A mi muy distinguido amigo
é ilustrado compañero Sr. Dn
Rodrigo Sanjurjo, Director y Cate-
drático del Instituto provl. de
Sevilla. Su affmo

Dimillo

ELEMENTOS
DE
MATEMÁTICAS

POR

D. MANUEL BURILLO DE SANTIAGO,

CATEDRÁTICO NUMERARIO

por oposicion de esta asignatura en el Instituto provincial de Córdoba; encargado en el mismo varios cursos de la de Topografía y Agrimensura;
Profesor que ha sido de cálculos mercantiles en el Instituto de San Isidro de Madrid;
Ex-Director y Catedrático de Matemáticas en el de Baeza;
Profesor que fué de esta asignatura y de la de Historia natural, cinco cursos, en el Colegio Politécnico de San Rafael de esta Capital;
Antiguo alumno de la facultad de ciencias de la Universidad Central, en la cual ha probado y cursado los estudios correspondientes á los periodos del Bachillerato, Licenciatura y Doctorado;
Perito agrónomo, agrimensor é individuo de varias sociedades.

TOMO I.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

CORDOBA.—1879.

IMPRENTA, LIBRERIA Y LITOGRAFIA DEL DIARIO,

San Fernando 34 y Letrados 18.

PRÓLOGO.

Una obra elemental de Matemáticas ofrece muy sérias dificultades, si al terminarla ha de llenar cumplidamente el objeto propuesto por su autor al escribirla; es preciso que al propio tiempo que desenvuelva gradualmente el entendimiento de la tierna juventud, le dé fuerza y vigor, encaminándole rectamente á la investigacion de la verdad; es preciso además que vaya acompañada de esa totalidad de conocimientos utilísimos é imprescindibles al ejercicio de todas las profesiones científicas é industriales; es preciso, en fin, que se procure neutralizar su marcada aridez con ese conjunto de ejemplos, aplicaciones y ejercicios prácticos mas frecuentes á los usos de la vida.

Para vencer la primera dificultad, es necesario mucho método, y ninguna otra ciencia lo exige en tan alto grado como una obra elemental de Matemáticas, razon por la cual, manifestaremos en este punto nuestro natural recelo, pues apesar de haberlo tenido muy en cuenta, desconfiamos de habernos sujetado al mismo, cual fué nuestro afan constante.

Para vencer las demás dificultades, hemos procurado en todo el decurso de la obra intercalar los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que nos han parecido convenientes, como complemento á las teorías expuestas.

Para esta obra, fruto de largas vigilias y de meditaciones profundas, hemos tomado de las demás aquello que siendo general á la ciencia no es de pertenencia particular, pero ni aun corriendo el riesgo de que resulte nuestra obra inferior á otras, hemos querido engalanarnos con lo que á otros esclusivamente pertenezca; pocas innovaciones caben, sin embargo, en una obra de esta índole, tanto menos, si como esta se concreta á la exposicion de las verdades fundamentales, aunque en la redaccion y demostraciones pueda haber mas ó menos claridad. Segun lo que la esperiencia y práctica en la enseñanza nos ha aconsejado, hemos procurado ampliar ó reducir cada teoría, procurando espresar en cada una el conjunto de verdades que mas fácilmente se acomoda á la inteligencia de los jóvenes alumnos: el órden que hemos seguido está subordinado en un todo al rigorismo de la ciencia, que marca á cada teoría el preciso lugar de un estudio; en el razonamiento hemos procurado la mayor claridad y concision posibles; en las demostraciones hemos elegido aquellas que mas breve y fácilmente llevan la conviccion al ánimo de los oyentes.

Hubiéramos quizás podido dar mayor amplitud á nuestra obra, pero hemos desistido de hacerlo en atencion ya á la edad de los jóvenes alumnos que generalmente cursan esta asignatura en los Institutos, Seminarios y Escuelas normales, para quienes se dedica, ya por el escasísimo número de lecciones en que se cursan estas materias, y ya en fin porque creemos que aun los mas ámplios programas de Institutos, no comprenderán quizás mayor número de Teorías; pareciéndonos al propio tiempo que estudiada esta asignatura con arreglo á esta obra, se hallarán los alumnos en buena disposicion al mas ámplio y ya completo estudio de esta ciencia.

Atendiendo á la dificultad de reunir una obra elemental de Matemáticas, tan múltiples circunstancias, algunas de las cuales dejamos expuestas, justificado es hoy nuestro temor al someterla al claro é imparcial juicio de nuestros ilustrados compañeros; nos hemos decidido, sin embargo, á publicarla por acomodar mas bien nuestras esplicaciones en cátedra con la obra elegida de texto, evitando así anotaciones equivocadas; y por tanto con el propósito de vulgarizar la ciencia en nuestra esfera de accion, tanto como nos sea posible. Si con ella, en efecto, se consigue nuestro objeto, y es á la vez mirada con benevolencia por mis dignos comprofesores, cuyas observaciones admitiré gustoso, será grande mi gratitud y mis aspiraciones quedarán satisfechas.

PRELIMINARES DE LÓGICA

NECESARIOS AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS.

LÓGICA es la ciencia que expone las leyes de la inteligencia y las reglas que han de dirijirla en la investigacion de la verdad.

VERDAD, es la aspiracion natural y constante de la inteligencia.

INTELIGENCIA, es la facultad de conocer.

CONOCER, es tener conciencia de una relacion entre dos objetos; es juzgar.

JUICIO, es el acto por el cual referimos unas á otras las ideas ya formadas.

IDEA, es la nocion directa de alguna cosa, adquirida por simple percepcion.

PROPOSICION, es la enunciacion oral de un juicio.

RACIOCINIO, es el acto por el cual establecemos relacion entre varios juicios; el raciocinio puede ser *inductivo* ó *deductivo*: el primero va de lo particular á lo general; el segundo de lo general á lo particular.

ARGUMENTACION, es la enunciacion oral de un raciocinio; cuando la argumentacion consta de tres proposiciones, verificándose que de las dos primeras llamadas *premisas*, se deduce la tercera llamada *conclusion*, entónces esta argumentacion, se llama *silogismo*.

Ciencia, es una ordenada série de verdades dependientes unas de otras y sujetas á varios principios reconocidos ya como evidentes.

Teoría, es el conjunto de verdades relativas á un mismo objeto y relacionadas todas entre sí.

Método, es la marcha que sigue el espíritu humano en en la investigacion de una verdad, ó estando ya adquirida el que emplea para demostrarla. El método puede ser *analítico* ó *sintético*: el primero procede siempre de lo compuesto á lo simple, es decir, de lo particular y determinado á lo general é indeterminado; el segundo procede de lo simple á lo compuesto, es decir, de lo general é indeterminado á lo particular y determinado; este es generalmente el método de enseñanza, sin embargo de aplicarse frecuentemente el método *científico* que participa de los dos anteriores, eligiendo de entrambos aquello mediante lo cual nos elevamos mas pronto al conocimiento de la verdad.

Demostrar, es hacer ver la verdad de una proposicion fundada en principios evidentes, relacionando las ideas y juicios ya establecidos.

Axioma, es una verdad que se evidencia con solo su enunciacion.

Postulado, es una verdad de carácter práctico que no puede demostrarse.

Teorema, es una verdad que necesita demostrarse: en todo teorema se distinguen tres partes, *Hipótesis* ó supuesto, *Tésis* ó afirmacion y la *Demostracion*: si se cambia la 1.ª por 2.ª y esta por aquella, el teorema se llama *Recíproco*.

Corolario, es una verdad que se deriva de un teorema por simples razonamientos; és, la consecuencia de un teorema.

Lema, es un teoremita auxiliar que prepara la mas pronta demostracion de un teorema.

Escolios, son las observaciones ó advertencias que se intercalan en los teoremas para facilitar su enlace.

Problema, es una proposicion que se establece, para determinar el valor de una ó varias cantidades desconocidas llamadas *incógnitas* por sus relaciones con otras conocidas llamadas *datos*.

ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS.

Axiomas fundamentales de esta ciencia:

I. Las cantidades de una misma especie son las únicas comparables; y son de la misma especie cuando están referidas á una misma unidad.

II. El todo es igual al todo, es decir, una cantidad es siempre igual á sí misma.

III. El todo es igual al conjunto de todas las diferentes partes en que se puede descomponer.

IV. La parte es siempre menor que el todo, ó el todo es siempre mayor que la parte.

V. Una parte es igual al todo menos el conjunto de sus otras partes complementarias.

VI. Dos ó mas cantidades iguales á otra, son todas iguales entre sí.—Dos ó mas semejantes á otra, son todas semejantes entre sí.

VII. Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales, los resultados no quedarán alterados en su relacion de igualdad.

VIII. Es verdadera una proposicion particular si está comprendida en una general verdadera, mas puede no ser cierta la general aunque lo sea la particular, pues ya sabemos que el todo comprende á la parte, pero que la parte no comprende al todo.

IX. Si todas las proposiciónes particulares comprendidas en una general, son ciertas, es cierta tambien la proposicion general; y si probando que todas las proposiciones particulares son ciertas, hacemos ver induciendo así, que lo es tambien la general, demostramos á *Posteriori*.

Pero si deducimos que una proposicion verdadera es cierta, de otra aun mas general ya evidente y por tal reconocida; entonces demostramos á *Priori*.

X. Si tomando por principio de una demostracion á *priori* una proposicion general y por riguroso encadenamiento, se viene á una particular evidentemente falsa, deduciéndose que tambien lo es la general de quien partió; esta demostracion se dice que es *ad adsurdum* de la cual nos valemos muchas veces para demostrar que es cierta una proposicion por ser su contraria absurda.

SIGNOS MATEMATICOS.

Los signos matemáticos pueden espresar *operacion*, *relacion* ó *cualidad*.

Espresan operacion:	$+$	equivale á	mas.
	$-$		menos.
	$\times$ ó $\cdot$		multiplicado por.
	$:$		dividido por.
	$(\ )^n$		potencia del grado n.
	$\sqrt[n]{\ }$		raiz del grado n.
Espresan relacion	$=$	equivale	igual a...
	$>$		mayor que.
	$<$		menor que.
	$\ngtr$		que no es mayor que.
	$\nless$		que no es menor que.
Espresan cualidad	$+$	signo de	cantidad positiva.
	$-$	»	» negativa.
	$\mp$	»	» ambigüedad.
	$\sqrt{-1}$	»	» cantidad imaginaria.

NOTAS. 1.ª Los números encerrados en un paréntesis de carácter grueso, y que se encuentran con frecuencia, indican que lo expuesto anteriormente con tal número, ó en tal Teorema, debe consultarse sin pasar mas adelante.

2.ª Lo expuesto en letra mas pequeña ó con asterisco indica que puede ser suprimido, en el primer estudio, fijando luego la atencion en el repaso.

3.ª Los signos + y — no solo son signos que espresan operacion entre los términos que enlace, sino que son los que espresan si los términos á quienas preceda son *aditivos* ó *sustractivos*, es decir, si son *positivos* ó *negativos*.

4.ª Todo número á quien no preceda signo, se supone positivo.

INTRODUCCION

AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS.

1. *Matemáticas*, son las ciencias que se ocupan de exponer las leyes generales del tiempo y del espacio. Constituye *su objeto*, reconocer las propiedades y relaciones del número y de la estension; por el mismo se conoce su importancia á *Priori*. Constituye *su fin*, la precisa determinacion de estas relaciones ya contando ó ya midiendo; por su fin se reconoce su importancia á *posteriori*. El principio fundamental de esta ciencia es la *cantidad*.

2. *Cantidad* es en general todo lo que puede ser determinado relativamente, ya se le mire ó nó como formado de una ó varias unidades. Llámase *Magnitud*, á las propiedades de los cuerpos que son suceptibles de aumento y disminucion.

Hay magnitudes que no se pueden determinar; tal sucede á las afecciones psicológicas, como el placer, el dolor, etc., que siendo susceptibles de aumento ó disminucion, no pueden ser determinables, porque no puede separarse de ellas una parte tal, que utilizada como *tipo de relacion*, nos sirviese para espresar su *cuanto*; por lo cual es evidente que *no* todas las magnitudes son cantidades; y *sí* por el contrario, toda cantidad es una magnitud determinable.

Para medir las propiedades de los cuerpos las comparamos con otra de la misma especie que tomamos por unidad ó padron, mas para poder medir, necesitamos contar, y de aquí que el fin de esta determinacion sea contar y medir: Contamos en el tiempo. Medimos en el espacio.

3. *Unidad*, es la cantidad que se elige caprichosamente, como término de comparacion, para medir cantidades de su misma especie; la unidad matemática se considera siempre compuesta.

4. *Número*, es el que espresa la relacion de la cantidad con la unidad: és, la espresion de la cantidad determinada.

5. *Estension*, es el espacio que ocupa un cuerpo.

6. Siendo la cantidad el principio fundamental de estas ciencias, el estudio de sus leyes corresponde á las Matemáticas; pero como estas leyes pueden referirse esclusivamente á las de la cantidad discreta ó numerable, es decir, al

número, las estudiaremos en su primer tratado de **Aritmética**, que se ocupa de los mismos. Si estas leyes son referidas á las de la cantidad contínua ó mensurable, lo haremos en su tratado de Geometría, que comprende la *sintética*, *analítica* y *descriptiva*. Por último, cuando queramos conocer las leyes generales de la cantidad, independientemente de su magnitud lo haremos en sus tratados de **Algebra** y *Cálculos infinitesimales*.

7. Las matemáticas, para su estudio, se dividen en PURAS y MISTAS.

Las Matemáticas Puras, ó ciencias del número y de la estension, hacen abstraccion de las demás propiedades de los seres.

Las Matemáticas mistas, aplican las leyes ya conocidas del número y estension á las demás propiedades de los cuerpos, por ejemplo al equilibrio y movimiento, á la propagacion del sonido, etc. A la division de terrenos, al levantamiento de planos, al curso de los astros, etc.

8. Las Matemáticas Puras tambien se dividen en *Elementales* y *Superiores*. A las primeras corresponde la *Aritmética*, *Algebra elemental* y *Geometria sintética*. A las superiores corresponden *Los cálculos infinitesimales, la Geometria analítica, y la Descriptiva*.

<table>
<tr><td rowspan="6">Las Matemáticas para su estudio se dividen en</td><td rowspan="3">PURAS
que consideran el número y la estension como cualidades abstractas:
se dividen en</td><td>Aritmética que se ocupa del número.</td></tr>
<tr><td>Geometria que se ocupa de la estension.</td></tr>
<tr><td>Algebra que se ocupa de las leyes generales de la cantidad independientemente de su magnitud.</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">MISTAS
que aplican las leyes conocidas de el número y la estension á las propiedades de los cuerpos:
se dividen en</td><td>Físico-Matemáticas que aplican estas ciencias á los cuerpos de la naturaleza, como la Mecánica racional, Física-Matemática, Astronomía, etc. etc.</td></tr>
<tr><td>Aplicadas propiamente tales, como Mecánica industrial, Geodesia, Agrimensura, Arquitectura, Fortificacion, Balística, Gnomónica, etc. etc.</td></tr>
</table>

ARITMÉTICA.

9. *Aritmética* ó ciencia de los números, es aquel tratado de las Matemáticas que se ocupa de espresar y representar los números, efectuando con los mismos sus diferentes operaciones y relacionándolos entre sí.

Su objeto lo constituye, la exacta representacion de la cantidad.

Los medios de que se vale, son los números y sus diferentes operaciones.

Su fin, es determinar un número tal, que satisfaga las condiciones de relacion con otros, y el cual para ser hallado resulte de una operacion que ha de efectuarse.

10. Una cantidad determinada ya sabemos es representada por un número, y por tanto los elementos de una cantidad son *la unidad, la pluralidad y la totalidad.*

Unidad es un tipo de referencia, el principio de toda medida.

Pluralidad es un conjunto de unidades, ó la unidad en plural.

Totalidad es la espresion final de la cantidad.

11. Para que podamos hacer aplicaciones con los números, refiriéndolos á cantidades en cuya determinacion estemos interesados, consideraremos primero al número como *abstracto*, sabido que la abstraccion es el principio fundamental de todas las investigaciones científicas.

Al medir una cantidad observaremos que puede resultar, 1.° que de la cantidad se hayan podido separar, justamente, varias veces la unidad, en cuyo caso el número que la esprese se llama *Entero*; 2.° que al separar ó considerar aisladamente varias veces la unidad en la cantidad, quede un resto tal que se pueda apreciar exactamente con media, tercia, cuarta, quinta, etc. parte de la unidad, repetida una ó mas veces; en este caso, el número que espresa este resto se llamará *Quebrado*; y 3.º que si este resto no pudiese ser determinado con ninguna parte alícuota de la unidad, el número que lo representa se llama *Inconmensurable.*

12. En el adjunto cuadro espresamos las divisiones del número, en cuyo conocimiento nos debemos interesar, toda vez que nos iniciamos en la ciencia de los mismos.

El número ó espresion de la cantidad se divide en

- *Abstracto* que no expresa la especie á que se refiere
  - *Entero* producido por la reunion de unidades enteras.
    - Dígito.
    - Polidigito.
  - *Quebrado* producido por las divisiones inexactas.
    - Ordinario.
    - Decimal.
  - *Inconmensurable* producido por las Extracciones de raices inexactas.
    - De 2.º órden.
    - » 3.º »
    - » 4.º »
    - etc.
- y
- *Concreto* que espresa la especie á que se refiere.
  - *Complejo* que consta de unidades de distinta especie aunque de la misma naturaleza.
    - Homogéneos ó de la misma naturaleza.
    - Heterogéneos de diferente naturaleza.
  - *Incomplejo* que consta de una sola especie y naturaleza.
    - Homogéneos.
    - Heterogéneos.

13. Para verificar el estudio por nuestra Aritmética, observaremos el siguiente cuadro en el que espresamos la division que hacemos de la misma, para su ordenado estudio.

La Aritmética ó ciencia de los números se divide para su estudio en

- 1.ª parte de la misma: NUMERACION que dá medios fáciles para espresar y representar los números.
  - Dècupla
    - Oral ó hablada.
    - Escrita.
  - Breve ojeada sobre los diferentes sistemas de numeracion.
- 2.ª parte. Combinacion de los mismos, por LAS OPERACIONES fundamentales, con las propiedades de los números.
  - DE COMPOSICION
    - Adicion.
    - Multiplicacion.
    - Elevacion á potencias.
  - DE DESCOMPOSICION
    - Restar.
    - Dividir.
    - Extraccion de raices.
  - Libro 1.º Operaciones fundamentales con los números ENTEROS y propiedades de estos.
  - Libro 2.º Operaciones con los números FRACCIONARIOS ordinarios y decimales, y propiedades de las fracciones.
  - Libro 3.º Operaciones con los números INCONMENSURABLES y raices de los números en general.
- 3.ª parte. RELACIONES numéricas.
  - Diferencias, equidiferencias y Proporciones aritméticas.
  - Razones y Proporciones geométricas.
  - Progresiones aritméticas y geométricas.
- 4.ª parte. APLICACIONES NUMERICAS.
  - Sistema métrico decimal, y sistema antiguo de pesas y medidas.
  - Cálculo de números complejos é incomplejos.
  - Regla de tres simple y compuesta, directa é inversa.
  - Regla de compañia simple y compuesta.
  - Regla de Interés por mas ó menos de un año.
  - Regla de Descuento Real y abusivo.
  - Regla de Aligacion directa e inversa.
  - Regla conjunta y su aplicacion á los cambios.

PRIMERA PARTE.

Numeracion.

14. *Numeracion,* es la parte de la Aritmética que se ocupa de la representacion de los números, y como esta puede hacerse por medio de palabras ó por medio de guarismos, de aquí que debamos ocuparnos de la numeracion hablada y de la escrita en que todo sistema de numeracion se divide para su estudio.

Numeracion hablada de nuestro sistema décuplo.

15. Los números enteros son producidos por la sucesiva agregacion de unidades, lo cual nos hace ver que la série de los números es ilimitada, pues por grande que sea un número, se le podrá agregar una nueva unidad.

A una cantidad igual á la unidad, se la espresa por UNO,
A la reunion de esta con otra. . . . . . . DOS,
A la reunion de dos con otra. . . . . TRES,
A la de tres con otra mas. . . . . CUATRO,
A la de cuatro con otra mas. . . . . CINCO,
A la de cinco con otra mas. . . . . SEIS,
A la de seis con otra mas. . . . . SIETE,
A la de siete con otra mas. . . . . OCHO,
A la de ocho con otra mas. . . . . NUEVE,
Y á la de nueve con otra mas. . . . . DIEZ.

Diez es el número que sirve de base en nuestro usual sistema de numeracion décuplo, y este número constituye una nueva unidad de 2.º órden que se llama DECENA.
A una mas otra decena llamamos. . . . . VEINTE.
A veinte mas otra decena. . . . . TREINTA.
A treinta mas otra decena. . . . . CUARENTA.
A cuarenta mas otra decena. . . . . CINCUENTA.
A cincuenta mas otra decena. . . . . . . SESENTA.
A sesenta mas otra decena. . . . . SETENTA.
A setenta mas otra decena. . . . . OCHENTA.
A ochenta mas otra decena. . . . . NOVENTA.
A noventa mas otra decena. . . . . CIENTO.

Ciento es otra unidad superior ó de *tercer* órden.

Todo número menor que ciento se compondrá de *decenas* y *unidades*. Así cuarenta y siete se compone de cuatro decenas y siete unidades.

A ciento mas otro ciento se llama. . .	*Doscientos.*
A doscientos mas otro ciento.	*Trescientos.*
A trescientos mas otro ciento.	*Cuatrocientos.*
A cuatrocientos mas otro ciento. . . .	*Quinientos.*
A quinientos mas otro ciento.	*Seiscientos.*
A seiscientos mas otro ciento.	*Setecientos.*
A setecientos mas otro ciento.	*Ochocientos.*
A ochocientos mas otro ciento.. . . .	*Nuevecientos.*
A nuevecientos mas otro ciento. . . .	MIL.

Mil es otra unidad mas superior ó sea de *4.°* órden.

Todo número menor que mil se compondrá de un número de *centenas, decenas* y *unidades* que no pasará de nueve, puesto que es sabido, que cada DIEZ unidades de un órden constituyen otra del superior inmediato.

Así seguiriamos formando las unidades superiores que son en número ilimitado, pudiéndose por tanto prolongar indefinidamente el cuadro siguiente que espresa la formacion de algunas de estas unidades.

Diez unidades simples ó de 1.er órden forman una	*Decena.*
Diez decenas ó unidades de 2.° órden forman una	*Centena.*
Diez centenas ó unidades de 3.° órden forman un	*Millar.*
Diez millares ó unidades de 4.° órden forman un	*Décuplo millar.*
Diez décuplos millares ó unidades de 5.° órden forman un	*Céntuplo millar*
Diez céntuplos millares ó unidades de 6.° órden forman un	*Millon.*
Diez millones ó unidades de 7.° órden forman un	*Décuplo millon.*
Diez décuplos millones ó unidades de 8.° órden forman un	*Céntuplo millon*
Diez céntuplos millones ó unidades 9.° órden forman un	*Millar de millon*
	etc.

16. Todo número inferior á cada una de estas unidades se compondrá de varias de las de los órdenes inferiores, ninguna de las cuales escederá de nueve, colocándose cero donde no existan de las de su órden respectivo, segun el lugar de su colocacion.—Por lo tanto para espresar una cantidad cualquiera nos valdremos del concurso de ciertas de las unidades indicadas, empezando á leerlas por la de

valor relativo superior; para esto separaremos el número dado en secciones de tres en tres cifras por medio de comas, de derecha á izquierda; encima de las comas que ocupen lugares pares, pondremos: encima de la 2.ª un punto, de la 4.ª dos puntos, de la 6.ª tres puntos etc., la primera de estas espresará millones, la segunda billones, la tercera trillones etc., empezando luego á leerse el número de izquierda á derecha, en esta forma con referencia á este número.

40⁚060,830;730,410;060,427

Cuarenta
trillones
sesenta
mil
ochocientos
treinta
billones
setecientos
treinta
mil
cuatrocientos
diez
millones
sesenta
mil
cuatrocientos
veinte y
siete unidades

Numeracion escrita.

17. Es la que se propone espresar las cantidades, mediante la aplicacion de signos ó cifras: antigüamente se espresaban los números por las letras del Alfabeto, á las cuales se le asignaban ciertos valores determinados, y aun en el dia es bien conocida la numeracion romana que se efectúa con los respectivos valores de las siguientes letras:

I	V	X	L	C	D	M	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\text{C}}$	$\overline{\text{M}}$	cuyos valores son
1	5	10	50	100	500	1000	10.000	100.000	1.000.000	

Para espresar cualquier cantidad tenian presente que solo se permitia poner seguidas tres letras iguales; que toda letra de menor valor colocada á la izquierda de otra que esprese valor superior, rebajaba á esta el valor de aquella: que para representar unidades superiores al millar, se colocaba encima del valor absoluto de cada letra una rayita horizontal, con lo cual quedan multiplicadas por 1000.

1879.=MDCCCLXXIX.
3444.=MMMCDXLIV.
1;200.749.=$\overline{\text{MCC}}$DCCXLIX.

Esto nos hace ver que la base del sistema de numeracion de los romanos fué el número *cinco*.

18. El sistema de signos empezado á adoptar en el siglo X por casi todos los pueblos, es el arábigo, por medio del cual se espresa

	Uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	y DIEZ
por	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Las nueve primeras cifras son llamadas *significativas;* la última *no significativa.*

En este sistema tenemos que notar que toda cifra colocada á la izquierda de otra, espresa unidades diez veces mayores, es decir, que la eleva á unidades del órden superior inmediato, segun lo cual observaremos que á toda cifra debe asignársele un valor *absoluto* que no escederá nunca de nueve, y otro llamado de posicion ó *relativo*, segun el lugar que ocupe. La cifra cero, aunque aislada no tenga ningun valor, es sí de imprescindible utilidad y necesaria aplicacion, lo primero porque colocada á la derecha de una cifra la eleva de su órden al inmediato gerárquico superior, y lo segundo porque colocado entre varios guarismos manifiesta la carencia de unidades del órden correspondiente al lugar de su posicion.

Las unidades superiores espresadas por

	Uno	diez	ciento	mil	diez mil	cien mil	un millon
por	1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000

Los números polidígitos se leen de izquierda á derecha, empezando, como ya hemos manifestado, por los de órden superior: es evidente por tanto, que ceros colocados à su izquierda no alterarán su valor. Para escribir un número determinado, deberemos atender al número necesario de cifras para su espresion; sabido las que son precisas para escribir 10, 100, 1000, 10.000 100.000 etc., es decir, entre qué dos unidades de órden superior se halle comprendido, y hasta que la práctica facilite su segura representacion, conviene poner las unidades de órden superior y á su derecha los ceros necesarios, para ir luego sustituyendo por las unidades del órden respectivo correspondientes al número dado.

Así tratemos de escribir: seis billones, treinta mil catorce millones, diez y siete mil nueve unidades.

6;000,000;000,000
 3 14 17 9   que se escribirá

6;030,014;017,009.

(1) INDICACIONES GENERALES

ACERCA DE LOS DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACION.

* 19. Hemos visto como la base de nuestro sistema de numeracion es el número *diez*, pero pudiera ser otro cualquiera mayor ó menor; se ha establecido el décuplo y está sancionado ya por el uso, pero convendrá brevemente que conozcamos algunos otros y sepamos referir á ellos cualquier número dado en nuestro sistema, así como dado en otro cualquiera, espresarlo en el nuestro.

Todas las cantidades numéricas podrian ser espresadas por el solo concurso de las cifras *cero* y *uno* conforme indicó *Leibnitz* en su *Diabética* ó *Aritmética Binaria*, en la cual no usaba mas que dichas cifras; así que con las unidades 1 10 100 1000 10.000 100.000 etc.
representarán 1 2 4 8 16 32 etc.,
las cuales en vez de llamarse unidad, decena, centena, etc., se llamarian *unidad*, *binas*, *duasbinas*, *duasduasbinas*, etc.

Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc.
se espresarán por 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010 etc.

Para escribir, por ejemplo, el número 75 en este sistema Binario, es decir, por el concurso solo de ceros y unos, se atenderá á la unidad de órden superior contenida en el mismo que se le pueda restar y observamos és 64, unidad de 7.° órden (luego se escribirá con 7 cifras) del resto 11 no se puede restar ninguna, ni del 6.° ni del 5.° órden; se

---

(1) En la antigüedad existieron varios sistemas de numeracion, fundados segun dice Mr. Dareste en los primitivos instrumentos de la Aritmética que fueron los dedos; así vemos como por las investigaciones de Mr. Humboldt se nos manifiesta que existió el sistema quinario, el decimal y el vigesimal.

Del primero admitiremos como prueba la numeracion de los romanos, y que aun existe la costumbre de contarse el papel por manos, cuadernos etc., de cinco en cinco por los dedos de una mano etc.

Del vigesimal la costumbre en algunas naciones tal como Francia de contar cantidades superiores por cierto número de veces, la base 20, asi llaman al ochenta, por ejemplo, quatre vingt, etc. El sistema decimal que evita en la práctica los inconvenientes de entrambos, y viene conservándose aceptado por todo el mundo.

puede sí, una del 4.°; del resto 3 no se puede restar ninguna del 3.°, pero sí una del 2.° y otra del 1.er órden.—Luego el núm.75=64+8+2+1 equivale á 1000.000+1000+10+1 luego 1001011 es el número que en el sistema binario equivale á 75 del decimal.

Si, por el contrario, dado el número 11011 se nos pidiese su espresion en el decimal, diriamos que es equivalente á 10000+1000+10+1 que valen respectivamente 16+8+2+1, por tanto el número dado vale 27.

* 20. Si tratásemos del sistema Tetragonal la base seria 4, la cual como toda base se espresará por 10, y las cifras que se emplearian serán solamente el 0, 1, 2, 3.

Las unidades	1	10	100	1000	10.000	100.000	etc.
espresarán	1	4	16	64	256	1024	etc.

que recibirian nombres especiales espresando su cantidad.

Los números	0	1	2	3	4	5	6	7	8	etc.
se espresarán por	0	1	2	3	10	11	12	13	20	etc.

Para representar el número 2063, deduciremos de él la ó las unidades de órden superior que sea posible, las cuales serán dos unidades del 6.° órden (y tendrá seis cifras su representacion en este sistema) ninguna de los órdenes 5.°, 4.° y 3.°, puesto que del resto 15 solo se podrán descontar 3 unidades del 2.° órden y quedarán 3 unidades del primer órden.

Por tanto, 2063=1024+1024+4+4+4+3 por lo cual 2063=100.000+100.000+10+10+10+3 ó igual á 200.000+30+3=200.033.

Recíprocamente si dándosenos el núm. 200.033 del sistema tetragonal se nos preguntase qué número espresaria su equivalencia en nuestro sistema, diriamos, 2 unidades del 6.° órden valen 2048, tres unidades del 2.° órden valen 12, y 3 unidades simples, sumarán 2063 que será el número pedido.

* 21. De todos los sistemas el preferible seria el que tuviese por base al número 12 ó *Duodecimal*: en él habria otros dos guarismos mas, tales como n y m para espresar 10 y 11 respectivamente; la base 12 se espresaria por 10. Las unidades

1 10 100 1.000 10.000 etc., representarian
1 12 144 1.728 20.736 etc. y se llamarian

unidad, docena, duodedocena etc.

Propongámonos en este sistema espresar el número

47.014 y veremos que contiene *dos* unidades del 5.° órden mas *tres* del 4.° mas *dos* del 3.° mas *cinco* del 2.° y *diez* del primer órden, luego se espresará por 2325n—

Si por el contrario se nos diese ahora el número nn2m del sistema duodecimal para espresarlo en el nuestro,

diriamos	10	unidades de 4.° órden	valen	17280
	10	de 3.°		1440
	2	de 2.°		288
	11	de 1.°		11

que sumados dan 19.019, que es su valor en nuestro sistema.

SEGUNDA PARTE.

LIBRO PRIMERO.

Operaciones fundamentales.

La segunda parte de las tres en que hemos considerado dividida la Aritmética para su estudio, se ocupa de la composicion y descomposicion de los números por medio de las diferentes operaciones que se verifican con los mismos, las cuales son *Adicion, Sustraccion, Multiplicacion. Division, Elevacion á potencias* y *Extraccion de raices;* las que necesitamos saber efectuar con los números, sean estos *Enteros, Fraccionarios* ó *Inconmensurables;* constituiremos con las que se refieren á cada uno de estos un Libro, dejando, sin embargo, el estudio de la extraccion de raices para el que se ocupa de los números inconmensurables.

OPERACIONES CON LOS NUMEROS ENTEROS.

Adicion de los mismos.

22. Adicion *es la operacion que tiene por objeto reunir en un solo número el valor de otros dados.*

Los términos de una suma se llaman *Sumandos*; el resultadc *suma*; el signo que la espresa es +

Los casos que pueden ocurrir son: 1.° *Sumar dos ó mas números Dígitos; 2.° sumar uno ó varios Dígitos con uno ó mas Polidígitos; 3.° sumar varios Polidígitos.*

Para sumar números Dígitos nos valemos de la Tabla de sumar, bien conocida; conviene que tengamos presente que todo número tiene un complemento, que lo constituye su diferencia á una ó varias unidades de órden superior: así el complemento de 6 será 4 que es lo que le falta á 6 para valer una decena; el complemento de 3, es 7; el de 32 será 68 que es lo que le falta para una centena. etc. Sabiendo esto, al pedírsenos la suma de dos números dados, descompondremos uno de ellos en dos partes, una de ellas que sea el complemento del otro sumando á una ó mas unidades superiores, y la otra parte en el esceso sobre este complemento; así podremos ir sumando mentalmente dos á dos todos los números dados, hasta que quede en uno solo espresado el valor de todos.

Para sumar un Compuesto con un Dígito, sumaremos con las unidades del compuesto el dígito, y si la suma dá alguna decena, se añadirá á las decenas del compuesto.

Para sumar compuestos, se colocarán unos debajo de los otros correspondiéndose las cifras del mismo órden, y luego empezaremos á sumar por la derecha; la cifra de las unidades de esta suma la colocaremos debajo, y las decenas que resulten las añadiremos á la columna de las decenas y así sucesivamente; con lo cual habremos tenido presente el principio de la numeracion décupla, que dice que cada diez unidades de un órden constituyen una nueva unidad del superior inmediato.

23. Del artificio de la suma deduciremos que en lo que aumente ó disminuya uno de los sumandos aumentará ó disminuirá la suma. Que si aumenta uno de los sumandos en tantas unidades como disminuya otro, la suma no cambiará. Que si aumenta cada uno de los sumandos en varias unidades, la suma aumentará en tantas, cuantas en conjunto hayan aumentado aquellos. Que el órden de colocacion de dichos sumandos no puede alterar la totalidad de su conjunto, de donde deduciremos que para comprobar esta operacion convendrá sumar inversamente á como antes se hubiese hecho; es decir, que si fué de arriba abajo comprobamos la igualdad de la suma, verificando la operacion de abajo arriba.

* Es general en Aritmética comprobar una operacion por su igual y contraria, segun lo cual podriamos aplicar la operacion de la sustraccion, para comprobarla, observando si se reduce á cero la suma despues de ir deduciendo de la misma uno á uno los sumandos que la produjeron.

Se reconoce prácticamente que una operacion es igual y contraria á otra cuando espresando por un mismo número las dos operaciones que afecten á otro, observemos que este no cambia: en efecto $9+7-7=9$.

Sustraccion de números enteros.

24. Sustraccion *es la operacion contraria á la Adiccion; tiene por objeto determinar la diferencia que existe entre dos números,* es decir, el esceso del mayor sobre el menor, ó el defecto de este con aquel. Los términos de una sustraccion se llaman *minuendo* y *sustraendo,* al resultado efectuado de la operacion *resto, resíduo* ó *diferencia:* el signo es —

La prueba de toda sustraccion consiste en sumar el resíduo con el sustraendo, para ver si exactamente produce el minuendo.

Para restar de un número otro, basta ir disminuyendo al primero, unidad por unidad, todas las contenidas en el segundo. Cuando restemos de un número otro mayor la diferencia será negativa y al resíduo se antepondrá el signo *menos* para espresar su cualidad; en el caso contrario debe ponerse el signo mas, aunque generalmente es sobre entendido, cuando no existe.

Para restar dos números se coloca uno debajo de otro de manera que las cifras del mismo órden se correspondan; trácese debajo una línea horizontal y por la derecha despues empezaremos á deducir de la cifra del minuendo la correspondiente del sustraendo; si la cifra de este término fuese mayor, aumentaremos la del minuendo con diez unidades mas que equivalen á una decena, la cual añadiremos á las decenas del sustraendo; estas serán deducidas de las decenas del minuendo: si estas fueran menores se añadirian diez mas y así sucesivamente como en el ejemplo siguiente:

235421	Minuendo.	Comprobacion 178596	Sustraendo
—178596	Sustraendo.	56825	Resíduo.
56825	Resíduo.	235421	Minuendo.

25. Del artificio de la sustraccion se desprende que si el minuendo aumenta ó disminuye en un número, la diferencia aumentará ó disminuirá en el mismo número.

Por el contrario, si el sustraendo aumenta ó disminuye en un número, el resíduo disminuirá ó aumentará en el mismo número.

Si el minuendo y sustraendo aumentan ó disminuyen á la vez en un mismo número, el valor de la diferencia no cambiará.

Multiplicacion de números enteros.

26. Multiplicar *es una operacion que tiene por objeto hacer á un número tantas veces mayor como unidades tiene otro;* los términos de una multiplicacion se llaman *factores*, al primero se denomina *multiplicando* y al segundo *multiplicador*, al resultado se denomina *producto*.

La multiplicacion es una suma abreviada, puesto que se propone repetir por sumando al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador: el signo que espresa esta operacion es un punto ó ×

En toda multiplicacion debemos hacer observar que el producto es siempre de la misma especie que el multiplicando, pues que este es siempre una parte alícuota de aquel; y que al multiplicador lo debemos considerar como número abstracto, pues que no espresa mas que las veces que el multiplicando debe ser repetido.

Multiplicar es una operacion contraproducente á la de dividir, pues $9 \times 7 : 7 = 9$ y por tanto la prueba de la multiplicacion se efectúa por la division, observando si el cociente de dividir el producto por uno de sus factores, produce el otro factor.

27. Como la base de nuestro sistema de numeracion es diez y por tanto como un cero colocado á la derecha de un número cambia el valor relativo de las cifras del mismo, elevando cada una á la de su órden superior inmediato, y como estas ván de 10 en 10, tendremos que para multiplicar un número por 10, 100, 1000, etc., y en general la unidad seguida de ceros se colocarán estos en igual número á los que acompañen á la unidad á la derecha del número dado, así: $57 \times 100 = 5700$, y por tanto si un número termina en ceros, por cada uno que le quitemos de su derecha le haremos 10 veces menor, de lo cual se deducirá como recíproco del anterior, que para dividir un número que termine en ceros por la unidad seguida de ceros, basta suprimirle tantos como acompañen á la unidad.

28. Los casos que pueden ocurrir en la multiplicacion

son: 1.° *Multiplicar un Dígito por otro Dígito: 2.° un Polidígito por un Dígito,* y 3.° *un Polidígito por otro Polidígito.*

Para verificar la multiplicacion de un dígito por otro dígito, basta tener presente la llamada, aunque no con fundamento, tabla de Pitágoras, que trascribimos á continuacion.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para hacer aplicacion de la misma al producto de dos factores dígitos se buscará uno de los factores en la columna 1.ª de izquierda á derecha, y el otro en la 1.ª columna vertical, de arriba abajo, y siguiendo desde este número hácia la derecha, ó desde aquel hácia abajo, enfrente del otro factor encontraremos el producto de los dos números dados.

29. Para multiplicar un número *polidígito ó compuesto por un dígito* (teniendo presente la tabla) *multiplicaremos el dígito por las unidades, decenas, centenas etc. del compuesto, teniendo presente que el producto del dígito por las unidades del compuesto son unidades; que el producto del mismo por las decenas, son decenas; por las centenas, son centenas,* etc., y si cada producto de la cifra del multiplicador por cada una del multiplicando se espresa por *dos cifras, colocaremos la de valor relativo inferior en el producto, añadiendo la otra como de la misma especie al producto siguiente.*

30. *Si ambos factores* son números compuestos colocados ya uno debajo del otro, trazaremos debajo una línea horizontal y multiplicaremos la cifra de las unidades del multiplicador por todo el multiplicando, y obtendremos un producto parcial cuyo conjunto serán *unidades:* multiplicaremos despues la cifra de las decenas del multiplicador por todo el multiplicando, y su conjunto serán *decenas*, y por esto al colocarlo debajo del producto parcial anterior se pondrá un lugar mas á la izquierda. Se irán así multiplicando sucesivamente la cifra de las centenas, millares,

etc., y al colocar cada producto parcial le correremos á la izquierda debajo de su lugar respectivo; si alguna cifra del multiplicador fuese cero se correrá el producto siguiente mas á la izquierda.

PRODUCTO DE VARIOS FACTORES ENTEROS.

Se llama múltiplo de un número á otro mayor que sea capaz de contenerle exactamente cierto número de veces. Si le contiene 2, 3, 4, 5 n veces, se llama respectivamente su *duplo*, *triplo*, *cuádruplo*, *quíntuplo*, *enéctuplo*.

31. *El número de cifras de un producto de dos factores estará compuesto á lo mas de tantas como tengan entre los dos factores, ó de tantas á lo menos como tengan ambos factores menos una.*

En efecto, sea $9\times9=81$ factores de una sola cifra no pueden ser mayores que estos, ni por tanto estar el producto compuesto de mas cifras que las dos que forman este producto.

Sea ahora 525×37 este producto, por ser el 37 mayor que 10 y menor que 100, será mayor que 5250 y menor que 52500; el primero tiene una cifra menos que las cinco que hay en ambos factores, el segundo cinco ó tántas como tienen entre los dos factores.

32. *El órden de los factores no altera el producto.*

En efecto, digo que $3\times4=4\times3=$ $1+1+1+1$
que contadas estas unidades $1+1+1+1$
por columnas horizontales ó $1+1+1+1$
por columnas verticales componen 12.

Si los factores fuesen tres multiplicariamos los dos primeros en cualquier órden, y su producto con el tercero ó este por aquel producto seria el mismo, segun lo espuesto.

33. *Para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada uno de los sumandos por dicho número y se suman los productos parciales.*

En efecto, sea la suma indicada $3+4+5$, sea 2 el número factor, digo que:

$$(3+4+5)\times2=3\times2+4\times2+5\times2=6+8+10=24$$

Puesto que siendo $3+4+5=12$ como lo que se haga con las partes $3+4+5$ queda hecho con el todo 12, al multiplicar las diferentes partes por 2, habrá quedado multiplicado por 2 el todo 12.

34. *Para multiplicar una suma indicada por otra suma indicada, se multiplica cada uno de los sumandos de una de ellas por cada uno de los de la otra, y la suma de estos productos parciales será el producto de las dos sumas verificadas.*

En efecto, porque descomponiendo el multiplicador en tantos factores como sumandos tiene, quedará reducido al caso anterior

Sea $(4+5+3)\ (6+2)=(4+5+3)\ 6+(4+5+3)2$ igual á $12\times8=4.6+5.6+3.6+4.2+5.2+3.2$

35. *Para multiplicar una diferencia indicada por un número, se multiplica dicho número por el minuendo y sustraendo restándose despues los productos parciales.*

En efecto sea $(9-3)\ 2=9.2-3.2=18-6=6.2$ pues siendo $9-3=6$ será $9=3+6$ esta igualdad no se altera multiplicando por 2 ambos miembros, luego $9.2=(3+6)2$ y $9.2=3.2+6.2$ y como la parte igual al todo menos las demás partes, tendremos $6.2=9.2-3.2$ y separando el factor comun 2 será $6.2=(9-3)2$.

36. *Para multiplicar una diferencia indicada por una suma tambien indicada, se obtendrá el producto sumando las diferencias que existan entre los productos del minuendo y sustraendo, por cada uno de los sumandos de la suma indicada.*

Asi $(8-5)(7+2)=8.7-5.7+8.2-5.2$

37. *Para multiplicar una diferencia indicada por otra diferencia indicada, se suma el producto de los dos minuendos, con el de los dos sustraendos y de esta suma se resta la suma de el primer minuendo por segundo sustraendo, mas producto de primer sustraendo por segundo minuendo.*

En efecto, sabemos que $(7-3)(4-2)=7.4-3.4-7.2+3.2$

La suma ó diferencia indicada que esté afecta á un factor se cierra en un paréntesis, colocando fuera el factor, en cuyo caso es innecesario el signo de multiplicar por ser sobre entendido.

Como consecuencia de los teoremas espuestos conviene tener presente el diferente producto que resulta de los mismos factores que espresamos á continuacion, para que con otros ejemplos análogos se ejerciten los jóvenes alumnos

$$(8+3)\times(7-5)=11\times2=22$$
$$(8+3)\times\ 7-5\ =11\times7-5=72$$
$$8+3\ \times(7-5)=8+3\times2=14$$
$$8+3\ \times\ 7-5\ =3\times7+8-5=24$$

Alteraciones del producto por la variacion de los términos.

38. *Si á uno de los factores de un producto se le añade ó quita un número, el producto resultará aumentado ó disminuido en el producto de este número por los demás factores.*

Sea $4\times8=32$ digo que $(4+3)8=32+3\times8$.

Siendo ahora $7\times6=42$ digo que $(7-1)6=42-6$ como se comprenderá fácilmente segun lo demostrado.

39. *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número, el producto queda multiplicado por el mismo número.*

En efecto, $5\times7=35$ digo que si multiplico 5 por n el producto 35 quedará multiplicado por n; efectivamente $5\times n=5+5+5+....$ n veces multiplicando ambos miembros por 7 será $7\times5\times n=7.5+7.5+7.5+........$ n veces ó sea 35 veces n que es lo que queriamos demostrar.

40. *Si uno de los factores de un producto se divide por un número, el producto quedará dividido por el mismo número.*

Sea $4\times5=20$ digo que si en vez de multiplicar por 5 el número 4, multiplico por 5 la mitad de 4 que es 2, el producto quedará dividido por 2.

En efecto, $4:2\times5=2\times5=10$ y $10=20:2$.

* 40. Al indicar los signos en una de las primeras páginas dijimos que los signos + y — no solo espresaban operacion sino que tambien podian indicar la cualidad *positiva* ó *negativa* de las cantidades reales á quienes afecten; es general que en la operacion de la sustraccion, consideremos á todo sustraendo como negativo; en la operacion de la multiplicacion convendrá que tengamos presente, yendo habituados para el estudio de el Algebra, las variaciones del producto, segun la distinta cualidad de los factores, dentro del estudio de las cantidades reales numéricas únicas de que se ocupa la Aritmética.

Sabemos que los números á quienes no anteceda el signo + se considerarán como positivos.

Así que siendo $+3\times+4=+12$ si prescindimos de las cantidades numéricas, tendremos que $+\times+=+$, es decir que el producto de dos factores positivos es positivo. De ser $-3\times+4=-3+-3+-3+-3=-12$ tendremos que $-\times+=-$ si prescindimos del valor numérico.

Siendo ahora $+3\times-4$ producirá -12 pues siendo el signo del multiplicador negativo, el signo del producto claro es que será contrario al del multiplicando, luego $+\times-=-$, luego el producto de dos factores de distinto signo es negativo.

Ultimamente si tuviésemos -3×-4 será igual á $+12$, por lo espresado anteriormente, y por tanto $-\times-=+$ luego el producto de dos factores negativos es positivo.

FACILES ABREVIACIONES DE LA MULTIPLICACION.

41. Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros se colocan estos á la derecha del número dado, segun lo expuesto en la numeracion.

42. Para multiplicar un número por 9, 99, 999, etc. ó en general por otro, compuesto solo de nueves, se ponen á la derecha del número dado tantos ceros como nueves tenga el multiplicador, restando luego del producto formado una vez el multiplicando.

En efecto, $78\times99=78(100-1)=7800-78=7722$.

43. Para multiplicar un número por 5, se pone un cero á su derecha, y la mitad del número que resulte será el producto pedido: en efecto, $421\times5=421\times10:2=2105$.

44. Para multiplicar un número por 25, se pondrán á su derecha dos ceros y la cuarta parte del resultado será el producto del número dado por 25; por ser $25=100:4$.

En efecto, $77\times25=77\times100:4=7700:4=1925$.

45. Para multiplicar un número por 125, se pondrán tres ceros á su derecha y la octava parte del resultado será el producto pedido por ser $125=1000:8$.

Sea $731\times125=731\times1000:8=731000:8=91375$.

46. Para multiplicar un número por 11, 111, ó en general un número compuesto solo de unos, se repite el multiplicando tantas veces como unos tiene el multiplicador, colocándolos un lugar mas á la izquierda y sumándolos luego, en el lugar y órden indicado.

47. Para multiplicar un número por 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 ó 19, basta multiplicar respectivamente por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9 y poner este producto debajo del número dado, cuidando de colocarlo un lugar mas á la derecha, sumándolos despues.

Así $374\times13=$ 374 cuya suma es 4862.
1122

48. Para multiplicar un número por 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 ó 91 basta multiplicarlo respectivamente por 2, 3, 4, 5, 6,

7, 8 ó 9 colocando este producto debajo del número dado un lugar mas á la izquierda, sumándolos luego

Así $374 \times 31 =$ 374 cuya suma es 11594.
1122

49. Para multiplicar un número por otro terminado en ceros, se multiplican ámbos prescindiendo de los ceros, y despues se añaden al producto tantos cuantos tengan los factores

$$9100 \times 7000 = 637 \times 100000 = 63700000.$$

50. Para multiplicar un número compuesto de decenas y unidades por 11, se suman sus decenas y unidades, y si la suma tiene solo una cifra se pone en medio de las decenas y unidades del número dado.

Así: $43 \times 11 = 473$. Si la suma es mayor que 9 se ponen en el medio de las dos cifras las unidades de su suma y las decenas se añaden á las que tuviere el número dado.

Así $78 \times 11 = 858$.

DIVISION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

51. La division es una operacion que tiene por objeto averiguar las veces que un número llamado *Dividendo* contiene á otro llamado *Divisor*; el número que ha de espresar estas veces se llama *Cociente*, el cual es el resultado de efectuar la operacion de Dividir. Esta operacion es por lo tanto igual y contraria á la Multiplicacion, pues esta, como hemos visto, tuvo por objeto formar un número llamado *Producto*, tantas veces mayor que el *Multiplicando* como unidades tiene otro llamado *Multiplicador*, y la Division se propone un objeto contrario al averiguar las veces que un número llamado *Dividendo* es capaz de contener á otro llamado *Divisor*. El signo que espresa la division es una raya ó :

Se prueba que dividir es lo contrario de multiplicar, observando que cualquier númrro afecto de un factor y un divisor iguales no altera el resultado, así $24 \times 8 : 8 = 24$.

La division es una sustraccion abreviada, pnes si contamos las veces que se puede restar del *Dividendo* el *Divisor*, ese número de veces espresará el *Cociente*.

Si el Dividendo no contiene un número exacto de veces al Divisor, la Division será inexacta y efectuada quedará un *Resto* forzosamente menor que el *Divisor*, puesto que se ha descompuesto el dividendo en tantas veces el *Divisor* cuantas ha sido posible, segun espresan las unidades del Cociente; en este caso el Cociente obtenido se llamará el *entero*, y para completarlo se le pondrá á su derecha una rayita, colocando encima el *resto* y debajo el *divisor*, en cuyo caso tendremos el cociente *completo;* el número que se ha adicionado para completar el cociente es lo que se llama un quebrado, producido como se ha visto por cualquier division inexacta.

Por lo dicho comprenderemos que toda division se *comprueba* multiplicando el cociente por el divisor, y añadiendo, el resto si existe, producirá el Dividendo.

En efecto, sea $17:3$, el cociente es 5 y el resto 2.

Luego $17=3\times5+2$ y $3=(17-2):5$ y $5=(17-2):3$ y por último $2=17-3\times5$.

Por tanto:

Dividendo igual divisor por cociente mas resto.

Divisor igual Dividendo menos resto, partido por cociente.

Cociente igual Dividendo menos resto, partido por Divisor.

Resto igual Dividendo menos producto de divisor por cociente

52. Los casos que pueden ocurrir en la Division de los números enteros, son: 1.º *dividir un número que termine en ceros, por la unidad seguida de ceros*; para obtener este cociente bastará suprimir de la derecha del Dividendo tantos ceros como acompañen á la unidad divisor, segun lo espresado en el § (27.)

2.º caso. *Cuando el Dividendo tiene una ó dos cifras y el divisor una sola, el cociente y factor se halla por el solo conocimiento de la tabla Pitagórica.*

3.er caso. *Para dividir un número polidígito por un dígito,* conocida la espresada tabla, se divide la primera ó dos primeras cifras del Dividendo por el Divisor, empezando por la de órden superior, el producto de cada cifra del cociente por el divisor la iremos restando del respectivo dividendo parcial formado por el resto de la division anterior, á la derecha del cual bajamos nueva cifra del dividendo.

Es preferible, para este caso, acostumbrarse á sacar la mitad, tercera, cuarta, etc. parte de un número en vez de dividir por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9.

4.º caso. *Para dividir un número polidígito por otro tambien polidígito,* se separan de la izquierda del dividendo tantas cifras, ó tantas mas una como tenga el divisor, y dividiendo por este aquellas, obtendremos así la cifra de órden superior del cociente, la cual multiplicada por el divisor formará un producto que deduciremos de las cifras separadas; á la derecha del resto, si le hay, bajaremos la siguiente cifra del dividendo, con la cual quedará el nuevo y parcial dividendo formado, reducido á unidades del órden inferior inmediato siguiente, obteniéndose para el cociente, por esta nueva division, la siguiente cifra de unidades del órden inferior; el producto de esta por el divisor lo restaremos del dividendo parcial; bajando del dividendo luego á la derecha del resto, nueva cifra etc., siguiendo la division en la espresada forma hasta su terminacion.

53. Antes de colocar una cifra en el cociente podemos adquirir la certeza de ser esta la verdadera, si tenemos en cuenta el *tanteo mental*, que debe verificarse de la manera siguiente: La cifra que supondremos para el cociente la multiplicaremos por la que esprese unidades de órden superior en el divisor, cuyo producto restaremos de la primera ó dos primeras del dividendo parcial; á la derecha de esta diferencia supondremos colocada la siguiente del dividendo parcial; del conjunto de unidades que estas espresen restaremos el producto de la indicada cifra del cociente por la segunda de órden superior del divisor; á la derecha de este resíduo supondremos la siguiente del dividendo parcial, de cuyo conjunto volveremos á restar el producto de la cifra del cociente por la tercera del divisor etc. Si alguna vez no fuese posible esta sustraccion, la cifra que tanteamos para el cociente debe disminuirse en una unidad y volver con el nuevo guarismo á verificar el tanteo. Para no colocar una cifra menor de la que debe ser, empezaremos á tantear el mayor cociente que puede producir la division de la primera ó dos primeras cifras del dividendo cuando sean necesarias, por la primera del divisor.

54. En una division cualquiera de números enteros fácilmente se determina el número de cifras que tendrá el cociente por el número necesario de ceros que colocados á la derecha del divisor le hagan inmediatamente mayor que el dividendo. Así por ejemplo 78432:47 será el cociente mayor que 1000 y menor que 10.000 por ser $47.000 < 78.432 < 470.000$; claro es por lo tanto que el

cociente de esta division tendrá cuatro cifras, por hallarse comprendido entre 1000 y 10.000.

COCIENTE DE VARIOS DIVISORES ENTEROS.

55. *Divisor* de un número es otro menor que este y en el cual se halla contenido exactamente. Para que un número sea divisor de otro, es preciso que sea uno de sus *factores* ó una *parte alícuota* del mismo. Si por ejemplo se nos diese el número 20, sus divisores serán 2, 4, 5 y 10. Consideraremos por tanto las palabras *factor*, *divisor* y *parte alícuota*, bajo el concepto numérico, como sinónimas.

56. *Para dividir una suma indicada por un número se divide cada uno de los sumandos por dicho número y se suman luego los cocientes parciales: el resultado será igual á la suma verificada partida por el mismo número.*

En efecto, sea $(6+3+9)$ la suma indicada, sea 3 el número que ha de dividirla; digo que

$$(6+3+9):3=6:3+3:3+9:3=2+1+3=6$$

puesto que siendo 18 la suma verificada, y siendo $18:3=6$, el resultado habrá de ser igual al anterior, puesto que lo que se haga con las partes queda hecho con el todo.

57. *Para dividir una diferencia indicada por un número, se dividen por dicho número el minuendo y sustraendo, restándose luego los cocientes parciales, cuyo resto será igual á la diferencia verificada, partida por el divisor.*

En efecto, sea $(45-27):9$, digo que es igual á $45:9-27:9$ puesto que siendo $45-27=18$ será $45=27+18$ en cuya igualdad dividiendo ambos miembros por 9 tendremos que $45:9=(27+18):9$ que segun el Teorema anterior será igual á $27:9+18:9$ y por tanto siendo $45:9=27:9+18:9$ la parte será igual al todo menos las demás partes, por lo cual $45:9-27:9=18:9$ y $18:9=(45-27):9$.

58. *Para dividir un producto indicado de varios factores, por un divisor de uno de ellos basta dividir por este indicado factor.*

Sea el producto indicado $4\times21\times2\times5$ que vamos á dividir por 7 (que únicamente es divisor del 21) digo que $4\times21\times2\times5:7=4\times3\times2\times5$ en efecto, como aquí se verifica que cociente por divisor igual al dividendo; segun lo demostrado en el Teorema 39 estará tambien demostrado.

59. *Para dividir un número entero por el producto indicado de varios factores, se dividirá sucesivamente dicho entero por cada uno de los espresados factores.*

Sea el número 48, y sea el divisor el producto de 2.3.4 digo que 48:(2.3.4)=48:2:3:4.

En efecto, si llamamos c al cociente tendremos que 48:(2.3.4)=c luego 48=(2.3.4)×c.

Dividiendo ambos miembros primero por 2, luego por 3 y últimamente por 4, tendremos que c=2 que es precisamente el resultado de dividir 48 por 24 que es el producto de 2.3.4.

Alteraciones del cociente por la variacion de los datos.

60. Las alteraciones del cociente por la variacion de los datos se deducen de las del producto por la variacion de sus factores. Así diremos en general que: *si aumenta ó disminuye el dividendo, aumentará ó disminuirá el cociente; é inversamente, si aumenta ó disminuye el divisor, disminuirá ó aumentará el cociente.*

61. De ser el Dividendo igual al producto del Divisor por el cociente, deduciremos que *si se multiplica ó divide el dividendo de una division por un número*, como el producto de divisor por cociente tiene que quedar multiplicado ó dividido (si el divisor no varia) claro es que *el cociente tiene que quedar respectivamente multiplicado ó dividido.* (Directamente).

62. Por estar demostrado ya, que si uno de los factores de un producto se multiplica ó divide por un número, el producto queda multiplicado ó dividido por el mismo número, resultará *que si el divisor de una division se multiplica ó divide por un número* (no alterándose el dividendo) claro es que el cociente *quedará respectivamente dividido ó multiplicado por el mismo número.* (Inversamente.)

63. Por ser suficiente para multiplicar ó dividir un producto indicado por un número el multiplicar ó dividir uno de sus factores, resultará que *el cociente de una division no se altera porque se multipliquen ó dividan dividendo y divisor por un mismo número*; fundamento me-

diante el cual hacemos ver como los términos de una division se pueden simplificar sin que altere el cociente.

64. Por ser cierto que si se multiplica ó divide una diferencia indicada por un número, queda multiplicada ó dividida por dicho número la diferencia verificada, y ser tambien todo resto de una division inexacta igual á la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por cociente, resultará *que si se multiplican ó dividen por un número el dividendo y divisor de una division inexacta, el resto quedará multiplicado ó dividido respectivamente por dicho número.*

65. * Por ser cierto que cociente por divisor es igual al dividendo, y estar á mas demostrado que el *producto de dos factores, ambos positivos ó ambos negativos, es positivo,* asi como que *el producto de un factor positivo por otro negativo, es negativo,* resultará que *el cociente de una division cuyos dos términos sean positivos ó ambos negativos, es positivo;* así como *si uno de los términos es positivo y otro negativo, el cociente será negativo.*

Abreviaciones de la division de números enteros.

66. Si los dos términos de una divisíon terminan en ceros, para hallar el cociente, deben suprimirse de la derecha de ambos un número igual de ceros, pues segun lo espresado en el párrafo 63, el cociente no varia.

67. Para dividir un número por 5 se duplíca y prescinde de su última cifra de la derecha.

En efecto, $7630:5=7630\times2:10=763\times2=1526$, puesto que 10 es el doble de 5.

68. Para dividir un número por 25 se multiplica por 4, prescindiendo de sus dos últimas cifras, puesto que 100 es el cuádruplo de 25.

En efecto, $9700:25=9700\times4:100=97\times4=388$.

69. Para dividir un número por 125 se multiplica por 8, prescindiendo de sus tres últimas cifras, puesto que 1000 es 8 veces mayor que 125.

En efecto, $951000:125=951000\times8:1000=951\times8=7608$

Elevacion á Potencias de los números enteros.

70. *Se llama Potencia de un número al producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo cierto número de veces*: para espresar la potencia de un número se coloca otro número mas pequeño sobre el dado á su derecha, que se llama *exponente*: siendo este 2, 3, 4, 5, n espresará la 2.ª 3.ª 4.ª 5.ª *enesima* potencia.

A las segundas y terceras potencias se ha convenido en llamarlas cuadrados y cubos (1) respectivamente.

Los cuadrados y cubos de los números dígitos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sus cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Sus cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Los cuadrados de los números dígitos tambien se forman por la sucesiva agregacion de los números impares 1, 3, 5, 7, 9, etc., verificándose que de la suma de los 2, 3, 4, etc. n primeros, tenemos respectivamente los cuadrados de 2, 3, 4, n.

Los cuadrados de los números 8, 9 y 10 se espresan
$8^2=8\times8=64$;, $9^2=9\times9=81$; $10^2=10\times10=100$.

Los cubos de 11 y 12, por ejemplo, se espresan
$11^3=11\times11\times11=1331$; $12^3=12\times12\times12=1728$.

La *enésima* potencia de 6 se espresará por
$6^n=6\times6\times6...$ n veces.

71. El número de cifras necesario para espresar el cuadrado de un número, serán á lo mas en número duplo de las que tenga el dado.

Así como el número de cifras que hayan de espresar el cubo de un número serán triples á lo mas de las del número dado, ó triples menos dos á lo menos; segun lo espresado en el (T. 31.)

72. *El cuadrado de la suma indicada de dos números es igual al cuadrado del primero, mas duplo de primero por segundo, mas cuadrado del segundo.*

En efecto:
$(10+4)^2=(10+4).(10+4)=10.10+10.4+10.4+4.4$
igual por tanto á $10^2+2.10.4+4.^2$ que es lo indicado.

---

(1) Porque espresan el area y volúmen respectivamente del cuadrado y del cubo.

Luego si el primero son *decenas* y el segundo *unidades*, el cuadrado de esta suma será *cuadrado de decenas, mas doble producto de decenas por unidades, mas cuadrado de unidades.*

Si al primero llamásemos *raiz* y al segundo *cociente*, se diria el cuadrado de esta suma igual..... etc.

Si espresásemos al primero por a y al segundo por b tendriamos $(a+b)^2=(a+b).(a+b)=a^2+2ab+b^2$ y por último, si en lugar de tratarse del cuadrado de la suma de dos números nos ocupásemos del *cuadrado de la diferencia*, sería $(a—b)^2=(a—b)(a—b)=aa—ab—ab+bb$ luego igual á $a^2—2ab+b^2$ y por tanto siendo *decenas* y *unidades* respectivamente los números a y b, seria *igual al cuadrado de decenas, menos el duplo de decenas por unidades, mas cuadrado de las unidades.*

73. *La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual á la suma de ellos.*

En efecto $(a+1)^2—a^2=a^2+2a+1—a^2$ igual por tanto á $2a+1$ y numéricamente $9^2—8^2=9+8=17=81—64$.

74. *El cubo de la suma indicada de dos números enteros es igual al cubo del primero, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas triplo del primero por cuadrado del segundo, mas cubo del segundo.*

En efecto: $(10+4)^3=(10+4)(10+4)(10+4)$ igual á $(10^2+2.10.4+4^2)(10+4)$ que verificando el producto resulta $10^3+3.10.^24+3.10.4^2+4.^3$

Si al primero llamamos *decenas* y al segundo *unidades*, tendremos etc.

Y si al primero llamamos *raiz* y al segundo *cociente*, tendremos etc.

Representando en general, al primero por a, y al segundo por b, tendremos:

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b.^3$

Ultimamente, si en vez de tratarse del cubo de la suma nos ocupásemos del cubo de la diferencia, seria igual á el *cubo del primero, menos el triplo de cuadrado de primero por segundo, mas el triplo de primero por cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.*

75. *La diferencia entre los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, mas triplo del menor, mas uno.*

En efecto, sea $(a+1)^3-a^3$ será igual á

$$a^3+3a^2+3a+1-a^3=3a^2+3a+1$$

Así como $9^3-8^3=3.8^2+3.8+1=217=729-512$.

76. *La Potencia de un producto de varios factores es igual al producto de las potencias de cada uno de estos factores.*

En efecto: si $48=2\times3\times8$ tendremos que $48^2=2^2.3^2.8^2$ pues siendo cierto que lo que se haga con el todo, queda hecho con las partes, será evidente lo espresado.

77. *La potencia de un cociente, es igual á la potencia del dividendo, partida por la potencia del Divisor;* así en efecto, siendo $4=8:2$, tendremos que $4^3=8^3:2^3$ pues siendo cociente por divisor igual á dividendo no se alterará esta igualdad por multiplicar ambos miembros por 2^3.

78. *El producto de varias potencias de un mismo número, es igual á este que tenga por esponente la suma de los esponentes de los factores.*

Asi en efecto: $4^2\times4^3\times4=4.4\times4.4.4\times4=4^6$, y el esponente 6 es la suma de $2+3+1$ que son los esponentes de los factores. (1)

79. *El cociente de dividir una potencia de un número por otra potencia menor del mismo número, es igual al número dado, que tenga por esponente la diferencia entre los esponentes de ambos términos.*

En efecto: $5^4:5^2=5.5.5.5:5.5=5.5=5^2$.

El esponente 2 es la diferencia entre 4 y 2 esponentes de los dos términos.

80. *La potencia de otra potencia de un número, es igual al mismo número que tenga por esponente el producto de los esponentes que espresan ambas potencias.*

Asi $(8^2)^3=8.8\times8.8\times8.8=8^6$ y el esponente 6 es el producto de 2×3.

81. *La potencia de un número terminado en ceros, será igual á la potencia del espresado por las cifras significativas colocándole, á la derecha tantas veces los ceros que le acompañan como unidades tenga el esponente que espresa la potencia.*

En efecto: $(800)^3=8^3.100^3=512\times1000000=512000000$.

---

(1) Ya suponemos sabido, que la unidad es el esponente que se supone á un número si no le tiene.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS ENTEROS.

DIVISIBILIDAD.

Hemos dicho, que reconocemos á un número como *divisor* de otro cuando está contenido en este exactamente. Así tenemos que 7 es un divisor del 21; ó de otro modo, el 21 es un múltiplo de 7.

Todo número entero es divisible por la unidad, toda vez que el conjunto de unidades constituye todo número entero; segun lo cual, todo número entero es el producto verificado de la unidad, por las que compongan espresado entero.

82. *Si dos ó mas números tienen un divisor comun, la suma de ellos tendrá el mismo divisor.*

Sean los números 14, 42 y 63 divisibles todos por 7; digo que $14+42+63$ cuya suma es 119, es exactamente divisible por 7.

En efecto: $14=2$ veces 7
$42=6$ » 7
$63=9$ » 7 Luego

La suma $119=(2+6+9)$ veces 7, lo cual es evidente por ser $17\times7=119$.

Corolarios: 1.° *Si alguno de varios sumandos no es exactamente divisible por un número, la suma tampoco lo será.*

2.° *Si un número divide á otro, dividirá á todos los múltiplos de este otro*; principio que se deduce como legítima consecuencia del anterior: sabido que un múltiplo de un número es tomarle varias veces por sumando, luego teniendo todos los sumandos un divisor la suma tambien lo tendrá.

83. *Si dos números tienen un divisor comun, la diferencia de ellos tambien lo tendrá.*

En efecto sean los números 56 y 24 digo que:
si $56=7$ veces 8 y
$24=3$ veces 8 tendremos

que $56-24$ que son $32=(7-3)$ veces 8 como asi es precisamente.

Cor. Por tanto, si un número es divisor del minuendo y no lo es del sustraendo, no lo será tampoco de la diferencia, porque si lo fuese, como el sustraendo es la diferencia entre el minuendo y el resto, dicho número seria divisor del sustraendo, lo cual es contrario á la hipótesis.

Dos números consecutivos no pueden tener mas divisor comun que la unidad, porque siendo esta la diferencia entre ellos y no pudiendo ser divisible mas que por sí misma, tampoco lo podrán ser por otro los dos números consecutivos.

84. *Si dos números tienen un divisor comun, el resto que resulte de dividir el mayor por el menor tambien lo tendrá.*

En efecto, hemos dicho que el resto de toda division inexacta es igual á la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente; pero el dividendo y divisor lo tienen segun la hipótesis, luego divisor por cociente tambien lo tendrá, puesto que es un múltiplo del divisor; por tanto el resto tambien tendrá el mismo divisor.

Sean los números 72 y 15: ambos tienen tercera parte: vamos á probar que el resto de esta division tambien la tiene: $72:15=4$ enteros y quedan 12 de resto, por tanto $72=15\times4+12$ restando de ambos miembros 15×4 tendremos $72-15.4=12$ pero minuendo y sustraendo de esta diferencia tienen ambos tercera parte, luego el resto 12 tambien lo tendrá.

(En este teorema se funda la teoría del Máximo Comun Divisor.)

Cor. Por ser dividendo igual á la suma del resto mas producto de divisor por cociente, tendremos que si divisor y resto tienen uno ó mas factores, el dividendo tambien lo tendrá; por tanto *todo factor de dividendo y divisor lo será del divisor y el resto, ó del resto y dividendo.*

Caracteres de divisibilidad.

85. Por ser el cociente exacto de dividir un número que termine en ceros, por 10, 100, 100, 1000, etc., el mismo número suprimiéndole uno, dos, tres ceros etc., tendremos que:

Para que un número sea divisible por 10, 100, 1000 y en general por la unidad seguida de ceros, se necesita y basta que dicho número termine en tantos ceros como tenga la unidad por quien ha de ser dividido.

86. *Un número será divisible por 2 cuando la cifra de sus unidades sea cero ó cifra par.*

En efecto, si termina en cero es divisible por 10, pero $10=2\times5$ y como si un número divide á otro dividirá á sus múltiplos es evidente. Si el número termina en cifra, par se podrá descomponer en la suma de decenas y unidades; cualquier número de decenas por terminar en cero es divisible por 10, y por tanto por los divisores de este que son 2 y 5; y las unidades siendo espresadas por un número par, contienen evidentemente al 2 una, dos, tres ó cuatro veces, y como si dos números tienen un divisor comun, la suma de ellos tambien lo tendrá, queda demostrado.

87. *De la misma manera probaremos que un número es divisible por 5 si termina en cero ó cinco.*

88. *Un número será divisible por 4 si sus dos últimas cifras son ceros ó componen un múltiplo de 4.* En efecto, si termina en dos ceros es divisible por 100 pero este número equivale á 4×25, y como si un número tiene un divisor sus múltiplos tambien lo tendrán, y siendo el que termina en dos ceros un múltiplo de cien, es evidente.

Si el número terminare en un múltiplo de 4 se descompondrá en centenas y unidades; las primeras está demostrado que son múltiplas de 4, si lo son tambien las unidades, lo será la suma segun lo demostrado.

Por un procedimiento análogo demostraremos *que todo número que termine en dos ceros ó en 25, 50 ó 75 es divisible por 25.*

89. *Un número es divisible por 8 cuando las tres últimas cifras son ceros ó componen un múltiplo de 8.* En efecto, si termina en tres ceros es divisible por 1000 pero este número equivale á 8×125, luego el número terminado en tres ceros es múltiplo de 8 y de 125.

Si el número termina en un múltiplo de 8 constituido por sus tres últimas cifras, se podrá descomponer en la suma de sus millares y unidades de millar: sea el número 7024: digo que $7024=7000+24$, el primer sumando por terminar en tres ceros, es evidentemente divisible por 8; el segundo sumando 24, lo es tambien conforme sabemos; y como si dos ó mas números tienen un divisor comun la suma de ellos tambien lo tendrá, queda demostrado.

90. *Un número será divisible por 9 si la suma de los valores absolutos de sus cifras componen un múltiplo de* 9.

Para esta demostracion y como Lema preparatorio, es necesario demostrar, que *toda cifra significativa seguida de ceros es igual á un múltiplo de 9 mas el valor absoluto de espresada cifra significativa.*

En efecto, sea 500: digo que es igual á 5×100 pero

$100=99+1$, luego $500=5(99+1)=5.99+5.1$, pero $99=9.11$; por tanto $500=5.11.9+5$, en lo cual observaremos que el primer sumando es un múltiplo de 9, el segundo es 5 la cifra significativa y esceso que tiene el número 500 sobre un múltiplo de 9.

La misma demostracion es aplicable análogamente á cualquier otro número seguido de ceros.

Para demostrar ahora nuestro aserto principal, refirámoslo á un número cualquiera polidígito, y sea este por ejemplo

$$423=\begin{cases}400=\text{m. de } 9+4\\ 20=\text{m. de } 9+2\\ 3=\phantom{\text{m. de } 9+}3\end{cases}$$

sumando ambos miembros de esta igualdad tendremos que el número $423=\text{m. de } 9+(4+2+3)=\text{m de } 9+9$ y como en este caso particular ambos sumandos son divisibles por 9, la suma 423 es un múltiplo de 9.

91. *Un número será divisible por 3, si la suma de los valores absolutos de sus cifras componen un múltiplo de 3.* En efecto, del caso anterior fácilmente se desprende que tambien todo número dígito seguido de ceros es igual á un múltiplo de 3 mas el valor absoluto de su cifra significativa que si esta es 3, 6 ó 9 es siempre un múltiplo de 3; que si no es alguna de ellas sobrará uno ó dos; por tanto, si el número es polidígito y al sumar sus cifras componen un múltiplo de 3, el número será divisible por 3.

92. *Un número será divisible por 6 si es divisible por 2, siéndolo además por 3*; es decir, si el cociente de dividir el número por 3 es un número *par*; en efecto, porque de lo contrario si fuese *impar*, su producto por 3 seria tambien impar y no podria contener exactamente al 2, por lo cual es preciso que sea par.

93. *Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar* impar *y la suma de las cifras que ocupan lugar* par *sea cero ó un múltiplo de 11.* Para esta demostracion son requeridos los dos lemas siguientes:

1.° *Toda cifra significativa seguida de un número par de ceros, es igual á un múltiplo de 11 mas el valor absoluto de dicha cifra significativa.* Sea el número 40.000: digo que es igual á un m. de $11+4$.

En efecto, $40.000=10000\times4$ pero $10000=9999+1$. luego $40000=(9999+1)4=9999.4+4$ y como un número par de cifras iguales es siempre divisible por 11, resultará siempre que el resto de dividir una cifra significativa seguida de un número par de ceros por 11, será siempre el valor de espresada cifra significativa.

2.° *Toda cifra significativa seguida de un número impar de ceros es igual á un múltiplo de 11 menos el valor absoluto de dicha cifra significativa.*

Sea el número 400000 digo que es igual á un m. de 11—4 En efecto, 400000=40000×10, habiendo demostrado ya que 40000=m. de 11+4 multiplicando ambos miembros por 10; tendremos que 400000=(m. de 11+4)10=m. de 11×10+4×10 pero 4×10=4(11—1)=4.11—4 luego 400000=m. de 11×10+4×11—4 luego igual m. de 11—4.

Por tanto, *el resto que resulte de Dividir un número por 11, es el mismo que el que resulte de Dividir por 11 la diferencia entre la suma de las cifras que ocupen lugar impar y la suma de las cifras que ocupen lugar par.*

Apliquemos razonadamente esta regla al número 76329=70000+6000+300+20+9 digo que

70000=m. de 11+7
6000=m. de 11—6
300=m. de 11+3
20=m. de 11—2
9= +9

Sumando ambos miembros será 76329=m. de 11+(7+3+9)—(6+2)=m. de 11+11 ambos sumandos son divisibles por 11, luego el número es divisible por 11.

Podria suceder que la suma de las cifras que ocupan lugar impar fuese menor que la suma de las cifras que ocupan lugar par, y por tanto que la diferencia resultase negativa por ser el sustraendo mayor que el minuendo; en este caso, al múltiplo de 11 tendriamos que restarle una cantidad, si esta era 11, ó uno de sus múltiplos dejaria de diferencia otro múltiplo de 11 y estaria demostrado: en el caso contrario, el número seria igual á un múltiplo de 11+11 menos la diferencia menor que 11 ó lo que es lo mismo á un múltiplo de 11 menos la diferencia entre las dos sumas espresadas.

Hemos obtenido los caracteres de divisibilidad que ha de tener un número para poder ser divisible exactamente por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100, 1000 etc., 11, 25, 125 y en general por uno de estos números terminados en ceros.

94. *Espondremos ahora un método general mediante el cual conoceremos cuando un número propuesto es divisible ó nó por otro dado.*

Supongamos que se nos propone reconocer los caracteres de divisibilidad que debe tener un número para ser divisible por otro, tal, que no tenga mas posible descomposicion en factores que el producto de sí mismo por la unidad, es decir, y como luego veremos, que sea este divisor *Primo.*

Para reconocer cuando un número es divisible por otro primo, se necesita y basta que conozcamos los restos que resulten de dividir por dicho número primo las distintas unidades representativas de los órdenes diferentes unídad, decena, contena; unidad, decena y centena de millar; unidad, decena y centena de millon, etc., y fijándonos en que los restos han de ser menores que el divisor ó número primo dado, observaremos que tienen que llegar á repetirse las cifras del cociente á lo mas tardar, verificando tantas divisiones como unidades tenga el divisor menos una á consecuencia de tener que reproducirse un resto, igual á alguno de los anteriores: convencidos de esto, será evidente que cada unidad de los órdenes arríba espresados será igual á un múltiplo de indicado primo, mas un resto que variará segun la unidad de que se trate, y como el número que se nos dé para reconocer si es ó nó divisible por el número dado ó primo, se puede descomponer en la suma de las unidades de sus órdenes respectivos; y tambien que 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9 unidades de cada órden, son iguales á un múltiplo del número dado mas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9 veces el respectivo resto, será ya evidente que el número propuesto será igual á un múltiplo del Primo, mas los productos que resulten de multiplicar cada cifra de su órden por el resto correspondiente á cada unidad de espresada cifra, y por tanto si ambos sumandos son múltiplos del número primo lo será la suma (82).

Este método general, con ligeras variantes, es el que puede emplearse para reconocer cuando un número es divisible por otro cualquiera dado siendo primo.

95. Apliquémoslo para determinar las condiciones que debe tener un número para ser divisible por 7.

UNIDADES DE ORDENES DIFERENTES.

$$\begin{aligned}
1 &= \text{m. de } 7+1 = 0\times7+1\\
10 &= \text{m. de } 7+3 = 1\times7+3\\
100 &= \text{m. de } 7+2 = 14\times7+2\\
1000 &= \text{m. de } 7+6 = 142\times7+6\\
10000 &= \text{m. de } 7+4 = 1428\times7+4\\
100000 &= \text{m. de } 7+5 = 14285\times7+5
\end{aligned}$$

Si seguimos verificando la division de unidades de órdenes superiores por 7, observaremos que la unidad, decena y centena de millon; unidad, decena y centena de millar de millon, vuelven á producir los mismos restos 1, 3, 2, 6, 4 y 5; luego la unidad, decena ó centena equivalen respectivamente á un múltiplo de 7 mas 1, 3 ó 2, y cada unidad, decena ó centena de millar equivalen á un múltiplo de 7 mas 6, 4 ó 5, ó lo que es lo mismo; igual á un múltiplo de 7 menos 1, 3 ó 2 que es lo que le falta respectivamente á 6, 4 ó 5 para valer 7.

Por tanto, *podremos fácilmente reconocer cuando un número es divisible por 7 dividiéndole en secciones de 3 cifras yendo de derecha á izquierda, sumando aparte los productos que resulten de multiplicar la cifra de las unidades por 1, la de sus decenas por 3, la de sus centenas por 2, de todos los periodos de lugar impar: aparte sumaremos los productos que resulten de multiplicar por 1, 3 y 2 las unidades, decenas y centenas de sus periodos de lugar par, y si al restar ambas sumas, la diferencia es un múltiplo de 7 ó cero, el número propuesto será divisible por 7.* Apliquemos este ejemplo al número 8.321.573.197.

Periodos de lugar par.

8——573——

$3.1+7.3+5.2+8.1=42$

Periodos de lugar impar.

—321——197

$7.1+9.3+1.2+1.1+2.3+3.2=49$

pero $49-42=7$. Luego el número dado es igual á un múltiplo de $7+7$: es por tanto divisible por 7.

96. Para reconocer cuando un número es divisible por otro compuesto, que se puede descomponer en factores, se necesita y basta saber que lo sea por los factores primos entre sí de este compuesto, pues *todo número que es divisible por otros dos primos entre sí, será divisible por el producto de estos.* Sea **M** un un número divisible por 6 y por 11, que son primos entre sí; hagamos ver como **M** es divisible por 66, producto de 6×11. En efecto, **M** será igual á 6 veces el número entero S, pero 11 es divisor de este producto $6\times S$ y primo con 6, luego dividirá á S y por tanto $S=11\times R$, luego $M=6\times11\times R$.

(Para la mejor inteligencia de este Teorema debe estudiarse antes el 106.)

Máximo comun divisor de números enteros.

97. Se llama Máximo comun divisor de varios números al factor mayor que es comun á todos ellos.

Si dos ó mas números no tienen mas factor comun que la unidad, se llaman *Primos entre sí*, y si cada uno de ellos es primo entre sí con otro, se llaman *Primos dos á dos.*

Los números 4, 9 y 25 son primos entre sí. Los números 3 y 7, 3 y 11, 3 y 26 son primos dos á dos.

El teorema fundamental de esta teoría, demostrado en el número (84) nos decia que *si dividendo y divisor de una division inexacta tienen uno ó mas divisores, el resto tambien los tendrá*; luego los factores que tengan dividendo y divisor, los tendrá divisor y resto ó dividendo y resto, y como al mayor le llamamos M. c. d., será evidente que el m. c. d. de dividendo y divisor será el m. c. d. de divisor y resto; por tanto, *para hallar el máximo comun divisor de dos números se dividirá el mayor por el menor, si el cociente es exacto el menor será el Máximo comun divisor pedido; si así no es, sobrará un resto menor que el divisor, por el cnal dividiremos este; si el cociente es exacto, este resto será el Máximo comun divisor pedido: sino seguiremos la division hasta encontrar un cociente exacto, siendo el máximo comun divisor pedido, el último de los divisores.*

La operacion se dispone como en el siguiente ejemplo: Sean los números 4656 y 1776. m. c. d.

	4656	1776	1104	672	432	240	192	48
Cocientes...........		2	1	1	1	1	1	4
Restos que pasan á divisores.........	1104	672	432	240	192	48		

98. *Para hallar el m. c. d. de varios números, se hallará el m. c. d. de los dos menores, luego el del hallado con el tercero, luego el de estos con el cuarto, etc.* Puesto que todo divisor comun de dos números ha de serlo del resto de su division, y como estos restos pasan á divisores y el último divisor es el m. c. d. pedido, es evidente; como consecuencia de ello será claro, que para hallar los divisores comunes de dos ó mas números, bastará conocer los de su m. c. d., y por tanto para hallar el m. c. d. de varios números podremos tambien obtenerlo *en el producto de todos los factores que sean comunes á los números dados.*

99. Si dos ó mas números se multiplican ó dividen por un tercero, el resto de la division de dichos números quedará multiplicado ó dividido por dicho número (64) y como el último resto es el m. c. d. de los dos números, resultará que si dos números se multiplican ó dividen por un tercero su m. c. d. quedará multiplicado ó dividido; por tanto, y de aquí deduciremos, que para hallar el m. c. d.

de varios números si á la simple vista y mediante la aplicacion de las reglas que hemos establecido en la divisibilidad, los reconoceremos como múltiplos de un mismo número, podremos dividir á todos por este, hallar luego el m. c. d. de los cocientes, multiplicándolo luego por aquel divisor comun, *en lo cual se fundan las abreviaciones á que atenderemos en la obtencion del m. c. d.*

100. *Si dos números se dividen por su m. c. d. los cocientes serán primos entre sí.* En efecto, si no lo fuesen tendrian nuevo divisor comun, y por tanto el hallado no seria el máximo, lo cual es contrario á la definicion.

El m. c. d. de dos números primos entre sí, será la unidad.

Números primos.

101. Se llaman números *primos absolutos* á aquellos que tan solo son divisibles por sí mismo y por la unidad, como los siguientes, únicos comprendidos en la 1.ª centena.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Todo número que no es primo es el producto de números primos. Sea el número 12: vamos á probar que si no es primo es un producto de números primos; en efecto, $12=2\times6$. Si ambos fuesen primos estaria demostrado, pero $6=2\times3$ luego $12=2\times2\times3$ y por tanto 12 que es un compuesto, es el producto de los números primos $2\times2\times3$.

102. *Para reconer si un número es ó no primo se dividirá por 2, 3, 5, 7, 11 etc., y cuando el cociente entero sea menor que el divisor primo, estará reconocido por tal.*

Sea el número que se nos dé para ensayar si es ó no primo el 109, dividiéndolo por los primos 2, 3, 5, 7, 11 no dá cociente completo exacto, y como el cociente entero de dividirlo por 11 es 9, no será ya divisible por ningun otro menor que 11, y por tanto será primo.

103. El sábio Eratóstenes constituyó su tabla ó criba de números primos, formándola de la manera siguiente:

Para obtener los números primos desde el uno hasta el límite que se desee, se escriben todos los números impares comprendidos, se tacharán los cuadrados de 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. y los que vayan de 3 en 3, de 5 en 5, de 7 en 7, de 11 en 11 etc., siguiendo así hasta que el cuadrado de uno de los subsiguientes salga del límite propuesto. Todos los números primos son impares escepto el número 2 que es preciso luego, comprender en la tabla anterior.

104. *La série de los números primos es ilimitada*; para probarlo, consideremos por el contrario, que el mayor de todos los números primos sea *R;* tendremos que el producto de 1.2.3.5.7.11×....×*R* será primo entre si, con este mismo producto aumentado en una unidad, (83) luego no pueden tener ningun factor comun menor que *R*, luego si este producto, aumentado en una unidad no es un primo absoluto, los factores que tenga serán mayores que *R:* por tanto demostrado.

105. *Si un número primo no es divisor de otro, los dos números serán primos entre sí*; en efecto, pues no teniendo el número primo mas divisor que el mismo y la unidad, si el compuesto no es múltiplo del número primo no tiene mas factor comun con él que la unidad, y por lo tanto serán primos entre sí.

106. *Todo divisor de un producto de dos factores y primo con uno de ellos, es divisor del otro.* En efecto, pues siendo **nm** el producto y **a** uno de sus factores, digo que si **n** y **a** son primos entre sí, **m** es múltiplo de **a**, puesto que siendo el m. c. d. de **n** y **a** la unidad, multiplicando ambos números por **m**, su m. c. d. quedará multiplicado por **m**. y por tanto el m. c. d. de **nm** y de **am** será **m**, pero **a** es divisor de su múltiplo **am**, por hipótesis es de **nm**, luego tiene que serlo de su m. c. d. de **m**.

Cor. *Todo número que divide á un producto de varios factores, es por lo menos divisor de uno de ellos,* porque sino lo fuera todos serian primos entre sí, y entónces el número dado no podria dividir al producto.

Si un número primo divide á una potencia dividirá á la base de esta potencia por no ser esta mas que el producto de varios factores iguales todos á la base.

Si dos números son primos entre sí, lo serán tambien todas sus potencias, puesto que es evidente no tendrán mas divisores que los números que las producen.

Descomposicion de un número en sus factores primos, trasformacion de un número en el producto indicado de sus factores primos.

107. *Todo número que no es primo es un producto de*

números primos, segun lo demostrado en el Teorema 101, por tanto para descomponer un número en sus factores primos se dividirá el número y los cocientes sucesivos por los factores primos mas pequeños, hasta obtener de cociente la unidad, y el producto de todos estos divisores será el número dado.

Sea por ejemplo el número 720: para descomponerlo trazo una línea vertical, y á su derecha voy poniendo los divisores del número y de sus cocientes, los cuales se irán colocando sucesivamente el menor debajo del mayor, disponiéndolo como en el ejemplo indicado y tendré que

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$720=2.2.2.2.3.3.5=2^4.3^2.5.$$

Cor. *Un número cualquiera no puede admitir dos descomposiciones diferentes en factores primos, porque si asi fuere resultaria absurda la igualdad que entre ellas estableciésemos*, como dos cosas que suponiamos iguales á una tercera, que era el número dado.

Los divisores compuestos de un número serán todos los que podamos formar con los distintos productos de sus factores primos, segun lo espuesto en el Teorema 96.

108. *Para formar la tabla comprensiva de todos los factores primos y compuestos de un número dado, colocaremos la unidad, á su derecha el factor ó divisor primo menor y las potencias que puedan resultar del distinto número de veces que por este mismo factor fuere divisible el número dado; debajo de la unidad colocaremos otro factor primo, si lo hubiere y sucesivamente los productos de este nuevo factor por todos los divisores ya hallados; en nuevas filas cada una de las potencias de este nuevo factor por los colocados en primera línea, y así con cada uno de los demás*, segun se indica practicamente en el siguiente ejemplo referido á los divisores del número 720.

1	2	4	8	16	unidad y potencias de 2.
3	6	12	24	48	factor 3 y sus productos por los anteriores.
9	18	36	72	144	cuadrado de 3 y sus productos por los primeros
5	10	20	40	80	
15	30	60	120	240	factor 5 y sus productos por los anteriores.
45	90	180	360	720	

La regla que podremos establecer para conocer el número de divisores que entre simples y compuestos tiene un número, estará determinado por el producto de los esponentes de sus factores primos, añadiendo á cada uno la unidad, pues siendo esta divisor de todos los números, y empezando toda tabla comprensiva de los mismos *por ella*, ha de constituir nueva columna vertical.

Por ejemplo: los factores correspondientes al número 720 que es el producto de la *cuarta* potencia de 2, por la *segunda* de 3, por la *primera* de 5, serán $5 \times 3 \times 2 = 30$, que son en efecto, el número de sus factores.

Mínimo múltiplo comun de varios números enteros.

109. Llámase Mínimo múltiplo comun de varios números, al número menor capaz de contener exactamente á dichos números.

El m. m. c. de varios números será el producto de todos ellos, cuando estos sean primos entre sí; tratemos por ejemplo de hallar el m. m. c. de 5 y 7; los múltiplos de 5 son 10, 15, 20, 25, 30, 35, etc.; los múltiplos de 7 son 14, 21, 28, 35, etc., el primer número que encuentro comun es el 35, este es el m. m. c. y no fué hallado antes porque 5 y 7 son primos entre sí.

Ahora bien, *si los números no son primos y cada uno de los menores estuviese contenido en el mayor, como este tambien se contiene á sí mismo, el m. m. c. seria el mayor;* así sucede que el de los números 2, 6, 12 y 24, será el número 24.

110. Si los números no fuesen primos entre sí, ni estuviesen todos contenidos exactamente en el mayor, necesitaremos hallar un número tal que, para que sea el m. m. c., contenga á todos los divisores de los números dados y sea por tanto formado, por el producto de el mayor número de divisores simples en que los números dados se descompongan, pues en efecto, este número contendrá al producto de sus factores multiplicados uno á uno, uno á dos, dos á dos, ó en cualquier forma, toda vez que contiene al producto de todos ellos (96); luego,

Para hallar el m. m. c. de varios números se descompondrán estos en sus factores simples, y el producto de las mayores potencias de estos factores simples será el m. m. c. pedido.

Tratemos de hallar el m. m. c. de los números 96, 54 y 100: descomponiéndolos tendremos

96	2	54	2	100	2
48	2	27	3	50	2
24	2	9	3	25	5
12	2	3	3	5	5
6	2	1		1	
3	3				
1					

96=2.2.2.2.2.3 54=2.3.3.3 100=2.2.5.5

Luego el m. m. c. será $2^5.3^3.5^2=21.600$.

Cor. *Los cocientes que resulten de dividir el m. m. c. de varios números por cada uno de ellos, deben ser primos entre sí, porque si no lo fueran tendrian un divisor comun y por tanto el m. m. c. no seria el menor de los múltiplos, lo cual es contrario á la definicion.*

El m. m. c. de varios números es á lo mas el producto de todos ellos (cuando sean primos entre sí). Es á lo menos el mayor de los dados (cuando todos los demás sean divisores del mismo).

111. Tambien puede hallarse el m. m. c. de varios números, dividiendo el producto de todos ellos por el máximo comun divisor de los mismos.

112. *De lo dicho se desprende que si tenemos varios números descompuestos en sus factores primos y multiplicamos los factores simples comunes de los mismos, su producto será el m. c. d. de los espresados números. Si multiplicamos las mayores potencias de cada uno de todos sus factores primos, el producto nos dará el m. m. c de todos ellos.*

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO PRIMERO

QUE COMPRENDE Á LA NUMERACION, Á LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES, Y Á LAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

I. Leer en el Sistema décuplo los números 70108090704 y 100700890001.

II. Escribir en el mismo sistema 3 billones, 4 mil 9 millones, 75 mil 14 unidades.

4 cientos 6 trillones, 14 mil 6 billones, 20 mil 9 millones y 75 unidades.

2 mil 9 cuatrillones, 21 mil 7 billones, 437 mil 101 unidad.

III. Determinar la espresion del número 24310 en los sistemas quinario, duodecimal y vigesimal.

IV. Determinar lo que valdrá en nuestro sistema el número 21.372 escrito este número así en el sistema octogonal.

V. Dado el número 100101 en nuestro sistema, se pregunta cuánto valdrá en el binario, quinario, duodecimal y vigesimal.

Operaciones con los enteros.

VI. Sumar 6 millones, 3 decenas de millar y 4 centenas, con 3 centenas de millar y 5 millares.

6 billones y 7 centenas de millar de millon con 12 decenas de millar y 2 unidades.

VII. ¿Qué número es el que añadiéndole 20 centenas y 8 decenas y restando de la suma 14 unidades produce 3000?

VIII. Hallar un número que añadiéndole 27 decenas y restándole 4 millares 2 decenas y 6 unidades dá de diferencia 1.111.

IX. Cuántas cifras tendrán los productos 976×54 y 8791×567.

X. Hallar los productos de $(7+6).(13-2)=$

$$(7+6).\ 13-2 =$$
$$7+6\ .(13-2)=$$
$$7+6\ .\ 13-2 =$$

XI. Hallar dos números cuya suma sea 46 y su diferencia 12.

XII. Descomponer el número 78 en tres partes tales que la primera tenga 9 unidades mas que la segunda y esta 14 mas que la tercera.

XIII. Hallar un número que dividido por 2170 dé de cociente 3207 y de resto 190.

XIV. Desarrollar las espresiones $(10+5)^2$, $(21-9)^3$, $(14+11)^3$

XV. Elevar á potencias $(8 \times 4 \times 2)^2$; $(15+13+21)^3$;

Divisibilidad.

XVI. Demostrar cuando un número será divisible por 13, 14, 15, 17.

XVII. Demostrar que todo producto de dos factores es un múltiplo de 9 mas el producto de los resíduos que se obtienen dividiendo dichos factores por 9.

XVIII. Demostrar que si el cociente de dividir dos números es exacto, el menor es el m. c. d. de ellos y el mayor es el m. m. c. de los mismos.

XIX. Qué divisores primos tendrá el número 1340 escrito este en los sistemas binario, ternario, quínario y duodecimal.

XX. Cómo se espresará un número para que sea divisible por 8 en un sistema que tenga por base al 4, 5, 6, 7 ú 8.

Sobre el Máximo comun divisor.

XXI. Hallar el m. c. d. de los números 192, 520 y 1260 por el procedimiento de las divisiones sucesivas y por la descomposicion de cada número en factores.

XXII. Hallar así mismo por ámbos procedimientos el de 720, 5120, 3600 y 1460.

Números primos.

XXIII. Formar una tabla de números primos que estén comprendidos entre el 1 y el 1000 segun la criba de Eratóstenes.

XXIV. Espresar 10 números cada uno de 3 cifras, tales que sin ser ninguno primo absoluto, sean todos primos entre sí.

Descomposicion de números en factores simples y compuestos.

XXV. Descomponer los números 480, 960, 740, 10800 en sus factores simples, determinar el número de todos los simples y compuestos; y esponer los correspondientes á cada número.

Sobre el Mínimo múltiplo comun.

XXVI. Hallar el m. m. c. de los números 240, 720 y 200, así mismo los de los números 48, 100, 72, 75 y 64, no solo por el producto del mayor número de divisores primos, sino tambien por el cociente del producto de todos ellos, partido por el m. c. d.

LIBRO SEGUNDO.

NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Espresion y numeracion de los números fraccionarios ordinarios.

113. *Se llama número fraccionario ó quebrado aquel que expresa parte ó partes de la unidad dividida.* Los números fraccionarios son originados por las divisiones inexactas de los números enteros: porque en efecto, la operacion de dividir se reduce á medir ó á determinar las veces que un número (dividendo) contiene á otro (divisor.) Cuando el primero no es múltiplo del segundo quedará un resto menor que este, el cual debe ponerse encima de una raya á la derecha del *cociente entero*, colocando debajo de la misma el divisor formándose así un quebrado que convierte este cociente entero, *en cociente completo*: Así por ejemplo $15:4=3$ enteros y sobran 3 unidades que no se pueden partir exactamente por 4, luego $15:4=3\frac{3}{4}$ que se leerá tres y tres cuartos, por todo lo cual comprenderemos que la inmediata aplicacion de los quebrados es espresar cocientes incompletos.

Todo quebrado está expresado por sus dos términos, que son *numerador* y *denominador*; este espresa las partes en que está dividida la unidad; aquel, las partes que se toman de la unidad dividida. *Los quebrados se llaman ordinarios cuando tienen por denominador un número cualquiera, y se llamarán decimales cuando su denominador sobreentendido sea la unidad seguida de ceros.*

Los quebrados son llamados *propios*, cuando su valor es menor que el de la unidad, é *impropios* cuando valgan tanto ó mas que la unidad; un quebrado valdrá tanto como la unidad cuando sus dos términos sean iguales; si el númerador es mayor que el denominador, el quebrado valdrá mas que la unidad; y si por el contrario fuese el numerador menor que el denominador, valdrá menos que la unidad, de todo lo cual podremos concluir diciendo: lo que sea el numerador comparativamente con el denominador, será el quebrado con la unidad.

Los quebrados $\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{7}{7}, \frac{12}{12}$ valen tanto como 1.

Los quebrados $\frac{7}{5}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \frac{6}{3}$ valen mas que 1.

Los quebrados $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{9}{11}, \frac{7}{17}$ valen menos que 1.

Un quebrado es la espresion de una division inexacta en la cual el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor. El cociente completo de toda division inexacta se compone de el cociente entero, mas el quebrado que se forma segun indicamos mas arriba, y todo ello en conjunto espresará *un número mixto* porque está compuesto de entero y quebrado.

114. Para leer un quebrado, se lée primero su numerador. despues el denominador, terminándose en *avos*, á menos que sea menor que 10 que entónces se dirá: tantos *tercios, cuartos, quintos, sestos. séptimos, octavos, ó novenos*, segun que el denominador sea 3, 4, 5, 6, 7, 8, ó 9.

Como sabemos que las operaciones de multiplicar y dividir son contraproducentes, y por tanto que todo número multiplicado y dividido á la vez por otro no altera, tendremos que: Para reducir un entero á la forma fraccionaria de un denominador dado, no hay mas que multiplicarlo y dividirlo á la vez por el mismo número Sea 12 enteros que queremos reducirlo á quintos diremos $12=12\times5:5$ luego igual $\frac{60}{5}$ Reduzcamos 8 á quebrado cuyo denominador sea a tendremos $8=\frac{8\times a}{a}=\frac{8a}{a}$

De ser el cociente de dividir un número por la unidad el mismo número, es evidente que á todo número le podemos considerar la unidad de denominador, así como ya tenemos presente que por factor ó esponente, no altera tampoco al número á quien afecte.

Para reducir un número misto á quebrado, de su respectivo denominador se multiplica el entero por el denominador se le añade el numerador y á esta suma se pone por denominador el del quebrado.

Sea $5\frac{2}{7}=\frac{35}{7}+\frac{2}{7}=\frac{37}{7}$

Los quebrados se llamarán *homogéneos* cuando tengan el mismo denominador, es decir, cuando son partes alicuotas de la unidad: siéndolo se podrán comparar y reconocer fácilmente su magnitud relativa: así diremos, *que de quebrados que todos tengan el mismo denominador es mayor el que tenga mayor numerador*, luego

$$\frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{5}{5} < \frac{6}{5} < \frac{8}{5}$$

Cuando varios quebrados tengan todos el mismo numerador, y diferente el denominador, espresarán todos el mismo número de partes de la unidad dividida, pero dicho se está que cuanto menor sea el número de las en que se divida una misma cosa, serán mayores, luego es claro tambien *que de quebrados de igual numerador será el mayor el que tenga menor denominador*.

Así $\frac{7}{9} < \frac{7}{8} < \frac{7}{6} < \frac{7}{5} < \frac{7}{3}$ etc.

115. En las alteraciones del cociente por la variacion de sus términos de la division de números enteros, hemos visto lo necesario para comprender aquí, despues de haber identificado los dos términos de una division con los de un quebrado, *que si aumenta ó disminuye el numerador de un quebrado, este aumentará ó disminuirá respectivamente; por tanto, si se multiplica ó divide el numerador de un quebrado por un número el quebrado quedará multiplicado ó dividido por dicho número*, y por tanto, *que para multiplicar un quebrado por un entero, ó este por aquel, basta multiplicar el numerador por el entero.*

Para dividir un quebrado por un entero basta dividir el numerador por el entero.

De ser evidente que si aumenta ó disminuye el denominador de un quebrado, queda este disminuido ó aumentado respectivamente, se desprende que *si se multiplica ó divide el denominador de un quebrado por un número, este quedaré dividido ó multiplicado por dicho número, y por tanto tambien, que para multiplicar un quebrado por un número bastará dividir el denominador del mismo por el número; así como para dividir un quebrado por un número, bastará multiplicar por dicho número su denominador.*

Por tanto, *si numerador y denominador de un quebrado se multiplican por un mismo número, el quebrado no se habrá alterado*; pues si por la multiplicacion efectuada en el numerador el quebrado quedó multiplicado, por la efectuada en el denominador el quebrado quedó dividido; y como estas operaciones de multiplicar y dividir son contraproducentes, estará demostrado. En esto se funda el poder convertir varios quebrados en otros equivalentes del mismo denominador.

Si numerador y denominador de un quebrado se dividen por un mismo número, el quebrado tampoco varia, en lo que tiene su fundamento que todo quebrado se pueda simplificar, que es reducirlo á otro equivalente cuyos términos sean mas sencillos, lo cual se podrá ir haciendo hasta obtener el quebrado *irreducible* que es aquel cuyos términos sean *primos entre sí*. Para obtenerlo de una vez no hay mas que dividir los dos términos del quebrado por el *m. c. d.* de los mismos; los cocientes serán primos entre sí y formarán la fraccion irreducible, la cual es entre todas las fracciones que pueden representar una cantidad la mas sencilla; es decir, que así como una cantidad entera no puede ser representada mas que por un número en el sistema décuplo, por el contrario en los números fraccionarios una cantidad puede representarse por un sin número de fracciones todas ellas iguales entre sí (1) pero todas ellas espresadas por una unidad fraccionaria diferente.

Operaciones con los números fraccionarios.

Con estos números se pueden efectuar las mismas operaciones de composicion y descomposicion que con los números enteros.

Nos ocuparemos en primer lugar de estas operaciones con quebrados ordinarios.

Adicion.

116. Para sumar números quebrados es necesario que si no son homogéneos ó del mismo denominador, se procure convertirlos en otros equivalentes de denominador comun, segun lo ya espresado en el número anterior. Tres casos pueden ocurrir.

---

(1) Lo que produce las igualdades fraccionarias, uno de los estudios mas importantes de la Aritmética por sus numerosas aplicaciones á la resolucion de un sin número de problemas de los que mas adelante nos ocuparemos.

Primer caso. *Para sumar quebrados del mismo denominador*, como son, digámoslo así, números correspondientes al mismo sistema, y dependientes de la misma unidad fraccionaria, *se sumarán los numeradores y á esta suma se pondrá por denominador el denominador comun.*

Ejemplo: $\frac{3}{9}+\frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{13}{9}=1\frac{4}{9}$

Segundo caso. *Para sumar quebrados de diferentes denominadores, es preciso hallar otros equivalentes del mismo denominador*, y por tanto de la misma especie; para esto conviene observar si los denominadores son primos entre sí; entonces el denominador comun será el producto de todos ellos, y el numerador de cada uno se formará multiplicando el de cada quebrado por los denominadores de los demàs, escepto el suyo: *hecho esto, se procederá como en el caso anterior.*

Ejemplo: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{2}=\frac{10}{30}+\frac{12}{30}+\frac{45}{30}=\frac{67}{30}=2\frac{7}{30}$

Tercer caso. Si los denominadores de los quebrados sumandos no son primos entre sí, el denominador comun será el *m. m. c.* de todos los denominadores, y el numerador de cada uno lo formaremos dividiendo el *m. m. c.* hallado, por el denominador de cada uno, y multiplicando este cociente por el numerador respectivo. Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{3}{8}=\frac{16}{24}+\frac{20}{24}+\frac{14}{24}+\frac{9}{24}=\frac{59}{24}=2\frac{11}{24}$$

117. *Para verificar la adicion de números mixtos, ó se reducen á quebrados procediendo como en los casos anteriores*, ó pueden sumarse los enteros y aparte los quebrados, adicionando á la una suma la otra.

Sustraccion de números fraccionarios.

PUEDEN OCURRIR TRES CASOS.

118. 1.er CASO. *Para restar dos quebrados de un mismo denominador, se restan los numeradores y á la diferencia se pone por denominador el de ambos quebrados.*

Ejemplo: $\frac{7}{11}-\frac{3}{11}=\frac{4}{11}$

2.° CASO. *Para restar dos quebrados de diferentes de-*

nominadores, si estos son primos entre sí se pone por denominador comun el producto de los dados, y por numerador de cada uno el producto del suyo respectivo por el denominador del otro: hecho esto se restan como en el caso anterior.

Ejemplo: $\frac{6}{7}-\frac{4}{5}=\frac{30}{35}-\frac{28}{35}=\frac{2}{35}$

3.er CASO. *Para restar dos quebrados de diferentes denominadores, pero que no son primos entre sí*, se halla el *m. m. c.* de los denominadores de ambos y este será el denominador comun; su numerador respectivo se formará del producto de este, por el cociente que resulte de dividir el *m. m. c.* hallado por el denominador respectivo.

Ejemplo: $\frac{17}{24}-\frac{9}{16}=\frac{34}{48}-\frac{27}{48}=\frac{7}{48}$

119. *Para restar dos números mixtos se reducen á quebrados y se restan como ya sabemos.*

Para restar de un número entero un quebrado se reduce el entero á la forma fraccionaria de la especie del quebrado, se restan los numeradores poniendo á la diferencia por denominador el de ambos quebrados.

Ejemplo: $6-\frac{3}{2}=\frac{12}{2}-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$

Para restar de la unidad un quebrado propio se resta el numerador del denominador y á la diferencia se pone por denominador el del quebrado.

Ejemplo: $1-\frac{7}{9}=\frac{9-7}{9}=\frac{2}{9}=\frac{9}{9}-\frac{7}{9}$

Multiplicacion de números fraccionarios.

120. *Para multiplicar números fraccionarios se multiplicarán sus numeradores, partiendo este producto por el de sus denominadores.*

NOTA. Solo para efectuar las operaciones de adicion y sustraccion de números fraccionarios, se requiere que estos sean de la misma especie ó sea del mismo denominador.

Ejemplo sea $\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}$ esto es, hallar las dos terceras partes de cinco sestos: tendremos por tanto que la tercera parte de $\frac{5}{6}$ será como sabemos $\frac{5}{6\times3}$ y como las dos terceras partes serán $\frac{5}{6\times3}\times2$ tendremos que será $\frac{5\times2}{6\times3}$. Si los factores fuesen mas dos se efectuará de la misma manera.

121. *Para multiplicar dos números mixtos se reducen á quebrados, multiplicándolos luego como á tales.*

Para multiplicar un entero por un quebrado está indicada la demostracion en el número (115).

El producto de un quebrado por su denominador, será evidentemente su numerador.

Dos quebrados se llaman inversos cuando lo que el uno tiene por numerador, lo tiene el otro por denominador y vice-versa.

El producto de dos quebrados inversos será otro de iguales términos, luego valdrá la unidad.

En efecto $\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{35}{35}=1$

Division de números fraccionarios.

122. Hemos visto qne para dividir un quebrado por un entero, ó se divide el numerador por el entero dejando el mismo denominador; ó se multiplica el denominador por el entero dejando el mismo numerador, porque en efecto: $\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}$ ó $\frac{6}{7}:3=\frac{6}{7\times3}=\frac{6}{21}$ pero $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$

De aquí deduciremos que para dividir un quebrado por otro quebrado, deberá partirse el producto del numerador del dividendo y denominador del divisor, por el de denominador del dividendo y numerador del divisor.

En efecto, sea $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$, observemos que 4, es 5 veces mayor que $\frac{4}{5}$ y entónces si solo fuera $\frac{2}{3}:4$ seria $\frac{2}{3\times4}$ pero como no se ha de dividir por 4 sino por un número

5 veces menor, será evidente que al cociente para ser el verdadero, habrá que multiplicarle por 5, luego será $\frac{2}{3\times4}\times5=\frac{2\times5}{3\times4}$ que será lo dicho ó sea el resultado de multiplicarlos en cruz.

123. *Para dividir un entero por un quebrado se multiplica el entero por el denominador del quebrado y su producto se parte por el numerador*, porque en efecto, suponiendo al entero la unidad por denominador, el resultado de verificar la operacion como en el caso anterior, será lo espresado, así:

sea $4:\frac{2}{3}=\frac{4}{1}:\frac{2}{3}=\frac{4\times3}{2}=\frac{12}{2}=6$

La relacion que existe entre dividir un entero por un quebrado, ó el quebrado por el entero, es la misma que la que existe entre dos quebrados inversos.

El cociente que resulta de dividir la unidad por un quebrado, será el quebrado inverso, como corolario de lo espresado en el número (121).

El cociente de dos quebrados del mismo denominador es el mismo que el de sus numeradores.

En efecto, $\frac{5}{7}:\frac{3}{7}=\frac{5.7}{3.7}=\frac{5}{3}$

El cociente de dos quebrados del mismo numerador es el mismo que el de sus denominadores tomados inversamente.

En efecto, $\frac{8}{5}:\frac{8}{10}=\frac{8.10}{8.5}=\frac{10}{5}=2$

124. *Para dividir un número mixto por otro mixto se reducen á quebrados y se procede como en estos.*

Elevacion á potencia de números fraccionarios.

125. *La potencia de una fraccion*, es el resultado de multiplicarla por sí misma cierto número de veces; y como ya sabemos como se multiplican los quebrados, diremos que la potencia de una fraccion es igual á la potencia del numerador partida por la del denominador.

En efecto $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3.3}{4.4}=\frac{9}{16}$

126. *La potencia de un número mixto* se halla reduciéndole á quebrado impropio y procediendo con este como en el caso anterior.

Así: $\left(3\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2=\frac{13^2}{4^2}=\frac{169}{16}=10\frac{9}{16}$

127. Debemos hacer observar que el resultado de elevar un quebrado propio á una potencia *disminuye á medida que aumente el exponente*, porque en efecto, multiplicado un número por la unidad, no varía; y como si se multiplica por un número mayor que uno, aumenta; será evidente, que si se multiplica por un número menor que uno disminuye, tanto cuanto menor que *uno* sea. En efecto:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\quad\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\quad\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

y $\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{8}>\frac{1}{16}$

De esto deduciremos que siempre nos será posible convertir una division indicada en una multiplicacion equivalente y vice-versa.

Así $35:7=35\times\frac{1}{7}=5.\quad 40\times\frac{1}{8}=40:8=5.$

La potencia de un quebrado impropio igual á la unidad es siempre igual á uno, porque ambos términos serán siempre iguales.

La potencia de un quebrado impropio, sigue la ley natural, idéntica á los números enteros, de aumentar á medida que aumente el exponente.

FRACCIONES BAJO LA FORMA ENTERA Ó SEAN FRACCIONES DECIMALES.

ESPRESION Y NUMERACION DE LAS MISMAS.

128. *Llámanse fracciones decimales aquellas cuyo denominador es la unidad seguida de uno ó mas ceros.*

Si la unidad se divide en 10 partes iguales, se llaman *Décimas*

100	Centésimas.
1.000	Milésimas.
10.000	Diez milésimas.
100.000	Cien milésimas.
1000.000	Millonésimas.

De lo cual admitiremos como evidente que una unidad vale tanto como *10 décimas,* ó como *100 centésimas,* ó como *1000 milésimas,* ó como *10.000 diez milésimas,* ó como *100.000 cien milésimas,* ó como *1000.000 de millonésimas,* etc.

Por tanto, *una décima valdrá diez centésimas, ó cien milésimas, ó mil diez milésimas, diez mil cien milésimas, ó cien mil millonésimas,* etc. Luego recíprocamente conviene tener presente, que *diez millonésimas equivalen á una cien milésima; que diez cien milésimas equivalen á una diez milésima; que diez diez milésimas equivalen á una milésima; que diez milésimas equivalen á una centésima; que diez centesimas equivalen á una décima; asi como diez décimas equivalen á una unidad;* como diez unidades equivalen á una decena, como diez decenas equivalen á una centena, etc., y que cuanto aquí referimos á una unidad, podemos proporcionalmente referirlo á las unidades que fueren espresadas.

129. Los números decimales se separan de los enteros por medio de una *coma* ó *vírgula*; las cifras colocadas á la izquierda de la misma, espresan los enteros, y las á la derecha, las cifras decimales, las cuales no necesitan denominador esplícito, porque se supone siempre ser la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la fraccion decimal.

130. Para leer un número decimal, se leerá cual si fuese entero, y al final se espresa el órden decimal de su última cifra:

Así 0,047 serán cuarenta y siete *milésimas,* 31,04723 son treinta y un entero y cuatro mil setecientos veinte y tres *cien milésimas.*

Para escribir un número decimal despues de enunciado, se colocará cada cifra en el lugar respectivo.

Así, veinte y cinco enteros y nueve millonésimas, se escribirá, 25,000009.

Los ceros á la derecha de un número decimal no alteran su valor, pues por cada uno que se le coloque, quedará multiplicado por 10, pero tambien lo queda el denominador implícito correspondiente al mismo, por lo cual no cambiará el valor del número decimal. Tampoco cambiará, si terminando en ceros se le suprimen de su derecha. De lo cual se desprende que para reducir números decimales á otros de igual denominacion, puede hácerse colocando ó suprimiendo ceros é igualando así en número de cifras las correspondientes á cada fraccion o número decimal.

131. *Si la coma de un número decimal se traslada uno ó mas lugares á la derecha, el número decimal queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares haya corrido la coma;* en efecto, por cada lugar que pase la coma de izquierda á derecha convertirá las décimas en unidades, las centésimas en décimas, las milésimas en centésimas; así como en las cifras de la parte entera las correspondientes á cada órden habrán pasado al superior inmediato, y como estas van de 10 en 10 aumentando en valor, habrá quedado el número multiplicado por 10; luego si se corre dos, tres, etc., habrá quedado multiplicado por 100, 1000, etc. Por el contrario tendremos que *si la coma de un número decimal se corre uno ó más lugares á la izquierda, el número habrá quedado dividido por la unidad seguida de tantos ceros como lugares haya corrido.*

Operaciones con los números decimales.

Adicion.

132. *Para sumar fracciones decimales las sumaremos como si fuesen enteros, teniendo cuidado antes de que las cifras correspondientes á un mismo órden se coloquen unas debajo de las otras y poniendo en la suma la coma en su lugar respectivo,* debemos procurar agregando ceros á la derecha de los sumandos, que todos estén espresados por unidades del mismo órden decimal.

Sustraccion.

133. *Para restar números decimales, procederemos como en los números enteros, procurando que las cifras se correspondan y colocando la coma en su lugar respectivo.*

Multiplicacion.

134. Sabido que para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se coloca la coma tantos lugares á la derecha cuantos ceros acompañen á la unidad multiplicadora, segun lo espresado en (131)

Tendremos que *para multiplicar dos números decimales se debe prescindir de las comas, multiplicándolos cual si fuesen enteros y separando despues tantas cifras del producto, cuantas hubiere en ambos factores.* En efecto, sea $6{,}35 \times 0{,}621$ prescindiendo de la coma en el multiplicando, queda este multiplicado por 100; prescindiendo de ella en el multiplicador queda multiplicado por 1000, luego el producto resultará multiplicado por $100 \times 1000 = 100.000$ que es por quien habrá que dividirlo, separándole en este caso las cinco últimas cifras de su derecha.

Cuando ocurra que el número de cifras que hubiesen de separarse en el producto fuese mayor que las que formen este, se agregarán ceros á su izquierda hasta el completo, poniendo antes de los mismos la coma y el que ha de espresar cero entero.

135. Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma tantos lugares á la izquierda cuantos ceros acompañen á la unidad divisora segun lo espresado en el número (131.)

Division.

136. *Para dividir un número decimal por un entero se dividen cual si fuesen enteros, separando luego de la derecha del cociente tantas cifras decimales cuantas tenga el dividendo;* porque en efecto, al prescindir de la coma en el dividendo, queda este multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga, y el cociente, por tanto, quedará multiplicado igualmente; luego para que el cociente sea el verdadero habrá que dividirle por la unidad seguida del mismo número de ceros, que será lo mismo que separarle de su derecha tantas cifras decimales cuantas tenga el dividendo.

137. *Para dividir un número decimal por otro decimal ó un entero por un decimal, se multiplican ambos términos de la division por la unidad seguida de tantos ceros como ci-*

fras decimales tenga aquel de los dos términos que tenga mas, verificándose despues la division de estos números conforme la de los enteros; es evidente que el cociente no cambiará.

Potencia de un número decimal.

138. *La potencia de un número decimal se obtiene fácilmente, hallándola cual si se tratase de un número entero y separando luego tantas cifras decimales cuantas tuvieren los factores*, que serán las que indique el exponente por las que tuviere el número dado.

Reduccion de fracciones ordinarias á decimales.

139. El procedimiento generalmente seguido para reducir una fraccion ordinaria á decimal consiste en dividir el numerador por el denominador, y obtendremos así la parte entera; quedará un resto menor que el divisor, el cual multiplicado por 10 quedará reducido á décimas, y el cociente de partirlas por el divisor serán las décimas de la fraccion decimal; si queda nuevo resto se multiplicará por 10, y convertido así en centésimas el nuevo cociente de dividirlas, serán las centésimas de la fraccion; si queda resto se multiplica por 10 y serán milésimas el producto; y su cociente será la tercera cifra del cociente, y por tanto las

---

Nota. Como el objeto al reducir una fraccion ordinaria á decimal es convertirla en otra equivalente cuyo denominador sea 10 ó una de sus potencias, tambien se podrá obtener, dado un quebrado ordinario, hallando primeramente su equivalente irreducible y dividiendo luego 10, 100, 1000 etc. por el denominador, hasta obtener un cociente exacto; despues multiplicaremos ambos términos por espresado cociente y habremos obtenido así el quebrado decimal equivalente: sin embargo, no siempre es posible hacer esto por que hay fracciones ordinarias que se reducen mal á decimales, las cuales son llamadas PERIÓDICAS; al tratarse de estas no es por 10 y sus potencias por quien debemos dividir su denominador, sino por un número que discrepe de una potencia de 10 en una unidad, que será del primer órden en las que producen fracciones decimales *p. p.* y de órden mas superior en las que produzcan fracciones decimales *p. m.*

milésimas del mismo, toda vez que siempre el cociente es de la especie del dividendo, etc.

140. *El número de cifras de la fraccion decimal equivalente á un quebrado ordinario serán limitadas y por tanto exacta siempre que el denominador no contenga, descompuesto en factores, mas que al 2 y al 5 ó solo á uno de ellos*; porque en efecto, el 2 y 5 son los factores de 10 y como al numerador y restos se van agregando ceros en las divisiones sucesivas, llegará un momento en el cual el producto de uno de los restos por 10 llegue á contener exactamente al divisor, por ejemplo $\frac{3}{8}=0{,}375$.

141. *El número de cifras de la fraccion decimal equivalente á un quebrado ordinario, será ilimitada, si los factores de el denominador de la misma son primos entre sí con 2 y 5*, porque en efecto, los productos de este numerador y restos sucesivos por 10, cuyos únicos factores son 2 y 5, no puede constituirle en un múltiplo del denominador, por lo cual la division será siempre inexacta é ilimitado por tanto el número de cifras decimales del cociente; además como el denominador es un número invariable y los restos de la division no pueden ser mayores que el divisor, resultará que el número de restos diferentes no puede ser mayor que el de las unidades que tenga el divisor menos una, por lo cual tendrán que repetirse los restos periódicamente y por tanto las cifras del cociente; luego la fraccion decimal producida es *periódica*.

Ejemplo: $\frac{2}{7}=0{,}285714\ 285714.....$

De esto deduciremos que todo número entero ó quebrado ordinario se podrá representar por una fraccion decimal, ó que toda fraccion decimal se podrá equivaler á un número entero ó á un quebrado ordinario, de donde por tanto, un número que no sea conmensurable, es decir entero ó quebrado, no podrá ser representado por fraccion decimal, aunque esta sea periódica, pues las fracciones decimales periódicas son todas equivalentes á quebrados ordinarios cuyos denominadores son primos con alguno de los factores 2 ó 5 cuando menos.

142. *El número de cifras decimales de una fraccion ordinaria*, capaz, segun lo demostrado en el teorema (140,) de producir *decimal exacta, serán tantas como unidades tenga el mayor exponente del factor 2 ó 5 que entre en su denominador*. En efecto, siendo el quebrado ordinario

irreducible, claro es que su numerador y denominador serán primos entre sí, y como antes digimos en el Teorema citado, que el denominador habia de estar solo formado por el producto de factores 2 ó 5. para llegar á formar del numerador un múltiplo del denominador, necesitaremos multiplicarle por la unidad seguida de tantos ceros como veces el factor 2 ó 5 entre en el denominador. No se deben contar simultáneamente las veces que entre el factor 2 y 5, porque siendo $2\times5=10$ por cada cero que se coloque á la derecha del numerador entra una vez cada factor, luego basta atender al mayor número de veces que entre como factor en el denominador ó el 2 ó el 5.

143. * *El número de cifras que tendrá el periodo de una fraccion decimal periódica pura equivalente á una ordinaria dada, serán tantas como tenga el número menor que compuesto solo de nueves, sea capaz de contener al denominador.*

Para la demostracion de este Teorema se requiere el Lema siguiente: *Todo número entero primo con 10, ha de tener necesariamente un múltiplo que se escriba solo con nueves.* Sea N el número primo con 10 y por tanto con 2 y 5, divisores de 10, vamos á demostrar que 9999.... es ún múltiplo de N.

Los resíduos de dividir 999.... por N son forzosamente menores que N, y por tanto si no se llega á obtener cociente exacto los restos se repetirán: y en efecto, suponiendo que sin haber obtenido cociente exacto llegásemos á obtener dos dividendos tales como 99999 y 99 que escediesen á un múltiplo de N en el mismo resto, la diferencia entre los dos seria un múltiplo de N, es decir que $99999-99=m.$ de N. ó que $99900=m.$ de N evidentemente N es factor del segundo miembro, luego lo será del primero, pero N es primo con 10, segun la hipótesis, luego lo será con 100 y por tanto tendrá que ser divisor de 999: por lo cual será imposible obtener dos restos iguales sin haber encontrado antes un cociente exacto, de lo cual será evidente que 999.... es un perfecto múltiplo de N.

Para la demostracion del Teorema, observaremos que si el quebrado produce fraccion decimal periódica pura, es porque su denominador es primo con los factores del 10, que son 2 y 5, luego el quebrado dado á no poder ser equivalente exactamente á otro que tenga por denominador una potencia de 10, lo será á otro que tenga por numerador el *periodo* y por denominador un número compuesto solo de nueves, segun el lema que antecede, luego este número será un múltiplo del denominador del quebrado dado y el periodo ha de ser un múltiplo del numerador respectivo; mas para espresar la fraccion decimal lo hacemos solo con el numerador ó periodo, anteponiendo la parte entera si la hay ó cero entero, coma y el periodo que deberá tener tantas cifras como nueves tenga su denominador supuesto. Si el número de cifras del numerador fuese menor que el de nueves de su denominador, le precederán á aquellas tantos ceros como fuesen necesarios á completar en igual número de cifras del numerador y denominador.

144. * De lo espuesto en los Teoremas anteriores se infiere, que: el número de cifras decimales que tendrá la fraccion decimal p. m. equivalente á una ordinaria tal que su denominador siendo primo con 2 no lo es con 5, ó siendo primo con 5 no es con 2; serán unas que no se repiten y forman por tanto la parte *no periódica*, y otras que se repiten, constituyendo por tanto la parte *periódica*; aquellas serán tantas como unidades tenga el exponente del factor 2 ó 5 que entre en su denominador; estas serán tantas, como nueves tenga un número, que compuesto solo de los mismos, sea capaz de contener á todos los factores primos con 2 y 5 que entren en su denominador.

Reduccion de fracciones decimales á las ordinarias generatrices.

145. Hemos visto en lo indicado en el número (139) que al reducirse los quebrados ordinarios á fracciones decimales podrian producir fracciones decimales exactas ó periódicas, pudiendo ser estas *puras* ó *mixtas*: veamos ahora como estas, por el contrario, se reducen á aquellas.

Teniendo en cuenta lo espuesto en la numeracion de las fracciones decimales, deduciremos fácilmente que *dada una fraccion decimal exacta, hallaremos su ordinaria generatriz, poniendo por numerador las cifras decimales que la constituyen sin cero entero ni coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga aquella,* dividiendo luego ambos términos por su m. c. d., hallaremos la fraccion ordinaria generatriz pedida.

Sea 0,625 digo que vale $\frac{625}{1000}=\frac{5}{8}$

146. *Para reducir una fraccion decimal periódica á su ordinaria generatriz, observaremos si aquella es periódica pura ó mixta. Si la fraccion es periódica pura, se pondrá por numerador un periodo y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tenga el periodo;* despues se simplifica, y la fraccion irreducible será la generatriz pedida. En efecto, sea f=0,8793 8793... multiplicando ambos miembros por 10000, que es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el periodo,

tendremos que $10000f=8793,8793....$ y restando de esta igualdad la anterior, tendremos que $9999f=8793$ en la cual partiendo ambos miembros por 9999 tendremos que $f=\frac{8793}{9999}$ la cual simplificada nos dará $f=\frac{977}{1111}$ fraccion que será la ordinaria generatriz.

147. *Si la fraccion decimal fuese periódica mixta, para hallar su ordinaria generatriz se pondrá por numerador la diferencia entre la parte no periódica seguida del periodo y la parte no periódica, y por denominador un número formado de tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.*

En efecto, sea $f=0,45723723.....$ la fraccion decimal periódica mixta, multiplicando ambos miembros por 100.000, que es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene *el periodo y parte no periódica*, tendremos que $100.000f=45723,723.....$ multiplicando de nuevo la igualdad primitiva por 100, que es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte *no periódica*, dará $100f=45,723.....$ y restando esta, de la igualdad anterior tendremos que $99900f=45723-45$. Si partimos ahora ambos miembros por 99900 tendremos que

$$f=\frac{45723-45}{99900}=\frac{7613}{16650}$$

que será la fraccion irreducible y por tanto la ordinaria generatriz que buscamos.

Propiedades de las igualdades fraccionarias.

148. Habiendo observado que una cantidad puede representarse en cuantas formas fraccionarias se quiera, si elegimos é igualamos dos fracciones que espresen la misma cantidad, constituiremos una igualdad fraccionaria y en cada una de las dos fracciones que la forman, será igual la relacion del numerador con su denominador respectivo, relacion que en definitiva en el quebrado, no es otra cosa que el valor de la *fraccion*, ó el *cociente* de la division de sus dos términos, ó la *razon* de comparacion entre los mismos. Segun lo cual, numéricamente es lo mismo decir *fraccion, cociente* ó *razon*: de la misma manera como son idénticas las ideas de *numerador, dividendo* ó *antecedente*, asi como lo son las de *denominador, divisor* ó *consecuente*.

Las igualdades fraccionarias, son aun hoy, mas conocidas con el nombre de *Proporciones*, y aunque antes se trataba esta Teoria con prolijos detalles, como no constituye otra cosa que la exposicion facilísima de las transformaciones que pueden hacerse con las igualdades fraccionarias, las colocaremos en este lugar, recomendando su estudio por sus numerosas aplicaciones á la resolucion del sin número de problemas que con las mismas se resuelven, algunas de las cuales esplicaremos en las aplicaciones de la Aritmética.

Una igualdad fraccionaria será $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}$ y la mas general de sus formas será $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

En ella llamaremos *términos opuestos* á los estremos a, d, y poniendo la primera fraccion por la segunda lo serán tambien c, b.

149. *En toda igualdad fraccionaria se verifica que el producto de dos términos estremos ú opuestos es igual al producto de los otros dos.*

En efecto, sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, vamos á demostrar que $ad=bc$; multiplicando los dos miembros de la igualdad fraccionaria por el producto de los dos denominadores será $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$ suprimiendo en los dos términos de cada miembro el factor comun, quedará demostrado lo que queriamos probar.

El valor de uno de los 4 términos de una igualdad fraccionaria estará dado, por el producto de los dos opuestos conocidos, partido por el que solo es conocido de los otros dos opuestos. Siendo $ad=bc$ partiendo ambos miembros por a, d, b, c, tendremos respectivamente

$$d=\frac{bc}{a};a=\frac{bc}{d};c=\frac{ad}{b};b=\frac{ad}{c}$$

Si una igualdad fraccionaria tuviere dos términos opuestos iguales, este se llamaria medio proporcional, el cuadrado del cual sería igual al producto de los otros dos; así siendo $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ será tambien $ac=b^2$ igualdad en la cual siendo b desconocido, tendriamos que extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros, resultaría $b=\sqrt{ac}$ por tanto el medio proporcional, es igual á la raiz cuadrada del producto de los términos opuestos conocidos, que son entre sí diferentes: y cada uno de estos será igual al cociente del cuadrado del medio proporcional por el opuesto conocido.

150. *Dos productos iguales, compuesto cada uno de dcs factores, pueden formar una igualdad fraccionaria poniendo por términos opuestos los factores de cada producto.*

En efecto, si $ad=bc$, dividiendo ambos miembros por el producto de dos factores uno de cada uno, por ejemplo, por ab, será $\frac{ad}{ab}=\frac{bc}{ab}$ simplificando será $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ lo que se queria demostrar.

151. *Sin dejar de ser opuestos dos á dos los mismos términos de una igualdad fraccionaria, puede esta afectar 8 formas que son las que en la teoria de proporciones se llamaban Alternadas, Invertidas, Permutadas.*

En efecto, si la propiedad de toda igualdad fraccionaria es que el producto de dos términos opuestos es igual al de los otros dos, como son los mismos los términos opuestos la igualdad fraccionaria subsistirá.

Así, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$

$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$; $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

152. *Con dos igualdades fraccionarias que tengan un miembro comun, se podrá suprimir este y formar igualdad fraccionaria con las otras dos;* porque en efecto, dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí;

luego si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}=\frac{s}{r}$ será $\frac{c}{d}=\frac{s}{r}$

153. *Si dos igualdades fraccionarias tienen los mismos numeradores ó denominadores, con los otros cuatro términos se puede formar proporcion ó nueva igualdad fraccionaria.*

En efecto, porque si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{r}=\frac{c}{s}$ tendremos que $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ y $\frac{a}{c}=\frac{r}{s}$ luego evidentemente $\frac{b}{d}=\frac{r}{s}$

154. *El producto de varias igualdades fraccionarias produce otra tambien igual:*

En efecto: si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$ y $\frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$

tendremos que $\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''}$

y por tanto $\frac{aa'a''}{bb'b''}=\frac{cc'c''}{dd'd''}$

* De esto deduciremos que las mismas potencias ó raices de dos fracciones que constituyen una igualdad fraccionaria, forman tambien idéntica igualdad fraccionaria, y en efecto, puesto que si las igualdades fraccionarias anteriores fuesen exactamente iguales seria $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$ y por análoga razon $\frac{\sqrt{a^n}}{\sqrt{b^n}}=\frac{\sqrt{c^n}}{\sqrt{d^n}}$

155. *En toda igualdad fraccionaria se verifica que la suma de los dos términos del primer quebrado partida por el numerador ó denominador del mismo, es igual á la suma de los dos términos del segundo quebrado, partida por su numerador ó denominador respectivo.*

Sea la igualdad fraccionaria $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ añadiendo á ambos miembros la unidad ó sea $\frac{b}{b}$ al primer miembro, y $\frac{d}{d}$ al segundo que evidentemente constituyen el valor de la unidad, tendremos $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ toda vez que teniendo ámbos términos en cada miembro el mismo denominador, se sumarán los numeradores partiendo cada uno por su denominador respectivo. Ahora bien, la igualdad fraccionaria $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se puede tambien espresar por $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, de donde procediendo como en el caso anterior resultará que $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$

156. *En toda igualdad fraccionaria se verifica que la*

diferencia entre los dos términos del primer quebrado partida por su numerador ó denominador respectivo, es igual á la diferencia de los dos términos del segundo, partida igualmente por su numerador ó denominador respectivo.

Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ la igualdad fraccionaria, siendo los dos quebrados propios, restando cada una de la unidad será $\frac{b}{b}-\frac{a}{b}=\frac{d}{d}-\frac{c}{d}$ luego $\frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{d}$. Si ahora, las consideramos como fracciones impropias restaremos de cada una la unidad y será $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. Pero tambien sabemos que la igualdad primitiva se puede espresar por $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ y procediendo en esta como en la anterior, tendremos que $\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$ y tambien que $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

157. *En toda igualdad fraccionaria se verifica que la suma de los dos términos de la primera fraccion, partida por la diferencia de los mismos; será tambien igual á la suma de los términos de la segunda fraccion partida por la diferencia de los mismos.*

En efecto, por lo demostrado en el teorema (155) tenemos que $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$ Por lo demostrado en el teorema (156) tenemos que $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$, luego por lo demostrado en el (153) tendremos que $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

158. *En toda igualdad fraccionaria se verifica que: entre la suma ó diferencia de los dos numeradores y la suma ó diferencia de los dos denominadores, media la misma razon que existe entre los términos de cualquiera de las dos fracciones.*

En efecto de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ tenemos que $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ y de esta, por tanto, segun lo demostrado anteriormente tendremos que $\frac{a \pm c}{a} = \frac{b \pm d}{b}$ luego de esta tendremos que $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

159. *En toda igualdad fraccionaria, se verifica tambien, que el cociente que resulta de dividir la suma de sus numeradores por la diferencia de los mismos; es igual á la suma de los denominadores partida por la diferencia de los mismos.*

En efecto, de ser $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, segun lo anteriormente espuesto, se desprende que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ y $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ luego $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ y tambien $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$

160. *En toda serie de igualdades fraccionarias se verifica que la suma de todos los numeradores, partida por la suma de todos los denominadores, produce una razon idéntica á la que existe entre los dos términos de cualquiera de las fracciones.*

En efecto, sea $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{d}{d'} \cdots\cdots\cdots = \frac{n}{n'}$ si llamamos c al cociente, claro es que será $a = a'c$; $b = b'c$; $d = d'c$ .... $n = n'c$ igualdades que sumadas ordenadamente nos dan $a+b+d+\ldots\ldots+n = a'c+b'c+d'c+\ldots\ldots+n'c$, y separando el factor comun c tendremos que

$$a+b+d+\cdots\cdots+n = c\ (a'+b'+d'+\cdots\cdots+n')$$

de donde tendremos que

$$c = \frac{a+b+d+\ldots\ldots+n}{a'+b'+d'+\ldots\ldots+n'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO SEGUNDO

QUE COMPRENDE Á LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS ORDINARIOS Y DECIMALES CON LAS PROPIEDADES DE LAS IGUALDADES FRACCIONARIAS.

I. Reducir varios quebrados ó á un comun denominador ó á un comun numerador, por la aplicacion del M. M. C.

II. La division indicada por los dos términos de un quebrado se podrá expresar por dos factores?

III. Demostrar que la suma de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$etc. puede llegar á ser mayor que un número dado.

IV. Demostrar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ etc., no llega á la unidad.

V. Qué condiciones habrán de tener dos quebrados para que el producto de ellos sea *igual, mayor* ó *menor* que la unidad.

VI. Si se añade á los dos términos de un quebrado un mismo número entero; se podrá obtener una fraccion igual á la unidad?

VII. ¿Qué fraccion es la que sumada con 11 produce la novena parte de 334?

VIII. Siendo $\frac{51}{48}$ la suma de cinco quebrados uno de ellos $\frac{1}{12}$ y siendo el segundo y tercero iguales entre sí y cualquiera de ellos igual á la suma del cuarto y quinto ¿cuales serán estas fracciones?

IX. Hallar un número tal que sumado con sus tres novenas partes produzca 48.

X. Demostrar los teoremas del producto de varios factores, ó del cociente de varios divisores, siendo todos los términos fraccionarios.

XI. Cuantas milésimas tendrá una centésimas y cuantas centésimas tendrá un millon?

XII. Espresar seis quebrados ordinaríos que reducidos á decimales produzcan respectivamente fracciones decimales exacta á la 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª y 6.ª cifra.

XIII. Espresar otros seis quebrados ordinarios que convertidos en decimales produzcan fracciones periódicas puras en cada una de las cuales respectivamente tenga el periodo, 1, 2, 3, 4, 5, y 6 cifras decimales.

XIV. Espresar otros seis quebrados ordinarios que reducidos á decimales, las produzcan periódicas mixtas, teniendo respectivamente una cifra la parte no periódica, y otra la periódica, en la primera: dos cifras la parte no periódica, y otras dos la parte periódica en la segunda etc.

XV. Verificar las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y elevacion á potencias, con las fracciones decimales que fueren propuestas.

XVI. Demostrar los teoremas del producto de varios factores y el cociente de varios divisores, siendo todos los términos fracciones decimales.

XVII. Hacer con la igualdad fraccionaria $\frac{4}{13}=\frac{16}{52}$ todas las transformaciones espresadas en su respectiva teoria, sin que deje de existir su relacion constante.

XVIII. Convertir en igualdades fraccionarias los siguientes productos $12\times8=16\times6$; $7\times30=3\times70$.

LIBRO TERCERO.

NÚMEROS INCONMENSURABLES.

Propiedades de los números inconmensurables

161. *Llámanse* números inconmensurables *aquellos que no pueden expresarse exactamente ni por el concurso de varias unidades enteras, ni por la reunion de varias partes alícuotas de la unidad dividida, es decir, ni por los números fraccionarios.*

Los números inconmensurables se producen numéricamente por las extracciones de raices inexactas de los números enteros ó fraccionarios.

162. *Todo número inconmensurable se halla comprendido entre dos conmensurables tan próximos entre sí como se quiera,* por lo cual se podrá tomar por valor de un número inconmensurable, otro conmensurable tal, que discrepe del valor de aquel, en una cantidad tan pequeña como se desee

En efecto, si para determinar el valor de un número inconmensurable elegimos por unidad una parte alícuota de la misma tal como 0,01 0,001 0,0001 etc. ú otra tan pequeña como se quiera, por ejemplo $\frac{1}{n}$ observaremos que esta está contenida c veces en la cantidad inconmensurable m, quedando por tanto un resto r menor que el divisor $\frac{1}{n}$: por tanto tendremos que $m=c\times\frac{1}{n}+r$; pero $r<\frac{1}{n}$, luego $\frac{c}{n}<m<\frac{c+1}{n}$ mas siendo $\frac{c+1}{n}$ mayor que $\frac{c}{n}$ en la cantidad $\frac{1}{n}$, como este ha sido nuestro término de comparacion para determinar m por medio de un número fraccionario, tendremos evidentemente, que al espresar este número m, por $\frac{c}{n}$ ó por $\frac{c+1}{n}$ el error que cometemos es menor que $\frac{1}{n}$, que está en nuestras atribuciones disminuir tanto como queramos.

163. Toda cantidad que por su naturaleza particular puede solo espresarse por un valor mas ó menos aproximado y el cual tiende á otro que se conserva fijo, se llama *variable*, y aquel valor fijo á que se aproxima se llama *constante;* si á este no alcanza nunca aquel, esta cantidad constante será su límite.

Por ejemplo: $\frac{4}{11}=0,363636.....$ $\frac{4}{11}$ será la constante y límite superior de 0,36... que será la variable. Cuando una cantidad constante es mayor que la variable, será el límite superior de esta, y en el caso contrario será el límite inferior.

Para la perfecta inteligencia de lo espresado espondremos el siguiente Teorema.

Si á los dos términos de un quebrado propio se les añade un mismo número entero, el nuevo quebrado es mayor que el propuesto y su límite máximo será la unidad: y si á los dos términos de un quebrado impropio se les añade un mismo número entero, el nuevo quebrado es menor que el dado, y su límite mínimo es la unidad. En efecto, sea en el primer caso $\frac{3}{5}$ el quebrado, añadiendo á ambos términos n será $\frac{3+n}{5+n}$; demostremos que este quebrado es mayor que el dado: reduciéndolos á un comun denominador producirán respectivamente $\frac{15+3n}{25+5n}$ y $\frac{15+5n}{25+5n}$ de donde observaremos que $\frac{3+n}{5+n}$ es mayor que $\frac{3}{5}$

Si por el contrario y para demostrar el segundo estremo fuese el quebrado impropio $\frac{5}{3}$, añadiendo n á ambos términos dará $\frac{5+n}{3+n}$ que reducidos ambos á un comun denominador darán $\frac{15+5n}{9+3n}$ y $\frac{15+3n}{9+3n}$ en el que como vemos el segundo quebrado es menor que el primero, lo que nos hará reconocer á la unidad como el *límite superior* de todo quebrado propio, cuyos dos términos van recibiendo incremento, siendo á la vez el *límite inferior* de todo quebrado impropio, cuyos dos términos disminuyen por sucesivos decrementos.

164. *Si una cantidad variable tiene dos límites superiores, estos serán forzosamente iguales.* En efecto, pues si llamamos M á la cantidad variable y P y R á sus dos límites superiores, estos no pueden ser diferentes, porque de serlo, como la variable es menor que P y R evidentemente se aproximaria mas, no siendo iguales, al menor de los mismos, luego le faltaria para aproximarse al mayor, una cantidad mayor que la diferencia entre P y R, lo cual es contrario á la definicion del límite.

165. Teorema de los Limites. *Los límites de dos cantidades variables serán iguales si estas se conservan perfectamente iguales en todos sus grados de magnitud,* porque en efecto, una cantidad variable no puede tener mas que un solo límite superior; si pues hay dos variables perfectamente iguales, podremos espresarlas de una misma manera, lo cual si es así, hará que de un solo modo podamos tambien espresar sus límites, luego estos serán iguales.

Corolarios: *El límite de una suma, diferencia, producto ó cociente de cantidades variables, será la suma, diferencia, producto ó cociente de los respectivos límites de las espresadas variables.* Efectivamente, pues si cada variable por sucesivos incrementos se aproxima á su límite, el resultado de cualquiera de las operaciones indicadas podrá ser una nueva variable que guardará con su límite respectivo la misma relacion que cada variable con su constante; por tanto, deben efectuarse con los límites las mismas operaciones que se verifiquen con sus variables, y los resultados obtenidos serán los límites en cada una de las operaciones.

* Los Teoremas (32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 56, 57, 59) son aplicables, no solo á los números conmensurables, sean estos enteros ó fraccionarios, sino tambien á los números inconmensurables, toda vez que estos se podrán espresar por cantidades literales, sustituyendo luego los valores respectivos.

166. *La raiz de un grado cualquiera de un número entero ó fraccionario que no sea una potencia perfecta de otro número entero ó fraccionario, es un número inconmensurable.*

En efecto, supongamos que $\sqrt{c}$ no sea entero, si así es, no puede ser tampoco fraccionario, porque de ser $\frac{a}{b}$ tendríamos que $\frac{a^2}{b^2}=c$ igualdad absurda, porque siendo $\frac{a}{b}$ un quebrado irreducible lo será tambien $\frac{a^2}{b^2}$ que nunca puede dar por valor un número entero c.

Si el número sub-radical fuese quebrado, no siendo potencia exacta de una fraccion, no podrá ser tampoco equivalente á un entero, por que si $\sqrt{\frac{N}{M}}=R$ sería $R^2=\frac{N}{M}$ lo cual es tambien absurdo porque un entero no puede ser igual nunca á un quebrado irreducible. En ambos casos si el quebrado no fuese irreducible se pondría su equivalente tal. De lo dicho se infieren las operaciones con los números.

Inconmensurables.

167. * *Para* SUMAR DOS Ó MAS NÚMEROS INCONMENSURABLES *se reducen á conmensurables, espresando su aproximacion por el mismo número de cifras decimales,* y luego se suman. Se procurará que la mitad de los sumandos se aproximen *por defecto* y la otra mitad *por esceso*, por cuyo procedimiento compensaremos el error que se cometa.

Así $\sqrt{8}+\sqrt{7}=2{,}83+2{,}64=5{,}47$.

* *Para* RESTAR DOS NÚMEROS INCONMENSURABLES *se transforman en conmensurables, espresando su aproximacion por el mismo número de cifras decimales, y despues se restan como tales.* Para esta operacion conviene que se aproximen ó ambos por esceso ó ambos por defecto.

Asi $\sqrt{8}-\sqrt{7}=2{,}82-2{,}64=0{,}18$.

* *Para* MULTIPLICAR DOS NÚMEROS INCONMENSURABLES *se reducen á conmensurables, espresando en ambos su aproximacion por el mismo número de cifras decimales y despues se multiplican como tales.* Para compensar los errores en esta operacion, conviene que uno de los factores esté aproximado por esceso y el otro por defecto.

Así $\sqrt{8}\times\sqrt{7}=2.83\times2.64=7{,}4712$.

* *Para* DIVIDIR DOS NÚMEROS INCONMENSURABLES *se reducen á conmensurables aproximadamente, espresando esta aproximacion por el mismo número de cifras decimales, y luego se dividen como estos, teniendo cuidado que ambos estén aproximados por esceso ó por defecto.*

Así $\sqrt{8}:\sqrt{7}=2,82:2,64=1,071.$

* *El resultado de sumar, restar, multiplicar ó dividir dos números inconmensurables, puede ser conmensurable ó inconmensurable.*

Generalmente la aproximacion con que se reduce un número inconmensurable á conmensurable está dada por una fraccion decimal, pero puede obtenerse con otra aproximacion cualquiera, segun lo que se espone en los números (173) y (180.)

Raices de los números.

168. Raiz de un número, *es otro cuya potencia del mismo grado produce el número sub-radical.*

La extraccion de raices es por lo tanto una operacion de descomposicion, contraproducente de la elevacion á potencias; en esta se *sinteliza* ó compone un número, en aquella se *analiza* ó descompone: con cada una de ellas se comprueba la otra.

Para investigar la raiz de cualquier grado de un número, es necesario conocer la formacion de las potencias del mismo grado de los números.

Las raices de que deberemos ocuparnos son la 2.ª y 3.ª ó *cuadrada y cúbica*, y de aquellas cuyos índices siendo compuestos no contengan mas factores que al 2 y al 3.

Raiz cuadrada de números enteros y fraccionarios.

169. *Raiz cuadrada de un número, es otro que elevado al cuadrado ó á su segunda potencia produce el número dado.*

El signo que espresa la extraccion de raices, es $\sqrt{}$

Los diez números primeros

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
hemos visto tienen por cuadrados.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Observaremos por tanto, que en la primera centena solo hay 10 cuadrados perfectos, por lo cual las raices de los demás números intermedios serán inconmensurables segun lo espresado en (166). Luego la raiz entera correspondiente á los mismos se espresará por la *del mayor cuadrado perfecto* contenido en dicho número. Así la raiz cuadrada de 60 es 7 y quedarán 11 de resto; esto así, es evidente que para extraer la raiz cuadrada de un número menor que 100, será suficiente el conocimiento de los cuadrados espuestos.

Ahora bien, los cuadrados de

1	10	100	1.000	10.000	100.000	etc. serán
1	100	10.000	1000.000	100.000.000	10.000.000.000	etc.

por tanto, la raiz cuadrada de un número menor que 100 y mayor que 1, será menor que 10 y mayor que 1: la de un número menor que 10.000 y mayor que 100, será menor que 100 y mayor que 10: la de un número menor que 1000.000 y mayor que 10.000, será menor que 1.000 y mayor que 100: la de un número menor que 100.000.000 y mayor que 1000.000, será menor que 10.000 y mayor que 1000, etc.

Luego la raiz de un n.° de 1 ó 2 cifras tiene una cifra.
» » » » » de 3 ó 4 » » dos »
» » » » » de 5 ó 6 » » tres »
» » » » » de 7 ú 8 » » cuatro »

Por tanto el número de cifras de la raiz cuadrada de un número, serán espresadas por el de secciones de dos cifras que tenga dicho número, empezando á contar de derecha á izquierda, teniendo presente que la primera seccion de la izquierda puede tener una sola cifra, en cuyo caso la raiz cuadrada correspondiente á la misma será 1, 2 ó 3 por ser las solas cifras, cuyos cuadrados respectivos contienen solo unidades.

Propongámonos ahora hallar la raiz cuadrada de un número cualquiera comprendido entre 100 y 10.000, por ejemplo, 7194, su raiz cuadrada se compondrá, segun lo espuesto, de dos cifras; luego tendrá *decenas* y *unidades*. Si llamamos á las primeras D y á las segundas u, tendremos, segun lo demostrado en el número (72) que $(D+u)^2=D^2+2.D.u+u^2$ cuyo conjunto habrá de valer tanto como 7194. Pero D^2 es el cuadrado de decenas, que compondrán necesariamente cierto número de centenas, las que se hallarán necesariamente comprendidas en las 71 que contiene el número dado, por lo cual la raiz entera de 71 centenas que son 8 decenas, será el mayor número de las en él contenidas, porque aumentadas en una unidad serian 9 y su cuadrado 81 es superior al 71, lo cual no puede ser. Si del número 71 centenas, restamos las 64, cuadrado de las 8 decenas, quedarán 7 centenas, que con las 9 decenas y 4 unidades, compondrán el número 794, el cual habrá de contener necesariamente, *al doble de las decenas por las unidades, mas el cuadrado de las unidades*, si el número dado es cuadrado perfecto, si no tendrá á mas una diferencia que será el resto, cuya condicion de magnitud segun lo espuesto en el número (73) ha de ser menor que el duplo de la raiz obtenida, mas uno.

Para hallar la cifra de las unidades, dividiremos las decenas del resto que son 79 por $2D$, ó sea el duplo de las decenas halladas, que serán 16, el cociente 4, serán las unidades de la raiz, las cuales por 16 componen 64, que deducidas de las 79, restarán 15 decenas, que con las 4 unidades de que antes prescindimos compondrán 154 unidades, de las que deduciendo por último u^2 ó *cuadrado de unidades*, que en este caso son $4^2=16$ y quedarán 138 unidades que constituyen el resto; luego

$$84^2+138=7056+138=7.194.$$

Si el número cuya raiz cuadrada buscásemos estuviere comprendido entre 10.000 y 1000.000, por ejemplo 271.826 le considerariamos formado por 2718 centenas, mas 26 unidades; por el procedimiento anterior hallariamos la raiz cuadrada de 2718 centenas, que serán 52 decenas, y el resto 14 que con 26 unidades forman 142 decenas, mas 6 unidades; se dividirán por 104, duplo de las 52 decenas, y nos dará 1 de cociente y por tanto la raiz cuadrada será 521 y el esceso del número sobre el cuadrado de 521 serán 385.

Disposicion práctica.

	$\sqrt{27.18.26}$	521
Cuadrado de centenas......	25	10 (1.er divisor.)
	21	2 cifra para la raiz.
Duplo centenas por decenas	20	104 (2.° divisor.)
	18	1 cifra para la raiz.
Cuadrado de decenas..........	4	
	142	
Duplo decenas por unidades	104	
	386	
Cuadrado de unidades.........	1	
RESTO.......	385	

luego $521^2+385=271826$. Por tanto: tendremos la siguiente REGLA:

170. *Para extraer la raiz cuadrada de un número entero mayor que 100, se divide en secciones de dos cifras empezando por la derecha, se extrae la raiz cuadrada de la primera seccion de la izquierda y se tendrá la primera cifra de su raiz, el cuadrado de esta cifra se resta de la primera seccion; á la derecha del resto se baja la seccion siguiente, las decenas de este número se dividen por el duplo de las de la raiz hallada, el cociente será la segunda cifra de la raiz, el producto de esta cifra por el duplo de la raiz se resta de expresado número de decenas, y de la diferencia y unidades que contuviere se resta el cuadrado de la cifra del cociente, que subirá á la raiz: á la derecha del resto se bajará la seccion siguiente, las decenas que contenga se dividirán por el duplo de la raiz hallada etc., etc.*

171. *Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado, observaremos si ambos términos tienen ó no raiz cuadrada exacta: en el primer caso su raiz cuadrada será igual á la raiz del numerador partida por la raiz del denominador.*

En efecto: $\sqrt{\frac{64}{81}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}}=\frac{8}{9}$ pues que $\frac{8^2}{9^2}=\frac{64}{81}$.

Si el denominador fuese únicamente cuadrado perfecto la raiz de este quebrado seria igual á la raiz entera del numerador partida por la exacta del denominador, y el error que se comete, en este caso, será menor que la unidad partida por la raiz cuadrada exacta del denominador.

En efecto: $\sqrt{\frac{33}{64}}$ será mayor que $\frac{5}{8}$ y menor que $\frac{6}{8}$ y siendo $\frac{1}{8}$ la diferencia entre estos dos quebrados, estará demostrado.

Con esta aproximacion será siempre posible obtener la raiz de un quebrado, pues si el denominador no es cuadrado perfecto, podremos hacerlo multiplicando numerador y denominador por un número igual à este.

Así: $\sqrt{\frac{8}{11}}=\sqrt{\frac{8\times11}{11\times11}}=\frac{\sqrt{88}}{\sqrt{121}}=\frac{\sqrt{88}}{11}$ que será mayor que $\frac{9}{11}$ y menor que $\frac{10}{11}$.

172. *Para extraer la raiz cuadrada de una fraccion*

decimal, es necesario que se tenga en cuenta que el número de cifras decimales despues de la coma, sea par, lo que se consigue sin alterar su valor, añadiendo un cero á su derecha, si el número de sus cifras es impar. Entónces el denominador será la unidad seguida de un número par de ceros y por tanto cuadrado perfecto.

173. *La raiz cuadrada de un número entero que no sea cuadrado perfecto, puede obtenerse con la aproximacion que fuere pedida.*

En efecto, si espresamos la aproximacion por un quebrado cuyo numerador sea la unidad y cuyo denominador sea un número cualquiera; (1) procederemos multiplicando el número dado por el cuadrado del denominador del quebrado que espresa la aproximacion; de este producto extraeremos la raiz cuadrada, y el cociente que resulte de dividirla por el denominador simple será la raiz del número propuesto con la aproximacion pedida.

Ejemplo: $\sqrt{17}$ sin que le falte $\frac{1}{5}$

$$\sqrt{17}=\frac{\sqrt{17\times 5}}{5}=\frac{\sqrt{17.5^2}}{5}=\frac{\sqrt{425}}{5}=\frac{20}{5}=4 \quad \text{luego}$$

$$4<\sqrt{17}<4\frac{1}{5}$$

Si la aproximacion fuese dada por un quebrado decimal, pondremos tantos ceros á la derecha del número subradical cuantos sean el doble de los que tenga su denominador supuesto, los que como sabemos á la derecha de la unidad formarán el cuadrado del denominador, por quien hay que multiplicar siempre conforme á lo indicado, para proceder luego á la extraccion de la raiz cuadrada del producto, la cual obtenida y dividida por el denominador simple, constituirá la resolucion de lo que nos fué propuesto.

174. *La raiz cuadrada de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices cuadradas de sus diferentes factores.*

---

(1) Si así no es, se dividirá numerador y denominador por el numerador, y quedará el quebrado que esprese la aproximacion reducido á otro de las condiciones espuestas. Si el denominador no contiene al numerador exactamente á su cociente entero, se añade uno.

En efecto: $\sqrt{4.9.16}=\sqrt{4}.\sqrt{9}.\sqrt{16}=2.3.4=24$ pues $24^2=576=4.9.16$; pues que en efecto

$$(2.3.4)^2=2.3.4\times2.3.4=2^2.3^2.4^2=4.9.16,$$

lo cual se hace evidente, pues que la potencia de un producto de varios factores es igual al producto de las potencias de sus diferentes factores.

175. *Para hallar un medio proporcional entre dos números dados, se extrae la raiz cuadrada del producto de los mismos.*

Si $\frac{c}{x}=\frac{x}{d}$ tendremos que $x^2=c\times d$ luego $x=\sqrt{c\times d}$

Así tambien el medio proporcional entre 24 y 6 será $\sqrt{24\times6}=12$

Raiz cúbica de los números enteros y fraccionarios.

176. Raiz cúbica *de un número es otro que elevado al cubo produce el número dado.* El signo que espresa la extraccion de la raiz cúbica es $\sqrt[3]{}$

Los diez números primeros

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tienen por cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Observaremos por tanto que en el primer millar solo hay 10 cubos perfectos, por lo cual las raices cúbicas de los números intermedios serán *inconmensurables.* Luego la raiz cúbica de los mismos se espresará por *el mayor cubo contenido en dicho número.* Así la raiz cúbica de 400 será mayor que 7 y menor que 8; por tanto, para la extraccion de la raiz cúbica de un número menor que 1000 será suficiente el conocimineto de los cubos expuestos.

Ahora bien, los cubos de

	1	10	100	1.000	10.000	100.000 etc.
serán	1	1000	1000.000	1000.000.000	1000.000.000.000	1000;000.000;000.000

Por tanto la raiz cúbica de un número menor que 1000, será menor que 10, luego la

raiz cúbica de un número de 1, 2 ó 3 cifras, tiene solo *unidades.*
» » » » » 4, 5 ó 6 » » *decenas y unidades*
» » » » » 7, 8 ó 9 » » *centenas, decenas y unidades.*
» » » » » 10, 11 ó 12 » » *millares, centenas, decenas y unidades*, etc.

Por tanto el número de cifras que tendrá la raiz cúbica de un número dado, serán tantas cuantas sean las secciones de tres cifras en que el número se pueda descomponer, empezando de derecha á izquierda, teniendo presente que la primera seccion de la izquierda puede tener 1, 2 ó 3, pues como sabemos hay números (el 1 y 2) cuyos cubos solo tienen una cifra; hay números (el 3 y 4) cuyos cubos tienen dos cifras; los cubos de los demás dígitos tienen 3 cifras. Análogamente á lo demostrado en el Teorema (166) probaremos que la raiz cúbica de un número entero que no es cubo perfecto, es inconmensurable. Hallemos ahora la raiz cúbica de un número comprendido entre 1000 y 1000.000, tal como por ejemplo de 42.981: segun lo espuesto su raiz cúbica tendrá dos cifras y por tanto se compone de decenas y unidades; dicha raiz será tal que su cubo será el mayor comprendido en 42981, si este número no fuese un cubo perfecto. Segun lo espuesto en (74) sabemos que el cubo de decenas y unidades *se compone del cubo de decenas* (que producen millares): *mas triplo de cuadrado de decenas por unidades*, (que formarán centenas): *mas triplo de decenas por cuadrado de unidades* (que constituirán decenas): *mas cubo de unidades* (que serán unidades). Segun esto, el cubo de decenas produce millares, luego de los 42 que contiene el número dado, saldrán las decenas de la raiz que serán 3, pues siendo el cubo de este número 27, es el mayor contenido en los 42; si restamos de este aquel, quedará de diferencia 15 millares, que con los 981 unidades, compondrán 15981 unidades, de las que habrá que restar las centenas *contenidas en el triplo del cuadrado de decenas por unidades; mas las* decenas *contenidas en el triplo de decenas por cuadrado de unidades; mas las* unidades *contenidas en el cubo de unidades:* para investigar ahora el número de unidades de la raiz, dividiremos las centenas contenidas en el resto 15981 que son 159, por el triplo del cuadrado de las decenas halladas (que como sabemos son tambien centenas) y componen 27, el cociente será 5 y por tanto *las unidades;* multiplicando el 5 por 27 produce 135 centenas, que deducidas de las 159, dará una diferencia de 24 centenas, que con las 81 unidades formarán 2481 unidades, que tendrán que responder *al triplo de decenas por cuadrado de las unidades, mas el cubo de espresadas unidades*: en efecto, el triplo de las decenas, 9, por cuadrado de las unidades, 25, serán 225 decenas, que deducidas de las 248 contenidas en el resto anterior, darán por nuevo resto 23 decenas, estas, con 1 unidad mas del resto anterior compondrán 231 unidades. de las que queda que deducir solamente *las 125 unidades que componen el cubo de las 5 correspondientes* á la raiz, y el resto 106 será el resíduo de esta raiz, luego $35^3+106=42875+106=42981$.

La condicion de magnitud del resto, será segun lo espuesto en (75) *que ha de ser menor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la raiz mas uno.*

Si nos propusiéremos ahora extraer la raiz cúbica de un número mayor que 1000.000 y menor que 1000.000.000, por ejemplo del número 76:458.973 le considerariamos formado de 76458 millares mas 973 unidades, hallariamos como en el caso anterior las decenas contenidas en espresado número; los millares que resultasen de diferencia con las 973 unidades, formarian un número cuyas centenas divididas por las que resultaren del triplo del cuadrado de la raiz hallada ya, serian las unidades de la misma, etc.

Disposicion práctica.

	$\sqrt[3]{76.4,5,8.9,7,3}$	424
Cubo de centenas.....	64	
	124	48 (1.er divisor.)
Triplo del cuadrado de centenas por decenas	96	2 Cifra que pasa á la raiz; espresa las decenas.
	285	5292 (2.° divisor.)
Triplo de centenas por cuadrado de decenas	48	
	2378	4 Cifra que pasa á la raiz; espresa las unidades.
Cubo de decenas..........	8	
	23709	
Triplo del cuadrado de decenas por unidades	21168	
	25417	
Triplo de decenas por el cuadrado de unidades...	2016	
	234013	
Cubo de unidades............	64	
Resto.........	233949	

Luego $424^3+233.949=76.225.024+233.949=76;458.973$.

Lùego tendremos la siguiente Regla:

177. *Para extraer la raiz cúbica de un número mayor que 1000, se divide en secciones de tres cifras empezando por la derecha; se extrae la raiz cúbica de la primera seccion de la izquierda y se tendrá la primera cifra de la raiz; el cubo de la misma se resta de dicha primera seccion, y á la derecha del resto se baja la siguiente; las centenas contenidas en este número, se dividen por el triplo de el cuadrado de la raiz hallada; el cociente será la segunda cifra de la raiz, esta cifra por el divisor producirá un número de centenas que se restarán de las contenidas en espresado dividendo; de la diferencia y decenas siguientes restaremos las producidas de el triplo de la raiz por el cuadrado del cociente, y por último, del resto y unidades siguientes restaremos el cubo de la segunda cifra que se pondrá en la raiz; á la derecha del resto se bajará la seccion siguiente; el número de centenas que contenga se dividirán por las que resulten del triplo del cuadrado de la raiz*, etc. *Es mas frecuente, sin embargo, que despues de dividir un número para extraer su raiz cúbica* en secciones de tres cifras empezando por derecha, despues, de estraer la raiz cúbica de la primera seccion de la izquierda para obtener la primera cifra de la raiz, deduciendo de dicha primera seccion el cubo de esta cifra y despues, de poner á la derecha del resto la seccion siguiente para dividir las centenas de este resto por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, *que se sumen aparte, los tres productos del triplo del cuadrado de la raiz hallada por el cociente, mas el triplo de la raiz por el cuadrado del cociente, mas el cubo del cociente, teniendo cuidado de colocar cada producto un lugar mas á la derecha, uno debajo del otro, restando luego esta suma del dividendo formado.*

178. *Para extraer la raiz cúbica de un quebrado, se extrae la raiz al numerador y luego al denominador, partiendo la primera por la segunda.* La raiz cúbica de un número fraccionario ó es otro número fraccionario, si los dos términos son cubos perfectos como

$$\sqrt[3]{\frac{125}{216}}=\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{216}}=\frac{5}{6};$$

ó si no son cubos perfectos, es un número fraccionario inconmensurable como $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ segun se comprenderá por lo esplicado en (166).

La raiz cúbica de un quebrado, cuyo denominador sea un cubo perfecto, será igual á la raiz cúbica entera del numerador, partida por la exacta del denominador; el error que se comete, en este caso, es menor que la unidad partida por la raiz cúbica exacta del denominador.

Ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{41}{64}}=\frac{\sqrt[3]{41}}{4}$ valor que será mayor que $\frac{3}{4}$ y menor que $\frac{4}{4}$ luego el error que se comete es menor que un cuarto.

Si el denominador de un quebrado no fuere un cubo perfecto, tambien se podria obtener con esta aproximacion, si observamos que el quebrado no se alterará por multiplicar ambos términos por el cuadradro del denominador. Así por ejemplo

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}=\sqrt[3]{\frac{3.25}{5.25}}=\sqrt[3]{\frac{75}{125}}=\frac{\sqrt[3]{75}}{5}$$

que será mayor que $\frac{4}{5}$ y menor que $\frac{5}{5}$ luego espresando por cualquiera de estas dos fracciones la raiz, el error que se comete será menor que $\frac{1}{5}$.

179. *Para extraer la raiz cúbica de un número decimal, es preciso observar si el número de cifras decimales del mismo es múltiplo de 3, porque si nó, es preciso completarlas añadiendo uno ó dos ceros á su derecha*, con lo cual no se altera, pero su denominador habrá quedado convertido en un cubo perfecto.

180. *La raiz cúbica de un número entero que no sea cubo perfecto*, puede obtenerse con cuanta aproximacion fuere pedida; esta se espresa siempre por un quebrado cuyo numerador es uno, siendo el denominador un número cualquiera.

Para obtener esta raiz cúbica, con la aproximacion pedida, *se multiplica el número dado por el cubo del denominador del espresado quebrado, de su producto se ex-*

trae la raiz cúbica, y hallada esta, se divide por el denominador simple, siendo el cociente la raiz, con la aproximacion pedida.

El fundamento es el siguiente: supongamos que se trata de $\sqrt[3]{39}$ sin que le falte $\frac{1}{12}$ digo que

$$\sqrt[3]{39}=\frac{\sqrt[3]{39}\times 12}{12}=\frac{\sqrt[3]{39}\times\sqrt[3]{12^3}}{12}=\frac{\sqrt[3]{39}.\sqrt[3]{1728}}{12}=\frac{\sqrt[3]{67.392}}{12}=\frac{40}{12}=3\frac{4}{12}$$

Si la aproximacion fuere dada por un quebrado decimal, se pondrán á la derecha del número sub-radical tantas veces tres ceros como ceros tenga el denominador correspondiente al quebrado que espresa la aproximacion, y obtenida luego su raiz, se dividirá por el denominador simple.

181. *La raiz cúbica de un producto de varios factores será igual al producto de las raices cúbicas de sus diferentes factores*: (segun lo espresado en 174) y en general podremos decir que la raiz de cualquier grado de uń producto de varios factores es igual al producto de las raices del mismo grado de sus diferentes factores.

182. *La extraccion de una raiz cuyo índice esté solo compuesto de los factores 2 y 3 se obtiene por el concurso esclusivo de las raices cuadradas y cúbicas.*

En efecto, sea $\sqrt[4]{N}=m$ de donde $m^4=N$ pero como

$m^4=m^2.m^2=N$ será $\sqrt[4]{N}=\sqrt{\sqrt{(m^2)^2}}=\sqrt{m^2}=m$

Luego *la raiz cuarta de un número es igual á la raiz cuadrada de la cuadrada. La raiz sesta de un número, es igual, á la cúbica de la cuadrada. La raiz octava de un número es igual á la cuadrada, de la cuadrada, de la cuadrada. La raiz dozava es igual á la cúbica de la cuadrada de la cuadrada*, y así con las demás raices cuyos índices se descompongan solo en los factores 2 y 3.

Para las extracciones de raices cuycs índices son primos, y mayores que 2 y 3, pudieran darse reglas, pero serian demasiado prolijas, por lo cual no se aplican, tanto menos, cuanto que por *la inmediata aplicacion de los Logarit-*

mos convertimos las extracciones de raices en simples divisiones.

Caracteres de irracionalidad en la raiz cuadrada.

183. *Todo entero cuya última cifra sea 2, 3, 7 ú 8 su raiz cuadrada es inconmensurable.*

En efecto, de lo expuesto en (72) se infiere que el cuadrado de todo entero termina en la misma cifra que el cuadrado de sus unidades, y conocidos los cuadrados de los diez primeros números observamos que estos solo terminan en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9, y por tanto los que terminen en los indicados primeramente, no serán nunca cuadrados perfectos.

184. *Todo entero que terminando en 5, la cifra de sus decenas no sea 2, no es cuadrado perfecto.*

En efecto, de los cuadrados de los números dígitos solo termina en 5 el cuadrado de 5, y para que el número sea cuadrado perfecto es preciso que esté compuesto de

$$(d.10+5)^2=d^2.100+20.d\times5+25$$

igual por tanto á $d.^2 100+d.100+25$ que necesariamente termina en 25. Por tanto, si la cifra de sus decenas no es 2, es inconmensurable su raiz cuadrada.

185. *Todo número divisible por otro primo y no divisible por el cuadrado de este, su raiz cuadrada es inconmensurable.*

En efecto, sea M un cuadrado perfecto, es evidente que $M=r^2=r.r$ pero si M es divisible por c, tambien r será divisible por c, si ambos son diferentes, será $r=cs$ y por tanto $M=cs\times cs=c^2.s^2$ Luego el cuadrado de un número entero que es divisible por los cuadrados de otros primos, tendrá raiz cuadrada exacta y por tanto será cierto que si un número es divisible por otro primo y no lo es por el cuadrado de este, su raiz cuadrada será inconmensurable.

Cor. 1.° *Para que un número entero sea cuadrado perfecto, es preciso que sea divisible por los cuadrados de todos los factores primos entre sí, que entren multiplicándoles á componerle.*

2.° *Todo número terminado en un número impar de ceros, tiene su raiz cuadrada inconmensurable,* toda vez que uno cuando menos de sus factores, que será 10, 1.000, 100.000 etc., no tiene raiz cuadrada exacta.

3.º *La raiz de todo número no divisible por 4, aunque sea par, es inconmensurable*, pues si es divisible por 2, no lo es por $2^2=4$.

4.º *La raiz de todo número impar que disminuido en una unidad no es divisible por 4, es inconmensurable.*

En efecto, pues segun lo indicado mas arriba, en el 1.er corolario, esta raiz no puede ser par, y así mismo tampoco puede ser impar, porque si $r=2m+1$
y $r^2=N=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4(m^2+m)+1=$ á un múltiplo de $4+1$.

Caracteres de irracionalidad de las raices cúbicas.

186. *La raiz de todo número divisible por otro primo y no divisible por el cubo de este, es inconmensurable.*

En efecto, sea M un cubo perfecto, será evidente que $M=r^3=r.r.r$, pero si M es divisible por c, será tambien r divisible por c, luego $r=cs$ y por tanto $M=cs\times cs\times cs=c^3s^3$ Luego el cubo de un número entero que es divisible por los cubos de otros primos, tendrá raiz cúbica exacta y por tanto será cierta la propuesta del Teorema.

Como corolarios espondremos que:

Para que un número entero sea cubo perfecto, será necesario que todos sus factores primos sean cubos perfectos.

Que todo número par que no sea divisible por 8, tiene su raiz cúbica inconmensurable.

Que todo número terminado en un número de ceros que no sea múltiplo de 3, tiene su raiz cúbica inconmensurable.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO TERCERO.

QUE COMPRENDE: Á LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES, PROPIEDADES DE ESTOS, OPERACIONES CON LOS MISMOS Y RAIZ CUADRADA Y CÚBICA DE NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONARIOS.

I. Demostrar en qué casos será conmensurable ó innconmensurables la suma, diferencia, producto y cociente de cantidades conmensurables é inconmensurables con la unidad.

II. Determinar la diferencia entre los cuadrados de dos números que se diferencien en media unidad: y en dos unidades.

III. Averiguar si puede ser cuadrado perfecto un número dado.

IV. Demostrar que la suma de los n primeros números impares, es el perfecto cuadrado de n.

V. Demostrar que la suma de los cubos de los n primeros números enteros es el cuadrado de la suma de dichos n números.

VI. Demostrar que para que un quebrado cualquiera tenga raiz cuadrada ó cúbica exacta, es necesario y suficiente que el producto de sus dos términos sea exactamente un cuadrado ó cubo.

VII. Demostrar que el cubo de un número impar es un múltiplo de 8 aumentado ó disminuido en *una* ó en *cinco* unidades.

Cor. Todo número impar que aumentado ó disminuido en *una* ó en *cinco* unidades, no sea múltiplo de 8, no tiene raiz cúbica exacta.

VIII. Demostrar que en todo entero cuya última cifra sea 4 ú 8 siendo cifra impar la de sus decenas, su raiz cúbica es inconmensurable.

IX. Demostrar que es tambien inconmensurable la raiz cúbica de todo número entero que siendo par la cifra de sus decenas, tenga por cifras de las unidades al 2 ó al 6.

X. Estando expresada la razon de la circunferencia con el diámetro por 3, 14159265358979323S.... se desea obtener el valor del cuadrado, y cubo de este número, sin que le falte 0,000000000001.

TERCERA PARTE.

RELACIONES NUMÉRICAS.

187. Llámanse relaciones numéricas, las que se establecen entre los números, sean estos enteros, fraccionarios ó inconmensurables: de compararlos entre sí, puede resultar *la igualdad* ó *la desigualdad*. Para espresar la igualdad se emplea el signo $=$; constituye el primer miembro de la misma, lo colocado á la izquierda del signo, y el segundo miembro lo espresado á su derecha, indicándose con este signo la perfecta igualdad del valor numérico de ambos miembros.

Para las relaciones de desigualdad se emplea el signo $>$ ó $<$. poniendo la cantidad ó miembro mayor precediendo á la parte abierta del signo y al otro lado la menor.

De ser evidente que si con cantidades iguales ó desiguales se verifican operaciones iguales, los resultados no alteran la primitiva relacion de igualdad ó desigualdad, resultará como evidente que si á los dos miembros de una igualdad ó desigualdad se les añade ó quita un mismo número; se les multiplica ó divide por la misma cantidad; se elevan á una misma potencia; ó se les extrae la raiz del mismo grado, la relacion de igualdad ó desigualdad subsistirá. De lo cual inferiremos que en toda igualdad ó desigualdad, todo término puede pasar de un miembro á otro cambiando de signo, es decir, que todo *sumando* en un miembro *puede pasar al otro como sustraendo* y *viceversa;* todo *factor* en un miembro *pasa al otro como divisor* y *viceversa*, y todo *exponente* que afecte á un miembro, *puede pasar al otro como índice y vice-versa.*

Cuando cada uno de los miembros de una igualdad indica una diferencia, se dice que la relacion es por diferencia: cuando cada miembro espresa un cociente indicado, se dice que la relacion es por cociente. La diferencia entre los dos miembros de una igualdad siempre es *cero*. El cociente que resulta de dividir los dos miembros de una igualdad es siempre *uno.*

La relacion por diferencia que se establece entre los dos miembros de una desigualdad es siempre distinta de cero, mayor ó menor, es decir, positiva ó negativa.

La relacion por cociente que se puede establecer entre los dos miembros de una desigualdad es siempre mayor ó menor que uno.

Toda igualdad que en alguno de sus miembros tenga algun término desconocido, cambia la igualdad en una *ecuacion*, sobre las cuales no se puede especular esclusivamente en el tratado de **Algebra**, al que pertenecen de hecho, por que, aun en la **Aritmética** mas elemental estamos despejando continuamente ecuaciones en la resolucion de cualquier problema por insignificante que sea, aunque ciertamente referidas á casos concretos y particularísimos.

Toda desigualdad, en la cual alguno de sus términos aparezca como desconocido, produce una *Inecuacion*, de las cuales, como de las anteriores, se ocupa el Algebra.

Como regla facilísima diremos: que para determinar en las igualdades ó en las desigualdades el valor numérico de un término desconocido, deberemos pasar todos los demás que le acompañen en su miembro respectivo, de este al otro, verificar las operaciones fundamentales que espresen los signos, y ya determinado el valor numérico, comprobar la relacion de igualdad ó desigualdad en la primitiva, sustituyendo el valor numérico que antes era desconocido.

RELACIONES POR DIFERENCIA.

(DIFERENCIAS Y EQUIDIFERENCIAS.)

188. *Se llama diferencia de dos números á la relacion aritmética que entre ellos existe,* y mediante la cual apreciamos el esceso del mayor de los números dados con el menor, ó el defecto del menor con el mayor; una diferencia indicada ha de espresarse con dos términos, llamados minuendo y sustraendo: *con dos diferencias iguales formamos una equidiferencia,* que se espresará por ejemplo diciendo $13-4=27-18$ siendo la forma mas general de las mismas $a-b=c-d$. *Toda equidiferencia puede espresarse bajo la forma de una Proporcion aritmética,* ó sea separando por un punto minuendo y sustraendo de cada diferencia y por dos puntos las dos diferencias entre sí; de esta manera 13.4:27.18 la cual leeremos diciendo, 13 es aritméticamente con 4, lo que 27 sea aritméticamente con 18: de la misma manera leeremos $a.b:c.d$.

En toda proporcion aritmética llamamos términos estremos al 1.° y 4.°; términos medios al 2.° y 3.°; al 1.° y 3.° antecedentes; al 2.° y 4.° consecuentes.

En toda proporcion aritmética se verifica que la suma de los términos estremos es igual á la de los medios: en efecto, pues si $a-b=c-d$, sumando á ambos miembros $b+d$ tendremos $a-b+b+d=c-d+b+d$ que reduciendo será $a+d=c+b$ y por tanto si restamos de los dos miembros respectivamente a, d, c, b tendremos $d=c+b-a$, $a=c+b-d$, $b=a+d-c$, $c=a+d-b$, *luego un estremo igual á la suma de los medios, menos el otro estremo y un medio igual á la suma de los estremos, menos el otro medio.*

Si el sustraendo de la primera diferencia es igual al minuendo de la segunda, la proporcion aritmética tendrá los dos términos medios iguales, y el cual se llamará *medio diferencial*, y será igual á la mitad de la suma de los estremos, pues si $a.b:b.c.$ tendremos que de ser $a+c=b+b=2b$ será $b=(a+c):2$.

Si la suma de dos números es igual á la suma de otros dos, con los cuatro términos se podrá formar una proporcion aritmética, poniendo por estremos los dos sumandos de una suma, y por medios los otros dos de la otra. En efecto, si $7+8=9+6$ es evidente que si restamos de ambos miembros $8+6$ será $7+8-8-6=9+6-8-6$ que equivale á $7-6=9-8$ luego 7.6:9.8 que quedan colocados en la forma indicada y cumpliéndose en ella la espresada ley.

De lo indicado se desprende:

189. 1.° *Que si dos diferencias indicadas son iguales con los cuatro términos, se puede formar una proporcion aritmética.*

2.° *Los 4 términos de una equidiferencia pueden cambiar de lugar, con tal que los primitivos no dejen de ser compañeros entre sí, ocupando los dos medios ó los dos estremos. Cambiando de lugar los medios ó los estremos,* (alternamos.) *Poniendo los medios por estremos y al contrario* (invertimos.) *Poniendo la 2.ª diferencia por 1.ª y al contrario* (permutamos).

3.° *Si dos equidiferencias tienen comun una diferencia,* *puede ser esta suprimida y formarse con las otras dos una proporcion aritmética.*

4.° *Ninguna equidiferencia deja de serlo porque se añada ó quite un mismo número á sus cuatro términos, ó á un medio y á un estremo que puede ser á los dos antecedentes, ó á los dos consecuentes, ó á los dos primeros términos, ó á los dos últimos.*

5.° *Que si los dos antecedentes fuesen iguales, lo serán tambien los dos consecuentes y recíprocamente.*

190. A la relacion aritmética entre dos términos, llamamos *Diferencia;* á la que se establece entre dos diferencias iguales, llamamos *Equidiferencia,* cuyas propiedades dejamos espuestas, constituyendo con las mismas las *Proporciones aritméticas;* á la relacion que se establece entre varias equidiferencias iguales y contínuas se llama *Progresion aritmética.*

Progresiones aritméticas.

Llámase así á una série de términos tales, entre los cuales se verifica que la diferencia entre dos consecutivos es una cantidad fija y constante, llamada relacion de la progresion; esta relacion puede ser positiva ó negativa, espresada por un número entero, fraccionario ó inconmensurable; si la diferencia es positiva, la progresion aritmética será *creciente,* y si la diferencia es negativa, se formará una progresion aritmética *decreciente.* En toda progresion aritmética tal como 7... 10... 13... 16... 19... 22... 25... 28... etc. cuyo símbolo es $\div$ se verifica que el segundo término es igual al primero mas la diferencia; el tercero igual al 1.° mas dos veces la diferencia; el cuarto igual al 1.° mas tres veces la diferencia, etc., y en general un término cualquiera igual al primero mas tantas veces la diferencia como términos le antecedan. Si llamamos a al primer término, u al último, d á la diferencia y n al número de términos, tendremos que $u=a+d(n-1)$ y de lo espresado en el número (187) deduciremos que $a=u-d(n-1)$, que $d=\frac{u-a}{n-1}$, que $n-1=\frac{u-a}{d}$, fórmulas que traducidas al lenguaje vulgar, nos dicen *que el primer término de una progresion aritmética creciente, es igual al último, menos la diferencia repetida tantas veces como términos tenga la progresion menos uno; que la diferencia es igual al último* *término menos el primero, y partido este por el número de términos menos uno: que el número de términos menos uno de una progresion aritmética, es igual al último menos el primero, partido esto por la diferencia.*

Si la progresion aritmética fuese decreciente *se verificaria que el segundo término es igual al primero menos la diferencia; el tercero, igual al primero menos dos veces la diferencia; el cuarto, igual al primero menos tres veces la diferencia,* etc., *y en general un término cualquiera será igual al primero menos tantas veces la diferencia como términos le antecedan,* luego en este caso $u=a-d(n-1)$ de donde deduciremos que $a=u+d(n-1)$, que $d=\frac{a-u}{n-1}$ $n-1=\frac{a-u}{d}$

Entre los términos de toda progresion aritmética se verifica *que con cuatro consecutivos ó simétricos en su colocacion se forma una proporcion aritmética legal,* y *tambien que con solo tres, repitiendo el de enmedio, se formará otra de iguales medios, que por tenerlos se llamará Contínua,* y por tanto será evidente que la suma de los estremos será igual á la de los términos medios; luego en toda progresion aritmética sea creciente ó decreciente se verifica que *la suma del primero y el último término, es igual á la del segundo y penúltimo; es igual á la del tercero y antepenúltimo,* etc. y si el número de términos de la progresion es impar, será cualquiera de estas sumas igual al duplo del término medio; por tanto *la suma de todos los términos de una progresion aritmética, será igual á tantas veces la suma del primero y último, como la mitad del número de términos que tenga la progresion;* y por tanto llamando S á la suma, tendremos: $S=(u+a)\frac{n}{2}$

Con completo conocimiento de lo esplicado, podremos proponer ahora cuantos problemas se quiera y en los cuales por tanto sea la incognita a, d, u, n ó S, respectivamente.

RELACIONES POR COCIENTE.

(RAZONES Y PROPORCIONES GEOMÉTRICAS.)

191. A la relacion por cociente entre dos términos le

hemos llamado *fraccion* ó *quebrado,* de los cuales nos hemos ocupado en el Libro segundo de la segunda parte de este Tratado.

Con dos razones geométricas iguales, formamos una equi-razon geométrica ó una igualdad fraccionaria, de cuyas propiedades hemos tratado tambien en los números del 148 al 160. Nos resta en este lugar indicar que la igualdad fraccionaria $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ la podremos espresar en la forma bien conocida de *Proporcion geométrica,* de este modo $a:b::c:d$ la cual leeremos diciendo a es á b como c es á d, observando que todo lo que en las proporciones aritméticas se efectúa *sumando* ó *restando*, en las geométricas se verifica *multiplicando* ó *dividiendo.*

De lo espresado en las igualdades fraccionarias deduciremos:

192. 1.° *Que en toda proporcion geométrica se verifica que el producto de los términos medios es igual al de los estremos, y por tanto que un estremo es igual al producto de los medios, partido por el estremo conocido; y un medio igual al producto de los estremos partido por el otro medio: que si la proporcion tiene los dos medios iguales ó es* contínua, *el cuadrado de el término medio ó* medio proporcional *es igual á la raiz cuadrada de el producto de los estremos.*

2.° *Que si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con los cuatro se podrá formar una proporcion geométrica legal, poniendo los factores de un producto por medios y los otros dos por estremos.*

3.° *Que todos los términos de una proporcion pueden cambiar de lugar, y por tanto que son legales tambien las proporciones* alternadas, invertidas *y* permutadas.

4.° *Que los cuatro términos de una proporcion se pueden multiplicar ó dividir por el mismo número, elevar á la misma potencia ó extraerles la raiz del mismo grado, sin que deje de verificarse que el producto de los medios sea igual al de los estremos: que tampoco se altera por que solo se multipliquen ó dividan un medio y un estremo, que pueden ser los dos antecedentes ó los dos consecuentes; ó los dos primeros términos ó los dos últimos.*

5.° *Que si se multiplican término á término varias proporciones, resultará otra nueva de condiciones legales.*

6.° *Que si dos proporciones tienen una razon comun se podrá suprimir esta y formar proporcion legal con las otras dos razones.*

7.° *Que la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la primera razon es á su antecedente ó consecuente, como la suma ó diferencia de antecedente y consecuente, de la segunda razon, es á cu antecedente ó consecuente respectivamente.*

8.° *Que la suma de antecedente y consecuente de la primera razon es á su diferencia, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razon, es á su diferencia.*

9.° *Que la suma ó diferencia de los antecedentes, es á la suma ó diferencia de los dos consecuentes, como primer antecedente, es á primer consecuente, ó como segundo antecedente, es á segundo consecuente.*

10.° *Que la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

193. A la relacion geométrica entre dos términos le hemos llamado *razon, cociente* ó *fraccion*. A la que se establece entre dos razones iguales *equi-razon* ó *igualdad fraccionaria*, con las cuales hemos constituido las *Proporciones geométricas*, cuyas propiedades acabamos de esponer: á la que se establece entre varias equi-razones continuas llamamos *Progresiones por cociente* ó *geométricas*.

Progresiones por cociente.

Llámanse así, á una série de términos tales entre los cuales se verifica que: el cociente de dividir dos términos consecutivos es una cantidad fija y constante llamada razon de la progresion; esta razon puede ser entera ó fraccionaria; en el primer caso producirá una progresion geométrica *creciente*, en el segundo será *decreciente*.

En toda progresion geométrica creciente tal como 5 . 10.. 20.. 40... 80... 160... 320... 640... 1280... cuyo símbolo es $\div\div$, se verifica que el segundo término es igual al primero, multiplicado por la razon; que el tercero es igual al primero multiplicado por la segunda potencia de la razon; el cuarto término es igual al primero por la tercera potencia de la razon, etc., y en general un término cualquiera es igual al primero multiplicando por la razon elevada á la potencia espresada por un exponente tal, que tenga tantas unidades como términos le antecedan. Si pues llamamos *a* al primer término, u al último, q á la razon, n al número de términos de la progresion: segun lo espresado anteriormente tendremos $u=a\times q^{n-1}$ de donde y segun lo esplicado en el número (187) tendremos que $a=\frac{u}{q^{n-1}}$ y por tanto $q^{n-1}=u:a$ luego $q=\sqrt[n-1]{u:a}$, fórmulas que traducidas al lenguaje vulgar nos dicen: *que el primer término de una progresion gesmétrica creciente, es igual al cociente de dividir el último por la razon elevada á la potencia espresada por el número de términos que tenga la progresion menos uno; que esta potencia de la razon, es igual, al cociente de dividir el último término por el primero; y que la razon es igual á la raiz, cuyo grado esté espresado por el número de términos que tenga la progresion menos uno, del cociente que resulte de dividir el último término por el primero*s Nos resta determinar el valor de n, pero esto no podemo. espresarlo en este lugar, por tratarse de una ecuacion esponencial, para el despejo de la cual se requiere elconocimiento del Algebra.

Para determinar la fórmula que esprese el valor de la suma de todos los términos de una Progresion geométrica, supongamos segun lo espresado, que sea

$$S=a+aq+aq^2+aq^3+\cdots\cdots+aq^{n-1}$$

si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por q, tendremos $Sq=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\cdots+aq^{n-1}+aq^n$ de la cual restando miembro á miembro la anterior tendremos que $Sq-S=aq^n-a$, pero aq^n fué producido de multiplicar aq^{n-1} por q y como sabemos que $aq^{n-1}=u$ tendremos que $Sq-S=uq-a$ separando el factor comun S del primer miembro, tendremos que $S(q-1)=uq-a$, partiendo ahora ambos miembros por $q-1$ tendremos que $S=\frac{uq-a}{q-1}$, fórmula que traducida al lenguaje vulgar nos dice *que la Suma de todos los términos de una progresion geométrica cuya razon es entera, es igual al último término multiplicado por la razon, deduciendo de este producto el primer término, y partiendo esta diferencia por la razon disminuida en una unidad.*

Si la progresion fuese decreciente, es decir, si la razon de la misma fuese fraccionaria, todas las fórmulas serian iguales escepto la de la suma, en la cual y por restarse inversamente las dos progresiones, se cambiarian en los dos términos los minuendos en sustraendos y recíprocamente; por tanto en estas $S=\frac{a-uq}{1-q}$

Con los términos de una progresion geométrica se verifica, *que cuatro términos consecutivos en su colocacion forman una proporcion geométrica legal, y tambien que con solos tres, repitiendo el de en medio, se formará una legal continda. Que la suma ó diferencia de los antecedentes, es á la suma ó diferencia de los consecuentes como un antecedente, es á su consecuente. Que la suma de los antecedentes es la suma de los consecuentes, como la diferencia de los primeros es á la diferencia de los segundos. Que la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

Con completo conocimiento de lo espuesto podremos proponer ahora cuantos problemas se desée y en los cuales aparezcan como incógnitas a, q, u, ó S.

De las relaciones que existen entre los términos de una progresion aritmética creciente que empieza por cero, con los de otra geométrica cuyo primer término es la unidad, pueden resultar las propiedades generales de los Logaritmos, segun fueron reconocidas por su Inventor; mas esta Teoria de tanta importancia y tan interesantísima y necesaria, para la simplificacion de los Cálculos, la omitimos en la Aritmética por ser rigurosamente perteneciente al Algebra.

EJERCICIOS

CORRESPONDIENTES AL ESTUDIO DE LAS RELACIONES NUMÉRICAS, QUE COMPRENDE: DIFERENCIAS, EQUIDIFERENCIAS Y PROGRESIONES ARITMÉTICAS, RAZONES, PROPORCIONES Y PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

I. Cuánto valdrá el centésimo término de los de una progresion aritmética, siendo 9 el primer término y 2,75 la diferencia; y en la misma progresion cuánto valdrá la suma de todos los términos.

II. Interpolar 14 términos entre el 7, y 45 siendo la Progresion aritmética.

III. Cual será el primer término de una Progresion aritmética, siendo 9 el término 6.° y siendo 2 la diferencia.

IV. Cuantos reales valdrá un caballo por el cual se pidió un maravedí por el primer clavo de una de sus herraduras, 2 por el segundo, 4 por el tercero, etc. así duplicando hasta los 32 clavos que sujetan sus 4 herraduras.

V. El inventor del juego del ajedrez, á quien un soberano ofrecia por esto recompensa, se limitó á pedir, como premio á su invencion, un grano de trigo por la primera casilla del tablero del mismo, 2 por la 2.ª, 4 por la 3.ª, etc., así duplicando hasta las 64 casillas: se pregunta ¿cuántos Hectólitros de trigo pidió, sabiendo que un decímetro cúbico contiene 125000 granos de trigo próximamente?

CUARTA PARTE.

(APLICACIONES ARITMÉTICAS)

Números concretos.

194. Hemos dicho al empezar nuestro estudio que siendo la abstraccion el principio fundamental de todas las investigaciones científicas, debiamos proceder en el estudio de los números, prescindiendo de la especie á que podian referirse. Ahora bien, en las aplicaciones de la Aritmética debemos de espresar las especies correspondientes á las unidades que deben componer el estudio del cálculo de los números concretos, hemos visto que al ser comparada y medida una cantidad, se relaciona siempre con otra de la misma naturaleza, pero de una magnitud perfectamente invariable aunque no conocida en absoluto: esta será pues nuestra *unidad de comparacion*. En los cuerpos podemos querer medir no solo su longitud, si que tambien su superficie, volúmen, capacidad, peso, etc., y de aquí por tanto que á la reunion de todas las unidades de longitud, superficie, volúmen, capacidad, peso, etc., se le llame sistema de medidas, pesas y monedas.

A una sola longitud, superficie, volúmen, capacidad ó peso etc., puede espresársela con un número cuando solo se hubiere comparado con una unidad, pero como este término de comparacion puede ser escesivamente grande ó pequeño, se tiene siempre en cuenta para establecer esta comparacion el elegir una unidad superior ó inferior á la que en sus respectivas medidas sirva de base para espresar todas las de su propia naturaleza, toda vez que la unidad la consideramos siempre como compuesta y por tanto como divisible.

Dos son los sistemas empleados, el antiguo cuyo fundamento es de todo punto arbitrario, y el sistema llamado

Métrico decimal, siempre fijo é inalterable y de fácil comprobacion cuando fuese requerido.

Sistema métrico decimal.

185. Llámase así por estar fundado en el Metro, *que es la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre que pasa por Paris*, y tambien por la circunstancia de ser á la vez décimal ó décuplo, es decir que la suma de cada diez unidades de un órden, constituye una nueva unidad del superior inmediato, formándose así las unidades superiores y las inferiores, por medio de las cuales nos es tan fácil y exacto indicar cualquier medida.

El artificio especial mediante el cual espresamos estas nuevas unidades, consiste en anteponer á cada palabra de las que espresan unidad, las voces griegas Miria, Kilo, Hecto, Deca, que quieren decir respectivamente 10000, 1000, 100 y 10 unidades. Si tanto estas como la unidad fuesen demasiado grandes para medir una cantidad, se formarian unidades inferiores anteponiendo á las unidades usuales las voces latinas Deci. Centi, Mili, que indican respectivamente *décima, centésima y milésima* parte de la unidad.

Aquellas serán las múltiplas de la unidad y estas las sub-múltiplas ó medidas divisoras de la unidad, y entre las unas y las otras se hallará la unidad comprendida, verificándose que cada diez unidades de un órden equivalen á una sola del superior inmediato.

Las diferentes unidades del sistema métrico son:

De longitud el Metro, ó sea la diez millonésima parte del meridiano terrestre.

De superficie el Area cuadrada, que tiene 10 metros de lado y vale por tanto 100 metros cuadrados.

De volúmen el Métro cúbico, cubo que tiene un métro de arista.

De capacidad el Litro, cabida contenida en un cubo que tiene un decímetro de arista.

De peso el Gramo, peso en el vacio del agua destilada á 4 grados y una décima, que cabe en un cubo que tiene un centímetro de arista.

Segun lo espresado, fácilmente comprenderemos:

Que un Miriá-metro	quiere	decir	10000 metros.
» Kiló-gramo	»	»	1000 gramos.
» Hecta-area	»	»	100 áreas.
» Deca-litro	»	»	10 litros.
» Unidad	»	»	1
» Deci-metro	»	»	décima parte de metro.
» Centi-area	»	»	centésima » » area.
» Milí-gramo	»	»	milésima » » gramo.

Todas las unidades de longitud correspondientes al sistema métrico serán:

Miriámetro	*=10 kilómetros*
Kilómetro	*=10 hectómetros*
Hectómetro	*=10 decámetros*
Decámetro	*=10 metros*
Metro	*=10 decímetros*
Decímetro	*=10 centímetros*
Centímetro	*=10 milímetros*

Las correspondientes para medir superficies serán:

Miriámetro cuadrado	*=100*	*kilómetros cuadrados.*
Kilómetro cuadrado	*=100*	*hectómetros cuadrados*
Hectómetro cuadrado	*=100*	*decámetros cuadrados.*
Decámetro cuadrado	*=100*	*metros cuadrados.*
Metro cuadrado	*=100*	*decímetros cuadrados.*
Decímetro cuadrado	*=100*	*centímetros cuadrados.*
Centímetro cuadrado	*=100*	*milímetros cuadrados.*

Las correspondientes de volúmen serán:

Miriámetro cúbico	*=1000*	*kilómetros cúbicos.*
Kilómetro cúbico	*=1000*	*hectómetros cúbicos.*
Hetómetro cúbico	*=1000*	*decámetros cúbicos.*
Decámetro cúbico	*=1000*	*metros cúbicos.*
Metro cúbico	*=1000*	*decímetros cúbicos.*
Decímetro cúbico	*=1000*	*centímetros cúbicos.*
Centímetro cúbico	*=1000*	*milímetros cúbicos.*

Las correspondientes de peso serán:

Miriágramo	*=10*	*kilógramos.*
Kilógramo	*=10*	*hectógramos*
Hectógramo	*=10*	*decágramos.*
Decágramo	*=10*	*gramos.*
Gramo	*=10*	*decígramos.*
Decígramo	*=10*	*centígramoe.*
Centígramo	*=10*	*milígramos*
Milígramo	*= 1*	»

Para espresar grandes pesos se usa la *Tonelada* ó sean *10 quintales métricos* igual á 1000 kilógramos, y el *quintal métrico* equivalente á 100 kilógramos.

Las correspondientes de capacidad serán;

Miriálitro	=*10*	*kilolitros.*
Kilólitro	=*10*	*hectólitros.*
Hectólitro	=*10*	*decálitros.*
Decálitro	=*10*	*litros.*
Litro	=*10*	*decílitros*
Decílitro	=*10*	*centílitros.*
Centílitro	=*10*	*milílitros.*
Milílitro	= *1*	»

De todas estas medidas se eligen siempre las mas proporcionadas á la cantidad que se vá á medir, sin embargo de que algunas de ellas no están en uso.

Para reducir medidas superiores de *longitud, peso ó capacidad* á sus inferiores respectivas, se agregan ceros á la derecha del número que las esprese; y por el contrario para reducir unidades inferiores á superiores, se suprimen ceros de la derecha, del número que las esprese; si no los hubiese, se corre la coma de derecha á izquierda en este caso, y al contrario en el anterior.

Para reducir cada unidad superior superficial á las de el órden inmediato inferior se pondrán dos ceros á la derecha del número que las esprese; y por el contrario, para reducir unidades inferiores á cada una de las de su órden inmediato superior se suprimirán dos ceros de su derecha, y si no los hay, se correrá la coma dos lugares á la izquierda.

Para reducir unidades superiores de volúmen á las de cada órden inmediato inferior se pondrán tres ceros á la derecha del número que las esprese, y por el contrario para reducir unidades inferiores á cada una de las de su órden inmediato superior se suprimirán tres ceros de su derecha, y si no los hay se correrá la coma tres lugares á la izquierda.

Cuyo fundamento estriva en lo espresado en los números decimales.

Respecto al sistema de monedas corrientes en España, diremos que en las mandadas acuñar por Real decreto del 19 de Octubre de 1868, se establece sea su ley de 900 milésimas, es decir que en 1000 partes en peso, haya 900 de metal puro y 100 de la llamada liga, formada de otros metales para aumentar la dureza de las mismas, sin perder el valor correspondiente á su peso total, considerada como metal fino; sin embargo, como la fabricacion de la moneda no puede ser en todo tan perfecta que no admita falta ó esceso del metal con quien se alea, se consiente una pequeña variacion que se llama *permiso*, el cual está sujeto á un límite que las leyes determinan. El siguiente cuadro espresa el

SISTEMA MONETARIO ACTUAL.

MONEDAS.	PESO. EXACTO — GRAMOS.	PESO. PERMISO. — Milésim.	LEY. EXACTA. — Milésimas.	LEY. PERMISO. — Milésimas.	DIAMETRO — Milímets.
DE ORO.					
De 100 pesetas.	32,25806	1	900	2	35
De 50 „	16,12903	1			28
De 20 „	6,45161	2			21
De 10 „	3,22580	2			19
De 5 „	1,61290	3			17
DE PLATA.					
De 5 pesetas.	25	3	900	2	37
De 2 „	10	5	835	3	27
De 1 „	5				23
De 0,50 „	2,50	7			18
De 0,20 „	1	10			16
DE BRONCE.					
De 0,10 pesetas.	10	10	950 cobre	10	30
De 0,05 „	5		40 estaño	5	25
De 0,02 „	2	15	10 zinc		20
De 0,01 „	1				15

Sistema de pesas y medidas de Castilla.

196. El sistema de pesas y medidas antiguas, comprende.

Medidas de longitud.

La vara de Burgos	= 3	pies ó 4 palmos.
El pié	=12	pulgadas.
El palmo ó cuarta	= 9	id.
La pulgada	=12	líneas.
La línea	=12	puntos.

Unidad itineraria.

La legua = 20.000 piés = 6666,6 varas.

Unidad agraria.

El estadal =4 varas.

Unidades marinas.

La legua	= 3	millas.
La milla	= 10	cables.
El cable	=111	brazas.
La braza	= 2	varas.
Codo de ribera	= 2	pies y 9 lineas.

Medidas superficiales.

La legua cuadrada	=400;000,000 pies cuadrados.
La vara cuadrada	=9 pies cuadrados=16 palmos cuad.
El pié cuadrado	=144 pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada	=144 líneas cuadradas.

Para campo.	Fanega cuadrada	=9216 varas cuadradas= 576 estadales cuadrados.
	Aranzada id.	=6400 varas cuadradas = 400 estadales cuadrados.
	Estadal cuadrado	= 16 varas cuadradas.

Tambien se divide la fanega superficial en 12 celemines, cada uno de 768 varas, y cada celemin en 4 cuartillos, siendo la estension superficial de cada uno de 192 varas cuadradas.

Medidas cúbicas.

La legua cúbica	$=(20000)^3=8;000;000;000.000$ piés cúbicos.
La vara cúbica	=27 piés cúbicos.
El pié cúbico	=1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada cúbica	=1728 lineas cúbicas.

Para grandes volúmenes.

La tonelada de arqueo	=70189	pies cúbicos.
La tonelada ordinaria	=42646	» »

Medidas de capacidad.

PARA LÍQUIDOS.

El moyo	=16	cántaras.
La cántara	= 8	azumbres.
El azumbre	= 4	cuartillos.
El cuartillo	= 4	copas.

El aceite se mide por arrobas, libras y panillas (esta vale un cuarteron.)

PARA ARIDOS.

El caiz	=12	fanegas.
La fanega	=12	celemines.
El celemin	= 4	cuartillos.

Medidas de peso.

Pesas ordinarias.

La tonelada	=20	quintales.
El quintal	= 4	arrobas.
La arroba	=25	libras.
La libra	=16	onzas.
La onza	=16	adarmes.
El adarme	= 3	tomines.
El tomin	=12	granos.

Pesas empleadas en la farmacia.

La libra	=12	onzas.
La onza	= 8	dracmas.

La dracma = 3 escrúpulos.
El escrúpulo =24 granos.

Pesas empleada en platería y joyería.

El marco =8 onzas.
La onza =8 ochavas.
La ochava =6 tomines.
El tomin =3 quilates.
El quilate =4 granos.

Unidades de tiempa.

El evo =1000 años.
El siglo =100 años.
Indiccion =15 años.
El lustro =5 años.
La olimpiada =4 años.
El año =12 meses.
El mes =30 dias.
El dia =24 horas.
La hora =60 minutos.
El minuto =60 segundos.
El segundo =60 terceros.

MONEDAS DE ORO	DE PLATA.	DE COBRE.
Onza =320 rs.	Peso ó duro =20 rs.	Medio real =0,50
Media onza =160 „	Medio duro =10 „	Cuartillo =0,25
Centen =100 „	Peseta columnaria = 5 „	Dos cuarts.=8 maravedis.
Ochentin = 80 „	Peseta = 4 „	Cuarto =4 „
Escudo de oro = 40 „	Media peseta columnaria = 2 1|2 „	Ochavo =2 „
Escudito = 20 „	Media peseta= 2 „	
Id. de premio = 21 1/4	Real columnario = 1 1|4 „	

Equivalencias aproximadas entre las Medidas, Pesas y Monedas antiguas con las métrico decimales.

197. UNIDADES DE LONGITUD.

	Leguas á kilómetros.	Varas á metros.	Piés á decímetros.	Pulgadas á centímetros.	Líneas á milímetros.
1	5,5727	0,8359	2,7864	2,3220	1,9350
2	11,1454	1,6718	5,5727	4,6439	3,8699
3	16,7181	2,5077	8,3591	6,9659	5,8049
4	22,2908	3,3436	11,1454	9,2878	7,7399
5	27,8635	4,1795	13,9318	11,6098	9,6748
6	33,4362	5,0154	16,7181	13,9318	11,6098
7	39,0089	5,8513	19,5045	16,2537	13,5448
8	44,5816	6,6872	22,2909	18,5757	15,4797
9	50,1543	7,5231	25,0772	20,8977	17,4147
	Kilómetros á leguas.	**Metros á varas.**	**Decímetros á piés.**	**Centímetros á pulgadas.**	**Milímetros á líneas.**
1	0 1794	1,1963	0 3589	0 4307	0.5168
2	0 3589	2,3926	0,7178	0 8613	1,0336
3	0,5383	3,5889	1,0767	1.2920	1,5504
4	0,7178	4,7852	1,4356	1,7227	2,0672
5	0,8972	5,9815	1.7945	2,1534	2 5840
6	1,0767	7,1778	2,1534	2,5840	3,1008
7	1,2561	8 3742	2,5122	3,0147	3 6176
8	1,4356	9,5705	2,8711	3,4454	4,1344
9	1.6150	10,7668	3 2300	3 8760	4 6512

UNIDADES DE SUPERFICIE.

	Leguas cuadradas á kilómetros cuadrados.	Fanegas á hectáreas.	Varas cuadradas á metros cuadrados.	Piés cuadrados á decímetros cuadrados.	Pulgadas cuadradas á centímetros cuadrados.
1	31,0550	0.6440	0 6987	7.7637	5,3915
2	62 1100	1,2879	1,3975	15.5275	10,7830
3	93,1650	1.9319	2,0962	23,2912	16,1745
4	124 2199	2,5758	2.7949	31,0550	21,5660
5	155,2749	3,2198	3 4937	38,8187	26,9575
6	186,3299	3.8637	4,1924	46,5825	32,3489
7	217,3849	4,5077	4 8912	54 3462	37,7404
8	248,4399	5 1516	5.5899	62.1100	43.1319
9	279,4949	5.7956	6 2886	69 8737	48,5234

	Kilómetros cuadrados á leguas cuadradas	Hectáreas á fanegas.	Metros cuadrados á varas cuadradas	Decímetros cuadrados á piés cuadrados.	Centímetros cuadrados á pulgadas cuadradas.
1	0.0322	1,5529	1,4312	0,1288	0,1855
2	0 0644	3,1058	2,8623	0 2576	0,37'0
3	0 0966	4,6587	4,2935	0,3864	0,5564
4	0,1288	6,2116	5,7246	0,5152	0 7419
5	0 1610	7,7645	7.1558	0.6440	0 9274
6	0.1932	9,3174	8,5869	0 7728	1,1129
7	0,2254	10 8703	10,0181	0 9016	1 2983
8	0,2576	12 4232	11,4492	1,0304	1,4838
9	0,2898	13.9761	12 8804	1,1592	1,6693

UNIDADES DE CAPACIDAD, PARA ARIDOS,

Y DE VOLÚMEN.

	Cahíces á kilólitros.	Fanegas á hectólitros	Celemines á decálitros.	Varas cúbicas á metros cúbicos.	Piés cúbicos á decímetros cúbicos.
1	0 6660	0,5550	0,4625	0,5841	21,6325
2	1,3220	1,1100	0 9250	1,1682	43,2650
3	1 9980	1 6650	1,3875	1,7522	64,8975
4	2,6640	2,2200	1,8500	2,3363	86 5301
5	3.3301	2,7751	2.3125	2,9204	108,1626
6	3,9961	3,3301	2,7750	3,5045	129 7951
7	4,6621	3,8851	3,2376	4,0886	151 4276
8	5,3281	4,4401	3,7001	4,6727	173,0601
9	5 9941	4.9951	4.1626	5,2568	194.6926
	Kilólitros á cahíces.	**Hectólitros á fanegas.**	**Decálitros á celemines**	**Metros cúbicos á varas cúbicas.**	**Decímetros cúbicos á piés cúbicos**
1	1,5015	1,8018	2 1621	1,7121	0,0462
2	3,0030	3,6035	4,3243	3,4242	0,0925
3	4,5044	5,4053	6 4864	5,1363	0,1387
4	6,0059	7,2071	8,6485	6,8484	0,1849
5	7,5074	9,0088	10,8106	8,5605	0,2311
6	9,0088	10,8106	12,9727	10,2726	0,2774
7	10,5103	12,6124	15,1349	11,9847	0,3236
8	12,0118	14,4142	17,2970	13,6968	0,3698
9	13,5133	16,2159	19,4591	15,4089	0,4160

UNIDADES DE CAPACIDAD PARA LIQUIDOS.

	Cántaras à decálitros.	Cuartillos à litros.	Arrobas de aceite á decálitros.	Libras de aceite á litros.
1	1,6133	0,5042	1,2563	0,5025
2	3,2266	1,0083	2,5126	1,0050
3	4,8399	1,5125	3,7689	1,5076
4	6 4532	2,0166	5,0252	2,0101
5	8,0665	2,5208	6,2815	2,5126
6	9,6798	3,0249	7,5378	3,0151
7	11,2931	3,5291	8,7941	3,5176
8	12 9064	4,0333	10,0504	4,0202
9	14,5197	4,5374	11,3067	4,5227

	Decálitros á cántaras	Litros á cuartillos	Decálitros á arrobas de aceite.	Litros á libras de aceite.
1	0,6198	1,9835	0,7960	1,9900
2	1,2397	3 9670	1,5920	3 9799
3	1,8595	5,9505	2,3880	5,9699
4	2,4794	7,9341	3,1840	7,9599
5	3,0992	9,9176	3,9799	9,9499
6	3,7191	11,9011	4,7759	11,9398
7	4,3389	13,8846	5,5719	13 9298
8	4,9588	15,8681	6,3679	15,9198
9	5,5786	17,8516	7,1639	17.9097

UNIDADES DE PESO.

	Quintales á quintales métricos.	Arrobas á kilógramos.	Libras á kilógramos	Onzas á gramos.	Adarmes á gramos.
1	0,4601	11,5023	0,4601	28,7558	1,7972
2	0,9202	23,0046	0,9202	57,5116	3,5945
3	1,3803	34,5070	1,3803	86,2674	5,3917
4	1,8404	46.0093	1,8404	115,0232	7 1890
5	2,3005	57,5116	2,3005	143,7791	8 9862
6	2,7606	69,0139	2,7606	172,5349	10 7834
7	3,2207	80,5163	3,2207	201,2907	12 5807
8	3,6807	92,0186	3,6807	230,0465	14,3779
9	4,1408	103,5209	4,1408	258,8023	16,1752

	Quintales métricos á los antiguos.	Kilógramos á arrobas	Kilògramos á libras.	Gramos á onzas.	Gramos á adarmes
1	2,1735	0 0869	2,1735	0,0348	0 5564
2	4,3469	0 1769	4,3469	0,0696	1,1128
3	6,5204	0,2608	6,5204	0 1043	1,6692
4	8,6939	0 3478	8,6939	0,1391	2,2256
5	10,8674	0,4347	10 8674	0,1739	2 7820
6	13,0408	0 5216	13,0408	0,2087	3 3384
7	15 2143	0 6086	15,2143	0 2435	3,8948
8	17,3878	0 6955	17,3878	0,2782	4,4513
9	19 5613	0,7825	19,5613	0,3130	5,0077

UNIDADES MONETARIAS.

	Reales á pesetas.	Pesetas á reales.	Maravedis á céntimos.	Céntimos á maravedis.
1	0,25	4	0,7353	1,36
2	0,50	8	1,4706	2 72
3	0,75	12	2 2059	4,08
4	1	16	2,9412	5,44
5	1,25	20	3,6765	6 80
6	1,50	24	4 4118	8,16
7	1,75	28	5 1471	9,52
8	2	32	5,8824	10 88
9	2,25	36	6,6176	12,24

Apesar de los espresados cuadros, expondremos concretamente á continuacion algunas analogías fáciles de ser retenidas por los alumnos, para su inmediata aplicacion á las reducciones.

ENTRE LAS DE LONGITUD.

3 pulgadas =7 centímetros.
7 piés =19,5 decímetros.
6 varas =5 metros.
7 leguas =39 kilómetros.

ENTRE LAS SUPERFICIALES.

5 Pulgadas cuadradas =27 centímetros cuadrados.
4 piés „ =31 decímetros „
10 varas „ = 7 metros „
1 legua „ =31 kilómetros „

ENTRE LAS CÚBICAS.	
8 piés cúbicos	= 173 decímetros cúbicos.
8 varas „	= 3,5 metros „
8 celemines	= 3,7 decálitros.
9 fanegas	= 5 hectólitros.
3 cahices	= 2 kilólitros.

ENTRE LAS DE CAPACIDAD.	
4 libras aceite	= 2 litros.
4 arrobas „	= 5 decálitros.
8 cántaras	= 12,9 decálitros

ENTRE LAS DE PESO.	
2 onzas	= 57,5 gramos.
5 libras	= 2,3 kilógramos.
4 arrobas	= 46 kilógramos.
5 quintales	= 2,3 quintales métricos

ENTRE UNIDADES MONETARIAS.	
5 céntimos de peseta	= 6,8 maravedises.
10 „ „	= 13,6 „
1 real	= 34 „

198. Aplicacion de las mismas á los siguientes problemas:

1.° ¿326 fanegas de grano, se pregunta, á cuantos hectólitros equivalen?

La relacion entre fanegas y hectólitros nos dice que 9 fanegas=5 hectólitros: falta solo saber cuántas veces tenemos 9 fanegas en las 326 que se nos dan; sabidas, su producto por 5 nos darán los hectólitros que se nos piden; luego 326 fanegas $=\frac{326}{9}\times5=181\frac{1}{9}$ hectólitros.

2.° 3.520 metros cuadrados, se pregunta, cuántos pies cuadrados contendrán?

Observaremos que en las medidas superficiales no hay relacion entre los metros y los pies cuadrados, y si la hay entre los metros y varas cuadradas, luego multiplicando estas por 9 (número de piés cuadrados que tiene la vara cuadrada) tendremos esta relacion:

7 metros cuadrados=90 piés cuadrados.

Dividiendo, por tanto, los 3520 metros cuadrados por 7, y multiplicando el cociente por 90, tendremos resuelto el problema; luego

3520 metros cuadrados$=\frac{3520}{7}\times90=45257\frac{1}{7}$ pies cuadrados.

Todas las cuestiones análogas se resolverán como estas, teniendo presente que la proporcionalidad que existe *entre el número de unidades que se nos dan para reducir, y el valor numérico de la incógnita, es la misma que la que se establezca entre los dos miembros de la relacion; siendo, en definitiva, la resolucion de estos problemas dependiente de una proporcion geométrica, ó igualdad fraccionaria de la cual se despeja fácilmente cualquier término opuesto.*

Para la resolucion de estos problemas, tambien pudiera emplearse el

Método de reducion á la unidad.

199. *Este consiste en determinar ó averiguar el valor de una unidad de medida en las equivalentes al otro sistema, y multiplicar luego por estas el número de aquellas*

Aplicando este mètodo resolveriamos el problema anterior diciendo, 7 metros cuadrados=10 varas cuadradas, luego 7 metros cuadrados=90 pies cuadrados; dividiendo en esta última igualdad, ambos miembros por 7, tendriamos que 1 metro cuadrado $12\frac{6}{7}$ piês cuadrados, luego 3520 metros cuadrados tendràn $3520\times12\frac{6}{7}=45257\frac{1}{7}$ pies cuadrados, en cuyo resultado convienen ambos procedimientos.

Cálculo de los números complejos.

200. *Se llama número complejo aquel que espresa unidades de diferente especie, pero todas referidas á una misma naturaleza*

Será complejo de tiempo	la cantidad:	3 años+7 meses+8 dias+13 horas.
» » » peso	»	2 quintales+3 arrobas+20 libras+8 onzas.
» » » capacidad	»	1 cahiz+3 fanegas+2 celemines.
» » » superficie	»	3 varas cuadradas+8 pies cuadrados+100 pulgadas cuadradas.

Se llama número incomplejo el que se refiere á unidades de una sola especie; como 15 años, ó como 7 arrobas.

Para reducir un número incomplejo á otro de especie inferior, multiplicaremos las unidades de aquel por el número de las que de la especie pedida, tenga cada unidad de la especie dada.

Asi, para reducir 12 dias à minutos, diremos $12\times1440=17280$ minutos. (Sabido que 1440 minutos=1 dia).

Para reducir 20 arrobas á onzas, diremos $20\times25=500$ libras$=500\times16=8000$ onzas.

Para reducir un incomplejo á otro de especie superior dividiremos las unidades de aquel por el número de las que contenga cada una de esta.

Asì para reducir 1.000.000 de minutos á horas, se dividirán por 60 cuyo cociente 16666 serán horas, sobrando 40 minutos.

Para reducir las horas á dias, dividiremos por 24 y nos darán 694 dias, y quedan de resto 10 horas:

Para reducir los dias á meses, dividiremos por 30, lo que nos dará 23 meses y 4 dias: y para reducir los meses á años dividiremos por 12: de todo lo cual resultará que 1.000.000 de minutos equivalen á 1 año+11 meses+4 dias +10 horas+40 minutos, *cuyo procedimiento nos permite reconocer de que manera reduciremos un incomplejo á su complejo respectivo.*

Recíprocamente diremos: *que para reducir un número complejo á incomplejo de especie inferior, se reducirán las unidades superiores á las de la especie inferior inmediata, añadiendo á este resultado las que hubiere de esta especie en el número propuesto; procederiamos inmediatamente con este número de igual manera que con el anterior, hasta llegar á las especies inferiores, ó solo hasta la especie dada.*

Tambien se puede reducir un número complejo á incomplejo de una de sus especies, reduciendo el complejo á incomplejo de la especie inferior y partiendo el número de estas unidades, por las que de la misma especie tuviere la unidad de la especie pedida.

Para reducir un número incomplejo métrico decimal á unidades de especie superior, basta correr la coma ó vírgula á la izquierda, tantos lugares como número de especies haya intermedias entre la dada y pedida. *Por el contrario, para reducir un incomplejo métrico decimal a unidades de especie inferior*, se correrá la coma á la derecha.

Para reducir á incomplejo un complejo métrico decimal se pondrán los números que espresen cada una de las especies unos al lado de los otros, si las especies son sucesivas, y si no, se intercalan los ceros necesarios en los lugares donde no haya unidades del órden correspondiente.

Valuacion de una fraccion ordinaria ó decimal en unidades inferiores, cuando esta esté referida á unidad superior de número incomplejo.

1.er problema. Si se nos propusiese $\frac{2}{3}$ de siglo ¿á cuantos años y meses equivale?

Diriamos $\frac{2}{3}$ de 100 años, serán $\frac{2}{3}\times 100=\frac{200}{3}=$ 66 años y restan 2 años que teniendo 24 meses, su tercera parte serán 8 meses; luego los dos tercios de siglo serán equivalentes á 66 años $+$8 meses.

2.º problema. Si se nos dijese $\frac{4}{5}$ de quintal, se pregunta ¿á cuantas arrobas y libras equivalen?

Diremos $\frac{4}{5}$ de 4 arrobas$=\frac{16}{5}=$3 arrobas y sobran 25 libras, cuya quinta parte son 5 libras; luego cuatro quintos de quintal equivalen á 3 arrobas$+$5 libras.

3.er problema. Cuánto valdran $\frac{7}{18}$ de onza (moneda) expresando su valor en centenes, duros, pesetas, reales y maravedises. Una onza vale 16 duros, luego

$\frac{7}{18}\times 16=$1 centen$+$1 duro$+$1 peseta$+$15 maravedis.

4.º problema. Cuánto importarán 0,35 de fanega superficial en unidades superficiales inferiores?

La fraccion que se nos dá tiene por ordinaria irreducible equivalente á $\frac{7}{20}$.

La fanega cuadrada, hemos visto equivale á 9216 varas cuadradas, luego $\frac{7\times 9216}{20}=$4225,6 varas cuadradas, que equivale á 4 celemines $+$153 varas cuadradas.

5.º problema. Si se nos pregunta 0,625 de quintal á cuantas arrobas, libras y onzas equivale?

Diremos, esta fraccion decimal exacta tiene por ordinaria generatriz á $\frac{5}{8}$ luego $\frac{5}{8}$ de 4 arrobas serán 2 arrobas$+$12 libras$+$8 onzas.

6.° problema. Si se nos preguntase 0,5688 5688... de año á cuantos meses, dias, horas, minutos y segundos equivale?

Diriamos, esta fraccion decimal periódica pura, tiene por ordinaria generatriz á $\frac{632}{1111}$, multiplicando por 12 el numerador y partiendo por su denominador respectivo, nos dá 6 meses con $\frac{918}{1111}$; multiplicando por 30 el numerador y partiendo por su denominador respectivo, el quebrado anterior será equivalente á 24 dias y $\frac{876}{1111}$; multiplicando el numerador de este por 24 (horas) y partiendo el producto por su denominador respectivo, tendremos que el quebrado anterior equivaldrá á 18 horas y $\frac{1026}{1111}$; multiplicando el numerador de este por 60 (minutos de la hora) y partiendo el producto por su denominador, tendremos que los minutos á que equivale son 55 con $\frac{455}{1111}$, cuya fraccion en último término equivale á 24 segundos. Por tanto la fraccion decimal 0.5688 5688.... de año equivale á 6 meses+24 dias+18 horas+55 minutos+24 segundos

Operaciones con los números concretos.

Adicion.

201. *Para sumar dos ó mas números incomplejos, si son de la misma especie, se suman como los abstractos, siendo la suma de la especie de los sumandos. Si fuesen de especies diferentes, pero correspondientes á la misma naturaleza, se reducirán á una misma especie,* (1) *procediendo como en el caso anterior.*

Así diremos: 25 minutos, mas 37 minutos es igual á una hora y dos minutos.

---

(1) Decimos de la misma especie y naturaleza, pues fácilmente se comprende que no es posible adicion ni sustraccion entre números heterogéneos.

34 dias+600 horas=34 dias+25 dias=816 horas+600 horas=1416 horas.

Para sumar un número complejo con un incomplejo (de su misma naturaleza) se suman las unidades de este, con las que de la misma especie tenga el complejo dado, haciendo luego reducion si es posible. Ejemplo:

	2 quintales	+3 arrobas	+5 libras	+10 onzas
			+100 libras.	
Suma=	2 quintales	+3 arrobas	+105 libs.	+10 onzas, igual á
	2 »	+7 »	+5 »	+10 » igual á
	3 »	+3 »	+5 »	+10 »

Para sumar dos ó mas complejos, se ponen unos debajo de los otros, teniendo cuidado de colocar las unidades correspondientes á la misma especie en columna vertical; verificada la suma, se harán las reducciones posibles ordenadamente, para que el número de las unidades de cada especie sea menor que las que de la misma constituyan unidad de especie superior.

Ejemplo: ¿cuál será la edad de un sugeto que se

casó á los	27 años	+3 meses	+15 dias,	tuvo el 1.er hijo
á los	2 »	+1 »	+7 »	de matrimonio; y
cuando este tenia	1 »	+2 »	+11 »	tuvo el 2.°; que
teniendo	19 »	+7 »	+23 »	nació el 3.° que
hoy tiene	7 »	+2 »	+21 »	
E. del padre	56 »	+15 »	+77 »	que equivalen á
la suma =	57 »	+5 »	+17 »	

Sustraccion.

202. *Para restar dos números incomplejos de la misma especie, se restan como los abstractos; siendo la diferencia de la especie de entreambos términos.*

Así 7 cahices—3 cahices=4 cahices.

Para restar dos incomplejos que correspondiendo á la misma naturaleza, sea su especie diferente, se reducirán á una misma, procediendo como en el caso anterior.

Así 2 centenes menos 127 reales igual á 200—127=73 reales.

Para restar de un complejo un incomplejo se restarán estas unidades de las que de la misma especie tenga aquel; sino bastaren se le adicionarán todas las que contengan la unidad de especie superior inmediata que se le descontará.

Ejemplo: restar de 3 años+9 meses+20 dias, 11 meses será lo mismo que restar de 2 años+21 meses+20 dias
—11 meses.

La diferencia será 2 años+10 meses+20 dias.

Para restar de un complejo otro complejo de la misma naturaleza, se coloca el sustraendo debajo del minuendo, correspondiéndose las unidades de cada especie y restándose luego.

Ejemplo: ¿Qué diferencia existe entre los pesos de dos bultos, pesando

el uno	3 quintales	+2 arrobas	+20 libras	y 12 onzas
el otro	2 »	+3 »	+23 »	y 15 »
peso mayor	2 quintales	+5 arrobas	+44 libras	+28 onzas,
peso menor	2 »	3 »	23 »	15 »
Diferencia		2 arrobas	+21 libras	+13 onzas.

Para restar de un incomplejo un complejo, descompondremos el incomplejo en complejo equivalente, restándose luego como en el caso anterior.

Ejemplo: ¿cuánto tiempo le faltará á un sugeto que tiene de edad 53 años+9 meses+17 dias+21 horas para tener un siglo?

Diremos un siglo	=99 años	+11 meses	+29 dias	+24 horas.
Edad del sugeto	53 »	+9 »	+17 »	+21 »
Diferencia	=46 años	+ 2 meses	+12 dias	+ 3 horas.

Multiplicacion.

203. *Para multiplicar dos números incomplejos, se efectúa como si fueran abstractos, teniendo presente que la especie del producto está determinada por las condiciones del problema.*

Aquí pues, siempre se efectúa la multiplicacion entre números concretos de especie diferente, para lo cual conviene recordar que consideramos como abstracto al multiplicador.

Si decimos, por ejemplo, 7 varas de tela á 12 reales vara, será su producto 84 reales, ó sean 7 veces 12 reales, que es el valor de cada vara.

Para multiplicar un complejo por un incomplejo se multiplica este por cada uno de los grupos de unidades de *las especies diferentes de aquel, y la suma de estos productos será el producto pedido.* Ej. ¿Valiendo la libra de

cacao 2 pesetas+3 reales+21 maravedis.
se pregunta, cuanto valdrán 6 libras?

su producto será 12 pesetas+18 reales+126 maravedis, que equivaldrán á 17 pesetas+1 real +24 maravedis.

Tambien se puede hallar, reduciendo el complejo á incomplejo y multiplicando luego los dos incomplejos: procedimiento que se emplea cuando el incomplejo es fraccionario.

Para multiplicar un incomplejo por un complejo se reduce este á incomplejo y se multiplican luego, como dos incomplejos.

Ejemplo: Valiendo una vara de de tela 8 reales ¿cuánto valdrán 5 varas+8 pulgadas?

$$8\times\frac{188}{36}=\frac{1504}{36}=41 \text{ reales}+26 \text{ maravedis.}$$

Para multiplicar un complejo por otro complejo se reducen á incomplejos y se multiplican como estos.

Ejemplo: Valiendo la vara de una tela 14 reales+20 maravedis, se pregunta ¿cuánto valdrán 7 varas+9 pulgadas?

Tendremos que el producto de estos dos complejos, será lo mismo que decir $\frac{496}{34}$ de real $\times\frac{261}{36}$ de vara $=\frac{129456}{1224}$ de real, que valen 105 reales+26 maravedis.

Para la multiplicacion de dos números complejos tambien se suele emplear el

Método de las partes alícuotas.

204. *Consiste este método, en considerar descompuesto el multiplicador en un múltiplo de la unidad cuyo valor es el multiplicando, y en varias fracciones sencillas y consecutivas de la unidad.*

Si hallamos y sumamos respectivamente el valor de cada una de estas partes, tendremos en esta suma el producto pedido.

Apliquemos este método á la resolucion de el problema anterior, segun lo cual diremos.

valor de una vara	14 reales + 20	maravedis.
han de tomarse	7 varas + 9	pulgadas.
las 7 varas solamente valdrán	98 reales + 140	maravedis.
las 9 pulgadas valdrán	3 » + 22	»
cuya suma serán	105 » + 26	»

Determinemos por referido *método de las partes alícuotas* la resolucion de este problema.

Valiendo una vara de tela 2 pesetas + 3 reales + 12 maravedis, se pregunta ¿cuánto valdrán 5 varas + 2 piés + 3 pulgadas.

Las 5 varas valdrán	10 pesetas + 15 reales + 60	maravedis
Una tercia ó pié valdrá	3 » + $26 \frac{2}{3}$	»
La otra tercia valdrá	3 » + $26 \frac{2}{3}$	»
Las 3 pulgadas ó la cuarta parte de la tercia	+ $32 \frac{1}{6}$	»
Luego el valor de la suma será	10 pesetas + 21 reales + $145 \frac{1}{2}$	maravedis,

que equivaldrán á 16 pesetas + 1 real + $9 \frac{1}{2}$ maravedis.

Division.

205. *Para dividir un incomplejo, por otro incomplejo se dividirán como si fuesen abstractos, y la especie del cociente será determinada por las condiciones del problema.*

Ejemplo: Con 20000 reales se pregunta ¿cuántas arrobas de arroz se podrán comprar valiendo cada arroba 28,5 reales?

La resolucion de este problema, será pedir las veces que en el número 20.000, contiene al 28,5 cuya division efectuada nos dá de cociente 701,75.

Cuando dividendo y divisor fueren de diferente especie, consideraremos como abstracto al divisor y el cociente será de la especie del dividendo. (1)

(1) Tendremos presente la escepcion relativa á las áreas y volumenes, cuando conocidas estas y uno de los factores, pretendamos hallar el otro factor.

Para dividir un complejo por un incomplejo se divide cada grupo de unidades de aquel por este, y la suma de los cocientes parciales será evidentemente el cociente total. Ejp. Hallar la 6.ª parte de 17 varas+3 cuartas+3 pulgadas.

(Dividendo)

17 varas+ 3 cuartas+3 pulgadas	6 (*Divisor.*)
5 » =20 »	2 vs.+3 cs.+8 ps.
23 cuartas	
5 » =45 pulgadas.	
48 pulgadas.	

Tambien puede resolverse este problema reduciendo el complejo á incomplejo, y verificando luego la division de los incomplejos conforme está indicado.

Para dividir un número incomplejo, por un complejo se reduce este á incomplejo, dividiéndose luego como estos.

Ejemplo: Vendiéndose los libros de una biblioteca, cada uno á 2 duros+3 pesetas+1 real, se pregunta ¿cuántos libros se podrán adquirir con 1000 reales?

Diremos 1000:53=18,867, es decir que se podrán adquirir 18 volúmenes y sobrarán 0,867 que valen á 46 rs

Para dividir un complejo por otro complejo se reducen ambos á incomplejos y se dividen como tales

Ejemplo: Si la vara de una tela vale 7 reales+15 maravedis, se desea saber ¿cuánta tela se podrá adquirir con 300 reales+19 maravedis?

Cuyo problema se resolverá dividiendo 10219 por 253, lo que nos dará de cociente 40 varas+11 pulgadas+4 líneas.

Tambien puede hallarse el cociente de la division de dos complejos, reduciendo á la menor de sus especies el divisor, dividiendo luego cada parte del dividendo por el divisor reducido, multiplicando despues este cociente por el número de unidades inferiores del divisor, que forman la superior á que se refiere el propuesto.

REGLA DE TRES.

206. *Llámase* Regla de Tres, *aquella con aplicacion de la cual resolvemos todos los problemas que como dependientes de la proporcionalidad de los números, resulten de establecer y despejar una ó mas proporciones ó igualdades fraccionarias.*

Se llama *Regla de tres simple* á la que se establece para resolver un problema, cuya resolucion depende de una sola proporcion.

Se llama *Regla de tres compuesta*, aquella de la cual depende la resolucion de un problema, el que para ser resuelto obliga al planteamiento y resolucion de varias proporciones

Si dos cantidades son tales que toda variacion en una de ellas hace cambiar á la otra, estas se llaman *relativas*; tal sucede por ejemplo entre el trabajo de un operario con su jornal: el mayor peso de un cuerpo, con su mayor volúmen: el consumo de víveres de una ciudad, con el número de sus habitantes, etc., cuyas cantidades espresadas por números, nos indican la *proporcionalidad directa* de los mismos.

Mas si la variacion de la una en un sentido produjese la alteracion de la otra en el contrario, nos espresaria la *proporcionalidad inversa*; tal sucede por ejemplo *entre el menor* tiempo necesario para terminar una obra, á medida que el número de operarios para la misma *aumente*.

Es decir que dos cantidades son *directamente* proporcionales cuando su *cociente* es constante aunque cambien los términos de la razon; y son *inversamente proporcionales* cuando su *producto* es constante, aunque varien los términos de la razon.

Cuando los 4 números sean homogéneos y tuviésemos que $A:B::b:a$ serian estos números recíprocamente proporcionales

Cuando dos números homogéneos son proporcionales con otros dos tambien homogéneos, de modo que el número 1.° es con el 2.° como el correspondiente al 1.° es al correspondiente al 2.°; se dirá que estos números son *directamente* proporcionales; tal sucederá entre los 4 números homogéneos dos á dos A y a, B y b, que formarán la siguiente proporcion $A:a::B:b$.

Y cuando dos números homogéneos son proporcionales con otros dos, de manera que el número 1.° es al 2.° como el correspondiente al 2.° es al correspondiente al 1.°, se dirá que estos forman una proporcion *inversa*, como sucederia siendo homogéneos los números anteriores y formándose la proporcion en esta forma: $A:a::b:B$.

Conoceremos si los términos son proporcionales directamente cuando multiplicando uno de los números principales por un número resulte su relativo multiplicado por el mismo, entónces serán *directamente proporcionales.*

Y cuando al multiplicar uno de los números principales por un número, resulte su relativo dividido por el mismo, serán los números *inversamente proporcionales.*

Regla de Tres simple. (1)

207. *La Regla de tres simple puede ser* directa *ó* inversa. *Será directa cuando suponiendo aumentada una de las cantidades, deba aumentar tambien su* relativa correspondiente: *el valor de la incógnita se determina multiplicando el número de su especie por un quebrado cuyo numerador es la cantidad correspondiente á la incógnita y por denominador la correspondiente á su homogénea.*

Ejemplo: 12 arrobas de azúcar costaron 768 reales.

Se pregunta: ¿3 arrobas cuanto costarán? Diremos:

12 arrobas=768 reales.
3 arrobas= x reales.

La naturaleza de esta cuestion espresa claramente que el número de reales es proporcional al de arrobas; por tanto, si la primera razon es 12:3 fácil es averiguar si la segunda debe ser 768:x ó si x:768; esta última no puede ser, porque si la primera razon es 12:3, va de mayor á menor referida á arrobas; luego la segunda razon debe tambien ir de mayor á menor referida á reales (y pues x es evidentemente menor que 768), luego la proporcion debe establecerse diciendo 12:3::768:x, de donde $x=3\times768:12=192$ reales, valor de las 3 arrobas, y cuya incógnita despejamos conforme á lo espresado.

208. *Será* Inversa *la regla de tres simple cuando suponiendo aumentada una de las cantidades, deba disminuir su correspondiente. Para hallar en este caso el valor de la incógnita, se multiplica el número de su especie por un quebrado que tenga por numerador la cantidad correspondiente á la homogénea de la incógnita y por denominador la correspondiente á esta.*

Ejemplo: 80 hombres consumen en 30 dias 12 sacos de

---

(1) Las cuestiones dependientes de la Regla de tres simple, pueden tambien resolverse por el Método de reduccion á la unidad.

harina; se pregunta, ¿en cuántos dias consumirán 100 hombres la espresada harina?

Haremos caso omiso del término fijo 12 sacos, el cual no es mas que un incidente de la cuestion, independiente de la misma, y diremos:

80 hombres.... 30 dias.
100 hombres.... x dias.

La naturaleza de este problema espresa claramente que el número de dias será menor que 30, y por tanto que á medida que aumente el número de hombres, disminuirán los dias. Si la 1.ª razon es $80:100$. la 2.ª deberá ser $30:x$ ó $x:30$, pero la 1.ª razon va de *menor á mayor*, y hemos asegurado que x será menor que 30, luego la 2.ª debe ser $x:30$, y por último la progresion será $80:100::x:30$ donde $x=80\times30:100=24$ dias, cuya incógnita despejamos conforme á lo espresado.

Regla de tres compuesta.

209. *Llámase así á aquella regla que es necesario establecer para determinar el cuarto término de una proporcion procedente de la multiplicacion de otras varias.*

El número de proporciones que son necesarias se determina por el de condiciones del problema. Tratemos, por ejemplo, de averiguar *¿cuántos dias invertirán 200 hombres, trabajando 9 horas diarias, para hacer un desmonte de 300 metros de largo, por 8 de ancho y por 5 de profundidad, en un terreno 4 veces mas duro; que aquel en el cual 120 hombres, trabajando 11 horas diarias, han invertido 30 dias en hacer otro desmonte de 160 metros de largo por 6 de ancho y 3 de profundidad?*

Expondremos las condiciones del problema en esta forma:

200 homb.,	9 h.,	300 metros,	8 ancho,	5 profundidad,	4 veces,	x dias
120 „	11 „	160 „	6 „	3 „	1 „	30 „

Si se tratase esclusivamente de averiguar ¿cuántos dias invertirán 200 hombres en hacer una obra para la cual bastasen 120 hombres durante 30 dias? Diriamos:

$$200:120::30:x \text{ (dias).}$$

Ahora bien, si 200 hombres necesitan x dias para hacer la obra, trabajando 11 horas diarias, claro es que trabajando solo 9 horas se necesitarán mas dias, luego

$$9:11::x\text{ (dias)}:x'\text{(dias)}.$$

Atendiendo ahora á la longitud del desmonte, observaremos, prescindiendo de las demás condiciones, que cuanto mas largo sea mas dias se necesitarán para hacerlo; por tanto

$$160:300::x'\text{(dias)}:x''\text{(dias)}.$$

Evidentemente cuanto mas ancho sea, será necesario mas tiempo y por tanto

$$6:8::x''\text{(dias)}:x'''\text{(dias)}$$

y tambien cuanto mas profundo aumentará el tiempo de su construccion, así que

$$3:5::x'''\text{(dias)}:x''''\text{(dias)}.$$

Por último, como la mayor dureza del terreno espresa la necesidad de mas tiempo, tendremos que:

$$1:4::x''''\text{(dias)}:X$$

cuyas proporciones ordenadamente colocadas, serán

$$\begin{array}{llll}
200\text{ (hombres)}: & 120\text{(hombres)} :: & 30\text{ (dias)}: & x\text{ (dias)}\\
9\text{ (horas)}: & 11\text{ (horas)} :: & x\text{ (dias)}: & x'\text{ (dias)}\\
160\text{ (metros)}: & 300\text{ (metros)} :: & x'\text{ (dias)}: & x''\text{ (dias)}\\
6\text{ (m. anch.)}: & 8\text{ (m. anch.)} :: & x''\text{ (dias)}: & x'''\text{ (dias)}\\
3\text{ (m. prof.)}: & 5\text{ (m. prof.)} :: & x'''\text{ (dias)}: & x''''\text{(dias)}\\
1\text{ (dureza)}: & 4\text{ (dureza)} :: & x'''': & X\textit{ Dias.}
\end{array}$$

Estas proporciones multiplicadas término á término, y simplificando en los dos términos de la 2.ª razon las incógnitas comunes, nos darán la proposicion final

$$200\times9\times160\times6\times3\times1:120\times11\times300\times8\times5\times4::30:X$$

donde $X=\dfrac{120\times11\times300\times8\times5\times4\times30}{200\times9\times160\times6\times3\times1}=366\text{ dias}+\dfrac{2}{3}$

que equivale á 366 dias y 6 horas (toda vez que el trabajo de cada dia es contado solamente por 9 horas).

Segun lo cual diremos: para hallar el valor de una incógnita, de pendiente de las varias proporciones con las cuales se resuelve una Regla de tres compuesta, *se multiplica su homogénea por los cocientes que resulten de dividir entre sí, las cantidades de cada par; teniendo en cuenta que cuando un par es directamente proporcional al de la incógnita, se debe poner por numerador la cantidad correspondiente á esta, y la otra por denominador; y cuando un par es inversamente proporcional al valor de la in-*

cógnita, se debe poner por denominador la cantidad correspondiente á esta, y por numerador la otra cantidad.

REGLA DE COMPAÑIA. (1)

210. Entendemos por Regla de compañia, la que se establece para averiguar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios individuos que se han asociado, para emprender con sus capitales una negociacion cualquiera.

Para la resolucion de estas cuestiones, es preciso, no solo atender al *capital* impuesto por cada uno, sino tambien al *tiempo* durante el cual cada uno de los asociados espuso su capital. De aquí que la REGLA DE COMPAÑIA pueda ser *simple* ó *compuesta*.

La REGLA DE COMPAÑIA, *es simple* en los dos casos siguientes: 1.° cuando es uno mismo el tiempo de la imposicion de cada sócio, en cuyo caso las ganancias ó pérdidas son proporcionales á los capitales; y 2.° cuando siendo iguales los capitales, sean diferéntes los tiempos, en cuyo caso las ganancias ó pérdidas serán proporcionales á los tiempos.

La REGLA DE COMPAÑIA se llama *compuesta*, cuando siendo diferentes los capitales, sean tambien distintos los tiempos de la imposicion de cada uno de los sócios; siendo entónces las ganancias ó pérdidas proporcionales á los productos de los tiempos por los capitales. (2)

---

(1) Segun el artículo 265 del Código de comercio, puede contraerse compañia mercantil de las siguientes maneras:

1.° *En compañia regular colectiva.* Esto es, en nombre colectivo bajo pactos comunes á todos los sócios y en participacion de los mismos derechos y obligaciones, en la proporcion establecida.

2.° *Por compañia en comandita.* Es decir, prestando una ó varias personas los fondos para estar á las resultas de las operaciones sociales, bajo la direccion esclusiva de otros sócios que los administren en su nombre particular.

3.° *En compañia anónima.* Esto es, formándose un fondo por acciones determinadas. Fondo, que luego se gira sobre uno ó muchos objetos que dan nombre á la empresa social y cuyo manejo se encarga á mandatarios ó administradores, amovibles á voluntad de los sócios.

(2) Al producto de un tiempo por un capital se le llama *número mercantil.*

Regla de compañia simple.

211. 1.^{er} Caso. Tres sócios A. B. C. imponen:

$A=4500$ reales.
$B=5000$ id.
$C=6000$ id.

Con la suma de los capitales de A, B y C se emprende una negociacion que en un tiempo dado, produce un beneficio de 3000 reales: se quiere saber la ganancia correspondiente á A. B y C.

Es claro que será mayor la ganancia de quien mas capital hubiese impuesto, y por tanto que C ganará mas que B, y este mas que A.

Luego diremos si 4500+5000+6000 reales ganaron 3000 reales, la sola cantidad de 4500, ó la de 5000, ó la de 6000 ganará respectivamente.

x, x' y x'', luego $15.500:3000::4500:x$
$15.500:3000::5000:x'$
$15.500:3000::6000:x''$

donde $x=870,968$; $x'=967,742$; $x''=1.161,290$.

Y en efecto, la suma de las ganancias parciales es igual á la ganancia total.

212. 2.° Caso. Supongamos que varios sócios, por ejemplo 3, imponen todos un capital igual, el 1.° por 1 año y tres meses; el 2.° por 2 años, y el 3.° por 2 años y 3 meses, y obtuvieron una pèrdida de 4000 reales, se pretende averiguar la pérdida correspondiente á cada uno; formariamos las proporciones teniendo en cuenta que las pérdidas son proporcionales á los tiempos correspondientes diciendo:

A. impone su capital por 15 meses.
B. por 24 id.
C. por 27 id.

Diriamos si en la suma 66 meses se han perdido 4000 reales en 15, 24 ó 27 se habrán perdido respectivamente

x, x' y x'' luego $66:4000::15:x$
$66:4000::24:x'$
$66:4000::27:x''$

La suma de las pérdidas parciales serà igual á la pêrdida total.

Tambien podria resolverse por el *método de reduccion á la unidad*, dividiendo 4000 por 66 y multiplicando el cociente por 15, 24 ó 27 respectivamente, en cuyo caso el espresado cociente seria la pérdida correspondiente á un mes.

Regla de Compañía compuesta.

213. Sean por ejemplo, tres sócios *A*, *B* y *C*.
A impone 8000 por 2 años.
B impone 6000 por 2 años y 7 meses
C impone 5400 por 3 años y 2 meses.
Pierden la cantidad de 3500 reales; se quiere saber la pérdida correspondiente á cada uno.

Ya sabemos que si los tiempos fueran iguales, las pérdidas serian proporcionales á los capitales; y que si estos fuesen iguales, aquellas serian proporcionales á los tiempos: luego aquí deberán ser las pèrdidas proporcionales á los productos de los tiempos por los capitales, que es lo que se llaman números mercantiles.

A $8000 \times 24 = 192000$ primer número mercantil.
B $6000 \times 31 = 186000$ segundo número mercantil.
C $5400 \times 38 = 205200$ tercer número mercantil.

583.200 es la suma de estos.

Luego $583200 : 3500 :: 192000 : x$
$583200 : 3500 :: 186000 : x'$
$583200 : 3500 :: 205200 : x''$

que se resolverán fácilmente, verificándose que $x + x' + x'' = 3500$ reales.

214. En general diremos que para dividir un número en cierto número de partes proporcionales, no hay mas que dividir el número dado por la suma de todos los números que indican las partes proporcionales, y este cociente se multiplica respectivamente por cada uno de los números correspondientes á cada parte.

Este problema de la division de un número en partes proporcionales se aplica al *reparto de contribuciones; para socorros mútuos; prorrateo; para cupos de quintas*, y en general para todos los repartos, cuya cuestion se funde en los repartos proporcionales.

REGLA DE INTERÈS.

215. *Se llama interés á la ganancia que produce un*

capital prestado á un rédito ó tanto por ciento convenido.

El interés puede ser SIMPLE ó COMPUESTO, *el primero es solamente producido por el capital. El compuesto es producido por el capital, adicionado con los intereses devengados.*

Es decir que en el interés simple el capital se conserva invariable, percibiéndose los intereses al vencimiento de cierto tiempo.

En el interés compuesto, el capital vá aumentando al final de cada plazo con los réditos que se le aglomeran, y es por tanto este aumento progresivo.

En el interés simple hay que considerar dos casos: 1.° *que el tiempo sea un año.* 2.° *que el tiempo sea diferente de un año.*

1.er caso. Para este haremos observar que como á mayor capital corresponde mayor interés y recìprocamente, es evidente que las veces que un capital contenga á cien unidades, deberán ser las mismas que el interés contenga al tanto por 100 que se llama rédito. Luego si llamamos

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ al capital} \\ r \text{ al rédito é} \\ i \text{ al Interés} \end{array}\right\} \text{ tendremos } 100:C::r:i$$

proporcion en la cual, despejando respectivamente cada uno de sus términos, tendremos $C=100\times i:r$

$$r=100\times i:C \quad \text{é} \quad i=C\times r:100$$

lo que nos dice: *que el* CAPITAL *es igual á 100 multiplicado por el interés y partido por el rédito: que el* RÉDITO *es igual á 100 por el interés partido por el capital: y que el* INTERÉS *es igual al capital por el rédito partido por 100.*

Tres son pues los problemas que podemos resolver:

1.° ¿Qué capital al 8 0/0 produce de interés anual 10.000 rs.?

$$c=100\times 10000:8=125000 \text{ rs.}$$

2.° ¿A qué rédito están impuestos 40.000 rs., que producen de interés anual 8000?

$$r=100\times 8000 : 40.000 \text{ será al } 20\ 0/0.$$

3.° ¿Qué interés anual producen 100.000 al 9 0/0?

$$i=100.000\times 9 : 100=9000 \text{ rs.}$$

216. 2.° caso. Si el tiempo es diferente de un año, habremos que tener en cuenta el número de dias, puesto que si este es la mitad ó tercera etc. parte de un año, es evidente que el rédito correspondiente será la mitad ó

tercera etc. parte del correspondiente á un año; luego llamando t al número de dias y considerando el año comercial compuesto de 360 dias, tendremos $360 : t :: i : t$ y proporcion que multiplicada término á término con la ya conocida que dice $100 : C :: r : i$ nos dará $36000 : c\times t :: r\times i : i\times y$ en la cual partiendo los dos términos de la 2.ª razon por i tendremos $36000 : c\times t :: r : y$ en la que y representará el interés correspondiente, y en ella despejando cada una de las cantidades c, t, r, y, tendremos:

$$c=36.000\times y : (t\times r)$$
$$t=36.000\times y : (c\times r)$$
$$r=36.000\times y : (c\times t)$$
$$y=c\times t\times r : 36.000$$

Las cuales podremos aplicar á estos ó parecidos problemas.

1.° ¿Qué capital en 200 dias al 8 0/0 produce de interés 3.000 reales?

$c=36.000\times 3000 : 200\times 8$ luego será $n=67.500$ rs.

2.° ¿En cuántos dias 12000 rs. al 10 0/0 producen 400 rs. de interés?

$t=36.000\times 400 : 12.000\times 10=$ en 120 dias.

3.° ¿A qué rédito produce un capital de 6.000 reales, impuesto al 8 0/0, 800 rs. de interés en 400 dias?

$r=36.000\times 800 : 6.000\times 400=$ al 12 0/0.

4.° ¿Qué interés producen 20000 reales en 70 dias al 14 0/0 anual?

$y=20000\times 70\times 14 : 36000=544{,}44.$

REGLA DE DESCUENTO.

217. Dase el nombre de LETRA DE CAMBIO, á un documento mercantil que con todas las condiciones legales y con arreglo al código de comercio, se remite por una persona á otra de diferente poblacion, y en la cual se consigna un *valor nominal* que se manda pagar á otra tercera persona vecina de aquella á quien se remite. En toda letra hay los nombres de el girador ó remitente; de aquel que debe pagarla, y el de el dueño ó tenedor de la letra.

Del Interés compuesto así como del Descuento compuesto nos ocuparemos con otras aplicaciones que requieren el conocimiento de los Logaritmos, en el tratado de Algebra.

Las letras se pueden girar pagaderas á la vista, ó á cierto número de dias fecha, despues de espedida, ó á tantos dias vista.

En el primer caso el valor nominal y el efectivo de la letra es el mismo.

En el segundo y tercer caso el valor efectivo de la letra será tanto menor que el nominal, cuanto mayor número de dias falten para el de su vencimiento.

La que venga á tantos dias fecha, corre esto plazo despues de fechada la misma; pero la que venga á tantos dias vista es preciso que sea inmediatamente presentada para que se *acepte* y feche, y desde este dia, corren los que deben transcurrir á su vencimiento.

Si una letra se recibe por todo su valor, se dice que se negocia á la *par;* si se recibe por valor superior al suyo, se dice que con *beneficio*, y si valor inferior, se dice que con *quebranto*, puesto que siempre se refiere al que entrega ó vende la letra.

Pagaré es otro documento mercantil por el cual se obliga la persona que le otorga, á pagar cierta cantidad, en un término preciso.

Tanto las *letras de cambio* como los *pagarés* tienen por lo tanto dos valores, uno *efectivo* y otro *nominal*, que es el que espresan los mismos; el valor efectivo de una letra ó pagaré se aproximará tanto al valor nominal cuanto mas se aproxime á la fecha de su vencimiento, por tanto, el quebranto que sufre una Letra por cobrarla antes de su vencimiento es á lo que se llama *Descuento.*

Hay dos clases de descuento, el *Real* y el *Abusivo*. Llámase descuento *Real* al que es proporcional *al valor efectivo de la letra y al tiempo que falta para su vencimiento.* Llámase *Abusivo* al que es proporcional *al valor nominal de la Letra y á su tiempo*, este es pues el interés del valor nominal en dicho tiempo, que se deduce de su espresado valor nominal. Este descuento que es el generalmente usado, equivale al interés del valor nominal de la letra, mas el interés de dicho interés.

Segun lo cual observaremos que es menos racional que el anterior, siendo sin embargo el corriente en las operaciones comerciales. Con un ejemplo referido á una misma letra aclararemos la diferencia entre ambos, indicando los procedimientos para obtenerlos.

Toda letra se puede descontar á un tanto por 100 de su valor sin atender á tiempo; ó á un tanto por ciento anual.

Descontar el 10 $^0/_0$ de una letra de 84.500 rs. (con aplicacion de el descuento *Real*).

Diremos de 110 deben descontarse 10, luego de 84.500 reales se descontarán x.

$$100+10:10::84500:x \qquad x=7681{,}81.$$

En este caso el valor efectivo de la letra será

$$84500-7681{,}81=76818{,}19.$$

Por el Descuento *Abusivo* ó Comercial será

$$100:10::84500:x \qquad x=8450.$$

Luego el valor efectivo es 84500—8450=76,050. (En este caso el perjuicio ocasionado al Tenedor de la Letra es de 768,19 rs.)

Si el descuento se refiere á un tanto por ciento anual, podriamos reducir ese tanto por ciento al que corresponde á los dias que faltaren para su vencimiento, lo cual hariamos multiplicando el descuento anual convenido, por los dias espresados, partiendo este producto por 360. Tambien por aplicacion de estas fórmulas; llamando N al valor nominal y E al efectivo, r al tanto por 100 y t al tiempo: tendremos

$$N=E+\frac{Ert}{100} \qquad E=N-\frac{Nrt}{100}$$

REGLA DE ALIGACION. (1)

218. La Regla de Aligacion se propone resolver los dos problemas siguientes:

1.° *Conocidas las cantidades que se mezclan, así como sus precios, determinar el precio medio de la mezcla.*

2.° *Determinar las cantidades que han de mezclarse de cada uno de varios precios para que la mezcla tenga un precio convenido.*

En el primer caso se llama Regla de Aligacion *directa* y en el segundo *inversa*.

Regla de Aligacion directa.

219. *Para resolver el primer problema procederemos*

(1) Esta Regla tambien se aplica para conocer el peso, calidad, densidad, etc., así como la relacion entre el todo y sus partes y recíprocamente (la mezcla).

determinando el valor de las unidades de cada especie, segun su precio respectivo, sumaremos estos productos y partiremos la suma por el número total de aquellas unidades.

Ejemplo: si mezclamos 20 arrobas de vino de **90** rs. con 16 id. de 100 rs., con 31 id. de 73 rs. ¿cuál será el precio medio de la mezcla?

20 arrobas de vino	á	90 rs.=1800	rs.
16 » »	á	100 rs.=1600	»
31 » »	á	73 rs.=2263	»
67 arrobas suman: que valdrán		5663	» luego
el precio de cada arroba será		84,52	»

cociente de dividir 5663 entre 67.

Regla de Aligacion inversa.

220. Para resolver el 2.° Problema, por ejemplo determinar cuantas fanegas de garbanzos se deben mezclar de 82 rs. y de 130 rs. fanega para que resulten á 100 rs. Observaremos que en cada fanega de 82, vendida á 100 rs. se ganan 18 rs. y en cada una de 130, vendida á 100 se pierden 30 rs.; si la pérdida fuese igual á la ganancia, el vendedor daria salida á su gênero sin quebranto del mismo, por tanto es necesario multiplicar el 18 por un número tal, que su producto espresando la ganancia, sea igual al producido por multiplicar 30 por otro número. Un producto espresará la pérdida, otro la ganancia; siendo iguales no habrá quebranto y puede verificarse la mezcla sin fraude; y como $18\times30=30\times18$ tendremos que se podrán y deberán mezclar 18 fanegas de los de 130 rs. con 30 fanegas de los de 82 rs. Como consecuencia se podrán mezclar todos los submúltiplos y múltiplos de las cantidades que espresan estas clases, en la forma siguiente:

	Del de 130.		Del de 82.
Sub-múltiplos	18	con	30
	9	con	15
	6	con	10
	3	con	5

	De 130.		De 82.
Múltiplos.	36	con	60
	54	con	90
	72	con	120
	108	con	180
	180	con	300

De todo lo cual deduciremos fácilmente que:

Los números de unidades de diferente precio que hay que mezclar para que resulte de un precio medio, son inversamente proporcionales á las diferencias de sus precios con el precio medio.

Si las especies que hubieran de ser mezcladas fuesen 3 ó mas, se tomarán dos á dos, una de precio superior al precio medio y otra de precio inferior; luego el de otras dos, superior é inferior y así sucesivamsnte, aunque una de ellas entre dos ó mas veces, las unidades correspondientes á esta se sumarán, para que esprese en total las que deba entrar de dicha especie. Ejemplo:

Tenemos vino tinto de 54, 64, 84 y 93 reales arroba: se pregunta: ¿cuánto debe mezclarse de cada una de estas clases para que resulte de 62 reales?

$$62\begin{cases}54\text{———}62-54=8 \text{ de } 64\\ 64\text{———}64-62=2 \text{ de } 54\end{cases} \qquad 62\begin{cases}54\text{———}62-54=8 \text{ de } 84\\ 84\text{———}84-62=22 \text{ de } 54\end{cases}$$

$$62\begin{cases}54\text{———}64-54=8 \text{ de } 93\\ 93\text{———}93-62=31 \text{ de } 54\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Del de } 54 & \text{entrarán} & 2+22+31=55\\ \text{Del de } 64 & \text{id.} & =8\\ \text{Del de } 84 & \text{id.} & =8\\ \text{Del de } 93 & \text{id.} & =8\end{array}\right\}\text{total}=79.$$

Comprobacion: 79 arrobas á 62 rs.=4.898.

$$\left.\begin{array}{llr}55 \text{ arrobas} & \text{á } 54 \text{ rs.}= & 2970\\ 8 \text{ id.} & \text{á } 64 \text{ id.}= & 512\\ 8 \text{ id.} & \text{á } 84 \text{ id.}= & 672\\ 8 \text{ id.} & \text{á } 93 \text{ id.}= & 744\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{que suman } 4.898 \text{ rs.}\\ \text{número precisamente igual al}\\ \text{anterior.}\end{array}$$

REGLA CONJUNTA.

221. *La* REGLA CONJUNTA *se propone determinar la relacion entre dos números por medio de las relaciones conocidas que estos tienen con otros intermedios.*

A cada relacion de igualdad entre dos números de distinta especie se le llama EQUIVALENCIA.

La resolucion de todos los problemas dependientes de esta regla se funda en el siguiente

Teorema: *Si multiplican ordenadamente varias equivalencias, tales que el primer miembro de cada una sea de la misma especie que el segundo de la que le antecede, resultará otra equivalencia cuyo primer miembro será de la especie del primer miembro de la primera, y el segundo de la especie del 2.º miembro de la última.*

Sean las equivalencias

a onzas $=b$ libras
c libras $=d$ arrobas
e arrobas$=f$ quintales

Vamos á demostrar que $a\times c\times e$ onzas$=b\times d\times f$ quintales; multiplicando la primera equivalencia por c dará $a\times c$ onzas$=b\times c$ libras: multiplicando por b la 2.ª tendremos $c\times b$ libras$=b\times d$ arrobas: dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, luego $a\times c$ onzas$=b\times d$ arrobas; multiplicando esta nueva igualdad por e tendremos $a\times c\times e$ onzas$=b\times d\times e$ arrobas; si multiplicamos ahora la tercera equivalencia por el producto de $b\times d$ tendremos $b\times d\times e$ arrobas$=b\times d\times f$ quintales: igualando los dos miembros diferentes de estas dos últimas igualdades tendremos: $a\times c\times e$ onzas$=b\times d\times f$ quintales, que es lo que queriamos demostrar.

La regla conjunta tiene su aplicacion mas general en los cambios extrangeros, segun indicamos en el problema siguiente:

Se pregunta ¿x reales = 150 thalers? sabiendo que:

7 thalers= 27 francos.
50 francos= 2 libras.
1 libra =4500 reis.
920 reis = 20 reales. tendremos que

$x\times 7\times 50\times 1\times 920$ reales$=150\times 27\times 2\times 4500\times 20$ rs.

de donde $x=2.263,97$

Luego 150 thalers=2.263,97 reales, y
por tanto 1 thalers=15,09 reales.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES Á LAS APLICACIONES ARITMÉTICAS Ó NUMÉRICAS.

I. Convertir en incomplejo ó de años, ó de meses, ó de dias, ó de horas ó de minutos, el complejo 2 lustros+3 años+8 meses+15 dias+7 horas.

II. Convertir en complejo el incomplejo dos tercios de lustro.

III. Expresar en decímetros ó centímetros cúbicos los que tendrán 3 metros cúbicos.

IV. Reducir á granos, 2000 gramos.

V. Espresar en kilógramos un peso de 7 arrobas+3 libras+4 onzas.

VI. Reducir á hectáreas, áreas y centiáreas, 13 fanegas+200 estadales +9 varas cuadradas.

VII. Reducir á fanegas, estadales y varas cuadradas, 15 hectareas+12 áreas+15 centiáreas.

VIII. Espresar en cada una de las unidades de capacidad del sistema antiguo, un kilólitro.

IX. Sabiendo que una vara de tela vale 2 duros, 3 pesetas, 2 reales y 7 maravedis, espresar el valor de 30 varas, 7 pulgadas y 4 líneas (Por el Método de las Partes alícuotas.)

X. Si con 23 duros, 2 pesetas, 3 reales y 8 maravedis, se compraron 6 varas, 2 tercias y 3 pulgadas ¿á como habrá costado la vara?

XI. Si con 15 kilógramos de cáñamo se hacen 23 varas, 2 tercias y 4 pulgadas de tela ¿cuánto podrá hacerse con 1 kilógramo?

XII. Una cuarta de tubo de plomo, pesa 1 libra, 9 onzas y 3 adarmes; se pregunta cuánto pesarán 5 metros, 4 decímetros y 3 centímetros.

XIII. Dar á la equidiferencia 7.10:13.16 todas las formas posibles, y despejar cada uno de sus términos con aplicacion de los valores de los otros 3.

XIV. Formar con la misma proporcion aritmética algunas proporciones compuestas.

XV. Dar á la proposicion geométrica 7:9::14:18 todas las formas posibles, despejar cada uno de sus 4 términos, y formar con la misma todas las proporciones compuestas.

XVI. Si 21 varas de tela costaron 47 rs. ¿cuántas varas se podrán comprar con 173 reales? (Por el Método de Reduccion á la unidad).

XVII. Si en 50 dias hacen 8 hombres una casa ¿en cuántos dias la harán 22 hombres?

XVIII. Si 12 hombres en 8 dias, trabajando 9 horas diarias, hacen un muro de 77 metros de largo, ¿en cuántos dias harán este mismo muro 9 hombres, trabajando 10 horas diarias?

XIX. Qué ganancia corresponde á cada uno de 4 sócios, si el 1.º impuso 2.500 rs., el 2.º 3.100, el 3.º 1.820 y el 4.º 1.000, sabiendo que todos ganaron 4.622 rs.

XX. Qué pérdida corresponde á cada uno de 3 sócios, habiendo cada uno impuesto el mismo capital, el 1.º por 11 meses, el 2.º por 1 año y 3 meses y el 3.º por 2 años, 2 meses y 2 dias, siendo 10.000 rs. la pérdida total.

XXI. Qué ganancia corresponde á cada uno de 3 sócios, si entre los 3 ganaron 2000 rs., habiendo impuesto el 1.º 1000 rs. por 7 meses, el 2.º 500 por 3 años y 3 meses, y el 3.º 1600 por 5 meses y 13 dias.

XXII. ¿Qué interés anual producen 15700 al 9,5 por 100?

¿Qué capital produce 8000 rs. de interés, al 11 por 100?

¿A qué rédito están impuestos 14000 rs. que producen 3500 de interés anual?

XXIII. ¿Qué interés producen 8000 rs. en 131 dias al 7 por 100?

¿Qué capital en 80 dias produce 6000 rs. impuesto al 10 por 100?

¿En cuantos dias 9000 rs. producen 300 impuestos al 6 por 100?

¿A qué rédito 1000 rs. producen en 30 dias 100 rs.?

XXIV. Descontar una letra de 12000 al 8 por 100 anual, por cobrarla 100 dias antes de su vencimiento, verificando el descuento *Real* y el *Abusivo* y marcando la diferencia entre los dos. Para hacer ver lo injusto del Descuento Abusivo.

XXV. Cual es el precio medio úe una mezcla formada con 20 arrobas de arroz á 24 rs., 75 arrobas de 33 y 60 arrobas de 31 reales.

XXVI. ¿Cuántas fanegas de trigo habrá que mezclar del de 50 rs. fanega, del de 63 rs. y del de 59 para tener una sola clase de trigo que valga á 54 rs. fanega?

XXVII. ¿Cnántos reales valdrán 2000 copecks rusos, sabiendo que 258 valen 10 pesetas; que 20 rs. valen 880 reis portugueses; que 900 reis valen 107 bayocos romanos; que 90 bayocos valen 49 peniques ingleses; que 52 peniques valen 5,3 liras italianas; que 5 liras valen 44 schelines de Hamburgo; que 45 schelines valen 5,25 francos franceses, y por último, que 10 francos valen 38,5 reales?

ÁLGEBRA.

ÁLGEBRA.

1. ALGEBRA *es la ciencia que se ocupa de* ANALIZAR, DETERMINAR *y* ESPRESAR *las leyes generales de la cantidad en general, independientemente de su naturaleza numérica ó estensiva.*

Constituye SU OBJETO *determinar las leyes generales de la cantidad, relacionando y operando con las partes de esta.*

Los MEDIOS *de que se vale son la notacion algebráica, las cantidades literales, las operaciones fundamentales y las relaciones algebráicas.*

Constituye SU FIN *llegar á espresar por fórmulas estas leyes generales.*

Llamamos *fórmula* á la espresion de una ley general referida á la cantidad: su traduccion el lenguaje vulgar nos sirve para enunciar reglas generales de importante aplicacion á la resolucion de problemas.

Siendo el objeto del *Algebra* el estudio de la *cantidad* en sus leyes generales, deberemos saber que

La cantidad literal puede ser

- Real
  - Positiva
  - Negativa
    - De forma entera
    - » » » con exponente negativo.
    - » » » » » fraccionario.
    - » » Fraccionaria.
    - » » Radical.
      - Monomias.
      - Polinomias
- ó
- Imaginaria
  - Positiva
  - Negativa
    - Monomia
    - Polinomia
      - Del 2.º grado.
      - » 4.º »
      - » 6.º »
      - etc.

Para verificar el estudio por nuestro Tratado de Algebra, observaremos el siguiente cuadro, en el que espresamos la division que hacemos de la misma para su ordenado estudio.

Algebra ó ciencia que se ocupa de las leyes generales de la cantidad: se divide en

- 1.ª Parte. NOTACION ALGEBRAICA que dá medios fáciles para espresar las cantidades y sus leyes generales.
- 2.ª Parte. CÁLCULO ALGEBRAICO de las cantidades literales por medio de las operaciones fundamentales.
  - De Composicion.
    - Sumar.
    - Multiplicar.
    - Elevar á potencias.
  - De Descomposicion.
    - Restar.
    - Dividir.
    - Extraccion de raices.
  - Libro 1.º Cálculo de las cantidades literares enteras.
  - Libro 2.º Cálculo de las cantidades literales fraccionarias, y de las que afectando la forma entera tienen exponentes negativos.
  - Libro 3.º Cálculo de las cantidades literales radicales, y de las que afectando la forma entera tienen exponentes fraccionarios. Cálculo de las cantidades imaginarias del 2.º grado.
  - Libro 4.º Coordinaciones. Binomio de Newton y su aplicacion á las potencias y raices de los polinomios.
- 3.ª Parte. RELACIONES ALGEBRAICAS de igualdad, desigualdad y comparacion.
  - Libro 1.º Ecuaciones y problemas del primer grado.
  - Libro 2.º Ecuaciones y problemas del segundo grado Inecuaciones.
  - Libro 3.º Progresiones y Logaritmos.
- 4.ª Parte. APLICACIONES ALGEBRÁICAS
  - Ecuaciones exponenciales.
  - Interés compuesto.
  - Descuento compuesto.
  - Anualidades.
  - Rentas vitalicias, etc.

PRIMERA PARTE.

NOTACION ALGEBRÁICA.

2. *Entendemos por* NOTACION ALGEBRÁICA *los medios ó convenios establecidos para espresar y representar las cantidades y sus leyes generales.*

En *Aritmética* hemos representado las cantidades por números, y aun cuando estos simbolicen todos los de su especie, no puede ser esta representacion susceptible de tal generalidad como es preciso, para la espresion mas general y exacta de las leyes universales de la cantidad, sin embargo de que en muchos casos hemos prescindido del valor cuantitativo del número atendiendo solo, y como ahora lo haremos esclusivamente, á los caracteres de generalizacion.

En el *Algebra* espresamos las cantidades por las letras de nuestro alfabeto; con lo cual conseguimos obviar los razonamientos é imprimir á los resultados el carácter de generalizacion propio de este tratado. Con *las primeras letras* del Alfabeto, se *indican las cantidades conocidas ó datos,* siendo general representar *las incógnitas por las últimas* del Alfabeto; para espresar las cantidades análogas, nos servimos con frecuencia de las mismas letras acentuadas. Tambien es bastante general hacer uso en Algebra de las letras del Alfabeto griego.

En *Algebra*, tratado el mas trascendental y elevado de los que comprende el estudio de las MATEMÁTICAS, se prescinde del cuanto mas ó menos de las cantidades literales que puedan espresar valores numéricos, y se atiende solo á la ley ó leyes que liguen entre si estas cantidades y muy especialmente se atiende á su *cualidad ó modo de ser*; bajo este concepto puede ser una cantidad, *Real ó imaginaria*; *positiva ó negativa.*

Se dice que una cantidad es real cuando tiene una existencia evidente; mas como esta puede espresar ganancia ó pérdida, ascenso ó descenso, tiempo pasado ó futuro etc. conceptos en fin diametralmente opuestos y contrarios, necesitaban el nuevo carácter, *de positivas y negativas*, que sirve bien para espresar esta contrariedad.

Llámanse *cantidades imaginarias*, ó simplemente espresiones imaginaria, á aquellas que se hallan afectas del signo radical *raiz menos uno*, y á las que por ser su existencia imaginaria somos, en cierto modo, agenos á las alteraciones que las mismas sufran aumentando ó disminuyendo, en contraposicion de lo que sucede con las cantidades reales.

Las *operaciones* que deben efectuarse entre las cantidades literales, las *relaciones* que entre las mismas se establecen, y la indicacion de la *cualidad* correspondiente á las mismas, se espresa por medio de los mismos signos empleados en la aritmética.

Las operaciones que se pueden verificar con las cantidades literales, son las mismas que se efectuaron con los números.

La cualidad de una cantidad literal se espresa anteponiéndola el signo $+$ ó $-$ ó $\sqrt{-1}$ segun sea *positiva, negativa ó imaginaria.*

Las cantidades á quienes no anteceda signo se consideran positivas.

A LAS CANTIDADES NEGATIVAS CUYA EXISTENCIA NO PUEDE DESECHARSE DEL TRATADO DEL ALGEBRA, POR SER TAN NATURALES COMO LAS POSITIVAS, se le antepone siempre el signo menos, teniendo en cuenta que *toda cantidad negativa es menor que cero; así como tambien que de dos cantidades negativas, es siempre mayor la de valor absoluto menor; y menor la de valor absoluto mayor.*

Hemos dicho que en ALGEBRA representamos las cantidades por las letras de nuestro Alfabeto, por lo cual una letra espresará en lo sucesivo una cantidad en general, á la cual hipotéticamente podemos asignarle las condiciones que fueren requeridas en las demostraciones que nos propongamos establecer.

Así por ejemplo a, b, c, d, etc. representarán 4 cantidades que podrán ser enteras, fraccionarias ó inconmensurables. Con a podremos espresar un número *par* ó *impar*; *primo* ó *compuesto*; divisible por 2 ó por 7 etc.

3. El *fin* que se propone la *Aritmética* es encontrar un *número.*

El *fin* que se propone el *Algebra* es hallar una *fórmula.*

Aquel está referido á un caso particular y *concreto.*

Esta, se refiere á un caso *general ó abstracto.*

La Aritmética concreta su estudio al número, en tanto este esprese una cantidad (que cuenta en el tiempo.)

La Geometría se ocupa de la cantidad, en tanto esta esprese una estension (que mide en el espacio.)

El ALGEBRA prescinde del *número* y *estension*, como espresiones de una cantidad de *tiempo* y *espacio*, y estudia las leyes de la cantidad, en la cantidad misma, analizando *su cualidad, su relacion, su modalidad, su valor. La cualidad* espresa si es su existencia real ó imaginaria, positiva ó negativa; *su relacion* indica la operacion ú operaciones que deben verificarse entre sus partes. *Su modalidad* espresa determinacion ó indeterminacion; posibilidad ó imposibilidad. *Su valor* indica la magnitud relativa de la misma

En Aritmética, resuelta ya una cuestion, si los datos varian, no puede referirse á otra, haciéndose preciso empezar de nuevo *el planteo y resolucion*, toda vez que la anterior no ha dejado huella del procedimiento empleado para resolverla.

EN ALGEBRA, una cuestion ya resuelta, mediante una fórmula general, sirve siempre para la resolucion de todas las cuestiones análogas, pues que esta espresa todas las operaciones que es necesario efectuar con los datos é incógnitas, para obtener los valores de estas.

4. Para el perfecto conocimiento de lo espresado espondremos á continuacion el siguiente problema:

Determinar el valor de dos cantidades, conocida la suma y la diferencia de las mismas.

Sean las dos cantidades x é y; sea S la suma y D la diferencia. Evidentemente tendremos $x+y=S$ y $x-y=D$. Sumando estas dos cantidades miembro á miembro tendremos $x+y+x-y=S+D$ de donde $2x=S+D$ y por tanto $x=\frac{S+D}{2}$. Si en vez de sumar las dos igualdades miembro á miembro las restamos, tendremos $x+y-(x-y)=S-D$ diferencia en la cual, debiendo disminuir el sustraendo en y, deberá aumentarse el minuendo en el mismo valor, luego la diferencia equivale á

$$x+y-x+y=S-D,$$

en donde $2y=S-D$ é $y=\frac{S-D}{2}$. De cuya fórmula y de la anterior deduciremos, *que dada la suma y la diferencia de dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma, mas la mitad de la diferencia, y la menor es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.*

Teorema. *La suma de dos cantidades, multiplicada por la diferencia de las mismas, es igual á la diferencia entre los cuadrados de dichas dos cantidades.*

En efecto: sean estas a y b.

La suma será $(a+b)$.

La diferencia se espresará por $(a-b)$.

El producto de la suma por la diferencia será

$$(a+b)(a-b)$$

En donde

$$(a+b)(a-b)=(a+b)a-(a+b)b=aa+ab-ab-bb=a^2-b^2.$$

Si damos resolucion al *problema* anterior *aritméticamente,* suponiendo que la suma de los dos números pedidos sea 100 y la diferencia 40, hallaremos, en efecto, que $x=70$ é $y=30$; pero no nos daria una fórmula y su ley general, propia para la resolucion de este problema en cualquier otro caso.

Si el *Teorema* demostrado *Algebráicamente*, lo refiriésemos y evidenciáramos, haciendo aplicacion de los *números enteros* ó por Aritmètica, no seria aplicable á los números fraccionarios é inconmensurables, para los cuales nos fuera preciso nueva demostracion, en contrario de lo que sucede en Algebra, para cuyas demostraciones se aplican las cantidades literales, que conforme hemos espresado, pueden representar indistintamente toda clase de números.

Espresion algebraica ó cantidad literal, *es la espresion efectuada ó indicada con varias cantidades literales: así S, D, P, etc. podrá espresar el resultado de una suma, ó de una diferencia ó de un producto.*

$a+b+c$ quiere decir, que á la cantidad a se le añada b y á la suma, la cantidad c.

$3a^2b$ quiere decir, que 3 se multiplique por a, por otra a y luego por b; ó tambien que se sume $a^2b+a^2b+a^2b$. El número 3 es un

Coeficiente *que es un número colocado como factor á la izquierda de una cantidad literal*: si una cantidad literal no tiene coeficiente, se le supone la unidad.

Exponente *es un número colocado en la parte superior y á la derecha de un factor algebráico, y el cual espresa una potencia.* Es preciso no confundir el coeficiente con el exponente, el primero espresa una *multiplicacion* y el segundo una *potencia.*

Ejemplo: $3a=a+a+a$; $a^3=a\times a\times a$.

Se llama *Cantidad entera* toda cantidad que no contiene ni radical ni denominador, como $5a$.

Se llama *Cantidad radical* la que está afecta del signo radical como $\sqrt{a}$

Las cantidades radicales pueden ser *racionales* ó *irracionales,* segun tengan ó no la raiz del grado que les afecta. Así $\sqrt{b^2}=b$ es cantidad *radical racional*: $\sqrt{b}$ es cantidad *radical irracional.*

Se llama *cantidad fraccionaria* la que sin tener signo radical tiene denominador como $\frac{a}{b}$

Se llama *cantidad imaginaria* la que está afecta del signo radical, raiz menos uno, como $a\sqrt{-1}$.

Las letras unidas y sin signo intermedio se consideran como factores, así abc quiere decir $a\times b\times c$.

Toda cantidad literal compuesta de una ó mas letras unidas entre sí y no por los signos mas ni menos, se llama *Monomio,* como $2ab$, como a, como $3abcd$.

Toda cantidad literal compuesta de dos monomios se llama *Binomio;* si compuesto por tres se llama *Trinomio*; si por mayor número de términos *Polinomio.*

Se llama *valor numérico de un monomio ó polinomio,* al resultado de sustituir en el monomio ó polinomio dado, cada factor literal por su valor numérico, así, $3ab$ siendo $a=2$ y $b=4$ valdrá $3.2.4=24$.

Todo término literal que no tenga *factor, divisor ó esponente* se le puede considerar como tales, la unidad.

Se llama *grado de un monomio* entero, al número de factores literales que le componen.

Así $3a^2b=3aab$ es un monomio del tercer grado.

Grado de un polinomio con respecto á una de sus letras, es el mayor exponente de esta letra en el polinomio.

Un polinomio se llama HOMOGÉNEO, cuando todos sus términos son del mismo grado; así el polinomio

$$3a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$$

es homogéneo y del cuarto grado. Este polinomio está tambien ordenado con respecto á las *potencias decrecientes* de la letra a y conforme á las *crecientes* de la b.

Los términos que en el expresado polinomio tienen el signo menos son *negativos*; los que tienen el signo mas son *positivos*. El signo que corresponde á cada término, es el que le antecede.

SEGUNDA PARTE.

LIBRO PRIMERO.

Cálculo de las cantidades literales enteras.

Adicion.

5. *La adicion de las cantidades literales enteras, tiene por objeto obtener una espresion algebráica, que sea equivalente á la reunion de todos los sumandos, pero como estos pueden tener una cualidad diferente, de aquí que no siempre esprese la idea de aumento.*

Por lo tanto, debemos tener en cuenta que la adicion de varias cantidades, todas ellas positivas, *es positiva é igual al conjunto de los sumandos*; que la suma de varias cantidades literales todas ellas negativas, es tambien negativa é igual á la reunion de las mismas, y por último que la suma de varias cantidades literales unas positivas y otras negativas, será cero, si el conjunto de las positivas es igual al de las negativas, y será positiva ó negativa segun que predominen respectivamente aquellas ó estas.

Se llaman *términos semejantes*, en Algebra *á aquellos que constan de los mismos factores literales con sus propios exponentes aunque tengan diferentes sus signos y coeficientes.*

La adicion de monomios, si estos son semejantes se *efectúa fácilmente sumando los coeficientes si pertenecen á términos de la misma cualidad, y siguiéndose los factores literales con sus propios exponentes.* Así:

$$4ab+7ab=11ab.$$

Si los signos fuesen contrarios se restarian los coeficientes, poniendo á la diferencia el signo correspondiente al término mayor. Así:

$$4ab+(-7ab)=-3ab.$$

Si los términos no fuesen semejantes, se pondrian los unos á continuacion de los otros unidos por el signo mas, pero teniendo cuidado de colocar á los términos *negativos* ó *sustractivos* el signo menos.

6. *Para sumar polinomios, se formará un solo polinomio con todos los términos de los sumandos, conservando estos sus propios signos;* y si hubiere términos semejantes se reducen á uno solo, segun lo indicado.

Sustraccion.

7. *Para restar dos términos semejantes* se restan sus coeficientes, siguiéndose á esta diferencia los factores literales con sus propios exponentes, y poniendo á la diferencia el signo positivo si predomina el minuendo, ó el negativo en caso contrario.

$$5a^2b-3a^2b=2a^2b, \quad 7a-9a=-2a.$$

Para restar de un monomio positivo otro negativo semejante, se suman ambos y la diferencia será positiva. Así: $8a-(-3a)=11a$.

8. *Para restar dos polinomios se escribe el minuendo y á continuacion el sustraendo, cambiando el signo de cada uno de sus términos.*

Así tenemos: $a-b+c=a-(b-c)=a+c-b.$

$$a+b-c+d=a-(-b+c-d)$$

Si los términos son semejantes, se efectúa la reduccion de estos á uno solo.

En todo caso obtendremos: que el resíduo mas el sustraendo debe dar el minuendo.

Multiplicacion.

9. Segun el Teorema (78) esplicado en la Aritmética, el producto de dos potencias iguales ó distintas de una

misma cantidad, es igual á esta con un exponente igual á la suma de los exponentes de los factores.

$$a^2 \times a^3 = aa.aaa = aaaaa = a^5 = a^{2+3}$$

10. Los casos que pueden ocurrir en la multiplicacion de cantidades literales enteras, son:

1.° *Multiplicar un monomio por otro.*
2.° » *un monomio por un polinomio.*
3.° » *un polinomio por otro polinomio.*

1.er caso. *Para multiplicar dos monomios* se multiplican los coeficientes, y á la derecha del producto se colocan los factores literales por órden alfabético, colocando á cada uno por exponente, la suma de los exponentes que afectan á el mismo en los factores.

Es preciso tener en cuenta, segun lo dicho en el § 40 de Aritmética, *que el signo del producto es* POSITIVO, *si los dos factores tienen el mismo signo, y* NEGATIVO *en el caso contrario.* Así:

$$4ab \times -3a^2 = -12a^3b \qquad -7a \times -5b^2 = +35ab^2$$

11. 2.° caso. *Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica este por cada término de aquel, atendiendo en primer lugar á los signos, y verificando luego la multiplicacion como en el caso anterior.* Así:

$$(2ab - 3a^2 + 4ab^3 - 5a^2b^2) \times 3a = 6a^2b - 9a^3 + 12a^2b^3 - 15a^3b^2$$

12. 3.er caso. *Para multiplicar un polinomio por otro polinomio, se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador y la suma algebráica de este resultado será el producto pedido.*

Antes de efectuar esta operacion, conviene se ordenen ambos polinomios con respecto á las potencias crecientes ó decrecientes de una letra que se llamará *ordenatriz*, en cuyo caso el polinomio-producto resultará tambien ordenado, pues que cada término ocupará sin reduccion su lugar respectivo. Ejemplo:

$$\begin{array}{rl}
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & \text{polinomio multiplicando} \\
a^2 + 2ab + b^2 & \text{» multiplicador} \\
\hline
\left.\begin{array}{r}
a^5 - 3a^4b + 3a^3b^2 - a^2b^3 \qquad\qquad\qquad \\
2a^4b - 6a^3b^2 + 6a^2b^3 - 2ab^4 \qquad \\
a^3b^2 - 3a^2b^3 + 3ab^4 - b^5
\end{array}\right\} & \text{Productos parciales.} \\
\hline
a^5 - a^4b - 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4 - b^5 & \text{PRODUCTO TOTAL.}
\end{array}$$

13. De lo cual deduciremos. 1.° *Que el producto de dos polinomios* HOMOGÉNEOS *es tambien* HOMOGÉNEO. 2.° *que*

el grado correspondiente al mismo, se espresará por la suma de los grados de entrambos factores; pues que un término cualquiera del producto, es el producto de un término del multiplicando por otro del multiplicador, y contiene tantos factores literales, cuantos contengan mencionados términos, pero el número de ellos es el mismo en cada polinomio siendo homogéneo, y por tanto tambien lo será en el producto, que es lo que se queria demostrar; pues que la reduccion de términos semejantes, afecta, como ya sabemos, esclusivamente á los coeficientes.

El número de términos de un polinomio-producto está, (sin reduccion de términos semejantes) *espresado por el producto del número de términos de que conste cada factor polinomio.* Porque en efecto, cada término del polinomio multiplicador produce, al multiplicarse por los del polinomio multiplicando, tantos, como este polinomio tenga.

14. De lo demostrado en los números 72, 73, 74 y 75 de la Aritmética, recordaremos los resultados siguientes:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a+1)^2-a^2=2a+1$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$
$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

que son consecuencia de las reglas dadas para la multiplicacion de polinomios.

Division.

15. *Cociente exacto de dos cantidades literales, es aquella espresion algebráica que multiplicada por el divisor, produce el dividendo.*

Los casos que pueden ocurrir en la division algebráica de cantidades literales enteras son:

1.er Caso. *Dividir un monomio por otro monomio.*
2.° » *un polinomio por un monomio.*
3.° » *un polinomio por otro polinomio.*
4.° » *un monomio por un polinomio.*

Segun lo espresado en el teorema (79) de Aritmética el cociente de dividir la potencia de una cantidad por otra potencia menor de la misma, es igual á esta cantidad, con un exponente igual á la diferencia de los exponentes de entrambos términos de la division.

En efecto: $a^5:a^3=aaaaa:aaa=aa=a^2=a^{5-3}$.

Segun lo espuesto en el número (65) de la Aritmética, tenemos que el cociente de dividir dos cantidades positivas, ó dos negativas, *es positivo*, y que el cociente de dividir una positiva por otra negatíva ó al contrario *es negativa*.

16. Es de la mayor importancia conocer los tres cocientes diferentes que se pueden producir de dividir $a^m:a^n$ segun sea $m=n$, $m>n$ ó $m<n$. En el primer caso, siendo $m=n$ el cociente de dividir $a^m:a^n$ será a^{m-n} segun lo espresado anteriormente, pero $m-n=o$ luego $a^{m-n}=a^o$, de otro modo $a^m:a^n=a^m:a^m=1$. Luego por tanto $a^o=1$. Lo que nos dice *que toda cantidad con exponente cero, vale la unidad.*

2.° caso. Si $m>n$ tendremos que $m=n+d$ siendo d la diferencia, y por tanto $m-n=d$ tendremos $a^m:a^n=a^{m-n}=a^d$ lo cual nos dice *que el cociente de dividir una potencia de un número por otra potencia menor del mismo número, es igual á este número, elevado á un exponente espresado por la diferencia de entrambos exponentes.*

3.^{er} caso. Siendo $m<n$ tendremos que $m+d=n$ y por tanto $m-n=-d$, luego $a^m:a^n=a^{m-n}=a^{-d}$ pero tambien tenemos que

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+d}}=\frac{a^m\,1}{a^m.a^d}\qquad \text{Simplificando } =\frac{1}{a^d}$$

Luego $a^{-d}=\frac{1}{a^d}$ lo que nos dice para lo sucesivo que *toda cantidad con exponente negativo es igual á un quebrado que tenga por numerador la unidad. y por denominador la misma cantidad con exponente positivo.*

Como ejemplo bastará que espresemos que

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

de lo cual podremos ya espresar la posibilidad de representar las cantidades fraccionarias bajo la forma de cantidades enteras con exponentes negativos.

De verificarse que $a^d\times a^{-d}=1$ tendremos que $a^d=\frac{1}{a^{-d}}$, luego tambien *toda cantidad con exponente* *positivo es igual á un quebrado cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la misma cantidad con exponente negativo.*

17. 1.er caso. *Para dividir un monomio por otro monomio, despues de atender á la cualidad, segun lo espresado mas arriba, se dividen los coeficientes y se escriben á la derecha del cociente las letras comunes de dividendo y divisor, colocándole á cada una de exponente lo que resulte de restar los exponentes que tienen las mismas en los monomios propuestos. Las letras que solo entren en el dividendo, se colocan en el cociente con sus propios exponentes.*

Ejemplo: $40a^3b^2c^4 : 5a^2bc^3 = 8abc.$

Para dividir un monomio por otros varios, se divide el primero por el segundo, este cociente por el tercero, etc.

18, 2.° caso. *Para dividir un Polinomio por un monomio, se dividen sucesivamente todos los términos del polinomio dividendo por el monomio divisor, poniendo á cada cociente parcial el signo correspondiente; este caso por tanto queda reducido al anterior.*

Sea por ejemplo:

$$(35a^2b^3-28ab+21a^3b^4-14ab^2):7ab=$$
$$5ab^2-4+3a^2b^3-2b.$$

19. 3.er caso. *Para dividir un Polinomio por otro polinomio se ordenan con respecto á las potencias de una letra, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor y se obtendrá el primero del cociente; este se multiplicará por todo el polinomio divisor y su producto se resta del polinomio dividendo; el primer término del resto se dividirá por el primero del divisor y el cociente será el segundo término del polinomio cociente, su producto por el polinomio divisor, se restará del polinomio primer resíduo; el primer término del nuevo polinomio resíduo se dividirá por el primero del divisor, y su cociente será el tercer término del polinomio cociente; del mismo modo continuaremos ó hasta obtener un resíduo cero, lo cual ocurrirá en la division exacta de polinomios, ó hasta la obtencion de un resto cuyo primer término no sea divisible por el primero del divisor, en cuyo caso se añadirá al cociente entero una fraccion algébrica que tenga al resto por numerador y al polinomio divisor por denominador.*

La demostracion de esta regla práctica se hace evidente si consideramos que siendo la division de polinomios una operacion igual y contraria á la multiplicacion de los mismos, y si la multiplicacion la formamos de la suma de los polinomios producidos de multiplicar cada monomio del multiplicador por todo el multiplicando, siendo evidente que el polinomio Dividendo es el producto del polinomio divisor por el cociente, es claro que del polinomio dividendo debemos ir deduciendo los polinomios parciales que resulten de multiplicar cada monomio del cociente por todo el polinomio divisor. Segun esto, y para procurar hallar los términos del polinomio cociente, es evidente que tendremos que ir dividiendo el primer monomio del polinomio dividendo y restos sucesivos por el primer monomio del polinomio divisor, que siendo el cociente un término algébrico tal, que su producto por el primero del divisor, será igual al primero del dividendo y el cual para reducir á cero es preciso que consideremos con el signo contrario al que tenga en el dividendo, por tanto, á todos los términos de cada uno de los polinomios producidos de multiplicar el polinomio divisor por cada uno de los del cociente, se le supondrá el signo contrario al que tenga, es decir, que si es mas, para restar es menos y al contrario.

Ejemplo práctico:

$$
\begin{array}{r|l}
a^5-a^4b-2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4-b^5 & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
\cline{2-2}
-a^5+3a^4b-3a^3b^2+a^2b^3 & a^2+2ab+b^2 \\
\cline{1-1}
2a^4b-5a^3b^2+3a^2b^3+ab^4-b^5 & \\
-2a^4b+6a^3b^2-6a^2b^3+2ab^4 & \\
\cline{1-1}
a^3b^2-3a^2b^3+3ab^4-b^5 & \\
-a^3b^2+3a^2b^3-3ab^4+b^5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Operacion que será conveniente cotejar con la efectuada en la multiplicacion de polinomios, pues que así las dos se completan y *comprueban*.

La division de dos polinomios será inexacta: 1.° cuando el primer término de algun dividendo parcial no es divisible por el primero del divisor. 2.° Si el divisor contiene alguna letra que no tenga el dividendo.

20. *Si se divide un polinomio ordenado por las potencias decrecientes de una letra, tal como*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+\dots\dots+Kx+L$$

por el binomio x—a, *el resíduo de esta division será el mismo polinomio sustituyendo la letra* a *en vez de la letra* x.

En efecto: si llamamos Q al cociente y R al restó tendremos

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+......+Kx+L=Q\,(x-a)+R$$

cualquiera que sea el valor de x esta igualdad es evidente si hacemos $x=a$ será entónces $Q\,(x-a)=o$, de donde

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+.....+Kx+L=R=$$
$$Aa^m+Aa^{m-1}+Ca^{m-2}+....+Ka+L$$

pudiendo ser el cociente Q un monomio ó polinomio cualquiera

Recíproco: *Si un polinomio ordenado por las potencias de una letra cualquiera* x *es divisible por* x—a *y se sustituye* a *en vez de* x *en el polinomio, este se reduce á cero*

Porque en efecto, el resíduo de la division es

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+......+Ka+L$$

pero como la division se supone exacta, este resíduo es cero.

Corolario 1.° *Si un polinomio ordenado con respecto á una letra cualquiera* x, *se sustituye en vez de ella una cantidad* a *que reduzca á cero dicho polinomio, este será divisible por* x—a.

Pues siendo el polinomio

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+.....+Kx+L$$

sabemos que el resto de dividirlo por $x-a$ es

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+......+Ka+L,$$

pero como este es cero, segun el supuesto, la division del polinomio por $x-a$, será exacta.

2.° *La diferencia entre las potencias de igual grado de dos cantidades, es divisible por la diferencia de estas cantidades.*

En efecto, digo que x^m-a^m es divisible por $x-a$ pues si hacemos $x=a$, $x^m-a^m=o$ luego será divisible por $x-a$.

$\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$ segun lo espresado en el número 14.

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

. . . .

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots..+ab^{m-2}+b^{m-1}$$

Observándose *que el número de términos del polinomio cociente es igual al de unidades de la potencia: que el polinomic, es homogéneo; el exponente de* a *en el primer término tiene una unidad menos que en el dividendo y vá disminnyendo progresivamente una unidad en cada uno de los términos sucesivos; el de* b *es cero en el primer término, y vá aumentando una unidad en los términos sucesivos, es decir que el polinomio cociente resultará ordenado conforme á las potencias decreciente de la letra* a *y conforme á las crecientes de* b, *y por último que los coeficientes de todos sus términos serán la unidad.*

21. 4.° caso. *Para dividir un monomio por un polinomio se divide el dividendo por el primer término del polinomio divisor, y tendremos el primer término del polinomio cociente continuando luego la operacion del mismo modo que para dividir dos polinomios.*

Esta division es siempre inexacta, porque el producto de dos polinomios, hemos demostrado, en lo expuesto anteriormente (13), es otro polinomio, tal que habrá de tener dos términos por lo menos, que no admiten reduccion por no ser semejantes; los cuales serán, uno el producto de los dos términos de los factores en que una letra cualquiera tiene el mayor exponente, y el otro, el producto de los dos términos en que la misma letra tiene el menor exponente. Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l}
3a^4 & a^2+a-1 \\
\cline{2-2}
-3a^4-3a^3+3a^2 & 3a^2-3a+6-\ldots\ldots \\
\hline
-3a^3+3a^2 & \\
+3a^3+3a^2-3a & \\
\hline
6a^2-3a & \\
-6a^2-6a+6 & \\
\hline
-9a+6 & \\
\vdots &
\end{array}$$

Elevacion á potencias.

22. *Potencia de una cantidad literal es en general el*

resultado de multiplicar esta cantidad por sí misma cierto número de veces, que serán tantas como unidades esprese el exponente que afecte á la misma. Esta puede ser *monomia* ó *polinomia:* por su cualidad puede ser *positiva* ó *negativa*; el número de unidades de su exponente puede ser *par ó impar.*

Por lo demostrado en el número (40) de nuestra Aritmética hemos visto que el *producto de dos cantidades positivas ó negativas es positivo, y que el producto de una positiva por otra negativa es negativo*; de donde evidentemente *el resultado de cualquier potencia de una cantidad positiva es positivo; y el de cualquier potencia de una cantidad negativa, es positivo ó negativo segun que el grado de esta potencia sea par ó impar.*

Segun lo demostrado en el teorema (76) de la Aritmética, *la potencia de un producto de varios factores es igual al producto de las potencias de cada uno de estos factores.*

Ahora bien, un monomio es un producto indicado de varios factores literales (á menos que esté espresado por una sola letra), luego *la potencia de un monomio es igual á la potencia del mismo grado de su coeficiente ó factor numérico seguido de las potencias del mismo grado de cada uno de sus factores literales*; si estos tuviesen ya un exponente, entónces y conforme á lo espuesto (80) se pondria á la derecha de la potencia del coeficiente, cada uno de los factores literales, teniendo por exponente el producto del exponente que ya tuvieren por el que afecte á todo el monomio.

Es preciso tener en cuenta *que si el monomio es negativo y del grado de la potencia el impar, el resultado será negativo.* Ejemplos:

$$(7a^2b^3)^3=343a^6b^9 \;; \qquad (-5ab^2)^2=25a^2b^4 \;;$$
$$(-4ab)^3=-64a^3b^3$$

Potencias de los Polinomios.

23. Segun lo ya expuesto, es evidente que el cuadrado de la suma indicada de dos números, ó que *el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer monomio, mas el duplo del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo*; por tanto que

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\ ;$$

sea ahora $(a+b+c)^2$ es decir, *el cuadrado de un trinomio* haciendo $b+c=N$; será $N^2=b^2+2bc+c^2$, y por tanto $(a+b+c)^2=(a+N)^2=a^2+2aN+N^2$, sustituyendo ahora $(b+c)$ por N, y $b^2+2bc+c^2$ por N^2 tendremos

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

luego *el cuadrado de un polinomio es igual al cuadrado del primer término, mas el duplo del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo, mas el duplo de los dos primeros por el tercero, mas el cuadrado del tercero, mas el duplo de los tres primeros por el cuarto, mas el cuadrado del cuarto y así sucesivamente.*

24. Conforme ya sabemos, es evidente que el cubo de la suma indicada de dos números, ó que *el cubo de un binomio es igual al cubo del primer monomio, mas el triplo del cuadrado del primer monomio por el segundo, mas el triplo del primer monomio por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo monomio.*

Por tanto $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ segun esto, tratemos ahora de averiguar el *valor* de $(a+b+c)^3$, es decir el cubo de un trinomio, haciendo $(b+c)=N$ tendremos

$$(a+b+c)^3=(a+N)^3=a^3+3a^2N+3aN^2+N^3$$

si sustituimos ahora N, N^2 y N^3 por sus respectivos valores, tendremos:

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)$$
$$+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

De donde deduciremos que *el cubo de un polinomio es igual al cubo del primer término, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo; mas el triplo del cuadrado de la suma de los dos primeros por el tercero, mas el triplo de los dos primeros por el cuadrado del tercero, mas el cubo del tercero, mas el triplo del cuadrado de la suma de los tres primeros por el cuarto, mas etc.*

Conviene en general tener en cuenta que el desarrollo de la potencia de un polinomio de m términos, depende de la potencia del mismo grado de otro polinomio compuesto de $m-1$ términos; que la de este, depende de otra potencia igual de otro polinomio de $m-2$ términos, y así sucesivamente hasta convertirse el Polinomio en un Binomio: evidentemente, por tanto, las potencias de un polinomio dependen de todas las potencias de grados inferiores de un Binomio, de las cuales nos ocuparemos en el *Binomio de Newton*, dejando sentado en este lugar de qué manera obtendriamos el cuadrado y cubo de un polinomio, que es lo que en la práctica suele ocurrir.

Hemos considerado aquí como positivos todos los términos del polinomio, y aun los dos del binomio, pero si así no fuese en alguno de ellos, dicho se está, que como cada término es el producto de varios factores, si de estos hubiese un número impar que fuesen negativos el término tambien lo seria.

Extraccion de raices.

25. *Entendemos por* RAIZ *de cierto grado de una cantidad literal, otra tal que elevada á la potencia espresada por el índice produce la cantidad sub-radical.*

Por ser evidente que *el producto de dos cantidades ambas positivas ó ambas negativas, es positivo*, se deducirá que *la raiz cuadrada de una cantidad positiva, puede ser negativa ó positiva* y por tanto debe precederle el signo doble $\pm$.

Si la cantidad sub-radical es negativa y par el índice de su raiz, no podrá igualarse ni á una cantidad positiva ni á una negativa, y así es en efecto, *por lo cual llamamos* ESPRESION IMAGINARIA *á toda cantidad negativa debajo de un radical del grado par.*

Si la cantidad es negativa é impar el índice de su raiz, evidentemente, segun la regla de los signos, su raiz será negativa.

26. *La raiz de un monomio, se obtiene extrayendo la raiz del mismo grado del coeficiente, y á la derecha se colocarán los factores literales, poniendo á cada uno por exponente el cociente que resulte de dividir el suyo respectivo, por el índice de la raiz.*

El fundamento estriba en el teorema (181) de la Aritmética, el cual nos dice «*que la raiz de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices de sus diferentes factores.*»

Pero tambien tenemos: *que la raiz de una potencia, cuyo exponente es divisible por el índice de la raiz, será otra* *potencia cuyo exponente esté espresado por el cociente de dividir el exponente primitivo por el índice de la raiz.*

En efecto, la $\sqrt[m]{a^{mn}}=a^{n}$, pues que la potencia *enésima* de ambos miembros será una identidad, porque $(a^{n})^{m}=a^{mn}$ segun lo espresado en el Teorema (80) de nuestra Aritmética.

Por tanto $\sqrt{49a^2b^4}=\pm 7ab^2$; $\sqrt[3]{8a^3b^9}=2ab^3$.

27. Cuando todos los factores no tuvieren raiz exacta, se extraerá la raiz de los que la tengan, poniendo inmediatamente despues y debajo de su radical respectivo los que no la tengan

$$\sqrt{50\,a^3b^5}=5ab^2\sqrt{2ab}$$

lo cual constituye saber descomponer una cantidad radical en sus partes racional é irracional.

Con frecuencia ocurre por el contrario tener necesidad de *colocar bajo el signo radical un factor exterior; para esto no habrá mas que elevar dicho factor á la potencia que indique el índice, colocándolo luego dentro como factor.*

28. *La raiz cuadrada de un polinomio se obtiene ordenándolo con respecto á las potencias de una letra, extrayendo la raiz cuadrada de su primer término para obtener el primero de su raiz; restando el cuadrado de este del primero del polinomio dado y dividiendo luego el segundo por el duplo de la raiz hallada, obtendremos así el segundo de la raiz; el cuadrado de este y el producto de dicho segundo término de la raiz por el duplo del primero, se restan del polinomio dividendo; el primer término del resto se divide por el primero que resulte de duplicar el binomio de la raiz; el cociente será el tercer término de la raiz etc., y así sucesivamente hasta la terminacion; el resultado podrá comprobarse, elevando al cuadrado la raiz para ver si se produce el polinomio sub-radical.*

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2} & a+b+c \\
-a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{2a} \\
\hline
2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 & b \quad \text{2.° término de la raiz.} \\
-2ab \qquad\quad -b^2 \qquad\qquad & \overline{2a+2b} \\
\hline
2ac \qquad +2bc+c^2 & c \quad \text{3.}^{\text{er}} \text{ término de la raiz.} \\
-2ac \qquad -2bc-c^2 & \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

La demostracion algébrica de la regla anterior estriba en el siguiente sencillo razonamiento:

Sea $(A+B+C+.....)$ un polinomio; sea $(a+b+c+....)$ su raiz cuadrada; supongamos que ambos polinomios se hallan ordenados, será evidente que

$$(A+B+C+....)=(a+b+c....)^2=$$
$$a^2+2a(b+c+....)+(b+c+....)^2$$

segun lo espuesto en (23).

El primer término del polinomio cuadrado es A, que será igual al cuadrado del primer término de su raiz que es a^2, luego si $a^2=A$ será $a=\sqrt{A}$: *hay por tanto que extraer la raiz cuadrada del primer término del polinomio*, para obtener el primero de la raiz; como el objeto de la extraccion de raices es analizar el polinomio sub-radical, y como por tanto para obtener el resto hay que deducir del polinomio dado el cuadrado de la raiz; como el cuadrado de a es A, el polinomio sub-radical queda reducido á $B+C+.....=2a(b+c+.....)+(b+c+.....)^2$ luego $B+C+.....=2ab+2ac+.....+(b+c+....)^2$ y por tanto el primer término $B=2ab$ luego $B:2a=b$, lo que nos dice *que para obtener el segundo término de la raiz, se divide el segundo término del polinomio propuesto por el duplo del primero de la raiz.*

Ahora bien, como la raiz es ya un binomio y su cuadrado tiene 3 términos, y del polinomio no se dedujo mas que el primero de los mismos, habrá que deducir ahora los otros dos, que serán *el duplo del producto de los dos términos de la raiz y el cuadrado del segundo*; esto verificado, seguiremos dividiendo el primer término del resto por el primero que resulte de duplicar la raiz, para obtener el tercer término de la raiz; los términos que del cuadrado de este trimonio resulten de mas: sobre el cuadrado de los dos anteriores, se restarán del polinomio resíduo etc., con lo cual queda demostrada la regla dada.

29 *Para extraer la raiz cúbica de un polinomio despues de ordenado, se extraerá la raiz cúbica de su primer término, obteniéndose el primero de la raiz; el cubo de este se restará del primero del polinomio propuesto; el segundo término de este se dividirá por el triplo del cuadrado de primer término de la raiz, y el cociente será el segundo término de la raiz; el triplo del cuadrado del primer término de la raiz por el segundo ó cociente, mas el*

triplo de la raiz por el cuadrado del cociente, mas el cubo del cociente, se restarán del polinomio propuesto; dividiéndose el primer término del residuo formado, por el primero que resulte de triplicar el cuadrado del binomio raiz, obteniéndose por este cociente el tercer término de la raiz; el trinomio raiz se eleva al cubo restándose del polinomio propuesto todos los términos que aun no se hubiesen deducido, etc., y así sucesivamente hasta su términacion.

El razonamiento de esta regla, es análogo al espresado para raiz cuadrada, por cuya razon y obsequio á la brevedad no lo ponemos. Ejemplo:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & \sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3} & a+b+c \\
 & -a^3-3a^2b-3ab^2-b^3 & 3a^2 \text{ (1.}^{\text{er}}\text{ divisor)} \\
\hline
 & 3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3 & b \text{ (2.}^{\text{o}}\text{ término)} \\
-3(a+b)^2.c= & -3a^2c-6abc-3b^2c & 3a^2+6ab+3b^2 \\
\hline
 & 3ac^2+3bc^2+c^3 & \text{(2.}^{\text{o}}\text{ divisor)} \\
-3(a+b)c^2= & -3ac^2-3bc^2 & c \text{ (3.}^{\text{er}}\text{ término)} \\
\hline
 & c^3 & \\
-c^3= & -c^3 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

30. *De las consideraciones expuestas se deduce:*

1.° Que si un polinomio consta solo de dos términcs no puede tener ni aun raiz cuadrada exacta, puesto que el cuadrado de un monomio es otro monomio, y el cuadrado de un binomio es un trinomio. 2.° que un trinomio para ser cuadrado perfecto, tienen que ser positivos el 1.° y 3.ᵉʳ términos, y á la vez cuadrados perfectos. 3.° un polinomio que no tenga su 2.° término ó cada uno de los términos primeros de los restos sucesivos divisible por el duplo de la raiz es irracional ó no tiene raiz cuadrada.

Un polinomio ordenado no tendrá raiz cúbica exacta: 1.° si tiene solo dos ó tres términos, pues el cubo de un monomio es otro monomio y el cubo de un binomio es un tetranomio. 2.° si los términos primero y cuarto no son cubos perfectos. 3.° si el segundo término del polinomio propuesto ó el primero de todos los restos sucesivos no son divisibles por el triplo del cuadrado del 1.° de la raiz hallada.

Hay sin embargo casos en los cuales pueden descomponerse los polinomios dados en dos factores, que uno de ellos sea racional y el otro no: entónces se pone á continuacion de la raiz del uno, el otro factor bajo el signo radical, de acuerdo con lo espuesto en los números (27) del Algebra y el (181) de la Aritmética.

LIBRO SEGUNDO.

Cálculo de las cantidades literales fraccionarias

Preliminares.

31. Entendemos por *fraccion algebráica*, al resultado de dividir una cantidad literal por otra tambien literal ó numérica; los términos de esta, como los de un quebrado, se llaman numerador y denominador, que pueden ser cantidades monomias ó polinomias.

Los dos términos de toda fraccion algebráica se pueden multiplicar ó dividir por cualquier cantidad, sin que la fraccion cambie de valor.

Sea la fraccion $\frac{a}{b}$; digo que evidentemente $\frac{a}{b}\times b=a$, si multiplicamos los dos términos por c tendremos $\frac{a}{b}\times b\times c=a\times c$; si ahora dividimos los dos términos de esta igualdad por $b\times c$, tendremos que

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$$

lo cual nos habrá demostrado que el quebrado dado, es igual al que resulta de multiplicar sus dos términos por cualquier cantidad c.

De lo espuesto deduciremos: 1.° *que tampoco se alterará una fraccion algebráica, porque se simplifiquen sus dos términos, suprimiendo de numerador y denominador factores comunes hasta hallar la fraccion* IRREDUCIBLE *equivalente.*

2.° *Que varias fracciones de denominadores diferentes se pueden equivaler á otras de un denominador comun*, análogamente á lo que hemos demostrado con los quebrados numéricos en la Aritmètica.

Operaciones con las fracciones algebráicas.

32. ADICION *Para sumar fracciones algebráicas de denominadores diferentes, se reducen á otras de un denominador comun, segun lo espresado en el Teorema anterior, se suman luego los numeradores, y á la suma se pone por denominador el denominador comun.*

Sea $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}$; digo que es igual á $\frac{a+c+d}{b}$

en efecto, supongamos que $\frac{a}{b}=A$, $\frac{c}{b}=C$, $\frac{d}{b}=D$;

esto así, $a=Ab$, $c=Cb$, $d=Db$, igualdades que sumadas miembro á miembro, nos darán

$a+c+d=Ab+Cb+Db=b(A+C+D)$ luego

$A+C+D=\frac{a+c+d}{b}$ y por tanto $=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}$

33. SUSTRACCION. *Para restar dos fracciones algebráicas, se reducen á un comun denominador si no le tienen, y despues se restan los numeradores y al resíduo se le pone el denominador comun.*

Digo que $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$. En efecto, si hacemos

$\frac{a}{b}=A$ y $\frac{c}{b}=C$ tendremos que $a=Ab$ y $c=Cb$

restando estas igualdades miembro á miembro

$a-c=b(A-C)$ luego $A-C=\frac{a-c}{b}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$

34. MULTIPLICACION. *Para multiplicar dos ó mas fracciones algebráicas, se multiplican los numeradores, y su producto se parte por el de los denominadores.*

Digo que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$. En efecto, si espresamos el valor de cada uno de estos quebrados por A, C, E, tendremos que $a=Ab$, $c=Cd$, $e=Ef$: multiplicando estas igualdades miembro á miembro, será

$ace=bdf\times ACE$ y por tanto $ACE=\frac{ace}{bdf}$, luego

$$ACE = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

35. DIVISION. *Para dividir dos fracciones algebráicas se multiplican el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y se divide el primer producto por el segundo.*

Digo que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. En efecto, si multiplicamos $\frac{ad}{bc}$ por $\frac{c}{d}$ resultará $\frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$ luego si un cociente multiplicado por el divisor nos produce el dividendo, es por que el cociente es el verdadero.

36. ELEVACION A POTENCIAS. *La potencia de una fraccion algebráica es igual á la potencia del numerador partida por la potencia del denominador.*

En efecto si $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$ segun lo espresado en la multiplicion.

37. EXTRACCION DE RAICES. *La raiz de una fraccion algebráica es igual á la raiz del numerador partida por la raiz del denominador.*

En efecto $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ puesto que $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$

38. Las operaciones con las fracciones algebráicas se verifican, segun hemos visto, análogamente que con los quebrados numéricos.

Para simplificar las fracciones algebraicas, hasta hallar sus equivalentes irreducibles, se hallará el m. c. d. de los dos términos de la fraccion: dividiendo luego por el mismo entrambos términos, los cocientes formarán la fraccion irreducible.

Los dos términos de una fraccion algebráica pueden ser cantidades monomias ó polinomias; si son polinomias, no podemos en el Algebra elemental hallar el m. c. d. que es del dominio esclusivo de la parte superior. La reduccion de varios quebrados á otros de un denominador comun, se efectúa por el m. m. c. que se establece por el producto de las mayores potencias de sus factores literales colocados á la derecha del m. m. c. de los coeficientes.

Cálculo de fracciones literales, bajo la forma entera con exponentes negativos.

39. Segun lo demostrado en el número (16) sabemos *que toda cantidad con exponente negativo es igual á un quebrado cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la misma cantidad con exponente positivo.*

En toda fraccion algebráica se verifica que los diferentes factores de sus dos términos, pueden pasar de denominador al numerador y vice-versa, sin mas que cambiar de signo á su exponente. En efecto:

$$\frac{a^3b^2}{c^4d^3}=\frac{a^3b^2}{c^4}\times\frac{1}{d^3}=\frac{a^3b^2}{c^4}\times d^{-3}=a^3b^2d^{-3}\times\frac{1}{c^4}$$
$$=a^3b^2d^{-3}c^{-4}.$$

Hemos demostrado que $a^{-d}=\frac{1}{a^d}$ y como cociente por divisor igual al dividendo tendremos que $a^{-d}\times a^d=1$ de lo que deduciremos $a^d=\frac{1}{a^{-d}}$ y por tanto *toda cantidad que entre como factor pasa á divisor, mudando el signo á su exponente*: luego toda fraccion algebráica se puede representar bajo la forma entera, poniendo el signo negativo á los exponentes de los diferentes factores que contenga el denominador.

40. *ADICION Y SUSTRACCION. Estas operaciones se verifican entre cantidades algebráicas con exponentes negativos, por las mismas reglas establecidas para las que solo tienen exponente positivo, puesto que las convenciones ya establecidas son generales independientemente de la forde los datos.*

41. MULTIPLICACION. *El producto de dos potencias negativas de una misma letra ó factor literal es igual á este factor literal elevado á la potencia espresada por la ma suma algebráica de sus exponentes.*

En efecto $a^{-n}\times a^{-m}=\frac{1}{a^n}\times\frac{1}{a^m}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}$

si fuese $a^{-n}\times a^m=\frac{1}{a^n}\times a^m=\frac{a^m}{a^n}=a^{(m-n)}$

42. DIVISION. *El cociente de dos potencias negati-*

vas de una misma letra ó factor literal, es igual á este factor literal elevado á la potencia espresada por la diferencia algebráica de sus exponentes.

$$a^{-n}:a^{-m}=\frac{1}{a^n}:\frac{1}{a^m}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$a^{-n}:a^m=\frac{1}{a^n}:a^m=\frac{1}{a^{n+m}}=a^{-n-m}$$

$$a^n:a^{-m}=a^n:\frac{1}{a^m}=a^{n+m}$$

43. ELEVACION A POTENCIAS. *La potencia negativa ó positiva de otra potencia positiva ó negativa de un factor literal es igual á este factor afecto de un exponente espresado por el producto de ambos exponentes.*

$$(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$$

$$(a^{-m})^{-n}=\frac{1}{(a^{-m})^n}=\frac{1}{a^{-mn}}=a^{mn}$$

$$(a^{-m})^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$$

44. EXTRACCION DE RAICES *La raiz de una potencia negativa, se efectúa dividiendo el exponente por el índice de la raiz, y por tanto, la raiz de una potencia de un factor literal, será igual á este factor con un exponente espresado por el cociente de dividir el suyo por el índice de la raiz.*

$$\sqrt[m]{a^{-mn}}=\sqrt[m]{\frac{1}{a^{nm}}}=\frac{1}{a^n}=a^{-n}.$$

45. De lo demostrado se desprende que:

El cálculo de las cantidades con exponentes negativos se efectúa por las reglas generales dadas para el de las cantidades con exponentes positivos.

Que el empleo de los exponentes fraccionarios nos permite ordenar un polinomio fraccionario con respecto á un factor literal que entre en su denominador.

Que en las divisiones incompletas de los polinomios se facilita su continuacion, y en muchos casos se hace posible terminarla por el empleo de los exponentes negativos.

Observacion: La idea de fraccion algébrica no se puede referir á la de quebrado ordinario, pues si estos siendo irreducibles espresan que la cantidad no tiene relacion con la unidad, en aquellas que solamente por la forma que afectan son idénticas á estas, puede muy bien suceder que aun siendo fraccion algebráica irreducible, de los valores numéricos que demos á sus términos, resulte ser el numerador un múltiplo del denominador, en cuyo caso, el valor de la fraccion algébrica se puede espresar por el de un entero.

LIBRO TERCERO

Cálculo de las cantidades Literales Radicales.

Preliminares.

46. *Se llama cantidad Radical algébrica á toda espresion monomia ó polinomia afecta del signo radical*; las cantidades *radicales* pueden ser *reales ó imaginarias*; se llamarán *reales* á las que siendo su índice radical un número cualquiera, es la cantidad sub-radical positiva, ó á las que aun siendo negativas, el índice de su raiz es de grado impar.

Serán cantidades radicales imaginarias ó simplemente espresiones imaginarias, las cantidades negativas afectas de un radical de grado par; que podrán ser de 2.°, 4.°, 6.° etc. grado, segun el índice de su raiz sea 2, 4, 6, etc.: nos ocuparemos de algunas de estas, despues del estudio de las cantidades radicales reales.

Bajo el concepto de su cualidad las cantidades radicales pueden ser *Positivas ó Negativas,* segun que las preceda el signo *mas* ó el *menos.*

Las cantidades *radicales* pueden ser *racionales* ó *irracionales* segun tenga ó no la raiz del grado que les afecte; que segun lo espresado será, cuando los exponentes de los factores literales sean divisibles por el índice de la raiz.

Las cantidades radicales pueden ser *enteras ó fraccionarias, monomias ó polinomias.*

Se llaman cantidades radicales homogéneas á las que tienen el mismo índice.

Se dice que *dos cantidades radicales son conjugadas cuando en una es positivo y en otra negativo el signo del radical.*

47. *Ninguna cantidad* RADICAL *se altera porque se multiplique ó divida el índice de su raiz por un número, con tal que se multiplique ó divida tambien por el mismo número, cada uno de los exponentes de los factores literales de la cantidad sub-radical.*

En efecto, sea la cantidad radical monomia y de un solo factor $\sqrt{a^2}=a$ si elevamos ambos miembros á la potencia m, tendremos $(\sqrt{a})^{2m}=a^m$; extrayendo ahora la raiz del grado $2m$, tendremos: $\sqrt{a}=\sqrt[2m]{a^m}$ cuya igualdad demuestra lo expuesto en el teorema, el que podrá referirse igualmente á otros monomios y polinomios.

De esto deduciremos: 1.° *Que toda cantidad radical se puede simplificar, dividiéndose el índice de su raiz por todos los factores que sean comunes al espresado índice y á los exponentes de sus factores literales.*

2.° *Que varias cantidades radicales de índices diferentes se pueden reducir á otras de un índice comun ó hacer que sean homogéneas, hallando el m. m. c. de los índices, que será el índice comun de las cantidades radicales ya homogéneas, y multiplicando cada uno de los exponentes de los factores literales, por el cociente que resulte de dividir el m. m. c. hallado, por el índice respectivo del radical que le afecte.*

48. ADICION. *Para sumar cantidades radicales, si son homogéneas, se suman los coeficientes, poniendo á la derecha de esta suma la cantidad radical comun.*

Ejemplo: $3\sqrt{a}+5\sqrt{a}=8\sqrt{a}$

Si las cantidades radicales no son homogéneas se ponen las unas á continuacion de las otras unidas por el signo MAS, *y teniendo cuidado de espresar la cualidad de cada sumando.*

49. SUSTRACCION. *Para restar cantidades radicales homogéneas se restan sus coeficientes, poniendo á la derecha del resto el radical comun.*

Ejemplo: $2a\sqrt{b+c}-5d\sqrt{b+c}=(2a-5d)\sqrt{b+c}$

Para restar cantidades radicales de índices diferentes, se pone á la derecha de la suma de los términos positivos la de los términos negativos separadas por el signo MENOS, *y reduciendo términos semejantes, si los hubiere.*

50. MULTIPLICACION. *Para multiplicar cantidades radicales homogéneas, se colocará bajo un signo radical*

con el mismo índice, el producto de las cantidades sub-radicales, puesto que segun lo demostrado en el Teorema (181) de nuestra Aritmética, *la raiz de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices de sus factores.*

En efecto, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = \sqrt{abc}$

Si los índices fuesen diferentes, se reducen las cantidades radicales, segun lo expuesto en el número (47,) á otras equivalentes del mismo índice.

$$\sqrt{2a^2} \times \sqrt[3]{4b} \times \sqrt[4]{a^3b^2} = \sqrt[12]{64a^{12}} \times \sqrt[12]{256b^4} \times \sqrt[12]{a^9b^6}$$
$$= \sqrt[12]{16384a^{21}b^{10}}$$

51. DIVISION. *Para dividir dos cantidades radicales de un mismo índice se pondrá debajo del radical comun el cociente de dividir las dos cantidades radicales,* puesto que *la raiz del cociente de dos cantidades es igual al cociente de las raices de sus dos términos.*

Ejemplo: $7a\sqrt{3b} : 4a\sqrt{5c} = \frac{7a}{4a}\sqrt{\frac{3b}{5c}}$

Si las cantidades radicales tuviesen índices diferentes, se reducen á otras homogéneas y se procede como el caso anterior.

52. ELEVACION A POTENCIAS. *La potencia de una cantidad radical, es igual á la potencia del mismo grado de la cantidad sub-radical.*

Así $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \ldots\ldots$ (m) veces, luego$= \sqrt{a^m}$

Si el exponente de esta potencia es factor del índice radical, se dividirá dicho índice por el exponente de la potencia.

Así: $(\sqrt[4]{a})^2 = \sqrt{a}$

Si la cantidad radical es binomia ó polinomia, se hallará su potencia segun las reglas dadas para las cantidades literales enteras.

53. EXTRACCION DE RAICES. *La raiz de una cantidad radical, se obtiene colocando la cantidad sub-radical debajo de otro signo radical que tenga por índice el producto de ambos índices radicales.*

En efecto:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

pues que elevando ambos miembros á la potencia mn la igualdad es evidente.

Si el esponente de la cantidad sub-radical es múltiplo del grado de la raiz, se dividirá dicho exponente por el índice de la raiz.

Así: $\sqrt{\sqrt[m]{a^2}}=\sqrt[m]{a}$

54. De lo espresado anteriormente se desprende que: *la suma de dos cantidades radicales conjugadas es una cantidad racional,* así tenemos que

$$(A+\sqrt[n]{B})+(A-\sqrt[n]{B})=2A.$$

La diferencia de dos cantidades radicales conjugadas es una cantidad irracional, así tenemos que

$$(A+\sqrt[n]{B})-(A-\sqrt[n]{B})=2\sqrt[n]{B}$$

El producto de dos cantidades radicales conjugadas siendo de segundo grado, es igual á una cantidad racional.

$$(A+\sqrt{B})\times(A-\sqrt{B})=A^2-B.$$

El cociente de dos cantidades radicales del 2.° grado es una cantidad irracional.

$$\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}=\frac{(A+\sqrt{B})(A+\sqrt{B})}{(A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B})}=\frac{A^2+2A\sqrt{B}+B}{A^2-B}$$

$$=\frac{A^2+B}{A^2-B}+\frac{2A}{A^2-B}\sqrt{B}.$$

Las cantidades radicales pueden ser de diferente grado, pero aquí solo nos ocupamos de las cantidades radicales de segundo grado.

Cálculo de cantidades radicales bajo lo forma entera con exponente fraccionario.

55. Segun lo expuesto en el número (53) sabemos que $\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a$ que $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}-a^2$

y por tanto $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ Luego *toda cantidad con exponente fraccionario es igual á la raiz del grado que indica su denominador, de la misma cantidad elevada á la potencia que esprese el numerador:* y por tanto para extraer la raiz de cualquier grado de una cantidad con exponente positivo ó negativo, bastará dividir el exponente que la afecte por el índice de la raiz, elevando á este cociente la espresada cantidad.

56. ADICION Y SUSTRACCION. *Estas operaciones se verifican con las cantidades radicales de forma entera con exponente fraccionario, poniéndolas unas á continuacion de las otras, con sus signos respectivos, á menos que pueda efectuarse alguna simplificacion ó reduccion por existir términos semejantes.*

57. MULTIPLICACION Y DIVISION. *El producto de dos cantidades iguales con exponentes fraccionarios, es igual á esta cantidad que tenga por exponente la suma de los exponentes de los dos factores.*

El cociente de dividir dos cantidades iguales con exponente fraccionario, es esta cantidad que tenga por esponente la diferencia de los exponentes de entrambos términos.

$$a^{\frac{r}{s}}\times a^m=\sqrt[s]{a^r}\times\sqrt[s]{a^{ms}}=\sqrt[s]{a^{r+ms}}=a^{\frac{r+ms}{s}}$$

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[ns]{a^{ms-nr}}=a^{\frac{ms-nr}{ns}}$$

58 ELEVACION A POTENCIAS Y EXTRACCION DE RAICES. *La potencia de una cantidad literal con exponente fracionario, es igual á esta cantidad con un exponente igual al producto de ambos exponentes.*

La raiz de una cantidad literal con exponente fraccionario, es igual á esta cantidad, con un exponente igual al cociente de dividir el suyo por el indice de la raiz.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{a^{\frac{mr}{n}}}=\sqrt[sn]{a^{mr}}=a^{\frac{mr}{sn}}$$

$$\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}}=a^{\frac{m}{nr}}=a^{\frac{m}{n}:r}$$

Nota. Hemos visto lo que vale una cantidad con esponente *entero ó fraccionario, positivo ó negativo;* si nos propusiésemos determinar el valor de una cantidad con esponente *inconmensurable*, tal como $a^{\sqrt{2}}$; si no lo podemos obtener exactamente podriamos sí, obtenerlo, con la aproximacion que fuese deseada, puesto que la $\sqrt{2}$ la podemos obtener aproximadamente segun resulta de considerarla desarrollada en fraccion contínua, sus reducidas respectivas serán $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{21}$, etc., luego los límites de $a^{\sqrt{2}}$ se hallarán comprendidos entre a^1 y $a^{\frac{3}{2}}$ ó entre $a^{\frac{7}{5}}$ y $a^{\frac{17}{12}}$ entre $a^{\frac{41}{29}}$ y etc., luego $a^{\sqrt{2}}$ se halla comprendida entre a^1 y $\sqrt{a^3}$ entre $\sqrt[5]{a^7}$ y $\sqrt[12]{a^{17}}$ entre $\sqrt[29]{a^{41}}$ y etc.

Tambien tendremos que:

$$\sqrt[-n]{a^m}=a^{\frac{m}{-n}}=a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

segun las transformaciones expuestas

$$\sqrt[m:n]{a}=\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$$ segun lo expuesto.

$$\sqrt[\sqrt{3}]{a}=a^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \text{y} \quad \sqrt[-\sqrt{2}]{a}=a^{\frac{1}{-\sqrt{2}}}=a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{1.41...}}}$$

pero $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se puede obtener con cuanta aproximacion se desee: luego el valor pedido se hallará comprendido entre otros dos que serán sus *límites*.

Espresiones imaginarias: operaciones con estas cantidades.

59. Hemos dicho en el § 46 que se *llama espresion imaginaria á toda cantidad negativa debajo de un radical de grado par*; y en efecto, la raiz cuadrada de una cantidad negativa, no puede ser positiva, ni negativa, pues que el cuadrado de una cantidad positiva ó negativa, es positiva.

Hemos espresado tambien, que las cantidades imaginarias pueden serlo de diferentes grados, pero de grados pares, como de 2.°, 4.°, 6.° etc.: en el Algebra elemental nos ocupamos solo de las imaginarias del 2.° grado, y despues de todo son las mas importantes, porque á ellas se reducen las de grados superiores.

Las cantidades imaginarias representan una imposibilidad, por lo cual son mas bien que cantidades, espresiones; pero como con ellas tambien se pueden verificar las distintas operaciones de composicion y descomposicion, como con los demás radicales, de aquí la razon por la cual esté tan en uso considerarlas como cantidades. Wronski las llamaba ya *cantidades eminentemente racionales*. A las cantidades ó espresiones imaginarias, segun las preceda el signo mas ó menos, se llamarán positivas ó negativas; estas pueden tambien ser monomias ó polinomias.

Distintas interpretaciones se han dado á las cantidades imaginarias, unas *aritméticas*, considerándolas como la espresion de un capital que sin ser *tenido* ni *debido* existe bajo cualquier concepto, mas sin que pueda realmente afectarnos su aumento ó disminucion: otras son de carácter *geométrico*, tal por ejemplo considerándolas como símbolo propio de la perpendicularidad, espresando las cantidades reales positivas á partir de un punto fijo á la *derecha*; las *reales negativas* á la izquierda; las imaginarias positivas por la línea superior perpendicular á las anteriores en el punto de orígen; y por último, las imaginarias negativas, por la prolongacion de esta recta ó perpendicular inferior.

Recomendaremos en este punto como de la mayor importancia la obra titulada «*Teoria trascendental de cantidades imaginarias,*» escrita por nuestro malogrado compatriota el insigne cordobés D. José Maria Rey Heredia; las consideraciones que establece sobre todas las cuestiones relativas á estas cantidades, son dignas de ocupar la atencion del filósofo y del matemático; mas sobre ellas no nos es posible, dada la índole de esta obra, entrar aquí en consideraciones.

60. El valor de toda cantidad imaginaria de 2.° grado estará bien espresada por la raiz cuadrada de la cantidad sub-radical multiplicada por $\sqrt{-1}$, porque en efecto, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$ elevando al cuadrado los dos miembros se hace evidente la igualdad.

Luego llamaremos tambien cantidad imaginaria á toda cantidad afecta al signo $\sqrt{-1}$ que es el propio de las mismas: segun esto el cálculo de las cantidades imaginarias se establece y es dependiente de las mismas reglas empleadas para el de las cantidades reales, teniendo en cuenta el factor $\sqrt{-1}$.

61. ADICION Y SUSTRACCION. *Para sumar ó restar cantidades imaginarias monomias, si son semejantes se suman ó restan sus coeficientes, y á su derecha se pone el factor* $\sqrt{-1}$.

Si no fuesen términos semejantes, se indica la suma ó resta y cerrados todos en un paréntesis, se pondrá fuera del mismo el factor comun $\sqrt{-1}$.

Si los términos de la adicion ó sustraccion fuesen polinomios, se pondrán los unos á continuacion de los otros con sus propios signos en la adicion y con signos contrarios en la sustraccion, verificando luego, si es posible, la reduccion de términos semejantes.

62. MULTIPLICACION. *El producto de dos factores monomios imaginarios, es una cantidad real negativa* pues que en efecto,

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot(\sqrt{-1})^2=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}$$

Para el producto de dos factores imaginarios polinomios se aplicarán las mismas reglas que para el de las cantidades reales, teniendo en cuenta lo espresado anteriormente.

63. DIVISION. *El cociente de dividir dos monomios imaginarios es una cantidad real positiva.* porque en efecto, $a\sqrt{-1}:b\sqrt{-1}=a:b$, pues que los dos términos tienen un factor comun que se suprime. Si los dos términos son polinomios, se siguen las mismas reglas que en la division de polinomios reales.

64. ELEVACION A POTENCIAS. *La potencia de un monomio es igual á la potencia de la parte real por la misma potencia del factor imaginario* $\sqrt{-1}$.

Toda vez *que la potencia de un producto de varios factores, es como sabemos, igual al producto de las potencias de sus diferentes factores.*

Para esto conviene que sepamos las siguientes potencias.

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=-1.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=-1\times-1=+1.$$

Las potencias sucesivas de este factor, son respectivamente alguna de las 4 expuestas: así la

1.ª	2.ª	3.ª	y	4.ª	son	iguales	á	la
5.ª	6.ª	7.ª	»	8.ª	»	»	»	»
9.ª	10	11	»	12	»	»	»	»
13	14	15	»	16	etc.			

Si la cantidad imaginaria fuese un polinomio, se elevará al cuadrado ó cubo, segun las reglas espuestas para el cuadrado y cubo de cantidades reales.

65. EXTRACCION DE RAICES. *La raiz de un monomio imaginario, es igual á la raiz del mismo grado de la parte real multiplicada por la misma del factor* $\sqrt{-1}$.

Así: $$\sqrt[n]{\sqrt{-a}}=\sqrt[2n]{a}.\sqrt[2n]{-1}.$$

Para la raiz cuadrada ó cúbica de un polinomio imaginario, se emplean las mismas reglas que para la obtencion de las mismas raices de cantidades reales.

66. *La suma y el producto de dos cantidades imaginarias conjugadas, es una cantidad real. La diferencia y cociente de las mismas es una cantidad imaginaria.*

Así tenemos que

$$(a+\sqrt{-b})+(a-\sqrt{-b})=2a$$
$$(a+\sqrt{-b})-(a-\sqrt{-b})=2\sqrt{-b}$$
$$(a+\sqrt{-b})\times(a-\sqrt{-b})=a^2+b \qquad (N)$$
$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}=\frac{(a+\sqrt{-b})^2}{a^2+b}=\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a}{a^2+b}\sqrt{-b}$$

La suma, diferencia, producto y cociente de dos binomios imaginarios, son tambien binomios imaginarios.

Así tenemos que

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$
$$(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}$$
$$(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1} \quad (M)$$
$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=$$
$$=\frac{(ac+db)+(bc-ad)}{c^2+d^2}\sqrt{-1} \quad (1)$$

Segun lo expuesto en la fórmula (N) tenemos que el producto de $(a+b\sqrt{-1})$ por $(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2$ y por tanto $(8+5\sqrt{-1})(8-5\sqrt{-1})=8^2+5^2$ de donde deduciremos que una suma indicada de dos sumandos, se puede descomponer en el producto indicado de dos factores imaginarios conjugados: Así $7+6=(\sqrt{7}+\sqrt{-6})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{-6})$

67. *Se llama* MÓDULO *de una espresion imaginaria de la forma $A+B\sqrt{-1}$ al valor absoluto de la raiz cuadrada del producto de dicha cantidad, por su imaginaria conjugada*; *así el* MÓDULO de la espresion indicada, será

$$\sqrt{A^2+B^2}.$$

Si una cantidad imaginaria se reduce á cero, su MÓDULO *es tambien cero.* En efecto, si la cantidad imaginaria $a+b\sqrt{-1}=0$ resultará que $a=-b\sqrt{-1}$ si elevamos ambos miembros al cuadrado, tendremos que $a^2=b^2$ de donde $a^2+b^2=0$ por lo cual $\sqrt{a^2+b^2}=0$.

Recíprocamente tendremos: *que si es cero el módulo de una cantidad imaginaria, esta es tambien cero*: *pues si* $\sqrt{a^2+b^2}=0$ será $a=o$ y $b=o$, luego $o\times\sqrt{-1}=o$.

69. *El módulo de un producto de dos factores imaginarios, es igual al producto de sus módulos.* En efecto, segun la fórmula (M) tenemos que

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}$$

El módulo de este producto, segun lo espuesto

(1) Para transformar una espresion fraccionaria imaginaria en otra de denominador real, se multiplican ambos términos por la conjugada del denominador.

será: $\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$
$=\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$
$=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}$

70. *El módulo de un cociente de dos cantidades imaginarias es igual al cociente de dividir sus módulos respectivos.*

Hemos visto como el cociente de dividir dos binomios imaginarios, es otro binomio imaginario, luego segun esto el binomio dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.

Por tanto si $(a+b\sqrt{-1})=(c+d\sqrt{-1})(e+f\sqrt{-1})$ será segun lo demostrado. $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2}\times\sqrt{e^2+f^2}$ y por tanto $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\sqrt{e^2+f^2}$ igualdad que demuestra el Teorema.

71. *Para que un producto de factores imaginarios sea cero, se necesita y basta que uno de sus factores lo sea.* Porque en efecto, siendo el producto de dos factores binomios imaginarios otro de la misma forma, para ser cero esta espresion basta que su *módulo* lo sea; pero el *módulo* de un producto de dos factores es igual al producto de sus *módulos*, y como estos módulos son cantidades reales, y un producto de cantidades reales solo puede ser cero cuando uno de sus factores lo sea, resultará que para ser cero el producto tiene que serlo uno de los módulos, y por tanto cero tambien el valor de uno de los factores imaginarios. Teorema que podemos espresar recíprocamente.

LIBRO CUARTO

* Coordinaciones.—Binomio de Newton y su aplicacion á las potencias y raices de los polinomios.

COORDINACIONES.

72. La formacion de las potencias y raices de los polinomios es dependiente, segun hemos espresado en el número (24), de las potencias sucesivas de un binomio.

La potencia *emésima* de un binomio obtenida por *Newton*, se funda en la Teoria de las Coordinaciones.

Entendemos por COORDINACIONES *los grupos diferentes que se pueden formar con varios objetos, considerando cada grupo formado del mismo número de objetos, y distinguiéndose cada grupo de otro ó en algun objeto, ó cuando menos en el órden de colocacion de los mismos.*

Las coordinaciones se llamarán *binarias*, *ternarias*, *cuaternarias*, etc., segun conste cada grupo de *dos*, *tres*, *cuatro objetos*, etc.

Entendemos por *Permutaciones* á *las coordinaciones* en cada uno de *cuyos grupos* entran todos los objetos dados, y por tanto qne *solo se diferencian entre sí por el órden de colocacion.*

Entendemos por *Combinaciones*, á las coordinaciones *que se diferencian en uno ó mas objetos.* Los objetos que debemos coordinar en Algebra son las cantidades literales (son pues las letras.)

A priori podemos determinar el número de grupos binarios ternarios, cuaternarios, etc. que pueden formarse con m letras: así como tambien dadas m letras y espresando uno solo de cualquiera de sus grupos, la probabilidad que al espresarlo tenemos de acertar aquel, de cuyo acierto estuviésemos pendiente: es por tanto evidente que la Teoría de las coordinaciones es de aplicacion imprescindible al cálculo de las probabilidades.

Si tenemos varios objetos, a, b, c, d, ... es evidente que para formar todas las coordinaciones binarias, tenemos necesidad de colocar á la derecha de cada uno de los objetos, uno de los demás. Sea m el número de letras, los grupos que resultan de poner á la derecha de a, cada una de las demás letras, serán $(m—1)$ igual al número de los que resultan de poner á la derecha de b cada una de las demás, etc.; luego es evidente que *el número de coordinaciones binarias con m letras, serán* $m(m—1)$ es decir,

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad & \ldots\ldots \\ ba, & bc, & bd & \ldots\ldots \\ ca, & cb, & cd & \ldots\ldots \end{array}$$

Colocando al lado de cada grupo binario sucesivamente cada una de las demás letras, resultarán los grupos ó *coordinaciones ternarias*; y las formadas con cada coordinacion binaria, serán $(m—2)$, pero como las binarias son $m(m—1)$ que habrá que repetir $(m—2)$ veces, resultará que *el número de coordinaciones ternarias será* $m(m-1)(m-2)$;

es decir abc, abd ....
acb, acd ....
adb, adc ....
....

Por tanto, el *número de coordinaciones cuaternarias será* $m(m-1)(m-2)(m-3)$ etc. etc. Luego reconoceremos que por cada letra mas que haya de tener la coordinacion, adquiere la fórmula un factor mas que tendrá una unidad menos que el anterior. Por tanto, si nos proponemos determinar el número de coordinaciones que se podrán formar con m letras tomadas n á n será

$$m(m-1)(m-2)......(m-n+1).$$

Este último factor $(m-n+1)$ se reducirá á *uno* cuando sea $m=n$, en cuyo caso la fórmula que nos espresa el número de coordinaciones que pueden formarse con m letras, entrando en cada grupo todas las mismas, será

$$m(m-1)(m-2)(m-3)..............\times3\times2\times1.$$

Problema 1.° Se pregunta cuántas coordinaciones cuaternarias se pueden hacer con las 25 letras que cierran un *candado de letras*, y el cual ha de abrirse con una coordinacion cuaternaria. Serán por tanto

$$25(25-1)(25-2)(25-3)=303.600.$$

2.° Problema: Con las nueve cifras significativas sin repetirse en cada grupo una cifra dos veces, se pregunta cuántas cantidades pueden representarse, serán

$$9.8.7.6.5.4.3.2.1=362.880.$$

73. Permutaciones. *Esta denominacion espresa, segun hemos indicado, las coordinaciones que solo se distinguen en el órden de colocacion de los objetos.*

Con una sola letra, solo se podrá hacer 1. Con dos letras, tal como a y b se podrán formar dos permutaciones binarias ab y ba, luego habrá $1\times2=2$. Con tres letras, podremos formar $1\times2\times3=6$ permutaciones, pues al lado de cada una podremos poner las dos permutaciones binarias formadas por las otras dos: sean las letras a, b, c, tendremos: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Las permutaciones formadas con 4 letras, se obtienen colocando al lado de cada una de las 4 letras las 6 permutaciones ternarias formadas con las otras 3 letras: las permutaciones quinarias se formarán poniendo al lado *de cada una de las cinco letras, las permutaciones cuaternarias formadas con las otras cuatro y así sucesivamente:* por tanto las Permutaciones

binarias serán $P=1\times 2$
las *ternarias* » $P=1\times 2\times 3$
las *cuaternarias* » $P=1\times 2\times 3\times 4$

Las permutaciones de n letras serán $P=1\times 2\times 3\times 4\times\ldots\times n$ y por tanto la fórmula general resultante la de las coordinaciones, haciendo $m=n$, será

$$m(m-1)(m-2)\ldots.\times 2\times 1.$$

74. COMBINACIONES. *Llámanse así á las coordinaciones que se diferencian por una ó mas letras; tambien se conocen con el nombre de* PRODUCTOS DIFERENTES, *lo cual quiere decir que consideramos como una sola combinacion á todas las permutaciones posibles con determinado número de letras.*

Para formar los *productos binarios diferentes* con un cierto número de letras colocadas en un órden dado, pondremos á la derecha de la primera cada una de las demás; al lado de la segunda cada una de las que le siguen; al lado de la tercera, cada una de las siguientes; etc. Segun lo cual observaremos que cada producto binario *ef* por ejemplo, produce dos permutaciones binarias *ef* y *fe*; luego tratándose de los *productos binarios*, serán en número la mitad que el de las permutaciones binarias; y si en estas la fórmula que las espresa es $m(m-1)$ *el número de productos diferentes ó combinaciones binarias será* $\frac{m(m-1)}{2}$

Para formar ahora las *combinaciones ternarias, se escribirán al lado de cada letra los productos diferentes ó combinaciones binarias una á una*, y como hemos visto que cada seis permutaciones ternarias, no es mas que un solo producto diferente, por referirse los seis productos expuestos por solo *abc*, resultará que el número de combinaciones ternarias será la sesta parte que el de permutaciones; luego el número de *combinaciones ternarias con m letras* será

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.}$$

De aquí generalizando, diremos que el número de combinaciones cuaternarias $=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$

24

Por tanto, las combinaciones diferentes formadas con m letras, colocadas por órden y tomando n en cada grupo, serán las espresadas por

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots. n}$$

De esto inferiremos que *el número de combinaciones de m letras tomadas n á n son tantas como tomadas m—n á m—n.*

En efecto, si de las m letras se toman n para formar una combinacion, quedarán $m-n$ que formarán otra combinacion; por tanto para cada combinacion de n letras, hay otra de $m-n$ letras, y para cada una de $m-n$ hay n letras, y segun esto, *el número de ambas es el mismo.* (1)

Binomio de Newton.

75. Las potencias de un polinomio se puede obtener en general por la multiplicacion de polinomios; pero este procedimiento es demasiado prolijo y no se emplea en la práctica, tanto menos, cuanto que segun lo ya espresado, la potencia de un polinomio depende de la misma potencia de otro polinomio que tenga un término menos y que en definitiva se reduce á un binomio.

Las potencias de un binomio se obtienen fácilmente con el conocimiento prévio del llamado BINOMIO DE NEWTON, en honor y prez de su inventor, quien con un profundo espíritu analítico supo encerrar en una fórmula todas las leyes generales que se establecen entre un binomio ó polinomio y todas sus respectivas potencias; entre estas respectivas potencias y el binomio ó polinomío que las origina, y en general entre todos los términos del desarrollo

Si consideramos los términos que resultan del producto de los binomios $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, etc. tomando primero dos binomios, luego tres, despues cuatro, etc., teniendo en cuenta que todos estos binomios tienen igual el primer monomio, tendremos que

$$(x+a)(x+b)=x^2\begin{array}{l}+a\\+b\end{array}x+ab,$$

(1) 30 individuos tardarian algo mas de 32 años en colocarse de todas las maneras posibles, si suponemos que no invirtiesen mas de un minuto en colocarse en cada posicion ó en formar cada coordinacion.

que $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3\left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\end{array}\right| x^2\left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\right| x+abc;$

que:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4\left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right| x^3\left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right| x^2\left.\begin{array}{l}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\right| x+abcd$$

Y así siguiendo con los productos de cinco, seis, m binomios observaremos en los términos producidos por esta multiplicacion y que necesariamente resultan ordenados con respecto á las potencias decrecientes de la letra comun x, la siguiente ley.

El polinomio del desarrollo tiene un término mas que el número de factores binomios. El exponente de x en el primer término es el número de binomios y vá disminuyendo en una unidad en los términos sucesivos, hasta el último en que se puede suponer entra este factor con exponente cero. El coeficiente del primer término es uno, el del segundo es la suma de los segundos términos de los factores binomios, el del tercer término es la suma de los productos binarios de dichos segundos términos, el del cuarto es la suma de los productos ternarios de los mismos, y así sucesivamente hasta el último que es el producto de todos los segundos términos de los binomios

76. Dicha ley es general, y para demostrarlo supongamos que habiéndose verificado en el producto de 2, 3, 4, m binomios, queremos hacerla notar en el producto de $m+1$ binomios.

Segun lo expuesto, si suponemos que

$$(x+a)(x+b)(x+c)......(x+u)=$$
$$=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+....+U$$

verificándose segun lo manifestado que:

$$A=a+b+c+d+..............+u$$
$$B=ab+ac+ad+bc+............$$
$$C=abc+abd+acd+bcd+.....$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$U=abcd.....$$

Multiplicando ahora por un nuevo binomio $(x+K)$ tendremos que

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d).....(x+u)\times(x+K)$$

será lo mismo que multiplicar por $x+K$ el polinomio

$$\begin{array}{l} x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+.........+U. \\ \qquad\qquad\qquad x+K \\ \hline x^{m+1}\begin{array}{l|l|l|l}+A & x^m+\ B & x^{m-1}+\ C & x^{m-2}+.........+KU. \\ +K & \ \ +AK & \ \ +BK & \end{array} \end{array}$$

producto en el que observaremos hay un término mas que en el anterior, siendo el exponente de x en el primer término $m+1$ y disminuyendo una unidad en cada uno de los términos siguientes, hasta el último en el cual existe con exponente cero: respecto al coeficiente del primer término sigue siendo 1. El del segundo es $A+K$ que espresa la suma de todos los segundos monomios de los $m+1$ factores. El del tercer término es $B+AK$ y como B es la suma de los productos binarios de los m segundos términos primitivos y AK es el producto de $(a+b+c+...+u)$ por K, resultará que $B+AK$ será la suma de todos los productos binarios que se pueden formar con los $m+1$ segundos términos El coeficiente del cuarto término es $C+BK$, pero C es la suma de los productos ternarios de los segundos términos de los m binomios primitivos y BK la suma de los productos binarios multiplicados por K: luego $C+BK$ será la suma de los productos ternarios que se pueden formar con los $m+1$ segundos términos. Si continuamos este razonamiento verémos mas y mas comprobada la ley, hasta el último KU que es el producto de los segundos términos de los $m+1$ binomios. LUEGO LA LEY ES GENERAL.

77. Demostrada esta ley independientemente de los valores que puedan tener los segundos términos ó segundos monomios de los factores binomios, podemos ahora suponer que dichos segundos términos sean iguales, ó lo que es lo mismo que todos los binomios sean iguales y el producto de m factores será:

$$(x+a)^m=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+......+U$$

En donde

$$A=a+a+a+\ldots\ldots+a=ma$$

$$B=a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots+a^2=\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$$

$$C=a^3+a^3+a^3+\ldots\ldots+a^3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$$

....

$$U=aaa\ldots\ldots a=a^m$$

Por tanto la fórmula general del Binomio de Newton será $(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\ldots\ldots$

$$+ma^{m-1}x+a^m.$$

Del exámen detenido del segundo miembro de esta igualdad se descubren las siguientes propiedades.

78. *1.ª La potencia del grado m de un binomio se desarrolla en un polinomio de m+1 términos, pues siendo m el exponente del primer término y disminuyendo en una unidad dicho exponente en los términos sucesivos con el penúltimo término se forman m términos y con mas el último habrá m+1.*

2.ª La suma de los exponentes de a y de x en cada término es igual á m, pues siendo fijo el número de términos del polinomio, el de a expresa el número de términos anteriores, el de x el de términos posteriores: el polinomio será pues homogéneo, del grado m, ordenado con respecto á las potencias decrecientes de x, ó con respecto á las crecientes de a.

3.ª Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales, pues el uno expresa el número de combinaciones de m letras tomadas n á n, el otro el número de las combinaciones de m letras tomadas m—n á m—n que será igual segun lo expuesto en el número (74).

4.º El coeficiente numérico de cada término, estará espresado el primero y último por 1: el del segundo y penúltimo, por el exponente de la potencia: el del tercero y antepenúltimo será el de las combinaciones binarias que pueden formarse con m letras: el del cuarto término empezando de izquierda á derecha ó de derecha á izquierda, será el espresado por el número de combinaciones ternarias, etc.

5.ª La expresion de un término general de la fórmula del binomio, se puede determinar con solo saber el lugar que ocupa, prévias las propiedades consignadas. Así para obtener el 5.° término, diremos el coeficiente será igual al número de combinaciones cuaternarias, el exponente de x será m—4, el de a será 4, luego será

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^4x^{m-4}$$

y por tanto la expresion del término general será

$$\frac{m(m-1)(m-2).......(m-n+1)}{1.2.3.........n}a^nx^{m-n}$$

Si hiciésemos en esta fórmula general m=n, el coeficiente seria un quebrado de iguales términos que valdria 1, pues el numerador seria el producto de todos los factores enteros decrecientes desde m á 1 y el denominador el producto de los mismos factores en órden inverso de 1 á m; por convertirse el exponente de x en cero, su potencia seria igual á uno y por tanto tendriamos el último término que es a^m.

Si en esta fórmula general diésemos á n un valor mayor que m, resultaria en el numerador un factor m—m que por valer cero anularia todo el término, lo cual nos haria ver que el desarrollo de la potencia m de un binomio, no puede tener mas de m+1 términos

6.ª El coeficiente de cada término se obtiene, multiplicando el del anterior por el exponente de x y dividiéndolo por el de a aumentado en una unidad. En efecto, esta ley será notada en los términos del desarrollo: comparando el coeficiente de un término con el de su anterior, comparemos ahora, por ejemplo, la espresion del término general ya dado y que tiene delante de sí n términos, con el que existiere antes que él, el cual solo tendrá ante sí n—1 término; su espresion será

$$\frac{m(m-1)(m-2).....(m-n+2)}{1.2.3.\ ....\ \ n-1}a^{n-1}x^{m-n+1}$$

entre los cuales notaremos se verifica la propiedad En las observaciones indicadas se funda la regla siguiente: Para desarrollar una potencia de un binomio, se eleva su primer término á dicha potencia y esta será el primer término del desarrollo, y cada uno de los demás términos *se forma multiplicando su anterior inmediato por el exponente de x en el mismo, y dividiendo este producto por el exponente de a mas la unidad, aumentando 1 al exponente de a y disminuyéndolo al de x.*

Aplicando esta regla á algunos ejemplos, tendremos:

$(x+a)^1=x+a$

$(x+a)^2=x^2+2ax+x^2$

$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+x^3$

$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$

$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$

7.ª *Cuando ambos términos del binomio sean positivos, lo serán tambien todos los términos del desarrollo; igualmente serán positivos cuando los dos términos del binomio sean negativos y* par *su potencia; y evidentemente serán negativos, si la potencia es* impar *de acuerdo con la Regla de los signos.*

Cuando un término del binomio sea positivo y otro negativo, serán positivos los términos del desarrollo que tengan potencias pares del término negativo, y serán negativas las que tengan potencias impares. Segun lo cual y alternadamente serán positivos y negativos los términos del desarrollo.

8.ª *Si desarrollamos los binomios* $(x+a)^m$ *y* $(x-a)^m$ *haciendo* $x=1$ *tendremos:*

$$(1+a)^m=1+ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\dots\dots$$

$$(1-a)^m=1-ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2-\dots\dots$$

cuyos desarrollos son de importancia suma porque nos manifiestan la ley precisa, mediante la cual desarrollamos la potencia de cualquier binomio. Supongamos que tenemos $(S+r)^m$*: digo que* $s+r=s\left(1+\frac{r}{s}\right)$

y espresando la fraccion por b *será*

$$(s+r)^m=s^m.(1+b)^m$$

9.ª *Si en los dos desarrollos anteriores hacemos tambien* $a=1$ *tendremos que*

$$(1+1)^m=2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\dots$$

$$(1-1)^m=0^m=1-m+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\dots\dots$$

La primera nos espresa que la suma de todos los coeficientes de cualquier potencia de $x+a$, es igual á la potencia del mismo grado del número 2. La segunda nos espresa que la suma de los coeficientes de lugar impar *es igual á la suma de los coeficientes de lugar* par, *pues que la diferencia de ambas es cero.*

79. POTENCIAS DE LOS POLINOMIOS. Hemos espresado en el número (23) de que manera se obtiene el cuadrado y cubo de un polinomio, y aunque ya iniciado, nos queda dejar expuesto el procedimiento general para obtener cualquiera otra potencia de un polinomio. Para esto consideraremos el segundo y terminos siguientes como un monomio, y por tanto el polinomio dado como un binomio, desarrollaremos la espresada potencia del binomio equivalente al polinomio dado, y veremos que esta depende de la potencia del mismo grado de otro polinomio que tiene un término menos; equivaliendo en este, su segundo y términos sucesivos á un monomio, quedará convertido en otro binomio cuya potencia desarrollaremos, observando es dependiente de la misma potencia de un polinomio que tiene ya dos términos menos; sustituyendo en este, su segundo y términos siguientes por un monomio quedará reducido á un nuevo binomio cuya potencia desarrollaremos. etc., y por tanto, la inmediata aplicacion de la fórmula del Binomio de Newton es para la obtencion de los términos del desarrollo de cualquier potencia de un Polinomio, sin embargo de que como en otro lugar indicamos, lo mas frecuente en la práctica es solo la obtencion del cuadrado y cubo de los polinomios

80. RAICES DE LOS POLINOMIOS. Hemos espresado en los números (28) y (29) el procedimiento para obtener la raiz cuadrada y cúbica de un polinomio; nos resta manifestar en este punto la aplicacion que siempre hacemos del Binomio de Newton para la obtencion de una raiz cualquiera de un polinomio. Supongamos que se trata de extraer la raiz emésima de un polinomio $P+Q+R+\ldots\ldots$, sea su raiz $p+q+r+\ldots\ldots$ estando ordenados ambos polinomios con respecto á una letra, tendremos:

$$P+Q+R+\ldots\ldots=(p+q+r+\ldots\ldots)^{m}=p^{m}+mp^{m-1}(q+r+\ldots)$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}p^{m-2}(q+r+\ldots)^{2}+\ldots\ldots\ldots$$

luego hemos considerado el polinomio raiz, compuesto de dos partes, una en primer término y otra la suma de todos los demás, lo cual era forzoso para aplicar la fórmula general del Binomio; por tanto $p^m=P$ luego $p=\sqrt[m]{P}$, lo que nos indica que el primer término de la raiz se obtiene de la raiz emésima del primer término del polinomio dado; si de la igualdad anterior restamos la posterior, quedará $Q+R+\ldots\ldots=mp^{m-1}q+\ldots\ldots$ luego $Q=mp^{m-1}q$ de donde $q=Q:mp^{m-1}$ lo que nos dice que para hallar el segundo término de la raiz, se dividirá el segundo término del polinomio propuesto por m veces la potencia $m-1$ del primer término de la raiz, etc., etc.

Luego por tanto; para hallar la raiz emésima *de un polinomio, despues de ordenado, se extrae la raiz del mismo grado de su primer término y se obtendrá el primero de la raiz, se divide el segundo término del polinomio por* m *veces la potencia* m—1 *de la raiz hallada, y el cociente será el segundo término de la raiz. Para hallar cada uno de los siguientes, se resta del polinomio propuesto la potencia* emésima *de la raiz hallada y se divide el primer término del resto por* m *veces la potencia* m—1 *del primero de la raiz.*

El exponente que afecta al binomio de Newton se ha supuesto siempre entero y positivo, pero puede ser fraccionario y negativo, y su generalidad está evidentemente comprobada, por mas que al estudio de la misma para todos los valores de que pueda ser susceptible, sea agena la índole de esta obra. En las teorias del Algebra superior ocurren con mucha frecuencia estos desarrollos, no siendo el exponente ni entero ni positivo.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES

AL CÁLCULO DE LAS CANTIDADES LITERALES ENTERAS, FRACCIONARIAS, RADICALES É IMAGINARIAS: RELATIVOS Á LAS COORDINACIONES, BINOMIO DE NEWTON Y Á LAS POTENCIAS Y RAICES DE LOS POLINOMIOS.

I. Valor numérico del polinomio $ab^3+5ab-7a^3b-9a^2+ab$ valiendo $a=2$ y $b=4$.

II. Hallar los cocientes que pueden resultar de dividir $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$ siendo $m=10$, $m=8$, $m=5$.

III. Determinar el número de términos del cuadrado de un polinomio antes y despues de hecha la reducion.

IV. Descomponer las espresiones algébricas siguientes en su factor racional y factor irracional

$$\sqrt{a^5b^4}, \qquad \sqrt{12ab^3}, \qquad \sqrt[3]{16a^5b^2}$$

V. Reducir á comun denominador varias fracciones literales, indicando despues la espresion de la suma.

VI. Hallar el producto de varias fracciones literales, considerándolas como cantidades enteras con exponentes negativos.

VII. Simplificar en lo posible varias cantidades radicales y equivalerlas luego á espresiones literales enteras con exponentes fraccionarios; verificar con las mismas las operaciones de composicion y descomposicion, afectando ya una ya otra de las dos formas.

VIII. Descomponer una suma de dos sumandos en el producto de dos factores imaginarios conjugados.

IX. Verificar las operaciones del cálculo algébrico con varias espresiones imaginarias del 2.° grado.

X. Reducir una fraccion cuyos dos términos sean imaginarios en otra equivalente cuyo denominador sea Real.

XI. Formar todas las coordinaciones posibles con las cinco primeras letras.

XII. Raices cuadrada y cúbica de varios polinomios y condiciones que deben cumplir para ser racionales.

TERCERA PARTE.

RELACIONES ALGEBRAICAS DE IGUALDAD.

LIBRO PRIMERO

Ecuaciones y problemas de primer grado.

81. Por lo espresado en el número (187) de la Aritmética sabemos que se llama ECUACION *á una igualdad en la cual entran una ó mas cantidades desconocidas.*

La igualdad relaciona cantidades conocidas.

La ecuacion relaciona las conocidas con las desconocidas.

Resolver una ecuacion es determinar el valor de la ó de las incógnitas, por sus relaciones con los datos.

Si las cantidades conocidas se espresan por números, la ecuacion se llama *numérica*; si se espresan por letras, se llama *literal.*

Comprobar una ecuacion, es sustituir las incógnitas por sus valores, observando si la ecuacion se convierte en *igualdad*, y si verificando en esta las operaciones indicadas, aparece la *identidad*, que como evidente por sí misma espresa el primer axioma de ser el todo igual al todo.

El *Grado de una ecuacion con una incógnita está espresado por el mayor exponente de la incógnita*, siempre que esta no se halle por denominador ni debajo de signo radical. Si en un tèrmino hubiese dos ó mas incógnitas, el grado de la ecuacion estaria expresado por la suma de los exponentes de las incógnitas en el término en que sea mayor dicha suma De modo que el grado de la ecuacion puede referirse á esta suma, ó con respecto á una sola incógnita, será el mayor exponente de la misma.

Se llama Ecuacion completa del grado n con relacion á una sola incógnita, la que contiene todas las potencias de la misma desde cero á n, una en cada término. Se llama *ecuacion incompleta*, si le falta alguna.

A las ecuaciones completas tambien se le llaman *Mixtas*.

A las ecuaciones incompletas se le llaman *Puras*.

Se dice que una ecuacion es equivalente de otra cuando los valores de las incógnitas son iguales en una y otra; dada una ecuacion se pueden hallar cuantas equivalentes se quieran, si con los dos miembros de la misma verificamos idénticas operaciones.

Si en una ecuacion se verificase que ningun valor para la incógnita reducia la ecuacion á identidad prévia la verificacion de las operaciones, es porque la ecuacion es *imposible* ó *absurda* como $4x+7=4x-82$. Si por el contrario existe un número ilimitado de valores que satisfacen la ecuacion, reduciéndola á identidad, la ecuacion se llama entónces *indeterminada* como $2x+1=2x+\frac{4}{4}$

82. El despejo de una incógnita en una ecuacion es dependiente de las operaciones que constituyen el cálculo algébrico. Para determinar en una sola ecuacion el valor de la incógnita, es preciso procurar que todas las cantidades numéricas ó literales que acompañen á la incógnita en su miembro respectivo, pasen al otro, es decir que la incógnita se halle sola en uno de los miembros y todas las demás cantidades en el otro.

La incógnita ó cantidad desconocida puede entrar en la ecuacion como *sumando*, *sustraendo*, *factor*, *divisor*, *exponente* ó *índice*; si entra como sumando, debe restarse á ambos miembros de la ecuacion todos los demás; así $8+x=13$ nos dice que $x=13-8=5$. Si entra la incógnita como sustraendo, por ejemplo $20-x=7$, restaremos 7 á los dos miembros y quedará $20-7-x=o$ donde añadiendo x á ambos miembros $20-7=13=x$. Si la incógnita fuese factor, partiriamos los dos miembros por los factores que la acompañarán y despejariamos su valor así $3\times x=12$ donde $x=12:3=4$. Si la incógnita entrase por divisor, multiplicariamos los dos términos por la misma x y luego los dividiriamos por los demás términos, así en $24:x=8$ tendremos que $24=8\times x$, luego $24:8=3=x$; por último, si la incógnita entrase como exponente ó como índice, la ecuacion se llamaria *esponencial* de la resolucion, de las cuales nos ocuparemos en último término.

83. Segun lo espresado observaremos que el despejo de una ecuacion se efectúa mediante el concurso de otras ecuaciones equivalentes que se producen de *sumar*, *restar*,

multiplicar ó *dividir* á los dos términos de una igualdad, la ó por la misma cantidad, cuyas transformaciones, como ya tenemos sabido por uno de los axiomas, no imprimen alteracion en la perfecta relacion de igualdad que hubiese ya sido establecida.

Al conjunto de todas estas operaciones se conoce con el nombre de *operaciones indicadas*; el efecto que producen en la ecuacion que se nos proponga, son 1.° *Quitar denominadores*. si los tiene. 2.° *Quitar paréntesis*. 3.° *Trasposicion*, y 4.° *Reduccion*.

El fundamento de cada una de estas operaciones estriva: la primera, en que como sabemos, ninguna igualdad se altera por multiplicar ambos miembros por la misma cantidad, debiendo ser esta el m. m. c. de los denominadores; la segunda, en los Teoremas expuestos en los números del (33) al (37) de la Aritmética. La tercera, en la posibilidad de hacer pasar los términos de un miembro al otro, cambiando de signo, y la cuarta en la reduccion de términos semejantes. La mas simple espresion ó fórmula general de las de primer grado es $Ax=B$. Donde $x=B:A$.

84. Sea la ecuacion $\frac{x}{4}+\frac{2(x-5)}{7}-3x+40=x-3$ *multiplicando ambos miembros por* 28, *m. m. c. de los denominadores*, tendremos

$$7x+8(x-5)-84x+1120=28x-84,$$

quitando paréntesis

$$7x+8x-40-84x+1120=28x-84;$$

pasando los términos que no tienen incógnita al segundo miembro, y los que la tengan al primero, tendremos

$$7x+8x-84x-28x=-84-1120+40$$

reduciendo, tendremos: $-97x=-1164$, multiplicando ambos miembros por -1 será $1164=97x$; partiendo ambos miembros por 97, tendremos: $1164:97=97x:97$ de donde $12=x$.

Hemos por tanto despejado el valor de la incógnita en la ecuacion, la cual comprobariamos sustituyendo 12, en vez de la incógnita reduciendo la ecuacion á igualdad y esta á identidad. Sea ahora la ecuacion literal

$$\frac{x}{a}+\frac{b(x-c)}{d}=bx+\frac{c(x-a)}{c}$$

quitando denominadores; lo cual conseguiremos multiplicando toda la ecuacion por adc producto de los denominadores, tendremos

$$dcx+abc(x-c)=abcdx+adc(x-a),$$

quitando paréntesis será

$$dcx+abcx-abc^2=abcdx+adcx-a^2dc,$$

verificando la trasposicion,

$$dcx+abcx-abcdx-adcx=abc^2-a^2dc,$$

luego $x(dc+abc-abcd-adc)=abc^2-a^2dc$ y por tanto

$$x=\frac{abc^2-a^2dc}{dc+abc-abcd-adc}$$

85. Llámanse *Problemas particulares de primer grado* con una incógnita, aquellos que se resuelven por medio de una *ecuacion numérica* de primer grado, cual la expuesta en primer lugar en el número anterior.

Llámanse *Problemas generales de primer grado* con una incógnita, aquellos que se plantean y resuelven algebráicamente por medio de una *ecuacion literal* del primer grado, cual la segunda espuesta en el número precedente.

86. La fórmula que espresa una ecuacion en general, no es mas que la traduccion al lenguaje algebráico de todas las condiciones espresadas en el problema, formada con arreglo á las relaciones de los datos con las incógnitas que se desprenden, mediata ó inmediatamente de la enunciacion del problema, teniendo en cuenta que estas condiciones pueden ser *esplícitas* ó *implícitas*; luego se *plantea el problema* ó se pone en *ecuacion, resolviéndose* despues.

De lo expuesto comprenderemos que la resolucion de todo problema tiene dos partes, 1.ª *planteo de la ecuacion*, y 2.ª *resolucion de la misma*.

El planteo de un problema en ecuacion, no puede sugetarse á reglas fijas, en todo caso es siempre dependiente de las condiciones del problema, cabiéndonos solo indicar que para esto se analiza escrupulosamente el enunciado, reconociendo en el mismo las condiciones tanto esplícitas como implícitas, cuales sean las cantidades conocidas y las desconocidas, representándose estas por las últimas letras del alfabeto, se expresarán luego algebráicamente las mismas operaciones que se harian con los datos é incógnitas si todos fueran conocidos: despues se pueden comprobar estos valores, resolviéndola conforme queda indicado.

87. Los problemas pueden ser *determinados, indeterminados* ó *imposibles*. Son *determinados* cuando tienen un número limitado de soluciones; *Indeterminados* cuando pueden tener infinitas, é *imposibles ó absurdos* cuando no tienen ninguna.

Los problemas se llaman tambien de *primero, segundo, tercer grado, etc.*, segun dependen de ecuaciones de *primero, segundo, tercer grado*, etc.

88. PROBLEMAS NUMÉRICOS DE PRIMER GRADO. 1.° *Teniendo un padre 32 años y su hijo 7, se quiere saber cuantos años han de trascurrir para que la edad del padre sea triple de la edad del hijo.*

Si representamos por x los años que deben pasar, el padre tendrá $32+x$ y el hijo tendrá $7+x$, y como la edad del primero debe ser tres veces mayor que la del hijo, tendremos que:

$$32+x=3(7+x)$$

fórmula en la cual *quitando paréntesis, trasponiendo, reduciendo y despejando* el valor de x, será $x=5{,}5$.

En efecto, entónces el padre tendrá 37,5 años, y el hijo tendrá 12,5 que es la tercera parte de la edad del padre.

2.° Si se dijese con los mismos datos anteriores: *Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué 13 veces mayor que la del hijo.* Pondriamos en ecuacion el problema diciendo: $32-x=13(7-x)$, la cual resolviendo nos daria para x el valor de 2 años y 11 meses, edad que repetida 13 veces nos dará 27 años y 1 mes, que es precisamente la edad que tendria el padre.

3.° *Un empleado gasta en manutencion la mitad de su sueldo, la cuarta parte en casa, la novena parte en vestir, en los demás gastos la dozava parte, y nota que siendo siempre así le sobran al año 2000 rs.; se pregunta cual es su sueldo y cuanto gasta en comer, en casa, en vestir y en los demás gastos.*

Si llamamos x al sueldo tendremos que:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{9}+\frac{x}{12}+2000=x,$$

ecuacion en la cual, sacando denominadores y reduciendo, resulta que $x=36.000$ rs. y por tanto resulta:

18000	en	comer
9000	»	casa
4000	»	vestir
3000	»	gastos
2000	»	sobrante

Siendo la suma, su sueldo de 36.000 reales.

4.° *Diofanto, matemático griego, pasó la sesta parte de su vida en la niñez, la duodécima en la adolescencia, vivió casado sin hijos la séptima parte de su vida mas cinco años, tuvo un hijo que vivió la mitad que Diofanto al cual le sobrevivió cuatro años. Se pregunta, ¿cuántos años vivió Diofanto?*

Este problema puesto en ecuacion nos dá que

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x,$$

la cual resolviendo nos espresa que $x=84$, fueron los años de su vida.

5.° *Un padre al morir dispuso en su testamento que al mayor de sus hijos se entregase 1000 duros y el quinto del resto; que al segundo se entregase 2000 duros y el quinto del resto; al tercero 3000 y el quinto del resto, etc. Verificada la reparticion de este modo resultaron iguales las partes que correspondieron á sus hijos. Se pregunta, qué capital dejó el padre, cuántos eran sus hijos y cuanto correspondió á cada uno.*

Lo que corresponde al primer hijo será:

$$1000+\frac{x-1000}{5} \text{ ó bien } \frac{4000+x}{5}.$$

Al 2.° hijo corresponderá 2000, mas el quinto del resto que será $x-\frac{4000+x}{5}-2000=\frac{4x-14000}{5}$

luego la quinta parte de esta cantidad será: $\frac{4x-14000}{25}$

por tanto al 2.° le corresponde $2000+\frac{4x-14000}{25}$, la cual simplificando equivale á $\frac{36000+4x}{25}$; pero segun el enunciado del problema estas partes son iguales, así que

$$\frac{4000+x}{5}=\frac{36000+4x}{25}$$

la cual resolviendo nos dá que $x=16000$ *duros, que los hijos eran 4, y 4000 duros lo que correspondió á cada uno.*

6.° *Un caño puede llenar un estanque en 5 horas; pero si este estanque tiene en su fondo dos orificios, uno tal que estando abierto le vacia en 11 horas y otro tal que abierto le vacia en 20 horas; se pregunta, corriendo el agua por los tres caños es posible que se llene el estanque? en cuánto tiempo?*

Fácilmente se comprende que en una hora llenará el orificio de entrada la quinta parte del mismo, que el primer orificio de salida en una hora vaciará $\frac{1}{11}$ y que el otro vaciará en una hora $\frac{1}{20}$, luego siempre que $\frac{1}{5}$ sea mayor que $\frac{1}{11}+\frac{1}{20}$ será posible que se llene el estanque, como así es en efecto, luego la fórmula de la ecuacion será $\frac{x}{5}-\frac{x}{11}-\frac{x}{20}=1$ que despejando x resulta que el estanque se llenará en 16 horas$+$55 minutos.

89. Problemas generales de primer grado.

1.° *Si un padre tiene* m *veces mas edad que su hijo y la suma de ambas edades es* S, *¿cual será la edad de cada uno?*

Siendo x la edad del hijo, la del padre será mx y como la suma es S tendremos que $x+mx=S$, luego $x(1+m)=S$, de donde $x=S:(1+m)$. *Fórmula que traducida al lenguaje vulgar nos dice que la edad del hijo es igual á la suma de las dos edades, dividida por el número de veces que la edad del padre es mayor que la edad del hijo, aumentando este divisor en una unidad.*

2.° *Si un padre tiene* A *años y su hijo* B *años, se pregunta, cuánto tiempo debe trascurrir para que la edad del padre sea* M *veces la edad del hijo.*

Llamando x á los años que deben pasar, tendremos que $A+x=M(B+x)$ de donde $A+x=MB+Mx$ y $x(1-M)=MB-A$, luego $x=\frac{MB-A}{1-M}$ que traducida al lenguaje vulgar nos dice que: *el tiempo es igual á la diferencia entre la edad del padre y el producto de la del hijo por el factor que indica las veces que la edad del padre ha de contener á la del hijo, y dividida esta diferencia por la que exista entre dicho factor y la unidad.*

En la fórmula precedente cambiaremos los signos á los dos términos de la fraccion.

3.^{er} *Sabiendo el tiempo que tarda un estanque en llenarse por cada uno de dos caños, se quiere saber el que tardará si sobre el mismo vierten los dos á la vez.*

Llamando t y t' á los dos tiempos conocidos y x al desconocido, tendremos que $\frac{x}{t}+\frac{x}{t'}=1$ la cual resuelta nos dice que $x=\frac{tt'}{t+t'}$ luego el tiempo que tarda en llenarse está espresado por el cociente que resulta de dividir el producto de los tiempos por la suma de los mismos.

Discusion de la Ecuacion general del primer grado.

90. *La fórmula general de la ecuacion de primer grado es* Ax=B *donde* x=B:A. *Si* B *y* A *son los dos positivos ó los dos negativos, fácilmente se comprende por la regla de los signos que* x *es positivo; si por el contrario fuesen de signo diferente,* x *es negativo.*

Si B=A, x *será igual* 1.

Si B *mayor que* A, x *será mayor que* 1.

Si B *menor que* A, x *será menor que* 1.

Si A *es igual á* 1, x *será igual á* B.

Si B *es igual á* 1, x *será igual á* $\frac{1}{A}$

Si A *disminuye, es claro que* x *aumenta, luego si suponemos que* A *valga* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{1000}$, *etc.*, x *valdrá* 2B, 3B, 10B, 1000B, *etc., luego si* A *disminuyendo se convierte en cero,* B *habrá crecido hasta que por* *ser infinitamente grande, se esprese por el infinito, cuyo signo es* ∞, *luego por tanto*

$$B:0=\infty \quad y \quad B=0\times x=0\times\infty$$

ecuacion imposible ó absurda para valores finitos de x.

Si B *igual á cero, claro que* $x=0$.

Si disminuyendo progresivamente A, *disminuye progresivamente* B *haciéndose* $B=0$ *y* $A=0$, x *será igual á* $\frac{0}{0}$ *y como cociente por divisor igual al dividendo, tendremos que* $x\times0=0$, *mas en este caso* x *puede tener cualquier valor finito comprendido entre los límites* cero *y el* infinito, *y siendo por tanto indeterminado su valor, el símbolo* $\frac{0}{0}$ *será la espresion de toda indeterminacion.*

De la misma manera si $A=\infty$ *y* $B=\infty$ *será* $x=\frac{\infty}{\infty}$ *y por tanto* x *puede valer cualquier cantidad finita comprendida entre* 0 *é* ∞ *pues que cualquier cantidad multiplicada por* ∞ *es siempre* ∞, *por tanto* $\frac{\infty}{\infty}$ *es otro símbolo de indeterminacion.*

Los símbolos de indeterminacion son $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

De esto concluiremos diciendo que si una ecuacion es determinada, *su raiz única puede ser, bajo el concepto de su cualidad, positiva, negativa ó imaginaria, espresándose en cualquier caso este valor por un número entero, fraccionario ó inconmensurable.*

Si es absurda ó imposible *su raiz es cero ó infinito.*

Si es indeterminada *podrá tener cuantas raices se quieran.*

Discusion de varios problemas de primer grado.

91. Solucion positiva: *Proponiéndose un amo repartir entre sus criados, con motivo de una festividad, cierta cantidad de duros, observó que para dar á cada uno 7, le faltaban 3; y que si solo le daba á cada uno 5, le sobraban 4. Se pregunta cuántos eran los criados.*

Siendo x el número de estos, el de pesos serán $7x-3$ segun la primera distribucion y $5x+4$ segun la segunda, luego $7x-3=5x+4$ en la cual despejando $x=3,5$, este valor de la incógnita satisface la ecuacion pero por ser fraccionario indica la imposibilidad del problema.

92. Solucion negativa. *Un padre tiene 35 años, su hijo 13; se pregunta cuántos años faltan para que la edad del padre sea cuádruple de la del hijo.*

Planteándolo resulta: $35+x=4\ (13+x)$ que dá para la incógnita $x=-5$ años y 8 meses. Esta *solucion negativa* se produce de considerar como tiempo futuro al que ya es pasado; y en efecto, si en vez de añadirlo lo restamos de las respectivas edades, quedará para el padre 29 años y 4 meses y para el hijo 7 años y 4 meses, entre cuyas edades se observa que en efecto la edad del padre fué *entónces* 4 veces mayor que la del hijo.

93. Solucion cero. *Si dijésemos un padre tiene 30 años, su hijo 6, se pregunta cuánto tiempo debe trascurrir para que la edad del padre sea cinco veces mayor que la del hijo.*

Plantearemos el problema diciendo: $30+x=5\ (6+x)$ que resuelto nos dá $x=0$ y en efecto, esto nos dice que *siendo cero* el límite del pasado y el futuro, en el momento presente se verifica la condicion del problema.

94. Solucion infinita. *Un padre tiene 35 años y 8 su hijo. Se pregunta. cuánto tiempo debe trascurrir para que la edad del padre sea igual á la del hijo.* Tendremos que $35+x=8+x$ ó bien $(1-1)x=23$ luego $0\times x=23$ y

$$x=\frac{23}{0}=\infty.$$

Solucion infinita que nos espresa que la imposibilidad del problema, el cual es evidentemente absurdo, como lo es asimismo la ecuacion.

95. Solucion indeterminada. *Cuál es un número al que agregando 20, dividiendo todo por 2 y restándole la mitad del mismo número produce 10 unidades.*

Planteada en ecuacion tendremos $\frac{x+20}{2}-\frac{x}{2}=10$ que equivale á $x+20-x=20$, lo que dice que $(1-1)x=20-20$ luego $x=\frac{0}{0}$; lo que nos indica que el valor de x puede ser cualquier cantidad, y por tanto que la ecuacion *es indeterminada.*

96. Para el estudio de los diferentes valores que pue-

de tener la incógnita de una ecuacion de primer grado ponemos á continuacion el siguiente problema con su respectiva discusion.

Dos móviles recorren con movimiento uniforme y en la misma direccion la línea NM pasando en un momento dado, uno por A, y otro por B, distantes entre sí a *metros; las velocidades respectivas de los dos móviles son v y v' metros por minuto: ¿en qué punto de la línea se encontrarán?*

N H' A B H M

Siendo el movimiento de izquierda á derecha, supongamos que se encuentran en H, espresando la distancia AH por x, la distancia BH estará bien representada por $x-a$; supuesto que $AB=a$ el tiempo invertido por uno de los móviles en andar AH será el mismo que tardó el otro en andar BH; pero si el primero recorre en 1 minuto v metros, en recorrer x metros tardará $\frac{x}{v}$ minutos, y el otro tardará $\frac{x-a}{v'}$, minutos, en recorrer la distancia $x-a$. Por tanto la ecuacion del problema será $\frac{x}{v}=\frac{x-a}{v'}$, de donde resultará que $x=\frac{av}{v-v'}$. Esta fórmula obtenida para valor de x, podemos discutirla dando á las cantidades conocidas a, v, y v' los distintos valores particulares de que sean suceptibles.

1.er caso: Si $v>v'$, el valor de x *es positivo* y satisface al problema: además $x>a$ lo que está conforme con las condiciones físicas del problema.

2.° caso: Si se verifica que $v<v'$, el valor de x *es negativo* y no satisface al problema, y por tanto siendo negativo debe contarse en el sentido contrario, es decir, de derecha á izquierda, resultando por tanto, que el punto de encuentro estará en H' lo cual hará que la última parte del enunciado se modifique diciendo: *¿en qué punto de la línea NM se han encontrado?*

3.er caso: Si la distancia AB decreciendo se reduce á cero, *el valor de x se reduce á cero;* cuya solucion está conforme con el enunciado, porque si los puntos A y B están juntos, al pasar los móviles por ellos, claro es que se encontrarán.

4.° caso. Si $v=v'$ el *valor de x es infinito* indicándonos que el punto de encuentro se halla infinitamente lejos de A, y por tanto que los móviles jamás se encontrarán, lo que se hace evidente, puesto que si las dos velocidades son iguales, los dos móviles siempre se hallarán distantes a metros.

5.° caso: Si al mismo tiempo que las dos velocidades son iguales, fuese la distancia $AB=0$ el valor de x *afectará la forma de* $\frac{0}{0}$ y como la fraccion $\frac{av}{v-v'}$, no tiene ningun factor comun á sus dos terminos, la solucion *es indeterminada*; lo cual nos hace ver que los dos móviles se encuentran en todos los puntos de la línea, exactamente cual debia suceder, puesto que pasando á la vez por el mismo punto, y llevando entrambos igual velocidad, jamás se apartarán el uno del otro.

Resolucion de una ecuacion de primer grado con varias incógnitas.

97. Toda ecuacion de primer grado con una incógnita se reduce á la forma $Ax=B$ Toda ecuacion de primer grado con dos incógnitas se reduce á la forma $Ax+By=C$ y en general toda ecuacion de primer grado con m incógnitas se reduce á la forma $Ax+B\,y+Cz+..........=K$.

98. *Para resolver una ecuacion de primer grado con dos ó mas incógnitas, se despeja una de las incógnitas, dando valores arbitrarios á todas las demás, y obtendremos así una solucion de la ecuacion propuesta. Dando otros valcres diferentes á todas las incógnitas menos una, y despejando esta, obtendremos otra solucion; y así siguiendo, cuantas se quieran; esto nos hará ver que todas estas ecuaciones son* INDETERMINRDAS. *Sus incógnitas se llaman* VARIABLES, *y las que admiten valores arbitrarios son* VARIABLES INDEPENDIENTES, *y* VARIABLE DEPENDIENTE Ó FUNCION *á la incógnita cuyo valor depende del que se asigne á las demás*, entendiendo para lo sucesivo, que se llama *funcion de una ó mas variables*, en su mas general acepcion, á toda espresion algébrica cuyo valor depende del que reciben dichas variables.

Tratemos de resolver la ecuacion $x+y=8$

Donde $x=8-y$ si hacemos y igual 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tendremos que x igual 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 y, *será la variable independiente; x, será la funcion.*

Es evidente por tanto, que una ecuacion de primer grado con varias incógnitas admite *una infinidad de soluciones;* las cuales sin embargo, se disminuirán en número considerablemente, si se establece por condicion que los valores de las incógnitas han de ser enteros y positivos.

Métodos de eliminacion.

99. Llámanse así, los que se emplean para determinar los valores de las incógnitas que entran en varias ecuaciones que constituyen por su reunion un *sistema de ecuaciones.*

Solucion es un conjunto de valores, uno para cada incógnita, que satisfaciendo á las ecuaciones las convierten en identidades.

Un sistema de ecuaciones puede ser *determinado, indeterminado* ó *absurdo* segun que el número de soluciones sea *limitado, ilimitado* ó *imposible.*

Eliminar una incógnita en un sistema de ecuaciones, es deducir del mismo por medio de operaciones que no alteren los valores de sus incógnitas, otro en el cual no exista la incógnita que se desea eliminar.

Resolver un sistema de ecuaciones es determinar todas sus soluciones.

Los métodos de eliminacion son el de *Sustitucion, Igualacion, Reduccion,* y el método de *Factores indeterminados* ó llamado de *Bezout.*

100. EL MÉTODO DE SUSTITUCION *consiste en despejar una incógnita de una ecuacion y* SUSTITUIR *su valor en las demás, reduciéndose el sistema, con la aplicacion de este método á otro equivalente en el cual habrá una ecuacion menos y una incógnita menos tambien:* prosiguiendo así, con la aplicacion de este método, llegará á reducirse el sistema á otro en el cual no exista mas que una sola ecuacion que se llamará *ecuacion final,* en la que despejaremos el valor de la ó de las incógnitas.

Supongamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tal como

$\left.\begin{array}{l} Ax+By=C \\ A'x+B'y=C' \end{array}\right\}$ despejando x en la primera tendremos que $x=\dfrac{C-By}{A}$: sustituyendo en la segunda será: $A'\left(\frac{C-By}{A}\right)+B'y=C'$ en la cual quitando *denominadores* y *paréntesis*, verificando la *trasposicion* y *reduccion*, resultará que $y=\frac{AC'-CA'}{AB'-BA'}$ y despejando y será $x=\frac{CB'-BC'}{AB'-BA'}$.

101. Ejemplo numérico: sea el sistema de dos ecuaciones $4x+2y=14$ y $8x-5y=25$: despejando x en la primera, tendremos que: $x=\frac{14+2y}{4}$ sustituyendo en la 2.ª $8\left(\frac{14+2y}{4}\right)-5y=25$, quitando *denominadores, paréntesis*, verificando la *trasposicion* y *reduccion* será: $x=5$ $y=3$.

102. Método de igualacion. *Este método, consiste en despejar la incógnita que se vá á eliminar en cada una de las diferentes ecuaciones, é* igualando *luego sus valores resultará una ecuacion menos y una incógnita menos que las propuestas y el sistema resultante será equivalente al dado* Apliquemos este método á las dos ecuaciones literales expuestas mas arriba: tendremos que en la primera $x=\frac{C-By}{A}$; en la 2.ª $x=\frac{C'-B'y}{A'}$ igualando estos valores será $\frac{C-By}{A}=\frac{C'-B'y}{A'}$, la cual resolviendo nos dará para y el mismo valor obtenido por el método anterior. Si queremos determinar el valor de x, despejando en cada una de ambas ecuaciones el valor de y é igualando luego, obtendremos que el valor de x es tambien el que está expuesto mas arriba.

103. Ejemplo numérico. Sean las ecuaciones

$$7x-3y=11 \quad \text{y} \quad 2x+4y=8$$

despejando x, en la 1.ª y 2.ª é *igualando* será

$$\frac{11+3y}{7}=\frac{8-4y}{2}$$

resolviéndola dará que $y=1$ y $x=2$.

104. *El* MÉTODO DE REDUCCION *tambien se llama de* ADICION Y SUSTRACCION, *y tambien de* COEFICIENTES IDÉNTICOS: *consiste en convertir un sistema de varias ecuaciones con varias incógnitas, en otro equivalente en el cual una misma incógnita tenga el* MISMO COEFICIENTE, *y despues se* SUMAN Ó RESTAN *miembro á miembro cada dos ecuaciones, con el fin de que se destruyan los términos que tienen dicha incógnita.*

Aplicando este método á estas dos ecuaciones

$$Ax+By=C, \quad A'x+B'y=C'$$

tendremos queriendo eliminar x, que multiplicando la primera ecuacion por A' y la segunda por A resultará

$$AA'x+A'By=A'C; \quad AA'x+AB'y=AC':$$

restándolas miembro á miembro obtendremos

$$A'By-AB'y=A'C-AC,'$$

de cuyo miembro primero separando el factor y, y despejando tendremos: $y=\dfrac{A'C-AC'}{A'B-AB'}$

105. Supongamos que se nos propusiese el siguiente sistema de ecuaciones numéricas:

$$5\,x+2y=44 \qquad 4x-3y=3;$$

multiplicando por 4 ambos miembros de la primera, y por 5 los dos de la segunda, obtendremos

$$20x+8y=176 \text{ y } 20x-15y=15,$$

sistema equivalente al anterior, y en el cual restando miembro á miembro las dos ecuaciones, tendremos

$$8y-(-15y)=176-15, \text{ luego } 23y=161$$

y por tanto $y=161:23=7$ cuyo valor numérico aplicado á cualquiera de las dos anteriores nos diria que $x=6$

Escolio: Si los dos coeficientes de la incógnita que se vá á eliminar no son primos entre sí, se hallará el *m. m. c.* de los mismos, multiplicando los dos miembros de cada ecuacion, por el cociente que resulte de dividir dicho *m m.c*, por coeficiente de la incógnita.

106. * ***Método de factores indeterminados ó de Bezout.*** Este método, frecuentemente empleado aun en el cálculo superior, tiene la ventaja de eliminar á un tiempo todas las incógnitas menos una: consiste en multiplicar cada una de las ecuaciones por un factor indeterminado, á escepcion de una, sumando despues miembro á miembro las ecuaciones resultantes, é igualando á cero en la ecuacion final todos los coeficientes de todas las incógnitas menos uno, se obtendrá un sistema con una ecuacion menos

y una incógnita menos que el propuesto; hoy, sin embargo, es mas frecuente en el empleo de este método, usar en un sistema de m ecuaciones con m incógnitas; m factores indeterminados, en vez de $m-1$; pues con *Mr. Gergonne*, otros matemáticos han evidencia- que aplicando solo $m-1$ segun el método de *Bezout*, alguna vez puede conducir á error.

Para conocimiento del mismo, sin embargo, apliquemos este método al sistema ya expuesto.

$$Ax+By=C \qquad A'x+B'y=C'$$

multiplicando los dos miembros de la primera por M (factor indeterminado) y así trasformada sumándola miembro á miembro con la segunda, tendremos

$$AMx+BMy+A'x+B'y=CM+C'$$

y separando factores comunes

$$(AM+A')x+(BM+B')y=CM+C'$$

esta ecuacion con una de las dos propuestas forma un sistema equivalente al dado, y en una de las cuales M puede tener un valor cualquera. Si queremos eliminar la x, deberemos hacer nulo su coeficiente, estableciendo por tanto la siguiente ecuacion de condicion:

$$AM+A'=0 \quad \text{de donde} \quad M=-\frac{A'}{A};$$

la ecuacion anterior queda reducida á

$$(BM+B')\,y=CM+C'$$

en la cual sustituyendo por M su valor anterior, será

$$\left(-\frac{BA'}{A}+B'\right)y=-\frac{CA'}{A}+C'$$

que es una sola ecuacion con la incógnita y. Si por el contrario quisiéramos eliminar y obtendriamos, procediendo de manera análoga, otra ecuacion con solo la incógnita x.

De todo lo cual concluiríamos diciendo, que para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones por el método de Bezout se multiplica una de las ecuaciones por un factor indeterminado, y la resultante se adiciona con la otra; en esta ecuacion final se iguala á cero el coeficiente de la incógnita que se quiere eliminar, y de esta condicion se deduce el valor del factor indeterminado que se sustituye en la misma suma. Si las ecuaciones fuesen m se multiplicarian las $m-1$ por un factor indeterminado y se sumarian todas, igualando á cero en la resultante, todos los coeficientes menos uno, etc.

De la frecuente aplicacion y exámen detenido de las fórmulas resultantes por la resolucion de este método, *indujo Cramer su regla práctica* para determinar sin cálculo las fórmulas que resuelven un número cualquiera de ecuaciones entre igual número de incógnitas.

107. Problemas numéricos dependientes de un sistema de m ecuaciones con m incógnitas.

1.° *Hieron, rey de Siracusa, dió á un platero 20 libras de oro para hacer una corona, y aunque despues de hecha pesaba 20 libras, sospechó que el platero se habia quedado con parte del oro, y rogó á Arquímedes que lo averiguara sin estropear la corona.* El sábio determinó el peso específico de la corona, y encontró que era 16, y como el del oro es 19,64, dedujo que la corona estaba formada de oro aleado de otro metal menos denso, que infirió fuese la plata, por la mucha facilidad que tiene de alearse al oro. En efecto, siendo 10,5 el peso específico de la plata, concluyó Arquímedes que constaba la corona de 14,77 libras de oro, con 5.23 de plata, en lo cual convino el platero. Veamos como obtuvo esta solucion.

Peso específico de un cuerpo se llama á la relacion que existe entre el peso del mismo y el de un volúmen igual de agua destilada: llamando V al volúmen, P al peso del cuerpo y D al peso específico ó densidad, tendremos $P = V \times D$ y por tanto $P:D = V$.

Llamemos ahora x al peso del oro, y al de la plata, tendremos pues $x + y = 20$,

siendo D. del oro$=19,64$ y D. de la plata $=10,5$

tendremos $\frac{x}{19,64} + \frac{y}{10,5} = \frac{20}{16}$ que será el volúmen de la corona, en cuyas dos ecuaciones aplicando un método cualquiera de los expuestos nos dará la solucion espresada.

108. *Una persona se encarga de trasladar objetos de un lugar á otro á condicion de abonar por cada objeto que se rompa una cantidad igual á la que recibiria por su conduccion si la entregase sana. En el primer viaje recibe 6 grandes, 2 medianos y 3 pequeños, entrega intactos los grandes y los medianos, rompe los pequeños y recibe 40 reales. En el segundo viaje recibe 8 grandes, 4 medianos y 5 pequeños; entrega intactos los grandes y los pequeños, rompe los medianos y recibe 38 reales. En el tercer viaje recibe 2 grandes, 7 medianos y 9 pequeños; entrega intactos los medianos y los pequeños, rompe los grandes y recibe 41*

reales. Se pregunta: ¿cuál es el precio de trasporte de cada objeto segun el tamaño?

Sean x, y, z, el precio respectivo del trasporte de cada objeto *grande*, *mediano* y *pequeño* tendremos que:

$$6x+2y-3z=40$$
$$8x-4y+5z=38$$
$$7y+9z-2x=41$$

Las que resolviendo por alguno de los métodos ya expuestos, nos darán: $x=6$, $y=5$, $z=2$.

109. Problemas generales dependientes de m ecuaciones con m incógnitas.

Estos problemas, cuyo planteo resulta de las condiciones del mismo, se resuelven fácilmente eliminando una misma incógnita sucesivamente entre una de las ecuaciones y cada una de las otras, lo que originará un grupo de $m-1$ ecuaciones con $m-1$ incógnitas. Se eliminará luego una de estas $m-1$ incógnitas, entre una de dichas $m-1$ ecuaciones, y cada una de las otras, lo que originará un grupo de $m-2$ ecuaciones con $m-2$ incógnitas, continuando así hasta obtener una sola ecuacion con una sola incógnita: resuelta esta ecuacion nos dá el valor de una incógnita, y sustituido su valor en una de las dos ecuaciones con dos incógnitas, obtendremos el valor de otra incógnita: si sustituimos luego los dos valores hallados en una de las tres ecuaciones con tres incógnitas, determinaremos el valor de otra incógnita, continuando así hasta obtener el valor de las incógnitas, cuyo conjunto constituirá la solucion al problema.

110. Si en una ó varias de las ecuaciones dadas no se hallaren todas las incógnitas, puede prescindirse de la marcha rigurosa de los métodos de eliminacion expuestos, siguiendo procedimientos particulares que variarán segun la índole del problema.

Ejemplo: *Entre la suma de las edades de 4 personas suman 71 años. La 1.ª tiene 11 años mas que la 2.ª; la 2.ª 11 años mas que la 3.ª; la 3.ª 6 años menos que la 4.ª* Se pregunta cuántos tiene cada una: llamándolas x, y, z, u, tendremos:

$$x+y+z+u=71; \quad x=y+11; \quad y=z+11; \quad z=u-6$$

determinando todas en funcion de u, tendremos:

$$u=u, \quad z=u-6, \quad y=u+5, \quad x=u+16,$$

equivaliendo la suma de los segundos miembros á 71, reduciendo y despejando tendremos:

$$u=14,\quad z=8,\quad y=19,\quad x=30$$

entre los que se verifican las relaciones establecidas.

Discusion de un sistema de tantas ecuaciones de primer grado como incógnitas.

111. Hemos visto como en cualquier sistema de m ecuaciones con m incógnitas por eliminaciones sucesivas, se llega á obtener una sola ecuacion con una sola incógnita, cuyo valor despejado puede ser *positivo, negativo, cero, infinito* ó *indeterminado*; cualquiera de las tres primeras soluciones espresa evidentemente la *posibilidad del sistema*, interpretándose bien los valores cuantitativos y cualitativos obtenidos como solucion al problema. Si por el contrario se obtiene para la incógnita un valor *infinito*, resultará evidenciado que es *imposible el sistema* que no se satisface para la incógnita con ningun número finito; y si cualquier valor satisface á la ecuacion, nos manifestará claramente que esta es *indeterminada*.

Supongamos que sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $Ax+By=C \quad A'x+B'y=C'$

ya hemos obtenido $x=\dfrac{CB'-BC'}{AB'-BA'} \quad y=\dfrac{AC'-CA'}{AB'-BA'}$

1.^er^ caso. Si suponemos $AB'-BA'=0$ sin que lo sea ninguno de los numeradores, los valores de las incógnitas serán infinitos, pues que $x=\dfrac{CB'-BC'}{0}$, $y=\dfrac{AC'-CA'}{0}$

mas de la igualdad $AB'=BA'$ se deduce que $A'=\dfrac{AB'}{B}$

cuyo valor sustituido en la ecuacion 2.ª de las dos dadas, nos produce, $\dfrac{AB'}{B}x+B'y=C'$ en la que quitando denominadores, será $AB'x+BB'y=BC'$, y partiendo los dos miembros por B', tendremos: $Ax+By=\dfrac{BC'}{B'}$; ecuacion que observaremos es *incompatible* con la primera, porque siendo los primeros miembros iguales, son diferentes los segundos, toda vez que si $C=\frac{BC'}{B'}$ tendremos que $CB'-BC'=0$ lo que es contrario á la hipótesis y por tanto el sistema es *imposible ó absurdo.*

2.° caso. Si siendo cero el denominador, lo fuese tambien uno de los numeradores, es decir, si $AB'-BA'=0$ y $CB'-BC'=0$, de estas dos igualdades resultará que

$$A'=\frac{AB'}{B};\quad C'=\frac{CB'}{B}$$

cuyos valores sustituidos en el valor de la incógnita, nos dará para el numerador de su espresion fraccionaria

$$AC'-CA'=\frac{ACB'}{B}-\frac{ACB'}{B}=0.$$

Por tanto el numerador de la otra incógnita es tambien cero.

De idéntica manera probaremos que si $AC'-CA'=0$, tambien lo será $CB'-BC'=0$ y por tanto *los dos valores de las dos incógnitas serán expresados por* $\frac{0}{0}$.

Si sustituimos ahora los dos valores hallados para A' y C' en la 2.ª de las dos ecuaciones tendremos:

$$\frac{AB'}{B}x+B'y=\frac{CB'}{B}$$

en la cual quitando denominadores tendremos:

$$AB'x+BB'y=CB'$$

partiéndola toda por B' quedará $Ax+By=C$ que es la misma ecuacion primera; siendo por tanto idénticas es evidente que todos los sistemas de valores que satisfagan á una satisfarán tambien á la otra, y como una ecuacion con dos incógnitas es indeterminada, lo será todo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, con las condiciones expuestas en este 2.° caso.

3.er caso Si los numeradores de las espresiones fraccionarias que expresan los valores de las incógnitas no son equivalentes á cero, ni lo son tampoco los denominadores, las incógnitas admiten un solo valor y el sistema de ecuaciones en que entren es *determinado.*

Fácilmente podriamos discutir un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas ó de 4 con 4, etc., pero en obsequio á la brevedad la suprimimos, por los muchos monómios de que constan los dos términos de las fracciones que espresan los valores de las incógnitas, deduciéndose de todo ello lo siguiente:

1.° Si el denominador comun se reduce á cero no siéndolo los numeradores, los valores de las incógnitas serán infinitos; el sistema será IMPOSIBLE Ó ABSURDO.

2.° Si el denominador se reduce á cero, reduciéndose tambien á cero el numerador, los valores de las incógnitas serán: $x=\frac{0}{0}$ $y=\frac{0}{0}$ y como pueden representarse por cualquier valor finito, resulta que el sistema es INDETERMINADO.

3.° Si el denominador comun á los valores de las dos incógnitas *no es cero*, estos admiten un valor único y determinado, en cuyo caso el sistema es DETERMINADO.

Sistemas de ecuaciones de primer grado, que consten de mas ecuaciones que incógnitas.

112. *Para determinar los valores de las incógnitas en un sistema de* m+n *ecuaciones, habiendo en el mismo tan solo* m *incógnitas, se tomarán de las mismas* m *ecuaciones, en las cuales existan las* m *incógnitas, y por aplicacion de cualquiera de los métodos de eliminacion obtendremos los valores de las* m *incógnitas; si sustituidos despues estos valores en las* n *ecuaciones restantes, las satisfacen convirtiéndolas en igualdades, diremos que el* sistema es compatible; *si por el contrario dichos valores no satisfacen á las* n *ecuaciones restantes*, el sistema es incompatible. *Sea el sistema siguiente de tres ecuaciones con dos incógnitas.*

$$4x+2y=22$$
$$8x-4y=4$$
$$3x-y=4$$

Despejando las incógnitas en las 2 primeras ecuaciones resulta $x=3$ $y=5$ cuyos valores observaremos satisfacen la tercera ecuacion, siendo por tanto el sistema *compatible*

Supongamos que se nos dé el siguiente sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$5x+2y+z=15$$
$$4x-3y+2z=11$$
$$7x+8y-6z=4$$
$$6x-y+2z=26$$

Despejando las tres incógnitas de las tres primeras ecuaciones resulta $x=2$, $y=1$, $z=3$, aplicando estos valores á la cuarta ecuacion, resulta que $12-1+6=26$ *igualdad absurda* que nos espresa que el sistema de ecuaciones propuesto *es incompatible.*

113. Si contienen las ecuaciones propuestas *coeficientes ó términos indeterminados*, podrá hallarse la condicion ó condiciones que deben satisfacer dichos coeficientes ó términos para que el sistema de ecuaciones sea compatible.

Sean las tres ecuaciones con dos incógnitas siguientes:

$$x+y=S$$
$$x-y=D$$
$$xy=P$$

Resolviendo los valores de las incógnitas en las dos ecuaciones primeras, tendremos que

$$x=\frac{S+D}{2}\ ;\ y=\frac{S-D}{2}$$

cuyos valores sustituidos en la 3.ª nos darán que:

$$\frac{S+D}{2}\times\frac{S-D}{2}=P,$$

luego $S^2-D^2=4P$ que será una ecuacion de *condicion.*

Sistemas de ecuaciones de primer grado que constan de mas incógnitas que ecuaciones.

114. En todo sistema de m ecuaciones con $m+n$ incógnitas, se podrian determinar los valores de las m incógnitas en las m ecuaciones, en funcion de las n incógnitas restantes: cuyos valores convertirán en identidades las ecuaciones propuestas, con entera independencia de los valores que tengan las n incógnitas; por tanto, si damos valores arbitrarios á las n incógnitas, despejando las demás con aplicacion de cualquiera de los métodos de eliminacion, quedará satisfecho el sistema.

Mas como son arbitrarios los valores de las n incógnitas, y dependientes de estos, los valores de otras m incógnitas, evidentemente *el número de soluciones es indeterminado*, é *indeterminado* tambien *el sistema*, que puede estar constituido con una ecuacion y varias incógnitas, segun lo expuesto en el número (98).

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO PRIMERO

QUE COMPRENDE TODO LO REFERENTE Á LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

I. Resolver las ecuaciones

$$\frac{4x}{15}+\frac{2(x-3)}{4}-\frac{x}{3}=2x-\frac{x}{5}-\frac{66x}{45}$$

$$\frac{abc}{x}+\frac{d}{3x}-a=\frac{b(x-c)}{x}-b.$$

II. Pesando un objeto de oro 12 libras y siendo su peso específico 15, se pregunta qué cantidad en peso contiene de oro y de la plata con quien se supone aleada.

III. Un sugeto percibe mil duros anuales por intereses de un capital de mil onzas, del cual tiene prestado parte al 5 por 100, y parte al 8 por 100, se pregunta: ¿cuáles son entrambas partes?

IV. Sabiendo que 87 monedas (entre duros y dobles pesetas) valen 1096 reales, se pregunta: ¿cuántas habrá de cada clase?

V. Hallar una fraccion tal que agregando 6 á cada uno de sus dos términos produzca $\frac{5}{6}$, y restando 8 á sus dos términos produzca $\frac{1}{4}$.

VI. Resolver por todos los métodos de eliminacion, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 4x-3y&=7 \\ 2x+9y&=35 \end{aligned}$$

VII. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6x-3y+2z&=5 \\ 8x+2y-z&=21 \\ 9x+y-z&=20 \end{aligned}$$

VIII. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$abx-cby=d \qquad dx+by=a.$$

IX. Siendo la suma de dos números 250, y siendo la suma de la mitad, cuarta y quinta parte del primero, igual á la suma de tercera, quinta y décima parte del segundo; se pregunta: ¿cuánto valdrá cada parte?

X. 6 docenas de huevos, 2 de naranjas y 3 de melocotones costaron 72 reales; despues, una docena de huevos, 4 de naranjas y 5 de melocotones costaron 43 reales, y últimamente, 7 docenas de huevos, 9 de naranjas y 8 de melocotones costaron 101 reales; se pregunta: ¿cuánto vale la docena de huevos, la de naranjas y la de melocotones?

LIBRO SEGUNDO

Ecuaciones y problemas de segundo grado.

115. *Se llama una ecuacion de segundo grado con una incógnita cuando tiene á esta elevada á la segunda potencia. Los términos esencialmente distintos de una ecuacion de segundo grado con una incógnita. no pueden ser mas que tres; uno, el que tenga la incógnita con exponente dos; otro, con la primera potencia de la incógnita, y otro perfectamente conocido, porque suponiéndose en él la incógnita con exponente cero, como el valor de esta es la unidad, carecerá de la misma, estando por tanto perfectamente determinado. En el caso de existir con estos tres términos, la ecuacion se llama* mixta ó completa, *presentándose en definitiva reducida á la forma*

$$ax^2+bx+c=0$$

Si de estos tres términos fallare el segundo ó el tercero, la ecuacion se llamaría pura ó incompleta *del segundo grado, la cual se reduciría á alguna de estas dos formas:*

$$ax^2+bx=0 \qquad ax^2+c=0$$

que se concibe, son evidentemente, casos particulares de la anterior, en la cual se hubiese hecho respectivamente

$$c=0, \quad b=0.$$

116. Ecuaciones incompletas. Tratemos de resolver una ecuacion incompleta del 2.° grado de la forma

$$ax^2+bx=0,$$

para esto, sacando el factor comun x á los dos términos, tendremos que $x(ax+b)=0$; en la cual evidentemente tendremos que para que se reduzca á cero el primer miembro es preciso que lo sea uno de sus factores, luego $x=0$ que será un valor de la incógnita; del otro factor deduciremos que $ax=-b$ luego $x=-\frac{b}{a}$ que será otro valor de la incógnita. En efecto, los dos valores satisfacen la ecuacion, pues sustituyendo cero en vez de x, se tiene que $0=0$;

y tambien si se sustituye por $x, -\frac{b}{a}$, tendremos que

$$a\left(\frac{-b}{a}\right)^2+b\times\frac{-b}{a}=0$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{b^2}{a}-\frac{b^2}{a}=0$$

Luego por tanto, para resolver una ecuacion de 2.° grado incompleta reducida á la forma $ax^2+bx=0$ *se divide el coeficiente del 2.° término con el signo contrario por el coeficiente del primer término, y se tiene uno de los valores de lo incógnita, siendo el otro 0.*

117. Para resolver una ecuacion incompleta del segundo grado, reducida á la forma $ax^2+c=0$ pasaremos c al segundo miembro, y despejando tendremos $x^2=\frac{-c}{a}$, extrayendo ahora la raiz cuadrada tendremos

$$\pm x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

cuyos valores separados son:

$$x=\sqrt{\frac{-c}{a}},\quad x=-\sqrt{\frac{-c}{a}};\quad -x=\sqrt{\frac{-c}{a}};$$

$$-x=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

de cuyas cuatro raices, multiplicadas las dos últimas por —1 se convierten en las dos primeras, que son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuacion: en efecto, sustituidos en ésta nos dan que

$$a\left(\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)^2+c=0$$

ó lo que es lo mismo $a\times\frac{-c}{a}+c=0$ luego $c-c=0$, satisfaciéndose de igual manera que si sustituimos en vez de x su segundo valor negativo. De todo lo cual resultará como evidente que al extraer la raiz cuadrada de los dos miembros de una ecuacion, es suficiente poner el signo $\pm$ á uno solo de sus miembros: que en la ecuacion incompleta

$ax^2+c=0$ la incógnita tiene dos raices iguales y de signo contrario, y que *su valor está espresado por la raiz cuadrada del cociente de dividir el término conocido con el signo cambiado por el coeficiente de la incógnita.*

118. Ecuaciones completas. Para resolver la ecuacion completa $\pm ax^2 \pm bx \pm c=0$, se procura en primer lugar, que el término en x^2 sea positivo, multiplicando por -1 todo la ecuacion cuando sea negativo; esto así, es necesario hacer desaparecer el coeficiente del término en x^2; dividiendo por tanto toda la ecuacion por a, tendremos

$$x^2 \pm \frac{b}{a} x \pm \frac{c}{a}=0,$$

si ahora, para abreviar, hacemos

$\frac{b}{a}=S$ y $\frac{c}{a}=P$, tendremos $x^2 \pm Sx \pm P=0$

pasando P al segundo miembro, tendremos $x^2 \pm Sx = \mp P$ que sería fácil resolver si por la extraccion de la raiz cuadrada á sus dos miembros pudiera convertirse en ecuacion del primer grado; mas su primer miembro como binomio, no puede tener raiz cuadrada, pero si puede, agregársele otro término que le convierta en trinomio, cuadrado perfecto, porque considerando $x^2 \pm Sx$ como los dos primeros términos del cuadrado del binomio $x \pm \frac{S}{2}$ tendremos que $\left(x \pm \frac{S}{2}\right)^2 = x^2 \pm Sx + \frac{S^2}{4}$; añadiendo por tanto $\frac{S^2}{4}$ á los dos miembros de la ecuacion será

$$x^2 \pm Sx + \frac{S^2}{4} = \frac{S^2}{4} \mp P$$

extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros será:

$$x \pm \frac{S}{2} = \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} \mp P}.$$

y pasando $\frac{S}{2}$ al 2.º miembro será:

$$x = \mp \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} \mp P}$$

lo cual nos dá la siguiente regla: *La incógnita de una ecua-*

cion completa del segundo grado de la forma

$$x^2 \pm Sx \pm P = 0,$$

es igual, á la mitad del coeficiente del segundo término con signo contrario, más ó menos la raiz cuadrada del cuadrado de dicha mitad, menos ó más el tercer término.

Si sustituimos en vez de S y P sus valores, tendremos que el valor de la incógita en una ecuacion completa del 2.° grado de la forma $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, será

$$x = \frac{\mp b \pm \sqrt{b^2 \mp 4ac}}{2a}$$

es decir, *que la incógnita es igual al 2.° coeficiente con signo contrario, mas ó menos la raiz cuadrada del cuadrado del mismo coeficiente, menos ó mas el cuádruple del producto del coeficiente primero por el término conocido, dividiéndose todo ello por el duplo del coeficiente primero.*

Problemas de 2.° grado.

Problemas del 2.° grado son aquellas cuestiones cuya resolucion depende del planteamiento y resolucion de una ecuacion del 2.° grado; estos problemas pueden ser como los expuestos en las ecuaciones del primer grado *particulares numéricos* ó *generales literales.*

119. PROBLEMAS PARTICULARES DEL 2.° GRADO.

1.° *Hallar un número tal que si al cuadrado del mismo le añadimos su triplo y á mas cinco unidades dé de suma 93.*

Planteado en ecuacion será $x^2 + 3x + 5 = 93$, resuelto nos dá $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{88 + \frac{9}{4}}$ ó

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{19}{2}$$

Las dos raices son: $x = 8$, $x = -11$.

Estos dos números satisfacen el problema, pero la cuestion está resuelta por el valor positivo 8.

2.° *Una persona compra por 288 reales cierta cantidad de cacao; si con el mismo dinero comprase 12 libras menos, cada libra le costaria 4 reales mas, se pregunta: ¿cuántas libras ha comprado?*

Cuyo problema planteado en ecuacion nos dá que

$\frac{288}{x-12}-\frac{288}{x}=4$: quitando denominadores y reduciendo tendremos $x^2-12x=864$, y resolviendola nos dará que $x=6\pm30$; tomando el signo *mas* tendremos $x=36$ valor que verifica la ecuacion y resuelve el problema. Si consideramos el signo *menos* resulta $x=-24$, valor que satisface tambien á la ecuacion y que resolveria el problema espresado así: *por 288 reales compra una persona cierta cantidad de cacao; si con el mismo dinero comprase 12 libras mas, cada libra le costaria 4 reales menos ¿cuántas libras ha comprado?*

120. PROBLEMAS GENERALES DEL 2.° GRADO. *Dividir un número en dos partes cuyo producto sea conocido.* Expresando por N el número dado y por P su producto tendremos: si una de las partes de N es x, la otra será $N-x$ y la ecuacion que esprese la condicion del problema será $x(N-x)=P$ que preparada nos dá $x^2-Nx+P=0$ en la cual aplicando su valor segun lo expuesto en (118) resulta que $x=\frac{N}{2}\pm\sqrt{\frac{N^2}{4}-P}$ en la cual separando los dos valores de x resultará

$$x=\frac{N}{2}+\sqrt{\frac{N^2}{4}-P} \quad \text{y} \quad N-x=\frac{N}{2}-\sqrt{\frac{N^2}{4}-P}$$

Estas dos fórmulas resuelven todos los casos particulares del problema sustituyendo en vez de N y P sus valores respectivos: es preciso, sin embargo, tener en cuenta que el producto no ha de ser mayor que el cuadrado de la mitad del número dado, pudiendo ser á lo mas iguales estos valores; de otro modo los dos valores asignables á la incógnita serian imaginarios, pues que resultaria un valor negativo debajo de un radical cuadrado. Así por ejemplo cuando sea $N=24$ y $P=128$ será 128 menor que $\left(\frac{24}{2}\right)^2$ los valores de x serán 8 y 16.

Relacion entre las dos raices de una ecuacion completa del 2.° grado y sus coeficientes.

121. Si separamos las dos raices de una ecuacion del 2.° grado bajo la forma $x^2-Sx+P=0$, tendremos segun

lo expuesto que $x=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$ en la cual llamando x' y x'' á sus dos raices, tendremos:

$$x'=\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-P} \text{ y } x''=\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$$

igualdades que sumadas miembro á miembro nos dan $x'+x''=\frac{S}{2}+\frac{S}{2}=S$, pues que al sumarse se destruyen los otros dos términos.

Si multiplicamos miembro á miembro las dos igualdades, tendremos

$$x'x''=\left(\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}\right)\left(\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}\right)$$

y como el 2.º miembro es la *suma* por la *diferencia* de dos cantidades, que segun lo expuesto en el *Teorema* (3) nos dice, que es igual á la diferencia de los cuadrados, tendremos: $x'x''=\frac{S^2}{4}-\left(\frac{S^2}{4}-P\right)=P.$

La misma demostracion hariamos con las raices de cualquiera de las 4 ecuaciones que resultan de la general $x^2\pm Sx\pm P=0$.

De lo expuesto se deduce: 1.º *Que la suma de las dos raices de una ecuacion completa del 2.º grado es igual al coeficiente del 2.º término con signo contrario.*

2.º *Que el producto de las mismas raices, es igual al término conocido.*

122. *Por tanto, si la suma de dos números es* S *y su producto* P, *estos números son las raices de la ecuacion.*

Si siendo números conocidos las dos raices de una ecuacion del 2.º grado, se quiere formar la misma, se pondrá x^2*; luego la suma algebráica de dichos números con signo contrario, por coeficiente de* x, *y despues por* 3.er *término ó término conocido, el producto de los mismos números.*

123. *Toda ecuacion de 2.º grado completa de la forma* $x^2+Sx+P=0$ *se puede descomponer en el producto de dos factores binomios cuyo primer término es* x, *siendo el otro monomio de cada factor binomio, cada una de las dos raices únicas de la misma, con signo contrario.*

En efecto, el polinomio $x^2+Sx+P=0$, segun lo expuesto en el *número* (20), será divisible por $x-x'$ designando por x' una de sus raices; el cociente de esta division será otro binomio de primer grado que podremos representar por $x—x''$, por manera que tendremos que:

$$x^2+Sx+P=(x-x')(x-x'')$$

cuya igualdad demuestra el Teorema.

124. *Las raices de una ecuacion del 2.° grado no pueden ser mas que dos, pues si suponemos que á mas de* x' *y* x'' *hubiese otra nueva raiz* x''' *que verificase la ecuacion, tendriamos que* x^2+Sx+P *sería divisible por* $(x-x''')$ *y por tanto este factor deberá dividir ó* $(x-x')$ *ó á* $(x-x'')$, *lo cual es imposible porque la cantidad* x''' *ha de ser diferente de* x' *y* x''.

Discusion de las ecuaciones y Problemas del segundo grado con una incógnita.

125. Las dos raices de una ecuacion del 2.° grado no siempre son reales, cual ocurre con las del primer grado, puesto que como la *raiz prima* de una cantidad es ella misma, por necesidad tiene que ser real el valor de la incógnita de una ecuacion de primer grado; mas al determinar los distintos valores cualitativos de toda incógnita de una ecuacion completa del 2.° grado, puede suceder que la cantidad subradical sea negativa, en cuyo caso, las dos raices tendrán que ser imaginarias; por tanto las raices de una ecuacion del 2.° grado pueden ser *reales ó imaginarias, positivas ó negativas, enteras ó fraccionarias, iguales ó desiguales.*

126. De la fórmula general $x^2 \pm Sx \pm P=0$ se deduce que $x=\mp\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}\mp P}$; considerando las 4 ecuaciones separadamente y las raices respectivas de cada una tendremos:

Ecuaciones.	Raices.	
1.ª $x^2+Sx-P=0$	$-\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$	$-\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$
2.ª $x^2-Sx-P=0$	$+\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$	$+\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}+P}$
3.ª $x^2+Sx+P=0$	$-\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$	$-\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$
4.ª $x^2-Sx+P=0$	$+\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$	$+\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$

Consideraremos para su discusion que P sea *positivo*, que sea *cero* ó que sea *negativo.*

PRIMER CASO. *Si P es positivo, las dos raices de la primera ecuacion serán reales y desiguales,* pues el radical valdrá mas de $\frac{1}{2}S$, la primera será positiva y la segunda negativa y de valor menor que S, puesto que entre cantidades negativas es menor la de mayor valor absoluto.

En la segunda ecuacion, siendo P positivo, tambien las dos raices serán reales, la primera positiva y mayor que S, y la segunda negativa; luego siendo la escuacion $x^2 \pm Sx - P=0$ y P positivo, las dos raices son desiguales, una positiva y otra negativa.

En la tercera ecuacion, siendo P positivo, si P es menor que $\frac{1}{4}S^2$, las dos raices serán reales, y como el radical en este caso es menor que $\frac{1}{2}S$, las dos raices serán negativas y desiguales

En la misma tercera ecuacion, siendo $P=\frac{1}{4}S^2$, las dos raices serán negativas é iguales á $-\frac{1}{2}S$.

En la misma ecuacion, siendo P mayor que $\frac{1}{4}S^2$, *la cantidad sub-radical será negativa y las dos raices de la misma serán imaginarias conjugadas.*

En la cuarta ecuacion, siendo P positivo, si es P menor que $\frac{1}{4}S^2$, *las dos raices serán positivas, y puesto que el valor del radical es menor* $\frac{1}{2}S$, *las dos raices serán desiguales.*

En esta ecuacion, siendo $P=\frac{1}{4}S^2$, *las dos raices serán positivas é iguales á* $\frac{1}{2}S$.

Y por último, *siendo P mayor que* $\frac{1}{4}S^2$, *las dos raices seran imaginarias conjugadas.*

Por tanto, *siendo la ecuacion* $x^2 \pm Sx + P = 0$ *sus dos raices serán reales, desiguales ó iguales, ambas positivas, ó bien imaginarias conjugadas.*

127. Segundo caso: *Si P es igual á cero, el valor del radical será* $\frac{1}{2}S$, *las dos raices de la 1.ª serán una cero, y la otra igual á* $-S$.

Las dos de la segunda, serán la 1.ª S positivo, la 2.ª cero.

Las dos de la tercera serán, la 1.ª cero, la segunda igual á $-S$.

Las dos de la cuarta serán, la 1.ª S positivo, la 2.ª cero.

128. Tercer caso: *Si P es negativo, siendo mayor que* $\frac{1}{4}S^2$

Las dos raices de la primera y segunda serán imaginarias conjugadas.

Las dos de la tercera y cuarta serán reales, porque deducir una cantidad ya negativa, es aumentarla, y por tanto, la cantidad radical valdrá mas que $\frac{1}{2}S$, *luego las dos raices de la tercera serán la 1.ª positiva y la 2.ª negativa, ambas desiguales.*

En la cuarta ecuacion las dos raices reales serán la 1.ª positiva y mayor que S; la 2.ª negativa.

Aplicacion á varios ejemplos:

$x^2+8x-9=0$. Las dos raices son reales, una positiva y otra negativa.

$x^2-10x-11=0$. Las dos raices reales desiguales, una positiva y otra negativa.

$x^2+6x+5=0$ Las dos raices reales desiguales y ambas negativas.

$x^2-12x+61=0$. Ambas raices son imaginarias.

129. Si tratásemos de discutir una ecuacion completa del 2.° grado, en la cual el coeficiente del término en x^2 fuese diferente de la unidad, siendo por tanto la ecuacion $ax^2\pm bx\pm c=0$ ya hemos visto que el valor de x es en este caso:

$$x=\frac{\mp b\pm\sqrt{b^2\mp 4ac}}{2a}$$

de cuya simple inspeccion comprenderemos que *cuándo $4ac$ es mayor que b^2, siendo negativa b^2* las raices serán *imaginarias*, puesto que la cantidad sub-radical queda negativa.

Si $4ac$ es igual á b^2 se comprenderá tambien que las dos raices serán iguales, positivas ó negativas, segun el signo del segundo término.

Y por último, *si $4ac$ es menor que b^2, las raices de la ecuacion serán reales y desiguales.*

Aplicacion á varios ejemplos:

$4x^2+5x+9=0$ Las dos raices serán imaginarias.
$7x^2+6x-3=0$ » » » reales y desiguales.
$2x^2-8x+6=0$ » » » reales y desiguales.
$3x^2-6x-8=0$ » » » reales, desiguales y de signo contrario.

130. Como ejemplo para discusion de un problema de 2.° grado con una incógnita, discutiremos el siguiente:

* *Hallar en la recta AB que une dos luces de intensidades conocidas, un punto tal, que esté igualmente iluminado por ellas.*

M'' A M B M'

Si suponemos sernos conocida la ley que se comprueba en Física y que dice *que las intensidades de la luz están en* *razon inversa de los cuadrados de las distancias al cuerpo iluminado;* es decir, que si las distancias son como 1, 2, 3, 4 etc., las intensidades son como $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$ etc, tendremos que llamando a á la intensidad de A; b á la intensidad de B; llamemos d á la distancia $A\,B$ á $B\,M$ la llamaremos $d-x$, si llamamos i á la intensidad de la luz A en el punto M, hallaremos el valor de i por la proporcion siguiente:

$$a : i :: x^2 : 1 \quad \text{de donde} \quad i = \frac{a}{x^2}$$

Si llamamos i' á la intensidad de la luz B en el punto M, para hallar i' diremos $b : i' :: (d-x)^2 : 1$ de donde $i' = \frac{b}{(d-x)^2}$ y como ambas intensidades hemos supuesto que sean iguales en el punto M, tendremos que $\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2}$ y extrayendo la raiz de ambos miembros $\frac{\sqrt{a}}{x} = \pm \frac{\sqrt{b}}{d-x}$ despejando la incógnita y sus dos raices tendremos

$$x' = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \qquad x'' = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

Discutamos, suponiendo primero que $a > b$ el valor de x' será mayor que $\frac{d}{2}$ lo que nos dice que hay un punto M comprendido entre A y B mas próximo á este, igualmente iluminado: la segunda raiz x'' nos dice que es en este caso, mayor que d y por tanto, que el punto M debe estar en M' situado á la derecha de B, para estar igualmente iluminado; luego en ambos casos, el punto pedido está mas cerca de B que de A, como así debe ser siendo b menor que a.

Supongamos ahora que $a = b$, en este caso, $x' = \frac{d}{2}$ lo que nos dice que el punto M debe estar equidistante de A y de B como así debe ser en efecto para estar igualmente iluminado; el valor de x'' será $\frac{d\sqrt{a}}{0}$ cuyo cociente infinito nos expresa que no hay otro punto fuera del indicado, en el que se cumpla la condicion expresada, como no sea en el infinito, lo que está conforme con las condiciones físicas del supuesto. Si suponemos que siendo $a=b$ la distancia AB se reduce á cero será $d=0$, lo que nos dará para x' y x'' el valor $\frac{0}{0}$ que como símbolo de indeterminacion expresa que á cualquier punto llega la misma intensidad de ambos focos luminosos, como así es en efecto.

Por último, supongamos $a<b$, y tendremos x' menor que $\frac{d}{2}$ luego entónces habrá un punto M'' mas cercano de A que de B igualmente iluminado. El valor de x'' negativo, nos expresa que M'' debe estar á la izquierda, como así debe ser, para que se cumpla la condicion del problema, conforme con las condiciones físicas del mismo.

Ecuaciones bicuadradas.

131. Se llaman ECUACIONES BICUADRADAS aquellas ecuaciones incompletas de 4.° grado, que despues de preparadas afectan la forma $ax^4 \pm bx^2 \pm C=0$. Estas ecuaciones se resuelven por las fórmulas de las completas del 2.° grado sin mas que hacer $x^2=y$, en cuyo caso se reducirá á $ay^2 \pm by \pm c=0$ en la cual segun (118) dá que

$$y=\frac{\mp b\pm\sqrt{b^2\mp 4ac}}{2a}$$

y sustituyendo x^2 por y será

$$x^2=\frac{\mp b\pm\sqrt{b^2\mp 4ac}}{2a}$$

en la que estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros resulta que

$$x=\pm\sqrt{\frac{\mp b\pm\sqrt{b^2\mp 4ac}}{2a}}$$

Si consideramos una sola de las ecuaciones tal como $ax^4+bx^2+c=0$, tendremos que

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

la cual contiene las cuatro raices distintas de esta ecuacion que son:

$$x'=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x''=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$x'''=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x''''=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

132. Ejemplo numérico: Sea la ecuacion $x^4-10x^2+9=0$ su equivalente $y^2-10y+9=0$ nos dá que $y=5\pm\sqrt{25-9}=5\pm4$ y por tanto $x^2=5\pm4$ luego $x=\pm\sqrt{5\pm4}$ en la cual las cuatro raices de x son:

$+3$, -3 , $+1$, y -1.

Sistemas de dos ecuaciones que no pasan del 2.° grado teniendo cada una dos incógnitas.

133. *Una ecuacion del 2.° grado con dos incógnitas, despues de efectuar las operaciones indicadas y pasar al primer miembro todos sus términos, afecta la siguiente forma:*

$$ax^2\pm bxy\pm cy^2\pm dx\pm ey\pm f=0$$

podrá suceder que alguno de los coeficientes sea 0, y por tanto, que no se componga la ecuacion de tantos términos.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones que no pasen del segundo grado, deben distinguirse dos casos: *1.° que por lo menos una de las dos ecuaciones sea del primer grado con respecto á una de las dos incógnitas; 2.° que las dos ecuaciones sean del segundo grado con respecto á las dos incógnitas.*

1.er caso. *Se debe despejar la incógnita con respecto á la cual es de primer grado una de las ecuaciones sustituyendo luego su valor en la otra, con lo cual obtendremos el valor de la incógnita que se despejó, obteniéndose luego inmediatamente el valor de la incógnita que se eliminó.*

Ejemplo correspondiente á este caso:

$$y^2-xy+12=0$$
$$y-x+1=0$$

Despejando en la segunda $x=y+1$; sustituyendo en la primera resulta $-y+12=0$ donde $y=12$, $x=13$.

2.° ejemplo: Si las escuaciones fuesen
$$y^2-10xy+16=0$$
$$y^2-x+1=0$$

Despejando x en la 2.ª será $x=y^2+1$, sustituyendo en la primera resulta $y^2-10y(y^2+1)+16=0$ que dará: $y^2-10y^3-10y+16=0$ multiplicando por -1 será $10y^3-y^2+10y-16=0$. Ecuacion del tercer grado cuya resolucion corresponde al Algebra superior.

3.^{er} ejemplo:
$$y^2-x^2+4=0$$
$$y^2-x+8=0$$

Despejando x en la segunda ecuacion tendremos: $x=y^2+8$, sustituyendo en la primera resulta la ecuacion bicuadrada $y^4+15y^2+60=0$, la que resolviendo nos dice que:

$$y=\pm\sqrt{-\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{15^2}{4}-60}}$$

cuyas cuatro raices podriamos separar.

2.° caso. *Si las dos ecuaciones fuesen del 2.° grado con respecto á las dos incógnitas, se eliminará uno de los cuadrados y resultará una ecuacion de primer grado con respecto á la incógnita cuyo cuadrado hubiese sido eliminado que tambien podrá ser con respecto á las dos incógnitas, quedando por tanto la cuestion reducida al caso anterior.*

Sean las ecuaciones
$$12y^2+3x^2-4y+2x-7=0$$
$$4y^2+x^2-3y+9x-8=0$$

Multiplicando toda la segunda por 3 y restando miembro á miembro, resultará $5y-25x+17=0$, cuya resolucion continuariamos, como en los casos precedentes á los que queda reducido.

134. Supongamos por fin que las dos ecuaciones sean
$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$
$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0$$

ordenando cada una con respecto á las potencias decrecientes de x, se tiene con la primera
$$cx^2+(by+e)x+ay^2+dy+f=0$$
y dividiéndola por c resulta
$$x^2+\frac{by+e}{c}x+\frac{ay^2+dy+f}{c}=0$$

en la cual equivaliendo á S el coeficiente de x y á P el tercer término, tendremos: $x^2+Sx+P=0$. De una manera análoga tendriamos para la segunda $x^2+S'x+P'=0$ las que restando miembro á miembro, nos darian

$$(S-S')x+P-P'=0$$

de donde $x=\dfrac{P'-P}{S-S'}$, cuyo valor sustituido en cualquiera de las dos ecuaciones por ejemplo en la primera, dará:

$$\left(\frac{P'-P}{S-S'}\right)^2+S\left(\frac{P'-P}{S-S'}\right)+P=0$$

la cual multiplicada por $(S-S')^2$ nos dá que

$$(P'-P)^2+S(P'-P)(S-S')+P(S-S')^2=0$$

la que podremos espresar por

$$(P'-P)^2+(S-S')(SP'-PS')=0.$$

Hemos hecho desaparecer la incógnita x y por tanto, esta ecuacion final no contiene mas incógnita que la y comprendida entre S, P, S' y P', cuya ecuacion resuelta nos dá los valores de y, determinándose luego los de x, lo que nos hará conocer las soluciones del sistema; sin embargo. esta última ecuacion es en general del cuarto grado, cuya resolucion depende del Algebra superior, á menos que por la aplicacion de este procedimiento nos sea factible descomponerlas en otras del primero ó segundo grado.

* Máximos y mínimos de las expresiones algebráicas.

135. Cuando tenemos una *funcion* de una *variable*, ya sabemos que segun los valores de esta vá aquella adquiriendo diferentes valores; y si observamos detenidamente la ley de su incremento ó decremento, veremos cómo sus distintos valores pueden crecer despues de haber disminuido, ó disminuir despues de haber aumentado.

Llamaremos máximo *de una funcion á uno de sus valores particulares mayor que los que le anteceden y siguen inmediatamente.*

Mínimo *de una funcion será por tanto, uno de sus valores particulares menor que los que le anteceden y siguen inmediatamente.*

El estudio de la Teoría de los máximos y mínimos pertenece al análisis infinitesimal, sin embargo de lo cual no queremos omitir algunos casos particulares referentes á funciones de 2.° grado, y que con el conocimiento de los estudios precedentes, se resuelven fácilmente con aplicacion de la siguiente

REGLA. *Para hallar el máximo ó el mínimo de una funcion de segundo grado, se iguala esta á una indeterminada, se despeja en la ecuacion la variable, y fácilmente determinaremos el mayor ó menor valor de la indeterminada, conservándose real el valor de la variable.*

1.er ejemplo. Supongamos que se nos pide el máximo y mínimo de la funcion $\frac{x^2+2x+7}{2x+3}$ igualándola á y, quitándo denominadores, ordenándola con respecto á x y despejando su valor segun (118) tendremos que

$$x=y-1\pm\sqrt{y^2+y-6}$$

y descomponiendo el trinomio sub-radical en el producto de dos binomios (123) tendremos que

$$x=y-1\pm\sqrt{(y-2)(y+3)}$$

de cuya inspeccion inferiremos que todos los valores de y comprendidos entre $+2$ y -3 hacen imaginario el radical; que todo valor positivo mayor que 2 y todo valor negativo menor que -3, hace real el valor de x. Y siendo 2 el valor mas pequeño de la funcion y será el *mínimo*, en cuyo caso el correspondiente á la variable x es 1. El valor $y=-3$ será el máximo de la misma funcion, siendo -4 el valor de la variable x.

2.º ejemplo. *Descomponer el número A en dos sumandos, cuyo producto sea un máximo.*

Llamando x al primer sumando, el segundo será $A-x$; á su producto lo representaremos por M y la ecuacion será $(A-x)\,x=M$, quitando paréntesis, trasponiendo y despejando será

$$x=\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-M}$$

en cuya fórmula observaremos que para que el radical sea real, el mayor valor que puede tener M, será $\frac{1}{4}A^2$ en cuyo caso $x=\frac{A}{2}$, lo que nos dice que para que M sea un máximo, *los dos sumandos en que debe descomponerse A son sus mitades;* luego el mayor producto que puede formarse de la descomposicion de un número en dos sumandos *es el cuadrado de su mitad.* 30

Recíprocamente: Si un número se considera como la suma de varios sumandos tomados 2 á 2, el producto de estos sumandos será un máximo, cuando ambos sean iguales.

3.^{er} ejemplo: *Descomponer un número A en dos factores cuya suma sea un mínimo.*

Llamando x á uno de sus factores, el otro será $\frac{A}{x}$ si designamos la suma por S, será $x+\frac{A}{x}=S$, quitando denominadores y despejando el valor de x, resulta

$$x=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-A}$$

y como el menor valor de S para que sea real esta expresion, es $\frac{S^2}{4}=A$ de donde $S^2=4A$ y $S=2\sqrt{A}$ solo cuando $x=\frac{2\sqrt{A}}{2}=\sqrt{A}$ la suma será un mínimo; de donde deduciremos que *para descomponer un número en dos factores cuya suma sea un mínimo, se precisa que ambos factores sean iguales á su raiz cuadrada y esta suma será el duplo de la raiz.*

Recíprocamente: si un número se considera como el producto de varios factores, tomados dos á dos la suma de estos factores será un mínimo cuando ambos factores sean iguales.

* Ecuaciones Binomias.

136. *Se llaman* ECUACIONES BINOMIAS *aquellas que solamente constan de dos términos, uno conocido y otro con cualquier potencia de la incógnita.* La forma general de las mismas es $Ax^n+B=0$, de donde deduciremos que $x^n=-\frac{B}{A}$ si hiciéremos $\frac{B}{A}=\mp K$ tendremos que $x^n=K$, y por tanto x es igual á la raiz n de K, lo que nos expresa que la resolucion de estas ecuaciones consiste en saber determinar todas las raices del grado n de K, en la investigacion de cuyas raices consiste la resolucion de toda ecuacion Binomia. Si llamamos a á la raiz *enésima* de K, tendremos que $a^n=K$, en cuyo caso la ecuacion anterior seria $x^n=\pm a^n$, si hiciésemos ahora $x=ay$ tendríamos que

$a^n y^n = \pm a^n$ de donde $y^n = \pm 1$ y por tanto $y^n \mp 1 = 0$. De la resolucion de esta ecuacion conoceremos los valores de x en la propuesta, pero como la resolucion general de la misma corresponde al Algebra superior, nos concretaremos á los siguientes casos particulares

1.° $y^2 = +1$ tiene por raices reales $+1$, -1

$y^2 = -1$ tiene por raices $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$

2.° $y^3 = +1$ equivale á $y^3 - 1 = 0$ ó tambien $(y^2 + y + 1)(y - 1) = 0$ para que se evidencie este producto igual á cero, diremos $y - 1 = 0$ de donde $y = +1$.

Si suponemos que el otro factor sea igual cero, tendremos que $y^2 + y + 1 = 0$, despejando el valor de y en esta ecuacion completa de 2.° grado, será

$$y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3}\right)$$

luego las 3 raices de la ecuacion primitiva $y^3 = +1$ serán

$$+1, \quad \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{-3}\right), \quad \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{-3}\right).$$

Si fuese la ecuacion $y^3 = -1$ equivaldria á $y^3 + 1 = 0$, de donde $-y^3 = +1$ que es lo mismo como $(-y)^3 = +1$, por tanto las raices de esta ecuacion son las mismas que las de la anterior sin mas que mudar el signo.

3.° $y^4 = +1$ de donde $y^4 - 1 = 0$ equivalente á

$$(y^2 + 1)(y^2 - 1) = 0$$

de donde haciendo cada uno de los factores igual á cero se tienen las cuatro raices $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Si fuese la ecuacion $y^4 = -1$ tendriamos que $y^4 + 1 = 0$, que seria lo mismo como $(y^2 + \sqrt{-1})(y^2 - \sqrt{-1}) = 0$, de donde equivaliendo á cero cada uno de los dos factores, tendríamos las 4 raices

$$+\sqrt{\sqrt{-1}}, \quad -\sqrt{\sqrt{-1}}, \quad +\sqrt{-\sqrt{-1}}, \quad -\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

Con el estudio completo de estas ecuaciones, llegaríamos á comprobar como evidentes todas las propiedades de las raices del grado n de la unidad; pudiéndose exclusivamente probar á *posteriori*, con lo expuesto que: *las raices de un grado cualquiera de la unidad son tantas como unidades tiene el índice de la raiz. Que la suma de todas las raices de la unidad, referidas á una sola ecuacion, es siempre cero. Que el producto de las mismas es siempre ó +1 ó —1.*

* Ecuaciones trinomias.

137. *Se llama* ECUACIONES TRIMONIAS *á aqnellas que constan de tres términos y mas detalladamente aquellas que tienen un término conocido, otro con una potencia cualquiera de la incógnita y otro con la incógnita elevada al cuadrado de dicha potencia, la forma general es* $x^{2n}+Sx^{n}+P=0$.

Las ecuaciones que hemos explicado con el nombre de *Bicuadradas,* son un caso porticular de las ecuaciones trinomias, en las cuales hemos hecho $n=2$, las que hemos resuelto por las completas del segundo grado sustituyendo y por x^2, espresando en las mismas las cuatro raices que resultan para la incógnita, á consecuencia de los dos signos $\pm$ con que se expresa en general la incógnita, cuyas raices son iguales dos á dos y de signos contrarios. El estudio de estas ecuaciones, como dependiente del Algebra superior queda excluido de estos elementos.

RELACIONES ALGEBRAICAS DE DESIGUALDAD.

Desigualdades é Inecuaciones.

138. *Se llama desigualdad á la relacion que se establece entre dos cantidades diferentes ó por su cantidad ó por su cualidad.*

Si decimos que $a>b$ se comprenderá fácilmente que si a y b son ambos positivos, el valor cuantitativo de a es mayor que el de b.

Si los dos términos son negativos, para que se verifique la desigualdad en el sentido indicado, es preciso que el valor absoluto de a sea menor que el de b.

Y si a es positivo y b negativo evidentemente es clara la desigualdad, y la diferencia de $a-b$ será equivalente á la suma $a+b$, y por tanto mayor que cero.

Si $a>b$ restando b á ambos miembros será $a-b>0$ y por tanto, si $a-b>0$ será $a>b$.

Una desigualdad no deja de serlo porque se añada ó quite la misma cantidad á sus dos miembros.

En efecto, si $a>b$ tendrémos $a-b>0$ añadiendo ó quitando $c\pm c$ á los dos miembros, tendremos que $a-b\mp c\pm c>0$ que equivale á $a\pm c-b\mp c>0$ y por tanto $a\mp c>b\mp c$; luego *para trasladar un término de un miembro al otro, basta cambiarle el signo. Toda desigual-*

dad multiplicada por -1 subsiste, pero como la relacion de desigualdad entre dos cantidades positivas se establece inversamente que entre estas mismas cantidades siendo negativas, resulta que si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por -1, debe invertirse el signo.

Una desigualdad no deja de serlo porque se multipliquen ó dividan sus dos miembros por cualquier cantidad positiva.

En efecto, sea $a>b$ y $c>0$ tendremos que $a-b>0$ y por tanto $ac-bc>0$ luego $ac>bc$.

Si $a>b$, $a-b>0$ luego $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}>0$ y por tanto $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$. *Si suponemos que la cantidad por quien se multiplican ó dividen es menor que cero y por tanto negativa* (1) *se deberá invertir el signo de la desigualdad.* En efecto, si $a>b$ y $c<0$ será $a-b>0$ luego multiplicando por c, valor negativo, resultarán dos productos negativos ac y bc. este de menor valor absoluto que aquel, por lo cual será mayor, luego $ac<bc$. De la misma manera se hace evidente que $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

139. *Con la suma de varias desigualdades que existan en el mismo sentido, se puede formar otra, sumándose miembro á miembro.* En efecto, si $a>b$ y $c>d$ tendremos que $a-b>0$, $c-d>0$, luego $a-b+c-d>0$ luego

$$a+c>b+d.$$

Dos igualdades tambien podrán restarse miembro á miembro con tal que se verifiquen en sentido contrario, dando á la desigualdad resultante el signo de la que sirve de minuendo. En efecto, si $a>b$ y $c<d$ tendremos que $a-b>0$ y $c-d<0$ si restamos de la cantidad positiva $a-b$ la negativa $c-d$, el resultado será evidentemente positivo, luego $a-c>b-d$.

---

(1) Que toda cantidad negativa tal como $-C$ es menor que cero se demuestra, considerando que de no ser así, sucederia que $-c>0$ ó $-c=0$, añadiendo á ambos miembros de la desigualdad ó de la igualdad C resultarian de la 1.ª que $0>+c$, de la 2.ª $0=C$ lo cual es absurdo en ambos casos, luego evidente que $-C<0$.

Si ambas estuviesen en el mismo sentido, como $10>9$ y $5>1$, es decir que $10-5>9-1$ seria absurdo, por lo cual no es posible que se resten miembro á miembro.

Si varias desigualdades están dirigidas en el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro á miembro con tal que sean positivos referidos miembros. En efecto, si $a>b$ y $c>d$, $ac>bd$ puesto que el primer miembro debe ser mayor que el segundo, como producto de factores mayores. Por el contrario de ser $5>3$ y $-6>-7$ no se puede deducir que $-30>-21$ lo cual es absurdo.

Las potencias del mismo grado de los dos miembros de una desigualdad forman otra en el mismo sentido con tal que ambos miembros sean positivos. Si son negativos forman otra, con tal que el índice de la potencia sea impar, teniendo presente que si es par, debe cambiarse el signo.

Los cocientes que resultan de dividir dos desigualdades miembro á miembro y qus se verifican en sentido contrario, forman otra desigualdad.

En efecto, si $a>b$ y $c<d$ será $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ evidentemente, puesto que el dividendo del primero es mayor que el del segundo, mientras el divisor del primero es menor que el del segundo.

Inecuaciones y Problemas de primer grado con una incógnita.

140. *Se llama* Inecuacion *de primer grado, á aquella desigualdad en la cual entra una cantidad desconocida que no está elevada á ninguna potencia.*

Las inecuaciones son á las desigualdades, lo que las ecuaciones á las igualdades: así pueden ser de primero, segundo, tercer grado, etc.

Resolver una desigualdad consiste solo en determinar los límites de los valores de las incógnitas.

La fórmula general de las inecuaciones del primer grado, ó la expresion final de las mismas despues de verificar las operaciones indicadas es

$$Ax^2 \pm B \gtrless 0$$

siendo A y B cantidades literales ó numéricas; monomias ó polinomias. Los valores de la incógnita se hallarán comprendidos entre

$$x \gtrless \mp \frac{B}{A}$$

1.er PROBLEMA. Resolver la inecuacion $8x+4>3x+29$, de donde resulta que $x(8-3)>25$ y $x>5$.

En efecto, para que sea desigualdad, x debe valer mas que 5, de otro modo la convierte en ecuacion.

2.° PROBLEMA. Descomponer el número 28 en dos enteros que se diferencien en mas de 7 unidades. Llamando x á uno de ellos, el otro será $28-x$, luego $x-(28-x)>7$ luego $x-28+x>7$ y $2x>28+7$ luego $x>\frac{35}{2}$, cuyas soluciones son

$$\begin{array}{rcccccccccc} x= & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ (28-x)= & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

La suma de cada dos es 28, y su diferencia mayor que 7.

3.er PROBLEMA. *Preguntándole á un Pastor el número de sus ovejas contestó: si á las tres octavas partes de su número aumentas 22, será la suma mayor que 33, y si á la cuarta parte de su número restas 7, la diferencia será menor que cinco cuartos. Se pregunta ¿cuál es el número de ovejas? Designando por x las ovejas, será*

$$\frac{3}{8}x+22>33 \quad \text{y} \quad \frac{x}{4}7<\frac{5}{4}$$

de ellas obtendremos que

$$x>29\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad x<33.$$

En este caso, el número de ovejas tiene que ser expresado por un número entero de los comprendidos entre los límites de la incógnita que son 30, 31 y 32.

4.° PROBLEMA. *Preguntándole á un sujeto qué número de libros contenia su librería, contestó: Si al quíntuplo de los que tengo se añaden 50, el resultado no puede ser mayor que 550; y si al triplo del número de mis libros se le disminuyen 30, el resultado no puede ser menor que 270.*

Por tanto $5x+50 \ngtr 550$.

$3x-30 \nless 270$, de donde

$x \ngtr 100$ y $x \nless 100$, luego el número de sus libros si no pudiendo ser mayor ni menor que 100, serán 100 evidentemente.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO SEGUNDO,

QUE COMPRENDE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO É INECUACIONES DEL PRIMERO.

I. Resolver las ecuaciones

$$x^2-10x=-21 \quad ; \quad x^2-13x+42=0$$

$$\frac{4}{x}-7=\frac{x}{3}+2 \quad ; \quad 5x^2-45x=-280$$

II. Resolver las ecuaciones

$$\frac{x}{3+2x}=\frac{6}{5x-4} \qquad \frac{25}{x-2}=\frac{460}{12x+1}-\frac{7}{17}$$

III. Siendo 20 la suma de dos números, y 99 su producto, determinar estos números.

IV. Siendo 32 la diferencia de dos números, y 5 su cociente, determinar el valor de dichos números.

V. Formar una ecuacion de 2.º grado cuyas dos raices sean

$$7b \text{ y } 4$$

VI. Resolver esta ecuacion bicuadrada, determinando sus cuatro raices

$$x^4-6x^2-8=0$$

VII. Descomponer el número 20 en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

VIII. Descomponer el número 20 en dos partes tales, cuyo producto sea un máximo.

IX. Hallar el máximo ó el mínimo de las funciones

$$4x^2-12x+2 \qquad 3x^2-15x-6$$

X. Resolver la inecuacion sigmiente:

$$\frac{4x}{5}-6x>3-6x$$

LIBRO TERCERO

(RELACIONES ALGEBRAICAS DE COMPARACION.)

Progresiones y Logaritmos.

141. *Progresiones aritméticas.* En los números (190) y (193) de la Aritmética nos hemos ocupado de las *Progresiones aritméticas y geométricas* sean *crecientes* ó *decrecientes.*

En las Progresiones aritméticas hemos determinado las fórmulas que espresan el valor del *primer término* en funcion del *último*, de la *diferencia ó razon de la progresion* y del *número de términos de la misma,* y cada una de las que espresan, ya el *último*, ya la *razon* ó ya el *número de términos* en funcion de las otras *tres* cantidades; hemos determinado tambien, la fórmula que espresa la suma de todos los términos de la progresion en funcion del primero y último y del número de términos de la misma la cual nos ha dado que $S=(a+u)\frac{n}{2}$ de la cual deduciremos fácilmente que

$$a=\frac{2S}{n}-u, \quad u=\frac{2S}{n}-a, \quad n=\frac{2S}{a+u}.$$

Si quisiésemos espresar la suma de todos los términos de una progresion aritmética, en funcion del primer término, de la diferencia de la progresion y del número de ellos, tendriamos sustituyendo por u su valor, que

$$S=(a+u)\frac{n}{2}=(2a+d(n-1))\frac{n}{2}$$

en cuya fórmula entran S, a, n, d, en la cual podemos despejar cada una en funcion de los otras 3 cantidades, así tenemos: $S=\frac{(2a+d(n-1))n}{2}$, $a=\frac{S}{n}-\frac{d(n-1)}{2}$,

$$n=\frac{1}{2d}\left(d-2a\pm\sqrt{(2a-d)^2+8Sd}\right) \quad d=\frac{2(S-an)}{n(n-1)}$$

* 142. PROBLEMAS GENERALES. En las fórmulas de las progresiones entran las cinco cantidades a, d, n, u, S, cuya significacion conocemos; los productos binarios ó ternarios diferentes que se pueden formar con cinco letras son 10, y por tanto 10 son los problemas que se pueden establecer, para que conocidas 3 de las 5 cantidades; en funcion de las mismas despejemos el valor de las otras 2, cuyos valores se expresan en el siguiente cuadro:

Problemas.	Datos.	Incógnitas.	Determinacion de las incógnitas.	
1.°	a,d,u	n,S	$n=\frac{u-a+d}{d}$	$S=\frac{(a+u)(u-a+d)}{2d}$
2.°	a,d,n	u,S	$u=a+d(n-1)$	$S=(2a+nd-d)\frac{n}{2}$
3.°	a,d,S	n,u	$n=\frac{1}{2d}(d-2a\pm\sqrt{(d-2a)^2+8ds})$;	$u=a+d(n-1)$
4.°	a,u,n	d,S	$d=\frac{u-a}{n-1}$	$S=\frac{(u+a)n}{2}$
5.°	a,u,S	d,n	$d=\frac{u^2-a^2}{2S-a-u}$	$n=\frac{2S}{a+u}$
6.°	a,n,S	d,u	$d=\frac{2(S-an)}{n(n-1)}$	$u=\frac{2S}{n}-a$
7.°	d,u,n	a,S	$a=u-d(n-1)$	$S=(2u-dn+d)\frac{n}{2}$
8.°	d,n,S	$a\ u$	$a=\frac{1}{2n}(2S-n(n-1)d)$	$u=\frac{1}{2n}(2S+n(n-1)d)$
9.°	d,u,S	n,a	$n=\frac{1}{2d}(2u+d\pm\sqrt{(2u+d)^2-8dS})$;	$a=u-d(n-1)$
10	u,n,S	a,d	$a=\frac{2S}{n}-u$	$d=\frac{2(un-S)}{n(n-1)}$

Si diésemos valores numericos, en cada caso, á cada una de las tres letras que espresan los datos, fácilmente, con aplicacion de estas fórmulas, determinariamos el valor de cada una de las dos incógnitas.

* 143. Es frecuente ver en los parques de artillería la colocacion de las balas en pilas que ya afectan la forma de pirámides triangulares ó cuadrangulares, ó ya de base rectangular terminándose por la parte superior en una hilera de balas.

Uno de los problemas mas frecuentes y para los cuales es imprescindible el conocimiento de las progresiones aritméticas, es la determinacion del número de balas que están contenidas en cada pila, por el exámen prévio de su forma, el número de capas de la misma ó el número de balas contenidas en la hilera de su capa inferior.

1.° Supongamos sea la pila una pirámide triangular equilátera, es evidente que cada una de sus capas es un triángulo equilátero, que la capa superior tendrá una bala, la segunda tres, etc., y por tanto, que cada una está sostenida por otras tres; supongamos que el número de sus capas sea N, la 1.ª superior tendrá:

$$\frac{1^2+1}{2},\quad la\ 2.^a\ \frac{2^2+2}{2},\quad la\ 3.^a\ \frac{3^2+3}{2},$$

$$la\ 4.^a\ \frac{4^2+4}{2},\quad la\ última\ tendrá\ \frac{N^2+N}{2},$$

luego la suma de todas ellas tendrá:

$$\frac{N(N+1)(N+2)}{6}$$

2.° Si suponemos que sea la pila pirámide cuadrangular, ó que tiene por base un cuadrado; la 1.ª fila superior tendrá 1, la 2.ª 4, la 3.ª 9, la última capa N^2, luego será;

$$1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +N^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

3.° Si suponemos que sea la pila rectangular y que tenga su última capa superior una hilera de balas; afectará la forma de un trozo de prisma, todas sus capas serán rectángulos, cuyos lados van disminuyendo en una bala desde su base á la cúspide, estando cada bala sostenida por cuatro; por tanto, si suponemos que el número de balas de la hilera superior sea de $N+1$, la capa inferior á esta tendrá $2(N+2)$, la 3.ª tendrá $3(N+3)$ y la base, suponiendo n el número de capas, será $n(n+N)$ y por tanto el número total de balas será:

$$N(1+2+3+\ \dots\ +n)+1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2=$$
$$=\frac{Nn(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

fórmula en la cual n espresa el número de balas del lado menor de la base y $n+N$ las del lado mayor.

144. *Progresiones geométricas.* Hemos definido y determinado tambien en las progresiones por cociente el valor de cada uno de sus diferentes términos en funcion de los otros; así dijimos que siendo la progresion geométrica creciente, representando por a el primer término, por u el último, por q la razon, y por n el número de términos.

$u=aq^{n-1}$ de donde

$$a=\frac{u}{q^{n-1}}, \quad q^{n-1}=\frac{u}{a}. \quad q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

El valor de $n-1$ se despeja por logaritmos, diciendo:

$$(n-1)=\frac{Lg.u-Lg.a}{Lg.q.}, \text{ segun hemos visto.}$$

Llamando S á la suma de todos los términos, será

$$S=\frac{uq-a}{q-1}$$

fórmula en la cual entran las 4 cantidades S, u, q, a: si de estas cantidades fuese desconocido u, sería:

$$u=\frac{S(q-1)+a}{q}, \quad q=\frac{S-a}{S-u}, \quad a=uq+S(1-q)$$

Si quisiésemos determinar la fórmula de la suma en funcion del primer término tendriamos, sustituyendo por u su valor, en funcion del primer tèrmino

$$S=\frac{aq^{n-1}\times q-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

de donde fácilmente deduciremos el valor de a, q, y n.

Si quisiéramos determinar la fórmula que esprese el producto de todos los términos de una progresion geométrica, fácilmente lo haríamos, teniendo en cuenta que el producto de dos términos equidistantes de los estremos, es siempre igual; luego si llamamos P á este producto considerando el producto de todos un término, colocados direcrectamente, y P al mismo producto, considerando invertido el órden de los términos, tendriamos que seria $P^2=(a\times u)^n$, de cuya fórmula deduciriamos que

$$P=\sqrt{(a\times u)^n}$$

De esta fórmula tambien deduciremos fácilmente el valor de a, u, n.

145. Para el estudio ulterior de la teoría de las séries conviene saber cuales son los límites superiores de la suma de todos los términos de una progresion geométrica. Si esta es creciente, la fórmula de la suma es

$$S=\frac{uq-a}{q-1}$$

Siendo infinito el número de sus términos, el último de ellos será aq^{n-1}, pero como la razon es en estas positiva y mayor que la unidad, su potencia infinita valdrá el ∞. luego el límite superior de la suma de todos sus términos, es en este caso el ∞. Si la progresion geométrica fuese decreciente, la fórmula de la suma de todos sus términos será

$$S=\frac{a-aq^n}{1-q},$$

pero como en ella se supone que la razon q es una fraccíon menor que la unidad, cuyas potencias sabemos disminuyen á medida que aumemta el exponente, es claro que q^n siendo n infinito se reduce á cero; luego en este caso el límite de la suma de todos los términos de una progresion geométrica decreciente (que constituirán una série converjente) es $S=\frac{a}{1-q}$

De la aplicacion de cuya fórmula podriamos derivar que un término cualquiera de una progresion decreciente de un número indefinido de términos, es igual, mayor, ó menor, que la suma de todos los que le siguen.

146. Problemas generales. En las fórmulas de estas progresiones, entran las cinco cantidades a, u, q, n, S, cuya significacion nos es conocida; con estas cinco cantidades solo podremos formar diez grupos binarios ó ternarios diferentes, luego pueden surgir diez problemas generales, de suponer que se conocen tres de las cinco cantidades; cuyos problemas, con las fórmulas que espresan el valor de las dos incógnitas, en funcion de los datos, ponemos á continuacion:

Problemas.	Datos	Incógnitas.	Determinacion de las incógnitas.	
1.º	a, q, u	n, S	$n=1+\frac{\text{Log. } u-\text{Log. } a}{\text{Log. } q}$	$S=\frac{uq-a}{q-1}$
2.º	a, q, n	u, S	$u=aq^{n-1}$	$S=\frac{1}{(q-1)}(aq^n-a)$
3.º	a, q, S	n, u	$n=\frac{\text{Log.}(Sq-S+a)-\text{lg.}a}{\text{log. } q}$	$u=\frac{a+S(q-1)}{q}$
4.º	a, u, n	q, S	$q=\sqrt[n-1]{u:a}$	$S=\frac{u\sqrt[n-1]{u}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u}-\sqrt[n-1]{a}}$
5.º	a, u, S	q, n	$q=\frac{S-a}{S-u}$	$n=1+\frac{\text{log. } u-\text{log. } a}{\text{log.}(S-a)-\text{log.}(S-u)}$
6.º	a, n, S	q, u	$q^{n-1}+q^n+\ldots.+q+1=S:a$	$u=aq^{n-1}$
7.º	q, u, n	a, S	$a=\frac{u}{q^{n-1}}$	$S=\frac{u(q^n-1}{(q-1)q^n-1}$
8.º	q, u, S	a, n	$a=uq-S(q-1)$	$n=1+\frac{\text{log.}u-\text{log.}(uq+S--Sq)}{\text{log. } q.}$
9.º	q, n, S	a, u	$a=\frac{S(q-1)}{q^n-1}$	$u=Sq^{n-1}\times\frac{q-1}{q^n-1}$
10	u, n, S	a, q	$a=\frac{u}{q^{n-1}}$	$(u-S)q^n+Sq^{n-1}=u$

cuyas fórmulas podremos aplicar dando valores numéricos á los datos, sustituyéndolos y despejando.

TEORIA DE LOGARITMOS.

147. La Teoría de Logaritmos es una de las de mas reconocida importancia en el cálculo de los números, toda vez que se propone simplificar y abreviar los cálculos de una manera sorprendente.

Los *simplifica* y *abrevia*, porque aplicando los logaritmos al cálculo de los números, en primer lugar, estos se representan por valores de menor cuantidad, y en segundo porque la operacion que entre aquellos hubiere de verificarse se reduce á otra mas fácil y espedita.

La aplicacion de los Logaritmos al cálculo de los números hace que la elevacion á Potencias de un número cualquiera se convierta en la multiplicacion de otro menor llamado su logaritmo. La Extraccion de la raiz de un grado cualquiera de cualquier número, se facilita por la aplicacion de los logaritmos, toda vez que se reduce á una simple division de otro menor llamado su logaritmo. La Multiplicacion y Division de los números se reduce por la aplicacion de los logaritmos de estos á la Adicion ó sustraccion de los mismos.

Y aun los logaritmos de los términos de una suma ó diferencia pueden ser fácilmente determinados por el estudio prévio del opúsculo titulado «*Suplemento Logaritmo*» impreso en Burdeos á principio de este siglo por el italiano Leonelli, apesar de ser conocidos bajo el nombre de Logaritmos de Gauss.

148. Encarecido por tanto el estudio de esta luminosa é interesantísima Teoría, de la que cabe á España la gloria de su descubrimiento desde el siglo XIV, apesar de atribuirse su invencion al célebre Neper, matemático escocés; expondremos que fué reconocida su importancia para la abreviacion de los cálculos numéricos, de la comparacion de los términos de dos progresiones una aritmética y otra geométrica, la primera que empiece por *cero* y la segunda por *uno*, siendo ó las dos *crecientes* ó ambas *decrecientes*, y cuyos términos se correspondan en el órden de su colocacion. Considerando ambas progresiones de términos ilimitados, observaremos que *el producto* de dos términos cualquiera de la progresion geométrica constituye otro término de la misma progresion y al cual ha de corresponder de la *aritmética* un término tal, que sea *la suma* de los términos que en esta misma progresion hubiesen correspondido á ambos factores.

Sean las progresiones

$$\div\div\ 1....q...q^2....q^3.....q^4....q^5.....q^6.............q^n$$
$$\div\ 0...d..\ 2d..\ 3d...\ 4d....5d....6d......\quad nd$$

tendremos que $q^2 \times q^3 = q^5$ y $2d + 3d = 5d$, y en efecto, á q^5 de la progresion geométrica le corresponde $5d$ de la aritmética.

Por tanto, si la progresion primera contuviese todos los números enteros, la operacion de la multiplicacion de estos se facilita sumando los términos de la progresion aritmética que corresponden á sus factores, cuyo producto será el término de la progresion geométrica, correspondiente á la suma de aquellos.

Observando que *el cociente* de dividir dos términos de la progresion geométrica, es otro término de la misma; que se corresponde con uno de la progresion aritmética tal, que es *la diferencia* entre los términos que de la misma se corresponden con los de la geométrica, pues que

$$q^6 : q^2 = q^4 \quad \text{y} \quad 6d - 2d = 4d$$

y en las progresiones, correspondiendo á $q.^4$ de la 1.ª, $4d$ de la 2.ª, resulta que la operacion de la division de los números enteros, si todos estuviesen contenidos en la 1.ª progresion, se facilita extraordinariamente porque se reduce á restar los términos correspondientes de la 2.ª progresion, hallándose de diferencia otro término de la misma, al cual corresponderá de la geométrica un término que será el cociente pedido.

149. *Estas propiedades generales que se cumplen siempre entre los términos de dos progresiones en las condiciones expuestas, motivaron que se llamasen* logaritmos *á los términos de la progresion aritmética, correspondientes á los* números *de otra progresion geométrica.*

Llamamos, por tanto, logaritmo de un número al término de la progresion aritmética que empezando por cero se corresponda con dicho número, considerado como término de una progresion geométrica que empiece por uno. *Luego logaritmos de los números en general son los términos de una progresion aritmética que empezando por cero se correspondan con dichos números, considerados como términos de una progresion geométrica cuyo primer término sea uno.*

Los sistemas de logaritmos posibles son en número infinito, pues que en las dos progresiones expuestas puede ser q y d números diferentes en cada sistema. Un sistema de logaritmos lo constituirán dos progresiones, una aritmética y otra geométrica, con las condiciones expuestas.

En todo sistema de logaritmos se verifica: *que el logaritmo de uno es cero*; y *tambien que uno, es el logaritmo de la razon de la progresion geométrica, á la cual se llama siempre* BASE DEL SISTEMA LOGARÍTMICO. QUE LOS LOGARITMOS de números inferiores á uno, cuales son LAS FRACCIONES PROPIAS, son NEGATIVOS; y *por tanto*, QUE LOS LOGARITMOS DE CANTIDADES NEGATIVAS, SERÁN IMAGINARIOS.

150. Los sistemas de logaritmos empleados no han sido mas que *dos*: el 1.º debido á su inventor *Neper* y llama-

do por tanto *Neperiano* (1) y el sistema de Logaritmos ordinario ó debido á Briggs, en el que se estableció por *base* el mismo número 10, como en el sistema de numeracion.

El sistema *de Logaritmos primitivo* ó el Neperiano resulta formado de las siguientes progresiones

$$\div 1 : 1+a : (1+a)^2 : (1+a)^3 : (1+a)^4 : \ldots\ldots$$
$$\div 0.\ a.\ \ 2a.\ \ 3a.\ \ 4a\ \ \ldots\ldots$$

Siendo a tan pequeño como sea preciso, para que un término cualquiera n se halle comprendido en los de la primera progresion, determinándose por tanto su logaritmo en el correspondiente de la segunda: luego la razon de la progresion por cociente es en este sistema la unidad mas la razon de la progresion aritmética.

La determinacion numérica de la base en este sistema se obtiene fácilmente, suponiendo que un término cualquiera de una segunda progresion sea la unidad, el cual tendrá delante un número de términos n, en cuyo supuesto $1 = na$ y por tanto $n = \frac{1}{a}$, y el término correspondiente á este, de la primera, será $(1+a)^{\frac{1}{a}}$.

La base del sistema neperiano se representa por e, cuyo valor se determinará con la aplicacion del binomio de Newton al desarrollo de la expresion anterior cuando a tiende hácia cero, así tenemos que

$$e = (1+a)^{\frac{1}{a}} = (1+\tfrac{1}{\infty})^{\infty} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

ley muy fácil de retener en la memoria, y la cual, calculada con la aproximacion de 12 cifras decimales, nos dice que

$$e = 2{,}718281828459\ldots\ldots$$

151. En el sistema de Logaritmos vulgares ó de Briggs la base es 10, que es, como sabemos, el mismo número que sirve de base en nuestro sistema de numeracion. En este resulta que las dos progresiones serán

(1) Los Logaritmos llamados naturales ó Neperianos, tambien se llaman *Hiperbólicos*, porque representan las áreas de la hipérbola equiláctera entre sus asíntotas, tomando por unidad la del cuadrado inscripto.

$\div\div 1 \ldots 10 \ldots 100 \ldots 1000 \ldots 10000 \ldots 100000 \ldots 1000000$ etc.
$\div\ 0 \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots 4 \ldots 5 \ldots 6 \ldots$ etc.
por consecuencia, de hacer en las generales $d=1$ y $q=10$, que conforme hemos dicho pueden equivalerse á cualquier cantidad, produciéndose por tanto, cuantos sistemas de logaritmos pretendamos formar.

Si suponiendo en ellas $q=a^d$, tendremos que $a=\sqrt[d]{q}$, y por tanto, las dos progresiones generales se trasformarán en

$$\div\div 1 \ldots a^d \ldots a^{2d} \ldots a^{3d} \ldots a^{4d} \ldots \ldots a^{nd}$$
$$\div\ 0 \ldots d \ldots 2d \ldots 3d \ldots 4d \ldots \ldots nd$$

En las cuales observaremos que *el logaritmo de cualquier potencia de a, es su respectivo exponente*, luego tambien podremos pescindir del concurso de las dos progresiones, para la generacion de los logaritmos, definiéndolos como exponentes de la base y diciendo: *Se llaman logaritmos de los números, á los exponentes á que debe elevarse la base, para producir dichos números.* Se comprende fácilmente que *la base deberá ser diferente de uno,* dado que todas las potencias de uno son siempre la mitad Fácilmente comprenderemos, que tiene tambien que *ser positiva la base de un sistema de logaritmos*, pues de lo contrario, las potencias pares de la base serán positivas, y las potencias impares negativas, verificándose anómalamente que el logaritmo de una cantidad negativa, sería mayor que el de una cantidad positiva, mucho mayor que como término de la progresion geométrica la anteceda.

De dos maneras hemos definido los logaritmos, una por las relaciones entre los términos de dos progresiones, una aritmética y otra geométrica; y la otra considerando los logaritmos como los exponentes algébricos de la base del sistema: el procedimiento primero fué el seguido por su inventor, mas hoy, sin embargo, es preferible el segundo por la mayor sencillez y facilidad con que se demuestran sus propiedades.

Propiedades generales de los logaritmos.

152. De la fórmula $q=a^d$ en la que podemos representar por y el número q, y por x el valor d, tendremos que $y=a^x$ es la ecuacion final que facilita la demostracion de las propiedades de los logoritmos como consecuencia de su definicion.

En esta ecuacion, la base a es distinta para cada sistema, *pero constante en cada uno, real, positiva y diferente de la unidad;* al exponente x le debemos considerar como una variable que puede tener todos los valores reales comprendidos entre $+\infty$ y $-\infty$, la cantidad y es una *funcion* de dicha variable que solo puede tener valores numéricos positivos, y por tanto mayores que cero y menores que el infinito; pues que si suponemos que $a>1$, dando á x valores crecientes, su funcion y admitirá valores tambien crecientes: si damos ahora á x valores negativos, observaremos como y vá pasando por todos los valores comprendidos entre *uno* y *cero*.

Si suponemos que $a<1$, su valor será una fraccion que podremos reducir á otra equivalente, cuyo numerador sea uno, luego $\frac{1}{a'^x}=y$ y siendo a' una cantidad mayor que uno, segun crezca x positiva ó negativamente, así a'^x crecerá desde uno al infinito, ó desde uno á cero, y por tanto y disminuirá desde uno á cero, ó crecerá desde uno al infinito, de una manera respectiva.

De todo lo cual inferiremos, que todo número positivo mayor ó menor que uno, como base de un sistema de logaritmos, por sus potencias respectivas, puede originar todos los números comprendidos entre CERO *y el* INFINITO POSITIVO: puesto que siendo $a>1$ tendremos $Lg.0=-\infty$, $Lg.1=0$, $Log.\infty=\infty$, y siendo $a<1$ será $Lg.0=\infty$, $Lg.1=0$, $Lg\ \infty=-\infty$.

Las propiedades generales, comunes á todos los sistemas de logaritmos son:

153. 1.ª *El logaritmo de 1 es cero. El logaritmo de la base es la unidad.*

2.ª *En un sistema dado, cada número tiene un solo logaritmo y recíprocamente, un logaritmo no puede corresponder mas que á un solo número;* lo cual se hace evidente ante la consideracion de que para cada valor de x, no hay mas que un solo valor de y, y recíprocamente en la ecuacion $a^x=y$.

3.ª *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.*

En efecto: si llamamos á los números y', y'', y''' serán sus logaritmos respectivos x', x'', x''' y por tanto, tendremos $y'=a^{x'}$, $y''=a^{x''}$, $y'''=a^{x'''}$ que multiplicadas miembro á miembro nos darán que

$$y'y''y''', etc.,=a^{x'+x''+x'''+etc.},$$

$$\text{luego}\quad log.\ y'y''y'''=x'+x''+x'''$$

4.ª *El logaritmo de un cociente es igual á la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.*

En efecto, sean los números y', y'', sus logaritmos respectivos serán x', x'', y por tanto $y'=a^{x'}$, $y''=a^{x''}$, dividiendo las dos igualdades miembro á miembro, tendremos que

$$\frac{y'}{y''}=x^{x'-x''} \quad \text{luego logaritmo de} \frac{y'}{y''}=x'-x''$$

5.ª *El logaritmo de una potencia de un número, es el producto de su exponente por el logaritmo de dicho número.*

En efecto, siendo la ecuacion general $y=a^x$ elevando ambos miembros á la potencia n, tendremos $y^n=a^{xn}$, Luego log. $y^n=xn$.

6.ª *El logaritmo de una raiz, es igual al cociente de dividir el logaritmo del número por el índice de la raiz.*

En efecto, siendo $y=a^x$ la ecuacion general, extrayendo la raiz del grado n de ambos miembros tendremos que

$$\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{a^x}=a^{\frac{x}{n}} \quad \text{luego logaritmo} \quad \sqrt[n]{y}=\frac{x}{n}$$

Propiedades particulares de los logaritmos ordinarios de Briggs.

154. En el sistema de Briggs la ecuacion general queda reducida á $10^x=y$.

En este sistema los únicos números enteros que tienen logaritmos conmensurables son las potencias enteras de 10.

En efecto, si hacemos $x=0, 1, 2, 3, 4, 5,$ etc.. resultará que $y=1, 10, 100, 1000, 10000, 100000,$ etc., lo cual nos hace ver que las potencias de 10, tienen por logaritmos respectivamente los mismos números enteros que lleva la base por exponente. Si suponemos que sea n un número entero y no potencia de 10, si le asignamos por logaritmo un número conmensurable $\frac{b}{c}$ se debe tener que $10^{\frac{b}{c}}=n$ ó bien $10^b=n^c$ y como $10=2\times5$ tendremos que $2^b\times5^b=n^c$. lo cual solo puede verificarse teniendo n por únicos factores al 2 y al 5, puesto que descomponiendo n resultaria $n=2^p \times 5^q$ y por tanto $2^b + 5^b = (2^p \times 5^q)^s = 2^{ps} \times 5^{qs}$ lo cual, para que suceda, es preciso que $b=ps=qs$, luego $p=q$.

De todo lo cual inferiremos que para que un entero n tenga por logaritmo un número comensurable, es preciso que $n=2^b \times 5^b = 10^b$, es decir, que dicho número n sea potencia entera de 10.

Por tanto, los logaritmos de números que no sean exactamente potencias de 10, son inconmensurables y solo pueden expresarse aproximadamente por los números decimales, considerándose en ellos dos partes; una la parte entera ó CARACTERÍSTICA, *y otra la parte decimal ó* MANTISA.

Los números que solo tienen por logaritmo *característica*, son la base y potencias de la base.

Los números que solo tienen por logaritmo *mantisa* ó parte decimal, son los mayores que uno y menores que la base.

Los números que tienen logaritmos compuestos de *característica y mantisa* son los mayores que 10, y que se hallen comprendidos entre dos potencias de la base.

155. Siendo el logaritmo de 1, 0; de 10, 1; de 100, 2; de 1000, 3; de 1000.000, 6 etc., se comprenderá fácilmente que en el sistema de logaritmos vulgares, la característica del logaritmo de un número, tendrá tantas unidades menos una, como cifras tenga el número: si tenemos el número 82723 que se compone de cinco cifras, es claro que será mayor que 10.000 y menor que 100.000; luego su logaritmo será mayor que 4 y menor que 5, expresándose por 4 enteros y una fraccion decimal, que será tanto mayor cuanto el número sea mayor que 10.000: si tuviésemos por el contrario el logaritmo 2,873511 expresará que corresponde á un número mayor que 100 y menor que 1.000, las cifras decimales 0,873511 expresan que se aproximan el número, en su valor, mas al 1000 que al 100.

156. *Los logaritmos de los números decuplos tienen la misma mantisa, y solo varian en el número de unidades de su característica.*

En efecto, supongamos que se trata de los números n, $10 \times n$, $100 \times n$, $1000 \times n$, $10000 \times n$ etc. sea el Logaritmo de n $0,abcdef$, tendremos que

$$\text{Lg } 1000 \times n = \text{Lg } 1000 + \log. n = 3 + 0,abcdef = 3,abcdef$$

(segun lo demostrado en 153) Corolario:

La mantisa del logaritmo de un número decimal no va-

ria, aun cuando se corra la coma uno ó mas lugares á la derecha, ó á la izquierda, puesto que todos estos son números décuplos que van de 10 en 10.

Los logaritmos de los números fraccionarios menores que uno *son negativos*, lo cual se comprende por ser la base de este sistema un número mayor que 1.

157. Todo Logaritmo tiene *su complemento* que es lo que le falta para valer *10* enteros que es el logaritmo de 10.000,000.000. Para hallar el complemento de un logaritmo se restan todas sus cifras de 9 menos la última que se resta de 10; así tenemos que el complemento de

4, 307824 es 5,692176.

La aplicacion de los complementos logarítmicos permite convertir una diferencia en suma.

Así, si queremos restar de 83.415 el número 37.890, la diferencia será igual al resultado de sumar al número 83.415, el complemento de 37.890 que es 62110, si se prescinde luego, en la suma, de la unidad de órden superior, así tenemos que

$$\begin{array}{r} +83415 \\ -37890 \\ \hline +45525 \end{array} \quad \text{igual á} \quad \begin{array}{r} +83415 \\ +62110 \\ \hline 145525 \end{array} \quad \text{restándole } 100.000$$

158. Mediante la aplicacion de los complementos logaritmos: *convertimos los logaritmos negativos que corresponden á los números fraccionarios propios en otros equivalentes de característica negativa y mantisa positiva.* En efecto, supongamos que sea el logaritmo negativo —3,472153, no se altera por sumarle y restarle 10 enteros, luego

$$-3{,}472153=10-3{,}472153-10=6{,}527847-10=$$
$$=-4+0{,}527847.$$

Los logaritmos de característica negativa y mántisa positiva se espresan poniendo el signo menos sobre la característica, así el anterior se pondrá $\overline{4}{,}527847$.

159. *La característica negativa de una fraccion decimal propia, tiene tantas unidades mas una como ceros tenga esta fraccion entre la coma y la primera cifra significativa.*

Sea la fraccion 0,0076 que tiene dos ceros despues de la coma, si la multiplicamos por $10^3=1000$ se convertirá en 7,6, el logaritmo de este número tiene por característica cero; luego el del número dado que resulta de dividirlo por 1000 tendrá —3 de característica. Por razonamientos análogos podremos hacerlo ver en otra fraccion cualquiera.

160. *Conociendo el logaritmo de un número en un sistema dado, fácilmente se comprende como podria determinarse el logaritmo correspondiente al mismo número en otro sistema de base diferente,* pues que siendo dependiente el logaritmo de un número del conocimiento de las dos potencias consecutivas de la base, entre las que se halle comprendido el número propuesto, se espresará por el menor de los dos exponentes de dichas potencias la *característica* de su logaritmo correspondiente; y del cual su *mantisa* será la fraccion que indique su mayor ó meuor proximidad á la una ó á la otra de dichas dos potencias de la base.

Ejemplo: Supongamos que se trata del logaritmo del número 64, que es en los ordinarios 1,806180 el cual queremos obtener en un sistema de logaritmos cuya base sea 8. Observaremos que 64 es precisamente la segunda potencia de 8, luego su logaritmo es 2 enteros de característica y *cero* mantisa.

Como procedimiento general para pasar de el logaritmo de un número en un sistema cuya base es a, á otro cuya base sea A, tendremos presente que tratándose del número n será $n=a^x$ $n=A^{x'}$ de donde $a^x=A^{x'}$ cantidades que siendo iguales, lo serán tambien sus logaritmos, luego

$x \; log.\, a = x' \; log.\, A$ pero $log.\, a = 1$ luego $x = x' \; log.\, A$

y por tanto $x' = x \times \frac{1}{log.\, A}$ lo cual nos espresa claramente que *dado el logaritmo de un número en un sistema se obtiene el logaritmo del mismo número en otro sistema, multiplicando el logaritmo dado por su módulo respectivo, el cual lo constituye una fraccion cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es el logaritmo de la nueva base tomado en el sistema de logaritmos primitivo.*

Formacion, disposicion y aplicacion de las tablas de logaritmos.—Formacion.

161. Llámanse tablas de logaritmos á unos libros en los que se exponen varios números consecutivos, desde el uno hasta cierto limite con sus respectivos logaritmos. Cada sistema de logaritmo requiere sus tablas particulares,

pero como fácilmente se pasa de un sistema de logaritmos á otro, segun lo demostrado, y á mas son las usuales y corrientes las primitivas de Briggs, cuya base es 10, referiremos á ella la construccion de las mismas.

Sabemos que en estas tablas, solamente la base y sus potencias tienen por logaritmo números conmensurables, siendo por tanto, aproximados los logaritmos de los demás números; propongamos hallar *el logaritmo del número 2.* Sabemos que el logaritmo de 1 es cero y el de 10 es 1; por tanto el del número 2, será mayor que cero y menor que 1: si hallamos un *medio diferencial* entre 0 y 1 será $\frac{0+1}{2}=0.5$; y hallando un *medio proporcional* entre 1 y 10

tendremos que $\sqrt{1\times10}=3,162277$

luego log. de $3,162277=0,5$.

El número 2 se halla comprendido entre 1 y 3.162277, y por tanto su logaritmo entre 0 y 0,5; hallando nuevamente un medio diferencial entre estos, tendremos

$$\frac{0+0,5}{2}=0,25,$$

que será el logaritmo del número que resulte del medio proporcional $\sqrt{1\times3,162277}=1,77828$: por tanto log. de $1,77828=0,25$, pero el número 2 se halla comprendido entre 1,77828 y 3,162277, hallando un medio proporcional entre estos y un modo diferencial entre 0,25 y 0,5, nos iremos acercando paulatinamente hasta obtener un medio proporcional cuyo valor sea tan próximo al 2, que lo podamos tomar por este sin error sensible; en cuyo caso su respectivo medio diferencial será el logaritmo pedido: de este modo, despues de 22 interpolaciones de medios proporcionales y medios diferenciales se ha venido á obtener que logaritmo de 2 es 0,301030.

Siendo el logaritmo de un producto de varios factores igual á la suma de los logaritmos de dichos factores (153,) bastará que se obtengan los logaritmos de los números primos; y siendo el logaritmo de un cociente igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, tendremos por ejemplo que siendo $2\times5=10$ y siendo log. de 2 igual 0.301030 será log. de $5=1-0.301030=0,698970$:

conocido el logaritmo de 2 conoceremos los de 4, 8, 16 32, y en general todas sus potencias; los logaritmos de 5, 25, 125, y en general sus potencias; los de los números décuplos de 2 y 5; y tambien los de los números formados solo de estos factores: si además conocemos el logaritmo del otro número con aplicacion de los teoremas expuestos, obtendremos los logaritmos de muchos números mas.

162. Disposicion. Determinados los logaritmos de todos los números primos comprendidos en el número que ha de servir de límite á las tablas, fácilmente, segun lo anteriormente expuesto, se determinan los de todos los compuestos, y si correlativamente y en columna vertical colocamos estos, correspondiéndose con otra que en la misma forma presente los números respectivos, tendremos claramente *dispuestas las tablas de logaritmos* para el uso á que se destinan.

Nota. Las tablas de Logaritmos de mayor importancia son en Francia las de *Callet*, publicadas por Fermin Didot, que contienen los logaritmos de los números del 1 al 108.000 con la aprocsimacion de 7 cifras decimales.

Las de *La Lande*, que contiene los logaritmos de los números del 1 al 10.000, con 5 cifras decimales.

En Inglaterra: las de Edmond Wingate, que fueron publicadas en 1624.

En Italia, las de Cavalleri, publicadas en 1632.

En España se han publicado varias, pero de todas recomendamos y adoptamos las del Excmo. Sr. D. Vicente Vazquez Queipo, última edicion, que contiene los logaritmos del 1 al 20.000, con 6 cifras decimales, edicion esmeradísima y en la cual se expone con gran claridad los logaritmos de los números, y en su segunda parte los logaritmos de las líneas trigonométricas; precedida esta obra de una explicacion sucinta acerca de los logaritmos y sus numerosas aplicaciones, y estando generalmente adoptada para el estudio de esta asignatura, nos dispensarémos de dar amplitud excesiva á esta parte de nuestros estudios.

Creemos oportuno hacer mencion de los modernos y notabilísimos folletos publicados recientemente en Paris, imprenta de Mallet-Bochelier, por su autor A. Bouché, quien por un método ingeniosísimo presenta dos tablas, en las cuales, sin necesidad de hojear y colocadas á los estremos del encerado, pueden hallar los alumnos los logaritmos de los números y los números de los logaritmos con cinco cifras decimales, sin mas trabajo que el conocimiento y disposicion de las tablas por sus líneas é intersecciones.

Además de las dos columuas indicadas, se pone otra nueva, para colocar en ella *las diferencias* entre cada dos logaritmos consecutivos, las cuales tienen aplicacion inmediata para la obtencion de los logaritmos correspondientes á números mayores que el límite de las tablas.

Las tablas del Sr. Vazquez Queipo son llamadas de *doble entrada* por la ventajosa disposicion que ofrecen para buscar fácilmente los logaritmos de estos números, superiores á su límite (20.000) atendiendo, no solo á la columna vertical, sino tambien á la horizontal que se halla al principio y fin de cada dos planas; esta circunstancia no solo es ventajosa para la obtencion de dichos logaritmos, sino tambien para buscar el número que mas proximamente corresponda á un logaritmo dado.

En estas tablas no se expone *la característica* correspondiente á un número, porque ya sabemos que en el sistema décuplo *está dada por un número compuesto de tantas unidades como cifras tenga el número menos una.*

La aproximacion de los logaritmos en las mismas, es hasta *millonésimas.* es decir, con 6 cifras decimales, pero de ellas las dos primeras se exponen á la izquierda y en la parte superior de la primera columna, que comprende logaritmos por ser comunes á todos los logaritmos siguientes; así que las columnas de los logaritmos están solo formadas de los 4 últimos guarismos que corresponde á cada uno de ellos.

Omitimos la esplicacion detallada de estas *Tablas,* no solo por estar estas precedidas de una esplicacion sucinta, sino tambien porque de viva voz y á presencia de las mismas, es mas fácil y espedito su manejo y aplicacion.

163. Aplicacion de las tablas de Logaritmos. *Las tablas de Logaritmos sirven para hallar los Logaritmos de los números y para hallar el número correspondiente á un Logaritmo dado.*

Para saber hallar el logaritmo correspondiente á un número, es necesario tener en cuenta todas las propiedades de las mismas.

Apliquemos prácticamente estas tablas á la resolucion de un cálculo numérico que nos ofrezca el mayor número de dificultades que puedan surgir,

$$\text{sea} \quad x = \frac{(427{,}5)\sqrt{\frac{38}{21}} \times \sqrt[3]{\frac{4}{13}} \times 429876}{(93{,}57)^3 \times 0{,}072}$$

¿Hallar el valor numérico de x?

Log. de 427,5. =	2,630936
Log. de $\sqrt{\frac{38}{21}}$ =	0,128783
Log. de $\sqrt[3]{\frac{4}{13}}$ =	9,829372
Log. de 429876=	5,633342
Comp. Log. $(93{,}57)^3$	4,086589
Comp. Log. de 0,072.	1,142668
Suma. . . .	23,451690

De cuya suma separando las dos unidades del órden superior, conforme lo expuesto en el número (157) quedará 3,451690 cuyo Logaritmo corresponderá á un número mayor que 1000 y menor que 10.000. Las dos primeras cifras de la mantisa son 45 buscándolas en las dos primeras cifras de los logaritmos que están, conforme sabemos, separadas de las demás, y luego las que mas se aproximen á las cuatro últimas 1690 las hallaremos debajo del 9, teniendo á su izquierda en la columna de los números el 282: luego el número correspondiente será $2829=x$.

En obsequio á la brevedad omitimos algunos mas cálculos que pudiéramos proponer para aplicacion de las tablas logarítmicas, puesto que han de ser suplidos con ventaja por los que fueren propuestos en las cátedras públicas.

La resolucion del cálculo precedente nos ha hecho ver:

1.° *Que para hallar el logaritmo correspondiente á un* NÚMERO ENTERO, *observaremos si este escede ó nó al límite de las tablas; en el primer caso, prescindiremos de la última cifra de sus unidades, y ya buscado encontraremos su logaritmo á la derecha en la columna que se encabeza con el guarismo separado.*

Si el número dado para hallar su logaritmo, es superior al límite de las tablas, se separarán de su derecha los guarismos necesarios para que el número que queda á la iz-

quierda esté comprendido en el límite de las Tablas; obtenida la mantisa del Logaritmo de este número, se le añadirá el producto que resulte de multiplicar la diferencia de este logaritmo (con la correspondiente al Logaritmo del número inmediato superior) por las cifras que hubiesen sido separadas; considerándolas como decimales, la suma será la mantisa correspondiente al Logaritmo pedido. La característica, ya sabemos, se determina por el número de guarismos que tenga el número dado menos uno.

Para obtener tambien el Logaritmo correspondiente á un número no comprendido en las tablas, podremos descomponerlo en varios factores tales que ninguno sea mayor que el límite de las tablas, hallar despues los logaritmos de estos factores y la suma de los mismos será el logaritmo pedido, puesto que ya hemos visto que el Logaritmo de un producto de varios factores es igual á la suma de los Logaritmos de sus diferentes factores.

2.° Para obtener el Logaritmo correspondiente á un número fraccionario, observaremos si este es ordinario ó decimal, propio ó impropio.

Para obtener el Logaritmo de un quebrado ordinario impropio, se halla el logaritmo de su numerador y despues se le resta el correspondiente á su denominador, siendo la diferencia el logaritmo pedido.

Para obtener el logaritmo correspondiente á un quebrado propio, se añadirá al logaritmo del numerador el complemento logarítmico del denominador.

Para obtener el logaritmo de una fraccion decimal, se obtendrá su mantisa considerándolo como entero, y para su característica negativa atenderemos á lo ya expresto en el núm. (159).

3.° La obtencion de el logaritmo correspondiente á un número inconmensurable, se obtiene hallando el logaritmo del número sub-radical y dividiéndole luego por el índice de la raiz.

Si nos propusiésemos hallar el logaritmo de un número fraccionario impropio, afecto á un radical, dividiremos el resto producido de restar del logaritmo del numerador el del denominador por el índice de la raiz.

Por último, si el quebrado afecto del signo radical fuese propio, su logaritmo se obtiene fácilmente restando del logaritmo del denominador el del numerador, dividiendo *esta diferencia por el índice radical, y obteniendo luego el complemento logarítmico correspondiente.*

Para dado un logaritmo hallar su numero, ya sabemos que se buscan primeramente las dos primeras cifras de la mantisa, despues buscaremos las que mas se aproximen á las otras cuatro, y si no estuvieren, las cuatro inferiores mas próximas, restaremos estas de aquellas y la diferencia la dividiremos por la cantidad espresada en la columna que empieza dif., *que quiere decir diferencia tabular, debiendo el cociente ser considerado como cifras decimales correspondientes al número pedido.*

* Para las operaciones que se efectúan con los logaritmos se tienen presentes las mismas reglas empleadas con los números decimales.

La suma de varios logaritmos de características negativas y mantisas positivas, se efectúa sumando estas y las unidades enteras que produzcan, restándolas de la suma de sus características. Al resultado se le pone el signo correspendiente.

La diferencia de dos logaritmos de característica negativa y mantisa positiva se obtiene restando las mantisas y cambiando el signo de la característica del sustraendo. A la diferencia se le pondrá el signo correspondiente.

El producto de un número por un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva, se obtiene restando las unidades enteras que lleguen á resultar del producto del entero por la cifra de órden superior de la mantisa de las unidades que tenga el producto de el entero por la característica negativa.

El cociente de dividir un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva, por un número, se obtiene dividiendo la característica por el número, y despues la mantisa. Si esta característica y mantisa no fuese divisible por el número, se añadirán á dicha característica y tambien á la primera cifra de la mantisa, tantas unidades como fueren necesarias para formar de la característica un múltiplo del número dado ó divisor.

CUARTA PARTE.

APLICACIONES ALGEBRAICAS.

Ecuaciones exponenciales.

164. *Llámase* ECUACION EXPONENCIAL *á la que tiene la incógnita por exponente.*

Algunas ecuaciones exponenciales se pueden resolver por medio de los logaritmos.

La forma mas sencilla de estas ecuaciones es $A^x = B$, donde Lg. $A^x =$ Lg. B, y por tanto x. Lg. $A =$ Lg. B, de donde diremos $x = \frac{\text{Lg. } B}{\text{Lg. } A}$.

Sea ahora la ecuacion $A^{b^x} = B$: si en esta suponemos $b^x = y$ tendremos $A^y = B$, en donde

$$y = \frac{\text{Lg. } B}{\text{Lg. } A}, \text{ luego por tanto } b^x = \frac{\text{Lg. } B}{\text{Lg. } A}$$

en la que aplicando de nuevo los logaritmos resultará

$$\text{Lg. } b^x = \text{Lg. Lg. } B - \text{Lg. Lg. } A,$$

y por tanto x. Lg. $b =$ Lg. Lg. $B -$ Lg. Lg. A

y por último $x = \frac{\text{Lg. Lg. } B - \text{Lg. Lg. } A}{\text{Lg. } b}$

Las fórmulas principales de las progresiones geométricas crecientes se expusieron, diciendo:

$$u = aq^{n-1}$$

$$a = \frac{u}{q^{n-1}}$$

$$q^{n-1} = \frac{u}{a}$$

$$S = \frac{uq - a}{q - 1}$$

Si les aplicamos ahora los Logaritmos, diremos:

$$\text{Lg. } u = \text{Lg. } a + (n-1.) \text{ Lg. } q.$$

$$\text{Lg. } a = \text{Lg. } u - (n-1). \text{ Lg. } q.$$

$$(n-1). \text{ Lg. } q = \text{Lg. } u - \text{Lg. } a$$

$$(n-1) = \frac{\text{Lg. } u - \text{Lg. } a}{\text{Lg. } q.}$$

$$\text{Lg. } S = \text{Lg. } (uq - a) - \text{Lg. } (q - 1)$$

165. Resolvamos la siguiente ecuacion exponencial:

Siendo 3 el primer término de una Progresion geométrica creciente, siendo 5038848 el último de la misma, y siendo 6 la razon de la Progresion, se pregunta ¿cuántos términos tiene esta?

$$n-1=\frac{\text{Lg. } u-\text{Lg. } a}{\text{Lg. } q} \quad \text{luego } (n-1)=\frac{\text{Lg. } 5038848-\text{Lg. } 3}{\text{Lg. } 6},$$

de donde

$$\begin{array}{ll} \text{Lg. de } 5.038848=6,702329 & \\ -\text{Lg. de } 3 \quad =-0,477121 & (\text{Lg. } 6=0,778151) \\ \hline \text{Diferencia.} \quad =6,225208 : 0,778151=8 & \end{array}$$

Luego, por último, si $(n-1)=8$ será $n=9$, que son los términos de la progresion.

Interés compuesto.

166. *Segun lo expuesto* (215) *de nuestra Aritmética, se llama* INTERÉS COMPUESTO *correspondiente á un tiempo dado, al producido por un capital prestado á un tanto por 100, y cuyos intereses devengados, en los plazos anteriores (de division de aquel tiempo) fueron aglomerados al capital, produciéndose en los mismos intereses progresivos.*

El Interés simple es producido por solo un capital prestado en un tiempo dado.

El Interés compuesto es producido por un capital que se supone prestado en varios tiempos al mismo sujeto con aumento en cada tiempo.

Interés simple es el rédito de un capital.

Interés compuesto es el rédito de un capital y sus intereses devengados.

El Interés simple es siempre proporcional al capital y al tiempo, durante el cual se verifica el préstamo.

El Interés compuesto no guarda tal relacion de proporcionalidad.

Necesitamos establecer, por tanto, la verdadera relacion que existe entre las cuatro cantidades, c capital impuesto; C al capital c aumentado por su interés compuesto; r, al rédito correspondiente á *una sola unidad*; y por último, t al tiempo durante el cual se cambia c en C.

Un capital, por ejemplo de 10.000 rs. en un plazo dado al 8°/₀ producirá de interés $i=\frac{C\times r}{100}$ conforme ya sabemos; ahora bien, si referimos el rèdito á 1, en vez de ser á 100 unidades, será $i = C \times r$, luego 10.000 al fin de un plazo aumentarán en $10.000 \times 0{,}08 = 800$ rs. (0,08 será el rédito de cada 1, pues si 100:8 será 1:0,08). luego por tanto 10.000 rs. al fin de un plazo al 8°/₀ será: 10.000 al fin de un *plazo* $= 10.000 + 800 = 10.800$ rs., luego

$$C = c + cr = c(1+r)$$

lo cual nos dice que cualquiera que sea el capital se obtiene su aumento multiplicando el mismo por el rédito correspondiente á un año; luego todo capital multiplicado por el factor constante $(1+r)$ nos espresará en conjunto su valor al fin de un plazo.

Si los plazos fuesen dos, sería:

$$C = c(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$

Si fuesen tres los plazos sería

$$C = c(1+r)(1+r)(1+r) = C(1+r)^3$$

y por último estando los plazos ó años espresados por t, será: $C = c(1+r)^t$ de cuya fórmula despejando c, r y t, tendremos que

$$c = \frac{C}{(1+r)^t}$$

$$(1+r)^t = \frac{C}{c}$$

$$(1+r) = \sqrt[t]{\frac{C}{c}}$$

Aplicando los logaritmos, tendremos:

$$Lg.C = Lg.c + t \times Lg.(1+r)$$

$$Lg.c = Lg.C - t \times Lg.(1+r)$$

$$t \times Lg.(1+r) = Lg.C - Lg.c$$

$$t = \frac{Lg.C - Lg\ c}{Lg.(1+r)}$$

$$Lg\ (1+r) = \frac{Lg.C - Lg.c}{t}$$

cuyas fórmulas aplicaremos á la resolucion de los PROBLEMAS siguientes:

167. 1.er *Problema.* Un capital de 42.000 rs., impuesto al 10 °/₀ anual de interés compuesto, se pregunta, al fin de tres años qué capital importará?

$$C = c(1+r)^t \quad \text{luego} \quad Lg.C = Lg.c + t \times Lg.(1+r)$$

$$Lg.C = Lg\ 42.000 + 3 \times Lg\ 1{,}1 = 4{,}623249 + 0{,}124179 = $$
$$= 4{,}747428.$$

A este logaritmo le corresponde el número 55.902 rs. que espresa el capital total, siendo la ganancia líquida igual á $55.902 - 42.000 = 13.902$.

2.° *Problema.* ¿Qué capital impuesto al 12 °/° de interés compuesto, por espacio de 5 años, es capaz de convertirse en 100.000 reales?

$$c = \frac{C}{(1+r)^t} \quad \text{luego} \quad Lg.c = Lg.C - t \times Lg.(1+r)$$

por tanto, $Lg.c = Lg.100.000 - 5.Lg.1{,}12.$

$Lg.c = 5 - 0,246090 = 4,753910$, cuyo logaritmo corresponde al número 56.742 que es el capital impuesto. La ganancia será $100.000 - 56742 = 43258$

3.^er *Problema.* Cuánto tiempo necesita estar impuesto á interés compuesto un capital de 36.000 al 9 °/₀ para que llegue á ser de 80.000 reales?

$$t = \frac{Lg.C - Lg\,c}{Lg.(1+r)} \quad \text{Luego} \quad t = \frac{Lg.80.000 - Lg.36.000}{Lg.\ 1{,}09}$$

$$t = \frac{4.903090 - 4{,}556303}{0{,}037426} = 9{,}26$$

que equivale á 9 años +3 meses+5 dias.

4.° *Problema.* ¿A qué rédito estuvo impuesto un capital de 90.000 rs. para que al cabo de 7 años se hubiese convertido en 126.500 reales?

$$\text{Lg. } (1+r) = \frac{\text{Lg. } C - \text{Log. } c}{t} = \frac{\text{Lg. } 126500 - \text{Lg. } 90.000}{7} =$$

$$= \frac{5{,}102091 - 4{,}954243}{7} = 0{,}021121$$

cuyo Logaritmo espresa que el rédito es mayor que 4 y menor que 5 °/₀.

Variando los datos en cada uno de los 4 problemas anteriores podremos resolver cuantos problemas se quieran. (1).

Descuento compuesto.

168. Los Descuentos é Intereses compuestos no son de uso en la práctica, estando sobre todo prohibidos por el Código de comercio. Exponemos sin embargo, las fórmulas que resuelven los Problemas que pudieran presentarse por su aplicacion á los Logaritmos.

El Descuento compuesto es aplicable á determinar el quebranto que sufre un capital por ser percibido varios plazos antes de su vencimiento y aplicando un tanto por ciento á cada uno.

Si llamamos *C al capital total; c al capital efectivo*

(1) Si el tiempo fuese espresado por años, meses ó dias, hallariamos el rédito correspondiente á cada año, mes ó dia y aplicariamos las fórmulas expuestas.

que ha de percibirse; r *al rédito ó tanto por ciento correspondiente á cada plazo,* y t *al tiempo, ó mejor, al número de plazos que se anticipa el pago*, tendremos que: $c=C-Cr=C(1-r)$ al fin del 1.er plazo; $c=C(1-r)(1-r)$ al fin del 2.° plazo; $c=C(1-r)(1-r)(1-r)=C(1-r)^3$ al fin del 3.er plazo, y por último al fin de un número t de plazos será $c=C(1-r)^t$ de donde $C=\frac{c}{(1-r)^t}$ y

$$(1-r)^t=\frac{c}{C} \qquad (1-r)=\sqrt[t]{\frac{c}{C}}$$

fórmulas en las que aplicando los Logaritmos

$$\text{Log. de } c=\text{Log. } C+t\times\text{Log. }(1-r)$$

$$\text{Log. } C=\text{Log. } c-t\text{ Log. }(1-r)$$

$$t\text{ Log. }(1-r)=\text{Log. } c-\text{Log. } C$$

$$t=\frac{\text{Log. } c-\text{Log. } C}{\text{Log. }(1-r)}$$

$$\text{Log. }(1-r)=\frac{\text{Log. } c-\text{Log. } C}{t}$$

Si suponemos conocidas 3 de estas 4 cantidades y aplicamos los logaritmos, resolveremos todos los problemas correspondientes al *descuento compuesto.*

* Anualidades.

169. *Llámanse* ANUALIDADES *á unos pagos iguales que se satisfacen al fin de ciertos plazos de tiempo iguales, con el propósito de estinguir un Capital y sus intereses compuestos.*

Llámanse anualidades, por verificarse generalmente estos pagos anualmente, pero puede ser al final de cada semestre, trimestre ó mes.

La condicion principal que deben cumplir es, que la reunion de todas las anualidades sea una suma tal que amortice ó estinga todo el capital prestado con los respectivos intereses compuestos que correspondan al mismo.

Los problemas dependientes de esta cuestion son muy numerosos, interesantes y frecuentes, mas conocidos hoy ya que lo eran anteriormente, por cuya circunstancia creemos que en rigor no deben ser omitidos.

En todos los problemas de esta clase, de la misma manera que en los referentes á los intereses y descuentos compuestos entran cuatro cantidades: el *capital*, el *tanto por ciento*, el *número de años ó de plazos* y la *anualidad;* representando por c al capital, por r al tanto por uno anual, por t al número de años y por a la anualidad, tratemos ahora de establecer la relacion que liga entre sí estas cuatro cantidades.

Recibido el capital c, el deudor, al cabo de t años tiene que satisfacer $c(1+r)^t$ segun ya sabemos; para satisfacer á un acredor C, ó lo que es lo mismo $c(1+r)^t$ ha de satisfacer al fin de cada plazo la anualidad a, que aunque son iguales siempre, como el tiempo en el que se satisface es diferente, claro es que debe considerarse cada una como un pago anticipado, produciéndose por esta razon y á favor del deudor, los intereses compuestos correspondientes.

Prestado un capital por t años; para ser satisfecho por el deudor la primera anualidad debe trascurrir un año, luego aunque el valor efectivo de la primera anualidad sea a, el que verdaderamente debe asignársele es $a(1+r)^{t-1}$ A la segunda anualidad le asignaremos análogamente $a(1+r)^{t-2}$. A la tercera $a(1+r)^{t-3}$ y así sucesivamente; la penúltima será $a(1+r)$ y la última a.

Por tanto, como el conjunto de todas ellas extingue el capital prestado con sus intereses compuestos tendremos que $a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+a(1+r)^{t-3}+\ldots\ldots\ldots$
$$+a(1+r)^2+a(1+r)+a=c(1+r)^t$$

Si observamos detenidamente el primer miembro de esta igualdad, observaremos es una verdadera *progresion geométrica decreciente*, la que expuesta inversamente, pues que el órden de los sumandos no altera la suma, tendremos que: $a+a(1+r)+a(1+r)^2+\ldots\ldots$
$$+a(1+r)^{t-3}+a(1+r)^{t-2}+a(1+r)^{t-1}=c(1+r)^t$$
en cuyo primer miembro tenemos una progresion geométrica creciente, cuyo primer término es a, cuya razon es $(1+r)$, cuyo último tèrmino es $a(1+r)^{t-1}$

Si recordamos la fórmula correspondiente á la suma de todos los términos de esta progresion, expuesta en (193) observaremos dice:

$S=\dfrac{uq-a}{q-1}$ en la cual sustituyendo $c(1+r)^t$ por S,

$a(1+r)^{t-1}$ por u, $(1+r)$ por q y a por a, tendremos

$$c(1+r)^t=\frac{a(1+r)^{t-1}(1+r)-a}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)^t-a}{r}=$$

$$=\frac{a((1+r)^t-1)}{r}$$

igualando el primer miembro con el cuarto de estas igualdades, y teniendo en cuenta que cociente por divisor es igual á dividendo, tendremos la fórmula general

$cr(1+r)^t=a((1+r)^t-1)$ en la cual

$$c=\frac{a((1+r)^t-1)}{r(1+r)^t} \qquad a=\frac{cr(1+r)^t}{((1+r)^t-1)}$$

Fórmulas que determinan el valor del *capital* y de la *anualidad.*

Si la incógnita fuese el *tiempo* t, de igualar el primer miembro con el tercero y ser producto del cociente por divisor igual á dividendo, tendremos que:

$cr(1+r)^t=a(1+r)^t-a$ partiendo los dos miembros de esta igualdad por $(1+r)^t$, tendremos:

$$cr=a-\frac{a}{(1+r)^t}$$ añadiendo á ambos miembros

$$\frac{a}{(1+r)^t}$$ será: $$cr+\frac{a}{(1+r)^t}=a$$

restando ahora de ambos miembros cr tendremos que:

$$\frac{a}{(1+r)^t}=a-cr$$

y como cociente por divisor igual dividendo, tendremos:

$a=(a-cr)(1+r)^t$ despejando $(1+r)^t=\dfrac{a}{a-cr}$

y aplicando los logaritmos tendremos que:

$$t=\frac{Lg.a-Lg.(a-cr)}{Lg.(1+r)}$$

Si por último fuese la incógnita *el rédito* r, tendríamos que resolver una ecuacion del grado $t+1$, lo cual no podemos realizar por sola la aplicacion de los logaritmos sin el conocimiento prévio del Algebra Superior.

170. Para la inmediata aplicacion de las fórmulas pre-

cedentes espondremos á continuacion los 4 problemas siguientes, en los que aparecen como incógnitas respectivamente la *anualidad*, el *capital*, el *tiempo* y el *tanto por ciento*.

PROBLEMA 1.° *Sea la incógnita la anualidad. Qué* ANUALIDAD *deberá satisfacerse para que en 6 años se extinga una deuda de 80.000 rs. al 4 por 100 anual.*

Aplicando los logaritmos á la fórmula que expresa el valor de la anualidad, tendremos que esta equivale á 15260,8.

2.° PROBLEMA. *Sea la incógnita el capital. En 12 años ¿qué* CAPITAL *se extinguirá pagando anualmente 4000 rs. al interés compuesto del 5 por 100?*

Aplicando á su fórmula respectiva los logaritmos, obtendremos que el capital extinguido será de 35.451,5 rs.

3.^{er} PROBLEMA. *Sea la incógnita el tiempo. Suponiendo que un capital de 46000 rs. y sus intereses compuestos al 6 por 100 ha sido estinguido con una anualidad de 6249 rs., se pregunta ¿qué* NÚMERO DE AÑOS *se estuvo satisfaciendo referida anualidad?*

Aplicando los logaritmos á su fórmula respectiva obtendremos que el tiempo serán 10 años.

171. Para el cuarto problema, *siendo la incógnita el rédito ó tanto por ciento*, cuya resolucion precisa el conocimiento del Algebra superior, puede obtenerse mas fácilmente, así como la resolucion de los problemas anteriores, por el *principio de proporcionalidad*, si tenemos en cuenta el siguiente cuadro, que expresa:

La anualidad que se debe percibir ó pagar al fin de cada año, desde 1 á 12, para estinguir un préstamo ó empréstito de 1000 rs. con sus intereses compuestos al 2, 3, 4, 5 ó 6 por 100 anual.

Años.	2 por 100.	3 por 100.	4 por 100.	5 por 100.	6 por 100.
1	1020	1030	1040	1050	1060
2	515,05	522,61	530,20	537,81	545,44
3	346,76	353,53	360,35	367,21	374,11
4	262,62	269,03	275,50	282,02	288,60
5	212,16	218,36	224,63	230,98	237,40
6	178,53	184,60	190,76	197,02	203,36
7	154,51	160,51	166,61	172,82	179,14
8	136,51	142,46	148,53	154,72	161,04
9	122,52	128,43	134,49	140,70	147,02
10	111,33	117,23	123,30	129,51	135,87
11	102,18	108,08	114,15	120,40	126,79
12	94,56	100,46	106,55	112,83	119,28

Con aplicacion del espresado cuadro, propongamos ahora el PROBLEMA 4.°: *Siendo la incógnita el rédito.*

Habiendo pagado durante siete años una anualidad de 17.282 reales, hemos estinguido un capital de 100.000 rs.; se desea saber el rédito anual que correspondió al mismo.

Diremos si $100.000:17.282::1.000:x$ donde $x=172{,}82$. Busco en el cuadro á la derecha de los siete años el numero que mas se aproxime al dado, y lo encuentro justo en la penúltima columna vertical que tiene arriba el 5 °/₀ y este será el rédito pedido.

De una manera análoga y sencillísima resolveriamos los problemas propuestos anteriormente, así como tambien cuantos mas pudieran proponerse

Rentas vitalicias.

172. *Se llaman* RENTAS VITALICIAS *las anualidades que se perciben por un capital satisfecho y que se estinguen con la vida del prestador.*

Todas las cuestiones referentes á esta teoría se resuelven por aplicacion de las mismas fórmulas que nos han servido en la teoría precedente, y aunque no es conocida de antemano, la duracion ó vida de un individuo que pretenda sujetar su haber á cierta renta ó anualidad, satisfaciendo con antelacion un capital, se calcula fácilmente con aplicacion de las llamadas tablas de mortalidad, en la cual se nos indica la vida probable de un individuo, conocida su edad. Dichas tablas no pueden en modo alguno referirse exactamente á un solo individuo, pero están comprobadas como exactas para muchos, puesto que unos ganan en existencia lo que otros pierden.

La formacion de estas tablas de mortalidad se establece fácilmente. Si, por ejemplo, se nos propone cuál es la vida probable de un individuo de 40 años, con los datos estadísticos necesarios, observaremos en ellos, cuando 50 individuos de 100 y espresada edad llegan á fallecer; y verificándose esto á los 26 años y 6 meses, resultará que de 100 individuos de 40 años, llegan 50 á cumplir $40+26,5=$ 66.5 años y los otros 50 mueren antes de cumplir espresada edad, verificándose que la suma de los tiempos en que aquellos 50 individuos esceden de los 66,5 años es con regularidad igual á la suma de los tiempos que á los otros 50 individuos les faltaba para cumplir espresada edad. Luego la vida probable de un individuo de 40 años serán 26 años y seis meses.

Llamamos, por tanto, *vida probable* de un individuo, al tiempo que ha de transcurrir para que fallezcan la mitad de los que tengan su misma edad.

Varias tablas de mortalidad tenemos á la vista, siendo entre ellas las de mayor uso para la resolucion de todas estas cuestiones, las de *Kerseboon* y las de *Demonferrand*; sin embargo, como referidas á paises ó nacionalidades cuyos climas y condiciones biológicas son diferentes de nuestra hermosa Península, no deben ser aplicables entre nosotros, por cuya razon exponemos á continuacion las que han sido formadas con arreglo á algunos datos obtenidos en el último censo de poblacion, y aunque por referirse solo á una localidad no pueden ser aplicables en general, sin embargo, entre nosotros las podemos considerar como mas aproximadas que las anteriores, por mas que lleguen á sufrir algunas modificaciones.

Edad.	Vida probable.	Edad.	Vida probable.	Edad.	Vida probable.
1	44	33	32,5	65	8,6
2	50	34	31,5	66	8
3	52	35	30,5	67	7,5
4	53	36	29,8	68	7
5	54	37	29	69	6,6
6	53,5	38	28	70	6,2
7	53	39	27,4	71	5,7
8	52,5	40	26,5	72	5,4
9	52	41	25,7	73	5
10	51	42	25	74	4,7
11	50,5	43	24	75	4,5
12	50	44	23,5	76	4,3
13	49	45	22,5	77	4
14	48	46	22	78	3,7
15	47	47	21	79	3,5
16	46	48	20,5	80	3,2
17	45,5	49	20	81	3
18	45	50	19	82	2,8
19	44	51	18	83	2,7
20	43	52	17,2	84	2,6
21	42	53	16,5	85	2,5
22	41	54	15,7	86	2,3
23	40	55	15	87	2,1
24	39,5	56	14,5	88	2
25	38,5	57	13,6	89	1,7
26	38	58	13	90	1,5
27	37	59	12,3	91	1,4
28	36,5	60	11,5	92	1,3
29	35,5	61	11	93	1,2
30	34,5	62	10,5	94	1,1
31	34	63	10	95	1
32	33	64	9,2		

Conocidas estas tablas y las fórmulas anteriores, varios son los problemas que podemos proponer para aplicacion de esta Teoría.

1.° *Dada la actual edad de una persona y el capital de que dispone*, determinar la anualidad que tendria *á un rédito propuesto.*

2.° *Dada la edad de un individuo y sabido la anualidad ó sueldo que precisa*, determinar *á un rédito dado*, el capital *necesario á producir expresada anualidad.*

3.° *Determinar* la bien diferente anualidad *que como renta vitalicia corresponderá á un sujeto de 50 años y á otro de 70, siendo uno mismo el capital de imposicion y rédito respectivo.*

4.° *Calcular* la edad *que tendria una persona, sabido la anualidad que percibe, el capital impuesto á este objeto, y el rédito correspondiente.*

Nota. Para el completo estudio de todas las cuestiones referentes al Interés compuesto, anualidades atrasadas, arbitrarias ó irregulares, intereses de cada una de las anualidades, Imposiciones, amortizaciones simples y compuestas, rentas vitalicias de todas clases, pagarés, cambios, Arbitrajes, etc., y otros muchos é importantísimos problemas, véase el Suplemento de las Tablas de Logaritmos del Señor Vazquez Queipo.

FÉ DE ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
95	1.ª	*y partido este*	*y partido todo esto*
131	3.ª	$360:t::i:t\ y$	$360:t::i:y$
171	1.ª	$a^{\frac{6}{3}}-a^2$	$a^{\frac{6}{3}}=a^2$
204	6.ª	$4x+2y=14$	$4x-2y=14$

ÍNDICE.

Páginas.

ARITMÉTICA.

ALGEBRA.

Páginas.

Burillo

Matematicas