

Fragment of a label on the spine, partially obscured and torn.

de la Armada
CA

Observatorio de San Fernando

BIBLIOTECA

Núm. del Invent. 985

Secció

Carpe

Estan

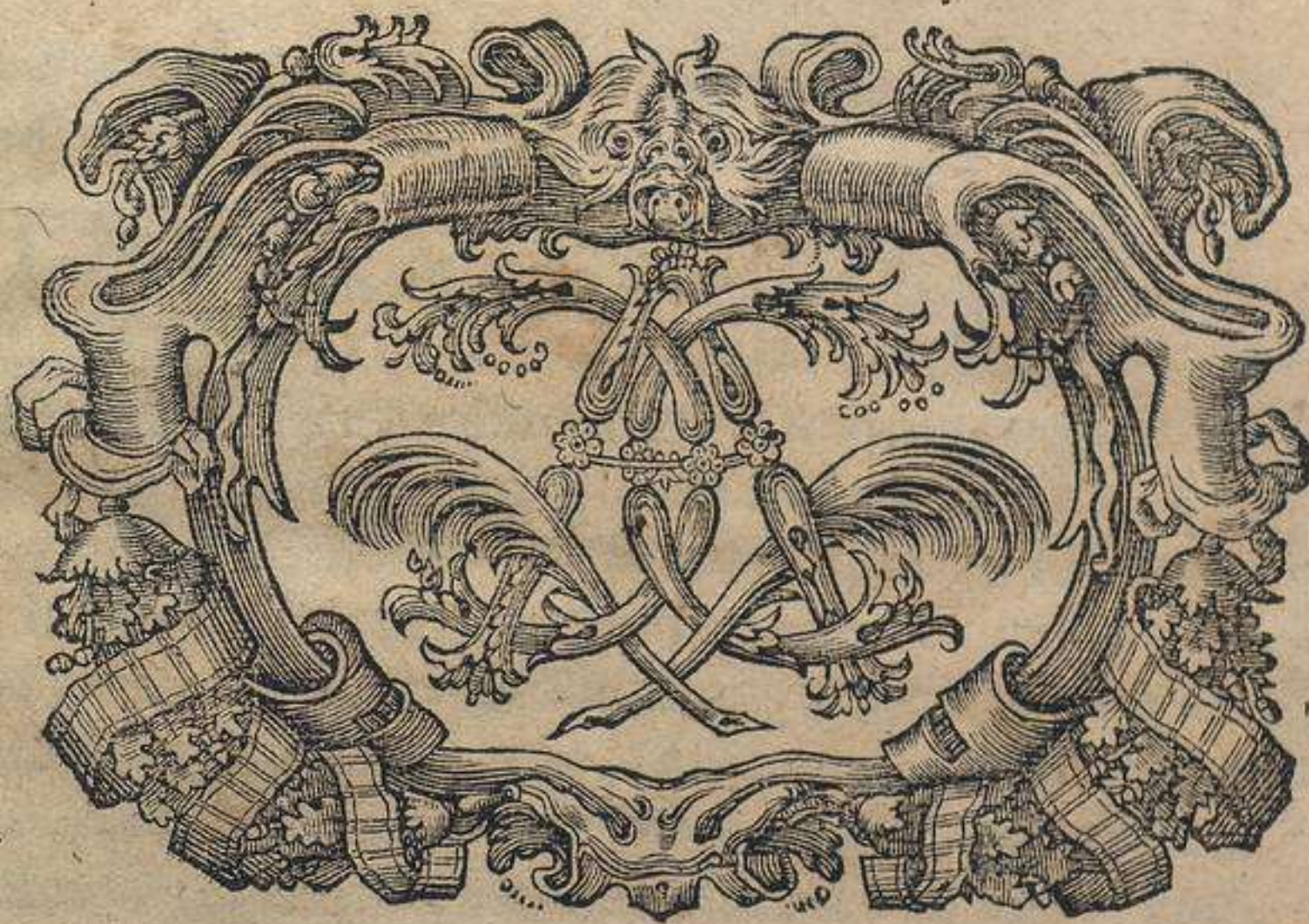
Observatorio de Marina
BIBLIOTECA

Núm. 205



N
S
C
E

LA
GEOMETRIE.
DE
RENÉ DESCARTES.



A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, rue saint Jacques,
au Lion d'or.

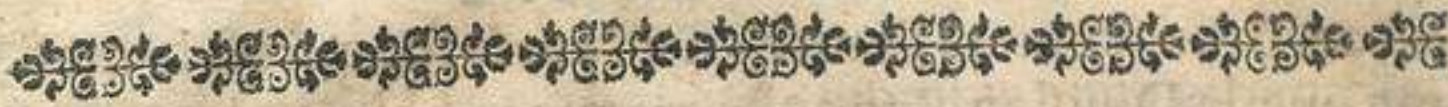
M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.



J. A.
GÉOMÉTRIE
DE
RENE DESCARTES



A PARIS
Chez Charles Anson, Libraire
en la Cour
M. DC. LXXIV
Imprimé chez la Citoyenne



LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des Problemes qu'on peut construire sans y employer que des Cercles & des Lignes droites.



Ovs les Problemes de Geometrie se peuvent facilement reduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoistre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision; Ainsi n'a-t-on autre chose a faire en Geometrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre conuës, que de leur en ajoûter d'autres, ou en oster; Ou bien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriéme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; ou bien en trouuer vne quatriéme, qui soit a l'vne

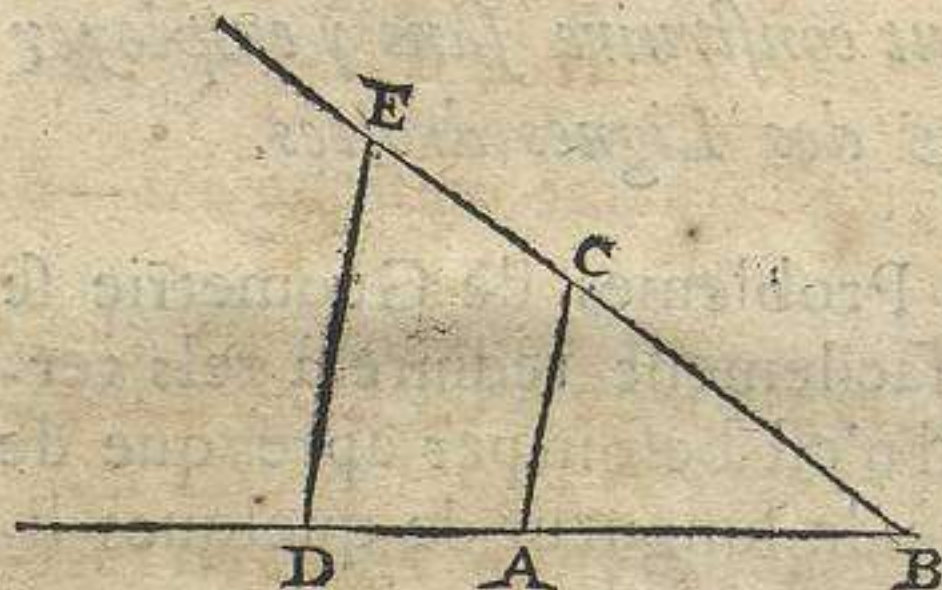
Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

A ij



de ces deux, comme l'vnité est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision ; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne ; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, afin de me rendre plus intelligible.

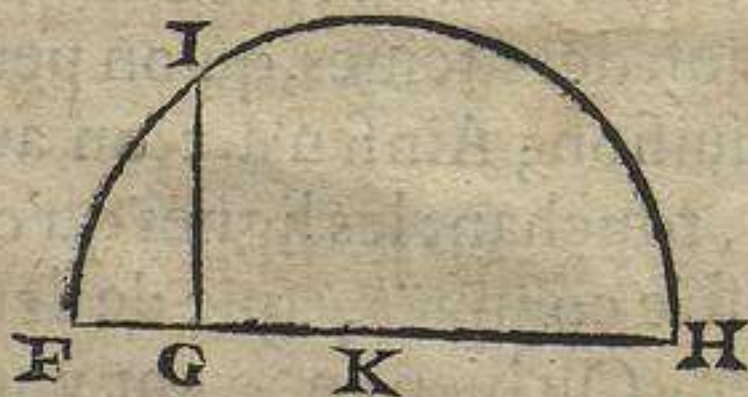
La Multi-
plication.



La Diuision.

BE par BD, ayant ioint les points E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC est le produit de cette diuision.

L'Extra-
ction de la
racine
quarrée.



le cercle FIH, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy après.

Comment
on peut

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces li-

Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'a ioindre les points A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE est le produit de cette Multiplication.

Oubien s'il faut diuiser

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouste en ligne droite FG, qui est l'vnité, & diuisant FH en deux parties égales au point K, du centre K ie tire

le cercle FIH, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy après.

gnes sur le papier, & il suffit de les designer par quelques lettres, chacune par vne seule. Comme pour ajouter la ligne BD a GH, ie nomme l'vne a & l'autre b , & escriis $a + b$; Et $a - b$, pour soustraire b d' a ; Et ab , pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b ; Et aa ,

vser de
chiffre en
Geome-
trie.

ou a^2 , pour multiplier a par soy mesme; Et a^3 , pour le multiplier encore vne fois par a , & ainsi a l'infini; Et

$\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' $a^2 + b^2$; Et

$\sqrt[3]{C. a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d' $a^3 - b^3 + abb$, & ainsi des autres.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçooy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsitez en l'Algebre, ie les nomme des quarez ou des cubes, &c.

Il est aussi a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est

point déterminée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu' abb ou b^3 dont se compose la ligne que

i'ay nommée $\sqrt[3]{C. a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est déterminée, a cause qu'elle peut estre sous-entenduë par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $abb - b$, il faut penser que la quantité abb est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

Au reste afin de ne pas manquer a se souuenir des noms de ces lignes, il en faut toujors faire vn registre separé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, escriuant par exemple.

$A B \propto 1$, c'est à dire, $A B$ esgal à 1.

$GH \propto a$

$B D \propto b$, &c.

Comment
il faut ve-
nir aux
Equations
qui ser-
uent a re-
soudre les
proble-
mes,

Ainsi voulant resoudre quelque probleme, on doit d'a-
bord le considerer comme desia fait, & donner des noms
à toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le con-
struire, aussi bien à celles qui sont inconnuës, qu'aux
autres. Puis sans considerer aucune difference entre ces
lignes connuës & inconnuës, on doit parcourir la diffi-
culté, selon l'ordre qui monstre le plus naturellement
de tous en qu'elle sorte elles dependent mutuellement
les vnes des autres, iusques a ce qu'on ait trouué moyen
d'exprimer vne mesme quantité en deux façons: ce qui
se nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces
deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit
trouuer autant de telles Equations, qu'on a supposé de li-
gnes, qui estoient inconnuës. Ou bien s'il ne s'en trouue
pas tant, & que nonobstant on n'obmette rien de ce qui
est desiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas
entierement déterminée. Et lors on peut prendre a dis-
cretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës,
ausquelles ne correspond aucune Equation. Après cela
s'il en reste encore plusieurs, il se faut seruir par ordre de
chacune des Equations qui restent aussi, soit en la con-
siderant toute seule, soit en la comparant avec les autres,
pour expliquer chacune de ces lignes inconnuës; & faire

ainsi en les demeslant, qu'il n'en demeure qu'une seule, égale a quelque autre, qui soit connue, ou bien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le surfolide, ou le quarré de cube, &c. soit égal a ce, qui se produit par l'addition, ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantitez, dont l'une soit connue, & les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connues. Ce que j'escriis en cete sorte.

$$z \propto b. \text{ ou}$$

$$z^2 \propto a z + b b. \text{ ou}$$

$$z^3 \propto a z^2 + b b z - c. \text{ ou}$$

$$z^4 \propto a z^3 - c z + d. \text{ \&c.}$$

C'est à dire, z , que ie prens pour la quantité inconnue, est égale a b ; ou le quarré de z est égal au quarré de b moins a multiplié par z ; ou le cube de z est égal à a multiplié par le quarré de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c . & ainsi des autres.

Et on peut toujours reduire ainsi toutes les quantitez inconnues à vne seule, lorsque le probleme se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou mesme par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrez plus composée. Mais ie ne m'arreste point a expliquer cecy plus en détail, à cause que ie vous osterois le plaisir de l'apprendre de vous mesme, & l'utilité de cultiuer vostre esprit en vous y exerçant, qui est a mon avis la principale, qu'on puisse

tirer de cette science. Aussi que ie n'y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront vn peu versez en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui est en ce traité, ne puisse trouuer.

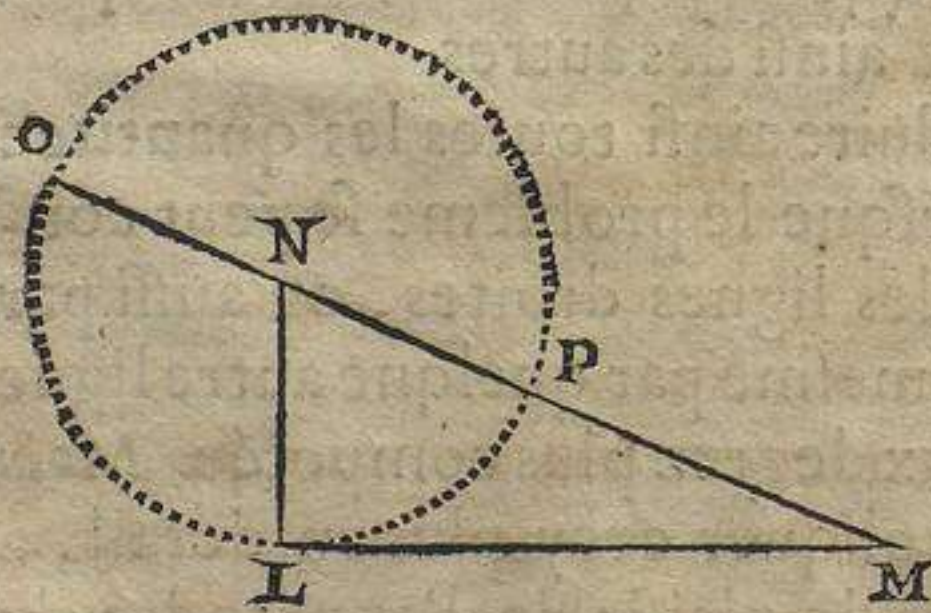
C'est pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeslant ces Equations on ne manque point a se seruir de toutes les diuisions, qui seront possibles, on aura infailliblement les plus simples termes, ausquels la question puisse estre reduite.

Quels
sont les
proble-
mes plans.

Et que si elle peut estre resoluë par la Geometrie ordinaire, c'est à dire, en ne se seruant que de lignes droites & circulaires tracées sur vne superficie plate, lorsque la derniere Equation aura esté entierement demeslée, il n'y restera tout au plus qu'vn quarré inconnu, égala ce qui se produit de l'Addition, ou Soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité conneuë, & de quelque autre quantité aussi conneuë.

Comment
ils se resol-
uent.

Et lors cette racine, ou ligne inconnuë se trouue aisément. Car si i'ay par exemple



$$z^2 \propto az + bb$$

ie fais le triangle rectangle NLM, dont le costé LM est égal a b racine quarrée de la quantité conneuë bb , & l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité

conneuë, qui estoit multipliée par z , que ie suppose estre la ligne inconnuë. Puis prolongeant MN la baze de ce triangle,

angle,

angle, iufques a O, en forte qu'NO soit égale a NL, la route OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte

$$z \propto \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}.$$

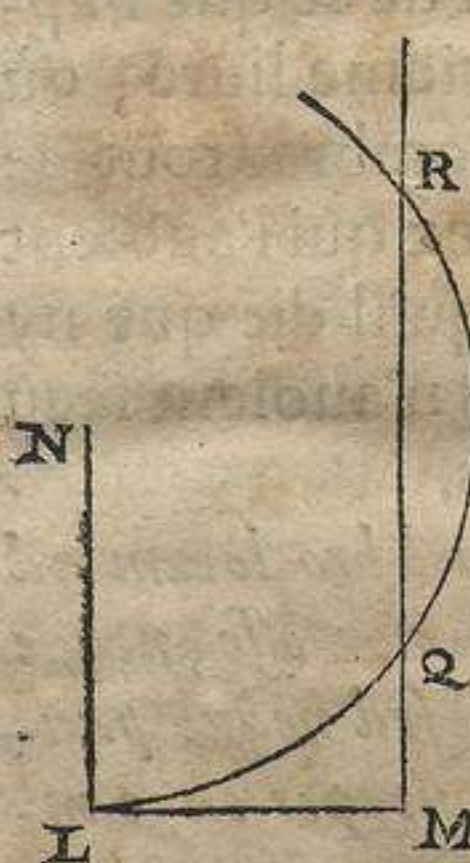
Que si i'ay $yy \propto -a y + b b$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouver, ie fais le mesme triangle rectangle NLM, & de sa baze MN i'oste NP égale a NL, & le reste PM est y la racine cherchée. De façon que i'ay

$$y \propto -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}.$$

Et tout de mesme si i'a-

$$uois $x \propto \frac{1}{4} a x + b$. PM seroit x. & i'aurois$$

$$x \propto \sqrt{-\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}}: \text{ \& ainsi des autres.}$$



Enfin si i'ay $z \propto a z - b b$:

ie fais NL égale à $\frac{1}{2} a$, & LM égale à b comme deuant; Puis, au lieu de ioindre les points MN, ie tire MQR parallele a LN, & du centre N par L ayant décrit vn cercle qui la coupe aux points Q & R, la ligne cherchée z est MQ, ou bien MR; car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à

$$\text{sçauoir } z \propto \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a - b b},$$

$$\text{\& } z \propto \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} a a - b b}.$$

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne coupe ny ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut asseurer que la construction du probleme proposé est impossible.

B

Au reste ces mesmes racines se peuuent trouver par vne infinité d'autres moyens ; & i'ay seulement voulu mettre ceux-cy, comme fort simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les problemes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. Car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Exemple
tiré de
Pappus.

Et on le peut voir aussi fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septième liure ; où après s'estre arresté quelque temps à dénombrer tout ce qui auoit esté écrit en Geometrie par ceux qui l'auoient précédé, il parle enfin d'une question, qu'il dit que ny Euclide, ny Apollonius, ny aucuns autres n'auoient sceu entierement resoudre, & voicy ses mots.

Je cite plutôt la version latine que le texte grec, afin que chacun l'entende plus aisément.

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paullum quid addere iis, quæ Euclides scripsit per ea tantum conica, quæ vsque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, &c.

Et vn peu après il explique ainsi quelle est cette question.

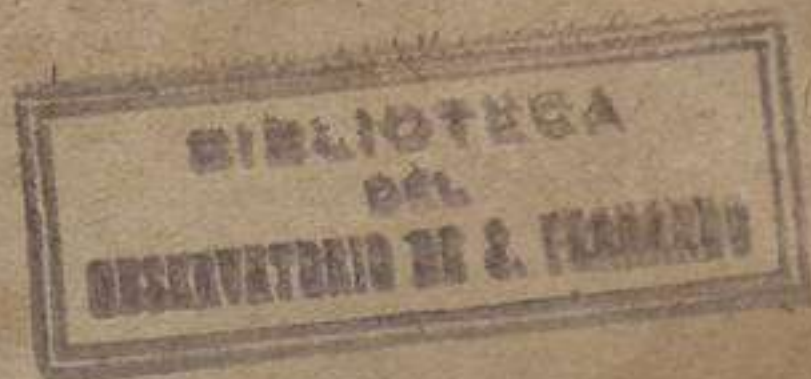
At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè se iactat, & ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est huiusmodi. Si positione datis tribus

rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ, punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit, similiter punctum datam conicam sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantum locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas, quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, & quæ manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hæc sunt.

Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio solidi parallelepipedum rectangulum, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, & data quapiam lineæ, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur, rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cuiuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus.

Ou ie vous prie de remarquer en passant, que le scrupule, que faisoient les anciens d'vser des termes de l'Arithmetique en la Geometrie, qui ne pouuoit proceder,

B ij



que de ce qu'ils ne voyoient pas assez clairement leur rapport, caufoit beaucoup d'obscurité & d'embaras, en la façon dont ils s'expliquoient. Car Pappus poursuit en cette sorte.

Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt. Neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur. Licebit autem per coniunctas proportiones hæc, & dicere, & demonstrare uniuersè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio coniuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, si sint septem, si vero octo, & reliqua ad reliquam, punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcumque sint impares vel pares multitudinem, cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita ut linea nota sit, &c.

La question donc qui auoit esté commencée a résoudre par Euclide, & pourfuiuie par Apollonius, sans auoir esté acheuée par personne, estoit telle. Ayant trois ou quatre ou plus grand nombre de lignes droites données par position; premierement on demande vn point, duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, vne sur chacune des données, qui fassent avec elles des angles donnez, & que le rectangle contenu en deux de celles, qui seront ainsi tirées d'un mesme point, ait la proportion donnée avec le quarré de la troisième, s'il n'y en a que trois; ou bien avec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre; ou bien, s'il y en a cinq, que le parallelepipedé composé de trois ait la proportion donnée avec le

parallelepipedes composé des deux qui restent, & d'une autre ligne donnée. Ous'il y en a six, que le parallelepipedes composé de trois ait la proportion donnée avec le parallelepipedes des trois autres. Ous'il y en a sept, que ce qui se produit lors qu'on en multiplie quatre l'une par l'autre, ait la raison donnée avec ce qui se produit par la multiplication des trois autres, & encore d'une autre ligne donnée; Ou s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée avec le produit des quatre autres. Et ainsi cette question se peut estendre a tout autre nombre de lignes. Puis, à cause qu'il y a toujours vne infinité de diuers points qui peuvent satisfaire a ce qui est icy demandé, il est aussi requis de connoistre, & de tracer la ligne, dans laquelle ils doivent tous se trouver. Et Pappus dit que lors qu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en vne des trois sections coniques. Mais il n'entreprend point de la determiner, ny de la décrire. Non plus que d'expliquer celles où tous ces points se doivent trouver, lorsque la question est proposée en vn plus grand nombre de lignes. Seulement il ajoûte que les anciens en auoient imaginé vne qu'ils monstroient y estre vtile, mais qui sembloit la plus manifeste, & qui n'estoit pas toutefois la premiere. Ce qui m'a donné occasion d'essayer si par la methode dont ie me sers on peut aller aussi loin qu'ils ont esté.

Et premierement i'ay connu que cette question n'estant
proposée qu'en trois, ou quatre, ou cinq lignes, on peut
toujours trouver les points cherchez par la Geometrie
simple; c'est à dire en ne se seruant que de la regle & du

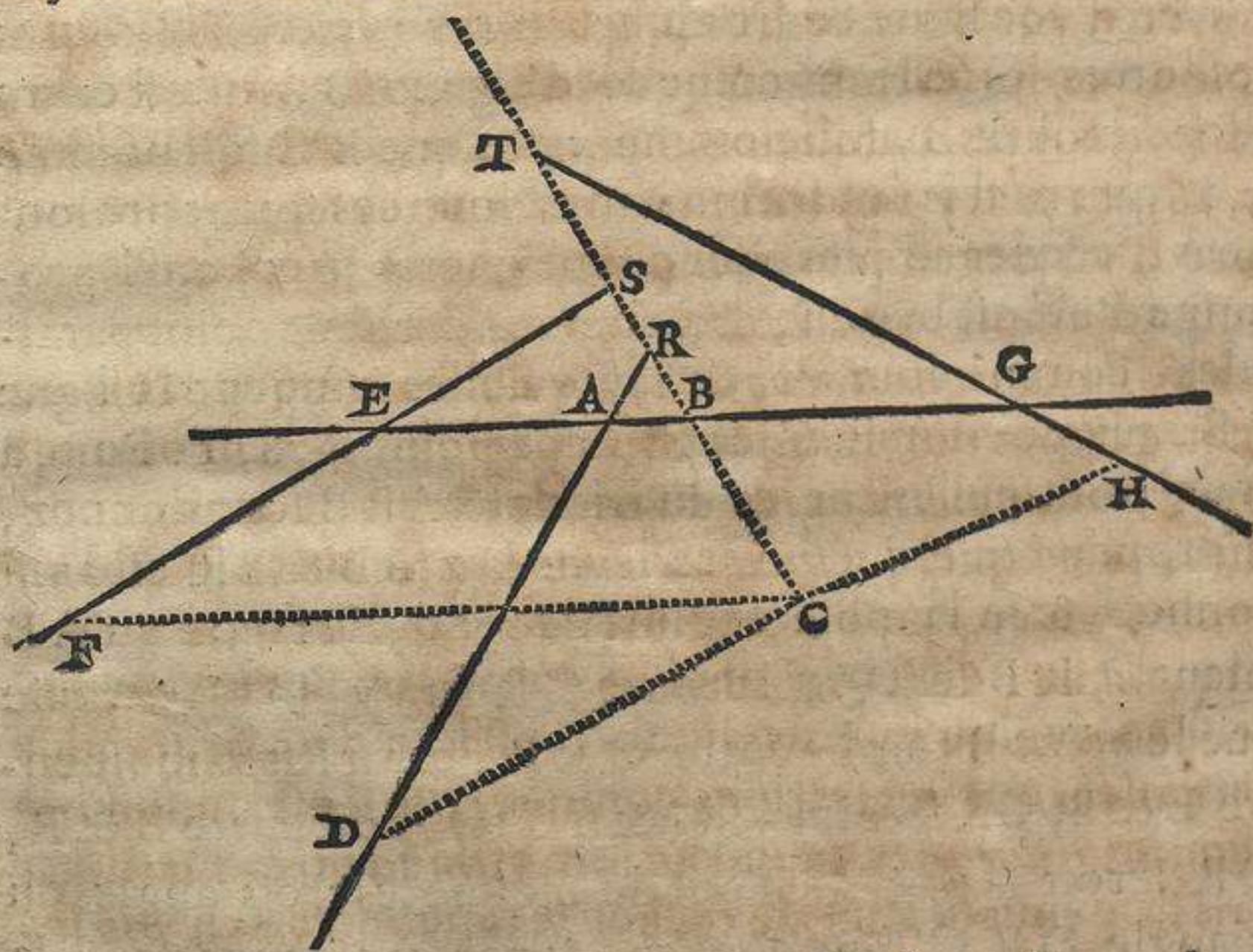
Réponse à
la question
de Pappus.

compas, & ne faisant autre chose, que ce qui a desia esté dit; excepté seulement lors qu'il y a cinq lignes données, si elles sont toutes paralleles. Auquel cas, comme aussi lors que la question est proposée en six, ou 7, ou 8, ou 9 lignes, on peut toujours trouver les points cherchez par la Geometrie des solides; c'est à dire en y employant quelqu'une des trois sections coniques. Excepté seulement lors qu'il y a neuf lignes données, si elles sont toutes paralleles. Auquel cas derechef, & encore en 10, 11, 12, ou 13 lignes on peut trouver les points cherchez par le moyen d'une ligne courbe qui soit d'un degré plus composée que les sections coniques. Excepté en treize si elles sont toutes paralleles, auquel cas, & en quatorze, 15, 16, & 17. il y faudra employer une ligne courbe encore d'un degré plus composée que la precedente, & ainsi a l'infini.

Puis j'ay trouvé aussi, que lors qu'il n'y a que trois ou quatre lignes données, les points cherchez se rencontrent tous, non seulement en l'une des trois sections coniques, mais quelquefois aussi en la circonference d'un cercle, ou en une ligne droite. Et que lors qu'il y en a cinq, ou six, ou sept, ou huit, tous ces points se rencontrent en quelqu'une des lignes, qui sont d'un degré plus composées que les sections coniques, & il est impossible d'en imaginer aucune qui ne soit utile à cette question; mais ils peuvent aussi de rechef se rencontrer en une section conique, ou en un cercle, ou en une ligne droite. Et s'il y en a neuf, ou 10, ou 11, ou 12, ces points se rencontrent en une ligne, qui ne peut estre que d'un degré plus composée que les precedentes; mais toutes celles

qui sont d'un degré plus composées y peuvent servir, & ainsi a l'infini.

Au reste la premiere, & la plus simple de toutes, après les sections coniques, est celle qu'on peut décrire par l'intersection d'une Parabole, & d'une ligne droite, en la façon qui sera tantost expliquée. En sorte que ie pense avoir entierement satisfait a ce que Pappus nous dit avoir esté cherché en cecy par les anciens. Et ie tascheray d'en mettre la demonstration en peu de mots. Car il m'ennuie déjà d'en tant écrire.



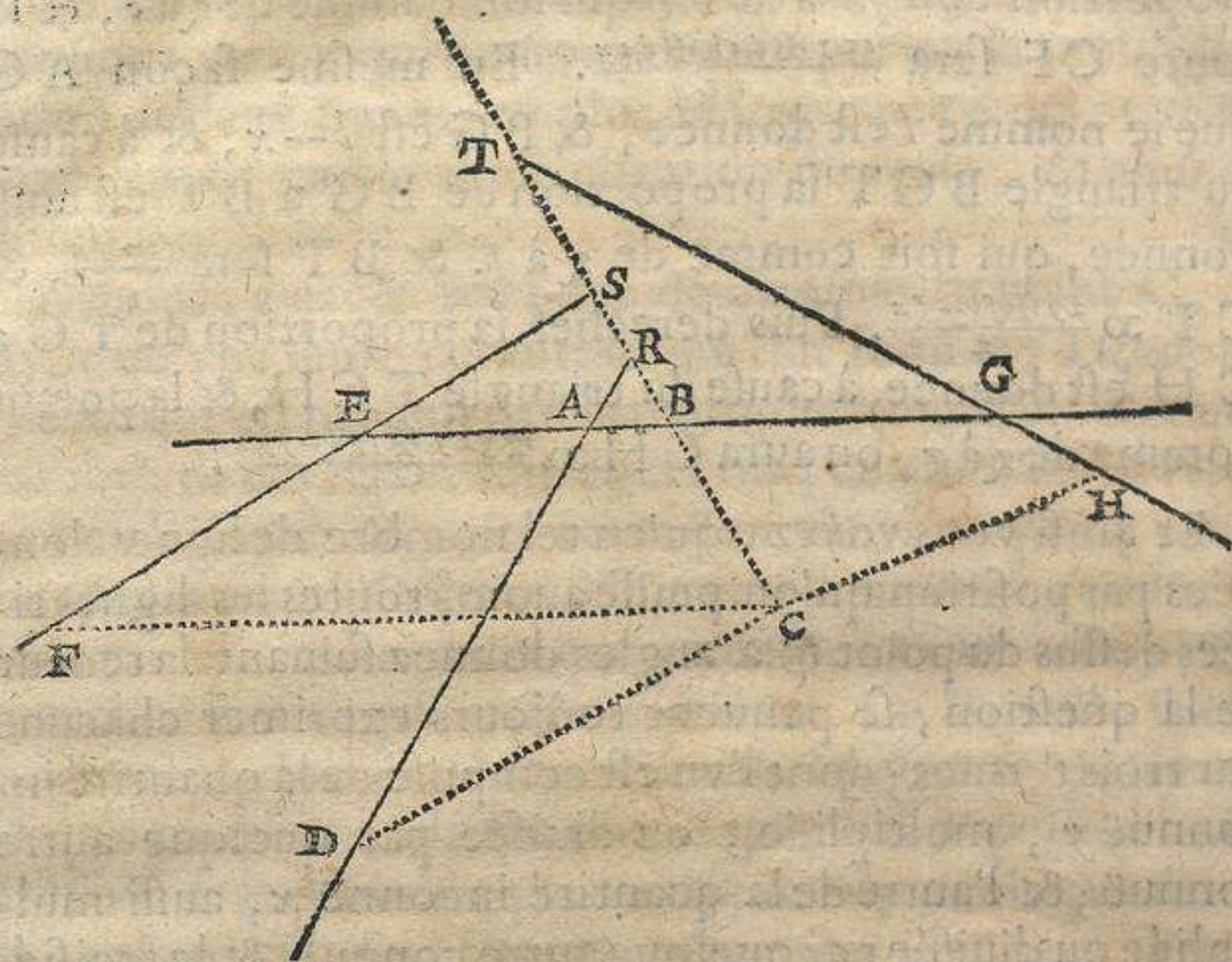
Soient AB, AD, EF, GH, &c. Plusieurs lignes données par position, & qu'il faille trouver un point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF, & CH, en sorte que les

angles CBA, CDA, CFE, CHG, &c. soient donnez; & que ce qui est produit par la multiplication d'une partie de ces lignes, soit égal a ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile.

Comment
on doit
poser les
termes
pour venir
à l'Equa-
tion en cet
exemple.

Premierement ie suppose la chose comme déjà faite, & pour me demesler de la confusion de toutes ces lignes, ie considere l'une des données, & l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB, & CB, comme les principales, & auxquelles ie tâche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A & B, soit nommé x , & que BC soit nommé y . & que toutes les autres lignes données soient prolongées, iusques a ce qu'elles coupent ces deux, aussi prolongées s'il est besoin, & si elles ne leur sont point paralleles; comme vous voyez icy qu'elles coupent la ligne AB, aux points A, E, G. & BC aux points R, S, T. Puis, à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnez, la proportion qui est entre les costez AB & BR est aussi donnée; & ie la pose comme de z a b ; de façon qu'AB estant x , RB sera $\frac{bx}{z}$ & la toute CR sera $y + \frac{bx}{z}$, à cause que le point B tombe entre C & R; car si R tomboit entre C & B, CR seroit $y - \frac{bx}{z}$; & si C tomboit entre B & R, CR seroit $-y + \frac{bx}{z}$. Tout de mesme les trois angles du triangle DRC sont donnez, & par consequent aussi la proportion qui est entre les costez CR, & CD, que ie pose comme de z à c ; de façon que CR estant $y + \frac{bx}{z}$,

CD



CD sera $\frac{cy}{z} \mp \frac{bcx}{zz}$. Après cela pource que les lignes AB, AD, & EF sont données par position, la distance qui est entre les points A & E est aussi donnée, & si on la nomme K, on aura EB égal a $k \mp x$; mais ce seroit $k - x$, si le point B tomboit entre E & A; & $-k + x$, si E tomboit entre A & B. Et pource que les angles du triangle ESB sont tous donnez, la proportion de BE a BS est aussi donnée, & ie la pose comme z à d , si bien que BS est $\frac{dk \mp dx}{z}$, & la toute CS est $\frac{zy \mp dk \mp dx}{z}$; mais ce seroit $\frac{zy - dk - dx}{z}$, si le point S tomboit entre B & C; & ce seroit $\frac{-zy \mp dk \mp dx}{z}$, si C tomboit entre B & S. De plus les trois angles du triangle FSC sont donnez, & en suite la

C

proportion de CS à CF , qui soit comme de z à e , & la toute CF fera $\frac{ezy \times dek \times dex}{zz}$. En mesme façon AG que ie nomme l est donnée, & BG est $l--x$, & à cause du triangle BGT la proportion de BG à BT est aussi donnée, qui soit comme de z à f . & BT fera $\frac{fl--fx}{z}$, & $CT \propto \frac{zy \times fl--fx}{z}$. Puis derechef la proportion de TC à CH est donnée, à cause du triangle TCH , & la posant comme de z à g , on aura $CH \propto \frac{gz \times fl--fx}{zz}$.

Et ainsi vous voyez, qu'en tel nombre de lignes données par position qu'on puisse auoir, toutes les lignes tirées dessus du point C à angles donnez suiuant la teneur de la question, se peuvent touïjours exprimer chacune par trois termes; dont l'un est composé de la quantité inconnuë y , multipliée, ou diuisée par quelque autre connuë; & l'autre de la quantité inconnuë x , aussi multipliée ou diuisée par quelque autre connuë, & le troisiéme d'une quantité toute connuë. Excepté seulement si elles sont paralleles; ou bien à la ligne AB , auquel cas le terme composé de la quantité x sera nul; ou bien à la ligne CB , auquel cas celui qui est composé de la quantité y sera nul; ainsi qu'il est trop manifeste pour que ie m'arreste à l'expliquer. Et pour les signes $+$, & $--$, qui se ioignent à ces termes, ils peuvent estre changez en toutes les façons imaginables.

Puis vous voyez aussi, que multipliant plusieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantitez x & y , qui se trouuent dans le produit, n'y peuvent auoir que chacune autant de dimensions, qu'il y a eu de lignes à l'explication desquelles elles seruent, qui ont esté ainsi multi-

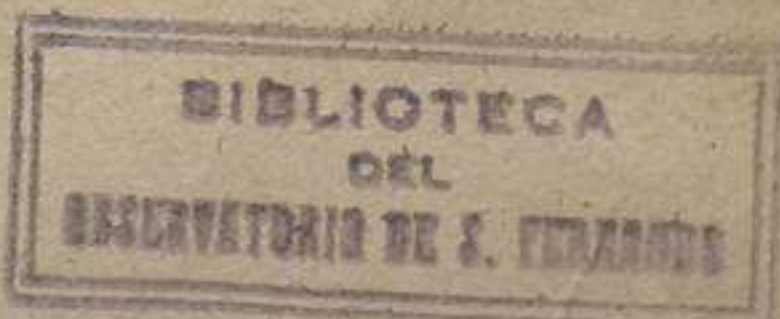
pliées : en sorte qu'elles n'auront jamais plus de deux dimensions, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes ; ny plus de trois, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois, & ainsi à l'infini.

De plus, à cause que pour déterminer le point C, il n'y a qu'une seule condition qui soit requise, à sçavoir que ce qui est produit par la multiplication d'un certain nombre de ces lignes soit égal, ou (ce qui n'est de rien plus malaisé) ait la proportion donnée, à ce qui est produit par la multiplication des autres ; on peut prendre à discretion l'une des deux quantitez inconnuës x ou y , & chercher l'autre par cette Equation. En laquelle il est évident que lors que la question n'est point proposée en plus de cinq lignes, la quantité x qui ne sert point à l'expression de la premiere peut toujours n'y avoir que deux dimensions. De façon que prenant une quantité connue pour y , il ne restera que $x \times x \times \dots$ ou $-- a x +$ ou $-- b b$. Et ainsi on pourra trouver la quantité x avec la regle & le compas, en la façon tantost expliquée. Mesme prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y , on en trouvera aussi infinies pour la ligne x , & ainsi on aura une infinité de divers points, tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée.

Comment on trouve que ce probleme est plan, lors qu'il n'est point proposé en plus de cinq lignes.

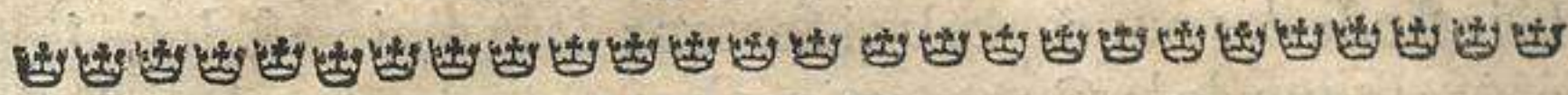
Il se peut faire aussi, la question estant proposée en six, ou plus grand nombre de lignes ; s'il y en a entre les données qui soient paralleles à BA, ou BC, que l'une des deux quantitez x ou y n'ait que deux dimensions en l'Equation, & ainsi qu'on puisse trouver le point C avec

C ij



la regle & le compas. Mais au contraire si elles sont toutes paralleles, encore que la question ne soit proposée qu'en cinq lignes, ce point C ne pourra ainsi estre trouué, à cause que la quantité x ne se trouuant point en toute l'Equation, il ne sera plus permis de prendre vne quantité conuë pour celle qui est nommée y , mais ce sera elle qu'il faudra chercher. Et pource qu'elle aura trois dimensions, on ne la pourra trouuer qu'en tirant la racine d'une Equation cubique. Ce qui ne se peut generalement faire sans qu'on y employe pour le moins vne section conique. Et encore qu'il y ait iusques a neuf lignes données, pourvû qu'elles ne soient point toutes paralleles, on peut touûjours faire que l'Equation ne monte que iusques au quarré de quarré. Au moyen dequoy on la peut aussi touûjours resoudre par les sections coniques, en la façon que i'expliqueray cy-aprés. Et encore qu'il y en ait iusques à treize, on peut touûjours faire qu'elle ne monte que iusques au quarré de cube. En suite de quoy on la peut resoudre par le moyen d'une ligne, qui n'est que d'un degré plus composée que les sections coniques, en la façon que i'expliqueray aussi cy-aprés. Et cecy est la premiere partie de ce que i'auois icy à demonstrier; mais avant que ie passe à la seconde, il est besoin que ie die quelque chose en general de la nature des lignes courbes.





LA

G E O M E T R I E .

LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

Es anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les problemes de Geometrie, les vns sont plans, les autres solides, & les autres lineaires, c'est à dire, que les vns peuvent estre construits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique; ny enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'estonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué diuers degrez entre ces lignes plus composées, & ie ne scaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plutôt que Geometriques. Car de dire que ç'ait esté, à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudroit reietter par mesme raison les cercles & les lignes droites; vû qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec vn compas & vne regle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus, à cause que les instrumens qui seruent à les tracer, estant plus composez que la regle & le compas, ne peuvent estre si iustes; car il faudroit pour cette raison les reietter des Mechaniques, où

Quelles
sont les li-
gnes cour-
bes qu'on
peut rece-
voir en
Geome-
trie.

la iustesse des ouurages qui sortent de la main est desirée; plûtoft que de la Geometrie, où c'est seulement la iustesse du raisonnement qu'on recherche, & qui peut sans doute estre aussi parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres. Je ne diray pas aussi, que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, & qu'ils se sont contentez qu'on leur accordast, qu'ils peussent ioindre deux points donnez par vne ligne droite, & décrire vn cercle d'vn centre donné, qui passast par vn point donné. Car ils n'ont point fait de scrupule de supposer outre cela, pour traiter des sections coniques, qu'on pût couper tout cone donné par vn plan donné. Et il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes, que ie prétens icy introduire; sinon que deux ou plusieurs lignes puissent estre meües l'vne par l'autre, & que leurs interfections en marquent d'autres; ce qui ne me paroist en rien plus difficile. Il est vray qu'ils n'ont pas aussi entierement receu les sections coniques en leur Geometrie, & ie ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont esté approuuez par l'usage; mais il est, ce me semble, tres-clair, que prenant comme on fait pour Geometrique ce qui est precis & exact, & pour Mechanique ce qui ne l'est pas; & considerant la Geometrie comme vne science, qui enseigne generalement à connoistre les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plûtoft exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvû qu'on les puisse imaginer estre décrites par vn mouuement continu, ou par plusieurs qui s'entresuiuent, & dont les derniers soient entierement reglez par ceux qui les precedent. Car par ce moyen on peut tou-

jours auoir vne connoissance exacte de leur mesure. Mais peut-estre que ce qui a empesché les anciens Geometres de receuoir celles qui estoient plus composées que les sections coniques, c'est que les premieres qu'ils ont considerées, ayant par hasard esté la Spirale, la Quadratrice & semblables, qui n'appartiennent veritablement qu'aux Mechaniques, & ne sont point du nombre de celles que ie pense deuoir icy estre receuës, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouuemens separez, & qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement, bien qu'ils ayent après examiné la Conchoïde, la Cissoïde, & quelque peu d'autres qui en sont, toutefois à cause qu'ils n'ont peut-estre pas assez remarqué leurs proprietés, ils n'en ont pas fait plus d'estat que des premieres. Ou bien c'est que voyant, qu'ils ne connoissoient, encore que peu de choses touchant les sections coniques, & qu'il leur en restoit mesme beaucoup, touchant ce qui se peut faire avec la regle & le compas, qu'ils ignoroient, ils ont creu ne deuoir point entamer de matiere plus difficile. Mais pource que i'espere que d'orenauant ceux qui auront l'adresse de se seruir du calcul Geometrique icy proposé, ne trouueront pas assez de quoy s'arrester touchant les problemes plans ou solides; ie croy qu'il est a propos que ie les inuite a d'autres recherches, où ils ne manqueront iamais d'exercice.

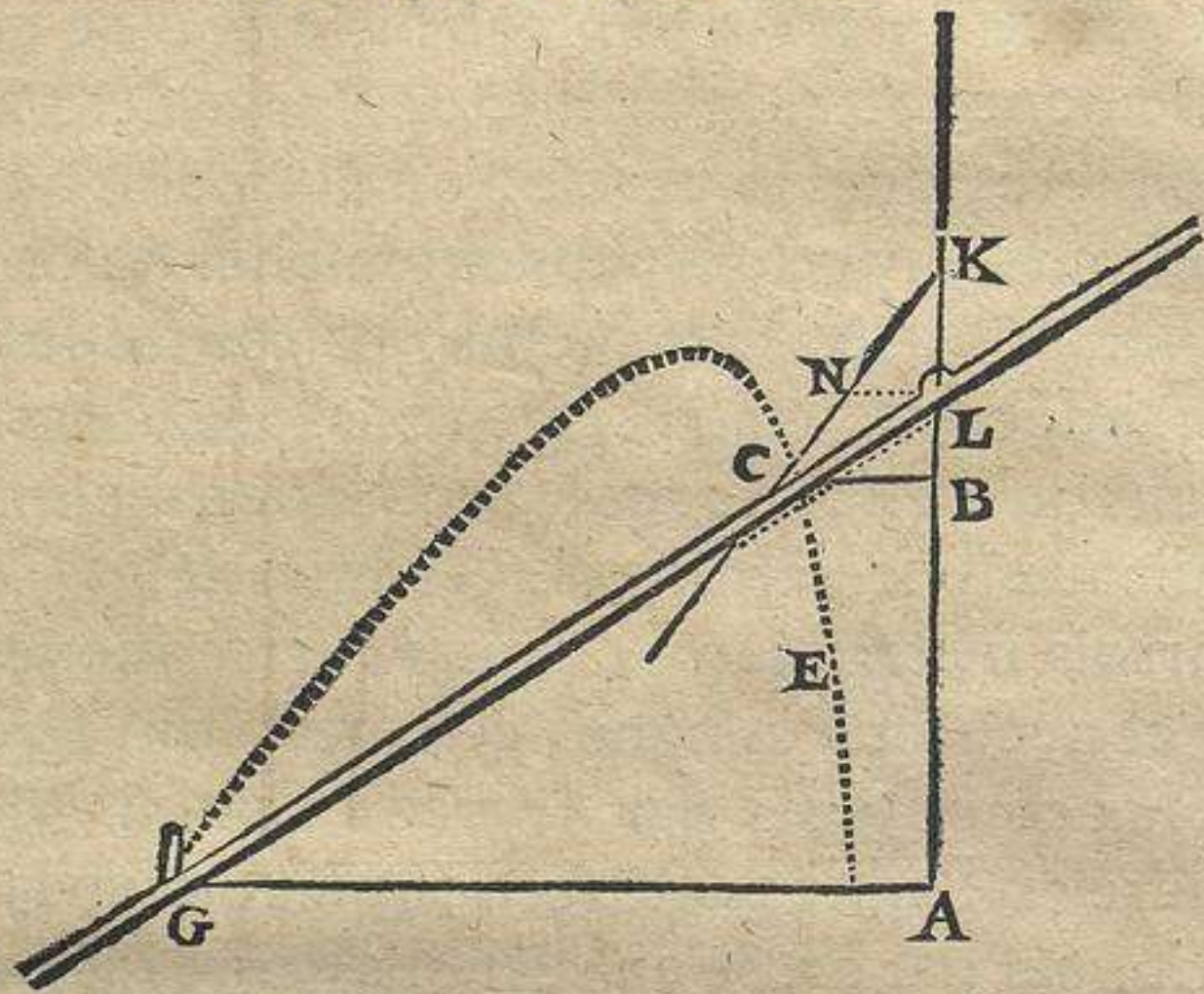
Voyez les lignes AB, AD, AF, & semblables que ie suppose auoir esté décrites par l'aide de l'instrument YZ, qui est composé de plusieurs regles tellement iointes, que celle qui est marquée YZ estant arrestée sur la ligne AN, on peut ouurir & fermer l'angle XYZ; & que lors

ie ne voy pas ce qui peut empescher, qu'on ne conçoive aussi nettement, & aussi distinctement la description de cette premiere, que du cercle, ou du moins que des sections coniques; ny ce qui peut empescher qu'on ne conçoive la seconde, & la troisieme, & toutes les autres, qu'on peut décrire, aussi bien que la premiere; ny par consequent qu'on ne les reçoive toutes en mesme façon, pour servir aux speculations de Geometrie.

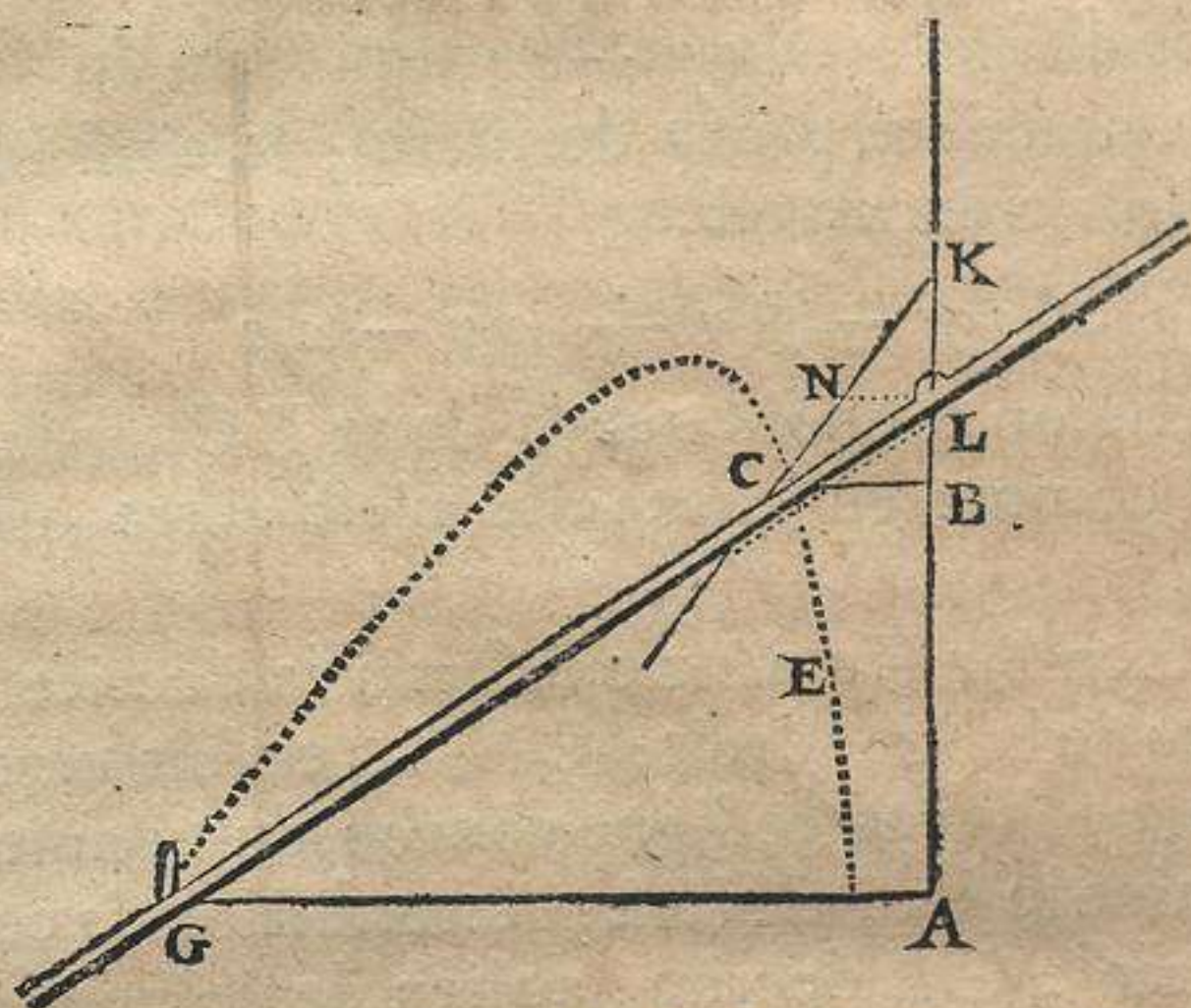
Je pourrois mettre icy plusieurs autres moyens pour tracer & concevoir des lignes courbes, qui seroient de plus en plus composées par degrez a l'infini. Mais pour comprendre ensemble toutes celles, qui sont en la nature, & les distinguer par ordre en certains genres; ie ne sçache rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est à dire qui tombent sous quelque mesure precise & exacte, ont necessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque Equation, en tous par vne mesme. Et que lorsque cette Equation ne monte que iusques au rectangle de deux quantitez indeterminées, où bien au quarré d'une mesme, la ligne courbe est du premier & plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipse qui soient comprises. Mais que lors que l'Equation monte iusques à la 3 ou 4 dimension des deux, ou de l'une des deux quantitez indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'un point à vn autre, elle est du second: & que lors que l'Equation monte iusques à la 5 ou 6 dimension, elle est du troisieme; & ainsi des autres a l'infini.

Comme si ie veux sçavoir de quel genre est la ligne EC,
D

La façon de distinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoistre le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites.



que ie m' imagine estre décrite par l'interfection de la regle GL , & du plan rectiligne $CNKL$, dont le costé KN est indefiniment prolongé vers C , & qui estant meu sur le plan de dessous en ligne droite, c'est à dire en telle sorte que son diametre KL se trouue toujourns appliqué sur quelque endroit de la ligne BA prolongée de part & d'autre, fait mouvoir circulairement cette regle GL autour du point G , à cause quelle luy est tellement iointe quelle passe toujourns par le point L . Je choisís vne ligne droite, comme AB , pour rapporter à ses diuers points tous ceux de cette ligne courbe EC , & en cette ligne AB ie choisís vn point, comme A , pour commencer par luy ce calcul. Je dis que ie choisís & l'vn & l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut. Car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'Equation plus courte & plus aisée; toutefois en quelle façon qu'on les prene, on peut toujourns faire que la ligne paroisse



de mesme genre, ainsi qu'il est aisé à demonstrier. Après cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert à la décrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne CB parallele a GA, & pource que CB & BA sont deux quantitez indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'une y & l'autre x . Mais afin de trouuer le rapport de l'une à l'autre; ie considere aussi les quantitez connuës qui determinent la description de cette ligne courbe, comme GA que ie nomme a , KL que ie nomme b , & NL parallele a GA que ie nomme c . Puis ie dis, comme NL est à LK, ou c à b , ainsi CB, ou y , est à BK, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & BL est $\frac{b}{c}y -- b$, & AL est $x + \frac{b}{c}y -- b$. De plus comme CB est à LB, ou y à $\frac{b}{c}y -- b$, ainsi a , ou GA, est à LA, ou $x + \frac{b}{c}y -- b$. De façon que multipliant la seconde par la troisiéme on produit $\frac{ab}{c}y -- ab$,

D ij

qui est égale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$, qui se produit en multipliant la premiere par la derniere ; & ainsi l'Equation qu'il falloit trouver est

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$$

de laquelle on connoist que la ligne EC est du premier genre, comme en effet elle n'est autre qu'une hyperbole.

Que si en l'instrument qui sert à la décrire, on fait qu'au lieu de la ligne droite CNK, ce soit cette hyperbole, ou quelque autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan CNKL; l'interfection de cette ligne & de la regle GL décrira, au lieu de l'Hyperbole EC, vne autre ligne courbe, qui sera du second genre. Comme si CNK est vn cercle, dont L soit le centre, on décrira la premiere Conchoïde des anciens; & si c'est vne Parabole, dont le diametre soit KB, on décrira la ligne courbe, que i'ay tantost dit estre la premiere, & la plus simple pour la question de Pappus, lors qu'il n'ya que 5 lignes droites données par position. Mais si au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, s'en est vne du second, qui termine le plan CNKL, on en décrira par son moyen vne du troisieme, ou si c'en est vne du troisieme, on en décrira vne du quatrieme, & ainsi a l'infini. Comme il est fort aisé a connoistre par le calcul. Et en quelque autre façon, qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvû qu'elle soit du nombre de celles que ie nomme Geometriques, on pourra toujors trouver vne Equation pour déterminer tous ses points en cette sorte.

Au reste ie mets les lignes courbes qui font monter cette Equation iusques au quarré de quarré, au mesme genre que celles qui ne la font monter que iusques au cube. Et celles dont l'Equation monte au quarré de cube, au mesme genre que celles dont elle ne monte qu'au surfolide, & ainsi des autres. Dont la raison est, qu'il y a regle generale pour reduire au cube toutes les difficultez qui vont au quarré de quarré, & au surfolide toutes celle qui vont au quarré de cube, de façon qu'on ne les doit point estimer plus composées.

Mais il est à remarquer qu'entre les lignes de chaque genre, encore que la plupart soient également composées, en forte qu'elles peuvent servir à déterminer les mesmes points, & construire les mesmes problemes, il y en a toutefois aussi quelques vnes, qui sont plus simples, & qui n'ont pas tant d'estenduë en leur puissance. Comme entre celles du premier genre outre l'Ellipse, l'Hyperbole & la Parabole qui sont également composées, le cercle y est aussi compris, qui manifestement est plus simple. Et entre celles du second genre il y à la Conchoïde vulgaire, qui a son origine du cercle; & il y en a encore quelques autres, qui bien qu'elles n'ayent pas tant d'étenduë que la plupart de celles du mesme genre, ne peuvent toutefois estre mises dans le premier.

Or après auoir ainsi reduit toutes les lignes courbes a certains genres, il m'est aisé de poursuiure en la démonstration de la réponse, que i'ay tantost faite à la question de Pappus. Car premierement ayant fait voir cy-dessus, que lors qu'il n'y a que trois ou 4 lignes droites données, l'Equation qui sert à determiner les points cher-

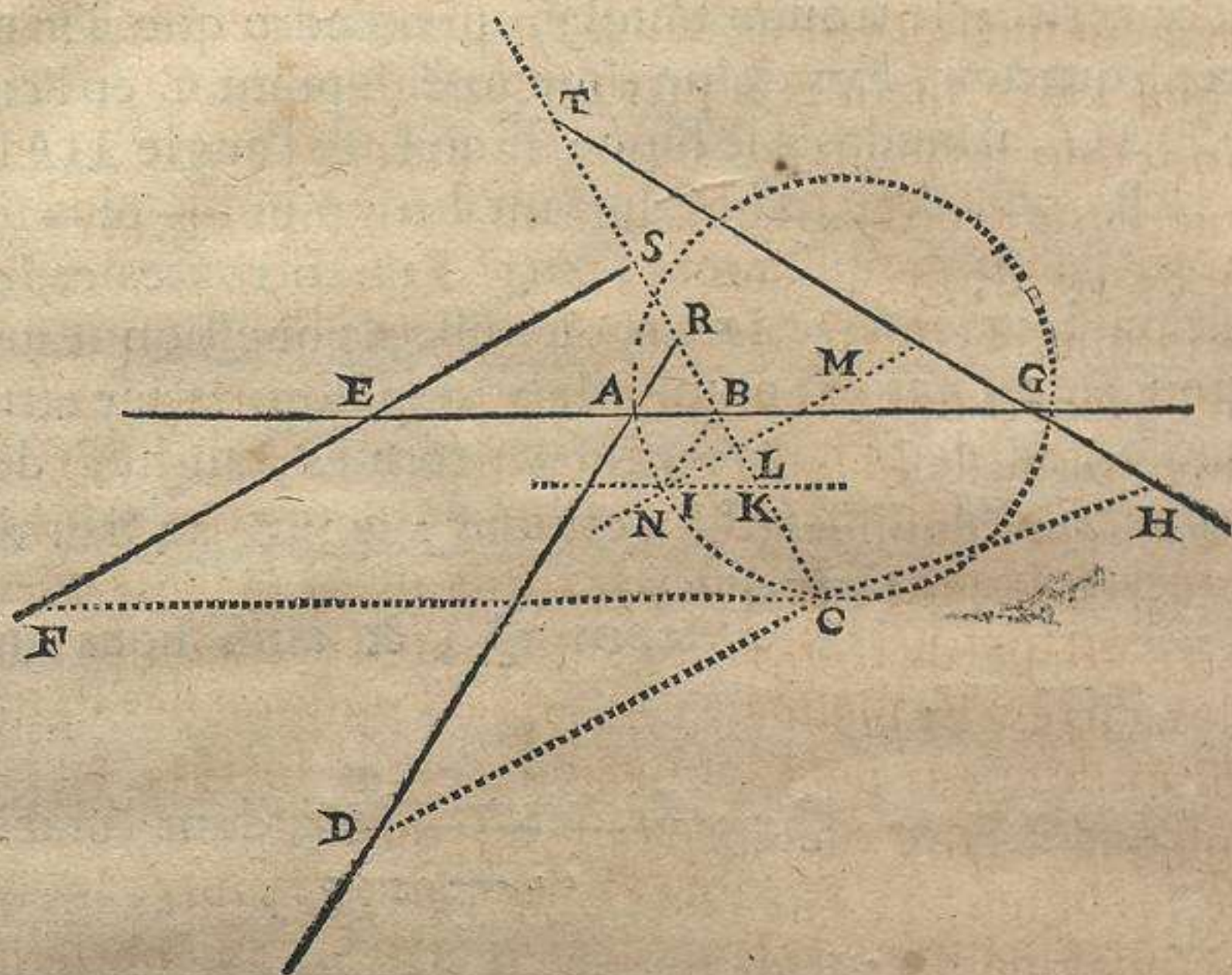
Suite de l'explication de la question de Pappus mise au liure precedent.

chez, ne monte que iusques au quarré; il est évident, que la ligne courbe ou se trouuent ces points, est necessairement quelque vne de celles du premier genre: à cause que cette mesme Equation explique le rapport, qu'ont tous les points des lignes du premier genre à ceux d'une ligne droite. Et que lors qu'il n'y a point plus de huit lignes droites données, cette Equation ne monte que iusques au quarré de quarré tout au plus, & que par consequent la ligne cherchée ne peut estre que du second genre, ou au dessous. Et que lors qu'il n'y a point plus de douze lignes données, l'Equation ne monte que iusques au quarré de cube, & que par consequent la ligne cherchée n'est que du troisieme genre, ou au dessous, & ainsi des autres. Et mesme à cause que la position des lignes droites données peut varier en toutes sortes, & par consequent faire changer tant les quantitez conuës, que les signes $+$ & $-$ de l'Equation, en toutes les façons imaginables; il est évident qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre, qui ne soit vtile à cette question, quand elle est proposée en quatre lignes droites; ny aucune du second qui n'y soit vtile, quand elle est proposée en huit; ny du troisieme, quand elle est proposée en douze: & ainsi des autres. En sorte qu'il n'y a pas vne ligne courbe, qui tombe sous le calcul, & puisse estre receuë en Geometrie, qui n'y soit vtile pour quelque nombre de lignes.

Solution
de cette
question
quand elle
n'est pro-
posée qu'e
3 ou quatre
lignes.

Mais il faut icy plus particulièrement que ie determine, & donne la façon de trouuer la ligne cherchée, qui sert en chaque cas, lors qu'il n'y a que 3 ou 4 lignes droites données; & on verra par mesme moyen que le pre-

mier genre des lignes courbes n'en contient aucunes autres, que les trois sections coniques, & le cercle.



Reprenons les 4 lignes AB, AD, EF, & GH données cy-dessus, & qu'il faille trouver vne autre ligne, en laquelle il se rencontre vne infinité de points tels que C, duquel ayant tiré les 4 lignes CB, CD, CF, & CH, a angles donnez, sur les données, CB multipliée par CF, produit vne somme égale a CD, multipliée par CH.

C'est à dire ayant fait $CB \propto y$, $CD \propto \frac{czy \times bcx}{zz}$, $CF \propto \frac{czy \times dek \times dex}{zz}$, & $CH \propto \frac{gzy \times fgl - fgx}{zz}$ l'Equation est

$$yy \propto \left. \begin{array}{l} -dekzz \\ \times cglz \end{array} \right\} y \left. \begin{array}{l} -dezxx \\ -cfgzx \\ \times bcgzx \end{array} \right\} y \left. \begin{array}{l} \times bcglx \\ -bcgxx \end{array} \right\}$$

$$ezzz - czgz$$

au moins en supposant ez plus grand que cg . Car s'il estoit moindre, il faudroit changer tous les signes $+$ & $-$. Et si la quantité y se trouuoit nulle, ou moindre que rien en cette Equation, lors qu'on a supposé le point C en l'angle DAG, il faudroit le supposer aussi en l'angle DAE, ou EAR, ou RAG, en changeant les signes $+$ & $-$ selon qu'il seroit requis a cet effect. Et si en toutes ces 4 positions la valeur d' y se trouuoit nulle, la question seroit impossible au cas proposé. Mais supposons la icy estre possible, & pour en abreger les termes, au lieu des quantitez $\frac{c f g l z}{3} - \frac{d e k z z}{3}$ écriuons $2m$, & au lieu de

$\frac{d e z z}{3} * \frac{c f g z}{3} - \frac{e z - c g z z}{3}$ écriuons $\frac{2n}{z}$; & ainsi nous au-

rons

$$y y \infty 2 m y - \frac{2n}{z} x y + \frac{b c f g l x - b c f g x x}{3 e z - c g z z}, \text{ dont la raci-}$$

ne est

$$y \infty m - \frac{n x}{z} + \sqrt{m m - \frac{2 m n x}{z} + \frac{n n x x * (b c f g l x - b c f g x x)}{3 e z - c g z z}}$$

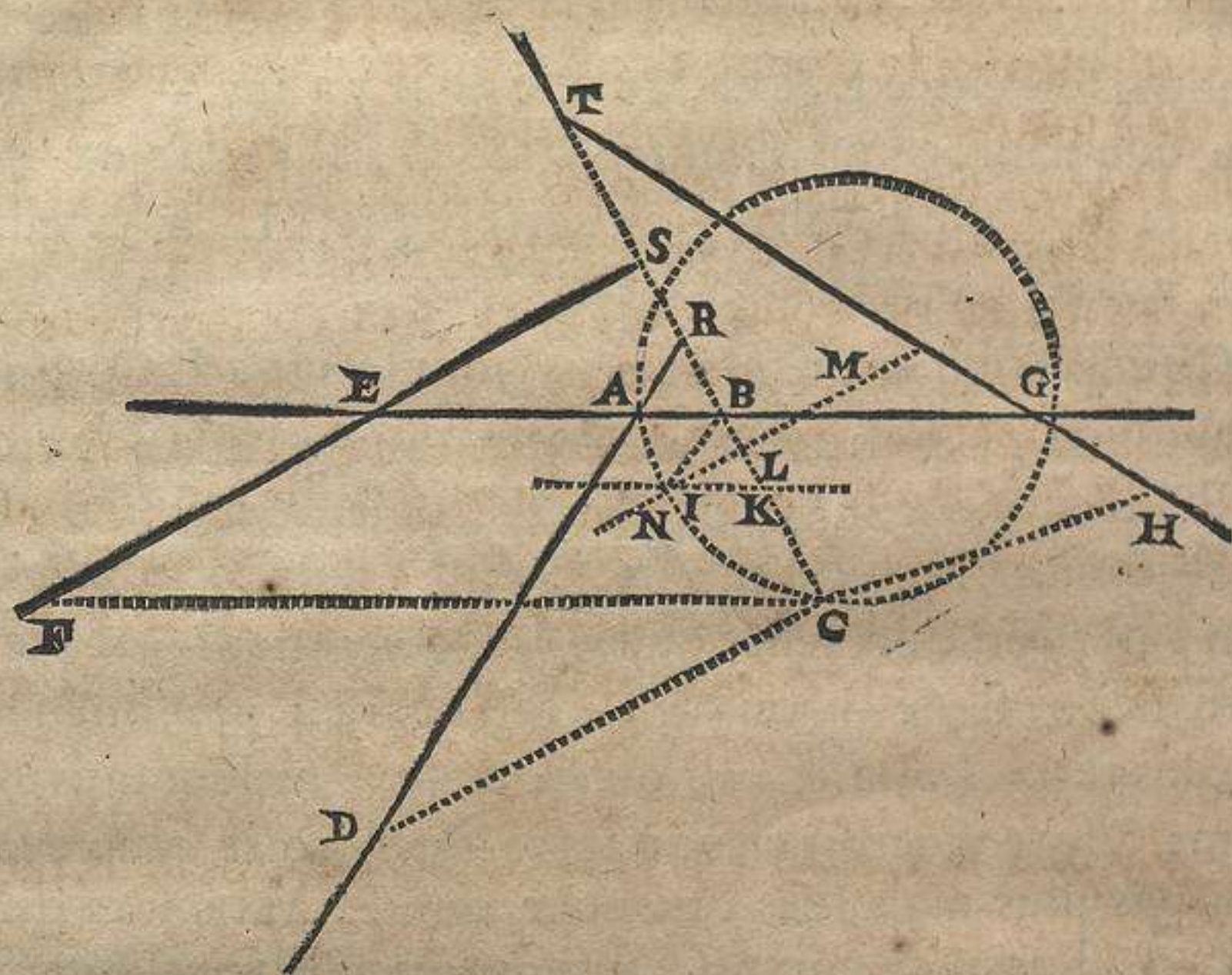
& derechef pour abreger, au lieu de

$$- \frac{2 m n}{z} + \frac{b c f g l}{3} \text{ écriuons } o, \text{ \& au lieu de } \frac{n n}{z z} - \frac{b c f g}{3 e z - c g z z}$$

écriuons $\frac{p}{m}$. Car ces quantitez estant toutes données, nous les pouuons nommer comme il nous plaist. Et ainsi nous auons

$$y \infty m - \frac{n}{z} x + \sqrt{m m + o x - \frac{p}{m} x x}, \text{ qui doit estre la}$$

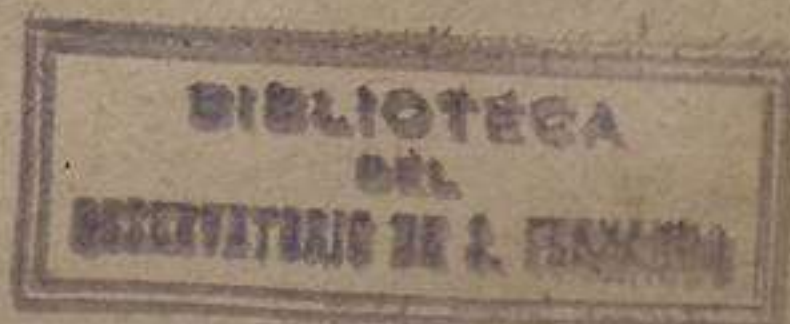
longueur de la ligne BC, en laissant AB, ou x indeter-
minée. Et il est évident que la question n'estant pro-
posée qu'en trois ou quatre lignes, on peut toujourns
auoir



avoir de tels termes. Excepté que quelques vns d'eux
peuvent estre nuls, & que les signes $+$ & $--$ peuvent
diuerfement estre changez.

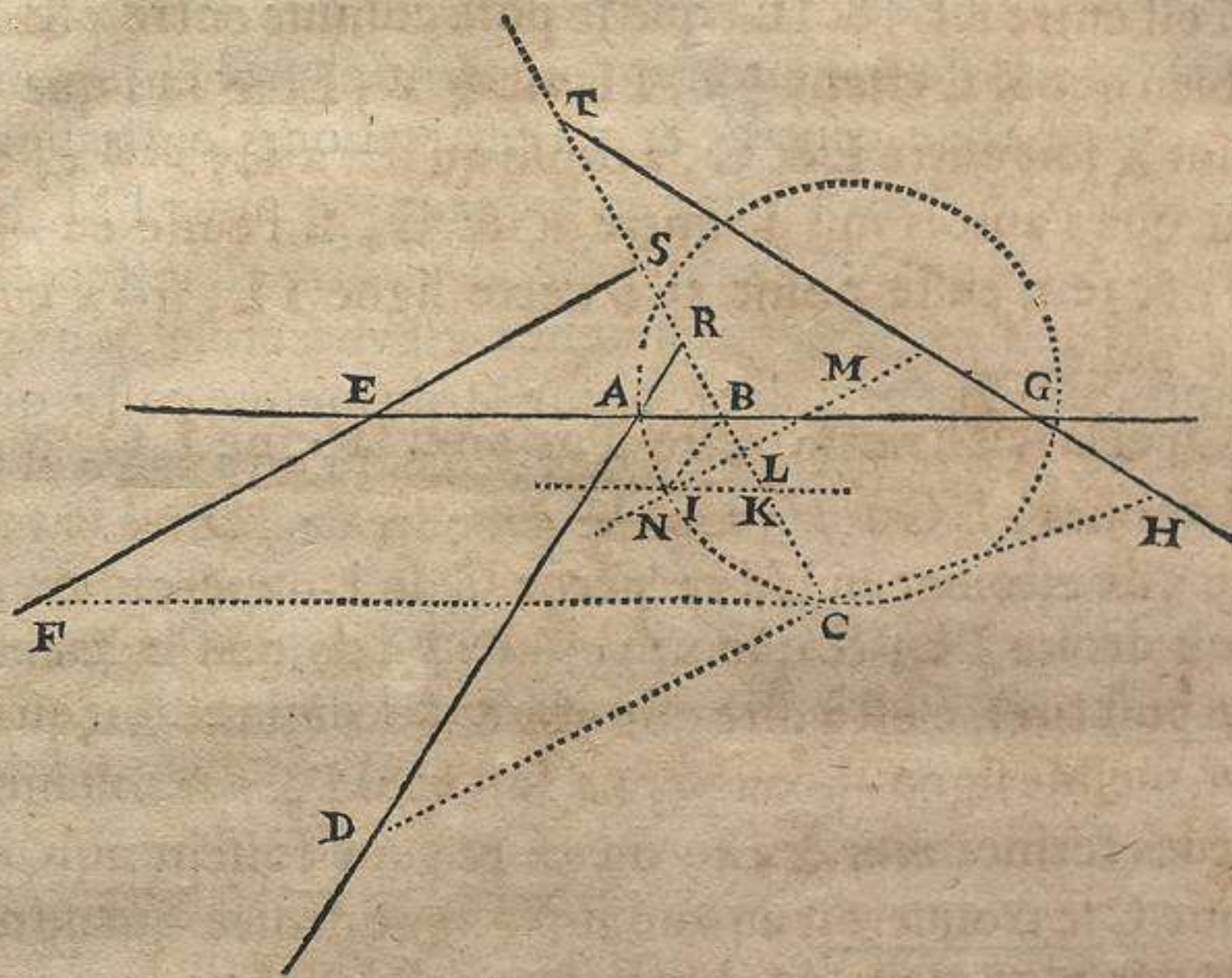
Aprés cela ie fais KI égale & parallele à BA, en sorte
qu'elle coupe de BC la partie BK égale à m , à cause
qu'il y a icy $+$ m ; & ie l'aurois ajoutée en tirant cette
ligne IK de l'autre costé, s'il y auoit eu $-- m$; & ie ne l'au-
rois point du tout tirée, si la quantité m eust esté nulle.
Puis ie tire aussi IL, en sorte que la ligne IK est à KL,
comme Z est à n . C'est à dire que IK estant x , KL est
 $\frac{2}{3}x$. Et par mesme moyen ie connois aussi la proportion

E



qui est entre KL , & IL , que ie pose comme entre n & a :
 Si bien que KL estant $\frac{n}{z}x$, IL est $\frac{a}{z}x$; Et ie fais que le
 point K soit entre L & C , à cause qu'il y a icy $--\frac{n}{z}x$; au
 lieu que i'aurois mis L entre K & C , si i'eusse eu $+\frac{n}{z}x$; & ie n'eusse point tiré cette ligne IL , si $\frac{n}{z}x$ eust
 esté nulle.

Or cela fait il ne me reste plus pour la ligne LC , que
 ces termes, $LC \propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. D'où ie voy
 que s'ils estoient nuls, ce point C se trouueroit en la
 ligne droite IL ; & que s'ils estoient tels que la racine
 s'en pust tirer, c'est à dire que mm & $\frac{p}{m}xx$ estant marquez
 d'un mesme signe $+$ ou $--$, oo fust égal à $4pm$, ou bien
 que les termes mm & ox , ou ox & $\frac{p}{m}xx$ fussent nuls, ce
 point C se trouueroit en vne autre ligne droite qui ne se-
 roit pas plus malaisée à trouuer qu' IL . Mais lors que
 cela n'est pas, ce point C est toujours en l'une des trois
 sections coniques, ou en vn cercle, dont l'un des dia-
 metres est en la ligne IL , & la ligne LC est l'une de cel-
 les qui s'appliquent par ordre à ce diamettre; ou au con-
 traire LC est parallele au diamettre, auquel celle qui est
 en la ligne IL est appliquée par ordre. A sçauoir si le ter-
 me $\frac{p}{m}xx$, est nul cette section conique est vne Parabole;
 & s'il est marqué du signe $+$, c'est vne Hyperbole; &
 enfin s'il est marqué du signe $--$ c'est vne Ellipse. Excepté
 seulement si la quantité aa est égale à pzz & que l'an-
 gle ILC soit droit: auquel cas on a vn cercle au lieu



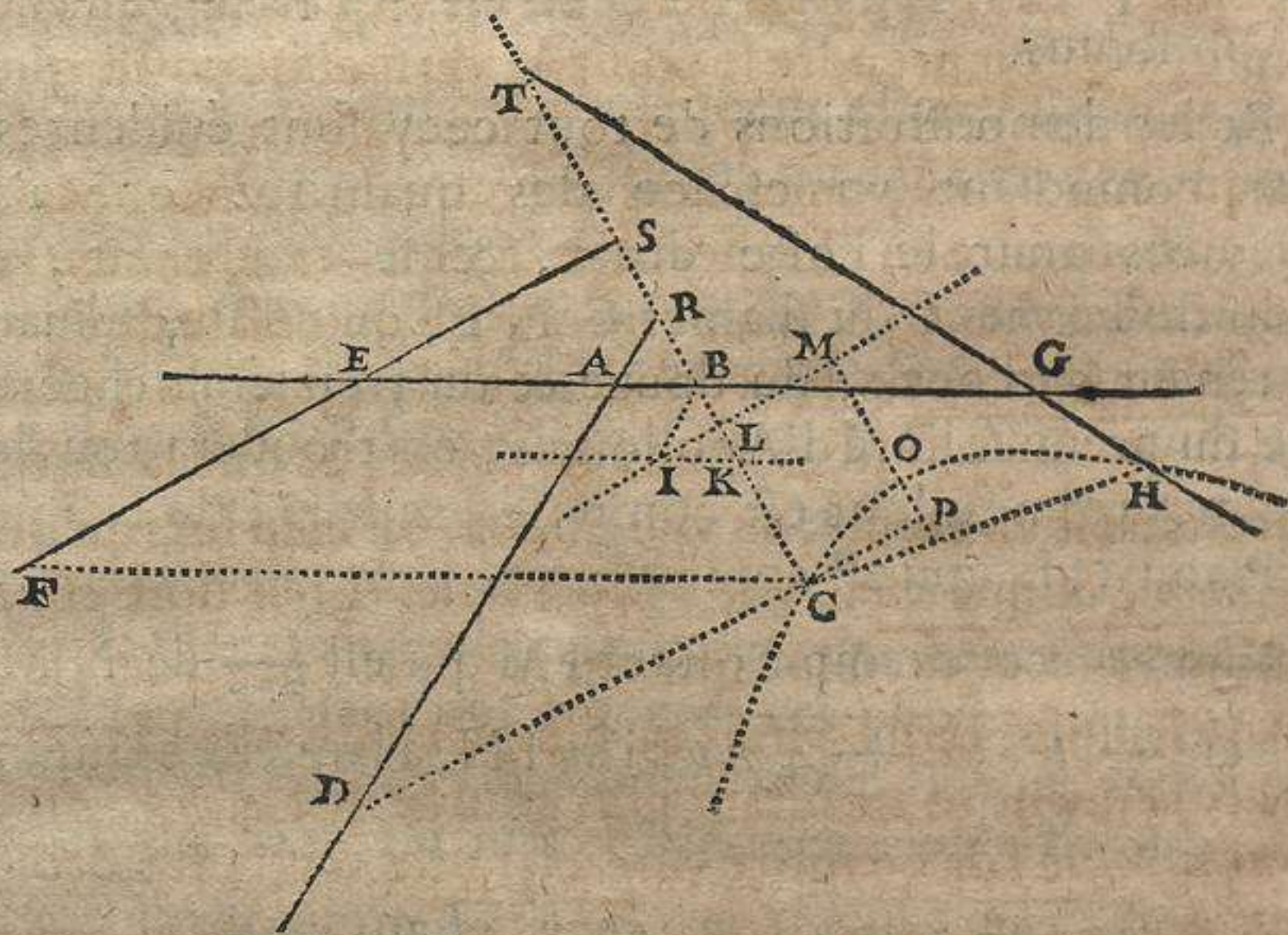
d'une Ellipse. Que si cette section est vne Parabole, son costé droit est égal à $\frac{oz}{a}$, & son diametre est toûjours en la ligne I L. Et pour trouver le point N, qui en est le sommet, il faut faire I N égale à $\frac{amm}{oz}$; & que le point I soit entre L & N, si les termes sont $+mm + ox$; ou bien que le point L soit entre I & N, s'ils sont $+mm - ox$; ou bien il faudroit qu'N fust entre I & L, s'il y auoit $-mm + ox$. Mais il ne peut iamais y auoir $-mm$, en la façon que les termes ont icy esté posez. Et enfin le point N seroit le mesme que le point I si la quantité mm estoit nulle. Au moyen dequoy il est aisé de trouver cette Parabole par le premier Probleme du premier liure d'Apollonius.

Que si la ligne demandée est vn cercle, ou vne ellipse, ou vne Hyperbole, il faut premierement chercher le point M, qui en est le centre, & qui est toujours en la ligne droite IL, ou l'on trouue en prenant $\frac{aom}{2pz}$ pour IM. En sorte que si la quantité o est nulle, ce centre est iustement au point I. Et si la ligne cherchée est vn cercle, ou vne Ellipse; on doit prendre le point M du mesme costé que le point L, au respect du point I, lors qu'on a $+ox$; & lors qu'on a $--ox$, on le doit prendre de l'autre. Mais tout au contraire en l'Hyperbole, si on a $--ox$, ce centre M doit estre vers L; & si on a $+ox$, il doit estre de l'autre costé. Après cela le costé droit de la figure doit estre $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$ lors qu'on a $+mm$, & que la ligne cherchée est vn cercle, ou vne Ellipse; ou bien lors qu'on a $--mm$, & que c'est vne Hyperbole. Et il doit estre $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$ si la ligne cherchée estant vn cercle, ou vne Ellipse, on a $--mm$; ou bien si estant vne Hyperbole & la quantité oo estant plus grande que $4mp$, on a $+mm$. Que si la quantité mm est nulle, ce costé droit est $\frac{oz}{a}$, & si ox est nulle, il est $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Puis pour le costé trauersant, il faut trouuer vne ligne, qui soit a ce costé droit, comme aam est à pzz , à sçauoir si ce costé droit est

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} \text{ le trauersant est } \sqrt{\frac{aaomm}{ppzz} + \frac{4aam}{pzz}}$$

Et en tous ces cas le diametre de la section est en la ligne IM, & LC est l'une de celles qui luy est appliquée par ordre. Si bien que faisant MN égale à la moitié du costé trauersant & le prenant du mesme costé du point M, qu'est le point L, on a le point N pour le sommet de

ce diametre. En suite de quoy il est aisé de trouver la section par le second & le troisiéme Probleme du premier liure d'Apollonius.



Mais quand cette section estant vne Hyperbole, on a $+mm$; & que la quantité oo est nulle ou plus petite que $4pm$, on doit tirer du centre M la ligne MOP parallele à LC , & CP parallele à LM . Et faire MO égale à $\sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$; ou bien la faire égale à m si la quantité ox est nulle. Puis considerer le point O , comme le sommet de cette Hyperbole; dont le diametre est OP , & CP la

ligne qui luy est appliquée par ordre, & son costé droit est

$$\sqrt{4 \frac{a^4 m^4}{p p z^4} - \frac{a^4 o o m^3}{p^3 z^4}} \text{ \& son costé traufersant est } \sqrt{4 m m - \frac{o o m^2}{p}}$$

Excepté quand $o x$ est nulle. Car alors le costé droit est $\frac{2 a a m m}{p z z}$, & le traufersant est $2 m$. Et ainsi il est aisé de la trouver par le troisiéme Probleme du premier liure d'Apollonius.

Demon-
stration de
tout ce qui
vient d'e-
stre expli-
qué.

Et les demonstrations de tout cecy sont évidentes : Car composant vn espace des quantitez que i'ay assignées pour le costé droit, & le traufersant, & pour le segment du diametre $N L$, ou $O P$, suiuant la teneur de l'onze, du douze & du treiziéme theoreme du premier liure d'Apollonius, on trouuera tous les mesmes termes dont est composé le quarré de la ligne $C P$, ou $C L$, qui est appliquée par ordre à ce diametre.

Comme en cet exemple ostant $I M$ qui est $\frac{a o m}{2 p z}$ de $N M$, qui est $\frac{a m}{2 p z} \sqrt{o o + 4 m p}$, i'ay $I N$, à laquelle ajoutant

$I L$ qui est $\frac{a}{z} x$, i'ay $N L$, qui est $\frac{a}{z} x - \frac{a o m}{2 p z} +$

$\frac{a m}{2 p z} \sqrt{o o + 4 m p}$, & cecy estant multiplié par

$\frac{z}{a} \sqrt{o o + 4 m p}$, qui est le costé droit de la figure, il

vient $x \sqrt{o o + 4 m p} - \frac{o m}{2 p} \sqrt{o o + 4 m p} + \frac{m o o}{2 p} +$

$2 m m$: pour le rectangle. Duquel il faut oster vn espace

qui soit au quarré de $N L$ comme le costé droit est au

traufersant. Et ce quarré de $N L$ est $\frac{a a}{z z} x x - \frac{a a o m}{p z z} x$

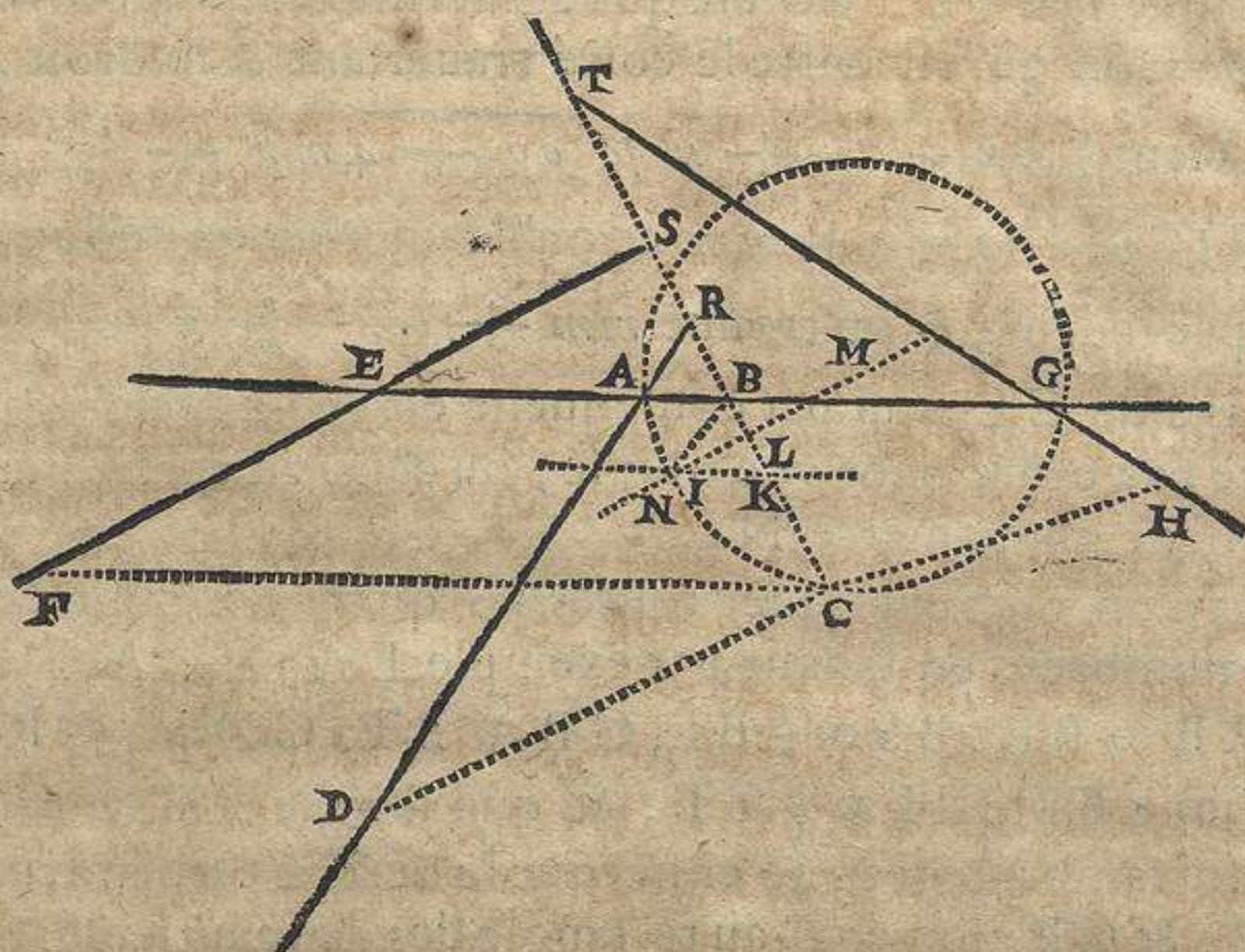
$+ \frac{a a m}{p z z} x \sqrt{o o + 4 m p} + \frac{a a o o m m}{2 p p z z} + \frac{a a m^3}{p z z}$

$- \frac{a a o m m}{2 p p z z} \sqrt{o o + 4 m p}$ qu'il faut diuiser par $a a m$ &

multiplier par pzz , à cause que ces termes expliquent la proportion qui est entre le costé trauefsant & le droit,

& il vient $\frac{p}{m}xx -- ox \pm x \sqrt{oo \pm 4mp} \pm \frac{o^2m}{2p}$
 $-- \frac{o^2m}{2p} \sqrt{oo \pm 4mp} \pm mm$. ce qu'il faut oster du rectan-
 gle précédent, & on trouue $mm \pm ox -- \frac{p}{m}xx$ pour le
 quarré de CL, qui par consequent est vne ligne appli-
 quée par ordre dans vne Ellipse, ou dans vn cercle, au
 segment du diametre NL.

Et si on veut expliquer toutes les quantitez données par nombres, en faisant par exemple $EA \propto 3$, $AG \propto 5$, $AB \propto BR$, $BS \propto \frac{1}{2}BE$, $GB \propto BT$, $CD \propto \frac{1}{2}CR$, $CF \propto 2CS$, $CH \propto \frac{2}{3}CT$, & que l'angle ABR soit de soixante degrez; & enfin que le rectangle des deux CB , & CF , soit égal au rectangle des deux autres CD & CH ; car il faut auoir toutes ces choses afin que la question soit entierement determinée. Et avec cela sup-
 posant $AB \propto x$, & $CB \propto y$, on trouue par la façon cy-dessus expliquée $yy \propto 2y -- xy \pm 5x -- xx$ & $y \propto 1 -- \frac{1}{2}x \pm \sqrt{1 \pm 4x -- \frac{1}{4}xx}$: si bien que BK doit estre 1, & KL doit estre la moitié de KI , & pource que l'angle IKL ou ABR est de 60 degrez, & KIL qui est la moitié de KIB , ou $KIKL$, de trente, ILK est droit. Et pource que IK ou AB est nommé x , KL est $\frac{1}{2}x$, & IL est $x \sqrt{\frac{3}{4}}$, & la quantité qui estoit tantost nommée z est 1, celle qui estoit a est $\sqrt{\frac{1}{4}}$, celle qui estoit m est 1, celle qui estoit o est 4, & celle qui estoit p est $\frac{3}{4}$, de façon qu'on à $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour



I M , & $\sqrt{\frac{12}{3}}$ pour NM , & pource que aam qui est $\frac{3}{4}$ est icy égal à pzz & que l'angle ILC est droit , on trouue que la ligne courbe NC est vn cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en mesme forte.

Quels sont les lieux plans , & solides : & la façon de les trouuer

Au reste à cause que les Equations , qui ne montent que iusques au quarré , sont toutes comprises en ce que ie viens d'expliquer ; non seulement le probleme des anciens en 3 & 4. lignes est icy entierement acheué ; mais aussi tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la composition des lieux solides ; & par consequent aussi a celle des lieux plans , à cause qu'ils sont compris dans les solides. Car ces lieux ne sont autre chose , sinon que lors qu'il est question de trouuer quelque point auquel il manque

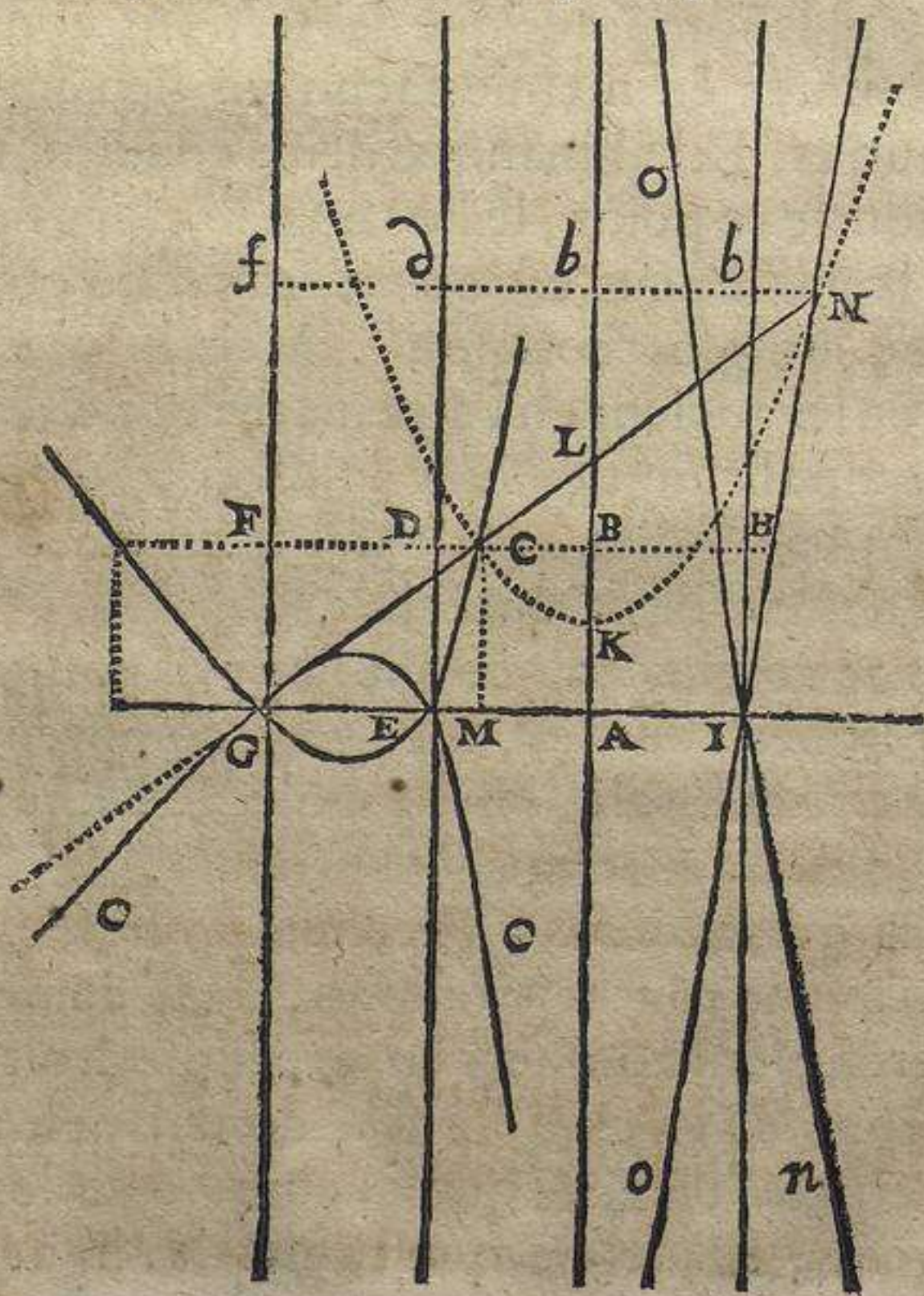
manque vne condition pour estre entierement determiné, ainsi qu'il arriue en cette exemple, tous les points d'une mesme ligne peuuent estre pris pour celuy qui est demandé. Et si cette ligne est droite, ou circulaire, on la nomme vn lieu plan. Mais si c'est vne parabole, ou vne hyperbole, ou vne ellipse, on la nomme vn lieu solide. Et toutefois & quantes que cela est, on peut venir à vne Equation qui contient deux quantitez inconnuës, & est pareille a quelqu'une de celles que ie viens de resoudre. Que si la ligne qui determine ainsi le point cherché, est d'un degré plus composée que les sections coniques, on la peut nommer en mesme façon vn lieu surfolide, & ainsi des autres. Et s'il manque deux conditions à la determination de ce point, le lieu où il se trouue est vne superficie, laquelle peut estre tout de mesme ou plate, ou spherique, ou plus composée. Mais le plus haut but qu'ayent eu les anciens en cette matiere, a esté de paruenir à la composition des lieux solides; Et il semble que tout ce qu'Apollonius a écrit des sections coniques n'a esté qu'à dessein de la chercher.

De plus on voit icy que ce que i'ay pris pour le premier genre des lignes courbes, n'en peut comprendre aucunes autres que le cercle, l'hyperbole, & l'ellipse, qui est tout ce que i'auois entrepris de prouuer.

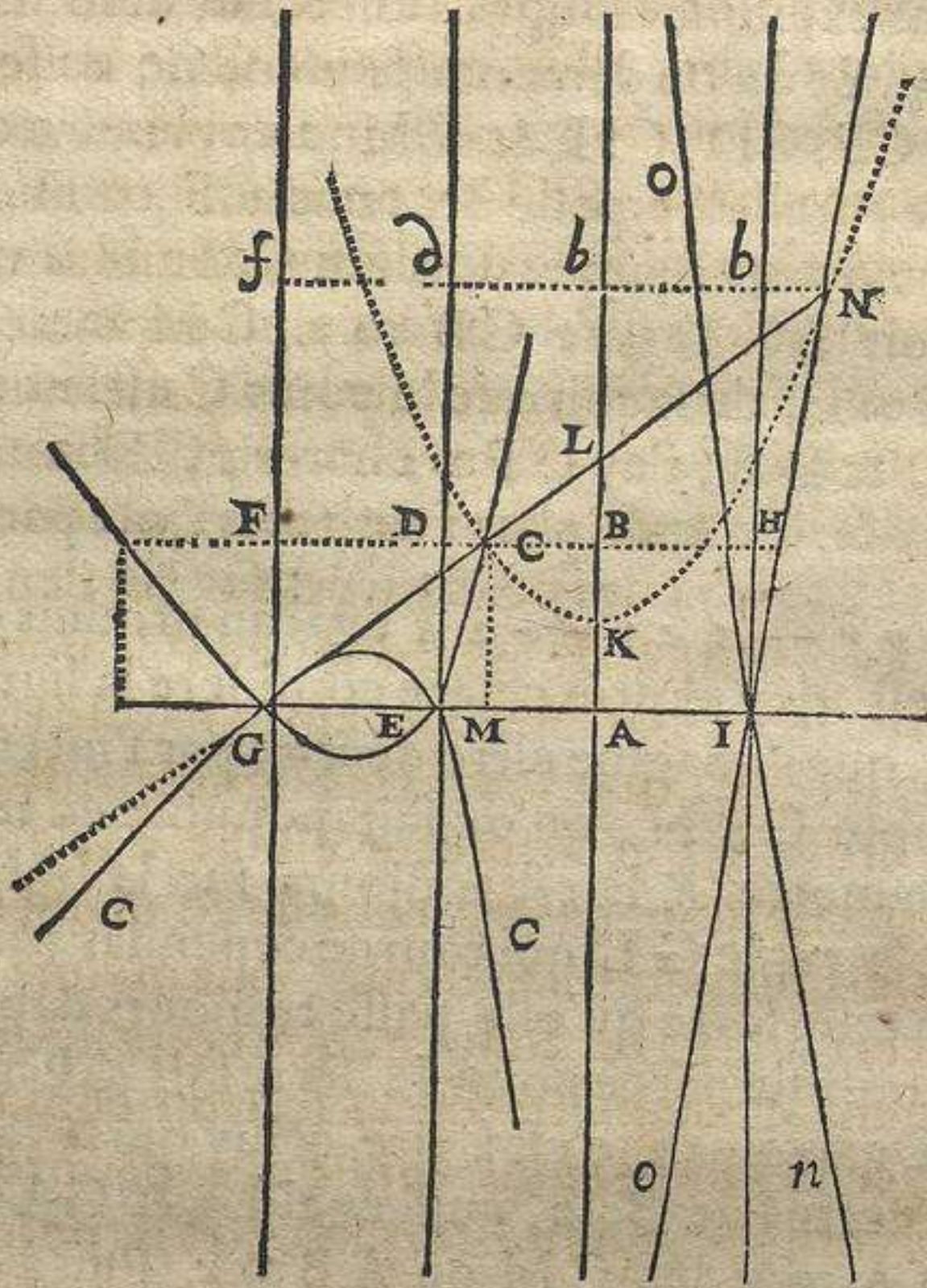
Que si la question des anciens est proposée en cinq lignes, qui soient toutes paralleles, il est évident que le point cherché sera toujours en vne ligne droite; Mais si elle est proposée en cinq lignes, dont il y en ait quatre qui soient paralleles, & que la cinquième les coupe a angles droits, & mesme que toutes les lignes tirées du

Quelle est la première & la plus simple de toutes les lignes courbes qui seruent en la question des anciens quand elle est proposée en cinq lignes.

point cherché les rencontrent aussi a angles droits, & enfin que le parallelepipede composé de trois des lignes ainsi tirées sur trois de celles qui sont paralleles, soit égal au parallelepipede composé des deux lignes tirées l'une sur la quatrième de celles qui sont paralleles & l'autre sur celle qui les coupe a angles droits, & d'une troisième ligne donnée. Ce qui est ce semble le plus simple cas qu'on puisse imaginer après le precedent; le point cherché sera en la ligne courbe, qui est décrite par le mouvement d'une parabole en la façon cy-dessus expliquée.



Soient par exemple les lignes cherchées AB, IH, ED, GF, & GA. Et qu'on demande le point C, en sorte que tirant CB, CF, CD, CH, & CM, a angles droits sur les données, le parallelepipedes des trois CF, CD, & CH soit égal à celuy des 2 autres CB, & CM, & d'une troisième qui soit AI. Je pose $CB \propto y$. $CM \propto x$. AI, ou AE, ou GE $\propto a$, de façon que le point C estant entre les lignes AB, & DE, j'ay $CF \propto 2a - y$, $CD \propto a - y$. Et $CH \propto y + a$. Et multipliant ces trois l'une par l'autre, j'ay $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ égal au produit des trois autres qui est axy . Après cela ie considere la ligne courbe CEG, que j'imagine estre décrite par l'interfection, de la Parabole CKN, qu'on fait mouvoir en telle sorte que son diametre KL est toujours sur la ligne droite AB, & de la regle GL qui tourne cependant autour du point G en telle sorte qu'elle passe toujours dans le plan de cette Parabole par le point L. Et ie fais $KL \propto a$, & le costé droit principal, c'est à dire celuy qui se rapporte a l'aissieu de cette Parabole, aussi égal à a , & $GA \propto 2a$, & CB ou $MA \propto y$, & CM ou $AB \propto x$. Puis à cause des triangles semblables GMC & CBL, GM qui est $2a - y$, est à MC qui est x , comme CB qui est y , est à BL qui est par consequent $\frac{xy}{2a - y}$. Et pource que LK est a , BK est $a - \frac{xy}{2a - y}$, ou bien $\frac{2aa - ay - xy}{2a - y}$. Et enfin pource que ce mesme BK estant vn segment du diametre de la Parabole, est à BC qui luy est appliquée par ordre, comme celle-cy est au costé droit qui est a , le calcul monstre que $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, est égal à axy . Et par conse-



quent que le point C est celuy qui estoit demandé. Et il peut estre pris en tel endroit de la ligne C E G qu'on veuille choisir, ou aussi en son adointe $c E G c$ qui se décrit en mesme façon, excepté que le sommet de la Parabole est tourné vers l'autre costé, ou enfin en leurs contreposées N I o, n I O, qui sont décrites par l'interfection que fait la ligne G L en l'autre costé de la Parabole K N.

Or encore que les paralleles données A B, I H, E D, & G F ne fussent point également distantes, & que G A

ne les couppast point a angles droits, ny aussi les lignes tirées du point C vers elles, ce point C ne laisseroit pas de se trouver toujours en vne ligne courbe, qui seroit de cette mesme nature. Et il s'y peut aussi trouver quelquefois, encore qu'aucune des lignes données ne soient paralleles. Mais si lors qu'il y en a 4 ainsi paralleles, & vne cinquième qui les traaverse: & que le parallelepiped de trois des lignes tirées du point cherché, l'une sur cette cinquième, & les 2 autres sur 2 de celles qui sont paralleles; soit égal à celuy, des deux tirées sur les deux autres paralleles, & d'une autre ligne donnée. Ce point cherché est en vne ligne courbe d'une autre nature, à sçavoir en vne qui est telle, que toutes les lignes droites appliquées par ordre à son diametre estant égales à celles d'une section conique, les segmens de ce diametre, qui sont entre le sommet & ces lignes, ont mesme proportion à vne certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux segmens du diametre de la section conique, auxquels les pareilles lignes sont appliquées par ordre. Et ie ne sçauois veritablement dire que cette ligne soit moins simple que la precedente, laquelle i'ay creu toutefois deuoir prendre pour la premiere, à cause que la description, & le calcul en sont en quelque façon plus faciles.

Pour les lignes qui seruent aux autres cas, ie ne m'arrestera point à les distinguer par especes. Car ie n'ay pas entrepris de dire tout; & ayant expliqué la façon de trouver vne infinité de poins par ou elles passent, ie pense auoir assez donné le moyen de les décrire.

Mesme il est à propos de remarquer, qu'il y a grande difference entre cette façon de trouver plusieurs poins



Quelles
sont les
lignes
courbes
qu'on dé-
crit en
trouuant
plusieurs
de leurs
points, qui
peuent
estre re-
ceus en
Geome-
trie.

pour tracer vne ligne courbe, & celle dont on se fert pour la spirale, & les semblables. Car par cette derniere on ne trouue pas indifferemment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuent estre déterminez par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, & ainsi à proprement parler on ne trouue pas vn de ses points. c'est à dire pas vn de ceux qui luy sont tellement propres, qu'ils ne puissent estre trouués que par elle: Au lieu qu'il ny a aucun point dans les lignes qui seruent a la question proposée, qui ne se puisse rencontrer entre ceux qui se déterminent par la façon tantost expliquée. Et pourceque cette façon de tracer vne ligne courbe, en trouuant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'estend qu'à celles qui peuent aussi estre descrites par vn mouuement regulier & continu, on ne la doit pas entierement reietter de la Geometrie.

Quelles
sont aussi
celles
qu'on dé-
crit avec
vne cor-
de, qui
peuent y
estre re-
ceus.

Et on n'en doit pas reietter non plus, celle ou on se fert d'vn fil, ou d'vne corde repliée, pour déterminer l'egalité ou la difference de deux ou plusieurs lignes droites qui peuent estre tirées de chaque point de la courbe qu'on cherche, à certains autres points, ou sur certaines autres lignes à certains angles. Ainsi que nous auons fait en la Dioptrique pour expliquer l'Ellipse & l'Hyperbole. Car encore qu'on n'y puisse receuoir aucunes lignes qui semblent à des cordes, c'est à dire qui deuiennent tantost droites & tantost courbes, à cause que la proportion, qui est entre les droites & les courbes, n'estant pas conuë, & mesme ie croy ne le pouuant estre par les hommes, on ne pourroit rien conclure de la qui

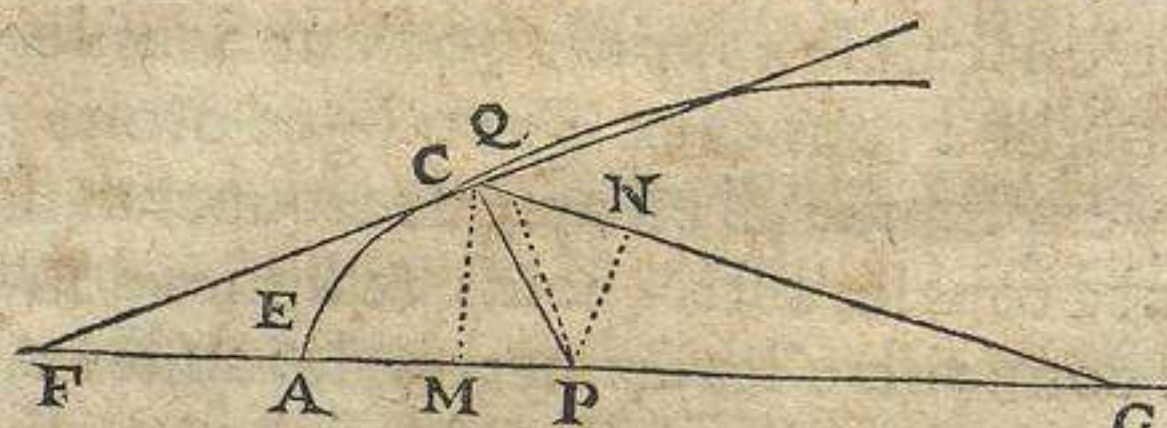
fust exact & assuré. Toutefois à cause qu'on ne se sert de cordes en ces constructions, que pour déterminer des lignes droites, dont on connoist parfaitement la longueur, cela ne doit point faire qu'on les reiette.

Or de cela seul qu'on sçait le rapport, qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, en la façon que j'ay expliquée; il est aysé de trouver aussi le rapport qu'ils ont à tous les autres points, & lignes données: & ensuite de connoistre les diametres, les aissieux, les centres, & autres lignes, ou points, à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres: & ainsi d'imaginer divers moyens pour les décrire, & d'en choisir les plus faciles. Et mesme on peut aussi par cela seul trouver quasi tout ce qui peut estre déterminé touchant la grandeur de l'espace qu'elles comprennent, sans qu'il soit besoin que j'en donne plus d'ouverture. Et enfin pour ce qui est de toutes les autres proprieté qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Mais lors qu'on peut tirer des lignes droites qui les coupent à angles droits, au point ou elles sont rencontrées par celles avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que ie prens icy pour le mesme, qui coupent leurs contingentes; la grandeur de ces angles n'est pas plus malaisée à trouver, que s'ils estoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoy ie croiray avoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes courbes, lors que j'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent à angles droits sur

Que pour
trouver
toutes les
proprieté
des lignes
courbes, il
suffit de
sçavoir le
rapport
qu'ont
tous leurs
points à
ceux des li-
gnes droi-
tes, & la fa-
çon de ti-
rer d'au-
tres lignes
qui les
coupent
en tous ces
points à an-
gles droits.

tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est cecy le probleme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye jamais desiré de sçavoir en Geometrie.

Façon generale pour trouver des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, à angles droits.

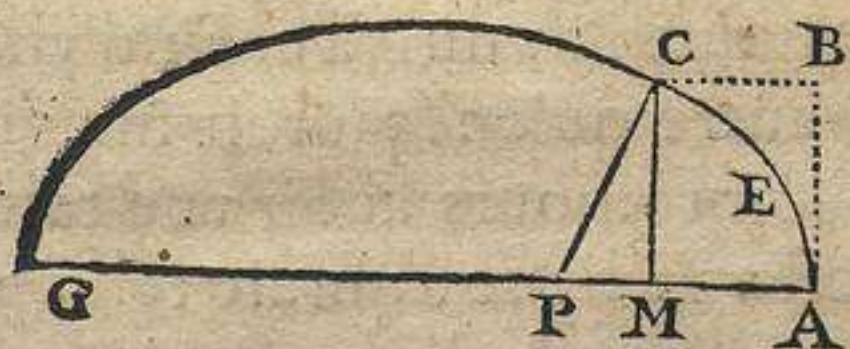


Soit CE la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui fasse avec el-

le des angles droits. Je suppose la chose déjà faite, & que la ligne cherchée est CP, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite GA, que ie suppose estre celle aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE: en sorte que faisant MA ou CB $\propto y$, & CM, ou BA $\propto x$ i'ay quelque Equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y . Puis ie fais PC $\propto s$, & PA $\propto v$ ou PM $\propto v - y$, & à cause du triangle rectangle PMC i'ay ss , qui est le quarré de la baze égal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costez. C'est à dire i'ay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cette Equation, j'oste de l'autre Equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA, l'une des deux quantitez indeterminées x ou y . Ce qui est aisé a faire en mettant par tout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d' x , & le quarré de cette somme au lieu d' xx , & son cube au lieu d' x^3 , & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; ou bien

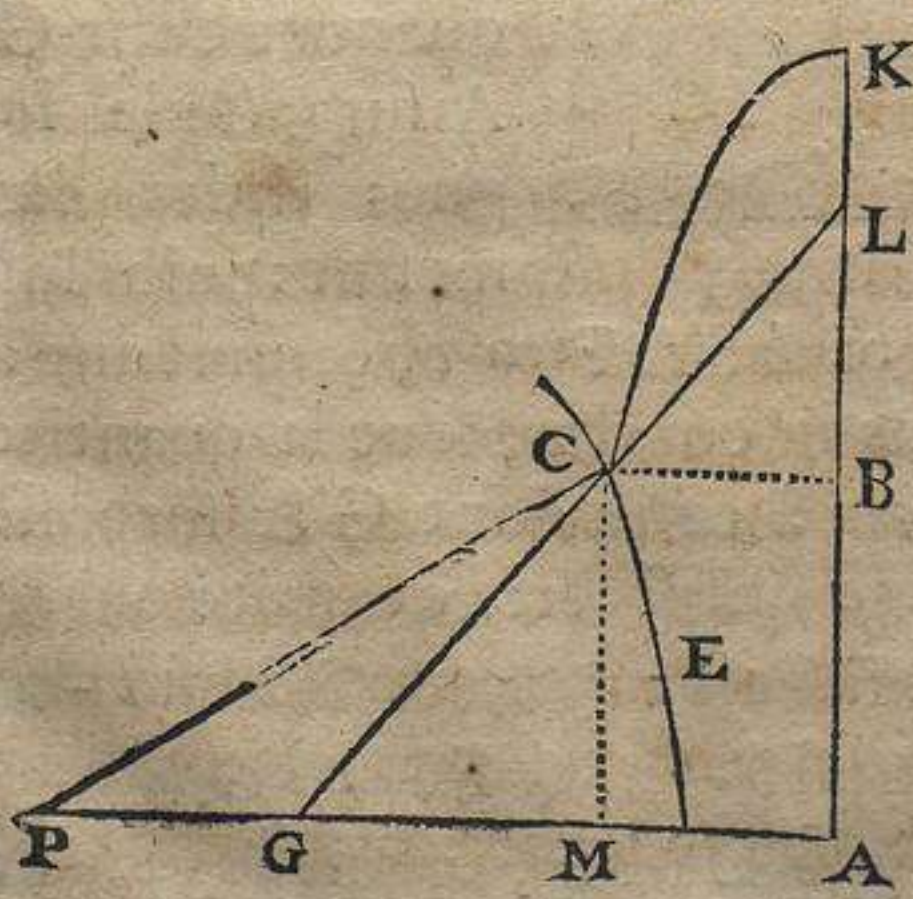
bien si c'est y , en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. De cette somme, au lieu d' yy , ou y^3 , &c. De façon qu'il reste toujours après cela vne Equation, en laquelle il n'y a plus qu'une seule quantité indeterminée, x , ou y .

Comme si CE est vne Ellipse, & que MA soit le segment de son diametre, auquel CM soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le tra- uersant, on à par le 13 th. du 1. liu. d'Apollonius.



$xx \propto ry - \frac{r}{q} yy$, d'où ostant xx , il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q} yy$. ou bien,

$yy \frac{qrv - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ égal à rien. Car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme que d'en faire vne partie égale à l'autre.



Tout de mesme si CE est la ligne courbe décrite par le mouuement d'une Parabole en la façon cy-dessus expliquée; & qu'on ait posé b pour GA, c pour KL, & d pour le costé droit du diametre KL en la parabole : l'Equation qui explique le rapport qui

G

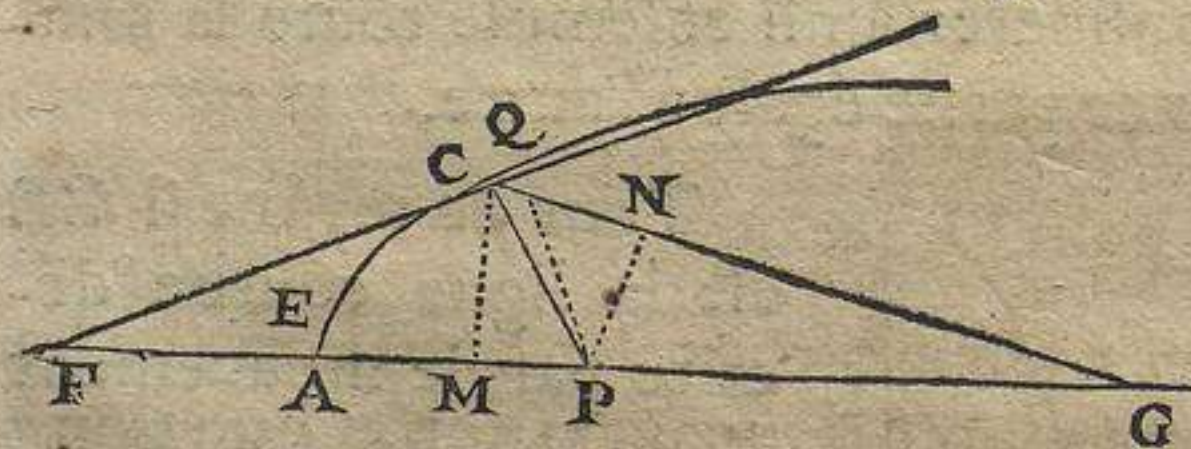
qui est entre x & y , est $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \propto 0$.

D'où ostant x , on a $y^3 - byy - cdy + bcd + dy$
 $\sqrt{ss - vv} + 2vy - yy$. Et remettant en ordre ces
termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 \left. \begin{array}{l} - 2cd \\ \times bb \\ \times dd \end{array} \right\} y^4 \left. \begin{array}{l} \times 4bcd \\ - 2ddv \end{array} \right\} y^3 \left. \begin{array}{l} - 2bbcd \\ \times ccd \\ - dds \\ \times ddv \end{array} \right\} yy - 2bccddy \times bbccdd \propto 0.$$

Et ainsi des autres.

Mesme encore que les points de la ligne courbe ne se rapportassent pas en la façon que i'ay dite à ceux d'une ligne droite, mais en toute autre qu'on scauroit imaginer, on ne laisse pas de pouuoir toujours auoir vne telle Equation. Comme si CE est vne ligne, qui ait tel rapport aux trois points F, G, & A, que les lignes droites tirées de chacun de ses points comme C, iusques au point F, surpassent la ligne FA d'une quantité qui ait certaine



proportion donnée à vne autre quantité dont GA surpasse les lignes tirées des mesmes points ius-

ques à G. Faisons $GA \propto b$, $AF \propto c$, & prenant à discretion le point C dans la courbe, que la quantité dont CF surpasse FA, soit à celle dont GA surpasse GC, comme d à e , en sorte que si cette quantité qui est indeterminée se nomme z , FC est $c + z$, & GC est $b - \frac{e}{d}z$. Puis posant $MA \propto y$, GM est $b - y$, & FM est $c + y$, & à cause du triangle rectangle CMG, ostant le quarré

de GM du quarré de GC, on a le quarré de CM, qui est $\frac{e^2}{d^2} z z -- \frac{2bc}{d} z + 2by -- yy$. Puis ostant le quarré de FM du quarré de FC, on a encore le quarré de CM en d'autres termes, à sçavoir $z z + 2cz -- 2cy -- yy$, & ces termes estant égaux aux precedens, ils font connoistre y, ou MA, qui est $\frac{ddz z \times 2cddz -- eez z \times 2bdez}{2bdd \times 2cdd}$ & substituant cette somme au lieu d'y dans le quarré de CM, on trouue qu'il s'exprime en ces termes.

$$\frac{bddz z \times ceez z \times 2bcddz -- 2bcdez}{bdd \times cdd} -- yy.$$

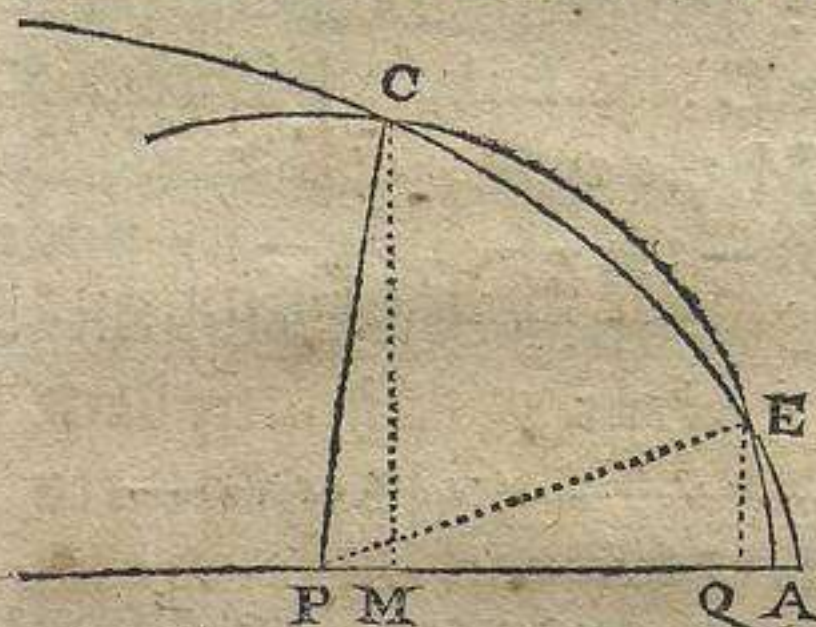
Puis supposant que la ligne droite PC rencontre la courbe a angles droits au point C, & faisant PC $\propto s$, & PA $\propto v$ comme deuant, PM est $v - y$; & à cause du triangle rectangle PCM, on a $ss -- vv + 2vy -- yy$ pour le quarré de CM; ou derechef ayant au lieu d'y substitué la somme qui luy est égale, il vient,

$$z z \frac{2bcddz -- 2bcdez -- 2cddvz -- 2bdevz -- bddss \times bddvv}{bdd \times cee \times eev -- ddv} -- cddss \times cddvv \propto 0$$

pour l'Equation que nous cherchions.

Or après qu'on a trouué vne telle Equation, au lieu de s'en seruir pour connoistre les quantitez x, ou y, ou z, qui sont déjà données, puis que le point C est donné, on la doit employer à trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE, sans la couper: mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus éloigné du point

A, qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C, mais aussi nécessairement en quelque autre. Puis il faut aussi considérer, que lors que ce cercle coupe la ligne courbe CE, l'Equation par laquelle on cherche la quantité x , ou y , ou quelque autre semblable, en supposant PA & PC estre connus, contient nécessairement deux racines, qui sont inégales. Car par exemple si ce cercle coupe la courbe aux points C & E, ayant tiré EQ parallèle à CM, les noms des quantitez indeterminées x & y , conuiendront aussi bien aux lignes EQ, & QA, qu'à CM, & MA; puis PE est égale à PC, à cause du cercle, si bien que cherchant les lignes



EQ & QA, par PE & PA qu'on suppose comme données, on aura la même Equation, que si on cherchoit CM & MA par PC, PA. D'où il suit évidemment, que la valeur d' x , ou d' y , ou de telle autre quantité qu'on aura supposée, sera double en cette Equation, c'est à dire qu'il y aura deux racines inégales entre elles; & dont l'une sera CM, l'autre EQ, si c'est x qu'on cherche; ou bien l'une sera MA, & l'autre QA, si c'est y : & ainsi des autres. Il est vray que si le point E ne se trouue pas du même costé de la courbe que le point C; il n'y aura que l'une de ces deux racines qui soit vraye, & l'autre sera renuersée, ou moindre que rien: mais plus ces deux points, C, & E, sont proches l'un de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux raci-

nes ; & enfin elles sont entierement égales , s'ils sont tous deux joins en vn ; c'est à dire si le cercle , qui passe par C , y touche la courbe CE sans la couper.

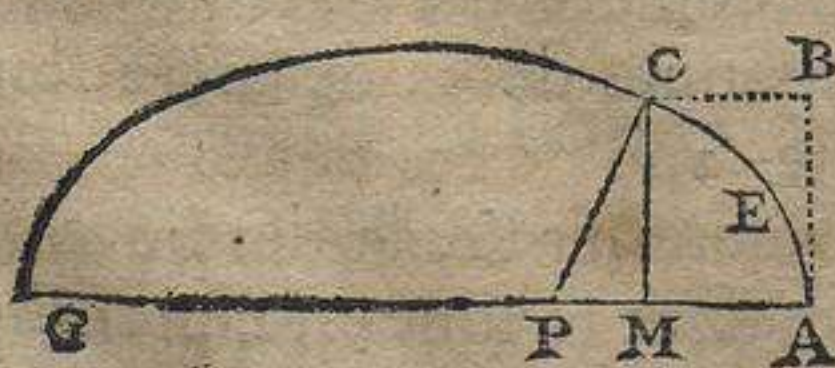
De plus il faut considerer que lors qu'il y a deux racines égales en vne Equation elle a necessairement la mesme forme, que si on multiplie par soy mesme la quantité qu'on y suppose estre inconnuë moins la quantité connuë qui luy est égale, & qu'après cela si cette deniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par vne autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque ; afin qu'il puisse y auoir separement Equation entre chacun des termes de l'une, & chacun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere Equation trouuée cy-dessus, à sçauoir

$yy \frac{qry}{q-r} - 2qvy \frac{qv}{q-r} - qss$ doit auoir là mesme forme que

celle qui se produit en faisant e égal à y , & multipliant $y - e$ par soy mesme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en sorte qu'on peut comparer separement chacun de leurs termes, & dire que puisque le premier qui est yy est tout le mesme en l'une qu'en l'autre, le second qui est en l'une $\frac{qry}{q-r}$ est égal au second de l'autre qui est $-2ey$,

d'où cherchant la quantité v qui est la ligne PA, on a



$v \propto e - \frac{r}{q} e + \frac{1}{2} r$, ou bien à cause que nous auons supposé e égal a y , on a $v \propto y - \frac{r}{q} y + \frac{1}{2} r$. Et ainsi on pourroit trouuer

G iij



par le troisieme terme $ee \propto \frac{quv - qss}{g - r}$, mais pour ce que la quantité v determine assez le point P , qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.

Tout de mesme la seconde Equation trouuée cy-dessus; à sçauoir,

$$y^6 \begin{matrix} -2cd \\ *bb \\ *dd \end{matrix} \left. \vphantom{y^6} \right\} y^4 \begin{matrix} *4bcd \\ -2ddv \end{matrix} \left. \vphantom{y^4} \right\} y^3 \begin{matrix} -2bbcd \\ *ccdd \\ -ddss \\ *ddvv \end{matrix} \left. \vphantom{y^3} \right\} yy - 2bccddy *bccdd.$$

doit auoir mesme forme, que la somme qui se produit lors qu'on multiplie $yy - 2ey + ee$ par

$$y^4 + fy^3 + ggyy + hy^2 + k, \text{ qui est}$$

$$y^6 \begin{matrix} *f \\ -2e \end{matrix} \left. \vphantom{y^6} \right\} y^5 \begin{matrix} *gg \\ -2ef \\ *ee \end{matrix} \left. \vphantom{y^5} \right\} y^4 \begin{matrix} *k^2 \\ -2egg \\ *eef \end{matrix} \left. \vphantom{y^4} \right\} y^3 \begin{matrix} *k^3 \\ -2eh^2 \\ *eegg \end{matrix} \left. \vphantom{y^3} \right\} yy \begin{matrix} -2ek^4 \\ *eeh^3 \end{matrix} \left. \vphantom{yy} \right\} y *eek^4.$$

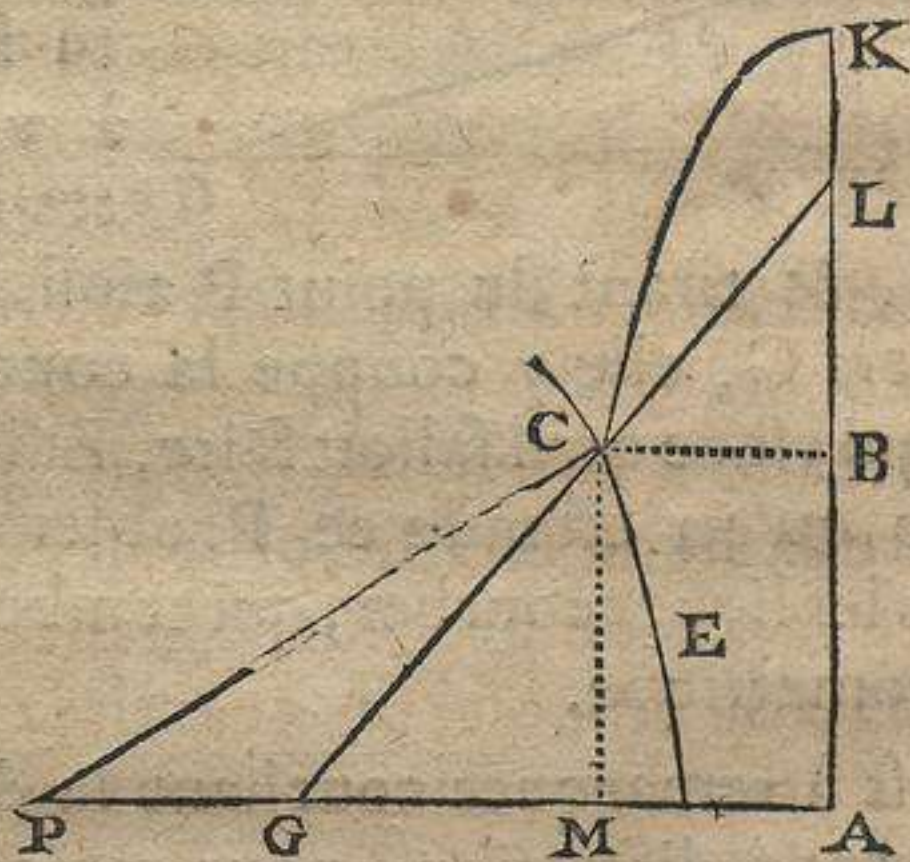
de façon que de ces deux Equations i'en tire six autres, qui seruent à connoistre les six quantitez $f, g, h, k, v, \& s$. D'où il est fort aisé à entendre, que de quelque genre que puisse estre la ligne courbe proposée, il vient toujours par cette façon de proceder autant d'Equations, qu'on est obligé de supposer de quantitez, qui sont inconnuës. Mais pour demesler par ordre ces Equations, & trouuer enfin la quantité v , qui est la seule dont on a besoin, & à l'occasion de laquelle on cherche les autres: Il faut premierement par le second terme chercher f , la premiere des quantitez inconnuës de la derniere somme, & on trouue $f \propto 2e - 2b$.

Puis par le dernier il faut chercher K , la derniere des quantitez inconnuës de la mesme somme, & on trouue

$$k^4 \propto \frac{bbccdd}{ee}$$

Puis par le troisiéme terme il faut chercher g la seconde quantité, & on a $gg \propto 3 ee - 4 be - 2cd + bb + dd$.
 Puis par le penultiéme il faut chercher h la penultiéme quantité, qui est $h^3 \propto \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Et ainsi il faudroit continuer suiuant ce mesme ordre iusques à la der- niere, s'il y en auoit dauantage en cette somme; car c'est chose qu'on peut touiours faire en mesme façon.

Puis par le terme qui suit en ce mesme ordre, qui est icy le quatriéme, il faut chercher la quantité v , & on a



$$v \propto \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbce}{e^3}$$

ou mettant y au lieu d' e qui luy est égal on a

$$v \propto \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbce}{y^3}$$

pour la ligne AP.

Et ainsi la troisiéme Equation, qui est

3

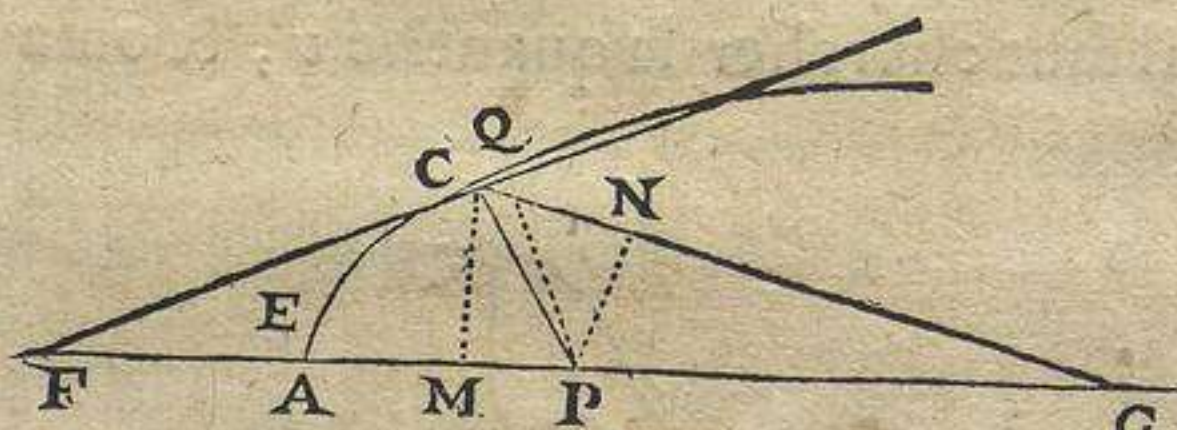
$$zz \times \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bdds \times bddvz}{bdd \times ccc \times ccv}$$

$\frac{cddss \times cddvv}{ddv}$, à la mesme forme que

$zz - 2fz + ff$, en supposant f égal a z , si bien que il y a derechef Equation entre $-2f$, ou $-2z$, &

$$\frac{2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd \times ccc \times ccv - ddv} \text{ D'où on connoist que}$$

la quantité v est $\frac{bcdd - bcde \times bddz \times cccz}{cdd \times bde - ccz \times ddz}$



C'est pourquoy composant la ligne AP, de cette somme égale à v , dont toutes les quantitez sont connuës, & tirant du point P ainsi trouué, vne ligne droite vers C, elle y coupe la courbe CE a angles droits; qui est ce qu'il falloit faire. Et ie ne voy rien qui empesche qu'on estende ce Probleme en mesme façon à toutes les lignes courbes, qui tombent sous quelque cacul Geometrique.

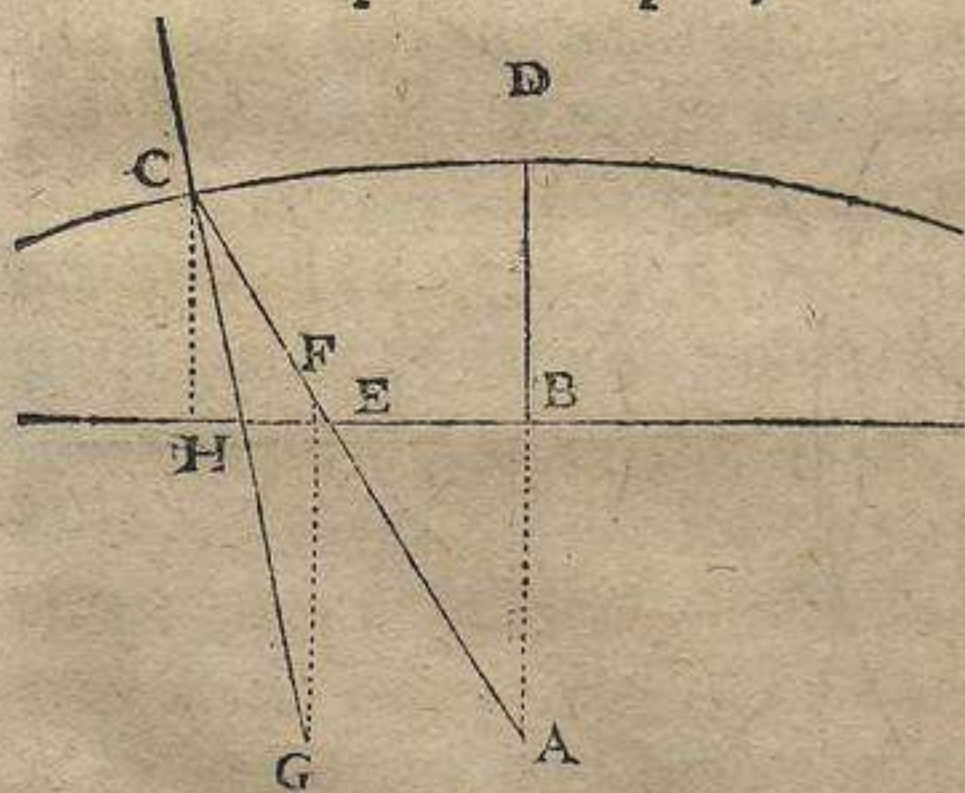
Mesme il est à remarquer touchant la derniere somme, qu'on prent à discretion, pour remplir le nombre des dimensions de l'autre somme, lors qu'il y en manque, comme nous auons pris tantost

$y^4 + fy^3 + ggyy + b^3y + k^4$; que les signes $+$ & $-$ y peuent estre supposez tels, qu'on veut, sans que la ligne v , ou AP, se trouue diuerse pour cela, comme vous pourrez aisement voir par experience. Car s'il falloit que ie m'arretasse à demonstrier tous les theoresmes dont ie
fais

fais quelque mention, ie serois contraint d'écrire vn volume beaucoup plus gros que ie ne desire. Mais ie veux bien en passant vous auertir que l'invention de supposer deux Equations de mesme forme, pour comparer separément tous les termes de l'une à ceux de l'autre, & ainsi en faire naistre plusieurs d'une seule, dont vous auez veu icy vn exemple, peut seruir à vne infinité d'autres Problemes, & n'est pas l'une des moindres de la methode dont ie me sers.

Ie n'ajoute point les constructions, par lesquelles on peut décrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, en suite du calcul que ie viens d'expliquer, à cause qu'il est toujours aisé de les trouuer: Bien que souvent on ait besoin d'un peu d'adresse, pour les rendre courtes & simples.

Comme par exemple, si DC est la premiere conchoïde



de des anciens, dont A soit le pole, & BH la regle: en sorte que toutes les lignes droites qui regardent vers A, & sont comprises entre la courbe CD, & la droite BH, comme DB & CE, soient égales: Et qu'on veuille

Exemple de la construction de ce probleme, en la conchoïde.

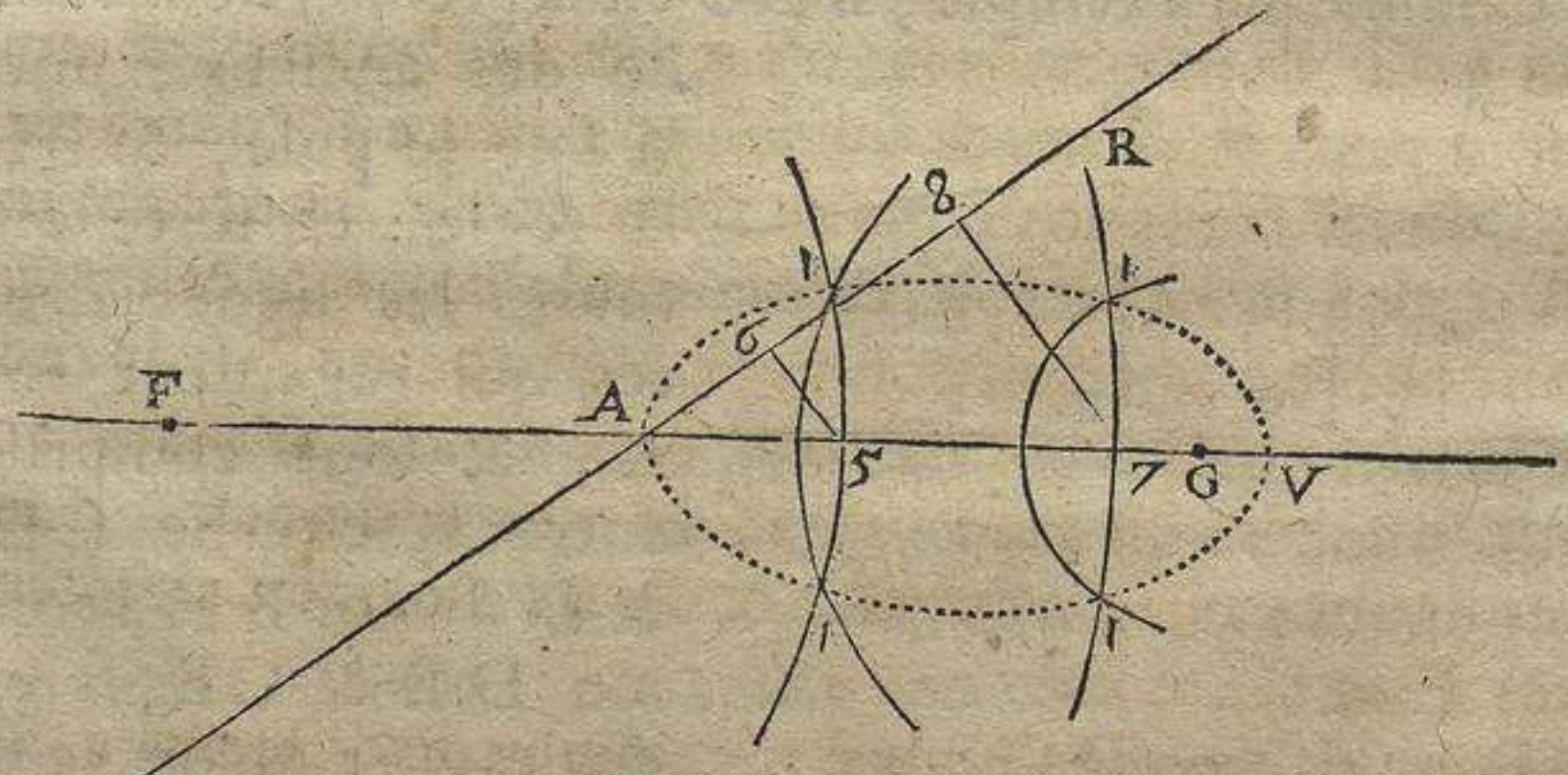
le trouuer la ligne CG qui la coupe au point C à angles droits. On pourroit en cherchant, dans la ligne BH, le point par où cette ligne CG, doit passer, selon la methode icy expliquée, s'engager dans vn

H

calcul autant ou plus long qu'aucun des precedens : Et toutefois la construction , qui deuroit après en estre deduite , est fort simple. Car il ne faut que prendre CF en la ligne droite CA , & la faire égale à CH qui est perpendiculaire sur HB : puis du point F tirer FG , parallele à BA & égale à EA : au moyen de quoy on a le point G , par lequel doit passer CG la ligne cherchée.

Explication de 4. nouveaux genres d'Ouales, qui seruent à l'Optique.

Au reste afin que vous sçachiées que la consideration des lignes courbes icy proposée n'est pas sans usage , & qu'elles ont diuerfes proprietéz , qui ne cedent en rien a celles des sections coniques , ie veux encore ajoûter icy l'explication de certaines Ouales , que vous verrez estre tres-utiles pour la Theorie de la Catoptrique , & de la Dioptrique. Voicy la façon dont ie les décris.

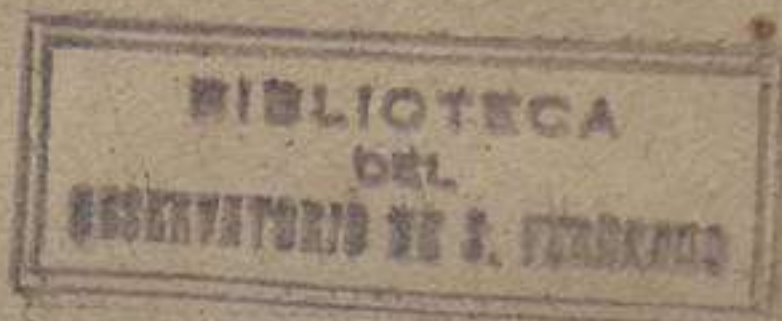


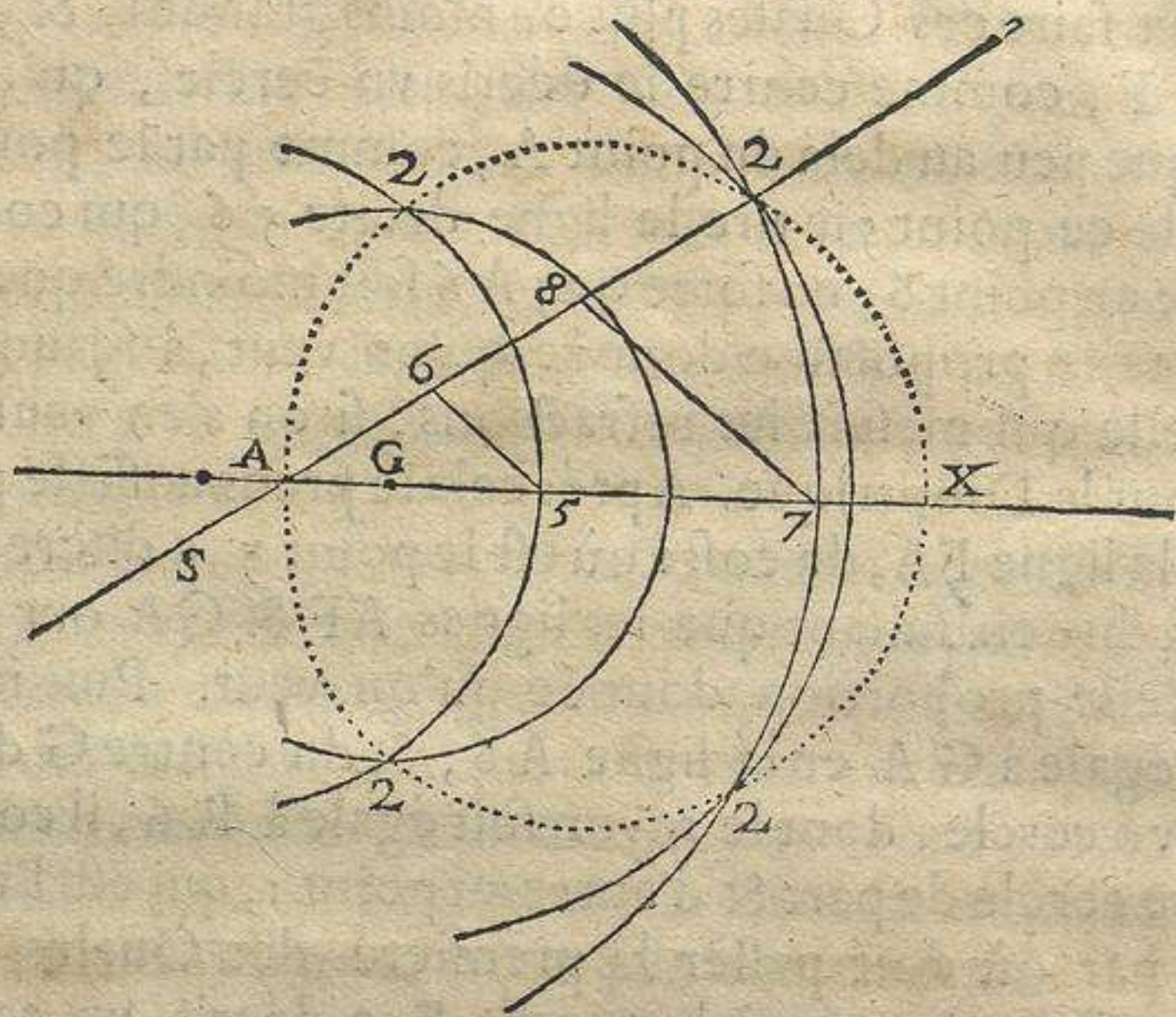
Premierement ayant tiré les lignes droites FA , & AR , qui s'entrecouppent au point A , sans qu'il importe à quels angles , ie prens en l'une le point F à discretion , c'est à dire plus ou moins esloigné du point A selon que

ie veux faire ces Ouales plus ou moins grandes, & de ce point F, comme centre ie décris vn cercle, qui passe quelque peu au delà du point A, comme par le point 5, puis de ce point 5 ie tire la ligne droite 5 6, qui coupe l'autre au point 6, en sorte que A 6 soit moindre que A 5, selon telle proportion donnée qu'on veut, à sçauoir selon celle qui mesure les refractions, si on s'en veut seruir pour la Dioptrique. Après cela ie prens aussi le point G en la ligne FA, du costé où est le point 5, a discretion, c'est à dire en faisant que les lignes AF & GA ont entre elle telle proportion donnée qu'on veut. Puis ie fais RA égale à GA en la ligne A 6, & du centre G décrivant vn cercle, dont le rayon soit égale à R 6, il coupe l'autre cercle de part & d'autre au point 1, qui est l'un de ceux par où doit passer la premiere des Ouales cherchées. Puis derechef du centre F ie décris vn cercle, qui passe vn peu au deçà, ou au delà du point 5, comme par le point 7, & ayant tiré la ligne droite 7 8 parallele à 5 6, du centre G ie décris vn autre cercle, dont le rayon est égal à la ligne R 8. Et ce cercle coupe celuy qui passe par le point 7 au point 1, qui est encore l'un de ceux de la mesme Ouale. Et ainsi on en peut trouuer autant d'autres qu'on voudra, en tirant derechef d'autres lignes paralleles à 7 8, & d'autres cercles des centres F & G.

Pour la seconde Ouale il n'y a point de difference, sinon qu'au lieu d'AR il faut de l'autre costé du point A prendre AS égal à AG, & que le rayon du cercle décrit du centre G, pour couper celuy qui est décrit du centre F & qui passe par le point 5, soit égal à la

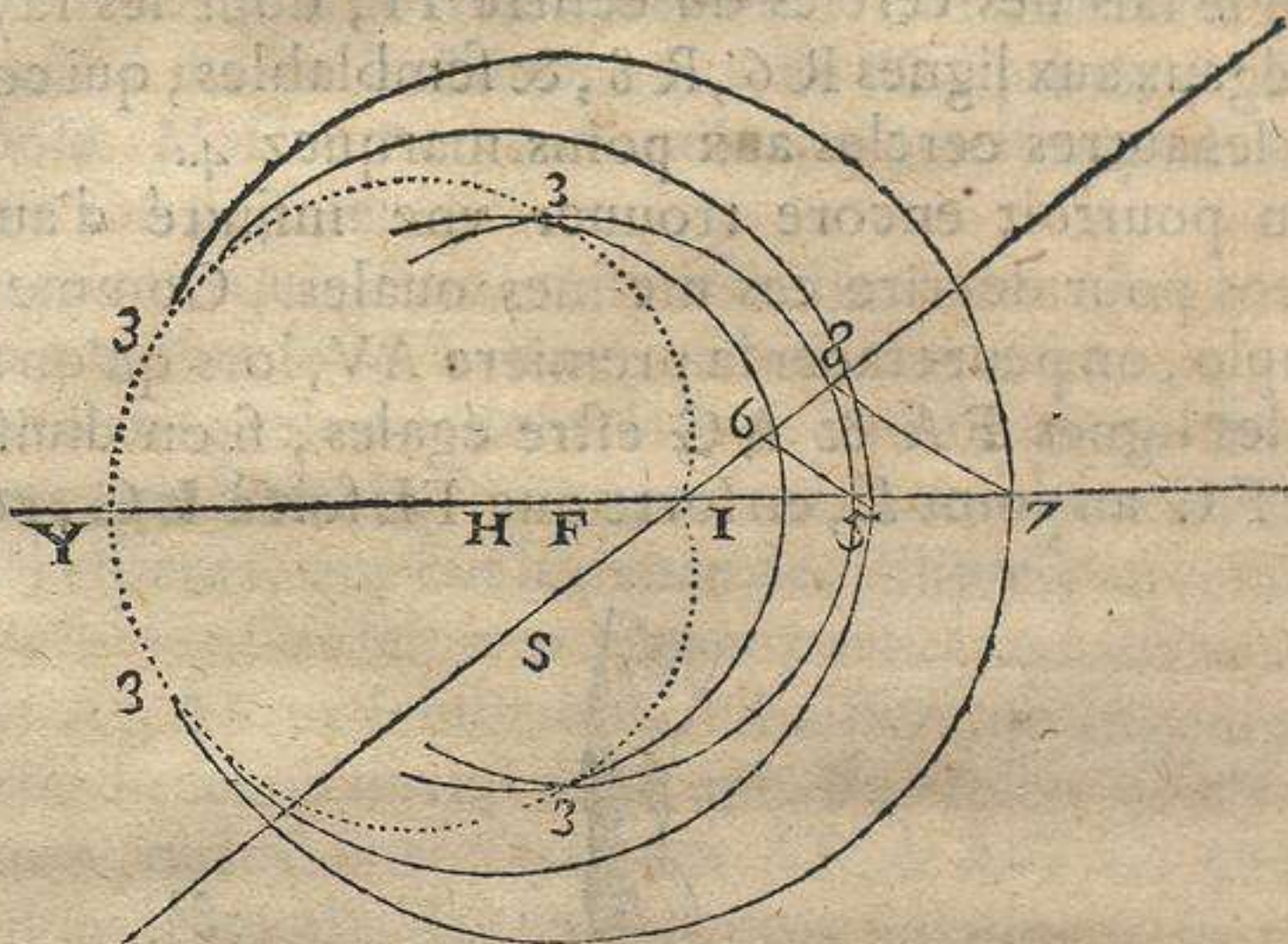
H ij



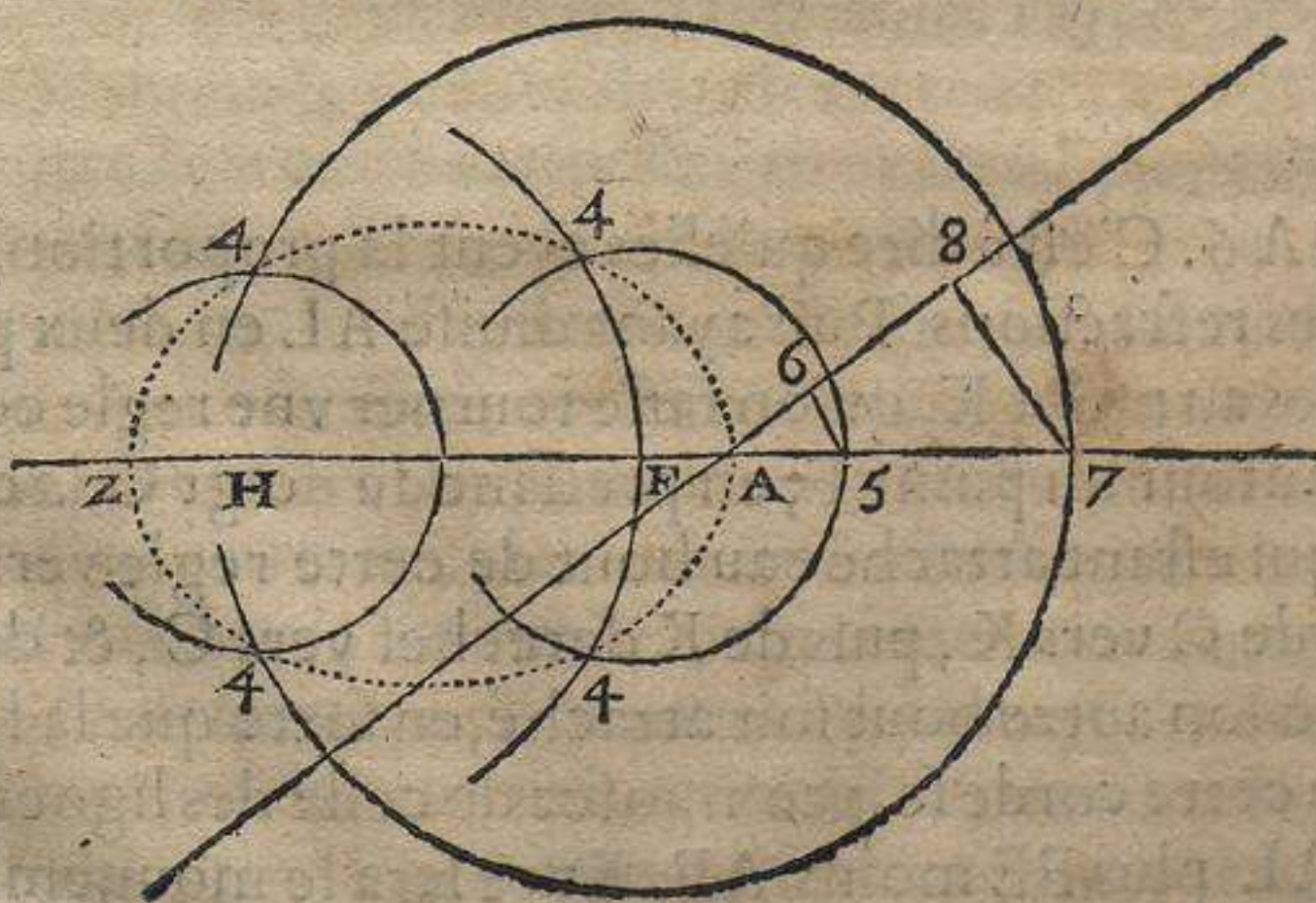


ligne $S6$; ou qu'il soit égal à $S8$, si c'est pour couper celui qui passe par le point 7, & ainsi des autres. Au moyen de quoy ces cercles s'entrecouppent aux points marquez 2, 2, qui sont ceux de cette seconde Ouale $A2X$.

Pour la troisième & la quatrième, au lieu de la ligne AG il faut prendre AH de l'autre costé du point A , à sçavoir du mesme qu'est le point F . Et il y a icy de plus à observer que cette ligne AH doit estre plus grande que AF : laquelle peut mesme estre nulle, en sorte que le point F se rencontre où est le point A , en la description de toutes ces Ouales. Après cela les lignes AR , & AS estant égales à AH , pour décrire la troisième Ouale $A3Y$, ie fais vn cercle du centre H , dont le rayon est

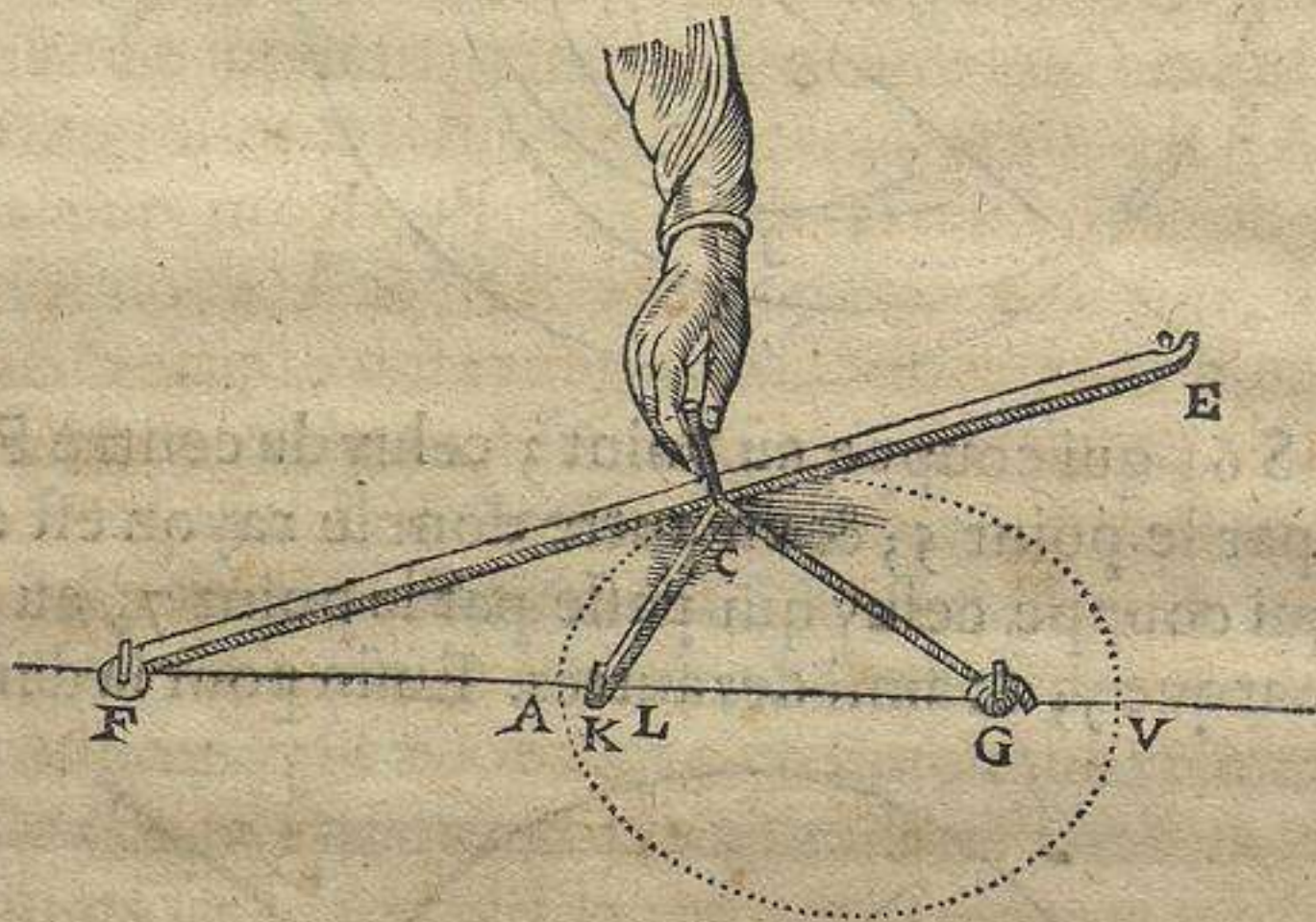


égal à S 6, qui coupe au point 3 celui du centre F, qui passe par le point 5; & vn autre dont le rayon est égal à S 8, qui coupe celui qui passe par le point 7, au point aussi marqué 3; & ainsi des autres. Enfin pour la dernière



ouale ie fais des cercles du centre H, dont les rayons sont égaux aux lignes R 6, R 8, & semblables, qui coupent les autres cercles aux points marquez 4.

On pourroit encore trouver vne infinité d'autres moyens pour décrire ces mesmes ouales. Comme par exemple, on peut tracer la premiere AV, lors qu'on suppose les lignes FA & AG estre égales, si on diuise la toute FG au point L, en sorte que FL soit à LG, com-



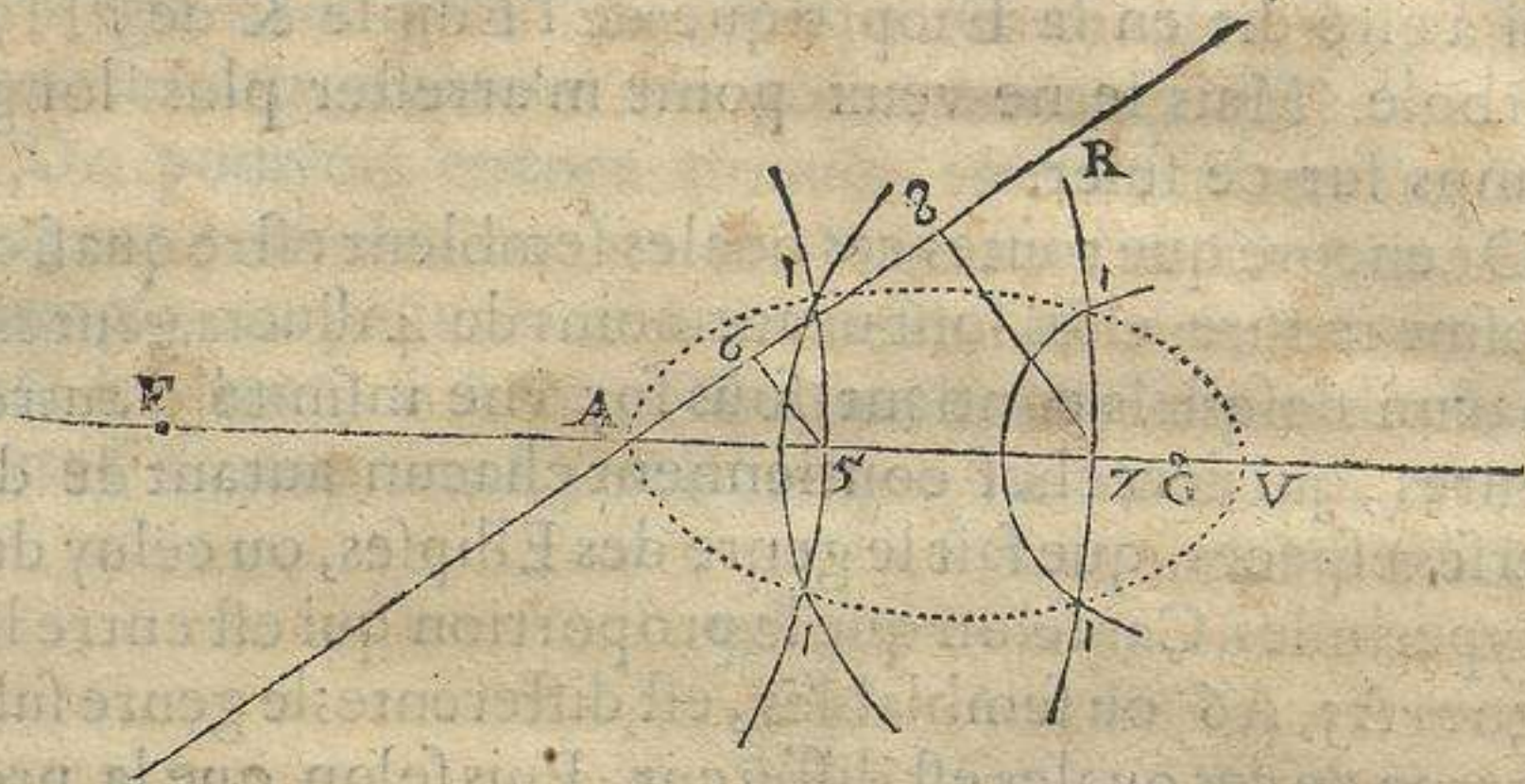
me A 5 à A 6. C'est à dire qu'elles ayent la proportion, qui mesure les refractions. Puis ayant diuisé AL en deux parties égales au point K, qu'on fasse tourner vne regle comme FE, autour du point F, en pressant du doigt C, la corde EC, qui estant attachée au bout de cette regle vers E, se replie de C vers K, puis de K derechef vers C, & de C vers G, où son autre bout soit attaché, en sorte que la longueur de cette corde soit composée de celle des lignes GA plus AL plus FE moins AF. Et ce sera le mouuement

du point C, qui décrira cette ouale, à l'imitation de ce qui a esté dit en la Dioptrique de l'Ellipse & de l'Hyperbole. Mais ie ne veux point m'arrester plus longtemps sur ce sujet.

Or encore que toutes ces ouales semblent estre quasi de mesme nature, elles sont neantmoins de 4 diuers genres, chacun desquels contient sous soy vne infinité d'autres genres, qui derechef contiennent chacun autant de diuerses especes, que fait le genre des Ellipses, ou celuy des Hyperboles. Car selon que la proportion qui est entre les lignes A5, A6, ou semblables, est differente; le genre subalterne de ces ouales est different. Puis selon que la proportion, qui est entre les lignes AF, & AG, ou AH, est changée, les ouales de chaque genre subalterne changent d'espece. Et selon qu'AG, ou AH est plus ou moins grande, elles sont diuerses en grandeur. Et si les lignes A5 & A6 sont égales, au lieu des ouales du premier genre ou du troisiéme, on ne décrit que des lignes droites; mais au lieu de celles du second on a toutes les Hyperboles possibles; & au lieu de celles du dernier toutes les Ellipses.

Outre cela en chacune de ces ouales il faut considerer deux parties, qui ont diuerses proprietéz; à sçauoir en la premiere, la partie qui est vers A, fait que les rayons, qui estant dans l'air viennent du point F, se retournent tous vers le point G, lors qu'ils rencontrent la superficie conuexe d'un verre, dont la superficie est I A I, & dans lequel les refractions se font telles, que suiuant ce qui a esté dit en la Dioptrique, elles peuuent toutes estre mesurées par la proportion, qui est entre les lignes A5 & A6, ou semblables, par l'aide desquelles on a décrit cette ouale.

Les propriétés de ces ouales touchant les reflexions, & les refractions.



Mais la partie, qui est vers V, fait que les rayons qui viennent du point G se reflexchiroient tous vers F, s'ils y rencontroient la superficie concaue d'un miroir, dont la figure fust $i V i$, & qui fust de telle matiere qu'il diminuast la force de ces rayons, selon la proportion qui est entre les lignes $A 5$ & $A 6$: Car de ce qui a esté démontré en la Dioptrique, il est évident que cela posé, les angles de la reflection seroient inégaux, aussi bien que sont ceux de la refraction, & pourroient estre mesurez en mesme sorte.

En la seconde ouale la partie $2 A 2$ sert encore pour les reflexions dont on suppose les angles estre inégaux. Car estant en la superficie d'un miroir composé de mesme matiere que le precedent, elle feroit tellement reflexchir tous les rayons, qui viendroient du point G, qu'ils sembleroient après estre reflexchis venir du point F. Et il est à remarquer, qu'ayant fait la ligne $A G$ beaucoup plus

plus grande que AF, ce miroir seroit conuexe au milieu, vers A, & concaue aux extrémitez: car telle est la figure de cette ligne, qui en cela represente plutôt vn cœur qu'une ouale.

Mais son autre partie X₂ sert pour les refractions, & fait que les rayons, qui estant dans l'air tendent vers F, se detournent vers G, en trauersant la superficie d'un verre, qui en ait la figure.

La troisième ouale sert toute aux refractions, & fait que les rayons, qui estant dans l'air tendent vers F, se vont rendre vers H dans le verre, après qu'ils ont trauersé la superficie, dont la figure est A₃ Y₃, qui est conuexe par tout, excepté vers A où elle est vn peu concaue, en sorte qu'elle à la figure d'un cœur aussi bien que la precedente. Et la difference qui est entre les deux parties de cette ouale, consiste en ce que le point F est plus proche de l'une, que n'est le point H; & qu'il est plus esloigné de l'autre, que ce mesme point H.

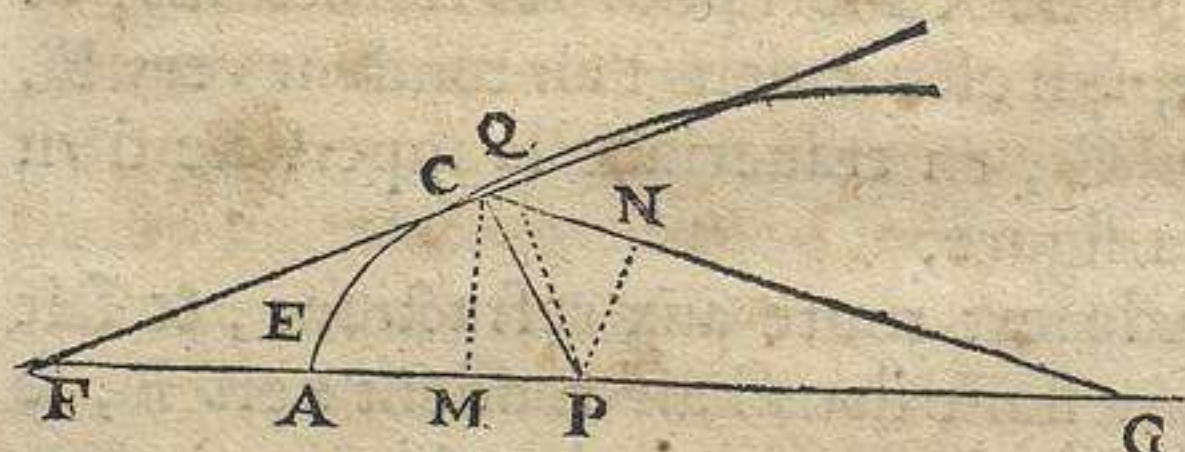
En mesme façon la dernière ouale sert toute aux reflexions, & fait que si les rayons, qui viennent du point H, rencontrent la superficie concaue d'un miroir de mesme matiere que les precedens, & dont la figure fust A₄ Z₄, ils se reflexiroient tous vers F.

De façon qu'on peut nommer les points F, & G, ou H les points bruslans de ces ouales, à l'exemple de ceux des Ellipses, & des Hyperboles, qui ont esté ainsi nommez en la Dioptrique.

J'ometts quantité d'autres refractions & reflexions, qui sont réglées par ces mesmes ouales: car n'estant que les conuerses, ou les contraires de celles-cy, elles en

Demon-
stration
des pro-
prietez de
ces ouales
touchant
les refle-
xions &
refra-
ctions.

peuvent facilement estre deduites. Mais il ne faut pas que i'omette la demonstration de ce que i'ay dit. Et à cet effect, prenons par exemple le point C à discretion en la premiere partie de la premiere de ces ouales; puis tirons



la ligne droite CP, qui coupe la courbe au point C à angles droits, ce qui est facile par le Probleme prece-

dent; Car prenant b pour AG , c pour AF , $c + z$ pour FC ; & supposant que la proportion qui est entre d & e , que ie prendray icy toujours pour celle qui mesure les refractions du verre proposé, designe aussi celle qui est entre les lignes $A\delta$, & $A\epsilon$, ou semblables, qui ont serui pour décrire cette ouale, ce qui donne $b - \frac{e}{d}z$ pour GC : on trouue que la ligne AP est

$$\frac{bcd - bcde \times bddz \times cez}{bde \times edd \times ddz - eez}$$

ainsi qu'il a esté montré - cy dessus.

De plus du point P ayant tiré PQ à angles droits sur la droite FC , & PN aussi à angles droits sur GC , considérons que si PQ est à PN , comme d est à e , c'est à dire, comme les lignes qui mesurent les refractions du verre conuexe AC , le rayon qui vient du point F au point C , doit tellement s'y courber en entrant dans ce verre, qu'il s'aille rendre après vers G : ainsi qu'il est tres évident de ce qui a esté dit en la Dioptrique. Puis enfin voyons par le calcul, s'il est vray, que PQ soit à PN ; comme d est à e . Les triangles rectangles PQF , & CME sont sem-

blables; d'où il suit que CF est à CM , comme FP est à PQ ; & par conséquent que FP , estant multipliée par CM , & diuisée par CF , est égale à PQ . Tout de mesme les triangles rectangles PNG , & CMG sont semblables; d'où il suit que GP , multipliée par CM , & diuisée par CG , est égale à PN . Puis à cause que les multiplications, ou diuisions, qui se font de deux quantitez par vne mesme, ne changent point la proportion qui est entre elles; si FP multipliée par CM ; & diuisée par CF , est à GP multipliée aussi par CM & diuisée par CG ; comme d est à e , en diuisant l'une & l'autre de ces deux sommes par CM , puis les multipliant toutes deux par CF , & derechef par CG , il reste FP multipliée par CG , qui doit estre à GP multipliée par CF , comme d est à e .

Or par la construction FP est $c \frac{bcdd \times bcde \times bddz \times ceex}{bde \times cdd \times ddz \times eez}$

ou bien $FP \propto \frac{bcdd \times cdd \times bddz \times cddz}{bde \times cdd \times ddz \times eez}$ Et CG est

$b - \frac{e}{d} z$. Si bien que multipliant FP par CG il vient

$$\frac{bbcdd \times bccdd \times bbddz \times bcddz \times bcdez \times cdez \times bdez z \times cdez z}{bde \times cdd \times ddz \times eez}$$

Puis GP est $b \frac{bcdd \times bcde \times bddz \times ceex}{bde \times cdd \times ddz \times eez}$ ou bien

$GP \propto \frac{bbde \times bcde \times beez \times ceex}{bde \times cdd \times ddz \times eez}$ & CF est $c + z$;

si bien que multipliant GP par CF , il vient

$$\frac{bbcde \times bccde \times bceex \times cceex \times bbdez \times bcdez \times beez z \times ceex z}{bde \times cdd \times ddz \times eez}$$

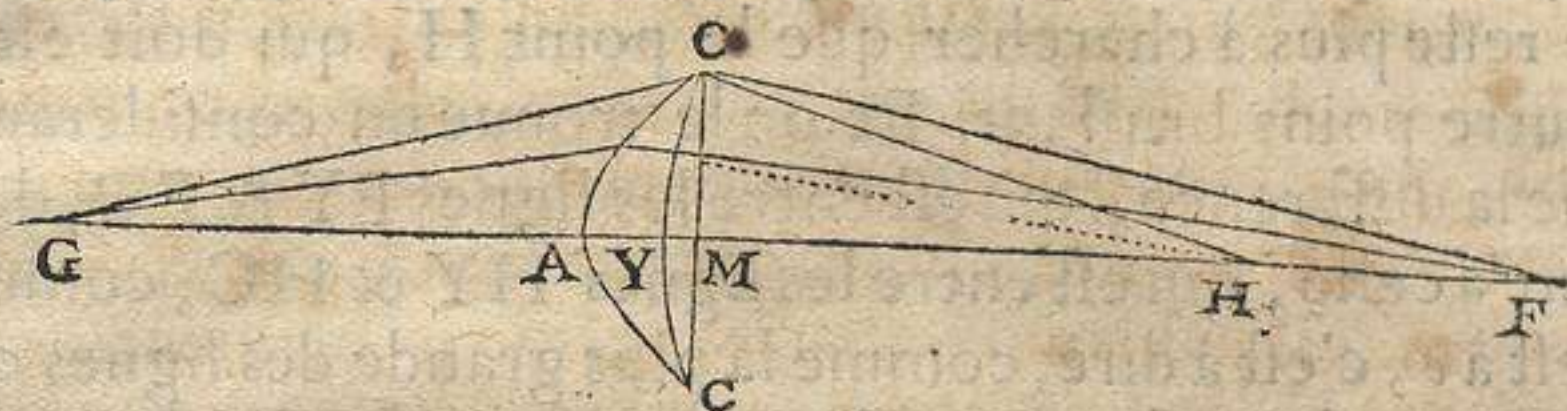
Et pource que la premiere de ces sommes diuisée par d , est la mesme que la seconde diuisée par e , il est manifeste, que FP multipliée par CG est à GP multipliée par CF ;

c'est à dire que PQ est à PN , comme d est à e , qui est tout ce qu'il falloit demonstrier.

Et sçachez, que cette mesme demonstration s'étend à tout ce qui a esté dit des autres refractions ou reflexions, qui se font dans les ouales proposées; sans qu'il y faille changer aucune chose, que les signes $+$ & $-$ du calcul. C'est pourquoy chacun les peut aisement examiner de soy mesme, sans qu'il soit besoin que ie m'y arreste.

Mais il faut maintenant, que ie satisfasse a ce que i'ay omis en la Dioptrique, lors qu'après auoir remarqué, qu'il peut y auoir des verres de plusieurs diuerses figures, qui fassent aussi bien l'un que l'autre, que les rayons venans d'un mesme point de l'obiet, s'assemblent tous en un autre point après les auoir trauez. Et qu'entre ces verres, ceux qui sont fort conuexe d'un costé, & concaues de l'autre, ont plus de force pour brusler, que ceux qui sont également conuexes des deux costez. Au lieu que tout au contraire ces derniers sont les meilleurs pour les lunettes. Ie me suis contenté d'expliquer ceux que i'ay crû estre les meilleurs pour la pratique, en supposant la difficulté que les artisans peuuent auoir à les tailler. C'est pourquoy, afin qu'il ne reste rien à souhaiter touchant la theorie de cette science, ie dois expliquer encore icy la figure des verres, qui ayant l'une de leurs superficies autant conuexe, ou concaue, qu'on voudra, ne laissent pas de faire que tous les rayons, qui viennent vers eux d'un mesme point, ou paralleles, s'assemblent après en un mesme point; & celles des verres qui font le semblable, estant également conuexe des deux costez, ou bien la

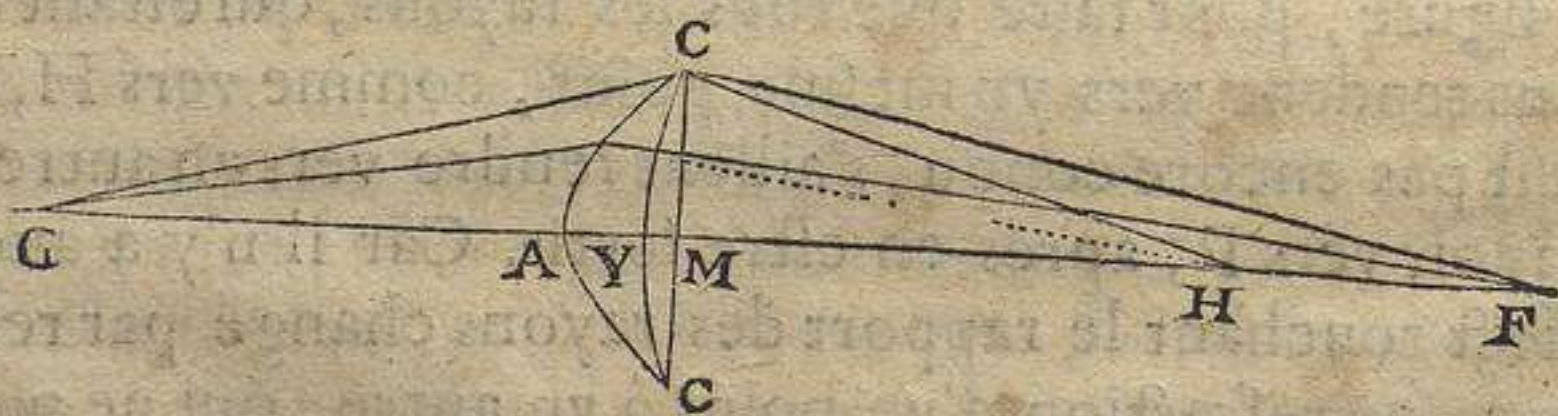
convexité de l'une de leurs superficies ayant la proportion donnée à celle de l'autre.



Posons pour le premier cas, que les points G, Y, C, & F estant donnez, les rayons qui viennent du point G, ou bien qui sont paralleles à GA se doiuent assembler au point F, après auoir trauersé vn verre si concaue, qu'Y estant le milieu de la superficie interieure, l'extremité en soit au point C, en sorte que la corde CMC, & la fleche YM de l'arc CYC, sont donnees. La question va là, que premierement il faut considerer, de laquelle des ouales expliquées, la superficie du verre YC, doit auoir la figure, pour faire que tous les rayons, qui estant dedans tendent vers vn mesme point, comme vers H, qui n'est pas encore connu, s'aillent rendre vers vn autre, à sçauoir vers F, après en estre sortis. Car il n'y a aucun effect touchant le rapport des rayons changé par reflexion, ou refraction d'un point à vn autre, qui ne puisse estre causé par quelqu'une de ces ouales. Et on voit aisement que cettuy-cy le peut estre par la partie de la troisieme ouale, qui a tantost esté marquée 3 A 3, ou par celle de la mesme, qui a esté marquée 3 Y 3, ou enfin par la partie de la seconde qui a esté marquée 2 X 2. Et pource que ces trois tombent icy sous mesme calcul, on doit tant pour l'une que pour l'autre prendre Y pour

Comment on peut faire vn verre autant conuexe ou concaue, en l'une de ses superficies, qu'on voudra, qui rassemble à vn point donné, tous les rayons qui viennent d'un autre point donné.

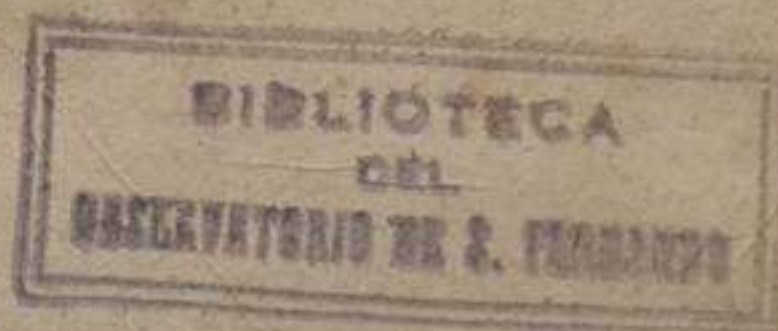
leur sommet, C pour l'un des points de leur circonferen-
 ce, & F pour l'un de leurs points bruslans; après quoy il
 ne reste plus à chercher que le point H, qui doit estre
 l'autre point bruslant. Et on le trouue en considerant,
 que la difference, qui est entre les lignes FY & FC, doit
 estre a celle, qui est entre les lignes HY & HC, comme
d est à *e*, c'est à dire, comme la plus grande des lignes qui
 mesurent les refractions du verre proposé est à la moin-
 dre; ainsi qu'on peut voir manifestement de la descri-
 ption de ces ouales. Et pource que les lignes FY & FC
 sont données, leur difference l'est aussi, & en suite celle
 qui est entre HY & HC; pource que la proportion qui
 est entre ces deux differences est donnée. Et de plus à
 cause que YM est donnée, la difference qui est entre
 MH, & HC, l'est aussi; & enfin pource que CM est don-
 née, il ne reste plus qu'à trouuer MH le costé du triangle



rectangle CMH, dont on à l'autre costé CM, & on a
 aussi la difference qui est entre CH la baze, & MH le
 costé demandé. D'où il est aisé de le trouuer. Car si on
 prend *k* pour l'excez de CH sur MH, & *n* pour la lon-
 gueur de la ligne CM, on aura $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pour MH. Et après
 auoir ainsi le point H, s'il se trouue plus loin du point Y,

que n'en est le point F, la ligne CY doit estre la premiere partie de l'ouale du troisieme genre, qui a tantost esté nommée 3 A 3: Mais si HY est moindre que FY, ou bien elle surpasse HF de tant, que leur difference est plus grande à raison de la toute FY, que n'est *e* la moindre des lignes qui mesurent les refractions comparée avec *d* la plus grande, c'est à dire que faisant $HF \propto c$, & $HY \propto c + b$, *dh* est plus grande que $2ce + eb$, & lors CY doit estre la seconde partie de la mesme ouale du troisieme genre, qui a tantost esté nommée 3 Y 3; Ou bien *dh* est égale, ou moindre que $2ce + eb$: & lors CY doit estre la seconde partie de l'ouale du second genre qui a cy-dessus esté nommée 2 X 2. Et enfin si le point H est le mesme que le point F, ce qui n'arrive que lors que FY & FC sont égales, cette ligne YC est vn cercle.

Après cela il faut chercher CAC, l'autre superficie de ce verre, qui doit estre vne Ellipse, dont H soit le point bruslant, si on suppose que les rayons qui tombent dessus soient paralleles; & lors il est aisé de la trouver. Mais si on suppose qu'ils viennent du point G, ce doit estre la premiere partie d'une ouale du premier genre, dont les deux points bruslans soient G & H, & qui passe par le point C: d'où on trouve le point A pour le sommet de cette ouale, en considerant, que GC doit estre plus grande que GA, d'une quantité, qui soit à celle dont HA surpasse HC, comme *d* à *e*. Car ayant pris *k* pour la difference, qui est entre CH, & HM, si on suppose *x* pour AM, on aura $x - k$, pour la difference qui est entre AH, & CH; puis si on prend *g* pour celle qui est entre GC, & GM, qui sont données, on aura $g + x$ pour celle qui est entre

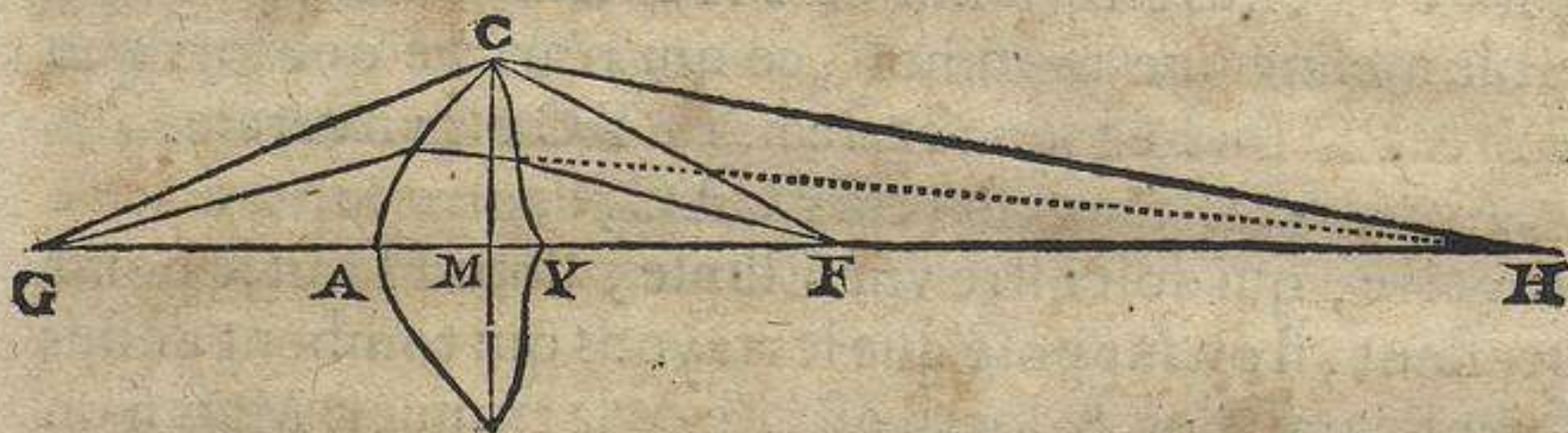


Comment
on peut
faire vn
verre, qui
ait le mes-
me effect
que le pre-
cedent, &
que la con-
uexité de
l'vne des
superficies
ait la pro-
portion
donnée
avec celle
de l'autre.

GC, & GA; & pource que cette derniere $g + x$ est à l'autre $x - k$, comme d est à e , on à $ge + ex \propto dx - dk$, ou bien $\frac{ge + dx}{d - e}$ pour la ligne x , ou AM, par laquelle on determine le point A qui estoit cherché.

Posons maintenant pour l'autre cas, qu'on ne donne que les points GC, & F, avec la proportion qui est entre les lignes AM, & YM, & qu'il faille trouver la figure du verre ACY, qui fasse que tous les rayons, qui viennent du point G s'assemblent au point F.

On peut derechef icy se servir de deux ouales dont l'vne, AC, ait G & H pour ses points bruslans; & l'autre,



CY, ait F & H pour les siens. Et pour les trouver, premierement supposant le point H qui est commun à toutes deux estre connu, ie cherche AM par les trois points G, C, H, en la façon tout maintenant expliquée; à sçauoir prenant k pour la difference, qui est entre CH, & HM; & g pour celle qui est entre GC, & GM: & AC étant la premiere partie de l'Ouale du premier genre, i'ay $\frac{ge + dx}{d - e}$ pour AM: puis ie cherche aussi MY par les trois points F, C, H, en sorte que CY soit la premiere partie d'vne ouale du troisiéme genre; & prenant y pour MY, &

& f pour la difference, qui est entre CF , & FM ; i'ay $f + y$, pour celle qui est entre CF , & FY : puis ayant déjà k pour celle qui est entre CH , & HM , i'ay $k + y$ pour celle qui est entre CH , & HY , que ie sçay deuoir estre à $f + y$ comme e est à d , à cause de l'Ouale du troisiéme genre, d'où ie trouue que y ou MY est $\frac{f e - d k}{d - e}$ puis ioignant ensemble les deux quantitez trouuées pour AM , & MY , ie trouue $\frac{g e + f e}{d - e}$ pour la toute AY ; D'où il suit que de quelque costé que soit supposé le point H , cette ligne AY est touiours composée d'une quantité, qui est à celle dont les deux ensemble GC , & CF surpassent la toute GF , Comme e , la moindre des deux lignes qui seruent à mesurer les refractions du verre proposé, est à $d - e$, la difference qui est entre ces deux lignes. Ce qui est vn assez beau theoresme. Or ayant ainsi la toute AY , il la faut couper selon la proportion que doiuent auoir ses parties AM & MY ; au moyen de quoy pource qu'on a déjà le point M , on trouue aussi les points A & Y ; & en suite le point H , par le Probleme precedent. Mais auparavant il faut regarder, si la ligne AM ainsi trouuée est plus grande que $\frac{g e}{d - e}$ ou plus petite, ou égale. Car si elle est plus grande, on apprend de là que la courbe AC doit estre la premiere partie d'une ouale du premier genre; & CY la premiere d'une du troisiéme, ainsi qu'elles ont esté icy supposées: au lieu que si elle est plus petite, cela montre que c'est CY , qui doit estre la premiere partie d'une ouale du premier genre; & que AC doit estre la premiere d'une du troisiéme: Enfin si AM est égale à

K

les deux courbes AC & CY doiuent estre deux hyperboles.

On pourroit estendre ces deux problemes à vne infinité d'autres cas, que ie ne m'arreste pas à deduire, à cause qu'ils n'ont eu aucun vsage en la Dioptrique.

On pourroit aussi passer outre, & dire, lors que l'une des superficies du verre est donnée, pourvû qu'elle ne soit que toute plate, ou composée de sections coniques, ou de cercles; comment on doit faire son autre superficie, afin qu'il transmette tous les rayons d'un point donné, à vn autre point aussi donné. Car ce n'est rien de plus difficile que ce que ie viens d'expliquer; ou plûtost c'est chose beaucoup plus facile, à cause que le chemin en est ouuert. Mais i'ayme mieux, que d'autres le cherchent, afin que s'ils ont encore vn peu de peine à le trouuer, cela leur fasse d'autant plus estimer l'inuention des choses qui sont icy demonstrees.

Comment on peut appliquer ce qui a esté dit icy des lignes courbes décrites sur vne superficie plate, à celles qui se décriuent dans vn espace qui a trois dimensions.

Au reste ie n'ay parlé en tout cecy, que des lignes courbes, qu'on peut décrire sur vne superficie plate; mais il est aisé de rapporter ce que i'en ay dit, à toutes celles qu'on scauroit imaginer estre formées, par le mouuement regulier des poins de quelque corps, dans vn espace qui a trois dimensions. A scauoir en tirant deux perpendiculaires, de chacun des poins de la ligne courbe qu'on veut considerer, sur deux plans qui s'entrecouppent à angles droits, l'une sur l'un, & l'autre sur l'autre. Car les extremités de ces perpendiculaires décriuent deux autres lignes courbes, vne sur chacun de ces plans, desquelles on peut, en la façon cy-dessus expliquée, déterminer tous les poins, & les rapporter à ceux de la ligne droite, qui

est commune à ces deux plans, au moyen dequoy ceux de la courbe, qui à trois dimensions, sont entierement determinez. Mesme si on veut tirer vne ligne droite, qui coupe cette courbe au point donné à angles droits: il faut seulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, vne en chacun, qui couppent à angles droits les deux lignes courbes, qui y sont, aux deux points, où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné. Car ayant éleué deux autres plans, vn sur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle est, on aura l'interfection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. Et ainsi ie pense n'auoir rien obmis des elemens qui sont necessaires pour la connoissance des lignes courbes.



L A

G E O M E T R I E .

L I V R E T R O I S I E ' M E .

De la construction des Problemes, qui sont solides, ou plus que solides.

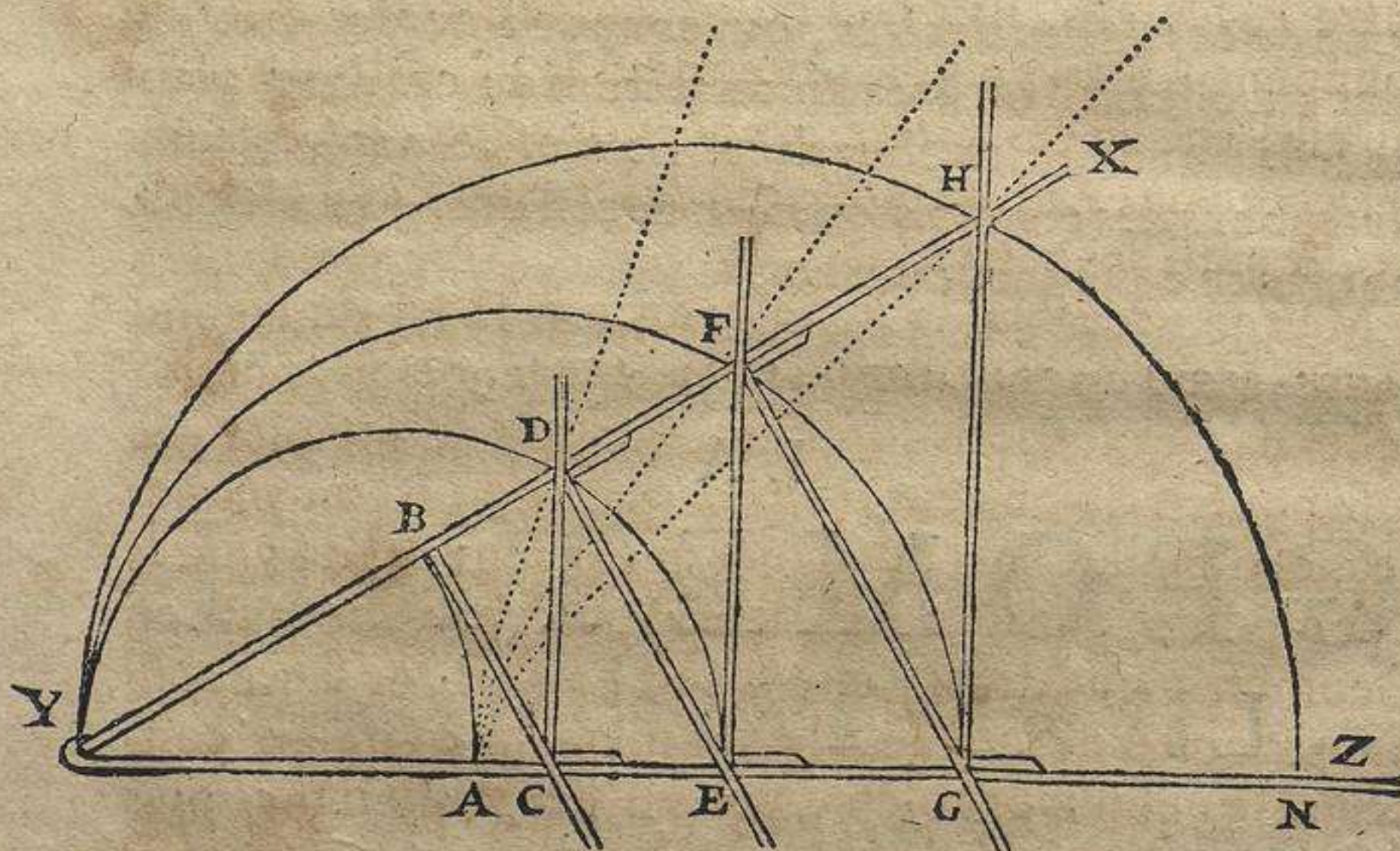


E N C O R E que toutes les lignes courbes qui peuvent estre décrites par quelque mouuement regulier, doiuent estre receuës en la Geometrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se seruir indifferemment de la premiere qui se rencontre, pour la

De quelles lignes courbes on peut se seruir, en la construction de chaque probleme.

K ij

construction de chaque Probleme : mais il faut auoir soin de choisir touiours la plus simple , par laquelle il soit possible de le resoudre. Et mesme il est à remarquer , que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles, qui peuent le plus aisement estre décrites , ny celle qui rendent la construction ou la demonstration du Probleme proposé plus facile , mais principalement celles, qui sont du plus simple genre , qui puisse seruir à determiner la quantité qui est cherchée.



Exemple
rouchant
l'inuen-
tion de
plusieurs
moyennes
propor-
tionnelles.

Comme par exemple ie ne croy pas , qu'il y ait aucune façon plus facile , pour trouuer autant de moyennes proportionnelles, qu'on veut , ny dont la demonstration soit plus évidente , que d'y employer les lignes courbes, qui se décriuent par l'instrument XYZ cy-dessus expliqué. Car voulant trouuer deux moyennes proportion-

nelles entre YA & YE , il ne faut que décrire vn cercle, dont le diametre soit YE ; & pource que ce cercle coupe la courbe AD au point D , YD est l'une des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la demonstration se voit à l'œil par la seule application de cet instrument sur la ligne YD . Car comme YA , ou YB , qui luy est égale est à YC ; ainsi YC est à YD ; & YD à YE .

Tout de mesme pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre YA & YG ; ou pour en trouver six entre YA & YN , il ne faut que tracer le cercle YFG , qui coupant AF au point F , determine la ligne droite YF , qui est l'une de ces quatre proportionnelles; ou YHN , qui coupant AH au point H , determine YH l'une des six, & ainsi des autres.

Mais pource que la ligne courbe AD est du second genre, & qu'on peut trouver deux moyennes proportionnelles par les sections coniques, qui sont du premier; & aussi pource qu'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionnelles, par des lignes qui ne sont pas de genres si composez, que sont AF , & AH , ce seroit vne faute en Geometrie que de les y employer. Et c'est vne faute aussi d'autre costé de se traualier inutilement à vouloir construire quelque probleme par vn genre de lignes plus simple, que sa nature ne permet.

Or afin que ie puisse icy donner quelques regles, pour éviter l'une & l'autre de ces deux fautes, il faut que ie die quelque chose en general de la nature des Equations; c'est à dire des sommes composees de plusieurs termes partie connus, & partie inconnus, dont les vns sont égaux aux autres, ou plûtoft qui considerez tous ensem-

De la nature des Equations.

ble sont égaux à rien. Car ce sera souuent le meilleur de les considerer en cette sorte.

Combien
il peut y
auoir de
racines en
chaque E-
quation.

Scachez donc qu'en chaque Equation, autant que la quantité inconnuë à de dimensions, autant peut il y auoir de diuerses racines, c'est à dire de valeurs de cette quantité. Car par exemple si on suppose x égale à 2; ou bien $x - 2$ égal à rien; & derechef $x \propto 3$; ou bien $x - 3 \propto 0$; en multipliant ces deux Equations $x - 2 \propto 0$, & $x - 3 \propto 0$, l'une par l'autre, on aura $xx - 5x + 6 \propto 0$, ou bien $xx \propto 5x - 6$, qui est vne Equation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait $x - 4 \propto 0$, & qu'on multiplie cette somme par $xx - 5x + 6 \propto 0$, on aura $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$, qui est vne autre Equation en laquelle x ayant trois dimensions a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3, & 4.

Quelles
sont les
fausses ra-
cines.

Mais souuent il arriue, que quelques vnes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. Comme si on suppose que x designe aussi le defaut d'une quantité, qui soit 5, on à $x + 5 \propto 0$, qui estant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$$

Comment
on peut di-
minuer le
nombre
des dimen-
sions d'une
Equation
lors qu'on
connoist
quelqu'une
de ses
racines.

pour vne Equation en laquelle il y a quatre racines, à sçauoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, & vne fausse qui est 5.

Et on voit éuidemment de cecy, que la somme d'une Equation, qui contient plusieurs racines, peut toujors estre diuisée par vn binôme composé de la quantité inconnuë moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit; ou plus la valeur de l'une des faussez. Au moyen dequoy on diminuë d'autant ses dimensions.

Et reciproquement que si la somme d'une Equation

ne peut estre diuifée par vn binôme composé de la quantité inconnuë $+$ ou $--$ quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette dernière

$$x^4 -- 4 x^3 -- 19 xx + 106 xx -- 120 \infty 0$$

peut bien estre diuifée, par $x -- 2$, & par $x -- 3$, & par $x -- 4$, & par $x + 5$; mais non point par $x +$ ou $--$ aucune autre quantité. Ce qui montre qu'elle ne peut auoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5.

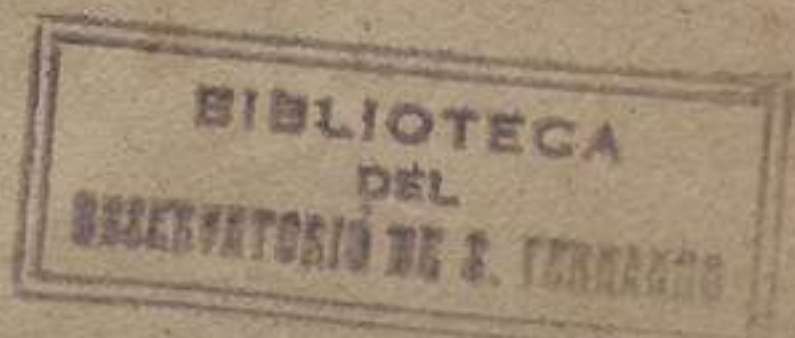
On connoist aussi de cecy combien il peut y auoir de vraies racines, & combien de fausses en chaque Equation. A sçauoir il y en peut auoir autant de vraies, que les signes $+$ & $--$ s'y trouuent de fois estre changez; & autant de fausses qu'il s'y trouue de fois deux signes $+$, ou deux signes $--$ qui s'entresuiuent. Comme en la dernière, à cause qu'après $+ x^4$ il y a $-- 4 x^3$, qui est vn changement du signe $+$ en $--$, & après $-- 19 xx$ il y a $+ 106 x$, & après $+ 106 x$ il y a $-- 120$ qui sont encore deux autres changemens, on connoist qu'il y a trois vraies racines; & vne fausse, à cause que les deux signes $--$, de $4 x^3$, & $19 xx$, s'entresuiuent.

De plus il est aisé de faire en vne mesme Equation, que toutes les racines qui estoient fausses deuiennent vraies, & par mesme moyens que toutes celles qui estoient vraies deuiennent fausses: à sçauoir en changeant tous les signes $+$ ou $--$ qui sont en la seconde, en la quatrième, en la sixième, ou autres places qui se designent par les nombres pairs, sans changer ceux de la première, de la troisième, de la cinquième & semblables qui se designent par les nombres impairs.

Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'une racine.

Combien il peut y auoir de vraies racines en chaque Equation.

Comment on fait que les fausses racines d'une Equation deuiennent vraies, & les vraies fausses.



Comme si au lieu de

$$+ x^4 -- 4 x^3 -- 19 xx + 106 x -- 120 \infty 0$$

on écrit

$$+ x^4 + 4 x^3 -- 19 xx -- 106 x -- 120 \infty 0$$

on a vne Equation en laquelle il n'y a qu'une vraye racine qui est 5, & trois fausses qui sont 2, 3, & 4.

Comment
on peu
augmenter
ou dimi-
nuer les
racines
d'une E-
quation,
sans les
connoistre

Que si sans connoistre la valeur des racines d'une Equation, on la veut augmenter, ou diminuer de quelque quantité connue, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en supposer vn autre, qui soit plus ou moins grand de cette mesme quantité, & le substituer par tout en la place du premier.

Comme si on veut augmenter de 3 la racine de cette Equation

$$x^4 + 4 x^3 -- 19 xx -- 106 x -- 120 \infty 0$$

il faut prendre y au lieu d' x , & penser que cette quantité y est plus grande qu' x de 3, en sorte que $y -- 3$ est égal a x , & au lieu d' xx , il faut mettre le quarré d' $y -- 3$ qui est $yy -- 6y + 9$ & au lieu d' x^3 il faut mettre son cube qui est $y^3 -- 9yy + 27y -- 27$, & enfin au lieu d' x^4 il faut mettre son quarré de quarré qui est $y^4 -- 12y^3 + 54yy -- 108y + 81$. Et ainsi décriuant la somme precedente en substituant par tout y au lieu d' x on a

$$\begin{array}{r} y^4 -- 12 y^3 + 54 yy -- 108 y + 81 \\ + 4 y^3 -- 36 yy + 108 y -- 108 \\ -- 19 yy + 114 y -- 171 \\ -- 106 y + 318 \\ -- 120 \end{array}$$

$$y^4 -- 8 y^3 -- 1 yy + 8 y^* \infty 0$$

ou bien

ou bien $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$.

où la vraye racine qui estoit 5 est maintenant 8, à cause du nombre trois qui luy est ajouté.

Que si on veut au contraire diminuer de trois la racine de cette mesme Equation, il faut faire $y + 3 \propto x$ & $yy + 6y + 9 \propto xx$. Et ainsi des autres, de façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$$

on met

$$y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81$$

$$+ 4y^3 + 36yy + 108y + 108$$

$$- 19yy - 114y - 171$$

$$- 106y - 318$$

$$- 120$$

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0.$$

Et il est à remarquer qu'en augmentant les vrayes racines d'une Equation, on diminuë les fausses de la mesme quantité; ou au contraire en diminuant les vrayes, on augmente les fausses. Et que si on diminuë soit les vnes soit les autres, d'une quantité qui leur soit égale, elles deuiennent nulles, & que si c'est d'une quantité qui les surpasse, de vrayes elles deuiennent fausses, ou de fausses vrayes. Comme icy en augmentant de 3 la vraye racine qui estoit 5, on a diminuë de 3 chacune des fausses, en forte que celle qui estoit 4 n'est plus qu'1, & celle qui estoit 3 est nulle, & celle qui estoit 2 est deuenüë vraye & est 1, à cause que $-2 + 3$ fait $+1$. C'est pourquoy en cette Equation $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$ il n'y a plus que 3 racines, entre lesquelles il y en a deux qui sont vrayes,

Qu'en augmentant les vrayes racines on diminuë les fausses, & au contraire.

L

1, & 8, & vne fausse qui est aussi 1. Et en cette autre

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$$

il n'y en a qu'une vraie qui est 2, à cause que $+5 - 3$ fait $+2$, & trois fausses qui sont 5, 6, & 7.

Comment
ou peut
oster le se-
cond ter-
me d'une
Equation.

Or par cette façon de changer la valeur des racines sans les connoistre, on peut faire deux choses, qui auront cy après quelque usage: la premiere est qu'on peut toujours oster le second terme de l'Equation qu'on examine, à sçauoir en diminuant les vraies racines, de la quantité conuë de ce second terme diuisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes estant marqué du signe $+$, l'autre est marqué du signe $-$; ou bien en l'augmentant de la mesme quantité, s'ils ont tous deux le signe $+$, ou tous deux le signe $-$. Comme pour oster le second terme de la dernière Equation qui est

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$$

ayant diuisé 16 par 4, à cause des 4 dimensions du terme y^4 , il vient derechef 4, c'est pourquoy ie fais $z = 4 + y$, & i'écris

$$\begin{array}{r} z^4 - 16z^3 + 96zz - 256z + 256 \\ + 16z^3 - 192zz + 768z - 1024 \\ + 71zz - 568z + 1136 \\ - 4z + 16 \\ - 420 \end{array}$$

$$z^4 - 25zz - 60z - 36 = 0.$$

ou la vraie racine qui estoit 2, est 6, à cause qu'elle est augmentée de 4; & les fausses qui estoient 5, 6, & 7, ne sont plus que 1, 2, & 3, à cause qu'elles sont diminuées, chacune de 4.

Tout de mesme si on veut oster le second terme de

$$x^4 - 2ax^3 + 2aa^2xx - 2a^3x + a^4 = 0,$$

pource que diuisant $2a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}a$; il faut faire

$z + \frac{1}{2}ax$ & écrire

$$\begin{aligned} z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}aaz^2 + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\ - 2az^3 - 3aaz^2 - \frac{3}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 \\ + 2aaz^2 + 2a^3 + \frac{1}{2}a^4 \\ - cc - acc - \frac{1}{4}aacc \\ - 2a^3 - a^4 \\ + a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^4 + \frac{1}{2}aaz^2 - a^3z + \frac{5}{16}a^4 = 0 \\ - cc - acc - \frac{1}{4}aacc \end{aligned}$$

& si on trouue après la valeur de z , en luy ajoûtant $\frac{1}{2}a$ on aura celle de x .

La seconde chose, qui aura cy-après quelque vsage, est, qu'on peut toujors en augmentant la valeur des vrayes racines, d'une quantité qui soit plus grande que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deuiennent toutes vrayes, en sorte qu'il n'y ait point deux signes $+$, ou deux signes $-$ qui s'entresuiuent, & outre cela que la quantité conuë du troisieme terme soit plus grande, que le quarre de la moitié de celle du second. Car encore que cela se fasse, lors que ces fausses racines sont inconnuës, il est aisé neanmoins de iuger à peu près de leur grandeur, & de prendre vne quantité, qui les surpasse d'autant, ou de plus, qu'il n'est requis à cet effet. Comme si on a

Comment on peut faire que toutes les fausses racines d'une Equation deuiennēt vrayes, sans que les vrayes deuiennent fausses.

$x^6 \times nx^5 -- 6nnx^4 \times 36n^3x^3 -- 216n^4x^2 \times 1296n^5x -- 7776n^6 \times 0$
 en faisant $y -- 6n \times x$, on trouuera

$$\begin{array}{r}
 y^6 - 36n \} y^5 \times 540nn \} y^4 - 4320n^3 \} y^3 \times 19440n^4 \} yy - 46656n^5 \} y \times 46656n^6 \\
 \times n \} \quad \quad \quad \times 30nn \} \quad \quad \quad \times 360n^3 \} \quad \quad \quad \times 2160n^4 \} \quad \quad \quad \times 6480n^5 \} \quad \quad \quad \times 7776n^6 \\
 \quad \quad \quad \times 6nn \} \quad \quad \quad \times 144n^3 \} \quad \quad \quad \times 1296n^4 \} \quad \quad \quad \times 5184n^5 \} \quad \quad \quad \times 7776n^6 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \times 36n^3 \} \quad \quad \quad \times 648n^4 \} \quad \quad \quad \times 3888n^5 \} \quad \quad \quad \times 7776n^6 \\
 \quad \times 2592n^5 \} \quad \quad \quad \times 7776n^6 \\
 \quad \times 1296n^5 \} \quad \quad \quad \times 7776n^6
 \end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 \times 504nn \ y^4 - 3780n^3 \ y^3 \times 15120n^4 \ y^2 - 27216n^5 \ y \times 0$$

Où il est manifeste, que $504nn$, qui est la quantité conuë du troisieme terme est plus grande, que le quarre de $\frac{35}{2}n$, qui est la moitié de celle du second. Et il n'y a point de cas, pour lequel la quantité, dont on augmente les vrayes racines, ait besoin à cet effect, d'estre plus grande, à proportion de celles qui sont données, que pour cettuy-cy.

Comment
on fait que
routes les
places d'v-
ne Equa-
tion soient
remplies.

Mais à cause que le dernier terme s'y trouue nul, si on ne desire pas que cela soit, il faut encore augmenter tant soit peu la valeur des racines; & ce ne scauroit estre de si peu, que ce ne soit assez pour cet effect. Non plus que lors qu'on veut accroistre le nombre des dimensions de quelque Equation, & faire que toutes les places de ses termes soient remplies. Comme si au lieu de $x^5 **** - b \times 0$, on veut auoir vne Equation, en laquelle la quantité inconnuë ait six dimensions, & dont aucun des termes ne soit nul, il faut premierement pour

$$x^5 **** - b \times 0 \text{ écrire}$$

$$x^6 **** - b x^* \times 0$$

puis ayant fait $y -- a \times x$, on aura

$$y^6 - 6ay^5 \times 15a^2y^4 - 20a^3y^3 \times 15a^4yy - 6a^5y \times a^6 \\
 \quad \times ab \times 0$$

Où il est manifeste que tant petite que la quantité a soit

supposée toutes les places de l'Equation ne laissent pas d'estre remplies.

De plus on peut sans connoistre la valeur des vraies racines d'une Equation, les multiplier, ou diuiser toutes, par telle quantité conuë qu'on veut. Ce qui se fait en supposant que la quantité inconnuë estant multipliée, ou diuisée, par celle qui doit multiplier, ou diuiser les racines, est égale à quelque autre. Puis multipliant, ou diuisant la quantité conuë du second terme, par cette mesme qui doit multiplier, ou diuiser les racines; & par son quarré, celle du troisième; & par son cube, celle du quatrième; & ainsi iusques au dernier. Ce qui peut ser-

Comment on peut multiplier ou diuiser les racines sans les connoistre.

Comment on reduit les nombres rompus d'une Equation a des entiers.

$$x^3 - \sqrt{3} x x + \frac{26}{27} x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0,$$

& qu'on veuille en auoir vne autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux; il faut supposer $y \infty x \sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité conuë du second terme, qui est aussi $\sqrt{3}$, & par son quarré qui est 3 celle du troisième qui est $\frac{26}{27}$, & par son cube qui est $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui est $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, ce qui fait

$$y^3 - 3 yy + \frac{26}{9} y - \frac{8}{9} \infty 0$$

Puis si on en veut auoir encore vne autre en la place de celle-cy, dont les quantitez conuës ne s'expriment que par des nombres entiers; il faut supposer $z \infty 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27 on trouue

$z^3 - 9 zz + 26 z - 24 \infty 0$, où les racines estant 2, 3 & 4, on connoist de là que celles de l'autre d' auparauant

L iij



estoyent $\frac{2}{3} 1$, & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere estoient

Comment $\frac{2}{9} \sqrt[3]{3}$, $\frac{1}{2} \sqrt[3]{3}$, & $\frac{4}{9} \sqrt[3]{3}$.

on rend la
quantité
connüe de
l'un des
termes
d'une E-
quation é-
gale à telle
autre qu'on
veut.

Cette operation peut aussi servir pour rendre la quan-
tité connüe de quelqu'un des termes de l'Equation égale
à quelque autre donnée, comme si ayant

$$x^3 - 6bx + c^3 = 0$$

On veut auoir en sa place vne autre Equation, en laquel-
le la quantité connüe, du terme qui occupe la troisième
place, à sçauoir celle qui est icy bb , soit $3aa$, il faut suppo-
ser $y = x \sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis écrire $y^3 - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3} = 0$.

Que les
racines,
tant vrayes
que fausses
peuvent
estre reel-
les ou ima-
ginaires.

Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont
pas toujours reelles; mais quelquefois seulement imagi-
naires; c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer
autant que j'ay dit en chaque Equation; mais qu'il n'y a
quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles
qu'on imagine. Comme encore qu'on en puisse imagi-
ner trois en celle-cy, $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, il n'y
en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, & pour les deux
autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multi-
plie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne sçauroit
les rendre autres qu'imaginaires.

La redu-
ction des
Equations
cubiques
lors que le
probleme
est plan.

Or quand pour trouuer la construction de quelque
probleme, on vient à vne Equation, en laquelle la quan-
tité inconnüe à trois dimensions; premierement si les
quantitez connües, qui y sont, contiennent quelques
nombres rompus, il les faut reduire à d'autres entiers, par
la multiplication tantost expliquée; Et s'ils en contien-
nent de sours, il faut aussi les reduire à d'autres ratio-
naux, autant qu'il sera possible, tant par cette mesme mul-

tiplication, que par diuers autres moyens, qui sont assez faciles à trouuer. Puis examinant par ordre toutes les quantitez, qui peuuent diuifer sans fraction le dernier terme, il faut voir, si quelqu'une d'elles, iointe avec la quantité inconnüe par le signe $+$ ou $-$, peut composer vn binôme, qui diuise toute la somme; & si cela est le Probleme est plan, c'est à dire, il peut estre construit avec la regle & le compas; Car ou bien la quantité con- nuë de ce binôme est la racine cherchée; ou bien l'Equation estant diuisée par luy, se reduit a deux di- mensions, en forte qu'on en peut trouuer après la racine, par ce qui a esté dit au premier liure.

Par exemple si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0.$$

le dernier terme, qui est 64, peut estre diuisé sans fra- ction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64; C'est pourquoy il faut examiner par ordre si cette Equation ne peut point estre diuisée par quelqu'un des binômes, $yy - 1$ ou $yy + 1$, $yy - 2$ ou $yy + 2$, $yy - 4$, &c. Et on trouue quelle peut l'estre par $yy - 16$, en cette sorte.

$$\begin{array}{r} + y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0 \\ - 1y^6 - 8y^4 - 4yy - \\ \hline 0 - \frac{16y^4 - 128yy}{16} \end{array}$$

$$+ y^4 + 8yy + 4 = 0.$$

Il commence par le dernier terme, & diuise $- 64$ par $- 16$, ce qui fait $+ 4$, que i'écris dans le quotient, puis ie multiplie $+ 4$ par $+ yy$, ce qui fait $+ 4yy$; c'est pourquoy i'écris $- 4yy$ en la somme, qu'il faut diuifer. Car

La façon de diuiser vne Equation par vn binôme qui contiët la racine.

il y faut toujours écrire le signe $+$ ou $-$ tout contraire à celui que produit la multiplication. Et joignant $-124 yy$ avec $-4 yy$, i'ay $-128 yy$, que ie diuise derechef par -16 , & i'ay $+8 yy$ pour mettre dans le quotient & en le multipliant par yy , i'ay $-8 y^4$, pour ioindre avec le terme qu'il faut diuiser, qui est aussi $-8 y^4$, & ces deux ensemble font $-16 y^4$, que ie diuise par -16 , ce qui fait $+1 y^4$ pour le quotient, & $-1 y^6$, pour ioindre avec $+1 y^6$, ce qui fait 0 , & monstre que la diuision est acheuée. Mais s'il estoit resté quelque quantité, ou bien qu'on n'eust pû diuiser sans fraction que!qu'un des termes precedens, on eust par là reconnu, qu'elle ne pouuoit estre faite.

Tout de mesme si on a $y^6 \begin{matrix} *aa \\ 2cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} -a^4 \\ *c4 \end{matrix} yy \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac4 \end{matrix} \infty 0$. le dernier terme se peut diuiser sans fraction par $a, aa, aa + cc, a^3 + acc$, & semblables. Mais il n'y en a que deux qu'on ait besoin de considerer, à sçauoir aa & $aa + cc$; car les autres donnant plus ou moins de dimensions dans le quotient, qu'il n'y en a en la quantité connue du penultième terme, empescheroient que la diuision ne s'y pût faire. Et notez, que ie ne conte icy les dimensions d' y^6 , que pour trois, à cause qu'il n'y a point d' y^5 , ny d' y^3 , ny d' y en toute la somme. Or en examinant le binôme $yy - aa - cc \infty 0$, on trouue que la diuision se peut faire par luy en certe sorte.

$$\begin{array}{r}
 + y^6 \begin{matrix} *aa \\ -2cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} -a^4 \\ *c4 \end{matrix} yy \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac4 \end{matrix} \infty 0 \\
 - y^6 \begin{matrix} -2aa \\ *cc \end{matrix} \begin{matrix} -a^4 \\ -aac \end{matrix} \begin{matrix} -aa \\ -cc \end{matrix} \\
 \hline
 -aac \begin{matrix} -aa \\ -cc \end{matrix}
 \end{array}$$

$$+ y^4 \begin{matrix} *2aa \\ -cc \end{matrix} yy \begin{matrix} *a^4 \\ *aac \end{matrix} \infty 0.$$

Ce

Ce qui montre que la racine cherchée est $aa + cc$.
Et la preuve en est aisée à faire par la multiplication.

Mais lors qu'on ne trouve aucun binôme, qui puisse ainsi diuiser toute la somme de l'Equation proposée, il est certain que le Probleme qui en dépend est solide. Et ce n'est pas vne moindre faute après cela, de tâcher à le construire sans y employer que des cercles & des lignes droites, que ce seroit d'employer des sections coniques à construire ceux auxquels on n'a besoin que de cercles. Car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

Quels problèmes sôt solides, lors que l'Equation est cubique.

Que si on a vne Equation dont la quantité inconnue ait quatre dimensions, il faut en mesme façon, après en auoir osté les nombres sours, & rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouver quelque binôme, qui diuise toute la somme, en le composant de l'vne des quantitez, qui diuisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouve vn, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée; ou du moins après cette diuision, il ne reste en l'Equation, que trois dimensions, en suite dequoy il faut derechef l'examiner en la mesme sorte. Mais lors qu'il ne se trouve point de tel binôme, il faut en augmentant, ou diminuant la valeur de la racine, oster le second terme de la somme, en la façon tantost expliquée. Et après la reduire en vne autre, qui ne contienne que trois dimensions. Ce qui se fait en cette sorte.

La reduction des Equations qui ont quatre dimensions, lors que le probleme est plan, Et quels sont ceux qui sont solides.

Au lieu de $+ x^4 * . p x x . q x . r \infty 0$,

il faut écrire $+ y^6 . 2 p y^4 . \frac{*pp}{4r} y y -- q q \infty 0$.

Et pour les signes $+ -$ ou $--$, que j'ay omis, s'il y a

M

eu $+p$ en la precedente Equation, il faut mettre en celle-cy $+2p$, où s'il y a eu $-p$, il faut mettre $--2p$. Et au contraire s'il y a eu $+r$, il faut mettre $--4r$, ou s'il y a eu $--r$, il faut mettre $+4r$. Et soit qu'il y ait eu $+q$, ou $--q$, il faut toujours mettre $--qq$, & $+pp$. Au moins si on suppose que x^4 , & y^6 sont marquez du signe $+$, car ce seroit tout le contraire si on y supposoit le signe $--$.

Par exemple si on a $+x^4 - 4xx - 8x + 35 = 0$ il faut écrire en son lieu $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$. Car la quantité que j'ay nommée p estant $--4$, il faut mettre $--8y^4$ pour $2py^4$. Et celle, que j'ay nommée r estant 35 , il faut mettre $+16yy$, c'est à dire $--124yy$, au lieu de $+ppyy$. Et enfin q estant 8 , il faut mettre $--64$, pour $--qq$. Tout de mesme au lieu de $+x^4 - 17xx - 20x - 6 = 0$, il faut écrire $+y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$. Car 34 est double de 17 , & 313 en est le quarré joint au quadruple de 6 , & 400 est le quarré de 20 .

Tout de mesme aussi au lieu de

$$+z^4 - \frac{1}{2}aa - a^3 + \frac{5}{16}a^4 = 0,$$

$$+z^4 - cc - 2cc - acc - \frac{1}{4}aacc$$

Il faut écrire

$$y^6 - 2cc y^4 - 2a^4 yy - a^6 = 0,$$

Car p est $+\frac{1}{2}aa - cc$, & pp , est $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, & $4r$ est $--\frac{5}{4}a^4 + aacc$, & enfin $--qq$ est $--a^6 - 2a^4cc - aac^4$.

Après que l'Equation est ainsi reduite à trois dimensions, il faut chercher la valeur d' yy par la methode déjà expliquée; Et si elle ne peut estre trouuée, on n'a point

besoin de passer outre; Car il suit de là infailliblement, que le Probleme est solide. Mais si on la trouue, on peut diuiser par son moyen la precedente Equation en deux autres, en chacune desquelles la quantité inconnüe n'aura que deux dimensions, & dont les racines seront les mesmes que les siennes. A sçauoir, au lieu de

$$+ x^4 * . p x x . q x . r \infty o ,$$

il faut écrire ces deux autres

$$+ x x -- y x + \frac{1}{2} y y . \frac{1}{2} p . \frac{q}{2y} \infty o , \&$$

$$+ x x + y x + \frac{1}{2} y y . \frac{1}{2} p . \frac{q}{2y} \infty o .$$

Et pour les signes $+$ & $--$ que j'ay omis, s'il y a $+$ p en l'Equation precedente, il faut mettre $+$ $\frac{1}{2} p$ en chacune de celles-cy; & $-- \frac{1}{2} p$, s'il y a en l'autre $-- p$. Mais il faut mettre $+$ $\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $-- y x$; & $-- \frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+$ $y x$, lors qu'il y a $+$ q en la premiere. Et au contraire s'il y a $-- q$, il faut mettre $-- \frac{q}{2y}$, en celle où il y a $-- y x$; & $+$ $\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+$ $y x$. En suite dequoy il est aisé de connoître toutes les racines de l'Equation proposée, & par consequent de construire le probleme, dont elle contient la solution, sans y employer que des cercles & des lignes droites.

Par exemple à cause que faisant

$$y^6 -- 34 y^4 + 313 y y -- 400 \infty o , \text{ pour}$$

$x^4 * -- 17 x x -- 20 x -- 6 \infty o$, on trouue que yy est 16, on doit au lieu de cette Equation.

$$+ x^4 * -- 17 x x -- 20 x -- 6 \infty o , \text{ écrire ces deux}$$

autres $+xx - 4x - 3 \infty 0$. Et $+xx + 4x + 2 \infty 0$.
 Car y est 4, $\frac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, & q est 20, de façon que
 $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait -3 , & $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait $+2$. Et
 tirant les racines de ces deux Equations, on trouue tou-
 tes les mesmes, que si on les tiroit de celle où est x^4 , à
 sçauoir on en trouue vne vraye, qui est $\sqrt{7 + 2}$, & trois
 fausses, qui sont $\sqrt{7 - 2}$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$.
 Ainsi ayant $x^4 - 4xx - 8x + 35 \infty 0$, pource que la racine
 de $y^6 - 8y^4 - 124yy + 64 \infty 0$, est derechef 16, il faut
 écrire

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \text{ \& } xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Car icy $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait 5, & $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$
 fait 7. Et pource qu'on ne trouue aucune racine, ny
 vraye, ny fausse, en ces deux dernieres Equations, on
 connoist de là que les quatre de l'Equation dont elles
 procedent sont imaginaires; & que le Probleme, pour
 lequel on l'a trouuée, est plan de sa nature; mais qu'il
 ne sçauroit en aucune façon estre construit, à cause que
 les quantitez données ne peuuent se ioinde.

Tout de mesme ayant

$$\left. \begin{array}{l} z^4 + \frac{1}{2}aa \\ - cc \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} - a^3 \\ z^2 - acc \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} + \frac{5}{16}a^4 \\ - \frac{1}{4}aacc \end{array} \right\} \infty 0,$$

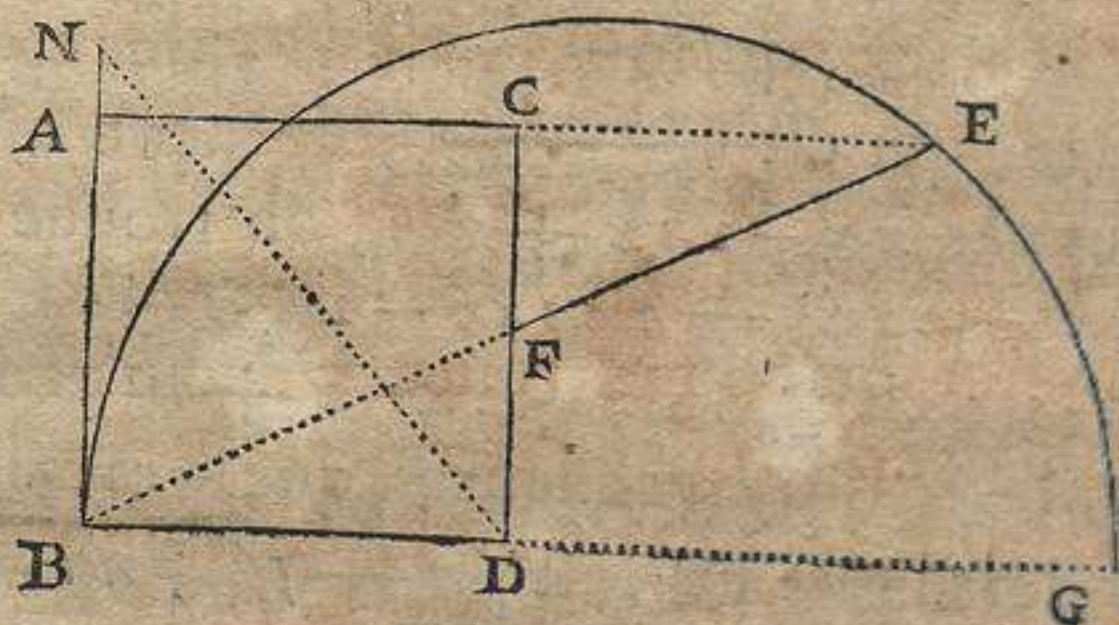
pource qu'on trouue $aa + cc$ pour yy , il faut écrire

$$zz - \sqrt{aa + cc} z + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} \infty 0, \text{ \& }$$

$$zz + \sqrt{aa + cc} z + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} \infty 0.$$

Car y est $\sqrt{aa + cc}$, & $+ \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ est $\frac{3}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$
 est $\frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$. D'où on connoist que la valeur de z

est $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
 ou bien $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.
 Et pource que nous auions fait cy-dessus $z + \frac{1}{2}ax$,
 nous apprenons que la quantité x , pour la connoissance
 de laquelle nous auons fait toutes ces operations, est
 $+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.



Mais afin qu'on puisse mieux connoistre l'vtilité de cette regle, il faut que ie l'applique à quelque Probleme.

Si le quarré AD, & la ligne BN estant donnez, il faut prolonger le costé AC iusques a E, en sorte qu'EF, tirée d'E vers B, soit égale à NB. On apprend de Pappus, qu'ayant premierement prolongé BD iusques à G, en sorte que DG soit égale à DN, & ayant décrit vn cercle dont le diamettre soit BG, si on prolonge la ligne droite AC, elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E, qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne scauroient point cette construction elle seroit assez difficile à rencontrer, & en la cherchant par la methode icy proposée, ils ne s'auiseroient iamais de prendre DG pour la qua-

Exemple
de l'usage
de ces re-
ductions.

M iij



tité inconnuë, mais plutôt CF, ou FD, à cause que ce
 sont elles qui conduisent le plus aisement à l'Equation: &
 lors ils en trouueroient vne qui ne seroit pas facile à de-
 mêler, sans la regle que ie viens d'expliquer. Car posant a
 pour BD ou CD, & c pour EF, & x pour DF, on à CF
 $\propto a-x$, & comme CF ou $a-x$, est à FE ou c , ainsi FD ou x ,
 est à BF, qui par consequent est $\frac{cx}{a-x}$. Puis à cause du trian-
 gle rectangle BDF, dont les costez sont l'un x & l'au-
 tre a , leurs quarrez, qui sont $xx + aa$, sont égaux à ce-
 luy de la baze, qui est $\frac{ccxx}{xx-2ax+aa}$, de façon que multi-
 pliant le tout par $xx-2ax+aa$, on trouue que l'E-
 quation est $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto ccxx$,
 ou bien $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0$. Et on
 connoist par les regles precedentes, que sa racine, qui est
la longueur de la ligne DF, est $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc -$
 $\sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

Que si on posoit BF, ou CE, ou BE pour la quantité
 inconnuë, on viendroit derechef à vne Equation, en la-
 quelle il y auroit 4 dimensions, mais qui seroit plus aisée
 a demêler, & on y viendroit assez aisement; au lieu que
 si c'estoit DG qu'on supposast, on viendroit beaucoup
 plus difficilement à l'Equation, mais aussi elle seroit tres
 simple. Ce que ie mets icy pour vous auertir, que lors
 que le Probleme proposé n'est point solide, si en le cher-
 chant par vn chemin on vient à vne Equation fort com-
 posée, on peut ordinairement venir à vne plus simple, en
 le cherchant par vn autre.

Ie pourrois encore ajoûter diuerses regles pour de-
 mêler les Equations, qui vont au Cube, ou au Quarré

de quarré, mais elles seroient superfluës; car lors que les Problemes sont plans, on en peut toujourns trouver la construction par celles-cy.

Je pourrois aussi en ajoûter d'autres pour les Equations qui montent iusques au surfolide, ou au quarré de cube, ou au delà, mais i'ayme mieux les comprendre toutes en vne, & dire en general, que lors qu'on a tâché de les reduire à mesme forme, que celles d'autant de dimensions, qui viennent de la multiplication de deux autres qui en ont moins, & qu'ayant dénombré tous les moyens, par lesquels cette multiplication est possible, la chose n'a pû succeder par aucun, on doit s'asseurer qu'elles ne scauroient estre reduites à de plus simples. En sorte que si la quantité inconnuë à 3 ou 4 dimensions, le Probleme pour lequel on la cherche est solide; & si elle en a 5, ou 6, il est d'un degré plus composé; & ainsi des autres.

Au reste i'ay omis icy les demonstrations de la plupart de ce que i'ay dit, à cause qu'elles m'ont semblé si faciles, que pourvû que vous preniez la peine d'examiner methodiquement si i'ay failly, elles se presenteront à vous d'elles mesmes: & il sera plus utile de les apprendre en cette façon, qu'en les lisant.

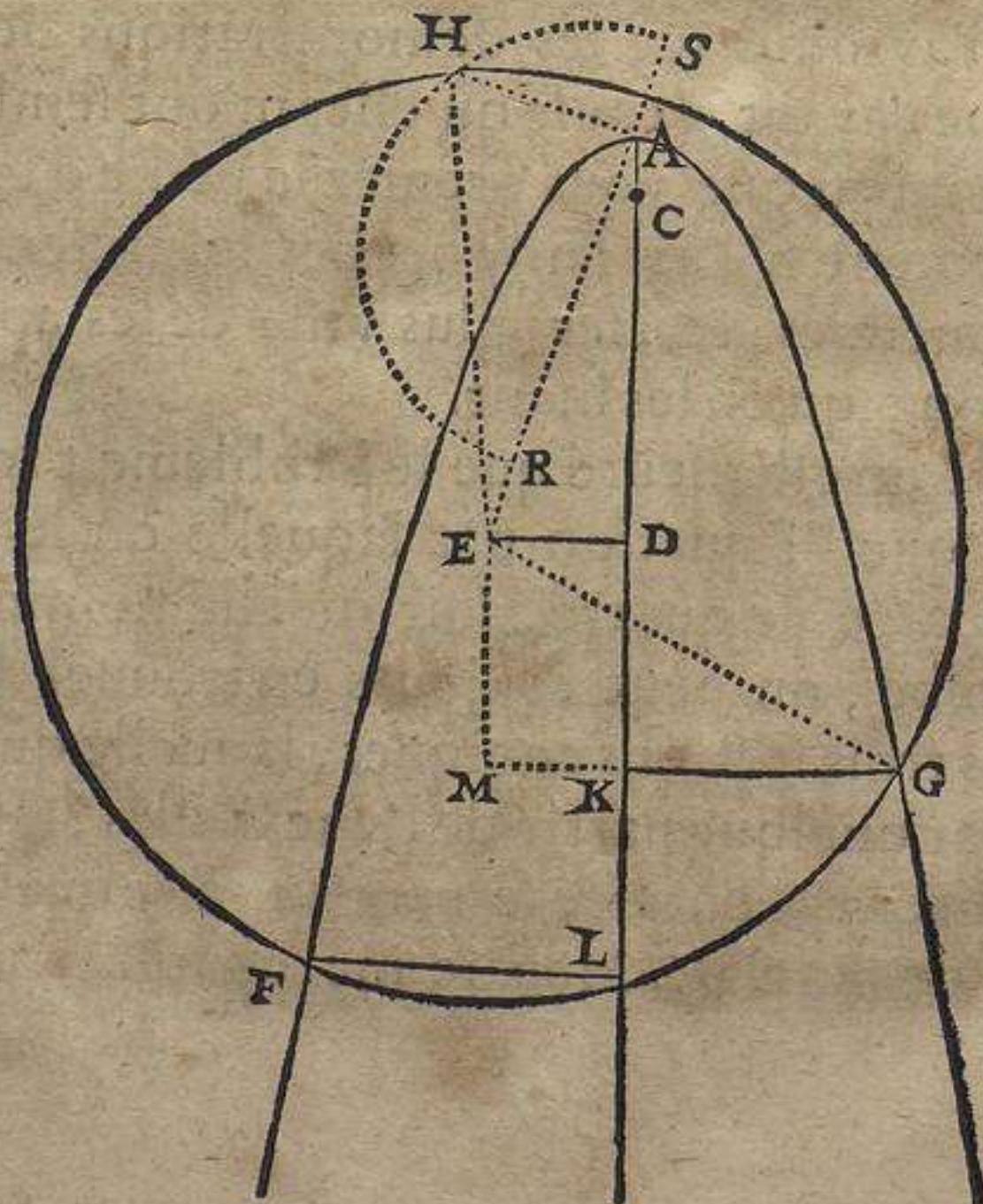
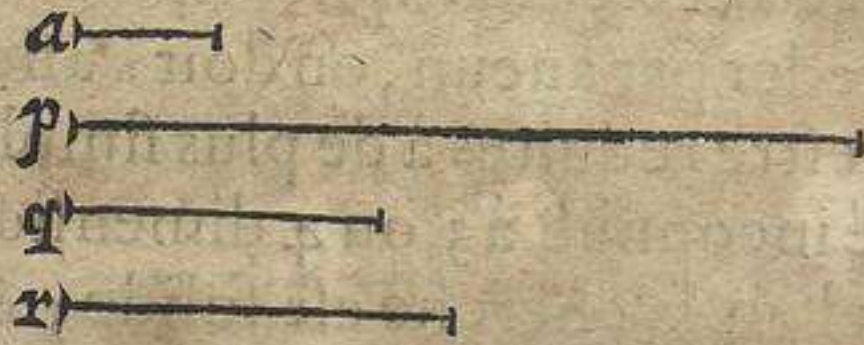
Or quand on est assure que le Probleme proposé est solide, soit que l'Equation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, soit qu'elle ne monte que iusques au cube, on peut toujourns en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou mesme par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse estre, en ne se servant au reste que de lignes droites, & de cercles. Mais ie me contenteray icy de

Regle generale pour reduire les Equations qui passent le quarré de quarré.

Façon generale pour construire tous les Problemes solides, reduits à vne Equation de trois ou quatre dimensions.

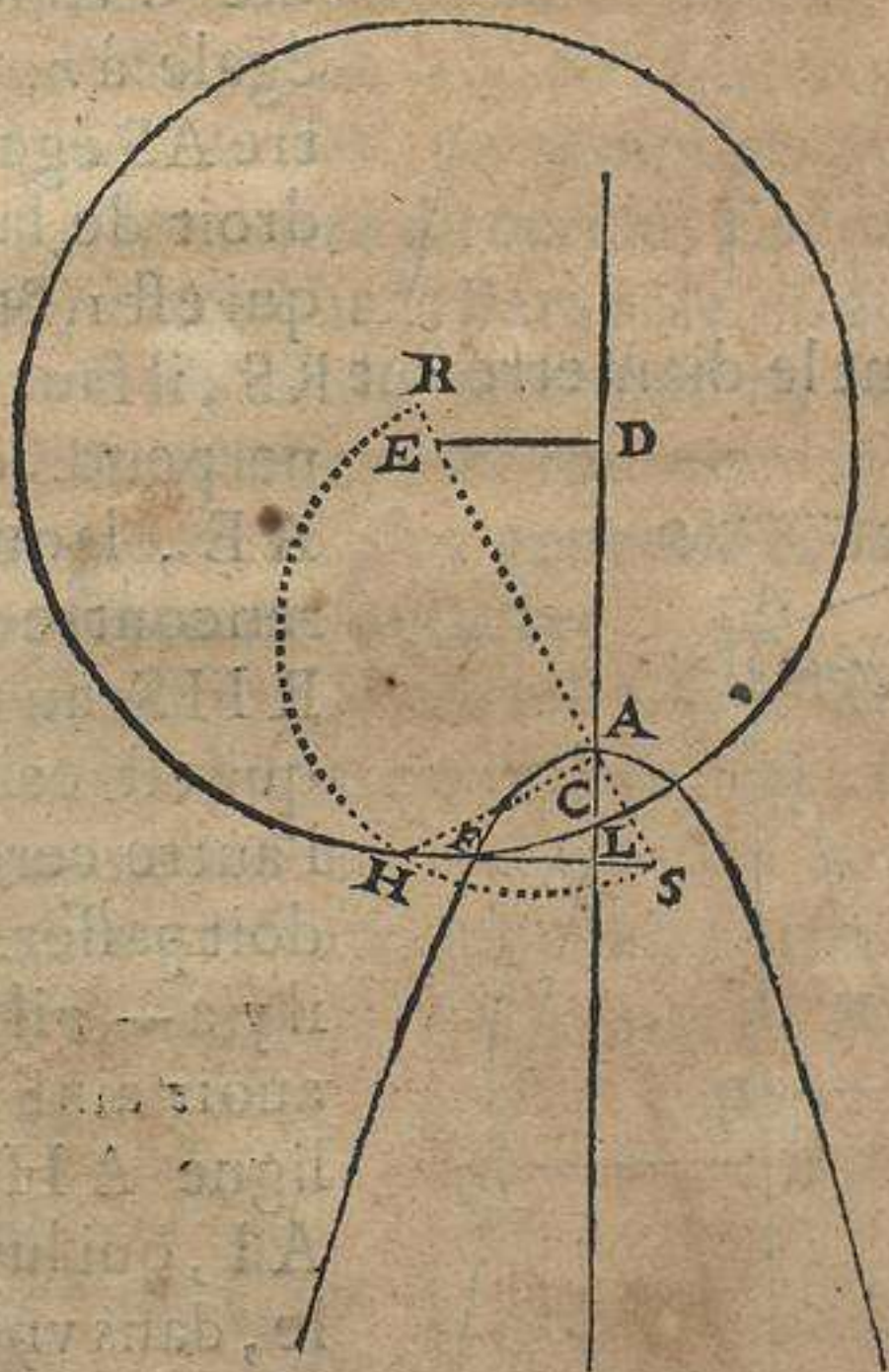
donner vne regle generale pour les trouver toutes par le moyen d'une Parabole, à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple.

Premierement il faut oster le second terme de l'Equation proposée, s'il n'est déjà nul, & ainsi la reduire à telle forme, $z^3 \infty^*$. apz . aaq , si la quantité inconnue n'a que trois dimensions; ou bien à telle, $z^4 \infty^*$. $apzz$. $aaqz$. a^3r , si elle en a quatre; ou bien en prenant a pour l'unité, à telle, $z^3 \infty^*$. pz . q , & à telle $z^4 \infty^*$. pzz . qz . r .



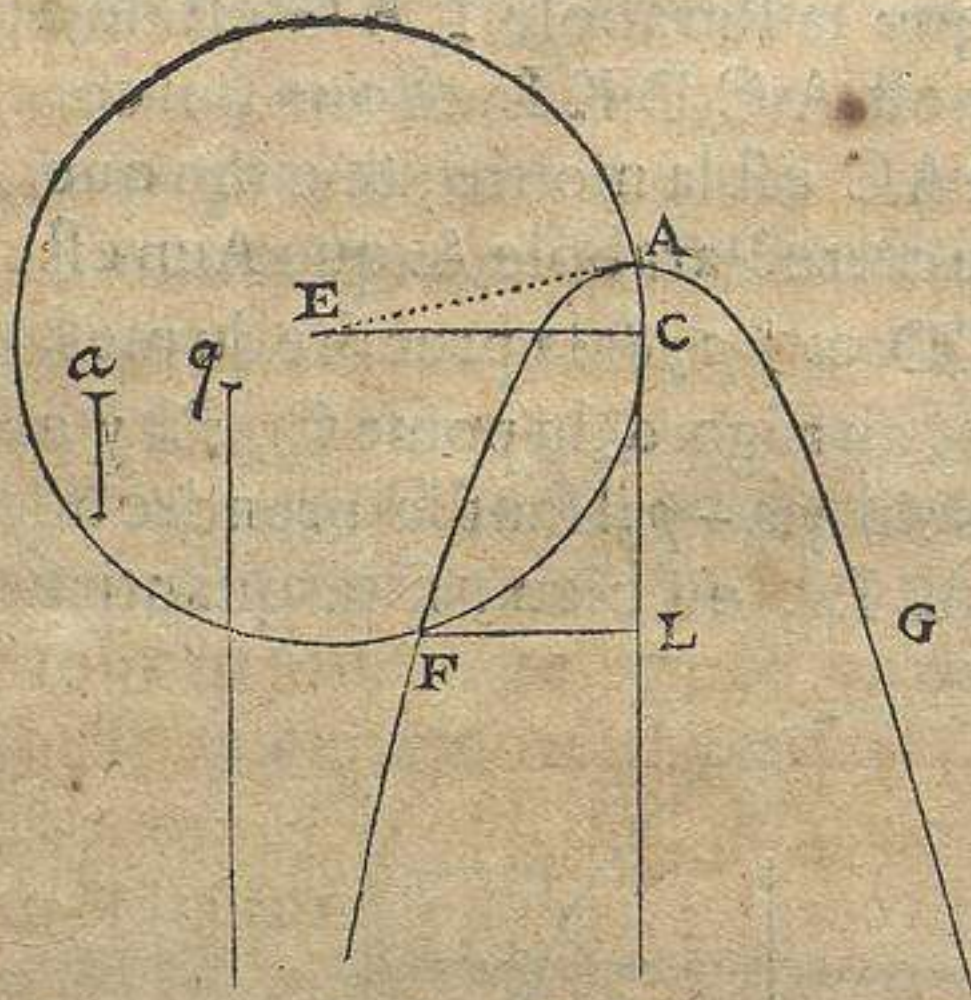
Après

Après cela supposant que la Parabole FAG est déjà décrite, & que son aissieu est $ACKL$, & que son costé droit est a , ou r , dont AC est la moitié, & enfin que le point C est au dedans de cette Parabole, & que A en est le sommet; Il faut faire $CD = \frac{1}{2} p$, & la prendre du mesme costé, qu'est le point A au regard du point C , s'il y a $+p$ en l'Equation; mais s'il y a $-p$ il faut la prendre de l'autre costé. Et du point D , ou bien, si la quantité

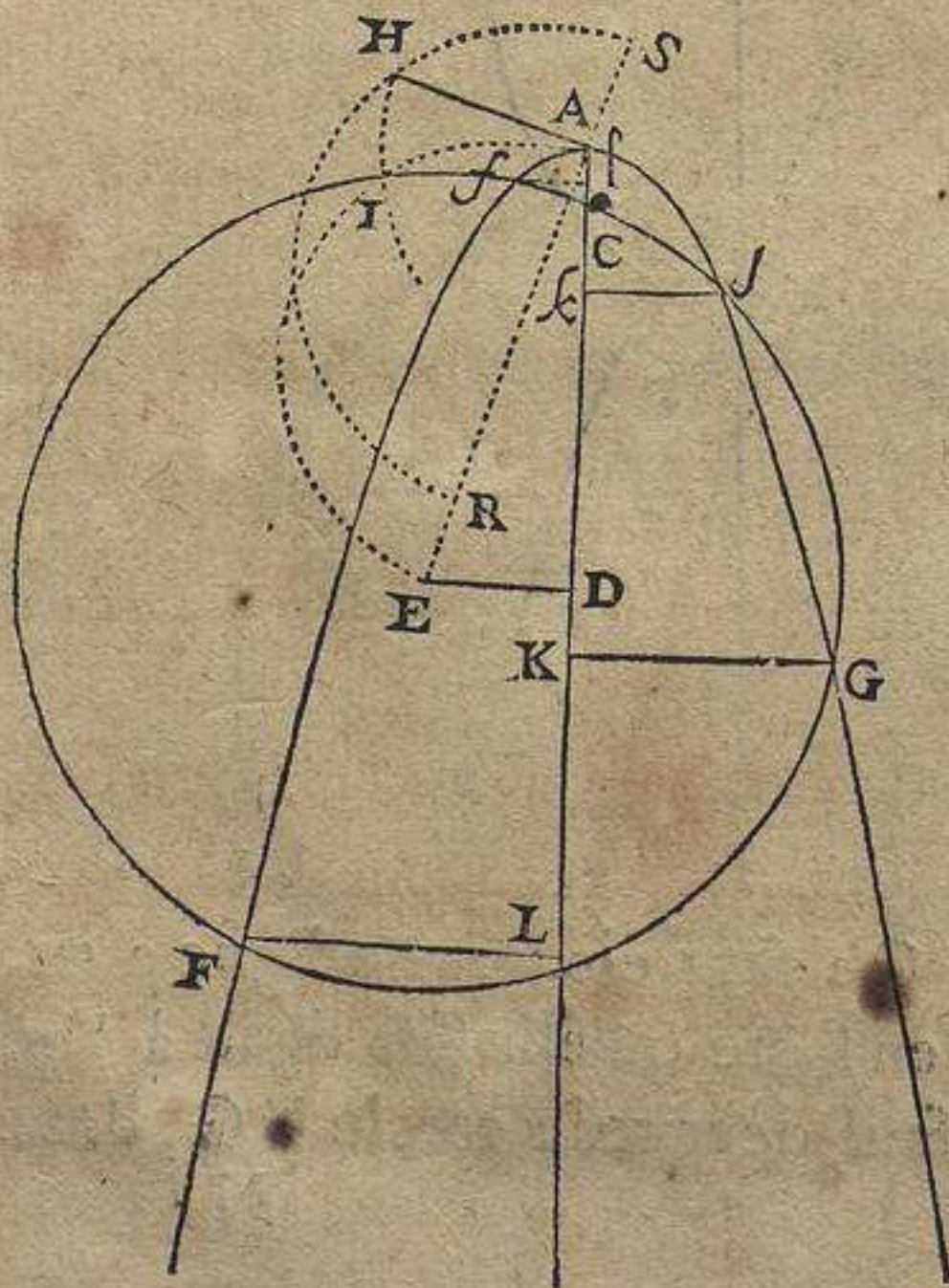


p estoit nulle, du point C il faut élever vne ligne a angles droits iusques a E , en sorte qu'elle soit égale à $\frac{1}{2} q$. Et enfin du centre E il faut décrire le cercle FG , dont

N.



crit vn cercle dont le diametre soit



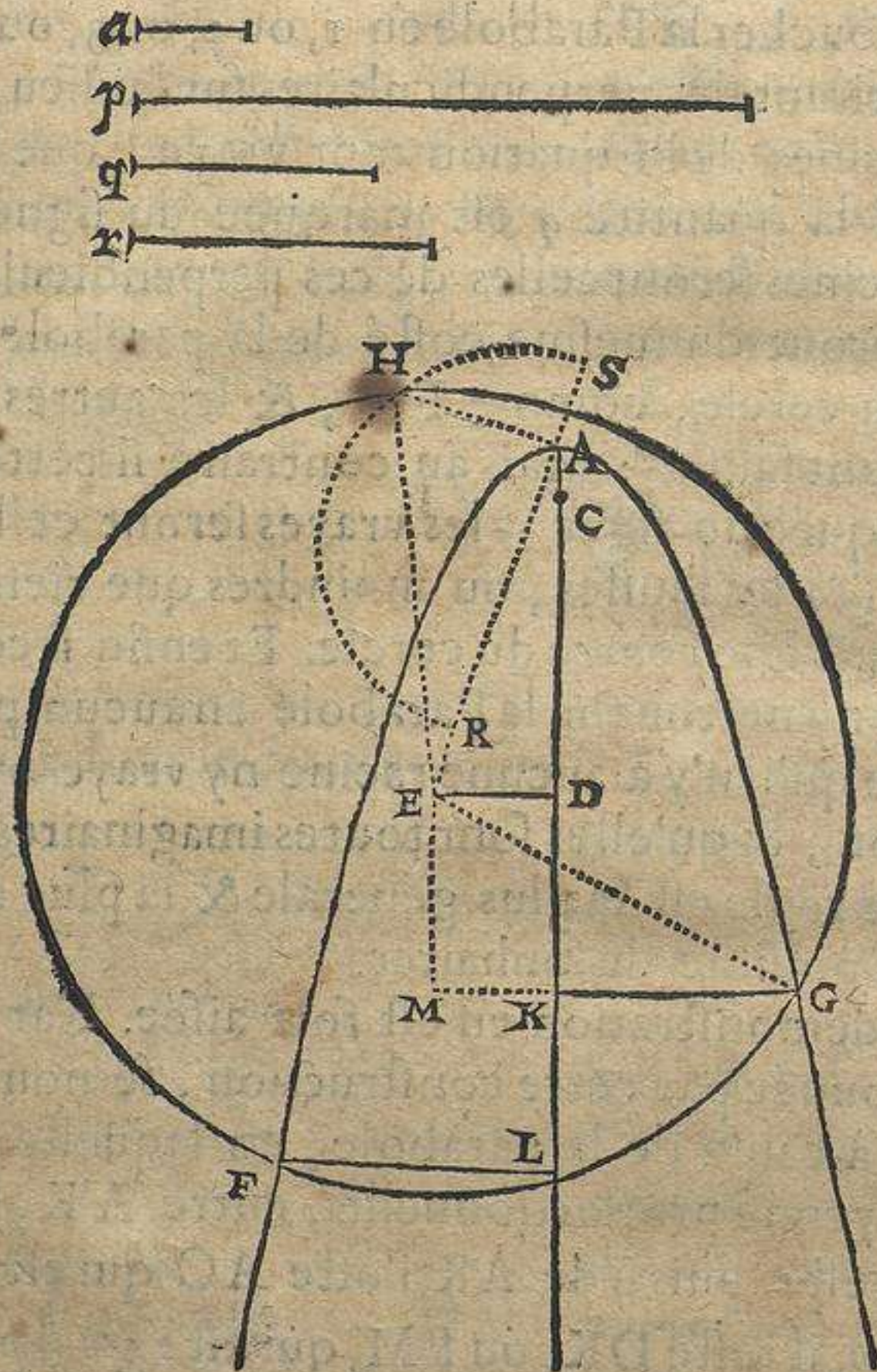
le demi diametre soit
 AE, si l'Equation
 n'est que cubique, en
 sorte que la quanti-
 té r soit nulle. Mais
 quand il y a $+$ r il
 faut dans cette ligne
 AE prolongée, pren-
 dre d'un costé AR
 égale à r , & de l'au-
 tre AS égale au costé
 droit de la Parabole
 qui est 1, & ayant dé-
 crit vn cercle dont le diametre soit RS, il faut faire AH
 perpendiculaire sur
 AE, laquelle AH
 rencontre ce cercle
 RHS au point H,
 qui est celuy par où
 l'autre cercle FHG
 doit passer. Et quand
 il y a $-$ r il faut après
 auoir ainsi trouué la
 ligne AH, inscrire
 AI, qui luy soit éga-
 le, dans vn autre cer-
 cle, dont AE soit le
 diametre, & lors
 c'est par le point I,
 que doit passer FIG

le premier cercle cherché. Or ce cercle FG peut couper, ou toucher la Parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 points, desquels tirant des perpendiculaires sur l'axe, on a toutes les racines de l'Equation tant vrayes, que fausses. A sçavoir si la quantité q est marquée du signe $+$, les vrayes racines seront celles de ces perpendiculaires, qui se trouveront du mesme costé de la parabole, que E le centre du cercle, comme FL; & les autres, comme GK, seront fausses: Mais au contraire si cette quantité q est marquée du signe $-$ les vrayes seront celles de l'autre costé; & les fausses, ou moindres que rien seront du costé où est E le centre du cercle. Et enfin si ce cercle ne coupe, ny ne touche la Parabole en aucun point, cela rémoigne qu'il n'y a aucune racine ny vraye ny fausse en l'Equation, & qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cette regle est la plus generale & la plus accomplie qu'il soit possible de souhaiter.

Et la demonstration en est fort aisée. Car si la ligne GK, trouuée par cette construction, se nomme z , AK fera z , à cause de la parabole, en laquelle GK doit estre moyenne proportionnelle, entre AK, & le costé droit qui est 1. puis si de AK i'oste AC qui est $\frac{1}{2}$, & CD qui est $\frac{1}{2}p$, il reste DK, ou EM, qui est $z - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le quarré est

$z^2 - pz - z + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et à cause que DE, ou KM est $\frac{1}{2}q$, la toute GM est $z + \frac{1}{2}q$, dont le quarré est $z^2 + qz + \frac{1}{4}qq$, & assemblant ces deux quarez, on

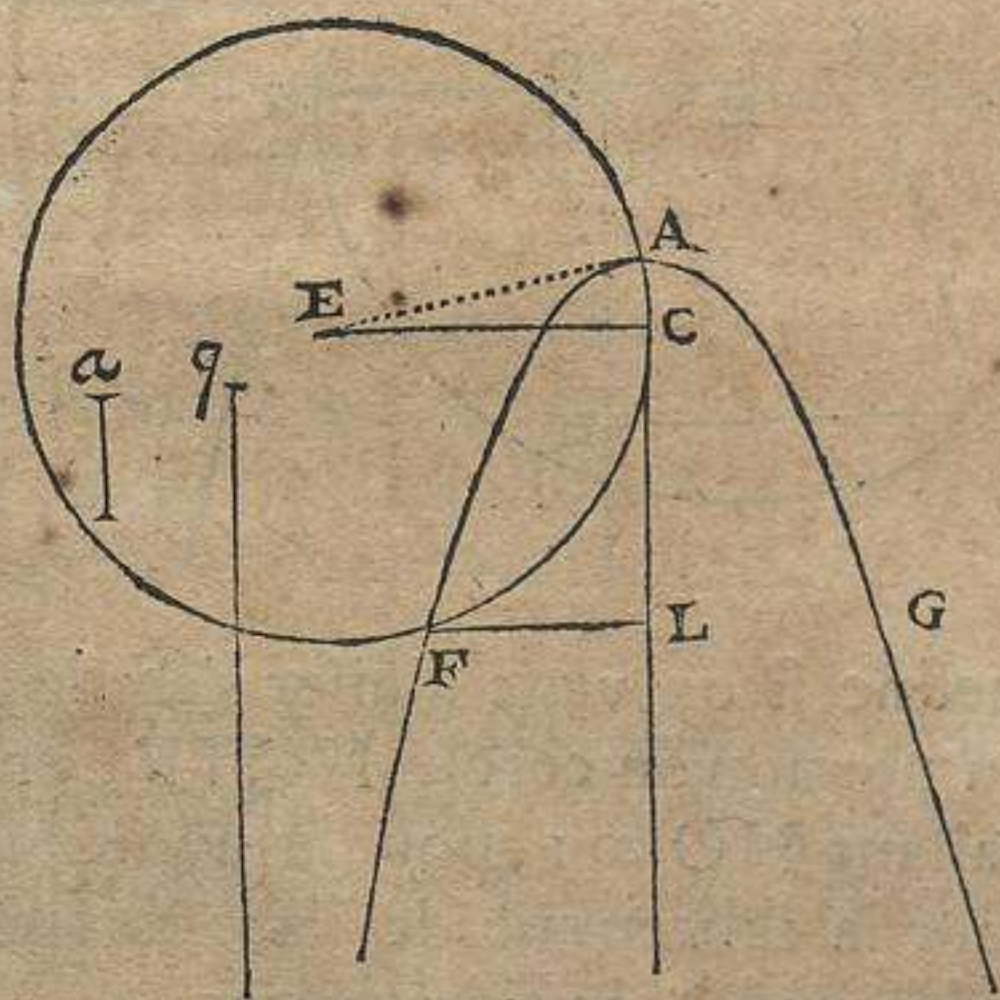
$$a \ z^2 - pz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4},$$



pour le quarré de la ligne GE, à cause qu'elle est la baze
du triangle rectangle E M G.

Mais à cause que cette mesme ligne GE est le demi
diametre du cercle FG, elle se peut encore expliquer en
d'autres termes, à sçavoir ED estant $\frac{1}{2}q$, & AD estant
 $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, EA est $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$ à cause de

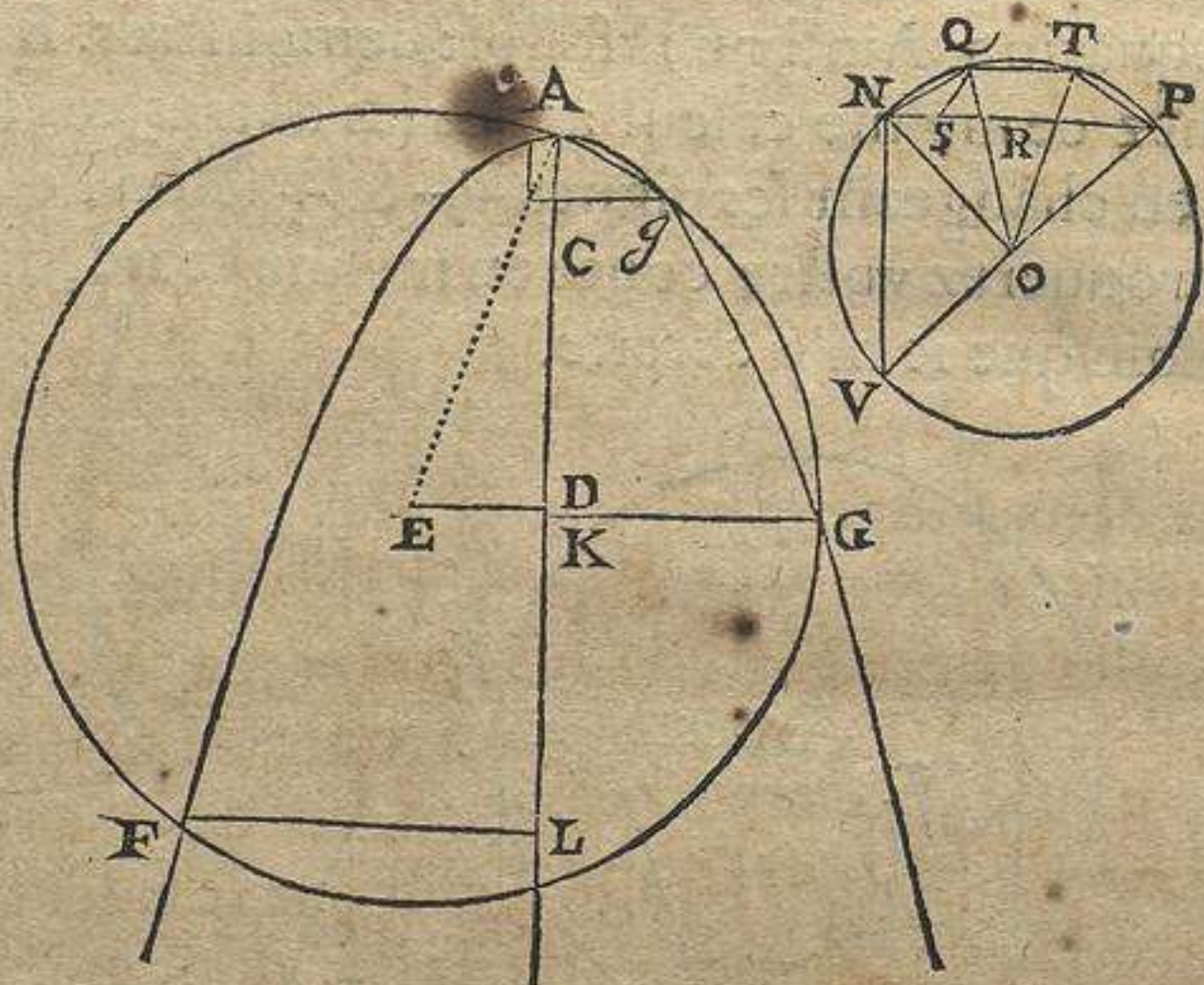
l'angle droit ADE, puis HA estant moyenne proportionnelle entre AS qui est 1 & AR qui est r, elle est \sqrt{r} . Et à cause de l'angle droit EAH, le quarré de HE, ou EG est $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$: Si bien qu'il y a Equation entre cette somme & la precedente. Ce qui est le mesme que $z^4 \propto^* pzz - qz + r$. Et par consequent la ligne trouuée GK qui a esté nommée z est la racine de cette Equation. Ainsi qu'il falloit demonstrier. Et si vous appliquez ce mesme calcul à tous les autres cas de cette regle, en changeant les signes + & -- selon l'occasion, vous y trouuerez vostre conte en mesme sorte, sans qu'il soit besoin que ie m'y arreste.



Si on veut donc suiuant cette regle trouuer deux moyennes proportionnelles entre les lignes a & q; chacun sçait que posant z pour l'une, comme a est à z, ainsi z à $\frac{z^2}{a}$, & $\frac{z^2}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a Equation entre q & $\frac{z^3}{aa}$.

L'invention de 2 moyennes proportionnelles.

c'est à dire, $z^3 \propto^{**} a a q$. Et la Parabole FAG estant décrite avec la partie de son aissieu AC, qui est $\frac{1}{2} a$ la moitié du costé droit; il faut du point C élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2} q$, & du centre E, par A, décriuant le cercle AF, on trouue FL, & LA, pour les deux moyennes cherchées.



La façon
de diuiser
vn angle
en trois.

Tout de mesme si on veut diuiser l'angle NOP, ou bien l'arc, ou portion de cercle NQTP, en trois parties égales; faisant $NO \propto r$, pour le rayon du cercle, & $NP \propto q$, pour la subtendue de l'arc donné, & $NQ \propto z$, pour la subtendue du tiers de cet arc; l'Equation vient,

$z^3 \propto^{*} 3z - q$. Car ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT; & faisant QS parallele à TO, on voit que comme NO est à NQ, ainsi NQ à QR, & QR à RS; en sorte

que NO estant 1 , & NQ estant z , QR est z^2 , & RS est z^3 : Et à cause qu'il s'en faut seulement RS , ou z^3 , que la ligne NP , qui est q , ne soit triple de NQ , qui est z ; on à $q \propto 3z - z^3$, ou bien,

$$z^3 \propto^* 3z - q.$$

Puis la Parabole FAG estant décrite, & CA la moitié de son costé droit principal estant $\frac{1}{2}$, si on prend $CD \propto \frac{1}{2}$, & la perpendiculaire $DE \propto \frac{1}{2}q$, & que du centre E , par A , on décriue le cercle $FAgG$, il coupe cette Parabole aux trois points F , g , & G , sans conter le point A qui en est le sommet. Ce qui monstre qu'il y a trois racines en cette Equation, à sçavoir les deux GK , & gk , qui sont vrayes; & la troisième qui est fausse, à sçavoir FL . Et de ces deux vrayes c'est gk la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne NQ qui estoit cherchée. Car l'autre GK , est égale à NV , la subtendue de la troisième partie de l'arc NVP , qui avec l'autre arc NQP acheue le cercle. Et la fausse FL est égale à ces deux ensemble QN & NV , ainsi qu'il est aisé à voir par le calcul.

Il seroit superflus que ie m'arrestasse à donner icy d'autres exemples; car tous les Problemes qui ne sont que solides se peuvent reduire à tel point, qu'on n'a aucun besoin de cette regle pour les construire, sinon entant qu'elle sert à trouuer deux moyennes proportionelles, ou bien à diuiser vn angle en trois parties égales. Ainsi que vous connoistrez en considerant, que leurs difficultez peuvent toujourns estre comprises en des Equations, qui ne montent que iusqu'au quarré de quarré, ou au cube: Et que toutes celles qui montent au quarré de quarré, se reduisent au quarré, par le moyen de quelques autres, qui ne

Que tous les problemes solides se peuvent reduire à ces deux constructions.

montent que iusques au cube : Et enfin qu'on peut oster le second terme de celles-cy. En sorte qu'il n'y en a point qui ne se puisse reduire à quelque vne de ces trois formes.

$$z^3 \propto^* -- p z + q.$$

$$z^3 \propto^* + p z + q.$$

$$z^3 \propto^* + p z -- q.$$

Or si on a $z^3 \propto^* -- p z + q$; la regle dont Cardan attribué l'inuention à vn nommé Scipio Ferreus, nous apprend que la racine est.

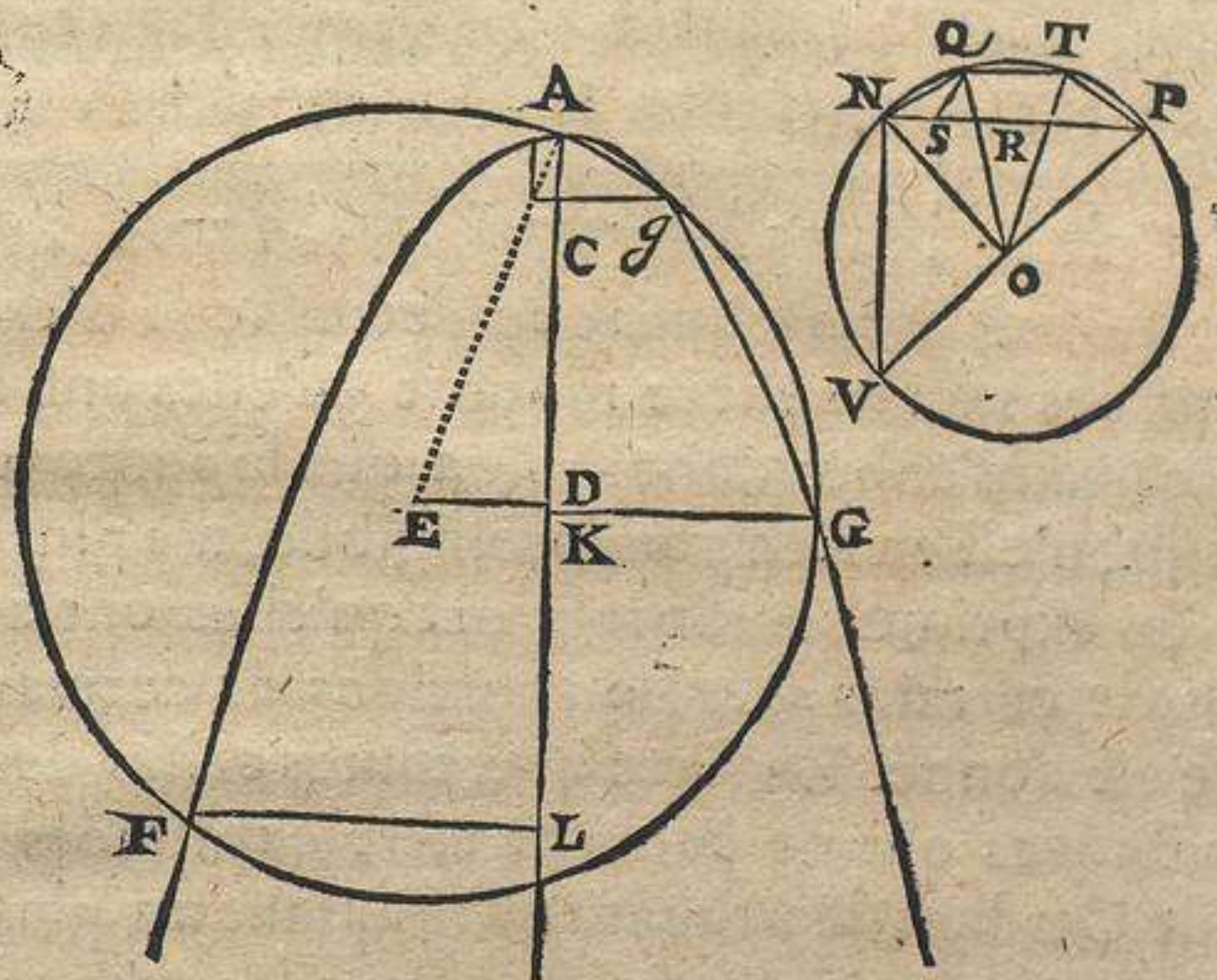
$$\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} -- \sqrt[3]{C. -- \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

Comme aussi lors qu'on a $z^3 \propto^* + p z + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme est plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du penultième, vne pareille regle nous apprend que la racine est,

$$\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} + \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

D'où il paroist qu'on peut construire tous les Problemes, dont les difficultez se reduisent à l'vne de ces deux formes, sans auoir besoin des sections coniques pour autre chose, que pour tirer les racines cubiques de quelques quantitez données, c'est à dire, pour trouuer deux moyennes proportionnelles entre ces quantitez & l'vnité.

Puis si on a $z^3 \propto^* + p z + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme ne soit point plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du penultième, en supposant le cercle NQP V, dont le demi diametre NO soit $\sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$, c'est à dire la moyenne proportionnelle entre le tiers de la quantité donnée p & l'vnité; & supposant aussi la ligne NP inscrite dans ce cercle qui soit $\frac{2q}{p}$, c'est à dire
qui



qui soit à l'autre quantité donnée q comme l'vnité est au tiers de p ; il ne faut que diuiser chacun des deux arcs NQP & NVP en trois parties égales, & on aura NQ , la subtenduë du tiers de l'un, & NV la subtenduë du tiers de l'autre, qui iointes ensemble composeront la racine cherchée.

Enfin si on a $z^3 \propto p z - q$, en supposant derechef le cercle $NQP V$, dont le rayon NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & l'inscrite NP soit $\frac{2p}{q}$, NQ la subtenduë tiers de l'arc NQP fera l'une des racines cherchées, & NV la subtenduë du tiers de l'autre arc fera l'autre. Au moins si le quarré de la moitié du dernier terme, n'est point plus grand, que le cube du tiers de la quantité connuë du penultième. Car s'il estoit plus grand, la ligne NP ne pourroit estre inscrite dans le cercle, à cause qu'elle seroit plus longue que son diamettre: Ce qui seroit cause que les deux vrayes ra-

O

cines de cette Equation ne seroient qu'imaginaires, & qu'il n'y en auroit de reelles que la fausse, qui suiuant la regle de Cardan seroit,

$$\sqrt[3]{C. \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$$

La façon d'exprimer la valeur de toutes les racines des Equations cubiques: & en suite de toutes celles qui ne montent que iusques au quarré de

Au reste il est à remarquer que cette façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux costez de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoisse, n'est en rien plus intelligible, n'y plus simple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux subtendus de certains arcs, ou portions de cercles, dont le triple est donné. En sorte que toutes celles des Equations cubiques qui ne peuvent estre exprimées par les regles de Cardan, le peuvent estre autant ou plus clairement par la façon icy proposée.

Car si par exemple, on pense connoistre la racine de cette Equation, $z^3 \propto^* - qz + p$. à cause qu'on sçait qu'elle est composée de deux lignes, dont l'une est le costé d'un cube, duquel le contenu est $\frac{1}{2} q$, ajouté au costé d'un quarré, duquel derechef le contenu est $\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3$; Et l'autre est le costé d'un autre cube, dont le contenu est la difference, qui est entre $\frac{1}{2} q$, & le costé de ce quarré dont le contenu est $\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3$, qui est tout ce qu'on en apprend par la regle de Cardan. Il n'y a point de doute qu'on ne connoisse autant ou plus distinctement la racine de celle-cy, $z^3 \propto^* + q - p$, en la considerant inscrite dans un cercle, dont le demi diametre est $\sqrt{\frac{1}{3} p}$, & sçachant qu'elle y est la subtendue d'un arc dont le triple à pour sa subtendue $\frac{2q}{p}$. Mesmes ces ter-

mes sont beaucoup moins embarassez que les autres, & ils se trouueront beaucoup plus cours si on veut vser de quelque chiffre particulier pour exprimer ces subten-
duës, ainsi qu'on fait du chiffre \sqrt{C} . pour exprimer le costé des cubes.

Et on peut aussi en suite de cecy exprimer les racines de toutes les Equations qui montent iufques au quarré de quarré, par les regles cy-dessus expliquées. En sorte que ie ne sçache rien de plus à desirer en cette matiere. Car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus simples, ny qu'on les determine par aucune construction qui soit ensemble plus generale & plus facile.

Il est vray que ie n'ay pas encore dit sur quelles raisons ie me fonde, pour oser ainsi asseurer, si vne chose est possible ou ne l'est pas. Mais si on prend garde comment, par la methode dont ie me sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Geometres, se reduit à vn mesme genre de Problemes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation; on iugera bien qu'il n'est pas malaisé de faire vn dénombrement de toutes les voyes par lesquelles on les peut trouuer, qui soit suffisant pour démonstrer qu'on a choisi la plus generale, & la plus simple. Et particulierement pour ce qui est des Problemes solides, que i'ay dit ne pouuoir estre construits, sans qu'on y employe quelque ligne plus composée que la circulaire, c'est chose qu'on peut assez trouuer, de ce qu'ils se reduisent tous à deux constructions; en l'vne desquelles il faut auoir tout ensemble les deux points, qui déterminent deux moyennes proportionnelles entre deux

Pourquoy les Problemes solides ne peuent estre construits sans les sections coniques, ny ceux qui sont plus composés sans quelques autres lignes plus composées



lignes données ; & en l'autre les deux points , qui diuisent en trois parties égales vn arc donné : Car d'autant que la courbure du cercle ne dépend , que d'un simple rapport de toutes ses parties , au point qui en est le centre ; on ne peut aussi s'en seruir qu'à déterminer vn seul point entre deux extremes , comme à trouuer vne moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données , ou diuiser en deux vn arc donné : Au lieu que la courbure des sections coniques , dépendant touiours de deux diuerses choses , peut aussi seruir à déterminer deux points differens.

Mais pour cette mesme raison il est impossible , qu'aucun des Problemes qui sont d'un degré plus composez que les solides , & qui présupposent l'inuention de quatre moyennes proportionnelles , ou la diuision d'un angle en cinq parties égales , puissent estre construits par aucune des sections coniques. C'est pourquoy ie croiray faire en cecy tout le mieux qui se puisse , si ie donne vne regle generale pour les construire , en y employant la ligne courbe qui se décrit par l'interfection d'une Parabole & d'une ligne droite en la façon cy-dessus expliquée. Car i'ose assurer qu'il n'y en a point de plus simple en la nature , qui puisse seruir à ce mesme effect ; & vous auez vû comme elle suit immediatement les sections coniques , en cette question tant cherchée par les anciens , dont la solution enseigne par ordre toutes les lignes courbes , qui doivent estre receuës en Geometrie.

Façon generale
pour construire
tous les
Problemes
reduits a

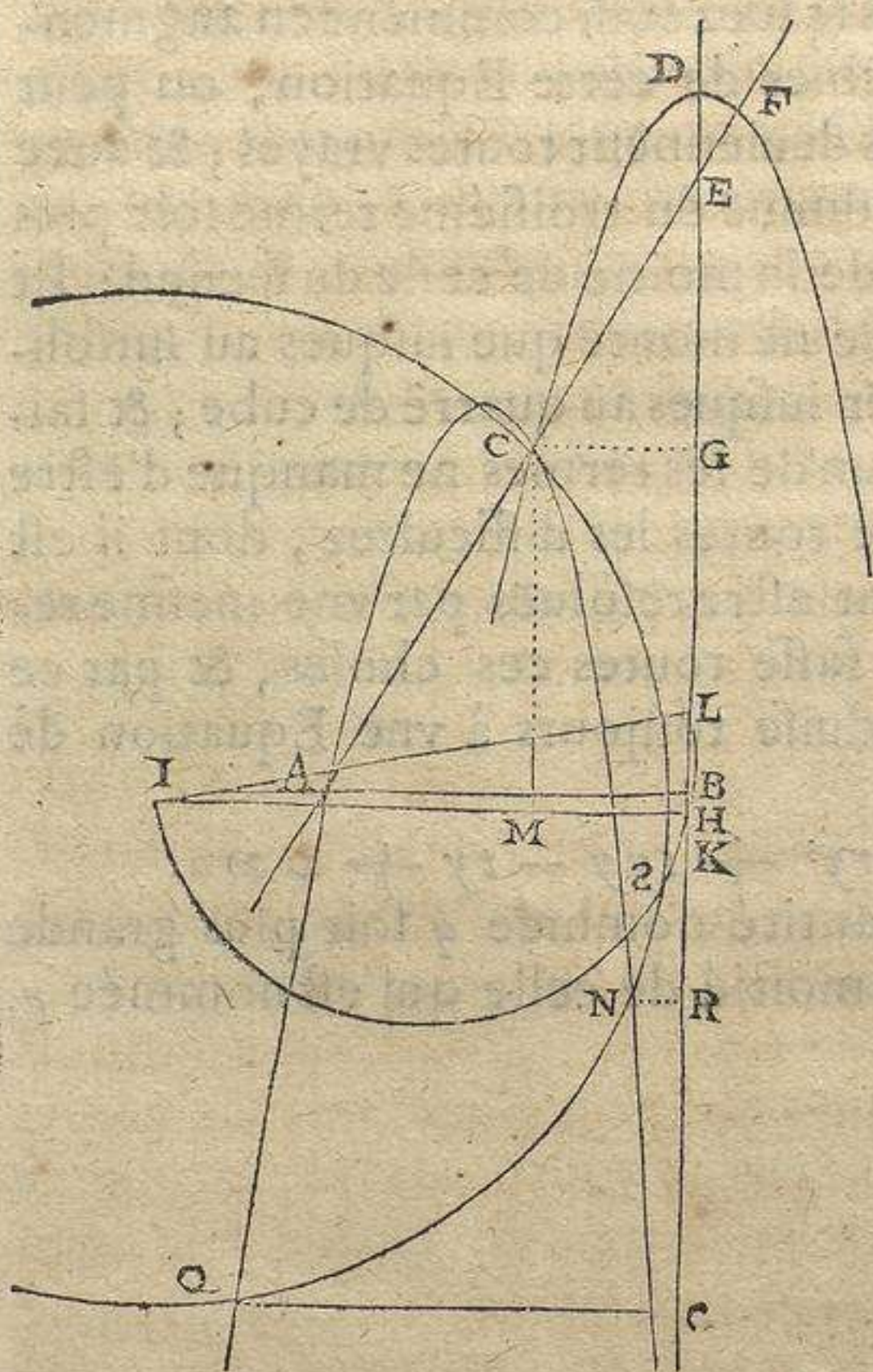
Vous sçauetz déjà comment , lors qu'on cherche les quantitez qui sont requises pour la construction de ces Problemes , on les peut touiours reduire à quelque Equation , qui ne monte que iusques au quarré de cube, ou

au surfolide. Puis vous sçavez aussi comment en augmentant la valeur des racines de cette Equation, on peut toujours faire qu'elles deuiennent toutes vrayes; & avec cela que la quantité connuë du troisieme terme soit plus grande que le quarré de la moitié de celle du second: Et enfin comment, si elle ne monte que iusques au surfolide, on la peut hausser iusques au quarré de cube; & faire que la place d'aucun de ses termes ne manque d'estre remplie. Or afin que toutes les difficultez, dont il est icy question, puissent estre resoluës par vne mesme regle, ie desire qu'on fasse toutes ces choses, & par ce moyen qu'on les reduise toujours à vne Equation de telle forme,

$$y^6 -- p y^5 + q y^4 -- r y^3 + s y y -- t y + v \propto 0.$$

& en laquelle la quantité nommée q soit plus grande que le quarré de la moitié de celle qui est nommée p .

vne Equation qui n'a point plus de six dimensions.



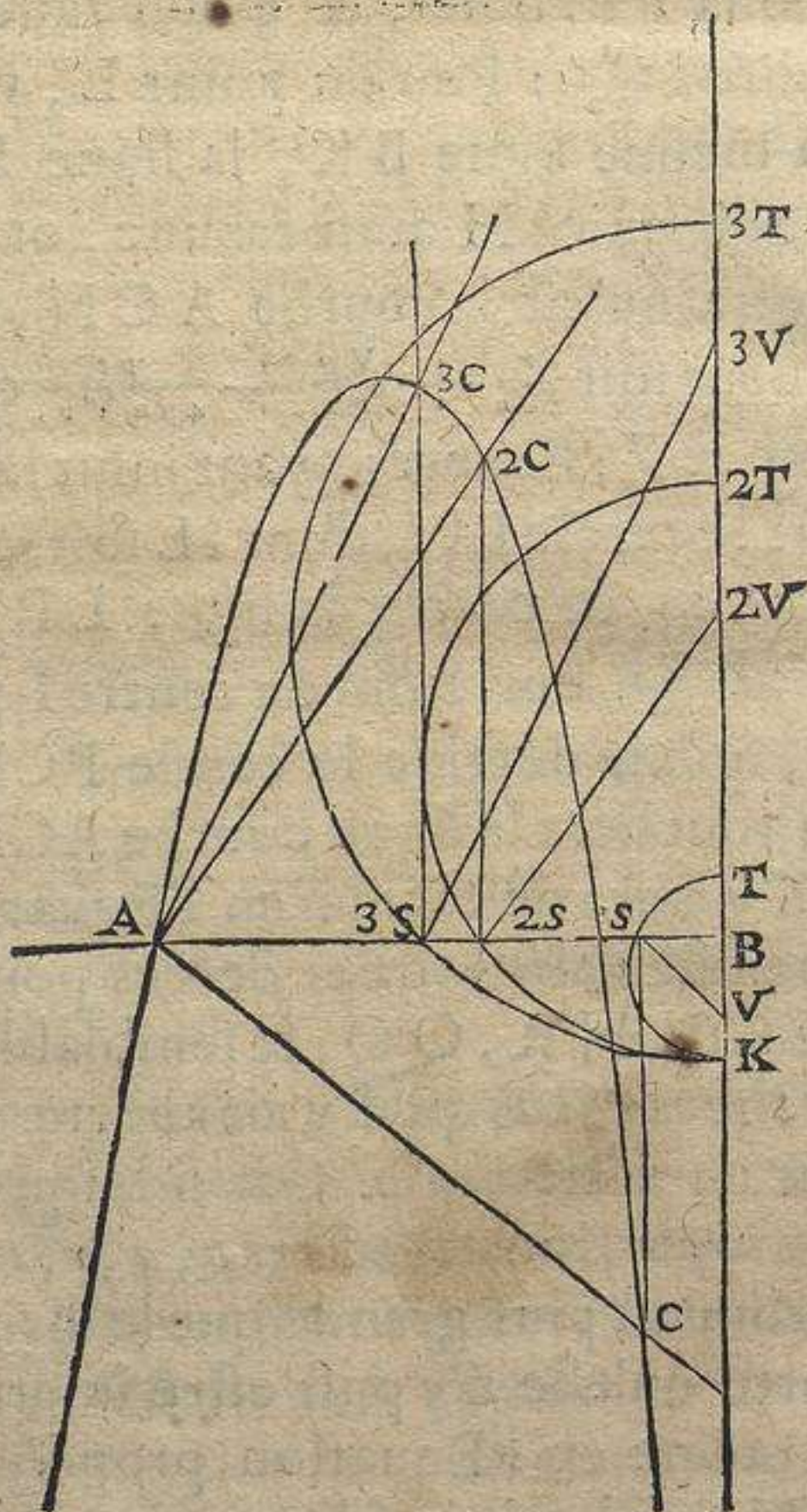
Puis ayant fait la ligne BK indéfiniment longue des deux costez; & du point B ayant tiré la perpendiculaire AB, dont la longueur soit $\frac{1}{2} p$; il faut dans vn plan separé décrire vne Parabole, comme CDF dont le costé droit principal soit

$\sqrt{\frac{t}{v} + q} - \frac{1}{4} pp$,
 que ie nommeray n pour abreger. Après cela il faut poser le plan dans lequel est cette Parabole sur celuy ou sont les lignes AB

& BK, en sorte que son aissieu DE se rencontre iustement au dessus de la ligne droite BK: Et ayant pris la partie de cet aissieu, qui est entre les poins E & D, égale à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, il faut appliquer sur ce point E vne longue regle, en telle façon qu'estant aussi appliquée sur le point A du plan de dessous, elle demeure toujourns iointe à ces deux poins, pendant qu'on hauffera ou baiffera la Parabole tout le long de la ligne BK, sur laquelle son aissieu

est appliqué. Au moyen dequoy l'interfection de cette Parabole, & de cette regle, qui se fera au point C, décrira la ligne courbe ACN, qui est celle dont nous avons besoin de nous servir pour la construction du Probleme proposé. Car après qu'elle est ainsi décrite, si on prend le point L en la ligne BK, du costé vers lequel est tourné le sommet de la Parabole, & qu'on fasse BL égale à DE, c'est à dire à $\frac{2Vv}{p^n}$: Puis du point L, vers B, qu'on prenne en la mesme ligne BK, la ligne LH, égale à $\frac{r}{2n\sqrt{v}}$; & que du point H ainsi trouué, on tire à angles droits, du costé qu'est la courbe ACN, la ligne HI, dont la longueur soit $\frac{r}{2nn} + \frac{Vv}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, qui pour abréger sera nommée $\frac{m}{nn}$: Et après, ayant ioint les points L & I, qu'on décriue le cercle LPI, dont IL soit le diametre; & qu'on inscrive en ce cercle la ligne LP dont la longueur soit $\sqrt{s + \frac{pVv}{nn}}$: Puis enfin du centre I, par le point P ainsi trouué, qu'on décriue le cercle PCN. Ce cercle coupera ou touchera la ligne courbe ACN, en autant de points qu'il y aura de racines en l'Equation: En sorte que les perpendiculaires tirées de ces points sur la ligne BK, comme CG, NR, QO, & semblables, seront les racines cherchées. Sans qu'il y ait aucune exception ny aucun défaut en cette regle. Car si la quantité s estoit si grande, à proportion des autres p, q, r, t, & v, que la ligne LP se trouuast plus grande que le diametre du cercle IL en sorte qu'elle n'y pust estre inscrite, il n'y auroit aucune racine en l'Equation proposée qui ne fust imaginaire: Non plus que si le cercle IP estoit si petit, qu'il ne coupast la courbe ACN en aucun point. Et il la

peut couper en six differens, ainsi qu'il peut y auoir six diuerses racines en l'Equation. Mais lors qu'il l'a coupe en moins, cela témoigne qu'il y a quelques-vnes de ces racines qui sont égales entre elles, ou bien qui ne sont qu'imaginaires.



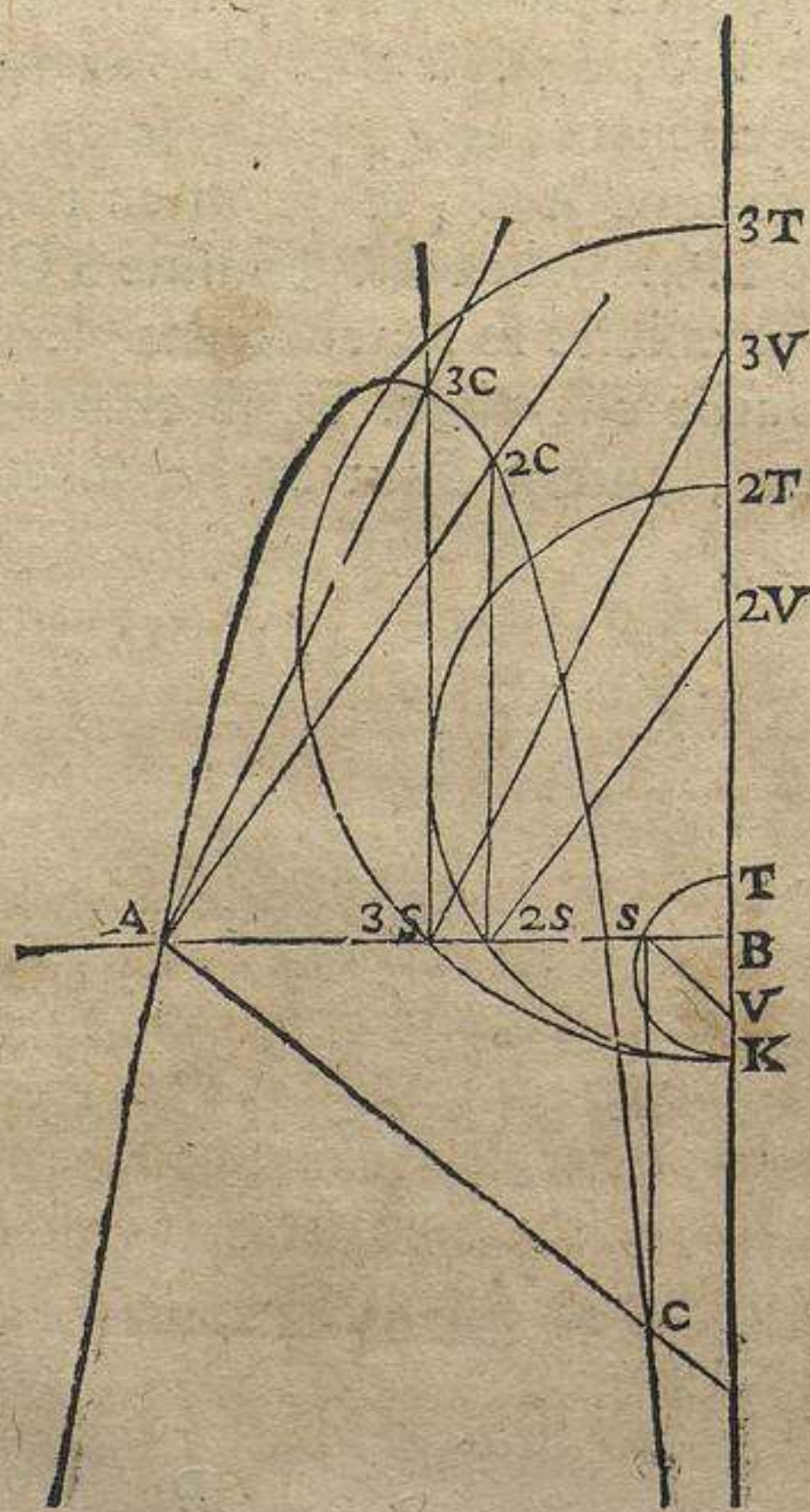
Que

Que si la façon de tracer la ligne ACN par le mouvement d'une Parabole vous semble incommode, il est aisé de trouver plusieurs autres moyens pour la décrire. Comme si ayant les mesmes quantitez que deuant pour AB & BL; & la mesme pour BK, qu'on auoit posée pour le costé droit principal de la Parabole; on décrit le demi-cercle KST dont le centre soit pris à discrétion dans la ligne BK, en sorte qu'il coupe quelque part la ligne AB, comme au point S, & que du point T, où il finit, on prenne vers K la ligne TV, égale à BL; Puis ayant tiré la ligne SV, qu'on en tire vne autre, qui luy soit parallele, par le point A, comme AC; & qu'on en tire aussi vne autre par S, qui soit Parallele à BK, comme SC; le point C, où ces deux paralleles se rencontrent, sera l'un de ceux de la ligne courbe cherchée. Et on en peut trouver, en mesme sorte, autant d'autres qu'on en desire.

P



Or la demonstration de tout cecy est assez facile. Car appliquant la regle AE avec la Parabole FD sur le point C; comme il est certain qu'elles peuvent y estre appliquées ensemble, puisque ce point C est en la courbe ACN, qui est décrite par leur interfection; si CG se nomme y , GD fera $\frac{yy}{n}$, à cause que le costé droit, qui est n , est à CG, comme CG à GD. Et ostant DE, qui est $\frac{2Vv}{pn}$, de GD, on à $\frac{yy}{n} - \frac{2Vv}{pn}$, pour GE. Puis à cause que



AB est à BE, comme CG est à GE; AB estant $\frac{1}{2} p$, BE est $\frac{py}{2n} - \frac{Vv}{ny}$.

Et tout de mesme en supposant que le point C de la courbe à esté trouué par l'interfection des lignes droites, SC parallele à BK, & AC parallele à SV. SB qui est égale à CG, est y : & BK estant égale au costé droit de la Parabole, que j'ay nommé n , BT est $\frac{yy}{n}$. Car comme KB est à BS, ainsi BS est à BT. Et TV

estant la mesme que B L, c'est à dire $\frac{2\sqrt{v}}{p^n}$, B V est $\frac{yy}{n} -- \frac{2\sqrt{v}}{p^n}$: & comme SB est à BV, ainsi AB est à BE, qui est par consequent $\frac{py}{2n} -- \frac{\sqrt{v}}{ny}$ comme deuant, d'où on voit que c'est vne mesme ligne courbe qui se décrit en ces deux façons.

Après cela, pource que BL & DE sont égales, DL & BE le sont aussi: de façon qu'ajoutant LH, qui est $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$ à DL, qui est $\frac{py}{2n} -- \frac{\sqrt{v}}{ny}$, on a la toute DH, qui est $\frac{py}{2n} -- \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & en ostant GD, qui est $\frac{yy}{n}$ on a GH, qui est $\frac{py}{2n} -- \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} -- \frac{yy}{n}$. Ce que j'écris par ordre en cette sorte $GH \propto -- \frac{y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} -- \sqrt{v}}{ny}$.

Et le quarré de GH est,

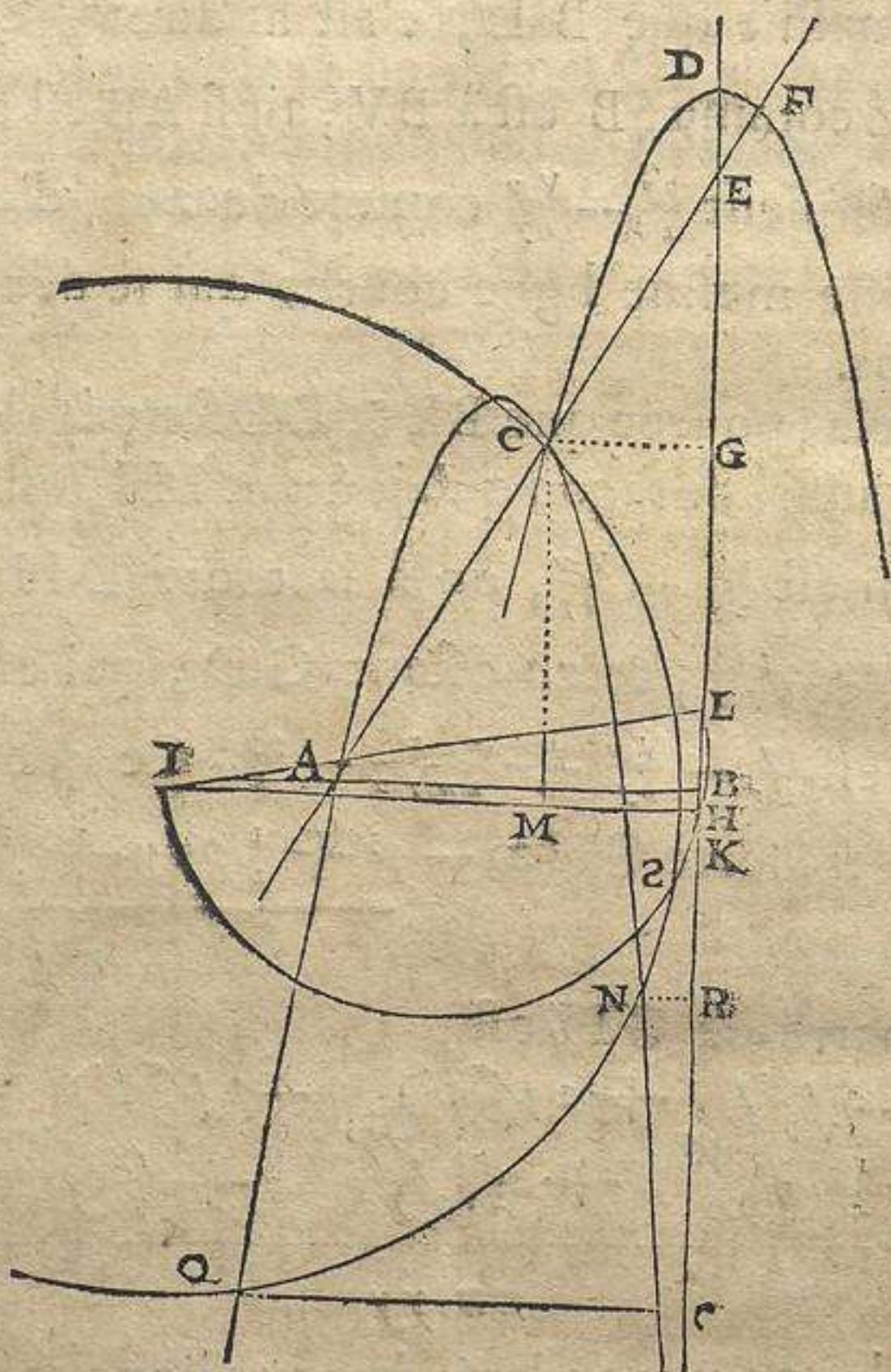
$$\left. \begin{array}{l} y^6 -- py^5 -- \frac{t}{\sqrt{v}} \end{array} \right\} y^4 + 2\sqrt{v} \left. \begin{array}{l} + \frac{1}{4}pp \end{array} \right\} y^3 -- p\sqrt{v} \left. \begin{array}{l} + \frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{array} \right\} yy -- ty + v$$

$nn yy$

Et en quelque autre endroit de cette ligne courbe qu'on veuille imaginer le point C, comme vers N, ou vers Q, on trouvera toujours que le quarré de la ligne droite, qui est entre le point H & celui où tombe la perpendiculaire du point C sur BH, peut estre exprimée en ces mesmes termes, & avec les mesmes signes + & --.

De plus IH estant $\frac{m}{nn}$, & LH estant $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, IL est

$$\sqrt{\frac{mm}{n^2} + \frac{tt}{2n\sqrt{v}}}$$



$\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{pVv}{nn}}$, IP ou IC est,

$\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{pVv}{nn}}$, à cause aussi de l'angle droit IPL. Puis ayant fait CM perpendiculaire sur IH, IM est la difference qui est entre IH, & HM ou CG, c'est à dire entre $\frac{m}{nn}$, & y , en sorte que son quarré est toujours $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, qui estant osté du quarré

de IC, il reste $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy.$
 pour le quarré de CM, qui est égal au quarré de GH
 déjà trouué. Ou bien en faisant que cette somme soit di-
 uifée comme l'autre par $nn yy$, on a

$$- nn y^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{tt}{4v}yy. \text{ Puis}$$

$nn yy$

remettant $\frac{t}{v} y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}pp y^4$, pour $nn y^4$; &
 $ry^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pt}{2v}y^3$, pour $2my^3$; & multipliant
 l'une & l'autre somme par $nn yy$, on a

$$\left. \begin{array}{l} y^6 - py^5 - \frac{t}{v}y^4 \\ + \frac{1}{4}pp \end{array} \right\} y^4 + \left. \begin{array}{l} + 2\sqrt{v}y^3 \\ + \frac{pt}{2v}y^3 \end{array} \right\} y^3 - \left. \begin{array}{l} p\sqrt{v}y^2 \\ + \frac{tt}{4v}y^2 \end{array} \right\} yy - ty + v$$

égal à

$$\left. \begin{array}{l} - \frac{t}{v}y^4 \\ - qy^4 \\ + \frac{1}{4}pp \end{array} \right\} y^4 + \left. \begin{array}{l} + r \\ + 2\sqrt{v}y^3 \\ + \frac{pt}{2v}y^3 \end{array} \right\} y^3 - \left. \begin{array}{l} - p\sqrt{v}y^2 \\ - syy \\ + \frac{tt}{4v} \end{array} \right\} yy$$

C'est à dire qu'on a,

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0.$$

D'où il paroist que les lignes CG, NR, QO, & sem-
 blables sont les racines de cette Equation, qui est ce qu'il
 falloit demonstrier.

Ainsi donc si on veut trouuer quatre moyennes pro-
 portionnelles entre les lignes a & b , ayant posé x pour la
 premiere, l'Equation est $x^6 - a^4b = 0$ ou bien
 $x^6 - a^4bx = 0$. Et faisant $y = ax$ il vient $y^6 -$

$$6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - 6a^5y + a^6 = 0.$$

C'est pourquoy il faut prendre $3a$ pour la ligne AB, &

$$\sqrt{\frac{6a^3 \times aab}{v \cdot aa \times ab}} + 6aa \text{ pour BK, ou le costé droit de la Pa.}$$

rabole que i'ay nommée n . Et $\frac{2^a}{3^n} \sqrt{aa + ab}$ pour DE ou BL. Et après auoir décrit la ligne courbe ACN sur la mesure de ces trois, il faut faire LH, $\propto \frac{6a^3 \times aab}{2n \sqrt{aa} \times ab}$. Et

HI $\propto \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn} \sqrt{aa + ab} + \frac{18a^4 \times 3a^3b}{2nn \sqrt{aa} \times ab}$. Et LP \propto

$\sqrt{\frac{15a^4 \times 6a^3 \sqrt{aa} \times ab}{nn}}$. Car le cercle qui ayant son centre au point I passera par le point P ainsi trouué, coupera la courbe aux deux points C & N; desquels ayant tiré les perpendiculaires NR & CG, si la moindre, NR, est ostée de la plus grande, CG, le reste sera, x , la premiere des quatre moyennes proportionnelles cherchées.

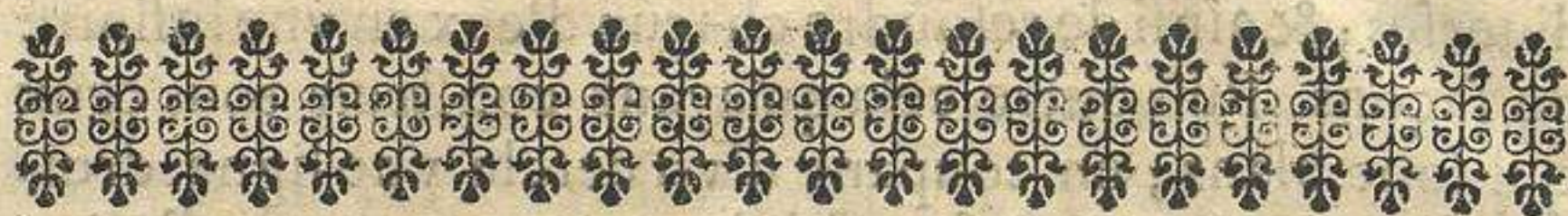
Il est aisé en mesme façon de diuiser vn angle en cinq parties égales, & d'inscrire vne figure d'onze ou treize costez égaux dans vn cercle, & de trouuer vne infinité d'autres exemples de cette regle.

Toutefois il est à remarquer, qu'en plusieurs de ces exemples, il peut arriuer que le cercle coupe si obliquement la parabole du second genre, que le point de leur intersection soit difficile à reconnoistre: & ainsi que cette construction ne soit pas commode pour la pratique. A quoy il seroit aisé de remedier en composant d'autres regles, à l'imitation de celle-cy, comme on en peut composer de mille sortes.

Mais mon dessein n'est pas de faire vn gros liure, & ie tasche plutôt de comprendre beaucoup en peu de mots: comme on iugera peut-estre que i'ay fait, si on considere, qu'ayant réduit à vne mesme construction tous les Problemes d'vn mesme genre, i'ay tout ensemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres

diuerſes ; & ainſi de reſoudre chacun d'eux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant conſtruit tous ceux qui ſont plans , en coupant d'un cercle vne ligne droite ; & tous ceux qui ſont ſolides , en coupant auſſi d'un cercle vne Parabole ; & enfin tous ceux qui ſont d'un degré plus compoſez , en coupant tout de meſme d'un cercle vne ligne qui n'eſt que d'un degré plus compoſée que la Parabole ; il ne faut que ſuivre la meſme voye pour conſtruire tous ceux qui ſont plus compoſez à l'infini. Car en matiere de progreſſions Mathematiques , lors qu'on a les deux ou trois premiers termes , il n'eſt pas malaiſé de trouuer les autres. Et i'eſpere que nos neueux me ſçauront gré , non ſeulement des choſes que i'ay icy expliquées ; mais auſſi de celles que i'ay omiſes volontai-
rement , afin de leur laiſſer le plaifir de les inuenter.

F I N.



T A B L E
D E S M A T I E R E S
D E L A
G E O M E T R I E .

LIVRE PREMIER.

D E S P R O B L E M E S Q V O N P E V T
construire sans y employer que des Cercles
& des Lignes droites.



<i>COMMENT le calcul d' Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.</i>	page 3
<i>Comment se font Geometriquement la Multiplication, la Division, & l' extraction de la racine quarrée.</i>	4
<i>Comment on peut user de chiffres en Geometrie.</i>	4 & 5
<i>Comment il faut venir aux Equations qui seruent à resoudre les problemes.</i>	6
<i>Quels sont les problemes plans ; Et comment ils se resoluent.</i>	8
<i>Exemple tiré de Pappus.</i>	10
<i>Réponse à la question de Pappus.</i>	13
<i>Comment on doit poser les termes pour venir à l' Equatiõ en cet exẽple.</i>	16
<i>Comment on trouue que ce probleme est plan lors qu' il n' est point proposé en plus de cinq lignes.</i>	19

DISCOVRS

TABLE DE LA GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

DE LA NATURE DES LIGNES Courbes.

QUELLES sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en Geometrie. 21

La façon de distinguer toutes les lignes courbes en certains genres : Et de connoître le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites. 25

Suite de l'explication de la question de Pappus mise au liure precedent.

29

Solution de cette question quand elle n'est proposée qu'en 3 ou 4 lignes. 30

Demonstration de cette solution. 38

Quels sont les lieux plans & solides & la façon de les trouver tous. 40

Quelle est la premiere & la plus simple de toutes les lignes courbes qui servent en la question des anciens, quand elle est proposée en 5. lignes. 41

Quelles sont les lignes courbes qu'on décrit en trouvant plusieurs de leurs points qui peuvent estre receuës en Geometrie. 46

Quelles sont aussi celles qu'on décrit avec vne corde, qui peuvent y estre receuës. la mesme

Que pour trouver toutes les proprietéz des lignes courbes, il suffit de sca- voir le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites; & la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits. 47

Façon generale pour trouver des lignes droites qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes à angles droits. 48

Exemple de cette operation en vne Ellipse : Et en vne Parabole du second genre. 49

Autre exemple en vne ouale du second genre. 50

Exemple de la construction de ce probleme en la conchoïde. 57

Explication de 4. nouveaux genres d'Ouales qui servent à l'Optique. 58

Les proprietéz de ces Ouales touchant les reflexions & les refractions. 63

Demonstration de ces proprietéz. 66

Q

T A B L E

- Comment on peut faire vn verre autant conuexe ou coucaue en l'vne de ses superficies, qu'on voudra, qui rassemble à vn point donné tous les rayons qui viennent d'vn autre point donné.* 69
- Comment on en peut faire vn qui fasse le mesme, & que la conuexité de l'vne de ses superficies ait la proportion donnée avec la conuexité ou concavité de l'autre.* 72
- Comment on peut rapporter tout ce qui a esté dit des lignes courbes décrites sur vne superficie plate, à celles qui se décriuent dans vn espace qui a 3. dimensions, ou bien sur vne superficie courbe.* 74

L I V R E T R O I S I E S M E.

D E L A C O N S T R U C T I O N D E S P R O B L E M E S
solides ou plus que solides.

- D**E quelles lignes courbes on peut se seruir en la construction de chaque probleme. 75
- Exemple touchant l'inuention de plusieurs moyennes proportionnelles.* 76
- De la nature des Equations.* 77
- Combien il peut y auoir de racines en chaque Equation.* 78
- Quelles sont les fausses racines.* la mesme
- Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'vne Equation, lors qu'on connoist quelque vne de ses racines.* la mesme
- Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'vne racine.* 79
- Combien il peut y auoir de vrayes racines en chaque Equation.* la mesme
- Comment on fait que les fausses racines deuiennent vrayes, & les vrayes fausses.* la mesme
- Comment on peut augmenter ou diminuer les racines d'vne Equation.* 80
- Qu'en augmentant ainsi les vrayes racines on diminue les fausses, ou au contraire.* 81
- Comment on peut oster le second terme d'vne Equation.* 82
- Comment on fait que les fausses racines deuiennent vrayes, sans que les vrayes deuiennent fausses.* 83

DE LA GEOMETRIE.

- Comment on fait que toutes les places d'une Equation soient remplies.* 84
- Comment on peut multiplier ou diuiser les racines d'une Equation.* 85
- Comment on oste les nombres rompus d'une Equation.* la mesme
- Comment on rend la quantité connue de l'un des termes d'une Equation égale à telle autre qu'on veut.* 86
- Que les racines tant vrayes que fausses peuuent estre reelles ou imaginaires.* la mesme
- La reduction des Equatiōs cubiques lors que le problemie est plan.* la mesme.
- La façon de diuiser vne Equation par vn binôme qui contient sa racine.* 87
- Quels problemes sont solides lors que l'Equation est cubique.* 89
- La reduction des Equations qui ont quatre dimensions lors que le problemie est plan. Et quels sont ceux qui sont solides.* la mesme
- Exemple de l'usage de ces reductions.* 93
- Regle generale pour reduire toutes les Equations qui passent le quarré de quarré.* 95
- Façon generale pour construire tous les problemes solides reduits à vne Equation de trois ou quatre dimensions.* la mesme.
- L'inuention de deux moyennes proportionelles.* 101
- La diuision de l'angle en trois.* 102
- Que tous les problemes solides se peuuent reduire à ces deux constructions.* 103
- La façon d'exprimer la valeur de toutes les racines des Equations cubiques: Et ensuite de toutes celles qui ne montent que iusques au quarré de quarré.* 106
- Pourquoy les problemes solides ne peuuent estre construits sans les sections coniques, ny ceux qui sont plus composez sans quelques autres lignes plus composées.* 107
- Façon generale pour construire tous les problemes reduits à vne Equation qui n'a point plus de six dimensions.* 108 & 109
- L'inuention de quatre moyennes proportionelles.* 117

FIN.

FAUTES PRINCIPALES SURVENUES
en l'impression.

- P** Age 5. ligne 9. -b lisez -b³
 Page 24. l. 1. lisez B, C, D, E, F, &c.
 Page 32. l. 14. mettez ainsi $+\frac{nnxx}{zz}$
 Page 36. l. 4. lisez où on le trouue. Et ligne 16. mettez
 - au lieu de $+$
 Page 39. l. 22. lisez ou IKL. Et l. 24. lisez $V^{\frac{3}{4}}$
 Pag. 41. l. 23. lisez le cercle, la parabole, &c.
 P. 54. l. 10. lisez $y^4 + fy^3$. Et l. 11 au lieu de k^3 mettez h.
 Page 60. dans la figure, mettez vn F auprès du point qui est
 contre l'A
 P. 61. dans la 1. fig. mettez vn A au point où les 2. lignes droi-
 tes s'entre coupent. Et dans la 2. figure après le 8 mettez vn
 R sur le milieu de la ligne droite qui est hors le cercle.
 Page 79. l. 5. lisez $+106. x$
 Page 83. lignes 11. & 12. mettez ainsi.

$$z4 \quad * \quad +\frac{1}{2}aa \quad zz \quad -- a^3 \quad z \quad +\frac{5}{16}a_4 \quad \infty 0$$

$$-- cc \quad -- acc \quad -- \frac{1}{4}aaccc$$

 Page 86. ligne 2. $\frac{1}{2}$ lisez $\frac{1}{3}$
 Page 88. l. 13. mettez -- 2cc
 Page 90. l. 23. mettez ainsi $\frac{--2a^4cc}{--aac^4}$
 Page 102. dans la fig. au lieu du trait qui monte vers A au dela
 des petits points, mettez vn K, & finissez la ligne g C où elle
 touche la ligne CA, & de mesme par tout où est la mesme fig.
 Page 105. l. 9. lisez du tiers.
 Page 110. dans la fig. au lieu de l'S renuersée qui est entre le K
 & l'M, mettez vn P; & de mesme, page 116.



PRIVILEGE DV ROY.



OVIS PAR LA GRACE DE DIEU,
ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE:
A nos amez & feaux Conseillers les Genste-
nans nos Cours de Parlemens, Maistres des
Requestes ordinaires de nostre Hostel,
Baillifs, Seneschaux, Preuosts, leurs Lieutenans & tous
autres nos Iusticiers & Officiers qu'il appartiendra: Salut.
Nostre Amé CHARLES ANGOT Marchand Libraire
en nostre bonne Ville de Paris, Nous a fait remonstrer,
qu'ayant cy-deuant en vertu de nostre permission im-
primé *Les Lettres Françoises du Sieur Descartes* en deux
volumes, dont le temps accordé pour le premier Tome
estant expiré & pour le deuxième estant prest à expirer:
Il desireroit de nouveau r'imprimer lesdits deux Volu-
mes desdites *Lettres Françoises*, ensemble les *Ouurages*
François du mesme Autheur, en diuers Volumes, de
telle grandeur qu'il auisera bon estre, mais il craint que
d'autres ne voulussent faire le semblable par concurren-
ce, ce qui l'empescheroit de retirer les frais qu'il auroit
faits, & luy causeroit vne perte tres-considerable s'il
n'auoit nos Lettres sur ce necessaires, humblement re-
querant icelles. A CES CAUSES, voulant fauora-
blement traiter l'Exposant: Nous luy auons permis
& permettons par ces presentes, de r'imprimer ou

Q iij

faire r'imprimer, vendre & debiter en tous les lieux de nostre obeïssance, les Ouvrages du Sieur Descartes, contenant, *Ses Lettres*, où sont traittées plusieurs belles questions touchant la Moralle, Physique, Medecine, les Mathematiques, & plusieurs difficultez touchant ses Ouvrages; *Le Discours de la Methode pour bien conduire sa raison & chercher la verité dans les sciences*, plus la *Dioptrique & les Metheores*; *La Geometrie*; *Les Meditations Metaphysiques touchant la premiere Philosophie*; *Les Passions de l'Ame*; & autres *Traitez François du mesme Autheur*, durant le temps & espace de dix années, à commencer du iour que chacun Volume sera acheué d'estre r'imprimé, en tels Volumes, marges & caracteres qu'il auisera bon estre; faisant defenses pēdant ledit temps à tous Marchands Libraires, Imprimeurs, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'imprimer ou faire imprimer lesdits liures cy-dessus, ny iceux vendre & debiter en quelque sorte & maniere que ce soit, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, deux mil liures d'amende applicable, vn tiers à Nous, vn tiers à l'Hospital General, & l'autre tiers à l'Exposant, & de tous ses dépens, dommages & interests: à la charge de mettre deux exemplaires en nostre Bibliothèque publique, vn en nostre Bibliothèque servant à nostre personne, scise au Chasteau du Louure, & vn autre en celle de nostre cher & feal Cheualier Chancelier de France, le sieur Seguier. Comme aussi de faire Register ces presentes és Registres du Syndic des Libraires avant que de l'exposer en vente, dont il sera tenu de prendre vn receu de nostre Bibliothequaire, & iceluy mettre és mains de nostre amé & feal Conseiller en nos

Conseils, grand Audiancier de France en quartier, & à
faute d'y satisfaire, nous auons dès à present déclaré ces
presentes nulles, enioignons audit Syndic desdits Libraires
de faire saisir tous lesdits exemplaires qui en auront
esté imprimez, faute d'auoir satisfait aux clauses portées
par ces presentes, du contenu desquelles Nous vous
mandons faire jouïr & vser l'Exposant plainement & pai-
siblement: Voulant qu'en mettant au commencement
ou à la fin dudit liure vn extrait d'icelles, elles soient te-
nuées pour bien & deuëment signifiées. Commandons
au premier nostre Huissier ou Sergent sur ce requis, faire
pour l'execution des presentes, tous Exploits, Significa-
tions & autres actes de Iustice requis & necessaires, sans
pour ce demander autre permission. **CAR** tel est nostre
plaisir, nonobstant Clameur de Haro, Chartre Norman-
de, & Lettres à ce contraire. **DONNE'** à Paris le 18. iour
d'Avril l'an de grace 1664. & de nostre Regne le vingt-
vnième. Signé, Par le R O Y en son Conseil.

M A B O V L E.

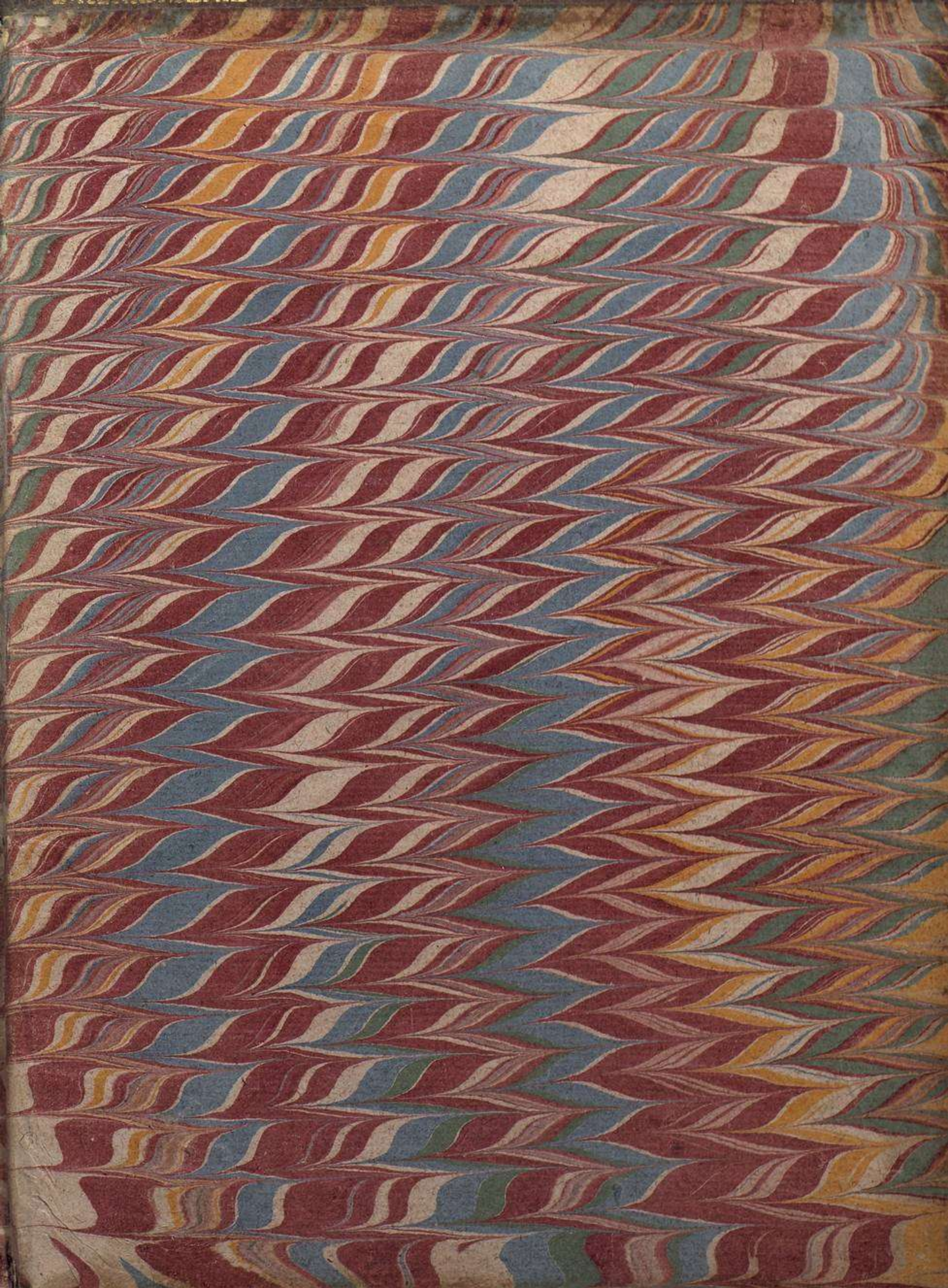
*Registré sur le liure de la Communauté des Marchands Libraires
& Imprimeurs de cette Ville, suiuant & conformément à l'Arrest
de la Cour de Parlement, du 8. Avril 1653. aux charges & condi-
tions portées par le present Privilege. A Paris le 14. May 1664.*

Signé, E. MARTIN.

Acheué d'imprimer le 4. Decembre 1664.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO





Observatorio
BIBLIOT

Núm.

Real Observatorio
BIBLI

06

Observatorio de Marina
BIBLIOTECA

Núm. 00238

GEOM
DE
DESC
CAR
TES

Real Observatorio de la Armada
BIBLIOTECA

00238