

calibrite

colorchecker classic



TRATADO
DE
GEODESIA

POR
EL CORONEL A. R. CLARKE, C. B.
Ingeniero real; M.R.S.; M. Hon. C.P.S.
Miembro correspondiente de la Academia Imperial de Ciencias
de San Petersburgo.

OBRA TRADUCIDA DEL INGLÉS Y ANOTADA

POR
D. EDUARDO LEÓN Y ORTIZ

Doctor en Ciencias,
catedrático de Geodesia en la Universidad Central.

2.^a tirada



1673

MADRID
CASA EDITORIAL BAILLY-BAILLIERE

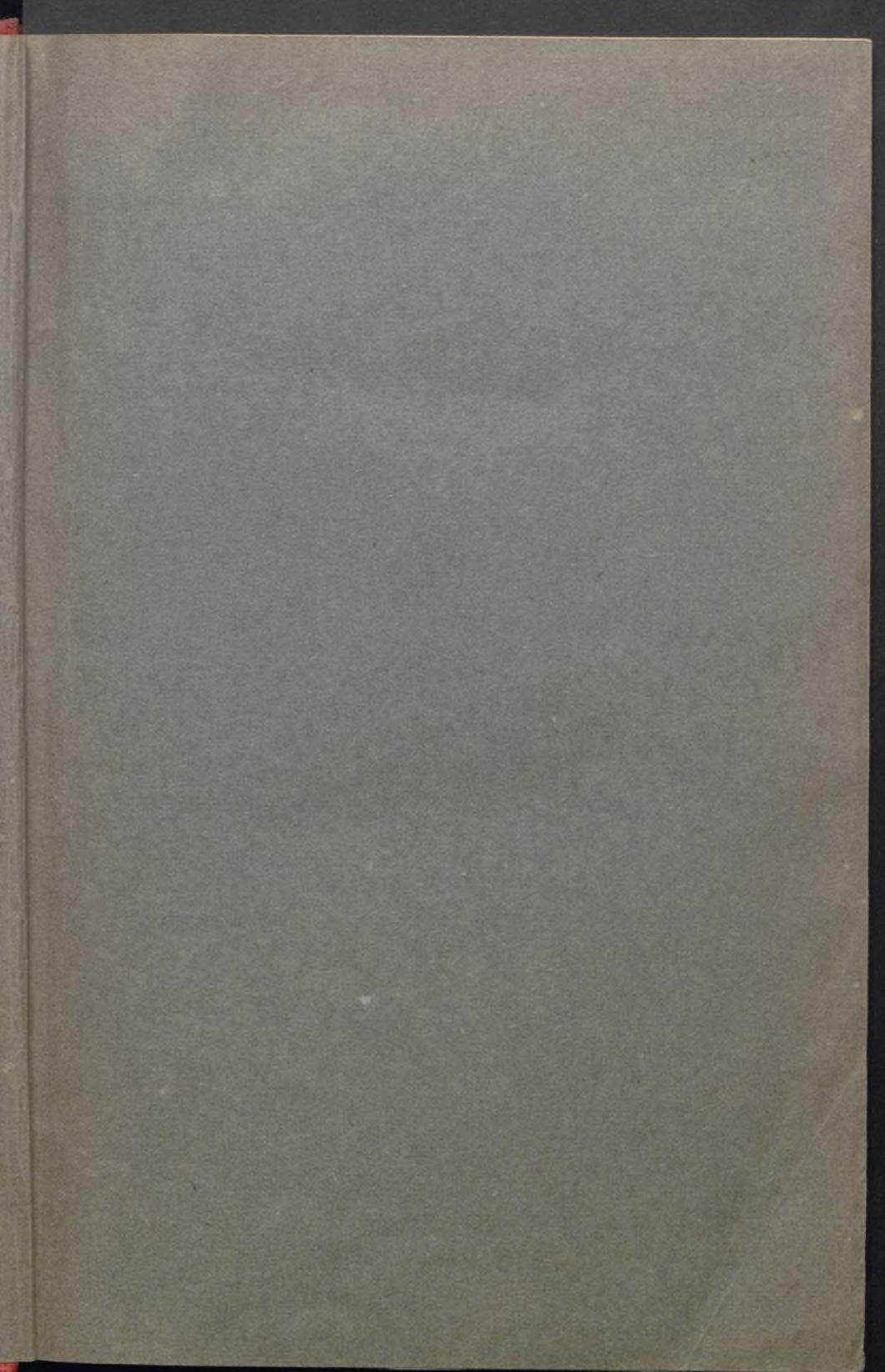
Núñez de Balboa, 21.—Apartado 56.
VENTA AL POR MENOR: Plaza de Santa Ana, 11.
1910

A. R. Clarke
TRATADO
DE GEODESIA

6358

Baillie-Baillien

6358



a-2-1-f

TRATADO
DE
GEODESIA

REPORT
ON
GEOLOGIA

TRATADO
DE
GEODESIA

POR

EL CORONEL A. R. CLARKE, C. B.

Ingeniero real; M.R.S.; M. Hon. C.P.S.
Miembro correspondiente de la Academia Imperial de Ciencias
de San Petersburgo.

OBRA TRADUCIDA DEL INGLÉS Y ANOTADA

POR

D. EDUARDO LEÓN Y ORTIZ

Doctor en Ciencias,
catedrático de Geodesia en la Universidad Central.

2.^a tirada



1673

MADRID
CASA EDITORIAL BAILLY-BAILLIERE

Núñez de Balboa, 21.—Apartado 56.

VENTA AL POR MENOR: Plaza de Santa Ana, 11.

1910

TRAYBROOK
GEODESIA

THE RIGHT HONORABLE
THE SECRETARY OF STATE
IN COUNCIL
BY APPOINTMENT
TO HER MAJESTY
THE QUEEN



BY APPOINTMENT
TO HER MAJESTY
THE QUEEN

PRÓLOGO DEL TRADUCTOR

El autor del presente libro, el coronel de ingenieros de Inglaterra A. R. Clarke, tenía ya, antes de publicarlo, ganada gran reputación por trabajos prácticos y teóricos, entre los cuales figuraba su relación de las operaciones geodésicas realizadas en la Gran Bretaña é Irlanda; su cálculo de la forma y dimensiones de la tierra, conforme á los datos de los mayores arcos de meridiano medidos en diversos países; su estudio de las líneas geodésicas sobre la superficie del globo trazadas, y la comparación que se le confió de los patrones de longitud empleados por Francia, Bélgica, Inglaterra, Prusia, Rusia, Austria, España y los Estados Unidos como unidades en las respectivas bases de sus cadenas ó redes trigonométricas. No faltaba, por lo tanto, al autor la condición más propia para escribir un excelente tratado: la de conocer á fondo el asunto escogido. Pero aparte de esto, hay en su libro otras dotes que admirar.

En acertada proporción aparecen los estudios teóricos y los que en la práctica se inspiran, pues el interés despertado por los primeros no hace olvidar la importancia de los segundos. Por ejemplo, el capítulo en que se inquiere y determina la figura de la tierra como consecuencia de las leyes de atracción de la materia combinadas con la primitiva fluidez del

planeta y con su movimiento de rotación, teoría donde brillan ilustres matemáticos ingleses, franceses y alemanes, está reducido, sin perder pormenor alguno esencial, á límites adecuados para no apartarse de la comprobación práctica. Nótase además por cualquiera esa elegante concisión que sienta bien aun en las obras de consulta y es de absoluto rigor en las que aspiran al nombre de didácticas. Con brevedad se exponen los principios y métodos de la ciencia, y con brevedad también se indica cuanto de provecho se ha recogido de las medidas y observaciones verificadas por sabios de diversas naciones, reflejándose en esa indicación un criterio digno de elogio por su delicadeza, pues más bien se muestra severo el autor con su propio país que con el ajeno.

Entre las naciones citadas en el libro del Sr. Clarke cuéntase España por la precisión de su red geodésica y por el esmero con que se unió esta triangulación con la de Argelia, salvando el Mediterráneo por medio de atrevidas observaciones hechas desde elevadas cumbres de ambas costas. En verdad, España no ha llevado la iniciativa en los problemas geodésicos, pero ha intervenido en ellos en momentos memorables. En las célebres medidas que sirvieron para definir la tierra como aplanado elipsoide, tomaron parte Juan y Ulloa. Después, con los sabios eminentes encargados de los cálculos que habían de fijar la magnitud de la unidad fundamental de las medidas usuales, alternó D. Gabriel de Císcar, y á su vez Chaix y Rodríguez, que auxiliaron á Biot y Arago, cuando fué extendido hasta la latitud de la isla de

Formentera el arco meridiano de París y Barcelona, medido por Delambre y Méchain, acreditaron que no se mantenía nuestra nación ajena á los estudios que tan justo renombre daban á Francia. Emprendidos en fecha más reciente con mayor amplitud esos estudios por la Comisión del Mapa de España y después por el Instituto Geográfico y Estadístico, geodestas españoles combinaron con acierto sus observaciones con las de los franceses para realizar el ya mencionado enlace trigonométrico de nuestra costa con la argelina, merced al cual pudo prolongarse uno de los tres grandes arcos de meridiano medidos sobre la superficie de la tierra.

Con tales antecedentes, lícito es esperar que la obra del ilustre geodesta inglés halle aquí favorable acogida. No en modo alguno como enmienda del texto, sino como ampliación del mismo para hacerlo más útil en España, ha sido aumentada con notas la traducción (1). Tienen unas por objeto completar la reseña de los valiosos trabajos verificados por dicho Instituto con la cooperación del Observatorio astronómico y meteorológico de Madrid, y, en sucinto extracto, dan idea de lo contenido en Memorias ó libros especiales publicados por los referidos centros ó por esclarecidas personas de los mismos. Otras notas ofrecen, para pasar de las fórmulas de partida á las que han de demostrarse, algunas transformaciones

(1) Las notas con asterisco son del autor; las notas numeradas son del traductor.

intermedias, á fin de que con este auxilio aumente el número de lectores, por requerirse así menor práctica en el cálculo ó más breve preparación matemática. Pero no se ha llevado en esta clase de notas la facilidad hasta el extremo, porque quien desee, en idioma español, tratado más elemental de Geodesia, que sirva como de guía provechoso, puede con gran fruto estudiar el publicado en 1869 en Méjico por don Francisco Díaz Covarrubias, profesor que fué allí de Geodesia y Astronomía práctica en la Escuela especial de Ingenieros, y persona de reconocida competencia en tales estudios, pues bajo su dirección se midió una base de más de ocho kilómetros y medio en el Valle de Méjico, en el camino de la capital al Peñón, y se tendió la red geodésica para levantar la carta geográfica del citado valle; al mismo profesor se confiaron otras muy importantes comisiones científicas, y por añadidura á él se deben otros libros bien reputados, como el que tiene por título *Nuevos métodos astronómicos*.

Parecerá acaso que la presente traducción, con las adiciones indicadas, hubiera resultado mejor haciendo con todo ello una como refundición del texto é intercalando en él, como partes del mismo, las antedichas notas, salvo dejarlo así apuntado en este prólogo ó en alguna advertencia. Pero esas notas son meramente auxiliares, y los que, por sus conocimientos previos ó por tener á mano libros de fácil consulta, puedan pasarlas por alto, echarían de menos la concisión del autor. Además, aquellos para quienes no sean sobradas, preferirán sin duda la separa-

ción entre ellas y el texto, porque en primera lectura encontrarán de ese modo cierta relativa amenidad, por una forma de exposición algo semejante al diálogo, y porque en segunda lectura, ya conocida la materia, les bastará concentrar la atención solamente en el texto, cuyo compendioso estilo permite dominar mejor el conjunto y reparar en los puntos principales. Tal es el criterio adoptado al ampliar, deseando el acierto, la traducción del TRATADO DE GEODESIA de A. R. Clarke; tarea con mayor agrado acometida por contar con el esmero de la casa editorial de los Sres. Bailly-Bailliere, para que las condiciones tipográficas no desdijeran de las que, como obra de la imprenta Clarendon en Oxford, adornan la edición británica.

E. LEÓN Y ORTIZ.

DATOS MAS IMPORTANTES

DEL ELIPSOIDE APLANADO

QUE MEJOR REPRESENTA EL GLOBO TERRESTRE

SEGÚN LOS CÁLCULOS DE ESTE LIBRO

1.

(Páginas 474-476)

NOTACION

a, c . . . semiejes, ecuatorial y polar de dicho elipsoide.

x, y . . . abscisa y ordenada de un punto á la latitud φ .

VALORES NUMÉRICOS

(LAS MAGNITUDES LÍNEALES EN METROS)

$$a = 6\ 378\ 249,$$

$$c = 6\ 356\ 515,$$

$$\frac{a-c}{a} = \frac{1}{293.46},$$

$$2 \frac{a-c}{a+c} = \frac{1}{292.96},$$

$x = 6$	383	687	$\cos \varphi$		$y = 6$	351	086	$\sen \varphi$
—	5	445	$\cos 3\varphi$		—	5	422	$\sen 3\varphi$
+		7	$\cos 5\varphi$		+		7	$\sen 5\varphi$

2.

(Páginas 477-478)

NOTACIÓN

- $\rho, \rho \dots$ radios de curvatura que en un punto á la latitud φ corresponden al arco del meridiano y al arco perpendicular al antedicho.
- $\delta, \delta' \dots$ magnitudes lineales que á la misma latitud poseen el grado de meridiano y el grado de paralelo.
- $\mathcal{M} \dots$ metro efectivo ó por la ley adoptado.
- $\mathcal{M}' \dots$ metro ideal ó diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano.

VALORES NUMÉRICOS

(LAS MAGNITUDES LINEALES EN METROS)

$10 + \log \frac{1}{\rho \text{ sen } 1''} =$	$10 + \log \frac{1}{\rho \text{ sen } 1''} =$
8.510 466 754	8.508 983 084
+ 0.002 223 606 cos 2φ	+ 0.000 741 202 cos 2φ
- 0.000 001 897 cos 4φ	- 0.000 000 632 cos 4φ

$\delta = 111$ 131.86	$\delta' = 111$ 416.36 cos φ
- 568.97 cos 2φ	- 95.04 cos 3φ
+ 1.21 cos 4φ	+ 0.12 cos 5φ

$\mathcal{M}' = 1.000 \quad 186 \quad 8 \quad \mathcal{M}.$

TABLAS DE REDUCCION

DE MEDIDAS INGLESAS Á LAS DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

RELACION FUNDAMENTAL

ENTRE EL METRO LEGAL \mathfrak{M} Y LA YARDA \mathfrak{Y}

(Página 242)

$$\mathfrak{M} = 1.09 \ 362 \ 311 \ \mathfrak{Y}$$

PIES

1 yarda = 3 pies.

PIES	METROS		PIES	METROS	
1	0.30479	72654	6	1.82878	35925
2	0.60959	45308	7	2.13358	08580
3	0.91439	17963	8	2.43837	81234
4	1.21918	90617	9	2.74317	53888
5	1.52398	63271	10	3.04797	26542

P = razón del pie al metro.

$$10 + \log P = 9.484 \ 011 \ 066.$$

PULGADAS

1 pie = 12 pulgadas.

PULGADAS	CENTÍMETROS	PULGADAS	CENTÍMETROS
1	2.53998	6	15.23986
2	5.07995	7	17.77984
3	7.61993	8	20.31982
4	10.15991	9	22.85979
5	12.69989	10	25.39977

MILLA

1 milla = 1760 yardas = 1.60933 kilómetro.

INICIALES Y SIGNOS

C. B.

Caballero del Baño, *Companion of the Bath*, uno de los tres grados de la orden inglesa del Baño, así denominada por la ceremonia á que en tiempos antiguos se sometía el que en ella ingresaba. Data esta orden por lo menos del siglo XIII, y en importancia es la que sigue á la de la Jarretera (*Garter*) ó de San Jorge, que también así se llama la más estimada de las órdenes inglesas. Fué puramente militar y naval la del Baño hasta 1847, en que se dispuso nombrar y admitir en lo sucesivo cierto número de personas civiles. Tienen tratamiento de *Sir* los comandadores y caballeros grandes cruces de esta distinguida orden.

I. R.

Ingeniero Real ú oficial del cuerpo militar de Inglaterra, organizado en 1763 y constituido en 1783 en Real Cuerpo (*Royal Corps of Engineers*) con uniforme distintivo. No todos sus oficiales proceden de enseñanza facultativa, pues existen los denominados *non-commissioned*, admitidos por su habilidad en profesiones ú oficios mecánicos, útiles en las prácticas peculiares del Cuerpo. Mas el título de Ingeniero sólo lo llevan los que habiendo entrado por oposición en la Real Academia Militar de Woolwich, en el condado de Kent, destinada exclusivamente á Artilleros é Ingenieros, han hecho en ella sus estudios y pasado después á completarlos en Chatham, perteneciente al mismo condado. Su ascenso, mientras están en el Cuerpo, es siempre por antigüedad. De estos oficiales se destinan 402 á la India para mandar allí tropas indígenas. A cargo de los Ingenieros Reales está la *Ordnance Survey*, que así llaman á los estudios y trabajos ne-

cesarios para levantar planos y mapas del Reino y de sus colonias. Hácese el dibujo en escala minuciosa, pues muchas veces se representa la milla por una pulgada, por seis y aun por veinticinco para los distritos más bajos y poblados. Los mapas de la India, aunque son los más reducidos, tienen escala detallada de una cuarta parte de pulgada por milla.

M. A.

Maestro en Artes, *Master of Arts*. A juzgar por las materias exigidas por la Universidad de Londres en sus exámenes—único acto oficial, pues la enseñanza es libre,—el título español más análogo sería el de *Doctor en Filosofía*, si la Facultad de Filosofía y Letras estuviese dividida en dos secciones y aumentada la de Filosofía con algunas asignaturas de la Facultad de Ciencias. Las Universidades de Cambridge y Oxford tienen otra organización, pues cada una de ellas consta de varios Colegios, famosos por su abolengo y cultura, donde se dan á los alumnos las enseñanzas necesarias por eminentes profesores, titulados algunos con nombre alusivo al del fundador de la cátedra correspondiente, como el llamado en Cambridge *Plumian professor of Astronomy*, porque el Doctor Thomas Plume instituyó allí esta enseñanza.

M. Hon. C. P. S.

Miembro honorario de la *Cambridge Philosophical Society* (Sociedad Filosófica de Cambridge). Publica esta corporación sus *Transactions*, á semejanza de la Real Sociedad de Londres. Conviene advertir que por Filosofía, sin especial calificativo, suelen entender los ingleses la de la Naturaleza, *Natural Philosophy*, esto es, las ciencias exactas, físicas y naturales, y en este sentido debe interpretarse también el título del acreditado periódico mensual de Londres, comúnmente llamado *Philosophical Magazine*, cuyo nombre completo, como resumen de los de otras revistas científicas, á las cuales sirve de continuación, es años ha *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and*

Journal of Science. La Metafísica y ciencias análogas las suelen llamar las ingleses *Philosophy of Mind* y *Moral Philosophy*.

M. R. S.

Miembro de la *Royal Society* (Real Sociedad), establecida en Londres. Hombres muy ilustres han figurado en ella como presidentes, y el título de miembro de la misma es con el que más se honran las personas doctas en Inglaterra. Como reunión particular ya existía esta Sociedad en 1645, y de ella formaba parte el célebre matemático Wallis; pero como corporación oficial no comenzó hasta 1662, reinando el tercer Estuardo, Carlos II, quien le otorgó estatutos y privilegios para promover el adelanto de las ciencias, en especial las exactas, físicas y naturales; cometido plenamente realizado por la Sociedad, pues desde su fundación apenas ha habido en Inglaterra propósito científico de importancia que no patrocinara. Basta con recordar que dió instrumentos al Observatorio de Greenwich en sus primeros años; que hizo imprimir la obra *Principia* de Newton; que proyectó é impulsó el viaje del célebre capitán Cook, quien en 1768, en el barco *Endeavour*, se dirigió al archipiélago de Tahiti para observar el paso de Venus por el Sol, y que protegió asimismo la expedición científica por los mares del Atlántico y del Pacífico, hecha en los años 1872 á 76 por la Comisión embarcada en el *Challenger* y dirigida por Sir Wyville Thomson. La Real Sociedad principió en 1664 á publicar las *Philosophical Transactions*, que, continuadas hasta el presente, componen unos doscientos volúmenes, y en 1880 dió comienzo á otra impresión titulada *Proceedings*, que contiene las actas y reseñas de sus sesiones. *Catalogue of scientific papers* es una bibliografía, ordenada por la misma Sociedad, de obras científicas de todas partes en el presente siglo publicadas. Cuenta actualmente la corporación con una renta anual de unas 5.000 libras esterlinas (25.000 duros), producto de sus bienes raíces y en fondos públicos, y de las cuotas de sus socios, los cuales entran por elección y contribuyen con diez libras al ingreso y cuatro de pago anual. Además, desde 1849 administra las mil libras que cada año vota el Parlamento inglés para trabajos científicos.

R. A. S.

Royal Astronomical Society (Real Sociedad Astronómica), establecida en Londres. Publica sus Memorias (*Memoirs*) y el periódico mensual *Monthly Notices*. Responde dignamente á las honrosas tradiciones astronómicas de la nación inglesa, que llevada de su celo por tales estudios ha fundado observatorios donde quiera, entre los cuales pueden citarse los Reales de Greenwich, Dublín y Edimburgo; los de Oxford, Cambridge y Glasgow, creados por sus Universidades; el de Liverpool por su Ayuntamiento; otros muchos por particulares, como el de Dun Echt, en Aberdeen, por lord Lindsay; el de Birr Castle, en el condado de King, por lord Ross, y el de South Villa, cerca de Londres, por Bishop; y finalmente, los de las colonias, como el Real Observatorio del Cabo de Buena Esperanza, el de Madras, fundado por la Compañía de las Indias orientales, y los de Sidney y Melbourne, por los gobiernos de las colonias de Nueva Gales del Sur y de Victoria en Australia.

U. S. A.

United States Army (Ejército de los Estados Unidos).

Este signo, puesto delante de una fórmula, indica que ésta es consecuencia de las precedentes. Debe leerse dicho signo: *luego, por lo tanto, por consiguiente, etc.*

PRÓLOGO DEL AUTOR

El Ensayo que con el título *Figure of the Earth* (Figura de la Tierra) escribió Sir G. B. Airy en la Enciclopedia Metropolitana de Londres, es el único estudio de Geodesia publicado en Inglaterra que trata debidamente esta materia; y aunque ahora, por nuevos adelantos, resulte incompleto, siempre será de gran valor, tanto por sus indagaciones históricas como por la exposición sencilla y clara de la teoría mecánica en ese libro contenida.

Pero desde que tal obra apareció, hasta el presente, se han publicado gran número de Memorias oficiales y de libros particulares, ya científicos, ya descriptivos, y entre todas estas obras hay muchas de suma importancia, como por ejemplo la *Gradmessung in Ostpreussen* (Medición de un grado en la Prusia oriental), por Bessel; la Memoria de 1847, donde Everest hace la reseña del gran arco medido por él en la India; la obra en dos tomos con magnífica impresión en que Struve describe la cadena trigonométrica que enlaza el Mar Negro con el Cabo Norte de Europa; la Memoria sobre la triangulación de las Islas Británicas; las publicaciones de la Asociación geodésica internacional; los tomos recientes de Memorias del Depósito general de la Guerra en Francia; los Informes anuales de la Dirección geodésica de la costa de los Estados Unidos; los tomos publi-

cados por el general Ibáñez, donde se describe la triangulación española con tanta precisión realizada, y por último, en no menor ni inferior contingente, los varios tomos publicados de algunos años á esta parte por el general Walker, que contienen los pormenores de sus trabajos geodésicos en la India.

La materia, como se ve, ha crecido en abundancia en los últimos años, y aunque el presente libro no sea muy minucioso, quizá alcance á llenar hasta cierto punto el hueco que entre las obras científicas inglesas se notaba. De los problemas de Astronomía enlazados con la Geodesia sólo nos ocuparemos someramente, porque no faltan excelentes libros que traten de ello, pudiendo citarse como ejemplo las obras de Brünnow y Chauvenet, las cuales, especialmente la última, contienen casi todo cuanto pueda necesitarse.

La razón 298 : 299, que era antes la admitida como valor de la relación de los ejes de la tierra, cabe decir que quedó descartada desde que en 1858 se publicó en la Memoria sobre la triangulación de las Islas Británicas un estudio de la figura de la tierra, en el cual se demostraba que esa razón debía reemplazarse por otra menor, á saber: por 293 : 294. Pero todavía, como se verá en el presente libro, debe reducirse un poco, mientras que el valor que para la misma razón de ejes se deducía de las observaciones del péndulo, que venía á ser de 288 : 289, aumentó hasta coincidir con el inferido actualmente de las mediciones de arcos de meridiano, esto es, con unos 292 : 293.

De este modo la lamentable laguna que por mucho tiempo se creyó que existía entre lo que arrojan las mediciones meridianas efectivas y lo que, según el teorema de Clairaut, revelaban las variaciones de la gravedad realmente observadas en la superficie de la tierra, ha desaparecido ya, gracias á la perseverancia con que el general Walker ha extendido los trabajos geodésicos en la India y al celo é inteligencia con que le secundaba su Estado Mayor.

A. R. CLARKE.

FE DE ERRATAS

(Contadas desde abajo las líneas con signo —)

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
69	— 5	P	P_1
94	6	(g^2)	g^2
129	— 7	$\frac{1}{3} \left(-\mu^2 \right)$	$\left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right)$
203	5 y 15	$\overline{\text{sen } \sigma}$	$\overline{\text{sen } \sigma'}$
373	1	$-\frac{1}{3} \epsilon$	$-\frac{1}{3} \epsilon$
477	— 2	δ'	δ

CAPÍTULO PRIMERO

OPERACIONES GEODÉSICAS

Ninguno de los muchos descubrimientos hechos en la edad moderna por los astrónomos, geógrafos y viajeros, estuvo en contradicción tan manifiesta con lo que de antiguo, siguiendo á célebres filósofos, se admitía y enseñaba, como que la tierra era esférica ó aproximadamente de esta forma. Sin embargo, tal principio parece hoy de fácil demostración, pues cualquiera puede convencerse de que la superficie del mar es convexa donde quiera con sólo mirar con un anteojo, desde lo alto de una roca cercana al mar, un barco en el horizonte ó cerca de él, volviéndolo á mirar momentos después desde el pie de esa roca. Si la tierra fuese rigurosamente esférica, bastaría observar con suma escrupulosidad la inclinación del anteojo ó ángulo de depresión del horizonte y unir á esto la medida de la altura de la cima, para obtener con cierta aproximación el radio de la esfera. Ha más de dos siglos se hizo este experimento en el monte Edgecumbe ⁽¹⁾ y es posible que en algún otro lugar se haya también efectuado. La depresión del horizonte del mar, desde la cumbre de Ben Nevis, en Escocia, es de $1^{\circ} 4' 48''$, valor promedio de ocho observaciones hechas con muchísimo cuidado con el antedicho objeto, y la altura de esa montaña es de 4 406 pies (1 343 metros). Pero la tangente trazada desde el ojo del observador al horizonte subtiende en el centro de la tierra un ángulo igual á

(1) En la costa Sudoeste de Inglaterra, en el condado de Devon, cerca de Plymouth.

la depresión; luego si este ángulo se designa por δ , y por x el radio de la tierra, la longitud de la tangente será $x \tan \delta$. Mas como por otra parte, trazadas desde un punto á una circunferencia una tangente y una secante, aquélla es media proporcional entre ésta y su segmento externo, el cuadrado de dicha longitud, llamando h la altura de la cima, equivaldrá á $h(2x+h)$, ó con bastante exactitud para el objeto, á $2xh$; por tanto $x = 2hcot^2\delta$. Esta fórmula, sin embargo, sería algo errónea en la práctica; porque el rayo luminoso no sigue desde el horizonte al ojo del observador una línea recta, sino curva. Mas estudiando detenidamente las leyes de la refracción terrestre, se ha visto que el error podía enmendarse multiplicando el antedicho valor de x por un cierto coeficiente, variable segun las circunstancias atmosféricas, pero que por término medio, según se desprende de gran número de observaciones, vale 1.6866; de modo, que la verdadera ecuación sería $x = 1.6866hcot^2\delta$. Sustituyendo aquí por δ y h aquellos valores, resulta el radio x de la tierra de 3 960 millas (6 373 kilómetros), lo que se aproxima bastante á la verdad. Con todo, por este método aun se podría en algunos casos incurrir en un error de más de 100 millas (161 kilómetros), si no se tuviere la precaución de hacer á la misma hora del día observaciones combinadas. En realidad, dicho método más bien sirve para dar el tamaño de la tierra en números redondos que para estudios de precisión.

Merecen mencionarse principalmente entre los primeros ensayos encaminados á determinar el radio de la tierra, el de Snellius en Holanda, quien fué el primero que recurrió á la triangulación para medir un grado de meridiano: la Memoria acerca de este trabajo se publicó en Leyden en 1617. Medio siglo transcurrió después hasta que Picard en Francia, contando con mejores medios, pues tuvo la feliz idea de poner en sus instrumentos de medir ángulos un anteojo con alambres cruzados en su foco, formó la red de triángulos que se extendía desde Malvoisine, cerca de París, á Amiens, comprendiendo un arco cuya amplitud, determinada con un sector de 10 pies de radio, resultó de $1^\circ 22' 55''$. Por longitud del grado dedujo 57 060 toesas (111 212 metros), valor bastante ajustado á la verdad, pero cuya

exactitud, como pasado algún tiempo pudo verse, provenía de una afortunada compensación de errores.

Fué la medición de Picard importantísima, en gran parte porque merced á ella pudo Sir Isaac Newton establecer ya definitivamente su doctrina de la gravitación universal en su libro *Principia*, que publicó en 1687. Pero en esta obra demostró Newton que la tierra debía ser un esferoide aplanado y que la gravedad debía resultar menor en el ecuador que en los polos. De esto último había encontrado en 1672 un indicio palpable, aunque extraño al pronto, el astrónomo francés Richer en la isla de Cayenne, en la América del Sur, á donde fué enviado para hacer observaciones astronómicas y determinar la longitud del péndulo de segundos. En efecto, habiendo visto que el reloj atrasaba más de dos minutos al día respecto de lo que en París andaba, lo arregló de modo que batiera segundos; lo tuvo en observación durante diez meses, y deducida la longitud del péndulo simple que con él iría acorde, halló, al regresar á París, que esa longitud era inferior en $1\frac{1}{4}$ de línea á la del péndulo simple de segundos en este otro punto: hecho importantísimo que no tardó en confirmarse donde quiera con las observaciones de Halley, Varin, Des Hayes y otros.

En cuanto á la otra proposición de Newton, la práctica pareció por de pronto contradecirla, porque durante los años de 1684 á 1718, J. y D. Cassini continuaron la triangulación de Picard por el Sur hasta Collioure y por el Norte hasta Dunkerque, midiendo una base en cada extremo; y de la porción Norte del arco, cuya amplitud era de $2^{\circ} 12'$, se deducía por longitud de un grado 56 960 toesas, mientras que la porción Sur, cuya extensión era de $6^{\circ} 19'$, arrojaba 57 097 toesas, de donde se desprendía, como consecuencia, que la tierra era un esferoide prolongado. Tal contradicción nacía, como lo demostraron después Cassini de Thuri y Lacaille, midiendo nuevamente el mismo arco (*Méridienne vérifiée en 1744*), de que los resultados precedentes, derivados de la base de Picard, eran erróneos; y en efecto, los grados crecen y no menguan yendo hacia el Norte. Pero al principio, apoyada en autoridad tan notoria como la de Cassini, la opinión de que la tierra era un esferoide prolongado, no aplanado, como Newton, Huygens

y otros sostenían, no dejó de tener muchos partidarios, y en esta cuestión de la figura de la tierra los sabios se dividieron en dos bandos. Por fin, la Academia de Ciencias de París, que conservaba la iniciativa en la ciencia geodésica, resolvió someter el asunto á una prueba decisiva, haciendo medir un arco en el ecuador y otro en el círculo polar.

Al efecto, en mayo de 1735 los académicos Godin, Bouguer y La Condamine se dirigieron al Perú, donde, auxiliados por dos oficiales españoles, D. Jorge Juan y D. Antonio de Ulloa, consiguieron, después de algunos años de impropia tarea, medir un arco de $3^{\circ} 7'$, cortado por el ecuador. La segunda Comisión, compuesta de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, el abate Outhier y Celsius, profesor de astronomía en Upsal, se encaminó á Laponia.

Aunque no es nuestro propósito escribir la historia de las operaciones geodésicas llevadas á cabo en diferentes tiempos y lugares, reseñaremos, con todo, algo minuciosamente la de Laponia, en parte por haber sido la primera que confirmó que la tierra es un esferoide aplanado, y en parte para que se vea en bosquejo cómo se verifican los estudios y trabajos de esta índole.

A principios de julio de 1736 desembarcó la Comisión dirigida por Maupertuis en Tornea, ciudad situada en la desembocadura del río del mismo nombre en el extremo Norte del golfo de Botnia. Explorado el río vieron que su curso era casi de Norte á Sur y que á ambos lados había elevadas montañas, circunstancias todas por las cuales resolvieron hacer allí las operaciones. Los puntos escogidos, juntamente con el curso del río, se indican en la figura que acompaña. Tomando la iglesia de la ciudad por extremo Sur del arco, eligieron los puntos en este orden: Niwa, *N*; Avasaxa, *A*; Horrilakero, *H*; Kakama, *K*; Cuitaperi, *C*; Pullingi, *P*; Kittis, *Q*; Niemi, *N*; el extremo Norte de la base *B* y el extremo Sur de la misma *B*. Dejando antes escuetas las cumbres que habían de servir de vértices, levantaron en ellas, como señales, conos huecos formados con gruesos árboles descortezados, para que quedaran blancos y de diez á doce leguas se vieran. Tuvieron la precaución de trazar marcas en las rocas ó clavar estacas en el suelo para que, indicando con exactitud los

centros de las estaciones, pudieran hallarse de nuevo si por acaso se alteraban ó destruían las señales. En la obra de Outhier,

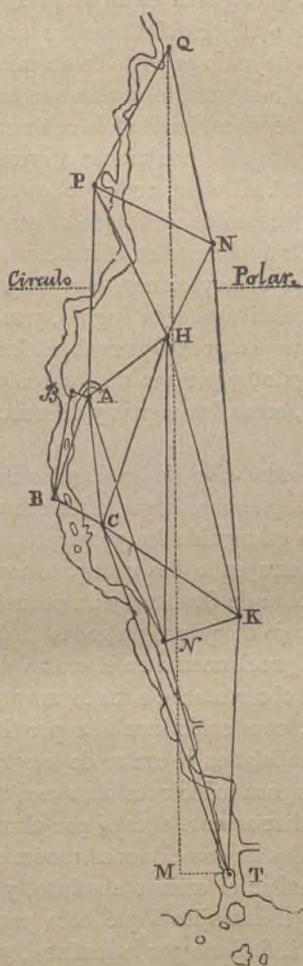


Fig. 1.^o

titulada *Journal d'un Voyage au Nord en 1736-37*, se describen detenidamente dichas estaciones. En verdad, la situación de ellas en la red de triángulos, donde constituían los vértices de un hep-

tágono, en medio del cual venía á caer la línea de la base, era muy apropiada al caso, y la Comisión miró con complacencia el trazado que ofrecían, que, á estar en su mano colocar las montañas, no hubiera resultado mejor. Midieron los ángulos con un cuadrante de dos pies de radio provisto de un micrómetro. Respecto de la precisión del instrumento consta que habiéndolo comprobado gran número de veces, haciéndole recorrer el horizonte, encontraron siempre que daba con mucha aproximación la suma de ángulos igual á 360° . Al observar los de los triángulos cuidaban de colocar el instrumento de modo que su centro correspondiera al de la estación. Cada observador corría con todos los ángulos y anotaba sus propias observaciones; mas después se tomaban los promedios de las relativas á cada ángulo, y sólo estos promedios se consignaban como lecturas. Observaban siempre los tres ángulos de cada triángulo, y por vía de comprobación otros varios ángulos auxiliares, como las sumas y diferencias de los propios de cada estación.

Terminada la observación de los ángulos al cabo de sesenta y tres días, el 9 de septiembre llegaron los comisionados á Kittis, donde comenzaron en seguida los preparativos para los trabajos astronómicos, construyendo dos observatorios. Pusieron en uno de ellos un reloj, obra de Graham, y un pequeño instrumento de pasos con un anteojo de quince pulgadas de longitud: este instrumento quedaba precisamente en el centro de la estación geodésica. En el otro observatorio, situado muy próximo, pusieron un sector zenital, construido también por Graham; pero como este sector no se hallaba en el centro de la estación, tomaron las medidas necesarias para reducir las observaciones al punto expresado. Arreglaban diariamente el reloj por alturas correspondientes de sol. Una de las observaciones astronómicas que debían hacer consistía en hallar el azimut absoluto, y para ello observaban con el reloj y el anteojo á qué hora pasaba el sol por el vertical de Niemi al Sudeste por la mañana, y por el vertical de Pullingi al Sudoeste por la tarde. Observaron durante ocho días, desde el 30 de septiembre al 8 de octubre. El cálculo que después habían de efectuar requería resolver un triángulo esférico, cuyos vértices eran el zenit, el polo y el lugar del sol, conociendo la co-

latitud ó distancia del zenit al polo, la distancia del sol á éste, y el ángulo horario de dicho astro; es decir, dos lados y el ángulo comprendido; datos de los cuales podía deducirse el ángulo en el zenit, que era el azimut del sol que se pedía, á la hora marcada á que se hizo la observación.

Consistía el sector zenital en un anteojo de latón, de nueve pies de longitud, cuyo eje estaba dirigido según el radio de un arco de $5^{\circ} 30'$, dividido en partes de $7' 30''$. El limbo dividido y el anteojo formaban una sola pieza, y todo ello estaba sostenido por dos espigones cilindricos que permitían oscilar el anteojo, como un péndulo, en el plano del meridiano y en torno de su propio centro. Uno de estos espigones, terminado por un pequeñísimo muñón que se apoyaba precisamente sobre el centro del limbo dividido, era el eje de suspensión de la plomada que llevaba el instrumento. El limbo al girar, resbalaba sobre un arco, fijo debajo de él, donde había un tornillo micrométrico contra el cual quedaba oprimido el limbo por la tensión de un hilo. Ese tornillo, que comunicaba al limbo y al anteojo un pausado movimiento en el plano del meridiano, servía para subdividir el espacio de $7' 30''$. No se empleaba este instrumento para hallar las distancias zenitales absolutas, sino sólo las diferencias de estas distancias. Las observaciones de δ Draconis, que pasaba cerca del zenit, principiaron en Kittis el 4 de octubre y concluyeron el 10. La Comisión partió de este lugar el 23, y habiendo llegado á Tornea el 28, comenzó las observaciones de δ Draconis el 1.º de noviembre, terminando el 5. En ambas estaciones hicieron las observaciones de la estrella con luz natural, sin iluminar artificialmente los alambres del anteojo. La amplitud del arco de meridiano entre Kittis y Tornea, dada por la diferencia de distancias zenitales corregida de aberración, precisión y nutación, resultó igual á $57' 26''-93$.

Faltaba todavía medir la base, lo cual de propósito dejaron para el invierno. Eligieron los extremos de ella de modo que resultase sobre el río Tornea, que, estando congelado, presentaba superficie muy adecuada para la medición. Habíanse llevado consigo de Francia una toesa tipo, conocida después por la *toesa del Norte*, la cual, junto con la que se había llevado la otra Comi-

sión al Perú para el arco ecuatorial, se ajustó en París á la verdadera longitud, á la temperatura de 13° Reaumur; y comparando con dicha toesa tipo, construyeron allí, en un cuarto puesto á la misma temperatura de 13°, cinco toesas de madera, terminada cada una por un clavo de hierro que limaban hasta conseguir la longitud exacta. Habiendo fijado después dos grandes clavos en las paredes del cuarto, á una distancia un poco menor que cinco toesas, colocaron entre ambos, en línea horizontal y en contacto sucesivo, aquellas cinco reglas sostenidas por caballetes, limando tales clavos hasta que las cinco reglas llenaran exactamente el espacio entre ellos; y así obtenida del uno al otro una longitud invariable y conocida, construyeron luego para la medición de la base, ajustándolas á este patrón, ocho reglas de pino, cada una de cinco toesas de largo (unos 9.7 metros), con clavos en los extremos para su contacto sucesivo. Hicieron muchos experimentos para averiguar la dilatación que las reglas experimentaban con los cambios de temperatura; mas sacaron, por consecuencia, que la dilatación era insignificante.

Comenzaron la medición de la base el mismo día que empezaba el invierno, el 21 de diciembre, día muy señalado, como advierte Maupertuis, para dar principio á semejante empresa. Por entonces en aquellas regiones apenas asoma el sol sobre el horizonte hacia la hora del medio día; pero el prolongado crepúsculo, la blancura de la nieve y los meteoros que de continuo resplandecen en el cielo, proporcionaban bastante luz para trabajar cada día de cuatro á cinco horas. Dividida la Comisión en dos secciones, tomó cada una cuatro reglas, y entre ambas hicieron dos mediciones de la base independientes. En esto invirtieron siete días, midiendo en cada uno las dos secciones igual número de toesas. Terminadas las dos mediciones, la diferencia entre ellas fué de cuatro pulgadas en una distancia de 8.9 millas. No consta de qué modo sostenían y nivelaban las reglas, pero es probable que no hicieran más que dejarlas sobre el hielo.

Hecho cuanto acaba de decirse, era ya fácil averiguar la longitud del arco terrestre. Calculando los triángulos como rectilíneos, dedujeron la distancia entre los observatorios astronómicos de Kittis y Tornea, y la del último al meridiano de aquél, sacando

después de ambas la distancia entre los paralelos de las dos estaciones. Hicieron además la comprobación por medio de ángulos auxiliares. Por fin, aceptaron, como distancia entre los paralelos, la de 55 023.5 toesas, de la cual, teniendo en cuenta la amplitud á que según la observación correspondía, dedujeron la longitud de un grado á la latitud del círculo polar.

La latitud absoluta de Tornea, inferida de observaciones de la estrella Polar verificadas con dos cuadrantes distintos, aunque sin aspirar á suma precisión, era de $65^{\circ} 50' 50''$.

Como el valor del grado obtenido excedía en mucho al de París, ya no podía caber duda de que la tierra era un esferoide aplanado y no prolongado. No obstante, tanta era la diferencia entre los dos grados, que la Comisión resolvió someter todas las operaciones al más riguroso examen. Pero no debía existir error en la base, de la cual se habian tomado dos medidas separadas que estaban acordes, ni se concebía tampoco en los ángulos de los triángulos, puesto que cada uno de ellos habia sido observado repetidas veces por varias personas. Propusieronse, pues, averiguar de nuevo la amplitud astronómica, eligiendo otra estrella, y observar otra vez el azimut absoluto de Tornea.

Habia indicado el artífice del sector zenital, Graham, que el arco del limbo no era exactamente de $5^{\circ} 30'$, sino inferior á esto en $3''.75$, y en su consecuencia decidieron comprobarlo por si propios en Tornea durante el invierno. Al efecto, colocando horizontal el sector, fijaron en el hielo dos señales que, con el centro del sector, determinaban un triángulo rectángulo, cuyos lados, muy escrupulosamente medidos, eran tales, que el ángulo agudo de ese triángulo, que tenía por vértice dicho centro, era de $5^{\circ} 29' 50''.0$. Mas el ángulo que la observación con el instrumento revelaba (conviene advertir que en la obra de Maupertuis hay en esto una errata) era de $5^{\circ} 29' 52''.7$, cuya diferencia respecto de aquel otro número acusaba con bastante aproximación la de $3''.75$ indicada por Graham. Midieron luego con el micrómetro todos los espacios de $15'$ abarcados por cada dos partes consecutivas de $7' 30''$ en que estaba dividido el limbo, y compararon también los dos grados que comprendían respectivamente la amplitud primera y la que hallaban por medio de la estrella α

Draconis, que pasaba sólo á un cuarto de grado al Sur de Tornea. Hicieron en este punto las observaciones el 17, 18 y 19 de marzo, y en Kittis el 4, 5 y 6 de abril, resultando por amplitud $57^{\circ} 30'' \cdot 42$.

Para hallar el azimut de Tornea observaron el 24 de mayo, á hora dada, el ángulo horizontal entre el sol en su ocaso y la señal de Niwa; y á la mañana siguiente (en esa época del año, entre la puesta y la salida del sol, en aquellas regiones, sólo median unas cuatro horas) observaron también, á hora dada, el ángulo entre el sol naciente y la señal de Kakama. De aquí, por un cálculo fácil, dedujeron los azimutes de las dos estaciones. El resultado difería en unos $34''$ del azimut calculado por las observaciones hechas en Kittis.

Pero esta diferencia de azimutes no podía producir una alteración apreciable en la longitud calculada del arco, y de los $3'' \cdot 49$ en que discrepaban los dos valores de la amplitud, $1''$ provenía de la diferencia de los dos grados del sector usados respectivamente con α y δ Draconis. Luego de todo ello se sacaba por conclusión que la longitud del grado del meridiano que corta el círculo polar es de $57\ 437 \cdot 9$ toesas ($111\ 948 \cdot 6$ metros).

Mas á este propósito hay que añadir que, no obstante la gran aproximación que las operaciones antedichas parecían indicar, pudo notarse mucho después que la medición terrestre y la determinación astronómica no concordaban bien, pues ó en el arco había de más 200 toesas ó en la amplitud unos doce segundos de menos; y que, con objeto de aclarar este punto, salió de Estocolmo en 1801 una expedición dirigida por Svanberg, la cual durante aquel año y los dos siguientes midió otra vez y prolongó aquel arco. Publicóse la reseña de esta medida en la obra titulada *Exposition des Opérations faites en Lapponie*, etc., por J. Svanberg, Estocolmo, 1805. Svanberg consiguió verificar la medición terrestre de Maupertuis, volviendo á ocupar, aunque no con entera exactitud, las estaciones elegidas por éste; pero como tomó por puntos extremos dos nuevas estaciones, hasta las cuales no llegaba el arco primitivo, no comprobó la amplitud obtenida por Maupertuis. La longitud del grado deducida por Svanberg era cerca de 220 toesas (429 metros) inferior á la hallada por aquél.

El valle donde se encuentra Quito está circuido por la doble cadena de montañas en que se divide allí la gran cordillera de los Andes, la cual recorre en esta forma, casi en dirección Sur, hasta Cuenca, unos tres grados, y éste fué el lugar escogido por Godín, Bouguer y La Condamine para sus operaciones. Esas montañas, que por su excesiva altura acarreaban fatigas y trabajos sin cuento, ofrecían en cambio grandes ventajas para elegir las estaciones trigonométricas, pues podían tomarse alternativamente á uno y otro lado del valle, de modo que hubiera cierta uniformidad en las longitudes de los lados de los triángulos y presentaran éstos acertada proporción, lo cual en otros casos ha sido difícil de lograr.

A cada extremo terminaba la cadena de triángulos en una base directamente medida. La septentrional, cerca de Quito, tenía una longitud de 7-6 millas: la altitud del extremo Norte sobre el nivel del mar era de 7 850 pies. Mas esta elevación era la menor á que se operaba: siete vértices estaban á alturas mayores de 14 000 pies. El grabado adjunto muestra los triángulos septentrionales del arco, extendidos por el Sur hasta Cotopaxi. La base meridional superaba en altitud á la del Norte en unos 1 000 piés, y tenía 6-4 millas de longitud; pero en medirla invirtieron sólo diez días, en agosto de 1739, mientras que en medir la del Norte, la cual caía en terreno escabroso, habían empleado veinticinco, en octubre de 1736. Las reglas usadas para la medición de la base tenían 20 pies de longitud, y sus extremos estaban guarnecidos de láminas de cobre para el contacto. Hicieron por duplicado cada medición, dividiéndose la Comisión en dos secciones que medían la línea en sentidos opuestos. Dejaban siempre las reglas horizontales, enlazando un nivel con otro por medio de una plomada, cuyo hilo era un cabello ó hebra fina de aloe. Todos los días, durante la medición, comparaban las reglas con una toesa marcada sobre una regla de hierro que en una tienda tenían bien resguardada. Este patrón de la operación, si así cabe llamarlo, estaba sacado de la toesa tipo que se llevaron de París, la cual, con el nombre de la *toesa del Perú*, fué después el marco legal en Francia. A ella se refiere La Condamine en las siguientes líneas: «Nos llevamos en 1735 una regla de hierro bruñido

de 17 líneas de anchura por cuatro líneas y media de grueso. El señor Godín, ayudado por un hábil artifice, procuró ajustar con el mayor esmero la longitud de esta regla á la de la toesa *marco*, que desde 1668 estaba al pie de la escalera del Palacio de Justicia (gran Châtelet) de Paris. Mas previendo que este antiguo patrón, bastante groseramente construido, y expuesto por añadidura á algún golpe, á las injurias del tiempo, á la herrumbre, al contacto de todas las medidas que para comprobarlas se presentarían, y por último, á la malicia de algún mal intencionado, no

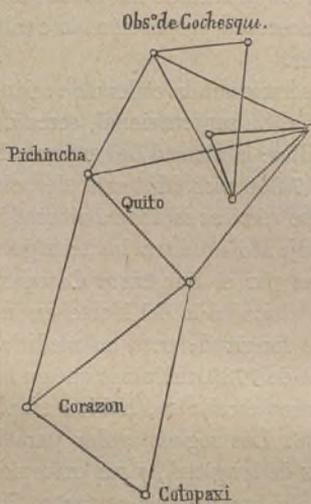


Fig. 2.

sería muy á propósito para comprobar, andando el tiempo, la toesa que se destinaba á la medida de la tierra ni para constituir el modelo á que las demás debieran ajustarse, pareciome de todo punto necesario que al llevarnos una toesa bien comprobada dejáramos en Paris otra de igual materia y forma, á la cual pudiera recurrirse si algún percance ocurria á la nuestra en tan largo viaje. En su consecuencia, obtuve autorización para mandar hacer otra idéntica, la cual fué construída por el mismo artifice con las mismas precauciones que la primera. En una de nuestras juntas comparáronse ambas y dejóse depositada en la Academia una

de ellas, la cual fué después llevada á Laponia por el Sr. Maupertuis y se empleó en todas las operaciones por la Comisión de académicos mandada al círculo polar.» Las dos bases del Perú se midieron á una temperatura media, muy próximamente de 13° Reaumur. «Era cabalmente la que el termómetro del Sr. Reaumur marcaba en París en 1735, cuando nuestra toesa de hierro fué ajustada con la del Palacio por el señor Godin.» (*Mesure des trois premiers Degrés du Méridien par M. de la Condamine, Paris, 1751, págs. 75 y 85*). La diferencia entre las dos mediciones de cada base, según dice el mismo autor, no excedió de tres pulgadas.

Observaron los ángulos de la triangulación con cuadrantes de dos á tres pies de radio, mas eran instrumentos muy defectuosos, y en averiguar sus errores de división y excentricidad se gastó mucho tiempo. Las observaciones, sin embargo, se hicieron con bastante precisión. La Condamine dedujo la serie de correcciones para cada grado del instrumento que manejaba, y sólo en cuatro de los treinta y tres triángulos observados por él llegó á 10" el error, en la suma de los tres ángulos, que provenía puramente de la observación, es decir, el que quedaba, ya descontados los de instrumento. Observaban siempre, y cada uno más de una persona, los tres ángulos de cada triángulo.

Hallaron la dirección azimutal de la cadena de triángulos por medio de unas veinte observaciones de sol hechas en varias estaciones situadas á lo largo de ella.

La determinación de las latitudes les costó algunos años. Los sectores de que se valían, de ocho y doce pies de radio, eran de poca precisión, y en su manejo había que tener en cuenta tantas correcciones, que esto equivalía á construirlos de nuevo. Desechando muchas observaciones, dedujeron por fin el ángulo por las simultáneas de ϵ Orionis, hechas por La Condamine en Tariqui (extremo meridional) y por Bouguer en Cotchesqui, desde el 29 de noviembre de 1742 hasta el 15 de enero de 1743. Esta coordinación simultánea de observaciones servía para eliminar el error que pudiese ocurrir por cualquier cambio ignorado de posición de la estrella.

No manejaban el sector zenital del mismo modo que Mauper-

tuis, pues éste se limitaba á indicar la dirección del antejo, ó sea la de la visual á la estrella, en una y otra estación, respecto del hilo de la plomada, sin apreciar ni deducir la distancia zenital absoluta; mientras que los observadores del Perú invertían en cada estación el sector zenital, aumentando su azimut en 180° , con lo cual, aunque no hacían la lectura del zenit, que quedaba incógnito, medían la doble distancia zenital de la estrella. Deduciéndola, como ya se ha dicho, de ϵ Orionis, hallaron que la amplitud del arco era de $3^\circ 7' 1''.0$. Hubieran podido comprobarla por observaciones de α Aquarii y θ Aquilæ, mas no recurrieron á ellas.

De esta amplitud y de la longitud del arco, que era de 176 945 toesas (al nivel del punto más bajo, y tomando el promedio de las dos longitudes calculadas por Bouguer y La Condamine), se deducía que la longitud del grado era de 56 753 toesas (110 613.7 metros).

Publicose la historia de la expedición (1) en la obra titulada *La figure de la Terre*, por Bouguer, París, 1749. Los cálculos relativos al arco fueron después revisados (*Mon. Corresp.* xxvi, página 52) por Von Zach, quien halló que la amplitud era de $3^\circ 7' 3''.79$ y el arco terrestre de 176 874 toesas, ajustado al nivel del mar. Delambre revisó también la reducción de las observaciones hechas con el sector zenital y obtuvo por latitud de Tarqui $3^\circ 4' 31''.9$ S, y de Cotchesqui $0^\circ 2' 31''.22$ N., siendo, por consecuencia, la amplitud entre ambos puntos $3^\circ 7' 3''.12$.

Habiendo expuesto Cassini de Thuri á la Real Sociedad de Londres las ventajas que se reportarían del enlace geodésico de París y Greenwich, fué propuesto en 1783 el general Roy por dicha Sociedad y nombrado de Real orden para dirigir las operaciones en Inglaterra, mientras que el conde Cassini, Mechain y Legendre las dirigían en Francia. Los pormenores de esta triangulación, relativos á los trabajos ingleses, constan todos en el *Account*

(1) Refiérese también en las *Observaciones astronómicas y físicas hechas de orden de S. M. en los reinos del Perú por D. Jorge Juan y D. Antonio de Ulloa, de las cuales se deduce la figura y magnitud de la Tierra.....*: Madrid, 1773.

of the Trigonometrical Survey of England and Wales, tomo I; y los relativos á los estudios franceses, en la obra titulada *Exposé des Opérations faites en France en 1787 pour la jonction des Observatoires de Paris et Greenwich*, por Cassini, Mechain y Legendre.

Mucho adelantó entonces la geodesia en precisión, pues en Francia se comenzó á usar por primera vez el círculo de repetición, y en Inglaterra se empleó el teodolito de Ramsden de tres pies de diámetro para medir los ángulos de los triángulos y determinar el azimut por observaciones de la estrella polar. Este instrumento, que aun se conserva y usa, consta, en la parte inferior, de tornillos de nivel, por los cuales se apoya; de un largo eje vertical de acero y de unos microscopios micrométricos (primero hubo tres), por cuyo medio se lee el círculo graduado: todo ello unido con firmeza. Siguen por arriba un círculo horizontal, un eje vertical hueco ajustado sobre el antedicho eje de acero y unos brazos para llevar el anteojo: todo ello también sólidamente enlazado. El círculo, cuyo diámetro es de treinta y seis pulgadas, está dividido por rayitas en espacios de 15', los cuales, por medio de los microscopios, se subdividen en unidades de segundos. El eje vertical mide cerca de dos pies de altura sobre el círculo. El anteojo, cuya distancia focal es de treinta y seis pulgadas, gira sobre un eje transversal de dos pies de longitud, terminado por espigones cilíndricos, por medio de los cuales se apoya, quedando el anteojo en condiciones para moverse en un plano vertical.

A este instrumento se agregó muy pronto otro casi idéntico por su tamaño y construcción, que, como aquél, todavía se usa. Ambos han sido empleados en la mayoría de las principales estaciones geodésicas de Inglaterra; y á pesar del uso que de ellos se ha hecho durante tantos años, los dos se hallan ahora, prescindiendo de ligerísimas composiciones, en tan buen estado como al salir del taller de Ramsden, pues no ha ocurrido el menor accidente en ninguno de ellos, cosa digna de admirarse, habiéndolos subido á tantas cumbres.

La medida de una base en Hounslow Heath fué el primer paso para el estudio trigonométrico de la Gran Bretaña. Eligióse ese terreno por la extraordinaria igualdad de su superficie y el gran

espacio que en él podía recorrerse sin estorbo para la medición.

Como en las operaciones semejantes verificadas en otros países se habían empleado generalmente reglas de madera, en Inglaterra, siguiendo la misma práctica, se hicieron tres reglas de la mejor madera, de veinte pies de longitud cada una, terminadas por guarniciones de cobre para ponerlas con más exactitud en contacto al efectuar la medición. Mas habiéndose visto claramente en el curso de la operación (parece que las reglas no estaban dadas de aceite ó barniz) que las variaciones de humedad del ambiente influían bastante en las reglas, y que la medición, por consecuencia, no podía reputarse exacta, decidiose sustituirlas con tubos de vidrio de veinte pies de longitud, tubos cuya dilatación se había determinado por experimentos previos. La temperatura de cada uno durante la medición estaba dada por dos termómetros que en contacto de cada uno había.

La longitud media obtenida con estos tubos de vidrio resultó de 27 404.0 pies, reducida al nivel del mar y á la temperatura de 62° Fahrenheit (16°.67 C.).

A propósito de la primera reducción, ya otra vez mentada, conviene advertir lo que significa. Cuando se dice que la tierra es una esfera ó esferoide, no se quiere indicar con ello que tal forma rigurosamente es la que ofrece por fuera, sino que la superficie del mar, idealmente prolongada á través de los continentes, sería esa superficie regular de revolución. Mas practicándose las operaciones geodésicas forzosamente sobre un suelo más ó menos irregular y elevado, hay que deducir de las observaciones y medidas directas las que se tendrían en los puntos correspondientes sobre el nivel del mar. Por ejemplo, si S es una de las estaciones trigonométricas de que se trata y s su proyección sobre la indicada superficie, esto es, el pie de la normal á ella $Ss = h$, este punto s es al que ha de ajustarse el cálculo trigonométrico.

En tal supuesto, la línea de una base debería seguir el nivel del mar ab ; pero como en la práctica hay que trazar siempre una línea algo desigual AB , se la descompone, según indica el grabado, en pequeñas porciones horizontales de una longitud igual á la de la regla con que se mide, y luego se reducen éstas á ese nivel. Al efecto, si l es dicha longitud y r el radio de la tierra,

la proyección de l sobre ab , efectuada por rectas dirigidas al centro de la tierra, será evidentemente

$$\frac{lr}{r+h} = l - l \frac{h}{r};$$

mas si i es el número de veces que la regla se ha colocado sobre la base, será ésta $L = il$; luego sumando todas las reducciones la

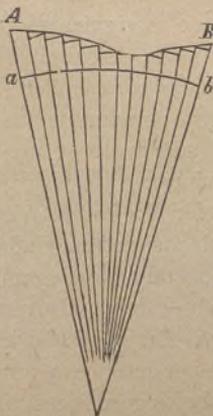


Fig. 3.

nivel del mar que de un extremo á otro de la base correspondan hacer, se tendrá

$$f = L - \frac{L}{r} \cdot \frac{\Sigma(h)}{i};$$

por donde se ve que, para la reducción de la base, se requiere que la altura de cada porción de ella sea conocida, á fin de contar con la altura media de la línea.

Mas volviendo á la base medida en Hounslow, pensose, recelando todavia que en la longitud hallada con los tubos de vidrio hubiese error, en medir otra vez la línea con una cadena de acero, con cuyo objeto construyó Ramsden dos de esta clase de cien pies de longitud. Con staba cada una de cuarenta eslabones de media pulgada en cuadro de sección, y terminaba por dos

asas de latón, que con mucho esmero se habían dejado planas en la parte inferior y tenían una raya transversal cada una para precisar la longitud de la cadena. Usábase una de éstas para medir y guardábase la otra como patrón.

A cada cien pies recorridos se fijaba un poste que llevaba arriba una reglita graduada y corrediza que, por medio de un tornillo de pausado movimiento, se hacía adelantar ó retroceder en la dirección de la base: en esta reglita se señalaba el fin de una medida y el principio de la siguiente. La cadena, estirada por un peso de veintiocho libras, descansaba sobre cinco cajas sucesivas de madera, sostenidas por caballetes, y las asas de la cadena quedaban sobre las reglitas graduadas que en los postes había. El resultado final excedió solamente en unas dos pulgadas al obtenido con los tubos de vidrio.

El círculo de repetición que comenzó á usarse en Francia para medir no sólo los ángulos terrestres, sino también los de observaciones astronómicas, estaba basado en el principio establecido por Tobías Mayer, profesor de la Universidad de Gottinga, en los *Commentarii Societatis Regiæ Scientiarum*, Gotting, 1752. Este instrumento, único que por entonces y mucho después emplearon los franceses en los trabajos geodésicos, alcanzó pronto muchísima fama y fué adoptado en casi todas las naciones del continente de Europa para observaciones de precisión; sin embargo, nunca llegó á usarse en Inglaterra. Tenía por objeto el principio citado eliminar los errores de división, que en verdad eran grandes en aquella época; pero á medida que ha ido adelantando el arte de dividir los círculos, ha menguado la importancia del círculo de repetición, mayormente al ver que el instrumento en la práctica suele dar un error constante, que á punto fijo no se sabe todavía á qué deba atribuirse.

Descansa el círculo de repetición sobre un tripode que lleva los tornillos usuales de nivel. Dicho tripode sustenta una gruesa columna giratoria, en cuya base hay un circulito azimutal; pero éste no es parte principal del instrumento. La columna tiene arriba, atravesado en una horcadura, un eje corto horizontal cruzado por otro, que es el del círculo de repetición situado á un extremo y equilibrado en el otro por un contrapeso. Haciendo

girar el círculo en torno de ese eje horizontal, se le da cualquier inclinación, desde la posición horizontal á la vertical, y combinando esto con la rotación azimutal al rededor de la columna, se lleva el círculo al plano que se quiere. El círculo, dividido sólo por una cara, está provisto de dos anteojos: el superior arrastra consigo cuatro nonius para leer los ángulos, el inferior carece de nonius y está montado fuera del centro; cada anteojo tiene su eje óptico paralelo al plano del círculo y gira al rededor de la prolongación del eje del círculo, pudiendo ambos amordazarse á éste con independencia uno de otro.

El manejo del instrumento es como sigue, designando por D é I dos objetos terrestres; el primero á la derecha y el segundo á la izquierda, y suponiendo que, como se practica en Francia, al revés de lo que se hace en Inglaterra, las divisiones del círculo se lean de izquierda á derecha mirando al centro: 1.º, puesto y amordazado el anteojo superior en el cero, se hace girar el círculo en su propio plano, hasta que, apuntado á D el anteojo, su hilo central divida por mitad el objeto: amordázase entonces el círculo; 2.º, dejando fijos el círculo y el anteojo superior, hácese girar el inferior hasta apuntar á I, amordazándole entonces al círculo: esta es la primera parte de la operación; 3.º, sin tocar los anteojos déjase suelto el círculo, hácese girar en su propio plano hasta que el anteojo inferior quede dirigido á D, y en seguida vuélvese á sujetar el círculo: el anteojo superior se habrá corrido desde D, de derecha á izquierda, una cantidad igual al ángulo que ha de medirse; 4.º, suéltase el anteojo superior, y dirigiéndole á I, se le amordaza. Si ahora se leen los nonius, claro es que darán el duplo del ángulo entre D é I. Repítase la misma serie de operaciones cuantas veces se juzgue necesario, empezando siempre desde el punto donde el anteojo superior quedó al concluir la doble medición precedente. Por de contado á las mordazas acompañan los ordinarios tornillos tangentes para el movimiento pausado.

No hay que leer el círculo más que al principio y fin de la serie de repeticiones, pero ha de llevarse en cuenta el número de circunferencias completas recorridas. Divídese el ángulo resultante, que acaso sea de miles de grados, por el número de repe-

ticiones, con lo cual el error de lectura y graduación se divide también por el mismo número, de manera que si éste es grande el error en la práctica debe quedar eliminado.

Sin embargo, hay otras causas de error en la operación. No es el aparato una armazón tan rígida como supone la teoría, y efectuándose giros en torno de varios ejes, puede nacer de aquí algún error constante. Además, es principio general de observación que el repetir una misma varias veces, precisamente en las mismas circunstancias, es sencillamente gastar el tiempo, pues parece que el ojo toma en tales condiciones determinado hábito al mirar el objeto que observa y comete un error que llega á ser constante con el tiempo. Así se ha notado en algunos círculos de repetición que el ángulo medido propendía á aumentar ó disminuir según iba aumentando el número de observaciones.

Habiendo advertido W. Struve en su Memoria acerca del grande arco medido en Rusia, que si al observar un ángulo se hacía primero la repetición como de ordinario, y después se invertía el sentido de la rotación del círculo, diferían ambos resultados de una manera sistemática, pensose entonces combinar, al medir los ángulos, las rotaciones en los dos sentidos; pero como ni aun así se tenía certidumbre de eliminar el error, abandonose el método de repetición.

En marzo de 1791 se leyó y aprobó en la Asamblea Constituyente de Francia el proyecto presentado por algunos distinguidos miembros de la Academia de Ciencias, entre los cuales se contaban Laplace y Legendre, para que en lo sucesivo se adoptara como patrón nacional de longitud, con el nombre de metro, la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Para ello debía medirse el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona, cuya amplitud era de $9^{\circ} 40'$, de los cuales 6° caían al Norte de la latitud media de 45° . Al efecto, se comprobarían con nuevas observaciones los ángulos de los triángulos que antes se hubiesen trazado en Francia, se extendería la triangulación hasta Barcelona, se medirían las bases convenientes, se averiguaria la diferencia de latitud entre Dunkerque y este último punto, y se harían las demás observaciones astronómicas que se creyesen necesarias. A la vez se determinaría la longitud

del péndulo de segundos á la latitud de 45° y se resolverían otros varios problemas.

Designado Delambre para que entendiese en la porción Norte del arco y Mechain en la del Sur, dieron comienzo á los trabajos en junio de 1792, contando cada uno con dos círculos de repetición, contruidos por Lenoir. Con estos círculos se observaron los ángulos de todos los triángulos, desde Dunkerque hasta Barcelona. En Watten (estación próxima á Dunkerque), París, Bourges, Carcassonne y Montjuí se averiguaron los azimutes absolutos, todos ellos por observaciones de sol; hallando por la tarde y por la mañana, á horas dadas, el ángulo entre el sol y las estaciones trigonométricas. Las observaciones fueron muchas; en París llegaron á 396, y en Bourges (que está 120 millas al Sur) se hicieron 180; con todo, resultó entre ambos puntos una diferencia en los azimutes de $39''.4$, con harta extrañeza de Delambre, que no acertaba con la causa. Mas no hizo en ello mucho hincapié, considerando que aun siendo algo considerable el error en el azimut, apenas podía influir en la distancia que entre los paralelos de Dunkerque y Barcelona había deducido.

Halláronse las latitudes de Dunkerque, París, Evaux, Carcassonne y Montjuí, tomando distancias zenitales, principalmente de las estrellas α y β Ursæ Minoris.

Para deducir la longitud del arco terrestre midiéronse dos bases: una en Melun, cerca de París, y otra en Carcassonne, cada una de unas siete millas y un cuarto de milla; empleándose para ello cuatro reglas que se componían de dos de distinto metal, puesta una encima de otra, formando un termómetro metálico. Cada doble regla descansaba sobre un fuerte madero. La regla inferior era de platino y tenía de largo dos toesas, de ancho media pulgada y de grueso una línea. La superior era de cobre y seis pulgadas más corta que la inferior; atornillada á ésta sólo por un extremo, en el resto podía dilatarse y contraerse con entera libertad; en su otro extremo había una escala dividida, y al lado, sobre la de platino, un nonius, precisándose así la variación relativa de longitud de ambas reglas, de la cual se infería la temperatura, dato necesario para deducir la longitud absoluta de la regla de platino. En el extremo libre de ésta, adonde

no alcanzaba la regla de cobre, alojábase en un rebajo una lengüeta corrediza, con la cual podía prolongarse algún tanto la longitud de dicha regla de platino, y medirse, por las divisiones trazadas en la lengüeta y por otro nonius que habia en la regla, el intervalo entre ésta y la que se pusiera delante. Los dos nonius mencionados se leían con microscopios.

Cada doble regla, con su madero, estaba sostenida durante la medición por dos tripodes de hierro, provistos de tornillos de nivel, y la inclinación de la regla se hallaba por medio de otra que pendía, como el hilo de una plomada, del centro de un arco dividido, de 10° de amplitud y dos pies de radio, situado hacia la parte inferior de la regla pendiente, la cual estaba cruzada por un nivel de burbuja: el instrumento se aplicaba dos veces sucesivas, invirtiendo su posición. Todo ello, reglas, aparejos y nivel, fué construido por Borda.

Comparadas por éste con la regla núm. 1 las otras tres y la antedicha con la toesa del Perú por medio de otras dos toesas, repetidas veces cotejadas con este patrón, todas las longitudes en aquel arco de Francia se expresaron con relación á dicha toesa del Perú, á la temperatura de 13° Reanmur = $16^\circ.25$ Cent. Posteriormente á Delambre no volvió á usarse la regla núm. 1 para medir bases, conservándose en el Instituto de Longitudes (*Bureau de Longitudes*) como marco comparativo.

La Comisión oficialmente nombrada para estudiar los trabajos de Delambre y Mechain y deducir la longitud del metro, después de haber verificado todos los cálculos, halló la longitud del cuadrante de meridiano, combinando el nuevo arco de Francia con el del Perú. Fijó en 551 584.7 la longitud del primero, comprendido entre los paralelos de Dunkerque y Montjuí, con una amplitud de $9^\circ 40' 25''$, siendo la latitud del punto medio del arco $46^\circ 11' 58''$; y tomó por longitud del segundo arco las cifras de Bouguer, corregidas según lo que en su revisión obtenía Delambre, es decir, por longitud reducida al nivel del mar 176 940-67, esto es, 176 873, con una amplitud de $3^\circ 7' 1''$, siendo la latitud del punto medio $1^\circ 31' 0''$.

No estará demás repetir someramente dicho cálculo en atención á su importancia histórica. La latitud de un lugar en la su-

perficie de la tierra, suponiendo ésta un elipsoide de revolución, es el ángulo que la normal á la superficie en este punto forma con el plano del ecuador. Sean $2A$ y $2B$ la suma y diferencia de los semiejes del meridiano elíptico, cuya figura supondremos se aproxima tanto á una circunferencia que el cuadrado de la fracción $B:A$ es insignificante. Fácil es demostrar que en tal supuesto el radio de curvatura, á la latitud φ , es ⁽¹⁾

$$R = A - 3B \cos 2\varphi;$$

de donde, multiplicando por $d\varphi$ é integrando desde 0 hasta $\frac{1}{2}\pi$, se deduce que la longitud del cuadrante es $Q = \frac{1}{2}\pi A$. Mas ha de hallarse antes A . Para ello, averiguados los radios de curvatura en dos puntos cuyas latitudes sean φ y φ' , tendremos dos ecuaciones como la de arriba, y, eliminando B entre ellas, resultará— designando por 2Σ , 2Δ la suma y diferencia de esos radios, y por σ , δ la suma y diferencia de las latitudes—

$$A = \Sigma + \Delta \cot \sigma \cot \delta;$$

y para determinar tales radios no habrá más que dividir las longitudes de arcos cortos, cuyos puntos medios sean los extremos de aquéllos, por sus amplitudes respectivas. Esto sentado, de los números que antes se dieron se infiere que los radios de cur-

(1) Como se verá más adelante (párrafo 1, del capítulo V), el radio de curvatura, á la latitud φ , del extremo del arco s , en el meridiano elíptico cuyos semiejes ecuatorial y polar son a , c , está dado por la fórmula

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

siendo

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{(a+c)(a-c)}{a^2},$$

ó bien, puesto que $a+c=2A$, $a-c=2B$

$$e^2 = 4 \frac{AB}{(A+B)^2} = 4 \frac{B}{A} \left(1 + \frac{B}{A}\right)^{-2},$$

valor que se reduce á $4 \frac{B}{A}$ cuando el cuadrado de $\frac{B}{A}$ es insignificante. Sustituyendo este valor en la expresión del radio de curvatura, limitando el desarrollo á la primera potencia de $\frac{B}{A}$ y prescindiendo de $\frac{B^2}{A}$ como cantidad pequeña con relacion á A , resulta la fórmula del texto.

vatura en los puntos medios de los dos arcos de Francia y del Perú son respectivamente de 3 266 978 y 3 251 285 toesas: luego $\Sigma = 3\ 259\ 131$ y $\Delta = 7\ 846$. Ahora bien:

log 7846 . . .	3.89465
log cot ($\sigma = 47^{\circ}43'$) . . .	9.95875
log cot ($\delta = 44^{\circ}41'$) . . .	0.00480
log 7214 . . .	<u>3.85820</u>

Por tanto, $A = 3\ 266\ 345$; valor que multiplicado por $\frac{1}{2}\pi$ y dividido por 10 000 000 da la longitud del metro = .5130766 con relación á la toesa del Perú, y como ésta se divide en 6 pies, el pie en 12 pulgadas y la pulgada en 12 líneas, constando, por consiguiente, dicha toesa de 864^l, también puede decirse que el metro abraza 443^l.298.

Mas no fué esto precisamente lo deducido por la Comisión, porque el cálculo que hemos hecho es sólo aproximado: el valor obtenido fué 443^l.296, y ésta es la longitud legal del metro.

La historia detallada de lo que precede se halla en los tomos titulados *Base du système métrique décimale*, por Delambre.

La siguiente tabla contiene los resultados finales de los diversos trozos del arco de Francia.

ESTACIONES	LATITUDES	DISTANCIA DE LOS PARALELOS	
		Toesas.	Metros.
Dunkerque.	51 2 8.85	124944.8	243522.0
Pantheon (París).	48 50 49.37	152293.1	296824.8
Evvaux.	46 10 42.54	168846.7	329088.4
Carcassonne	43 12 54.30	104555.9	203783.3
Barcelona.	41 22 47.90	943.1	1838.1
Montjuí.	41 21 44.96		

Este arco fué prolongado después por Biot y Arago á través de España hasta terminar en las islas de Ibiza y Formentera, y de este trabajo se da cuenta en la obra titulada *Recueil d'observations géodésiques astronomiques et physiques...*, por Biot y Arago, París, 1821. Hiciéronse 3990 observaciones de α y β Urs. Min.,

durante los años 1807 y 1808, para determinar la latitud de Formentera, y habiéndose suscitado dudas acerca del valor de las observaciones verificadas para dicho objeto con el círculo de repetición, por haberse hecho todas á un mismo lado del zenit, Biot volvió á hallar todavía la latitud en 1825, tomando estrellas al Norte y Sur del zenit. En 880 observaciones la latitud deducida de estrellas al Norte difirió en 7'' de la hallada por estrellas al Sur; mas en otras 180 observaciones la diferencia llegó á 12''. En suma, fijose la latitud de Formentera en 38° 39' 53''·17. La distancia entre los paralelos de Montjuí y Formentera, calculada de nuevo por Bessel (*Astron. Nachricht*. Número 438, pág. 114), es de 153 673·6 toesas (299 515·5 metros).

Al publicarse en 1838 la obra titulada *Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung*....., por F. W. Bessel, comenzó una nueva época en la ciencia geodésica, pues el libro era un modelo de precisión, lo mismo que la operación á que se refería. Era ésta la medición hecha por el mismo Bessel y el coronel, después general, Baeyer, de una cadena oblicua de triángulos entre Trunz y Memel, destinada á enlazar la vasta red de triángulos de Francia, Hanover, Dinamarca, Prusia, Baviera y otras regiones al Oeste, con la de Rusia al Este. En el adjunto dibujo se indican los triángulos de la nueva red, omitiendo la base y su enlace con el lado Galtgarben-Königsberg. Por el lado Trunz-Wildenhof se unía esta cadena con la triangulación prusiana, y por el lado Memel-Lepaizi con la de Rusia. La red trazada por Bessel y Baeyer, á la par que enlazaba las triangulaciones mencionadas y permitía comparar las extensiones lineales y los azimutes de ambas, constituía la medida de un grado, oblicuo, es verdad, pero de suma importancia por esta misma razón; pues determinadas la latitud y la dirección del meridiano en los extremos del arco, se deducían los dos semiejes del esferoide terrestre. En efecto, como dicho arco equivalía á uno de meridiano, combinado con otro perpendicular á éste, se conocía la curvatura de la superficie en las secciones principales, y se podía, por tanto, inferir los valores de los semiejes.

Midiose la base, cuya extensión era sólo de 935 toesas, por medio de cuatro reglas, parecidas á las de Borda. Cada una tenía

de largo dos toesas, y se componía de una regla de hierro y otra de zinc, superpuesta y un poco más corta, constituyendo ambas un termómetro metálico. El pequeño intervalo que entre sus extremos libres mediaba y que servía de termómetro, se precisaba con una cuña de vidrio dividida, apreciándose del mismo modo el otro intervalo que, al medir la base, quedaba entre dos reglas

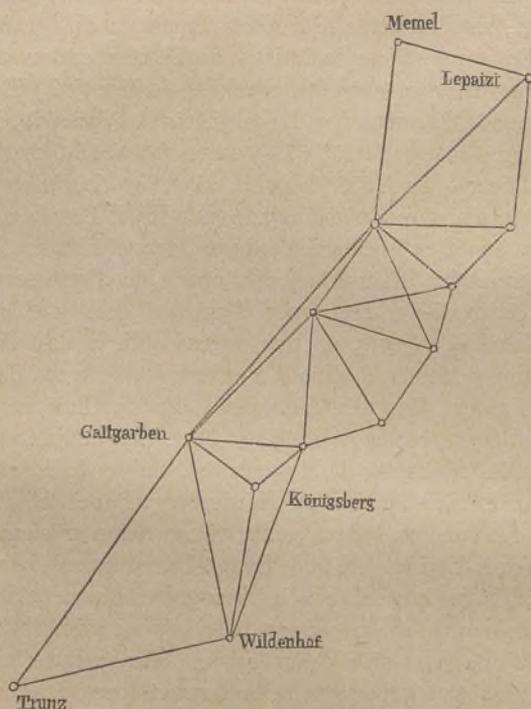


Fig. 4.

consecutivas. Las longitudes relativas de las dobles reglas y los valores de sus grados termométricos se obtuvieron por su mutua comparación, poniéndolas primero todas á una temperatura propia de verano; después, todas también, á otra de invierno, y, por último, de dos en dos, á temperaturas sucesivas que diferían en 20° Reaumur (25° Cent.). Las longitudes absolutas se

dedujeron comparando una de las reglas con la *toesa de Bessel*—ajustada por su constructor Fortin sobre la toesa del Perú.

Para señalar los extremos de la base se hacía lo siguiente. Colocado sobre cimiento de ladrillo un zócalo de granito, en un agujero vertical, abierto en éste, se fijaba un cilindro de latón cuyo eje, indicado por una cruz fina, grabada en la base superior del cilindro, correspondía al extremo de la base geodésica. Sobre ese zócalo construía-se después de ladrillo un pilar de cierta altura, coronado por una piedra, donde se fijaba otro cilindro vertical cuyo eje estaba á continuación del eje del primero. El teodolito se colocaba sobre esa piedra, poniendo su centro en dicho eje con tanta precisión, que ni siquiera se cometía un error del diámetro de un cabello. En todas las estaciones andábase siempre con muchísimo cuidado al señalar el centro de la estación y al poner el instrumento sobre la marca correspondiente.

Las señales de observación eran de dos clases. Consistían unas en un hemisferio de cobre plateado y bruñido, cuyo eje, vertical, pasaba por la marca que indicaba el centro de la estación. Los rayos del sol, reflejándose sobre ese hemisferio, ofrecían un punto brillante, y éste era el que se observaba, si bien aplicando cierta corrección, porque tal punto variaba con la hora del día. Las otras señales consistían en una tabla vertical, de dos pies en cuadro, pintada de blanco, con una raya negra por en medio, montada dicha tabla de manera que pudiese girar al rededor de un eje vertical que pasase por mitad de la raya negra y por la marca del centro de la estación.

Para medir los ángulos horizontales empleábanse dos teodolitos, uno de 15 pulgadas de diámetro y otro de 12, verificándose la observación del siguiente modo: colocado en su sitio y puesto á nivel el teodolito, y sujeto el círculo horizontal graduado, hacíase girar el anteojo hasta apuntar al primer objeto y se leían los nonius que llevaba el círculo horizontal superior, arrastrado por el anteojo, repitiéndose sucesivamente lo mismo con cada uno de los otros puntos que habian de observarse. Terminada esta primera serie y efectuada en seguida otra igual en sentido inverso, se tomaba el promedio de las dos lecturas obtenidas para cada punto. Después, corriendo el cero del círculo dividido

unos 15° , hacíase del mismo modo la tercera y cuarta serie; luego, corriéndole otros 15° , la quinta y sexta, y así prosiguiendo.

El teodolito menor era de repetición, y por este principio se efectuaron unas pocas observaciones. Con el teodolito mayor, el error medio que en una observación aislada de un objeto podía cometerse, era de $\pm 1''.3$.

Hacíanse las observaciones astronómicas relativas á la hora y latitud y parte de las de azimut, con un instrumento de pasos, de $1\frac{1}{4}$ pulgada de abertura y 21 pulgadas de distancia focal, levantando para la determinación simultánea de la hora y azimut señales en el meridiano ó cerca de él. En Trunz se fijó una M

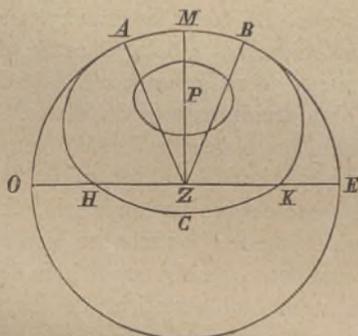


Fig. 5.

precisamente al Norte, otra A $2^{\circ}20'$ al Oeste y otra B á igual distancia al Este. Como este ángulo era un poco menor que el máximo azimut de la Polar, el plano vertical trazado por cualquiera de las dos últimas cortaba el curso de la estrella en dos puntos, y por consecuencia, dirigido el instrumento de pasos de modo que su hilo central dividiera por mitad una de estas señales, se observaban dos pasos consecutivos de la estrella Polar, el uno un poco antes del máximo azimut, y el otro un poco después. Y combinadas estas observaciones con las de pasos de estrellas próximas al zenit, cuyo curso es rápido, se determinaban á la vez la hora y el azimut.

Hallábase también este último observando con el teodolito ma-

por el ángulo entre una señal terrestre y la Polar, y anotando la hora de observación. Cada vez que se medía este ángulo, se requerían las siguientes operaciones: leer el nivel transversal del teodolito en posiciones inversas, observar la señal, observar la estrella, y repetir en orden opuesto las observaciones de la estrella, la señal, el nivel. Invertiase luego el anteojo, antes de medir el siguiente ángulo, á fin de cambiar el signo del error de colimación.

En el dibujo, figura 5, $M Z O$ es el meridiano, $O Z E$ el primer vertical, $K C H$ el círculo diurno de una estrella que, por tener declinación menor que la latitud del lugar de observación, cruza dos veces el primer vertical, primero por el Este del zenit y despues por el Oeste. Esto sentado, si con un instrumento de pasos dispuesto de manera que su línea de colimación describa el plano $O Z E$, se observan los pasos de dicha estrella por el Este y el Oeste y se anotan las horas á que ocurren; la mitad del intervalo, convertido en grados, da el ángulo $Z P K$, de donde, conociendo $P K$, distancia polar de la estrella, se deduce fácilmente la colatitud buscada $P Z$; pero si se sabe la hora precisa de un solo paso, basta con ello para semejante determinación. Tal método ⁽¹⁾ se empleó para hallar las latitudes de Trunz, Memel y Königsberg: las observaciones duraron diez días en Trunz y trece en Memel. Por un cálculo muy meditado, sirviéndose de fórmulas de suma elegancia, redujéronse luego todas estas observaciones astronómicas, sin que, por defecto de cálculo, pudiera originarse ningún error residuo.

Hízose á su vez la reducción de los ángulos horizontales y el cálculo de la triangulación, aplicando el método de los mínimos cuadrados, procedimiento de mucho trabajo, á la resolución de 31 ecuaciones con 31 incógnitas. A este propósito conviene advertir que si, al efectuar una triangulación, no se observaran más que los ángulos puramente necesarios para fijar todos los puntos, no habría dificultad en el cálculo, pues sólo se obtendría una

(1) La exposición del procedimiento de Bessel, con todos sus pormenores prácticos, puede verse en el *Método para determinar la latitud en el primer vertical*, por D. Miguel Merino, Madrid, 1877.

combinación de valores. Pero siempre se observan más ángulos de los estrictamente necesarios, y de estos ángulos excedentes nace la complicación. Hasta Gauss y Bessel, cada calculador discernía por su propio criterio cómo se emplearían y aprovecharían mejor los ángulos excedentes; mas el principio de los mínimos cuadrados mostró que á cada posición ó ángulo observado podía aplicarse un sistema de correcciones que armonizara todo el trabajo, poniendo por condición que la suma de los cuadrados de ellas fuese un mínimo absoluto. En la obra de Bessel fué donde por primera vez se dió extensa aplicación y desarrollo á este principio.

En 1823 fué designado como sucesor del coronel Lambton, para dirigir el gran estudio trigonométrico de la India, el coronel Everest. El primero había medido un arco de meridiano de 10 grados de amplitud, desde Punnoe, cerca del cabo de Comorin, hasta Damargida, que está á la latitud de $18^{\circ} 3'$, y el segundo debía continuar este arco hacia el Norte. Los instrumentos de que se habia valido el coronel Lambton eran dos cadenas de acero, un sector zenital de Ramsden, un teodolito de 18 pulgadas de diámetro y otro de 36. Sufrió este último, en 1808, un percance de consideración; pues al subirle á la cima de una pagoda, rompióse una cuerda y el instrumento dió contra el muro; mas los mismos artifices que lo habían construido lo compusieron bastante bien y con él midió el coronel Everest los ángulos, por cierto con suma habilidad. La medida del arco de Damargida á Kalianpur está descrita en la obra del coronel Everest, titulada *An Account of the Measurement of an Arc of the Meridian between the parallels of $18^{\circ} 3'$ and $24^{\circ} 7'$...* (Londres, 1830). Para deducir la longitud del arco midiéronse tres bases, una á cada extremo y otra hacia la parte media, en Takal-Khera, cuya estación astronómica venia á dividir el arco muy próximamente por mitad, pues las amplitudes de las dos porciones septentrional y meridional eran:

$$\alpha' = 3^{\circ} 1' 19'' \cdot 91,$$

$$\alpha = 3^{\circ} 2' 35'' \cdot 86.$$

Mas al comparar éstas con las correspondientes extensiones lineales resultaban los radios de curvatura ρ' y ρ del meridiano

en los puntos medios de las dos secciones con los siguientes valores en pies:

$$\rho' = 20\ 803\ 380, \quad \text{á la latitud } \varphi' = 22^{\circ} 36' 32'',$$

$$\rho = 20\ 813\ 200, \quad \text{á la latitud } \varphi = 19^{\circ} 34' 34''.$$

Presentábase, pues, la anomalía que en otros puntos se había reparado, á saber: que la curvatura del meridiano parecía ir en aumento hacia el Norte. Mas sospechó Everest si esto provendría de que la latitud del punto medio del arco por él medido estuviese mal determinada, á consecuencia del desvío que en la plomada se produjera por la atracción de la masa de montañas ó meseta llamada Mahadeo P'har, que se halla al Norte de Takal-Khera. Es dicha meseta casi un rectángulo, cuyo largo $AB = 120$ millas, y cuyo ancho $BD = 60$ millas: Takal-Khera cae en-

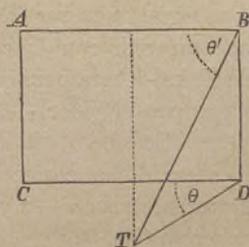


Fig. 6.

frente del punto medio de CD , á una distancia de 20 millas; la altura de la meseta, por término medio, es de unos 1 600 pies, ó sean 0.3 millas. Para ver si su sospecha era fundada, Everest halló la fórmula general de la atracción de un paralelepipedo sobre un punto exterior. Hé aquí un cálculo aproximado de esto mismo, empleando una sencilla fórmula incluida en otra del capítulo XII de esta obra. El desvío en T , dependiente de los ángulos θ , θ' , que en la figura 6 se indican, está dado por la expresión (1)

(1) Dando la altura h en kilómetros, la fórmula sería

$$\delta = 7''.73 \ g h \log_e \left(\tan \frac{1}{2} \theta' \cot \frac{1}{2} \theta \right).$$

$$\delta = 12'' \cdot 44 gh \log_e (\tan \frac{1}{2} \theta' \cot \frac{1}{2} \theta),$$

designando g la razón de la densidad de las montañas á la densidad media de la tierra y h la altura de la meseta en millas. Como en dicho caso $g = 0.6$ y $h = 0.3$, sustituyendo estos números y reemplazando los logaritmos neperianos por los vulgares, se tiene

$$\delta = 10'' \cdot 31 \log (\tan \frac{1}{2} \theta' \cot \frac{1}{2} \theta).$$

Pero $\theta' = 53^\circ 8'$, $\theta = 18^\circ 26'$,

$$\log \tan 26^\circ 34' \dots 9.6990$$

$$\log \cot 9^\circ 13' \dots 0.7898$$

$$\log \tan \frac{1}{2} \theta' \cot \frac{1}{2} \theta \dots 0.4888$$

y este último número multiplicado por $10'' \cdot 3$ da $5'' \cdot 0$. Luego éste sería el desvío de la vertical ó error de la latitud.

No discrepaba mucho, segun pudo ver en seguida Everest, el error que así resultaba, comparado con la corrección que debía hacerse en la latitud de Takal-Khera para que los dos trozos del arco estuvieran conformes con el valor $\frac{1}{100}$, entonces admitido por elipticidad de la tierra. En efecto, limitándonos aquí á un cálculo aproximado, si x era dicha corrección, las amplitudes respectivas de los dos trozos serían $\alpha' - x$ y $\alpha + x$, y por tanto los radios de curvatura serían (1)

$$\rho' \left(1 + \frac{x}{\alpha'} \right); \quad \rho \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right);$$

mas éstos, en función de los elementos elípticos, valen respecti-

(1) Los radios de los arcos l' , l , con las amplitudes α' , α , son

$$\rho' = \frac{l'}{\alpha'}, \quad \rho = \frac{l}{\alpha},$$

mas con las amplitudes $\alpha' - x$, $\alpha + x$, serán

$$\frac{l'}{\alpha' - x} = \frac{l'}{\alpha'} \left(1 - \frac{x}{\alpha'} \right)^{-1}, \quad \frac{l}{\alpha + x} = \frac{l}{\alpha} \left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-1},$$

y los segundos miembros, limitando el desarrollo del paréntesis á la primera potencia de la fracción $\frac{x}{\alpha'}$ ó $\frac{x}{\alpha}$, dan las expresiones arriba consignadas.

vamente, designando por A y B la semisuma y semidiferencia de los semiejes de la tierra, y siendo $A=600 B$, es decir, B pequeña con relación á A,

$$A - 3 B \cos 2 \varphi', \quad A - 3 B \cos 2 \varphi;$$

y de estas ecuaciones, eliminando A, resulta con bastante aproximación (1)

$$\frac{x}{a} = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} + \frac{\sin (\varphi' - \varphi) \sin (\varphi' + \varphi)}{200}.$$

El cálculo, pues, sería:

$\rho - \rho' \dots 3.99300,$	$\sin (\varphi' - \varphi) \dots 8.72359,$
$\rho + \rho' \dots 7.61927,$	$\sin (\varphi' + \varphi) \dots 9.82691,$
$\cdot 000236 \dots 6.37373,$	$\cdot 005 \dots 7.69897,$
$\cdot 000178 \dots \dots \dots$	$\dots 6.24947,$
$\cdot 000414 = x : a.$	

Y puesto que $a = 10956''$, se tendría $x = 4''.5$; resultado muy conforme con el error que, según se había calculado, debía producir la atracción de las montañas de Mahadeo.

Con motivo del percance que había sufrido el teodolito mayor, hubo de fijarse Everest en la necesidad de medir cada ángulo con partes distintas del círculo graduado, corriendo el cero sistemáticamente trechos iguales: práctica adoptada después con escrupulosidad en toda operación geodésica. Mas no habiendo quedado satisfecho del arco que había medido entre Damargida y Kalianpur, porque el error en la suma de los ángulos de los triángulos con frecuencia ascendía á $4''$ y $5''$, quiso medirlo de nuevo con mejores medios; y pocos años después estaba enteramente compuesto el antiguo teodolito, habiase construido otro nuevo del mismo tamaño, al sector zenital de Ramsden reemplazaban dos círculos verticales de 36 pulgadas de diámetro, y

(1) Porque pueden suponerse iguales α, α' ; suprimirse los productos de $\frac{\cos 2\varphi}{200}$ y $\frac{\cos 2\varphi'}{200}$ (inferiores á $\frac{1}{200}$) por $\frac{x}{a}$ que es valor pequeño; y finalmente, en los productos de esas mismas cantidades por ρ, ρ' , reemplazarse estos últimos factores por $\frac{\rho + \rho'}{2}$.

para medir las bases se contaba con el aparato de compensación de Colby. Provisto, pues, de todos estos instrumentos de suma precisión, revisó por completo dicho arco y lo extendió hacia el Norte. Habíalo llevado hasta Banog, á la latitud de $30^{\circ} 29'$; mas habiendo reparado que en este punto era grande el influjo del Himalaya tanto al determinar la latitud como el azimut, fijó en Kaliana, á la latitud de $29^{\circ} 30' 49''$, el término Norte del arco. Las bases medidas en esta segunda operación fueron tres: una en Damargida, otra en Kalianpur y otra en Dehra Dun, cerca del extremo Norte; y comparadas las longitudes de las bases extremas halladas por medición directa, con las mismas deducidas por cálculo de la intermedia de Kalianpur, resultó:

	DEHRA DUN	DAMARGIDA
Longitud medida, en pies	39 183.87.	41 578.54.
» calculada »	39 183.27.	41 578.18.

Mucho se precisó también la determinación del azimut con aumentar Everest el número de observaciones de las estrellas circumpolares y combinarlas de una manera sistemática. Júzguese por estos resultados de sus propias observaciones en 1836 para hallar el azimut de la «lámpara de mira» en Kalianpur.

Según 130 observaciones de δ Urs. Min. ...	179° 59' 53'' .120
115 » » 4 Urs. Min. Bode ...	53.565
128 » » 51 Cephei ...	53.420

Para los pormenores relativos á este arco puede consultarse la obra titulada *An Account of the Measurement of two Sections of the Meridional Arc of India...*, por el teniente coronel Everest, M. R. S., etc. (1847). Los trabajos posteriores concernientes al estudio trigonométrico de la India se describen en los tomos que está publicando el general Walker, C. B., M. R. S. El tomo I refiere la medición de diez bases; en el tomo II se reduce la triangulación por el método de los mínimos cuadrados. En la página 137 de este tomo, se compara el azimut observado en Kalianpur con los hallados en sesenta y tres estaciones diferentes de la India, exceptuando las que están bajo el influjo de las montañas del Himalaya y del Sulimani. En treinta y cuatro estacio-

nes la discrepancia de azimut es inferior á $3''$, y la mayor en las otras es de $10''$; infiriéndose en suma, de todas ellas, que el azimut observado en Kalianpur debe corregirse en $1''\cdot 10$. En el di-

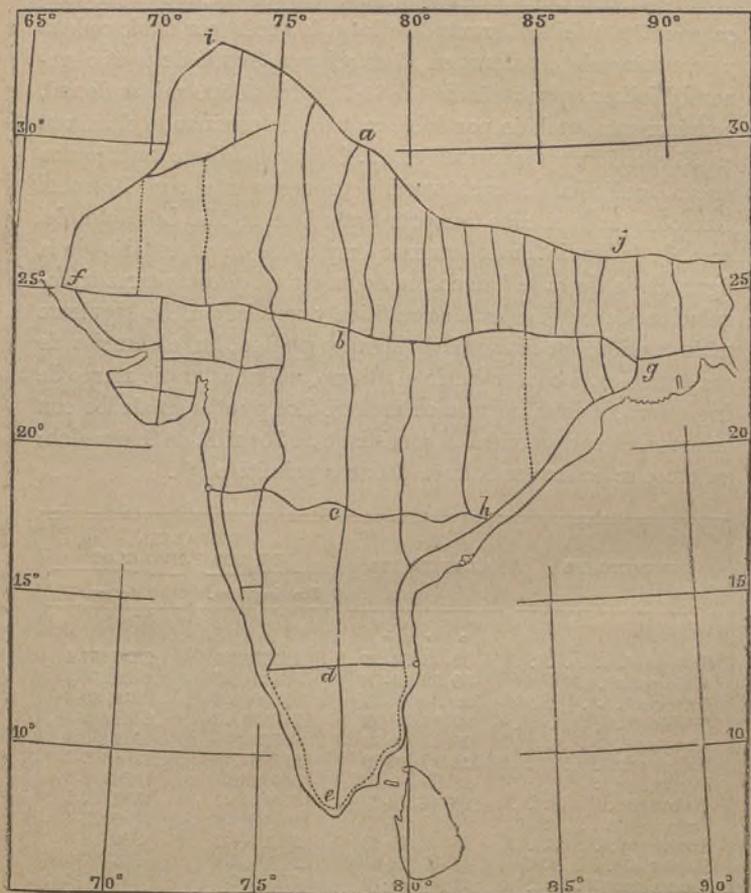


Fig. 7.

bajo adjunto *c* indica el lugar de esta estación, y meras líneas señalan las varias cadenas que forman la triangulación principal de la India. Algunas son cadenas sencillas de triángulos; mas otras

son dobles cadenas ó cintas de cuadriláteros y polígonos. Las letras *a b c d e f g h i j* indican donde se hallan las bases medidas.

Sir A. Waugh, que sucedió á Sir George Everest, extendió (1843-61), con tanta precisión como su antecesor, la red geodésica unas 7900 millas, trazándola las más veces por doble cadena y determinando el azimut en 97 estaciones. Siguió después el general Walker, quien añadió (1861-73) unas 5500 millas de red, comúnmente también por doble cadena; determinando el azimut en 55 estaciones y la latitud en 89. Comprendía este trabajo una nueva medición del arco trazado primeramente por el coronel Lambton desde el cabo Comorin hasta Damargida. Los datos del arco de la India anteriormente empleados en el estudio de la figura de la tierra se han corregido en virtud de estas otras triangulaciones encaminadas á su revisión y ampliación. La siguiente tabla contiene las latitudes de algunos puntos, las distancias de sus paralelos, á contar desde el último, referidas al pie marco de Inglaterra, y estas mismas en metros. Los puntos señalados con un asterisco corresponden al meridiano de 75° al E. de Greenwich; los otros se hallan en la línea del arco primitivo (*).

ESTACIONES	LATITUDES			DISTANCIA DE LOS PARALELOS	
				Pies ingleses.	Metros.
Shahpur*	32	1	34.06	8653153.1	2637457.4
Khimnana*	30	22	11.78	8051100.7	2453953.5
Kaliana	29	30	48.32	7739965.6	2359120.3
Garinda*	27	55	30.02	7161851.5	2182912.8
Khamor*	25	45	10.93	6372728.8	1942390.3
Kalianpur	24	7	10.79	5778810.6	1761365.7
Fikri*	22	1	3.77	5014982.1	1528552.8
Walwari*	20	44	21.27	4551346.4	1387237.9
Damargida	18	3	14.82	3575896.1	1089923.4
Darur (5)	16	9	46.13	2889541.2	880724.3
Honur (5)	14	55	21.51	2438531.8	743257.8
Bangalore (3)	12	59	51.79	1740522.1	530506.4
Patchapaliam (3)	10	59	41.06	1013112.4	308793.9
Kudankulam (6)	8	12	10.44

(*) El general Walker ha tenido la bondad de proporcionarnos estos resultados aun no impresos. Aunque todavía no son definitivos, porque el

Cada una de las cinco últimas estaciones estaba dentro de un grupo de varias de cuyas latitudes se dedujo la de aquélla. Hacíase esto con objeto de eliminar cualquier atracción puramente local. Por ejemplo, si A, B, C, D, E formaban un grupo de cinco estaciones, siendo C la del centro, de la latitud observada en A, B, D, E se deducía por el enlace de triángulos la de C , para la cual resultaban de este modo cinco latitudes astronómicas, cuyo promedio se tomaba como latitud definitiva, pues así determinada debía quedar exenta, en gran parte por lo menos, del influjo de la atracción local. En la tabla está indicado el número de estaciones de cada grupo por el guarismo que acompaña al nombre del lugar.

La longitud de los lados de los triángulos era por término medio de unas treinta millas, ascendiendo pocas veces á sesenta; y con objeto de que no resultaran cortos los lados de los triángulos en las llanuras, Sir George Everest elevaba torres de ladrillo de una altura de 50 ó más pies, en los puntos elegidos por estaciones; pero despues se redujo esta altura á la par que la longitud de los lados de los triángulos. Variada de muchas maneras la construcción de las torres, vióse al fin que era lo mejor para su estabilidad no hacerlas macizas, sino huecas, teniendo en tal caso mucho cuidado de colocar el teodolito de modo que correspondiera á la marca central inferior de la estación.

A fin de conservar fielmente las estaciones principales de la triangulación, dejóse encomendada su custodia á las autoridades de los puntos donde se hallan; de vez en cuando se examinan esas estaciones, se da cuenta anualmente de su estado y se las repara si es menester. Las señales de observación empleadas

método de los mínimos cuadrados sólo se ha aplicado hasta ahora al espacio *jaifboh* que indica el dibujo, no es probable que ocurra notable alteración en las distancias puestas en la tabla. No hemos copiado todos los datos recibidos, correspondientes á 84 estaciones. Las distancias consignadas en la tabla se han calculado partiendo de las latitudes geodésicas dadas por el general Walker, y claro es que dependen, aunque muy poco, de los valores adoptados para los elementos elípticos de la tierra que intervienen en la expresión de δS que se halla en el cap. X del presente libro

en la India en los trabajos antedichos fueron siempre luminosas—lámparas de Argand por la noche y heliotropos durante el día,—proporcionada la abertura de luz efectiva á la distancia del teodolito con que se observaba.

En la obra titulada *Account of the Observations and Calculations of the Principal Triangulation* (*),....., por el capitán A. R. Clarke, I. R., Londres, 1858, se describen las operaciones geodésicas comenzadas en Inglaterra por el general Roy, continuadas desde 1809 hasta 1846 por el coronel Colby, I. R., y terminadas bajo la dirección del general Sir H. James. Esta triangulación no se hizo, como la de la India, por cadenas, sino teniendo por el país una red general, desde Scilly hasta Shetland; siendo de notar que en esta obra la mayor parte de las observaciones, tanto terrestres como astronómicas, las verificaron oficiales y subalternos de Ingenieros Reales no comisionados (**). Extendida en 1862 la triangulación por el Norte de Francia hasta Bélgica, se halló por su medida que la distancia entre los paralelos de Greenwich y Dunkerque es de 161 407.5 pies ingleses (49 196.6 metros). Una triangulación bien enlazada abarca, por lo tanto, desde Formentera hasta Shetland, y de ella resultan los siguientes datos para el problema de la figura de la tierra, contando la distancia desde el primero de dichos dos puntos:

(*) Publicada por la *Ordnance Trigonometrical Survey* de la Gran Bretaña é Irlanda.

(**) Merece citarse principalmente entre ellos el sargento James Steel (que fué después maestro cuartel de Ingenieros Reales y capitán), natural de Wishaw, en el condado de Lanark. Habiéndose alistado como minero, adelantó tanto en matemáticas y astronomía, y adquirió tal habilidad como observador, que se le confiaron las partes más delicadas del estudio geodésico de Inglaterra, como la medida de la base en la llanura de Salisbury con el aparato de compensación, las operaciones de campo encaminadas á averiguar la densidad de la tierra en Arthur's Seat, etc.

ESTACIONES	LATITUDES	DISTANCIA DE LOS PARALELOS	
		Pies ingleses.	Metros.
		° / #	
Saxavord (*)	60 49 37.21	8086820.7	2464840.8
North Rona	59 7 15.19	7463029.3	2274710.9
Great Stirling	57 27 49.12	6857323.3	2090093.4
Kellie Law	56 14 53.60	6413221.7	1954732.4
Durham	54 46 6.20	5872637.9	1789964.0
Clifton	53 27 29.50	5394063.4	1644095.8
Arbury	52 13 26.59	4943837.6	1506868.2
Greenwich	51 28 38.30	4671198.3	1423768.5
Dunkerque (*)	51 2 8.41	4509790.8	1374571.9
Dunnose	50 37 6.54	4357480.7	1328148.2
Pantheon (*)	48 50 47.98	3710827.1	1131050.0
Carcassonne	43 12 54.30	1657287.9	505136.8
Barcelona	41 22 47.90	988701.9	301353.6
Montjuí	41 21 44.96	982671.0	299515.4
Formentera	38 39 53.17

El célebre astrónomo F. G. W. Struve, que tomó parte en la medición del grande arco ruso de 25° 20', la describe en una obra en dos tomos, titulada *Arc du Méridien de 25° 20', entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855..... ouvrage composé sur les différents matériaux et rédigé par F. G. W. Struve*; San Petersburgo, 1860. Constaba la cadena de 258 triángulos, sin contar los necesarios para enlazar las 10 bases: la latitud y dirección del meridiano se determinaron en trece estaciones. El arco se componía de siete trozos, como se indica á continuación:

PROVINCIAS	ENTRE LAS LATITUDES	MEDIDOS BAJO LA DIRECCIÓN DE	EN LOS AÑOS
	° / ° /		
Besarabia	45 20 y 48 45	El general Tenner.	1844-52
Podolia y Wolhynia	48 45 » 52 3	El general Tenner.	1835-40
Lithuania	52 3 » 56 30	El general Tenner.	1816-28
Provincias del Báltico	56 30 » 60 5	F. G. W. Struve.	1816-31
Finlandia	60 5 » 65 50	F. G. W. Struve.	1830-51
Laponia	65 50 » 68 54	Sr. Selander.	1845-52
Finmark	68 54 » 70 40	Sr. Hansteen.	1845-50

(*) Véanse respecto de las latitudes de estas estaciones las notas, página 282, de la obra titulada *Comparisons of the Standards of Length of*

La parte meridional del arco, en una extensión de 8°, desde el Duna hasta el Neister, caía en un país llano y pantanoso poblado de bosques inmensos y casi impenetrables, y ofrecía, por consecuencia, grandes obstáculos para los trabajos geodésicos; mas salvó las dificultades el general Tenner levantando muchos andamios, cuya altura era de 120 pies y aun de 146. La obra de Struve deben consultarla cuantos estudien con interés la geodesia.

Los resultados de este arco, expresada en pies ingleses y metros la distancia, á contar desde el último punto, se hallan en la siguiente tabla:

ESTACIONES	LATITUDES	DISTANCIA DE LOS PARALELOS	
		Pies ingleses.	Metros.
	o / //		
Fnglenaes.	70 40 11.23	9257921.1	2821789.0
Stuor-oivi.	68 40 58.40	8530517.9	2600078.5
Tornea.	65 49 44.57	7486789.9	2281953.1
Kilpi-maki.	62 38 5.25	6317905.7	1925680.4
Hogland.	60 5 9.84	5386135.4	1641679.3
Dorpat.	58 22 47.56	4762421.4	1451573.0
Jacobstadt.	56 30 4.97	4076412.3	1242479.3
Nemesch.	54 39 4.16	3400312.6	1036406.0
Belin.	52 2 42.16	2448745.2	746370.8
Kremenetz.	50 5 49.95	1737551.5	529600.9
Ssuprunkowzi.	48 45 3.04	1246762.2	380009.7
Wodolui.	47 1 24.98	616529.8	187916.6
Staro Negrassowka.	45 20 2.94

El arco medido en el Cabo de Buena Esperanza (*) por Sir Thomas Maclear, ofrece los siguientes datos:

England, France, Belgium, Prussia, Russia, etc., made at Southampton, por el capitán Clarke I. R.

(*) *Verification and Extension of Lacaille's Arc of Meridian at the Cape of Good Hope, por Sir Thomas Maclear. Londres, 1866.*

ESTACIONES	LATITUDES	DISTANCIA DE LOS PARALELOS	
		Pies ingleses.	Metros.
	o ' "		
Punta del Cabo.	34 21 6.26	1678375.7	511564.3
Zwart Kop.	34 13 32.13	1632533.3	497606.9
Real Observatorio.	33 56 3.20	1526386.8	465238.5
Heerenlogement Berg.	31 58 9.11	811507.7	247345.3
Extremo Norte.	29 44 17.66

La reseña de las triangulaciones ya terminadas ó en vías de terminarse en Dinamarca, España, Italia y otros países de Europa, puede verse en los informes anuales de la Asociación geodésica internacional, *Verhandlungen der permanenten Comission der Europäischen Gradmessung* (1).

En la determinación de la diferencia de longitudes por la telegrafía eléctrica se ha alcanzado en estos últimos años muchísima precisión, y este método se ha ido propagando por Europa, América y la India. El error probable de una observación, al averiguar de este modo la diferencia de longitudes, puede ser de unas $\pm 0^s.025$.

Los estudios hechos en la India han contribuido en gran manera al conocimiento de la figura de la tierra. Espérase dentro de poco la descripción del arco de paralelo que cruza Europa desde el Oeste de Irlanda hasta Orsk en Rusia. Otro, también de paralelo, en Argelia, fué terminado en 1869 por el comandante Sr. Perrier. En la segunda parte del *Mém. du Dép. Gén. de la Guerre* se describe la determinación de la amplitud astronómica de este arco. Constaba la cadena de 66 triángulos principales, y se halló el azimut y la latitud en las dos estaciones extremas y en la media, á saber: en Nemours, cerca de Marruecos; en Bone, en la frontera de Túnez, y en Argel, poco distante del punto medio de la cadena. Averiguadas por separado las diferencias de

(1) La descripción de los trabajos geodésicos verificados en España puede verse además en las *Memorias del Instituto geográfico y estadístico*.

longitud de Bone-Argel, Argel-Nemours, Bone-Nemours, por medio de la telegrafía eléctrica, se obtuvieron los siguientes datos:

ESTACIONES	NÚMERO DE DÍAS	POR OBSERVACIÓN DIRECTA		CORREGIDA LA ECUACIÓN PERSONAL		ERROR PROB.
		m.	s.	m.	s.	
Bone-Argel. . .	7	18	51.222	18	51.392	± 0.011
Argel-Nemours..	9	19	35.119	19	34.949	± 0.011
Bone-Nemours..	8	38	26.498	38	26.328	± 0.013

La suma de las dos primeras longitudes, que debiera ser igual á la tercera, da sólo una diferencia de 0^s.013: prueba satisfactoria de la exactitud de la operación.

Desde 1867 el círculo de repetición había sido reemplazado por el teodolito ó círculo azimutal, que también así se llama, y con un instrumento de esta clase, de sencillísima construcción, se terminó el trozo de la porción occidental de la cadena argelina. La extensión lineal del arco de paralelo, ajustado á la latitud de 36°, es como sigue:

Bone-Argel.	m. 425234.7
Argel-Nemours.	441139.8

Mas como estos números dependen de la figura atribuida á la tierra, no pueden emplearse sin modificación para resolver el problema de esta figura, y en virtud de los cálculos expuestos al final del capítulo XIII de esta obra, si se fija en 295 826.4 pies (90 167.1 metros) la longitud del grado de paralelo de 36°, se hallarán las siguientes diferencias que parecen acusar una atracción considerable al Oeste de Argel:

ESTACIONES	AMP. ASTRONÓMICA			AMP. GEODÉSICA			G—A
	o	l	"	o	l	"	
Bone-Argel. . .	4	42	50.79	4	42	57.87	+ 7.08
Argel-Nemours	4	53	44.20	4	53	32.89	— 11.31
Bone-Nemours.	9	36	34.99	9	36	30.76	— 4.23

Las estaciones trigonométricas de la cadena argelina se señalaron, salvo raras excepciones, con pilares de piedra de sólida construcción — por lo común cónicos y de una sola pieza — con un agujero vertical según el eje, que caía sobre la marca central de la estación. Las bases de Bone y Orán (este último cerca de Nemours) medían unos 10 kilómetros de longitud, y deducida una de ellas de la otra por medio de los 88 triángulos de enlace, sólo difería en unos 40 centímetros de la longitud medida.

El círculo azimutal ó teodolito, construido por el Sr. Brunner, de Paris, y empleado en 1879 en las estaciones del gran cuadrilátero, Mulhacén, Tetica, Filhaoussen, M'Sabiha (1), tenía de diámetro 42 centímetros y se leía con cuatro micrómetros. El anteojo medía 62 centímetros de distancia focal y 53 milímetros de abertura.

(1) Este cuadrilátero, como se refiere más adelante en el párrafo 14 del capítulo IX, sirvió para el enlace geodésico y astronómico de España con Argelia, verificado con objeto de prolongar hasta los confines del Sahara, abarcando una amplitud total de 28°, el arco de meridiano que desde las islas de Shetland llegaba á la de Formentera: pensamiento ya acariciado medio siglo antes por Biot y Arago.

La observación de los vértices de dicho cuadrilátero hubiera tropezado con serias dificultades á no efectuarse de noche, disponiendo de poderosos focos de luz eléctrica. Cerca de la costa, á las horas de sol, salvo en el invierno, se forma en aquella parte, con el vapor que se eleva del mar y con polvo finísimo procedente de las arenas del desierto, una niebla donde los rayos solares, al penetrar, se difunden y desvanecen. Cuando en 1878, por espacio de más de dos meses, desde agosto, hicieron las operaciones de ensayo el coronel español Monet, primero en Mulhacén y despues en Tetica, y los capitanes franceses Derrien y Koszutski, éste en Filahaoussen y aquél en M'Sabiha, fué difícil, y en la dirección de las diagonales imposible, ver la luz reflejada por los heliotropos. Y en 1879 las dos Comisiones española y francesa encargadas de la operación definitiva, las cuales llevaban heliotropos además de señales eléctricas, aunque desde el 1.º de agosto hasta el 15 de octubre los tuvieron expuestos de continuo cuando el sol brillaba sobre el horizonte, nunca llegó á verse de ellos el menor indicio.

Los trabajos de dicho enlace se refieren en la obra *Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne, exécutée en commun en 1879 par ordre des Gouvernements d'Espagne et de France, sous la direction de M. le général Ibañez et M. le colonel Perrier*. Paris, 1886.

La luz eléctrica que servía de señal en las estaciones antedichas ocupaba el foco de un reflector de 50 centímetros de diámetro y 60 centímetros de distancia focal. Este reflector era una lente de cristal cóncavo-convexa: su cara posterior estaba plateada, y los radios de ambas guardaban proporción adecuada para destruir la aberración esférica, con lo cual el reflector en la práctica venía á resultar como parabólico. El cono de luz blanca que despedía alcanzaba una amplitud de $24'$, suficiente para compensar cualquier pequeño error que pudiera haber al dirigir el eje de la lente á la estación lejana, aunque esto, por medio de un anteojo y un mecanismo especial, se hacía con suma precisión. Mas, como en las observaciones de longitud para enlazar Tetica y M'Sabiha pudo comprobarse, con una lente de refracción de 20 centímetros de diámetro bastaba para proyectar la luz eléctrica á una distancia de 225 kilómetros.

Comenzada en 1870, desde la base de Perpiñán, al Sur de Francia, la revisión de la cadena de Delambre y Mechain, se terminó años después en la base de Melún, cerca de París, abarcando una extensión de $6^{\circ} 30'$. La obra puede reputarse como nueva, porque pocas de las antiguas estaciones volvieron á elegirse. El Sr. Perrier adoptó el sistema de observaciones nocturnas, dando luz una lámpara de petróleo en el foco de una lente de refracción de 20 centímetros de diámetro y 60 centímetros de distancia focal. Abandonando la antigua práctica de escoger las torres de las iglesias por estaciones trigonométricas, entre Bourges y Melún, país accidentado y poblado de árboles, alzaronse tablados de 55 metros de altura. En este trozo se trazó doble la cadena de triángulos. El cierre de éstos, ó sea el error de la suma de los ángulos observados, revela en la obra suma precisión, pues el máximo error no pasa de $1''\cdot 20$ y el medio es de $0''\cdot 53$.

En la importante estación central de Puy de Dôme resultó en la latitud una atracción local de $7''\cdot 0$.

CAPITULO II

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

1

En los cálculos trigonométricos no se supone, como en la Geometría elemental, que los ángulos no exceden de dos rectos. Si α es el ángulo que una recta OP trazada por la intersección de los ejes de coordenadas rectangulares $X'OX$, $Y'OY$ forma con OX , al girar OP al rededor de O en el sentido de X hacia Y , par-

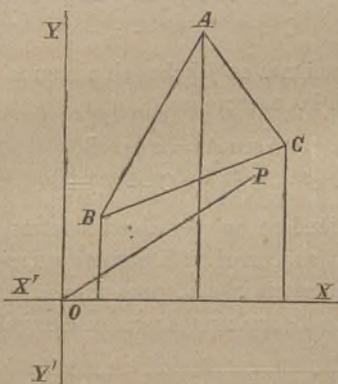


Fig. 8.

tiendo de la posición OX , ese ángulo α que en un principio era cero, valdrá sucesivamente $\frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{3}{2}\pi$, 2π ,... ó esto mismo negativamente si la recta gira en sentido opuesto. Una recta limitada BC se determina por completo, dando su longitud y dirección, juntamente con las coordenadas de uno de sus extremos.

advirtiendo que en la dirección es menester muchas veces distinguir el sentido BC del contrario CB, cuyos ángulos con la recta de partida difieren en 180° . Así es que si a designa la longitud de BC y α el ángulo que esta recta forma con OX, la proyección de BC sobre esta última será $a \cos \alpha$, mientras que la de CB será $-a \cos \alpha$. Por lo tanto, si desde C se traza la recta $CA = b$ que forme con OX el ángulo β , la proyección de $BC + CA$ será $a \cos \alpha + b \cos \beta$; pero si $AB = c$ forma el ángulo γ , su proyección será $c \cos \gamma$; luego la de BA será $-c \cos \gamma$; mas como esta es igual á $a \cos \alpha + b \cos \beta$, se tendrá, transponiendo:

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0;$$

y si del mismo modo se proyectan los tres lados del triángulo sobre OY, resultará

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0.$$

Pero los ángulos del triángulo son

$$A = 180^\circ + \beta - \gamma$$

$$B = -180^\circ + \gamma - \alpha$$

$$C = 180^\circ + \alpha - \beta;$$

y si de las dos ecuaciones antedichas eliminamos primero c y después γ , se hallarán las ecuaciones ⁽¹⁾

$$b \sin A = a \sin B,$$

$$a^2 - 2ab \cos C + b^2 = c^2, \quad (1)$$

las cuales, entendiéndose que en ellas las letras pueden permutarse, conservando su correlación, son las ecuaciones fundamentales de la Trigonometría plana, pues implícitamente contienen la solución de todos los triángulos planos. En realidad la segunda

(1) Restando las dos ecuaciones

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0,$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0,$$

después de multiplicar la primera por $\sin \gamma$ y la segunda por $\cos \gamma$, queda eliminada c . Pasando en dichas ecuaciones el último término al segundo miembro, elevando ambas al cuadrado y sumando los resultados, queda eliminada γ .

ecuación las comprende todas, pues la primera fácilmente se deduce de ella.

También se derivan de las ecuaciones primitivas las siguientes, que en lo sucesivo nos serán útiles (1):

$$a \cos A \cos 2\alpha + b \cos B \cos 2\beta + c \cos C \cos 2\gamma = 0, \quad (2)$$

$$a \cos A \sin 2\alpha + b \cos B \sin 2\beta + c \cos C \sin 2\gamma = 0,$$

$$b^2 \cos 2\beta + 2bc \cos(\beta + \gamma) + c^2 \cos 2\gamma = a^2 \cos 2\alpha,$$

$$b^2 \sin 2\beta + 2bc \sin(\beta + \gamma) + c^2 \sin 2\gamma = a^2 \sin 2\alpha,$$

y así prosiguiendo.

Sean ahora $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ los ángulos que los lados consecutivos $PP_1 = s_1, P_1P_2 = s_2, P_2P_3 = s_3 \dots$ de un polígono plano PP_1P_2, \dots forman con una recta PX trazada por el vértice inicial P . Designando por P'_n la proyección del vértice P_n sobre PX , las coordenadas de dicho punto serán $PP'_n = \xi_n, P_nP'_n = \eta_n$. El ángulo interior del polígono en P_n y el exterior que sumado con él da 360° , equivalen respectivamente á $\pi - \sigma_n$ y $\pi + \sigma_n$, siendo

(1) La primera de las ecuaciones (2) resulta de la diferencia de las primitivas

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0,$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0,$$

multiplicadas respectivamente por

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ & + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta; \\ & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ & + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

La segunda ecuación (2) proviene de la diferencia de dichas ecuaciones primitivas, multiplicadas por

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

La tercera ecuación (2) se halla pasando en esas ecuaciones primitivas el primer término al segundo miembro, elevando ambas al cuadrado y restando una de otra.

Y la cuarta ecuación (2) es el producto de las ecuaciones primitivas, previa la transposición indicada.

Además, las dos ecuaciones (2) primera y tercera se deducen de la segunda y cuarta, ó viceversa, haciendo girar 45° el triángulo respecto del eje OX , con lo cual cada uno de los ángulos $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, queda aumentado en 90° .

σ_n el ángulo formado por uno de los dos lados comunes á ambos con la prolongación del otro lado, de manera que

$$\alpha_n = \alpha_1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 \dots - \sigma_{n-1}.$$

Las proyecciones q_m, p_m de cada lado s_m sobre PX y sobre la perpendicular á ésta darán

$$q_m = s_m \cos \alpha_m, \quad p_m = s_m \operatorname{sen} \alpha_m,$$

teniéndose además

$$\xi_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n, \quad \eta_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Luego si cada lado y cada ángulo reciben un incremento, las variaciones de ξ, η serán (1)

$$d\xi_n = q_1 \frac{ds_1}{s_1} + q_2 \frac{ds_2}{s_2} + q_3 \frac{ds_3}{s_3} \dots - p_1 d\alpha_1 - p_2 d\alpha_2 \dots - p_n d\alpha_n,$$

$$d\eta_n = p_1 \frac{ds_1}{s_1} + p_2 \frac{ds_2}{s_2} + p_3 \frac{ds_3}{s_3} \dots + q_1 d\alpha_1 + q_2 d\alpha_2 \dots + q_n d\alpha_n.$$

Mas haciendo $\frac{ds_n}{s_n} - \frac{ds_{n-1}}{s_{n-1}} = dS_{n-1}$, se tendrá

$$\frac{ds_1}{s_1} = dS, \quad d\alpha_1 = d\alpha_1,$$

$$\frac{ds_2}{s_2} = dS + dS_1, \quad d\alpha_2 = d\alpha_1 - d\sigma_1,$$

$$\frac{ds_3}{s_3} = dS + dS_1 + dS_2, \quad d\alpha_3 = d\alpha_1 - d\sigma_1 - d\sigma_2,$$

y así prosiguiendo. Luego si P_i es el último vértice del polígono (es decir, el que coincide con el primero P), las variaciones de sus coordenadas en función de todos los lados y ángulos serán éstas (2):

$$(1) \quad \begin{aligned} dq_m &= ds_m \cos \alpha_m - s_m \operatorname{sen} \alpha_m d\alpha_m, \\ dp_m &= ds_m \operatorname{sen} \alpha_m + s_m \cos \alpha_m d\alpha_m, \\ \operatorname{sen} \alpha_m &= \frac{p_m}{s_m}, \quad \cos \alpha_m = \frac{q_m}{s_m}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} d\xi_n &= q_1 dS + q_2 (dS + dS_1) + \dots \\ &\quad - p_1 d\alpha_1 - p_2 (d\alpha_1 - d\sigma_1) - \dots \\ &= (q_1 + q_2 + \dots) dS + (q_1 + q_2 + \dots - q_1) dS_1 + \dots \\ &\quad - (p_1 + p_2 + \dots) d\alpha_1 + (p_1 + p_2 + \dots - p_1) d\sigma_1 + \dots \\ &= \xi_n dS + dS_1 + dS_2 + \dots - \xi_1 dS_1 - \xi_2 dS_2 - \dots \\ &\quad - \eta_n (d\alpha_1 - d\sigma_1 - d\sigma_2 - \dots) - \eta_1 d\sigma_1 - \eta_2 d\sigma_2 - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -d\xi_i &= \xi_1 dS_1 + \xi_2 dS_2 + \dots + \xi_{i-1} dS_{i-1} + \eta_1 d\sigma_1 & (3) \\
 &\quad + \eta_2 d\sigma_2 \dots + \eta_{i-1} d\sigma_{i-1}, \\
 -d\eta_i &= \eta_1 dS_1 + \eta_2 dS_2 + \dots + \eta_{i-1} dS_{i-1} - \xi_1 d\sigma_1 \\
 &\quad - \xi_2 d\sigma_2 \dots - \xi_{i-1} d\sigma_{i-1}.
 \end{aligned}$$

2

Las ecuaciones fundamentales de la Trigonometría esférica se obtienen con suma rapidez del siguiente modo. Unido el centro O de la esfera con los vértices A , B , C del triángulo trazado en

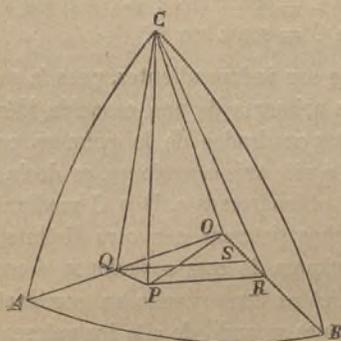


Fig. 9.

ella, sean Q , R las proyecciones de C sobre OA y OB , P su proyección sobre el plano AOB y S la de Q sobre OB . Se tendrá

$$\begin{aligned}
 OR &= OS + PQ \operatorname{sen} c, \\
 PR &= QS - PQ \operatorname{cos} c, \\
 CQ \operatorname{sen} A &= CR \operatorname{sen} B;
 \end{aligned}$$

la última ecuación, por ser ambos miembros equivalentes á la perpendicular CP .

Pero si $n = i$, serán $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$, puesto que el último vértice se confunde con el primero situado en el origen.

De un modo análogo se obtiene la expresión general de $d\eta_n$.

Haciendo ahora estas sustituciones:

$$\begin{array}{ll} \text{OR} = \cos a, & \text{OS} = \cos b \cos c, \\ \text{CR} = \sin a, & \text{PQ} = \sin b \cos A, \\ \text{OQ} = \cos b, & \text{PR} = \sin a \cos B, \\ \text{CQ} = \sin b, & \text{QS} = \cos b \sin c; \end{array}$$

hallaremos en seguida las tres primeras del siguiente grupo, y proyectando B sobre el plano AOC, las dos últimas:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, & (4) \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A, \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A. \end{aligned}$$

Mas no todas ellas son independientes, pues la suma de los cuadrados de las tres primeras da una ecuación idéntica, lo mismo que la suma de los cuadrados de la primera, cuarta y quinta. Equivalen, pues, á sólo tres ecuaciones, es decir, que dados por ejemplo b, c y A , obtendremos a, B y C mediante dos ecuaciones de uno de dichos sistemas con otra distinta del otro grupo. En realidad la primera de esas ecuaciones, á condición de que se permuten las letras conservando su correlación, comprende todas las demás, pues sacando de ella los valores de $1 \pm \cos A$ y poniendo

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2\sigma, \\ -a + b + c &= 2\sigma_1, \\ a - b + c &= 2\sigma_2, \\ a + b - c &= 2\sigma_3; \end{aligned}$$

se tiene

$$\sin \frac{1}{2} A = \left(\frac{\sin \sigma_2 \sin \sigma_3}{\sin b \sin c} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \left(\frac{\sin \sigma \sin \sigma_1}{\sin b \sin c} \right)^{\frac{1}{2}};$$

y multiplicando ambas se deduce

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

donde se contienen la tercera y quinta ecuación de aquel grupo, sacándose después, por su combinación con la primera, las dos restantes, ó sean la segunda y cuarta.

3

De las expresiones ha poco escritas del seno y coseno de $\frac{1}{2} A$, se deducen por analogía las relativas á los otros ángulos, y combinadas unas y otras, resultan (1) las siguientes fórmulas del seno y coseno de la semisuma y semidiferencia de B y C:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (B+C)}{\cos \frac{1}{2} A} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c)}{\cos \frac{1}{2} a}, & (5) \\ \frac{\cos \frac{1}{2} (B+C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} A} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (b+c)}{\cos \frac{1}{2} a}, \\ \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (B-C)}{\cos \frac{1}{2} A} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (b-c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}, \\ \frac{\cos \frac{1}{2} (B-C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} A} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (b+c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}. \end{aligned}$$

Estas importantes fórmulas, dadas primero por Delambre, se conocen también con el nombre de teoremas de Gauss. Dividiendo unas por otras, se deducen las sabidas analogías de Neper.

Designando por Δ el exceso esférico ó área del triángulo, se tiene

$$\Delta = A + B + C - \pi,$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta = \operatorname{sen} \frac{1}{2} (B+C) \operatorname{sen} \frac{1}{2} A - \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} A.$$

Mas hallada la semidiferencia de las dos primeras ecuaciones del último grupo, resulta

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a} \operatorname{sen} A, \quad (6)$$

(1) Multiplicando respectivamente las expresiones de $\operatorname{sen} \frac{1}{2} B$ y $\cos \frac{1}{2} B$ por las de $\cos \frac{1}{2} C$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2} C$, la suma de los productos da $\operatorname{sen} \frac{1}{2} (B+C)$, y de aquí se deduce la primera fórmula. Las demás se obtienen análogamente.

ó reemplazando $\text{sen } A$ por $2 \text{ sen } \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$ y los dos últimos factores por los valores escritos más arriba,

$$\text{sen } \frac{1}{2} \Delta = \frac{(\text{sen } \sigma \text{ sen } \sigma_1 \text{ sen } \sigma_2 \text{ sen } \sigma_3)^{\frac{1}{2}}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}. \quad (7)$$

4

En el lado AB de un triángulo esférico, sea F un punto unido al vértice opuesto C por el arco $CF = f$ que divide el ángulo C en los dos segmentos C_1, C_2 , siendo los segmentos correspon-

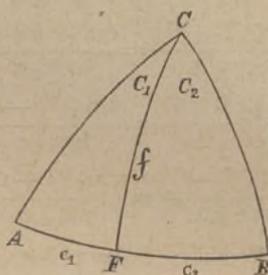


Fig. 10.

dientes de AB , el uno $AF = c_1$ y el otro $FB = c_2$. El coseno de $\angle AFC$ estará expresado por cualquiera de los dos miembros de la ecuación

$$\frac{-\cos a + \cos c_2 \cos f}{\text{sen } c_2 \text{ sen } f} = \frac{\cos b - \cos c_1 \cos f}{\text{sen } c_1 \text{ sen } f},$$

de la cual se deduce

$$\cos f = \cos a \frac{\text{sen } c_1}{\text{sen } c} + \cos b \frac{\text{sen } c_2}{\text{sen } c}, \quad (8)$$

y de ésta, dividiendo ambos miembros por $\text{sen } f$ y multiplicando el numerador y denominador del segundo por $\text{sen } F$,

$$\cot f = \frac{\cos a \text{ sen } c_1 \text{ sen } F + \cos b \text{ sen } c_2 \text{ sen } F}{\text{sen } c \text{ sen } f \text{ sen } F};$$

pero como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} F &= \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C_1, \\ \operatorname{sen} c_2 \operatorname{sen} F &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C_2, \\ \operatorname{sen} f \operatorname{sen} c \operatorname{sen} F &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C, \end{aligned}$$

sustituyendo en la fórmula anterior, será

$$\cot f = \cot a \frac{\operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} C} + \cot b \frac{\operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} C}. \quad (9)$$

Requírese muchas veces deducir la diferencia de dos ángulos casi iguales de la diferencia de sus cosenos, esto es, dados c y α en la ecuación

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2c,$$

hallar β . Mas haciendo $\beta - \alpha = 2x$, la antedicha se transforma en

$$\operatorname{sen}(\alpha + x) \operatorname{sen} x = c,$$

y desarrollando, se tiene la ecuación bicuadrada

$$\operatorname{sen}^4 x - (\operatorname{sen}^2 \alpha + 2c \cos \alpha) \operatorname{sen}^2 x + c^2 = 0,$$

cuyas raíces, ó incógnitas buscadas, son ⁽¹⁾

(1) Estas raíces tienen la forma

$$\pm \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \pm \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}};$$

pero como α y β son casi iguales, el valor absoluto de x debe ser el menor, y en su consecuencia, de las cuatro raíces sólo caben en este caso dos, á saber:

$$\begin{aligned} \pm \operatorname{sen} x &= \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{2} c (1 + \cos \alpha)} - \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{1}{2} c (1 - \cos \alpha)}, \end{aligned}$$

ó bien, multiplicando y dividiendo el segundo miembro por la suma de los mismos radicales, y sustituyendo el seno y el coseno de α por sus valores en función del seno y coseno de su mitad,

$$\pm \operatorname{sen} x = \frac{c}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + c \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - c \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

y esta fórmula, dividiendo numerador y denominador por $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, es la misma del texto.

$$\pm \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \frac{c}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha} \cdot \left(1 + \frac{c}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{c}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Por ejemplo, si en un cuadrilátero esférico $PQpq$ son rectos los ángulos P, Q é iguales los lados Pp, Qq , siendo su longitud común b , el ángulo A comprendido entre estos lados prolongados hasta su intersección estará medido por el arco PQ , y si se hace $pq = a$, será (1)

$$\cos a - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \tan^2 b,$$

Aplicando, pues, la fórmula (10) tendremos, si por 2ψ designamos el exceso esférico del cuadrilátero (2),

(1) En el triángulo isósceles pAq , cuyos dos lados iguales tienen por valor común $\frac{\pi}{2} - b$, es

$$\cos A = \frac{\cos a - \operatorname{sen}^2 b}{\cos^2 b}.$$

(2) Reemplazando en dicha fórmula (10)

$$\beta, \alpha, c \text{ por } A, a, \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \tan^2 b$$

y tomando el signo positivo, puesto que $A > a$, resulta

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - a) = \frac{\tan \frac{a}{2} \tan^2 b}{\left(1 + \tan^2 b\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \tan^2 b \tan^2 \frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pero si ω es el valor común de los ángulos no rectos del cuadrilátero $PpqQ$ se tiene

$$2\psi = 2\frac{\pi}{2} + 2\omega - 2\pi, \quad \omega = \psi + \frac{\pi}{2};$$

además, en el triángulo isósceles pAq los ángulos iguales valen cada uno $\pi - \omega$. Luego

$$\cos A = -\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega \cos a,$$

$$\cos a - \cos A = 2 \cos^2 \omega \cos^2 \frac{a}{2} = 2 \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \frac{a}{2},$$

y como también

$$\cos a - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \tan^2 b,$$

se deduce

$$\operatorname{sen} \psi = \tan \frac{a}{2} \tan b.$$

$$\overline{\text{sen}} \frac{1}{2} (A - a) = \frac{\text{sen } b \text{ sen } \psi}{1 + \cos b \cos \psi},$$

ó bien (1)

$$\tan \frac{1}{2} (A - a) = \tan \frac{1}{2} b \tan \frac{1}{2} \psi. \quad (11)$$

5

Diferenciando la primera ecuación del grupo (4), sustituyendo luego los coeficientes de db , dc por los valores respectivos que indican la cuarta y segunda, y, finalmente, dividiendo toda la ecuación por $\text{sen } a$, resulta la primera del siguiente grupo, pudiendo de ella inferirse en seguida la segunda y tercera por permutaciones circulares de las letras:

$$\begin{aligned} da - \cos C db - \cos B dc &= \text{sen } c \text{ sen } B dA, & (12) \\ -\cos C da + db - \cos A dc &= \text{sen } a \text{ sen } C dB, \\ -\cos B da - \cos A db + dc &= \text{sen } b \text{ sen } A dC. \end{aligned}$$

De aquí, ya por eliminación ó ya recurriendo al triángulo polar, se deduce

$$\begin{aligned} dA + \cos c dB + \cos b dC &= \text{sen } B \text{ sen } c da, & (13) \\ \cos c dA + dB + \cos a dC &= \text{sen } C \text{ sen } a db, \\ \cos b dA + \cos a dB + dC &= \text{sen } A \text{ sen } b dc. \end{aligned}$$

Pueden también escribirse las primeras bajo la forma (2)

$$\begin{aligned} (1) \quad \tan \frac{x}{2} &= \frac{\text{sen } \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \text{sen } x} - \sqrt{1 - \text{sen } x}}{\sqrt{1 + \text{sen } x} + \sqrt{1 - \text{sen } x}}, \\ \tan \frac{1}{4} (A - a) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (b - \psi) - \cos \frac{1}{2} (b + \psi)}{\cos \frac{1}{2} (b - \psi) + \cos \frac{1}{2} (b + \psi)}. \end{aligned}$$

(2) Sumando la primera con la tercera multiplicada por $\cos B$, con lo cual desaparece dc ; sustituyendo después

$$\begin{aligned} \cos C &= -\cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B \cos c, \\ \text{sen } b \text{ sen } A &= \text{sen } a \text{ sen } B, \end{aligned}$$

y dividiendo todo por $\text{sen } B$, se obtiene la primera de este grupo. Análogamente las demás.

$$\begin{aligned} \text{sen } Bda - \cos c \text{ sen } Adb - \text{sen } a \cos BdC &= \text{sen } cdA, & (14) \\ - \cos c \text{ sen } Bda + \text{sen } Adb - \text{sen } b \cos AdC &= \text{sen } cdB, \\ \cos Bda + \cos Adb + \text{sen } b \text{ sen } AdC &= dc; \end{aligned}$$

y las segundas, por consecuencia, en virtud del triángulo polar,

$$\begin{aligned} \text{sen } bdA + \cos C \text{ sen } adb + \text{sen } A \cos bdc &= \text{sen } Cda, & (15) \\ \cos C \text{ sen } bdA + \text{sen } adb + \text{sen } B \cos adc &= \text{sen } Cdb, \\ - \cos bdA - \cos adb + \text{sen } B \text{ sen } adc &= dC. \end{aligned}$$

Si como caso particular se supone que, siendo el lado c exacto, en los ángulos A y B se hayan padecido los errores dA , dB , los que de resultas afecten á los otros elementos del triángulo se determinarán haciendo $dc = 0$ en las precedentes ecuaciones, hallándose así:

$$\begin{aligned} \text{sen } Cda &= \text{sen } bdA + \cos C \text{ sen } adb, \\ \text{sen } Cdb &= \cos C \text{ sen } bdA + \text{sen } adb, & (16) \\ dC &= - \cos bdA - \cos adb. \end{aligned}$$

6

En los triángulos esféricos rectángulos, siendo A el ángulo recto, conviértense las fórmulas generales en éstas:

$$\begin{aligned} \text{sen } a \text{ sen } B &= \text{sen } b, & (17) \\ \text{sen } a \cos B &= \cos b \text{ sen } c, \\ \cos a &= \cos b \cos c, \\ \text{sen } a \cos C &= \cos c \text{ sen } b, \\ \text{sen } a \text{ sen } C &= \text{sen } c; \end{aligned}$$

y es claro que, como aquellas de que proceden, equivalen todas ellas á sólo tres ecuaciones.

Si se dan los catetos b y c , pueden obtenerse $\tan B$ y $\tan C$ por dichas ecuaciones, ó mejor por las analogías de Neper ó ecuaciones (5), haciendo $B = 90^\circ - V$, con lo cual resulta (1)

(1) Las analogías de Neper, aplicadas á los lados y ángulos que se requieren para los problemas aquí propuestos, son:

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(B+C)}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}, \quad \frac{\tan \frac{1}{2}(B-C)}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen } \frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\tan \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}(C-V)}{1 - \tan \frac{1}{2}(C-V)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)};$$

y otras ecuaciones parecidas se hallan para $\tan \frac{1}{2}(B-C)$, deduciéndose de aquéllas y éstas respectivamente

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(C-V) &= \tan \frac{1}{2}b \tan \frac{1}{2}c, \\ \tan \frac{1}{2}(C+V) &= \cot \frac{1}{2}b \tan \frac{1}{2}c; \end{aligned} \quad (18)$$

que sólo exigen dos logaritmos en vez de cuatro. Por éstas también, si se dieran B y C , fácilmente se hallarían b y c . Y asimismo, dados el ángulo B y el lado adyacente c , puede recurrirse á las ecuaciones (5) que dan

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(a+b) &= \tan \frac{1}{2}c \cot \frac{1}{2}V, \\ \tan \frac{1}{2}(a-b) &= \tan \frac{1}{2}c \tan \frac{1}{2}V, \end{aligned} \quad (19)$$

en cuyos segundos miembros no hay tampoco más que dos factores.

Supóngase ahora que el cateto c sea pequeño, en cuyo caso también los ángulos C y V lo serán. Las dos últimas ecuaciones del grupo (17) dan

$$\frac{\tan C}{\tan c} = \frac{1}{\sin b};$$

mas haciendo para mayor sencillez el segundo miembro de esta ecuación igual á k , y desarrollando las tangentes en serie, resulta

$$C + \frac{1}{3}C^3 + \frac{2}{45}C^5 + \dots = k(c + \frac{1}{3}c^3 + \frac{2}{45}c^5 + \dots);$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}, \quad \frac{\tan \frac{1}{2}(a-b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}$$

y en ellas debe substituirse $A = 90^\circ$.

La igualdad

$$\tan \frac{1}{2}(B+C) = \tan \frac{1}{2}(90^\circ + C - V) = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}(C-V)}{1 - \tan \frac{1}{2}(C-V)}$$

se obtiene por la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos que en este caso son 45° y $\frac{1}{2}(C-V)$.

Además se tiene

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(b-c) - \cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(b-c) + \cos \frac{1}{2}(b+c)} = \tan \frac{1}{2}b \tan \frac{1}{2}c.$$

Fórmulas análogas corresponden á $\tan \frac{1}{2}(B-C)$.

de donde por el método de los coeficientes indeterminados, escribiendo

$$C = kc + k'c^3 + k''c^5 + \dots,$$

fácilmente se deduce (1)

$$\frac{C}{c} = k \left\{ 1 + \frac{c^2}{3}(1 - k^2) + \frac{c^4}{15}(1 - k^2)(2 - 3k^2) \dots \right\}. \quad (20)$$

Sustituyendo aquí en vez de k su valor $\frac{1}{\operatorname{sen} b}$, y recordando que cuando es una cantidad insignificante la segunda potencia de x , se tiene

$$\operatorname{sen}(b + x) = \operatorname{sen} b (1 + x \cot b);$$

se halla como valor aproximado, omitiendo el término con c^5 y los sucesivos (2),

$$C = \frac{c}{\operatorname{sen}(b + \frac{1}{3}c^2 \cot b)},$$

Por otra parte, en virtud de las ecuaciones segunda y quinta del mismo grupo (17), es

$$\operatorname{sen} V = \operatorname{sen} C \cos b;$$

por consiguiente

$$V = C \cos b \left(1 - \frac{c^2}{6} \dots\right),$$

ó bien, suprimiendo los términos que contengan c^5 ,

$$V = C \cos(b + \frac{1}{6}c^2 \cot b).$$

Por último, haciendo $a = b + \eta$, la tercera de las ecuaciones (17) da

$$\cos(b + \eta) = \cos b \cos c,$$

(1) Igualados los coeficientes que en ambos miembros, sustituido el valor de C , afectan á las mismas potencias de c , se tienen las ecuaciones

$$k' + \frac{1}{3}k^3 = \frac{1}{3}k, \quad k'' + k^2 k' + \frac{2}{15}k^5 = \frac{2}{15}k,$$

de donde

$$k' = \frac{1}{3}k(1 - k^2), \quad k'' = \frac{1}{15}k(1 - k^2)(2 - 3k^2).$$

(2) Pues, no pasando de los dos primeros términos, es

$$C = \frac{c}{\operatorname{sen} b} \left(1 - \frac{1}{3}c^2 \cot^2 b\right) = \frac{c}{\operatorname{sen} b \left(1 + \frac{1}{3}c^2 \cot^2 b\right)}.$$

de donde, si es pequeña la diferencia $a - b = \eta$, se deduce (1)

$$\eta = \frac{c^2}{2} \cot b - \frac{c^4}{24} (1 + 3 \cot^2 b) \cot b.$$

Suponiendo, pues, que de la potencia cuarta de c en adelante pueda prescindirse, las fórmulas para resolver el triángulo serán éstas:

$$a - b = \frac{c^2}{2} \cot b = \eta, \quad (21)$$

$$C = \frac{c}{\operatorname{sen} (b + \frac{2}{3} \eta)},$$

$$90^\circ - B = C \cos (b + \frac{1}{3} \eta).$$

Por lo que toca al error cometido, con despreciar la parte de $a - b$ que depende de c^4 , júzguese por estos dos casos, valiéndose en ambos c un grado: si $b = 30^\circ$, dicha parte asciende á $0'' \cdot 014$ y si $b = 45^\circ$, sólo llega á $0'' \cdot 003$.

En el caso más general en que, siendo c pequeño, el ángulo A sea oblicuo, también puede aplicarse con ventaja la serie (20). De las fórmulas (5) se deduce la analogía de Neper

$$\frac{\tan \frac{1}{2} (a - b)}{\tan \frac{1}{2} c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B)};$$

(1) Desarrollando el primer miembro y reemplazando

$$\cos \eta = 1 - \frac{\eta^2}{2}, \quad \operatorname{sen} \eta = \eta,$$

se tiene

$$\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) \cos b - \eta \operatorname{sen} b = \cos b \cos c;$$

de donde

$$\eta = \cot b \cdot 2 \operatorname{sen}^2 \frac{c}{2} - \frac{\eta^2}{2} \cot b,$$

y esta relación, sustituido como valor bastante aproximado para el caso

$$\operatorname{sen}^2 \frac{c}{2} = \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{c^3}{8}\right)^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{c^4}{8},$$

y puesto en vez de η^2 el cuadrado del primer término del segundo miembro, se transforma en la fórmula del texto.

y llamando, por simplificar, k el segundo miembro de esta ecuación, la serie (20) da

$$\frac{a-b}{c} = k \left\{ 1 + \frac{c^2}{12} (1 - k^2) + \frac{c^4}{240} (1 - k^2) (2 - 3k^2) \dots \right\};$$

Calculando $a - b$ por esta fórmula, dados k y c , el error cometido al prescindir del término con c^5 será muy pequeño, pues el mayor valor numérico de $k(1 - k^2)(2 - 3k^2)$, correspondiente al valor de k , que satisface la ecuación bicuadrada

$$15k^4 - 15k^2 + 2 = 0,$$

cuyo primer miembro es la derivada del producto anterior, es 0.51.... Luego si c vale 2° , el término con c^5 ascenderá á lo sumo á 0'.000022, y por consecuencia puede siempre despreciarse, teniéndose así ⁽¹⁾

$$a - b = c \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B)} \left\{ 1 + \frac{c^2}{12} \cdot \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(A + B)} \right\}. \quad (22)$$

Sea ahora en el interior del triángulo rectángulo dado ABC, S

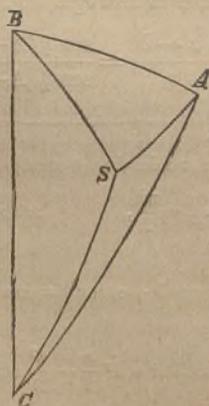


Fig. 11.

(1) $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(A + B) - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$

un punto tal que $BS = AB = c$ y $ABS = \theta$: se pide el ángulo $ACS = \eta$. Si $SC = \zeta$, será (1)

$$\text{sen } \eta \text{ sen } \zeta = \text{sen } SA \cos SAB = \text{sen } 2c \text{ sen}^2 \frac{1}{2} \theta,$$

y reemplazando $\text{sen } \zeta$ por su valor (2)

$$\text{sen } c \frac{\text{sen}(B - \theta)}{\text{sen}(C - \eta)},$$

tendremos

$$\begin{aligned} \tan \eta &= \frac{2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos c \text{sen } C}{\text{sen}(B - \theta) + 2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos c \cos C} \\ &= \frac{\tan C}{1 + \frac{\sec^2 c \text{sen}(B - \theta)}{2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \text{sen } B}} \end{aligned}$$

y ambas expresiones son adecuadas para el cálculo de $\tan \eta$. Sirven estas fórmulas para hallar el azimut de una estrella circumpolar, siendo B el polo celeste, C el zénit y A el lugar de la estrella S cuando posee el máximo azimut. Cuando θ es pequeño, se tiene aproximadamente (3)

(1) La primera igualdad resulta de la proporción de senos en el triángulo CAS , cuyo ángulo CAS es complemento del SAB . La segunda es la fórmula del seno de un lado por el coseno del ángulo adyacente, aplicada al lado desigual del triángulo isósceles ABS , esto es, la relación

$$\text{sen } SA \cos SAB = \cos c \text{sen } c - \text{sen } c \cos c \cos \theta,$$

hechas en el segundo miembro las reducciones correspondientes.

(2) Este valor, deducido del triángulo $SB C$, debe sustituirse en la igualdad formada por la primera y última de las tres expresiones antedichas. Dividiendo después por $\text{sen } c$ y desarrollando $\text{sen}(C - \eta)$, es fácil obtener la primera expresión de $\tan \eta$. Pásase de ésta a la segunda, dividiendo numerador y denominador por el segundo término del último y sustituyendo luego en la fracción que queda en el denominador el valor

$$\cos C = \text{sen } B \cos c,$$

deducido del triángulo rectángulo BAC .

(3) La fórmula anterior puede también escribirse

$$\tan \eta = \frac{2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 c \tan C}{2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 c + \frac{\text{sen}(B - \theta)}{\text{sen } B}},$$

$$\eta = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 c \tan C}{1 - \cot B \operatorname{sen} \theta}, \quad (23)$$

con un error que muy poco difiere de $\operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen}^2 2c \tan C$.

7

Consideremos ahora un triángulo esférico cuyos tres lados sean pequeños con relación al radio de la esfera. Sean A' , B' , C' los ángulos, y Δ' el área de un triángulo plano cuyos lados a , b , c sean iguales á los del triángulo esférico. Prescindiendo de las cantidades pequeñas de sexto orden, las fórmulas (7) dan (1)

$$\Delta = \frac{(\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \sigma_1 \operatorname{sen} \sigma_2 \operatorname{sen} \sigma_3)^{\frac{1}{2}}}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

la cual, desarrollado $\operatorname{sen} (B - \theta)$, reemplazado $\cos \theta$ por $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta$ y reducidos algunos términos, se convierte en

$$\tan \eta = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 c \tan C}{1 - \cot B \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen}^2 c};$$

y ésta, cuando el ángulo θ es pequeño, en cuyo caso del último término del denominador puede prescindirse, y por ser entonces también el ángulo η pequeño, ponerse η en vez de $\tan \eta$, se reduce á la fórmula del texto, ó lo que es lo mismo, considerado el denominador de ésta como factor elevado á la potencia -1 y limitado su desarrollo á los dos primeros términos, á la fórmula

$$\eta = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 c \tan C (1 + \cot B \operatorname{sen} \theta).$$

Mas si análoga transformación y limitado desarrollo se operan con la fórmula antedicha sin prescindir del último término del denominador, el factor que á éste sustituya será

$$1 + \cot B \operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen}^2 c;$$

luego el error cometido será próximamente, puesto que aun habría más términos si se continuara el desarrollo,

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 c \tan C \cdot 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen}^2 2c \tan C.$$

(4) Limitados á los primeros términos los respectivos desarrollos en serie, se tiene

$$\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} \sigma = \sigma^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{12}\right), \quad \cos \frac{1}{2} a = 1 - \frac{a^2}{8};$$

$$= (\sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24} \right),$$

$$\Delta = \Delta' \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24} \right). \quad (24)$$

Mas por otra parte se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A' &= \left(\frac{\sigma \sigma_1}{bc} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma_2 \operatorname{sen} \sigma_3}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} A' &= \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{bc} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \sigma_1}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \right)^{\frac{1}{2}}; \\ \therefore \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - A') &= \frac{\Delta'}{bc} \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} \sigma_2 \operatorname{sen} \sigma_3}{\sigma_2 \sigma_3} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \sigma_1}{\sigma \sigma_1} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{b \cdot c} \right)^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

y puesto que ⁽¹⁾

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \sigma = \sigma^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{12} + \frac{\sigma^4}{1440} \right),$$

luego

$$\Delta = (\sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \frac{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{12}}{1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}};$$

mas reemplazando $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, por sus valores dados en el párrafo 2 de este capítulo, se hallará

$$\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

y si después de sustituir este valor en la relación precedente se considera el denominador como factor elevado á la potencia -1 y se reduce el desarrollo de éste á los dos primeros términos, se obtendrá la fórmula del texto.

⁽¹⁾ En efecto,

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^4}{120} - \dots \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 - \sigma_2^2 &= a b + b c, & \sigma^2 + \sigma_2^2 &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) + a c, \\ \sigma_1^2 - \sigma_3^2 &= -a b + b c, & \sigma_1^2 + \sigma_3^2 &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) - a c. \end{aligned}$$

$$\sigma^4 - \sigma_2^4 = (\sigma^2 - \sigma_2^2) (\sigma^2 + \sigma_2^2),$$

$$\sigma_1^4 - \sigma_3^4 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) (\sigma_1^2 + \sigma_3^2),$$

$$\sigma_2^2 \sigma_3^2 = \frac{1}{16} [a^2 - (b - c)^2]^2, \quad \sigma^2 \sigma_1^2 = \frac{1}{16} [(b + c)^2 - a^2]^2.$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 - \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_3^2 &= 2bc, \\ \sigma^4 - \sigma_2^4 + \sigma_1^4 - \sigma_3^4 &= bc(3a^2 + b^2 + c^2), \\ \sigma_2^2 \sigma_3^2 - \sigma^2 \sigma_1^2 &= \frac{1}{2}bc(a^2 - b^2 - c^2),\end{aligned}$$

resulta (1)

$$A - A' = \frac{1}{3} \Delta' \left(1 + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{120} \right).$$

Reemplazando Δ' por Δ deducida de la fórmula (24), se obtiene la primera de las siguientes ecuaciones, infiriéndose por simetría la segunda y tercera (2)

$$A = A' + \frac{\Delta}{3} + \frac{\Delta}{180}(-2a^2 + b^2 + c^2), \quad (25)$$

$$B = B' + \frac{\Delta}{3} + \frac{\Delta}{180}(a^2 - 2b^2 + c^2),$$

$$C = C' + \frac{\Delta}{3} + \frac{\Delta}{180}(a^2 + b^2 - 2c^2),$$

Prescindiendo aquí de los términos de cuarto orden, resulta

(1) Pues se tiene, desarrolladas las razones de los senos á los arcos y sustituidos luego por σ , σ_1 , σ_2 , σ_3 sus valores en función de a , b , c ,

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\text{sen } \sigma_2}{\sigma_2} \cdot \frac{\text{sen } \sigma_3}{\sigma_3} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\text{sen } \sigma}{\sigma} \cdot \frac{\text{sen } \sigma_1}{\sigma_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sigma^2 - \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_3^2}{12} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2 - \sigma^2 \sigma_1^2}{144} - \frac{\sigma^4 - \sigma_2^4 + \sigma_1^4 - \sigma_3^4}{1440} \\ &= \frac{bc}{6} \left(1 + \frac{a^2 - 3b^2 - 3c^2}{120} \right);\end{aligned}$$

por otra parte,

$$\left(\frac{\text{sen } b}{b} \cdot \frac{\text{sen } c}{c} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(1 - \frac{b^2}{6} \right) \left(1 - \frac{c^2}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right),$$

luego

$$\text{sen } \frac{1}{2}(A - A') = \frac{\Delta'}{6} \left(1 + \frac{a^2 - 3b^2 - 3c^2}{120} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{12} \right),$$

de donde, efectuada en el segundo miembro la multiplicación indicada, con las reducciones á que ha lugar, y reemplazado en el primero el seno por el arco, resulta la fórmula que da el autor.

$$(2) \quad \Delta' = \frac{\Delta}{1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24}} = \Delta \left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24} \right).$$

el teorema de Legendre, que dice: los ángulos A, B, C de un triángulo esférico, cuyos lados a, b, c son muy pequeños con relación al radio de la esfera, son iguales á los ángulos correspondientes del triángulo plano cuyos lados son también a, b, c , aumentado cada ángulo con el tercio del exceso esférico del triángulo.

La aplicación del teorema de Legendre simplifica mucho la resolución práctica de los triángulos geodésicos; mas conviene saber hasta qué punto de aproximación puede llegarse con seguridad. Si se conoce el lado c y es ε el exceso esférico del triángulo, se tendrá por el teorema de Legendre

$$a = c \operatorname{sen} \left(A - \frac{1}{3} \varepsilon \right) \operatorname{cosec} \left(C - \frac{1}{3} \varepsilon \right),$$

$$b = c \operatorname{sen} \left(B - \frac{1}{3} \varepsilon \right) \operatorname{cosec} \left(C - \frac{1}{3} \varepsilon \right),$$

y los errores $\partial a, \partial b$ de los lados así obtenidos dependerán del valor que se atribuya á ε , que puede calcularse de diferentes modos. Por de pronto los expresaremos como sigue (1), en función de la variable ε (*):

$$\partial a = c \frac{\operatorname{sen} \left(A - \frac{1}{3} \varepsilon \right)}{\operatorname{sen} \left(C - \frac{1}{3} \varepsilon \right)} - \operatorname{sen}^{-1} \left(\operatorname{sen} c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \right).$$

Más existiendo las relaciones (2)

(1) Las notaciones $\operatorname{sen}^{-1}, \operatorname{cos}^{-1}, \dots$ indican lo mismo que $\operatorname{arc} \operatorname{sen}, \operatorname{arc} \operatorname{cos}, \dots$, es decir, las funciones inversas del seno, coseno, ... de un arco, y aunque al parecer sean ambiguas porque pudieran representar también los valores inversos ó recíprocos $\frac{1}{\operatorname{sen}}, \frac{1}{\operatorname{cos}}, \dots$; sin embargo, como estos valores tienen nombres especiales, á saber, cosecante, secante, ..., la ambigüedad desaparece.

(*) *Account of the Principal Triangulation*, pág. 245.

(2) Multiplicadas las dos fórmulas de Delambre

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - C)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} B} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a - c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b}, \quad \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A - C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} B} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a + c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b},$$

resulta

$$\frac{\operatorname{sen} (A - C)}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{cos} a - \operatorname{cos} c}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b};$$

por el primer miembro de esta igualdad puede escribirse

$$\cot C - \cot A = \frac{a^2 - c^2}{a b \operatorname{sen} C} \left(1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{12} \right),$$

$$c \frac{\operatorname{sen} (A - \frac{1}{3} \varepsilon)}{\operatorname{sen} (C - \frac{1}{3} \varepsilon)} = c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} + \frac{a}{6} (a^2 - c^2) \frac{2 \varepsilon}{a b \operatorname{sen} C},$$

$$\operatorname{sen}^{-1} \left(\operatorname{sen} c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \right) = c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} + \frac{a}{6} (a^2 - c^2) \left(1 - \frac{a^2}{20} + \frac{7c^2}{60} \right),$$

la segunda de ellas por ser pequeña ε^2 , que vale próximamente $\frac{1}{4} a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 C$; se tendrá

$$\partial a = \frac{a}{6} (a^2 - c^2) \left(\frac{2\varepsilon}{ab \operatorname{sen} C} - 1 + \frac{3a^2 - 7c^2}{60} \right).$$

Luego si calculamos ε por la fórmula $2\varepsilon = ab \operatorname{sen} C$, los errores de los lados obtenidos serán

$$\partial a = \frac{a}{360} (a^2 - c^2) (3a^2 - 7c^2), \quad (26)$$

$$\partial b = \frac{b}{360} (b^2 - c^2) (3b^2 - 7c^2);$$

$$(\cot C - \cot A) \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} \operatorname{sen} C,$$

y reemplazando

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}, \quad \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2},$$

se deduce

$$\cot C - \cot A = \frac{\cos c - \cos a}{\operatorname{sen} a \tan \frac{1}{2} b \operatorname{sen} C};$$

ó bien, substituyendo en vez de $\cos c$, $\cos a$ sus desarrollos hasta el tercer término, y en vez de $\operatorname{sen} a$, $\tan \frac{1}{2} b$ los suyos hasta el segundo,

$$\cot C - \cot A = \frac{a^2 - c^2}{a b \operatorname{sen} C} \cdot \frac{1 - \frac{a^2 + c^2}{12}}{1 - \frac{2a^2 - b^2}{12}},$$

de donde, efectuada la última división, sin pasar en ella de los términos de segundo orden, resulta la primera fórmula del texto.

En cuanto á la segunda, desarrollando el numerador y denominador de su primer miembro y dividiéndolos respectivamente por sus primeros términos, se tiene

mientras que si hacemos el cálculo de ε por la fórmula

$$\operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} C}{\cos \frac{1}{2} c},$$

ó lo que es lo mismo, por la fórmula

$$\varepsilon = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C \left(1 + \frac{3c^2 - a^2 - b^2}{24} \right),$$

los errores serán

$$\partial a = \frac{a}{720} (a^2 - c^2) (a^2 - 5b^2 + c^2) \quad (27)$$

$$\partial b = \frac{b}{720} (b^2 - c^2) (b^2 - 5a^2 + c^2).$$

Si por ejemplo, poniendo un caso numérico, los lados del triángulo fueran $a = 220$, $b = 180$, $c = 60$ millas, calculando por el primer método el exceso esférico, los errores de los lados obtenidos serían, en pies

$$\partial a = +0.068, \quad \partial b = +0.026,$$

mientras que por el segundo método serían

$$\partial a = -0.031, \quad \partial b = -0.030.$$

Pero de todos modos, como se ve, los errores que la aplicación

$$c \frac{\operatorname{sen} (A - \frac{1}{2} \varepsilon)}{\operatorname{sen} (C - \frac{1}{2} \varepsilon)} = c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \cdot \frac{1 - \tan \frac{1}{2} \varepsilon \cot A}{1 - \tan \frac{1}{2} \varepsilon \cot C},$$

ó bien, efectuada la última división indicada en el segundo miembro, prescindiendo de los términos en que $\tan \frac{1}{2} \varepsilon$ resulte elevada á potencia superior á la primera, á causa de la pequeñez relativa de ε ,

$$c \frac{\operatorname{sen} (A - \frac{1}{2} \varepsilon)}{\operatorname{sen} (C - \frac{1}{2} \varepsilon)} = c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} + c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \tan \frac{1}{2} \varepsilon (\cot C - \cot A);$$

y esta relación se transforma en la del texto, reemplazando en el último término, como valores suficientes, $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$ por $\frac{a}{c}$, $\tan \frac{1}{2} \varepsilon$ por $\frac{1}{2} \varepsilon$ y la diferencia de las cotangentes por el valor antes hallado, reducido á su primer término.

La tercera fórmula resulta de la serie

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots$$

del teorema de Legendre produce son de mínimo orden, y no pueden trascender en cálculos geodésicos.

Si dados a , b y C se quiere A , B y c , se tendrá en función de los datos, suponiendo $\varepsilon = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$,

$$\begin{aligned} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B) &= (a - b) \cos \frac{1}{2} (C - \frac{1}{2} \varepsilon), \\ c \cos \frac{1}{2} (A - B) &= (a + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (C - \frac{1}{2} \varepsilon), \\ \frac{1}{2} (A + B) &= 90^\circ - \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

8

Aplicase el teorema de Legendre del siguiente modo para determinar las coordenadas de varios puntos en una esfera. Sean P, P_1, P_2, \dots los vértices de un polígono esférico, cuyos lados y ángulos se dan. Trácese por P_1, P_2, \dots perpendiculares á la circunferencia máxima PM , y sean p_1, p_2, \dots los pies de estas perpendiculares. Tomando q_2 en P_2p_2 de manera que $p_2q_2 = P_1p_1$, trácese el arco de circunferencia máxima P_1q_2 . Designemos por s_1, s_2, \dots los lados PP_1, P_1P_2, \dots ; por $180 \pm \sigma_n$ el ángulo exterior y el interior del polígono, correspondientes al vértice P_n ; y por $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ los ángulos $P_1Pp_1, P_2P_1q_2, \dots$. Teniendo los triángulos $P_1Pp_1, P_2P_1q_2$, los siguientes ángulos y excesos esféricos

que aplicada á este caso da

$$\begin{aligned} &\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\operatorname{sen} c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \right) \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}^{-1} \left(\operatorname{sen} c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \right) \\ &= \operatorname{sen} c \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} + \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3 c \frac{\operatorname{sen}^3 A}{\operatorname{sen}^3 C} + \frac{3}{40} \operatorname{sen}^5 c \frac{\operatorname{sen}^5 A}{\operatorname{sen}^5 C} + \dots, \end{aligned}$$

en cuyo segundo miembro basta sustituir

$$\operatorname{sen} c = c - \frac{c^3}{6} + \frac{c^5}{120},$$

$$\operatorname{sen}^3 c = c^3 - \frac{c^5}{2}, \quad \operatorname{sen}^5 c = c^5,$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} = \frac{a}{c} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{6} \right),$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 A}{\operatorname{sen}^3 C} = \frac{a^3}{c^3} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{2} \right), \quad \frac{\operatorname{sen}^5 A}{\operatorname{sen}^5 C} = \frac{a^5}{c^5},$$

puesto que de los términos de orden superior al quinto debe prescindirse.

$$\begin{array}{l} P_1 P p_1 : \quad \alpha_1, \quad \frac{1}{2} \pi, \quad \beta_1, \quad \varepsilon_1; \\ P_2 P_1 q_2 : \quad \alpha_2, \quad \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \varepsilon', \quad \beta_2, \quad \varepsilon_2; \end{array}$$

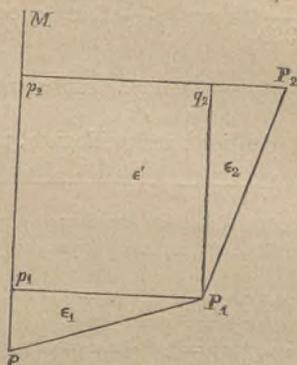


Fig. 42.

llamando ε' el exceso esférico del cuadrilátero $P_1 p_1 p_2 q_2$, será (1)

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 90^\circ - \alpha_1 + \varepsilon_1, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 - \sigma_1 - \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon', \\ \beta_2 &= \beta_1 + \sigma_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon'. \end{aligned}$$

Por último, si

$$\begin{array}{lll} P p_1 = x_1, & P_1 q_2 = x'_2, & P p_2 = x_2, \\ P_1 p_1 = y_1, & P_2 q_2 = y'_2, & P_2 p_2 = y_2, \end{array}$$

se tendrá en el triángulo $P_1 P p_1$, en virtud del teorema de Legendre,

$$x_1 = s_1 \frac{\cos(\alpha_1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1)}{\cos \frac{1}{3} \varepsilon_1}, \quad y_1 = s_1 \frac{\sin(\alpha_1 - \frac{1}{3} \varepsilon_1)}{\cos \frac{1}{3} \varepsilon_1}.$$

Mas en la práctica puede suprimirse el divisor $\cos \frac{1}{3} \varepsilon_1$, dejando

$$x_1 = s_1 \cos(\alpha_1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1), \quad y_1 = s_1 \sin(\alpha_1 - \frac{1}{3} \varepsilon_1). \quad (29)$$

(1) Pues la suma de los ángulos del triángulo $P_1 P p_1$, la de los ángulos reunidos en P y la de los ángulos del triángulo $P_2 P_1 q_2$ son respectivamente

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \frac{1}{2} \pi &= \pi + \varepsilon_1; \\ \beta_1 + (\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \varepsilon') + \alpha_2 &= \pi - \sigma_1, \\ \alpha_2 + \beta_2 + (\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \varepsilon') &= \pi + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Los errores de estas últimas expresiones, si se calcula ε_1 por la fórmula $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} s^2 \text{sen } \alpha_1 \cos \alpha_1$, serán (1)

$$\partial y_1 = \frac{s^5}{360} (22 \text{sen } 2\alpha_1 - 3) \text{sen } \alpha_1 \cos^2 \alpha_1,$$

$$\partial x_1 = \frac{s^5}{90} (1 - 13 \text{sen } 2\alpha_1) \text{sen}^2 \alpha_1 \cos \alpha_1;$$

que ascienden á una cantidad insignificante, pues para una dis-

(1) Cuando de los términos de orden superior al segundo se puede prescindir, se tienen, suprimiendo los subíndices para mayor rapidez, las equivalencias

$$x = s \cos \alpha, \quad y = s \text{sen } \alpha,$$

$$xy = s^2 \text{sen } \alpha \cos \alpha,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} s^2 \text{sen } \alpha \cos \alpha;$$

mas cuando el cálculo debe comprender hasta los términos de cuarto, las igualdades son las siguientes:

$$x = s (\cos \alpha + \frac{2}{3} \varepsilon \text{sen } \alpha), \quad y = s (\text{sen } \alpha - \frac{1}{3} \varepsilon \cos \alpha),$$

$$xy = s^2 \text{sen } \alpha \cos \alpha [1 + \frac{1}{3} s^2 (3 \text{sen}^2 \alpha - 1)],$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} xy \left(1 + \frac{s^2}{12}\right) = \frac{1}{2} s^2 \text{sen } \alpha \cos \alpha [1 + \frac{1}{12} s^2 (6 \text{sen}^2 \alpha - 1)],$$

formada la penúltima reemplazando en el producto de las dos anteriores en vez de ε el valor dado para el primer caso, y deducida la última de la fórmula

$$\varepsilon = \frac{1}{2} a b \text{sen } C \left(1 + \frac{3c^2 - a^2 - b^2}{24}\right),$$

sustituyendo $C = \frac{1}{2} \pi$, $a = x$, $b = y$, $c = s$ y como valor bastante aproximado $x^2 + y^2 = s^2$.

Esto supuesto: 1.º, si en vez de calcular x , y directamente por las fórmulas de los triángulos esféricos, se hallan por las de Legendre, es decir, por las relaciones

$$x = s \frac{\cos(\alpha - \frac{2}{3} \varepsilon)}{\cos \frac{1}{3} \varepsilon}, \quad y = s \frac{\text{sen}(\alpha - \frac{1}{3} \varepsilon)}{\cos \frac{1}{3} \varepsilon},$$

se cometerán, según la fórmula

$$\partial a = \frac{a}{720} (a^2 - c^2) (a^2 - 5b^2 + c^2),$$

sustituyendo $c = s$ y $a = x$, $b = y$ ó viceversa, los errores

$$\partial_1 x = \frac{s^5}{360} (-1 + 3 \text{sen}^2 \alpha) \text{sen}^2 \alpha \cos \alpha,$$

$$\partial_1 y = \frac{s^5}{360} (-3 \text{sen}^2 \alpha + 2) \text{sen } \alpha \cos^2 \alpha,$$

diferencias entre los valores actuales y los directos;

tancia s de 3° llegarían á lo sumo á $0''.0007$ y $0''.0027$ respectivamente.

A su vez, en el triángulo $P_2P_1Q_2$ se tendrá (¹)

$$x'_2 = s_2 \cos(\alpha_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon'), \quad y'_2 = s_2 \sin(\alpha_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2);$$

siendo $\varepsilon' = x'_2 y_1$; y finalmente

$$y_2 = y_1 + y'_2, \quad x_2 = x_1 + x'_2 + \frac{1}{3}y_1\varepsilon', \quad (30)$$

2.º Si en vez de las fórmulas de Legendre, se emplean estas otras más sencillas

$$w = s \cos(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon) \quad y = s \sin(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon),$$

es decir, si se suprime en aquellas el factor

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{3}\varepsilon} = 1 + \frac{1}{18}\varepsilon^2 = 1 + \frac{1}{36}\frac{s^4}{2}\sin^2\alpha \cos^2\alpha,$$

se cometerán nuevos errores

$$\partial_2 w = \frac{s^5}{360}(-5 + 5\sin^2\alpha)\sin^2\alpha \cos\alpha,$$

$$\partial_2 y = \frac{s^5}{360}(-5\sin^2\alpha)\sin\alpha \cos^2\alpha,$$

diferencias entre los valores presentes y los anteriores;

Y 3.º Si para mayor sencillez todavía, en lugar de sustituir en las fórmulas precedentes

$$\varepsilon = \frac{1}{2}s^2 \sin\alpha \cos\alpha [1 + \frac{1}{12}s^2(6\sin^2\alpha - 1)],$$

se reduce el valor de ε al primer término, aun se cometerán otros errores

$$\partial_3 w = \frac{s^5}{360}(10 - 60\sin^2\alpha)\sin^2\alpha \cos\alpha,$$

$$\partial_3 y = \frac{s^5}{360}(30\sin^2\alpha - 5)\sin\alpha \cos^2\alpha,$$

diferencias entre los valores actuales y los que anteceden.

En su consecuencia los errores totales de los últimos valores respecto de los directos serán

$$\text{esto es,} \quad \partial w = \partial_1 w + \partial_2 w + \partial_3 w, \quad \partial y = \partial_1 y + \partial_2 y + \partial_3 y,$$

$$\partial w = \frac{s^5}{90}(1 - 13\sin^2\alpha)\sin^2\alpha \cos\alpha,$$

$$\partial y = \frac{s^5}{360}(22\sin^2\alpha - 3)\sin\alpha \cos^2\alpha.$$

(¹) El valor inmediato de x'_2 es

$$x'_2 = s_2 \sin(\beta_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2);$$

mas sustituyendo el valor de β_2 , deducido de la relación consignada en la primera nota de este párrafo, pág. 69,

$$\alpha_2 + \beta_2 + (\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\varepsilon') = \pi + \varepsilon_2,$$

resulta la fórmula del texto.

deduciéndose de la relación (11) la última expresión (1).

9

Como es de importancia, tanto en cálculos geodésicos como en otros, el desarrollo en serie de $(1 + 2n \cos \theta + n^2)^{-s}$ según los cosenos de los múltiplos de θ , le daremos aquí. Poniendo

$z = e^{\theta\sqrt{-1}}$, con lo cual (2) $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ y $z^r + \frac{1}{z^r} = 2 \cos r\theta$, tendremos

$$(1 + 2n \cos \theta + n^2)^{-s} = (1 + nz)^{-s} \left(1 + \frac{n}{z}\right)^{-s},$$

$$= \left\{1 - snz + \frac{s(s+1)}{2} n^2 z^2 - \dots\right\} \left\{1 - s\frac{n}{z} + \frac{s(s+1)n^2}{2z^2} - \dots\right\};$$

y efectuando la multiplicación

$$= 1 + s^2 n^2 + \frac{s^2(s+1)^2}{1 \cdot 2^2} n^4 + \dots$$

$$- \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(sn + \frac{s^2(s+1)}{1 \cdot 2} n^3 + \dots\right)$$

$$+ \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \left(\frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} n^2 + \frac{s^2(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^4\right)$$

$$- \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) \left(\frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 + \dots\right).$$

(1) Aplicada la relación (11) al cuadrilátero $P_1 p_1 p_2 q_2$, da, reemplazadas las tangentes por los arcos,

$$\frac{1}{4}(p_1 p_2 - w'_2) = \frac{1}{4} \gamma_1 \cdot \frac{1}{4} \epsilon'_1,$$

de donde

$$p_1 p_2 = w'_2 + \frac{1}{4} \gamma_1 \epsilon'_1.$$

(2) En efecto,

$$z = e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta,$$

$$\frac{1}{z} = e^{-\theta\sqrt{-1}} = \cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta,$$

$$z^r = e^{r\theta\sqrt{-1}} = \cos r\theta + \sqrt{-1} \sin r\theta,$$

$$\frac{1}{z^r} = e^{-r\theta\sqrt{-1}} = \cos r\theta - \sqrt{-1} \sin r\theta.$$

Mas el término con n^4 , aun cuando aquí se conserva, no será menester para nuestro objeto. Entre los casos particulares de esta fórmula merecen especialmente nuestra atención los dos siguientes, que corresponden á $s = \frac{1}{2}$ y $s = \frac{3}{2}$,

$$(1 + 2n \cos \theta + n^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2^2} n^2 + \frac{3^2}{2^6} n^4 + \dots \quad (31)$$

$$- \cos \theta \left(n + \frac{3}{2^3} n^3 + \dots \right)$$

$$+ \cos 2 \theta \left(\frac{3}{2^2} n^2 + \frac{5}{2^4} n^4 + \dots \right)$$

$$- \cos 3 \theta \left(\frac{5}{2^3} n^3 + \dots \right);$$

$$\vdots$$

$$(1 + 2n \cos \theta + n^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3^2}{2^2} n^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2} n^4 + \dots \quad (32)$$

$$- \cos \theta \left(3n + \frac{3^2 \cdot 5}{2^3} n^3 + \dots \right)$$

$$+ \cos 2 \theta \left(\frac{3 \cdot 5}{2^2} n^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4} n^4 + \dots \right)$$

$$- \cos 3 \theta \left(\frac{5 \cdot 7}{2^3} n^3 + \dots \right).$$

El desarrollo del logaritmo es

$$\begin{aligned} \log(1 + 2n \cos \theta + n^2) &= \log(1 + n z) + \log\left(1 + \frac{n}{z}\right) \\ &= M \left\{ n \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{n^2}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{n^3}{3} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) - \dots \right\}, \\ &= 2M \left\{ n \cos \theta - \frac{n^2}{2} \cos 2 \theta + \frac{n^3}{3} \cos 3 \theta - \dots \right\}; \quad (33) \end{aligned}$$

siendo M el módulo del sistema vulgar de logaritmos.

$$\text{Log } M = 9.6377843.$$

100

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

CAPÍTULO III

MÍNIMOS CUADRADOS

El método de los mínimos cuadrados (¹), vislumbrado por Simpson y D. Bernoulli, fué dado á conocer en 1806 por Legendre, si bien antes, en 1795, había sido empleado por Gauss, quien en su *Theoria Motus*, etc., 1809, publicó por primera vez la ley, bien sabida al presente, de la mayor ó menor posibilidad de ocurrir los errores, según su magnitud, fundando el método de los mínimos cuadrados en la teoría de las probabilidades. Fué en seguida tratado el asunto muy á fondo por Laplace en su *Théorie analytique des probabilités*. Pero esta materia ofrece no pocas dificultades matemáticas, y sólo podemos dar aquí las nociones más elementales.

1

Los resultados de estudios geodésicos, ora se midan distancias entre puntos, ora se determinen azimutes ó latitudes, adolecen

(¹) Este método es «un medio poderoso de discusión que los sabios utilizan para ver hasta qué punto se ajustan á la realidad sus fórmulas y teorías, ó para hallar con la mayor exactitud números en la ciencia fundamentales. Cuando, por ejemplo, hay que comparar las medidas geodésicas de arcos de meridiano, á costa de grandes gastos verificadas en los diversos continentes con objeto de hallar la verdadera figura del globo, por el método de los mínimos cuadrados deben depurarse las ecuaciones de condición, aunque el cálculo dure meses enteros y requiera numeroso personal de calculadores». (Faye, *Cours d'Astronomie*, tomo I, pág. 236.)

de errores que son funciones lineales de los de observación (¹); de suerte que la precisión de esos resultados depende, en primer lugar, de la precisión de las medidas angulares y lineales, y en segundo de la manera como estas medidas entran en ellos. Fijémonos primeramente en las observaciones de un solo ángulo. A fin de desvanecer los errores constantes que se producirán, por ejemplo, por causa de los errores de graduación y por alguna particularidad de la luz al caer sobre las dos señales cuyo ángulo se quiere precisar, se repiten las observaciones, empleando partes distintas del círculo, á diversas horas del día y en días diferentes; porque por experiencia sabe el observador que, siendo probable que existan causas ignoradas de error constante, es inútil repetir la misma medición gran número de veces sucesivas precisamente bajo las mismas circunstancias. Hechas, pues, cuidadosamente muchas y variadas mediciones, es de presumir que el promedio aritmético, si no es el verdadero valor del ángulo, sea en cierto modo el más probable; y las diferencias entre cada observación y el promedio de ellas serán los errores al parecer cometidos en la serie de éstas. Claro es que la suma de tales errores será cero, y que los signos positivo y negativo serán igualmente probables;

(¹) Aunque la función $f(X, Y, Z \dots)$ que enlaza las magnitudes medidas ú observadas con las incógnitas X, Y, Z, \dots no suele ser lineal, sin embargo, como de estas incógnitas siempre cabe obtener en la práctica valores aproximados X_0, Y_0, Z_0, \dots , si $X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \dots$ son sus valores precisos, cada medida ú observación de dichas magnitudes dará en virtud de la fórmula de Taylor una ecuación

$$f(X, Y, Z, \dots) - f(X_0, Y_0, Z_0, \dots) = \frac{df}{dX_0} x + \frac{df}{dY_0} y + \frac{df}{dZ_0} z + \dots,$$

donde no habrá necesidad de los coeficientes más elevados si x, y, z, \dots son cantidades pequeñas, esto es, si los valores aproximados de las incógnitas se acercan bastante á la verdad. Luego llamando m el primer miembro con signo contrario, es decir, la diferencia entre el valor calculado $f(X_0, Y_0, Z_0, \dots)$ y el valor medido ú observado $f(X, Y, Z, \dots)$, diferencia dada, y a, b, c, \dots los coeficientes $\frac{df}{dX_0}, \frac{df}{dY_0}, \frac{df}{dZ_0}, \dots$, cantidades también conocidas, se obtendrán ecuaciones como ésta

$$ax + by + cz + \dots + m = 0,$$

lineales con respecto á las nuevas incógnitas x, y, z, \dots

además, es principio ó hecho de observación que si esos errores se escriben por orden de magnitud, se verá que los más pequeños acontecen en mayor número que los crecidos, y que, descartadas las equivocaciones, no ocurren errores grandes ó que excedan de cierto límite, siquiera éste no se precise bien. Todo, por consiguiente, induce á creer en la posibilidad de que en la distribución de los errores exista una ley; y suponiendo indefinido el número de observaciones, y que pasen los errores por gradaciones infinitamente pequeñas, se concibe que el número ydx de los comprendidos entre las magnitudes x y $x + dx$ pueda expresarse por una relación tal como $ydx = \varphi(x^2) dx$ que sea la misma para los valores positivos y negativos de x , debiendo además disminuir rápidamente conforme x vaya en aumento. En esta ley indicará ydx también la probabilidad (1) de un error acaecido entre x y

(1) Si en n observaciones cabe cometer p veces el error x , la probabilidad $\psi(x^2)$ de que tal error se padezca en una observación, al acaso, será $\frac{p}{n}$; luego si x, x_1, x_2, \dots son todos los diferentes errores que en dichas n pueden ocurrir, será

$$\Sigma \psi(x^2) = \psi(x^2) + \psi(x_1^2) + \psi(x_2^2) + \dots = \frac{p + p_1 + p_2 + \dots}{n} = \frac{n}{n} = 1;$$

y en efecto, así como la probabilidad siempre es una fracción, la certidumbre es la unidad, y claro es que en cualquiera de esas observaciones uno ú otro de dichos errores se debe cometer. Esto sentado, cuando los errores formen una serie continua, esto es, de gradaciones infinitamente pequeñas, el número de casos posibles será infinito y la probabilidad de incurrir en un error comprendido entre x y $x + dx$ estará expresada por un número infinitamente pequeño. Luego, siendo entonces $\psi(x^2) = \varphi(x^2) dx$, la probabilidad de un error comprendido entre límites finitos será, como suma de las diversas probabilidades particulares, una integral, esto es,

$$\Sigma_a^b \psi(x^2) = \int_a^b \varphi(x^2) dx.$$

En su consecuencia, entre los límites extremos de los errores $-l$ y $+l$ ó entre $-\infty$ y $+\infty$, puesto que entre $-l$ y $-\infty$ y entre $+l$ y $+\infty$ puede decirse que no hay ningún error, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2) dx = 1.$$

$x+dx$, si la integral de ydx entre los límites $\pm\infty$ se toma por 1.

Varios caminos se han seguido para hallar qué clase de función sea φ , y aunque cada investigación ofrece sus dificultades y puntos controvertibles, todas vienen á parar al mismo resultado. Expondremos aquí el método propuesto por Sir John Herschel, aun cuando no á todos parezca enteramente riguroso. Supongamos que se deje caer una piedra para que dé contra una señal en el suelo, indicada, por ejemplo, por la intersección de dos rectas perpendiculares. Tomándolas por ejes de coordenadas x , y , el azar de que la piedra caiga entre las distancias x , $x+dx$ al eje y será $\varphi(x^2)dx$, y el azar de que caiga entre las distancias y , $y+dy$ al eje x será $\varphi(y^2)dy$. Luego considerando estos sucesos como independientes, la contingencia de que la piedra caiga en el rectángulo $dx dy$ ⁽¹⁾ será $\varphi(x^2) \varphi(y^2) dx dy$ ó bien $\varphi(x^2)\varphi(y^2)d\sigma$, representando $d\sigma$ un elemento de área en torno del punto xy . Pero este azar no depende de la dirección particular de los ejes; luego si x' , y' son otras coordenadas de dicho punto referidas al mismo origen, debe ser

$$\varphi(x^2)\varphi(y^2) = \varphi(x'^2)\varphi(y'^2),$$

si á la par se verifica $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Solución completa á tal condición da $\varphi(x^2) = C e^{cx^2}$, y como $\varphi(x^2)$ ha de disminuir conforme x aumente, c debe ser negativa; pongamos, pues, $-1:c^2$ en lugar de c . De aquí, puesto que la integral de $\varphi(x^2)dx$ entre $\pm\infty$ será la unidad, y además ⁽²⁾

⁽¹⁾ La probabilidad de la coexistencia de dos ó más sucesos independientes es igual al producto de sus probabilidades por separado. Por ejemplo, si en una caja hay diez bolas, dos negras y las restantes blancas, y en otra diez, tres encarnadas y las demás blancas, al sacar dos, una de cada caja, es claro que los casos posibles serán 10·10; pero los casos en que una bola negra resulte con una encarnada, sólo serán 2·3, luego la probabilidad de que tal combinación ocurra será

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10}.$$

⁽²⁾ Pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c^2}} dx = c\sqrt{\pi}, \quad (1)$$

se infiere que $C c \sqrt{\pi} = 1$. Luego la probabilidad de un error comprendido entre x y $x + dx$ será

$$y dx = \frac{dx}{c\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{c^2}}; \quad (2)$$

y esta fórmula dará también el número de errores entre x y $x + dx$, tomando por unidad el valor total (1).

2

Si μ_1 es el promedio de todos los errores, prescindiendo de su signo, y μ_2 el promedio de sus cuadrados, se tendrá (2)

indicando $\Gamma(n)$ la integral euleriana

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^{n-1} dz,$$

en la cual se incluye la propuesta, poniendo $z = x^2$ y $n = \frac{1}{2}$.

(1) Las áreas de la curva

$$y = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{c^2}},$$

limitadas entre las diversas ordenadas, darán en su medida números iguales á los de errores comprendidos entre los números que expresen las abscisas correspondientes á dichas ordenadas. Tal curva, simétrica con respecto al eje de ordenadas, corta este eje á una distancia del origen

$$y_0 = \frac{1}{c\sqrt{\pi}}.$$

En dicho punto la curva presenta su concavidad hacia el eje de las x . En los puntos cuyas abscisas son

$$x_1 = \pm \frac{c}{\sqrt{2}} = \pm 0.7071 c,$$

valores que anulan la derivada segunda, hay inflexión. Las dos ramas de la curva se aproximan después rápidamente hacia el eje de las x , que es asíntota de ambas.

(2) El número de errores comprendidos entre x y $x + dx$, es decir, iguales á x , apreciándolos en números finitos, es

$$\mu_1 = \frac{2}{c\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c^2}} x dx = \frac{c}{\sqrt{\pi}}, \quad (3)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c^2}} x^2 dx = \frac{c^2}{2}.$$

Llámase la cantidad c el módulo (*) del sistema á causa de la íntima relación que existe entre ella y los valores medios de los errores. Este módulo es grande ó pequeño, conforme las observaciones son toscas ó delicadas.

$$y dx = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{c^2}} dx,$$

y como existe el mismo número de errores iguales á $-x$, la suma de los valores absolutos de unos y otros será

$$x \cdot 2y dx = \frac{2}{c\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{c^2}} x dx$$

y la suma de sus cuadrados

$$x^2 \cdot 2y dx = \frac{2}{c\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{c^2}} x^2 dx;$$

por lo tanto, el promedio μ_1 de todos los errores sin distinción de signo será la integral de la penúltima expresión y el promedio μ_2 de los cuadrados de todos ellos la integral de la última, tomadas ambas integrales entre los límites extremos.

Ahora bien:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} dz = \left(-e^{-z} \right)_0^{\infty} = 1;$$

luego

$$\frac{2}{c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c^2}} x dx = c \quad \text{y} \quad \mu_1 = \frac{c}{\sqrt{\pi}}.$$

En cuanto á la integral

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c^2}} x^2 dx,$$

se incluye en la euleriana $\Gamma(n)$ citada en la nota (2), pág. 78, poniendo

(*) Airy, *Theory of Errors of observation*, pág. 15.

Como según la relación (2), el número de errores cuya magnitud absoluta está comprendida entre 0 y tc es (1)

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{tc} e^{-t^2} dt, \quad (4)$$

se han formado tablas que dan para todos los valores de t los de esta importante integral (2); y esas tablas manifiestan que el número de errores menores que $\frac{1}{2}c$, c , $2c$ son respectivamente

$$N_{\frac{1}{2}c} = .520, \quad N_c = .843, \quad N_{2c} = .995;$$

por donde se ve que sólo cinco entre mil exceden á $2c$. Hay un

$x = x^2$, $n = \frac{3}{2}$; y en virtud de la propiedad de estas integrales $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$, será

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

luego

$$\frac{2}{c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c^2}} x^2 dx = \frac{c^2}{2} \sqrt{\pi} \quad \text{y} \quad \mu_2 = \frac{c^2}{2}.$$

(1) El número de errores cuyo valor absoluto está comprendido entre 0 y tc es

$$N = \frac{2}{c\sqrt{\pi}} \int_0^{tc} e^{-\frac{t^2}{c^2}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{tc} e^{-\left(\frac{t}{c}\right)^2} \frac{dt}{c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt;$$

luego en el sistema cuyo módulo sea c , los errores entre 0 y tc serán tan probables como en el sistema de módulo c_1 los errores entre 0 y tc_1 ; por ejemplo, si $c_1 = 2c$, cabrán en el segundo sistema, con el mismo grado de probabilidad, errores dobles que en el primero. También suele escribirse

$c = \frac{1}{h}$, y es claro que dando c la medida del error de un sistema, dará h la medida de su precisión; es decir, que un sistema de observaciones será tanto más erróneo cuanto mayor sea c , y tanto más exacto cuanto mayor sea h .

(2) Desarrollando en serie la exponencial é integrando, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-t^2} dt &= t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{t^5}{5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{t^7}{7} + \dots \\ &+ \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \dots; \end{aligned}$$

cierto error, que llamaremos $c' = \rho c$, para el cual $N = \frac{1}{2}$; es decir, que la mitad de los errores son mayores que c' y la otra mitad son menores. Este error c' se llama el *error probable*, porque la misma probabilidad existe de un error superior á él que de otro inferior; la fracción ρ , deducida de las tablas de la fórmula, es .477. Mas la expresión (4) da también el número de errores acaecidos entre 0 é ic' , haciendo $t = i\rho$, y si suponemos sucesivamente $i = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5$, los valores de N serán

$$.264, \quad .500, \quad .823, \quad .957, \quad .993, \quad .999;$$

es decir, fijándonos en el penúltimo, que siete errores entre mil excederán al cuádruplo del error probable (1). Infírese de la segunda ecuación (3) que $c' = \pm 0.674 \mu_2^{\frac{1}{2}}$.

serie convergente, aunque lenta cuando el valor de t es algo crecido. Mas puede hallarse entonces el valor de la integral por la igualdad

$$\int_0^t e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_t^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

aplicando al último término la fórmula de Laplace, con lo cual se tiene,

$$\text{poniendo } q = \frac{1}{2t^2},$$

$$\int_0^t e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2te^{t^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \dots}}}}$$

(1) Luego el grado de precisión de una serie de observaciones análogas puede inferirse, en virtud de las relaciones

$$c = \frac{1}{h} = \sqrt{\pi} \mu_1 = \sqrt{2} \sqrt{\mu_2} = \frac{1}{\rho} c',$$

bien de la cantidad c , medida del error, bien de su inversa h , medida de la precisión, ó bien de cualquiera de estas otras cantidades: 1.^a, del *promedio* μ_1 de los errores, no considerado en todos ellos más que su valor absoluto; 2.^a, del llamado *error medio*, ó sea del error $\sqrt{\mu_2}$ cuyo cuadrado es el promedio de los cuadrados de todos los errores, y 3.^a, del error probable c' , esto es, del que con signo + ocupa el lugar medio de la serie de los errores positivos y con signo - el lugar medio de la serie de los negativos, puestos unos y otros por orden de magnitud sin omitir ninguno de los que resulten iguales.

3

Si aX es un múltiplo de una cantidad observada X , cuyas observaciones tienen c por módulo, es claro que el módulo correspondiente al sistema de errores de aX será ac (1).

El error probable de la suma de dos cantidades afectadas de errores independientes es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus errores probables separados. Así, siendo $X+Y=Z$ y a, b los módulos respectivos de los sistemas de errores en X, Y , la ley de probabilidad de errores en Z será la misma función φ que antes, pero con un módulo $=\sqrt{a^2+b^2}$.

Porque siendo el error z en Z la suma de un error x del primer sistema y de otro error $y = z - x$ del segundo sistema, el azar de que ocurran á la vez un error entre x y $x + dx$ y otro entre $z - x$ y $z - x + dz$ será (2)

$$\frac{1}{\pi a b} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{b^2}} dz = \frac{dz}{\pi a b} e^{-\frac{z^2}{a^2+b^2}} e^{-\frac{a^2+b^2}{a^2 b^2} \left(x - \frac{za^2}{a^2+b^2}\right)^2} dx.$$

Mas para incluir todas las combinaciones, esta expresion ha de

(1) Como las cantidades $c = \frac{1}{h}, \mu_1, \sqrt{\mu_2}$ y c' sólo difieren por factores ó coeficientes constantes, claro es que las relaciones que existan entre los módulos de dos series de observaciones, esto es, entre los valores inversos de sus medidas de precisión, existirán también entre sus promedios de errores, sus errores medios y sus errores probables. Por ejemplo, puesto que siendo c el módulo de X , el de aX es ac ; á su vez, si c' es el error probable de X , el de aX será ac' .

(2) Siendo a el módulo de X , la probabilidad de que en una medida de X se cometa un error comprendido entre x y $x + dx$ será

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx,$$

y siendo b el módulo de Y , la probabilidad de que en una medida de Y se cometa un error comprendido entre $y = z - x$ é $y + dy = z - x + dz$, será

$$\frac{1}{b\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{b^2}} dz;$$

integrarse, considerando z como constante, desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$. Recordando, pues, la integral (1), la probabilidad de un error entre z y $z + dz$ será

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{a^2+b^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

reproduciéndose con esto la función φ .

Obtendriase el mismo resultado si $X - Y = Z$, y puede extenderse el principio á cualquier número de cantidades. En su consecuencia, si U es la media de i medidas de una cantidad, y el

luego la probabilidad de que ambos errores se cometan á la vez, el uno en X y el otro en Y , será el producto de ambas probabilidades, ó sea la primera expresión del texto, de la cual se pasa á la segunda por la transformación

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(z-x)^2}{b^2} &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) x^2 - 2 \frac{xz}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \left(x - \frac{z a^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, igualando á u la raíz cuadrada del primer término de esta suma, la integral, con relación á x , y entre los límites $-\infty$ y $+\infty$, de la segunda expresión del texto, equivaldrá á

$$\begin{aligned} \frac{dz}{\pi a b} e^{-\frac{z^2}{a^2+b^2}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \\ \frac{dz}{\pi a b} e^{-\frac{z^2}{a^2+b^2}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{a^2+b^2}} dz; \end{aligned}$$

pero ésta es, según la misma ley general, la probabilidad de que en Z se cometa un error comprendido entre z y $z + dz$, si el módulo de Z es $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Y la misma relación existirá entre los errores μ , $\sqrt{\mu_x}$ y c' de Z y los errores análogos de X é Y ; es decir, que si se suponen formadas las tres listas de errores posibles en X , Y , Z , procedentes los de esta última de la suma algebraica de todos los errores de X con cada uno de los de Y , el promedio de errores, el error medio y el error probable, relativos á la tercera lista, serán la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las cantidades análogas en las dos listas primeras.

módulo de ellas c , la ley de probabilidad de error de U tendrá por módulo (1)

$$\left(\frac{c^2}{i^2} + \frac{c^2}{i^2} + \frac{c^2}{i^2} + \dots\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{i}};$$

y asimismo, si c' es el error probable de una sola observación, el del promedio de i observaciones será $c' : \sqrt{i}$.

Llámase la fracción $i : c^2$ el peso w de la determinación ó medida de U (2); por tanto, $w = i : 2\mu_2$ y la probabilidad de un error x en U será

$$ydx = \left(\frac{w}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-wx^2} dx. \quad (5)$$

Así también, el módulo del error en aU será $a : \sqrt{w}$.

4.

Si $U_0 = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots$ es una función lineal de cantidades medidas U_1, U_2, \dots , cuyos pesos son w_1, w_2, \dots , y los errores pro-

(1) Porque

$$U = \frac{U_1 + U_2 + \dots}{i} = \frac{U_1}{i} + \frac{U_2}{i} + \dots;$$

y puesto que c es el módulo de las medidas U_1, U_2, \dots , el de $\frac{U_1}{i}, \frac{U_2}{i}, \dots$, será $\frac{c}{i}$ en virtud del primer principio establecido en el párrafo 3. Siendo, pues,

el módulo del promedio $c_1 = \frac{c}{\sqrt{i}}$, será $h_1 = h \sqrt{i}$, puesto que $h = \frac{1}{c}$; luego

en los promedios mengua el error, ó bien crece la precisión, no como el número de medidas, sino solamente como la raíz cuadrada de este número.

(2) Cuando en el mismo lenguaje vulgar se quiere encarecer la exactitud de una observación, se dice que vale por dos ó bien que es una observación de peso. Esta idea puede generalizarse suponiendo que las medidas ú observaciones propuestas se comparan con otras imaginadas, cuya medida de precisión h ó su cantidad inversa el módulo c se toman por tipo ó unidad, pues es claro que dado un valor de una medida ú observación, habrá de efectuarse mayor ó menor número de esas medidas ú observaciones ideales para que su promedio alcance precisión igual á la del valor hallado. Tal número w es el peso de este valor. Pero si $\frac{c}{\sqrt{i}}$ es el módulo del mis-

bables $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$; infiérese de lo demostrado en el párrafo precedente que el módulo de U_0 será

$$\left(\frac{a_1^2}{w_1} + \frac{a_2^2}{w_2} + \frac{a_3^2}{w_3} + \dots \right)^{\frac{1}{2}};$$

y el error probable de U_0

$$\pm (a_1^2 \varepsilon_1^2 + a_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} = \pm \rho \left(\frac{a_1^2}{w_1} + \frac{a_2^2}{w_2} + \frac{a_3^2}{w_3} + \dots \right)^{\frac{1}{2}};$$

de lo cual podemos hacer una importante aplicación. En efecto, en cálculos geodésicos ocurre muchas veces tener que determinar un sistema de incógnitas x, y, z, \dots , por ecuaciones de la forma

$$a_1x + b_1y + c_1z + \dots + m_1 = 0, \quad (6)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + \dots + m_2 = 0,$$

y así sucesivamente, siendo el número de ecuaciones mayor que el de incógnitas. Los coeficientes son números dados, y m_1, m_2, \dots , cantidades observadas, cuyos pesos son w_1, w_2, \dots . A causa de los errores padecidos en m_1, m_2, \dots , las ecuaciones no son exactas, porque en realidad en los segundos miembros debiera reemplazarse el cero por e_1, e_2, \dots , errores verdaderos de m_1, m_2, \dots . Luego para compensarlo debe hacerse derivar cada una de las incógnitas de todas las observaciones: para ello multiplíquense las ecuaciones por ciertos factores k_1, k_2, \dots , con la condición de que sumando se tenga

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \dots = 1, \quad (7)$$

$$k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 + \dots = 0,$$

$$k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 + \dots = 0,$$

&;

mo, se tendrá, según lo expuesto, $\frac{c}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{w}}$; luego $w = \frac{i}{c^2}$ ó bien $w = \frac{i}{2\mu_1}$,

siendo $\sqrt{\frac{\mu_2}{i}}$ el error medio de dicho valor. Por donde se ve que los pesos de dos medidas ú observaciones están en razón inversa de los cuadrados de sus errores medios, y á este propósito conviene notar su diferencia respecto de las medidas de precisión h que están en razón inversa de esos errores medios no elevados al cuadrado.

resultará entonces

$$x + k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3 \dots = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 \dots,$$

y puesto que el error probable de x será

$$\pm \rho \left(\frac{k_1^2}{w_1} + \frac{k_2^2}{w_2} + \frac{k_3^2}{w_3} + \dots \right)^{\frac{1}{2}},$$

determinemos esos valores de k de manera que tal expresión sea un mínimo que cumpla con las condiciones (7). Si para simplificar, y porque en realidad es el caso más común, suponemos que las observaciones son del mismo peso, entonces lo que habrá de hacerse un mínimo será la suma $k_1^2 + k_2^2 + \dots$. Ahora bien, diferenciando esta expresión y las ecuaciones (7), se tiene

$$0 = k_1 dk_1 + k_2 dk_2 + k_3 dk_3 \dots,$$

$$0 = a_1 dk_1 + a_2 dk_2 + a_3 dk_3 \dots,$$

$$0 = b_1 dk_1 + b_2 dk_2 + b_3 dk_3 \dots,$$

y así prosiguiendo. Mas si adoptando el método que se acostumbra en el cálculo diferencial, se multiplican estas ecuaciones por los factores $-1, \lambda_1, \lambda_2, \dots$, se suman después todas ellas y se igualan á cero los coeficientes de dk_1, dk_2, dk_3, \dots , resultará

$$k_1 = a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_3 + \dots,$$

$$k_2 = a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + c_2 \lambda_3 + \dots,$$

$$k_3 = a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 + \dots,$$

&

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (7) y designando por (ab) la suma $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$ y análogamente las demás, de manera, por ejemplo, que (aa) represente la suma de los cuadrados de las a , se tendrá

$$1 = (aa) \lambda_1 + (ab) \lambda_2 + (ac) \lambda_3 + \dots,$$

$$0 = (ab) \lambda_1 + (bb) \lambda_2 + (bc) \lambda_3 + \dots,$$

$$0 = (ac) \lambda_1 + (bc) \lambda_2 + (cc) \lambda_3 + \dots,$$

&

Mas si ∇ es la determinante de los coeficientes de estas ecuaciones, $[aa]$ la determinante menor correspondiente á (aa) etc., será

$$\nabla \lambda_1 = [a a], \quad \nabla \lambda_2 = [a b], \quad \nabla \lambda_3 = [a c];$$

por lo tanto

$$\nabla k_1 = a_1 [a a] + b_1 [a b] + c_1 [a c] \dots,$$

$$\nabla k_2 = a_2 [a a] + b_2 [a b] + c_2 [a c] \dots,$$

$$\nabla k_3 = a_3 [a a] + b_3 [a b] + c_3 [a c] \dots,$$

&

de donde, multiplicando por m_1, m_2, \dots , y sumando, se infiere (1)

$$0 = \nabla x + (am) [a a] + (bm) [a b] + (cm) [a c] \dots$$

Pero tanto esta expresión como las simétricas de $\nabla y, \nabla z, \dots$, son las que obtendríamos resolviendo las ecuaciones

$$(aa)x + (ab)y + (ac)z + \dots (am) = 0, \quad (8)$$

$$(ab)x + (bb)y + (bc)z + \dots (bm) = 0,$$

$$(ac)x + (bc)y + (cc)z + \dots (cm) = 0,$$

&

á las cuales habríamos llegado si nos hubiéramos propuesto determinar x, y, z, \dots , de manera que la suma de los cuadrados de los errores $\Sigma (e^2)$ ó

$$\Sigma (ax + by + cz \dots + m)^2$$

fuera un mínimo (2). Discurriendo análogamente, cuando fue-

(1) Luego si en la expresión

$$x = -(k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3 + \dots)$$

los errores posibles en m_1 y los que puedan afectar á m_2, m_3, \dots , se combinan de todas maneras, tomando uno de cada serie y suponiendo en todas ellas el mismo error probable; en la lista de errores que por consecuencia de tales combinaciones resulten para x , el error probable cuando los factores k_1, k_2, \dots sean los que indican las relaciones anteriores, esto es, cuando

$$k_1 = a_1 \frac{[a a]}{\nabla} + b_1 \frac{[a b]}{\nabla} + \dots$$

$$k_2 = a_2 \frac{[a a]}{\nabla} + b_2 \frac{[a b]}{\nabla} + \dots$$

&

será un mínimo respecto del error probable que aparezca en cualquiera otra lista de errores de x que se forme cuando dichos factores k_1, k_2, \dots sean otras funciones de los coeficientes a, b, \dots , de las ecuaciones propuestas.

(2) Pues para ello deben ser nulas por separado las derivadas parciales con relación á x, y, z, \dots y tales condiciones

ran diferentes los valores de w_1, w_2, \dots , hallaríamos que x, y, z, \dots deberían determinarse de modo que

$$\Sigma w (ax + by + cz + \dots + m)^2 \quad (9)$$

ó $\Sigma (we^2)$ fuese un mínimo. Así este caso se reduce en la práctica al primero, multiplicando previamente cada ecuación por la raíz cuadrada del peso respectivo.

5.

Volviendo al caso de pesos iguales, determinemos los errores probables de una función lineal $fx + gy + hz \dots$ de los valores obtenidos para x, y, z, \dots (1). La solución de las ecuaciones (8) puede escribirse de este modo:

$$0 = x + (\alpha\alpha) (am) + (\alpha\beta) (bm) + (\alpha\gamma) (cm) \dots, \quad (10)$$

$$0 = y + (\alpha\beta) (am) + (\beta\beta) (bm) + (\beta\gamma) (cm) \dots,$$

$$0 = z + (\alpha\gamma) (am) + (\beta\gamma) (bm) + (\gamma\gamma) (cm) \dots,$$

&

$$\Sigma (ax + by + cz + \dots)a = 0$$

$$\Sigma (ax + by + cz + \dots)b = 0$$

$$\Sigma (ax + by + cz + \dots)c = 0$$

&

son bajo otra forma las mismas ecuaciones (8).

En resumen, la solución dada por el método de los mínimos cuadrados al problema de que se trata, puede enunciarse diciendo que propuesto un sistema de *ecuaciones de condición aproximadas* (6), que tales deben reputarse, porque á causa de los errores en los datos de observación hay en ellas cierta contradicción por la cual no es posible verificarlas todas á la vez con exactitud, los valores de las incógnitas deducidos de las ecuaciones (8) son los que mejor cumplen con dichas ecuaciones de condición ó que mejor armonizan su contradicción ó irregularidad. Por este motivo las *ecuaciones finales* (8) suelen llamarse también las *ecuaciones normales* del sistema dado.

(1) Como los valores x, y, z, \dots no son independientes, sino que están ligados con unas mismas cantidades directamente medidas m_1, m_2, \dots , no puede aplicarse á una función lineal de dichos valores el principio sentado en el § 4 acerca del peso de una función $U_0 = a_1U_1 + a_2U_2 + \dots$ de cantidades que cumplen con esa otra condición.

Mas poniendo

$$\begin{aligned} 0 &= A + (\alpha\alpha)f + (\alpha\beta)g + (\alpha\gamma)h \dots, \\ 0 &= B + (\alpha\beta)f + (\beta\beta)g + (\beta\gamma)h \dots, \\ 0 &= C + (\alpha\gamma)f + (\beta\gamma)g + (\gamma\gamma)h \dots, \\ &\&, \end{aligned} \quad (11)$$

se deduce (1)

$$\begin{aligned} 0 &= f + (aa)A + (ab)B + (ac)C \dots, \\ 0 &= g + (ab)A + (bb)B + (bc)C \dots, \\ 0 &= h + (ac)A + (bc)B + (cc)C \dots, \\ &\&; \end{aligned} \quad (12)$$

(1) Desarrollando en determinantes menores con relación á los elementos de la primera columna la determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & (ac) & \dots \\ (ab) & (bb) & (bc) & \dots \\ (ac) & (bc) & (cc) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

y las que provienen de repetir la primera columna en la segunda ó tercera...; dividiendo después los resultados por ∇ y escribiendo, según la notación convenida,

$$(\alpha\alpha) = \frac{[aa]}{\nabla}, \quad (\alpha\beta) = \frac{[ab]}{\nabla}, \quad \dots$$

se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= (aa)(\alpha\alpha) + (ab)(\alpha\beta) + (ac)(\alpha\gamma) + \dots \\ 0 &= (aa)(\alpha\beta) + (ab)(\beta\beta) + (ac)(\beta\gamma) + \dots \\ 0 &= (aa)(\alpha\gamma) + (ab)(\beta\gamma) + (ac)(\gamma\gamma) + \dots \\ &\&; \end{aligned}$$

y otros grupos de ecuaciones parecidas (tantos como líneas ó columnas hay en la determinante) se hallan poniendo en ∇ como primera columna la segunda, tercera..., y operando en estos casos del mismo modo. Pero de tales sistemas de ecuaciones, llamando $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$..., las menores de la determinante

$$\nabla' = \begin{vmatrix} (\alpha\alpha) & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & \dots \\ (\alpha\beta) & (\beta\beta) & (\beta\gamma) & \dots \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & (\gamma\gamma) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

se deduce

$$(aa) = \frac{[\alpha\alpha]}{\nabla'}, \quad (ab) = \frac{[\alpha\beta]}{\nabla'}, \quad \dots$$

y por tanto

$$\begin{aligned} fx + gy + zh \dots &= A(am) + B(bm) + C(cm) \dots, \\ &= (\Delta a_1 + Bb_1 + Cc_1 \dots)m_1 + (\Delta a_2 + Bb_2 + Cc_2 \dots)m_2 + \dots \end{aligned}$$

Ahora bien, si S es la suma de los cuadrados de los coeficientes que aquí tienen m_1, m_2, \dots será ⁽¹⁾ $S =$

$$A(A(aa) + B(ab) + C(ac) \dots) + B(A(ab) + B(bb) + C(bc) \dots);$$

ó en virtud de (12) y (11),

$$\begin{aligned} S &= (\alpha\alpha)f^2 + (\alpha\beta)fg + (\alpha\gamma)fh \dots & (13) \\ &+ (\alpha\beta)fg + (\beta\beta)g^2 + (\beta\gamma)gh \dots \\ &+ (\alpha\gamma)fh + (\beta\gamma)gh + (\gamma\gamma)h^2 \dots \end{aligned}$$

Así, pues, cuando se quiera el error probable de una función de x, y, z, \dots , cuyos coeficientes f, g, h , ofrezcan varios sistemas de valores numéricos, déjense los términos independientes simbólicos ó algebraicos al resolver las ecuaciones (8), y los coeficientes numéricos de los resultados serán las cantidades $(\alpha\alpha), (\alpha\beta), \dots$, que se buscan.

Pero si f, g, h sólo ofrecen un sistema de valores numéricos, se

Esto sentado, de las ecuaciones (11) se inferen éstas

$$\begin{aligned} 0 &= f + \frac{A[\alpha\alpha] + B[\alpha\beta] + C[\alpha\gamma] + \dots}{\Delta'} \\ 0 &= g + \frac{A[\alpha\beta] + B[\beta\beta] + C[\beta\gamma] + \dots}{\Delta'} \\ 0 &= h + \frac{A[\alpha\gamma] + B[\beta\gamma] + C[\gamma\gamma] + \dots}{\Delta'} \end{aligned}$$

&

que son las mismas ecuaciones (12).

⁽¹⁾ En efecto,

$$\begin{aligned} (\Delta a_1 + Bb_1 + Cc_1 + \dots)^2 &= (\Delta a_1 + Bb_1 + \dots)(\Delta a_1 + Bb_1 + \dots) = \\ &A(\Delta a_1 a_1 + B a_1 b_1 + C a_1 c_1 + \dots) \\ &+ B(\Delta a_1 b_1 + B b_1 b_1 + C b_1 c_1 + \dots) \\ &+ C(\Delta a_1 c_1 + B b_1 c_1 + C c_1 c_1 + \dots) \end{aligned}$$

&

y sumada esta fórmula con las análogas de los demás cuadrados, resulta la primera expresión de S dada en el texto, de la cual se deduce en seguida

$$S = -(\Delta f + Bg + Ch + \dots)$$

y de aquí la fórmula (13).

deducirán de las ecuaciones (12) A, B, C por eliminación; y en virtud de la primera expresión dada de S, esta cantidad se obtendrá por la ecuación

$$0 = S + fA + gB + hC + \dots$$

Por error probable de $fx + gy + hz \dots$ puede tomarse $\varepsilon \sqrt{S}$, siendo ε el error probable de cada una de las cantidades m cuya observación se ha hecho con igual grado de precisión (1). Comúnmente el valor de ε se determina atendiendo sólo á los errores residuos de las ecuaciones. Si σ es la suma de los cuadrados de estos errores residuos, i el número de ecuaciones, j el de in-

(1) En su consecuencia, puesto que los pesos de dos medidas están en razón inversa de los cuadrados de sus errores probables, si p es el peso de $fx + gy + hz + \dots$, tomando por unidad el peso de las cantidades m cuya medida se supone del mismo grado de precisión, será $p = \frac{1}{S}$.

Cuando $f=1, g=0, h=0 \dots$, reducese á x la función $fx + gy + hz + \dots$ y es $S = (\alpha\alpha) = \frac{[aa]}{\nabla}$; luego el error probable de x es igual á $\sqrt{(\alpha\alpha)} \varepsilon$, lo cual también se hallaría directamente calculando la suma de cuadrados de la expresión

$$(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} \varepsilon$$

del mismo modo que la de los cuadrados que componen S. Por lo tanto $(\alpha\alpha)$ será el valor recíproco del peso de x con relación al de las cantidades m ; pero $(\alpha\alpha)$ es el coeficiente de (am) en la fórmula (10)

$$0 = x + (\alpha\alpha)(am) + (\alpha\beta)(bm) + \dots,$$

ó bien el valor x' deducido de las ecuaciones

$$(aa)x' + (ab)y_1 + (ac)z_1 + \dots = 1,$$

$$(ab)x' + (bb)y_1 + (bc)z_1 + \dots = 0,$$

$$(ac)x' + (bc)y_1 + (cc)z_1 + \dots = 0,$$

Δ,

que son las mismas ecuaciones normales (8), reemplazados los términos independientes $(am), (bm), (cm) \dots$ el primero por -1 y los demás por cero.

A su vez $\sqrt{(\beta\beta)} \varepsilon$ es el error probable de y , y $(\beta\beta)$, valor recíproco del peso de esta incógnita, es el coeficiente de (bm) en la segunda fórmula (10), ó bien el valor y' deducido de las ecuaciones normales, después de reemplazados los términos independientes, el de la segunda por -1 y los demás por cero.

cógnitas x, y, z, \dots , el error probable de $fx + gy + hz \dots$ será

$$\pm 0.674 \left(\frac{S \sigma}{i-j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Que debe dividirse por $i-j$ y no por i se demuestra en los tratados de mínimos cuadrados, por ejemplo, en la *Theoria Combinationis*, de Gauss, § 38, ó en la *Spherical and Practical Astronomy*, de Chauvenet, tomo II, páginas 519-521 (1).

La suma calculada σ puede comprobarse por la siguiente ecuación, fácil de verificar:

$$\sigma = (m^2) + (am)x + (bm)y + (cm)z + \dots$$

(1) Sustituidos por separado en las ecuaciones de condición (6) los valores probables x, y, z, \dots , es decir, los que verifican las ecuaciones (8), y los verdaderos valores $x + \xi, y + \eta, z + \zeta, \dots$, darán

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + m_1 &= \varepsilon_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + m_2 &= \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (6^*)$$

$$\begin{aligned} a_1(x + \xi) + b_1(y + \eta) + c_1(z + \zeta) + \dots + m_1 &= e_1, \\ a_2(x + \xi) + b_2(y + \eta) + c_2(z + \zeta) + \dots + m_2 &= e_2, \end{aligned} \quad (6^{**})$$

y entre unos y otros errores residuos existirá la relación

$$(e\varepsilon) = (\varepsilon\varepsilon) + (ae)\xi + (be)\eta + (ce)\zeta + \dots$$

En efecto, multiplicadas las ecuaciones (6*) por sus primeros coeficientes, resultan ecuaciones análogas á ésta

$$a_1\varepsilon_1 = a_1a_1x + a_1b_1y + a_1c_1z + \dots + a_1m_1,$$

y sumadas todas ellas, se tiene en virtud de las ecuaciones normales (8)

$$(a\varepsilon) = (aa)x + (ab)y + (ac)z + \dots + (am) = 0,$$

verificándose del mismo modo $(b\varepsilon) = 0, (c\varepsilon) = 0 \dots$; luego si, multiplicadas las ecuaciones (6*) y (6**) por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, se suman los productos de cada grupo, resultará

$$(m\varepsilon) = (\varepsilon\varepsilon), \quad (m\varepsilon) = (e\varepsilon);$$

luego

$$(e\varepsilon) = (\varepsilon\varepsilon).$$

En su consecuencia, si multiplicadas las mismas ecuaciones (6*) y (6**) por e_1, e_2, \dots se suman los productos de cada grupo, se tendrá

$$\begin{aligned} (ae)x + (be)y + (ce)z + \dots + (me) &= (e\varepsilon) = (\varepsilon\varepsilon), \\ (ae)x + (be)y + (ce)z + \dots + (me) & \\ + (ae)\xi + (be)\eta + (ce)\zeta + \dots & \} = (e\varepsilon); \end{aligned}$$

deduciéndose de ambas relaciones la que se quería demostrar.

Esto sentado, multiplíquense las ecuaciones (6**) por $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$,

En el caso de sólo dos incógnitas las ecuaciones (10) se convierten en

$$0 = x + \frac{(b^2)(am) - (ab)(bm)}{(a^2)(b^2) - (ab)^2},$$

$$0 = y + \frac{-(ab)(am) + (a^2)(bm)}{(a^2)(b^2) - (ab)^2};$$

y el error probable de $fx + gy$ es

$$\pm 0.674 \left(\frac{\sigma}{i-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(b^2)f^2 - 2(ab)fg + (a^2)(g^2)}{(a^2)(b^2) - (ab)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad (14)$$

si además $f + g = 1$, el error probable será mínimo cuando la derivada del numerador del paréntesis con respecto á f ó g se anule, lo que exige

$$f \{ (ab) + (b^2) \} - g \{ (a^2) + (ab) \} = 0.$$

c_1, c_2, \dots ; sùmense los productos que provienen de factores análogos, y se deducirá, descartadas las partes que se anulan en virtud de las ecuaciones normales (8),

$$(ax)\xi + (ab)\eta + (ac)\zeta + \dots - (ae) = 0,$$

$$(ab)\xi + (bb)\eta + (bc)\zeta + \dots - (be) = 0,$$

$$(ac)\xi + (bc)\eta + (cc)\zeta + \dots - (ce) = 0,$$

...

pero como éstas sólo difieren de dichas ecuaciones por el cambio de las incógnitas x, y, z, \dots por ξ, η, ζ, \dots , y de los términos independientes $(am), (bm), \dots$ por $-(ae), -(be), \dots$, las nuevas incógnitas estarán dadas por fórmulas análogas; y para ξ , por ejemplo, se hallará

$$\xi = (\alpha\alpha)(ae) + (\alpha\beta)(be) + (\alpha\gamma)(ce) + \dots$$

$$= k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + \dots$$

teniendo k_1, k_2, \dots los valores obtenidos en el párrafo 4, puesto que

$$(ae) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + \dots$$

y parecida significación poseen $(be), (ce), \dots$

Ahora bien, como sólo cabe sustituir en vez de e_1, e_2, \dots valores aproximados, pues los verdaderos se desconocen, demos á cada una de dichas cantidades el valor medio $\sqrt{\mu_2}$ definido por la ecuación

$$i\mu_2 = e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3 + \dots = (ee),$$

designado por i el número de errores residuos que es igual al de ecuaciones. Pero tal valor medio debe suponerse en unos errores e_1, e_2, \dots con signo $+$ y en otros tantos con signo $-$; luego al multiplicar (ae) por ξ , los productos de términos cruzados se destruirán del todo ó en su mayor parte

6.

Los siguientes ejemplos numéricos aclararán la teoría que precede. La tabla adjunta contiene en las columnas primera, tercera, quinta y séptima cuarenta medidas micrométricas independientes, de igual peso, hechas con objeto de averiguar el error de posición de cierta línea divisoria en la escala tipo.

x	ERROR	x	ERROR	x	ERROR	x	ERROR
3.68	-0.25	2.81	-1.12	5.48	+1.55	3.28	-0.65
3.11	-0.82	4.65	+0.72	3.76	-0.17	3.78	-0.15
4.76	+0.83	3.27	-0.66	4.59	+0.66	3.22	-0.71
2.75	-1.18	4.08	+0.15	2.64	-1.29	3.98	+0.05
4.15	+0.22	4.51	+0.58	2.98	-0.95	3.91	-0.02
5.08	+1.15	4.43	+0.50	4.21	+0.28	5.21	+1.28
2.95	-0.98	3.43	-0.50	5.23	+1.30	4.43	+0.50
6.35	+2.42	3.26	-0.67	4.45	+0.52	2.28	-1.65
3.78	-0.15	2.48	-1.43	3.95	+0.02	4.10	+0.17
4.49	+0.56	4.84	+0.91	2.66	-1.27	4.18	+0.25

y sólo quedarán ó sólo tendrán importancia los productos de términos correlativos, siendo por lo tanto exacta ó muy aproximadamente

$$(ae)\xi = k_1 a_1 e_1 e_1 + k_2 a_2 e_2 e_2 + \dots$$

ó bien, reemplazando $e_1 e_1, e_2 e_2, \dots$, por su valor medio μ_2 ,

$$(ae)\xi = (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots) \mu_2 = \mu_2,$$

pues, en virtud de las relaciones (7), la cantidad encerrada dentro del paréntesis en el segundo miembro vale la unidad. A su vez resultarían, por análogo razonamiento, $(be)\eta, (ce)\zeta, \dots$ con el mismo valor μ_2 ; luego aquella relación

$$(ee) = (\varepsilon\varepsilon) + (ae)\xi + (be)\eta + (ce)\zeta + \dots$$

se convertirá en esta otra

$$i\mu_2 = (\varepsilon\varepsilon) + \mu_2 + \mu_2 + \mu_2 + \dots = \sigma + j\mu_2,$$

siendo j el número de incógnitas y $\sigma = (\varepsilon\varepsilon)$; de donde se infiere

$$\mu_2 = \frac{\sigma}{i-j}, \quad \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sigma}{i-j}};$$

luego si ε es el error probable entre los errores e_1, e_2, \dots , será

$$\varepsilon = \pm 0.674 \sqrt{\frac{\sigma}{i-j}}.$$

Cuando sólo haya una incógnita, el error medio y el error probable de una observación aislada serán

$$\sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sigma}{i-1}}, \quad \varepsilon = \pm 0.674 \sqrt{\frac{\sigma}{i-1}}.$$

La media aritmética de estas medidas da $x = 3.93$; en las columnas que alternan con las anteriores figuran los errores ó diferencias entre cada medida y la media de todas (1). La suma de los cuadrados de estos errores es 32.635; luego el error probable de una sola medida es

$$\pm .674 \left(\frac{32.635}{40-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm 0.62.$$

Ahora bien; si escribimos los errores por orden de magnitud, veremos que los dos que ocupan el centro de los positivos y el de los negativos, y representan por lo tanto el error probable, son $+0.66$ y -0.66 . Además, conforme la teoría, según vimos en la página 82, el número de errores, que entre 40 no deben exceder de la mitad del error probable, es 11 y aquí resultan 12; el número de los que no alcanzan á dos veces el error probable es 33, y aquí se tienen 32; y por último, dos errores excederían á tres veces el error probable, y aquí resulta uno.

El error probable del valor medio de x es

$$\pm 0.62 : \sqrt{40} = \pm 0.097.$$

La unidad de longitud á que estas medidas se refieren es la millonésima de una yarda.

(1) CUADRO DE OPERACIONES
PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Promedios.

Ecuaciones de condición.	Residuos.	Cuadrados.
$x + m_1 = 0$	E_1	$E_1 E_1$
$x + m_2 = 0$	E_2	$E_2 E_2$
.....
(i ecuac.)	Suma. . .	$= \sigma$
Ecuación normal.	Error probable de una observación.	
$ix + (m) = 0$	$\varepsilon = \pm 0.674 \sqrt{\frac{\sigma}{i-1}}$	
$x + \frac{1}{i}(m) = 0$		
Valor recíproco del peso de x .	Error probable de x .	
$x' = \frac{1}{i}$	$\varepsilon_x = \pm \varepsilon \sqrt{a'}$	

He aquí ahora un ejemplo con dos incógnitas (1). La siguiente tabla contiene las diferencias de longitud observadas á diversas temperaturas entre el metro de platino de la Real Sociedad de Londres y el metro de acero de la Ordnance Survey (*Comparisons of Standards*, pág. 171):

DIF.	TEMP.	DIF.	TEMP.	DIF.	TEMP.	DIF.	TEMP.
5.76	65.16	6.47	63.76	41.59	36.12	36.57	35.22
6.69	65.20	7.23	63.93	38.53	36.06	38.54	37.33
5.00	65.45	4.17	64.21	41.08	36.08	39.47	37.49
5.90	65.51	6.32	63.90	39.13	36.23	41.10	37.60
6.39	64.57	7.31	64.03	41.80	35.57	40.10	37.79
5.77	64.77	38.07	38.36	38.65	35.48		
3.30	64.88	39.29	33.35	41.26	35.94		

(1) CUADRO DE OPERACIONES
 PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS
Ecuaciones lineales con varias incógnitas.

Ecuaciones de condición.

$$a_1x + b_1y + \dots + m_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + \dots + m_2 = 0$$

.....

(i ec. — j incógn.)

Ecuaciones normales.

$$(aa)x + (ab)y + \dots + (am) = 0$$

$$(ab)x + (bb)y + \dots + (bm) = 0$$

.....

de donde se deducen x, y, \dots

Valor recíproco del peso de x .

$$(aa)x' + (ab)y' + \dots - 1 = 0$$

$$(ab)x' + (bb)y' + \dots - 0 = 0$$

.....

y de aquí x' ;

x' es también el valor absoluto del coeficiente de (am) en la fórmula de x .

Valor recíproco del peso de y .

$$(aa)x_2 + (ab)y' + \dots - 0 = 0$$

$$(ab)x_2 + (bb)y' + \dots - 1 = 0$$

.....

y de aquí y' ;

y' es también el valor absoluto del coeficiente de (bm) en la fórmula de y .

CLARKE.—7

Residuos.

$$E_1$$

$$E_2$$

.....

Cuadrados.

$$E_1E_1$$

$$E_2E_2$$

.....

$$\text{Suma. } \dots = \sigma$$

Error probable de una observación.

$$\varepsilon = \pm 0.674 \sqrt{\frac{\sigma}{i-j}}$$

Error probable de x .

$$\varepsilon_x = \pm \varepsilon \sqrt{x'}$$

Error probable de y .

$$\varepsilon_y = \pm \varepsilon \sqrt{y'}$$

Sea x el exceso de longitud del metro de platino á 62° sobre el metro de acero á la misma temperatura é y el exceso á 32° : el correspondiente á la temperatura t será (1)

$$x \frac{t-32}{30} + y \frac{62-t}{30} :$$

é igualando esta expresión á cada una de las diferencias observadas, se tendrá una serie de ecuaciones con las dos incógnitas, x, y . Las tres primeras, por ejemplo, serán

$$1.105 x - 0.105 y - 5.76 = 0,$$

$$1.107 x - 0.107 y - 6.69 = 0,$$

$$1.115 x - 0.115 y - 5.00 = 0.$$

Al formar las sumas de los cuadrados y productos

$$(aa), (ab), (bb), (am), (bm),$$

conviene notar que en el presente caso, puesto que en cada ecuación los coeficientes de x é y dan $a + b = 1$, se tiene

$$(a^2) + (ab) = (a), \quad (ab) + (b^2) = (b);$$

y así con más brevedad se halla que las ecuaciones finales (8) son ahora

$$14.549724 x + 0.684874 y - 163.0507 = 0,$$

$$0.684874 x + 10.080524 y - 462.4393 = 0.$$

(*) Las longitudes de dichas reglas de platino y acero á la temperatura t en función de las correspondientes á 0° están dadas por las fórmulas

$$l = l_0 (1 + \alpha t), \quad l' = l'_0 (1 + \alpha' t),$$

restadas las cuales se obtiene

$$d = d_0 + mt,$$

llamando d el exceso $l - l'$ á la temperatura t , d_0 el exceso $l_0 - l'_0$ á 0° y m el coeficiente $l_0\alpha - l'_0\alpha'$. Pero del sistema de ecuaciones análogas, relativas á las temperaturas $t, 62^\circ$ y 32° , á saber:

$$\left. \begin{array}{l} d = d_0 + mt \\ x = d_0 + m62 \\ y = d_0 + m32 \end{array} \right\} \text{se infiere} \quad \begin{vmatrix} d & 1 & t \\ x & 1 & 62 \\ y & 1 & 32 \end{vmatrix} = 0$$

ó bien, desarrollando la determinante,

$$d(62 - 32) = x(t - 32) + y(62 - t).$$

Resolviéndolas, dejando en símbolo los términos independientes, resulta

$$x + .068950 (am) - .004685 (bm) = 0,$$

$$y - .004685 (am) + .099522 (bm) = 0,$$

y sustituyendo los valores numéricos de (am) , (bm) , se tiene $x = 9.08$, $y = 45.26$. Reemplazando éstos en las 26 ecuaciones, los errores residuos son

$$\begin{array}{rcccccc} -0.49 & -0.41 & -0.48 & -1.69 & -0.85 & +0.29 \\ -1.47 & -0.03 & +2.24 & -1.30 & +2.41 & -0.83 \\ -0.08 & +2.31 & +0.47 & +1.83 & -0.75 & -2.59 \\ -1.05 & +0.49 & -0.74 & -0.74 & +4.81 & -1.82 \\ & & -0.48 & +1.03 & & \end{array}$$

la suma de sus cuadrados da 66.03; por lo tanto el error probable de una sola comparación es

$$\pm 0.674 \left(\frac{66.03}{26-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm 1.12;$$

y los errores probables de x , y son

$$x \dots \pm 1.12 (-0.690)^{\frac{1}{2}} = \pm 0.29,$$

$$y \dots \pm 1.12 (-0.995)^{\frac{1}{2}} = \pm 0.35.$$

Por la fórmula (14) podemos deducir el error probable de la diferencia de longitudes correspondiente á una temperatura τ , siendo fácil demostrar que ese error será un mínimo cuando τ sea el promedio de todas las temperaturas observadas (1).

(1) La condición del mínimo de la fórmula (14) se reduce en este caso á

$$f(b) - g(a) = 0;$$

pero

$$f = \frac{\tau - 32}{30}, \quad g = \frac{62 - \tau}{30},$$

$$y \quad (b) = i \frac{62 - T}{30}, \quad (a) = i \frac{T - 32}{30},$$

llamando i el número de observaciones y T el promedio de las temperaturas. Sustituídos estos valores en aquella ecuación, resulta $\tau = T$.

7.

Ocurre muchas veces que los valores observados, con independencia unos de otros, son de cantidades u_1, u_2, \dots, u_i que tienen entre sí relaciones necesarias expresadas por j ($< i$) ecuaciones lineales, de suerte que si U_1, U_2, \dots, U_i son los valores obtenidos por observación, y su peso respectivo w_1, w_2, \dots, w_i , los errores x_1, x_2, \dots, x_i de U_1, U_2, \dots, U_i estarán enlazados por j ecuaciones de la forma

$$0 = a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \dots \quad (15)$$

Mas la probabilidad de que tal sistema de errores ocurra á la vez, se expresará, según la relación (5), por

$$P = C e^{-w_1 x_1^2 - w_2 x_2^2 - w_3 x_3^2 - \dots}$$

esto es, por el producto de las probabilidades por separado. Luego, entre los infinitos sistemas de errores que verifican las j ecuaciones de condición, deben elegirse los correspondientes al máximo valor de P , que acontece cuando

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2 + \dots \quad (16)$$

es un mínimo, lo cual, nótese, está de acuerdo con la condición (9). Así, pues, x_1, x_2, \dots han de determinarse de modo que la expresión (16) sea un mínimo y se cumplan á la par las condiciones (15): lo que constituye un problema determinado del cálculo diferencial (1).

(1) El problema general es el siguiente: dadas una ó más ecuaciones de condición (15) que las incógnitas hayan de verificar *con exactitud* y dadas otras ecuaciones de condición (6) que las mismas incógnitas deban verificar sólo *aproximadamente*, ó sea con errores residuos, *hallar entre todos los sistemas posibles con las condiciones rigurosas los más probables con las condiciones aproximadas, es decir, que mejor cumplan con estas últimas.*

Las ecuaciones de condición aproximadas, cuando se trata de cantidades directamente observadas ó medidas, son las diferencias entre los valores probables y los valores directos, si se toman aquéllos por incógnitas, ó bien las diferencias entre las correcciones probables de los valores directos y cero, si como incógnitas figuran dichas correcciones.

Es claro que el número de ecuaciones de condición rigurosas debe ser menor que el de incógnitas, pues de lo contrario éstas quedarían determinadas prescindiendo de toda medida ú observación.

Supongamos, por ejemplo, que los valores observados de los ángulos A, B, C de un triángulo rectilíneo posean los pesos u , v , w . Si x , y , z son los errores probables de los valores observados, puesto que la verdadera suma de los ángulos se conoce, tendremos ya establecida una relación entre x , y , z : á saber, designando ε el error de la suma de los ángulos observados,

$$x + y + z = \varepsilon;$$

luego x , y , z han de determinarse de modo que sea

$$ux^2 + vy^2 + wz^2 = \text{un mínimo.}$$

Diferenciando estas dos ecuaciones y comparando los coeficientes de dx , dy , dz , resulta

$$ux = vy = wz.$$

En su consecuencia

$$x = \frac{\frac{\varepsilon}{u}}{1 + 1 + 1},$$

$$y = \frac{\frac{\varepsilon}{v}}{1 + 1 + 1},$$

$$z = \frac{\frac{\varepsilon}{w}}{1 + 1 + 1}.$$

Así, pues, siendo A, B, C los verdaderos ángulos y e_1 , e_2 , e_3 los verdaderos errores de los ángulos observados, los valores que se adopten serán (1)

(1) Entre los errores probables x , y , z y los errores verdaderos e_1 , e_2 , e_3 , existe la relación

$$e_1 + e_2 + e_3 = x + y + z = \varepsilon.$$

Los ángulos $A + e_1$, $B + e_2$, $C + e_3$ son los observados, y los ángulos \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , son los mismos corregidos, pero de manera que

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A + B + C = 180^\circ.$$

$$\mathfrak{A} = A + e_1 - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}} \cdot \frac{1}{u},$$

$$\mathfrak{B} = B + e_2 - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}} \cdot \frac{1}{v},$$

$$\mathfrak{C} = C + e_3 - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}} \cdot \frac{1}{w}.$$

Luego el verdadero error de una función $\alpha \mathfrak{A} + \beta \mathfrak{B} + \gamma \mathfrak{C}$ de los ángulos observados será

$$(\alpha - w'K)e_1 + (\beta - w'K)e_2 + (\gamma - w'K)e_3,$$

siendo

$$\frac{1}{w'} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}, \quad K = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w}.$$

Mas como los cuadrados de los módulos de la ley de probabilidad de error en los ángulos observados, es decir, los cuadrados de los módulos de e_1, e_2, e_3 , son los valores recíprocos de u, v, w ; el cuadrado del módulo de errores en $\alpha \mathfrak{A} + \beta \mathfrak{B} + \gamma \mathfrak{C}$ será

$$\frac{1}{u} (\alpha - w'K)^2 + \frac{1}{v} (\beta - w'K)^2 + \frac{1}{w} (\gamma - w'K)^2$$

ó bien, bajo otra forma (1),

$$\frac{u(\beta - \gamma)^2 + v(\gamma - \alpha)^2 + w(\alpha - \beta)^2}{uv + vw + wu};$$

(1) En efecto, desarrollada la expresión anterior, da

$$\frac{\alpha^2}{u} + \frac{\beta^2}{v} + \frac{\gamma^2}{w} - 2K \cdot w'K + \frac{1}{w'} \cdot w'^2 K^2 = \frac{\alpha^2}{u} + \frac{\beta^2}{v} + \frac{\gamma^2}{w} - w'K^2 =$$

$$\frac{\alpha^2 vw + \beta^2 wu + \gamma^2 uv}{uvw} - \frac{uvw}{uv + vw + wu} \left(\frac{\alpha vw + \beta wu + \gamma uv}{uvw} \right)^2,$$

de donde, simplificando y reduciendo á un común denominador, es fácil deducir la fórmula del texto.

y el error probable será la raíz cuadrada de esta expresión, multiplicada por $\rho = .477$. Si, por ejemplo, se diera el lado c , el error probable del calculado a sería (¹)

$$\pm \rho a \left\{ \frac{u \cot^2 C + v (\cot A + \cot C)^2 + w \cot^2 A}{uw + vw + wu} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Si los tres ángulos estuvieran observados con igual grado de precisión, teniendo cada uno el error probable r , el de a sería

$$\pm r \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\cot^2 A + \cot A \cot C + \cot^2 C)^{\frac{1}{2}} a. \quad (17)$$

No debe olvidarse, al aplicar semejante fórmula, que estriba precisamente en la hipótesis de que los errores siguen la ley de probabilidad establecida en (2), y no tendría aplicación en otro caso—si, por ejemplo, las observaciones estuviesen ligadas á un error constante desconocido. Más seguro sería, por lo tanto, si sobre este punto hubiera alguna duda, deducir r de las diferencias entre las observaciones particulares y A, B, C , que de las diferencias correspondientes á las medias respectivas. Supongamos que sea igual á $\pm 0''.4$ cada uno de los errores probables de los ángulos observados, computados esos errores de la manera últimamente indicada (á saber, por la comparación de observa-

(¹) No siendo exactos los ángulos A y C , no lo será tampoco, salvo alguna rara compensación, el lado a deducido de la ecuación

$$a \sin C = c \sin A.$$

Mas designando por A, C, a los errores respectivos de A, C, a , se tendrá

$$(a + \alpha) \sin (C + C) = c \sin (A + A),$$

y de esta ecuación, desarrollada y reducida en virtud de la primera, reemplazados además los cosenos de A y C por la unidad, y los senos por los valores de estos ángulos con relación al que abraza un arco de longitud igual al radio, y finalmente, omitido el término de segundo orden $\alpha \sin C$, se deducirá

$$\alpha = \frac{c \cos A}{\sin C} A - \frac{a \cos C}{\sin C} C = \frac{a \cos A}{\sin A} A - \frac{a \cos C}{\sin C} C$$

ó bien

$$\alpha = a \cot A \cdot A - a \cot C \cdot C;$$

expresión que, comparada con $\alpha A + \beta B + \gamma C$, da

$$\alpha = a \cot A, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -a \cot C.$$

ciones en cada estación, sin referirse para nada á la suma de los ángulos): el error probable de su suma será entonces

$$\pm 0'' \cdot 4 \sqrt{3} = 0'' \cdot 7.$$

Pero, como se infiere de lo dicho (pág. 82), en un sistema de errores donde 0.7 sea el error probable, sólo uno próximamente entre 143 pasará de

$$4 \times 0'' \cdot 7 = 2'' \cdot 8;$$

en su consecuencia, es muy improbable que en la suma de tales ángulos llegue el error á $2'' \cdot 8$. Sin embargo, pudiera ocurrir. Pero si el error fuera, por ejemplo, de $4''$, habría fundamento para creer en la existencia de un error constante, y en tal caso la fórmula antedicha sería engañosa.

Nótase en extensas triangulaciones que los errores en las sumas de los ángulos observados de los triángulos son, en la larga serie de ellos, algo mayores de lo que pudiera esperarse de la concordancia mutua de las observaciones de cada ángulo; por cuyo motivo suele estimarse la precisión de los ángulos observados con relación á estos errores de las sumas de los ángulos de cada triángulo. Sobre esta materia puede consultarse con gran fruto el tomo segundo del *Account of the Great Trigonometrical Survey of India*, por el general Walker, C. B., I. R., Inspector general de la India.

CAPÍTULO IV

TEORÍA DE LA FIGURA DE LA TIERRA

En el tercer libro de la obra de Newton *Principia* (1687)—proposiciones 18, 19, 20—se encuentra el primer estudio científico de la figura que debía tener la tierra en virtud de la teoría de la gravitación sentada por el mismo autor. Newton dedujo la relación en que debían estar los ejes de la tierra, admitiendo que es un elipsoide de revolución la forma de equilibrio de una masa fluida homogénea que gira con velocidad angular uniforme: proposición plenamente demostrada algunos años después por Maclaurin.

En 1743 se publicó la famosa obra de Clairaut (*) sobre la figura de la tierra, y, como dice la excelente *History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth*, por I. Todhunter M. A., M. R. S., 1873, tomo I, pág. 229, «ningún autor adelantó tanto como Clairaut en la teoría de la figura de la tierra, pudiendo asegurarse que en sustancia el asunto se encuentra hoy todavía como aquél lo dejó, aunque la forma de exposición sea distinta, pues el brillante análisis hecho por Laplace ilustró, pero en realidad no alteró la teoría ideada por la poderosa inteligencia de Clairaut». Demostraremos aquí algunas de sus conclusiones, partiendo del precioso teorema debido á Maclaurin y

(*) *Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique*, por Clairaut, de la Real Academia de Ciencias de París y de la Real Sociedad de Londres. Segunda edición. París, 1808.

Laplace, que dice que « las potenciales de dos elipsoides confocales en todo punto exterior á ambos son como sus masas » (1).

Quien desee conocer los estudios de muchos insignes matemáticos que de esta teoría se han ocupado, puede consultar la interesante obra de Todhunter.

1.

De los varios métodos seguidos para demostrar el teorema de Laplace, uno de los más elegantes es el de Rodríguez, que se halla en la *Corresp. sur l'Ecole Polytech.*, tomo III, páginas 361-385 (*). Fúndase en el siguiente lema, fácil de demostrar, á saber, que si M es un punto exterior ó interior á una superficie cerrada, P un punto de ella, PQ la normal exterior en P y dS el elemento superficial en este punto, la integral

$$\int \frac{dS \cos MPQ}{MP^2}$$

extendida á toda la superficie, será igual á 0 ó -4π , según que M esté fuera ó dentro de ésta (2).

Sean f, g, h las coordenadas de un punto, a, b, c los semiejes

(1) Llámanse *potencial de un cuerpo, con relación á un punto dado*, la suma de los cocientes obtenidos dividiendo la masa de cada elemento de ese cuerpo por la distancia del elemento á dicho punto. Las derivadas de la potencial con respecto á las coordenadas de este punto dan las componentes de la atracción que sobre él ejerce el cuerpo, paralelas á los ejes donde se cuentan las respectivas coordenadas y en el sentido de éstas.

(*) Véase también Todhunter, *Attractions*, etc., II, 243; y el *Quarterly Journal of Mathematics*, tomo II, págs. 333-337.

(2) En efecto, la proyección central del elemento dS sobre la esfera de radio MP es

$$dS \cos MPQ,$$

y la proyección central del mismo elemento sobre la esfera cuyo radio es la unidad y cuya área vale 4π , es

$$\frac{dS \cos MPQ}{MP^2}.$$

Ambas proyecciones son positivas ó negativas, según que el punto M esté delante ó detrás de la cara externa del elemento dS .

de un elipsoide, δa , δb , δc incrementos de a , b , c tales que $a\delta a = b\delta b = c\delta c =$ una constante que haremos $= \frac{1}{2}\delta t$; claro es que con semejantes variaciones se pasa del elipsoide primero al elipsoide confocal inmediato (1). La potencial del elipsoide es

$$V = \iiint \frac{dx dy dz}{R},$$

siendo

$$R^2 = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2.$$

Mas si se transforma la integral que antecede, poniendo

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta \cos \varphi, \quad z = cr \sin \theta \sin \varphi;$$

como el elemento de masa será entonces $abc r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$ (2),

(1) Pues, integradas dichas relaciones, dan

$$a^2 - b^2 = \text{constante}, \quad a^2 - c^2 = \text{constante}.$$

(2) Tanto el elipsoide propuesto como el confocal que de él difiere poco, se suponen divididos en capas separadas por otros elipsoides, semejantes á los que los envuelven. Si la ecuación del propuesto es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la de sus elipsoides semejantes será

$$\frac{x^2}{r^2 a^2} + \frac{y^2}{r^2 b^2} + \frac{z^2}{r^2 c^2} = 1,$$

siendo r una fracción distinta para cada uno de ellos. Los valores de x , y , z que en el texto se indican, cumplen con esta ecuación; mas de esos valores se infiere

$$r = F_1(x, y, z),$$

$$\theta = F_2(x, y, z),$$

$$\varphi = F_3(x, y, z);$$

y estas ecuaciones, con valores dados de r , θ , φ , son las de tres superficies cuya intersección común es un punto $x y z$ del elipsoide definido por el valor de r . El paralelepípedo elemental comprendido entre las superficies correspondientes á

$$r, r + dr, \theta, \theta + d\theta, \varphi, \varphi + d\varphi,$$

es el séxtuplo del tetraedro cuyos vértices tienen respectivamente por coordenadas

$$\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \left| \begin{array}{l} x + \frac{dx}{dr} dr \\ y + \frac{dy}{dr} dr \\ z + \frac{dz}{dr} dr \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x + \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ y + \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ z + \frac{dz}{d\theta} d\theta \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x + \frac{dx}{d\varphi} d\varphi \\ y + \frac{dy}{d\varphi} d\varphi \\ z + \frac{dz}{d\varphi} d\varphi \end{array} \right|$$

se tendrá

$$\frac{V}{abc} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \frac{r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr}{R}$$

La variación de esta función $V:abc$, al pasar del elipsoide abc al elipsoide confocal inmediato, será

$$\delta \left(\frac{V}{abc} \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \delta \left(\frac{1}{R} \right) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr.$$

Pero $\delta x = r \cos \theta \delta a = \frac{x}{a} \delta a$, y análogas las demás variaciones; luego

$$\delta x = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2} \delta t, \quad \delta y = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2} \delta t, \quad \delta z = \frac{1}{2} \frac{z}{c^2} \delta t;$$

y por lo tanto (1)

$$\delta \frac{1}{R} = -\frac{\delta t}{2R^3} \left\{ (x-f) \frac{x}{a^2} + (y-g) \frac{y}{b^2} + (z-h) \frac{z}{c^2} \right\};$$

Pero el volumen de un tetraedro, en función de las coordenadas rectangulares $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$ de sus vértices, está dado por la determinante

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Luego el volumen del paralelepípedo elemental estará expresado por

$$dx \, dy \, dz \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{dz}{d\varphi} \end{vmatrix},$$

que se reduce á $abc r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, después de sustituidos en la determinante los valores de las derivadas.

(1) Pues

$$\delta \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\delta R}{R^2},$$

y diferenciando la expresión de R^2 dada más arriba, se halla

$R\delta R = (x-f)\delta x + (y-g)\delta y + (z-h)\delta z$,
de donde se deduce δR .

de manera que designando por N la cantidad entre paréntesis, será

$$\delta \left(\frac{V}{abc} \right) = -\frac{\delta t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \frac{N}{R^3} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr, \quad (1)$$

extendiendo la integración á todo el elipsoide.

Consideremos ahora la capa comprendida entre la superficie elipsoidal cuyos semiejes son ra, rb, rc y aquella cuyos semiejes son $(r+dr)a, (r+dr)b, (r+dr)c$. Si ε es el espesor de esa capa y λ, μ, ν son los cosenos de dirección (1) de la normal en el punto xyz á la cara interior, será (2)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= r^2, \\ \frac{(x+\lambda\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{(y+\mu\varepsilon)^2}{b^2} + \frac{(z+\nu\varepsilon)^2}{c^2} &= (r+dr)^2; \\ \therefore \left(\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2} \right) \varepsilon &= r dr; \end{aligned}$$

(1) Entendiendo por cosenos de dirección de una recta los cosenos de los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

(2) Obtíenese la última de estas relaciones restando las dos anteriores é igualando los términos de primer orden.

La ecuación

$$\lambda \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{a^2}$$

resulta de la fórmula

$$\lambda = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2}}$$

Sustituidos los segundos miembros de dicha ecuación y de sus análogas, relativas á μ, ν , por los primeros, en la última de las precedentes, esto es, en

$$\left(\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2} \right) \varepsilon = r dr,$$

se halla, puesto que $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$,

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r dr}{\varepsilon}.$$

pero $\lambda \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{a^2}$, y relaciones análogas dan μ y ν ;

luego

$$\varepsilon \frac{x}{a^2} = \lambda r dr, \quad \varepsilon \frac{y}{b^2} = \mu r dr, \quad \varepsilon \frac{z}{c^2} = \nu r dr.$$

Además, designando por dS el elemento superficial de una de las dos caras de la capa, el elemento de volumen será εdS , y este valor podemos sustituirlo en la triple integral (1) en vez del otro valor $abc r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$.

De todo ello resulta

$$\begin{aligned} \frac{N}{R^3} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr &= \frac{1}{abc} \cdot \frac{dS}{R^2} \cdot \frac{\varepsilon N}{R} \\ &= \frac{1}{abc R^2} \left\{ \frac{x-f}{R} \lambda + \frac{y-g}{R} \mu + \frac{z-h}{R} \nu \right\} r dr \\ &= -\frac{1}{abc} \cdot \frac{\cos \varphi dS}{R^2} r dr, \end{aligned}$$

siendo φ el ángulo que forman la normal exterior en el punto xyz y la recta que lo une con el fg h (1). En su consecuencia

$$\delta \left(\frac{V}{abc} \right) = \frac{1}{abc} \delta t \int \left\{ \int \frac{\cos \varphi dS}{R^2} \right\} r dr,$$

extendiéndose la integral relativa á S á toda la superficie de elipsoide cuyos semiejes son ra , rb , rc .

En virtud, pues, del lema sentado al principio, si el punto fg h está fuera del elipsoide, $V:abc$ es constante, ó de otro modo, si M es la masa del elipsoide, $V:M$ no varía, esto es, no depende de las longitudes de a , b , c sino únicamente de la excentricidad del elipsoide. Por tanto, las potenciales de elipsoides concéntricos en un punto exterior son como sus masas.

(1) En efecto, los cosenos de dirección de las dos rectas que comprenden dicho ángulo φ son: los de la normal

$$\lambda, \mu, \nu,$$

y los de la otra recta R

$$\frac{f-x}{R}, \quad \frac{g-y}{R}, \quad \frac{h-z}{R}.$$

2.

De la última ecuación puede sacarse la expresión de la potencial de un elipsoide en un punto interior $fg h$. Se tiene entonces, en virtud del lema,

$$\delta \left(\frac{V}{abc} \right) = - \frac{2\pi \delta t}{abc} \int r dr,$$

debiendo comprender la integral todas las capas exteriores á dicho punto, á saber, desde $r = r'$, siendo

$$\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = r'^2,$$

hasta $r = 1$; por consiguiente

$$\delta \left(\frac{V}{abc} \right) = \frac{\pi \delta t}{abc} \left(\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} - 1 \right).$$

Mas el segundo miembro de esta ecuación es el incremento que recibe la función $V : abc$, cuando se pasa del elipsoide a, b, c al confocal $a + \delta a, b + \delta b, c + \delta c$, puesto que

$$a \delta a = b \delta b = c \delta c = \frac{1}{2} \delta t.$$

Podemos reemplazar la δ por la d comun, y poner además

$$\alpha^2 = a^2 + t, \quad b^2 = \beta^2 + t, \quad c^2 = \gamma^2 + t,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{V}{\{(a^2+t)(\beta^2+t)(\gamma^2+t)\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{\{(a^2+t)(\beta^2+t)(\gamma^2+t)\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{f^2}{a^2+t} + \frac{g^2}{\beta^2+t} + \frac{h^2}{\gamma^2+t} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

E integrando desde $t=0$ hasta $t=\infty$, se tendrá, puesto que $V : M$ se anula cuando $t=\infty$,

$$V = -\pi \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{dt}{Q} \left\{ \frac{f^2}{a^2+t} + \frac{g^2}{\beta^2+t} + \frac{h^2}{\gamma^2+t} - 1 \right\}, \quad (2)$$

siendo $Q = \{(a^2+t)(\beta^2+t)(\gamma^2+t)\}^{\frac{1}{2}}$. Tal es la expresión de la

potencial del elipsoide, cuyos semiejes son α , β , γ , en un punto interior fgh .

3.

El resultado que acaba de obtenerse se aplica del siguiente modo á un elipsoide casi esférico. Representemos los cuadrados de los semiejes por $h^2 + \varepsilon_1$, $h^2 + \varepsilon_2$, $h^2 + \varepsilon_3$, siendo ε_1 , ε_2 , ε_3 cantidades muy pequeñas, de cuyos cuadrados puede prescindirse, y ligadas por la relación $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ (1). Si se hace $h^2 + t = u$ será

$$Q^2 = (u + \varepsilon_1)(u + \varepsilon_2)(u + \varepsilon_3),$$

de donde $Q = u^{\frac{3}{2}}$, y si M es la masa del elipsoide, se tendrá

$$\pi h^3 = \frac{4}{3} M.$$

Luego en un punto interior fgh , será

$$V = \frac{4}{3} M \int \frac{du}{Q} \left\{ 1 - \frac{f^2}{u + \varepsilon_1} - \frac{g^2}{u + \varepsilon_2} - \frac{h^2}{u + \varepsilon_3} \right\},$$

tomando la integral desde $u = h^2$ hasta $u = \infty$, esto es (2),

$$V = \frac{4}{3} M \int_{h^2}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 - \frac{r^2}{u} + \frac{\varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 g^2 + \varepsilon_3 h^2}{u^2} \right\},$$

siendo $r^2 = f^2 + g^2 + h^2$. Efectuada la integración, resulta

(1) Con estas condiciones el producto de

$$\alpha^2 = h^2 + \varepsilon_1, \quad \beta^2 = h^2 + \varepsilon_2, \quad \gamma^2 = h^2 + \varepsilon_3,$$

da $\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = h^6$; luego $\alpha \beta \gamma = h^3$, y en su consecuencia, el elipsoide cuyos semiejes son α , β , γ es equivalente á la esfera de radio h .

(2) Reduciendo á un común denominador, se tiene, dada la relación $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ y omitidos los términos de segundo orden,

$$\frac{f^2}{u + \varepsilon_1} + \frac{g^2}{u + \varepsilon_2} + \frac{h^2}{u + \varepsilon_3} = \frac{f^2(u^2 - \varepsilon_1 u) + g^2(u^2 - \varepsilon_2 u) + h^2(u^2 - \varepsilon_3 u)}{u^3},$$

de donde es fácil obtener la transformación final del texto. La

$$\int du \left\{ u^{-\frac{3}{2}} - r^2 u^{-\frac{5}{2}} + (\varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 g^2 + \varepsilon_3 h^2) u^{-\frac{7}{2}} \right\}$$

es sencilla, pues todos sus términos son de la forma $\int u^m du$.

$$V = M \left\{ \frac{3}{2k} - \frac{r^2}{2k^3} + \frac{3}{10} \frac{\varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 g^2 + \varepsilon_3 h^2}{k^5} \right\}, \quad (3)$$

que es la potencial buscada.

De ella se deduce á su vez la de ese elipsoide en un punto exterior. En efecto, cuando corriéndose el punto interior llega á la superficie, es

$$\frac{f^2}{k^2 + \varepsilon_1} + \frac{g^2}{k^2 + \varepsilon_2} + \frac{h^2}{k^2 + \varepsilon_3} = 1;$$

de donde (1)

$$r^2 = k^2 + \frac{\varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 g^2 + \varepsilon_3 h^2}{k^2};$$

$$\therefore 3 \frac{r}{k} - \frac{r^3}{k^3} = 2,$$

ó bien

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{r^2}{2k^3} = \frac{1}{r}.$$

Luego en un punto de la superficie

$$V = M \left\{ \frac{1}{r} + \frac{3}{10} \frac{\varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 g^2 + \varepsilon_3 h^2}{r^5} \right\}. \quad (4)$$

Mas llamemos E el elipsoide á que esta fórmula se refiere y R el punto *fgh* de su superficie. Si E' es otro elipsoide confocal con E é interior á él (los cuadrados de sus semiejes $k_1^2 + \varepsilon_1$, $k_1^2 + \varepsilon_2$,

(1) Se obtiene por el mismo cálculo hecho anteriormente cuando en vez de k^2 figuraba u . Mas la fórmula puede escribirse

$$\frac{r^2}{k^2} = 1 + i,$$

designando por i el último término de la misma dividido por k^2 . Pero como i es cantidad pequeña, pues lo son ε_1 , ε_2 , ε_3 , se tiene

$$\frac{r}{k} = (1 + i)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}i; \quad \frac{r^3}{k^3} = (1 + i)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}i,$$

luego

$$3 \frac{r}{k} - \frac{r^3}{k^3} = 2.$$

$k_1^2 + \varepsilon_3$), y es M' su masa y V' la potencial de E' en R , se tendrá por el teorema de Laplace

$$V' : M' = V : M.$$

Por tanto, en la ecuación anterior pueden sustituirse V' y M' en vez de V y M , ó en otros términos, dicha ecuación expresa la potencial de un elipsoide casi esférico en un punto exterior.

Esto mismo se deduce también de la fórmula general. En efecto, siendo a, b, c los semiejes de un elipsoide y

$$e_1^2 = b^2 - c^2, \quad e_2^2 = c^2 - a^2, \quad e_3^2 = a^2 - b^2,$$

su potencial en un punto exterior está expresada por la serie (*)

$$\begin{aligned} V = & \frac{M}{r} - \frac{M}{15r^3} \{ P'_2 (e_2^2 - e_3^2) + P''_2 (e_3^2 - e_1^2) + P'''_2 (e_1^2 - e_2^2) \} \\ & - \frac{3M}{35r^5} \{ P'_4 e_2^2 e_3^2 + P''_4 e_3^2 e_1^2 + P'''_4 e_1^2 e_2^2 \} \\ & - \frac{M}{42r^7} \{ P'_6 e_2^2 e_3^2 (e_2^2 - e_3^2) + P''_6 e_3^2 e_1^2 (e_3^2 - e_1^2) \\ & + P'''_6 e_1^2 e_2^2 (e_1^2 - e_2^2) + P_6 e_1^2 e_2^2 e_3^2 \}, \end{aligned}$$

y así prosiguiendo, designando P'_i, P''_i, P'''_i los valores que toma el coeficiente de Legendre del orden i , cuando se sustituyen, cada uno á su vez, los cosenos de dirección de la recta r en lugar de la variable contenida en la expresión de P_i , é indicando P una función simétrica de tales cosenos. Los valores de P_1, P_2, P_4, P_6 son

$$P_1 = \mu,$$

$$P_2 = \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_4 = \frac{5.7}{2.4} \mu^4 - \frac{3.5}{2.4} 2\mu^2 + \frac{1.3}{2.4},$$

$$P_6 = \frac{7.9.11}{2.4.6} \mu^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3\mu^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3\mu^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

Pero de tal expresión de V se deduce, dada la ley de la serie, que si el elipsoide difiere tan poco de una esfera que puedan

(*) *Philosophical Magazine*, diciembre de 1877.

despreciarse las pequeñas cantidades de segundo orden (e^4), su potencial V en un punto exterior, siquiera éste se halle muy próximo al elipsoide, podrá expresarse solamente con los dos primeros términos de la serie. Designando como antes los cuadrados de los semiejes por $k^2 + \varepsilon_1$, $l^2 + \varepsilon_2$, $h^2 + \varepsilon_3$, siendo $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$, fácilmente se halla (1)

$$e_2^2 - e_3^2 = -3\varepsilon_1, \quad e_3^2 - e_1^2 = -3\varepsilon_2, \quad e_1^2 - e_2^2 = -3\varepsilon_3;$$

por otra parte (2)

$$P'_2 = \frac{3}{2} \frac{f^2}{r^2} - \frac{1}{2},$$

$$P''_2 = \frac{3}{2} \frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2},$$

$$P'''_2 = \frac{3}{2} \frac{h^2}{r^2} - \frac{1}{2};$$

y substituyendo todos estos valores en el segundo término de la serie, encontramos de nuevo la expresión (4).

4.

Supongamos ahora que se trate de un esferoide (*) aplanado y hallemos la fórmula de la potencia de una de sus capas en un punto exterior y en otro interior. Si $c(1 + \frac{1}{2}e)$ y $c(1 - \frac{1}{2}e)$ son

(1) En efecto, de las ecuaciones

$$a^2 = k^2 + \varepsilon_1, \quad b^2 = l^2 + \varepsilon_2, \quad c^2 = h^2 + \varepsilon_3,$$

$$e_1^2 = b^2 - a^2, \quad e_2^2 = c^2 - a^2, \quad e_3^2 = a^2 - b^2,$$

se deducen éstas

$$e_1^2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad e_2^2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad e_3^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2;$$

de las cuales, en virtud de la ecuación $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$, se infieren las del texto.

(2) Pues siendo λ, μ, ν los cosenos de dirección del radio r que une el centro del elipsoide con el punto fgh , se tiene

$$\lambda = \frac{f}{r}, \quad \mu = \frac{g}{r}, \quad \nu = \frac{h}{r}.$$

(*) Entiéndase, cuantas veces se emplee en esta obra la palabra *esferoide*, que se habla de un elipsoide de revolución.

los semiejes de una elipse ⁽¹⁾ y r, θ las coordenadas polares de un punto de ella, siendo θ el ángulo comprendido entre r y el semieje menor, la ecuación de la misma, despreciando el cuadrado de e , será

$$\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{c^2(1 + \frac{2}{3}e)} + \frac{r^2 \operatorname{cos}^2 \theta}{c^2(1 - \frac{2}{3}e)} = 1,$$

la cual puede ponerse bajo la siguiente forma ⁽²⁾

$$r = c \{ 1 + e(\frac{1}{3} - \mu^2) \},$$

haciendo, para simplificar, $\operatorname{cos} \theta = \mu$.

Tal elipse, al girar en torno de su eje menor, engendra un esferoide, cuya masa, tomando su densidad por unidad, será $\frac{4}{3}\pi c^3$, siendo c el radio medio de la superficie y e , que se llama la elipticidad, la razón de la diferencia de los semiejes á dicho radio medio ⁽³⁾. Para obtener la expresión de la potencial de este

⁽¹⁾ Con lo cual, siendo e pequeña, se tiene

$$(1 + \frac{2}{3}e)^2 = 1 + \frac{4}{3}e, \quad (1 - \frac{2}{3}e)^2 = 1 - \frac{4}{3}e,$$

y se cumple la condición $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$.

⁽²⁾ Reducidos en la ecuación

$$\frac{r^2}{c^2} \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \frac{2}{3}e} + \frac{\mu^2}{1 - \frac{2}{3}e} \right) = 1$$

los términos del paréntesis á un común denominador, omitido en éste el término con e^2 y despejado el valor de $\frac{r^2}{c^2}$, se tiene

$$\frac{r^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{2}{3}e}{1 - \frac{2}{3}e + 2e\mu^2};$$

de donde, considerado el divisor del segundo miembro como factor elevado á la potencia -1 , limitado el desarrollo de esta potencia á los términos en que e no pase de la primera, y con la misma limitación efectuado el producto de ambos factores y extraída la raíz cuadrada de este producto, se halla sucesivamente

$$\frac{r^2}{c^2} = 1 + 2e \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right),$$

$$\frac{r}{c} = 1 + e \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right).$$

⁽³⁾ El achatamiento ó razón de la diferencia de los semiejes al semieje mayor es

$$\frac{e}{1 + \frac{1}{3}e} = e \left(1 - \frac{1}{3}e \right),$$

esferoide basta escribir en las fórmulas del elipsoide

$$h^2 = c^2, \quad \varepsilon_1 = \frac{2}{3} ec^2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = -\frac{4}{3} ec^2;$$

hallando así (1) que la potencial en un punto interior es

$$\Pi_1 = 2\pi \left(c^2 - \frac{r^2}{3} \right) + \frac{4}{3} \pi e r^2 \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right),$$

y en un punto exterior

$$\Pi_0 = \frac{4\pi c^3}{3r} + \frac{4\pi ec^3}{5r^3} \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right).$$

Esto sentado, si en la capa cuya cara interior es la superficie de un esferoide, cuyos elementos son c , e , y su cara exterior la superficie de otro elipsoide, cuyos elementos son $(c+dc)$ y $(e+de)$, se considera e como función de c , siendo por lo tanto

$$de = \frac{de}{dc} dc;$$

las potenciales de esa capa en un punto interior y otro exterior serán respectivamente (2)

y por lo tanto difiere de la elipticidad e en una cantidad pequeña de primer orden con relación á ella.

(1) Las segundas potencias de los semiejes, expresadas antes por

$$h^2 + \varepsilon_1, \quad h^2 + \varepsilon_2, \quad h^2 + \varepsilon_3,$$

lo están ahora por

$$c^2 + \frac{2}{3} ec^2, \quad c^2 + \frac{2}{3} ec^2, \quad c^2 - \frac{4}{3} ec^2,$$

y de la comparación de estas expresiones con aquéllas resultan los valores que en el texto se indican. En las fórmulas

$$V = M \left\{ \frac{3}{2h} - \frac{r^2}{2h^3} + \frac{3}{10} \frac{\varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 g^2 + \varepsilon_3 h^2}{h^5} \right\},$$

$$V = M \left\{ \frac{1}{r} + \frac{3}{10} \frac{\varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 g^2 + \varepsilon_3 h^2}{r^5} \right\},$$

donde dichos valores se substituyen, pónese también

$$M = \frac{4}{3} \pi c^5, \quad f^2 + g^2 = r^2 (1 - \mu^2),$$

deducida la última igualdad de las siguientes:

$$f^2 + g^2 + h^2 = r^2, \quad \frac{h}{r} = \cos \theta = \mu.$$

$$(2) \quad \frac{d\Pi_0}{dc} dc = \frac{4\pi c^2}{r} dc + \frac{4\pi}{5r^3} \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \frac{d}{dc} (ec^3) dc,$$

$$\frac{d\Pi_1}{dc} dc = 4\pi c dc + \frac{4}{5} \pi r^2 \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \frac{de}{dc} de.$$

$$\frac{d\Pi_1}{dc} dc \quad \text{y} \quad \frac{d\Pi_0}{dc} dc,$$

si su densidad se toma por unidad; mientras que si fuera por el contrario ρ la densidad, la potencial sería

$$\text{en un punto exterior,} \quad \rho \frac{d\Pi_0}{dc} dc;$$

$$\text{en un punto interior,} \quad \rho \frac{d\Pi_1}{dc} dc.$$

5.

Consideremos tras de esto un esferoide cuya densidad no sea uniforme, sino variable; pero de manera que las superficies que la tengan constante sean esferoides concéntricos cuyos ejes coincidan en dirección, siendo la superficie exterior una de ellas. Supongamos además que tanto la elipticidad de estas superficies como su densidad sean funciones de la distancia al centro, y que $r = c \{1 + e(\frac{1}{2} - \mu^2)\}$ sea la ecuación de la curva que engendre la superficie de densidad ρ , siendo c la variable independiente y e, ρ , funciones de c . Todo lo cual quiere decir, en otros términos, que se suponga el esferoide dado compuesto de capas esferoidales homogéneas, cuya elipticidad y densidad dependan de c . Para distinguir las cantidades e, ρ correspondientes á la superficie exterior, representémoslas por las letras acentuadas e', ρ' . Y supuesto lo que antecede, imaginemos dentro del cuerpo un punto P situado en la superficie, cuyos elementos son c', e' , y determinado por las coordenadas polares r, μ : se quiere hallar la potencial de toda la masa en P.

En el párrafo precedente obtuvimos, tanto para un punto exterior como interior, la expresión de la potencial de una capa análoga á éstas de que suponemos está formado el esferoide. Integrando, pues, entre los límites 0 y c la fórmula relativa al primer caso, la potencial en P del montón de capas que no envuelvan á P será

$$\int_0^{c'} \rho' \frac{d\Pi_0}{dc} dc,$$

é integrando desde c , hasta c' la fórmula concerniente al segundo caso, la potencial en P del montón de capas que envuelvan á P estará dada por

$$\int_c^{c'} \rho \frac{d\Pi_1}{dc} dc;$$

por tanto, la potencial de todo el esferoide será

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{c'} \rho \frac{d\Pi_0}{dc} dc + \int_c^{c'} \rho \frac{d\Pi_1}{dc} dc \\ &= \frac{4\pi}{r} \int_0^{c'} \rho c^2 dc + \frac{4\pi}{5r^3} (\frac{1}{3} - \mu^2) \int_0^{c'} \rho \frac{d}{dc} (ec^3) dc \quad (5) \\ &\quad + 4\pi \int_c^{c'} \rho c dc + \frac{1}{3} \pi r^2 (\frac{1}{3} - \mu^2) \int_c^{c'} \rho \frac{de}{dc} dc. \end{aligned}$$

De donde, reemplazando r por su valor $c, \{1 + e, (\frac{1}{3} - \mu^2)\}$, se deduce (1)

$$V = \frac{4\pi}{c} \int_0^{c'} \rho c^2 dc + 4\pi \int_c^{c'} \rho c dc + 4\pi (\frac{1}{3} - \mu^2) U, \quad (6)$$

siendo

$$U = -\frac{e}{c} \int_0^{c'} \rho c^2 dc + \frac{1}{5c} \int_0^{c'} \rho \frac{d(ec^3)}{dc} dc + \frac{c'^2}{5} \int_c^{c'} \rho \frac{de}{dc} dc.$$

Los dos primeros términos de la fórmula (6) expresan la potencial, en un punto interior, de una esfera cuya densidad es función de la distancia al centro; la cantidad U es del mismo orden de magnitud que e .

6.

Demuéstrase en los tratados de Hidrostática que si p es la presión en el punto xyz de una masa fluida, ρ la densidad en el

(1) Pues con bastante aproximación para el caso es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - e, \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \right\},$$

y como las potencias r^2 y $\frac{1}{r^3}$ están multiplicadas por términos del orden

de e , pueden reemplazarse en estos productos por c^2 y $\frac{1}{c^3}$.

mismo punto y X , Y , Z las componentes de la fuerza que sobre él actúa,

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz);$$

que es necesario para el equilibrio que el segundo miembro de esta ecuación sea una diferencial completa, y que en la superficie libre es

$$X dx + Y dy + Z dz = 0;$$

infririéndose de esta última ecuación (1) que la fuerza resultante en cada punto de la superficie debe ser normal á ésta. Si el fluido es homogéneo, es claro que tal ecuación será la ecuación diferencial de todas las superficies de igual presión. Si es el fluido heterogéneo y designan X , Y , Z las componentes de la atracción de la masa, cuya potencial es V , se tendrá

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz};$$

de suerte que en este caso $X dx + Y dy + Z dz$ será también una diferencial completa. Y si se trata de un fluido que gira con velocidad uniforme al rededor, por ejemplo, del eje de las z , es fácil ver que la parte correspondiente de

$$X dx + Y dy + Z dz$$

será asimismo una diferencial completa. Por tanto, con las fuerzas que debemos tomar en cuenta, á saber, la atracción ó gravitación y la fuerza llamada centrífuga, se tendrá

$$X dx + Y dy + Z dz = d\Theta,$$

indicando Θ una función de xyz ; y será menester para el equilibrio que $dp = \rho d\Theta$ sea otra diferencial completa, es decir, que sea ρ función de Θ , mas entonces también p lo será de la misma, y $d\Theta = 0$ será la ecuación diferencial de las superficies de igual presión é igual densidad.

(1) La cual puede escribirse de este modo :

$$\frac{X}{F} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{F} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{F} \frac{dz}{ds} = 0,$$

designando por F la resultante de X , Y , Z y por ds el arco infinitesimal descrito sobre la superficie á partir del punto xyz .

Aunque girando nuestro globo en torno de su eje, todos los problemas concernientes al equilibrio relativo de la tierra y de los cuerpos que en su superficie se hallan son en realidad problemas dinámicos; no obstante, pueden resolverse como de Estática, añadiendo á la atracción la fuerza ideal llamada centrífuga. Referida la tierra á coordenadas rectangulares, y siendo el eje de las z el de rotación, si es V la potencial de la masa en un punto interior xyz , las componentes de la fuerza resultante, según los ejes coordenados, serán (1)

$$X = \frac{dV}{dx} + x\omega^2, \quad Y = \frac{dV}{dy} + y\omega^2, \quad Z = \frac{dV}{dz},$$

designando ω la velocidad angular de rotación. Conforme, pues, con lo que precede, en cada superficie de igual presión y densidad será

$$\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz + \omega^2 (x dx + y dy) = 0;$$

de donde, integrando, se deduce

$$\int \frac{dp}{\rho} = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \Theta, \quad (7)$$

siendo Θ constante en cada superficie, pero variable de una á otra. Luego esta ecuación es la de las superficies de igual presión y densidad, ó como generalmente se dice, de las superficies de nivel. En cada punto de cualquiera de éstas la fuerza resultante es perpendicular á la superficie, y tiene por valor $\frac{d\Theta}{dn}$, llamando dn el elemento de la normal (2).

(1) La fuerza centrífuga, como es sabido, se mide por el cociente del cuadrado de la velocidad lineal por el radio, y en su consecuencia valdrá aquí $\frac{r^2\omega^2}{r}$. Los productos $x\omega^2$ y $y\omega^2$ de este valor por los cosenos $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ de los ángulos que forma la dirección de la fuerza con los ejes de las x , y , darán las componentes respectivas según estos ejes.

(2) La atracción según la normal es $\frac{dV}{dn}$ y la componente de la fuerza centrífuga según la misma recta es

$$\omega^2 \left(x \frac{dx}{dn} + y \frac{dy}{dn} \right).$$

7.

Averiguemos ahora si es posible que una masa fluida de forma elipsoidal, girando en torno de uno de sus ejes, esté en equilibrio relativo. Si a, b, c son los semiejes de este elipsoide y f, g, h las coordenadas de una partícula de su masa, la potencial en este punto estará dada por la ecuación (2), y si sustituimos este valor de V en la ecuación de las superficies de nivel y dividimos por $\frac{2}{3}M$, siendo M la masa del elipsoide, obtendremos, suponiendo que sea c el eje de revolución (1),

$$-f^2 \int_0^\infty \frac{dt}{Q(a^2+t)} - g^2 \int_0^\infty \frac{dt}{Q(b^2+t)} - h^2 \int_0^\infty \frac{dt}{Q(c^2+t)} + \frac{2\omega^2}{3M} (f^2 + g^2) = C',$$

siendo $Q^2 = (a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)$ y C' una constante (2). Como esta ecuación será aplicable también á la superficie exterior, donde la presión es nula y donde

$$\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1;$$

comparando los coeficientes de f^2, g^2, h^2 , resultan las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{2\omega^2}{3M} - \int \frac{dt}{Q(a^2+t)} &= \frac{\mu}{a^2}, \\ \frac{2\omega^2}{3M} - \int \frac{dt}{Q(b^2+t)} &= \frac{\mu}{b^2}, \\ - \int \frac{dt}{Q(c^2+t)} &= \frac{\mu}{c^2}, \end{aligned}$$

$$(1) \quad \rho = 1, \quad M = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

$$(2) \quad C' = \frac{\Theta}{\frac{2}{3}M} - \int_0^\infty \frac{dt}{Q}.$$

que equivalen á dos solamente. Pero veamos si las consecuencias que envuelven son posibles.

Restando la segunda ecuación de la primera, se halla

$$a^2 b^2 \int \frac{(a^2 - b^2) dt}{Q(a^2 + t)(b^2 + t)} = \mu(b^2 - a^2);$$

y eliminando μ por medio de la tercera ecuación, resulta

$$(a^2 - b^2) \left\{ \int \frac{a^2 b^2 dt}{Q(a^2 + t)(b^2 + t)} - \int \frac{c^2 dt}{Q(c^2 + t)} \right\} = 0;$$

condición que se cumple tanto siendo $a = b$, en cuyo caso el elipsoide es de revolución en torno de c , como siendo nula la cantidad que está entre paréntesis, esto es,

$$\int_0^\infty \frac{\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{c^2}\right)t + t^2}{Q_i^3} dt = 0;$$

más en esta integral no aparecerán elementos negativos sino cuando

$$c < \frac{ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}};$$

pero si se imagina un triángulo rectángulo cuyos catetos sean a , b , la perpendicular trazada á la hipotenusa desde el vértice opuesto será igual á $ab(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$; luego para que dicha integral se anule, c debe ser menor que a y b . Ahora bien, como esta integral es negativa cuando c es muy pequeña, se infiere que con un cierto valor de c debe anularse. Consúltese á propósito de este curiosísimo problema [la discusión hecha por Todhunter en los *Proceedings of the Royal Society*, núm. 123, 1870.

Por otra parte, que el valor de ω es real resulta de la primera y tercera ecuación, que dan

$$\frac{2\omega^2}{3M} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \int \frac{t dt}{Q(a^2 + t)(c^2 + t)}$$

relación de suyo positiva.

Esta notabilísima propiedad del elipsoide fluido homogéneo, de tres ejes desiguales, que puede estar en equilibrio relativo, girando en torno de su eje menor, fué hallada por Jacobi en 1834.

8.

Cuando $a = b$ y el elipsoide es un esferoide aplanado, sólo existe una ecuación de condición, á saber, la que enlaza la velocidad de rotación con la razón de los ejes. Si c y $c(1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ son los semiejes y ρ la densidad de la masa fluida, la última ecuación escrita arriba será (1)

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = c^3 \varepsilon^2 \int_0^\infty \frac{t dt}{Q(a^2 + t)(c^2 + t)}$$

Mas transformemos la integral poniendo $c^2 + t = \varepsilon^2 c^2 \cot^2 \theta$, con lo cual (2)

(1) En efecto, con los valores antedichos, es

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \quad M = \frac{4}{3} \pi c^3 (1 + \varepsilon^2) \rho.$$

(2) Pues se tiene

$$a^2 + t = b^2 + t = \varepsilon^2 c^2 \operatorname{cosec}^2 \theta,$$

$$dt = -2\varepsilon^2 c^2 \cot \theta \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta,$$

$$\frac{t}{(a^2 + t)(c^2 + t)} = \frac{\varepsilon^2 - \tan^2 \theta}{\varepsilon^4 c^2 \operatorname{cosec}^2 \theta},$$

y de $t = c^2(\varepsilon^2 \cot^2 \theta - 1)$ se infiere

$$t = 0 \dots \theta = \operatorname{arc} \tan \varepsilon,$$

$$t = \infty \dots \theta = 0;$$

con todo lo cual se efectúa la primera transformación de la integral.

Aplicando después la expresión general de $\int_0^\theta \frac{\operatorname{sen}^m \theta}{\cos^n \theta}$ ó directamente,

integrando por partes, resulta

$$\int_0^\theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta,$$

$$\int_0^\theta \frac{\operatorname{sen}^4 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{\cos \theta} + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \theta;$$

pero aquí

$$\theta = \operatorname{arc} \tan \varepsilon, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}.$$

$$Q = \varepsilon^3 c^3 \cot \theta \operatorname{cosec}^2 \theta, \quad \frac{dt}{Q} = -\frac{2d\theta}{\varepsilon c},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\omega^2}{2\pi\rho} &= \frac{2}{\varepsilon^3} \int_0^{\tan^{-1}\varepsilon} (\varepsilon^2 - \tan^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{3 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \tan^{-1} \varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Si ε recorre sucesivamente todos los valores desde 0 hasta el ∞ , el segundo miembro de esta última ecuación, el cual llamaremos más brevemente E, crecerá primero desde cero hasta que, con un cierto valor de ε deducido de la ecuación $dE = 0$ (1) ó

$$\tan^{-1} \varepsilon = \frac{9\varepsilon + 7\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon^2)(9 + \varepsilon^2)},$$

alcance su máximo; mas pasado ese valor de ε , que es próximamente de 2.5, menguará E gradualmente hasta cero: luego hay un límite máximo para la velocidad angular ω , y cuando ésta es menor que tal límite, existen siempre dos esferoides que cumplan con la condición de equilibrio, en uno de los cuales ε es mayor y en otro menor que 2.5. Esta propiedad fué indicada primero por Thomas Simpson y demostrada después por D'Alembert (2). Conviene notar, sin embargo, que una misma masa fluida no puede indistintamente ser uno ú otro esferoide sin que cambie el momento resultante de las cantidades de movimiento, y cuando este momento y la masa se dan, sólo cabe una forma de equilibrio.

Puede tras de esto demostrarse que no es posible que la tierra sea ni haya sido una masa fluida homogénea. Si ρ es la densidad media de la tierra, su masa será $\frac{4}{3}\pi\rho a^2 c$, designando a el radio ecuatorial y c el polar, y esa masa, dividida por ac , podrá tomarse como valor medio de la atracción en la superficie; luego si m

$$(1) \quad \frac{dE}{d\varepsilon} = -\frac{9 + \varepsilon^2}{\varepsilon^4} \arctan \varepsilon + \frac{9 + 7\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)\varepsilon^3}.$$

(2) Véase Todhunter, *History of the Mathematical Theories of Attraction*, etc., tomo I, págs. 180 y 181.

designa la razón entre la fuerza centrífuga ecuatorial y la fuerza de la gravedad, será

$$m = \frac{a\omega^2}{\frac{4}{3}\pi\rho a}; \quad \therefore \frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{3}{4}m.$$

Mas sea l la longitud del péndulo de segundos: la aceleración debida á la gravedad será $\pi^2 l$. En el ecuador $l = 39.017$ pulgadas (0.99102 metros), en el polo $l = 39.217$ (0.99610 metros), y la media entre estos valores es la longitud del péndulo de segundos á la latitud de 45° . Por otra parte, llamando t el número de segundos solares medios que la tierra invierte en una rotación en torno de su eje, la aceleración debida á la fuerza centrífuga será

$$a\omega^2 = \frac{4a\pi^2}{t^2};$$

luego, sustituyendo los valores $t = 86\ 164$, $a = 20\ 926\ 000$ pies (6 378 200 metros), $l = 39.117$ pulgadas (0.99356 metros), será

$$m = \frac{4a}{lt^2} = \frac{1}{289.1}.$$

Ahora bien, cuando ε^2 es cantidad muy pequeña, como en el caso actual sucede (1),

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{3 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \tan^{-1} \varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2} = \frac{4}{15} \varepsilon^2;$$

mas esto, como queda dicho, debe ser igual á $\frac{3}{4}m$; luego

$$\frac{1}{4} \varepsilon^2 = \frac{3}{4} m,$$

y la razón de los ejes, que es $1 : 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2$, valdrá 231.3 : 232.3, que difiere demasiado de la que realmente existe.

(1) Sustituyendo en la primera de estas dos igualdades el desarrollo de

$$\tan^{-1} \varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^5}{5} - \dots$$

y reduciendo el cálculo á los términos en que ε no entre elevada á potencia superior á la segunda, se halla la otra igualdad.

9.

Supongamos, por último, que el esferoide fluido que gira no posea una densidad uniforme, y sin imponerle otra condición que la de estar limitadas las capas de igual densidad por esferoides concéntricos con la superficie exterior, y cuyos ejes coincidan en dirección con los de ésta, veamos en qué circunstancias es posible el equilibrio. En tal caso, las superficies de igual densidad serán también de igual presión. La potencial en un punto de semejante esferoide, dada por la fórmula (6), debe sustituirse en la (7), que puede ponerse bajo esta forma, más á propósito (1),

$$\Theta = V + \frac{\omega^2}{2} r^2 (1 - \mu^2) = V + \frac{1}{3} r^2 \omega^2 + \frac{1}{3} r^2 \omega^2 (\frac{1}{3} - \mu^2). \quad (8)$$

Mas, ajustándonos á la notación primitiva, cabe reemplazar aquí r por c , puesto que se prescinde de las cantidades pequeñas de segundo orden. Hecha con arreglo á esto aquella sustitución, resulta, poniendo $4\pi U + \frac{1}{3} c^2 \omega^2 = \Omega$,

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{4\pi}{c} \int_0^{c'} \rho c^2 dc + 4\pi \int_{c'}^{c''} \rho c dc + \frac{1}{3} c^2 \omega^2 + (\frac{1}{3} - \mu^2) \Omega.$$

Pero tal expresión ha de ser constante en la superficie esferoidal definida por c , y e , siendo menester para ello que Ω , por la cual está multiplicada la variable μ^2 , se anule; luego

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{4\pi}{c} \int_0^{c'} \rho c^2 dc + 4\pi \int_{c'}^{c''} \rho c dc + \frac{1}{3} c^2 \omega^2, \quad (9)$$

y sustituyendo el valor de U que da la relación (6),

$$\begin{aligned} -\frac{e'}{c} \int_0^{c'} \rho c^2 dc + \frac{1}{5c^3} \int_0^{c'} \rho \frac{d(ec^5)}{dc} dc + \frac{c^2}{5} \int_{c'}^{c''} \rho \frac{de'}{dc} dc \\ + \frac{c^2 \omega^2}{8\pi} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Esta importantísima fórmula, que expresa la condición de

(1) $x^2 + y^2 = r^2 (1 - \cos^2 \theta) = r^2 (1 - \mu^2)$.

equilibrio, fué dada primero por Clairaut (*), quien la transformaba suprimiendo los subíndices que señalan la superficie particular en que la potencial se toma; multiplicando esta relación (10) por c^3 , diferenciando y dividiendo por c^4 ; diferenciando después, multiplicando por c^2 y dividiendo por la integral que queda, con todo lo cual resulta (1)

$$\frac{d^2e}{dc^2} + \frac{2\rho c^2}{\varphi(c)} \cdot \frac{de}{dc} + \left(\frac{2\rho c}{\varphi(c)} - \frac{6}{c^2} \right) e = 0, \quad (11)$$

designando $\varphi(c)$ la $\int_0^c \rho c^2 dc$.

10.

La ecuación diferencial que acabamos de obtener puede integrarse siempre, al menos por serie, cuando se da ρ en función de c , y las dos constantes arbitrarias permiten alcanzar un valor de e que satisfaga la ecuación de que aquélla se deriva. Por tanto, cuando se da ρ en función de c , cabe siempre hallar la elipticidad de cada superficie de igual densidad y presión de manera que se cumpla la condición de equilibrio, resultando así la tierra con una constitución posible. Pero sin suponer ninguna ley especial de densidad, Clairaut sacó de lo que precede una importantísima consecuencia, que puede deducirse como sigue. Puesto que la masa M del esferoide es $= 4\pi\varphi(c')$, y la razón de la fuerza centrífuga en el ecuador á la gravedad es $m = c'^3\omega^2 : M$ (2), será

(*) *Théorie de la figure de la Terre*, etc., págs. 273 y 276.

(1) Multiplicada la ecuación (10) por c^5 , derivada después teniendo en cuenta que

$$\frac{d(ec^5)}{dc} = \frac{de}{dc} c^5 + 5ec^4,$$

y dividida dicha derivada por c^4 , se halla

$$\left(\frac{de}{dc} \frac{1}{c^2} + \frac{2e}{c^5} \right) \int_0^c \rho c^2 dc - \int_c^{c'} \frac{c'}{\rho} \frac{dc}{dc} - \frac{5\omega^2}{8\pi} = 0.$$

(2) Siendo el área de cada cara de la capa extendida á la distancia c , del centro $4\pi c^2$, el espesor de la misma dc y su densidad ρ , será

$$\frac{c'^2 \omega^2}{8\pi} = \frac{m}{2c'} \varphi(c').$$

En su consecuencia, haciendo $c = c'$ en la relación (10), se tiene

$$\frac{1}{5c'^2} \int_0^{c'} \rho \frac{d}{dc} (ec^3) dc - \left(e' - \frac{m}{2} \right) \varphi(c') = 0; \quad (12)$$

y con esto la ecuación (5) da para la potencial en un punto exterior de la tierra (1)

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M}{r^3} c'^2 \left(e' - \frac{m}{2} \right) \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right). \quad (13)$$

Diferenciando ésta con respecto á r , el coeficiente diferencial tomado con signo negativo dará la atracción hacia el centro de la tierra, atracción que puede tomarse por la componente según la normal, despreciando las cantidades pequeñas de segundo orden. Mas para tener la fuerza total de la gravedad que comprende también la fuerza centrífuga, debe añadirse la componente vertical de esta última. En suma, el valor de g es

$$g = - \frac{d\Theta}{dr} = - \frac{dV}{dr} - r\omega^2(1 - \mu^2).$$

Efectuada la diferenciación y puesto por r el valor que en la superficie le corresponde, resulta (2)

$$M = 4\pi \int_0^{c'} \rho c^2 dc.$$

La fuerza centrífuga en el ecuador es $c' \omega^2$ y la gravedad $\frac{M}{c'^2}$

(1) Sustituyendo $c_r = c'$ en la fórmula de la potencial, reduce-se ésta á

$$V = \frac{4\pi}{r} \int_0^{c'} \rho c^2 dc + \frac{4\pi}{5r^3} \frac{1}{3} (-\mu^2) \int_0^{c'} \rho \frac{d}{dc} (ec^3) dc;$$

y reemplazada aquí la última integral por su valor deducido de la ecuación (12), y la otra integral, ó sea $\varphi(c')$, por $\frac{M}{4\pi}$, resulta la fórmula del texto.

(2) En efecto, si en

$$g = \frac{M}{r^2} + 3 \frac{M}{r^4} c'^2 \left(e' - \frac{m}{2} \right) \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) - r \omega^2 (1 - \mu^2)$$

se sustituye

$$g = \frac{M}{c'^2} \left\{ 1 - \frac{2}{3}m + (e' - \frac{5}{3}m) \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \right\}.$$

Luego si G es el valor de la gravedad en el ecuador, donde $\mu = 0$, en otro punto, á la latitud φ , será ⁽¹⁾

$$g = G \left\{ 1 + \left(\frac{5}{3}m - e' \right) \text{sen}^2\varphi \right\}; \quad (14)$$

de donde se deduce el teorema llamado de Clairaut, á saber: que designando G y G' los valores respectivos de la gravedad en el ecuador y el polo, es

$$\frac{G' - G}{G} = \frac{5}{3}m - e'.$$

Clairaut, al demostrar este teorema, no hace hipótesis alguna de fluidez primitiva, salvo que el lecho superficial de la tierra

$$\begin{aligned} r &= c' \left\{ 1 + e' \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \right\}, \\ \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{c'^2} \left\{ 1 - 2e' \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \right\}, \\ \frac{1}{r^4} &= \frac{1}{c'^4} \left\{ 1 - 4e' \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \right\}, \\ e' \omega^2 &= \frac{Mm}{c'^2}, \end{aligned}$$

resulta, prescindiendo de los términos que contienen e'^2 ó me' , porque son pequeños de segundo orden,

$$g = \frac{M}{c'^2} \left\{ 1 + \left(e' - \frac{3}{2}m \right) \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) - m \left(1 - \mu^2 \right) \right\};$$

y de esta fórmula se pasa fácilmente á la del texto, poniendo

$$m \left(1 - \mu^2 \right) = m \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) + \frac{2}{3}m.$$

⁽¹⁾ Puesto que

$$G = \frac{M}{c'^2} \left(1 - \frac{3}{2}m + \frac{1}{3}e' \right),$$

se tiene con suficiente aproximación

$$\frac{g}{G} = \left\{ 1 - \frac{2}{3}m + \left(e' - \frac{5}{2}m \right) \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{3}{2}m - \frac{1}{3}e' \right\};$$

y efectuado este producto, prescindiendo de los términos donde m ó e' entren elevados á la segunda potencia ó multiplicados uno por otro, se halla la fórmula del texto, en la cual $\text{sen } \varphi = \mu$. Cuando $\varphi = 90^\circ$, es $\text{sen } \varphi = 1$ y por tanto

$$\frac{G'}{G} = 1 + \left(\frac{5}{2}m - e' \right).$$

posea la misma forma que si fuera fluido y estuviera en equilibrio relativo al girar con velocidad angular uniforme; fuera de esto, sólo supone que los lechos terrestres son capas esferoidales concéntricas, cuyos ejes coinciden en dirección, y prescinde de que la densidad varíe de tal ó cual modo de una capa á otra. El profesor Stokes publicó en 1849 dos artículos (*) demostrando el teorema de Clairaut, donde hacía ver que estableciendo que la superficie es la de un esferoide de equilibrio, de pequeña elipticidad, dicho teorema se deduce prescindiendo de la hipótesis de la fluidez primitiva y aun sin suponer ningún arreglo interior en capas próximamente esféricas de uniforme densidad. Téngase en cuenta, en efecto, que la distribución de densidad en lo interior de la tierra puede cambiarse de infinitos modos sin alterar la gravedad en ningún punto de la superficie, pues siendo la atracción de una esfera sólida, homogénea, en un punto exterior, igual á la de una capa esférica concéntrica de la misma masa—con tal que sea homogénea y quede también exterior respecto de ella el punto de que se trata,—claro es que se puede imaginar practicada en alguna parte de la masa de la tierra una gran cavidad, distribuyendo la materia en capas concéntricas, á todas las cuales sea exterior el punto dado. Luego que las variaciones de la gravedad en la superficie de la tierra, indicadas por el péndulo, estén de acuerdo con la ley demostrada en el teorema de Clairaut, no es una prueba concluyente de la fluidez primitiva de la tierra.

11.

Para hallar la ley de la elipticidad de las superficies de igual densidad hay que suponer alguna otra ley que enlace ρ con c . La admitida por Laplace, y hasta ahora no reemplazada por ninguna otra mejor, supone que la materia que compone la tierra varía en su compresibilidad, de tal modo que el incremento del cuadrado de la densidad es proporcional al incremento de la presión. Esta ley, por lo menos, nada envuelve en contradicción con

(*) *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tomo IV, pág. 194.
Cambridge Philosophical Transactions, tomo VIII, pág. 672.

lo que por experiencia sabemos acerca de la compresibilidad de la materia. Expresada algebraicamente da

$$dp = k\rho d\rho,$$

$$\therefore \int \frac{dp}{\rho} = k\rho + C.$$

Pero en virtud de la ecuación (9), si omitimos el pequeño término con ω^2 y reemplazamos las constantes indeterminadas k y C por $4\pi k^2$ y $4\pi C$, se tiene

$$C + k^2 \rho = \frac{1}{c} \int_0^c \rho c^2 dc + \int_c^{c'} \rho c dc.$$

Multiplicando ésta por c y diferenciando dos veces (1), resulta

$$\frac{d^2}{dc^2} (\rho c) + \frac{\rho c}{k^2} = 0,$$

cuya integral es (2)

$$\rho c = h \operatorname{sen} \left(\frac{c}{h} + g \right);$$

pero para que la densidad en el centro no sea infinita, debe ser $g = 0$, siendo por tanto la ley de densidad

$$\rho = \frac{h}{c} \operatorname{sen} \frac{c}{h}.$$

(1) Por primera vez se obtiene

$$C + k^2 \frac{d}{dc} (\rho c) = \int_c^{c'} \rho c dc.$$

(2) Pues la ecuación anterior es la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} + q y = 0,$$

cuya integral es

$$x = b + \frac{1}{\sqrt{q}} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{q}{a}} y,$$

ó bien

$$y = \sqrt{\frac{a}{q}} \operatorname{sen} \sqrt{q} (x - b),$$

designando por a , b constantes arbitrarias.

En cuanto á la densidad media ρ_0 de la tierra, se deduce de la igualdad de estas dos expresiones de la masa del esferoide

$$4\pi\varphi(c') = \frac{4}{3}\pi\rho_0 c'^3;$$

$$\therefore \rho_0 = \frac{3}{c'^3} \varphi(c').$$

Pero

$$\begin{aligned} \varphi(c) &= \int_0^c ch \operatorname{sen} \frac{c}{k} dc, \\ &= -chk \cos \frac{c}{k} + hk \int_0^c \cos \frac{c}{k} dc, \\ &= hk \left(k \operatorname{sen} \frac{c}{k} - c \cos \frac{c}{k} \right); \end{aligned}$$

$$\therefore \rho_0 = 3 \frac{hk}{c'^2} \left\{ \frac{k}{c'} \operatorname{sen} \frac{c'}{k} - \cos \frac{c'}{k} \right\}.$$

Mas designando por ρ' la densidad en la superficie, es

$$\rho' = \frac{h}{c'} \operatorname{sen} \frac{c'}{k},$$

y en su consecuencia, llamando n la razón de la densidad en la superficie á la densidad media, con lo cual $\rho' = n\rho_0$, y haciendo $c' = k\theta$, se tiene (1)

$$\frac{1}{n} = \frac{3}{\theta^2} - \frac{3}{\theta \tan \theta}. \quad (15)$$

12.

Con la ley de densidad de Laplace podemos ya resolver la ecuación (11). Diferenciando la expresión de ρ , resulta

$$\frac{d\rho}{dc} = \frac{h}{kc} \cos \frac{c}{k} - \frac{h}{c^2} \operatorname{sen} \frac{c}{k} = -\frac{\varphi(c)}{k^2 c^2}.$$

$$(1) \quad \frac{1}{n} = \frac{\rho_0}{\rho'} = 3 \frac{k}{c'} \left(\frac{k}{c'} - \frac{1}{\tan \frac{c'}{k}} \right).$$

y sustituyendo esto, dicha ecuación puede sin dificultad transformarse en la siguiente (1):

$$\frac{d^2}{dc^2} (\varphi(c) e) + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{6}{c^2} \right) (\varphi(c) e) = 0,$$

cuya integral (*) es

$$e \varphi(c) = C \left\{ \left(1 - \frac{3k^2}{c^2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{c}{k} + B \right) + \frac{3k}{c} \cos \left(\frac{c}{k} + B \right) \right\}.$$

Pero aquí B debe ser nula, pues si no la elipticidad en el centro sería infinita, como puede verse desarrollando e según las potencias de c . En su consecuencia la ecuación anterior puede escribirse de este modo

$$e \varphi(c) = C \left\{ c \rho - \frac{3}{c^2} \varphi(c) \right\}, \quad (16)$$

de donde se deduce para cada capa (2)

(1) De la ecuación

$$\int_0^c \rho c^2 dc = \varphi(c)$$

se deduce

$$\rho c^2 = \frac{d\varphi(c)}{dc}, \quad 2\rho c = \frac{d^2\varphi(c)}{dc^2} - \frac{d\rho}{dc} c^2,$$

transformándose por consecuencia la ecuación (11) en esta otra

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 e}{dc^2} \varphi(c) + 2 \frac{de}{dc} \frac{d\varphi(c)}{dc} + \frac{d^2 \varphi(c)}{dc^2} e \\ - \frac{d\rho}{dc} c^2 e - \frac{6}{c^2} \varphi(c) e \end{aligned} \right\} = 0,$$

la cual, reemplazado el primer renglón por el término equivalente

$\frac{d^2}{dc^2} (\varphi(c) e)$, y $\frac{d\rho}{dc}$ por el valor arriba hallado, es la misma del texto.

(*) *Differential Equations*, por Boole, tercera edición, pág. 425, donde, puesta la ecuación diferencial bajo la forma

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + q^2 u - \frac{6u}{x^2} = 0,$$

está integrada por método simbólico.

(2) Pues dividiendo por $\varphi(c)$ y sustituyendo en vez de esta función y de ρ los valores hallados en el párrafo anterior, se tiene

$$e = \frac{3C}{c^2} \left\{ \frac{h \operatorname{sen} \frac{c}{k}}{\frac{3}{c^2} h k \left(h \operatorname{sen} \frac{c}{k} - c \cos \frac{c}{k} \right)} - 1 \right\}.$$

$$e = \frac{3C}{c^2} \left\{ \frac{1}{3 \frac{k^2}{c^2} \left(1 - \frac{c}{k} \cot \frac{c}{k} \right)} - 1 \right\}.$$

En la superficie esta expresión se convierte en

$$e' = \frac{3C}{c'^2} (n - 1),$$

y en el centro, donde $c = 0$, es ⁽¹⁾

$$e_0 = \frac{e'}{15} \cdot \frac{\theta^2}{1 - n}.$$

Queda así determinada la relación de las elipticidades extremas, pero no en absoluto la elipticidad de la superficie. Para obtenerla en función de n puede procederse de este modo: según ya hemos visto por la fórmula (12)

$$5c'^2 \left(e' - \frac{m}{2} \right) \varphi(c') = \int_0^{c'} \rho \frac{d}{dc} (ec^3) dc;$$

y si llamamos el segundo miembro $\varphi_1(c')$ y recordamos que ⁽²⁾

$$3n\varphi(c') = \rho' c'^3,$$

se tendrá

$$e' - \frac{m}{2} = \frac{3n\varphi_1(c')}{5\rho' c'^3}; \quad (17)$$

mas integrando por partes la expresión de $\varphi_1(c')$, resulta

⁽¹⁾ Escribiendo $c = kz$, es

$$\frac{1}{3 \left(1 - \frac{c}{k} \cot \frac{c}{k} \right)} - \frac{k^2}{c^2} = \frac{z^2 \operatorname{sen} z - 3(\operatorname{sen} z - z \cos z)}{3z^2(\operatorname{sen} z - z \cos z)},$$

y aunque esta relación y la de las primeras y segundas derivadas de sus dos términos ofrecen para $z = 0$ la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, la relación

de las terceras derivadas, para dicho valor de z , es $-\frac{1}{15}$. Luego

$$e_0 = -\frac{3C}{15k^2}, \quad \frac{e_0}{e'} = \frac{1}{15} \left(\frac{c'}{k} \right)^2 \frac{1}{1-n}.$$

$$^{(2)} \quad \rho' = n\rho_0 = n \frac{3}{c'^5} \varphi(c').$$

$$\varphi_1(c') = \rho' e' c'^3 + \frac{1}{k^2} \int_0^{c'} c^3 e \varphi(c) dc,$$

y reemplazando aquí por $e \varphi(c)$ el valor hallado antes (16) y haciendo otras sustituciones en virtud de las igualdades

$$c' = k\theta, \quad c' \rho' = h \operatorname{sen} \theta,$$

se deduce (1)

$$\int e c^3 \varphi(c) dc = \rho' c'^3 \frac{C k^2}{\theta^2} \{ 6\theta^2 - 15 + (15\theta - \theta^3) \cot \theta \};$$

pero como se ha visto anteriormente, $e' c'^2 = 3(n-1)C$; por lo cual, y teniendo en cuenta la ecuación (15), será (2)

(1) Sustituyendo en el segundo miembro de la igualdad

$$\int e c^5 \varphi(c) dc = C \int c^5 \left\{ a \rho - \frac{3}{c^2} \varphi(c) \right\} dc,$$

en vez de ρ y $\varphi(c)$ sus valores hallados en el párrafo precedente, y escribiendo después $c = k z$, se tiene

$$\int e c^5 \varphi(c) dc = \\ C h k^4 \left\{ \int z^5 \operatorname{sen} z dz + 3 \int z^2 \cos z dz - 3 \int z \operatorname{sen} z dz \right\},$$

de donde, integrados por partes los tres términos, se deduce, prescindiendo de la constante general,

$$\int e c^5 \varphi(c) dc = \\ = \\ C h k^4 \left\{ \begin{array}{l} -z^5 \cos z + 3 z^2 \operatorname{sen} z + 6 z \cos z - 6 \operatorname{sen} z \\ + 3 z^2 \operatorname{sen} z + 6 z \cos z - 6 \operatorname{sen} z \\ + 3 z \cos z - 3 \operatorname{sen} z \end{array} \right\} \\ = \\ C k^4 h \operatorname{sen} z \{ -z^5 \cot z + 6 z^2 + 15 z \cot z - 15 \}.$$

(2) En efecto, por la primera sustitución se tiene

$$\frac{1}{k^2} \int_0^{c'} e c^5 \varphi(c) dc = \frac{\rho' e' c'^5}{n-1} \left\{ 2 - \frac{\theta}{3 \tan \theta} - 5 \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta \tan \theta} \right) \right\},$$

y en virtud de la ecuación (15)

$$\frac{1}{k^2} \int_0^{c'} e c^5 \varphi(c) dc = \frac{\rho' e' c'^5}{n-1} \left\{ 2 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\theta^2}{3n} \right) - 5 \frac{1}{3n} \right\}.$$

$$\frac{1}{k^2} \int e c^3 \varphi(c) dc = \frac{\rho' e' c'^5}{n-1} \left\{ \frac{\theta^2}{9n} + \frac{5}{3} - \frac{5}{3n} \right\};$$

luego

$$\varphi_1(c') = \frac{\rho' e' c'^5}{n} \left\{ \frac{5}{3} + n - \frac{1}{9} \frac{\theta^2}{1-n} \right\},$$

cuyo valor, sustituido en (17), da

$$\frac{5m}{6e'} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\theta^2}{1-n} - n, \quad (18)$$

resultando con esto la elipticidad de la superficie expresada en función de la razón de la densidad media á la densidad superficial.

13.

Si la tierra, en efecto, se solidificó conservando la forma de un fluido en equilibrio y la ley de densidad que decíamos, tendremos comprobada la teoría precedente por el fenómeno de la precesión de los equinoccios, pues las observaciones astronómicas dan un valor muy exacto de $(C - A) : C$, siendo A y C los momentos principales de inercia de la masa, y tal razón se enlaza con la elipticidad de la tierra. Mas dichos momentos, en un esferoide homogéneo, que posee la densidad ρ , y los semiejes $c(1 - \frac{2}{3}e)$, $c(1 + \frac{1}{3}e)$, son (¹)

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2}{3} c^2 M \left(1 - \frac{1}{3}e\right), \\ C' &= \frac{2}{3} c^2 M \left(1 + \frac{2}{3}e\right). \end{aligned}$$

(¹) En el elipsoide cuyos ejes son $2a$, $2b$, $2c$, los momentos de inercia con relación á éstos son respectivamente

$$A' = \frac{M}{5} (b^2 + c^2), \quad B' = \frac{M}{5} (c^2 + a^2), \quad C' = \frac{M}{5} (a^2 + b^2),$$

indicándose la masa por

$$M = \frac{4\pi a b c \rho}{3}.$$

Luego en el esferoide que representa la tierra se tendrá ⁽¹⁾

$$C - A = \frac{8\pi}{15} \varphi_1(c'),$$

$$C = \frac{8\pi}{3} \int_0^{c'} \rho c^4 dc,$$

pues no es necesario conservar en C las cantidades del orden e .

Pero ⁽²⁾

$$\begin{aligned} \int_0^{c'} \rho c^4 dc &= h k^4 \int_0^{c'} \frac{c^3}{k^3} \operatorname{sen} \frac{c}{k} d\left(\frac{c}{k}\right), \\ &= \frac{k^4 c' \rho' \theta^2}{n} \left(\frac{\theta^2}{3} + 2n - 2\right), \\ &= \frac{c'^5 \rho'}{3n} \left(1 + 6 \frac{n-1}{\theta^2}\right); \end{aligned}$$

además

⁽¹⁾ Pues siendo $M = \frac{4}{3} \pi c^3 \rho$, los incrementos respectivos de esos momentos al pasar del esferoide c al concéntrico y coáxico $c + dc$, ó sean los momentos principales de inercia de la capa comprendida entre ambos esferoides, serán

$$dA' = \frac{8}{15} \pi \rho \left(5c^4 - \frac{1}{3} \frac{d(c^5)}{dc}\right) dc,$$

$$dC' = \frac{8}{15} \pi \rho \left(5c^4 + \frac{2}{3} \frac{d(c^5)}{dc} dc\right)$$

La integral, entre los límites 0 y c' , de la diferencia entre estas dos expresiones, da el valor de $C-A$, y la integral de la segunda expresión, entre los mismos límites, el valor de C .

⁽²⁾ Pues

$$\int_0^{c'} \frac{c^5}{k^5} \operatorname{sen} \frac{c}{k} d\left(\frac{c}{k}\right) = \int_0^{\theta} \frac{c'}{k} z^5 \operatorname{sen} z dz,$$

é integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int z^5 \operatorname{sen} z dz &= -z^5 \cos z + 5z^4 \operatorname{sen} z + 20z^3 \cos z - 24z^2 \operatorname{sen} z + 12z \cos z - 6 \operatorname{sen} z \\ &= \operatorname{sen} z \left\{ 2z^2 + z^2(1-z \cot z) - 6(1-z \cot z) \right\}, \end{aligned}$$

y según se desprende de relaciones establecidas en el párrafo 11,

$$\frac{c'}{k} = \theta, \quad 1 - \theta \cot \theta = \frac{\theta^2}{3n}, \quad h \operatorname{sen} \theta = c' \rho'.$$

$$C - A = \frac{8\pi}{15} \varphi_1(c') = \frac{8\pi}{3} \left(e' - \frac{m}{2} \right) \cdot \frac{c'^3 \rho'}{3n},$$

$$\therefore \frac{C - A}{C} = \frac{e' - \frac{m}{2}}{1 - 6 \frac{1 - n}{\theta^2}}, \quad (19)$$

que es otra sencilla y notable consecuencia de la ley de densidad de Laplace, pues se puede, por la fórmula obtenida, deducir de la constante de precesión que se observa el valor de la elipticidad de la tierra. D'Alembert fué el primero que indicó este método en su obra *Recherches sur la Précession des Equinoxes*.

14.

En la siguiente tabla damos los resultados numéricos que de la anterior teoría se desprenden, suponiendo que la razón de la densidad media de la tierra á la densidad superficial tenga sucesivamente los seis valores que se indican en la primera columna. La segunda da el valor del ángulo auxiliar θ en arco; la tercera, este mismo expresado en grados; la cuarta, la elipticidad de la superficie; la quinta, la de las capas en el centro de la tierra, y la última, la constante de precesión calculada.

$\frac{1}{n}$	θ	$\frac{\theta}{\pi} \cdot 180^\circ$	e'	e''	$\frac{C-A}{C}$
1.9	2.4083	138.0°	$\frac{1}{259.4}$	$\frac{1}{354}$	$\frac{1}{295}$
2.0	2.4605	141.0°	$\frac{1}{293.2}$	$\frac{1}{363}$	$\frac{1}{300}$
2.1	2.5058	143.6°	$\frac{1}{296.9}$	$\frac{1}{371}$	$\frac{1}{305}$
2.2	2.5454	145.8°	$\frac{1}{300.2}$	$\frac{1}{379}$	$\frac{1}{309}$
2.3	2.5804	147.8°	$\frac{1}{303.2}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{312}$
2.4	2.6115	149.6°	$\frac{1}{306.1}$	$\frac{1}{393}$	$\frac{1}{316}$

El valor de $(C - A) : C$ últimamente averiguado por observaciones astronómicas (*Annales de l'Observatoire Impérial de Paris*, tomo V, 1859, pág. 324) está comprendido entre $\frac{1}{313}$ y $\frac{1}{314}$ que corresponden á $n = \frac{1}{2.1}$. Los arcos de meridiano medidos dan para la tierra, como veremos más adelante, una elipticidad de $\frac{1}{313}$, que supone $n = \frac{1}{2}$. De las observaciones del péndulo, en virtud del teorema de Clairaut, se deduce por elipticidad próximamente $\frac{1}{313}$ que corresponde á $n = \frac{1}{1.9}$. En otro capítulo veremos lo que acerca de este particular se desprende de las observaciones de la India.

15.

No debe sorprender que entre las consecuencias de la teoría precedente y lo que la observación y las mediciones arrojan, como se ve por el último párrafo, no exista mayor acuerdo. La constitución de la tierra no es como se ha supuesto. Que un tiempo fuese enteramente fluida, no debe andar lejos de la verdad; pero ahora la corteza por lo menos es sólida hasta una profundidad de varias millas, y toda la superficie visible es muy irregular, presentando océanos, continentes y montañas. La superficie que en todo caso podría responder á la teoría es la del mar, prolongado mentalmente, como filtrado por canales en los continentes; la cual, representada con su altura media, es lo que entendemos por superficie matemática de nuestro globo. Pero dada la forma irregular y no simétrica de los océanos y continentes, no cabe suponer que la figura del mar sea la de una superficie regular de revolución, y de semejante irregularidad debe nacer alguna discrepancia entre la teoría de la fluidez y los resultados de las mediciones. Además cada montaña debe producir alguna alteración en la superficie matemática, y otro tanto debe ocurrir por causa de algún cambio de densidad en las partes de la corteza que estén debajo. Habiendo, pues, visto que la figura general de la tierra se acomoda, en cuanto cabe, á lo que dice la teoría, examinemos ahora las irregularidades que en la superficie causarán masas perturbadoras; y á fin de simplificar la cuestión, prescindamos de la elipticidad y rotación de la tierra y supongámosla una esfera

cuya densidad, excepto en las partes próximas á la superficie, sea una función de la distancia al centro. Imaginemos, por consiguiente, como primer caso, que siendo la tierra una esfera de radio c , poseyendo simétrica constitución y estando cubierta por una capa delgada de agua, se añade por encima de toda la corteza una cantidad de materia m , cuya densidad ζ , ora positiva ó negativa, varíe en función de la latitud y longitud de manera que se reproduzca, tal como ahora es, la densidad superficial de la tierra con sus desigualdades. Con lo que se quite y lo que se añada, toda la masa perturbadora debe sumar cero. Consideremos un punto P en la superficie del mar, ya no esférico, y sea $y+c$ la distancia de ese punto al centro de la tierra y V la potencial de m en P. Puesto que la superficie del mar es una superficie equipotencial, escrita la constante bajo forma á propósito, se tendrá la ecuación

$$V + \frac{M}{c+y} = \frac{M}{c} - \text{constante},$$

designando M la masa de la tierra. Mas como y es muy pequeña, puede prescindirse de su cuadrado, con lo cual queda (1)

$$\frac{M}{c^2} y = V + \text{constante},$$

$$\therefore y = \frac{c^2}{M} V + C. \quad (20)$$

Debe aquí C determinarse de manera que la

$$\iint y \sin \theta d\theta d\varphi,$$

extendida á toda la superficie esférica, sea nula. Ahora bien; puesto que no es posible establecer una fórmula general para V en la ecuación últimamente escrita, consideremos el caso en que la masa perturbadora esté circunscrita á una cierta localidad. Supondremos que sea una masa de mucha densidad, y tan compacta, que su potencial sea la misma ó casi la misma que si toda esa masa estuviese condensada en su centro, el cual supondremos que se halla debajo de la superficie de esa localidad.

$$(1) \quad \frac{M}{c} - \frac{M}{c+y} = \frac{M}{c^2} y \left(1 + \frac{y}{c} \right)^{-1}.$$

Sea μM dicha masa; hc la profundidad á que está su centro m debajo de la superficie; θ el ángulo comprendido entre el radio trazado por el centro m de la masa perturbadora y el dirigido al

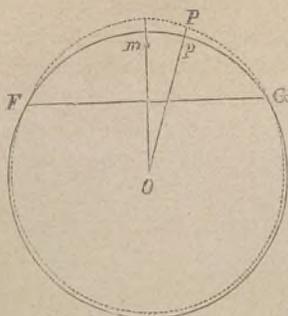


Fig. 1.-

punto P de la superficie alterada; finalmente, p la proyección de P sobre la superficie esférica. Puesto que Pp es muy pequeña, podemos poner $V = \mu M : mp$, y haciendo $mO = kc$, será (1)

$$y = \frac{\mu c}{(1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} + C$$

la ecuación de la curva, cuya revolución al rededor de mO engendre la superficie alterada. El volumen encerrado por esta superficie será igual al de una esfera de radio c si hacemos

$$\int_0^{\pi} y \sin \theta d\theta = 0,$$

ó bien

$$\int_0^{\pi} \frac{\mu c \sin \theta d\theta}{(1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} + 2C = 0;$$

$$\therefore \left[\frac{\mu c}{k} (1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{\pi} + 2C = 0;$$

de donde se infiere $C + \mu c = 0$, y por tanto

$$y = \mu c \left\{ \frac{1}{(1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\}$$

dará la altura de cada punto de la superficie alterada.

(1) $mp^2 = p^2 O^2 + m^2 O^2 - 2 p O \cdot m O \cos \theta$
 $= c^2 (1 + k^2 - 2 k \cos \theta).$

Nótese que, trazada FG perpendicular á mO en su punto medio, y es positiva para todos los puntos que están al mismo lado de FG que el punto m , y negativa para los que se hallan en el opuesto (1). El máximo valor de y corresponde á $\theta = 0$, lo que indica que la mayor altura ocurre precisamente encima de la masa perturbadora. Esta máxima altura, despreciando el término del orden $h^2 = (1 - h)^2$, es (2)

$$Y = \frac{\mu c}{h}.$$

A fin de que pueda formarse idea, por medio de números, de la conclusión á que acaba de llegarse, supongamos que la masa perturbadora sea una esfera de un radio = n millas y cuyo centro esté á la misma profundidad n debajo de la superficie. Sea además su densidad—es decir, la excedente dentro de ese radio sobre la densidad normal de los puntos inmediatos—la mitad de la densidad media de la tierra, y se tendrá

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{c} \right)^3 = \frac{1}{2} h^3,$$

$$Y = \frac{n^2}{2c}.$$

Estará expresada Y en millas; para tenerla en pies debemos

(1) Es $y = 0$ cuando

$$\cos \theta = \frac{h}{2} = \frac{hc}{2c} = \frac{mO}{2c},$$

esto es, cuando el punto se halla situado sobre FG.

(2) La relación de las masas de una esfera de radio n y densidad ρ y la esfera terrestre de radio c y densidad media ρ_0 , es

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{n}{c} \right)^3;$$

luego si el centro de la masa perturbadora se halla á la profundidad n , en cuyo caso $n = hc$, ó á una profundidad que de la antedicha difiera poco,

serán respectivamente μ , μc , $\frac{\mu c}{h}$ de los órdenes h^3 , h^2 y h , suponiendo h una pequeña fracción.

multiplicar por 5 280, conservando en millas n y $c = 3\,960$, y resultará en pies ⁽¹⁾

$$Y = \frac{2}{3} n^2.$$

Luego si el diámetro de la esfera de la masa perturbadora fuera de una milla (1.6 kilómetros), es decir, si $n = \frac{1}{2}$, el valor de la Y sería de dos pulgadas (5 centímetros). Por donde se ve que una gran masa perturbadora apenas produciría una alteración apreciable en el nivel del mar—ya estuviese colocada esa masa encima ó debajo de la superficie.—Mas aunque un cambio en el nivel del mar, como el que acabamos de suponer, no se repararía directamente en las operaciones geodésicas, se echaría de ver indirectamente, á saber, por la inclinación de la superficie alterada respecto de la superficie esférica no alterada, ó lo que viene á ser lo mismo, por la variación acaecida en la curvatura de la superficie, pues merced á escrupulosas operaciones geodésicas se puede inferir la curvatura local de la superficie con muchísima precisión.

16.

Concretémonos á estudiar la superficie no lejos de la perturbación. Desdeñando las potencias de θ superiores á la segunda, la ecuación de la curva generatriz es ⁽²⁾

⁽¹⁾ Si se quiere Y en metros, dando n en kilómetros, la fórmula será

$$Y = 0.08 n^2.$$

Las expresiones lineales donde entre c , como en la antedicha del texto

$$Y = \frac{n^2}{2c},$$

darán la incógnita en kilómetros, poniendo en esta unidad los datos, y por consiguiente, en vez del primero el segundo de estos valores:

$$c = 3\,960 \text{ millas}, \quad c = 6\,373 \text{ kilómetros.}$$

⁽²⁾ Pues sustituyendo $\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2$ en la fórmula de y del párrafo precedente, resulta

$$y = r - c = \mu c \left\{ \frac{1}{[(1-k)^2 + k\theta^2]^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\},$$

y esta ecuación, por ser $k = 1 - h$, se transforma en la del texto, prescindiendo en el denominador del término relativamente pequeño $h\theta^2$.

$$r = c + \frac{\mu c}{(h^2 + \theta^2)^{\frac{1}{2}}} - \mu c,$$

de cuyo último término μc puede prescindirse por ser esta constante muy pequeña. El ángulo entre las dos superficies, ó sea el de desviación local de la línea á plomo, es

$$\frac{dr}{c d\theta} = \frac{\mu \theta}{(h^2 + \theta^2)^{\frac{3}{2}}};$$

y puesto que

$$\frac{d^2 r}{c d\theta^2} = \frac{\mu(h^2 - 2\theta^2)}{(h^2 + \theta^2)^{\frac{5}{2}}},$$

se deduce que la mayor desviación ocurre cuando

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} h,$$

esto es, en un punto de la superficie cuya distancia angular al radio de la tierra, que pasa por el centro de la masa perturbadora, es á la profundidad á que está dicho centro como $1 : \sqrt{2}$. Luego el valor de la máxima desviación ψ es

$$\psi = \frac{2\mu}{3h^2\sqrt{3}}.$$

Así, suponiendo que la masa perturbadora sea la misma que antes, es decir, una esfera con un radio de n millas, será en arco la desviación

$$\psi = \frac{n}{3c\sqrt{3}};$$

y expresándola en segundos,

$$\psi = \frac{n \times 180.60.60}{3960 \pi. 3\sqrt{3}} = \frac{200\sqrt{3}}{11\pi} n,$$

que equivale casi exactamente á $10n$ ⁽¹⁾. Por tanto, si como en el caso antedicho fuera $n = \frac{1}{2}$, sería $\psi = 5''.0$; pero esto es una cantidad bastante grande para lo que en las medidas geodésicas se acostumbra apreciar, pues con el cuidado que generalmente se

(1) O bien á $6.2n$, dando n en kilómetros.

pone, siempre puede determinarse la latitud de un lugar con menos error que medio segundo, de manera que 5'' bien podrían medirse. Luego si imaginamos dos puntos que estén, uno á cada lado, á la distancia $\pm \theta c = \pm c h \sqrt{\frac{1}{3}}$ del punto de la superficie que se halla verticalmente encima de la masa perturbadora, el ángulo entre las normales á la superficie alterada, trazadas por dichos puntos, excederá en 10'' al ángulo entre las normales correspondientes de la superficie esférica. Llénanos esto á considerar la curvatura de la sección producida en la superficie por un plano que pase por el centro de la tierra y la masa perturbadora. El radio de curvatura R se obtendría por la fórmula sabida

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}};$$

mas aquí puede suprimirse el cuadrado de $\frac{dr}{d\theta}$, teniendo con suficiente exactitud

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\theta^2} \right) \\ &= \frac{1}{c} \left\{ 1 - \mu \frac{2\theta^2 - h^2}{(h^2 + \theta^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Para hallar los valores de las curvaturas máxima y mínima debemos igualar á cero el coeficiente diferencial ⁽¹⁾ de R^{-1} , tomado con relación á θ , lo que da $\theta(2\theta^2 - 3h^2) = 0$, ecuación que se satisface tanto con $\theta = 0$ como con $\theta = h\sqrt{\frac{3}{2}}$. El primer valor de θ corresponde á la máxima curvatura que ocurre en el punto que se halla verticalmente encima de la masa perturbadora, y está expresada por

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\mu}{h^3} \right);$$

(1) $\frac{d(R^{-1})}{d\theta} = \frac{\mu}{c} \frac{3\theta(2\theta^2 - 3h^2)}{(h^2 + \theta^2)^{\frac{5}{2}}}$.

y el segundo valor corresponde á la mínima curvatura, que ha lugar á la distancia $ch\sqrt{\frac{3}{2}}$ y está expresada por

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{8\sqrt{10}}{125} \cdot \frac{\mu}{h^3} \right).$$

Luego por pequeño que sea el radio de la esfera perturbadora, con tal que la profundidad á que se halle el centro sea igual al radio, si la densidad perturbadora es la mitad de la densidad media de la tierra, es decir, $\mu = \frac{1}{2}h^3$, las magnitudes de los radios de la superficie serán

$$R_1 = \frac{3}{4}c, \quad R_2 = \frac{19}{9}c;$$

por donde se ve que, aun habiendo poca masa perturbadora debajo de la superficie, se produciría gran variación de curvatura, siendo fácil deducir que efectos análogos acaecerían suponiendo masas perturbadoras compactas encima de la superficie.

17.

Imaginemos ahora una cordillera con pendiente más pronunciada por un lado que por otro, y hallemos la diferencia de nivel que al pie de ambas vertientes ofrecerá la superficie alterada del mar. Hablando con propiedad, el nivel será el mismo á ambos lados, pero no será igual su diferencia con relación al de la superficie esférica no alterada. Para simplificar, supongamos que la cordillera presente una sección triangular uniforme según indica la figura adjunta: sean s, s' las longitudes de las vertientes,

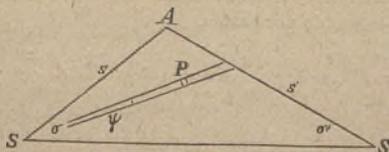


Fig. 14.

σ, σ' sus ángulos respectivos de inclinación. Supongamos además que la anchura de la base $SS' = a$ sea mucho menor que la longitud de la cordillera. Para hallar la potencial de la masa, en la parte media de esa longitud, sobre el pie S de una vertiente,

dividamos la cordillera por planos que pasen por el vértice del triángulo ó arista S del prisma, como indica la figura, y dividamos luego estas secciones en prismas elementales, como en P. Sea $PSS' = \psi$, $SP = r$ y x la distancia de un punto, en este prisma elemental, á su sección media: el elemento de masa, suponiendo que su densidad se tome por unidad, será $r d\psi dr dx$; luego

$$V = 2 \int_0^{\sigma} \int_0^r \int_0^k \frac{r d\psi dr dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

siendo $2k$ la longitud de la cordillera. Hecha la integración con respecto á x (1) y suprimidos los términos que dependen de $r^2 : k^2$, esto es, sustituido

$$\log \frac{2k}{r} \text{ en vez de } \log \left\{ \frac{k}{r} + \left(\frac{k^2}{r^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

se tiene (2)

(1) Como comprendida en el tipo de

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}},$$

será la

$$\int_0^k \frac{dx}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \log (k + \sqrt{r^2 + k^2}) - \log r = \log \frac{k}{r} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\};$$

y limitado el desarrollo de la potencia al primer término, porque r es pequeña con relación á k , se tiene la sustitución indicada en el texto.

(2) Hállase, integrando por partes,

$$\int r \log \frac{2k}{r} dr = \frac{r^2}{2} \log \frac{2k}{r} + \frac{r^2}{4};$$

pero la expresión

$$\frac{r^2}{2} \log \frac{2k}{r} = \frac{\log \frac{2k}{r}}{\frac{2}{r^2}},$$

que aparece bajo forma indeterminada cuando $r = 0$, se anula con este valor de r , como lo indica la relación de las primeras derivadas; luego

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^\sigma \int_0^r r \log \frac{2k}{r} d\psi dr, \\
 &= a^2 \int_0^\sigma \text{sen}^2 \sigma' \left\{ \text{cosec}^2 (\sigma' + \psi) \log \frac{2k \text{sen} (\sigma' + \psi)}{a \text{sen} \sigma'} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{cosec}^2 (\sigma' + \psi) \right\} d\psi;
 \end{aligned}$$

y terminada la integración (1),

$$\frac{V}{2\Delta} = \frac{3}{2} + \log \frac{2k}{a} + \frac{s}{s'} \cos A \log \frac{a}{s} - \frac{s}{s'} \text{sen} A \cdot \sigma,$$

$$\int_0^r r \log \frac{2k}{r} dr = \frac{r^2}{2} \left(\log \frac{2k}{r} + \frac{1}{2} \right).$$

Ahora bien; dedúcese del triángulo parcial é inferior de la figura

$$\frac{r}{a} = \frac{\text{sen} \sigma'}{\text{sen} (\psi + \sigma')},$$

ó de otro modo

$$r = a \text{sen} \sigma' \text{cosec} (\psi + \sigma'),$$

y sustituido este valor en esa integral, resulta la fórmula en el texto consignada.

(1) En efecto,

$$\int \text{cosec}^2 x dx = -\cot x,$$

é integrando por partes,

$$\int \text{cosec}^2 x \log (m \text{sen} x) dx = -\cot x \log (m \text{sen} x) - \cot x - x.$$

En su consecuencia, y puesto que $\sigma + \sigma' = 180^\circ - A$, la integral del texto dará

$$\begin{aligned}
 V &= a^2 \text{sen}^2 \sigma' \left\{ \cot A \left(\log \frac{2k}{a} + \log \frac{\text{sen} A}{\text{sen} \sigma'} \right) + \frac{3}{2} \cot A \right. \\
 &\quad \left. + \cot \sigma' \log \frac{2k}{a} + \frac{3}{2} \cot \sigma' - \sigma' \right\},
 \end{aligned}$$

pasándose de aquí fácilmente á la fórmula consignada arriba, pues

$$\cot A + \cot \sigma' = \frac{\text{sen} \sigma}{\text{sen} A \text{sen} \sigma'}, \quad \frac{\text{sen} A}{\text{sen} \sigma'} = \frac{a}{s},$$

$$2\Delta = \frac{a^2 \text{sen} \sigma \text{sen} \sigma'}{\text{sen} A}, \quad \frac{\text{sen} \sigma}{\text{sen} \sigma'} = \frac{s'}{s}.$$

designando Δ el área de la sección triangular. Análogamente para S' será

$$\frac{V'}{2\Delta} = \frac{3}{2} + \log \frac{2k}{a} + \frac{s'}{s} \cos A \log \frac{a}{s'} - \frac{s'}{s} \operatorname{sen} A \cdot \sigma',$$

y tomando la diferencia se eliminará k , resultando con esto

$$\frac{V-V'}{2\Delta} = -\cos(\sigma + \sigma') \left\{ \frac{s}{s'} \log \frac{a}{s} - \frac{s'}{s} \log \frac{a}{s'} \right\} + \operatorname{sen}(\sigma' + \sigma) \left\{ \frac{s' \sigma'}{s} - \frac{s \sigma}{s'} \right\}.$$

Pero según una fórmula ya hallada (20), la altura que la superficie alterada en S tiene sobre la de S' es

$$y - y' = \frac{c^2}{M} (V - V');$$

y poniendo $c = 3\,960$ millas y reduciendo á pies se tendrá en esta última unidad, suponiendo que sea $\frac{1}{4}$ la razón de la densidad de las montañas á la media de la tierra (1),

$$y - y' = \frac{1}{2\pi} (V - V'). \quad (21)$$

Si, por ejemplo, la proyección ó base de la vertiente s tiene una milla (1.6 kilómetro) de anchura y la de s' tres millas, de modo que $a = 4$, siendo á su vez de una milla la altura, $V - V'$

(1) Pues siendo $M = \frac{4}{3} \pi c^3$, y debiendo multiplicarse por la densidad $\frac{1}{2}$ los precedentes valores de V y V' hallados en el supuesto de que la densidad fuera 1, será

$$y - y' = \frac{3}{4\pi c} \cdot \frac{1}{2} (V - V');$$

y sustituyendo aquí $c = 3\,960$ — número de millas del radio medio,— y multiplicando por 5 280 — número de pies de una milla,— resulta la fórmula del texto, pues la razón de este número al anterior es precisamente la de 4 á 3. Si en vez de esto se sustituye $c = 6\,373$ kilómetros, y se multiplica la fórmula por 1 000, se tendrá en metros, con suficiente exactitud, pues la razón de este número al anterior se aproxima bastante á la de 1 á 6,

$$y - y' = \frac{1}{16\pi} (V - V').$$

valdrá $+1.426$, y por tanto la superficie del mar en S distará del centro de la tierra 2.75 pulgadas (6.98 centímetros) más que la correspondiente á S'.

18.

Examinemos tras de esto la elevación que una extensa meseta ó región alta puede producir á lo largo de la costa en el nivel del mar. Lo más sencillo que cabe suponer es que el contorno de tal meseta sea una circunferencia, pequeña con relación al radió c de la tierra. Sea E el centro de esa circunferencia, α su radio, P un punto en el interior y F un punto fijo de la circunferencia; además $EFP = \varphi$, $FP = \theta$ y γ un ángulo tal que (1)

$$\tan \frac{1}{2} \gamma = \tan \alpha \cos \varphi.$$

Si h es la altura, supuesta constante, de la meseta, el elemento de masa en P será $c^2 h \sin \theta d\varphi d\theta$, y como en realidad h es sumamente pequeña comparada con c , la potencial en F será (2)

(1) El ángulo γ corresponde al arco FP prolongado hasta encontrar á la circunferencia de la meseta en otro punto F'.

(2) Pues

$$dv = h \cdot c d\theta \cdot c \sin \theta d\varphi,$$

$$R = \text{cuerda PF} = 2c \sin \frac{\theta}{2},$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^\gamma \frac{dv}{R} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\gamma \frac{dv}{R}.$$

Verificada la integración con respecto á la variable θ , y sustituido

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\tan \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2}}} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}},$$

la integral que queda relativa á φ es de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{sen}^{-1} x,$$

indicando de este modo, conforme con la notación del texto, el arc sen x .

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^\gamma ch \cos \frac{1}{2} \theta d\varphi d\theta \\
 &= 4ch \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \gamma d\varphi \\
 &= 4ch \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \varphi d\varphi}{(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 4ch \left[\operatorname{sen}^{-1} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 4ch\alpha.
 \end{aligned}$$

Asimismo hallaríamos que la potencial en E⁽¹⁾ es $4\pi ch \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha$, y en el punto opuesto E' de la esfera

$$4\pi ch (1 - \cos \frac{1}{2} \alpha).$$

Luego, según la fórmula (21), si y_0, y, y' son las alturas, en pies, del nivel del mar en E, F y E' respectivamente, y la densidad de la región que atrae es la mitad de la densidad media de la tierra, será

$$y_0 = 2ch \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha + C,$$

$$y = 2ch \frac{\alpha}{\pi} + C,$$

$$y' = 2ch (1 - \cos \frac{1}{2} \alpha) + C.$$

No podemos obtener C sin integrar la expresión general de V extendida á toda la superficie esférica, pero podemos alcanzar un valor aproximado teniendo en cuenta que en E' debe ser y' ne-

(1) En el centro E de la meseta es

$$V = 2ch \int_0^\pi d\varphi \int_0^\alpha \cos \frac{1}{2} \theta d\theta,$$

y en el punto opuesto E' de la esfera

$$V = 2ch \int_0^\pi d\varphi \int_{\pi-\alpha}^\pi \cos \frac{1}{2} \theta d\theta.$$

gativa (1); luego C debe también ser negativa y mayor en valor absoluto que $4ch \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} \alpha$. Además, cuando existe una masa perturbadora compacta hemos visto que y se anula á la distancia de 60° ; guiémonos por esto en el caso actual y notemos que, siendo α pequeño, la potencial de la región perturbadora á la distancia de 60° es casi el doble de la potencial á 180° , es decir, en E' . Por donde podemos inferir $C = -8ch \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} \alpha$, y por tanto en cualquier punto del contorno circular de la meseta la elevación del nivel del mar será, en pies,

$$y = 2ch \left(\frac{\alpha}{\pi} - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} \alpha \right),$$

expresando c y h en millas.

Para hacer de este cálculo, siquiera no sea muy aproximado, aplicación á algún caso práctico, supongamos que se trate de la meseta del Himalaya. Descansan estas montañas sobre una área que, aun cuando no circular, equivale á la de un círculo de 5° de radio, y su altura es de unos 15.000 pies (4.6 kilómetros): luego, según lo que precede, la elevación y , en números redondos, será de 600 pies (183 metros). Por donde se ve que, cuando en un país existen grandes mesetas, pueden producir una alteración notable en el nivel del mar. Con todo, es por lo menos discutible que realmente la produzcan, pues calculada la desviación que en la plomada debe producir la atracción del Himalaya en varios puntos de la India (*), hase hallado muy poca concordancia en-

(1) En la fórmula de y' puede sustituirse

$$1 - \cos \frac{1}{2} \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} \alpha.$$

Dando c , h en kilómetros se hallarán y_0 , y , y' en metros, reemplazando en las fórmulas respectivas el coeficiente 2 por $\frac{1}{4}$. En tal supuesto, la fórmula que á éstas sigue en el texto será aproximadamente

$$y = \frac{1}{4} ch \left(\frac{\alpha}{\pi} - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} \alpha \right).$$

(*) Véase *A Treatise on Attractions, Laplace's Functions and the Figure of the Earth*, por J. H. Pratt, M.A., M.R.S., arcediano de Calcuta. También los artículos del mismo en las *Philosophical Transactions*, años 1855, 1858 y 1871.

tre la teoría y la realidad, porque la atracción del Himalaya sólo se hace perceptible á la observación en lugares muy próximos á esas montañas; debiendo inferirse de ello que existe alguna causa que, obrando en contrario, compensa la atracción de la masa visible. Como no sabemos de qué manera la corteza terrestre llegó á su forma actual, no podemos hacer otra cosa que sentar hipótesis más ó menos probables para explicar el extraño fenómeno físico antes citado (1).

La primera explicación propuesta fué la de Sir George Airy, astrónomo real de Greenwich (en las *Philosophical Transactions* de 1855, pág. 101), fundada en la hipótesis de que la corteza de la tierra tiene poco espesor. Supongamos, por ejemplo, que mida éste 10 millas, siendo el resto, es decir, el interior de la tierra, fluido, é imaginemos que haya sobre la superficie una meseta de 100 millas en su menor dimensión horizontal y 2 millas como altura constante: ¿podrá esta masa ser sostenida por la corteza ó la romperá y se introducirá parcialmente en la masa fluida? Sea $abcd$, figura 15, una parte de la corteza terrestre y efg la me-

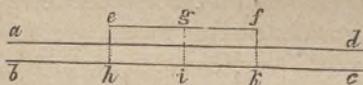


Fig. 15.

seta; supongamos partidas las rocas, como indican las líneas de puntos del grabado, por hendiduras verticales producidas á consecuencia de que, habiendo habido un derrumbamiento en la parte media de la masa, hayan girado las dos mitades sobre los puntos

(1) En una Memoria que publicó en Berlín en 1861 el general Baeyer, compañero de Bessel en las operaciones geodésicas efectuadas sobre el meridiano de Königsberg, da por resuelto el problema de geometría relativo á la figura de la tierra; pero el problema físico y geológico, estrechamente relacionado con dicha figura, apenas le considera planteado. Resolveríase éste así, en lugar de huir de las influencias locales que dificultan y complican las operaciones geodésicas, se buscaran de propósito y se midieran; si, hasta donde se presenta hacedero, la red de triángulos se extendiera al rededor y sobre la superficie de los mares, de los terrenos volcánicos y á través de los valles y cordilleras de más extraña composición; si los ins-

por donde inferiormente se enlazan con la corteza restante. Sea W el peso de una milla cúbica de roca y C la fuerza necesaria para desprender una milla cuadrada, ó bien la cohesión de ésta que es fuerza igual y contraria. La cohesión en h será $10 C$ y en i equivaldrá á $12 C$: además, el peso de cada mitad que cae encima será $2 \times 50 W$; luego considerando una mitad sola eg , se tendrá la ecuación de momentos $10^2 C + 12^2 C = 2 \times 50^2 W$, y en su consecuencia C valdrá próximamente $20 W$, es decir, que la cohesión habría de ser poderosa á mantener suspendida una columna de 20 millas de roca. Y si supusiéramos que el espesor de la corteza fuese de 100 millas, obtendríamos *ceteris paribus* $C = \frac{1}{4} W$. Pero aun en este caso la fuerza de cohesión necesaria sería mayor de lo que en realidad cabe conceder: luego la corteza no puede sostener la meseta. Parece, pues, probable que para conservar el equilibrio esas montañas se hayan hundido parcialmente en varios puntos de la masa fluida, produciendo así en la parte inferior vastas entalladuras como la $e' f'$. Luego si se coloca una plomada en a , por una parte habrá desviación hacia e á causa de la atracción de la materia suprayacente ef ; mas por otra parte, á consecuencia de estar reemplazada la masa fluida por

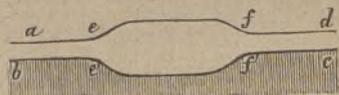


Fig. 16.

otra $e' f'$, aunque sólida menos densa, habrá atracción perdida ó negativa en la misma dirección. La disminución de materia atractiva debajo será casi igual al aumento de esta materia arriba; luego si el punto a no está muy cerca de ef , puede en suma

trumentos para medir distancias y ángulos se asemejaran también en cierto modo á la balanza del químico y á la sonda del geólogo; y, en resumen, si después de haber definido la forma externa de la tierra penetrara la Geodesia, siquiera fuese con los ojos de la intuición, en el interior del globo, para revelarnos el origen de aquella forma, los trastornos que ha experimentado y la estabilidad, grande ó pequeña, que posee para resistir los embates destructores del tiempo. (D. Miguel Merino, *Figura de la tierra*, artículo inserto en el *Anuario del Observatorio de Madrid*, 1863.)

no haber ninguna perturbación; pero si *a* estuviese muy próximo á la meseta, mayormente si el espesor de la corteza fuera de unas 100 millas, podría haber una perturbación muy marcada. Por de contado, lo que acaba de decirse de las mesetas no es aplicable á masas montañosas compactas más reducidas, como Schiehallion ú otras alturas aisladas, ni á terrenos elevados que tengan poca extensión.

El arcadiano Pratt, que ha estudiado detenidamente la atracción del Himalaya, tanto en lo que pueda influir, con su componente horizontal, en la dirección de la plomada en la India como en lo que afecte, con su componente vertical, á las oscilaciones del péndulo en aquel país, sienta la teoría de que la variedad que se nota en las elevaciones y depresiones de la superficie terrestre, en montañas, llanuras y lechos de los mares, procede de haberse contraído desigualmente las masas cuando, solidificándose, perdieron su condición de fluidez ó semifluidez; resultando de ello que debajo de las montañas y llanuras hay próximamente tanta

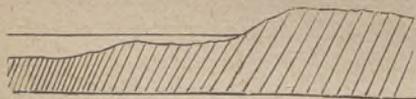


Fig. 17.

falta de materia como abundancia en las alturas sobre el nivel del mar, y debajo de los lechos del Océano un exceso de materia casi igual al defecto que pueda haber en la densidad del Océano comparada con la de las rocas; de modo que la suma de materia, en toda columna elevada hasta la superficie desde otra de nivel que pase por debajo de la corteza, es casi la misma en cualquier parte de la tierra ⁽¹⁾.

Según esta teoría, que corroboran mucho los resultados de las operaciones geodésicas en la India, la alteración del nivel del

(1) «La causa física de esta singular compensación estriba en que el enfriamiento debajo de los mares se operó con mayor rapidez que debajo de los continentes. Y he aquí una prueba de que la Geología debe ir unida á la Geodesia, de cuyo concurso creíase antes le era dado prescindir.» (Faye, *Cours d'Astronomie*, tomo I, pág. 307.)

mar producida por las masas visibles de los continentes debe ser de mínimo orden; porque la alteración resultaría, en todo caso, de una simple traslación de materia en la corteza terrestre hacia el centro ó desde el centro. Pero ya de suyo es casi evidente que semejante cambio de materia poco puede influir en el nivel del mar, pudiendo además demostrarse con números imaginando el siguiente caso.

19.

De una esfera de radio c y densidad ρ_0 se ha sacado otra de densidad ρ , corriéndola de modo que su centro, primitivamente en P, ha pasado á Q sobre la línea OPSQ trazada desde el centro O de la primera esfera al punto S de su superficie. La distancia SQ es igual á $SP = h$, y la masa de la esfera trasladada es m ; se supone

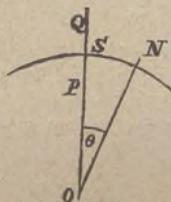


Fig. 18.

además que h es muy pequeña con respecto á c y que m equivale á una esfera de radio h . Esto sentado, si N es un punto de una superficie equipotencial, casi en coincidencia con la superficie de la esfera primitiva, cuya masa es M, se tendrá, haciendo $ON = c + y$,

$$\frac{M}{c + y} - \frac{m}{NP} + \frac{m}{NQ} = \text{constante};$$

ó lo que da lo mismo (1)

(1) Sustituyendo en la fórmula anterior

$$M = \frac{4}{3} \pi c^3 \rho_0, \quad m = \frac{4}{3} \pi h^3 \rho,$$

$$\frac{1}{c + y} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{y}{c}\right)^{-1} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{y}{c}\right).$$

$$y + \frac{\rho}{\rho_0} \beta^3 \left(\frac{c^2}{NP} - \frac{c^2}{NQ} \right) = C,$$

siendo $\beta = h : c$. Pero (1)

$$\begin{aligned} NQ &= \{ (c+h)^2 + (c+y)^2 - 2(c+h)(c+y) \cos \theta \} \\ &= P \left\{ 1 + \frac{2ch \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta}{P^2} + y \frac{2c \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta - h \cos \theta}{P^2} \dots \right\}, \end{aligned}$$

poniendo $P^2 = 4c^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta + h^2$ y omitiendo el cuadrado de y . Además, si en esa fórmula cambiamos el signo de h , tendremos el valor de NP ; luego, haciendo $2cP_1 = P$, será

$$\frac{c^2}{NP} - \frac{c^2}{NQ} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta}{P_1^3} - \frac{y h \cos \theta}{4c} \cdot \frac{1}{P_1^3};$$

con lo cual, poniendo, para simplificar más, $\frac{\rho}{\rho_0} h \beta^3 = \eta$, resulta por ecuación de la superficie

$$y \left\{ 1 - \frac{\eta \cos \theta}{4c P_1^3} \right\} + \frac{1}{2} \eta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta}{P_1^3} = C;$$

pero como β es muy pequeña, podemos prescindir de $y \beta^3$ y reducir la ecuación á

$$y + \frac{1}{2} \eta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta}{(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \beta^2)^{\frac{3}{2}}} = C.$$

Para hallar esa superficie particular que contiene el mismo volumen que la esfera primitiva, debemos igualar á cero la integral de $y \operatorname{sen} \theta d\theta = 2y d(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta)$ extendida á toda la superficie esférica (2), esto es, escribir, haciendo $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta = x$,

$$\int_0^1 C dx - \frac{1}{2} \eta \int_0^1 \frac{x dx}{(x + \frac{1}{4} \beta^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

(1) Desarrollando la primera expresión y omitiendo y^2 , se tiene

$$\begin{aligned} NQ &= \{ 4(c^2 + ch + cy) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta + h^2 - 2hy \cos \theta \}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ P^2 \left(1 + 2 \frac{ch \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta}{P^2} + 2y \frac{2c \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta - h \cos \theta}{P^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(2) El anillo elemental, cuyo radio es $c \operatorname{sen} \theta$, su grueso y y su espesor $c d\theta$, mide un volumen $2\pi c^2 y \operatorname{sen} \theta d\theta$.

pero en la última integral podemos suprimir los términos de menor orden, y por tanto (1) será $C - \eta = 0$: luego por ecuación de la superficie tendremos

$$y = \eta - \frac{\eta}{2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \theta}{(\sin^2 \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Así, pues, la elevación del nivel del mar en S, donde $\theta = 0$, será η , mientras que en el punto opuesto de la esfera será la mitad de esta cantidad, omitiendo los términos de orden menor. Los puntos en que y se anula están dados por la ecuación de tercer grado

$$(z + \beta^2)^3 - z^2 = 0,$$

siendo $4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = z$. Las raíces de esta ecuación son en serie (2)

(1) Integrando por partes y omitida la constante, se tiene

$$\int x(x+a)^{-\frac{3}{2}} dx = -x \frac{2}{(x+a)^{\frac{1}{2}}} + 4(x+a)^{\frac{1}{2}} = \frac{2x+4a}{(x+a)^{\frac{1}{2}}};$$

deduciéndose, en virtud de ello, de la ecuación del texto

$$\begin{aligned} 0 &= [Cx]_0^1 - \frac{1}{2} \eta \left[\frac{2x+\beta^2}{(x+\frac{1}{4}\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^1 \\ &= C - \frac{1}{2} \eta \left\{ \frac{2+\beta^2}{(1+\frac{1}{4}\beta^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\beta \right\}; \end{aligned}$$

de donde, prescindiendo de los términos con β , resulta $C = \eta$.

(2) Omitiendo por de pronto el pequeño término β^2 , dicha ecuación se reduce á

$$z^3 - z^2 = z^2(z-1) = 0;$$

luego una raíz z_1 diferirá poco de la unidad, y las otras dos raíces z_2, z_3 serán muy pequeñas. Estas últimas, puesto que aquella ecuación es, conservando el término β^2 ,

$$z^3 - (1-3\beta^2)z^2 + 3\beta^4z + \beta^6 = 0,$$

estarán dadas aproximadamente por la ecuación

$$(1-3\beta^2)z^3 - 3\beta^4z - \beta^6 = 0;$$

de la cual se infiere

$$z_2 = \beta^5 + \frac{3}{2}\beta^4 + \dots, \quad z_3 = -\beta^5 + \frac{3}{2}\beta^4 + \dots$$

Y el valor aproximado de la raíz z_1 se deduce en seguida, pues

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1 - 3\beta^2.$$

$$z_1 = 1 - 3\beta^2 - 3\beta^4 - \dots, \quad z_2 = \beta^3 + \frac{3}{2}\beta^4 + \dots,$$

$$z_3 = -\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^4 + \dots,$$

mas la última da para θ valores imaginarios. Los reales están dados aproximadamente por las ecuaciones

$$\text{sen } \frac{1}{2}\theta = \pm \frac{1}{2} \quad \text{sen } \frac{1}{2}\theta = \pm \frac{1}{2}\beta^{\frac{3}{2}};$$

dedúcese de la primera $\theta = \pm 60^\circ$, mientras que de la segunda se deduce un valor muy pequeño de θ . Luego si e, f , figura 19:

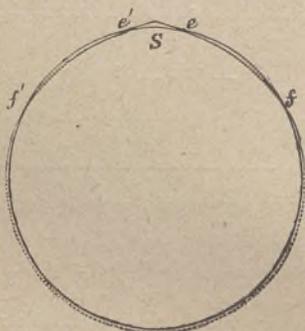


Fig. 19.

son los dos puntos donde y se anula: desde S hasta e , será y positiva; desde e hasta f , será negativa, siendo el valor máximo (1)

$$\eta \left(1 - \frac{2}{3\beta\sqrt{3}} \right),$$

ó reducido al término predominante,

$$-\frac{2\eta}{3\beta\sqrt{3}};$$

(1) En efecto, de

$$y = \eta \left(1 - \frac{z}{(z + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

se deduce

$$\frac{dy}{dz} = \eta \frac{\beta^2 - \frac{1}{2}z}{(z + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

y esta derivada es nula cuando $z = 2\beta^2$.

y desde f , será γ positiva é irá en aumento hasta $\theta = 180^\circ$, valiéndose próximamente

$$\eta \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta} \right).$$

La máxima alteración del nivel del mar será el máximo hallado entre e y f que ocurre á la distancia $h\sqrt{2}$ de S (1).

Si, por ejemplo, teniendo la esfera pequeña un radio de 10 millas (16.1 kilómetros), y una densidad igual á la mitad de la de la esfera grande, se sube aquélla, pasando su centro desde la profundidad de 10 millas bajo la superficie hasta la altura, sobre ella, de 10 millas, con lo cual $h = 10$, la máxima depresión entre e y f , en el supuesto de que $c = 3\,960$, será de unas 0.8 de pulgada (2 centímetros), mientras que la elevación positiva será sumamente pequeña.

20.

Concluiremos este capítulo estudiando la situación respectiva de la superficie del mar y la de un lago sobre el nivel del mar, y para ello prescindiremos de las diferencias que respecto de la forma esferoidal pueda ofrecer la superficie de éste por efecto de la atracción de la materia sólida inmediata al lago. La condición de equilibrio en la superficie de este último es

$$V + \frac{1}{2} r^2 \omega^2 (1 - \mu^2) = \Theta;$$

además hemos hallado para la fuerza g de la gravedad

$$g = - \frac{d\Theta}{dr}.$$

De donde se sigue que si h designa la altura del lago, siendo esta altura pequeña, será $gh = \text{constante}$; de modo que si imaginamos la superficie del lago extendida hasta circundar la tierra, la distancia de esa superficie á la del mar será en los diferentes puntos inversamente proporcional á la gravedad en los mismos.

(1) Pues siendo $\varepsilon = 2\beta^2$, ó bien $4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta = 2 \frac{h^2}{c^2}$, y pudiendo, por ser θ pequeño, reemplazarse el seno por el arco, se infiere $c\theta = h\sqrt{2}$.

Luego la superficie del lago no será exactamente paralela á la del mar, midiendo la inclinación de ambas en el plano del meridiano. Si φ es la latitud é I el ángulo entre la superficie del lago y la del mar, imaginando éste prolongado por debajo de aquél, será

$$I = \frac{dh}{c d\varphi};$$

pero (1)
$$\frac{dg}{g d\varphi} + \frac{dh}{h d\varphi} = 0,$$

$$\therefore I = -\frac{h}{c} \frac{dg}{g d\varphi};$$

por otra parte, $g = G \{1 + (\frac{2}{3}m - e') \text{sen}^2 \varphi\},$

$$\therefore I = -\frac{h}{c} (\frac{2}{3}m - e') \text{sen} 2\varphi.$$

Dedúcese de aquí que, cuando se determina por observación la latitud de un lugar situado á una altura h , debe hacerse luego la corrección I. Pero en la práctica esta corrección es muy pequeña, pues sólo asciende á unas pocas décimas de segundo en las alturas comunes de montañas.

Para expresar I en segundos, debe dividirse el segundo miembro de la última ecuación por $\text{sen } 1''$. Pero $c \text{ sen } 1''$ es la longitud de un segundo en la superficie de la tierra, y vale próximamente 100 pies: también próximamente $\frac{2}{3}m - e' = 0.0052$. Luego llamando H á la altura expresada por millares de pies, será (2)

$$I = -0.0052 H \text{ sen } 2\varphi.$$

(1) De $g h = \text{constante}$ se deduce $\log g + \log h = \text{constante}$, cuya derivada es la ecuación del texto.

(2) Dando H en hectómetros, será

$$I = -0.0017 H \text{ sen } 2\varphi.$$

CAPÍTULO V

DISTANCIAS, AZIMUTES Y TRIÁNGULOS EN UN ESFEROIDE

1.

Suponiendo la tierra un elipsoide de revolución engendrado por una elipse cuyos semiejes sean a y c , de suerte que $2a$ sea el diámetro ecuatorial y $2c$ el eje polar, la ecuación de la curva meridiana será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

designando x, z las distancias respectivas de un punto del meridiano al eje de revolución y al plano del ecuador. Cumplen con dicha ecuación los valores

$$x = a \cos u, \quad z = c \operatorname{sen} u. \quad (1)$$

Latitud de un punto de la superficie del globo es el ángulo que la normal en ese punto forma con el plano del ecuador. Si φ es la latitud del punto determinado anteriormente por u , y s la longitud del meridiano elíptico comprendida entre el ecuador y el punto antedicho, se tendrá (1)

$$\begin{aligned} -dx &= a \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} \varphi \, ds, \\ dz &= c \cos u \, du = \cos \varphi \, ds, \end{aligned} \quad (2)$$

de donde se deduce entre φ y u la relación

$$a \tan u = c \tan \varphi. \quad (3)$$

(1) El ángulo que la tangente, con la cual coincide ds , forma con el eje de las x , es igual al comprendido entre la normal y el eje de las z , esto es, al ángulo φ .

Llámanse el ángulo u la latitud reducida. Designando por e la excentricidad del meridiano, es decir, la cantidad que satisface la ecuación $a^2 e^2 = a^2 - c^2$, y poniendo

$$\Delta^2 = 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi, \quad \nabla^2 = 1 - e^2 \cos^2 u, \quad (4)$$

se deducen fácilmente las siguientes relaciones (1):

$$\begin{aligned} \Delta \nabla &= \sqrt{1 - e^2}, & (5) \\ \nabla \operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{sen} u, \\ \cos \varphi &= \Delta \cos u, \\ \frac{\operatorname{sen} 2 \varphi}{\Delta} &= \frac{2 \operatorname{sen} (\varphi - u)}{1 - \sqrt{1 - e^2}} = \frac{\operatorname{sen} 2 u}{\nabla}. \end{aligned}$$

En su consecuencia, las coordenadas x, z pueden escribirse de este modo:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\Delta}, \quad z = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\Delta} (1 - e^2). \quad (6)$$

Diferenciando la ecuación (3) y eliminando du por medio de la (2), resulta (2)

$$\frac{ds}{d\varphi} = a \frac{1 - e^2}{\Delta^3},$$

que es el radio de curvatura del meridiano. Llamemos ρ este radio y ρ' el de curvatura de la sección hecha en la superficie perpendicularmente al meridiano, radio que equivale á la normal ter-

(1) Elevando á la segunda potencia la igualdad (3), poniendo la tangente en el primer miembro en función del coseno y en el segundo en función del seno, y finalmente, sustituyendo $c^2 = a^2 (1 - e^2)$, se deduce

$$1 = \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 u - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 u;$$

y previa esta relación, es fácil obtener las tres primeras fórmulas (5). Multiplicando después la segunda y tercera de éstas, primero correlativamente y luego en cruz; restando los dos miembros de este segundo producto, de $\operatorname{sen} \varphi \cos u$, y por último, multiplicando la segunda fórmula (5) por $\cos u$, hállese, comparando las así obtenidas, las fórmulas (5) consignadas en el último renglón.

$$(2) \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{c \cos u}{a \cos^2 \varphi}, \quad \frac{ds}{du} = \frac{c \cos u}{\cos \varphi}.$$

minada en el eje de revolución. Por la ecuación anterior y la primera de las (6) se tendrá

$$q = \frac{a}{\Delta^3}(1 - e^2), \quad \rho = \frac{a}{\Delta}. \quad (7)$$

2.

Sean, figura 20, O el centro del esferoide; OP el semieje polar; EQ el ecuador; A, B puntos de los meridianos PAE, PBQ ; a, b las proyecciones de A, B sobre el eje; AN la normal en A ; BN la intersección del plano ANB con el meridiano de B ; K

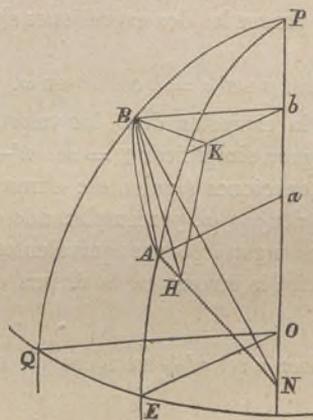


Fig. 20.

la proyección de B sobre el plano $PAEO$; BH, HK perpendiculares a AN . Designemos por α el azimut de B en A , esto es, la inclinación del plano NAB respecto del plano NAP , y sea $90^\circ + \mu$ la distancia zenital de B en A , con lo cual

$$BAN = 90^\circ - \mu.$$

Tomando OE, OP por ejes de las x, z , y por eje de las y una recta perpendicular á ambas, y llamando u, u' las latitudes reducidas de A y B , y ω la diferencia de longitudes de estos puntos, ó sea el ángulo comprendido entre los dos planos PAE, PBQ , las coordenadas de A y B serán

$$\begin{aligned}x &= a \cos u, & x' &= a \cos u' \cos \omega, \\y &= 0, & y' &= a \cos u' \sin \omega, \\z &= c \sin u, & z' &= c \sin u'.\end{aligned}$$

Si k es la longitud de la cuerda ó recta AB , se tendrá

$$\begin{aligned}k^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2, \\AH &= k \sin \mu, & HK &= k \cos \mu \cos \alpha.\end{aligned}$$

Proyectando la línea quebrada $AH + HK$ primero sobre OE y después sobre OP , resulta

$$\begin{aligned}k (\sin \mu \cos \varphi + \cos \mu \cos \alpha \sin \varphi) &= a (\cos u - \cos u' \cos \omega), & (8) \\k (-\sin \mu \sin \varphi + \cos \mu \cos \alpha \cos \varphi) &= c (\sin u' - \sin u),\end{aligned}$$

teniéndose además, porque las dos expresiones siguientes equivalen á BK ,

$$k \cos \mu \sin \alpha = a \cos u' \sin \omega.$$

Sustituyendo en la expresión de k^2 los valores de x, x', y, y', z, z' , y escribiendo para simplificar $\Sigma = \sin u' - \sin u$, se tiene la primera de las ecuaciones siguientes: eliminando de las (8) primero $\sin \mu$, después $\cos \mu$, y reemplazando en los resultados los términos que contengan φ por sus equivalentes con u , se hallan la segunda y cuarta; la tercera es la última escrita anteriormente (1):

$$\begin{aligned}1 - \frac{k^2}{a^2} &= \sin u \sin u' + \cos u \cos u' \cos \omega + \frac{e^2}{2} \Sigma^2, & (9) \\ \nabla \frac{k}{a} \cos \mu \cos \alpha &= \cos u \sin u' - \sin u \cos u' \cos \omega - e^2 \Sigma \cos u, \\ \frac{k}{a} \cos \mu \sin \alpha &= \cos u' \sin \omega, \\ \nabla \frac{k}{c} \sin \mu &= 1 - \sin u \sin u' - \cos u \cos u' \cos \omega.\end{aligned}$$

$$(1) \quad \frac{k^2}{a^2} = \cos^2 u + \cos^2 u' - 2 \cos u \cos u' \cos \omega + (1 - e^2) \Sigma^2,$$

$$\nabla \frac{k}{a} \cos \mu \cos \alpha = (\cos u - \cos u' \cos \omega) \sin u + (1 - e^2) \Sigma \cos u,$$

$$\nabla \frac{k}{c} \sin \mu = (\cos u - \cos u' \cos \omega) \cos u - \Sigma \sin u.$$

Las tres primeras son análogas á las ecuaciones fundamentales de la Trigonometría esférica dadas en la página 50.

Llamando v el lado de un triángulo esférico cuyos otros dos lados $90^\circ - u$ y $90^\circ - u'$ formen un ángulo ω , y designando por ψ un ángulo auxiliar tal que (1)

$$\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \frac{v}{2} = e \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u' - u) \cos \frac{1}{2}(u' + u),$$

resultan de las ecuaciones anteriores la primera, segunda y cuarta de las que siguen, deduciéndose por simetría la tercera y quinta, representando α' , μ' , Δ' respecto del punto B lo que α , μ , Δ respecto del A (2):

$$k = 2 a \operatorname{sen} \frac{v}{2} \cos \psi \quad (10)$$

$$\operatorname{sen} \mu = \Delta \operatorname{sen} \frac{v}{2} \sec \psi,$$

$$\operatorname{sen} \mu' = \Delta' \operatorname{sen} \frac{v}{2} \sec \psi,$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \mu = \frac{a}{k} \cos u' \operatorname{sen} \omega,$$

$$\operatorname{sen} \alpha' \cos \mu' = \frac{a}{k} \cos u \operatorname{sen} \omega.$$

Estas ecuaciones dan la distancia entre dos puntos del esferoide, sus recíprocos azimutes y sus distancias zenitales.

3.

Si dividimos la segunda ecuación (9) por la tercera, resultará

$$\nabla \cot \alpha \cos u' \operatorname{sen} \omega = \cos u \operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u \cos u' \cos \omega - e^2 \Sigma \cos u; \quad (11)$$

$$(1) \quad 2 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \frac{v}{2} = e \Sigma.$$

$$(2) \quad \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u' + \cos u \cos u' \cos \omega = \cos v \Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} v.$$

y si sustituimos en vez de los términos con u, u' sus equivalentes con φ, φ' , y designamos por β, β' lo que podemos llamar los azimutes esféricos, es decir, los valores de α, α' cuando $e = 0$, hallaremos fácilmente (1)

$$\begin{aligned}\cot \alpha - \cot \beta &= \frac{e^2 \cos \varphi}{\Delta \cos \varphi'} \left(\frac{\Delta' \sin \varphi - \Delta \sin \varphi'}{\sin \omega} \right), \\ -\cot \alpha' + \cot \beta' &= \frac{e^2 \cos \varphi'}{\Delta' \cos \varphi} \left(\frac{\Delta' \sin \varphi - \Delta \sin \varphi'}{\sin \omega} \right).\end{aligned}$$

Y de aquí, hechas varias reducciones que pueden verse en las *Memoirs of the R. A. Soc.*, tomo XX, pág. 131, se deduce la siguiente ecuación:

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' + \frac{e^4}{4} \left(\frac{k}{a} \right)^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \varphi \cos^3 \varphi.$$

Pero el máximo valor del pequeño término con e^4 es (2)

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{e^4}{4} \left(\frac{k}{a} \right)^3;$$

y esto, si la distancia correspondiente á k es n grados, será en segundos $0.0000015 n^3$, lo cual es cero en la práctica, aun para distancias de algunos centenares de millas. De aquí el siguiente importante teorema: si φ, φ' son las latitudes de dos puntos, ω su diferencia de longitud, α, α' sus azimutes recíprocos, será (3)

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)} \cot \frac{\omega}{2}. \quad (12)$$

(1) $\cot \beta \cos \varphi' \sin \omega = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos \omega,$
 $\Delta \nabla = \Delta' \nabla'.$

(2) Anúlense las derivadas parciales primeras de dicho término con relación á α y φ cuando

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan^2 \varphi = \frac{1}{3};$$

lo cual implica

$$\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{3}; \quad \cos^2 \varphi = \frac{3}{4}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{4}.$$

(3) Pues reemplazando en esta fórmula $\alpha + \alpha'$ por $\beta + \beta'$, se tiene una de las analogías de Neper.

De donde se sigue que el *exceso esférico* de un triángulo esferoidal equivale al de un triángulo esférico cuyos vértices tengan las mismas latitudes y longitudes que los puntos correlativos del primer triángulo.

4.

Si desde un punto S de la curva AB se traza la SG perpendicular á AN, fijarán este punto las coordenadas $SG = \xi$, $AG = \zeta$; y poniendo

$$f = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} \varphi, \quad h = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos \varphi \cos \alpha, \quad (13)$$

la ecuación de la curva ASB será

$$\xi^2 (1 + h^2) - 2hf\xi\zeta + \zeta^2 (1 + f^2) - 2\rho\zeta = 0. \quad (14)$$

Para demostrarlo, sea J la proyección de S sobre el plano meridiano de A: la distancia de J al eje de revolución es (1)

$$x = (\rho - \zeta) \cos \varphi - \xi \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi;$$

mientras que la longitud de SJ es

$$y = \xi \operatorname{sen} \alpha,$$

y la distancia de S al plano del ecuador

$$z = (\rho (1 - e^2) - \zeta) \operatorname{sen} \varphi + \xi \cos \alpha \cos \varphi.$$

Enlazando las tres expresiones por la relación (2)

$$(1 - e^2) (x^2 + y^2) + z^2 = c^2,$$

resulta la ecuación (14).

(1) En virtud de las fórmulas (6) y la última (7), las coordenadas x_1, z_1 del punto A serán

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad z_1 = \rho (1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi.$$

(2) Ecuación del elipsoide de revolución

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en la cual $a^2 = c^2 : (1 - e^2)$. Al substituir en ella los valores de x, y, z , consignados en el texto, recuérdese que $a = \Delta \rho$ y por tanto

$$c^2 = \rho^2 (1 - e^2) (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi).$$

De ella á su vez se deduce el radio de curvatura de la sección vertical en A, puesto que tal radio es el límite de la razón de $\xi^2 : 2 \zeta$ cuando estas cantidades se desvanecen: luego si R designa dicho radio de curvatura, será (1)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha \right). \quad (15)$$

Haciendo $\xi = r \cos \theta$ y $\zeta = r \sin \theta$, la ecuación (14) puede escribirse de este modo:

$$r + r (\hbar \cos \theta - f \sin \theta)^2 - 2 R (1 + \hbar^2) \sin \theta = 0;$$

y de esta ecuación, poniendo $\theta = A r + B r^2 + C r^3 \dots$, se deduce θ en función de r por el método de los coeficientes indeterminados. El resultado á que se llega, haciendo para simplificar

$$F = \frac{f \hbar}{1 + \hbar^2}, \quad H = \frac{f^2 - \hbar^2}{1 + \hbar^2},$$

es el siguiente (2):

$$\theta = \frac{r}{2R} - \frac{1}{2} F \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{8} H + \frac{1}{2} F^2 \right) \left(\frac{r}{R} \right)^3 - \left(\frac{3}{8} F H + \frac{1}{2} F^3 \right) \left(\frac{r}{R} \right)^4,$$

teniéndose así bajo otra forma la ecuación polar de A B.

$$(1) \quad R = \lim \frac{\xi^2}{2\zeta} = \frac{\rho}{1 + \hbar^2}.$$

(2) Sustituídos en la antedicha ecuación en vez de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ sus desarrollos en serie, limitado el cálculo á la tercera potencia de θ y dividido todo por $(1 + \hbar^2)$, se tiene

$$0 = r - 2 (F r + R) \theta + H r \theta^2 + \frac{1}{3} (4 F r + R) \theta^3;$$

reemplazando aquí $\theta = A r + B r^2 + C r^3 + D r^4$, resulta, deteniéndose en la cuarta potencia de r ,

$$0 = (1 - 2 A R) r - 2 (A F + B R) r^2 + \left(A^2 H + \frac{1}{3} A^3 R - 2 B F - 2 C R \right) r^3 + \left(\frac{4}{3} A^3 F + A^2 B R + 2 A B H - 2 C F - 2 D R \right) r^4,$$

é igualados á cero los coeficientes de las diversas potencias de r , se determinan A, B, C, D.

La longitud de la curva desde A hasta S es

$$s = \int \left(1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2} \right)^{\frac{1}{2}} dr;$$

$$\therefore s = r + \int \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2} - \frac{1}{8} r^4 \frac{d\theta^4}{dr^4} \dots \right) dr,$$

y sustituido aquí el valor del coeficiente diferencial sacado de la ecuación de la curva últimamente escrita, hecha la integración, resulta (1),

$$s = r + \frac{r^3}{24 R^2} \left(1 - 3 F \frac{r}{R} \right) + \left(\frac{3}{640} + \frac{3}{80} H + \frac{1}{4} F^2 \right) \frac{r^5}{R^4} \\ - \left(\frac{3}{16} F H + \frac{5}{12} F^3 \right) \frac{r^6}{R^5} + \dots$$

Si en esta ecuación reemplazamos k en lugar de r , obtendremos la longitud de toda la curva AB. Pero, á menos que por algún motivo especial se requiera suma precisión, pueden desprejarse varios términos de la serie. Por ejemplo, el que contiene $e^2 k^5$ sólo llega en 300 millas (483 kilómetros) á una centésima de pie (3 milímetros), y el término con $e^4 k^4$ todavía es menor: luego bastará poner (2)

$$s = k + \frac{k^3}{24 R^2} - \frac{e^2 k^4}{16 R^3} \cos \alpha \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{3 k^5}{640 R^4}.$$

A su vez, siendo R' una función de α' , φ' análoga á R respecto

$$(1) \quad \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 = \frac{1}{4 R^4} - F \frac{r}{R^3} + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{8} H + \frac{5}{2} F^2 \right) \frac{r^2}{R^4} \\ - \left(\frac{1}{8} F + \frac{9}{4} F H + 5 F^3 \right) \frac{r^3}{R^5} + \dots \\ \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^4 = \frac{1}{16 R^4} - F \frac{r}{2 R^5} + \dots$$

(2) Sustituyendo los valores de f , h dados arriba, se tiene

$$F = \frac{f h}{1 + h^2} = \frac{e^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cos \alpha}{1 - e^2 (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha)},$$

y prescindiendo de los términos que contienen e en potencia superior á la segunda, el cociente se reduce al numerador.

de α , φ , la longitud de la otra curva A B, obtenida como intersección de la superficie por el plano que determinan la normal en B y el punto A, será

$$s' = k + \frac{k^3}{24 R'^2} - \frac{e^2 k^4}{16 R'^3} \cos \alpha' \operatorname{sen} 2\varphi' + \frac{3 k^5}{640 R'^4}.$$

Mas la diferencia de s y s' , del orden $e^4 k^6$, puede desdeñarse por completo; y si tomamos por s la media entre ambas series, se notará que al sumar los términos que contienen $e^2 k^4$, éstos hasta tal punto se compensan que de la suma de ellos, por ser de orden más elevado, cabe prescindir. Luego ambas series pueden representarse por ⁽¹⁾

$$s = k + \frac{k^3}{24 R_0^2} + \frac{3 k^5}{640 R_0^4}, \quad (16)$$

donde

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a (\nabla \nabla')^{\frac{3}{2}}} (1 - e^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 \alpha),$$

(¹) Como es próximamente $\alpha + \alpha' = 180^\circ$, tendrán α y α' cosenos opuestos y casi iguales en valor absoluto. Además, de

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2}{R R'},$$

$$\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right)^2 = \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R'^4} - \frac{2}{R^2 R'^2},$$

se deduce que si R difiere poco de R', será con suficiente aproximación

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} = \frac{2}{R R'} = \frac{2}{R_0^2}, \quad \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R'^4} = \frac{2}{R^2 R'^2} = \frac{2}{R_0^4}.$$

En cuanto al valor de R_0 , de la fórmula (15) y de las del párrafo primero, relativas á ρ , $\cos \varphi$, Δ y ∇ , se infiere

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - e^2} = \frac{\Delta \Delta^2 (1 - e^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 \alpha)}{a (1 - e^2)},$$

esto es $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a \nabla^2} (1 - e^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 \alpha)$.

A su vez $\frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a \nabla'^2} (1 - e^2 \cos^2 u' \operatorname{sen}^2 \alpha')$,

y la raíz cuadrada del producto de estas dos expresiones da el valor consignado en el texto, previa la modificación que se indica.

siendo R_0 la media proporcional entre R y R' , ó esto con muy corta diferencia, puesto que $e^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 \alpha$ apenas difiere de $e^2 \cos^2 u' \operatorname{sen}^2 \alpha'$.

5.

De algún interés será, á propósito de esto, comparar resultados precisos con otros alcanzados por medio de fórmulas aproximadas, por lo cual damos aquí los obtenidos calculando por las fórmulas anteriormente escritas los ángulos y lados de un triángulo esferoidal, del cual se conocen las latitudes y longitudes de los vértices. Las posiciones dadas de A, B, C son

Lat.	Long.
A ... 51° 57' N. ...	4° 46' O.,
B ... 53 4 N. ...	4 4 O.,
C ... 50 37 N. ...	1 12 O.;

los elementos del esferoide

$$a = 20926060, \quad c : a = 294 : 295,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \log a &= 7.3206874662, \\ \log e^2 &= 7.8304712628, \\ \log \sqrt{1-e^2} &= 9.9985253144. \end{aligned}$$

Con estos datos se hallan primero como latitudes reducidas de A, B, C, y como logaritmos de las funciones correspondientes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3,$

$$\begin{aligned} A \dots u_1 &= 51^\circ 51' 19'' .92163, & \log \Delta_1 &= 9.9990867071, \\ B \dots u_2 &= 52 58 23 .43810, & \log \Delta_2 &= 9.9990589251, \\ C \dots u_3 &= 50 31 16 .40080; & \log \Delta_3 &= 9.9991202240; \end{aligned}$$

y después, para los ángulos auxiliares que corresponden á los lados opuestos,

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} \frac{v_1}{2} &= 8.4217198302, & \log \operatorname{sen} \psi_1 &= 8.6156259752, \\ \log \operatorname{sen} \frac{v_2}{2} &= 8.3562766510, & \log \operatorname{sen} \psi_2 &= 8.4221562901, \\ \log \operatorname{sen} \frac{v_3}{2} &= 8.0187180976; & \log \operatorname{sen} \psi_3 &= 8.6709531435. \end{aligned}$$

Contando los azimutes en el sentido Norte, Este, Sur, y á partir del primer punto, por azimutes de los lados resultan

AB ...	20° 39' 17''	.2401,	BA ...	201° 12' 36''	.8177,
BC ...	142 55 50	.2183,	CB ...	325 11 7	.4013,
CA ...	302 10 54	.6710,	AC ...	119 23 54	.3366;

siendo por tanto los ángulos

$$\begin{aligned} A &= 98^{\circ} 44' 37'' \cdot 0965, \\ B &= 58 16 46 \cdot 5994, \\ C &= 23 0 12 \cdot 7303, \\ A + B + C &= 180 1 36 \cdot 4262. \end{aligned}$$

Por último, las distancias, medidas tanto por cuerdas como por arcos de curva, son

$$\begin{aligned} k_1 &= 1104249 \cdot 327, & a &= 1104377 \cdot 386, \\ k_2 &= 950259 \cdot 744, & b &= 950341 \cdot 187, \\ k_3 &= 436473 \cdot 497, & c &= 436481 \cdot 410. \end{aligned}$$

Otro ejemplo: un triángulo próximo al ecuador, cuyos vértices tienen estas posiciones:

Lat.	Long.
A ... 1° 30' S. ...	0° 0' E.,
B ... 0 20 N. ...	0 30 E.,
C ... 1 30 N. ...	3 0 E.

Por azimutes, ángulos y lados de este triángulo resultan los siguientes, con exactitud hasta la última cifra decimal aquí expresada:

AB, 15° 21' 24''	.0371;	BA, 195° 21' 5''	.7090;
BC, 65 6 46	.6939;	CB, 245 9 10	.7078;
CA, 225 12 16	.2131;	AC, 45 12 16	.2131;
A = 29° 50' 52''	.1760;	BC = 1006266	.448 pies;
B = 130 14 19	.0151;	CA = 1544212	.630 pies;
C = 19 56 54	.4947;	AB = 689666	.750 pies.

6.

Si los dos puntos, cuya distancia se busca, están en el mismo meridiano, á las latitudes φ , φ' , esa distancia estará dada por la fórmula

$$s = a \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{(1 - e^2) d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Mas conviene reemplazar aquí e^2 por otro simbolo n tal que (1)

$$n = \frac{a - c}{a + c}, \quad \therefore e^2 = \frac{4n}{(1 + n)^2},$$

y resultará con esto

$$s = c(1 + n)(1 - n^2) \int_{\varphi}^{\varphi'} (1 + 2n \cos 2\varphi + n^2)^{-\frac{3}{2}} d\varphi.$$

En la página 73 se dió en serie $(1 + 2n \cos \varphi + n^2)^{-\frac{3}{2}}$, y sustituido ese desarrollo y efectuada la integración, se halla (2)

$$\begin{aligned} \frac{s}{c} &= (1 + n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^3)(\varphi' - \varphi) \\ &\quad - (3n + 3n^2 + \frac{21}{8}n^3) \operatorname{sen}(\varphi' - \varphi) \cos(\varphi' + \varphi) \\ &\quad + (\frac{15}{4}n^2 + \frac{15}{8}n^3) \operatorname{sen} 2(\varphi' - \varphi) \cos 2(\varphi' + \varphi) \\ &\quad - \frac{31}{8}n^3 \operatorname{sen} 3(\varphi' - \varphi) \cos 3(\varphi' + \varphi). \end{aligned}$$

De la parte de s que depende de n^3 cabe siempre prescindir en la práctica, pues aun en el arco ruso que pasa de 25° sólo asciendo á pulgada y media, pudiendo por tanto escribirse

$$\begin{aligned} \frac{s}{c} &= (1 + n + \frac{1}{4}n^2)(\varphi' - \varphi) - (3n + 3n^2) \operatorname{sen}(\varphi' - \varphi) \cos(\varphi' + \varphi) \\ &\quad + \frac{15}{8}n^2 \operatorname{sen} 2(\varphi' - \varphi) \cos 2(\varphi' + \varphi). \end{aligned} \quad (17)$$

$$(1) \quad \frac{c}{a} = \frac{1 - n}{1 + n}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}.$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2\varphi' - \operatorname{sen} 2\varphi) = \operatorname{sen}(\varphi' - \varphi) \cos(\varphi' + \varphi).$$

Esta fórmula da la longitud de un arco de meridiano entre las latitudes φ y φ' , siendo la razón de los semiejes

$$1 - n : 1 + n$$

y el semieje polar = c .

En los cálculos geodésicos suelen convertirse las distancias medidas á lo largo del meridiano—cuando no exceden de cosa de un grado—en diferencias de latitud, dividiendo la extensión lineal por el radio de curvatura correspondiente al punto medio, ó por mejor decir, á la latitud media entre las dos extremas. Y viceversa, las diferencias pequeñas de latitud suelen convertirse en distancias meridianas, multiplicando aquéllas por el respectivo radio de curvatura á la latitud media. Por la serie anterior es fácil averiguar el error en ello cometido. Depende este error de n y de las potencias superiores de n ; mas de estas últimas puede prescindirse, limitándose sólo al término principal. Si $\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon$ son las latitudes extremas, será

$$s = c(1 + n)\varepsilon - 3cn \operatorname{sen} \varepsilon \cos 2\varphi;$$

pero el radio ρ vale $c(1 + n) - 3nc \cos 2\varphi$, luego (1)

$$s = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho n \varepsilon^3 \cos 2\varphi.$$

Por donde se ve que el error antedicho es $\frac{1}{2}\rho n \varepsilon^3 \cos 2\varphi$. Este es nulo á la latitud de 45° , y á la de 60° , pues próximamente $n = \frac{1}{11}$ viene á ser $\frac{1}{11} \rho \varepsilon^3$. Por un grado, puesto que

$$\begin{aligned} \log \rho &\dots 7.320, \\ 2400^{-1} &\dots \bar{4}.620, \\ \sin^3 1^\circ &\dots \bar{6}.726, \\ &\dots .046 \dots \bar{2}.666; \end{aligned}$$

el error es de media pulgada. Por 100 millas (161 kilómetros) ascendería á unas dos pulgadas (5 centímetros).

(1) Sustituyendo los dos primeros términos del desarrollo de $\operatorname{sen} \varepsilon$, se tiene

$$s = [c(1 + n) - 3cn \cos 2\varphi] \varepsilon + \frac{1}{2} cn \varepsilon^3 \cos 2\varphi,$$

y prescindiendo de los de orden n^2 , puede reemplazarse c por ρ en el último término de esta relación.

7.

Conviene notar una causa de error que existe en todas las observaciones de ángulos hechas con teodolito. Si B es la proyección, sobre la superficie esferoidal, de una señal B' situada sobre B á la altura h , para un observador en A no estarán B y B' en el mismo plano vertical, á no dar la coincidencia de que B esté á la misma latitud que A; pero es fácil ver que el ángulo azimutal que desde A forman B y B' es (1)

(1) Si N es el punto de intersección de la normal en A con el eje del elipsoide, O el centro de éste y $AN = \rho$, restando del valor (6) de la ordenada z del punto A la proyección de ρ sobre dicho eje, se tendrá

$$ON = -\rho e^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Luego si N' es el punto de intersección de la normal en B con el mismo eje, dando por supuesto que AN y BN' posean próximamente la misma longitud, será

$$N'N = \rho e^2 (\operatorname{sen} \varphi' - \operatorname{sen} \varphi).$$

Pero en el triángulo ANN', por la proporción de lados con los senos de los ángulos opuestos, se tendrá aproximadamente, llamando i al pequeño ángulo en A,

$$i = e^2 (\operatorname{sen} \varphi' - \operatorname{sen} \varphi) \cos \varphi.$$

Por la proporción correlativa en el triedro ANN'B, cuyo vértice es A y cuyo ángulo plano BAN es casi recto, será á su vez, llamando I al pequeño ángulo diedro opuesto á i y α el azimut de B en A,

$$I = i \operatorname{sen} \alpha.$$

Y reemplazando, por ser pequeño el arco AB, su coseno por la unidad y su seno por $h : a$, designando h la cuerda AB, la relación

$$\operatorname{sen} \varphi' = \operatorname{sen} \varphi \cos AB + \cos \varphi \operatorname{sen} AB \cos \alpha,$$

obtenida suponiendo esférico el triángulo ABP, cuyo vértice P es el polo, se convertirá en

$$\operatorname{sen} \varphi' - \operatorname{sen} \varphi = \frac{h}{a} \cos \varphi \cos \alpha.$$

Luego

$$I = \frac{1}{2} \frac{h}{a} e^2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos^2 \varphi.$$

Esto sentado, el ángulo diedro comprendido entre el plano BAB' y el plano tangente al elipsoide en A, con el cual casi coincide la cuerda h , es

$$\frac{e^2}{2} \frac{h}{a} \operatorname{sen} 2\alpha \cos^2 \varphi,$$

lo cual es una cantidad tan pequeña que á la latitud de la Gran Bretaña sólo puede ascender á una diez y ochoava parte de segundo por cada mil pies (305 metros) de altura. Si h fuera tal que, prescindiendo de la refracción, B' apareciera para el observador de A á una distancia zenital de 90° , se tendría $h = k^2 : 2a$ y el error sería

$$\frac{e^2}{4} \frac{k^2}{a^2} \operatorname{sen} 2\alpha \cos^2 \varphi.$$

8.

El plano que contiene la normal en A y pasa por B , y el que contiene la normal en B y pasa por A , cortan la superficie según dos curvas planas diferentes. Suponiendo, para fijarnos, que A y B pertenezcan al hemisferio Norte y que B esté á mayor latitud que A , la curva APB dada por el plano que contiene la normal en A queda al Sur de la curva BQA dada por el plano que contiene la normal en B . Luego, al hablar de la distancia AB , hay cierta ambigüedad, si bien ésta es más aparente que real, porque la curva más corta ó distancia geodésica, como veremos, no difiere apenas en extensión lineal de cada una de las curvas planas; además, la dirección de BQA es exacta en B y la de APB lo es en A . Esto no obstante, conviene distinguir, entre las varias curvas que pueden trazarse sobre la superficie desde A

próximamente el complemento de I ; luego si B'' es la proyección de B' sobre este horizonte ó plano tangente, será

$$\tan B A B'' = \tan B A B' \cdot \operatorname{sen} I;$$

mas, llamando h á la altura $B'B$, se tendrá

$$\tan B A B' = \frac{h}{k};$$

luego, reemplazando las tangentes y el seno por los ángulos respectivos,

$$B A B'' = \frac{e^2}{2} \frac{h}{a} \operatorname{sen} 2\alpha \cos^2 \varphi.$$

hasta B, dos principalmente: una que llamaremos curva de alineación, y otra la línea geodésica. Referiremos el trazado de ambas á las curvas planas, estudiando primero la curva de alineación.

Supongamos que un observador, colocado entre A y B con un instrumento de pasos, quiera ponerse en línea con ambos puntos. Para ello cambiará de posición transversalmente respecto de la línea AB hasta conseguir colocarse en un punto L, donde el plano vertical, descrito por el eje óptico del anteojo, pase tanto por A como por B. Imaginemos por este punto L, figura 21, el

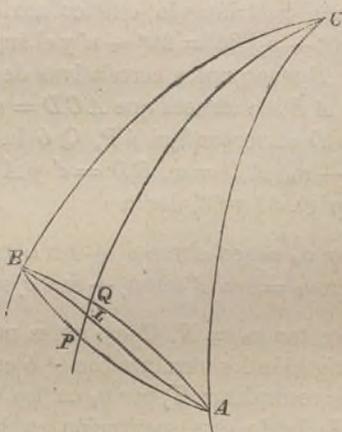


Fig. 21.

plano del meridiano CQLP, y sean Q, P los puntos en que corta las curvas planas. Designemos por u, u' las latitudes reducidas de A y B, por U, U', U , las de P, Q, L, y pongamos además

$$ACB = \omega, \quad ACQ = \omega, \quad BCQ = \omega'.$$

Llamando α al azimut de B ó P en A, la fórmula (11) da

$$\begin{aligned} \nabla \cos u' \operatorname{sen} \omega \cot \alpha &= \cos u, \operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u, \cos u' \cos \omega \\ &\quad - e^2 \cos u, (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u), \\ \nabla \cos U, \operatorname{sen} \omega, \cot \alpha &= \cos u, \operatorname{sen} U, - \operatorname{sen} u, \cos U, \cos \omega, \\ &\quad - e^2 \cos u, (\operatorname{sen} U, - \operatorname{sen} u), \end{aligned}$$

en que $\nabla^2 = 1 - e^2 \cos^2 u$. Eliminando en estas ecuaciones $\cot \alpha$, resulta la siguiente: (18)

$$\begin{aligned} & \text{sen } U_1 - N \cos U_1 = \\ & - e^2 \left\{ \text{sen } \omega_1 \cos U_1, \frac{\text{sen } u' - \text{sen } u_1}{\text{sen } \omega \cos u'} - \text{sen } U_1 + \text{sen } u_1 \right\}, \end{aligned}$$

siendo (1)

$$N = \frac{\text{sen } u' \cos u_1 \text{sen } \omega_1 + \text{sen } u_1 \cos u' \text{sen } \omega'}{\cos u_1 \cos u' \text{sen } \omega}$$

Mas imaginemos un triángulo esférico auxiliar ABC , con los lados $AC = 90^\circ - u_1$, $BC = 90^\circ - u'$ y el ángulo $ACB = \omega$, de modo que A y B sean puntos correlativos de A y B . Tomemos D en el lado AB , de manera que $ACD = \omega_1$, $BCD = \omega'$: con esto el punto D corresponderá á P , Q ó L . Poniendo además $CD = 90^\circ - u_0$, $AD = c_1$, $BD = c'$ y $AB = c$, las fórmulas (8) y (9), págs. 52 y 53, darán

$$\begin{aligned} \text{sen } \omega \tan u_0 &= \text{sen } \omega' \tan u_1 + \text{sen } \omega_1 \tan u', \\ \text{sen } c \text{sen } u_0 &= \text{sen } c' \text{sen } u_1 + \text{sen } c_1 \text{sen } u', \end{aligned}$$

de donde se deduce $\tan u_0 = N$. Como no es necesario conservar en esta investigación los términos con e^4 ó con potencias superiores, podemos reemplazar U_1 por u_0 en los términos multiplicados por e^2 . Haciendo esta sustitución en la fórmula (18), multiplicando por $\cos u_0$ y poniendo el arco $U_1 - u_0$ en vez de $\text{sen } (U_1 - u_0)$, resulta para P (2)

$$(1) \quad \text{sen } \omega' = \text{sen } \omega \cos \omega_1 - \cos \omega \text{sen } \omega_1.$$

(2) Puesto que en los triángulos esféricos auxiliares ACD y ACB se tiene

$$\frac{\text{sen } \omega_1}{\text{sen } c_1} = \frac{\text{sen } A}{\cos u_0}, \quad \frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } c} = \frac{\text{sen } A}{\cos u'},$$

será

$$\frac{\text{sen } \omega_1 \cos u_0}{\text{sen } \omega \cos u'} = \frac{\text{sen } c_1}{\text{sen } c};$$

$$U, - u_0 = e^2 \cos u_0 \operatorname{sen} u, \frac{2 \operatorname{sen} \frac{c'}{2} \operatorname{sen} \frac{c_l}{2}}{\cos \frac{c}{2}}. \quad (19)$$

Análogamente, para el punto Q,

$$U' - u_0 = e^2 \cos u_0 \operatorname{sen} u' \frac{2 \operatorname{sen} \frac{c'}{2} \operatorname{sen} \frac{c_l}{2}}{\cos \frac{c}{2}}.$$

Y asimismo la condición de que el plano vertical de L, que pase por A, lo verifique también por B, da para L

$$U - u_0 = e^2 \cos u_0 \operatorname{sen} u_0 \frac{2 \operatorname{sen} \frac{c'}{2} \operatorname{sen} \frac{c_l}{2}}{\cos \frac{c}{2}}.$$

Restando de dos en dos estas ecuaciones y multiplicando por a , resulta

$$QP = ae^2 \cos u_0 \frac{2 \operatorname{sen} \frac{c'}{2} \operatorname{sen} \frac{c_l}{2}}{\cos \frac{c}{2}} (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u,).$$

y sustituido este valor y el de $\operatorname{sen} u_0$ dado arriba, la cantidad encerrada dentro del paréntesis en la fórmula (18) se transforma en

$$\frac{\operatorname{sen} c_l}{\operatorname{sen} c} (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u,) - \left(\frac{\operatorname{sen} c'}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen} u, + \frac{\operatorname{sen} c_l}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen} u' \right) + \operatorname{sen} u, =$$

$$\left(1 - \frac{\operatorname{sen} c_l + \operatorname{sen} c'}{\operatorname{sen} c} \right) \operatorname{sen} u,.$$

Mas siendo $\operatorname{sen} c = 2 \operatorname{sen} \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}$ y $c_l + c' = c$, el último paréntesis, transformada en producto la suma de senos primero y la diferencia de cosenos después, equivale á

$$\frac{\cos \frac{c}{2} - \cos \frac{c_l - c'}{2}}{\cos \frac{c}{2}} = -2 \frac{\operatorname{sen} \frac{c'}{2} \operatorname{sen} \frac{c_l}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$LP = ae^2 \cos u_0 \frac{2 \operatorname{sen} \frac{c'}{2} \operatorname{sen} \frac{c_i}{2}}{\cos \frac{c}{2}} (\operatorname{sen} u_0 - \operatorname{sen} u_i),$$

$$QL = ae^2 \cos u_0 \frac{2 \operatorname{sen} \frac{c'}{2} \operatorname{sen} \frac{c_i}{2}}{\cos \frac{c}{2}} (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u_0).$$

Estas cantidades determinan completamente la posición de L respecto de las dos curvas planas.

Puesto que la razón $LP : AP$ se desvanece cuando $AP = c = 0$, es claro que la curva de alineación toca en A la curva plana APB, y por consiguiente su azimut allí es el mismo de B. Otro tanto ocurre en B respecto de la curva plana BQA. Mas en el curso de la curva de alineación pueden presentarse dos casos: primero, que entre A y B el valor de $\operatorname{sen} u_0$ esté siempre comprendido entre $\operatorname{sen} u_i$ y $\operatorname{sen} u'$; entonces la curva queda toda ella entre APB y BQA; segundo, que el valor de $\operatorname{sen} u_0$ no esté siempre comprendido entre $\operatorname{sen} u_i$ y $\operatorname{sen} u'$, lo que ocurrirá si, no hallándose A y B distantes muchos grados, tienen tan pequeña diferencia de latitud que los azimutes recíprocos, contados desde el Norte, son ambos menores que un ángulo recto. En tal caso, es fácil ver que QL se anula cuando (1)

$$\tan \frac{c_i}{2} \tan \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u_i}{\operatorname{sen} u' + \operatorname{sen} u_i};$$

(1) Sustituido en

$$\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u_0 = 0$$

el valor de $\operatorname{sen} u_0$, deducido de

$$\operatorname{sen} c \operatorname{sen} u_0 = \operatorname{sen} c' \operatorname{sen} u_i + \operatorname{sen} c_i \operatorname{sen} u',$$

resulta

$$\frac{\operatorname{sen} u'}{\operatorname{sen} u_i} = \frac{\operatorname{sen} c'}{\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} c_i};$$

de donde se infiere la fórmula u del texto, restando y sumando los primeros y últimos términos de esta proporción y verificando transformaciones análogas á las indicadas al fin de la nota anterior.

luego la curva de alineación corta la curva plana BQA en un punto F dado por el valor de c , que de aquí se deduce. Desde A hasta F el punto L está entre las curvas planas, y desde F hasta B queda al Norte de FB, á una distancia del orden $e^2 c^4$. Cuando

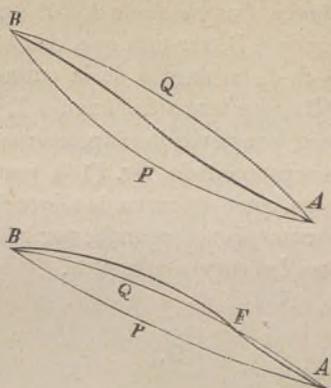


Fig. 22.

A y B se hallan á la misma latitud, toda la curva de alineación queda al Norte de la curva plana trazada por A y B.

El ángulo según el cual se cortan las dos curvas planas, tanto en A como en B, es ⁽¹⁾

(1) En la figura 21 se tiene, suponiendo esférico el triángulo PAQ,

$$\frac{\text{sen } I}{\text{sen } QPA} = \frac{QP}{QA};$$

de donde, sustituyendo en vez de QP la expresión dada arriba, y tomando como valor bastante aproximado para el objeto

$$QA = ac, = a \cdot 2 \text{sen } \frac{c'}{2},$$

se deduce

$$\frac{\text{sen } I}{\text{sen } QPA} = e^2 \cos u_0 \frac{\text{sen } \frac{c'}{2}}{\cos \frac{c'}{2}} (\text{sen } u' - \text{sen } u_1).$$

$$I = e^2 \cos^2 u, \text{ sen } 2\alpha \text{ sen}^2 \frac{c}{2},$$

suponiendo c pequeña; mas si comparamos esta expresión con la que hallaremos más adelante, cap. VI, fór. (12), para el ángulo que la curva geodésica trazada desde A á B forma en A con el plano vertical dirigido á B, veremos que, desdennando las cantidades del orden $e^2 c^3$, dicho ángulo de la curva geodésica en A con la curva APB es un tercio del ángulo I, y que lo mismo pasa en B. Pruébese, conservando las potencias superiores de c , que la geodésica, capítulo citado, fór. (13), corta BQA en ciertos casos; mas queda como la curva de alineación, enteramente al Norte de las curvas planas, cuando, por hallarse A y B á la misma latitud, estas dos curvas coinciden.

9.

De conformidad en un todo con el método seguido en las curvas planas, Gauss define del siguiente modo la curvatura de una superficie. Si tenemos una porción de esta superficie ceñida por una línea cerrada, y trazamos los radios de una esfera, de radio unidad, paralelos á las normales á la superficie en los diferentes puntos de ese contorno, el área de la porción correspondiente de

Pero con suficiente aproximación, á causa de estar multiplicado el paréntesis por la cantidad pequeña e^2 , se tiene

$$\text{sen } u' - \text{sen } u, = \text{sen } c \cos u, \cos \alpha,$$

valor deducido reemplazando, por ser c arco pequeño, su coseno por la unidad y su seno por c , en la fórmula trigonométrica que enlaza los tres lados y el ángulo α del triángulo CAB, supuesto esférico. Sustituído dicho valor, é imaginando que el arco CP gire en torno de C, acercándose indefinidamente á CA; en el límite, donde $c' = c$, el ángulo QPA = $180 - \alpha$ y $u_0 = u$, será

$$\frac{\text{sen } I}{\text{sen } \alpha} = 2 e^2 \cos^2 u, \cos \alpha \text{ sen}^2 \frac{c}{2},$$

y de aquí se deduce la fórmula del texto multiplicando por $\text{sen } \alpha$ y poniendo 1 en vez de $\text{sen } I$.

la esfera será la curvatura total de la porción de superficie de que se trate. Y esto supuesto, si dado un punto de ella dividimos la curvatura total del elemento superficial donde se encuentre dicho punto por el área de este elemento, el cociente nos ofrecerá la medida de la curvatura en tal punto. Sea, pues, ese elemento un pequeñísimo rectángulo formado por cuatro líneas de curvatura: α , β los lados de este rectángulo, ϱ , ρ los radios correspondientes de curvatura. Las normales trazadas por los puntos del contorno estarán en cuatro planos que se cortarán de dos en dos perpendicularmente. Los radios correlativos de la esfera de radio unidad determinarán en su superficie un rectángulo cuyos lados serán $\alpha : \varrho$ y $\beta : \rho$ y su área $\alpha\beta : \varrho\rho$, la cual, dividida por el área del rectángulo, da $1 : \varrho\rho$, y esto será la medida de la curvatura. Demostró Gauss que si una superficie inextensible, pero flexible, se arquea ó deforma más ó menos, la medida de la curvatura en cada punto aun será la misma. Así, tomando en una superficie una porción muy pequeña, en cuyo centro los radios principales de curvatura sean ϱ , ρ , esa porción podrá adaptarse, sin que en ningún punto de ella cambie la curvatura, sobre una esfera de radio igual á $(\varrho\rho)^{\frac{1}{2}}$. Sin que valga como demostración rigurosa, puede esto comprenderse por

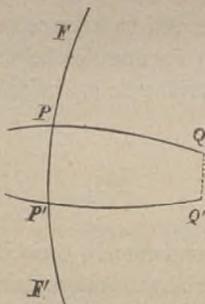


Fig. 25.

lo que sigue: sean FP , PQ las secciones principales de una superficie trazadas por P ; sus radios de curvatura, ϱ , ρ respectivamente; P' un punto infinitamente próximo á P en FP ; $P'Q'$ la sección hecha en la superficie por un plano trazado por P'

perpendicular al plano FP , y q, q' las proyecciones de Q, Q' sobre el plano FP : prolongadas $Pq, P'q'$, se cortarán á una distancia de P igual á ϱ . Siendo $PQ = P'Q'$ una cantidad ($= s$) muy pequeña comparada con ϱ ó ρ , se tendrá

$$Pq = P'q' = \frac{s^2}{2\rho};$$

y puesto que $qq' = QQ'$,

$$QQ' : PP' = \left(\varrho - \frac{s^2}{2\rho} \right) : \varrho,$$

$$\therefore \frac{PP' - QQ'}{PP'} = \frac{s^2}{2\varrho\rho}.$$

Luego dado PP' , la ley de magnitud de la porción elemental de superficie $PQP'Q'$ será la misma que si esta porción pertenece á la esfera de radio $(\varrho\rho)^{\frac{1}{2}}$. Por consiguiente, un trozo muy pequeño de superficie alrededor de P podrá arquearse de modo que se adapte sobre una esfera de ese radio, y cuando esto se haga, ni las líneas trazadas sobre ese trozo cambiarán de longitud, ni los ángulos de intersección se alterarán. Así, un triángulo esferoidal pequeño, cuyos lados sean líneas geodésicas, podrá amoldarse sobre una superficie esférica de radio $(\varrho\rho)^{\frac{1}{2}}$ — correspondiendo estas cantidades al centro del triángulo, — y sin perder su cualidad las líneas geodésicas se transformarán en arcos de circunferencias máximas, y los ángulos del triángulo esférico serán los mismos que los del triángulo esferoidal antes de la deformación.

10.

Comparemos ahora, suponiendo conocidos los lados y azimutes, los ángulos de un triángulo esferoidal (es decir, los verdaderos ángulos observados, comprendidos entre las curvas de alineación que enlazan los vértices) con los de un triángulo esférico cuyos lados sean de la misma longitud que los de aquél, siendo el radio de la esfera $(\rho\varrho)^{\frac{1}{2}}$, que designaremos por N . Pueden despreciarse las potencias superiores de θ^2 , y dase por sentado que las diferencias de los ángulos de que se trata son del orden

$e^2 c^2$. Si x, y , son las coordenadas de un punto de una curva que pasa por el origen, siendo allí tangente al eje de las x , llamando s á la longitud de esta curva, contada desde el origen, tendremos por el teorema de Maclaurin

$$x = s + \frac{s^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right) + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 x}{ds^3} \right) + \dots,$$

$$y = \frac{s^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right) + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 y}{ds^3} \right) + \dots;$$

ó bien, siendo ϱ el radio de curvatura en el origen (1),

$$x = s - \frac{s^3}{6 \varrho^2} + \frac{s^4}{8 \varrho^3} \left(\frac{d\varrho}{ds} \right) + \dots,$$

$$y = \frac{s^2}{2 \varrho} - \frac{s^3}{6 \varrho^2} \left(\frac{d\varrho}{ds} \right) + \dots,$$

donde $\left(\frac{d\varrho}{ds} \right)$ indica el valor del coeficiente diferencial en el origen.

Tambi3n puede darse á dicha serie esta forma (2):

$$x = \varrho \operatorname{sen} \frac{s}{\varrho} + \frac{s^4}{8 \varrho^3} \left(\frac{d\varrho}{ds} \right) + \dots,$$

$$y = \varrho \left(1 - \cos \frac{s}{\varrho} \right) - \frac{s^3}{6 \varrho^2} \left(\frac{d\varrho}{ds} \right) + \dots$$

Apliquemos tales expresiones á la curva de intersecci3n de la

(1) Llamando $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ las primeras, segundas..... derivadas de x, y con relaci3n á la variable independiente s , se tiene

$$\varrho = \frac{1}{x_1 y_2 - y_1 x_2}, \quad \frac{d\varrho}{ds} = - \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2},$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$x_2^2 + y_2^2 + x_1 x_3 + y_1 y_3 = 0,$$

$$3 x_2 x_3 + 3 y_2 y_3 + x_1 x_4 + y_1 y_4 = 0.$$

Pero siendo la curva tangente en el origen al eje de las x , ser3 en dicho punto $dy = 0$, y por tanto

$$\begin{array}{l} x_1 = 1, \quad y_1 = 0 \\ x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{\varrho} \end{array} \left| \begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{\varrho^2}, \quad y_3 = -\frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{d\varrho}{ds} \right) \\ x_4 = \frac{3}{\varrho^3} \left(\frac{d\varrho}{ds} \right). \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \operatorname{sen} \frac{s}{\varrho} = \frac{s}{\varrho} - \frac{1}{6} \frac{s^3}{\varrho^3}, \quad \cos \frac{s}{\varrho} = 1 - \frac{1}{2} \frac{s^2}{\varrho^2}.$$

superficie esferoidal por el plano que contiene la normal en A y pasa por B; y para ello tracemos por B una perpendicular á la normal en A, y sean ξ , η las coordenadas de B, c la longitud de la curva AB y R el radio de curvatura de la sección en A. Resultarán las ecuaciones

$$\frac{\xi}{R} = \operatorname{sen} \frac{c}{R} + \frac{c^4}{8R^4} \left(\frac{dR}{ds} \right) + \dots,$$

$$\frac{\eta}{R} = 1 - \cos \frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3} \left(\frac{dR}{ds} \right) + \dots,$$

las cuales pueden escribirse así ⁽¹⁾:

$$\frac{\xi}{N} = \operatorname{sen} \frac{c}{N} + \frac{c^3}{3N^2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{R} \right) + \frac{c^4}{8R^4} \left(\frac{dR}{ds} \right) + \dots,$$

$$\frac{\eta}{N} = 1 - \cos \frac{c}{N} - \frac{c^2}{2N} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{R} \right) - \frac{c^3}{6R^3} \left(\frac{dR}{ds} \right) + \dots$$

(1) Llamando T, T' á los últimos términos de las dos fórmulas precedentes, y haciendo

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{N} = p,$$

dichas fórmulas pueden escribirse

$$\frac{\xi}{N} + p\xi = \operatorname{sen} \left(\frac{c}{N} + pc \right) + T,$$

$$\frac{\eta}{N} + p\eta = 1 - \cos \left(\frac{c}{N} + pc \right) - T';$$

ó bien, puesto que p es cantidad pequeña,

$$\frac{\xi}{N} + p\xi = \operatorname{sen} \frac{c}{N} + pc \cos \frac{c}{N} + T,$$

$$\frac{\eta}{N} + p\eta = 1 - \cos \frac{c}{N} + pc \operatorname{sen} \frac{c}{N} - T'.$$

Mas traspuestos los términos $p\xi$, $p\eta$ á los segundos miembros, y sustituidos aquí como valores suficientes, por estar multiplicados por p ,

$$\xi = N \operatorname{sen} \frac{c}{N}, \quad \eta = N \left(1 - \cos \frac{c}{N} \right),$$

se tiene

$$\frac{\xi}{N} = \operatorname{sen} \frac{c}{N} + pN \left(\frac{c}{N} \cos \frac{c}{N} - \operatorname{sen} \frac{c}{N} \right) + T,$$

$$\frac{\eta}{N} = 1 - \cos \frac{c}{N} + pN \left(\frac{c}{N} \operatorname{sen} \frac{c}{N} - 1 + \cos \frac{c}{N} \right) - T';$$

de donde se deducen las fórmulas del texto, reemplazando en los paréntesis el seno y el coseno por los primeros términos de sus desarrollos en serie.

En ellas

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{e^2}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi' + e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi' \right),$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \right),$$

siendo α el azimut de B en A, φ' la latitud de A y φ la latitud media del triángulo (1). Pero como no es necesario conservar en la expresión de ξ ningún término de orden superior á $e^2 c^3$ ni en la de η ninguno de orden superior á $e^2 c^2$, podemos prescindir del término que contiene $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)$: además, en la fórmula de R podemos sustituir en vez de α el azimut γ de AB en su punto medio, y en vez de φ' poner φ . Por tanto (2)

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{R} = -\frac{e^2 \cos^2 \varphi \cos 2\gamma}{2N},$$

y en su consecuencia

$$\xi = N \operatorname{sen} \frac{c}{N} - \frac{e^2 c^3}{6 N^2} \cos^2 \varphi \cos 2\gamma + \dots, \quad (20)$$

$$\eta = N \left(1 - \cos \frac{c}{N} \right) + \frac{e^2 c^2}{4 N} \cos^2 \varphi \cos 2\gamma + \dots,$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 2 N^2 \left(1 - \cos \frac{c}{N} \right) - \frac{e^2 c^4}{12 N^2} \cos^2 \varphi \cos 2\gamma + \dots,$$

no siendo menester los términos menores. Con esto queda precisada la posición del punto B; y en cuanto á las coordenadas ξ' , η' de C, se obtendrán sustituyendo en las fórmulas anteriores \bar{b} , β en lugar de c , γ .

(1) Dedúcense estas expresiones sustituyendo en la fórmula (15) y en $N = (\rho \varrho)^{\frac{1}{2}}$ los valores de ρ , ϱ y Δ dados en el párrafo primero de este capítulo.

$$(2) \quad N = a \left(1 - \frac{e^2}{2} + e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \right),$$

$$\frac{N}{R} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - 2 \cos^2 \gamma),$$

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{R} = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{N}{R} \right).$$

11.

Sean A, B, C los ángulos del triángulo esférico cuyos lados son a, b, c en la esfera de radio N, y los ángulos correlativos del triángulo esferoidal

$$A' = A + dA, \quad B' = B + dB, \quad C' = C + dC,$$

contándose los azimutes α, β, γ de los lados a, b, c (correspondientes á los puntos medios de éstos) desde 0° hasta 360° en el mismo sentido que los ángulos citados A, B, C. Tomando N por unidad de longitud, se tendrá

$$\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cos A' + (\eta' - \eta)^2 = BC^2,$$

á la par que

$$BC^2 = 2(1 - \cos a) - \frac{e^2}{12} a^4 \cos^2 \varphi \cos 2\alpha.$$

Sustituyendo en vez de ξ, ξ', η, η' los valores dados en el párrafo precedente; poniendo, para simplificar, $\frac{1}{12} e^2 \cos^2 \varphi = i$, é igualando las dos expresiones de BC^2 , resulta, después de una sencilla reducción ⁽¹⁾

$$0 = 2(\cos a - \cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A') \\ + ia^4 \cos 2\alpha + ib^2 \cos 2\beta \cdot H + ic^2 \cos 2\gamma \cdot K,$$

siendo ⁽²⁾

⁽¹⁾ Sustitúyese

$$\xi = \operatorname{sen} c - 2ic^5 \cos 2\gamma, \quad \eta = 1 - \cos c + 3ic^2 \cos 2\gamma, \\ \xi' = \operatorname{sen} b - 2ib^5 \cos 2\beta, \quad \eta' = 1 - \cos b + 3ib^2 \cos 2\beta,$$

y en el cálculo se prescinde de los términos con i^2 .

⁽²⁾ Las expresiones que por de pronto se hallan son

$$H = -4b \operatorname{sen} b - 6(\cos b - \cos c) + 4b \operatorname{sen} c \cos A', \\ K = -4c \operatorname{sen} c - 6(\cos c - \cos b) + 4c \operatorname{sen} b \cos A';$$

las cuales, sustituidos los primeros términos de los desarrollos en serie de los senos y cosenos, se convierten en las primeras fórmulas consignadas en el texto. Pero como H y K están multiplicadas por la cantidad pequeña i , puede reemplazarse en sus expresiones A' por A; pasándose entonces del primer valor de H al segundo en virtud de las relaciones

$$b \cos A + a \cos P = c, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

y del primer valor de K al segundo en virtud de las correlativas

$$a \cos A + a \cos C = b, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\begin{aligned} H &= 4bc \cos A' - 3c^2 - b^2 = -a^2 - 2ac \cos B, \\ K &= 4bc \cos A' - 3b^2 - c^2 = -a^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

Mas si en vez de $\cos A'$ ponemos $\cos A - dA \operatorname{sen} A$, y designamos por Δ el área del triángulo (1), la expresión anterior se convertirá en esta otra:

$$\begin{aligned} \frac{4\Delta}{i} dA &= -a^2 \cos 2\alpha + b^2 \cos 2\beta (a^2 + 2ac \cos B) \\ &\quad + c^2 \cos 2\gamma (a^2 + 2ab \cos C), \end{aligned}$$

la cual, en virtud de las fórmulas (2) (pág. 47), se reduce á (2)

$$4\Delta dA = 2iabc \operatorname{sen} A \{c \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) - b \operatorname{sen} (\alpha + \beta)\},$$

ó bien á la primera de las que siguen, deduciéndose las otras dos por analogía (*):

$$(1) \quad \Delta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A$$

(2) En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{4\Delta}{i} dA &= a^2 (-a^2 \cos 2\alpha + b^2 \cos 2\beta + c^2 \cos 2\gamma) \\ &\quad + 2abc (b \cos B \cos 2\beta + c \cos C \cos 2\gamma) \\ &= -a^2bc (2 \cos (\beta + \gamma) - 2 \cos (\beta - \gamma) \cos 2\alpha) \\ &= -a^2bc \left\{ \begin{array}{l} \cos (\beta + \gamma) - \cos (2\alpha - \beta + \gamma) \\ + \cos (\beta + \gamma) - \cos (2\alpha + \beta - \gamma) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

pues de la primera igualdad se pasa á la segunda en virtud de las fórmulas (2) y del valor $A = 180^\circ + \beta - \gamma$ consignado en la pág. 46, y de la segunda á la tercera, desdoblado el primer término del paréntesis y transformando el segundo en suma de cosenos. Reemplazadas aquí á su vez las dos diferencias de cosenos en productos de senos, se tiene, en virtud de los valores de B y C, dados en la antedicha página,

$$\frac{4\Delta}{i} dA = 2a^2bc \{ \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} B \},$$

y substituyendo en esta expresión

$$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A, \quad a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A,$$

se obtiene la fórmula del texto. Para hallar después las relaciones (21) se escribe como valor bastante aproximado para el objeto

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.$$

(*) *Account of the Principal Triangulation*, pág. 242.

$$dA = iabc \left\{ \frac{\text{sen}(\alpha + \gamma)}{b} - \frac{\text{sen}(\beta + \alpha)}{c} \right\}, \quad (21)$$

$$dB = iabc \left\{ \frac{\text{sen}(\beta + \alpha)}{c} - \frac{\text{sen}(\gamma + \beta)}{a} \right\},$$

$$dC = iabc \left\{ \frac{\text{sen}(\gamma + \beta)}{a} - \frac{\text{sen}(\alpha + \gamma)}{b} \right\}.$$

Estas también pueden ponerse bajo la forma (1)

$$\begin{aligned} dA &= ib^2 \text{sen } 2\beta - ic^2 \text{sen } 2\gamma, \\ dB &= ic^2 \text{sen } 2\gamma - ia^2 \text{sen } 2\alpha, \\ dC &= ia^2 \text{sen } 2\alpha - ib^2 \text{sen } 2\beta. \end{aligned} \quad (22)$$

De ambos modos se echa de ver que, con el orden de cantidades pequeñas que se conservan, la suma de los ángulos del triángulo esferoidal equivale á la suma de los del triángulo esférico. Sirva de ejemplo el gran triángulo calculado con escrupulosidad en la página 173. El promedio de los tres valores de N correspondientes á los vértices del triángulo es 20942838, y las fórmulas que preceden dan

$$dA = -0'' \cdot 093, \quad dB = +0'' \cdot 132, \quad dC = -0'' \cdot 039.$$

Y en efecto, si con dicho valor de N convertimos en arcos los lados a, b, c del triángulo, y calculamos con precisión los ángulos del triángulo esférico respectivo, resultará la siguiente correlación de ángulos:

(1) Pues restando la fórmula (2) de la página 47,

$$a^2 \text{sen } 2\alpha + 2ab \text{sen}(\alpha + \beta) + b^2 \text{sen } 2\beta = c^2 \text{sen } 2\gamma,$$

de su análoga

$$a^2 \text{sen } 2\alpha + 2ac \text{sen}(\alpha + \gamma) + c^2 \text{sen } 2\gamma = b^2 \text{sen } 2\beta,$$

se halla

$$abc \left\{ \frac{\text{sen}(\alpha + \gamma)}{b} - \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{c} \right\} = b^2 \text{sen } 2\beta - c^2 \text{sen } 2\gamma.$$

y del mismo modo se transformarían los otros dos paréntesis.

Esferoidales.			Esféricos.		
°	'	"	°	'	"
A'	= 98 44	37.0965,	A = 98 44	37.1899,	
B'	= 58 16	46.5994,	B = 58 16	46.4737,	
C'	= 23 0	12.7303,	C = 23 0	12.7634,	
ε'	= 1 36	.4262,	ε = 1 36	.4270.	

La diferencia entre los excesos esféricos de los dos triángulos se reduce, pues, á 0".0008.

12.

Mas supongamos que con los dos lados a , b de un triángulo esferoideal y el ángulo que comprenden en el mismo, se calculen por las reglas de la Trigonometría esférica los otros dos ángulos y el tercer lado, y se quiera averiguar los errores ∂A , ∂B , ∂c de los ángulos y lado así obtenidos. Si en el triángulo esférico los datos a , b , C dan A , B , c , los datos a , b , $C + dC$ darán (1)

$$A - \frac{a}{c} \cos B dC \text{ en vez de } A + dA,$$

$$B - \frac{b}{c} \cos A dC \quad \gg \quad B + dB,$$

$$c + b \operatorname{sen} A dC \quad \gg \quad c.$$

Luego, puesto que $dA + dB + dC = 0$, será (2)

(1) Suponiendo nulas da , db , es decir, constantes a , b , y reemplazando los senos de los lados por estos mismos, las fórmulas diferenciales (12), página 55, son, llamando d' el aumento en la esfera, no común al esferoide,

$$- \cos B d'c = c \operatorname{sen} B d'A,$$

$$- \cos A d'c = a \operatorname{sen} C d'B,$$

$$d'c = b \operatorname{sen} A d'C;$$

y de éstas, conservando la última, dividiendo por ella las dos primeras y sustituyendo en los cocientes, en vez de la razón de senos de los ángulos, la de los lados opuestos, resultan los valores del texto.

$$(2) \quad c = a \cos B + b \cos A, \quad a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A.$$

$$\begin{aligned} \partial A &= \frac{ab}{c} \left\{ -\frac{dA}{a} \cos A + \frac{dB}{b} \cos B \right\}, \\ \partial B &= \frac{ab}{c} \left\{ -\frac{dA}{a} \cos A - \frac{dB}{b} \cos B \right\}, \\ \partial c &= \frac{ab}{c} \operatorname{sen} C dC, \end{aligned}$$

ó sustituyendo en las dos primeras por dA , dB los valores (21) hallados en el párrafo anterior (1),

$$\begin{aligned} \partial A &= iab \{ 2 \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} 2\gamma \cos (\alpha - \beta) \}, \quad (23) \\ \partial B &= -iab \{ 2 \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} 2\gamma \cos (\alpha - \beta) \}. \end{aligned}$$

A su vez, si con el lado c del triángulo esferoidal y los ángulos que en éste le son adyacentes, calculamos por las reglas de la Trigonometría esférica los otros dos lados, sus errores serán, como es fácil demostrar,

$$\begin{aligned} \partial a &= i \frac{abc}{\operatorname{sen} C} \{ 2 \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) + \operatorname{sen} 2\beta \cos (\alpha - \gamma) \}, \quad (24) \\ \partial b &= -i \frac{abc}{\operatorname{sen} C} \{ 2 \operatorname{sen} (\beta + \gamma) + \operatorname{sen} 2\alpha \cos (\beta - \gamma) \}. \end{aligned}$$

(1) Con la sustitución indicada es

$$\begin{aligned} \partial A &= i \frac{ab}{c} (b \cos A + a \cos B) \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \\ &\quad + iab (-\operatorname{sen} (\alpha + \gamma) \cos A - \operatorname{sen} (\beta + \gamma) \cos B); \end{aligned}$$

pero reducido el primer término de esta expresión en virtud de la igualdad primera de la nota precedente, sustituidos en el segundo término los valores

$$A = 180^\circ + (\beta - \gamma), \quad B = -180^\circ + (\gamma - \alpha),$$

y reemplazados después por sumas los productos de senos por cosenos, resulta

$$\partial A = iab \left\{ 2 \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} (2\gamma + \alpha - \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} (2\gamma - \alpha + \beta) \right\},$$

de donde es fácil deducir la primera fórmula (23). Análogamente, ó permutando letras, se halla la segunda.

Luego el máximo error que puede cometerse, por efecto de la forma esferoidal de la superficie, al calcular el lado de un triángulo, es inferior á

$$\frac{e^2}{4} \cos^2 \varphi \frac{abc}{\operatorname{sen} C},$$

siendo C el ángulo que se opone á la base ó lado propuesto.

Si en aquel triángulo esferoidal que nos sirve de comparación calculamos los lados a , b en función del c , sus errores respectivos serán $+0.5$ pies y $+0.7$ pies, cantidades muy pequeñas relativamente á las grandes distancias $a = 209$ millas y $b = 180$ millas.

En conclusión: tales triángulos esferoidales pueden calcularse como triángulos esféricos, es decir, por medio del teorema de Legendre, determinando el exceso esférico por la fórmula

$$\varepsilon = \frac{ab \operatorname{sen} C'}{2 \rho \operatorname{sen} 1''}. \quad (25)$$

CAPÍTULO VI

LÍNEAS GEODÉSICAS

El estudio especial de las líneas geodésicas lo han reputado de mayor importancia los matemáticos del Continente que los geodestas ingleses, los cuales, en las triangulaciones llevadas á cabo en el Reino Unido y en la India, han prescindido de ese estudio; parte, porque los grandes arcos medidos por ellos corresponden á meridianos (que son líneas geodésicas planas), y parte, porque los ángulos de los triángulos geodésicos no se obtienen por observación, pues como veremos, el azimut de la geodésica dirigida del punto A al B, difiere del azimut astronómico de B en A, que es el que en realidad se mide. Demás de esto, la diferencia entre la distancia AB según la curva plana y la distancia geodésica es exigua, aun mediando de un extremo á otro tres ó cuatro grados; y aunque en rigor, según se demuestra, el cálculo de los triángulos esferoidales como si fueran esféricos, sólo es lícito cuando los ángulos observados se reemplazan por los geodésicos, es decir, por los que forman entre sí las líneas geodésicas que unen los tres vértices, sin embargo la diferencia es también de tan escasa cuantía en triángulos cuyos vértices sean puntos de la superficie de la tierra visibles uno de otro, que en general se desdeña. Mas no se deduce de aquí que el estudio de las líneas geodésicas huelgue en Geodesia, pues tanto por la precisión actualmente alcanzada en la medida de bases y ángulos, como por la amplitud dada á algunas triangulaciones, conviene no omitir escrupulosidad ninguna.

1.

Hallemos primeramente la ecuación de la línea geodésica (ó línea más corta) trazada sobre un elipsoide de revolución. Definida la posición de un punto en esta superficie por la distancia ζ á que aquél se encuentra de uno de los polos, según el meridiano correspondiente, y por su longitud ω contada desde un meridiano fijo, y designada por r la distancia del punto al eje de revolución, la longitud de la curva trazada será

$$s = \int (r^2 d\omega^2 + d\zeta^2)^{\frac{1}{2}},$$

y esta longitud debe ser la mínima sobre dicha superficie entre dos puntos dados. El medio más rápido para obtener la ecuación característica de la curva es dar á ω una variación $\delta\omega$, como función de ζ , con lo cual se tiene (1)

$$\begin{aligned} \delta s &= \int \frac{r^2 d\omega}{ds} d \cdot \delta\omega \\ &= \delta\omega \frac{r^2 d\omega}{ds} - \int \delta\omega d \left(\frac{r^2 d\omega}{ds} \right); \end{aligned}$$

deduciéndose como condición del mínimo

$$r^2 d\omega = C ds. \quad (1)$$

Para fijarnos, contemos positivamente las longitudes de Oeste á Este y los azimutes del Norte al Este hasta volver al primer punto. Si α es el azimut del elemento ds de la curva, será

$$\begin{aligned} ds \cos \alpha &= -d\zeta, \\ ds \sin \alpha &= r d\omega, \end{aligned}$$

y substituyendo la segunda en la ecuación característica del mínimo, se tendrá

$$r \sin \alpha = C.$$

Ahora bien; llamando u la latitud reducida y a el semieje ma-

(1) $ds = (r^2 d\omega^2 + d\zeta^2)^{\frac{1}{2}}.$

por del esferoide, es $r = a \cos u$; luego si u, α , son los valores iniciales de u, α en el punto A, será

$$\cos u \operatorname{sen} \alpha = \cos u, \operatorname{sen} \alpha. \quad (2)$$

Pero tal relación existe asimismo en un triángulo esférico ABC , cuyos lados sean $AC = 90^\circ - u$; $BC = 90^\circ - u$, y los ángulos opuestos á ellos $CAB = \alpha$, $CBA = 180^\circ - \alpha$; y en este triángulo, llamando σ el tercer lado y haciendo el tercer ángulo $C = \tilde{\omega}$, se tiene (1)

$$\begin{aligned} d\sigma \cos \alpha &= du, \\ d\sigma \operatorname{sen} \alpha &= \cos u d\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Además, si φ es la latitud de un punto de la geodésica, será (2)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi &= \frac{\operatorname{sen} u}{(1 - e^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}}}, \\ dr &= d\zeta \operatorname{sen} \varphi = -a \operatorname{sen} u du, \end{aligned}$$

(1) Pues prolongado el arco σ por el punto B, unido por otro arco el extremo B' de la prolongación con el vértice opuesto C, y trazado, haciendo centro en este vértice, con el radio esférico $90^\circ - u$ un arco desde B hasta el arco CB', se formará un triángulo, rectángulo en el límite, esto es, cuando BB' = $d\sigma$, en el cual $d\sigma$ será la hipotenusa, $\cos u d\tilde{\omega}$ un cateto, $-du$ el otro cateto y $180^\circ - \alpha$ el ángulo adyacente á este último.

Dedúcense también esas fórmulas diferenciales de las (12) de la Trigonometría (pág. 55), suponiendo b y A constantes, esto es, db y dA nulas, pues con esto la primera y tercera de las fórmulas citadas se reducen á

$$\begin{aligned} da - \cos B dc &= 0, \\ -\cos B da + dc &= \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A dC; \end{aligned}$$

y conservando la primera y reemplazando la segunda por la obtenida eliminando da entre ambas, y sustituyendo $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$, se tienen las del texto, salvo el cambio de notación.

(2) La primera de estas fórmulas es la $\nabla \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} u$ de la página 164, y la segunda, con diversa notación, es la primera de las fórmulas (2) de la página 163. Hállanse después las ecuaciones (3), dividiendo las dos ecuaciones relativas á ds por las correspondientes á $d\sigma$.

de donde se deduce

$$\begin{aligned} ds &= a(1 - e^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} d\sigma, \\ d\omega &= (1 - e^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (3)$$

Determinan por completo estas ecuaciones el triángulo esférico auxiliar, y de ellas se sacan la latitud y longitud de un punto á la distancia s de A , medida sobre la geodésica trazada con un azimut inicial dado. De ese triángulo esférico se tiene

$$d\tilde{\omega} = d\sigma \frac{\sin \alpha}{\cos u} = \frac{\sin \alpha, \cos u,}{\cos^2 u} d\sigma,$$

y con esta relación podemos eliminar $d\tilde{\omega}$ de la segunda de las (3). Integrandolo esta que se cita y suprimiendo las potencias superiores de e^2 , resulta

$$\omega = \tilde{\omega} - \frac{e^2}{2} \int \cos^2 u d\tilde{\omega} = \tilde{\omega} - \frac{e^2}{2} \sigma \sin \alpha, \cos u, \quad (4)$$

2.

Antes de aplicar las relaciones precedentes al cálculo de distancias, sigamos el curso de la línea geodésica que une sobre el esferoide dos puntos dados A, B , y omitamos en tal estudio las potencias superiores de e^2 . Sea G un punto de esa línea geodésica, y sean s, s' las distancias de G y B á A contadas sobre la geodésica; σ, σ' los valores correspondientes de σ ; ω, ω' las longitudes de G y B ; u, u' sus latitudes reducidas. Sea á su vez C en el lado AB del triángulo esférico auxiliar ABC , el punto correlativo de G , de suerte que $AC = \sigma, AB = \sigma', ACB = \tilde{\omega}, ACB = \tilde{\omega}', CB = 90^\circ - u, CB = 90^\circ - u'$. Se tendrán las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \sin u &= \sin u, \cos \sigma + \cos u, \sin \sigma \cos \alpha, \\ \sin u' &= \sin u, \cos \sigma' + \cos u, \sin \sigma' \cos \alpha, \\ \sin \tilde{\omega}' \tan u &= \sin \tilde{\omega} \tan u' + \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \tan u, \end{aligned}$$

deducida esta última de la ecuación (9), (pág. 53). Pero en virtud de la relación (4),

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{e^2}{2} \sigma \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} u,$$

$$\tilde{\omega}' = \omega' + \frac{e^2}{2} \sigma' \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} u,$$

luego reemplazando para mayor brevedad $\omega' - \omega$, $\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}$, $\sigma' - \sigma$ por ω_r , $\tilde{\omega}_r$, σ_r , y teniendo en cuenta que los senos de los segundos términos pueden reemplazarse por estos mismos y sus cosenos por la unidad, será

$$\operatorname{sen} \tilde{\omega} = \operatorname{sen} \omega + \frac{e^2}{2} \sigma \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} u, \operatorname{cos} \omega,$$

$$\operatorname{sen} \tilde{\omega}' = \operatorname{sen} \omega' + \frac{e^2}{2} \sigma' \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} u, \operatorname{cos} \omega',$$

$$\operatorname{sen} \tilde{\omega}_r = \operatorname{sen} \omega_r + \frac{e^2}{2} \sigma_r \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} u, \operatorname{cos} \omega_r,$$

y estos valores deben sustituirse en la ecuación de arriba, en la cual entra tan u . Además, llamando α' el azimut de la geodésica en B, se tienen las ecuaciones

$$\operatorname{sen} \sigma' \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} u, \operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u, \operatorname{cos} u' \operatorname{cos} \tilde{\omega}',$$

$$- \operatorname{sen} \sigma' \operatorname{cos} \alpha' = \operatorname{cos} u' \operatorname{sen} u, - \operatorname{sen} u' \operatorname{cos} u, \operatorname{cos} \tilde{\omega}',$$

y por medio de éstas y las precedentes, previas algunas simplificaciones, se deduce (1)

(1) Llamando T el último término de esta fórmula se tiene primeramente

$$T = \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} u, \left\{ \begin{array}{l} \sigma \operatorname{cos} \omega \tan u' + \sigma_r \operatorname{cos} \omega_r \tan u_r \\ - \sigma' \operatorname{cos} \omega' \tan u \end{array} \right\}.$$

Pero hallándose el paréntesis multiplicado por la cantidad pequeña e^2 , puede escribirse dentro de él

$$\tan u = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \omega'} \tan u' + \frac{\operatorname{sen} \omega_r}{\operatorname{sen} \omega_r'} \tan u_r,$$

y como además

$$\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{cos} u_r = \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{cos} u_r',$$

se tiene asimismo

$$T = \frac{e^2}{2} \frac{1}{\operatorname{sen} \omega'} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha' (\sigma \operatorname{cos} \omega \operatorname{sen} \omega' - \sigma' \operatorname{cos} \omega' \operatorname{sen} \omega) \operatorname{sen} u' \\ + \operatorname{sen} \alpha_r (\sigma_r \operatorname{cos} \omega_r \operatorname{sen} \omega_r' - \sigma_r' \operatorname{cos} \omega_r' \operatorname{sen} \omega_r) \operatorname{sen} u_r \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \omega' \tan u &= \operatorname{sen} \omega \tan u' + \operatorname{sen} \omega, \tan u, & (5) \\ &+ \frac{e^2}{2} (\sigma \cos \alpha, \operatorname{sen} \omega, -\sigma, \cos \alpha' \operatorname{sen} \omega). \end{aligned}$$

Imaginando ahora, como en la página 180, un triángulo esférico auxiliar ABC , que corresponda punto por punto á los ABC y $A'B'C'$, siendo $BC = 90^\circ - u'$, $AC = 90^\circ - u$, $ACB = \omega'$, tomemos G sobre $A'B$ de modo que $ACG = \omega$, $GCB = \omega$; y haciendo $CG = 90^\circ - u_0$, se tendrá como en la página antedicha,

$$\operatorname{sen} \omega' \tan u_0 = \tan u' \operatorname{sen} \omega + \tan u, \operatorname{sen} \omega, \quad (6)$$

poseyendo u_0 el mismo valor que entonces si en ambos casos A, B y el punto intermedio son los mismos. Ahora bien, puesto que de e^4 cabe prescindir, póngase ⁽¹⁾ dentro del paréntesis de la fórmula (5)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \omega, &= \operatorname{sen} \omega' \frac{\cos u, \operatorname{sen} \sigma,}{\cos u \operatorname{sen} \sigma'}, \\ \operatorname{sen} \omega &= \operatorname{sen} \omega' \frac{\cos u' \operatorname{sen} \sigma}{\cos u \operatorname{sen} \sigma'}. \end{aligned}$$

Verifícanse tras de esto las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} T &= \frac{e^2}{2} \frac{1}{\operatorname{sen} \omega'} \left\{ \operatorname{sen} \alpha' (\sigma \operatorname{sen} \omega, -\sigma, \cos \omega' \operatorname{sen} \omega) \operatorname{sen} u' \right\}, \\ T &= \frac{e^2}{2} \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma'} \left\{ \sigma (\cos u, \operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u, \cos u' \cos \omega') \operatorname{sen} \omega, \right\}; \end{aligned}$$

la primera porque $\sigma' = \sigma + \sigma$, y $\omega' = \omega + \omega$; la segunda porque uno de los triángulos esféricos auxiliares señalados por letras góticas se deduce, reemplazando el verdadero ángulo ω' por ω , del cual difiere poco,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\cos u,} = \frac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} \sigma'} = \frac{\operatorname{sen} \alpha,}{\cos u'}.$$

De la última expresión se pasa fácilmente á la del texto, en virtud de las dos relaciones que preceden á la fórmula (5), en las cuales, para la transformación indicada, puede escribirse ω' en vez de ω .

(1) Hállanse estas igualdades eliminando A y B entre las proporciones

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} A}{\cos u} &= \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \sigma}, & \frac{\operatorname{sen} A}{\cos u'} &= \frac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} \sigma'}, \\ \frac{\operatorname{sen} B}{\cos u} &= \frac{\operatorname{sen} \omega,}{\operatorname{sen} \sigma,}, & \frac{\operatorname{sen} B}{\cos u,} &= \frac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} \sigma'}. \end{aligned}$$

establecidas en los triángulos esféricos auxiliares ACB y ACG , admitiendo, como valores bastante aproximados para el objeto, u por u_0 , y σ, σ, σ' por longitudes de los lados opuestos á $\omega', \omega, \omega,$.

Y tomando, hecha esta sustitución, la diferencia entre (5) y (6), y escribiendo $\tan u - \tan u_0 = (u - u_0) \sec^2 u$, se hallará por último

$$u - u_0 = \frac{e^2}{2} \cos u \left(\frac{\sigma \operatorname{sen} \sigma'}{\operatorname{sen} \sigma'} \cos u, \cos \alpha, \right. \\ \left. - \frac{\sigma, \operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \sigma} \cos u' \cos \alpha' \right). \quad (7)$$

Al comparar esta ecuación con las de la página 181, entiéndase que los actuales puntos A, B, como queda dicho, son los mismos A, B á que entonces nos referíamos y que el punto G está en el mismo meridiano que P, L y Q. Corresponden así las $c, c', c,$ de aquellas fórmulas á las σ', σ, σ de (7), y queda por lo tanto bien definido el curso de la línea geodésica respecto de las curvas planas ó de la curva de alineación. De la última fórmula y de la (19) se deduce la distancia de G á P (*), á saber, estando aquel punto al Norte de este otro (1): *

$$PG = a \frac{e^2}{2} \cos u \left\{ \frac{\sigma \operatorname{sen} \sigma'}{\operatorname{sen} \sigma} \cos u, \cos \alpha, - \frac{\sigma, \operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \sigma'} \cos u' \cos \alpha' \right. \\ \left. - \frac{4 \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma'}{2}}{\cos \frac{\sigma'}{2}} \operatorname{sen} u, \right\};$$

y eliminando α' por medio de la ecuación trigonométrica

$$-\cos u' \cos \alpha' = \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} \sigma' - \cos u, \cos \sigma' \cos \alpha,$$

cámbiase esa fórmula en

$$PG = a \frac{e^2}{2} \cos u (H \cos u, \cos \alpha, + K \operatorname{sen} u), \quad (8)$$

(*) Véase en el *Philosophical Magazine*, mayo de 1870, el artículo «On the course of geodetic lines on the earth's surface», por el capitán Clarke, I. R., de cuyo trabajo se ha tomado la mayor parte de este capítulo.

(1) $\frac{PG}{a} = (u - u_0) - (U, - u_0).$

siendo

$$H = \frac{\sigma \operatorname{sen} \sigma'}{\operatorname{sen} \sigma'} - \frac{\sigma, \operatorname{sen} \sigma}{\tan \sigma'},$$

$$K = \sigma, \operatorname{sen} \sigma - 4 \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma'}{2}}{\cos \frac{\sigma'}{2}}.$$

Si ha de cumplir la línea geodésica, no con la condición de pasar por dos puntos dados, sino de partir de un punto A con un azimut propuesto, puede referirse cada punto de ella al de igual meridiano de la curva obtenida en la superficie por su intersección con el plano vertical de A tangente á la geodésica en este punto. Basta para ello poner en (8) $\sigma_1 = \sigma' - \sigma$, y en el resultado $\sigma' = 0$, como distancia límite al moverse B hacia A por la línea geodésica. Resulta con esto (1)

$$PG = \frac{a^2}{2} \cos u \operatorname{sen} \sigma \left\{ \left(\frac{\sigma}{\tan \sigma} - 1 \right) \cos u, \cos a, \right. \\ \left. - \left(\sigma - 2 \tan \frac{\sigma}{2} \right) \operatorname{sen} u, \right\}, \quad (9)$$

y en cuanto al signo de PG, recuérdese que $PG = a(u - U_1)$. Dedúcese de aquí fácilmente que si A es el verdadero azimut de

(1) Sustituyendo $\sigma_1 = \sigma' - \sigma$, desarrollando el seno de la diferencia y verificando sencillas reducciones, entre ellas

$$4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma}{2} = \operatorname{sen} \sigma \cdot 2 \tan \frac{\sigma}{2},$$

resulta

$$H = \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{\sigma}{\tan \sigma} - \frac{\sigma'}{\tan \sigma'} \right)$$

$$K = \operatorname{sen} \sigma \left(\sigma' - \sigma - 2 \tan \frac{\sigma'}{2} + 2 \tan \frac{\sigma}{2} \right);$$

de donde es fácil deducir los valores correspondientes á $\sigma' = 0$.

B en A, α , el azimut, en el mismo punto A, de la geodésica dirigida á B, y α el azimut de ésta en B, se tendrá (1)

$$\begin{aligned} A - \alpha, &= -\frac{PG \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \sigma} \\ &= \frac{e^2}{2} \cos u, \operatorname{sen} \alpha, \left\{ \left(1 - \frac{\sigma}{\tan \sigma} \right) \cos u, \cos \alpha, \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\sigma}{2} - \tan \frac{\sigma}{2} \right) \operatorname{sen} u, \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

fórmula dada por Bessel en el *Astronomische Nachrichten*, números 3 y 330.

Infiérese de ella que el azimut de la geodésica será igual al verdadero cuando exista la siguiente condición:

$$\cot u, \cos \alpha, = 2 \frac{\tan \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}}{1 - \frac{\sigma}{\tan \sigma}}. \quad (11)$$

Cuando σ sea pequeña, se tendrá aproximadamente (2)

$$A - \alpha, = \frac{e^2}{6} \cos u, \operatorname{sen} \alpha, \left\{ \sigma^2 \cos u, \cos \alpha, - \frac{\sigma^3}{4} \operatorname{sen} u, \right\}. \quad (12)$$

3.

Figurémonos ahora sobre un esferoide de poca excentricidad trazadas en todas direcciones líneas geodésicas que partan de un mismo punto: primeramente de uno situado en el ecuador. Como es sabido, y se infiere también del triángulo esférico auxiliar, una geodésica toca alternativamente dos paralelos equidistantes

(1) La primera igualdad proviene de la proporción de senos en el triángulo APB, calculado como esférico, en el cual el ángulo $A - \alpha'$, y el lado opuesto $BP = -\frac{PG}{a}$ son tan pequeños que pueden reemplazarse sus senos por los arcos respectivos.

(2)
$$\tan \sigma = \sigma \left(1 + \frac{\sigma^2}{3} \right) = \frac{\sigma}{1 - \frac{\sigma^2}{3}}.$$

de los polos (1), y la diferencia de longitudes entre los puntos sucesivos de contacto es constante y un poco menor que 180° , dependiendo lo que discrepa de este límite del ángulo según el cual corta la geodésica al ecuador. Si parte una de esas líneas de un punto de él con un azimut α , y hacia el punto opuesto N, en que el plano osculador de la línea en aquél vuelve á cortar al ecuador, se mueve otro punto G por la geodésica, el ángulo ω del triángulo esférico auxiliar irá aumentando desde 0, y cuando ya valga π , también σ será $= \pi$ y G habrá alcanzado el ecuador á una longitud $\pi - \frac{1}{2} \pi e^2 \operatorname{sen} \alpha$ (2). La línea geodésica quedará enteramente al Sur del plano osculador del punto inicial, suponiendo $\alpha < 90^\circ$, porque la diferencia $\sigma \cot \sigma - 1$ que figura en (9) es negativa con todos los valores de σ desde 0 hasta π ; y su distancia á la curva, determinada en la superficie por dicho plano, cuando sea $\sigma = \pi$ y esté G sobre el ecuador, valdrá $\frac{1}{2} \pi e^2 \cos \alpha$. Infírese de esto que en todas las geodésicas emanadas del mismo punto del ecuador queda comprendida después, entre el ecuador y el meridiano de N, próximamente una misma longitud $\frac{1}{2} \pi e^2$, que en la tierra es de unos $36'$ (3). En su consecuencia, las inter-

(1) Anúlase el coeficiente

$$\frac{du}{d\sigma} = \cos \alpha$$

cundo $\alpha = \pm 90^\circ$ ó bien, en virtud de la relación (2), cuando

$$\cos u = \pm \cos u, \operatorname{sen} \alpha,$$

(2) Dedúcese este valor de la fórmula (4) La (9), que se cita después, puede escribirse de este modo:

$$PG = \frac{ue^2}{2} \cos u \left\{ \begin{array}{l} (\sigma \cos \sigma - \operatorname{sen} \sigma) \cos u, \cos \alpha, \\ - \left(\sigma \operatorname{sen} \sigma - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma}{2} \right) \operatorname{sen} u, \end{array} \right\}$$

y haciendo en ella $u, = 0, \alpha, = \alpha, u = 0, \sigma = \pi$, resulta la distancia consignada en el texto.

(3) Llamando G el punto donde la geodésica corta el ecuador y N' el punto donde la misma corta el meridiano de N, se tendrá, puesto que los arcos son pequeños,

$$GN' = \sqrt{GN^2 + NN'^2};$$

pero tomando el radio a por unidad, y dado que NN' difiere apenas de PG, será:

$$GN = \frac{1}{2} \pi e^2 \operatorname{sen} \alpha, \quad NN' = \frac{1}{2} \pi e^2 \cos \alpha.$$

secciones de las geodésicas consecutivas formarán en esta parte una envolvente parecida á la evoluta de la elipse ó á la hipocicloide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}},$$

siendo N el centro de la curva. Mas tales líneas geodésicas que partiendo de un punto se cortan luego formando una envolvente, son mínimas distancias sólo hasta el punto de contacto con esta envolvente, pero no más allá (Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Berlín, 1866). Si el punto de donde parten las líneas no está en el ecuador sino á la latitud u , el diámetro de la envolvente variará como $\cos^2 u$.

4.

La línea geodésica que une dos puntos poco distantes suele quedar entre las curvas planas, y es fácil ver, fundándose en lo que precede y desdeñando las cantidades del orden $e^2 \sigma^4$, que existe la relación (1)

(1) Reemplazando los senos y la tangente por los dos primeros términos de sus desarrollos en serie, la expresión del coeficiente H dada en el párrafo 2 se convierte en

$$H = \frac{\sigma\sigma', 3\sigma'^2 + \sigma^2 - \sigma_r^2}{\sigma' \cdot 6}$$

y en esta otra, sustituyendo en el segundo quebrado $\sigma_r = \sigma' - \sigma$:

$$H = \sigma\sigma' \frac{\sigma + \sigma'}{3};$$

luego, desdeñando el último término de la fórmula (8), será

$$PG = \frac{ae^2}{2} \cos u \cdot \sigma\sigma' \frac{\sigma + \sigma'}{3} \cos u_r \cos \alpha_r.$$

Por otra parte, si en la fórmula de la página 181, con la notación apropiada al caso actual,

$$PQ = ac^2 \cos u \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma_r}{2}}{\cos \frac{\sigma'}{2}} (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u_r),$$

se sustituye

$$\operatorname{sen} u' = \operatorname{sen} u_r \cos \sigma' + \cos u_r \operatorname{sen} \sigma' \cos \alpha_r,$$

$$\frac{PG}{PQ} = \frac{\sigma + \sigma'}{3\sigma'} = \frac{1}{3} + \frac{\sigma - \sigma'}{6\sigma'},$$

de la cual se infiere que la geodésica divide el ángulo P en dos partes, cuya razón es 1 : 2, y el ángulo Q en dos partes, cuya razón es 2 : 1. Mas en algún caso, á saber: cuando las estaciones extremas están casi á la misma latitud, la geodésica corta las curvas planas; propiedad que se demuestra tomando en consideración cantidades de orden de mayor pequeñez. Como en el punto de sección debe ser nula la fórmula (8) de PG, la condición para que la línea geodésica corte la curva determinada en la superficie por el plano que pasa por B y la normal en A, será

$\frac{H}{\sigma\sigma'} \cot u, \cos \alpha, + \frac{K}{\sigma\sigma'} = 0$, la cual, substituyendo en las expresiones de $\frac{H}{\sigma\sigma'}$ y $\frac{K}{\sigma\sigma'}$, en vez de los senos y cosenos sus desarrollos en serie, se transforma en (1)

$$\frac{(\sigma + \sigma') \cot u, \cos \alpha,}{\frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma\sigma' + \sigma'^2) + \frac{1}{144}(\sigma^4 + \sigma^3\sigma' - \sigma^2\sigma'^2 + \sigma\sigma'^3 + \sigma'^4)} = \quad (13)$$

y se limitan á los primeros términos los desarrollos en serie, se tendrá

$$PQ = \frac{ae^2}{2} \cos u \cdot \sigma\sigma' \cdot \cos \alpha,$$

En su consecuencia,

$$\frac{PG}{PQ} = \frac{\sigma + \sigma'}{3\sigma'} = \frac{2\sigma' + \sigma + (\sigma' - \sigma)}{6\sigma'}.$$

(1) Reemplazados en los segundos miembros de

$$H \sin \sigma' = \sigma \sin \sigma, - \sigma, \sin \sigma \cos \sigma',$$

$$K \sin \sigma' = \sigma, \sin \sigma \sin \sigma' - 8 \sin \frac{\sigma'}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\sigma'}{2},$$

los tres primeros términos de los desarrollos en serie de los senos y del coseno, se halla

$$\begin{aligned} \frac{H \sin \sigma'}{\sigma\sigma'} \left(1 + \frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{10}\right) &= \frac{\sigma + \sigma'}{3}, \\ \frac{K \sin \sigma'}{\sigma\sigma'} \left(1 + \frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{10}\right) &= -\frac{\sigma^2 + \sigma\sigma' + \sigma'^2}{3 \cdot 4} \\ &\quad - \frac{\sigma^4 + \sigma^3\sigma' - \sigma^2\sigma'^2 + \sigma\sigma'^3 + \sigma'^4}{3 \cdot 120}; \end{aligned}$$

y substituidos estos valores en

$$\left(\frac{H}{\sigma\sigma'} \cot u, \cos \alpha, + \frac{K}{\sigma\sigma'}\right) \frac{\sin \sigma'}{\sigma'} \left(1 + \frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{10}\right) = 0,$$

resulta la ecuación (13).

Esto sentado, si la intersección, acercándose á A, llega á este punto como límite, será $\sigma = 0$, y por lo tanto

$$\cot u, \cos \alpha, = \frac{\sigma'}{4} \left(1 + \frac{\sigma'^2}{30} \right),$$

y si, acercándose á B, alcanza este punto, será $\sigma = \sigma'$; luego

$$\cot u, \cos \alpha, = \frac{3\sigma'}{8} \left(1 + \frac{\sigma'^2}{20} \right).$$

Imaginando por un momento esférica la tierra, en cuyo caso $e = 0$, bájese un arco perpendicular desde el polo C al arco AB; sea S el pie entre A y B de ese arco perpendicular, y póngase $AS = iAB$. Por Trigonometría esférica tendremos $\cot u, \cos \alpha, = \tan i\sigma' = i\sigma' + \frac{1}{3}i^3\sigma'^3$. Luego, si es muy pequeño el arco σ' , debe estar el valor de AS comprendido entre $\frac{1}{4}AB$ y $\frac{3}{8}AB$ para que la geodésica corte la curva plana situada al Norte, siendo A en tales circunstancias la estación más septentrional de las dos extremas. Son, pues, muy reducidos los límites de azimut, dentro de los cuales la intersección ocurre.

Si los puntos A, B pertenecen al mismo paralelo de latitud, y es L el punto que en la curva de alineación corresponde al mismo meridiano que G en la geodésica, se tendrá, siendo pequeña σ' (1)

(1) En efecto, de la relación

$\text{sen } \sigma' \text{ sen } u = \text{sen } \sigma \text{ sen } u, + \text{sen } \sigma, \text{ sen } u'$
se infiere, siendo $u' = u,$

$$\text{sen } u - \text{sen } u, = 2 \frac{\text{sen } \frac{\sigma}{2} \text{ sen } \frac{\sigma'}{2}}{\cos \frac{\sigma'}{2}} \text{ sen } u,$$

y por lo tanto la fórmula de PL (pág. 182), con la notación apropiada al caso actual, se transforma en

$$PL = ae^2 \cos u \frac{4 \text{sen}^2 \frac{\sigma}{2} \text{sen}^2 \frac{\sigma'}{2}}{\cos^2 \frac{\sigma'}{2}} \text{ sen } u,$$

de la cual es fácil deducir la del texto, poniendo en el quebrado en vez de los dos factores y el divisor los primeros términos de sus desarrollos en serie.

$$PL = \frac{ae^2}{4} \sigma^2 \sigma',^2 \cos u \operatorname{sen} u,$$

$$PG = \frac{ae^2}{24} \sigma \sigma', (\sigma^2 + 3\sigma\sigma' + \sigma',^2) \cos u \operatorname{sen} u;$$

luego en la parte media de su curso la geodésica quedará comprendida entre la curva de alineación y aquella donde las dos curvas planas se han confundido.

5.

Veamos tras de esto, siendo corta la distancia, la diferencia de extensión lineal entre la geodésica y las otras curvas; primero entre la geodésica y la curva P. Sea δu la diferencia de latitudes de los puntos correlativos G y P de estas curvas: G, al Norte de P, se hallará de este punto á la distancia $a \delta u$; y si trazado por G un arco de paralelo, corta éste la curva plana en un punto R al este de G, la diferencia de longitudes de R y G será $\delta \omega = \delta u \tan \alpha \sec u$. Referidos del mismo modo todos los puntos de la curva plana á la geodésica, cuando ω aumente $\delta \omega$, la derivada

$$\frac{ds}{d\zeta} = \left(r^2 \frac{d\omega^2}{d\zeta^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

A su vez, puesto que $u' = u$, y $\alpha' = 180^\circ - \alpha$, de la igualdad que precede á la fórmula (8) (pág. 203), ó bien del triángulo rectángulo, mitad del isósceles, cuyos dos lados iguales valen $90^\circ - u$, y el tercer lado σ' , se infiere

$$\cos u, \cos \alpha' = \operatorname{sen} u, \tan \frac{\sigma'}{2};$$

luego dicha fórmula (8) será ahora

$$PG = \frac{ae^2}{2} \left(H \tan \frac{\sigma'}{2} + K \right) \cos u \operatorname{sen} u,$$

donde, sustituyendo el arco en vez de la tangente, además

$$H = \frac{\sigma \sigma', \sigma^2 - \sigma',^2 + 3\sigma',^2}{6},$$

$$K = \sigma \sigma', \frac{\sigma',^3 - 3\sigma^2 - 3\sigma',^2}{6 \cdot 4},$$

y después $\sigma' = \sigma + \sigma''$, se tiene la fórmula arriba consignada.

crecerá (1)

$$r^2 \frac{d\omega}{ds} \left(\frac{d\delta\omega}{d\zeta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta\omega}{d\zeta} \right)^2 \frac{r^2 d\zeta^3}{ds^3},$$

cuyo primer término al integrar se anulará, según el carácter propio de la geodésica (2). Luego cuando de esta línea se pase á la curva plana, la variación de longitud, dado que $ds \cos \alpha = -d\zeta$, y $r = a \cos u$, será

$$\delta s = -\frac{1}{2} a^2 \int \cos^2 u \cos^3 \alpha \left(\frac{d\delta\omega}{d\zeta} \right)^2 d\zeta,$$

ó bien, porque necesitándose sólo el término primero ó principal del valor de δs , basta escribir $d\zeta = -adu$ (3),

$$\delta s = \frac{1}{2} a \cos^2 u \cos^3 \alpha \int \left(\frac{d\delta\omega}{du} \right)^2 du.$$

Sea, pues, c la extensión total de la curva plana, y como antes σ la distancia geodésica de G al punto inicial A . Prescindiendo

(1) Pues escribiendo

$$\frac{ds}{d\zeta} = s_1, \quad \frac{d\omega}{d\zeta} = \omega_1, \quad \frac{d\delta\omega}{d\zeta} = \delta_1 \omega,$$

resulta

$$\left\{ 1 + r^2 \left(\frac{d\omega + d\delta\omega}{d\zeta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = s_1 \left\{ 1 + 2 r^2 \frac{\omega_1 \delta_1 \omega}{s_1^2} + r^2 \frac{(\delta_1 \omega)^2}{s_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

cuyo segundo miembro, desarrollado en serie, limitada á los términos en que $\delta_1 \omega$ no esté en potencia superior al cuadrado, equivale á

$$s_1 \left\{ 1 + r^2 \frac{\omega_1 \delta_1 \omega}{s_1^2} + \frac{1}{2} r^2 \frac{(\delta_1 \omega)^2}{s_1^4} (s_1^2 - r^2 \omega_1^2) \right\},$$

siendo fácil deducir de aquí la expresión del texto, dado que

$$s_1^2 - r^2 \omega_1^2 = 1.$$

(2)

$$r^2 d\omega = C ds.$$

(3) De los valores de $d\zeta$ y du dados en el párrafo primero y de la ecuación (3) del mismo se infiere

$$\frac{d\zeta}{du} = -\frac{ds}{d\sigma} = -a (1 - e^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}}.$$

diendo de las cantidades pequeñas de cuarto orden, la ecuación (8) se convierte en (1)

$$PG = a \frac{e^2}{6} \sigma (c - \sigma) (c + \sigma) \cos^2 u \cos \alpha,$$

luego (2) $\delta\omega = \frac{1}{6} e^2 \sigma (c^2 - \sigma^2) \sin \alpha \cos u,$

y $\left(\frac{d\delta\omega}{du}\right)^2 du = \left(\frac{d\delta\omega}{d\sigma}\right)^2 \frac{d\sigma}{du} d\sigma;$

$$\begin{aligned} \therefore \delta s &= \frac{a e^4}{288} \cos^4 u \sin^2 2\alpha \int_0^c (c^2 - 3\sigma^2)^2 d\sigma \\ &= \frac{a e^4}{360} c^5 \cos^4 u \sin^2 2\alpha. \end{aligned} \quad (*) (14)$$

Da esta fórmula un valor aproximado á la verdad mientras la distancia c no es muy grande. El coeficiente $\frac{1}{360} a e^4$ sólo vale 2.66 pies (81 centímetros); luego si c por ejemplo fuera de 10° , el máximo valor de δs sería menor que una centésima de pulgada (un cuarto de milímetro). Para hallar la diferencia de extensión lineal entre la curva de alineación y la geodésica, póngase (3)

(1) Es la misma expresión de PG dada en la nota de la página 207, poniendo $\sigma' = c$, $\sigma_r = c - \sigma$ y quitando los subíndices de u_r , α_r , con cuya supresión no se comete en el caso actual error de cuantía.

$$(2) \quad \delta\omega = \delta u \tan \alpha \sec u, \quad \delta u = \frac{PG}{a}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

(*) Bessel, *Astron. Nachr.*, núm. 330, pág. 285. Mas no está dada la demostración.

(3) Con la notación adecuada al caso actual la fórmula de PL dada en la página 182 es

$$PL = a e^2 \cos u \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{c - \sigma}{2}}{\cos \frac{c}{2}} (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u_r),$$

la cual, sustituyendo en el quebrado los senos por los arcos y el coseno por la unidad, y reemplazando el paréntesis por el valor deducido de

$$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u, \quad \cos \sigma + \cos u, \quad \operatorname{sen} \sigma \cos \alpha,$$

$$\delta \omega = \frac{1}{8} e^2 \sigma (c - \sigma) (2\sigma - c) \operatorname{sen} \alpha \cos u,$$

y se tendrá, siguiendo método análogo (1),

$$\delta s = \frac{ae^4}{1440} c^3 \cos^4 u \operatorname{sen}^2 2\alpha,$$

esto es, la cuarta parte de la diferencia hallada en el caso de la curva plana.

La diferencia de extensión lineal de las dos curvas planas es de orden de mayor pequeñez.

6.

Pueden compararse por la fórmula (12) los ángulos de un triángulo geodésico trazado sobre el esferoide con los verdaderos ángulos esferoidales. Sea ABC el triángulo, a, b, c sus lados; y medidos desde 0° hasta 360° , $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ y α, β, γ respectivamente los azimutes verdaderos y geodésicos de C en B, A en C, B en A, y $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ y α, β, γ , los azimutes recíprocos, verdaderos y geodésicos, de B en C, C en A, A en B. Basta para el objeto conservar la parte de (12) que depende de σ^2 , omitiendo el término menor. Además puede reemplazarse $\cos^2 u$, (que varía poco de un punto á otro del triángulo) por $\cos^2 u$, refiriéndose u al centro del mismo; y no es menester, en el factor $\operatorname{sen} 2\alpha$ y los

poniendo la unidad en vez del coseno de σ y este arco en vez de su seno, se convierte en

$$PL = \frac{ae^2}{2} \sigma^2 (c - \sigma) \cos u \cos \alpha,$$

donde pueden suprimirse los subíndices sin error de importancia.

Restando de este valor el de PG dado arriba, se tiene

$$GL = \frac{ae^2}{6} \sigma (c - \sigma) (2\sigma - c) \cos^2 u \cos \alpha,$$

y sustituyendo en $\delta \omega = \delta u \tan \alpha \operatorname{sen} u$ en vez de δu la expresión precedente dividida por a , resulta la fórmula del texto

$$(1) \quad \delta s = \frac{ae^4}{8 \cdot 6^2} \cos^4 u \operatorname{sen}^2 2\alpha \int_0^c (\delta \sigma^2 - 6c\sigma + c^2)^2 d\sigma.$$

demás análogos, distinguir entre el azimut directo y el inverso del lado respectivo del triángulo. Resulta de este modo, haciendo $i = \frac{1}{14} c^2 \cos^2 u$,

$$(\alpha) = \alpha + ia^2 \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$(\alpha_r) = \alpha_r + ia^2 \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$(\beta) = \beta + ib^2 \operatorname{sen} 2\beta,$$

$$(\beta_r) = \beta_r + ib^2 \operatorname{sen} 2\beta,$$

$$(\gamma) = \gamma + ic^2 \operatorname{sen} 2\gamma,$$

$$(\gamma_r) = \gamma_r + ic^2 \operatorname{sen} 2\gamma.$$

Y los verdaderos ángulos del triángulo son

$$A = (\beta_r) - (\gamma) = \beta_r - \gamma + i(b^2 \operatorname{sen} 2\beta - c^2 \operatorname{sen} 2\gamma),$$

$$B = (\gamma_r) - (\alpha) = \gamma_r - \alpha + i(c^2 \operatorname{sen} 2\gamma - a^2 \operatorname{sen} 2\alpha),$$

$$C = (\alpha_r) - (\beta) = \alpha_r - \beta + i(a^2 \operatorname{sen} 2\alpha - b^2 \operatorname{sen} 2\beta),$$

En la página 192 se hallaron las diferencias entre los verdaderos ángulos de un triángulo esferoidal y los ángulos del triángulo esférico de lados iguales á los de aquél (siendo el radio de la esfera el que corresponde á la curvatura media del triángulo esferoidal); y si se comparan con aquellas fórmulas estas otras, se verá que los ángulos del triángulo geodésico son iguales respectivamente á los del triángulo esférico, al menos no pasando de los términos del orden ia^2 .

7.

Con algunos ejemplos numéricos se comprenderá mejor el curso que siguen las líneas geodésicas. Tomando por elementos del esferoide $a = 20926060$ pies, $a : b = 295 : 294$, y por lo tanto, $\log \frac{1}{2} ae^2 = 4.85013$, veamos primero la que une la base de Kurrachee al Oeste de la India con la base de Calcuta. La latitud aproximada de Kurrachee es de $25^\circ 0'$, la de Calcuta de $22^\circ 30'$, y la diferencia de longitudes $21^\circ 10'$: datos de los cuales se deduce, siendo σ la distancia total y u la latitud del punto medio,

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 92^\circ 58', & \alpha' &= 101^\circ 34', \\ \sigma &= 19^\circ 40', & u &= 24^\circ 7'. \end{aligned}$$

Pero en el punto medio del arco el valor de PG—distancia, por

el Norte, de la geodésica á la curva determinada en la superficie por el plano vertical de Calcuta que pasa por Kurrachee—es (1):

$$PG = 2ae^2 \cos u \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\sigma}{4}}{\cos \frac{\sigma}{2}} \left(\frac{\frac{\sigma}{4}}{\tan \frac{\sigma}{4}} \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u \right);$$

y substituidos aquellos números en esta fórmula, resulta de 46.6 pies la distancia de la geodésica á la curva plana, al Norte de ésta. Las diferencias de los azimutes de la geodésica respecto de los de los planos verticales son: en Calcuta $3''.76$ y en Kurrachee $2''.04$.

Sirva de segundo ejemplo la línea que une la catedral de Burdeos, á la latitud de $44^\circ 50' 20''$, con el observatorio de Nicolaeff, á la latitud de $46^\circ 58' 20''$, siendo desde el centro de la tierra la distancia angular entre ambos puntos $22^\circ 35' 30''$. Por Trigonometría esférica se deduce que el azimut de Nicolaeff, en Burdeos, es $= 72^\circ 55' 7''$, y el de Burdeos en Nicolaeff $= 83^\circ 23' 14''$, entendiendo por este azimut el ángulo entre la parte septentrional del meridiano y Burdeos. Tomado este punto como inicial, y dividida toda la distancia en diez partes iguales, imagínese por cada punto de división un arco de meridiano que

(1) Escribiendo en las expresiones de H y K, dadas en la página 204, en vez de σ' , σ , σ_1 , respectivamente σ , $\frac{\sigma}{2}$, $\frac{\sigma}{2}$, se tiene

$$H = \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \tan \frac{\sigma}{2}, \quad K = \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} - 4 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\sigma}{4}}{\cos \frac{\sigma}{2}};$$

y de la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u \cos \frac{\sigma}{2} + \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cos u \cos \alpha$$

se deduce $\cos u \cos \alpha$. Substituidos este valor y los precedentes de H y K en la fórmula (8), página 203, y hechas algunas reducciones, resulta la expresión del texto.

corte las curvas planas P, Q y la línea geodésica. La primera curva plana, determinada por el plano vertical de Burdeos, queda entre los puntos extremos al Sur de Q. Calculada además la curva de alineación que corta cada meridiano PQ en L, mientras la geodésica lo corta en G, puede compararse también el curso respectivo de ambas líneas. La primera columna de la siguiente tabla contiene las distancias á que se hallan de Burdeos los puntos intermedios sucesivos.

c_i	LATITUD DE P		Q	L	G	L	G	
	°	'	AL NORTE DE P	AL NORTE DE P	AL NORTE DE P	AL NORTE DE G	AL NORTE DE Q	
	°	'	''	pies	pies	pies	pies	pies
0	0	0	44 50 20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	15	33	45 27 41	18.26	5.40	14.00	- 8.60	- 4.26
4	31	6	45 59 58	32.19	17.66	26.53	- 8.87	- 5.66
6	46	39	46 26 58	41.93	31.80	36.70	- 4.90	- 5.23
9	2	12	46 48 33	47.62	44.04	43.77	+ 0.27	- 3.85
11	17	45	47 4 32	49.36	51.41	47.20	+ 4.51	- 2.16
13	33	18	47 14 51	47.23	53.19	46.54	+ 6.65	- 0.69
15	48	51	47 19 23	41.25	47.88	41.57	+ 6.31	+ 0.32
18	4	24	47 18 8	31.42	36.17	32.13	+ 4.04	+ 0.71
20	19	57	47 11 6	17.70	19.42	18.24	+ 1.18	+ 0.54
22	35	30	46 58 20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tanto la línea geodésica como la curva de alineación cruzan aquí al Norte de la curva Q, aunque avanzando muy poco la geodésica por este lado. En realidad el azimut de la geodésica en Nicolaeff sólo difiere del verdadero en $0''\cdot 152$, según la fórmula (10), pues muy aproximadamente se cumple la condición expresada por la ecuación (11).

Hállase el punto de intersección de la línea geodésica con Q por medio de la ecuación (13), la cual, siendo c la distancia total c' , y x la distancia σ del punto de intersección á Nicolaeff, da

$$x^4 + x^3 + x^2 \left(\frac{30}{c^2} - 1 \right) + (x+1) \left(1 + \frac{30}{c^2} - \frac{120 \cos \alpha}{c^3 \tan u} \right) = 0;$$

ó poniendo los valores numéricos de c , α y u (por estos dos últimos los relativos á Nicolaeff),

$$x^4 + x^3 + 191.97 x^2 - 16.46 x - 16.46 = 0,$$

cuya raíz, apropiada al caso, es $x = .338$: resultado conforme con la última columna de la antedicha tabla que da por interpolación $x = .339$.

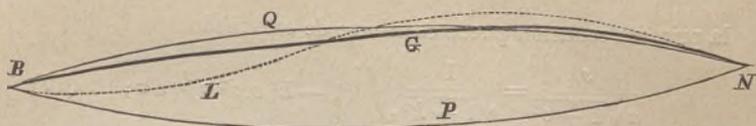


Fig. 24.

En el grabado adjunto, donde se aclara lo anterior, las curvas planas están indicadas por líneas finas, la geodésica por una línea gruesa y la curva de alineación por una línea de puntos.

8.

Ocupémonos ahora del siguiente problema. Dada la latitud de la estación A de donde parte una línea geodésica, normal al meridiano de este lugar, y conocida la distancia á que se halla de A sobre esta curva un punto B, calcular la latitud y longitud del mismo. Sea U la latitud reducida de A; u la del punto B, cuya distancia de A sobre la geodésica llamaremos s ; ω la longitud de B. El triángulo auxiliar en este caso es rectángulo, los catetos son $90^\circ - U$ y σ , la hipotenusa $90^\circ - u$ y los otros dos ángulos $\tilde{\omega}$ y α . Por tanto, $\text{sen } u = \text{sen } U \cos \sigma$, y las ecuaciones (3) se transforman en ⁽¹⁾

$$s = a \int (1 - e^2 + e^2 \text{sen}^2 U \cos^2 \sigma)^{\frac{1}{2}} d\sigma, \quad (15)$$

$$\omega - \tilde{\omega} = \int \left\{ (1 - e^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \frac{\cos U d\sigma}{\cos^2 u}.$$

$$^{(1)} \quad d\omega - d\tilde{\omega} = \left\{ (1 - e^2 \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} d\tilde{\omega},$$

$$d\tilde{\omega} = \frac{\text{sen } \alpha \cos u}{\cos^2 u} d\sigma = \frac{\cos U}{\cos^2 u} d\sigma,$$

Mas poniendo

$$k^2 = \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 U}{1 - e^2 \cos^2 U}, \quad 1 - k^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 U}, \quad (16)$$

la primera ecuación puede escribirse de este modo

$$\frac{s}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \int (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{\frac{1}{2}} d\sigma; \quad (17)$$

y puesto que (1)

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma - \frac{1}{8} k^4 \operatorname{sen}^4 \sigma - \frac{1}{16} k^6 \operatorname{sen}^6 \sigma - \dots, \\ \operatorname{sen}^2 \sigma &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 2\sigma, \\ \operatorname{sen}^4 \sigma &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\sigma + \frac{1}{8} \cos 4\sigma, \\ \operatorname{sen}^6 \sigma &= \frac{5}{16} - \frac{3}{8} \cos 2\sigma + \frac{3}{16} \cos 4\sigma - \frac{1}{32} \cos 6\sigma; \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{13}{64} k^4 + \frac{43}{256} k^6, \\ B &= \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{16} k^4 + \frac{79}{512} k^6, \\ C &= \frac{1}{128} k^4 + \frac{5}{242} k^6, \\ D &= \frac{1}{128} k^6, \end{aligned} \quad (18)$$

resulta (2)

$$\left\{ \frac{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma}{1 - k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = A + B \cos 2\sigma - 2C \cos 4\sigma + 3D \cos 6\sigma;$$

por consiguiente, integrando desde $\sigma = 0$,

(1) La fórmula general de Trigonometría en el caso de exponente m par es

$$\begin{aligned} 2^{m-1} (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{sen}^m \sigma &= \cos m\sigma - m \cos(m-2)\sigma + \\ & \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)\sigma - \dots \mp \frac{m(m-1) \dots \left(\frac{m}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{\frac{1}{2}} = A + B \cos 2\sigma - C \cos 4\sigma + D \cos 6\sigma,$$

$$(1 - k^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{8} k^4 + \frac{5}{16} k^6 + \dots,$$

$$A, (1 - k^2)^{-\frac{1}{2}} = A, \quad \left| \quad C, (1 - k^2)^{-\frac{1}{2}} = 2C,$$

$$B, (1 - k^2)^{-\frac{1}{2}} = B, \quad \left| \quad D, (1 - k^2)^{-\frac{1}{2}} = 3D.$$

$$\frac{s}{a\sqrt{1-e^2}} = A\sigma + \frac{1}{2}B \operatorname{sen} 2\sigma - \frac{1}{4}C \operatorname{sen} 4\sigma + \frac{1}{8}D \operatorname{sen} 6\sigma, \quad (19)$$

y por la serie inversa se tendrá σ en función de s . De tal forma, dados los dos lados σ , $90^\circ - U$ del triángulo esférico, se calcularán los dos ángulos $\tilde{\omega}$ y α . Para deducir ω de $\tilde{\omega}$ desarrollemos la segunda ecuación (15). Sustituído en vez del radical su valor en serie, es

$$\omega - \tilde{\omega} = -\frac{e^2}{2} \cos U \int \left(1 + \frac{e^2}{4} \cos^2 u + \frac{e^4}{8} \cos^4 u \right) d\sigma;$$

y reemplazado aquí $\cos^2 u$ por su valor $1 - \operatorname{sen}^2 U \cos^2 \sigma$, y reducido todo, se llega á la siguiente ecuación (1):

$$\omega - \tilde{\omega} = -\frac{e^2}{2} \cos U \left(A' \sigma - \frac{1}{2} B' \operatorname{sen} 2\sigma + \frac{1}{8} C' \operatorname{sen} 4\sigma \right), \quad (20)$$

siendo

$$\begin{aligned} A' &= 1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{5}{64}k^4, \\ B' &= \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}k^4, \\ C' &= \frac{1}{128}k^4. \end{aligned} \quad (21)$$

Queda, pues, determinada por completo ω .

(1) Reemplazando por $2^m - 1 \cos^m \sigma$ el primer miembro de la fórmula de la nota (1) de la página 218, y escribiendo con signo positivo todos los términos del segundo miembro, se tiene la fórmula general de las potencias pares de $\cos \sigma$, y por tanto,

$$\begin{aligned} \cos^2 \sigma &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\sigma, \\ \cos^4 \sigma &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\sigma + \frac{1}{8} \cos 4\sigma. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} &1 + \frac{e^2}{4} \cos^2 u + \frac{e^4}{8} \cos^4 u = \\ &1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} - \frac{1}{8} e^2 (1 + e^2) \operatorname{sen}^2 U + \frac{3}{64} e^4 \operatorname{sen}^4 U \\ &- \left(\frac{1}{8} (1 + e^2) e^2 \operatorname{sen}^2 U - \frac{1}{16} e^4 \operatorname{sen}^4 U \right) \cos 2\sigma + \frac{e^4}{64} \operatorname{sen}^4 U \cos 4\sigma. \end{aligned}$$

Sustituyendo aquí

$$e^2 \operatorname{sen}^2 U = \frac{k^2}{1 - k^2} (1 - e^2),$$

y deteniéndose en los términos de cuarto orden, se pasa fácilmente á la expresión (20) del texto.

9.

Las fórmulas del párrafo anterior nos ponen en camino para resolver este problema más general: conocida la latitud reducida u , del punto A de donde parte una geodésica con un azimut inicial dado α , hallar la latitud y longitud de un punto B de la línea geodésica, cuya distancia de A contada sobre dicha curva es s . Al resolver este problema omitiremos, porque no hacen falta para nuestro objeto, los términos con e^6 . Sea PHK el triángulo auxiliar, el vértice P el polo, y H, K los puntos correlativos de A, B, de manera que $PH = 90^\circ - u$, $PHK = \alpha$. Bajemos la perpendicular PM sobre HK , prolongando este lado, si fuera menester, y sea

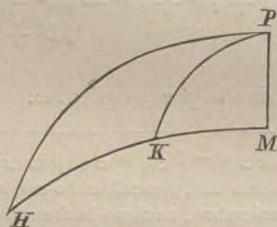


Fig. 25.

$$\begin{array}{ll} PM = 90^\circ - U, & HM = \Sigma, \\ PK = 90^\circ - u, & HK = \sigma, \\ HPK = \tilde{\omega}, & PKM = \alpha. \end{array}$$

El triángulo rectángulo PHM da

$$\begin{array}{l} \text{sen } u, = \text{sen } U \cos \Sigma, \\ \cos \alpha, \cos u, = \text{sen } U \text{ sen } \Sigma, \\ \text{sen } \alpha, \cos u, = \cos U; \end{array}$$

fórmulas por medio de las cuales se obtienen y comprueban U y Σ . Esto sentado, así como s corresponde á σ , sea S el arco correlativo de Σ : por la fórmula (19) se tendrá, puesto que $KM = \Sigma - \sigma$,

$$\frac{S}{a\sqrt{1-e^2}} = A\Sigma + \frac{1}{2}B \operatorname{sen} 2\Sigma - \frac{1}{2}C \operatorname{sen} 4\Sigma,$$

$$\frac{S-s}{a\sqrt{1-e^2}} = A(\Sigma-\sigma) + \frac{1}{2}B \operatorname{sen} 2(\Sigma-\sigma) - \frac{1}{2}C \operatorname{sen} 4(\Sigma-\sigma),$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{s}{a\sqrt{1-e^2}} &= A\sigma + B \cos(2\Sigma - \sigma) \operatorname{sen} \sigma \\ &\quad - C \cos(4\Sigma - 2\sigma) \operatorname{sen} 2\sigma. \end{aligned} \quad (22)$$

Por la serie inversa se hallará σ , y resolviendo después el triángulo esférico PHK , dados los lados HK , HP y el ángulo H , se determinarán el tercer lado $PK = 90^\circ - u$ y los ángulos $\tilde{\omega}$ y α . El valor de ω se deduce de la ecuación (20) de este modo: poniendo sucesivamente en el segundo miembro de esta ecuación Σ y $\Sigma - \sigma$ en vez de σ , y restando el segundo resultado del primero, con lo cual se obtiene esta expresión de la incógnita $\omega - \tilde{\omega}$ del problema (1):

$$\omega - \tilde{\omega} = -\frac{e^2}{2} \cos U \{A'\sigma - B' \cos(2\Sigma - \sigma) \operatorname{sen} \sigma\}, \quad (23)$$

indicando aquí A' , B' lo mismo que en la relación (21).

10.

El cálculo completo está dado en el siguiente ejemplo numérico. La latitud del centro de la torre de Dunkerque, determinada por observaciones hechas con el sector zenital de Ramsden, es de $51^\circ 2' 8''.41$; la latitud de la veleta de la torre Munster de la catedral de Strasburgo es de $48^\circ 34' 55''.94$; la diferencia de longitudes de ambos puntos (*Annales de l'Observatoire Imperial*

(1) Pues designando por $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ los ángulos HPM y KPM de los triángulos auxiliares, y por ω_1 , ω_2 , los correlativos de los triángulos geodésicos, el primer resultado corresponde á $\omega_1 - \tilde{\omega}_1$ y el segundo á $\omega_2 - \tilde{\omega}_2$; pero $\omega = \omega_1 - \omega_2$ y $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$. Por tanto,

$$\omega - \tilde{\omega} = \omega_1 - \tilde{\omega}_1 - (\omega_2 - \tilde{\omega}_2).$$

de *Paris*, tomo VIII, páginas 256, 320 y 356) es de $5^{\circ} 22' 28'' \cdot 440$; con estos datos se quiere hallar la distancia geodésica entre dichos puntos y hallar también sus recíprocos azimutes. Los elementos del esferoide son, como queda dicho, $a = 20926060$ pies, $b : a = 294 : 295$; por consiguiente,

$$\begin{aligned}\log e^2 &= 7.8304712, \\ \log e^2 \operatorname{cosec} 2'' &= 2.8438663, \\ \log a\sqrt{1-e^2} &= 7.3192128.\end{aligned}$$

Usando sólo logaritmos de siete decimales pueden omitirse los términos con k^6 . No es menester que demos aquí el cálculo de las latitudes reducidas de las estaciones; los resultados son:

$$\begin{array}{ll} u, = 50^{\circ} 56' 25'' \cdot 837 & \log \cos u, = 9.7994281, \\ u' = 48 \quad 29 \quad 8 \cdot 406 & \log \cos u' = 9.8213873, \\ \text{además} \quad \omega = 5 \quad 22 \quad 28 \cdot 440 & \log \sen \omega = 8.9715838.\end{array}$$

En el triángulo auxiliar cuyos lados son $90^{\circ} - u$, $90^{\circ} - u'$, el ángulo comprendido es $\tilde{\omega}$ —que tiene por valor aproximado ω , diferencia verdadera de longitudes—y el tercer lado es σ . Los otros dos ángulos son los azimutes de la línea geodésica en las estaciones extremas. Si $90^{\circ} - U$ es el arco perpendicular al lado σ desde el vértice opuesto, y Σ el arco desde el punto u , al pie de ese otro perpendicular, se tendrá ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned}\sen \sigma \cos U &= \cos u, \cos u' \sen \tilde{\omega}, \\ \cos \Sigma \sen U &= \sen u,;\end{aligned}$$

y escribiendo

$$\kappa^2 = \frac{1}{4} \frac{e^2 \sen^2 U}{1 - e^2 \cos^2 U}, \quad (24)$$

$$A = a\sqrt{1-e^2} \left(1 + \kappa^2 + \frac{1}{4} \kappa^4 \right),$$

$$B = a\sqrt{1-e^2} \left(\kappa^2 + 3 \kappa^4 \right),$$

$$C = a\sqrt{1-e^2} \left(-\frac{1}{4} \kappa^4 \right);$$

(1) La primera fórmula resulta del producto de estas dos

$$\cos U = \cos u, \sen \alpha,$$

$$\sen \sigma \sen \alpha, = \cos u' \sen \tilde{\omega},$$

correspondientes la primera al triángulo *HPM* y la segunda al triángulo *HPK*, figura 25, suponiendo $PK = 90^{\circ} - u'$.

donde $\kappa = \frac{1}{2}k$, se hallará, siendo s la distancia geodésica que se busca,

$$s = A\sigma + B \cos(2\Sigma - \sigma) \operatorname{sen} \sigma + C \cos(4\Sigma - 2\sigma) \operatorname{sen} 2\sigma, \quad (25)$$

$$\omega - \bar{\omega} = -\frac{e^2}{2} \cos U \left\{ \sigma \left(1 + \frac{e^2}{4} - \frac{\kappa^2}{2} \right) - \frac{\kappa^2}{2} \cos(2\Sigma - \sigma) \operatorname{sen} \sigma \right\}.$$

El cálculo no es directo, porque se necesita σ , la cual está dada por

$$\cos \sigma = \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u' + \cos u, \cos u' \cos \bar{\omega};$$

luego habría de obtenerse primero $\bar{\omega}$, que se dió antes en función de σ . Mas podemos emplear el método de sucesivas aproximaciones. Sea $\bar{\omega}_1$ el primer valor aproximado de $\bar{\omega}$, es decir, $\bar{\omega}_1 = \omega + \delta\omega$, y será ⁽¹⁾

$$\delta\omega = \frac{e^2}{\operatorname{sen} 2''} \left(\frac{\sigma_0}{\operatorname{sen} \sigma_0} \right) \cos u, \cos u' \operatorname{sen} \omega,$$

$$\cos \sigma_0 = \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u' + \cos u, \cos u' \cos \omega.$$

Si σ_1 es un primer valor cercano á σ , deducido de

$$\cos \sigma_1 = \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u' + \cos u, \cos u' \cos \bar{\omega}_1,$$

restando esta ecuación de la precedente, tendremos ⁽²⁾

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \delta\omega \cos u, \cos u' \operatorname{sen} \omega \operatorname{cosec} \sigma_0.$$

(¹) Limitándose al primer término del desarrollo, la segunda fórmula (25) da

$$\bar{\omega}_1 - \omega = \delta\omega = \frac{e^2}{2} \sigma_0 \cos U,$$

y en virtud de una de las dos fórmulas que preceden á las (24) se tiene con suficiente aproximación

$$\operatorname{sen} \sigma_0 \cos U = \cos u, \cos u' \operatorname{sen} \omega.$$

Hállase $\delta\omega$ en segundos dividiendo por $\operatorname{sen} 1''$, ó bien reemplazando el divisor 2 por $\operatorname{sen} 2''$, puesto que $2 \operatorname{sen} 1'' = \operatorname{sen} 2''$.]

(²) Reemplazando las diferencias de cosenos por productos de senos y admitiendo como valores bastante aproximados para el objeto los arcos en vez de los senos de las semidiferencias de σ_1 y σ_0 , ω_1 y ω ; y $\operatorname{sen} \sigma_0$, $\operatorname{sen} \omega$ en vez de los senos de las semisumas.

Al calcular $\delta\omega$ podemos reemplazar la fracción σ_0 : $\text{sen } \sigma_0$ por su valor aproximado $\text{sec } \frac{1}{4} \sigma_0$ (1). No es menester tampoco dar aquí el cálculo de σ_0 , sino el resultado

$$\sigma_0 = 4^\circ 15' 11''.2, \quad \log \text{sen } \sigma_0 = 8.8701852.$$

El cálculo restante es como sigue:

$\log \text{sec } \frac{1}{4} \sigma_0$	0.00040
$\log e^2 \text{ cosec } 2''$	2.84387
$\log \cos u, \cos u' \text{ sen } \omega$	8.59240
$\delta\omega = 27''.33$	1.43667
$\log \text{cosec } \sigma_0$	1.12981
$\sigma_1 - \sigma_0 = 14''.41$	1.15888

de donde se deduce $\tilde{\omega}_1 = 5^\circ 22' 55''.77$ y $\sigma_1 = 4^\circ 15' 25''.6$.

Con estos valores obtenemos U y κ con bastante aproximación:

$\log \cos u, \cos u'$	9.6208154
$\log \text{sen } \tilde{\omega}_1 \text{ cosec } \sigma_1$	0.1016022
$\log \cos U$	9.7224176
$\log \text{sen } U$	9.9291162
$\log \frac{1}{4} e^2 \text{ sen}^2 U$	7.0866436
$\log (1 + e^2 \cos^2 U)$	0.0008179
$\log \kappa^2$	7.0874615.

El valor de Σ , sacado de la ecuación $\cos \Sigma \text{ sen } U = \text{sen } u$, es $\Sigma = -23^\circ 54' 49''.3$: negativo, porque el arco perpendicular U cae á distinto lado de Dunkerque que Strasburgo. Con ese valor $\log \cos (2\Sigma - \sigma_1) = 9.7885193$. Dedúcese luego $\tilde{\omega}$ de la ecuación (25) por el siguiente cálculo, escribiendo para simplificar $N = e^2 \cos u, \cos u' \text{ sen } \tilde{\omega}_1 \text{ cosec } 2''$:

$\log N$	1.436877	1.4369
$\log \text{sec } \frac{1}{4} \sigma_1$	0.000400	$\cos (2\Sigma - \sigma_1)$	9.7885
$+ 27''.3701$	1.437277	$\frac{1}{4} \kappa^2$	6.7864
$\log (\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \kappa^2)$	7.03362	$-$.0103 8.0118
$+ 0''.0296$	8.47090		

$$\therefore \tilde{\omega} = \omega + 27''.389 = 5^\circ 22' 55''.829.$$

(1) Limitándose á los dos primeros términos de los desarrollos en serie de $\text{sen } \sigma_0$ y $\cos \sigma_0$, es fácil demostrar esta equivalencia.

Calcularemos ahora, en el triángulo esférico cuyos lados son los complementos de u , y u' , y el ángulo comprendido ω , el tercer lado y los dos ángulos restantes. Obtenidos estos últimos por las tangentes de su semisuma y semidiferencia, que es el medio más exacto, resultan los siguientes azimutes:

De Strasburgo en Dunkerque..... $123^{\circ} 7' 20'' \cdot 41$,

De Dunkerque en Strasburgo..... $52 46 11 \cdot 46$,

medido el segundo del Norte al Oeste. Para hallar el tercer lado σ podemos seguir diferentes caminos, si bien quedará, por causa de la incertidumbre de la séptima cifra del logaritmo del resultado, indecisión de dos á tres unidades en la tercera cifra decimal de los segundos. El valor de este lado, hasta donde es dado llegar con logaritmos de siete decimales, es

$$\sigma = 4^{\circ} 15' 25'' \cdot 710.$$

Ya sin dificultad, puesto que se tienen todos los logaritmos necesarios, se calculará por la fórmula (25) la distancia s . He aquí los valores de los diferentes términos que dependen de las varias potencias de κ (1): —

TÉRMINOS CON	σ	sen σ	sen 2σ
	pies	pies	pies
κ^0	1549559.6
κ^2	1895.27	1163.56
κ^4	7.54	4.27	0.14

La suma de tales términos da $s = 1552630.4$ con incertidumbre de una ó dos unidades en la cifra decimal. La verdadera distancia es 1552630.300 . Los azimutes astronómicos hallados con escrupulosidad son

De Strasburgo en Dunkerque..... $123^{\circ} 7' 20'' \cdot 165$,

De Dunkerque en Strasburgo..... $52 46 11 \cdot 725$.

Calculando ahora por la fórmula (12), página 205, las diferen-

(1) Este cuadro es de doble entrada y debe leerse de este modo: término con κ^0 y σ , término con κ^2 y σ , etc.

cias entre los azimutes verdaderos y geodésicos, se verá que para reducir los primeros á los segundos deben aplicarse las correcciones $+ 0''.24$ y $- 0''.26$. Hechas éstas, se encuentran los mismos azimutes geodésicos que antes se hallaron.

11.

Por el camino seguido al deducir la ecuación de la línea geodésica no hemos llegado á ver una de sus principales propiedades, á saber: que el plano osculador, en cualquier punto de la línea geodésica trazada sobre una superficie curva, contiene la normal á la superficie en dicho punto. En efecto, imagínese, siendo p, q dos puntos contiguos de una superficie curva, trazado por el punto medio s de la cuerda pq un plano perpendicular á esta recta, y sea S un punto de la intersección de dicho plano con la superficie. Es claro que la suma $pS + Sq$ será la menor cuando sS sea un mínimo, es decir, cuando sS sea normal á la superficie; de donde se infiere que de todas las curvas planas que unen p, q , cuando estos puntos están infinitamente próximos el uno del otro, la más corta es la determinada por el plano normal.

Sean ahora tres puntos en el espacio A, B, C , tales que $AB = BC = c$; l, m, n los cosenos de dirección de AB , y l', m', n' los de BC : si x, y, z son las coordenadas de B , serán respectivamente las de A y C

$$\begin{array}{lll} x - cl, & y - cm, & z - cn, \\ x + cl', & y + cm', & z + cn', \end{array}$$

y en su consecuencia, las de M , punto medio de AC ,

$$x + \frac{1}{2}c(l' - l), \quad y + \frac{1}{2}c(m' - m), \quad z + \frac{1}{2}c(n' - n);$$

por tanto las proyecciones de BM sobre los planos coordenados serán

$$\frac{1}{2}c(l' - l), \quad \frac{1}{2}c(m' - m), \quad \frac{1}{2}c(n' - n),$$

y los cosenos de dirección de BM proporcionales á $l' - l, m' - m, n' - n$. Luego si el ángulo formado por BC con AB es infinitamente pequeño, los cosenos de dirección de BM serán proporcionales á $\delta l, \delta m, \delta n$. Mas si AB, BC , son dos elementos conse-

cutivos de una curva geodésica, será BM normal á la superficie; y puesto que δl , δm , δn están en tal caso representadas por

$$d \cdot \frac{dx}{ds}, \quad d \cdot \frac{dy}{ds}, \quad d \cdot \frac{dz}{ds},$$

se tendrá (1), siendo $u = 0$ la ecuación de la superficie,

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{du}{dy}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{du}{dz}}. \quad (26)$$

En el elipsoide, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

las ecuaciones de la línea geodésica son

$$\frac{a^2}{x} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{b^2}{y} \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{c^2}{z} \frac{d^2z}{ds^2}.$$

En el esferoide, puesto que $a = b$,

$$y \frac{d^2x}{ds^2} - x \frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

la cual integrada da

$$y dx - x dy = C ds,$$

de donde se deduce la ecuación que al principio se obtuvo, $r^2 d\omega = C ds$.

Las dos ecuaciones (26) equivalen á una sola, porque la igualdad de los tres miembros se infiere de la de dos de ellos en virtud de las ecuaciones

(1) Pues los cosenos de dirección de BM serán también proporcionales á

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}.$$

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} dx + \frac{d^2y}{ds^2} dy + \frac{d^2z}{ds^2} dz = 0.$$

Véase sobre la materia de este capítulo un importante trabajo: *Sur les écarts de la ligne géodésique et des sections planes normales entre deux points rapprochés d'une surface courbe*, por F. J. Van den Berg (*Extrait des Archives Néerlandaises*, tomo XII).

CAPÍTULO VII

MEDICIÓN DE BASES

Las reglas geodésicas, en los diferentes países empleadas, distintas por su longitud, forma y materia de que están hechas, son de dos clases: reglas con *rayas* y reglas con *conteras*. Poseen las del primer grupo líneas ó marcas que precisan la medida, grabadas sobre laminas de plata, oro ó platino, incrustadas en la regla, y suelen ser los extremos de las del segundo grupo unos cilindritos que terminan—pues la medición se hace entonces poniendo en contacto reglas sucesivas—en un disco ó en un casquete esférico de ágata ó de metal duro y bruñido.

La unidad á que en su mayor parte se han referido las medidas geodésicas de Europa es la *toesa del Perú*, regla de conteras, de la cual por fortuna, aparte de la copia sacada en la regla de Borda, núm. 1, existen otras dos (comparadas con la original y certificadas por Arago): una obtenida por Struve en 1821 y otra por Bessel en 1823. Los modelos de Bélgica y Prusia son copia á su vez de la toesa de Bessel, y el patrón de Rusia, cuya longitud es de dos toesas, se ajustó sobre la toesa de Struve. La regla inglesa tiene diez pies de extensión lineal, y por sección un rectángulo, pulgada y media de base por dos y media de altura. Descansa sobre dos rodillos, distante cada uno del extremo más próximo la cuarta parte de la longitud total; y rebajada dicha regla en ambos extremos hasta la mitad de su grueso, en la sección neutra, así manifiesta, ofrece las rayas que señalan la medida. También en la yarda tipo de Inglaterra, y en las reproducciones de la misma—reglas de hierro, acero, latón ó cobre, de una pulgada cuadrada de sección—están sobre el eje las rayas

que indican la longitud. El tipo del Instituto Geográfico de España es una regla de cuatro metros de largo, compuesta de dos láminas unidas, formando una \perp , donde los trazos que sirven de índices se hallan sobre el canto superior de la lámina vertical.

Llevan algunas reglas en contacto con el metal termómetros de forma común, ó los tienen otras con el tubo encorvado en la parte por donde se une con el depósito para que éste se aloje en un hueco cilíndrico en la cara superior de la regla. Como un error de una décima de grado produciría otro de casi una milonésima de la longitud total en una barra de hierro, y esa cantidad precisamente en otra de bronce, averíguanse con escrupulosidad los errores de tales termómetros para no incurrir en uno que llegue á cierto límite, á saber: á $0^{\circ}.04$. Compáranse en cuando esos termómetros con otros que sirven de tipo. Son estos últimos obra escogida del más reputado constructor, y por observaciones y medidas cuidadosas se precisan los errores inexcusables de sus rayas. Determinanse para ello los puntos de ebullición y congelación, hállanse los errores de calibrado, y hechas las correcciones correspondientes, compáranse los modelos. Demás de esto, á causa de propender los termómetros á un error de índice, porque el lugar del cero se corre lentamente, no se deja transecurrir mucho tiempo sin determinar de nuevo el punto de congelación, lo que se hace introduciendo el termómetro en hielo en fusión, que se prepara bien para este objeto cepillando un trozo con una superficie áspera.

Dentro del agua, porque así conviene, se efectúa la comparación de los termómetros. En Southampton verificase esto del siguiente modo: en una caja rectangular de 16 pulgadas cuadradas de sección por 36 pulgadas de longitud, una laminita de zinc agujereada, puesta en medio, sostiene horizontales los termómetros; cubre éstos una capa de agua de unas 7 pulgadas de espesor, y á intervalos por un mecanismo especial se agita todo el líquido para que en algún punto no se enfríe; léense por encima aquéllos con un microscopio micrométrico vertical.

A continuación ponemos, reputando de interés estas noticias, el cuadro de la comparación de dos termómetros tipos importantes, á saber: los dos escogidos para confrontar los que en Sou-

thampton y en la India respectivamente se examinasen. Comprobados los puntos de ebullición y congelación de ambos en la sazón en que se comparaban, vióse que el primero requería la corrección $-0^{\circ}.010 (t - 32^{\circ}) - 0^{\circ}.41$, llamando t la lectura termométrica, y el segundo la corrección $-0^{\circ}.010 (t - 32^{\circ})$. Los errores de calibrado que consignan las columnas segunda y quinta se obtuvieron midiendo muchas veces con el micrómetro la capacidad de diversas porciones de los tubos. Contienen las columnas primera y cuarta los promedios de cinco lecturas simultáneas de los termómetros en el agua, hechas permaneciendo el cuarto, donde la comparación se practicaba, á una temperatura que difería de la del agua dos grados á lo sumo.

MODELO DE LA DIRECCION BRITÁNICA			MODELO DE LA DIRECCIÓN DE LA INDIA		
Lectura.	Corrección de calibrado	Error aparente.	Lectura.	Corrección de calibrado	Error aparente.
97.84	- 0.032	+ 0.005	97.46	- 0.073	- 0.005
92.58	- 0.062	0.000	92.11	- 0.005	0.000
87.61	- 0.039	+ 0.010	87.15	- 0.012	- 0.010
82.72	- 0.095	- 0.005	82.25	- 0.020	+ 0.005
77.92	- 0.116	0.000	77.43	- 0.044	0.000
72.56	- 0.106	- 0.015	72.03	+ 0.046	+ 0.015
67.70	- 0.083	+ 0.010	67.17	+ 0.029	- 0.010
62.64	- 0.068	- 0.005	62.15	+ 0.035	+ 0.005
57.95	- 0.059	- 0.015	57.48	+ 0.036	+ 0.015
52.63	- 0.041	- 0.020	52.20	+ 0.016	+ 0.020

El «error aparente» que figura en las columnas tercera y última es la diferencia entre la lectura de cada termómetro, y corregida de los errores de calibrado é índice, y la media de ambas.

Llamando T la de uno de estos termómetros, cuando estaban puestos horizontales en agua hirviendo, y B la lectura simultánea del barómetro, reducido á la temperatura de $32^{\circ} F = 0^{\circ}C$, el error E del punto de ebullición era, en grados de Fahrenheit,

$$E = T - 212^{\circ} + 1.680 (\mathfrak{B} - B),$$

siendo \mathfrak{B} la presión atmosférica tipo, según la fórmula de Laplace, á saber: á la latitud φ y á la altura de h pies sobre el mar,

$$\mathfrak{B} = 29.9215 \text{ pulg.} + .0785 \cos 2\varphi + .0000018 h;$$

que da 0.760 de metro á la latitud de 45° , ó 30.000 pulgadas en el ecuador, al nivel del mar en ambos casos ⁽¹⁾. Minutos después de introducidos los termómetros en agua hirviendo, poníanse en hielo para averiguar el error de índice.

No queda definida una longitud por la distancia á cierta temperatura entre dos rayas en la cara superior de una regla metálica, pues no es ésta un cuerpo rígido sino elástico, y según esté sostenida, así cambiará de forma. Teniéndola horizontal por su punto medio, toda la materia que caiga encima de la *línea neutra* padecerá una tensión, á la par que una compresión la otra mitad situada debajo; sucediendo lo contrario cuando por ambos extremos esté la regla suspendida ó apoyada. Demuéstrase que si es a su longitud, su sección un rectángulo cuya base sea h y k su altura, w el peso de la regla, α la pequeña cantidad, que la misma se alargaría ó acortaría por una tensión ó compresión igual á w ; y por último, ρ el radio de curvatura del eje de la regla en un punto q , si la regla, recta cuando no se halla ni estirada ni comprimida, presenta leve arqueado en el plano vertical que contiene aquella dimensión h ; la suma de los momentos de las fuerzas elásticas, desenvueltas en la sección transversal trazada por aquel punto, valdrá $\frac{w a k^2}{12 \alpha \rho}$. Pero esta suma será equivalente á la de momentos de las fuerzas exteriores que tiendan á

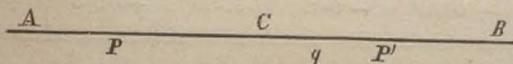


Fig. 26.

encorvar la regla en el punto q . Sean, pues, P, P' los de apoyo de la misma á las distancias b, b' del C , punto medio de AB ; y expresando en coordenadas rectangulares la ecuación de la regla,

⁽¹⁾ En grados centígrados la corrección sería

$$E = T - 100 + 0.367 (\mathfrak{B} - B),$$

expresando \mathfrak{B} y B en centímetros y calculando la primera por la fórmula

$$\mathfrak{B} = 76 + 0.1993 \cos 2\varphi + 0.000015 h,$$

si la altura h se da en metros.

ó por mejor decir, de su eje, elíjanse los de coordenadas de modo que contenga el de las x los puntos de apoyo, y sea $x = 0$ para el C, lo que equivale á suponer que pase por éste el eje de las y . Las fuerzas exteriores que tienden á doblar qB en torno de q son su propio peso y la reacción del punto de apoyo P' , cuya suma de momentos es (1)

$$= \frac{bw}{b+b'}(b'-x) - \frac{w}{2a}(\frac{1}{2}a-x)^2.$$

Luego la condición de equilibrio será

$$\frac{ak^2}{6\alpha} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{2bb'}{b+b'} - \frac{a}{4} + \frac{b'-b}{b'+b}x - \frac{x^2}{a}.$$

Por donde se ve que mientras no sea $b+b' > \frac{1}{2}a$ no habrá punto de inflexión, esto es, que en tanto la distancia entre los de apoyo no exceda de la mitad de la longitud de la regla, será toda convexa, mirada por encima (2). En el trozo $P'B$ no rige dicha ecuación, sino esta otra:

$$\frac{ak^2}{6\alpha} \frac{1}{\rho} = -\frac{a}{4} + x - \frac{x^2}{a}.$$

Pero en ambas, por ser muy leve en realidad la flexión de la regla, cabe suprimir $\frac{dy^2}{dx^2}$ y poner $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ (3), con lo cual, y escri-

(1) La reacción f del punto de apoyo P' , y el peso p de qB son respectivamente

$$f = \frac{b}{b+b'}w, \quad p = \frac{\frac{1}{2}a-x}{a}w.$$

(2) Pues para que con un valor real de x sea el radio ρ infinito, ó bien nulo el segundo miembro de la última ecuación, y con otros valores de x se produzca cambio de signo, se requiere la condición

$$\left(\frac{b'-b}{b'+b}\right)^2 > 4 \frac{1}{a} \left(\frac{a}{4} - \frac{2bb'}{b+b'}\right),$$

que simplificada es la del texto $b+b' > \frac{1}{2}a$.

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

biendo $\mu = \frac{6\alpha}{ak^2}$, dichas ecuaciones serán

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2bb'}{b+b'} - \frac{a}{4} + \frac{b'-b}{b'+b} x - \frac{x^2}{a}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{a}{4} + x - \frac{x^2}{a}; \quad (2)$$

de las cuales, integrando dos veces, se deduce la del eje.

La distancia entre dos puntos extremos de la cara superior de la regla no varía sólo porque, arqueado el eje neutro, se acorta su proyección horizontal, sino también porque dicha superficie se comprime ó estira; y si la variación de longitud originada por aquella curvatura es por lo general insignificante, en cambio la debida á la última causa es de alguna cuantía y motivo de error si no se previene. Trazadas por A, C y B las normales al eje de la regla en su plano vertical, sea θ el ángulo entre las de C y B —suponiéndolas concurrentes por arriba— y θ' el ángulo entre las de A y C: los puntos de la cara superior se habrán corrido la cantidad $\frac{1}{4}k(\theta + \theta')$. Pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \theta &= \int_0^{b'} \left(\frac{2bb'}{b+b'} - \frac{a}{4} + \frac{b'-b}{b'+b} x - \frac{x^2}{a} \right) dx \\ &+ \int_0^a \left(-\frac{a}{4} + x - \frac{x^2}{a} \right) dx = b' \frac{bb'}{b+b'} - \frac{a^2}{24}, \end{aligned}$$

y otra fórmula semejante se obtiene para θ' ; luego la contracción de esa cara será, escribiendo $\alpha\alpha = k\varepsilon$,

$$\frac{1}{4}k(\theta + \theta') = 3\varepsilon \left(\frac{bb'}{a^2} - \frac{1}{12} \right).$$

Cuando, pues, la regla esté sostenida por su punto medio, es decir, si $b = b' = 0$, dicha superficie resultará *extendida* la cantidad $\frac{1}{4}\varepsilon$. Si se apoya por los extremos, habrá una *contracción* igual á $\frac{1}{4}\varepsilon$, esto es, doble de lo que antes importaba la extensión. Si descansa sobre dos rodillos, puesto cada uno del extremo más próximo á la cuarta parte de la longitud de la regla, la cara su-

perior quedará extendida sólo $\frac{1}{16}$ ε. Y colocados los puntos de apoyo de manera que

$$b = \frac{a}{2\sqrt{3}} = b',$$

la distancia entre las señales extremas de esa cara será la misma que si la regla no se arquease: caso particular de un teorema más general sentado por el astrónomo Sr. Airy (*Memoirs of the Royal Astronomical Society*, tomo XV).

Por esas variaciones de longitud que la cara superior de la regla padece, suelen grabarse las rayas, que señalan la medida, en la sección trazada por el eje neutro, sobre una lámina de oro, plata ó platino allí incrustada.

La Dirección geodésica de Inglaterra posee en Southampton un edificio de intento construído para comparar los patrones de longitud. Es un cuarto medio enterrado bajo el suelo exterior: mide 20 pies por 11, los muros son gruesos y dobles, el techo macizo y de 9 pulgadas de espesor. Hállase dentro de otro cuarto que lo aísla del ambiente para que nada trasciendan á aquella estancia las variaciones diurnas de la temperatura. En ese cuarto interior, á lo largo de una pared, y partiendo de cimientos profundos de ladrillo, suben hasta $4\frac{1}{2}$ pies sobre el pavimento, destinado al observador, tres pilares macizos de piedra, coronados por pesadas piezas de fundición que se adelantan á la piedra unas 7 pulgadas para sostener verticalmente los microscopios micrométricos, bajo los cuales han de colocarse las reglas que se comparan. A cada microscopio acompaña un nivel para poner el eje óptico vertical. La división ó parte micrométrica mide poco menos de una millonésima de yarda.

Los cimientos en que descansan los pilares—sostén á su vez de las reglas en tanto se comparan—y el pavimento que pisa el observador, están construídos *separadamente* para evitar, precaución necesaria, que por cualquier movimiento de él padezcan alguna sacudida las reglas ó los microscopios.

La laminita incrustada en la regla, donde va la línea ó marca que señala la medida, se ve á la luz de una lámpara ó bujía puesta á unas diez pulgadas detrás del microscopio respectivo:

una gran lente concentra la luz sobre la laminita, dando copiosa iluminación en el punto necesario, con el menor aumento posible de calor.

Pónense por lo común en la misma caja las dos reglas que han de compararse, una junto á otra, descansando cada una sobre rodillos distintos que pueden subir ó bajar muy pausadamente. Nivélanse ante todo las reglas y colócanse sobre las rayas de sus extremos los microscopios; rectificanse después éstos hasta que el eje óptico esté vertical, la imagen en foco y la línea de colimación pase rigurosamente por la raya respectiva. Suelen dejarse preparadas las dos reglas veinticuatro horas por lo menos antes de comenzar una serie de comparaciones, á fin de que haya entonces igualdad más duradera de temperatura. Compáranse tres ó cuatro veces en un día. Desarréglese á menudo y de intento todo, volviendo á dejarlo luego como estaba, y también se truecan una por otra las dos reglas, para desvanecer todo error constante, cuya posibilidad debe siempre admitirse. Cada *comparación* abraza estas operaciones:—1.º, leer los termómetros de las reglas; 2.º, puesta bajo los microscopios la regla A, bisecar las líneas ó marcas extremas y leer los micrómetros; 3.º, hacer lo propio con la regla B; 4.º, quitada de foco la imagen de B en los microscopios, ponerla otra vez y leer de nuevo; 5.º, hacer esto mismo con la regla A; 6.º, leer de nuevo los termómetros.

Como no se emplea temperatura artificial, suelen compararse las reglas cuando aquélla es próximamente de 62° F. (16°,7 C.), temperatura elegida como tipo en Inglaterra para los patrones de longitud, y otra vez se comparan cuando es mucho más baja, á fin de eliminar las diferencias de dilatación. En pocos modelos se han determinado allí los coeficientes absolutos, aunque en el cuarto antedicho existe un aparato, con mucho esmero construido, para averiguar esos coeficientes en reglas de diez pies de longitud. Tiénese con ese aparato la ventaja de poder conservar una regla á elevada temperatura, como de 90 ó 100° F, sin que en el cuarto se note semejante elevación; y por consecuencia comparar, cuando hay dos reglas A, B, primero A caliente con B fría y luego B caliente con A fría. Déjase para ello cada regla bien ajustada entre dos largas y angostas artesas de cobre: écha-

se hielo ó agua fría en las que comprenden la regla sometida á baja temperatura; en las de la otra regla entra de continuo agua caliente por tubos flexibles que la recogen de un depósito que fuera del edificio se tiene constantemente á la temperatura deseada, y recorridas las artesas, sale dicha agua del cuarto por otros tubos como aquellos. Por un mecanismo á propósito se truecan con rapidez bajo los microscopios ambas reglas, cada una con las artesas respectivas.

Los coeficientes de dilatación que siguen, relativos á cuatro reglas de diez pies de longitud, se dedujeron previas 6500 lecturas de micrómetros y termómetros:

Patrón de la India: Bronce ...	0.0000098277 ±	.0000000057,
» » Acero ...	0.0000063478 ±	.0000000056,
» de Inglaterra: Hierro ...	0.0000064729 ±	.0000000031,
» » » ...	0.0000064773 ±	.0000000033.

Por unidad de las medidas micrométricas y de sus errores probables, conviene adoptar una tan pequeña como la millonésima de yarda (1). Refiriéndose á esta unidad, el error probable cometido por un observador experto, al hacer una bisección aislada con una raya limpia, es ± 0.25 ; mas si la línea ó marca estuviese borrosa ó mal definida, el error podría ser mucho mayor. El error probable, al comparar una vez la longitud de dos reglas, depende tanto de ésta como de la calidad de las rayas: en una yarda varía entre ± 0.35 y ± 0.66 ; en una longitud de diez pies está comprendido entre $\pm .65$ y ± 1.30 .

En las observaciones micrométricas que al comparar patrones de longitud se efectúan, algo influye, aunque no mucho, la *ecuación personal*, pues acaso lo que un observador crea una *bisección* otro lo reputará situación errónea. Bisecar ó hacer una bisección significa en términos técnicos, si el micrómetro consta de dos líneas cruzadas, poner la intersección de ellas sobre la raya que

(1) La millonésima de una longitud suele designarse por la letra μ . La millonésima de metro se llama *micrón*.

se observe; y si el micrómetro se compone de dos rectas paralelas, colocar éstas de modo que la raya grabada en la regla equidiste de ellas. Mas si al hacer un observador una bisección de esta última clase otros dos dibujaran lo que ven, quizá resultase lo que manifiestan a y b , figura 27, donde representan las lí-

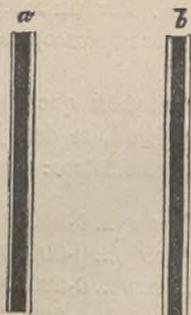


Fig. 27.

neas finas las del micrómetro y la línea gruesa la grabada en la regla. Ni existe una diferencia constante entre dos observadores, ni todas las rayas ocasionan error personal: de todos modos, el error asciende á poco. La diferencia de apreciación, al parecer, proviene de desigualdades en los bordes de la línea grabada. Las finas ó débiles producen el máximo error personal; las mejores son las de perfiles limpios y paralelos. En el metro de platino de la Real Sociedad de Londres las rayas son tan delgadas que es difícil observar con ellas.

Cuando con el microscopio micrométrico deban de recorrerse muchas divisiones, y hayan de darse quizá varias vueltas al micrómetro, es necesario de todo punto averiguar los errores del tornillo. Pero al medir espacios en una escala puede padecerse error, no poniéndola bien en foco; por consiguiente, cuando se midan tales espacios con objeto de hallar la parte del tornillo micrométrico, á cada medida se debe comprobar ó renovar la enfocación. En el aparato de comparación empleado en Southampton el valor de una parte del micrómetro en uno de los dos principales microscopios es $0.79566 \pm .00008$, y en el otro $0.79867 \pm .00009$, no influyendo en estos valores de un modo

perceptible la temperatura. Los errores probables respectivos de los dos microscopios al medir n veces mil partes ó divisiones son

$$\pm \sqrt{.187 n^2 + .20} \qquad \pm \sqrt{.349 n^2 + .20},$$

ofreciendo menor grado de exactitud el valor crecido que se refiere al segundo microscopio.

Terminan algunos modelos *de conteras*, según queda dicho, en casquetes esféricos. Son éstos de leve convexidad, y de su radio de curvatura puede sacarse partido para mayor precisión en la medida. En efecto, la longitud verdadera; es decir, la longitud máxima de la regla, es la distancia entre los centros C, C' de las caras convexas de ambos casquetes, hallándose estos centros, así como los de curvatura, en el eje de la regla; y en su consecuencia, cuando se mida desde un punto P de la cara convexa de un casquete hasta un punto P' de la cara respectiva del otro, la distancia PP' , como longitud de la regla, será errónea; pero puede adoptarse tal radio de curvatura ρ que el error fortuito, padecido al medir entre puntos que no sean los centros de dichas caras, resulte el menor posible. Sea $2a$ la longitud de la regla y $2c$ el diámetro de la base de cada casquete. Elegido el punto medio del eje de la regla por origen de coordenadas y este mismo eje por el de las z , las coordenadas de P, P' serán, llamando r, r' las distancias de estos puntos á dicho eje,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, & z &= a - \frac{r^2}{2\rho}, \\ x' &= r' \cos \theta', & y' &= r' \sin \theta', & z' &= -a + \frac{r'^2}{2\rho}. \end{aligned}$$

Puede suponerse nulo uno de los dos ángulos, por ejemplo el θ' , y entonces (1)

$$\begin{aligned} (1) \quad PP'^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \\ \left(\frac{PP'}{2a}\right)^2 &= \left(1 - \frac{r^2 + r'^2}{4a\rho}\right)^2 + \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}{4a^2}. \end{aligned}$$

Desarrollando el segundo miembro, extrayendo después la raíz cuadrada y limitándose á los términos en que r y r' no entren elevadas á potencias superiores á la segunda, se tiene

$$\frac{PP'}{2a} = 1 - \frac{r^2 + r'^2}{4a\rho} + \frac{1}{2} \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}{4a^2}.$$

$$PP'^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta + \left(2a - \frac{r^2 + r'^2}{2\rho} \right)^2;$$

$$\therefore 2a - PP' = \frac{1}{4a} \left(2 \frac{a}{\rho} (r^2 + r'^2) - r^2 - r'^2 + 2rr' \cos \theta \right),$$

que es el error de la medida. La suma de cuadrados de los errores cometidos en todos los pares de puntos importa (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{16a^2} \int_0^c \int_0^c \int_0^{2\pi} \left\{ (r^2 + r'^2) \left(\frac{2a}{\rho} - 1 \right) + 2rr' \cos \theta \right\}^2 dr dr' r r' d\theta \\ = \frac{\pi c^8}{192 a^2} \left\{ 3 + 7 \left(\frac{2a}{\rho} - 1 \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

y será un mínimo cuando $\rho = 2a$, es decir, cuando el centro de curvatura de cada casquete esté en el otro extremo de la regla.

Deseando comparar las unidades geodésicas de las diversas naciones, con el objeto principalmente de enlazar las triangulaciones del continente de Europa con la de Inglaterra, el Gobierno de este país, por indicación del general Sir Henry James, que allí dirigía entonces los trabajos geodésicos, invitó á los Gobiernos de Rusia, Prusia, Bélgica, España, Austria, y también á los Estados-Unidos de América, para que remitieran sus patrones de longitud á Southampton. Aceptada la invitación, cotejéronse en dicho punto unas medidas con otras, y en las *Philosophical Transactions* de 1866 y 1873 se publicaron dos Memorias con la reseña de esa comparación, de capital importancia para la Geodesia, pudiendo consultar quien desee más pormenores la obra titulada *Comparisons of the Standards of Length of England, France, etc.*, por el coronel Clarke, I.R.

La tabla adjunta contiene los resultados principales, tomando por tipos de referencia las longitudes verdaderas de la Yarda,

$$(1) \quad (A + B \cos \theta)^2 = A^2 + \frac{B^2}{2} + 2AB \cos \theta + \frac{B^2}{2} \cos 2\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} (A + B \cos \theta)^2 d\theta = 2\pi \left(A^2 + \frac{B^2}{2} \right).$$

Toesa, Metro y Klafter, representadas por antiguos patrones ingleses:

PATRÓN DE LONGITUD	TEMP. tipo (°)	LONGITUD acreditada (*)	LONGITUD EN YARDAS INGLESA
		l.	
Toesa belga.	61.25	$\mathcal{T} - 0.00100$	2.13150851 \mathcal{Y}
Toesa prusiana.	»	$\mathcal{T} - 0.00099$	2.13150911 »
Doble toesa rusa.	»	$2 \mathcal{T} - 0.00560$	4.26300798 »
		mm.	
Regla española de 4 metros.	»	$4 \mathcal{M} + 0.40710$	4.37493562 »
Metro de platino de la R. S. de Londres.	32.0	$\mathcal{M} - 0.01759$	1.09360478 »
		l.	
Copia pulkowiana del Klafter	61.25	$\mathcal{K} - 0.00029$	2.07403658 »
Copia milanese (**) $K_{1.3}$	»	$\mathcal{K} - 0.00580$	2.07401462 »
» » $K_{1.11}$	»	$\mathcal{K} - 0.00000$	2.07402990 »

Ofrecen los tres primeros renglones de esta tabla tres valores de la toesa, independientes en un todo, deducidos de varios miles de observaciones; pero la mayor diferencia entre estos valores y su promedio no pasa de media millonésima de toesa. Determinada la longitud de esta unidad, dedúcese la del metro por la relación $443296 \mathcal{T} = 864000 \mathcal{M}$; comprobándose además tal valor del metro por la regla española, cuya longitud, según se infiere de su confrontación con la regla de Borda, núm. 1, es de $4.0004071 \mathcal{M}$, y según se desprende de las observaciones hechas en Southampton, es de $4.0004052 \mathcal{M}$, es decir, de igual valor, con la diferencia solamente de media millonésima de la longitud.

(°) Las dos temperaturas 32° 0 y 61° 25 están en grados de Fahrenheit. En grados centígrados equivalen respectivamente a 0° y 16° 25.

(*) La l, línea, representa la 864—ava parte de la Toesa ó del Klafter, ó sea la 12—ava parte de la pulgada respectiva.

La indicación mm significa milímetros.

(**) La copia milanese del Klafter de Viena es una regla donde hay dos medidas del Klafter, una en la cara superior, definida por las rayas 1.3, y otra en la cara inferior, por rayas marcadas con los números romanos I-II.

En conclusión,

$$\mathcal{C} = 2.13151116 \text{ U.}$$

$$\mathcal{M} = 1.09362311 \text{ U.}$$

$$\mathcal{K} = 2.07403483 \text{ U.}$$

En pulgadas la longitud del metro, contando el error probable, es

$$\mathcal{M} = 39.0137043 \pm 0.0100002.$$

A propósito de esto, conviene advertir que Kater obtuvo otro valor del metro, 39.0137079, que todavía suele usarse como equivalencia (1); pero Kater dedujo este valor comparando cierta regla inglesa con dos metros llevados de París, y aunque consta que uno de ellos, el metro de platino, fué comparado por Arago con un *metro tipo*, esto, faltando otros antecedentes, no es bastante garantía, y de la autoridad que responda del segundo metro nada se dice. Ignórase también si en las comparaciones se tuvieron en cuenta los errores de los termómetros que acompañaran á las reglas, y más bien se presume que no se averiguaron, ni se sabe que se tomara precaución alguna para no dar en el escollo de un *error constante*, contra el cual desde el principio hasta el fin de cualquier investigación debe prevenirse todo observador. Por de contado, la longitud obtenida por Kater no está en pulgadas de la yarda tipo actual; pero por las comparaciones hechas en Southampton en 1864 entre la yarda tipo y ese mismo metro de platino, se infiere que la longitud del *metro tipo* á que Arago se refería era = 39.0137046. En cuanto á la validez y suficiencia

(1) En el Anuario del *Bureau des Longitudes*, correspondiente al año 1891, aun se conserva en la tabla de comparación de medidas francesas é inglesas, página 345, la equivalencia del metro dada por Kater, si bien en dicho libro se advierte que los valores de los pesos y medidas consignados en la mencionada tabla están tomados de las que acompañaban al acta de 1864 del Parlamento inglés, en virtud de la cual se autorizó el uso del sistema métrico en la Gran Bretaña.

de las autoridades en que se apoya el otro valor del metro arriba consignado, son dignas seguramente de entera fe (1).

Ha variado según las circunstancias la extensión de las bases. Mientras la de Bessel, en la Prusia Oriental, tenía de largo poco más de una milla (1.6 kilómetro), la de Ensisheim, en Francia, medida por el coronel Henry, era de 11.8 millas (19 kilómetros), y entre ambos límites se cuentan de todas longitudes. En la India la base del cabo Comorin es de 1.7 millas, pero las otras nueve miden de 6.4 á 7.8 millas. En la triangulación española hay varias bases cortas de milla y media próximamente: la principal, cerca de Madrid, mide 9.1 millas, y en la isla de Ibiza hay una cuya longitud es justamente de una milla.

(1) Del patrón original del metro se sacaron después de esa fecha copias fidedignas. Respondiendo á la conclusión sentada en 1867 por la Asociación geodésica internacional, reunida en Berlín, acerca de la necesidad de definir, tan precisa é invariablemente como se pudiera, la unidad común de medida, el Gobierno de Francia procuró constituir desde 1870 una Comisión internacional con el expresado objeto; y para mejor realizarlo, en 1875 se estipuló y ratificó un convenio diplomático entre 19 naciones de Europa y América.

Decidió la Comisión internacional que el nuevo metro prototipo no se definiera por conteras ó caras extremas, sino por rayas, trazadas en el eje de fibras neutras de una barra con sección en forma de X, y acompañadas de otras dos á medio milímetro de distancia, sobre pulimento especular; que se fabricase de platino aleado con una décima parte de iridio, puros ambos metales, y que fundida y recocida la materia, se estirase y cepillara hasta que adquiriese constitución molecular duradera. El kilogramo debía componerse de la misma aleación y poseer la forma de un cilindro de igual altura que el diámetro de sus bases.

Encargóse al efecto en 1878 á una casa inglesa que construyese tres metros y tres kilogramos de la indicada aleación, y á los mismos fabricantes se pidió luego preparasen la necesaria para 40 metros y otros tantos kilogramos. Hizose después en Francia detenido estudio de la composición y densidad de los kilogramos; se depuró cuanto se pudo la forma, pulimento y trazado de los metros; su elasticidad y coeficientes de dilatación se averiguaron también, y tras de ello comparáronse las medidas análogas, metros ó kilogramos. Finalmente, en la conferencia general de últimos de septiembre de 1889 celebrada en París, se aprobó la construcción de los nuevos prototipos, y escogidos los internacionales, se repartieron los nacionales por sorteo. La Comisión en su informe decía á este propósito: «Aunque cambiados los tipos materiales, las unidades son las mismas. No

Debe ser el terreno elegido para medir la base llano, sin obstáculos y tal que no sólo de cada extremo de ella se distinga el otro, sino que ambos se dominen de vértices de la triangulación más distantes, de manera que los lados de los triángulos, comen-

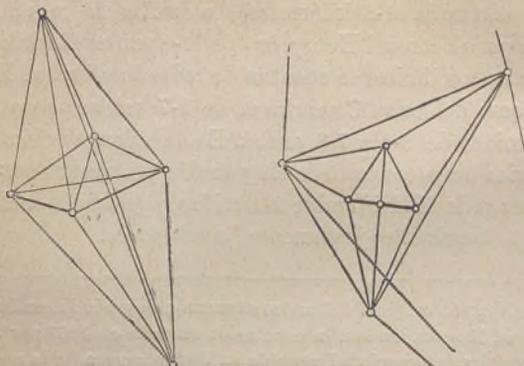


Fig. 28.

zando por la base, crezcan gradualmente. El primer grabado adjunto muestra el enlace de la base medida en Epping, Maine, en los Estados Unidos, con las estaciones trigonométricas inmediatas, y el segundo el enlace de la base medida cerca de Ostende por el general Nerenburger en 1853.

hay interrupción entre el pasado y el porvenir, y todos los resultados numéricos que las ciencias metrológicas expresaran con relación á los tipos antiguos, se refieren á los nuevos sin variante alguna».

Correspondieron á España los prototipos lineales señalados con los números 17 y 24, cuyas longitudes son, designando μ la millonésima de metro y T la temperatura:

$$\text{Núm. 17} = 1^m + 0.49 + 8.4653 T + 0.000100 T^2,$$

$$\text{Núm. 24} = 1 + 1.8 + 8.670 T + 0.00100 T^2;$$

y los prototipos de peso números 3 y 24, cuyo volumen en mililitros y peso en kilogramos y miligramos son respectivamente:

	Volumen.	Peso.
Núm. 3	46 ^{ml.} 422	1 ^{kg} + 0 ^{mg} .021,
Núm. 24	46.410	1 - 0.191.

Véase para más pormenores el discurso leído por el Excmo. Sr. D. Francisco de Paula Arrillaga en su recepción en la Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales.—Madrid, 1890.

Para saber la longitud que una regla metálica posee en determinado momento, requiérense tres datos: su longitud á cierta temperatura, el coeficiente de dilatación de la regla y su temperatura en la sazón de que se trate. Averíguase lo primero comparando repetidas veces la regla con el patrón de medida; lo segundo por experimentos especiales. En cuanto á la temperatura exacta del metal en el momento dado, léese en unas reglas en los termómetros puestos en contacto con ellas; mas como por experiencia se ha visto que cabe error en suponer que la temperatura del metal sea la misma que la del mercurio en los termómetros, para eludir tal inconveniente se han adoptado otros dos sistemas: uno—el de Borda—que consiste en componer la regla con dos metales, cuyos coeficientes de dilatación difieran mucho, formando de este modo un termómetro metálico, y otro—el de Colby—en el cual, por una sencilla combinación mecánica, se consigue que las dos reglas de distintos coeficientes ofrezcan dos puntos á distancia permanente.

Mas sea cualquiera el aparato que se use, es indispensable reducir rigurosamente la medida al plano vertical donde los extremos de la base se hallen, y determinar con exactitud la inclinación, respecto del horizonte, de la línea que en realidad se mida en cada posición de la regla. Reducir decimos en la primera condición y no efectuar, porque á veces es necesario que dos ó más trozos de la base no estén con todo rigor en la misma recta, lo cual no es un inconveniente cuando se conocen los ángulos que las diversas partes forman entre sí; pero en cada segmento debe hacerse la medida en el mismo plano vertical.

Como operación preliminar para medir la base, obtenido ante todo un trazado bastante fiel de esta línea por nivelación topográfica, suele determinarse aproximadamente su longitud, y elegirse uno, dos ó más puntos en su dirección ó no lejos, que dividan la base en los segmentos que convenga. Tráense luego estos puntos á la línea, ó se comprueba su situación si ya estuvieran en ella, haciendo todo esto con suma escrupulosidad por medio de un teodolito ó antejo de pasos, en uno ú otro extremo elevado, ó por medio de dos, alzados sobre ambos; y si tales puntos no pudieran quedar absolutamente sobre la línea, se miden

los ángulos que indiquen la verdadera posición de cada uno. Márcanse á veces estos puntos intermedios de modo tan permanente como los extremos de la base, á saber: con una señalita sobre metal asegurado en una piedra emplazada en obra de ladrillo: señalita que suele consistir en una cruz microscópica en la cara superior de una pieza de latón embutida en la piedra, ó bien en una rayita al extremo de un alambre de platino vertical, afirmado con plomo que se echa fundido en un agujero abierto en la piedra. También por pequeñas facetas verticales se indican á veces los extremos de la base.

Hácese luego una alineación de ésta más minuciosa. Dirigido el teodolito ó anteojo de pasos en los extremos ó puntos intermedios, clávanse en el suelo, separados con regularidad unos de otros, estacas ó piquetes, provistos de una señalita que corresponda con exactitud á la línea de la base; procediendo en esto con muchísimo cuidado, porque no propenden á destruirse, por ser siempre del mismo signo, los errores nacidos de imperfecta alineación.

No permite la índole de este libro que, al pasar ahora á la descripción de los aparatos y métodos para medir bases, entremos en pormenores que no dejan de ser bastante complejos, pudiendo consultar quien desee conocer tal punto con amplitud, entre otras, las siguientes obras: *Compte rendu des opérations... à la mesure des bases géodésiques Belges*, Bruselas, 1855; *Triangulation du Royaume de Belgique*, Bruselas, 1867; *Experiencias hechas con el aparato de medir bases*, Madrid, 1859; *Base central de la triangulación geodésica de España*, Madrid, 1865; *Account of the measurement of the Lough Foyle base*, Londres, 1847.

El aparato para medir bases usado por el astrónomo ruso F. W. Struve consta de cuatro reglas de hierro, cada una de dos toesas de longitud. A un extremo lleva cada regla un cilindrito de acero, cuyo eje coincide con el de aquélla y cuya base exterior, de leve convexidad, está muy bruñida; y al otro extremo, ligada con la regla, una palanquita también de acero, cuyo brazo inferior acaba en un hemisferio pulimentado, que debe quedar en contacto con la regla inmediata, y cuyo brazo superior recorre un arco graduado, con fijeza unido á la regla. Cuando

una rayita ó índice en la extremidad de este brazo señala cierta división en mitad del arco, posee la regla la longitud asignada; pero se sabe también la que á cualquier otra lectura corresponde.

La figura 29 pone de manifiesto la palanquita mencionada. Para medir la base colócanse sucesivamente las reglas en contacto, manteniendo éste por medio de un muelle que actúa sobre la palanca. Guárdase cada regla, sostenida por dos puntos, en una caja, de donde salen sus extremos y donde queda á salvo de las variaciones de temperatura, envuelta en una faja de lienzo con algodón en rama. Dos termómetros, cuyas esferas se alojan en la regla, indican su temperatura.

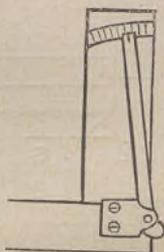


Fig. 29.

Señálase el término del trabajo del día clavando en el suelo hasta dos pies de profundidad, debajo del extremo anterior de la regla delantera, una pica gruesa de hierro, de la cual sale un brazo con una canal, donde se hace deslizar, y cuando es menester se deja fijo un cubo metálico con una marquita en su cara superior. Proyéctase el extremo de la regla sobre esta marquita por medio de un teodolito puesto como anteojo de pasos á distancia de 25 pies en dirección perpendicular á la base.

Averiguaba Struve con sumo cuidado en las diversas bases medidas por él los siguientes errores probables: 1. Los de alineación. 2. El de inclinación de cada regla. 3. El de la longitud adoptada como patrón. 4. Los de las longitudes atribuidas á las reglas con que la medición se hacia. 5. Los de lectura del índice de la palanquita y de las divisiones del limbo. 6. Los personales de los observadores. 7. El de temperatura, subdividido en los siguientes: (1) el del coeficiente de dilatación del tipo de longi-

tud; (2) los de los mismos coeficientes de las reglas con que se medía; (3) los de las temperaturas señaladas mientras se comparaban estas reglas con la que servía de tipo; (4) el de la temperatura media á que la medición se efectuaba.

Los errores probables de las siete bases medidas con tales reglas oscilan entre $\pm 0.73 \mu$ y $\pm 0.91 \mu$, siendo μ la millonésima parte de la longitud apreciada.

Midiéronse las otras tres bases de Rusia con el aparato de Tenner: las reglas eran también de hierro; pero los intervalos entre ellas se estimaban con una reglita corrediza. La exactitud en esas bases no fué tan grande, siendo los errores probables próximamente de $\pm 3.1 \mu$.

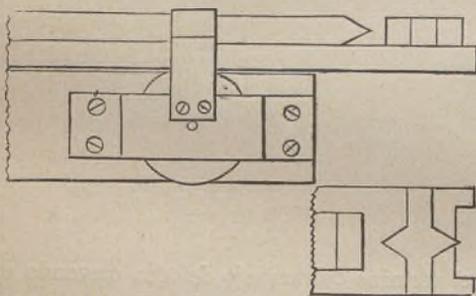


Fig. 50.

Ya describimos la regla de Borda al hablar de la operación de Delambre. Al platino y cobre de aquella reemplazan en la de Bessel el hierro y zinc, y se miden los intervalos entre las reglas con cuñas de cristal. El adjunto grabado muestra el corto intervalo cuya mayor ó menor amplitud sirve de termómetro. Por ambos extremos termina la componente superior, ó sea la de zinc, en un filo horizontal, mientras un prisma fijo en la cara superior de la componente de hierro presenta dos filos verticales, uno donde acaba la doble regla y otro que con el filo horizontal del zinc, interior á la regla, limita el intervalo termométrico, que también se mide con cuña de cristal.

Sostienen la doble regla siete pares de rodillos, montado cada par sobre un eje de hierro, y está todo ello en una caja de donde

salen los extremos de la regla y donde puede correrse ésta un poco á lo largo por medio de un tornillo de lenta hélice, cuya cabeza está fuera de la caja.

Tiene cada cuña de cristal de largo unas cuatro pulgadas, y de ancho, en la parte más estrecha, 0.07 de pulgada y en la más amplia 0.17; grabadas en la cara superior 120 divisiones, á distancia de 0.03 de pulgada.

Si τ es la temperatura á que las medidas y comparaciones hechas se reducían y l, l' las longitudes, á esa misma, de las componentes de zinc y hierro de una regla, las longitudes respectivas á otra temperatura t serían

$$L = l + e(t - \tau), \quad L' = l' + e'(t - \tau).$$

Por consiguiente, llamando i la diferencia de éstas, diferencia medida por la cuña, sería $i = l' - l + (e' - e)(t - \tau)$, y eliminando $t - \tau$,

$$L' = \frac{l'e' - l'e}{e' - e} + \frac{e'i}{e' - e};$$

de manera que la longitud de la regla estaba dada por $A + B i$, siendo A y B constantes que habían de determinarse en cada regla. Luego las longitudes de las cuatro podían escribirse del siguiente modo (1):

$$L_1 = \lambda + x_1 + ay_1,$$

$$L_2 = \lambda + x_2 + by_2,$$

$$L_3 = \lambda + x_3 + cy_3,$$

$$L_4 = \lambda + x_4 + dy_4.$$

Por comparaciones mutuas de estas reglas se determinaron tanto sus pequeñas diferencias x , cuya suma es cero, como los valores de los coeficientes termométricos y , pues con ello se obtenía, aplicando el método de los mínimos cuadrados, un sistema de ocho ecuaciones entre las x y las y . Finalmente, comparando una de las reglas con la elegida por tipo se hallaba λ .

(1) Designase aquí por λ el promedio de las A , y cada una de éstas por $\lambda + x$, variando el subíndice de esta última letra. La B respectiva está reemplazada por y , con el subíndice correspondiente, y la i por a, b, c ó d .

En conclusión, la longitud de la base con estas reglas medida se expresaba de este modo:

$$L = n\lambda + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 + \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma' y_3 + \delta' y_4.$$

El error probable de la que midió Bessel fué de $\pm 2.2\mu$.

Empleóse también el aparato del mismo en las bases medidas en Bélgica cerca de Beverloo y Ostende (1852-53), con toda la escrupulosidad imaginable, por el general Nerenburger. Pero en vez de señalar el término de la operación del día por medio de la plomada, punto débil del método seguido por Bessel, se indicaba del siguiente modo. Decidido de antemano cuál fuera ese término, construía-se á dos pies de profundidad, y hasta salvar el suelo, un cimiento de ladrillo sobre el cual, con la base bien afirmada, se alzaba un cuerpo de fundición; atornillábase sobre éste, y luego se quitaba, una armazón de hierro de dos pies de altura, que tenía en su cara superior una canal por donde se podía correr, según la línea de la base, una reglita dividida de 14 pulgadas de longitud, deteniéndola cuando conviniera. Por el extremo anterior terminaba esta reglita en un filo vertical y por el opuesto en otro horizontal. Cuando acabada la operación del día se dejaba cerca de este aparato el filo vertical de la última regla, corriase la reglita hasta que entre ella y la regla antedicha quedara un intervalo tan corto como el que solía medirse con las cuñas de cristal. Al día siguiente se comenzaba el trabajo desde el extremo anterior de la reglita, la cual formaba así parte integrante de la medición.

El error medio de la base próxima á Beverloo, con 2300 metros de longitud, fué de $\pm 0.59\mu$, y el de la base de Ostende, con 2488 metros, de $\pm 0.45\mu$: al menos tales fueron las cantidades calculadas.

La regla de compensación de Colby, compuesta de dos, una de hierro y otra de latón, ambas de 10 pies de longitud, firmemente unidas en su parte media por dos cilindros transversales, lleva á cada extremo una palanquita metálica de unas seis pulgadas, que se articula con las dos componentes, de modo que no ofrece, aun cuando bien asegurada en ellas, impedimento á su dilatación. En una espiga de plata, introducida en el extremo

libre de cada palanquita, existe una marca microscópica, cuyo lugar indican en la figura las letras c, c' , así como las $ab, a'b'$ acusan el de los ejes de articulación, indicado en las reglas por otra señalita. Los puntos c, c' están elegidos de manera que, siendo α, β los respectivos coeficientes de dilatación de la regla de latón y la de hierro, aa' y bb' , se tenga

$$ac : bc = \alpha : \beta = a'c' : b'c';$$

con lo cual en la distancia cc' no influye la temperatura, pues fija las dos componentes por su parte media, si con un aumento de temperatura se corre el punto a á la izquierda el corto trecho ai , se correrá b en el mismo sentido la cantidad βi ; luego nada se moverá c y la distancia cc' , de 10 pies justos, permanecerá constante.

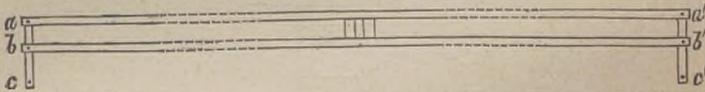


Fig. 31.

Pero para que tal mecanismo funcione bien, deben las dos componentes tanto absorber como radiar cantidades iguales de calor, y con este objeto ora se empaña, ora se barniza su superficie hasta que por experimentos se eche de ver que al calentarse y enfriarse los dos metales, esas cantidades se regulan por los mismos coeficientes.

Descansa cada doble regla sobre dos rodillos, dentro de una sólida caja de madera, donde una espiga que se eleva por entre los dos cilindros de enlace impide que la regla se corra á lo largo. Sostiénense las cajas con tripodes y caballetes como los que para reglas de otros sistemas se usan.

Déjase durante la medición, entre cada dos reglas consecutivas, un intervalo de seis pulgadas que se precisa con el *microscopio de compensación*, construido de este modo: dos microscopios de dos pulgadas de distancia focal exterior cada uno, paralelos y uno de otro á seis pulgadas, están unidos por dos travesaños, el superior de latón y el inferior de hierro, de manera que los focos exteriores sean puntos, á dicha distancia mantenidos siempre,

en virtud de la compensación. Por los centros de los dos travesaños pasa un microscopio paralelo á los otros; pero éste es telescópico, es decir, tal que alcanza á puntos más ó menos próximos, contando para ello con objetivos de diversa distancia focal: su colimación se efectúa con esmero.

Giran los tres microscopios en torno del eje del central, alojado en un tubo unido por la parte inferior á un trípode provisto de tornillos de nivel; pudiendo correrse los tres microscopios horizontalmente en dos direcciones, á saber, según la línea

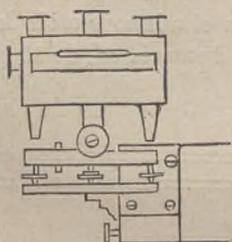


Fig. 52.

de la base y perpendicularmente á ésta, por medio de dos tornillos de rosca menuda que en la figura 32 se indican. Descansa el trípode, cuando se mira con los microscopios, sobre una repisa de tres brazos acanalados que la caja de la regla tiene á un extremo. A un lado de la combinación se ve un nivel fijo y al otro lado un anteojo de alineación que se mueve en un plano vertical.

Márcase en el suelo el término de cada serie de seis reglas por medio del *porta-punto*, lámina de fundición maciza, triangular, que lleva, para que se deje á la altura de la cara superior de esta lámina ó á la altura que se quiera, un disco horizontal corredizo, con un puntito grabado en él, señal que deben bisecar los hilos en el foco del microscopio telescópico puesto al frente de la serie.

Con este aparato se midieron dos bases en Inglaterra—una en Irlanda, en el condado de Londonderry, otra en la llanura de Salisbury—y diez bases en la India.

Pero las reglas de compensación, sobre todo en este país, no

resultaron de tanta exactitud como parecía, y descubiertas algunas incorrecciones, varióse de método al medir la base del Cabo Comorin, donde en vez de una línea de la longitud usual se eligió otra igual á la cuarta parte, y se midió cuatro veces, logrando de este modo hallar un valor del error probable de la medición que siguiendo otro método no se hubiera obtenido.

Corría la base en dicho lugar de Norte á Sur, dividida por tres puntos en trozos casi iguales. Dos veces se midió cada uno con la componente de latón al Oeste y otras dos con la misma al Este, operando así á causa de las desigualdades térmicas puestas de manifiesto en los metales de las reglas. Además de esto, el día antes y el día después de aquel en que se efectuaba cada medida comparábase las reglas con el patrón de longitud, y únicamente al valor de ambos días, deducido por promedio, se refería esa medida. Los resultados en pies los da la siguiente tabla:

BASE DEL CABO COMORIN

1869

MEDIDA	TROZO I	TROZO II	TROZO III	TROZO IV	LONGITUD TOTAL
Primera. . . .	2205.186	2205.166	2205.169	2297.083	8912.604
Segunda.180	.156	.163	.065	.565
Tercera.175	.156	.162	.075	.568
Cuarta.176	.162	.164	.071	.573
Promedio. . .	2205.179	2205.160	2205.164	2297.074	8912.578

No se recurrió en tal base al principio de compensación. Las dos componentes de una de las reglas estaban provistas cada una de dos termómetros que durante la operación se leían con regularidad.

El error probable de la longitud de una base, apreciada con la regla de Colby, según se deduce de estas mediciones repetidas, es próximamente de $\pm 1.5 \mu$.

Hállase tal error del siguiente modo: Si midiendo n veces cada trozo de la base, los resultados de las diferentes medidas del primer trozo son

$$s'_1, s''_1, s'''_1 \dots \text{ y su promedio} = \sigma_1,$$

los resultados correspondientes al segundo trozo

$$s'_2, s''_2, s'''_2 \dots \text{ y su promedio} = \sigma_2;$$

y así sucesivamente, llamando i el número de segmentos, por longitud de la base se adoptará

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_i.$$

Mas designando por S^2 la suma $(s' - \sigma)^2 + (s'' - \sigma)^2 + \dots$ y por q el número 0.674, los errores probables de $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ serán ⁽¹⁾

$$\pm q \left(\frac{S_1^2}{n(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \pm q \left(\frac{S_2^2}{n(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

luego en la longitud atribuida á la base se padecerá un error probable de

$$\pm q \left(\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_i^2}{n(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Midiendo sólo dos veces cada trozo, si $\delta_1, \delta_2 \dots$ son las diferencias de los i pares de medidas, se tendrá $S_1^2 = \frac{1}{2} \delta_1^2$, $S_2^2 = \frac{1}{2} \delta_2^2$ y así prosiguiendo; luego el error probable de la longitud adoptada por base será

$$\pm \frac{q}{2} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_i^2)^{\frac{1}{2}},$$

y el error probable en la medida de una longitud igual á la unidad (entendiendo por ésta la regla con que se mida, contenida σ_1 veces en el primer segmento)

$$\pm \frac{q}{2} \left(\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_i^2}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La Dirección de la costa de los Estados- Unidos (*United States Coast Survey*) emplea para medir bases el aparato que ideó el profesor Bache en 1845, combinando el principio de las dobles

(1) El error probable e de $s', s'', s'''\dots$ y el error probable ϵ de σ son respectivamente

$$e = \pm 0.674 \sqrt{\frac{S^2}{n-1}}, \quad \epsilon = \frac{e}{\sqrt{n}}.$$

reglas de Borda con la palanquita de compensación de Colby y la de contacto de Struve. Poseen las dos componentes igual superficie de absorción, y á la par, merced á una variación adecuada de su anchura y espesor, masas en razón inversa de su calor específico, en compensación de su diferente conductibilidad. Una componente es de hierro y la otra de latón, aquélla encima de ésta, puestas de canto ambas y por un extremo firmemente unidas. La de latón, de mayor grueso, descansa sobre rodillos montados en estribos, y la de hierro, sostenida por otros rodillos menores, unidos á ella, corre sobre la otra al dilatarse ó contraerse. Tornillos que cruzan los costados de los estribos mantienen la regla en la posición que debe tener. Frente á los extremos li-

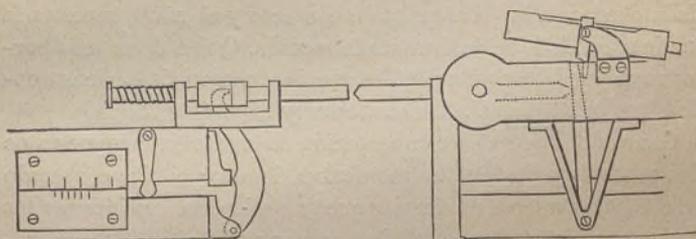


Fig. 53.

bres de las componentes, y articulada con la inferior, está la palanquita de compensación, la cual por el lado interior presenta un filo horizontal que da contra un plano de acero, contera de la componente superior ó sea la de hierro, mientras arriba por el lado opuesto esa palanquita ofrece otro filo que hace las veces del nodo ó punto neutro en la regla de Colby. Apóyase esta arista contra un anillo ceñido á una reglita corrediza dentro de una armazón de hierro fija sobre la componente de igual materia; y un muelle en espiral que un trecho rodea á la reglita, tirando de ella en dirección contraria, hace que el otro filo de la palanquita, ó sea el interior, oprima de continuo á esa componente: la reglita sobresale un poco y termina en un plano de ágata que sirve para el contacto. Un nonio en este extremo de la regla total acusa la diferencia de longitudes de las componentes como comprobación de la medida.

En el otro extremo, donde dichas componentes se enlazan, existe otra reglita corrediza que, como aquélla, también sobresale un poco por un lado, terminando aquí en un filo horizontal obtuso: su remate opuesto oprime la palanquita de contacto, articulada con la componente inferior, y esta palanquita, cuando esa reglita la empuja, da contra el pedacito de un nivel que, montado sobre muñones, propende á inclinarse por el otro lado: con cierto avance de tal reglita queda la burbuja en el centro, teniéndose entonces la longitud asignada á la regla de medida. Claro es que con tales prevenciones, á las cuales hay que añadir que la presión en los contactos es siempre la misma, la medición se hace con suma escrupulosidad.

Por último, en este extremo del aparato un sector, cuya alidada obedece á la palanquita de contacto y al nivel, muestra la inclinación de la regla durante la medida. Quien desee más pormenores puede consultar la descripción, acompañada de grabados, que publicó el *U. S. Coast Survey Report*, 1873.

Guárdase la regla de compensación en una caja compuesta de dos tubos de hoja de lata, uno dentro de otro: el aire contenido en el espacio intermedio impide que trasciendan á lo interior las variaciones de temperatura. Dan mayor resistencia á la caja varios tabiques, colocados de trecho en trecho, y dos láminas de hierro, una vertical y otra horizontal, tendidas á lo largo. Las bocas del doble tubo están tapadas, saliendo sólo por cada una la correspondiente regla corrediza. Este tubo, pintado de blanco por fuera, descansa sobre dos caballetes; el contacto de una regla con otra se produce con el mayor esmero, merced á un aparato especial. Empléanse dos reglas como las descritas, cada una de seis metros de longitud.

Con ellas van medidas más de ocho bases: la operación es bastante rápida y en un día ha llegado á recorrerse hasta una milla.

Con todo, así como en el aparato de Colby, tampoco debe abrigarse absoluta confianza en la compensación de esta regla, pues se ha echado de ver que varía su medida según sea la temperatura alta ó baja, y por este motivo en la actualidad se asigna á la regla diferente longitud al medir con ella en unas ú otras condiciones.

Tres veces se midió una de las bases últimamente determinadas, la de Atalanta en Georgia (*U. S. C. Survey Report*, 1873), dos en invierno y una en verano, á temperaturas por consiguiente muy distintas, que variaban desde los 18° F. (— 7°·8 C.) hasta los 107° F. (41°·7 C.), por cuyo medio pudo averiguarse bien hasta qué punto llegaba la exactitud de las reglas. Subdividida la base en seis trozos, de una milla próximamente cada uno, las diferencias entre sus tres medidas respectivas y su promedio fueron en milímetros las siguientes:

TROZOS	PRIMERA MEDIDA	SEGUNDA MEDIDA	TERCERA MEDIDA
	mm.	mm.	mm.
I.	— 5·09	+ 1·76	+ 3·32
II.	+ 0·90	— 2·88	+ 1·97
III.	+ 4·37	— 0·23	— 4·14
IV.	— 2·29	+ 3·38	— 1·08
V.	— 2·68	+ 1·50	+ 1·18
VI.	— 3·31	— 3·85	+ 7·16
Suma.	— 8·10	— 0·32	+ 8·41

Quedan estas diferencias bastante por bajo de los errores probables, con toda escrupulosidad calculados, de las tres medidas completas, los cuales ascienden respectivamente á $\pm 26^{\text{mm}}$, $\pm 26^{\text{mm}}$ y $\pm 21^{\text{mm}}$, y en verdad no es común que esto suceda. Pero en gran parte la cuantía de esos errores probables provenía de la comparación de las reglas con el patrón de longitud, y las tres medidas no eran del todo independientes. La longitud de la base resultó en definitiva de 9338·4763 \pm ·0166, es decir, con un error probable de $\pm 1\cdot76\mu$. El de las siete bases medidas antes que ésta varió entre $\pm 1\cdot8\mu$ y $2\cdot4\mu$.

Sistema enteramente distinto de cuantos preceden es el de Porro, adoptado por el Depósito de la Guerra (*Dépôt de la Guerre*), de Francia, en las bases medidas en Argelia (1). Por este

(1) El método del piemontés Porro data de 1850; pero antes que él en Francia, Hassler en los Estados Unidos se valió de microscopios aislados para observar dos hilos tendidos á través en los extremos de una sola regla, con la cual recorría sucesivamente, según la línea de la base, los intervalos entre cada dos microscopios consecutivos. Porro reemplazó los hilos con escalas de partes iguales trazadas en los extremos de la regla.

procedimiento sólo se usa una regla, con la cual se precisan, uno en pos de otro, iguales intervalos entre microscopios puestos sobre la línea, con los ejes ópticos verticales. Los microscopios son cuatro y la longitud de la regla de tres metros, como el intervalo entre dos de aquellos consecutivos. Colocados en la dirección de la base los cuatro, que llamaremos A, B, C, D, pónese primero la regla debajo de A y B, y leídos éstos, trasládase debajo de B y C, mientras se coloca A con su sustentáculo tres metros más allá de D, y así prosiguiendo.

Descansa cada microscopio sobre una armazón sólida, mas sirviendo de inmediato sostén una columna que se alza sobre un tripode con tornillos de apoyo ó nivel, y adelanta dos brazos horizontales, uno superior á otro, en dirección perpendicular á la línea de la base, terminado cada uno por un anillo ceñido al microscopio, que se puede girar dentro de esos anillos, poner vertical, dando vuelta á los tornillos de apoyo y consultando un nivel que lleva, y subir ó bajar algún tanto hasta dejar la imagen en foco. El objetivo es tal que no sólo cabe leer la regla á pocos centímetros de distancia, sino cuando es preciso un punto de referencia sobre el suelo, pues componen ese objetivo una lente de cosa de un metro de distancia focal y otra lente de foco cercano, fija en el centro de aquélla, habiendo delante una pantallita, que se quita cuando se quiere, con un agujero en medio, del mismo diámetro que la segunda lente. Apartada la pantallita, se ve el punto sobre el suelo; puesta, se leen las divisiones de la regla con que se mide.

Por el lado de la columna opuesto á aquél donde está el microscopio, un contrapeso suyo sirve á la vez de repisa ó sustentáculo al eje transversal horizontal de un anteojo de alineación. Muévase dicho contrapeso en azimut en torno de la columna, y cuando el eje óptico del anteojo se halla dirigido según la línea de la base, queda ese eje á distancia de 144 milímetros del eje del microscopio. Quitase, cuando es menester, el anteojo y se reemplaza por una reglita de marfil dividida, de un decímetro de longitud. Colocada tal reglita sobre la repisa del siguiente microscopio, se ve aquélla con el anteojo, á la par que, á unos 200 ó 300 metros, una mira en la dirección de la base, ó por mejor

decir, separada de ella 144 milímetros. La lectura de la mira sobre la reglita da el desvío horizontal de la regla de medida respecto de la base. La inclinación de dicha regla sobre el horizonte se averigua por medio de un nivel.

Con el anteojo de alineación puede verse á la vez tanto un punto á tres metros como otro á 200 ó 300 metros, porque dentro del tubo, detrás del objetivo y concéntrica con él existe una pequeña lente, corrediza á lo largo, mediante un piñón y una cremallera: esta lente se sitúa de modo que con ella, combinada con el objetivo, se vea claramente la reglita á 3 metros, á la par que con el resto del objetivo, no interceptado por aquélla, se distinga bien el punto lejano.

Componen la regla de medida dos varillas, una de acero y otra de cobre, juntas y por su parte media firmemente unidas, mas sin obstáculo para dilatarse hacia los extremos. Guárdase la regla en una caja resistente de madera, reforzada por travesaños ó tabiques, y merced á un hilo de seda tirante y un cristal con milímetros marcados se puede medir la flexión que acaso se produzca en aquélla. En sus extremos, que salen de la caja, ambas componentes llevan escalas cortas, divididas en décimas de milímetro (1).

Ajustada la regla debajo de dos microscopios, dos observadores, uno á cada extremo, leen á la vez las escalas respectivas de

(1) La regla primitiva de Porro, de tres metros de longitud, era de pinabete barnizado, y á cada extremo terminaba por una piecicita de níquel donde había trazada una escala de cinco milímetros subdivididos en décimas partes. Empleaba dicho autor la madera barnizada, creyendo por los experimentos de Zach que los cambios de humedad y temperatura no hacían variar la longitud de las fibras.

La regla de que se sirvió el P. Secchi para medir en Roma, por el procedimiento de Porro, una base sobre la *via Appia*, era bimetalica, como la del Depósito de la Guerra en Francia; pero la componente de acero de esta última estaba reemplazada en la regla romana por una componente de hierro forjado. Hallábase la flexión de esta otra regla, fundándose en principios elementales de focos é imágenes, por medio de una lente colocada en mitad de la regla y de dos cristales planos—con una escala de milímetros uno de ellos y con una raya horizontal el otro—situados en los extremos, paralelamente al plano del borde de la lente.

las dos componentes, y cuando acerca de la exactitud en la colimación de los microscopios abrigan alguna duda, hácenlos girar 180° y los vuelven á leer.

Para señalar sobre el suelo, ya el término de la operación del día, ya los extremos de la base, se emplea una reglita de marfil dividida en medios milímetros, la cual en su cara inferior lleva perpendicular una espiga que entra con exactitud en un agujerito abierto en un disco de cobre sujeto con tres tornillos á la cabeza de una estaca hundida en el suelo, ó incrustado en piedra asentada en construcción firme cuando se trata del principio ó fin de la base. Situado tal agujerito próximamente en la prolongación del eje óptico del microscopio—eje que con sumo esmero se deja vertical,—introdúcese allí la espiga mencionada y dirígese la reglita según la línea que se mide.

Hállase la distancia del centro del agujerito al eje óptico del microscopio leyendo con este instrumento la reglita, cuyas divisiones comienzan á contarse desde un extremo, y volviéndola á leer, después de una media vuelta dada á la misma, á fin de pasar el cero al otro lado. En seguida, para eliminar todo error de colimación en el objetivo, se hace girar el microscopio 180° en azimut y se verifican nuevas lecturas.

Tal es el aparato de Porro, con las mejoras introducidas por el coronel Hossard. Puede verse su descripción detallada en el *Memorial du Dépôt général de la Guerre*, París, 1871. Calculóse que el error probable de cada una de las tres bases, con este aparato medidas en Argelia, es de $\pm 1.0 \mu$.

Del mismo sistema, aunque con otras modificaciones y perfeccionamientos del comandante de ingenieros, después general, D. Carlos Ibáñez, y el capitán de artillería D. Frutos Saavedra, es el aparato para medir bases que perteneció á la Comisión del Mapa de España (1). La longitud de la regla es de cuatro metros,

(1) En 1853 se nombró á dichos señores para proponer el sistema de reglas y microscopios con que debían medirse las bases de la triangulación española, y formado el proyecto y obtenida la aprobación de la Junta Directiva del Mapa, fueron comisionados por el Gobierno para pasar al extranjero á encargar y dirigir la construcción del aparato. Fué ésta confiada

ó más bien de dos toesas. Véase el libro titulado *Base central de la triangulación geodésica de España*, Madrid, 1865, donde se describe minuciosamente la base de Madrideojos, y la obra *Experiencias hechas con el aparato de medir bases*, Madrid, 1859, que contiene la descripción del aparato.

Dividida la base de Madrideojos en cinco trozos, midióse dos veces el central de 2767 metros de longitud, subdividido en 12 secciones de 234 metros (un poco menor una de ellas), constituyendo cada una el trabajo de un día. Las diferencias entre las dos medidas de cada sección en milímetros fueron:

al artista Brunner, de París, quien introdujo micrómetros de hilos móviles y otros mecanismos semejantes á los empleados en anteojos astronómicos. Ni por los autores ni por el constructor se descuidó detalle alguno que redundara en mayor exactitud.

Las dos componentes de la regla están colocadas de plano, una sobre otra, con una separación de 6^{mm}; sus dimensiones son iguales: su sección transversal mide 21^{mm} por 5^{mm}. La de latón está debajo, pero tiene hacia cada extremo sobrepuesta una reglita de platino, cuya cara superior se halla en el mismo plano que la superior de la componente de platino, asomando al efecto por una ventanita abierta hacia el extremo correspondiente. Hay señaladas en esta regla superior 400 partes iguales, centímetros á la temperatura de - 6°,8, y de ellas las seis que caen junto á cada ventanita están subdivididas en 100 partes, decimilímetros á esa temperatura. En partes enteramente idénticas á estas últimas se hallan divididas las reglitas de platino asomadas á dichos huecos.

Un cojinete, afirmado sobre un banco de hierro, sujeta por el centro las dos reglas de platino y latón entre piezas de este último metal oprimidas por tornillos; pero ambas componentes se dilatan y contraen con libertad entre dicho punto y los extremos. De apoyo y guía les sirven para ello otros catorce cojinetes, á trechos iguales afirmados sobre el mismo banco: lo primero, porque tienen cilindros giratorios horizontales donde las componentes descansan; lo segundo, porque tienen además columnitas por entre las cuales pasan las reglas. Son también estas columnitas giratorias y más gruesas arriba que abajo las de un lado, al revés que las del otro, á fin de que tocada cada una solo por una componente, el movimiento longitudinal de una regla no entorpezca el de la otra. Por arriba tiene cada cojinete de apoyo una abertura, y por las de dos contiguos pueden introducirse y descansar sobre la regla de platino los pies de un nivel cuya posición respecto de ellos cabe variar y corregir.

Compónese el banco de una lámina vertical colocada á lo largo y en medio de otra horizontal, sólidamente unidas ambas á los dos lados por

+ 0.23	+ 0.00	- 0.32	- 0.28
- 0.20	- 0.02	+ 0.39	+ 0.36
+ 0.49	- 0.23	- 0.09	- 0.14,

cuya suma de cuadrados es .8765. Luego el error medio de la media entre las dos medidas de este trozo de la base es $\frac{1}{2}\sqrt{.8765} = \pm 0.47$, y el error probable $\pm .32$ milímetros, prueba de que la medida se hizo con suma precisión.

Las dos componentes de la regla son: una de latón y otra de platino, y la longitud se dedujo de 120 comparaciones con la regla núm. 1 de Borda.

catorce escuadras, de hierro como ellas, atornilladas debajo de los respectivos cojinetes. Dos asas á cada lado sirven para transportar el banco, y dos niveles á un lado indican cuándo la posición de la regla es próximamente horizontal. Descansa el banco sobre dos sustentáculos de metal colocados del extremo más próximo á un metro, ó sea á la cuarta parte de la longitud del banco, y apoyados á su vez en fuertes trípodes de madera. Cuenta cada sustentáculo con un eje que puede subir y bajar y que sostiene tres láminas horizontales, corrediza la intermedia en una dirección y la superior en dirección perpendicular: encaminado todo ello á conseguir que en sentido vertical, en el de la longitud y transversalmente se pueda mover la regla. Tornillos, muelles y guías en dichas piezas permiten verificar tales movimientos tan ajustados y tan á pulso como se desee. Cada sustentáculo termina en la parte inferior por un trípode con tornillos de nivel, y éstos son los que se apoyan sobre el trípode de madera.

Para sostener y situar los microscopios, la mira, el anteojo de alineación y el de referencia, se tienen otros sustentáculos de metal, compuesto cada uno de un círculo graduado, fijo á una columna que descansa sobre una combinación de láminas horizontales, corredizas en direcciones perpendiculares, como en los sustentáculos de la regla, y sostenidas á su vez por un trípode con tornillos de nivel para descansar en el sostén respectivo de madera. Como la columna está á un lado del eje del trípode metálico, existe al otro lado un contrapeso. El círculo fijo tiene otro interior, hueco en el centro, y este segundo círculo se puede mover á mano ó por medio de un tornillo. Lleva un pequeño nivel y dos nonios con que se aprecian hasta 30". Alzarse sobre este círculo interior, y participan por lo tanto de su giro, dos montantes donde puede apoyarse cualquiera de los microscopios, la mira, el anteojo de alineación ó el de referencia, pues todos estos instrumentos están provistos de un eje horizontal de la misma forma y tamaño, y sus extremos ó muñones pueden descansar sobre los mismos apoyos. En las cajas talladas en éstos en forma de ángulos constituidos por

Para averiguar los coeficientes termométricos de la regla compuesta empleáronse dos microscopios fijos en un muro, á distancia de cuatro metros uno de otro. Puestos cuidadosamente verticales sus ejes ópticos, y determinadas las lecturas correspondientes á sus centros de colimación, comparábase á una misma temperatura t las dos componentes. Llamando P la longitud de la regla de platino en aquel momento, L la de la regla de latón y e, e' las dilataciones respectivas por un grado, si á la temperatura τ las dos componentes poseían en absoluto igual longitud R , á la antedicha temperatura t sería

$$P = R + (t - \tau) e, \quad L = R + (t - \tau) e'.$$

dos superficies convexas concurrentes hacia abajo tienen los muñones el menor contacto posible, y tornillos y muelles permiten variar un poco la posición de una de dichas cajas ó muñoneras y sujetar ó correr el eje horizontal de los instrumentos mencionados.

Tres microscopios hay destinados á observar la regla. El objetivo acromático de cada uno tiene 56^{mm} de distancia focal; á distancia cinco veces mayor está el ocular, y el aumento total que se produce es de 60 veces. El micrómetro se compone de un retículo formado por dos hilos de araña paralelos y otro perpendicular á ellos, prendidos todos á un bastidor que se mueve obedeciendo á un tornillo cuyo tambor ó cabeza está dividido en 100 partes iguales, numeradas de 10 en 10. La fracción de vuelta correspondiente á cada división supone un recorrido en longitud de una *milésima* de milímetro. Para dejar horizontal el eje de apoyo del microscopio se tiene un nivel con una montura metálica formada por tres lados de un marco rectangular: el nivel descansa sobre el lado intermedio: los dos paralelos terminan en un contrapeso, y por medio de unas piezas en forma de sillas, situadas en la parte media é inferior, se montan sobre dicho eje, dejando entre ellos espacio libre para el tubo vertical del microscopio. Obsérvase una raya de las trazadas en la componente de platino ó en las reglitas sobrepuestas á la componente de latón, dando vuelta al tornillo micrométrico hasta que dicha raya se halle equidistante entre los dos hilos paralelos del retículo.

La mira se compone de dos hilos metálicos cruzados oblicuamente y fijos en un diafragma que puede moverse dentro de una caja cilíndrica cuyas tapas son dos cristales planos. El antejo de alineación, cuyo eje óptico debe quedar horizontal, posee un micrómetro como los microscopios, pero el retículo sólo cuenta con dos hilos de araña perpendiculares: el diámetro del objetivo acromático es de 30^{mm} y su distancia focal de 400^{mm} . En el tubo, á fin de observar objetos próximos ó lejanos sin variar la distancia

Dispuestos los micrómetros de modo que la cabeza del tornillo quedara á la derecha del observador, y avanzara por lo tanto el eje de derecha á izquierda; si a, b eran las lecturas dadas por los microscopios izquierdo y derecho en la regla P ; a', b' las lecturas correlativas en L ; α, β las correspondientes á los centros de colimación, y h, k el valor respectivo de una división del micrómetro en cada microscopio, la distancia Z de dichos centros sería

$$\begin{aligned} Z &= R + (t - \tau) e - h(a - \alpha) + k(b - \beta), \\ Z &= R + (t - \tau) e' - h(a' - \alpha) + k(b' - \beta). \end{aligned}$$

entre el ocular y el objetivo, hay una lente acromática corrediza de 85^{mm} de distancia focal. Del mismo modo, pero con diferentes dimensiones y variación de retículo, está construido el anteojo de referencia, cuyo eje óptico debe quedar vertical. El diámetro del objetivo es de 25^{mm}; su distancia focal de 320^{mm} y la de la lente corrediza de 50^{mm}. El retículo se compone de dos hilos cruzados oblicuamente como en la mira.

Para marcar el punto de referencia al fin de cada jornada ó serie de mediciones se emplea un disco horizontal con un agujero en el centro y tres tornillos por pies. Hay montadas en este disco tres piezas que giran en torno de ejes horizontales: una de ellas, cuando se baja, cierra aquel agujero con una lámina de plata unida á ella; las otras dos piezas terminan cada una en una cuchilla, y como sus ejes de rotación son perpendiculares, cuando se baja una de dichas piezas y alzada luego se baja la otra, sus dos cuchillas trazan una cruz en el metal que ocupe dicho agujero ó que por él asome. La señalada previamente en la lámina de plata sirve de ensayo. Puesto el anteojo de referencia en el centro del círculo del aparato que lo sostiene, y debajo de dicho anteojo encajada en el suelo una piedra con una lámina de latón horizontal incrustada en su cara superior, se coloca sobre la piedra aquel disco y se mueve á mano hasta que el centro de la cruz de ensayo coincida próximamente con el punto de intersección de los hilos del retículo. Levantando entonces la lámina de plata, se deja al descubierto la de latón, sobre la cual las cuchillas, puestas en juego, trazan la cruz cuyo centro ha de servir de punto de referencia.

Tal es el aparato con que en 1858 se midieron en la llanura de Madrid, provincia de Toledo, los 14 $\frac{1}{2}$ kilómetros que alcanza la base central de la triangulación española. Pero á fin de conservar, sin riesgo de que por el uso se deteriorase, la mencionada regla como unidad primitiva de longitud de las demás bases que los trabajos geodésicos de nuestro país demandaran, se reemplazó desde 1865 dicho aparato por otro, ideado por uno de los autores de aquél, D. Carlos Ibáñez, y construido en París por

Pero eliminando $t - \tau$, se tenía

$$Z = R - h(a - \alpha) + k(b - \beta) + \{h(a' - a) - k(b' - b)\} \frac{e}{e' - e};$$

por donde se ve que haciendo la pequeña cantidad $Z - R = z$ y escribiendo $e = y(e' - e)$, la comparación de ambas reglas daba una ecuación de la forma

$$z + dy + c = 0.$$

Variada, pues, artificialmente la temperatura común de las dos componentes; permaneciendo mientras tanto á igual distancia

los hermanos Brunner, hijos del artista que con tanta habilidad llevó á cabo la obra primera. Este segundo aparato es menos costoso, requiere poco personal, permite gran rapidez en la medición, y aunque la exactitud con él es menor que la obtenida con el precedente, basta para el objeto, pues supera á la alcanzada con otros aparatos de justo renombre. He aquí los principales pormenores en que difiere del primitivo de Ibáñez y Saavedra.

La regla es de un solo metal como la de Struve y tiene como ella termómetros de mercurio. Se parece al banco del primer aparato, pues consta de dos láminas de hierro de 7^{mm} de espesor, una vertical y otra horizontal, unidas por trece pares de escuadras de la misma materia, atornilladas á las láminas: á cada lado de la regla hay dos asas. En el canto superior, hacia los extremos, tiene la lámina vertical incrustadas dos hojitas de plata, cada una con una raya perpendicular á la longitud de la regla. La distancia entre ambas rayas difiere muy poco de 4 metros. Otras hojitas de plata, también con rayas, dividen esa distancia en ocho partes iguales. A un lado de la regla, á trechos iguales, se ven cuatro termómetros centígrados, bien calibrados, con sus tubos en contacto con la lámina vertical, medio introducidos en ella los depósitos y rodeados de limaduras de hierro, en cajas cuyo fondo es dicha lámina y la tapa un cristal que deja ver el termómetro respectivo. Cada grado abraza 3^{mm} y está dividido en cinco partes. El nivel para fijar la horizontalidad de la regla ó medir su leve inclinación es de la misma traza que el del aparato primitivo, destinado á igual objeto, y se coloca en mitad del canto superior de la regla, donde se asegura con dos ganchos, uno á cada lado.

Los sustentáculos de la regla son semejantes á los del aparato anterior; pero los de los microscopios, mira y anteojos son más simétricos respecto al eje del tripode metálico. La mira, el antejo de alineación y el de referencia pueden reemplazarse sobre los mismos montantes, pero el microscopio ocupa en cada sustentáculo diferente sitio que esos instrumentos. En efecto, á un lado de dichos apoyos, sobre la lámina que los sustenta,

los dos microscopios, con la comparación de aquéllas, repetida en los diversos cambios, se tenía una serie de ecuaciones de la forma antedicha, en las cuales las cantidades d y c figuraban sucesivamente con distinto valor. Pero no podían suponerse en absoluto inmóviles los dos microscopios sino en breves intervalos, y admitiendo que en las i primeras observaciones z tuviese el valor z_1 , en las i siguientes el valor z_2 y así prosiguiendo; señalando con subíndices correlativos las cantidades dadas por la observación, resultaba, eliminadas las z , la ecuación

$$y + \frac{(d_1)(c_1) + (d_2)(c_2) + (d_3)(c_3) \dots - i(dc)}{(d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2 \dots - i(d^2)} = 0,$$

existe una escuadra metálica, atornillada por el lado horizontal á esa lámina, y provista en el vertical de una corredera por donde se sube y baja con lentitud por medio de un tornillo una doble escuadra, metálica también, cuyo lado horizontal superior sirve de brazo para sostener el microscopio, y el inferior de índice, pues lleva incrustada una hojita de plata con una raya que debe quedar en la prolongación de una de las trazadas en los extremos de la regla. Hállase esa raya del índice exactamente en el plano que determinan el eje horizontal de las muñoneras de los montantes y el eje vertical de giro del sustentáculo, y á la misma distancia de este último eje en cada sostén de esta clase. La ampliación de los microscopios es de 20 diámetros.

El instrumento destinado á marcar el punto de referencia en la lámina de latón de la piedra enterrada previamente en el suelo es más sencillo que en el primer aparato. El disco horizontal, en vez de cuchillas, lleva en la parte superior un cilindro vertical hueco que deja ver, mirando por encima, una hojita de plata incrustada en el disco, y en ella un agujero cuyo centro cae en la prolongación del eje de aquel cilindro. El retículo del antejo de referencia consta de tres hilos paralelos cruzados perpendicularmente por otros tres paralelos, y valiéndose de los cuatro cuadraditos así formados en la parte media se puede centrar con precisión dicho agujero sobre la cruz interior. Logrado esto, se deja inmóvil el disco, é introduciendo en el cilindro un punzón de acero, que un muelle guía mientras tanto, se le baja hasta señalar en el latón de la piedra una marquita cónica, que puede hacerse luego más visible, si se quiere, grabando á mano desde ese punto cuatro rayas que formen una cruz.

Es verdad que al medir con este aparato una base por segunda vez, con objeto de calcular el error probable, puede ocurrir por variación de la temperatura y por tanto de la longitud de la regla, que en la posición postrera de ésta quede algún espacio entre la raya extrema de la misma y la raya

en la cual la suma de los cuadrados de los coeficientes que poseen las cantidades medidas c es el valor recíproco de

$$(d^2) = \frac{1}{i} \{ (d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2 + \dots \}.$$

Conociase, por lo tanto, y con su error probable, y al medir la base podía hallarse desde luego la distancia entre los centros de cada dos microscopios consecutivos por la siguiente fórmula: $Z = R + \gamma + \delta y$. En el aparato español el error probable del valor de R , inferido de las comparaciones con la regla de Borda, núm. 1, es de $\pm 0^{\text{mm}}.001$.

El adjunto grabado muestra la base de Madridejos con su red

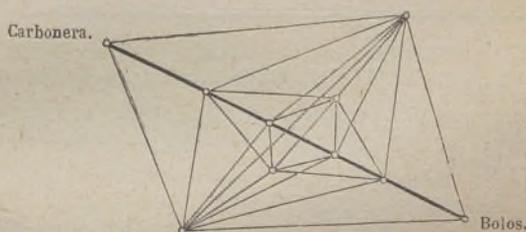


Fig. 54.

de comprobación formada por los cinco trozos de la base y cuatro puntos fuera de ella. De los ángulos observados en las diez

que lleva el índice del microscopio y que se sitta en la vertical del punto marcado en el suelo. Pero tal inconveniente se halla prevenido con una reglita adicional de plata, dividida en milímetros y decimímetros, y otra, también de plata y dividida del mismo modo, pero de mayor longitud, 26 centímetros, por si aquella resultase corta para el objeto. Ambas poseen montura adecuada para quedar afirmadas en la regla y corridas hasta el punto que convenga.

Con el aparato de Ibáñez se han hecho también mediciones en Suiza. El aparato primero de Ibáñez y Saavedra ha sido reproducido por la misma casa constructora, Brunner, para Egipto, Prusia, y en fecha reciente, Francia, donde en 1890 se midió por el coronel Bassot y el comandante Defforges, con aparato ajustado al mismo modelo, la llamada *base de Paris*, de 7726 metros, en el camino de París a Fontainebleau, entre Villejuif y Juvisy. En la regla francesa la componente de platino contiene aleado este metal con una décima parte de iridio, y posee por tanto la misma composición que el nuevo metro prototipo internacional.

estaciones, unidos á la longitud hallada en el segmento central, podían deducirse por cálculo las de los otros cuatro; y hecho así, las diferencias entre las longitudes dadas por medición directa y las mismas calculadas fueron las siguientes:

TROZO	MEDIDO	CALCULADO	DIFERENCIA
	m.	m.	m.
I.	3077.459	3077.462	- 0.003
II.	2216.397	2216.399	- 0.002
III.	2766.604	"	"
IV.	2723.425	2723.422	+ 0.003
V.	3879.000	3879.002	- 0.002
Suma.	14662.885	14662.889	+ 0.004

CAPÍTULO VIII

INSTRUMENTOS Y OBSERVACIONES

1.

No es posible, sin muchos grabados, dar idea de las diversas formas con que se han construido los teodolitos destinados á operaciones geodésicas y astronómicas. En tres clases pueden dividirse: 1.^a, los altazimutarios, á propósito tanto para operaciones terrestres como astronómicas; 2.^a, los que sirven para hallar diferencias de azimutes entre objetos terrestres y hallar también azimutes absolutos, pero no latitudes, y 3.^a, los dispuestos sólo para medir esas diferencias ó ángulos terrestres. De tales instrumentos, los de mayor tamaño se leen con microscopios micrométricos y los de menores dimensiones con nonios. En unos teodolitos los microscopios del círculo horizontal giran á la par que el anteojo, permaneciendo mientras tanto inmóvil el círculo; en otros gira éste con el anteojo y los microscopios están fijos.

De la segunda clase de las tres mencionadas son los dos grandes teodolitos de Ramsden, en el primer capítulo de esta obra descritos, y los microscopios con que se lee su círculo horizontal permanecen inmóviles. El coronel Everest disponía, para el vasto estudio trigonométrico de la India, de dos teodolitos altazimutarios, con círculos horizontales de tres pies (91.4 centímetros) y círculos verticales de 18 pulgadas (45.7 centímetros), que se leían con cinco microscopios los primeros y con dos los últimos. Aparte de estos teodolitos contaba con dos *círculos astronómicos*, también altazimutarios, provisto cada uno de dos círculos unidos, verticales, paralelos y divididos en intervalos de 5'; el anteojo se hallaba entre ambos y tenía 54 pulgadas (137.2 centímetros) de distancia focal y 3.46 pulgadas (8.79 centímetros) de abertura ó diámetro en el objetivo; léanse los dos círculos verti-

cales, cuyo diámetro era de 36 pulgadas (91.4 centímetros), uno con dos microscopios fijos y otro por el lado opuesto con dos mo-

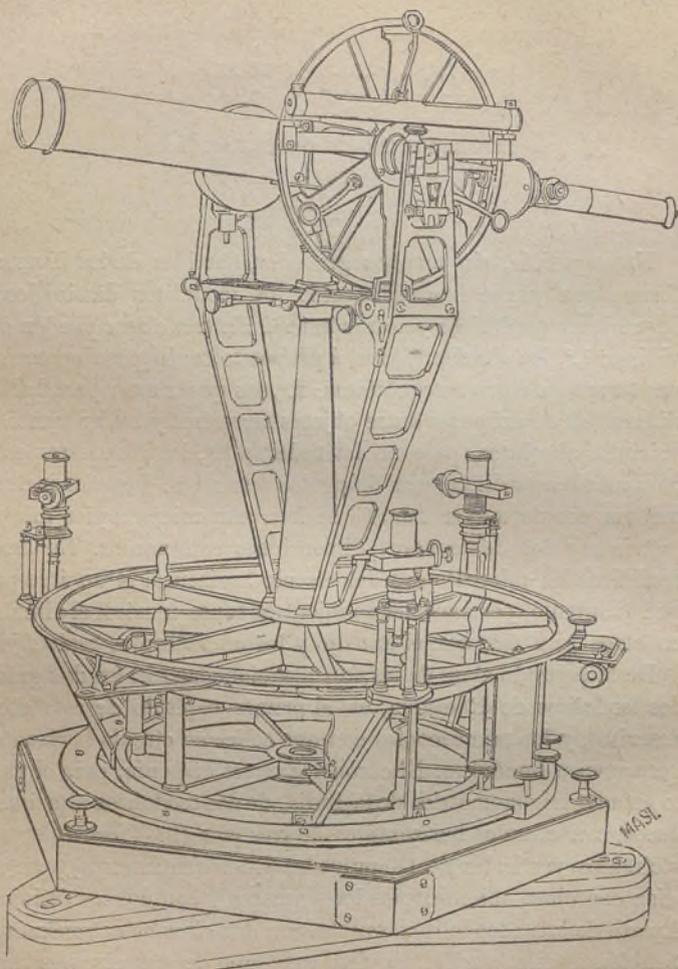


Fig. 35.

vibles. Empleábanse estos instrumentos para determinar latitudes, midiendo simultáneamente en dos estaciones distancias zenitales de estrellas en el meridiano.

En la triangulación principal de la Gran Bretaña é Irlanda se usaron, además de los dos mencionados teodolitos de Ramsden, otro menor del mismo artífice, de 18 pulgadas de diámetro, que la figura 35 representa, y un altazimutario de Troughton y Simms, dibujado en la figura 36. Posee este instrumento un sustentáculo de repetición y un círculo horizontal de dos pies (61 centímetros) de diámetro, enlazado por seis radios cónicos con el eje del instrumento, de acero este eje y cónico también. Un cuerpo cilíndrico de 8 pulgadas (20 centímetros) de diámetro, con seis brazos que sostienen otros tantos microscopios verticales, hueco en el centro, está colocado sobre el antedicho eje de acero y gira en torno suyo. Desde una gruesa lámina metálica, puesta encima de ese cuerpo y fija á él, se elevan dos columnas coronadas por cojinetes en forma de Y que sustentan los espigones del eje de rotación del anteojo: son estas columnas de bastante altura para dejar que en el plano vertical gire el anteojo 180°. Tiene éste de distancia focal 27 pulgadas (68.6 centímetros) y de abertura 2.12 pulgadas (5.38 centímetros), y se halla entre dos círculos verticales y paralelos de 15 pulgadas (38 centímetros), concéntricos con el eje de rotación de aquél, al cual acompañan en su giro. Tanto el círculo horizontal como estos dos verticales están divididos en espacios de 5', leyéndose los dos últimos con microscopios que cruzan los pilares. El instrumento descansa por tres tornillos de nivel sobre el sostén repetidor, no usado en realidad para el objeto que indica su nombre (*), sino para correr el cero del círculo. Todo el instrumento, con el antedicho sustentáculo inclusive, se apoya en el trípode de asiento por medio de tres tornillos de nivel. Un microscopio telescópico vertical que cruza, según el eje, la parte inferior del instrumento, sirve para centrarlo sobre la marca de la estación.

La Dirección de la costa de los Estados Unidos emplea teodolitos con círculos cuyo diámetro es de 24 y aun de 30 pulgadas (61 y 76 centímetros). Los manejados en el continente de Europa suelen ser de menores dimensiones. Struve tenía para su pro-

(*) Sin embargo, de 1828 á 1829 se hicieron por vía de prueba unas pocas observaciones de repetición.

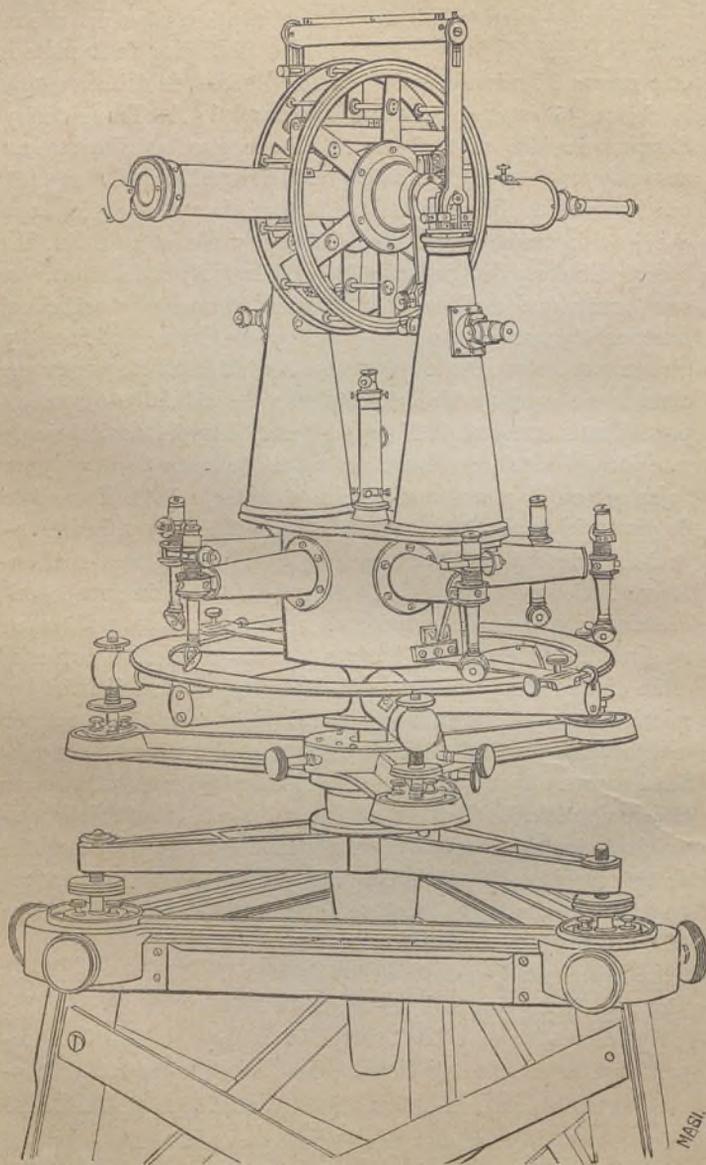


Fig. 56.

pio uso, cuando midió el gran arco de Rusia, un *instrumento universal*, obra de Reichenbach, equivalente á un altazimutario, cuyo círculo horizontal poseía de diámetro 33 centímetros y el círculo vertical 28 centímetros. Lefanse en ambos hasta 4" por medio de cuatro nonios, y segundos midiendo á ojo. Un prisma en mitad del anteojo reflejaba los rayos luminosos perpendicularmente á su primera dirección, y los encaminaba por uno de los brazos, hueco al efecto, en cuyo extremo el ocular se hallaba. El aumento ó potencia óptica era de 60, la distancia focal de 46 centímetros y la abertura de 4.44 centímetros. Al círculo horizontal iba unido por debajo un anteojo de comprobación que revelaba cualquier cambio producido en este círculo mientras se manejara el anteojo superior. Servía tal instrumento, no sólo para determinar ángulos terrestres, sino también el azimut, la hora y la latitud. De él decía Strave que «no obstante su compleja construcción, era, tanto en su conjunto como en sus pormenores, de una exactitud matemática, y manejado por atento observador que con escrupulosidad lo estudiara, nada dejaba que desear». En verdad, los trabajos hechos por dicho geodesta demuestran suma precisión.

En la triangulación actual de España se emplean para las operaciones terrestres teodolitos de Ertel y de Repsold, cuyos círculos tienen de diámetro 31.7 y 36.8 centímetros, y para las observaciones astronómicas los dos instrumentos siguientes: un teodolito de Repsold con círculo horizontal de 31.7 centímetros y el vertical de 26 centímetros, en los cuales, con un par de micróscopios micrométricos que lleva cada uno, se leen hasta dos segundos, y un *anteojo de pasos*, instrumento cuyo anteojo, acodado ó doblado en ángulo recto como los de los otros aparatos, tiene distancia focal de 80 centímetros y objetivo de 6.8 centímetros de diámetro. La longitud del eje de rotación es de 50 centímetros. Por un mecanismo adecuado se efectúa en pocos segundos el *cambio* ó inversión del anteojo sobre los cojinetes, en forma de Y, tallados en dos columnas sostenidas por un círculo horizontal de 55 centímetros de diámetro. Existe también un círculo vertical, dividido como el anterior directamente de 10 en 10', y de minuto en minuto con auxilio de un par de nonios, Pero

ambos círculos sirven sólo para orientar y dirigir el anteojo.

Suelen descansar los tornillos de nivel de los teodolitos en tres canalitas convergentes; mas á veces se hace que un tornillo entre en un agujerito cónico, otro quede en una canalita dirigida hacia el primero y el último se apoye sobre un plano, para que de tal manera el primero no se corra, el segundo sólo en una dirección pueda moverse y el tercero quede libre.

Dispónense de varios modos los hilos de araña que forman el *retículo* colocado en el foco común del objetivo y ocular. Los al-
tazimutarios, como la mayoría de los instrumentos astronómicos, cuentan con cinco ó siete hilos verticales equidistantes, cruzados por uno ó tres horizontales. En los anteojos destinados á observaciones terrestres se pone una cruz aguda bisecada por un

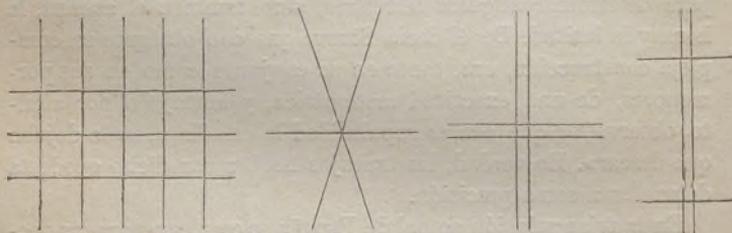


Fig. 37.

hilo horizontal, ó bien dos hilos verticales próximos cortados por dos horizontales, con igual ó mayor separación, que cierran con aquéllos un cuadradito de 40'' ó 50'' de lado ó un rectángulo también pequeño. Al objeto que se mire debe apuntarse de modo que resulte en el cruzamiento de los hilos ó en el centro del cuadradito ó rectángulo. Los microscopios micrométricos poseen también una cruz para bisecar las rayas de graduación, ó dos hilos paralelos próximos entre los cuales, y equidistantes de ellos, deben las antedichas quedar situadas.

La línea de colimación, es decir, la determinada de una parte por el centro del objetivo y de otra por el hilo medio ó el punto de intersección de los hilos en cruz ó el centro del cuadradito ó rectángulo, debe ser perpendicular al eje de rotación del anteojo; mas suele haber en esto algún pequeño error, y como

consecuencia, al girar el anteojo, esa línea no describe un plano, sino una superficie cónica. Cabe á su vez otro error porque la línea señalada por las muñoneras, en que los brazos del anteojo descansan, no sea rigurosamente horizontal. Puede asimismo producirse error porque los muñones de los mencionados brazos no posean con exactitud igual diámetro. Debe, pues, buscarse la compensación ó averiguarse escrupulosamente la cuantía de estos pequeños errores. Ha de atenderse también á otras condiciones. Acompañan á los grandes teodolitos dos niveles muy sensibles, montado uno en el círculo vertical y otro en el eje horizontal ó de rotación del anteojo; y es menester que en ambos niveles se determine con sumo cuidado el valor de una división, y esto á diferentes temperaturas, pues con ellas puede variar. Suelen leerse segundos con los microscopios micrométricos, pero han de comprobarse éstos de vez en cuando para corregir las lecturas si hubiese necesidad.

Los errores de graduación de un círculo son de dos clases: periódicos y accidentales. Están dados los primeros por la fórmula

$$E_{\theta} = a_1 \sin (\theta + b_1) + a_2 \sin (2\theta + b_2) + a_3 \sin (3\theta + b_3) + \dots,$$

designando por E_{θ} el error de graduación correspondiente á la lectura θ del círculo. El error de excentricidad puede contarse como un error de graduación expresado por el primer término de esta serie (1).

(1) Si en el triángulo que en el círculo dividido determinan el centro verdadero C, el aparente C' y un punto T de la circunferencia, al cual corresponde la graduación θ , se traza desde C' la perpendicular al lado TC, se tendrá, llamando e el lado CC', r el CT, ε el ángulo CTO', a la graduación del punto A donde corta al limbo la recta CC' prolongada y e' la razón $e : r$,

$$\tan \varepsilon = \frac{e \operatorname{sen} (\theta - a)}{r - e \cos (\theta - a)} = \frac{e' \operatorname{sen} (\theta - a)}{1 - e' \cos (\theta - a)}$$

Pero como e' es un número muy pequeño, la serie que proviene del desarrollo de ε , y que en la fórmula del texto resulta comprendida, es tan convergente que basta con el primer término, esto es:

$$\varepsilon = e' \operatorname{sen} (\theta - a).$$

En general, ya procedan de esta causa los errores de división ó de estar

Es fácil demostrar que cuando el círculo se lee con i microscopios equidistantes, la expresión del error que afecta al promedio de las i lecturas se limita á los términos que contienen $i\theta$ y los múltiplos de $i\theta$ (*). Si hubiera, por ejemplo, tres microscopios, sería el error del promedio de las lecturas

$$\frac{1}{3} \{ E_0 + E_{0+120} + E_{0+240} \} = a_3 \sin(3\theta + b_3),$$

suponiendo la serie acabada en el término con a_3 . No se podría en tal caso reducir más el error combinando sólo las tres lecturas, porque ese término sería el mismo para cada uno de los tres microscopios. Mas por medio de dos colimadores, en dirección perpendicular uno de otro, se determinarían a_3 y b_3 , haciendo sobre el círculo lecturas que del ángulo entre ellos fueran medida.

El centro de cada estación trigonométrica suele indicarse por una marca trazada con precisión en la cara superior de un trozo de piedra encajado en el suelo á bastante profundidad. Cuando eso se verifica en la línea de la base, pónense marcas microscópicas. De la escrupulosidad con que los teodolitos se dejan centrados sobre los puntos ó rayitas que indican los centros de las estaciones depende la exactitud en el resultado de la triangulación. Las señales elevadas en ellas deben ser simétricas respecto de la vertical que pase por el centro, para que apuntar á la señal equivalga á observar la plomada que sobre la marca de ese centro se suspendiese. Empléase para estaciones lejanas el instrumento llamado *heliotropo*, que centrado en la estación que desde otra se mira refleja los rayos solares hacia el teodolito dirigido en ésta hacia aquélla. El heliotropo usado por los geodestas ingleses se reduce á un espejo circular provisto de dos ejes de rotación, uno vertical y otro horizontal, y se deja al cuidado de un ayudante

levemente inclinado el círculo en el momento de efectuarla ó de cualquier otro motivo, si la división se hizo con cuidado, los términos de la fórmula del texto disminuyen con rapidez, y desde cierto término en adelante es dado prescindir.

(*) En efecto, es nula la suma de senos ó de cosenos, de arcos que tienen el mismo origen y terminan en puntos que dividen la circunferencia en partes iguales, pues dichos senos ó cosenos son proyecciones sobre un mismo eje de las raíces de la ecuación $x^i - 1 = 0$.

que orienta é inclina el espejo de modo que los rayos reflejados salgan siempre dirigidos hacia el teodolito de la otra estación.

Debe descansar el teodolito sobre base de mucha estabilidad. Lógrese esto de varios modos, según la naturaleza del terreno: por lo común basta clavar en el suelo, tan hondas como sea posible, fuertes estacas, que cortadas después á flor de tierra sirven de apoyo inmediato al trípode ó sostén del instrumento. Este debe quedar á cubierto dentro de un observatorio cuyo piso sea independiente de la base en que aquél descansa. A veces, para dominar puntos lejanos, es menester colocar el teodolito sobre un tablado de 12, 18 y aun 24 metros de altura: destinase en tales casos para el observatorio otro tablado exterior, como se ve en la figura 38 (*).

Obsérvanse las estaciones ó vértices por el siguiente método: En el centro y á nivel el instrumento, si A, B, C ... H, K son los vértices tomados por orden de azimut, biseCASE A y léense los microscopios; hácese lo mismo con B, y sucesivamente con las otras estaciones C ... H, K; después desde K se continúa el giro del antejo en el mismo sentido hasta A, que se observa por segunda vez. Constituye esto una vuelta del horizonte, ó lo que los geodestas ingleses llaman *arc*, los franceses *mise* y los alemanes *salz*. Pero también se acostumbra, una vez observados dichos puntos en el orden A, B, C ... H, K, invertir en seguida el giro del antejo y observar de nuevo, en orden retógrado, K, H ... C, B, A, por cuyo medio cada vértice se observa por duplicado.

A fin de eliminar los errores de graduación suelen reiterarse los arcos corriendo el círculo horizontal: cambian unos observadores el cero ú origen de las lecturas después de cada arco, otros después de haber leído cierto número de ellos conservando el mismo origen. Suponiendo que mientras se tome un arco—lo cual se ejecuta en el menor tiempo posible—permanezca en realidad fijo el círculo, compondrán el error probable en la observación de un ángulo los errores en la bisección de los objetos á que

(*) El tablado que esta figura representa, de 21 metros de elevación, fué construído por el sargento Beaton, I. R.

el anteojo se apunte, los errores en las lecturas del círculo y los errores de graduación. Si α es el error probable de una bisección, β el del promedio de las lecturas con los microscopios y γ el error

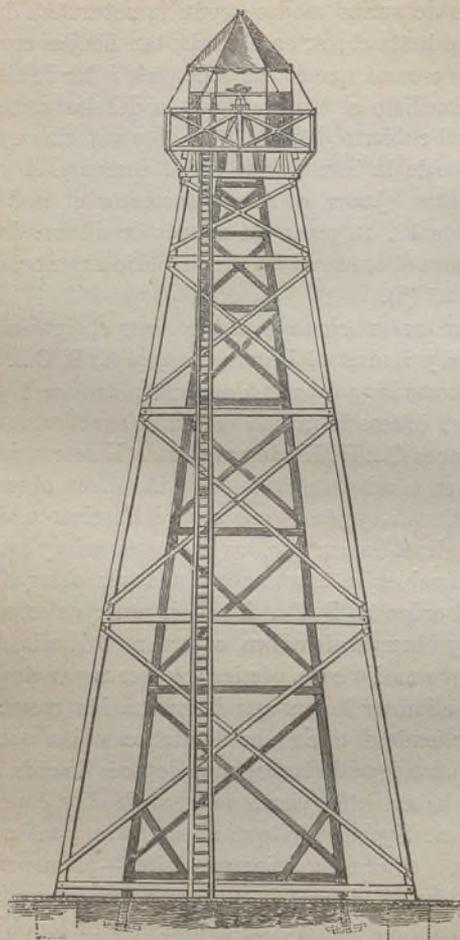


Fig. 38.

cometido en el ángulo por la situación no exacta de las rayas divisorias á que en tal observación se haga referencia, el error del ángulo medido por n arcos en idéntica posición del círculo será

$$\gamma \pm \sqrt{\frac{2}{n} (\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Mas deduciendo el ángulo de n medidas en cada una de las m posiciones del círculo, el error probable será

$$\pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2}{mn}},$$

advirtiendo que γ , cuya magnitud sólo depende de errores accidentales de división, es una constante especial para cada instrumento.

Con uno de muy esmerada construcción, observando en circunstancias propicias, el error probable de una bisección, incluyendo el padecido en la lectura del círculo, es $\pm 0''.20$. El error probable en la medida de un ángulo depende del instrumento, del observador y de los números n , m . En los mejores trozos de la triangulación de la India era de $\pm 0''.28$; en las observaciones hechas por Struve en las provincias del Báltico era de $\pm 0''.38$.

Destruído en el incendio de la Torre de Londres el sector zenital de Ramsden, que tenía un anteojo de 8 pies (2.44 metros) de longitud, se reemplazó para los trabajos geodésicos de Inglaterra por el sector zenital de Airy.

Este instrumento, representado en la figura 39, consta de tres partes: la armazón exterior, el cuerpo giratorio y la caja del anteojo. La armazón se compone de cuatro piezas, fundidas por separado: una artesa rectangular, puesta al revés y provista de tornillos de nivel, la cual sirve de zócalo; dos pies derechos de ancha base atornillados sobre dicha artesa, y un travesaño que por encima los une. Desde el centro de la artesa se eleva un cono y por mitad del travesaño cruza hacia la parte inferior un tornillo cuya punta es también un cono; los vértices de ambos constituyen los quicios del cuerpo giratorio.

Es éste de metal de fusil fundido en una pieza; su forma la de una artesa puesta de pie, reforzada por dentro con sólidas costillas y provista á cada lado de dos salientes para que en su giro quede detenida al tropezar con uno de los pies derechos. En el centro, por el frente ó parte exterior, hay un anillo real-

zado de unas nueve pulgadas (23 centímetros) de diámetro, donde entra el eje de rotación de la caja del antejo. Concéntrico con tal anillo, á cada extremo del cuerpo giratorio se ve un limbo graduado con radio de 20.5 pulgadas (52.1 centímetros) y divisiones de 5' en 5' grabadas en plata. Hay también á cada extremo un limbo realzado, más toscamente dividido, donde se aprieta la mordaza que asegura el antejo á la distancia zenital apetecida. En

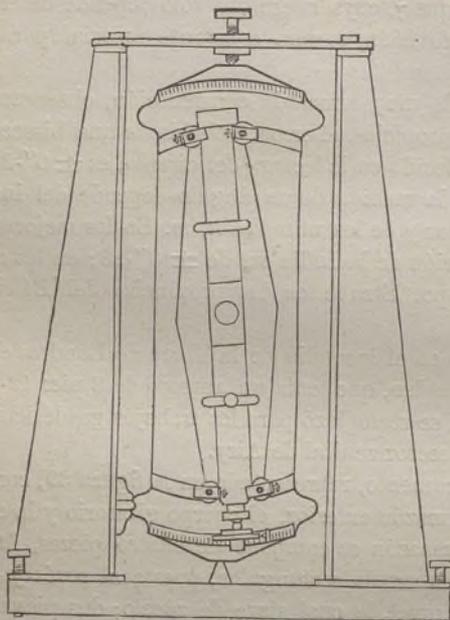


Fig. 59.

la parte opuesta del cuerpo giratorio van montados tres niveles.

La caja del antejo gira en un plano vertical. Forma una sola pieza con ella un anillo, montura del objetivo, y á dicha caja acompañan también el ocular y cuatro microscopios micrométricos, cuyos huecos están abiertos en el metal. Los microscopios son como los de costumbre: córtanse los hilos en ángulo agudo y recorren unos 10 minutos sobre el limbo graduado.

Componen el retículo del antejo cinco hilos meridianos, sos-

tenidos por un bastidor fijo, y un solo hilo perpendicular á ellos, que obedece á un tornillo micrométrico. No teniendo el tubo del anteojo otro objeto que resguardar del polvo, no sostiene ninguna pieza esencial del instrumento, si se exceptúa un sencillo aparato para graduar la cantidad de luz que ha de hacer visibles los hilos, merced al cual, dando vuelta á un tornillo, se agranda ó reduce el agujero por donde entra aquélla. La distancia focal del anteojo es de 46 pulgadas (1.17 metro), el diámetro del objetivo de 3.75 pulgadas (9.5 centímetros) y de 70 veces el aumento que suele usarse.

Averiguado con escrupulosidad, por observaciones de pasos de estrellas por el norte y sur del zenit, el desvío, pequeñísimo por lo común, del plano del instrumento respecto del meridiano, y puesto el eje vertical ó tan inmediato á esta posición como sea posible, el observador coloca el anteojo próximamente á la distancia zenital de la estrella esperada, lo amordaza y antes de que entre el astro en el campo visual lee los cuatro microscopios micrométricos y los niveles. Cuando la estrella aparece, la biseca con el micrómetro del retículo en uno de sus hilos, anota el número de orden de éste y consigna también la lectura del micrómetro. Suelta entonces el anteojo, da al cuerpo giratorio 180° de vuelta en torno del eje vertical para que la cara situada antes á Oriente quede ahora á Occidente. Pone otra vez el anteojo próximamente á aquella distancia zenital, lo amordaza y de nuevo con el micrómetro del retículo biseca la estrella en un hilo, por lo común el mismo donde antes la observó. Lee después este micrómetro, los otros cuatro y en la parte opuesta los niveles. Todo esto constituye la doble observación.

Hállase á cuánto asciende el desvío azimutal comparando los intervalos entre las horas anotadas de los pasos de estrellas septentrionales y meridionales con las diferencias de las mismas en ascensión recta (¹). Si Δ es el exceso de la diferencia en ascensión

(¹) En el triángulo cuyos vértices son el polo celeste P, la estrella S y el zenit Z, y cuyos lados valen respectivamente $PZ = 90^\circ - \varphi$, $PS = 90^\circ - \delta$, $SZ = z$, y los ángulos opuestos á estos dos últimos, el $PZS = \alpha$ y el $ZPS = h$, se tiene

recta de dos estrellas sobre el intervalo hallado entre sus pasos, δ , δ' las declinaciones de las mismas y φ la latitud del lugar donde se halle instalado el instrumento, el desvío azimutal α en segundos de arco será, expresando Δ en segundos de tiempo,

$$\alpha = \frac{15 \Delta \cos \delta \cos \delta'}{\cos \varphi \operatorname{sen} (\delta - \delta')}.$$

La corrección que á causa de esto debe hacerse en la distancia zenital z es (1):

$$\operatorname{sen} h = \tan \alpha (\tan \delta \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos h).$$

Pero si la estrella está próxima al meridiano y entre P y Z, serán pequeños los ángulos α y h y podrán reemplazarse sus senos y tangentes por los arcos y sus cosenos por la unidad, resultando con esto

$$h = \alpha (\tan \delta \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi).$$

A su vez, si otra estrella se halla próxima al meridiano, pero al otro lado de éste, al sur de Z y en el mismo plano vertical que la anterior, se tendrá, sobrentendiendo en h' valor negativo,

$$h' = \alpha (\tan \delta' \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi).$$

Restando ambas expresiones resulta

$$h - h' = \alpha \cos \varphi (\tan \delta - \tan \delta').$$

Pero si A , A' son las ascensiones rectas de las dos estrellas y T , T' las horas de sus pasos por el plano vertical donde la observación se verifica, será

$$\frac{h - h'}{15} = T - A - (T' - A') = A' - A - (T' - T) = \Delta.$$

Sustituyendo este valor y despejando α , se obtiene la fórmula del texto.

(1) En el triángulo citado en la nota precedente se tiene también

$$\operatorname{sen} \delta = \cos z \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} z \cos \varphi \cos \alpha,$$

ó bajo otras formas

$$\operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} (\varphi + z) = -2 \operatorname{sen} z \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\delta - \varphi - z) \cos \frac{1}{2} (\delta + \varphi + z) = -\operatorname{sen} z \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Pero si la estrella es de las que pasan por el meridiano, entre el polo y

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha \text{ sen } z \cos \varphi}{\cos \delta \text{ sen } 2''}$$

Y la corrección en la misma, por causa de la distancia i á que esté del meridiano el hilo donde la estrella se observe, es (1):

$$\pm \frac{i^2}{2} \tan \delta \text{ sen } 1'',$$

aplicando el signo superior á las estrellas que pasen al sur del zenit y el inferior á aquellas cuyo paso se efectúe al norte.

Con este sector se hallaron las latitudes de 26 estaciones de la triangulación principal de la Gran Bretaña é Irlanda, pero mayor número todavía se han determinado allí con el *anteojo zenital*. Este instrumento, de construcción sencillísima y fácil transporte, está representado en la figura 40. El anteojo, de 76 centí-

el zenit, será, llamando z_0 su distancia zenital en dicho paso, $\delta - \varphi = z_0$, y en su consecuencia

$$\begin{aligned} \delta - \varphi - z &= z_0 - z = \Delta z, \\ \delta + \varphi + z &= \delta + \varphi + z_0 - \Delta z = 2\delta - \Delta z. \end{aligned}$$

Luego aquella ecuación puede escribirse de este modo:

$$\text{sen} \frac{\Delta z}{2} \cos \left(\delta - \frac{\Delta z}{2} \right) = - \text{sen } z \cos \varphi \text{ sen}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Esto sentado, si la estrella se halla próxima al meridiano, será $\frac{1}{2} \Delta z$ arco pequeño, y se podrá reemplazar su seno por este arco y el coseno por la unidad. Como además α será también pequeño, se podrá sustituir $\text{sen} \frac{\alpha}{2}$ por $\frac{1}{2} \text{sen } \alpha$. Con todo ello, y prescindiendo en el primer miembro del término de segundo orden, dicha ecuación se convierte entonces en

$$\Delta z = - \frac{\text{sen}^2 \alpha \text{ sen } z \cos \varphi}{2 \cos \delta}.$$

La misma se obtiene para una estrella que pase al sur del zenit, cuando la observación se verifica en el vertical que forma con el meridiano el pequeño ángulo α .

La fórmula del texto es esta misma, expresada en segundos, pues con suficiente aproximación es $2 \text{ sen } 1'' = \text{sen } 2''$.

(1) Llamando p la distancia polar de la estrella, y $p - \Delta p$ la proyección de este arco sobre el meridiano cuando se ve la estrella sobre el hilo lateral que dista de dicho plano el arco i , se tiene

$$\cos p = \cos (p - \Delta p) \cos i;$$

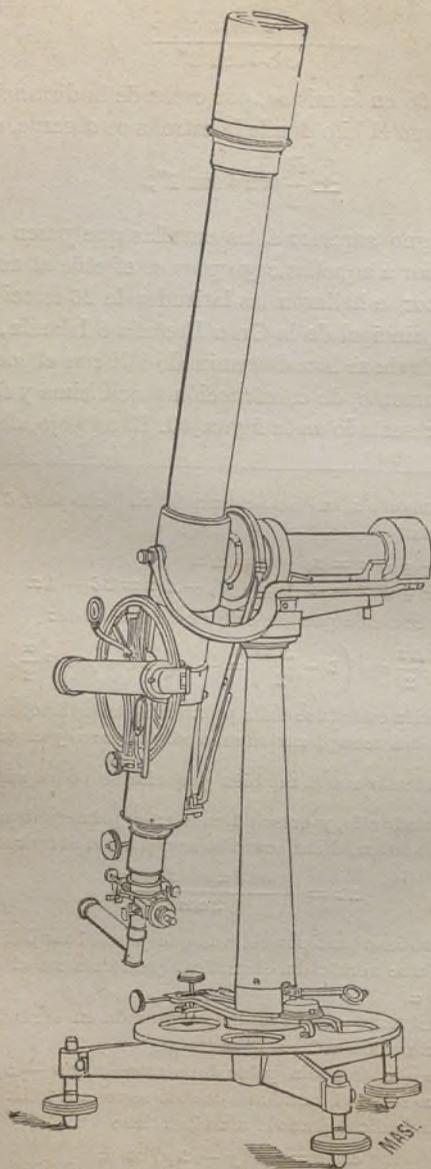


Fig. 40.

metros de longitud, gira en torno de un eje horizontal corto, en uno de cuyos extremos se halla fijo y en el otro equilibrado por un contrapeso, debiendo en ese giro describir el eje óptico un plano vertical: el del meridiano cuando las observaciones se verifiquen. Dicho eje de rotación está sostenido por una columna hueca ajustada á otra maciza de acero de 38 centímetros de altura, sustentada esta última por un trípode con tornillos de nivel y provista en la parte inferior de un círculo azimutal, concéntrico con ella, destinado á orientar el anteojo. Posee éste á su vez un círculo vertical para su situación respecto del zenit, y lleva además un nivel muy sensible. Consta el retículo de los cinco hilos de pasos que se acostumbra poner, cruzados por otro hilo, que obedece á un tornillo micrométrico de grande recorrido, con el cual puede medirse en arco zenital un ángulo de 30'. En la lámina del círculo de orientación ú horizontal existen cuatro agujeros circulares para que, dirigido por uno de ellos el anteojo al nadir, se corrija la colimación, lo cual se hace valiéndose de un ocular de Bohnenberger y de un vaso de mercurio.

Antes de tomar distancias zenitales con este instrumento debe averiguarse primero la lectura correspondiente al meridiano en el círculo de orientación, y esto se logra observando unos pocos pasos de estrellas. Para dichas distancias dispone el observador de una lista de estrellas por pares, escogido cada uno de modo que pasando uno de los dos astros al norte del zenit y el otro al

mas atendida la pequeñez de i y la mayor todavía de Δp , basta escribir

$$\cos p = (\cos p + \Delta p \operatorname{sen} p) \left(1 - \frac{i^2}{2} \right);$$

de donde, prescindiendo en el segundo miembro del término de orden inferior $\frac{1}{2} \Delta p i^2 \operatorname{sen} p$, se deduce

$$\Delta p = \frac{i^2}{2} \cot p.$$

Pero $\Delta p = \pm \Delta z$ y $p = 90^\circ - \delta$. Sustituyendo estos dos valores y haciendo la reducción á segundos de la corrección Δz y de la distancia i , se halla la fórmula del texto.

sur, la diferencia entre sus ascensiones rectas quede comprendida entre 2^m y 10^m y la diferencia de sus distancias zenitales no exceda de $15'$. Inclínase el anteojo según indique el término medio entre las distancias zenitales del par que va á observarse, y si la estrella que pasará primero ha de verificarlo por ejemplo al sur del zenit, pónese hacia esta parte el anteojo. Cuando pasa dicha estrella, es bisecada con el hilo micrométrico sobre el hilo central. Hácese girar acto continuo el instrumento 180° en azimut sin alterar el ángulo zenital del anteojo. Entra á su vez en el campo visual la segunda estrella y es bisecada del mismo modo sobre el mencionado hilo. Conocido el valor de una división del micrómetro, dedúcese de la diferencia de lecturas micrométricas la diferencia de distancias zenitales de las estrellas, y de aquí se infiere inmediatamente la latitud. Acompañan á la observación de cada estrella lecturas de nivel. Con este método puede darse por eliminada la refracción, pues su influjo se reduce al de la diferencia de las refracciones correspondientes á dos distancias zenitales de casi igual magnitud. Determinase con suma precisión el avance del tornillo por cada vuelta, ó en otros términos, el valor de una de ellas, observando pasos, por el hilo micrométrico, de la Polar cuando su movimiento es vertical ó casi vertical, es decir, desde 20^m antes del momento de su máxima digresión ó azimut hasta 20^m después, y anotando en estas observaciones las lecturas del nivel.

Fué ideado este instrumento por Talcott, capitán de ingenieros de los Estados Unidos, y es el único que allí se emplea para determinar las latitudes de estaciones geodésicas. Su parte débil consiste en que acaso la posición de algunas estrellas de los pares que convenga elegir no se halle aún bien definida. Pero para nuestras latitudes medias no es difícil encontrar pares de estrellas cuya posición esté dada en los catálogos de Greenwich ú Oxford. El instrumento, como obra de Wurdemann, es de suma precisión y da gusto observar con él. Puede citarse como ejemplo que en Findlay Seat, en el condado de Elgin, treinta y un pares de estrellas observadas sucesivamente en una noche ofrecieron en el resultado diferencias que no excedían de $2''-00$.

La figura 41 representa un anteojo de pasos portátil de excelentes condiciones, usado por los geodestas ingleses en combinación con el anteojo zenital. Los pies derechos, de caoba, cons-

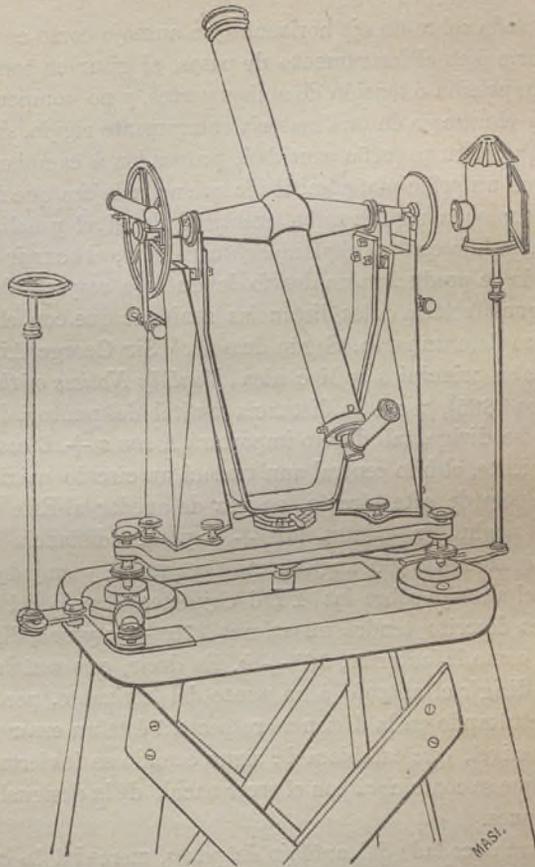


Fig. 41.

tan de varias piezas atornilladas. Con el aparato de cambio que el instrumento posee puede trocarse la posición de los brazos del anteojo en 15° . La distancia focal es de 21 pulgadas (53.3 centímetros) y el diámetro del objetivo de 1.67 pulgadas (4.24 centímetros).

2.

Montado sobre un eje horizontal un anteojo como en el altilimutario ó en el instrumento de pasos, al girar en torno de él varía la presión ó tensión de ambas partes, y no componiéndose el eje y el anteojo de una materia enteramente rígida, sino flexible, siquiera en pequeña cantidad, propenden á cambiar de forma. Si en un principio, admitiendo que nada dejara que desear el instrumento en rigidez ni en exactitud de nivel y colimación, trazara su hilo central el plano del meridiano, al ocurrir después la flexión se produciría un desvío del anteojo respecto del meridiano que afectaría á las distancias zenitales que con el instrumento se determinarían. Según demostró Sir George Airy, fundándose en principios de Mecánica (*Monthly Notices of the R. A. S.*, enero 1865), si z es la distancia zenital del punto á donde el anteojo se dirige, tal desvío importará $A \operatorname{sen} z + B \operatorname{cos} z$; por consiguiente, el hilo central aun trazará un círculo máximo (1). Pero el polo de este círculo, en vez de quedar al Este exactamente, tendrá un azimut $90^\circ + a$ y una distancia zenital $90^\circ + b$, siendo a y b ángulos muy pequeños; y cuando se invierta el anteojo sobre las YY ó cojinetes, el polo del círculo entonces descrito tendrá un azimut $270^\circ + a$ y una distancia zenital, como la anterior, $90^\circ + b$. Es decir, que será dado colimar ó dirigir el anteojo á un punto del horizonte, pero no al zenit, resultando en la distancia respecto á éste un error parecido al de nivel, que cambiará de signo cuando se invierta el anteojo y que se combinará con el error nacido de la desigualdad de los muñones.

La forma acodada del anteojo de pasos, merced á la cual los rayos luminosos, en vez de ir en línea recta desde el objetivo al

(1) Pues trazando arcos perpendiculares d' , d á un círculo máximo desde puntos de otro, se tiene, llamando z' , $z' + z$ las abscisas circulares contadas desde la intersección de ambos,

$$\tan d : \tan d' = \operatorname{sen} (z' + z) : \operatorname{sen} z'.$$

ocular, son reflejados en ángulo recto por un prisma colocado en el cubo central, y dirigidos de este modo por el hueco interior de uno de los brazos, no es tan conocida en Inglaterra como en Alemania, Rusia y España. Ofrece esta construcción las siguientes ventajas: que el observador sin cambiar de postura apunta á estrellas de cualquier declinación, que los pies derechos son cortos y que el nivel puede permanecer sobre los muñones del anteojo mientras éste recorre el meridiano, no habiendo ni aun necesidad de quitarlo al verificar el cambio ó inversión del anteojo. Tal cambio se efectúa por medio de un mecanismo á propósito y no produce alteración de cuantía: de $\pm 0''.19$ en azimut y $\pm 0''.13$ en nivel era la originada en uno de estos instrumentos, según revelaban multitud de observaciones con él verificadas. En cuanto al influjo de la flexión en instrumentos de esta clase, se comprende bien, pues el peso del anteojo, el del cubo central y el contrapeso, hacen descender el prisma una cantidad casi constante; y situada por consecuencia la imagen de una estrella en el campo óptico debajo de su propio lugar, á una distancia f , cada lectura micrométrica de un objeto en dicho campo requiere una corrección $-f \cos z$ (1). Puede hallarse el valor de f comparando la lectura del centro de colimación, dirigido el anteojo á una marca en el horizonte, con la del mismo centro, dirigido el anteojo á un colimador puesto al zenit ó á cualquier distancia de este punto que no se aproxime á 90° . En un instrumento ruso de este tipo, empleado por algún tiempo en los trabajos geodésicos de Inglaterra, se halló f valiéndose de un colimador que podía colocarse á la distancia zenital que se quisiera: de 172 observaciones hechas con este objeto se dedujo $f=3''.16 \pm 0''.04$, cantidad que debía agregarse, en la reducción y corrección de observaciones, á la diferencia de muñones que en dicho instrumento era de $0''.65 \pm 0''.02$. (Véase un artículo sobre este asunto en las *Mem. R. A. Soc.*, tomo XXXVII.)

(1) El ángulo que forma con el horizonte la cara del prisma, que sirve de espejo, varía desde 45° , cuando el anteojo se dirige al zenit, hasta 90° , cuando se dirige al horizonte. Si al descender dicha cara se corre según la vertical la cantidad f , se correrá según el eje del anteojo $f \cos z$.

3.

Sea φ la latitud del punto de observación y sean z , α respectivamente la distancia zenital y el azimut de una estrella S, cuya declinación es δ y cuyo ángulo horario en el momento de la observación es h . Supongamos se cuente h desde 0 hasta 360° , á partir de la culminación superior, y el azimut también desde 0 hasta 360° , á partir del Norte, en dirección de este punto al Este. Del triángulo esférico ZPS—formado por la estrella S, el zenit Z y el polo P,—en el cual

$$\begin{aligned} ZP &= 90^\circ - \varphi, & PS &= 90^\circ - \delta, \\ PZS &= \alpha, & ZPS &= 360^\circ - h; \end{aligned}$$

se deducen los valores de z y α en función de φ , δ , h , en virtud de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos h, & (1) \\ \cos \alpha \sin z &= \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos h, \\ \sin \alpha \sin z &= & - \cos \delta \sin h. \end{aligned}$$

Y si T es la hora señalada por el reloj, τ la corrección que á ella debe aplicarse y A la ascensión recta de la estrella, será el ángulo horario

$$h = 15 (T + \tau - A).$$

Las variaciones que en z y α se produzcan de resultas de las que en δ , φ , h sobrevengan, se obtendrán por las ecuaciones (14) de la Trigonometría esférica, página 56, que, con la notación apropiada á este caso, designando S el ángulo paraláctico, dan

$$\begin{aligned} \sin z d\alpha &= - \sin S d\delta + \cos \delta \cos S dh + \cos z \sin \alpha d\varphi, \\ dz &= - \cos S d\delta - \cos \delta \sin S dh - \cos \alpha d\varphi. \end{aligned}$$

Cuando se requiera con gran exactitud la posición de la estrella S, no debe prescindirse del efecto de la aberración diurna, en virtud de la cual la estrella aparecerá corrida hacia el punto Este e del horizonte la cantidad $0'' \cdot 311 \cos \varphi \sin S e$, aumentan-

do con ello el azimut y la distancia zenital las cantidades respectivas $\delta\alpha$ y δz , dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{sen } z\delta\alpha &= 0'' \cdot 311 \cos \varphi \cos \alpha, \\ \delta z &= 0'' \cdot 311 \cos \varphi \text{ sen } \alpha \cos z, \end{aligned}$$

que es fácil demostrar geoméricamente (1).

No deben olvidarse tampoco los errores de colimación y nivel. Representada, figura 42, la esfera celeste en proyección estereográfica sobre el plano del horizonte, sea ns el meridiano, oe el primer vertical y p el punto donde cortaría la esfera, prolongándole por un extremo, el eje de rotación del anteojo, ya sea éste de

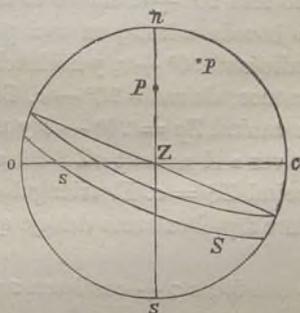


Fig. 42.

teodolito ó de instrumento de pasos. Mas como importa distinguir este punto p de su opuesto, supóngase, toda vez que en ambos instrumentos puede trocarse la posición del anteojo sobre

(1) En el triángulo esférico rectángulo SeH , cuyos vértices son la estrella S , el Este e y el punto H donde el vertical ZS corta el horizonte, se tiene

$$\begin{aligned} \text{sen } Se \text{ sen } eSH &= \cos \alpha \\ \text{sen } Se \cos eSH &= \text{sen } \alpha \cos z. \end{aligned}$$

Por otra parte, si S' es el lugar aparente de la estrella sobre Se , tomando en el vertical ZS' un arco $ZS'' = ZS$, el pequeño triángulo $SS'S''$ puede reputarse como rectilíneo y además rectángulo en S'' . Por tanto,

$$SS'' = S'S' \text{ sen } eSH, \quad S'S'' = SS' \cos eSH.$$

Pero

$$SS'' = \text{sen } z\delta\alpha, \quad S'S'' = \delta z, \quad SS' = 0'' \cdot 311 \cos \varphi \text{ sen } S_e.$$

Sustituyendo unas cantidades por otras se obtienen las fórmulas del texto.

sus puntos de apoyo, que en el teodolito corresponda p á la Y ó muñonera que se halle á la izquierda del observador cuando mire por el anteojo, y en el instrumento de pasos á la Y que esté próxima al Norte ó al Este. La distancia del centro de colimación á la imagen del objeto que se observe, ó bien á uno de los hilos laterales en el instrumento de pasos, reputémosla positiva cuando la imagen de ese objeto ó dicho hilo esté al mismo lado del anteojo que el círculo vertical graduado. Llamando c tal distancia, cuando el extremo del anteojo, donde esté ese círculo, se halle sobre la Y correspondiente á p , la distancia angular de este punto al observado será $90^\circ + c$. Luego el hilo á que se refiere c describirá en la bóveda celeste, en una posición, un círculo menor Ss , cuyo radio será $90^\circ + c$, y hecho el cambio en el anteojo, otro círculo menor, de radio $90^\circ - c$. Sea a el azimut nZp de p , su distancia zenital $Zp = 90^\circ - b$ y por tanto b el error de nivel. Sea á su vez α el azimut nZS del objeto observado S y su distancia zenital $ZS = z$. El triángulo pZS , suponiendo que se halle frontero á p el extremo del eje que lleve el círculo, dará

$$- \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos z + \cos b \operatorname{sen} z \cos (\alpha - a); \quad (2)$$

ó bien, porque no pasando nunca el error de nivel de unos pocos segundos se puede escribir $\cos b = 1$, y siendo asimismo c siempre pequeña, reemplazar c por su seno,

$$c + b \cos z + \operatorname{sen} z \cos (\alpha - a) = 0, \quad (3)$$

de donde se deduce

$$\alpha = a + \frac{c + b \cos z}{\operatorname{sen} z} + 90^\circ.$$

Para otro objeto observado S' , cuyo azimut sea α' y la distancia zenital z' , se tendrá, siendo b' el error correspondiente de nivel y a' el azimut de p ,

$$\alpha' = a' + \frac{c + b' \cos z'}{\operatorname{sen} z'} + 90^\circ;$$

$$\therefore \alpha' - \alpha = A + c \left(\frac{1}{\operatorname{sen} z'} - \frac{1}{\operatorname{sen} z} \right) + \frac{b'}{\tan z'} - \frac{b}{\tan z}. \quad (4)$$

Prescindiendo de magnitudes del orden b^2 , la cantidad A , es-

crita aquí en lugar de $a' - a$, es la diferencia de las lecturas hechas sucesivamente en el círculo horizontal, al apuntar el teodolito á S y S'. Suponiendo S una estrella y S' una señal terrestre á la derecha de S, esa ecuación da el azimut de la señal en función del azimut conocido de la estrella, del ángulo medido por el teodolito y de los errores de nivel y colimación. Elimínase este último haciendo el cambio en el anteojo. Al determinar b debe tenerse en cuenta la desigualdad de los muñones.

Desarrollando en la ecuación (3) el coseno de $z - a$ y sustituyendo los valores de $\sin z \cos a$ y $\sin z \sin a$ que suministran las ecuaciones (1), resulta

$$c + b \cos z + \cos a \cos \varphi \sin \delta - \cos a \sin \varphi \cos \delta \cos h - \sin a \cos \delta \sin h = 0, \quad (5)$$

y esta fórmula, aplicable al instrumento de pasos en cualquier posición, da el ángulo horario h que, en el momento de hallarse sobre el hilo definido por c , tiene la estrella cuya declinación es δ .

Acostúmbrase en la observación de pasos reducir la hora del que acontece por un hilo lateral á la del paso por el centro de colimación ó por el hilo central si estuviera éste exactamente colimado. Puesto el anteojo en el meridiano, el promedio de las horas á que cruza la estrella por los diferentes hilos, da la hora del paso por el punto que puede llamarse hilo medio. Mas cuando el instrumento no está en el meridiano, no cabe tomar el promedio de los tiempos, porque los invertidos de uno á otro hilo en los de la derecha del central no son los mismos que en los de la izquierda. Para hallar el intervalo transcurrido al pasar la estrella del hilo c á aquel en que c es nula, debe hacerse $b = 0$ en la fórmula (5). Pero escribiendo además $c = 0$ y h' en vez de h , resultará

$\cos a \cos \varphi \sin \delta - \cos a \sin \varphi \cos \delta \cos h' - \sin a \cos \delta \sin h' = 0$;
y poniendo $h - h' = 2I$, $h + h' = 2H$, la suma y diferencia de ambas ecuaciones darán

$$\begin{aligned} 2 \cos I \cos \delta \{ \cos a \cos H \sin \varphi + \sin a \sin H \} \\ = c + 2 \cos a \cos \varphi \sin \delta, \\ 2 \sin I \cos \delta \{ - \cos a \sin H \sin \varphi + \sin a \cos H \} = c. \end{aligned}$$

Mas si ψ y G son dos ángulos auxiliares tales que (1)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \psi \cos G &= \operatorname{sen} \alpha, \\ \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} G &= \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi, \\ \cos \psi &= \cos \alpha \cos \varphi,\end{aligned}$$

introduciéndolos en aquellas ecuaciones, se tendrá

$$\begin{aligned}2 \cos I \cos \delta \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} (G + H) &= c + 2 \cos \psi \operatorname{sen} \delta, \\ 2 \operatorname{sen} I \cos \delta \operatorname{sen} \psi \cos (G + H) &= c.\end{aligned}$$

Eliminando en éstas $G + H$, resulta una ecuación bicuadrada respecto de $\operatorname{sen} I$, de la cual, poniendo (2)

$$C \operatorname{sen} (\psi + \delta) = c = C' \operatorname{sen} (\psi - \delta),$$

se deduce (*)

$$\pm \operatorname{sen} I = \frac{(CC')^{\frac{1}{2}}}{(1 + C')^{\frac{1}{2}} + (1 - C)^{\frac{1}{2}}}, \quad (6)$$

advirtiéndose que con la inversión del instrumento cambian los signos de C , C' . Esta es la fórmula que usaba Bessel para reducir los pasos en el primer vertical. Cuando el instrumento se halla exactamente en dicho plano $\alpha = 0$ y $\psi = \varphi$,

$$C = \frac{c}{\operatorname{sen} (\varphi + \delta)}, \quad C' = \frac{c}{\operatorname{sen} (\varphi - \delta)}.$$

(1) En estas tres ecuaciones sólo hay dos independientes, pues la suma de cuadrados de los primeros y segundos miembros ofrece una identidad.

(2) Relaciones de las cuales se infiere

$$\begin{aligned}2 CC' \operatorname{sen} \psi \cos \delta &= c (C' + C), \\ 2 CC' \cos \psi \operatorname{sen} \delta &= c (C' - C).\end{aligned}$$

Recuérdese además, para la transformación indicada en el texto, que

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

(*) *Gradmessung in Ostpreussen*, pág. 312.

4.

Situado el anteojo de pasos cerca del meridiano, a vale próximamente 90° . Si se reemplaza a en la ecuación (5) por $90^\circ + a$, suponiendo esta nueva a tan pequeña que sea dado escribir $\cos a = 1$; como también entonces h valdrá casi 0° ó 180° y sin error de cuantía $\cos h = \pm 1$, se tendrá para el paso superior la ecuación

$$a \operatorname{sen} (\varphi - \delta) + b \cos (\varphi - \delta) + c - h \cos \delta = 0,$$

sustituyendo el coeficiente $\cos z$ de b por $\cos (\varphi - \delta)$.

Si para mayor brevedad se designan también por a, b, c los errores de azimut, nivel y colimación, divididos por 15 y con esto referidos al segundo de tiempo como unidad, el estado del reloj, puesto que $\frac{1}{15} h = T + \tau - A$, será

$$\tau = A - T + a \operatorname{sen} (\varphi - \delta) \sec \delta + b \cos (\varphi - \delta) \sec \delta + c \sec \delta, \quad (7)$$

expresión conocida con el nombre de *fórmula de Mayer*, y que Hansen, poniendo $n = b \operatorname{sen} \varphi - a \cos \varphi$, escribe de este otro modo:

$$\tau = A - T + b \sec \varphi + n (\tan \delta - \tan \varphi) + c \sec \delta, \quad (8)$$

fórmula fácil de deducir de aquélla y conveniente en la reducción de pasos de estrellas próximas al zenit (1).

Con la inversión del instrumento—la cual en el curso de las observaciones del día se practica por lo menos una ó dos veces—cambia el signo de c , positivo con la lectura creciente del micrómetro cuando el círculo vertical se halla al Este y negativo con la

(1) La n que aparece en la fórmula de Hansen es la declinación del punto p de la figura 42, en posición próxima al Este, en la cual su azimut es $90^\circ + a$ y su altura b , indicando tanto a y b como n pequeños valores. En las prácticas astronómicas del Instituto geográfico y estadístico de España se aplican las dos fórmulas de Mayer y Hansen, cambiando los signos de los términos que contienen a, b, c ; debido esto á que el sentido positivo ó negativo de dichas cantidades se establece á la inversa, por referirse al punto de la bóveda celeste opuesto al p de la citada figura.

antedicha lectura cuando queda al Oeste. El de b será positivo si el extremo oriental del eje es el más alto. Tratándose de la culminación inferior (*subpolo*), debe reemplazarse en dicha fórmula δ por $180^\circ - \delta$ y A por $12^h + A$; además, cuando se requiera gran exactitud, debe aumentarse A con $0^s.02 \cos \varphi \sec \delta$ por causa de la aberración diurna. Suele emplearse el método de los mínimos cuadrados para determinar el azimut, el *estado*, de adelanto ó atraso, del reloj en el momento dado, y el *movimiento* de este reloj, ó lo que él por sí adelante ó atrase: incógnitas entre las cuales cada paso suministra una ecuación.

Cuando el anteojo de pasos portátil se instale en un lugar, se le pondrá ante todo sobre firmísimo asiento, y se anulará ó reducirá cuanto sea posible el error de colimación. Situado después el anteojo tan cerca del meridiano como por cualquier medio expedito se alcance, debe nivelarse el eje horizontal. Si se conoce el estado del reloj, bastará para dicha situación que se observe el paso, por el hilo central del anteojo, de una estrella de rápido curso, que cerca del meridiano conserve gran distancia zenital. Mas si se ignora el estado del reloj, se observarán dos estrellas que difieran bastante en declinación; y si de la primera se deduce un estado aparente τ_1 y de la segunda otro estado aparente τ_2 , la fórmula (1)

$$\tau = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \frac{\tan \delta_1 - \tan \varphi}{\tan \delta_1 - \tan \delta_2} \quad (9)$$

dará muy aproximadamente el estado verdadero, y con este dato

(1) No existiendo los errores de nivel y colimación, ó prescindiendo de ellos, la fórmula (8) se convierte en

$$\tau = A - T - a \cos \varphi (\tan \delta - \tan \varphi).$$

En su consecuencia, para las dos estrellas observadas se tiene

$$\tau = \tau_1 - a \cos \varphi (\tan \delta_1 - \tan \varphi)$$

$$\tau = \tau_2 - a \cos \varphi (\tan \delta_2 - \tan \varphi),$$

y eliminando a entre ellas, resulta

$$\tau (\tan \delta_1 - \tan \delta_2) = \tau_2 (\tan \delta_1 - \tan \varphi) - \tau_1 (\tan \delta_2 - \tan \varphi),$$

de donde, restando $\tau_1 (\tan \delta_1 - \tan \delta_2)$ de ambos miembros, se pasa la fórmula (9).

se podrá situar el anteojo cerca del meridiano. Por la fórmula (7) ú (8) se echa de ver que las estrellas próximas al zenit son las más adecuadas á la determinación de la hora cuando el azimut queda incierto. Para hallar éste conviene incluir en las observaciones del día las de uno ó más pasos de estrellas cercanas al polo, aunque sólo se observen sobre un hilo nada más, y aunque el plano vertical, que en aquel momento pase por la estrella circumpolar á donde el anteojo se dirija, esté algo separado del meridiano.

Es método bastante seguido en el continente de Europa el de averiguar la hora con un anteojo de pasos puesto en el plano vertical de la Polar, porque por este medio se tiene la ventaja de saber la posición azimutal del instrumento sin incertidumbre alguna, ligando el paso de cada estrella de estado con una observación inmediata de la Polar. Sítuase para ello el instrumento con su hilo central un poco adelantado respecto de esta última y se nivela con sumo esmero. Debe haber en el anteojo un micrómetro provisto de un hilo vertical móvil en el campo óptico, y existir en el instrumento un mecanismo que como el tornillo del anteojo de pasos, figura 41, página 287, permita dar á la posición del aparato pequeñas y graduadas variaciones. Sea m_0 la lectura micrométrica del centro de colimación del anteojo y m la de la estrella cuando es bisecada: si μ es el valor de una división del tornillo, la distancia c' , á que la estrella se halla del círculo máximo descrito por el centro de colimación, será $\mu (m - m_0)$, suponiendo que las lecturas micrométricas aumenten á medida que el hilo se corra hacia el extremo del eje donde esté el círculo. La serie de observaciones puede coordinarse al tenor siguiente, salvo por de contado circunstancias especiales:

Círculo al Este.—Paso de una estrella de estado y dos bisecciones de la Polar, una antes, otra después.

Círculo al Oeste.—La Polar, dos estrellas de estado y la Polar.

Círculo al Este.—Paso de una estrella de estado y bisecciones de la Polar, como primero se dijo.

Tales observaciones deben ir acompañadas de lecturas de nivel si han de constituir una determinación completa de la hora.

Debe tenerse preparada una tabla que contenga los valores del azimut y distancia zenital de la Polar calculados de cinco en cinco minutos para el período que duren las observaciones de esta estrella. Sea T' la hora señalada por el reloj en el momento de observarse la Polar, τ el estado del reloj conocido con tanta aproximación como sea posible, $\tau + \Delta\tau$ el verdadero estado. Si α'_0 es el azimut calculado de tal estrella, correspondiente á la hora $T' + \tau$, y β la variación de azimut en un segundo de tiempo, $\alpha'_0 + \beta \cdot \Delta\tau$ será el verdadero azimut de dicho astro en el momento de la observación. Mas reemplazando a por $90^\circ + a$ en la ecuación (3), se transforma ésta en

$$c + b \cos z + \operatorname{sen} z \operatorname{sen} (a - \alpha) = 0.$$

Así, pues, cuando el círculo se halle al Este, se tendrá respectivamente para la estrella polar y la de estado:

$$\text{Estrella polar: } a = \alpha'_0 + \beta \Delta\tau + \frac{b \cos z'}{\operatorname{sen} z'} + \frac{c'}{\operatorname{sen} z'}.$$

$$\text{Estrella de estado: } a = 180^\circ + a + \frac{b \cos z}{\operatorname{sen} z} + \frac{c}{\operatorname{sen} z}.$$

Supónese aquí que el error de nivel b no varía entre la observación de la estrella de estado y la de la Polar, y además que c es el error de colimación del *hilo medio* ó del hilo central, según se practique la reducción de los pasos: generalmente se refieren éstos al hilo central. El ángulo horario h de la estrella de estado y el azimut están enlazados por la ecuación (1)

$$\cos \delta \operatorname{sen} h = - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} \alpha;$$

$$\therefore \cos \delta \operatorname{sen} h = \operatorname{sen} z \operatorname{sen} a + (b \cos z + c) \cos a. \quad (10)$$

(*) Llamando f la suma de los dos últimos términos de la fórmula que da el valor de α , se tiene

$$- \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (a + f),$$

ó bien, puesto que, por la pequeñez de f , puede reemplazarse por este arco su seno y por la unidad su coseno,

$$- \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} a + f \cos a.$$

Mas poniendo $a_0 = \alpha'_0 + c' \operatorname{cosec} z'$, y

$$\cos \delta \operatorname{sen} h_0 = \operatorname{sen} z \operatorname{sen} a_0, \quad (11)$$

la diferencia de (10) y (11) da (1)

$$\cos \delta \cos h (h - h_0) = \operatorname{sen} z \cos a (a - a_0) + (b \cos z + c) \cos a;$$

$$\therefore h = h_0 + b \frac{\operatorname{sen} (z + z')}{\cos \delta \operatorname{sen} z'} + \frac{c}{\cos \delta} + \frac{\beta \Delta \tau \operatorname{sen} z}{\cos \delta},$$

reemplazando el factor $\cos a : \cos h$ por la unidad. Pero si T es la hora anotada del paso de la estrella, cuya ascensión recta es A , será $T + \tau + \Delta \tau - A = \frac{1}{15} h$; de donde en conclusión se deduce

$$\gamma \cdot \Delta \tau = A - T - \tau + \frac{1}{15} h_0 + b \sec \varphi + c \sec \delta, \quad (12)$$

poniendo $\gamma = 1 - \frac{1}{15} \beta \operatorname{sen} z \sec \delta$ y expresando b, c en segundos de tiempo (2). La distancia zenital de la estrella de estado es

$$z = \varphi - \delta + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} (\varphi - \delta) \cos \varphi \sec \delta \cdot \operatorname{sen} 1'', \quad (13)$$

dando el azimut a en segundos (3).

(1) Admitiendo, como bastante aproximados para el objeto, los arcos en vez de los senos de las semidiferencias de h y h_0 , a y a_0 , y $\cos h, \cos a$ en vez de los cosenos de las semisumas, resulta la primera fórmula del texto; y sustituyendo en ella

$$a - a_0 = a - \left(\alpha'_0 + \frac{c'}{\operatorname{sen} z'} \right) = \beta \Delta \tau + \frac{b \cos z'}{\operatorname{sen} z'},$$

se obtiene la segunda.

(2) Pues con suficiente aproximación en este caso

$$\begin{aligned} z' &= 90^\circ - \varphi, & \operatorname{sen} z' &= \cos \varphi, \\ z &= \varphi - \delta, & \operatorname{sen} (z + z') &= \cos \delta, \end{aligned}$$

(3) Sustituyendo $\cos h = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}$ en la fórmula

$$\cos z = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h,$$

se tiene

$$\cos z - \cos (\varphi - \delta) = -2 \cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2},$$

ó bien transformando el primer miembro,

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (z - \varphi + \delta) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (z + \varphi - \delta) = \cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}.$$

De aquí, reemplazando el primero y último factor por el arco respecti-

La fórmula (6) para reducir la hora del paso por el hilo lateral que se halla á la distancia c del hilo central es en este caso (1)

$$\frac{1}{2}c \left\{ \sec(\delta + n) \sec(\delta - n) \right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ siendo } n = a \cos \varphi.$$

Trátase esta materia extensamente en el ensayo titulado *Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsintsruments im Verticale des Polarsterns*, por W. Döllén, San Petersburgo. El método para reducir las observaciones arriba citado es en sustancia el que se siguió en las operaciones para determinar la diferencia de longitudes entre Poulkowa (San Petersburgo), Stoccolmo y las estaciones intermedias. (*Mem. Acad. Imp. Sci. St. Petersbourg*, tomo XVII, números 1 y 10.)

5.

Si el plano vertical que describe un anteojo de pasos, exento de error en nivel y colimación, es cortado una vez por una es-

vo, y poniendo en el segundo $z = \varphi - \delta$, se infiere con suficiente aproximación

$$(z - \varphi + \delta) \operatorname{sen}(\varphi - \delta) = \frac{h^2}{2} \cos \varphi \cos \delta.$$

Pero de la relación $\cos \delta \operatorname{sen} h = -\operatorname{sen} z \operatorname{sen} a$ se deduce como valor aproximado $h \cos \delta = a \operatorname{sen} z = a \operatorname{sen}(\varphi - \delta)$, pues a y $180^\circ + a$ discrepan poco, y sustituyendo ese valor en la fórmula precedente, se obtiene la del texto. Esta es también caso particular de la dada por Delambre para observaciones próximas al meridiano.

(1) Si en la relación $\cos \psi = \cos a \cos \varphi$ se reemplazan ψ y a por $90^\circ + n$ y $90^\circ + a$, se tendrá

$$\operatorname{sen} n = \operatorname{sen} a \cos \varphi$$

ó con suficiente aproximación para el objeto $n \approx a \cos \varphi$. Además

$$C = \frac{c}{\cos(\delta + n)}, \quad C' = \frac{c}{\cos(\delta - n)},$$

y el denominador

$$(1 + C)^{\frac{1}{2}} + (1 - C)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2}(C' - C) - \dots$$

se reduce al primer término del desarrollo, pues de los siguientes se puede en este caso prescindir. Por otra parte, $2I = h - h'$.

trella, de nuevo lo será por la misma en su curso diurno; y designando por h, h' , los ángulos horarios correspondientes á los dos pasos, se tendrá en virtud de la ecuación (5)

$$\begin{aligned} - \cos a \cos \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos a \operatorname{sen} \varphi \cos \delta \cos h, \\ + \operatorname{sen} a \cos \delta \operatorname{sen} h, &= 0, \\ - \cos a \cos \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos a \operatorname{sen} \varphi \cos \delta \cos h' \\ + \operatorname{sen} a \cos \delta \operatorname{sen} h' &= 0; \end{aligned}$$

de las cuales se infiere (1)

$$\begin{aligned} \tan \delta \cos \frac{1}{2}(h, + h') &= \tan \varphi \cos \frac{1}{2}(h' - h), \\ \tan a &= \operatorname{sen} \varphi \tan \frac{1}{2}(h' + h). \end{aligned} \quad (14)$$

Deducidas, pues, h , y h' de las horas á que pase la estrella, se hallará por la primera ecuación el valor de la latitud y por la segunda el azimut del plano. Cuando el anteojo esté en el primer vertical, será $a = 0$ y $h, + h' = 0$; luego si h es el valor absoluto del ángulo horario de la estrella en uno y otro paso, se tendrá $\tan \varphi = \tan \delta \sec h$. Este método, para hallar la latitud, observando pasos de estrellas por el primer vertical, fué ideado por Bessel. Ofrece la gran ventaja de que los errores del instrumento se eliminan con facilidad, ora haciendo el cambio del anteojo entre las observaciones de dos estrellas ó á la mitad del paso de una misma, ora empleando el instrumento con el círculo al Norte una noche y con el círculo al Sur en la inmediata. Pero el método tiene estos inconvenientes: que la hora ha de saberse con exactitud y que la precisión del resultado es menor en las bajas latitudes que en las elevadas. Como el error $d\varphi$ producido por los errores de δ y h está dado por la ecuación (2)

(1) Eliminando a entre ambas, para lo cual basta multiplicar la primera por $\operatorname{sen} h'$, la segunda por $\operatorname{sen} h$, y restar un producto de otro, resulta, previa alguna reducción, la primera ecuación (14); y eliminando δ entre aquéllas, ó sea restando una de otra, se obtiene la segunda mediante simplificación parecida.

(2) Véase para la práctica de este procedimiento la obra ya citada: *Método para determinar la latitud en el primer vertical*, por D. Miguel Merino, Madrid, 1877.

No se debe, conforme lo advertido en la página 53 de dicha obra, en i preferir, para hallar al valor de φ , las estrellas más de 4º distantes del ze-

$$\frac{2 d\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} = \tan h d\bar{h} + \frac{2 d\delta}{\operatorname{sen} 2\delta},$$

échase de ver la conveniencia de que el ángulo horario de la estrella, ó su distancia zenital, en el momento de la observación tenga la menor cuantía posible (1).

La ecuación (5) es aplicable á los pasos por el primer vertical, suponiendo muy pequeño el ángulo α . En tal posición del anteojo será b positiva cuando esté elevado el extremo norte del eje de rotación. Escribiendo

$$\cos \alpha = 1 \quad \text{y} \quad \cos \delta \operatorname{sen} h = -\operatorname{sen} z,$$

toda vez que el azimut de la estrella observada en dicha posición difiere muy poco de 90° , la ecuación se transforma en

$$a \operatorname{sen} z + b \cos z + c + \cos \varphi \operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} \varphi \cos \delta \cos h = 0. \quad (15)$$

Mas determinada φ' por la ecuación $\tan \varphi' = \tan \delta \sec h$, se tiene, haciendo $\varphi' - \varphi = \varepsilon$ (2),

nit, porque la determinación de sus pasos por el primer vertical se verifica en breve tiempo y sin error absoluto considerable, ni aquellas tan zenitales que no sea factible, sin atención muy sostenida y cansancio del observador, anotar los momentos precisos de sus pasos, sin error ó incertidumbre mucho mayor, hasta de *dos, tres* y más *segundos* de tiempo en la persuasión de que la influencia de este error de apreciación trasciende al resultado final con mucha menos eficacia que en el caso precedente. Puede consultarse también acerca de éste y otros puntos tratados en el presente capítulo la descripción de las prácticas astronómicas hecha por el mismo autor en las *Instrucciones para los trabajos geodésicos*, Madrid, 1878, publicadas por la Dirección general del Instituto geográfico y estadístico.

(1) Diferenciando la ecuación arriba consignada

$$\tan \delta = \tan \varphi \cos h,$$

se tiene

$$\frac{d\delta}{\cos^2 \delta} = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \cos h - \tan \varphi \operatorname{sen} h d\bar{h},$$

y dividiendo, miembro por miembro, esta ecuación por la anterior, se halla la del texto.

(2) De ambas relaciones se deduce

$$\tan \varphi + \tan \varepsilon = (1 - \tan \varphi \tan \varepsilon) \tan \delta \sec h,$$

y de aquí, reemplazando, por ser ε arco pequeño, su tangente por el mismo arco, y multiplicando ambos miembros por $\cos \varphi \cos \delta$, se infiere la fórmula del texto.

$$\cos \varphi \operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} \varphi \cos \delta \cos h = \varepsilon (\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h),$$

y por tanto, puesto que la cantidad comprendida en el paréntesis es $\cos z$,

$$\varphi = \varphi' + a \tan z + b + c \sec z, \quad (16)$$

fórmula que también puede demostrarse geoméricamente. En ella será z negativa si los pasos son occidentales.

Cuando la estrella observada sea de las que pasan cerca del zenit habrá tiempo para verificar el cambio ó inversión del instrumento á la mitad del tránsito de aquélla. Así, durante el paso oriental, se puede observar la estrella, al Norte del primer vertical, en los hilos que se hallen al Sur del centro de colimación, y en seguida, hecho el cambio, verla de nuevo en los mismos hilos. Tras de esto, no invirtiendo el anteojo, pero dirigiéndole hacia Occidente cuando dicha estrella vaya á pasar por esta parte, se la observará otra vez en los mismos hilos, al Sur del primer vertical, y acto continuo, efectuado el cambio del anteojo, se la verá, por el Norte de ese plano, cruzar de nuevo los mencionados hilos. De este modo los pasos por un mismo hilo serán datos para obtener la latitud exenta de los errores del instrumento. Llamando I el ángulo correspondiente al intervalo entre los dos pasos por un hilo cuando acontezcan al Norte, I' el correspondiente al intervalo entre los dos pasos por el mismo hilo cuando esto ocurra al Sur y H el ángulo en que se traduzca la diferencia entre la ascensión recta de la estrella y el promedio de las horas de los cuatro pasos, se tendrá por la ecuación (15)

$$\cot (\varphi - b) = \cot \delta \cos \frac{1}{2} (I + I') \cos \frac{1}{2} (I - I') \sec H. \quad (17)$$

Demuéstrase esto mismo geoméricamente. En efecto, sean P, Z , figura 43, el polo celeste y el zenit; p el punto donde, prolongado por el extremo norte, corta al cielo el eje de rotación del anteojo de pasos, y nef el círculo máximo descrito por el centro de la colimación. El círculo menor da será el trazado por un hilo en la primera posición del instrumento, y el círculo menor cb el trazado por el mismo hilo en la posición inversa. Sean a, b, c, d los puntos donde la estrella en su curso corta estos círcu-

los, de suerte que $aPd = I$ y $bPc = I'$. Si el círculo máximo pP corta nef en e y el círculo máximo que une c, d corta nef en n será

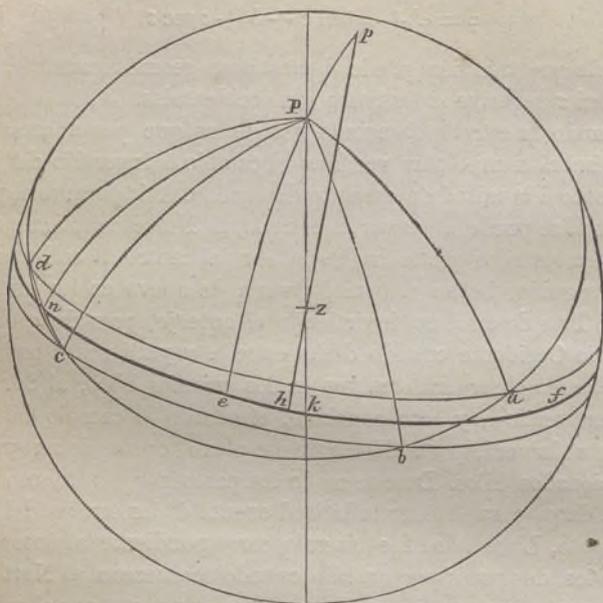


Fig. 45.

$$nPd = \frac{1}{2}(I - I') = nPe,$$

$$ePn = \frac{1}{2}(I + I'),$$

$$ePk = H.$$

Pero $Zh = b$, y si $Zk = b'$, se tendrá $\tan b' \cos a = \tan b$. Ahora bien, de la combinación de relaciones sacadas de los tres triángulos dPn , nPe , ePk , resulta ⁽¹⁾

$$\tan Pk = \tan Pd \cos \frac{1}{2}(I + I') \cos \frac{1}{2}(I - I') \sec H,$$

(1)

$$\tan Pn = \tan Pd \cdot \cos \frac{1}{2}(I - I'),$$

$$\tan Pe = \tan Pn \cdot \cos \frac{1}{2}(I + I'),$$

$$\tan Pk = \tan Pe \cdot \sec H.$$

siendo $P\bar{h} = 90^\circ - \varphi + b'$. Tal fórmula concuerda con la (17), suponiendo pequeñas las cantidades a y b .

Puede simplificarse en la práctica el método expuesto, si no se quiere repetir tantas veces la inversión del anteojo, eligiendo cierto número de estrellas tales que $\varphi - \delta$ no exceda de 2° , y observándolas primero al Este del zenit, con el círculo al N. por ejemplo, después al Oeste con el círculo al S., y en la noche inmediata, en la posición E., con el círculo al S., y O. con el círculo al N.

Si en el supuesto antedicho, de ser muy pequeña la diferencia $\varphi - \delta$, ponemos $e = \frac{1}{2} (\varphi - \delta)^2 \operatorname{cosec} 1''$ y calculamos esta cantidad e , inferior á $1'' \cdot 5$, deduciéndola de un valor aproximado de φ , la ecuación (15) en las dos observaciones de la estrella al E. y al O. se podrá escribir del siguiente modo para cada hilo, tomando por unidad $1''$ (1):

$$\begin{aligned} \varphi - \delta - c &= \frac{2}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{\bar{h}}{2} + a \operatorname{sen} z + b \cos z + e, \\ \varphi - \delta + c &= \frac{2}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{\bar{h}'}{2} + a \operatorname{sen} z' + b' \cos z' + e. \end{aligned}$$

Con el promedio de ambas ecuaciones eliminase c y queda a con exiguo coeficiente, porque z' difiere poco de $-z$. El valor de a para las observaciones de cada noche puede obtenerse de este modo: estableciendo, con a y c como incógnitas, las dos ecuaciones antedichas para varias estrellas observadas en el hilo central, y restando las dos fórmulas correspondientes á cada estrella, con lo cual cada diferencia dará una ecuación como ésta:

$$c + a \operatorname{sen} z = g.$$

(1) Sustituyendo $\cos \bar{h} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\bar{h}}{2}$, la ecuación (15) se transforma en

$$\operatorname{sen} (\varphi - \delta) - c = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{\bar{h}}{2} + a \operatorname{sen} z + b \cos z.$$

Reemplazando aquí

$$\operatorname{sen} (\varphi - \delta) = (\varphi - \delta) - \frac{1}{6} (\varphi - \delta)^3,$$

y reduciendo á segundos, se halla la fórmula arriba consignada.

6.

Hállase la latitud en las operaciones geodésicas por alguno de los siguientes métodos: 1.º, por distancias zenitales meridianas de las estrellas; 2.º, por distancias zenitales de la Polar, lo cual ofrece la ventaja de poder verificar las observaciones, estando la estrella en cualquier punto de su órbita aparente, y tanto de día como de noche; 3.º, mediante pasos por el vertical primario; 4.º, con el antejo zenital.

Cuando se emplea el primer método, conviene escoger estrellas que pasen unas por el Norte y otras por el Sur del zenit, y á tales distancias de este punto que el promedio de todas ellas, tomadas con su signo respectivo, sea casi nulo. Si una estrella—no de las que culminan cerca del zenit—es observada cuando tiene pequeño ángulo horario h , de su distancia zenital z entonces obtenida, se deducirá su distancia zenital meridiana z' , prescindiendo de términos de orden inferior al de h^4 , por la fórmula (1)

$$z' = z \mp \frac{2 \cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} h}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (z' + z)}, \quad (18)$$

(1) Contando h desde la culminación respectiva se tiene

$$\cos z = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta \pm \cos \varphi \cos \delta \cos h,$$

con el signo superior si la estrella pasa al Sur del zenit ó al Norte entre el zenit y el polo, y con el inferior si la estrella pasa al Norte por debajo del polo. Pero en estos tres casos es respectivamente

$$z' = \varphi - \delta, \quad z' = \delta - \varphi, \quad z' = 180^\circ - \varphi - \delta.$$

Por lo tanto, sustituyendo $\cos h = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}$, aquella expresión se transforma en

$$\cos z - \cos z' = \mp 2 \cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2},$$

con el primer signo ó el segundo, conforme la culminación sea superior ó inferior. Finalmente, reemplazando la diferencia de cosenos por productos de senos, y por ser $z' - z$ un arco pequeño, el seno de la semidiferencia por el arco, se halla la fórmula del texto. Si la estrella culminara cerca del zenit, el divisor del segundo término de esta fórmula sería muy pequeño, y por consiguiente este término demasiado crecido.

en la cual debe tomarse el signo negativo si la estrella está próxima á la culminación superior y el positivo si está cerca de la culminación inferior. Aunque en el segundo miembro de dicha fórmula figura también la incógnita, basta sustituir en él la z' deducida de un valor aproximado.

No hay duda que con círculos de pequeñas dimensiones un observador experto puede determinar la latitud de un punto con suma precisión. Las de la mayor parte de las estaciones del arco ruso se hallaron con círculos cuyo diámetro era de 28 ó de 36 centímetros. Ya quedan consignadas en este libro las dimensiones del instrumento usado en las operaciones geodésicas de España, y puede juzgarse de la precisión que con él se alcanza por los siguientes valores de latitud relativos á tres estaciones diferentes en cada una de las cuales se halló dicha coordenada por tres métodos distintos.

MÉTODO	CONJUROS 36° 44'.		DIEGO GÓMEZ 40° 55'.		LLATIAS 43° 29'.	
	N.º de días	Segundos de latitud.	N.º de días.	Segundos de latitud.	N.º de días.	Segundos de latitud.
Polar.	5	22.41 ± .10	5	39.11 ± .10	5	28.78 ± .10
Otras estrellas.	9	21.99 ± .10	5	38.26 ± .07	5	29.02 ± .10
Primer vertical	6	22.43 ± .12	6	38.42 ± .12	4	29.45 ± .13

Es verdad que en la segunda estación la diferencia entre los resultados obtenidos por los dos primeros métodos llega á 0."85; pero esta diferencia no excede mucho á la que existe entre los valores de la latitud de Balta determinados respectivamente con el sector zenital de Ramsden y el de Airy (1).

(1) *Llatias* y *Conjuros* son dos de los 43 vértices pertenecientes á la cadena de triángulos tendida sobre el meridiano que pasa por el Observatorio astronómico de Madrid. *Diego Gómez* es uno de los 40 vértices, entre los cuales se cuenta también el Observatorio astronómico de San Fernando, correspondientes á la cadena del meridiano de Salamanca.

Llatias, altura situada sobre la costa del mar Cantábrico, á un kilómetro próximamente al O. del faro del Cabo Mayor, á tres hacia el N. de la ciudad de Santander; pertenece al término ó arrabal de Cueto de esta

Con el anteojo zenital se halla la latitud del siguiente modo: Sea z_0 el ángulo que la recta determinada por el centro óptico del objetivo y por un punto situado en el centro del campo óptico, é-indicado por la lectura micrométrica m_0 , forme con la vertical cuando, puesto el anteojo aproximadamente á la distancia zenital media del par de estrellas que han de observarse, esté el nivel en el cero. Establecido esto, y admitiendo que en el corto tiempo invertido en observar ambas estrellas compongan un conjunto invariable el anteojo y el nivel, si al apuntar á una de ellas—la septentrional por ejemplo—corresponde al extremo norte del nivel la lectura n y al extremo sur la lectura s , la distancia zenital de ese punto m_0 será $z_0 + \frac{1}{2}(s - n)$, sustituyendo las lecturas de nivel por su valor angular.

Por lo tanto, si los valores de esta clase de las divisiones respectivas del micrómetro y nivel son μ , λ , y

	N.	S.
las declinaciones de las estrellas.. . . .	δ'	δ_s
las lecturas micrométricas.. . . .	m'	m_s
las refracciones.. . . .	R'	R_s
las lecturas de nivel.. . . .	$n' \quad s'$	$n_s \quad s_s$

las distancias zenitales aparentes de las estrellas serán, concediendo que las lecturas micrométricas aumenten á medida que esas distancias disminuyan,

ciudad. *Conjueros*, loma situada á unos cuatro kilómetros de la costa del Mediterráneo, á siete al N.E. del faro del Cabo Sacratif y á nueve al E. de la ciudad de Motril; forma parte de la sierra de Jolucar, derivación de la cordillera de Sierra Nevada, y pertenece al término de Gualchos, provincia de Granada. El vértice *Diego Gómez* se halla en el lugar denominado Cabeza de Diego Gómez, ayuntamiento de Sando, provincia de Salamanca.

Las observaciones de latitud se verificaron en los dos primeros puntos en 1871 y en el tercero en el año siguiente, siendo dirigidas todas ellas por el primer astrónomo del Observatorio de Madrid Sr. Merino, y hechas por el mismo con la cooperación de otro astrónomo del mencionado Observatorio: el Sr. Ventosa en Llatias y Conjueros, y el Sr. Torroja en Diego Gómez. Véanse las *Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico*, tomo I, Madrid, 1875.

$$\begin{aligned} \text{N..... } \delta' - \varphi - R' &= z_0 + \frac{1}{2}\lambda (s' - n') + (m_0 - m')\mu, \\ \text{S... } -\delta, + \varphi - R, &= z_0 - \frac{1}{2}\lambda (s, - n,) + (m_0 - m_r)\mu; \end{aligned} \quad (19)$$

de donde, eliminando z_0 y m_0 , resulta:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}(\delta' + \delta,) + \frac{1}{2}\mu (m' - m_r) + \frac{1}{2}\lambda (n' - s' + n, - s,) \\ &\quad - \frac{1}{2}(R' - R,). \end{aligned} \quad (20)$$

Mas esta fórmula supone que la observación se hace sobre el hilo central y que el instrumento se halla en el plano del meridiano. Si la bisección micrométrica se verifica estando la estrella sobre un hilo lateral, á la distancia c del hilo de enmedio, debe hacerse en la distancia zenital la corrección $\pm \frac{1}{2}c^2 \tan \delta$, con el signo superior si la estrella pasa por el Sur y con el inferior si pasa al Norte; y por consecuencia, á la expresión antedicha de φ debe añadirse entonces $+\frac{1}{2}(c' + c_r)$, llamando c' , c_r las correcciones correspondientes á las dos estrellas septentrional y meridional. Si la observación se hace sobre el hilo de enmedio, pero fuera del plano del meridiano, será menester una corrección como la (18).

Para hallar el valor de μ , pónese el anteojo á la distancia zenital de la estrella polar en su máxima digresión, y se dirige al astro cosa de media hora antes del momento en que alcance dicha situación. Una vuelta tras otra vase adelantando el tornillo micrométrico al curso de la estrella, y se anotan las horas de los pasos por los verticales sucesivos, leyendo además el nivel en cada paso. Sea z' la distancia zenital de la Polar en una observación y ζ la correspondiente al momento del máximo azimut. Llamando R la refracción relativa á ζ y escribiendo

$$\delta' - \varphi = z', \quad z_0 + R = \zeta - x, \quad R' - R = \beta(z' - \zeta),$$

la primera de las ecuaciones (19) se convierte en la siguiente, en la cual $z' - \zeta$ está expresada en segundos:

$$\mu (m' - m_0) + x + (z' - \zeta) (1 - \beta) + \frac{1}{2}\lambda (n' - s') = 0.$$

Cada paso que se observa da una ecuación de condición análoga. La solución de todas ellas por el método de los mínimos cuadrados se simplifica poniendo $M + y$ en vez de μ , siendo M un valor aproximado é y la corrección necesaria: $z' - \zeta$ se deduce fácilmente de la hora anotada en la observación. Suponen

estas fórmulas que el antejo se emplea con el tornillo micrométrico debajo, según se ve en la figura. No obstante, si se usara en la posición inversa, aun serían aplicables las mismas cambiando el signo de μ .

En los dos instrumentos de esta clase empleados en los trabajos geodésicos de Inglaterra cada vuelta del micrómetro vale respectivamente

$$62''\cdot356 \pm 0''\cdot003 \quad \text{y} \quad 63''\cdot325 \pm 0''\cdot006,$$

según en cada instrumento se dedujo de las observaciones combinadas hechas en seis estaciones.

Las listas de estrellas preparadas para estos anteojos comprendían de treinta á cincuenta pares para cada noche, tomadas la mayor parte de los catálogos de Greenwich y Oxford, y algunas del catálogo de la Asociación Británica. La siguiente tabla contiene los resultados definitivos concernientes á la latitud de una cumbre de los montes Grampians, estación donde menor número de estrellas se observó.

PARES	JULIO 1, 1868	JULIO 4, 1868	JULIO 6, 1868
	56° 58'	56° 58'	56° 58'
I.	40 ^{''} 22	40 ^{''} 28	39 ^{''} 84
II.	..	41.46	40.26
III.	40.57	40.06	39.92
IV.	39.47	40.28	40.29
V.	39.34	...	40.54
VI.	40.60
IX.	41.63	...	41.40
X.	41.18	40.55	39.86
XI.	38.91	39.63	39.70
XII.	39.64	...	40.01
XIII.	39.94	...	39.01
XIV.	38.76	...	39.02
XV.	39.21	...	40.87
XVI.	40.37
XVII.	40.37	...	40.71
XVIII.	40.46
XIX.	40.33
Promedios diarios.	40.01	40.38	40.16

Latitud: 56° 58' 40^{''}·13 \pm 0^{''}·08.

El anteojo zenital, por la misma sencillez de su construcción, está exento de varias causas de error, y por la facilidad con que se maneja y transporta es muy á propósito para las operaciones geodésicas. En los Estados Unidos es el único instrumento que se emplea para determinar latitudes, y probable es que quien alguna vez lo maneje lo prefiera á los círculos graduados que al mismo objeto se destinan.

Según se echa de ver por la fórmula (20), el error padecido en cada valor de la latitud, determinado con el anteojo zenital, procede de los errores de las declinaciones fijadas para el par de estrellas, de los errores cometidos al bisecar éstas y, finalmente, de los errores de los valores atribuidos á las divisiones del micrómetro y nivel. Los originados por las dos últimas causas pueden reducirse mucho. Discutido gran número de observaciones se ha visto que el error probable de *observación solamente*, al hallar un valor de la latitud por medio de un par de estrellas, está comprendido entre

$$\pm 0''.35 \text{ y } \pm 0''.65,$$

variando su cuantía según el esmero del observador y la sensibilidad del nivel del anteojo (1). En su consecuencia, llamando e, e' los errores de declinación de las dos estrellas: si éstas se observan n veces, el error en el valor promedio de la latitud con ellas determinada podrá expresarse por

$$\frac{1}{2}(e + e') \pm \frac{0''.50}{\sqrt{n}}.$$

Y llamando $\varepsilon, \varepsilon'$ los errores probables de las declinaciones de dichas estrellas, el error, de la misma clase, de la latitud deducida de n observaciones de ese par será

$$\pm \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \frac{1.00}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto, al combinar los resultados obtenidos con varios

(1) El término medio entre dichos números es $\pm 0''.50$, valor adoptado por los geodestas de los Estados Unidos como ordinario error, bajo el concepto arriba expresado.

pares de estrellas, puede aceptarse como peso propio de cada resultado

$$\frac{n}{1 + n\varepsilon^2 + n\varepsilon'^2}$$

El error probable de la declinación depende del catálogo que suministre esta coordenada. Si es el almanaque náutico inglés (*the Nautical Almanac*) ó los catálogos de Greenwich, ε puede valer unas $\pm 0''.5$; pero si fuera el catálogo de la Asociación Británica, ε ascendería probablemente al doble.

En la Memoria oficial acerca de los límites de los Estados Unidos (*) discútese tal asunto muy detenidamente. En las operaciones practicadas para fijar dichos límites el error probable de un valor de latitud deducido de una sola observación fué en varios casos inferior á $\pm 0''.3$.

7.

El método comúnmente seguido en Inglaterra para hallar el azimut absoluto consiste en medir la proyección horizontal del ángulo comprendido entre una señal terrestre y una estrella inmediata al polo, cuando ésta alcanza su máxima digresión ó dista poco de ella. En Rusia, España y América siguen el mismo método, salvo que las observaciones no se limitan á la posición en que el astro posee el máximo azimut. Principalmente se emplea la Polar, y en segundo término las δ , ε y λ Ursæ Minoris, la 51 Cephei y otras. Como en la fórmula (4) los errores de colimación y nivel entran multiplicados por factores, más crecidos á medida que la latitud es más elevada, conviene antes y después de las observaciones de la estrella determinar la colimación, y durante ellas leer el nivel en posiciones inversas. El error de este nombre debe procurarse que sea el menor posible, y el valor de una división del nivel á diversas temperaturas averiguarse con

(*) *Reports upon the Survey of the Boundary between the Territory of the United States and the Possessions of Great Britain.* Washington, 1878, páginas 95-169.

exactitud. Debe conocerse también la pequeña diferencia de los radios de los muñones, y decimos pequeña porque para dicho objeto no se emplean anteojos que la tengan crecida. Por señal nocturna terrestre—á más de kilómetro y medio por lo menos de distancia—suele ponerse una lámpara detrás de una hendidura, ya descubierta, ya cerrada con un papel dado de aceite.

Varia un poco en sus detalles la serie de operaciones; pero las diferencias son leves, y en sustancia puede dictarse como procedimiento el siguiente: Puesto sobre el eje el nivel, y el anteojo con el círculo al Oeste, por ejemplo: 1.º, obsérvese la señal; 2.º, obsérvese la estrella; 3.º, léase é inviértase el nivel; 4.º, obsérvese por segunda vez el astro; 5.º, léase el nivel; 6.º, obsérvese la señal. Verificado en seguida el cambio ó inversión del anteojo, y situado por consiguiente el mismo con el círculo al Este, repítanse las operaciones que acaban de enumerarse. Tales operaciones, así duplicadas, constituirán una medición completa del ángulo. Anótense las horas señaladas por el cronómetro en las observaciones de la estrella para calcular después su azimut. Los errores de graduación se eliminarán como en la medida de ángulos terrestres, corriendo el cero del círculo horizontal.

El error probable de un valor de azimut, á medida que la latitud crece, aumenta á su vez, pues viene á estar expresado por la fórmula (1)

$$\varepsilon = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \tan^2 \varphi.$$

En los azimutes hallados por Struve en puntos enlazados con el gran arco ruso de meridiano, el error probable de una determinación, hecha según acaba de decirse, aumentaba desde $\pm 0''\cdot75$ á la latitud de 45° hasta $\pm 1''\cdot98$ en Finmark. En las operaciones geodésicas de España se ha hallado el azimut con teodolitos de Repsold con suma precisión. En las de la Gran

(1) Observando la Polar, puede reemplazarse en la fórmula (4), como valor aproximado, z por $90^\circ - \varphi$. Además, para apreciar la variación producida por la diferencia de latitud, debe suponerse igualdad de las otras condiciones, y por consiguiente de 90° ó de otro valor constante la distancia zenital z' de la señal terrestre.

Bretaña se ha obtenido dicho dato en sesenta estaciones, siendo en doce de ellas el error probable del resultado final inferior á $\pm 0''\cdot50$, y en treinta y cuatro inferior á $\pm 0''\cdot70$. Como en estas observaciones no solía saberse la hora sino aproximadamente, sólo se hacía en cada digresión máxima de la estrella una medición. Las observaciones verificadas desde 1844 fueron corregidas todas de los errores de nivel y colimación. En cincuenta y siete de dichas sesenta estaciones fueron los observadores oficiales subalternos del Real Cuerpo de Ingenieros.

El coronel Everest, en las operaciones de la India, acostumbraba tomar cuatro medidas con el círculo vertical al Este y otras cuatro con el mismo al Oeste, haciendo ocupar al cero del horizontal, á cada lado del polo, cuatro posiciones diversas, de donde resultaban sesenta y cuatro medidas: número suficiente, pero del cual aun pasó muchas veces.

Otro método para hallar los azimutes absolutos consiste en elevar una señal al Norte, un poco al Este ó al Oeste—ó una á cada lado—en punto á propósito para que la estrella polar cruce el círculo vertical de la marca un poco antes y un poco después de la máxima digresión. Verifícanse las observaciones con un anteojo de pasos provisto de hilo vertical movable, destinado á mediciones micrométricas. Colócase el anteojo con el hilo de enmedio próximo á la señal, y apuntado después en tiempo oportuno á la estrella, ésta cruza pausadamente por el campo óptico. Puesto el hilo micrométrico sucesivamente en la señal, la estrella, la estrella y la señal, hácese sus lecturas, combinadas con las del nivel en posiciones inversas. Repítese esta operación alternando la situación del instrumento con el círculo al Este, con la del mismo con el círculo al Oeste, y coordinando las observaciones de modo que se tome la estrella tantas veces en un lado del campo óptico como en el otro, para que en el resultado definitivo casi no influya el valor atribuido á una división del micrómetro.

Llamando μ_0 la lectura micrométrica del centro de colimación, μ la de la estrella, μ' la de la señal—crecientes todas á medida que el hilo se corra hacia el extremo del eje de rotación donde está el círculo,—y designando además por d el valor an-

gular de una división micrométrica, tendremos, de conformidad con la ecuación (3),

$$(\mu - \mu_0) d + b \cos z + \operatorname{sen} z \cos (\alpha - a) = 0,$$

$$(\mu' - \mu_0) d + b \cos z' + \operatorname{sen} z' \cos (\alpha' - a) = 0;$$

de donde se deduce, puesto que $\alpha - \alpha'$ sólo mide unos pocos minutos ⁽¹⁾,

$$\alpha' = \alpha - \frac{(\mu - \mu_0) d}{\operatorname{sen} z} + \frac{(\mu' - \mu_0) d}{\operatorname{sen} z'} - b \frac{\operatorname{sen} (z' - z)}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'}. \quad (21)$$

El siguiente cuadro contiene los valores obtenidos para el azimut de una estación en el condado de Elgin, á la latitud de $57^{\circ}35'$, donde se hicieron las observaciones con el antejo de pasos ruso arriba citado. Cada número responde á una medición completa deducida de las dos posiciones del antejo, según antes se dijo:

1868. SEÑAL AL NORTE HACIA EL OESTE. AZ. $177^{\circ} 45'...$						
Oct. 14.	Oct. 16.	Oct. 17.	Oct. 18.	Oct. 20.	Oct. 25.	Oct. 26.
37'' 36.50	38'' 37.21 37.21	39'' 38.90	38'' 38.79	36'' 35.13 34.43	37'' 35.85 38.08 36.98	37'' 39.13 37.65
SEÑAL AL NORTE HACIA EL ESTE. AZ. $182^{\circ} 17'..$						
Oct. 16.	Oct. 17.	Oct. 20.	Oct. 21.	Oct. 23.	Oct. 25.	
15'' 15.75	15'' 16.13	14'' 15.36 15.40	16'' 16.31	16'' 15.66 15.29 14.99 14.67 15.00	14'' 14.83 14.50 15.64 16.97	

(1) Pues

$$\cos (\alpha' - a) - \cos (\alpha - a) = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - \alpha'}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - a \right),$$

y por ser pequeño el arco del primer seno, y casi de 90° el arco del segundo, puede reemplazarse dicho primer seno por el arco y el segundo por la unidad.

Luego, en conclusión, se tienen los siguientes azimutes, contados desde el Sur:

De la señal al Norte hacia el Oeste.... $177^{\circ} 45' 37'' \cdot 61 \pm 0'' \cdot 19$.

De la señal al Norte hacia el Este..... $182^{\circ} 17' 15'' \cdot 37 \pm 0'' \cdot 11$.

En la primera el error probable de una medición completa aislada es de $\pm 0'' \cdot 820$, y en la segunda de $\pm 0'' \cdot 489$. Esta diferencia de precisión en los resultados proviene de que la primera señal se observaba durante el crepúsculo matutino, á veces con una lámpara y con dificultad, mientras que la segunda se observaba con buena luz por la tarde. Hicieron este trabajo (con tiempo tempestuoso y á una altura de 335 metros) Steel, maestre cuartel, y Buckle, sargento, ambos de ingenieros, probándose con ello, tanto la habilidad de los observadores como la bondad del antejo.

Observando la estrella y su imagen reflejada sobre artificial horizonte, cabe prescindir del error de nivel, á menos que la distancia de la señal al zenit difiera de 90° en cantidad no despreciable. Si α , z son las coordenadas esféricas de la estrella, serán α y $180^{\circ} - z$ las de su imagen reflejada; luego, si μ , μ' son las lecturas de la estrella y su imagen, se tendrá:

$$(\mu - \mu_0) d + b \cos z + \operatorname{sen} z \cos(\alpha - a) = 0,$$

$$(\mu' - \mu_0) d - b \cos z + \operatorname{sen} z \cos(\alpha - a) = 0,$$

desdeñando la exigua variación que en la distancia zenital z se produzca entre ambas observaciones. Con el promedio de estas fórmulas queda desligada de b la estrella, y se tiene ⁽¹⁾

(1) El promedio de ambas fórmulas da

$$-\operatorname{sen} z \cos(\alpha - a) = \frac{1}{2} (\mu + \mu') - \mu_0 \} d,$$

y de la primera de ellas se deduce

$$(\mu - \mu_0) d + b \cos z = -\operatorname{sen} z \cos(\alpha - a).$$

Además, la fórmula (21) puede escribirse de este modo:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\mu' - \mu_0}{\operatorname{sen} z'} d + b \cot z' - \frac{(\mu - \mu_0) d + b \cos z}{\operatorname{sen} z}.$$

De la combinación de estas tres relaciones resulta la fórmula del texto.

$$\alpha' = \alpha + \frac{\mu' - \mu_0}{\text{sen } z'} d - \frac{\frac{1}{2}(\mu + \mu') - \mu_0}{\text{sen } z} d + b \cot z'.$$

El azimut de una circumpolar en cualquier punto de su curso está dado por la fórmula (1)

$$\frac{\tan \alpha}{\tan A} = \frac{\text{sen } H \text{ sen } h}{1 - \cos H \cos h}, \quad (22)$$

en la cual H es el ángulo horario correspondiente á la máxima digresión A. Pero si las observaciones de la estrella distan del momento de máxima digresión menos de una hora, la fórmula (23), página 62, es bastante exacta; y aun, si dicho intervalo no excede de unos 20 minutos (lo cual depende de la latitud donde se observe), puede reemplazarse en dicha fórmula el denominador del segundo miembro por la unidad.

En el azimut obtenido por observaciones de la Polar debe hacerse la corrección $\pm 0''.311$ por causa de la aberración diurna.

8.

La determinación de la diferencia de longitudes de dos estaciones A y B es problema muy sencillo en teoría, pues basta saber con exactitud la hora en cada uno de dichos puntos y poseer algún medio de comparar las correspondientes á un mismo momento. Pero la dificultad está en la práctica, y para trabajos

(1) A los ángulos horarios h y H corresponden respectivamente las fórmulas

$$\begin{aligned} \tan \delta \cos \varphi &= \text{sen } \varphi \cos h + \text{sen } h \cot \alpha, \\ \tan \delta \cos \varphi &= \text{sen } \varphi \cos H + \text{sen } H \cot A. \end{aligned}$$

Además, en el triángulo esférico rectángulo formado en la máxima digresión se tiene

$$\text{sen } \varphi = \cot H \cot A.$$

Sustituido este valor en la relación que se halla restando las dos primeras ecuaciones, se pasa fácilmente á la fórmula arriba consignada.

geodésicos no ofrecen bastante precisión los métodos que se fundan en la situación de la Luna respecto de otros astros ó respecto del horizonte y meridiano. Recúrrese en su lugar á la telegrafía eléctrica, ya por todas partes extendida, la cual suministra el medio más exacto de cotejar las horas locales. Quien desee conocer bien los pormenores de este método puede acudir, entre otras, á las obras siguientes: *U. S. C. Survey Reports*, 1857, 1867, 1874; *Reports of the Surveyor-General of India*; *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris*, tomo VIII; *Mémorial du Dépôt général de la Guerre*, tomo XI; *Publication des Königl. Preussischen Geodätischen Instituts*, Berlín, 1876.

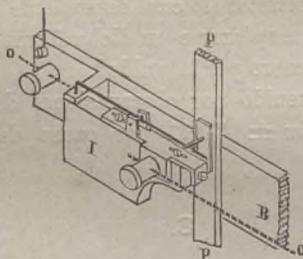


Fig. 44.

El anotar sobre un cilindro giratorio la hora á que se verifica una observación astronómica fué iniciado por la Dirección de la Costa de los Estados Unidos con objeto de hallar la longitud por señales electro-magnéticas. El cronógrafo de Bond (1) es un cilindro de unos 30 centímetros de largo y 15 de diámetro, que da una vuelta por minuto, lográndose su movimiento uniforme por medio de un volante de fuerza centrífuga enlazado con el péndulo. Mientras el cilindro da vuelta, se desliza por el tornillo que le sirve de eje, y envuelto ese cilindro por un papel que se qui-

(1) Director del Observatorio del Colegio Harvard, en Cambridge, Estados Unidos. Su cronógrafo data de 1848. Antes de esta fecha se conocían los de Morse y Mitchel. Las notas del primero quedaban sobre una cinta; las del segundo, sobre un disco. De Saxton hay otro cronógrafo.

ta cuando se desea, una pluma, que un electro-imán pone en contacto con el papel, traza en éste una espiral continua. A cada segundo, el péndulo interrumpe la corriente eléctrica que por él cruza: durante la interrupción, que dura cosa de media décima de segundo, pierde el electro-imán su fuerza magnética, y obediendo la pluma á un muelle, traza un rasgo en forma de diente perpendicular á la antedicha espiral. De tal modo, en vez de oírse los golpes del reloj se ven en los rasgos que se dibujan. Por el grabado adjunto se comprenderá cómo el reloj interrumpe la corriente; PP es la varilla del péndulo, B una lámina de latón fija detrás de la caja del reloj é I una repisa de marfil unida á un saliente de dicha lámina. Sobre esa repisa hay un martillito de platino que puede oscilar en torno del punto medio de su mango: la cabecita del martillo, situada á la izquierda, descansa sobre un disco de platino, enlazado con B y con el alambre *o* que pertenece al circuito. Una aguja fina que sale de la varilla del péndulo da, cuando éste ocupa su posición más baja, contra una suave elevación del mango del martillito: elévase entonces su cabecita y queda interrumpida la corriente.

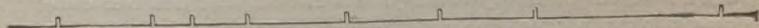


Fig. 45.

Puede cortarla también el observador por medio de una llave al alcance de su mano, y de este modo el momento en que una estrella cruza por un hilo del anteojo de pasos se acusa en el papel por otro diente que por su mayor tamaño no se confunde con los rasgos de segundos marcados en las oscilaciones del péndulo, resultando, por ejemplo, lo que indica esta figura.

Debe hacerse la lectura del dibujo cronográfico refiriéndose al primer perfil, ó sea el de la derecha de cada diente, pues al trazarse este perfil es cuando ocurría la interrupción producida en el circuito por el péndulo ó el observador. Para que se lea con más facilidad la hora, á cada minuto se omite el rasgo relativo al segundo que completa los 60, y cada cinco minutos se omiten los rasgos correspondientes á dos segundos consecutivos. Tal supresión se verifica por medio de un ingenioso mecanismo,

merced al cual el mismo reloj en esos momentos completa el circuito (1).

En cada una de las estaciones A y B, cuya diferencia de longitudes se quiere hallar, debe haber un reloj astronómico, un cronógrafo y un anteojo de pasos. Cuando se determinó dicha diferencia entre París y Argel, dieron muy buen resultado anteojos cuya distancia focal era de 77.5 centímetros y el diámetro del objetivo de 61.0 milímetros: estaban provistos de círculos de 41.5 centímetros de diámetro, y en realidad venían á ser círculos meridianos. De casi dobles dimensiones son los anteojos usados en la India: la distancia focal 1.52 metro, y el diámetro del objetivo 127 milímetros; pero á decir verdad, la precisión de los resultados no guarda proporción con el aumento de dimensiones. Discutidos muchísimos pasos observados en las operaciones geodésicas de la Costa de los Estados Unidos, se ha

(1) Casi desde su invención se había aplicado la telegrafía eléctrica para determinar longitudes, pues suministraba señales, instantáneas ó poco menos, que en un punto podían hacerse desde otro, bien con el desvío que la aguja imanada padece bajo el influjo de la corriente eléctrica, bien con el chasquido que la armadura de hierro dulce de un electro-imán produce, cuando en virtud de la fuerza atractiva por éste adquirida merced á dicha corriente se vence el resorte que en sentido contrario requiere la armadura y da ésta en el electro-imán. El observador del punto de origen, atento el oído á las pulsaciones del péndulo ó cronómetro local, anotaba el momento en que oprimía la llave del circuito para establecer la corriente, y el observador del punto de término—atalaya en un caso y escucha en otro—anotaba á su vez del mismo modo el momento en que veía ó oía la señal respectiva. De origen y término hacían alternativamente ambas estaciones.

Dando en la de origen la señal en el mismo instante de sonar una pulsación de segundo en el péndulo ó cronómetro, se evitaba en dicha estación el error que suele cometerse al apreciar á oído, por impresión de intervalo, las fracciones de segundo, y sólo cabía tal error en el punto de término donde las señales recibidas no coincidirían por lo común con latidos del reloj. Cuando también los observadores querían desvanecer esta incorrección, determinaban primero, sin salvarla por de pronto, la diferencia de longitudes; y luego, rigiéndose el uno constantemente por un cronómetro sidéreo y el otro por un cronómetro medio, procedían á comparar los dos, para lo cual, turnando ambos observadores en remitir y re-

sacado en conclusión que el error probable del paso por un hilo, cuando se anota su hora en el registro cronográfico, tiene el siguiente valor, expresando por δ la declinación de la estrella:

$$\varepsilon = \pm \left((0.063)^2 + (0.036)^2 \tan^2 \delta \right)^{\frac{1}{2}}$$

ó

$$\varepsilon = \pm \left((0.080)^2 + (0.063)^2 \tan^2 \delta \right)^{\frac{1}{2}}$$

el primero en los anteojos cuya distancia focal es de 1.19 metro, el segundo en aquellos donde dicha distancia mide 66 centímetros.

Causa más grave de error es la *ecuación personal*. Cada individuo observa é inscribe los pasos á su modo, y de aquí nace un error peculiar. Cuando se sigue el método de ver y oír á un tiempo, se padece cierto pequeño error al coordinar la posición de la estrella en el campo óptico con los golpes que se escuchan del reloj, porque la vista y el oído no proceden simultáneamente;

cibir series de señales, dábales el que remetía, á compás de los segundos de su cronómetro, y anotaba sólo el otro las coincidencias que se producían con segundos del suyo.

Entre las medidas de diferencias de longitudes verificadas en Europa por telegrafía eléctrica, antes de generalizarse el cronómetro ideado en los Estados Unidos, se cuentan las siguientes:

FECHAS	DIRECTORES	OBSERVATORIOS	LONG. OESTE
1854	Airy—Le Verrier.	Greenwich—París.	9 ^m 20 ^s .63
1860	Márquez—Aguilar.	San Fernando—Madrid.	10 4.21
1863	Aguilar—Le Verrier.	Madrid—París.	24 6.08

En la primera, los observadores Sres. Dunkin y Faye turnaron en Greenwich y París. En la tercera, que se hizo refiriendo ambas estaciones á Biarritz como intermedia, el astrónomo Sr. Merino observó en este punto con el Sr. Le Verrier y en Madrid con el Sr. Aguilar. Empleóse como señal en las dos primeras determinaciones de longitud citadas el desvío de la aguja magnética, y en la tercera el chasquido de la armadura. Biarritz daba los segundos á Madrid y París. Véanse respectivamente *Comptes rendus de l'Acad. des Sci. de Paris*, 1854; *Anuario del Observ. astr. de Madrid*, 1863; *Annales de l'Observ. de Paris*, 1866.

y á esto se agrega cierto error habitual al subdividir los segundos por el intervalo que al observador le parece haber transcurrido. Probable es que, por lo concerniente á la vista, el error radique en la misma causa de donde dimana que un observador biseque con el microscopio una línea sobre un limbo ó regla de distinto modo que otro, y con diferencia casi constante. Cuando se emplea el método cronográfico de inscribir las observaciones, también se padece error personal, porque cada cual ve á su modo la posición relativa de la estrella y el hilo, y con diversa celeridad da la señal con la llave de que dispone. El brillo de la estrella y su velocidad pueden influir en el error personal. Que la dirección del movimiento afecta á su vez no admite duda, pues en algunos observadores las estrellas que pasan al Norte del zenit producen diferente error que las que pasan al Sur. También se ha notado en los anteojos, donde los rayos luminosos son reflejados por un prisma central perpendicularmente á su dirección primera, que el error personal varía en las dos posiciones del ocular, es decir, al Este y al Oeste.

Es, por lo tanto, de suma importancia, cuando se halla la diferencia de longitudes, averiguar el error relativo de los dos observadores A y B. El método comúnmente seguido para ello consiste en observar uno y otro pasos de las mismas estrellas con el mismo antejo, turnando del siguiente modo: A observa la primera estrella mientras pasa por todos los hilos anteriores al central; B la observa después, mientras pasa por los que á éste siguen; el mismo B observa la estrella inmediata en la primera mitad de hilos; A en la segunda, y así alternativamente. Observadas de este modo gran número de estrellas, se obtiene la diferencia de ecuaciones personales, tanto para las estrellas que pasan al Norte del zenit como para los que lo verifican al Sur, pues se tiene cuidado de comparar sólo las observaciones relativas á cada grupo. Por desgracia la ecuación personal no es constante, pues depende de la excitación nerviosa ó estado de salud del individuo.

Cuando se usa el registro cronográfico, suelen ponerse en los anteojos de pasos muchos hilos: por ejemplo, cinco grupos de cinco, colocados los que componen cada grupo á intervalos ecua-

toriales de $2^{\text{s}}.5$ (1): con cielo despejado, basta observar con los tres grupos del centro.

Preparados convenientemente los aparatos y anteojos, antes de emprender cada noche los trabajos para la diferencia de longitudes, se observan pasos de estrellas con objeto de averiguar los errores instrumentales y el estado del reloj: tómanse al efecto seis ú ocho estrellas zenitales y una ó dos circumpolares, haciendo mientras tanto dos veces el cambio ó inversión del anteojo. Enlazado después con el circuito el reloj de la estación oriental A, señala á la par en el cronógrafo de A y el de B. El astrónomo de A, cuando llega la primera estrella de la lista convenida para la determinación de longitud, observa su paso, y manejando la llave de que dispone en el circuito, inscribe el momento en ambos cronógrafos. Cuando la misma estrella alcanza el meridiano de B, el astrónomo de este punto observa su paso, y manejando la respectiva llave, inscribe el momento en los dos aparatos. Lo propio se repite con las demás estrellas. A la mitad del trabajo de aquella noche se desliga el circuito del reloj de A y se une con el de B.

Dará de este modo cada estrella en los dos cronógrafos una diferencia de longitudes independiente de la posición que ella ocupe, y aunque la diferencia registrada por el cronógrafo occidental será un poco menor que la verdadera por causa del tiempo invertido en transmitirse las señales, como la registrada por el oriental será por la misma causa otro tanto mayor, con tomar el promedio de las dos indicaciones se eliminará ese pequeño intervalo á condición de que la energía de las pilas se hubiere conservado constante. Con todo, aun quedará en el resultado el error personal de los observadores; mas puede eliminarse cambiando ellos mutuamente de lugar á la mitad de la serie de sus trabajos.

Si las estaciones están muy distantes, en vez de este método, impracticable entonces, se adopta el siguiente: Hechas las ob-

(1) El *intervalo ecuatorial* ó la distancia entre dos hilos expresa, en segundos y fracción decimal de segundo, el tiempo que una estrella situada en el ecuador celeste invertirá al pasar de un hilo á otro si el anteojo estuviese precisamente en el meridiano.

servaciones necesarias para determinar en cada estación el estado del reloj, se enlaza primero con el circuito el péndulo oriental, á fin de que señale á la vez en ambos cronógrafos, y desligado después dicho péndulo, se enlaza el occidental para que éste señale. El cronógrafo occidental dará la longitud un poco menor por el tiempo invertido en la transmisión, y el oriental otro tanto mayor por la misma causa. En cuanto á la ecuación personal, ésta se tiene averiguada de antemano ó se averigua después, ó ambas veces, reuniéndose al efecto los dos observadores en un mismo sitio, cada uno con su cronógrafo y antejo (1).

(1) En vez de dejar registrado el tiempo invertido por las estrellas en pasar de un meridiano á otro, ó en vez de anotar en ambos puntos las horas de uno y otro reloj, también se cronografian independientemente observaciones astronómicas destinadas á precisar el estado del péndulo en cada estación y señales para comparar ambos. Debe ser breve cada período de éstas, con objeto de que durante él pueda suponerse uniforme el movimiento propio de adelanto ó atraso de los dos péndulos, y deben además intercalarse esos períodos de modo que cada noche de las varias que á tal trabajo se consagren se obtenga, por ejemplo, un cronograma de señales entre dos de observaciones horarias ó dos de señales, alternados con tres de dichas observaciones, siendo en todos casos muy corto el intervalo entre éstas y las señales que comprendan.

Consisten estas últimas en interrumpir con cierta regularidad la corriente, no local, sino de línea, sólo utilizada durante el período de ellas, y por medio de pausas se dividen en series para su mejor interpretación. Pueden darse y recibirse, por ejemplo, de dos en dos segundos por series de diez, separada una serie de la siguiente por una pausa de tres ó cuatro segundos, ó de dos ó más minutos cuando suspende una estación el envío y lo comienza ó reanuda la otra. Veinte minutos bastan para que sin confusión se transmitan 200 señales alternadas de 50 en 50 con otras 200 que al mismo tenor se reciban.

Suelen emplearse para mayor claridad cronógrafos de dos plumas, movidas por electro-ímanes distintos: una para los segundos de tiempo y otra para las observaciones astronómicas y las señales de comparación, tanto transmitidas como recibidas. La corriente local é inmediata, por cuyo efecto traza sus rasgos esta segunda pluma, la cierra un relevador, al pasar por él otra corriente local, utilizada durante dichas observaciones, ó la corriente de línea que en el período de señales interviene. Deben ser de igual intensidad las dos últimas corrientes, y para ello cerca del observador se pone una mesita ó *tablita cronográfica*, provista de aparatos donde reciben las antedichas adecuada graduación, pues dividida allí cada

En una Memoria muy curiosa del Sr. J. E. Hilgard acerca de la medición transatlántica de longitud, verificada en 1872,

una en dos ramas que vuelven á reunirse después de recorrer una de ellas un reostato y otra una brújula ó galvanómetro y el mencionado relevador, é interpuesta en el reostato la resistencia necesaria, pasa al último aparato una parte de la corriente, de intensidad dada, que se mide por el desvío de la aguja del galvanómetro. Hay además en dicha mesita un mecanismo para determinar la ecuación automática ó *paralaje de las plumas*, es decir, el adelanto ó atraso relativo de la pluma de segundos respecto de la de observaciones y señales.

Debe procurarse en lo posible que las observaciones astronómicas se refieran en ambos puntos á las mismas estrellas, para que en los valores de la diferencia de longitudes no influyan los errores de que sus ascensiones rectas adolecieren. Conviene asimismo que la hora media del cambio recíproco de señales coincida, ó poco menos, con el promedio de las horas de observación de las dos series de estrellas, entre las cuales dicho cambio se intercale, pues en tal caso los pequeños errores cometidos al determinar el movimiento del péndulo trascenderán apenas al resultado. Si los instrumentos y aparatos, astronómicos y eléctricos, son en ambos puntos de igual forma, tamaño y construcción, se determinará más brevemente la ecuación personal, valiéndose sólo de los instalados en un mismo punto.

Entre las medidas de diferencias de longitudes efectuadas por este método cronográfico, se cuentan las siguientes verificadas por geodestas del Instituto geográfico y estadístico de España y del Servicio geográfico militar de Francia, y relativas al vértice *Reducto*, poco distante de la ciudad de Badajoz, al vértice *Lérida*, situado en la torre del castillo principal de la ciudad del mismo nombre, y á los dos observatorios astronómicos de Madrid y París:

FECHAS	OBSERVADORES	ESTACIONES	LONG. OESTE
1882	Esteban—Eugenio.	Badajoz—Madrid.	13 ^m 10 ^s 367
1882	Esteban—Eugenio.	Madrid—Lérida.	17 15 578
1883	Eugenio—Esteban.	Badajoz—Lérida	30 25 907
1886	Esteban y Bassot.	Madrid—París.	24 5 998

El error probable de cada una de estas medidas es respectivamente de $\pm 0^{\circ}.014$, $0^{\circ}.011$, $0^{\circ}.009$, $0^{\circ}.009$,

y el error de cierre en el vasto triángulo Badajoz—Madrid—Lérida es de $0^{\circ}.038$. Véanse las *Memorias del Instituto geográfico y estadístico*, tomo VI, Madrid, 1886, y la *Détermination de la différence de longitude entre Paris et Madrid, par MM. Bassot et Esteban*, Paris, 1889.

entre América y Europa, se hace el siguiente resumen de tres medidas de la longitud del Observatorio del Colegio de Harvard, en Cambridge de los Estados Unidos, contada desde Greenwich por el Oeste:

	h	m	s	s
Por los cables anglo-americanos, en 1866.	4	44	30.99	± 0.10
Por el cable francés de Duxbury, en 1870.	»	»	30.98	± 0.06
Por el cable francés de St. Pierre, en 1872.	»	»	30.98	± 0.04

En la India se ha determinado con gran exactitud larga serie de longitudes bajo la dirección del general Walker, C. B., M. R. S. é inspector general de dicho país. En la Memoria anual correspondiente á 1877-78 se consignan once diferencias de longitud

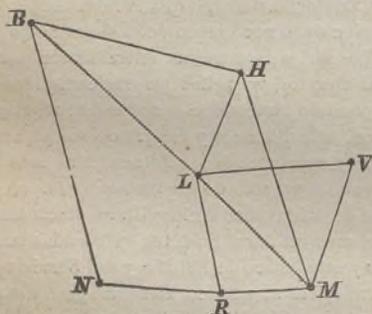


Fig. 46.

medidas por medio de la telegrafía eléctrica, á las cuales acompañan las diferencias geodésicas correlativas. Refiérense á Bombay (B) y Mangalore (N), en la costa occidental; Vizagapatam (V) y Madras (M), en la oriental, é Hyderabad (H), Bangalore (R) y Bellary (L), en el interior. Las once líneas observadas se indican en la figura 46. Nótese que cada triángulo ofrece una comprobación de la longitud medida, pues el LRM, por ejemplo, da, en lo que á esto concierne, $LM = LR + RM$. «Al comenzar las operaciones, dice el general Walker, me propuse se hicieran con gran esmero, y de tal modo que, comprobándose mutuamente, se pudiera calcular la cuantía de los errores padecidos, con más exactitud aún que por los errores probables teóricos de las observaciones...; y me pareció que la combinación más

sencilla era elegir sobre una línea telegráfica que formase circuito tres estaciones trigonométricas A, B, C casi equidistantes, y medidos los arcos de longitud correspondientes á AB y BC, medir AC por separado como comprobación de los otros dos arcos.»

El siguiente cuadro contiene las diferencias de longitud observadas:

ANOS	ARCOS	DIFERENCIA DE LONGITUD OBSERVADA	CORRECCION
1872-73	Madras-Bangalore.....	2° 39' 45.63"	$x_1 = +2.010$
»	Bangalore-Mangalore...	2 44 11.54	$x_2 = +1.691$
1875-76	Hydrabad-Bombay.....	5 42 12.74	$x_3 = -0.452$
»	Bellary-Bombay.....	4 6 44.39	$x_4 = -0.393$
»	Hydrabad-Bellary.....	1 35 28.25	$x_5 = +0.040$
»	Madras-Hydrabad.....	1 43 40.38	$x_6 = -0.412$
»	Madras-Bellary.....	3 19 8.45	$x_7 = -0.192$
»	Bangalore-Bellary.....	0 39 20.46	$x_8 = +0.160$
1876-77	Vizagapatam-Madras....	3 2 26.78	$x_9 = +0.401$
»	Vizagapatam-Bellary....	6 21 35.84	$x_{10} = -0.401$
»	Mangalore-Bombay.....	2 1 50.54	$x_{11} = +0.845$

Los dos primeros arcos, por los cuales se comenzó, contienen algún error procedente de uno de los anteojos de pasos: como poco manejado todavía, no bien conocido entonces; y en su consecuencia, dichos arcos en punto á precisión tienen menor peso que los otros.

Las correcciones inscritas en la última columna se hallan del siguiente modo: el grabado, como se ve, consta de cuatro triángulos y un cuadrilátero, y cada una de estas figuras impone una condición en las longitudes observadas. Supongamos que por causa de los errores padecidos deban hacerse en las diferencias arriba consignadas las correcciones respectivas $x_1, x_2 \dots x_{11}$. En el triángulo BLH, por ejemplo, la suma de la cuarta y quinta diferencia de longitud observada debe ser igual á la tercera; luego

$$5^\circ 42' 12''.64 + x_4 + x_5 = 5^\circ 42' 12''.74 + x_3:$$

relación lineal entre x_3, x_4 y x_5 . De modo análogo se hallarán otras ecuaciones, y simplificadas y reunidas todas, se tendrá:

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_7 + x_8 - 2.36 &= 0, \\
 x_7 + x_9 - x_{10} - 0.61 &= 0, \\
 x_3 + x_6 - x_7 + 0.18 &= 0, \\
 -x_3 + x_4 + x_8 - 0.10 &= 0, \\
 -x_2 + x_4 + x_8 - x_{11} + 2.77 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Es verdad que tales ecuaciones no son en bastante número para determinar las x . Pero los valores más probables, según dice su teoría, serán aquellos que, cumpliendo con las ecuaciones antedichas, conviertan en un mínimo la función

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + x_3^2 + \dots x_{11}^2,$$

formada tomando por unidad de peso el de las nueve últimas medidas é indicando por las letras a_1, a_2 los pesos de las dos primeras, los cuales pueden suponerse iguales á $\frac{1}{2}$ á falta de valores exactos de los mismos.

Esto sentado, si, recurriendo al método comúnmente seguido en el cálculo diferencial, multiplicamos por su orden las ecuaciones (23) por los factores indeterminados $u_1, u_2 \dots u_5$, y expresamos las condiciones del mínimo, tendremos

$$x_1 = 2u_1, \quad x_2 = -2u_3, \quad x_3 = -u_4,$$

y así las demás x , en función todas de $u_1 \dots u_5$. Sustituyendo ahora estos valores de $x_1 \dots x_{11}$ en las ecuaciones (23), transfórmense éstas en

$$\begin{aligned}
 4u_1 - u_2 + u_3 \dots \dots \dots + u_5 - 2.36 &= 0, \\
 -u_1 + 3u_2 - u_3 &= 0, \\
 u_1 - u_2 + 3u_3 + u_4 &+ 0.18 = 0, \\
 &u_3 + 3u_4 + u_5 - 0.10 = 0, \\
 u_1 \dots \dots \dots + u_4 + 5u_5 + 2.77 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Dedúcense de aquí los valores numéricos de $u_1 \dots u_5$, y de ellos se infieren en seguida los de $x_1 \dots x_{11}$. Estos son los que figuran en la última columna del cuadro referido.

La pequeñez de tales correcciones testifica bien la notable precisión conseguida en la observación de esas diferencias de longitud.

El tomo XI del *Mém. du Dép. gén. de la Guerre*, contiene una

preciosa y muy detallada Memoria del comandante Perrier sobre las operaciones practicadas para hallar la diferencia de longitudes entre París y Argel por medio del cable submarino que enlaza este último punto con Marsella: los resultados de cada día, reunidos en la página 167 de dicha Memoria, dan:

	m	s	s		m	s	s
Nov. 2,	2	50.372	± 0.049;	Nov. 17,	2	50.355	± 0.021;
» 3,	2	50.284	± 0.050;	» 23,	2	50.318	± 0.025;
» 6,	2	50.298	± 0.047;	» 24,	2	50.295	± 0.025;
» 7,	2	50.338	± 0.046;	Prom.,	2	50.326	± 0.010.

Mas este promedio requiere, á causa de los errores personales de los observadores, la corrección $-0^s.093$, y por lo tanto; la diferencia de longitudes es $2^m 50^s.233$. Comprueban este valor las siguientes diferencias, halladas por separado:

Paris-Marsella.	12 ^m	13 ^s .435	± 0 ^s .011,
Marsella-Argel.	9	23.219	± 0.011,

que restadas dan $2^m 50^s.216 \pm 0^s.016$, valor que sólo discrepa en $0^s.017$ del obtenido por medición directa.

CAPÍTULO IX

CÁLCULO DE LA TRIANGULACIÓN

Si los ángulos observados en una triangulación no adolecieran de error alguno, el cálculo de las distancias entre cada dos vértices no ofrecería dificultad. Pero como en dichos ángulos se cometen errores que son causa de resultados contradictorios, procede ver de qué manera se calcularán y repartirán con objeto de que la contradicción desaparezca. Si sólo se tratara de un triángulo, y la suma de sus tres ángulos contuviera, por ejemplo, un error de $+ 3''$, natural y lógico sería, en el supuesto de que dichos ángulos se hubiesen medido en igualdad de condiciones, aplicar á cada uno la corrección $- 1''$; y si, por el contrario, sus medidas fueran de desigual precisión, aun sabríamos, por el método expuesto en el capítulo de los mínimos cuadrados, repartir entre los ángulos el error. Pero casos más complejos que el de triángulos aislados se presentan, y de ellos vamos á ocuparnos.

1.

Examinaremos primeramente un polígono de i lados, formado, como el que indica la figura 47, por la reunión de i triángulos con vértice común, y admitiremos que los ángulos respectivos se observen todos con igual grado de precisión. En cada triángulo la suma de los ángulos medidos acusará un cierto error; además la suma de todos los ángulos reunidos en torno de P , un poco diferirá de 360° ; y por añadidura, si partiendo del lado PP_1 , se calculan sucesivamente los PP_2 , PP_3 , ... PP_i , hasta volver por

último á PP_1 , resultará una diferencia entre la longitud de PP_1 así calculada y aquella desde la cual se comenzó, y esta diferencia será también una función de los errores de las observaciones. Luego tendremos $i + 2$ valores numéricos de otras tantas funciones de los $3i$ ángulos medidos, y á esto deben agregarse las condiciones requeridas para la mayor probabilidad.

El problema, en efecto, será el siguiente: Representemos por

A_1, B_1, C_1 los verdaderos ángulos del primer triángulo,

A'_1, B'_1, C'_1 los ángulos observados del mismo,

e_1, f_1, g_1 los errores correspondientes de observación,

x_1, y_1, z_1 las correcciones que han de calcularse,

$\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1$ los ángulos que al fin se adopten;

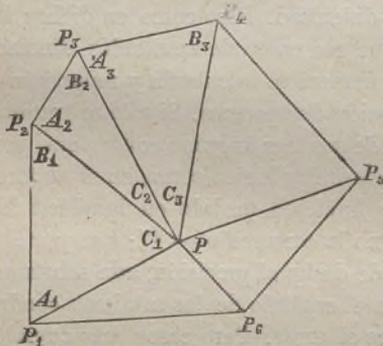


Fig. 47.

y por las mismas letras con subíndice n , en vez de 1, las cantidades correlativas del triángulo n -ésimo; todo lo cual supone las relaciones

$$\begin{aligned} A_n' &= A_n + e_n, & \mathcal{A}_n &= A_n + e_n + x_n, \\ B_n' &= B_n + f_n, & \mathcal{B}_n &= B_n + f_n + y_n, \\ C_n' &= C_n + g_n, & \mathcal{C}_n &= C_n + g_n + z_n. \end{aligned}$$

Sentado lo antedicho, trátase de averiguar los valores más probables de las correcciones x, y, z que á los ángulos observados deben aplicarse.

Para mayor brevedad, llamaremos $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ las cotangentes de A_1, B_1, C_1 , y escribiremos

$$2\alpha_1 + \beta_1 = a_1, \quad -\alpha_1 - 2\beta_1 = b_1, \quad -\alpha_1 + \beta_1 = c_1,$$

lo cual implica $a_1 + b_1 + c_1 = 0$.

Sea ε_n en el triángulo n -ésimo el exceso de la suma de los ángulos observados sobre la verdadera, y $360^\circ + \varepsilon_0$ la de los ángulos medidos en torno de P. Tendremos por consiguiente (1):

$$e_n + f_n + g_n = \varepsilon_n, \quad g_1 + g_2 + \dots + g_i = \varepsilon_0, \quad (1)$$

y con los varios valores de n resultará un total de $i + 1$ ecuaciones. Mas la última puede reemplazarse por la que se obtiene substituyendo en ella cada g en función de las respectivas e, f , á saber:

$$e_1 + f_1 + e_2 + f_2 + \dots + e_i + f_i = -\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i. \quad (2)$$

Debiera verificarse también la siguiente relación, cuyos dos miembros valen respectivamente la unidad:

$$\frac{PP_1}{PP_2} \cdot \frac{PP_2}{PP_3} \dots \frac{PP_i}{PP_1} = \frac{\text{sen } B_1}{\text{sen } A_1} \cdot \frac{\text{sen } B_2}{\text{sen } A_2} \dots \frac{\text{sen } B_i}{\text{sen } A_i} =$$

ó bien, si el triángulo fuese esférico, la relación análoga en cuyo primer miembro figure $\text{sen } PP_1$ en vez de PP_1 , etc.; pero no cumpliendo con tal propiedad los ángulos observados A', B', \dots , resultará

$$\frac{\text{sen } B'_1 \text{ sen } B'_2 \dots \text{sen } B'_i}{\text{sen } A'_1 \text{ sen } A'_2 \dots \text{sen } A'_i} = 1 + \varepsilon,$$

siendo ε una cantidad muy pequeña; y de aquí, puesto que desdénando términos de orden inferior, es (2)

$$\frac{\text{sen } B'_1}{\text{sen } A'_1} = \frac{\text{sen } B_1 (1 + \beta_1 f_1)}{\text{sen } A_1 (1 + \alpha_1 e_1)} = (1 - \alpha_1 e_1 + \beta_1 f_1) \frac{\text{sen } B_1}{\text{sen } A_1},$$

se infiere

$$-\alpha_1 e_1 + \beta_1 f_1 - \alpha_2 e_2 + \beta_2 f_2 - \dots - \alpha_i e_i + \beta_i f_i = \varepsilon. \quad (3)$$

(1) Cálculase ε_n restando del exceso de la suma de los tres ángulos observados sobre 180° el mismo exceso deducido, como se indica en la página 67, en función de los lados y un ángulo.

(2) $\text{sen } (A_1 + e_1) = \text{sen } A_1 + e_1 \cos A_1$.

Ahora bien, toda vez que los ángulos A, B, C que se adopten, deben cumplir con todas las propiedades teóricas, se tendrá, de acuerdo con (2) y (3),

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots x_i + y_i = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \dots - \varepsilon_i, \quad (4)$$

$$- \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 - \dots - \alpha_i x_i + \beta_i y_i = -\varepsilon;$$

y de acuerdo con (1),

$$x_n + y_n + z_n + \varepsilon_n = 0, \quad z_1 + z_2 + \dots z_i + \varepsilon_0 = 0.$$

Pero aparte de llenar estas condiciones necesarias, los valores de x_1, y_1, x_2, y_2 , etc., deben convertir en un mínimo la función

$$2\Omega = x_1^2 + y_1^2 + (x_1 + y_1 + \varepsilon_1)^2 + x_2^2 + y_2^2 + (x_2 + y_2 + \varepsilon_2)^2 + \dots$$

para lo cual se requiere que diferenciando se verifique:

$$0 = \frac{d\Omega}{dx_1} dx_1 + \frac{d\Omega}{dy_1} dy_1 + \frac{d\Omega}{dx_2} dx_2 + \frac{d\Omega}{dy_2} dy_2 + \dots$$

$$= (2x_1 + y_1 + \varepsilon_1) dx_1 + (x_1 + 2y_1 + \varepsilon_1) dy_1$$

$$+ (2x_2 + y_2 + \varepsilon_2) dx_2 \dots$$

Quedarán enlazadas unas y otras condiciones si, diferenciando las ecuaciones (4) y multiplicándolas respectivamente por factores indeterminados, $3Q$ y $3P$, las sumamos con la ecuación últimamente escrita, pues tendremos

$$0 = (2x_1 + y_1 + \varepsilon_1 - 3\alpha_1 P + 3Q) dx_1,$$

$$+ (x_1 + 2y_1 + \varepsilon_1 + 3\beta_1 P + 3Q) dy_1,$$

$$+ (2x_2 + y_2 + \varepsilon_2 - 3\alpha_2 P + 3Q) dx_2,$$

$$+ (x_2 + 2y_2 + \varepsilon_2 + 3\beta_2 P + 3Q) dy_2,$$

$$+ \dots \dots \dots$$

y según los principios del cálculo diferencial, los coeficientes de $dx_1, dy_1, \dots dx_i, dy_i$; deberán ser nulos por separado, resultando con ello las igualdades

$$x_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 + a_1 P - Q, \quad x_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 + a_2 P - Q, \quad (5)$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 + b_1 P - Q, \quad y_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 + b_2 P - Q,$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 + c_1 P + 2Q, \quad z_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 + c_2 P + 2Q,$$

y así en los demás triángulos. Para hallar los valores directos, sustitúyanse los precedentes de x_1, y_1, x_2, y_2 , etc., en las ecuacio-

nes (4) y se obtendrán otras dos de las cuales podrán sacarse P y Q. En efecto, escribiendo

$$\begin{aligned} h &= c_1 + c_2 + \dots c_i, \\ k &= \alpha_1^2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_2\beta_2 + \beta_2^2 + \dots \alpha_i^2 + \alpha_i\beta_i + \beta_i^2, \\ M &= -\varepsilon_0 + \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_i), \\ N &= \varepsilon - \frac{1}{3}(\varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 + \dots \varepsilon_i c_i), \end{aligned}$$

dichas ecuaciones son (1)

$$\begin{aligned} hP + 2iQ &= M, \\ 2kP + hQ &= N; \end{aligned}$$

de las cuales, haciendo $4ik - h^2 = U$, se deduce

$$\begin{aligned} UP &= -hM + 2iN, \\ UQ &= +2kM - hN, \end{aligned} \quad (6)$$

Averiguados los valores de P y Q, los de $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_i, y_i, z_i$, se obtienen en seguida por las ecuaciones (5). El problema queda con esto resuelto: en el triángulo 1, por ejemplo, los valores de los ángulos que definitivamente se adopten serán:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= A_1 + \frac{1}{3}(2e_1 - f_1 - g_1) + a_1P - Q, \\ \mathcal{B}_1 &= B_1 + \frac{1}{3}(-e_1 + 2f_1 - g_1) + b_1P - Q, \\ \mathcal{C}_1 &= C_1 + \frac{1}{3}(-e_1 - f_1 + 2g_1) + c_1P + 2Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Pero veamos cómo en cada uno de los ángulos adoptados influirán los errores verdaderos de observación. Si sustituímos en (6) los valores de M y N, poniendo antes $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_i$ en función de dichos errores según (1) y (3), tendremos⁽²⁾

$$\begin{aligned} UP &= E_1 e_1 + F_1 f_1 + G_1 g_1 + E_2 e_2 + F_2 f_2 + G_2 g_2 + \dots, \\ UQ &= E'_1 e_1 + F'_1 f_1 + G'_1 g_1 + E'_2 e_2 + F'_2 f_2 + G'_2 g_2 + \dots, \end{aligned}$$

(1) Pues sobreentendiendo subíndices iguales en todas las letras menos P, Q, se obtiene

$$\begin{aligned} x + y &= -\frac{2}{3}\varepsilon - cP - 2Q, \\ -\alpha x + \beta y &= -\frac{1}{3}c\varepsilon - 2P(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - cQ. \end{aligned}$$

(2) $3\alpha = a - c, \quad 3\beta = c - b.$

siendo

$$\begin{aligned} 3E_n &= -h - 2ia_n, & 3E'_n &= 2k + a_n h, \\ 3F_n &= -h - 2ib_n, & 3F'_n &= 2k + b_n h, \\ 3G_n &= 2h - 2ic_n, & 3G'_n &= -4k + c_n h, \end{aligned}$$

cantidades entre las cuales, como es fácil verificar, existen las siguientes relaciones, útiles para el cálculo de los errores probables (1):

$$\begin{aligned} \Sigma(E^2 + F^2 + G^2) &= \frac{2}{3} i U, \\ \Sigma(E'^2 + F'^2 + G'^2) &= \frac{2}{3} k U, \\ \Sigma(EE' + FF' + GG') &= -\frac{1}{3} h U. \end{aligned}$$

Sustitúyanse las últimas expresiones de P y Q en las ecuaciones (7), y se obtendrán éstas:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 + \epsilon_1 e_1 + f_1 f_1 + g_1 g_1 + \epsilon_2 e_2 + f_2 f_2 + g_2 g_2 + \dots, \\ B_1 &= B_1 + \epsilon_1' e_1 + f_1' f_1 + g_1' g_1 + \epsilon_2' e_2 + f_2' f_2 + g_2' g_2 + \dots, \\ C_1 &= C_1 + \epsilon_1'' e_1 + f_1'' f_1 + g_1'' g_1 + \epsilon_2'' e_2 + f_2'' f_2 + g_2'' g_2 + \dots, \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{U} (a_1 E_1 - E_1'), & \epsilon_2 &= \frac{1}{U} (a_1 E_2 - E_2') \dots, \\ f_1 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{U} (a_1 F_1 - F_1'), & f_2 &= \frac{1}{U} (a_1 F_2 - F_2') \dots, \\ g_1 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{U} (a_1 G_1 - G_1'), & g_2 &= \frac{1}{U} (a_1 G_2 - G_2') \dots; \end{aligned}$$

(1) En efecto, suponiendo subíndices iguales en todas las letras menos h, i, k , se tiene

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 6(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \\ E^2 + F^2 + G^2 &= \frac{2}{3} \left\{ h^2 - 2hic + 4i^2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \right\}, \\ E'^2 + F'^2 + G'^2 &= \frac{2}{3} \left\{ 4k^2 - 2hkc + h^2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \right\}, \\ EE' + FF' + GG' &= -\frac{1}{3} \left\{ 4hk - (4ki + h^2)c + 4hi(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \right\}. \end{aligned}$$

$$e_1' = -\frac{1}{3} + \frac{1}{U} (b_1 E_1 - E_1'), \quad e_2' = \frac{1}{U} (b_1 E_2 - E_2') \dots,$$

$$f_1' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{U} (b_1 F_1 - F_1'), \quad f_2' = \frac{1}{U} (b_1 F_2 - F_2') \dots,$$

$$g_1' = -\frac{1}{3} + \frac{1}{U} (b_1 G_1 - G_1'), \quad g_2' = \frac{1}{U} (b_1 G_2 - G_2') \dots;$$

$$e_1'' = -\frac{1}{3} + \frac{1}{U} (c_1 E_1 + 2E_1'), \quad e_2'' = \frac{1}{U} (c_1 E_2 + 2E_2') \dots,$$

$$f_1'' = -\frac{1}{3} + \frac{1}{U} (c_1 F_1 + 2F_1'), \quad f_2'' = \frac{1}{U} (c_1 F_2 + 2F_2') \dots,$$

$$g_1'' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{U} (c_1 G_1 + 2G_1'), \quad g_2'' = \frac{1}{U} (c_1 G_2 + 2G_2') \dots$$

En su consecuencia, llamando S, S', S'' las sumas de los cuadrados de estas cantidades—coeficientes de los errores verdaderos en las fórmulas de los ángulos adoptados—se deduce, hecha una leve reducción, que los errores probables de tales ángulos, designando por ϵ el error probable de un ángulo observado, son los que á continuación se expresan á la derecha de los ángulos respectivos (1):

$$\mathcal{A}_1 \dots \pm \epsilon \sqrt{S} = \pm \epsilon \sqrt{\left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{6i} - \frac{3 E_1^2}{2 i U} \right\}}, \quad (8)$$

$$\mathcal{B}_1 \dots \pm \epsilon \sqrt{S'} = \pm \epsilon \sqrt{\left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{6i} - \frac{3 F_1^2}{2 i U} \right\}},$$

$$\mathcal{C}_1 \dots \pm \epsilon \sqrt{S''} = \pm \epsilon \sqrt{\left\{ \frac{2}{3} - \frac{2}{3i} - \frac{3 G_1^2}{2 i U} \right\}}.$$

Análogamente se hallaría que los errores probables de las correcciones x_1, y_1, z_1 , que en los ángulos observados deben hacerse,

$$\begin{aligned} (1) \quad E_1 + F_1 + G_1 &= 0, & E_1' + F_1' + G_1' &= 0, \\ \frac{3}{2} (E_1' - a_1 E_1) &= k + h a_1 + i a_1^2 = \frac{1}{4i} (U + 9E_1^2), \\ \frac{3}{2} (F_1' - b_1 F_1) &= k + h b_1 + i b_1^2 = \frac{1}{4i} (U + 9F_1^2), \\ -\frac{3}{2} (2G_1' + c_1 G_1) &= 4k - 2h c_1 + i c_1^2 = \frac{1}{4i} (4U + 9G_1^2). \end{aligned}$$

son los consignados á continuación, á la derecha de las correcciones respectivas:

$$x_1 \dots \pm \epsilon \sqrt{\left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{6i} + \frac{3 E_1^2}{2 iU} \right\}}, \quad (9)$$

$$y_1 \dots \pm \epsilon \sqrt{\left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{6i} + \frac{3 F_1^2}{2 iU} \right\}},$$

$$z_1 \dots \pm \epsilon \sqrt{\left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{3i} + \frac{3 G_1^2}{2 iU} \right\}}.$$

2.

Como ejemplo numérico, donde las fórmulas precedentes se apliquen, pondremos la corrección de un gran polígono que abraza la mayor parte de Irlanda y se parece al de la figura 47. El punto central es Keeper (P), en el condado de Tipperary; y en torno, por su orden, están Bantregaum (P₁), cerca de Tralee; Bencorr (P₂), en Connemara; Nephin (P₃), en Mayo; Cuilcagh (P₄), cerca de Enniskillen; Kippure (P₅), cerca de Dublin, y Knockanaffrin (P₆), en Waterford. Mas conviene advertir respecto de este polígono que las condiciones no son en un todo las supuestas en el estudio anterior, porque los ángulos no se observaron con independencia unos de otros y sus medidas no poseen todas el mismo peso. En efecto, recorridos esos ángulos según se explicó en la pág. 277, la suma de los formados en P es forzosamente de 360° y por tanto $\epsilon_0 = 0$. No obstante, con dicha salvedad, tal polígono servirá de aclaración. La tabla que sigue contiene los datos con los cuales han de calcularse las 18 correcciones que los ángulos observados requieren:

Δ	ÁNGULOS OBSERVADOS	ERROR DE Δ	$a, b, c, zc,$	$a^2 + b^2 + c^2$
PP ₁ P ₂	$A_1' = 58 \quad 46 \quad 5.46$	$\epsilon_1 = -1.68$	$a_1 = + 1.986$	8.612
	$B_1' = 52 \quad 16 \quad 22.32$		$b_1 = - 2.154$	
	$C_1' = 68 \quad 58 \quad 8.90$		$c_1 = + 0.168$	
	Suma = 36.68		$\epsilon_1 c_1 = - 0.282$	
	Exceso esf. ^o = 38.36			
PP ₂ P ₃	$A_2' = 102 \quad 34 \quad 5.26$	$\epsilon_2 = -3.76$	$a_2 = + 0.264$	2.373
	$B_2' = 54 \quad 38 \quad 27.77$		$b_2 = - 1.197$	
	$C_2' = 22 \quad 47 \quad 43.81$		$c_2 = + 0.933$	
	Suma = 16.84		$\epsilon_2 c_2 = - 3.508$	
	Exceso esf. ^o = 20.60			
PP ₃ P ₄	$A_3' = 74 \quad 5 \quad 54.27$	$\epsilon_3 = +1.81$	$a_3 = + 0.967$	2.112
	$B_3' = 68 \quad 22 \quad 0.37$		$b_3 = - 1.079$	
	$C_3' = 37 \quad 32 \quad 47.29$		$c_3 = + 0.112$	
	Suma = 41.93		$\epsilon_3 a_3 = + 0.203$	
	Exceso esf. ^o = 40.12			
PP ₄ P ₅	$A_4' = 51 \quad 55 \quad 12.30$	$\epsilon_4 = -0.52$	$a_4 = + 1.946$	6.323
	$B_4' = 69 \quad 17 \quad 33.41$		$b_4 = - 1.540$	
	$C_4' = 58 \quad 48 \quad 2.80$		$c_4 = - 0.406$	
	Suma = 48.51		$\epsilon_4 c_4 = + 0.211$	
	Exceso esf. ^o = 49.03			
PP ₅ P ₆	$A_5' = 29 \quad 40 \quad 42.02$	$\epsilon_5 = + 7.16$	$a_5 = + 3.658$	20.170
	$B_5' = 81 \quad 34 \quad 25.36$		$b_5 = - 2.051$	
	$C_5' = 68 \quad 45 \quad 22.28$		$c_5 = - 1.607$	
	Suma = 29.66		$\epsilon_5 c_5 = - 11.506$	
	Exceso esf. ^o = 22.50			
PP ₆ P ₁	$A_6' = 50 \quad 55 \quad 6.36$	$\epsilon_6 = -2.51$	$a_6 = + 3.678$	39.277
	$B_6' = 25 \quad 57 \quad 17.09$		$b_6 = - 4.920$	
	$C_6' = 103 \quad 7 \quad 54.92$		$c_6 = + 1.242$	
	Suma = 18.37		$\epsilon_6 c_6 = - 3.117$	
	Exceso esf. ^o = 20.88			

Tomemos el segundo por unidad de ángulo en las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), y calculando por logaritmos la relación de senos, sea el resultado

$$\log \frac{\text{sen } B_1' \text{ sen } B_2' \dots \text{sen } B_i'}{\text{sen } A_1' \text{ sen } A_2' \dots \text{sen } A_i'} = \eta.$$

De aquí se deducirá, puesto que η es cantidad muy pequeña (1),

$$\eta = \log(1 + \varepsilon \operatorname{sen} 1''), \quad \varepsilon = \frac{\eta}{\operatorname{mod.} \operatorname{sen} 1''}$$

Esto sentado, el cálculo es como sigue (2):

log sen B'	log sen A'
9.8981401,4	9.9320049,5
9.9114466,6	9.9894667
9.9682787,3	9.9830548,6
9.9709966,3	9.8960582
9.9952864	9.6947194,7
9.6411380	9.8900012
suma = 9.3852865,6	9.3853053,8 = suma;
$\eta = -0.000188,2$,	$\varepsilon = -8''.93$;
$h = \Sigma(c)$	= + 0.442,
$k = \frac{1}{3} \Sigma(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$	= + 13.144,
$M = \frac{1}{3} \Sigma(\varepsilon_1)$	= + 0.167,
$N = \varepsilon - \frac{1}{3} \Sigma(\varepsilon_1 c_1)$	= - 2.930,
$U = 24k - h^2$	= 315.273;
$UP = -35.234$,	$P = -0.11176$,
$UQ = +5.677$,	$Q = +0.01800$.

Los valores de $x_1, y_1, z_1, \dots, x_6, y_6, z_6$, se deducen en seguida por las ecuaciones (5), y son estos:

ÁNGULOS	PP ₁ P ₂	PP ₂ P ₃	PP ₃ P ₄	PP ₄ P ₅	PP ₅ P ₆	PP ₆ P ₁
A'	$x_1 = +0.32$	+ 1.21	- 0.73	- 0.06	- 2.81	+ 0.41
B'	$y_1 = +0.78$	+ 1.37	- 0.50	+ 0.33	- 2.18	+ 1.37
C'	$z_1 = +0.58$	+ 1.18	- 0.58	+ 0.25	- 2.17	+ 0.73

Aplicadas estas correcciones á los ángulos observados, cada

(1) $\log(1 + x) = \operatorname{módulo} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$.

(2) Léase: $\log \operatorname{sen} B_1' = 9.8981401,4$; $\log \operatorname{sen} B_2' = 9.9114466,6\dots$

triángulo cierra con exactitud, y al reproducir el lado PP_1 , combinándole con los ángulos del polígono, se tiene:

log sen β .	log sen A .
9.8981414,6	9.9320053,4
9.9114487	9.9894661,7
9.9682783	9.9830544
9.9709969	9.8960580,8
9.9952856,6	9.6947090,6
9.6411438,7	9.8900019
suma = 9.3852949	9.3852949,5 = suma.

Los errores probables de los ángulos adoptados A , β , C en el primer triángulo son:

$$\pm 0''.766 \epsilon, \quad \pm 0''.762 \epsilon, \quad \pm 0''.746 \epsilon,$$

y análogamente se obtienen los de los demás. En estos valores, ϵ es, en segundos, el error probable de un ángulo observado.

3.

Examinemos tras de esto una cadena de triángulos, como la que indica la figura 48. Sean F_1, F_2, \dots, F_i los pies de las perpendiculares trazadas desde las estaciones trigonométricas P_1, P_2, \dots al meridiano que pasa por P ; llamemos k_n la longitud del lado $P_n P_{n+1}$, y K_n el ángulo que la dirección $P_n P_{n+1}$ forma por el Norte con el meridiano. Supongamos primeramente que los ángulos de todos los triángulos estén observados con igual precisión, y que $\pm \epsilon$ sea el error probable de su medida.

El último lado de la cadena debiera ser

$$k_i = k_0 \frac{\text{sen } B_1 \text{ sen } B_2 \dots \text{sen } B_i}{\text{sen } A_1 \text{ sen } A_2 \dots \text{sen } A_i};$$

mas si dicho lado se calcula valiéndose de los ángulos observados A'_1, B'_1, \dots , el resultado será

$$k'_i = k_0 \frac{\text{sen } B'_1 \text{ sen } B'_2 \dots \text{sen } B'_i}{\text{sen } A'_1 \text{ sen } A'_2 \dots \text{sen } A'_i}.$$

Luego empleando la misma notación que antes, y haciendo $k'_i - k_i = k_i \varepsilon$, tendremos

$$\varepsilon = -\alpha_1 e_1 + \beta_1 f_1 - \alpha_2 e_2 + \beta_2 f_2 - \dots$$

Pero si se corrigen en cada triángulo los ángulos observados aplicando á cada uno con signo negativo la tercera parte del ex-

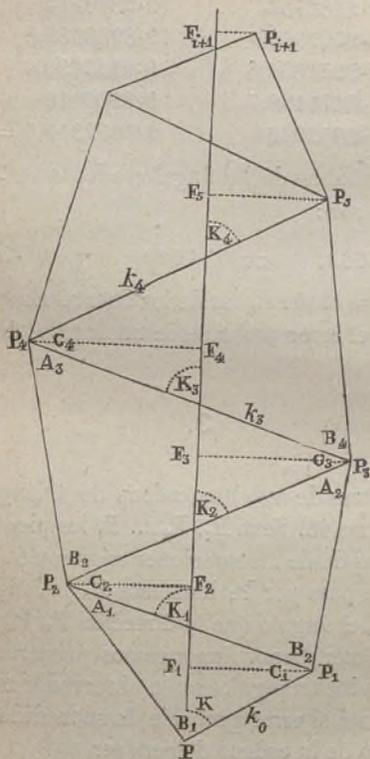


Fig. 48.

ceso de la suma de los tres sobre la verdadera suma, los ángulos modificados del primer triángulo serán:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 + \frac{2}{3} e_1 - \frac{1}{3} f_1 - \frac{1}{3} g_1, \\ B_1 &= B_1 - \frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} f_1 - \frac{1}{3} g_1, \\ C_1 &= C_1 - \frac{1}{3} e_1 - \frac{1}{3} f_1 + \frac{2}{3} g_1, \end{aligned} \quad (10)$$

y análogamente se obtendrán los de los otros.

Luego calculando k_i con estos ángulos corregidos, y escribiendo también $k'_i - k_i = \varepsilon k_i$, se tendrá expresado por (1)

$$-\varepsilon = \frac{1}{3} e_1 a_1 + \frac{1}{3} f_1 b_1 + \frac{1}{3} g_1 c_1 + \frac{1}{3} e_2 a_2 + \frac{1}{3} f_2 b_2 + \frac{1}{3} g_2 c_2 + \dots$$

el coeficiente del error de la longitud $P_i P_{i+1}$ en función de los errores verdaderos de los ángulos observados. Por tanto, el error probable de k'_i será

$$\pm \frac{1}{3} \varepsilon k_i \sqrt{\Sigma (a^2 + b^2 + c^2)} = \pm \varepsilon k_i \sqrt{\frac{2}{3} \Sigma (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}. \quad (11)$$

Llamaba Struve el valor recíproco de la cantidad

$$\varepsilon^2 (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

en un triángulo, ó el valor recíproco del promedio de

$$\varepsilon^2 \Sigma (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

en una cadena de triángulos, el *peso de continuación* del triángulo ó de la serie. En efecto, alcanza este peso el máximo valor cuando A y B son casi ángulos rectos; pero entonces el ángulo C es muy pequeño, y el triángulo produce poco *avance* en la cadena. En suma, el peso de un triángulo es proporcional al avance que éste verifica, multiplicado por el peso de continuación (2).

$$(4) \quad -\varepsilon = \Sigma \left\{ \alpha \cdot \frac{1}{3} (2e - f - g) + \beta \cdot \frac{1}{3} (e - 2f + g) \right\}.$$

(2) Adóptase por unidad de peso de continuación el del triángulo equilátero, porque esta figura ofrece la doble ventaja de fijar con precisión un nuevo vértice y adelantar con rapidez sobre el arco de meridiano. Si toda la cadena constase de triángulos equiláteros, y estuviera de modo que los lados opuestos á C_1, C_2, \dots , es decir, los lados no *transversales*, si no *tendidos*, formasen dos líneas que corriesen paralelamente á la del meridiano, produciría sobre esta línea cada triángulo un adelanto medio equivalente á la mitad de su lado L, en el supuesto de ser poco señalada la curvatura. Luego, dada esta cadena como tipo, si con una serie de triángulos no regulares el adelanto medio es F, se podrá estimar como peso *geométrico* medio de uno de estos triángulos $\sigma = mF\rho$, siendo $m = 1 : \frac{1}{2} L$ y ρ el peso de continuación del mismo.

Pero para apreciar por completo la importancia de cada serie en la medida del arco de meridiano, debe tenerse también en cuenta el grado de

Falta hallar el error en la dirección calculada K_i' del último lado k_i de la cadena.

Nótese para ello que entre K_n , C_{n+1} y K_{n+1} existe la relación

$$K_n + K_{n+1} + C_{n+1} = \pi,$$

de la cual se deduce

$$\begin{aligned} K_1 &= \pi - C_1 - K, \\ K_2 &= C_1 - C_2 + K, \\ K_3 &= \pi - C_1 + C_2 - C_3 - K, \\ K_4 &= C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + K, \end{aligned}$$

cuya ley está á la vista. Por lo tanto, el azimut del último lado, obtenido con los ángulos corregidos, será

$$C_1 - C_2 + C_3 - \dots + K, \quad \text{ó} \quad \pi - C_1 + C_2 - C_3 + \dots - K,$$

según que i sea par ó impar. Luego el error en la dirección calculada de k_i , prescindiendo de su signo y suponiendo el ángulo K exacto, será

$$\frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} g_1 - \frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{2} g_2 + \frac{1}{2} e_3 \dots,$$

y el error probable correspondiente

$$\pm \epsilon \sqrt{\frac{2i}{3}}.$$

Distinguiendo, como en lo precedente, con acentos en las letras respectivas las cantidades calculadas, el valor de $P F_{i+1}$, hallado por cálculo, será

$k_0 \cos K + k_1' \cos K_1' + k_2' \cos K_2' + k_3' \cos K_3' + \dots k_i' \cos K_i'$; y si se quiere el error probable de este resultado, se deberá expre-

precisión alcanzado en la medida de sus ángulos, es decir, sus pesos *trigonométricos*, sirviendo de unidad, por ejemplo, el de un ángulo sujeto á error medio de un segundo. Combinando, pues, ambos se obtendrá como peso general $p = \sigma\tau$. Struve adoptaba por unidad el peso del triángulo equilátero de 15000 toesas (29 kilómetros) de longitud en los lados y $1''$ de error medio en los ángulos. Véase *Arc du meridian de 25° 20' entre le Danube et la mer glaciale...* San Petersburgo, 1860, tomo I, págs. 2 y 11.

sar cada término como función lineal de $e_1, f_1, g_1; e_2, f_2, g_2; \dots$ y efectuar después la suma de los cuadrados de los coeficientes de tales símbolos.

Aunque al computar así el error de la longitud calculada de la cadena y el del azimut del último lado hemos supuesto rectilíneos los triángulos, esta simplificación no introduce en el resultado incorrección alguna.

4.

Supongamos que, habiendo medido sin error los dos lados k_0 y k_i , se trate de corregir los ángulos observados en la cadena intermedia para que aparezcan de acuerdo esas longitudes, cuando partiendo de una se halle la otra. Calculada, pues, k_i con k_0 por medio de los ángulos ya corregidos, se obtendrá el mismo resultado que si el cálculo se hiciera con los verdaderos ángulos; esto es:

$$\frac{\text{sen } B_1 \text{ sen } B_2 \dots \text{ sen } B_i}{\text{sen } A_1 \text{ sen } A_2 \dots \text{ sen } A_i} = \frac{\text{sen } \mathfrak{B}_1 \text{ sen } \mathfrak{B}_2 \dots \text{ sen } \mathfrak{B}_i}{\text{sen } \mathfrak{A}_1 \text{ sen } \mathfrak{A}_2 \dots \text{ sen } \mathfrak{A}_i};$$

de donde se deduce

$$0 = -\alpha_1(e_1 + x_1) + \beta_1(f_1 + y_1) - \dots - \alpha_i(e_i + x_i) + \beta_i(f_i + y_i).$$

Mas si calculada k_i por medio de los ángulos observados $A_1', B_1', A_2', B_2', \dots$ se halla otro valor k'_i , se tendrá, haciendo $k'_i - k_i = \varepsilon k_i$,

$$\varepsilon = -\alpha_1 e_1 + \beta_1 f_1 - \alpha_2 e_2 + \beta_2 f_2 \dots - \alpha_i e_i + \beta_i f_i;$$

y además, conservando la notación ya empleada,

$$e_n + f_n + g_n = \varepsilon_n, \quad x_n + y_n + z_n = -\varepsilon_n,$$

y

$$-\varepsilon = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 - \dots - \alpha_i x_i + \beta_i y_i. \quad (12)$$

Si se trata del caso general, en que no se hayan medido los ángulos con igual precisión, sean w_n, w_n', w_n'' las cantidades recíprocas de los pesos de A_n', B_n', C_n' . Los valores más probables

de $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 \dots$ serán aquellos que, cumpliendo con la condición (12), reduzcan á un mínimo la función

$$2\Omega = \frac{x_1^2}{w_1} + \frac{y_1^2}{w_1'} + \frac{(x_1 + y_1 + \varepsilon_1)^2}{w_1''} + \frac{x_2^2}{w_2} + \frac{y_2^2}{w_2'} + \frac{(x_2 + y_2 + \varepsilon_2)^2}{w_2''} + \dots$$

Para hallarlos, sumemos con la diferencial de Ω la diferencial del segundo miembro de la ecuación (12), multiplicada por $3Q$, é igualemos por separado á cero los coeficientes de $dx_1, dy_1, dx_2, dy_2, \dots$. Las dos primeras ecuaciones que así resultan son

$$\frac{x_1}{w_1} + \frac{x_1 + y_1 + \varepsilon_1}{w_1''} - 3\alpha_1 Q = 0,$$

$$\frac{y_1}{w_1'} + \frac{x_1 + y_1 + \varepsilon_1}{w_1''} + 3\beta_1 Q = 0;$$

y en su consecuencia,

$$x_1 = \frac{-\varepsilon_1 w_1}{w_1 + w_1' + w_1''} + 3w_1 Q \frac{(\alpha_1 + \beta_1) w_1' + \alpha_1 w_1''}{w_1 + w_1' + w_1''}, \quad (13)$$

$$y_1 = \frac{-\varepsilon_1 w_1'}{w_1 + w_1' + w_1''} - 3w_1' Q \frac{(\alpha_1 + \beta_1) w_1 + \beta_1 w_1''}{w_1 + w_1' + w_1''},$$

$$z_1 = \frac{-\varepsilon_1 w_1''}{w_1 + w_1' + w_1''} + 3w_1'' Q \frac{\beta_1 w_1' - \alpha_1 w_1}{w_1 + w_1' + w_1''},$$

siendo $x_1 + y_1 + z_1 = -\varepsilon_1$. Reemplazando en (12) estos valores de las x é y , la ecuación resultante dará Q en función de cantidades conocidas, y tras de esto las correcciones de los ángulos se deducirán de las ecuaciones (13) y de las análogas de los demás triángulos. El problema, por lo tanto, quedará enteramente resuelto. Además, puesto que en la expresión de Q entrarán $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$, pueden estas cantidades reemplazarse por sus valores formados con los $3i$ errores verdaderos de los ángulos medidos; y así, tanto los ángulos adoptados como la longitud y el ángulo de dirección de cualquier lado, quedarán en función de los $3i$ errores.

Como aclaración, supongamos el caso más sencillo, de ser iguales los pesos de todos los ángulos observados, y por consecuencia

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{1}{3}\varepsilon_1 + a_1Q, & x_2 &= -\frac{1}{3}\varepsilon_2 + a_2Q \dots, \\y_1 &= -\frac{1}{3}\varepsilon_1 + b_1Q, & y_2 &= -\frac{1}{3}\varepsilon_2 + b_2Q \dots, \\z_1 &= -\frac{1}{3}\varepsilon_1 + c_1Q, & z_2 &= -\frac{1}{3}\varepsilon_2 + c_2Q \dots\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (12) y poniendo $\Sigma(a^2 + b^2 + c^2) = 6k$ como en la página 335, tendremos (1)

$$-6kQ = a_1e_1 + b_1f_1 + c_1g_1 + a_2e_2 + b_2f_2 + c_2g_2 + \dots$$

Los errores verdaderos de los ángulos adoptados en el primer triángulo estarán expresados por (2)

$$\begin{aligned}\frac{e_1}{3} \left(2 - \frac{a_1a_1}{2k} \right) + \frac{f_1}{3} \left(-1 - \frac{a_1b_1}{2k} \right) + \frac{g_1}{3} \left(-1 - \frac{a_1c_1}{2k} \right) \\ - \frac{a_1}{6k} (e_2a_2 + f_2b_2 + g_2c_2) - \dots, \\ \frac{e_1}{3} \left(-1 - \frac{b_1a_1}{2k} \right) + \frac{f_1}{3} \left(2 - \frac{b_1b_1}{2k} \right) + \frac{g_1}{3} \left(-1 - \frac{b_1c_1}{2k} \right) \\ - \frac{b_1}{6k} (e_2a_2 + f_2b_2 + g_2c_2) - \dots\end{aligned}$$

(1) Puesto que

$$\begin{aligned}a_n - c_n = 3\alpha_n, & \quad c_n - b_n = 3\beta_n, & \quad c_n = -a_n - b_n, \\ \varepsilon_n = e_n + f_n + g_n,\end{aligned}$$

se deduce, supliendo subíndices iguales en todas las letras menos Q,

$$\alpha x - \beta y =$$

$$\frac{1}{3}(a-c)x - \frac{1}{3}(c-b)y = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)Q + \frac{1}{3}c(e+f+g).$$

Pero

$$\Sigma(\alpha x - \beta y) = \varepsilon = \Sigma(-\alpha e + \beta f).$$

Luego

$$6kQ + \Sigma c(e+f+g) = \Sigma\{(c-a)e + (c-b)f\}.$$

(2) Proceden estos valores de sustituir en

$$x_1 + e_1, \quad y_1 + f_1, \quad z_1 + g_1$$

las expresiones precedentes de x_1, y_1, z_1 , habiendo antes reemplazado en ellas $\varepsilon_1 = e_1 + f_1 + g_1$ y puesto en vez de Q el valor deducido de la última igualdad del texto.

$$\frac{e_1}{3} \left(-1 - \frac{c_1 a_1}{2k} \right) + \frac{f_1}{3} \left(-1 - \frac{c_1 b_1}{2k} \right) + \frac{g_1}{3} \left(2 - \frac{c_1 c_1}{2k} \right) \\ - \frac{c_1}{6k} (e_2 a_2 + f_2 b_2 + g_2 c_2) - \dots ;$$

y hecha la suma de los cuadrados de los coeficientes de e_1, f_1, g_1 , etcétera, se hallará (1):

$$\begin{aligned} \text{Error probable de } \mathfrak{A}_n \dots &\pm r \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{a_n^2}{6k} \right)}, \\ \text{» » } \mathfrak{B}_n \dots &\pm r \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{b_n^2}{6k} \right)}, \\ \text{» » } \mathfrak{C}_n \dots &\pm r \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{c_n^2}{6k} \right)}. \end{aligned}$$

El error en la dirección del lado k_i (estando determinada con exactitud la del primer lado) depende de $\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 - \dots$, y su expresión es

$$z_1 + g_1 - z_2 - g_2 + z_3 + g_3 - z_4 + \dots$$

Efectuada como antes la suma de los cuadrados de los coeficientes, resulta por error probable en la dirección de que se trata (2)

(1) La suma de los cuadrados de los coeficientes en la primera expresión, es

$$\frac{1}{9} \left\{ 6 - \frac{a_1}{k} (2a_1 - b_1 - c_1) + \frac{a_1^2}{4k^2} \Sigma (a^2 + b^2 + c^2) \right\},$$

y sustituyendo $2a_1 - b_1 - c_1 = 3a_1$ y $\Sigma (a^2 + b^2 + c^2) = 6k$, se tiene la cantidad del radical que figura en el primer error probable. Análogamente se hallan las de los otros errores.

(2) Pues reemplazando por $z_1 + g_1, z_2 + g_2 \dots$ sus valores en función de los errores verdaderos, se tiene

$$\begin{aligned} z_1 + g_1 - z_2 - g_2 + z_3 + g_3 - \dots = \\ - \frac{e_1}{3} (1 + a_1 C) - \frac{f_1}{3} (1 + b_1 C) + \frac{g_1}{3} (2 - c_1 C) \\ + \frac{e_2}{3} (1 - a_2 C) + \frac{f_2}{3} (1 - b_2 C) - \frac{g_2}{3} (2 + c_2 C) \\ \dots \end{aligned}$$

y la suma de los cuadrados de los coeficientes de cada renglón es

$$\frac{2}{3} \mp \frac{2}{3} C c_n + \frac{1}{9} C^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2),$$

con el signo negativo cuando el subíndice n es impar y con el positivo cuando es par.

$$\pm \epsilon \sqrt{\left(\frac{2i}{3} - \frac{2}{3} kC^2\right)},$$

siendo

$$2kC = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 \dots$$

5.

No sólo influyen en el error probable ϵ de un ángulo observado la perfección del instrumento que se emplea, la práctica del observador y el número de medidas efectuadas, sino también el arte y tino con que en general las operaciones se llevan. En cuanto son parte los errores de bisección, de lectura del círculo y de graduación, puede deducirse el valor de ϵ de lo que en cada estación indican las mismas observaciones ó medidas particulares de un ángulo, comparadas con su promedio. Mas otros errores, de que acaso adolezcan los ángulos medidos, sólo se manifestarán al cotejar las observaciones hechas en diferentes estaciones. De esta clase de errores es, por ejemplo, el error constante producido cuando el instrumento con que se mira ó la señal que se observa no están centrados con exactitud sobre la marca de su estación respectiva. A veces también la configuración del suelo en un lugar origina una refracción lateral de escasa cuantía sin duda, pero de efecto persistente. Además, si una señal se halla al Este ó al Oeste, y recibe su iluminación por el Norte ó por el Sur, presentará una fase como toda señal que habitualmente se vea bajo una luz peculiar.

Por lo tanto, más confianza que la indicación propia de las mismas observaciones debe inspirar el estudio de los errores acusados por las sumas de los tres ángulos de cada triángulo, obtenidos por medición directa. En los 107 triángulos comprendidos entre Dunkerque y Formentera, el cuadrado medio de error de uno de ellos es 4.161, y en su consecuencia el cuadrado medio de error en la medición de un ángulo es 1.387, tercio del anterior; luego, en dicha triangulación, el error probable ϵ de un ángulo observado es

$$\pm .6745 \sqrt{1.387} = \pm 0''.794.$$

En la cadena de triángulos formada en la India por el coronel Everest, los errores de los 86 triángulos entre las dos bases de Dehra Dun y Seronj dan para ϵ el primero de los dos valores siguientes, y los errores de los 72 triángulos entre las bases de Beder y Seronj el segundo:

$$\pm 0''.517, \quad \pm 0''.370.$$

En el arco ruso, el error probable ϵ de un ángulo observado ofrece estos valores:

$$\pm 0''.387, \quad \pm 0''.573, \quad \pm 0''.589, \quad \pm 0''.843, \quad \pm 1''.466;$$

el primero en las provincias del Báltico, el segundo en Besarabia, el tercero en Finlandia, el cuarto en Laponia y el quinto en los 12 triángulos septentrionales extremos.

6.

Los triángulos que enlazan Dunkerque con Formentera forman una cadena sencilla como la que suponíamos, y lo mismo puede decirse de la mayor parte de la triangulación rusa. Pero ésta, en el trozo que cae al Norte de Tornea hasta Fuglenaes, está reforzada por la observación de gran número de puntos desde cada estación. Lo mismo ocurre en el adjunto grabado, que reproduce parte de la cadena meridional de Madrid, enlazada con la base de Madridejos. Claro es que, cuando esto acontece, no cabe proceder del mismo modo que si se tratara de una cadena única, y menos aún que en los dos últimos ejemplos cabe en triangulaciones como las de la Gran Bretaña é Irlanda, donde las visuales de observación están entrelazadas de todas las maneras posibles.

Ecuaciones de condición en una red geodésica son las que existen entre los valores de las cantidades excedentes, tales como por observación se hallan, y los valores de las mismas, tales como por cálculo resultan, pues, por ejemplo, cuando ya se tienen las observaciones necesarias para fijar todos los puntos, cualquier otro ángulo que se observe puede compararse con su valor calculado.

Si una triangulación comprende $n + 2$ puntos, dos de ellos extremos de una base medida, para fijar los n puntos restantes será menester observar $2n$ ángulos; luego si los ángulos observados son en número m , habrán $m - 2n$ ecuaciones de condición. Supóngase, para formarse idea de cómo éstas se deducen, que habiéndose ya fijado cierto número de puntos A, B, C... sea Q un

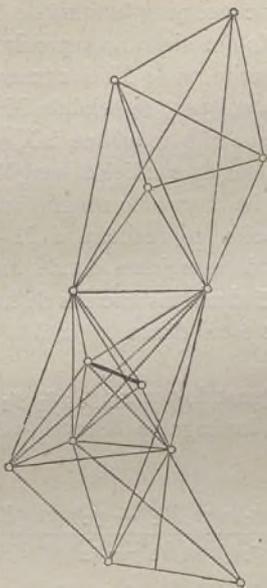


Fig. 49.

nuevo punto que desde q de aquéllos se observe y desde el cual á su vez se observen estos q : se formarán $q - 1$ triángulos, y en cada uno de ellos la suma de los ángulos observados debe ser igual á 180° mas el exceso esférico, lo cual da desde luego $q - 1$ ecuaciones de condición. Además, cada una de las $q - 2$ distancias excedentes dará una ecuación de las llamadas de lado; á saber, de la forma

$$\frac{QC}{QB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QA}{QC} = 1,$$

aunque no limitadas en general á tres factores. Claro es que, si desde Q sólo se observan dos puntos y desde éstos aquél, sólo habrá una ecuación de condición relativa á los ángulos; pero si q excede de dos, cada una de las otras visuales no recíproca, que se dirija desde Q á los puntos fijos ó desde éstos á aquél, dará una ecuación de lado. Cuando se observen ángulos independientes en torno de un punto por todo el horizonte, resultará además una ecuación de otra clase, pues la suma de dichos ángulos debe ser $= 360^\circ$; pero en lo que sigue no supondremos este caso.

Sentado lo que precede, si es M el número total de visuales dirigidas desde N estaciones, se tendrán $M - N$ ángulos para fijar $N - 2$ puntos que sólo requieren $2N - 4$ ángulos: luego el número de ecuaciones de condición será $M - 3N + 4$. Pero si en P puntos no se ha observado ningún ángulo, el número de ecuaciones de condición se reducirá á $M - 3N - 2P + 4$, siendo N el número de estaciones donde hubo observación. A estas ecuaciones se añadirán las nacidas de haber medido más de una base, pues n de éstas darán lugar á $n - 1$ ecuaciones de lado.

Estas últimas, designando por $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ las correcciones que deban hacerse en los ángulos observados $A_1', B_1'; A_2', B_2'; \dots$ toman la forma

$$1 = \frac{\text{sen}(B_1' + y_1) \text{sen}(B_2' + y_2) \text{sen}(B_3' + y_3) \dots}{\text{sen}(A_1' + x_1) \text{sen}(A_2' + x_2) \text{sen}(A_3' + x_3) \dots}; \quad (14)$$

mas también pueden escribirse de este modo:

$$-x_1 \cot A_1' + y_1 \cot B_1' - x_2 \cot A_2' + \dots = -1 + \frac{\text{sen} A_1' \text{sen} A_2' \dots}{\text{sen} B_1' \text{sen} B_2' \dots},$$

ó bien de esta otra manera:

$$0 = \Sigma (\log \text{sen} B' - \log \text{sen} A') - a_1 x_1 + b_1 y_1 - a_2 x_2 + b_2 y_2 \dots \quad (15),$$

si expresando x_1, y_1, \dots en segundos, se toma el logaritmo de la fórmula precedente y se escribe

$$\text{mod. sen } 1'' \cot A_1' = a_1, \quad \text{mod. sen } 1'' \cot B_1' = b_1;$$

lo que equivale á igualar respectivamente á $a_1, b_1 \dots$ las diferencias, por un segundo, de los logaritmos senos (¹).

De tal modo se obtienen en una triangulación dada las condiciones necesarias entre los ángulos observados, y así se traducen las mismas por ecuaciones lineales entre las correcciones que á estos ángulos deben aplicarse. Es verdad que todavía quedarán indeterminadas dichas correcciones; pero los valores más probables, según la teoría á esto consagrada, serán aquellos que conviertan en un mínimo la suma de los cuadrados de todos los errores de observación.

7.

Concretémonos primero á los ángulos medidos en una estación solamente. Elegida una señal R entre las varias observadas, para referir á ella todas las demás, se quiere hallar los valores más probables A, B, C ... de los ángulos que por orden de azimut formen con la dirección de R las visuales dirigidas á esas otras estaciones. Si se designan por $m_1, m_1', m_1'', m_1''', \dots$ las lecturas obtenidas en la primer vuelta al horizonte, correspondiendo m_1 á la lectura arbitraria de R, cuyo verdadero ó más probable valor es x_1 , y se designan por las mismas letras con el respectivo subíndice de orden las lecturas obtenidas en las otras vueltas, se hallarán en la primera, segunda y tercera de ellas las ecuaciones

$$\begin{array}{lll} m_1 - x_1 = 0, & m_1' - x_1 - A = 0, & m_1'' - x_1 - B = 0, \\ m_2 - x_2 = 0, & m_2' - x_2 - A = 0, & m_2'' - x_2 - B = 0, \\ m_3 - x_3 = 0, & m_3' - x_3 - A = 0, & m_3'' - x_3 - B = 0, \end{array}$$

(¹) Limitándose al primer término del desarrollo en serie es

$$\log(1 + u) = u \cdot \text{módulo},$$

y por tanto

$$\log \frac{\text{sen}(A + 1'')}{\text{sen} A} =$$

$$\log(1 + \text{sen } 1'' \cot A) = \text{mód.} \text{sen } 1'' \cot A.$$

y otras análogas en las vueltas sucesivas. Serían exactas estas ecuaciones si las medidas no adolecieran de error; pero como esto no ocurre, los primeros miembros de tales ecuaciones representarán los errores de observación, cuya suma de cuadrados debe reducirse á un mínimo, tratándose de los valores más probables de A, B, C, ... y de los más probables de las distancias arbitrarias x_1, x_2, x_3, \dots que medien entre el cero del círculo y la visual de referencia. Para que el resultado sea general, multipliquemos esas ecuaciones por los factores

$$\sqrt{p_1}, \sqrt{p_1'}, \sqrt{p_1''} \dots \sqrt{p_2}, \sqrt{p_2'}, \sqrt{p_2''},$$

entendiendo que cuando sólo se haya hecho una observación, el factor correspondiente valdrá la unidad, y cuando falte también esta observación, dicho factor valdrá cero. La suma de cuadrados de todos los errores de observación en la estación antedicha será

$$\begin{aligned} & p_1(m_1 - x_1)^2 + p_1'(m_1' - x_1 - A)^2 + p_1''(m_1'' - x_1 - B)^2 + \dots, \\ & + p_2(m_2 - x_2)^2 + p_2'(m_2' - x_2 - A)^2 + p_2''(m_2'' - x_2 - B)^2 + \dots, \\ & + p_3(m_3 - x_3)^2 + p_3'(m_3' - x_3 - A)^2 + p_3''(m_3'' - x_3 - B)^2 + \dots, \\ & \& . \end{aligned}$$

Mas igualados separadamente á cero los coeficientes diferenciales de esta suma relativos á $x_1, x_2, x_3 \dots A, B, C, \dots$ resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_1 m_1 + p_1' m_1' + \dots &= (p_1 + p_1' + \dots) x_1 + p_1' A + p_1'' B + \dots, \\ p_2 m_2 + p_2' m_2' + \dots &= (p_2 + p_2' + \dots) x_2 + p_2' A + p_2'' B + \dots, \\ p_3 m_3 + p_3' m_3' + \dots &= (p_3 + p_3' + \dots) x_3 + p_3' A + p_3'' B + \dots, \\ & \& .; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1' m_1' + p_2' m_2' + \dots &= (p_1' + p_2' + \dots) A + p_1' x_1 + p_2' x_2, \dots, \\ p_1'' m_1'' + p_2'' m_2'' + \dots &= (p_1'' + p_2'' + \dots) B + p_1'' x_1 + p_2'' x_2, \dots, \\ p_1''' m_1''' + p_2''' m_2''' + \dots &= (p_1''' + p_2''' + \dots) C + p_1''' x_1 + p_2''' x_2, \dots, \\ & \& .; \end{aligned}$$

y sustituyendo en el segundo grupo los valores de x_1, x_2, \dots deducidos del primero, se obtiene una serie de ecuaciones que puede escribirse de este modo y que manifiesta su simetría:

$$\begin{aligned}
 (aa)A + (ab)B + (ac)C + \dots &= (an), \\
 (ab)A + (bb)B + (bc)C + \dots &= (bn), \\
 (ac)A + (bc)B + (cc)C + \dots &= (cn), \\
 &\&.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Tales ecuaciones determinan A, B, C, ... es decir, los valores más probables de las observaciones verificadas en aquella estación solamente.

Pero la condición que se impone en el caso general es la de ser un mínimo la suma 2Ω de cuadrados de los errores de observación en *todas* las estaciones, y á la vez que esta suma $2\Omega =$

$$\begin{aligned}
 p_1(m_1 - x_1)^2 + p_1'(m_1' - x_1 - A)^2 + p_1''(m_1'' - x_1 - B)^2 \dots, \\
 + p_2(m_2 - x_2)^2 + p_2'(m_2' - x_2 - A)^2 + p_2''(m_2'' - x_2 - B)^2 \dots, \\
 + p_3(m_3 - x_3)^2 + p_3'(m_3' - x_3 - A)^2 + p_3''(m_3'' - x_3 - B)^2 \dots, \\
 &\&.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

incluyendo todos los vértices, cumpla con dicho requisito, deben verificarse las i ecuaciones de condición que haya en la red geodésica, las cuales pueden expresarse de este modo:

$$\begin{aligned}
 0 &= f_1 + \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C + \dots, \\
 0 &= f_2 + \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C + \dots, \\
 0 &= f_3 + \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C + \dots, \\
 &\&.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Multiplíquense, pues, estas ecuaciones por factores $I_1, I_2, I_3, \dots, I_i$, cuyos valores se hallarán luego, y en virtud de la condición del mínimo se tendrán las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dx_2} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dx_3} = 0 \dots; \\
 -\frac{d\Omega}{dA} + \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \dots + \alpha_i I_i = 0, \\
 -\frac{d\Omega}{dB} + \beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \dots + \beta_i I_i = 0, \\
 -\frac{d\Omega}{dC} + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \dots + \gamma_i I_i = 0, \\
 &\&.
 \end{aligned}$$

Para mayor sencillez, escribase

$$\begin{aligned} [1] &= \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \dots, & (19) \\ [2] &= \beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3 + \dots, \\ [3] &= \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \gamma_3 I_3 + \dots, \\ &\quad \&, \end{aligned}$$

correspondiendo á cada ángulo observado un símbolo de la forma $[n]$; y con tal notación, las ecuaciones, precedentes serán

$$\begin{aligned} p_1 m_1 + p_1' m_1' + \dots &= (p_1 + p_1' \dots) x_1 + p_1' A + p_1'' B + \dots, \\ p_2 m_2 + p_2' m_2' + \dots &= (p_2 + p_2' \dots) x_2 + p_2' A + p_2'' B + \dots, \\ p_3 m_3 + p_3' m_3' + \dots &= (p_3 + p_3' \dots) x_3 + p_3' A + p_3'' B + \dots \\ &\quad \&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] + p_1' m_1' + p_2' m_2' + \dots &= (p_1' + p_2' \dots) A + p_1' x_1 + p_2' x_2 \dots, \\ [2] + p_1'' m_1'' + p_2'' m_2'' + \dots &= (p_1'' + p_2'' \dots) B + p_1'' x_1 + p_2'' x_2 \dots, \\ [3] + p_1''' m_1''' + p_2''' m_2''' + \dots &= (p_1''' + p_2''' \dots) C + p_1''' x_1 + p_2''' x_2 \dots, \\ &\quad \&. \end{aligned}$$

Sustitúyanse ahora en el segundo grupo los valores de las x deducidos del primero, y resultará

$$\begin{aligned} [1] + (an) &= (aa) A + (ab) B + (ac) C + \dots, & (20) \\ [2] + (bn) &= (ab) A + (bb) B + (bc) C + \dots, \\ [3] + (cn) &= (ac) A + (bc) B + (cc) C + \dots, \\ &\quad \&, \end{aligned}$$

ecuaciones correlativas de las (16). Pero si bien en unas y otras tienen (aa) , (ab) , (an) , ... los mismos valores, las A , B , C , ... en (16) no son las mismas A , B , C , ... que en (20), pues las primeras sólo son valores aproximados.

Distinguiendo estos últimos con las letras A_1 , B_1 , C_1 , ... y escribiendo

$$A = A_1 + (1), \quad B = B_1 + (2), \quad C = C_1 + (3),$$

y así sucesivamente, si se consignan tales valores en (20), se tendrá

$$\begin{aligned} [1] &= (aa) (1) + (ab) (2) + (ac) (3) + \dots, & (21) \\ [2] &= (ab) (1) + (bb) (2) + (bc) (3) + \dots, \\ [3] &= (ac) (1) + (bc) (2) + (cc) (3) + \dots, \\ &\quad \&. \end{aligned}$$

Cada estación dará un grupo de ecuaciones de esta forma compuesto de tantas menos una como vértices se hayan observado desde ella. Resueltas dichas ecuaciones, darán

$$\begin{aligned}(1) &= (\alpha\alpha) [1] + (\alpha\beta) [2] + (\alpha\gamma) [3] + \dots, & (22) \\(2) &= (\alpha\beta) [1] + (\beta\beta) [2] + (\beta\gamma) [3] + \dots, \\(3) &= (\alpha\gamma) [1] + (\beta\gamma) [2] + (\gamma\gamma) [3] + \dots, \\&\quad \&.,\end{aligned}$$

si se adopta por simetría esta notación de coeficientes.

Sustituyendo en tales resultados los valores (19) de [1], [2], [3], ... se tendrán (1), (2), (3), ... en función de los factores I_1 , I_2 , I_3 , ...

Falta ahora hallar éstos por las ecuaciones de condición, en las cuales al efecto se escribirán con sus respectivas correcciones simbólicas los ángulos A_1 , B_1 , C_1 , ... deducidos de las observaciones verificadas en cada estación por separado. Vendrán á quedar entonces dichas ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}0 &= g_1 + \alpha_1 (1) + \beta_1 (2) + \gamma_1 (3) + \dots, \\0 &= g_2 + \alpha_2 (1) + \beta_2 (2) + \gamma_2 (3) + \dots, & (23) \\0 &= g_3 + \alpha_3 (1) + \beta_3 (2) + \gamma_3 (3) + \dots, \\&\quad \&.\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en ellas, que son en número de i , por (1), (2), ... sus valores en función de I_1 ... I_i , resultará un sistema de ecuaciones, de donde se deducirá cada uno de los i factores eliminando los otros.

Alcanzado esto, que es la parte más penosa del trabajo, se obtienen fácilmente los valores numéricos de (1), (2), (3), ...

De tal modo calculó Bessel su triangulación de la Prusia oriental, donde existiendo 31 ecuaciones de condición, había de hallarse un sistema final de ecuaciones con 31 incógnitas. Este método se ha aplicado después en otros trabajos geodésicos, uno de ellos la triangulación española, á pesar del penosísimo cálculo que requiere.

8.

La triangulación principal de la Gran Bretaña é Irlanda comprende 218 estaciones, pero en diez y seis de ellas no se hizo observación alguna: el número de direcciones trazadas ascendía á 1.554 y el de ecuaciones de condición á 920. Reducir tan crecido número de observaciones de la manera descrita no era hacedero y hubo que recurrir á métodos de aproximación. Obtuvieronse primero los resultados finales de las observaciones en cada estación, resolviendo aproximadamente las ecuaciones (16).

Por el siguiente cuadro se comprenderá cómo esto se hizo:

R 4° 21'	A 11° 7'	B 37° 34'	C 97° 54'	D 220° 3'	E 271° 43'	PROMEDIO
29.21	36.04	14.07	47.84	19.00	39.17	
29.21	35.91	18.18	38.22	
29.21	34.21	11.86	39.42	
29.21	32.41	10.71	46.05	16.30	
29.21	11.91	48.30	14.17	
29.21	18.59	41.04	
29.21	34.64	12.14	47.40	17.25	39.46	
0.00	+ 1.40	+ 1.93	+ 0.44	+ 1.75	- 0.29	+ 0.87
0.00	+ 1.27	+ 0.93	- 1.24	+ 0.24
0.00	- 0.43	- 0.28	- 0.04	- 0.19
0.00	- 2.23	- 1.43	- 1.35	- 0.95	- 0.19
0.00	- 0.23	+ 0.90	- 3.08	- 0.60
0.00	+ 1.34	+ 1.58	+ 0.97
28.34	35.17	13.20	46.97	18.13	35.30	
28.97	35.67	17.94	37.98	
29.40	34.40	12.05	39.61	
30.40	33.60	11.90	47.24	17.49	
29.81	12.51	48.90	14.77	
28.24	17.62	40.07	
29.19	34.71	12.42	47.70	17.19	38.99	

Contiene la primera sección de este cuadro las observaciones relativas á seis vértices hechas en seis distintas vueltas al horizonte, habiendo agregado un mismo número á las lecturas del

círculo verificadas en cada vuelta, á fin de que en todas éstas tuviera R igual valor (próximamente la lectura del verdadero azimut). Tomados después los promedios de las columnas, las diferencias entre los números de cada una y su respectivo promedio están inscritas en la segunda sección del cuadro, y á la derecha, en columna separada, se ven los promedios de estas diferencias, hallados por líneas horizontales. Réstanse á su vez estos nuevos promedios de los números de la primera sección, por este orden: el primer promedio, de los números de la primera línea ó sea de la primera vuelta; el segundo, de los números de la segunda, y así sucesivamente; y tales diferencias son las inscritas en la tercera sección. Por último, los promedios de las columnas de esta sección son los valores de los ángulos, que como verdaderos ó más probables se aceptan.

Los pesos de estos valores se obtienen hallando las diferencias entre ellos y los números de las columnas de donde como promedios se derivan, sumando los cuadrados de las diferencias que á un mismo valor se refieren é introduciendo esta suma en la fórmula

$$w = \frac{n^2}{2 \sum (e^2)},$$

que es la de la página 85, indicando por n el número de observaciones del ángulo de situación de que se trate.

Aumentarían bastante dichos pesos desechando las medidas que más discrepan de la mayoría de ellas; pero no es lícita semejante omisión sino en aquellos casos en que el mismo observador puso nota, tachando de irregular ó dudosa la medida verificada. Sin duda alguna, las que en condiciones propicias se efectúan son de más valor comúnmente que las realizadas en circunstancias menos favorables; pero en absoluto no cabe afirmarlo, ni aun siendo así puede fijarse por lo general su valor numérico relativo. «Parece, dice Bessel (*Gradmessung in Ostpreussen*), que el mayor detenimiento requerido por las observaciones, cuando las circunstancias contrarían algún tanto, compensa en gran manera las desventajas exteriores, y muchas veces causas de error, en las cuales el observador no repara, influyen sobre él en

no menor grado que otras que á las claras se le imponen.» En efecto, según se ha advertido no pocas veces, observaciones á las cuales el mismo que las hizo había puesto algún reparo, por parecerle que la bisección no se ajustó bien, ó la luz no era á propósito, ó había cualquier otro motivo de incertidumbre, concordaban no obstante con suma precisión con el promedio general.

Obtenidos, pues, como decimos, en cada vértice los ángulos que fijan la situación de otros puntos, y hallados los pesos de dichos ángulos, el problema queda planteado en estos términos: encontrar para esos ángulos un sistema de correcciones tales, que la suma de los productos de sus cuadrados por los pesos respectivos de aquéllos sea un mínimo. Difiere este problema del de Bessel, que exige reducir á un mínimo la verdadera suma de los cuadrados de todos los errores de observación en todos los vértices; pero modificado de este modo, no pierde mucho el problema y la solución es bastante más expedita.

Numerados por orden los ángulos de situación que de los promedios resultan, y expresada por x_n la corrección del n — ésimo, cuyo peso llamaremos w_n , se tienen las ecuaciones

$$e_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \dots, \quad (24),$$

$$e_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \dots,$$

$$e_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \dots,$$

&.,

$$2\Omega = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2 \dots,$$

siendo las primeras las de condición del sistema y la última la función de las correcciones que debe ser un mínimo. Multiplicadas las ecuaciones de condición por I_1, I_2, I_3, \dots diferenciadas y sumadas con $-\delta\Omega$, deben anularse por separado los coeficientes que dx_1, dx_2, dx_3, \dots posean en la suma; y por tanto

$$w_1 x_1 = a_1 I_1 + b_1 I_2 + c_1 I_3 \dots, \quad (25)$$

$$w_2 x_2 = a_2 I_1 + b_2 I_2 + c_2 I_3 \dots,$$

$$w_3 x_3 = a_3 I_1 + b_3 I_2 + c_3 I_3 \dots,$$

&.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de condición, se halla:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{aa}{w}\right) I_1 + \left(\frac{ab}{w}\right) I_2 + \left(\frac{ac}{w}\right) I_3 \dots, \quad (26)$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{ab}{w}\right) I_1 + \left(\frac{bb}{w}\right) I_2 + \left(\frac{bc}{w}\right) I_3 \dots,$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{ac}{w}\right) I_1 + \left(\frac{bc}{w}\right) I_2 + \left(\frac{cc}{w}\right) I_3 \dots,$$

&c.;

sistema compuesto de tantas ecuaciones cuantos sean los factores I_1, I_2, I_3, \dots , del cual se deducirán los valores numéricos de éstos, que reemplazados después en (25) darán directamente los valores buscados de $x_1, x_2, x_3 \dots$. Hechas estas correcciones en los ángulos que de los promedios resultan, quedarán cumplidas todas las condiciones geométricas con la menor alteración posible en el conjunto de las primitivas observaciones.

Para aplicar, pues, este método, ha de hacerse lo siguiente: 1.º, establecer las ecuaciones de condición dadas por el enlace de los triángulos; 2.º, sustituir en ellas los ángulos de situación obtenidos en los promedios, pero añadiendo á cada uno su corrección incógnita; 3.º, escritas las ecuaciones de condición bajo su forma algebraica (24) é introducidos factores incógnitos, formar las ecuaciones (25); 4.º, deducidas de aquí las correcciones en función de I_1, I_2, I_3, \dots sustituir estos valores en las ecuaciones de condición; 5.º, hallar, resolviendo estas ecuaciones, los valores numéricos de I_1, I_2, I_3, \dots ; 6.º, reemplazar los valores de estos factores en las ecuaciones (25), y deducir los de las correcciones x_1, x_2, x_3, \dots ; 7.º, hacer la comprobación sustituyendo las correcciones en las ecuaciones de condición y resolviendo otra vez, con los datos ya corregidos, todos los triángulos. Otra comprobación cabe también, pues fácil es ver que entre las correcciones x_1, x_2, x_3, \dots de los ángulos de situación obtenidos en un vértice cualquiera, y los pesos w_1, w_2, w_3, \dots correspondientes á los mismos, existe la ecuación (1)

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \dots = 0.$$

(1) La corrección de un ángulo de la triangulación, es decir, del comprendido entre las visuales dirigidas desde un vértice á otros dos, es la diferencia de las dos correcciones relativas á los ángulos que fijan la situa-

En cuanto á los errores probables de los ángulos adoptados, sea e_n el error verdadero del ángulo de situación n —ésimo: el error del valor que para este ángulo se acepte será $e_n + x_n$. Mas cada x puede expresarse en función de todas las e , porque de las ecuaciones (26) se deducen las I en función de las ε , y éstas se hallan enlazadas con los errores verdaderos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \dots, \\ -\varepsilon_2 &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \dots, \\ -\varepsilon_3 &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \dots, \\ &\& . \end{aligned}$$

Los valores de los factores I_1, I_2, I_3, \dots deducidos de las ecuaciones (26) en función de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ pueden escribirse de este modo convencional:

$$\begin{aligned} I_1 &= (\alpha\alpha) \varepsilon_1 + (\alpha\beta) \varepsilon_2 + (\alpha\gamma) \varepsilon_3 \dots, \\ I_2 &= (\alpha\beta) \varepsilon_1 + (\beta\beta) \varepsilon_2 + (\beta\gamma) \varepsilon_3 \dots, \\ I_3 &= (\alpha\gamma) \varepsilon_1 + (\beta\gamma) \varepsilon_2 + (\gamma\gamma) \varepsilon_3 \dots, \\ &\& .; \end{aligned} \tag{27}$$

y si por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se designan valores tales que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\alpha\alpha) a_1 + (\alpha\beta) b_1 + (\alpha\gamma) c_1 \dots, \\ \lambda_2 &= (\alpha\beta) a_1 + (\beta\beta) b_1 + (\beta\gamma) c_1 \dots, \\ \lambda_3 &= (\alpha\gamma) a_1 + (\beta\gamma) b_1 + (\gamma\gamma) c_1 \dots, \\ &\& ., \end{aligned} \tag{28}$$

será

$$\begin{aligned} w_1 x_1 &= \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 \dots = -(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 \dots) e_1, \\ &\quad -(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 \dots) e_2, \\ &\quad -(\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3 \dots) e_3, \\ &\quad \& ., \end{aligned}$$

y expresiones análogas en función de e_1, e_2, e_3, \dots se tendrán para $x_2, x_3 \dots$

ción de dichas visuales respecto de la dirección de partida ó referencia, salida del mismo vértice. Luego, en las ecuaciones de condición, estas últimas correcciones entrarán con signos contrarios é igual coeficiente, y por tanto las concernientes á un mismo vértice darán

$$a_1 + a_2 + \dots = 0, \quad b_1 + b_2 + \dots = 0 \dots$$

Esto sentado, escribamos

$$w_1 x_1 = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 \dots,$$

y en su consecuencia

$$w_1 (x_1 + e_1) = (w_1 + p_1) e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + \dots$$

Si ϵ es el error probable de un ángulo de situación observado, cuyo peso sea la unidad, el error probable relativo al peso w será $\epsilon : \sqrt{w}$. Luego el error probable de $w_1 (x_1 + e_1)$ valdrá

$$\pm \epsilon \left\{ w_1 + 2p_1 + \frac{p_1^2}{w_1} + \frac{p_2^2}{w_2} + \frac{p_3^2}{w_3} + \dots \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (29)$$

Pero

$$\frac{p_1^2}{w_1} = \left(\lambda_1 \frac{a_1}{w_1} + \lambda_2 \frac{b_1}{w_1} + \lambda_3 \frac{c_1}{w_1} \dots \right) (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 \dots),$$

ó bien, desarrollando,

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{w_1} &= \lambda_1 \lambda_1 \frac{a_1 a_1}{w_1} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{a_1 b_1}{w_1} + \lambda_1 \lambda_3 \frac{a_1 c_1}{w_1} + \dots, \\ &+ \lambda_1 \lambda_2 \frac{a_1 b_1}{w_1} + \lambda_2 \lambda_2 \frac{b_1 b_1}{w_1} + \lambda_2 \lambda_3 \frac{b_1 c_1}{w_1} + \dots, \\ &+ \lambda_1 \lambda_3 \frac{a_1 c_1}{w_1} + \lambda_2 \lambda_3 \frac{b_1 c_1}{w_1} + \lambda_3 \lambda_3 \frac{c_1 c_1}{w_1} + \dots, \\ &\quad \&, \end{aligned}$$

y expresiones análogas con a_2, b_2, c_2, \dots resultarían variando los subíndices del primer miembro. Sumadas todas ellas, dan

$$\begin{aligned} \Sigma \left(\frac{p^2}{w} \right) &= \lambda_1 \lambda_1 \left(\frac{aa}{w} \right) + \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{ab}{w} \right) + \lambda_1 \lambda_3 \left(\frac{ac}{w} \right) \dots, \quad (30) \\ &+ \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{ab}{w} \right) + \lambda_2 \lambda_2 \left(\frac{bb}{w} \right) + \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{bc}{w} \right) \dots, \\ &+ \lambda_1 \lambda_3 \left(\frac{ac}{w} \right) + \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{bc}{w} \right) + \lambda_3 \lambda_3 \left(\frac{cc}{w} \right) \dots, \\ &\quad \&. \end{aligned}$$

mas, en virtud de la siguiente transformación del sistema (28),

deducida de las relaciones mutuas de los sistemas (26) y (27),

$$a_1 = \left(\frac{aa}{w}\right)\lambda_1 + \left(\frac{ab}{w}\right)\lambda_2 + \left(\frac{ac}{w}\right)\lambda_3 \dots,$$

$$b_1 = \left(\frac{ab}{w}\right)\lambda_1 + \left(\frac{bb}{w}\right)\lambda_2 + \left(\frac{bc}{w}\right)\lambda_3 \dots,$$

$$c_1 = \left(\frac{ac}{w}\right)\lambda_1 + \left(\frac{bc}{w}\right)\lambda_2 + \left(\frac{cc}{w}\right)\lambda_3 \dots,$$

&c.;

efectuada la suma en cada columna de las ecuaciones (30), resulta

$$\Sigma \left(\frac{p^2}{w}\right) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 + \dots = -p_1.$$

Sustituyendo este valor en la expresión (29) del error probable de $w_1 (x_1 + e_1)$, tal expresión se convierte en

$$\pm r (w_1 + p_1)^{\frac{1}{2}};$$

luego, poniendo por p_1 su valor, será

$$\pm r \left\{ \frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_1^2} (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 \dots) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

el error probable del ángulo de situación al cual corresponde la enmienda x_1 .

Podría hallarse también el error probable de la distancia angular entre dos vértices de la triangulación ó del ángulo subtendido en una estación por otras dos; mas consúltese acerca de esto á Gauss, *Supplementum theoriæ combinationis observationum erroribus minimis obnoxia*, Gotinga, 1826, y al general Walker, en el segundo tomo del *Account of the Great Trigonometrical Survey of India*, quienes exponen la materia con detenimiento.

Fácil es ver que el valor mínimo de

$$2 \Omega = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2 \dots$$

es (*)

$$2 \Omega = I_1 \varepsilon_1 + I_2 \varepsilon_2 + I_3 \varepsilon_3 + \dots$$

(*) En efecto, la suma de los cocientes obtenidos, dividiendo por su orden los cuadrados de las ecuaciones (25) por w_1, w_2, \dots ofrece en el segundo miembro idéntica expresión que la suma de los productos respectivos de las ecuaciones (26) por I_1, I_2, \dots

Queriendo eludir en la triangulación de la Gran Bretaña é Irlanda la resolución de ecuaciones con 920 incógnitas, dividióse en trozos la red que cubría el reino, comprendiendo cada trozo un número de ecuaciones ya asequible. Corregido ó calculado uno de ellos por separado de los otros, introducíanse en las ecuaciones de condición del siguiente trozo, que contenían algunas de las cantidades enmendadas, las correcciones obtenidas, y se reducía á un mínimo la suma de cuadrados de las ecuaciones subsistentes en dicho trozo. Las correcciones deducidas para este segundo se pasaban al tercero y así se continuaba. Cuatro trozos, en que no se hacían correcciones procedentes de las figuras contiguas, servían de comienzos independientes. Los trozos en total eran 21: en 9 de ellos el número de ecuaciones de condición no bajaba de 50, y en uno ascendía á 77. Hicieronse estos cálculos—todos por duplicado—en dos años y medio, ocupándose en semejante trabajo, por término medio, ocho calculadores (*).

Omitiéronse las ecuaciones de condición necesarias para la conformidad entre las longitudes de las bases medidas y las mismas calculadas, por no aumentar considerablemente el trabajo, ya con lo que precede bastante penoso.

9.

Una vez obtenidas como se ha dicho las correcciones de los varios ángulos de situación observados, el cálculo de distancias por el teorema de Legendre es de bastante sencillez y precisión para el objeto. Pero si se hubiesen omitido las ecuaciones de condición que deben cumplir los triángulos para que por cálculo vuelvan á hallarse exactamente las longitudes de las bases medidas, aun habría de verse qué longitud absoluta se debía tomar para cada lado de la triangulación. Sea x la longitud que se

(*) Cumple decir á propósito de esto, que al satisfactorio resultado contribuyeron en gran parte el talento y actividad del jefe de los calculadores, Sr. James O'Farrell.

busca de un lado y q_1x, q_2x, q_3x, \dots las longitudes de las bases, deducidas de las relaciones q_1, q_2, q_3, \dots de estas líneas con aquel lado, que de la triangulación resultan. Si B_1, B_2, B_3, \dots son las longitudes medidas de las bases y w_1, w_2, w_3, \dots sus pesos respectivos, deberá escogerse x de magnitud tal que reduzca á un mínimo la expresión

$w_1(q_1x - B_1)^2 + w_2(q_2x - B_2)^2 + w_3(q_3x - B_3)^2 + \dots$;
es decir,

$$x = \frac{w_1 q_1 B_1 + w_2 q_2 B_2 + w_3 q_3 B_3 + \dots}{w_1 q_1^2 + w_2 q_2^2 + w_3 q_3^2 + \dots}$$

En Inglaterra, de las seis bases medidas, las primeras con cadenas de acero y las dos últimas con el aparato de compensación de Colby, se eligieron estas dos para dicho cálculo, y de ellas exclusivamente se hizo depender la longitud absoluta de cada lado de la red geodésica. El siguiente cuadro contiene las longitudes medidas de las bases y las deducidas para las mismas de la triangulación corregida:

FECHA	LUGAR	BASE MEDIDA	BASE CAL- CULADA	DIFE- RENCIA	CONDADO
		Pies.	Pies.	Pies.	
1791	Hounslow Heath. . .	27406.19	27406.36	+ 0.17	Middlesex.
1794	Llanura de Salisbury	36576.83	36577.66	+ 0.83	Wilts.
1801	Misterton Carr. . . .	26344.06	26343.87	- 0.19	Lincoln.
1806	Rhuddlan Marsch. . .	24516 00	24517.60	+ 1.60	Flint.
1817	Belhelvie.	26517.53	26517.77	+ 0.24	Aberdeen.
1827	Lago Foyle.	41640.89	41641.10	+ 0.21	Londonderry.
1849	Llanura de Salisbury	36577.86	36577.66	- 0.20	Wilts.

La única diferencia de alguna cuantía se halla en la base de Rhuddlan, pero en gran parte puede atribuirse al mal enlace de esta línea con la triangulación inmediata.

10.

Daremos ahora, como ejemplo sencillo, el cálculo de las correcciones que debían hacerse en los ángulos de situación observados en un reducido trozo de la triangulación inglesa. Los vértices eran South Berule, B, en la Isla de Man; Merrick, M, en el

condado de Kircudbright; Slieve Donard, D, en el condado de Down, en Irlanda; Snowdon, S, al Norte de Wales, y Sca Fell, F, en Cumberland. La línea DF del dibujo, cortada hacia F, da á entender que desde Sca Fell no se observó Slieve Donard.

Medidos los tres ángulos en el triángulo BMD, se tenía primeramente

$$BMD + MDB + DBM = 180^\circ + \varepsilon_1,$$

siendo ε_1 el exceso esférico del triángulo. En segundo lugar, en el triángulo BDS se tenía análogamente

$$BDS + DSB + SBD = 180^\circ + \varepsilon_2.$$

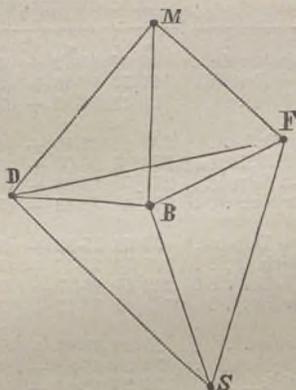


Fig. 50.

En tercer lugar, en el triángulo BSF

$$BSF + SFB + FBS = 180^\circ + \varepsilon_3.$$

Además, ya determinados los vértices de MBF, la observación de los ángulos BME, BFM, deducidos por otra parte, daba dos ecuaciones de condición: una,

$$BMF + MFB + FBM = 180^\circ + \varepsilon_4,$$

y otra, la ecuación de lado

$$\frac{\text{sen BSF} \cdot \text{sen BDS} \cdot \text{sen BMD} \cdot \text{sen BFM}}{\text{sen BFS} \cdot \text{sen BSD} \cdot \text{sen BDM} \cdot \text{sen BMF}} = 1.$$

Por último, la visual DF daba la ecuación de lado

$$\frac{\text{sen FMD} \cdot \text{sen FBM} \cdot \text{sen FDB}}{\text{sen FDM} \cdot \text{sen FMB} \cdot \text{sen FBD}} = 1.$$

A fin de traducir estas ecuaciones numéricamente, ponemos en la siguiente tabla los resultados de las observaciones hechas en los varios vértices á que el cálculo se refería. La penúltima columna contiene el valor recíproco del peso de cada ángulo de situación determinado, y la última el número de medidas en cada caso. En vez de x_1, x_2, x_3, \dots escribimos, como es costumbre, (1), (2), (3)...

VÉRTICES DE OBSERVACIÓN	VÉRTICES OBSERVADOS	SITUACIÓN HALLADA Y SÍMBOLO DE CORRECCIÓN	$\frac{1}{w}$	NÚM. DE OBSERVACIONES
Merrick. . . .	South Berule. .	$6^{\circ} 47' 45''.72 + (1)$	0.11	35
	Slieve Donard.	$41 52 49.08 + (2)$	0.19	24
	Sca Fell.	$312 48 54.49 + (3)$	0.13	32
Slieve Donard.	Merrick.	$220 41 42.50 + (4)$	0.08	8
	Sca Fell.	$259 5 10.02 + (5)$	0.46	13
	South Berule. .	$271 53 16.88 + (6)$	0.37	19
	Snowdon.	$314 38 39.43 + (7)$	0.22	21
South Berule. .	Slieve Donard.	$92 54 35.32 + (8)$	0.61	24
	Merrick.	$186 38 21.37 + (9)$	0.82	20
	Sca Fell.	$249 44 48.27 + (10)$	0.50	17
	Snowdon.	$341 41 50.13 + (11)$	0.62	20
Sca Fell.	Snowdon.	$20 38 31.85 + (12)$	2.93	3
	South Berule. .	$70 55 36.88 + (13)$	0.98	6
	Merrick.	$133 50 41.88 + (14)$	1.88	7
Snowdon.	Slieve Donard.	$136 7 51.72 + (15)$	2.17	4
	South Berule. .	$162 10 9.13 + (16)$	10.10	4
	Sca Fell.	$199 56 40.20 + (17)$	1.35	3

En su consecuencia, las cuatro ecuaciones de ángulo se establecían de este modo:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{South Berule. . . .} & 93^{\circ} 43' 46''.05 - (8) + (9) & \\
 \text{Slieve Donard. . . .} & 51 11 34.38 - (4) + (6) & \\
 \text{Merrick.} & 35 5 3.36 - (1) + (2) & \\
 \hline
 & 180 0 23.79 & \\
 \varepsilon_1 = & 22.922 & \\
 \therefore 0 = + & 0.868 - (1) + (2) - & \\
 & (4) + (6) - (8) + (9). &
 \end{array}$$

South Berule. . .	⁰ 111	['] 12	^{''} 45.19	+ (8) - (11)
Slieve Donard. . .	42	45	22.55	- (6) + (7)
Snowdon.	26	2	17.41	- (15) + (16)

$$180 \quad 0 \quad 25.15$$

$$\varepsilon_2 = \quad 24.433$$

$$\therefore 0 = + 0.717 - (6) + (7) + (8) - (11) - (15) + (16).$$

South Berule. . .	⁰ 91	['] 57	^{''} 1.86	- (10) + (11)
Snowdon.	37	46	31.07	- (16) + (17)
Sca Fell.	50	17	5.03	- (12) + (13)

$$180 \quad 0 \quad 37.96$$

$$\varepsilon_3 = \quad 32.258$$

$$\therefore 0 = + 5.702 - (10) + (11) - (12) + (13) - (16) + (17).$$

South Berule. . .	⁰ 63	['] 6	^{''} 26.90	- (9) + (10)
Sca Fell.	62	55	5.00	- (13) + (14)
Merrick.	53	58	51.13	+ (1) - (3)

$$180 \quad 0 \quad 23.03$$

$$\varepsilon_4 = \quad 25.230$$

$$\therefore = - 2.200 + (1) - (3) - (9) + (10) - (13) + (14).$$

Al calcular las ecuaciones de lado, restábase de los ángulos observados en los diferentes triángulos el tercio del exceso esférico; pues, aunque no necesario, conviene por lo general hacerlo. Empleando logaritmos de ocho decimales, y dando por supuesto que (1), (2)... se expresen en segundos, el cálculo se verificaba de este modo:

log sen B S F . .	9.7871239,0	+ 27,17	} - (16) + (17) {,
» BDS . .	9.8317751,2	+ 22,77	} - (6) + (7) {,
» B M D . .	9.7594791,7	+ 29,98	} - (1) + (2) {,
» B F M . .	9.9495547,9	+ 10,77	} - (13) + (14) {,
log cosec B F S . .	0.1139629,9	- 17,49	} - (12) + (13) {,
» B S D . .	0.3576004,5	- 43,10	} - (15) + (16) {,
» B D M . .	0.1083304,9	- 16,93	} - (4) + (6) {,
» B M F . .	0.0921606,2	- 15,31	} + (1) - (3) {,
Suma . .		- 124,7	+ &;

log sen F M D . .	9.9999417,3	+ 0,34	} + (2) - (3) {,
» F B M . .	9.9502860,1	+ 10,68	} - (9) + (10) {,
» F D B . .	9.3455070,3	+ 92,67	} - (5) + (6) {,
log cosec F D M . .	0.2069267,5	- 26,58	} - (4) + (5) {,
» F M B . .	0.0921606,2	- 15,31	} + (1) - (3) {,
» F B D . .	0.4052080,5	- 49,21	} + (8) - (10) {,
Suma . .		301,9	+ &.

Por lo tanto, las ecuaciones quinta y sexta eran éstas:

$$0 = -124.7 - 45.29 (1) + 29.98 (2) + 15.31 (3) + 16.93 (4) \\ - 39.70 (6) + 22.77 (7) + 17.49 (12) - 28.26 (13) \\ + 10.77 (14) + 43.10 (15) - 70.27 (16) + 27.17 (17).$$

$$0 = + 301.9 - 15.31 (1) + 0.34 (2) + 14.97 (3) \\ + 26.58 (4) - 119.25 (5) + 92.67 (6) \\ - 49.21 (8) - 10.68 (9) + 59.89 (10).$$

Multiplicando por $I_1, I_2 \dots I_6$, las seis ecuaciones obtenidas, y formando las ecuaciones (25), página 360, resultaba (4):

$$\frac{1}{0.11} (1) = -I_1 + I_4 - 45.29 I_5 - 15.31 I_6, \\ \frac{1}{0.19} (2) = +I_1 + 29.98 I_5 + 0.34 I_6, \\ \frac{1}{0.13} (3) = -I_4 + 15.31 I_5 + 14.97 I_6,$$

(4) Como se indicó en la página 361, es igual á cero la suma de las expresiones relativas á un mismo vértice, á saber: la suma de las comprendidas en cada uno de los grupos (1) ... (3) - (4) ... (7) - (8) ... (11) - etc.

$$\begin{aligned} \frac{1}{0.08} (4) &= -I_1 + 16.93 I_5 + 26.58 I_6, \\ \frac{1}{0.46} (5) &= -119.25 I_6, \\ \frac{1}{0.37} (6) &= +I_1 - I_2 - 39.70 I_5 + 92.67 I_6, \\ \frac{1}{0.22} (7) &= +I_2 + 22.77 I_5, \\ \frac{1}{0.61} (8) &= -I_1 + I_2 - 49.21 I_6, \\ \frac{1}{0.82} (9) &= +I_1 - I_4 - 10.68 I_6, \\ \frac{1}{0.50} (10) &= -I_3 + I_4 + 59.89 I_6, \\ \frac{1}{0.62} (11) &= -I_2 + I_3, \\ \frac{1}{2.93} (12) &= -I_3 + 17.49 I_5, \\ \frac{1}{0.98} (13) &= +I_3 - I_4 - 28.26 I_5, \\ \frac{1}{1.88} (14) &= +I_4 + 10.77 I_5, \\ \frac{1}{2.17} (15) &= -I_2 + 43.10 I_5, \\ \frac{1}{10.1} (16) &= +I_2 - I_3 - 70.27 I_5, \\ \frac{1}{1.35} (17) &= +I_3 + 27.17 I_5. \end{aligned}$$

Multiplicando, por último, estas ecuaciones por los divisores de los primeros miembros, se obtenían (1), (2), (3)... directamente en función de $I_1, I_2, I_3...$ Hecho esto y sustituidos (1), (2), (3)... en las seis ecuaciones de condición, se transformaban éstas en las siguientes:

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
0 = + 0.868	+ 2.48	- 0.98		- 0.95	- 5.565	+ 55.171
0 = + 0.717	- 0.98	+ 14.09	- 10.72		- 785.556	- 64.506
0 = + 5.702		- 10.72	+ 16.48	- 1.48	+ 667.466	- 29.945
0 = - 2.200	- 0.95		+ 1.48	+ 4.42	+ 40.970	+ 55.072
0 = - 124.7	- 5.565	- 785.556	+ 667.466	+ 40.970	+ 57944.1	+ 1217.22
0 = + 501.9	+ 55.171	- 64.506	- 29.945	+ 35.072	- 1217.22	+ 15194.5

De aquí había que deducir los valores numéricos de $I_1, I_2, I_3...$ lo cual constituía la parte más penosa de toda la operación. Por logaritmos de dichos valores numéricos resultaban:

$$\begin{array}{ll} \log I_1 = 9.2707823, & \log I_4 = 9.6787289, \\ \log I_2 = 9.9693096 n, & \log I_5 = 6.7453816 n, \\ \log I_3 = 9.9750836 n, & \log I_6 = 8.5005758 n; \end{array}$$

indicando la n que sigue á algunos logaritmos que sus números correspondientes son negativos. Era ya fácil tras de esto hallar los valores de (1), (2), (3)...; á saber:

$$\begin{array}{lll} (1) = + 0''.088, & (7) = - 0''.208, & (13) = - 1''.378, \\ (2) = + 0.030, & (8) = + 0.268, & (14) = + 0.886, \\ (3) = - 0.125, & (9) = + 0.039, & (15) = + 1.970, \\ (4) = - 0.083, & (10) = - 0.237, & (16) = + 0.521, \\ (5) = + 1.737, & (11) = - 0.008, & (17) = - 1.295. \\ (6) = - 0.664, & (12) = + 2.738, & \end{array}$$

Tales eran, en conclusión, las correcciones que para los ángulos de situación promediados se buscaban, y una vez efectuadas, calculando de nuevo los triángulos, ya aparecía en éstos la conformidad debida.

El lado de Slieve Donard á Sca Fell, el más largo de la triangulación inglesa, mide más de 111 millas (178.6 kilómetros).

11.

Conveniente será dar también un ejemplo del cálculo de coordenadas por medio de las fórmulas de las páginas 69 y 71. Partiendo de D, como del punto P de la figura 12, calculemos las coordenadas de F y M, contadas sobre el meridiano de D y sobre perpendiculares al mismo. Primeramente, resolviendo el triángulo DFM, se hallan los resultados que indica esta tabla, cuya tercera columna contiene los segundos de los ángulos de la columna precedente disminuidos en $\frac{1}{2} \epsilon$.

ESTA- CIONES	ÁNGULOS CORREGIDOS	$-\frac{1}{3}\varepsilon$	LOG. SENOS	LOG. DE LAS DISTANCIAS	DIS- TANCIAS
					Pies.
Merrick.	89° 3' 54".645	41".331	9.999994173	5.76867715	587052.78
Donard.	38 23 29.340	16.025	9.79307805	5.56181347	364597.32
Sca Fell.	52 33 15.959	2.644	9.89976146	5.66849688	466119.08
	$\varepsilon = 39.944$				

En D conocemos $\alpha_1 = 79^\circ 5' 16''.000$, azimut de F desde aquel punto, y la distancia $DF = s_1$, que es la primera consignada en el cuadro. Conservando la notación del artículo á que nos referimos, pongamos además

$$\alpha_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_1 = \alpha_1', \quad \alpha_1 - \frac{2}{3}\varepsilon_1 = \alpha_1'',$$

y expresemos por E el factor $(2\rho\rho \text{ sen } 1'')^{-1}$ que entra en el cálculo del exceso esférico. Para las coordenadas de Sca Fell resulta (1):

	logs	logs
$\alpha_1' = 79^\circ 5' 10.981$	sin 9.99207534	sin α_1 9.99208
$\alpha_1'' = 79^\circ 5' 5.961$	cos 9.27727150	cos α_1 9.27716
$s_1 = 587052.78$	5.76867715	s_1^2 1.53735
$x_1 = 111160.03$	5.04594865	E 0.37117
$y_1 = 576435.19$	5.76075049	$\varepsilon_1 = 15''.058$ 1.17776

Para pasar de F á M, se tiene $\sigma_1 = 127^\circ 26' 44''.041$, por ser éste el suplemento del ángulo DFM; además

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \sigma_1 - \varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon' = -48^\circ 22' 15''.912,$$

obteniéndose ε' mediante el cálculo previo aproximado de x_2' .

Para las coordenadas de Merrick resulta, pues:

	logs	logs
$-\alpha_2' = 48^\circ 22' 10.740$	sin 9.87358000	sin α_2 9.87359 <i>n</i>
$\frac{1}{2}\varepsilon' - \alpha_2'' = 48^\circ 22' 38.382$	cos 9.82231330	cos α_2 9.82237
$s_2 = 364597.32$	5.56181347	s_2^2 1.12362
$-y_2' = 272516.92$	5.43539347	E 0.37117
$\alpha_2' = 242173.59$	5.38412677	$\varepsilon_2 = -15''.515$ 1.19075
$\frac{1}{2}\varepsilon'/y_1 \text{ sen } 1'' = 91.70$	1.96237	w_2' 5.38413
$y_2 = 303918.27$		y_1 5.76075
$w_2 = 353425.32$		$\frac{1}{2}\varepsilon' = 32''.813$ 1.51605

(1) En la columna de la derecha de este cálculo y del siguiente están determinadas las incógnitas previas.

Estos valores de x_2 , y_2 pueden comprobarse pasando directamente de D á M, con cuyo cálculo se obtiene

$$x_2 = 353425.34, \quad y_2 = 303918.23.$$

12.

El grabado adjunto pone de manifiesto la red geodésica de la parte septentrional del Reino Unido, sección que comprende Escocia, algo de Inglaterra é Irlanda y las islas de Shetland. La estación de Saxaford, en el extremo Norte, pertenece á un grupo de tres estaciones muy próximas, en cada una de las cuales se determinó la latitud con objeto de precisar la del extremo del arco de meridiano. La línea de puntos que se dirige al Norte desde la estación de Easington, en la costa septentrional del condado de York, pasando un poco á la izquierda de Saxaford, es el meridiano de aquel vértice, y S el pie de la perpendicular trazada á este arco desde Saxaford.

Las otras líneas de puntos indican de qué modo se calculó la distancia de Easington á S. Determinado por observaciones astronómicas el azimut de Cheviot en Easington, que media $38^{\circ} 48' 58'' .68$ al Oeste, contando desde el Norte, se halló el punto A, cuya distancia á Easington era igual á la distancia Easington-Cheviot. Unido dicho punto A con Cheviot y el monte Battock, es claro que se podía calcular, pues todos los ángulos y lados de la red eran conocidos, la distancia de A al monte Battock y el ángulo comprendido en A entre dicho monte y el meridiano. Hallóse después en éste mismo el punto D, cuya distancia á A era igual al lado A-monte Battock, y enlazado D con este vértice y con Scarabin, se determinó el punto G tal que DG tuviese la misma longitud que la distancia de D á Scarabin. Unido G con este último y con Fitty Hill y Foula, se halló H tal que GH valiese tanto como la distancia de G á Foula. Finalmente, enlazado H con Foula, Yell y Saxaford, se trazó desde este último punto al meridiano la perpendicular cuyo pie señala S. Sumados los varios segmentós de la línea, á saber, el de Easington á A y los siguientes AD, DG, GH, HS, y calculada

asimismo la longitud de la perpendicular de Saxaford á S, los resultados respectivos fueron

$$\begin{array}{ll} 2\ 288\ 427.29 \text{ pies,} & 222.56 \text{ pies.} \\ (697\ 506.38 \text{ metros),} & (67.84 \text{ metros).} \end{array}$$

Repetido el cálculo, variando por completo la serie de puntos, los valores de la misma distancia y de la perpendicular antedicha fueron

$$\begin{array}{ll} 2\ 288\ 427.38 \text{ pies,} & 221.94 \text{ pies.} \\ (697\ 506.41 \text{ metros),} & (67.65 \text{ metros).} \end{array}$$

Deduciase de aquí la distancia Easington-Saxaford y también el ángulo

$$\text{Cheviot : Easington : Saxaford} = 38^{\circ} 49' 18''.767.$$

Hemos elegido este ejemplo para explicar cómo se calculan en una triangulación las distancias directas entre puntos lejanos. De modo parecido se obtuvieron los siguientes resultados:

La distancia Greenwich-Feaghmain

$$= 2\ 350\ 102.30 \text{ pies} = 716\ 304.75 \text{ metros.}$$

El ángulo Chingford : Greenwich : Feaghmain

$$= 81^{\circ} 59' 11''.857.$$

Feaghmain, en la isla de Valencia, es la estación trigonométrica más occidental de Irlanda, y Chingford una estación justamente al Norte de Greenwich.

La distancia Greenwich-monte Kemmel

$$= 694\ 849.31 \text{ pies} = 211\ 788.17 \text{ metros.}$$

El ángulo Chingford : Greenwich : monte Kemmel

$$= 110^{\circ} 26' 7''.398.$$

El monte Kemmel es un vértice de la triangulación belga.

Hízose en 1861 el enlace de la red inglesa con la de Francia y Bélgica para ligarlas con el arco de paralelo que, según proponía Struve, debía extenderse desde Feaghmain hasta Orsk, sobre el río Ural. La red que unió la costa de Kent y Sussex, en

Inglaterra, con el monte Kemmel, en Bélgica, está dibujada en la figura 52. Fairlight, Paddlesworth y la iglesia de San Pedro, vértices los tres de la triangulación inglesa, suministraban como datos los dos lados que concurrían en Paddlesworth y el ángulo que éstos formaban; pero para mejor enlace eligióse además, cerca de Folkestone, otro punto, Coldham, desde donde se dominaba bien la costa francesa y las estaciones de Fairlight y San Pedro.

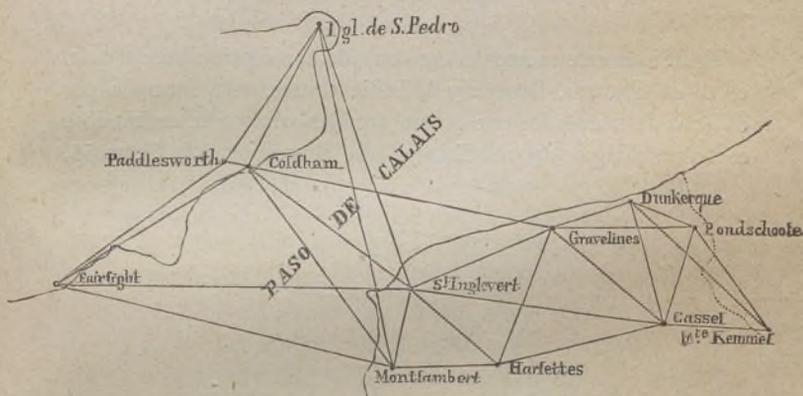


Fig. 52.

Los trabajos necesarios se verificaron á esta parte por oficiales ingleses, procediendo de acuerdo con los oficiales franceses que al otro lado operaban. Las observaciones—efectuadas por separado unas de otras—comenzaron en junio de 1861 y concluyeron en enero del siguiente. Por el cuadro adjunto puede verse que la comparación de las longitudes halladas para algunos lados, partiendo de la triangulación inglesa, con las obtenidas por los belgas, derivándolas de la base de Ostende, ofrece entre ellas bastante conformidad: dichas longitudes están expresadas en metros; la segunda columna da la distancia aproximada en millas,

DISTANCIAS	MILLAS	TRIANGULA- CIÓN INGLESA	TRIANGULA- CIÓN BELGA	DIF.
		m	m	m
Hondschoote—Kemmel....	17.2	27612.80	27612.74	-0.06
Cassel—Hondschoote.....	13.3	21415.80	21415.84	+0.04
Cassel—Kemmel	14.3	22981.43	22981.18	-0.25
Dunkerque—Hondschoote	9.9	15918.98	15919.10	+0.12
Dunkerque—Cassel.....	17.1	27458.41	27458.40	-0.01

13.

Estudio aparte merece el caso en que la red principal del país, como en Francia, España y la India ocurre, está formada por cadenas de triángulos que corren por el Norte y Sur, cruzándose con otras dirigidas por el Este y Oeste. Examinemos la figura 53,

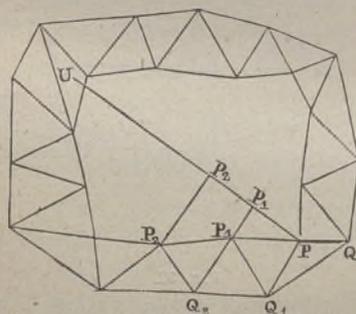


Fig. 53.

que representa un cuadrilátero constituido por cuatro segmentos de dos pares de cadenas, en el cual supondremos que de todos los 25 triángulos de que consta estén observados los tres ángulos, todos ellos con igual grado de precisión. Sea PQ una base ó una línea de longitud dada: descontados P y Q, quedan en la figura 23 puntos, y para determinar su posición se requieren 46 ángulos, resultando en su consecuencia $3 \times 25 - 46 = 29$ ecuaciones de condición, que son las siguientes:

En todo polígono esférico de n lados y de área E ,
 la suma de los ángulos internos $= (n - 2) \pi + E$,
 la suma de los ángulos externos $= (n + 2) \pi - E$;

luego, aplicadas estas fórmulas, la primera al polígono exterior de la figura y la segunda al interior de la misma, designando por n' , E' el número de lados y el área de aquél, la suma de los ángulos de todos los triángulos comprendidos entre ambos polígonos deberá ser igual á $(n' + n) \pi + E' - E$. Mas tal condición quedará cumplida si en cada uno de los $n' + n$ triángulos, es decir, de los 13 + 12 en el caso presente, es la suma de sus tres ángulos $= \pi +$ el exceso esférico respectivo. Aparte de estas 25 condiciones, se tendrá: (A) la dada por la suma de los ángulos de uno de los polígonos, y (B) la ecuación de lado necesaria para que deducida PQ de la serie de todos los triángulos vuelva á encontrarse exactamente la misma longitud. Pero faltan todavía otras dos condiciones, pues con las precedentes sólo cabe afirmar que, si partiendo de PQ se calculan uno tras otro todos los triángulos de la cadena hasta volver al susodicho lado, se hallarán de nuevo su verdadera longitud y verdadera dirección; mas no habrá seguridad de que resulte ese lado en coincidencia con el primitivo y no meramente paralelo. Imagínese al efecto, por el punto P, un arco de circunferencia máxima PU que forme con PQ un ángulo tal que el polígono interior quede dividido en dos partes casi iguales, y trazadas por P_1, P_2, \dots las perpendiculares P_1p_1, P_2p_2, \dots á ese arco PU, tómense por coordenadas de cada punto $Pp_n = X_n, P_np_n = Y_n$. Para que deducidas, partiendo de P, de las coordenadas de cada punto las del siguiente, se torne otra vez á P después de recorrer todo el polígono interior, será menester: (C) que X sea cero, y (D) que Y lo sea también. Tales son las dos ecuaciones que faltaban.

Pero puede disminuirse el número total de condiciones, si designando por A', B', C' los ángulos observados en cualquier triángulo, es e el error de su suma y son los ángulos que como más probables deben adoptarse

$$A' - \frac{1}{2}e + x, \quad B' - \frac{1}{2}e + y, \quad C' - \frac{1}{2}e - x - y;$$

pues efectuadas estas correcciones en dicho triángulo, se cum-

plirá desde luego el requisito de que la suma de sus ángulos sea la verdadera; por tanto, el número de ecuaciones se reducirá á cuatro: (A), (B), (C), (D), y esto cualquiera que sea el número de triángulos, con tal que con simples cadenas se cierre el polígono.

Formar las ecuaciones (A) y (B) en función de todas las x é y no ofrece dificultad. En cuanto á las otras dos, si suponiendo primero los ángulos iguales á $A' - \frac{1}{2}e$, $B' - \frac{1}{2}e$, $C' - \frac{1}{2}e$, es decir, si admitiendo por de pronto que las x é y sean nulas, se calculan los lados y ángulos del polígono interior, se obtendrán determinados valores numéricos, de los cuales podrán deducirse á su vez por las fórmulas de Trigonometría esférica, páginas 69 y 71, las coordenadas correspondientes $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$; y éstas serán tales que, cuando se torne al punto inicial, en vez de encontrarse allí coordenadas nulas, se hallarán todavía ciertos valores numéricos (X) é (Y); mas rehaciendo después el cálculo con las cantidades x, y, \dots la introducción de éstas producirá en cada lado y ángulo del polígono incrementos respectivos que pueden expresarse fácilmente. Por ejemplo: si $180^\circ + \sigma$ es uno de los ángulos externos del polígono interior, $d\sigma$ valdrá $x_{n-1} - x_n - y_n + y_{n+1}$, y en virtud del cálculo de la página 48, dS contendrá en general seis de las cantidades x, y con coeficientes distintos de la unidad. Por lo tanto, si se escriben las expresiones concernientes á las sucesivas $d\sigma, dS$, las fórmulas (3) darán los incrementos totales $d(X)$ y $d(Y)$ que deben agregarse á los valores (X), (Y), ya obtenidos. Luego las ecuaciones (C) y (D) serán

$$(X) + d(X) = 0, \quad (Y) + d(Y) = 0.$$

Esto sentado, los valores más probables de las x é y serán aquellos que reduciendo á un mínimo la suma

$$\Sigma \left\{ \left(\frac{1}{2}e - x \right)^2 + \left(\frac{1}{2}e - y \right)^2 + \left(\frac{1}{2}e + x + y \right)^2 \right\},$$

ó—lo que para el caso da lo mismo—la suma

$$\Sigma \{ x^2 + y^2 + (x + y)^2 \},$$

cumplan también con las cuatro condiciones antedichas, las cuales pueden escribirse de este modo:

$$0 = a_1x + b_1y + a'_1x' + b'_1y' + \dots,$$

$$0 = a_2x + b_2y + a'_2x' + b'_2y' + \dots,$$

$$0 = a_3x + b_3y + a'_3x' + b'_3y' + \dots,$$

$$0 = a_4x + b_4y + a'_4x' + b'_4y' + \dots$$

Resolviendo, pues, tal problema como otros análogos, procederá hallar cuatro factores, y por medio de éstos deducir finalmente las x é y . Si otro lado HK figurara también como base medida, contárase con una nueva condición (1).

Los cálculos más laboriosos para compensar redes geodésicas por el método de los mínimos cuadrados han sido los concernientes á la India. Su red principal se compone de cadenas de triángulos dirigidas como manifiesta el grabado de la página 35; eje de toda la triangulación es el gran arco que midió el coronel Everest, y que desde el cabo Comorin corre hasta la base de Dehra Dun en el Himalaya; la red comprende cinco secciones geográficas, cuatro de ellas parecidas á cuadriláteros y la quinta al Sur, de forma triangular; junto á los vértices de los cuadriláteros están las bases, medidas todas, menos una, con el aparato de Colby.

Como por la mucha extensión de tal obra no había que pensar en corregirlo todo á la par, conforme los principios teóricos requieren, el general Walker resolvió hacerlo por separado con cada uno de los cinco trozos antedichos, reduciendo sucesivamente las figuras y llevando á las contiguas, cuando llegara su vez, los resultados obtenidos en la corregida con antelación. Fué menester, en su consecuencia, comenzar por el trozo que mayor exactitud en todas sus partes ofrecía, á saber: por el cuadrilátero del Noroeste *abfi* (*). Pero aun este trozo comprendía 128 triángulos y 110 polígonos, incluyendo en esta denominación cuadri-

(1) Véase para más pormenores la *Memoria sobre la compensación general de los errores en la red geodésica de España*, por el coronel de Ingenieros D. Joaquín Barraquer y el de Artillería D. Francisco Cabello, Madrid, 1874.

(*) *Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India*, por el coronel J. T. Walker, C. B., I. R., M. R. S., tomo II, páginas 30 y 32.

láteros y figuras más complicadas: el total de ángulos observados era de 2.418, y las ecuaciones de condición que imponía el conjunto de triángulos y polígonos llegaban á 955, sin contar las relativas al cierre de los circuitos. No era, pues, hacedero tampoco manejarse simultáneamente con todo, y hubo que deducir las correcciones de cada figura en particular, ya fuese un simple triángulo, ya un polígono, cuidando tan sólo de las condiciones que tal figura por sí presentara, es decir, que como cálculo previo se halló para cada ángulo cierta corrección, prescindiendo del cierre de los circuitos.

Para lograr después el ajuste definitivo de éstos, reemplazáronse las cadenas complejas—esto es, las compuestas de triángulos y polígonos—por otras sencillas, formadas por aquéllos y por una serie continua de triángulos tomados de los polígonos sin orden determinado, pues una vez establecida en éstos la trabazón de sus partes, poco importaba elegir los triángulos de un modo ó de otro; y aplicáronse á los tres ángulos A, B, C de cada uno, ya hasta cierto punto enmendados, las correcciones incógnitas x , y y $-(x + y)$, cuya suma de cuadrados multiplicados por los pesos respectivos debía reducirse á un mínimo, á la vez que tales x é y se enlazaran por las condiciones necesarias para que cerraran bien las cadenas y se reprodujeran exactamente las longitudes de las bases medidas. Por el dibujo de la página 35 se echa de ver que en el cuadrilátero del Noroeste había que cerrar cinco circuitos, lo cual, conforme lo dicho anteriormente, imponía $4 \times 5 = 20$ ecuaciones de condición. Teníanse además $4 - 1 = 3$ ecuaciones dadas por las cuatro bases.

Conviene advertir que para obtener de nuevo, por medio de la triangulación corregida, las longitudes medidas de las bases, puesto que en semejante cálculo se apreciaba con toda escrupulosidad el peso de cada ángulo observado y su debido influjo en el resultado definitivo, debía hacerse otro tanto con los errores probables ó pesos de las bases medidas, no menos sujetas á error que los ángulos observados; pero el general Walker demostró (tomo II de su obra, página 265) que, examinado detenidamente el caso presente, bien podían tenerse dichas bases por exactas, comparadas con la triangulación.

Para comprender cómo se formularon las condiciones relativas al cierre, supónganse elegidos de una cadena envolvente de triángulos una serie de lados como indica la figura 54. De los triángulos, ya en parte corregidos, cada lado y cada ángulo resultará con un valor numérico determinado; mas á éste debe agregarse un incremento incógnito que se puede expresar en función de las x é y . Ahora bien; si partiendo de a , donde se conocen la latitud de este punto y el azimut de la línea ab que en él principia, calculamos la latitud y longitud de su extremo b , junto con el azimut inverso de a en b , y haciendo lo mismo al pasar de b

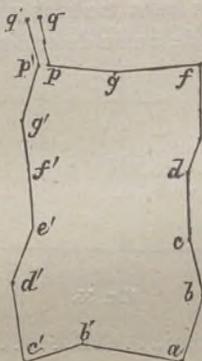


Fig. 54.

á c , continuamos de este modo hasta llegar á p , obtendremos la latitud y longitud de tal punto y el azimut de la línea pq . Pero si recorriendo b' , c' ... efectuamos cálculos parecidos, hallaremos también la latitud y longitud de p' , y azimut de $p'q'$, y los valores correlativos en uno y otro caso deben ser iguales. De donde nacerán estas tres ecuaciones (*):

Por la serie izquierda. Por la serie derecha.

$$\text{Latitud, } \Phi' + \Sigma (a' x' + b' y') = \Phi + \Sigma (a x + b y);$$

$$\text{Longitud, } \Omega' + \Sigma (a'_1 x' + b'_1 y') = \Omega + \Sigma (a_1 x + b_1 y);$$

$$\text{Azimut, } A' + \Sigma (a'_2 x' + b'_2 y') = A + \Sigma (a_2 x + b_2 y);$$

(*) Comprendidas en las fórmulas (121) del coronel Walker, tomo II, página 176.

y se añadirá otra ecuación, una ordinaria de lado, estableciendo la equivalencia lineal de pq con $p'q'$. Las diferencias $\Phi' - \Phi$, $\Omega' - \Omega$ y $A' - A$ serán los errores del circuito en latitud, longitud y azimut revelados por los triángulos parcialmente corregidos.

En el trabajo relativo á la India escribiéronse primero las ecuaciones necesarias para reproducir las longitudes de las bases (las de Sironj, Dehra Dun, Chach y Karachi se designan en la figura 55 por A, B, C, D), é identificar asimismo las longitudes de los lados de unión de las cadenas. Expresadas por logaritmos y referidas á los decimales del séptimo lugar, las diferencias entre las longitudes de las bases medidas y calculadas, ó entre las longitudes de los lados de unión determinadas por dos caminos diferentes, eran:

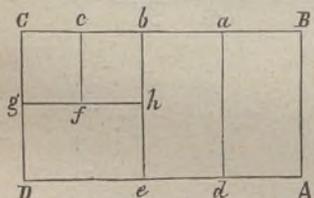


Fig. 55.

1. Bases de Dehra y Sironj... AB. + 44, 0;
2. Lado de triángulo en a ... Ba - (A \bar{d} , $\bar{d}a$)... + 68, 2;
3. Bases de Dehra y Chach... BC. + 71, 9;
4. Bases de Sironj y Karachi... AD. - 79, 6;
5. Bases de Karachi y Chach... DC. + 163, 8;
6. Lado en b (da, ab) - ($\bar{d}e$, $e\bar{b}$)... - 124, 6;
7. Lado en c (hb, bc) - (hf, fc)... + 150, 9;
8. Lado en C. (fc, cC) - (fy, gC)... - 5, 3.

Consignábanse después las diferencias de latitud, longitud y azimut en a , b , g , c , C:

	$\Phi - \Phi'$	$\Omega - \Omega'$	$A - A'$
a ... (AB, Ba) - (A \bar{d} , $\bar{d}a$)... + 0''39	+ 0''17	+ 5''91;	
b ... (da, ab) - ($\bar{d}e$, $e\bar{b}$)... - 0.39	+ 0.21	+ 1.55;	
g ... (eh, hg) - (eD, Dg)... + 0.39	+ 0.29	- 3.25;	
c ... (hb, bc) - (hf, fc)... + 0.04	- 0.29	- 4.23;	
C... (fc, cC) - (fy, gC)... - 0.00	- 0.29	- 3.00.	

Suministraban estos números los términos independientes de las 23 ecuaciones de condición. Formadas éstas, pasábase luego á deducir las que ligaban los 23 factores, por los cuales se debían multiplicar para ajustarlas con la reducción al mínimo, y se determinaban, resolviendo las nuevamente halladas, los valores numéricos de tales factores.

Es de notar que las correcciones x é y , tras este prolijo cálculo obtenidas, son bastante pequeñas, pues de 1650, á que asciende su número, 1511 son inferiores á $0''\cdot 1$; 116 están comprendidas entre $0''\cdot 1$ y $0''\cdot 2$; 20 entre $0''\cdot 2$ y $0''\cdot 3$; 2 entre $0''\cdot 3$ y $0''\cdot 4$, y 1 solamente llega á $0''\cdot 46$.

Tal es, en bosquejo, el procedimiento seguido para reducir la triangulación de la India: sumamente laborioso, aunque por su brevedad teórica parezca que la solución debería ser fácil; pero basta ver el segundo tomo de la obra del general Walker para convencerse de lo contrario. Método parecido al empleado en el cuadrilátero Noroeste se aplicó á los demás trozos.

En la corrección de la red geodésica de España por mínimos cuadrados, también ha sido preciso para resolver las ecuaciones de condición—que pasan de setecientas—dividir toda la triangulación en trozos. Son éstos en número de diez y á cada uno corresponden de 60 á 83 de dichas ecuaciones. Redúcese cada grupo por separado de los contiguos; pero al cerrar el cálculo se introducen ciertas condiciones con objeto de conciliar las diferencias que por otra parte pudieran aparecer en los lados de unión. Seis son las bases en que los cálculos estriban (1).

(1) Constituyen la red española las cadenas de triángulos tendidas según los meridianos de las capitales Salamanca, Madrid, Pamplona y Lérida, según los paralelos de las capitales Palencia, Madrid y Badajoz, y por las costas Norte, Este y Sur. Los diez trozos, numerados de Occidente á Oriente, y designados por la provincia que sirve de respectivo centro ó encabezamiento, son:

- I. Coruña. II. Burgos. III. Pamplona. IV. Lérida.
V. Cáceres. VI. Madrid. VII. Teruel.
VIII. Sevilla. IX. Jaén. X. Murcia.

De acuerdo con lo dispuesto por la Asociación geodésica internacional,
CLARKE.—25

14.

De 1859 á 1869 tendieron los franceses en Argelia, entre las fronteras de Marruecos y las de Túnez, valiéndose de los modernos instrumentos y métodos, una red geodésica que abarca 10° de paralelo, cuya mitad occidental fué dirigida por el comandante, entonces capitán, Perrier, uno de los oficiales que en 1861 y 62, en cooperación con los ingleses, tomó parte en el enlace de la triangulación de Inglaterra con la de Francia, merced al cual se completó la red geodésica desde las islas de Shetland hasta las Baleares. Ocupado en 1868 en triangular el extremo que recaía en la provincia de Orán, tuvo ocasión de comprobar con nuevos datos la posibilidad del problema que hacía tiempo algunos geodestas acariciaban, á saber: la unión trigonométrica de las dos costas mediterráneas. En efecto, durante el otoño pudo distinguir claramente á simple vista desde varias cumbres los dentados

limitase la primera compensación á las medidas angulares, y cada trozo es independiente de los demás, pues no entra en él condición derivada de otro. Están repartidas las seis bases de manera que no produzcan ecuación alguna. Los trozos donde no hay base contienen por lo menos un lado común con alguno de los seis trozos que las comprenden, los cuales son los siguientes:

- I. La de Lugo. III. La de Olite. IV. La de Vich.
 VI. La de Madridejos.
 VIII. La de Arcos de la Frontera. X. La de Cartagena.

Pertenece además á cada trozo cierto número de estaciones astronómicas, cuyos resultados, unidos á los geodésicos, suministran los datos necesarios para determinar con precisión los elementos del elipsoide terrestre dentro de cada trozo.

La indicada división está ajustada al *Informe sobre la compensación, por trozos, de los errores angulares de la red geodésica de España*, Madrid, 1878, redactado por el coronel D. Joaquín Barraquer, informe que la Dirección general del Instituto geográfico y estadístico aprobó y que sustancialmente se halla reproducido en las *Instrucciones para los trabajos geodésicos*, Madrid, 1878, publicadas por la citada Dirección. Véanse, para los cálculos efectivos, las *Memorias del Instituto geográfico y estadístico*, tomos VI y VII, Madrid, 1886 y 1888.

perfiles de las sierras de Andalucía, determinar aproximadamente las distancias y alturas de dos de sus picos y demostrar que las visuales salvaban el mar á más de 300 metros de su superficie. El único obstáculo que pudiera entorpecer tal proyecto era el producir señales perceptibles á distancias acaso de 300 kilómetros; pero la luz eléctrica fué poderosa á ello, y trabajando de consuno los oficiales franceses y españoles con la protección de sus respectivos gobiernos, verificaron cumplidamente la mencionada unión geodésica en el otoño de 1879.

A 30 kilómetros al S. E. de Granada, y á una altura de 3 481 metros sobre el nivel del mar, se eleva el pico más alto de España, Mulhacén, y á unos 83 kilómetros del mismo, al E. N. E., se halla Tetica, que alcanza 2 080 metros de altitud: la línea que une ambos es un lado del cuadrilátero de enlace. El lado opuesto, situado en Argelia, mide 105 kilómetros, y tiene por extremos Filhaoussen, á 1 136 metros de altitud, y M'Sabiha, á 585 metros. Los otros dos lados y las dos diagonales salvan el Mediterráneo abarcando distancias, la menor de las cuales, Tetica-M'Sabiha, alcanza unos 226 kilómetros, y la mayor, Mulhacén-Filhaoussen, cerca de 270, longitud á que también se aproxima la diagonal Mulhacén-M'Sabiha. Observados desde cada uno de estos vértices los otros tres, se formaron cuatro triángulos cuyos excesos esféricos eran

$$43''\cdot50, \quad 60''\cdot07, \quad 70''\cdot73, \quad 54''\cdot16.$$

Las señales ópticas en cada estación se hicieron con lámparas reguladoras de Serrin, cuya luz producían máquinas magneto-eléctricas de Gramme, impulsadas por una de vapor, con fuerza asignada de tres caballos, pero poderosa hasta cinco. Para transportar á tales alturas semejantes máquinas con el agua y combustible necesarios, subir á las mismas los instrumentos geodésicos usuales con su equipo ó accesorios, y trabajar con todo ello por espacio de dos meses, hubo que destinar á cada una de esas cumbres un destacamento militar. Vencidas al fin grandísimas dificultades, el 28 de agosto quedó todo corriente para las observaciones que debían verificar desde España el coronel Barraquer en Mulhacén y el comandante López Puigcerver en Te-

tica, y desde Argelia el comandante Perrier en M'Sabiha y el comandante Bassot en Filhaoussen. Pero hasta el 9 de septiembre no se vió desde Argelia la luz eléctrica de Tetica, que apareció como estrella encarnada, perceptible á intervalos á simple vista. Al día siguiente se distinguió Mulhacén, y las observaciones pudieron proseguir hasta el 4 de octubre. Los errores en las sumas de los ángulos medidos en los cuatro triángulos fueron (1)

(1) Estos números y los precedentes son los deducidos de cálculos provisionales que mandó hacer el general Ibáñez en el Instituto Geográfico de España así que se terminó el enlace geodésico. Véase la Memoria leída por el Sr. Perrier á la Academia de Ciencias de París en noviembre del mismo año é inserta en los *Comptes rendus*, tomo LXXXIX, París, 1879, y la Memoria leída por el general Ibáñez en febrero de 1880 á la Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid, é inserta en la *Revista de los progresos de las ciencias*, tomo XXI, Madrid, 1886.

Los números definitivos consignados en la *Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne*, París, 1886, y *Memorias del Instituto geográfico y estadístico*, tomo VII, Madrid, 1888, fueron los comprendidos en este cuadro, en el cual significa F—Filhaoussen, M—Mulhacén, S—M'Sabiha, T—Tetica:

TRIÁNGULO	MTS	TSF	SFM	FMT
Exceso..	43".498	60".076	70".744	54".165
Error.	+ 1 .926	+ 0 .952	- 0 .714	+ 0 .261

Del grado de exactitud alcanzado en las operaciones geodésicas de España y Argelia puede juzgarse por la siguiente conformidad de resultados: la longitud ó extensión lineal más probable del lado argelino M'Sabiha-Filhaoussen, que por medio del cuadrilátero de enlace, ya corregido ó compensado, se deducía del lado Tetica-Mulhacén, perteneciente á la triangulación española é inferido de sus bases, era de 105 179.35 metros, y el valor más probable de esa misma longitud, sacado de la triangulación argelina, sólo era inferior al antedicho en 0.79 metros, fracción equivalente á 1 : 133000 de la longitud indicada.

Las operaciones en los cuatro vértices, por punto general, fueron penosas: en Filhaoussen sólo se pudo observar cuatro noches en treinta y cinco días. Con el coronel Barraquer observaron en Mulhacén el comandante Borrés y el capitán Cebrián, y al comandante López Puigcerver secundó en Tetica el comandante Piñal.

$$+ 1''.84, \quad + 1''.12, \quad - 0''.54, \quad + 0''.18,$$

no dejando nada que desear en punto á precisión ese enlace de ambas costas, que permitió tener una red geodésica completa desde Shetland hasta Africa.

No contentos todavía con tan brillante resultado, intentóse en seguida hallar la diferencia de longitudes entre Tetica y M'Sabiha, llevándolo á cabo el mismo Sr. Perrier y el astrónomo español D. Miguel Merino. Reunidos antes en París, habían discutido el programa de operaciones y ensayado el método de observación, y de acuerdo con lo que entonces reconocieron preferible, emplearon como señales eclipses instantáneos de luz eléctrica que de dos en dos segundos se producían, brillando ésta durante un segundo y quedando extinguida en todo el siguiente. Desde el 5 de octubre hasta el 16 de noviembre viéronse quince noches las señales eléctricas, las más veces aun á simple vista, y en siete de aquéllas, igualmente propicias para ambos puntos, se obtuvieron los datos que sirvieron de base para el cálculo de la diferencia de longitudes. Cada noche de observación se hicieron alternativamente en Tetica y M'Sabiha 640 señales divididas en diez y seis series: las observaciones se anotaban cronográficamente. Por último, para no prescindir de nada que pudiera redundar en mayor exactitud, la ecuación personal, previamente determinada en París por los Sres. Merino y Perrier, fué medida por los mismos en el Observatorio de Madrid algunos meses después de terminadas las antedichas operaciones (1).

(1) Hízose el enlace astronómico de Tetica y M'Sabiha con objeto de cerrar, salvando el Mediterráneo, el vasto polígono de diferencias de longitud, cuyos vértices eran Madrid, París, Marsella, Argel, M'Sabiha, Tetica y Madrid.

Prefirióse para dicha operación observar los momentos en que la luz se eclipsaba en vez de aquellos que brillaba de nuevo, porque de los ensayos previos se infería mayor exactitud en los primeros, debido sin duda á quedar instintivamente más prevenido el observador para la extinción de luz que para su reaparición. Cuidaron también ambos observadores de medir dos errores personales, á saber: su *ecuación de pasos* en los de estrellas por el meridiano y su *ecuación de eclipses* en los producidos por las intermitencias luminosas, porque en los ensayos echaron de ver que, aun

15.

Concluiremos este capítulo dando las fórmulas de compensación para el caso en que los triángulos trazados compongan un cuadrilátero con sus diagonales, como en la figura 56. Sean $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ los excesos esféricos de los cuatro triángulos, cuyo vértice común es el punto de intersección de ellas, é indiquemos por las letras A, B acentuadas los valores observados de los ángulos; las tres ecuaciones de condición relativas á éstos, y deducidas, una del valor de los ángulos en torno del punto central y

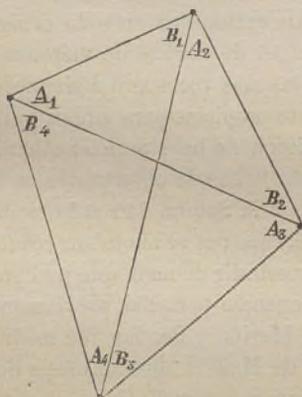


Fig. 56.

las otras dos de la igualdad de ángulos opuestos, pueden expresarse como sigue:

con interrupciones acompasadas ó rítmicas subsistía esa segunda ecuación y podía llegar como la primera á una ó más décimas de segundo.

En el enlace astronómico de Tetica y M'Sabiha se alcanzó notable precisión, pues el error probable $\pm 0^{\circ}.013$ de la diferencia de longitudes $6^{\circ}14'.979$, hallada entre dichos puntos, no sale de los límites del que suele cometerse cuando la medida se efectúa entre estaciones enlazadas por un alambre telegráfico.

Con objeto de adquirir otros datos se hicieron además en los mismos

$$\begin{aligned} 360^\circ - \Sigma(A' + B') + \Sigma(\xi) &= e_0, \\ -A'_1 - B'_1 + A'_3 + B'_3 + \xi_1 - \xi_3 &= e_1, \\ -A'_2 - B'_2 + A'_4 + B'_4 + \xi_2 - \xi_4 &= e_2, \end{aligned}$$

siendo e_0, e_1, e_2 cantidades que resultan de los errores de observación. En su consecuencia, calculadas

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{3}e_0 + \frac{1}{4}e_1, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{3}e_0 + \frac{1}{4}e_2, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{3}e_0 - \frac{1}{4}e_1, & \varepsilon_4 &= \frac{1}{3}e_0 - \frac{1}{4}e_2, \end{aligned}$$

las ocho correcciones incógnitas de igual número de ángulos observados (que suponemos haberlo sido por separado unos de otros) se reducirán á cinco, si escribimos de la siguiente manera, ya ajustada á aquellas tres ecuaciones, los ángulos corregidos:

$$\begin{aligned} A_1 &= A'_1 + \varepsilon_1 + x_0 - x_1, & A_2 &= A'_2 + \varepsilon_2 - x_0 - x_2, \\ B_1 &= B'_1 + \varepsilon_1 + x_0 + x_1, & B_2 &= B'_2 + \varepsilon_2 - x_0 + x_2, \\ A_3 &= A'_3 + \varepsilon_3 + x_0 - x_3, & A_4 &= A'_4 + \varepsilon_4 - x_0 - x_4, \\ B_3 &= B'_3 + \varepsilon_3 + x_0 + x_3, & B_4 &= B'_4 + \varepsilon_4 - x_0 + x_4; \end{aligned}$$

y por lo tanto faltarán sólo cumplir la condición de lado

$$\frac{\operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3 \operatorname{sen} A_4}{\operatorname{sen} B_1 \operatorname{sen} B_2 \operatorname{sen} B_3 \operatorname{sen} B_4} = 1,$$

á la par que las emanadas de la expresión del mínimo.

Mas poniendo

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sen}(A'_1 + \varepsilon_1) \operatorname{sen}(A'_2 + \varepsilon_2) \operatorname{sen}(A'_3 + \varepsilon_3) \operatorname{sen}(A'_4 + \varepsilon_4)}{\operatorname{sen}(B'_1 + \varepsilon_1) \operatorname{sen}(B'_2 + \varepsilon_2) \operatorname{sen}(B'_3 + \varepsilon_3) \operatorname{sen}(B'_4 + \varepsilon_4)} \\ &= 1 + \eta \operatorname{sen} 1'', \end{aligned}$$

vértices otras observaciones. El capitán Defforges determinó la latitud de M'Sabiha y el ángulo azimutal comprendido entre la mira astronómica de este vértice y la señal geodésica de Tessala, para deducir el azimut de Tetica sobre el horizonte de M'Sabiha, combinando aquel ángulo con el azimut de la mira, el ángulo entre Tessala y Filhaoussen y el de este punto con Tetica. A su vez, el ingeniero D. Antonio Esteban halló la latitud de este otro vértice, y sobre el horizonte del mismo el azimut del lado Tetica-Gigante, perteneciente á la cadena geodésica de la costa meridional de España.

Véanse, para más pormenores, las reseñas respectivas publicadas en las obras citadas en la nota anterior.

$$c_1 = \cot A_1 + \cot B_1, \quad c'_1 = \cot A_1 - \cot B_1, \text{ \&c.,}$$

$$c_0 = -c'_1 + c'_2 - c'_3 + c'_4;$$

aquella ecuación se reduce á esta otra, expresando x_0, x_1, x_2, \dots en segundos:

$$\eta = c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4.$$

Luego admitiendo, para mayor sencillez, que los ángulos se hayan medido con igual grado de precisión, se tendrá, en virtud de la condición de que la suma de cuadrados de las correcciones sea un mínimo ⁽¹⁾:

$$\frac{4x_0}{c_0} = \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2} = \frac{x_3}{c_3} = \frac{x_4}{c_4} = \frac{\eta}{(c^2) + \frac{1}{4}c_0^2}.$$

Sirva de ejemplo numérico, para la aplicación de este método, un cuadrilátero cuya forma y dimensiones se parezcan á las del trazado para la unión geodésica de Europa con Africa. Sean los ángulos medidos ⁽²⁾:

$$\begin{array}{ll} A'_1 = 50^\circ 25' 41''.24, & B'_1 = 88^\circ 53' 30''.50, \\ A'_2 = 24^\circ 10' 2.12, & B'_2 = 16^\circ 31' 28.60, \\ A'_3 = 79^\circ 1' 35.00, & B'_3 = 60^\circ 17' 56.03, \\ A'_4 = 17^\circ 57' 10.36; & B'_4 = 22^\circ 44' 32.14; \end{array}$$

los valores de $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4, \xi_4 + \xi_1$, ó excesos esféricos de los cuatro grandes triángulos:

$$43''.50, \quad 60''.07, \quad 70''.73, \quad 54''.16,$$

⁽¹⁾ Pues multiplicada por -4λ la ecuación precedente, y sumando el producto con la expresión

$$(x_0 - x_1)^2 + (x_0 + x_1)^2 + (x_0 - x_2)^2 + \dots,$$

por la condición de que tenga su mínimo valor esta suma y á la vez se cumpla aquella ecuación, serán las diferentes derivadas parciales

$$4x_0 - \lambda c_0 = 0, \quad x_1 - \lambda c_1 = 0, \quad x_2 - \lambda c_2 = 0 \dots$$

⁽²⁾ Los excesos esféricos de los cuatro triángulos son los mismos que en el cuadrilátero de enlace entre España y Argelia, pero los valores de los ángulos están variados en algunos minutos y segundos.

y los errores respectivos de las sumas de los ángulos medidos en los mismos triángulos.

$$-1''.04, \quad +1''.68, \quad +2''.80, \quad +0''.08.$$

En su consecuencia,

$$e_0 = -1''.76, \quad e_1 = +2''.72, \quad e_2 = +1''.12.$$

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = +0.46, & c_1 = 0.846, & c'_1 = +0.808, \\ \varepsilon_2 = +0.06, & c_2 = 5.601, & c'_2 = -1.143, \\ \varepsilon_3 = -0.90, & c_3 = 0.764, & c'_3 = -0.376, \\ \varepsilon_4 = -0.50; & c_4 = 5.472; & c'_4 = +0.702; \\ c_0 = -0.873, & (c^2) = 62.613. & \end{array}$$

$$\log \{(c^2) + \frac{1}{4} c_0^2\}^{-1} \text{ mod. sen } 1''^{-1} = 3.87872.$$

log sen (A' + ε)	log sen (B' + ε)
9.8869572,	9.9999188,
9.6121499,	9.4539715,
9.9919850,	9.9388298,
9.4888783,	9.5872441,
suma = 8.9799704,	8.9799642 = suma.

Por lo tanto, $\eta \text{ mod. sen } 1'' = +0.0000062$; luego

$$\begin{array}{ll} & 3.8787, \\ \log \eta \text{ mod. sen } 1'' & 4.7924, \\ \log \eta \{(c^2) + \frac{1}{4} c_0^2\}^{-1} & 8.6711; \end{array}$$

de donde se deduce $\eta \{(c^2) + \frac{1}{4} c_0^2\}^{-1} = +0''.0469$. Tras de esto se infiere en seguida:

$$\begin{array}{l} x_0 = -0.010, \\ x_1 = +0.040, \\ x_2 = +0.263, \\ x_3 = +0.036, \\ x_4 = +0.257; \end{array}$$

luego los ángulos ya corregidos serán:

$$\begin{array}{ll} A_1 = 50^{\circ} 25' 41.650, & B_1 = 88^{\circ} 53' 30.990, \\ A_2 = 24 10 1.927, & B_2 = 16 31 28.933, \\ A_3 = 79 1 34.054, & B_3 = 60 17 55.156, \\ A_4 = 17 57 9.613; & B_4 = 22 44 31.907. \end{array}$$

CAPÍTULO X

CÁLCULO DE LATITUDES Y LONGITUDES

1.

Conociendo la latitud de A y la distancia y azimut de B respecto de A, hallar la latitud y longitud de B y el azimut de A en B sería problema muy sencillo si la tierra fuese esférica, pues bastaría resolver un triángulo de este nombre. Pero el cálculo no es tan fácil tratándose de un esferoide. En efecto; en la figura 57,

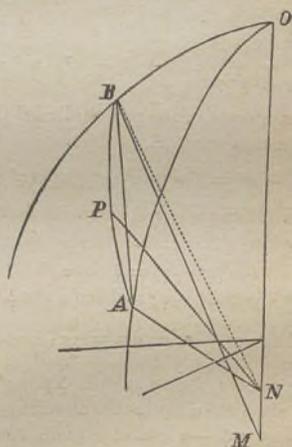


Fig. 57.

que lo representa, $AN = \rho$ es la normal en A; NAB es el plano vertical de A que pasa por B, y la inclinación α de este plano sobre el meridiano de A es el azimut de B; pero el ángulo α , entre el plano ANB y el meridiano de B no es el azimut de A en B, porque este azimut es la inclinación α' del plano BMA sobre el meridiano de B, siendo BM la normal en B.

Mas sean $\varphi, \varphi', \omega$, las latitudes y diferencia de longitudes de A y B; además, $\text{ANB} = \theta$ y $\text{BNO} = 90^\circ - \psi$. La diferencia de los ángulos α , y α' , cantidad muy pequeña, puede hallarse por el triángulo esférico que forman las direcciones BA, BM, BN; el cual da

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha'} = \frac{\text{sen ABM}}{\text{sen ABN}} = \frac{\text{NB}}{\text{NA}} \cdot \frac{\text{sen ABM}}{\text{sen BAN}} = \frac{\text{NB}}{\text{NA}} \cdot \frac{\text{cos } \mu'}{\text{cos } \mu},$$

indicando μ, μ' lo mismo que en la página 165. Pero en virtud de las ecuaciones (10) de la página 167, es $\Delta' \text{sen } \mu = \Delta \text{sen } \mu'$, de donde se infiere (1)

(1) Hállase la primera de estas dos fórmulas por la transformación

$$\text{sen}^2 \varphi' - \text{sen}^2 \varphi = \text{sen}(\varphi' - \varphi) \text{sen}(\varphi' + \varphi).$$

La segunda fórmula es consecuencia de la primera, pues escribiendo $\text{sen } \mu' = m \text{sen } \mu$, se infiere

$$\frac{\text{cos}^2 \mu'}{\text{cos}^2 \mu} = 1 + (1 - m^2) \tan^2 \mu.$$

Pero como en el presente caso cabe prescindir del término en que e figure con potencia superior á la segunda, se tiene

$$1 - m^2 = e^2 \text{sen}(\varphi' - \varphi) \text{sen}(\varphi' + \varphi).$$

Además, para multiplicados por el pequeño factor e^2 , son valores con suficiente aproximación

$$\begin{aligned} \text{sen}(\varphi' - \varphi) &= \theta \text{cos } \alpha, \\ \text{sen}(\varphi' + \varphi) &= 2 \text{sen } \varphi \text{cos } \varphi, \\ \tan \mu &= \mu = \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

que se deducen: el primero, reemplazando ψ por φ' y $\text{sen } \theta$ por θ en la fórmula $\text{sen}(\psi - \varphi) = \text{sen } \theta \text{cos } \alpha$, aplicable al triángulo esférico casi rectángulo que determinen θ y $\psi - \varphi$ con el ángulo $90^\circ - \alpha$ opuesto á éste; el segundo sustituyendo 2φ en vez de $\varphi' + \varphi$, puesto que la diferencia de estos ángulos es inferior á θ , y el tercero reemplazando el corto arco elíptico AB por el arco circular correspondiente, trazado con el radio NA, en cuyo supuesto $\mu = \frac{1}{2} \theta$. De todo ello resulta

$$\frac{\text{cos}^2 \mu'}{\text{cos}^2 \mu} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \theta^2 \text{cos } \alpha \text{sen } \varphi \text{cos } \varphi,$$

y limitándose, al extraer la raíz cuadrada, á los dos primeros términos del desarrollo en serie, se halla la fórmula del texto.

$$\frac{\operatorname{sen} \mu'}{\operatorname{sen} \mu} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen} (\varphi' - \varphi) \operatorname{sen} (\varphi' + \varphi),$$

$$\frac{\operatorname{cos} \mu'}{\operatorname{cos} \mu} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \theta^3 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi;$$

además, como veremos por la ecuación (2) del presente capítulo, el valor aproximado de NB : NA es (1)

$$\frac{NB}{NA} = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{1 - e^2} (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi)^2;$$

y sustituyendo estos valores en aquella expresión de $\operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \alpha'$, se obtiene, tras de una leve reducción (2),

(1) En efecto, dividida la ecuación (2) por ρ^2 , se puede para este caso sustituir dentro del paréntesis la unidad en vez de $r : \rho$. Pero de la fórmula

$$\operatorname{sen} \psi = \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \alpha$$

se deduce, reemplazando $\operatorname{sen} \theta$ por θ y $\operatorname{cos} \theta$ por los dos primeros términos de su desarrollo en serie,

$$\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi = \theta \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \alpha - \frac{1}{2} \theta^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Luego, no pasando de términos de cierto orden, será

$$\frac{NB}{NA} = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{1 - e^2} (\theta^2 \operatorname{cos}^2 \varphi \operatorname{cos}^2 \alpha - \theta^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \alpha).$$

(2) Escribiendo

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = M,$$

y transformando la diferencia de senos en producto, se infiere con suficiente aproximación, atendida la pequeñez de la diferencia de estos dos arcos,

$$\alpha' - \alpha = M \tan \alpha.$$

Pero en el triedro N·A·B O, figura 57, se tiene

$$\tan \varphi \operatorname{sen} \theta = \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cot \alpha,$$

ó bien, desdénando términos de segundo ó inferior orden,

$$\theta \tan \varphi = \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cot \alpha,$$

de donde se deduce $\tan \alpha$, en función de $\tan \alpha$.

En su consecuencia,

$$\alpha' - \alpha = M \tan \alpha \left(1 + \theta \frac{\tan \varphi}{\operatorname{cos} \alpha} \right);$$

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha_r &= -\frac{\theta^2}{4} \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{e^2 \theta^3}{8} \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} \alpha \\ &= -\frac{e^2 \omega (\varphi' - \varphi)}{2(1 - e^2)} \cos^3 \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi);\end{aligned}$$

y de aquí, sustituyendo en

$$M = \frac{NB \cos \mu'}{NA \cos \mu} - 1$$

las dos razones del primer término por los valores anteriormente hallados, resulta la primera expresión del texto.

Para transformar ésta en la segunda, escríbase, con objeto de simplificar,

$$\begin{aligned}Q &= \theta \cos \varphi \cos \alpha - \frac{1}{2} \theta^2 \operatorname{sen} \varphi, \\ T &= \theta \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha,\end{aligned}$$

y la primera expresión, salvo términos de orden inferior á los que deben tomarse en cuenta, será equivalente á

$$\alpha' - \alpha_r = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{1 - e^2} Q T.$$

Pero en el triedro N.A.O se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \psi &= \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \cos \alpha, \\ \cos \psi \operatorname{sen} \omega &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha, \\ \cos \psi \cos \omega &= \cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha;\end{aligned}$$

y de estas fórmulas, en razón á la pequeñez de ω , θ y $\psi - \varphi$ inferior á θ , se deducen las siguientes:

De la primera, restando de ella $\operatorname{sen} \varphi$,

$$(\psi - \varphi) \cos \frac{1}{2} (\psi + \varphi) = \theta \cos \varphi \cos \alpha - \frac{1}{2} \theta^2 \operatorname{sen} \varphi;$$

y de la misma, sumando con ella $\operatorname{sen} \varphi$,

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\psi + \varphi) = \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} \theta \cos \varphi \cos \alpha,$$

ó bien, elevando esta última al cuadrado y restando ambos miembros de la unidad,

$$\cos^2 \frac{1}{2} (\psi + \varphi) = \cos^2 \varphi - \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cos \alpha.$$

De la segunda y tercera,

$$\theta \operatorname{sen} \alpha = \omega (\cos \varphi - \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}Q &= (\psi - \varphi) \cos \frac{1}{2} (\psi + \varphi), \\ T &= \omega \cos^2 \frac{1}{2} (\psi + \varphi),\end{aligned}$$

y en estos valores puede reemplazarse, como muy aproximado para el caso, ψ por φ' .

ó bien, designando por L, L' las diferencias en grados de las longitudes y latitudes entre A y B, y tomando por relación de semejanzas 294 : 295,

$$\alpha' - \alpha = - 0''.21407 LL' \cos^3 \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi), \quad (1)$$

de suerte que sólo en largas distancias llegaría esta cantidad á ser apreciable.

2.

Averiguemos ahora el ángulo subtendido en N por un arco s de la sección plana AB. Si $AP = s$, $ANP = \theta$, $NP = r$ y el ángulo $PNO = 90^\circ - \psi$, tendremos

$$\text{sen } \psi = \cos \theta \text{ sen } \varphi + \text{sen } \theta \cos \varphi \text{ cos } \alpha;$$

mas siendo C el centro del esferoide, es

$$NC = e^2 \rho \text{ sen } \varphi;$$

luego

$$\frac{r^2 \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{(r \text{ sen } \psi - e^2 \rho \text{ sen } \varphi)^2}{c^2} = 1;$$

de donde, multiplicando por $a^2 = \rho^2 (1 - e^2 \text{ sen}^2 \varphi)$ y sustituyendo $c^2 = a^2 (1 - e^2)$, se deduce, ordenando de otro modo los términos,

$$r^2 + \frac{e^2}{1 - e^2} (r \text{ sen } \psi - \rho \text{ sen } \varphi)^2 - \rho^2 = 0. \quad (2)$$

Designando por f y h las mismas expresiones que en la página 169, y escribiendo

$$\begin{aligned} f \cos \theta + h \text{ sen } \theta &= F, \\ -f \text{ sen } \theta + h \cos \theta &= H, \end{aligned}$$

$$\frac{r}{\rho} = U,$$

$$UF - f = V,$$

la ecuación de la curva se convierte en (1)

(1) Dividiendo por ρ^2 la ecuación (2) y sustituyendo en vez de $\text{sen } \psi$ el valor dado anteriormente, resulta dicha ecuación bajo la nueva forma indicada en el texto.

$$U^2 + V^2 - 1 = 0, \quad (3)$$

cuya analogía con la ecuación (14), página 169, es fácil ver, poniendo ésta bajo la forma

$$(h\xi - f\zeta)^2 + (\rho - \zeta)^2 + \xi^2 - \rho^2 = 0.$$

Mas diferenciando la (3) varias veces sucesivas con respecto á θ y representando por U_m, V_m los coeficientes diferenciales del orden m de U, V , resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= UU_1 + VV_1, \\ 0 &= UU_2 + U_1^2 + VV_2 + V_1^2, \\ 0 &= UU_3 + 3U_1U_2 + VV_3 + 3V_1V_2, \\ 0 &= UU_4 + 4U_1U_3 + 3U_2^2 + VV_4 + 4V_1V_3 + 3V_2^2, \\ &\quad \&.; \end{aligned}$$

y puesto que

$$\frac{dF}{d\theta} = H, \quad \text{y} \quad \frac{dH}{d\theta} = -F,$$

se tiene á la vez, por la relación que precede á la (3),

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1F + UH, \\ V_2 &= U_2F + 2U_1H - UF, \\ V_3 &= U_3F + 3U_2H - 3U_1F - UH, \\ V_4 &= U_4F + 4U_3H - 6U_2F - 4U_1H + UF, \\ &\quad \&.; \end{aligned}$$

Luego si designamos por $(U), (U_1) \dots, (V), (V_1) \dots$, los valores particulares que á $U, U_1 \dots, V, V_1 \dots$, corresponden cuando $\theta = 0$, resultará en virtud de las relaciones anteriores, y dado que $(U) = 1$ y $(V) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (U_1), \\ 0 &= (U_2) + (V_1)^2, \\ 0 &= (U_3) + 3(V_1)(V_2), \\ 0 &= (U_4) + 3(U_2)^2 + 4(V_1)(V_3) + 3(V_2)^2, \\ &\quad \&.; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (V_1) &= h, \\ (V_2) &= f(U_2) - f, \\ (V_3) &= f(U_3) + 3h(U_2) - h, \\ (V_4) &= f(U_4) + 4h(U_3) - 6f(U_2) + f, \\ &\quad \&.; \end{aligned}$$

de donde, eliminando las V , se deduce:

$$(U_2) = -h^2,$$

$$(U_3) = 3fh(1+h^2),$$

$$(U_4) = h^2(4+9h^2) - 3f^2(1+h^2)(1+5h^2);$$

y estos valores, sustituidos en la serie de Maclaurin, darán

$$\frac{r}{\rho} = 1 + \frac{(U_2)}{1 \cdot 2} \theta^2 + \frac{(U_3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \theta^3 + \frac{(U_4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \theta^4 + \dots \quad (4)$$

Pero designada por s la longitud del arco, es (1)

$$\frac{ds}{d\theta} = r + \frac{1}{2r} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{8r^3} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^4 + \dots,$$

y en su consecuencia, indicando sin paréntesis para mayor sencillez aquellos valores particulares (2),

$$\frac{ds}{d\theta} = \rho \left\{ 1 + (U_2 + U_2^2) \frac{\theta^2}{2} + (U_3 + 3U_2U_3) \frac{\theta^3}{6} + \dots \right\};$$

de donde, integrando y deduciendo la serie inversa, se infiere

$$\theta = \frac{s}{\rho} - \frac{U_2(1+U_2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{s}{\rho}\right)^3 - \frac{U_3(1+3U_2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{s}{\rho}\right)^4 + \dots \quad (5)$$

Aunque por los términos escritos parece que todos los de la serie desaparecen, á excepción del primero, cuando $\alpha = 90^\circ$, no ocurre así en realidad, pues el cuarto término no se anula. En efecto, cuando $\alpha = 90^\circ$ (3),

$$(1) \quad \frac{ds}{d\theta} = r \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$(2) \quad \frac{dr}{d\theta} = \rho \left(U_2 \theta + \frac{U_3}{2} \theta^2 + \frac{U_4}{6} \theta^3 + \dots \right),$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{U_2}{2} \theta^2 - \dots \right).$$

(3) El cuarto término de la serie directa es

$$\frac{U_4(1+4U_2) + 3U_3^2 - 3U_2^5(2+U_2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \theta^5,$$

y cuando $\alpha = 90^\circ$, si bien se anulan U_2 y U_3 porque $h = 0$, no sucede lo mismo con el otro término, cuyo valor es entonces

$$U_4 = -3f^2 = -3 \frac{e^2}{1-e^2} \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

$$\frac{s}{\rho} = \theta - \frac{e^2}{1 - e^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \frac{\theta^3}{40},$$

mas en la práctica puede tomarse $s = \rho\theta$.

3.

El ejemplo numérico que sigue se ha elegido del tomo titulado *Extension of the Triangulation of Great Britain and Ireland into France and Belgium*. Ya dimos en la página 376 la distancia de Feaghmain á Greenwich y el ángulo subtendido en este último punto por Feaghmain y Chingford; de donde se deduce, dado que el azimut de Chingford es de $359^\circ 59' 58'' \cdot 360$, el valor de $\alpha = 81^\circ 59' 13'' \cdot 497$. La latitud de Greenwich, según cálculo que no es menester detallar al presente, es de $51^\circ 28' 39'' \cdot 864$. Por semiejes, medidos en pies, adoptaremos

$$a = 20\ 926\ 348, \quad c = 20\ 855\ 233.$$

Esto sentado, designando por $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, los términos primero, segundo y tercero de la fórmula (5), expresados en segundos, se tiene:

log s	6.37108677,	
log $(\rho \operatorname{sen} 1'')^{-1}$,	7.99282796,	
log σ_1	4.36391473,	$\sigma_1 = 6^\circ 25' 16'' \cdot 1088,$
		$\sigma_2 = \quad \quad \quad + \cdot 0025,$
		$\sigma_3 = \quad \quad \quad - \cdot 0019,$
		$\theta = 6^\circ 25' 16'' \cdot 1094$

Debe resolverse ahora un triángulo esférico ordinario, del cual se conocen los dos lados $\theta, 90^\circ - \varphi$ y el ángulo comprendido α . El cálculo de los otros dos ángulos α, ω se hará de este modo:

0.03429587	log sec $\frac{1}{2}(90^\circ - \varphi + \theta)$,	log cosec	0.41767856,
9.98273156	log cos $\frac{1}{2}(90^\circ - \varphi - \theta)$,	log sen	9.44167235,
0.06093582	log cot $\frac{1}{2}\alpha$,	log cot	0.06093582,
0.07796325	log tan $\frac{1}{2}(\alpha + \omega)$,	$\frac{1}{2}(\alpha - \omega)$ log tan	9 92028673

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\alpha, + \omega) &= 50^{\circ} 6' 55''.3757, \\ \frac{1}{2}(\alpha, - \omega) &= 39^{\circ} 46' 15''.8002, \\ \alpha, &= 89^{\circ} 53' 11''.1759, \\ \omega &= 10^{\circ} 20' 39''.5755;\end{aligned}$$

y toda vez que la pequeña corrección $\alpha' - \alpha$, asciende aquí á $-0''.2319$, deduciremos el valor de α' , puesto que ya α , está averiguado.

En cuanto al tercer lado de dicho triángulo esférico, á saber, el lado opuesto á Greenwich, es fácil ver que

$$90^{\circ} - \psi = 38^{\circ} 4' 42''.2145.$$

Finalmente, de la fórmula (5), en razón á medir $\psi - \varphi$ sólo unos pocos minutos, se infiere que $\rho(\psi - \varphi)$ es la distancia de los paralelos de Greenwich y Feaghmain; y este valor, dividido por el radio de curvatura correspondiente al promedio aproximado de las latitudes de ambas estaciones, dará su diferencia de latitud.

4.

Volviendo al problema capital, supóngase primero que α sea un ángulo recto y que s exceda poco de un grado. No diferirá entonces el azimut α' de α , en cantidad apreciable y podrá escribirse

$$\alpha' = 90^{\circ} - v,$$

designando por v lo que se llama la *convergencia de meridianos*.

Tómese en el meridiano de A un punto B' de latitud igual á la de B, de manera que el ángulo $B'NO = BNO$, y escribase $B'NA = \eta$; en virtud de las ecuaciones (21), página 59, será

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{\rho} \right)^2 \tan \varphi,$$

y llamémosle ρ el radio de curvatura del meridiano en A,

$$\varphi - \varphi' = \rho \eta : \rho.$$

Sustituyendo, pues, aquí el antedicho valor, y agregando las demás ecuaciones correlativas de las (21) citadas, se tendrá:

$$\varphi - \varphi' = \frac{1}{3} \frac{s^2}{\rho} \tan \varphi, \quad (6)$$

$$\omega = \frac{s}{\rho \cos(\varphi - \frac{2}{3}\eta)},$$

$$v = \omega \operatorname{sen}(\varphi - \frac{1}{3}\eta).$$

Estas tres ecuaciones dan la solución completa del caso estudiado. Simplificanese prescindiendo de la reducción de η á $\varphi - \varphi'$, lo cual puede hacerse poniendo desde luego

$$\varphi - \varphi' = \frac{s^2}{2\rho q} \tan \varphi = \eta; \quad (7)$$

pues el error así introducido en las dos últimas ecuaciones (6) es del orden $e^2 s^3$, como indican las expresiones (1),

$$\partial \omega = -\frac{2}{3} e^2 \eta \left(\frac{s}{\rho}\right) \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\partial v = -\frac{1}{3} e^2 \eta \left(\frac{s}{\rho}\right) (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi),$$

y por breve cálculo sería fácil demostrar que tal error monta exigua cantidad con las distancias de que se trata.

(1) Diferenciando ω y v , resulta, prescindiendo de términos de inferior orden,

$$\partial \omega = -\frac{2}{3} \frac{s}{\rho} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi} \partial \eta,$$

$$\partial v = -\frac{1}{3} \frac{s}{\rho} (1 + 2 \tan^2 \varphi) \partial \eta.$$

Mas la diferencia entre el valor que se atribuye á η y el verdadero, es

$$\partial \eta = \frac{s^2}{2\rho^2} \tan \varphi \left(\frac{\rho}{q} - 1\right),$$

ó bien, sustituyendo ρ y q por los valores (7) dados en la página 165 y desdénjando términos en que e figure elevada á potencia superior á la segunda,

$$\partial \eta = \eta e^2 \cos^2 \varphi.$$

Resolvamos ahora el problema en el caso general, esto es, poseyendo α cualquier valor. Sea P el pie del arco perpendicular trazado desde B al meridiano de A y ε el exceso esférico del triángulo ABP; se tendrá:

$$AP = s \cos \left(\alpha - \frac{2}{3} \varepsilon \right), \quad BP = s \sin \left(\alpha - \frac{1}{3} \varepsilon \right).$$

Luego, si φ , es la latitud de P, ϱ_0 el radio de curvatura correspondiente á la latitud $\frac{1}{2} (\varphi + \varphi')$ y la diferencia $\varphi - \varphi' = \eta$, resultará (1):

$$\varepsilon = \frac{s^2}{2\varrho\rho} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \quad (8)$$

$$\eta = \frac{s^2}{2\varrho\rho} \operatorname{sen}^2 \alpha \tan \varphi,$$

$$\varphi' - \varphi = \frac{s}{\varrho_0} \cos \left(\alpha - \frac{2}{3} \varepsilon \right) - \eta,$$

$$\omega = \frac{s \operatorname{sen} \left(\alpha - \frac{1}{3} \varepsilon \right)}{\rho \cos \left(\varphi' + \frac{1}{3} \eta \right)},$$

$$\nu = \omega \operatorname{sen} \left(\varphi' + \frac{2}{3} \eta \right) - \varepsilon.$$

En tales expresiones ϱ y ρ representan los valores relativos al punto P, cuya latitud es φ . Conviene notar que este cálculo dará ε negativa cuando lo sea $\cos \alpha$. La última ecuación da la convergencia, de la cual se deduce fácilmente el azimut de A en B, pues el ángulo formado por A y P en B y el azimut de P en B son iguales respectivamente á

$$90^\circ - \alpha + \varepsilon, \quad 90^\circ - \omega \operatorname{sen} \left(\varphi - \frac{1}{3} \eta \right);$$

luego el azimut de A en B, suma de ambos, será $180^\circ - \alpha - \nu$.

(1) En las expresiones

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{BP \cdot AP}{\varrho\rho}, \quad \eta = \frac{(BP)^2}{2\varrho\rho} \tan \varphi,$$

pueden sustituirse, como de suficiente aproximación para el objeto,

$$AP = s \cos \alpha, \quad BP = s \operatorname{sen} \alpha.$$

5.

Como ejemplo numérico para la aplicación de estas fórmulas, proponemos el cálculo relativo al lado más corto del triángulo esferoidal, cuyos elementos exactos dimos en la página 174. Para ello formaremos el siguiente cuadro, refiriendo al pie la medida lineal:

$$a = 20926060, \quad a : c = 295 : 294.$$

φ	$\text{Log} \frac{1}{\rho \text{ sen } 1''} + 10.$	$\text{Log} \frac{1}{\rho \text{ sen } 1''} + 10.$	$\text{Log} \frac{1}{2\rho \text{ sen } 1''} + 10.$
51 50	7.9928272927	7.9939559152	0.371326
52 0	8231241	9434094	311
10	8189614	9309214	295
20	8148048	9184517	278
30	7.9928106545	7.9939060007	0.371262
40	8065106	8935689	245
50	8023732	8811567	228
53 0	7982424	8687645	212
10	7.9927941185	7.9938563927	0.371195

Los datos para encontrar las incógnitas son:

$$s = 436481.4,$$

$$\alpha = 20^{\circ} 39' 17''.240,$$

$$\varphi = 51 57 0.000.$$

Primeramente ha de hallarse un valor aproximado de φ , por medio de la fórmula

$$\varphi' - \varphi = \frac{s}{\rho} \cos \alpha,$$

que da $\varphi' = 53^{\circ} 4' 8''$. Tras de esto, escribiendo para abreviar, $E^{-1} = 2\rho \text{ sen } 1''$, el cálculo se efectuará de este modo (1):

(1) En este cálculo es

$$\begin{aligned} \varphi' - \varphi &= 4027''.411 - 7''.413, & \omega &= 2520'' = 42', \\ \nu &= 2014''.361 - 14'' 782. \end{aligned}$$

log s^2	11.27994			
log sen α	9.54745	$\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon = 20$	39	12.313
log cos α	9.97115	$\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon = 20$	39	7.386
log E	0.87120			
$\varepsilon = 14''.782$	1.16974	log s		5.6399657
log tan α	9.57630	log cos $(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon)$		9.9711550
log tan φ_1	0.12397	log $(\rho \text{ sen } 1'')^{-1}$		7.9939053
$\eta = 7''.413$	0.87001	4027''.411		3.6050260

log s	5.6399657	$\varphi' - \varphi = 1$	6	59.998
log sen $(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon)$	9.5474230	φ'	$= 53$	3
log $(\rho \text{ sen } 1'')^{-1}$	7.9927965			
log sec $(\varphi' + \frac{1}{3}\eta)$	0.2212153	$\varphi' + \frac{1}{3}\eta = 53$	4	2.469
2520''.000	3.4014005	$\omega = 0$	42	0.000
log sen $(\varphi' + \frac{2}{3}\eta)$	9.9027368	$\varphi' + \frac{2}{3}\eta = 53$	4	4.940
2014''.361	3.3041373	$\nu = 0$	33	19.579

Por azimut de A en B, que debía ser $158^\circ 47' 23''.182$, resulta $158^\circ 47' 23''.181$. Los errores de latitud, longitud y azimut son:

$$\partial\varphi' = -0''.002, \quad \partial\omega = 0''.000, \quad \partial\alpha = 0''.001.$$

6.

Cuando las distancias excedieren de unos 160 kilómetros, será preciso proceder de otro modo. El ángulo θ se obtendrá con toda la aproximación que se quiera por medio de la serie ya hallada; después, aplicando tan sólo las fórmulas de la Trigonometría esférica, se tendrán α , ψ y ω con la exactitud que se desee, y α' se deducirá de α , en virtud de una pequeña corrección fácil de calcular, como ya se ha visto. Respecto de la latitud φ' de B, su única fórmula directa se obtiene de este modo: unido B con el centro del esferoide, si λ es la latitud geocéntrica de B y $BN = r$, será ⁽¹⁾

(1) Siendo C el centro del elipsoide, figura 57, página 395, y b la proyección de B sobre el eje MO, se tiene

$$Nb \cot \psi = Cb \cot \lambda.$$

$$\frac{\tan \lambda}{\tan \psi} = \frac{r \operatorname{sen} \psi - e^2 \rho \operatorname{sen} \varphi}{r \operatorname{sen} \psi};$$

pero (1) $\tan \lambda = (1 - e^2) \tan \varphi',$

luego $(1 - e^2) \frac{\tan \varphi'}{\tan \psi} = 1 - e^2 \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi}{r \operatorname{sen} \psi},$ (9)

pudiendo sustituirse aquí como valor muy aproximado de $\rho : r$ el deducido de la relación (2). Sin embargo, la fórmula (9) es embarazosa para el cálculo de que se trata, y en la práctica es más sencillo hallar la distancia meridiana S entre los paralelos de las dos estaciones A, B y dividirla por el radio de curvatura correspondiente á la latitud media. Por la expresión (5) de θ en función de s es fácil ver que (2)

$$\frac{S}{s} = \frac{\psi - \varphi}{\theta};$$
 (10)

pues si bien, para mayor exactitud, debiera agregarse al segundo miembro el término

$$+ \frac{1}{12} e^2 \theta^3 \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen} 2\varphi,$$

(1) Dividiendo la segunda por la primera de las dos fórmulas (6) de la página 164, se halla este valor de $\tan \lambda$.

(2) No pasando de términos del orden $e^2 \theta^3$, la expresión (5) da respectivamente para el arco s que corresponde al ángulo θ con azimut α y para el arco S correspondiente al ángulo $\psi - \varphi$ con azimut nulo

$$\frac{s}{\rho} = \theta \left(1 - \frac{1}{6} \theta^2 e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha \right),$$

$$\frac{S}{\rho} = (\psi - \varphi) \left(1 - \frac{1}{6} (\psi - \varphi)^2 e^2 \cos^2 \varphi \right).$$

Pero de las fórmulas trigonométricas relativas al triedro $N \cdot ABO$, y consignadas en la nota de la página 398, se infiere

$$(\psi - \varphi)^2 = \theta^2 (\cos^2 \alpha - \theta \tan \varphi \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha).$$

Luego

$$\frac{S}{s} = \frac{\psi - \varphi}{\theta} \left(1 + \frac{1}{12} e^2 \theta^3 \operatorname{sen} 2\varphi \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \right).$$

Efectuada la multiplicación indicada y sustituyendo en el segundo término como valor suficiente $\psi - \varphi = \theta \cos \alpha$, dicho término adquiere la forma señalada en el texto.

cabe prescindir de él por ser en todos los casos sumamente pequeño. Por tanto, en virtud de la ecuación (22), página 60, se tendrá (1):

$$S = s \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha, -\alpha)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha, +\alpha)} \left\{ 1 + \frac{\theta^2}{12} \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha, -\alpha) \right\}. \quad (11)$$

7.

En los cálculos aquí dados como ejemplo estriban los resultados en los valores que se adoptan para los elementos determinativos de la figura de la tierra; mas no pocas veces se requiere que no se circunscriban de ese modo, sino que puedan corregirse con facilidad al cambiar los elementos de que dependen. Desde luego, si habiendo calculado con los datos numéricos a , e , partiendo del punto A con una latitud φ y un azimut α conocidos, la latitud y longitud de B y la dirección de su meridiano, se hubieren obtenido los valores (φ') , (ω) , (α') , los resultados con los datos $a + \delta a$, $e + \delta e$ serían

$$\begin{aligned} (\varphi') + h\delta a + h'\delta e, \\ (\omega) + j\delta a + j'\delta e, \\ (\alpha') + k\delta a + k'\delta e. \end{aligned}$$

Mas al pasar después desde B á un tercer punto C para hallar su latitud y longitud y dirección de su meridiano con los nuevos elementos del esferoide, deberíamos tener en cuenta, no sólo las variaciones δa , δe , sino también las de latitud, longitud y azimut ocasionadas por ello en B. Hay que plantear, pues, el problema en estos términos más generales: averiguar los incrementos que en la latitud y longitud de B y en la dirección de su meridiano se producen cuando la latitud de A y el azimut, en este punto,

(1) En efecto,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\alpha, +\alpha)} = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\alpha, -\alpha)}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\alpha, +\alpha)},$$

pero como en el presente caso $\alpha, +\alpha$ difiere poco de 180° , el segundo miembro equivale con bastante aproximación á $\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha, -\alpha)$.

de B reciben los incrementos $\delta\psi$, $\delta\alpha$ á la vez que los elementos del esferoide se cambian de a , e en $a + \delta a$, $e + \delta e$.

En el triángulo esférico ABO, determinado por el ángulo en A y los lados que lo forman, las variaciones de a y e son causa de otra en θ , y puesto que aproximadamente (1)

$$\theta = \frac{s}{a} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}},$$

será también en el mismo concepto

$$-\delta\theta = \theta \frac{\delta a}{a} + \frac{e\theta \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \delta e. \quad (12)$$

Es verdad que para admitir tal aproximación es menester que la distancia s no sea muy crecida, es decir, que no exceda mucho á las líneas más largas abarcadas en los triángulos usuales, pues entonces θ debería calcularse con mayor exactitud; pero á fin de no complicar las fórmulas, no consideremos tal caso, aunque no habría dificultad en introducir en $\delta\theta$ el término correspondiente.

Al aplicar al triángulo ABO las fórmulas (14) de la página 56, supondremos se cuenten los azimutes á partir del Norte hacia el Este, desde 0° hasta 360° , de manera que $360^\circ - \alpha'$ será el tercer ángulo del triángulo, es decir, el formado en B, no siendo menester distinguir α' de α , y á su vez que las longitudes se cuenten como positivas hacia el Este. Esto sentado,

$$\begin{aligned} \cos \psi \delta \alpha' &= \operatorname{sen} \omega \delta \varphi + \cos \varphi \cos \omega \delta \alpha - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \alpha' \delta \theta, \\ \cos \psi \delta \omega &= \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \omega \delta \varphi - \operatorname{sen} \theta \cos \alpha' \delta \alpha - \operatorname{sen} \alpha' \delta \theta, \\ \delta \psi &= \cos \omega \delta \varphi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha' \delta \alpha - \cos \alpha' \delta \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Puede reemplazarse en las dos primeras de estas ecuaciones ψ por φ' , y en la tercera $\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha'$ por $-\cos \varphi \operatorname{sen} \omega$; mas no cabe substituir en esta misma $\delta \psi$ por $\delta \varphi'$, que requiere cálculo

(1) Hállase esta expresión substituyendo en $s = \theta\rho$ el valor (7) de ρ dado en la página 165.

aparte. En efecto, de la ecuación (9), que puede escribirse bajo la forma (1)

$$\tan \varphi' = \tan \psi + \frac{e^2}{1-e^2} \cdot \frac{\Theta}{\cos \psi} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right)^2 \Theta^2 \tan \psi + \dots,$$

poniendo $\Theta = \text{sen } \psi - \text{sen } \varphi$, se deduce, diferenciándola y suprimiendo el último término por ser muy pequeño,

$$\begin{aligned} \sec^2 \varphi' \delta \varphi' &= \frac{1-e^2 \text{sen } \varphi \text{sen } \psi}{(1-e^2) \cos^2 \psi} \delta \psi - \frac{e^2 \cos \varphi}{1-e^2 \cos \psi} \delta \varphi \\ &\quad + \frac{\Theta}{\cos \psi} \cdot \frac{2e \delta e}{(1-e^2)^2}, \end{aligned}$$

ó con bastante aproximación (2)

$$\delta \varphi' = (1 + e^2 \cos^2 \varphi) \delta \psi - e^2 \cos^2 \varphi \delta \varphi + \Theta \cos \psi \frac{2e \delta e}{(1-e^2)^2}.$$

Luego, escribiendo para mayor brevedad $1 + e^2 \cos^2 \varphi = n$, la tercera ecuación (13) dará

$$\delta \varphi' = \cos \omega \delta \varphi - n \text{sen } \omega \cos \varphi \delta \alpha - n \cos \alpha' \delta \theta + \frac{2 \Theta \cos \psi e \delta e}{(1-e^2)^2}.$$

(1) Dividiendo por r^2 la ecuación (2) de la página 399, y reemplazando dentro del paréntesis por la unidad la razón $\rho : r$, se tiene

$$\frac{\rho}{r} = 1 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{1-e^2} \Theta^2.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (9), y poniendo en el término con e^4

$$\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \psi} = 1 - \theta \frac{\cos \varphi}{\text{sen } \psi} \cos \alpha,$$

relación aproximada deducida de

$$\text{sen } \psi = \cos \theta \text{sen } \varphi + \text{sen } \theta \cos \varphi \cos \alpha,$$

se obtiene fácilmente la fórmula del texto.

(2) Sustituyendo en la ecuación $\sec^2 \varphi' = 1 + \tan^2 \varphi'$ el valor de $\tan \varphi'$, dado arriba, y limitándose á los primeros términos, se tiene

$$\cos^2 \varphi' = \cos^2 \psi (1 - 2e^2 \Theta \text{sen } \psi).$$

Luego puede reemplazarse con suficiente aproximación en los coeficientes de la ecuación diferencial del texto φ' por ψ , y asimismo, en algunos de ellos, por lo advertido en la nota precedente, ψ por φ .

En conclusión, si φ' , ω , α' son respecto de $\varphi + \delta\varphi$, $\alpha + \delta\alpha$, $e + \delta e$, las mismas funciones que (φ') , (ω) , (α') respecto de φ , α , e , tendremos las siguientes ecuaciones (14), de suma importancia:

$$\varphi' - (\varphi)' = \cos \omega \delta\varphi - n \operatorname{sen} \omega \cos \varphi \delta\alpha - n \cos \alpha' \delta\theta + \frac{2\Theta \cos \varphi' e \delta e}{(1 - e^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi' \{ \omega - (\omega)' \} &= \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} \omega \delta\varphi - \operatorname{sen} \theta \cos \alpha' \delta\alpha - \operatorname{sen} \alpha' \delta\theta \\ \cos \varphi' \{ \alpha' - (\alpha')' \} &= \operatorname{sen} \omega \delta\varphi + \cos \varphi \cos \omega \delta\alpha - \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} \alpha' \delta\theta. \end{aligned}$$

Si $\delta\varphi = 0$ y $\delta\alpha = 0$, resulta, poniendo el valor (12) de $\delta\theta$ (1),

$$\varphi' - (\varphi)' = \theta n \cos \alpha' \frac{\delta a}{a} + \theta \cos \alpha' \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2} - \frac{2 \cos^2 \varphi}{(1 - e^2)^2} \right\} e \delta e,$$

y es de notar que en esta fórmula el coeficiente de δe se anula cuando $(3 - e^2) \operatorname{sen}^2 \varphi = 2$; condición que se cumple cerca de la latitud de 55° , á la cual próximamente se encuentra el centro de la Gran Bretaña. En tales latitudes, pues, las mediciones efectuadas no tienen por sí propias peso alguno en el cálculo de la excentricidad.

Repárese además que la $\delta\theta$ de las ecuaciones (13) depende, no sólo de δa y de δe , sino también de $\delta\varphi$. Sin embargo, como el coeficiente de $\delta\varphi$ es muy pequeño, puede suprimirse por lo general este término (2).

Diferenciando la ecuación (10), se hallará sin dificultad la ex-

(1) Con bastante aproximación para este caso se tiene

$$\frac{n \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2},$$

y como basta también $\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi = -\theta \cos \varphi' \cos \alpha'$, se tiene asimismo, reemplazando φ' por φ ,

$$\frac{2\Theta \cos \varphi'}{(1 - e^2)^2 \theta \cos \alpha'} = -\frac{2 \cos^2 \varphi}{(1 - e^2)^2},$$

(2) La diferencial parcial, con relación á φ , de la fórmula que precede á la (12) del presente capítulo, es

$$-e^2 \theta \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \delta\varphi.$$

presión de δS en función de δa , δe , $\delta \varphi$, $\delta \alpha$. Si, por ejemplo, solo se toma en cuenta la variación producida por δa , δe , será (1)

$$-\delta S = a \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\delta \theta}{\theta}.$$

8.

El cálculo expuesto en la página 402 es el que se hizo para hallar la extensión lineal del arco de paralelo á los 52° de latitud comprendido entre los meridianos de Greenwich y Feaghmain. Designando por ρ' la normal correspondiente á dicha latitud, la extensión de ese arco es $P = \rho' \omega \operatorname{sen} 1'' \cos 52^\circ$, siendo como ya vimos $\omega = 37239'' \cdot 5755$. Ahora bien,

log. 37239''·5755	4·57100472,
log. $\rho' \operatorname{sen} 1'' \cos 52^\circ$	1·79652713,
log. 230944·07	6·36753185.

Pero tal valor de P depende de los atribuidos á los elementos de la figura de la tierra. Si los semiejes reciben los incrementos δa , δb , se producirá en el mencionado arco un incremento que podrá expresarse por $\gamma \delta a + \gamma' \delta b$. Para determinarlo, calculemos los dos términos del segundo miembro de la relación

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta \rho'}{\rho'} + \frac{\delta \omega}{\omega}.$$

(1) Según se advirtió en la nota de la página 408, es

$$\frac{S}{s} = \frac{\psi - \varphi}{\theta} = \cos \alpha - \frac{1}{2} \theta \tan \varphi \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Por consiguiente,

$$-\frac{\delta S}{s} = \frac{1}{2} \tan \varphi \operatorname{sen}^2 \alpha \delta \theta,$$

ó bien, reemplazando $\operatorname{sen} \alpha$ por $\operatorname{sen} \alpha_1$, porque $\alpha + \alpha_1$ difiere poco de 180° y sustituyendo $s = a \theta$ y $\theta \operatorname{sen} \alpha_1 = \operatorname{sen} \omega \cos \varphi$,

$$-\delta S = \frac{1}{4} a \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen}^2 \omega \frac{\delta \theta}{\theta},$$

expresión equivalente á la del texto, dada la pequeñez de ω .

Tomando la diferencial logarítmica de (1)

$$\rho^2 = \frac{a^4}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

resulta (2)

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta a}{a} \left(2 - \frac{\rho^2}{a^2} \cos^2 \varphi \right) - \frac{\delta b}{b} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \cos^2 \varphi \right),$$

ó en forma más breve

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = h \delta a + k \delta b;$$

luego, para la normal ρ' correspondiente á $\varphi = 52^\circ$, será

$$\frac{\delta \rho'}{\rho'} = h' \delta a + k' \delta b.$$

Aumentada á su vez por el mismo motivo la latitud de Greenwich en $\delta \varphi = h, \delta a + k, \delta b$, si se sustituye este incremento en la segunda ecuación (13), escribiendo además en la misma (3)

$$\delta \theta = -\theta \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad \delta a = 0,$$

se tendrá

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = \tan \psi \frac{\text{sen } \omega}{\omega} (h, \delta a + k, \delta b) + \frac{\theta}{\omega} \text{sen } \alpha' \sec \psi \frac{\delta \rho}{\rho}.$$

(1) Bajo otra forma, esta expresión es la misma dada en la página 165:

$$\rho = \frac{a}{\Delta} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

(2) En la diferencial inmediata debe substituirse para ello este valor, deducido de la fórmula precedente:

$$\frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi = \frac{a^2}{\rho^2} - \cos^2 \varphi.$$

(3) $s = \theta \rho, \quad 0 = \frac{\delta \theta}{\theta} + \frac{\delta \rho}{\rho}.$

Por consiguiente,

$$\frac{\delta P}{P} = \delta a \left(h, \tan \psi \frac{\text{sen } \omega}{\omega} + h \frac{\theta}{\omega} \text{sen } \alpha' \sec \psi + h' \right) \\ + \delta b \left(k, \tan \psi \frac{\text{sen } \omega}{\omega} + k \frac{\theta}{\omega} \text{sen } \alpha' \sec \psi + k' \right).$$

En conclusión, apreciando los semiejes de la tierra en estos números de pies:

$$20\ 926\ 348 + \delta a, \quad 20\ 855\ 233 + \delta b,$$

la extensión lineal del arco de paralelo á la latitud de 52° comprendido entre Greenwich y Feaghmain es, en la misma unidad de medida,

$$2\ 330\ 944.07 + 0.0062 \delta a - 0.0006 \delta b.$$

A su vez la extensión lineal del arco de paralelo, á la misma latitud, comprendido entre Greenwich y el monte Kemmel de Bélgica es

$$634\ 157.39 + 0.0027 \delta a - 0.0006 \delta b.$$

CAPÍTULO XI

ALTURAS DE LAS ESTACIONES

La dirección según la cual se ve un punto B desde otro A, es la de la tangente en A á la línea que describe el rayo luminoso al pasar del primer punto al segundo, y que por causa de la refracción terrestre no es la recta trazada entre ambos. El desvío producido por dicha refracción en la visual de B ocurre en el plano vertical, que con suficiente exactitud puede decirse común á A y B, ó en este plano recae casi por completo, pues la refracción horizontal que á veces acontece altera muy poco los ángulos azimutales. De este segundo caso prescindiremos aquí, concretándonos al resultado más frecuente, es decir, á la alteración causada en la medida de las distancias al zenit, y remitiendo al lector que desee estudiar con detenimiento la teoría de la refracción terrestre á los importantes artículos publicados por el doctor Bauernfeind en la *Astronomische Nachrichten* de 1866.

Varía mucho el valor de la refracción y no puede expresarse por una ley sencilla, pues dependiendo el curso del rayo luminoso del poder refractor de la atmósfera en cada punto por donde pasa, es línea muy irregular, como se echa de ver sobre todo cuando las estaciones son bajas y el rayo roza el suelo. Además, en las llanuras de la India se ha notado que el terreno comprendido entre el observador y una altura distante, si bien se muestra convexo en las primeras horas de la mañana, cambia gradualmente de aspecto conforme el día avanza, hasta presentarse ese terreno como cóncavo, de modo tan manifiesto que á la puesta del sol parece subir en declive hacia la base de la torre ó altura que sirve de señal, siendo así que en un principio dicha base

quedaba enteramente debajo del horizonte (*). En tales condiciones, la refracción no pocas veces es negativa y su coeficiente llega á oscilar entre -0.09 y $+1.21$.

En la Gran Bretaña alcanza su máximo valor la refracción en las primeras horas de la mañana, hacia el mediodía disminuye y por la tarde aumenta; pero esta regla, en varios casos, deja de cumplirse. Repetidas observaciones, hechas con sumo cuidado por el coronel Hossard en Angulema (**), demostraron que cerca del amanecer llega á su valor máximo la refracción; que ésta mengua rápidamente desde las 5 ó 6 de la mañana hasta las 8 y con lentitud desde las 8 hasta las 10; que permanece casi constante desde esta hora hasta las 4 de la tarde, y que á partir de esta última comienza á crecer.

Por término medio la refracción, entendiendo por ella la diferencia entre la verdadera dirección y la aparente, varía desde una dozava parte hasta una dieciseisava del ángulo subtendido por las estaciones en el centro de la tierra. A orillas del mar ocurren comúnmente los valores más crecidos y á gran distancia de él los más pequeños. Puede medirse la refracción del siguiente modo: sean h, h' las alturas conocidas de dos estaciones A, B—determinadas, por ejemplo, por nivelación topográfica; $-Z, Z'$ las verdaderas distancias zenitales de B en A y de A en B, y C el centro de la tierra que supondremos una esfera de radio r ; si hacemos el ángulo $ACB = v$, dará el triángulo ACB las ecuaciones

$$\frac{1}{2}(Z' + Z) = 90^\circ + \frac{1}{2}v,$$

$$\tan \frac{v}{2} \tan \frac{1}{2}(Z' - Z) = \frac{h' - h}{h' + 2r + h},$$

y éstas determinarán Z y Z' . Sustituyendo por $\tan \frac{1}{2}v$ los dos primeros términos de su desarrollo en serie, la segunda ecuación se transforma fácilmente en

$$h' - h = s \tan \frac{1}{2}(Z' - Z) \left(1 + \frac{h + h'}{2r} + \frac{s^2}{12r^2} \right), \quad (1)$$

en la cual se designa por s la distancia entre las estaciones A

(*) *Account of the Great Trigonometrical Survey of India*, tomo II, página 77.

(**) *Mém. de Dépôt Gén. de la Guerre*, tomo IX, pág. 451.

y B reducida al nivel del mar. No inducirá á error en la práctica la hipótesis de ser la tierra esférica en la zona comprendida entre ambas estaciones, si se compensa esto con tomar por medida de curvatura de la superficie en esta parte $1 : r^2 = 1 : \rho_2$.

Coefficiente de refracción es la razón que la diferencia entre la distancia zenital verdadera y la observada en una ú otra de las dos estaciones tiene con el ángulo v ; de manera que llamando k dicho coeficiente y z, z' las distancias zenitales observadas, será

$$k = \frac{Z - z}{v} \quad \text{ó} \quad k = \frac{Z' - z'}{v}$$

Pero estos dos valores no siempre concuerdan. El siguiente cuadro contiene—tomadas al azar—diversas medidas de k , deducidas de ese modo de observaciones hechas en los trabajos geodésicos de la Gran Bretaña por la *Ordnance Survey* (1):

ESTACIÓN	AL-TURA	Z, Z'			z, z'			N.º DE OBS.	v	k
		°	'	"	°	'	"			
Ben Lomond..	3192.2	90	1	21.2	89	58	35.8	5	2300.7	.0719
Ben Nevis. . .	4406.3	90	37	2.0	90	33	25.3	19		.0942
Dunkerry.. . .	1706.4	90	31	51.0	90	26	56.1	4	3870.9	.0762
Precelly.. . .	1757.9	90	32	45.0	90	27	44.4	5		.0777
High Wilhays.	2039.6	90	42	22.7	90	36	14.3	14	4843.0	.0761
Precelly.. . .	1757.9	90	38	26.7	90	31	36.4	6		.0847
High Wilhays.	2039.6	90	33	51.8	90	31	32.8	12	2142.9	.0649
Hensbarrow. .	1027.0	90	1	54.0	89	59	20.1	17		.0718
Coringdon. . .	655.6	90	12	54.0	90	10	30.4	16	1806.9	.0795
Dunnose. . . .	771.9	90	17	15.4	90	14	57.1	12		.0765
Treose Head..	242.6	90	3	18.2	90	1	5.6	20	1713.7	.0774
Karnminnis..	799.8	90	25	17.8	90	23	9.5	10		.0749

(1) Las alturas señaladas en el cuadro á los dos vértices de cada grupo equivalen, por su orden, á estos números de metros:

1.º	{ 972m.98 1343 .03	3.º	{ 621m.67 535 .80	5.º	{ 199m.83 235 .27
2.º	{ 520 .11 535 .80	4.º	{ 621 .67 313 .03	6.º	{ 73 .94 243 .78

El coeficiente más anormal es el de Ben Nevis, siendo digno de contarse que durante unos quince días, en que se hicieron la mayor parte de las observaciones, el estado de la atmósfera en la cima del monte era el de absoluta calma, hasta el punto de que muchas veces pudo llevarse una vela encendida desde las tiendas hasta el observatorio, mientras que al pie del monte reinaba viento fuerte y se veía el cielo tempestuoso.

Puede obtenerse también el coeficiente de refracción observando distancias zenitales recíprocas de A y B, prescindiendo de que se conozcan las alturas de estos vértices. Suponiendo que en ambos la refracción sea la misma (para lo cual las observaciones deben ser simultáneas), se tendrá $Z = z + kv$ y $Z' = z' + kv$, y por lo tanto

$$z + z' + 2kv = 180^\circ + v;$$

$$\therefore 1 - 2k = \frac{z + z' - 180^\circ}{v}.$$

Promediados los 144 valores de k , deducidos de las observaciones hechas en Inglaterra, resulta por coeficiente medio de refracción $\cdot 0771$. Pero escritos por orden de magnitud todos esos valores, los extremos son $\cdot 0320$ y $\cdot 1058$, mientras que los 72 situados en la parte media están comprendidos entre $\cdot 0733$ y $\cdot 0804$ y dan un promedio de $\cdot 0768$ que difiere poco del promedio general. Por consiguiente, el error probable de una medida aislada de k viene á ser de $\pm \cdot 0035$.

Pero forman sección aparte los rayos que salvan el mar de los que cruzan por encima del suelo. En efecto, teniendo en cuenta el peso de la medida aislada en cada caso, resulta:

$$\begin{array}{ll} \text{para los rayos que salvan el suelo,} & k = \cdot 0750; \\ \text{para los rayos que salvan el mar,} & k = \cdot 0809; \end{array}$$

diferencia confirmada por observaciones verificadas en otras partes del globo, pues, por ejemplo (*), en los trabajos geodésicos de Massachusetts se adopta por valor de k en la costa $\cdot 0784$ y en el interior $\cdot 0697$.

(*) *Professional Papers of the Corps of Engineers U. S. A.*, núm. 12, página 143.

De las ecuaciones precedentes se deduce $\frac{1}{2}(Z' - Z) =$

$$\frac{1}{2}(z' - z) = 90^\circ - z + v\left(\frac{1}{2} - k\right).$$

Luego si en la ecuación (1) reemplazamos z , distancia zenital de B observada en A, por $90^\circ + \delta$, siendo δ la *depresión* de B, resultará (1)

$$h' - h = s \tan \left(s \frac{1 - 2k}{2r} - \delta \right) \left(1 + \frac{h + h'}{2r} + \frac{s^2}{12r^2} \right), \quad (2)$$

ó, si se conoce también la *depresión* δ' de A observada en B,

$$h' - h = s \tan \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \left(1 + \frac{h + h'}{2r} + \frac{s^2}{12r^2} \right). \quad (3)$$

En ambas ecuaciones puede omitirse el último factor sin error de importancia (2).

Además, suponiendo se trate de estaciones lejanas una de otra, en cuyo caso δ rara vez excede de un grado, puede escribirse

$$h' - h = s^2 \left(\frac{1 - 2k}{2r} \right) - s\delta. \quad (4)$$

Haciendo $\mu = \frac{2r}{1 - 2k}$, y admitiendo que la tierra sea una esfera de radio medio en pies, tal que $\log r = 7.32020$, se tiene (3)

$$\text{para } k = .0750, \quad \log \mu = 7.69181,$$

$$k = .0809, \quad \log \mu = 7.69788,$$

valores suficientes en la práctica por punto general.

Cuando por la fórmula (4) se deduce la altura h' de B de la distancia zenital de B observada desde A, el error de h' es

$$dh' = -\frac{s^2}{r} dk - s d\delta.$$

Luego si la distancia s vale n millas, el error probable de la

$$(1) \quad \tan \frac{1}{2}(Z' - Z) = \cot \left\{ x - \frac{s}{r} \left(\frac{1}{2} - k \right) \right\}.$$

(2) En los *Estudios sobre nivelación geodésica*, por el coronel D. Carlos Ibáñez, Madrid, 1864, se examinan y comparan los diferentes métodos seguidos en esta clase de nivelación.

(3) Si por unidad de longitud se toma el metro, se tendrá:

$$\text{para } k = .0750 \quad \log \mu = 7.17582$$

$$k = .0809 \quad \log \mu = 7.18189.$$

distancia zenital observada $\pm \epsilon$ segundos y el del coeficiente de refracción $\pm .004$, el error probable de h' en pies será aproximadamente (1)

(1) La fórmula precedente, la cual puede escribirse de este modo:

$$dh' = -s \left(\frac{s}{r} dk + d\delta \right),$$

supone h' , s , r referidas á la misma unidad y $d\delta$ referida al radio. Pero si se quiere h' en pies, dando s , r en millas y $d\delta$ en segundos, se debe reemplazar $d\delta$ por su número de segundos $d\delta$, dividido por los 206265" que contiene el radio; sustituir s por su número n de millas y r , radio terrestre, por su valor en millas, que en número redondo equivale á 4000, y hecho todo esto, multiplicar el segundo miembro por los 5280 pies que tiene una milla, con lo cual resulta con suficiente aproximación

$$dh' = -\frac{n}{40} (d\delta_r + 50 ndk).$$

Luego, sobrentendiendo el doble signo, el error probable en pies será

$$e_p = \frac{n}{40} \left(\epsilon^2 + (50 n)^2 (0.004)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

y hecha la reducción numérica, esta expresión se convierte en la del texto.

El mismo error probable en metros, designando por n_r el número de kilómetros de la distancia s , será

$$e_m = \frac{n_r}{210} \left(\epsilon^2 + \left(\frac{n_r}{s} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mayor precisión se obtiene tomando distancias zenitales recíprocas y simultáneas, pues por la fórmula (3) se tiene entonces con suficiente aproximación, si los vértices están lejanos,

$$h' - h = \frac{s}{2} (\delta' - \delta),$$

y por consiguiente

$$dh' = \frac{s}{2} (d\delta' - d\delta).$$

Luego si $d\delta'$ y $d\delta$ se dan en segundos, el error probable en pies ó metros, según se mida s por millas ó kilómetros, será respectivamente

$$e_p = \frac{n}{40} \cdot \frac{\epsilon}{2} \sqrt{2}, \quad e_m = \frac{n_r}{210} \cdot \frac{\epsilon}{2} \sqrt{2}.$$

Por ejemplo, si $s = 25$ millas = 40 kilómetros y $\epsilon = 1''$, el error probable de la diferencia de nivel, determinada por observaciones zenitales recíprocas y simultáneas, será de 0.44 pie = 0.13 metro.

Consíguese exactitud mucho mayor todavía practicando con esmero la nivelación topográfica, es decir, el método de visuales horizontales tendidas entre miras verticales separadas por trechos cortos, en mitad de cada uno de los cuales se coloca el anteojo con el nivel de burbuja que le acom-

$$\pm \frac{n}{40} \left\{ \epsilon^2 + \left(\frac{n}{5} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Cuando en A y B se verifiquen observaciones recíprocas, po-

paña. Aunque el procedimiento es lento y costoso, se ha aplicado en toda Europa. Bourdaloüe comenzó en 1860 á tender en Francia, por este sistema, una red de líneas de altura referidas todas al nivel medio del Mediterráneo en Marsella, y el mismo trabajo hicieron en seguida otras naciones, adoptando cada una como horizonte fundamental el nivel medio del mar en algún punto de sus costas, excepto Holanda y Alemania, cuyos ceros respectivos están á 0^m.14 y 0^m.20 sobre el nivel medio de sus mares.

En España se ha formado también, por medio de la nivelación de precisión, extensa red de líneas radiales y transversales. Parten las primeras de Madrid, y entre ellas figuran las dirigidas á Coruña, Santander, Barcelona, Alicante y Cádiz. Otras, ya directas, ya derivadas de algunas de las antedichas, tienen por objeto enlazar con la nivelación francesa por Perpiñán y por la parte de Irún y con la portuguesa por Oporto y Lisboa. Las demás sirven para determinar las altitudes de las capitales de provincia y poblaciones de importancia. El conjunto ofrece en sus diferentes polígonos ecuaciones de condición para depurar la exactitud de los resultados. El error de cierre en la doble nivelación de una línea de N kilómetros no excede de 5^{mm} \sqrt{N} . Las altitudes están referidas al nivel medio del mar en Alicante. Por un mareógrafo establecido en este punto, y otros dos en Cádiz y Santander, se deduce el nivel medio de los mares que bañan las costas de España. Véanse las *Memorias del Instituto geográfico y estadístico* y las *Instrucciones para los trabajos geodésicos*, publicadas por la Dirección general del mismo Instituto.

Como de las nivelaciones de precisión verificadas en Europa resultaban entre los mares diferencias de nivel harto crecidas para excusarlas como errores, pues, por ejemplo, según la nivelación llevada por Bourdaloüe desde Marsella hasta Brest, aparecía el Mediterráneo 1^m.10 más bajo que el Océano y 0^m.64 según la nivelación española entre Alicante y Santander, tratábase de fijar un cero ú origen común á todas las redes europeas. Pero quizá no sea esto menester, porque la última nivelación general de Francia, comenzada en 1884 y enlazada con las de Italia, Bélgica, Holanda y Alemania del Norte, parece revelar diferencias menores limitadas á algunos centímetros, 10 á lo sumo, é imputables por lo tanto á errores de observación. Si, en efecto, lo confirman cálculos definitivos, se deducirá que el nivel medio de los mares es el mismo y que cada país puede fijar sin incertidumbre la altitud de sus puntos, refiriéndose al mar que bañe alguna de sus costas ó al que tenga más inmediato. Véase la r seña del Congreso celebrado en Friburgo por la Asociación geodésica internacional en 1890: *Annuaire du Bureau des Longitudes*, Paris, 1891.

dremos ó eliminar el coeficiente de refracción empleando la fórmula (3) ó hallar dos resultados diferentes, partiendo de un valor medio atribuido á h , y combinar después los mismos, asignando á cada uno el peso deducido de la comparación de las observaciones respectivas de donde separadamente se hubiere obtenido dicho resultado; peso cuyo valor, según la fórmula últimamente escrita, es proporcional al inverso de $\varepsilon^2 + \frac{1}{45} n^2$.

Si en cada una de tres estaciones se observan las distancias zenitales de las otras dos, la diferencia de alturas calculada entre dos cualquiera de ellas no concordará, por causa de los errores cometidos, con la suma de las diferencias de alturas entre las antedichas y la tercera; es decir, que si las diferencias halladas son $C - B = h_1$, $B - A = h_2$, $A - C = h_3$, debiera ser $h_1 + h_2 + h_3 = 0$; pero esto en general no sucederá, y á las mencionadas cantidades habrán de aplicarse las enmiendas x_1, x_2, x_3 , que se determinarán agregando á la condición

$$x_1 + x_2 + x_3 + h_1 + h_2 + h_3 = 0$$

la de que si w_1, w_2, w_3 son los pesos de las medidas de h_1, h_2, h_3 , la expresión

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2$$

sea un mínimo: cálculo parecido al de las correcciones que requieren los ángulos de un triángulo aislado.

También se puede proceder de este otro modo, que se comprenderá mejor suponiendo sean cuatro los puntos, desde cada uno de los cuales se hayan observado los demás. Las alturas $0, x, y, z$ de los cuatro puntos, respecto de uno de ellos, darán las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + a &= 0, \\ y - x + a' &= 0, \\ y + b &= 0, \\ z - y + b' &= 0, \\ z + c &= 0, \\ x - z + c' &= 0; \end{aligned}$$

y de ellas, asignando previamente sus pesos, se deducirán x, y, z por el método de los mínimos cuadrados.

Las líneas principales de nivelación topográfica tendidas en Inglaterra y Wales se corrigieron de este modo, y hubo que cal-

cular 91 incógnitas. En la corrección de las líneas de nivel de Escocia figuraban 77 incógnitas.

Si desde un vértice cuya altura es h se ve el horizonte del mar con una depresión Δ y á una distancia Σ , las ecuaciones (3) y (4)

$$\text{darán} \quad h = \Sigma \tan \frac{1}{2} \Delta, \quad \bar{h} = \Sigma^2 \frac{1}{\mu};$$

quedando por consecuencia, si se elimina Σ , enlazadas h y Δ por la ecuación

$$h = \mu \tan^2 \frac{1}{2} \Delta. \quad (5)$$

Sean h' , h'' las alturas de dos vértices A, B, situados uno de otro á la distancia c y sea δ la depresión de B observada desde A. Si C es otro punto colocado en la dirección del rayo que une A con B, una señal por ejemplo que parezca exactamente alineada con B, y es h la altura de C y $s + \frac{1}{2}c$, $s - \frac{1}{2}c$ las distancias respectivas de dicho punto á A y B, se verificarán estas ecuaciones:

$$h - h' = \frac{(s + \frac{1}{2}c)^2}{\mu} - (s + \frac{1}{2}c)\delta,$$

$$h'' - h' = \frac{c^2}{\mu} - c\delta,$$

$$h - \frac{1}{2}(h' + h'') = \frac{s}{c}(h'' - h') + \frac{1}{\mu} \left(s^2 - \frac{c^2}{4} \right),$$

de las cuales la tercera, obtenida eliminando δ de las dos primeras, será la ecuación de la curva descrita por el rayo luminoso que une A con B. El punto de dicha curva más próximo á la superficie se hallará igualando á cero el coeficiente diferencial de h con respecto á s , con lo cual se tiene (1)

(1) La tercera de las ecuaciones precedentes puede escribirse bajo estas dos formas:

$$h = h' + \frac{1}{2}(h'' - h') \left(1 + \frac{2s}{c} \right) + \frac{1}{\mu} \left(s^2 - \frac{c^2}{4} \right),$$

$$= h'' - \frac{1}{2}(h'' - h') \left(1 - \frac{2s}{c} \right) + \frac{1}{\mu} \left(s^2 - \frac{c^2}{4} \right),$$

y reemplazando en ambas h , s por h_0 , s_0 y $h'' - h'$ por el valor deducido de la ecuación

$$s_0 = -\frac{1}{2} (h'' - h') \frac{\mu}{c},$$

se tienen las dos que á ésta siguen en el texto.

$$s_0 = -\frac{1}{2} (h'' - h') \frac{\mu}{c},$$

$$h_0 = h' - \frac{(s_0 + \frac{1}{2}c)^2}{\mu} = h'' - \frac{(s_0 - \frac{1}{2}c)^2}{\mu},$$

designando por s_0 la distancia á que se encuentra sobre esa curva el punto de mínima altura y por h_0 esta altura. Si tomamos por ejemplo el rayo dirigido desde Precelly, en el condado de Pembroke, á High Wilhays, en el condado de Devon, cuyas alturas están dadas en el cuadro de la página 419, y cuya distancia c es de 93 millas ($\log c = 5.69221$), veremos que la altura mínima es de 677 pies (206.3 metros) y ocurre á unas 44 millas (70 kilómetros) de la estación más baja y 49 millas (78 kilómetros) de la más alta.

A su vez, entre las estaciones Tetica y M'Sabiha, cuyas alturas dimos en la página 387, y cuya distancia mutua es de 225.7 kilómetros, la mayor aproximación de la visual á la superficie del Mediterráneo es de 1077 pies (328.3 metros).

Dos estaciones cuyas alturas en pies sean h' y h'' no podrán en circunstancias ordinarias verse mutuamente sobre el mar si su distancia en millas excede de (1)

$$\frac{1}{2} (\sqrt{h'} + \sqrt{h''}).$$

(1) Para que estando el punto C entre A y B sea h_0 positiva y no se anule, se requiere:

$$\frac{1}{2} c + s_0 < \sqrt{\mu} \sqrt{h'}, \quad \frac{1}{2} c - s_0 < \sqrt{\mu} \sqrt{h''}.$$

Luego

$$c < \sqrt{\mu} (\sqrt{h'} + \sqrt{h''}).$$

Mas si en vez de referir á la misma unidad c , h' , h'' , μ , se aprecia la primera en millas, midiendo en pies las últimas, debe dividirse el segundo miembro por 5280, y entonces resulta la expresión del texto, porque de los valores de $\log \mu$, dados arriba, se infiere que por término medio $\sqrt{\mu}$ vale próximamente 7040, cuya razón al antedicho número es la de 4 á 3.

Si se mide c en kilómetros, dando h' y h'' en metros, la condición será

$$c < 4 (\sqrt{h'} + \sqrt{h''}).$$

CAPÍTULO XII

ENLACE DE OPERACIONES GEODÉSICAS Y ASTRONÓMICAS

1.

De los estudios teóricos expuestos en el capítulo IV, combinados con observaciones y medidas directas, se deduce que la figura de nuestro globo se aproxima mucho á la de un elipsoide de revolución. Mas no es esta su forma exacta, pues la patente irregularidad de la superficie exterior y la variación ofrecida en punto á densidad por la corteza, hacen que respecto de dicha figura elipsoidal haya diferencias, cuya magnitud crece y mengua alternativamente sin sujeción á fórmula alguna. Sin embargo, merced á las vastas operaciones geodésicas llevadas á cabo, puede hallarse un esferoide al cual se ajuste tanto la superficie matemática de la tierra que la discrepancia probable en cualquier punto sea muy pequeña. En efecto, si designando por E ese esferoide y por S la verdadera superficie matemática de nuestro globo, son A, B, C, \dots una serie de puntos de S , y A_1, B_1, C_1, \dots sus proyecciones sobre E , el valor variable ζ de las distancias normales AA_1, BB_1, CC_1, \dots de S á E será sumamente limitado, á juzgar por los datos hasta ahora obtenidos, pues no hay observación alguna que no permita suponer donde quiera ζ exigua, comparada con la diferencia de los semiejes del esferoide.

Cuando sólo se contaba para cálculos geodésicos con cortos arcos, la irregularidad de la figura de la tierra se revelaba principalmente por los muy distintos valores de elipticidad ó achatamiento que por diversas combinaciones de esos arcos se ob-

tenían. Mas la causa de tales diferencias era un hecho bien notorio al presente, á saber: que aun en puntos donde por las condiciones de la región que los rodea parece no debiera existir ninguna atracción local, la latitud determinada por observación puede adolecer de un error de uno ó dos segundos. No pocas veces se pasa de este valor ni es raro hallar, como en las cercanías de Edimburgo ocurre, un desvío de 5" en la dirección de la gravedad, y todavía acontecen otros de mayor cuantía en los condados de Banff y Elgin, verificándose el máximo de 10" en la aldea de Portsoy. En la base del Himalaya, donde es de presumir naturalmente gran atracción, asciende ese desvío hasta cerca de 30", disminuyendo con alguna rapidez según aumenta la distancia á la cordillera.

Cerca de Moscou (*) ocurren irregularidades muy curiosas de esta índole, puestas de relieve por gran número de latitudes observadas en aquel distrito. Trazada por dicha ciudad una línea próximamente en la dirección de Este á Oeste, en una longitud de ella de 80 á 95 kilómetros se hallan los puntos donde el desvío septentrional de la dirección de la gravedad alcanza su máximo valor, por término medio de unos 6", mientras que una línea paralela trazada á 29 kilómetros al Sur contiene los puntos de máximo desvío meridional, quedando en mitad del espacio comprendido entre ambas la de los puntos donde no se produce desvío alguno. Prueba todo ello claramente que debajo de la superficie debe existir, si no una cavidad, por lo menos una vasta extensión con materia muy poco densa. En Crimea y en el Cáucaso se producen desvíos muy superiores á los que acaban de indicarse (1).

(*) *Untersuchungen ueber die in der Naehc von Moskau stattfindende Local-Attraction*, por G. Schweizer. Moscou, 1863.

(1) Las latitudes astronómicas de los vértices de la triangulación española *Llatias* y *Conjueros*, determinadas en 1871 por D. Miguel Merino, con la cooperación de D. Vicente Ventosa, revelaron que en el primer vértice, situado cerca de Santander, junto al mar Cantábrico, la latitud astronómica superaba á la geodésica en unos 12 ó 13", y que en el segundo vértice, á la vista del Mediterráneo, cerca y al Oriente de Motril, la latitud astronómica era inferior á la geodésica en unos 10", de manera que las vertica-

2.

Suponiendo expresada la pequeña cantidad ζ en función de la latitud y longitud del punto á que se refiere, quedará rigurosamente definida la superficie S, y haciendo

$$\xi = \frac{d\zeta}{\rho d\varphi}, \quad \eta = \frac{d\zeta}{\rho \cos \varphi d\omega},$$

serán ξ , η las proyecciones que sobre el plano meridiano y el primer vertical tendrá la inclinación de la superficie S en A respecto de la superficie E en A_1 , ó sea el ángulo de las normales correspondientes á los puntos expresados. Por lo tanto, la lati-

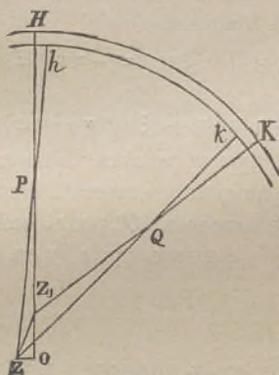


Fig. 58.

tud de A_1 excederá en ξ á la de A y la longitud de aquel punto excederá á la de éste en $\eta \sec \varphi$.

En cuanto á la dirección del meridiano, determinada por observación, sea, figura 58, Z, Z_1 el respectivo zenit de A, A_1 ; P el polo, Q el punto de la bóveda celeste donde se proyecta una se-

les de ambos puntos estaban separadas por mayor ángulo del que á la distancia lineal entre ellos correspondía.

Comprobaron este desvío de las verticales otras observaciones hechas al Norte, en el cabo de Peñas y costa de San Sebastián; al Oriente, en la mesa de Boldán, y al Sur, en el Observatorio de San Fernando; pero el efecto tanto podía provenir de que el promontorio general de la Península ibérica constituyese en conjunto un centro secundario de atracción, como

ñal terrestre, siguiendo la visual á ella dirigida. Puesto que los arcos máximos Z_1PH y Z_1QK , como ZPh y ZQk , valen cada uno 90° , el azimut de Q medido con el teodolito será $hk = \alpha$, y el mismo azimut referido al esferoide E será $HK = \alpha_1$. Mas prolongando HPZ_1 hasta el pie O del arco ZO perpendicular á Z_1H , será $Z_1O = \xi$ y $ZO = \eta$. Además $PZ = 90^\circ - \varphi$, y designando por e el ángulo de elevación ó altura de la señal, $QZ = 90^\circ - e$. Por lo tanto ⁽¹⁾,

$$ZPZ_1 = \frac{\eta}{\cos \varphi}, \quad ZQZ_1 = \frac{\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \cos \alpha}{\cos e};$$

de donde á su vez se infiere que la distancia de h á PH y la de k á KQ valdrán respectivamente

$$\eta \tan \varphi, \quad (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \cos \alpha) \tan e,$$

luego

$$\alpha_1 = \alpha + \eta \tan \varphi + (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \cos \alpha) \tan e. \quad (1)$$

Pero si, como siempre se practica, la observación de la Polar se enlaza con la de un punto ó marca terrestre, cuya distancia zenital se aproxime mucho á 90° , podrá omitirse por insignificante el término que contiene $\tan e$, y en tal caso, llamando

proceder de *atracciones locales*, no sujetas á regularidad alguna, emanadas de las cordilleras de España ó de sus diversas ramificaciones.

Situado el vértice *Tetica* en medio de un laberinto de montañas, lejos del mar y con causas locales de atracción y desvío repartidas en torno suyo con alguna simetría, era adecuado para resolver esa duda, y con este propósito, aprovechando el Sr. Merino su estancia en dicho vértice con motivo del enlace astronómico de España y Argelia determinó por observación la latitud de *Tetica*. El resultado apenas discrepó algún segundo del que se desprendía de la triangulación geodésica, partiendo de la latitud del Observatorio de Madrid y azimut del lado tendido desde este punto al vértice Hierro, situado en la cumbre del Guadarrama. Por consiguiente, aquel desvío á atracciones puramente locales debía sólo imputarse. Véase la Memoria leída por el Sr. Merino á la Academia de Ciencias en febrero de 1880 é inserta en la *Revista de los progresos de las Ciencias exactas, físicas y naturales*; tomo XXI, Madrid, 1886.

⁽¹⁾ Designando por O_1 el pie del arco trazado desde Z perpendicular á QZ_1 , será:

$$ZO_1 = \xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \cos \alpha.$$

φ , ω la latitud y longitud de A; φ_1 , ω_1 la latitud y longitud de A_1 ; α el azimut observado de la señal terrestre, y α_1 el mismo azimut referido á A_1 , se tendrán entre A y A_1 las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi + \xi \\ \omega_1 &= \omega + \eta \sec \varphi \\ \alpha_1 &= \alpha + \eta \tan \varphi.\end{aligned}\tag{2}$$

Sabido es que las bases medidas se reducen al nivel del mar y que los ángulos observados con los teodolitos son los mismos que si á dicho nivel se determinaran; luego las operaciones trigonométricas pueden suponerse en realidad verificadas sobre la superficie S. Pero los ángulos medidos entre los puntos A, B, C,... no son idénticos á los que resultarían entre sus proyecciones A_1 , B_1 , C_1 ,... pues de la fórmula (1) se desprende que el ángulo horizontal medido entre dos puntos cuyos azimutes y elevaciones son α , α' , e , e' , queda, á causa del distinto zenit correspondiente á A y A_1 , variado en la cantidad

$$\xi (\text{sen } \alpha' \tan e' - \text{sen } \alpha \tan e) - \eta (\cos \alpha' \tan e' - \cos \alpha \tan e).$$

Sin embargo, como ξ , η suelen limitarse á muy pocos segundos, y además e es por lo común muy pequeña por hallarse distantes los vértices observados en operaciones geodésicas, los ángulos determinados entre los puntos A, B, C,... sobre S no diferirán en cantidad apreciable de los ángulos correlativos entre los puntos A_1 , B_1 , C_1 ,... sobre E; y con fundamento, por consecuencia, cabe aceptar la triangulación como proyectada en E y calcularla conforme lo dicho en los capítulos IX y X.

3.

Contando como datos con la distancia entre dos puntos A, B y con la latitud, longitud y azimut determinados astronómicamente en cada uno de ellos, indiquemos con la siguiente notación la correspondencia de los elementos observados en dicho punto con los elementos reducidos pertenecientes á A_1 , B_1 :

A	Δ_1	B	B_1
φ	$\varphi + \xi$	φ'	$\varphi' + \xi'$
0	$\eta \sec \varphi$	ω	$\omega + \eta' \sec \varphi'$
α	$\alpha + \eta \tan \varphi$	α'	$\alpha' + \eta' \tan \varphi'$

Si partiendo de A con la distancia dada y las coordenadas que comprende la primera columna, calculamos los elementos de B, los resultados numéricos serán (φ') , (ω) , (α') ; mas si partiendo de Δ_1 , con la misma distancia y las coordenadas que comprende la segunda columna, pasamos a B_1 , tendremos por las ecuaciones (14), página 412, omitiendo $d\theta$ (1),

$$\varphi_1' = (\varphi') + \cos \omega \cdot \xi - n \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \varphi \cdot \eta, \quad (3)$$

$$\omega_1 = (\omega) + \frac{\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} \omega}{\cos \varphi'} \xi - \left(\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \alpha'}{\cos \varphi'} \tan \varphi - \sec \varphi \right) \eta,$$

$$\alpha_1' = (\alpha') + \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \varphi'} \xi + \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \omega}{\cos \varphi'} \eta;$$

é igualando estos valores con los que en la cuarta columna se escribieron, resultará

$$\xi' = \varphi') - \varphi' + \cos \omega \cdot \xi - n \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \varphi \cdot \eta,$$

$$\sec \varphi' \cdot \eta' = (\omega) - \omega + \frac{\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} \omega}{\cos \varphi'} \xi + \left(-\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \alpha'}{\cos \varphi'} \tan \varphi + \sec \varphi \right) \eta,$$

$$\tan \varphi' \cdot \eta' = (\alpha') - \alpha' + \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \varphi'} \xi + \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \omega}{\cos \varphi'} \eta.$$

Por donde se ve que la observación de la diferencia de longitud nada revela que no quede también manifiesto por la observación de azimut; sin embargo, servirá para comprobar la operación.

Si en vez de dos puntos disponemos de una red de triángulos, podremos expresar en cada punto donde contemos con datos as-

(1) Sustitúyese en dichas ecuaciones $\delta\varphi = \xi$, $\delta\alpha = \eta \tan \varphi$, y en la segunda de ellas se reemplaza (ω) por $(\omega) + \eta \sec \varphi$.

trónomicos las ξ' y η' en función de ξ y η , y aunque éstas no serán incógnitas determinadas, se convertirán en tales si se imagina el esferoide E — sin que deje de ser paralelo su eje al de rotación de la tierra — colocado de tal modo respecto de S , ó por mejor decir, respecto de la porción de S , por donde la red de triángulos se extiende, que la suma de los cuadrados de las ξ , η y de las ξ' , η' ... puestas todas en función de aquéllas, sea un mínimo. Con esta condición se hallarán ξ , η , y de las ecuaciones antedichas se deducirán después las ξ' , η' de las demás estaciones. Debe suponerse también, para fijar enteramente la posición de E , que el valor medio de ζ en la superficie mencionada se anula ó desvanece.

Por el método expuesto se ve cómo se calcularán en una red geodésica la serie de desvíos respecto de un elipsoide definido E en posición definida: á otro elipsoide que difiera poco de E corresponderá otro sistema poco diferente, y si se dejan indeterminados los semiejes, es decir, si se expresan por símbolos, se podrá, por medio de las ecuaciones de condición á que dé origen, calcular ese elipsoide que llamaremos \mathcal{E} , respecto del cual la suma de los cuadrados de todos los desvíos será un mínimo; elipsoide que vendrá á ser el que mejor represente aquella porción de S por donde la triangulación se extienda.

Es verdad que si $(a) + da$ y $(c) + dc$ son los semiejes de \mathcal{E} , significando (a) , (c) valores numéricos aproximados y da , dc las pequeñas cantidades que han de calcularse, no cabe en rigor que deducidos los excesos esféricos de los triángulos, basando el cálculo en los elementos (a) , (c) , se supongan tales triángulos tendidos sobre \mathcal{E} ; pero el error así cometido es insignificante.

En efecto, siendo proporcional el exceso esférico ε á

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi)^2}{a^4 c^4};$$

si tomamos la diferencial logarítmica y sustituimos en el resultado en vez de φ su valor en función de la latitud reducida u , tendremos

$$-\frac{d\varepsilon}{2\varepsilon} = (1 - \cos 2u) \frac{da}{a} + \cos 2u \frac{dc}{c};$$

y de esta expresión (1) se infiere la pequeñez de la variación de ε , pues en el gran polígono calculado en la página 339 el exceso esférico del triángulo mayor es de $49''.03$, y si suponiendo da , dc de signo contrario, á fin de que el efecto sobre ε resulte de mayor cuantía, ponemos $da = 1000$ pies (304.8 metros) y $dc = -1000$ pies, hallaremos $-de = \frac{1}{1000} \varepsilon$ aproximadamente; luego toda vez que en el mayor triángulo esa variación no llegaría á modificar el exceso esférico en una centésima de segundo, es claro que los lados y ángulos de toda la figura no quedarían afectados en cantidad apreciable por un cambio como el antedicho en los elementos del esferoide.

Definamos \mathcal{E} por $(a) + da$ y $(e) + de$ en vez de hacerlo por el semieje ecuatorial (a) y el polar (c) y reemplacemos en las ecuaciones (14), página 412, $d\theta$ por su valor en función de da y de . Hagamos además, como en el caso que antes se estudió, $d\varphi = \xi$, $dx = \eta \tan \varphi$, y para mayor brevedad escribamos dichas ecuaciones de este modo:

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= (\varphi') + A\xi + B\eta + C da + E de, \\ \omega_1' &= (\omega) + A'\xi + B'\eta + C' da + E' de, \\ \alpha_1' &= (\alpha') + A''\xi + B''\eta + C'' da + E'' de,\end{aligned}$$

siendo B' un coeficiente que comprende un término $\sec \varphi$ como en (3). En estas ecuaciones (φ') , (ω) , (α') indican los elementos astronómicos de B_1 calculados con las latitudes y azimutes observados en A_1 y con las (a) , (e) del esferoide aproximado. Luego si ξ' , η' corresponden á B , se tendrá

(1) Como en dicha diferencial logarítmica desaparece la constante de la proporción, se tiene

$$\frac{d\varepsilon}{2\varepsilon} = 2 \frac{a \cos^2 \varphi da + c \operatorname{sen}^2 \varphi dc}{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - 2 \frac{du}{a} - \frac{dc}{c}.$$

Pero, según las relaciones de la página 164,

$$a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = a^2 \Delta^2,$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\Delta}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} u, \quad \cos \varphi = \Delta \cos u.$$

Sustituyendo estos valores y el de $a^2(1-e^2) = c^2$, se deduce fácilmente la ecuación del texto.

$$\begin{aligned}\xi' &= (\varphi') - \varphi' + A \xi + B \eta + C da + E de, \\ \sec \varphi' \cdot \eta' &= (\omega) - \omega + A' \xi + B' \eta + C' da + E' de, \\ \tan \varphi' \cdot \eta' &= (\alpha') - \alpha' + A'' \xi + B'' \eta + C'' da + E'' de.\end{aligned}$$

4.

El *Account of the Principal Triangulation of Great Britain and Ireland*, páginas 693 y 694, contiene setenta y seis ecuaciones como las antedichas; treinta y cinco deducidas de las latitudes observadas, y las cuarenta y una restantes fundadas en las observaciones de azimutes y longitudes. La solución de estas ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados determina los ejes de ese esferoide particular \mathfrak{C} que representa mejor que otro alguno la superficie de la Gran Bretaña é Irlanda, y determina también, pues da ξ , η relativas al Observatorio de Greenwich, la inclinación de la superficie de \mathfrak{C} en dicho punto respecto de la superficie S en el mismo. De estas ξ , η se deducen las ξ' , η' de todos los demás puntos. Los semiejes de \mathfrak{C} son

$$a = 20\ 927\ 005, \quad c = 20\ 852\ 372.$$

Las ecuaciones de azimut y longitud, por la índole de las observaciones respectivas, son de mucho menor peso que las ecuaciones de latitud, sobre todo las ecuaciones de azimut, donde tiene directo influjo la acumulación de errores de los ángulos observados en la red geodésica, y así se explica que el promedio de las cantidades η halladas sea algo mayor que el de las ξ . Interés ofrece comparar los valores de las cantidades ξ —que podemos decir son los desvíos locales de la gravedad en proyección sobre el meridiano, obtenidos según antes se dijo—con los desvíos deducidos de la forma del suelo en torno de las estaciones, al menos de aquellas donde haya posibilidad de hacer semejante cálculo.

Mas al inferir por la forma del suelo el desvío de la gravedad, tropezamos con una causa de incertidumbre, pues ignoramos hasta qué distancia de la estación debe el cálculo extenderse, si bien por las razones expuestas en la página 155 sea dudoso que las masas distantes tengan realmente influjo. En su virtud, en

la cuarta columna del siguiente cuadro se prescinde de las situadas á más de nueve ó diez millas (de 14 á 16 kilómetros), mientras en la quinta columna se toma en cuenta la influencia acaso ejercida por esas masas:

NOMBRE ESTACIÓN DE LA	SITUACIÓN	DESVIÓ		
		ξ	SEGÚN EL SUELO	
Dunnose.	Cerca de Ventnor, Isla de Wight.	- 1.62	- 1.02	- 0.54
Boniface		+ 0.80	+ 1.94	+ 2.42
Weck Down.		+ 0.58	+ 1.50	+ 1.90
Puerto Valley.	Condado de York.	+ 1.61	+ 2.81	+ 3.29
Clifton		- 2.56	- 0.90	
Burleigh Moor.	»	- 3.54	- 3.03	- 4.55
Hungry Hill.	Cork.	+ 2.92	+ 3.85	+ 5.40
Feaghmain	Kerry.	- 0.88	- 1.95	
Forth.	Wexford.	+ 0.26	- 0.17	+ 1.13
Tawnaglmore.	Mayo.	- 0.95	- 1.43	- 2.30
Lago Foyle.	Londonderry.	- 4.48	- 2.15	- 4.12
Kellie Law.	Condado de Fife.	+ 1.82	+ 2.08	
Monach.	Hébridas.	+ 1.36	+ 0.47	
Ben Hutig.	Sutherland.	- 2.86	- 1.63	- 2.01
Calton Hill.	Edimburgo.	- 5.30	- 2.43	- 3.57
Cowhythe.	Condado de Banff.	- 9.55	(- 2)	(- 5)

Las cantidades relativas á Cowhythe, puestas en las dos últimas columnas, no están calculadas con gran precisión.

Suponiendo proyectada la red geodésica sobre el elipsoide \mathcal{C} , determinado en definitiva, podremos obtener, en cada punto donde contemos con observaciones azimutales, el error aparente del azimut observado en dicho punto. Calculados estos errores en sesenta y un vértices de la triangulación inglesa, resultaron veintitrés inferiores á 3'', diez comprendidos entre 3'' y 4'' y uno de 11''. El error probable de azimut de dicha triangulación en conjunto es de $\pm 0''.69$.

5.

El desvío producido en la dirección de la gravedad en un punto J , por la irregular distribución de las masas que compongan el suelo del país que le rodee, se calculará sin dificultad teniendo un mapa de este país, donde por líneas de nivel ó de

algún otro modo se indiquen las alturas del suelo. Trazando sobre este mapa varios círculos con centro común en J y varias rectas que partan del mismo punto, tendremos el país dividido en una serie de espacios de cuatro lados. Sean α, α' los azimutes de dos rectas consecutivas, r, r' los radios de dos círculos consecutivos. Trátase de hallar la atracción sobre J—ó por mejor decir, la componente de la atracción en dirección septentrional—de la masa M contenida en el espacio comprendido entre los expresados límites de azimut y distancia, suponiendo plana la superficie superior de M. Llamando α, r el azimut y distancia horizontal de cualquier partícula de esta masa, ϱ su densidad y z su altura sobre J, la masa de dicha partícula será $\varrho r d\alpha dr dz$ y la componente que se busca de la atracción—suponiendo ϱ constante—será (1)

$$A = \varrho \int_{\alpha'}^{\alpha} \int_{r'}^{r''} \int_0^h \frac{r^2 \cos \alpha \, d\alpha dr dz}{\sqrt{r^2 + z^2}^{\frac{3}{2}}},$$

designando por h la altura de la superficie superior de M sobre J. De aquí (2)

$$\begin{aligned} A &= \varrho (\sin \alpha' - \sin \alpha) \int_{r'}^{r''} \int_0^h \frac{r^2 \, dr dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= \varrho h (\sin \alpha' - \sin \alpha) \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{(r^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ &= \varrho h (\sin \alpha' - \sin \alpha) \log_e \frac{r' + \sqrt{r'^2 + h^2}}{r'' + \sqrt{r''^2 + h^2}}. \end{aligned}$$

Sólo en casos excepcionales, por ejemplo, cuando inmediato á

(1) La expresión á que se refiere la triple integral proviene del producto

$$\varrho r d\alpha dr dz \cdot \frac{1}{r^2 + z^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \cdot \cos \alpha,$$

cuyo segundo factor es la cantidad inversa del cuadrado de la distancia entre el punto J y la partícula cuyas coordenadas son z, r, α y el tercer factor es el coseno de la inclinación de esta distancia sobre el horizonte.

(2) La segunda y tercera integral se reducen respectivamente á los tipos

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \log_e (x + \sqrt{1+x^2}).$$

la estación existe un terreno muy escarpado, hay que tomar en cuenta h^2 ; pero por lo común puede suprimirse, expresando la atracción debida á M por

$$\varrho h (\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha_r) \log_e \frac{r'}{r_1}$$

de manera que, si las rectas trazadas desde J forman ángulos tales que los senos de los azimutes estén en progresión aritmética, siendo h su diferencia constante, y los radios de los círculos se toman en progresión geométrica, siendo l el logaritmo neperiano de su razón constante, la atracción total hacia el Norte será

$$A = \varrho h l \{ \Sigma (h) - \Sigma (h') \},$$

designando por $\Sigma (h)$ la suma de las alturas de los trozos situados al Norte de la estación y por $\Sigma (h')$ la suma de las alturas de los recayentes al Sur.

Mas si consideramos la tierra como una esfera de radio r y masa M , el ángulo del desvío D producido en la dirección de la gravedad por la atracción A estará dado por la fórmula (1)

$$D = \frac{r^2}{M} A;$$

ó bien, si se fija r en 3960 millas y se llama ϱ_0 la densidad media de la tierra, dicho ángulo expresado en segundos será

$$D = 12'' \cdot 44 \frac{A}{\varrho_0},$$

(1) Como D es cantidad pequeña, puede reemplazarse la tangente por el arco en la igualdad

$$\tan D \doteq A : \frac{M}{r^2},$$

y con esto resulta la primera expresión de D dada en el texto. Sustituyendo en ella $M = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_0$, multiplicando el segundo miembro por 206 265, número de segundos del radio, y verificando las reducciones numéricas, se halla la expresión que sigue á aquélla para el valor $r = 3960$ millas. Si la unidad de longitud en el cálculo de A fuera el kilómetro en vez de la milla, habría que sustituir $r = 6373$ kilómetros y el resultado sería

$$D = 7'' \cdot 73 \frac{A}{\varrho_0}.$$

suponiendo que por unidad de longitud en el cálculo de A se tome la milla.

Luego, en el caso que antes suponíamos, será

$$D = 12'' \cdot 41 \frac{g}{\zeta_0} kl \{ \Sigma(h) - \Sigma(h') \}. \quad (4)$$

Por este método se calculó por primera vez la atracción de Shiehallion en el famoso experimento hecho por el Dr. Maskelyne para determinar ζ_0 .

Si la distancia considerada no fuese bastante reducida para poder prescindir de la curvatura de la superficie terrestre, es fácil ver que, siendo entonces r una distancia angular, la componente, en dirección septentrional, de la atracción de la masa comprendida en el espacio cuya base esté limitada por los azimutes α, α' y las distancias r, r' sería (1)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} g h (\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha) \int_r^{r'} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} r}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} r} dr, \\ &= g h (\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha) \left(\log_o \frac{\tan \frac{1}{2} r'}{\tan \frac{1}{2} r} + \cos \frac{1}{2} r' - \cos \frac{1}{2} r \right). \end{aligned}$$

(1) Llamando R y R + z las distancias respectivas á que se hallan del centro de la tierra el punto J y la partícula que respecto de este punto está á la distancia angular r y á la distancia lineal Δ , la masa de dicha partícula será

$$g (R + z)^2 \operatorname{sen} r \, d\alpha \, dr \, dz,$$

y el coseno del ángulo de inclinación de la recta Δ sobre el horizonte (ángulo que con signo negativo es el complemento del opuesto al lado R + z en el triángulo cuyos otros dos lados son Δ y R) valdrá

$$\frac{R + z}{\Delta} \operatorname{sen} r;$$

luego la componente, en dirección septentrional, de la atracción ejercida por dicha partícula sobre el punto J será

$$a = g \left(\frac{R + z}{\Delta} \right)^3 \operatorname{sen}^2 r \cos \alpha \, d\alpha \, dr \, dz,$$

teniéndose á la par

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= R^2 + (R + z)^2 - 2R(R + z) \cos r \\ &= 4R(R + z) \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2} + z^2. \end{aligned}$$

Pero en el caso arriba estudiado puede desdenarse como de pequeña cuantía la razón $z : R$, y por tanto

La atracción de una meseta elevada, cuya superficie superior sea casi plana y su contorno rectangular, se obtendrá de este modo. Tomando el punto atraído por origen de coordenadas rectangulares—las x, y horizontales y la z vertical,—limitemos el sólido por los planos

$$\begin{aligned} x &= a, & y &= 0 & z &= 0 \\ x &= a', & y &= b & z &= h, \end{aligned}$$

siendo h muy pequeña en comparación con las otras dimensiones $a' - a$, y b . La componente de la atracción, según el eje de las x , es (1)

$$\frac{R+z}{\Delta} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{r}{2}}$$

Sustituyendo este valor y el de $\operatorname{sen} r = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} r \cos \frac{1}{2} r$ en la expresión de la componente a , é indicando las integraciones que deben efectuarse, se tiene

$$A = \frac{1}{2} g \int_{\alpha}^{\alpha'} \int_{r'}^{r''} \int_0^h \frac{\cos^2 \frac{1}{2} r}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} r} \cos \alpha \, da \, dr \, dz.$$

Hecha la integración con respecto á z y α , se halla la primera fórmula del texto. La segunda se deduce con facilidad, pues

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2} r}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} r} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} r} - \operatorname{sen} \frac{1}{2} r.$$

(1) La expresión de la diferencial procede del producto

$$2 \, dx \, dy \, dz \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

La integral con respecto á y se reduce al primer tipo indicado en la nota (2) de la página 437. En cuanto á la segunda integral, escribiendo

$$1 + \frac{x^2 + z^2}{b^2} = v^2,$$

y designando por L el logaritmo neperiano ó \log_e , se tiene

$$\begin{aligned} 2b \int \frac{x \, dx}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + z^2 + b^2}} &= \int \frac{2 \, dv}{v^2 - 1} = \\ \int \frac{dv}{v-1} - \int \frac{dv}{v+1} &= L \frac{v-1}{v+1} = 2L \frac{\sqrt{v^2-1}}{v+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \varrho \int_a^{a'} \int_0^{z^3} \int_0^{z^h} \frac{x dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 &= \varrho \int_a^{a'} \int_0^{z^h} \frac{bx dx dz}{(x^2 + z^2)(x^2 + b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 &= \varrho \int_0^{z^h} dz \log_e \left\{ \left(\frac{a'^2 + z^2}{a^2 + z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{b + \sqrt{b^2 + a'^2 + z^2}}{b + \sqrt{b^2 + a^2 + z^2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Mas desdeñando las potencias elevadas de z^2 y escribiendo

$$b = a \cot \varphi, \quad a' = a' \cot \varphi',$$

tal expresión se convierte en (1)

$$\begin{aligned}
 \varrho \int_0^{z^h} \log_e \left\{ \frac{\tan \frac{1}{2} \varphi'}{\tan \frac{1}{2} \varphi} \left(1 + \frac{z^2}{a'^2} \cos \varphi' - \frac{z^2}{a^2} \cos \varphi \right) \right\} dz, \\
 = \varrho h \log_e \frac{\tan \frac{1}{2} \varphi'}{\tan \frac{1}{2} \varphi} + \frac{1}{2} \varrho h^3 \left(\frac{\cos \varphi'}{a'^2} - \frac{\cos \varphi}{a^2} \right). \quad (5)
 \end{aligned}$$

El desvío correspondiente se hallará reemplazando ϱ por $6'' \cdot 22$, si la densidad de la masa que atrae es la mitad de la densidad media de la tierra.

Suponiendo, por ejemplo, una meseta que tuviera doce millas

(1) En virtud de las relaciones

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1, \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

se tiene con la aproximación arriba indicada

$$b + \sqrt{b^2 + a^2 + z^2} = a \cot \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Con la misma aproximación es

$$(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a^2} \right).$$

Luego

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + a^2 + z^2}}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \cot \frac{1}{2} \varphi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{a^2} \cos \varphi \right).$$

La integral del texto se deduce fácilmente, pues, limitando la serie logarítmica al primer término, es

$$\log_e (1 + Bz^2) + \log_e C = Bz^2 + \log_e C.$$

de largo (19 kilómetros) por ocho millas (13 kilómetros) de ancho, y una altura de 500 pies (152 metros), el desvío en un punto exterior que distase del punto medio del lado mayor y perpendicularmente á este lado dos millas (3 kilómetros) sería de $1''\cdot47$. En tal caso, el término con h^3 sería insignificante.

La atracción que un prisma de longitud indefinida, y cuya sección sea un trapezoide $HSS'H'$, ejerza sobre un punto O situado en el plano de una cara SS' , puede expresarse por una

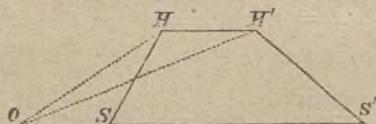


Fig. 59.

fórmula bastante sencilla, por medio de la cual se obtendrá aproximadamente el desvío producido por una cordillera rectilínea de sección casi uniforme ó constante. Sea

$$\begin{aligned} HOS &= \varphi, & H'OS &= \varphi', \\ HSS' &= \sigma, & H'S'S' &= \sigma', \\ OS &= c, & OS' &= c', \\ OH &= b, & OH' &= b'; \end{aligned}$$

y además

$$z^2 + (c + z \cot \sigma)^2 = u^2, \quad z^2 + (c' - z \cot \sigma')^2 = u'^2.$$

Tomando en las integrales por límites respectivos

$$\text{de } y \dots \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}, \quad \text{de } x \dots \begin{cases} c' - z \cot \sigma' \\ c + z \cot \sigma \end{cases}, \quad \text{de } z \dots \begin{cases} h \\ 0 \end{cases},$$

se tendrá:

$$\begin{aligned} A &= 2g \iiint \frac{x dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= 2g \iint \frac{x dx dz}{x^2 + z^2} = g \int \log \left(\frac{u'}{u} \right)^2 dz, \\ &= g z \log \left(\frac{u'}{u} \right)^2 - g \int z \frac{d}{dz} \log \left(\frac{u'}{u} \right)^2 dz. \end{aligned}$$

Efectuada la integración, que no ofrece dificultad, se halla (1)

$$A = 2 \log_e \left\{ \left(\frac{c'}{b'} \right)^{c' \operatorname{sen} 2\sigma'} \cdot \left(\frac{c}{b} \right)^{c \operatorname{sen} 2\sigma} \cdot \left(\frac{b'}{b} \right)^{2h} \right\} \\ + 2c \left\{ c' \varphi' \operatorname{sen}^2 \sigma' - c \varphi \operatorname{sen}^2 \sigma \right\};$$

y reemplazando 2 por $6'' \cdot 22$, resultará el valor del desvío en el

(1) Puesto que

$$z \frac{d(u^2)}{dz} = 2 \left\{ u^2 - c(z \cot \sigma + c) \right\},$$

se tendrá, designando por L el logaritmo neperiano,

$$z \frac{dL u^2}{dz} = 2 \left\{ 1 - \frac{c(z \cot \sigma + c)}{u^2} \right\},$$

ó bien

$$z \frac{dL u^2}{dz} = 2 - \frac{zc \operatorname{sen} 2\sigma + 2c^2 \operatorname{sen}^2 \sigma}{\left(z + \frac{c}{2} \operatorname{sen} 2\sigma \right)^2 + c^2 \operatorname{sen}^4 \sigma}.$$

El primer término se destruye con el primero de la expresión análoga relativa á u' . La integral del segundo término multiplicado por dz es del tipo

$$\int \frac{(Mx + N)dx}{(x - \beta)^2 + \gamma^2} = \frac{M}{2} L \left\{ (x - \beta)^2 + \gamma^2 \right\} + \frac{M\beta + N}{\gamma} \operatorname{arc} \tan \frac{x - \beta}{\gamma}.$$

Luego designando la de dicho término por Y , se tendrá

$$Y = \frac{c}{2} \operatorname{sen} 2\sigma L \left\{ \left(z + \frac{c}{2} \operatorname{sen} 2\sigma \right)^2 + c^2 \operatorname{sen}^4 \sigma \right\} \\ + 2c \operatorname{sen}^2 \sigma \operatorname{arc} \tan \frac{z + \frac{c}{2} \operatorname{sen} 2\sigma}{c \operatorname{sen}^2 \sigma};$$

de donde se deduce, reemplazando por z los límites h y 0 y expresando la tangente de la diferencia de dos arcos en función de las tangentes de éstos,

$$\left(Y \right)_0^h = \frac{c}{2} \operatorname{sen} 2\sigma L \frac{h^2 + (c + h \cot \sigma)^2}{c^2} + 2c \operatorname{sen}^2 \sigma \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{h}{c + h \cot \sigma}.$$

Pero

$$h^2 + (c + h \cot \sigma)^2 = b^2, \quad \frac{h}{c + h \cot \sigma} = \tan \varphi,$$

y por consiguiente

$$\left(Y \right)_0^h = L \left(\frac{c}{b} \right)^{c \operatorname{sen} 2\sigma} - 2c \varphi \operatorname{sen}^2 \sigma,$$

supuesto de que la densidad de las montañas sea la mitad de la densidad media de la tierra.

Para sección triangular, como SVS' en la figura 60, el desvío v en un punto P de la pendiente SV se deducirá de la fórmula

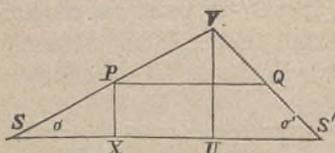


Fig. 60.

precedente, y trazando PQ paralela á la base y PX perpendicular á la misma, será (1)

$$v = 6'' \cdot 22 \left\{ PX \log_e \left(\frac{PS'}{PS} \right)^2 + \frac{1}{2} PQ \operatorname{sen} 2\sigma' \log_e \left(\frac{PS'}{PV} \right)^2 + 2PQ \operatorname{sen}^2 \sigma' (\sigma + QPS') \right\}.$$

(1) En el primer paréntesis de la fórmula precedente de A el segundo factor se convierte en la unidad cuando en la figura 59 el punto O' se traslada á S. A su vez, el tercer factor se reduce á la unidad cuando en dicha figura el punto H' se confunde con el H. Por consiguiente, si v_1 , v_2 son los desvíos respectivos de la vertical de P, figura 60, producidos por la atracción ejercida sobre este punto por los dos prismas, superior é inferior, cuyas secciones son PVQ y SPQ3', se tendrá, puesto que el ángulo SPQ = $180^\circ - \sigma$ y el ángulo S'QP = $180^\circ - \sigma'$,

$$v_1 = 6'' \cdot 22 \left\{ \log_e \left(\frac{PQ}{PV} \right)^{PQ \operatorname{sen} 2\sigma'} + 2PQ\sigma \operatorname{sen}^2 \sigma' \right\},$$

$$v_2 = 6'' \cdot 22 \left\{ \log_e \left(\frac{PQ}{PS'} \right)^{-PQ \operatorname{sen} 2\sigma'} + \log_e \left(\frac{PS'}{PS} \right)^2 \cdot X + 2PQ \cdot QPS' \operatorname{sen}^2 \sigma' \right\}.$$

Sumando estos dos valores, é invirtiendo los términos del primer logaritmo de la igualdad segunda por causa del exponente negativo, resulta la fórmula del texto.

Si, por ejemplo, es la altura $VU =$ media milla, $SU =$ una milla (1.6 kilómetro) y $US' =$ dos millas, se tendrán los desvíos, en segundos, consignados en la figura 61, relativos á diferentes puntos.

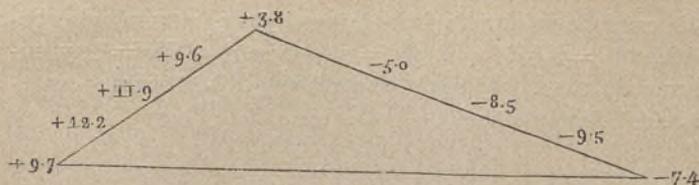


Fig. 61.

La máxima atracción se verificará en este caso próximamente á una cuarta parte de la altura á contar desde la base.

6.

Ofrece interés averiguar la cuantía del error que por causa de tales atracciones se comete al nivelar á través de una cordillera. Por ejemplo, efectuada la nivelación topográfica desde S hasta S' pasando por V , figura 60, si se hiciera la misma directamente de S á S' por un túnel imaginario, ¿qué diferencia, originada por la atracción de la cordillera, se hallaría entre las alturas en ambos casos obtenidas?

Para la operación, el observador coloca el nivel de alcohol en mitad del espacio comprendido entre dos miras verticales, situadas una delante y otra detrás, y la diferencia de nivel está dada por $R, - R'$, siendo R , la lectura de la mira posterior y R' la de la mira anterior. Mas si existe un desvío v en la vertical—contándose como positiva la atracción cuando se verifica en el sentido en que la nivelación avanza,— y es dx la corta distancia horizontal de una á otra mira en cualquiera de las posiciones del instrumento, la diferencia de alturas medida $R, - R'$ requerirá la corrección $v dx$. Luego, designando por v' el desvío en cualquier punto de la recta SS' , y llamando H la altura obtenida por el camino SVS' y H' la hallada por el camino directo SS' , se tendrá

$$H + \int v dx = H' + \int v' dx,$$

y por consiguiente la diferencia entre las dos alturas obtenidas será

$$\int v dx - \int v' dx.$$

La *Astronomische Nachrichten*, número 1916, páginas 314 y 318, contiene un estudio de la integral $\int v dx$; el resultado, haciendo $SV = s$, $VS' = s'$, $SS' = a$, el área de $SVS' = \Delta$, y suprimiendo por un momento el coeficiente $6''\cdot 22$, puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{1}{2\Delta} \int v dx = \cos(\sigma' - \sigma) \left\{ \frac{s}{s'} \log \frac{a}{s} - \frac{s'}{s} \log \frac{a}{s'} \right\} + \sin(\sigma' - \sigma) \left\{ \frac{s'\sigma'}{s} + \frac{s\sigma}{s'} \right\}.$$

Por otra parte, $-\int v' dx$ es el exceso de la potencial de la masa en S sobre la potencial de la misma en S', y por lo tanto, según lo dicho en la página 150,

$$-\frac{1}{2\Delta} \int v' dx = -\cos(\sigma' + \sigma) \left\{ \frac{s}{s'} \log \frac{a}{s} - \frac{s'}{s} \log \frac{a}{s'} \right\} + \sin(\sigma' + \sigma) \left\{ \frac{s'\sigma'}{s} - \frac{s\sigma}{s'} \right\}.$$

Sumando, pues, ambas fórmulas, la diferencia $H - H'$ de las dos nivelaciones estará dada por la expresión (1)

$$2\Delta \left\{ \left(\frac{h}{s'} \right)^2 \log \left(\frac{a}{s} \right)^2 - \left(\frac{h}{s} \right)^2 \log \left(\frac{a}{s'} \right)^2 + \sigma' \sin 2\sigma - \sigma \sin 2\sigma' \right\},$$

restableciendo en ella el coeficiente $6''\cdot 22$. Para valuar en pies esta pequeña diferencia ha de multiplicarse además la fórmula por $5280 \times \sin 1''$, ó en otros términos, en vez de 2Δ escribir en ella $0\cdot 318 \Delta$ (2).

Si, por ejemplo, la altura mide una milla (1.6 kilómetros), la

(1) $h = s \sin \sigma = s' \sin \sigma'$.

(2) En vez de esto se escribirá $0\cdot 374 \Delta$ si se quiere la diferencia $H - H'$ en decímetros, dando a , h , s , s' en kilómetros y el área Δ en kilómetros cuadrados.

proyección de la vertiente s otra milla y la de la vertiente s' tres millas, discreparán las dos nivelaciones en 0.11 pie (3.4 centímetros).

7.

Antes de concluir esta materia, indicaremos sucintamente cómo se dedujo la densidad media de la tierra de las observaciones de latitud, que enlazadas con los trabajos de la triangulación inglesa se hicieron en 1855 en tres estaciones situadas en Arthur's Seat, en Edimburgo. Estaba la primera de ellas en la vertiente septentrional de la colina, á un tercio próximamente de su altura á contar desde la base; la segunda en la cumbre, y la tercera en la falda meridional, casi á la misma altura que la primera. Compulsadas 1260 observaciones de estrellas, resultó que la diferencia δ_1 de latitud entre la estación septentrional y la situada en la cumbre y la δ_2 entre esta estación y la meridional eran respectivamente

$$\delta_1 = 25''.53 \pm 0''.04, \quad \delta_2 = 17''.00 \pm 0''.04;$$

mientras que, atendidas las distancias trigonométricas de las estaciones, tales diferencias debían ser

$$\delta_1' = 24''.27, \quad \delta_2' = 14''.19.$$

Aplicando la fórmula (4), se hallaban respectivamente en la estación que estaba al Norte, en la de la cumbre y en la situada al Sur los siguientes desvíos septentrionales:

$$- 5''.237z, \quad - 2''.399z, \quad + 2''.700z,$$

designando por z la razón de la densidad media de la colina á la de la tierra. Pero había algún motivo para creer que existía un desvío general hacia el Sur común á las tres estaciones, y en su consecuencia, llamándole $-\psi$ é igualando las latitudes astronómicas, ya corregidas de atracción, con las latitudes que de la triangulación se deducían, se tenía:

$$\begin{aligned} \varphi + \delta_1 - 5.237z + \psi &= \varphi_1 + \delta_1' \\ \varphi - 2.399z + \psi &= \varphi_1 \\ \varphi - \delta_2 + 2.700z + \psi &= \varphi_1 - \delta_2', \end{aligned}$$

ó haciendo $\varphi + \psi - \varphi_1 = x$:

$$x - 5.237z + \delta_1 - \delta_1' = 0$$

$$x - 2.399z \quad \quad \quad = 0$$

$$x + 2.700z + \delta_2' - \delta_2 = 0;$$

de donde, una vez sustituidos los valores de $\delta_1, \delta_1', \delta_2, \delta_2'$, se sacaba z . En conclusión, habiendo hallado que la densidad media de la colina era de 2.75, se infería que la de la tierra debía ser de 5 316.

Puede consultarse un admirable ensayo de Bessel sobre la materia de este capítulo en la *Astronomische Nachrichten*, números 329, 330 y 331, con el título de *Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde, auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen.*

CAPÍTULO XIII

FIGURA DE LA TIERRA

Ya vimos en el capítulo precedente, que si se comparaba la superficie de la Gran Bretaña con la de un elipsoide de revolución, se notaban irregularidades que parecían acusar error de varios segundos en cada una de las latitudes observadas; pero vimos también que la distribución irregular de las masas del suelo en torno de las estaciones astronómicas—aunque no en todos casos salvara por completo toda la cuantía de los errores,—bastaba para explicar la magnitud de aquellos que aparecían al comparar la superficie matemática con la del elipsoide de revolución que á la antedicha más se aproxima. En verdad, el valor absoluto del error probable allí cometido al determinar por observación una latitud, á causa de la perturbación local de la gravedad, no baja de $1''\cdot5$, y esta cantidad excede mucho al valor absoluto del error que en toda operación geodésica puede provenir de los de observación y medida. Pero cabe considerar estos inevitables errores de latitud como puramente accidentales, y manejándolos por el método de los mínimos cuadrados, deducir de aquí, para representar mejor la figura de la tierra, el elipsoide de tres ejes ó el elipsoide de revolución que convierta en un mínimo la suma de los cuadrados de todas las correcciones que hayan de hacerse en las latitudes observadas. Walbeck parece haber sido el primero que resolvió de este modo el problema, aunque sólo parcialmente. Schmidt lo perfeccionó después y Bessel lo explanó por completo.

1.

Echaremos una ojeada á varios de los primeros resultados obtenidos acerca de la figura de la tierra. Los de Laplace, en su *Mecánica celeste*, dejan bastante que desear por razón del estado imperfectísimo de las medidas geodésicas en su tiempo. En las notas puestas por Bowditch á dicha obra en su traducción inglesa, tomo II, página 453, la longitud, en pies, del arco de meridiano que se extiende desde el Ecuador hasta la latitud φ está dada por la fórmula (1)

$$S = 101.259564 \varphi'' - 50209.2 \operatorname{sen} 2\varphi - 60.0 \operatorname{sen} 4\varphi,$$

siendo φ'' la latitud expresada en segundos. La curva que esta ecuación representa no es rigurosamente una elipse, sino una línea deprimida respecto de la curva de esta clase descrita sobre los mismos ejes, si bien la máxima depresión es sólo de 59 pies (18 metros) á la latitud de 45° .

En la *Encyclopedia Metropolitana* se publicó por el astrónomo Airy, con el título de *Figura de la Tierra*, un detenido estudio en que se discuten catorce arcos de meridiano y cuatro de paralelo. Resultan como semiejes, tomando el pie por unidad (2):

$$a = 20\ 923\ 713, \quad c = 20\ 853\ 810,$$

cuya razón es $a : c = 299.33 : 298.33$.

El estudio hecho por Bessel pocos años después, en 1841, se halla en la *Astronomische Nachrichten*, números 333 y 438, y de él se desprende:

$$a = 20\ 923\ 600, \quad c = 20\ 853\ 656,$$

$$a : c = 299.15 : 298.15.$$

Muy notable era semejante conformidad entre los resultado

(1) En metros, el valor de dicha longitud es

$$S = 30.863638 \varphi'' - 15303.6 \operatorname{sen} 2\varphi - 18.3 \operatorname{sen} 4\varphi.$$

(2) En metros, los valores hallados por Airy son:

$$a = 6\ 377\ 491, \quad c = 6\ 356\ 184,$$

y los obtenidos por Bessel:

$$a = 6\ 377\ 456, \quad c = 6\ 356\ 137.$$

de Airy y Bessel, obtenidos por métodos de cálculo muy distintos; mas después se vió que, por defecto de los datos entonces poseídos, ambos resultados adolecían de considerable error.

En los diez y seis años siguientes aumentó mucho el número de datos, porque se extendió el arco ruso desde 8° hasta 25°, el inglés desde 3° hasta 11° y el de la India 5½°. El *Account of the Principal Triangulation of Great Britain and Ireland* contiene un estudio hecho por el capitán Clarke, I. R., tomando en cuenta estos nuevos arcos. Los datos en que se funda son: 1.º, los arcos francés é inglés, que en prolongación uno de otro componen 22° 9'; 2.º, el arco ruso, de 25° 20'; 3.º, el arco indio, de 21° 21'; 4.º, el arco indio primeramente medido, de 1° 35'; 5.º, el arco prusiano, que midió Bessel, de 1° 30'; 6.º, el arco del Perú, de 3° 7'; 7.º, el arco de Hannover, de 2° 1', y 8.º, el arco danés, de 1° 32'. Pero estos pequeños arcos influían muy poco en el resultado.

En dicho estudio, la figura del meridiano no se ciñe á la forma elíptica. Supónese el radio de curvatura expresado por la fórmula (1)

$$q = A + 2B \cos 2\varphi + 2C \cos 4\varphi, \quad (1)$$

que corresponde al de una elipse en el caso particular en que

(1) Si en la primera fórmula (7) de la página 165

$$q = a (1 - e^2) (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

se sustituye, de conformidad con lo que se hizo en la página 175,

$$e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2}, \text{ lo cual supone } n = \frac{a-c}{a+c},$$

se hallará, limitándose á la segunda potencia de n ,

$$q = c \left\{ \left(1 + n + \frac{5}{4} n^2 \right) - (3n + 3n^2) \cos 2\varphi + \frac{15}{4} n^2 \cos 4\varphi \right\};$$

ó bien

$$q = A' + 2B' \cos 2\varphi + 2C' \cos 4\varphi,$$

entre cuyos coeficientes existe, con la aproximación antedicha, la relación indicada en el texto $5B'^2 - 6A'C' = 0$.

$5B^2 - 6AC = 0$. Las coordenadas x, y del punto Q, cuya latitud es φ , son (1):

$$x = - \int Q \operatorname{sen} \varphi d\varphi = (A - B) \cos \varphi + \frac{1}{3} (B - C) \cos 3\varphi + \frac{1}{15} C \cos 5\varphi,$$

$$y = \int Q \cos \varphi d\varphi = (A + B) \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{3} (B + C) \operatorname{sen} 3\varphi + \frac{1}{15} C \operatorname{sen} 5\varphi;$$

de donde se deducen desde luego los semiejes (2)

$$a = A - \frac{2}{3} B - \frac{2}{15} C, \quad c = A + \frac{2}{3} B - \frac{2}{15} C.$$

Para saber cuánto discrepa esta curva de la elipse descrita con los mismos semiejes, sean x', y' las coordenadas de un punto P á la latitud φ en dicha elipse; si la proyección de PQ sobre la última es la magnitud PS y sobre la normal á ella SQ, se tendrá:

$$\begin{aligned} PS &= - (x - x') \operatorname{sen} \varphi + (y - y') \cos \varphi, \\ SQ &= (x - x') \cos \varphi + (y - y') \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}$$

Designando estas magnitudes por δs y δr , se demuestra que (3)

$$(1) \quad \begin{aligned} 2 \cos m \varphi \operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{sen} (m + 1) \varphi - \operatorname{sen} (m - 1) \varphi, \\ 2 \cos m \varphi \cos \varphi &= \cos (m + 1) \varphi + \cos (m - 1) \varphi. \end{aligned}$$

(2) Los semiejes corresponden á $\varphi = 0^\circ$ y $\varphi = 90^\circ$. Para la elipse descrita con los mismos se tendrá:

$$a = A' - \frac{2}{3} B' - \frac{2}{15} C', \quad c = A' + \frac{2}{3} B' - \frac{2}{15} C',$$

y comparando con los valores correlativos arriba consignados, se deduce:

$$B' = B, \quad A - A' = \frac{2}{15} (C - C').$$

(3) En virtud de las relaciones establecidas en la nota anterior, se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} x - x' &= (A - A') \cos \varphi - \frac{1}{3} (C - C') \cos 3\varphi + \frac{1}{15} (C - C') \cos 5\varphi, \\ y - y' &= (A - A') \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{3} (C - C') \operatorname{sen} 3\varphi + \frac{1}{15} (C - C') \operatorname{sen} 5\varphi, \\ \delta s &= \frac{2}{15} (C - C') \operatorname{sen} 4\varphi, \\ \delta r &= \frac{2}{15} (C - C') \operatorname{sen}^2 2\varphi; \end{aligned}$$

pero de la relación $5B^2 - 6A'C' = 0$ se infiere

$$C' = \frac{5}{6} \frac{B^2}{A'}, \quad \text{ó bien } C' = \frac{5}{6} \frac{B^2}{A};$$

porque siendo C pequeña con relación á A y la diferencia $A - A'$ del mismo orden que $C - C'$, es decir, del orden ϵ^4 , la razón $A':A$ puede reemplazarse por la unidad. Sustituyendo este valor de C' en las expresiones precedentes de δs y δr , resultan las consignadas en el texto.

$$\delta s = \frac{4A}{45} \left\{ 6 \frac{C}{A} - 5 \frac{B^2}{A^2} \right\} \sin 4\varphi,$$

$$\delta r = \frac{2A}{45} \left\{ 6 \frac{C}{A} - 5 \frac{B^2}{A^2} \right\} \sin^2 2\varphi.$$

La última es el valor de la proeminencia de la curva (1) respecto de la elipse de idénticos ejes.

La distancia, sobre la curva (1), de dos puntos cuyas latitudes son $\varphi - \frac{1}{2}\alpha$ y $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$, es (1)

$$s = A\alpha + 2B \sin \alpha \cos 2\varphi + C \sin 2\alpha \cos 4\varphi.$$

Finalmente, añadiendo á cada una de las latitudes observadas en los diferentes arcos una corrección x para que estén de acuerdo con la curva (1), se determinan A, B, C, imponiendo como condición que $\Sigma (x^2)$ sea un mínimo absoluto. Los semiejes obtenidos son (2):

$$a = 20\ 927\ 197, \quad c = 20\ 855\ 493,$$

$$a : c = 291.86 : 290.86.$$

La cantidad δr que la curva sobresale de la elipse de idénticos ejes es $(177 \pm 70) \sin^2 2\varphi$, por donde se ve que dicha curva apenas difiere de la indicada elipse. Aceptando esta forma, los mismos datos darían (3):

$$a = 20\ 926\ 348, \quad c = 20\ 855\ 233,$$

$$a : c = 294.26 : 293.26.$$

Sin embargo, tales resultados adolecían de algún error por la incertidumbre habida entonces respecto al valor exacto de la unidad de longitud á que estaba referida la mitad meridional del

$$(1) \quad s = \int_{\varphi - \frac{1}{2}\alpha}^{\varphi + \frac{1}{2}\alpha} \rho \, d\varphi.$$

(2) En metros:

$$a = 6\ 378\ 552, \quad c = 6\ 356\ 697.$$

(3) En metros:

$$a = 6\ 378\ 294, \quad c = 6\ 356\ 618.$$

arco de la India—incertidumbre disipada después midiendo de nuevo el arco de Damargida á Punnaë.

2.

En las *Memoirs of the R. A. Society*, tomo XXIX, puede verse un estudio de la figura de la tierra, suponiendo sea tal vez elipsoide de tres ejes; estudio inspirado por el *Essai d'une détermination de la véritable Figure de la Terre*, del general T. F. de Schubert. Para dar idea de estos trabajos hay que definir ante todo los paralelos y meridianos, entendiendo siempre por colatitud de un punto el ángulo que la normal á la superficie en dicho punto forma con el eje de rotación. Defínese el meridiano: el lugar de los puntos cuyo cenit esté en un mismo círculo máximo celeste, que tenga sus polos sobre el Ecuador, ó bien el lugar donde las normales á la superficie sean perpendiculares á una recta, dada en el plano del Ecuador. En el esferoide coincide este lugar geométrico con la línea que sigue la dirección de Sur á Norte; pero como en el elipsoide son curvas distintas, llamaremos la última la línea norte.

Designando por a , b los dos semiejes ecuatoriales, mayor y menor respectivamente, y por c el semieje polar, la ecuación de la superficie será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2)$$

Como los cosenos de dirección de la normal en x , y , z son proporcionales á

$$\frac{x}{a^2}, \quad \frac{y}{b^2}, \quad \frac{z}{c^2},$$

es fácil ver que los puntos del paralelo cuya latitud sea φ estarán ligados por la ecuación (1)

(1) Designando por λ , μ , ν los números ó razones precedentes, se tiene

$$\text{sen}^2 \varphi = \frac{\nu^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{c^4} \cot^2 \varphi = 0. \quad (3)$$

A su vez, puesto que en el meridiano las normales á la superficie han de ser perpendiculares á la recta cuyos cosenos de dirección tienen las relaciones

$$-\operatorname{sen} \omega : \cos \omega : 0,$$

una ecuación de ese meridiano será

$$-\frac{x}{a^2} \operatorname{sen} \omega + \frac{y}{b^2} \cos \omega = 0, \quad (4)$$

estando el extremo positivo del semieje a á la longitud 0.

De las ecuaciones (2), (3), (4), escribiendo (1)

$$a^2(1-i) = k^2 = b^2(1+i),$$

se deduce:

$$x = \frac{k}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\cos \omega}{1-i}, \quad (5)$$

$$y = \frac{k}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \omega}{1+i},$$

$$z = \frac{k}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c^2 \tan \varphi}{k^2},$$

$$N = 1 + \frac{c^2}{k^2} \tan^2 \varphi + \frac{i \cos 2\omega + i^2}{1-i^2}.$$

Para determinar la línea norte, veamos en general cuál es la descrita sobre la superficie del elipsoide por un punto que se mueve, encaminándose siempre hacia otro fijo x', y', z' . Dos puntos consecutivos de dicha curva, cuyas coordenadas sean x, y, z ; $x+dx, y+dy, z+dz$, estarán enlazados por la condición

$$\frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy + \frac{z}{c^2} dz = 0. \quad (6)$$

(1) Equivale esto á escribir $i = (a^2 - b^2) : (a^2 + b^2)$.

La ecuación de todo plano que pase por los dos puntos xyz y $x'y'z'$ será

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0;$$

mas tratándose del plano que contenga la normal en xyz y el punto $x + dx, y + dy, z + dz$, existirán otras dos ecuaciones entre A, B, C. Luego eliminando dichas cantidades, la ecuación diferencial de la curva buscada estará dada por la determinante

$$\begin{vmatrix} x' - x & y' - y & z' - z \\ dx & dy & dz \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \end{vmatrix} = 0.$$

La línea norte, caso particular de esta curva general, correspondiente á $x' = 0, y' = 0, z' = \infty$, tendrá por ecuación diferencial (1)

$$a^2 y dx - b^2 x dy = 0, \quad (7)$$

cuya integral es $x^{a^2} = C y^{b^2}$. Luego dicha línea será de *máxima pendiente* respecto del Ecuador.

Sea ahora S un punto de la superficie del elipsoide, punto situado, por ejemplo, en la octava parte de esta superficie, cuyas x, y, z son todas positivas, y sean SN, SM, SP porciones infinitamente pequeñas de la línea norte, de la línea meridiana y del paralelo que pasen por S: se piden los ángulos formados entre estas líneas.

De las ecuaciones (6) y (7) se deduce que las razones

$$dx : dy : dz$$

(1) Dividiendo por z' los términos de la tercera columna de la determinante, y suponiendo después $z' = \infty$, el primer término se convierte en la unidad, mientras que el segundo y el tercero se anulan. Obiténesse como consecuencia la ecuación (7), y como las variables quedan separadas dividiendo por xy , la integración es fácil. Manifiesta dicha ecuación (7) que la razón $dy : dx$ es inversa de la de las derivadas parciales de z respecto de x ó y , condición de las líneas de máxima pendiente.

equivalen á

$$-b^2xz : -a^2yz : c^2 \left(\frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x}{a^2} \right);$$

luego estas cantidades son proporcionales á los cosenos de dirección de SN. A su vez, diferenciando la ecuación (4) del meridiano y á la par atendiendo á la (6), resultan las razones $dx : dy : dz$ expresadas por

$$-a^2z \cos \omega : -b^2z \operatorname{sen} \omega : c^2 (x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega);$$

luego estas cantidades son proporcionales á los cosenos de dirección de SM. Finalmente, diferenciando la ecuación (3) del paralelo, se halla, en virtud de la (6), que las razones $dx : dy : dz$ son iguales á

$$-a^2yz \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\cot^2 \varphi}{c^2} \right) : b^2xz \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cot^2 \varphi}{c^2} \right) : c^2xy \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

luego estas cantidades son proporcionales á los cosenos de dirección de SP.

De tales razones se deducen sin dificultad los ángulos que se desean. Esto sentado, siendo i cantidad muy pequeña, cuyo cuadrado puede desdeseñarse, las coordenadas x, y, z serán proporcionales á

$$(1 + i) \cos \omega : (1 - i) \operatorname{sen} \omega : \frac{c^2}{k^2} \tan \varphi,$$

y substituyendo estos valores en las razones precedentes se hallará en conclusión (1)

(1) Hállanse los cosenos de dirección relativos á las líneas SN, SM y SP, dividiendo los números proporcionales á los tres cosenos correspondientes á cada una de ellas por la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de dichos tres números. Limitando el cálculo á la primera potencia de i , y designando tales cosenos por α, β y γ , sus valores para SN, SM y SP son respectivamente:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = -\operatorname{sen} \varphi \cos \omega, & \alpha_2 = -\operatorname{sen} \varphi \cos \omega (1 + 2i \operatorname{sen}^2 \omega), \\ \beta_1 = -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega, & \beta_2 = -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega (1 - 2i \cos^2 \omega), \\ \gamma_1 = \cos \varphi, & \gamma_2 = \cos \varphi, \end{array}$$

$$\text{MSP} = \frac{\pi}{2} - i \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\omega - \frac{ic^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\omega}{c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi} \quad (8)$$

$$\text{NSP} = \frac{\pi}{2} - \frac{ic^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\omega}{c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi}$$

Si, por ejemplo, hubiera entre a y b la diferencia de una milla (1.6 kilómetro), el ángulo entre el meridiano y el paralelo en el punto situado á los 45° de longitud, y á la latitud φ , sería inferior á un ángulo recto en la cantidad de $105'' \operatorname{sen} \varphi$ próximamente, y un ángulo de este valor quedaría manifiesto en las operaciones geodésicas de primer orden, si bien sería menester para ello prolongar algún tanto la medición del meridiano y del paralelo.

Suponiendo la tierra elipsoidal, las direcciones de las curvaturas principales de la superficie no coincidirán en realidad con los paralelos, meridianos ó líneas nortes. Si no se encuentra S á una latitud elevada, una de las líneas de curvatura SR que pasan por S seguirá un trozo casi la dirección de SP , pues según puede demostrarse será el ángulo (1)

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -\operatorname{sen} \omega (1 + 2iA \cos^2 \omega), \\ \beta_3 &= \cos \omega (1 - 2iA \operatorname{sen}^2 \omega), \\ \gamma_3 &= iA \operatorname{sen} 2\omega \cot \varphi, \end{aligned}$$

escribiendo

$$A = \frac{c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi}$$

Sustituídos estos valores en las ecuaciones

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \text{MSP} \right) = \alpha_1 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3,$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \text{NSP} \right) = \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3,$$

resultan las expresiones del texto, pues en los primeros miembros pueden reemplazarse los senos por los arcos.

(1) Escribiendo $B = c^2 : (k^2 - c^2)$, y llamando α , β y γ los cosenos de los ángulos que con los ejes de las x , y , z forma la tangente en el punto S á la línea de que se trata, se tiene

$$\alpha : \beta : \gamma = -\operatorname{sen} \omega (1 + 2iB \tan^2 \varphi) : \cos \omega : iB \operatorname{sen} 2\omega \tan \varphi,$$

como puede verse aplicando la fórmula que para obtener la razón $\alpha : \beta$

$$\text{RSN} = \frac{\pi}{2} - i \operatorname{sen} 2\omega \operatorname{sen} \varphi \frac{c^2 \sec^2 \varphi}{k^2 - c^2};$$

mas no sucederá lo mismo á altas latitudes, porque cerca de los puntos umbilicales las líneas de curvatura son aproximadamente cónicas confocales que tienen esos puntos por focos.

Los resultados del cálculo antedicho, consignados en el tomo XXIX de las mencionadas Memorias de la R. S. A., ya corregidos de los errores de que adoleciera la comparación de las reglas de medida, son, contando las longitudes geográficas desde Greenwich y tomando el pie por unidad lineal (1):

Semieje mayor del Ecuador (á 15° 34' long. O.)	$a = 20926350;$
Semieje menor	» (á 74° 26' long. E.) $b = 20919972;$
Semieje polar	$c = 20853429.$

Pero estos resultados no estaban corregidos del error correspondiente á la mitad meridional del antiguo arco de la India. Repasado el cálculo después de haberse revisado y extendido las operaciones geodésicas de la India, se hallaron, según puede verse en el *Philosophical Magazine*, agosto de 1878, los siguientes números (2):

Semieje mayor del Ecuador (á 8° 15' long. O.)	$a = 20926629;$
Semieje menor	» (á 81° 45' long. E.) $b = 20925105;$
Semieje polar	$c = 20854477.$

suministra el cálculo diferencial, escogiendo de sus dos valores el que se aproxima á $-\tan \omega$ y sustituyéndolo en la fórmula que enlaza las dos razones $\gamma : \beta$ y $\alpha : \beta$.

Sabido es que en el elipsoide de tres ejes las líneas de curvatura componen dos series: una formada por las intersecciones de este elipsoide con hiperboloides de una hoja, y otra por intersecciones del mismo con hiperboloides de dos hojas, confocales tanto éstos como aquéllos con dicho elipsoide. Los puntos umbilicales se van acercando á los extremos del eje menor ó polar á medida que la diferencia entre los dos ejes mayor é intermedio disminuye.

(1) En metros:

$$a = 6\ 378\ 294, \quad b = 6\ 376\ 350, \quad c = 6\ 356\ 068.$$

(2) En metros:

$$a = 6\ 378\ 379, \quad b = 6\ 377\ 915, \quad c = 6\ 356\ 388.$$

En su consecuencia, el meridiano donde está el diámetro ecuatorial mayor pasa en un hemisferio por Irlanda y Portugal, cortando algo del saliente noroeste de Africa, mientras que en el hemisferio opuesto corta la extremidad nordeste de Asia y cruza por la isla meridional de Nueva Zelanda. Y el meridiano que contiene el diámetro menor del Ecuador, pasa por Ceilán en un hemisferio y divide por mitad la América septentrional en el otro. En verdad, tal posición de los ejes, deducida de un cálculo muy prolijo, se ajusta de notable manera á las condiciones físicas de la figura del globo, esto es, á la distribución de las tierras y mares en su superficie. Es de advertir también que en esta teoría que supone la tierra elipsoidal, con la pequeña diferencia indicada entre los dos diámetros del Ecuador, los arcos de paralelo medidos en la India quedan mejor representados que admitiendo como forma del globo el elipsoide de revolución. Sin embargo, no hay que adelantarse hasta imaginar que la figura del Ecuador esté con eso averiguada en definitiva, porque los datos fehacientes son harto escasos para responder de semejante conclusión.

En la teoría que venimos examinando la fórmula de un arco de longitud, ó bien de la extensión lineal de un arco de paralelo comprendido entre dos longitudes dadas, se halla diferenciando las ecuaciones (5), las cuales dan:

$$dx = -\frac{k}{N^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \omega}{1-i} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{c^2}{k^2} \tan^2 \varphi \right) d\omega,$$

$$dy = \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\cos \omega}{1+i} \left(\frac{1}{1-i} + \frac{c^2}{k^2} \tan^2 \varphi \right) d\omega,$$

$$dz = \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{i \operatorname{sen} 2\omega}{1-i^2} \cdot \frac{c^2}{k^2} \tan \varphi d\omega,$$

extrayendo la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de estas cantidades, con lo cual resulta, si se desdeña i^2 (1),

(1) Escribiendo:

$$C = \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}, \quad D = 1 + \frac{c^2}{k^2} \tan^2 \varphi$$

$$ds = k \left(1 + \frac{c^2}{k^2} \tan^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}} \{ 1 - i(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi) \cos 2\omega \} d\omega,$$

é integrando esta ecuación entre los límites ω , y ω' , lo cual da

$$\frac{s}{k} = \frac{\omega' - \omega, -\frac{1}{2} i (1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi) (\text{sen } 2\omega' - \text{sen } 2\omega),}{\left(1 + \frac{c^2}{k^2} \tan^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mas volvamos al elipsoide de revolución.

3.

Medido un arco de meridiano de pocos grados, y determinadas por observación las latitudes de los puntos extremos de este arco, no se obtendrá en realidad otra cosa de estos datos que el valor del radio de curvatura del meridiano en el punto medio de dicho arco. Si s es la extensión lineal del mismo, φ la latitud media y α la diferencia de las latitudes extremas, se tendrá por la fórmula (17), página 175, prescindiendo de las cantidades del orden n^2 ,

$$\frac{1}{2}(a + c) - \frac{3}{2}(a - c) \cos 2\varphi = \frac{s}{\alpha};$$

y limitándose á la primera potencia de i , se tiene:

$$\begin{aligned} dx &= - C \text{sen } \omega \{ D + (D - 1) i \} d\omega, \\ dy &= C \cos \omega \{ D - (D - 1) i \} d\omega, \\ dz &= C \text{sen } 2\omega \cdot (D - 1) i d\omega, \\ N &= D + i \cos 2\omega. \end{aligned}$$

Por consiguiente, con la aproximación citada será

$$ds^2 = \frac{k^2}{D} \left\{ 1 - \left(2 + \frac{1}{D} \right) i \cos 2\omega \right\} d\omega^2.$$

Pero si se hace $c^2 = k^2 (1 - i')$,

se tendrá
$$\frac{1}{D} = \cos^2 \varphi (1 + i' \text{sen}^2 \varphi),$$

puesto que i' es cantidad pequeña. Sustituyendo este valor en la fórmula de ds^2 , y desdeñando el término con i' , resulta el cuadrado de la expresión del texto.

ó bien, reemplazando $s : a$ por r , radio de curvatura,

$$a \frac{1 - 3 \cos 2\varphi}{2} + c \frac{1 + 3 \cos 2\varphi}{2} = r.$$

Otro arco á la latitud φ' , con el radio r' , dará

$$a \frac{1 - 3 \cos 2\varphi'}{2} + c \frac{1 + 3 \cos 2\varphi'}{2} = r',$$

y de esta ecuación y la precedente se deducirán a y c . Mas para ello es menester que los coeficientes respectivos de a y c en ambas discrepen algún tanto, y por consiguiente que los arcos estén situados en latitudes apartadas. Hay dos puntos del meridiano que dan resultados especiales, á saber: aquel en que

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{3} \text{ ó } \varphi = 54^{\circ} 45',$$

donde el radio de curvatura vale a , y aquel en que

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{3} \text{ ó } \varphi = 35^{\circ} 15',$$

donde el radio de curvatura vale c . Medidos, pues, dos arcos, uno en cada latitud, se tienen directa y separadamente a y c . El arco inglés goza de situación geográfica adecuada para deducir de él a , mientras que del arco francés, cuya latitud media es de 45° , se infiere $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} c$. La importancia respectiva de los principales arcos para hallar a y c puede verse, en números redondos, por medio del siguiente cálculo. Designando por r_1 el radio de curvatura correspondiente á los 10° septentrionales del arco ruso, comprendidos entre los 70° y los 60° ; por r_2 el del arco inglés, entre los 60° y los 50° ; por r_3 el del arco francés, entre los 50° y 40° , y por r_4 el de los 10° meridionales del arco de la India, se tienen estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} c - r_1 &= 0, \\ a - r_2 &= 0, \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} c - r_3 &= 0, \\ -\frac{1}{11} a + \frac{3}{11} c - r_4 &= 0; \end{aligned}$$

cuya solución por mínimos cuadrados da:

$$\begin{aligned} a &= +.3961 r_1 + .3189 r_2 + .2417 r_3 + .0432 r_4, \\ c &= +.0688 r_1 + .1645 r_2 + .2602 r_3 + .5064 r_4. \end{aligned}$$

Por donde se ve que la parte meridional del arco de la India influye mucho en el cálculo de c y poco ó nada en el de a .

Para exponerlo con más precisión, supongamos en cada uno de dichos arcos, tomados con mayor amplitud, seis estaciones astronómicas equidistantes, separadas de 5° en 5° en el arco ruso, de 4° en 4° en el arco anglo-francés y también de 4° en 4° en el arco de la India, y combinemos estos arcos por el método de los mínimos cuadrados para determinar la figura de la tierra. Sean $\theta_1 \dots \theta_6$ las latitudes de las estaciones en el arco ruso, por su orden de Norte á Sur; $\varphi_1 \dots \varphi_6$ las del arco anglo-francés; $\psi_1 \dots \psi_6$ las del arco de la India. Esto sentado, si $\delta\theta_1 \dots, \delta\varphi_1 \dots, \delta\psi_1 \dots$, son los incrementos recibidos por las latitudes observadas y expresados en segundos, las variaciones en pies que alcanzarán a y c serán éstas:

ARCO RUSO		ANGLO FRANCÉS		INDIO	
a	c	a	c	a	c
- 117.6 $\delta\theta_1$	- 26.5 $\delta\theta_1$	- 76.2 $\delta\varphi_1$	- 39.6 $\delta\varphi_1$	- 5.4 $\delta\psi_1$	- 112.5 $\delta\psi_1$
- 63.7 $\delta\theta_2$	- 23.0 $\delta\theta_2$	- 40.7 $\delta\varphi_2$	- 28.9 $\delta\varphi_2$	+ 0.3 $\delta\psi_2$	- 71.1 $\delta\psi_2$
- 14.5 $\delta\theta_3$	- 14.5 $\delta\theta_3$	- 8.8 $\delta\varphi_3$	- 14.6 $\delta\varphi_3$	+ 3.0 $\delta\psi_3$	- 26.7 $\delta\psi_3$
+ 29.3 $\delta\theta_4$	- 0.6 $\delta\theta_4$	+ 19.1 $\delta\varphi_4$	+ 3.9 $\delta\varphi_4$	+ 3.2 $\delta\psi_4$	+ 20.3 $\delta\psi_4$
+ 67.3 $\delta\theta_5$	+ 19.3 $\delta\theta_5$	+ 43.2 $\delta\varphi_5$	+ 26.3 $\delta\varphi_5$	+ 1.2 $\delta\psi_5$	+ 69.5 $\delta\psi_5$
+ 99.3 $\delta\theta_6$	+ 45.4 $\delta\theta_6$	+ 63.4 $\delta\varphi_6$	+ 52.8 $\delta\varphi_6$	- 2.3 $\delta\psi_6$	+ 120.3 $\delta\psi_6$

4.

La distancia meridiana entre dos puntos cuyas latitudes son φ, φ' está expresada, según se vió en la página 175, por la ecuación

$$\frac{s}{c} - (1 + n + \frac{1}{2}n^2) \alpha + (3n + 3n^2) \alpha_1 - \frac{1}{2}n^2 \alpha_2 = 0, \quad (9)$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi' - \varphi, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi' - \frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \text{sen } 4\varphi' - \frac{1}{2} \text{sen } 4\varphi. \end{aligned}$$

Mas si c, n, φ, φ' son valores meramente aproximados que requieren las correcciones $\delta c, \delta n, \delta \varphi, \delta \varphi'$, designando por F el valor que tome con ellos el primer miembro de la ecuación (9), será

$$F + \frac{dF}{dc} \delta c + \frac{dF}{dn} \delta n + \frac{dF}{d\varphi} \delta \varphi + \frac{dF}{d\varphi'} \delta \varphi' = 0;$$

de donde, desdespreciando los pequeños términos $n^2 \delta \varphi, n^2 \delta \varphi'$, se infiere

$$0 = F - \frac{s}{c} \cdot \frac{\delta c}{c} + \left\{ - (1 + \frac{5}{2} n) \alpha + (3 + 6n) \alpha_1 - \frac{1}{4} n \alpha_2 \right\} \delta n$$

$$+ \left\{ 1 + n - 3n \cos 2\varphi \right\} \delta \varphi - \left\{ 1 + n - 3n \cos 2\varphi' \right\} \delta \varphi';$$

ó bien, llamando μ, μ' los coeficientes de $\delta \varphi, \delta \varphi'$,

$$\delta \varphi' = \frac{\mu'}{\mu} \delta \varphi + \frac{F}{\mu'} - \frac{s}{c\mu'} \cdot \frac{\delta c}{c}$$

$$+ \left\{ - (1 + \frac{5}{2} n) \alpha + (3 + 6n) \alpha_1 - \frac{1}{4} n \alpha_2 \right\} \frac{\delta n}{\mu'}$$

Sean valores aproximados de c y n los de estas cantidades en un esferoide E_1 , en el cual (1)

$$c = 20\ 855\ 500, \quad n = \frac{1}{330}, \quad (E_1)$$

y escribamos

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{u}{10000}, \quad \delta n = 10v \text{ sen } 1''. \quad (10)$$

Si designamos además por x, x' las correcciones $\delta \varphi, \delta \varphi'$ expresadas en segundos, y hacemos, llamando α'' el valor de α en segundos (2),

$$m = \frac{s}{c\mu' \text{ sen } 1''} - \frac{1}{\mu'} (1 + n + \frac{5}{2} n^2) \alpha'' + \frac{3n + 3n^2}{\mu' \text{ sen } 1''} \alpha_1 - \frac{15 n^2 \alpha_2}{8\mu' \text{ sen } 1''}$$

(1) En metros: $c = 6\ 356\ 699$.

(2) $m = \frac{F}{\mu' \text{ sen } 1''}$.

$$a, = \frac{s}{10000 c \mu' \text{sen } 1''},$$

$$b, = \frac{10}{\mu'} \left\{ (1 + \frac{5}{2} n) \alpha + (3 + 6n) \alpha_1 - \frac{15}{4} n \alpha_2 \right\},$$

$$c, = \frac{\mu'}{\mu},$$

será

$$x' = m, + a, u + b, v + c, x, \tag{11}$$

la relación que debe ligar las correcciones x, x' , que se apliquen á las latitudes observadas en un arco, para que éste pertenezca al elipsoide de revolución E, cuyos elementos son

$$c = 20855500 \left(1 + \frac{u}{10000} \right), \quad n = \frac{1}{250} + 10v \text{ sen } 1'' \text{ (E)}$$

Y si en vez de haberse observado únicamente las dos latitudes extremas, lo hubiera sido en el arco de que se trata cualquier número n de latitudes, y fuese $x,$ la corrección que debiera aplicarse á la latitud extrema meridional, cada una de las correcciones de las $n - 1$ estaciones restantes sería de la forma

$$m, + a, u + b, v + c, x,$$

Luego medidos varios arcos de meridiano y determinadas en cada uno de ellos por observación varias latitudes, la suma de los cuadrados de las correcciones que deban hacerse en todas éstas para que correspondan al elipsoide (E) será:

$$\begin{aligned} U = & x_1^2 + (m_1 + a_1 u + b_1 v + c_1 x_1)^2, \\ & + (m_1' + a_1' u + b_1' v + c_1' x_1)^2, \\ & + (m_1'' + a_1'' u + b_1'' v + c_1'' x_1)^2, \\ & \&.; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + x_2^2 + (m_2 + a_2 u + b_2 v + c_2 x_2)^2, \\ & + (m_2' + a_2' u + b_2' v + c_2' x_2)^2, \\ & + (m_2'' + a_2'' u + b_2'' v + c_2'' x_2)^2, \\ & \&.; \end{aligned}$$

y así sucesivamente, designando por x_1, x_2, \dots las correcciones que hayan de aplicarse á las latitudes observadas en los extremos meridionales de los arcos primero, segundo... Pero el elipsoide de revolución que mejor represente la figura de la tie-

rra será aquel que convierta la suma U en un mínimo absoluto; por lo tanto, u, v, x_1, x_2, \dots se deducirán de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dU}{du} &= 0, & \frac{dU}{dv} &= 0, \\ \frac{dU}{dx_1} &= 0, & \frac{dU}{dx_2} &= 0, \end{aligned}$$

y así prosiguiendo. Equivale esto á igualar á cero las fórmulas de las diversas correcciones y resolver tales ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados.

5.

Suponíamos en el párrafo anterior que los datos consistían únicamente en arcos de meridiano; pero pueden incluirse también arcos de paralelo. Las longitudes determinadas en la India aumentan con datos de mucho valor las medidas de que depende el cálculo de la figura de la tierra.

De la precisión alcanzada al determinar esas longitudes por telegrafía eléctrica podemos juzgar adecuadamente por las correcciones calculadas en las páginas 327 y 328. Cabe decir que esas medidas, en conjunto, son de poco menor peso que las de latitud, si se atiende al influjo accidental que en todas ejercen las atracciones locales. Debemos, pues, hallar la expresión del desvío oriental en cada una de las estaciones de arco de paralelo é incluir en la fórmula de U , puesta en el párrafo precedente, la suma de los cuadrados de tales desvíos.

En la quinta columna del siguiente cuadro se dan—con relación á Bellary como punto central—las diferencias de longitud halladas por telegrafía eléctrica y corregidas como se indicó en la página 326 por su comprobación mutua. La segunda columna contiene las latitudes; la tercera y cuarta las cantidades ψ, θ , como se definen en la página 396, y la última los segundos de las longitudes por cálculo deducidas, con los elementos del esferoide E' de Everest (1),

(1) En metros

$c = 6\ 356\ 024$.

$$n = \cdot 00\ 166\ 499, \quad c = 20\ 853\ 284,$$

de la triangulación que enlaza las diversas estaciones con Bellary. La latitud de este punto es $\varphi = 15^\circ\ 8'\ 33''$:

ESTACIÓN	φ'			ψ			θ			LONGITUD OBSERVADA			SEGUNDOS DE LONGITUD GEODÉSICA
	°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''	''
Vizagapatam.	17	41	22	17	40	26	6	36		6	21	35.44	40.03
Hydrabad. . .	17	30	14	17	29	22	2	43		1	35	28.29	31.53
Bombay. . . .	18	53	49	18	52	28	5	25		-4	6	44.00	50.74
Mangalore. . .	12	52	14	12	53	5	3	2		-2	4	52.61	56.79
Bangalore. . .	13	0	41	13	1	29	2	14		0	39	20.62	20.75
Madras.	13	4	4	13	4	51	3	26		3	19	8.26	14.90

Si s es la distancia de una de tales estaciones á Bellary, se tendrá por la fórmula (5), página 401 (1),

(1, Si en la segunda fórmula (7) de la página 165

$$\rho = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

se sustituyen en vez de a y e^2 los valores deducidos de la relación

$$n = \frac{a - c}{a + c};$$

esto es,

$$a = \frac{1+n}{1-n} c, \quad e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2};$$

se hallará

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1-n}{(1+n)^2} (1 + 2n \cos 2\varphi + n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Reemplazando á su vez e^2 por el antedicho valor en

$$U_2 = -h^2 = -\frac{c^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha,$$

tomando de la serie (5) de la página 401 sólo los dos primeros términos, y reduciendo el segundo al grado de aproximación suficiente para el caso, será

$$\theta = \frac{s}{\rho} \left\{ 1 + \frac{2}{3} n \left(\frac{s}{\rho} \right)^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha \right\}.$$

Pero desdénanse los términos de orden inferior, puede substituirse dentro del paréntesis $s : \rho = \theta$, y con esto se obtiene la fórmula del texto.

$$\theta = \frac{s}{c} \cdot \frac{1-n}{(1+n)^2} (1 + 2n \cos 2\varphi + n^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{2}{3}n\theta^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha),$$

siendo α el azimut. En su consecuencia, desdénando el término con $n\theta^2\delta\theta$, la alteración de θ producida por variaciones muy pequeñas de c y n será (1)

$$\delta\theta = -\theta \frac{\delta c}{c} - 2\theta (1 + \sin^2 \varphi - n \sin^2 2\varphi - \frac{1}{3}\theta^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha) \delta n.$$

Peró si $\delta\omega$ es la variación correspondiente de la longitud calculada, se tendrá por la segunda de las ecuaciones (13), página 410, siendo nulas las demás variaciones,

$$\delta\omega = -\frac{\sin \alpha'}{\cos \psi} \delta\theta = \frac{\delta\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \varphi \sin \omega}{\cos \psi}.$$

Luego sustituyendo aquí el precedente valor de $\delta\theta$, y poniendo en vez de δc , δn sus valores en función de u , v , resultará una expresión de la forma

$$\delta\omega = Au + Bv.$$

Los valores algebraicos de A y B pueden escribirse desde luego, y de ellos deduciremos sus valores numéricos para cada estación del cuadro anterior. Si en el esferoide E reemplazamos u , v por

$$u' = -1.0626, \quad v' = -0.6172,$$

dicho esferoide se convertirá en el E'. Luego si ω , es la longitud que para una estación del cuadro se deduce por triangulación

(1) Limitándose á los términos en que n no está elevada á potencia superior á la segunda, ó á la primera, cuando se halla multiplicada por θ^2 , se tiene en logaritmos neperianos:

$$\begin{aligned} \log(1-n) - 2 \log(1+n) &= -3n + \frac{1}{2}n^2, \\ \frac{1}{2} \log(1+2n \cos 2\varphi + n^2) &= n \cos 2\varphi + \frac{1}{2}n^2(1-2 \cos^2 2\varphi), \\ \log(1 + \frac{2}{3}n\theta^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha) &= \frac{2}{3}n\theta^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\log \theta = \log s - \log c - 2n(1 + \sin^2 \varphi) + n^2 \sin^2 2\varphi + \frac{2}{3}n\theta^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha.$$

Diferenciando esta ecuación y desdénando el término indicado en el texto, resulta la fórmula arriba consignada.

en el esferoide E , ω' su longitud referida al E' y ω la misma referida al E , se tendrá:

$$\begin{aligned} \omega - \omega' &= Au + Bv, \\ \omega' - \omega &= Au' + Bv', \\ \omega &= \omega' + A(u - u') + B(v - v'). \end{aligned}$$

Omitiendo los grados y minutos, las longitudes de las seis estaciones sobre el esferoide E son las siguientes:

Vizagapatam. . .	36.083	- 2.3200 u	- 2.4008 v
Hydrabad. . . .	30.543	- 0.5799 u	- 0.6001 v
Bombay.	- 48.170	+ 1.5112 u	+ 1.5627 v
Mangalore. . . .	- 55.523	+ 0.7419 u	+ 0.7678 v
Bangalore. . . .	20.352	- 0.2339 u	- 0.2421 v
Madras.	12.885	- 1.1841 u	- 1.2256 v

Mas suponiendo un desvío oriental y en Bellary y otro y' en una de las otras estaciones, en la cual la longitud geodésica sobre E sea $\Omega + Au + Bv$ y la longitud observada Ω' , se tendrá la relación (1)

$$\Omega' + y' \sec \varphi' - y \sec \varphi = \Omega + Au + Bv.$$

Por consiguiente, la y' estará expresada en función de y por una ecuación de esta forma:

$$y' = m + au + bv + cy.$$

La suma de los cuadrados de las correspondientes á las siete estaciones de arco de paralelo debe agregarse á la fórmula de U dada en el párrafo anterior y tratarse la y como una de las x .

6.

Daremos ahora los segundos miembros de las ecuaciones relativas á las correcciones x que han de aplicarse á las latitudes

(1) El radio del paralelo á la latitud φ vale $\rho \cos \varphi$ y el arco perpendicular al meridiano y correspondiente al pequeño desvío y de la vertical hacia el Este es ρy . Luego el ángulo que en el centro del paralelo mide dicho pequeño arco es $\rho y : \rho \cos \varphi = y \sec \varphi$.

determinadas por observación en las estaciones de los arcos de meridiano, consignadas en las páginas 36-41, y los segundos miembros también de las ecuaciones concernientes á las y de las estaciones de arco de paralelo en la India (1):

Saxaford.	- 3.981	- 7.9628 <i>u</i>	- 5.6899 <i>v</i>	+ 0.9962 <i>x</i> ₁
North Rona.	- 5.356	- 7.3508 <i>u</i>	- 4.9501 <i>v</i>	+ 0.9965 <i>x</i> ₁
Great Stirling.	- 6.140	- 6.7562 <i>u</i>	- 4.2763 <i>v</i>	+ 0.9968 <i>x</i> ₁
Kellie Law.	- 6.506	- 6.3193 <i>u</i>	- 3.8104 <i>v</i>	+ 0.9969 <i>x</i> ₁
Durham.	- 6.847	- 5.7884 <i>u</i>	- 3.2777 <i>v</i>	+ 0.9972 <i>x</i> ₁
Clifton.	- 7.851	- 5.3177 <i>u</i>	- 2.8372 <i>v</i>	+ 0.9974 <i>x</i> ₁
Arbury.	- 4.151	- 4.8748 <i>u</i>	- 2.4497 <i>v</i>	+ 0.9976 <i>x</i> ₁
Greenwich.	- 4.530	- 4.6070 <i>u</i>	- 2.2285 <i>v</i>	+ 0.9978 <i>x</i> ₁
Dunkerque.	- 6.545	- 4.4478 <i>u</i>	- 2.1021 <i>v</i>	+ 0.9978 <i>x</i> ₁
Dunnose.	- 6.969	- 4.2980 <i>u</i>	- 1.9860 <i>v</i>	+ 0.9979 <i>x</i> ₁
Pantheon.	- 7.823	- 3.6613 <i>u</i>	- 1.5278 <i>v</i>	+ 0.9982 <i>x</i> ₁
Carcassonne.	- 6.114	- 1.6368 <i>u</i>	- 0.4499 <i>v</i>	+ 0.9992 <i>x</i> ₁
Barcelona.	- 4.177	- 0.9767 <i>u</i>	- 0.2235 <i>v</i>	+ 0.9995 <i>x</i> ₁
Montjul.	- 0.822	- 0.9708 <i>u</i>	- 0.2216 <i>v</i>	+ 0.9995 <i>x</i> ₁
Formentera.	- 0.000	- 0.0000 <i>u</i>	- 0.0000 <i>v</i>	+ 1.0000 <i>x</i> ₁
Fuglenaes.	+ 2.779	- 9.1011 <i>u</i>	- 10.0005 <i>v</i>	+ 0.9961 <i>x</i> ₂
Stuor-oivi.	+ 1.260	- 8.3904 <i>u</i>	- 8.8682 <i>v</i>	+ 0.9963 <i>x</i> ₂
Toruea.	+ 6.518	- 7.3668 <i>u</i>	- 7.3283 <i>v</i>	+ 0.9967 <i>x</i> ₂
Kilpi-maki.	+ 1.297	- 6.2198 <i>u</i>	- 5.7382 <i>v</i>	+ 0.9972 <i>x</i> ₂
Hogland.	+ 2.117	- 5.3041 <i>u</i>	- 4.5770 <i>v</i>	+ 0.9975 <i>x</i> ₂
Dorpat.	+ 1.060	- 4.6913 <i>u</i>	- 3.8572 <i>v</i>	+ 0.9978 <i>x</i> ₂
Jacobstalt.	+ 4.807	- 4.0167 <i>u</i>	- 3.1193 <i>v</i>	+ 0.9981 <i>x</i> ₂
Nemesch.	+ 2.371	- 3.3516 <i>u</i>	- 2.4506 <i>v</i>	+ 0.9984 <i>x</i> ₂
Belin.	+ 2.768	- 2.4149 <i>u</i>	- 1.6090 <i>v</i>	+ 0.9939 <i>x</i> ₂
Kremenetz.	+ 0.499	- 1.7140 <i>u</i>	- 1.0583 <i>v</i>	+ 0.9992 <i>x</i> ₂
Ssuprunkowzi.	+ 5.377	- 1.2301 <i>u</i>	- 0.7175 <i>v</i>	+ 0.9994 <i>x</i> ₂
Wodolui.	+ 4.008	- 0.6085 <i>u</i>	- 0.3282 <i>v</i>	+ 0.9997 <i>x</i> ₂
Staro Negrassowka.	+ 0.000	- 0.0000 <i>u</i>	- 0.0000 <i>v</i>	+ 1.0000 <i>x</i> ₂

(1) El primer grupo de estaciones se refiere al arco de meridiano anglo-francés y español; el segundo, al arco de meridiano ruso; el tercero y cuarto á dos arcos de la India, uno de meridiano y otro de paralelo; el quinto, al arco de meridiano del Cabo de Buena Esperanza, y el sexto, al arco de meridiano medido en el Perú.

Shahpur.	- 4.141	- 8.5624 <i>u</i>	+ 5.1019 <i>v</i>	+ 0.9973 x_3
Khimnana.	- 0.250	- 7.9691 <i>u</i>	+ 4.9884 <i>v</i>	+ 0.9976 x_3
Kaliana.	+ 3.369	- 7.6619 <i>u</i>	+ 4.9123 <i>v</i>	+ 0.9977 x_3
Garinda.	- 1.979	- 7.0917 <i>u</i>	+ 4.7415 <i>v</i>	+ 0.9980 x_3
Khamor.	+ 2.216	- 6.3122 <i>u</i>	+ 4.4459 <i>v</i>	+ 0.9983 x_3
Kalianpur.	- 0.933	- 5.7251 <i>u</i>	+ 4.1790 <i>v</i>	+ 0.9985 x_3
Fikri.	- 2.174	- 4.9698 <i>u</i>	+ 3.7827 <i>v</i>	+ 0.9988 x_3
Walwari.	+ 5.506	- 4.5109 <i>u</i>	+ 3.5137 <i>v</i>	+ 0.9989 x_3
Damargida.	+ 2.647	- 3.5451 <i>u</i>	+ 2.8861 <i>v</i>	+ 0.9992 x_3
Darur.	+ 6.086	- 2.8652 <i>u</i>	+ 2.3968 <i>v</i>	+ 0.9994 x_3
Honur.	- 1.748	- 2.4183 <i>u</i>	+ 2.0569 <i>v</i>	+ 0.9995 x_3
Bangalore.	+ 5.175	- 1.7264 <i>u</i>	+ 1.5020 <i>v</i>	+ 0.9997 x_3
Patchapaliam.	+ 0.425	- 1.0050 <i>u</i>	+ 0.8933 <i>v</i>	+ 0.9998 x_3
Kudankulam.	+ 0.000	- 0.0000 <i>u</i>	+ 0.0000 <i>v</i>	+ 1.0000 x_3
Vizagapatam.	+ 0.6126	- 2.2103 <i>u</i>	- 2.2872 <i>v</i>	+ 0.9870 <i>y</i>
Hydrabad.	+ 2.1487	- 0.5530 <i>u</i>	- 0.5723 <i>v</i>	+ 0.9880 <i>y</i>
Bombay.	- 3.9452	+ 1.4298 <i>u</i>	+ 1.4785 <i>v</i>	+ 0.9801 <i>y</i>
Mangalore.	- 2.8457	+ 0.7232 <i>u</i>	+ 0.7485 <i>v</i>	+ 1.0099 <i>y</i>
Bangalore.	- 0.2611	- 0.2279 <i>u</i>	- 0.2358 <i>v</i>	+ 1.0094 <i>y</i>
Madras.	+ 4.5052	- 1.1535 <i>u</i>	- 1.1938 <i>v</i>	+ 1.0091 <i>y</i>
Bellary.	+ 0.0000	+ 0.0000 <i>u</i>	+ 0.0000 <i>v</i>	+ 1.0000 <i>y</i>
Punta del Cabo.	- 0.325	- 1.5602 <i>u</i>	+ 0.2558 <i>v</i>	+ 0.9993 x_4
Zwart Kop.	+ 0.833	- 1.6150 <i>u</i>	+ 0.2535 <i>v</i>	+ 0.9993 x_4
Real Observatorio.	- 0.755	- 1.5099 <i>u</i>	+ 0.2470 <i>v</i>	+ 0.9993 x_4
Heerenlogement.	+ 0.304	- 0.8030 <i>u</i>	+ 0.1672 <i>v</i>	+ 0.9996 x_4
Extremo Norte.	+ 0.000	- 0.0000 <i>u</i>	+ 0.0000 <i>v</i>	+ 1.0000 x_4
Cochesqui.	+ 0.582	- 1.1224 <i>u</i>	+ 1.0852 <i>v</i>	+ 1.0000 x_5
Tarqui.	+ 0.000	- 0.0000 <i>u</i>	+ 0.0000 <i>v</i>	+ 1.0000 x_5

Igualemos á cero la expresi3n de cada rengl3n y manejemos todo ello seg3n el m3todo de los m3nimos cuadrados. Eliminadas las *x* é *y*, quedan estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= + 56.6615 + 301.7624u + 126.9252v, \\ 0 &= - 16.9677 + 126.9252u + 221.4307v, \end{aligned} \quad (12)$$

cuya soluci3n da

$$u = - 0.2899, \quad v = + 0.2428.$$

En su consecuencia, las correcciones que deben aplicarse á las latitudes observadas son las comprendidas en el siguiente cuadro:

ESTACIÓN	CORRECCIÓN	ESTACIÓN	CORRECCIÓN
	"		"
Saxaford.	+ 1.453	Shahpur.	- 3.550
North Rona.	+ 0.081	Khimnana.	+ 0.141
Great Stirling.	- 0.710	Kaliana.	+ 3.652
Kellie Law.	- 1.089	Garinda.	- 1.904
Durham.	- 1.453	Khamor.	+ 1.993
Clifton.	- 2.486	Kalianpur.	- 1.392
Arbury.	+ 1.180	Fikri.	- 2.949
Greenwich.	+ 0.778	Walwari.	+ 4.532
Dunkerque.	- 1.252	Damargida.	+ 1.240
Dunnose.	- 1.691	Darur.	+ 4.362
Pantheon.	- 2.617	Honur.	- 3.684
Carcassonne.	- 1.228	Bangalore.	+ 2.903
Barcelona.	+ 0.573	Patchapaliam.	- 2.204
Montjul.	+ 3.927	Kudankulam.	- 3.138
Formentera.	+ 4.524		
		Vizagapatam.	+ 0.649
Fuglenaes.	+ 0.029	Hydrabad.	+ 2.121
Stuor-oivi.	- 1.423	Bombay.	- 4.050
Tornea.	+ 3.911	Mangalore.	- 2.924
Kilpi-maki.	- 1.258	Bangalore.	- 0.303
Hogland.	- 0.422	Madras.	+ 4.499
Dorpat.	- 1.433	Bellary.	- 0.050
Jacobstadt.	+ 2.247		
Nemesch.	- 0.221	Punta del Cabo.	- 0.161
Belin.	+ 0.108	Zwart Kop.	+ 0.983
Kremenetz.	- 2.232	Real Observatorio.	- 0.637
Ssaprunkowzi.	+ 2.588	Heerenlogement.	+ 0.198
Wodolui.	+ 1.133	Extremo Norte.	- 0.380
Staro Nekrassowka.	- 2.973		
		Cotchesqui.	+ 0.586
		Tarqui.	- 0.585

La suma de los cuadrados de las correcciones es 285.763..., y por tanto el error probable de una latitud aislada es de

$$\pm .674 \sqrt{\frac{285.763}{56 - 8}} = \pm 1''.645.$$

Y puesto que designando por A, B los términos independientes de las ecuaciones (12), últimamente escritas, se transforman éstas en

$$\begin{aligned} 0 &= u + .0043667 A - .0025030 B, \\ 0 &= v - .0025030 A + .0059508 B, \end{aligned}$$

el error probable de $\alpha u + \beta v$ será (1)

$$\pm 1.645 (\cdot 004367 \alpha^2 - \cdot 005006 \alpha\beta + \cdot 005951 \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pero c contiene 2085 u y a contiene 2085 $u + 2022 v$; luego sus errores probables serán respectivamente ± 227 y ± 245 pies (2). Además, el número que representa lo que se llama elipticidad valdrá, toda vez que contiene 8.44 v (3),

(1) De lo dicho en la página 91 respecto del error probable de una función de las incógnitas $fx + gy + hz...$, se infiere que escribiendo las ecuaciones del texto de este modo:

$$\begin{aligned} 0 &= u + qA + rB, \\ 0 &= v + rA + sB, \end{aligned}$$

y llamando ε el valor abstracto del error probable $\pm 1''.645$ de cada latitud observada, el de $\alpha u + \beta v$, será

$$\varepsilon \sqrt{q\alpha^2 + 2r\alpha\beta + s\beta^2}.$$

(2) Llamando c' , n' y a' los valores aproximados que sirven de partida y están entre sí ligados por la relación

$$a' = \frac{1 + n'}{1 - n'} c',$$

con los nuevos valores

$$c = c' + \delta c', \quad n = n' + \delta n',$$

será

$$a = a' + \delta a' = a' + \frac{1 + n'}{1 - n'} \delta c' + \frac{2c'}{(1 - n')^2} \delta n'.$$

Pero esta expresión puede simplificarse por ser n' pequeña y porque la u y la v de las relaciones establecidas en la página 464

$$\delta c' = \frac{c'}{10000} u, \quad \delta n' = 10 \text{ sen } 1'' \cdot v,$$

son inferiores en valor absoluto á 0.3.

(3) Sustituyendo $a = a' + \delta a'$ y $c = c' + \delta c'$, resulta

$$\frac{a + c}{a - c} = \left\{ \frac{a' + c'}{a' - c'} + \frac{\delta a' + \delta c'}{a' - c'} \right\} \left\{ 1 + \frac{\delta a' - \delta c'}{a' - c'} \right\}^{-1}.$$

Luego, con suficiente aproximación, será:

$$2 \frac{a - c}{a + c} = 1 : \left\{ \frac{1}{2} \frac{a' + c'}{a' - c'} - \frac{1}{2} \frac{a' + c'}{a' - c'} \frac{\delta a' - \delta c'}{a' - c'} \right\}.$$

Esta *elipticidad* de la tierra y el llamado *achatamiento* ó *aplanamiento* de la misma, es decir, los pequeños valores

$$2n = 2 \frac{a - c}{a + c} \quad \text{y} \quad p = \frac{a - c}{a},$$

sólo difieren en una cantidad pequeña de segundo orden, pues $2n = p + \gamma p$.

$$2 \frac{a-c}{a+c} = \frac{1}{292.96 \pm 1.07}$$

En conclusión, los valores de a y c son ⁽¹⁾:

$$a = 20\ 926\ 202, \quad \text{€}$$

$$c = 20\ 854\ 895,$$

y su razón

$$c : a = 292.465 : 293.465.$$

7.

Examinadas las correcciones que en las latitudes observadas deben hacerse conforme la tabla anterior manifiesta, no cabe decir que ninguno de los arcos esté mal representado por el esferoide que acaba de hallarse, pues, por el contrario, todos ellos se acomodan bien á la figura media así determinada. Pero á fin de ver esto más detenidamente, calculemos para uno de dichos arcos en particular la curva €', ya elíptica, ya de forma más general,

$$\varrho = A' + 2B' \cos 2\varphi + 2C' \cos 4\varphi, \quad \text{€'}$$

que mejor lo represente. Por los mínimos cuadrados obtendremos A' , B' , C' y además cierta corrección ξ' que habrá de añadirse á la latitud observada φ_0 del extremo meridional S, pues la normal en el punto de €' correspondiente á S formará con el Ecuador un ángulo $\varphi_0 + \xi'$.

Las coordenadas de un punto de €' á la latitud φ son:

$$x' = (A' - B') \cos \varphi + \frac{1}{3} (B' - C') \cos 3\varphi + \frac{1}{5} C' \cos 5\varphi + H,$$

$$y' = (A' + B') \sin \varphi + \frac{1}{3} (B' + C') \sin 3\varphi + \frac{1}{5} C' \sin 5\varphi + K,$$

indicando H, K constantes indeterminadas de las cuales puede disponerse. A su vez, en el elipsoide € que hemos hallado como figura media de la tierra, las coordenadas de un punto á la latitud φ en el meridiano elíptico son:

$$x = (A - B) \cos \varphi + \frac{1}{3} B - C) \cos 3\varphi + \frac{1}{5} C \cos 5\varphi,$$

$$y = (A + B) \sin \varphi + \frac{1}{3} (B + C) \sin 3\varphi + \frac{1}{5} C \sin 5\varphi;$$

(1) En metros:

$$a = 6\ 378\ 249,$$

$$c = 6\ 356\ 515.$$

pero la latitud observada en el punto S requiere en este elipsoide una corrección ξ , pues la normal al meridiano elíptico en el punto correspondiente á S estará inclinada sobre el Ecuador según un ángulo $\varphi_0 + \xi$.

Esto sentado, si los valores de x', y' relativos á $\varphi = \varphi_0 + \xi'$ se igualan respectivamente con los de x, y correspondientes á $\varphi = \varphi_0 + \xi$, es decir, si en S se hace coincidir la curva \mathcal{C}' con el meridiano correlativo del elipsoide \mathcal{C} , quedarán H y K determinadas. La distancia normal entre ambas curvas á la latitud φ será

$$\zeta = (x' - x) \cos \varphi + (y' - y) \sin \varphi,$$

y eso valdrá la cantidad en que la distancia de un punto en \mathcal{C}' al centro de la tierra exceda á la del punto correspondiente de \mathcal{C} . Haciendo

$$A' - A = E, \quad \frac{2}{3}(B' - B) = F, \quad \frac{1}{3}(C' - C) = G,$$

será $\zeta = E - F \cos 2\varphi - G \cos 4\varphi + H \cos \varphi + K \sin \varphi$.

Los valores de ζ en los grandes arcos medidos se consignan en el siguiente cuadro (1):

ANGLO-FRANCÉS		RUSO		INDIO	
Lat.	ζ	Lat.	ζ	Lat.	ζ
o	pies	o	pies	o	pies
60	- 2.7	70	+ 4.1	32	- 4.2
58	- 3.6	68	+ 3.8	30	+ 3.8
56	- 1.8	66	+ 3.1	28	+ 3.3
54	+ 1.9	64	+ 2.0	26	+ 9.3
52	+ 6.8	62	+ 0.8	24	+ 6.9
50	+ 11.8	60	- 0.5	22	+ 2.1
48	+ 16.1	58	- 1.8	20	- 4.3
46	+ 18.8	56	- 2.9	18	- 11.1
44	+ 18.9	54	- 3.7	16	- 16.7
42	+ 15.7	52	- 4.0	14	- 19.6
40	+ 8.1	50	- 3.7	12	- 18.5
		48	- 2.7	10	- 11.8

(1) En metros, los valores de ζ de mayor cuantía absoluta que en este cuadro figuran son:

$$+ 5^m,76 \text{ á la latitud de } 44^\circ,$$

$$- 5^m,97 \quad \text{»} \quad 14^\circ.$$

En los arcos anglo-francés y ruso la curva \mathcal{C}' es elíptica; en el arco de la India, la línea deducida de las latitudes observadas en 66 estaciones no es una elipse, sino la curva representada por ⁽¹⁾

$$z = 20932184 - 167963.6 \cos 2\varphi + 28153.2 \cos 4\varphi.$$

Manifiesta esta ecuación el curso que en dirección del meridiano va siguiendo el nivel del mar en diferentes lugares de la India con relación al elipsoide medio de la tierra. Suponiendo en el cabo de Comorin ajustado dicho nivel al teórico ó medio, preséntase primero desde ese cabo hacia el Norte una depresión que alcanza su máximo valor, de unos 20 pies (6.0 metros), por los 14° de latitud, disminuyendo después hasta desaparecer cerca de los 21°. Comienza luego una elevación que á los 26° alcanza unos 9 pies (2.7 metros) y mengua después hasta convertirse en leve depresión á los 32°. Tales desigualdades pueden, ó no, provenir de la atracción del Himalaya; pero de todas maneras, constituyen una como prueba de que esa vasta meseta no produce la perturbación que al parecer anuncia. Sin embargo, aunque prolongado por el Norte el gran arco de meridiano hasta Kaliana aun no es perceptible el efecto del Himalaya, ya en Banog, á los 0° 57' al Norte de Kaliana, hay un desvío septentrional de unos 30".

El arco anglo-francés ofrece una deformación casi tan acentuada como el de la India. Pero en uno y otro caso la cantidad ζ es tan pequeña como era de suponer.

8.

Ya obtenidos los valores de a y c , se deducen los siguientes: Designando x , y las coordenadas de un punto á la latitud φ , es decir, sus distancias al eje de revolución y al plano del Ecuador, resulta ⁽²⁾

⁽¹⁾ En metros,

$$z = 6380072 - 51194.8 \cos 2\varphi + 8581.0 \cos 4\varphi.$$

⁽²⁾ En metros:

$$\begin{aligned} x &= 6383687 \cos \varphi - 5445 \cos 3\varphi + 7 \cos 5\varphi, \\ y &= 6351086 \sin \varphi - 5422 \sin 3\varphi + 7 \sin 5\varphi. \end{aligned}$$

$$x = 20944044 \cos \varphi - 17865 \cos 3\varphi + 23 \cos 5\varphi,$$

$$y = 20837084 \sin \varphi - 17789 \sin 3\varphi + 23 \sin 5\varphi.$$

A su vez, llamando ϱ, ρ los radios de curvatura del arco de meridiano y del arco perpendicular al mismo, es (1)

$$\varrho = 20890564 - 166960 \cos 2\varphi + 228 \cos 4\varphi,$$

$$\rho = 20961932 - 35775 \cos 2\varphi + 46 \cos 4\varphi;$$

$$\log \frac{1}{\varrho \text{ sen } 1''} = 7.994477820 + .002223606 \cos 2\varphi$$

$$- .000001897 \cos 4\varphi,$$

$$\log \frac{1}{\rho \text{ sen } 1''} = 7.992994150 + .000741202 \cos 2\varphi$$

$$- .000000632 \cos 4\varphi.$$

Denominando δ, δ' las magnitudes lineales de un grado de latitud y de otro de longitud, se tiene (2):

(1) Las dos fórmulas del segundo grupo se deducen de las del primero en virtud de la relación

$$\log. a \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) = \log. a + M \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right),$$

en la cual se indica por M el módulo con que se pasa del sistema neperiano al decimal. Dicha relación supone que b y c , comparadas con a , son, como al presente ocurre, cantidades pequeñas y c bastante menor que b .

Midiendo en metros, las fórmulas correspondientes á las del primero y segundo grupo son:

$$\varrho = 6367387 - 32601 \cos 2\varphi + 69 \cos 4\varphi,$$

$$\rho = 6389140 - 10904 \cos 2\varphi + 14 \cos 4\varphi;$$

$$\log \frac{1}{\varrho \text{ sen } 1''} = 8.510466754 + .002223606 \cos 2\varphi - .000001897 \cos 4\varphi,$$

$$\log \frac{1}{\rho \text{ sen } 1''} = 8.508983084 + .000741202 \cos 2\varphi - .000000632 \cos 4\varphi,$$

sobrentendiendo en estas dos últimas, como en sus correlativas del texto, que la característica del resultado debe rebajarse en diez unidades.

(2) En metros:

$$\delta' = 111131.86 - 568.97 \cos 2\varphi + 1.21 \cos 4\varphi,$$

$$\delta = 111416.36 \cos \varphi - 95.04 \cos 3\varphi + 0.12 \cos 5\varphi.$$

$$\delta = 364609.12 - 1866.72 \cos 2 \varphi + 3.98 \cos 4 \varphi,$$

$$\delta' = 365542.52 \cos \varphi - 311.80 \cos 3 \varphi + 0.40 \cos 5 \varphi,$$

tomando por unidad el patrón de pie de Inglaterra.

La extensión lineal del cuadrante de meridiano se obtiene multiplicando el primer término de la anterior fórmula de δ por $\frac{1}{2} \pi$ (1). Medida en pulgadas, la diezmillonésima parte del cuadrante vale

$$39^{\text{ps}}.377786,$$

mientras que la magnitud del metro legal es (2)

$$39^{\text{ps}}.370432.$$

(1) En efecto, la fórmula de δ dada en la página 453 se reduce al primer término cuando $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ y $\varphi = 45^\circ$. Luego, llamando C al cuadrante del meridiano terrestre, será en metros efectivos

$$C = 10\,001\,868^{\text{m}}.$$

En la misma unidad resulta como valor medio sobre el meridiano:

$$1^\circ = 111\,131^{\text{m}}.86,$$

$$1' = 1\,852.20,$$

$$1'' = 30.87.$$

(2) De estos números ó del valor de C dado en la nota anterior se deduce la siguiente relación entre la longitud M' del metro ideal, ó sea la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano, y la longitud M del metro efectivo, por la ley adoptado:

$$M' = 1.000\,187 M;$$

por donde se ve que el metro ideal excede al legal próximamente en dos décimas de milímetro.

CAPÍTULO XIV

DEL PÉNDULO

Si una molécula pesada, suspendida de un punto fijo por un hilo sutil, inextensible y sin peso, efectúa en el vacío, obedeciendo á la gravedad, pequeñas oscilaciones en un plano vertical, la duración de cada una de ellas en segundos estará dada por la fórmula

$$t = \pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{16} \alpha^2), \quad (1)$$

en la cual l significa la longitud del péndulo, g la aceleración producida por la gravedad al cabo de un segundo y α el máximo desvío del hilo respecto de la vertical en la oscilación. Dicho tiempo será también el intervalo entre dos pasos consecutivos de la citada molécula por el punto inferior. El término α^2 puede, por lo pequeño, desdeseñarse cuando α no excede de un grado. Si las oscilaciones son infinitamente pequeñas, las que verifique un mismo péndulo en dos lugares distintos, donde la intensidad respectiva de la gravedad sea g, g' , invertirán tiempos t, t' enlazados por la relación

$$t^2 : t'^2 = g' : g;$$

y por tanto, si n, n' son los números de oscilaciones en uno y otro sitio efectuadas durante un día solar medio, será

$$n^2 : n'^2 = g : g'.$$

Luego si un péndulo simple verifica en el Ecuador n oscila-

ciones al día, hará á la latitud φ , en virtud de la fórmula (14) de la página 130, un número n' dado por la ecuación

$$n'^2 = n^2 \{1 + (\frac{5}{2} m - e) \text{sen}^2 \varphi\}. \quad (2)$$

Contados, pues, estos números n , n' , si los valores de m y φ se conocen, se deducirá la elipticidad e de la tierra.

A su vez si λ , λ' son las longitudes de los péndulos respectivos que batían segundos en el Ecuador y en el punto cuya latitud es φ , se tendrá

$$\lambda' = \lambda \{1 + (\frac{5}{2} m - e) \text{sen}^2 \varphi\}.$$

Luego determinadas λ y λ' por medidas y observaciones, también se deducirá e , contando con los datos m y φ como en el caso anterior.

Figuran Picard y Richer entre los primeros que observaron la longitud del péndulo de segundos. Bouguer, en la Memoria donde describe sus trabajos geodésicos en el Perú, refiere las observaciones que hizo con sumo cuidado con un péndulo que se componía simplemente de una plomadita de metal, cuya forma era la de dos conos truncados, iguales y unidos por su base mayor, y de un hilo de pita, hebra fuerte y finísima, en la cual la humedad atmosférica no influye en cantidad que se note. En previsión de la desigualdad, ya de masa, ya de forma, que tuviera dicha plomadita, agujereada según el eje para dar paso al hilo, Bouguer cuidaba de colocarla en posiciones inversas en la serie de sus experimentos. Determinaba el centro de oscilación del péndulo y medía con una regla de hierro á propósito la distancia de este punto al de sostenimiento, sin olvidar la variación que en la longitud de dicha regla se producía por efecto de la temperatura. El movimiento del péndulo lo observaba comparándolo con el de un reloj astronómico y anotando los momentos en que había coincidencia de oscilación.

Hizo los primeros experimentos en la cumbre del Pichincha, á 4570 metros sobre el nivel del mar, y calculando la disminución de la densidad del aire á tal altura é infiriendo por ello que la plomada perdía 1 : 11000 de su peso, aplicaba la corrección debida, lo cual, como advierte, era la primera vez que en obser-

vaciones de esta clase se practicaba (*). Sienta después como principio general—añadiendo que esto mismo puede demostrarse geoméricamente—que la resistencia del aire disminuye el tiempo de la semiosciliación ascendente en tanto como aumenta el de la semiosciliación descendente, y que, como consecuencia, el de oscilación completa no varía (**). Pero la amplitud de la misma mengua de continuo, y según Bouguer esta disminución es en progresión geométrica á medida que el número de oscilaciones crece en progresión aritmética: ley aceptada todavía como expresión bastante aproximada de dicho fenómeno.

Buscando después el mismo observador la corrección que debe hacerse, de una parte, por la altura h á que el punto de experimento se halle sobre el nivel del mar, y de otra por la atracción de la montaña ó meseta que se alce desde este nivel al péndulo, obtiene la fórmula

$$g' = g \left\{ 1 - 2 \frac{h}{r} + \frac{3}{2} \frac{h}{r} \frac{\delta}{\Delta} \right\},$$

en la cual g' significa la intensidad de la gravedad sobre la meseta, g su valor al nivel del mar y á la misma latitud del punto de observación, r el radio de la tierra, Δ su densidad media y δ la densidad de la masa de que la meseta se compone. Fácil es ver, en efecto, que esta fórmula se aproxima bastante á la verdad. Pues la atracción de una lámina circular de radio x , espesor dy y densidad δ , sobre un punto que en la perpendicular á ella trazada por su centro esté á una distancia y de dicha lámina, es (1)

$$2\pi\delta \left\{ 1 - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dy;$$

(*) Bouguer, *Figure de la Terre*, pág. 340.

(**) Tait y Steel, *Dynamics of a Particle*, pág. 376.

(1) Llamando V la potencial de esa lámina circular en el punto indicado, ρ la distancia de otro en la lámina al centro de la misma y ω el ángulo comprendido entre esta recta ρ y un radio fijo, será

$$V = \delta dy \int_0^x \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\omega}{\sqrt{\rho^2 + y^2}} = 2\pi\delta (\sqrt{x^2 + y^2} - y) dy.$$

Derivando esta expresión con respecto á y sin alterar el factor dy y cam-

de donde se infiere que la atracción de un cono, cuya altura sea h y el radio de la base k , sobre una partícula colocada en el vértice, vale (1)

$$2\pi\delta h \left\{ 1 - \frac{h}{(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}} \right\};$$

que la atracción de un segmento esférico, cuya altura sea h y el radio de la base k , sobre una partícula situada en su punto más elevado, importa (2)

$$2\pi\delta h \left\{ 1 - \frac{h}{(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}} \right\},$$

y que la atracción de un cilindro de altura h y radio k , sobre una partícula puesta en el centro de la base superior, es

$$2\pi\delta h \left\{ 1 - \frac{(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}{h} + \frac{k}{h} \right\}.$$

Pero imaginando con una ú otra de estas formas la meseta sobre la cual oscila el péndulo, y dando el radio k mucho mayor en todos casos que la altura h , la atracción equivaldrá muy aproximadamente á $2\pi\delta h$. Luego en tal supuesto será

$$\frac{4}{3} \frac{\pi r^3 \Delta}{(r + h)^2} + 2\pi\delta h$$

la atracción definitiva sobre el péndulo por causa de la altura y de la masa interpuesta; es decir, el valor de $g - dg$, llamando g

biando el signo del resultado se obtiene la fórmula dada en el texto para la componente vertical de la atracción, la cual se ejerce en sentido contrario de las y positivas.

Hállase también esta componente A efectuando las integraciones señaladas en la fórmula

$$A = \delta \int_0^x \int_0^{2\pi} \frac{y \rho \delta \rho d\omega}{(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(1) En la fórmula precedente del texto, antes de efectuar la integración con respecto á y entre los límites 0 y h , debe substituirse para este caso el valor de x deducido de la proporción $x : k = y : h$.

(2) En la misma fórmula, relativa á la lámina circular, ha de substituirse

el correspondiente á $h = 0$. Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación establecida por Bouguer, tendremos (1)

$$\frac{dg}{g} = 2 \frac{h}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{\delta}{\Delta} \right\}, \quad (3)$$

fórmula de nuevo hallada por el doctor Thomas Young y á él á veces atribuida.

Comparando las observaciones de Quito con las verificadas al nivel del mar y á la misma latitud, Bouguer dedujo que la razón de la densidad de la cordillera de los Andes á la de la tierra era $\delta = \frac{3890}{3333} \Delta$; resultado entonces anómalo, pero conforme, como veremos, con observaciones análogas más recientes.

Hizo también La Condamine experimentos con el péndulo en varios puntos del Perú, entre ellos las cumbres del Pichincha y del Chimborazo. Maupertuis, jefe de la Comisión que fué á Suecia, como dijimos en el capítulo I, halló por medio de un reloj, ideado al objeto por Graham, la razón de la gravedad en París á la gravedad en Pello, aldea de Finlandia, sobre el río Tornea, á la latitud de $66^{\circ} 48'$. Formaba parte de ese reloj una pesada péndola, con la forma usual de lenteja, unida á una regla de latón atravesada arriba por un cuchillo de acero que descansaba sobre un plano horizontal de la misma sustancia. La temperatura, que se sabía por un termómetro inmediato al péndulo y colocado hacia la parte media de la longitud del mismo, se consiguió, no sin gran trabajo, fuera durante cinco días y noches en la estancia, donde en Pello oscilaba el péndulo, la misma á que se ha-

para este caso, antes de integrar con respecto á y , en vez del segundo término del paréntesis, el valor deducido de la relación

$$\frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{k^2 + h^2}{h},$$

establecida en virtud de la proporción que los cuadrados de las cuerdas que parten del extremo de un diámetro de la esfera forman con las proyecciones de dichas cuerdas sobre el mismo diámetro.

(1) Desdeñando potencias superiores de la pequeña razón $h:r$, es

$$\left(\frac{r}{r+h} \right)^2 = 1 - 2 \frac{h}{r}.$$

bían hecho las observaciones en París. De la comparación resultó que el instrumento adelantaba en Pello 59.⁵1 por día con relación á su movimiento en el segundo punto.

El péndulo de Borda, por medio del cual la longitud del que bate segundos en varias estaciones situadas entre Formentera y Dunkerque fué determinada por los astrónomos franceses, constaba de una esfera de platino suspendida, por un fino alambre de hierro ó cobre, de un prisma ó cuchillo con el filo hacia abajo. Verificábase la oscilación en torno de esta arista, que descansaba en un plano de acero ó ágata, fijo sobre firmísimo apoyo y con

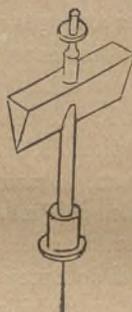


Fig. 62.

sumo cuidado puesto á nivel. Merced á un tornillito que se introducía ó sacaba más ó menos en el cuchillo, se lograba el isocronismo de las oscilaciones de éste con las de todo el péndulo, con lo cual la parte superior quedaba como sin peso en el movimiento del conjunto y el eje de suspensión coincidía exactamente con el indicado filo. La esfera de platino se prendía del alambre del siguiente modo: sostenía este último un casquete de latón, cuya cara interior se había esmerilado hasta el punto de que á ella pudiera ajustarse con gran precisión la citada esfera; se engrasaba aquélla un poco, y al encajar ésta, el aire intermedio quedaba expulsado y la esfera sostenida.

Podía girarse ésta dentro del casquete, y haciéndolo de manera que la mitad que en parte de la observación estaba encima del centro quedara después debajo, se eliminaba del promedio de los

resultados el efecto de cualquier irregularidad de forma ó densidad.

Poníase el péndulo delante de un reloj astronómico, de modo que la esfera de platino estuviera á la misma altura que la péndola del reloj, y para comparar sus oscilaciones respectivas, se miraba desde cierta distancia con un anteojo. Como el alambre del péndulo empleado por Borda en París media 12 pies (3.66 metros), la esfera hacía poco menos de una oscilación por cada dos de la péndola del reloj, y próximamente una vez por hora pasaba por la posición inferior á la par y en el mismo sentido que la péndola. Anotando estas coincidencias, se deducían los movimientos relativos del péndulo y el reloj: el movimiento propio de este último se hallaba por pasos de estrellas. Las lecturas del termómetro y barómetro, con la medida del arco α á que se refiere la fórmula (1), eran datos para hacer las correcciones debidas á la variación de la longitud del alambre por el calor, á la pérdida de peso en el aire y á la amplitud del arco: correcciones encaminadas á deducir del tiempo que realmente duraba la oscilación observada el que hubiese transcurrido si á la temperatura de 0° centígrados y en el vacío se hubiera descrito en la oscilación un arco infinitamente pequeño. Para averiguar la longitud del péndulo, se subía á tornillo un plano horizontal de acero hasta ponerlo en contacto con la esfera de platino, y apartado luego el péndulo, se medía con una regla á propósito la distancia entre ese plano y aquel donde el cuchillo antes descansaba. Calculábase también con escrupulosidad la posición que tenía el centro de oscilación de todo el sistema ó conjunto formado por el cuchillo, el alambre, el casquete y la esfera de platino. Durante las observaciones verificadas en un punto, todo el aparato quedaba dentro de una caja de cristal para prevenir cualquier perturbación originada por corriente de aire.

En 1818, el capitán Kater halló la longitud del péndulo de segundos en Londres, aplicando el siguiente teorema, debido á Huygens: que los centros respectivos de suspensión y oscilación son recíprocos, ó en otros términos, que suspendido un cuerpo por su centro de oscilación, el punto por donde primero se sostenía pasa á ser dicho centro, y por lo tanto en el segundo caso cada oscilación invierte el mismo tiempo que en el primero. El

péndulo según tal principio construido es una regla delgada de latón que tiene de ancho pulgada y media (3.8 centímetros) y de grueso un octavo de pulgada (3 milímetros). En dos agujeros que, uno arriba y otro abajo, lleva dicha regla, se encajan los dos cuchillos, en torno de los cuales han de verificarse alternativamente las diversas series de oscilaciones. Estos cuchillos son de un acero duro llamado *wootz*, su sección es triangular y el ángulo cuya arista sirve de eje de oscilación mide cerca de 120° ; la distancia entre los dos filos es de unas 39 pulgadas (99 centímetros). Añádese á la regla un disco macizo de latón que mide de diámetro $3\frac{1}{4}$ pulgadas (8.9 centímetros), y que tiene entre sus caras paralelas un agujero de forma adecuada para que, pasando por él la regla, pueda fijarse el disco cerca de uno de los cuchillos. Así dispuesto el péndulo, cuando oscila en torno de uno de ellos y luego en torno del otro, consume casi el mismo tiempo en las oscilaciones de la primera posición que en las de la segunda; pero por si se quiere sincronismo completo, hay un pesito corredizo, con el cual puede lograrse la igualdad apetecida. Mas no es menester una exactitud acabada.

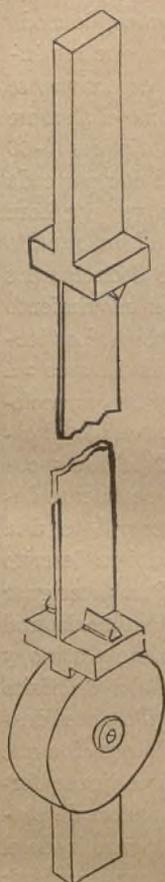


Fig. 63.

Si h_1, h_2 son las distancias del centro de gravedad á los dos filos y t_1, t_2 los tiempos invertidos por las oscilaciones en el vacío, verificadas sucesivamente en torno de uno y de otro, la longitud del péndulo de segundos estará dada, según veremos, por la fórmula (1)

$$\lambda = \frac{h_1 + h_2}{\frac{t_1^2 h_1 - t_2^2 h_2}{h_1 - h_2}}$$

(1) Verificadas en el vacío las oscilaciones del péndulo compuesto, la

La medida de la distancia $h_1 + h_2$ entre los filos de los dos cuchillos es operación muy entretenida, pues debe hacerse con todo esmero y precisión. Mas al medir $h_1 - h_2$, es decir, al determinar el punto donde se halla el centro de gravedad, no se requiere la misma escrupulosa atención cuando los tiempos t_1, t_2 son casi iguales (1). Compréndese además fácilmente, por la manera como estos tiempos figuran en la fórmula antedicha, que el

fórmula (5), dada más adelante para deducir la longitud del péndulo simple que oscilaría á compás de este otro, se reduce á

$$l = h + \frac{h^2}{h};$$

pero $l = \lambda t^2$, y por lo tanto en las dos posiciones del péndulo compuesto se tendrá respectivamente

$$\begin{aligned} \lambda t_1^2 h_1 &= h_1^2 + h^2, \\ \lambda t_2^2 h_2 &= h_2^2 + h^2. \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones, resulta la fórmula del texto.

(1) En aparatos modernos van montados sobre el mismo trípode del péndulo, para medir la *distancia entre los filos* de los cuchillos, una regla métrica y un comparador con micrómetros.

La *regla métrica* es un cilindro vertical de latón, hueco y con agujeros para que, circulando el aire, haya uniformidad de temperatura. Dos medias cañas forman respectivamente los extremos: una rellena por un cilindro macizo de latón, otra sólo por mitad por un cuadrante de cilindro macizo del mismo metal. En el primero, sobre su única cara plana y vertical, y en el segundo sobre la que corresponde á la antedicha, se ven grabadas en plata rayitas horizontales que miden décimas de milímetro: la rayita cero se halla en el mencionado cuadrante. Hay además dentro de ese cilindro hueco ó tubo de latón otros dos, concéntricos con él y de longitud algo menor. El inmediato es de acero, el más interior de zinc, y ambos constituyen un termómetro, pues fijo el de acero en el de latón por el extremo cercano á la rayita cero, se dilata hacia el opuesto, y fijo á su vez aquí en el de acero el de zinc, se dilata este otro hacia el primer extremo, donde lleva un cuadrante de cilindro macizo de latón que llena en parte la media caña donde está el primer cuadrante citado, á cuya rayita cero opone el unido al zinc rayitas separadas por décimas de milímetro y grabadas en plata sobre la cara situada en el mismo plano de esa rayita. Dichos cuadrantes y el semicilindro, que también presenta divisiones métricas, están resguardados por las tapaderas que en sus extremos posee el tubo de latón, provistas de un agujero para dejar ver las divisiones. Cada tapadera termina en un tornillo, el cual, cuando queda arriba en las posiciones inversas que se da á la regla métrica, recibe una monte-

t_1 debe averiguarse con más exactitud que el t_2 , y por lo tanto ha de observarse mayor número de oscilaciones con el disco ó peso abajo que con él arriba, procurando que el total de las verificadas se distribuya en partes que, por lo menos en números redondos, sean proporcionales á h_1 , h_2 .

Mientras oscila el péndulo, descansa el cuchillo de suspensión sobre un plano de ágata, cuidadosamente nivelado, y además, cosa de capital interés, puesto con tal firmeza que en nada parti-

rita, y cuando queda debajo, entra en una contera sobre que se apoya y gira la regla.

Consta el *comparador* de un cilindro vertical de latón, hueco y con contera, sobre la cual á su vez gira. Lleva este cilindro arriba un microscopio horizontal y abajo otro igual y paralelo, los cuales alcanzan unas 30 veces de amplificación y están provistos de micrómetro, con retículo formado por tres hilos de araña, uno vertical y dos horizontales para comprender la imagen del filo del cuchillo ó la de la rayita que en la regla se observe. Equivale el avance del tornillo micrométrico en cada vuelta próximamente á la división menor de la regla, ó sea una décima de milímetro, y dividida la cabeza del tornillo en cien partes iguales, á cada una de ellas viene á corresponder un micrón ó milésima de milímetro. Sujétase el microscopio inferior en el mencionado cilindro y déjase el superior unido á otro cilindro interior, móvil dentro del primero, por medio de un tornillo contrapuesto á un muelle, para que de este modo pueda variarse entre ciertos límites la distancia entre los dos microscopios.

Para corregir la situación de la regla métrica y del comparador respecto de la del péndulo libremente suspendido y en reposo hay en el trípode combinaciones adecuadas de piezas y tornillos. Que ambos instrumentos queden verticales se logra con un nivel que puede descansar sobre el microscopio superior del comparador ó afirmarse por medio de un pie central y hueco en el remate superior de la regla. La medición se verifica observando sucesivamente con los microscopios fijos en el comparador giratorio, tanto los filos de los cuchillos como las rayitas trazadas en la regla. Hácense perceptibles con limpieza los filos de los cuchillos merced á reflectores con los cuales el filo, relativamente oscuro, se destaca en el campo iluminado del microscopio, ó merced á otros con los cuales, al contrario, ese filo aparece iluminado sobre el fondo más oscuro de este campo. La longitud absoluta de la regla se halla comparándola con un patrón de medida, y la corrección que en ella debe hacerse á causa del acortamiento producido en la regla por su propio peso se averigua cotejando la longitud que tiene cuando está apoyada con la que alcanza cuando se deja colgada ó suspendida.

En cuanto al *centro de gravedad* del péndulo, se determina su situa-

cipe del movimiento del péndulo. Si no existiera el cuchillo próximo á la péndola ni la repisa donde se le aseguraba, se tendría el llamado péndulo *invariable* de Kater, significando tan sólo con dicho adjetivo que no habría piezas que se quitaran y pusieran.

Haciendo oscilar en varios lugares un péndulo como el descrito, y deduciendo del número de oscilaciones que verifique en cada punto durante un día solar medio el número de las que haría si fueran infinitamente pequeñas y se efectuaran á la temperatura y presión barométrica que sirven de tipo, se calculará

ción poniendo en equilibrio sobre una línea ó punto de apoyo dicho instrumento tendido según su longitud. Tiénese para ello un pie sobre el cual va montado un eje horizontal de acero, cuya figura es la de dos conos truncados é iguales, unidos por su base menor; eje que puede girar con rapidez ó lentitud, según se requiera. Ese mismo pie lleva unas horquillas á propósito para que, colocado sobre el antedicho eje el péndulo horizontalmente con sus cuchillos verticales sólo tenga leve cabeceo, y cuando haciendo girar el eje se corra el péndulo hasta la posición exacta de equilibrio, le sirvan de guías en este movimiento á lo largo. Por un collar, sostenido por el mismo pie, pasa rozando una regla. Muévase ésta horizontalmente en dirección perpendicular al eje de acero, es decir, paralela á la que ha de tener la varilla del péndulo en equilibrio, y deslizada la regla en la cantidad necesaria, un tornillo fija su posición. No está dividida la regla en toda su longitud sino en algunos pequeños trozos; las divisiones son en milímetros. Como índice va unida al mencionado collar una laminita con subdivisiones en décimas de milímetro y rayita cero ó línea de fe, trazos todos ellos amplificados por un microscopio, y otro índice parecido acompaña á una especie de dedal colocado á un extremo de la regla y corredizo por medio de un tornillo. Dicho dedal lleva una palanquita que acusa, levantando su brazo mayor, el contacto del otro, muy corto, con el filo del cuchillo del péndulo. La distancia del centro de gravedad á este filo es la longitud comprendida entre las dos líneas de fe, más una constante igual á la distancia de la primera al eje de acero sumada con la de la segunda al punto de contacto con el cuchillo; pero trocados luego los extremos del péndulo y medida la distancia del centro de gravedad al filo del otro cuchillo, se elimina dicha constante al tomar la diferencia de ambas medidas.

Véase para más pormenores de descripción y manejo de los aparatos precedentes la obra *Determinación experimental de la intensidad de la fuerza de gravedad en Madrid* por el coronel de ingenieros D. Joaquín Barraquer, Madrid, 1888.

la intensidad relativa de la gravedad en cada uno de dichos lugares; y si á ello se agrega la reducción al nivel del mar, se tendrán los datos necesarios para inferir la figura de la tierra. Por supuesto, cuanto mayor sea el número de estaciones y entre límites más apartados varíen las latitudes, mejor será para tal objeto.

Antes de referir las diversas series de observaciones hechas con el fin indicado, diremos cómo se cuentan las oscilaciones del péndulo y cómo se deduce el número de las infinitamente pequeñas que durante el mismo tiempo se verificarían.

El péndulo destinado á la observación lleva á cada extremo como apéndice, aunque no se ve en el dibujo, una reglita que tiene de ancho unos $\frac{3}{4}$ de pulgada (1.9 centímetro). Colocado este péndulo con precisión, es decir, sin quedar un poco corrido á derecha ni izquierda, delante de un reloj astronómico, se anotan los momentos en que las líneas centrales de ambos aparatos pasan á la vez por la posición inferior. Ocurre esto alternativamente, yendo ambos en el mismo sentido y en sentido contrario; pero sólo se observa y anota la primera clase de *coincidencias*, entre dos de las cuales consecutivas efectúa uno de los péndulos dos oscilaciones más que el otro. Para saber con mayor exactitud el momento de la coincidencia, se pega en la péndola del reloj un pedacito de papel del mismo ancho que la reglita extrema del péndulo de observación. Además, entre éste y el del reloj se pone un diafragma provisto de una ventanita, cuya anchura es también la antedicha, y se le deja colocado de manera que los lados verticales de la ventanita queden en los planos que pasan por los lados correspondientes de la reglita y del pedacito de papel, cuando los dos péndulos están en reposo. Mirase con un anteojo, cuyo eje óptico, dirigido horizontalmente, pasa por los centros de la reglita, el diafragma y el papel, de manera que en esa posición de reposo el papel queda enteramente oculto (1).

(1) En vez del método de coincidencias del péndulo de observación con el péndulo que sirve de tipo, suele en operaciones modernas emplearse el *método de pasos*, según puede verse en la obra citada en la nota precedente. Es dicho método de menos brillantez teórica, pero se alcanza con él

Esto sentado, cuando los dos péndulos oscilan, dicho papel, que llegó á verse del todo, va desapareciendo poco á poco detrás de la reglita hasta ocultarse por completo, y el momento en que tal ocurre es el de la *desaparición*. Pocas oscilaciones después comienza á verse el papel, y tal momento es el de la *reaparición*. Por momento de la *coincidencia* se toma el promedio de los tiempos ú horas á que respectivamente acontecieron aquella desaparición y esta reaparición. Aunque cada observador tiene su regla para ello, lo más común es observar tres coincidencias consecutivas al principio de una serie de oscilaciones y otras tres

gran precisión, merced al registro eléctrico que permite apreciar con bastante exactitud instantes que comprenden un número cabal y determinado de oscilaciones. Usase para ello un cronógrafo combinado con un reloj, cuyo mecanismo indicador está impulsado por corrientes eléctricas, como sucede en el aparato ideado por el constructor suizo Sr. Hipp, de Neuchâtel.

Consta su *péndulo sidéreo eléctrico* de dos partes principales, la péndola y el llamado cuadrante simpático: partes no ligadas mecánicamente, sino enlazadas tan sólo por alambres por donde las corrientes circulan. La *péndola*, dispuesta de modo que la oscilación invierta un segundo de tiempo sidéreo, se compone de dos varillas de acero, paralelas y unidas por cuatro travesaños, y de un vaso de mercurio que, sostenido por el último travesaño, sirve de peso y de aparato compensador. Está suspendida esta péndola de dos laminitas juntas y flexibles de acero bien templado, y el impulso reparador, cuando mengua la amplitud, lo recibe de un electroimán que obra sobre una armadura unida al segundo travesaño, al ser despertado dicho electroimán por la corriente que entonces se produce, á causa de prolongarse el contacto de una piececita del tercer travesaño con un escape que da contra un juego de palanquitas enlazadas con la pila motora. Al muelle de suspensión de la péndola, formado por las dos laminitas antedichas, van unidos dos cuchillos, de los cuales, á cada oscilación, mientras el uno sube el otro baja hasta tocar en otro juego de palanquitas, lográndose con ello que alternativamente, en sentidos opuestos, una corriente eléctrica emanada de una segunda pila recorra el circuito, que á cada oscilación se cierra de ese modo á través de la otra parte principal del péndulo sidéreo eléctrico. Esta otra parte, ó sea el *cuadrante simpático*, se reduce á un mecanismo de relojería provisto de un electroimán, el cual, al pasar por los hilos de sus carretes la citada corriente, cuyo sentido cambia á cada oscilación, actúa sobre una armadura imanada de modo permanente y unida á una espiga vertical móvil que gira por consecuen-

al terminar. Anotadas las horas del reloj, cuando esas coincidencias ocurren, se deduce luego el número, por término medio, de oscilaciones que el péndulo del reloj verifica entre dos coincidencias consecutivas: si dicho número es n , el péndulo de observación hará en el mismo tiempo $n \pm 2$: tales serán los valores de sus movimientos relativos. El movimiento propio del reloj se halla por observaciones de estrellas: si vale r en un día solar medio, y por N se designa el número de segundos de que consta este tiempo, durante el mismo hará el péndulo del reloj $N \mp r$

cia en alternado sentido, rigiendo la rueda catalina y los engranajes, por cuya combinación son movidas las saetas de la muestra ó cuadrante.

El *cronógrafo* que con este reloj se enlaza, construido según los principios explicados en la página 318 del presente libro, es de los de cinta de papel y de dos plumas. Las puntas de ambas se corresponden sobre la perpendicular á la dirección de esa cinta, la cual avanza por segundo unos once milímetros. La pluma de segundos marca automáticamente los del reloj eléctrico, obedeciendo á un electroimán que por una corriente derivada de la que emana de la pila indicadora ó de saetas es despertado á la vez que el electroimán del cuadrante. La pluma de señales anota los instantes en que el observador, manejando un botón de mano, cierra el circuito de otra pila distinta, la de registro. Como complemento del cronógrafo, el mismo constructor Sr. Hipp ha ideado un aparatito, el *traductor*, destinado á precisar en tiempo cronográfico los instantes de observación. Es una canalita poco profunda, cruzada perpendicularmente á su longitud por dos hilos cuya distancia equivale á la que separa los rasgos de dos segundos en la cinta cronográfica, la cual se hace deslizar sobre el fondo de la canalita hasta que entre esos hilos se comprendan señales de observación. Cuidase, antes de detener la cinta, de que tales hilos se proyecten sobre dos de aquellos rasgos, y entonces se traducen en fracciones de segundo las distancias intermedias de las señales de observación por medio de un hilo movable, cuyo recorrido está ligado con otro mayor y proporcional de un índice sobre una reglita que comprende 200 divisiones en milímetros. En esta traducción, la incertidumbre no excede de una centésima de segundo.

Con el reloj y cronógrafo antedichos, ó con otros análogos, el *método de pasos* se aplica del siguiente modo: Mirase á distancia la punta cónica en que al efecto termina el péndulo de observación, con un antejo que se fija de manera que el hilo vertical de su retículo coincida con la raya cero del arco graduado unido al sostén del péndulo, procurando antes que verticalmente corresponda á tal raya el extremo inferior de este último cuando se halle en reposo. Hácese andar el cronógrafo, y mientras que en su cinta

oscilaciones. Luego el número de las verificadas por el péndulo de observación será

$$N + r \pm 2 \frac{N + r}{n} = N'.$$

Mídese por medio de una escala la amplitud del arco α al principio y fin de la serie de oscilaciones, y á veces en el intermedio á intervalos iguales. El tiempo que la oscilación dura en dicho arco α equivale al que sobre un arco infinitamente pequeño se invierte, multiplicado por $1 + \frac{1}{16} \alpha^2$.

van quedando automáticamente anotados, á medida que transcurren, los segundos del reloj eléctrico, señálanse en la misma, á voluntad del observador, los instantes en que verificado en igual sentido el movimiento en oscilaciones separadas por otra intermedia, coincida con el hilo inmóvil del anteojo la imagen móvil del extremo inferior del péndulo. Así se prosigue hasta contar cierto número de pasos, cincuenta por ejemplo, y lo mismo se repite al fin de un período de mil ó más oscilaciones, ó bien cuando este número es crecido, al fin de cada uno, de dos, tres ó cuatro intervalos que dividan el período total en partes iguales. Tómase el promedio de tiempos relativos á cada grupo y réstanse los promedios correspondientes á grupos consecutivos para deducir la duración del período total ó la de cada uno de sus intervalos. Los promedios para esas diferencias pueden simplificarse, rebajando de cada tiempo ó dato directo los segundos acumulados por el aumento de dos en dos, á contar de la primera observación del grupo. Mas tales diferencias deben corregirse de la paralaje de las plumas, ó sea del adelanto de una respecto de otra, el cual se averigua disponiendo los conmutadores de manera que, por virtud de la corriente emanada de la pila motora, obren á la vez los dos electroimanes sobre las armaduras de las plumas, las cuales trazan entonces en la cinta á cada segundo del reloj rasgos pareados que á un mismo instante corresponden.

Hallada según lo expuesto la duración de las oscilaciones en tiempo cronográfico, falta todavía determinarla en tiempo sidéreo ó en tiempo solar medio. Ha de compararse á este propósito el reloj eléctrico con un reloj astronómico, lo cual puede realizarse á este tenor: hácese andar el cronógrafo, y mientras en su cinta se marcan automáticamente los segundos del reloj eléctrico, el observador, colocado cerca del reloj astronómico, mirando las saetas y oyendo la pulsación de cada segundo, maneja el botón de mano para anotar en el cronógrafo los instantes de esas pulsaciones, repitiendo esto hasta completar cierto número de segundos consecutivos, sesenta por ejemplo, y determinando tras de ello nuevamente la paralaje de las plumas de la manera antes indicada. El movimiento propio del reloj astronómico, como en el texto se dice, se halla por pasos de estrellas.

Suponiendo que la amplitud disminuya en progresión geométrica, si α_1 es la amplitud inicial, cualquiera de las siguientes estará expresada por $\alpha = \alpha_1 e^{-ct}$, dado que t represente el tiempo transcurrido. Si por unidad se toma el que medie entre el principio y fin de la serie, para la amplitud final α_2 se tendrá $\alpha_2 = \alpha_1 e^{-c}$. El promedio de los valores de α^2 será (1)

$$(\alpha^2) = \alpha_1^2 \int_0^1 e^{-2ct} dt = -\frac{\alpha_1^2}{2c} (e^{-2c} - 1);$$

mas esta expresión, puesto que $-c = \log \alpha_2 - \log \alpha_1$, se convierte en

$$(\alpha^2) = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{2 \log \frac{\alpha_1}{\alpha_2}},$$

y ésta á su vez, sustituyendo la serie logarítmica (2)

$$\log \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 2 \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^3 + \dots \right\},$$

(1) En efecto, poniendo $m = \frac{1}{dt}$, será

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 e^{-2ct} = m \alpha_1^2 e^{-2ct} dt;$$

pero el factor m , que representa el número de intervalos iguales á dt comprendidos en el tiempo adoptado por unidad, desaparece al tomar el promedio (α^2) de la integral de esa expresión.

(2) Escribiendo

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad S = \alpha_1 + \alpha_2, \quad D = \alpha_1 - \alpha_2,$$

se deduce

$$x = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{D}{S}.$$

Por lo tanto, la conocida fórmula, correspondiente á logaritmos neperianos,

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left\{ x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots \right\}$$

dará

$$\log \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 2 \left\{ \frac{D}{S} + \frac{1}{3} \left(\frac{D}{S} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{D}{S} \right)^5 + \dots \right\}.$$

se transforma en

$$(\alpha^2) = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - \dots$$

Luego el número de oscilaciones infinitamente pequeñas verificadas al día por el péndulo de observación será

$$N' + \frac{N'}{64} \{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2\}, \quad (4)$$

fórmula adoptada por el capitán Basevi para reducir las observaciones que hizo en la India. Tomando en cuenta el término que sigue en la serie logarítmica, se echa de ver que el error de la fórmula (4) es (1)

$$\frac{N' (\alpha_1 - \alpha_2)^4}{720 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

Si, por ejemplo, como en las observaciones de Sabine, α valiera en un principio cerca de $1^\circ.2$ y al dar por terminada la serie dos horas después $0^\circ.6$, el error de dicha fórmula quedaría muy por debajo de una centésima de oscilación al día (2).

(1) Si el desarrollo del postrer factor de

$$M = \frac{1}{2 \log \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{S}{4D} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{D}{S} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{D}{S} \right)^4 + \dots \right\}^{-1}$$

se limita á los términos en que la razón $D : S$ no esté elevada á potencia superior á la cuarta, se tendrá

$$M = \frac{S}{4D} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{D}{S} \right)^2 - \frac{4}{45} \left(\frac{D}{S} \right)^4 \right\}.$$

En su consecuencia, puesto que $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = SD$, apreciando el valor de (α^2) hasta el tercer término, será

$$(\alpha^2) = \frac{1}{4} S^2 - \frac{1}{12} D^2 - \frac{1}{45} \frac{D^4}{S^2}.$$

(2) Cuando se aplica el método de pasos para deducir el tiempo invertido en cada oscilación, suelen medirse las amplitudes á intervalos frecuentes—por ejemplo, de cinco en cinco minutos hasta verificar diez medidas ó menor número de ellas,—y tal operación, juntamente con la observación de pasos, se repite en otros varios períodos, conservando igual re-

En un péndulo de segundos la corrección correspondiente á una excursión constante de 48' á cada lado de la vertical es una oscilación por día, ó con más exactitud

$$\frac{86400}{16} \left(\frac{48 \pi}{60 \cdot 180} \right)^2 = 1.05.$$

La ecuación diferencial del movimiento de un cuerpo rígido que oscila en el vacío en torno de un eje horizontal, obedeciendo á la acción de la gravedad, está expresada por

$$m(h^2 + k^2) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2mgh \cos u = C,$$

en la cual m es la masa del cuerpo, mk^2 su momento de inercia respecto del eje trazado por el centro de gravedad G paralelamente al eje de rotación, h la distancia del punto G á este último eje y u el ángulo que el plano determinado por la misma

lación de intervalos y procurando que las amplitudes iniciales de todos los períodos difieran poco y que otro tanto suceda con las finales. En tal caso, para deducir las amplitudes que más verosíblemente habrán correspondido á los instantes determinados como promedios de los de paso, se promedian á su vez las amplitudes medidas en los mismos instantes correlativos, esto es, al principio ó fin de los intervalos primeros, segundos ó de otro orden, anteriores ó posteriores á un instante escogido hacia la mitad de cada período. Esto hecho, cada promedio de los que así se hallan y el número de minutos, positivo ó negativo, que indica su orden con relación á ese instante escogido, se sustituyen en la fórmula

$$\alpha = A - Bt + Ct^2 - Dt^3 + \dots$$

que se deduce de la ecuación $\alpha = \alpha_0 e^{-ct}$ desarrollando su exponencial en serie. Obtienen así tantas ecuaciones de condición, más una, como intervalos tiene cada período, y de ellas por mínimos cuadrados se infieren los tres ó cuatro primeros coeficientes A , B , C , D de la fórmula numérica que expresa la ley de variación de amplitud. Después, por una corrección Δt aplicada al tiempo t , se rectifica la dicha fórmula para ajustarla á períodos cuyas amplitudes extremas y correlativas no son enteramente idénticas; y calculadas luego por medio de Δt las amplitudes correspondientes á instantes próximos y con uniformidad distribuidos entre los de paso, se halla por promedio la amplitud media en el período por estos últimos comprendido.

recta y por ese punto forme con la vertical: ángulo que se anula cuando el cuerpo queda en reposo (1). Pero si la oscilación se verifica en el aire, y es m' la masa de éste desalojada por el péndulo y h' la distancia del eje de rotación al centro de gravedad que por su figura tendría el péndulo si fuera homogéneo, deberá reemplazarse en la fórmula antedicha mh por $mh - m'h'$. Si además de este cambio, designando por λ la longitud del péndulo simple que bate segundos en el punto de observación, se sustituye $\pi^2\lambda$ en vez de g , esa ecuación se convertirá en

$$(h^2 + k^2) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2\pi^2\lambda \left(h - \frac{m'}{m} h' \right) \cos u = C,$$

expresión donde, si el péndulo es homogéneo, se escribirá $h' = h$.

Con todo, esta ecuación aun no se ajusta enteramente á la verdad. El caballero Du Buat, en su libro *Principes d'hydraulique*, publicado en 1786, sentó, como atestiguado por muchos experimentos, que, cuando un sólido se mueve en un fluido, cierta parte de éste es arrastrada por aquél: principio confirmado después

(1) Llamando μ la masa de una partícula del péndulo, ρ la distancia de ella al eje de giro ó suspensión y ξ la distancia de este eje á la vertical que pasa por dicha partícula cuando ρ forma con la vertical el ángulo u , la igualdad de las sumas de momentos, que respecto al eje de giro deben tener las fuerzas de inercia y las reales, dará

$$-\frac{d^2u}{dt^2} \Sigma \mu \rho^2 = g \Sigma \mu \xi.$$

Pero entre los dos momentos de inercia de un sólido respecto de un eje y de otro paralelo trazado por el centro de gravedad existe, como es sabido la relación

$$\Sigma \mu \rho^2 = m k^2 + m h^2;$$

y en virtud de que la suma de momentos de las fuerzas componentes con respecto á un eje equivale al momento de la resultante, se tiene, llamando x la distancia del eje de rotación á la vertical trazada por el centro de gravedad,

$$\Sigma \mu \xi = m x = m h \operatorname{sen} u.$$

Sustituyendo estos valores en aquella ecuación diferencial, multiplicándola por $2du$ y verificando la primera integración, resulta la fórmula del texto.

por Bessel, tanto con estudios prácticos como teóricos, según puede verse en su admirable obra sobre el péndulo *Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels*, Berlín, 1828, en la cual demuestra que si el fluido, donde el péndulo oscila, es de leve densidad, su influjo, en que la oscilación de corta amplitud invierta más tiempo, proviene de que aumenta el momento de inercia del péndulo á la vez que disminuye la fuerza de la gravedad. Luego la antedicha ecuación debe reemplazarse por

$$\left(h^2 + k^2 + \frac{m'}{m} K\right) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda \left(h - \frac{m'}{m} h'\right) \cos u = C,$$

designando por K una constante cuyo valor dependerá de la forma que posea el péndulo, sin dejar de ser simétrico respecto del plano trazado por el centro de gravedad G y el eje de rotación. Infírese de la ecuación precedente que el péndulo dado tendrá el mismo movimiento que el péndulo simple de longitud (1)

$$l = \frac{h^2 + k^2 + \frac{m'}{m} K}{h - \frac{m'}{m} h'}. \quad (5)$$

Si en vez de K se sustituye $\kappa(h^2 + k^2)$ y se supone homogéneo el péndulo dado, en cuyo caso $h' = h$, la oscilación invertirá el tiempo (2)

(1) La longitud l del péndulo simple es la misma distancia h de la molécula pesada al punto ó eje de suspensión; además se tiene $k = 0$, y verificándose las oscilaciones en el vacío, es también $m' = 0$. Por consiguiente, la ecuación diferencial del movimiento de tal péndulo será

$$l^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda l \cos u = C'.$$

Pero si dicho movimiento ha de ser el mismo que el del péndulo compuesto, los coeficientes de las dos ecuaciones respectivas serán proporcionales, y de esta propiedad resulta la fórmula (5).

(2) En efecto,
$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{l}{\lambda}}.$$

$$t = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{h^2 + k^2}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1 + \frac{m'}{m} \kappa}{1 - \frac{m'}{m}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Hállase la constante κ por experimentos. Para ello Bessel hacía oscilar, primero en agua y después en el aire, un péndulo formado por una esfera de latón pendiente de fino alambre y veía en cada caso cuánto duraba la oscilación. Siendo t_1, t_2 los tiempos respectivos y $1 : \delta_1 : \delta_2$ las razones de densidad que entre la esfera, el agua y el aire existían, la ecuación (6) suministraba las siguientes:

$$\begin{aligned} h\lambda t_1^2 (1 - \delta_1) &= (k^2 + h^2) (1 + \delta_1 \kappa), \\ h\lambda t_2^2 (1 - \delta_2) &= (k^2 + h^2) (1 + \delta_2 \kappa), \end{aligned}$$

de las cuales se deducía (1)

$$1 + \kappa = \frac{t_1^2 - t_2^2}{\frac{\delta_1 t_2^2}{1 - \delta_1} - \frac{\delta_2 t_1^2}{1 - \delta_2}}$$

El experimento citado dió $1 + \kappa = 1.65$; mas verificado otro, en que Bessel sustituía la esfera de latón por un cilindro de la misma materia, resultó 1.75. No limitándose á esto, el mismo observador hizo oscilar en el aire dos esferas, ambas de dos pulgadas (5 centímetros) de diámetro, pero de muy diferente peso específico, pues una era de latón y otra de marfil, y comparados sus tiempos de oscilación, dedujo $1 + \kappa = 1.95$, número en su concepto más apropiado.

El tomo de las *Philosophical Transactions* correspondiente á 1832 contiene una Memoria muy importante de Baily, que da

(1) De las dos relaciones precedentes se infiere, haciendo una sencilla transformación en los últimos paréntesis de los segundos miembros,

$$\frac{1 - \delta_1 + \delta_1(1 + \kappa)}{t_1^2(1 - \delta_1)} = \frac{1 - \delta_2 + \delta_2(1 + \kappa)}{t_2^2(1 - \delta_2)}$$

y de esta igualdad, dividiendo por $1 - \delta_1$ los dos términos de la primera razón y por $1 - \delta_2$ los dos de la segunda, se pasa fácilmente á la fórmula del texto.

cuenta de la medida de dicha constante por una serie de experimentos en que este autor se valió de ochenta péndulos de distinta materia y construcción.

Como en el péndulo de inversión de Kater, á causa de no ser simétrica la parte superior de la inferior, no influye del mismo modo el aire cuando el disco ó peso está arriba que cuando se halla abajo, Repsold hizo el péndulo que lleva su nombre y que en ambos extremos posee idéntica forma, si bien conservando la desigualdad de masa, pues uno de los dos discos está hueco. Queda con esto en el punto medio de la longitud, á igual distancia de ambos cuchillos, el centro de gravedad de la figura y en diferente situación el verdadero centro de gravedad, es decir, el de la masa. Si las distancias de este último á los dos filos son h_1 , h_2 , y los tiempos respectivos de oscilación t_1 , t_2 , como K con la construcción indicada vale lo mismo en las dos posiciones del péndulo y en ambas es $h' = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$, la fórmula (5) dará:

$$\lambda t_1^2 = \frac{h_1^2 + h^2 + \frac{m'}{m} K}{h_1 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \frac{m'}{m}},$$

$$\lambda t_2^2 = \frac{h_2^2 + h^2 + \frac{m''}{m} K}{h_2 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \frac{m''}{m}}.$$

No siempre en estas ecuaciones es m'' igual á m' , pues la altura del barómetro puede variar de una á otra serie de observaciones; pero si bajo la misma presión barométrica oscilara el péndulo en torno de un cuchillo que en torno del otro, entonces, al eliminar h^2 de las ecuaciones antedichas, también K desaparecería, y por lo tanto se tendría (1)

$$\lambda = \frac{h_1 + h_2}{\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2) \left(1 - \frac{m'}{m}\right) \left(\frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}\right)},$$

(1) $t_1^2 h_1 - t_2^2 h_2 = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)(h_1 + h_2)$.

ó, toda vez que construido tal péndulo de modo que t_1 y t_2 sean casi iguales, puede desdeñarse el cuadrado de $t_1 - t_2$ (1),

$$\lambda = \frac{h_1 + h_2}{t_1 t_2} - 2\lambda \left(1 - \frac{m'}{m}\right) \left(\frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}\right) \left(\frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}\right) \quad (7).$$

El tratado de Sir G. B. Airy sobre la figura de la tierra, incluido en la *Encyclopedia Metropolitana*, contiene un detenido estudio histórico de las expediciones en distintas fechas verificadas con objeto de medir la intensidad relativa de la gravedad á diferentes latitudes. En las *Philosophical Transactions* de 1821-23 se publicaron las Memorias de las observaciones hechas por el capitán Hall en *Londres* y en *Río Janeiro, isla de Galápagos y San Blas de California*; por Sir Thomas Brisbane en *Paramatta*, y por Goldingham en *Madras*. El péndulo invariable que fué llevado á este punto lo había tenido de antemano en observación cinco días en Londres el capitán Kater; en Madras duraron quince días las observaciones. Constituyen éstas el eslabón de enlace entre las verificadas después en la India y en Londres.

Los sabios franceses Freycinet (1817-1820) y Duperrey (1822-1825), y la Comisión rusa, al frente de la cual iba Lutke (1826-1829), hicieron también observaciones en varios puntos. La obra titulada *An Account of experiments to determine the Figure of the Earth by means of the pendulum vibrating seconds in*

(1) En tal caso, las relaciones

$$t_1^2 + t_2^2 = (t_1 - t_2)^2 + 2t_1 t_2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2$$

darán con suficiente aproximación

$$\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) = t_1 t_2 = \frac{1}{4}(t_1 + t_2)^2.$$

Atendida la primera de estas dos igualdades, se tendrá

$$\lambda \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1 t_2} \left(1 - \frac{m'}{m}\right) \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \right\} = \frac{h_1 + h_2}{t_1 t_2},$$

y sustituyendo aquí, en virtud de la segunda,

$$\frac{1}{2} \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1 t_2} = 2 \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2},$$

se deducirá la fórmula del texto.

different latitudes, Londres, 1825, describe el gran número de las efectuadas con el péndulo invariable por Sir Edward Sabine en *Londres*; en *Sierra Leona*, *Santo Tomás* y *La Ascensión*; en *Bahía*, *Maranhao*, *La Trinidad*, *Jamaica* y *Nueva York*, y en *Spitzberg*, *Hammerfest*, *Drontheim* y *Groenlandia*. Disponía Sabine de dos péndulos, y en todas las estaciones antedichas observó de ocho á doce ó catorce series de oscilaciones con cada uno de ellos, durando cada serie dos horas, en cuyo intervalo ocurrían once coincidencias, de las cuales anotaba la primera y la última. Comparando los valores dados en cada punto por los dos péndulos, se infiere el grado de exactitud que alcanzó la operación. El error probable del resultado final, obtenido con uno ú otro de dichos instrumentos, es ± 0.11 de oscilación, y tomando como resultado el promedio de las oscilaciones de ambos péndulos, se reduce á ± 0.07 , cuya pequeñez sorprenderá, sobre todo si se repara en los escasísimos medios que se empleaban para determinar por observación el error del reloj. En once de las mencionadas estaciones estudió Sabine, además de dichos péndulos, otros dos del tipo *invariable*, unidos al mecanismo de un reloj. Con mucha mayor facilidad podía seguirse la oscilación de ellos, toda vez que este último aparato contaba el número de las verificadas al día. Hiciéronse tales observaciones con objeto de averiguar experimentalmente si un péndulo movido por un peso impulsor ofrecería exactitud bastante para medir con él en diferentes puntos la fuerza relativa de la gravedad. Los resultados, al parecer, eran satisfactorios, pues los péndulos unidos al mecanismo del reloj concordaban entre sí con tanta precisión como uno con otro lo verificaban los no sujetos al mismo; pero si se compara el promedio para cada estación deducido de aquellos dos péndulos con el promedio obtenido de estos otros, se echará de ver que el acuerdo ya no es tan completo (1).

(1) En la obra titulada *Operations of the great trigonometrical Survey of India*, tomo V, año 1879, publicó Sir John Herschel una lista bibliográfica de los libros y Memorias concernientes á experimentos hechos con el péndulo para deducir la figura de la tierra. Después, abarcando ésta y otras aplicaciones, el astrónomo del Observatorio de Paris, C. Wolf, dió en

En el tomo VII de las *Memoirs of the Royal Astronomical Society* se exponen detenidamente los cálculos de reducción, hechos por Baily, de las observaciones verificadas por el capitán Foster con dos péndulos de latón de tipo invariable y otros dos de

la *Collection des Mémoires relatifs à la Physique*, publicadas por la Sociedad francesa de Física, tomo IV, año 1889, una extensa bibliografía del péndulo ó lista cronológica de las numerosas obras que acerca de la teoría y aplicaciones de este instrumento se habían escrito desde 1629 hasta fin de 1885, comenzando por dos del célebre Galileo: *Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano*, y *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove Scienze attenenti alla Meccanica ed ai movimenti locali*. A menudo acompaña el Sr. Wolf el enunciado de los títulos con citas extensas, sobre todo al reseñar las publicaciones desde 1629 hasta principios del siglo XIX, como obras de menos fácil consulta. Precede á esta bibliografía una preciosa introducción histórica del mismo autor, en la cual se resumen los progresos de la ciencia en la teoría y aplicaciones del péndulo, y á continuación de la bibliografía se insertan las Memorias que pueden llamarse fundamentales para el manejo y observación de tal instrumento, á saber: las de La Condamine, Borda y Cassini, Prony, Kater, Bessel, Sabine, Baily y Stokes.

La de Prony data de 1800 y expone su método para determinar la longitud del péndulo simple que bate segundos, y en general para hallar la posición de los centros de gravedad y oscilación y el momento de inercia de un cuerpo de forma cualquiera. Estaba inédita, pero fué encontrada en 1888 por el capitán Defforges en París, en los archivos de la Escuela de Ingenieros de puentes y caminos. De esa Memoria se desprende que Prony en París, 1800, comparte con Bohnenberger en Tubinga, 1811, y Kater en Londres, 1818, la teoría del péndulo de inversión sentada por cada uno de los dos últimos sin tener noticia de indicación alguna precedente; pero la teoría acompañada de la práctica corresponde exclusivamente á Kater. La Memoria del profesor de la Universidad de Cambridge, G. G. Stokes, es de 1850. Estudia por cálculo el efecto del rozamiento interno de los fluidos en el movimiento de los péndulos, y completa magistralmente la teoría de reducción de oscilaciones al vacío, fundada en los experimentos de Du Buat y de Bessel. Confirma también los de Baily, de los cuales se deducía que en un péndulo como el de Borda el alambre á cuyo extremo está la esfera no disminuye, sino que aumenta, por su pequeño diámetro la corrección necesaria; circunstancia que unida á otras hace que dicho péndulo, á pesar de su aparente sencillez, sea de difícil manejo. La citada colección termina con la Memoria de Bessel sobre la construcción de un péndulo de forma simétrica con ejes recíprocos, la cual dió origen al péndulo llamado de Repsold.

forma poco distinta, pues estaban constituidos por una regla estrecha, de cobre en uno y de hierro en otro, en la cual había dos cuchillos á diferente distancia del centro de gravedad. Observó el capitán Foster en *Londres y Greenwich*, en la isla *Staten*, en *Montevideo*, *Cabo de Hornos* y *Shetland del Sur*, en el *Cabo de Buena Esperanza*, *Santa Elena* y *La Ascensión*, y en *Fernando de Noronha*, *Maranhao*, *Para*, *La Trinidad* y *Porto Bello*. Sus observaciones fueron muchísimas, ascendiendo á 2 710 horas el tiempo total en las oscilaciones invertido. En cada serie, que duraba dos horas y media ó tres, anotaba las tres primeras coincidencias y las tres últimas.

En la isla de La Ascensión hizo oscilar uno de los péndulos en la cumbre de la Montaña Verde, cuya altitud es de 2 230 pies (680 metros). El número de oscilaciones al día fué allí de 85878.96, mientras que en la estación principal de la misma isla, á 15 pies (4.6 metros) de altitud, el número de ellas con el mismo péndulo era de 85887.44, reducido al nivel del mar. Haciendo en el primer número la corrección de altura según la fórmula de Bouguer, representando por δ y Δ las densidades de la montaña y la tierra, é igualando el número de oscilaciones así hallado al ya reducido de la estación principal, resulta la ecuación $6.87 \delta = 0.68 \Delta$; de donde se infiere que dicha montaña, como la de América, respecto de la cual efectuó Bouguer parecido cálculo, tiene muy leve densidad.

El tomo XXXIX de las *Mem. R. A. Society* contiene un resumen de la serie de observaciones que con dos péndulos de inversión, de Repsold, verificó el profesor Sawitsch para hallar la variación de la gravedad en la Rusia occidental. Ya queda indicada más arriba la ventaja que un péndulo de esta clase ofrece para eliminar casi por completo el influjo del aire, porque el conjunto formado por la regla, los cuchillos, la péndola hueca y la maciza es simétrico respecto del plano perpendicular á la longitud, trazado por el centro de figura. Oscila el péndulo sobre un tripode portátil y hay medio adecuado para medir con suma precisión la distancia entre los dos filos. Mientras duran las observaciones se cubre el péndulo con una caja de cristal. La descripción completa del aparato puede verse en la Memoria del

profesor Plantamour, *Expériences faites à Genève avec le pendule à réversion*, Ginebra y Basilea, 1866 (1).

En doce puntos efectuó Sawitsch sus observaciones. En todos ellos empleó el péndulo, únicamente como péndulo invariable, salvo en San Petersburgo, donde, midiendo además la longitud del que oscila por segundos, permutó, como se debe hacer para tal medida, los dos cuchillos, los cuales al efecto pueden quitarse y ponerse. Mas las observaciones verificadas requerían cierta

(1) En el aparato de esta clase, descrito en la citada obra del Sr. Barraquer, la *varilla* del péndulo es un cilindro hueco de latón de unos cuatro centímetros de diámetro y dos milímetros de espesor, con punta cónica de acero en las dos partes extremas, con grandes aberturas, por las cuales pueden pasar los cuchillos de suspensión y con otras pequeñas para ver sus filos. Lógrase á la vez por medio de todas ellas que el aire llegue al interior y la temperatura de la masa metálica sea igual á la del ambiente. Las *dos péndolas*, maciza y hueca, que cerca de sus extremos lleva la varilla, son de latón y tienen la forma de disco ó cilindro bajo, agujereado en el centro para que las caras planas queden perpendiculares á la varilla. Cada péndola está sujeta entre dos anillos: uno es resalto de la varilla y otro de tuerca. Las dimensiones de cada disco, idénticas en ambos, son unos doce centímetros de diámetro y tres centímetros en altura. Abrazadas á la varilla entre las dos péndolas y próximas á éstas hay dos monturas provistas de tornillos y muelles para ajustar en ellas los *cuchillos de suspensión*, de modo que no contraríen la dilatación de la varilla. La distancia entre los filos, una vez colocados aquéllos, es de un metro, para que el péndulo haga próximamente una oscilación por segundo. El ángulo, cuya arista es el filo, mide unos 95°. Pueden ponerse sucesivamente dos juegos de cuchillos pareados, de ágata un juego y de acero el otro; cada par de la misma forma y dimensiones, y ambos sin variación apenas. Los cuchillos del mismo juego se distinguen uno de otro por una marca hecha en una de las dos caras perpendiculares al filo para que á su vez las diferencie. Sirve esto, ya para trocar los cuchillos, ya para cambiar su frente. Cuando se sustituyen los de acero por los de ágata, menos pesados, se atornillan á la varilla como suplemento, á la altura de ellos, unas piecitas de latón. Hay para resguardar los filos otras piezas que se quitan y se ponen.

El *trípode* consta de tres cilindros huecos del mismo metal, algo inclinados como aristas laterales de pirámide truncada y enlazados abajo por una basa, también de latón, compuesta de un disco central y tres brazos con tornillos de apoyo, y arriba por una lámina ahorquillada de igual materia. De la parte media de la curva de esta horquilla, y paralelo á sus

corrección, porque el aparato de Repsold tiene el defecto de que el sostén ó apoyo, no obstante su estabilidad aparente, se balancea, mientras el péndulo oscila, hecho que estudiaron con suma atención, tanto por cálculo como valiéndose de experimentos, el Sr. Pierce, perteneciente al cuerpo encargado de los estudios geodésicos en la costa de los Estados Unidos, y los Sres. Cellérier y Plantamour. Ya corregidos de esto, los resultados obtenidos por Sawitsch pueden verse en el tomo XLIV de las *Mem. R. A. Soc.*, pág. 307 (1).

dos brazos, sale otro intermedio sobre el cual está fija la montura del *plano de suspensión*. Brazo, montura y plano pueden pasar por las grandes aberturas de la varilla del péndulo y situarse debajo del cuchillo, cuyo filo ha de servir de eje en torno del cual se verifique la oscilación. Hay en la montura una horquilla de brazos verticales terminados en cojinetes, y enlazada con ella una palanca que obedece á un tornillo. Tal combinación tiene por objeto dejar apoyado el filo del cuchillo sobre el plano de suspensión durante las observaciones y subirlo luego, cogiendo los extremos con los cojinetes. En medio del plano de suspensión, y en dirección perpendicular á la que sobre él ocupará el filo, existe una muesca para ver éste cuando descansa en el plano. Cada juego de cuchillos posee su plano de suspensión de igual materia que ellos, es decir, de ágata ó de acero, y dicho plano se deja horizontal por medio de un nivel adecuado. Unido á la parte inferior del tripode está el *arco graduado* para medir la amplitud de oscilación. Hállase dividido de 10' en 10' hasta 2º 40' á cada lado de la raya cero, y puede correrse un poco hasta que tal raya corresponda al extremo inferior del péndulo en reposo. Detrás del arco hay una pieza giratoria provista de muelle y tornillo para sujetar el péndulo, si se quiere, después de girada esa pieza hacia adelante.

(1) El movimiento del plano de suspensión por el balance del sostén puede suponerse horizontal y rectilíneo, pues el punto medio de ese plano, al describir un pequeñísimo arco simétrico con relación á la vertical correspondiente á la posición de reposo, apenas saldrá de la tangente a dicho arco. Tal movimiento será debido á la componente horizontal Q de la presión ejercida sobre el mencionado plano por el péndulo que oscila, y admitiendo que esa componente no varíe ó padezca muy lenta variación, el pequeño espacio e , que tanto á un lado como á otro de aquella vertical se corra dicho plano, será proporcional á la expresada componente, es decir, $e = cQ$, siendo c una constante. Cellérier, en su *Note sur le mouvement simultané d'un pendule et de ses supports*, publicada en los *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, tomo LIV, Ginebra, 1875, páginas 121-134, demuestra por cálculo que cabe suponerlo así sin error de im-

Forman la más amplia serie de observaciones del péndulo las verificadas en la India para enlazar sus datos con los del gran estudio trigonométrico relativo al mismo país y dirigido por el general Walker. El capitán Basevi, I. R., observó en veintisiete estaciones comprendidas entre los $8^{\circ} 9'$ y los $33^{\circ} 16'$ de latitud,

portancia; que llamando m y P la masa y peso del péndulo, h la distancia de su centro de gravedad al eje de suspensión, α la amplitud de la mitad de la oscilación y l la longitud del péndulo simple, que sería sincrónico con el propuesto en el caso de no balancearse el sostén, se tiene

$$Q = \frac{mg\bar{h}}{l} \operatorname{sen} \alpha = P \frac{\bar{h}}{l} \operatorname{sen} \alpha;$$

y que si bien dicho balance apenas hace disminuir la amplitud α , en cambio aumenta el tiempo τ de cada oscilación en una cantidad que dividida por τ da la razón

$$\delta = \frac{cmg\bar{h}}{2l^2} = \frac{cP\bar{h}}{2l^2}.$$

Esto sentado, se infiere con suficiente aproximación, á causa de tener δ pequeño valor,

$$(\tau + \tau\delta)^2 = \tau^2(1 + 2\delta);$$

luego, designando por λ la longitud del péndulo simple de segundos, el cuadrado del tiempo τ aumentará por efecto del balance en una cantidad

$$\Delta(\tau^2) = 2\tau^2\delta = 2 \frac{l}{\lambda} \delta = \frac{cP\bar{h}}{\lambda l};$$

y en su consecuencia, verificadas en el vacío las oscilaciones del péndulo dado, las fórmulas de la pág. 500 del texto, relativas á λt_1^2 y λt_2^2 , deberán escribirse

$$\lambda \left(t_1^2 - \frac{cP\bar{h}_1}{\lambda l_1} \right) = \frac{\bar{h}_1^2 + k^2}{h_1}, \quad \lambda \left(t_2^2 - \frac{cP\bar{h}_2}{\lambda l_2} \right) = \frac{\bar{h}_2^2 + k^2}{h_2}.$$

Pero en los segundos términos de los paréntesis, por la pequeñez de c , pueden reemplazarse l_1 y l_2 por la distancia entre los filos de los cuchillos $D = h_1 + h_2$, y con esto se tendrán las ecuaciones

$$\lambda t_1^2 h_1 = h_1^2 + k^2 + cP \frac{\bar{h}_1^2}{D},$$

$$\lambda t_2^2 h_2 = h_2^2 + k^2 + cP \frac{\bar{h}_2^2}{D},$$

de las cuales se deduce

$$\lambda = D \frac{h_1 - h_2}{t_1^2 h_1 - t_2^2 h_2} \left(1 + \frac{cP}{D} \right),$$

mientras que si el balance del sostén no se produjera, quedaría limitado

hallándose el último punto, Moré, á una altitud de 15 427 pies (4 702 metros). El capitán Heaviside, I. R., completó la serie observando en Bombay, Aden, Ismalia y el Observatorio de Kew, puntos respectivos de la India, Arabia, Egipto é Inglaterra. Los péndulos eran dos, y antes de mandarlos á la India se les hizo

al primer término el segundo miembro. Simplificase la fórmula anterior escribiendo

$$T^2 = \frac{t_1^2 h_1 - t_2^2 h_2}{h_1 - h_2},$$

ecuación en la cual, si t_1 y t_2 no estuvieran aumentados por efecto del balance, representaría T el tiempo invertido en la oscilación del péndulo simple de longitud D . Hecha esta sustitución y llamando d y t las cantidades correlativas de D y T en un péndulo de menor peso p , resultan las dos ecuaciones

$$\lambda T^2 = D + cP, \quad \lambda t^2 = d + cp,$$

de las cuales se infiere, eliminando c ó λ ,

$$\lambda = \frac{P d - p D}{P t^2 - p T^2}, \quad c = \frac{d T^2 - D t^2}{P t^2 - p T^2}.$$

Mas la cantidad c , ó sea la *constante del balance*, desvío que en el sostén de que se trate sería producido por una fuerza horizontal representada por la unidad de peso, puede determinarse también directamente de dos modos: por experimento estático, midiendo con el micrómetro el desvío causado en el plano de suspensión por un esfuerzo horizontal equivalente á un peso dado, y dividiendo por el segundo número el primero, ó por experimento dinámico, midiendo los desvíos totales de dicho plano, tal como acontecen mientras el péndulo oscila, y dividiendo por el doble de la componente Q , calculada por la fórmula dada arriba, esos desvíos que á su vez son dobles de los correspondientes á la mitad de oscilación. Es preferible el segundo método, y para aplicarlo con más exactitud se convierte el desvío longitudinal del plano de suspensión en amplitud de giro de un espejo, delante del cual hay un objeto fijo, cuya imagen se corre á proporción, describiendo un arco tanto mayor cuanto más separado se halla del espejo ese objeto. Unese para ello al plano de suspensión, por armadura á propósito, una punta finisima de acero que se deja colocada horizontalmente á la altura del filo del cuchillo superior del péndulo y en el plano donde las oscilaciones se verifican, y que por medio de un tornillo micrométrico horizontal puede ser adelantada en la cantidad necesaria. Apóyase sobre esa punta la cara posterior de un espejito casi vertical y giratorio en torno de un eje horizontal, unido á una lámina que sobre otra afianzada en pilar independiente del que sustenta el aparato del péndulo

oscilar en Kew, ambos primero á la presión atmosférica ordinaria y después en un recipiente donde se había efectuado el vacío hasta la presión de una ó dos pulgadas (de 25 á 51 milímetros), y ambos también primero á una temperatura elevada y después á otra baja. Comparados los valores obtenidos en estas diversas

se desliza, merced á un tornillo micrométrico vertical, para poner dicho eje debajo y á muy corta distancia de la punta de acero. Frente al espejito, montada sobre una varilla y corrediza por medio de piñón y cremallera, se coloca una reglita vertical de madera que en ambas caras tiene á un borde ó lado una faja negra, dentellada con desigualdad para dejar entre diente y diente espacios blancos cada vez menores, y que en una de sus caras posee además, al otro lado de dicha faja, una escala dividida en partes iguales de cinco milímetros. Con un anteojo puesto al lado de la reglita, en el plano de oscilación del péndulo, puede el observador, con auxilio del hilo horizontal del retículo, apreciar la oscilación de la imagen de la reglita en el espejito, correlativa de la oscilación de la punta de acero unida al plano de suspensión. Además, cerca del péndulo y formando un ángulo de 45° con el plano de oscilación, se coloca un espejo vertical para que el observador, con otro anteojo paralelo y próximo al antedicho, vea de frente por reflexión las oscilaciones con respecto á él verificadas de perfil.

Dedúcense los desvíos padecidos por la punta de acero del aumento ó razón que tienen con ellos los de la imagen de la reglita, y su relación con las oscilaciones del péndulo se infiere de la *correspondencia de amplitudes* ó razón entre los desvíos de la expresada imagen y los del péndulo respecto de la vertical mientras oscila. Como datos para estas medidas figuran la longitud del paso del tornillo micrométrico vertical y las de los espacios blancos de las dos caras de la reglita. El indicado aumento equivale á la razón entre la distancia del anteojo primero á dicha imagen y la pequeña distancia x del eje del espejito á su punto de contacto con la punta de acero. Para hallar esta última sin medición directa, á causa de su pequeñez, se hace girar un poco el espejito, empujándolo con esa punta movida por medio del tornillo micrométrico horizontal; se repite lo mismo con igual avance, después de haber bajado el eje de rotación del espejito un poco más, ó sea la cantidad ξ que se mide con el tornillo micrométrico vertical, y en un giro como en otro se observan las excursiones E y E' que el hilo horizontal y fijo del retículo del primer anteojo parece hacer sobre la imagen de la división métrica de la reglita. En razón inversa de E y E' estarán las distancias x y $x + \xi$, y de esta proporción es fácil deducir el valor de x . Para hallar la correspondencia de amplitudes se deja centrada la imagen de un espacio blanco de la reglita con relación al eje horizontal del anteojo indicado, y se espera á que, disminuyendo la oscilación del pé-

circunstancias, resultó que, designando por β la altura del barómetro en pulgadas y por τ la temperatura en grados de Fahrenheit, debía hacerse en el número de oscilaciones verificadas al día la corrección

$$+ 0.435 (\tau - 62^{\circ}) + \frac{0.32 \beta}{1 + .0023 (\tau - 32^{\circ})}$$

dulo, el desvío de la imagen equivalga á la longitud de dicho espacio, lo cual acontece cuando ese hilo parece recorrerlo todo sin salir del mismo; y algunos segundos después, contados al oído, veinte por ejemplo, se mide, mirando con el otro antejo, la amplitud de oscilación del péndulo, reservándose aplicar luego por este retardo la debida corrección, según las leyes del decrecimiento. Lo mismo se repite con otros espacios cada vez menores.

Por este método, iniciado por Plantamour, pero mejorado con el tornillo micrométrico horizontal para eludir todo elemento estático, determinó el coronel D. Joaquín Barraquer la constante del balance en las observaciones del péndulo que hizo en Madrid, como principio de las que han de verificarse en varios puntos de España por acuerdo del Instituto Geográfico y Estadístico. Como trabajo preliminar hizo en 1877, en una sala del mismo Instituto, una serie de observaciones con un solo péndulo, y acometiendo después la operación definitiva, la llevó á cabo en 1883 en el Observatorio astronómico con dos aparatos: uno grande, en el cual se hicieron oscilar sucesivamente un péndulo pesado y otro ligero, ambos con longitud de un metro con corta diferencia, y por tanto con oscilación casi de un segundo, y otro aparato pequeño, al que correspondían otros dos péndulos, pesado y ligero, cuya longitud era de unos 56 centímetros, y como consecuencia la oscilación de unas tres cuartas partes de segundo. En los dos aparatos, el péndulo ligero pesaba próximamente la mitad que el otro. Hacíanse las observaciones por series intercaladas con simetría. Por ejemplo, para hallar el tiempo invertido en cada oscilación se verificaban en algunos casos diez series de observaciones de amplitud, median-do de serie á serie cinco minutos, y entre ellas se interponían cuatro de observaciones de pasos, de este modo: entre la 1.^a y 2.^a de aquéllas, entre la 3.^a y 4.^a, entre la 7.^a y 8.^a y entre la 9.^a y 10.^a; precedía y seguía á estas catorce series una de medidas de paralaje de las plumas del cronógrafo, y á su vez, antes de la primera de estas dos nuevas series y después de la postrera, se observaban la presión y temperatura, esta última por termómetros de mercurio con preferencia á los metálicos. El conjunto de todas las series, encaminadas á obtener los datos necesarios para deducir la longitud del péndulo de segundos, constituía una determinación. Atendidos los resultados que arrojaban cuatro de éstas hechas con el gran aparato, y complementadas por separado con el experimento especial del balance,

si se quería tener el número de las que se verificarían en el vacío, á los 62° F. (16°·67 C.).

En dichas observaciones de la India se hacía oscilar los péndulos en un espacio vacío, de conformidad con lo recomendado

las mismas cuatro combinadas entre sí y dos determinaciones con el pequeño aparato, á su vez entre sí enlazadas, dedujo finalmente dicho observador que la longitud λ del péndulo matemático de segundos de tiempo medio, oscilando en el vacío en el Observatorio astronómico de Madrid, situado á la latitud de 40° 24' 30" y altitud de 657 metros, y la intensidad g de la fuerza de la gravedad en el mismo punto, valen respectivamente, incluyendo los errores probables,

$$\lambda = 0^m \cdot 992 \ 963 \ 4 \pm 0^m \cdot 000 \ 001 \ 6,$$

$$g = 9^m \cdot 800 \ 156 \ \pm 0^m \cdot 000 \ 016.$$

Examinando el mismo observador los resultados, independientes entre sí, que debían dar en teoría un mismo valor como medida de la constante del balance, halló diferencias muy pequeñas, pero dignas de atención, porque superaban los límites de incertidumbre y parecían indicar que el movimiento oscilatorio del péndulo no se transmitía al sostén del mismo modo al variar el plano de suspensión y los cuchillos, sino como insinuándose algún *resbalamiento* con los de ágata. Otras consecuencias se desprenden también del conjunto de sus experimentos y observaciones. Haciendo oscilar sucesivamente en el mismo sostén dos péndulos de inversión, de casi igual longitud y pesos muy diferentes, con un solo juego de cuchillos, se llega sin discrepancia de cuantía al mismo resultado que con cada péndulo, cuando se completa su observación con el experimento, del cual se deduce la constante del balance; y si bien el segundo método admite mayor exactitud, en cambio el primero es más expedito en la práctica y de suficiente precisión, si se establece la relación numérica adecuada entre los pesos de los péndulos pareados. No hay motivo manifiesto para preferir el aparato grande ó el pequeño, ni le hay para optar entre el péndulo pesado ó el ligero de cada aparato, cuando se determina la longitud del péndulo simple con un solo péndulo de inversión, salvo que con el pesado puede prolongarse más cada serie de oscilaciones. No estaría, al parecer, justificado el empleo exclusivo de cuchillos y plano de suspensión de acero ó ágata, pues de unos á otros varía muy poco la precisión con que se mide la distancia entre los filos, y al hallar el tiempo invertido en cada oscilación, si bien los cuchillos y plano de ágata pueden ser causa, como antes se dijo, de algún resbalamiento, compensan tal inconveniente con no padecer oxidación, ser más duros y admitir mayor pulimento.

Véase la citada obra *Determinación experimental de la intensidad de la fuerza de gravedad en Madrid*, por el coronel de Ingenieros D. Joaquín Barraquer, Madrid, 1888.

por el presidente de la Real Sociedad de Londres. Cada serie de oscilaciones duraba, ó por mejor decir se observaba, unas nueve horas, menos en dos puntos, donde la observación llegó á veintitrés horas. Al principio y fin de cada serie se anotaban tres coincidencias consecutivas, y en el intermedio otras á intervalos de hora y media: en esos momentos se leían también los termómetros colocados dentro del recipiente. Pero al realizar la oscilación del péndulo en el vacío, se aumentaba mucho el trabajo del observador y la ventaja á proporción era poca, pues cuando sólo se trata de hallar la variación de la gravedad, no es realmente de importancia referirse al vacío.

El cambio de temperatura durante cada serie de oscilaciones—cambio que por lo común consistió en aumentar y por excepción en disminuir—ascendió no pocas veces á 10° Fahrenheit (5°·6 centígrados), y en algunos casos á mucho más, sobre todo en Moré.

La temperatura media inferior á que se hicieron las observaciones en los diversos puntos fué de 52° F. (11°·1 C.) y la superior de 92° F. (33°·3 C.). Claro es que importaba mucho saber con exactitud la corrección por temperatura, puesto que, al determinar la figura de la tierra por observaciones del péndulo, las que principalmente influyen en el resultado son las verificadas en puntos próximos al Ecuador y en los más distantes de él, lugares donde dicha corrección es mayor y con menos precisión está averiguada. Por tal motivo, en las observaciones de la India se procedió con sumo cuidado en la medida, harto difícil, del coeficiente de corrección por temperatura.

Comparados los valores obtenidos en cada punto con los dos péndulos, se infería que el error probable del resultado definitivo, es decir, el error probable del promedio de los números de oscilaciones verificadas en cualquiera estación por los dos péndulos, era de $\pm 0\cdot11$ de oscilación.

Once de los puntos de la India donde se observó el péndulo se hallan á más de 1 600 pies de altitud (unos 490 metros), Mussoorie está á 6 920 pies (2 109 metros) y Moré pasa de 15 000 pies (unos 4 570 metros). A tan grandes alturas, la reducción de las observaciones al nivel del mar reviste menor exactitud. Se-

gún lo expuesto en la página 129, si suprimimos los acentos que allí tienen c y e y escribimos $\mu' = \frac{1}{3} - \mu^2$, será $g =$

$$-\frac{d\Theta}{dr} = \frac{M}{r^2} + 3 \frac{M}{r^4} c^2 \mu' \left(e - \frac{m}{2} \right) - rm \frac{M}{c^3} \left(\frac{2}{3} + \mu' \right),$$

$$-\frac{dg}{dr} = 2 \frac{M}{r^3} + 12 \frac{M}{r^5} c^2 \mu' \left(e - \frac{m}{2} \right) + m \frac{M}{c^3} \left(\frac{2}{3} + \mu' \right),$$

$$\frac{dg}{g} = -\frac{2dr}{r} \left\{ 1 + 3 \frac{c^2}{r^2} \mu' \left(e - \frac{m}{2} \right) + \frac{2}{3} m \left(\frac{2}{3} + \mu' \right) \frac{r^3}{c^3} \right\}.$$

y si en esta última fórmula se sustituye $r = c(1 + \mu'e)$ y $dr = h$, resultará la expresión (1)

$$\frac{dg}{g} = -\frac{2h}{a} \left\{ 1 + m + e \cos 2\varphi \right\}, \quad (8)$$

en la cual se indica por g la gravedad á la latitud φ y al nivel del mar, por dg la variación producida en esa gravedad cuando el punto atraído se traslada según la vertical á una altura h y por a el radio del ecuador.

Estudio detenido se hizo para calcular el efecto causado en el péndulo por la atracción de la montaña ó meseta donde la estación respectiva se hallaba. En problemas análogos solía suponerse, como en la fórmula de Bouguer, que la atracción provenía de una meseta de longitud indefinida y altura h constante entre dos bases planas. Pero es evidente que si estas bases tenían la curvatura de la superficie de la tierra, tal atracción había de ser mayor.

El efecto de la curvatura puede calcularse del siguiente modo:

(1) Desdeñando los términos que contienen e^2 ó me , resulta

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c(1 + \frac{1}{3}e)} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} - \mu' \right) e \right\},$$

$$\frac{dg}{g} = -\frac{2h}{c(1 + \frac{1}{3}e)} \left\{ 1 + m + \left(\frac{1}{3} + 2\mu' \right) e \right\};$$

pero esta última fórmula equivale á la del texto, pues

$$\mu' = \frac{1}{3} - \mu^2 = \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi,$$

y cuando $\varphi = 0$, se convierte r en $a = c(1 + \frac{1}{3}e)$.

Sea OGS (fig. 64) el radio de la tierra relativo á la estación S; y trazado el arco GH al nivel del mar, sea SXK otro arco concéntrico, del mismo valor angular; se quiere la atracción que producirá en S el sólido engendrado por la revolución de SKGH en torno de SG. Si KH = SG = h y SK = k , y si además se designa por x el arco SX, por y la porción XP de radio, contada hacia el centro de la tierra, por c el radio del arco SK y por ψ el azimut del punto P en S, el volumen del elemento de masa en P será (1):

$$x \left(\frac{c-y}{c} \right)^2 dx dy d\psi,$$

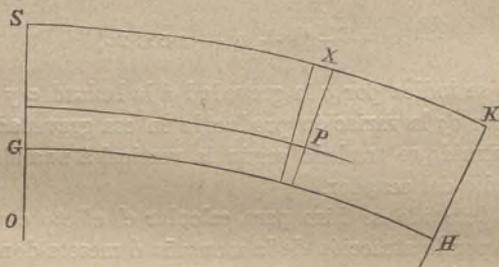


Fig. 64.

Dando por supuesto que k es muy pequeña comparada con c y que h es pequeña con relación á k , las coordenadas de P, me-

(1) Llamando x' al arco trazado desde P hasta SG, concéntrico con SX, y designando por dM el elemento de volumen en el punto P, ó bien el elemento de masa si su densidad se toma por unidad, será

$$dM = dx' \cdot dy \cdot x' d\psi.$$

De aquí se deduce la expresión del texto, reemplazando x' y dx' por los valores sacados de las proporciones

$$\frac{x'}{x} = \frac{c-y}{c}, \quad \frac{dx'}{dx} = \frac{c-y}{c};$$

y si en dicha expresión se sustituye el cuadrado que en ella figura por los términos en que el divisor c no esté elevado á potencia superior á la primera, se tendrá el valor puesto después en la fórmula de A, á saber:

$$dM = \left(x - 2 \frac{xy}{c} \right) dx dy d\psi.$$

didadas una á lo largo de SG y otra según la perpendicular á esta recta, valdrán (1):

$$y + \frac{x^2}{2c}, \quad x - \frac{xy}{c}.$$

Luego la atracción en S estará expresada por (2)

$$A = 2\pi \iint \frac{\left(x - 2\frac{xy}{c}\right) \left(y + \frac{x^2}{2c}\right)}{\left(x^2 + y^2 - \frac{x^2y}{c}\right)^{\frac{3}{2}}} dx dy;$$

y escribiendo

$$A' = 2\pi \iint \frac{xy dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

se deducirá (3):

(1) La proyección del arco SX sobre SG vale $x^2 : 2c$ y la proyección del arco concéntrico x' sobre la perpendicular á SG es con suficiente aproximación el mismo arco

$$x' = \frac{c-y}{c} x = x - \frac{xy}{c}.$$

Llamando R á la distancia del elemento dM al punto S y limitándose á los términos en que el divisor c no esté elevado á potencia superior á la primera, será

$$R^2 = \left(x - \frac{xy}{c}\right)^2 + \left(y + \frac{x^2}{2c}\right)^2 = x^2 + y^2 - \frac{x^2y}{c}.$$

(2) En efecto, la componente vertical A de la atracción ejercida por el elemento dM sobre el punto S estará dada por la fórmula

$$A = \iint \iint \frac{dM}{R^2} \frac{y + \frac{x^2}{2c}}{R}.$$

(3) La expresión finita que figura bajo la doble integral en la fórmula de A puede escribirse de este modo:

$$\frac{\left(x - 2\frac{xy}{c}\right) \left(y + \frac{x^2}{2c}\right)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{y}{c} + \frac{y^5}{c(x^2 + y^2)}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Desarrollese la potencia negativa por la fórmula del binomio, y tanto al hacer este desarrollo como al verificar las operaciones indicadas, desdénense los términos en que el divisor c esté elevado á potencia superior á la primera; finalmente réstese del resultado obtenido la expresión finita puesta bajo la doble integral del valor de A' y se llegará con facilidad á la primera fórmula de A — A' dada en el texto.

$$\begin{aligned} A - A' &= \frac{\pi}{c} \int \int \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy - \frac{3\pi}{c} \int \int \frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy, \\ &= \frac{\pi}{c} \int \left\{ \frac{k^2 + 3y^2}{(k^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - 3y \right\} dy + \frac{\pi}{c} \int \left\{ \frac{y^4}{(k^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} - y \right\} dy. \end{aligned}$$

Pero integrando se tiene (1)

$$A - A' = \frac{\pi kh}{c},$$

y si á esto se agrega que A' representa la atracción de un cilindro, cuya altura es h y el radio de la base k , caso estudiado en la pág. 482, la atracción en S , no omitiendo ya la densidad, será:

Integrando por partes y omitiendo la constante arbitraria, se tiene

$$\begin{aligned} &\int (x^2 - y^2) \cdot x (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + 2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

y por integración inmediata se halla

$$\int (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x dx = -\frac{1}{3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Tomando ambas integrales entre los límites h y 0, se obtiene la segunda fórmula de $A - A'$ dada en el texto.

(1) Si se escribe

$$F = \int (k^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy,$$

se tendrá, en virtud de la evidente igualdad

$$k^2 + 3y^2 = 3(k^2 + y^2) - 2k^2,$$

el siguiente valor, en logaritmo neperiano, de un término de la fórmula de $A - A'$ consignada anteriormente en el texto

$$\int \frac{k^2 + 3y^2}{(k^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = 3F - 2k^2 \log \left\{ \frac{y}{k} + \left(1 + \frac{y^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

mientras que la integración por partes da para otro término de la misma

$$\int y^3 \cdot y (k^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dy = -\frac{y^5}{(k^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + 3y (k^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 3F.$$

Sustituyendo estos valores en la citada fórmula, la cantidad $3F$ queda eliminada. Finalmente, desarrollando en serie las expresiones

$$\left(1 + \frac{y^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \log \left\{ \frac{y}{k} + \left(1 + \frac{y^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad \left(1 + \frac{y^2}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

tomando las integrales entre los límites h y 0 de y , y desdeñando términos de orden inferior, resulta el valor de $A - A'$ dado en el texto.

$$A = 2\pi\delta \left\{ h + k - \sqrt{h^2 + k^2} + \frac{hk}{2c} \right\}. \quad (9)$$

Esta fórmula fué primero hallada por Pratt, si bien por distinto razonamiento, y de nuevo, tras de detenido estudio, quedó demostrada en el tomo concerniente á la India. Calculóse también en el mismo para varias estaciones el influjo que pudieran tener las irregularidades del suelo del contorno, pero sólo en un punto alcanzaba á una oscilación por día.

Expuesto cuanto precede, deduzcamos ahora de las observaciones referidas el valor de la elipticidad de la tierra.

Al intentar la resolución de este problema por minimos cuadrados, tropiézase al pronto con la dificultad de desembarazar los errores de observación de los producidos por las irregularidades locales de la gravedad; pero, á juzgar por los datos adquiridos, la cuantía de los últimos errores debe de exceder en mucho á la de los primeros. Tal se infiere, en efecto, de que verificadas en varios puntos observaciones por dos y aun tres distintas personas, sus resultados, según puede verse en el cuadro contenido en la página 96 de la Memoria de Baily, ofrecen notoria conformidad. Por ejemplo, Sabine y Foster concuerdan casi con exactitud en Maranhao, La Ascensión y La Trinidad; Duperrey se halla en el mismo caso respecto de ambos en La Ascensión, y Lutke aparece de acuerdo con Foster en Santa Elena. Por este motivo, á excepción de las dos estaciones Madras y San Petersburgo, que por pertenecer á la par á series distintas conviene conservarlas en ambas, sólo incluimos en este cálculo de la elipticidad una vez cada estación, suprimiendo de la lista de Lutke Santa Elena, donde también estuvo Foster; y de las estaciones por Duperrey y Freycinet visitadas, Guam, donde observó Lutke; Río Janeiro, adonde fué el capitán Hall; el Cabo de Buena Esperanza, visitado por Foster, y la Ascensión, donde estuvieron Foster y Sabine.

Optamos por los resultados de Lutke en Guam en vez de los obtenidos por Freycinet, porque él mismo declara que sus observaciones en dicho punto no le inspiraban entera confianza. Excluimos las estaciones de Ualan y Bouin, porque la intensidad

de la gravedad parece allí anormal, y prescindimos también de tres estaciones de las que figuran en la serie de la India, á saber: Dehra, Mussoorie y Moré.

Las observaciones de Sabine, Foster, Goldingham, Kater, Hall y Brisbane, indicadas por las iniciales de estos apellidos, se hallan reunidas en el primero de los siguientes cuadros:

1

FOSTER, SABINE, ETC.

ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES	ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES
Spitzberg.	S 79 49 58N	86485-42	Porto Bello.	F 9 32 50N	86272-15
Groenlandia.	S 74 32 19	86470-86	Sierra Leona.	S 8 29 28	86267-68
Port Bowen.	F 73 13 59	86470-58	Galápagos.	H 0 52 19	86264-56
Hammerfest.	S 70 40 5	86461-28	Santo Tomás.	S 0 24 41	86268-98
Drontheim.	S 63 25 54	86438-78	P. Gaunsa Lout.	G 0 1 49N	86266-64
Unst.	K 60 45 28	86435-40	Para.	F 1 27 0 S	86260-75
Portsey.	K 57 40 59	86424-70	Maranhao.	SF 2 31 59	86259-10
Leith Fort.	K 55 58 41	86418-02	F. de Noronha.	F 3 49 59	86271-54
Altona.	S 53 32 45	86408-98	Ascensión.	SF 7 55 35	86272-55
Clifton.	K 53 27 43	86407-48	Bahia.	S 12 59 21	86272-52
Arbury Hill.	K 52 42 55	86405-68	Santa Elena.	F 15 56 7	86288-43
Londres.	SF 51 31 15	86400-00	Río Janeiro.	H 22 55 22	86294-90
Shanklin.	K 50 37 24	86396-40	Paramatta.	B 55 48 45	86351-48
Nueva York.	S 40 42 43	86358-20	Cabo Buena Esperanza F	53 54 37	86351-47
San Blas.	H 21 32 24	86288-80	Montevideo.	F 34 54 26	86354-50
Jamaica.	S 17 56 7	86284-80	Isla Staten.	F 54 46 25	86415-36
Madras.	G 13 4 9	86272-56	Cabo Hornos.	F 55 51 20	86418-12
Trinidad.	SF 10 38 56N	86267-15	Shetland Sur.	F 62 56 14 S	86444-66

2

BASEVI Y HEAVISIDE.

ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES	ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES
Kew.	51 28 6	86119-19	Bombay *.	18 53 46	86005-28
Moré.	35 15 39	86024-48	Damargida.	18 3 17	83996-05
Meean Meer.	51 31 37	86056-56	Kodangal.	17 7 57	85995-91
Ismalia.	50 35 55	86056-01	Cocanada *.	16 56 21	85998-25
Mussoorie.	50 27 41	86050-47	Namthabad.	15 5 52	85990-71
Dehra.	50 19 29	86026-89	Madras *.	15 4 8	85989-10
Nejli.	29 53 28	86029-87	Bangalore N.	15 4 56	85987-08
Kaliana.	29 50 55	86029-33	Bangalore S.	15 0 41	85986-47
Dataira.	28 44 5	86028-57	Mangalore *.	12 51 37	85988-89
Usira.	26 57 6	86025-50	Aden *.	12 46 55	85991-68
Pahargarh.	24 56 7	86015-50	Pachapaliam.	10 59 40	85984-77
Kalianpur.	24 7 11	86014-87	Alleppy.	9 29 59	85985-90
Ahmadpur.	25 36 21	86012-62	Mallapatti.	9 28 45	85985-54
Calcuta *.	22 32 55	86012-75	Isla Minicoy.	8 47 1	85987-02
Badgaon.	20 44 23	86005-13	Kudankolam *.	8 10 21	85984-99
Somtana.	19 5 0	86000-69	Punnae *.	8 9 28	85982-88

* Estaciones de la costa.

3

SAWITSCH.

ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES	ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES
	° ' "			° ' "	
Tornea	65 50 43	86590-33	Wilna	54 41 2	86549-37
Nicolaistadt	63 5 35	86578-25	Belin	52 2 22	86558-75
San Petersburgo	59 56 30	86568-68	Kremenetz	50 6 8	86551-51
Revel	59 26 37	86567-41	Kamenetz	48 4 59	86524-74
Dorpat	58 22 47	86565-21	Kischinef	47 1 50	86519-18
Jacobstadt	56 30 3	86554-74	Ismail	45 20 54	86541-52

FREYCINET.

4

DUPERRY.

ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES	ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES
	° ' "			° ' "	
Paris	48 50 14N	86406-00	Paris	48 50 14N	86406-85
Mowi *	20 52 7	86515-41	Tolón	43 7 20	86585-46
Rawak **	0 1 34S	86279-35			
Isla de Francia	20 9 56	86515-97	Isla de Francia	20 9 25S	86515-87
Port Jackson	33 51 54	86551-96	Port Jackson	33 51 40	86551-21
Isla Falkland	51 35 18	86444-64	Isla Falkland	51 51 44	86448-12

* Islas de Sandwich.

** Cerca de Nueva Guinea.

5

LUTKE.

ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES	ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES
	° ' "			° ' "	
Petersburgo	59 56 31	86275-08	Isla Bonin *	27 4 12	86165-14
Sitka	57 2 58	86261-44	Guam **	15 26 21	86121-78
Petro-Paulowski	53 0 53	86249-83	Ualan ***	5 21 16	86116-65
Greenwich	51 28 40	86240-18	Valparaiso	33 2 50	86169-23

* Archipiélago de Magallanes, al S. E. del Japón.

** Islas Marianas.

*** Islas Carolinas.

6

BIOT Y ARAGO.

ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES	ESTACIÓN	LATITUD	OSCILA- CIONES
	° ' "			° ' "	
Dunkerque	51 2 40	86554-00	Figeac	44 36 45	86505-91
Clermont	45 46 48	86510-50	Formentera	38 39 56	86485-00
Burdeos	44 50 26	86506-65			

Los números del cuadro primero concuerdan con los dados por Baily en las *Memorias de la Real Sociedad Astronómica de Londres*, tomo VII, páginas 96 y 97, menos los números de oscilaciones obtenidos por Foster y Sabine que, á excepción de los de Port Bowen y Altona, están aumentados todos en 0.14 con objeto de que el término medio en Londres sea 86400. Como ambos observadores estuvieron en cuatro mismas estaciones, á saber: en *Londres*, *La Ascensión*, *La Trinidad* y *Maranhao*, se ha puesto en el cuadro, para cada uno de dichos puntos, el promedio de los dos números respectivos. Restando de los números hallados por Foster los obtenidos por Sabine, resultan las diferencias $+0.28$, -0.30 , $+0.46$, -0.45 .

Contiene el segundo cuadro las observaciones de la India. Refiérese el tercero á puntos de Rusia, y da, convertidos en números de oscilaciones, los datos de otra clase comprendidos en las *Memorias* antes citadas, tomo XLIV, página 314. En la tabla cuarta se consignan los resultados de Duperrey y Freycinet; unos y otros están tomados de la Memoria de Baily, páginas 91 y 92, salvo que los de Duperrey han sido multiplicados por el factor cuyo logaritmo es 9.9810785; pero como cuatro de las estaciones fueron observadas por ambos viajeros, empleamos, en el cálculo general que aquí exponemos, el promedio de los dos números correspondientes á cada una de las mismas. El cuadro quinto contiene los resultados de Lutke, y el sexto los de Biot y Arago, convertidos en números de oscilaciones según los datos del *Recueil d'observations géodésiques*, etc., escrito por los mismos observadores, 1821, página 573.

Al escoger Kew en Inglaterra en vez de Londres como punto de comparación ó como base para la serie de observaciones de la India, no se procedió con el mayor acierto, pues tales observaciones hablan de figurar con menor peso al deducirse la forma de la tierra, á causa de no estar Kew enlazada con ninguna de las primitivas estaciones donde se observó el péndulo. Muy ventajoso hubiera sido ampliar la serie de la India hasta comprender por lo menos dos de los puntos de Sabine y Foster, y también San Petersburgo. No obstante, siquiera el eslabón no sea tan firme como se desearía, podemos aprovechar las observacio-

nes de Goldingham que enlazan Londres y Madras, y unir así la serie de la India con la de Inglaterra (*).

Con objeto de enlazar dicha serie de la India con la de Rusia, los péndulos con que verificó Sawitsch sus observaciones en este país fueron llevados á la India, donde se les hizo oscilar en unas pocas estaciones, y últimamente á Kew, donde también fueron observados. Como la longitud en líneas de pulgada, 440^l.7170, obtenida por Heaviside, concuerda con la hallada empleando los péndulos de Sawitsch, pudiera incluirse el número correspondiente de oscilaciones en la serie del cuadro tercero; pero no siendo en realidad sino un resultado independiente ó absoluto, no pertenece en rigor á la serie de Sawitsch y sólo servirá de leve conexión.

Del siguiente modo podemos comprobar los dos encadenamientos que acaban de explicarse. Si en la ecuación

Greenwich =

$$\text{Londres} \cdot \frac{\text{Madras}}{\text{Londres}} \cdot \frac{\text{Kew}}{\text{Madras}} \cdot \frac{\text{San Petersburgo}}{\text{Kew}} \cdot \frac{\text{Greenwich}}{\text{San Petersburgo}}$$

hacemos igual á 86400 el número de oscilaciones al día en Londres y ajustamos la primera razón del segundo miembro á las observaciones de Goldingham, la segunda á la serie de la India, la tercera á la serie de Rusia y la cuarta á las observaciones de Lutke, resultará para Greenwich un número de oscilaciones que sólo discrepará del de Londres en una pequeña parte de oscilación. Tal conformidad es una prueba de exactitud, aunque no por completo, toda vez que la verdadera diferencia entre Greenwich y Londres no está bien determinada todavía, pues los resultados numéricos sacados de las observaciones de Sabine, Foster y Baily, unos son positivos y otros negativos; con todo, es probable que esa diferencia no exceda de media oscilación.

Esto sentado, sea e la elipticidad de la tierra, m la razón de la fuerza centrífuga en el ecuador á la gravedad y $\eta = \frac{1}{2}m - e$. Trátase de hallar η para deducir en seguida e . Al efecto, si de-

(*) Existe el proyecto de ampliar la serie de observaciones verificadas en la India con el péndulo.

signamos por n_0 , n los números de oscilaciones de un péndulo invariable á las latitudes 0, φ , se tendrá, como es sabido, por la fórmula (2) de este capítulo.

$$n^2 = n_0^2(1 + \eta \operatorname{sen}^2 \varphi).$$

Mas dadas

$$m = \frac{1}{115} \quad \text{y} \quad \eta_0 = .0052022$$

por valor aproximado de η , escribamos (1)

$$\eta = \eta_0 + \frac{y}{10000},$$

$$e = \frac{1}{290} - \frac{y}{10000} = \frac{1}{290 + 8.4y}.$$

En virtud de aquella relación, si N_0 es el número aproximado de oscilaciones de un péndulo en el ecuador, $N_0 + z$ el verdadero número, N el número de oscilaciones del mismo péndulo contadas en el punto cuya latitud es φ y $N + x$ este número corregido de la perturbación local del aparato, será

$$(N + x)^2 = (N_0 + z)^2 \left\{ 1 + \eta_0 \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{y}{10000} \operatorname{sen}^2 \varphi \right\},$$

ecuación que fácilmente se transforma en esta otra (2)

$$x = z \frac{N_0}{N} + y \frac{N_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{20000 N} + \frac{\eta_0 N_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2N} + \frac{N_0^2 - N^2}{2N}.$$

Como z vale una ó dos unidades, puede reemplazarse su coeficiente por la unidad, y si además de esto escribimos (3)

(1) Siendo y número pequeño y b bastante menor que c , se tiene

$$\frac{1}{b} - \frac{y}{c} = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{b}{c} y \right) = \frac{1}{b \left(1 + \frac{b}{c} y \right)} = \frac{1}{b + \frac{b^2}{c} y}.$$

(2) Obtíense esta ecuación limitándose á los términos de primer orden en el desarrollo de la fórmula precedente, es decir, desdeñando aquellos términos que contienen potencias de x ó z superiores á la primera ó alguno de los productos $z\eta_0$, zy .

(3) Puede también reemplazarse por la unidad el último factor del segundo miembro en la igualdad siguiente:

$$\frac{N_0^2 - N^2}{2N} = \frac{N_0 - N}{2N_0} \left\{ 2N_0 - (N_0 - N) \right\} \frac{N_0}{N}.$$

$$a = \frac{N_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{20000 N},$$

$$m = r_0 \frac{N_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2 N} + N_0 - N - \frac{(N - N_0)^2}{2 N_0},$$

las observaciones hechas en cada punto darán una ecuación de la forma

$$x = z + ay + m,$$

donde z será la misma para cada serie de observaciones, pero variable de una á otra serie.

Para precisar la y y las z pondremos como condición que la suma de los cuadrados de las x sea un mínimo. Escrita, pues, la igualdad

$$2\Omega = (z_1 + a_1 y + m_1)^2 + (z_1 + a_1' y + m_1')^2 + (z_1 + a_1'' y + m_1'')^2 \dots,$$

$$+ (z_2 + a_2 y + m_2)^2 + (z_2 + a_2' y + m_2')^2 + (z_2 + a_2'' y + m_2'')^2 \dots,$$

$$\&., \qquad \qquad \qquad \&., \qquad \qquad \qquad \&.,$$

eliminaremos de la ecuación $\frac{d\Omega}{dy} = 0$ las z por medio de las condiciones

$$\frac{d\Omega}{dz_1} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz_2} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz_3} = 0 \dots,$$

y el resultado, si se indica por i_n el número de estaciones de la serie n —ésima, será la suma de las cantidades (1)

(1) Igualando á cero la derivada de 2Ω con relación á y , é indicando por $(a_1), (a_1^2), \dots$ la suma de cantidades de análoga expresión, sólo diferenciada por los acentos de la a y de la m , se tiene

$$0 = (a_1)z_1 + (a_1^2)y + (a_1)m_1$$

$$+ (a_2)z_2 + (a_2^2)y + (a_2)m_2$$

$$+ \dots \dots \dots ;$$

mientras que igualadas á cero las derivadas de 2Ω con relación á $z_1, z_2 \dots$ se tienen las ecuaciones

$$0 = i_1 z_1 + (a_1) y + (m_1)$$

$$0 = i_2 z_2 + (a_2) y + (m_2)$$

$$\dots \dots$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \left\{ (a_1^2) - \frac{1}{i_1} (a_1)^2 \right\} y + (a_1 m_1) - \frac{1}{i_1} (a_1) (m_1), & (10) \\
 Y_2 &= \left\{ (a_2^2) - \frac{1}{i_2} (a_2)^2 \right\} y + (a_2 m_2) - \frac{1}{i_2} (a_2) (m_2), \\
 Y_3 &= \left\{ (a_3^2) - \frac{1}{i_3} (a_3)^2 \right\} y + (a_3 m_3) - \frac{1}{i_3} (a_3) (m_3), \\
 &\quad \&, \qquad \qquad \qquad \&,
 \end{aligned}$$

igualada á cero. Tal será la ecuación final con y . Por coeficiente en ella tendrá esta incógnita el valor recíproco de la suma de cuadrados de los coeficientes que posean las m en la expresión obtenida al despejar la y en dicha ecuación (1).

He aquí los resultados del cálculo.

En primer lugar, suponiendo independientes todas las seis series, las ecuaciones (10) son:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= 78.7593y + 2.8664, \\
 Y_2 &= 7.8295y - 2.5995, \\
 Y_3 &= 2.3138y - 4.9886, \\
 Y_4 &= 6.4696y + 14.3964, \\
 Y_5 &= 6.9186y + 7.1597, \\
 Y_6 &= 0.4307y - 0.3743, \\
 0 &= 102.7215y + 16.4601;
 \end{aligned}$$

$$\therefore y = -0.160, \quad \eta = .0051862,$$

$$e = \frac{1}{288.7}.$$

(1) Designando por A_1, A_2, \dots los coeficientes de y en las expresiones de Y_1, Y_2, \dots ; por A la suma de todos ellos, y por s_1, s_2, \dots las sumas de cuadrados de los coeficientes que las respectivas m_1, m_2, \dots distinguidas por acentos, tienen después de despejada y en la ecuación final, y representando por la letra Σ antepuesta á un paréntesis la suma de cantidades de análoga expresión que la contenida en el mismo, salvo los acentos de la a , será

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{1}{A^2} \Sigma \left\{ a_1^2 - \frac{2}{i_1} a_1 (a_1) + \frac{1}{i_1^2} (a_1)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{A^2} \left\{ (a_1^2) - \frac{2}{i_1} (a_1)^2 + \frac{1}{i_1^2} (a_1)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{A^2} \left\{ (a_1^2) - \frac{1}{i_1} (a_1)^2 \right\} = \frac{1}{A^2} A_1
 \end{aligned}$$

En segundo lugar, suponiendo enlazada la serie inglesa con la de la India:

$$\begin{aligned} Y_{1,2} &= 105.4021y - 48.2878, \\ Y_3 &= 2.3138y - 4.9886, \\ Y_4 &= 6.4696y + 14.3964, \\ Y_5 &= 6.9186y + 7.1597, \\ Y_6 &= 0.4307y - 0.3743, \\ 0 &= 121.5348y - 32.0946; \end{aligned}$$

$$\therefore y = 0.264, \quad \eta = .0052286,$$

$$e = \frac{1}{292.2}.$$

En tercer lugar, suponiendo enlazadas las dos series de la India y de Rusia:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 78.7593y + 2.8664, \\ Y_{2,3} &= 55.0711y - 81.1328, \\ Y_4 &= 6.4696y + 14.3964, \\ Y_5 &= 6.9186y + 7.1597, \\ Y_6 &= 0.4307y - 0.3743, \\ 0 &= 147.6493y - 57.0846; \end{aligned}$$

$$\therefore y = 0.387, \quad \eta = .0052409,$$

$$e = \frac{1}{293.3}.$$

Por último, suponiendo enlazadas las tres series de Inglaterra, la India y Rusia:

y valores parecidos se hallarán para s_1, s_2, \dots . Luego, llamando S á la suma de s_1, s_2, s_3, \dots se tendrá

$$S = \frac{1}{A^2} (A_1 + A_2 + \dots) = \frac{1}{A}.$$

$$\begin{aligned}
 Y_{1, 2, 3} &= 137.7645y - 92.8100, \\
 Y_4 &= 6.4696y + 14.3964, \\
 Y_5 &= 6.9186y + 7.1597, \\
 Y_6 &= 0.4307y - 0.3743, \\
 0 &= 151.5834y - 71.6282;
 \end{aligned}$$

$$\therefore y = 0.472, \quad \eta = -0.052494.$$

$$e = \frac{1}{294.0}.$$

Bien cabe inferir que e estará comprendida entre los límites señalados por la primera y cuarta solución, y comparando la segunda y tercera con el valor de la elipticidad hallado en la página 474, veremos que la elipticidad acusada por las observaciones del péndulo, según lo indicado por los presentes datos, apenas ó nada discrepa de la obtenida midiendo arcos sobre la superficie terrestre.

Corresponde á cada una de las soluciones antedichas un sistema de cantidades x que manifiestan el aumento ó disminución aparente de la gravedad en cada punto observado. Pero si, fijándonos en el sistema concerniente á la primera solución, comparamos la x de Londres con la de Kew, hallaremos en el primer punto disminuída la gravedad en 0.91 de oscilación y aumentada en el segundo en 5.15, lo que da una diferencia de 6.06 oscilaciones por día entre dos lugares casi á la misma latitud y á distancia uno de otro solamente de 10 millas (16 kilómetros). Como esto no es admisible, parece natural recurrir á las observaciones de Goldingham, en Madras, para enlazar con Londres la serie de la India. El siguiente cuadro indica el aumento de oscilaciones ó exceso de la gravedad que en los diferentes puntos resulta, ateniéndose á la segunda solución

$$e = \frac{1}{292.2}$$

Las estaciones marcadas con un asterisco no se han tomado en cuenta para el cálculo.

ESTACIÓN	OSCILA- CIONES AUMEN- TADAS	ESTACIÓN	OSCILA- CIONES AUMEN- TADAS	ESTACIÓN	OSCILA- CIONES AUMEN- TADAS
Spitzberg.	+ 5.09	Kew.	+ 2.89	Torneat.	+ 5.51
Groenlandia.	- 0.50	Moré *.	- 22.08	Nicolaistadt.	+ 0.55
Port Bowen.	+ 1.98	Maean Meer.	- 5.97	San Petersburgo.	+ 0.48
Hammerfest.	- 1.41	Ismailia.	- 1.08	Revel.	+ 0.91
Drontheim.	- 5.55	Mussoorie *.	- 6.06	Dorpat.	+ 0.41
Unst.	+ 4.75	Dehra *.	- 9.50	Jacobstadt.	+ 1.56
Portsoy.	+ 4.67	Nojli.	- 4.82	Wilna.	- 0.06
Leith Fort.	+ 1.15	Kaliana.	- 4.09	Belin.	- 0.74
Altona.	+ 1.09	Dalaira.	- 2.25	Kremenetz.	- 0.50
Clifton.	- 0.09	Usira.	- 1.54	Kamenetz.	+ 0.81
Arbury Hill.	+ 0.85	Pahargarh.	- 3.54	Kischinef.	- 0.82
Londres.	- 0.21	Kalianpur.	- 1.54	Ismail.	- 2.07
Shanklin.	- 0.56	Almadpur.	- 2.55	Paris.	- 5.29
Nueva York.	+ 0.20	Calcuta.	+ 0.79	Tolon.	- 1.85
San Blas.	- 5.70	Badgaon.	- 1.92	Mowi.	+ 4.80
Jamaica.	+ 1.51	Somtana.	- 2.21	Rawak.	+ 2.61
Trinidad.	- 2.66	Bombay.	+ 2.84	Isla de Francia.	+ 7.16
Porto Bello.	+ 5.85	Damargida.	- 4.45	Port Jackson.	- 0.38
Sierra Leona.	+ 0.66	Kodangal.	- 2.46	Falkland.	- 5.85
Galápagos.	+ 2.45	Cocanada.	+ 0.50	Petersburgo.	- 0.15
Santo Tomás.	+ 6.86	Namthabad.	- 5.41	Sitka.	- 1.66
P. Gaussa Lout.	+ 4.55	Madras.	- 1.28	Petro-Paulowski.	+ 1.59
Para.	- 1.50	Bangalore N.	- 5.32	Greenwich.	- 2.25
Maranhao.	- 5.45	Bangalore S.	- 3.82	Isla Bonin *.	+ 11.79
F. de Noronha.	+ 8.22	Mangalore.	- 1.12	Guam.	+ 4.88
Ascension.	+ 6.15	Aden.	+ 1.81	Ualan.	+ 9.95
Bahia.	- 0.98	Pachapaliam.	- 2.27	Valparaiso.	- 2.41
Santa Elena.	+ 3.52	Alleppy.	+ 0.91	Dunkerque.	+ 1.96
Río Janeiro.	- 1.41	Mallapatti.	- 1.65	Clermont.	- 1.05
Paramatta.	- 0.44	Isla Minicoy.	+ 3.49	Burdeos.	- 1.20
Cabo B. Esperanza.	- 0.80	Kodankolam.	- 0.45	Figeac.	- 4.02
Montevideo.	- 1.45	Punne.	- 0.55	Formentera.	+ 1.29
Isla Staten.	+ 2.90				
Cabo Hornos.	+ 1.67				
Shetland Sur.	+ 5.90				

Expresando en segundos por día el error probable de una ecuación, ó bien la irregularidad probable de la gravedad, su valor es

$$\pm .674 \sqrt{\frac{767.97}{94-7}} = \pm 2.00;$$

Inego el error de y valdrá ± 0.18 , y por lo tanto será

$$e = \frac{1}{292.2 \pm 1.5}$$

Pero tales errores probables son demasiado pequeños á causa de haberse omitido en el cálculo los datos relativos á algunas estaciones.

Conforme fué en aumento el número de observaciones del péndulo en la India, el general Walker llamó la atención—primero en su *Yearly Report*, 1866, y después en las Memorias que siguieron hasta 1874—acerca de un hecho en esbozo que poco á poco iba quedando de manifiesto, á saber: que la gravedad disminuía indudablemente en intensidad á medida que el punto de observación estaba más cerca del Himalaya, y que, por el contrario, esa fuerza era mayor en los puntos de la costa, sobre todo en la isla de Minicoy (1). Como complementó, según puede verse en el *Report*, 1874, páginas 20 y 21, los estudios del capitán Basevi—que tan deplorable fin (2) tuvo por lo arriesgado de ellos—revelaron que en las cumbres del Himalaya existe cuantiosa disminución en la gravedad. De acuerdo con estas indicaciones se hallan los números contenidos en el cuadro anterior.

(1) Fundándose Faye en esta compensación, que explica según queda indicado en la nota de la página 156 del presente libro, establece que en el cálculo de las observaciones del péndulo se debe prescindir, por lo común, de las desigualdades de la superficie terrestre, ó en otros términos, en la reducción al nivel del mar, atender sólo á la altitud, salvo en casos muy especiales. Pero Helmert, en su *Die Theorien der höheren Geodäsie*, opina que debe tomarse en cuenta la masa que haya debajo del punto de observación, y da, para calcular el efecto de ella, un método que estriba en el estudio de lo que él llama *superficie de condensación*, es decir, una superficie que el autor imagina trazada á determinada distancia, paralelamente á la superficie matemática de la tierra y constituida por la reunión de la masa exterior, llevada allí por proyección según el radio. Wolf, en la introducción á los tomos IV y V de la *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, recomienda que no sólo se hagan observaciones del péndulo para deducir del conjunto de ellas la forma general de la tierra, sino que además, por observaciones repetidas en gran número de lugares, se averigüen las variaciones especiales que allí tenga la superficie elíptica ideal, las cuales influyen aún en las capas de nivel de la atmósfera y modifican la refracción. Y por este motivo añade: «Tanto á la Astronomía como á la Geodesia y Geología conviene que se extiendan las medidas con el péndulo».

(2) Pereció el capitán de ingenieros Basevi en los confines del Tíbet chino, en una meseta del Himalaya, cuya altitud supera á 5 200 metros. Encontróse allí rodeado de nieve y á gran distancia de todo socorro humano.

En Kalia (*), elegida por Sir G. Everest como el punto más próximo á la falda del Himalaya, donde era posible situarse sin que por un efecto de desvío local padeciera la exactitud de las operaciones geodésicas, hay en la gravedad, como manifiesta el cuadro precedente, gran disminución, la cual subsiste en toda la parte recayente al Norte de dicho punto y llega á restar en Moré 22 oscilaciones. Nótese bien que á esto cabalmente asciendo la corrección hecha tomando en cuenta la atracción que al parecer debían de producir las montañas dominadas por ese punto: luego es nula en realidad la atracción vertical aparente de las tres millas (48 kilómetros) de corteza terrestre comprendidas desde Moré hasta el nivel del mar. Ni es sólo en dicha estación donde tal ocurre, pues en la mayor parte de los otros puntos elevados la discrepancia desaparece, ó cuando menos disminuye mucho, omitiendo la corrección fundada en la supuesta atracción de la meseta que se alce desde el nivel del mar al punto respectivo.

Parece, pues, fuera de duda, en vista de las mencionadas observaciones del péndulo, lo ya indicado por las observaciones astronómicas de latitud en la India, á saber, que hay allí alguna causa desconocida, tal vez distribución especial de la materia, que contraviene la atracción de las montañas visibles. Si se reputa aventurado suponer que existan vastas cavidades debajo de las grandes montañas, la explicación más plausible será la suministrada por la hipótesis del arcediano Pratt, expuesta en la página 156 de la presente obra, opinión acogida por el general Walker en el prólogo del tomo relativo al péndulo (**).

(*) *An Account of the Measurement of two Sections of the Meridional Arc of India*, por el teniente coronel Everest, páginas XLI y XLII. En el azimut observado en Banog llega á 20" el influjo de la atracción del Himalaya.

(**) *Account of the Great Trigonometrical Survey of India*, tomo V, páginas XXXII y XXXIII.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs, but the characters are too light and blurry to be transcribed accurately.

INDICE

	PAGINAS
PRÓLOGO DEL TRADUCTOR..	I
DATOS MÁS IMPORTANTES DEL ELIPSOIDE TERRESTRE..	VI
TABLAS DE REDUCCIÓN DE MEDIDAS INGLESA.	VIII
INICIALES Y SIGNOS..	IX
PRÓLOGO DEL AUTOR..	XIII

CAPÍTULO I

OPERACIONES GEODÉSICAS

Valor aproximado del radio de la tierra.	1
Primeras triangulaciones geodésicas realizadas por Snellius, Picard y Cassini.	2
Medida de un arco de meridiano en Suecia, por la Comisión compuesta de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, Outhier y Celsius.	4
Medida de otro arco en el Perú, por la Comisión compuesta de Bouguer, La Condamine, Godín, D. Jorge Juan y D. Antonio de Ulloa.. . . .	11
La toesa del Perú.	11
Enlace geodésico de Inglaterra y Francia, por el general Roy de una parte, y de otra el conde Cassini, Méchain y Legendre.	14
Teodolito de Ramsden.	15
Medida de una base en Hounslow Heath..	15
Círculo de repetición..	18
Cadena meridiana francesa trazada por Delambre y Méchain.	20
Reglas de Borda.	21
Cálculo de la longitud del metro legal.	22
Medida de un grado en la Prusia oriental, por Bessel..	25
Medida de un arco de meridiano en la India, por el coronel Everest.	30
Atracción producida por una meseta montañosa situada enfrente del punto medio del arco medido	31
Prolongación de la cadena trigonométrica de la India, por el general Walker..	36
Continuación de la red geodésica de Inglaterra é Irlanda, por el coronel Colby y después por el general Sir H. James.	38
Arco de meridiano de 25°20' medido en Rusia por Tenner y Struve.	39
Revisión y ampliación hechas por Sir Thomas Maclear del arco de meridiano medido en el Cabo de Buena Esperanza por Lacaille.	40

Arco de paralelo medido en Argelia, por el comandante Perrier.	41
Revisión emprendida por el mismo de la cadena meridiana francesa.	44

CAPÍTULO II

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Ecuaciones fundamentales de Trigonometría y algunas fórmulas importantes que de ellas se infieren.	45
Arco trazado en un triángulo esférico desde un vértice hasta el lado opuesto.	52
Diferencia de dos ángulos casi iguales deducida de la diferencia de sus cosenos.	53
Variaciones correlativas de lados y ángulos en un triángulo esférico.	55
Triángulos esféricos rectángulos.	56
Fórmula concerniente al giro del vértice del ángulo recto en torno de otro vértice del mismo triángulo.	60
Teorema de Legendre y errores que al aplicarlo se cometen.	62
Cálculo de coordenadas esféricas por medio de dicho teorema.	68
Desarrollo de $(1 + 2n \cos \theta + n^2) - \theta$ en serie.	72

CAPÍTULO III

MÍNIMOS CUADRADOS

Método de los mínimos cuadrados.	75
Ley de probabilidad de un error dado.	77
Promedio de errores y promedio de sus cuadrados.	79
Error probable.	82
Su valor en una suma de cantidades afectadas de errores independientes.	83
Resolución de un sistema de ecuaciones en mayor número que las incógnitas.	86
Error probable de una función de los valores obtenidos para las incógnitas.	89
Ejemplos numéricos.	95
Caso en que, además de las ecuaciones deducidas de la serie de observaciones, existan entre las incógnitas ecuaciones de condición en menor número que dichas incógnitas.	100
Error probable de una función de los valores observados en los ángulos pertenecientes á un triángulo.	102

CAPÍTULO IV

TEORÍA DE LA FIGURA DE LA TIERRA

Las potenciales de elipsoides confocales en un punto exterior son como sus masas.	106
Expresión de la potencial de un elipsoide en un punto interior.	111

Fórmulas de las potenciales de un elipsoide casi esférico relativas á un punto interior y á otro exterior.	112
Potencial de un esferoide aplanado, compuesto de capas esferoidales, cuya densidad y elipticidad varíen con la distancia media de la capa respectiva al centro.	118
Teorema de Jacobi concerniente al equilibrio relativo en la rotación de un elipsoide fluido y homogéneo.	122
Equilibrio relativo en la rotación de un esferoide aplanado, fluido y homogéneo.	124
La tierra no pudo ser una masa fluida homogénea.	125
Ecuación diferencial de Clairaut ó condición de equilibrio relativo en la rotación de un esferoide aplanado, fluido y compuesto de capas esferoidales concéntricas de diferente densidad.	127
Teorema de Clairaut ó relación entre la elipticidad de la tierra y la variación de la fuerza de la gravedad desde el polo al ecuador.	128
Ley de Laplace sobre la variación de densidad.	131
Ley que de la anterior se deduce para la elipticidad de cada capa esferoidal.	133
Relación entre la elipticidad de la tierra y la constante de la precesión de los equinoccios.	137
Comparación de la elipticidad que así resulta, con la que dan las medidas de arcos terrestres y las observaciones del péndulo.	139
Variación de altura producida en el nivel del mar por distribución irregular de la materia terrestre.	140
Variación de curvatura producida en dicho nivel por la misma causa.	144
Cordillera con pendiente más pronunciada por un lado que por otro.	147
Teorías de Sir G. Airy y del arcediano Pratt acerca de la atracción de las montañas.	154
Efecto de la altitud en las latitudes halladas por observación.	161

CAPÍTULO V

DISTANCIAS, AZIMUTES Y TRIÁNGULOS EN UN ESFEROIDE

Coordenadas de un punto y radios principales de curvatura en el mismo.	163
Distancia entre dos puntos, azimutes recíprocos de ambos y distancias zenitales de los mismos.	165
Comparación de un triángulo esferoidal con otro esférico cuyos vértices tengan las mismas latitudes y longitudes que los del primero.	167
Fórmulas pertenecientes á la curva según la cual es cortado un esferoide por el plano que pasa por un punto y por la vertical de otro.	169
Arco de meridiano en un esferoide.	175
De las varias curvas que pueden ser trazadas como lados de un triángulo esferoidal.	178
Estudio de la curva de alineación.	179
Curvatura de una superficie.	184

Coordenadas rectangulares de dos vértices del triángulo esferoidal con relación á la normal en el tercer vértice.	186
Comparación de los ángulos de un triángulo esferoidal con los de un triángulo esférico de lados respectivamente iguales.	190
Errores cometidos al calcular como esféricos los triángulos esferoidales.	193

CAPÍTULO VI

LÍNEAS GEODÉSICAS

Ecuación de la línea geodésica ó de mínima distancia en un elipsoide de revolución.	198
Triángulo esférico auxiliar para el estudio de esta línea.	199
Curso de la línea geodésica entre dos puntos referido á la curva según la cual es cortada la superficie esferoidal por el plano que pasa por uno de ellos y por la vertical del otro.	200
Azimutes de la línea geodésica en sus puntos extremos.	204
Condición para que la línea geodésica entre dos puntos poco distantes corte una de las dos curvas planas determinadas por cada uno de ellos y por la vertical del otro.	207
Longitud de la línea geodésica.	210
Comparación de los ángulos de un triángulo geodésico con los ángulos hallados por observación	213
Línea geodésica entre Kurrachee y Calenta.	214
Línea geodésica entre Burdeos y Nicolaeff.	215
Latitud y longitud de un punto de la línea geodésica, dando la posición del punto de partida, la dirección inicial de la línea y el arco recorrido sobre ella.	217
Distancia geodésica entre Strasburgo y Dunkerque.	221
Propiedad del plano osculador en cualquier punto de la línea geodésica.	226

CAPÍTULO VII

MEDICIÓN DE BASES

Clases de reglas geodésicas usadas en los diversos países.	229
Determinación de los errores de los termómetros.	230
Flexión de la regla.	232
Medios empleados en Southampton para comparar reglas y determinar sus coeficientes de dilatación.	235
Errores personales en las observaciones micrométricas.	237
Radio que conviene dar á los casquetes extremos en las reglas con conteras.	239
Longitudes de varias reglas geodésicas con relación á la yarda, tipo de Inglaterra.	241
Longitud del metro.	242
Previsiones al medir una base.	244
Regla de Struve.	246

Regla de Bessel.	248
Bases de Beverloo y Ostende.	250
Regla de compensación de Colby.	250
Base del Cabo Comorin.	253
Error probable de una base formada por trozos medidos repetidas veces.	253
Aparato de Bache empleado en los Estados Unidos.	254
Base de Atalanta.	257
Aparato de Porro.	257
Regla española.	260
Base de Madriçejos.	261
Comprobación de la base por red de triángulos.	267

CAPÍTULO VIII

INSTRUMENTOS Y OBSERVACIONES

Clases de teodolitos.	269
Teodolitos de Ramsden.	269
Teodolitos de Troughton y Simms.	271
Instrumento universal de Reichenbach.	273
Teodolitos de Ertel y de Repsold.	273
Advertencias para observar con el teodolito.	274
Errores de graduación.	275
Heliotropo.	276
Tablados para dominar puntos lejanos.	277
Método con que se observan desde un vértice otros varios vértices ó estaciones.	277
Sector zenital de Airy.	279
Anteojo zenital de Talcott.	283
Anteojo de pasos portátil.	287
Flexión del eje horizontal.	288
Efecto de la aberración y errores de colimación y nivel.	290
Reducción de las horas de pasos por los hilos del retículo.	293
Determinación de la hora.	295
Observación de pasos de estrellas por el plano vertical de la Polar.	297
Cálculo de la latitud mediante la observación de pasos de estrellas por el primer vertical.	301
Otros métodos para hallar la latitud.	306
Observaciones para determinar el azimut.	312
Método telegráfico ó norteamericano para hallar la diferencia de longitudes.	317
Ecuación personal.	321
Determinación de longitudes transatlánticas por medio del cable.	325
Método de comprobación de las diferencias de longitudes practicado en la India.	326
Diferencia de longitudes entre Paris y Argel.	329

CAPÍTULO IX

CÁLCULO DE LA TRIANGULACIÓN

Cálculo de un polígono formado por varios triángulos con vértice común y determinación de los errores probables de los resultados.	331
Ejemplo tomado de la triangulación de Irlanda.	338
Cálculo de una cadena de triángulos y determinación de los errores probables de los resultados.	341
Correcciones que, en los ángulos de la cadena tendida entre dos lados medidos con exactitud, deben hacerse para que las longitudes de ambos aparezcan de acuerdo, cuando partiendo de una se halle la otra.	345
Error probable en la medición de un ángulo.	349
Ecuaciones de condición deducidas de propiedades geométricas en una red de triángulos.	350
Método seguido por Bessel en la reducción por mínimos cuadrados.	353
Modificación de este método en la triangulación de la Gran Bretaña é Irlanda.	358
Errores probables de los ángulos adoptados por el método precedente.	362
Correcciones en las longitudes de los lados.	365
Ejemplo de correcciones de ángulos en una pequeña red de la triangulación inglesa.	366
Ejemplo de cálculo de coordenadas esféricas en la red antedicha.	372
Cálculo del arco de meridiano comprendido entre Easington y la proyección, sobre el mismo, de Saxaford.	374
Enlace de las triangulaciones de Inglaterra, Francia y Bélgica.	376
Cruzamiento y cierre de cadenas en las redes trigonométricas de la India, Francia y España.	378
Enlace de las triangulaciones de España y Argelia.	386
Fórmulas de compensación cuando los lados de los triángulos trazados componen los lados y diagonales de un cuadrilátero.	390

CAPÍTULO X

CÁLCULO DE LATITUDES Y LONGITUDES

Diferencia entre los ángulos que forman con el meridiano de un punto B de un esferoide el plano donde está contenida la vertical de este punto con otro A de dicho esferoide y el plano determinado por la vertical de A y por el punto B.	395
Ángulo comprendido entre la vertical en un punto del esferoide y la recta que une otro punto del mismo con el de intersección de dicha vertical con el eje del esferoide.	399
Ejemplo numérico con datos pertenecientes á Greenwich y al vértice Feaghmain, situado en Valencia de Irlanda.	402
Mediando entre dos puntos A y B de un esferoide distancia inferior ó	

poco superior á un grado, deducir de esta distancia, de la latitud de A y del azimut de B en A, la latitud de B, la diferencia de longitudes entre B y A y el azimut de A en B. 403

Resolución del mismo problema cuando la distancia entre los dos puntos es más considerable. 407

Distancia meridiana entre los paralelos de dichos dos puntos. 408

Correcciones promovidas en los cálculos en virtud de pequeñas variaciones en las longitudes de los ejes del esferoide. 409

Expresión de la extensión lineal abarcada sobre un esferoide indeterminado, por el arco de paralelo comprendido á los 52° de latitud, entre el meridiano de Feaghmain, en Irlanda, y el del monte Kemmel, en Bélgica 413

CAPÍTULO XI

ALTURAS DE LAS ESTACIONES

Refracción terrestre y sus variaciones en el curso del día. 417

Medida del coeficiente de refracción. 418

Valor medio que se infiere de las observaciones hechas en Inglaterra. . . 420

Diversidad de coeficiente entre los rayos que salvan el mar y los que cruzan por encima del suelo. 420

Diferencia entre las alturas de dos puntos deducida de las distancias zenitales observadas. 421

Error probable de esta diferencia. 422

Aplicación del método de mínimos cuadrados para corregir las diferencias de alturas concernientes á varios puntos. 424

Altitud de una cima desde la cual se domine el horizonte del mar. . . . 425

Curva descrita á través de la atmósfera por el rayo luminoso que va de un punto á otro. 425

Condición para que, una de otra, puedan verse dos estaciones. 426

CAPÍTULO XII

ENLACE DE OPERACIONES GEODÉSICAS Y ASTRONÓMICAS

Diferencias de densidad en la corteza terrestre puestas de manifiesto por este enlace 427

Latitud y longitud de la proyección de un punto de la superficie terrestre sobre un esferoide que discrepe poco de dicha superficie y azimut de una señal referida á la misma proyección. 429

La corrección que el ángulo horizontal, medido entre dos puntos de la tierra, requiere al trasladarlos á dicho esferoide, es muy pequeña. . . . 431

Fórmulas para deducir de las coordenadas de un punto de este esferoide las correspondientes á otro punto del mismo. 431

Cálculo del esferoide que con más exactitud responde á las observaciones astronómicas hechas en una triangulación. 433

Esferoide que mejor representa la superficie de la Gran Bretaña é Irlanda.	435
Desvío producido en la dirección de la gravedad en un punto por distribución irregular de materia en el suelo que le rodee.	436
Atracción debida á una meseta elevada, prismática y rectangular.	440
Atracción producida por una cordillera.	442
Error causado en la nivelación topográfica por la atracción de las montañas.	445
Cálculo de la densidad media de la tierra.	447

CAPÍTULO XIII

FIGURA DE LA TIERRA

Principio en que se funda el cálculo del elipsoide teórico ó que mejor representa la figura de la tierra.	449
Dimensiones deducidas respectivamente por Airy y por Bessel, suponiendo la tierra un elipsoide de revolución.	450
Cálculo hecho por Clarke para figura más general de revolución.	451
Estudio de la figura de la tierra como elipsoide de tres ejes, según la hipótesis de Schubert.	454
Posición de los ejes de tal elipsoide.	459
Importancia respectiva de los arcos de meridiano medidos á diferentes latitudes en el cálculo de los semiejes del esferoide ó elipsoide de revolución.	461
Relación entre las correcciones que se apliquen á las latitudes halladas por observación en dos puntos de un arco de meridiano para que éste pertenezca á un esferoide que difiera poco de la superficie terrestre.	463
Relación que para el mismo objeto debe existir entre las correcciones que se apliquen á las longitudes halladas por observación en dos puntos de un arco de paralelo.	466
Ecuaciones que en los tres grandes arcos de meridiano, anglofrancés, ruso é indio, en los dos menores del Cabo de Buena Esperanza y del Perú, y en un arco de paralelo de la India, se establecen por las relaciones precedentes.	469
Ecuaciones finales deducidas de las anteriores para el esferoide teórico, y correcciones que se infieren para las latitudes y longitudes.	471
Valores de los semiejes del indicado esferoide.	474
Cotejo de la figura propia de cada uno de los tres grandes arcos de meridiano citados con la de los meridianos correlativos del esferoide teórico.	474
Fórmulas numéricas concernientes á las coordenadas rectangulares de un punto de dicho esferoide, á los radios principales de curvatura en el mismo punto y á las magnitudes lineales de un grado de latitud y de otro de longitud.	476
Magnitud del metro legal.	478

CAPÍTULO XIV

DEL PÉNDULO

Fórmulas relativas al péndulo simple de segundos.	479
Primeras observaciones del péndulo enlazadas con la variación de la gravedad, por Picard y Richer.	480
Reducción que hacía Bouguer de sus observaciones por la pérdida de peso del péndulo en el aire.	480
Fórmula dada por el mismo observador para calcular el influjo ejercido por la atracción de una montaña cuando sobre ella oscila el péndulo.	481
Observaciones de Maupertuis en Finlandia.	483
Aparato de Borda.	484
Péndulo de inversión ó conversión aplicado por Kater, para hallar en cada punto la longitud absoluta del péndulo de segundos.	485
Péndulo invariable del mismo observador.	489
Modo de contar las oscilaciones del péndulo.	490
Reducción de las oscilaciones á otras de amplitud infinitamente pequeña.	493
Ecuación del movimiento que un péndulo compuesto tendría en el vacío.	496
Principio de Du Buat acerca del movimiento de un sólido en un fluido.	497
Estudios de Bessel y de Baily sobre este movimiento.	498
Péndulo de Repsold y fórmula para deducir de sus observaciones la longitud del péndulo de segundos.	500
Observaciones hechas en diferentes puntos del globo, por Sabine, con péndulos invariables, y por Foster con péndulos de esta clase y con otros distintos.	502
Observaciones verificadas en varios puntos de Rusia, por Sawitsh, con el péndulo de Repsold.	504
Corrección que requieren las observaciones con este péndulo á causa del balance de sostén.	506
Observaciones realizadas en la India por Basevi y Heaviside con dos péndulos invariables.	507
Correcciones motivadas por la altitud del lugar y por la atracción de las capas terrestres situadas debajo cuando es muy grande esa altitud.	513
Resumen de los números de oscilaciones al día obtenidos en diferentes puntos por los antedichos observadores y por Hall, Brisbane, Goldingham, Kater, Freycinet, Duperrey, Lutke, Biot y Arago.	517
Cálculo de la elipticidad de la tierra.	521
Resultados que se obtienen separando las series de observaciones ó enlazándolas de diversos modos y discusión de estos resultados.	524
Distribución probable de la materia terrestre á juzgar por las observaciones hechas con el péndulo.	528

LIBRERÍA EDITORIAL DE BAILLY-BAILLIERE É HIJOS

— Plaza de Santa Ana, núm. 10, Madrid. —

CIRODDE. LECCIONES DE ARITMÉTICA, obra autorizada por el Consejo de Instrucción pública de Francia, modificada conforme á los últimos programas de enseñanza; traducida de la última edición francesa por D. Francisco Zoleo.—*Trigésimasegunda tirada.*—Madrid, 1893. Un tomo en 8.º Precios: en Madrid, en rústica, 4 pesetas; en pasta, 5,50; en provincias, en rústica, 4,50 pesetas; en pasta, 6.

CIRODDE. LECCIONES DE ÁLGEBRA, obra autorizada por el Consejo de Instrucción pública de Francia; traducida de la última edición francesa por D. Bartolomé Peregrin, licenciado en Ciencias físico-matemáticas.—*Vigésimacuarta tirada*, revisada por D. Francisco de Borja Gayoso.—Madrid, 1893. Un tomo en 8.º Precios: en Madrid, en rústica, 7 pesetas; en pasta, 8,50; en provincias, en rústica, 7,50 pesetas; en pasta, 9.

CIRODDE. LECCIONES DE GEOMETRÍA, con algunas nociones de la descriptiva; traducidas de la última edición francesa por D. Manuel María Barber y.—*Décimaséptima tirada* española, corregida, anotada y adicionada por el traductor.—Madrid, 1893. Un tomo en 8.º, con ocho láminas. Precios: en Madrid, en rústica, 8 pesetas; en pasta, 9,50; en provincias, en rústica, 8,50 pesetas; en pasta, 10.

CIRODDE. ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ES-FÉRICA; traducidos al castellano por D. Manuel María Barber y, director de sección del Cuerpo de Telégrafos, antiguo alumno de la Academia especial de Ingenieros del ejército, director de caminos vecinales, maestro académico de obras por la Nacional de San Fernando, bachiller en artes, profesor de matemáticas, fortificación y geografía, etc., etc.—*Décimasexta edición.*—Madrid, 1893. Un tomo en 8.º, con láminas. Precios: en Madrid, en rústica, 2 pesetas; en pasta, 3,50; en provincias, en rústica, 2,50 pesetas; en pasta, 4.

JIMENEZ (D. Eulogio). EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS.—*Aritmética.*—Resolución de todos los problemas contenidos en la de D. Ambrosio Moya y en las de otros autores, con un Apéndice acerca de la teoría de los números.—Madrid, 1868. Un tomo en 8.º Precios: en Madrid, en rústica, 2 pesetas; en provincias, 2,50.

JIMENEZ (D. Eulogio). TRATADO ELEMENTAL DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS; obra premiada en público certamen por la Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales.—Madrid, 1877. Un tomo en 4.º Precios: en Madrid, en rústica, 12,50 pesetas; en pasta, 14,50; en provincias, en rústica, 13,50 pesetas; en pasta, 15,50.

