E. ROUCHE

GEOMETRÍA ELEMENTAL

Luis Hoyos Sáinz

1886

194 = Exagono de Brianchon
Pascal

¿Si los lados no son paralelos y por tanto a no llevar la demostracion a los en el Ex regular?

NOTAS

AL

TRATADO DE GEOMETRIA ELEMENTAL

DE

E. ROUCHÉ Y CH. DE COMBEROUSSE

NOTAS AL TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL

DE

E. ROUCHÉ Y CH. DE COMBEROUSSE

POR

A. PORTUONDO
INGENIERO DE CAMINOS

SEGUNDA EDICION, REVISADA Y AUMENTADA

PARA EL USO DE LOS CANDIDATOS Á LAS ESCUELAS ESPECIALES
CIVILES Y MILITARES

MADRID
IMPRENTA DE ENRIQUE TEODORO
calle de Atocha, núm. 80

1881

ÍNDICE

GEOMETRIA PLANA

NOTA 1.ª (de la pág. 11).

NOTA 2.ª (de la pág. 25).

NOTA 3.ª (de la pág. 27).

NOTA 4.ª (de la pág. 31).

NOTA 5.ª (de la pág. 32).

NOTA 6.ª (de la pág. 37).

Páginas.

NOTA 7.ª (de la pág. 38).

NOTA 8.ª (de la pág. 51).

NOTA 9.ª (de la pág. 57).

NOTA 10 (de la pág. 104).

NOTA 11 (de la pág. 106).

NOTA 12 (de la pág. 122).

NOTA 13 (de la pág. 132).

NOTA 14 (de la pág. 135).

NOTA 15 (de la pág. 154).

POLÍGONOS REGULARES DE ESPECIE SUPERIOR.

Páginas.

NOTA 16 (de la pág. 158).

NOTA 17 (de las págs. 161 y 162).

NOTA 18 (de la pág. 168).

NOTA 19 (de la pág. 180).

NOTA 20 (de la pág. 260).

Páginas.

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

NOTA 21 (de la pág. 290).

NOTA 22 (de las págs. 297 y 298).

NOTA 23 (de la pág. 303).

NOTA 24 (de la pág. 307).

Páginas.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ESFÉRICA.

POLÍGONOS ESFÉRICOS.

NOTA 29 (de la pág. 474).

ERRATA.

Pág. 70. { Dice. . . . . . NOTA 28 (de la pág. 415)
{ Debe decir . . NOTA 28 (de la pág. 417).

ADVERTENCIA

Al publicar esta segunda edicion de las NOTAS AL TRATADO DE GEOMETRÍA *de MM. Rouché y Comberousse*, he añadido algunas (reducidas á cuatro palabras) para llamar la atencion sobre la verdad de los recíprocos de algunos teoremas; la certeza del recíproco da carácter de *esencial* á la propiedad que se estudie en un teorema, y por eso conviene hacerla constar.

En las **Notas 2.ª, 18, 32** rectifico algunas ligeras inexactitudes ó faltas de rigor que, en mi entender, hay en el *Tratado de Geometría*.

Es algo extensa la **Nota 15**, para completar el estudio de los polígonos regulares de especie superior; tambien lo son las **Notas 21 y 22**, en que se estudian los teoremas del paralelismo y la perpendicularidad de rectas y planos en el espacio por medio de sus proyecciones ó sus trazas sobre un plano, porque estos teoremas aparecen muy incompletos en el *Tratado de Geometría*. Me he detenido bastante en la **Nota 28**, que trata de la esfera, para completar su estudio y discutir detalladamente algunos problemas importantes, acerca de los cuales hay tan sólo ligeras indicaciones en la obra que anotamos.

La definicion de número inconmensurable reclama indispensablemente una demostracion; damos en la **Nota 9.ª** la propuesta por MM. Rouché y Comberousse.

Las demas **Notas** contienen observaciones, ampliaciones ó discusiones que son de utilidad para el estudiante, ó que éste no puede hacer fácilmente por sí mismo.

Debo advertir que, cuando no se cite figura alguna, se hace referencia á la del *Tratado de Geometría.*

A. PORTUONDO.

Madrid Enero de 1881.

GEOMETRÍA PLANA.

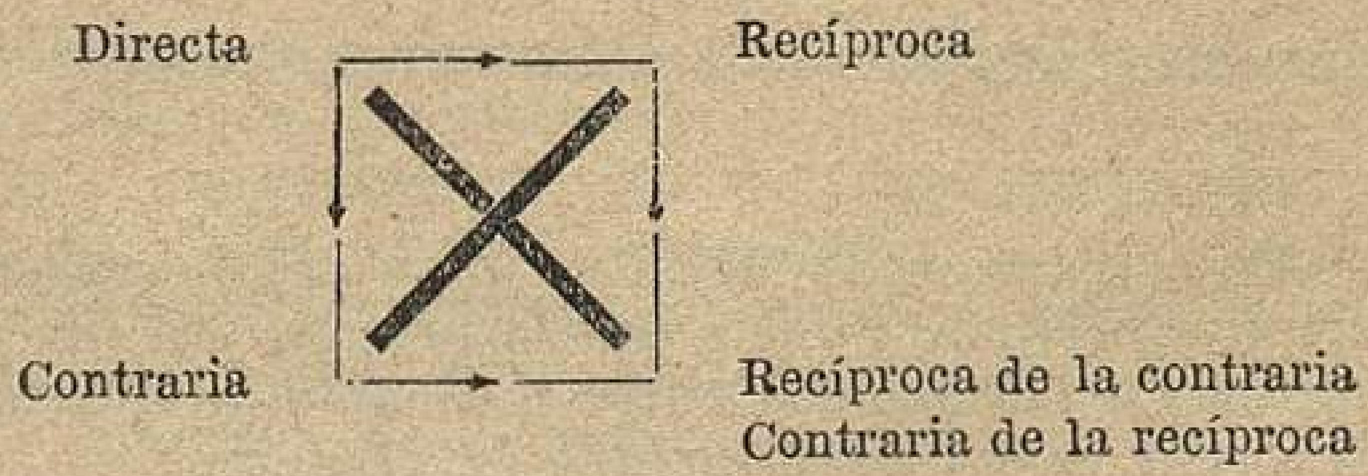
NOTA 1.ª (de la pág. 11).

Es cierta la proposicion *recíproca* que dice:

Si las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí, dichos ángulos son suplementarios; porque siendo la suma de las mitades de los dos ángulos adyacentes igual á un recto, la suma de los ángulos mismos valdrá el doble, es decir, dos rectos.

NOTA 2.ª (de la pág. 25).

La relacion ó dependencia lógica que hay entre una sencilla proposicion directa, su recíproca, su contraria y la recíproca de su contraria ó contraria de su recíproca (que es una misma), es la siguiente:



La proposicion *directa* y la *recíproca de su contraria* se entrañan mútuamente de tal modo, que la verdad de la una implica *necesariamente* la verdad de la otra(*). Así, por ejemplo, demostrada la proposicion *directa:*

Si un punto está situado en la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados, es *necesariamente* cierta *la recíproca de su contraria,* que dice:

Si un punto no equidista de los lados de un ángulo, no está en su bisectriz; porque si estuviera en ella equidistaría de los lados segun la directa. Asimismo, si la proposicion última fuera demostrada *directamente*, la primera (recíproca de la contraria de esta última) sería *necesariamente* cierta.

Análogamente, la proposicion *recíproca* y la *contraria* de una proposicion cualquiera se entrañan mútuamente de tal modo, que la verdad de la una implica *necesariamente* la verdad de la otra. Así, por ejemplo, la verdad de la proposicion:

Si un punto equidista de los lados de un ángulo está situado en su bisectriz, lleva *necesariamente* consigo la verdad de esta otra:

Si un punto no está situado en la bisectriz de un ángulo, no equidista de sus lados; porque si equidistase de los lados, estaría situado en la bisectriz, segun la proposicion anterior.

Y viceversa: la verdad de la última lleva *necesariamente* consigo la verdad de la primera.

Notando que una cualquiera de las cuatro proposiciones puede ser lógicamente mirada como directa, diremos, en vista de lo que precede, que:

Si se demuestran separadamente

DIRECTA Y RECÍPROCA,

ó bien

DIRECTA Y CONTRARIA,

quedan establecidas las cuatro proposiciones.

(*) En el Tratado de MM. Rouché y Comberousse hay, como se ve, alguna inexactitud al decir que la proposicion directa, su recíproca y la contraria están ligadas entre sí de manera que *una cualquiera de las dos últimas es una consecuencia de las otras dos.*

NOTA 3.ª (de la pág. 27).

TEOREMA.

Cuando dos rectas son paralelas, toda perpendicular á una de ellas es tambien perpendicular á la otra.

Conviene hacer notar que este teorema es *el recíproco parcial* (*) del siguiente:

Dos rectas perpendiculares sobre una tercera, son paralelas. Las dos propiedades contenidas en la hipótesis de este teorema son una misma, y por eso los dos recíprocos parciales que admite equivalen en el fondo á *uno solo*, que es el enunciado primeramente.

Merece notarse entre los *contrarios parciales* la siguiente proposicion, que sirvió de *postulado* á Euclides para fundar la teoría de rectas paralelas:

Si una recta es perpendicular y otra no lo es á una tercera recta, tienen que cortarse; porque si fueran paralelas, siendo una de ellas perpendicular á la tercera recta, la otra habría de serlo tambien (en virtud del recíproco), contra lo supuesto.

NOTA 4.ª (de la pág. 31).

Es cierta la proposicion recíproca que dice:

Si dos ángulos son iguales ó suplementarios, y tienen dos de

(*) Cuando la hipótesis de un teorema directo contiene dos propiedades, llamaremos *recíprocos parciales* de él los que se forman adoptando como hipótesis: la conclusion del directo unida á una de las propiedades de su hipótesis — y como conclusion: la otra propiedad de dicha hipótesis. Llamaremos *contrarios parciales* los que se forman adoptando como hipótesis: una de las propiedades de la hipótesis del directo unida á la contraria de la otra propiedad; — y como conclusion: la contraria de la conclusion del directo.

Se ve desde luego que un teorema de este género admite en general dos recíprocos parciales y dos contrarios parciales.

Para más detalles véase el final de la **NOTA 22.**

sus lados paralelos, los otros dos lo serán tambien; porque si no lo fueran, se podría trazar por el vértice de uno de los ángulos una recta paralela al lado del otro ángulo, y se tendrían por una parte en virtud de la hipótesis, y por otra en virtud del teorema directo dos ángulos iguales á un tercero, ó suplementarios de un tercero, y que no serían iguales entre sí, lo cual es absurdo.

NOTA 5.ª (de la pág. 32).

Es cierta la proposicion recíproca que dice:

Si dos ángulos son iguales ó suplementarios, y tienen dos de sus lados perpendiculares, los otros dos serán tambien perpendiculares. La demostracion es idéntica á la del recíproco anterior. (NOTA 4.ª)

Para precisar los casos en que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son *suplementarios* ó *iguales*, conviene observar que:

Si por el vértice O de un ángulo AOB *(figs. 1.ª* y *2.ª)* se levanta la perpendicular OA′ al lado OA, en la misma region del plano en que está el lado OB (una recta separa siempre en el plano dos regiones), y tambien se levanta la perpendicular OB′ al lado OB, en la misma region en que está el lado OA, el ángulo A′OB′ es *suplementario* de AOB, porque es de diferente especie que éste; así, en la figura 1.ª, en que el ángulo AOB es agudo, el A′OB′ es obtuso, como mayor que el recto A′OA ó B′OB; y en la figura 2.ª, en la cual el ángulo AOB es obtuso, el A′OB′ es agudo, como menor que el recto A′OA ó B′OB.

En vista de esto, un ángulo cuyos lados sean respectivamente perpendiculares á los del ángulo AOB, será *suplementario de éste* si sus lados están dos á dos dirigidos *en los mismos sentidos* ó *en sentidos contrarios* que los del ángulo A′OB′ formado como acabamos de decir; y será *igual al* AOB si tiene un lado en el mismo sentido y otro en sentido contrario con respecto al ángulo A′OB′.

NOTA 6.ª (de la pág. 37).

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono cóncavo es igual al número $2n-4$ (siendo la unidad el ángulo recto), *si* n *es el número de lados del polígono.*

En efecto: llegaremos á un polígono cóncavo cualquiera P *(fig. 3.ª)* si partimos de un cierto polígono convexo y reemplazamos sucesivamente un lado ó un segmento de lado por una quebrada de dos rectas. Demostremos, pues, que si en un polígono en el cual se verifique el teorema hacemos una de estas modificaciones, el teorema subsiste.

1.º Sea el polígono ACDEF *(fig. 4.ª)* en el cual va á ser reemplazado el lado AC por la quebrada ABC. El polígono ACDEF tendrá $n-1$ lados, y la suma de las medidas de sus ángulos es

$$2(n-1)-4=2n-6:$$

se obtendrá la suma de las medidas de los ángulos del polígono ABCDEF quitando á la anterior las medidas de los ángulos BAC y BCA, y añadiendo la del entrante B, que equivale á 4—ABC. Así,

$$S=(2n-6)-BAC-BCA+4-ABC=2n-4.$$

2.º Sea el polígono DEFGH *(fig. 5.ª)* en el cual va á ser reemplazado el segmento AC por la quebrada ABC. El polígono DEFGH tendrá $n-3$ lados, y la suma de las medidas de sus ángulos es

$$2(n-3)-4=2n-10:$$

se obtendrá la suma de las medidas de los ángulos del polígono ABCDEFGH aumentando la anterior en

$$(2-\mathrm{BAC})+(4-\mathrm{ABC})+(2-\mathrm{BCA})=6.$$

Así,

$$\mathrm{S}=(2n-10)+6=2n-4.$$

El lector verá fácilmente las transformaciones sucesivas en la figura 3.ª como en cualquier otro polígono cóncavo.

La suma algebráica de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono cóncavo, es igual al número constante 4 (siendo siempre la unidad el ángulo recto), si se consideran como sumandos *negativos* los exteriores que corresponden á ángulos entrantes.

En efecto, prolongando todos los lados del polígono cóncavo ABCDEFG *(fig. 6.ª)* en los sentidos mismos en que suponemos recorrido el perímetro, si representamos por B, C, D, E, F, G, A los números de medida de los ángulos interiores, y por b, c, d, e, f, g, a los números de medida de los exteriores, se ve que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{B}+b=2 \\ \mathrm{C}-c=2 \\ \mathrm{D}+d=2 \\ \mathrm{E}+e=2 \\ \mathrm{F}-f=2 \\ \mathrm{G}-g=2 \\ \mathrm{A}+a=2 \end{array}\right\},$$

y por tanto,

$$\mathrm{S}+[b-c+d+e-f-g+a]=2n;$$

de donde

$$[b-c+d+e-f-g+a]=2n-\mathrm{S}=2n-(2n-4)=4.$$

Esta importante propiedad es más claramente percibida si se imagina que una recta OB′ paralela á AB′ (*figs. 6.ª y 7.ª*) y en el mismo sentido que ella gire alrededor del punto fijo O, en magnitudes angulares iguales á los ángulos *exteriores* del polígono, pasando á ser paralela á cada uno de los sucesivos lados BC, CD, DE,..., y en los mismos sentidos en que estos son recorridos: gira primero la magnitud angular $B'OC' = b$ en el sentido (que adoptamos como positivo) en que lo hacen las agujas de un reloj; despues en sentido negativo (retrocede) la magnitud angular $C'OD' = c$; luego en sentido positivo (avanza) la magnitud angular $D'OE' = d$, y así sucesivamente; la penúltima posicion que ocupa la recta móvil es OA′, y al girar la magnitud angular $A'OB' = a$ en sentido positivo (avanzando), vuelve á la posicion OB′ de que partió, despues de haber dado *una vuelta entera* alrededor del punto fijo O. Cuando el polígono es *convexo*, es decir, que no tiene ningun ángulo entrante, los ángulos exteriores son suplementos *positivos* de los ángulos del polígono, y, por consiguiente, la recta móvil da *la vuelta entera* alrededor del punto fijo O, avanzando por giros sucesivos, que tienen lugar siempre en el mismo sentido (sumandos positivos).

NOTA 7.ª (de la pág. 38).

Se demuestra fácilmente que el punto *o* en que se cortan las diagonales de un paralelógramo es un *centro*; es decir, que divide en dos partes iguales á toda recta que pase por él y esté limitada en el contorno ABCD.

En efecto, si se considera una recta cualquiera MON, los triángulos opuestos MOB y NOD, ó bien los MOA y NOC, son iguales por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales; luego $OM = ON$.

NOTA 8.ª (de la pág. 51).

Son ciertos los tres recíprocos siguientes:

1.º *Si dos cuerdas interceptan arcos iguales sobre una circunferencia* (y no se cortan en el interior de ésta), *son paralelas.*

2.º *Si una cuerda y una tangente interceptan arcos iguales, son paralelas.*

3.º *Si dos tangentes interceptan arcos iguales, son paralelas.*

En efecto:

1.º Si se une el centro con el punto medio de una de las cuerdas, este diámetro será perpendicular á ella y dividirá al arco subtendido en dos partes iguales; por consiguiente, añadiendo ó quitando los arcos interceptados, que son iguales por hipótesis, se ve que el citado diámetro pasa por el centro y por el punto medio del arco subtendido por la otra cuerda, y por tanto será perpendicular á ésta; las dos cuerdas serán, pues, paralelas, como perpendiculares á una misma recta.

2.º Si se une el centro con el punto de contacto, este diámetro será perpendicular á la tangente; pero además este diámetro pasa por el centro y por el punto medio del arco, y será, por tanto, perpendicular á la cuerda; la tangente y la cuerda serán, pues, paralelas, como perpendiculares á una misma recta.

3.º Si se une el centro con uno de los puntos de contacto, este diámetro será perpendicular á la tangente; pero como este diámetro ha de dividir á la circunferencia en dos partes iguales, tendrá que pasar por el otro punto de contacto y será, por tanto, perpendicular á la otra tangente; las dos tangentes serán, pues, paralelas, como perpendiculares á una misma recta.

NOTA 9.ª (de la pág. 57).

Para que la definicion de número inconmensurable pueda aceptarse, hay que *demostrar* que los números $\frac{k}{n}$ y $\frac{k+1}{n}$ tienden hácia un *límite*, y que este límite es el mismo, cualquiera que sea la ley segun la cual se haga crecer indefinidamente á n. O más brevemente: *hay que demostrar que el límite existe y que es único.*

La demostracion que proponen MM. Rouché y Comberousse está dividida en dos partes:

1.ª *Si* $\frac{k}{n}$ *es el número que expresa la medida de* G *en ménos de* $\frac{1}{n}$, *y* $\frac{k'}{nm}$ *es el número que la expresa en ménos de* $\frac{1}{nm}$, *el segundo número es igual ó mayor que el primero* (suponiendo que n y m son dos números enteros cualesquiera).

En efecto, si U es la magnitud *unidad*, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} k.\dfrac{\mathrm{U}}{n} < \mathrm{G} < (k+1).\dfrac{\mathrm{U}}{n} \\ k'.\dfrac{\mathrm{U}}{nm} < \mathrm{G} < (k'+1).\dfrac{\mathrm{U}}{nm} \end{array}\right\};$$

y multiplicando estas magnitudes por el número entero $n.m$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} km.\mathrm{U} < nm.\mathrm{G} < (k+1)\,m.\,\mathrm{U} \\ k'.\,\mathrm{U} < nm.\mathrm{G} < (k'+1).\,\mathrm{U} \end{array}\right\};$$

las segundas desigualdades indican que $k'.\mathrm{U}$ es el mayor múltiplo de U contenido en la magnitud $nm.\mathrm{G}$; y como la primera desigualdad deja ver que $km.\mathrm{U}$ es un múltiplo de U menor que dicha magnitud, deducimos que

$$km.U \leqq k'.U, \text{ de donde } k' \geqq km;$$

y dividiendo por nm, se llega á

$$\frac{k'}{nm} \geqq \frac{k}{n}.$$

2.ª Fijándonos en una cierta ley para el crecimiento indefinido del número de partes iguales en que se divida la unidad U, y suponiendo que

$$\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{4}, \frac{h_3}{8}, \ldots \frac{h_s}{2^s}, \ldots.$$

son los números que expresan la medida de G en ménos de

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots. \frac{1}{2^s}, \ldots.,$$

se ve (1.º) que cada uno de esos números será mayor ó igual que el precedente. Pero como todos ellos son números de medida de magnitudes menores que G, todos ellos habrán de ser menores que $\frac{h_1+1}{2}$, puesto que este número es la medida de una magnitud mayor que G. Los números

$$\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{4}, \frac{h_3}{8}, \ldots. \frac{h_s}{2^s}, \ldots.$$

tienden, por consiguiente, hácia *un cierto límite* L cuando s crece indefinidamente.

Los dos números

$$\frac{h_s}{2^s} \text{ y } \frac{h_s+1}{2^s}$$

tienden hácia un mismo límite, porque su diferencia $\frac{1}{2^s}$ decrece indefinidamente.

Para demostrar ahora que este límite es el mismo, sea cualquiera la ley segun la cual crezca indefinidamente, observemos que

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{k}{n} < \dfrac{h_s+1}{2^s}\\[2ex] \dfrac{h_s}{2^s} < \dfrac{k+1}{n}\end{array}\right\} \text{ó bien } \left.\begin{array}{l}\dfrac{k}{n} < \dfrac{h_s+1}{2^s}\\[2ex] \dfrac{h_s}{2^s} - \dfrac{1}{n} < \dfrac{k}{n}\end{array}\right\};$$

es decir, que

$$\frac{h_s}{2^s} - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} < \frac{h_s+1}{2^s},$$

$\dfrac{k}{n}$ está comprendido entre dos números que tienden hácia L cuando s y n crecen indefinidamente. Por consiguiente,

$$\lim. \frac{k}{n} = \text{L}.$$

NOTA 10 (de la pág. 104).

Se sabe que las bisectrices interior y exterior del ángulo A de un triángulo ABC descansan sobre la base BC en dos puntos D y D′, conjugados armónicos con respecto á B y C, y conviene hacer notar:

1.º Que si el vértice A está á la izquierda de la perpendicular levantada á BC en su punto medio O, es decir, si dista ménos de B que de C, ó lo que es lo mismo, si la relacion de sus distancias á estos puntos es menor que 1, los puntos D y D′ quedarán ambos á la izquierda de O.

2.º Que si el vértice A está, por el contrario, á la derecha de la perpendicular, es decir, si dista más de B que de C, ó lo que es lo mismo, si la relacion de sus distancias á estos puntos es mayor que 1, los puntos D y D′ quedarán ambos á la derecha de O.

3.° En el caso *límite comun de los dos anteriores,* en que el punto A esté situado en la misma perpendicular levantada á BC en su punto medio O, es decir, en el caso en que equidiste de B y C (triángulo isósceles), ó lo que es lo mismo, en que la relacion de sus distancias á estos puntos es 1, el punto D en que descansa la bisectriz interior coincide con O, y el punto D′ en que descansaría la bisectriz exterior se ha alejado al infinito (á la izquierda ó á la derecha), lo cual significa que esta bisectriz exterior es paralela á BC.

NOTA II (de la pág. 106).

Es conveniente que el principiante se acostumbre á ver los lugares geómetricos en su variacion contínua siempre que intervengan magnitudes ó relaciones que puedan recibir valores por la ley de continuidad.

Así, respecto á la circunferencia, lugar geométrico de los puntos, tales que la relacion de sus distancias á dos fijos B y C sea un número constante K, se ve que:

Empieza reducida al punto B para $K = O$, puesto que los dos extremos de su diámetro se hallan reunidos en B;

Crece de un modo contínuo á medida que K aumenta por la ley de continuidad, puesto que los dos extremos de su diámetro se alejan de B á derecha é izquierda de un modo contínuo;

Se convierte (como debía ser) en la perpendicular levantada á BC en su punto medio O para $K = 1$, puesto que uno de los extremos del diámetro se halla en O y el otro en el infinito;

Decrece luego de un modo contínuo á medida que K sigue su aumento por la ley de continuidad, puesto que los dos extremos de su diámetro se acercan á C á izquierda y derecha de un modo contínuo;

Concluye reducida al punto C para $K = \infty$, puesto que los dos extremos de su diámetro se hallan reunidos en C.

El diámetro variable de la circunferencia en todos los estados porque pasa, es la distancia entre cada dos puntos conjugados armónicos con respecto á B y C; puntos situados á la izquierda del punto O para valores de K menores que 1, á la derecha del punto O para valores de K mayores que 1.

NOTA 12 (de la pág. 122).

El teorema:

Si en una série de secantes que parten de un punto O, *y descansan sobre una recta* ABCD,..., *se traza una recta* A′B′C′D′... *paralela á* ABCD,..., *las secantes quedarán divididas en partes proporcionales*,

admite este otro como

Recíproco: *Si en una série de secantes que parten de un punto* O, *y descansan sobre un recta* ABCD,..., *se marcan puntos* A′, B′, C′, D′, ..., *que las dividan en partes proporcionales, estos puntos estarán en una línea recta* A′ B′ C′ D′,..., *paralela á* ABCD...

En efecto, basta observar que la recta de union A′B′ habrá de ser paralela á AB; la B′C′ á BC; la C′D′ á CD,..., y que, por hipótesis, los puntos A, B, C, D,... están en una línea recta.

NOTA 13 (de la pág. 132).

Se sabe que: *el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos fijos* B *y* C (figura 8.ª) *sea* K^2, *es una circunferencia cuyo centro está en el pun-*

to medio D *de la recta* BC, *y cuyo radio se determina por la fórmula*

$$R = \sqrt{\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right)^2 - BD^2}.$$

Observando que la magnitud R es (por su fórmula) cateto de un triángulo rectángulo que tenga por otro cateto la longitud dada BD, y por hipotenusa la longitud $\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right)$, y notando que esta longitud es á su vez (por el teorema de Pitágoras) el cateto de un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa sea la longitud dada K, se llega á la siguiente construccion gráfica:

Trácese por uno de los puntos dados, B por ejemplo, la recta indefinida BN con la inclinacion de 45° sobre la recta dada BC; tómese sobre ésta la magnitud BM, igual á K, y bájese desde el punto M la perpendicular MN á la direccion BN; haciendo, finalmente, centro en B con la magnitud BN por radio, córtese la perpendicular indefinida DA y se tendrá en la longitud DA el radio pedido R, con el cual se trazará la circunferencia lugar geométrico.

La fórmula de R nos dice que, segun que

$$\frac{K}{\sqrt{2}} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} BD \ldots \text{será } R \begin{cases} \text{imaginario} \\ \text{nulo} \\ \text{real} \end{cases}$$

lo cual nos muestra tambien la figura; en efecto, si se toma BM igual á BE (es decir, igual á BD $\sqrt{2}$), la perpendicular M'N' da lugar á un triángulo BM'N' igual á BDE, por tener la hipotenusa y un ángulo agudo iguales; por consiguiente, la magnitud BN' es igual á BD y el arco de círculo descrito desde el punto B como centro con el radio BN' es tangente en D á la perpendicular DA. Se ve, pues, que: *Si la longitud* BM' = K *es menor que* BM' = BD $\sqrt{2}$, el arco de círculo descrito desde el punto B con el radio BN′ es exterior á la recta DA *y no hay lugar geométrico. Si la longitud* BM $=$ K *es igual á* BD $\sqrt{2}$, el arco de círculo descrito con el radio BN′ es tangente á la recta DA en el punto D, y *el lugar geométrico* es una circunferencia de radio nulo, cuyo centro es D; es decir, *se reduce al punto* D. *Si la longitud* BM $=$ K *es mayor que* BM′ $=$ BD $\sqrt{2}$, el arco de círculo corta en el punto A, *y el lugar geométrico es la circunferencia descrita desde el punto* D *como centro con el radio* DA.

Creciendo la longitud dada K indefinidamente desde BD $\sqrt{2}$ por la ley de continuidad, se ve la circunferencia (lugar geométrico) crecer indefinidamente á partir del punto D, que es el centro comun. Al pasar K por el valor particular BC, la circunferencia es la que tiene por diámetro BC, lugar geométrico, en efecto, de los puntos, tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á B y C es $\overline{BC}^2$: las circunferencias envueltas por ésta corresponden á los valores de K menores que BC, y las circunferencias que la envuelven corresponden á los valores de K, mayores que BC.

Se sabe que: *el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos fijos* B *y* C (figura 9.ª) *sea* K^2, *es el sistema de dos rectas perpendiculares á* BC, *cuya distancia al punto medio* D *de esta recta se determina por la fórmula*

$$\delta = \frac{K^2}{4BD} = \frac{\left(\frac{K}{2}\right)^2}{BD}.$$

Observando que la distancia δ es (por su fórmula) la tercera proporcional á BD y $\left(\frac{K}{2}\right)$, la construccion gráfica se reduce á lo siguiente:

Tómese sobre la perpendicular indefinida DM′, levantada á BC en su punto medio, la magnitud DM, igual á $\left(\frac{K}{2}\right)$; únanse los puntos B y C con M, y levántense á estas rectas las perpendiculares MN y MP en el punto M, las cuales cortarán á la recta BC en los puntos N y P á la distancia pedida δ del punto medio D, porque esta longitud DN = DP es la tercera proporcional á BD y $DM = \frac{K}{2}$ por una propiedad conocida del triángulo rectángulo.

Este lugar geométrico existe siempre, cualesquiera que sean la longitud dada K y la distancia entre los puntos fijos B y C.

La fórmula de δ nos dice que si K crece indefinidamente por ley de continuidad desde cero, δ crece tambien indefinidamente por ley de continuidad desde cero, y la construccion gráfica así lo muestra. Las dos perpendiculares empiezan reunidas en la DM′, que es, en efecto, el lugar geométrico de los puntos, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á B y C es *nula;* se van alejando del punto medio D por ley de continuidad, y pasan por los mismos puntos dados B y C cuando K es igual á BC, en cuyo caso particular las perpendiculares á BC, levantadas en sus extremos, son, en efecto, el lugar geométrico de los puntos, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á B y C es $\overline{BC}^2$; las perpendiculares que están dentro de éstas corresponden á los valores de K, menores que BC, y las que están fuera corresponden á los valores de K, mayores que BC.

NOTA 14 (de la pág. 135).

Propongámonos calcular los valores x é y de las diagonales de un cuadrilátero *cualquiera*, y será fácil luego demostrar el directo y el *recíproco* del siguiente

TEOREMA.

En un cuadrilátero inscriptible, la relacion de las diagonales es igual á la relacion entre la suma de los productos de los lados que terminan en las extremidades de la primera diagonal, y la suma de los productos de los lados que terminan en las extremidades de la segunda.

Consideremos la diagonal x de un cuadrilátero cualquiera ABCD *(fig. 10)*: los triángulos ACB y ACD nos dan

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = a^2 + b^2 - 2a.\mathrm{B}m \\ x^2 = c^2 + d^2 + 2d.\mathrm{D}n \end{array}\right\};$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} x^2.cd = (a^2 + b^2)\, cd - 2acd.\mathrm{B}m \\ x^2.ab = (c^2 + d^2)\, ab + 2abd.\mathrm{D}n \end{array}\right\};$$

y sumando, se tiene

$$x^2\,(ab + cd) = (a^2 + b^2)\,cd + (c^2 + d^2)\,ab + 2ad\,[b.\mathrm{D}n - c.\mathrm{B}m],$$

ó bien

$$x^2\,(ab + cd) = (ac + bd)\,(ad + bc) + 2ad\,[b.\mathrm{D}n - c.\mathrm{B}m];$$

de donde se deduce la fórmula

$$x^2 = \frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd} + \frac{2ad}{ab + cd}\,[b.\mathrm{D}n - c.\mathrm{B}m] = \mathrm{H} + \mathrm{S},$$

que *da el valor de la diagonal* x.

De los triángulos BDC y BDA, se deduce análogamente la fórmula

$$y^2 = \frac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{ad + bc} + \frac{2cd}{ad + bc}\,[b.\mathrm{A}q - a.\mathrm{C}p] = \mathrm{K} + \mathrm{T},$$

que *da el valor de la diagonal* y.

Obsérvese que H y K son esencialmente positivas, y que

S y T no pueden ser de un mismo signo. Lo primero es evidente. Para hacer ver lo segundo, vamos á demostrar que,

$$\text{segun que } S \gtreqless 0\ldots, \text{ será } B + D \gtreqless 180^0.$$

En efecto,

$$\text{segun que } S \gtreqless 0, \text{ se tiene } b.Dn \gtreqless c.Bm \text{ ó } b \gtreqless \frac{c.Bm}{Dn};$$

pero tomando sobre Dn *(fig. 11)* la longitud Dn' =Bm, y formando el triángulo rectángulo Dn'C$'$, la hipotenusa DC$'$ es la cuarta proporcional

$$DC' = \frac{c.Bm}{Dn};$$

comparando este triángulo rectángulo Dn'C con el BmC *(figura 10)*, colocado en la posicion Dn'C$''$ *(fig. 11)*, se ve que

$$\text{Si } b \gtreqless DC'\ldots \text{ será } B \gtreqless CDn = 180^0 - D; \text{ es decir, } B + D \gtreqless 180^0.$$

Del mismo modo,

$$\text{segun que } T \gtreqless 0\ldots, \text{ será } A + C \gtreqless 180^0.$$

Se comprende ya que S y T no pueden ser del mismo signo, puesto que la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero es igual á 360^0.

La demostracion del teorema que hemos enunciado y la de su *recíproco*, son facilísimas despues del estudio analítico que acabamos de presentar.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DIRECTO.

En efecto, si el cuadrilátero es inscriptible, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} B + D = 180^0;\ \text{por consiguiente, } S = 0 \\ A + C = 180^0;\ \text{por consiguiente, } T = 0 \end{array}\right\};$$

y, por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = H = \dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \\ y^2 = K = \dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} \end{array}\right\};$$

de donde

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{H}{K}} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

DEMOSTRACION DEL RECÍPROCO.

En efecto, si se supone que

$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd},\ \text{es decir, } \frac{x^2}{y^2} = \frac{H}{K},$$

se tiene

$$\frac{H+S}{K+T} = \frac{H}{K};$$

pero como S y T no pueden ser del mismo signo, la relacion $\frac{S}{T}$ no puede ser igual á $\frac{H}{K}$, que es positiva; por consiguiente, la igualdad anterior obliga á

$$\left.\begin{array}{l} S = 0;\ \text{por consiguiente, } B + D = 180 \\ T = 0;\ \text{por consiguiente, } A + C = 180 \end{array}\right\};$$

el cuadrilátero es, pues, inscriptible (*).

(*) Se podría dar la siguiente demostracion del recíproco:
Fijémonos en dos vértices cualesquiera B y C, y considerando que CD sea el mayor de los dos lados opuestos BA y CD (es decir, $a < c$) (*figura* 12), hagamos pasar la circunferencia por los tres vértices B, C, D: el teorema consiste en demostrar que el cuarto vértice A no podrá ser interior ni exterior á ella si se supone que

NOTA 15 (de la pág. 154).

POLÍGONOS REGULARES DE ESPECIE SUPERIOR.

Si se considera una circunferencia dividida en m partes iguales, que llamaremos a, y se unen sucesivamente á partir de A los puntos de division entre los cuales medie un mismo número p de partes, se llegará por primera vez al punto de

---

$$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

En efecto: si el vértice A quedára interior ó exterior, y se tomára la cuerda BA′ igual al lado BA $= a$, se formaría el *cuadrilátero inscrito* A′BCD, que tendría comunes con el propuesto dos lados b, c, y una diagonal y; su lado a' sería igual á a, y por el teorema directo se podría escribir

$$\frac{x'}{y}=\frac{ad'+bc}{ab+cd}.$$

Ahora bien, considerando los triángulos A′BD y ABD, que tienen dos lados iguales, se ve que:

Si el vértice A *es interior*,

$$d'>d.$$

Pero siendo $a<c$, se ve fácilmente que

$$\frac{ad'+bc}{ab+cd'}<\frac{ad+bc}{ab+cd};$$

y como por hipótesis

$$\frac{ad+bc}{ab+cd}=\frac{x}{y},$$

se tiene en definitiva

$$\frac{x'}{y}<\frac{x}{y};$$

lo cual es absurdo, porque los triángulos A′BC y ABC, que tienen dos lados iguales, dan

$$x'>x,\ \text{y por tanto}\ \frac{x'}{y}>\frac{x}{y}.$$

partida A; es decir, se cerrará el polígono cuando se haya recorrido sobre la circunferencia la longitud que sea *mínimo múltiplo* de ma y pa.

En efecto: si se llega al punto de partida A, el arco total recorrido será evidentemente un múltiplo de pa (arco subtendido por cada lado del polígono) y un múltiplo de ma (circunferencia completa). Y recíprocamente: se llegará al punto de partida A, si se considera un arco total que sea múltiplo comun de pa y ma; porque, repitiendo un cierto número de veces el arco pa, se tendrá un arco total que abrace un número exac-

---

Si el vértice A es exterior,

$$d' < d.$$

Pero siendo $a < c$, se ve fácilmente que

$$\frac{ad' + bc}{ab + cd'} > \frac{ad + bc}{ab + cd};$$

y como por hipótesis

$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{x}{y},$$

se tiene en definitiva

$$\frac{x'}{y} > \frac{x}{y};$$

lo cual es absurdo, porque los triángulos A'BC y ABC, que tienen dos lados iguales, dan

$$x' < x, \text{ y por tanto, } \frac{x'}{y} < \frac{x}{y}.$$

La demostracion que precede es debida al antiguo oficial de Ingenieros D. José Garin, ex-profesor de la Academia del Cuerpo.

Del teorema contrario ha dado el señor comandante de Artillería D. Diego Ollero, ex-profesor de la Academia del Cuerpo, la demostracion siguiente:

Se ha demostrado que si en un triángulo, cuyos lados designaremos por a, b, y c, se hace crecer un lado a por ejemplo, permaneciendo constantes los otros dos, el ángulo A crece tambien; y es evidente que para el valor mínimo de a, que sería $b - c$ (en el supuesto de ser $b > c$) corresponde $A = 0$, y para el máximo $a = b + c$ el valor de $A = 180^\circ$. Si se supone que a crece de una manera contínua, A tambien crecerá de una manera contínua é irá pasando por todos los estados de magnitud intermedios, pues para cualquier valor de A podrá to (entero) de circunferencias; es decir, se llegará al punto de partida A.

Se ve, pues, que el mínimo múltiplo comun de *pa* y *ma* corresponde á la primera vez que se llegue al punto de partida A; puesto que si se hubiera llegado ántes, se tendría un múltiplo comun menor que el *mínimo*.

El polígono así formado es *regular*, puesto que todos los lados son cuerdas que subtienden arcos iguales *(pa)*, y todos los ángulos son inscritos en arcos iguales (2 *pa*).

Examinemos ahora toda la variedad de polígonos regula-

---

siempre construirse el triángulo con los lados b y c y quedará determinado el otro lado a.

Recordado el principio anterior, pasemos á demostrar que *si un cuadrilátero* ABCD (fig. 13) *no es inscriptible, la razon* $\frac{AC}{BD}$ *será diferente de la razon*

$$\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Con arreglo al supuesto, la suma de dos de los ángulos opuestos del cuadrilátero será menor que 180°, y la suma de los otros dos mayor que este mismo valor.

Para fijar las ideas, admitamos que es $B+D<180°$, y supongamos ademas que $a+b<d+c$.

Si se hace crecer de una manera contínua la diagonal AC, podremos concebir las formas que sucesivamente irá tomando el cuadrilátero, cuyos lados suponemos constantes. Segun se ha indicado, los ángulos B y D irán creciendo de una manera continua y tambien su suma, convirtiéndose en 180° el ángulo en D cuando la diagonal AC sea igual á $a+b$, en cuyo caso la suma $B+D$ tomará un valor mayor que 180°. Existirá, pues, un caso intermedio en el que se verifique que la suma de los ángulos B y D sea 180°, y en dicho cuadrilátero, que designaremos por A′B′C′D′ *(fig. 14)*, se verificará, con arreglo á la proposicion directa,

$$\frac{A'C'}{B'D'}=\frac{ad+bc}{ab+dc}.$$

Comparando los dos cuadriláteros ABCD y A′B′C′D′, se observa que, por ser $B+D<B'+D'$, deberá verificarse

$$A+C>A'+C',$$

lo cual exige que uno por lo ménos de los ángulos A ó C sea mayor que sus correspondientes A′ ó C′. Si se admite, pues, que $A>A'$, de los triángulos BAD y B′A′D′ se deduce

$$BD>B'D',$$

res que se obtiene uniendo (de p en p) de todas las maneras posibles los puntos de division de la circunferencia en m partes iguales.—Observaremos primeramente que unir de m en m los puntos de division, equivaldría á no moverse del punto de partida A, es decir, á no trazar lado alguno de polígono; y que:

unir de		unir de
$m+1$ en $m+1$	equivale á	1 en 1
$m+2$ » $m+2$	»	2 » 2
. . .	.	. . .
. . .	.	. . .

Basta, pues, examinar los polígonos regulares que se obtienen uniendo de

$$1 \text{ en } 1;\ 2 \text{ en } 2;\ 3 \text{ en } 3;\ldots\ (m-1) \text{ en } (m-1).$$

---

lo cual indica que tambien el ángulo C es mayor que C′. Comparando, finalmente, las razones $\frac{AC}{BD}$ y $\frac{A'C'}{B'D'}$, se observa que por ser $AC < A'C'$ y $BD > B'D'$, se verificará

$$\frac{AC}{BD} < \frac{A'C'}{B'D'};$$

y, por lo tanto,

$$\frac{AC}{BD} < \frac{ad+bc}{ab+dc}.$$

En el caso de ser $B+D > 180°$, se tendria $A+C < 180°$, y por las mismas consideraciones deduciríamos

$$\frac{AC}{BD} > \frac{ad+bc}{ab+dc}$$

y queda demostrada la proposicion.

Tenemos el mayor gusto en dar á conocer estas demostraciones de los distinguidos profesores ya citados.

Pero si se observa más atentamente, se nota que:

unir de		unir de
$m - 1$ en $m - 1$	equivale á	1 en 1
$m - 2$ » $m - 2$	»	2 » 2
$m - 3$ » $m - 3$	»	3 » 3
. . .	.	. . .
. . .	.	. . .
. . .	.	. . .

porque si dos puntos de division de la circunferencia comprenden en un sentido $m - p$ *emésimas* partes, abrazan tambien por otro lado p *emésimas* partes; basta, pues, en definitiva, examinar los polígonos regulares que se obtienen uniendo de

$$1 \text{ en } 1;\ 2 \text{ en } 2;\ 3 \text{ en } 3;\ldots \frac{m-1}{2} \text{ en } \frac{m-1}{2};$$

ó de

$$1 \text{ en } 1;\ 2 \text{ en } 2;\ 3 \text{ en } 3;\ldots \frac{m}{2} - 1 \text{ en } \frac{m}{2} - 1;$$

segun que m sea impar ó par; lo cual se expresa diciendo que basta considerar los números de la escala

$$1, 2, 3, \ldots p, \ldots \frac{m-1}{2};\ \text{ó}\ 1, 2, 3, \ldots p, \ldots \frac{m}{2} - 1:$$

en el caso de ser m par, no se considera la union de los punde $\frac{m}{2}$ en $\frac{m}{2}$, porque los lados del polígono serían dos solamente y aparecerían reunidos en un solo y único diámetro; es decir, que no habría polígono.

Ahora bien: entrando en el exámen detenido de los números de la escala con el sentido que acabamos de decir, se ve que los números p y m estarán en uno de estos tres casos:

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ}\ p \text{ divisor de } m \\ 2.^{\circ}\ \left.\begin{array}{l} p \\ m \end{array}\right\} m.\,c.\,d. \ldots \theta \\ 3.^{\circ}\ p \text{ primo con } m \end{array}\right\}.$$

En el primer caso, el arco *pa* es divisor de *ma*, y, por consiguiente, el mínimo múltiplo es *una circunferencia;* lo que prueba que el polígono tendrá un número de lados indicado por el número de veces que el arco *pa* quepa en la circunferencia *ma;* es decir, indicado por el número entero $\frac{m}{p}$, y que se cerrará al dar la primera vuelta.

En el segundo caso, el mínimo múltiplo de *pa* y *ma* es

$$\frac{mp}{\theta}a = \frac{m}{\theta}(pa) = \frac{p}{\theta}(ma);$$

lo que prueba que el polígono tendrá un número de lados indicado por el número de veces que el arco *pa* quepa en el mínimo múltiplo; es decir, indicado por el número entero $\frac{m}{\theta}$, y que se cerrará al dar el número de vueltas que quepan en el mínimo múltiplo; es decir, que el número de vueltas estará indicado por el número entero $\frac{p}{\theta}$.

En el tercer caso, el mínimo múltiplo de *pa* y *ma* es

$$mpa = m(pa) = p(ma);$$

lo que prueba que el polígono tendrá *m* lados, y que se cerrará al dar *p* vueltas.

Para expresarnos brevemente diremos que un polígono es del *género m* cuando tiene *m* lados, y que es de la *especie p* cuando da *p* vueltas para cerrarse.

Tenemos, pues, en definitiva, que entre los números *p* de la escala:

1.º *Los divisores de* m *dan polígonos del género* $\frac{m}{p}$, *especie primera;*

2.º *Los que tienen con* m *un máximo comun divisor* θ, *dan polígonos del género* $\frac{m}{\theta}$, *especie* $\frac{p}{\theta}$;

3.º *Los primos con* m *dan polígonos del género* m, *especie* p.

Como se ve, sólo estos últimos dan polígonos del género m; todos los demas dan géneros $\left[\frac{m}{p} \text{ ó } \frac{m}{\theta}\right]$ inferiores á m: por consiguiente, cuando tan sólo se trata de averiguar la variedad de especies que admite un género m, bastará señalar los números *primos* con m que se encuentran en la escala. Así se descubre la variedad de especies que admite el género *triángulo*, el género *cuadrilátero*, el género *pentágono*, etc., etc. Véase el siguiente cuadro de algunos géneros escogidos. Hemos tachado los números primos con m en cada escala:

m	ESCALA DE NÚMEROS.	GÉNERO.	ESPECIES.
3	~~1~~.	3	1.
4	~~1~~.	4	1.
5	~~1~~, ~~2~~.	5	1, 2.
6	~~1~~, 2.	6	1.
10	~~1~~, 2, ~~3~~, 4.	10	1, 3.
12	~~1~~, 2, 3, 4, ~~5~~.	12	1, 5.
15	~~1~~, ~~2~~, 3, ~~4~~, 5, 6, ~~7~~.	15	1, 2, 4, 7.
20	~~1~~, 2, ~~3~~, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, ~~9~~..	20	1, 3, 7, 9.
30	~~1~~, 2, 3, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, 9, 10, ~~11~~, 12, ~~13~~, 14. . . .	30	1, 7, 11, 13.

Hemos visto: 1.º, que los números p de la escala divisores de m, dan polígonos del género $\frac{m}{p}$, especie primera; 2.º, los que tengan con m un máximo comun divisor θ, dan polígonos del género $\frac{m}{\theta}$, especie $\frac{p}{\theta}$. Si recordamos todo lo dicho anteriormente, es fácil demostrar ahora que:

Si se unen (de p *en* p) *de todas las maneras posibles los pun-*

tos de division de una circunferencia en m *partes iguales, se obtendrán polígonos regulares, cuyos* GÉNEROS *estarán indicados por todos los divisores simples y compuestos del número* m, *y aparecerán* TODAS LAS ESPECIES *que admita cada género.*

En efecto:

1.º *Todos* los divisores simples y compuestos del número m (á excepcion del mismo m y de su mitad $\frac{m}{2}$ si es par) se encuentran en la escala

$$1, 2, 3, \ldots p, \ldots \frac{m-1}{2}; \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots p, \ldots \frac{m}{2}-1,$$

puesto que un divisor del número m no puede ser mayor que su mitad. Si se ensaya un divisor p, el número $\frac{m}{p}$ (que indica el género obtenido) es tambien divisor de m; por consiguiente, al ensayar todos los divisores simples y compuestos de m como números de la escala, se obtendrán géneros indicados por todos esos mismos divisores, de tal modo que si se ensayan los divisores p por órden creciente de magnitud, los géneros $\frac{m}{p}$ irán dando esos mismos divisores en órden decreciente. Los polígonos así formados son todos de 1.ª especie.

2.º Al ensayar los números p que tienen factor comun (θ) con m, los géneros $\frac{m}{\theta}$ son divisores de m, y no serán, por consiguiente, géneros nuevos, puesto que ya en el ensayo anterior (1.º) se obtuvieron como géneros todos los divisores de m. Pero si bien no son géneros nuevos, aparecen, sí, *especies superiores* $\left(\frac{p}{\theta}\right)$ de algunos de dichos géneros, y vamos á ver que aparecerán *todas* las especies superiores que admita cada género; en efecto, si consideramos un género $\frac{m}{\theta}$ y formamos la correspondiente escala

$$1, 2, 3, \ldots e \ldots \frac{\frac{m}{\theta} - 1}{2}; \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots e \ldots \frac{m}{2\theta} - 1;$$

en la cual e indique una especie del género $\frac{m}{\theta}$ (por ser el número e primo con $\frac{m}{\theta}$), podremos asegurar que el entero $e.\theta$ se encuentra forzosamente en la escala

$$1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m-1}{2}, \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m}{2} - 1,$$

y es uno de los números p de que estamos tratando; porque siendo

$$e < \frac{m}{2\theta}, \text{ se ve que } e.\theta < \frac{m}{2};$$

y ese número $e.\theta$ [que llamamos p] no es divisor de m, puesto que e es primo con $\frac{m}{\theta}$, ni es primo con m, puesto que tiene con él un factor comun θ. Vemos, por consiguiente, que hay un cierto número $p = e.\theta$ que conduce á la especie $\frac{p}{\theta} = e$ del género $\frac{m}{\theta}$: lo dicho de una especie e se diría de todas; luego aparecerán todas las especies del género $\frac{m}{\theta}$. Lo mismo diríamos de cada uno de los géneros, y queda así demostrada la proposicion que habíamos enunciado.

En resúmen:

Si se usan todos los números de la escala

$$1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m-1}{2}, \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m}{2} - 1,$$

se obtienen todas las especies de los polígonos regulares cuyos géneros son los divisores simples y compuestos de *m*, de esta suerte:

Los divisores de m, *dan la primera especie de todos los géneros indicados;*

Los primos con m, *dan todas las especies del género* m;

Los que tienen con m *un factor comun, dan todas las especies superiores de los demas géneros.*

Hagamos, por ejemplo la division de la circunferencia en 60 partes iguales, y veamos todo lo que dará de sí. La escala es la siguiente:

$$\underline{\cancel{1}},\ \underline{2},\ \underline{3},\ \underline{4},\ \underline{5},\ \underline{6},\ \cancel{7},\ 8,\ 9,\ \underline{10},\ \cancel{11},\ \underline{12},\ \cancel{13},\ 14,\ \underline{15},$$
$$16,\ \cancel{17},\ 18,\ \cancel{19},\ \underline{20},\ 21,\ 22,\ \cancel{23},\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,$$
$$28,\ \cancel{29}.$$

En ella encontramos primeramente todos los divisores de 60 (á excepcion de 60 y de 30)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20,

que hemos subrayado, y dan la primera especie de los géneros

60, 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3.

Los primos con 60

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

que hemos tachado, y dan lugar á las *ocho* especies de polígonos regulares de 60 lados.

Por último, los que tienen con 60 un factor comun

8, 9, 14, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28,

que hemos dejado intactos en la escala, y dan *todas* las especies superiores de los géneros inferiores arriba citados. El lector comprobará esto consultando el cuadro que dimos ántes.

En el Tratado de MM. Rouché y Comberousse se dan las construcciones gráficas para la inscripcion del triángulo, del cuadrado, del exágono, de las dos especies de pentágonos, las dos especies de decágonos y las cuatro de pentedecágonos, y se calculan los respectivos lados.

Para los dodecágonos no hay dificultad, porque la division en 12 partes iguales se hace inmediatamente; el lado del dodecágono de 1.ª especie se deduce por la fórmula

$$a' = \sqrt{R\,[2R - \sqrt{4R^2 - a^2}]}$$

en la cual a es el lado del exágono.

Así, se tiene

$$a' = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}:$$

el lado del dodecágono de 5.ª especie es la cuerda suplementaria del lado del dodecágono de 1.ª, y, por consiguiente, su valor es:

$$\sqrt{4R^2 - R^2\,(2 - \sqrt{3})} = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.\ (*)$$

Respecto á las cuatro especies del género 20, debe observarse análogamente que los lados de los icoságonos de 1.ª y

(*) Lo mismo sucede con los octógonos de 1.ª y de 3.ª especie. El lado del octógono de 1.ª se deduce por la misma fórmula

$$a' = \sqrt{R\,[2R - \sqrt{4R^2 - a^2}]}$$

en la cual a es el lado del cuadrado. Así, se tiene

$$a' = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}:$$

el lado del octógono de 3.ª especie es la cuerda suplementaria, y vale, por consiguiente,

$$\sqrt{4R^2 - R^2\,(2 - \sqrt{2})} = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

de 3.ª especie se deducen de los decágonos de 1.ª y de 3.ª especie por la fórmula ya citada

$$a' = \sqrt{R[2R - \sqrt{4R^2 - a^2}]},$$

dando á a los valores

$$a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} \text{ y } a = \frac{R(\sqrt{5}+1)}{2};$$

si se representan por a'_1 y a'_3 los lados de los icoságonos de 1.ª y de 3.ª especie, se tiene, pues,

$$a'_1 = R\sqrt{2 - \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}}$$

y

$$a'_3 = R\sqrt{2 - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}};$$

por medio de la fórmula algebráica, que sirve para descomponer un radical doble en dos radicales, se pueden poner bajo la forma

$$a'_1 = R.\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$$

y

$$a'_3 = R.\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}.$$

Los lados a'_7 y a'_9 de los icoságonos de 7.ª y de 9.ª especie son cuerdas suplementarias de a'_3 y a'_1, por lo cual

$$a'_7 = R\sqrt{2 + \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}}$$

y

$$a'_9 = \mathrm{R}\sqrt{2+\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}},$$

que se pueden poner tambien bajo la forma

$$a'_7 = \mathrm{R}.\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$$

y

$$a'_9 = \mathrm{R}.\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}.$$

Las cuatro especies del género 30 tienen por lados respectivos las cuerdas suplementarias de los lados de las cuatro especies de pentedecágonos. Si representamos por p_1, p_2, p_4, p_7 estos lados, y por x_1, x_7, x_{11}, x_{13} las incógnitas, y se tiene á la vista los valores conocidos de p_1, p_2, p_4, p_7, se llega á los siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{4\mathrm{R}^2 - p_7^2} = \mathrm{R}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)}{8}\\
x_7 &= \sqrt{4\mathrm{R}^2 - p_4^2} = \mathrm{R}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)}{8}\\
x_{11} &= \sqrt{4\mathrm{R}^2 - p_2^2} = \mathrm{R}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)}{8}\\
x_{13} &= \sqrt{4\mathrm{R}^2 - p_1^2} = \mathrm{R}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)}{8}
\end{aligned}\right\}.$$

El género 60 admite, como hemos dicho, *ocho* especies, cuya inscripcion en la circunferencia es fácil por medio del triángulo y dos de las especies de icoságonos, por ejemplo la 1.ª y la 3.ª

En efecto, si á partir de un punto cualquiera A de la circunferencia *(fig. 15)* se toma el arco AB que sea la tercera parte de la circunferencia, y desde el extremo B, á uno y otro lado, se toman BC y BD iguales á la vigésima parte de la circunferencia, es decir, que sus cuerdas sean lados del icoságono de 1.ª especie, se tendrán en las cuerdas AC y AD los lados de los polígonos del género 60, especies 17 y 23; porque si representamos por c la longitud de la circunferencia

$$\left.\begin{array}{l}\text{arco AC} = \text{arco AB} - \text{arco BC} = \dfrac{c}{3} - \dfrac{c}{20} = \dfrac{17c}{60}\\ \text{arco AD} = \text{arco AB} + \text{arco BD} = \dfrac{c}{3} + \dfrac{c}{20} = \dfrac{23c}{60}\end{array}\right\}:$$

si á partir del punto A se toma nuevamente (pero á la izquierda para mayor claridad) el arco AE, que sea la tercera parte de la circunferencia, y desde el extremo E, á uno y otro lado, se toman EF y EG iguales á las tres vigésimas partes de la circunferencia, es decir, que sus cuerdas sean lados del icoságono de 3.ª especie, se tendrán en las cuerdas AG y AF los lados de los polígonos del género 60, especies 11 y 29; porque

$$\left.\begin{array}{l}\text{arco AG} = \text{arco AE} - \text{arco EG} = \dfrac{c}{3} - \dfrac{3c}{20} = \dfrac{11c}{60}\\ \text{arco AF} = \text{arco AE} + \text{arco EF} = \dfrac{c}{3} + \dfrac{3c}{20} = \dfrac{29c}{60}\end{array}\right\}:$$

ahora se ve muy fácilmente que las cuerdas suplementarias A'C, A'D, A'G, A'F dan los lados de las cuatro especies restantes, que son las especies 13, 7, 19, 1.

Podía haberse dispuesto la construccion inversamente haciendo uso del triángulo y de las especies 7.ª y 9.ª de icoságonos.

Los polígonos regulares de especie superior (estrellados) no difieren en nada esencial de los polígonos regulares ordinarios.

Son inscriptibles y circunscriptibles, es decir, que hay una circunferencia que pasa por todos los *vértices* del polígono, y otra tangente á todos los lados. (*) Téngase bien presente que se llaman vértices los puntos de interseccion de cada dos lados *consecutivos*, pero no los puntos en que se corten dos de los lados al atravesarse mútuamente. Las dos circunferencias inscrita y circunscrita son concéntricas, y su centro comun se llama *centro del polígono*, aunque no lo sea efectivamente cuando el género es impar.

La suma S de los ángulos interiores de un polígono convexo (**) cualquiera del género m, especie p, está dada por la fórmula

$$S = 2m - 4p.$$

Para demostrarlo basta observar que la suma de los ángulos interiores y exteriores vale $2m$, y que la de los exteriores equivale á p veces 4 rectos, porque se pueden ver reunidos alrededor de un punto cualquiera o, y llenando p veces el espacio angular.

Siendo los *radios* las rectas OA, OB,..., *(fig. 16)* que unen el centro O con los vértices A, B,..., y las *apotemas* las perpendiculares OH, OK,..., á los lados AB, BC,..., se llama *ángulo en el centro* del polígono el ángulo

$$AOB = HOK$$

formado por dos radios *consecutivos* ó por dos apotemas *conse-*

(*) La demostracion que se da para los polígonos regulares ordinarios, es aplicable á los estrellados.

(**) Aquí tomamos la palabra *convexo* en su sentido propio, que corresponde al polígono que tenga todos sus ángulos interiores menores que 2 rectos, es decir, *salientes*. Se sabe que los ángulos exteriores del polígono son en este caso suplementos positivos de los interiores.

cutivas. El valor del ángulo en el centro de un polígono regular del género *m*, especie *p*, es evidentemente $\frac{4p}{m}$, y el valor del ángulo ABC del polígono es

$$2 - \frac{4p}{m},$$

como se ve fácilmente si se observa que el ángulo ABC es el suplemento de HOK. (*)

Es claro que cada apotema es bisectriz del ángulo de dos radios consecutivos, y que cada radio es bisectriz del ángulo de dos apotemas consecutivas, al mismo tiempo que bisectriz de un ángulo del polígono.

Cuando haya que considerar el área de un polígono regular de especie superior, se tratará en general de la suma de los triángulos isósceles AOB, BOC, COD,..., que tienen su vértice en el centro O *(fig. 11)* y por bases los lados AB, BC, CD,... Esta área, así mirada, tiene por expresion *el producto del semiperímetro por la apotema* (como en los polígonos ordinarios); pero se debe tener siempre presente que, al aplicar esta expresion, el área del núcleo se repite 2, 3,... *p* veces si el polígono es de la especie 2, 3,... *p;* es decir, que el área del núcleo aparece multiplicada por el número que indica la especie.

Para concluir estas indicaciones acerca de los polígonos regulares de especie superior, vamos á demostrar en general que:

1.° *El polígono convexo que envuelve á un polígono regular estrellado, es siempre regular y de su mismo género.*

(*) Podría llegarse á este valor del ángulo de un polígono regular observando que deberá ser la *m*ésima parte de S, y, por tanto,

$$\widehat{ABC} = \frac{S}{m} = \frac{2m - 4p}{m} = 2 - \frac{4p}{m}.$$

En efecto, el polígono convexo envolvente tiene ante todo por vértices *todos* los vértices del polígono dado; porque estando situados estos vértices en una circunferencia, el polígono convexo *envolvente* dejaría algunos vértices fuera de él, si no pasára por todos ellos, y no sería envolvente como suponemos: el polígono ordinario ADGBEHCF *(fig. 17)* es, pues, del mismo género que el estrellado ABCDEFGH. Para probar que es regular, basta demostrar que los arcos AD, DG, GB,... son iguales, y esto se ve con sólo observar que dos ángulos como BCD y EFG, cuyos vértices C y F sean seguidos, han de abrazar arcos DGB y GBE iguales (puesto que son inscritos é iguales), y por tanto que el arco DG ha de ser igual al BE: dando vueltas al polígono, se ve así que todos los arcos AD, DG, GB,..., son iguales entre sí. (*)

2.º *El polígono convexo que forma el núcleo de un polígono regular estrellado, es siempre regular y de su mismo género.*

Que es de su mismo género es evidente, porque tiene sus lados en las rectas mismas que forman los lados del estrellado. Para probar que es regular basta demostrar que los arcos MN, NP, PQ,... son iguales, y esto se ve con sólo observar que dos ángulos como BCD y EFG, cuyos vértices C y F sean seguidos, han de abrazar arcos QRST y RSTU iguales (puesto que son circunscritos é iguales), y por tanto que el arco QR ha de ser igual al TU; dando vueltas al polígono, se ve así que todos los arcos MN, NP, PQ,..., son iguales entre sí.

Recíprocamente: *El polígono estrellado que se forma prolongando los lados de un núcleo regular convexo, es siempre regular y de su mismo género.*

Que es de su mismo género es evidente, porque tiene sus lados en las rectas mismas que forman los lados del núcleo. Y

(*) Este teorema es el *recíproco* del teorema fundamental de polígonos estrellados, en que se supone que el convexo ADGBEHCF es regular, y se demuestra que, uniendo los vértices de *p* en *p*, el estrellado del mismo género ABCDEFGH lo es tambien.

es regular, porque los arcos MNPQ, QRST,... que median entre los puntos de contacto *consecutivos* M, Q, T,... son iguales, puesto que se componen del mismo número de partes iguales.

Estos dos teoremas (directos y recíprocos), demostrados del modo que acabamos de hacerlo, dejan comprender que se puede razonar siempre en los polígonos regulares estrellados como se razona en los ordinarios.

NOTA 16 (de la pág. 158).

Conviene hacer notar que teniendo en una circunferencia sobre el diámetro AF los lados AB y AD de los decágonos regulares de 1.ª y de 3.ª especie, y los lados FB y FD de los pentágonos de 2.ª y de 1.ª especie:

1.° Si se trazára por el centro O, en el triángulo rectángulo AFB, una paralela á FB, aparecería un triángulo semejante al AFB, que tendría por hipotenusa OA el radio, y el ángulo agudo O sería la mitad del ángulo en el centro del decágono ordinario. En este triángulo: *el cateto opuesto al ángulo O es la mitad del lado del decágono ordinario, y el cateto adyacente á dicho ángulo es la mitad del lado del pentágono estrellado.*

2.° Si se trazára por el centro O, en el triángulo rectángulo AFD, una paralela á FD, aparecería un triángulo semejante al AFD, que tendría por hipotenusa OA el radio, y el ángulo agudo O sería la mitad del ángulo en el centro del decágono estrellado. En este triángulo: *el cateto opuesto al ángulo O es la mitad del decágono estrellado, y el cateto adyacente á dicho ángulo es la mitad del lado del pentágono ordinario.*

NOTA 17 (de las págs. 161 y 162).

Es sabido que el lado a' del polígono regular de $2n$ lados (ordinario), inscrito en una circunferencia, se calcula en funcion del radio R de ésta, y del lado a del inscrito de n lados, por la fórmula

$$(1) \qquad a' = \sqrt{R[2R - \sqrt{4R^2 - a^2}]}:$$

para calcular inversamente a en funcion de a' y R, basta despejar a de la fórmula (1). Elevando al cuadrado, se tiene

$$a'^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2},$$

ó

$$R\sqrt{4R^2 - a^2} = 2R^2 - a'^2;$$

de donde, elevando al cuadrado y simplificando

$$a^2R^2 = a'^2(4R^2 - a'^2),$$

y, finalmente,

$$(1') \qquad a = \frac{a'\sqrt{4R^2 - a'^2}}{R}.$$

Tambien sabemos que el lado α del polígono regular de n lados (ordinario) circunscrito á una circunferencia, se calcula en funcion del radio R de ésta y del lado a del inscrito de n lados, por la fórmula

$$(2) \qquad \alpha = \frac{2Ra}{\sqrt{4R^2 - a^2}};$$

para calcular inversamente a en funcion de R y α, basta despejar a de la fórmula (2). Elevando al cuadrado, se tiene

$$\alpha^2 = \frac{4R^2a^2}{4R^2 - a^2},$$

ó

$$4R^2\alpha^2 - \alpha^2a^2 = 4R^2a^2;$$

de donde

$$a^2(4R^2 + \alpha^2) = 4R^2\alpha^2,$$

y, finalmente,

$$(2') \qquad a = \frac{2R\alpha}{\sqrt{4R^2 + \alpha^2}}.$$

Por medio de las cuatro fórmulas (1), (1′), (2), (2′) se puede calcular el lado de un polígono regular inscrito ó circunscrito de *doble, mitad* ó *igual* número de lados que otro polígono inscrito ó circunscrito cuyo lado sea dado (siendo tambien conocido el radio de la circunferencia de que se trata), puesto que ellas permiten pasar del inscrito al circunscrito [fórmula (2)] ó viceversa [fórmula (2′)] conservando el mismo número de lados, y duplicar [fórmula (1)] ó reducir á la mitad [fórmula (1′)] el número de lados en lo inscrito. Así, por ejemplo, dado el lado α' de un polígono regular circunscrito, se calcularía el lado α del circunscrito de un número de lados mitad del anterior por el modo siguiente: del dato α' se pasaría [fórmula (2′)] al lado a' del inscrito del mismo número de lados; de éste se pasaría [fórmula (1′)] al lado a del inscrito de un número de lados mitad; y, finalmente, se pasaría de éste [fórmula (2)] al lado α.

Se sabe cuál es el procedimiento gráfico directo que hay que emplear para tener el polígono regular inscrito ó circunscrito de *doble*, *mitad* ó *igual* número de lados que otro polígono inscrito ó circunscrito dado.

NOTA 18 (de la pág. 168).

Cuando una magnitud variable A′ es siempre menor que otra variable B′, no puede en rigor deducirse que el límite A de la primera es menor que el límite B de la segunda.

La demostracion á que nos referimos en esta Nota quedaría, sin embargo, rigurosa reemplazando un arco de la línea B por su cuerda, y cuidando de que ésta sea exterior ó á lo sumo tangente á la línea convexa A; si, hecho esto, se representa por B_1 la longitud obtenida, reemplazando el arco por la cuerda, esta B_1 vendrá á ser el límite de la variable B′, y de la desigualdad permanente

$$A' < B' \text{ deduciremos } A \leqq B_1;$$

pero, como

$$B_1 < B, \text{ se tiene en definitiva } A < B.$$

NOTA 19 (de la pág. 180).

Conviene hacer notar que las cantidades

$$\varepsilon_k,\ \varepsilon_{k+1},\ \varepsilon_{k+2} \cdots\cdot$$

son *negativas*, puesto que expresan diferencias entre una media geométrica y una media aritmética; por consiguiente,

$$\frac{a_k + 2r_k}{3}$$

es valor aproximado *por exceso* de $\frac{1}{\pi}$, siendo el error cometido menor que $\frac{4}{45} \cdot \frac{(r_k - a_k)^2}{a_k}$.

Si α y ρ fueran valores aproximados *por defecto* de a_k y r_k, la expresion

$$\frac{\alpha + 2\rho}{3}$$

sería aproximada *por defecto* de $\frac{a_k + 2r_k}{3}$. Si en este supuesto el error de $\frac{a_k + 2r_k}{3}$ sobre π fuera menor que $\frac{1}{2.10^m}$, y el de $\frac{\alpha + 2\rho}{3}$, respecto de $\frac{a_k + 2r_k}{3}$, fuera tambien menor que $\frac{1}{2.10^m}$, se podría asegurar que el error de $\frac{\alpha + 2\rho}{3}$ (por defecto ó por exceso) *respecto de* $\frac{1}{\pi}$ sería menor que $\frac{1}{2.10^m}$.

NOTA 20 (de la pág. 260).

Entre las cuatro cantidades R, n, l, S, que representan respectivamente el radio de un sector circular, su número de grados, la longitud de su arco y su área, se tienen dos ecuaciones que permiten calcular dos cualesquiera de ellas en funcion de las otras dos. Ponemos á continuacion un cuadro con las fórmulas que resuelven los

$$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6,$$

problemas que corresponden á las seis combinaciones, dos á dos, de las cuatro cantidades.

R, n	R, l	R, S	n, l	n, S	l, S
$l = \frac{\pi R}{180} n$	$n = \frac{180.l}{\pi R}$	$n = \frac{360.S}{\pi R^2}$	$R = \frac{180.l}{n\pi}$	$R = \sqrt{\frac{360.S}{n\pi}}$	$R = \frac{2S}{l}$
$S = \frac{\pi R^2}{360} n$	$S = l. \frac{R}{2}$	$l = \frac{2S}{R}$	$S = \frac{90.l^2}{n\pi}$	$l = \sqrt{\frac{Sn\pi}{90}}$	$n = \frac{90.l^2}{S\pi}$

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

NOTA 21 (de la pág. 290).

Se demuestra que: *dos rectas cualesquiera* AC *y* A′C′ (figura 18) *son cortadas por tres planos paralelos* P, Q, R, *en partes proporcionales;* ó en otros términos, que si los tres planos P, Q, R son paralelos, se cumple la proporcion

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

No es verdadera la proposicion recíproca: es decir, que si tres planos P, Q, R cortan á dos rectas cualesquiera AC y A′C′ en partes proporcionales AB, BC, A′B′ y B′C′, *no han de ser por esto* paralelos, porque estando sujeto el plano P á pasar por los puntos A y A′ y no más, queda *indeterminada* su direccion, y tambien quedan indeterminadas las direcciones de los planos Q y R, sujetos tan sólo á pasar respectivamente por las rectas BB′ y CC′.

Pero es fácil demostrar que:

TEOREMA.

Si dos rectas cualesquiera AC *y* A′C′ *son cortadas por otras* *tres* AA′, BB′, CC′ *en partes proporcionales, estas tres son paralelas á una misma direccion de plano.*

En efecto, si trazamos por el punto B las paralelas BA, y BC, á las rectas dadas AA′ y CC′, y hacemos pasar por ellas un plano, la recta BB′ estará contenida en él; ó en otros términos, este plano pasará por el punto B′, porque dicho plano y los paralelos á él, que contienen á AA′ y CC′, cortan á la recta A′C′ en partes proporcionales á AB y BC, y no puede haber entre A′ y C′ un punto distinto de B′ que divida á A′C′ en dos segmentos aditivos que estén en la relacion dada de AB á BC.

Del mismo modo se probaría que la recta AA′ estaría contenida en un plano paralelo á BB′ y CC′ que se trazára por el punto A, ó que la recta CC′ habría de estar situada en el plano que se hiciera pasar por el punto C paralelamente á AA′ y BB′. (*)

Se ve, pues, que el hecho de ser cortadas dos rectas cualesquiera por otras tres AA′, BB′, CC′ en partes proporcionales, sólo indica que por estas tres rectas *se pueden hacer pasar tres planos paralelos*, lo cual no es posible por tres rectas cualesquiera que no estén sujetas á la condicion de ser paralelas á una misma direccion de plano.

Si las dos rectas AC y A′C′ estuvieran situadas en un plano, los tres planos paralelos P, Q, R cortarían á su plano segun tres rectas AA′, BB′ y CC′ paralelas entre sí *(figura 19)*, y el teorema directo se convertiría en el teorema conocido de Geometría plana que dice: *dos rectas cualesquiera* AC *y* A′C′, *son cortadas por tres paralelas en partes proporcionales.*

(*) En el Apéndice al libro V del *Tratado* de Rouché y Comberousse, se demuestra este teorema, enunciado del siguiente modo: «*Toda recta que divida proporcionalmente á dos lados opuestos de un cuadrilátero alabeado, está situada en un plano paralelo á los otros dos lados.*»

Corolarios.

Cuando son várias las rectas AC, A′C′ A″C″,... cortados por tres planos paralelos, P, Q, R, se tiene (por el intermedio de relaciones comunes) la série de razones iguales *(fig. 20)*

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{A''B''}{B''C''}=\frac{A'''B'''}{B'''C'''}=\cdots$$

Si várias rectas AC, AC′, AC″... (fig. 21) *concurren en un punto* A (formando un haz en el espacio) *y son cortadas por dos planos paralelos* Q *y* R, *se tiene análogamente la série de razones iguales*

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}=\frac{AB''}{B''C''}=\frac{AB'''}{B'''C'''}=\cdots$$

Recíprocamente. *si en una série de secantes* AC, AC′, AC″ ... *que parten de un punto* A *y están cortadas por un plano* R, *se marcan puntos* B, B′, B″... *que las dividan en partes proporcionales, estos puntos estarán en un plano paralelo al primero.*

Porque, en efecto, las rectas de union BB′, B′B″, B″B‴,..., habrán de ser respectivamente paralelas á CC′, C′C″, C″ C‴,...; luego el plano BB′B″, paralelo á CC′C″, deberá ser el mismo que el B′B″B‴ paralelo á C′C″C‴, que es R, y así sucesivamente.

Tambien se ve que:

Si dos líneas quebradas cualesquiera BB′B″B‴,... *y* CC′C″C‴... *(planas ó no) tienen sus lados paralelos y proporcionales, las rectas de union* BC, B′C′, B″C″, B‴C‴,... *concurren en un cierto punto* A.

En efecto, si es r el valor constante de las relaciones

$$\frac{BB'}{CC'}=\frac{B'B''}{C'C''}=\frac{B''B'''}{C''C'''}=\cdots,$$

se observa que el punto A en que se corten CB y C′B′ satisface á la condicion

$$\frac{AB'}{AC'} = r,$$

pero como el punto A′ en que C″B″ cortára á C′B′ habría de satisfacer tambien á la condicion

$$\frac{A'B'}{A'C'} = r,$$

y no hay más que un punto que satisfaga á esta condicion, se ve que la recta C″B″ habrá de concurrir en A con las dos primeras, y así sucesivamente todas las demas.

En el caso particular de ser la relacion r igual á 1, las rectas de union se cortan mútuamente por mitad si los segmentos en que el punto A las divide son aditivos; si los segmentos son sustractivos, las rectas de union son paralelas: en este último caso se diría que el punto de concurso está en el infinito.

NOTA 22 (de las págs. 297 y 298).

Se demuestra que: *si dos rectas* AB *y* CD (fig. 22) *son paralelas, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre un mismo plano* P *son paralelas.* (*)

No es verdadera la proposicion recíproca; es decir, que si las proyecciones *ab* y *cd* de dos rectas AB y CD sobre un mismo plano P son paralelas, *no han de ser por esto* paralelas las rectas AB y CD, porque quedan indeterminadas las direcciones de una y otra recta, como sujetas tan sólo á la condicion de estar respectivamente en los planos proyectantes M y N.

Pero es fácil demostrar que:

(*) Se prescinde aqui del caso en que las rectas sean perpendiculares al plano de proyeccion, porque las proyecciones son en tal caso puntos.

TEOREMA.

Si las proyecciones ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un mismo plano* P *son paralelas, los planos proyectantes* M *y* N *son paralelos.*

En efecto, siendo paralelas las rectas *a*A y *c*C levantadas perpendicularmente al plano P por dos puntos cualesquiera *a* y *c* de las proyecciones dadas *ab* y *cd*, los planos de los ángulos A*ab* y C*cd*, es decir, los planos proyectantes M y N son paralelos.

COROLARIO.

Si las proyecciones ab *y* cd (fig. 23) *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un mismo plano* P *son paralelas, y tambien lo son las proyecciones* a′b′ *y* c′d′ *de las mismas rectas* AB *y* CD *sobre otro plano* P′ *(no paralelo á* P*), las rectas* AB *y* CD *son paralelas entre sí.*

Porque, segun el recíproco anterior, los planos M y N son paralelos, y tambien lo son los planos M′ y N′, y las dos rectas AB y CD son, por consiguiente, paralelas á la recta H ó á la recta K, y por tanto paralelas entre sí. (*)

Este corolario cae en defecto cuando *las proyecciones* ab *y* cd *son perpendiculares á la interseccion* I *de los dos planos* P *y* P′ *(fig. 24),* porque entónces, segun un teorema conocido, los planos proyectantes M y N serían perpendiculares á la recta

(*) Es necesaria la restriccion de que el plano de proyeccion P′ no sea paralelo á P, porque teniendo dos planos paralelos sus perpendiculares comunes, el plano proyectante de una recta AB sobre P sería tambien proyectante de AB sobre P′, y las proyecciones de AB sobre P y P′ dejarían indeterminada la direccion de AB, equivaliendo á una sola proyeccion. Cuando, tratando de direccion, se hable de proyeccion de una recta sobre un plano, entiéndase que se habla de una *direccion* de plano y no de una determinada posicion. En general no debería decirse que una recta es perpendicular á un plano, sino que *una direccion de rectas es perpendicular á una direccion de planos.* Del mismo modo, debería decirse siempre: *perpendicularidad (ó inclinacion cualquiera) de dos direcciones de rectas, de dos direcciones de planos, ó de una direccion de rectas y una direccion de planos.*

I, y tambien perpendiculares, por tanto, al plano P′ que pasa por esta I; pero conteniendo los planos M y N á las rectas AB y CD, y siendo perpendiculares al plano P′, habrán de coincidir con los planos proyectantes M′ y N′, y la demostracion del corolario no es aplicable: queda nuevamente indeterminada la direccion de las rectas AB y CD, y no se puede afirmar, por consiguiente, que estas rectas sean paralelas.

Aquí se ve que: *las proyecciones* a′b′ *y* c′d′ *habrán de ser en este caso particular perpendiculares á* I *en los mismos puntos* m *y* n *en que lo sean* ab *y* cd; porque, siendo intersecciones de P′, con M y N pasan por *m* y *n*, y estando situadas en los planos M y N, son perpendiculares á I.

Las rectas AB y CD son perpendiculares á la interseccion I.

Están demostrados los dos teoremas siguientes:

1.° *Si dos rectas* AB *y* CD (fig. 25) *son perpendiculares entre sí, y una de ellas* CD *es paralela al plano* P *ó está contenida en él, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre este plano son perpendiculares entre sí.*

2.° *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y una de ellas* CD *es paralela al plano* P *ó está contenida en él, las rectas* AB *y* CD *son perpendiculares entre sí.*

Véase ademas que:

TEOREMA.

3.° *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y estas rectas* AB *y* CD *son tambien perpendiculares entre sí, una de ellas,* AB *ó* CD, *habrá de ser paralela al plano* P *ó estar contenida en él.*

En efecto, si la recta AB no es paralela al plano P ni está contenida en él, le cortará en un punto *p*, que (como se sabe) pertenece á su proyeccion *ab*. Ahora bien, si la recta CD no fuera paralela al plano P ni estuviera contenida en él, se podría trazar por uno de sus puntos *n* una recta C′D′ paralela al plano P (que habría de estar forzosamente contenida en el plano N), y tendríamos: por una parte la recta *pba*, que, siendo perpendicular á *ocd* y á una proyectante *oo*′, es perpendicular al plano N; y por otra parte la *p*BA, que, siendo perpendicular á CD por hipótesis, lo sería tambien á C′D′ en virtud del teorema 2.°, y sería, por consiguiente, perpendicular tambien al plano N; es decir, que tendríamos desde el punto *p* dos perpendiculares *pba* y *p*BA al plano N, lo cual es absurdo.

Caso particular. Si una de las dos rectas está situada en el plano P, sólo tienen razon de ser los dos primeros teoremas, que pueden enunciarse entónces de este modo:

1.° *Si una recta* AB *es perpendicular á otra* cd *situada en un plano* P, *la proyeccion* ab *de* AB *sobre este plano, tambien lo es.*

2.° Recíproco.—*Si la proyeccion* ab *de una recta* AB *sobre un plano* P *es perpendicular á otra* cd *situada en este plano, la recta* AB *tambien lo es.*

Si en este caso particular las dos rectas AB y *cd* se cortáran en un punto *p (fig. 26)*, podrían enunciarse los tres teoremas conocidos por *Teoremas de las tres perpendiculares*, á saber:

TEOREMAS.

1.° *Si una recta* AB *corta perpendicularmente en* p *á otra* cd *situada en un plano* P, *y se baja la perpendicular* Aa *desde un punto cualquiera* A *de la primera sobre el plano* P, *y se unen los piés* a *y* p (es decir, se proyecta la recta AB), *esta recta* ap *será perpendicular á* cd.

2.° *Si desde el pié* a *de una perpendicular* Aa *á un plano* P *se baja la perpendicular* ap *á una recta* cd *situada en este pla-*

no, y se une un punto cualquiera A *de la primera con* p, *esta recta* Ap *será perpendicular á* cd. (*)

3.º *Si una recta* AB *corta perpendicularmente en* p *á otra* cd *situada en un plano* P, *y por el punto* p *se levanta en este plano la perpendicular* pa *á* cd, *y desde un punto cualquiera* A *de la primera se baja la perpendicular* Aa *sobre* pa, *esta recta* Aa *será perpendicular al plano* P; porque, si así no fuera, bajando la perpendicular A*a'* al plano P, la recta de union *a'p* sería perpendicular á *cd* (1.º) y se tendrían por el punto *p* dos perpendiculares á *cd* en el plano P.

Como se ve, las tres propiedades de perpendicularidad son:

1.ª La de la recta A*a* y el plano P;

2.ª La de las rectas AB y *cd;*

3.ª La de las rectas *ap* y *cd.*

Está demostrado el siguiente

TEOREMA.

Si una recta AB (fig. 27) *es perpendicular á un plano* Q, *su proyeccion* ab *sobre otro plano cualquiera* P *es perpendicular á la traza* cd *de* Q *sobre* P.

No es verdadera la proposicion recíproca; es decir, que si la proyeccion *ab* de una recta AB sobre un plano P es perpendicular á la traza *cd* de un plano Q sobre P, *no ha de ser por esto* perpendicular la recta AB al plano Q, porque la direccion de la recta AB queda indeterminada, como sujeta tan sólo á la condicion de estar situada en el plano proyectante M.

Pero es fácil demostrar que:

TEOREMA.

Si la proyeccion ab *de una recta* AB *sobre un plano* P *es*

(*) Estos dos primeros teoremas no son otra cosa que el directo y el recíproco del caso particular que se acaba de considerar.

perpendicular á la traza cd *de un plano* Q *sobre* P, *el plano proyectante* M *es perpendicular al plano* Q.

En efecto, la recta *cd* es perpendicular á *ab* por hipótesis, y á una proyectante cualquiera de AB; por consiguiente, es perpendicular al plano M; luego el plano Q, que pasa por *cd*, tambien lo es.

Corolario.

Si las proyecciones ab *y* a′b′ (fig. 28) *de una recta* AB *sobre dos planos* P *y* P′ *(no paralelos)*, *son respectivamente perpendiculares á las trazas* cd *y* c′d′ *de un plano* Q, *sobre los mismos* P *y* P′, *la recta* AB *es perpendicular al plano* Q.

Porque, segun el recíproco anterior, los planos proyectantes M y M′ son perpendiculares al plano Q, y, por consiguiente, su interseccion AB tambien lo es.

Este corolario cae en defecto *cuando la proyeccion* ab *es perpendicular á la interseccion* I *de los dos planos* P *y* P′ *(figura 29)*, porque entónces el plano proyectante M es perpendicular á la recta I, y, por tanto, al plano P′ que pasa por esta I; pero conteniendo el plano M á la recta AB, y siendo perpendicular á P′, coincide con el proyectante M′, y la demostracion del corolario no es aplicable: la direccion de la recta AB queda nuevamente indeterminada, y no se puede, por consiguiente, asegurar que sea perpendicular al plano Q.

Como se acaba de ver, la proyeccion *a′b′* ha de ser en este caso particular perpendicular á I en el mismo punto *m* en que lo sea *ab:* las trazas *cd* y *c′d′* del plano Q serán paralelas á I, como perpendiculares á *ab* y *a′b′* respectivamente; el plano Q es paralelo á la recta I, y la recta AB es perpendicular á ella, como situada en el plano M, que lo es.

En la figura 27 se ve fácilmente que los teoremas anteriores dan lugar á estos otros

TEOREMAS.

1.° *Si dos planos* Q *y* M *son perpendiculares entre sí, y uno de ellos* M *es perpendicular al plano* P, *sus trazas* ab *y* cd *sobre este plano son perpendiculares entre sí;* porque siendo los dos planos P y Q perpendiculares á un tercero M, su interseccion *cd* tambien lo es, y, por consiguiente, *cd* es perpendicular á la recta *ab*, que está situada en el plano M.

2.° *Si las trazas* ab *y* cd *de dos planos* M *y* Q *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y uno de los planos* M *es perpendicular á* P, *los planos* M *y* Q *son perpendiculares entre sí;* porque siendo la recta *cd*, en el plano P, perpendicular á la recta *ab*, lo es tambien al plano M; luego el plano Q, que pasa por ella, es perpendicular al plano M.

3.° *Si dos planos* M *y* Q *son perpendiculares entre sí, y sus trazas* ab *y* cd *sobre un mismo plano* P *son tambien perpendiculares entre sí, uno de los planos* Q *ó* M *habrá de ser perpendicular al plano* P.

En efecto, si el plano Q *(fig. 27)* no es perpendicular á P (como suponemos que le corta), será oblícuo á P, y la recta *ab* es en este supuesto oblícua al plano Q; porque si le fuera perpendicular, el plano P, que pasa por *ab*, tambien lo sería.

Ahora bien, si el plano M levantado por *ab* no fuera perpendicular á P, se podría levantar otro M′ que lo fuese, y tendríamos: por una parte, el plano M perpendicular á Q por hipótesis, y por otra parte el plano M′ tambien perpendicular á Q, en virtud del teorema 2.°; es decir, que tendríamos por la recta *ab* (oblícua á Q) dos planos M y M′ perpendiculares al plano Q, lo cual es absurdo.

Las tres propiedades de perpendicularidad son aquí:

1.ª La de los planos M y P;

2.ª La de los planos M y Q;

3.ª La de las trazas *ab* y *cd*.

En lo que precede se ven ejemplos de proposiciones cuyas hipótesis contienen *dos propiedades*, de las cuales depende la conclusion. Así, en esta proposicion:

Si dos rectas AB *y* CD *son perpendiculares entre sí, y una de ellas* CD *es paralela al plano* P, *ó está contenida en él, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre este plano son perpendiculares entre sí*, la conclusion depende de dos propiedades contenidas en la hipótesis, que son:

1.ª Ser las rectas AB y CD perpendiculares entre sí.

2.ª Ser una de las rectas CD paralela al plano P, ó estar contenida en él.

En este género de proposiciones intervienen tres propiedades, y puede verse (con entera generalidad) que si se demuestran los tres teoremas formados, combinando dos á dos las tres propiedades, es decir, que si se demuestra que una cualquiera de ellas es consecuencia de las otras dos, *será* NECESARIAMENTE *cierto que si una de las tres propiedades se cumple y otra no, la tercera no se cumplirá;* porque si esta tercera se verificase, deduciríamos de su union, con la que se cumple por el supuesto, que la otra habría de cumplirse tambien, lo cual es contra el supuesto.

Enunciaremos así seis teoremas (que podrían llamarse *contrarios parciales* de los tres primeros), porque cada uno de estos tres primeros dará orígen á dos contrarios parciales, si se supone que la propiedad que se cumple es ya una, ya otra de las dos que entran en su hipótesis.

Si bien se mira, dos cualesquiera de los tres teoremas que se forman combinando dos á dos las tres propiedades, son *recíprocos parciales* del tercero, puesto que entra en sus hipótesis la conclusion de éste, y pasa á ser conclusion una de las dos propiedades que estaban contenidas en la hipótesis. Así, las dos recíprocas parciales de la proposicion que citamos ántes como ejemplo, son:

1.ª *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y una de estas* CD *es paralela al plano* P *ó está contenida en él, las rectas* AB *y* CD *son perpendiculares entre sí.*

2.ª *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y estas dos rectas son tambien perpendiculares entre sí, una de ellas* AB *ó* CD *habrá de ser paralela al plano* P *ó estar contenida en él.* (*)

Los seis contrarios parciales se enunciarían sin dificultad; por ejemplo:

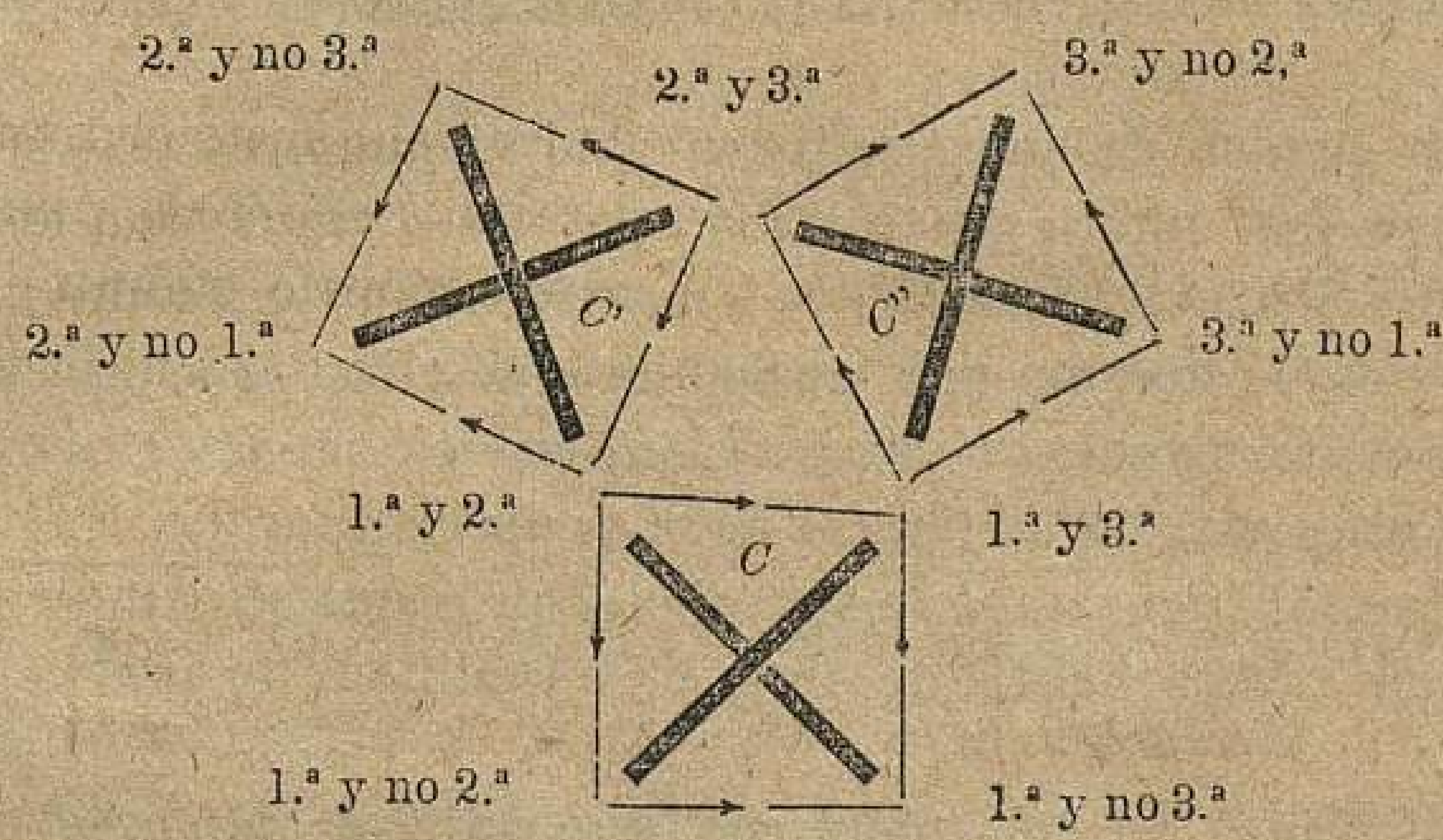
Si dos rectas AB *y* CD *son perpendiculares entre sí y ninguna de ellas*

(*) En la obra de MM. Rouché y Comberousse se considera sólo la 1.ª recíproca, y queda, por consiguiente, incompleto el estudio de este teorema.

es paralela á un plano P *ni está contenida en él, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre este plano* P *no son perpendiculares entre sí;*

Etc., etc.

La dependencia lógica de estos contrarios parciales, respecto del teorema primero y de sus dos recíprocos parciales, puede representarse por medio de tres cuadrados colocados en los tres lados de un triángulo de esta suerte: (*)



Consideremos tres propiedades, 1.ª, 2.ª, 3.ª, de tal manera ligadas entre sí, que cada una de ellas sea consecuencia de las otras dos; es decir, que adoptando como

hipótesis		*conclusion*
1.ª y 2.ª	se deduzca	3.ª
1.ª y 3.ª	»	2.ª
2.ª y 3.ª	»	1.ª

Las seis proposiciones que hemos llamado *contrarias parciales* de éstas, son:

hipótesis	*conclusion*
1.ª y no 2.ª, ...	no 3.ª
2.ª y no 1.ª, ...	no 3.ª
1.ª y no 3.ª, ...	no 2.ª
3.ª y no 1.ª, ...	no 2.ª
2.ª y no 3.ª, ...	no 1.ª
3.ª y no 2.ª, ...	no 1.ª

(*) La representacion que damos es puramente *schemática*.

La representacion *schèmática* que proponemos, es como sigue: En cada uno de los nueve puntos está puesta la hipótesis de un teorema. Las hipótesis de los tres primeros están en los tres vértices del triángulo de manera que, si se consideran dos de ellos, por ejemplo:

hipótesis	*conclusion*
Si 1.ª y 2.ª, ...	3.ª
Si 1.ª y 3.ª, ...	2.ª

se advierte que, siendo la 1.ª propiedad un supuesto comun de los dos teoremas, podemos tratarlos como *directo y recíproco simples*, puesto que sus enunciados se reducen (sobre el supuesto comun de estar satisfecha la 1.ª propiedad) á los siguientes:

	hipótesis	*conclusion*
Directo:	Si 2.ª, ...	3.ª
Recíproco:	Si 3.ª, ...	2.ª

Mirados estos dos teoremas como directo y recíproco simples, fórmese el cuadrado C de la Nota 1.ª y veremos reproducido lo que allí dijimos:

Contrario: Si no 2.ª, ... no 3.ª,

que se deriva necesariamente del

Recíproco: Si 3.ª, ... 2.ª;

y tambien:

Contrario del recíproco: Si no 3.ª, ... no 2.ª,

que se deriva necesariamente del

Directo: Si 2.ª, ... 3.ª

Estas cuatro proposiciones, lo repetimos, se enuncian así sobre el supuesto comun de estar satisfecha la 1.ª propiedad, de la cual hacemos abstraccion (en los enunciados que preceden) para apreciar más fácilmente el enlace lógico que hay entre las cuatro proposiciones.

El cuadrado C′ corresponde á las dos proposiciones:

hipótesis	*conclusion*
Si 2.ª y 3.ª, ...	1.ª
Si 2.ª y 1.ª, ...	3.ª

miradas como directa y recíproca simples sobre el supuesto comun de la 2.ª propiedad.

El cuadrado C″ corresponde á las dos

hipótesis	*conclusion*
Si 3.ª y 1.ª, ...	2.ª
Si 3.ª y 2.ª, ...	1.ª

miradas tambien como directa y recíproca simples sobre el supuesto comun de la 3.ª propiedad.

Se ve que la verdad de cada teorema de los que ocupan los vértices del triángulo implica *necesariamente* la verdad de dos de los contrarios parciales, y que la verdad de uno cualquiera de estos implica necesariamente la verdad de uno de los primeros.

Diremos, pues, en definitiva que:

Si se demuestran separadamente

DIRECTA Y SUS DOS RECÍPROCAS PARCIALES;

ó bien

DIRECTA Y SUS DOS CONTRARIOS PARCIALES;

quedan establecidas las nueve proposiciones.

Lo más natural (y ordinariamente lo más sencillo) será demostrar la directa y las dos recíprocas parciales, lo cual equivale á hacer ver que cada una de las tres propiedades que intervienen en la cuestion es consecuencia de las otras dos.

Se podría generalizar esto considerando proposiciones en que intervinieran cuatro ó más propiedades.

NOTA 23 (de la pág. 303).

Se sabe que si por un punto de la arista de un diedro se levantan perpendiculares á esta arista en cada una de las caras, *las magnitudes de estos ángulos rectilíneos son proporcionales á las magnitudes de los diedros,* porque se cumplen las dos condiciones que son *esenciales* para la proporcionalidad, á saber:

1.ª *Que dos rectilíneos correspondientes á diedros iguales, son iguales;*

2.ª *Que si un diedro es igual á la suma de otros dos, el rectilíneo correspondiente es igual á la suma de los rectilíneos correspondientes á los otros dos.*

Veamos si estas dos condiciones pueden cumplirse con algun otro ángulo formado por dos rectas trazadas en uno y otro plano.

Ante todo, la correspondencia en la igualdad exige que haya coincidencia de los ángulos rectilíneos al superponer dos diedros iguales, y esto, á su vez, exige que las inclinaciones de sus lados sobre la arista sean dos á dos iguales; pero hay que considerar dos casos:

1.º Que los dos lados oa y ob del ángulo rectilíneo tengan la misma inclinacion α sobre la arista OI;

2.º Que el lado oa tenga una inclinacion α, y el lado ob tenga una inclinacion β sobre OI.

En el primer caso *(fig. 30)*, el lado ob del rectilíneo aob correspondiente al diedro PoIQ, es tambien uno de los lados del rectilíneo boc correspondiente al diedro QoIR; y entónces las tres rectas oa, ob, oc no pueden estar situadas en un mismo plano; porque la recta Io formaría ángulos agudos iguales con las tres rectas oa, ob, oc, que pasarían por su pié o sobre ese plano, lo cual se sabe que no puede ser. Se tendrá, pues, un triedro $oabc$, en el cual

$$aoc < aob + boc;$$

luego no hay correspondencia en la suma.

En el segundo caso *(fig. 31)*, el lado ob del rectilíneo aob forma con la arista oI un ángulo β diferente del ángulo α que el lado oa forma con la misma arista; y, por consiguiente, el lado ob del rectilíneo aob es distinto del lado oa' del rectilíneo $a'ob'$: en este segundo caso tampoco puede haber correspondencia en la suma *para magnitudes, cualesquiera de los diedros.*

En efecto, coloquemos el diedro QoIR, adyacente al PoIQ, y supongamos que, dejando fijos los planos P y Q, pase el plano R á ocupar la posicion R_1, y el lado ob á la posicion ob_1. Si hubiera correspondencia en la suma, se tendría

$$\left.\begin{array}{l} aob + a'ob' = aob' \\ aob + a'ob'_1 = aob'_1 \end{array}\right\};$$

de donde

$$aob' - a'ob' = aob'_1 - a'ob'_1;$$

lo que no puede ser si tomamos dos posiciones ob' y ob'_1 que no estén situadas en el plano aoa', porque se tienen dos triedros $oaa'b'$ y $oaa'b'_1$ con una cara comun, dos caras que se cortan y dos que no se cortan, y en ellos se tiene

$$aob' + a'ob'_1 > a'ob' + aob'_1;$$

de donde

$$aob' - a'ob' > aob'_1 - a'ob'_1.$$

Vemos, pues, que, si hay correspondencia en la igualdad, no la hay en la suma.

Si dejáramos satisfecha, por el contrario, la correspondencia en la suma por medio de ángulos rectilíneos tales que al colocar los diedros como adyacentes aparecieran ellos tambien adyacentes en un mismo plano oblícuo á la arista, quedaría desatendida la correspondencia en la igualdad, porque las inclinaciones de los lados sobre la arista OI serían diferentes.

Queda así demostrado que *sólo los rectilíneos formados por perpendiculares á la arista* cumplen las dos condiciones esenciales para la proporcionalidad con los diedros.

NOTA 24 (de la pág. 307).

Como resúmen de las diversas propiedades de paralelismo y perpendicularidad de rectas entre sí, de planos entre sí, y de rectas y planos, conviene ver que:

Son DETERMINADOS *los siguientes*

PROBLEMAS GENERALES:

1.° *Trazar por un punto* A *una recta paralela á otra recta* B, porque se imponen á la recta *dos* condiciones, que son: pasar por un punto y tener una direccion dada.

2.° *Trazar por un punto* A *un plano paralelo á otro plano* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son: pasar por un punto y ser paralelo á dos direcciones situadas en el plano B.

3.° *Trazar por una recta* A *un plano paralelo á otra recta* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son: pasar por dos puntos de la recta A y ser paralelo á la direccion de la otra recta B.

Esta tercera condicion sería una consecuencia de las dos primeras si B fuera paralela á A, en cuyo caso el problema sería *indeterminado*, porque se impondrían sólo *dos* condiciones al plano.

4.° *Trazar por un punto* A *una recta perpendicular á un plano* B, porque se imponen á la recta *dos* condiciones, que son: pasar por un punto y tener la direccion de una perpendicular á un plano.

5.° *Trazar por un punto* A *un plano perpendicular á una recta* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son: pasar por un punto y ser paralelo á dos direcciones en un plano perpendicular á la recta B.

6.° *Trazar por una recta* A *un plano perpendicular á un plano* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son:

pasar por dos puntos de la recta A, y ser paralelo á la direccion de una perpendicular al plano B.

La tercera condicion sería una consecuencia de las dos primeras si la recta A fuera perpendicular al plano B, en cuyo caso sería *indeterminado*, porque el plano quedaría solamente sujeto á *dos* condiciones.

Son INDETERMINADOS *los siguientes*

PROBLEMAS GENERALES:

1.° *Trazar por un punto* A *un plano paralelo á una recta* B, porque sólo se imponen al plano *dos* condiciones, que equivalen á que el plano contenga la paralela trazada por el punto A á la recta B.

2.° *Trazar por un punto* A *una recta paralela á un plano* B, porque sólo se impone á la recta *una* condicion: la de pasar por el punto A en el plano trazado por él paralelamente al plano B.

3.° *Trazar por un punto* A *un plano perpendicular á un plano dado* B, porque sólo se imponen al plano *dos* condiciones, que son: pasar por A y ser paralelo á la direccion de una perpendicular al plano B, lo cual equivale á que el plano contenga la perpendicular trazada por el punto A al plano B.

4.° *Trazar por el punto* A *una recta perpendicular á una recta dada* B, porque sólo se impone á la recta *una* condicion: la de pasar por el punto A en el plano trazado por él perpendicularmente á la recta B.

Son ABSURDOS *los siguientes*

PROBLEMAS GENERALES:

1.° *Trazar por una recta* A *un plano paralelo á un plano dado* B, porque se imponen al plano *cuatro* condiciones, que son: pasar por dos puntos de la recta A y ser paralelo á dos direcciones en el plano B.

Una de estas cuatro condiciones sería consecuencia de las otras tres si la recta A fuera paralela al plano B, en cuyo caso las condiciones quedarían reducidas á *tres* y el problema sería *determinado* (el 2.º de los enunciados).

2.º *Trazar por una recta* A *un plano perpendicular á una recta dada* B, porque se imponen al plano *cuatro* condiciones, que son: pasar por dos puntos de la recta A y ser paralelo á dos direcciones en un plano perpendicular á la recta B.

Una de estas cuatro condiciones sería consecuencia de las otras tres si la recta A fuera perpendicular á la recta B, en cuyo caso las condiciones quedarían reducidas á tres y el problema sería *determinado* (el 5.º de los enunciados).

Conviene ver tambien que es, en general, *determinado* el siguiente

PROBLEMA.

Trazar por un punto A *una recta que se apoye sobre dos rectas dadas* B *y* B′.

Queda sujeta la recta á las *dos* condiciones de estar situada en el plano AB y tambien en el plano AB′, y estas dos condiciones la determinan en general.

Si una de las rectas, B por ejemplo, fuera paralela al plano AB′, la interseccion de los planos AB y AB′ sería paralela á B; entónces podría decirse que la recta que resolviera el problema se apoyaría sobre B en el punto del infinito.

Si las dos rectas B y B′ estuvieran en un mismo plano, podrían cortarse ó ser paralelas, y en uno y otro caso podría estar el punto A en ese plano ó no; si el punto A no está en el plano BB′, la recta está *determinada* y es la que une el punto A con el de interseccion de B y B′ (si éstas se cortan), ó la paralela á ellas que pasa por el punto A (si son paralelas): si el punto A está en el plano BB′, el problema es *indeterminado*, porque sólo queda sujeta la recta á *una* condicion:

la de pasar por el punto A en el plano BB′, ya se corten B y B′ ó sean paralelas.

Si en cualquiera de los casos anteriores el punto A perteneciera á una de las rectas, B por ejemplo, el problema sería evidentemente *indeterminado*, puesto que sólo quedaría sujeta la recta á *una* condicion : la de pasar por el punto A y apoyarse en la recta B′; es decir, la de pasar por el punto A en el plano AB′.

El exámen del problema que precede, hace ver que es *indeterminado* el siguiente

PROBLEMA.

Hallar una recta que se apoye sobre tres rectas dadas B, B′, B″.

Si se toma un punto cualquiera A en la recta B″, nos encontramos en el problema anterior, que es *determinado*. Si nos fijáramos en el punto A de la recta B″, tal que el plano determinado por él y una de las otras dos rectas, B′ por ejemplo, fuera paralelo á B, la recta correspondiente á este punto sería paralela á B (como ya vimos), y sería la solucion del siguiente problema *determinado :*

PROBLEMA.

Hallar una recta paralela á B *que se apoye en otras dos rectas dadas* B′ *y* B″.

Este problema se resuelve, como acabamos de ver, trazando por B′ un plano paralelo á B, hallando la interseccion de este plano con B″ y trazando por este punto la paralela á B; ó lo que es igual, trazando por B′ y B″ dos planos paralelos á B y hallando su interseccion.

Fácil es ver todas las combinaciones de casos particulares que pueden ofrecerse en estos últimos problemas.

NOTA 25 (de la pág. 353).

PROBLEMA.

Se da el volúmen V, *la altura* h *y el lado* A *de la base inferior de un tronco de pirámide de bases paralelas; se supone que esta base es un exágono* (ú otro polígono cualquiera) *regular, y se pide el lado* x *del exágono regular que sirve de base superior al tronco.*

Se sabe que este problema numérico queda planteado en la ecuacion de 2.° grado

$$V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{x}{A} + \frac{x^2}{A^2}\right),$$

ó

$$x^2 + Ax + A^2\left(1 - \frac{3V}{Bh}\right) = 0,$$

en la cual B representa el área del polígono regular que sirve de base, y cuyo lado es A; si se trata de un exágono, como en el enunciado se ha dicho, la expresion de B es

$$B = \frac{3\sqrt{3}}{2}A^2.$$

Resuelta la ecuacion, da

$$x = -\frac{A}{2} \pm \frac{A}{2}\sqrt{3\left(\frac{4V}{Bh} - 1\right)}.$$

El problema admite, pues, en general *dos soluciones.*

DISCUSION.

Las raíces son *imaginarias* cuando $V < \frac{Bh}{4}$; *reales é* *iguales á* $-\frac{A}{2}$ cuando $V = \frac{Bh}{4}$; *reales y desiguales*, cuando $V > \frac{Bh}{4}$. En este último caso, el radical es *menor*, *igual* ó *mayor* que 1, segun que V sea *menor*, *igual* ó *mayor* que $\frac{Bh}{3}$; y por consiguiente: las raíces reales y desiguales son *ambas negativas* cuando $V < \frac{Bh}{3}$; una raiz es *cero*, y otra $-A$ cuando $V = \frac{Bh}{3}$; una es *positiva* y otra *negativa* cuando $V > \frac{Bh}{3}$. En este último caso, todavía vemos que, segun sea V *menor*, *igual* ó *mayor* que Bh, la raiz positiva x' será *menor*, *igual* ó *mayor* que A, y la raiz negativa x'' será numéricamente *menor*, *igual* ó *mayor* que 2A.

Para mayor claridad agrupemos los resultados dados por la fórmula que resuelve el problema:

$$V < \frac{Bh}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{raíces imaginarias.}$$

$$V = \frac{Bh}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots x' = x'' = -\frac{A}{2}.$$

$$V > \frac{Bh}{4} \begin{cases} V < \dfrac{Bh}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots x' < 0;\ x'' < 0. \\[2ex] V = \dfrac{Bh}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots x' = 0;\ x'' = -A. \\[2ex] V > \dfrac{Bh}{3} \begin{cases} V < Bh \ldots\ldots x' \left.\begin{matrix} > 0 \\ < A \end{matrix}\right\} x'' \left.\begin{matrix} < 0 \\ < 2A. \end{matrix}\right\} \\[2ex] V = Bh \ldots\ldots x' \left.\begin{matrix} > 0 \\ = A \end{matrix}\right\} x'' \left.\begin{matrix} < 0 \\ = 2A. \end{matrix}\right\} \\[2ex] V > Bh \ldots\ldots x' \left.\begin{matrix} > 0 \\ > A \end{matrix}\right\} x'' \left.\begin{matrix} < 0 \\ > 2A. \end{matrix}\right\} \end{cases} \end{cases}$$

INTERPRETACION.

Para interpretar estos resultados, hagamos observar primeramente que la inclinacion del eje del tronco de pirámide sobre el plano de la base es arbitraria, y en nada afecta ni interesa al problema de que tratamos; porque estando situada la base inferior B del tronco en el plano P *(fig. 32)*, y en una posicion dada, bastará colocar el exágono regular, cuyo lado sea x, en el plano P′ y con sus lados paralelos á los del exágono B: *en cualquiera de estas posiciones*, el exágono situado en el plano P′ determinará, en union de B, un tronco de pirámide cuyo volúmen es V y cuya altura es h, pero de figura indeterminada, con tal que se tenga presente que debe formarse *tronco de primera especie* si el lado x' de la base superior es *positivo,* y de *segunda especie* si el lado x'' es *negativo.*

Ahora bien, si teniendo el plano P′ paralelo á P, y á la distancia h, concebimos un plano Q′ paralelo á ellos y á la distancia $(\frac{3}{4}h)$ del plano P, é imaginamos una pirámide cualquiera (la llamaremos q') que tenga por base B y su vértice en el plano Q′, y otra pirámide cualquiera (la llamaremos p') que tenga por base B y su vértice en el plano P′, el volúmen de la primera (q') sería $\frac{Bh}{4}$, y el volúmen de la segunda (p') sería $\frac{Bh}{3}$: en vista de esto, la interpretacion de los resultados que preceden es clara.

Considerando B y h constantes, y haciendo variar V por ley de continuidad, diremos que:

Si el volúmen dado V es menor que el volúmen $\frac{Bh}{4}$ de la pirámide q', *no hay solucion.*

Si el volúmen dado V es igual al volúmen $\frac{Bh}{4}$ de la pirámide q', hay *un solo tronco* de pirámide que resuelve el problema, y es tronco de 2.ª especie: las dos pirámides opuestas por el vértice que lo constituyen, tienen su vértice comun en el plano D paralelo á P, y á la distancia $^2/_3 h$ de él, puesto que x' y x'' son iguales á $-\frac{A}{2}$, lo cual indica (en virtud de la propiedad conocida de las secciones causadas en una pirámide por un plano paralelo á la base que la altura de la pirámide superior es mitad de la altura de la pirámide inferior.

Creciendo el volúmen desde $\frac{Bh}{4}$ (el de la pirámide q') hasta $\frac{Bh}{3}$ (el de la p'), hay siempre *dos troncos* de pirámide de 2.ª especie que resuelven el problema para cada valor de V.

Si el volúmen dado V es igual al volúmen $\frac{Bh}{3}$ de la pirámide p', resuelven el problema por una parte la pirámide p, y por otra un tronco de 2.ª especie, constituido por dos pirámides opuestas é iguales, cuyo vértice comun está, por consiguiente, en el plano M paralelo á P á la distancia $\frac{1}{2}h$ de éste; como se ve, el vértice de uno de los troncos de pirámide de 2.ª especie (que resolvían el problema para valores de V comprendidos entre $\frac{Bh}{4}$ y $\frac{Bh}{3}$) ha subido hasta el plano P″ y un tronco se ha convertido en pirámide, miéntras que el vértice del otro tronco de 2.ª especie ha bajado hasta el plano medio M.

Cuando el volúmen dado V es ya mayor que $\frac{Bh}{3}$, hay siempre dos troncos, uno de 1.ª y otro de 2.ª especie, que resuelven el problema para cada valor de V, y se ve que:

Si el volúmen dado V es menor que el volúmen Bh del prisma que tiene por base B y por altura h, la base superior del tronco de 1.ª especie es menor que la inferior B, puesto que la raiz positiva x' es menor que A; y el vertice comun de las dos pirámides opuestas que constituyen el tronco de 2.ª especie, está comprendido entre el plano medio M y el plano E que se halla á la distancia $^1/_3h$ de P, puesto que x'' es menor que 2A.

Si el volúmen dado V es igual al volúmen Bh del prisma citado, el tronco de 1.ª especie se convierte en este prisma, puesto que x' es igual á A; y el vértice comun de las dos pirámides opuestas que constituyen el tronco de 2.ª especie está en el plano E, paralelo á P á la distancia $^1/_3 h$: como se ve, el vértice de la pirámide á que pertenece el tronco de 1.ª especie ha subido hasta el infinito.

Si el volúmen dado V es, finalmente, mayor que el volúmen Bh del prisma, el tronco de 1.ª especie pertenece á una pirámide que tiene su vértice debajo del plano P, puesto que x' es mayor que A; y el vértice comun de las dos pirámides opuestas que constituyen el tronco de 2.ª especie está debajo del plano E paralelo á P á la distancia $^1/_3 h$: creciendo el volúmen V desde Bh indefinidamente, el vértice de la pirámide á que pertenece el tronco de 1.ª especie (que está debajo del plano P) se acerca á él indefinidamente, miéntras que el vértice del tronco de 2.ª especie (que está encima del plano P) se acerca tambien indefinidamente á él.

NOTA 26 (de la pág. 360).

Se sabe que *cuando dos figuras* F′ *y* F″ *son simétricas* (simetría respecto á un centro ó á un plano) *de una tercera* F, *son iguales entre sí.* Pero conviene ver cuál es el movimiento *más sencillo* para llevar á coincidir la figura F′ con la F″ en los diversos casos.

1.º *Si las dos simetrías son respecto á dos centros* o *y* o′ (figura 33) *ó respecto á dos planos paralelos* P y P′ (fig. 34), *el movimiento más sencillo es un simple movimiento de traslacion*, porque las dos figuras iguales F′ y F″ están igualmente orientadas.

Se ve fácilmente que, en uno y otro caso, la magnitud de la traslacion es doble de la distancia que media entre los dos centros ó entre los dos planos de simetría, y en la direccion indicada por esta distancia. En el caso de dos planos de simetría paralelos P y P′, se tiene

$$aa'' = 2ap' \text{ y } aa' = 2ap;$$

de donde, restando,

$$a'a'' = 2pp'.$$

2.° *Si las dos simetrías son respecto á dos planos* P *y* P′ *que se corten* (fig. 35), *el movimiento más sencillo es un simple movimiento de rotacion.*

Para demostrarlo, hagamos el dibujo sobre un plano perpendicular á la interseccion I de los dos planos: entónces esta interseccion aparece representada por el punto I, y los planos P y P′ por rectas. Se ve primeramente que la figura F′ podría pasar á ocupar la posicion F_1 por un primer giro de 180° alrededor del eje p; y que de esta posicion F_1 podría pasar á F″ por un segundo giro de 180° alrededor del eje p', siendo F_1 la figura simétrica de F respecto á un punto cualquiera I de la interseccion, y p, p' las perpendiculares levantadas á P y P′ en dicho punto.

Pero se puede llevar directamente F′ á F″ por un simple giro alrededor de la recta I en una magnitud angular doble del ángulo que forman entre sí los dos planos P y P′ de simetría. En efecto; si se mira un corte como el representado en el dibujo, se nota que el punto I equidista de a' y a'' (ó de b' y b'', de c' y c'',...) y que

$$a'oa'' = b'ob'' = \ldots = 2\text{PIP}';$$

lo cual prueba que el corte plano de la figura F′ llegaría á coincidir con el de la figura F″ por un giro alrededor del punto o en una magnitud angular doble del ángulo PIP′. Ahora bien, lo dicho para un corte se diría para todos, y el conjunto de giros planos quedaría realizado de una vez mediante el giro en el espacio de la figura F′ alrededor de la recta I. (*)

(*) El caso de dos planos de simetría paralelos, es un caso particular de éste: la intersecion I está en el infinito y el movimiento de rotacion se convierte en un movimiento de traslacion perpendicularmente á los planos.

3.º *Si las dos simetrías son respecto á un centro* o *y á un plano* P (fig. 36), *se requieren dos movimientos: uno de traslacion y otro de rotacion*; el primero para llevar la figura F′ á la posicion F_1, y el segundo en 180º alrededor de una perpendicular al plano P para llevarla de la posicion F_1 á la F″, siendo F_1 la figura simétrica de F respecto á un punto cualquiera del plano P, por el cual se levantará la perpendicular que ha de servir de eje de giro.

Los dos movimientos más sencillos son: 1.º, movimiento de traslacion, cuya magnitud sea doble de la distancia *op* que media entre el centro *o* y el plano P, y en la *direccion* y *sentido* de esta distancia; 2.º, movimiento de rotacion en 180º alrededor de la perpendicular *op*. Es decir, que los dos movimientos *más sencillos* consisten en un movimiento paralelamente á *op* seguido de otro alrededor de la misma *op*: el punto cualquiera que había que escoger en el plano P, es ahora el pié mismo de la distancia entre el centro y el plano de simetría.

NOTA 27 (de la pág. 375).

El primer Lema considera exclusivamente el caso en que uno ó vários diedros *no adyacentes* á la cara ASB (del ángulo poliedro SABCDEF) que puede variar, aumenten ó disminuyan.

No se puede suponer que aumente ó disminuya uno de los diedros SA ó SB adyacentes á dicha cara. En efecto, si ASB es la única cara que puede variar, es decir, si se sabe que las demas caras permanecen constantes, no se puede suponer que, permaneciendo constantes los diedros SC, SD, SE, SF, varíen en manera alguna el diedro SA ó el SB; porque si se construye el ángulo poliedro S á partir de la arista SB, y de la cara BSC, habremos de colocar sucesivamente en posiciones obligadas las caras CSD, DSE, ESF, FSA y llegaremos, por consiguiente, á una obligada posicion de la última arista SA, lo cual significa que no hay variacion posible para la cara ASB, ni para el diedro SA, ni para el diedro SB.

El único supuesto admisible es el de que aumente ó disminuya un diedro como el SD. En este supuesto se nota que uno de los diedros adyacentes ó los dos SA y SB habrán de variar: porque si se empieza la construccion del ángulo poliedro por la arista SB y la cara BSC, y se pone la cara CSD (con lo cual tendremos ya el ángulo BSD), y se aumenta, por ejemplo, el diedro SD, dejando constante lo demas, al llegar á la última arista (que llamaremos SA′) se observa que el triedro SBDA′ quedaría, con respecto al SBDA, en la posicion siguiente: la cara BSD, comun; el diedro BSDA, siendo una parte del BSDA′; y la cara DSA, igual á DSA′. Se ve bien que, en cualquiera de las tres posiciones en que puede quedar la arista SA con respecto á la cara BSA′, habrá variado forzosamente uno de los diedros adyacentes ó los dos.

Es evidente que en un ángulo triedro no se puede suponer que varíe ningun diedro si permanecen constantes las tres caras, puesto que dos triedros que tengan sus caras iguales una á una, tienen tambien sus diedros iguales uno á uno. Por esta razon, al suponer que todas las caras de un poliedro sean constantes y que varíen todos los diedros, no cabe pensar en que se trate de un ángulo triedro.

NOTA 28 (de la pág. 415).

ESFERA.

PROPIEDADES GENERALES.

Asimilando la superficie esférica de un casquete á la superficie plana de un círculo, el polo (que está en el casquete) de la circunferencia menor queda asimilado al centro del círculo plano, y podremos llamar *cuerda esférica* de un casquete al arco de círculo máximo (el menor) que una dos puntos de la circunferencia que lo limita; y *diámetro esférico* de un casquete á una cuerda esférica que pase por el polo, así como se llama *radio esférico* al arco de círculo máximo que une el polo con un punto de la circunferencia.

Un diámetro esférico de un casquete, se compone de dos radios esféricos; y como se sabe que todos los radios esféricos de un mismo casquete son iguales, queda establecido que *todos sus diámetros esféricos son iguales.*

TEOREMAS.

En una misma esfera, ó en esferas iguales, dos casquetes del mismo radio esférico son iguales; porque, superpuestas las esferas de modo que los polos de los círculos coincidan, estos coinciden tambien.

Un punto de una superficie esférica es *interior ó exterior* á un casquete, segun que su distancia al polo sea *menor ó mayor* que el radio esférico.

Todo diámetro esférico divide al casquete en dos partes iguales; porque si completada la circunferencia de círculo máximo de que forma parte el diámetro esférico, se hace girar uno de los hemisferios alrededor del eje polar hasta que coincida con el otro hemisferio, las dos partes en que estaba dividido el casquete coinciden tambien.

El diámetro es la mayor de las cuerdas esféricas de un casquete; porque una cuerda cualquiera, como lado de un triángulo esférico, es menor que la suma de los dos radios esféricos que terminan en sus extremos, y esta suma equivale á un diámetro esférico.

Una cuerda esférica que no es diámetro de un casquete, subtiende dos arcos diferentes de la circunferencia menor que sirve de base. Refiriéndonos al menor de los arcos subtendidos, diremos que en una misma esfera ó en esferas iguales, y en un mismo casquete ó en casquetes iguales:

TEOREMAS.

1.º *Dos arcos iguales, son subtendidos por cuerdas esféricas iguales;* porque, superpuestos los casquetes de modo que coincidan los arcos de que se trata, sus cuerdas coincidirán tambien por tener sus extremos comunes; si los arcos ab y $a'b'$ *(fig. 37)* están en la base de un mismo casquete, bastará trazar el diámetro esférico $m\text{P}n$ que pase por un punto cualquiera m del arco aa', y hacer girar el semicasquete $m\text{P}nb$ alrededor del eje polar PoP′, hasta que el punto a llegue á b', porque en esta posicion el punto b estará en a' por la supuesta igualdad de los arcos ab y $a'b'$, y las cuerdas habrán coincidido tambien.

2.º *De dos arcos desiguales* ac *y* ab, *el mayor* ac *es subtendido por mayor cuerda;* porque si se trazan los radios esféricos Pb y Pc correspondientes á los puntos b y c, se tiene

$$ab + \text{P}c < ac + \text{P}b;$$

y suprimiendo los radios Pc y Pb, que son iguales, se llega á

$$ab < ac;$$

si los arcos fueran ac y $a'b'$, se llevaría éste á la posicion ab por un giro alrededor del eje polar PoP′.

Los recíprocos de los dos teoremas (1.º y 2.º) son ciertos y se demuestan por reduccion al absurdo, como todos los que se hallan en un caso análogo.

TEOREMA.

El diámetro esférico mPm′ (fig. 38) *perpendicular á una cuerda* anb, *divide á ésta y á los arcos subtendidos* amb *y* am′b *en dos partes iguales.* En efecto, al trazar los radios esféricos Pa y Pb, que son oblícuos iguales que caen sobre anb, habrán de equidistar (segun se sabe) del pié n del perpendicular. Por otra parte, siendo $mnPm'$ el lugar geométrico de los puntos equidistantes de a y b, las cuerdas esféricas ma y mb serían iguales; luego los arcos ma y mb lo son tambien: otro tanto se diría de los arcos am' y bm'.

El diámetro esférico $m'Pnm$ tiene las cinco propiedades:

1.ª Pasa por el polo P;

2.ª Pasa por el punto medio n de la cuerda anb;

3.ª Pasa por el punto medio m del arco amb;

4.ª Pasa por el punto medio m' del arco $am'b$;

Y 5.ª Es perpendicular á la cuerda anb.

Dos de estas condiciones determinan el arco de círculo máximo $m'Pnm$; por consiguiente, si se cumplen dos cualesquiera de ellas, habrán de quedar satisfechas las otras tres. Se pueden enunciar tantos teoremas como combinaciones dos á dos puedan hacerse con las cinco condiciones.

Todas las cuerdas perpendiculares á un diámetro mPm' *(fig. 39)* forman parte de las circunferencias de círculo máximo que concurren en los polos Q y Q′ del diámetro; por lo que acabamos de decir, este diámetro divide en dos partes iguales á todas esas cuerdas, ó bien es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas.

En una misma esfera ó en esferas iguales, y en un mismo casquete ó en casquetes iguales:

TEOREMAS.

1.º *Dos cuerdas iguales* anb, a′n′b′ (fig. 40), *equidistan del polo ó de los polos*, porque las distancias Pn y Pn' son catetos homólogos de los triángulos rectángulos Pbn y $Pa'n'$, que son iguales por tener las hipotenusas Pb y Pa' iguales como radios, y los catetos bn y $a'n'$ iguales como mitades de las cuerdas dadas.

2.º *De dos cuerdas desiguales* a′b′ *y* a′b″, *la menor* a′b′ *dista más del polo;* porque siendo, como ya sabemos, el arco $a'b'$ menor que $a'b''$, el perpendicular Pn' cortará á la cuerda $a'b''$ entre P y n', y, por tanto,

$$Pn' > Pc;$$

pero á su vez

$$Pc > Pn'',$$

porque el oblícuo es mayor que el perpendicular; luego

$$Pn' > Pn'':$$

si las cuerdas no partieran de un mismo punto de la circunferencia, se las llevaría á esta disposicion mediante un giro.

Los recíprocos son ciertos y se demuestran por reduccion al absurdo.

Los teoremas que preceden tienen lugar si los casquetes son menores que el hemisferio: si se tratára de casquetes mayores que el hemisferio, los teoremas se invertirían. Así, en tales casquetes:

El diámetro es la menor de las cuerdas, porque los suplementos á cuatro rectos (circunferencia completa de círculo máximo) están en órden inverso de magnitud en el casquete que falta para completar la superficie esférica.

De dos arcos desiguales (en casquetes iguales de esferas iguales), *el mayor es subtendido por menor cuerda;*

La menor cuerda dista ménos del polo;

Etc., etc.

Se dice que una circunferencia de círculo máximo es *tangente* á una menor cuando no tiene más que un punto comun con ella, ó mejor: cuando es el límite de una circunferencia máxima secante que gire alrededor de uno de los puntos de interseccion hasta que el otro llegue á confundirse con el primero.

TEOREMA.

La circunferencia máxima perpendicular á un radio esférico de círculo menor en su extremo, es tangente á éste; porque hallándose todos sus puntos, á excepcion del punto de contacto, á distancias del polo mayores que el radio (como oblícuos), estarán fuera del casquete. Si el casquete que se considera es mayor que el hemisferio, se dirá, por el contrario, que hallándose todos los puntos de la circunferencia máxima, á excepcion del punto de contacto, á distancias del polo menores que el radio (como oblícuos), estarán dentro del casquete.

Cuando se considera el primer casquete, se dice que la circunferencia máxima está en contacto exterior con su base; y si se atiende al segundo casquete, se dice que está en contacto interior con su base.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Toda circunferencia máxima tangente á una menor, es perpendicular al radio esférico que termina en el punto de contacto; porque, teniendo por hipótesis todos sus puntos, á excepcion del punto de contacto, fuera del casquete, están á una distancia del polo mayor que el radio esférico; por tanto, el radio esférico que va al punto de contacto es la direccion de la mínima distancia, y, por consiguiente, la perpendicular. Si se considera el casquete mayor que el hemisferio, se dice lo inverso, y se llega á la misma consecuencia.

Se ve que por un punto de una circunferencia menor se puede siempre trazar una, y sólo una circunferencia máxima tangente á la menor, puesto que por un punto se puede levantar una, y sólo una máxima perpendicular al radio esférico.

ESCOLIO.

Los radios esféricos son, pues, las direcciones de las circunferencias máximas *normales* á una menor. Así, desde un punto interior m ó exterior n á un casquete P *(fig. 41)* se pueden trazar dos normales ma y ma', ó na y na', *que son las distancias mínima y máxima de los puntos* m ó n *á los de la circunferencia menor.* En efecto, si se trata del punto m, se tiene uniéndole con un punto cualquiera b de la circunferencia, y trazando el radio Pb,

$$mb > \mathrm{P}b - \mathrm{P}m, \text{ ó bien } mb > \mathrm{P}a - \mathrm{P}m = ma$$

y

$$mb < m\mathrm{P} + \mathrm{P}b, \text{ ó bien } mb < m\mathrm{P} + \mathrm{P}a' = ma',$$

Análogamente, para el punto n

$$nb > n\mathrm{P} - \mathrm{P}b, \text{ ó bien } nb > n\mathrm{P} - \mathrm{P}a = na,$$

y

$$nb < n\mathrm{P} + \mathrm{P}b, \text{ ó bien } nb < n\mathrm{P} + \mathrm{P}a' = na'. \text{ (*)}$$

TEOREMA.

Si dos arcos de círculo máximo concurren en dos puntos Q (que serán diametralmente opuestos) (fig. 42) *de la circunferencia máxima* pq, *cuyos polos son los mismos de una menor, interceptan en esta menor arcos iguales.*

Se distinguen tres casos:

1.° Que los dos arcos de círculo máximo sean secantes á la circunferencia menor;

2.° Que uno sea secante y otro tangente;

3.° Que los dos sean tangentes.

Sean en el primer caso los arcos secantes amb y cnd que concurren en Q; trazando el diámetro $e\mathrm{P}e'$ perpendicular á uno de los arcos, cnd por ejemplo, se ve que tendrá su polo en un

(*) Si el casquete P es un hemisferio, las dos normales ma y mb son tambien *máxima* y *mínima* entre los diversos arcos de círculo máximo que caen de m sobre ab, propiedad muy conocida.

punto de este arco *cnd*, puesto que es perpendicular á él, y en un punto de la máxima *pq*, puesto que ha de pasar por P, y, por consiguiente, que sus polos serán precisamente los puntos Q; por tanto, este diámetro ePe' será tambien perpendicular al otro arco *ab* que por el supuesto pasa por Q; ahora bien, segun un teorema ya demostrado,

$$ace = edb \text{ y } ce = ed;$$

luego

$$ac = bd.$$

Sean en el segundo caso los arcos Q*e* y Q*cd*, el primero tangente y el segundo secante, que concurren en Q; trazando, como anteriormente, el diámetro esferico ePe' perpendicular á á *cnd* (cuyo polo es Q), será tambien perpendicular á Q*e*; luego terminará en el punto de contacto *e*, y segun el mismo teorema aplicado ántes,

$$ce = ed.$$

Sean en el tercer caso los dos tangentes Q*e* y Qe'; trazando el diámetro perpendicular á Q*e* (cuyo polo es Q), será tambien perpendicular á Qe'; luego terminará en los puntos de contacto *e* y e' y dividirá á la circunferencia menor en dos partes iguales.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si dos arcos de círculo máximo interceptan en una circunferencia menor arcos iguales, concurrirán en dos puntos Q (diametralmente opuestos) *de la circunferencia máxima* pq, *cuyos polos son los mismos de la menor.*

Distinguiendo los mismos tres casos, vemos que:

1.º Si los arcos interceptados *ac* y *bd* son iguales, bajando el diámetro ePe' perpendicular á la cuerda *cd*, se tiene

$$ce = ed,$$

y, por consiguiente,

$$ac + ce = bd + dc \text{ ó } ae = ed;$$

lo que indica que el diámetro será tambien perpendicular al arco *ab;* luego los dos arcos de círculo máximo *cd* y *ab*, perpendiculares á ePe', concurrirán en los polos de éste, que pertenecen á la circunferencia *pq*.

2.º Si los arcos interceptados *ce* y *cd* son iguales, el diámetro ePe' que baja al punto de contacto *e* es perpendicular al tangente Q*e*, y tambien al secante *cd*, puesto que pasa por el polo y por el punto medio *e* del arco subtendido *ced;* luego los dos arcos de círculo máximo concurrirán en los polos Q de ePe', que pertenecen á la circunferencia *pq*.

3.º Si los arcos interceptados eae' y ebe' son iguales, los puntos *e* y e' estarán diametralmente opuestos en el casquete, y, por consiguiente, Q*e* y Qe', perpendiculares al diámetro ePe', concurrirán en los polos de éste, que pertenecen á la circunferencia *pq*.

TEOREMA.

Tres puntos a, b, c (fig. 43) *de la superficie esférica no situados en una misma circunferencia máxima, determinan una circunferencia menor;* porque si se levantan los máximos perpendiculares P*m*P′ y P*n*P′ en los puntos medios *m* y *n* de los arcos de círculo máximo *amb* y *bnc*, los puntos P y P′ de interseccion equidistan de *a*, *b* y *c*, y son, por consiguiente, los polos del menor pedido que existe siempre, y es único; como comprobacion, el máximo perpendicular en el punto medio de *ac* concurrirá en los mismos puntos P y P′ (puesto que éstos equidistan de *a* y *c)*, lo cual se expresa diciendo que: *los tres arcos de círculo máximo, perpendiculares á los tres lados de un triángulo en sus puntos medios, concurren en los polos* *del círculo menor circunscrito al triángulo.* Si los tres puntos a, b, c estuvieran situados en una misma circunferencia máxima, no habría triángulo.

Se sabe que: *si dos circunferencias menores se cortan* (figura 44), *el arco de círculo máximo que une sus polos* P *y* Q *es perpendicular á la cuerda comun* ab *y la divide en dos partes iguales*, porque los puntos P y Q equidistan de a y b.

Tambien se sabe que cuando los dos puntos de interseccion a y b se reunen en uno solo a', el arco PQ pasa por este punto a' y es perpendicular al límite de ab, que es el máximo tangente en a'.

Así, pues:

Si dos circunferencias menores son tangentes, el punto de contacto está en la circunferencia máxima que une los polos, y la circunferencia máxima perpendicular á ésta en el punto de contacto, es la tangente comun á las dos menores: el punto de contacto deja á diferente lado ó á un mismo lado á los dos polos, segun que el contacto sea exterior ó interior.

De aquí los cinco teoremas conocidos y sus recíprocos, en que se expresan las condiciones necesarias y suficientes para definir la posicion relativa de dos circunferencias situadas en una superficie esférica. No hay lugar de distinguir estas várias posiciones relativas cuando se trata de dos circunferencias máximas, puesto que dos de éstas se cortan siempre en puntos diametralmente opuestos y se cumplen las condiciones

$$\mathrm{D}\begin{cases} < \mathrm{R} + \mathrm{R} = \frac{1}{2} \text{ circunferencia máxima}, \\ > \mathrm{R} - \mathrm{R} = 0, \end{cases}$$

porque dos puntos cualesquiera de una superficie esférica distan siempre uno de otro ménos de media circunferencia máxima.

Recordamos estos teoremas con el objeto de hacer ver que las condiciones

$D > r + r_1$ para dos circunferencias menores exteriores,
$D < r - r_1$ » » » interior una á otra,
$D = r + r_1$ » » tangentes exteriormente,
$D = r - r_1$ » » » interiormente,
se refieren á la distancia de los polos P y P_1 que están en los casquetes menores que el hemisferio y á los radios esféricos r y r_1 correspondientes á estos casquetes; pero no á la combinacion de un casquete menor que el hemisferio para una circunferencia y el mayor que el hemisferio para la otra, ni á la combinacion de los dos mayores que el hemisferio, como vamos á demostrar.

Representaremos siempre por P y P′ los dos polos de la primera circunferencia menor, cuyos radios esféricos respectivos llamaremos r y r'; por P_1 y por P'_1 los dos polos de la otra circunferencia menor, cuyos radios esféricos respectivos llamaremos r_1 y r'_1; y por D la distancia entre los polos P y P_1. Nótese, ante todo, que

$$r' = 2 - r \text{ y } r'_1 = 2 - r_1.$$

1.ª *posicion.* EXTERIORES: $PP_1 = D > r + r_1$.

Considerando *(fig. 45)* las otras tres distancias que median entre los cuatro polos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D < 2 - r - r_1 = r' - r_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D < 2 - r - r_1 = r'_1 - r \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P'P'_1 = \quad D \quad > r + r_1 = 2 - r' + 2 - r'_1 = 4 - (r' + r'_1) \end{array}\right\}:$$

En ninguna de estas tres combinaciones de polos se verifica que *la distancia de los polos sea mayor que la suma de los radios esféricos correspondientes.* En dos de ellos, la distancia de los polos es menor que la diferencia de los radios esféricos correspondientes, y en la última, la distancia de polos es mayor que el suplemento á cuatro rectos de la suma de los radios esféricos correspondientes.

2.ª *posicion.* INTERIOR UNA Á OTRA: $PP_1 = D < r - r_1$.

Considerando *(fig. 46)* las otras distancias entre los cuatro polos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D > 2 - r + r_1 = r' + r_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D > 2 - r + r_1 = 2 - r + 2 - r'_1 = 4 - (r + r'_1) \\ P'P'_1 = \ \ D \ < r - r_1 = 2 - r' - (2 - r'_1) = r'_1 - r' \end{array}\right\}:$$

En ninguna de estas tres combinaciones se verifica que *la distancia de los polos sea menor que la diferencia de los radios esféricos correspondientes.* Se enunciarían sin dificultad, por simple lectura, los resultados de las tres combinaciones.

3.ª *posicion.* CONTACTO EXTERIOR: $PP_1 = D = r + r_1$.

Considerando *(fig. 47)* las otras tres distancias de polos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D = 2 - r - r_1 = r' - r_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D = 2 - r - r_1 = r'_1 - r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P'P'_1 = \ \ D \ = r + r_1 = 2 - r' + 2 - r'_1 = 4 - (r' + r'_1) \end{array}\right\}:$$

En ninguna de las tres combinaciones se verifica que *la distancia de los polos sea igual á la suma de los radios esféricos correspondientes.* Se podrían leer fácilmente los resultados obtenidos.

4.ª *posicion.* CONTACTO INTERIOR: $PP_1 = D = r - r_1$.

Las otras tres distancias de polos *(fig. 48)* son

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D = 2 - r + r_1 = r' + r_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D = 2 - r + r_1 = 2 - r + 2 - r'_1 = 4 - (r + r'_1) \\ P'P'_1 = \ \ D \ = r - r_1 = 2 - r' - (2 - r'_1) = r'_1 - r' \end{array}\right\}.$$

Tampoco en ninguna de estas tres combinaciones se verifica que *la distancia de polos sea igual á la diferencia de los ra-*

dios esféricos correspondientes. Se podría ver tambien el enunciado propio de cada combinacion.

En vista de todo lo dicho, aparece claramente la ventaja que hay en hablar siempre de los polos que están en los casquetes menores que el hemisferio, y de los radios esféricos correspondientes, que son entónces menores que un cuadrante; de esta suerte se conservan los mismos enunciados de Geometría plana, y no hay equívocos. Como se sabe, las tres magnitudes D, r, r_1 satisfacen entónces á la condicion

$$D + r + r_1 < 4.$$

Cuando se trate de una circunferencia máxima y una menor, deben considerarse tan sólo tres posiciones relativas, á saber: *que la máxima sea exterior, tangente ó secante á la menor* (fig. 45) (lo mismo que una recta con respecto á una circunferencia en Geometría plana), puesto que las posiciones de exterior é interior son una misma, é igualmente el contacto es interior á la vez que exterior. El carácter que distingue á las tres posiciones es: que *la menor distancia del polo* P *al máximo sea mayor, igual ó menor que el radio esférico* r.

TEOREMA.

Si se consideran várias circunferencias menores ABx, ABy,... (fig. 50) *que pasen por dos puntos* A *y* B *sobre una superficie esférica, y desde un punto* P *de la cuerda esférica comun* AB *prolongada se trazan los máximos* Px,Py,..., *tangentes á dichas menores, las longitudes de estas tangentes serán iguales.*

Para demostrarlo, observemos ante todo que la recta ABM es la interseccion comun de los planos de las menores con el plano del máximo ABP, y que esa recta ABM prolongada cortará en general al radio oP (tambien prolongado en un cierto punto M). Fijémonos ademas en que, si se une con M el punto x de contacto de una de los menores ABx con el máximo Px, la recta de union Mx es la tangente comun á la menor que consideramos y al máximo, porque es la interseccion de sus planos.

Visto esto, es fácil demostrar el Teorema, porque basta unir el centro o con los puntos x, y,... y formar así los triángulos rectángulos Mox, Moy,... que tienen la hipotenusa oM comun, y los catetos ox, oy,... iguales: (*) la igualdad de estos triángulos demuestra ya que los ángulos Pox, Poy,... es decir, que las longitudes de las tangentes Px, Py,... son iguales. En el caso particular en que la recta AB fuera paralela al radio oP, el punto M estaría (como se dice vulgarmente) en el infinito, y los arcos Px, Py,... serían cuadrantes: la circunferencia xy... sería máxima.

El Teorema de Geometría esférica que acabamos de demostrar, es análogo al siguiente de Geometría plana:

Si se consideran várias circunferencias que pasen por dos puntos A *y* B, *y desde un punto* M *de la cuerda comun* AB *prolongada se trazan las tangentes* Mx, My,..., *estas tangentes serán iguales.*

Su demostracion es mucho más sencilla que la de Geometría esférica, porque basta notar que

$$\left.\begin{array}{l}\overline{Mx}^2 = MA.MB \\ \overline{My}^2 = MA.MB \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

para deducir que Mx = My = ...

Cuando el punto M se aleja al infinito, las tangentes Mx, My,... son paralelas, y la circunferencia xy,... es una línea recta.

(*) Se ve tambien directamente que los catetos Mx, My,... son iguales, puesto que

$$\left.\begin{array}{l}\overline{Mx}^2 = MB.MA \\ \overline{My}^2 = MB.MA \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

y por tanto, Mx = My = ...

Corolarios.

La circunferencia menor que tiene su polo en P, y Px por radio esférico, es el lugar geométrico de los puntos de contacto x, y,... Esta circunferencia menor xy,... corta normalmente á todas las dadas, puesto que éstas son tangentes á los radios esféricos Px, Py,... en los puntos x, y,..., y estos radios esféricos son normales á la menor xy,...

En Geometría plana se ve igualmente que la circunferencia que tiene su centro en M y Mx por radio, es el lugar geométrico de los puntos de contacto xy,..., y que esta circunferencia es normal á todas las circunferencias dadas.

Problemas de Geometría esférica.

PROBLEMA 1.º

Trazar por un punto dado A *una circunferencia máxima tangente á una menor dada, cuyo radio es* r.

Se sabe que para resolver este problema hay que describir desde el polo P *(fig. 51)* con el radio esférico $2r$ una circunferencia, y desde el punto dado A, con el radio esférico AP, otra circunferencia; unir con P por arcos de círculo máximo los puntos M y N comunes á estas dos circunferencias auxiliares, y los puntos en que estos arcos de union corten á la circunferencia dada son los puntos de contacto x é y que se buscan. Conviene, para mayor claridad en la discusion, suponer que la distancia D á que se halla el punto dado A del polo P de la circunferencia menor, pase por todos los estados de magnitud desde 0 á 2.

Discusion.

1.º $D < r$: en este caso, el punto A es interior al casquete dado y se verifica

$$D < 2r - D,$$

por lo cual la circunferencia auxiliar descrita desde el punto

A como polo, con el radio esférico D, es interior á la descrita desde el punto P con el radio $2r$, y *no hay solucion.*

2.° $D = r$: en este caso, el punto A está en la circunferencia menor y se verifica

$$D = 2r - D,$$

y la primera circunferencia auxiliar es tangente interiormente á la segunda; el punto de contacto es el mismo dado A, y *hay una solucion,* que no aparece determinada por esta construccion, porque el punto dado y el de contacto son uno mismo; pero que se obtiene (como es sabido) trazando en el punto A la perpendicular al radio esférico; es decir, haciendo polo en el punto que dista un cuadrante del punto A sobre dicho radio esférico.

3.° $D \begin{smallmatrix} > r \\ < 2 - r \end{smallmatrix}$: en este caso, el punto A está en la zona comprendida entre la circunferencia menor dada y su simétrica, y se verifica

$$D \begin{smallmatrix} < 2r + D \\ > 2r - D \end{smallmatrix} \Big\} ; D + 2r + D = 2\,(r + D) < 4;$$

y las dos circunferencias auxiliares se cortan, y *hay dos soluciones*, que se trazan fácilmente, porque aparece determinada cada una de ellas por dos puntos.

4.° $D = 2 - r$: en este caso, el punto A está en la circunferencia simétrica de la dada y se verifica

$$D = 4 - (D + 2r),$$

que es la condicion del contacto interior cuando (como en el caso presente) una de las circunferencias tiene radio esférico D mayor que un cuadrante; el punto de contacto está sobre la superficie esférica, diametralmente opuesto al punto dado A, y *hay una solucion* que no está determinada por los dos puntos (por ser éstos los extremos de un diámetro de la esfera, como acabamos de decir): se la obtendrá trazando una perpendicular al radio esférico de la circunferencia menor dada.

5.° $D > 2 - r$: en este caso, el punto A es interior al casquete simétrico del dado y se verifica

$$D > 4 - (D + 2r),$$

que es la condicion para que la circunferencia auxiliar, cuyo polo es A, y su radio D (mayor que un cuadrante) sea interior á la circunferencia auxiliar cuyo polo es P y cuyo radio es $2r$: *no hay solucion.*

En todos estos casos, el radio $2r$ de una de las circunferencias auxiliares puede ser menor, igual ó mayor que un cuadrante, y todo lo dicho subsiste.

Hé aquí el Cuadro de discusion:

Casos.		Soluciones.
1.° $D < r$.	$D < 2r - D$.	0
2.° $D = r$.	$D = 2r - D$.	1
3.° $D \left. \begin{matrix} > r \\ < 2 - r \end{matrix} \right\}$	$D \left. \begin{matrix} > 2r - D \\ < 2r + D \end{matrix} \right\}$ $D + 2r + D < 4$.	2
4.° $D = 2 - r$. .	$D = 4 - (D + 2r)$.	1
5.° $D > 2 - r$. .	$D > 4 - (D + 2r)$.	0

Si se imagina (para verlo todo más claramente) que el punto A recorre la zona A′ A″ *(fig. 52)* bajando desde la posicion A′ (en la circunferencia dada) hasta la posicion A″ (en su simétrica), se ve en la primera posicion una sola circunferencia máxima tangente en A′ á la menor dada, y en A'_1 á su simétrica; para todas las posiciones sucesivas hay siempre dos soluciones, cuyos dos puntos de contacto se van separando en arcos iguales sobre la menor dada á uno y otro lado del punto A′ (á medida que el punto dado A va descendiendo por el máximo A′ A″) hasta llegar á reunirse en A''_1 cuando el punto dado llega á A″, en cuya última posicion las dos soluciones se convierten de nuevo en una sola. Cuando el punto dado A ocupa la posicion media, se encuentra á la distancia un cuadrante de los polos P y P′; la primera circunferencia auxiliar es la máxima $Pxy'P'x'y$, y al unir con P los puntos comunes que tendría con la 2.ª circunferencia auxiliar, se obtendrían los mismos puntos x é y, que son los de contacto; este es el único caso en que los radios esféricos Px y Py, que terminan en los puntos de contacto x é y, están en prolongacion uno de otro, siendo estos puntos diametralmente opuestos en la circunferencia menor; entónces las dos soluciones forman entre sí el mayor ángulo posible, que (como se ve) tiene la misma medida que el diámetro esférico $2r$ de la circunferencia menor dada.

Se sabe que, en todos los casos, las circunferencias máximas que se obtienen son tangentes á la menor dada y á su simétrica, siendo los puntos de contacto con una y otra diametralmente opuestos sobre la superficie esférica.

PROBLEMA 2.º

Trazar una circunferencia menor que pase por un punto dado B, *y sea tangente á una máxima dada en un punto* A. Levántese la máxima XAX′ *(fig. 53)* perpendicular á la dada en el punto A, y la XmX′ perpendicular en el punto medio de AB: los puntos X y X′ en que estas dos máximas se corten serán los polos de la menor pedida, que tendrá por radio esférico XA = XB.

PROBLEMA 3.º

Trazar una circunferencia menor que pase por un punto dado B, *y sea tangente á otra menor dada en un punto* A. Trácese el radio esférico PA *(fig. 54)*, y levántese la perpendicular mX en el punto medio m de AB; el punto X y su diametralmente opuesto en que se corten las dos máximas, serán los polos de la menor pedida.

Es evidente que la menor que se obtenga estará en el mismo casquete P′ en que se nos da el punto B; y que si este punto estuviera situado en la circunferencia menor, la solucion del problema coincidirá con esta misma.

PROBLEMA 4.º

Trazar una circunferencia menor que sea tangente á una máxima dada en un punto A, *y á una menor* b. Levántese la máxima AQ *(fig. 55)* perpendicular á la dada en el punto A; tómese sobre ella, á partir del punto A, la magnitud AD, igual al radio esférico r de la menor dada b; únase P con D por un arco de círculo máximo, y levántese una máxima CX perpendicular á él en su punto medio C: en X se tendrá el polo de la menor pedida, que será tangente exterior á la dada b. Tomando AD′ igual á r, y procediendo análogamente, se hallaría otra solucion tangente interiormente á b, que no representamos en la figura por temor de hacerla confusa.

Si las circunferencias máxima y menor dadas tuvieran los mismos polos como en la figura 56, la máxima levantada perpendicularmente á la dada en el punto A pasaría por el polo P, y al hacer la construccion anterior llegaríamos á los puntos X é Y sobre la misma circunferencia AP, y los puntos de contacto B y B′ de las soluciones tangentes exterior é interiormente, estarían diametralmente opuestos sobre la menor dada b.

En el caso en que la máxima dada fuera tangente á la menor b *(fig. 57)*, se observa que la segunda solucion sería la misma circunferencia máxima dada; porque al tomar AD′ igual á r, unir P con D′, y levantar la perpendicular EQ en su punto medio, esta perpendicular pasaría por el polo Q, puesto que, siendo MP = AD′, el punto Q equidista de P y D′. Si en este caso el punto A fuera el mismo de contacto, el problema sería evidentemente indeterminado.

PROBLEMA 5.º

Trazar una circunferencia menor que pase por dos puntos dados A *y* B *y sea tangente á una máxima dada* CD.

El polo de la circunferencia pedida ha de estar situado en la máxima YmX *(fig. 58)*, perpendicular en el punto medio m al arco de círculo máximo AB. Pero si vemos el punto P en que el arco de círculo máximo AB prolongado corta á la circunferencia CD, la distancia esférica desde el punto P al punto de contacto que se busca habrá de ser igual á la longitud de la tangente trazada desde el punto P á una cualquiera de las menores que pasan por A y B (en virtud de un teorema demostrado ántes); luego bastará trazar una tangente de estas PT, y llevar su longitud á uno y otro lado del punto P, sobre la máxima dada, para tener los puntos de contacto C y D. Es evidente que los puntos A y B no pueden estar en distinto hemisferio con respecto á la máxima dada; si uno de los puntos A estuviera en la misma circunferencia dada, este problema sería uno de los anteriores (2.º).

PROBLEMA 6.º

Trazar una circunferencia menor que pase por dos puntos A *y* B, *y sea tangente á otra menor dada* NMC, *cuyo polo es* P. El polo de la circunferencia pedida ha de estar situado en la máxima YmX *(fig. 59)*, perpendicular en el punto medio m al arco de círculo máximo AB; pero si trazamos por A y B una menor cualquiera que corte á la dada en dos puntos M y N, se observa que, si desde el punto P en que se corten los dos arcos de círculo máximo AB y MN, se trazan las tangentes PC y PD á la menor NMC, las circunferencias que pasen por los puntos A, B, C y por los A, B, D son tangentes á la menor dada. En efecto, P es un punto de la cuerda esférica comun NM prolongada; por consiguiente, las tangentes PD y PT son iguales, lo mismo que PC y PT; tambien P es un punto de la cuerda BA prolongada; por consiguiente, el arco de círculo máximo tangente que se trace desde el punto P á la menor BAD ha de ser igual á PT; pero como el arco PD tiene ya esta longitud, se deduce que este arco PD será el tangente á la menor BAD; las dos menores CMN y BAD tienen, pues, en D la tangente comun PD; luego son tangentes entre sí. Lo mismo se diría de la otra solucion BAC.

PROBLEMA 7.º

Trazar una circunferencia máxima tangente á dos menores dadas P *y* P_1.

Se sabe que para determinar el polo X de la circunferencia máxima tangente comun exterior, hay que construir sobre $PP_1 = D$ un triángulo cuyos otros dos lados sean

$$(1-r) \text{ y } (1-r_1): (*)$$

construyendo el triángulo esférico simétrico del anterior con respecto á PP_1, se hallaría el polo X_1 de la otra circunferencia máxima tangente comun exterior.

Se sabe tambien que, para determinar los polos Y é Y_1 de las circunferencias máximas tangentes comunes interiores, hay que construir sobre PP_1 dos triángulos simétricos con respecto á PP_1, y cuyos otros dos lados sean

$$(1-r) \text{ y } (1+r_1): (**)$$

Discusion.

Para fijar las ideas, supongamos $r > r_1$.

Antes de entrar en la discusion detallada, vemos desde luego que la construccion de los primeros triángulos requiere la condicion de posibilidad

$$D + (1-r) + (1-r_1) < 4,$$

ó sea

$$D < 2 + r + r_1;$$

y la construccion de los segundos triángulos requiere la condicion

(*) Podría construirse el triángulo cuyos tres lados fueran D, $(1+r)$, $(1+r_1)$.

(**) Podría construirse el triángulo cuyos tres lados fueran D. $(1+r)$, $(1-r_1)$.

$$D+(1-r)+(1+r_1)<4,$$

ó sea

$$D<2+r-r_1:$$

una y otra están cumplidas siempre, porque la distancia D entre los polos P y P_1 es menor que 2.

En vista de esto, quedan como *necesarias y suficientes* para la existencia de los primeros triángulos las condiciones

$$D\left.\begin{matrix}<(1-r_1)+(1-r)\\>(1-r_1)-(1-r)\end{matrix}\right\}\text{ ó sean }\left.\begin{matrix}D+r+r_1<2\\D>r-r_1\end{matrix}\right\}:$$

habrá, por tanto, *dos tangentes comunes exteriores cuando la circunferencia menor* P_1 *sea exterior á la simétrica de* P, *y al mismo tiempo exterior, tangente exteriormente, ó secante á la circunferencia* P. Pero en los *casos límites*

$$D+r+r_1=2,\text{ ó } D=r-r_1,$$

los triángulos simétricos de que tratamos quedan reducidos á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1, puesto que, en el primer caso límite, el lado D es igual á la suma de los otros dos, y en el segundo caso límite es igual á su diferencia. Se tendrá un punto sobre el arco PP_1, en el cual aparecerán entónces reunidos los polos X y X_1, que eran en general simétricos respecto de PP_1: *hay*, por tanto, *una sola tangente comun exterior cuando la circunferencia menor* P_1 *sea tangente exteriormente á la simétrica de* P, *ó tangente interiormente á la circunferencia* P.

Quedan asimismo, como *necesarias y suficientes* para la existencia de los segundos triángulos, las condiciones

$$D\left.\begin{matrix}<(1+r_1)+(1-r)\\>(1+r_1)-(1-r)\end{matrix}\right\}\text{ ó sean }\left.\begin{matrix}D+r-r_1<2\\D>r+r_1\end{matrix}\right\}:$$

habrá, por tanto, *dos tangentes comunes interiores cuando la circunferencia menor* P_1 *sea exterior, tangente exteriormente ó* *secante á la simétrica de* P, *y al mismo tiempo exterior á esta circunferencia* P. Pero en los *casos límites*

$$D+r-r_1=2, \text{ ó } D=r+r_1,$$

los triángulos de que tratamos ahora se reducirán á un arco de círculo máximo en la direccion PP_1, puesto que en estos casos límites el lado D es igual á la suma ó diferencia de los otros dos. Aparecerán reunidos en un mismo punto de PP_1 los polos Y é Y_1, que eran en general simétricos respecto de PP_1: *hay*, por tanto, *una sola tangente comun interior cuando la circunferencia menor* P_1 *sea tangente interiormente á la simétrica de* P, *ó tangente exteriormente á la circunferencia* P.

Los resultados que preceden serán vistos con toda claridad si se imagina que la distancia D, á que se hallan los polos P y P_1 (de las circunferencias menores de rádios esféricos constantes r y r_1) pase por todos los valores de 0 á 2, segun ley de continuidad, y para fijar más aún las ideas supondremos que la circunferencia P está fija, y que la P_1 ocupa diversas posiciones. Hay que considerar los siguientes casos:

1.º *Que la circunferencia* P_1 *sea interior á* P : $D<r-r_1$.

2.º *Que la circunferencia* P_1 *sea tangente interiormente á* P . . . . $D=r-r_1$.

3.º *Que la circunferencia* P_1 *sea secante á* P : $D \begin{smallmatrix} >r-r_1 \\ <r+r_1 \end{smallmatrix}$.

En este caso la circunferencia P_1 puede ser *exterior, tangente exteriormente* ó *secante* (no puede admitirse el supuesto de ser tangente interiormente ni interior) *á la simétrica de* P. . . . . $D+r+r_1 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 2$.

4.º *Que la circunferencia* P_1 *sea tangente exteriormente á* P . . . . $D=r+r_1$.

En este caso la circunferencia P_1 puede ser *exterior, tangente exteriormente* ó *secante* (no puede admitirse el supuesto de ser tangente interiormente ni interior) *á la simétrica de* P . . . . $D+r+r_1 \lesseqgtr 2.$

5.º *Que la circunferencia* P_1 *sea exterior á* $P : D > r + r_1$.

En este caso la circunferencia P_1 puede ser *exterior* ó *tangente exteriormente á la simétrica de* $P : D + r + r_1 \leqq 2$.

O bien puede ser *secante, tangente interiormente* ó *interior á la simétrica de* $P : D + r + r_1 > 2 ; D + r - r_1 \lesseqgtr 2.$

Los distintos casos que preceden están reunidos en el siguiente Cuadro:

CASOS		SOLUCIONES Exteriores	SOLUCIONES Interiores
1.º	$D < r - r_1$	0	0
2.º	$D = r - r_1$	1	0
3.º	$D \begin{smallmatrix} > r - r_1 \\ < r + r_1 \end{smallmatrix} ; D + r + r_1 < 2$	2	0
	$D + r + r_1 = 2$	1	0
	$D + r + r_1 > 2$	0	0
4.º	$D = r + r_1 ; D + r + r_1 < 2$	2	1
	$D + r + r_1 = 2$	1	1
	$D + r + r_1 > 2$	0	1
5.º $D > r + r_1$	$D + r + r_1 < 2$	2	2
	$D + r + r_1 = 2$	1	2
	$D + r + r_1 > 2 ; D + r - r_1 < 2$ . .	0	2
	$D + r + r_1 > 2 ; D + r - r_1 = 2$	0	1
	$D + r + r_1 > 2 ; D + r - r_1 > 2$ . .	0	0

Habiendo dicho ya que las condiciones para la existencia de los triángulos que dan los polos X y X_1 de las tangentes comunes exteriores, son:

$$D \begin{matrix} < (1 - r_1) + (1 - r) \\ > (1 - r_1) - (1 - r) \end{matrix} \Bigg\} \text{ ó bien } \begin{matrix} D + r + r_1 < 2 \\ D > r - r_1 \end{matrix} \Bigg\};$$

y que las condiciones para la existencia de los triángulos que dan los polos Y é Y_1 de las tangentes comunes interiores son:

$$D \begin{matrix} < (1+r_1)+(1-r) \\ > (1+r_1)-(1-r) \end{matrix} \Bigg\} \text{ ó bien } \begin{matrix} D+r-r_1<2 \\ D>r+r_1 \end{matrix} \Bigg\},$$

no hay dificultad en seguir paso á paso á la circunferencia P_1, verla en todos los casos y descubrir las soluciones. Así (*)

En el 1.er caso, siendo $D<r-r_1$, los primeros triángulos no existen, puesto que un lado es menor que la diferencia de los otros dos: *à fortiori*, $D<r+r_1$; por consiguiente no existen los segundos triángulos, y por la misma razon. No hay solucion exterior ni interior.

En el 2.º caso, siendo $D=r-r_1$, los primeros triángulos simétricos se reducen á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1, y aparecen los dos vértices X y X_1 reunidos en un solo punto sobre dicho arco: *à fortiori* $D<r+r_1$; por consiguiente, no existen los segundos triángulos. Hay una solucion exterior, no la hay interior.

En el 3er caso, siendo $D \begin{matrix} > r-r_1 \\ < r+r_1 \end{matrix}$:

Si $D+r+r_1<2$, existen los primeros triangulos simétricos; pero no existen los segundos triángulos. Hay dos dos soluciones exteriores, no la hay interior.

Si $D+r+r_1=2$, los primeros triángulos se reducen á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1 y aparecen los dos vértices X y X_1 reunidos en un solo punto sobre dicho arco; pero no existen los segundos triángulos. Hay una solucion exterior, no la hay interior.

Si $D+r+r_1>2$, los primeros triángulos no existen, puesto que un lado es mayor que la suma de los otros dos; tampoco existen los segundos triángulos. No hay solucion exterior ni interior.

(*) Recomendamos al lector que haga las figuras.

En el 4.º caso, siendo $D = r + r_1$, y, por tanto, $D > r - r_1$, se ve que:

Si $D + r + r_1 < 2$, existen los primeros triángulos simétricos; pero los segundos triángulos se reducen á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1 y aparecen los dos vértices Y é Y_1 reunidos en un solo punto sobre dicho arco. HAY DOS SOLUCIONES EXTERIORES Y UNA INTERIOR.

Si $D + r + r_1 = 2$, los primeros triángulos se reducen á un arco de círculo máximo y aparecen los dos vértices X y X_1 reunidos en un solo punto; los segundos triángulos siguen reducidos á un arco de círculo máximo y los dos vértices Y é Y_1 reunidos en un solo punto. HAY UNA SOLUCION EXTERIOR Y OTRA INTERIOR.

Si $D + r + r_1 > 2$, los primeros triángulos no existen, puesto que un lado es mayor que la suma de los otros dos; los segundos triángulos siguen dando los dos vértices Y é Y_1 reunidos en un solo punto. NO HAY SOLUCION EXTERIOR, Y HAY UNA INTERIOR.

En el 5.º caso, siendo $D > r + r_1$, y, por tanto, $D > r - r_1$, se ve que:

Si $D + r + r_1 < 2$, y, por tanto, $D + r - r_1 < 2$, HAY DOS SOLUCIONES EXTERIORES Y DOS INTERIORES.

Si $D + r + r_1 = 2$, y, por tanto, $D + r - r_1 < 2$, HAY UNA SOLUCION EXTERIOR Y DOS INTERIORES.

Si $\left.\begin{array}{l} D + r + r_1 > 2 \\ D + r - r_1 < 2 \end{array}\right\}$, NO HAY SOLUCION EXTERIOR, Y HAY DOS INTERIORES;

Si $\left.\begin{array}{l} D + r + r_1 > 2 \\ D + r - r_1 = 2 \end{array}\right\}$, NO HAY SOLUCION EXTERIOR, Y HAY UNA INTERIOR;

Si $\left.\begin{array}{l} D + r + r_1 > 2 \\ D + r - r_1 > 2 \end{array}\right\}$, NO HAY SOLUCION EXTERIOR NI INTERIOR.

Polígonos esféricos.

Se sabe que *polígono esférico* es la porcion de superficie esférica comprendida entre vários arcos de círculo máximo.

Diremos que un polígono esférico está *inscrito* en una circunferencia menor cuando sus vértices son puntos de esta menor; los lados del polígono son entónces cuerdas esféricas de la circunferencia menor. Diremos que un polígono esférico está *circunscrito* á una circunferencia menor cuando sus lados son tangentes á esta menor. En un polígono esférico inscrito, las circunferencias máximas perpendiculares á los lados en sus puntos medios concurren en los polos de la menor, puesto que éstos equidistan de todos los vértices. En el polígono circunscrito, las circunferencias máximas bisectrices de sus ángulos concurren en los polos de la circunferencia menor, puesto que éstos equidistan de todos los lados. En uno y otro caso, los polos de esas circunferencias máximas concurrentes en dos puntos diametralmente opuestos, están en la circunferencia de círculo máximo que tiene por polos estos dos puntos de concurso.

Se sabe que las tres circunferencias máximas perpendiculares en los puntos medios de los lados de un triángulo concurren en dos puntos diametralmente opuestos, y que las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo tambien concurren, y, por consiguiente, que *un triángulo esférico es siempre inscriptible y circunscriptible*. Es evidente que para trazar la circunferencia máxima bisectriz de un ángulo bastará hacer polo en el punto medio del arco de círculo máximo que une los polos de los dos lados del ángulo; y tambien que las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí; es decir, que los polos de cada una de ellas están en la otra.

Si se completan las tres circunferencias de círculo máximo de que son partes los tres lados de un triángulo esférico, se forman ocho triángulos, y hay, por consiguiente, *ocho* circunferencias menores tangentes á las tres máximas; las ocho circunferencias menores son dos á dos simétricas; una de ellas está propiamente inscrita en el triángulo dado, otra está inscrita en el triángulo simétrico, y de las seis restantes pueden considerarse tres de ellas como ex-inscritas al triángulo que se considera, y las otras tres como ex-inscritas á su simétrico. Así, se ven en la *fig. 60* las cuatro circunferencias menores, cuyos polos o, o', o'', o''' son los puntos de interseccion de las circunferencias máximas bisectrices de los ángulos A, B, C y sus suplementarios adyacentes: los puntos de la superficie esférica diametralmente opuestos de o, o', o'', o''', son los otros puntos de interseccion de estas bisectrices; están en el hemisferio posterior y son los otros polos de las mismas circunferencias menores y de sus cuatro simétricas.

Si se representan por a, b, c las longitudes de los tres lados del triángulo ABC, y por $2p$ el perímetro $(a+b+c)$, se encuentran las distancias de los cuatro puntos de contacto F, E, D, G, con el lado AB, á uno de sus vértices (A por ejemplo), por las fórmulas

$$AF = p;\ AE = p - a;\ AD = p - b;\ AG = p - c,$$

que se demuestran como en Geometría plana.

TEOREMA.

Las tres medianas de un triángulo esférico, concurren en un punto; porque siendo M, N, Q *(fig. 61)* los puntos medios de los tres lados, se ve que los radios de la esfera oM, oN, oQ dividen tambien en dos partes iguales á las cuerdas BC, AC, AB, y, por consiguiente, los planos AoM, BoN, CoQ de las tres máximas que son medianas del triángulo esférico ABC, contienen respectivamente á las medianas Am, Bn, Cq del triángulo plano y rectilíneo ABC; pero siendo estas tres últimas concurrentes en un punto d, los tres planos se cortan segun el radio odD, y las tres medianas del triángulo esférico concurren, por lo tanto, en el punto D.

Las tres alturas de un triángulo esférico no concurren en general en un punto, salvo en algunos casos particulares, como en el triángulo equilátero, en que las alturas son al mismo tiempo perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados, bisectrices y medianas, ó en el triángulo rectángulo, en que el vértice del ángulo recto es evidentemente punto de concurso de las alturas.

Entre los cuadriláteros esféricos, merecen especial mencion los que tienen *sus lados opuestos iguales dos á dos.*

TEOREMA.

Si un cuadrilátero esférico tiene sus lados opuestos iguales dos á dos, *sus ángulos opuestos serán tambien iguales dos á dos y sus diagonales se cortarán mútuamente en partes iguales.* En efecto, si en el cuadrilátero ABCD *(fig. 62)* se supone

$$AB = CD \text{ y } BC = AD,$$

trazando la diagonal BPD se descompone en dos triángulos ABD y BDC, que son iguales porque tienen sus tres lados respectivamente iguales; por la misma razon, la diagonal APC descompone el cuadrilátero en dos triángulos iguales; se ve, pues, que los ángulos opuestos son dos á dos iguales: ademas, dos triángulos opuestos como APB y CPD son iguales, porque tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; por consiguiente, $AP = PC$ y $BP = PD$; luego las diagonales se cortan mútuamente en partes iguales.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si las diagonales de un cuadrilátero esférico se cortan mútuamente en partes iguales, sus lados opuestos serán iguales dos á dos, y sus ángulos opuestos tambien lo serán. En efecto, los triángulos APB y CPD tienen un ángulo igual comprendido entre lados iguales, y en el mismo caso se hallan los triángulos BPC y APD; luego los lados opuestos son iguales dos á dos; de aquí se deduce ya que sus ángulos opuestos son tambien iguales dos á dos.

Este cuadrilátero corresponde al ángulo poliedro en el vértice de una pirámide, cuya base plana fuera un paralelógramo que tuviese el centro correspondiendo al punto P y los lados y diagonales correspondiendo á los lados y diagonales del cuadrilátero esférico que consideramos.

Como caso particular:

TEOREMA.

Si los cuatro lados de un cuadrilátero son iguales entre sí, las diagonales (ademas de cortarse mútuamente en partes iguales) *son perpendiculares entre sí y son bisectrices de los ángulos del cuadrilátero.* En efecto, las diagonales son perpendiculares entre sí, porque los puntos A y C *(fig. 63)* equidistan de B y D, ó B y D equidistan de A y C: las diagonales son bisectrices porque son alturas de triángulos isósceles.

RECÍPROCAMENTE:

TEOREMA 1.º

Si las diagonales de un cuadrilátero esférico se cortan en partes iguales y son perpendiculares entre sí, los cuatro lados del paralelógramo serán iguales entre sí y las diagonales serán bisectrices. En efecto, los puntos A y C equidistarán de B y D, y B y D de A y C por un teorema conocido: de aquí se deduce ya que las diagonales serán bisectrices.

TEOREMA 2.º

Si las diagonales se cortan en partes iguales y son bisectrices de los ángulos opuestos del cuadrilátero, éste tendrá sus cuatro lados iguales entre sí y sus diagonales perpendiculares entre *sí.* En efecto, por cortarse las diagonales en partes iguales, los lados opuestos del cuadrilátero serán iguales dos á dos, y, como ya se vió, el ángulo ABD será igual á BDC; pero el ABD es tambien igual por hipótesis al DBC; luego BDC = DBC, y en el triángulo BDC, á ángulos iguales se oponen lados iguales BC = DC; de aquí se deduce ya que las diagonales serán perpendiculares entre sí. Este caso particular corresponde al ángulo poliedro de una pirámide cuya base plana fuera un rombo en condiciones análogas á las dichas anteriormente para el paralelógramo en general. El rombo esférico de que hablamos ahora es circunscriptible á una circunferencia menor, puesto que el punto P equidista de sus cuatro lados.

Como caso particular:

TEOREMA.

Si un paralelógramo esférico tiene sus cuatro ángulos iguales entre sí, las diagonales (ademas de cortarse en partes iguales) *serán iguales entre sí.* En efecto, los triángulos ABC y ABD *(fig. 64)* son iguales por tener el lado AB comun, los lados BC y AD iguales, puesto que se supone que el cuadrilátero es un paralelógramo, y el ángulo ABC igual al BAD tambien por hipótesis; se ve, pues, que APC = BPD.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mútuamente en partes iguales y son iguales entre sí, los cuatro ángulos del cuadrilátero serán iguales entre sí. En efecto; por cortarse las diagonales en partes iguales, el cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales dos á dos, y sus ángulos opuestos iguales dos á dos; pero por ser iguales entre sí las diagonales, los triángulos APB, BPC, CPD, DPA son isósceles, y, por tanto,

$$ABP = BAP, \text{ y } PBC = PCB = PAD;$$

luego

$$ABP + PBC = BAP + PAD,$$

ó bien

$$ABC = BAD,$$

y los cuatro ángulos son iguales entre sí porque se componen de dos partes respectivamente iguales.

Este caso particular corresponde al rectángulo. El rectángulo esférico de que hablamos es inscriptible en una circunferencia menor, puesto que sus cuatro vértices equidistan del punto P.

Finalmente:

TEOREMA.

Si el cuadrilátero esférico tiene sus cuatro lados iguales entre sí y sus cuatro ángulos iguales entre sí, sus diagonales se cortan mútuamente en partes iguales, son perpendiculares entre sí é iguales entre sí. Basta reunir las demostraciones de los teoremas anteriores.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si las diagonales de un cuadrilátero esférico se cortan mútuamente en partes iguales, son perpendiculares entre sí (ó son bisectrices de los ángulos opuestos) y son iguales entre sí, el cuadrilátero tendrá todos sus lados iguales entre sí y tambien sus ángulos iguales entre sí. Basta reunir las demostraciones de los recíprocos anteriores.

Este caso particular corresponde al cuadrado. El cuadrado esférico es inscriptible y circunscriptible.

Cuando los polígonos esféricos corresponden á ángulos poliedros iguales, y pertenecen á superficies esféricas de radios diferentes R y R′, sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales, y los polígonos se llaman *semejantes;* la relacion de un lado cualquiera del uno á su homólogo en el otro, es $\frac{R}{R'}$, y se llama *relacion de semejanza.*

Se llaman *puntos homólogos* los puntos de una y otra superficie esférica que, unidos á dos vértices homólogos, dan lugar á triángulos semejantes y semejantemente colocados. Es evidente que si se hicieran coincidir los centros de las esferas y los ángulos poliedros correspondientes (que son iguales), los puntos homólogos serían puntos de una y otra superficie esférica situados en un mismo radio.

TEOREMA.

La relacion de dos arcos de círculo máximo homólogos es igual á la relacion de semejanza, puesto que haciendo coincidir los ángulos poliedros correspondientes á los polígonos (como acabamos de decir), los arcos de círculo máximo cuyos extremos son puntos homólogos son arcos descritos desde el centro con los radios R y R′ entre los lados de un mismo ángulo. Dos lados homólogos, y en general dos arcos de círculo máximo homólogos, son del mismo número de grados.

Dos polígonos esféricos semejantes se pueden descomponer en igual número de triángulos semejantes y semejantemente colocados, ya tomando puntos de las superficies esféricas en el interior de los polígonos, ya en los perímetros mismos, ya fuera; en las dos primeras descomposiciones los triángulos son todos aditivos, y en la última hay triángulos aditivos y triángulos sustractivos.

TEOREMAS.

1.° *La relacion de los perímetros de dos polígonos esféricos semejantes, es igual á la relacion de semejanza* $\frac{R}{R'}$, puesto que siendo los lados proporcionales, se tiene una série de razones iguales de la cual se deduce la relacion de los perímetros.

2.º *La relacion de las áreas de dos polígonos esféricos semejantes, es igual al cuadrado de la relacion de semejanza* $\frac{R}{R'}$; porque siendo sus ángulos respectivamente iguales, los números de medida de las áreas son los mismos, y, por tanto, la relacion de las áreas de los polígonos es igual á la relacion de las unidades, que son los triángulos esféricos trirectángulos en una y otra esfera; pero siendo cada uno de éstos la octava parte de la superficie esférica á que pertenece, la relacion es, en definitiva, la misma que la de las dos superficies esféricas, que es $\frac{R^2}{R'^2}$.

3.º *La relacion de los volúmenes de dos pirámides esféricas semejantes, es el cubo de la relacion de semejanza,* porque cada uno de ellos tiene por expresion el producto del área del polígono esférico que le sirve de base por el tercio del radio; luego su relacion será el producto del cuadrado de la relacion de semejanza por esta misma relacion; es decir, el cubo de la relacion de semejanza.

Llamaremos ángulo poliedro *regular* al que tiene todas sus caras iguales entre sí, y tambien sus diedros iguales entre sí. Un ángulo poliedro regular es forzosamente convexo, porque si tuviera diedros entrantes y salientes no serían todos iguales entre sí.

Se llama polígono esférico *regular* el que tiene todos sus lados iguales entre sí y tambien todos sus ángulos iguales entre sí. A todo ángulo poliedro regular cuyo vértice esté en el centro de la esfera, corresponde un polígono esférico regular, y viceversa. Todo polígono esférico regular es, pues, convexo.

TEOREMA.

El ángulo poliedro en el vértice de una pirámide regular, es un ángulo poliedro regular.

En efecto, siendo regular la pirámide, sus aristas laterales son iguales, como oblícuas cuyos piés equidistan del pié de la altura, y, por consiguiente, los triángulos que sirven de caras laterales á la pirámide son todos iguales entre sí; de lo cual se deduce que las caras del ángulo poliedro son iguales entre sí. Los ángulos triedros formados en los vértices de la base son iguales, por tener sus tres caras respectivamente iguales; por consiguiente, sus diedros lo son; así pues, los diedros de los ángulos poliedros que se consideran son tambien iguales entre sí.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si sobre las aristas de un ángulo poliedro regular se toman distancias iguales, se forma una pirámide regular.

En efecto, los puntos así obtenidos están en un mismo plano; porque siendo iguales los triángulos laterales isósceles, se ve que en los extremos de las aristas se forman ángulos triedros que son iguales, por tener un diedro igual comprendido entre dos caras iguales; luego los planos BCD y ABC *(fig. 65)*, que pasan por la recta BC y forman el mismo diedro con el plano *o*BC, tienen que coincidir: lo mismo se diría de los demas vértices. Este polígono, base de la pirámide, es, pues, regular, porque tiene sus lados iguales y tambien sus ángulos iguales. Finalmente, la altura de la pirámide caerá en un punto equidistante de los vértices A, B, C, . . .; es decir, en el centro de la circunferencia circunscrita á este polígono, puesto que las aristas son oblícuas iguales por construccion.

De lo dicho se deduce que:

TEOREMA.

Si se divide una circunferencia menor de una superficie esférica en n *partes iguales, y se unen dos á dos consecutivamente los puntos de division por arcos de círculo máximo, se forma un polígono esférico regular,* puesto que la pirámide que tenga por vértice el centro de la esfera, y por base el polígono plano (regular) inscrito en la circunferencia menor, es regular, y lo es, por tanto, el ángulo poliedro en su vértice; luego el polígono esférico corespondiente es regular.

TEOREMA.

Si se trazan los arcos de círculo máximo tangentes en los puntos de division, el polígono esférico que se forma es tambien regular, puesto que su ángulo poliedro correspondiente es el ángulo en el vértice de la pirámide regular, cuya base es el polígono plano regular de n lados circunscrito á la circunferencia menor; los lados de este polígono plano son, como se ve, las tangentes rectilíneas comunes al menor y á cada uno de los lados del polígono esférico; y así como el polígono plano es la base de una pirámide ordinaria regular de n caras, así el polígono esférico es la base de una pirámide esférica regular de n caras.

En una palabra: si se considera una cónica de revolucion y dos ángulos poliedros regulares de n caras, uno inscrito en ella y otro que esté circunscrito, al cortar por una superficie esférica cuyo centro sea el vértice comun la cónica da una circunferencia menor, y los ángulos poliedros dan polígonos esféricos regulares de n lados, uno inscrito y otro circunscrito á la circunferencia menor; los lados del primero son cuerdas esféricas de la circunferencia menor, y los lados del segundo son tangentes á ésta. Se forman, pues, dos pirámides esféricas, una inscrita en el sector esférico, y otra circunscrita á él.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Todo polígono esférico regular, es inscriptible y circunscriptible.

En efecto, al polígono esférico regular corresponde, como ya hemos demostrado, un ángulo poliedro regular; y siendo iguales á R las longitudes de sus aristas laterales, al unir los vértices del polígono dado por rectas se tiene un polígono plano regular. Ahora bien, el plano de este polígono corta á la superficie esférica segun una circunferencia menor que pasa por todos los vértices; luego el polígono esférico dado está inscrito en ella; y siendo ya sus lados cuerdas esféricas iguales de una menor, equidistan de su polo; luego si con un radio esférico igual á esta distancia se describe una circunferencia menor, se tendrá el polígono circunscrito á esta circunferencia, puesto que sus lados le serán tangentes.

Se ve que las dos circunferencias menores inscrita y circunscrita á un polígono esférico regular tienen los polos comunes. Llamaremos *radio* del polígono regular al radio esférico de la circunferencia circunscrita; *apotema* del polígono regular al radio esférico de la inscrita, y *ángulo en el polo* el ángulo de dos radios consecutivos ó de dos apotemas consecutivas, cuyo valor es constante é igual á $\left(\frac{4}{n}\right)$. Trazando las tangentes en los vértices de un polígono esférico inscrito, ó en los puntos medios de los arcos subtendidos por sus lados, se obtiene el esférico regular circunscrito del mismo número de lados; cuando se hace la segunda construccion, los vértices de los dos polígonos están dos á dos en arcos de círculo máximo que pasan por el polo, y son las bisectrices de los ángulos formados por dos apotemas consecutivas.

En una misma esfera ó en esferas iguales, dos polígonos regulares del mismo número de lados son iguales cuando lo son las circunferencias menores circunscritas ó inscritas, ó bien cuando lo son los ángulos poliedros correspondientes; los polígonos regulares que corresponden á ángulos poliedros iguales, son semejantes cuando pertenecen á esferas de diferente radio, y su relacion de semejanza, que es (como se sabe) la relacion de los radios de las esferas, es igual á la relacion de sus radios esféricos ó de sus apotemas esféricas, ó en general, de sus líneas homólogas.

Si dividida una circunferencia menor en m partes iguales se unen los puntos de division de p en p por arcos de círculo máximo, se forma un polígono esférico regular *de* m *lados de la especie* p si este número es primo con m, porque será preciso dar p vueltas para cerrarlo y se habrán trazado m cuerdas. A esta clase de polígonos esféricos regulares de especie superior corresponden ángulos poliedros regulares de especie superior, cuyo vértice es el centro de la esfera y que pertenece á una pirámide regular, cuya base es el polígono plano regular de m lados y de la especie p, inscrito en la circunferencia menor. Todo cuanto se dice en Geometría plana de las várias especies de polígonos regulares, es aplicable á los esféricos.

Es fácil hacer la inscripcion en una circunferencia menor de los polígonos esféricos regulares de 3, 4, 5,... lados.

Cuadrado.—Basta trazar por el polo P de la circunferencia menor dos diámetros esféricos perpendiculares entre sí, para lo cual se hace polo en dos puntos que disten un cuadrante sobre la máxima C descrita desde P: se tendrá así dividida la circunferencia menor en cuatro partes iguales, y se inscribirá el cuadrado esférico. Los ángulos de este cuadrado esférico no son rectos.

Exágono.—Para dividir la circunferencia menor en seis partes iguales, se empieza, como ántes, por describir, desde P como polo, la circunferencia máxima C y dividir ésta en seis partes iguales llevando el radio R; si se hace polo en tres puntos consecutivos de estos seis y se trazan tres circunferencias máximas, éstas dividirán á la menor en seis partes iguales. Es evidente que los otros tres puntos consecutivos de la circunferencia C serían polos de las mismas circunferencias máximas ya descritas. El lado del exágono esférico regular es menor que el radio esférico de la menor circunscrita, porque la cuerda rectilínea del lado, que es el lado del exágono plano regular (y, por tanto, igual al radio rectilíneo del menor) es menor que la distancia polar.

Triángulo.—Uniendo de dos en dos los puntos de division de la circunferencia menor en seis partes iguales, se tendrá el triángulo equilátero ó regular; pero en éste la apotema no es, como en Geometría plana, la mitad del radio.

Decágonos.—Se empieza siempre por describir desde P como polo la circunferencia máxima C, cuyo radio es el mismo de la esfera (hay que determinarlo préviamente cuando se trata de hacer construcciones sobre la superficie esférica): haciendo en un papel la division de esta circunferencia en diez partes iguales, y trasladando éstas á la superficie esférica por medio de sus cuerdas rectilíneas, bastará trazar las circunferencias de círculo máximo que bajan desde el polo P á esos diez puntos de division, y ellas dividirán á la menor dada en diez partes iguales. El decágono de 1.ª especie se obtendrá uniendo los puntos de division *de uno en uno* por cuerdas esféricas, y el de 3.ª especie uniéndolos *de tres en tres.*

Pentágonos.—Uniendo los mismos puntos de division en diez partes iguales *de dos en dos,* se obtendrá el pentágono de 1.ª especie, y uniéndolos *de cuatro en cuatro* se obtendrá el pentágono de 2.ª especie.

Pentedecágonos.—Dividiendo la circunferencia menor dada en 15 partes iguales por el procedimiento ántes indicado, se tendrán los pentedecágonos de 1.ª, de 2.ª, de 4.ª ó de 7.ª especie si se unen los puntos de division de uno en uno, de dos en dos, de cuatro en cuatro, ó de siete en siete.

Lo mismo se procedería para *todos los géneros y especies* de polígonos esféricos regulares. En cualquiera de ellos quedará determinado el lado (arco de círculo máximo) por medio de su cuerda rectilínea en la circunferencia máxima; esta cuerda rectilínea es á su vez el lado del polígono plano *del mismo género y de la misma especie* inscrito en la circunferencia menor dada. (*) Se diría lo mismo para los icoságonos regulares ó para los polígonos regulares cuyos géneros fueran 30, 60, etc., etc.

Las construcciones gráficas para tener el polígono esférico regular inscrito ó circunscrito de *doble, mitad* ó *igual* número de lados que otro polígono inscrito ó circunscrito dado, son las mismas de Geometría plana.

NOTA 29 (de la pág. 474).

Fundándose en la propiedad de Geometría plana de que los segmentos de dos rectas A′B′ y CD, la primera paralela y la segunda antiparalela á AB *(fig. 66)* comprendidos entre dos paralelas AA′ y BB′ son iguales entre sí (**), se ve fácilmente que en el cilindro oblícuo de base circular las secciones antiparalelas á la base y las paralelas á ésta son circunferencias *iguales entre sí*, puesto que tienen igual diámetro.

Se demuestra (como para el cono circular oblícuo) que dos secciones, una paralela á la base, y otra antiparalela á la base de un cilindro oblícuo de base circular, están siempre situadas en una misma esfera. Pero se ve ademas, como acabamos de decir, que son *círculos iguales* en dicha esfera.

(*) Si esta circunferencia menor está dada por *su radio esférico*, es fácil determinar en un papel su diámetro rectilíneo como cuerda que subtiende á su diámetro esférico en una circunferencia máxima.

(**) Esta propiedad se demuestra con sólo notar que los triángulos PA′C y PB′D son isósceles; y esto es evidente, porque

$$\text{ángulo } A' = \text{ángulo } A = \text{ángulo } D = \text{ángulo } C,$$

é igualmente

$$\text{ángulo } B' = \text{ángulo } D;$$

por consiguiente,

$$PA' = PC \text{ y } PB' = PD;$$

de donde

$$A'B' = CD.$$

E inversamente: Que por dos *círculos iguales* situados en una esfera se puede siempre hacer pasar un cilindro oblícuo ademas de las dos hojas de un cono oblícuo.

Los círculos iguales que consideramos serán máximos en la esfera cuando la interseccion de sus planos sea un diámetro comun.

NOTA 30 (de la pág. 490).

Poliedros regulares conjugados.

La esfera inscrita en un poliedro regular P está circunscrita á su conjugado *interior* P_1, porque los centros de las caras del primero, que son los puntos de contacto con la superficie esférica, són al mismo tiempo los vértices del segundo; por consiguiente, las apotemas del poliedro son los radios de su conjugado P_1. E inversamente: la esfera circunscrita al primer poliedro P está inscrita en su conjugado *exterior* P', porque los vértices del primero, por los cuales pasa la superficie esférica, son al mismo tiempo los centros de las caras de este otro conjugado, y estas caras son planos perpendiculares á los radios respectivos; por consiguiente, los radios del poliedro P son las apotemas de su conjugado P'.

Si representamos por R y r el radio y la apotema del primer poliedro P; por R_1 y r_1 el radio y la apotema de su conjugado P_1, y por R' y r' el radio y la apotema de su conjugado P', se ve que las tres apotemas

$$r_1, r, r',$$

y los tres radios

$$R_1, R, R',$$

no corresponden más que á cuatro esferas concéntricas (cuyo centro comun es el centro comun de los tres poliedros P_1, P, P'), de las cuales la de radio r_1 está inscrita en el poliedro interior P_1, la de radio R' está circunscrita al exterior P', y las dos intermedias de radios

$$r = R_1 \text{ y } R = r'$$

están : la primera circunscrita al poliedro P_1 é inscrita á P, y la segunda circunscrita á este P é inscrita en P'.

En vista de esto, se puede afirmar que á la série infinita (creciente ó decreciente, segun se mire) de poliedros regulares

$$\ldots P_4, P_3, P_2, P_1, P, P', P'', P''', P^{\mathrm{IV}} \ldots$$

deducidos uno de otro segun la ley de *conjugacion* (directa ó inversa) corresponde una série infinita (creciente ó decreciente) de esferas inscritas y circunscritas á dichos poliedros regulares. Los radios de esta série de esferas son

$$\text{ó bien } \left.\begin{array}{cccccccccc} \ldots\ldots r_4, & r_3, & r_2, & r_1, & r, & r', & r'', & r''', & r^{\mathrm{IV}} & \ldots\ldots \\ & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \\ \ldots\ldots\ldots R_4, & R_3, & R_2, & R_1, & R, & R', & R'', & R''', & R^{\mathrm{IV}} & \ldots \end{array}\right\}.$$

Esta série de radios es una progresion geométrica. En efecto, se sabe que en dos poliedros conjugados P_1 y P, la relacion del radio á la apotema es la misma; es decir, que

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r},$$

ó bien

$$\frac{r}{r_1} = \frac{r'}{r}, \text{ qué es lo mismo que } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R}{R_1},$$

lo cual prueba que la relacion de un radio (ó apotema) al que le precede es constante.

Siendo una progresion geométrica, se ve que cada radio r es medio proporcional entre el precedente r_1 y el siguiente r'; lo cual se podría hacer ver más directamente observando que una apotema r es cateto de un triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa el radio R, y en el cual la proyeccion de r sobre R es la apotema precedente r_1.

En la série de poliedros regulares

$$\ldots P_4, P_3, P_2, P_1, P, P', P'', P''', P^{IV} \ldots$$

dos términos consecutivos son conjugados, y dos términos alternos son semejantes; de manera que las dos séries

$$\ldots P_4, P_2, P, P'', P^{IV} \ldots$$

y

$$\ldots\ldots P_3, P_1, P', P''', \ldots\ldots$$

son séries de poliedros semejantes.

La relacion de semejanza es constante y la misma para una y otra série.

En efecto, tomando la relacion de las apotemas de los dos poliedros semejantes que se comparen, se ve que

$$\text{la relacion de semejanza entre} \left\{ \begin{array}{lll} P''' \text{ y } P' & \text{es} & \dfrac{r'''}{r'} \\ P'' \text{ y } P & » & \dfrac{r''}{r} \\ P' \text{ y } P_1 & » & \dfrac{r'}{r_1} \\ P \text{ y } P_2 & » & \dfrac{r}{r_2} \end{array} \right| .$$

Basta poner á la la vista la progresion geométrica

$$\ldots r_4, r_3, r_2, r_1, r, r', r'', r''', \ldots$$

para que resalte la série de relaciones iguales

$$\frac{r'''}{r'} = \frac{r''}{r} = \frac{r'}{} = \frac{r}{r_2} .$$

cuyo valor constante es *el cuadrado de la razon de la progresion de radios;* porque, en efecto, si se llama K esta razon, se ve inmediatamente que una cualquiera $\frac{r'}{\ }$ de las relaciones de semejanza es

$$\frac{r'}{r_1}=\frac{\frac{r'}{r}}{\frac{r_1}{r}}=\frac{K}{\frac{1}{K}}=K^2.$$

De aquí se deduce fácilmente que las dos séries de números de medida de las superficies de los poliedros semejantes

$$\ldots S_4, S_2, S, S'', S^{IV}, \ldots$$

y

$$\ldots S_3, S_1, S', S''', \ldots$$

así como tambien las dos séries de números de medida de sus volúmenes

$$\ldots V_4, V_2, V, V'', V^{IV}, \ldots$$

y

$$\ldots V_3, V_1, V', V''', \ldots$$

son progresiones geométricas, cuyas razones son respectivamente K^4 *y* K^6. En efecto: se tiene por comparacion de las superficies de poliedros semejantes

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S}{S_2}=\left(\frac{r}{r_2}\right)^2=(K^2)^2=K^4\\ \frac{S''}{S}=\left(\frac{r''}{r}\right)^2=(K^2)^2=K^4\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\frac{S'''}{S'}=\left(\frac{r'''}{r'}\right)^2=(K^2)^2=K^4\\ \frac{S'}{S_1}=\left(\frac{r'}{r_1}\right)^2=(K^2)^2=K^4\end{array}\right\},$$

y por comparacion de los volúmenes,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{V}{V_2}=\left(\frac{r}{r_2}\right)^3=K^6\\ \frac{V''}{V}=\left(\frac{r''}{r}\right)^3=K^6\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\frac{V'''}{V'}=\left(\frac{r'''}{r'}\right)^3=K^6\\ \frac{V'}{V_1}=\left(\frac{r'}{r_1}\right)^3=K^6\end{array}\right\}.$$

Si imagináramos inscritos en la esfera de radio R el poliedro regular P y otro Q semejante á los conjugados de P(*), es evidente que la apotema x de Q será la misma que la apotema r de P; es decir, que el poliedro Q estará circunscrito á la misma esfera que P, puesto que las relaciones de radio á apotema

$$\frac{R}{x} \text{ y } \frac{R}{r}$$

son las mismas para los dos poliedros. E inversamente: si hiciéramos que Q estuviera circunscrito á la misma esfera que P, quedaría inscrito en la misma esfera que éste.

Ahora bien, si á partir del poliedro Q formáramos (en órden creciente y en órden decreciente) la série de poliedros

$$\ldots Q_4, Q_3, Q_2, Q_1, Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, \ldots,$$

se ve desde luego que las dos séries distintas

$$\left.\begin{array}{l} \ldots P_4, P_3, P_2, P_1, P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots \\ \ldots Q_4, Q_3, Q_2, Q_1, Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, \ldots \end{array}\right\}$$

se corresponderían de tal suerte que un término cualquiera de la primera série y su correspondiente en la segunda aparecerían inscritos en una misma esfera y circunscritos á otra, por lo cual habría una sola y única série de esferas, cuyos radios son

$$\ldots r_4, r_3, r_2, r_1, r, r', r'', r''', r^{IV}, \ldots$$

Los poliedros

$$\ldots P_4, Q_3, P_2, Q_1, P, Q', P'', Q''', P^{IV}, \ldots$$

son semejantes entre sí: tambien son semejantes entre sí los poliedros

$$\ldots Q_4, P_3, Q_2, P_1, Q, P', Q'' P''', Q^{IV}, \ldots$$

(*) Si ademas lo colocáramos semejantemente, los radios de Q y de todos los conjugados estarían en las mismas líneas rectas.

La relacion de semejanza entre dos consecutivos de los primeros ó de los segundos, es ahora la razon K de la progresion de radios, puesto que

$$\text{la relacion de semejanza entre } \left\{ \begin{array}{l} Q' \text{ y } P \text{ es } \dfrac{r'}{r} \\ \\ P \text{ y } Q_1 \text{ es } \dfrac{r}{r_1} \end{array} \right|$$

$$\text{y la relacion de semejanza entre } \left\{ \begin{array}{l} P' \text{ y } Q \text{ es } \dfrac{r'}{r} \\ \\ Q \text{ y } P_1 \text{ es } \dfrac{r}{r_1} \end{array} \right| :$$

por consiguiente, las progresiones geométricas de sus superficies y de sus volúmenes tienen por razon respectivamente K^2 y K^3; estas progresiones no son otra cosa que las que se obtienen interpolando un término entre cada dos consecutivos de las progresiones de superficies y volúmenes que consideramos ántes.

NOTA 31 (de la pág. 493).

La determinacion geométrica de los radios r y R de las esferas inscrita y circunscrita á un poliedro regular, puede hacerse tambien del siguiente modo:

Sea ABCD *(fig. 67)* uno cualquiera de sus ángulos poliedros; $AB = a$ la arista; $oA = R$ el radio de la esfera circunscrita; $o'C = R'$ el radio del polígono BCD que se obtiene uniendo los extremos de las aristas que concurren en el vértice A: este polígono (triángulo, cuadrilátero ó pentágono, segun que el ángulo A sea triedro, tetraedro ó pentaedro) es regular y su plano es perpendicular al radio oA de la esfera.

Radio de la esfera circunscrita.—Considerando el diámetro AA′ de la esfera, y uniendo C con A′, se tiene

$$a^2 = 2\mathrm{R}.\mathrm{A}o' = 2\mathrm{R}.\sqrt{a^2 - \mathrm{R}'^2};$$

de donde

$$\mathrm{R} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \mathrm{R}'^2}}.$$

Para aplicar esta fórmula á los cinco poliedros regulares, habrá de calcularse préviamente el valor de R′, lo cual es fácil si se determina, como diagonal de una cara, el lado BC del polígono regular BCD.

Radio de la esfera inscrita.—Si O$m = r$ es el radio de la esfera inscrita, y $m\mathrm{A} = r'$ es el radio de la cara del poliedro, se tiene en el triángulo $om\mathrm{A}$

$$r = \sqrt{\mathrm{R}^2 - r'^2}.$$

Para aplicar esta segunda fórmula, habrán de calcularse préviamente R y r'.

Hagamos aplicacion á los cinco poliedros regulares.

Tetraedro: El lado BC es en este caso igual á la arista a, y el radio

$$o'\mathrm{C} = \mathrm{R}' = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$\mathrm{R} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

El radio $m\mathrm{A} = r'$ es tambien en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{3}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r=\sqrt{\frac{6a^2}{16}-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2a^2}{48}}=\frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Exaedro : El lado BC es en este caso $a\sqrt{2}$ y el radio

$$o'\mathrm{C}=\mathrm{R}'=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$\mathrm{R}=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{3}}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

El radio $m\mathrm{A}=r'$ es en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{2}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{2}.$$

Octaedro: El lado BC es en este caso igual á la arista a, y el radio

$$o'\mathrm{C}=\mathrm{R}'=\frac{a}{\sqrt{2}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$\mathrm{R}=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

El radio $m\mathrm{A}=r'$ es en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{3}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r=\sqrt{\frac{2a^2}{4}-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2a^2}{12}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Dodecaedro: Para determinar en este caso el lado BC, conviene hacer uso de la fórmula (1′) dada en la **NOTA 17**, que es aquí

$$\mathrm{BC} = \frac{a\sqrt{4r'^2 - a^2}}{r'};$$

pero el valor del radio r' del pentágono se sacará de la ecuacion

$$a = \frac{r'}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

de la cual se deduce

$$r' = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2a.\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2\times 20}} = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}};$$

sustituyendo este valor en el de BC, se tiene

$$\mathrm{BC} = \frac{a\sqrt{\frac{4a^2(5+\sqrt{5})}{10} - a^2}}{a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}} = \frac{a}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

Ya se ve que

$$o'\mathrm{C} = \mathrm{R}' = \frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{3}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$\mathrm{R} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2(6+2\sqrt{5})}{12}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \frac{a(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{4}$$

Ya hemos visto cuál es el valor del radio $m\mathrm{A} = r'$; por conguiente, la segunda fórmula da

$$r=\sqrt{\frac{a^2(18+6\sqrt{5})}{16}-\frac{a^2\,5+\sqrt{5})}{10}}=a\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{80}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}.$$

Icosaedro: El lado BC es en este caso igual á la arista a y el radio $o'\mathrm{C}=\mathrm{R}'$ es el de un pentágono: se saca de la relacion

$$a=\frac{\mathrm{R}'}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

de donde

$$\mathrm{R}'=\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$\mathrm{R}=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{a^2(5+\sqrt{5})}{10}}}=\frac{a}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{1}}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

El radio $m\mathrm{A}=r'$ es en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{3}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r=\sqrt{\frac{a^2(5+\sqrt{5})}{8}-\frac{a^2}{3}}=a\,\frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}};$$

pero se tiene

$$\sqrt{7+3\sqrt{5}}=\sqrt{7+\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{7+2}{2}}+\sqrt{\frac{7-2}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\,[3+\sqrt{5}]}{\sqrt{6}}$$

y, por tanto,

$$r=\frac{a\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}.\ (*)$$

(*) Debemos el método expuesto en esta Nota al distinguido profesor D. José Garin, ex-profesor de la Academia de Ingenieros militares.

NOTA 32 (de la pág. 501).

Poliedros de especie superior.

Veamos la fórmula de Euler generalizada para los poliedros de especie superior.

Adoptando las mismas notaciones del Tratado de MM. Rouché y Comberousse, se sabe que el área a del polígono esférico de especie superior (*) correspondiente á una cara del poliedro es

$$a = \Sigma\alpha - 2n = s + 4\varphi - 2n.$$

Si las diversas caras del poliedro son polígonos de géneros y especies distintos, las áreas de todos los polígonos esféricos correspondientes á todas las caras del poliedro tendrán las expresiones:

$$\begin{aligned} a &= s + 4\varphi - 2n \\ a' &= s' + 4\varphi' - 2n' \\ a'' &= s'' + 4\varphi'' - 2n'' \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

que, sumadas, conducen á la fórmula

$$8E = (s + s' + s'' + \ldots) + 4(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) - 2(n + n' + n'' + \ldots).$$

Ahora bien, la suma $(s + s' + s'' \ldots)$ de los ángulos esféricos de todos los polígonos, equivale á la suma de los que

(*) Tomada esta área esférica en el sentido que dijimos en la Nota 15, pág. 35, al hablar del área plana de un polígono regular de especie superior.

hay en los vértices; pero si los ángulos poliédricos son de las especies σ, σ', σ'',..., las sumas de los ángulos esféricos en esos diversos vértices son

$$4.\sigma,\ 4.\sigma',\ 4.\sigma'',\ldots;$$

por tanto,

$$s+s'+s''+\ldots=4.\sigma+4.\sigma'+4.\sigma''+\ldots=4.\Sigma\,\sigma.$$

Se ve, pues, que la fórmula anterior debe escribirse del modo siguiente:

$$8E=4.\Sigma\sigma+4.\Sigma\varphi-4A,$$

que, simplificada, es la fórmula general de Euler

$$A+2E=\Sigma\varphi+\Sigma\sigma.\ (*)$$

Como caso particular de ella, puede considerarse la fórmula

$$A+2E=\varphi.F+\sigma S$$

para los poliedros *regulares* de especie superior. Se deduce de la general con sólo notar que, por ser el poliedro *regular*, las especies

$$\varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ldots$$

de las caras son iguales entre sí, por cuya razon su suma equivale al producto del número φ que indique la especie de una cualquiera de las caras por el número F de ellas; y que, asimismo, las especies

$$\sigma,\ \sigma',\ \sigma'',\ldots$$

(*) Hemos repetido aquí la demostracion que hay en el Tratado de MM. Rouché y Comberousse, porque creemos equivocada la fórmula

$$A+2E=\Sigma(\varphi.F)+\Sigma(\sigma.S)$$

que se da en el original francés.

de los ángulos poliédricos son iguales entre sí, y, por tanto, su suma equivale al producto del número σ que indique la especie de un ángulo poliédrico por el número de ellos; es decir, por el número S de vértices.

En el caso particular de ser el poliedro convexo ú ordinario, los números E, φ, σ son iguales á la unidad, y la fórmula general de Euler se convierte en la fórmula muy conocida

$$A + 2 = F + S.$$

Lit. Espiritu-Santo, 18

P.J.G. gº

Lit. Espiritu-Santo, 18

P.J.G. gº

71

294