II.


N. S. del Pilar d Zarag.ª

ELEMENTOS DE MATHEMATICAS.

P.e R.o Quegila. S.e I.

INTRODVCION

El P.re GIL VRA ROQVE

Ciencias Mathematicas son las que prescriven reglas, y medidas ciertas para determinar la cantidad de las cosas. Cantidad se llama todo lo que concevimos capaz de aumento, y diminucion, o lo que comparado con otro es igual, mayor, o menor. La cantidad objeto de las Mathematicas considerada como una junta de partes se dice continua, extension, o dimension, y es objeto de la Geometria; pero quando se considera dividida en partes se llama discreta, y es objeto de la Arizmetica; esta enseña a contar la multitud de partes de la cantidad, y la Geometria a medir su extension. De donde se infiere que siendo la medida, y el numero medios unicos para determinar la cantidad de las cosas. Todas las Mathematicas se reducen a Arizmethica, y Geometria, a las quales suelen llamarse Mathematica pura, universal, o abstracta.

De su aplicacion a los particulares objetos, en que se considera la cantidad resultan las Mathematicas, que llaman mixtas, porque

si se aplican ala cantidad del movimiento delos
Astros resulta la Astronomia, si ala dela luz
la optica, si ala del equilibrio, y movimiento de
los cuerpos la Mecanica &c. En una palabra
el que sea Arithmetico, y Geometra podra apro
vechar en todas las Mathematicas, y en
las de mas ciencias naturales a que se estien
den sus conocimientos, y con su evidencia les
dan mucho lustre, y perfeccion. De donde se
infiere, que las Mathematicas no conside
ran la cantidad en si sola, sino con resolu
cion a otras de su misma especie, comparan
dolas entre si para demonstrar las verdades
ocultas por principios naturalmente cono
cidos.

A esto observan los Mathematicos en
el modo de tratar sus materias cierto orden,
en que se sirven primero de las definiciones,
que son una explicacion clara del significado de
los terminos. 2º de Axiomas, que son unas
verdades proximas tan evidentes, que no cabe pru
dente duda de su certidumbre: v.g. el todo es
mayor, que su parte. Tercero de postulados,
con que piden, se les permita suponer lo que ra
cionalmente no se puede negar: v.g. que de un
punto a otro punto se pueda tirar una linea.

A las definiciones, Axiomas, y postulados siguen
las proposiciones, que se llaman Theoremas,
quando se dirigen a provar las propiedades

de alguna cosa; y Problemas, quando propone
la execucion. De las proposiciones nacen los Coro
larios, que son unas verdades deducidas de lo
antecedente; y tambien suele añadirse Escolios,
en que se hace alguna nota a las proposiciones an
tecedentes &c. y Lemas, que son unas propo
y cuia demostracion
ciones, conduce para las siguientes. Este orden de
discurrir admirable, y perfectissimo es el me
todo de los Mathematicos, que vamos a empe
zar en nuestros Elementos.

TRATADO 1.º

Arizmetica universal.

Las Mathematicas, que prescriven reglas
para determinar la cantidad de las cosas tie
ne por fundamento la Arizmetica univer
sal, que enseña a aumentar la cantidad por
addicion, y multiplicacion, y a diminuirla
por la subtraccion, y division.

CAPITULO I.ero

Definiciones, y Reglas Generales.

Definicion 1.ª n.1

Arizmetica universal es ciencia, que ense
ña a contar. la

Escolio.

El nombre de Arizmetica universal
comprehende la vulgar, que exercita sus ope

raciones en los Caracteres Aravigos 1, 2, 3 &c.
y la especiosa, literal, o Algevra, que con las le
tras expresa baxo de una formula general toda
specie de Cantidad. Ambas componen una cie
cia perfecta de contar.

n 2º Def 2ª n 2º.

Cada cosa considerada en si, y sin respecto a
otras de su misma specie, se llama uno, o uni
dad; y la multitud, o agregado de estos unos se lla
ma cantidad.

n 3º Def 3º

Lo que expresa los unos, o unidades, de que se
compone la cantidad se llama numero, y suele
decirse numerante, quando no esta aplicado a
determinada specie de cantidad, v.g. 3, 4 &c.; y nu
merado, quando esta determinado v.g. 3 varas.

Escolio

El real considerado por si solo es uno, o unidad,
si se le añade otro resulta un agregado, que es can
tidad de reales: el segundo, que expresa los unos,
o unidades se llama numero.

n 4 Postulado primero.

Permitase, expresar qualquiera cantidad,
o con los caracteres, que vulgarmente llaman
1, 2, 3 &c., o con las letras a, b, c, d, &c.

Post 2º

Quando se enuncian cantidades en gene
ral sin determinar el numero de sus par
tes serviran las letras, aplicando las prime
ras a, b, c, &c a las cantidades conocidas, y las

ultimas $x\,z$ a las desconocidas.

Def. 4.ª n.5

La cantidad se dice simple, quando consta de una sola letra v.g. a; y compleja, quando se compone de muchas v.g. a, b, &. La cantidad positiva es mas, que nada; y la negativa menos, que nada.

Escolio.

Por quanto nada añadida a las cantidades, ni aumenta, ni diminuie su valor, lo que puede aumentarlo es mas, que nada; y lo que puede diminuirlo, menos.

Corolario.

Las cantidades negativas no son verdaderas cantidades, sino defecto, o negacion de ellas.

Post. 3.º n.6

La cantidad positiva se puede expresar con el signo + que significa mas; la negativa con –, que significa menos. Las cantidades, que antes de si no tienen signo, se entiende +; la igualdad de dos cantidades se expresa asi = v.g. $A = B$, que quiere decir A igual B. La maioria de una cantidad asi $>$, y la minoria asi $<$ v.g. $A > B$, que quiere decir A maior, que B. v.g. $A < B$, quiere decir A menor, que B.

Def. 5.ª n.7

Sumar es juntar muchas cantidades dadas. el agregado, que de ellas resulta se llama suma.

Problema 1º

n8 Sumar cantidades dadas.

Resolucion

Juntense unas con otras poniendo en medio el signo que las precede.

Exemplo 1º

Para sumar a, b, c, pondre a+b+c.

Ex. 2º

Para sumar -d-c+b pondre b-c-d.

Corolario.

La suma de las cantidades complejas se hace como en las simples.

Exemplo.

Cantidades. a+b-c
d+e-f.
Sum. a+b-c+d+e-f.

Def. 6ª

n9 Restar es quitar una cantidad de otra. Lo que sobra despues de hecha la resta se llama diferencia, o residuo.

Problema 2º

n10 Restar una cantidad de otra.

Resolucion.

En la cantidad que se resta se mudaran los signos, si son cantidades de diferentes letras; y si son de una misma se pondra cero por residuo.

Exemplo.

Para restar de $+a$, la cantidad $+b$, pondre $a-b$; y para restar de $+a$ la cantidad $-b$, pondre $a+b$.

Escolio

Donde se ve, que restando una cantidad negativa el signo $-$ se muda en $+$ por la misma naturaleza de la cantidad negativa; pues siendo esta menos, que nada, quitarle el menos es añadirle mas. De otra manera la cantidad negativa es defecto, o negacion de la positiva; luego quitarle el defecto es poner la cantidad. Por lo qual se entiende, que restando una cantidad negativa propiamente se suma, y sumandola se resta.

Def. 7a n11

Multiplicar es tomar muchas vezes una misma cantidad. Assi multiplicar A por B es tomar tantas vezes A como dice B. La cantidad, que se multiplica se llama multiplicando, aquella por quien se multiplica multiplicador, y lo que resulta del multiplicando, y multiplicador se llama producto.

Postulado.

La multiplicacion de una cantidad por otra se puede expresar, o juntandola v.g. ab, o poniendo en medio un punto v.g. $A.B$, o assi $a \times b$.

Problema. 3o. n12

Multiplicar cantidades.

Resolucion.

Si ambas fueren positivas, o ambas negati vas se juntaran poniendo el signo mas en el producto; pero si una fuere positiva, y otra ne gativa se pondra el signo menos.

Exemplo 1º

Multiplicando. +a, o -a

Multiplicador: +b, o -b

Producto: +ab, o +ab.

Ex. 2º

Multiplicando +a

Multiplicador -b

Producto. -ab

Ex. 3º

Multiplicando a+b

Multiplicador c-d

Primer Producto +ac -ad

Segundo Producto. +bc -bd

Total Producto. +ac -ad+bc -bd.

Escolio.

Donde se ve, que el mas multiplicado por menos, o la cantidad positiva por la negati va da siempre menos, o cantidad negativa; porque siendo esta defecto de la positiva su multiplicacion sera tomar algunas vezes el defecto de la cantidad positiva. Al con trario multiplicar menos por menos es negar algunas vezes el defecto de la can tidad positiva: luego se pondra otras tan tas vezes la misma cantidad.

n13 Def. 8ª

Partir es hallar las vezes, que una cantidad contiene a otra. La cantidad, que se parte se llama dividendo; aquella por quien se parte divisor, y lo que resulta de la division Coc. 14

Postulado.

La particion de una cantidad por otra se puede expresar de esta manera $\frac{a}{b}$, o de esta a:b.

Problema.

Partir cantidades.

Resolucion. 1.a

Si el divisor no se alla en el dividendo se expresara la particion como en el postulado antecedente.

2.a

Si el divisor, o alguna parte de el se alla en el dividendo borrese, y el residuo sera el Coc.

Exemplo 1.o	Ex. 2.o
Dividendo ab	Dividendo abd
Divisor a	Divisor ac
Coc. b.	Coc. bd:c.

La particion de una cantidad compleja por otra se ejecutara assi: Para partir aa-bb, por a+b, pondre el divisor al lado del dividendo. Luego partire el primer termino aa por a, y su Coc. a colocado bajo del divisor lo multiplicare por este: el Producto aa+ab lo restare del dividendo, cuio residuo -ab -bb lo partire por a, y el Coc. -b multiplicado por el divisor me dara -ab-bb, que res rado queda nada, y hecha la particion. Todo se expresa en la forma siguiente.

Dividendo	$aa - bb$	Divisor $a + b$
	$aa + ab$	Coc. $a - b$
	$0 - ab - bb$	
	$+ ab - bb$	
	$0 \quad 0$	

n 15 Escolio 1º.

La multiplicacion estara bien hecha si partiendo el producto por el multiplicador resulta el multiplicando, o partiendo por el multiplicado resulta el multiplicador; y la particion, quando multiplicado el Coco por el Divisor resulta el dividendo.

Escolio 2º.

n 16 Tanvien en la division si los signos son semejantes resulta $+$ en el coco; y si son desemejantes resulta menos; porque como acavamos de decir si el Coco se multiplica por el divisor devera resultar el dividendo: luego si este tiene el signo $+$, el Coco, y el divisor an de tener el mismo signo; y si tiene el $-$ tendran signos contrarios; pues el producto de uno por otro no puede ser mas si los signos no son semejantes, ni menos, si no son desemejantes.

Escolio 3º.

n 17 La demonstracion de las quatro operaciones precedentes es tan clara, como fundada en los Axiomas siguientes.

Axioma 1º.

El todo es mayor, que qualquiera de sus partes, e igual a todas juntas.

Axioma 2º.

Si a cantidades iguales se añaden otras iguales los todos resultaran iguales, y si de ellas, se quitan iguales lo seran tambien los residuos, pero si las que se añaden, o quitan son desiguales los todos, y los residuos tambien lo seran.

Axioma 3º.

Llas cosas iguales a una tercera son iguales entre si, y si de las iguales entre si la una es maior, o menor, que una tercera, lo sera tambien la otra.

Axioma 4º.

Si cantidades iguales se multiplican, o parten por iguales, a lo los productos, y quocientes seran iguales; por el contrario sucede si se multiplican, o parten por desiguales.

Escolio 4º.

En estos axiomas se funda tambien toda la doctrina siguiente.

CAPITVLO 2º

Doctrina General de la razon, y proporcion.

Ella es la fuente, y principio de todo el calculo, es el fundamento de todas las Mathematicas, en que apenas se allara proposicion alguna, que no pueda resolverse, y demonstrarse por las reglas de proporcion. Estas son tan claras que se deben tener por meros Axiomas: Por lo qual las demonstraciones prolijas, que de ellas traen Euclides, y otros Authores solo sirven de hacerlas dificiles, y obscuras.

Def 1a.

n 18 Razon se dice la relacion entre dos cantidades de una misma specie, quando se compara entre si. La cantidad, que se compara se le llama antecedente, y aquella a quien se compara consiguiente.

Def 2a.

n 19 Si en la relacion se atiende a la diferencia entre una, y otra cantidad la razon se llama Arismetrica, y se expresa assi a–b: si se busca las vezes, que la una contiene, o es contenida en la otra se dice Geometria, y se sinifica con el signo de division: $\frac{a}{b}$, o a:b.

Def 3a.

n 20 Exponente, o denominador de la razon Geometrica se llama el Coto, que indica las vezes que una cantidad se contiene en la otra; y este es el que mide, o determina la razon.

Corolario.

Las razones seran semejantes, o iguales quando sus antecedentes partidos por sus consiguientes dieren Cotos, o exponentes iguales.

escolio.

No se a de confundir la igualdad delas razones
la razon de igualdad; Pues esta supone los
terminos iguales, aquella solamente los [illegible],
o exponentes iguales. n 21

Def 4.ª

La igual de dos razones se llama propor
cion Arithmetica, quando la igualdad es de diferen(cias)
y Geometrica quando es de cotos. Los terminos
de las razones se llaman proporcionales.

Postulado.

La proporcion Arithmetica puede expre
sarse assi A.B.·.C.D, o A-B=C-D, o A-B=C-D;
y quiere decir, que la diferencia de A a B es la
misma, que de C a D. La Geometrica assi:
A:B::C:D, o A:B=C:D, o $\frac{a}{b}=\frac{c}{D}$ &c.
n 22

Def 5.ª

La proporcion se dice continua, quando el
segundo termino es uno mismo con el tercero,
v.g. A:b=b:c; y quando no lo es se llama
discreta v.g. A:b=C:D. Si los terminos pros
guen guardando la misma razon el prime
ro al segundo, el segundo al tercero, el terce
ro al quarto, el quarto al quinto &c formaran
una progresion, o Arithmetica, o Geome
trica segun fuere la razon, que entre si guar
dan.

Escolio

Es pues la progresion Arithmetica una
serie de cantidades, que crecen, o menguan

segun una misma diferencia. si las cantidades crecen se llama ascendente v.g. $a.\ a+m\ a+mm\ a+mmm$ &c. y descendente, quando decrecen v.g. $a.\ a-m.\ a-mm\ a-mmm$ &c.

Theorema

23. En la progresion Arithmetica la suma de los extremos es igual a la de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de ellos; y si el numero de los terminos es impar la suma de qualesquiera dos terminos es igual al duplo de su medio.

Demonstracion

La expresion literal hace evidente la verdad del Theorema. Sea el primer termino a, la diferencia $\pm m$: el segundo termino sera $a\pm m$ &c. luego si sumo el primero a con el ultimo $a \pm mmm$ resultara $a+a\pm mmm$ igual a la suma del segundo termino $a\pm m$ con el tercero $a\pm mm$. Asimismo sumando el primero a con el tercero $a\pm mm$ resultara $a+a \pm mm$ igual al duplo del termino medio $a\pm m$.

Corolario 1º

n24 Para saber el maior termino de la progresion Arithmetica multiplicase la diferencia por el numero de los terminos menos uno, y el producto con el primer termino sera el maior.

Cor 2º

n25 En la progresion ascendente si del el primer termino se quita del ultimo, y el residuo se parte por el numero de los terminos menos uno el Coto sera la diferencia de ellos.

Cor 3º n26

Si el primer termino se quita del ultimo, y el residuo se parte por la diferencia el Coto sera el numero de los terminos menos uno.

Cor 4º n27

Si la suma del primero, y ultimo termino se multiplica por la mitad del numero de los terminos resultara la suma de toda la progresion.

Cor 5º n28

De todo lo qual se infiere, que en la progresion Arismethica principalmente se han de saver 5º cosas. el primer termino, el ultimo, el numero de los terminos, la diferencia, y la suma de toda la progresion.

n29

Escolio 2º

Quando se abla en general de la razon, y proporcion comunmente se entiende la Geometrica.

Definicion 6ª n30

La razon se llama simple quando se halla entre dos cantidades simples, y compuesta quando resulta de la comparacion de cantidades, que son producto de otras, v.g. la razon de AB a DC, que se compone de la razon, que ai entre A, y D, y entre B, y C.

Def. 7ª n31

Quando las razones, que ai entre los terminos de los quales resulta la compuesta son iguales esta se distingue con otros nombres, llamandose duplicada si se compone de 2 razones iguales, y triplicada si de 3.º &c, v.g. la razon de BB a CC es duplicada; porque resulta de las razones de B a C, y de B a C. La razon simple respeto de su compuesta se llama subduplicada, subtriplicada &c; v.g. la razon de B a C es subduplicada de BB a CC.

Escolio 3.º

n 32 No se ade confundir la razon duplicada triplicada &c. con la dupla, tripla &c. pues en la primera comparamos entre si las razones, y se dice razon duplicada respeto de la simple; en la segunda se comparan entre si los terminos de una razon misma; y se llama dupla la razon que dice un termino a otro a quien contiene dos vezes.

Escolio 4.º

n 33 Los antiguos atendiendo al exponenente de la razon le han dado a esta diversos nombres; quando el exponente es uno, o indica, que uno de los terminos se contiene una vez en el otro la llaman razon de igualdad, y de desigualdad quando el exponente indica, que uno de los terminos contiene mas de una vez al otro. La misma razon de desigualdad se llama maior, quando el antecedente contiene al consiguiente mas de una vez; y menor desigualdad, quando el consiguente contiene al antecedente tamvien se llama la razon sesquialtera, sesquitercia &c. quando el antecedente contiene al consiguente

una vez, y media, o una vez, y un tercio, y subses
quialtera, subsesquitercia respecto del consigui
ente, que es contenido.

Escolio 5.º n 34

Porquanto el exponente de la razon es el coto, que nace de la division de la antecedente por el consiguiente se sigue, que el termino ma ior sera igual al menor multiplicado por el exponente; y el menor igual al maior parti do por el exponente; pues en la division el co te multiplicado por el divisor da el dividen do; y este partido por el coto da el divisor.

Exemplo.

Si los terminos son A, y B, el exponente M el me nor A sera el maior A M, y el menor $\frac{B}{m}$: si el maior es A sera el menor $\frac{a}{m}$, y el maior B M.

Theorema 2.º n 35

Si quatro cantidades son ~~e~~ Geometricamente propor cionales el producto de las extremas sera igual al producto de las medias; y al ~~duplo~~ producto de la me dia, si fueren tres las cantidades.

Demonstracion.

Està clara en la expresion literal de las cantidades. En quanto a la primera parte supongo al termino me nor de los primeros A, al exponente M; luego el ma ior sera MA. Supongo al menor de los segundos B y sera el maior BM. Formada la proporcion de las razones de menor desigualdad sera $a : ma = b : mB$: luego si multiplico los extremos de una parte y los medios de otra resultaran los productos iguales

$AMB = MAB$.

Para la segunda parte supongo la proporcion continua $A:B = B:C$; y siendo el menor termino de los primeros B, y de los segundos C sera el mayor BM; y resultara la proporcion de las razones de mayor desigualdad $BM:B = CM:C$: luego multiplicando los extremos, y medios seran los productos iguales $BMC = BCM$: pues substituiendo A en lugar de su igual BM, y B en lugar de CM; y multiplicando los extremos, y el medio por si mismo resultara $AC = BB$, que es lo que se avia de demonstrar.

n36 Theorema 3°.

Si de 4° cantidades el producto de las extremas fuere igual al producto de las medias; o siendo tres las cantidades al producto de la media por si misma seran proporcionales.

Demonstracion.

Para la primera parte sean los terminos proporcionales $A:MA = C:CM$: luego $ACM = MAC$; y partiendo los dos productos por AC resultara $M = M$, que me indican la igualdad de razones: luego los terminos son proporcionales.

Para la 2ª tomare de la demonstracion antecedente $AC = BB$: luego $A:B = B:C$, como acavamos de demonstrar: luego $A:B:C$ seran proporcionales, que es lo que se avia de demonstrar.

n37 Cor. 1°.

Dados dos productos iguales $AC = BD$ se pueden resolver en sus terminos proporcionales, si los factores se toman por extremos, o medios v.g. $A:B = D:C$; o

B: A = C: D &c. por este metodo, que es utilissimo, y necesario en la Analisi se resuelven las ecuaciones en sus terminos proporcionales, ó Analogos. 10

Cor. 2º

Dadas 3 cantidades proporcionales se allará la 4ª; 38 si se multiplica la 2ª por la 3ª, y el producto se parte por la 1ª v.g. de A, B, C será la 4ª $\frac{BC}{A}$.

Asi mismo si fueren 2 las cantidades v.g. A, B, multiplicando la 2ª por si misma resultará $\frac{BB}{A}$, que es la 3ª proporcional.

Cor. 3º

Aunque los terminos de la proporcion se inviertan de manera, que los medios se hagan extremos, lo extremos medios &c, siempre se conservara la proporcion, porque el producto de lo extremos será siempre igual al de los medios. Está a los ojos la demonstracion en la convinacion siguiente de las cantidades.

Proporcionales	Productos Extremos.	Productos Medios.
A: B = MA: MB	AMB =	BMA
MA: MB = A: B	MAB =	MBA
B: A = MB: MA	BMA =	AMB
MB: MA = B: A	MBA =	MAB
MA: A = MB: B	MAB =	AMB
MB: B = MA: A	MBA =	BMA
B: MB = A: MA	BMA =	MBA.

Cor. 4

Si comparo antecedente con antecedente, y consiguiente con consiguiente guardarán los terminos proporcion alterna v.g. A: B = MA: MB

Cor 5.

Si comparo cada consiguiente a su antecede te guardaran proporcion inversa v.g. $MA : A = MB : B$.

Cor 6

Si comparo la suma de cada antecedente, y consiguiente a su consiguiente guardara proporcion ~~inversa~~ compuesta v.g. $A + MA : MA = B + MB : MB$.

Cor 7

Si la diferencia de antecedente, y consiguiente se compara al consiguiente tendran razon dividida v.g. $A \pm MA : MA = B \pm MB : MB$.

Cor 8

Si la suma, o diferencia entre antecedente, y consiguiente se compara al antecedente guardara la razon conversa v.g. $A + MA : A = B + MB : B$ &c.

Def 8a

Quando 2 series de cantidades proporcionales sean de manera, que los terminos de la una guardan respectivamente la proporcion que los de la otra la razon, o proporcion se llama de igualdad, e igualdad ordenada, quando el 1er termino de la una serie se ha al 2o, como el 1o de la otra a su 2o, el 2o de la 1a al 3o como el 2o de la 2a a su 3: igualdad desordenada, o perturvada, quando el 1er termino de la una serie es al 2o, como el penultimo de la otra al ultimo; el 2o al 3o, como el antepenultimo al ultimo &c.

Cor

En la proporcion de igualdad la razon de las cantidades extremas de la una parte es igual ala razon de las extremas de la otra.

Capitulo 3º

7 Aplicacion de la Arizmetrica universal alas quentas vulgares.

Definicion 1ª

Arizmetrica vulgar es la, que exercita sus operaciones en los caracteres Aravigos, cuia nota, y valor simple es el siguiente ¹uno, ²dos, ³tres, ⁴quatro, ⁵cinco, ⁶seis ⁷siete ⁸ocho ⁹nueve.

Def 2ª Postulado.

Los referidos numeros se llaman digitos, y si cada uno se toma por si solo, o se escrive el ultimo ala derecha de otros significa simplemente unos, o unidades; pero colocado ala izquierda despues de otro significa tantas decenas de la especie del numero anterior, como el tiene unidades v.g el 6 por si solo, o puesto ala derecha del 9 en esta forma 96 significa 6 unidades, pero si se pone ala izquierda como aqui se expresa 69 significa 6 decenas de unidades

Cor 1º.

Los referidos numeros segun el lugar, que

cada uno ocupa pueden tener diferente valor,
y este crece infinitamente en proporcion de
cupla de manera, que una serie de numeros
el 1º a la derecha valdra unidades, y cada uno
de los demas valdra decenas de la especie, que
significa el numero immediato.

Cor. 2º.

Este valor local se expresa en la forma siguiente.

Unidad
Decena
Centena
Millar
Decena de Millar
Centena de Millar
Decena de centena de Millar
Millon o Cuento
Decena de Cuento
Centena de Cuento
Millar de Cuento
Decena de Millar de cuento
Centena de Millar de Cuento
Decenas de Centenas de Millar de Cuento
Cuentos, de Cuentos, o Vicuentos &c.

Escolio 2º.

De manera, que el 1er numero empezado por la derecha vale unidades, el 2º decenas el 3º centenas &c.

escolio 2º.

La nota separada, o por si sola nada vale, pero puede aumentar el valor de las otras, en qua to puesta a su derecha hace que occupen lugar diferente. Exemplo.

El 2 por si solo vale dos, pero teniendo a su derecha un cero vale 20 teniendos dos ceros vale doscientos, porque un cero dad 2 el segundo lugar, que es el de las decenas, y dos ceros le dad el tercero, que es el de las centenas.

Problema 1º.

Leer qualquiera serie de numeros dando a cada uno el valor correspondiente.

Resolucion.

Dividire de 3 en 3 las cantidades, o numeros. Al 1º, que esta a la derecha de la 3ª division pondre encima una raia inclinada, Al 1º de la 5ª division dos raias, al 1º de la 7ª tresra ias &c. Una raia indica millones, o cuentos, dos significa villones, o vicuentos. La 1ª nota a la izquierda significa centenas, la 2ª decenas, la 3ª unidades. Exemplo.

4''', 275, 853'', 170, 248', 593, 247................

la qual cantidad empezando por la izquierda se leera asi. Quatro tricuentos, doscientos setenta, y cinco mil, ochocientos cincuenta, y tres vicuentos; ciento setenta, y 8 mil doscientos quarenta, y 8 cuentos, quinientas noventa, y 3 mil, doscientas quarenta, y 7 unidades.

Proposicion 2ª

Sumar numeros dados.

Resolucion.

Pondre unos numeros devajo de otros em

pezando por la derecha, paraque corresponda unidades a unidades, decenas a decenas &c; luego comenzaré a juntar los 1.os numeros de la derecha, y si su valor no escediere el de 9 lo escriviré devajo, pasando a juntar los 2.os numeros en la misma forma. Pero si el valor, que resulta de los 1.os, o 2.os numeros fuere de algunas decenas pondré devajo cero, si de decenas, y unidades pondré devajo las decenas, y en uno, y en otro caso guardaré las decenas para juntarlas con el numero siguiente, v.g. Si las cantidades, que é de sumar son 1755, 2182 las pondrá unas devajo de otras en la forma dicha, y empezando por la derecha dire: 2+5=7, que pondré devajo del 2; 8+5=13, y porque el 13 contiene otra decena mas tres unidades escriviré el 3 devajo del 8, y llevaré una decena, que junta con el uno siguiente compondrá 2+1+7=9, que escriviré devajo del uno; assimismo juntando los 2 ultimos numeros 2+1=3, y poniendo devajo la suma 3 quedará hecha la operacion. Exemplo.

1755
2182
~~3937~~
3937

Escolio 1.º

A los numeros, que se suman les pondré una rayita transversa para significar, que en ellos ia se hizo la operacion, como se ve en el exemplo propuesto.

Escolio 2º.

Si se han de sumar numeros de diferentes especies v.g. Reales, Sueldos, Dineros &c Arrovas, Libras, Onzas &c. Años, Meses, dias &c se pondra la una especie devajo de la otra v.g. los Reales devajo de los Reales, los Sueldos devajo de los Sueldos &c, y empezando a sumar desde la derecha quando la especie inferior, v.g. los Sueldos llega a componer alguna unidad, o unidades de la especie inferior se substituiran estas en su lugar guardando en lo demas las reglas dadas.

Exemplo.

Me pide, que sume 4 Pesos, 2 Reales, y 24 Dineros con 6 Pesos, 10 Dineros, y 2 Reales. Poniendo las cantidade como se ha dicho empezare a sumar los Dineros, que componiendo la suma de 34 me daran un Real + 2 Dineros, escriviré estos devajo de los dineros, y guardare el Real para juntarlo con su especie, que es la siguiente. Lo mismo ejecutare con los Reales, que exedan la cantidad de un Peso &c.

Problema 3º.

Restar numeros dados.

Resolucion.

El numero, que se resta (deve ser menor, que aquel de quien se resta) lo pondre devajo de este de la misma forma, que en la suma: luego quitare cada numero menor del mayor empezando tamvien por la derecha, y los residuos los escrivire devajo de sus correspondientes en la forma siguiente.

Para restar 2431, de 4876 ordenadas las cantidades en la forma dicha empezare por la derecha diciendo 6-1=5, que escrivire vajo del uno; 7-3=4, que se a de poner al lado del 5; 8-4=4; 4-2=2, que con los demas ~~residuos~~ escritos hacen el residuo, o diferencia 2445.

Escolio 1º.

Si de algun numero se uviere de restar el cero se pondra el mismo numero en el residuo; pues como el cero nada es no puede disminuir. Si en la cantidad menor, que se resta uviere algun numero maior, que aquel de quien se resta se añadira a este una decena, y de la assi aumentado se restara el otro; pero al quitar el numero siguiente se dejara uno por la decena, que se avia añadido.

Exemplo

Para restar 4029 de 8037 dire restando 7-9 no puede resultar cantidad positiva por ser maior el 9 que se resta, pues añado al 7 una decena, y me dara 17 de que quitando 9 quedaran 8 que pondre devajo del 9; y por quanto añadi al 7 una decena devo quitarla del siguiente 3 que por eso quedara hecho 2: prosiguo la operacion 2-2=0, que escrivire devajo del 3, 0-0=0, 8-4=4, y quedara hecha la operacion de la resta

Escolio 2º

Si de una cantidad se uvieren de restar muchas se sumaran estas, y se restara la total. Si ocurrieren para restar numeros de diferentes especies se ordenaran, como se dijo en la suma, y en lo demas se guardara el orden de restar.

Escolio 3º

Para saver si la resta se hizo bien se sumara el residuo, o diferencia por la cantidad, que se resta, y si esta suma fuere igual a la cantidad, de quien se resta, convencera la bondad de la operacion. De la misma nos aseguraremos en la suma, si restando una de las cantidades de la suma total saliere por residuo la otra.

Problema 4º

Multiplicar numeros dados.

Resolucion.

Primero para egecutar facilmente la multiplicacion es necesario saver la tabla siguiente en que se ven los productos de los numeros digitos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	28	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81.

Por esta tabla se sabra el producto de qua
lesquiera numeros digitos v.g. de 4 por 5 vus
cando en la columna superior el 4, y en la
lateral de la izquierda el 5, y notando el
lugar donde concurriere la columna del
4 que vaja, y la del 5, que corre a lo largo,
pues alli se vera escrito 20, que es produc
to de 4 por 5.
Segundo para multiplicar numero com
puesto v.g. 234 por qualquiera otro nume
ro simple v.g. 2 pondre a este devajo del 4,
que representa las unidades del multi
plicando, y todas las cifras de este empe
zando por el 4 las multiplicare por 2, y escri
vire devajo el producto 468.
Tercero: para multiplicar un numero com
puesto por otro tamvien compuesto v.g. 3432
por 522 escrivire el multiplicador devajo
del multiplicando empezando por la dere
cha: luego multiplicare todas las cifras del
multiplicando por cada del multiplicador
diciendo 2.2=4, que escrivire devajo de la 1.ª
cifra como producto suio 3.2=6, 4.2=8, 3.2=6,
y escritos estos productos compondran el de
todo el multiplicando por la 1.ª cifra del mul
tiplicador, de la misma manera se ejecuta
ra la operacion en todo el multiplicando por
las demas cifras del multiplicador, cuios pro
ductos he de colocar vajo las cifras de donde

nacd. Ultimamente sumaxe los productos parciales para componer el total en la forma, que aqui se ve.

Dividendo	2520237612	Producto 2º	2542
Divisor	527	Residuo	5373
Producto 1º	2172	Divisor	527
Residuo	2102	Producto	5373
Divisor	527	Residuo	0000

Escolio.

Quandoala derecha del multiplicando, o mulor, o de uno, y otro se allan algunos ceros bastara multiplicar las demas cifras, y al producto de estas añadire otros tantos ceros v.g. en la multiplicacion al producto de 1.1=2 añadire 3 ceros, y resulta 1000. Assimismo en la multiplicacion de 12000 por 400 dire 2.4=8, que pondre debajo del 2; 1.4=4, que pondre despues del 8, y a este producto añadire 5 ceros, que ai en el multiplicando, y mulor de donde resultara 4800000.

Problema 5º

Partir numeros dados.

Resolucion.

Primero la particion de los numeros simples entre si es bien facil, porque partiendo 6 por 2: luego se ve, que el 6 contiene 3 veces al 3 veces al 2 a de advertir, que el dividendo contiene al divisor algun numero de veces, y mas otra cantidad menor, que el divisor v.g. 7 que contiene al 2 3 vezes mas la unidad, entonces se pondra por co to el numero de vezes, y a su lado la canti dad mas con el divisor devajo en esta forma $\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$.

Segundo para partir un numero compues to por otro 459093 por 597 separare con un pun to tantas notas en el dividendo a la izquierda, que excedan, o por lo menos igualen el valor del divisor, las quales en el exemplo pro puesto son 4590 devajo de estas pondre el divisor para ver quantas vezes cave. pe ro por quanto esteno es facil de conocer vusca re las vezes que cave la 1.a cifra 5 en 45 allo, que cave 7 vezes, las quales escrivo al lado del dividendo, y separado con una raia vertical; luego multiplico por el 7 todo el divisor, cuio producto 4179 escrivire devajo del dividen do, de quien restandolo me quedara el resi duo 411, que escrivire devajo, y a su derecha la nota 9 del dividendo: colocado el divi sor devajo vuscare cuantas vezes cave 5 en 41, y allando, que cave 6 vezes escrivire 6 en el coro a la derecha del 7; multiplicare por 6 el divisor, y el producto 3582 lo escri vire devajo de 4119 de quien restado que dara 437, a que añadire el 3 ultima nota del dividendo, y puesto devajo del divisor alla re, que 5 se contiene en 53, 9 vezes; pero escrito 9 en el Coro, y su producto por el divisor, que es 5373 restado del dividendo da cero, y quedara hecha la operacion; cuia prueba es la siguiente.

Multiplicador	3232
Multiplicado	522
1er Producto	6464
2º Producto	6464
3º Producto	171600
Total Producto	3411904

Esta multiplicacion se deve leer, o se lera donde esta la particion 4520237162, que esta en la plana antecedente, y aquella particion se lera aqui;

Escolio 1º

Muchas vezes sucede, que en el Coro no se puede poner todo el numero de vezes, que la 1ª cifra del divisor se contiene en la 1ª, o 1as del dividendo, porque multiplicando el divisor por este numero de vezes darian el producto maior, que el Dividendo, de quien se devia restar. toda la dificultad pues de partir consiste en allar un Coro, que, que multiplicado por el divisor de un producto, el qual se pueda restar del Divº. Para esto no se pueden dar reglas, y es precisso ir tanteando asta que con el exercicio se adquiera facilidad. Solamente en General podemos decir, que en el Coro no se a de poner cifra, que exceda al 9.

Escolio 2º

Quando quedare algo, que ia no se pueda partir por el divisor se pondra este residuo alla do del Coto, y devajo del di.^or como se dixo en la particion de los numeros digitos. Si las notas del divi.^o, que vajo para partir compone nume ro menor, que el divisor pondre cero en el Coto, y vajare las notas siguientes, al fin, de que com pongan cantidad maior, que el Di.^or

Escolio 3.^o

La division estara bien hecha si multiplicando el Coto por el D.^or, o este por el Coto, y añadiendo al producto algun residuo si uviere, que dado, resul tase el D.^o Assimismo la multiplicacion sera exacta, si partiendo el producto por el mul.^o sa liere por Coto el mul.^or, o si partiendo por el mul.^or saliere el mul.^o

Escolio 4.^o

Aquel residuo, que queda hecha la division, y que ponemos al lado del Coto con el Di.^or devajo se lla ma quevrado. Cuia naturaleza se entenderà por las definiciones siguientes.

Definicion 2.^a

Quevrado es una parte, o partes de la unidad con siderada como un todo divisible. Assi un pie se llama quevrado de vara, en quanto es una par te de las 3, en que la vara puede considerarse dividi da.

Def. 3.^a

Numero quevrado es el, que expresa alguna par te, o partes de la unidad, que se considera dividi da, o el, que indica la razon, que esa parte, o partes dicen a la unidad, de quien son quevrado. Assi 2 ter cios de vara es numero quevrado, que expresa 2

partes de las 3, en que la vara se considera di
vidida, o que indica aquellas partes de la vara, que
dicen a ella la razon de 2 a 3.

Escolio.

La razon, que dice el quebrado a la unidad se ex
presa con la particion de un numero por otro. De
donde resulta, que el numero quebrado se compo
ne de 2 numeros, 1º, que se considera como D.or, y se
pone encima del otro, que hace de Dor, y el Coto
es el que expresa la razon, o valor del quebrado.
el numero de encima suele tambien llamarse
numerador, y el de abajo denominador; este por
que dice quales son las partes en que la unidad se
considera dividida, y aquel porque numera las,
que de esas partes dice el quebrado.

Corolario 1º.

Siempre, que el numerador fuere igual al Deno.or
el Coto sera la unidad; si maior, sera maior, que
la unidad, y si menor sera menos. en el 1º, y 2º
caso no avra propiamente quebrado; pues este
es parte, o partes de la unidad: Luego solamente
quando el Coto del nume.or por el denomi.or fue
re menor, que la unidad (lo que sucede en ter
cer caso) avra quebrado propio.

Cor. 2º.

El valor de los quebrados se toma de la razon, que
ai entre el nume.or, y denomi.or, la qual como
dijimos se mide por el Coto: luego los quebra
dos en que la razon del nume.or al denomi.or es

la misma, serà iguales. Por lo qual un mismo quebrado sin immutar su valor se podra expresar de infinitos modos v.g. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{20}{40}$ &c porque todas las expresiones dicen la razon del 1º a 2.

Corolario 3º

Aquel quebrado serà maior, en que el numerador digere maior razon a su denominador, y entonces dirà maior razon, quando el numerador contenga mas partes de su denominador, que el otro quebrado. Assi $\frac{20}{40} > \frac{6}{18}$.

Cor. 4º

Si el numeradora, y denominador de un quebrado se multiplica, o parte por un mismo numero en el 1er caso el producto, y en el 2º el Coto seran quebrados iguales al 1º. Assi multiplicado $\frac{6}{8}$ por 2 resultarà el quebrado igual a $\frac{12}{16}$ y partiendo por 2 resultarà el quebrado igual a $\frac{3}{4}$. Lo mismo sucede en los quebrados literales pues $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$.

Corolario 5º

De donde se infiere el modo de reducir un quebrado a menores terminos conservando la igualdad; porque si allada la maior medida comun del numerador, y denominador partiere por ella ambos numeros resultarà un quebrado igual reducido a menor expresion.

Escolio 1º

Medida de un numero se dice otro numero, que lo parte exactamente. Assi el 4 es medida del 8, pero el 3 no lo es del 5. Medida comun de muchos numeros es aquel numero, que los parte a todos exactamente; tal es el 4 respeto del 8, y del 12. La maior comun de los numeros se alla partiendo el maior por el menor: luego este por el residuo de la 1.a division; este residuo por el de la 2.a, y asi en adelante asta ver si queda cero, en cuio caso el ultimo numero, o partidor es la maior medida comun; pero si quedare la unidad es señal, que aquellos numeros no tiene otra medida comun. V.g. para allar la maior medida comun de 75, y de 30 partire el 75 por 30, y el 30 por el residuo de la 1.a particion, que es 15, y resultara cero: luego el 15 es la maior medida comun del 30, y del 75. Si fueren 3, o mas los numeros allada la maior medida comun de los dos 1.os se buscara la que fue medida del 3, y del que fue medida de los 2 primeros, y esta sera comun medida de todos.

Esc. 2.o

Muchas vezes se reducira los quebrados a maior expresion partiendo el numerador, y denominador por 2 todas las vezes, que se pueda, despues por 3, despues por 5 &c. v.g. para reducir $\frac{48}{36}$ partiendo por 2 resultara $\frac{24}{18}$, $\frac{12}{9}$, y porque no se puede partir el 9 por 2 partiendo por 3 resultara $\frac{4}{3}$ que todos son quebrados iguales al 1.o

Cor. 6.o

Todas las especies inferiores las puedo considerar como quebrados de las superiores poniendoles por denominador el numero, que indica las partes de la misma especie, que compone la superior v.g. 2 reales, como quebrado de un Peso será $\frac{2}{8}$, o un 4º, que es $\frac{2}{8}$ o $\frac{1}{4}$. Cor. 7º.

Para saver el valor de un quebrado de monedas, pesos &c. v.g. el de $\frac{3}{4}$ de un peso en Reales multiplicare el 3 por 8, que son los reales de cada peso, y partiendo el producto 24 por el denom.or 4, el valor será el Coro de $\frac{3}{4}$ de peso en reales. Si quiero saver 2 reales, que parte son de un peso, pongo al 2 por denom.or de el 8, que es el numero de reales de cada peso, y allare, que 2 reales son 2 octavas partes de un peso. Cor. 8º.

Qualquiera parte, o quebrado si se considera dividido en otras partes será estas quebrado de quebrado. Assi un 4º de un 5º de peso se llama quebrado de quebrado de peso, que es lo mismo, que cada 5ª parte de un peso dividida en 4º. Para reducir estos quebrados a uno solo multiplicare el uno por el otro, y resultara el quebrado $\frac{1}{20}$.

Problema 6º.

Reducir los quebrados a un mismo denom.or, quando lo tuvieren diferente. Resolución.

Multipliquese cada quebrado por los denom.ores de los otros, y el producto de todos los denom.dores pongase por denominador de los quebrados, que resultan. v.g. he de reducir $\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}$ multiplicare el 2 por 4.5 y el producto 40 será numer.or del 1.er quebrado el 3 por 3.5 y el producto 45 será numer.or del 2º quebrado; ultimamente multiplicare el 4 por 3 multiplicado por 4, y el producto 48 será numer.or del tercer quebrado. Despues multiplicare entre si los denom.^{res} de todos los quebrados, y el producto 60 sera el comun denom.^{or} Vease la forma de la reduccion $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}=\frac{40+45+48}{60}$. De la misma manera se reducirá los quebrados literales $\frac{B}{b}$, y $\frac{C}{z}$ reducidos sera $\frac{Bz}{bz}\,\frac{bC}{bz}$.

Cor.

Por esta reduccion se conoce facilmente el valor entre si de los quebrados v.g. si quiero saber qual es maior de estos $\frac{2}{5}\,\frac{3}{4}$ los reducire a un mismo denom.^{or}, y resultara $\frac{8}{20}\,\frac{15}{20}$ de que el 1º es menor, que el 2º.

Problema 7º.

Sumar quebrados.

Resolucion.

Reduzcanse a un mismo denom.^{or} juntense los nume.^{res}, y a la suma se pondra el comun denom.^{or}

exemplo 1º

He de sumar $\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{2}{4}$ reducidos seran $\frac{72+80+48}{96}$ y sumados los numer.^{res} daran este $\frac{200}{96}$.

Ex. 2º

Para sumar $\frac{A}{B}\,\frac{C}{D}$ reducidos seran $\frac{AD}{BD}$, $\frac{BC}{BD}$, y sumados $\frac{AD+BC}{BD}$.

Problema 8º.

Restar quebrados.

Resolucion.

Reduzcanse a un mismo denominador, restese el menor nume.^{or} del maior, y al residuo se pondra el comun denominador.

Ex. 1º

De 3 quartos he de restar un tercio reducidos sera $\frac{9}{12}\,\frac{4}{12}$ y restando el 4 del 9 quedaran $\frac{5}{12}$.

$\frac{A}{B}$ se a de restar $\frac{2C}{B}$ 2º. reducidos sera $\frac{A}{BD}$ $\frac{BC}{BD}$, y restados $\frac{BC-AD}{BD}$.

Problema 9

Multiplicar quebrados.

Resolucion.

Multipliquese numeᵒʳ, y denomⁱᵒʳ, el numeᵒʳ por el numeᵒʳ, y el denomⁱᵒʳ por el denominador, y quebrado, que resulta sera el producto.

Exemplo 1º

Para multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ multiplicare el 3 por 2, y el 4 por 5, y resultara el producto $\frac{6}{20}$.

ex. 2º.

Multiplicando $\frac{AB}{D}$ por $\frac{CB}{D}$, $\frac{ABCB}{DD}$ resultara.

Problema 10

Partir quebrados

El num

Resolucion

El numeᵒʳ del dividendo multipliquese por el denomⁱᵒʳ del Divisor, y el producto sera numeᵒʳ del Coto; multipliquese el numeᵒʳ del Dʳ por el denomⁱᵒʳ del dividendo, y el producto sera denomⁱᵒʳ del Coto. Mas breve invertirase el diviᵒʳ poniendo su denomⁱᵒʳ por numeᵒʳ, y al contrario por el Dʳ inverso multipliquese el Dº, y el producto sera el Coto. Exemplo 1º. Partiendo $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ invertire el Dʳ poniendo en su lugar $\frac{5}{4}$ por el qual multiplicando $\frac{2}{3}$ resultara el Coto $\frac{10}{12}$. ex. 2º: para partir $\frac{BD}{FG}$ invertire el Dʳ poniendo en su lugar $\frac{G}{F}$, el qual multiplicado por $\frac{B}{C}$ dara $\frac{BG}{DF}$.

Escolio 1º.

Si se uviere de multiplicar, o partir ~~un~~ algun numero entero por un quebrado se expresara el ente ro en forma de quebrado, poniendole la unidad por denomin^{or}, y en lo demas se obrara segun la regla de la multiplicacion v. para multiplicar 8 por $\frac{2}{4}$ expresarse asi $8.\frac{2}{4}$ cuio producto sera $\frac{16}{4}$, y el Co to $\frac{32}{2}$.

Escolio 2°.

Partiendo, o multiplicando entero, y quebrado por entero, y quebrado, reducirse los enteros a la especie de sus quebrados; lo qual se haze multiplicando el entero por el denomin^{or} de su quebrado, y añadiendo al producto su nume^{or}, a cuia suma servira de Deno^{or} el del quebrado. Ex. He de multiplicar, o partir $2+\frac{3}{4}$ por $3+\frac{4}{6}$ reduciendo el 1° me dara $\frac{11}{4}$, y el 2°, $\frac{22}{6}$. Asi reducidos lo multiplicarse, o partirse segun las reglas generales.

Escolio 3°.

En la multiplicacion de los quebrados propios resulta el producto menor, que el mul^{o}. La razon es evidente por la misma naturaleza de los quebrados, y de la multiplicacion. En esta asi se ha el producto al mul^{o}, como el mul^{or} a la unidad: luego siendo en los quebrados el Mul^{or} menor, que la unid^{d}, tambien lo sera el producto al Mul^{o}.

Escolio 4°.

En la division el Co^{te} es maior, que el Divi^{o}. porque asi se ha segun la naturaleza de divi^{on} la unidad al Co^{te}, como el D^{or} al divi^{o}; luego tambien permutando sera la unidad al Di^{or} como el Co^{te} al Divi^{o}, y siendo en los quebrados la unidad maior, que el Di^{or} sera tambien el Co ro maior, que el Divi.^{o}

Escolio 5.^{o}

Los quebrados pueden tomar diferentes nombres segun que la unidad, o entero se considere diversamente divido. Los principales, y mas usados son los principales, y sexagesimales.

Def. 4.^{a}

Quebrados decimales son las partes decimas, centesimas de la unida, que se considera dividida segun la razon decupla, que se expresa en esta forma $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$. Quebrados sexagesimales son las partes de la unidad dividida segun la razon sexagecupla, y se expresa en esta forma $\frac{1}{60}, \frac{1}{3600}$.

Escolio.

Para maior brevedad del calculo suelen notarse estos quebrados con una raia a las decimas, 2 a las centesimas, 3 a las milesimas &c., y el numero de las partes, que se toma se indica con los numeros naturales. De manera, que 4'3''2'''5'''' significa 4 decimas, 3 centesimas, 2 milesimas, $\frac{5}{10000}$. En los sexagesimales la 1.^{a} sexagesima se llama minuto 1.^{o}, y se expresa con una raia, la 2.^{a} minuto 2.^{o}, y se expresa con 2 raias &c.

Problema 11.

Sumar, y restar quebrados decimales, y sexagesimales.

Resolucion.

Los quebrados de una misma especie, que son los que tiene iguales raias se pondran unos de

vaso de otros, lo numeros naturales se suma
ran, y restaran segun las reglas generales, y a
la suma, o residuo se pondran las raias correspon
dientes. Ex.10

Addiccion $5'8''7'''6''''$

$2'1''2'''3''''$

Suma $7'9''9'''9''''$

Resta $3'7''5'''3''''$

Escolio.

Para entender, y ejecutar con brevedad las ope
raciones de estos quevrados se ha de advertir, que
qualquiera decimales valen lo mismo, que un
quevrado, cuio numer.° se compone de los nume
ros naturales, que expresan los Decimales qua
tos son, y del ~~deno~~ denominador de la unidad con
los ceros, que signifique el valor del ~~valor~~ signo
de los Decimales v.g. $2'4''6'''4'''' = \frac{2464}{10000}$. Para la de
monstracion reduzco de una parte los Decima
les en sus quevrados correspondientes sin ate
der al valor, que por razon de el lugar tiene
los numeros naturales, y de otra tomando
cada numero natural segun el valor, que le
da el lugar primo de ellos otros tantos que
vrados, cuio comun denominador sera el que
expresa el valor del maior signo de los Deci
males en la forma siguiente.

$2'4''6'''4'''' = \frac{2464}{10000}$	
$\frac{4}{10000}$	$\frac{4}{10000}$
$\frac{6}{1000}$	$\frac{60}{10000}$
$\frac{4}{100}$	$\frac{400}{10000}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{2000}{10000}$

Estos quevrados son iguales,
pues comparando v.g. $\frac{4}{100}$ con
$\frac{400}{10000}$ allare, que tanto en le

cede el numerador de esta al numer.^r de la 1.^a, quanto el Denomin.^r al Denomin.^r. Lo mismo sucede con los demas quebrados, y como todos ellos juntos componen el quebrado $\frac{2464}{10000}$ (lo que sean sumando sus numeradores) se infiere que este quebrado será igual al valor de todos los Decimales.

Cor. 2º

De aqui pende la denominacion de todas las ope-raciones, que se hace con los Decimales; pues en la suma, y resta arriva propuestos los Decimales. $5'8''9'''6'''' = \frac{5896}{10000}$ $2'1''2'''3'''' = \frac{2123}{10000}$

Luego la suma $7'0''9'''9'''' = \frac{7099}{10000}$.

De donde para sumar los decimales basta sumar los numeros naturales, y a la suma añadir el valor, que indica el maior signo. Lo mismo proporcionalmente se observara en la resta.

Cor. 2º

Tambien se infiere, que si algun entero se halla junto con los Decimales será la suma de todos igual a un quebrado, cuio numer.^r será el entero, y Decimales, y el Denomin.^r el valor de el maior signo de los decimales v.g. $32,5'4''9''' = \frac{32549}{10000}$. La razon es clara; pues como consta de el numero antecedente los Decimales son iguales a $\frac{549}{1000}$: Luego reduciendo los ~~quebrados~~ enteros a un quebrado de la misma denominacion, se sultara $\frac{32000}{1000}$, el qual sumado $\frac{32540}{1000}$.

Problema.

Multiplicar, y partir quevrados decimales, y sexagesimales. Resolucion.

Multipliquense, y partanse los numeros naturales como si fueren enteros; en la multiplicacion se pondra al 1er numero dela derecha de el producto la suma de los maiores signos del Mulor, y Mulo, y en la particion restese el maior signo de el partidor de el maior de el Divo, y el residuo pongase al 1er numero dela derecha de el coto.

Multiplicacn Exemplo.

Particion coto

2'4''6''' 9'6'A 4'3''2'''

22 2

402

402

Suma 5412.

Demonstracion.

El mulor 2'4''6''', y mulor 2'2'' son iguales a los quevrados $\frac{246}{1000}$, y $\frac{22}{100}$, y como para multiplicar estos quevrados basta multiplicar los numeradores, y poner por Denomir el valor de la suma de los maiores signos, que es el Denomir de el quevrado la misma cantidad resultara si al producto de los numeros naturales se le pone la suma de los maiores signos del Mulor, y Mulo. Lo mismo respectivamente se demonstrara en la particion. Escolio 1o.

Suelen tambien expresarse estos quevrados omitiendo los signos, que sirve de Denomin.^{res}

y poniendo en su lugar al nume.r un punto, o coma, añadiendo tamvie quando fuere ne cesario los ceros, que basten para indicar el valor de las partes, que se toma v.g. en lu gar de $\frac{23}{100}$ pondre. 0.23; pues contando desde la izquierda a la derecha el cero vale unidades, y el punto decenas, y el 2 centenas, y contan do de la derecha a la izquierda el 3 vale uni dades, el 2 Decenas, y por eso es toda la canti da $\frac{23}{100}$.

Corolario

En este modo de expresar los decimales se ha de sumar, y restar como los numeros enteros; lue go a la suma se an de poner los ceros, que indi ca el valor de el quevrado. En la multiplica cion se añadira al producto la suma de los ceros de el mul.or, y mul.do; y en la parti cion se pondra al Coto la diferencia que re sulta quitando los ceros de el Div.r de los de el Div.o

Escolio 2.o

Para reducir qualquier quevrado comu a partes decimales, o sexagesimales pondre al nume.r una coma, o punto, y despues los ceros, que exprese las partes a que quiero re ducirlos, y el nume.r asi dispuesto lo parti re por el Denomin.r, cuio Coto sera el quevrado reducido v.g. Para reducir $\frac{4}{5}$ a partes Decimas pondre $\frac{4}{5}$, o cuio nume.r partido por el deno min.r me dara 0,8, que es $\frac{4}{5}$ reducido a partes

Capitulo 1º

La doctrina de proporciones aplicada a las potencias, dignidades, y logarithmos.

Definicion 1ª

En una serie de cantidades, que empezando de la unidad proceden en cantidad continua, todos los terminos menos la unidad son potencias, o dignidades. Se dice potencias porque nace de lo que puede ser cada cantidad multiplicada por si misma segun alguna razon determinada. Assi sean los terminos de estas series.

A°	AA	AAA	&c
1	2	4	8 &c.

Cor. 1º

La razon, que entre si guarda, o en que se multiplica los terminos de esta serie, o progression da diferentes nombres a las potencias. Siendo la unidad el termino 1º, el 2º, que es la raiz por donde se determina la razon comun de los terminos sera 1ª Dignidad, el tercero 2ª.

Corolario 2º.

Como la unidad no tiene en si dimension alguna de la Raiz no se dice potencia, o dignidad, desde el 2º termino.

Corolario 3º.

El 2º termino contiene en si una dime

sion, o una vez la razon en que se han los terminos. el 3.º 2, el 4.º 3, y assi en adelante. Para abreviar pues el calculo, y no repetir tantas vezes la misma Cantidad una progresion Arizmetica, que empieze desde cero, y se pone sus terminos encima de las cantidades en esta forma. A^0, A^1, A^2, A^3, en que los numeros de la progresion Arizmetica, se llama exponentes de las potencias, o Dignidades; porque indica las vezes, que cada una de ellas contiene la razon comun, o como dicen otros se multyplica por si misma.

Escolio 1.º

A las potencias, o Dignidades, que nosotros distinguimos por sus exponentes dieron les Antiguos nombres propios, que son los siguientes.

A^1	2	Raiz, o lado
A^2	4	quadrado
A^3	8	cuvo
A^4	16	Biquadrado
A^5	32	supersolido
A^6	64	quadrado cuvo
A^7	128	Supersolido 2.º
A^8	256	quadrado, quadrado quadrado
A^9	512	cuvo, cuvo &c.

Escolio 2.º

Donde se ve, que una potencia respeto de distintos terminos puede tener diversas denominaciones v. g. A^6, y 64, que son 6.ª Potencia respeto de A^1, y de 2, son 2.ª respeto de A^3, y de 8, y 3.ª respeto A^2, y de 4.

Definicion 2a

La Raiz, o 1a potencia de donde las demas nace, se llama Binomio, quando consta de 2 partes, Trinomio de 3, multinomio, o polinomio, quando consta de muchas.

Theorema 1o.

El quadrado, o 2a potestad de un Binomio se compone de los quadrados de ambas partes, y de el duplo producto de la multiplicacion de una parte por otra.

Demonstracion.

Es la misma operacion siguiente.

$A+B$	$20+5$
$A+B$	$20+5$
$AA+AB$	$400+100$
$+AB+B$	$+100+25$
$AA+2AB+BB$	$400+200+25$

Corolario.

De donde se infiere el modo facil de elevar qualquiera cantidad compuesta a su quadrado, porque si consta de 3 partes v.g. $A+B+C$ tomare las dos 1as $A+B$ como una, y formare su quadrado $A^2+2AB+B^2$, al qual añadire el duplo producto de esta 1a parte por la 3a, que es $2AC+2BC$, y el quadrado de la 3a C^2. Si la cantidad tuviere 4 partes tomare como una las 3 1as, si 5 las quatro 1as &c, y lo mismo se hara en las cantidades numericas.

Theorema 2o

El cubo de un Binomio consta de los cubos de ambas partes, y de 3 productos de el quadrado de cada una de las partes por la otra.

Demonstracion.

Es la misma operacion con que tomo el

cuvo, o 3ª dignidad multiplicando el quadrado, o 2ª dignidad por su raiz en esta forma.

$$A^2+2AB+B^2$$
$$A+B$$
$$A^3+2A^2B+AB^2$$
$$+A^2B+2AB^2+B^3$$
$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$

$$400+200+25$$
$$20+25$$
$$8000+4000+500$$
$$2000+1000+125$$
$$8000+6000+500+125$$

En que son los cuvos de las 1as partes A^3, y 8000, los 3 productos de los quadrados de las 1as por las 2as $3A^2B$, y 6000, y de los quadrados de las segundas por las primeras $3AB^2$, y 1500, y los cuvos de las segundas B^3, y 125.

Corolario.

Para elevar al cuvo el trinomio $A+B+C$ tomando las 2 primeras partes como una sola forma re su cuvo $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$, a que añadire el duplo producto, que nace de la multiplicacion de el quadrado de las 2 primeras por la 3ª C^2 por las dos 1as $3AC^2+3BC^2$, y ultimamente pondre el cuvo de la 3ª, que es C^3, y resultara por cuvo de el trinomio $A^3+3A^2B+3AB^2+3a^2C+6ABC+3B^2+3AC^2+3BC^2+C^3$.

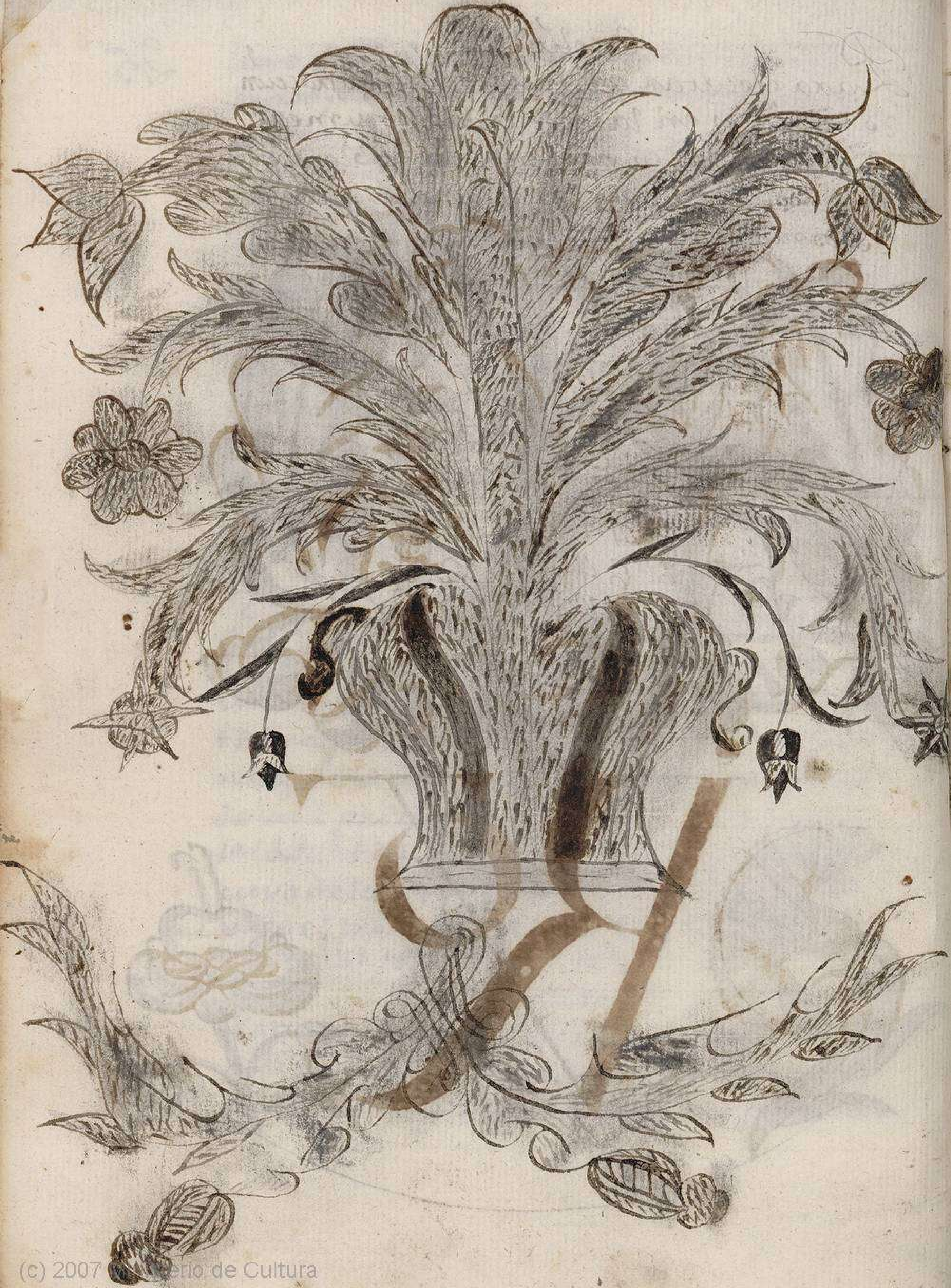
Definicion 3ª

Estraer la raiz de una potencia es allar aquella cantidad, o numeros de cuia multiplicacion nace potencia.

Corolio.

Para efecutar con facilidad la extraccion de las raices en las cantidades numericas se a de tener presente la tabla sig.te en donde se hallan los quadrados, y cuvos de los numeros digitos.

Raiz	Quadrado	Cuvo
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729



Problema 1º

Extraer la raiz quadrada.

Resolucion.

Serviran de resolucion los exemplos.

Ex. 1º

De cantidades.

Para extraer la raiz quadrada de 293764. 1º dividire la cantidad de 2 en 2 numeros con comas, o puntos en esta forma 29, 37, 64, pues tantas notas tendra la raiz, quantas fueren las divisiones. Poco importa, que en la ultima division azia la izquierda quede solo una nota.

Segundo buscare la raiz quadrada de 29, que es la 1ª division a la izquierda, y por quanto 29 no es quadrado perfecto tomare del quadrado antecedente 25, la raiz 5 que escrivire al lado, como se hace en la division con el coto.

Tercero: el quadrado de 5, que es 25 lo restare de 29, y el rendido 4 lo escrivire devajo poniendo a su lado la 2ª division 37.

Quarto: por el doble valor del 5 partire 43, y el coto 4 lo pondre al lado del 5, como 2ª parte de la raiz.

Quinto: formare el quadrado de 4, y multiplicare el mismo 4 por el duplo de 5, que es 10 para tener el doble producto de la 1ª parte por la 2ª, o mas brevemente multiplicare el 4 por 10, q̃ es 104, y el producto 416 restado 437 dara por residuo 21, que escrivire devajo, y a su

lado la ultima division 64.
Sexto el doble valor de 54, que es 108 me serviria para partir 216, y allando, que cave 2 veces, escrivo el 2 como 3ª parte de la raiz al lado del 4.
Septimo: multiplico el 2 por si para tener su quadrado, y por 108 para tener el doble producto 1082 de la 1ª parte por la 3ª, y el producto 2164 restado del 2164 dara ceros, y quedara concluida la operacion: luego la raiz es 542.

Ex. 2º

En cantidades literales.

Primero en quadrados de cantidades simples es facil la extraccion; pues luego se ve, que el quadrado de A^2 es A, de A^2X^2 es AX, de $\frac{A^2B^2}{C^2}$ es $\frac{AB}{C}$.
Segundo. extraiendo la raiz quadrada de la compleja $A^2+A^2B+B^2$, buscare la raiz del 1er termino a la izquierda A^2, que es A, y escrito A en el Coro restare su quadrado A^2 del 1er termino A^2, pondre cero devajo, y a su lado los terminos siguientes $2AB+B^2$ por el doble valor de A, que es $2A$ partire $2AB$, cuio Coro $+B$ lo pondre con A como 2ª parte de la raiz, y multiplicando B por $2A$ para tener el doble producto de la 1ª parte por la 2ª, y tamvien por B para tener el quadrado de la 2ª parte, el producto $2AB+B^2$ lo restare, y dando ceros es señal, que la raiz es $A+B$.

Problema 2º

Extraer la raiz cuvica.

Resolucion.

Serviran tamvien los exemplos de resolucion.

Exemplo 1º

En cantidades numericas. - - - - - - - - - -

Para estraer la raiz cuvica de 1728. 1º divire esta cantidad de 3 en 3 notas con un punto, o coma empezando de la derecha, tantos numeros tendra la raiz, quantas divisiones saigan, y de estas la 1ª azia la izquierda podra tener 3 notas, o 2, o 1, como en este exemplo.
Segundo busco la raiz cuvica de la 1ª division 1, que es 1, y la pongo en el lugar correspondiente, como se ha hecho con la raiz quadrada; y suvuo 1 restado de la 1ª division me da cero, que escrivo devajo, y a su lado la 2ª division 728.
Tercero tomo el triplo quadrado de la 1ª parte de la raiz 1, y advirtiendo, que aquel 1 por razon del numero, q. sigue vale 10, formo el quadrado de 10, que es 100, el qual triplico, o multiplico por 3 para tener 300, que es el triple quadrado de 1.
Quarto parto la division 728 por 300, y el coto 2 lo escrivo al lado del 1 como 2ª parte de la raiz.
Quinto el triple quadrado de la 1ª parte de la raiz, que es 300 lo multiplico por 2 para tener 600, que es el producto del triple quadrado de la parte por la 2ª.
Sexto busco el quadrado de 2, que es 4 lo triplico, o multiplico por 3, y me dara 12, que es triple quadrado de la 2ª parte, el qual multiplicado por la 1ª parte lo me dara 100, que es el producto del triple quadrado de la 2ª parte

por la 1ª. Ultimamente tomo el cuvo de la 2ª parte, que es 8, y sumando con 600+120 me da ra 728, que restado de la ultima division da ceros: luego la raiz es 12.

(Ex 2º en cantidades literales.)

Para extraer la raiz cuvica $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$. 1º tomo la raiz de A^3, y elevandola a su cuvo A^3 lo resto del de arriva, y me da cero.
Segundo por el triple quadrado de A, que es $3A^2$ parto el termino sigte $3A^2B$, y el coto $+B$ lo escrivo con A, como 2ª parte de la raiz.
Tercero tomo los productos del triple quadrado de A por B, y del triple quadra de B por A, que son $3A^2B+3AB^2$, y sumados con el cuvo de la 2ª parte, que es B^3: los restare de los terminos sigtes, y me dara cero: luego la raiz es $A+B$.

Cor 1º

La raiz quadrada, o cuvica de qualquier quebrado es el quebrado, que resulta extraiendo la raiz del numer. y denomin. v.g. de $\frac{36}{49}$ es raiz quadrada ~~a~~ $\frac{6}{7}$; y de $\frac{64}{1000}$ es raiz cuvica $\frac{4}{10}$.

Cor 2º.

Suceden muchas veces, que las potencias literale llevan antes de si algunos numeros naturales, que se llaman coeficientes, porque indican las veces, que se toma aquella potencia, y en estos casos tambien se ha de extraer la raiz de dichos numeros como en el exemplo sigte $27A^3$ es $3A$, cuio cuvo $27A^3$ lo resto del de arri va, y me da cero; vajo la 2ª division $-54A^2C$, y el quadrado de $3A$, que es $9A^2$ lo triplico para tener $27A^2$ por el qual partiendo $-54A^2C$ sera el coto $-2C$, que pondre como 2ª parte de la raiz. Multiplico el triple quadrado $27A^2$ por la 2ª parte $-2C$, y me dara $-54A^2C$; busco el quadrado de $-2C$, que es $4C^2$, el qual triplicado, y multiplicado su triplo por la 1ª parte $3A$ me dara $+36AC^2$ el qual sumado con $-54A^2C$, y con el cuvo de $-2C$, que es $+8C^3$ los restare de los sigtes terminos, y me dara ceros: luego la raiz es $3A-2C$

Cor. 3º

Si un numero no tuviere raiz justa en enteros tampo la tendra en quevrados. La razon es clara, porque el quevrado, que fuere raiz a de ser de tal naturaleza, que multiplicado por si mismo produzca la potencia, de qué es raiz; lo que jamas sucedera, pues el quevrado multiplicado por quevrado siempre dara quevrado. No obstante se podra allar la raiz quadra, o cuvica &c casi en algun quevrado verdadera, si se multiplica el numero, que no es quadrado por el quadrado, o cuvo del Denomr del quevrado, y extraiendo la raiz, o quadrada del producto se le pone a esta por numer el Denomr del quevrado v.g. de 12 busco la raiz cuvica, que se diferencie de la verdadera menos que $\frac{1}{8}$; pues multiplico 12 por 512 cuvo de 8, y extraida la raiz del producto 6144, que es 18 le pondre el 8, y sera $\frac{18}{8}$, o $2\frac{2}{8}$ la raiz cubica, que se dife rencia de la verdadera menos, que un un 8.

Cor 4º

Asimismo de qualquier numero, que por no ser quadrado, o cuvo perfecto no tiene ra iz justa, se podra allar una raiz, cuia diferen cia de la verdadera sea menor, que $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$ &c. en esta forma, para allar al numero 67 que no es quadrado perfecto una Raiz, que solo se diferencie de la verdadera en $\frac{1}{10}$ añadire al 67 dos ceros, que es lo mismo, que multiplicar 67 por 100 para tener el quadrado $\frac{6700}{100}$: luego sa cando la raiz quadrada del numerador, y deno minador de este quebrado sera $\frac{81}{10} = 8\frac{1}{10}$ raiz apro ximada; la qual si quiero en 100 añadire 4 ce ros al 67; si en 1000 añadire 6 ceros &c.

Cor 5º

Quando hecha la extraccion de qualquiera raiz so brare algo es señal, que aquel numero no es dignidad perfecta, y por consiguiente, que no tiene raiz jus ta. El modo de aproximarla es añadir al ultimo residuo 2 ceros para decimas, 4 para centesimas &c.; luego continuar la raiz allada para partir por ella el residuo assi aumentado, y poner el cocie en el lu gar de la raiz con el denominador correspondiente v. g. 149 Raiz $12\frac{20}{100}$ es raiz aproximada en decimas.

Problema 3º

Allar la diferencia de dos quadrados, y de dos cuvos, cuias radices solamente se exceden en la unidad.

Resolucion.

Llamo la raiz menor v, y sera la maior $v+1$, el quadrado de esta sera v^2+2v+1, y el de la otra v^2; el cuvo de la maior v^3+3v^2+3v+1, y el de la menor v^3: luego la diferencia de los quadrados sera $2v+1$, esto es el duplo de la raiz menor mas la unidad, y la de los cuvos $3v^2+3v+1$, esto es el quadrado de la raiz maior, el duplo quadrado de la menor, y la misma menor raiz.

Cor. 6.º
De donde se infiere el metodo facil de construir las tablas de los numeros quadrados, y cuvos; pues para los quadrados bastara tomar la suma de la raiz antecedente, y siguiente, que añadida al antecedente quadrado me dara el siguiente; v.g. la suma 2+3 añadida al quadrado 4 me dara el siguiente 9 quadrado de 3. En los cuvos la suma del quadrado de la raiz maior del duplo quadrado de la menor, y de la misma menor raiz añadida al cuvo ante.te dara el sig.te v.g. 9, que es quadrado de 3+8, que es duplo quadrado de 2, y el mismo 2 añadido a 8 dara el cuvo sig.te 27.

Problema 4.º

Elevar un Vinomio a qualquiera potencia, o dignidad.

Resolucion.

Primero para allar la potencia 6.ª v.g. de $A+B$ formare 2 progresiones Geometricas, de las quales la 1.ª empezara desde A elevada a la potencia, que se busca, e ira decreciendo asta la unidad

dad, y la otra empezando en B ira subiendo asta la potencia, que se busca en esta forma $\frac{A^6}{1}\,\frac{A^5}{B^1}\,\frac{A^4}{B^2}\,\frac{A^3}{B^3}\,\frac{A^2}{B^4}\,\frac{A^1}{B^5}\,\frac{1}{B^6}$: luego multiplicare los terminos de la serie superior por sus correspondientes de la inferior en esta forma $1A^6+A^5B^1+A^4B^2+A^3B^3+A^2B^4+A^1B^5+1B^6$. Para allar los coeficientes de estos terminos escrivire los expo^tes de las potencias de B vajo de las potencias de A en esta forma. $\frac{6\;5\;4\;3\;2\;1}{1\;2\;3\;4\;5\;6}$. De los quales el 1º $\frac{6}{1}=6$ sera coeficiente del 2º termino A, y el inferior 1 por 2 el que vrado resultare $\frac{30}{2}=15$ sera coeficiente del 3º termino, y proseguiendo assi allare los demas coeficientes multiplicando entre si los numeros de la serie superior como numeradores, y los de la inferior como Denominadores, cuios Cocientes seran los coeficientes, y el Binomio A+B elevado a la 6ª potencia sera el sig.te:

$1A^6+6A^5B+15A^4B^2+20A^3B^3+15A^2B^4+6B^5+1B^6$.

2º si esta misma regla la quiero aplicar para elevar el Binomio a una Potestad indeterminada llamare su expon.te M v.g. y descendiendo por todas las potencias de AM formare las 2 series sig.tes

$\frac{A^{m-1}}{1B^1}\;\frac{A^{m-2}}{B^2}\;\frac{A^{m-3}}{B^3}\;\frac{A^{m-4}}{B^4}\;\frac{A^{m-5}}{B^5}\;\frac{A^{m-6}}{B^6}$, y multiplicando los terminos de una, y otra serie resultara la sig.te

$A^m+A^{m-1}B+A^{m-2}B^2+A^{m-3}B^3+A^{m-4}B^4$ &c. Assi mismo (para allar) los coeficientes de los terminos seran los Cocientes, que nace de la Division de los productos de los expo.tes de la serie superior partidos por los de la inferior de esta manera $\frac{M}{1}$ del 2º termino, $M^1\cdot\frac{M-1}{2}$ del 3º termino $\frac{m-1}{1}.\frac{m-2}{2}$ del 4º termino $\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}:\frac{m-3}{4}$ del 5º termino &c. y poniendo estos coeficientes a los correspondientes terminos sera $A^m + \frac{m}{1}A^{m-1}B + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}A^{m-2}B^2 + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}A^{m-3}B^3$ &c.

Porquanto $A^{m-1} = \frac{A^m}{A}$ $A^{m-2} = \frac{A^m}{A^2}$ substituiendo estos valores en la formula antecedente sera $A^m + \frac{m}{1}\frac{A^m}{A}B + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}\frac{A^m}{A^2}B^2 + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{A^m B^3}{A^3}$ &c.

Tercero: para efectuar la operacion con mas brevedad nos podemos valer de la formula, que dio Newton, y es de esta manera. Supongamos, que A 1ª parte del Binomio sea $= P$, y $\frac{B}{A} = Q$ sera $A+B = P+PQ$, porque si multiplico el $A = P$ por $\frac{B}{A}$ me dara $\frac{AB}{A} = B$. Sera tambien $A^m = P^m$ $\frac{B^2}{A^2} = Q^2$ $\frac{B^3}{A^3} = Q^3$ &c. y substituiendo estos valores sera la formula general $P^m + \frac{m}{1}P^mQ + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}P^mQ^2 + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}P^mQ^3$. Supongo de nuevo el valor $P^m = A$: luego sera $\frac{m}{1}P^mQ = \frac{m}{1}AQ$. Supongo $\frac{m}{1}P^mQ = B$ sera $\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}P^mQ^2 = \frac{m-1}{2}BQ$. Supongo $\frac{m-1}{2}BQ = C$ sera $m.m-1.\frac{m-2}{3}P^mQ^3 = \frac{m-2}{3}CQ$. Supongo $\frac{m-2}{3}CQ = D$ sera $\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}P^mQ^4 = \frac{m-3}{4}DQ$. Supongo $\frac{m-3}{4}DQ = E$, sera $\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}P^mQ^5 = \frac{m-4}{5}EQ$. Supongo $\frac{m-4}{5}EQ = F$, sera $\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-5}{6}P^mQ^6 = \frac{m-5}{6}FQ$, y assi se puede proseguir infinitamente. Segun esto la formula general para elevar el Binomio $A+B$ a una potencia indeterminada m sera $\overline{A+B}^m = \overline{P+PQ}^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ . m-5FQ$.

Para usar de esta formula en la elevacion de la cantidad 16 v.g. al cuvo, ó 3ª Digmᵈ. Supongo $m=3$, $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, sera $P^m = 1.2 = 1000 = A$

$\frac{m}{1} AQ = 3.1000\,\frac{3}{5} = 1800 = B$

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{2}{2}.1800.\frac{3}{5} = 1080 = C$

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{1}{3}.1060.\frac{3}{5} = 216 = D$

$\frac{m-3}{4} DQ = 0.$

Luego $1000 = A$

$1800 = B$

$1080 = C$

$216 = D$

$4096 =$ al cuvo.

Dedonde se ve, que para determinar la raices es necesario dar valor al expon.te m. y para elevar qualquier Polinomio, ó cantidad de muchos terminos v.g. $C+Z+G$ se tomarán los terminos $D+G$ &c por una sola parte.

Problema 5º.

Sumar, restar, multiplicar, partir, y elevar las potencias a superior grado, y extraer de ellas sus raices. Resolucion.

Primero si las potencias tienen diferentes letras, ó aunque sean de una misma tienen diversos exponentes se suma, y se resta por medio de los signos $+$, y $-$, y segun las reglas generales v.g. A^2 sumado con B^3 sera A^2+B^3, y restado sera B^3-A^2 sumado con A^4 sera A^2+A^4, y restado A^4-A^2, siendo unas mismas las letras, y los exponentes se sumaran poniendo a su lado el numero, que exprese la suma, y se restara poniendo

do, el que expresse la diferencia v.g. A^3 su
mado con A^3 sera $2A^3$ restado de $5A^3$ dara $3A^3$.
Segundo para multiplicar, y partir poten
cias de distintas letras los escrivire con los
signos de la multiplicacion, y divon pomie
do a su lado los productos, o cocientes de sus coefici
entes, quando los tuvieren v.g. Para multipli
car $3A^3$ $4B^2$, escrivire $12A^3B^2$, y para partir A^4
por B^2, escrivire $\frac{A^4}{B^2}$. Si se huvieren de multipli
car, o partir las potencias de una misma letra,
en la multiplicacion se sumaran los expontes,
y la suma sera expon.te del producto, en la
particion se restara el expon.te del Divr de
el de el Divo, y el residuo sera expon.te del cocie,
v.g. para multiplicar A^2 por A^3, escrivire A^{2+3}.
A^5, y para partir B^6 por B^2 escrivire $B^{6-2} = 4B$.
Tercero: para elevar qualquier potencia a otro
grado superior multiplicare el expon.te de ella por
el expon.te de la potencia, o grado, a que quiero
elevarla, y el producto sera el expon.te del nue
vo grado, o potencia v.g. A^3 elevado a la 4a. Poten
cia sera $A^{3.4} = A^{12}$; y A^m elevado a la Potencia
N sera $A^{m.N}$.
Quarto para extraer la Raiz de qualquier po
tencia se partira el expon.te de ella por el ex
pon.te de la raiz, que quiere extraer, y el co
ciente sera expon.te de la raiz: Assi de A^4B^4 sera
la raiz quadrada $A^{\frac{4}{2}}B^{\frac{4}{2}} = A^2B^2$; y de B^6C^{12} se
ra la raiz cuvica $B^{\frac{6}{3}}C^{\frac{12}{3}}$ &c.

Demonstracion.

Primero de multiplicar. la unidad Mult.^{or}, Mult.^{o}, y producto son terminos Geometrica mente proporcionales: luego la suma delos expon.^{tes} del Mult.^{o}, y mult.^{or} es igual ala suma delos expon.^{tes} dela unidad, y del Producto; pues todos proceden en progresion Ariamethica: luego siendo el expon.^{te} de la unidad, que es el 1.^{er} termino dela progresion Geometrica delas potencias = cero, la suma de los expon.^{tes} del Mult.^{or}, y Mult.^{o} sera igual al expon.^{te} del producto.

Segundo de partir: el Div.^{or}, Div.^{o}, Unidad, y coto son Geometricamente proporcionales: luego la suma delos expon.^{tes} del Div.^{or}, y del coto es igual ala suma delos expon.^{tes} del Div.^{o}, y la unidad: luego siendo el expon.^{te} dela unidad cero, la suma de los exponentes del Div.^{r}, y del coto sera igual al expon.^{te} del Div.^{o}: luego quitando de este exponente el de el Div.^{r} sera el residuo exponente del coto.

Tercero de elevar a otra potencia: en el quadrado la unidad es a la raiz, como la raiz al quadrado; en el cuvo la unidad es a la raiz como el quadrado al cuvo &c: luego la suma delos exponen.^{tes} dela unida, y del quadrado es igual al duplo expon.^{te} de la raiz, y la suma de los exponentes dela unidad, y cuvo ala suma delos expon.^{tes} de la Raiz, y quadrado, que es el triplo de el exponente de la raiz: luego siendo el exponente de la unidad cero el exponente del quadrado sera duplo de el exponente de su raiz, el de el cuvo triplo, y assi respectivamente de las demas dignidades.

Quanto de extraer la raiz: el duplo de el exponente de la raiz es exponente de el quadrado, el triplo del cuvo &c. luego la mitad de el expon.te de qualquier potencia sera expon.te de su raiz quadrad, el triplo de su raiz cuvica &c: luego partiendo el expon.te de qualquier potencia por el exponente de el quadrado, de el cuvo &c se tendra el expon.te de la raiz quadrada cuvica &c.

Cor. 1.º

De este modo de partir unas potencias por otras nace, el que A^0 sea el 1.er termino de las potencias de A, porque si parto A^1 por A^1 me dara $A^{1-1} = A^0$, que expresa la unidad.

Cor. 2.º

Hacen tamvien las potencias, que se llamad negativas; porque partiendo A^0 por A^1 me dara $A^{0-1} = A^{-1}$, si parto A^{-1} por A^1 me dara $A^{-1-1} = A^{-2}$, de donde resultara la serie $A^{-1} A^{-2} A^{-3} A^{-4} A^{-5}$ &c esta misma saldra si substituio en vez de A^0 la unidad, o 1, que es su igual; porque partiendo 1 por A^1 me dara A^{-1}; partiendo A^{-1} por A^1 me dara $\frac{1}{a^2} = A^{-2}$; partiend $\frac{1}{a^2}$ por a^1 dara $\frac{1}{a^3} = A^{-3}$ &c de donde esta serie $A^{-1} A^{-2} A^{-3} A^{-4}$ &c.

es lo mismo, que esta otra $\frac{1}{a^1}\,\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{a^3}\,\frac{1}{a^4}$ &c. Son pues las potencias negativas unos quebrados cuio numerador es la unidad, y los Denominadores las potencias positivas.

Escolio:

Supongo $A^1 = 3$ vere, que esta series formada una progresion, que puede decrecer infinitamente de esta manera

$$\frac{1}{a^1} = a^{-1} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{a^2} = a^{-2} \quad \frac{1}{9}$$
$$\frac{1}{a^3} = a^{-3} \quad \frac{1}{27}$$

Y si esta junto la Serie de las potencias de $a^1 = 3$ tendra una progresion indefinida de Potencias, que crece, o decrece en esta forma

$$a^{\infty} = \&c\ a^{-3}\ a^{-2}\ A^{-1}\ A^{0}\quad a^{1}\ a^{2}\ \&c\ A^{\infty}\ \&c$$
$$\frac{1}{27}\quad \frac{1}{9}\quad \frac{1}{3}\quad 1\quad 3\quad 9\quad 27$$

Cor 3°.

El calculo de las potencias negativas se hace de la misma manera, que el de las positivas, pues para multiplicar a^{-4} por a^{-2} suma re los exponentes, y me dara a^{-6}; para partir B^{-4} por B^{-2} restare el exponente de el Divr, y sera $B^{-4+2} = B^{-2}$; para elevar a^{-2} a su cuvo multiplicare -2 por -3 exponente de el Cuvo, y me dara a^{-6} para extraer la raiz quadrada, cuvica &c de B^{-12} partire el exponente -12 por el exponte del quadrado -2, y me dara B^{-6}; por el de el Cuvo -3, y dara B^{-4} &c.

Cor. 4.º

Del metodo de extraer las raices de las potencias nacellas, que se llaman potencias quevradas, o imperfectas; pues si extraigo la raiz quadrada de A^1 me dara $A^{\frac{1}{2}}$ la cuvica $A^{\frac{1}{3}}$ &c.; si de A^{-1} me dara $A^{-\frac{1}{2}}$ $A^{-\frac{1}{3}}$ si la cuvica de A^4 me dara $A^{\frac{4}{3}}$, si de A^4 sera $A^{\frac{4}{3}}$ &c. Donde se ve, que el numerador de el quebrado indica la potencia, de quien se extrae la raiz; el Denom.ʳ la raiz, que se extrae, y todo el quevrado la raiz de aquella potencia, la qual raiz es una nueva potencia imperfecta negativa, o positiva.

Escolio 2.º

Assi pues como las potencias positivas, o negativas forman creciendo, o decreciendo las progresiones indefinidas, que se halla en el escolio 1.º n. 119, tamvien las raices de estas, que son potencias imperfectas forman estas progresiones

$a^{-\frac{3}{2}}\ a^{-\frac{2}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ A^0\ a^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{2}{2}}\ a^{\frac{3}{2}}$ &c.

De manera, que entre cada uno de los terminos de las progresiones citadas, y el termino siguiente, o precedente puede aver infinitos terminos, que sean potencias de ellos, y sus exponentes numeros quevrados positivos desde A^0 azia la derecha, y negativos desde A^0 azia la izquierda, el modo facil de allar estos terminos es el siguiente. Para allarlos entre A^0 v.g. y A^1 busco un medio Geometrico proporcional multiplicando A^0 por A^1, y de el producto ex

traiendo la raiz quadrada, que es $\sqrt[2]{A}$, cuio ex
ponente sera el medio Arismetrico propor
cional entre cero, y 1, el qual allare sumando
el cero con el 1, y de la suma 1 tomada $\frac{1}{2}$, que
sera el exponente de la raiz $A^{\frac{1}{2}}$ termino en
tre A^0, y A^1 si tomo la mitad $0+\frac{1}{2}$, que es un
quarto, y la de $\frac{1}{2}+1$ es $1=\frac{3}{2}$, que es $\frac{3}{2}$ tendre

$$\boxed{A^0\ A^{\frac{1}{4}}\ A^{\frac{1}{2}}\ A^{\frac{1}{4}}\ A^{\frac{2}{2}}}$$

Escolio 3º

Por este modo de expresar las potestades, y sus raices se pueden evitar en la algebra las cantidades, que llaman irracionales, o los signos radicales, que vamos a explicar. Quando de alguna potencia no se puede tener la raiz perfecta se pone a su lado el signo $\sqrt{}$, y sobre este el exponente de la potencia, cuia raiz se busca: assi $\sqrt[2]{a}$ $\sqrt[2]{3}$ $\sqrt[3]{a-B}$ es lo mismo, que raiz quadrada de a, raiz quadrada de 3, raiz cuvica de $a-B$.

Quando al signo radical precede alguna cantidad, o numero v.g. $5\sqrt[2]{aB}$, $c\sqrt[2]{aB}$ denota el producto de el radical por aquel numero, o cantidad, los quales pueden ponerse dentro de el signo radical, si elevados a la potencia, que indica el exponente de este se multiplica por las cantidades, que existe vajo de el v.g. $c\sqrt{aB}$ es lo mismo, que $\sqrt[2]{aBc^2}$, y $4\sqrt[2]{3}$ es lo mismo, que esta $\sqrt[2]{48}$.

Los radicales se llaman compuestos, quando tienen muchos terminos v.g. $\sqrt{B}+\sqrt{CD}$; universales, quando un radical comprehende a otro, v.g. $\sqrt{2+\sqrt{6}}$; imaginarios, quando no puede atenderse el signo con que se deven expresar para producir la potencia a quien se refiere $\sqrt{-a^2}$, pues no puede darse cantidad ni positiva, ni negativa, que multiplicada por si misma produzca esta potencia.

Las operaciones, que con los radicales se ejecutan son las siguientes: 1.ª reducirlos a menor expresion, o a los minimos terminos; lo qual se hace partiendo la cantidad, que esta vajo de el signo por alguna potencia de el mismo grado, que indica el expon.te de el radical, dejando dentro de este el coto, y poniendo fuera la raiz de el divisor v.g. $\sqrt{a^2c+a^2b}$ le reducira partiendo por a^2 potencia del mismo grado dejando el coto, $c+b$ dentro de el signo, y poniendo fuera la raiz de el divisor a^2 en esta forma $a\sqrt{c+b}$. Para reducir $\sqrt[3]{48}$ partire el 48 por 8 que es cuvo perfecto pondre el coto 6 dentro de el signo, y fuera la raiz cuvica de 8 es 2 en esta forma $2\sqrt[3]{6}$.

Para saver si la cantidad es divisible por alguna potencia de el mismo grado de el radical vere si entre los divisores de ella se halla dicha potencia, v.g. de $\sqrt[3]{368}$ los Divisores son 2, 4, 8 &c: luego es divisible por el 8 cuvo perfecto; partiendo pues me dara por coto 46, que pondre dentro de el signo, y fuera la raiz cuvica de el divisor 8, que es 2 en esta forma $2\sqrt[3]{46}$. Quando hecha la reduccion de diferentes radicales queda dentro de uno, y otro signo la misma cantidad es señal, que ambas son commensurables v.g. $\sqrt{48}\,\sqrt{12}$ reducidos me dan $4\sqrt{3}$, y $2\sqrt{3}$: luego son comensurables, y tiene entre si la razon de 4 a 2.

Segunda reducir a una misma operacion: esto se hace multiplicando el exponente de el un radical por el de el otro, y elevando la cantidad, que esta dentro de cada signo a la potencia, que indica el exponente de el otro v.g. $\sqrt[2]{AB}$, y $\sqrt[3]{ABC}$ reducidas son $\sqrt[6]{A^3B^3}$, y $\sqrt[6]{A^2B^2C^2}$.

Tercera sumar, y restar radicales. Reduzcanse a menor expresion si se puede, y a una misma denominacion si la tuviere diferente; si hecho esto se allare comensurables se pondra fuera de el radical la suma, o diferencia de ambas cantidades.

Cantidades	Exem. Reducion	Suma	Diferencia
$\sqrt[2]{50}$	$5\sqrt[2]{2}$	$8\sqrt[2]{2}$	$2\sqrt[2]{2}$
$\sqrt[2]{18}$	$3\sqrt[2]{2}$		

Quarta multiplicar radicales. Reducidos a una misma denominacion se multiplica como cantidades racionales.

exem.

Cant.... Reduccion.... Producto......

$\sqrt[3]{ax}.\sqrt{a^2x}$... $\sqrt[6]{a^3x^3}.\sqrt[6]{a^4x^2}$... $\sqrt[6]{a^7x^5}$......

Si fueren comensurables pueden reducirse a cantidades racionales mult.^e^ entre si las que esta fuera de el signo, y su producto por la cantidad de dentro, quedara otra cantidad raciona v.g. $3\sqrt{2}.5\sqrt{2}=15.2=30.$

Quinta partir radicales. Reducidos a una minima denominacion se partirad las cantidades, que esta dentro, y fuera de el signo poniendo los cotos en sus lugares correspondientes.... Cantidades...... Cotos..........

......$8\sqrt{12}:4\sqrt{2}$.........$2\sqrt{6}$..........

.....$\sqrt{c^2}:\sqrt{cb}$.........$\sqrt{c}:\sqrt{b}$..........

Si la division no puede hacerse, bastara indicarla v.g. para partir $\sqrt{11}$ por $\sqrt{7}$ se escrivirá $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$. Si e de partir un radical por una cantidad racional elevare esta a la potencia de el radical, y colocada vajo de el signo hare la particion v.g. $\frac{\sqrt{ax^2}}{x}$ sera $\sqrt{ax^2}:\sqrt{x^2}$ cuio coto es $\sqrt{a}$. Si de el coto, que nace por la division de las cantidades, que esta vajo de el signo se puede extraer la raiz, que indica el exponente de el radical sera dicho coto cant.^d^ racional v.g. $12\sqrt{36}$ partido por $4\sqrt{4}$ da por coto $3\sqrt{9}$, que es $3\sqrt{9}=3.3=9$.

Resta elevar los radicales a potencias superiores, y extraer sus raices. En radicales simples se haze lo 1º elevando las cantidades, que estan dentro, y fuera de el signo a las potencias, que se buscan, y poniendoles el mismo signo v.g. el cubo de raiz AB sera $\sqrt{A^3B^3}$ el quadrado de $\sqrt[3]{5}$ sera $\sqrt[3]{25}$. Si la cantidad, que esta debajo de el signo se ade elevar a la potencia de el exponente, que indica el signo bastara quitar el radical v.g. $\sqrt[3]{AB}$ cuio cubo es AB. Lo 2º se haze extraiendo las raices de las cantidades, que estan dentro, y fuera de el signo, y poniendoles es te mismo v.g. $\sqrt[3]{A^2B^2C^2}$ sera la raiz quadrada $\sqrt[3]{ABC}$, y de $\sqrt[6]{A^3C^3}$ sera $B\sqrt{AC}$.

Escolio 1

Todas estas operaciones se pueden executar mas facilmente en los radicales reduciendolos a potencias imperfectas. Lo qual se haze partiendo el exponente de la cantidad, que esta vajo de el signo por el exponente de este; v.g. $\sqrt{A}=A^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{A+B}=A+B^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[n]{A^m}=A^{\frac{m}{n}}$ Reducidos los radicales a potencias imperfectas. 1º se multiplican, suman &c los quebrados, que sirven de exponentes; los quales si tuviere diversa denominacion se reduciran a una misma.

Canti.s — exemplos. Reduccion. — Producto

$\sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a^5} = \dots a^{\frac{4}{2}} = \dots\dots\dots\dots a^{\frac{9}{2}} \dots\dots$

$\sqrt[3]{B^4} \cdot \sqrt[3]{B^6} = \dots B^{\frac{4}{3}}\, B^{\frac{6}{3}} = \dots\dots B^{\frac{10}{3}} \dots\dots$

Segundo se parten restando el expone.te de el divi.r de el expon.te de el div.o

Cant — exemplos Reduccion — Quoto

$\sqrt[4]{a^{12}} : \sqrt[4]{a^{8}} = a^{\frac{12}{4}} : a^{\frac{4}{4}} = \quad a^{\frac{4}{4}}$

Tercio se eleva a las potencias superio res si el quebrado exponente se multiplica por el expon.te de la potencia, a que deve elevarse; v.g. para tener el cuvo $\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}}$ multiplicase el quebrado un medio por el expon.te 3, y sera el cuvo $a^{-\frac{3}{2}}$.

Quarto se extrae las raices si el expon.te quebra do se parte por el exponente de la po tencia, cuia raiz se busca v.g. $\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{4}}$; $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}$ &c. Corolario.

Los exponentes de las dignidades se lla man tambien logarismos, pues esta voz propiamente significa unos numeros en progresion Arismethica correspondientes a otros, que componen una progresion geo metrica. Sea esta la 1a columna de la izquierda, a que corresponden las 3 sig.tes progresiones Arismethicas, cuios termi nos son logarismos de sus correspondien tes en la Geometrica.

Geom.ca	Arit	Arit	Arit
1	1	1	0
2	2	3	1
4	3	5	2
8	4	7	3
16	5	9	4
32	6	11	5
64	7	13	6
128	8	15	7
256	9	17	8

A estos logarizmos les conviene todas las propiedades, que se an demonstrado de los exponentes: es a saver 1°. que en 4° cant.s geometrica.te proporcionales la suma de los logarizmos de las extremas es igual a la suma de los logarizmos de las medias; y de 3 al duplo logarizmo de la media. 2° que tomando la progresion Aritmetica, en que cero es logarizmo de la unidad la suma de los logarizmos de el mult.or, y mult.o sera igual al logarizmo de el producto, y que el logarizmo de el div.r restado de el logarizmo de el Div.o dara el logarizmo de el Quoto. 3°, que el duplo logarizmo de la raiz sera logarizmo de el quadrado, el triplo de el cuvo &c; y la mitad de el logarizmo de una cantidad sera logarizmo de su raiz quadrada, el tercio de su raiz cuvica &c.

De donde resulta 1º, que dados 3 nu. se allara el 4 proporcional sumado los logarizmos de el 2º, y 3º, y restando de su suma el logarizmo de el 1º; pues el residuo sera logarizmo de el 4º; y para el 3º proporcional se tomara el duplo logarizmo de el 2º, y restando el logarizmo de el 1º, el residuo sera logarizmo de el 3º proporcional. Exemplos: Para el 4º proporcional a 2, 4, 8 tomo de la ultima progresion Arizmetica el 2, y el 3 logarizmos de 4, y 8, y de su suma 5 resto 1, que es logarithmo de 2, el residuo 4 sera logarithmo del 4º proporcional 16; pues assi se ha 2 a 4, como 8 a 16. Para el 3º proporcional a 8, y 16 tomo el 8, que es duplo logarithmo de 16, resto 3 logarithmo de 8, y el residuo 5 sera logarithmo de el 3º proporcional 32.

Segundo: Para multiplicar un numero por otro sumare sus logarithmos, y restado de la suma el logarithmo de la unidad, que dara el logarithmo de el producto; para partir los restare el logarithmo de el Div.^r^ de el logarithmo de el Divº, y el residuo sera logarithmo de el Quoto. v.g. Para multiplicar 8 por 4 tomo la suma de sus logarithmos 2, y 3, que es 5 de el qual restando cero

logarithmo de la unidad quedara 5
logarithmo de el producto 32; Para par
tir 8 por 4 resto de 3 logarithmo de 8
el 2 logarithmo de 4, y el residuo 1 sera
logarithmo de el Quoto 2

Tercio para tener el quadrado de un
numero, se toma el duplo logarithmo de
su raiz, y este sera logarithmo de su quadra
do; para el cuvo se toma el triplo; para el
viquadrado el quadruplo, para la 5.ª dig
nidad el quintuplo. 4.º para allar la
raiz quadrada de qualquier numero toma
se la mitad de su logarithmo; para la
cuvica el tercio &c. V. G. para la
raiz quadrada de 16 tomo 2, que es la
mitad de su logarithmo 4 &c.

Donde se ve, que con la suma, y
resta en los logarithmos se haze lo que
con la multiplicacion, y particion, que
son operaciones mas dificiles. Esta u
tilidad dio ocasion para componer las ta
blas, que contiene los logarithmos de los
numeros naturales hasta 100000, y mu
chos en su construccion se an valido los Au
thores de la progresion Geometrica decu
pla, y de la Arithmetica, que empieza
desde cero en esta forma

1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
100000000	8
1000000000	9

Si no fuera necesarios mas logarithmos que los correspondientes a los terminos de esta progresion Geometrica seria facil su invencion; pero bien se hecha de ver, que falta muchos terminos intermedios v.g. entre 1, y 10 el 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cuios logarithmos son tanvien necesarios; pues para allarlos empiezo por el logarithmo de 9, y luego advierto, que deviendo allarse entre los logarithmos de 1, y 10, que son cero, y 1 devera ser un quebrado menor, que la unidad, y assi mismo los logarithmos de 8 7 6 &c por que eran dos menores a un, que el 10: de donde resultaria notable molestia, y embarazo en el calculo. Para precaverlo añado a cada termino de la progresion Arithmetica un numero grande de ceros de manera que el logarithmo de el 1er termino sea 0.

0000000, y el de 10, 10.0000000, que por el grande exceso respeto de el 1er termino me dara los numeros, que en ser quebrados corresponda a los 9, &c. vusco pues medios Geometricos proporcionales entre 1, y 10, y medios Arithmeticos entre los correspondientes terminos de la progresion Arithmetica; el 1er medio Geometrico tendra por logarithmo al 1er medio Arithmetico, el 2o al 2o &c; pero como para tener el medio Geometrico entre 1, y 10 es necesario extraer la raiz quadrada de 10, que no la tiene justa se debera aproximar, para cuio fin formare 2 quebrados de el 1, y del 10 añadiendo a cada uno 7 ceros, y poniendoles por denominador la unidad con otros tantos en esta forma.

$$\frac{10000000}{10000000} \qquad \frac{100000000}{10000000}$$

Luego multiplicando un quebrado por otro resultara $\frac{1000000000000000}{100000000000000}$ de que extraiendo la raiz quadrada sera $\frac{31622777}{10000000}$ medio Geometrico entre 1, y 10, a que hallare el medio Arithmetico correspondiente sumando con $\frac{0.0000000}{10.0000000}$ logarithmos de 1, y 10 cuia mitad 5000000 sera el medio Arithmetico.

Mas por quanto el medio Geometrico hallado dista aun mucho de el numero

9, o de $\frac{90000000}{10000000}$, que es lo mismo vuscar otro medio Geometrico entre el sero, y el $\frac{10.00}{10.00}$ $\frac{00000}{00000}$ que sera $\frac{56234132}{10000000}$, cuio logarithmo allare tomando la mitad de la suma del logarithmo del ser ~~primero~~ medio Geometrico, y de 40000000, y sera 75000000; los que aun distan mucho de el que se busca, por lo qual continuare asta que despues de 26 operaciones allare el 90000000, que solo se diferencia de el 9 en una 10000000.

Con el mismo metodo se puede allar los logarithmos de los de los demas numeros, si bien teniendo los de 9, 2, 5, y 7 se allara con mas facilidad los de los demas numeros digitos; pues el duplo de el logarithmo de 2 da el de 4, el medio de el de 9 da el de 3, la suma de los logarithmos de 2, y 3 el de 6, la de los de 2, y 4 el de 8; y generalmente de los numeros, que son producto de otro tendra por logarithmo la suma de los logarithmos de los producentes, pero en los que se llaman primos, o que no tienen otra medida, que la unidad v.g. 11, 13, 17, 19, y 3, 2 &c. se han de vuscar los logarithmos de el mismo modo, que en los numeros digitos. De este penosisimo trabajo, han escusado los que compusieron tablas de los logarithmos correspondientes a los numeros naturales desde la unidad

NVMº.	LOGIM.	DIFERº.	Nº.	

Donde se deve observar, que todos los logarithmos de los numeros desde la unidad tiene por 1.ª cifra cero, los de 10 asta 100 1, de 100 a 1000 2 &c. Este 1.er numero, o cifra se llama caracteristica, porque indica las cifras, de que consta el numero, que siempre son una mas, que las unidades de la caracteristica.

Segundo: si en la operacion sale un logarithmo, que no se halla en las tablas he de tomar el mas proximo; pues como estas solo señalan los logarithmos de los enteros, y entre 2 enteros puede aver muchos quebrados tambien entre cada logarithmo de los enteros ai muchos numeros, que pueden expresar los logarithmos de los quebrados.

Tercio: el logarithmo de un entero, y quebrado se allara reduciendo el entero a la denominacion de el quebrado; pues resultando el numerador mayor, que el denominador la diferencia entre los logarithmos de ambos sera logarithmo de un entero cocto de la particion de el numerador por el denominador. Si el quebrado es propio sera el logarithmo la diferencia con el signo –; pues dicho quebrado es menor, que la unidad: luego siendo cero el logarithmo de la unidad sera el logarithmo de el quebrado menos, que cero.

Quanto aunque las tablas regulares de logarithmos solo se estiende solo se estiende asta 10000, o 200000 podre allar los logarithmos de numeros mayores de esta forma. Quiero allar el logarithmo de 3567894; pues busco el logarithmo de las 4 1.as cifras 3567, que es 3.5523031, el qual resto de el logarithmo sig.te en la tabla, que es este 3.5524248 sera la diferencia 1217 la qual multiplico por las cifras restantes 894, sera el producto 1087998 de cuia derecha cortare tantas cifras quantas fueron las restantes, que sera 998 el residuo es 1087 que añadido al logarithmo 3556793 dara 3552418, a cuia caracteristica 3 añadiendo tantas unidades quantas fueron las notas restantes, saldra 6.5524118 logarithmo de el numero dado.

9. Escolio.

Aunque el metodo de allar por medio de los logarithmos las 3.as, y 4.as proporcionales es facil, y suficiente para resolver las questiones de la regla, que vulgarmente llaman de 3; no obstante añadiremos aqui los principales preceptos, y seguir la practica de ella sin recurso a los logarithmos. El 1.º es, que los terminos sean verdaderamente proporcionales, por cuio de

fecto

no se puede aplicar dicha regla a varias 41
cosas ~~phisicas~~, que no guardan proporcion.
v.g. si por regla de 3 quiero determinar
quantos pies vajara en 10 minutos una
piedra, que camina 20 en 2 minutos me
saldra el 4º proporcional 100, que no de
verser asi, porque los graves no desciende
con movimiento igual.

El 2º, que solamente entre 2 especies
en la proporcion; pues esta consiste en igual-
dad de razones, y cada una de ellas en
la relacion de 2 terminos de una espe
cie: luego una razon a de ser entre ter
minos de una especie, y otra entre los
de otra. Assimismo siendo en la propor
cion el 1er termino al 2º, como el 3º al 4º
o el 1º al 3º como el 2º al 4º deven ser el 1º,
y 2º de una especie, el 3º, y 4º de otra, o el
1º, y 3º de una, y el 2º y 4º de otra. 3º: si
los terminos fuere omologos, o de diversa
denominacion se reducira a la misma;
v.g. si un palmo de tela vale 6 reales, qua
to valdra 40 varas? Reducire las varas
a palmos, o los palmos a quebrado de va
ra.

La regla de 3 se llama directa, quado
en la question el 1er termino es ma
yor, o menor, ~~que~~ respeto de el 3º, como
el 2º respeto de el 4º: v.g. en esta, la tierra

para caminar 360 grados necesita de 24 oras, pues en quantas caminara 30 grados? En donde a proporcion, que los 360 grados son mas, que 30 tamvien las 24 oras son mas, que el 4º termino. Se dice inversa, quando el 1er termino crece, o mengua respeto de el 3º, como el 4º respe de el 2º: v.g. 12 artifices haran una obra en 20 dias, 6 artifices en quantos la haran? Bien se ve, que 6 necesitan mas dias, luego el 1er termino crece respeto de el 3º, como el 4º respeto de el 2º. La inversa se hace directa pasando el termino 3º a 1º y este a 3º; y assi todas las questiones se resuelve multº el 2º por el 3º, y partiendo el producto por el 1º. Asi.

Aun se puede abreviar esta operacion si los terminos 1º, y 2º, o 1º, y 3º se parten por alguna comun medida, especialmente si el coto de alguno de ellos es la unidad. como en este, si en siete oras escrivo 63 paginas, quantas escrivire en 40 oras; en que partiendo el 1º, y 2º termino: el 1º, y 3º por la comun medida sera la proporcion. en el 1er caso 1: 9: 40; en el 2º caso, sera 1: 63: 7, y en 1º.

y en otro caso con solo mult.^ar el 2º por el 3º saldra el 4º proporcional 4º &c.

El esamen de la regla de 3 se hace mult.º el 1er termino por el 4º allado, y si el producto fuere igual al de el 2º por el 3º la operacion estara bien hecha. Para el exercicio, y conocimiento de la regla de 3 directa, e inversa servira estos exemplos.

Ex 1º

Un correo en 4 dias camina 200 leguas, en 8 dias quantas caminara? bien se ve, que en mas dias a de caminar mas leguas: luego al paso, q.e el 1er termino es menor, que el 3º el 2º es menor, que el 4º: luego por regla de 3 directa sera $\frac{200 \cdot 8}{4} = 400$ el 4º proporcional.

Ex 2º

Para un bestido necesito 9 varas de paño, cuia anchura es 3 palmos quantas necesitare de otro paño que solo tenga 2 palmos de ancho? Quanto mas estrecho es el paño sere quiere mas varas: luego quanto maior es el 1er termino 3 respecto de el 3º 2 a de ser maior el 4º respecto de el 2º 9: luego es proporcion inversa, la que reducire a directa

pasando el 3º a 1º y este a 3º en es
ta forma 2 : 9 : 3 ; y sera el 4º pro
porcional $9 . 3 = 13 + \frac{1}{2}$
$\overline{1}$ lo 3. ^{2}

Para levantar una torre se emple
aron 6352 ladrillos, cuia longitud
era de 3 pies + 6 pulgadas, quantos
serian necesarios de lo que solo tu
viessen 2 pies + 4 pulgadas de longi
tud se ordenara assi los terminos,
si la longitud de 3 pies + 6 pulgadas
pide 6352 ladrillos, la de 2 pies + 4 pul
gadas, quantos necessitara? Donde se
ve, que quanto es maior el 1º respe
to de el 3º sera maior el 4º respeto
de el 2º: luego es proporcion inversa,
la qual hecha directa, y reducidos los pies
dedos sera 9528 ladrillos el 4º proporcio
nal.

La regla de 3 se llama compuesta, quan
do se aplica muchas vezes, que es en las
questiones donde ai muchas analogias;
v.g. en esta: por 200 arrovas de azucar
traidas de 100 leguas se pagan de portes 4
doblones, quantos se pagara por 3000 arro
vas traidas de 400 leguas? en donde ai 2 ana
logias, pues se compara arrobas con arro
vas, y leguas con leguas para determinar
los portes. pasano pues 2 reglas de 3 assi, 200

arrobas: 1 doblones: 300 Arrobas? $\frac{4.300}{200}=6$ sera el 4º proporcional. 100 leguas: 6: 400 leguas? $\frac{6.400}{100}=24$ sera el ~~1º~~ 4º proporcional portes de las 300 arrobas traidas de 400 leguas. Resolvamos las sig^tes^ questiones de la regla de 3 compuesta.

Primera Question.

18 Hombres pueden abrir 45 varas de trinchera en 3 dias, quantas podra abrir en 12 dias? 15 hombres esta question, y otras semejantes pueden resolverse con mucha brevedad, si los terminos, que expresan las cosas principales se multiplican por sus adjuntos, que significan el tiempo la distancia &c, y sus productos se ponen por 1º, y 3º termino, dejado por 2º el que es Homogeneo con el que se busca. Ordenarse pues assi los terminos, 18 Hombres: 3 dias: 45 varas: 15 hombres: 12 dias, Multiplico 18 por 3, y el producto 54 sera 1^er^ termino; 15 por 12, y el producto 180 sera 3º; y poniendo por 2º las 45 varas, que es de la misma especie con el que se busca sera la proporcion 54: 45: 180? $\frac{45.180}{54}=\frac{8100}{54}=150$ sera el 4º ~~pro~~ proporcional numero de varas, que abrira 15 hombres en 12 dias.

Question 2ª

Un artillero puede arrojar con 4 mor

teros 10 bombas en 3 oras, en quanto
tiempo arrojará con 100 morteros
2000 bombas. Esta question solo puede
resolverse formando 2 reglas de 3 assi:
10 bombas: 4 morteros: 100 morteros?
$\frac{4 \cdot 100}{10} = \frac{400}{10} = 40$ será el 4º proporcional,
que tomaré por 1er termino de la 2ª
40 bombas: 3 oras: 2000? $\frac{3 \cdot 2000}{40} = \frac{6000}{40} = 150$
es el 4 proporcional numero de oras,
en que con 100 morteros dispararán 2000
bombas.
La regla de 3 compuesta se llama de compañia, quando se aplica muchas vezes
para distribuir alguna cantidad en partes proporcionales a un todo grado, lo
qual se practica en las compañias de
mercaderes para dar a cada uno la correspondiente ganancia.

Exemplo

Tres mercaderes juntaron sus caudales, poniendo el 1º 8000 escudos; el 2º 10000,
y el 3º 12000, de donde resultó ganancia
de 6000 escudos, que es lo que corresponde
de a cada uno? por quanto todo el fondo
es a la ganancia, como cada parte del fondo a cada parte de ganancia haré 3 reglas en esta forma el fondo 8000 + 10000
+ 12000 = 30000 a la ganancia 6000, como 8000 al 4º proporcional, que será

lo correspondiente al 1er Mercader; como 10000 a otro 4 proporcional ganancia de el 2º ~~...~~ mercader &c

Tambien se dice regla de aligacion quando se aplica para determinar el numero, o cantidad de diferentes cosas, que deven componer un todo dado; o para allar el precio medio de algun todo, que resulta de cosas de precios diferentes.

Exemplo.

Tengo 2 generos de viño, de los que 1º vale a 7 reales el cantaro, y el otro a 2, quiero hacer de ellos 20 cantaros para venderlo a 4 reales, quanto he de poner de cada uno? Ordenarse los precios de manera, que el maior este encima, luego el medio, y despues el infimo; correspondiente al maior escrivirse la diferencia de el medio al infimo, que es 2; al infimo correspondera la diferencia de el maior al medio, que es 3; y al medio correspondera la summa de estas diferencias 5 en esta forma

Maior 7. . . . . 2 Diferencia de medio a infimo
Medio 4. . . . . 5 summa de las diferencias
Infimo 2. . . . . 3 Diferencia de medio a Maior

Esta diferencia indica, que se deve

hacer 5 porciones yguales 2 de vi
no a 7 Reales, y 3. a 2 Reales, aviar u
madara 5 cantaros a 4 reales;
Despues formare esta regla si 5 de
vino a 4 reales piden 2 de vino a 7,
y 3 de vino a 2 para 20 quantos ca
raros pondre de dichos vinos? sale
8 de vino a 7, y 12 de vino a 2.

Ultimamente la regla de 3. se lla
ma tambien de falsa posicion sim
ple, ó doble, quando por medio de uno,
ó muchos numeros supuestos se halla
otros, que se busca.

exemplo

Tres personas deven 7000 escudos, la
1a. deve doble de la 2a, y la 3a. triple
de la 2a, quanto devera cada una?
Supongo, que la 2a deva 100; en el
qual caso la 1a. devera 200, y 300 la
3a, lo que compone la suma de 600;
pero la deuda es 7000: luego he de
formar esta regla 600 nace de la su
posicion de 100, de donde nacera
7000? el 4o proporcional es 1166
$\frac{2}{3}$ deuda de la 2a, luego la 1a deve
ra 2333 $+\frac{1}{3}$ y la 3a 3500 otras muchas
questiones de falsa posicion, como
tambien de aligacion, y de compa

ria se resolverá con mas breve
dad en el capitulo sig.te

Capitulo 4.º

Analisis, o el algevra aplicada a la solucion de los Proble mas.

Definicion 1.ª

Analisis es un metodo de resolver las questiones, o Problemas por medio de las ecuaciones.

Def. 2.ª

Ecuacion se dice, la que exprime la razon de igualdad, que ai entre 2 terminos diversamente deno minados v.g. $3+5=8$, $b^2+ab=A^2-B^2$, en que los terminos de una, y otra parte se llaman miembros de la ecuacion.

Escolio

Una question a problema puede resolverse por 2 metodos diferentes, que son el sintetico, y Analitico el se procede resolviendo en sus par tes la cosa, que se a de conocer, y aquel, que compone, o junta las partes de el todo a cuio conocimie to dirige. Veamos un exemplo obvio: halla alguno por acaso un relog, un organo, u otra maqui

na artificiosa admira el movi
miento, o la armonía de las vo
ces, y queriendo saver la causa
desace aquella maquina para exa
minar sus partes; Por el contra
rio si halla separadas las ruedas
de el relox procura unirlas, para
saver el uso, que pueden tener.
Assi pues la sintesis procede com
poniendo las cosas conocidas, pa
ra llegar por su medio al cono
cimiento de las, que vusca; pero
la Analisis suponiendo la cosa
hecha como deve estar se vale
de lo que en ella conoce para pro
ceder por la resolucion de sus
partes al conocimiento de lo
que busca.

Escolio 2º

En qualquiera question, o proble
ma ni todo es conocido, ni todo des
conocido, pues assi como no se bus
ca lo que se conoce tampoco es
necesidad vuscar lo que se ignora
sin alguna luz, o conocimien
to para allarlo. Si alguno me
preguntara, que le descubriese pidiera
un numero en que actualme
te piensa, le responderia, q.e

(dia de Maio de 1756 se escrivio esto por la) no soi adivino. Las cosas pues desconocidas solamen te pueden allarse conociendo alguna relacion suia a las, que nos son manifiestas. De aqui es, que en qualquier problema ai siempre algunas cosas conocidas mezcladas con las desconocidas; aquellas deven señalarse con las primeras letras de el alphabeto ABCD&c estas con las ultimas. VXZ&c

Escolio 3º.

En qualquier problema, que se a de resolver ana liticamente se supone la cosa hecha, como deve estar, y de su conocimiento se viene al de lo, que se busca: luego lo 1º deve ser conocer perfectamente el estado, y condiciones de el problema.

Exemplo

Quiero allar el numero de hombres, que ai en 3 exercitos, de los, que el segundo tiene 5000 mas que el 1º, y el 3º es doble de el 1º, y 2º, y los 3 com ponen 140000 hombres. Si llamo el primero V mero V, sera el 2º V+5000, y el 3º 2V+10000, y los tres exercitos V+V+5000+2V+10000=140000. Assi se propo ne el problema, como en realidad es, y de esta suposicion se deduce lo que se busca, que son los hombres de cada exercito.

Escolio 4º.

Este conocimiento de el estado de el problema sirve tamvien para conocer si en el se ponen condiciones superfluas, o imposibles, o si faltan alguna de las necesarias para determinarlo.

Exemplo

Me piden, que sobre una recta dada por

me un triangulo isosceles, cuios angulos de la va
si sean iguales en una razon de desigualdad dada.
La condicion, de que los angulos sean iguales
es superflua, porque esta embevida en la natu
raleza de el triangulo Ysosceles; la de que
sean iguales en una razon dada de desigualdad
es implicatoria, y por quanto son infinitos los
triangulos ysosceles, que sobre una recta pue
den formarse el problema es indeterminado,
o de tantas soluciones, quantas pueden ser
los triangulos.

Escolio 5º.

De ai mismo se infiere el modo de distinguir la na
turaleza de qualquier problema; pues entonces se
ra indeterminado, quando el numero de las relacio
nes, o cosas conocidas entre si independientes fue
re menor, que el de las desconocidas: quando suce
de que es igual es determinado; y tambien mas,
que determinado, quando las cantidades conocidas
son mas, que las, que se buscan; e imposible, quan
do las cantidades implican, o no pueden subsistir.

Exemplo.

Pidenme, que parta una recta de manera, que
el rectangulo de sus segmentos sea igual al qua
drado de otra recta dada, en lo qual me piden 2 cosas,
la 1ª un rectangulo igual a los segmentos de una
recta; la 2ª, que este rectangulo sea igual al qua
drado de otra recta, para lo qual se me determi
nan dos rectas: luego 2 son las cosas dadas, y
dos las, que se buscan, y por consiguiente es deter
minado el problema.

Si de el se quita la condición, que los lados de el rectangulo sean iguales a la recta dada pidiendo, que sea igual el rectangulo al quadrado de una recta dada será problema indeterminado, y capaz de infinitas soluciones; pues tomando qualquiera recta, y buscando una 3a proporcional a ella, y a la recta a cuio quadrado deve ser igual el rectangulo será este el, que formen la 1a, y 3a proporcional: luego siendo arbitrario el lado de el rectangulo será capaz de infinitas variaciones. Si se añade al problema, que los lados de el rectangulo an de estar en una razon dada, esta condicion es superflua, y a caso la solucion imposible, como lo seria si la razon pedida en los lados de el rectangulo no fuesse igual a la que tendria para ser iguales a la recta dada, y formar un rectangulo igual al quadrado de otra recta dada.

Escolio 6o

Depende mucho la solucion facil de qualquier problema de el adaquado modo de denominar las cantidades, pues siempre, que puedo denominarlas conocidas segun la relacion, que dicen a las desconocidas devo hacerlo, para maior claridad, y vrevedad.

Exemplo.

Vusco dos numeros dada su suma, y su diferencia; la suma llamaré a, la diferencia b, el numero menor x, y al maior no lo llamaré z, sino x+b; o a-x, porque igualmente se compone de el menor, y de la diferencia

o es la suma menos el menor; por eso lo deno
mino segun la relacion, que dice a las canti
dades conocidas suma, y diferencia.

Quan util sea esta denominacion de las can
tidades segun las relaciones, que entre si di
cen se puede ver en algun exemplo de los
problemas, que en el libro 2º de la Geometria
demuestra prolijamente Euclides.

Fig 1ª Lam 1ª

Si la recta AB esta partida por medio en C,
y no en D. 1º el rectangulo de las partes des
iguales AD, DB mas el quadrado de la porcion
intermedia CD es igual al quadrado de AC.
Segundo los quadrados de las partes desigua
les AD, DB son duplos de los quadrados de AC,
y CD. Este Theorema, o esto, que prolijame
te, y con muchos rodeos demuestra Euclides,
he aqui como puede demonstrarse denomi
nando adequadamente las lineas.

Sea AC, o BC = a, DC = b: luego AD sera igual
a+b, y DB = a−b: luego 1º $AD.DB = a^2-b^2$: luego
$AD.DB+CD^2 = a^2-b^2+b^2 = a^2$, que es el quadra
do de AC. 2º $AD^2+BD^2 = a^2+2ab+b^2$: luego
los quadrados de AD, DB son duplos de AC. CD.

Assimismo si a AB partida por medio en
C se le añade otra porcion BD, 1º $AD.DB+BC^2$
$= CD^2$. 2º AD^2+DB^2 duplo de AC^2+CD^2. Para
la demonstracion supongo AC o BC = a, CD = b:
luego AD sera igual b+a, y BD = b−a: luego

1º $AD.DB = b^2 - a^2$. $bc^2 = a^2$: luego $AD.DB + BC^2 = b^2 - a^2 + a^2 = b^2$, que es quadrado de CD.
Segundo $AD^2 + DB^2 = b^2 + 2ba + a^2 + b^2 - 2ab + a^2 = 2b^2 + 2a^2$ son duplos de AC^2 por $CD^2 = a^2 + b^2$, que es todo lo que se avia de demonstrar.

Escolio 7º.

Por la denominacion adequada de las cantidades segun las relaciones, que entre si dicen las conocidas, y desconocidas se entiende la diferencia, que ai entre los terminos de la question, y lo que los hace iguales, y desiguales; por cuio medio se puede espresar su valor de varios modos, que es lo mismo que formar las ecuaciones de que es capaz el problema. Si este fuere determinado podre formar tantas ecuaciones, quantas son las cantidades desconocidas.

Exemplo.

Para allar 2 numeros dada la suma, y diferencia haré 2 ecuaciones por ser 2 las incognitas, y 2 las condiciones de el problema. La 1ª de estas pide, que la suma de dichos numeros, que llamaré V; Z sea igual a a: luego $V+Z = a$ sera una ecuacion. La 2ª dice, que la diferencia de dichos numeros sea b: luego siendo el numero menor V sera la otra ecuacion $Z - V = b$, o $Z = V + b$, pues el numero maior es tamvien igual a la suma de el menor, y la diferencia.

Escolio 8

Las ecuaciones en General se pueden considerar, o como medios para obtener otras ecuaciones finales, o como ultimas conclusiones, que immediatamente contiene la solucion de el problema. De el primer genero de ecuaciones nos valemos para formar la ecuacion final, que conteniendo todas las condiciones de el problema nos de las cantidades incognitas igualadas a las conocidas. Assi en el exemplar arriva propuesto en la ecuacion $x+z=a$, poniendo en lugar de z el valor $x+b$, que me da la ecuacion $z=x+b$ tendre esta otra $x+x+b=a$, en que ai una sola incognita igualada a cantidades conocidas. De el modo de allar estas ecuaciones finales trataremos despues.

Escolio 2

Se distinguen tamvien las ecuaciones en grados segun el numero de dimensiones, a que asciende la incognita: lo qual se conoce por los exponentes; pues si aquella no tiene exponente alguno es la ecuacion de 1er grado v.g. $cx+dy=a-bc$; si el exponente es 2 de 2º grado v.g. $ax^2=bc^2$. Si 3 de tercer grado v.g. $x^3-bx^2=cx^2+b^2c^3$. &c. Estas mismas ecuaciones se llaman puras, quando esta la incognita elevada a una sola potencia sin mezcla de otros terminos v.g. $x^3=bd$; y afectas, quando se alla la incognita en varios grados v.g. $x^2+ax=b^2$. Las cantidades unidas con los signos + o − se llaman terminos de la ecuacion; y coeficientes de dichos terminos las cantidades, por que estos se multiplican. El valor, que expresan las cantidades conocidas a que se alla igual a das las desconocidas se llama raiz dela ecuacion v.g. $x = a - \frac{b}{2}$, en que $a - \frac{b}{2}$ es la raiz. El buen metodo, y orden pedia, que tratasemos aora dela naturaleza, y propiedades de todas las ecuaciones; pero como la materia es muy abstracta, y sumamente dificil seguiremos el metodo comun de los Authores, que primero tratan de el modo de preparar, y aplicar las ecuaciones menos complicadas para la solucion de algunos problemas faciles.

Proposicion 1a

Preparar las ecuaciones reduciendolas a la forma mas breve, y clara. El principal artificio dela Analisi consiste en disponer de manera las ecuaciones, que se reduzcan a la forma mas simple, vajo la qual las cantidades desconocidas esten libres de todo lo, que impide ver sus relaciones a las conocidas. Esto se egecuta con el uso de los preceptos siguientes.

Primero nos emos de valer de la addiccion, y substraccion añadiendo, y quitando cantidades iguales de uno, y otro miembro de la ecuacion v.g. $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$, si de ambas partes, quito $2v$, y añado $3a$ resultara la ecua cion $5b-3a+2v-2v+3a= 5a+3v-2v+3a$; en que vorrados los terminos, que se destruien sera $5b= 8a+v$. Con mas brevedad se añade qualqui era cantidad vorrando el (a v.g.) de el miembro en que esta con el signo $-$, y poniendola en el otro con el signo mas; y se quita con la opera cion contraria; Assi en la ecuacion propuesta añadire $3a$ vorrandolo de el 1er miembro, y po niendolo en el 2º con el signo $+$, y quitare $2v$ pa sandolo al 2º con el signo $-$.

La demonstracion esta clara en aquel axio ma, si a cantidades iguales se añaden iguales, o si de ellas se quitan iguales las sumas, y los re siduos an de ser iguales.

Corolario 1º

Con la misma operacion se pueden poner en un miembro de la ecuacion todas las incogni tas, y las conocidas en el otro; o en uno conoci das, y desconocidas, y en el otro cero: v.g. $abv+a^3 -a^2v=ab^2-2bv-v^3$ se podra reducir a esta $v^3-ab^2 +2bv+abv+a^3-a^2v=0$. Assi mismo se pueden ha cer positivas las cantidades negativas trans poniendolas a otro miembro con el signo $+$ todo lo qual es de mucho uso, como se vera des pues.

Corolario 2º

Sirve tambien para ordenar los termi nos de la ecuacion; en la qual se an de poner de una parte las cantidades conocidas, y de ellas como 1er termino la, que esta elevada a maior grado, como 2º la de el grado immediato, y assi descendiendo por los demas v.g. $bx^2 + ab = bx - x^3 + cx$ se ordenara assi $x^3 + bx^2 - bx = cx - ab$.

Segundo se reducen las ecuaciones por la multiplicacion, y division. Si los terminos estuvieren multiplicados, o partidos por alguna cantidad, deveran en el 1er caso partirse, y en el 2º multiplicarse por la misma: v.g. $\frac{ab}{x} = a + x$, se reducira multiplicando por x, a esta $ab = ax + x^2$; y $b^3 - \frac{b^2 x}{c} = \frac{x^2}{c}$ sera multiplicando por c, $cb^3 - \frac{cb^2 x}{c} = \frac{x^2 c}{c}$. Assimismo $ax + cx = b^2 - a^2$ partiendo por $a + c$ sera igual $x = \frac{b^2 - a^2}{a + c}$.

Se demuestra este precepto con el axioma si cantidades iguales se multiplican, o parten por una misma cantidad, o por iguales, los productos, y los cotos deven ser iguales.

Escolio

Las ecuaciones afectas v.g. $ab = ax + x^2$ no se pueden reducir perfectamente, sino es resolviendolas en sus raices; porque si parto por a resultara $b = \frac{x + x^2}{a}$, en que aun esta la incognita mezclada con la conocida.

Generalmente siempre, que la maxima potestad de la incognita no esta multiplicada, o partida por alguna cantidad se alla la cantidad bastante reducida, como sucede en el exemplo propuesto, y este $x^3 + ax^2 = a^2 x - a^2 b$. De igual regla aun deven esceptuarse aquellas ecuaciones, en que se alla la incognita en todos los terminos v.g. $x^3 + bx^2 = c^2 x$, que se ade reducir partiendo por x

en esta forma $\frac{v^3}{v}+\frac{Bv^2}{v}=\frac{c^2v}{v}$.

Corolario 1º

Por la multiplicacion se pueden quitar todos los quebrados de una ecuacion: 1º multiplicando los terminos por el denominador de el 1er quebrado, y la ecuacion, que resulta por el denominador de el 2º v.g. $\frac{av}{c}+\frac{Dv^2}{B}-\frac{cv^3}{D}=\frac{a^3b^2}{e}$ multiplico por el 1er denominador sera $av+\frac{cDv^2}{B}-\frac{c^2v^3}{D}=\frac{ca^3B^2}{e}$: luego multiplico por B sera $Bav+\frac{cDv^2}{D}-\frac{Bc^2v^3}{D}-\frac{ca^3B^2}{e}$; ultimamente multiplico por los demas denominadores resultara $aBDev+cD^2ev^2-Bc^2ev^3=DCa^3b^2$. 2º esto mismo lo efectuare con mas brevedad multiplicando todos los terminos por el producto de los denominadores entre si, y quitando despues las letras comunes al numerador, y denominador v.g. $\frac{zv}{a}+\frac{B}{c}+\frac{x}{D}=\frac{D}{e}$ sera $\frac{aczev+acDeB+acDxe=aceD^2}{a \quad c \quad D \quad e}$, que borrando las letras comunes sera igual $cDev+aDeB+acex=acD^2$.

Corolario 2º

Quando los terminos de la ecuacion se allan con incognita podra quitarse de alguno partiendo los demas por la incognita de inferior grado v.g. $v^4+Bv^3=c^3v^2$ partiendo por $v^2+Bv=c^3$.

Tercio se reducen las ecuaciones por la elevacion a las dignidades, la qual se deve usar quando se allan cantidades radicales, pues estas se reduciran a racionales, si puestas en un miembro de la ecuacion, y en el otro las racionales se elevan ambos miembros a la dignidad, que indica el esponen se de el radical v.g. $\sqrt{a^2-AV}+a=V$; traslada[n]dolos terminos sera $\sqrt{a^2-aV}=V-A$; elevados ambos miembros resultara $A^2-AV=V^2-2AV+a^2$.

Quarto: por la estraccion de raices, siempre, que en un miembro de la ecuacion son todas las can tidades conocidas, y en el otro esta la incognita elevada a alguna dignidad v.g. $V^2=A^2+B^2$ estraiendo la raiz de ambos miembros sera $V=\sqrt{a^2+B^2}$; $Z^3=125$ sera $Z=\sqrt[3]{125}=5$; $V^2-2AV+a^2=BC$ sera $V-a=\sqrt{BC}$.

La demonstracion de esto es clara; porque las raices quadradas, cuvicas &c de cantidades iguales deven ser iguales: luego estraiendo raices de terminos iguales, los que resultaren seran iguales.

Escolio 1°

Sucede muchas vezes, que el termino 1° de la ecuacion no es potencia perfecta, pero lo sera añadiendole alguna cantidad conocida en ambos miembros, lo que se puede hacer sin turvar la igualdad v.g. $V^2-2AV=BC$, cuio 1er miembro no es quadrado perfecto sino se añade en ambas partes la cantidad A^2, con lo que resulta la ecuacion $V^2-AV+A^2=A^2+BC$, cuia raiz es $V-A=\sqrt{A^2+BC}$.

Escolio 2°

La regla general para completar las potencias imperfectas se deduce de la misma construccion de ellas. Veamos un exemplo en el quadrado: este deve constar en el binomio, de quien se trata, de los quadrados de ambas partes, y de el duplo producto de una par te por otra, de donde se infiere manifiesta mente, que si tomo la mitad de el coefici ente de el 2º termino, que es el duplo de la 2ª parte, y añado su quadrado en ambos mi embros de la ecuacion queda esta comple ta por el quadrado de la 2ª parte. Assi quando el 2º termino es $2Ax$ sera dicha mitad A, y su quadrado A^2; quando es Ax sera la mitad medio A, y su quadrado $\frac{1}{4}A^2$, lo que añadido en ambos miembros de las ecuaciones corres pondientes quedaran estas completas.

Corolario 1º

De lo dicho se infiere el metodo de reducir a simples todas las ecuaciones de 2º grado, lo qual se executa pasando al 2º miembro los ter minos conocidos, completando el quadrado, qua do fuere menester, o necesario, y extrayendo la raiz en esta forma $x^2 - Ax - AB =$ cero, transla dando los terminos conocidos sera $x^2 - Ax = AB$, completando el quadrado resultara $x^2 - Ax + \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4}A^2 + AB$, y extrayendo la raiz saldra la ecuacion linear, o simple $x - \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + AB}$.

Escolio 3º.

Las operaciones referidas son comunes para reducir todas las ecuaciones, y bastan para las de 1º, y 2º grado, que tienen una so la incognita. El orden con que se hace es ta reduccion se vera en el exemplo siguien te: $\sqrt{Z^2+3A^2} - \sqrt{\frac{Z^2-3A^2}{4}} = \sqrt{\frac{AZ^2}{6}}$. Elevo ambos miembros al quadrado por el precepto 3º, y re sultara $\frac{1}{2}Z^2 - \frac{\sqrt{Z^4-9A^4}}{4} = \frac{AZ^2}{6}$. Añado en am

bos miembros $\sqrt{Z^4 - 9A^4}$, y resto AZ^2 transla
dolas a la otra parte con signos contrari
os, de donde saldra $\frac{1}{2}Z^2 - \frac{A}{b}Z^2 = \sqrt{Z^4 - \frac{9A^4}{4}}$.
Elevo ambos miembros al quadrado, y ten
dre $\frac{1}{4}Z^4 - \frac{AZ^4}{b} + \frac{A^2}{b^2}Z^4 = Z^4 - \frac{9A^4}{4}$. Resto $\frac{1}{4}Z^4$,
y los demas terminos los traslado de un
miembro a otro para que resulte $\frac{AZ^4}{b} - \frac{A^2}{b^2}$
$Z^4 = \frac{9A^4}{4}$. Quito los quebrados por el precepto
20, y tendre $4AbZ^4 - 4A^2Z^4 = 9A^4b^2$. Deprimo
los terminos partiendo por A segun el mismo
precepto, y resultara $4bZ^4 - 4AZ^4 = 9A^3b^2$.
Parto por $4b - 4A$, y tendre $Z^4 = \frac{9A^3b^2}{4b-4A}$. Extrai
go la raiz quadrada, que sera $Z^2 = \frac{3Ab\sqrt{A}}{2\sqrt{b-A}}$, y de es
ta raiz extraigola quadrada, y sera $Z =$
$\sqrt{\frac{3Ab\sqrt{A}}{2\sqrt{b-A}}}$, que me da reducida la ecuacion, y resuel
to el problema, a que se aplicare. Bien
se ve, que por la addicion, y substraccion orde
no los terminos, y los disminuio: por la mul
tiplicacion quito los quebrados; por la partici
on deprimo los terminos, y los disminuio; por
la elevacion a dignidades, quito los radicales; y
por la extraccion de las raices bajo la ecuacion
a los terminos mas simples. Con la resolucion
de los problemas siguientes se facilitara
el uso de estos preceptos.

Problema 1º

Allar un numero, cuia mitad, 3º, y 4º exceda
en la unidad al mismo numero.

Resolucion.

Llamando al numero, que busco X sera su mi
tad $\frac{1}{2}X$, su 3º $\frac{1}{3}X$, y su 4º $\frac{1}{4}X$, y la ecuacion que
comprehende todas las condiciones de el

problema sera

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=x+1.$$

Reduzco los quebrados a un comun denominador, y resultara.

$$\frac{12x+8x+6x}{24}=x+1$$

Sumo los numeradores, y sera $\frac{26x}{24}=x+1.$

Para quitar el quebrado multiplico el 2º miembro por 24, y resultara.

$$26x=24x+24.$$

Translado al otro miembro el $24x$, y sera

$$26x-24x=24$$

Reduzco el 1er miembro, y tendre

$$2x=24$$

Parto por 2, y resultara

$$x=\frac{24}{2}=12.$$

Luego el numero buscado es 12, cuia mitad 6, el 3º 4, y el 4º 3 componen 13, que excede en la unidad al 12.

Problema 2º

En un viage gaste $\frac{2}{3}$, y $\frac{1}{5}$ de el dinero, que llevava; al volver a casa tengo 36 pesos, quanto gaste.

Resolucion

Llamo a todo el dinero x: luego por la condicion de el problema sera.

$$x-\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}x=36$$

Reduzco los quebrados, y saldra $x-\frac{10x-3x}{15}=36.$

$$x-\frac{13x}{15}=36$$

Multiplico por 15, y sera

$$15x-13x=540$$

Reduzco el 1er miembro, y tendre

$$2x=540$$

Parto por 2, y sera

$$D = \frac{540}{2} = 270.$$

Luego este es el dinero, que lleve, pues restando de el $\frac{2}{3}$, ó 180, y $\frac{1}{5} = 54$ el residuo es 36.

Problema 3º

Dada la distancia de dos lugares de donde salen a un mismo tiempo dos correos, y la velocidad de cada uno allar el tiempo en que se juntaran.

Resolucion.

La distancia de los lugares sea A; la velocidad de el 1º sea B la de el 2º C, el tiempo en que se juntaran D: luego el camino de el 1º sera BD, y de el 2º CD, y haviendo ambos de aver corrido toda la distancia, quando se junten sera.

$$BD + CD = A$$

Parto por los coeficientes para quitarlos, y resultara $D = \frac{A}{B+C}$, que me da resuelto el problema, pues si supongo $A = 120$, $B = 6$, $C = 4$ sera

$$\frac{A}{B+C} = \frac{120}{6+4} = 12$$

que es el dia en que se juntaran.

Problema 4º

Allar un numero, cuio quadrado, mas el numero $A = 4$ multiplico por el mismo quadrado menos el numero $B = 3$ me de el numero $C = 6912$.

Resolucion.

La ecuacion, que comprehende las condiciones de el problema es

$$D^2 + A . D^2 - B = C.$$

$$D^4 + A - BD^2 - AB = C.$$

$$D^4 + A - BD^2 = AB + C.$$

Y extrayendo la raiz de ambos miembros que dara resuelto el problema, en que si A es ma ion, que se allaran 2 raices, una positiva, y otra negativa, aquella = 2, cuio quadrado 4 + 4, que es 8 sera = 82, y si del mismo quadrado se restan 3 el residuo sera 79, por el qual multiplico 82, dara 6242, que es el numero, a quien a de ser igual el buscado.

Proposicion

Reduzir las ecuaciones particulares a una ecuacion final.

Resolucion

Quando son muchas las condiciones, que incluie el problema son necesarias muchas ecuaciones para la solucion, y a caso cada una de ellas contendra muchas incognitas. En tonces de tal suerte se an de comparar entre si las ecuaciones, que en cada operacion se quite una incognita, y resulte otra nueva ecuacion. El modo para esecutar esto se pratica en las reglas siguientes.

Primera: quando la incognita, que se a de quitar tiene sola una dimension en todas las ecuaciones se allara facilmente su valor en cada una de ellas por los preceptos de la proposicion antecedente; y comparando entre si los valores allados se tendra la ecuacion final.

Exemplo.

El problema en que se piden dos numeros dada su suma, y su diferencia comprehende de estas ecuaciones $x + y = a$; $x - y = b$; pues queriendo quitar la x buscare su valor ambas ecuaciones, y sera $V=A-Y$ en la 1.a $V=B+Y$ en la 2.a y comparando entre si es tos dos valores resultara la ecuacion final $A-Y=B+Y$, en que trasladando los termi nos resultara $A-B=2Y$; y partiendo por 2 se ra $Y=\frac{A-B}{2}$.

Asi mismo si el valor de una, o de la in cognita se substituie por ella en otra se podra quitar de esta la incognita; como sucede en el exemplo propuesto substituiendo en la ecua cion 1.a $V+Y=A$ el valor $B+Y$ de donde resu ltara $B+Y+Y=A$. Y aun mas facilmente por me dio de la addicion, o subtraccion de ambas ecua ciones se podra quitar la incognita; pues su mando $V+Y=A$ con $V-Y=B$ resultara $2V+Y-Y=A+B$: que reducida sera $2V=A+B$; o restando $V-Y=B$ de $V+Y=A$ dara $V-V+Y+Y=A-B$, que reducida es $2Y=A-B$. $Y=\frac{A-B}{2}$, el qual va lor substituido tambien en la 1.a ecuacion me dara $V+\frac{A-B}{2}=A$.

Escolio.

Si en el exemplo propuesto, y otros semejan tes se denominan las cantidades segun la relacion de las conocidas a las desconocidas, como digimos ia en otra parte, sola esa de nominacion nos dara la ecuacion final; pu es llamando al numero menor V sera el maior $A-V$ o $V+B$; y comparando estos dos valores resultara la ecuacion $V+B=A-V$ &c.

Para proceder, pues

De esta manera se diminuiran los grados

Escolio 2º

Quando las incognitas se allan elevadas de alguna potencia se podran exterminar por el mismo methodo, con tal que sea una misma la dimension de cada incognita en todas las ecuaciones.

Exemplo

Sean las ecuaciones $Ax = y^2$, y $x^2 + xy = by + y^2$, en que quiero quitar x de la 2ª ecuacion para lo qual parto por A en la 1ª, y sera $x = \frac{y^2}{A}$, valor, que substituire por x elevandolo a todos los grados de x. luego en lugar de x^2 pondre $\frac{y^4}{A^2}$, y en lugar de xy escrivire $\frac{y^3}{a}$ de donde resultara $\frac{y^4}{a^2} + \frac{y^3}{A} = by + y^2$ en que no se alla la x.

Segunda regla.

Cuando la incognita tiene varias dimensiones en todas las ecuaciones se a de buscar el valor de la maxima dimension en cada una, y si las dimensiones fueren diferentes multipliquese la menor por la cantidad, que se a de quitar, o por su quadrado, cuvo &c asta elevarla a la maxima dimension, cuio valor allado en una ecuacion se substituira en la otra segun se ha dicho en el escolio antecedente. De esta manera se disminuiran los grados de la incognita, y repitiendo las operaciones, se reducira a un grado, en que facilmente se pueda exterminar por la antecedente regla.

Exemplo 1º

Sean las ecuaciones $x^2+5x=3y^2$, y $2xy-3x^2=4$. Para quitar x pongo sola en un miembro 57
la maxima dimension de ambas ecuaciones, y me daran $x^2=-5x+3y^2$; y, $x^2=\frac{2xy-4}{3}$. Comparo estos dos valores, y sera $3y^2-5x=\frac{2xy-4}{3}$. Reducida assi la x a una dimension se podra exterminar facilmente; pues si reduzco esta ultima ecuacion, resultara $9y^2-15x=2xy-4$, o $x=\frac{9y^2+4}{2y+15}$ el qual valor substituido en la 2a ecuacion x^2+5x, resulta

$$\frac{81y^4+72y^2+16}{4y^2+60y+225}+\frac{45y^2+20}{2y+35}=3y^2.$$

La qual reduzire quitando los quebrados.

Exemplo 2o

Sean las ecuaciones $x^2-ay=y^2$, y, $x^3+ayx=y^3$. Para quitar la x elevo la menor dimension x^2, que es el quadrado a la maior, que es el cubo, lo qual hare multiplicando por x, y resultara en la 1a ecuacion $x^3-ayx=y^2x$. Busco el valor de x^3 en la 1a ecuacion, y resultara $x^3=y^2x+ayx$, lo substituido en la 2a, y me dara

$$y^2x+ayx+ayx=y^3.$$

En que partiendo por y saldra $yx+2ax=y^2$, y ultimamente partiendo por $y+2a$ sera $x=\frac{y^2}{y+2a}$, el qual substituido, en la 1a, y 2a ecuacion desaparece la x.

Bien se ve en estos exemplos, que quando la incognita, que

Proposicion 3a

Se resuelven las ecuaciones de 1o, y 2o grado con muchas incognitas en algunos problemas

onque se explica tamvien la aplicacion de Algebra a la Arithmethica Geometria, y a las Mathemathicas mixtas.

Perfecionado el Analista en el metodo de redu zir, y transformar las ecuaciones por los pre ceptos dados en las proposiciones antecedentes de ve aplicar su ingenio a la reduccion de los proble mas en sus operaciones correspondientes; para lo qual ha de reflecsionar mucho sobre las con diciones, y circunstancias de la question a fin de expresarla y formarla assi en lenguage Analiti co. Pues abilitado en esto, y venzida antes la difi cultad de reduzir, y transformar las ecuaciones; podra resolver qualquier problema, aunque ten ga muchas incognitas, y este sumamente com plicado, como se vera en los problemas siguientes, que propondre por su orden.

Problemas de Arithmetica

Problema 1º

Hallar 3 numeros dada la suma de cada 2 de ellos

Resolucion.

Denomino los numeros con este orden x, y, z, la su ma de 1º, y 2º a, la de 1º, y 3º b, la de 2º, y 3º c: lue go las ecuaciones de el problema seran

$x+y=A$ suma de 1º, y 2º
$x+z=B$ suma 1º, y 3º
$y+z=C$ suma de 2º, y 3º

Para allar la ecuacion final translado la ynª incognita en cada ecuacion resultara

$$y=a-x$$
$$z=b-x$$
$$z=c-y$$

Comparo los dos valores de z, y sera $b-x=c-y$, en que pasando y ala izquierda, y $b-x$ ala derecha dara $y=c-b+x$, el qual valor colocado en la 1ª ecuacion tendre la final $A-x=c-b+x$. Translado $-x$, y $c-b$ dara

$$A+B-C=2x$$

Luego $x=\frac{a+b-c}{2}$ con que ya tengo el valor del 1er numero. Substituiendo este valor en las demas ecuaciones hallare el de las otras incognitas v.g. en la 2ª ecuacion $z=B-x$ substituido el valor de x que es $\frac{A+B-C}{2}$ resultara

$$z=b\left(\frac{-a-b+c}{2}\right)$$

, y substituido este valor ultimo en la ecuacion $y=c-z$ sera

$$y=c-b\left(\frac{+A+b-c}{2}\right)$$

Para convencer, que estos numeros son los que se piden provare, que las sumas son las dadas, lo qual se veen las ecuaciones siguientes

$$x+y=\frac{A+B-C+a+c-b}{2}=\frac{2A}{2}=a$$
$$x+z=\frac{a+b-c+a+b+c-A}{2}=\frac{2b}{2}=b$$
$$y+z=\frac{A+c-b+b+c-A}{2}=\frac{2c}{2}=c$$

Y aplicada la resolucion a algun caso particular determinare las conocidas en esta forma.

Suma de 1º, y 3º = 8
Suma de 1º, y 2º = 10
Suma de 2º, y 3º = 6

De donde se sigue $\left(\frac{a+b-c+a+c-b}{2} = \frac{10+8-6+10+6-8}{2} = \frac{12+8}{2} = 6+4\right)$

$\left(\frac{A+b-c+b+c-A}{2} = \frac{10+8-6+8+6-10}{2} = \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = 6+2 = 8\right)$

$\left(\frac{A+c-b+b+c-a}{2} = \frac{10+6-8+8+6-10}{2} = \frac{8}{2} + \frac{4}{2} = 4+2 = 6\right)$

Mas brevemente se pueda soltar el proble ma sumando las 3 las ecuaciones, de donde re sultará $2x+2y+2z=a+b+c$: en qualquiera de las 3 ecuaciones duplíquense los dos miembros v.g. en $y+z=c$, cuio duplo será $2y+2z=2c$. El valor dos c lo substituio en la ecuacion general en lu gar de dos $y+2z$, y resultará $2x+2c=a+b+c$: trans lado $2c$ será $2x=a+b+c-2c=a+b-c$, y $x=\frac{a+b-c}{2}$. De el mismo modo se allará el valor de qualqui era otra incognita.

Problema 2°

Pidenme tres numeros dandome los produc tos de cada dos de ellos.

Resolucion

Sea el 1° x, segundo y, 3° z: Producto de 1° y 2° a^2, de 1° y 3° b^2, de 2° y 3° c^2 serán las ecuacio nes

$$xy=a^2$$
$$xz=b^2$$
$$yz=c^2$$

Parto las tres ecuaciones cada una por su 1a in cognita, y resultará

$$y=\frac{a^2}{x}$$
$$z=\frac{b^2}{x}$$
$$z=\frac{c^2}{y}$$

Comparo los valores de z, y saldrá $\frac{b^2}{x}=\frac{c^2}{y}$ qui

tolos que estan dados por los denominadores respec
tivos, y tendre $b^2y=c^2x$; le quito a la y el coe
ficiente, y saldra $y=\frac{c^2x}{b^2}$. este valor de y
en su lugar en la 1.ª ecuacion; $y=\frac{a^2}{x}$, y re
sulta la ecuacion final $\frac{c^2x}{b^2}=\frac{a^2}{x}$. Multipli
co por los denominadores, y sera $c^2x^2=a^2b^2$.
Parto por c^2, y tendre $x^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$ de la qual ex
traiendo la raiz sera el valor de x; $x=\frac{ab}{c}$.
Para allar el valor de z en la ecuacion $z=\frac{b^2}{x}$
substituio en lugar de x su valor $\frac{ab}{c}$, y sera
$z=\frac{bc}{a}$. Asi mismo si en la ecuacion $y=\frac{c^2}{z}$:
en lugar de z substituio su igual $\frac{bc}{a}$ resultara
$y=\frac{ac}{b}$.

Para conocer si los tres numeros allados
satisfacen al problema dispondre sus produc
tos en esta forma

$\frac{ab}{c}.\frac{ac}{b}=\frac{a^2bc}{bc}=a^2$ Produ de 1.º y 2.º

$\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}=\frac{ab^2c}{ac}=b^2$ Pro. de 1.º y 3.º

$\frac{ac}{b}.\frac{bc}{a}=\frac{ac^2b}{ab}=c^2$ de 2.º y 3.º

Tambien se puede resolver el problema mul
tiplicando respectivamente los terminos de
las ecuaciones en esta forma

$xy=a^2$

$xz=b^2$

$x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$

Luego $x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$ de cuia ultima ecua
cion extraiendo la raiz sera $xyz=abc$; por
quanto en la tercera ecuacion es $yz=c^2$ subs
tituiendo este valor en xyz resultara c^2x
$=abc$, en que partiendo por c^2 sera $x=\frac{abc}{c^2}$, y

de ai facilmente se deduciran los demas va
lores.

Para aplicar la solucion a numeros sea $a^2=10$, $b^2=12$, $c^2=15$: Luego sera a

$$a=\sqrt{10},\ b=\sqrt{12},\ c=\sqrt{15}.$$

$$\frac{ab}{c}=\frac{\sqrt{10}.\sqrt{12}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{15}}=\sqrt{8}$$

$$\frac{ac}{b}=\frac{\sqrt{10}.\sqrt{15}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{25}{2}}$$

$$\frac{bc}{a}=\frac{\sqrt{12}.\sqrt{15}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{10}}=\sqrt{18}.$$

Problema 3º

Dada la suma, o producto, o la diferencia, y producto de dos cantidades allar las cantidades

Resolucion.

En los problemas en que me dan la suma, y diferencia podre avreviar la solucion denominando la cantidad maior $x+y$, y la menor $x-y$, en cuio caso la suma sera $2x$, y la diferencia $2y$. valiendome pues de esta denominacion sea la suma a, y el producto b; luego $2x=a$, y $x=\frac{1}{2}a$; $x+y.\ x-y=x^2-y^2=b$: substituio en esta ecuacion por x^2 su valor $\frac{1}{4}a^2$, y sera $\frac{1}{4}a^2-y^2=b$, y tranladando $y^2=\frac{1}{4}a^2-b$; y estrayendo la raiz sera $y=\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}$; luego el numero maior $x+y=\frac{1}{2}A+\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}$, y el menor $x-y=\frac{1}{2}A-\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}$.

Para las cantidades, dada su diferencia, y producto buscare en la ecuacion de diferencia $x-y=A$ un valor de x, que sera $A+y$. Substituio este valor en la ecuacion de el producto $XY = B$. Y resulta $AY + Y^2 - B$, y haziendo positivo el 1.er termino sera $Y^2 + AY = B$. Completando el mismo quadrado sera $Y^2 + AY + \frac{1}{4}a^2 = B + \frac{1}{4}$ de donde extraiendo la raiz sera $Y + \frac{1}{2}a + \sqrt{B + \frac{1}{2}}$ y trasladando el num $\frac{1}{2}A$ sera $Y = -\frac{1}{2}a^2 + \sqrt{B + \frac{1}{4}}$

$X = A + Y - a - \frac{1}{2}a - \sqrt{B + \frac{1}{4}}$ si denominamos las cantidades, como dijimos arriva sera $2Y = A$: luego $Y = \frac{A}{2}$, cuio quadrado $\frac{1}{4}a^2$ substituido en la ecuacion de el producto $X^2 - Y^2 - B$ me dara una ecuacion final

Problema

Dada la suma de dos cantidades, y la diferencia de sus quadrados, o la suma de cantidades, y quadrados, o la suma, y diferencia de los quadrados allar las cantidades.

Resolucion

Para la 1.a parte sea la suma A, la diferencia de los quadrados B numero menor X: luego el maior $A - X$ los quadrados X^2, y $A^2 - 2AX + X^2$: luego la diferencia $A^2 - 2AX = B$: luego $A^2 - B = 2AX$: luego $X = \frac{A^2 - B}{2A} = \frac{1}{2}a - \frac{B}{2A}$ si $a = 8$; $B = 16$, $\frac{1}{2}a - \frac{B}{2a} = 4 - 1$: luego el numero menor $X = 4 - 1 = 3$; y el maior $A - X = 8 - 3 = 5$

Para la 2.a sea el menor $X + Y$, y el menor $X - Y$: luego $2X = A$; $X = \frac{1}{2}A$ la suma de los quadrados sera $2X^2 + 2Y^2 = B$; pues substituio en vez de $2X^2$ su valor $\frac{2}{4}A^2$, y resultara $\frac{2}{4}A^2 + 2Y^2 = B$: luego $2Y = B - \frac{2A^2}{4}$: luego $Y^2 = \frac{B - \frac{2}{4}a^2}{2}$ luego $Y = \sqrt{\frac{B - \frac{2}{4}A^2}{2}}$.

luego $x+y=\frac{1}{2}A+\sqrt{B-\frac{2a^2}{4}}$

$x-y=\frac{1}{2}a-\sqrt{B-\frac{2A^2}{4}}$.

Si $a=10$ $B=54$: luego $x+y=5+\sqrt{\frac{54}{2}}\ \sqrt{\frac{50}{2}}\ \sqrt{\frac{4}{2}}$ $=\sqrt{4}=2$.

$x-y=5-\sqrt{54-50}=5-2=3$.

Para la 3ª x,y, luego la suma de sus quadrados $x^2+y^2=a$; y la diferencia $x^2-y^2=B$. Sumo las ecuaciones, y sera $2x^2=A+B$: luego $x=\sqrt{\frac{B+A}{2}}$ resto una de otra y sera $2y^2=A-B$: luego $y=\sqrt{\frac{A-B}{2}}$

Este mismo problema se puede soltar facilmente denominando la semidiferencia de las cantidades y, en cuio caso sera la maior $\frac{1}{2}A^2+y$, y la menor $\frac{1}{2}a-y$. El quadrado de la maior $\frac{1}{4}A^2+Ay+y^2$, y el de la menor $\frac{1}{4}A^2-Ay+y^2$, la suma $\frac{1}{2}A^2+2y^2$, y la diferencia $2Ay$: luego para la 1ª parte me valdre de la ecuacion de la diferencia $2Ay=B$, en que partiendo por $2A$ sale $y=\frac{B}{2A}$: luego sera

Numero maior $\frac{1}{2}A+y=\frac{1}{2}A+\frac{B}{2A}$

Numero menor $\frac{1}{2}A-y=\frac{1}{2}A-\frac{B}{2a}$.

En la 2ª parte me valdre de la ecuacion de la ecuacion de la suma de los quadrados de la qual proviene la resolucion siguiente.

$\frac{1}{2}A^2+2y^2=b$

$2y^2=b-\frac{1}{2}A^2$

$y^2=b-\frac{1}{2}a^2$:

$y=\sqrt{B-\frac{1}{2}a^2}$:

La 3ª parte se puede soltar, o con esta ecuacion de la suma $\frac{1}{2}A^2+2Y^2$, o por la diferencia $2XY=B$.

Problema 5

Dado el producto de 2 cantidades, y la suma, y diferencia de sus quadrados hallar las cantidades. Resolucion.

Para la 1ª parte sea el producto $XY=b^2$, y la suma de los quadrados $X^2+Y^2=2a^2$. Busco el valor de Z en ambas ecuaciones y sera en la 1ª $Y=\frac{b^2}{x}$ en la 2ª $Y^2=2a^2-x^2$. elevo la 1ª ecuacion al quadrado, y tendre $Y^2=\frac{b^4}{x^2}$. De la comparacion de los dos valores de Z^2 resulta la resolucion siguiente.

$$2a^2-x^2=\frac{b^4}{x^2}$$
$$2a^2x^2-x^4=b^4$$
$$x^4-2a^2x^2=-b^4$$
$$x^4-2a^2x^2+a^4=a^4-b^4$$
$$x^2-a^2=\sqrt{a^4-b^4}$$
$$x^2=a^2+\sqrt{a^4-b^4}$$
$$x=\sqrt{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}.$$

Si $2a^2=20$; $b^2=8$: luego $x=\sqrt{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}=\sqrt{16}=4$. $Y=\frac{b^2}{x}=\frac{8}{4}=2$.

Para la 2ª parte sea el producto A; la diferencia de los quadrados $2b$: el numero maior $x+z$, y el menor $x-z$: luego el producto $x^2-Y^2=A$; $x^2=a+Y^2$, la diferencia $2xz=2b$, $2xz=b$; quadro ambas ecuaciones y seran $x^4-2x^2Y^2+2x^2=a^2$

$4x^2Y^2=b^2$. La sumo y resultara

$$x^4+2x^2y^2+y^4=a^2+b^2$$
$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$x^2=\sqrt{a^2+b^2}-y^2$$

Comparo este valor de x^2 con el de la 1ª ecuacion, y resultara.

$$a+y^2=\sqrt{a^2+b^2}-y^2$$
$$2y^2=-a+\sqrt{a^2+b}$$
$$y^2=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$
$$y=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Problema 60

Dividir una cantidad en 2 partes, de tal manera que multiplicada por una de ellas su producto sea igual al quadrado de la otra.

Resolucion

Sea la cantidad a, la parte de el quadrado x, luego la otra $a-x$, luego $a\times a-x=x^2$, que es $a^2-ax=x^2$, pasando ax a la otra parte, y completando el quadrado sera $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2=a^2+\frac{1}{4}a^2$, extraiendo la raiz sera $x+\frac{1}{2}a=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}$, $x=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$.

Escolio.

Se ade advertir aqui, como se conoce si una ecuacion superior es reducible a quadrados, lo que sucede, quando consta de tres terminos en la quales los grados de la incognita son Arizmetricamente proporcionales, y entonces para su resolucion procedere en la forma siguiente.

$$x^6-ax^3+b=0$$
$$x^6-ax^3=-b$$
$$x^6-ax^3+\frac{1}{4}a^2=-b+\frac{1}{4}a^2$$
$$x^3-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}$$
$$x^3=\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}+\frac{1}{2}a$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2-b}+\frac{1}{2}a^2.$$

Problema 7º

Allar dos cantidades, cuia suma con la diferencia de sus quadrados sea igual a otra dada.

Resolucion.

La dada es A; el numero maior $X+Z$, el menor $X-Z$; luego la suma $2X$, y la diferencia de los quadrados $4XZ$; luego la ecuacion, que comprehende las condiciones sera $2X+4XZ=A$; que es lo mismo, que $X\times(2+4Z)=a$. Partiendo por $2+4Z$, y sera: $X=\frac{a}{2+4Z}$, en la qual substituiendo por Z un valor arbitrario, quedara determinado el X. Si $a=50$, y en lugar de Z substituio 2 sera $X=\frac{a}{2+4Z}=\frac{50}{10}=5$. luego $X+Z=7$, $X-Z=3$. El quadrado de 7 es 49, el de 3 es 9: luego la diferencia 40 con la suma de los numeros $7+3$ sera $=50$.

Problemas de Geometria.

Aunque muchas vezes las questiones Geometricas se pueden reducir a equaciones con igual facilidad, y methodo, que las abstractas; pero otras requieren mas artificio, para el qual abren camino los preceptos siguientes.

Primero: haze la figura, que contenga la solucion deel problema, y lo exprese, como si estuviera resuelto; esto es, que sin hacer diferencia de lineas conocidas, o desconocidas, podre usar de ellas como si fueran todas conocidas.

Segundo: examinare las relaciones entre las lineas, que componen la figura para saver su dependencia, y como determinadas unas se de terminan otras.

Tercero: muchas vezes avre de añadir, y restar las lineas para deducir de el valor de las partes el valor de el todo, o de el de este, q una parte o el de la otra. Otras vezes es me valdre de proporcionalidad de las lineas: comparando el valor de las extremas con el de las medias. esta proporcionalidad la he de tomar principalmente de los triangulos semejantes; para cuio conocimiento es necesaria la igualdad de los angulos.

Tamvien me valdre de la addicion, y subtraccion de los quadrados, (v.g. en el rectangulo, sumare los quadrados) de ambos lados, para tener el de la potenusa; o de este quadrado restare el de el uno de los lados para tener el de el otro.
Por lo qual es necesaria toda la doctrina de la proporcionalidad de las lineas, y semejanza de los triangulos, en la qual estriva la Analisi de la Geometria rectilinea.

Quarto: despues de aver reducido la ecuacion final, en la ultima ecuacion en que la incognita esta igualada a cantidades conocidas hallare la construccion Geometrica, que es diferente segun la variedad de las ecuaciones. De que daremos algunos exemplos en las de el 1º, y 2º grado.

Por lo que mira a las 1as vastara resolver los quebrados, que expresan el valor de la incognita, en sus terminos proporcionales.

Exemplo 1º

Si $x = \frac{AB}{C}$ sera la analogia $C:B = A:$ al 4ª proporcional $\frac{AB}{C}$: luego el valor de x se construira hallando la 4ª proporcional segun el methodo dado en la Geometria.

Exemplo 2º

Si $x = \frac{A^2 - B^2}{C}$ sera $C : A+B = A-B :$ al 4º proporcional $\frac{a^2 - B^2}{c}$.

Exemplo 3º

Si $x = \frac{ABC}{MN}$ formare la analogia tomando una letra del denominador, y 2, y 2 de el numerador en esta forma $M : B = A : \frac{AB}{M}$. Llamare a esta 4ª proporcional F: luego $x = \frac{FC}{N}$, la qual hallare resolviendo esta ultima en sus proporcionales $N : F = C : \frac{FC}{N}$.

Si los quebrados tuvieren mas letras, formare mas analogias con este mismo methodo. Si el valor de la incognita fuere igual a muchos quebrados, enteros, y quebrados buscare primeramente las lineas correspondientes a cada quebrado, y sumandolas, y restandolas, segun el orden de los signos, la suma, o el residuo sera el valor de la incognita.

Exemplo

Sea $x = A + \frac{AB}{C} + \frac{A^2B}{CF} - \frac{A^2C^2}{B^2}$ buscare la linea $H = \frac{ab}{c}$, y la $L = \frac{a^2b}{cF}$, las quales juntare a la linea A, y de la suma restare la linea tambien hallada $M = \frac{a^2c^2}{B^3}$, y el residuo sera el valor de la incognita, esto es $x = a + H + L - M$.

Quando el valor dela incognita se expresa con algun radical v.g. $x=\sqrt{ab}$ sera esta la media proporcional entre AB; la qual se halla en la figura 1a en que devo tomar AB = a : BC = b; y de el medio H con el radio HC describire el semicirculo ABC, en que la perpendicula BD elevada de el punto B sera $=x$; pues $AB \cdot BC = BD^2$: luego $ab = BD^2$, y $\sqrt{ab} = DB$.

Si $x=\sqrt{3a^2 \pm ab \pm 2ac}$. Tomare $AB = 3a \pm b \pm 2c$, si el signo es positivo, y la diferencia si es negativa. Tomare tambien $BC = a$: luego la perpendicular sera igual $\sqrt{3a^2 \pm ab \pm 2ac} = x$. Si $x=\sqrt{a^2+b^2}$. construire el rectangulo dela 2a figura ABC, en que AB sea igual a, $AC = b$: $AB = ac$: luego la hipotenusa $CB = \sqrt{a^2+b^2}$. Si $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. sobre AC levantare la perpendicular, y la hipotenusa BD sera $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Si $x=\sqrt{a^2-b^2}$ en el diametro de la 3a figura ABC, que supondre igual a describire el semicirculo, en el qual inscrita la cuerda $AC = b$ sera $BC = \sqrt{a^2-b^2}$.

En las ecuaciones de 2o grado si son simples v.g. $x^2 = ab$ hallare el valor buscando una media proporcional entre a b. Si son afectas se pueden reducir a las 4 formulas siguientes, que nacen de las diversas combinaciones de los signos

$$x^2+ax-b^2=0$$
$$x^2-ax-b^2=0$$
$$x^2+ax+b^2=0$$
$$x^2-ax+b^2=0$$

La ecuacion de 2º grado tiene dos raices, o valores, pues A^2 igualmente nace de la multiplicacion de $+A$, o de $-A$, que eso indican los signos $+$, y $-$ puestos antes de el radical. Estos valores, o raices pueden ser ambos positivos, o ambos negativos, o uno positivo, y otro negativo; y tamvien ambos imaginarios.

En la ecuacion $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2} - \frac{1}{2}a$ el valor $\sqrt{\frac{1}{2}a^2+b^2} - \frac{1}{2}a$ es positivo; pues siendo $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ que un medio la diferencia sera positiva, el otro valor menor $\sqrt{\frac{1}{2}a^2+b^2} - \frac{1}{2}a$ sera negativo. En la ecuacion $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ suponiendo B – que $\frac{1}{2}a$ seran ambos valores positivos, porque $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ sera menor, que $\frac{1}{2}a$, y por la misma razon en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2} - \frac{1}{2}a$ ambos valores seran negativos; y si fuesse B maior, que $\frac{1}{2}a$ serian imaginarios.

Las raices, o valores negativos, que tamvien se llaman falsos son no menos reales, que los positivos, con sola esta diferencia, que los positivos se toman de un punto principio de la incognita azia una parte, y los negativos de el mismo punto azia la opuesta. V.g. en la figura 4ª. Si el principio de la incognita $x = A$, tomando $AB = a$, y suponiendo los valores positivos azia b, sera $AB = a = x$ valor positivo, y $AC = \frac{1}{2}a = x$ valor negativo, y el problema tendra 2 soluciones una en el B, y otra en el C.

Para construir los valores, o raices de las dos 1ªs formulas hale la figura 5ª en que $AC = \frac{1}{2}a$, $AB = b$; sera BC el valor, o raiz positiva de la incognita, y BD la falsa en la ecuacion $x^2+ax-b^2=0$, y al contrario BD la verdadera, y BE la falsa de la ecuacion $x^2-ax-b^2=0$; porque la raiz de la 1a es $x=-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$. luego siendo iguales CA, CE, y CD seran tamvien CE, y CD $=\frac{1}{2}a$: AB = B: luego la potenusa CD $=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$: luego BE $=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}-\frac{1}{2}a$ valor positivo, y BD $=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ valor negativo, suponiendo BD negativa.

De la 2a ecuacion es la raiz $x=\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ tomando BD positiva sera $=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ valor positivo, y BE negativa $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ negativo.

Para las dos formulas siguientes hare la figura 6a. el radio CA = a; AB = b. BD paralela a AC las rectas BE, y BD seran los valores negativos de la ecuacion $x^2+ax+b^2=0$, y los positivos de $x^2-ax+b^2=0$. La raiz de la 1a es $x=-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ pues porquanto FD = FE $=\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ sera BE negativa igual menos $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$, y BD tamvien negativa igual $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2 b^2}$. La raiz de la 2a es $x=\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$: luego BD positiva sera ~~a~~ $=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$: luego BD positiva sera $=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$, y BE tamvien positiva $=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$.

Problema 1o

En el triangulo rectangulo dado el perimetro, y el area allar la ipotenusa.

Resolucion.

Sea la fig 7 el rectangulo BAC, cuyo perimetro igual a, el area igual b^2, la ipotenusa BC = x

luego $(aB+AC)^2 = a-x$ $(AB+AC)^2 = aB^2+2aB \cdot ac$ $+ac^2 = a^2+2ax+x^2$. luego siendo el quadrado de la ypotenusa $BC^2 = aB^2+ac^2$ sera tambien ygual $(aB+AC)^2 - 2aB \cdot AC$, y siendo $2aB \cdot AC = 2B^2$ sera $BC^2 = x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 2B^2$: de donde resultara la resolucion sigte

$$x^2 - x^2 + 2ax = a^2 - 2b^2$$

$$2ax = a^2 - 2b^2$$

$$x = a^2 - \frac{2B^2}{2a} = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Problema 2º

En el triangulo rectangulo dada la suma de dos lados, y el perpendiculo determinar los lados.

Resolucion

En la fig 8 sea la suma de los lados ygual a, la diferencia ygual y, el perpendiculo b, la ypotenusa ygual x luego el lado maior aB sea ygual $\frac{a+y}{2}$, y el menor $BC = \frac{a-y}{2}$. y porquanto $AC^2 = AB^2 + BC^2$ sera.

$$x^2 = \frac{a^2+y^2}{2}$$

$$2x^2 = a^2 + y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2.$$

Y siendo proporcionales $BA : BD = AC : BC$ sera

$$\frac{a+y}{2} : b = x : \frac{a-y}{2}$$

$$\frac{a^2 - y^2}{4} = bx$$

$$a^2 - y^2 = 4bx$$

$$a^2 - 4bx = y^2.$$

Comparo los dos valores de y^2, y me daran

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$

$$x^2 + 2bx = a^2$$

$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x+b=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$x=\sqrt{a^2+b^2}-b.$$

Construccion.

Sobre ab=a en la fig 9 levantare la perpendicular ac=b: luego sera BC=$\sqrt{a^2+b^2}$. De la CB resto CD=b: luego BD=$\sqrt{a^2+B^2}-b$. Teniendo la vasi, y el perpendiculo se construira facilmente el triangulo formando el paralelogramo, cuio lado DB sera la vasi de el triangulo, y DF el perpendiculo b; pues si se tira un semicirculo, sobre la vasi DB, y de el punto de interseccion H las rectas HD, HB sera el trian.º de DHB.

Problema 3º

Dados los 3 lados de un trian.º determinar el area.

Resolucion.

En la fig 14 sea la vasi ac=a, ab lado menor =b, BC lado mar=C la perpendicular BD parte la vasi en dos segmentos aD, Dc, cuia diferiencia llamo x; luego el mar sera $\frac{a+x}{2}$ y el menor $\frac{a-x}{2}$: luego siendo rectangulos aDB, CDB resultara

$$B^2-\frac{a^2+2ax+x^2}{4}=BD^2$$
$$c^2-\frac{a^2+2ax+x^2}{4}=BD^2$$

Comparo estos dos valores, y sera

$$B^2-\frac{a^2+2ax-x^2}{4}=c^2-\frac{a^2+2ax-x^2}{4}$$
$$\frac{-a^2+2ax-x^2+a^2+2ax+x^2}{4}=c^2-b^2$$
$$\frac{4ax}{4}=c^2-b^2$$
$$x=\frac{c^2-b^2}{a}.$$

Es pues la diff.a de los segmentos igual a la diffcia de los quadrados de ambos lados partida por la vara AC: luego si esta difª le añado a la vara AC la mitad de la suma sera el maior segmento, y si la resto la mitad de el residuo sera el menor segmento: siendo conocidos los segmentos hallare facilmente el perpendiculo restando ~~AB~~ el quadrado AB de el quadrado, o de BC² el DC²: y extrayendo la raiz quadrada de el residuo sera esta el valor de BD, por cuia mitad multiplicando la vasa tendre el area de el triangulo. Para la construccion reducire a proporcionales los terminos de la ultima ecuacion $x = C^2 - \frac{B^2}{a}$ y seran $a : C+B = C-B : x$.

En la fig 12 $ac :: cg = ce : of$ luego siendo AB, y BG radios sera $gg = CB+BA$. por la misma razon sera $Fe = CB-ab$. tamvien FC sera diffcia entre los segmentos DC, y AB: luego $a : BC+AB = ec : DC-AD$.

Pro 2

Dado el radio de un circulo allar el lado de un triangº regular, que se pueda inscrivir en el un mismo circulo

Fig 12 BA el lado de un exagono, y BD radio supondre AB lado de el trianº, qe se busca perpendicular sobre eD, qe es el radio dado al qual llamare a, BA llamare x: luego $bf = \frac{1}{2}x$: luego por la igualdad de los trianos bfe, y bfD sera $fe = fD = \frac{1}{2}a$: luego BD^2, y $Df^2 = bf^2$, de donde resulta esta resolucion.

$$3a^2 = \frac{1}{4}v^2$$
$$v = \sqrt{3a^2}.$$

Cons

Sobre el diametro $AB = 2a$ formare el equilatero AFB, y bajare al centro la FC, la qual sera el lado de el triangulo, que se busca; puestiendo FCB rectangulo, y $FB = 2a$, $CB = a$ deve ser $FC = \sqrt{4^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = v$.

Pro

De un punto dado fuera de el circulo tirar una tangente.

R

En la fg 43 sea el punto dado e, y $2FG$ el circulo tamviendado, luego eG, y GC seran dadas, llamare $eG = a$, y $GC = b$, $eD = v$; $eF = a + 2b$. por quanto eF mult^o por $eG = eD^2 = a^2 + 2ab = v^2$ sera $v = \sqrt{a^2 + 2aB}$.

Cons.

En la misma fg sobre eC descrivire el semicirculo eDC, el qual D sera recto, luego $Ce^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $CD^2 = b^2$; luego $De = a^2 + 2ab$, $De^2 = \sqrt{a^2 + 2ab}$.

Pro

Allar un trian^o cuios lados, y el perpendiculo guarden proporcion continua geometrica.

R

En la fg 12 sea el triangulo ALO en que tomare arbitrariamente un lado v.g. $AL = a$. sera $OL = v$; luego $AO = v^2$, y $LY = \frac{a^2}{v}$; luego $AY = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{v^2}}$; $YO = \sqrt{v^2 - \frac{a^4}{v^2}}$; luego $AY + YO = AO$ esto es.

$$\sqrt{a^2+\frac{a^4}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}=\frac{x^2}{a}$$

$$\frac{x^2}{a}-\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}=\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}$$

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{2x^2}{a}\cdot\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}+x^2-\frac{a^4}{x^2}=a^2-\frac{a^4}{x^2}$$

$$\frac{x^4}{a^2}+x^2-a^2=\frac{2x^2}{a}\cdot\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}\cdot\cancel{\frac{x^2-a^4}{x^2}}$$

$$\frac{x^8}{a^4}+\frac{2x^6}{a^2}+x^4-2x^4-2a^2+a^4=\frac{4x^6}{a^2}-4a^2x^2$$

$$x^8-a^2x^6-a^4x^4+a^6x^2+a^8=0$$

$$x^4-a^2x^2-a^4=0$$

$$x^4-a^2\cancel{a^2}x^2+\frac{a^4}{4}=a^4+\frac{a^4}{4}$$

$$x^2-\frac{a^2}{2}=\pm\sqrt{\frac{5a^4}{4}}\ \cancel{=0}$$

$$x^2=\frac{a^2\pm\sqrt{5a^4}}{2}\quad x=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{5a^4}}{2}}.$$

Donde se ve, que la incognita x tiene 4 valores los dos imaginarios, que son $\pm\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{5a^4}}{2}}$ y dos reales, que son $\pm\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{5a^4}}{2}}$.

Con.

En la fig. sobre AQ indefinida tomase AL = a; LC = $\sqrt{5a^2}$, y CB = $\frac{1}{2}a$; descrito el semicirculo AFB, y levantada la perpendicular CF sera esta igual $\sqrt{\frac{a^2+a\sqrt{5a^2}}{2}}$. Partiendo pues por medio la AC describirse con el radio AH desde el punto Q el arco HO levantarse de el punto L la LO = CF; tirarse AO, y LY, y sera ALO el trian.° que se deve construir. porque 1.° AL = a: LO = x = $\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{5a^4}}{2}}$; AO = AH = $\frac{x^2}{a}$ = $\frac{a+\sqrt{5a^2}}{2}$: luego AO : LO = LO : LA. 2.° siendo rectangulo ALO sera AO : LO = AL : LY, y tambien LO : LA = LA : LY.

Dado un rectangulo allar un paralelogramo cuios lados sean multiplos de los de el rectangulo en una razon dada, y el area sub multipla. R

Cn el rectang° dado ABDC pr sea $AB=a$; $BC=b$; luego el area $=ab$. sea el paralelogramo que se busca BFHG, cuio lado BF deve ser al AB como $N:e$: luego $BF=\frac{aN}{e}$. sea la razon de BG a BC como $M:e$: luego $BG=\frac{BM}{e}$. La razon de el area BFHG al rectangulo AB sea como $e:R$ llamare $BL=x$, y baxando FL perpendicular a BG sera $FL=\sqrt{\frac{a^2N^2}{e^2}-x^2}$: luego el paralelogramo $BFHG=FL.BG=\frac{BM}{e}.\sqrt{\frac{a^2N^2}{e^2}-x^2}$ el qual deve ser al rectang° ABCD: como $e:R$. De donde nace la sig^te analogia

$$\frac{BM}{e}.\sqrt{\frac{a^2N^2}{e^2}-x^2}:ab=e:R$$

$$\frac{BM}{e^2}\sqrt{\frac{a^2N^2}{e^2}-x^2}=\frac{ab}{R}$$

$$\frac{a^2N^2}{e^2}-x^2=\frac{a^2e^4}{M^2R^2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2N^2}{e^2}-\frac{a^2e^4}{M^2R^2}}.$$

Con.

Cn lado AB de la fig tomo $BY=\frac{ae^2}{MR}$, y $AB=\frac{AN}{e}$, y con el radio YD describire el semicirculo MLP: luego $BL=\sqrt{\frac{a^2N^2}{e^2}-\frac{a^2e^4}{m^2R^2}}=x$, levanto la perpendicular $BF=BY$ y tirando BF, tomare $BG=\frac{BM}{e}$ el parelogramo BHFG sera igual $BG.FL=\frac{aB}{R}$, q^e tiene las circunstancias, que se pide

Prob

Allar un circulo = qual a la superficie de un cilindro, y un cilindro cuia super ficie sea = a un circulo dado.

R

Para la 1a parte supongo la razon de el radio a la periferia como e:N: llamo la periferia de el cilindro N su altura B: luego sera la superficie = NB. llamo el radio de el circulo x, y sera

$$e:N::x:\frac{Nx}{e}$$

$$\frac{Nx^2}{2e} = aN$$

$$Nx^2 = 2eaN$$

$$x^2 = 2ea$$

$$x = \sqrt{2ea}.$$

luego el radio de el circulo igual a la super ficie de el cilindro es medio proporcional y la altura de el cilindro. Para la 2a parte sea el radio de el circulo N la peri feria B, la altura de el cilindro x, y el radio de la basa y, luego su periferia se ra $\frac{By}{N}$ de donde sera

$$\frac{Byx}{N} = \frac{1}{2}BN$$

$$Byx = \frac{1}{2}BN^2$$

$$yx = \frac{1}{2}N^2$$

$$2yx = N^2$$

$$x = \frac{N^2}{2y}$$

En donde se ve, que siendo el problema indeterminado es necesario determi nar arbitrariamente terminar el radio, o altura.

Pro

Dado el diametro de la esfera allar el lado de un retaedro, que se le puede inscrivir.

R

En la fig sea el diametro $AB = a$ el lado de el retaedro, que se busca $AD = x$: luego sera el radio de el circulo en que se ade inscrivir uno de los triangos de el retaedro $= \sqrt{\frac{1}{3}x^2}$ como consta en la solucion de el problema 2º. llamo $ac = y$, y sera $cB = a - y^2$: son pues

$ac : cD = cD : cB$

$y \cdot \sqrt{\frac{1}{3}x^2} = \sqrt{\frac{1}{3}x^2} : a - y$

$ay - y^2 = \frac{1}{3}x^2$

$ay - \frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{3}x^2$

$ay = x^2$

$a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^2} = x^2$

$\frac{2}{3}a^2x^2 = x^4$

$\frac{2}{3}a^2 = x^2$

$\sqrt{\frac{2}{3}a^2} = x.$

$AD^2 = ac^2 + cD^2$

$x^2 = y^2 + \frac{1}{3}x^2$

$\frac{2}{3}x^2 = y^2$

$\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = y.$

Donde se ve, que $x^2 : a^2 = 2 : 3$, esto es que el quadrado de el lado de el retaedro sea al quadrado de el diametro de la esfera en razon subsequialtera; assimismo el lado de el retaedro al diametro de la esfera dice la razon de $\sqrt{2}\ \sqrt{3}$, y por consigte es incommensurable

Problemas de los Tratados mixtos.

Problema 1º

Me determinar la magnitud, y el movimiento de dos cuerpos esfericos, que moviendose en una misma recta se encuentran; y me piden el movimiento con que caminara despues de la reflecsion

Resolucion

Para la solucion de este problema, y de los sig.tes he de suponer la verdad de estos preceptos demonstrado en la mecanica.

Primo: que ai cuerpos elasticos, y son aquellos, que en el centro de otros cuerpos se comprimen, y vuelven luego a recobrar su 1.er estado, o p.q.a, los demas, q.e no tienen esta virtud (si acaso ai algunos) se llaman inertes, o elasticos.

Segundo, q.e la velocidad de un cuerpo se comprime por el espacio, que camina en un tiempo determinado, y que la cantidad es igual al producto de la cantidad de la materia de el cuerpo por su velocidad.

Tercio, y que de el encuentro de dos cuerpos la accion es igual a reaccion: esto es, que cada uno de ellos se experimenta en el otro tanta resistencia, quanta es la fuerza con que lo impele, y assi dichos cuerpos se comunican el movimiento perdiendo tanto el uno, quanto comunica al otro.

§

Quarto: que si dos cuerpos tienen su magnitud, y su velocidad en razon reciproca tendran una misma cantidad de movimiento. Pues si llamo la magnitud de el 1º A la de el 2º B, la velocidad de aquel C, y la de este D seran A:B = D:C luego AC=BD: luego siendo AC producto de la magnitud de el 1º por su velocidad, y BD de el 2º tendran una misma cantidad de movimiento, la qual consiste en el producto de las magnitudes respectivas por sus velocidades.

§

Quinto: dos cuerpos, que caminando con movimiento igual por direcciones diametralmente opuestas se encuentran, obran igualmente uno contra el otro de donde nace, que en el instante de el encuentro, quedan en estado de quietud que llaman equilibrio.

Sexto si dos cuerpos (hablamos de los inertes) se mueven azia una misma

parte con velocidad desigual el mas veloz
encuentra al mas tardo prosiguen ambos
azia la misma parte, y la suma de su mo
vimientos sera igual a la que tenian antes
de el encuentro; pues quanto movimien
to el mas veloz comunica al mas tardo
tanto pierde de el suio.

Septimo: si dos cuerpos desiguales movien
dose sobre una misma direccion el uno
azia el otro llega a encontrarse la can
tidad de su movimiento sera igual a la
diffa de los movimientos, que tienen
antes de el encuentro.

Octavo: si un cuerpo elastico encuentra
directamente a otro igual, que esta quieto;
despues de el encuentro se parara el 1^{er}
cuerpo, y el 2^{o} se movera con la celeri
dad, que antes llevava el 1^{o}. Porque si
dichos cuerpos no fueran elasticos se
moverian ambos en la direccion, que
trai el 1^{o}, y con la mitad de su celeri
dad; luego siendo el elaterio igual a la
virtud comprimente, y obrando se
gun la misma direccion en que se hizo
la compresion el 2^{o} cuerpo repelera al
1^{o} con la mitad de su celeridad, y por
consig^{te} detendra su movimiento: lue
go como por otra parte el 2^{o} impele con
la mitad de la celeridad es necesario, q^{e}
se mueva con toda la celeridad, que an
tes tenia el 1^{o}.

Noveno. Si dos cuerpos elasticos de igual magnitud, y velocidad se encuentraran directamente ambos retrocederan segun la misma direccion, y con la velocidad, que antes traia, porque si no fueran elasticos ambos se pararian: luego toda la fuerza se pierde la compresion: luego siendo la exactitud igual a esta estara, que retrocedan con la misma fuerza, que antes traian.

Supuestos estos principios para la solucion de el problema llamare los cuerpos por A, y B, y las celeridades respectivas a, y b: luego los movimientos seran aA bB. y si los dos caminan azia una misma parte, y A mas velos alcanza a B llamare x al movimiento, que pierde en la persecucion a, y la que adquiere en la misma el cuerpo B: luego despues de la reflexion seran los movimientos $aA-x$, y $Bb+x$; y las velocidades $\frac{aA-x}{A}$; y $\frac{bB+x}{B}$ cuya diff^a es igual $a-b$ diff^a de la velocidades antes de la reflexion de donde podre formar esta proporcion mul^o por B, y $\frac{Bb+x}{B} - \frac{aA-x}{A} = a-b$ para

$$x = \frac{2aaB-2bAB}{a+B}.$$

el qual valor substituyendo por x en $\frac{aa-x}{a}$ y $\frac{Bb+x}{B}$ resultara $\frac{aa-aB+2Ba}{a+B}$. velocidad de el cuerpo a, y $\frac{2aa-ba+bB}{a+B}$

velocidad con que camina B, despues dela reflexion si los cuerpos se encuentran di rectamente mudando el 2º de B seran las velocidades despues dela reflexion $\frac{aA - aB - 2bB}{A+B}$; y $\frac{2aA + Ba}{A+B}$; si sucediesse, que alguna delas celeridades espues se negati va es indicio, que el movimiento despues dela reflexion se hace azia la parte con traria aquella adonde antes camina va el cuerpo. Exemº supongo A, y B cuer pos omogeneos el 1º cuia magnitud $=3$ y la celeridad $=8$ el 2º cuia magnitud igual 2, y la celeridad $=2$ caminando ambos azia un mismo termino substituiendo por a, A, B, b 3, 8, 9, 2 seran $\frac{aA - aB + 2bB}{A+B} = 1$

$\frac{2aA - bA + bB}{A+B} = 5$

Luego A despues dela reflexion retroce dera con un grado de celerida, y B prosegui ra con 5.

Pro

En una mesa de trucos me dan la posici on de una vola, y me dicen, que la tire de manera, que despues de algunas reflec siones contra los lados dela mesa toque a otra vola dada de posicion.

Resolucion

Para esta he de suponer 1º que quando un cuerpo elastico obliquamente tropieza con otro, cuerpo, que no cede de tal mane ra reflecte, que el angulo de reflexion es igual al de incidencia veasse la pg 19 en que el angulo DCA, que la linea de incidencia DC forma el punto de el contacto se llama de incidencia y el de reflecion es ecF, que forman la linea de reflecion ce en el punto de contacto.

Segundo, que el seno de el angulo de incidencia es al seno de el angulo de reflecsion, como la fuerza con que el cuerpo se comprime aquella con que se restituie a su estado.

Tercio, que la percusion perpendicular es a la oblicua, como el seno total al seno de el angulo de incidencia.

Sea puesta mesa de trucos la pg.ª 20 ABCD, y las volas Me, y NL dadas de posicion.

Primo: me piden, que tire la vola Me de manera, que reflectiendo una vez en el lado AB toque la N. supongo Me sea la linea por donde dirijir la vola, y Ne la linea de reflecion vaxo las perpendiculares MO, NP y por quanto me dan la posicion de M, y N tendre tamvien las perpendiculares, y la distancia OP. Llamare MO=a, NP=b, OP=c, y Oe=x. luego Pe=c−x; MeO, NeP, los rectangulos eOM, ePN seran semejantes. De donde resultan

$$a:b=x:c-x$$
$$bx=ac-ax$$
$$ax+bx=ac$$
$$x=ac:(a+b)$$

luego siendo por la ultima ecuacion

$$a+b:a=c^2:x$$

hallare el punto de la reflexion e si alargado M azia Q hasta que $MQ = NP$ tiro Me paralela a PQ.

Segundo: me piden, que tire la vola M de manera, q.e despues de dos reflexiones una sobre AB, y otra sobre BC toque la vola N.

Supongo en la fig.   la linea MB por donde devo dirigir la vola, y eF por donde reflectiendo de AB cae en BC, y eCN por donde reflectiendo de BC toca en N. Tiro las perpendiculares MO, y NP, y llamo $MO = a$, $NP = b$, $BO = c$, $BP = d$, $Oe = x$: luego $Be = c - x$. Los angulos Meo, y FeB iguales; y los triangulos eOM, eBF semejantes: luego e

$$Oe : Be = MO : BF$$

$$x : c-x = a : \frac{ac-ax}{x}$$

Por lo qual $PF = \frac{dx-ac+ax}{x}$. Asimismo los angulos eFB, y NFP son iguales, y los triangulos eBF, y NPF semejantes: luego

$$Be : NP = BF : PF$$

$$c-x : b = \frac{ac-ax}{x} : \frac{dx-ac+ax}{x}$$

Y multiplicando todos por x sera

$$cx-x^2 : bx = ac-ax : dx-ac+ax$$

Y permutando seran

$$cx-x^2 : ac-ax = bx : dx-ac+ax.$$

Pero $cx-x^2 : ac-ax = x : a$; luego por igualdad

$$x : a = bx : dx-ac+ax$$

$$abx = dx^2 - acx + ax^2$$

$$ab+ac = dx+ax$$

$$ab+ac : (a+d) = x$$

De la ultima ecuacion resulta esta analogia

$$a+b : d+c = a : x$$

De donde se infiere, que hallare el 1.er punto de reflexion E, si alargadas OM, y OB azia Q, y R hasta, que MQ = BP, y BR = NP tire me paralela a QR. 74

Pro

Por el sonido de una piedra, que tirada desde el brocal de un pozo hiere el fondo determinar la altura de el pozo.

Re

Para la solucion de este problema, y otros, he de suponer, o devo.

1.º que qualquier cuerpo cayendo de alto, o vaso recive en cada instante un aumento de ligereza, que se llama aceleracion, y por el contrario arrojado desde a vaso azia arriva pierde en cada instante una parte de su ligereza.

Segundo: que este aumento de ligereza es igual en igual tiempo de manera, que el cuerpo, que cae en el 2.º instante adquiere ligereza doble de la de el 1.º, en el tercero triple ~~&c~~

Tercero: los espacios, que corre el cuerpo, que cae son entre si, como los quadrados de los tiempos; de suerte, que si el cuerpo A v.g. corre dos espacios, el uno en tiempo, que exprimo con la linea AB, y el otro en tiempo, que exprimo con la AC seran estos espacios, como los quadrados de dichos.

Quarto: siendo los tiempos entre si como las velocidades, que el cuerpo adquiere al fin de ellos, parece cierto, que los espacios, que el cuerpo corre en los tiempos seran entre si, como los quadrados de las ligerezas adquiridas al fin de cada tiempo. Por lo qual si llamo e el 1er espacio T el tiempo, L la ligereza adquirida al fin de el, y el 2º espacio e, el tiempo t, la ligereza l sera

$$E : e = T^2 : t^2, \text{ o } E : e = L^2 : l^2$$

Assimismo estraiendo la raiz quadrada sera $\sqrt{E} : \sqrt{e} = L : l$

luego las ligerezas se pueden expresar por las raices de los espacios.

Quinto: el espacio, que camina el cuerpo en un tiempo desde, que empieza a caer es la mitad, de el que el mismo corre con movimiento igual en igual tiempo, si tuviera la ligereza que adquiere en el ultimo instante de su caida.

Sexto: la fuerza con que un cuerpo camina perpendicularmente azia arriva, se diminuye igualmente. Los espacios caminados por el cuerpo seran los mismos, aunque en sentido contrario, qe quando cae azia vaxo

Para la solucion de el problema sea la altura de el pozo igual x, el espacio por donde cae la piedra con movimiento uniforme acelerado $= a$, el tiempo $= b$, el espacio, por donde con movimiento uniforme vie ne el sonido = a, el tiempo = d: luego la piedra vajara por el espacio x en el tiempo b. $\sqrt{\frac{x}{a}}$, y el sonido suvira por el mismo espacio en el tiempo $\frac{D x}{a}$ pues los espacios se ran con los quadrados de los tiempos, o como las raices de los espacios, assi los tiempos; y como los espacios, que camina el sonido assi los tiempos de el transito: luego el tiempo desde que se arrojo la piedra asta que llega el sonido = b. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{D x}{a}$. este tiempo, que puede conocerse por observacion llamo t, y sera

$$b.\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{dx}{a}=t$$

$$b.\sqrt{\frac{x}{a}}=t^2-\frac{2t\,dx}{a}+\frac{d^2x^2}{a^2}$$

$$x^2=\frac{2adt+ab^2}{a^2}.\ x-\frac{a^2t^2}{d^2}$$

$$x=\frac{adt+\frac{1}{2}ab^2}{D^2}-\frac{ab}{2d^2}.\sqrt{b^2+4dt}$$

Problema

Determinar la linea de proieccion por donde se ha de tirar una vola v.g. con una velocidad dada, para que caiendo toque en un punto dado.

Resolucion.

He de suponer 1º, que todo cuerpo arrojado con qualquiera direccion, que no sea perpendicular al orizonte camina con un movimiento compuesto de el que le da el impulso, y de el de la pesadez por una linea, que llama parabola vease la fig   en que el cuerpo a con la direccion aB camina con movimiento uniforme, y proporcional a los tiempos recividos de el impulso, la recta AB, y por la fuerza accelleratriz, que lo impele hazia el centro dela tierra los espacios 1.1, 2.2, 3.2, los quales se an en razon du plicada delos tiempos, o delas recta A^1, A^2: lue go el cuerpo con este movimiento compuesto descrive la curva A^1 2 2 segun la estension de esta curva depende dela fuerza, o impul so, que se da al cuerpo, y esta se puede medir por la altura de donde cae; pues adquiriendo en cada instante de el descenso un nuevo gra do de ligereza, y pudiendo se suponer las al turas tan grandes, como se quiera no avra ligereza, que al cuerpo no se le pueda aplicar, y cuia eficacia no se pueda expresar por la dif cia delas alturas.

Sea pues la fig en que A es el globo, que devo arrojar con la velocidad expresada por la altura AB, y que ha de tocar en el punto M. Supongo, que la linea de proieccion sea AC, AEM la curva descrita para llegar a M, y AD = AB, para que en el mismo tiempo camine el cuerpo la AD, que la AB, en ygual tiempo ca minara con el movimiento, que le da el im pulso el lado AC de el paralelomo ADEC para llegar a E con el movimiento compuesto. De donde BA es = $\frac{1}{2}$ AC, o DE, pues el espacio, que camina el cuerpo desde que empieza a caer es la mitad de lo que caminaria en igual tiem po con la velocidad adquirida en ultimo ins tante de su caida. Assimismo en el tiempo, en que descriviria por la fuerza acceleratriz

la AN describiria por el impulso la ao, lue-
go siendo los espacios ac, AO descritos con la
misma velocidad, como los tiempos, y los AD
AN descritos por la fuerza acceleratriz, como
los quadrados de los tiempos seran proporcio-
nales $AD : AN = AC^2$ o $De^2 :: NM^2$

Pues llamo AB, o $AD = a$, $ZA = b$, $MZ = c$, $AN = x$ lue-
go $AC = 2ANZ = x - b$, $nM^2 = x^2 - 2bx + b^2 + c^2$

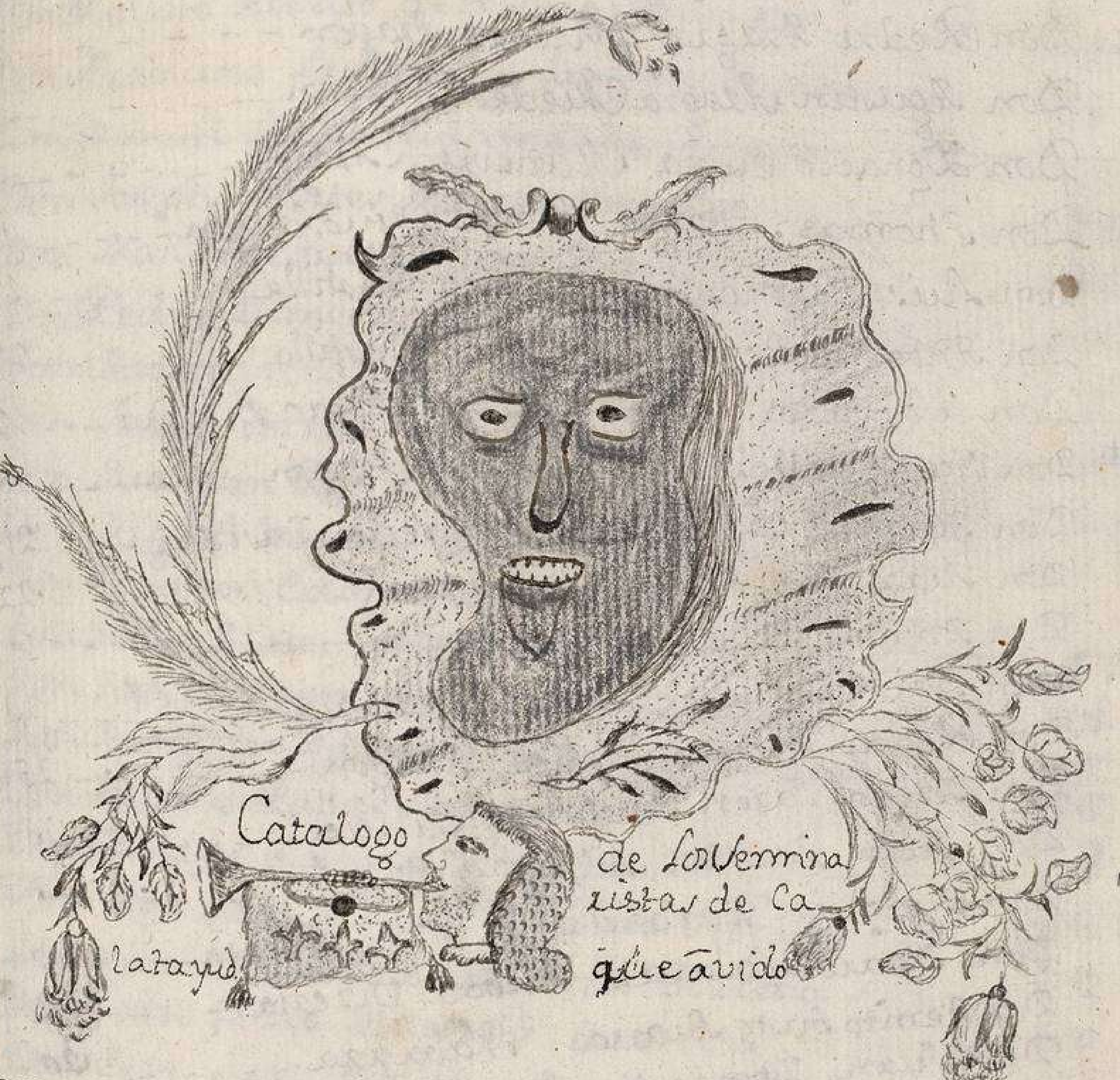
$$AD : AN = De^2 : nM^2$$
$$a : x = 4a^2 : x^2 - 2bx + b^2 + c^2$$
$$ax^2 - 2abx + ab^2 + ac^2 = 4a^2x$$
$$x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$$

y transponiendo, y completando

$$x^2 - 2bx + b^2 - 4ax + 4ab + 4a^2 = 4a^2 + 4ab - c^2$$
$$x - b - 2a = \sqrt{4a^2 + 4ab - c^2}$$
$$x = b + 2a \pm \sqrt{4a^2 + 4ab - c^2}$$
$$\cancel{x =}$$

Si $c^2 = 4a^2 + 4ab$ sera siempre $x = b + 2a$: lue-
go las dos soluciones se reduzen a una. Si c^2
maior $4a^2 + ab$ sera $\sqrt{4a^2 + 4ab - c^2}$ imagina-
ria: luego el problema es posible quando c^2
no es maior, que $4a^2 + 4ab$ esto es, que MZ^2
no sea maior, que el quadruplo de el rectangu-
lo ABZ.

Laus Deo.



Don Vicente Castegon, Agreda -- Castilla ----- 1
Don Antonio Xavier Castejon, Agreda, Castilla ------ 2 F
Don Mariano Lovera Munevrega, Aragon ----- 3 97
Don Valentin Castejon Agreda --- Castilla ---- 4
Don Antonio Castejon Agreda --- Castilla ---- 5
Don Juan Saenz Madrid --- Castilla --- 6
Don Antonio Marin Aldea nueva Castilla ---- 7
Don Diego Ugarte Calorra ---- Castilla --- 8
Don Antonio Heredia Borja --- Aragon --- 9
Don Antonio Martinez Almazan, castilla ---- 10
Don Antonio Terri Madrid Castilla ---- 11

Don Juaquin Galdeano de Peralta - Nabarra ------ 12

C Don Pedro Aragra Miedes, Aragon ---------- 13

Don Agustin Aragra Miedes Aragon ---------- 14

2P Don Ygnacio Cuver Munevrega Aragon ---------- 15

SV Don Thomas Avensio Calatayud Aragon ---------- 16

Don Luis Hermosilla Madrid Castilla ---------- 17

Don Antonio Cortes Molina Castilla ---------- 18

Don Salvador Aldaiturriaga Bilbao Bizcaya ---- 19

Ct Don Vicente de Vera Calatayud Aragon ---------- 20

Don Manuel Bidaurreta Agreda Castilla ---- 21

Don Juan Ara Albalate Aragon ---------- 22

Don Antonio Acha Mores Aragon ---------- 23

Don Juan Olai Siguenza Castilla ---------- 24

Don Pedro Arbues Epila Aragon ---------- 25

Don Joseph Jaren Aivadeo Galicia ---------- 26

Don Juan Zurviar Bilbao Vizcaia ---------- 27

Don Juaquin Barbachano Bilbao Vizcaia ---- 28

Don Ylario Salazar Bilbao Vizcaia ---------- 29

Don Benito Bueto Biana Nabarra ---------- 30

Don Juan Zenarve Zaragoza Aragon ---- 31

Don Joseph Toldi Zaragoza Aragon ---------- 32

Don Juaquin Toldi Zaragoza Aragon ---------- 33

Ct Don Francisco Sales Sorria Granada con ---- 34

Don Manuel Castejon Logroño Castilla ---- 35

C Don Pedro Medrano ~~Logroño~~ Calahorra Castilla - 36

Don Juaquin Breton Alfaro Castilla ---------- 37

Don Calisto Gualite Calahorra Castilla ---------- 38

\+ Don Francisco Gualite Carriada Calahorra - 39

Don Francisco Barra Remolinos Aragon - 40

Don Antonio Gil de Bernave Vagena Aon - 41

Don Juaquin La porta Zaragoza Aragon - - - - - 41 77
Don Fausto Acedo de Funes Navarra - - - - -
Don Francisco La Madrid de Toledo Castilla - - - 42 [c]
Don Manuel La Madrid de Toledo Castilla - - - - 43
Don Joseph Cortes Molina Castilla - - - - 44
Don Manuel Cortes Molina Castilla - - - - - 45
Don Pedro Ximenez de Texada Funes Navarra - - - 46
+Don Pedro Ximenez de Tejada Funes Navarra - - - 47
Don Sevastian Daudem Ylesuela Aragon - - - - 48
Don Joseph Barbachano Bilbao Bizcaia - - - - - 49
Don Juaquin Peñaredonda Zaragoza Aragon - - - 50
Don Miguel Ortavia Armuina Aragon - - - - - - 51
Don Juaquin Colon de Barcelona Cataluña - - - - 52
Don Pedro Alava de Vitoria de la Provincia de Alava 53 [ct]
Don Joseph Alava de Vitoria de Alava - - - - - 54
Don Juaquin Navarro Estella Navarra - - - - 55 [c]
Don Antonio Pallas Valencia - - - - - - - - - 56
Don Phelipe Lazaro Ojos negros Aragon - - - - - 57
Don Ignacio Maria Corral Azcoitia Vizcaia - - - - 58 [go]
Don Carlos Corral Azcoitia Vizcaia - - - - - 59
Don Pedro Muro Madrid Castilla - - - - - - 60
Don Pepe Luiz Miñano Corella Navarra - - - - 61
Don Joseph Ramon Aguirre Bilbao Vizcaia - - - 62
Don Manuel Aguirre Bilbao Vizcaia - - - - - 63
Don Ignacio Maria San Martin Pamplona Navarra 64
Don Miguel Otamendi Madrid Castilla - - - - - 65
Don Juan Joseph Sada Vadajoz Valencia - - - - 66
Don Thomas Arriola Vitoria Alaba - - - - - - 67
Don Joseph Arriola Vitoria Alaba - - - - - - 68
Don Juaquin Arriola Vitoria Alava - - - - - 69
Don Miguel Carrillo de Soria Castilla - - - - 70
Don Gregorio Carrillo Soria Castilla - - - - 71
Don Melchor Aguilar Borja Castilla - - - - - 72

Don Francisco Ramiro de Calatayud Aragon --- 73
Don Nicolas Piñateli Zaragoza Aragon 74
Don Jaime Doz Zaragoza Aragon 75
Don Alexandro Olavarrieta Bilbao Bizcaia 76
Don Antonio Samaniego la Guardia Castilla -- 77
Don Bentura Lazaro Borja Castilla --------- 78
Don Antonio Latorre Caspe Aragon ---------- 79
Don Hemeterio Hurtado Orduña Bizcaia ----- 80
Don Juan de Dios Perez Agreda Castilla ----- 81
Don Francisco Davila Cadiz Andaluzia ------ 82
Don Joseph Ygomez Olves Aragon ---------- 83
Don Miguel Franco la Almunia Aragon ------ 84
Don Nicolas la Mata Logroño Castilla ------ 85
Don Francisco Montenegro Milmarcos Castilla - 86
Don Antonio Francia Uxdones Castilla ------ 87
Don Juan Ravago Tresaguarda Castilla ----- 88
Don Manuel Parada Guete La Mancha ------ 89
Don Domingo Zantana Salinas Bizcaia -- 90
Don Juan Gardochi Bilbao Bizcaia ------ 91
Don Manuel Ormaza Bilbao Bizcaia ------- 92
Don Martin Arexti Plasencia Bizcaia ------- 93
x Don Geronimo Arias Molina Castilla ------- 94
Don Pedro Gonzales ~~Autol~~ Castilla -------- 95
+ Don Juan Antonio Urra Viana Navarra --- 96
Don Antonio Contreras Sn Pedro Manrique Castilla 97
Don Rafael Garces Molina Castilla ------ 98
Don Joseph Rementeria Bilbao Bizcaia ------ 99
Don Zacarias Lumbreras Madrid Castilla --- 100
Don Manuel Nuñez ~~Da~~ Palencia Leon ------ 101
Don Seberino Perez ~~Autol~~ Castilla ------ 102
Don Juan Lozano Ybides Aragon ------ 103

Don Antonio Olarte Vitoria Alava - - - - - - - - 104 79
Don Joaquin de Rojas Madrid Castilla - - - - - - - - 105
Don Pedro de Rojas Madrid Castilla - - - - - - - - 106
Don Pedro Franco Armunia Aragon - - - - - - - - 107
Don Francisco de Paula Morras Cascante Navarra - - - - 108
Don Pedro La Mata Madrid Castilla - - - - - - - - 109
Don Juan Thomas Uriarte Vitoria Alava - - - - - - - - 110
Don Francisco Matheo Monrreal Aragon - - - - - - - 111
Don Ramon Matheo Monrreal Aragon - - - - - - - - 112
Don Xavier Ovejas Agea Castilla - - - - - - - - - 113
Don Ignacio Argaiz Peralta Navarra - - - - - - - - 114
Don Joaquin Argaiz Peralta la raveznia Navarra - - 115
Don Miguel Ric Fonz Aragon - - - - - - - - - - 116
Don Vevastian Garaita Galdacano Bizcaia - - - - - - 117
Don Juan Meave La raveznia Bizcaia - - - - - - - - 118
Don Diego Vinoes Un Castillo Aragon - - - - - - - 119
Don Gonzalo Liñan Ojos negros Aragon - - - - - - - 120
Don Juan Manuel Galindo Villoslava Castilla - - 121
Don Noverto Maria Raiza Velasco Madrid Castilla 122
Don Cosme Antillon Arnedo Castilla - - 123
Don Miguel Zuaznabar Hernani Vizcaia - - 124
Don Miguel Dufresne - - - - 125
Don Pedro Franco La Almunia Aragon - - - - 126.
Don Xavier Urdinola Vizcaia - - - - 127.
Don Manuel Argiia Zaragoza Aragon - - - - 128
Don Francisco Castelor Estella Navarra - - - 129.
Dn. Pedro Agoaveza Teruel Aragon - - - - - 130
Dn. Lorenzo Vitoria Alava - - - - - - - 131
Dn. Joaquin Vitoria Alava - - - - - - 132
Dn. Geronimo Pantoja Leon Leon - - - - 133
Dn. Carlos Pantoja Leon Leon - - - - - 134

Dn Juan Franco de Oruguela 134
Dn Joseph Franco de Oruguela 135
Dn Antonio Pinillos de Madrid 136
Dn Luis la Casas de San Sebastian 137
Dn Julian Retomoza, Cartagena 138
Dn Manuel Francisco de Otamendi 139
Dn su hermano 140
Dn Antonio Cascajares de Zaragoza 141
Dn Mariano Cascajares de granada 142
Dn Mariano Amador Almazan 143
Dn Jacinto de Antillon de tudela 144
Dn Francisco Xavier de Cazat de Pamplona 145
Dn Joaquin Urgueta de Villa Franca 146
Dn Francisco Urgueta de Villa Franca 147
Dn Juan Manuel Gavadilla Villafranca 148
Dn Enrique Arenas Villafranca 149
pesan los catorce botones - 11 £ 2 £
25 de 7bre de 66 pesa el cor-
donsillo y cristo de oro - - 60 £ 18 £ 4
pesa la sinta y Clavero de 11 £ 16 £
plata - - - - -
pesan los singuenta y dos
botones de oro - - - 34 £ 10 £ 10
pesa la senta y clavero de
plata - - - - - 6 £ 8 £ 2
dia 17 de abril de 67.

†

el Maestro de Lengua Inglesa vino, uempo eldia 12 de
Abril de 68.

El Drapon entro eldia 17 de Febrero de 68 y lleva hechos
2 pares al Co, y dos pares al S, por cons.te ha hecho solo
asta el dia de oi ~~que~~ 17 de Abril de 68 quatro pares

Miguel Martorell empezó á servir el día 22 de septiembre, pague por el por un vestido once pesos menos 16 dobleros por echura de vestido &c.ª tres libras, y 16 sueldos. mas nueve pesetas en dinero. [La soldada es a razon de ~~dos~~ peseta y pague mas una peseta para tabaco en la estremera; mas ~~...~~ onze pesos en dinero, pague diez pesetas por un puño de espada, mas diez y seis pesetas por una baina, o/a, y plata de la espada

Pagado Miguel Martorell asta 22 de Diciembre de 1765 desde febrero ha recevido un peso para cavaus cada mes, ha recevido diez pesos tambien, diez y seis pesetas, y media ha recevido tambien, cinco de una boda, un duro para su muger quando pario, y otro duro antes todo lo dicho lo ha recevido, mas ha recevido quatro pesetas, mas dos pesetas para otra boda, para zapatos &c.ª cinco pesetas primero de Junio, ~~mas tres peseta~~ 22 de Junio para pagar a P. ~~...~~ Miguel, mas una peseta para su tia, mas quatro pesetas para una chupa,

† el dia diez y siete de Julio de 67 entregue tres doblones no para entregar a la Burba Miguel de mi parte. estos tres doblones no entran en la cuenta de Miguel. †

tiene recevido Miguel quatro peseta para una merienda con el criado del conde de Ripalda, mas tiene recevido quatro libras Mallorquinas para pagar un Jueta, mas tres pesetas por un par de zapatos hechos por el zapatero de Brabante, mas peseta, y media el dia 5 de Febrero de 68, mas una peseta los dia de navidad para cosas suyas, mas siete pesetas por unos calzones azules de velludo de color, otras tres peseta por un de zapatos del de Brabante ~~mas tres pesetas~~, para

Año 65 — 1 — 81

Dia 6 de Septiembre por un recivo de sillas 46 a. pague ~~38~~ 37 — quedaron 15 ps. por un recivo de Casaus pagado 5 doblones = 25 ps. La sillas mayores a razon de 2 pesetas, las menores a razon de dos pesetas menos un sueldo catalan, y al sastre 27 pesetas; pague veinte liuras Mallorquinas por el alquiler de la casa de Rosellon. He empezado a pagar a Casaus un doblon en octubre de 65. Pague en Noviembre al Zapatero treinta y 3 pesetas, y en Dec.e me hizo un par de zapatos ~~regu~~ regulares, mas me ha hecho unos de agua y otros regulares, mas 3 doblones para un recivo del platero

Dia 8 de Julio, esto es dia 7 de Julio de 66 le pernos a Don Ramon sep.e 65

Hechuras de Caracas siete pesetas, de chupa dos pesetas de calsones peseta y media. pelo para los ojales seis sueldos, entre forro 6 ℔,

tela fuerte y ojales para chupa 6 ℔

En el mes de Junio de 64 se empezo a pagar al sastre.

+

Dia 5 de ~~Deciembre me debe~~ Jop.e cinco ~~medios. y Monteviete~~
~~medios~~, mas diez medios duros Jos.e, ~~Monteviete dia 7 de Dec.e~~
3 dobl. de oro mas ~~doze pesetas~~

el dia 20 de Junio se compraron diez quarteras de cebada
a razon de 32 rreales la quartera, y se ha dado y pagado en
~~dar en palma~~ por dos mulas.

Un Galon de oro fino 23 libras Catalanas de a 16 sueldos
12 sueldos ~~catalanes~~, y 6 dineros, de echo cerca de 4 pe
setas
La pasaje que se trajo fueron catorce cavecons de son
~~[illegible]~~ Dameto de son Dameto venticinco chavetas
y de son fuster veinte chavetas

Pagina 4 del libro, t del Padre Silas

83

Antonio, Sosas entro a servirme el dia primero de Junio de 1766 su soldada son cinco pesetas. Recivio en dos meses diez pesetas, + seis pesetas, y medias recividas; + y quatro peseta recividas; mas tres pesetas ultimamente recividas para zapatos, mas tres + pesetas recivida dia 5 de Octubre para zapatos, mas dos pares de zapatos, que le hizo el zapatero de Bravante + tos qe importan seis pesetas, + mas un par de zapatos, + qe le ha hecho el zapatero Dragon importa 3 pesetas, + mas 3 pesetas para unas medias, todo lo dicho lo lleva recivido +

como tambien ha recivido un par de zapatos hecho por el Dragon, que son tres pesetas, +++ mas unos zapatos pr no q(ue)rer q(ue) s(e) puso ++

mas ha recivido una peseta

(tiene recivido hasta 8 d 1/2 p 1/2 se le deben 16 duros hasta 1o de Junio)

+ recivio una peseta en tonRamos +

+ mas tres pesetas por unos zapatos +

+ Recivio doce pesos por la licencia + mas dos pesetas tambien por una lacacio + mas dos pares de zapatos, que son seis pesetas, + mas un par de zapatos de Castor, mas una peseta para tabaco. + el dia 24 de Mayo de 62 le entregue quatro pesetas para unas medias +

+ Dia 29 de Diciembre de 62 entregue tres pesetas a Antonio +

Xribalucos 41 — 26
Montepio 11 — 6 17
m paga 76 — 33

Desde 2 de Sep.e empezo a p.r salina

Migl. Colom del lugar de
Binexax tiene arendada la
poya por - 4£15£

Cuenta dela Plaza desde Mayo asta Setiembre de 67

Importan los foros	120 £		
El tercio de 80 horas q.e no corr.e al S.r Rey	26 £	12 s. +	8 d.s
Idem delos Cordeleros	8 £	6 s.	8
Idem de la carnara	6 £	12 s.	8 d.s
Idem delos esparteros	1 £	2 s.	8 d.s
~~Maret~~ ~~Idem delos tres huertos~~	~~3 £~~	~~13~~	4
Importa todo	12 £	14 s.	8 d.s
Importa lo que se me debe de foros	26 £	12 s.	8 d.s
De los Cordeleros	4 £	8 s.	6 d.s
	31 £		15 d.s

Cuenta de lo q.e corresponde al S.r Rey por lo tocante a los foros habiendo salido de esta Villa a ultimos de Marzo y llegado a ultimos de Mayo de 68 por quanto es un año de ausencia no le toca nada.

Pronque la cuenta de Miguel Martorell, compra un
poro de vellut, mas cinco pesetas para llevar à su Casa, debo
a Miguel Martorell once pesos, y una peseta, y quedaro pagados has
ta 22 de Febrero de 68. ha recivido a cuenta de lo dicho cinco
pesos, y cinco pesetas, mas ha recivido cinco pesetas, mas quatro
pesetas para su enfermedad y estas no entran en cuenta mas ha re
cuirdo cinco pesetas, mas ha recivido dos pesetas para la boda de
Pau, mas ha recivido cinco pesetas dia 2 de Mayo de 68, mas
ha recivido quatro pesetas, y media para las aguas, mas ha
recivido quatro pesetas el dia 28 de Junio de 68 mas ha recivido siete
sueldos para tabaco + en tres 3 pesetas que ha recivido
el dia diez y nueve de Agosto de 68 entregue a Antonio diez
pesetas para entregar a Miguel a cuenta de su salario
mas entregue a Antonio para entregar a Miguel otra vez diez pe
setas, mas al Cabo de Lombardia para entregar a Miguel doce pese
tas, medio doblon, que yo le di en su Casa, quatro pesetas
por el Cabo de Lombardia, 6 pesetas por el Cabo de Lombar
dia

El dia 3 de set.e se embiaron 14 vizcochos

El dia 20 de set.e se pagaron ocho pesetas para la enferme
dad para Miguel desde el dia 24 de Agosto

Se pago dia 27 de Dbre. lo siguiente 4
Un Doblon al Chueta.
Doblon y medio a Casaus.
Un Doblon al secretario del obispo
medio Doblon a Chudon el de Sontu
Otro medio Doblon al sastre
Mas se hañade que pocos dias antes lleve yo mismo
a Mig.l Manconell diez pesos por fin de todas cuen
tas
Al secretario del obispo tiene recibido 20 l.s
el sast.e ~~tres~~ pesos, ~~y medio~~
El ~~sastre~~ ~~tres~~ Doblon y medio
En hen. de 63 a Santiandreu un Doblon
en Oro
Ytt en 2 de Febrero se llevo a Santi
andreu un doblon en oro
A Casaos doblon, y medio en oro
Al Chueta un doblon en oro dia 24 de h.o
de 63.
Ytt el dia 24 de hen.o medio doblon en oro
Ytt a Chudon otro medio

enel tiempo, que tenia latercianas Miguel Marcorell llego
undoblon enoro al secretario delobispo.

se turbo poco mas o menos que fue en Enº esta vez ultima
llevo el ordenanza la cama, vez un doblon en oro al secre
tario del Obispo lo llevo el solo, al que escrivia quando el
ordenanza selo entrego, y despues se puso otra vez a escrivir
otra vez entrego el ordenanza de Lombardia otro doblon en
oro al secº del obispo, y selo entrego en presencia de lo[r] de
ro, esta vez salio el secº a la puerta, y alli lo recivio en
presencia del ordero

otra vez selo entrego el ordenanza solo un doblon en oro al
secretario del obispo, y esta vez le encargo que me dijera q. e
me diera muchos recados, que siempre estaba para servir
me

otra vez se lo entrego el ordenanza solo, y se acuerda le
pregunto si era el secretario del Obispo, y dijo, que si
y le entrego el doblon en oro

Llave de typle en cesolfaut primera raia es dos puntos mas baso que
el biolin
Llave de tenor quarta raia es un punto mas baso
Llave de baso es cinco puntos mas baso que la de biolin

A + B + C = D + E

cadadia separata cinco doblenos de carne 2 doblenos un pollastre para tres dias, y quatro doblenos de vizcocho.

~~[illegible]~~

Cuenta del Coche Salvado cada dia dos almudes, y medio ciuco doblenos, doze doblenos de algarrobas una arroba, y media, alfalfa tres doblenos, un sueldo de paja, zebada nueve doblenos 12 doblenos Cochero.

Importa el Coche Cada dia - - - - L 7 ß 2

y Cada mes - - - - - - - - - - - - - 11 L . ß

Dia 27 de Marzo - - -

llevo el cochero Migl. en Casa Casas 1 doblon, y medio

en Casa del Chueta - - - - - - - - medio doblon

Entregue nueve libras ala Fornera Pisana el dia 22 de Setiembre de 1770

Dia 30 de Setiembre de 1770 di a Antoni, y a Miguel Coche 7 pesos y medio para llevar a Casaus

95

Modo como deve despacharse la Parada. Y med.te que se de la voz de marchen todas. las quar.s marcharan 6 pasos al frente, y concluidos por mitad de cada Guard.a daran un quar.o de combersion sobre la Dra. La Guard.a del Princ.l Abanzada, y S.n Cath.a y sobre la Izda. La divicion de Jesus, S.n Ant.o y S.n Xtobal.

Senececntar a 2. 36 q^a

20 0^a

16 7^a

75 3

30

60

75

estees

Un soldado dela batalla de roncesballes

Gordo, y pequeño natural de

Peguen tiene 20 dos mil y

años, estuvo en las gue

rras de cimmania, y

el es fuerte animal. murio

en la batalla de San Quin

tin que lo mato un Rocin

Lo demas se queda en la Bleoteca para

el curioso letor.