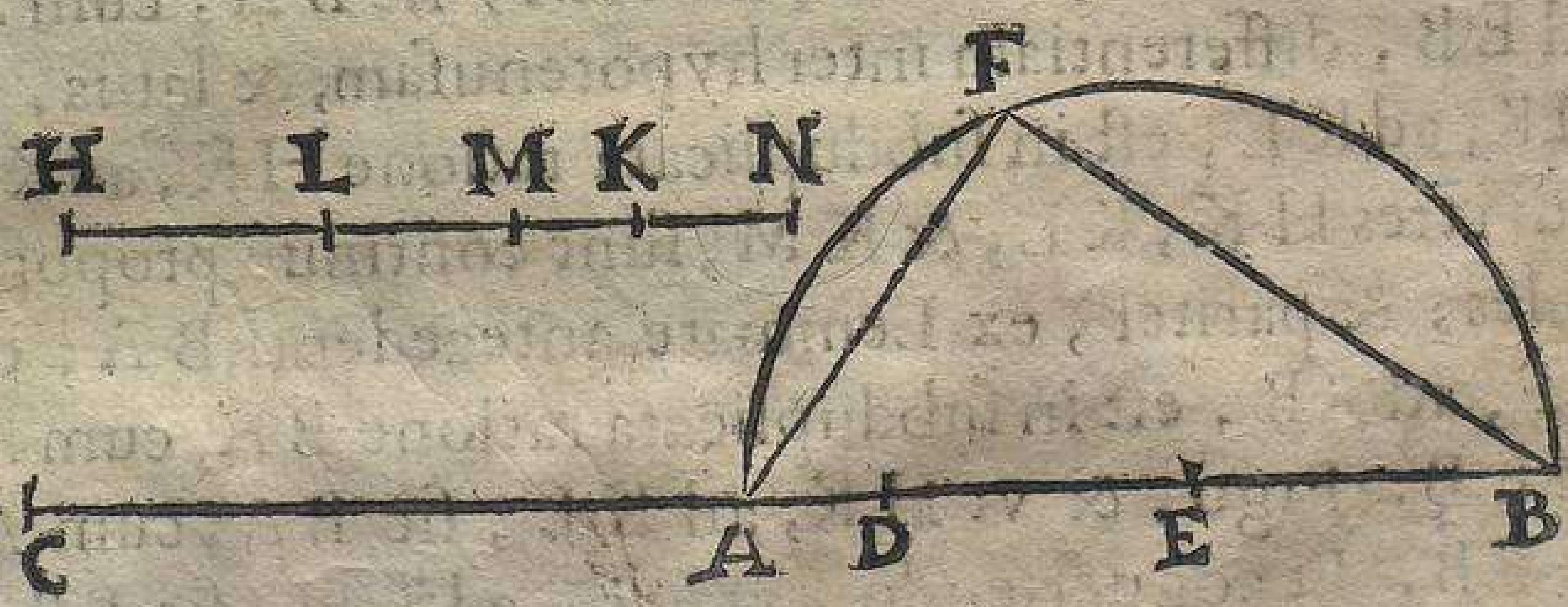
cur-

currat in E. Quoniam ergo A B, tangit circulum, quia angulus A B C, est rectus; ergo quadratum A B, est æquale rectangulo E A D. Sed A D, est differentia inter A C, C D, seu inter A C, C B; & A E, est composita ex A C, C E, hoc est C B. Quare patet propositum.

LEMMA LVI. PROP. XCIV.

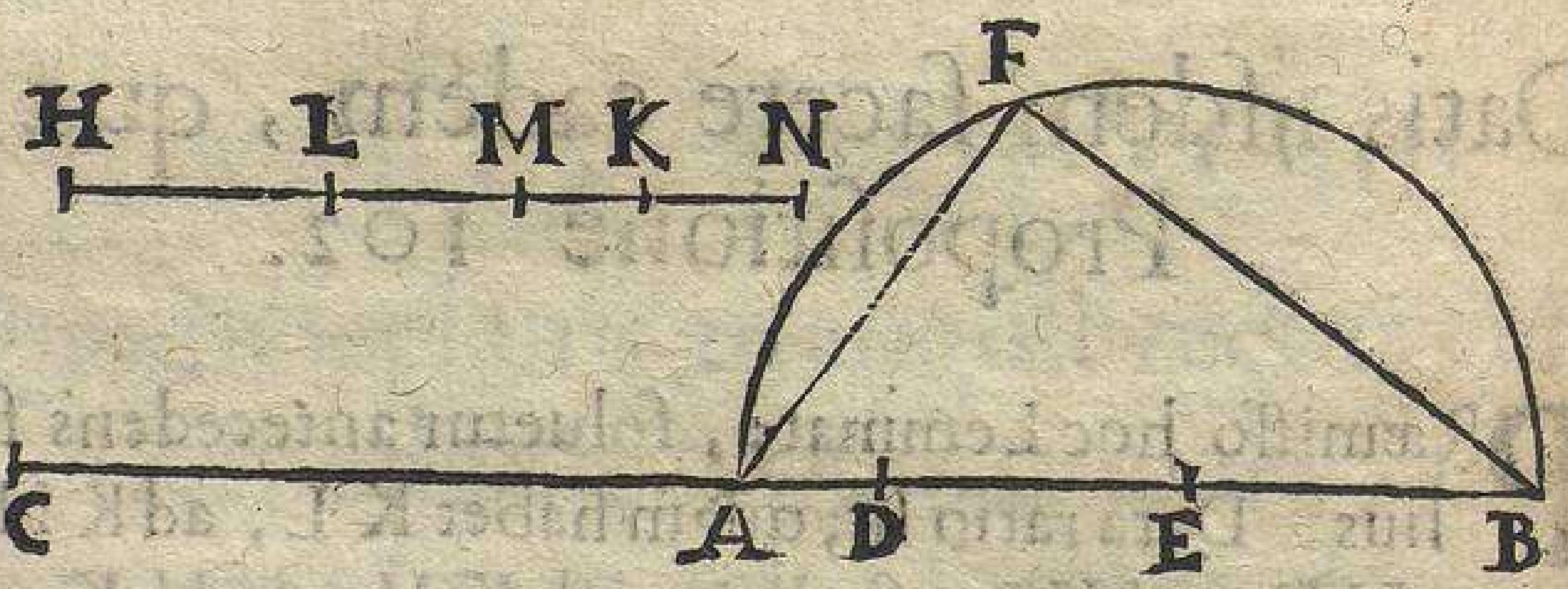
Datis iisdem facere eadem, quæ in Propositione 102.

PRæmisso hoc Lemmate, soluetur antecedens facilius. Data ratio sit, quam habet K L, ad K H; & fiat vt H K, ad K L, sic K L, ad K M, & M K, producatur in N, vt M N, sit dupla M K. Pariter B A, producatur in C, vt C B, sit dupla B A, & fiat vt H N, ad



N M, sic C B, ad B D; & D B, secetur bifariam in E; & super A B, facto semicirculo, in ipso à puncto A, aptetur A F, æqualis A E, & iungatur F B. Dico triangulum A F B, eſſe quæſitum, & in ipſo eſſe, vt H K, ad K L, ſic B A, cum A F, ad F B.

Quoniam enim factum eſt, vt H N, ad N M, ſic C B, nempe dupla A B, ad B D. Ergo & diuidendo, vt H M, ad M N, ſic B A, cum A D, ad D B. Et ad conſequentium dimidia. Ergo, vt H M, ad M K, ſic B A, cum A D, ad D E. Et componendo, vt H K, ad K M,



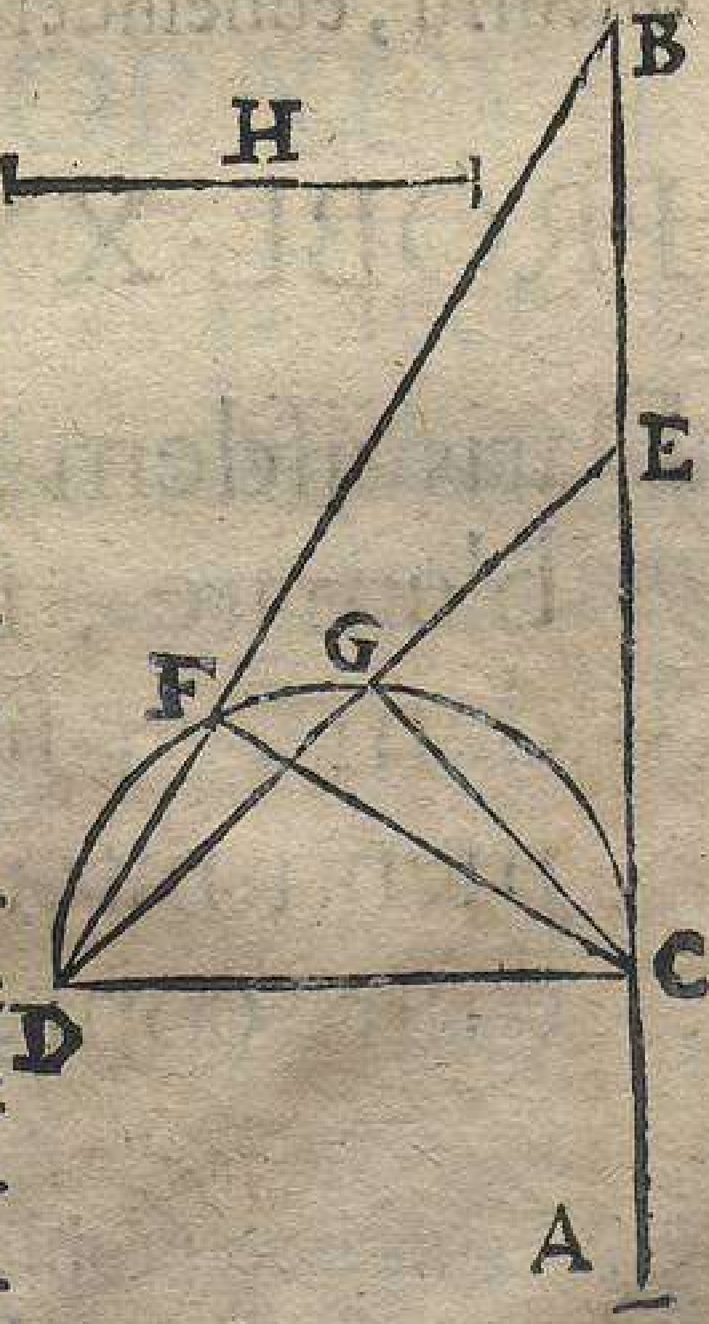
ſic A B, cum A E, ad D E, ſeù ad E B. Sed A E, facta eſt æqualis A F. Ergo B E, erit differentia inter A B, & A F. Quare erit, vt H K, ad K M, ſic B A, cum A F, ad E B, differentiam inter hypotenuſam, & latus. Sed H K, ad K L, eſt in ſubduplicata ratione H K, ad K M, quia tres H K, K L, & K M, ſunt continue proportionales; & pariter, ex Lemmate antecedenti, B A, cum A F, ad F B, eſt in ſubduplicata ratione B A, cum A F, ad E B. Ergo, & vt H K, ad K L, ſic B A, cum A F, ad F B. Et conuertendo, vt K L, ad K H, ſic F B, ad B A, cum A F. Quod &c.

LEM-

LEM. LVII. PROP. XCV.

Datis ijsdem, quæ in propos. 89. facere eadem, quæ ibidem, adeò vt rectangulum sub AB, in CE, ad rectangulum EDC, simul cum quadrato DC, sit in data proportione.

HOC etiam Lemma est determinatum, & determinatio est, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum ABC, ad rectangulum BDC, cum quadrato DC, vt constat ex Scholio proposit. 91. Data ergo proportio sit, quam habet H, ad DC. Data ergo DC, hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione, quam habet AB, ad H, inueniatur triangulum rectangulũ DCG, vt sit, sicut AB, ad H, sic composita ex CD, DG, ad GC, quæ inferius ostendetur minor FC, & DG, producatur vsque ad E. Dico factum esse, quod imperebatur.



Etenim, vt dictum est supra, proportio DC, ad H, com-

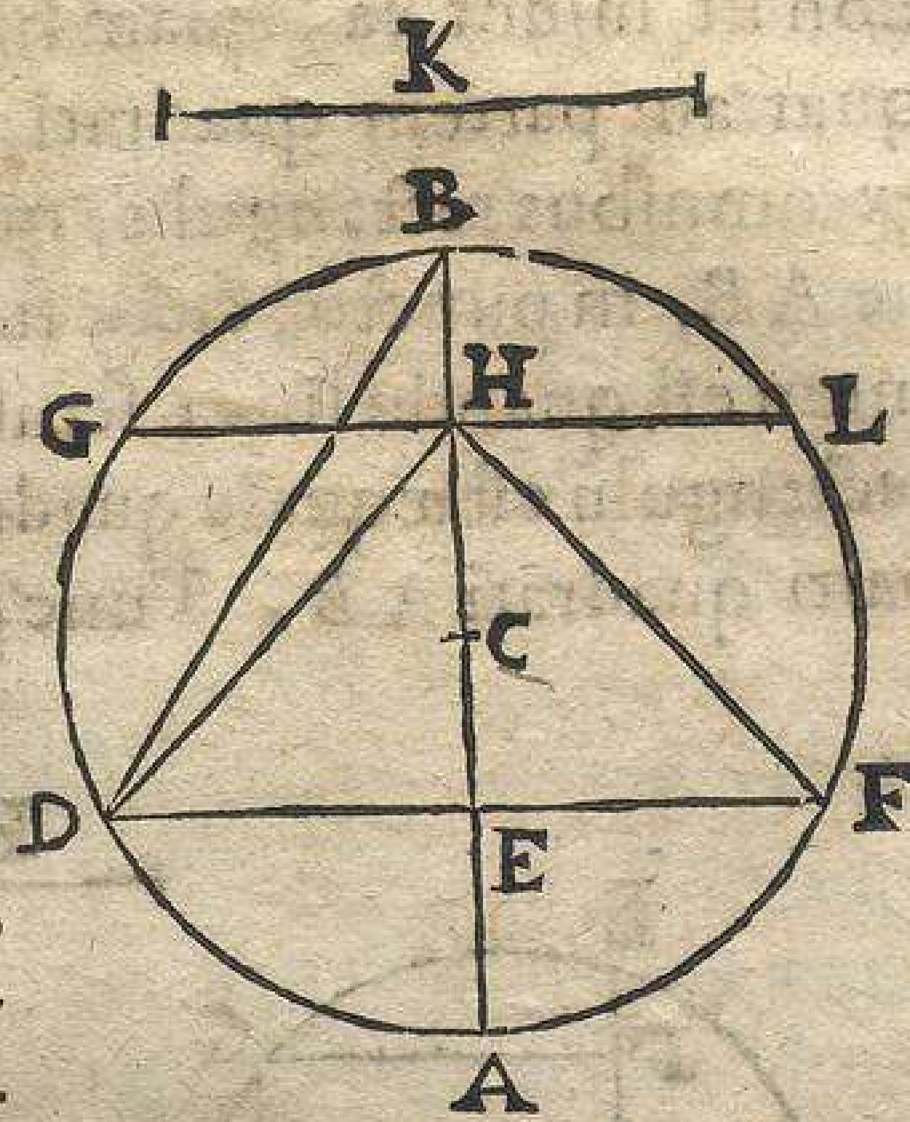
componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt A B, ad H, sic composita ex C D, D G, ad G C; & vt composita ex C D, D G, ad G C, sic propter similitudinem triangulorum C G D, & E D C, composita ex E D, & D C, ad C E. Ergo proportio quoque D C, ad H, componetur ex proportione D C, ad A B, & ex proportione compositæ ex E D, D C, ad C E. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, cum quadrato D C, ad rectangulum A B, C E. Ergo, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub A B, in C E, ad rectangulum E D C, cum quadrato D C. Quod erat faciendum.

Quòd verò C G, sit minor C F, patet; alioquin, eodem discursu, concluderetur contra determinationem.

PROBL. XXXIX. PROP. XCVI.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti intermedij, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Etiam hoc Problema est determinatum, & determinatio est, quod proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, cum qua-



quadrato D E. Quæ determinatio patet ex superioribus, sicut etiam constructio Problematis. Nam proportio superficiei sphæricæ segmenti intermedij, G D F N, ad perimetrum coni D H F, est eadem cum proportione rectãguli A B, H E, ad rectangulũ H D E, cum quadrato D E; vt deducitur ex Archimede supra citato.

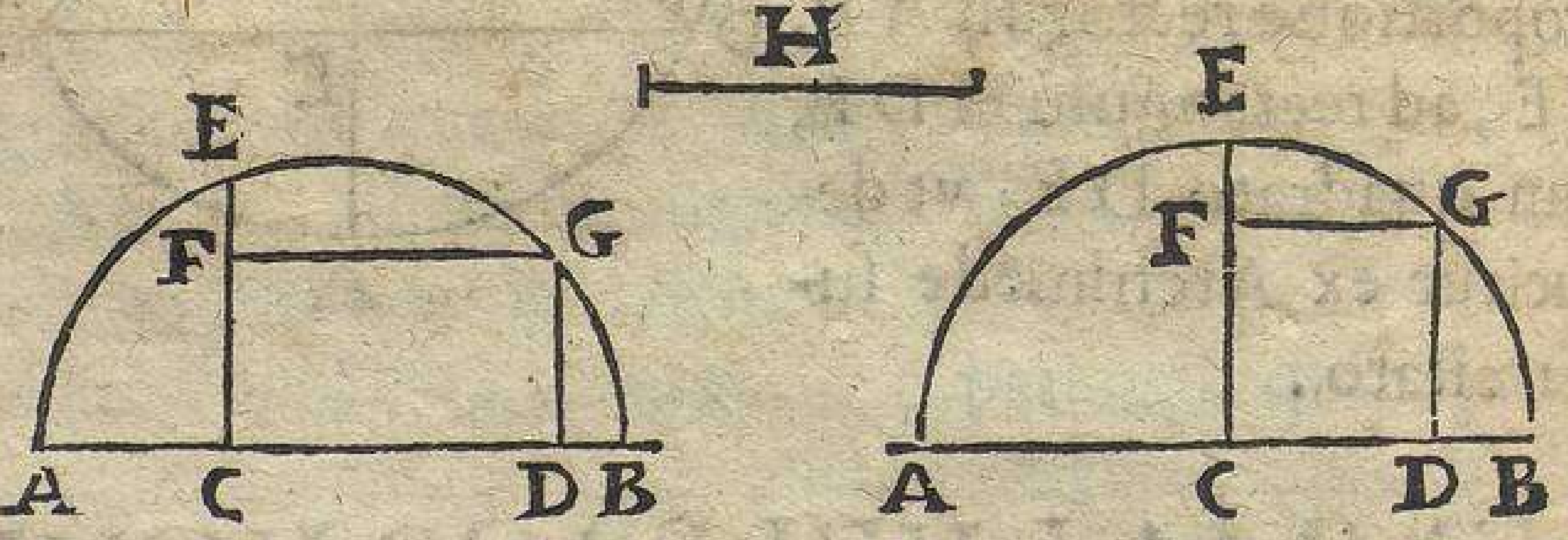
LEMMA LVIII. PROP. XCVII.

Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursum diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A C B, sit ad rectangulum A D B, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet A B, ad H. Linea autem A C, respectu lineæ C B, se habet tali pacto, vt sit, vel ea minor, vt in prima figura, vel nõ minor, vt in secunda. In primis patet, semper oportere, proportionem A B, ad H, esse talis conditionis, vt

non

non ſit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Res eſt euidens, quia ex omnibus rectangulis, quæ poſſunt haberi ex ſectione A B, in puncto, factis ſub duobus ſegmentis, maximum eſt quando linea ſecatur bifariam, & tunc tale rectangulũ eſt æquale quadrato dimidiæ, nempe quartæ parti quadrati A *B*. Tunc patet, quod ſi A C, ſit minor



C B, Lemma poteſt ſolui in quacumque proportione vniuerſaliter, præter quam quod in qualibet proportione defectus; quia in proportione defectus, Lemma eſt coarctandum, vt non ſit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Si verò A C, non ſit minor C B; tunc Lemma nequit ſolui niſi in proportione maioris inæqualitatis, quia ſemper rectangulum A C B, eſt maius quocumque rectangulo A D B, vt conſiderauti patet. His præmiſſis.

Super A *B*, fiat ſemicirculus, & à puncto C, erigatur perpendicularis C E; tunc fiat, vt A B, ad H, ſic quadratum E C, ad quadratum lineæ, quam ex determinationibus ſupra expoſitis; patet nunquam eſſe maio-

maiorem dimidia A B; quare si in C E, sumatur ei æqualis, siue hæc sit semper minor E C, vt in secundo casu, siue sit minor, siue æqualis, siue maior, vt in prima figura, (quamuis ponamus in schemate minorem,) quæ sit C F, & per punctum F, ducamus F G, parallelam A B, hæc semper occurret circumferentiæ. Ducatur ergo, & occurrat in G, & à puncto G, demittatur perpendicularis D G. Dico punctum D, esse quæsitum.

Res est euidens, quia cum factum sit, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum C F, seù ad quadratum D G, ei æquale, & quadratis E C, G D, sint æqualia rectangula A C B, & A D B, alterum alteri. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Si vice semicirculorũ constituerentur super A B, semiellipses, nihilominus eodem modo fieret propositum; quia quamuis in ellipsi, quadrato v. g. C E, non sit æquale rectangulum A C B, attamen, ex propos. 21. primi Conic. est, vt quadratum C E, ad quadratum D G, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B.

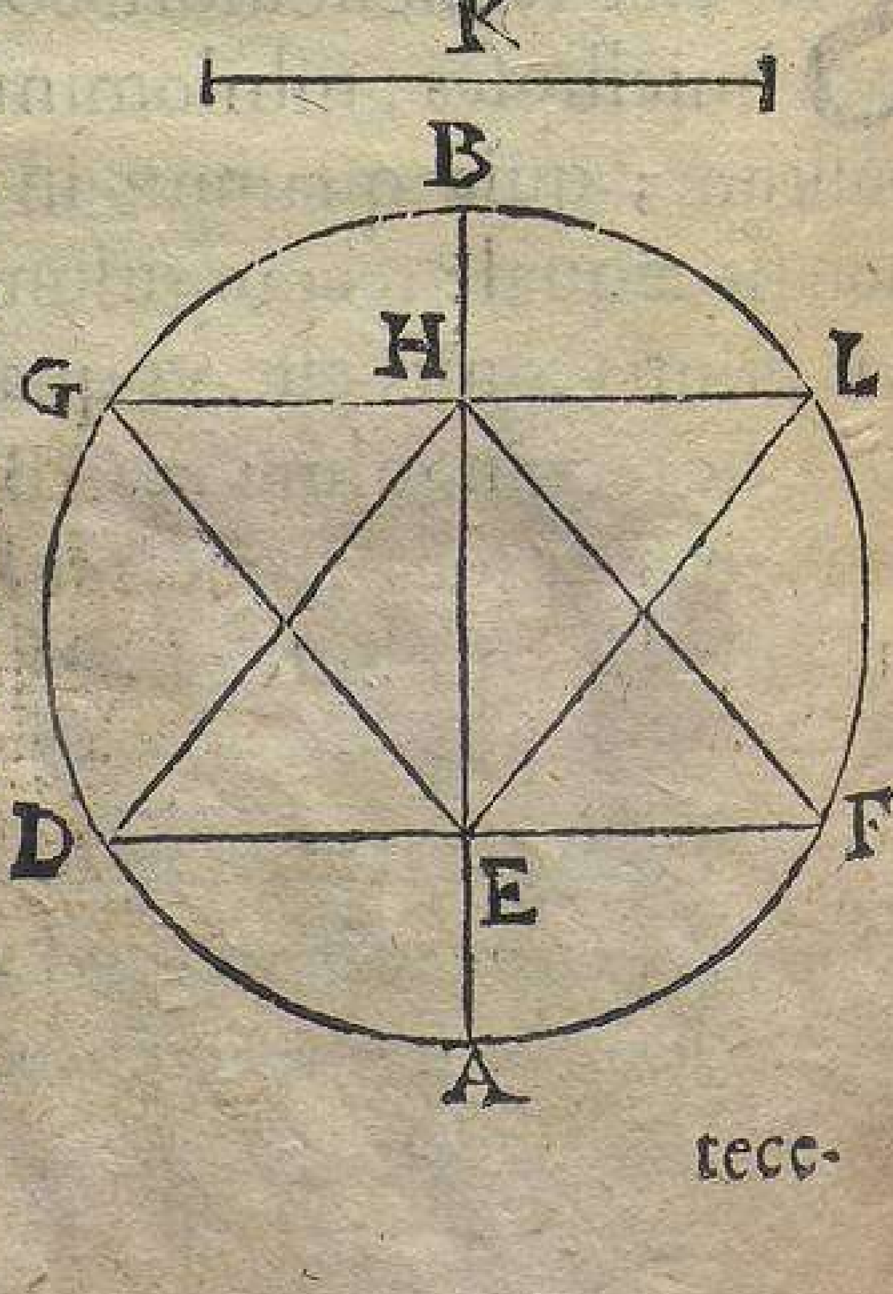
Pariter si loco semicirculorũ, vel semiellipsium vtamur duabus quibuscunque parabolis, nihilominus faciliter habebimus propositum, supponendo A B, esse vnam ex ordinatim applicatis ad axem, vel diametrũ. Nam, si per punctum C, ducatur C E, parallela axi, vel diametro, & fiat vt A B, ad H, sic E C, ad C F, & fiant

 reliqua,

reliqua, vt ſupra; punctum D, erit quæſitum. Nam, vt alij oſtendunt, ſed præcipue Caualerius lib 4. Geometr. indiuiſib. propoſ. 3. vt EC, ad GD, ſic eſt rectangulum ACB, ad rectangulum ADB.

PROBL. XL. PROP. XCVIII.

Datis ijſdem, quæ in ſuperioribus Problematibus; facere eadem, quæ ibidem, vt factis duobus conis, nẽpe DHF, ſuper baſim datam, & GEL, ſuper baſim non datam, quorum communis axis ſit EH, ſint in data proportione.



Quoniam enim duorum conorum eſt eadem altitudo, ergo ſunt inter ſe, vt baſes. Quare conus DHF, erit ad conũ GEL, vt baſis DEF, ad baſim GHL, ſeù vt quadratũ DF, ad quadratũ GH, ſeù vt rectãgulũ AEB, ad rectãgulũ AHB. Quare cõſtat præſens Problema reduci ad antecetecedens Lemma, & habebimus intentum, vt vnusquisque facile potest cognoscere.

SCHOLIVM.

HIC soluenda venirent Problemata circa superficies horum conorum, sed ipsas reseruamus ad aliud tempus, sicut etiam hæc, nempe. Datam sphæram, vt in superioribus Problematibus, sectam plano D E F, rursum secare plano G H L, plano D E F, parallelo, vt facto cono G E L, super basim non datam; vel segmentum intermedium G D F L, ad conum G E L; vel superficies segmenti ad superficiem, vel ad perimetrum coni, sit in data proportione.

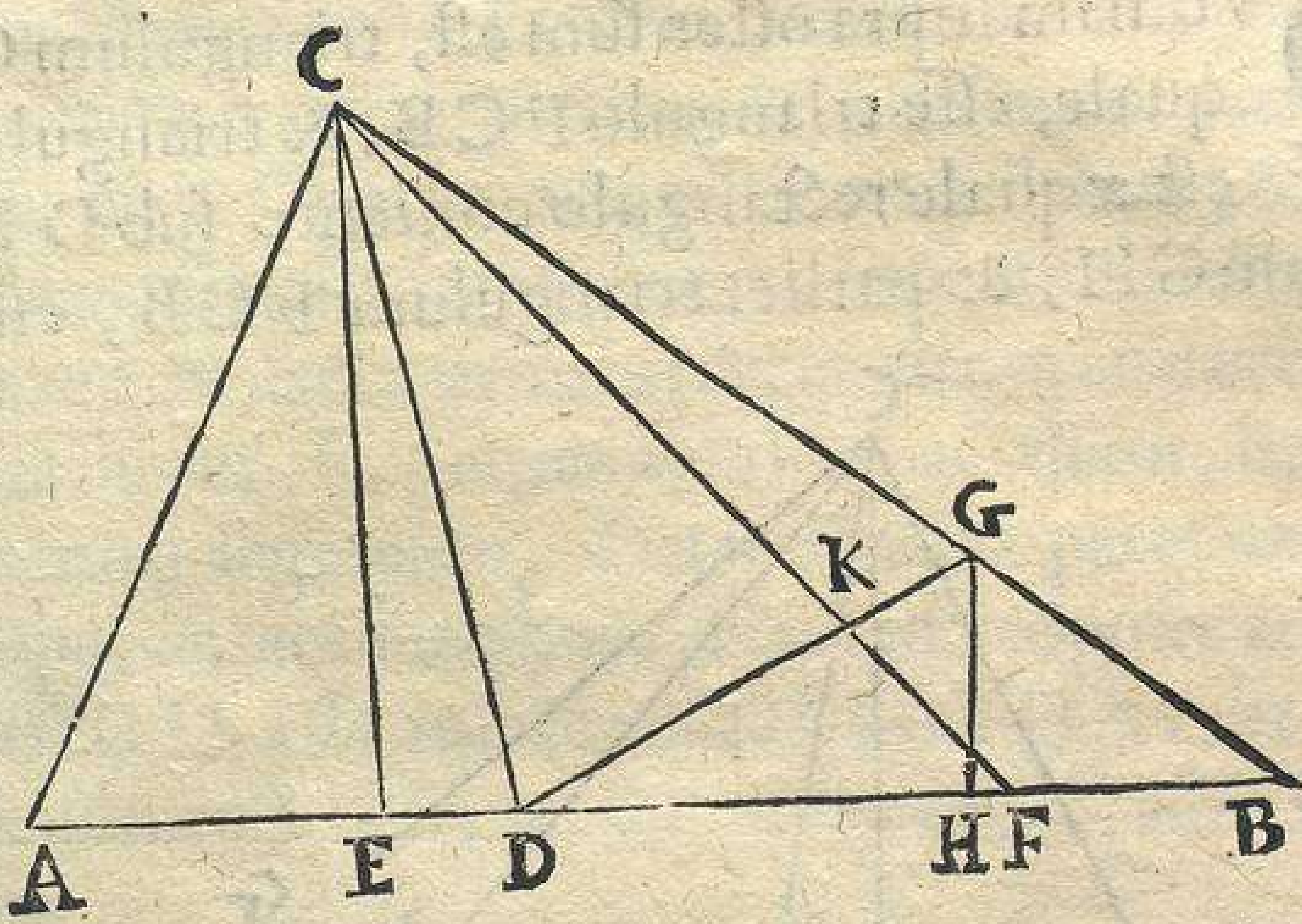
Sed hæc, vt diximus, reseruamus pro alio Opere, quod, Deo fauente, imprimetur.

LEMMA LIX. PROP. IC.

Esto triangulum A C B, cuius angulus C, secetur bifariam à linea C D, & latus A C, sit minus latere C B, vnde, & A D, sit minor D B, cui A D, sit facta æqualis D F, & sit ducta C F. Si super basim D B, fiat triangulum æquale triangulo F C B, perpendiculum ipsius ductum à vertice G, semper minus erit D F, seù D A.

QVoniam C B, maior supponitur C A, fiat ipsi C A, æqualis C G, & ducatur D G. Quoniam trianguli A C D, duo latera A C, C D, sunt æqualia duobus lateribus D C, C G, trianguli D C G, alterum alteri, & angulus A C D, est æqualis angulo D C G; ergo basis A D, erit æqualis basi D G, & triangula erunt æqualia. Sed etiam triangulo A C D, est æquale triangulum D C F. Ergo triangula D C F & D C G, erunt æqualia. Quare addito communi triangulo A C D, totum triangulum A C F, erit æquale trapezio A C G D. Quare, & reliquum F C B, erit æquale reliquo D G B.

Sed



Sed in hoc, dimisso perpendiculo GH, patet ipsum minus esse hypothenusa DG, hoc est ipsa DA, seù DF. Quare patet propositum.

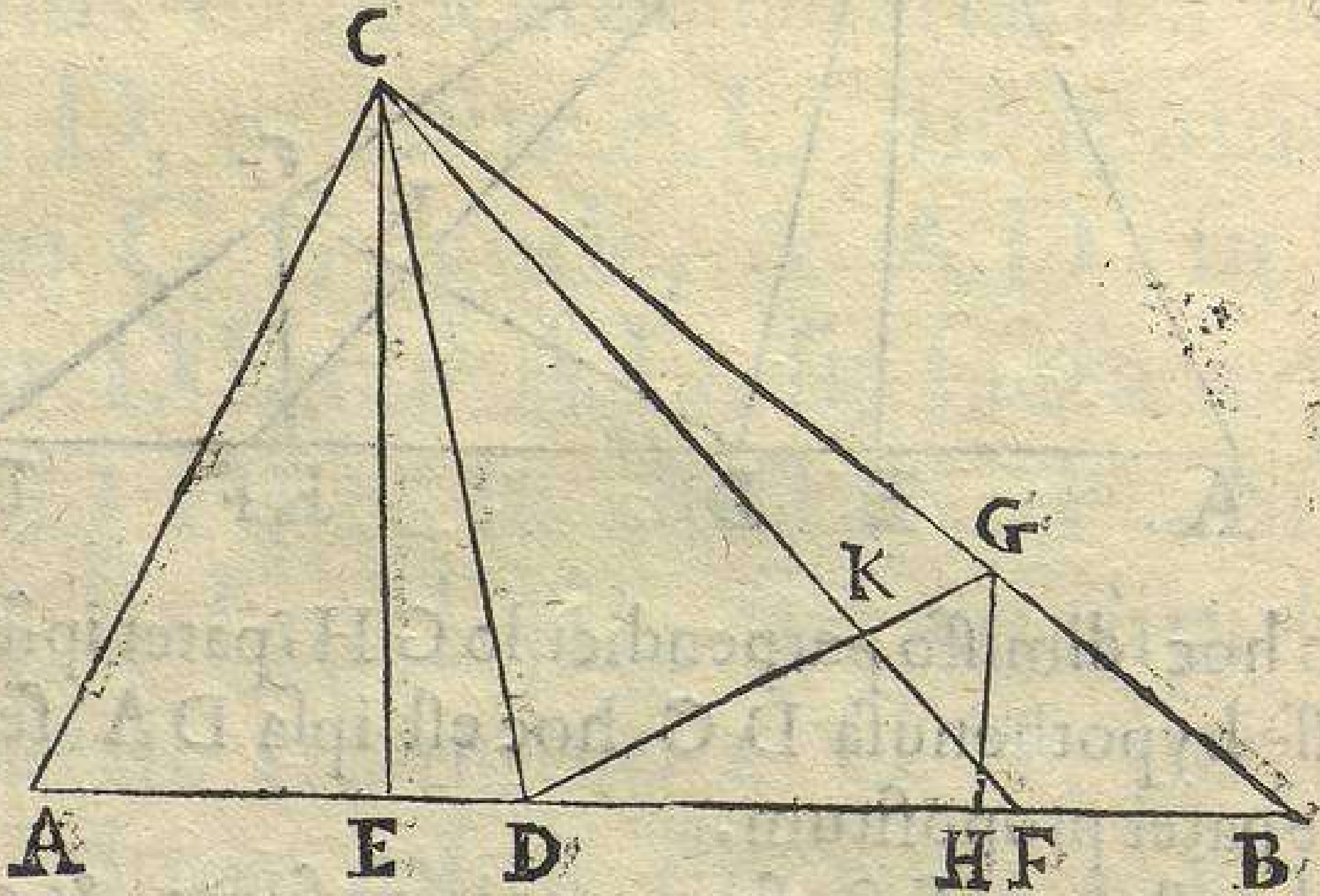
Vel postquam facta sunt omnia, vt supra, & conclusum est triangulum DCG æquale esse triangulo DCF, si auferatur commune triangulum DCK &, addatur commune trapezium FKGB, nihilominus facilius concludetur propositum. Res est clara.

LEMMA LX. PROP. C.

Sint facta, & ostensa eadem, quæ in superiori Lemmate, & sit ductum CE, perpendiculum trianguli ACB. Erit, vt DB, ad BF, sic CE, ad GH.

Quo-

QVoniam supra ostensum est, triangulum G D B, æquale, esse triangulo F C B, & triangulũ B G D, est æquale rectangulo contento sub D B, in dimidiam G H, & pariter triangulum F C B, est æquale



rectangulo contento sub F B, in dimidiam C E. Ergo, & hæc rectangula, & illorum dupla erunt æqualia, nempe rectangulum sub D B, in H G, erit æquale rectangulo sub F B, in C E. Quare, vt D B, ad F B, sic C E, ad G H. Quod erat ostendendum.

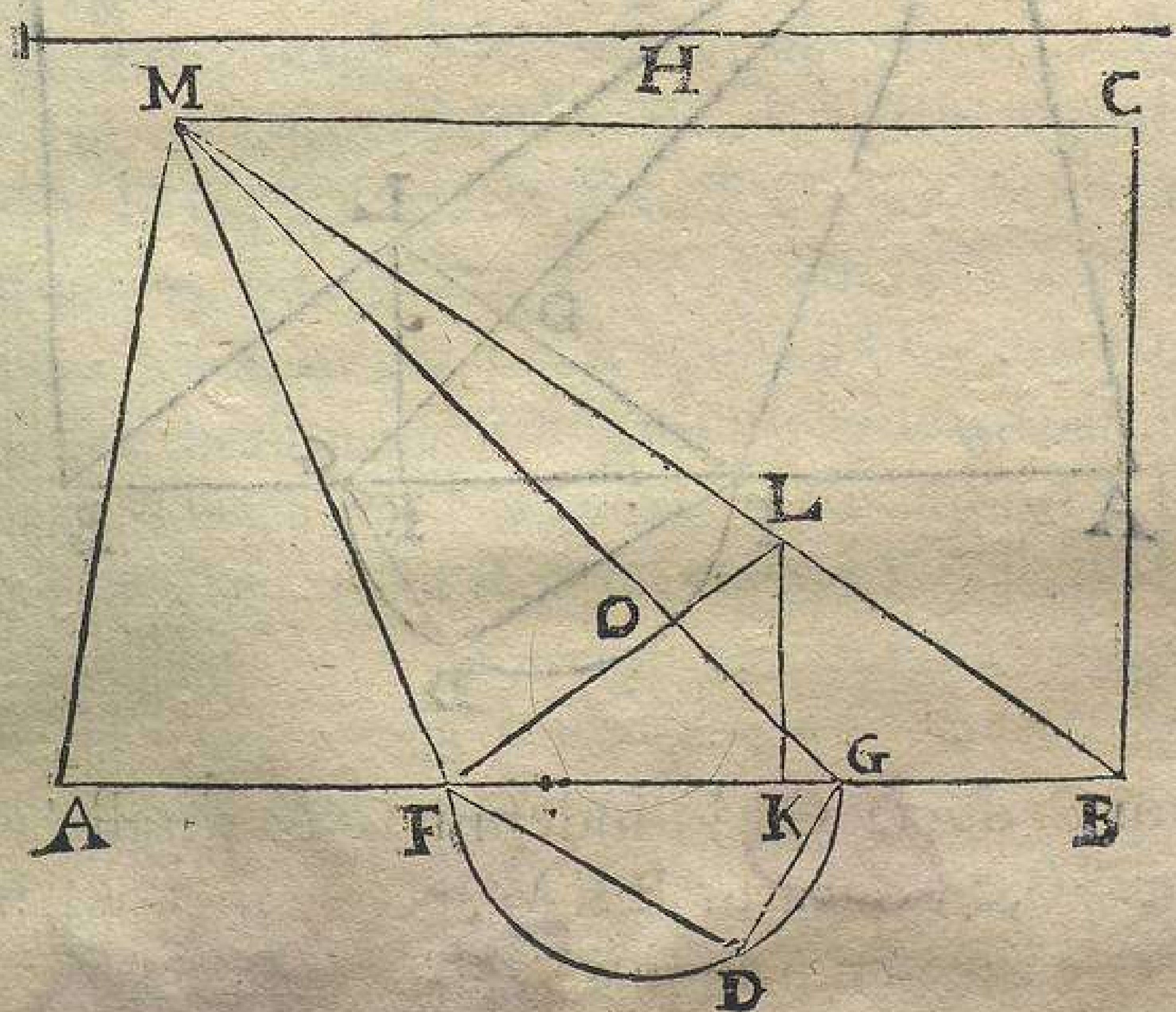
LEM. LXI. PROP. CI.

Data base, perpendiculo, & proportione laterum trianguli inuenire triangulum.

SI proportio data sit æqualitatis, res est adeò facilis, vt pudeat in hoc verba profundere. Si autem

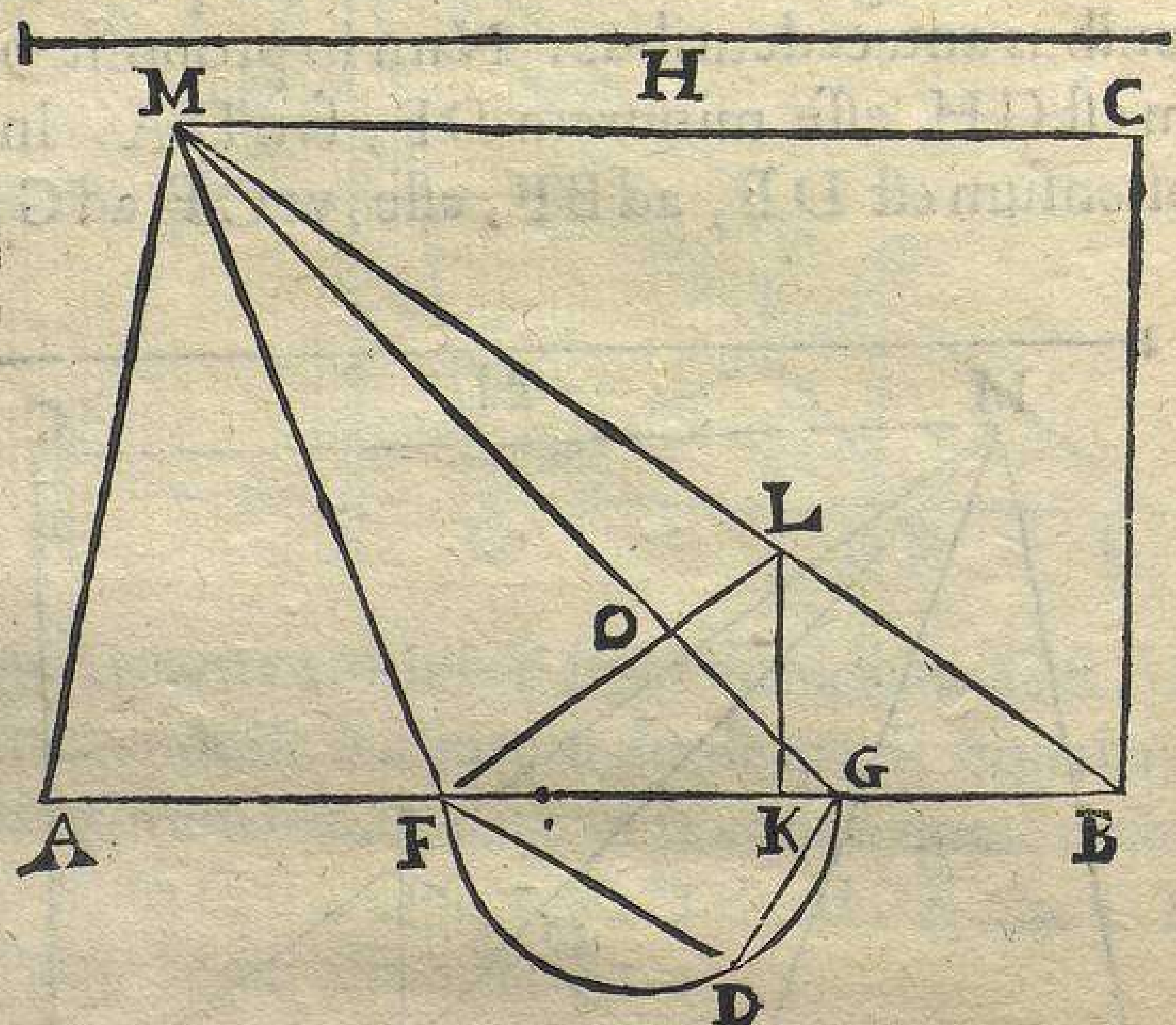
sit

sit inæqualitatis; tunc Lemma debet determinari. Si ergo est defectus, vt in præsenti supponimus, determinatio talis est. Oportet proportionem datam, & perpendiculum talis esse conditionis, vt secta base in data proportione, & facto vt maius segmentum ad excessum eius supra minus, sic perpendiculum ad aliam, hæc sit minor minori segmento. Determinatio patet ex propositionibus antecedentibus. Nam in proposit. 99. ostensum est G H, esse minorem DF, seù D A. In 100. verò ostensum est D B, ad B F, esse, vt C E, ad G H.



Sit ergo data basis A B, & data proportio sit, quam habet A B, ad H, perpendiculum verò datum sit B C, erectum normaliter super A B, à puncto B. Diuidatur A B, in F, vt sit, sicut A B, ad H, sic A F, ad F B, fiatque

que F G, æqualis A F, & ſuper F G, fiat ſemicirculus, fiatque vt F B, ad B G, ſic C B, ad aliam. Patet ex determinatione, hanc eſſe minorem F G. Ergo poterit aptari in ſemicirculo, cuius diameter F G; aptetur, & ſit F D, fiatque ei æqualis F K, atque à puncto K, erigatur K L, normalis ſuper A B, quæ ſit æqualis D G, & per



punctum C, ducta C M, indefinita, & parallela A B, per puncta B, L, ducatur B L M, occurrens C M, in M, (occurret enim, cum anguli M C B, C B M, ſint duobus rectis minores;) tunc ducatur M A. Dico triangulum A M B, eſſe quæſitum. Nam eſt ſuper baſi A B, & ſuum perpendiculum C B. Quòd verò ſit, vt A B, ad H, ſic A M, ad M B, ſic patebit. Ducantur M F, M G, & F L. Patet duo triangula A M F, F M G, eſſe æqualia,

pro-

propter bases A F, F G, æquales; & propter eandem altitudinem. Cùm autem factum sit, vt F B, ad B G, sic C B, ad D G, seù ad K L; ergo rectangulum sub F B, in K L erit æquale rectangulo facto sub C B, in B G. Ergo & illorum dimidia, nempe triangula F L B, G M B, erunt æqualia. Quare communi ablato trapezio L O G B, atque addito communi triangulo F M O, triangulum F M L, erit æquale triangulo F M G, seù A M F. Cùm autem super eandem basim M F, sint duo trianguli M L F, & M G F, æqualia, ducta L G, erit parallela M F. Ergo angulus F L G, erit æqualis alterno M F L, & angulus externus A F M, erit æqualis interno, & opposito F G L. Verùm cùm duæ F K, K L, sint æquales duabus F D, D G, & anguli F K L, F D G, ab ipsis contenti sint æquales, quia recti. Ergo, & F L, erit æqualis F G, seù F A. Cùm autem in triangulo L F G, duo latera F L, F G sint æqualia. Ergo anguli quoque ad basim, nempe F L G, F G L, erunt æquales. Sed angulo F L G, est æqualis ei alternus M F L & angulo F G L, ostensus est æqualis ei externus, & oppositus A F M. Ergo habemus duo triangula M F A, & M F L, quæ habent duo latera æqualia duobus lateribus, alterum alteri, & angulus A F M, cõtentus sub æqualibus lateribus vnius, est æqualis angulo contento sub æqualibus lateribus alterius. Ergo basis A M, erit æqualis basi M L, triangulum erit æquale triangulo, & angulus A M F, erit æqualis angulo F M L. Ergo, vt A F, ad F B, seù vt A B, ad H, sic A M, ad M B. Quod erat faciendum.

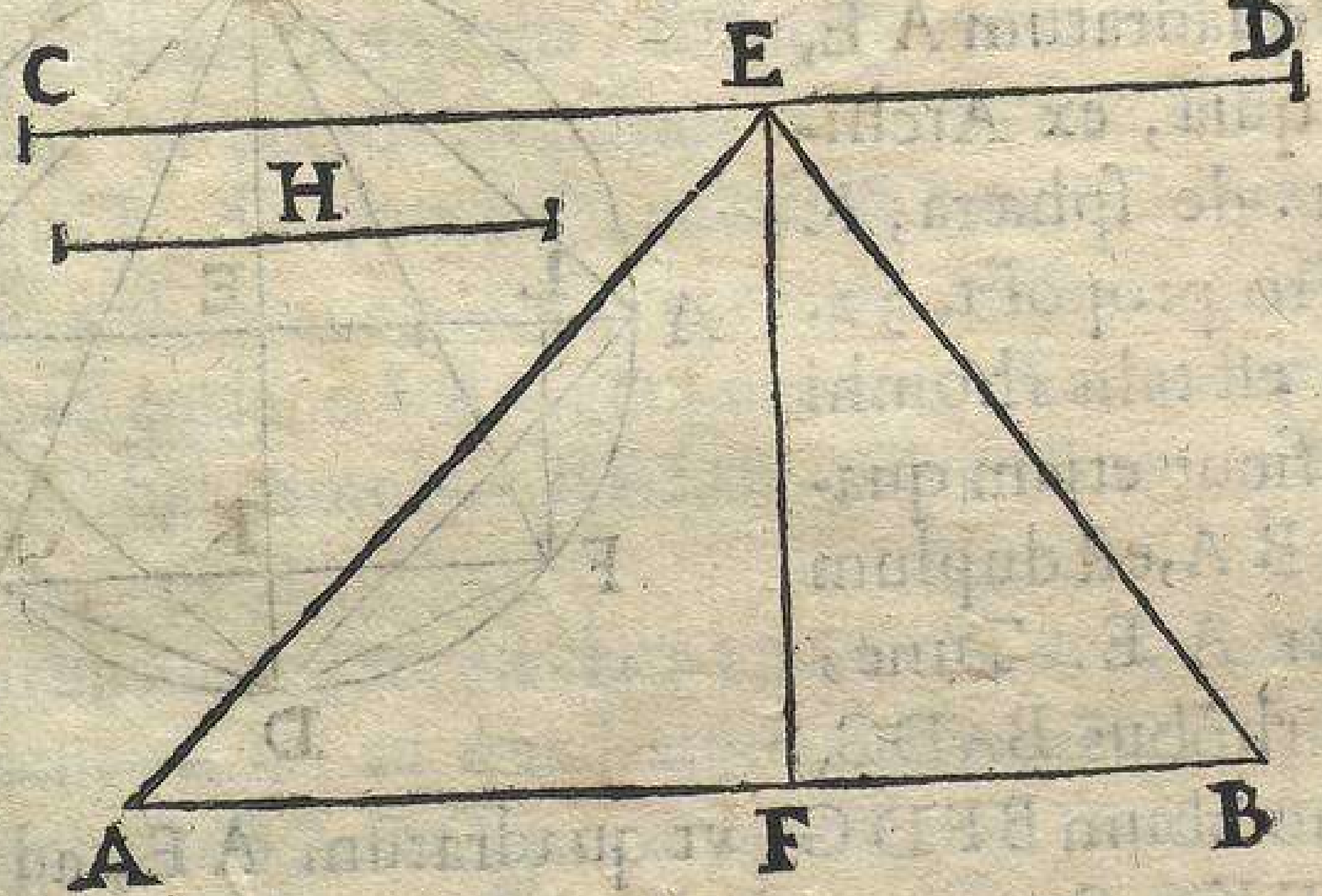
Si proportio data sit excessus, soluetur Lemma faciliter, faciendo, vt prius ex alia parte, & conuertendo.

PROBL. XLII. PROP. CII.

Data AB, magnitudine, & positione, & data CD, ei parallela, tantùm positione; inuenire in C D, punctum E, vt iunctis A E, E B, & ducta perpendiculari E F, & reuolutis triangulis E A F, F E B, circa A B, vt fiant coni; superficies conica coni ex triãgulo AEF, ad superficiem conicam coni ex triangulo F E B, sit in data proportione.

Data ratio sit, quam habet A B, ad H. Problema faciliter soluetur ex antecedentibus Lemmatibus. Nam cum duæ A B, & C D, sint datæ positione, dabitur etiam E F, magnitudine, per Propos. 32. datorum. Data ergo basi A B, & dato perpendiculo E F, & data ratione laterum, quę sit proportio data A B, ad H, inue-

inueniatur triangulum A E B, hoc est duo triangula A F E, B F E, vt sit sicut A B, ad H, sic A E, ad E B. Dico, quod si ex ipsis reuolutis circa A B, fiant coni, quod erunt quęsiti. Nam est vt A B, ad H, sic A E, ad E B, nempe rectangulum A E F, ad rectangulum B E F, nempe, ex



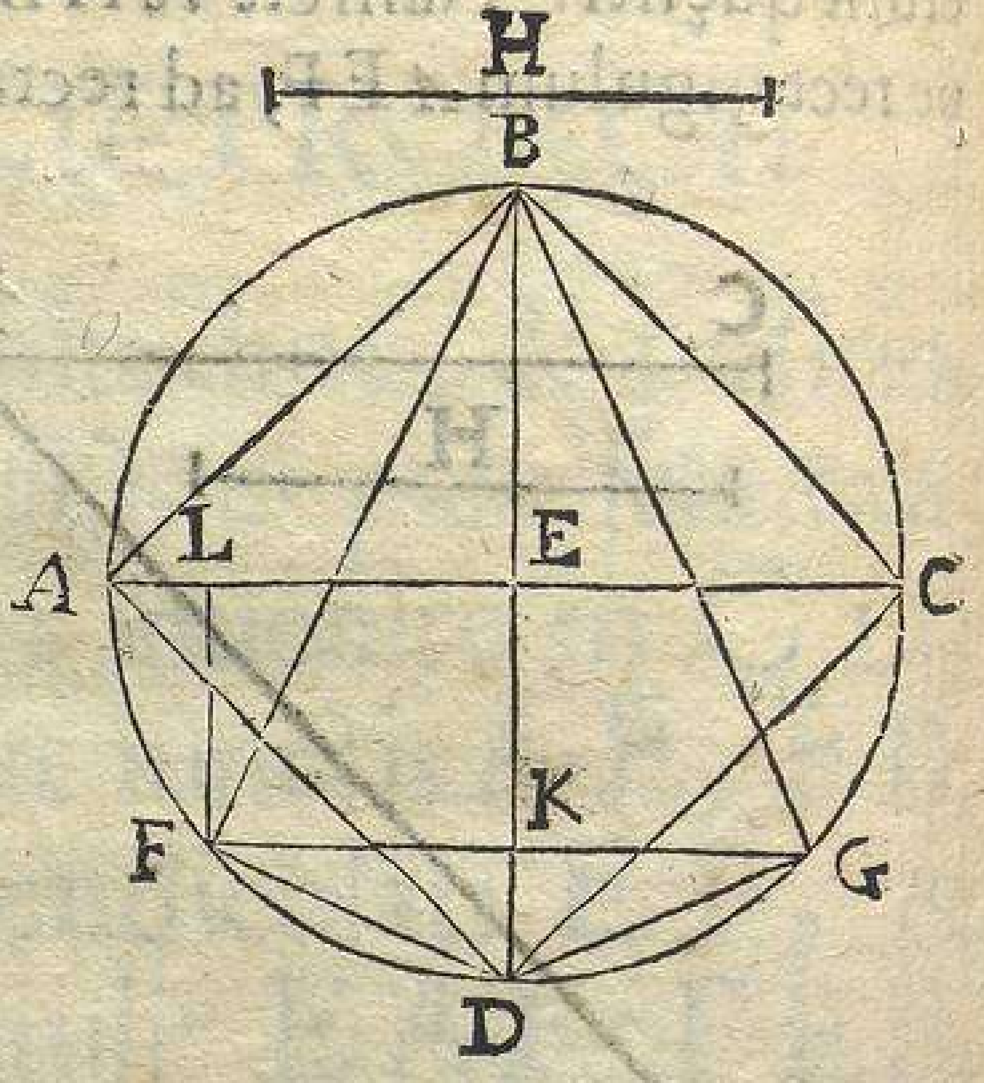
Archimede sæpe citato, superficies conica coni orti ex reuolutione trianguli A F E, circa A F, ad superficiem conicam coni orti ex reuolutione trianguli E F B, circa F B. Quod erat faciendum.

LEMMA LXII. PROP. CIII.

Sphæra ad rhombum sibi inscriptum, est vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum radij circuli, qui est basis rhombi.

 Sit

SIT in sphæra, cuiuscentrum E, rhombus inscriptus B F D G. Dico esse &c. Fiat rhombus BADC, cuius latera sint chordæ quadratis. Quod autẽ sphæra ad rhombum BADC, sit vt quadratũ B A, ad quadratum A E, patet; quia, ex Archimede 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 32. sphæra est talis rhombi dupla, sicut etiam quadratum B A, est duplum quadrati A E. Tunc; quoniã rhõbus BADC, est ad rhombum B F D G, vt quadratum A E, ad quadratum F K. Ergo ex æquali, sphæra ad rhombum B F D G, erit, vt quadratum B A, ad quadratum F K. Quod erat ostendendum.



PROBL. XXXXII. PROP. CIII.

In data sphæra inuenire rhombum, vt sphæra sit ad rhombum, in data ratione possibili.

RAtio possibilis est, vt proportio data non sit minor dupla, quia maximus rhombus inscriptibilium

lium in sphæra, est æquilaterus, qui est sphæræ subduplus. Data ergo sphæra sit A B C D, cuius diametri se se decussantes ad angulos rectos in E, sint A C, B D; & sit ducta B A, & data ratio sit, quam habet B A, ad H; & inter B A, & H, inueniatur media proportionalis, quæ vtique non erit maior A E, sed vel minor, vel æqualis, vt patebit. Si equalis, facto rhombo B A D C, erit quæsitus. Si autem sit minor A E, sit hec E L, & per punctum L, ducatur L F, parallela ipsi B D, occurrens sphæræ, vel ex vna parte, vel ex alia in F, & per punctum F, acto plano F K G, cui diameter B D, sit perpendicularis, fiat rhombus B F D G. Dico hunc esse quæsitum.

In primo casu, res est clara; nam est, vt A B, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum A E, nempe sphera ad rhombum B A D C, per antecedens Lemma.

In secundo verò casu, res est clarissima. Nam pariter est, vt B A, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum E L, nempe ad quadratum F K; nempe sic sphera ad rhombum B F D G. Quod erat ostendendum.

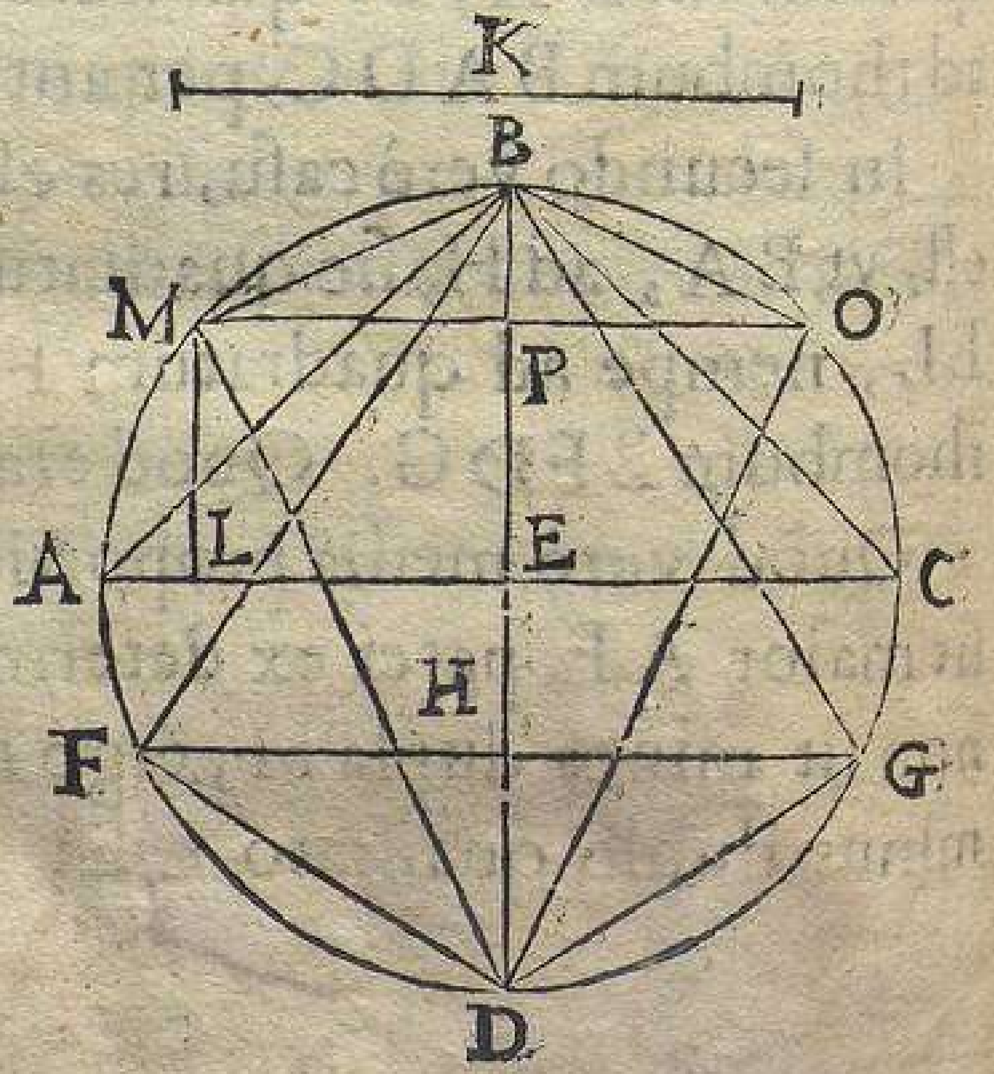
Quòd verò media proportionalis inter B A, & H, nõ sit maior A E, patet ex determinatione; quia cum B A, non sit minor dupla H; ergo nec quadratum A B, erit minus duplo quadrato L E, seù F K.

PRO-

PROBL. XLIII. PROP. CV.

In data ſphæra, dato rhombo inſcribere alium rhombum, ad quem rhombus datus ſit, in data ratione poſsibili.

Ratio poſſibilis eſt, vt non ſit minor ea, quam habet quadratum ſemidiametri baſis dati ad quadratum ſemidiametri ſphæræ, quia proportio quadrati radij baſis dati rhombi, ad quadratum ſemidiametri ſphæræ, eſt proportio rhombi dati ad rhombũ maximum inſcriptibilẽ in ſphæra; ergo non poteſt eſſe minor ea.



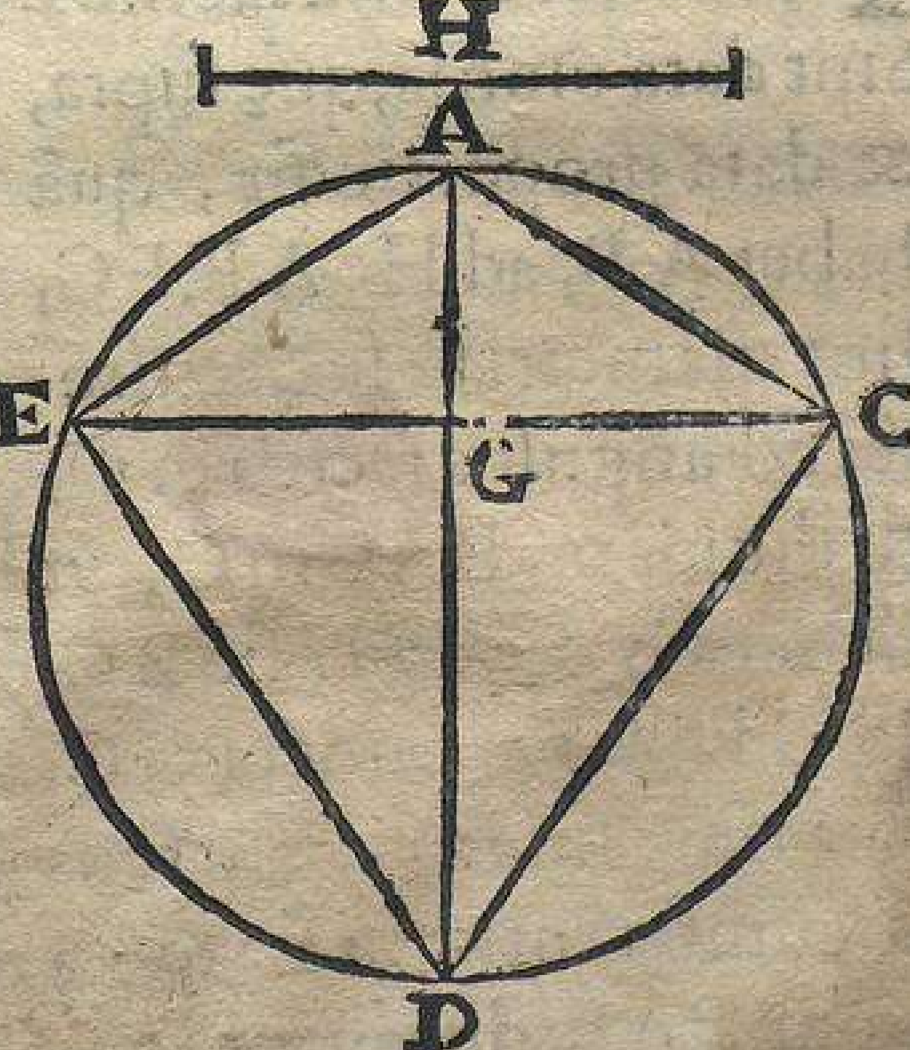
Sit ergo rhombus datus FBGD, in data ſphæra A B C D, cuius diametri ſe ſecantes ad angulos rectos, ſint B D, A C, & data ratio ſit, quam habet A B, ad K, & fiat vt A B, ad K, ſic quadratũ F H, ad quadratum alterius lineæ, quæ non erit maior A E, ſed vel ei æqualis, vel minor. Si æqualis, rhombus B A D C, erit.

erit quæsitus. Si minor, per L, acta L M, parallela B D, occurrens circumferentiæ, aut ex vna, aut ex altera parte, in puncto M, & intellecto rhombo M B O D, ipse erit quæsitus. Res est adeò euidens, vt non mereatur prolixiorem discursum.

PROBL. XLIV. PROP. CVI.

In data sphæra inscribere rhõbum, vt superficies conicę conorum, sint ad inuicem, in data proportione.

DAtæ sphæræ diameter sit A D, & data proportio sit, quã habet D A, ad H. Diuidatur D A, in G, vt sit, sicut quadratum D A, ad quadratum H, sic D G, ad G A; & per punctum G, acto plano E G C, cui diameter D A, sit normalis, fiat rhombus A E D C. Quem dico esse quæsitum.



Quoniá enim vt DA,

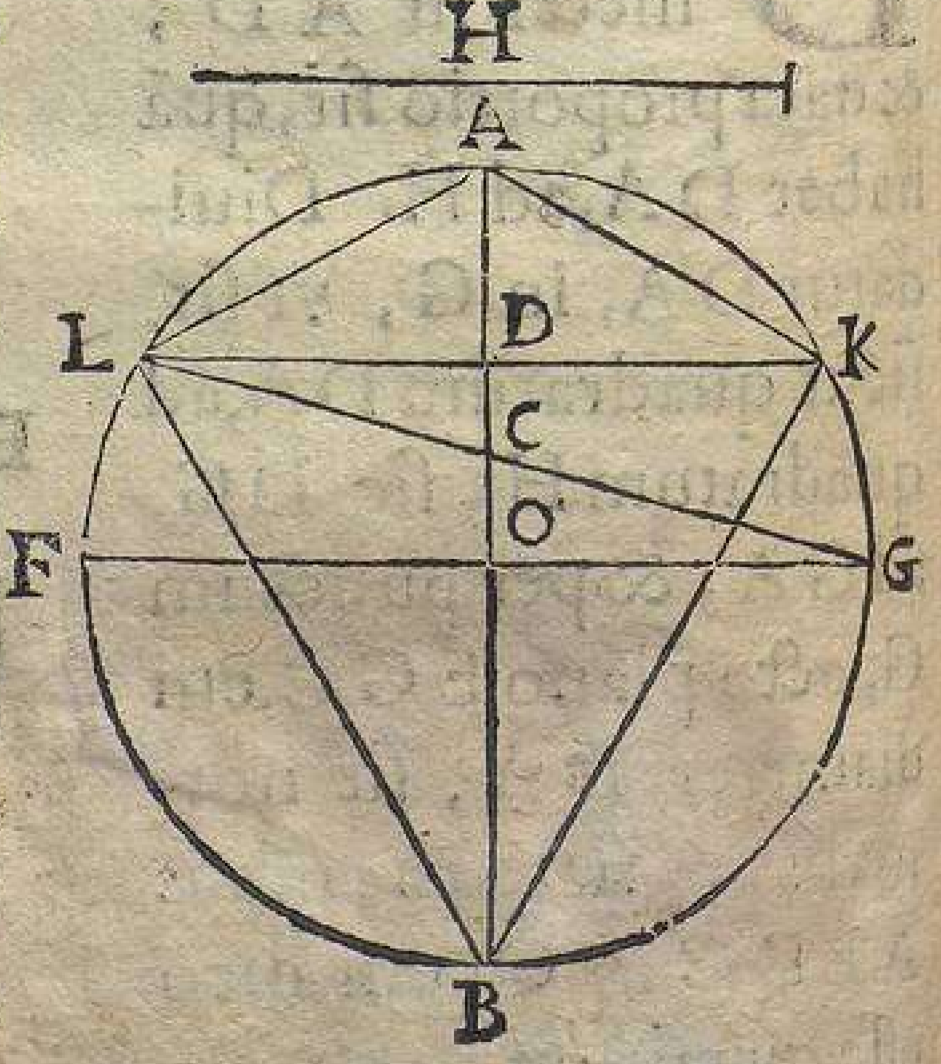
qua-

quadratum, ad quadratum H, ita facta est D G, ad G A; vt autẽ D G, ad G A, sic (sũpta cõmuni altitudine DA,) rectangulũ ADG, DAG, & rectãgulis ADG, DAG, sunt æqualia quadrata DE, AC, alterũ alteri. Ergo, & vt quadratũ D A, ad quadratũ H, sic quadratũ DE, ad quadratum A E. Ergo, & vt D A, ad H, sic D E, ad E A. Sed vt D E, ad E A, sic rectangulum D E G, ad rectangulũ A E G; vt autem rectangulum D E G, ad rectangulum A E G, sic superficies conica coni E D C, ad superficiem conicam coni E A C. Ergo &c. Quod &c.

PROBL. XLV. PROP. CVII.

Idem.

IDem Problema soluetur aliter, & forsitã facilius. Sint data omnia, quę supra, & data proportio sit, quã habet A B, ad H. A B, F G, sint diametri se se decussã tes ad angulos rectos in O; & diuidatur B A, in C, vt sit sicut B A, ad H, sic B C, ad C E; & per puncta G C, ducatur linea occurrens circumferentiæ in L; & à puncto L, ducantur L A, LB, & perpẽdicularis LDK;



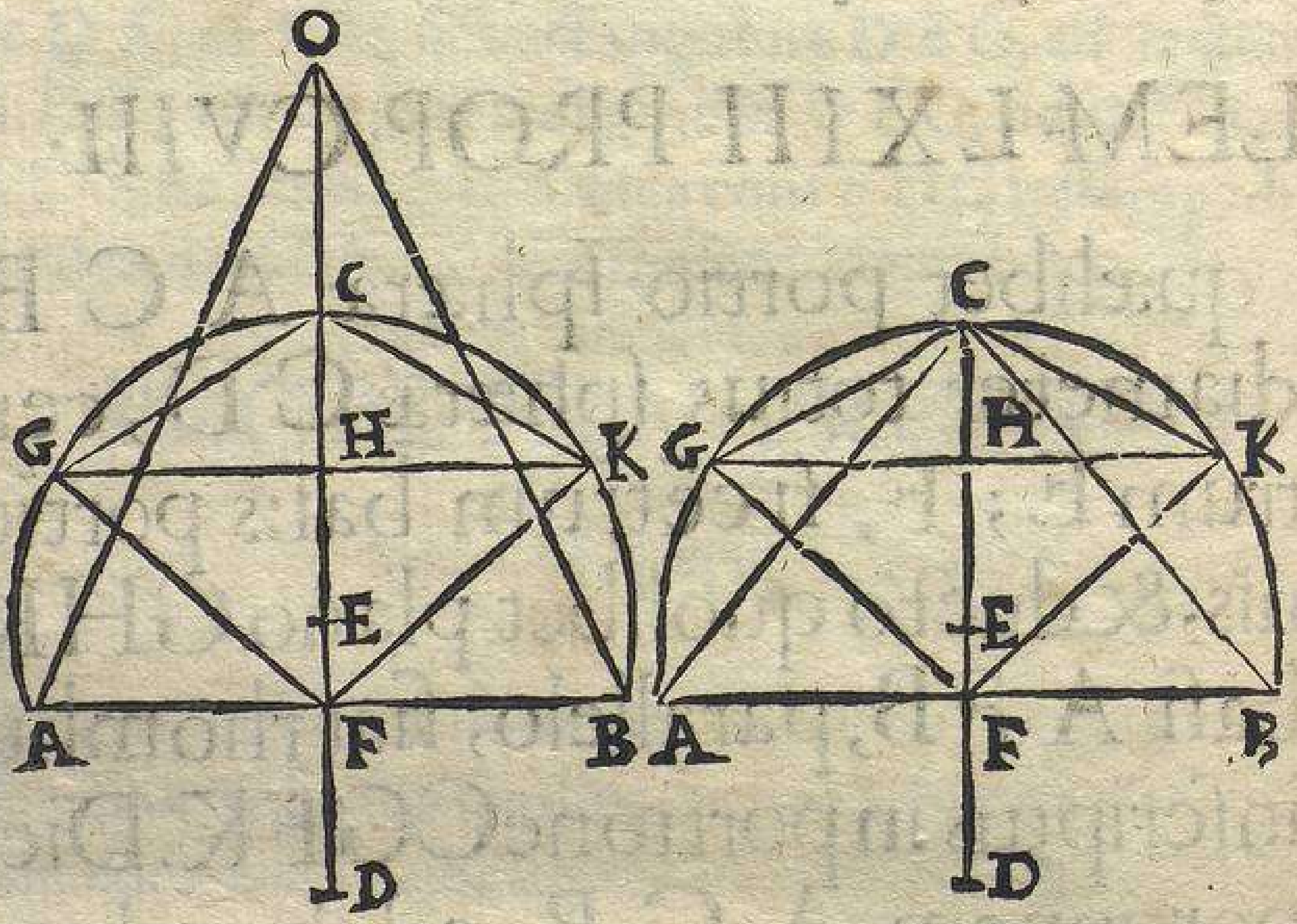
&

& intelligatur rhombus A L B K. Qui vtique erit quæsitus. Cùm enim duo anguli A L C, B L C, sint æquales, propter æqualitatem circumferentiarum A G, G B, quibus insistunt. Ergo vt B C, ad C A, seù, vt B A, ad H, sic B L, ad L A; nempe rectangulum B L D, &c. In reliquis sequatur præcedens demonstratio.

LEM. LXIII. PROP. CVIII.

Sit quælibet portio sphæræ A C B; diameter totius sphæræ C D, centrum E; F, si cētrum basis portionis, & ducto quolibet plano G H K, basi A F B, parallelo, fiat rhombus inscriptus in portione C G F K. Dico portionem A C B, ad rhombum C G F K, esse, vt rectāgulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C.

Fiat, vt D F, ad D F, cum D E, sic C F, ad F O; & fiat conus O A B. Ergo, ex Archimede 2. de sphær. & Cylindr. supra citato, conus O A *B*, erit æqualis portioni A C B. Quoniam verò conus O A B, ad rhombum C G F K, habet proportionem compositam ex proportione O F, ad F C, & ex proportione quadrati A F, ad quadratum G H. Ergo, & portio A C B, ad rhombum F G C K, habebit proportionem compositam ex ratione O F, ad F C, & ex ratione quadrati A F, ad quadratum G H; nempe ex ratione rectanguli D F C, ad rectan-



gulum D H C. Sed vt O F, ad F C, sic E D, cum D F, ad D F, ex constructione; & proportio rectanguli D F C, ad rectangulum D H C, componitur ex rationibus F D, ad D H, & F C, ad H C. Ergo, & proportio portionis A C B, ad rhombum C G F K, componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D F; D F, ad D H, & F C, ad H C. Sed duæ rationes E D, cum D F, ad D F, & D F, ad D H, faciunt rationem E D, cum D F, ad D H. Ergo quoque proportio portionis ad rhombum componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D H, & F C, ad C H. Sed istæ

duæ

duæ rationes componunt quoque rationem rectágulorum DFC, & ED, FC, seù EGF, ad rectangulum DHC. Quare patet propositum.

Vel intelligatur conus A C B, super eandem basim, & circa eundem axim cum portione, quæ sit A C B. Ergo portio A C B, ex Archimede 2. de sphær. & Cylin. propos 7. est ad conum A C B, vt D F, cum D E, ad D F; sed vt D F, cum D E, ad D F, sic (sumpta communi altitudine F C,) rectangulum D F C, cum rectangulo D E, C F, hoc est cum rectangulo E C F, ei æquale, ad rectangulum D F C; vt autem conus A C B, ad rhombum C G F K, sic (propter eandem altitudinem C F.) est quadratum A F, ad quadratum G H, seù rectangulú D F C, ad rectangulum D H C. Ergo ex æquali, portio A C B, est ad rhombum G C K F, vt rectangulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FOrsitan non erit inutile notasse, proportionem sphæræ, & hemisphærij ad suum rhombum, esse eandem; proportionem verò maioris portionis ad suum rhombum, esse is maiorem, minoris verò minorem. Quòd patet, quia, cùm portio A C B, sit ad rhombum G C K F, vt rectangulum D F C, cum rectangulo E C F, nempe cum quadrato E C, (si portio sit hemisphæriú) ad rectangulum D H C; patet, quod in hemisphærio, rectangulum D F C, seù D E C, seù quadratum E C, (quia hæc omnia sunt vnum, & idem) cum quadrato E C, est duplum vnius quadrati E C. Quare hemisphęrium ad rhombum sibi inscriptum, est, vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum G H, quæ proportio est eadem cum proportione sphæræ ad suum rhombum, per proposit 103. Quod etiam facilius patet, supponendo portionem A C B, esse hemisphærium, & mente intellecto rhombo C G D K, cuius basis eadem G H K. quia cùm duo rhombi C G F K, & C G D K, habeant communem basim G H K, erunt inter se, vt altitudines. vnde cùm in tali casu, altitudo C D, sit dupla altitudinis C F, sicut etiam sphæra est dupla hemisphærij; patet permutando, sphęram ad rhombum G C K D, esse vt hemisphęrium A C B, ad rhombum C G F K.

Quòd verò proportio maioris portionis ad suum rhõbum sit maior his, & minoris minor; patet, quia rectãgulum D F C, in primo casu, cum rectangulo E C F, est maius duplo quadrato C E, nempe quadrato inscriptibile in circulo maximo; in secundo verò casu est minus, vt esperienti patebit. Res enim est facilis demonstratu.

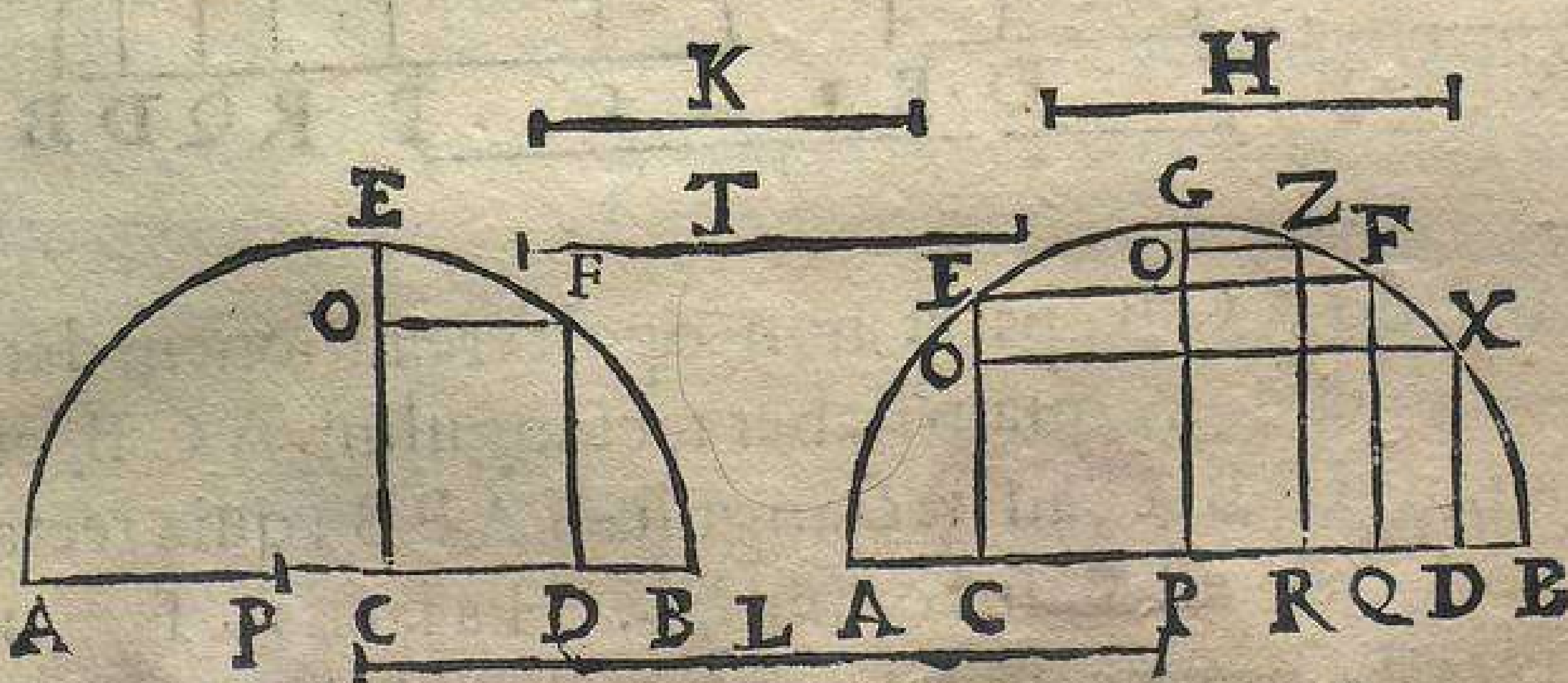
∴

LEM-

LEMMA LXIV. PROP. CIX.

Datam A B, vtcumque sectam in C, rursùm secare in D, inter C B, vt rectangulum A C B, vna cum rectangulo dimidiæ A B, in C B, sit ad rectangulum A D B, in data ratione possibili.

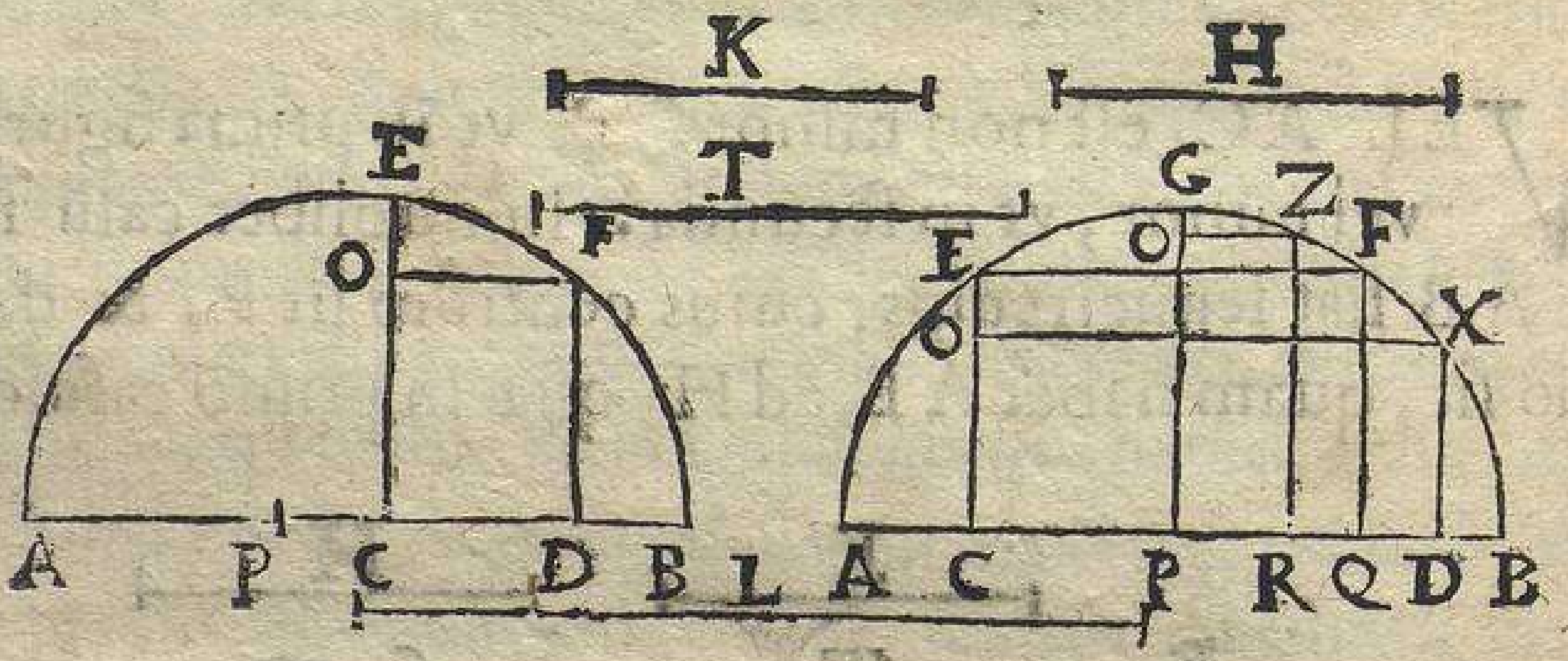
VEL A C, est non minor C B, vt in prima figura, vel minor, vt in secunda. In quolibet casu super A B, fiat semicirculus, cuius centrum sit P, & data ratio sit, quam habet A B, ad H, quæ in primo casu, de-



bet esse maior proportione rectanguli A C B, cum rectangulo sub dimidia A B, nempe sub P B, in C B, ad rectangulum A C B, quia sumpto vtcumque puncto D, semper rectãgulum A D B, minus est rectangulo A C B. In secũdo verò casu, potest esse æqualis, maior, & minor.

Nam

Nam, si fiat ipsi C P, æqualis P Q, rectangulum A C B, erit æquale rectangulo A Q B. Si verò punctum D, sumatur inter C, Q rectangulum factum ex talibus segmentis, erit maius rectangulo A C B. Secus erit, si punctum D sumatur inter Q, B; nam semper tale rectangulum erit minus rectangulo A C B, vt consideranti patet. Si verò proportio data est minor ea, quam habet rectágulum A C B, cum rectangulo P B C ad rectangulum A C B, nempe si rectangulum inueniendum sit maius



rectangulo A C B, patet non oportere rationem datam minorem esse ea, quam habet rectangulum A C B, cum rectangulo P B C, ad rectangulum A P B; quia rectangulum A P B, est maius omnibus. His iactis. Exponatur linea L, potens ambo rectangula A C B, & P B C, & fiat vt A B, ad H, sic L, ad K, & inter L, K, inueniatur media T, quæ in primo casu erit minor E C, erecta normaliter super A B, à puncto C; in secundo autem casu, vel erit æqualis E C, vel maior, sed nunquá maior A P, vel minor, vt patebit inferius. In primo casu, fiat C O,

æqua-

æqualis T, & acta O F, parallela A B, ducatur F D, normalis super A B. Dico punctum D, esse quæsitum. In secundo autẽ casu, si T, sit æqualis E C, agatur E F, parallela A B, & ducatur F Q, perpendicularis, & punctum Q, erit quæsitum. Si autem T, sit quidem maior C E, sed æqualis A P, punctum P, erit quæsitum. Si verò T, sit quidem maior C E, sed minor A P, seù G P, erectæ normaliter à puncto P, fiat P O, æqualis T, & acta O Z, parallela A B, vel ex vna parte, vel ex alia, & demissa perpendiculari Z R, punctum R, erit quæsitum. Si tandem T, sit minor E C, facta ei æquali C O, & per punctum O, ducta parallela A B, ipsa O X, & à puncto X, demissa perpendiculari X D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est vt A B, ad H, sic L, ad K, & vt L, ad K, sic quadratum L, ad quadratum T, & cũ T, sit æqualis in prima figura ipsi F D; in secunda autem vel F Q, vel G P, vel Z R, vel X D. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum L, ad quadratum F D, in prima figura; in secunda verò, ad quadratum linearum æqualium ipsi T. Sed quadratum L, est æquale rectangulo A C B, & rectangulo P B C, & quadratis linearum æqualium ipsi T, in prima figura, est æquale rectangulum A D B, in secunda verò sunt eis æqualia facta sub segmentis A B, diuisæ in punctis vbi incidunt perpendiculares. Quare, & vt A B, ad H, sic rectangula A C B, & P B C, ad rectangula inuenta, & supra exposita. Quare patet propositum.

Quòd verò linea T, in ambabus figuris habeat

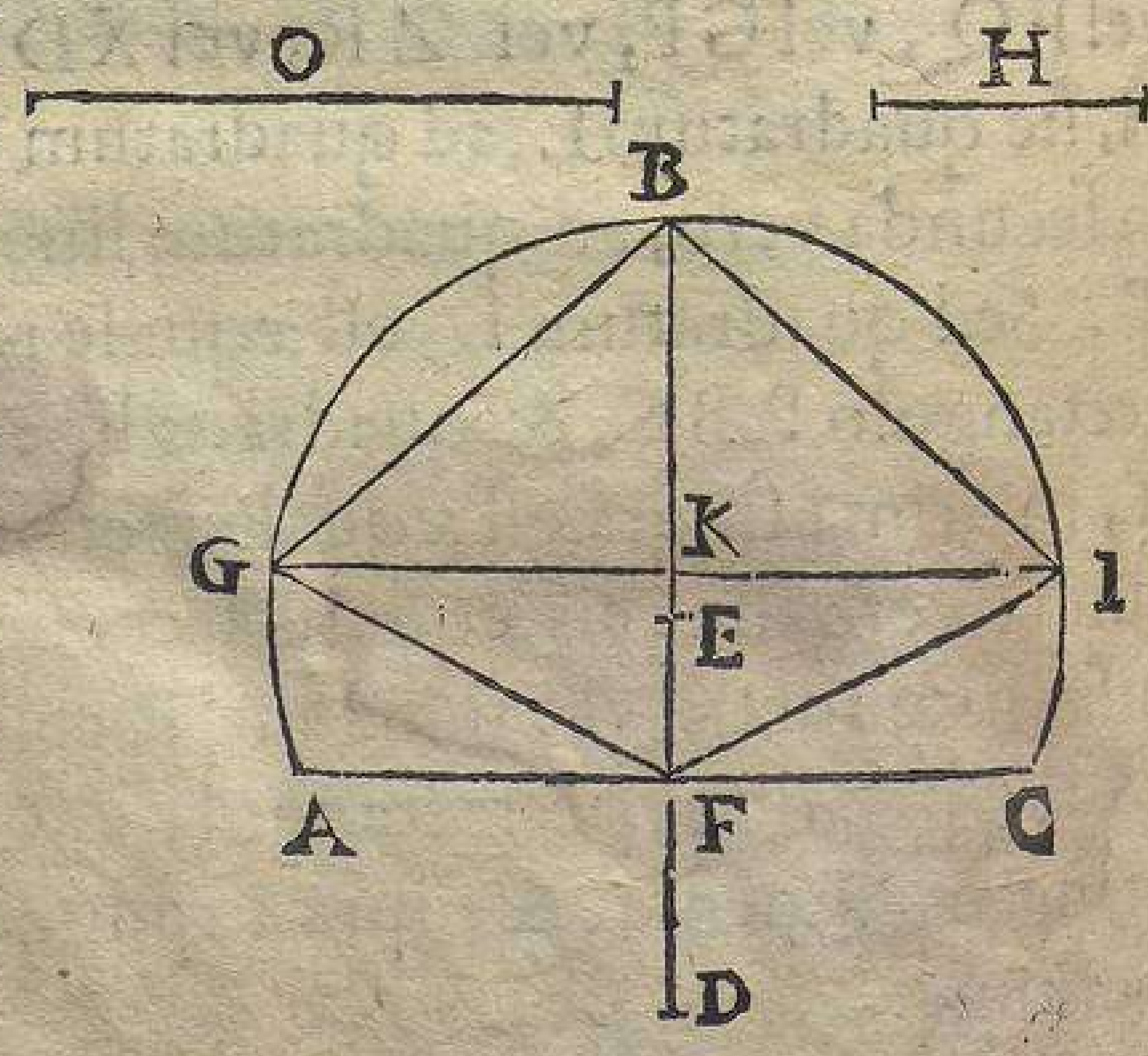
con-

conditiones prius expositas, patet ex determinatione congruente vnicuique casui, quæ determinationes supra sunt expositæ.

PROBL. XLVI. PROP. CX.

Data qualibet sphæræ portione, inscribere in ipsa rhombum, vt portio sit ad rhombum, in data proportione.

DAta portio sit ABC, & DB, sit diameter sphæræ, cuius est portio, E, sit eius centrum, & data ratio sit, quam habet *B*D, ad H. Cùm ergo ex propositione centum, & octo, pateat rationẽ portionis ad rhombum sibi inscriptum esse eandem cum ratione rectanguli DFB, cum rectangulo EBF, ad rectangulũ v.g DKB, inueniatur, per antecedens Lemma, punctum K, secundum hanc conditionem, vt illa duo rectangula sint ad



rectan-

rectangulum DKB, vt BD, ad H. Si per punctum K, agatur planum GKL, parallelum AC, & fiat rhombus GFLB, hic erit quæsitus. Res est euidens.

PROBL. XLVII. PROP. CXI.

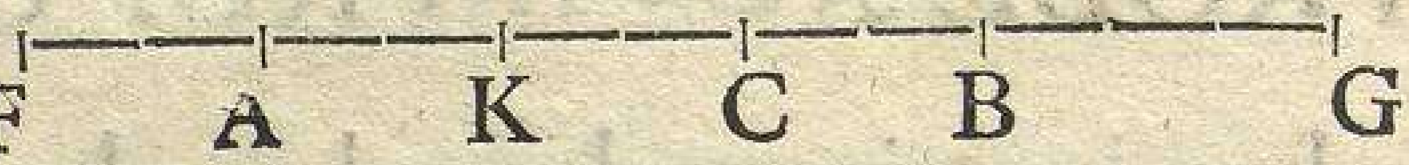
In data portione dato rhombo inscripto, inscribere alium rhombum, vt rhombus prius inscriptus, sit ad hunc posteriorem, in data proportione.

HOC Problema est facilissimum; quia cum illi duo rhombi sint in eadem altitudine, erunt inter se vt quadrata basium, & quadrata erunt vt rectangula contenta sub segmentis diametri; vnde adhibita congruenter Proposit. 109. habebimus intentum.

LEMMA LXV. PROP. CXII.

Datam rectam lineam FB, sectam in puncto K, rursùm in C, diuidere inter K, B, vt rectangulum FCB, cum quadrato KC, sit ad rectangulum FBC, in data proportione.

DAta proportio debet esse talis conditionis, vt si fiat in data proportione F K, ad aliam, hæc sit minor tota F B. Nam si esset æqualis, esset vt F K, ad illã, aliã, hoc est ad FB, ita rectãgulũ FKB, ad rectãgulũ FBK,



vnde KB, nõ posset diuidi in data proportione; & multo minus posset diuidi, si illa alia esset maior F B. Sit ergo proportio data ea, quam habet F K, ad F A, vbicumque cadat punctum A, inter F, B, & fiat vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, ei positam in directum; deinde K B, taliter secetur in C, vt sit sicut G B, ad B A, sic B C, ad C K. Dico punctum C, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est, vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, & vt K B, ad B G, sic (sumpta communi altitudine K C,) rectangulum B K C, ad rectangulũ sub K C, in B G. Ergo, & vt K F, ad F A, sic rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G. Pariter vt K F, ad F A, sic (sumpta communi altitudine C B,) rectangulũ F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo, & vt K F, ad F A, tàm est rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G, quam rectangulum F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo & vt K F, ad F A, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangula B K C, & F K, C B, ad rectangula C K, B G, & F A, C B. Sed rectangula B K C, & F K, C B, faciunt rectangulum F C B, cum quadrato C K; quia rectangulum B K C, diuiditur in rectangulum B C K, & in quadratum K C; & rectangulum

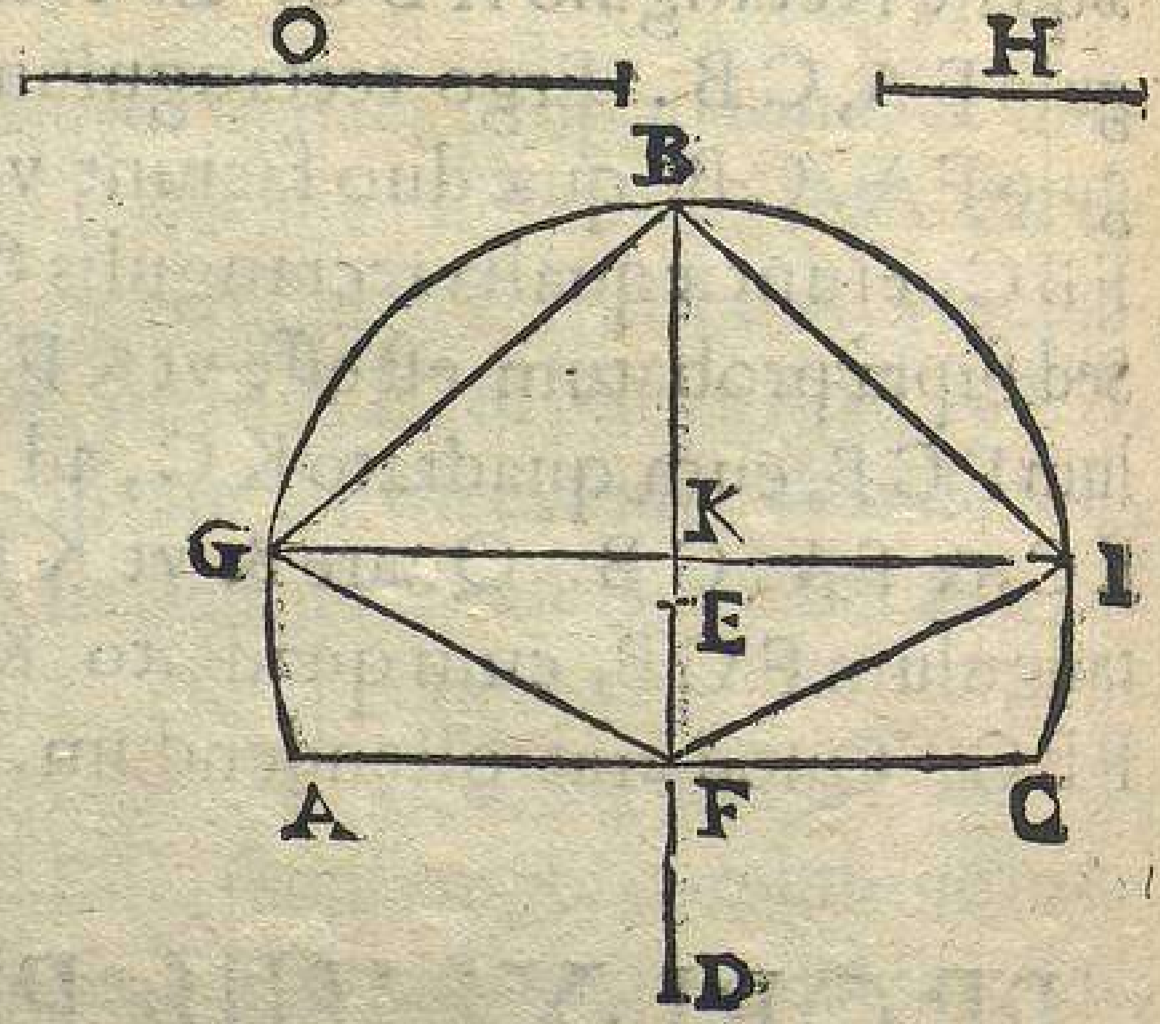
gulum B C K, cum rectangulo F K, C B, facit rectangulum F C B. Ergo, & vt K F, ad F A, ſic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangula G B, K C, & F A, C B.

Quoniam verò factum eſt ſupra, vt G B, ad B A, ſic B C, ad C K. Ergo rectangulum ſub G B, in K C, erit æquale rectangulo A B C. Et communi addito rectangulo F A, C B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo F A, C B, quæ duo faciunt vnum rectangulum F B C, erunt æqualia rectangulis G B, K C, & F A, C B. Sed ſupra probatum eſt eſſe vt K F, ad F A, ſic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad duo rectangula G B, K C, & F A, C B. Quare & vt K F, ad F A, ſic erit rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangulum F B C. Quod erat oſtendendum.

PROBL. XLVIII. PROP. CXIII.

Data qualibet ſphæræ portione, inſcribere in ipſa rhombum, vt ſuperficies conicæ conorum rhombi, ſint in data proportione.

Data portio ſit A C B, cuius axis ſit B F, & B D, ſit tota diameter ſphæræ, data proportio ſit, quam habet D F, ad H, & fiat vt D F, ad H, ſic H, ad O. Dico in primis hoc Problema eſſe determinatum, & determinationationem esse, quod proportio data sit talis conditionis, vt si fiat in data proportione DF, defectus axis portionis adiametro sphæræ, ad aliam, quæ sit H, & proportio DF, ad H, continuetur ad tertium terminum O; O, sit minor diametro sphæræ, vt patebit inferius.



Linea ergo DB, diuisa in F, rursùm diuidatur in K, inter F, B, vt rectangulum DKB, cum quadrato KF, sit ad rectangulum DBK, vt DF, ad O, per antecedens Lemma, & per punctum K, acto plano GKL plano AFC, parallelo, intelligatur rhombus BGFL, inscriptus in portione. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt DF, ad O, nempe vt quadratum DF, ad quadratum H, sic rectangulum DKB, cum quadrato KF, ad rectangulum DBk, & rectangulo DkB, est æquale quadratum Gk, & pariter rectangulo DBK, est æquale quadratum GB. Ergo & vt quadratum DF, ad quadratum H, sic quadratum GK, cum quadrato kF, nempe quadratum GF, æquale istis duobus quadratis, ad quadratum GB. Quare, & vt linea DF, ad lineam H, sic latus FG, ad latus GB. Sed vt FG, ad GB, sic (sumpta communi altitudine GK,)

rectan-

rectangulum F G K, ad rectangulum B G k; & vt rectangulum F G k, ad rectangulum B G K, sic superficies coni G F L, ad superficiẽ coni G B L, ex Archimede sępe citato. Ergo, & vt D F, ad H, sic superficies coni G F L, ad superficiem coni G B L. Quod erat faciendum.

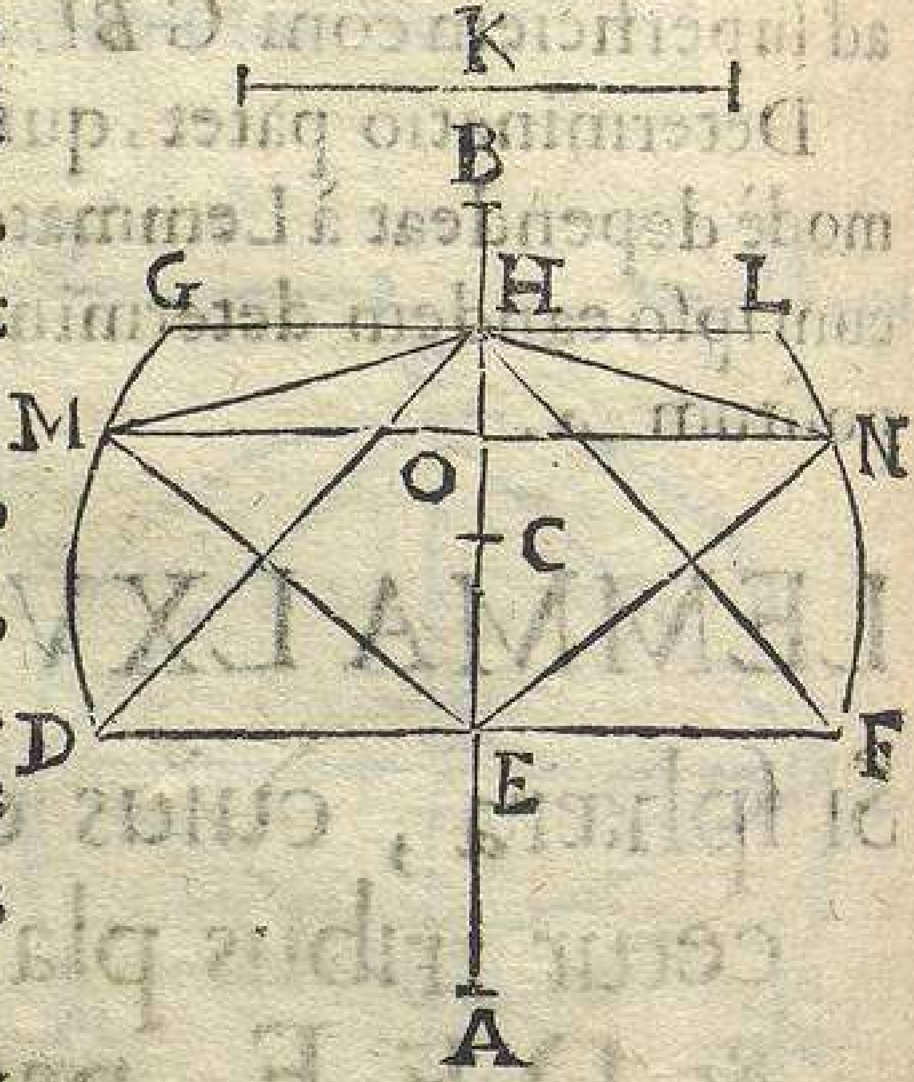
Determinatio patet, quia cùm hoc problema omnimodè dependeat à Lemmate antecedenti, debet sortiri cum ipso eandem determinationem. Quare patet propositum.

LEMMA LXVI. PROP. CXIV.

Si sphæra, cuius diameter B A, secetur tribus planis G H L, M O N, & D E F, parallelis, quibus diameter A B, sit normalis, & in segmento intermedio G D F L, inscribatur rhombus H M E N. Dico, quod secta H E, bifariam in C, segmentum G D F L, erit ad rhombum H M E N, vt tria rectangula sub A E, in C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B.

Nam

NAM super basim D E F, & circa axim segmenti intermedij H E, facto cono D H F, segmentum ad rhombum de foris sumpto cono, habet rationem compositam ex ratione segmenti G D F L, ad conum D H F, & ex ratione coni D H F, ad rhombũ H M E N. Sed segmentum G D F L, est ad conum D H F, ex Caualerio supra citato, vt tria rectangula sub A E, in C B, cũ tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B; conus verò D H F, ad rhombum H M E N, quia sunt circa eundem axim H E, est, vt basis ad basim, nempe, vt quadratum D E, ad quadratum M O, seu vt rectangulum A E B, ad rectangulum A O B. Ergo ex æquali, segmentum G D F L, ad rhombum G M E N, erit vt tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Quod &c.



SCHOLIVM.

NON diuerso modo probaremus, segmentum G D F L, esse ad rhombum H M E N, vt tria rectangula B H, C A, cum tribus rectangulis C E A, & cum

cum duobus quadratis C H, seù C E, ad rectangulum B O A. Quare, cum rectangulum A O B, sit idem, ad quod ista plana habent eandem determinationem, patet esse æqualia, nempe tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E esse æqualia tribus rectangulis B H, C A, tribus rectangulis C E A, & duobus quadratis C E, vel C H. Quibus hinc inde ablatis, & subtriplatis omnibus; vnũ rectangulum sub A E, in C B, cum vno rectangulo C H B, erit æquale vno rectangulo B H, C A, & vno rectangulo C E A. Vnde ex dictis habemus, quod si quædam recta linea B A, secetur in duobus punctis E, H, & rursùm segmentum intermedium H E, secetur bifariam in C; rectangulum A E, C B, cum rectãgulo C H B, erit æquale rectangulo B H, C A, cum rectangulo C E A. Quod etiam patet facilius, quia hæc rectangula sunt eadem plana, sed diuersimode denominata. Nam rectangulum sub A E, & B H, est idem cum rectangulo sub B H, E A; rectangulum verò sub A E, C H, est æquale rectangulo C E A; ergo duo rectangula sub A E, B H, & sub A E, C H, nempe rectangulum sub A E, C B, erit æquale rectangulo sub B H, E A, & rectangulo C E A. Et communi addito rectangulo C H B, cui est æquale rectangulum sub B H, C E. Ergo rectangulum sub A E, C B, cum rectangulo CHB, erit æquale rectangulo B H, E A; rectangulo C E A, & rectangulo B H, C E. Sed rectangulum B H, E A, cum rectangulo B H, C E, facit rectangulum B H, C A. Quare patet propositum.

Vnde

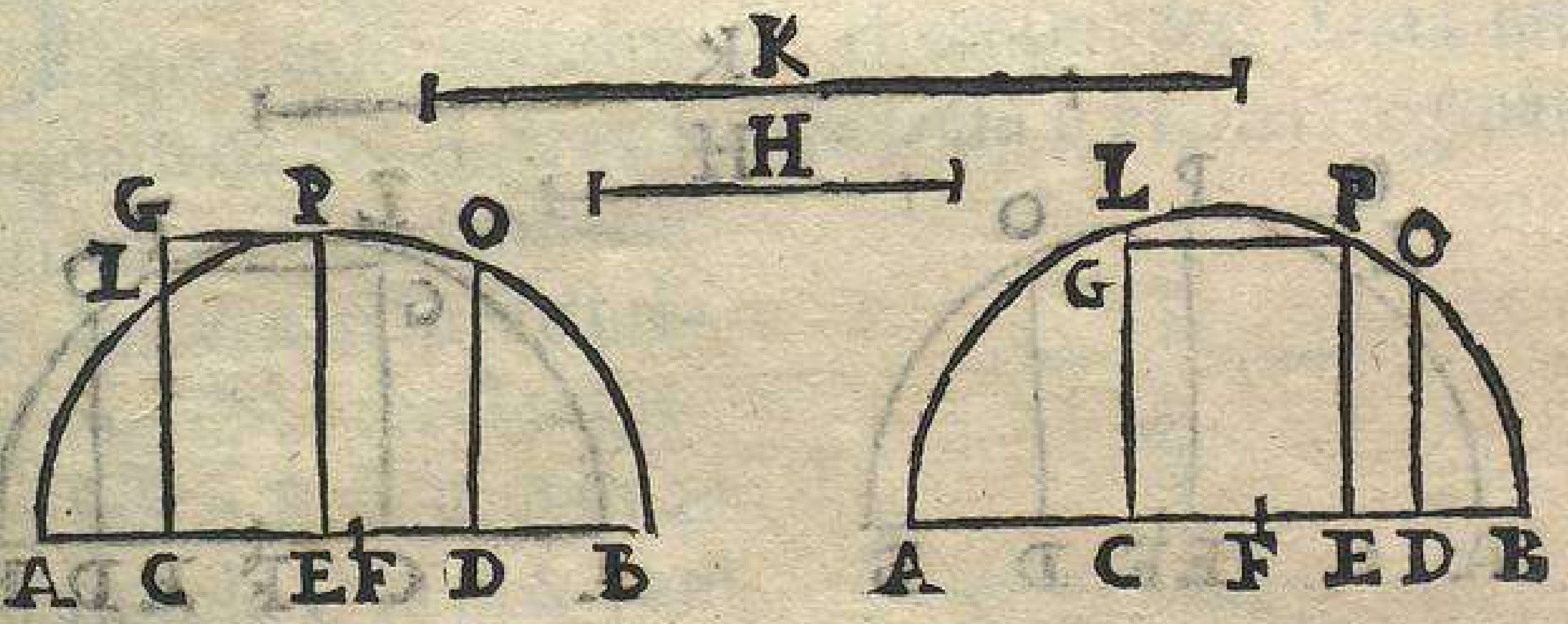
Vnde habemus ex dictis, quod si proponatur, vt proponetur in Lemmate sequenti. Datam rectam A B, sectam in duobus punctis E, H; rursùm secare in O, inter E, H, vt diuisa H E, bifariam in C, rectangulum sub A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, sit ad rectangulum A O B, in data proportione; etiam si fiat in data proportione ex alia parte rectangulum sub B H, in C A, cum rectangulo C E A, & cum sexta parte quadrati H E, ad idem rectangulum B O A; tamen habebimus intentum.

LEM. LVII. PROP. CV.

Datam rectam AB, sectam in punctis C, & D; rursùm diuidere in E, inter C, D, vt diuisa C D, bifariam in F, rectangulum sub A C, in F B, vna cum rectãgulo F D B, & cum sexta parte quadrati C D, sit ad rectangulum A E B, in data proportione.

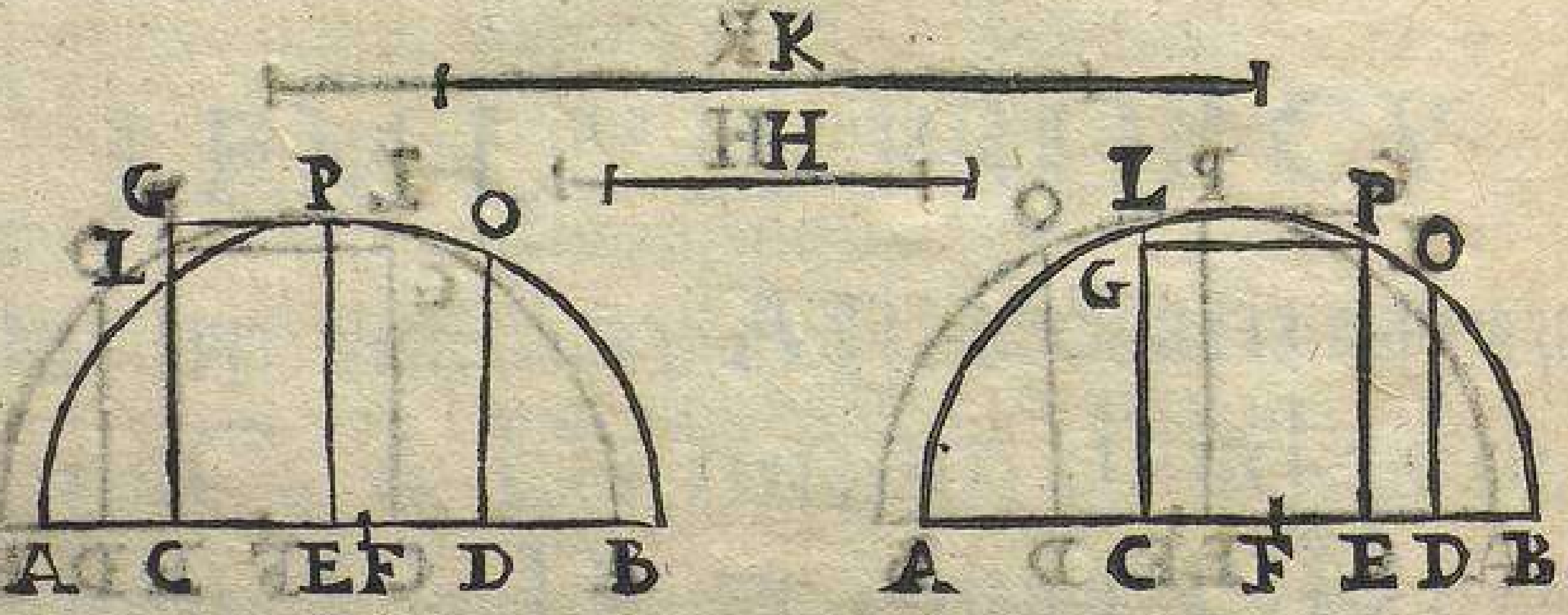
HOC Lemma potest habere duplicem casum; nam vel A C, D B, sunt æquales, vel inæquales. Si sint æquales, patet, quod proportio data debet esse talis conditionis, vt semper sit minor ea, quam habet rectan-

rectangulum ſub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum ſexta parte quadrati C D, ad alterum rectangulorum A C B, A D B. Quod patet, quia in quocumque puncto E, ſecetur C D, ſemper rectangulum A E B, erit maius rectangulo A C B, vel A D B. Debet tamen proportio data adeò eſſe minor, vt ſupra expoſitum eſt, vt tamen non ſit minor ea, quam habent prædicta illa plana, ad quartam partem quadrati A B; quia rectangulum æquale quartæ parti quadrati A B, eſt maximũ



omnium, vt conſideranti patet. Si verò A C, D B, ſint inæquales, oportet, quod proportio data ſit minor ea, quam habent prædicta plana ad rectangulum ſub minori illarum A C, D B, in reliquam totius A B. Debet tamen taliter eſſe minor, vt non ſit minor ea, quam habent prædicta plana, ad quartam partem quadrati A B.

Data ergo ratio ſit, quam habet A B, ad H, & ſuper A B, fiat ſemicirculus, & exponatur linea K, potens ſimul rectangulum ſub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum ſexta parte quadrati C D, & fiat vt A B, ad H, ſic quadratum K, ad quadratum alterius lineæ, quæ ex determinationibus supra expositis, erit non maior medietate A B, sed semper maior, lineis C L, D O, erectis normaliter super A B, à punctis C, D, in prima figura; & in secunda figura, semper erit maior O D, supponendo D B, esse minorem A C, sed potest esse aliquando maior, aliquando æqualis, & aliquando minor ipsa C L, & hoc secundum diuersas determinationes, & habitudines lineæ A C, ad totam A B, vt considiranti patet; semper tamen erit non maior medietate



Sit ergo hæc alia C G, & per punctum G, ducatur G P, parallela A B, quæ semper occurret, ex determinationibus supra positis, circumferentiæ inter puncta L, O. Occurrat ergo vt in P, & à P, dimissa perpendiculari P E. Dico punctum E, esse quæsitum.

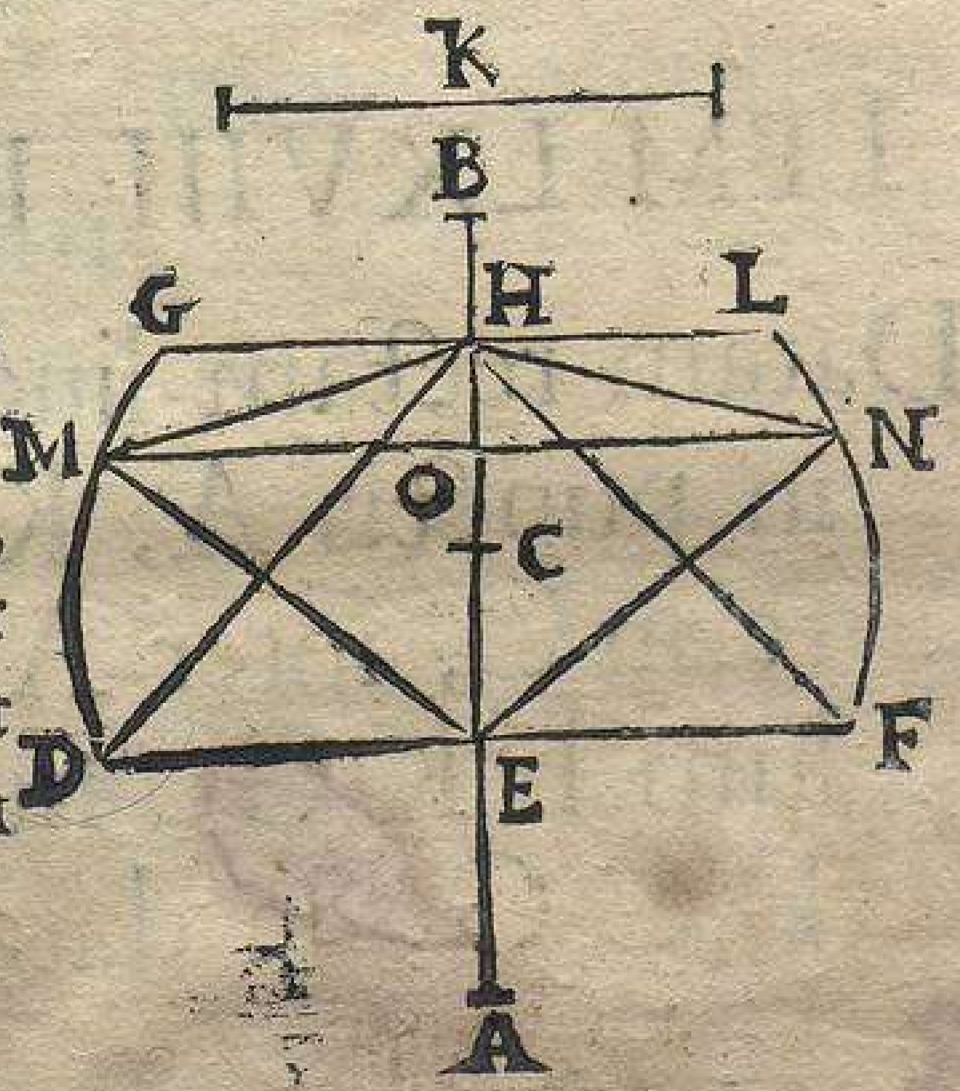
Cùm enim factum sit, vt A B, ad H, sic quadratum K, ad quadratum C G, nempe ad quadratum P E; & cum quadrato k, sint æqualia rectangulum A C, F B, rectangulum F D B, cum sexta parte quadrati C D; & pariter cum quadrato P E, sit æquale rectangulum A E B. Ergo, & vt A B, ad H; sic illa plana ad rectangulum A E B. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL. IL. PROP. CXVI.

In dato ſegmento intermedio inſcribere rhombum, vt ſegmentum ſit ad rhombum, in data proportione.

DAtum ſegmentum intermedium ſit G D F L, in quo inſcribendus ſit rhombus &c. Data ratio ſit, quam habet A B, ad k. Et ſecta E H, axis ſegmenti bifariam in C, diameter A B, ſphæræ taliter diuidatur in O, vt rectangulum ſub A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum ſexta parte quadrati E H ſit ad rectangulum A O B, vt tertia pars A B, ad k, per antecedens Lemma. Et per punctum O, agatur planum M O N, prioribus parallelum, & ſuper ipſū fiat rhōbus H M E N. Quem dico eſſe quæſitum.

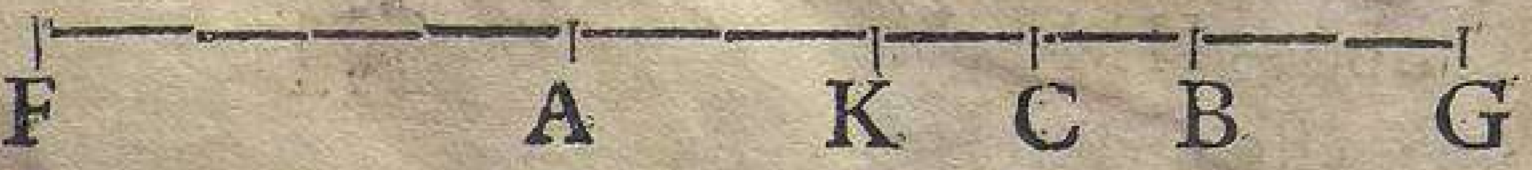


Sed antequam procedamus ad demonſtrationem, ſciendum eſt; quod cum præſens Problema dependeat ab antecedenti Lemmate, vt patet, & vt magis patebit, debet cum ipso sortiri easdem determinationes, quas repetere est superuacaneum.

Quoniam enim, vt tertia pars A B, ad K, sic rectangulum A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, ad rectangulum A O B. Ergo, & vt antecedentium tripla; nempe vt A B, ad K, sic tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum tribus sextis partibus quadrati E H, nempe cum dimidio quadrati E H, seù cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Sed & vt illa plana, ad rectangulum A O B, sic segmentum G D F L, ad rhombum H M E N, ex Propositio. 114. Quare patet propositum.

LEM. LXVIII. PROP. CXVII.

Datam rectam lineam F G, sectam in punctis A, K, B, rursùm secare in C, inter A, B, vt rectangulum F K G, sit ad rectangulum F C G, in data proportione.



HOc Lemma in aliter non difert à Propos. 115. nisi in hoc, quod terminus antecedens proportionis est diuersum, sed consequens est idem, nempe rectangulum

gulum ortum ex ſectione lineæ F G, inter A, B. Quare recipit etiam cum ipſo eandem determinationem, & eandem explicatioaem, vt conſideranti patet. Quare non eſt amplius immorandum. Solum meminendum eſt, pro huius ſolutione, poſſe adhiberi, circulum Parabolam, & Ellipſim, vt dictum eſt ſupra in Scholio propoſit. 97.

PROBL. L. PROP. CXVIII.

In dato ſegmento intermedio ſphæræ inſcripto rhombo, inſcribere alium rhombum, vt rhombus inſcriptus, ſit ad rhombum, qui inſcribetur, in data proportione.

HOc Problema dependet ab antecedenti Lemmate, & omnia ab explicatis in ſimili propoſito; quare ex ſuperioribus, facilè patet eius conſtructio, & demonſtratio.

SCHOLIVM.

HIc eſſet ſoluendum Problema. In dato ſegmento intermedio, inſcribere rhombum, vt ſuperficies conorum rhombi ſint in data proportione, ſed quia hoc

hoc Problema est quodam particulare contentum sub vniuersali, quod statim proponetur, ideò omittitur.

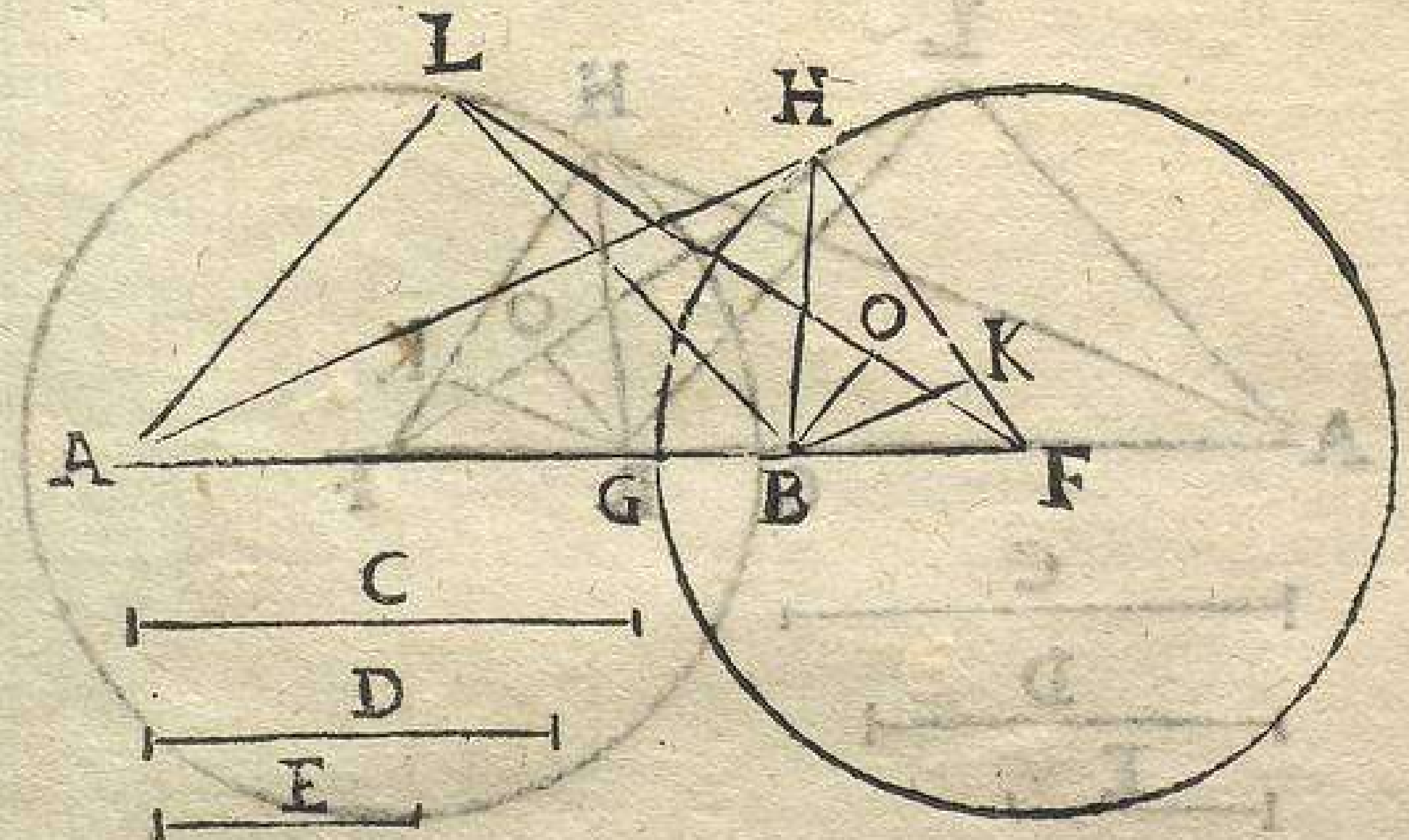
LEM·LXIX·PROP·CXIX·

Inuenire circulum secantem datam rectam lineam magnitudine, & positione, taliter, vt ab extremitatibus datæ lineæ inflexis lineis, quæ vniantur in quolibet puncto circumferẽtiæ inuenti circuli, semper retineant imperatam rationẽ. Inflexis autem talibus lineis, & vnitis extra periphæriam, impossibile sit retinere eandem rationem.

HOC Lemma, vel per modum Problematis, vel per modum Theorematis, solutum fuit à diuersis. Nempe, ab Eutocio initio Comentariorum super Apollonium Pergęum. Postea aliqualiter à Bartholomæo Souero lib. 3 de recti, ac curui proportione, ni fallor. Deinde à Galileo in postremis Dialogis pagina, apud nos 45. Tandẽ à P. Bonauentura Caualerio exercitatione 6. Propos. 33. Et forsitan ab alijs, quos non vidimus. Soluemus ipsum, & nos, quamuis construc-

tione,

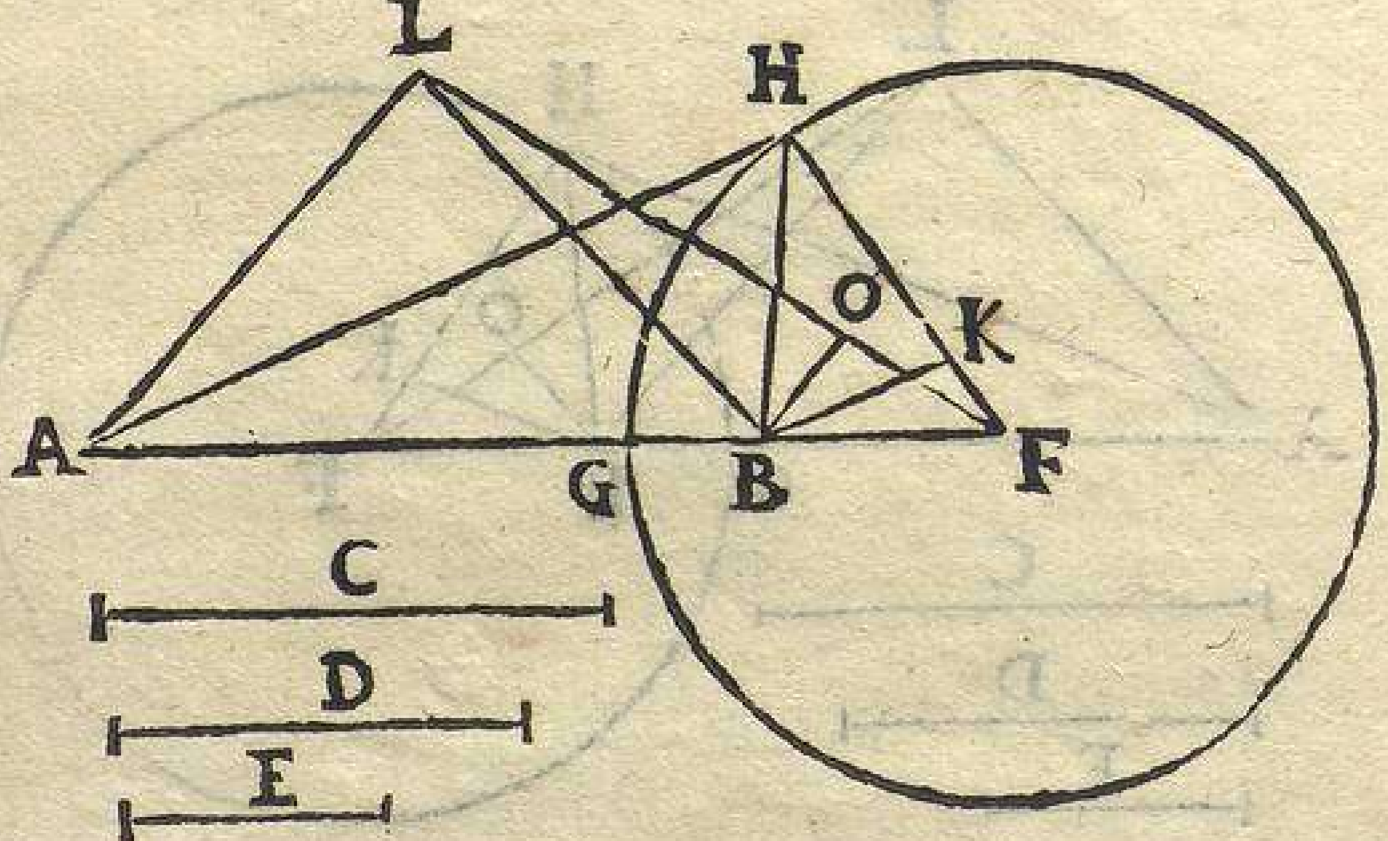
tione, & demonstratione parum diuersa à tradita ab Eutorio, præcipuè cum ipso vtamur in solutione Problematum alicuius considerationis.



Data ergo recta linea sit A B, & data proportio sit, quam habet C, ad D. Oportet inuenire circulum secãtem A B, in puncto v.g. G, vt ab extremitatibus A, B, inflexis lineis A H, H B, ad quodlibet punctum circumferentiæ, semper A H, ad H B, sit vt C, ad D.

Si data proportio sit æqualitatis, Lemma, vt proponitur, nequit solui; quia, vt ibidem ait Galileus, hoc admirabile tunc accidit, quod circulus degeneret in rectã lineam indefinitam, perpendiculariter erectam super datam rectam lineam A B, à puncto eius medio. Nam ab extremitatibus A, B, inflexis lineis ad quodlibet punctũ illius perpendicularis, semper hæ retinebunt proportionem æqualitatis, quia semper constituent triangulum æquicrure. Si verò proportio data sit inæqualitatis, semper Lemma potest construi; & eius constructio talis erit.

erit. Data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum minorem, hoc est si C, sit maior D, fiat vt C, ad D, sic D, ad E; & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic AB,



ad BF, ipsi productam in directum; & inter AF, FB, inueniatur media proportionalis, quæ sit FG. Tunc, centro F, interuallo FG, describatur circulus. Dico hunc esse quæsitum, nimirum, quod si in periphæria ipsius sumatur quodlibet punctum H, & vniantur in ipso AH, BH, quod semper AH, ad HB, erit vt C, ad D. Ducatur per punctum B, linea BK, parallela HA. Quoniam enim FG, est media proportionalis, per constructionem, inter AF, FB. Ergo vt AF, ad FG, seù ad FH, sic FG, seù FH, ad FB. Quare habemus duo triangula, nempe AFH, HFB quæ circa communem angulum F, habent latera proportionalia. Ergo sunt similia. Ergo angulus FHB, erit æqualis angulo HAF. Sed propter parallelas AH, BK, etiam angulus AHB, est æqualis alterno HBK. Ergo etiam duo triangula

AHB,

AHB, HBK, erunt ſimilia. Ergo vt AH, ad HB, ſic HB, ad BK. Et vt quadratum AH, ad quadratū HB, ſic AH, ad BK. Sed vt AH ad BK, ſic (ob parallelas AH, BK,) AF, ad FB, vt autem AF, ad FB, ſic C, ad F, (quia cum ſupra factum ſit, vt exceſſus C, ſuper E, ad E, ſic AB, ad BF.) Ergo, & vt C, ad E, ſeù, vt quadratum C ad quadratum D, ſic erit quadratum AH, ad quadratum HB. Ergo, & vt C, ad D, ſic AH, ad HB. Quod erat oſtendendum.

Quòd verò extra circumferentiam circuli inuenti nō ſit reperibile aliud punctum, vt ad illud inflexis lineis à punctis A, B, inflexæ habeant proportionem C, ad D, patet. Nam, ſit tale punctum, ſi datur, L, vel intra, vel extra circulum; & ſint ductæ LA, LB, LF; & per punctum B, ſit ducta BO, parallela AL. Quoniam, per hypotheſim, vt C, ad D, ſic AL, ad LB. Ergo & vt quadratum LA, ad quadratum LB, ſic quadratum C, ad D, quadratum, nempe ſic C ad E. Sed vt C, ad E, ſic, ex præoſtenſis AF, ad FB, & ob parallelas BO, LA, vt AF, ad FB, ſic AL, ad BO. Ergo, & vt quadratum LA, ad quadratum LB, ſic AL, ad BO. Ergo tres AL, LB, BO, ſunt continue proportionales. Cùm verò angulus ALB, ſit æqualis alterno LBO. Ergo triangula ALB, LBO, erunt ſimilia. Vnde angulus LAB, erit æqualis angulo BLO. Cùm verò angulus ad F, ſit cōmunis duobus triangulis AFL, LFB. Ergo hæc duo triangula cùm ſint æquiangula, erunt ſimilia. Vnde erit vt AF, ad FL, ſic FL, ad FB. Quare FL, erit media proportionalis inter AF, FB. Sed etiam FH, eſt media proportionalis inter easdē duas AF, FB. Ergo duæ FL, & FH, erunt æquales. Quod implicat, siue punctum L, sumatur extra, vt in schemate, siue intra circulū. Quare patet propositum.

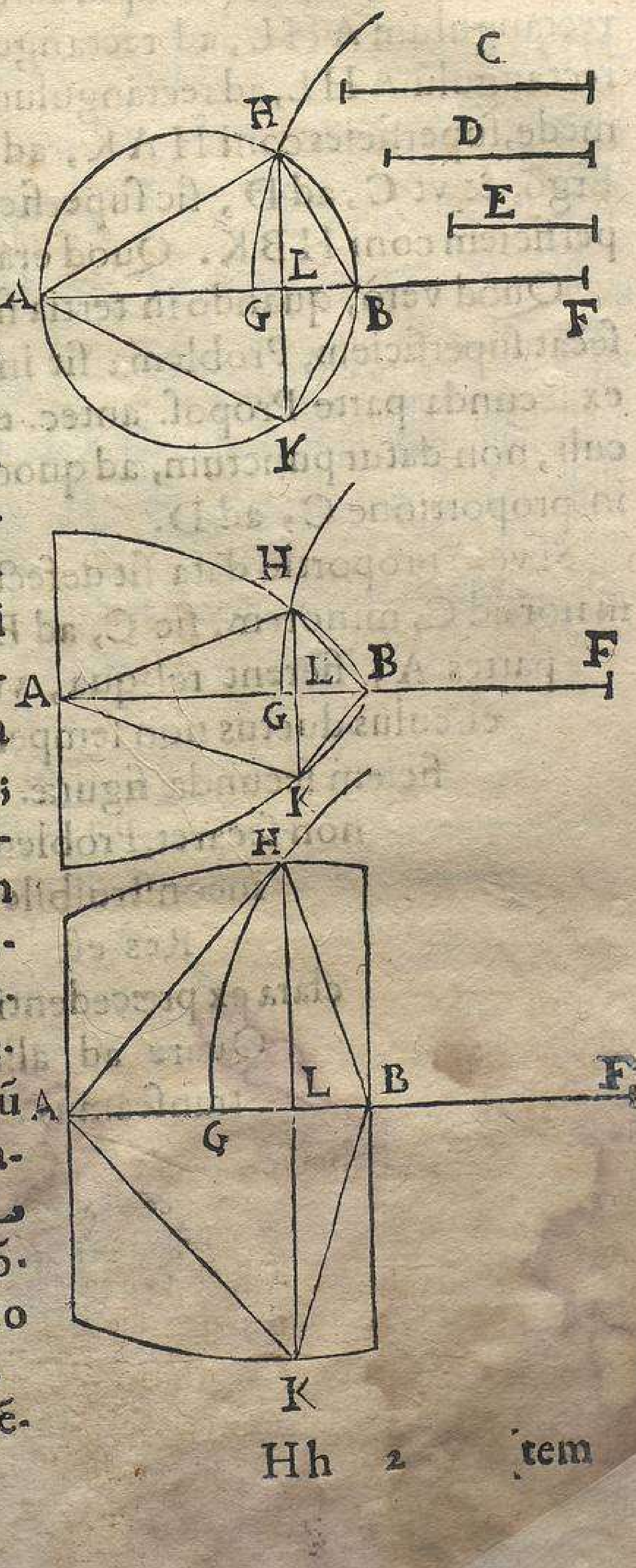
ROBL. LI. PROP. CXX.

In dato quolibet solido rotundo orto ex reuolutione circa axim; siue in dato quolibet eius segmento, seù ad verticem, seù intermedio, inscribere rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

SIT solidum quodlibet rotundum, vel sphæra, vel sphæroides, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud ortum ex reuolutione circa axim, &c., inclusum à curua tantùm superficie, quod nobis repræsentatur in prima figura. Vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vel quodlibet conoides, vel conus, vt in secunda; vel quodlibet segmentum intermedium prædictorum solidorum, vt in tertia, & omnium solidorū sit axis AB, oportet facere, quod imperatum est &c.

Data proportio sit quam habet C, ad D; quæ si sit æqualitatis, erubescimus verba profundere, cùm res etiā cæcu-

cæcutientibus sit splendidissima. Si verò proportio data sit inæqualitatis, vel est excessus, vel defectus; si est excessus, & data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum E, & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B, ad B F, positam sibi in in directum, & inter A F, F B, inuenta media F G, centro F, interuallo F G, describatur portio circuli secans superficiem dati solidi in H; (in prima enim, & secunda figura semper secabit; in tertia verò nō semper, sed quando non secat, Problema est insolubile, vt patebit inferius,) & per punctum H, ducatur planū H L K, perpendiculare axi A B; & supra H L K, inscribatur rhōbus A H B K. Dico hunc esse quæsitum.



Nam, per antecedētem Propositionem, est, vt C, ad D, sic A H, ad H B. Sed vt A H, ad H B, sic (sumpta communi altitudine HL,) rectangulum A H L, ad rectangulum B H L, vt autem rectangulũ A H L, ad rectangulum B H L, sic ex Archimede, superficies coni H A K, ad superficiẽ coni B H K. Ergo, & vt C, ad D, sic superficies coni A H K, ad superficiem coni H B K. Quod erat faciendum.

Quòd verò, quando in tertia figura, circulus non secat superficiem, Problema sit insolubile; patet, quia, ex secunda parte Propos. antec. extra periphæriam circuli, non datur punctum, ad quod ductæ A H, H B, sint in proportione C, ad D.

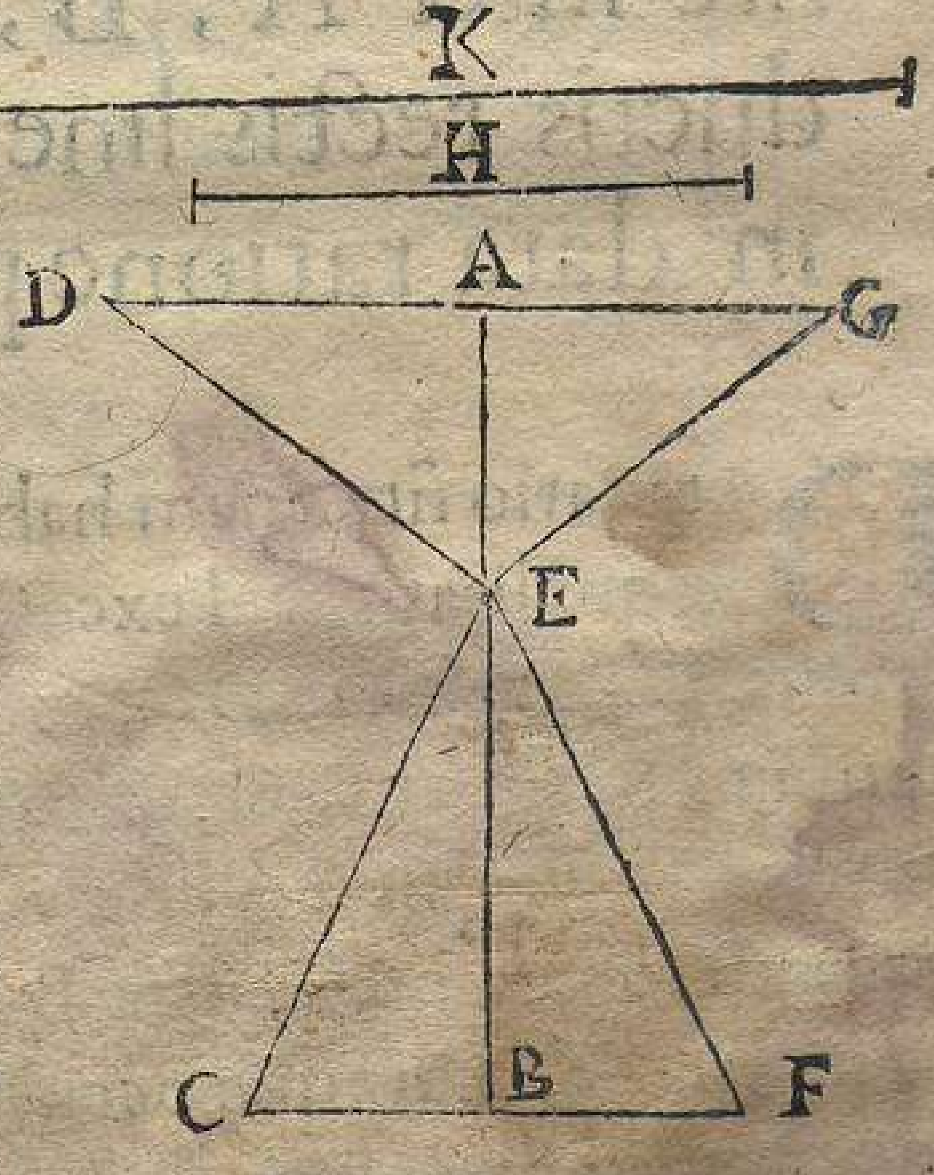
Si verò proportio data sit defectus, tunc fieret vt D, maior ad C, minorem, sic C, ad E, & producta B A, ad partes A, fierent reliqua, vt supra. Sed tunc circulus ductus non semper secaret superficiem secundæ figuræ. At quando non secaret, Problema esset inconstruibile. Res est clara ex præcedentibus. Quare ad alia transeamus.

PRO-

PROBL. LII. PROP. CXXI.

Data recta linea A B, à cuius extremitatibus A, B, ſint erectæ perpendiculares A D, B C, quæ pariter ſint datæ; reperire in A B, punctum E, vt iunctis E D, E C, & triangulis D E A, C E B, reuolutis circa A B; coni C E F, D E G, orti, ex tali reuolutione, ſint in data proportione.

Data proportio ſit, quam habet B A, ad H, & fiat vt quadratũ C B, ad quadratum D A, ſic B A, ad K, & B A, diuidatur in E, vt ſit, ſicut K, ad H, ſic B E, ad E A, & ductis E D, E C, intelligantur coni E C F, D E G. Quos dico eſſe quæſitos. Nam, ex propoſit. 1. proportio coni C E F, ad conum D E G, componitur



ex

ex proportione quadrati C B, ad quadratum D A, & ex proportione B E, ad E A. Sed vt quadratum B C, ad quadratum D A, sic B A, ad K; & vt B E, ad E A, sic K, ad H. Ergo proportio coni C E F, ad conum D E G, componetur quoque ex proportione B A, ad K, & K, ad H. Sed istæ duæ proportiones componunt quoque rationem B A, ad H. Ergo vt B A, ad H, sic conus C E F, ad conum D E G. Quod erat faciendum.

LEM. LXX. PROP. CXXII.

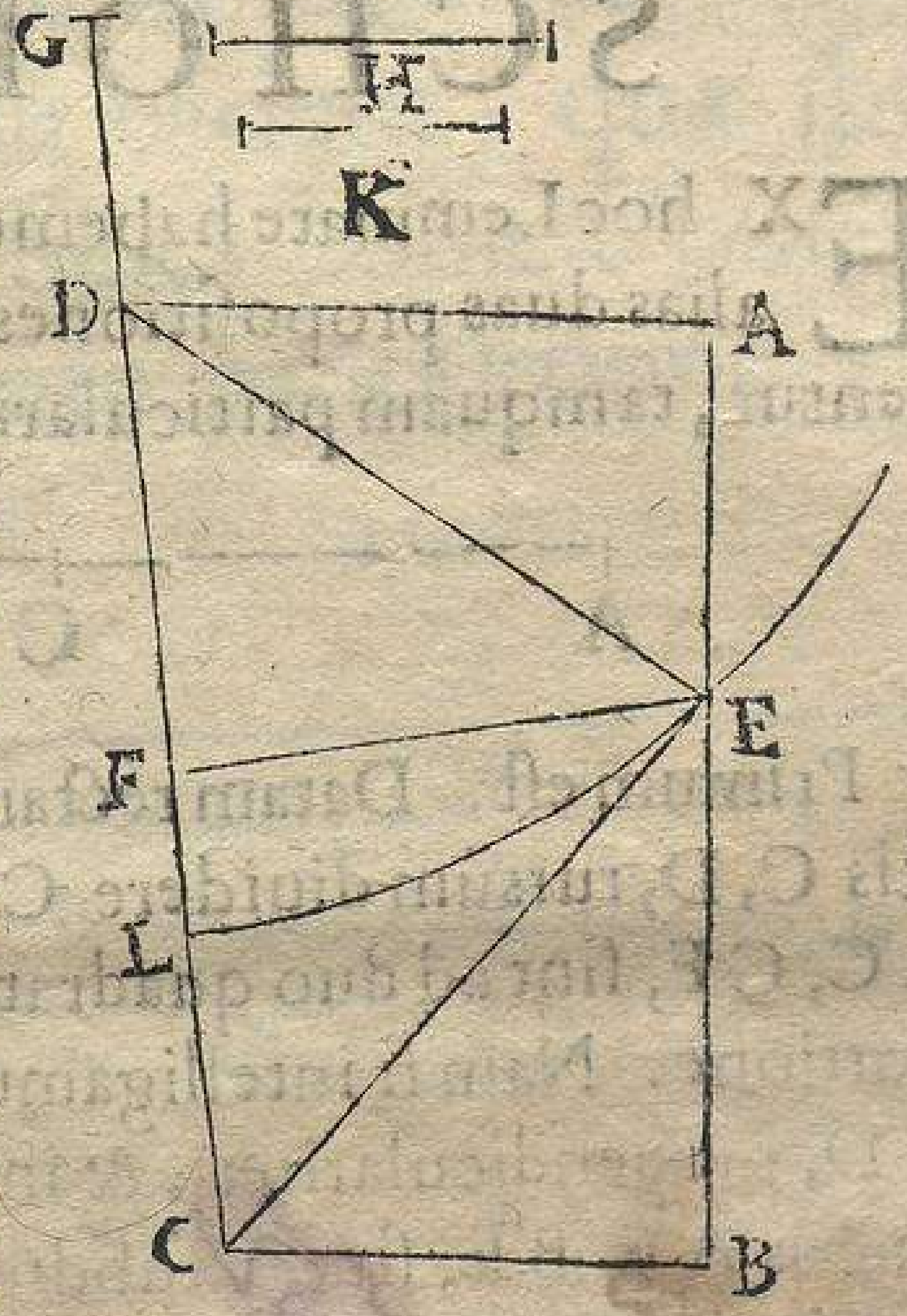
Data recta A B, & ab eius extremitatibus erectis normalibus B C, A D, quæ pariter sint datæ; reperire inter A, B, punctum E, vt ductis rectis lineis C E, D E, sint in data ratione possibili.

DAta ratio sit, quam habet C B, ad H, quæ vel est æqualitatis, vel excessus, vel defectus. Si sit æqualitatis. Ducatur D C, & diuidatur bifariam in F, & à puncto F, super D C, erigatur normalis F E, quæ occurret A B, vel inter A, B, vt in E, vel in aliquo punctorum B, vel A; vel extra B A, vel ad partes A, vel ad partes B. Vbicumque occurrat, semper istud punctum erit quæsitum, nempe si ducantur ad illud punctum lineæ

neæ

neæ à punctis D, C, istæ semper erunt æquales. Sed quando occurrit, vel in punctis A, B, vel extra ipsa, Lemma non est solubile, vt proponitur. Quando verò occurrit intra, vt in E, ductis D E, C E, patet ipsas esse æquales. Nam cum duæ D F, F E, sint æquales duabus E F, F C, & anguli D F E, E F C, sint recti. Ergo basis D E, erit æqualis basi C E.

Si verò ratio data sit excessus, fiat vt C B, ad H, sic H, ad K, & producatur C D, in G, vt sit sicut C B, ad K, sic C G, ad G D, & inter C G, G D, inueniatur media G L, & centro G, interuallo G L, describatur circulus occurrens A B, inter A, B, in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum.



Ducantur C E, D E. Ergo per ea, quæ habita sunt prop. 119. vt C B, ad K, seù vt quadratum C B, ad quadratum H, seù vt quadratum C G, ad quadratum G L, sic quadratum C E, ad quadratum E D. Quare, & vt C B, ad H, sic C E, ad E D.

Si verò circulus non occurreret *B A*, inter *B*, *A*, Lemma vt proponitur esset insolubile, vt patet ex secunda parte eiusdem propos. 119. quia extra circumferentiam

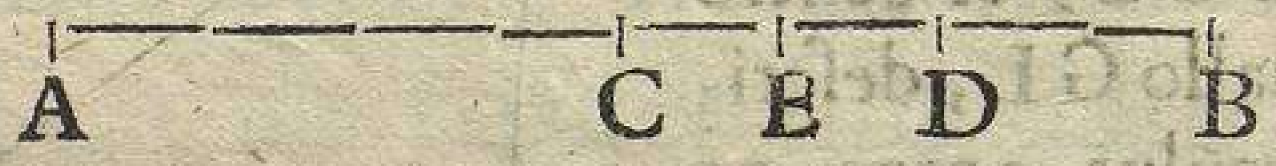
inuenti

inuenti circuli non eſt reperibile punctum, ad quod inflexæ lineæ retineant imperatam proportionem.

Si verò proportio C B, ad H, ſit defectus; fiat pariter, vt G B, ad H, ſic H, ad K; ſed D C, producatur vt factū eſt prius, ſed ex parte C, & fiant reliqua, vt prius. Nam eodem diſcurſu concludemus conuertendo propoſitum. Factum eſt ergo, quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Ex hoc Lemmate habemus modum, quo ſoluamus alias duas propoſitiones, quæ ſub Lemmate continentur, tamquam particularia ſub generali.



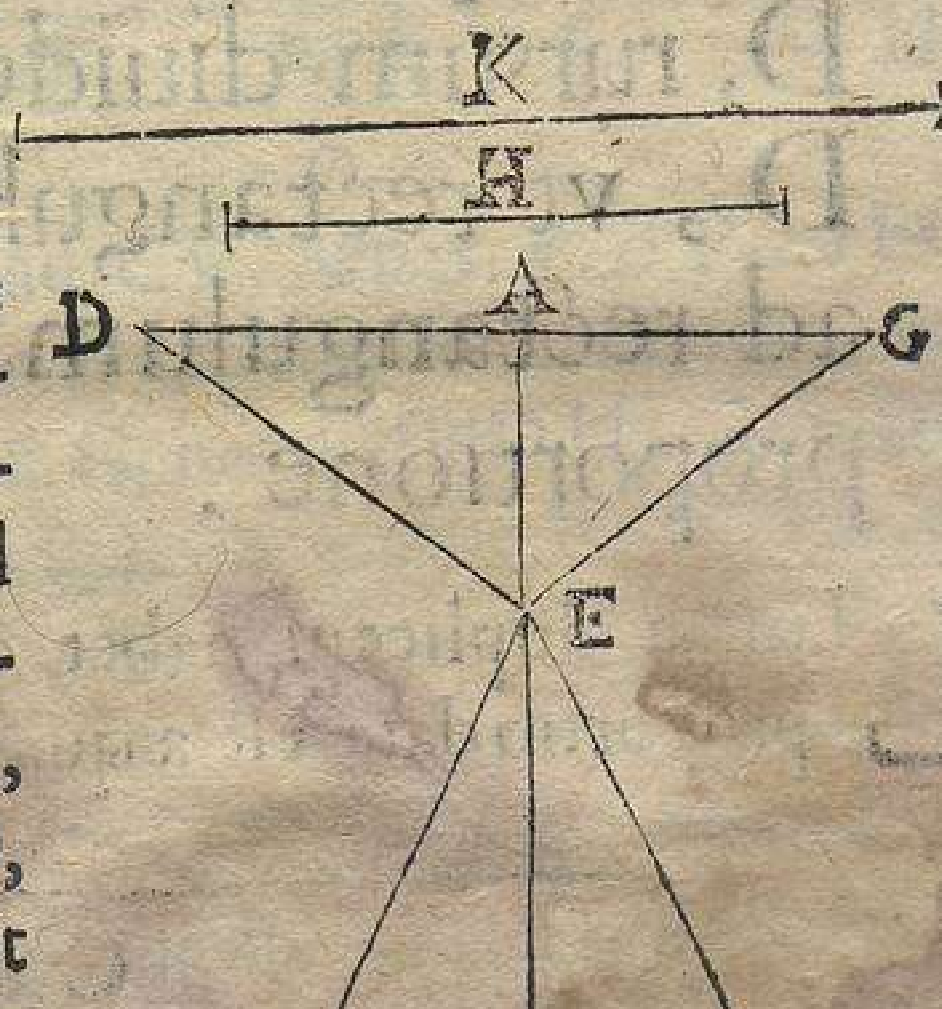
Primum eſt. Datam rectam v. g. A B, ſectam in punctis C, D, rursùm diuidere C D, in E, vt duo quadrata A C, C E, ſint ad duo quadrata B D, D E, in data proportione. Nam ſi intelligamus A C, D B, elleuari ſupra C D, perpendiculariter, & inueniamus punctum E, vt ductis A E, B E, ſint in ſubduplicata ratione proportionis datæ, punctum E, erit quæſitum.

Secundum eſt. Datam rectam A B, ſectam in duobus punctis C, D, rursùm diuidere C D, in E, vt rectangulum A C B, cum quadrato C E, ſit ad rectangulum A D B, cum quadrato D E, in data proportione. Nam ſi à punctis C, D, intelligamus erectas perpendiculariter medias proportionales inter A C, C B; & inter A D, D B.

DB. Et in CD, inueniamus punctum E, vt ductis lineis ab extremitatibus normalium ad punctum E, quæ ſint in ſubduplicata ratione data, factum erit, quod proponebatur, vt conſideranti patet.

PROBL. LIII. PROP. CXXIII.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies conicæ conodorum, ſint in data proportione.



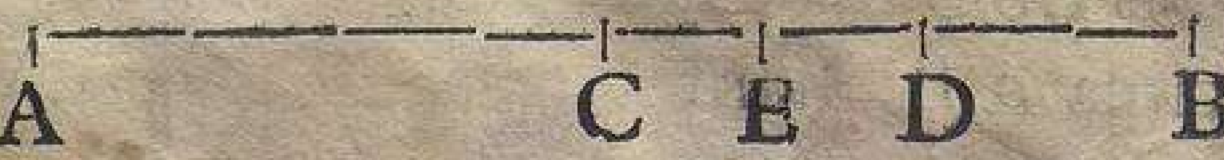
DAta proportio ſit, quam habet B A, ad H, & fiat vt C B, ad D A, ſic B A, ad K, & inter puncta B, A, inueniatur punctum E, vt ductis C E, D E, ſit vt K, ad H, ſic C E, ad E D, per propoſitionem antecedētem, & ex triāgulis EBC EAD, reuolutis circa A B, fiant coni C E F, D E G. Dico hos eſſe quæſitos. Nam B A, ad H, habet rationem compoſitam ex ratione A B, ad K, & ex ratione K, ad H, ſed

H, sed vt A B, ad K, sic facta est C B, ad D A, & vt K, ad H, sic C E, ad E D. Ergo ratio B A, ad H componetur ex rationibus C B, ad D A, & C E, ad E D. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E C B, ad rectangulũ E D A, & vt rectágulũ E C B, ad rectangulũ E D A, sic superficies conica coni E C F, ad superficiem conicam coni E D G. Quare, & vt B A, ad H, sic superficies conica coni C E F, ad superficiem conicam coni E D G. Quod erat faciendum.

LEM·LXXI· PROP· CXXIV·

Datam rectam lineam A B, sectam vtcumque in duobus punctis C, D, rursùm diuidere in E, inter C, D, vt rectangulum A E C, sit ad rectangulum B E D, in data proportione.

LEmma duplicem habet casum, secundùm quod proportio data est æqualitatis, vel inæqualitatis.

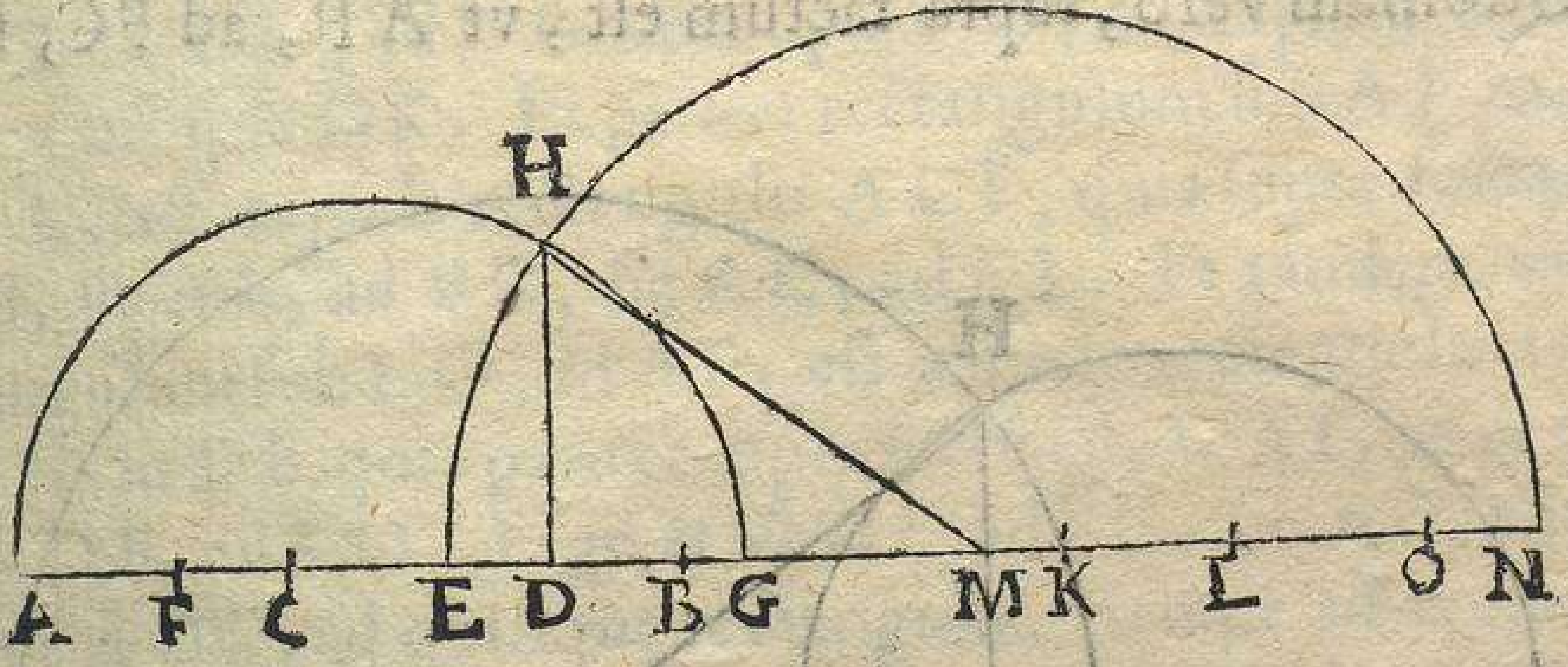


Si sit æqualitatis. Diuidatur D C, in E, vt sit sicut A D, ad C B, sic D E, ad E C. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim, vt tota A D, ad totam C B, sic

ablata

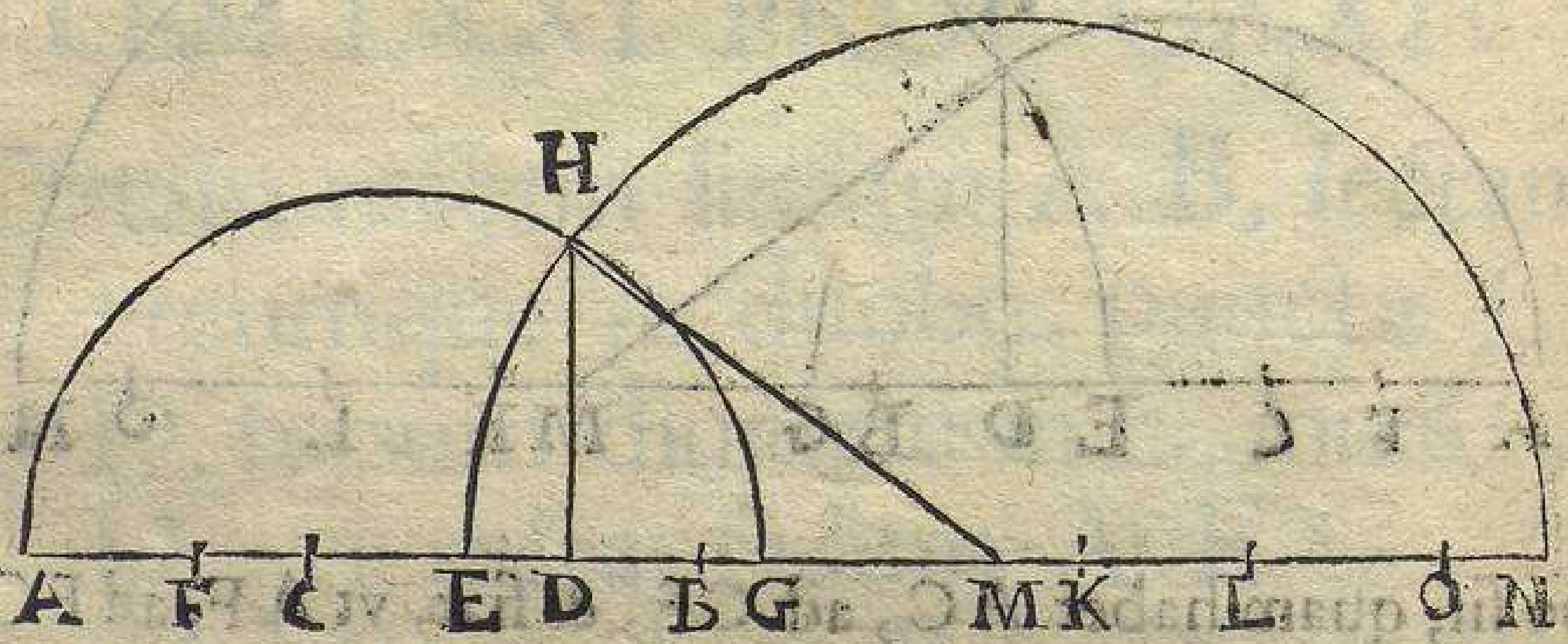
ablata D E, ad ablatam E C; ergo & reliqua A E, erit ad reliquam E B, vt tota ad totam, seù vt ablata D E, ad ablatam E C. Ergo rectangulum A E C, erit æquale rectangulo B E D.

SI verò proportio data sit inæqualitatis, determinetur rectangulum, quod debet esse maior terminus datæ proportionis, & sit hoc rectangulum A E C. Data ra-



tio sit, quam habet A C, ad C F, & fiat, vt A F, ad F C, sic C D, ad D G, & super A G, fiat semicirculus, & à puncto D, erigatur super A G, normalis D H. Sumatur autem ipsius D G, dupla D K, & pariter fiat vt A F, ad F C, sic A C, ad K L, ipsi A K, positam in directum, & tandem fiat vt A F, ad A C, sic D B, ad L O, itidem A L, positam in directum; & secta D O, bifariam in M & iuncta M H, centro M, interuallo M H, fiat semicirculus, qui vtique secabit C D, inter C, D, vt postea ostendetur; secet igitur eam in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula A D G, N D F, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato D H, &

& pariter rectangulo N D E, est æquale rectangulum O E D, quia N O, vt facilè patet, est æqualis ipsi D E, & O E, est æqualis ipsi N D. Ergo rectangulum A D G, erit æquale rectangulo O E D. Ergo vt A D, ad E O, sic E D, ad D G. Sed vt A D, ad E O, sic (sumpta communi altitudine A F,) rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Ergo & vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Quoniam verò, supra factum est, vt A F, ad F C, sic

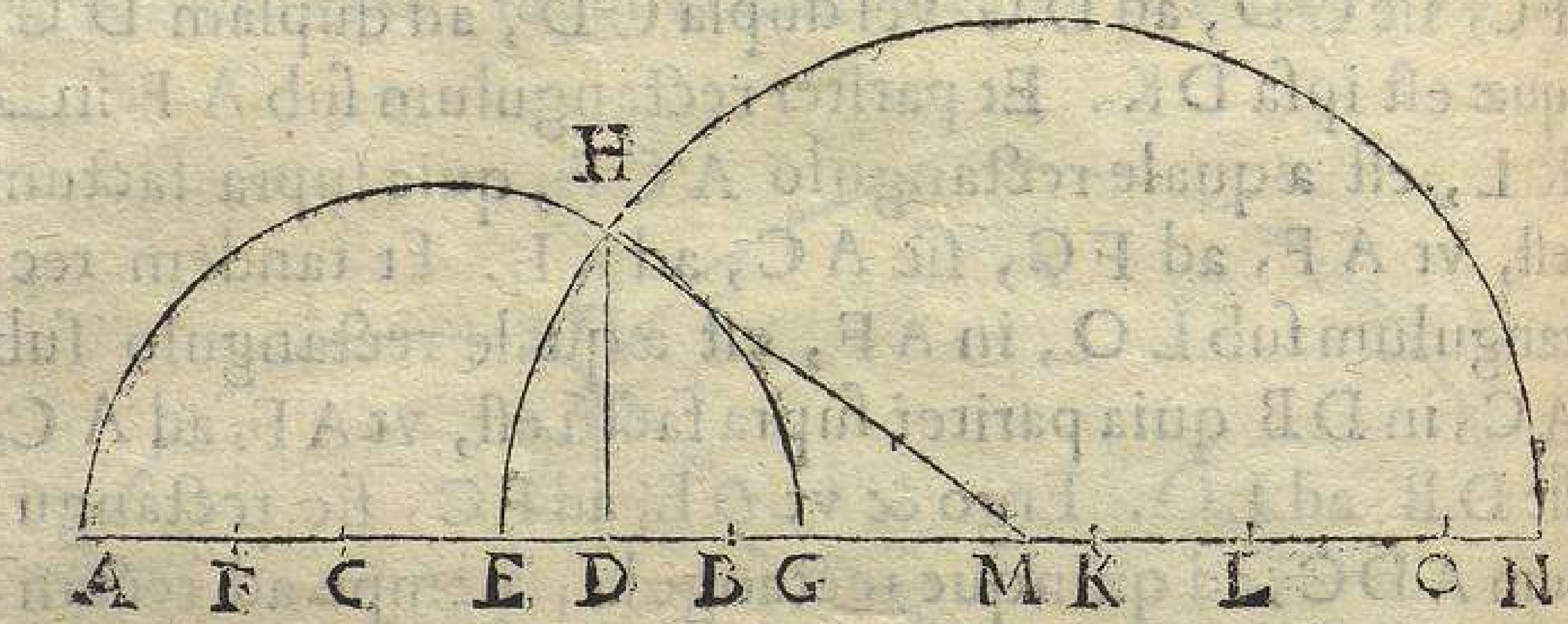


C D, ad D G. Ergo, & permutando, vt A F, ad C D, sic F C, ad D G. Et conuertendo vt C D, ad A F, sic D G, ad F C. Sed vt C D, ad A F, sic (sumpta communi altitudime A D,) rectangulum A D C ad rectangulum D A F. Ergo, & vt D G, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum D A F. Sed quoque supra probatum est, vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Ergo ex æquali; & in perturbata analogia, vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub O E, in A F. Sed rectangulum

gulum sub O E, in A F, diuiditur in rectangulum sub D E, in A F, in rectangulum sub D K, in A F, in rectangulum sub K L, in A F, & in rectangulum sub L O, in A F. Ergo & vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub D E, in A F, cum rectangulis sub D K, in A F, sub K L, in A F, & sub L O, in A F. Sed rectangulum sub D K, in A F, est æquale duplo rectangulo F C D, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic C D, ad D G, vel dupla C D, ad duplam D G, quæ est ipsa D K. Et pariter rectangulum sub A F in K L, est æquale rectangulo A C F, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic A C, ad K L. Et tandem rectangulum sub L O, in A F, est æquale rectangulo sub A C, in D B quia pariter supra factũ est, vt A F, ad A C, sic D B, ad L O. Ergo & vt D E, ad F C, sic rectangulum A D C, ad quinque rectangula, nempe ad rectangulum sub D E, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangulo sub A C, in D B. Quod seruetur.

Rursùm, quoniam vt D E, ad F C, sic (sumpta communi altitudine D E) quadratum E D, ad rectangulum sub E D, in F C. Ergo, & vt D E ad F C, tàm est rectangulum A D C, ad illa quinque rectangula, quàm quadratum D E, ad rectangulum sub D E, in F C. Ergo & vt D E, ad F C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad sex rectangula, nempe ad rectangulum sub E D, in F C, cum rectangulo sub E D, in A F; cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangulo

tangulo ſub A C, in D B. Sed rectangula ſub D E, in FC, & ſub D E, in A F, faciunt rectangulum ſub D E, in C A. Et pariter rectangulum ſub A C, in D B, cum rectangulo ſub A C, in E D, facit rectangulum ſub A C, in EB. Ergo, & vt D E, ad F C, ſic rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum ſub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F.



Tandem vt D E, ad F C, ſic (ſumpta communi altitudine compoſita ex A C, & ex dupla C D,) rectangulum ſub E D, in talem compoſitam, nempe rectangulũ ſub A C, in E D, cum duobus rectangulis C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis D C F. Quare, & vt rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum ſub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F, ſic rectangulum ſub A C, in E D, cum duplo rectangulo C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis F C D. Cum ergo ſit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, ſiue

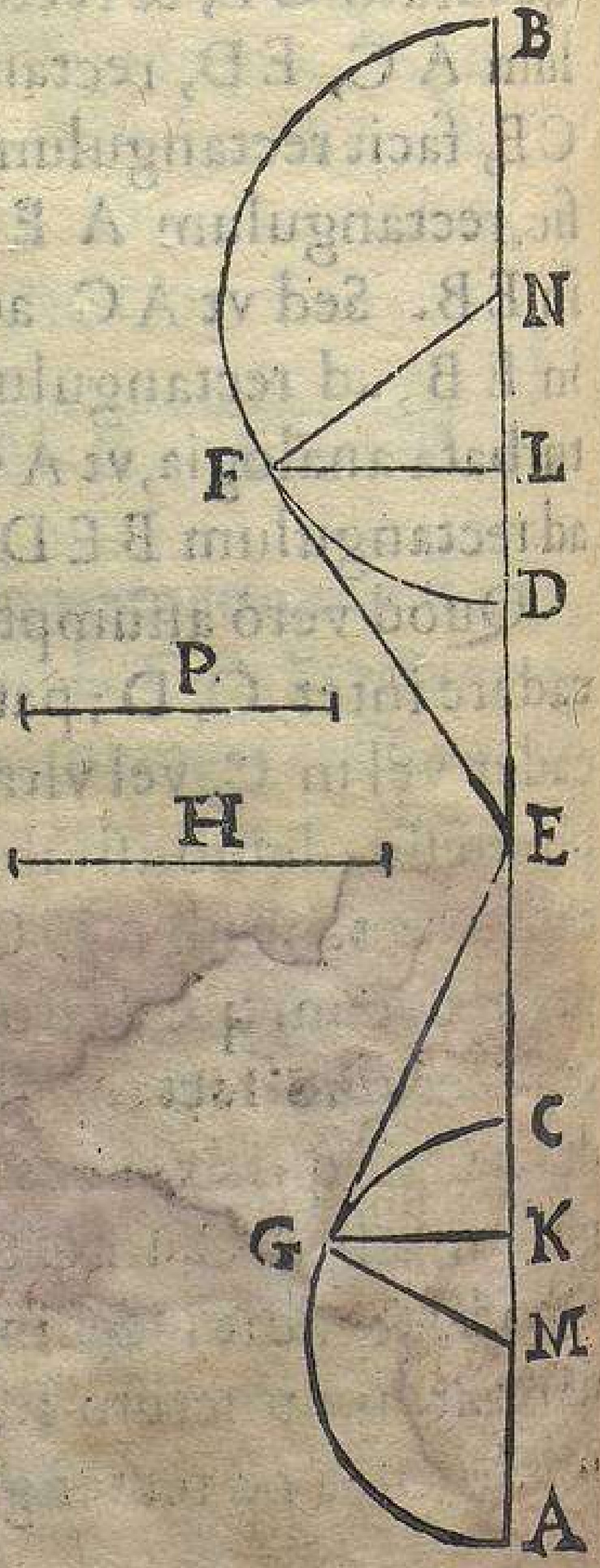
ſiue vt D E, ad F C. Quare & vt D E, ad F C, ſic exceſſus rectanguli A D C, cum quadrato E D, ſuper rectangulum A C, E D, & ſuper duo rectangula C D E, ad rectangulum ſub A C, in E B. Sed exceſſus rectanguli A D C, cum quadrato D E, ſuper rectangulum ſub A C, in E D, & ſuper duo rectangula C D E, eſt rectangulum A E C. Quia rectangulum A D C, diuiditur in rectangulum A C D, & in quadratum C D; duo autem quadrata C D, D E, excedunt duo rectágula C D E, quadrato C E, & rectangulum A C D, excedit rectangulum A C, E D, rectangulo A C E, quod cum quadrato C E, facit rectangulum A E C. Ergo, & vt D E, ad F C, ſic rectangulum A E C, ad rectangulum ſub A C, in E B. Sed vt A C ad E D, ſic rectangulum ſub A C, in E B, ad rectangulum B E D. Ergo ex æquali in perturbata analogia, vt A C, ad C F, ſic rectangulum A E C, ad rectangulum B E D. Quod erat &c.

Quòd verò aſſumptum eſt ſupra, nempe punctum E, cadere inter C, D; patet. Nam, ſi non cadit inter C, D, cadet vel in C, vel vltra C. Non in C, quia eodem progreſſu, demonſtrabitur eſſe, vt D E, ad F C, ſic exceſſus rectanguli A D C, cum quadrato D E, ſeù ex hypotheſi, cum quadrato D C, ſuper rectangulum A C D, & ſuper duo rectangula C D E, nempe ſuper duo quadrata C D, qui exceſſus eſſet in tali caſu nihil, ad rectangulum ſub A C, in C B, nempe ad rectangulum A C B. Quod implicat. Et multum maius abſurdum concluderetur, ſi punctum E, caderet vltra C; quia tunc minus nihilo, eſſet ad rectangulum poſitiuum, vt E D, ad F C.

LEM-

LEM. LXXII. PROP. CXXV.

Datis duobus semicirculis extra se positis, nec se contingentibus, quorum diametri sint sibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos semicirculos punctum, à quo ductis tangentibus semicirculos, istæ sint ad inuicem, in data proportione.



DAti duo semicirculi sint, quorum diametri B D, C A, sint vna linea continuata, & D C, sit linea extra semicirculos, & inter ipsos intercepta. Oportet autem facere, quod imperatum est. Data proportio sit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A C, ad H, sic H, ad P; deinde per Lemma antecedens, in C D, inueniatur punctum E, vt rectangulum A E C, sit ad rectangulum B E D, vt A C, ad P,

&

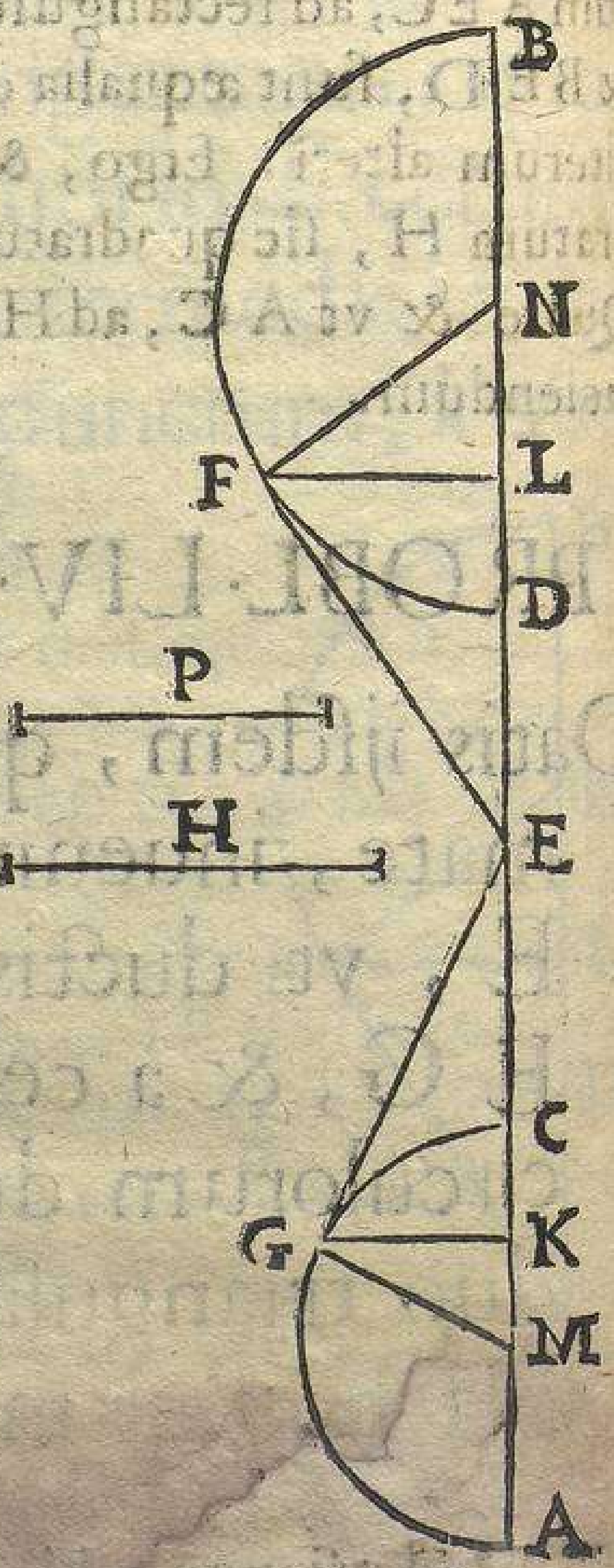
& à puncto E, ducantur tangentes E F, E G. Quas asſero eſſe quæſitas. Nam, quoniam vt A C, ad P, tàm eſt quadratum A C, ad quadratum H, quàm rectangulum A E C, ad rectangulum B E D, & rectangulis A E C, & B E D, ſunt æqualia quadrata tangentium E G, E F, alterum alteri. Ergo, & vt quadratum A C, ad quadratum H, ſic quadratum E G, ad quadratum E F. Quare, & vt A C, ad H, ſic E G, ad E F. Quod erat faciendum.

PROBL. LIV. PROP. CXXVI.

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Lemmate, inuenire in C D, punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & à centris M, & N, ſemicirculorum ductis M G, & N F, duo triangula rectangula M G E, N F E, ſint in data proportione.

QVod triangula M G E, & N F E, ſint rectangula, patet ob tangentes, & ſemidiametros. Data ergo proportio ſit, quam habet A M, ad H, & in C D, inueniatur punctum E, inter C, D, vt ductis tangentibus E G, E F, tangens G E, ſit ad tangentem F E, vt N D, ad H, & iungantur F N, G M. *D*ico triangula

gula M G E, N F E, esse quæsita. Dimittantur à punctis G, F, perpendiculares G K, F L. Tunc arguitur sic. Proportio A M, ad H, cōponitur ex proportione A M, ad N D, seu M G, ad N F, & ex proportione N D, ad H, hoc est, ex factis, ex proportione G E, ad E F. Sed hæ duæ proportiones componunt etiam proportionẽ rectanguli M G E, ad rectangulum N F E. Ergo & vt A M, ad H, sic rectangulum M G E, ad rectangulum N F E. Sed propter similitudinem triangulorum rectangulorum E G M, G M K, rectangulum M G E, est æquale rectangulo sub E M, in K G, & pariter propter eandẽ rationem similitudinis, rectāgulū E F N, est æquale rectāgulo sub N E, in F L. Ergo, & vt A M, ad H, sic rectangulum sub E M, in K G, ad rectangulum sub N E, in F L. Ergo, & horum rectangulorum dimidia, nempe triangula E G M, E F N. Ergo, & vt A M, ad H, sic triangulum E G M, ad triangulum N F E. Quod erat faciendum.

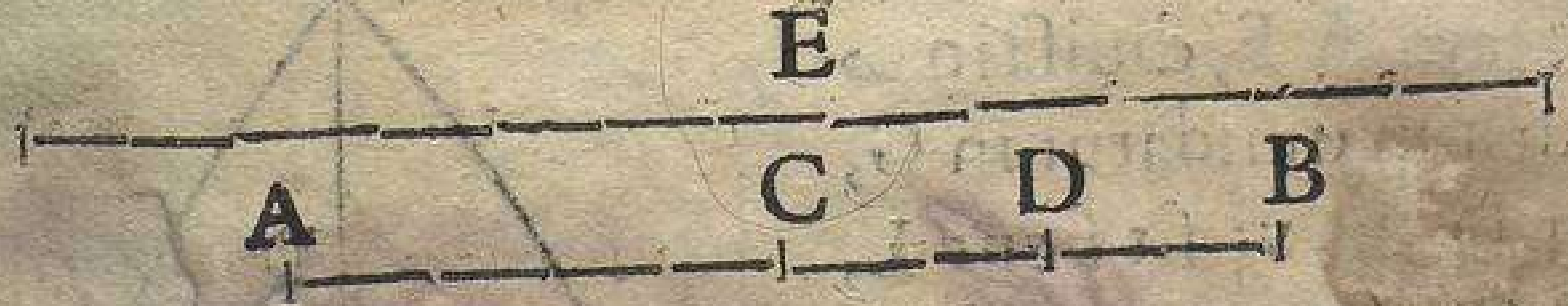


LEM-

LEM. LXXIII. PROP. CXXVII.

Datam A B, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B, C D, sit ad rectangulum AD, CB, in data proportione.

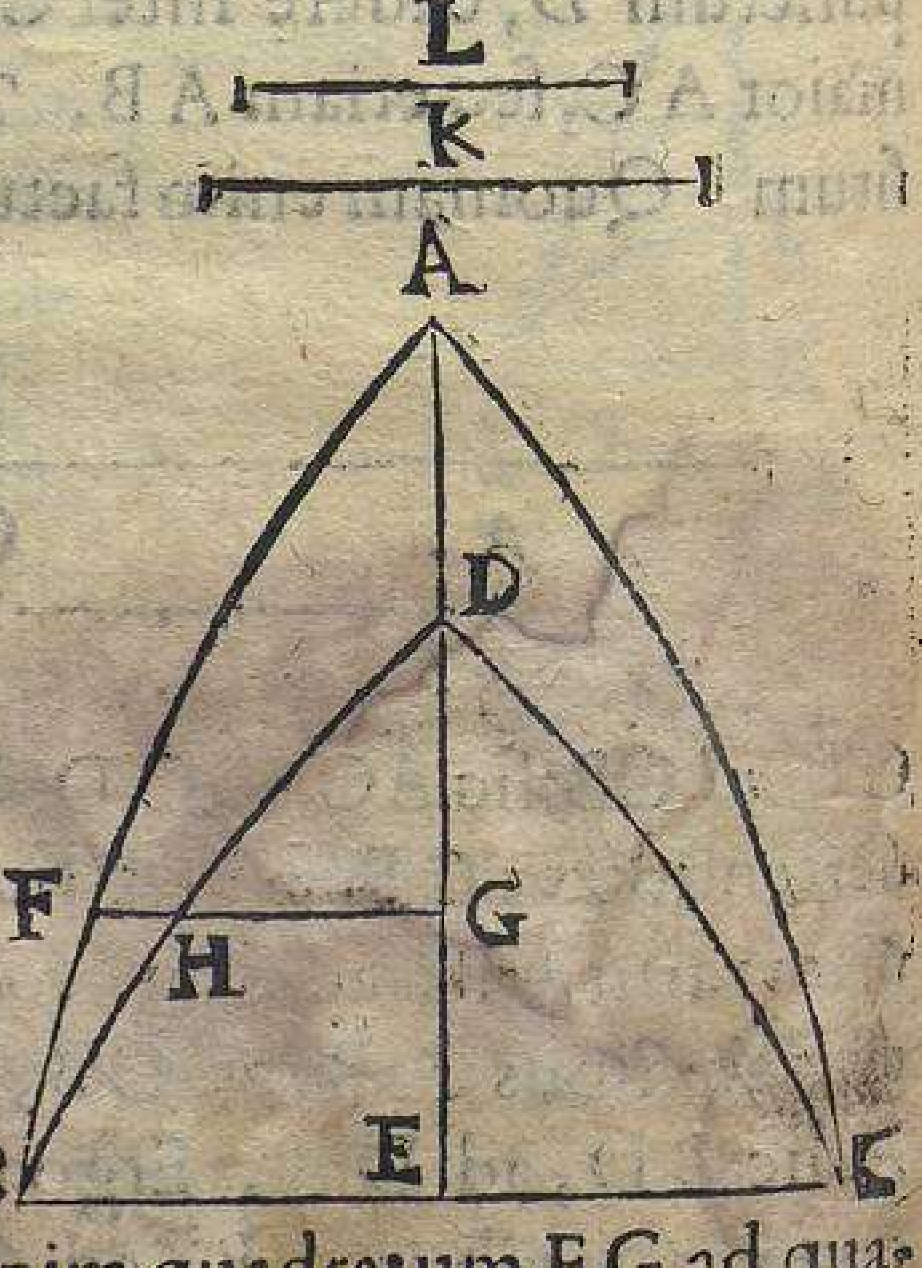
PAtet proportionem datam oportere esse defectus, quia rectangulum A B, C D, minus est rectangulo A D, C B, vt facile patebit consideranti. Proportio ergo data sit ea, quam habet A B, ad E, & fiat vt excessus E, super C B, ad C B, sic A C, ad C D. Patet punctum D, cadere inter C, B, quia non solum E, est maior A C, sed etiam A B. Dico punctum D, esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt excessus E, super



C B, ad C B, sic A C, ad C D. Ergo, & cõponendo, & conuertendo, vt C B, ad E, sic C D, ad D A. Tunc, quoniam ratio A B, ad E, de foris sumpta C B, composita est rationibus A B, ad C B, & C B, ad E, & vt C B, ad E, sic C D, ad D A. Ergo ratio A B, ad E, componetur ex rationibus A B, ad C B, & C D, ad D A. Sed ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli A B, C D, ad rectangulum A D, C B. Quare patet factum esse, quod proponebatur.

PROBL. LV. PROP. CXXVIII.

Datis duabus Parabolis ABC, DBC, in eadem basi BC, & circa eandem diametrum A E, inæqualis tamen altitudinis. Ducere FHG, ordinatim applicata, vt F G, ad G H, sit in data proportione.



Data proportio sit, quam habet BC, ad K, quæ continuetur ad tertium terminum L, & datam A E, diuisa in D, rursùm diuidatur in G, inter D, E, vt sit sicut L, ad B C, sic rectangulum A E, G D, ad rectangulũ A G, D E, per proposit. antecedẽtem, & per punctum G ordinatim applicetur G H F. Quam dico esse quæsitam. Quoniam enim quadratum F G, ad quadratum

dratum GH, de foris sumpto quadrato BE, habet rationem compositam ex ratione quadrati FG, ad quadratum BE, & ex ratione quadrati BE, ad quadratum HG. At vt quadratum FG, ad quadratum BE, sic AG, ad AE; & vt quadratum BE, ad quadratum HG, sic ED, ad DG, ex primo Conic. proposit. 20. Ergo ratio quadrati FG, ad quadratum GH, componetur ex rationibus AG, ad AE, & DE, ad DG. Sed ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli AG, DE, ad rectangulum AE, DG, & vt rectangulum AG, DE, ad rectangulum AE, DG, sic facta est conuertendo BC, ad L, nempe quadratum BC, ad quadratum K. Ergo, & vt quadratum BC, ad quadratum K, sic quadratum FG, ad quadratum GH. Ergo, & vt BC, ad K, sic FG, ad GH. Quod erat faciendum.

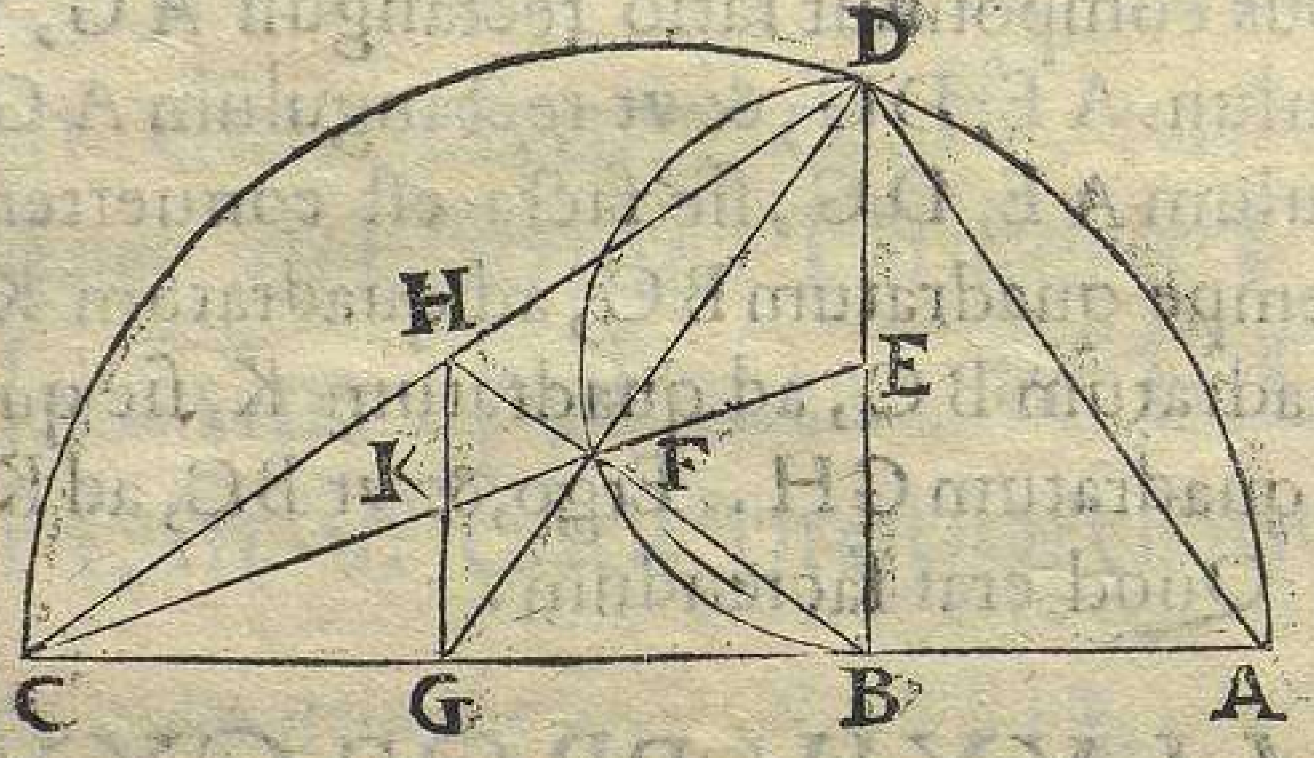
LEM. LXXIV. PROP. CXXIX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub altero, segmentorum ad quadratum alterius segmenti, sit in data proportone.

HOC Lemma solutum est etiam propos. 20. sed ad vberiorem scientiam, soluetur etiam nunc aliter, quamuis prolixius. Sit ergo data recta linea CB, quæ taliter sit secanda in G, vt rectangulum BCG, sit ad

qua-

quadratum G B, in data proportione. Data proportio sit, quam habet C B, ad B A, sibi positam in directum, & super A C, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur normalis B D, & super diametrum D B, fiat semicirculus ad partes C, cuius centrum sit E, & ducatur E C, secans circulum in F, & per puncta D F, ducatur D F G, occurrens B C, in G. Dico punctum G, esse quæsitum.



Ducatur D C, & per punctum G, agatur G H, parallela D B; & ducantur B F, F H. Quoniam D B, & H G, sunt factæ parallelæ, & D B, secatur bifariam in E, à linea C E. Ergo & H G, secabitur ab eadem bifariam in K, & angulus F K G, erit æqualis angulo D E F. Sed & angulus D F E, est æqualis sibi ad verticem K F G. Ergo triangulum D F E, erit æquiangulum, & simile triangulo K F G. Ergo, vt F D, ad D E, sic F G, ad G K. Et ad consequentium dupla. Ergo vt F D, ad D B, sic F G, ad G H. Sed & angulus G D B, est æqualis sibi alterno H G F. Ergo duo triangula D F B, H F G, sunt similia. Ergo angulus rectus D F B, est æqualis recto H F G.

Ergo

Ergo duæ lineæ BF, FH, sunt sibi in directum. Cùm autem triangulo DFB, sit simile triangulum DBG; & pariter triangulo HGF, sit simile triangulum HGB, quia omnia sunt rectangula, & bina habent vnum angulum communem. Ergo, & triangulum DBG, erit simile triangulo HGB. Quare vt DB, ad BG, ita BG, ad GH. Quare rectangulum sub DB, HG, erit æquale quadrato GB. Iungatur AD. Ergo triangulum DBA, est simile triangulo DBC; triangulo autem DBC, est simile triangulum HGC. Ergo vt DB, ad BA, sic HG, ad GC. Ergo rectangulum sub DB, in HG, erit æquale rectangulo sub CG, in BA. Sed rectangulum sub DB, in HG, ostensum est æquale quadrato GB. Ergo quadratum GB, erit æquale rectangulo sub CG, in BA. Ergo tres CG, GB, BA, sunt continue proportionales. Cùm autem sit, vt CG, ad GB, sic quadratum CG, ad rectangulum CGB. Ergo, & componendo, vt CB, ad BG, sic quadratum CG, cum rectangulo CGB, nempe rectangulum BCG, ad rectangulum CGB. Sed vt CG, ad GB, seù vt GB, ad BA, sic rectangulum CGB, ad quadratum GB. Ergo ex æquali vt CB, ad BA, sic rectangulum BCG, ad quadratum GB. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Constructio præsentis Lemmatis potest inseruire pro solutione propositionis. Data vna extremarum in ordine trium continue proportionalium, & summa ma mediæ, & alterius extremæ, distinguere singulas. Nam cùm probatum sit C G, G B, & B A, esse tres continue proportionales. Ergo B A, est vna extremarum, & C B est composita ex altera extrema, & ex media.

LEM. LXXV PROP. CXXX.

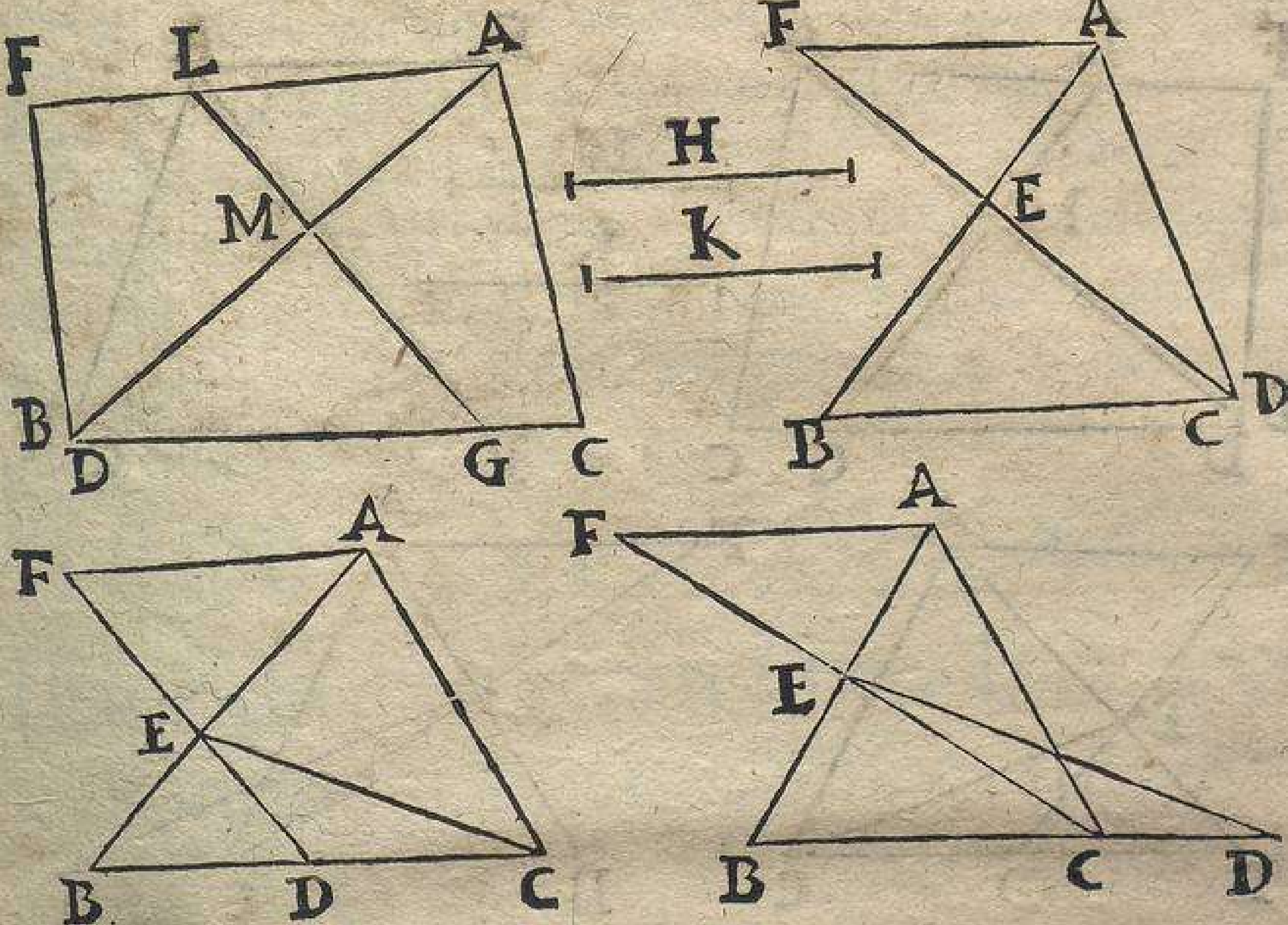
Dato triangulo ABC, & per punctum A, acta A F, indefinita, & parallela B C, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum D, & ducta D E F, triangulum externum F E A, sit ad triangulum datum A B C, in data proportione.

QVatuor diuersis modis potest dari punctum D, in linea B C. Nam vel potest cadere in ipso B, vt in prima figura, vel in ipso C, vt in secunda; vel inter B, C, vt in tertia; vel tandem vltra B C, vt in quarta. Si cadit in B, vt in prima, tunc res est facilis negotij. Nam data ratio sit, quam habet B C, ad H Et fiat vt H, ad B C, ita B C, ad F A, & ducatur F B. Dico triangulum F B A, esse quæsitum. Quod patet, quia cum duo triangula F B A, B A C, sint inter easdem parallelas; ergo habebunt eandem altitudinem. Quare

erunt

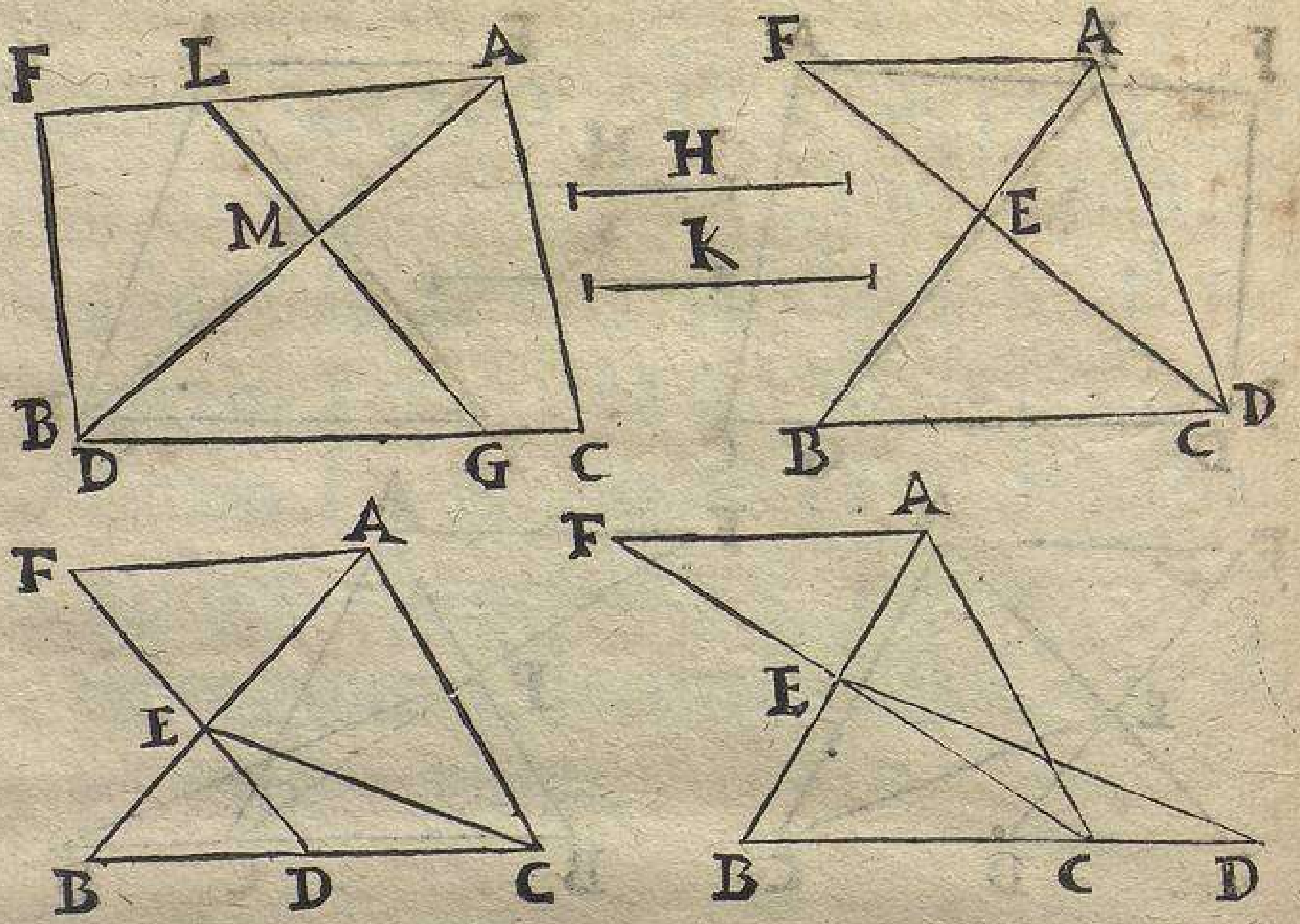
erunt ad inuicem, vt bases. Ergo triangulum F B A, erit ad triangulum B A C, vt basis F A, ad basim B C, seù vt B C, ad H.

In alijs tribus casibus semper fiat, vt B C, ad B D, ita H, ad K, & per propos. antec. B A, taliter secetur in E, vt rectangulum A B E, sit ad quadratũ A E, vt K, ad BC,



& ducatur per puncta D E, linea DEF, occurrens AF, in F. (Occurret enim, quia F A, B C, sunt parallelæ.) Dico triangulum F A E, esse quæsitum. Ducatur E C. Triangulum F A E, ad triangulum A B C, habet rationem cõpositam, ex rationibus trianguli FAE, ad triangulum B E D; trianguli B E D, ad triangulum B E C; & trianguli B E C, ad triangulum A B C. Sed triangulũ F E A, ad triangulum B E D, (quia ob parallelas FA, BC, sunt similia,) est vt quadratum A E, ad quadratum E B; &

triangulum B E D, est ad triangulum B E C, vt B D, ad B C; triangulum verò B E C, est ad triangulum BCA, vt B E, ad B A. Quare ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex ratione quadrati A E, ad quadratum E B, seù ex duplicata ratione A E, ad E B; & ex rationibus B D, ad B C; & B E, ad B A. Sed ex vna



ratione A E, ad E B, & ex ratione B E, ad BA, componitur ratio A E, ad B A, & vt B D, ad B C, ita est K, ad H Ergo ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex vna ratione A E, ad E B, ex ratione A E, ad A B, & ex ratione K, ad H. Sed ex rationibus A E, ad E B, & A E, ad A B, componitur ratio quadra- A E, ad rectangulum A B E; & vt quadratum A E, ad rectangulum A B E, sic est B C, ad K, conuertendo per constructionem. Ergo & ratio trianguli F A E, ad triangulum

lum B A C, componetur ex rationibus B C, ad K, & K, ad H; nempe erit ad ipsum, vt B C, ad H. Quod erat faciendum.

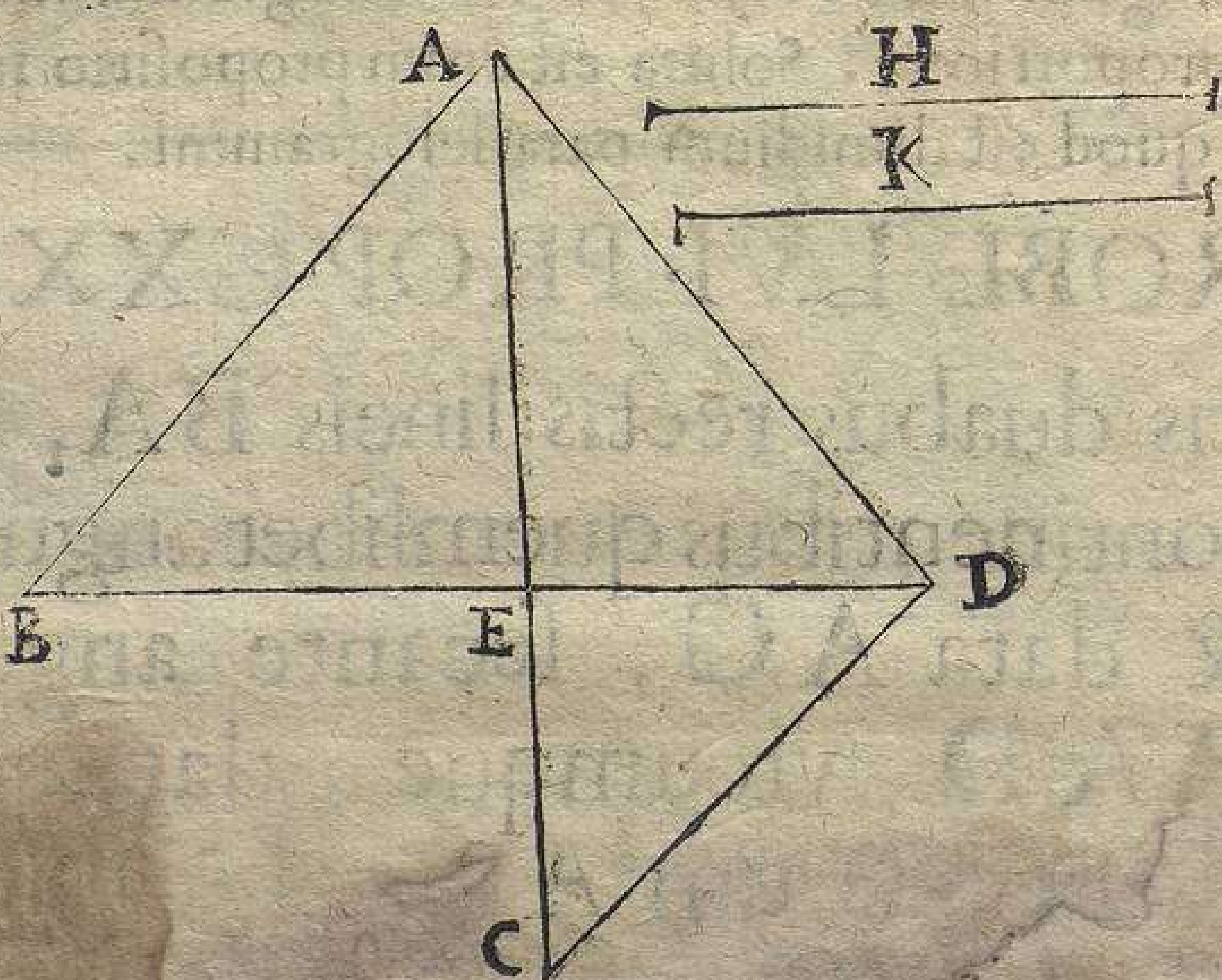
SCHOLIVM.

Ex dictis habemus modum, quo soluamus hanc propositionem. Dato parallelogrammo F C, vt in prima figura, cuius diameter sit B A, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum G, ducere G M L, vt triangulum L M A, sit ad parallelogrammum F C, in data proportione. Soluta est enim propositio in triangulo, quod est dimidium parallelogrammi.

PROBL. LVI. PROP. CXXXI.

Datis duabus rectis lineis B A, A D, continentibus quemlibet angulum, & data A C, secante angulum B A D, vtcumque; datoque in altera ipsarum AB, vel A D, puncto D. Ducere D E B, vt quadratum B E, sit ad rectangulum B D E, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet H, ad K, & per punctum datum D, agatur D C, parallela B A, quæ vtique occurret A C, indefinite productæ, quia, cum ipsa concurrit etiam ei parallela B A; occurrat in C, adeò vt fiat triangulum A C D; per proposit. ergo anteced., dato in C D, puncto D, ducatur D E B, occurrens A B, in B, vt triangulum A B E, sit ad triangulum A C D, vt H, ad K. Dico factum esse, quod proponebatur. Nam triangulum B E A, ad triangulum A C D, habet rationem compositam ex ratione trianguli B E A, ad triangulum A E D, & trianguli A E D, ad triangulum A C D. Ergo ratio quoque H, ad K, com-



ponetur ex istis rationibus. Sed vt triangulum BAE, ad triangulum A E D, sic est B E, ad E D; & vt triangulum E A D, ad triangulum A D C, sic est A E, ad A C. Sed ob parallelas B A, C D, vt A E, ad A C, sic B E, ad B D. Ergo ratio quoque H, ad K, componetur ex ratione BE,

ad

ad E D, & ex ratione B E, ad B D. sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem quadrati B E, ad rectangulum B D E. Ergo erit vt H, ad K, sic quadratum B E, ad rectangulum B D E. Quod erat faciendum.

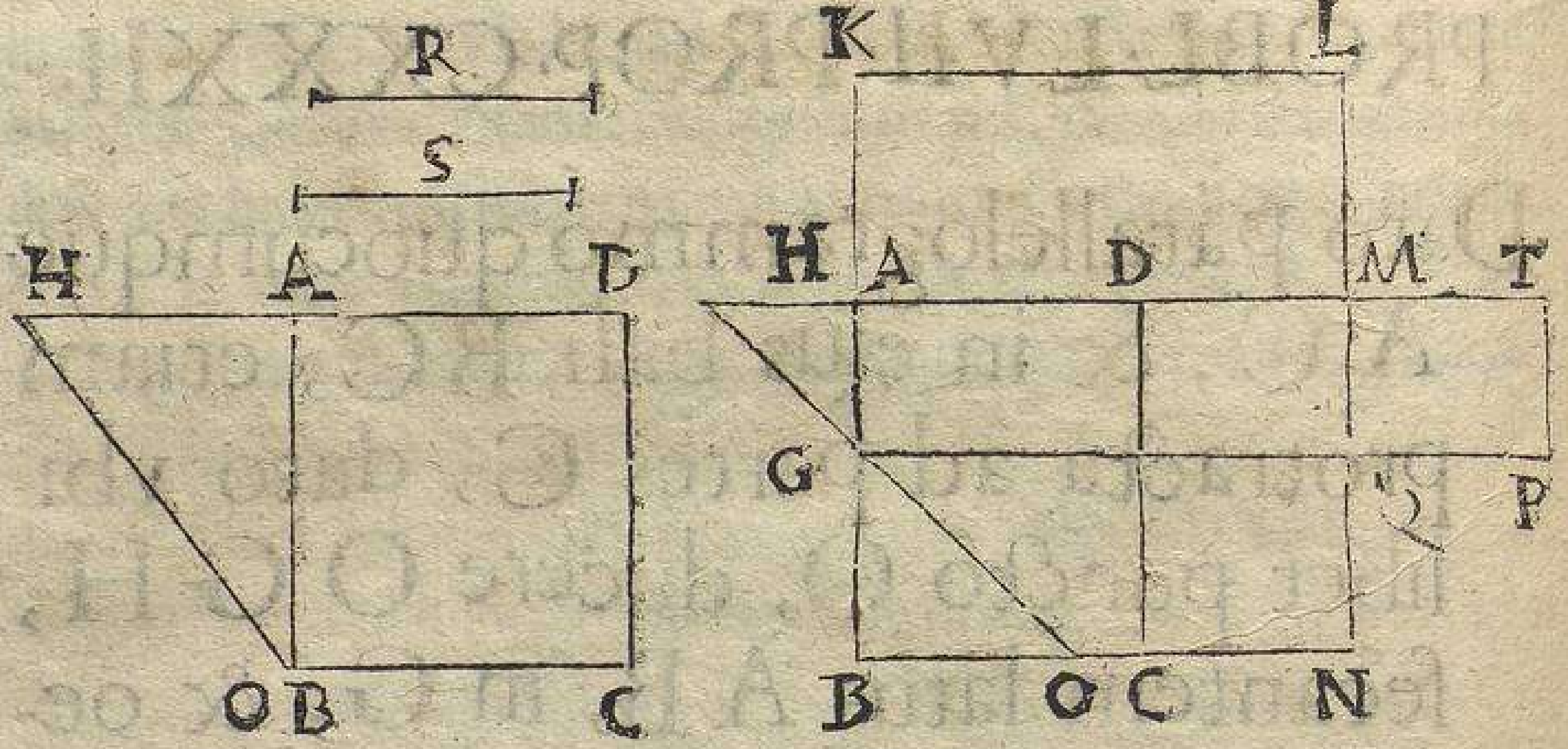
PROBL. LVII. PROP. CXXXII.

Dato parallelogrammo quocumque A C, & in eius basi B C, etiam protracta ad partes C, dato vbilibet puncto O, ducere O G H, secantem latus A B, in G, & occurrentem M A, protractæ indefinite in H, vt triãgulum H A G, sit ad parallelogrammum A C, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet R, ad S. Punctum autem O, potest cadere, vel in B, vel in C, vel inter C, B, vel tandem vltra C. Si cadit in B, vt in prima figura. Problema est facilis solutionis. Nam si fiat, vt S, ad R, sic dupla D A, ad A H, & iungatur B H, triangulum H A B, erit quæsitum. Nam triangulum H A B, ad triangulum, cuius basis dupla A D, & eadem altitudo cum altitudine trianguli H A B, est vt H A, ad

duplam

duplam A D, nempe ex constructione vt R, ad S. Sed triangulo cuius basis A D, & altitudo, altitudo trianguli H A B, seù parallelogrammi A C, est æquale parallelogrammum A C. Quare patet propositum.



SI autem cadit in C, vel inter B, C, vel vltra C. In omnibus istis casibus fiet eadem constructio. Ad euitandam verò confusionem ponemus tantùm figuram, in qua cadit inter B, C. Vnusquisque etenim poterit applicare eandem constructionem cæteris casibus. Producatur B A, in K, vt A K, sit æqualis B O; deinde fiat vt S, ad R, sic parallelogrammum A C, ad aliud, cuius duplo applicetur ad rectam K A, in angulo K A D, æquale, quod sit K M, & vbicumque secet A D, etiam productam, si opus sit, compleatur parallelogrammum K N, & ad datam rectam lineã A M, in angulo BAM, applicetur parallelogrammũ A P, æquale parallelogrammo A N, excedens rhombo M P, secans A B, in puncto G, & per puncta O G, ducatur O G H, occurrens D A, in in H, & faciens triangulum H A G. Dico triangulum HAG, esse quæsitum.

Quoniam enim parallelogrammum A N, est æquale parallelogrammo A P. Commune ablato parallelogrammo A G. Ergo parallelogrammum reliquum G N, erit æquale rhombo M P; & sunt in eodem angulo, quia tàm angulus *B G* Q. quàm angulus Q M T, externi, sunt æquales interno, & opposito *G A* M. Ergo vt *B* N, seù A M, ei æqualis, ad M Q, seù ad A *G*, ei æqualem, ita M Q, ad Q N, seù A G, ad *G* B. Sed vt A *G*, ad *G B*, sic (propter similitudinem triangulorum H *A* G, *G* BO, sunt enim similia, quia H A, B O, sunt parallelæ) ita H *A*, ad *B*O, seù ad *A* K, (supra enim facta est *A* K, æqualis ipsi *B* O.) Quare, & vt M *A*, ad *A G* sic H *A*, ad *A* K. Ergo, quod fit sub extremis est æquale facto sub medijs, dummodo omnia sint facta sub eodem angulo, vt ab alijs ostenditur, sed præcipuè à Caualerio lib 2. Geometr. indiuid. propos. 7. Ergo quod fit sub M *A*, in *A* K, nempe parallelogrammum M K erit æquale ei, quod fit sub H *A*, in A *G*, nempe parallelogrammo duplo trianguli H A *G*; quia duo anguli K A M, & H A *G*, ad verticem sunt æquales. Ergo, & illorum dimidia erunt æqualia, nempe triangulum H A *G*, erit æquale dimidio parallelogrammi K M. Sed dimidium parallelogrammi K M, est ad parallelogrammum A C, vt R, ad S; (factum est enim supra vt S, ad R sic parallelogrammũ A C, ad aliud, cuius duplum factũ est parallelogrammũ K M.) Quare, & vt R, ad S, sic triangulum H A G, ad parallelogrammum A C: Quod erat faciendum.

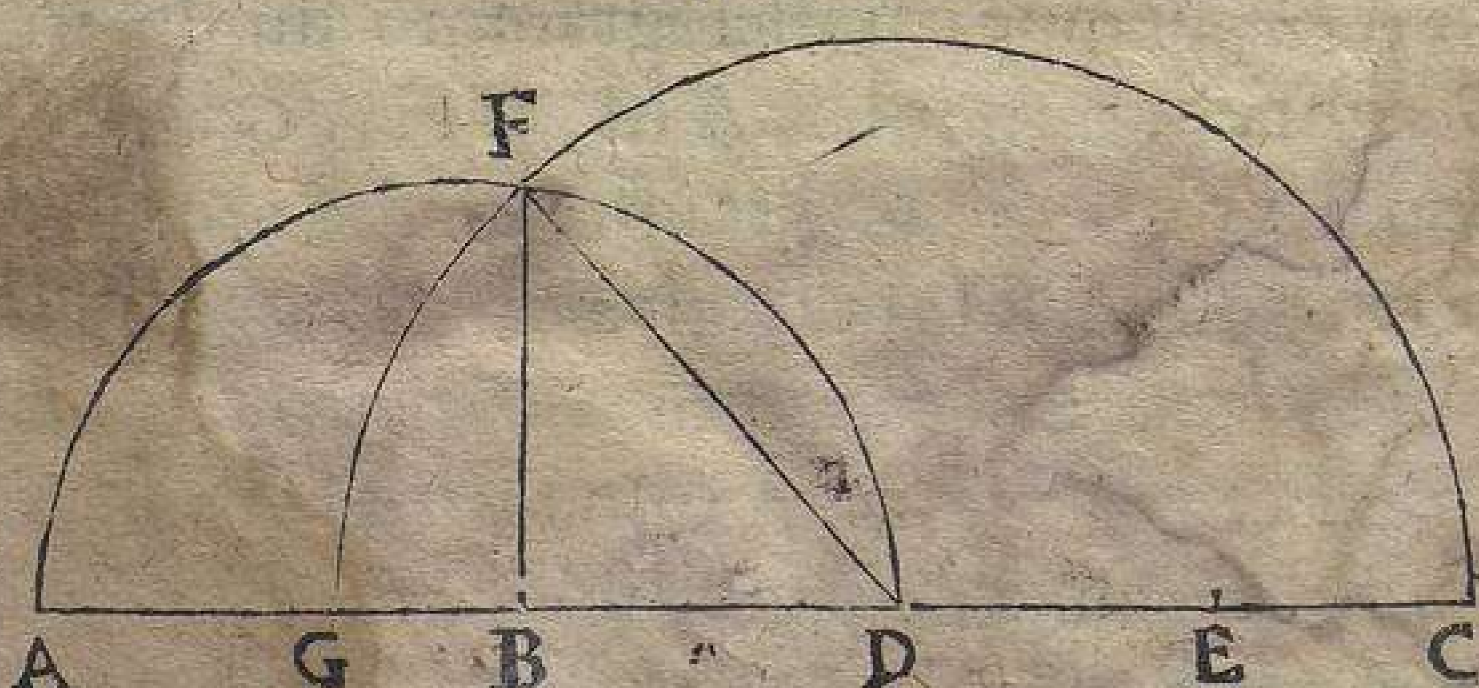
SCHO-

SCHOLIVM.

QVamuis in hoc Problemate sint designata tantùm duo schemata ad euitandam confusionem, attamen propter diuersitatem casus O, & diuersitatem applicationum parallelogramorum, constituerentur 12. Schemata diuersa, vt experienti patebit. In omnibus tamen casibus, præterquam in primo, fiet eadem constructio.

LEM·LXXVI·PROP·CXXXIII·

Datam rectam lineam taliter producere, vt quadratum datæ, vna cum duobus rectangulis sub data, & sub inuenta, ad quadratum inuētæ: sit in data proportione.



DAta recta linea sit A B, quam oportet taliter producere in C, vt quadratum A B, cum duobus rectanctangulis A B C, sit ad quadratum B C, in data proportione, quæ sit ea, quam habet A B, ad B D, ei positam in directum. Super A D, diametro fiat semicirculus, & B D, sumatur dupla B E, à puncto autem B, erigatur normalis B F, & iuncta D F, centro D, interuallo D F, describatur semicirculus secans B E, productam in C, & in G, vbilibet. Dico A B, datam, esse productam in C, sic, vt quadratum A B, cum duobus rectangulis A B C, sit ad quadratum B C, vt A B, ad B D.

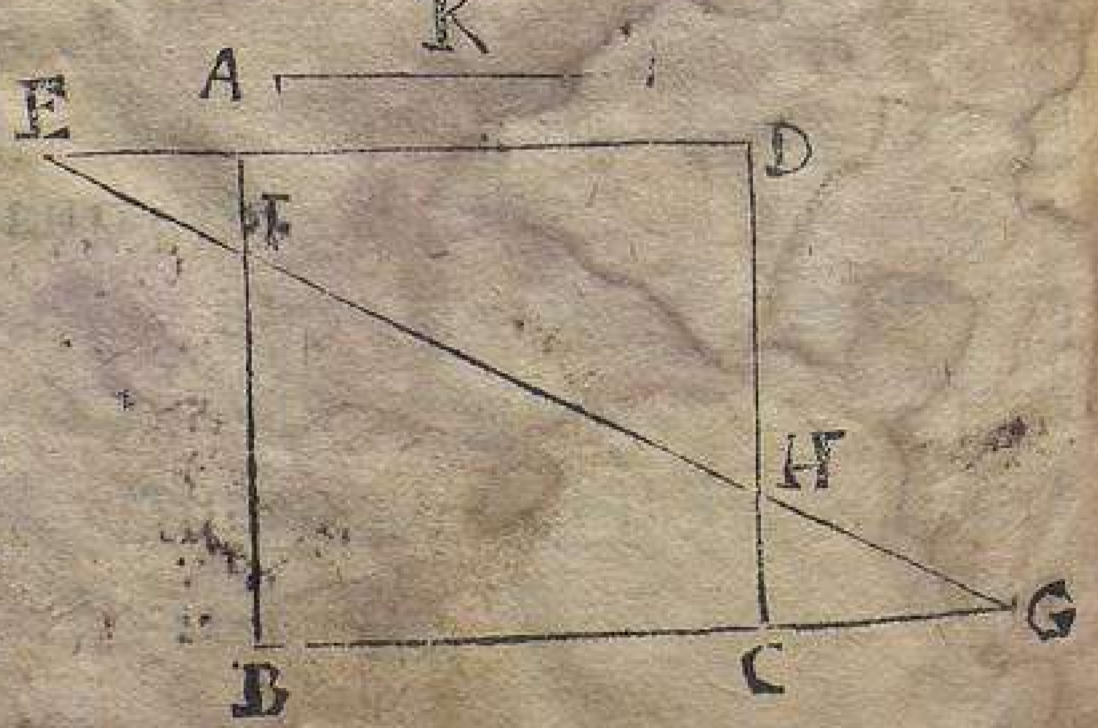
Quoniam enim duo rectangula A B D, & C B G, sunt æqualia inter se, quia ambo æqualia eidem quadrato BF, & cum rectangulum C B G, sit æquale rectangulo BCE, quia G B, & C E, sunt æquales, vt facilè patet consideranti. Ergo rectangulum A B D, erit æquale rectangulo B C E. Et communi addito rectangulo C B E. Ergo duo rectangula A B D, & C B E, erunt æqualia rectangulis B C E, & C B E, nempe quadrato B C. Verùm vt A B, ad B D, sic (sumpta communi altitudine A B,) est quadratum A B, ad rectangulum A B D. Pariter vt A B, ad B D, sic (sumpta communi altitudine B C,) est rectangulum A B C, ad rectangulum C B D; vt autem vnum ad vnum, sic duo ad duo. Ergo, & vt A B, ad BD, sic duo rectangula A B C, ad duo rectangula CBD, nempe ad rectangulum C B E. Cùm ergo probatum sit esse vt A B, ad B D, sic tàm quadratum A B, ad rectangulum A B D, quàm duo rectangula A B C, ad rectangulum C B E. Ergo, & vt A B, ad BD, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum AB, vna cum duobus rectangulis A B C, ad rectangulū

ABD, cum rectangulo CBE. Sed istis probatum est supra æquale esse quadratum BC. Ergo, & vt AB, ad BD, sic quadratum AB, cum duobus rectangulis ABC, ad quadratum BC. Quod erat faciendum.

PROBL·LVIII·PROP·CXXXIV·

Dato quocumque parallelogrammo, ABCD, & dato puncto G, in BC, producta; ducere GHFE, occurrentē DA, productæ in E, vt trapezium FADH, sit ad triāgulum EAF, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet BC, ad K, & DA, per propos. anteced taliter producatur in E, vt quadratum DA, cum duobus rectangulis DAF, sit ad quadratum AE, vt BC, ad K. Et ducatur GE, secans latera DC, AB, in punctis H, & F. Dico factum esse, quod proponebatur.

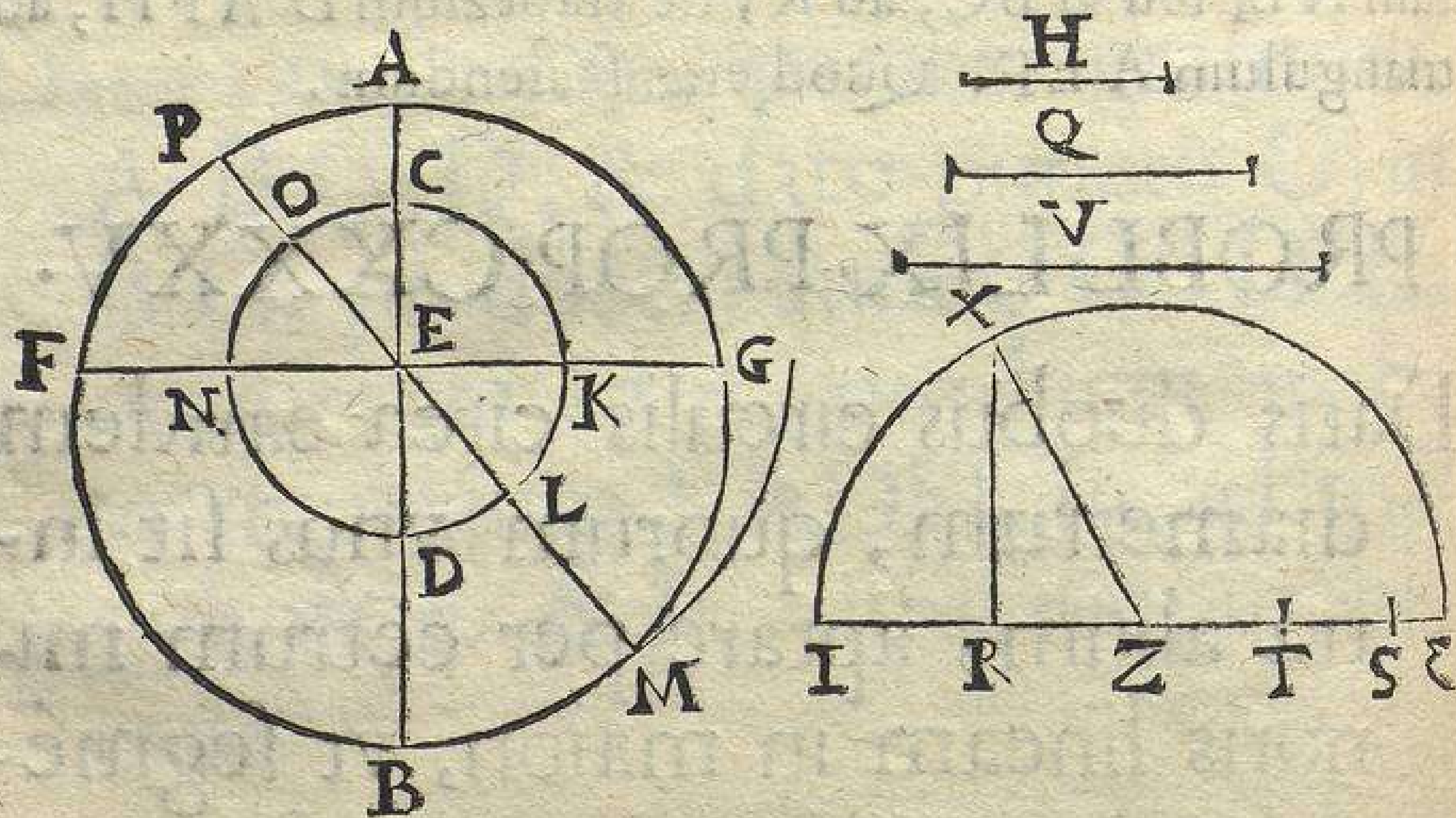


Quoniam enim triāgula DEH, AEF, sunt similia. Ergo triangulum DEH, erit ad triāgugulum A E F, vt quadratem D E, ad quadratum A E. Et diuidendo, trapezium D A F H, erit ad triangulum A E F, vt excessus quadrati D E, super quadratum A E, ad quadratum A E. sed talis excessus est æqualis quadrato D A, & duobus rectangulis D A E. Ergo, & vt quadratum D A, cum duobus rectangulis D A E, ad quadratum A E, seù vt B C, ad K; sic trapezium D A F H, ad triangulum A E F. Quod erat faciendum.

PROBL. LIX. PROP. CXXXV.

Datis duobus circulis circa eandem diametrum, quorum vnus sit intra alium, aptare per cētrum minoris lineam in maiori, vt segmēta intercepta inter circumferentias circulorum, sint in data proportione.

DAtorum circulorum diametri sint A B, C D. E verò sit centrum minoris; data verò ratio sit, quam habet D E, ad H. Oportet ducere P O E L M, vt M L, ad P O, sit vt D E, ad H. Vel circuli sunt concē-trici, vel excentrici. Si sunt cōcentrici, patet Problema non posse solui nisi in proportione æqualitatis, & tunc omnis linea aptata in maiori circulo transiens per centrum minoris facit propositum. Si verò sunt excentrici, vel se tangunt intus, vel non se tangunt, quamuis notemus tantùm schema, in quo non se tangunt; & proportio vel est æqualitatis, vel inæqualitatis, & si est inæqualitatis, si est maioris inæqualitatis, nequit esse



maior ea, quam habet B D, ad C A. Si verò sit minoris inæqualitatis, nequit esse minor ea, quam habet A C, ad D B. Ratio est, quia ex omnibus segmentis interceptis inter circumferentias linearum aptatarum in circulo maiori, & transeuntium per punctum E, D B, est maximum omnium, & A C, minimum, vt facilè potest probari. His præmissis.

A puncto E, erigatur super A B, E F, secans circumferentiam minoris circuli in N, quæ producatur ad K, G. Et ob euitandam confusionem in schematibus, exponantur seorsim R T, æqualis E K, seù E D, & Q, potens

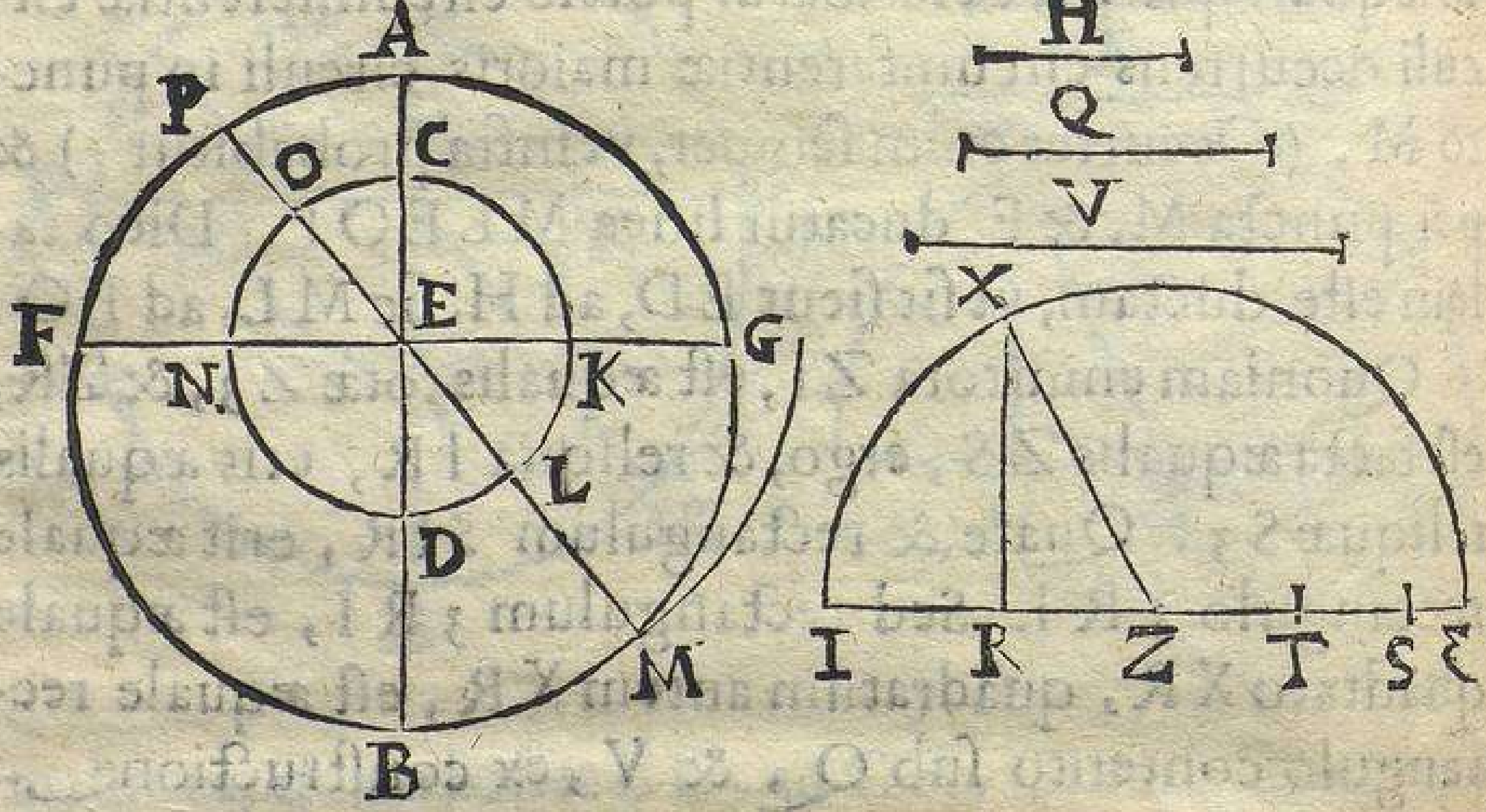
tens

tens excesſu quadrati E G, ſuper quadrato E K; & fiat vt H, ad R T, ſeù ad E D, ſic R T, ad T S, ſibi ipſi poſitam in directum. Et pariter fiat vt H, ad R T, ſic Q, ad V, & inter Q, V, inueniatur media proportionalis, cui æqualis fiat R X, erecta normaliter ſuper R T, à puncto R; & diuiſa R T, bifariam in Z, & iuncta Z X, centro Z, interuallo Z X, deſcribatur ſemicirculus ſecans R T, productam in I, & 3. Deinde centro E, interuallo æquali ipſi T I, deſcribatur portio circumferentiæ circuli occurrens circumferentiæ maioris circuli in puncto M. (Occurret enim ſemper, vt infra probabitur,) & per puncta M, & E, ducatur linea M L E O P. Dico talem eſſe ductam, vt ſit ſicut E D, ad H, ſic M L, ad P O.

Quoniam enim tota Z I, eſt æqualis totæ Z 3, & Z R, eſt facta æqualis Z S; ergo, & reliqua I R, erit æqualis reliquæ S 3. Quare & rectaugulum S I R, erit æquale rectangulo 3 R I. Sed rectangulum 3 R I, eſt æquale quadrato X R, quadratum autem X R, eſt æquale rectangulo contento ſub Q, & V, ex constructione. Ergo rectangulum S I R, erit æquale rectangulo contẽto ſub Q, & V. Quoniam verò ſupra factum eſt, vt H, ad R T, ſic Q, ad V, vt autem Q, ad V, ſic (ſumpta communi altitudine Q,) eſt quadratum Q, ad rectangulum Q, V, & rectangulo Q, V, oſtenſum eſt ſupra æquale rectangulum S I R. Ergo, & vt H, ad R T, ſic quadratum Q, ad rectangulum S I R. Pariter quoniã ſupra factum eſt, vt H, ad R T, ſic R T, ad T S, vt autem R T, ad T S, ſic (ſumpta communi altitudine I R,) rectangulum T R I, ad rectangulum ſub S T, in I R.

Ergo,

Ergo, & vt H, ad R T, sic rectangulum T R I, ad rectangulum sub T S, in I R. Sed & vt H, ad R T, sic supra probatum est esse quadratum Q, ad rectangulum S I R. Ergo & vt quadratum Q, ad rectangulum S I R, sic rectangulum T R I, ad rectangulum cõtentum sub S T, in R I. Cùm ergo sit, vt H, ad R T, sic tàm totú quadratum Q, ad totum rectangulum S I R, quàm ab-



latum rectangulum T R I, ad ablatum rectangulũ S T, I R. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totú, seù vt H, ad R T. Quare, & vt H, ad R T, sic excessus quadrati Q, super rectangulum T R I, ad rectangulum T I R. Sed R T, est æqualis E D, vel E L; T I, est æqualis ipsi E M; R I, est æqualis ipsi L M; vnde rectangulum T R I, est æquale rectangulo E L M, seù rectangulo sub O E, in L M; rectangulum verò T I R, est æquale rectangulo E M L; quadratum autem Q, est æ-

quale

quale excessui quadrati E G, super quadratum E K. Ergo, & vt H, ad D E, sic excessus quadrati E G, super quadrato E K, minus rectangulo sub O E, in L M, ad rectangulum E M L. Sed quoniam rectangulo F E G, seù quadrato E G, est æquale rectangulum P E M. Ergo, & quadratum E G, minus rectangulo O E, L M, & minus quadrato E K, seù E L, erit æquale rectangulo M E P, minus quadrato E L, & minus rectangulo O E, L M; nempe rectangulo sub E M, in P O. Quia rectangulũ M E P, diuiditur in rectangula M E O, & M E, O P; rectangulum verò M E O, diuiditur in rectangulum L E O, nempe in quadratum L E, & in rectangulum M L, E O. Ergo & vt H, ad D E, sic rectangulũ M E, P O, ad rectangulum E M L. Sed vt rectangulum M E, P O, ad rectangulum E M L, sic (propter eandem altitudinem M E,) est P O, ad L M. Ergo, & conuertendo vt D E, ad H, sic M L, ad P O. Quod erat &c.

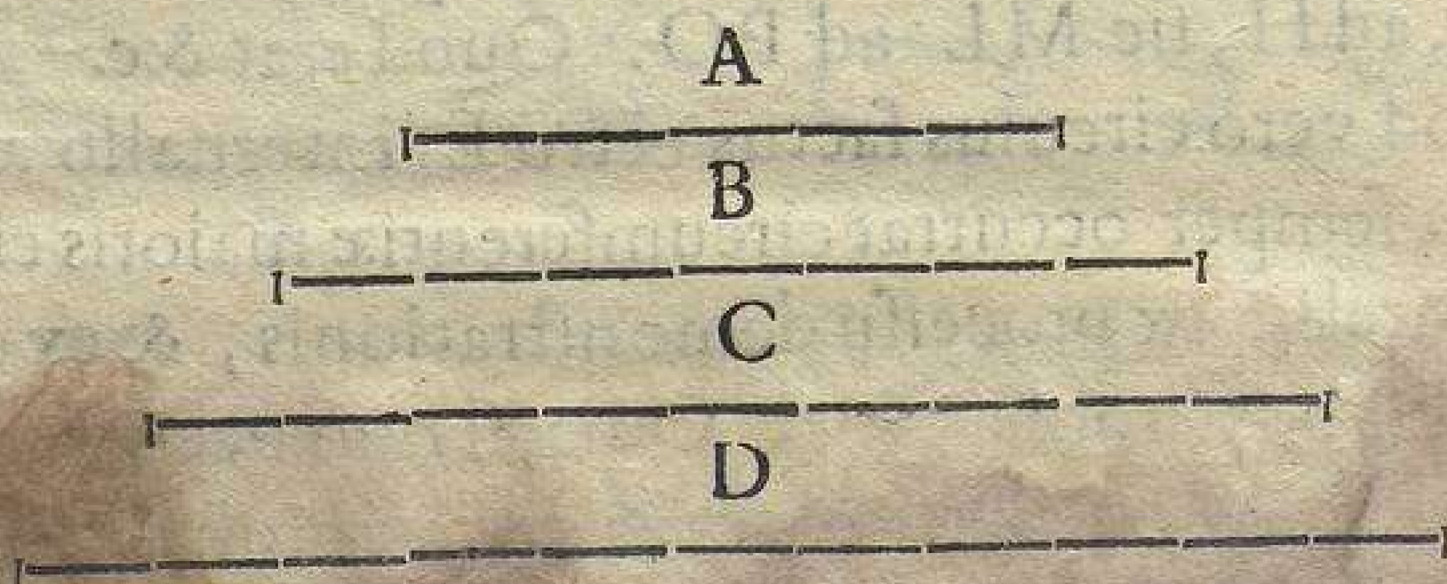
Quòd verò circulus factus cẽtro E, interuallo æquali ipsi H I, semper occurrat circumferentiæ maioris circuli, facilè patebit ex processu demonstrationis, & ex determinationibus Problematis. Quia, si non occurreret, sed caderet vel totus intra, vel totus extra, probaretur eodẽ discursu, proportionem datam esse maiorem ea, quam habet B D, ad C A; vel minorem ea, quam habet C A, ad B D, vt consideranti, & experienti patebit.

LEM-

LEM·LXXVII·PROP·CXXXVI

Si sint quatuor rectæ lineæ continue proportionales, erit, vt quadratum primæ minoris, ad excessum quadrati mediæ minoris super ipsā sic media minor ad excessum quartæ super ipsam.

SInt quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Dico esse, vt quadratum A, ad excessum quadrati B, super quadratum A, sic B, ad excessum D, super ipsam.



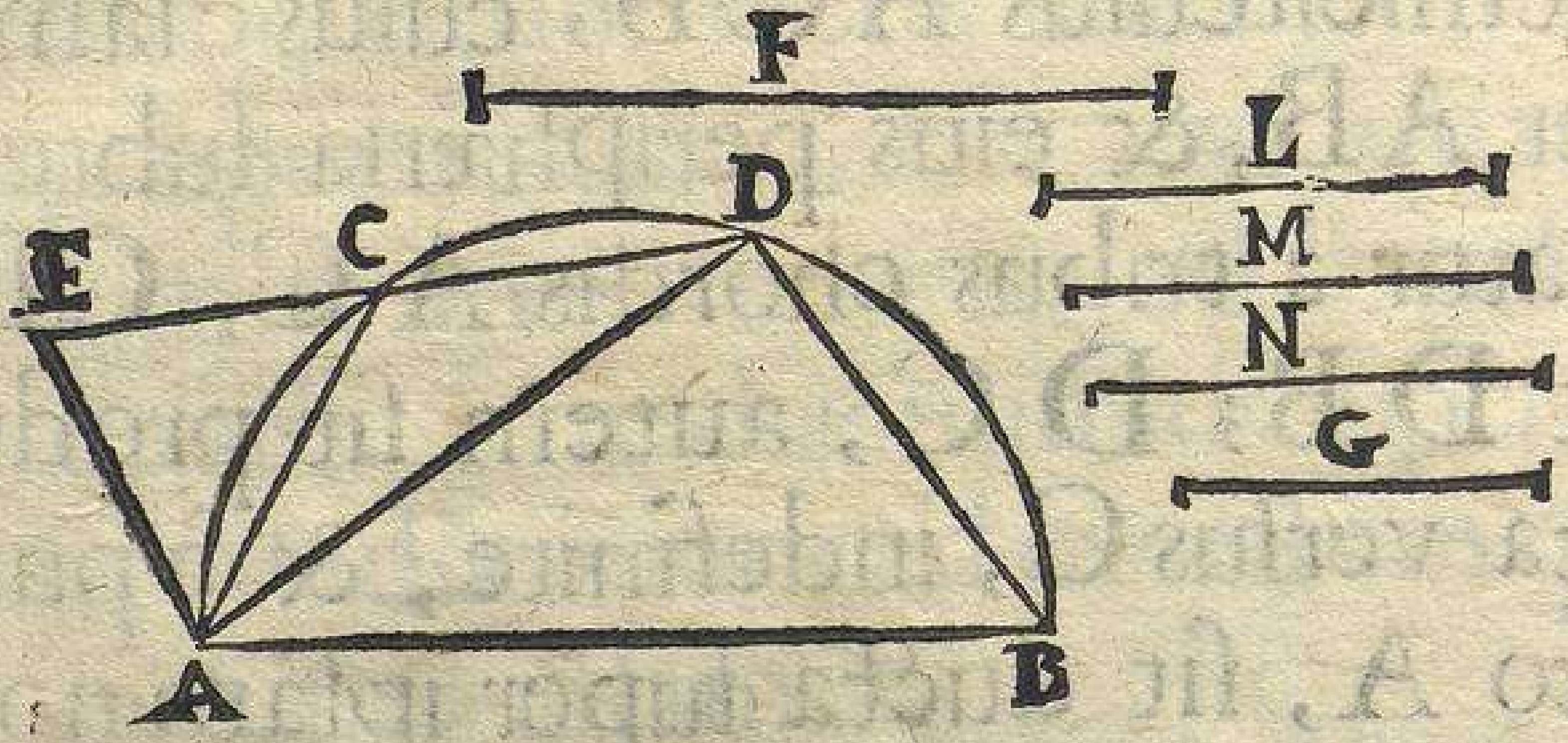
Quoniam enim D, C, B, A, sunt quatuor continue proportionales, erit, vt D, ad B, ita quadratum B, ad quadratum A. Quare, & per conuersionem rationis, erit vt D, ad excessum illius super B, sic quadratum B, ad excessum illius super quadratum A. Ergo, & diuidēdo, vt B, ad excesum D, super B; sic quadratum A, ad excesum quadrati B, super ipsum. Quod erat &c.

LEM·

LE. LXXVIII. PROP. CXXXVII.

Sit ſemicirculus A C B, cuius diameter A B, & eius periphæria ſubtendatur à tribus chordis A C, C D, & D B; D C, autem ſit producta verſus C, indefinite, & à puncto A, ſit ducta ſuper ipſam normalis A E. Dico parallelepipedum factum ſub A B, in rectangulum E C D, eſſe æquale ſolido facto ſub D B, in rectangulum A C D.

DVcatur A D. Quoniam duo anguli A C D, & D B A, ſunt æquales duobus rectis, quia quadrangulum A C D B, eſt in circulo; & pariter duo anguli A C E, & A C D, ſunt æquales duobus rectis. Ergo duo ſunt æquales duobus. Quare communi ablato angulo A C D, ergo angulus A C E, erit æqualis angulo A B D. Et pariter angulus rectus A E C, eſt æqualis angulo recto A D B. Quare, & reliquus erit æqualis reliquo; & triangulum A E C, erit ſimile triangulo A D B. Ergo, vt E C, ad C A, ſic D B, ad B A. Sed vt E C, ad C A, ſic (ſumpta communi altitudine C D,) eſt rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo



& vt D B, ad B A, ſic rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo ſolidum factum ſub extremis erit æquale facto ſub medijs. Ergo factum ſub D B, in rectangulum D C A, erit æquale facto ſub A B, in rectangulum E C D. Quod erat oſtendendum.

LE. LXXIX. PROP. CXXXVIII.

Datis ijſdem, quæ ſupra. Dico quadratum A B, eſſe æquale tribus quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D.

NAM quadratum A B, eſt æquale duobus quadratis B D, & D A. Quadratum autem D A, eſt

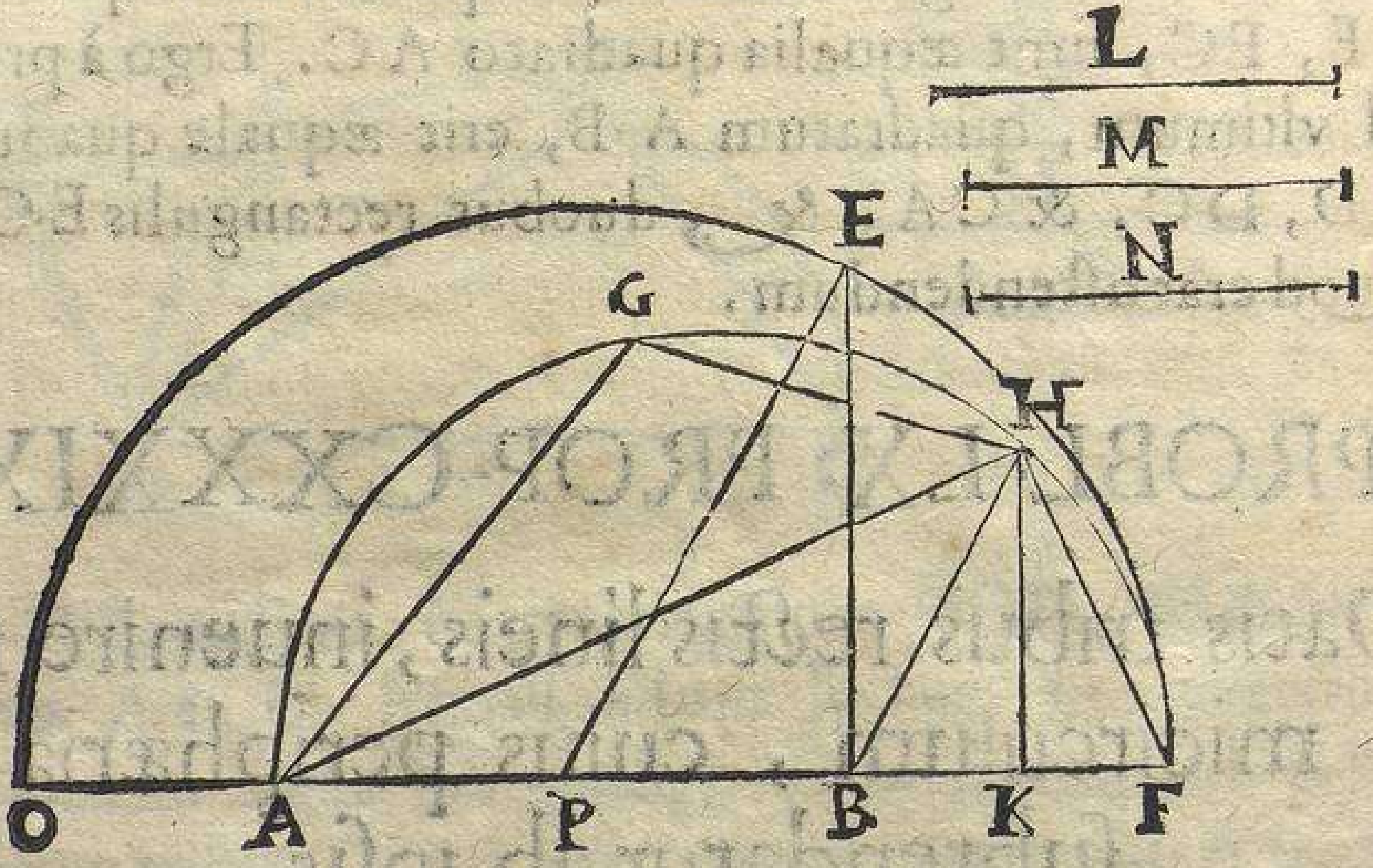
est æquale duobus quadratis A E, & E D, quia tam angulus A E D, quam A D B, sunt recti. Quadratum autem E D, est æquale quadrato E C, quadrato C D, & duobus rectangulis E C D; & pariter duo quadrata A E, E C, sunt æqualia quadrato A C. Ergo à primo ad vltimum, quadratum A B, erit æquale quadratis B D, D C, & C A, & duobus rectangulis E C D. Quod erat ostendendum.

PROBL. LX. PROP. CXXXIX.

Datis tribus rectis lineis, inuenire semicirculum, cuius periphæria subtendatur ab ipsis.

DAtæ tres rectæ lineæ sin L, M, N, & oporteat facere, quod imperatum est. Tunc vel omnes sunt inæquales, vel sunt duæ illarum æquales. Si duæ sunt æquales soluetur Problema per locum planũ. Sint ergo L, & M, æquales, & ipsi N, fiat æqualis A B. A puncto B, erigatur perpendicularis B E, cuius quadratum sit duplum quadrati L, vel M, & diuidatur A B, bifariam in P, & iungatur P E. Centro autem P, interuallo P E, describatur semicirculus, cui occurrat A B, producta in punctis O, & F, & super A F, tamquam supra diametro fiat semicirculus A G F, & à puncto A, aptetur A G, æqualis A B, & circumferentia G F, secetur bifariam in H, & iungantur G H, H F, & H B, & duplicatur

catur à puncto H, perpendicularis H K, ipsi A F. Dico G H, & H F, esse æquales ipsi L, & M, & semicirculũ A G F, esse quæsitum.

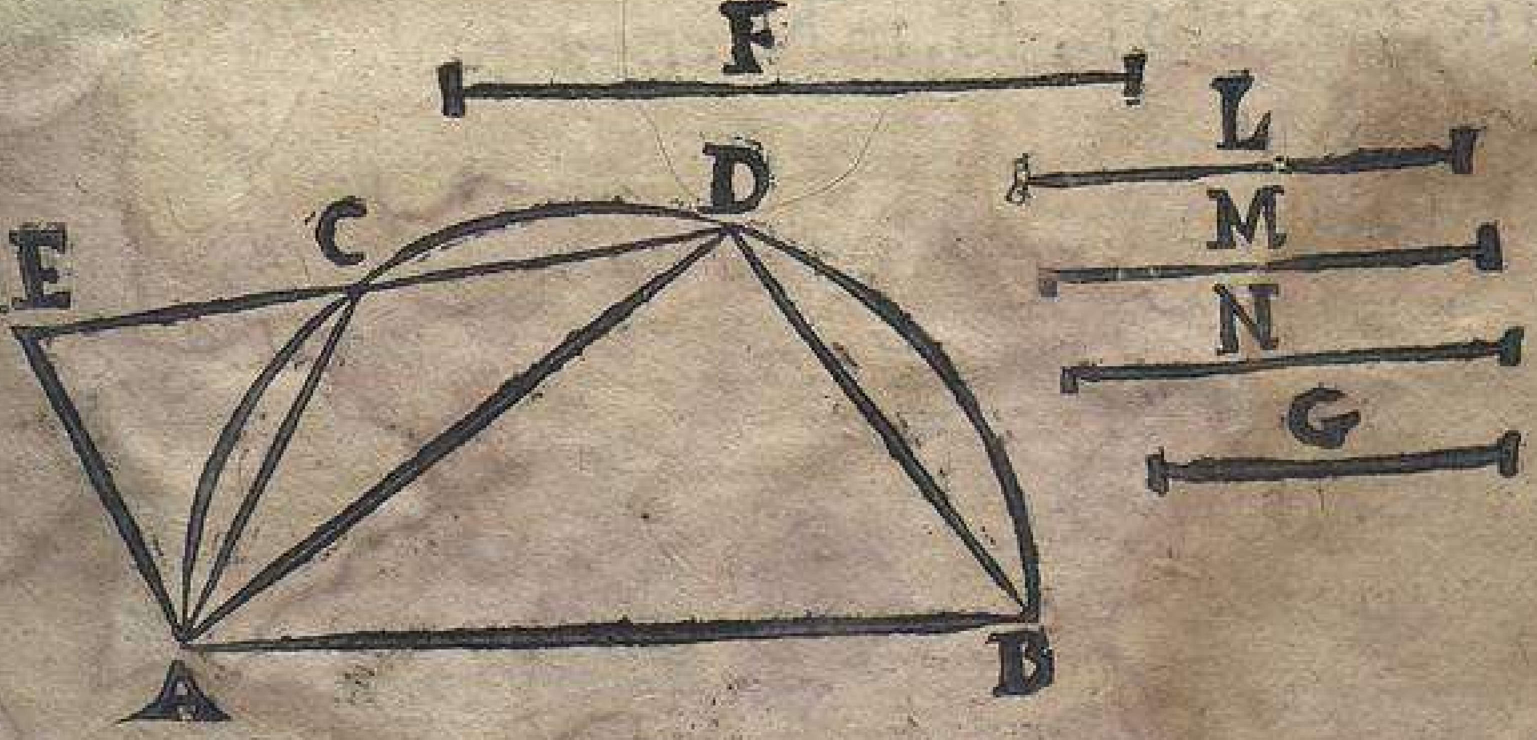


Quoniam enim circumferentia G F, est secta bifariam in H. Ergo angulus G A H, est æqualis angulo H A B. Sed etiam duæ lineæ G A, A H, sunt æquales duabus lineis H A, A B, altera alteri. Ergo triangulũ G A H, erit æquale triangulo H A B, & G H, erit æqualis H B. Sed G H, est æqualis H F. Ergo B H, erit æqualis H F. Quoniam autem duobus quadratis B K, & K H, est æquale quadratum B H, & pariter duobus quadratis H K, K F, est æquale quadratum H F, & duo quadrata B H, & H F, sunt inter se æqualia, quia & latera B H, & H F, ostensa sunt æqualia. Ergo duo quadrata B K, H K, erunt æqualia duobus quadratis H K, K F. Et communi ablato quadrato H K. Ergo, quadratum B K, erit æquale quadrato K F, & B K, erit

æqua-

æqualis K F. Ergo rectangulum A F B, erit duplum rectanguli A F K. Sed rectangulo A F B, eſt æquale rectangulum O B F, quia B F, eſt æqualis O A; & rectangulum O B F, eſt æquale quadrato B E; & pariter rectangulum A F K, eſt æquale quadrato F H. Quare, & quadratum B E, erit duplum quadrati F H. Sed pariter, quadratum B E, factum eſt duplum quadrati L, vel M. Ergo quadratum F H, eſt æquale quadratis L, vel M, & F H, & H G, ſunt æquales ipſis L, & M, & A G, facta eſt, æqualis A B, ſeù N. Ergo inuentus eſt ſemicirculus &c.

SI verò tres L, M, & N, ſint inæquales, ſoluetur Problema per locum ſolidum, demonſtratione comprehendente etiam caſum antecedentem. Exponatur linea F, potens ſimul tria quadrata L, M, N, & fiat vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum ſub M, & N, ſic L, ad G; & data F, minori extrema, & G, differentia ſecundæ, & quartæ in ordine quatuor continue



proportionalium, inueniatur ſecunda A B, quæ fiat dimetiens ſemicirculi. Quoniam A B, eſt maior F, hoc

 eſt

eſt tribus quadratis L, M, & N. Quare, ſi aptentur duæ ipſarum L, M, & N, in ſemicirculo, cuius diameter A B, ipſum totum non occupabunt. Aptetur A C, æqualis L, & C D, æqualis M, & D B, ducatur. Dico D B, eſſe æqualem N, & ſemicirculum A C D B, eſſe quæſitum. Producatur D C, verſus C, indefinite, cui à puncto A, occurrat perpendicularis A E, & ducatur A D. Quoniam ſunt quatuor continue proportionales, quarum prima minor eſt F, & G, eſt exceſſus quartæ ſuper ſecundam, & A B, eſt ſecunda. Ergo per propoſit. 136. erit vt quadratum F, ad exceſſum quadrati A B, ſuper ipſum, ita erit A B, ad G. Ergo factum ſub quadrato F, in G, erit æquale facto ſub exceſſu quadrati A B, ſuper quadratum F, in A B. Pariter quoniam ſupra factum eſt vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum ſub M, & N, ſic L, ad G. Ergo factum ſub quadrato F, in G, erit æquale ſolido contento ſub duplo rectangulo M, N, in L, ſeù ſolido contento ſub duplo rectangulo L, M, in N. Quare ſolidum contentum ſub duplo rectangulo L, M, in N, erit æquale facto ſub A B, in exceſſum quadrati A B, ſuper quadratum E, ſeu ſuper tria quadrata L, M, N, ei æqualia. Quare, & communibus additis factis ſub A B, in tria quadrata L, M, N. Ergo cubus A B, erit æquale factis ſub N, in duo rectangula L, M, ſeù A C D, quia A C, eſt æqualis L, & C D, eſt æqualis M, & ſolidis factis ſub A B, in tria quadrata A C, C D, & N. Et quoniam per propoſit. antec. quadratum A B, æquatur quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D. Ergo, & cubus A B, erit æquale

quale

quale factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, D B, & in duo rectangula E C D. Ergo & hæc facta erunt æqualia factis sub A B in quadrata L, & M, seù in quadrata A C, C D, & in quadratum N, & in duo rectangula A C D. Et communibus ablatis factis sub A B, in quadrata A C, C D. Ergo factum sub A B, in quadratum D B, cum facto sub A B, in duo rectangula E C D, seù sub D B, in duo rectangula A C D, quæ illis sunt æqualia, per proposit. 137 erunt æqualia factis sub AB, in quadratum N, & sub N, in duo rectangula A C D. Ex vtraque parte sunt duo æqualia, nempe duo rectangula A C D, & A B. Ergo, & N, erit æqualis D B. Quod erat ostendendum.

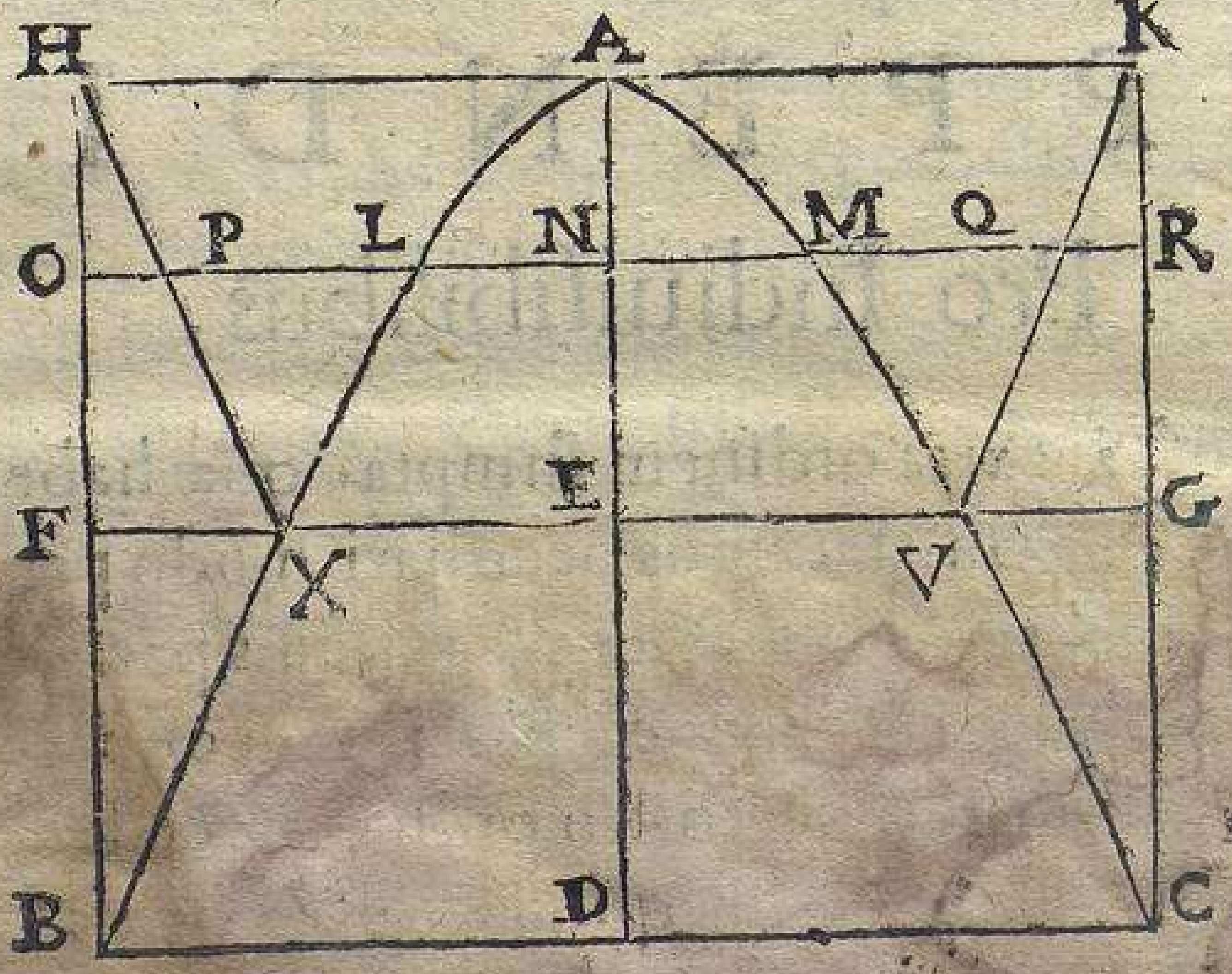
APPENDIX

Pro Indiuisibilibus.

PRopos. 2 extra ordinem sumpta, quæ habetur pag. 116. demonstrauimus peculiari modo per Indiuisibilia, Cylindrum esse duplum Conoidis parabolici super eandem basim, & circa eundem axim cum ipso. At nunc animaduertimus, nostro ordine procedendi, posse concludi illud admirabile, quod Celeberrimus Galilæus habet in postremis Dialogis, pag. apud nos 28. Nimirũ circuli circumferentiam æqualem esse puncto. Modum Galilæi videat Lector, loco supra citato. Noster autem sequens est non aliter discrepans à Methodo Galilęi, nisi quia vtimur solidis diuersi ab ijs, quibus ipse vtitur.

Pro-

Proposit. ergo supra citata, cuius schema denuo ponimus ostendebamus, quod si accepto in A E, vbilibet puncto N, per quod ordinatim applicaretur O P L N, semper verum esse circulum, cuius radius O N, æquari circulis, quorum radij P N, N L. Sed non solùm hoc verum est, sed etiam armillam circularem signatam litteris O P Q R, æqualem esse circulo L N M. Quod patet faciliter; quia cum quadratum O N, sit æquale, tam duobus quadratis P N, N L, quàm quadrato P N, & rectangulo O P R, sequitur (dempto communi quadrato P N;) rectangulum O P R, remanere æquale, quadrato L N; ac proinde, armillam O P Q R, esse æ-



qualẽ circulo L N M; & cum hoc semper verificetur, etiam verificari, excessum Cylindri H G, qui signatur litteris H F X V G K, supra frustum parabolicũ H X V K, æqualem esse portioni Conoidis X A V, tàm secundum

totum,

totum, quàm ſecundum partes. Vnde cum v g. pars HOPQRK, ſit æqualis LAM, portioni conoidis, & hoc ſemper verum ſit; ſequitur etiam, quod cum tandem ex continua diuiſione deueniamus ad circumferétiam, cuius diameter HK, & ad A, verticem conoidis, etiam circumferentiam eſſe æqualem vertici, nempe puncto. Circa hoc non immoror, quia faciliſſimè, & clariſſimè explicatur à Galilæo, ac eodem modo debet in caſu noſtro philoſophari.

At P. Marius Bettinus Societatis Ieſu, Vir, qui cum fuerit author Apiariorum poteſt Apis nuncupari; quia ſicut hæc habet vnde, & mellificet, & pungat, ſic hic mellificat, ſuauiſſimam doctrinam docendo, pungitque ſuo aculo non rectè de Mathematicis, ſecundum ipſum, ſentientes. At Apis infelix, quæ ſtimulum ammittens feriendo Indiuiſibilia, periclitata eſt. Author ergo iſte parui pendens, quæ in paradoxo Galilæi ait Illuſtriſſimus Interlocutor Sagredo Conciuis meus verbis, quæ loco Galilæi citato, poſſunt conſpici, tom.3. ſui Ærarij pareg Geom.ſchol.1 & alibi, notat aliqualiter Galilęi paradoxum, vnde, nec noſtrum omnimodè ei placeret. Admonet ergo nó eſſe intelligendum, circumferentiam æqualem eſse puncto ſic abſolutè, & Geometricè, ſed phyſicè. Attamen deducimus ex hoc veritatem pulcherrimam, nimirum inter phyſica indiuiſibilia vnum aliud multum phyſicè excedere. Nam cùm verum ſit, phyſicè loquendo, circumferentiam, cuius diameter HK, æqualem eſſe puncto A, & poſſimus concipere Cylindrum in infinitum baſium maiorum, & in eo inſcriptū

Conoi-

Conoides, vt supra factum est, & semper circumferentia sit æqualis, physicè loquendo, vertici conoidis, & tamen, & hæ circumferentiæ, & hi vertices sint quantitates physicæ, adeò vt inter ipsas cadat vera proportio æqualitatis. Sequitur, quod permutando, quam proportionem habet circumferentia maior, & vt ita dicam, maxima, ad paruissimam circumferentiam, hanc eandem habeat vertex conoidis maximi ad verticē conoidis paruissimi. Vnde vertex conoidis maximi excedet, vt ita dicam, infinitè, verticem conoidis paruissimi; & tamen vterque vertex, est punctum physicè indiuisibile. Et vtique admirabilissimum est considerare, quantum possimus concipere distrahi indiuisibile physicum, vt vertex coni, vel conoidis, physicè accepti, æquetur circumferentiæ circuli, quæ causa suę immensitatis, qua potest concipi, infinita queat appellari.

Verùm P. Bettinus loc. sup. cit. §. 28. &c. adducit paradoxum longè, vt ipse appellat, mirissimum; nimirum, non solum circumferentiam, sed circulum totum, æqualem esse puncto. Sed vt ignorantiam meam liberè fatear, tale paradoxū tali pacto mihi videtur mirissimū, vt intelligentiam meam effugiat. Contra tale paradoxum aliqua Geometrice obijcerem, sed nolo verba habere cū mortuis. Videat Lector tale paradoxum loco citato, & forsitan agnoscet, quam melius fuisset Bettino per indiuisibilia procedere, quam irrationabili liuore ipsa spernere. Sic enim ab indiuisibilibus abhorret, vt quasi ipsa lutum sint, ipse verò Armellinus, cupiat potius mori, quam fędari. Sic enim loc. sup. cit. Schol. 2. de Indiuisibiſibilibus loquitur: *In poſtremis reſpondeo impingentibus mihi ſimilitudinem phyloſophantium circa figuras Geometricas per indiuiſibilia. Longè longius à me abſit fruſtrari Geometricas meas theorias optato fine demonſtratæ veritatis. Quod fieret ſi (contra 4. definitionem lib. 5 & ſcholia noſtra ad eam) compararem inter ſe, quæ Geometricam inter ſe proportionem non habent, qualis eſt comparatio figurarum, & phyloſophatio circa eas per indiuiſibilia.* Intelligis ergo Lector, quomodo author iſte in indiuiſibilia incidens, quaſi ſibi Dæmones occurrerent exclamet: *Longè longius à me abſit &c.* Sed cum contra indiuiſibilia Author iſte anno 1648. nihil, præter nouum liuorem, noui adducat ab ijs, quæ contra ea obiecit Paulus Guldinus in ſua centrobarica, quibus abundè ſatisfecit ipſemet Indiuiſibilium inuentor Bonauentura Caualerius in ſuis exercitationibus Geometricis exercitat. 3. anno 1647. quo, maxima Matheſis iactura, vitam cum morte cõmutauit; ideò nec nos circa hoc debemus nouiter verba profundere.

SCHOLIVM.

HÆc ſunt, Benigne Lector, quæ pro hac vice determinauimus tibi legẽda proponere. Quamplurima adhuc tenemus diuerſis temporibus à nobis elaborata, pręcipuè circa proportiones Superficierum Sphęricarum, & Conicarum, quę ſuis temporibui tradentur, ſi Deus ſanitatem, & vitam impertierit. Hęc perlege, ſi tibi placet, reliqua in non modica quanti-

tate

tate, vel his pulchriora, vel his turpiora expecta. Tabellam errorum, vt moris est, tradere, non exhibemus, sed ipsos corrigere tuæ industrię relinquimus, pręcipuè cum adhibita aliquali diligentia, faciliter cognosci possint. Et vale.

FINIS.

501

ANGELI
PROBLEMATA
GEOMETRICA