TRATADO

DE TOPOGRAFIA

Y

AGRIMENSURA,

POR

[illegible]

TRATADO

DE TOPOGRAFIA

Y

AGRIMENSURA,

POR

El Brigadier Don Mariano Garrillo de Albornoz,
Director-Subinspector del Cuerpo de Ingenieros de Egército.

EZ.

Al Excmo. Señor

Don Luis María Balanzat, Mariscal de Campo, Ingeniero General de España é Indias, Consejero Honorario de Estado, Senador, etc., etc.

Mariano Carrillo.

Advertencia.

Hallándome el año de 1812 *de profesor en la Academia de Ingenieros, establecida provisionalmente en Cadiz, se me comisionó de real órden para formar un breve tratado de trigonometría rectilínea y geometría práctica. Para este encargo fue nombrado á una conmigo el capitan entónces y hoy coronel D. Bartolomé Amat, profesor tambien de la misma Academia; y basta citar á un oficial tan acreditado, para que no me sea necesario detenerme á demostrar, que suya fue la parte principal del desempeño de nuestra comision. La favorable acojida que este tratado obtuvo en la época de su publicacion, y la diligencia con que se le buscó despues, y aun se le busca en el dia, para servir de testo en varios establecimientos de enseñanza públicos y particulares, me ratificaron en el convencimiento que ya tenia acerca de la falta que estaba haciendo una obra, que, sin dejar de ser elemental, llenase completamente las miras con que fue escrito aquel ligero ensayo. Penetrado de esta idea me resolví, tan pronto como las atenciones del servicio y las vicisitudes políticas me lo permitieron, á escribir segun mis alcances tomando por base la citada obrita la que ahora publico con el título de* Tratado de Topografía y Agrimensura.

En ella he procurado reunir todos los principios y datos esenciales, que sobre tan interesantes materias se encuentran diseminados en gran número de obras nacionales y estrangeras, impre-

sas hasta fines del año próximo pasado. La lista de las principales que he consultado puesta á continuacion de esta advertencia servirá, no solo para justificar mi aserto, sino tambien para facilitar á los lectores los medios de adquirir estensamente las luces que puedan apetecer, sobre los puntos que no encuentren suficientemente dilucidados en mi obra. Ademas de que es en mi concepto cumplir con un deber de justicia el citar en cualquier obra las que se han tenido presentes para formarla. A los abundantes materiales suministrados por dichas obras he agregado el producto de mi propia esperiencia, y los muchos y muy interesantes datos y noticias que me han franqueado generosamente mis compañeros y amigos.

Entre estos estoy en la obligacion de tributar un especial testimonio de gratitud al teniente coronel D. José Garcia Otero, capitan que fue del Cuerpo de ingenieros del ejército, y subinspector en el dia del de puentes y caminos. Este amigo, ademas de las importantes correcciones que ha hecho en el todo de mi obra, ha redactado con muy pocas escepciones la 5.ª parte que trata del dibujo, y ha litografiado por sí mismo las láminas de la parte de topografía. Este trabajo puede mirarse como una introduccion al en que está ocupado sobre esta importante materia; y cuya publicacion es del mayor interés atendidos los notorios talentos é incansable laboriosidad de que tiene dadas y continúa dando tantas pruebas en la clase de geometria descriptiva, que desempeña en la escuela del Cuerpo á que actualmente pertenece. Y no con menos ventajas de la instruccion la desempeñó tambien en la del Cuerpo de ingenieros del ejército, hasta que por efecto de las vicisitudes políticas se verificó su separacion del mismo, con general sentimiento de sus compañeros.

Tocante al plan de mi obra desde luego se echará de ver, que mi propósito ha sido hacerla útil, no tan solo á los ingenieros militares y civiles, sino tambien á los arquitectos y agrimensores, y aun á las demas personas que por sus carreras necesiten tener algunas nociones de la materia de que trata, ó que deseen adquirirlas como parte de una educacion esmerada. Partiendo de esta idea, he procurado poner mi trabajo al alcance del mayor número posible de lectores; simplificándole de manera, que basten para su inteligencia los conocimientos mas elementales del álgebra y de la geometría. Con el mismo fin lo he amenizado cuanto me ha sido posible, haciendo palpable su utilidad y usual aplicacion por medio de ejemplos tomados de cosas conocidas, y de casos frecuentes en las transacciones sociales mas comunes. Este mismo anhelo de generalizar los conocimientos útiles, y no un pueril amor propio, es el origen de las frecuentes referencias que hago á otras ciencias; proponiéndome particularmente escitar con esto la curiosidad de los jóvenes, y estimularles al estudio de la física, de la química, y en general de las ciencias naturales, cuyo conocimiento, mas ó menos estenso, es en el dia casi indispensable hasta en el trato ordinario de la sociedad.

La franqueza con que acabo de manifestar los elementos de que e compone, y el objeto á que se dirije el Tratado que publico, basará para ponerme á cubierto de la crítica, que en otro caso polria tal vez sufrir de parte de quienes supusieran, que daba á mi rabajo mas valor del que realmente tiene. Pero al mismo tiempo ue rechazo tal suposicion, me sujeto muy gustoso á la censura uiciosa y razonada de los hombres ilustrados; porque, ademas de ontribuir á mi instruccion, producirá el resultado de que personas hábiles, ó mejoren mi obra, ó escriban otra que llene la idea i que he sacrificado el temor que me inspiraba el convencimiento le mi insuficiencia para desempeñarla dignamente. Esta clase de *censura que enseña y estimula es mas que en otra parte necesaria en nuestro pais, donde por desgracia se presentan tan pocos alicientes para escribir obras ó acometer otras cualesquiera empresas científicas. En efecto, mientras en Francia se publican diariamente con elogio obras insignificantes, y hasta copias casi literales de otras cuyos autores existen, sin mas que variarlas de forma, aprovechando de esta suerte en beneficio de la ilustracion general el doble influjo del interes y del amor propio, sucede por el contrario entre nosotros, que muy pocos libros de ciencias alcanzan una segunda edicion, como que ni aun logran sostenerse con crédito mucho tiempo. Asi es como apenas se encuentran ni son ya conocidas las obras del ingeniero en 2.º D. Pedro Padilla y Arcos, quien con tanto método como claridad escribió sobre matemáticas y puntos del arte de la guerra, para servir de testo en una Academia que se estableció en el año de 1756 en el cuartel de Guardias de Corps. Igual suerte han tenido el Tratado de álgebra y geometría del coronel de ingenieros D. Cárlos Lemaur, el Curso de matemáticas del capitan del mismo Cuerpo D. Tadeo Lope y Aguilar, y otras cuya enumeracion seria tan larga como molesta é inoportuna.*

Sin embargo, y á pesar de circunstancias tan poco lisongeras, debe verse con satisfaccion, que entre otras personas distinguidas por su mérito y escritos no han faltado en estos últimos tiempos oficiales de ingenieros celosos é ilustrados, que sin ninguna perspectiva de gloria, ni ventajas personales, hayan arrostrado el trabajo de escribir y los inconvenientes de publicar obras profundas é interesantes. De ello son una prueba, la Geometría analítica del célebre y malogrado D. Mariano Zorraquin, el Tratado de cálculos de D. Fernando Garcia San Pedro, y el de construcciones de D. Celestino del Piélago. Es sensible que no hayan visto tam-

bien la luz pública las luminosas lecciones, que los ya citados D. Bartolomé Amat y D. José Garcia Otero esplicaron en la Academia de ingenieros, el primero sobre los diversos ramos de las matemáticas y parte militar, y el segundo sobre la geometría descriptiva; ni la hayan visto tampoco muchos preciosos trabajos que poseen otros oficiales inteligentes y laboriosos.

Por lo que á mí hace, reconozco sinceramente la inferioridad del mérito de mi obra con respecto á las de mis distinguidos amigos y compañeros. Por lo tanto, solo deseo compartir con ellos el honor, de que se mire este pequeño trabajo como una prueba del celo que constantemente me ha animado de ser útil, y de contribuir en cuanto esté á mis limitadísimos alcances al mayor lustre del Cuerpo á que tengo el honor de pertenecer.

PRINCIPALES OBRAS CONSULTADAS.

Puissant. Topografíe.—Idem. Geodésie.—Lefebre. Traité de la Geométrie de l' arpentage.—Francoeur. Geodésie.—Brewster. A treatise on new philosophical instruments.—W Simms. A treatise on the principal instruments.—Adans. Geometrical and graphical essais etc.—Memorial topographique et militaire.—A. M. Perrot. Manuel elementaire pour les constructions et les dessins des cartes geografiques.—Dupain. Art pour lever les planes.—Verkaven. Traité de nivellement.—Memorial du corps du Genie.—Beudant. Phisique.—Reynau. Trigonometrie analitique.—Manuel des ingenieures du cadastre.—Essai sur le nivellement, an de 1805.—D. Angel Laborde. Tratado elemental de Geografia.—Rebollo. Tratado de Matemáticas.—Adiciones al Almanaque naútico de 1822.—Instruction sur les instrumens de reflection pour le corps royal de E. M.—Benoit. Traité de topografie.—Manzanares. Reconocimientos militares.—Zorraquin. Geometria analítica descriptiva.—San Pedro. Cálculo diferencial é integral.—Gutierrez. Lecciones de física, años de 1835 y 1836.—Francoeur. Mecanique.—Mazallon. Memoire sur les divers moyens de se procurer une base, etc., an de 1837.

NOTA. *La junta de profesores de la Academia de ingenieros, á la que el Exmo. señor ingeniero general pasó á informe esta obra, propuso se adoptase por testo para la enseñanza, lo que S. E. se ha servido aprobar.*

[illegible] á [illegible] las [illegible] lecciones, que fue [illegible] D. [illegible] á D. [illegible] García Otero explicaron en la Aca-[illegible] de ingenieros, el primero sobre los diversos ramos de las matemáticas y puras [illegible], y el segundo sobre la geometría descriptiva; [illegible] de [illegible] que [illegible] [illegible] y [illegible].

Por lo que á mí toca, [illegible] la [illegible]-dad del mérito de una obra con arreglo á luz de este [illegible] amigos y compañeros. Por lo tanto, [illegible] el honor [illegible] cada [illegible] de [illegible] [illegible] y de [illegible] [illegible] á [illegible] del Cuerpo á que tengo el honor de pertenecer.

PRINCIPALES OBRAS CONSULTADAS.

[illegible]. Topografía.— [illegible]. [illegible]. Tratado de la Agrimensura de [illegible].— [illegible] 1826.— [illegible]. A treatise on [illegible] [illegible] instruments.— W. Simms. A treatise on the principal [illegible] Adams. [illegible].— [illegible] [illegible] topographique et [illegible] [illegible].— A. M. [illegible]. Manuel [illegible] sur les [illegible] et les [illegible] [illegible].— [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible].— [illegible]. Manuel des ingénieurs du cadastre.— Essai sur le [illegible].— [illegible]. Tratado de Matemáticas.— Adiciones al [illegible] de [illegible].— [illegible] [illegible] sur les instruments de reflexion [illegible] pour le corps royal de [illegible].— [illegible]. Traité de topographie.— [illegible] [illegible] [illegible] descriptiva.— [illegible] [illegible] de Física, año de 18[illegible].— [illegible]. [illegible].— [illegible]. Mémoire sur les divers moyens de se procurer une base, etc., de 1825.

NOTA. La junta de profesores de la Academia de Ingenieros, á la que [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] que S. M. se ha servido aprobar.

TRATADO

DE

TOPOGRAFIA Y AGRIMENSURA.

Definiciones preliminares, y plan de la obra.

La aplicacion de las proposiciones ó teoremas de la geometría para determinar la forma, los accidentes, y las divisiones de un territorio de cierta estension, es el objeto de la *Topografía.* Corresponde á esta, no solo la formacion de los planos y cartas de los distritos ó partidos, poblaciones, heredades, bosques, parques, jardines, &c., sino tambien la *agrimensura*, ó medida y valuacion de superficies, la nivelacion topográfica, la division de heredades, y las operaciones del catastro. Tambien pertenece á la topografía el arte de *lavar* ó dibujar los planos.

La Geometría y la Geodesia, voces no muy diferentes por su significacion etimológica, puesto que significan literalmente la medida y la division de la tierra, lo son mucho por la significacion adjudicada por el uso, que designa con ellas ciencias enteramente diversas. A la Geometría ha tocado la consideracion de la figura y determinacion de las dimensiones de todos los cuerpos, y bajo de este concepto, la medida de la tierra es una de sus mas felices aplicaciones: á la Geodesia todas las teorías relativas á la forma de la tierra, tanto en su totalidad, como respecto á sus partes sólidas ó flúidas. Estas teorías de que la Geodesia se sirve suministran métodos prácticos, unas veces sencillos, otras complicados, segun la naturaleza de los objetos que considera: y de aqui su division en tres partes del todo distintas, llamadas la *Topografía*, la *Geomorfía*, y la *Navegacion*.

Esplicado ya el objeto de la Topografía resta solo decir, que á la Geomorfía corresponde la forma del globo terrestre, y el levantamiento de cartas de una provincia, ó de todo un Estado; cuyas operaciones exigen la mayor exactitud en los resultados de la observacion y del cálculo. Por lo que hace á la navegacion, esta tiene por objeto tratar de la superficie flúida del globo terrestre; y determinar, ya el punto en que se halla un buque, ya el rumbo que deberá seguir para llegar á un sitio determinado.

Siendo el presente un tratado de Topografía y Agrimensura, contendrá cuantas materias las corresponden, y se dividirá en cinco partes.

En la primera se tratará de la Trigonometría rectilínea.

En la segunda se describirán los instrumentos empleados en las operaciones topográficas, y se esplicará su manejo.

La tercera tendrá por objeto la enseñanza del uso de estos instrumentos en el levantamiento de los planos, y en las demas operaciones topográficas.

En la cuarta se esplicará la nivelacion.

Y en la quinta se esplanarán los puntos principales tocante al dibujo topográfico.

Por último, en una parte adicional se manifestará el uso de las cartas geográficas, y se hablará de su construccion.

Primera parte.

TRIGONOMETRIA RECTILÍNEA.

1. La Geometria enseña á medir la estension gráficamente, mientras que el objeto de la trigonometria rectilínea es emplear el cálculo para la medicion de las distancias, valiéndose de los triángulos rectilíneos, ó lo que se llama resolver estos para deducir tres de las seis partes que constituyen ó forman un triángulo; una vez que, conforme se enseña en la geometria especulativa, se den conocidas las otras tres, pero hallándose entre estas, cuando menos un lado. Asi pues, se hablará primero de la construccion gráfica de los triángulos, y empleará despues el cálculo, pudiendose de este modo comparar uno y otro método y sacár consecuencias importantes.

Combinacion de los datos para la construccion de los triángulos.

2. Como en todo triángulo cada ángulo es igual á 180° menos la suma de los otros dos, conocidos estos, queda determinado el tercer ángulo: asi en un triángulo solo existen cinco partes realmente distintas, que son, tres lados y dos ángulos.

Se trata pues de resolver este problema general. *Conociendo tres de las cinco partes de que consta un triángulo, encontrar por construccion las otras dos partes desconocidas*; *es decir, construir geométricamente el triángulo.*

3. Cuando el triángulo que se pide es rectángulo, basta

conocer dos partes, pues la otra es el ángulo recto, que siempre tiene el mismo valor.

Sea el triángulo *ABC*, rectángulo en B. Las tres partes conocidas se combinan de los cinco modos siguientes.

DATOS.

1.º ..... *a*, *c*.	esto es	dos catetos y el ángulo recto.....	(Fig. 1)
2.º ..... *b*, *a*.		hipotenusa y un cateto............	(2)
3.º ..... *b*, *A*.		hipotenusa y un ángulo agudo......	(3)
4.º ..... *A*, *c*.		un ángulo agudo y el cateto adyacente á este ángulo agudo...........	(4)
5.º ..... *A*, *a*.		un ángulo agudo y el cateto opuesto á dicho ángulo agudo.	(5)

4. Si el triángulo es oblicuángulo, la combinacion de las partes conocidas será tambien de los cinco modos que siguen.

DATOS.

1.º *b*, *A*, *C*.	esto es	Un lado y los dos ángulos adyacentes.	(Fig. 6)
2.º *A*, *C*, *c*.		Dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.	(7)
3.º *a*, *c*, *A*.		Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos	(8)
4.º *a*, *b*, *C*.		Dos lados y el ángulo comprendido	(9)
5.º *a*, *b*, *c*.		Los tres lados..................	(10)

Construccion de los triangulos rectilineos.

Triángulos rectángulos.

Fig. 1. 5. Problema 1.º . . datos. . . *a*, *c*. Tírense dos líneas BH, BK, que formen en el punto B un ángulo recto; sobrepónganse *a*, y *c* en las BH y BK desde B; y uniendo con la línea AC los puntos A, y C adonde llegan, se habrá construido el triángulo, en el que quedan determinados los ángulos A, C, y la hipotenusa B.

Este triángulo puede construirse tambien á la derecha, encima ó debajo de la línea BC; de que resulta, que los mismos datos convienen á los triángulos ABC′, A′BC′, A′BC; y solo determinará el caso á que la construccion se contraiga, cual de dichos triángulos es el que se quiere.

6. Problema 2.° . . datos . . . *b*. *a*. Fórmese en B un ángulo recto con las líneas indefinidas BH, BK, llévese *a*, de B hasta donde llegue en C, desde cuyo punto con un radio igual á *b* descríbase el arco *mn* que cortará á la BH en A, y tirando la AC quedará construido el triángulo. *Fig.* 2.

Esta construccion seria imposible si la hipotenusa *b* no fuese mayor que el cateto *a*, porque entonces el arco descrito desde C no cortaria al cateto BH. El problema seria imposible, pues pedir un triángulo rectángulo, con una hipotenusa menor ó igual á uno de los catetos, equivale á querer tirar desde un punto C de la perpendicular BC sobre una recta AB, una oblicua menor ó igual á la misma perpendicular, lo que no es posible.

7. Problema 3.° . . datos. . . *b*, A. Con la interseccion de dos líneas indefinidas AH, AK, fórmese el ángulo A dado, llévese *b*, de A hasta donde llegue, sea á C; desde este punto bájese sobre AK la perpendicular CB, y quedará construido el triángulo. *Fig.* 3.

8. Problema 4.° . . datos. . A, *c*. Tírense dos líneas indefinidas BH, BK, que se corten en ángulo recto en B; tómese desde B la BA$=c$, y por A tírese la AC, que forme con la AB el ángulo A igual al dado; y se tendrá el triángulo pedido. *Fig.* 4.

9. Problema 5.°. . . datos. . A, *a*. Fórmese con dos rectas indefinidas CH, CK, el ángulo A igual al dado; en el punto C levántese sobre la CH la perpendicular CB, igual al cateto conocido *a*, y en B sobre la CB la perpendicular BAS, con lo que queda formado el triángulo que se desea; pues á causa de las paralelas CH, BS los ángulos A, A, son iguales. *Fig.* 5.

Tambien se puede construir este triángulo, levantando en B, extremo de la línea BC$=a$ dada, la perpendicular BS, formando en cualquier punto P de esta, el ángulo BPQ$=$A, y tirando CK paralela á PQ, con lo que se tiene el triángulo ABC, pedido.

Construccion de triángulos oblicuángulos.

---

10. Problema 1.° . . datos. . . A, C, *b*. En las estremidades de la línea AC,$=b$ fórmense los ángulos A,C, iguales respectivamente á los dados A,C, con lo que la interseccion de las líneas AB, CB de- *Fig.* 6.

termina el punto B, quedando construido el triángulo pedido.

Fig. 7. 11. Problema 2.° . . datos. . . A,C,c. Con las dos rectas indefinidas AH,AK fórmese el ángulo A igual al dado; en un punto P cualquiera de la línea sobre que debe colocarse el ángulo C, se forma este tirando la línea PQ; llévese c desde A hasta donde llegue, en B por egemplo, tírese por este punto una paralela BC á la PQ, y se tendrá el triángulo ABC pedido.

Fig. 8. 12. Problema 3.° . . datos. . a, c, A. Tírense las dos rectas indefinidas AH, KA de modo que formen en A el ángulo dado; llévese c de A hasta donde llegue en B, desde cuyo punto como centro con un radio igual á la línea a se describirá un arco de círculo, que cuando corte á la indefinida KAK′ en uno de sus puntos C, quedará construido el triángulo.

Las magnitudes relativas á las cantidades conocidas, a, c, A ofrecen circunstancias dignas de observarse, y que por lo tanto se van á analizar.

El ángulo dado A puede ser agudo como HAK′, ú obtuso como HAK. Primer caso. Bajando desde B sobre la KAK′ la perpendicular AP, podrá suceder.

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°
$a<c$	$a<c$	$a<c$	$a=c$	$a>c$
$a<$ BP.	$a=$BP.	$a>$BP.	$a>$BP.	$a>$BP.

1.° Cuando el lado a es menor que la perpendicular BP, el arco mn descrito desde B como centro con el radio a, corta á la BP en D por egemplo, sin encontrar á la KAK′; el triángulo no puede existir, porque no concuerdan los datos con su naturaleza, pues la condicion de $a<$BP equivale á proponer se una un punto B, á la recta KAK′ por una línea mas corta que la perpendicular, lo que es imposible.

2.° Si $a=$BP, el arco $m'n'$ descrito desde B con el radio a, ó BP, es tangente á la KAK′ en P, lo que determina el triángulo rectángulo APB.

3.° Siendo $a >$ BP, y $<$ que c, el arco $m''n'''$ descrito del mismo modo, corta la KAK′ en los puntos C′,C′ equidistantes del pie P de la perpendicular BP, debiendo C′ caer entre A y P; porque siendo $a <$ que $c=$AB, debe estar mas cerca de dicha perpendicular. En este caso resultan dos triángulos ABC', ABC'', que satisfacen igualmente, porque uno y otro cumplen con los datos.

Debe observarse, que en los dos espresados triángulos ABC', ABC'', los dos ángulos BC'A, BC''A son suplemento el uno del otro, porque en el triángulo isósceles BC'C'' los ángulos BC'C'', BC'' C' son iguales.

4.° Si $a=c$, y por consiguiente > que BP, el arco $m'''n'''$ descrito como los anteriores, corta á la KAK' en dos puntos A,C''' que determinan el triángulo isósceles ABC.'''

5.° Siendo $a > c$, y con mas razon que BP, el arco $m''''n''''$ corta á la KAK' en dos puntos C y C'''', y el punto A estremo de una oblicua BA$=c$ menor que BC$=a$, cae necesariamente entre C y P.

Las dos intersecciones C y C'''', parecen indicar la construccion de dos triángulos, pero observando que el triángulo BAC no tiene el ángulo BAC''''$=$A, se verá que solo el triángulo BAC'''' satisface las condiciones del problema.

2.° caso. Siendo obtuso el ángulo dado A$=$BAC, el ángulo desconocido C es precisamente agudo, y se tendrá A>C, y por consiguiente $a>c$, sin cuya condicion el triángulo no puede existir.

La construccion concuerda con esta condicion, porque 1.° siendo el lado a opuesto al ángulo conocido A, mayor que el c, el arco m'''' n'''' descrito desde B con el radio a, cortará la KAK' en dos puntos C y C'''', que determinarán dos triángulos BAC, BAC''''; pero no conteniendo el segundo triángulo el ángulo dado BAC, se ve que el triángulo BAC, siempre posible, es el que solo satisface las condiciones del problema.

2.° Si a, no es > que c, el arco descrito desde B con el radio a no podrá cortar al lado KAK' á la izquierda de A, y tales datos no pueden pertenecer á ningun triángulo.

13. Problema 4.°..datos...a, b, C. Tírense dos lineas indefinidas CH, CK, que formen el ángulo conocido C; sobrepónganse desde C hasta donde lleguen las a, c, en A y B, tírese la AB, y queda construido el triángulo. *Fig.* 9.

14 Problema 5.°..datos..a, b, c. Sea b el mayor de los tres *Fig.* 10. lados, tírese una recta AC igual al lado b; haciendo centro en los puntos A,C y con los radios b, c, descríbanse dos arcos mn

$m'n'$, y desde su interseccion B tírense las rectas BA, BC, y se tendrá determinado el triángulo.

Esta construccion se obtiene siempre que los datos concuerden con la naturaleza del triángulo; esto es, que la suma de los dos lados sea mayor que el otro, porque así los arcos mn, $m'n'$ descritos desde los estremos de este, se cortan precisamente.

Si dicho tercer lado fuese igual á la suma de los otros dos, entonces los arcos $m''n''$, $m'''n'''$, descritos desde A y C con radio igual á los dos espresados lados a, c, se tocarian en un punto B′ situado en la línea AC, y por consiguiente dichos lados a, c se confundirian con la base b, y serian nulos los ángulos A, C.

Si el lado b fuese mayor que la suma de los otros dos a, c, los arcos $m''\,n''$, $m''''\,n''''$ no se cortarian, los lados a, c, no tendrian un punto de interseccion, y el triángulo no existiria.

15. Las construcciones egecutadas conducen á la regla general siguiente. *Un triángulo rectángulo se puede siempre construir, si se conocen los dos catetos; ó un ángulo agudo y la hipotenusa; ó un ángulo agudo y uno de los catetos; ó la hipotenusa y uno de los catetos.*

Un triángulo oblicuángulo se podrá construir, *si se conocen dos ángulos y un lado; ó dos lados y el ángulo comprendido.* Pero su construccion será imposible en los tres casos siguientes.

1.° *Si conocidos los tres lados, el mayor no es menor que la suma de los otros dos.*

2.° *Cuando dados los dos lados y el ángulo agudo opuesto á uno de ellos, el lado opuesto á dicho ángulo es menor que la perpendicular bajada desde el estremo del lado conocido adyacente á este ángulo, sobre el otro lado.*

3.° *Si dados los dos lados y el ángulo obtuso opuesto á uno de ellos, el lado conocido opuesto á dicho ángulo no es mayor que el otro lado conocido.*

16. En lo que precede se enseña el modo de construir los triángulos rectilíneos en todos los casos posibles; pero reflexionando sobre los medios empleados, facilmente se echa de ver la poca exactitud obtenida, ya por la dificultad de hacer un ángulo enteramente igual á otro, ya por la de determinar el punto de inter-

seccion de dos líneas, dificultad tanto mayor cuanto es mas agudo el ángulo en que estas se cortan.

Sin embargo, ambos defectos pueden casi desaparecer, y por consiguiente llegar las construcciones gráficas, á el mismo grado de exactitud obtenida por diferentes medios, en la medicion de los ángulos que se observan. En efecto, los ángulos pueden trazarse valiéndose de transportadores de un diámetro igual al de los instrumentos empleados en las operaciones topográficas, y provistos del artificio para contar las partes mas pequeñas, de todo lo que se hablará en su lugar respectivo. Y en cuanto á la dificultad de marcar el verdadero punto de interseccion de dos líneas que se cortan oblicuamente, la geometria proporciona hoy medios para resolver por intersecciones rectangulares las que en un problema se presentan agudas, como va á verse.

Si la interseccion de *b* con *c* fuese muy aguda (como en la fig. 5.ª) *Fig.* 11
y por lo tanto inexacta la determinacion de sus magnitudes y la posicion del punto A, se remediarian estos defectos dando una variacion conveniente á las ordenadas de *b* con relacion á *a*, de tal modo, que las nuevas sean un múltiplo ó submúltiplo de aquellas, y se tendrá otra recta que cortando al lado *c* en un ángulo menos agudo, disminuyendo ó aumentando la ordenada en la relacion que se adopte, resulte la posicion de A con mas exactitud.

Para esto, tómese sobre *b* el punto *m*, trácese la ordenada *mn*, divídase en cuatro partes y por la cuarta *nr* tírese la C*r*, que cortará en *s* á la *c*; aplíquese B*s* cuatro veces sobre *c*, y el punto A queda determinado por una interseccion rectangular de un arco de círculo con una recta.

Tambien quedaria determinado con mucha inexactitud el pun- *Fig.* 12.
to B (fig. 6) cuando los ángulos A, C son muy agudos; para evitarlo se eligen los puntos *m*, *n*, sobre los lados *a*, *c*, cuyas ordenadas *mr*, *nr*, se repiten sobre la prolongacion de estas el número de veces que convenga, por egemplo, se tienen las $3mr = rx$, $3nr = rz$ y se tiran las *ax*, *cz*, AX y CZ, para obtener una interseccion *d*, que difiera poco de la rectangular, y dividiendo la ordenada *dc*, en el mismo número de partes, se encontrará B con la debida exactitud.

Fig 13. Si el ángulo C fuese muy obtuso, el lado *b* no tendria la direccion conveniente para servir de ege, por lo que entonces se elige una recta auxiliar que hace sus veces, establecida del modo que convenga.

Fig 11. Cuando el lado *a* no tenga la direccion conveniente para servir de ege, como sucederia si uno de los ángulos C ó A fuese muy obtuso, ó que se quisiese aplicar la última construcion en el triángulo rectángulo, se elige una recta auxiliar MN, que hace sus veces establecida del modo conveniente.

La ordenada del punto de interseccion es única, y varía del mismo modo que las otras, y encontrado un punto por donde deba pasar, queda determinada su posicion, bien sea en el sistema de ordenadas rectangular, ú oblicuo.

Si á todo esto se añade el que las rectas pueden apreciarse tambien con bastante precision con escalas á propósito, como se dirá, y que usando de la precaucion de trazarlas en seco, con una punta aguda, de modo que en el papel se representen por una incision mas fina, se obtendrá una aproximacion mas que suficiente para la mayor parte de las operaciones de pormenor ó detall, no solo en la topografía sino en las artes en general. Ademas en estas operaciones delicadas, se puede auxiliar la vista por los medios puestos en práctica para observar líneas muy delgadas; pero cuando los triángulos son muy grandes respecto á la escala, las construcciones gráficas no pueden servir para encontrar magnitudes, y sí solo para representarlas; en este caso se apela al cálculo, y sus resultados se acotan aunque se construyan por escala, que no debe fijarse entonces en el plano, porque su uso podria inducir á errores en muchos casos.

Es, pues, de la mayor importancia emplear el cálculo, con el que se logra aproximar tanto como se quiera el valor de las cantidades; lo que conduce á este problema general.

Conociendo numéricamente el valor de tres de las cinco partes que constituyen un triángulo, calcular los valores numéricos de las otras. La solucion, pues, de este problema, es el objeto de la trigonometria.

17. Los primeros que intentaron desenvolver por una serie de

operaciones numéricas, ó por fórmulas algebraicas, las relaciones entre las diversas partes de un triángulo, debieron encontrar la dificultad de introducir en el cálculo la magnitud de los ángulos, que medidos por arcos de círculo no pueden compararse con líneas rectas. Mas luego conocieron, que calculando por cualquier medio una serie de triángulos, cuyos ángulos tuviesen todos los valores posibles, esta serie contendrá precisamente un triángulo semejante al que se trate de determinar, cualquiera que sea; y que entonces simples proporciones bastan; para deducir las partes del segundo de las del primero. El egemplo siguiente aclarará lo que esto pueda tener de abstracto.

Supóngase que en el triángulo ABC, son conocidos los ángulos B, C, y el lado BC. Búsquese en la serie de los triángulos calculados el que tenga dos ángulos b, c, respectivamente iguales á los B, C; y como dicho triángulo es semejante al propuesto ABC, y todos los lados ab, ac, bc, de aquel son conocidos, podran hacerse las proporciones siguientes. *Fig.* 14.

$$bc : ab :: BC : AB, \quad bc : ac :: BC : AC$$

En las que siendo conocidos los tres primeros términos se tendran los lados . . . . $\left\}\ AB = \dfrac{ab \cdot BC}{bc} \ldots\ldots AC = \dfrac{ac \cdot BC}{bc},\right.$

y como tambien se tiene el tercer ángulo $A = a$, quedan determinadas todas las partes del triángulo ABC.

18 Conocido el partido que puede sacarse de una série de triángulos, bajo todos los ángulos posibles, y cuyos lados esten calculados, fue natural buscar los medios de formarla. Supóngase el caso mas sencillo, tal es, el de los triángulos rectángulos: facilmente se concibe que pueden formarse todos estos en un cuarto de círculo, bajando desde los puntos del arco AB las perpendiculares MP, M′P′, M″P″ sobre el radio AC, y tirando los radios CM, CM′, CM″; pues en los triángulos CMP, CM′P′, CM″P″, asi formados, que serán rectángulos en P, P′, P″, los ángulos MCP, M′CP′, M″CP″, tendran sucesivamente todos los valores posibles, y los CMP, CM′P′, CM″P″, que con los anteriores componen el valor de ángulos rectos, serán tales como requiere la naturaleza de los triángulos rectángulos, sin que haya algu- *Fig.* 15.

no de estos, que no sea equiángulo con alguno de los de dicha construccion ó serie; debiendo observarse, que todos los espresados triángulos tienen una misma hipotenusa, igual al radio del arco AB.

19. Tambien se puede formar una serie de triángulos rectángulos, que todos tengan uno de los lados del ángulo recto igual al radio del círculo. Para esto basta levantar en el estremo A del radio CA la tangente indefinida AT, y tirar por el centro C, y por los puntos M, M′, M″, las secantes CM, CM′, CM″, con lo que resultarán los triángulos CAN, CAN′, CAN″, con todas las combinaciones sucesivas de ángulos que pueden existir en un triángulo rectángulo; encontrándose entre ellos indispensablemente un triángulo semejante á cualquier otro triángulo rectángulo que se quiera.

20. En los triángulos CPM, CP′M′, CP″M″, cuya hipotenusa no varia, se ha dado el nombre de *senos* de los arcos AM, AM′, AM″, á las perpendiculares PM, P′M′, P″M″, que crecen al mismo tiempo que dichos arcos, y que los ángulos MCP, M′CP′, M″CP″. *El seno, pues, de un arco es la perpendicular, bajada desde uno de los estremos de este arco sobre el radio que pasa por el otro estremo.*

Las líneas CP, CP′, CP″, que disminuyen cuando crecen los arcos AM, AM′, AM″, son respectivamente iguales á las perpendiculares MQ, M′Q′, M″Q″, bajadas desde los puntos M, M′, M″, sobre el radio CB perpendicular al CA. Dichas líneas MQ′, M′Q′, M″Q″, son con respecto á los arcos BM, BM′, BM″, lo que las MP, M′P′, M″P″, con respecto á los AM, AM′, AM″; esto es, senos de aquellos arcos BM, BM′, BM″, complementos de los AM, AM′, AM″: y asi dichas líneas MQ, M′Q′, M″Q″, se llaman senos de los complementos de dichos arcos, ó *cosenos* de los AM &c; de donde resulta, *que el coseno de un arco cualquiera es igual á la parte del radio comprendida entre el centro y el pie del seno.*

Se vé pues, que los triángulos rectángulos CPM, CP′M′, CP″M″, que tienen una misma hipotenusa, están formados por el radio del círculo, por el seno, y por el coseno del ángulo agudo que tiene su vértice en el centro (*).

(*) Las partes AP, AP′, AP″, del radio AC, comprendidas entre el estre-

21. En la otra serie de triángulos CAN, CAN′, CAN″ (19) las hipotenusas son las líneas CN, CN′, CN″, llamadas *secantes* de los arcos AM, AM′, AM″; de modo, *que secante de un arco es el radio tirado por uno de los estremos de este arco, prolongado hasta encontrar la tangente levantada en la otra estremidad.*

Los lados de dichos triángulos son, el uno el radio AC, y el otro las porciones AN, AN′, AN″, de la tangente AT, porciones á que se ha convenido en llamar tangentes de los arcos AM, AM′, AM″; de modo *que tangente de un arco es la parte interceptada de la tangente, tirada por uno de los estremos de este arco, hasta el radio prolongado que pasa por el otro estremo del arco* (*).

22. Si por la estremidad B del arco AB se tira la tangen- *Fig.* 16
te Bn, prolongada hasta que encuentre á la secante CN, dicha Bn será la tangente, y Cn la secante del arco BM complemento del AM; ó bien, segun convenio, *la cotangente* y *cosecante* de dicho arco AM. Debe observarse, que estas dos líneas respecto á las tangentes y secantes no son partes de un mismo triángulo, como sucede respecto al seno y coseno.

23. La tangente y secante tienen con el seno y coseno relaciones muy sencillas, que proporcionan encontrar una de estas líneas, conocidas las otras. En efecto, los triángulos semejantes CPM, CAN, dan

$$\mathrm{CP} : \mathrm{PM} :: \mathrm{CA} : \mathrm{AN} \ldots \text{ y } \ldots \mathrm{AN} = \frac{\mathrm{PM} \cdot \mathrm{CA}}{\mathrm{CP}},$$

ó poniendo á las líneas sus nombres, y representando el radio por R. $\Big\}$ .. $\operatorname{tang} \mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{R} \cdot \operatorname{sen} \mathrm{AM}}{\cos \mathrm{AM}}$

De los mismos triángulos se deduce tambien,

$$\mathrm{CP} : \mathrm{CM} :: \mathrm{CA} : \mathrm{CN} \ldots\ldots\ldots \mathrm{CN} = \frac{\mathrm{CM} \cdot \mathrm{CA}}{\mathrm{CP}}.$$

$$\text{ó} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sec \mathrm{AM} = \frac{\mathrm{R}^2}{\cos \mathrm{AM}}.$$

mo del arco y los pies de los senos, se llaman *senos versos* de los arcos AM, AM′, AM″. Estas líneas no tienen uso alguno en la trigonometria.

(*) Las palabras tangente, y secante se ven aqui usadas en un sentido muy diferente, del que se las da en los elementos de geometria. En estos, dichas líneas son indefinidas, mientras que en la trigonometría se refieren las mismas denominaciones á rectas de una magnitud determinada; por lo que, para evitar en cualquier caso toda confusion, se llaman tangentes y secantes trigonométricas.

24. De la comparacion de los triángulos semejantes CAN, CBn se saca. . . AN : CA : : CB = CA : Bn. . . $Bn=\frac{CA^2}{AN}$

ó. . . . . cot $AM=\frac{R^2}{\text{tang } AM}$

De la ecuacion arriba hallada de la secante y de la cotangente resulta, que el radio es media proporcional entre la secante y el coseno, y que lo es tambien entre la cotangente y tangente.

25. Teniendo ya los valores de las tangentes, secantes y cotangentes se ve, que para poder formar la série de que se habló (17), o establecer las tablas precisas en la trigonometria, solo se necesitan los medios para calcular los valores de los senos y cosenos: y aun los de estos últimos se deducen inmediatamente por los de aquellos, por que el triángulo rectángulo CPM que contiene uno y otro da. . $CM^2=CP^2+PM^2$

ó . . . . $R^2=\text{sen}^2 AM+\cos^2 AM$

y. . . . . cos $AM=\sqrt{R^2-\text{sen}^2 AM}$.

Fig. 17. 26. La fórmula siguiente, que da la espresion del seno y coseno de la suma ó diferencia de dos arcos, merece considerarse bien, por que encierra implícitamente todas las propiedades del seno y coseno.

Sean dos arcos cualesquiera a, b, se tendrá,

$$\text{sen.}\,(a\pm b)=\frac{\text{sen } a\cdot\cos b\pm\text{sen } b\cdot\cos a}{R}$$

$$\cos\,(a\pm b)=\frac{\cos a\cdot\cos b\mp\text{sen } a\cdot\text{sen } b}{R}$$

Para demostrarlo, tómese en la circunferencia AMB, el arco AM$=a$, y á cada lado del punto M, los arcos MN, MN′, iguales á b; tírese la cuerda N′N; desde los puntos N′, M, N, bájense sobre el radio AC las perpendiculares N′P′, MP, NP″; por M, tírese el radio MC; desde el punto E, en que este corta á la cuerda NN′, bájese sobre AC la perpendicular EF; y por los puntos E, N′, tírense las rectas ED, N′G paralelas al radio CA.

Se observará.

1.° Que NP″ es el seno del arco AN$=$AM$+$MN$=a+b$

2.° Que N′P′ es el seno del arco AN′$=$AM$-$MN′$=a-b$

Como por la construccion la cuerda NN' queda dividida en dos partes iguales en el punto E, resulta de la semejanza de los triángulos NED, $NN'Q$, que NG está tambien dividida en dos partes iguales en el punto D, ó $ND=DE$: ademas por el paralelismo de las ED, $N'G$, y AC, seran $DP''=EF$, $GP''=N'P'$, $DE=P''F$, y siendo DE la mitad de $N'G$, será FP'' la mitad de $P'P''$; de modo que $P'F=P''F=DE$.

$$\text{En fin.. } NP''=DP''+DN=EF+DN$$
$$N'P'=GP''=DP''-DG=EF-DN$$
$$CP''=CF-FP''=CF-DE$$
$$CP'=CF+FP'=CF+DE.$$

Poniendo en lugar de NP'', $N'P'$, CP'', CP', sus designaciones respectivas,

$$\operatorname{sen}(a+b),\ \operatorname{sen}(a-b),\ \cos(a+b),\ \cos(a-b),$$

$$\text{Se tendrá}\ \begin{cases}\operatorname{sen}(a+b)=EF+DN\\ \cos(a+b)=CF-DE\\ \operatorname{sen}(a-b)=EF-DN\\ \cos(a-b)=CF+DE\end{cases}$$

Falta, pues, solo calcular las cuatro líneas EF, CF, DE, DN. Las dos primeras se obtendran por los triángulos semejantes CMP, CEF que dan... $CM:PM::CE:EF$, $CM:CP::CE:CF$; pero siendo $AM=a$, será $PM=\operatorname{sen} a$, $CP=\cos a$, $CM=R$; y tambien (20) $EN=\operatorname{sen} b$, $CE=\cos b$.

Sustituyendo estos valores en las proporciones últimas, resulta

$$EF=\frac{PM\cdot CE}{CM}=\frac{\operatorname{sen} a\cdot\cos b}{R},\ CF=\frac{CP\cdot CE}{CM}=\frac{\cos a\cdot\cos b}{R}.$$

De la comparacion de los triángulos CPM, DEN, semejantes por ser los lados del uno perpendiculares á los del otro, se obtiene

$$CM:EN::CP:DN=\frac{EN\cdot CP}{CM}=\frac{\operatorname{sen} b\cdot\cos a}{R}$$

$$CM:EN::PM:DE=\frac{EN\cdot PM}{CM}=\frac{\operatorname{sen} b\cdot\operatorname{sen} a}{R}$$

Reuniendo estos valores á los anteriores para formar los de los senos y cosenos $(a+b)$, y $(a-b)$, resultan las cuatro ecuaciones siguientes.

$$\begin{cases} \text{sen}\,(a+b) = \dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\text{R}} \\ \text{sen}\,(a-b) = \dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\text{R}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\,(a+b) = \dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\text{R}} \\ \cos\,(a-b) = \dfrac{\cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\text{R}} \end{cases}$$

que se reducen á las dos enunciadas en la proposicion.

27. Con estas cuatro ecuaciones se pueden encontrar el seno y coseno de un arco doble, triple, y en general múltiplo de aquel, cuyo seno y coseno se conocen.

En efecto, haciendo sucesivamente $b=a$, $b=2a$... se tendrá

$$\begin{cases} \text{sen}\ 2a = \dfrac{2\text{sen}\,a \cdot \cos a}{r} \\ \cos\ 2a = \dfrac{\cos^2 a - \text{sen}^2 a}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sen}\ 3a = \dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cos 2a + \text{sen}\,2a \cdot \cos a}{r} \\ \cos\ 3a = \dfrac{\cos a \cdot \cos 2a - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,2a}{r} \end{cases}$$

sacando de estas dos ecuaciones sen $3a$, y cos $3a$, una vez conocidos por las dos primeras sen $2a$, y cos $2a$

28. La ecuacion sen $2a = \dfrac{2\,\text{sen}\,a \cdot \cos a}{r}$, conduce tambien del seno del arco á la espresion del seno de su mitad.

Sustitúyase en dicha ecuacion por cos a su valor $\sqrt{r^2 - \text{sen}^2\,a}$ (*) se tendrá $\text{sen}2a = \dfrac{2\,\text{sen}\,a\,\sqrt{(r^2 - \text{sen}^2\,a)}}{r}$, elevando al cuadrado y quitando el denominador... $r^2 \cdot \text{sen}^2 2a = 4r^2 \text{sen}^2 a - 4\text{sen}^4\,a$: tomando en esta ecuacion, que puede resolverse como las del segundo grado, á sen a por incógnita. sen $a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}r^2 \pm \tfrac{1}{2}r\,(r^2 - \text{sen}^2\,2\,a)}$ y haciendo... $2a = a'$, se tendrá $a = \tfrac{1}{2}\,a'$; por consiguiente

(*) El espresar el cuadrado del seno de un arco a, por egemplo, por sen a^2, seria conforme á la naturaleza de los esponentes, que hacen relacion á las letras; pero escribiendo $\text{sen}^2\,a$, se evitan equivocaciones.

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,a' = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}r^2 \pm \tfrac{1}{2}r\sqrt{(r^2 - \text{sen}^2 a')}}$$

Poniendo $\cos^2 a$ en lugar de $r^2 - \text{sen}^2 a$ (25), multiplicando las cantidades debajo del radical por 4, y dividiendo el todo por 2, será, . . . $\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2r^2 \pm 2r \cdot \cos a}$,

fórmula, que da la espresion del seno de la mitad de un arco, cuando se tiene el de este arco.

29 El mismo resultado puede obtenerse por medio de una *Fig.* 18 construccion muy sencilla.

Si se divide el arco AM en dos partes iguales con el radio CN, lo quedará tambien la cuerda AQM; y QM será el seno de $MN = \tfrac{1}{2}AM$.

El triángulo rectángulo AMP da. . . $AM = \sqrt{(PM^2 + AP^2)}$;

y como $AP = AC - CP = r - \cos AM = r - \cos a'$,

y. . . . $PM = \text{sen}AM = \text{sen}\ a'$

será igualmente. . . . $AM = \sqrt{(\text{sen}^2 a' + r^2 - 2r \cdot \cos a' + \cos^2 a')}$

y por ser. . . . . $\text{sen}^2 a' + \cos^2 a' = r^2$ (25.),

se tendrá. . . . . $AM = \sqrt{(2r^2 - 2r \cdot \cos a')}$,

de cuya expresion se saca. . . . . .

$$MQ = \tfrac{1}{2}AQM = \text{sen}\,\tfrac{1}{2}a' = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2r^2 - 2r.\cos a')}.$$

Se encuentra de este modo un solo valor de sen $\tfrac{1}{2}\,a'$, y el otro es MQ′, porque el arco MN′A′, que junto con el ANM componen la semicircunferencia, tiene tambien por seno á PM (20); y como en la ecuacion, de que se ha sacado dicho valor, nada manifiesta cual de los dos arcos es el que se propone dividir, deberán encontrarse al mismo tiempo los senos de la mitad del primero, y de la mitad del segundo; pues conforme á la construccion se tiene $A'M = \sqrt{(PM^2 + A'P^2)} = \sqrt{(PM^2 + (A'C + CP)^2)} = \sqrt{(\text{sen}^2 a' + (r + \cos a')^2)} = \sqrt{(\text{sen}^2 a' + r^2 + 2r \cdot \cos a' + \cos^2 a')} = \sqrt{(2r^2 + 2r\cos a')}$; y por consiguiente $Q'M = \text{sen}\tfrac{1}{2}a' = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2r^2 + 2r \cdot \cos a')}$, que es el primer valor de sen $\tfrac{1}{2}\,a'$.

Debe observarse sin embargo, que aunque en los dos valores de sen $\tfrac{1}{2}\,a'$, sea uno mismo el valor de sen a', el arco a' es diferente, pues para uno de ellos este arco es AM, y para el otro A′M, suplemento del primero; y de aqui se infiere, que el seno del suplemento de un arco es el mismo, que el de este arco. Mas adelante se hablará de los diferentes arcos que pueden tener un mismo seno, una misma tangente, &c.

30. De lo dicho se deduce, que el seno de un arco cualquiera AN es la mitad de la cuerda AM del arco duplo AMN, y al contrario; de modo que conociendo los senos se deducen las cuerdas, y viceversa.

Fig. 15. 31. No es necesario calcular los valores absolutos de los senos, y si solo su relacion con el radio, pues que basta conocer en los triángulos CPM, CP′M′, las relaciones que entre sí tienen dichos lados. Asi, para mayor sencillez, se puede tomar el radio por unidad suponiéndolo dividido en 1.000,000 de partes.

Fig. 19. 32. La longitud de un arco es siempre menor, que la de su tangente, y mayor que la de su seno. En efecto; si se toma por debajo del radio AC el arco AM′=AM, y se tiran la cuerda MM′, y las tangentes MT, M′T, es bien patente, que estas han de encontrar el radio AC en un mismo punto; pues los triángulos CMT, CM′T son iguales, y como lo son tambien las líneas MT, M′T, asi como las PM, PM′, y los arcos AM, AM′, se tendrá. . . .

$$2AM < 2MT \ldots 2AM > 2MP.$$

y. . . . . $AM < MT \ldots AM > MP.$

Puede ahora notarse, que la relacion entre la tangente y el seno de un arco se aproxima cada vez mas á la unidad, á medida que disminuye el arco; pues siendo. . . . . $\tang a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$,

será . . . . $\cos a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\tang a}$,

y como $\cos a$ se aproxima sin cesar á la unidad, se sigue, que el seno y la tangente se aproximan cada vez mas á la igualdad, porque el límite de su razon es la unidad.

33. De esto se sigue evidentemente, que no diferenciándose en un cierto número de sus primeras cifras el valor de la tangente y del seno de un arco pequeño AM, estas mismas cifras darán un valor aproximado del arco.

Siendo por egemplo. . . . . $PM = 0{,}0001$.

se tendrá. . . . . $CP = \sqrt{(CM^2 - PM^2)} = 0{,}\ 999{,}999{,}995$,

y. . . . . $MT = \dfrac{CM \cdot PM}{CP} = 0{,}000{,}100{,}000{,}000{,}5$

valor que no se diferencia del de PM hasta la decimatercia cifra decimal. Se puede pues tomar este número por el valor del arco AM espresado en partes del radio.

34. Para aplicar las fórmulas de los números 25, 26, y 27, se necesita cuando menos conocer el seno de uno de los arcos comprendidos en el cuadrante del círculo; pero de estos hay dos cuyos senos se conocen facilmente, tales son el del cuadrante y el de su tercio, por que el primero no es otra cosa que el radio, como lo manifiesta la simple inspeccion de la figura, y el segundo es igual *Fig* 15.
á la mitad de este; pues siendo el lado AM del exágono inscripto *Fig.* 20.
en el círculo, ó lo que es lo mismo, la cuerda de los $\frac{2}{3}$ del cuadrante igual al radio; la mitad AP de aquella, ó de este, será el seno del arco, tercio del cuadrante.

Teniendo pues dividido el radio, seno del cuadrante, en 1.000.000 (31), por medio de la fórmula $\operatorname{sen} a' = \frac{1}{2}\sqrt{(2r^2 - 2r\cos a')}$, se tendrá el seno de la mitad, despues el de la mitad de esta mitad, ó del cuarto del cuadrante; y asi sucesivamente todas las fracciones comprendidas en la série $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ . . . La misma fórmula, si se hubiese descendido desde el seno del tercio del cuadrante, conduciria á la série de las fracciones $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{48}$ . . . . . de este arco.

35. Se ve por todo esto, que si el arco estuviese dividido en un número de partes igual á cualquiera denominador de dichas fracciones, se encontraria directamente el seno de cada una de estas partes, y se formaria una tabla, escribiendo dichos senos al lado de los arcos á que corresponden. Mas no es así; un uso muy antiguo y otras razones han hecho adoptar la division de la circunferencia entera en 360 partes, que se llaman grados; subdividiendo cada uno de estos en 60 partes llamadas minutos; cada uno de estos, en otras 60 llamadas segundos, y asi sucesivamente en terceros &c. Los grados se distinguen por la nota ° puesta á la derecha del número algo mas elevada; los minutos de igual manera con la señal ′, los segundos con la ″, y asi en adelante (*).

(*) Como en la medida de los ángulos no se tiene consideracion al valor absoluto de los arcos, y sí solo á su relacion con toda la circunferencia; pare-

36. Segun lo dicho (28) se podrian tener sucesivamente los senos correspondientes á las mitades de los arcos duplos, ó ir obteniendo asi arcos cada vez mas pequeños; que por esta razon se aproximarán contínuamente á ser iguales á sus senos (33). Llegando pues al seno de 52'', 44''', 3'''', que por su pequeñez se confunde con su arco, y con mayor razon los de los arcos menores; y siendo tambien visible, que los arcos que se confunden con sus senos y sus tangentes son proporcionales á estas líneas; resultará poderse establecer la proporcion 52'', 44''', 3'''' : 1' : : sen 52'', 44''', 3'''' : sen 1'; que dará el seno de un minuto, y con este los de los arcos mayores, por medio de las ecuaciones: se tendrán

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\operatorname{sen} (a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\cos (a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b.$$

Haciendo en ellas . . . $a = 1'$. . . . . . $a = 2'$:
las dos primeras ecuaciones darán los senos de 2', 4', 8', y haciendo en seguida $a = 1'$, $b = 2'$, $b = 3'$, se obtendrán por las dos últimas ecuaciones los senos de 3', 5', 7', y con ellos los de

cia muy natural tomar esta por unidad, y espresar los árcos por fracciones comunes ó decimales. Sin embargo, la consideracion de que el valor de las líneas trigonométricas es el mismo para todos los cuadrantes, y que supuestas estas líneas respecto á uno de los cuadrantes, los otros tres son únicamente necesarios, para la determinacion del signo que corresponde á la posicion de dichas líneas, decidió á los sábios encargados en Francia de la reforma de los pesos y medidas, á tomar el ángulo recto por la unidad de los ángulos, y por consiguiente al cuarto de círculo ó cuadrante por unidad de los arcos. Dividieron, pues, el cuadrante en 100 partes iguales con el mismo nombre de grados, correspondiendo los 400° en que asi quedaba dividida la circunferencia, á los 360° de la antigua division. Cada una de las 400 partes ó grados se subdivide en 100 partes, que reemplazan los 60', pudiendo seguir asi la subdivision decimal tanto como se quiera. Para no confundir la medida de los arcos en esta nueva division con la antigua, se pone la letra q en la parte superior, y á la derecha de las unidades, escribiendo las decimales del modo ordinario; asi $0^q,435$ representa el arco igual á $\frac{435}{1000}$ del cuadrante, esto es 43°,5' los arcos duplos . 10, 20, hasta 60′, ó 1°, y del mismo modo los restantes hasta 45°.

Calculando igualmente los cosenos, con ellos y los senos se obtendrán los valores de las tangentes y cotangentes.

Con lo dicho basta para concebir como se han podido formar las tablas de las líneas trigonométricas (*).

37. Para la facilidad de los cálculos se han sustituido á los valores de los senos y demas líneas trigonométricas, sus logaritmos; encontrándose solo estos en la mayor parte de las tablas y por su medio se resuelven las cuestiones siguientes.

1.ª *Dado el valor de un arco, encontrar el logaritmo de su seno, coseno, tangente ó cotangente.*

2.ª Que es la inversa. *Dado el logaritmo del seno, coseno, &c. de un arco, encontrar el valor de este arco.*

La solucion de estas cuestiones depende de la disposicion de las tablas, que no es igual en todas las obras, por lo que se encuentra esplicada al principio de cada una (**).

38. Aunque las tablas trigonométricas se limitan al cuarto del círculo, dan no obstante los senos, cosenos, &c. de todos los arcos de mayor magnitud. Para manifestarlo, bastará observar la marcha de las líneas trigonométricas con relacion á las diversas estensiones, que puede tener un arco de círculo. Antes es preciso, para entender bien lo que sigue, penetrarse de la continuidad que reina siempre entre los diferentes resultados, que se deducen de una misma espresion algebraica, ó de una misma construccion geométrica. Dicha continuidad consiste en que cada valor, que adquiere la espresion de que se trata, está siempre precedido ó seguido de valores, que difieren todo lo menos que se quiera del primero, y tambien de que en la descripcion de una línea, cada punto está siempre precedido ó seguido de puntos inmediatamente contiguos.

(*) Pueden verse las de don Tadeo Lope, oficial de ingenieros del ejército, y las de Callet etc. Con respecto á la nueva division son apreciables las de la Borda.

(**) Por medio de series convergentes deducidas de las ecuaciones (26) se calculan mas espéditamente los senos de los arcos. Cálculo diferencial de La-Lroix, tomo 2.°, obra grande de Bails etc.

Fig. 21 Esto supuesto, si se considera que el radio CM, al principio en AC, gira al rededor del punto C, dicho radio formará sucesivamente con AC todos los ángulos posibles; y el punto M de su estremo pasará por todos los puntos de la circunferencia ABA′B′A ó lo que es lo mismo, la describirá. Siguiendo este movimiento se ve desde luego; que en el punto A, donde el arco es nulo, el seno lo es tambien, y el coseno es el radio AC. Separado el radio CM de AC el seno PM aumenta á proporcion, que el punto M adelanta hácia B; y, llegado á este punto, PM viene á ser CB, ó igual al radio. En esta misma marcha el coseno CP va disminuyendo contínuamente, hasta ser nulo cuando el punto M llega al B; entonces el ángulo ACB es recto, y el arco AB es igual á $\frac{1}{2}\pi$, llamando 2π la circunferencia.

Continuando su movimiento el punto M mas allá de B, el seno va menguando, y creciendo el coseno; que viene á caer precisamente sobre el diámetro AA′ del lado del punto C, opuesto á el en que caia, cuando se hallaba antes de llegar al punto B. Basta la sola inspeccion de la figura para comprender y ver, que P′M′ seno de ABM′ es menor, que BC seno de AB; y que CP′ coseno del primero de dichos dos arcos es mayor, que el coseno del segundo, que es nulo. Debe observarse, que P′M′ y CP′ son el seno y coseno del arco A′M′, contando desde el punto A′ suplemento del ABM′; de donde se sigue, *que el ángulo obtuso tiene el mismo seno y coseno, que su suplemento.*

Llegado el punto M á A′, el seno es nulo, como en A; y el coseno vuelve á ser igual al radio. En el punto A′ el arco ABA′ es igual á la semicircunferencia, ó á π: el ángulo ACM ha llegado á su límite mayor; pero nada se opone á que el radio CM continue su movimiento, y pase por debajo del diámetro AA′: entonces el seno llega á ser P″M″ cayendo tambien por debajo del diámetro, y aumenta á medida que el punto M″ se aproxima hácia B′; mientras que el coseno CP″ disminuye.

En el punto B′, en que el arco ABA′B′ es igual á $\frac{3}{2}\pi$, el seno es el radio CB′, y el coseno es nulo.

En fin desde B′ hasta A el seno P‴M‴, siempre por debajo de AA′, disminuye sin cesar; y el coseno CP‴, que entonces se halla del mismo lado en que estaba en el primer cuarto de círculo AB, encuentra, y llega á ser igual al radio AC. En este punto el seno es nulo, y el radio CA ha acabado su revolucion: pero nada impide que principie otra de nuevo; y considerando siempre como un arco de círculo la totalidad del camino corrido por el punto estremo del radio desde el principio del movimiento, se tendrán arcos mayores que la circunferencia, con los mismos senos, cosenos, tangentes, y cotangentes, que los descritos en la primera revolucion.

39. Resta hacer ver, como las espresiones algebráicas de los senos y cosenos corresponden á las diversas situaciones, que acaban de recorrerse.

Hágase . . . . . . $a = \frac{1}{2}n$ en las ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l}\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a\end{array}\right\} \ldots A.$$

Siendo . . $\cos\frac{1}{2}n = o$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{2}n = 1$, resulta. . . .

$$\cos(\tfrac{1}{2}n \pm b) = \mp \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}n \pm b) = \cos b.$$

En estas espresiones deben tenerse presentes dos cosas; el valor absoluto de ellas, y el signo á que están afectas.

El primero se verifica en la figura; pues, siendo $AB = \frac{1}{2}n$, si se toma el arco BM′ por b, la perpendicular P′M′, que es el seno de AM′ como de A′M′, será el coseno de BM′, ó de b; mientras que CP′ será el seno. Esto es en cuanto al valor de $\cos(\frac{1}{2}n \pm b)$. En cuanto al signo menos, que afecta esta espresion, resulta; que si se miran como positivos los senos y cosenos de un arco, menor que la cuarta parte de la circunferencia, el coseno de un arco mayor será negativo, mientras que el seno será positivo.

Si se hace tambien $b = \frac{1}{2}n$, se tendrá. . $\cos n = -1$, $\operatorname{sen} n = o$

Si en las ecuaciones (A) se hace $a = n$ se tendrá, segun lo que precede.

$$\cos(n \pm b) = -\cos b$$
$$\operatorname{sen}(n \pm b) = \mp \operatorname{sen} b$$

Se puede comprobar el valor absoluto de estas fórmulas con la misma facilidad, que el de las precedentes. El signo manifiesta, que todo arco comprendido entre n y $\frac{3}{2}n$ tendrá su seno y coseno negativos.

Si $b = \frac{3}{2}n$, se tiene $\cos\frac{3}{2}n = o$; $\operatorname{sen}\frac{3}{2}n = -1$

En fin, cuando $a = \frac{3}{2}n$, las ecuaciones (A) se reducen en virtud del valor procedente á. . . .

$$\cos\left(\tfrac{3}{2}n \pm b\right) = \pm \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}n \pm b\right) = -\cos b.$$

De donde se sigue, que todo arco comprendido entre $\frac{3}{2}n$ y $\frac{4}{2}$ ó $2n$, tiene su coseno positivo, y su seno negativo.

Reuniendo estos resultados se ve,

1.° Que desde el punto A hasta el punto A′, en que el arco $ABA' = n$, los senos son positivos.

2.° Que desde el punto A′ hasta el punto A, en que el arco $ABA'B'A = 2n$, esto es, desde n hasta $2n$ los senos son negativos.

3.° Que desde el punto A hasta el B, en que $AB = \frac{1}{2}n$, los cosenos son positivos.

4.° Que desde B hasta B′, en que el arco $ABA'B' = \frac{3}{2}n$, esto es, desde $\frac{1}{2}n$ hasta $\frac{3}{2}n$ los cosenos son negativos.

5.° En fin, que desde B hasta A, en que el arco $ABA'B'A = 2n$, es decir, desde $\frac{3}{2}n$ hasta $2n$, los cosenos son positivos.

Se observa, pues, que los senos mudan de signo, cuando pasan debajo del diámetro AA′; y los cosenos, cuando pasan de un lado á otro del punto C, ó que caen de uno á otro lado con respecto al diámetro BB′, perpendicular al primero.

40. En cuanto á las tangentes, en el movimiento que ha seguido el radio, se observará, que aumentan contínuamente desde el punto A al B, en que el arco AB llega á ser igual á $\frac{1}{2}n$. En este punto, confundiéndose la secante CN con CB, es paralela á la tangente AN; por consiguiente el arco AB, hablando rigorosamente, no tiene tangente trigonométrica; sin embargo se dice, que su tangente es infinita, debiendo entenderse por esta espresion, que tomando el punto M, tan próximo como sea posible del punto B, se encontrará una tangente AN, mayor que cualquiera cantidad imaginable.

Esto mismo manifiesta la espresion $\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, que da por el valor de la tangente a una cantidad tanto mayor, cuanto mas pequeño es el del coseno a.

Cuando $a = \frac{1}{4} n$, resulta, tang $a = r$; pues entonces el triángulo CAN es isósceles.

Si el arco $AM > \frac{1}{2} n$, el radio MC no encuentra ya á la línea AN por encima del diámetro, y sí por debajo. La tangente verdadera AN′ es igual, como se ve, á A′N″, que lo es del arco A′M′; pero se halla colocada en un sentido opuesto.

En el tercer cuadrante, la tangente, que ha sido nula en A′, vuelve por encima del diámetro AA′; y resulta, que tambien AN es la tangente del arco ABA′M″.

Volviendo el radio á ser paralelo á AN en el punto B′, la tangente es infinita, y despues vuelve á caer debajo del diámetro; asi el arco AA′M″ tiene por tangente á A′N″.

41. Véase ahora, lo que se infiere de la espresion algebráica,

$$\text{tang } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$$

Es patente, que este valor será positivo en todos los casos, en que el seno y coseno tengan el mismo signo, lo que se verifica desde cero hasta $\frac{1}{2} n$, y desde n hasta $\frac{3}{2} n$. Será negativo desde $\frac{1}{2} n$ hasta n, y desde $\frac{3}{2} n$ hasta $2n$; de que se sigue, que las tangentes, asi como los senos y cosenos, varian de signo, si varian de situacion.

Del mismo modo se encontrará, que las tangentes son positivas desde cero grados hasta $\frac{1}{2} n$, y desde n hasta $\frac{3}{2} n$; y negativas desde $\frac{1}{2} n$ hasta n, y desde $\frac{3}{2} n$ hasta $2n$.

42. La proposicion demostrada en el núm. (26) ofrece numerosas consecuencias; (*) pero aqui solo se sacará una necesaria en lo sucesivo.

Sumando las dos ecuaciones

$$\text{sen}\,(a+b) = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{r}$$

$$\text{sen}\,(a-b) = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a}{r}$$

(*) Vease la trigonometria de La-Croix traducida por Rebollo.

se tendrá, $\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=\frac{2\operatorname{sen} a \cdot \cos b}{r}$

y. . . . . $\operatorname{sen} a \cos b=\frac{r}{2} \operatorname{sen}(a+b)+\frac{r}{2} \operatorname{sen}(a-b)$ . . . . A′.

Restando la segunda de la primera de las dos primeras ecuaciones, resultará,

$$\operatorname{sen} b \cos a=\frac{r}{2} \operatorname{sen}(a+b)-\frac{r}{2} \operatorname{sen}(a-b) \text{. . . . . A}'.$$

Del mismo modo de las dos fórmulas,

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a \cdot \cos b-\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{r},$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a \cdot \cos b+\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{r}$$

se obtendrá $\left\{\begin{array}{l}\cos a \cdot \cos b=\frac{r}{2} \cos(a+b)+\frac{r}{2} \cos(a-b) \\ \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b=\frac{r}{2} \cos(a-b)-\frac{r}{2} \cos(a+b)\end{array}\right\}$ . . A′

Si se hace $a+b=a'$, $a-b=b'$, se tendrá sumando estas dos ecuaciones . . . . $2a=a'+b'$,

y restando la segunda de la primera. . . . . $2b=a'-b'$;

de donde. . . $a=\frac{a'+b'}{2}$, y $b=\frac{a'-b'}{2}$:

y si se sustituye estos valores en las espresiones . . . . A′

se hallará $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')=\frac{r}{2}(\operatorname{sen} a'+\operatorname{sen} b') \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')=\frac{r}{2}(\operatorname{sen} a'-\operatorname{sen} b') \\ \cos\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')=\frac{r}{2}(\cos a'+\operatorname{sen} b') \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'+b')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'+b')=\frac{r}{2}(\cos b'-\cos a')\end{array}\right.$

y si se divide la segunda fórmula por la primera, resultará

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\cos\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\operatorname{sen} a'-\operatorname{sen} b'}{\operatorname{sen} a'+\operatorname{sen} b'}:$$

pero como $\frac{\text{sen A}}{\text{cos A}} = \frac{\text{tang A}}{r}$, y por consiguiente $\frac{\text{cos A}}{\text{sen A}} = \frac{r}{\text{tang A}}$, representando A un arco cualquiera, se obtendrá,

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a'-b')}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\text{sen}\,a' - \text{sen}\,b'}{\text{sen}\,a' + \text{sen}\,b'}$$

43 Pasando ya á la esplicacion de las tablas trigonométricas para la resolucion de los triángulos, es preciso no olvidar, que (por medio de dichas tablas) cuando se conoce un ángulo, es tambien conocido el valor de su seno, coseno, tangente y cotangente; y, recíprocamente, dado el valor de una de estas líneas, se mira como conocido el valor del ángulo.

Sea CDE un triángulo rectángulo en D; desde uno de los ángulos agudos C con un radio igual al de las tablas, descríbase el arco AM; bájese MP perpendicular á CD; y en fin levántese la tangente AN para formar los dos triángulos de las tablas, que son CPM del seno y coseno, y CAN de la tangente y secante; siendo ambos semejantes al propuesto, comparándolos sucesivamente, se tendrá, *Fig.* 22

$$\left.\begin{array}{l}\text{CM : PM :: CE : ED}\\ \text{CM : CP :: CE : ED}\end{array}\right\}\ \text{ó}\ \left\{\begin{array}{l} r : \text{sen}\ c :: \text{CE : ED}\\ r : \text{cos}\ c :: \text{CE : ED}\end{array}\right.$$

$$\text{CA : AN :: CD : DE}\ldots\ \text{ó}\ldots\ r : \text{tang}\ a :: c\text{D : DE}$$

y siendo el ángulo E complemento del ángulo C, será cos C = sen E, y las dos primeras proporciones podrán reunirse en una sola, que se enuncia del modo siguiente.

El radio es al seno de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo propuesto, como la hipotenusa es al lado opuesto á este ángulo.

La tercera proporcion manifiesta, *que, el radio es á la tangente de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo propuesto, como el cateto adyacente es al cateto opuesto á este ángulo agudo.*

Como el radio es siempre dado, bastará conocer dos de los otros tres primeros términos de las proporciones enunciadas, para encontrar el último.

Asi pues, se determinará siempre por la primera una de estas tres cosas; *la hipotenusa, un cateto, ó un ángulo agudo.*

Se dice simplemente un ángulo agudo, aunque la proporcion exige, que sea este el opuesto al lado buscado ó dado; porque si uno de estos no cumple con dicha condicion, se puede emplear su complemento.

Por medio de la segunda proporcion se determinará una de las tres cosas siguientes: *los dos lados del ángulo recto, ó el ángulo agudo.*

De lo que acaba de decirse respecto á la averiguacion por medio de las dos proporciones, se ve; 1.º: *que, conociendo en un triángulo rectángulo un lado y un ángulo, se pueden calcular los otros dos lados.*

2.º *Que, conocido cualquiera de los lados, se pueden calcular los ángulos agudos.*

Aunque en estos dos casos no se comprenden aquellos, en que se dan los dos lados cualesquiera de un triángulo, y se pide el tercero, ó que se da la hipotenusa y uno de los catetos del ángulo recto; sin embargo, las mismas proporciones servirán para estos casos, como va á verse.

1.º Dados los catetos CD, DE, se pide la hipotenusa.

Por medio de la proporcion r : tang c : : CD : DE se tendrá el ángulo c; y ya con este, por la primera proporcion r : sen c : : CE: DE, se tendrá la hipotenusa.

2.º Dada la hipotenusa CE, y el lado CD, se piden los ángulos, y el tercer lado. Por la proporcion r : sen c, ó cos c : : CE : DE se calculará el ángulo agudo, opuesto al lado buscado, y se tendrá el tercer ángulo y su complemento; y despues por la proporcion r : sen c : : CE : DE se hallará el lado buscado.

Estos dos casos se resuelven tambien por la ecuacion $CE^2 = DE^2 + DC^2$, obtenida en la geometría.

44 El principio, en que se funda la resolucion de los triángulos rectángulos, conduce á la de los oblicuángulos.

Fig 23. Sea el triángulo oblicuángulo ABC. Bájese la perpendicular BD, y resultarán dos triángulos ABD, BDC, rectángulos en D.

El primero da r : sen a : : AB : BD. . . $r \cdot BD =$ sen $a \cdot AB$.
El segundo . . r : sen c : : BC : BD. . . $r \cdot BD =$ sen $c \cdot BC$;
de donde. . . . . sen $a \cdot AB =$ sen $c \cdot BC$,
ó. . . . . sen a : sen c : : BC : AB.

Cuando la perpendicular B′D′ cae fuera del ángulo C′, no es comun á los dos triángulos B′C′A′, B′C′D′; pero, siendo los ángulos B′C′D′, B′C′A′ iguales á dos rectos, tienen el mismo seno.

La proposicion anterior puede convertirse en principio general, que se enunciará del modo siguiente.

En un triángulo cualquiera los senos de los ángulos son entre sí como los lados opuestos á estos ángulos.

45 Por medio de esta proporcion se resolverá inmediatamente un triángulo oblicuángulo en los casos siguientes.

1.° *Dados dos ángulos y un lado*: porque entonces se tendrá tambien el tercer ángulo, y los lados buscados se opondrán precisamente á ángulos conocidos.

2.° *Dado un ángulo y dos lados, con tal que uno sea opuesto al ángulo dado.* Para esta resolucion téngase presente lo dicho (10, caso 3.°).

46. Hay dos casos, que no se hallan en los que acaban de enunciarse: tales son, el uno cuando se dan *los dos lados y el ángulo comprendido*, y el otro cuando se dan *los tres lados.*

1.° Sean conocidos los lados AC, BC, y el ángulo comprendido C.

Se tiene. . . . . $BC : AC :: \text{sen } a : \text{sen } b.$

y. . . . . . . $BC + AC : BC - AC :: \text{sen } (a+b) : \text{sen } (a-b),$

ó. . (42). . $BC + AC : BC - AC :: \tan \frac{1}{2}(a+b) : \tan \frac{1}{2}(a-b),$

y. . . . $\text{tang } \frac{1}{2}(a-b) = \frac{BC - AC}{BC + AC} \text{tang } \frac{1}{2}(a+b).$

Si se hace $a+b=m$, $a-b=n$, se tendrá, suponiendo que el ángulo mayor sea A, y B el menor,

$$a = \frac{m+n}{2},\ b = \frac{m-n}{2}\ (*);$$

y conocidos por este medio los ángulos, se hallará por lo dicho (44) el tercer lado.

2.° *Dados los tres lados.* Sea el triángulo oblicuángulo CBA; bájese desde un ángulo B, por egemplo, sobre el lado CA la perpendicular BD, y se tendrá,

$$AC : AB + BC :: AB - BC : DC - AD = \frac{(AB+BC)\ (AB-BC)}{AC}$$

$$DC + AD = \frac{(AB+BC)\ (AB-BC)}{AC}$$

(*) Geometria de La-Croix traducida por Rebollo.

Conocidas la suma y diferencia de AD, y DC, se conocerán las partes AD, DC; que seran, suponiendo $AB+BC=m$, $AB-BC=n$,

$$CD=\frac{m+n}{2}, AD=\frac{m-n}{2};$$

y en cada uno de los triángulos rectángulos ABD, BDC, podrá ya calcularse el ángulo a, ó c, por la proporcion . AB: AD : : r: sen ABD: conocido este ángulo se tendrá su complemento A, y se estará en el caso (44).

La aplicacion de estas reglas, ó la resolucion de los triángulos, se hará mas adelante, cuando se trate de las operaciones en el terreno.

==

Segunda parte.

DESCRIPCION

de los instrumentos empleados en las operaciones topográficas.

47. Para todas las operaciones topográficas (*) se necesita el auxilio de varios instrumentos, que darán resultados mas ó menos aproximados á la exactitud de la teoria, segun sea mayor ó menor la perfeccion, con que aquellos se hayan construido, y escrupulosidad, con que se proceda sobre el terreno en las citadas operaciones.

OBJETOS ACCESORIOS.

Jalones y Piquetes.

48. Los jalones son unas varas, ó reglones de madera, de una y media á dos pulgadas de grueso y dos varas de largo, armados en uno de sus estremos con un regaton punti-agudo de hierro para poderlos clavar verticalmente en la tierra. En el otro estremo, ó cabeza, tienen una abertura pequeña, en la que se coloca un carton ó papel llamado *mira*, pintado por mitad á lo largo de blanco y negro para poder percibir mejor los jalones á alguna distancia.

Como sea conveniente, que estos tengan el menor peso posible para la facilidad del transporte, se hacen de madera ligera; pero

(*) Veanse las definiciones al principio.

sin embargo de bastante fuerza para que mantengan el regaton, y aguanten los golpes, con que se clavan en el terreno.

49. Sirven los jalones para marcar las líneas, y los puntos de estas que forman ángulo; por lo que se emplean mas ó menos de ellos, segun la estension de las primeras, y el número de los segundos.

50. Los piquetes son mas cortos que los jalones, y sirven para dejar marcados por mas tiempo, ó permanentes, los puntos en que se forman ángulos, ó en que han de colocarse señales. En todos estos casos se introducen en el terreno uno y medio, ó dos pies, para poderlos hallar caso de no temer los arranquen; pues entonces se hacen bastante largos, y se clavan enteramente en tierra, dejando cerca algun montoncito de piedras, ú otra señal, que sirva para encontrarlos con facilidad.

Banderolas.

51. Para situar en el papel los puntos convenientes del terreno se colocan en estos *banderolas*, á las que se dirigen visuales. Las banderolas son unas varas redondas de madera de nueve á diez pies de largo, y de una á una y media pulgada de diámetro, armadas en su estremo de un regaton punti-agudo de hierro, y con una banderola en el otro de lanilla de una vara de largo y media de ancho, formada de dos colores bien opuestos, como blanco y negro, ó mejor blanco y encarnado, para poderlas distinguir á bastante distancia.

Las banderolas se usan muchas veces en lugar de los jalones, á los que son preferibles para las alineaciones en casi todos los casos, y se observa respecto á aquellas lo dicho respecto á estos.

Vara, Reglon y Cadenilla.

52. Para medir distancias muy cortas se emplean la vara castellana, y el reglon que tiene cuatro varas de largo. Tambien se usan varas de cinco pies; y unidas á rosca de dos en dos, con un par de ellas y dos hombres se miden los edificios con gran cele-

ridad y exactitud, para lo que se colocan á la altura que da la estension de los brazos, agarradas á igual distancia de su union. Cuando es ya muy grande la estension, se hace uso de la *cadenilla* de hierro, cuya longitud es de diez varas.

53. A primera vista parece, que lo mas ventajoso para estas mediciones seria usar cuerdas divididas en varas y pies, por su poco peso y volúmen, y ser menos embarazosas, pudiendo arrollarlas con facilidad. Pero el alargarse ó acortarse segun la mayor ó menor tension, y el estado de sequedad ó humedad de la atmósfera, las hace poco á propósito para dicho fin, é incomparablemente preferibles las cadenas.

54. Estas se forman con eslabones de alambre del grueso de *Fig.* 24
dos ó tres líneas, unidos por anillos del mismo metal y de figura ovalada muy oblonga, ó de la mayor escentricidad posible. En cada estremo de la cadena hay un agarradero ó asa, tambien de hierro, pero algo mas grueso que el de los eslabones, y de figura de un triángulo equilátero de cuatro á cinco pulgadas de lado para poder meter dos ó tres dedos La longitud de cada eslabon, incluso el semi-eje del anillo, es de un pie; y á cada tres de estos se cuelga de una cadeneta una plancha pequeña ó chapita de cobre con el número grabado, que indica las varas correspondientes hasta aquel punto de la cadenilla. El largo de los eslabones estremos se compone, primero, del semidiámetro del anillo inmediato; segundo, de la longitud del eslabon; y tercero, de la perpendicular tirada desde el estremo de la cadena al borde esterior del lado del asa. Al todo de una cadena de diez varas de largo se dan dos líneas mas para compensar la falta de tension.

55. Como el esfuerzo, que continuamente se hace al tender la cadena en el terreno, deba al fin alargarla, se mide y marca con exactitud en un muro una recta de diez varas y dos líneas de largo, sobre la que diariamente se coteja la cadena.

56. Para fijar esta en el terreno, y llevar la cuenta del nú- *Fig.* 25
mero de veces que se tiende sobre él, se usan unas agujas de hierro de media vara de largo, y cinco á seis líneas de grueso, para que resistan al introducirlas en la tierra, haciendo fuerza sobre el asa que tienen.

57. Las líneas muy largas, y los caminos, se miden con gran celeridad por medio de una cadena de cien pies de longitud, que tambien puede aplicarse á los usos, de la que acabamos de describir. Con diez agujas se miden mil pies sin llevar nota de la cuenta; pues basta que el hombre colocado en el estremo delantero de la cadena, luego que esta se aplica al terreno, deje una aguja, que le sirva al del otro estremo para marcar la posicion de la segunda aplicacion; y cuando se hayan recogido diez agujas, se habrán medido 1000 pies, y para una legua legal, que consta de 20,000 pies, solo se habrán señalado en el registro veinte rayas, ó el número correspondiente á cada millar.

Fig. 26 58. La figura 26 indica dos eslabones con su argolla; el diámetro del alambre de aquellos es de dos líneas, y el de esta de dos y media; su largo con la argolla, escluyendo los gruesos estremos, es de seis pulgadas exactas, y el cilindro, en que se encorva el alambre en espiral para sacar las argollas iguales, es de siete líneas, presentando aquellas en consecuencia una torsion, que al cerrarlas no debilita en manera alguna su resistencia en las tensiones que pueda sufrir la cadena. De diez en diez eslabones ó de cinco en cinco pies se pone en la argolla en que corresponde una planchita de metal con el número perteneciente, calado en la misma, como se ve en la figura 27.

59. La 28 demuestra una porcion de cadena con el asa de un estremo para manejarla con comodidad, y el modo con que debe doblarse para su transporte, de suerte que no padezca alteracion y ocupe el menor volúmen posible, que por lo comun se reduce á una especie de cilindro de siete á ocho pulgadas de diámetro y de igual altura.

INSTRUMENTOS.

SUS PARTES PRINCIPALES.

Alidadas.

60. Los instrumentos, que se usan en la topografía, tienen unido á ellos mismos, ó separado para colocar sobre su parte superior, un aparato especial llamado *alidada*, que sirve para dirigir la

vista, ó *tirar visuales* á los objetos de observacion, ó señales que se establecen para determinar los puntos que se desean del terreno.

La forma de la alidada varía segun la clase del instrumento, pero por lo general consiste en una regla BD movible de metal, *Fig.* 29.
por resultar asi mas pesada, mas exacta, y mas susceptible de precision que la de madera, como por ser mas facil grabar en ella las lineas y números de que se hablará.

61. Dicha regla tiene en sus dos estremos otras AB, CD, llamadas pínulas, perpendiculares á la longitud de aquella, á la que se unen por visagras, para poderlas doblar cuando no se usa la alidada, y que sobreponiéndolas á la regla, sea cómodo el guardarla en la caja en que se transporta.

En cada pínula hay una abertura muy estrecha *a*, *a*, ó un taladro cónico, y otra mas ancha *b*, *b*; y en el medio de cada una de estas bien tirante y perpendicular á la regla un cabello, cerda, ó seda *s*, *s*; por las que, y mirando desde los taladros cónicos ó aberturas estrechas opuestas *a*, *a*, se tiran las visuales á los objetos que se trata de situar, bien desde una pínula, bien desde otra; por cuya razon se colocan las aberturas y cerdas en ambas, pero contrapuestas. El plano visual, que pasa por la abertura y cerda opuesta, ó sea la direccion de la visual, debe rasar el canto ID de la regla.

62. No es preciso que las pínulas sean muy altas para poder mirar ó dirigir visuales, tanto á las grandes alturas, como á las hondonadas; pues que esto se consigue haciendo pasar dichas visuales á un tiempo por las cerdas, ó por las aberturas estrechas. Tambien pueden usarse alidadas, como la representada, que te- *Fig.* 30.
niendo un movimiento giratorio en I, puede en algunas ocasiones, dirigirse la visual sin inclinar el instrumento, sobre que se coloca la regla AA de la alidada; resultando la ventaja de ahorrarse la reduccion de los ángulos á el plano horizontal, como se conocerá por lo que se diga. (397)

63. Para rectificar la alidada, ó cerciorarse de que el plano vertical, que pasa por las aberturas y las sedas, rasa el canto ó borde de la regla, se dirige á cualquier objeto una visual, y se señala su direccion, trazando una línea de lapiz (*) en el papel sobre

(*) Esta línea se llama de colimacion.

que está la alidada; se vuelve despues esta, de modo que la pínula, que estaba en el estremo mas distante del ojo del observador, sea despues la mas próxima.

Se mira en seguida por la abertura estrecha y la cerda á el mismo objeto, y si el borde de la regla coincide exactamente con la línea de lapiz trazada en la primera posicion de la alidada, las cerdas estan bien colocadas; pero de lo contrario es preciso variar su posicion, hasta que el error desaparezca.

64. Sin necesidad de papel, ni de trazar líneas, puede hacerse la espresada rectificacion: para ello se pone la alidada sobre una tabla horizontal, ajustando el canto de la regla á dos agujas clavadas perpendicularmente en la tabla, á la distancia una de otra de poco menos el largo de la regla; se dirige una visual á dos jalones colocados en el terreno, en la direccion de las agujas; se invierte despues la posicion de la alidada, y se ve si en ella se cortan los dos jalones, y el borde de la regla toca ambas agujas.

65. Debe observarse, que, cuando la regla no es muy ancha, la visual tirada á un objeto es la misma, bien se dirija por su medio ó bien por los cantos de ella; pues los lados del triángulo formado con el objeto, aunque este no esté muy lejano, y la mitad del ancho de la regla, se pueden considerar, sin error muy sensible, como paralelos en la parte representada en el instrumento; razon por la cual hay algunas alidadas, en que su regla tiene el mismo ancho que las pínulas; pero es indudable, que la mas esacta es la esplicada.

66 La regla de la alidada se coloca como se quiere ó conviene; en los instrumentos en que se halla aparte ó separada de ellos. Pero en los que está unida, como en los destinados á medir ángulos tiene un movimiento de rotacion con respecto á un centro fijo colocado en los mismos instrumentos.

67 Cuando las banderolas, señales, ú objetos están á mucha distancia para poderlos distinguir bien, en vez de pínulas hay un anteojo B, movible en I, que descansa en un pie derecho C, colocado sobre la regla AA. El eje de este anteojo debe rasar el borde de dicha regla, y sus dos cristales, ocular, y objetivo, estar separados uno de otro lo necesario, para que sus focos concurran en

un mismo punto, ó foco comun del interior del tubo, en el que se coloca un anillo de metal con dos sedas, que se cruzan perpendicularmente en su centro, y dispuesto de modo que corra á lo largo del tubo para poderlo ajustar esactamente en el foco del objetivo. La señal, banderola, ú objeto á que se dirije la visual, debe interceptarse precisamente en el punto, en que se cortan las sedas, ó coincidir con una de estas.

Las imágenes se ven con estos anteojos en sentido inverso, lo que no ofrece inconveniente en estas operaciones.

Limbo: y Vernier, Nuñez, ó Nonio. (*)

---

68 El borde, ó circunferencia del círculo ó plano circular de los instrumentos en que gira la alidada, se llama el limbo del instrumento, y se divide para medir los ángulos formados por los diferentes objetos en el terreno en grados, medios grados, cuartos, y á lo mas quintos de grados; subdivision que no puede ser facilmente menor, segun la magnitud razonable del instrumento; pues la de los grados es ya por sí bien pequeña.

Sin embargo se cuentan en el limbo no solo las fracciones de los grados, sino tambien las de los minutos, asi como las fracciones de cualquier otra division de una longitud dividida en partes *Fig.* 31.
iguales. Sea, por egemplo, la regla HL una regla dividida en las partes iguales cinco, seis, siete..., y la CD otra que corra paralelamente á lo largo de ella, y de una longitud igual á cinco de las partes de la misma, pero dividida en seis iguales.

Tomando por unidad una de las divisiones de HL se tendrá, que, si el estremo coincide con la division diez, el número uno de la reglita estará $\frac{1}{6}$ de aquella unidad mas alto, que la division 11 de la HL; el núm. 2 estará $\frac{2}{6}$ mas alto, que la 12; el 3 $\frac{3}{6}$ mas, que la 13; el 4 $\frac{4}{6}$ mas, que la 14; el 5 $\frac{5}{6}$, que la 15 y en fin el 6 $\frac{6}{6}$, ó una division entera mas alto, que el número ó division 16,

(*) Nuñez, inventor de este medio, y Vernier, quien generalizó su uso ó aplicacion.

esto es, que el número 6 corresponderá esactamente á la division 15 de la regla; ó lo que es igual, que las 6 divisiones de CD corresponden esactamente á las 5 de la HL; pues supuesto que un estremo C corresponda precisamente con la division A, el otro D habrá indudablemente de ajustarse con la B, en que se completan las cinco partes.

Pero si dicha regla CD se hiciese correr mas arriba ó mas abajo, ó para evitar confusion se traslada á C′D′, en cuya posicion el estremo C′ no cae precisamente en una de las divisiones de la AB, habrá que averiguar el valor de la fraccion 13 *i*. Esta valuacion es bien sencilla, si se observa, que, ajustándose la division 5 de la reglita con la 18 de la HL, el núm. 4, por lo dicho antes, está debajo de la 17 la cantidad de $\frac{1}{6}$; el núm. 3 $\frac{2}{6}$ debajo de la 16; el 2 $\frac{3}{6}$ de la 15; 1 $\frac{4}{6}$ de la 14; y en fin C $\frac{5}{6}$ debajo de 13 *i*: luego 13 *i* equivale á $\frac{5}{6}$ de una division de la regla HL; y con solo ver cual es la division de la reglita, que coincide esactamente con la de la regla, el número de aquella indicará el numerador de la fraccion de una de las divisiones de la regla; y asi se dirá, que el punto C′ corresponde á 13 unidades y $\frac{5}{6}$ de una unidad.

Fig. 32. 69. Las fracciones son, en este caso ó construccion, de sestos, porque 5 de las unidades se han dividido en 6; pero, si se quisiese la division decimal, habria que dividir una longitud igual á 9 partes de la regla ó escala HL en 10 partes sobre la reglita ó nonio CD; y, segun se representa en la figura, la raya *i* llamada *línea de fé* corresponderá á 25 unidades y una fraccion, que se valua observando, que el núm. 6 (*) del nonio es el solo que coincide con una de las divisiónes de la escala; de lo que resulta ser la fraccion de $\frac{6}{10}$, ó que la línea de fé marque 25,6.

Fig. 33. 70. Como el mismo razonamiento puede aplicarse á las divisiones trazadas en una circunferencia, se tendrá, que si la alidada AF, movible alrededor del centro C del arco graduado AD, lleva unido el nonio FI terminado en un arco concéntrico que se ajuste con el AD en todas las posiciones de la alidada, y que 9 partes

(*) Para evitar confusion solo se han escrito en la figura la mitad de los números de las divisiones.

del limbo AD se hayan dividido en 10 iguales en el nonio FI, cuando la línea de fé F coincida con la division cero grados del limbo, las divisiones del nonio estarán por encima, ó les faltará para llegar á sus correspondientes del limbo, sucesivamente $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$; y si la alidada pasase á la posicion CB, y la línea de fé estuviera algo mas arriba de la raya que señala los 56°, el arco AB valdria 56° y una fraccion que se determina observando, que la sesta division del nonio es la que se ajusta con una de las del limbo, lo que da 0,6 por el valor de la fraccion, ó 56°,6 por todo el arco AB.

71. Si la circunferencia ó limbo estuviese dividido, como es lo general, en 360°, y se hiciese el arco del nonio igual á 59 de estos, pero dividido en 60 partes; como un grado tiene 60′, la fraccion seria de 1′. Si la division del limbo fuera de medios grados, y se tomase el arco correspondiente á 29 de ellos para el nonio, dividiendolo en 30 partes iguales, la fraccion seria de treinta avos de medio grado, ó de 1′. Si la division fuese de cuartos de grado ó de 15′, y se tomase el arco de 14° dividiéndolo en 15 partes iguales, la fraccion seria tambien de quince avos de cuarto de grado, ó de 1′.

Pero á fuerza de esmero en la construccion, si lo permiten las dimensiones del instrumento, se puede obtener mayor precision, dividiendo cada grado del limbo en 12 partes iguales, de donde resultará cada una de ellas de 5′; y tomando en el nonio un arco igual á 59 de estas partes, y dividiéndolo en 60, las fracciones serán de $\frac{1}{60}$ de 5′, esto es de 5″ cada una (*).

(*) Mr. Arago presentó á la Academia de ciencias en una de sus sesiones del año pasado, uno de estos instrumentos que repite los ángulos en el sentido horizontal y vertical. En dicho instrumento es tal la regularidad y la limpieza de la graduacion, que se puede, sin miedo de equivocarse, leer por medio de los *nonios*, hasta *cinco* segundos en ambos círculos, á pesar de que sus radios solo tienen tres pulgadas francesas.

Mr. Arago añade, que las diferentes partes de que se componen estos escelentes instrumentos, están hechas por medios mecánicos; y en cuanto á la division, dice, que está egecutada de modo que parece una paradoja; á saber, que no es preciso colocar el círculo que hay que graduar en el centro de la plataforma. Artistas de gran mérito, añade, creian insoluble este problema; pero Mr. Gambey lo ha resuelto de un modo preciso, ligando

72. Una vez que los arcos del nonio y del limbo son iguales, es claro que el número de partes n del limbo, multiplicado por el valor de cada m minutos, debe ser igual al número x de las partes del nonio multiplicado por el valor de cada una, que se supone sea de m' minutos; y se tendrá la ecuacion

$$n \cdot m = x \cdot m',$$

de la que suponiendo la division en grados, resultará

$$60' n = 59' x,$$

ó. . . . . $n : x :: 59 : 60.$

y. . . . . $\frac{n}{x} = \frac{59}{60} = \frac{1}{60}$ . . ó $1'$

Esto es, que en el caso de esta division, las diferencias ó fracciones serán de $1'$. Por lo tanto, cuando se quiera saber la fraccion que señala el nonio de cualquier instrumento, se contarán las divisiones de aquel. Sean por ejemplo a'; se hará la proporcion,

a (divisiones del nonio): a — 1 (divisiones del instrumento) $:: 60 : \frac{60\,(a-1)}{a}$

$$:: 30 : \frac{30\,(a-1)}{a} \ldots :: 15 : \frac{15\,(a-1)}{a} \ldots :: 5 : \frac{5\,(a-1)}{a},$$

y haciendo las restas respectivas se tendrá.

$$60 - \frac{60\,(a-1)}{a} = \frac{60}{a} = 1'$$

$$30 - \frac{30\,(a-1)}{a} = \frac{30}{a} = 1'$$

$$15 - \frac{15\,(a-1)}{a} = \frac{15}{a} = 1'$$

$$5' - \frac{5'\,(a-1)}{a} = \frac{5'}{a} = \frac{5'}{60} = \frac{300}{60} = 5''$$

Fig. 34. 73. La pequeñez de las divisiones del limbo y del nonio, sobre cuya perfecta igualdad puede contarse porque se trazan por medio de máquinas ingeniosas, exige para distinguirlas bien, el uso de un lente que se lleva á parte ó está unido, como M, á un brazo MI, que girando en I, permite colocarlo sobre las

la punta trazante (tracelet) á un sistema articulado muy sencillo. Nuevo Teodolito de Mr. Gambey (rue Pierre Levée, núm. 17. F. du Temple á París).

ciitadas divisiones. Ademas, como seria molesto contar el número de líneas que hay desde la de fé hasta la de coincidencia, basta leer la cifra que acompaña á aquellas, y que marca el número de minutos, que deben añadirse al número de partes ó grados señalados por la línea de fé sobre el limbo, para buscar desde alli la coincidencia.

74. Como la distancia entre las líneas del nonio y limbo se confunde por el delicado grueso de estas mismas, resulta parecer coincidir dos ó tres líneas consecutivas, por lo que se toma como de coincidencia la que media entre ellas.

75. El nonio en vez de colocarse en el estremo á un lado de la regla de la alidada, está, por lo regular, en el estremo mismo, vaciando la parte necesaria de metal para poder ver las divisiones del limbo, que de lo contrario quedarian debajo de dicha regla.

Tornillo de ajuste ó coincidencia.

---

76. El tornillo de coincidencia V, tiene en los instrumentos, el objeto de comunicar á la parte movible CD, en que estan el nonio y la alidada ó anteojo, un movimiento muy lento alrededor del limbo AB del instrumento, para que se ajuste ó coincida exactamente el objeto con la seda ó pelo del anillo del anteojo, ó de las pínulas de la alidada. Dicho tornillo V, gira en un anillo *b*, unido á la alidada. En la parte vaciada ó abierta *ab*, hay una pieza susceptible de andar cierto espacio, y que unida á la alidada CD, lleva ademas consigo una tuerca en que entra el tornillo V; de modo que dando vuelta á este, la pieza se aproxima ó separa de *b*, comunicando un movimiento lento á la alidada y anteojo. Debajo de lo descrito, hay un broche ó grapa formada de dos piezas, que agarran el limbo con un tornillo de presion K, para dejar libre ó afirmar la regla de la alidada ó anteojo al limbo del instrumento. Cuando lo primero, se puede llevar con la mano y con movimiento veloz la regla, próximamente hasta la direccion del objeto que se observa; y cuando lo segundo, por medio del tornillo V se hace andar á la misma lentamente, para que se ajuste ó coincida la direccion del objeto ó señal, con

las sedas del anteojo ó alidada. En efecto, una vuelta entera del tornillo V, solo produce un espacio corrido en la direccion del eje sobre el limbo, igual al paso de la rosca: si este es de $\frac{1}{2}$ línea, y á la cabeza del tornillo se la hace solo describir un arco de $30^{\circ}=\frac{1}{12}$ de la circunferencia, la tuerca *i* y la pieza *ab*, solo andarán $\frac{1}{12}$ de la $\frac{1}{2}$ línea, ó $\frac{1}{24}$ de línea. La cabeza del citado tornillo, para mayor comodidad en su uso, y para apreciar mejor las fracciones, conviene sea bastante grande respecto al diámetro de la rosca.

Pies de los instrumentos.

Fig. 35. 77. Los pies en que se colocan los instrumentos son de varias formas pero procurando siempre la firmeza en la situacion sobre el terreno, la facilidad de su colocacion en este, y la de su conduccion.

78. El pie mas sencillo es el que manifiesta la figura: se compone de un cilindro ó espiga *a* de dos ó tres pulgadas de largo, para unirlo al instrumento, el que puede girar sobre su centro, ínterin no se apriete un tornillo que lo sugeta á la espiga *a*; y de una parte *cb* cónica, de $1\frac{1}{2}$ vara de largo, con un regaton *b* de hierro en su estremo, para clavar el pie verticalmente y con firmeza en el terreno.

Fig. 36. 79. Como este pie no podria servir en terreno de piedra, y ademas es facil que pierda su posicion vertical, se usa generalmente, hasta en los instrumentos mas sencillos, de un trípode *a*, cuyas tres ramas ó pies pueden separarse mas ó menos por la parte inferior, para acomodarlos á las desigualdades del terreno, en que se fijan por medio de los regatones *b*. Por la parte superior, están los pies unidos por tornillos *t* á las caras ó chaflanes de un prisma triangular. Para colocar los pies, se aflojan los tornillos, y se mueven aquellos hasta que han tomado la abertura conveniente, y se han clavado en el terreno los regatones, en cuyo caso, se vuelven á apretar los tornillos. Por una operacion inversa se reunen los pies lo mas que sea posible, y se sugetan con una correa, cuerda &c. para poderlos transportar.

80. Aunque este trípode es ligero como sus pies son débiles, *Fig.* 37.
y ceden al movimiento de rotacion que tiene que darse al instrumento, se ha formado cada pie *a* de dos piezas de madera unidas en figura de V, introduciendo los estremos en unos regatones *b* de cobre con puntas *c* de hierro. Por la parte superior los pies entran en unas orejas *s*, cuadrangulares, vaciadas en una pieza de madera *t*, y á las que se afirman con los tornillos *o*.

81. Hoy generalmente los trípodes de los instrumentos se ha- *Fig.* 38
cen de modo, que reunidas las tres ramas compongan solo un co- *y* 39.
no *a*, *a*, *b*, resultando ser cada una de ellas una pirámide triangular mistilínea, ó un sector cónico. En la parte inferior tienen los pies su regaton *b*, de hierro, que juntos forman otro cono. Por la parte superior están unidos á unas piezas de cobre *s*, *s*, con sus espigas *r*, *r*, *r*, que entran en otras piezas, á las que se sugetan con tornillos y se unen al platillo *tt* del mismo metal, sobre que está encastrada la espiga *m* ó rosca *i*, á que se afirma el instrumento: *o*, *o*, son unas virolas de cuero ó metal, que se llevan aparte, y se introducen para que los pies se mantengan juntos, cuando se haya de transportar el trípode.

Rodilla.

82. En las operaciones es preciso poder dar al limbo del instrumento la posicion horizontal, oblicua, ó vertical, que cada caso requiere; y para esto hay en muchos una pieza, llamada *rodilla*, que constituye la articulacion del instrumento con los pies; la cual puede disponerse de diversos modos.

83. La de *nuez*, que sirve para los pies de los grafóme- *Fig.* 40.
tros (102, 106) y brújulas, es una esfera de cobre *o*, encerrada en dos piezas semi-esféricas *ee*, huecas por dentro llamadas *conchas*, las cuales se aflojan ó aprietan por medio del tornillo de presion *m* para dar ó quitar el movimiento á la esfera, y por consiguiente al tallo *i* que está unido á ella, y sostiene el instrumento.

84. El cilindro hueco de cobre *l* recibe la espiga *p*, la que se afirma por el tornillo *n*, permitiendo antes el movimiento vivo

para colocar la alidada ó anteojos próximamente en la direccion de los objetos, en la que acaban de ajustarse por el movimiento lento de rotacion de la esfera entre las conchas; y logrado, se aprieta fuertemente el tornillo *m*.

Fig. 41 85. La rodilla de Cugnot, que con corta diferencia es la usada muchos años hace para la plancheta (144) en el cuerpo de Ingenieros militares de España, se compone de dos cilindros BB, B′B′, equivalentes á la nuez antes descrita, cortándose en ángulo recto sus ejes, que son dos pernos de hierro BB, B′B′ con una rosca en uno de sus estremos, en que entra una tuerca de dos orejas *ee* para apretar ó aflojar. Con este artificio, y aflojando la tuerca, se da á las lengüetas de madera LL, que sugetan la parte superior del instrumento (por lo general la plancheta) dos movimientos en direcciones perpendiculares, con lo que podrá ponerse en la posicion horizontal ú otra conveniente; y apretando las tuercas se afirma y queda inmovil el instrumento, en la posicion que se necesita.

DESCRIPCION Y MANEJO DE LOS INSTRUMENTOS.

Regla de escalas.

Fig. 42 86. Consiste esta en un prisma triangular de madera, marfil, ó laton, que sirve no solo para hallar la magnitud de las rectas dadas, sino para tirarlas de una longitud determinada sin el uso del compas.

Puede contener hasta seis escalas diferentes en la inmediacion de sus aristas: dos van marcadas en la cara *ab*, y otras podrian trazarse en las caras *ac*, *bd*. Basta la inspeccion de la figura para enterarse del uso de esta regla.

Fig. 43 87. Cuando se quiere mayor exactitud, se puede usar de una escala de metal con nuñez bajo los principios indicados (72), y tambien del compás llamado de varas, que se representa en la figura 43, y se reduce á una regla *mn* de metal, sobre la cual hay una escala grabada, á cuyo estremo corresponde una punta *a* fija: otra *b* movible corresponde á la línea de fe del nuñez *rs*, el que se sugeta en la posicion conveniente por un tornillo *t*. En el interior de la caja del nuñez hay un resorte curvo, que se aplica al canto esterior de la regla; lo que hace que aquella se mueva con suavidad y del modo mas conveniente. Cuando se quiere mucha exactitud, la punta *b* se puede aplicar sobre un punto por medio de una rosca ó tornillo de coincidencia; y en este caso la regla debe ser pesada, y tener las puntas obtusas; como se dirá en la descripcion del gran círculo transportador.

88. El uso de este compás es sumamente facil para medir una recta, ó encontrar dos puntos que disten una magnitud determinada. Sea *ab* la recta: hágase coincidir la punta fija con el estremo *a* de la izquierda; y muévase la correspondiente al nuñez, hasta que se aplique al otro estremo *b*: léase la parte de la escala que ha recorrido el nuñez, y el número de diferencias que le correspondan, y se tendrá la medida de la recta *a b*.

89. Bajo dos conceptos pueden aplicarse estos compases: primero, para apreciar los puntos en el pie de Burgos, cuando en las cartas se tomen medidas tales como son en sí; y bajo de este aspecto son apreciables las que posee la fundicion de artillería de Sevilla, construidas por el difunto artista español Burgaí; y segundo, cuando se quieran usar como escalas; pues á poco que se reflexione se conoce, que una division de cuartos de línea, ó de tres puntos del pie de Castilla, puede hacerse bien, si de estas divisiones se toman 29 partes en la escala, y su estension se divide en 30 sobre el nuñez; con lo que se obtendrán diferencias de 0,1 de punto; como puede comprobarse por los principios establecidos en el número 68 y siguientes.

Del Semicírculo.

---

90. Este instrumento, que es uno de los que componen el estuche de matemáticas, sirve para medir y formar ángulos en el papel. Su uso es bien conocido; por lo tanto solo se hablará de dos mejoras hechas en él, que no son tan comunes. La primera se reduce á marcar sobre otra semicircunferencia concéntrica á la del borde los arcos desde 180° hasta 360°, para poder asi apreciar los ángulos mayores que el primer número. *Fig. 44*

Fig. 45. 91. La segunda consiste, en que como á la simple vista solo pueden contarse en el limbo de este instrumento los cuartos de grado, y de aqui la poca precision con que se miden ó forman los ángulos; para corregir este defecto, se han añadido al semicírculo la alidada ID con su nonio D, que proporciona poder contar los minutos. En la parte C de la alidada se vacia un espacio circular, en que se cruzan perpendicularmente dos cerdas, y cuyo punto de interseccion marca el centro de la alidada, que cae exactamente sobre el del semicírculo.

92. Al construirse este instrumento debe cuidarse, de que todos los puntos del borde de la regla YD estén en la misma direccion de dicho centro C.

Del Transportador.

Fig. 46. 93. Llámase asi un círculo entero, graduado con el mismo objeto que el semicírculo que acaba de describirse. Los brazos *aa*, sostienen la circunferencia graduada: el collar *b* lleva los *c*, *c*, teniendo en un estremo el nuñez, y en el otro un piñon *d*, que engrana en la circunferencia dentada A, y da movimiento á la alidada *cc*. En el collar *b* se nota la parte vaciada, en que se coloca un cristal, y en el fondo trazados los dos diámetros, que cortándose perpendicularmente determinan el centro del movimiento, cuyo centro es el mismo que el del instrumento. Las charnelas *tt* sirven para doblar las partes *ee*, sobreponiéndolas al diámetro *cc*, cuando no se haga uso del instrumento; y tienen en sus estremos *rr* dos puntas de acero, colocadas en línea recta con el centro del transportador.

Fig. 47. *y* 48. 94. Este instrumento puede servir tambien para el caso, en que no esté marcado el vértice del ángulo, ó punto de interseccion de las dos rectas que lo forman, y tambien para cuando se da este punto; pues siempre es dificil tomarlo sin error, en especial si el ángulo es muy pequeño.

Fig. 47. Supóngase el ángulo *o*: póngase el instrumento sobre las líneas AB, CD, de modo que los puntos, P*p*, toquen las líneas A*o*, D*o*, estando la línea de fé del nonio en cero del limbo; dése vuelta al piñon, hasta que el punto P caiga sobre el Q en la línea CD, (el otro p, caerá en q, cuando sea $pq = PQ$); muévase despues el piñon hácia R, hasta que el punto p caiga en r, con lo que quedará conocido el arco qr, cuya mitad es la medida del citado ángulo AoC; y como la circunferencia ó limbo del instrumento está dividida en 180°, será $qr = AoC$. Esta medida puede hacerse mas sencillamente colocando el punto P sobre o, y el otro p sobre uno de los de la línea oD, estando en cero el nonio, y moviendo el piñon hasta que este caiga sobre la oB, que marcará el nonio el ángulo AoC.

95. Cuando no se encuentran los dos lados, se coloca el punto P sobre la recta AB, y el otro p sobre la CD; se gira el piñon hasta que p caiga sobre el punto q de la recta AB: el punto P habrá descrito el arco $PQ = pq$; de modo que $\frac{QR}{2} = \frac{PR}{2} - \frac{PQ}{2} =$ al ángulo formado por las líneas ó lados AB, CD. Asi, pues, haciendo ya describir al punto P el arco QR se tiene la medida buscada. *Fig.* 48.

Facil es conocer, que lo dicho se funda en el principio geométrico de la medida de los ángulos escéntricos.

96. Este instrumento, invencion de Mr. Brewster (*), es muy apreciable; pues por su medio se puede conocer el ángulo que forman dos rectas, cuando el punto en que se cortan está á mucha distancia del plano en que se aplica, ó cuando el vértice del ángulo se determina por una interseccion aguda. Ademas, facilita la resolucion del problema siguiente. *Conocida una recta situada en un plano, y un punto fuera de ella, encontrar otra, que pasando por este punto forme con la dada un ángulo conocido.* En fin, la circunstancia de dividirse su circunferencia en 180°. ofrece mayor exactitud, cuando es pequeño el radio del instrumento; que, construido con las debidas precauciones para asegurar su invariabilidad durante la operacion, es susceptible de grande exactitud en los resultados que se obtengan por su medio.

Transportador de grandes dimensiones.

97. Los ángulos pueden medirse en el papel con la misma

(*) A Teatrise onw ne philosofical instruments etc. por David Brewster. Edimburgh 1813.

exactitud que sobre el terreno, y se construyen del mismo modo que se observan con un círculo transportador de 9, 12 y hasta 16 pulgadas de diámetro, cuya circunferencia está dividida en grados, medios, cuartos, y doce avos de grado, y con su nuñez, que da la misma diferencia que los instrumentos de observacion. Dicho transportador está formado por una corona de metal, que contiene la graduacion del limbo, y enlazada por cuatro radios, tambien de metal con el centro, el cual se halla determinado por líneas finísimas en un cristal de una pulgada de diámetro. El nuñez esterior á la division del limbo está en el estremo de una regla, como se ha esplicado (fig. 34); y una porcion de esta marca la prolongacion de la línea de fe por un punto, que señala una punta aguda, que lleva en su estremo. Este instrumento, por la cara que se aplica al papel, tiene cuatro puntas de acero, poco salientes y muy obtusas; tan bien entendidas y calculadas, que sin descomponer la superficie del papel, ó sin una fuerte impulsion, no se puede mover del sitio en que se coloque; cuya circunstancia, la de su exacta division, y el grande radio, hacen dé resultados de grande exactitud. Una triangulacion complicada, que exigiria muchos dias para sus cálculos, se traza por manos inteligentes con el transportador en una hora; por lo que se recomienda el uso de este instrumento, como un medio de comprobacion en los resultados del cálculo, advirtiéndose asi mas facilmente los errores que hayan podido cometerse.

Escuadra de Agrimensor.

Fig 49. 98. Este instrumento consiste en un cilindro atravesado por dos hendiduras ó rendijas rectangulares verticales AC DG, OF EI, que se cortan perpendicularmente entre sí, y sirven de pínulas. Las partes inferiores A, O, G, I, se vacian en figura de aspillera, para por ellas dirigir visuales á los objetos ó jalones. En la base del cilindro hay otro B hueco de menor diámetro, para introducir el pie, y colocarlo en el terreno. Este pie podrá estar dividido en pies y pulgadas, sirviendo asi tambien de vara de medir. *Fig*. 50.

En vez de la figura cilíndrica puede la escuadra tener la de un prisma octagonal con cuatro aberturas; y asi tirar visuales, no solo en ángulo recto, sino tambien en los de 45°.

Círculo de Agrimensor.

99. Es de laton, y consiste en un limbo de una á una y media *Fig.* 51
pulgadas de ancho, graduado y atravesado perpendicularmente por dos diámetros fijos de cinco á seis pulgadas, y del mismo metal, con pínulas en sus estremos. Para cerciorarse de si las sedas de las pínulas se cortan exactamente en ángulos rectos, se mira por las dos opuestas, colocando dos jalones en la misma direccion y á bastante distancia entre sí; se hace girar el instrumento sobre su eje, hasta que las pínulas mas distantes en la primera posicion queden mas próximas al observador; y si en esta posicion los jalones se cortan por las dos mismas visuales, se estará seguro de la exactitud del instrumento.

Pantómetra(*) *ó Cartabon de Agrimensor.*

100. La pantómetra viene á ser una escuadra de agrimensor *Fig.* 52
perfeccionada. Se compone de dos cilindros AD, EH de dos á tres pulgadas de diámetro, colocados uno bajo del otro. El primero AD tiene unido en su parte inferior el mango K para colocarlo en el pie, y el tornillo de presion P para afirmarlo al mismo. El cilindro superior EH puede girar sobre su eje, presentando sucesivamente en los diferentes puntos de la circunferencia inferior CD, dividida de dos en dos grados, una línea de fe trazada en el borde de EF; y por ella y el nonio *m* medir en el limbo CD los grados y cuartos de estos de que consta el arco, que ha corrido en su giro el cilindro superior EH. Si el diámetro de la pantómetra fuese doble, podrian medirse los ángulos con 3′ de diferencia; pero para los objetos de la agrimensura, en que este instrumento se emplea, basta la primera division.

Hay ademas en los dos cilindros las aberturas estrechas *a,c*, y diametralmente opuestas otras mas anchas *b, d*, con sus cerdas en el medio, correspondiendo la una al principio de la graduacion fija

(*) Pantómetra ó instrumento para medir ángulos su autor M N, Fouquier.

ó del limbo, y la otra á cero de la misma; de lo que es facil asegurarse ajustando estos dos puntos, y dirigiendo por ambos las correspondientes visuales, para ver si concurren en un mismo punto.

En la parte superior GH, se pone un nivel pequeño de aire, para asegurarse de que el pie del instrumento queda vertical; y una brújula, para marcar los objetos que no permitan descubrir los obstáculos, como se dirá cuando se hable de estos dos últimos instrumentos.

Uso de la Pantómetra.

101. Haciendo girar todo el instrumento sobre la espiga K, y el cilindro superior EH sobre su eje, se hace coincidir con las cerdas las visuales que se dirigen á dos objetos ó señales. Véase en seguida en el limbo el arco descrito por el nonio, y se tendrá el valor del ángulo que dichos dos objetos forman entre sí.

Del Grafómetro.

Fig 53 y 54. 102. Este instrumento sirve para medir el ángulo formado por dos visuales tiradas en el espacio, desde un punto del terreno en que se situa, y por lo que se llama punto de *estacion*, á otros dos distantes de él. Se reduce á un semicírculo de laton graduado, de cuatro hasta diez pulgadas ó mas de diámetro, con dos alidadas de pínulas, ó anteojos, el uno *pp* fijo en el limbo del instrumento; y el otro *tt* movible al rededor del centro *c* tiene un nonio en uno de sus estremos, que acompaña á la alidada en todas sus posiciones.

El anteojo fijo se coloca debajo del limbo, y encima el movible con la alidada correspondiente. El plano, que pasa por las sedas y claros de las pínulas de la alidada fija, debe pasar por la línea del instrumento marcada 0°, y 180°. El grafómetro tiene ademas una brújula pequeña *b*, con el diámetro del círculo de su base 0°, y 180°, paralelo al *pp* de aquel: y para cuando se quiera poner el limbo en la posicion horizontal, se lleva aparte un nivel pequeño de aire *n*, que se coloca sobre el limbo. En fin tiene su pie, de que ya se ha hablado (77 y 78).

103. Tres circunstancias deben concurrir en este instrumento, para que dé los resultados mas exactos posibles: 1.ª que el centro del eje de rotacion sea el centro del arco dividido; 2.ª que la línea de fé de la alidada fija, esté precisamente en la direccion de las divisiones 0° y 180°; y 3.ª que el borde de la alidada movible pase tambien por el centro.

Para asegurarse de lo primero, ó conocer si el instrumento está *bien centrado* y *bien dividido*, se observan con él los tres ángulos de varios triángulos, y la suma de aquellos en cada uno debe componer 180° con cortísima diferencia. Puede elegirse tambien un terreno bien despejado, y situando el grafómetro en un punto, tirar visuales todo al rededor, girando hácia una misma direccion; se suman despues todos los ángulos asi formados, y la suma deberá ser próximamente de 360°. Se dice próximamente, por no ser posible medir cada ángulo con una precision geométrica, ya á causa de la imperfeccion de nuestra vista, ya por la pequeñez de las divisiones.

Para comprobar las otras dos circunstancias, ó ver la exactitud de correspondencia de la línea, eje del anteojo movible, con el diámetro 0°, 180° ó línea de colimacion (63, nota) se coloca aquel anteojo, de modo que la línea de fé de la regla de su pie se ajuste con el citado diámetro, y mirando entonces por los dos anteojos ó alidadas á un mismo objeto, se vea este por los hilos verticales de ambos; y sino se verificase asi, habrá que valerse del tornillo que mueve el aro en que están las cerdas en lo interior del tubo, ó arreglar las de las pínulas (63).

104. Podria llevarse este error en cuenta. Sea *hc* la visual *Fig.* 55.
que se dirige por el anteojo superior, cuando se coloca sobre el inferior para poder ver un mismo objeto en la direccion de la línea de fé. Es claro, que se contará de menos el arco *ac* en todo ángulo que se observe, y de mas, si *ac* hubiese caido en c', á la derecha de la roseta *u*. Por lo tanto seria preciso, en el primer caso, añadir $a'c''$ á ca', y sustraerlo de este en el segundo; cuyo cuidado se evita corrigiendo, como se ha dicho, la posicion de las cerdas. Cuando este error es solo de algunos minutos en un instrumento de 8 á 10 pulgadas de diámetro, el instrumento es bueno: pero es preciso re-

petir las operaciones varias veces, pues la casualidad puede producir compensaciones que hagan tener por exacto un instrumento, que tal vez no sea ni mediano.

Uso del Grafómetro.

Fig. 54. 105. Para tomar ó medir ángulos con este instrumento, se hace coincidir su centro por medio de una plomada que se cuelga de él, y cuyo estremo inferior debe caer sobre el punto elegido del terreno; se pone horizontal el limbo del instrumento, valiéndose del nivelito que tiene para el efecto; se afloja el tornillo de presion *u*, que sujeta el instrumento á su pie; se hace girar el limbo hasta que el antcojo ó alidada fija quede en direccion de uno de los objetos; se aprieta el dicho tornillo; se afloja el de coincidencia de la alidada movible, que se lleva con el movimiento veloz próximamente hasta la direccion del otro objeto; acábase, con el movimiento lento, de ajustar esta visual, y midiendo en el limbo el ángulo entre 0° y la línea de fé del nonio, se tendrá el ángulo buscado. Y como nada impide tirar nuevas visuales, ya sea entre el primer objeto y otros varios, ya entre estos y otros nuevos, se podrán marcar las situaciones de todos los puntos de al rededor.

De la Brújula.

Fig. 56. 106. Consiste este instrumento en un paralelipípedo EP, de base cuadrada, de 4 hasta 7 pulgadas de lado, y su altura de 1 á 1 $\frac{1}{2}$; el todo de madera dura, cobre ú otra materia sólida, como no sea el hierro. En este paralelipípedo se ahueca un cilindro de 3 á 6 pulgadas de diámetro y $\frac{1}{2}$ pulgada de altura, en cuyo fondo se coloca un círculo de laton blanco, con un anillo ó limbo *ss* algo mas elevado que el espresado fondo, dividido en 360° y 720 medios
Fig. 57 grados. En el centro del círculo de la base hay un eje *q* de acero
y 58. templado, con la punta superior muy aguda, perpendicular al plano del círculo ó base, y en esta marcados dos diámetros, que se cortan en ángulo recto, paralelos á los lados del paralelipípedo ó caja de la brújula. En los estremos de los diámetros se ponen

las iniciales N, S, E, O, de los cuatro puntos cardinales del mundo, Norte, Sur, Este, y Oeste.

Sobre la punta aguda del eje *q*, se coloca una aguja imanada, que es una barrita *gg* ó plancha de acero *g'g'* delgada, puntiaguda en sus dos estremos, que se ha magnetizado frotandola con el iman (*) en toda su longitud y siempre en una misma direccion. En su mitad *c*, se añade un cono hueco de laton y mejor de ágata, que recibe la espresada punta del eje sobre la que jira casi sin rozamiento alguno la aguja, dirigiendo sus dos estremos á los diversos puntos del espacio; y como es sabido, por la propiedad del imán, toma aquella en cada localidad una direccion constante hácia el meridiano norte sur, que por esto se llama meridiano magnético.

Las dos puntas de la aguja se alzan un poco para que sus oscilaciones sean mas permanentes, sin dejar por eso de ser enteramente libres. El eje debe estar precisamente en el centro del círculo graduado, lo que se reconoce facilmente dando vueltas á la caja, por que en todas las posiciones la aguja, que siempre queda en la misma direccion absoluta, marcará diversas divisiones del limbo.

107. Si antes de *ímanar* la aguja se mantenia horizontalmente sobre el eje, despues ya no se conserva equilibrada; y al contrario toma una posicion muy inclinada al horizonte, ya hácia un estremo ya hácia el otro; pero poniendo un poco de cera en la parte que se levanta, vuelve la aguja á la posicion horizontal.

108. Aun despues de conseguida la horizontalidad de la aguja, todavia tiene lo que se llama la *declinacion*; ó sea el no dirigirse precisamente al norte, y sí formar un ángulo con la direccion de este. Dicha *declinacion* cambia segun los tiempos y los sitios; pero para las operaciones topográficas, basta que permanezca la aguja en una misma direccion durante muchos dias, como en efecto sucede.

108'. El estremo de la aguja que mira al norte se llama el

(*) Es el deutoxide de hierro: vease Thenard fol. 3, páginas 74 y 80, tratado de Química.

polo *boreal* y el opuesto el *austral*; aquel se marca con la inicial N, y este con la S, ó bien para distinguirlos se pavona el primero. Las acciones que determinan la direccion de la aguja, parece sean la fuerza de atraccion, que ejercen las grandes masas de hierro contenido en lo interior del globo terrestre; cuyas masas, por la propiedad que tiene el iman de atraer el hierro, obligan á la aguja á que tome la direccion en que obra aquella fuerza; y de aqui no hacerse la caja de la brújula de hierro, que sus uniones sean de espiga y escopleaduras, ó con tornillos de cobre, y en fin que los que estén inmediatos al instrumento no lleven ninguna cosa de hierro (*).

109. Para evitar los efectos del viento se cubre el cilindro ó hueco de la caja con un cristal, que se sobrepone en un rebajo hecho en el borde superior del cilindro, sugetándolo con un alambre de cobre sin unir sus dos estremos; y que se sobrepone al rededor de dicho borde. El cristal debe quedar muy inmediato al vértice del cono de ágata ó cobre que tiene la aguja en su medio, pero sin tocarlo, para que si se vuelve la caja no se salga aquella del eje en que gira. En fin, para evitar contingencias, tiene la caja una tapa de madera que se ajusta sobre el cristal, entrando por unos rebajos laterales.

Fig. 56. 110. En uno de los lados de la caja se coloca un prisma cuadrangular hueco *mr*, de media pulgada de lado, unido á ella por un perno ó eje *t*, que deja al prisma en libertad de girar en un plano perpendicular á la base ó círculo de la brújula. Dicho prisma es la alidada de este instrumento, por lo que tiene directamente opuestos en los paralelógramos mas chicos, ó sean sus cabezas de metal, unos agujeritos y lengüetas de lo mismo, que reemplazan las aberturas y cerdas para dirigir visuales á los objetos. El eje de este prisma alidada debe ser exactamente paralelo á el diámetro trazado en el fondo del hueco cilíndrico de la brújula, en la direccion de 0° y 180° que marca la línea NS, ó diámetro magnético. La figura de la derecha representa la alidada prismá-

(*) Si se quieren interesantes noticias sobre esta materia, puede verse el tratado de navegacion del señor Mendoza oficial de la marina española.

tica *rm*, y manifiesta las posiciones $r'm'$, $r''m''$ para dirigir visuales por elevacion ó depresion.

111. En lugar del prisma se usa tambien de un anteojo semejante á los descritos; en cuya parte esterior pueden ponerse unas alidadas para aproximar la visual á la direccion de los objetos.

112. Igualmente en vez del anteojo ó del prisma, se ponen unas pínulas *p*, *p* en la direccion del diámetro, las cuales giran en charnelas para doblarlas sobre la caja, cuando esta se tapa. *Fig.* 56′

113. Suele colocarse delante verticalmente un arco de círculo graduado, para marcar la inclinacion del anteojo respecto al horizonte; asi la brújula puesta horizontalmente por medio de un nivel de aire viene á ser tambien un *eclímetro* (538) dando ademas de la direccion horizontal de los objetos, su ángulo de altura, esto es, el ángulo que forma con la horizontal la visual dirigida á la cúspide del objeto observado.

114. Cuando no se hace uso de la brújula, para descargar al eje del peso de la aguja, y tambien cuando se quiere detener la oscilacion, se levanta aquella y afirma contra el cristal por medio de una pequeña palanca, que tiene uno de sus estremos fuera del cilindro hueco, y el otro lleva un anillo debajo del cono del medio de la aguja.

115. A la brújula puede añadirsele su pie y rodilla, y quedar en la direccion horizontal *a b c* por medio de un nivel chico de aire (559) que se pone sobre el cristal; ó bien sin el nivel, haciendo girar la caja sobre su centro, y viendo si los estremos de la aguja en todas las posiciones rasan con el limbo, y se mantienen en el plano de este. Ademas, el grado de precision en las observaciones que pueden hacerse con este instrumento, no exige una horizontalidad completa. En fin la brújula puede girar velozmente sobre su centro *i*, sirviendo el tornillo de presion *d* para detener este movimiento, y por otro de coincidencia obtenerse el movimiento lento. *Fig.* 40.

115′ La brújula ha sido mejorada por el capitan Kater miembro de la sociedad real de Londres, como va á verse.

La caja es de unas 3 pulgadas de diámetro con su eje muy *Fig* 56′′′′

agudo de acero en el centro para que gire la aguja, sobre la cual hay sobrepuesto un círculo de carton fino, cuya circunferencia está dividida en grados y medios grados: esta disposicion es la misma que en las brújulas marinas ó agujas de marcar. El polo S, corresponde á 0°, ó á 360°, y el polo N á los 180°. Todo está cubierto con un vidrio bien transparente unido al aro de la caja.

En todo esto, dicha brújula no se diferencia de las conocidas; pero las mejoras ó perfecciones que la distinguen son las siguientes. *Primera*: una pínula *mns* con un hilo ó pelo que sirve para dirigir la visual al objeto que se mira, y al mismo tiempo su prolongacion corta la graduacion. Dicha pínula es movible al rededor de una charnela *ns* para poder doblarla sobre el vidrio, con la mira de hacer mas portatil el instrumento. Detras de la pínula hay un espejo *z* de vidrio negro, que no solo puede tomar diferentes inclinaciones sino correr de arriba abajo, y aun salir de la corredera en que está, y volver á entrar invertido, es decir, que su cara reflectante mire hácia abajo. El objeto de este espejo se verá en los usos de este instrumento. *Segunda*: la pieza *abc* diametralmente opuesta á la pínula: esta pieza se compone de un prisma menisco, que sirve para presentar verticalmente y aumentados los grados y medios grados trazados horizontalmente en la roseta: en la cara vertical del prisma hay una abertura ó agujero á donde se aplica el ojo para dirijir la visual y leer la graduacion. Delante del prisma menisco y unidos á su armadura, hay dos vidrios *v* de color, que pueden interponerse entre el ojo y el objeto que se mira para moderar su escesiva luz; como por ejemplo, si es el sol reflejado por el espejo negro de la pínula. Toda esta pieza del prisma menisco está sugeta á una corredera que tiene un pequeño boton *d*, con el fin de graduar la altura segun convenga mejor á la vista del observador, para percibir con claridad las divisiones de la roseta.

Por último, para facilitar y abreviar las operaciones que se hagan con este instrumento, el autor pone un resorte con un boton debajo de la pínula en la parte esterior de la caja, que apretándosele con el dedo hace que se pare ó fije la roseta. Por este medio el observador puede disminuir la amplitud de las oscilaciones, y viendo los arcos que describe á uno y otro lado del pelo de la pínula, parar la roseta en el punto intermedio. En un lado de la caja hay una pieza escéntrica *e*, que haciéndosela girar levanta la aguja hácia arriba para que no trabaje inultimente sobre su eje (114).

En las primeras brújulas que se construyeron de esta especie, en lugar del prisma menisco, habia un espejo plateado con una inclinacion de 40° hácia la roseta, y una lente convexo-convexa de tres cuartas de pulgada de foco.

Aplicaciones de la Brújula.

---

116. Sirve este instrumento para marcar en los planos la direccion NS, ú *orientarlos*, por la propiedad que tiene la aguja imanada de dirigirse hacia el polo norte; y fundándose en esta misma propiedad, tambien para medir los ángulos que forman entre sí los diferentes objetos del terreno. Pero como el señalamiento del norte por la aguja no es con exactitud, inclinándose esta mas ó menos ya hacia oriente ya hacia occidente segun los tiempos y lugares, es preciso averiguar la variacion llamada *declinacion*, (108) para que los puntos del plano queden situados exactamente respecto á la línea NS.

117. Para esto se necesita saber trazar la verdadera meridiana, y ajustado á ella el borde del lado de la caja de la brújula, si es cuadrada ó paralelográmica, ver el ángulo que forma la aguja con este, ó lo que es lo mismo, con la verdadera meridiana; dicho ángulo será el valor de la *declinacion*, y formado en cualquier punto de la línea trazada, quedará aquella establecida en el plano. Si la caja fuese redonda, se coloca su centro sobre dicha linea, de modo que se ajuste con ella el diámetro que pasa por las divisiones 0° y 180°, quedando el primero hácia el norte.

118. La direccion verdadera de la meridiana, ó línea NS en un punto cualquiera, puede determinarse de varios modos. 1°. Observando en él, durante algunos dias consecutivos, el ángulo entre la salida y puesta del sol sobre el horizonte, marcando en el terreno ambas direcciones, y dividiendo dicho ángulo por medio con una línea, que será la meridiana.

Para ello, clávese en el terreno un piquete *am* bien á plomo, ***Fig.*** 59.

y haciendo centro en su pie, descríbase la circunferencia SOrN, que representará el horizonte. Sea P el punto por donde nace el sol, y O en el que se pone, ó su ocaso. Es evidente que saliendo el sol por el punto P, la sombra del piquete plantado en *a* caerá hacia la direccion *ar*, y que al ponerse aquel en O, la sombra seguirá la *aq*. Divídase el arco qNr en dos partes iguales en N, y tirando por el mismo punto el diámetro NS, este marcará la línea meridiana, en la que N será el norte y S el sur.

119. Para poder emplear el método anterior se requiere un horizonte bien descubierto, es decir, que la vista pueda estenderse á larga distancia sin que la obstruya ó termine la elevacion de alguna montaña, bosque, ú otro cualquier accidente del terreno; pero no siendo siempre dable lograrlo, podrá operarse como sigue.

Desde el punto *a* descríbanse una ó mas circunferencias concéntricas; sean las *qr*, *qr*; despues de salir el sol márquese el punto *r* á donde llega el estremo de la sombra del piquete; márquese igualmente antes de ponerse el sol, el punto *q* cuando llega á él dicha sombra; divídanse los arcos *qr* por medio en N*n*, y tirando por ellos y el centro *a* la línea *a* N, esta será la meridiana.

Fig. 60. 120. Tambien se marca esta sobre la plancheta (144) PL, con un estilo ó gnomon vertical ST, que por un tornillo T se afirma á la tabla PL. En T hay una planchita con un agujero *t* para el paso de un rayo del sol, y con un perpendículo se proyecta *t* en *p*, desde donde se describen las circunferencias concéntricas, en que se marcan los puntos de interseccion del sol con ellas, por las sombras observadas antes y despues de medio dia, lo que da posiciones equidistantes del sol con respecto al meridiano en su movimiento aparente; luego si se dividen por mitad los arcos comprendidos entre estos puntos ó sus cuerdas, se tendrá una recta respecto de la cual la curva será simétrica, y por lo tanto su eje, que es la interseccion del plano del meridiano con la plancheta, es la verdadera NS. Si el curso de la curva se hubiese seguido con cuidado, su interseccion con esta recta seria un vértice, ó la estremidad de la sombra del estilo cuando el sol estaba en el meridiano. Si los puntos medios de los arcos ó de las cuerdas no están en línea recta con el pie del estilo será necesario repetir la operacion con mayor atencion y escrupulosidad hasta conseguirlo.

120′. El método acabado de esponer, supone que el sol en el intérvalo de las observaciones de la mañana y tarde ha descrito un círculo paralelo al ecuador, y de consiguiente sin que su inclinacion varie, lo que solo se verifica en los solsticios; pues en cualquier otro tiempo del año la declinacion del sol varia de hora en hora. De aqui resulta, que, cuando la sombra tiene por la tarde la misma longitud que por la mañana, el sol está á la misma altura sobre el horizonte, pero no á igual distancia del meridiano, estando mas apartado cuando recorre los signos ascendentes, y menos cuando pasa por los descendentes; de modo que la recta, que se tire por las mitades de las cuerdas ó que divida los ángulos en dos partes iguales, se separará mas ó menos de la meridiana. Pero aun en el caso mas desventajoso el error solo podrá ser de un corto número de segundos, con especialidad si las sombras se marcan una hora antes y despues del medio dia.

Mas si se quisiese tener una meridiana correcta, se podria hacer uso de la tabla adjunta calculada por Mr. Mollet para Leon de Francia, y que puede aplicarse á puntos cuya latitud no difiera muchos grados de la de aquella ciudad; en el supuesto de que las operaciones de la mañana y de la tarde han de hacerse con cuatro horas de intérvalo. Aunque en dicha tabla no se espresen mas que los primeros dias de cada mes, es facil obtener por un cálculo prudencial la cantidad que corresponde á cada dia del año.

LA OBSERVACION DE LA TARDE

Debe adelantarse:		*Debe retardarse:*	
En 1.° de Enero.	9″	1.° de Julio.	4″
1.° de Febrero.	29″	1.° de Agosto.	15″
1.° de Marzo.	36″	1.° de Setiembre. . .	32″
1.° de Abril.	31″	1.° de Octubre.	36″
1.° de Mayo.	19″	1.° de Noviembre. . .	30″
1.° de Junio. . , . . .	6″	1.° de Diciembre. . .	15″

Fig. 61′ Para usar esta tabla supóngase que se quiere determinar la meridiana horizontal del dia 1.° de mayo, y que se han marcado algunos puntos de sombra despues de las diez de la mañana. En dicho dia los puntos correspondientes marcados por la tarde deben tener un retraso de 19″; pero entonces la sombra no puede llegar á la circunferencia, en que debe encontrarse. Para determinar el punto á que la sombra habria llegado, si hubiese tenido la suficiente longitud, se obrará del modo siguiente: se marca el punto en que la sombra *ab* llega á la circunferencia *op*, se dejan pasar 19″, y se nota el punto *o* en que la corta y el *d* á que llega la sombra, y trasladando la cuerda *bo* que une estos dos puntos, al otro lado en *bc*, el arco *cp* es el que debe dividirse para encontrar la verdadera meridiana.

Si la observacion se adelantase, la operacion seria enteramente semejante.

Es claro que, cuando la observacion se adelanta, para hallar la verdadera meridiana hay que retrasar el camino andado de mas; y por el contrario, si se retarda la observacion, hay que adelantar dicho camino.

Fig. 61 121. Puede trazarse tambien la meridiana mas exactamente que por los medios anteriores, sirviéndose de la estrella polar N, la cual solo dista dos grados del polo. Para conocerla basta imaginar una línea por las dos estrellas *a*, *b*, del estremo del carro ú osa mayor, bien facil de distinguir en el cielo. Marcada ya dicha estrella, como esta y la *c* de la lanza del carro mas próxima á él, pasan al mismo tiempo por el meridiano, si se las observa con una plomada suspendida de un punto cualquiera, por ejemplo del marco de una ventana, cuando ambas estrellas estén en el mismo plano vertical marcado por el hilo de la plomada, entonces estarán tambien en el meridiano; y si en este momento se alinéa una segunda plomada con la primera, se tendrá en el terreno otro punto, que con el ya marcado determinarán la direccion de la meridiana.

Medida de ángulos con la brújula.

---

122. Cuando se dirije una visual al objeto A por el prisma alidada, el ángulo que la direccion de la aguja ó norte magnético, forma con la visual, es igual al que aquella direccion forma con la línea NS trazada en el fondo de la caja; y cuando la visual se dirige al punto A′ por las pínulas *p*, *p*, cuyo eje coincide con dicha línea NS, el ángulo es el formado por la aguja y la línea NS. Pero en todos los casos este ángulo está reducido al horizonte; porque es necesario que el plano de la brújula esté precisamente horizontal, para que la aguja quede espedita y fije su direccion. *Fig.* 56

123. Para obtener los ángulos pueden hacerse dos suposiciones: la una que la brújula gire al rededor del punto de estacion, y la otra al rededor de su centro; teniendo en ámbas la alidada ó anteojo colocado en el lado paralelo á la línea NS.

En la figura 56′, y en la primera suposicion, p es el punto de estacion; pA, pB las visuales; c el centro de la brújula; cm la direccion de la aguja para la visual pA; y c', $c'm'$ para la pB. *Fig.* 56′

En la figura 56″ correspondiente á la segunda suposicion, c es el centro de la brújula; p el punto de estacion; pA una visual; p'B y el punto p' indican la visual al otro objeto, y la nueva posicion de p para poder dirigir esta última visual; en fin, cm espresa la direccion de la aguja. *Fig* 56″

Es facil conocer que el valor del ángulo observado depende de los ángulos, que la aguja forma con la línea NS de la caja; línea que en cada una de las posiciones de la brújula es paralela á la visual correspondiente. En estos dos ejemplos se ve, que tirando primero la visual OA figura 56′ al objeto de la derecha, y haciendo girar despues la brújula para dirigir al objeto de la izquierda la visual oB, se habrá formado el triángulo abo, en que se tendrá el ángulo esterno AoB observado, y por consiguiente será *Fig.* 56′

$$\text{A}o\text{B}=a+b;$$

$$\text{pero } a=r,\quad b=\text{A}sm=u:$$

luego. . . AoB$=r+u$; ó, lo que es lo mismo, cuando la aguja cae en el espacio del ángulo observado, este es igual á la suma de los ángulos formados en ambas posiciones por la aguja y la línea norte de la caja.

Si el ángulo o observado es interno, en el triángulo $o'b'a'$, se tendrá. . . . . $o'=a'b'\text{A}-a'$;

pero . . . . $\left\{\begin{array}{l} a'b'\text{A}=s \\ a'=r=u; \end{array}\right.$

luego. . . . . $o'=s-u$; esto es, cuando la aguja cae fuera del espacio del ángulo observado, este es igual á la diferencia entre los ángulos formados en ambas posiciones por la aguja y la línea norte de la caja.

124. La direccion de la aguja puede ser paralela á una de las dos visuales, lo que se conoce por la coincidencia de aquella con la línea norte en una de las posiciones de la brújula; y en este caso dos lados de los triángulos se convierten en paralelas, de que es secante una de las visuales, demostrándose asi, que el ángulo observado es igual, al que forma la aguja con la visual á que no es paralela.

125. Cuando la brújula tiene pínulas en la direccion NS, como en la figura 56, las reglas para hallar el ángulo son las mismas en iguales casos, y se le halla inmediatamente en cada uno de ellos, porque todos los ángulos tienen un centro comun, que es el del instrumento.

125'. Para emplear la brújula de Kater en la medida de los ángulos, ó determinar la posicion de cualquier objeto respecto al meridiano magnético, no hay mas que mover el tornillo escéntrico para que la roseta quede en libertad; mantener horizontal el instrumento (para lo cual se puede colocar encima, si se creyese necesario, un nivelito de aire); aplicar el ojo al prisma menisco de modo que se vea la coincidencia del hilo de la pínula con el objeto que se quiere enfilar; y leer al mismo tiempo la graduacion.

Se consigue esto facilmente, porque la pupila ó niña de nuestro ojo tiene una abertura suficiente para abrazar dos objetos distintos, el uno visto directamente, y el otro por reflexion; como sucede en otros varios instrumentos de óptica vg. *en la cámara lúcida.*

La lectura de los grados y medios grados se hace con facilidad y exactitud; porque la cara convexa del prisma menisco aumenta la estension de las divisiones, y porque ademas, como se presentan delante del hilo de la pínula, puede observarse al mismo tiempo su coincidencia con el objeto que se enfila.

Asi es que, con una de estas brújulas que solo tenga tres pulgadas de diámetro, se pueden apreciar los ángulos hasta cuartos de grado ó 15′ con facilidad y exactitud.

Si dicha brújula se usa para tomar un azimut del sol (136), entonces se ponen delante del prisma menisco los vidrios de color; se inclina el espejo negro de la pínula, hasta que el sol aparezca en el horizonte en el medio del espejo y su centro sobre el hilo de la pínula: de este modo se tendrá el azimut del sol respecto al meridiano magnético.

Si el objeto, á que se quiere dirijir una visual, está muy elevado ó muy profundo, en ambos casos el mismo espejo oscuro de la pínula sirve para conseguirlo. En el primero, es claro que se hará lo mismo que lo que se acaba de decir respecto al sol, separando ahora los vidrios oscuros que solo se ponen para mitigar la intensidad de la luz.

En el segundo caso se sacará el espejo, que por esto está metido á corredera, y se le volverá á meter invertido ó boca abajo, por decirlo asi, hecho lo cual se concluirá la observacion del mismo modo que la anterior.

Del Teodolito.

---

126. Se compone de dos planchas de metal *a*, *b*, de cinco pulgadas de diámetro la superior, y de algo mas la inferior; correspondiendo esta al limbo horizontal, y aquella, que gira libremente sobre la inferior en cuyo canto están las divisiones del limbo, á la base del anteojo ó alidada en que va el nonio: ambas tienen un movimiento horizontal por medio de un eje vertical *c*, que consta de dos partes, interna y esterna, unida la primera á la plancha del nonio, y la segunda á la del limbo. Las dos planchas, cuya forma es ligeramente cónica, estan exactamente encajadas y ajustadas entre sí, pero de modo que tienen un movimiento facil é inva- *Fig.* 62

riable de rotacion deslizandose una sobre otra. La parte esterna del eje *c* encaja tambien en un tambor *d*, al que queda unido por una rosca en la parte inferior del eje interno.

En el borde de la plancha inferior hay embutida una faja ó corona de plata ó platina, en la que están trazadas las divisiones del limbo, escojiendose este último metal por su mayor dureza, y porque proporciona mayor finura en la division, que por lo general es de medios grados. En la superior y en los estremos de los diámetros, que se cortan perpendicularmente, se vacian pequeños espacios en que se embuten tambien planchitas de plata ó platina *a'*, que, con la parte del borde de la inferior, forman un solo plano inclinado; y en ellas se marca el nonio que subdivide el limbo en minutos, pudiendose con el microscopio *e* estimar facilmente los medios minutos, ó cuartos de estos.

Otras dos planchas *f*, *g*, se unen por el tambor ó tallo, y se mantienen constantemente en su posicion por cuatro tornillos, de los cuales solo se ven en la figura los tres *b'*, *b'*, *b'*, que jiran en tuercas fijas en la plancha inferior *g*: empujando con sus cabezas por debajo de la superior *f* se consigue, dando al mismo tiempo un movimiento encontrado á cada dos tornillos opuestos, nivelar el instrumento observando los nivelitos *dd* colocados verticalmente en la plancha del nonio. Debajo de la plancha *g* hay un tornillo, que une la rodilla descrita para los pies (82).

127. Aflojado el tornillo *h* se deja en libertad el limbo inferior; se le da con la mano un movimiento veloz, que se suspende apretando el mismo tornillo *h*, lo cual obliga al collar *c'* á que sugete el eje *c*; y con el tornillo *i* se da al plano del limbo el movimiento lento.

El limbo superior se mueve tambien veloz y lentamente, y se fija al inferior por tornillos semejantes, que no se ven en la figura. En dicha plancha hay tambien una brújula *j*.

Las piernas K, K sostienen los estremos ó apoyos del eje, sobre que jira el arco ó semicírculo graduado vertical, en cuyo diámetro está el anteojo A. Del estremo del eje cuelga un microscopio *n* para leer las fracciones, que señala el nonio en el limbo de dicho arco *t*, de los ángulos de depresion ó elevacion. El otro estremo de dicho eje se afirma con el tornillo *o*, que lleva un brazo, y en este el tornillo *p* para el movimiento lento del semicírculo y por consiguiente del anteojo. Asi este movimiento, como el correspondiente del limbo horizontal, se efectuan por medio de piñones movidos por tornillos sin fin, que engranan en dientes al rededor de las respectivas circunferencias; pero es mas suave é insensible el movimiento producido por un tornillo tangente, que oprima dicha circunferencia, y que por esta circunstancia podrá llamarse tornillo de *coincidencia*.

En una de las caras del semicírculo vertical hay embutida una faja de plata ó platina para la division del limbo *g*: en él se leen los minutos con el lente. En la otra cara están anotadas las diferencias entre las hipotenusas y bases de los triángulos rectángulos; ó lo que debe rebajarse de cada distancia medida en un plano inclinado para deducir la horizontal correspondiente.

Debajo del anteojo y paralelamente á él hay otro nivel *s*, que por medio del tornillo f' puede levantarse ó bajarse, para que quede exactamente paralelo al eje del anteojo ó línea de colimacion. El tornillo opuesto g' ajusta lateralmente el nivel á este paralelismo. El telescopio entra en los dos collares l', l', que se cierran con las abrazaderas t',t', y las clavijas *r*, *r*.

En el foco del ocular se coloca el *retículo* ó marco cilíndrico, que lleva tres hilos de araña; uno horizontal, y los otros dos cruzándose, de modo, que formen un ángulo muy pequeño, para interceptar asi mejor los objetos, que con un solo hilo vertical. En *m* se ven los cuatro tornillos opuestos diametralmente, que sirven para ajustar en el foco los hilos cruzados, aflojando uno de aquellos y apretando el opuesto. El cristal objetivo se saca mas ó menos por medio del tornillo *g*, para hacer mas visible el objeto.

128. Ademas de los dos cristales citados, se tienen aparte otros, que se colocan en el anteojo para las observaciones astronómicas. Tambien suelen tener los teodolitos debajo del limbo horizontal, y con movimiento lento y veloz en este plano y en el vertical, otro telescopio llamado de *prueba*; porque su objeto es indicar si el instrumento en el curso de las operaciones ha variado de la línea en que se dirigió, por efecto de la torsion ú oscilacion, y en

tal caso determinar el error y enmendar la direccion. Para ello, despues de nivelado el instrumento, se dirige dicho telescopio á cualquier objeto muy distante haciendo la correspondiente interseccion con los hilos ó cabellos; y despues se afirma. Se siguen las observaciones con el telescopio superior; y despues de algunas, ó cuando parezca conveniente, se ve si el eje del inferior sigue interceptando exactamente el objeto á que se dirigió, y de no ser asi se repone el instrumento en su debido lugar por medio del tornillo tangente ó de coincidencia.

Para situar el instrumento en el punto de estacion hay una plomada de metal, que se cuelga de un hilo en el punto medio, que abraza el arranque de los pies debajo del platillo *gg*.

Correcciones.

129. 1.ª *La de colimacion*; que consiste en que la interseccion de los hilos ó cabellos del retículo coincida con la del eje de los encajes cilíndricos que abrazan el anteojo, y en los que puede dar vueltas. Mírese por este, para cerciorarse de si la interseccion de los hilos se verifica siempre en un mismo punto de un objeto lejano, durante una revolucion entera del telescopio dentro de dichas cajas ó abrazaderas. De no ser asi, se apela á los dos tornillos *m*, apretando el uno mientras se afloja el otro, para mover el hilo la mitad de la diferencia ó desviacion que se nota, y ajustar la otra mitad levantando ó bajando el telescopio, con lo que se consigue la colimacion correcta en altura ó depresion, y del mismo modo se logra ajustar la línea vertical ó colimacion lateral.

130. En los ángulos de elevacion ó de depresion los objetos deben cortarse por el hilo horizontal ó la interseccion de los hilos; y por lo tanto, despues de dirijida la visual al objeto, puede darse al anteojo media vuelta en las abrazaderas, de modo que el nivel quede encima; tírese la misma visual, y tomando la mitad de las dos medidas halladas, se neutraliza cualquier error en la línea de colimacion.

131. 2.ª *El paralelismo del nivel con la línea rectificada de colimacion.* Para esto quitadas las clavijas *r*, *r*, y asegurado el arco

vertical se hace, por medio del tornillo tangente p, que la ampolla de aire del nivel se fije en el punto medio del largo de su tubo; se saca despues el anteojo de sus collares y se coloca en sentido opuesto al que tenia, con cuidado, para que no varie el arco vertical; y si dicha ampolla conserva la misma posicion, habrá el paralelismo; y de lo contrario se tendrá que corregir la mitad del defecto por medio del tornillo g', que levanta ó baja un estremo del nivel, y la otra mitad por el tornillo tangente p. Conseguido asi el paralelismo horizontal del nivel, hay que procurar la coincidencia lateral del mismo, esto es, que la ampolla quede en el centro del tubo dando al nivel la inclinacion conveniente en el sentido de su diámetro, para lo que sirve el tornillo f'; y si esto desarregla el nivel, es preciso repetir toda la operacion.

132. 3.ª *Que el eje azimutal, ó del limbo horizontalmente colocado, sea vertical.* Póngase el limbo todo lo horizontal que á la simple vista sea posible, afírmese con el tornillo h el limbo inferior, dejando en libertad al superior, que se hace girar hasta que el telescopio esté en direccion de dos tornillos opuestos de los cuatro b' de las planchas paralelas. Hágase despues por medio del tornillo p, que la ampolla del nivel c se fije en medio de su tubo, gírese de nuevo el limbo superior hasta que describa 180°; y si en esta posicion la ampolla ocupa el centro del tubo, el plano del limbo será horizontal en dicha direccion; sino, se corregirá la mitad del error por medio de dos tornillos opuestos b' en la direccion del telescopio, y la otra mitad, bajando ó subiendo este por medio del tornillo tangente p. Ya entonces solo falta que hacer girar 90° el limbo superior para ponerlo horizontal en la direccion de los otros dos tornillos. Nivelado el limbo por el nivel del telescopio, el mas sensible del instrumento, en los otros niveles del limbo pueden fijarse las ampollas en el medio de sus tubos, con el auxilio de los tornillos que los aseguran en sus sitios.

133. 4.ª *Coincidencia del nonio vertical*; esto es, notar si hechas las anteriores correcciones, su línea de fé señala la division 0° en el limbo vertical. Para que se verifique, basta destornillar los tornillos que unen el nonio al instrumento y volverlos á asegurar luego que se ha hecho la coincidencia, ó lo que tal vez es

preferible, llevar en cuenta el error y añadirlo ó restarlo de cada ángulo vertical que se observe.

Uso del Teodolito.

134. Hechas todas las correcciones prescritas, puesto el instrumento horizontal, y por medio de la plomada, sobre el punto de estacion, ó de donde ha de tomarse el ángulo; se afirma el limbo horizontal inferior dejando en libertad al superior, y se dirige el telescopio próximamente á uno de los objetos de que se trata: se asegura en seguida el limbo superior, y por medio del tornillo tangente ó de coincidencia se hace la exacta interseccion del hilo con el medio ó determinado punto del objeto. Se leen los grados, minutos y segundos de uno de los nonios, y solo los minutos y segundos del otro, y se toma la mitad de la suma de estas últimas cantidades; por egemplo:

Primer nonio $= 120^\circ \ldots 40' \ldots 10''$
Segundo $\ldots = \ldots\ldots\ldots 37' \ldots 0$
Medio $\ldots\ldots = 120^\circ \ldots 38' \ldots 35''$

Déjese en libertad el limbo superior, y gírese hasta que el telescopio se dirija al otro objeto, cuya distancia angular con el primero se pide; afírmese dicho limbo, y hágase como antes la exacta interseccion; léanse los dos nonios, y la diferencia entre su medio y el que resultó anteriormente, será el ángulo buscado.

135. Puede tambien medirse un ángulo con el teodolito ajus-
Fig. 63. tando la línea de fé de los nonios sobre las divisiones 0°, 360°; dirigiendo despues el instrumento hácia el objeto A, se hace la interseccion de los hilos del telescopio por el movimiento lento del limbo inferior, á que se hace acompañar el superior; se deja libre este y se lleva el anteojo al objeto B; se lee el arco descrito por el nonio, y este será el valor del ángulo entre los objetos A, B, tomando siempre el medio de la suma de los minutos y segundos de ambos nonios.

La diferencia que se nota entre ambos nonios proviene, ó del error de centricidad ó de graduacion, ó de ambos errores; por lo que el medio término de las dos anotaciones los disminuye y aun mejor se lograria esta correccion, si fuesen tres ó cuatro los nonios, como se egecuta en los instrumentos cuyo diámetro lo permite.

Teodolito repetidor.

136. En la marcha seguida con el teodolito en las anteriores operaciones se ve, que el limbo inferior no necesitaria tener movimiento alguno tratándose simplemente de medir un ángulo; pero que será importante lo tenga para poder repetir los ángulos, lo que es de una gran ventaja, como se verá al tratar del círculo repetidor. Para repetir la medida de un ángulo tomado ya con el teodolito, afirmése el limbo superior con el inferior, muévase todo el instrumento al rededor hácia el primer objeto, ó de la izquierda, dirigiéndole el telescopio; afírmese el limbo inferior, y con el tornillo tangente hágase la interseccion exacta de la visual con el objeto. Aflójese el limbo superior, y llévese el telescopio hácia el objeto de la derecha verificando la interseccion. Con esto se completa una repeticion, ó se ha tomado un ángulo doble, y siguiendo una marcha semejante se tomarán los ángulos cuádruplos &c.

137. Se ve, pues, 1.º que por medio del telescopio superior del teodolito se observan y repiten los ángulos inclinados, pero que estos se dan ó proyectan en el plano horizontal del limbo, esto es, reducidos ya al horizonte: 2.º que con el mismo telescopio se obtienen los ángulos de altura, y la distancia zenital (141) de un astro, ó de un objeto ó señal, y los de depresion; pero que no da los ángulos absolutos formados por líneas inclinadas al horizonte como se logra con el círculo repetidor, instrumento que va á describirse, y cuyo limbo se pone en el plano de los objetos.

Círculo repetidor.

138 Consiste en un círculo de laton por lo regular de un pie de diámetro, y de algun grueso, teniendo su limbo dividido en grados ó medios grados, segun el diámetro del instrumento, y generalmente hasta de 5′ en 5′. Gira sobre el limbo un anteojo AA, y por la parte inferior otro BB, ambos con movimientos, lento y veloz. El pri- *Fig.* 64

mer anteojo tiene unido á su tubo un nonio que recorre por su borde las divisiones del limbo, cuyas fracciones se leen por medio de un lente que acompaña á aquel. Suele tambien llevar dicho anteojo, nonio y lente en el otro estremo, y aun á veces hay cuatro nonios colocados en cruz, que dan los arcos con solo el error de $5''$. El círculo con sus anteojos está unido en su centro á una espiga de acero sobre la que gira, y esta atraviesa la pieza V perpendicular al plano de aquel, pasando por el eje V' al rededor del cual puede tomar el círculo un movimiento de ondulacion apoyado en los lados x, x del marco $xttx$. La espiga de acero termina y se une en el centro de un tambor t paralelo al plano del círculo, y oprime por medio del tornillo de presion P, una pieza en cuarto de círculo unida al eje V', que quita el movimiento de ondulacion al círculo, y permite que este y los anteojos giren en el plano de los objetos que se observen; llevándolo lentamente por medio de un tornillo sin fin, que engrana en los dientes del tambor, ó velozmente levantando un resorte de acero que le sujeta.

La columna S, se une al marco con dos tornillos f, f, y está atravesada en su altura por un eje de acero ligeramente cónico, y sólidamente unido al círculo graduado o: al rededor de dicho eje se hace el movimiento general de la columna, que lleva consigo el círculo y anteojos; y se detiene por el tornillo de presion h, que fija la alidada que hay en el pie, contra el limbo del círculo o, en que se puede leer el valor angular de la rotacion general.

Este disco o se coloca sobre tres brazos que llevan en sus estremos los tornillos v, v, v, para dar una inclinacion pequeña á la columna, descansando estos sobre la mesa NN sostenida por un trípode muy sólido de madera, pudiendo dicha mesa ponerse mas ó menos alta, segun convenga elevar el instrumento para las observaciones, por medio de un prisma que entra en un agujero hecho en aquella y que se sujeta con una clavija.

Uso del Círculo repetidor.

Fig. 65 139. Establecido el instrumento sobre su pie en un punto C donde hay que operar, se pone el plano del círculo en el de los dos objetos distantes, tales como K, L, cuyo ángulo KCL formado por las visuales CK, CL, dirigidas á aquellos desde el punto C, se trata de medir. Segun la descripcion hecha, el limbo del círculo puede girar de modo que sin salir los objetos K, L del plano del limbo pueda dirigirse un radio CA, por ejemplo, á todos los puntos del espacio que estan en dicho plano; asi como los dos anteojos por su sola rotacion hácia cualquiera de los objetos, sin mover el limbo, ó un solo anteojo sin mover el otro ni el limbo.

Fíjese, pues, el anteojo superior AA en o° de la graduacion, en A; se gira el limbo del instrumento sobre el eje C, que le es perpendicular, hasta que el objeto L se halle en la direccion del punto en que se cruzan los hilos del anteojo. Dejando asi el limbo, se dirige al anteojo inferior BB al objeto K de la izquierda, y el ángulo ACB formado por los dos ejes ópticos es el que se busca, y tiene por medida el arco AB interceptado por dichos ejes ó radios; pero cuyo valor no puede leerse en el limbo superior á causa de caer debajo de este el anteojo inferior. Vuelto á girar el círculo sobre su eje, llevará consigo en su rotacion los dos anteojos y se podrá dirigir el inferior CB al objeto L; entonces el superior se habrá transportado á la posicion CD quedando en D el o° de la graduacion que antes estaba en A, y el arco AD=AB será el pedido. Ya en esta disposicion, quedando fijo el círculo, se deja libre el anteojo superior, que como se ha dicho está en CD; se lleva á CB en direccion del objeto K de la izquierda, y el ángulo BCA=ACD es el buscado; pero como el arco DAB, que es el que puede leerse en el limbo, es doble de aquel, hay que tomar su mitad para tener el verdadero valor de AB, si bien despues de haberlo observado dos veces.

Repítase toda la anterior operacion, suponiendo la salida desde el punto B; esto es, hágase girar el círculo con los dos anteojos hasta que el superior se traslade de BB á AA en la direccion del objeto L de la derecha. La divsion o° que estaba á la derecha se trasladará á E, y el anteojo inferior pasará de CA á CD; déjese libre este y diríjase al objeto de la izquierda, con lo que el arco BE es triple de AB. Repítase la misma operacion haciendo girar el círculo en totalidad para dirigir el anteojo inferior al objeto L; el 0° de la graduacion pasará á F; y llevando el superior que llegó á CD, al objeto K de la izquierda, el arco FB, que podrá leerse en el limbo, es cuádruplo del pedido; por lo que habrá que dividirlo por cuatro despues de cuatro observaciones, y asi sucesivamente. Si la observacion se repite diez veces, el ángulo es décuplo, pero no hay necesidad en este caso ni en los anteriores, de leer la graduacion ó valor del ángulo á cada movimiento, sino el del arco obtenido despues de todas las observaciones.

140. Como en los diferentes movimientos de los anteojos puede haber equivocacion, conviene tener presentes las siguientes reglas, deducidas de la marcha llevada en las anteriores operaciones.

1.ª El movimiento del círculo y el de un anteojo han de ser alternativos.

2.ª Cuando uno de los anteojos se halle fuera del ángulo buscado, se debe mover aquel, para dirigirlo al objeto mas apartado.

3.ª Si los dos anteojos se encuentran dirigidos á los dos objetos, corresponde al círculo el moverse.

4.ª El ángulo que se busca no está aun formado cuando el anteojo superior no se halla dirigido al objeto de la izquierda.

Fig. 66. 141. Con el círculo repetidor se toman tambien los ángulos de altura ó formados por una visual horizontal CB y otra *ch* dirigida al vértice, cúspide, ó cima de cualquier objeto. Dicho ángulo es el complemento del formado por esta última visual, y la vertical ó línea dirigida al zenit D; ó lo que es igual, es *el complemento de la distancia al zenit.*

Para medir esta distancia zenital se da al limbo del círculo repetidor la posicion vertical, lastrando ó poniendo en el tambor alguna masa de igual peso al del limbo y anteojos, afin de que el centro de gravedad permanezca en la columna, que entonces debe quedar vertical, lo que se conoce por el nivel de aire.

El anteojo superior se dirige á la señal *h*, cuya distancia zenital se pide, despues de colocado en el 0° de la division, y llevado con el movimiento del tambor y círculo en su plano vertical en la direccion de dicho objeto ó señal, permaneciendo fija la columna sobre el disco inferior por el tornillo de presion: el anteojo inferior se pone en la direccion horizontal BB, colocando para cerciorarse el nivel encima de él.

Si se afloja dicho tornillo y se hace girar el limbo 180° al rededor de la columna, el anteojo AA tomará la posicion EE′ trasladándose la division 0° á E; la línea DD siempre será vertical, y el ángulo ECD será el buscado.

Se observará el nivel para corregir la variacion que haya podido tener la horizontalidad del anteojo BB. Déjese en libertad el anteojo EE′ y llévese exactamente sobre la señal *h* sin mover el limbo: el arco AD es aun visiblemente el que quiere medirse, y por consiguiente el arco EA descrito por el anteojo, es doble de la distancia zenital pedida. Vuelto á girar el círculo al rededor hasta el lado opuesto, el anteojo superior caerá otra vez en EE′: déjese libre el limbo sin tocar al anteojo, y hágasele girar en su plano hasta que el superior se dirija á *h*, gírese el instrumento del lado opuesto y háganse las demas operaciones, y se tendrá el ángulo cuádruplo, y asi sucesivamente.

Exactitud de las medidas tomadas del modo esplicado.

---

142. Es patente, que si hechas diez observaciones saliendo desde 0°, se volviese á esta misma division el anteojo superior, la suma de dichos diez arcos seria de 360°, cada uno de ellos valdria 36°, y el instrumento estaria exento del error de la division del limbo, y del de la centracion de los anteojos; pero no es posible se verifique aquella coincidencia. Mas si se sabe que el instrumento da un error de 5′, es claro que despues de diez observaciones solo será este de $\frac{5'}{10}$, esto es, de 30″ en vez de 5′, por que este error es igual, sea el arco de 10, 20, ó 30° &c.

Supóngase que A sea el cero de la graduacion del limbo; AB, el arco obtenido en la primera observacion del ángulo, y *e* el error correspondiente. Si á su vez se supone B como un nuevo origen de arcos y que se haga una segunda observacion, se tendrá otro *Fig.* 67.

arco BB$'$, con su error e' y continuando bajo la misma suposicion resultarán otros arcos B$'$B$''$, B$''$B$'''$ y otros errores e', e'', e'''. La esperiencia demuestra que todos estos errores asi positivos como negativos, se compensan de tal modo, que su suma algebráica no difiere sensiblemente de uno de ellos, e, vg.; por lo que si P, representa el verdadero arco buscado, se tendrá sumando todos los arcos AB, BB$'$ ..

$$P+e+P+e'+P+e''+P+e'''=4P+e+e'+e''+e'''=4P+\acute{e},$$

y si se toma la cuarta parte resultará. . . . . $=P+\frac{e}{4}$

por el valor definitivo del ángulo; lo que demuestra que el error obtenido por una sola observacion quedaria asi reducido á su cuarta parte.

143. Reune pues, el círculo repetidor dos grandes ventajas; tales son, disminuir considerablemente, usado con cuidado y habilidad, los errores de construccion, y atenuar hasta donde se quiera, repitiendo las observaciones, los que dimanan de la direccion de las visuales, ó medicion de los ángulos.

Para lo primero, se leen los nonios opuestos antes de empezar, y despues de concluidas las indicaciones correspondientes, para tener el arco descrito por el anteojo; y aunque no resulten estos arcos exactamente iguales, diferirán muy poco tomando el término medio de su suma.

Plancheta.

144. Este instrumento, comunmente empleado para el levantamiento de los planos con sus detalles, es de muy facil manejo.

Fig. 41 *y* 68. Se compone principalmente de un tablero cuadrangular PP de dos á tres pies de lado y una y media á dos pulgadas de grueso, sobre el que se pega ó coloca el papel en que se ha de dibujar el plano que se *levanta*, ó traslada del terreno. Como segun dichas dimensiones no podria por lo general contener el citado papel la representacion del espacio cuyo plano se desea, y por evitar el tener que añadir otro, se coloca en algunas planchetas en dos lados opuestos del tablero, un cilindro de igual largo que ellos y de poco espesor, que gira sobre su eje, con las correspondientes retenidas y ruedas dentadas, para que su revolucion sea en un solo sentido, y que se mantenga en la posicion en que se deje. En dichos dos cilindros se arrolla el número de pliegos pegados por sus cantos, que se creen convenientes, ó bien pueden irse añadiendo. Por este medio conforme se va llenando el papel que ocupa todo el tablero, se arrolla en uno de los cilindros, mientras que se desarrolla del otro igual cantidad, aun en blanco. Resulta tambien la ventaja de no tener que pegar el papel á la tabla, y sí, para que tenga mas resistencia, á un lienzo delgado.

Sin embargo de todas estas razones, como el papel por este método no sienta bien sobre el tablero y es susceptible de variaciones que conducen á error, se ha adoptado embutir en el borde de los cuatro lados del tablero una plancha de laton, que se levanta por medio de unos tornillos para colocar debajo los cantos del papel, y apretando aquellos sujetar este bien estirado, pero cuidando de que los bordes de la plancha estén redondeados y construidos de modo que no corten el papel.

Con este arbitrio la contraccion del papel es invariable, tanto mas, cuanto mas trabajado esté por el uso de una pesada alidada de metal; y la dilatacion que resulte de la humedad y que haga se ahueque algun tanto la superficie del papel, no será de consecuencia si se toman las medidas con la alidada aplicada sobre las líneas correspondientes, en todas direcciones, lo que hará se contraiga el papel en la estension de la tabla.

Es muy conveniente humedecer muy por igual el papel antes de sujetarlo; y si el agua tiene en disolucion un astringente, como el alumbre, cuya fuerza se gradua al paladar para que no sea escesiva, sus poros se cierran, y el papel queda mejor preparado para el trabajo.

En la plancha están marcados los grados de la circunferencia en que puede considerarse inscrito el rectángulo que forma el tablero de la plancheta, y ademas la escala de pies y pulgadas; *Fig.* 68.
todo conforme manifiesta la figura del márgen que representa la plancheta inglesa de Troughton.

145. La tabla PP se fija por cuatro tornillos *vv* á otra mas chica *pp* que se une á la rodilla N, y puede girar sobre un disco *Fig.* 41.
cc, por medio de un eje céntrico E, cuyo estremo inferior V se ter-

mina en una rosca, despues de atravesado el disco, la cual apretada quita el movimiento giratorio del tablero. En fin, este con la rodilla se une á los pies y se tiene la plancheta dispuesta para las operaciones, en las que si ha de ponerse el tablero horizontal, se emplea un nivel chico de aire ó escuadra de albañil (532). Tambien usan algunos de una bola de mármol ó marfil, que puesta sobre el tablero se mantendrá quieta en el caso de la horizontalidad, ó en el contrario, marcará por la direccion de su movimiento, la correccion que deba hacerse, y que podrá conseguirse en un sentido por el tornillo E′. Pero para estar seguro de esta indicacion sería preciso que la bola fuese una esfera perfecta, cosa bien dificil, y todavia mas el que su centro de gravedad coincida con el de la figura, sin cuya circunstancia, y será lo mas comun, la esfera podria moverse en un plano horizontal, y en ciertas posiciones estar en equilibrio sobre planos inclinados. Asi pues debe preferirse la escuadra ó nivel mencionados, colocándolos sobre el tablero en dos posiciones sucesivas que se corten en ángulo recto; pues siendo el tablero un plano, su superficie es dada por la posicion de dos rectas, y esta queda mejor nivelada cuando las rectas se cortan perpendicularmente.

La mejor posicion que para el efecto puede darse al nivel ó á la escuadra, es en una direccion paralela á la de los ejes de los cilindros BB, B′B′ que se cortan en ángulo recto, asi como los niveles del teodolito ocupan la misma posicion respecto á las líneas que unen cada dos tornillos opuestos de la platina. (126).

146. Para que un punto de la plancheta corresponda exactamente al del terreno en que está situada, se hace uso del compás *g* llamado de *espesor* y de la plomada *a*A, ó bien en lugar del
Fig. 68′ primero, de un corchete de laton A′ con un agujerito *b*: aquel abraza la plancheta *p*, hasta que el agujero concurre en el tablero con el punto que se quiere, y que corresponde al *e* por debajo, desde el que se cuelga la plomada que marca en el terreno el *b*′.

Pero cuando está ya en este marcado el punto, y se quiere que coincida, ó esté en una misma perpendicular con su correspondiente en la plancheta; bien se ve habrá que tantear bastante para lograrlo, y que será muy raro se consiga exactamente, teniendo que rectificarse en cada movimiento, si pierde la horizontalidad, y la direccion que tenia; circunstancias precisas para operar. Todo esto se hace mas perceptible, si se reflexiona sobre las desigualdades del terreno que obliga en cualquier variacion de la plancheta á abrir mas ó menos sus pies.

Para evitar este inconveniente se ha dado al tablero un pequeño movimiento de traslacion, por medio del tornillo de coincidencia RR, que se une á la tabla inferior *cc*, hasta que la plomada marca que el punto superior de la plancheta coincide con el inferior del terreno. *Fig.* 41.

147. Seria conveniente por las mismas razones, que el tablero tuviese igual movimiento en la otra direccion perpendicular á la primera, como es facil de concebir; y en fin parece que ahorraria tambien mucho en algunas ocasiones, el que para poner el tablero mas ó menos alto, no fuera preciso acercar ó desviar los pies del trípode, sino que las planchetas estuvieran construidas de modo que los tableros pudiesen aisladamente levantarse ó bajarse, ó bien los pies alargarse ó acortarse.

148. Hay tambien otra gran plancheta de Troughton, cuyo tablero rectangular es de 30 á 36 pulgadas de longitud y de 24 á 30 de ancho, montado en el trípode sobre una platina tan perfecta como la del teodolito, que sirve para ponerla horizontalmente con la mayor exactitud conocida, por medio de niveles de aire que hay en los cantos del tablero, y ademas una buena declinatoria. El tablero está formado de dos piezas rectángulares, encastradas en otra que se une á la platina, y tambien reunidas por seis esteriores, y el todo sugeto por un gran marco de metal, que sirve igualmente para sujetar el papel. La alidada es de anteojo colocado sobre una gran plancha de metal bastante ancha hácia el centro.

149. Como esta plancheta tiene mucho peso, y sus pies son cortos y gruesos, no se desarregla con los vientos mas fuertes; se puede trabajar con una exactitud increible, haciendo la triangulacion en el acto mismo de las observaciones sin que difiera de la hecha con el teodolito por los transportadores, y en muchos casos ni aun de la calculada. Asi pues, con las perfecciones indicadas, la plancheta es uno de los instrumentos mas útiles para la topografía; por

que siempre se tiene delante la respectiva posicion de los objetos: los pormenores que llenan sus intermedios se hacen con mas perfeccion y prontitud, que con ninguno de los instrumentos conocidos, que obligan á formar ángulos, transportarlos, y despues trazar los detalles, que á veces hay que trasladar en seguida del reconocimiento del terreno.

Uso de la Plancheta.

150. Para operar con este instrumento debe ponerse su tablero horizontal, hacer coincidir el punto del terreno en que se halla situada la plancheta con el correspondiente en el plano del tablero, ó señalar aquel en este, valiendose de la plomada y del compás de espesor.

Se hace girar el borde de la regla de la alidada al rededor de dicho punto, para lo que se clava en él, bien perpendicularmente, una aguja que sirva á aquella de apoyo; se dirijen las pínulas á los objetos que se quieren marcar en el plano, se hacen coincidir las aberturas y cabellos de aquellas con la parte elejida en los objetos; y logrado, se trazan con el lapiz por el borde de la regla, las líneas que representarán las proyecciones de las visuales dirijidas.

151. Resta unicamente dar una idea de los métodos que pueden emplearse para usar la plancheta, los cuales se combinan entre sí segun las circunstancias. Consisten estos en hacer con ella una, dos ó mas estaciones: lo primero se ejecuta midiendo todas las
Fig. 69 visuales, por lo que se llama de *medicion*, y se reduce á situar la plancheta en un punto A, por egemplo, del terreno, y desde el correspondiente *a* de la plancheta tirar á los B, D, C, A′, A″ las visuales AB, AC, AD, y midiendo sus estensiones respectivas, trasladar sus correspondientes de la escala sobre las homólogas en la plancheta, con lo que se tendrán los puntos *b*, *c*, *d*, correspondientes á los B, C, D. Lo mismo puede ejecutarse desde los puntos
Fig. 70 A′, A″. El segundo método, con el que se mide la distancia entre las dos estaciones, determinándose despues los otros puntos por *intersecciones*, y que por lo tanto se distingue con este nombre, se prac-

tica colocando la plancheta en A; se dirige una visual al otro punto B de estacion ó estremo de la base AB, y las AD, AC... Se traslada la plancheta al punto B, ajustándola sobre el *b* de aquella, se alinéa la *ba* con la BA, se dirijen visuales á los mismos puntos anteriores, y la interseccion con las primeras determinará en la plancheta los *c*, *d*, correspondientes á los C, D, del terreno. Del mismo modo podrian haberse hecho las intersecciones desde otra base A′ B′, El tercer método consiste en ir midiendo el perímetro y proyectando sus ángulos. Para esto, colocada la plancheta en A, y *Fig.* 71
dirijida la visual *ba*, se mide AB, y se traza su correspondiente *ab*, se pasa al punto B, se alinéa con A, se dirige la BC que se mide, y se marca *c*; se coloca la plancheta en C, y alineada con B, se tira la visual *c*D, y sigue ejecutándose lo mismo, con lo que se tiene la fig. ABCD del terreno, trasladada á la *abcd* en la plancheta.

Usando de la brújula, llamada declinatoria, se abrevia mucho en los dos primeros métodos de operar; pues que una vez marcada en el plano la meridiana, basta en cada nueva posicion de la plancheta hacer coincidir el lado de la caja de la brújula con aquella línea, y girar la plancheta hasta que la aguja imanada caiga sobre el diámetro NS del fondo de la caja; lo que se llama orientar la plancheta. De este modo se ahorra tener que dirjiir desde cada punto que de nuevo se ocupa en el terreno, una visual al que se deja, como se ha hecho en aquellos dos métodos para alinear la plancheta.

Del Telescopio Micrómetro.

152. Este instrumento reune las cualidades de un telescopio porque puede variar su fuerza para agrandar los objetos, las de un miscroscopio por la mayor distincion ó claridad de los mismos, y en fin las de un instrumento geométrico, por su aplicacion á la medida de distancias y alturas, en circunstancias en que no pueden usarse convenientemente otros instrumentos. Verdad es, que no es de recomendarse su uso cuando se requiere grande exactitud, pero esta no es muy necesaria en algunos de los casos en

que se trata de averiguar la distancia á los objetos; pudiendo por consiguiente ser utilísimo el telescopio á los viageros, y á los ingenieros militares en muchas ocasiones, ya por ser portátil y poco espuesto á accidentes, ya por no necesitar de cálculos para la averiguacion de la distancia propuesta.

153. AE representa el telescopio compuesto de los tubos AB, *Fig.* 72 BC, CD, DE. El cristal ocular está en B, el principal objetivo en A, y el segundo, ó móvil, á poca distancia á la izquierda de la parte *c* en el estremo del tubo CD. El movimiento de este cristal y la coincidencia del tubo ocular, se verifican con solo tirar ó empujar los tubos; pero seria mejor para el observador, que entre A y D solo hubiese dos tubos, y que el movimiento del que lleva el objetivo movible y el del ocular, se hiciese por medio de una rueda dentada con su correspondiente piñon, con lo que se lograría la coincidencia con mayor seguridad y facilidad, haciendose las observaciones en mucho menos tiempo.

Fig. 73. 154. *amnb*, es un diafragma ó límite del campo del telescopio, que se coloca en el foco del primer cristal objetivo; *a*, *b*, son dos puntas muy finas de acero proyectadas en el campo de vista, y *mn*, *op*, dos hilos paralelos, todo bien asegurado en sus respectivas posiciones.

Para medir las distancias solo son necesarias las puntas, y aunque los hilos pueden servir para lo mismo, su principal uso es para medir el ángulo formado por un cuerpo en movimiento. Otra tercera punta en *c*, sirve para poder medir una gran variedad de ángulos, esto es, que si con las dos primeras puntas se medían solo los ángulos entre 180′ y 60′, pueden con la tercera tomarse los que hay entre 60′ y 20′.

Fig. 72 155. En los dos tubos movibles BC, CD, está grabada una escala, cuya longitud es igual á la distancia focal del objetivo principal, ó generalmente al espacio que puede recorrer el segundo objetivo á lo largo del eje del tubo. La escala está dividida en cierto número de partes iguales, correspondiendo $\frac{1}{2}$ pulgada de ella á 1′, ó $\frac{1}{10}$ de pulgada á 12″ de los ángulos que se miden por los hilos del diafragma. Asi pues, la escala puede dividirse en 60 partes iguales, de manera que $\frac{1}{2}$ de pulgada de ella, corresponda á 1′;

en 300 partes iguales de á $\frac{1}{10}$ de pulgada, representando cada una 12″: ó en fin en 1200 de $\frac{1}{40}$ de pulgada, equivalentes cada una á 3″. Cuando la escala está marcada en uno y otro tubo, la estremidad *c* del tubo BC sirve de índice ó línea de fé para las divisiones del tubo CD, siempre que CB esté enteramente dentro de AB; y la estremidad B del tubo AB, lo es de la division BC cuando CD está enteramente fuera. Si en las estremidades B, C, de los tubos AB, BC hubiere un nonio, el valor de los ángulos podrá tenerse con mayor exactitud. (*)

Uso del Telescopio micrómetro.

156. Se empléa este instrumento en la medicion de distancias horizontales, inclinadas, y verticales; su manejo ó uso está reducido al de cualquier otro anteojo, y consiste en sacar mas ó menos los tubos graduados, como se verá cuando se trate de las operaciones topográficas, y en hacer coincidir las puntas de acero con la distancia entre los objetos.

De la Estadia.

156.′ En el telescopio micrómetro, el diafragma está situado en un tubo movible del anteojo; pero si se supone que el foco esté fijo, el retículo lo estará tambien; y si ademas se considera en él un hilo vertical *tu*, este cortará á los horizontales *mn*, *op*, equidistantes del foco F en *t* y *u*, y el ángulo formado en el punto *o* del objetivo del micrómetro, tendrá por base la *tu*, y por la construccion del anteojo serán conocidas las *o*F, F*u*. Esto supuesto, si sobre el terreno se mide una distancia horizontal *oq*, colocando en uno de los estremos el objetivo *o* del anteojo, y en el otro una percha ó estadal vertical *rs*, resultan los triángulos semejantes *tuo*, *ors*, en los que $\frac{tu}{fo} = \frac{rs}{oq}$; luego si la longitud *rs* com- *Fig.* 73 *y* 73′.

(*) Para enterarse de los principios en que se funda la construccion de este instrumento, y tener todos los detalles convenientes, véase la obra ya citada *Nevv filosophical instruments*, por Breuster.

prendida entre los rayos *or*, *os*, se divide en el número de partes que representan las unidades de medida halladas para *oq*, se tendrá en la percha una escala de distancias, que se encontrarán inmediatamente con leerlas por medio del anteojo (si en la percha están marcadas las divisiones del modo conveniente, de negro sobre blanco); pues es claro que en otra posicion *mn* de la percha, la distancia *op* estará representada por las divisiones comprendidas entre los puntos *m*, *n*.

Dióle el nombre de Estadia el ingeniero italiano que hizo esta aplicacion de los micrómetros. La circunstancia de ser constante el ángulo *tou*, limita el uso de este instrumento á distancias que no escedan de 500 varas: su verificacion consiste en averiguar si son iguales las distancias F*t*, F*u*; lo que se conocerá fácilmente, si colocada una percha en la disposicion *mn*, se interceptan en ella entre la prolongacion del eje óptico F*o*, las porciones *pm*, *pn* iguales.

Del Barómetro y Termómetro.

157. El fundamento de la construccion del barómetro y termómetro corresponde á la física.

Fig. 74 La figura representa el barómetro portátil construido por Troughton. En la caja de metal A, que cubre la cubeta de mercurio al estremo del tubo, hay dos hendiduras horizontales, semejantes y opuestas. Su plano ó corte superior, corresponde al principio de la escala de pulgadas ó cero del barómetro. El tornillo B sirve para hacer coincidir la superficie del mercurio en la cubeta con el cero de la graduacion, y para que apretándolo suba el mercurio y llenándo todo el tubo sea transportable el barómetro sin mucho inconveniente. La escala en la parte superior, está subdividida por medio de un nonio, en dos milésimas de pulgada. El tornillo *c* mueve la pieza en que está el nonio, llevándola primero con la mano hasta la proximidad de la parte superior del mercurio, y verificando despues, por medio de un tornillo, la perfecta coincidencia.

El barómetro está unido á un trípode por un anillo, en el que gira suavemente con objeto de proporcionar la mejor situacion para leer las divisiones de la escala. Cerrado el trípode, forma una caja á propósito para transportar el barómetro.

158. Unido á la parte inferior de éste, hay generalmente un termómetro que sirve para indicar su temperatura, y se llama *termómetro unido*, para distinguirlo de otro con el nombre de *libre*, que está separado y manifiesta la temperatura del aire que circunda el parage donde se hace la observacion.

Uso del Barómetro.

159. Se empléa el barómetro solo ó acompañado del termómetro, para hallar las alturas y las distancias horizontales. El método empleado para ello, se funda en que las capas de aire disminuyen de densidad segun los términos de una progresion por cocientes, mientras que las elevaciones sobre la superficie de la tierra se representan por los de la progresion por equidiferencias.

De este modo, conocida la relacion entre las densidades y las elevaciones, pueden estas averiguarse, observando las densidades que indica el barómetro.

160. Para formar una idea exacta de las diversas aplicaciones del barómetro en la medicion de alturas, es preciso considerar las principales circunstancias que pueden ofrecerse en la práctica de las observaciones, y clasificarlas. Estas circunstancias pueden reducirse á cuatro:

1.ª *Observaciones simultáneas próximas.* Esto es, cuando se opera al mismo tiempo con dos barómetros, poco distantes entre sí en el sentido horizontal. En tal caso es cuando únicamente se obtienen resultados exáctos, y cuando la fórmula, de que se hablará despues, se aplica directamente. Asi es, que halladas por medio del barómetro varias alturas, y al mismo tiempo por el de la nivelacion, sin conocimiento los que observaban aquellas de los que practicaban esta; la coincidencia de los resultados, produjo solo en elevaciones desde 100 hasta 1200 varas, la diferencia de 0, 09 de vara.

2.ª *Observaciones simultáneas distantes.* Quiere decir, que se hacen al mismo tiempo como en el primer caso; pero que la distancia horizontal entre las dos estaciones es mas ó menos grande. En este caso se supone que las variaciones atmosféricas son instantáneas en los puntos de estacion, lo que es falso y solo admisible en distancias cortas. Hechas muchas observaciones en puntos á seis leguas unos de otros, la altura media hallada entre todas ellas, únicamente difirió de la obtenida por una sola observacion 0,4 de línea.

Pero si la distancia entre los puntos fuese mayor, seria preciso tener observaciones barométricas y termométricas, al menos de todo un año, para que en el resultado final se destruyesen todas las causas accidentales de las variaciones barométricas. Sin embargo, como tratándose de determinar la altura de un pueblo ó punto sobre el nivel del mar, es superflua una rigorosa exactitud geométrica, y como entre las diferentes partes de cualquier pueblo hay mayores diferencias de altura, que el error que puede cometerse, bastará tener algunas observaciones barométricas para calcular la altura aproximada del parage, lo que es de la mayor importancia para conocer el clima, el curso de las aguas, y otras muchas circunstancias de la geografía física de los terrenos. En fin para contar con la exactitud de las observaciones barométricas cuando los barómetros están distantes, basta saber que las grandes alteraciones atmosféricas se propagan con tal rapidez, que se verifican al mismo tiempo en parages bien lejanos, como se ha observado en estraordinarias variaciones del barómetro, tales como en 26 de Diciembre de 1778, en que subió á la mayor altura que hasta ahora se haya observado, en Londres, París, Ginebra y Marsella casi á la misma hora.

3.ª *Observaciones aisladas*, ó en que solo se hace realmente una observacion, porque ya está hecha la otra, que por lo general es la altura media del barómetro al nivel del mar, ó en la base de la atmósfera. Estas observaciones pueden mirarse como simultáneas existentes, siendo la correspondiente á la estacion inferior la altura media del barómetro al nivel del mar, y la de la superior la inmediatamente observada, pero que se supone ser próximamente la altura media. Ya en este caso toda la incertidumbre recae sobre el resultado, y asi es preciso tener presentes en el momento de la observacion, todas aquellas circunstancias que pueden contribuir á juzgar del grado de aproximacion del supuesto de que la altura observada es la altura media del barómetro en la estacion superior: de modo que si las circunstancias de la observacion son tales que persuadan, que la columna mercurial del barómetro está mas baja que su altura media, el resultado pecará por esceso; y si está mas alta, será lo contrario. Las dos bases principales para aplicar la fórmula de que ha de hablarse despues, son la altura media del barómetro, al nivel del mar, y la temperatura media de la columna de aire, en la altura en que se observa. La primera, en la zona templada, es de veinte y ocho pulgadas, dos líneas, y 0, 8 de línea á la temperatura de 10° termómetro de Reaumur, ó de 12°,5 del centígrado: en la tórrida es de veinte y ocho pulgadas, 1,2 líneas (medida francesa).

En cuanto á la segunda base, basta admitir que á cada 240 varas de altura corresponde un grado del centígrado de decremento; y asi para hallar la temperatura inferior de la columna de aire, se calculará la diferencia entre ambas estaciones por la simple diferencia de los logaritmos; esto es, sin contar con las temperaturas. Si esta diferencia aproximada es, por ejemplo, de 2400 varas, es claro que habrá 10° de diferencia entre el punto mas alto y el mas bajo; luego añadiendo á esta diferencia la temperatura observada en la estacion superior, se tendrá la de la inferior; y por consiguiente la semisuma de las temperaturas de las estaciones, dará la temperatura media de la columna de aire comprendida entre los dos puntos estremos; que es el segundo dato para aplicar la citada fórmula.

4.ª *Observaciones sucesivas*, ó hechas sucesivamente con un solo barómetro. Este supuesto unicamente es admisible cuando se verifican las condiciones siguientes: primera, que el tiempo transcurrido entre las dos observaciones sea bastante corto, como de dos horas por ejemplo; segunda, que la *variacion* de la presion atmosférica sea pequeña. El error producido en cada dos horas es bien facil de determinar, y con bastante aproximacion en la zona tórrida, en donde las variaciones que esperimenta la presion atmosférica, están casi reducidas al movimiento horario. No sucede asi en la templada, en que aquellas son mucho mas frecuentes; sin embargo, en algunos puntos de Europa hay ciertos periodos, como los meses de junio y julio, y especialmente agosto, en que el barómetro varia muy poco; pero por el contrario en los de diciembre, enero, y sobre todo en febrero, esperimenta grandes y rápidas variaciones. Asi pues, las observaciones en nuestros climas deberán hacerse en verano, y si se elige otra epoca del año, es preciso sea en dias en que el cielo esté sereno, y sople un viento ligero del N E, que los anuncia y conserva. Si entre el principio y el fin de la observacion ha pasado algun tiempo, como debe suceder, se notará si el barómetro está en su movimiento ascendente ó descendente para que esta condicion entre en el cálculo.

Pero en el caso de que las observaciones no se hagan con las circunstancias espresadas, puede admitirse que la incertidumbre que resulte en aquellas, sea proporcional á la *variacion media* que tiene el barómetro en la estacion y en el pais en que se opera.

Para determinar dicha *variacion*, tómense en las observaciones diarias sucesivas que se hacen en muchas ciudades, la diferencia de una á otra en los dos sentidos de ascenso y descenso, y con estas diferencias fórmense columnas que se colocarán al lado de las mismas observaciones; súmense estas columnas cada mes; divídase la suma por el número de observaciones; y el cociente espresará la variacion media en el mes correspondiente al número de horas que hayan mediado entre una observacion y la inmediata.

161. Las siguientes advertencias pueden servir para juzgar del grado de confianza que merece el cálculo de las alturas barométricas, segun las circunstancias en que se hicieron las observaciones.

1.ª El cálculo de las alturas será menor que el real, cuando se haga la observacion por la mañana ó por la tarde; cuando un barómetro esté en una llanura, y el otro en un valle estrecho y profundo; cuando soplen vientos fuertes del sur, y en fin, cuando el tiempo sea tempestuoso, en cuyo caso se pueden cometer grandes errores.

2.ª Será mayor, cuando se observe entre el medio dia y las dos ó tres de la tarde; especialmente si es en verano y con el sol picante; cuando un barómetro esté en la cima de un monte, y el otro en una garganta estrecha y dominada; cuando soplen vientos fuertes del norte, en especial si la observacion se hace en un monte, y si el viento sacude en la falda mas escarpada.

162. Se cree que los errores aumentan ó disminuyen, siendo todas las demas circunstancias iguales, en la misma proporcion que aumentan ó disminuyen la distancia horizontal entre las dos estaciones y la altura que hay que medir. De modo, que la distancia horizontal debe ser muy pequeña, pero al mismo tiempo subordinada á la conveniencia de las dos estaciones, si la diferencia de nivel es grande; pero si entre las dos estaciones no hay terreno alguno que esté mas alto que ellas, la distancia horizontal puede ser de varias leguas sin error sensible; antes por el contrario, la proximidad de los barómetros sería perjudicial si el inferior estuviese mal colocado.

163. Las observaciones siempre que se pueda, deben ser simultáneas y hacerse al medio dia, ó entre las once de la mañana y la una de la tarde.

164. Tambien se escoje un tiempo sereno, y no deben temerse los vientos suaves y regulares, pues estos renuevan la masa de aire local, y reducen los termómetros á la temperatura de la atmósfera.

165. No es desventajoso un cielo cubierto cuando no amenaza mal tiempo, porque la falta de la irradiacion solar favorece las observaciones. Sobre todo, si se hacen al aire libre y sin que esten resguardados los instrumentos, deben evitarse la lluvia, las tempestades, los vientos recios; desconfiándose de las observaciones que se hagan en tiempo en que se noten frecuentes variaciones del barómetro y termómetro.

166. Ha de ponerse suma atencion al observar los termómetros, en la direccion de los vientos, el movimiento de las nubes y la presencia ó ausencia del sol; viendo el efecto en los instrumentos de cada una de estas circunstancias.

167. En fin, si la distancia horizontal es considerable, debe hacerse varias veces la operacion, y si es muy grande, es preciso

tener la altura media deducida de muchas observaciones simultáneas durante un año, lo menos; y en el caso de que la distancia sea tal que los climas respectivos de las dos estaciones sean diversos, ninguna medida barométrica dará exactamente la elevacion respectiva.

168 Ocurrirá con frecuencia tener que comparar las observaciones termométricas hechas con termómetros diferentemente graduados; por lo que conviene saber reducir las alturas en los tubos de unas escalas á otras.

1.º Si se tratase de comparar los termómetros centígrado y de Reaumur, y conocer la correspondencia del número n de grados del primero, con el del segundo, se dirá:

100: 80::n: al número de grados de Reaumur.

Si la cuestion fuese al contrario } 80: 100::n: al número del centígrado.

Esto es bien perceptible, porque el intérvalo entre el hielo y el agua hirviendo es el mismo, diferenciándose solo en el número de partes en que está dividido, ó en su graduacion. Pero en el caso contrario, como sucede respecto á Farenheit, Reaumur, y centígrado, se usará de la fórmula. . $\frac{x-m}{m'-m}=\frac{z-n}{n'-n}$ en la que

$m=$ al número de grados, término fijo inferior. $=$ { 32° Farenheit. / 0° Reaumur y centígrado.

$m'=$. . . . . . .superior.$=$ { 212° Farenheit. / 80° Reaumur. / 100° centígrado.

$\left.\begin{matrix}n'\\n\end{matrix}\right\}=$ . . . . { á los correspondientes en una de las dos escalas que se comparan;

$x=$ á un número cualquiera de grados de una de las escalas;

$z=$ al correspondiente en la otra.

Trátese por ejemplo de las escalas de Farenheit y Reaumur; se tendrá $m=32$, $m'=212$, $n=o$. . . $n'=80$; y la fórmula se reducirá á $\frac{x-32}{180}=\frac{z}{80}$

Si se pregunta: 50° de Farenheit, á cuantos equivalen de

Reaumur, será. . . . . $x=50$. . . . . y $\frac{50-32}{180}=\frac{z}{80}$ . . .

ó. . . . . . . $z=\frac{50-32}{80}\times 80=8^{\circ}$.

Si la pregunta fuese al contrario, la fórmula dará:

$$x=\frac{8\times 180}{80}+32=50^{\circ}.$$

Si la comparacion fuese con el termómetro de Delisle, se usaría de las proporciones, 1 centígrado : 1 Delisle:: 100 : 150 : : 2 : 3.

Pero como lo escala de Delisle es descendente, habrá que restar el resultado de 100, para tener los grados centesimales, dados los de Delisle.

Instrumentos de reflexion.

169. Aunque los instrumentos de reflexion sirvan especialmente para las observaciones astronómicas y náuticas, pueden tambien ser útiles en las operaciones topográficas que exijen prontitud, tales como las que se ejecutan en los reconocimientos militares; bajo cuyo punto de vista el sestante es de mucho uso para los ingenieros. Tienen tambien la preciosa ventaja, de medirse en un instante el ángulo entre los dos objetos, y de no exijir pie ni establecimiento fijo, que no puede tenerse en las operaciones á bordo.

170. Segun prueba la esperiencia, si un rayo de luz AB choca en la superficie de un espejo MM′, se reflejará en una direccion BC formando el ángulo de reflexion ABM, igual al de *Fig.* 75 incidencia CBM′ ó NBA=NBC, siendo NB la normal sobre el espejo, respecto al punto B; de modo, que el rayo incidente, el reflejado, y la perpendicular, están en un plano normal á la superficie del espejo en el punto de incidencia.

171. En este principio de física se funda la construccion de todos los instrumentos de reflexion, y de él se deducen los dos teoremas siguientes:

1.° Si un rayo de luz cae ó choca en un espejo, y su reflexion encuentra otro segundo espejo en el que se refleja de nuevo; el ángulo formado por la direccion del rayo incidente y la direccion del segundo rayo reflejado, será doble del ángulo que formen los espejos entre sí.

Fig. 76 Sean MN, PQ los dos espejos; IO el rádio incidente; OA su reflexion ó primer rayo reflejado, cuya direccion se supone perpendicular al espejo PQ, y por consiguiente coincide con la del segundo rayo reflejado. En este caso el ángulo formado por los dos espejos, es el mismo que el de sus normales RO, OA; esto es, que ROA$=$D, por ser semejantes los triángulos POA, OAD y por consiguiente, ROA mitad de IOA formado por el rayo incidente y su reflexion, ó segundo rayo reflejado, porque IOR$=$ROA. Supóngase que el espejo PQ tome la posicion P′Q′, será entonces AS su normal, y AT el segundo rayo reflejado; el ángulo OAT será doble de PAP′, porque este, que es el ángulo formado por las dos posiciones del espejo, es igual al OAS, que forman las dos normales á ellas correspondientes, y OAS$=\frac{1}{2}$OAT. Asi pues, G será en este caso, el ángulo formado por las direcciones de los espejos P′Q′, MN; y ATI el correspondiente al rayo incidente IT, y al segundo rayo reflejado. Pero tambien ahora el último ángulo ATI es doble del primero G, porque estos dos ángulos tienen por diferencias respecto á los primitivos ADM, IOA, dos cantidades angulares, de las que la una es la mitad de la otra. Este resultado puede obtenerse por medio de un cálculo muy sencillo.

Fig. 77 Sean AB, AC los dos espejos, cuyos planos forman entre sí el ángulo x; y sea y el ángulo formado por el rayo incidente io, y el segundo rayo reflejado $o'l$; se tendrá. . . . $y=c+d$.

Pero . . $c=180-2a$. . $d=180-2b$:

luego . . . . $y=360°-(2a-2b)$

En el triángulo A$o'o$ se tiene . . . . $x=180°-(a+b)$:

asi, pues. . . . . $y=2x$.

Fig. 78 2.° Sean EF, EG dos espejos; ad el rayo incidente; y dc, lm, las líneas ó línea angular que recorre este rayo en sus reflexiones sucesivas hasta la cuarta.

Si se considera cl como un rayo incidente, mn será su segunda reflexion; y segun lo que acaba de demostrarse $o=2x$, siendo x el ángulo formado por los dos espejos.

Pero tambien . . $b=2x$, siendo *ad* un rayo incidente: luego en el triángulo *bo*N el ángulo esterno $aNo=4x$.

Pudiera probarse tambien que á la sesta reflexion, el ángulo formado por esta y el rayo incidente, seria igual á $6x$: y asi sucesivamente.

172. De lo dicho se infiere con facilidad, que se podrá medir un ángulo formado por dos objetos, valiéndose de un aparato compuesto de dos espejos que formen entre sí un ángulo que pueda variarse conforme convenga.

Supóngase que un espejo AB movible alrededor de un punto *Fig.* 79. C, tome la posicion ID; si GC es un rayo luminoso sobre C, se reflejará en la direccion CF, de modo, que siendo EC perpendicular á ID, se tendrá GCE $=$ ECF; esto es, que el ángulo formado por la perpendicular sobre el espejo en el punto de incidencia, y el rayo incidente, ó el reflejado, es igual á la mitad del formado por estos dos rayos.

Sea F un punto situado en el plano que pasa por dichas líneas: para determinar el ángulo que entre sí forman, habrá que dar al espejo MN la única posicion en que el rayo reflejado pasa por el punto F; y por lo tanto midiendo el ángulo ECF, formado por las dos respectivas normales, se tendrá la mitad del que se busca. Se necesita, pues, disponer el aparato, de modo que el observador conozca que esta condicion se ha verificado; por lo que si se coloca el espejo MN perpendicular á CF, el rayo reflejado hácia F lo será de nuevo hácia el punto C, y el observador verá la imágen del punto G en la direccion CF. Para que pueda ver al mismo tiempo el punto F, se tendrá que dejar transparente, ó sin azogar una parte del espejo MN, y de este modo cuando el punto F y la imágen del G coincidan, el espejo habrá tomado la posicion requerida, y se obtendrá el ángulo buscado tomando el doble del correspondiente FCE.

Triángulo gráfico de reflexion.

173. Este instrumento traza gráficamente el ángulo despues *Fig* 80. de medirlo, sin necesidad de semicírculo. Para ello sean AB, AC,

CB, tres reglas unidas por dos articulaciones en A, C, de manera que dos de aquellas puedan correrse ó deslizarse en B, valiéndose de una muesca &c. Sobre la direccion de la AC perpendicularmente á esta regla, y unido á ella, hay un espejo MM′, y otro NN′ perpendicular y de firme en la CB. Supongánse los espejos dispuestos de modo que la coincidencia de las imágenes se verifique exactamente; es claro que el ángulo a será igual al que formen los espejos, porque cuando a llega á ser cero, los espejos MM′, NN′ serán paralelos: luego dicho ángulo a es igual á la mitad del que formen entre sí los dos objetos. Pero si el instrumento se ha construido de modo que AC, AB sean iguales é invariables, será $a=a'$, y $b=2a$; es decir igual al ángulo buscado. Asi, pues, si se pone A sobre el punto en que quiere formarse el ángulo, y se hace que AB caiga sobre uno de los lados, la regla AC servirá para trazar el otro lado.

Escuadra ó paralelipípedo de reflexion de Agrimensor.

174. Este instrumento tiene la forma de un paralelipípedo cuadrangular, de cobre, su altura es de cinco á seis pulgadas, y su base de una pulgada de lado.

En los lados opuestos que forman la altura del paralelipípedo hay aberturas para tirar las visuales, y para que pasen los rayos dimanados de los objetos á que estas se dirigen.

Los espejos están dispuestos de tal modo, que por medio de los correspondientes tornillos pueden formar entre sí las salidas, como se dice entre los agrimensores, ó ángulos de 90°, $22\frac{1}{2}^\circ$ y 30°; con lo que podrán tomarse alineaciones que unan dos puntos, ó formen, sea un ángulo de 180°, sea otro de 90°, estando perpendiculares entre sí, sea de 45°, ó sea en fin de 60°, ó del triángulo equilátero, cuyos ángulos son de uso muy frecuente en los problemas de la geometría práctica.

Uso del paralelipípedo de reflexion.

Fig. 81 175. Sean DF, EF dos espejos que formen entre sí un ángulo de 90°, y O, O′ dos objetos, en cuya alineacion se quiere fijar un punto, ó lo que es igual, preténdase trazar dos líneas que pasen por el punto de estacion, ó cortándose en un ángulo de 180°. Es evidente que dispuestos los anteojos como en el sestante, y de modo que la vista colocada en M vea coincidir completamente los objetos O, O′, las direcciones OM, O′E, serán paralelas y podrán mirarse como prolongacion una de otra, pues que solo las separa la distancia DE que es despreciable.

Si el ángulo de los espejos fuese de $22\frac{1}{2}°$ y la vista estuviese en *p*, dispuestos aquellos de modo, que descubran directamente la imágen del punto O, y por doble reflexion la del punto O′ en perfecta coincidencia, el ángulo O*p*O′ será doble del de los espejos, ó de 45°. *Fig.* 82.

Si conservando los espejos el ángulo de $22\frac{1}{2}°$, el ojo solo viese la imágen del objeto O′ á la cuarta reflexion, el ángulo O*p*O′ seria de $4 \times 22\frac{1}{2} = 90°$. (*) *Fig.* 83.

En fin, si la direccion de los espejos formase un ángulo de 30°, se haria ver del mismo modo, que el ángulo de la direccion de los dos objetos seria en la segunda reflexion de 60°.

El instrumento descrito, que es muy portátil, podrá ser de útil aplicacion en las maniobras de las tropas, para las alineaciones, con ahorro de tiempo y de guias.

Verificacion y rectificacion del paralelipipedo de reflexion.

---

176. La verificacion y rectificacion de este instrumento se reduce á asegurarse de que los espejos forman entre sí los ángulos de 90°, $22\frac{1}{2}°$, y 30°; y de no, á corregirlos por medio de los correspondientes tornillos.

Para el primer caso de 90°, se elije una alineacion OO′, y se coloca el observador en uno de sus puntos S, por ejemplo; de que se cerciora por la coincidencia de las imágenes de los puntos O, O′. *Fig.* 84.

(*) Como el mayor inconveniente, en esta clase de instrumentos, consiste en la pérdida de luz ocasionada por las reflexiones, pues á la segunda la imágen se distingue escasamente, lo que produce error en la direccion, y fatiga la vista; se ha imaginado emplear un solo espejo movible, lo que parece haberse aplicado ya en la construccion de los instrumentos de que se trata.

Para el segundo caso, se camina sobre la direccion OO′, y ele-
Fig. 85 gido un punto esterior O″, se baja una perpendicular que pase por este punto, mirando hácia la parte O, lo que determinará el punto S de estacion, y pie de dicha perpendicular. Se gira despues sobre este mismo punto el instrumento hácia O′, y se levanta una perpendicular á la SO″: entonces si la SO coincide con la SO′, los ángulos OSO″, O″SO′ serán rectos, y el de los espejos de $22\frac{1}{2}^{\circ}$; y si no lo fueren, habrá que volver á tantear, despues de haber modificado por medio de los tornillos, la posicion de los espejos.

Fig. 86 177. En fin, para ver si el ángulo de los espejos es de 30°, que es el caso tercero, se elije un punto O″ esterior á la direccion OO′, sobre la que se camina hasta que se determina en ella el S, que forma con la direccion OO′, el ángulo OSO″ de 30° en el instrumento, ó de 60 entre los objetos O, O″. Despues sin dejar el punto S, y valiéndose de la cuarta reflexion, se ve si SO″ forma con la SO′ un ángulo de 120° suplemento de OSO″; de lo contrario habrá que modificar la posicion de los espejos, y volver á tantear.

Sestante.

178. Como los ángulos que se observan, deban en muchos casos entrar como elementos en los cálculos, es preciso conocer su valor, para lo que se añade á los instrumentos de reflexion un limbo graduado, como se ha visto en los otros ya descritos.

Fig. 87. El sestante se compone por lo regular, de las dos piezas siguientes: la NN′, que es un espejo fijo con solo la mitad inferior azogada; y la MM′, que es otro espejo movible al rededor de la vertical, que pasa por el punto C, considerado como visagra ó charnela. Si estos dos espejos son paralelos, el rayo incidente GC de un objeto distante G, se reflejará, por ejemplo, en la direccion CR, que encuentra en R al otro espejo, en el que se volverá á reflejar en la direccion RL, penetrando en L′ en que se supone el ojo; de suerte que por no estar azogada la mitad del espejo NN′, el ojo percibirá al mismo tiempo dos imájenes G, G′ de un mismo punto ú objeto; la una directa, la otra por reflexion. Debe notarse que en la práctica, las dos líneas GC, G′L′ se confunden sensiblemente á causa de la distancia del punto observado.

Concíbase la línea MM′ material y prolongada hasta A, y que este punto pertenezca al mismo tiempo á un limbo ó circunferencia material AB. . . descrita con el rádio material CA, que es la alidada. Si el espejo MM′ tomase otra posicion cualquiera, *mm′*, supónganse dos objetos distantes G, D, y que el rayo incidente DG sea tal que haga la segunda reflexion RL′; en consecuencia de lo demostrado (170 y sig.), el ángulo x formado con las dos posiciones de los espejos, será la mitad del ángulo DCG. Pero como el ángulo x tiene por medida el arco AB del limbo, si este estuviere graduado desde A en que se halla el cero, y en sentido de A á B, bastará duplicar el número de grados y minutos de AB, para hallar el ángulo entre los dos objetos.

179. Para no tener que duplicar á cada observacion, se acostumbra marcar con doble valor las cifras de las divisiones del limbo; y las fracciones de grados se toman con el nonio que hay en el estremo de la alidada. La estension del limbo es de 60°, y de aqui el llamar sestante á este instrumento, bien cuadrante ú octante cuando el arco es la cuarta ó la octava parte de la circunferencia.

La inspeccion de la figura y lo esplicado antes al describir otros instrumentos, bastan para enterarse completamente de la construccion y forma del sestante, que cuando tiene de quince á veinte pulgadas de radio se hace de madera dura, como el ébano, por *Fig.* 88
ejemplo, porque seria muy pesado de metal. Pero por lo general son de este, dándoseles seis pulgadas de radio para las observaciones menos importantes, y empleándose los círculos enteros, de que se hablará, en las que exigen mas precision.

180. Para debilitar la fuerza de los rayos del sol en las observaciones de este astro, hay en K entre los dos espejos, tres cristales de diferentes colores, y dos en H, jirando cada uno de por sí en charnelas que tienen al pie. SS son las armas ó brazos que sostienen y reunen las partes del instrumento; Q es un agarradero ó mango por su espalda, y el agujero que se ve en medio sirve para colocarlo en un apoyo, cuando el observador desea mucha estabilidad; LL′ es el telescopio para dirijir las visuales, las cuales

en este instrumento, al contrario de lo que sucede en los que no son de reflexion, no siguen el borde de la alidada MA. El cristal ocular comun del telescopio puede sustituirse con otro oscuro para producir el mismo efecto que con los cristales K, H. Se coloca el telescopio en un collar T, unido á una espiga que puede subirse ó bajarse por medio de un tornillo con el objeto de que el campo de vista del telescopio, sea cortado por la línea horizontal que divide la parte azogada de la transparente en el espejo NN′. El MM′, mas grande que este, es el que sigue el movimiento de la alidada, y se coloca unido á ella en direccion de su eje longitudinal y perpendicular á su plano. T, es el tornillo de coincidencia ó tangente para ajustar el nonio, cuyas divisiones se leen por medio del microscopio H, que se une en q á la alidada cuyo movimiento sigue, y que por medio del brazo ó palanca qb, que puede girar al rededor, y de alto á bajo en q, se coloca sobre la parte que se quiere y á la altura conveniente á la vista. Debajo del nonio hay un tornillo, que no puede verse en la figura, para afirmar la alidada al limbo concluido su movimiento. Suele añadirse tambien á este instrumento otro tercer espejo mas bajo que el NN, que sirve para las que se llaman *observaciones por la espalda*; perpendicular al grande MM′ y que tiene su anteojo ó telescopio.

Verificacion y rectificacion del sestante.

181. El sestante, por lo que acaba de esplicarse, debe reunir las circunstancias siguientes:

1.ª Que el eje del anteojo sea paralelo al plano del limbo;

2.ª Que el plano de los espejos sea perpendicular al plano del limbo;

3.ª Que la línea de fé del nonio marque la division 0° cuando los dos espejos son paralelos.

182. Para conocer si se cumple la primera condicion, ó verificar el instrumento en esta parte, se colocan dos miras de cobre (*)

(*) Estas piezas son semejantes á las que los carpinteros llaman codales, y de que se valen para poner planas las superficies de las maderas por medio del cepillo.

de altura igual á la mitad del espejo grande, sobre el limbo en dos puntos diametralmente opuestos, y se mira por el anteojo al objeto distante, que se halla en el plano de las aristas superiores de las miras ó codales. Si este objeto coincide exactamente con el hilo ó cabello horizontal del anteojo, el eje óptico es paralelo al limbo; de lo contrario hay que rectificar la operacion, moviendo el diafragma á que están unidos los cabellos ó hilos.

183. Puede tambien verificarse el paralelismo del eje del anteojo ó línea de colimacion con el plano del instrumento, por el contacto exacto del sol y la luna, cuando distan 90 ó mas grados, en el hilo del telescopio mas próximo al plano del instrumento; siempre que fijada la alidada, y dando vuelta al telescopio, para que los objetos se presenten hacia el otro hilo, permanezca aun perfecto el contacto. Si esto no se verifica, hay que apelar á los tornillos que afirman el anillo ó collar en que encaja el telescopio, hecho lo cual no es facil se altere de nuevo la direccion del eje óptico. Basta para cerciorarse, dirigir el eje á un objeto cualquiera; y dando vuelta á el anteojo en las cuatro partes del collar, ver si en todas estas posiciones la cruz de los hilos se dirije siempre al mismo punto.

184. La segunda verificacion exige una operacion para cada espejo. Respecto al grande ó de la alidada, sea este AB. Se colocan en el plano del limbo dos codales CD, EF, de tal modo que estando el *Fig* 89.
ojo en O se vean confundidas, en una misma línea perpendicular al plano, las aristas del espejo grande y superiores de los codales; esto es, la arista proyectada en E directamente y la en D por reflexion. Si no sucediere asi rigorosamente, se modifica la posicion del plano del espejo, cosa que corresponde al constructor. Esta verificacion puede tambien hacerse sin las piezas EF y CD, poniendo el instrumento horizontal, y la alidada en la mitad del limbo, mirando por encima del espejo hacia aquel; y observando si coinciden como si fueran un mismo arco, su vision directa y la reflejada, ó si parece aquel romperse en las partes en que ambas se encuentran; porque en este caso el espejo estará inclinado hácia el limbo.

Si el espejo pequeño es paralelo al grande, es claro, que siendo este perpendicular al limbo, lo será tambien el primero. Pero podrá verificarse desde luego, mirando por el espejo grande con un movimiento rápido de la alidada, si la imágen reflejada de un objeto al pasar sobre él lo cubre directamente; y si no, se corige por medio del tornillo *i*.

185. Para verificar la tercera circunstancia, la cual es necesaria para asegurarse de que el arco recorrido por la línea de fé del nonio corresponde exactamente al ángulo observado, se hace coincidir esta línea con la division 0° del limbo; y mirando por el anteojo á un objeto cualquiera, por ejemplo, al sol, su imágen reflejada en el espejo pequeño debe coincidir con el sol visto directamente por la parte no azogada del mismo espejo, apareciendo los dos como uno solo. Pero si esto no se verifica, la cantidad de su separacion es el error llamado del paralelismo ó colimacion; y como algunas veces no tienen los instrumentos en sí mismos medios de corregir el efecto de este error, hay que llevarlo en cuenta. Para ello afírmese la alidada en la division $30'$ á la izquierda de la 0°; y mirando al sol, las dos imágenes casi se tocarán en sus bordes. Perfecciónese el contacto por medio del movimiento lento del tornillo tangencial, y léanse los minutos y segundos marcados por el nonio. . . . . .

Que se supondrán.	á la izquierda de 0°, ó dentro del arco. .	$31'\ 56''$
Póngase despues la alidada á la derecha de 0°, en la parte de mas que tiene el arco del limbo, y á la misma distancia á que estaba en la izquierda, y haciendo despues exacta la coincidencia de las imágenes; sea.	á la derecha, ó fuera del arco.	31 22.
Diferencia.		$0'\ 34''$
Mitad del error, negativo en este caso por ser menor el arco de esceso, y positivo si este hubiese sido mayor que el del limbo, como se comprende facilmente.	Error del paralelismo ó de la alidada. . . .	$-\ 17''$

Asi, pues, del valor de los ángulos que se observen, se rebajará esta cantidad, ó se añadirá segun los casos.

Uso del sestante.

186. Se empléa este instrumento para medir los ángulos formados por los diferentes objetos de un terreno; pero estando estos en distintos planos, si el terreno fuese muy desigual, seria necesario para tener el plano exácto, reducir los ángulos á un mismo plano, operacion para que no está construido el instrumento, y que no es necesaria hacer con otros con los que se pueden dirijir las visuales mas altas ó mas bajas, señalándolas en el plano horizontal. Por lo tanto será muy útil el sestante cuando no se necesite grande exactitud, ó cuando haya que situar los puntos intermedios, una vez establecidos los principales con otros instrumentos.

187. Despues de lo dicho en la descripcion, fácil es comprender que para tomar los ángulos con el sestante, se ajusta la línea de fé del nonio en 0° del limbo; se toma el instrumento y coloca *Fig.* 90 con la mano en la posicion de los dos objetos cuyo ángulo quiere medirse; se mira por el anteojo *o*, y por la línea divisoria de la parte azogada y transparente del espejo pequeño IF al objeto de la derecha S que debe verse doble; y se mueve poco á poco la alidada LB dirijiendo gradualmente la vision directa á todos los objetos de la izquierda, pero conservando siempre la vista del objeto S por reflexion. Esta imágen reflejada, parece marchar de derecha á izquierda y coincidir con todos los objetos que va encontrando, y que se ven directamente por la parte transparente del espejo pequeño. Se sigue este movimiento de la alidada y del cuerpo, hasta estar frente al objeto H, cuyo ángulo con el S se quiere medir; viéndose entonces los dos en el anteojo, se hacen coincidir por el movimiento lento, y se lee el arco corrido por la alidada. Si puesto el limbo del instrumento en el plano de los objetos, se dirije desde luego la vista por el anteojo y línea divisoria del espejo pequeño al objeto de la izquierda, y se mueve la alidada hasta que el objeto de la derecha se vea coincidir con el de la izquierda por reflexion, se habrá conseguido lo mismo.

188. Si se quiere medir un ángulo mayor de 120°, se le divide, en dos eligiendo un objeto intermedio bien visible.

Fig. 90′ 189. Cuando se tiene un octante y el ángulo entre los objetos es mayor de 90°, puede tambien emplearse la *operacion por la espalda*, (180), que consiste en observar la parte opuesta H′ del objeto H que se mira directamente, y observando por el anteojo O hacer concurrir en el espejo MN los puntos H′, S, dejados á la espalda, con el H visto directamente. Moviendo el espejo AB, se hace reflejar el objeto S en el espejo MN; se mide como antes por la inclinacion BED del espejo, el ángulo SEH′; y su suplemento será el valor de SEH, que se busca. Se vé, pues, que no solo se pueden averiguar con este instrumento los ángulos obtusos, sino tambien conocer estos mismos ángulos sin tener que observar directamente uno de los objetos, cuando su mucha luz incomoda á la vista.

Para demostrar que los espejos deben ser perpendiculares entre sí (180) en esta observacion; supóngase el objeto H lejano. Las líneas HEH′, O*e*H serán sensiblemente paralelas y se tendrá. . . . . $eEH = 180° - eEH'$:
y como por suposicion. . . . $eEB = H'EA = HEB$;
será . . . . $eEB = \frac{1}{2}\, eEH'$.
Del mismo modo se sacaria. $EeM = \frac{1}{2}\, EeH$.
Luego. . . . . $EBe = 180° - \frac{180° - EeH - EeH}{2} = 90°$

Sestante de Bolsillo.

Fig. 91. 190. Como el fundamento de la construccion de este instrumento es igual al del anterior, bastará una ligera descripcion para darlo á conocer, pudiendo llamársele sestante de *reconocimientos*, por usarse especialmente en estas operaciones, y de ***bolsillo*** por su pequeñez.

Su figura es cilíndrica de tres á cuatro pulgadas de diámetro: está encerrado y ajustado á rosca *rr* en una caja K de metal, de cuya materia es todo el instrumento, facilitando el uso de él, su caja ajustada en otra rosca *t*, *t*, inferior á la primera. En A hay un telescopio, que se saca tirando hácia fuera, lo necesario para guaduarlo á la vista, ó enteramente cuando no se necesita de él por estar próximos los objetos; pues en este caso se hace uso del agujerito *a*, que se trae al punto A del eje optico, corriendo hácia él la planchita *ab'*, por medio del empuje de su cabeza *b*. En la superficie superior está el limbo H, de platina, dividido de derecha á izquierda desde 0° hasta 120°, y al contrario desde 120° hasta 180°, y mas hácia fuera hasta 230° para los ángulos suplementarios. En *o* gira la regla *g* del nonio con movimiento lento, único que tiene, por medio del tornillo de coincidencia *f*. En el mismo punto gira, pudiendo ademas levantarse ó bajarse, el brazo que lleva el lente ó microscopio *i*, para leer las indicaciones del nonio en el limbo; *c* es una llave que, introducida en la hembra *e*, que está en la parte superior, y en la *d* que cae al costado, y se señala con puntos porque no puede verse en la figura, sirve para rectificar los espejos en el sentido vertical y horizontal. En B se ven los estremos de dos brazos de palanca que, levantados ó bajados, juntos ó separados, sirven para subir ó bajar por una abertura en el fondo, dos cristales oscuros que se empléan en las observaciones del sol; pero para esto es preciso quitar antes el anteojo, el cual suele tambien tener un ocular oscuro. Los dos espejos se hallan dentro, por lo que no pueden verse en la figura, colocados de un modo análogo al del sestánte comun; *n* es un tornillo y tuerca que sujeta la tapa del instrumento. Cuando ya no hay que usarlo, se encierra despues de cubierto con su caja cilíndrita, en otra de cuero de su misma figura, con las correspondiences correas para poderlo colgar del hombro.

Verificacion y rectificacion del sestánte de bolsillo.

---

191. Para las verificaciones vertical y horizontal de los espejos, esto es, para cerciorarse de su paralelismo, se pone la línea de fé del nonio en la division 0° del limbo; se coloca primero el instrumento en la posicion horizontal y se dirige despues directamente una visual por el anteojo ó agujerito *a*, y línea divisoria del espejo pequeño á cualquier objeto, el cual debe cortarse en la misma

visual con su imágen reflejada. En el caso contrario, se destornilla la llave *c*; se aplica en *d*, y mirando de nuevo al objeto, se la hace girar hasta que se realice la coincidencia. Despues se pone el instrumento en la posicion vertical, y tirando la visual al mismo ú á otro objeto, debe este tambien coincidir con su imágen; y de no ser asi, la misma llave *c* hará girar la hembra *e* hasta que la coincidencia se verifique.

Uso del sestante de reconocimientos ó de bolsillo.

192. Rectificado el instrumento, para observar con él, ó medir el ángulo formado entre dos objetos, se dirige una visual por A y la línea divisoria del espejo chico al objeto de la izquierda; y dando movimiento con la mano derecha, porque la otra tiene agarrado el instrumento, al tornillo *f*, se hace girar la alidada y nonio sobre el limbo H, hasta que el objeto de la derecha, visto por reflexion, coincida con el primero mirado directamente. En fin, se coloca el lente como convenga, y se lee el valor del ángulo buscado.

193. Por cierta disposicion de los espejos y agujeros se pueden tirar con este instrumento líneas rectas, y bajar ó levantar perpendiculares. Para ello, inferiormente al espejo grande, ó de la alidada, hay otro, colocado de modo que refleja la imágen de un objeto al ojo situado en un agujerito cercano á la division 120°, bajo un ángulo constante de 90°, desde donde el observador puede dirigir su vista hacia la derecha, y en ángulo recto á la direccion real del objeto. Cuando el índice ó nonio se coloca en los 180°, su espejo puede reflejar tambien perpendicularmente una imágen opuesta de la izquierda, cortándose entonces las direcciones de los dos espejos; por consiguiente el observador, mirando por el agujero próximo á la division 120°, podrá percibir la coincidencia de los objetos distantes entre si 180° por medio de ángulos rectos en una línea que los una. De este modo puede hallarse un punto entre dos estaciones. Para ello el observador, puesto el instrumento como anteriormente, se coloca tan próximo á la direccion de la línea que une las dos estaciones, como le sea posible atinar á la

simple vista; mira despues por el agujero cercano á los 120°, y marcha hacia derecha ó izquierda, en direccion perpendicular á la que tiene, hasta que ve coincidir los dos objetos distantes de estacion ó elegidos, en cuyo caso se halla en el punto deseado.

Para cerciorarse el observador, da media vuelta en este punto, y mirando hacia la nueva direccion, opuesta á la primera, observa si los dos objetos coinciden aun, como debe suceder si el instrumento es exacto. Si no hubiere coincidencia, marcha en una nueva direccion hasta que la haya; y entonces el punto medio del camino andado será el que se busca en la línea, como el que promedia el error del instrumento.

La exactitud de esta operacion, asi como el método de observar los ángulos suplementarios, se reduce á elegir en el horizonte dos objetos, que serán tanto mas acomodados, cuanto mas disten entre sí, y nunca menos de 140°; se coloca el observador perpendicularmente al objeto de la derecha, de modo que vea su imágen en el espejo fijo; mueve despues la alidada, trayendo la imágen del otro objeto, visto en el espejo de aquella, á que coincida exactamente con la visual que pasa por la línea de separacion del espejo chico ó fijo, y lee el ángulo; en seguida da media vuelta, y tomando igualmente el ángulo que los mismos objetos forman á la otra parte, es evidente que su suma deberá ser de 360°, como tambien lo es que si escede de esta cantidad, la mitad del esceso deberá restarse, y que si al contrario le falta algo para llegar á 360°, habrá que añadir dicha mitad para obtener el ángulo verdadero (*).

194. Combinando dos niveles de aire con los espejos, es como parece haberse construido el sestante de bolsillo, propio para tomar alturas y depresiones; porque dando él los suplementos de las distancias zenitales, es cosa llana inferir sus complementos, que serán los ángulos pedidos, de elevacion si son mayores de 90°, y de depresion si menores.

(*) Con el sestante comun se hacen tambien estas operaciones.

Círculo de reflexion. (*)

195. Tomando en vez de la sesta parte el todo de la circunferencia para limbo del instrumento, se ha logrado dar al sestante las ventajas del círculo repetidor, como va á verse.

Fig. 92. 196. Se divide la circunferencia en 720 partes, ó medios grados, que lo mismo que en el sestante representan grados enteros cuando se observan ángulos, y se numera el limbo conforme á esta condicion. Las dos reglas OP y CB, son movibles, independientemente una de otra, al rededor de C. Para el movimiento lento tienen sus tornillos tangentes ó de coincidencia, y los correspondientes de presion para afirmarlas al limbo. Una de estas reglas BC es la alidada que tiene su nonio. La otra OP lleva un anteojo ó telescopio OO como el del sestante, y tiene tambien sus tornillos para ponerlo paralelo al limbo.

Sobre el centro de rotacion de la alidada está el espejo GL perpendicular al plano del limbo, y para cuando no lo estuviere, hay tornillos de correccion El espejo chico azogado tan solo en su mitad inferior, está en N en la regla OP con la que se mueve.

En H y *g* hay vidrios de colores para disminuir la fuerza de los rayos del sol, y por debajo para agarrar el instrumento, un mango de madera asi como en el sestante, con quien tanta semejanza tiene; por lo cual no parece necesaria mayor esplicacion.

Uso del círculo de reflexion.

197. Fíjese por el correspondiente tornillo la alidada BC en la division 0° del limbo, y diríjase la regla OP á un objeto lejano por ejemplo X, hasta que se vean coincidir sus dos imágenes: entonces los dos espejos serán paralelos entre sí. Afírmese la regla OP; aflójese la alidada BC; y hágasela girar hasta que la imágen reflejada del objeto Z, cuya distancia angular al X quiere averiguarse, se note coincidir con este, visto directamente por la parte

(*) Este instrumento es conocido con el nombre de *círculo de reflexion de Borda*, y pasa por el mas perfecto de esta clase. El de Troughton sin embargo merece igual lugar.

no azogada del espejo pequeño. Léase el arco del limbo descrito por la alidada, y se tendrá dicha distancia ó ángulo.

198. Este es el mismo método que el seguido con el sestante; pero puede repetirse otra operacion igual á la hecha, tomando por cero el punto en que quedó la alidada BC, lo que dará el ángulo duplo.

Para esto aflójese la regla OP y hágasela girar hasta que queden paralelos los dos espejos, que será cuando coincidan las dos imágenes de un mismo objeto X. Fíjese la regla OP; y aflójese la alidada BC haciéndola girar hasta que Z reflejado se vea coincidir con X visto directamente. El arco del limbo será entonces doble de la medida del ángulo ZCX.

Otra operacion semejante dará el ángulo triple, y asi succesivamente. Dividiendo despues el arco hallado de este modo por el número de operaciones, se tendrá el ángulo buscado con el menor error posible de division, y direccion de visuales.

199 Si bien por esta repeticion se consigue evitar el error provenido de la falta de paralelísmo de los espejos, y disminuir el de la graduacion; es sin embargo preciso verificar la perpendicularidad de los espejos respecto del plano del limbo, lo que se hace de un modo parecido al enseñado para el sestante.

200. Asi en el círculo como en el sestante, cuesta trabajo lograr la coincidencia de las dos imágenes del mismo objeto, ó de distintos objetos. En aquel la dificultad solo está en la primera observacion; porque conocido ya en esta próximamente el arco que mide el ángulo formado por los dos objetos, se forman los múltiplos dos, tres, cuatro. . . y en seguida se lleva la alidada succesivamente sobre los arcos asi determinados, percibiendo entonces en el anteojo las dos imágenes que se hacen coincidir por el movimiento lento del tornillo tangente.

201. Como los objetos terrestres no están siempre bien iluminados, y como ademas pierden de su claridad vistos por reflexion, resulta, que usando de instrumentos, que exigen mucho número de verificaciones, los ángulos observados no son tan exactos como los obtenidos con el círculo repetidor ordinario. Por lo tanto el uso de los instrumentos de reflexion debe reducirse á las operacio-

nes prontas, que se ejecutan en los ejércitos para servir de base en los reconocimientos militares; ó á las triangulaciones preparatorias, que en las operaciones geodésicas importantes quieran hacerse.

202. Tambien puede tomarse con este instrumento, asi como con el sestante, el ángulo formado por la visual tirada á la cúspide de los objetos y la horizontal, ó lo que en la práctica se entiende por *altura de los objetos*.

En el mar la superficie de las aguas ofrece un escelente horizonte, y la operacion se reduce á medir el ángulo entre un punto visible de él, y el astro ó punto de la costa, cuya altura se desea saber. Pero en tierra, es preciso tener un horizonte artificial, para lo que se emplea un espejo que debe ser muy plano, nadando en un baño de mercurio dentro de una caja.

Fig. 93. El observador coloca este horizonte á alguna distancia delante de sí, por ejemplo en H, en la direccion del objeto A. Supóngase C el centro del instrumento. El rayo AH caerá sobre el espejo del horizonte artificial, y reflejándose en la direccion HC, el ojo C verá por reflexion el punto A en A′ en la direccion A′HC por la parte transparente del espejo pequeño del círculo ó sestante. Por el contrario, en la parte azogada se verá por una doble reflexion la imágen A en coincidencia con la imágen A′. En una palabra, el punto A y su imágen A′, vienen á ser en este caso dos objetos distintos, cuyo ángulo se toma segun lo dicho anteriormente; teniendo solo que advertir, que el ángulo dado por el instrumento, es el ACA′ y no el AHA′; la diferencia, ó el ángulo HAC es despreciable, en razon á lo distante del punto A. Obtenido el ángulo AHA′, se le divide por medio, y el AHH′ será el ángulo que se busca, segun la ley de la reflexion.

203. Para tomar con el círculo de reflexion un ángulo de altura, se pone en la alidada del espejo grande un nivel que jire sobre una charnela, y se fija el instrumento sobre un pie, asegurándose de la verticalidad de su limbo por medio de una plomada: la operacion es la siguiente.

Fig. 94. Sea *pp′* la alidada del espejo grande; LL′ el eje del anteojo, y de la segunda alidada, estando L en cero y el objeto O en la direccion de LL′; y supóngase que *pp′* en libertad tome la posicion vertical por su propio peso, y que en *s′* esté la charnela para el nivel *nn′*.

Fíjese la alidada *pp′* al limbo, y hágase que éste describa una semi-revolucion al rededor. El anteojo tomará la posicion *l*, *l′*, y el cero caerá en *l* como tambien el ocular, que anteriormente estaba en L. Dése al limbo un nuevo jiro, hasta que el punto *l* recorra 180°, ó llegue al punto *l′*, lo que se conocerá por la horizontalidad del nivel *nn′* que tomará la posicion *mm′*, jirando libremente al rededor de *c*; aflójese la alidada *ll′*; y por último, mírese de nuevo al punto O, y el punto *l′* ó cero, recorrerá el arco *l′*L que será doble del que se busca.

Semicírculo de reflexion de Douglas.

---

204. Este instrumento, que es todo de metal, tiene un limbo circular ó semicircular ABC, fijo y graduado. CQ es una regla tambien fija, cuyo canto interior *ab*, sirve al semicírculo de diámetro; y en éste hay una rodaja fija semicircular concéntrica á aquel, y hueca para ver el centro P: sobre ella jira otra circular, á la que se sobrepone la tercera que la sujeta, para que la segunda no tenga mas movimiento que el jiratorio. *Fig.* B. *lám.* 16

Lleva consigo la segunda rodaja un limbo RSTV, que sigue sobre el fijo ABC el movimiento circular de aquella, y su figura viene á ser un sector de círculo, cuyo centro es el mismo que el del limbo fijo, y cuyos rádios terminan en la mitad del ancho de éste, teniendo uno de ellos el rebajo *cd*, que se ajusta al diámetro *ab* del semicírculo; quedando entonces enfrente de la division 10 del limbo fijo, el otro estremo del movible que lleva un nonio. Sobre este limbo movible hay fijo un espejo plano DE que sigue el movimiento de aquel.

En el estremo del limbo fijo del semicírculo, hay otra rodaja que jira sobre el punto K, embutida entre otras dos, superior é inferior, para que la de enmedio no tenga movimiento de arriba abajo, ni al contrario. Unida á esta rodaja jiratoria, está una regla LX que sigue el movimiento de aquella; y en K hay un vidrio plano *fg* unido á la alidada, exactamente paralelo al espejo DE, y dividido en dos partes á lo ancho, la superior diáfana y la inferior azogada. En la alidada hay una abertura *mn*, en la que entra ajustadamente un clavito *o*, asegurado en el limbo movible, y cuyo medio ó centro corresponde con exactitud á la mitad de la anchura del limbo fijo, y por consiguiente se halla en la misma circunferencia que el punto K. Con este arbitrio la alidada corre por el clavito, siguiendo el movimiento del limbo movible, acompañado de los dos espejos, que conservan su primitiva posicion paralela entre sí. La alidada lleva en su estremo una planchita de metal *yz*, con un punto de mira.

El limbo del semicírculo está dividido en 180°, y el arco sobre que están grabadas las divisiones, equivale al de un sestante, cuyo rádio fuese igual á la longitud de la alidada movible hasta el punto 0°, cuya longitud es igual al diámetro del semicírculo.

En la regla fija se graba una escála de cuatro pulgadas por milla, dividida en varas, con cuya adicion se pueden resolver por construccion todos los casos de la trigonometría. M, N, son dos tornillos que sirven para comunicar un pequeño movimiento á los espejos, con el fin de que coincidan estos en la misma vertical en la parte diáfana y azogada del vidrio *fg*.

Del movimiento del limbo movible resulta que la reglita *cd* se separa tanto del canto interior *ab* de la regla fija, cuanto el punto R del limbo movible anda hacia K sobre el fijo, ó lo que es lo mismo, que los puntos *d*, R, describen arcos iguales.

La construccion de este instrumento, se funda en el principio de óptica ya demostrado (170).

Uso del semicírculo de reflexion de Douglas.

205. El objeto de este instrumento, es combinar de tal modo el principio de medir ángulos con un transportador circular, que el índice ó limbo del instrumento pase sobre todo el ángulo medido.

Por este artificio, cada ángulo observado en el terreno, se transporta al plano en su actual magnitud, sin necesidad de tener que contar su valor en grados y minutos.

Esto es tanto mas útil en los reconocimientos militares, cuanto que puede determinarse de una vez la verdadera situacion de los objetos, y el plano queda correjido al mismo tiempo que se levanta.

Para su aplicacion, se tira en el plano á que se quiere trasladar los ángulos, una recta que se considera como diámetro, y en ella se señala un punto que representa el centro del instrumento. Se coje éste con la mano izquierda, y aplicando el ojo al punto de mira de la planchuela de metal, se dirije una visual por la parte diáfana del vidrio *fg*, á uno de los dos objetos cuyo ángulo se quiere observar. Se agarra la reglita del limbo movible, y se hace jirar á éste hasta que en la parte azogada del mismo vidrio, se vea el otro objeto reflejado por el espejo DE; y cuando ambos objetos coincidan exactamente en la parte diáfana y en la azogada del vidrio *fg*, se cuentan y apuntan los grados que el limbo movible ha andado sobre el fijo. Aun es preferible el transportar el ángulo al plano sin contar su valor en grados, colocando el canto de la regla sobre la línea tirada en el plano, de modo que el centro P del semicírculo caiga sobre el punto correspondiente elejido en aquella; y entonces tirando por el chaflan *cd* una línea, el ángulo que ésta forma con la marcada al principio en el plano, es igual al observado.

206. La utilidad de este instrumento consiste en lo reducido de su tamaño, que es de cinco á seis pulgadas en su mayor estension; en que se toman con él dos alineaciones á un tiempo, evitando asi el trabajo de comprobar la una despues de la otra; y en que se transportan inmediatamente al plano los ángulos observados.

Para mayor comodidad se lleva una cartera que contiene unos cartones preparados al modo de los que se usan en los libros de memorias, y sobre ellos se trazan inmediatamente los ángulos que se observan.

Esto es tanto mas útil en los reconocimientos militares, cuanto que puede determinarse de una vez la verdadera situacion de los objetos, y el plano [illegible] al mismo tiempo que se levanta.

Para su aplicacion, se tira en el plano á que se quiere trasladar los ángulos, una recta que se considera como diámetro, y en ella se señala un punto que representa el centro del instrumento. Se coje éste con la mano izquierda, y aplicando el ojo al punto de mira de la laminita de metal, se dirige una visual por la parte estañada del vidrio fg, á uno de los dos objetos cuyo ángulo se quiere observar. Se agarra la reglita del limbo movible, y se hace girar á éste hasta que en la parte azogada del mismo vidrio, se vea el otro objeto reflejado por el espejo DE; y cuando ambos objetos coinciden exactamente en la parte estañada y en la azogada del vidrio fg, se cuentan y apuntan los grados que el limbo movible ha andado sobre el fijo. Bien es preferible el transportar el ángulo al plano sin contar su valor en grados, colocando el canto de la regla sobre la línea trazada en el plano, de modo que el centro P del semicírculo caiga sobre el punto correspondiente de ella, y entonces [illegible] una recta, el ángulo que esta forma con la marcada al principio en el plano, es igual al observado.

208. La utilidad de este instrumento consiste en lo reducido de su tamaño, que es de cinco á seis pulgadas en su mayor extension; en que se miden con él dos direcciones á un tiempo, evitando así el trabajo de comprobar la una despues de la otra; y en que se transportan inmediatamente al plano los ángulos observados.

Para mayor comodidad se lleva una cartera que contiene unos cartones preparados al modo de los que se usan en los libros de memorias, y sobre ellos se trazan inmediatamente los ángulos que se observan.

Tercera parte.

Operaciones topográficas empleando los instrumentos.

207. Descritos ya los diferentes instrumentos usados en la topografía, resta manifestar su aplicacion á las diferentes operaciones que ocurren en el terreno, todas dirijidas á conocer las distancias entre los puntos, y la altura de estos, la configuracion, y demas accidentes del local, para representarlo todo en el papel, ó *levantar el plano*, con mas ó menos exactitud, segun las circunstancias, objeto, tiempo y medios.

Trazar y medir líneas; levantar y bajar perpendiculares; tirar paralelas; formar ángulos; y medir alturas accesibles é inaccesibles en el terreno, usando únicamente de cuerdas y piquetes.

208. Para trazar líneas rectas, si fuesen de poca estension, como sucede en el labrado de las maderas, corte de piedras ó montea &, se usa de una cuerda delgada *acb*, untada con almagre ú otra composicion que suelte. Teniéndola bien tirante por sus dos estremos *a*, *b*, se la sujeta á dos clavos ó piquetes fijados en los puntos por donde ha de pasar la recta, cuidando de que la tirantez no sea tanta, que no se pueda levantar la cuerda cuatro ú ocho pulgadas por una ó muchas partes *c*, segun la estension de la línea. Se suelta en seguida la cuerda, y al restablecerse la tension de sus estremos, quedará estampada sobre la superficie la recta *ab* que se queria. *Fig.* 95

209. Cuando las distancias son de mayor estension, como suelen serlo las que ocurren en el terreno, se hace uso de los jalones y mejor de las banderolas (51). Sean A, B, dos puntos por donde deba pasar una línea recta. *Fig.* 96

Se colocarán verticalmente dos jalones A, B, en dichos puntos, y otro tercero en C, próximamente á igual distancia de la que tienen aquellos, y se mirará desde el jalon A, haciéndo desviar á la derecha ó izquierda el C, hasta que se confunda con la visual que desde el A pasa por el B. Colóquense sucesivamente otros jalones bajo del mismo método, y de modo que ademas del que se coloca, siempre se descubran dos de ellos que disten entre sí 40 ó 50 varas, y se tendrán en el terreno diferentes puntos A, B, C, D, E. Tendiendo sobre ellos una cuerda, y echando á lo largo de ella cal ú otra materia que contraste con el color del terreno, ó bien haciendo un surco con una espiocha, pico, azada, arado &, quedará trazada la línea que se apetecía.

210. Para marcar el punto en que ha de situarse definitivamente cada jalon, es preciso que el hombre lo mantenga con el brazo derecho, bien perpendicularmente en línea con los otros, algo separado de su cuerpo, y que mire al encargado de la alineacion, para desviar ó acercar el jalon á la derecha ó á la izquierda, segun las señales convenidas con aquel, las cuales por lo general se hacen con solo la mano ó con un pañuelo, marcando el lado hácia que debe moverse el jalon. Si este no fuese enteramente recto, debe tenerse el mayor cuidado en que su cabeza y la curva que forme, esten en el mismo plano que pasa por los otros jalones.

Fig. 97 211. Si la línea ha de pasar por dos objetos distantes A, B, visibles uno desde otro, se colocará próximamente en la mitad de la distancia AB, un jalon D, y despues otro E en la direccion BD. Mírese desde D, para ver si la visual que pasa por los jalones D, E, pasa tambien por A; y si asi no fuese, habrá que colocar el primer jalon mas á la derecha ó izquierda, variando tambien el E hasta ponerlo en la nueva direccion y lograr la coincidencia exacta en la visual DA del punto medio marcado D, y el estremo A. Ya bien colocados los jalones D, E, se continuarán marcando en la línea DA los puntos F, G, H, desde los cuales se pueden alinéar los Y, K con el objeto B, y se tendrán los puntos que se quieran en la línea recta AB.

212. Como el terreno por lo regular no es una llanura, hay que marcar la línea, ya subiendo, ya bajando, para prolongarla des-

pues en el llano, ó bien hay que trazarla entre dos ribazos ó pendientes, que forman una cañada. *Fig.* 98

En el primer caso, se pone un jalon C en el estremo inferior de la pendiente, y otro D en esta; se alinéan despues las cabezas de los dos jalones con el pie B de otro, que se coloca en el llano y debe estar en el plano vertical de la línea AB.

Cuando la pendiente fuere muy rápida, los jalones C, D, no podrán alinearse, por poco que se suba con el pie del jalon B; por lo que será preciso poner otro G en el intermedio en el plano vertical ABC, alineándo el jalon D en la direccion CG. En la parte superior se colocan los jalones E, F, y se concluye la operacion alineándolos exactamente con algunos de los de el llano, como A ó B. *Fig.* 99

Para prolongar la línea mas allá de la parte superior de la pendiente, estando ya el jalon F en la direccion de los A, B, C, D, E, se coloca otro G que se alinéa con los E, F, y el H con los G, F, y continuando del mismo modo, se sitúan los Y, K, L.

El segundo caso, reducido á marcar la línea bajando, y prolongarla en el llano, no puede ofrecer dificultad; pues que bastará seguir el mismo método que acaba de esplicarse.

En el tercero, esto es, cuando se trata de trazar una línea recta atravesando la cañada ó valle ACE, se trazará primero la parte ABC bajando, y despues la CD subiendo, conforme á lo dicho; se alinearán los jalones D,E de la parte superior de la subida con los A,B opuestos, y se continuará el procedimiento despues en la misma direccion. *Fig.* 100

213. Cuando la mucha distancia entre los puntos estremos no permite el verlos con distincion, se pone detras del jalon á que se dirige la visual, un objeto oscuro, como el sombrero &c.

Bajar y levantar perpendiculares y dividir líneas.

---

214. Para bajar desde el punto A en el terreno una perpendicular sobre la recta EF, sujétese una cuerda por su mitad al piquete en A, y con las mitades AB, AC córtese la línea EF en los puntos B,C, llévese la cuerda á la parte inferior agarrándola por el medio A, dejándola sujeta con piquetes en los B, y C, hasta *Fig.* 101

que quede bien tirante; márquese el punto A′ en que cae el medio A, y tírese la línea AA′. La parte AD será la perpendicular pedida.

Este mismo método se emplea para dividir una recta en dos partes iguales, pues que por la construccion resulta BD=CD.

215. Para levantar una perpendicular en un punto D de la línea EF, se toma DB=DC; haciendo centro en los puntos B,C se marcan con una misma cuerda como radio dos arcos, y su interseccion, por ejemplo A, dará el otro punto de la perpendicular pedida: ó bien sin trazar los arcos se tomará para obtenerle la mitad de una cuerda BAC.

Fig. 102 216. Si la perpendicular se ha de levantar en el estremo A de la recta AB que no puede prolongarse hacia su derecha, se formará con una cuerda dividida en su mitad y sujeta en sus dos estremos B y A, un triángulo isósceles BEA, se pasará sin mover el resto, la parte BE á EC, en direccion esta de aquella, y se habrá marcado el otro punto C de la perpendicular propuesta.

Si fuese al contrario, que desde C se quisiese bajar la perpendicular CA á la línea BA, subsistiendo el obstáculo anterior, desde C, con la cuerda BC, señálese un punto B en la línea AB; divídase BC en su mitad E; llévese la EC hasta que corte á la BA en un punto A, y este será el pie de la perpendicular AC que se queria bajar desde C.

217. Las operaciones anteriores son iguales á las enseñadas en la geometría especulativa, con solo la diferencia de emplearse cuerdas en vez de la regla y compás. Por lo tanto, es patente que cuando haya en el terreno que formar ángulos iguales á otros dados, tirar paralelas &c., esto no puede ofrecer dificultad, sirviéndose como de radio propio para trazar los arcos que se necesiten, ya de una cuerda que tenga sujeta en su estremo una punta de madera ó hierro, ya de un liston ó de una regla.

Medicion de líneas con percha ó con cadenilla.

218. Luego que se han trazado las líneas en el terreno, ó cuando sin trazarlas se tiene hecha la alineacion; si se trata de

medirlas, se emplean, bien los reglones ó las perchas, ó bien la cadeneta ó cadenilla. (*)

219. El uso de todas estas medidas está reducido á colocarlas exacta y sucesivamente á lo largo de la línea ya determinada, bien en contacto unas con otras; llevando la cuenta mientras asi se procede, del número de veces que cada medida se aplica al terreno, para hacer luego la multiplicacion de este número, por el valor de la unidad usada. Esta operacion cuando se empléan los reglones, se hace mas pronto con dos de ellos iguales; pasando á colocar cada hombre

(*) La exactitud que requiere á veces la medicion de una línea, como sucede cuando ha de servir de base para operaciones sucesivas, (381) ha obligado á buscar los medios de emplear una unidad de medida tal, que se eviten los diferentes motivos de error, que de solo la materia de que está construida deben provenir; pues es sabido que los metales, las maderas etc. se dilatan mas ó menos, segun las variaciones de la atmósfera. De aqui el haberse empleado reglas de platina cubiertas con otras mas cortas de cobre, y unidas solo en una de sus estremidades, formando asi termómetros metálicos que marcan á cada momento el efecto de la temperatura por la cantidad que el cobre se dilata mas que la platina, cuya diferencia se gradua en unas divisiones trazadas á la estremidad de la regla de cobre, por medio de un nonio. Tales fueron las reglas usadas en las operaciones geodésicas y astronómicas, que se practicaron para determinar la longitud del metro. No se cita aqui cuanto concierne á este punto por no exigir tanta precision las operaciones á que esta obra se refiere. Para la correccion por el efecto de la temperatura, basta saber que cada grado del termómetro centígrado produce en cada metro la variacion de $0^m,0000089$ en la regla de platina; 0,0000122 en la de hierro; y 0,0000187 en la de laton. Por lo tanto una regla de hierro de 6^m á 8^o del centígrado llegaria á tener á la temperatura de 13^o . . . $6^m\ (1+0,0000\ 12\times5)$: luego si á esta temperatura se halla que una base contiene 1000 veces dicha regla es claro que la longitud de aquella es de $1000\times6^m\ (1\times0,000012\times4)$. *Chazallon. Memoire sur les divers moyens de se procurer une base etc.*, año de 1837. Podrán tambien consultarse la Geodésia de Puissant, y el tratado de práctica de Vallejo. En las operaciones geodésicas en que no se requiera tanta exactitud se pueden poner las medidas al tope unas de otras, empleando perchas de pino, de cinco á seis varas de largo, empapadas ó *templadas* en aceite de linaza hirviendo, y pintadas con un barniz espeso; con lo que serán poco sensibles á las variaciones higrométricas del aire y aun á las mudanzas de su temperatura. La figura 103 representa la forma de una de estas perchas. Los lados del rombo ABCD, y la diagonal ó travesaño CD hacen de tornapuntas, para que la regla AB no pueda alabearse: los dos estremos se terminan en unas planchas ó aristas de hierro, ó mejor el uno en una plancha, y el otro en una arista. En fin han usado los ingleses, tubos cilíndricos de vidrio y cadenas de acero. Fig 103 el suyo alternativamente, luego que su compañero ha sentado en el terreno el que lleva.

Estos reglones, y con mas razon las perchas, se colocan cuando el terreno no es llano ni próximamente horizontal, sobre caballetes bien firmes que proporcionen esta circunstancia; y si ni aun asi puede lograrse, habrá que medir su inclinacion como se dirá (222).

220. Para medir con la cadena que se supondrá de diez varas de largo, se coloca su anillo A en el pie del jalon, desde el cual
Fig. 24 quiere empezarse á medir; y se queda en este punto el que dirige la operacion, ú otro, para cuidar de que no se separe de la línea el encargado de la cadena, que la lleva por el otro estremo con la mano derecha, teniendo en la izquierda diez agujas. Marcha este último en la direccion de los otros jalones ó piquetes, que deja siempre á un mismo lado, hasta que se siente detener, á cuyo tiempo sienta la cadena en el terreno bien tirante, pero sin esfuerzo; cuidando de que estén libres los eslabones, y de separar las piedras, matas y demas que puedan trastornar la direccion rectilínea. Ejecutado todo esto, clava contra el estremo de la parte interior del anillo B, bien verticalmente, una de las agujas, y marcha adelante. Va siguiéndole el que quedó en el otro estremo, ó principio de la cadena, teniéndola cogida del agarradero A, hasta que llega á la primera aguja, en la cual mete la anilla; apoya entonces la mano sobre el ojo de aquella para que no se incline, y para que el hombre delantero sintiendo tirar de la cadena coloque otra aguja; y siguen ambos despues la operacion de este mismo modo, recogiendo el que va detras las agujas que sucesivamente encuentre coladas por el delantero hasta que se hallen en su poder las diez que este llevaba. Cada uno de estos actos de medicion debe apuntarse por el Director de ella en un registro á propósito, encabezando antes una columna de él, con el nombre de *tramos*, y poniendo debajo de esta palabra 1.° , 2.° 3.°: es claro que, procediéndose asi habrá al fin tantas veces diez varas como tramos resulten en el registro: Pero como por lo regular al aplicarse en la línea de medicion por última vez la cadena, la medida no vendrá al justo, luego que se recoja la última aguja, se contarán las varas y pies, que de esta última aplicacion resulten, por medio de las planchitas de cobre y

eslabones; y las pulgadas correspondientes à aquella parte de eslabon que falte para llegar al último jalon, se tomarán con una vara de medir.

221. Cuando se mide diferentes veces una misma base, es lo comun encontrarse con distintos resultados; en cuyo caso será necesario tomar un término medio entre las medidas halladas. Esto se hace sumándolas todas, y partiendo la suma por el número de veces que se ha hecho la operacion. Debe tenerse presente, que entre dos medidas de una misma distancia, practicada bien con cuerdas ó bien con cadenilla, la menor será la mas próxima á la verdadera, á causa de que la probabilidad está porque al medir se tendria demasiado tirante la cuerda ó la cadena; pues de lo contrario habria cabido mas veces como sucede en el resultado mayor.

222. Cuando el terreno se presenta con desigualdades, no es tan facil la medicion, y se hace preciso colocar la vara ó reglon en *Fig.* 104
ab, *bd*. . . horizontalmente, valiéndose del nivel de aire: hecho lo cual, tomando tantas veces la longitud de la vara ó reglon como veces se colocó esta en tierra, se tendrá la estension AB.

Para que los puntos a, b', d', m', correspondan á los A, b, d, m, se usa del perpendículo ó plomada, que colgado de los primeros, toma las direcciones verticales aA, $b'b$, $d'd$, $m'm$, las cuales por consiguiente son perpendiculares á la horizontal AB.

Las plomadas, para evitar los pequeños movimientos, pueden estar dentro de un vaso lleno de agua, cuidando de llevar en cuenta el espesor del hilo. No obstante toda la minuciosidad y las correcciones, y á pesar de que la base se haya medido dos ó mas veces en uno y otro sentido, siempre debe temerse algun error, cuando menos de una vara por cada 5o∂. En la mayor parte de las bases medidas tiempo ha, por Cassini, y reciéntemente por el Baron de Zach, se halla el error de una vara por cada 12∂,

223. Cuando se quiere usar de la cadena en pendientes largas y rápidas, hay que advertir, que si se la pone horizontalmente, ademas de ser procedimiento incómodo, seria poco exacto por la curva que su peso la haria formar.

Lo que en este caso puede hacerse, es medir la longitud total de la pendiente, que se supone sea K, y despues tomar con un instrumento el ángulo i de la inclinacion, con lo que se tendrá, siendo x la distancia horizontal, por la propiedad del triángulo rectángulo (44), $x = \mathrm{K} \cos i$.

Pero siendo el ángulo i generalmente muy pequeño, es mas exacto el calcular el esceso de K sobre x por medio de la formula $\mathrm{K} - x = \mathrm{K}\,(1 - \cos i)$, y como $\cos i = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$, será $\mathrm{K} - x = 2\,\mathrm{K} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$; esto es, la medida reducida á la horizontal será igual al duplo de la longitud, multiplicado por el cuadrado del seno de la mitad del ángulo de inclinacion(*). El ángulo i puede medirse por medio del nivel para pendientes (538), y
Fig 250′ tambien por el pequeño de aire (559), el cual en uno de los estremos de la plancha en que está colocado, tiene ademas del tornillo que le sirve de charnela para que sobre ella jire la plancha, otro para que marque por el número de sus vueltas y fracciones de estas, la inclinacion de la regla, ó sea el ángulo.

Fig 223′ Si se usa de la estadia (156), se reducen las distancias al horizonte, cuando el ángulo de inclinacion del eje óptico del micrómetro es conocido por medio del instrumento á que va unido. Sea O la posicion del objetivo, y cd la de la estadia: suponiendo esto,
Fig. 73″ las visuales dirijidas por la interseccion de los hilos, abrazarán el número de divisiones comprendidas entre c, d. Mas como la estadia no está situada del modo que se situó para graduarla, es indispensable hacer una correccion: para esto se tirará por el punto d una perpendicular dp' sobre la prolongacion op del eje óptico, y se formará el triángulo pdp' semejante á poq, por ser los dos rectángulos y tener el ángulo p comun; de consiguiente, el poq al que se llamará a, será igual á cdc'. Si en el triángulo rectángulo pdp' se hace $pd = b$, representando m siempre el número de partes que le corresponden en la escala de distancias, será $dp' = b \cos a$, que espresará la distancia op', y será tambien $oq' = b \cos^2 a$. Comparando este resultado con la figura, parecen necesarias ademas dos correcciones, porque en realidad $oq > oq'$, y $od > op'$; pero si se atiende á que por lo comun qq' debe ser muy pequeña, y que en el triángulo isósceles $c'od$, el ángulo $c'od$ comprendido por los lados

(*) Véase la *Geodesia de Puissant.*

iguales es muy pequeño, la cuerda $c'd$ puede suponerse confundida con el arco, y por consiguiente no hay dificultad en considerar como iguales dichas cantidades, y menos debe haberla todavia si se atiende al corto uso que se hace de este medio. No sucede lo mismo cuando se quiere aplicar la fórmula á la determinacion de la diferencia de altura ó *nivel* entre dos puntos, por ejemplo, o, d, por medio de las tangentes trigonométricas de los ángulos de inclinacion; pues entonces es indispensable hacer la correccion dp.

Para reducir al horizonte las distancias medidas, se puede evitar el cálculo trigonométrico al hacer la operacion, teniendo una tabla calculada de antemano por la fórmula anterior de medio en medio grado, ó de grado en grado, hasta la inclinacion de 35 á 40° para un rádio de 100 varas: su uso es muy fácil. Supóngase que la inclinacion en que se halla la distancia medida D, sea de 15°, se buscará al lado de este número en la tabla, el número representado aqui por r, que corresponde á la reduccion de 100, y se verá que en otra distancia R reducida al horizonte, es $R=\frac{Dr}{100}$; lo que demuestra que para hallar el resultado basta hacer una multiplicacion. En esta tabla puede introducirse la correccion qq' de que se ha hablado, en caso de que se creyese indispensable llevarla en cuenta.

En las operaciones de detalle puede omitirse esta reduccion, especialmente si el error cometido al medir la longitud, se cree menor que el que resulte de la operacion de tomar el ángulo.

224. Hasta aqui solo se ha tratado de medir distancias ó líneas en el terreno sobre ellas mismas, ó siguiendo su direccion. A veces las circunstancias de él no lo permitirán; por lo cual va á decirse el modo de proceder en tales casos, cuando se usa solo de la cuerda ó cadena, de la vara de medir, y piquetes.

225. Trátase de medir la distancia AB atravesada por un rio. Se clavará un piquete en cualquier punto H, y otro en F, en la alineacion de B y H, de suerte que sea HF=HB. Fórmese entonces en el punto F el ángulo BFJ=B; búsquese en la recta FJ un punto M que esté en línea con los H, A; y FM será igual á la línea AB buscada. *Fig.* 105

226. Este mismo método resuelve el problema de tirar una paralela á AB, por un punto dado F.

227. Si se hubiera tomado HG, tercio, cuarto, ú otra cualquier parte de HB, formando el ángulo $HGC = B$, seria GC el tercio, cuarto &. de AB; pues los triángulos semejantes GHC, ABH, dan HG : GC : : HB : AB.

ó . . . $\frac{1}{3}$ HB : GC : : $HB = 3HG$: AB : $= 3GC$

Fig. 106 228. Si la disposicion del terreno no permitiese tirar la GC, ni medir la HG; y se quisiese fundándose tambien en la semejanza de los triángulos, averiguar la distancia AB; se tiraría desde un punto cualquiera C al A la CA, y al B que equivale al H de la figura anterior, la CB prolongada; y se tomaría BG igual á una parte BD de la BC. Haciendo entonces el ángulo $G = D = C$ el triángulo BGF, sería igual al DBE, y el lado $BF = BE$, y por consiguiente se tendría la proporcion $BG = BD$: $BF = BE$: : BC : BA.

Fig. 107 y 107′ 229. Si el terreno se presentase horizontal, se podría medir la $ab = AB$ y formar los ángulos a, b, iguales á los A, B; con lo que se tendrían las distancias ac, bc iguales á las AC, BC. Igual operacion se puede hacer sobre la misma AB, formando por la parte inferior ángulos iguales á los A, B de la superior.

Fig. 108 230. Para medir AB, distancia del todo inaccesible desde un punto cualquiera H, tírense la HA al estremo AHL á un piquete L en direccion de H, y BLA, y HC á un punto cualquiera C de la LA; tómense la HK parte alicuota cualquiera de HL, y HM igual parte alicuota de HC, y por último, prolónguese la KM hasta que se encuentre en un punto P de la HA. Hágase despues la misma operacion por la derecha hasta encontrar el punto Q; y la PQ será la mitad, el tercio, el cuarto &c. de la AB, segun hayan sido H K, HO, mitad, tercio, cuarto &c de las HL, HF: pues teniendo por construccion que. . . . . HK : HL : : HM : HC;
serán paralelas. MK, CL;
asi como sus prolongaciones. . . . . MP, CA:
de donde resulta que. . . . . HM : HC : : HP : HA.
Del mismo modo se demostrará que. . HN · HY : : HQ : HB;
pero como por construccion. . . . . . HM : HC : : HN : HY,
será tambien. . . . . HP : HA : : HQ · HB;

y por consiguiente paralelas las. . . . . PQ, AB.
de todo lo cual resulta que. . . . . HP : HA :: PQ : AB.

Este mismo método, como se ha visto, puede emplearse para tirar una paralela por un punto dado P, á una línea inaccesible AB.

231. Cuando se esplicó el modo de trazar y medir líneas en el terreno (208), se supuso que este no presentaba obstáculo alguno que impidiese ver los estremos de la línea para la alineacion de los jalones; pero si ocurriese este caso, se elegirá un punto C desde el que se vean los puntos estremos A,B, y se tirarán las CA, CB; hecho lo cual, y formando aparte un triángulo *abc* igual ó semejante al ABC, se tendrá el ángulo $a=$A, y una porcion AD de la alineacion que se busca. Para hallar otros puntos D′,D″ intermedios de la misma, se tirarán desde C, atravesando los claros, las CJ, CK; y formando los triángulos *acd′*, *acd″* iguales á los ACD′, ACD″ se hallarán *cd′*, *cd″*: tomando entonces estensiones iguales á estas sobre las CJ, CK, quedarán marcados los puntos D′, D″ que se buscan. *Fig.* 109

232. Si un estorbo impidiese hallar un punto C, desde el que á un mismo tiempo puedan verse los A,B; se elegirá otro E, desde el cual se descubran los A y C. Por medio del triángulo CEA formado aparte, se hallará el AC que no podia medirse, y el ángulo ECA, que restado de ECB dará el ACB; el cual con CA hallado y CB, que puede medirse, reducirán este caso al anterior para el objeto de determinar los puntos intermedios D,D′. *Fig.* 110

233. Pueden tambien hallarse en la alineacion de los puntos A,B, los G, H; esto es, la prolongacion GH de la AB levantando en cualesquiera puntos A,B de esta las perpendiculares iguales AC, BD, que sobresalgan del obstáculo O. En seguida por los puntos C,D se tira la línea CDEF; se levantan en otros puntos E,F mas allá de O las perpendiculares EG, FH, iguales á las CA, DB, y tirando por los puntos de su terminacion la GH, esta línea será la prologacion buscada. *Fig.* 111

234. Si desde un punto D se quiere tirar una recta á otro B que no se descubre desde aquel, se formará un triángulo ABC cualquiera, con tal que el lado AC pase por el punto D. Tírese *Fig.* 112

despues por un punto cualquiera E, la EF paralela á la AC; midánse ambas, y la parte AD; y se tendrá la proporcion AC: EF: : AD: EG. Poniendo entonces un piquete en G, y continuando la alineacion de DG, se tendrá la línea pedida.

Fig 113 235. Para prolongar una línea AB á pesar de un bosque, fórmese un ángulo cualquiera BAH; levántese en un punto E la perpendicular EB, y en otros F, G, H, las FC, GD, HK indeterminadas; y se tendrá

$$AE : EB : : \left\{ \begin{array}{l} AF : FC = \dfrac{EB \times AF}{EA} \\ AG : GD = \dfrac{EB \times AG}{AE} \end{array} \right.$$

Trasladando ahora estas longitudes sobre las FC y GD, se tandrán los puntos C, D por donde se continuará la línea AB al otro lado del bosque. Si se hiciese BAH $= 45°$, se tendria CF $=$ AF $=$ . . GD $=$ AG . . HK $=$ AH. Para esta operacion se han hecho rectos los ángulos E, F, G, H, pero no es preciso; basta que sean iguales.

Fig 114 236. Si no se pudiese formar el ángulo tírese á cualquier distancia de AB la EF, y en cualesquiera puntos de ella E, G, H, F, fórmense ángulos iguales, tírense las EA, GB, HC, FD; y averigüense las distancias HC, FD.

Fig 115 237. Si se quisiere saber el punto en que las AD y EF han de llegarse á encontrar, se tirará otra línea BS; y se dirá, A E: EN : : BG : GM : : DF : FS. Cuando DF llegue á ser cero, tambien lo será FS; de consiguiente la operacion se reduce á hallar una cuarta proporcional á las AE, BG y EN, ó á las BG, GM, DF &c.

Fig 116 238. Muchos serán los métodos sencillos que la necesidad hará discurrir para hallar distancias inaccesibles. Asi dos reglas AB, BD en ángulo recto en C sobre que giran, con un apoyo ó eje para clavarse en el terreno; y con otras reglitas á sus estremos, movibles sobre sí mismas que hagan de alidadas, servirán para hallar, por ejemplo, el ancho RX de un rio. Para ello, fíjese en C el instrumento; diríjanse las visuales ABX, DB'X háganse girar hácia la izquierda ó derecha las reglas; y se tendrá en el terreno accesible el triángulo $ACX'=CXB'$, y por consiguiente la distancia $CX'=CX$: de la cual rebajando la parte CR, quedará RX ancho del rio.

239. Una persona en A hallará la longitud de una distancia inaccesible AB, dirijiendo por una señal cualquiera puesta en la parte delantera de su sombrero, ó por el pico de éste si fuese de los apuntados, la visual AB, girando sobre sus talones, y llevando la cabeza en la misma posicion que antes, verá á qué punto C del terreno va á parar esta visual; y tendrá $AC=AB$: ó rebajando AR, el ancho del rio. *Fig.* 117

Medicion de alturas con solo jalones.

240. Si se quiere medir la altura AB hasta cuyo pie puede llegarse, se coloca en C á una distancia proporcionada el jalon EC, y en D otro mas corto D F, de modo que por sus estremos F, E se vea la parte superior A de la altura; y marcando el punto G por la horizontal FG, se tendrá $FH : HE :: FG : GA$. Como las tres primeras distancias pueden medirse, quedará determinada la AG, á la cual añadiendo la $BG=FD$, se tendrá toda la altura buscada. *Fig* 118

241. Si el terreno no se presenta horizontal, se hallarán primero las distancias LB, KD, iguales á las FG, HF;

y por las proporciones $\left\{\begin{matrix} FH : HE :: FG : GA \\ FH : Hr :: FG : GB \end{matrix}\right\}$ se tendrán $\left\{\begin{matrix} GA \\ GB \end{matrix}\right.$ *Fig.* 119

y. . . . . $GA+GB=AB$.

242. Cuando la altura fuere inaccesible por su pie, se colocarán como anteriormente los piquetes TM, LN; se dirijirá la visual TA, y se apuntará la distancia TR. Sitúese despues el piquete mayor en el punto Q, y el menor en P, de suerte que tambien se vea A por sus estremos; mídase la distancia FS, restando de la cual $TR=ST'$, se tendrá FT'; mídase tambien $PM=FT'$; y la proporcion $FT : L'S :: F'T' : DA$ dará esta parte; á la cual añadiendo la altura del piquete F'P, se tendrá la de AB. *Fig.* 120

Esta práctica está fundada en que siendo $ST'=TR$, resultarán paralelas TL ó TA, y L'T', y los triángulos semejantes:
F'L'T' y F'TA darán. . . . . . . $F'T' : F'T :: F'L' : FA$;

y como. . . . . FL′ : FA : : L′S : AD;
resultará de aqui que. . . . . FT′ : FT : : L′S : AD.

*Fig.*121 243. En el caso de que el terreno se presente desigual, se medirá la HY=AE, y luego por los medios ya manifestados (230 y siguientes) se hallará YJ=EC, distancia inaccesible. Súmense la HY, y la YJ, y se encontrará HJ=AC. . . . .
Por la proporcion . . . AE : EB : : AC : CD. . . . se tendrá CD,
y por la. . . . . AE : EG : : AC : CJ. . . . . CJ,
y en fin. . . . . .DC + CJ = DJ altura pedida.

A la vista está que las prácticas anteriores no darán resultados muy exactos, asi por lo grosero de los medios empleados, como por la omision de las correcciones, de las cuales ha sido indispensable prescindir.

Levantamiento de planos con piquetes y cuerdas.

244. Los medios ó instrumentos empleados hasta aqui para medir distancias y alturas, se aplican tambien para trasladar al papel la configuracion de un terreno, edificio, jardin, bosque &c., ó para lo que se llama *levantar el plano del pais* ó de los objetos. Todo está reducido á trazar en el papel ángulos iguales á los que formen las sinuosidades, cercas, paredes &c. del terreno, edificio, &c., y
*Fig*122 *y* 123. á dar á los lados en aquel, longitudes iguales á los que tienen en este: con lo cual los triángulos, cuadriláteros, ó cualquiera otra figura de que se compongan los espacios que se quieren trasladar, resultarán semejantes en el plano. Un ejemplo aclarará todo esto. Trátase de levantar el plano de la casa, jardin, y dependencias, que representa la figura. Para verificarlo, recórrase primero bien despacio el edificio y demas, esterior é interiormente, formando de todo ello un bosquejo ó *croquis*.

Concluido esto, se entra en el edificio, y se miden por dentro los lados de las piezas, y las diagonales BC, *bc*.

Mídase tambien la distancia que hay desde los ángulos inmediatos á la puerta principal, la anchura de esta, la de la cochera y cuadra, la de las ventanas, el diámetro del brocal del pozo, la anchura de los tramos de la escalera, y demas pormenores.

Entrando en el jardin, se miden en los lados de la cerca las longitudes arbitrarias YR, YS, asi como la distancia RS que une los estremos de ellas, y se hace lo mismo desde los demas ángulos de la cerca: ó bien se toma esteriormente la medida de las XT, ZY′, y la de las TV, Y X′ en la prolongacion de Y′T, y por último la de las XV, y ZX′. Tírase el eje A4, y mídanse despues las distancias 1, 2; 2, 3; 3, 4; el radio de la glorieta *g*; el ancho de las calles principal y de traviesa; los lados de los cuadros &c.

245. Una vez anotadas todas estas medidas en el croquis, facil cosa es trasladarlas al papel para tener el plano del edificio y sus dependencias.

Para lograrlo, trázese en aquel el eje A′ á la distancia correspondiente; tírense á este las paralelas que marcan las paredes colaterales; y sobre aquellas levántense las perpendiculares que representan las divisiones de las piezas; ó bien con las diagonales conocidas *bc*, BC, fórmense los triángulos correspondientes de que ademas se conocen los dos lados, y se tendrá la figura de las piezas.

Por lo que hace á las longitudes del eje y de las demas líneas, se tomarán en la escala determinada, trazándolas en el papel con el mismo número de varas, pies, y pulgadas que sus correspondientes tienen en el terreno.

Haciendo lo mismo en los pisos superiores, se tendrá el plano de todo el edificio, quedando únicamente por hallar las alturas respectivas, cosa que corresponde al perfil.

246. Invirtiendo estos procedimientos, y trasladando al terreno con la vara las medidas que tienen en la escala del plano, los lados, diagonales &c, se trazará por un método semejante al anterior el proyecto de un edificio, siempre que el terreno formare naturalmente un plano horizontal, ó se le diere antes esta disposicion. Pero si el local estuviere formado por uno ó muchos planos inclinados, habrán de hallarse los puntos por el método esplicado para la medicion de rectas horizontales (212) en terreno irregular, á causa de que la representacion se hizo, y las medidas se tomaron con relacion á un plano horizontal.

247. Cuando haya, como sucede en los edificios y castillos antiguos, torres ó torreones, cuyo centro no esté en la prolongacion de los muros á que están unidos, para situarlos en el plano ta-

Fig. 124 les como naturalmente se hallan en el terreno, se tirarán las tangentes paralelas *qm*, *pr*, y á estas la perpendicular *pq* que será el diámetro de la torre. Si se quisiere despues tenerla en su posicion, basta tirar la tangente $p'q'$ paralela á *pq*; y su mitad r' será el punto de contacto, asi como $r'c$ el radio que determinará la posicion del centro.

248. Para determinar el punto de contacto á la simple vista, es claro que solo hay que tirar una visual, ó marcar una línea con la cuerda que toque al punto mas saliente de la curva, donde podrá haberse puesto una señal; y cuando esto no pudiere hacerse bien por defecto de construccion de la torre, habrá que tomar el punto medio del espacio de curva en que la cuerda ó visual remate. Pero como este método es muy erróneo especialmente si el radio es algo considerable, si se quiere mas exactitud, podrá hacerse la operacion tirando á la tangente $p'q'$ una paralela *st* que sea secante á la curva de la planta: entonces por los puntos *s*,*t* en que la corta, tírense á la tangente las perpendiculares *sm*, *on*, y el medio de la porcion interceptada entre ellas será el punto r' buscado.

Una vez determinados los puntos de contacto, se pueden tirar desde un punto del terreno dos tangentes, cuyo ángulo quedará determinado; despues de lo cual, levantando sobre ellas en los puntos de contacto las respectivas perpendiculares, se tendrá el centro de la torre hallado desde la parte esterior.

La sola inspeccion de la figura da á conocer el procedimiento que deberia emplearse en el caso de querer obrar en la parte interior, y aun cuando esta estuviese ocupada por una pieza, para determinar el centro y la situacion de la torre respecto al todo del edificio.

249. Con el plano, pues, que se ejecute de un modo semejante al tomado por ejemplo, de una posesion, hacienda &c., se puede ya medir la superficie que contenga, bien sea dividiéndolo en triángulos, bien calculando la area de los cuadriláteros, polígonos &c. de que se componga Pero como no debe esperarse mucha exactitud empleándo solo, como se ha hecho, la vara y la cuerda ó cadena, se hablará con particularidad de este punto mas adelante.

De otros medios para hallar distancias y alturas sin emplear los instrumentos geométricos.

250. Pueden hallarse las distancias de unos puntos á otros valiéndose de la propagacion del sonido. Se sabe por esperiencia (*)

(*) Segun las leyes del movimiento, el sonido corre algo menos que lo marcado por la esperiencia; cuya anomalía se esplica (veáse el tratado de física de Beudant). El ilustre Newton valiéndose de la teoria del movimiento oscilatorio, halló la fórmula $V = \sqrt{\frac{gHm}{D}}$: en la cual son g = gravedad terrestre, H = altura barométrica, D = densidad del aire referida á la del mercurio, y m la densidad del mercurio á 0^o. Esta fórmula dá una velocidad $\frac{1}{6}$ menor que la encontrada por la esperiencia; pero Laplace ha introducido la correccion del calórico específico ó del que deben producir las compresiones procedentes de las vibraciones, con lo que la diferencia viene á ser despreciable, pues se reduce á 0,01.—De los diferentes esperimentos ú observaciones sobre la velocidad del sonido al través del aire, hechos en Europa y en América, uno de los mas notables por el esmero y cuidado con que se verificó, es el que ejecutaron en las inmediaciones de París los individuos de la junta de longitudes, en las noches de 21 y 22 de junio de 1822.

De él resulta, que siendo la temperatura del aire 16°C, estando el barómetro á $0^{mt}7565 = 32^{pulgs.}58$, y señalando el hygrómetro de Saussure 78°, la velocidad del sonido es $340^{mt}, 88 = 407$ varas 796 por segundo de tiempo. La fórmula teórica con la correccion debida á Mr. Laplace, dá $337^{mt}, 21$; de modo que la diferencia entre la observacion y la teoría, es solo de $3^{m.}67$; es decir, un centésimo de la cantidad que se busca. Esta diferencia es bastante pequeña para que se pueda atribuir á los errores de la observacion, y acaso á la influencia del vapor acuoso, esparcido por el aire en el momento de las observaciones.

Por medio de dicha fórmula se puede calcular la velocidad del sonido para una temperatura cualquiera.

	Temperatura.	*Velocidad.*	*Temperatura.*	*Velocidad.*
Asi para. .	—10° centíg. .	321^{mt}, 32	+15°	336, 61
	— 5°.	324, 44	+20°	339, 58
	0°, ó hielo .	327, 52	+25°	342, 52
	+ 5°.	330, 58	+30°	345, 45
	+10°.	333, 61	+35°	348, 35

La fórmula de Mr. Laplace, es $V = \sqrt{\frac{gmh}{D}} \sqrt{\frac{c}{c_{\prime}}}$; en la cual c re-

que este recorre $403\frac{2}{3}$ varas en $1''$ en el aire libre á la temperatura media de 16°. Asi pues, si desde que se ve el fogonazo del disparo de un cañon, se cuenta con un reloj de segundos el nú-

presenta lo que se llama *el calor específico bajo de una presion constante*, *y* c, *el mismo en un volumen constante.* En esta fórmula se prescinde del vapor de agua contenido en el aire; pero bajo de esta consideracion la fórmula se convierte en $V = 332^m,1\sqrt{\dfrac{1+ab}{1-\frac{3}{8}\cdot\frac{f}{h}}}$, valor general de la velocidad del sonido à una temperatura y á un grado de humedad cualesquiera. Representa f la velocidad del vapor ó la presion que sufre; a el aumento que adquiere un volúmen 1 de aire, cuando la temperatura sube de 1 grado centígrado; y b el aumento por cierto número de grados. Cuando las observaciones no son *recíprocas ó cruzadas*, esto es, hechas en los dos estremos de la distancia al mismo tiempo, hay que introducir en la ecuacion, la correccion correspondiente á la velocidad del viento. *La fórmula general de la velocidad del sonido llevando en cuenta todas las circunstancias atmosféricas*, es $v = 341^m,3 + 0^m,6058\,(b - 15) + 0,085\,f + v'\cos a$; en la cual v' es la velocidad del viento, y a el ángulo que este forma con la direccion de la distancia que se quiere hallar. La velocidad v' del viento, es siempre menor que la v del sonido, pues en los mas fuertes huracanes es la primera de 40 varas por segundo, ó de menos de 22 leguas por hora. En esta fórmula se ve que la velocidad del sonido no depende de la presion barométrica ni de la naturaleza de él; esto es, que sea ó no el sonido musical, grave ó agudo, su velocidad es siempre la misma, como se ha demostrado ingeniosamente por Mr. Biot, haciendo este gran físico tocar una pieza de música muy conocida en uno de los estremos de un acueducto de mas de 1000 metros de largo, y escuchando en el otro. Véase para todo lo dicho sobre este asunto, al citado Mr. Chazallon.

Este autor propone entre otros medios espeditos para medir una base, valerse de la velocidad del sonido por el resultado de observaciones *recíprocas*, para destruir asi la influencia indudable del viento en la velocidad del sonido; porque entonces, suponiendose la de aquel constante, lo que la del sonido se acelere en uno de los estremos, eso mismo se retardará en el otro, y el resultado medio será igual al que se obtenga en la calma perfecta. Pero como la inexactitud del resultado que por este procedimiento se hallare, provendrá de dos causas de incertidumbre, cuales son: *la verdadera velocidad del sonido, y la medida del tiempo de su propagacion de un estremo al otro*; deberían para atenuar estos dos motivos de error, repetirse las esperiencias. Como el error de la velocidad del sonido provenga de la influencia del viento, podrá esta hacerse desaparecer sensiblemente; ya sea tirando cañonazos *recíprocos y simultáneos* en los estremos ó estaciones; ya sea midiendo en el momento de la esplosion la velocidad del viento con un instrumento á propósito, que el autor llama *ventímetro.* Si no se hiciere uso de este ni de los tiros, y si tampoco se pudiere elejir la base perpendicular á la direccion del viento, propomero corrido de estos, hasta que se oye el cañonazo, y se le multiplica por 403 $\frac{2}{3}$ varas se tendrá la distancia entre el punto en que se halla el cañon, y el del observador (*).

ne Mr. Chazallon que se ponga el cañon hácia el medio de la distancia, pero mas cerca del estremo por donde viene el viento; con lo que, y bajo de varias observaciones, infiere la fórmula para hallar la distancia.

El segundo error se disminuye hasta cierto límite, elijiendo distancias bastante grandes, porque la intensidad del sonido se estingue rápidamente.

En cuanto á la medida del tiempo, es cosa fácil teniendo un buen reloj de segundos valuarla precisamente con solo el error de un sesto de segundo. Al efecto se van contando los segundos 1, 2, 3. . . . que señala el reloj, y con el pie ó boca se van marcando é intercalando al mismo tiempo entre ellos, 1, 2, 3. . . . tiempos; lo que se consigue fácilmente con un poco de ejercicio.

La lluvia y la niebla no tienen influencia alguna en la velocidad del sonido. En fin, esta varía segun la temperatura, siendo mayor en el verano que en el invierno.

Las esperiencias hechas en la máquina neumática, prueban que el sonido se amortigua al paso que el aire se enrarece y que se estingue en el vacío; razon por la cual las esplosiones mas terribles de los trastornos terrestres no podrian oirse mas allá de los límites de nuestra atmósfera; y á la inversa, que se aumenta el sonido con la condensacion del aire por el frio. Por esto el sonido dejenera en las regiones elevadas, y un tiro en una grande elevacion hace un ruido semejante al de un cohete: cuando por el contrario en las regiones polares, la voz humana se oye á una ó dos millas. Sobre la superficie de las aguas, el sonido se estiende mucho mas, sin duda porque no le entorpecen su marcha las ondulaciones ú ondas sonoras; y esto esplica la causa porque oyen los habitantes de las poblaciones situadas á la marjen de un rio, un cañonazo á gran distancia, mientras que los de otras interiores, sin embargo de hallarse mas cercanos, no le oyen. En la mar se oye el estampido del cañon de á doce, cargado con dos ó tres libras, hasta 15 ó 18 millas.

En fin, es de observar que para hallar por medio del sonido la distancia entre dos puntos, no es *siempre preciso descubrir el uno desde el otro.* Una colina, un montecito, un bosque pequeño entre ambos, no impiden ver el resplandor del cañonazo, como entre otras esperiencias lo prueba una observacion de Cassini; pues á pesar de no poderse ver desde Mompeller el fanal de Cette por impedirlo la montaña de Saint Bauzeli de 479 varas próximamente de altura, el resplandor del cañonazo tirado en Cette se vió en Mompeller.

Durante el dia se pueden hacer las observaciones de esta clase, dirijiendo un anteojo hácia el sitio de la esplosion.

(*) Como cuando se ve la luz á cierta distancia no se la percibe en el mismo instante en que se produce, parece que esta circunstancia deberia hacer erróneo el resultado; pero desde luego se conocerá la poca influencia del retardo si se atiende á que la propagacion de la luz se hace con tan prodijiosa rapidez, que puede mirarse como instantánea, pues su velocidad es de 562 leguas en 1″.

251. Si se arroja un cuerpo desde el brocal de un pozo, se cuenta el número de segundos que pasan hasta que se oye la caida de aquel en el agua, y se multiplica el cuadrado de dicho número por 17,58451 pies que es lo que anda un cuerpo durante 1″, prescindiendo de la resistencia del aire, ó en el vacío; por cuyo medio se tendrán los pies ó las varas del pozo, ó cualquier otra profundidad.

252. Arrojando un cuerpo verticalmente, y contando el número de segundos que tarda en caer, la multiplicacion del cuadrado de la mitad de este número por 17,58451, dará el número de varas de altura á que subió el cuerpo (*).

(*) Se funda este medio en leyes del *movimiento uniformemente acelerado*, por las que se tiene $e = \frac{1}{2} gt^2$, espresando en esta fórmula e el espacio, g la gravedad ó la fuerza acceleratriz, y t el tiempo empleado. Veánse los tratados de mecánica, y la leccion sesta de física por el Sr. D. Antonio Gutierrez profesor del Conservatorio de artes de Madrid en 1836.

Cuando se aplica esta fórmula á la determinacion de la profundidad de un pozo, por lo general no se puede ver el momento en que el cuerpo llega al fondo; y por lo tanto se valua el tiempo que ha tardado en caer, por el ruido que produce al dar en aquel. De manera que el tiempo que tarda realmente en caer el cuerpo no es tan largo, como el que se cuenta hasta oir el ruido.

Para corregir este esceso, podria acaso creerse que bastaria calcular primero la profundidad sin contar con dicha correccion; deducir de aquella el número de segundos que ha empleado el sonido para venir hasta el observador y restarle del anterior; con lo que se tendría el número para calcular de nuevo la profundidad. Pero no es este el verdadero medio de hacer la correccion, y para conocerlo facilmente, basta el ejemplo que sigue. Supóngase que el cuerpo desde que se le suelta hasta que se oye el ruido de su caida tarda 100″, se tendrá $e = 17,58 \times 10000 = 175800$ pies cuya distancia tardaria el sonido en andarla 145″, restados los cuales de 100, se tendria un tiempo negativo, lo que es absurdo.

La correccion pues, dimanada de lo que tarda el sonido en propagarse se debe hacer en la fórmula misma $e = \frac{1}{2} gt^2$ del modo siguiente. Es claro que si V representa la velocidad del sonido ó lo que anda en 1″, se tendrá la siguiente proporcion $V : 1'' :: e : x = \frac{e}{V}$; de modo que el tiempo de la caida t es en realidad $t - \frac{e}{V}$; asi $e = \frac{1}{2} g \left(t - \frac{e}{V}\right)^2$. Cuya ecuacion de segundo grado resuelta respecto á e, dará la profundidad con la correccion dicha. ¿No se podrian disponer cebos que cayendo se inflamaran por el choque, en cuyo caso viendo la luz, se tendria el tiempo verdadero de su caida? Debo estas interesantes observaciones á la bondad del citado Señor Gutierrez.

253. Cuando un cuerpo hace sombra sobre una superficie plana, podrá hallarse fácilmente su altura, midiendo esta sombra y la que hace tambien al mismo tiempo un jalon paralelo á dicho cuerpo.

Supóngase un edificio terminado por planos verticales, y que se conoce la sombra AB de una de sus aristas BC; tomando sobre esta un punto c', y conociendo su sombra que llegue, por ejemplo, hasta a' se tienen los triángulos a'Bc, ABC semejantes, que darán Fig 125

AB : a'B : : Bc' : BC.

Si se quisiese hallar la altura de un punto M intermedio, se tiran por el estremo N de su sombra la NO paralela á AB, y resultan los triángulos semejantes NOM, B$a'c'$, que darán el valor de MO.

254. Si NO no fuese conocida, bien por no tener la sombra de una arista ó esquina BC, ó porque cayese sobre un terreno irregular, se colocará un jalon vertical bc, y conocida su sombra ab, se tirará por el punto N la paralela MN, y se tendrán los triángulos MON, abc semejantes, que darán . . . . .

ab : bc : : NO : OM.

255. Si determinada la sombra del piquete sobre un plano horizontal en un instante cualquiera, se señalase la producida por un punto del edificio sobre una superficie que no presentase un plano, se podría encontrar la direccion de la sombra que hubiera producido en una superficie de esta naturaleza, puesto que conocida la posicion del rayo de luz, por la de dos de sus puntos, el de sombra y el que la produce, se encontraria el plano vertical que pasa por dicho rayo, y su interseccion con el horizontal que se considerase.

Tambien pudiera hallarse la magnitud MC; pero este problema y otros importantes á que dan lugar las sombras en las prácticas de la geometría, no pueden ofrecer dificultad á los que conocen las teorías de aquellas.

256. Se ha supuesto el muro vertical; pero si tuviese talud, Fig 126
y si oE fuese la sombra de la arista oD sobre el plano horizontal, marcando en esta un punto d se conocerá la sombra oe de la porcion od que puede medirse, y los triángulos doe, DoE darán la

magnitud Do. En seguida si desde el punto d se tiran las dp, dp' en los planos que forman la arista, se conocerán dos triángulos dop, dop', que formados en su posicion respectiva separadamente, darán el valor de dd', y entonces por los triángulos dod', DoD' se conocerá DD'. La magnitud dd' podria hallarse tambien del modo que se va á indicar, para cuando se conoce la sombra de un punto C, que no corresponde á la arista.

257. Para ello en el punto b de la sombra, plántese el jalon vertical cb; márquense ba, y su prolongacion bB' que será la traza del plano proyectante del rayo de luz; y márquense tambien las sombras de la vertical CB, y de la CB' interseccion de este plano con el del talud, como si existiesen independientes del muro. Esta última se encontraría del modo siguiente: colóquese en B' verticalmente otro jalon mB' igual al primero, y márquese n por la visual cm, con lo cual nB' queda determinada, y conocidas la mn y nB', sepárese de la sombra del piquete, $bb'=mn$, y considérese $cb'=nB'$. Los triángulos CBb', $cb'a$, nmB', y CBB', darán la magnitud de CB. Si no pudiere trazarse en el terreno la bB, se colocará un jalon rs para fijar la visual cn y la posicion del jalon mB'. El cb puede colocarse fuera del punto, y entonces la bB' se tirará paralela á la direccion de la sombra (*).

Fig 127 258. Para hallar la altura de una torre, se observará la sombra e' del vertice e, y para encontrar la que produciria su eje ed, se tirará por e' la $e'd$, paralela á ab, sombra de una arista vertical, ó á la que se encontrare de un jalon vertical colocado separadamente. La $e'd$ se conocerá midiendo la dr, si puede penetrarse en

(*) La resolucion de este problema hace ver que las operaciones prácticas que van egecutadas tienen correspondencia con las operaciones gráficas. Para asegurarse de ello, reflexiónese, que lo primero que se ha hecho es determinar un plano proyectante ó vertical que pasa por una recta, y lo segundo encontrar su interseccion con otro inclinado. Si el plano vertical fuese ademas perpendicular al del talud, lo seria asimismo á su interseccion OB' con el plano horizontal; y si se hiciese una operacion análoga á la anterior sobre la BM perpendicular á OB', se encontraria el ángulo de inclinacion. No hay problemas de planos ó de superficies, cuya generacion no dé medios para las aplicaciones que hacen los ingenieros militares á la desenfilada de las obras de fortificacion.

el interior de la torre, ó si esto no se pudiere, trazando aparte su planta; y entonces podrá conocerse la altura por los medios ya esplicados.

259. Se puede medir una altura AB por medio de un espejo *Fig* 12
valiéndose de la reflexion de la luz. Supóngase vertical dicha altura; se colocará un jalon *ab* en igual posicion, y se tirará la *b*B, que será la traza del plano vertical que pase por esta y la altura AB. Puesto que se sabe que el rayo incidente y el reflejado se encuentran en un plano perpendicular á la supeficie reflectante, es claro que si en un punto conveniente de la B*b*, tal como *c*, se coloca un espejo plano en tal disposicion que mirando en la direccion *ac* se vea el estremo A de la altura en el espejo, los triángulos semejantes *acb*, A*c*B, facilitarán los datos para encontrarla; pues se tendrá que *bc* : *ab* : : *c*B : AB.

Con el fin de no perder tiempo en tantéos inútiles; para la determinacion de *c*, se colocará primeramente el espejo en *c'*, de modo que se vea por reflexion un punto cualquiera de la altura; en seguida se le trasladará por los puntos succesivos hácia *c*, de suerte que se vayan observando los que hay entre *d* y A; y luego no bien se vea este último, quedará *c* determinado.

260. Si el objeto fuese inclinado, tal como A'B, habria que encontrar por otros medios la *r*B para tener un lado conocido en el triángulo que se formase de la parte del objeto. Si B y *b* no perteneciesen á un plano horizontal, habria que determinar la posicion del espejo en el plano horizontal, y hacer con respecto á él la comparacion de los triángulos indicados, por que puede suceder que la B*b* sea una línea curva; pero esta debe determinarse siempre como interseccion del plano vertical con el terreno, y las propiedades de la curva para la reflexion serán las mismas. A la altura encontrada en este caso, habrá que añadir ó quitar la parte BE de la torre inferior ó superior al plano horizontal.

Hallar distancias y alturas con el telescopio micrómetro.

---

261. Sean, D, E dos puntos prominentes del objeto cuya *Fig* 129
distancia al de estacion B, se quiere hallar. Elíjanse tales estos

dos puntos, que las dos puntas de acero, separando los dos cristales objetivos á lo mas cuatro á cinco pulgadas, abracen el espacio DE; y tales ademas de esto, que sean bien visibles desde una segunda estacion A: cosa que se puede lograr siempre, cualquiera que sea el objeto, tomando el intérvalo que media entre dos ventanas, ú otras partes del edificio; el que hay entre dos piedras en el llano, ó sobre una altura; el espacio entre dos árboles, etc. La línea ED que une los dos puntos puede ser horizontal, inclinada al horizonte, ó vertical. En los dos primeros casos dirijase el
Fig. 72 telescopio al objeto, estando los tubos BC, CD dentro del AB, y
y 129. sáquese el DE hasta que se vean claramente los dos puntos D, E. En este estado, las dos puntas de acero del diáfragma pueden, ó bien coincidir exactamente con los puntos D, E, ó bien ocupar mayor distancia, como sucederá generalmente; en cuyo último caso deberán separarse los vidrios objetivos tirando del tubo graduado CD hasta que las dos puntas coincidan con los dos puntos del objeto y del ocular DE, y que se vean aquellos claramente. Entonces la estremidad C marcará en la escala el ángulo DBE. Ejecutado ya esto, mídase una base AB, igual á $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$ ú otra parte mayor de toda la distancia; y en el punto A colóquese el objetivo del telescopio, dirijiéndole á DE. Debe advertirse que la base podrá subtender un ángulo menor que el formado en A, y las puntas abrazar un espacio mayor que ella. Tírese del tubo CD, y si fuese necesario sáquese tambien una parte del BC, hasta que dichas puntas coincidan con los dos puntos D y E, alargando ó acortando el ocular DE para lograr la vision clara. Entonces si no ha salido todo el tubo CD, la estremidad C marcará en la escala entre C y D, el angulo DAE; pero si se halla aquel enteramente fuera y aun parte del BC, la estremidad del tubo AB será la que señale en la escala entre B y C este ángulo.

Conocidos ya los ángulos DBE, DAE, ó mas apropiadamente hablando, las tangentes trigonométricas de estos, con quienes son casi proporcionales, propiedad que puede suponérselas sin grande error en los ángulos muy pequeños, háganse la tangente DBE $=m$; la DAE$=n$; y la AB$=a$. Con estos datos se formará la proporcion AC : BC : : m : n. Conocida asi la relacion y teniendo tambien la diferencia AB de las dos distancias AC, BC,

se tendrá que $\begin{cases} AC = \dfrac{am}{m-n}\text{: esto es, que la mayor distancia se obtiene multiplicando la base por el ángulo mayor, y dividiendo el producto por la diferencia entre los dos ángulos.} \\ BC = \dfrac{an}{m-n}\text{: esto es, que la menor se obtiene} \end{cases}$

multiplicando la base por el ángulo menor, y dividiendo asimismo el producto por la diferencia entre los ángulos.

Sentado esto, sea por ejemplo. $m = 68'$. . $n = 46'$. . y. . $a = 120$ pies

serán. . . . . $\begin{cases} AC = \dfrac{120 \cdot 68}{68-46} = \dfrac{8160}{22} = 370\,\dfrac{10}{11} \text{ pies.} \\ BC = \dfrac{120 \cdot 46}{68-46} = \dfrac{5520}{22} = 250\,\dfrac{10}{11} \text{ pies.} \end{cases}$

262. De lo anteriormente dicho se infiere que en la práctica no se necesitan los ángulos subtendidos en A,B por DE, y si sola su relacion, razon por la cual en algunos telescopios micrómetros es esta la que se marca en la escala.

263. Para cuando las desigualdades del terreno no dejen medir la base en el mismo punto desde donde quiere hallarse la distancia á un objeto, ó para cuando el riesgo ú otra circunstancia, ni permitan esto, ni tampoco el observar dos ángulos en dicho punto, puede todavia servir, igualmente que para los ejemplos anteriores, el telescopio.

Sea por ejemplo M el punto adonde se supone que llegan *Fig.* 130 las balas tiradas desde C; y con este antecedente se trata de conocer la distancia MC. Para averiguarla tómense dos puntos B, A mas alla del sitio del peligro, pero en el mismo plano vertical que M; mídase la base AB; obsérvense del modo ya esplicado los ángulos aBb, aAb, que subtenden á ab, y hállese la distancia AC. En la estacion M mídase el ángulo aMb, al cual subtende el mismo intérvalo ab, y la distancia MC, y haciendo $aMb = m \times aAb = n$, se tendrá que $m : n :: AC : MC = \dfrac{AC \cdot n}{m}$. Esto es, que la mas corta distancia es igual á la mayor de las tres, multiplicada por el ángulo á que esta corresponde, y partida por el perteneciente á la menor.

La línea *ab* no necesita ser perpendicular al eje del telescopio; basta que tenga con este inclinacion igual en las estaciones A,B,M, lo cual se consigue cuando estos puntos están en el mismo plano vertical. Para esto es necesario, que este corte á la *ab* por su medio ó proximamente, y no á su prolongacion.

264. Con este instrumento pueden tambien hallarse alturas accesibles é inaccesibles con facilidad y exactitud.

Fig. 131 Sea AB una altura accesible. Desde un punto B, tan próximo como sea posible á la vertical AB, tómese el ángulo aBb, al cual subtende ab, y en otro punto cualquiera C el aCb; mídase la base BC, y si se hace $aBb=m$, $aCb=n$, $BC=a$, se tendra que.....

$$AC : : AB : m : n. \dots . AB = \frac{AC \cdot n}{m}$$

Pero siendo $AC^2 = BC^2 + AB^2 = BC^2 + (\frac{AC \cdot n}{m})^2 = a^2 + \frac{AC^2 n^2}{m^2}$,

será tambien $AC^2 \dots\dots\dots\dots (m^2 - n^2) = a^2 m^2$

y $\dots\dots\dots\dots AC = \frac{a\,m}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$.

Por un raciocinio semejante se tendrá $AB = \frac{a\,n}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$.

Si la altura AB fuese inaccesible; mídanse la base CD y los ángulos en C y D que subtende *ab*; hállese CB como se ha dicho en el párrafo anterior, y represéntense por *m*,*n* los ángulos en D y C; se tendrá que $AD : AC : : n : m. \dots$ y $AD = \frac{AC \cdot n}{m}$.

Pero siendo$\dots\dots\dots AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2\,(CD \cdot CB)$,

y$\dots\dots\dots AD^2 - AC^2 = CD^2 + 2\,(CD \cdot CB)$.

Si se sostituyere el valor de AD, se tendrá $\left\{ \frac{AC^2\,n^2}{m^2} - AC^2 = CD^2 + 2\,(CD \cdot CB), \right.$

ó $\dots\dots\dots\dots AC = \sqrt{\frac{CD^2 + 2\,(CD \cdot BC)}{\frac{n^2}{m^2} - 1}}$;

y por último. . . . . $AC=\sqrt{\dfrac{BD^2-BC^2}{\dfrac{n^2}{m^2}-1}}$.

Este método solo tiene lugar cuando la distancia BC se puede medir con el telescopio.

265. Como el ángulo á que subtende la distancia entre las dos puntas de acero, es de poca consideracion cuando se tocan los dos cristales objetivos, pueden por medidas succesivas tomarse ángulos grandes. *Fig. 32*

Sea por ejemplo Ab' una montaña, cuya altura vertical AB no pueda verse. Se hallará el ángulo ACB midiendo los ACc',e'Cf', f'Cb'. Para medirlos, el telescopio puede tener un nivel sobre el tubo ocular, con su eje paralelo de tal modo al del instrumento, que la punta de acero mas baja cubra el punto b' en la horizontal BC, cuando el nivel está arreglado.

266. Un instrumento llamado *telescopio de doble imágen* semejante al que se acaba de describir, se empléa con algunas ventajas á este para medir distancias y alturas; pero como su uso es enteramente igual, se omite hablar de la diferencia de su construccion. Una de sus aplicaciones es hallar la distancia entre dos buques. Otro telescopio de *imágenes luminosas* se aplica para medir de noche ángulos y distancias. En fin tambien se han calculado tablas, que dan las distancias correspondientes á los diferentes ángulos observados, lo cual ahorra el cálculo trigonométrico. (*).

Hallar alturas y distancias por medio del barómetro y termómetro.

---

267. La medicion de alturas puede hacerse con solo el barómetro, ó con este acompañado del termómetro.

En el primer caso se sube á la altura que quiere medirse, llevando un barómetro para notar si ocurre alguna variacion en la presion de la atmósfera, y valuarla antes de determinar el resultado de la operacion. Obsérvese en la cima de aquella el número de líneas

(*) Véase *New philosofical instruments* etc. por David Brewster.

que ha descendido el mercurio en el tubo del barómetro alto ; y multiplíquese este número por $88\frac{2}{3}$ pies castellanos : el producto será la altura. Asi, pues, si al pie de una montaña se observó que era la columna de mercurio de 28 pulgadas,
y en su cima de. . . . . 26 . . . 2 líneas,

cuya diferencia es . . . 1. . . 10=22 líneas,
se tendrá; . . . $22 \times 88\frac{2}{3} = 650$ varas 8 pulgadas, altura de la montaña.

268. Este método puede emplearse cuando la altura no pase de 2800 varas; pero pasando de ellas ó queriéndose mayor exactitud, y no teniendo termómetro, se hará uso del método de Bouguer del modo siguiente:

1.° Se buscarán en las tablas el logaritmo de la altura del mercurio, reducida á líneas, al pie del monte, torre etc., y el de la correspondiente á la cima; se restará este logaritmo del anterior; y la diferencia se multiplicará por 10.000.

2.° Pártase despues el producto por 30 y réstese este cociente del producto: la diferencia será la altura buscada.

Trátase por ejemplo de saber la altura del Mont-blanc sobre el lago de Ginebra.

En un punto de aquella ciudad, elevado 13 toesas sobre el nivel del lago, la columna de mercurio fué de . . . .

. . . . $27{,}2^{\text{pulgs.}}\ \frac{1085\ \textit{lins.}}{1800} = 326{,}6028' $— log. . . 2,5140199

A tres pies mas abajo de la cima del Mont-blanc } $16, . \frac{144}{160}$ = 192,9 . . . . log. . . 2,2853322

Diferencia 0,2286877

Multiplicada por 10.000 2286,877

Partido este producto por 30 76,23

Diferencia 2210,65

Añadidas las 13 toesas de la altura sobre el lago . . . 13

Id. los 3 pies ó . 0,5 de toesa de la cima del monte sobre el punto de la 2.ª observacion barométrica. } . . 0,5

Será la altura de la cima de Mont-blanc, sobre el lago de Ginebra. } 2224,15. toes.

ó. . . . . 5,191,63 varas

269. Conocida por alguna operacion geométrica la diferencia de nivel entre dos puntos, será facil hallar por el barómetro la que haya entre uno de los dos y otro tercero. Para ello supóngase ser a, b, c, las alturas del mercurio del barómetro en los tres puntos A, B, X, sobre la superficie del globo; y hágase la siguiente proporcion.

Log. a—Lb : A—B : : Lb—Lc : B—X. De aqui se sacará el valor de X (*).

270. Uniendo las observaciones termométricas, el resultado es mas exacto, y se le obtiene del modo siguiente:

Se anotan las alturas del mercurio de los tubos de ambos instrumentos, tanto al pie como en la cúspide de la elevacion que quiere medirse; hecho lo cual, se calcula esta por medio de la

fórmula . . . . . . $x = \frac{m + 180,50}{192} \times 70000$ D:

en la que . . . . .m = Altura media del mercurio del termómetro entre las dos alturas observadas en la base y cima de la eminencia,

y . . . . D = diferencia de los logaritmos de las dos alturas barométricas.

Sea el mismo caso (268).

Al observar el barómetro en la base, señalaba el termómetro. . . . . . +22,6° (**)

——————— próximo á la cima, señalaba el termómetro. . . . . . —2,3°

D = Log. altura barométrica en la base — Log. altura barométrica en la cima = 2,5140199 — 2,2853322 = 0,2,286877.

D×70000 = 16.008,139.

$$m = \frac{22,6 - 2,3}{2} = \frac{20,3}{2} = 10,15°.$$

(*) Estas prácticas están fundadas en las esperiencias y en principios de Hydrodynámica.

(**) Los signos + — indican hallarse los grados encima ó debajo de la congelacion ó cero de la graduacion.

Será pues . . $x = \frac{10,15 + 180,50}{192} \times 16.008,139 =$

$\frac{190,65}{192} \times 16.008,139 = 15895,6$ pies castellanos.

y últimamente. . . $x = 5330$ varas castellanas (*).

271. Conocida la altura media del barómetro y termómetro en un punto cualquiera, se calcula facilmente la de este sobre el nivel del mar.

Sea por ejemplo la graduacion media del termómetro de Reaumur en Madrid. . . . . a

Y al nivel del mar . . . . b.

Altura media del barómetro en Madrid. . . . . C, su Log. $=$ A

——— al nivel del mar. . . . . D . . L $=$ B

Diferencia . . . . . A $-$ B $=$ F.

Será entonces $x = \frac{m + 180,50}{192} \times 70000\, d = \frac{\frac{a+b}{2} + 180,50}{192} \times 70000\,\mathrm{F}$. (**)

272. Tambien puede averiguarse la elevacion de una eminencia sobre el nivel del mar, sin conocer las alturas medias del barómetro y termómetro, aunque no con tanta exactitud como por los medios esplicados (267 y 268): sirva de prueba el ejemplo siguiente:

La altura del barómetro en la Carolina (***) en 31 de marzo de 1803, segun don Agustin Betancourt, era de 26 pulgadas

(*) Si la fórmula hubiese sido $x = \frac{m + 180,50}{192} \times 10000$ D, el resultado habria salido en toesas, que se reducirian despues á varas castellanas: los cálculos entonces se hubieran hecho mas facilmente.

(**) La altura media del barómetro al nivel del mar es de 28 pulgadas, 2 líneas francesas; 30,08 pulgadas inglesas; 32 pulgadas 10 $\frac{1}{3}$ líneas de Búrgos. La graduacion media del termómetro á dicho nivel es de 10° Réaumur, 55 Farenheit, 11°, 5 centígrado.

(***) Cabeza de los establecimientos de Sierra-Morena.

6,734 líneas francesas . . . . L=2,5034299.
El termómetro estaba á. . . . . 20°.
Al nivel del mar (nota última.**). . 10°.
Altura del barómetro al nivel del mar 28 pulg. 2 lín. L=2,5289167

Diferencia=D. 0,0254938

D×10000=. 254,938,

m. . . . . $\frac{10^\circ+20^\circ}{2}=15^\circ$,

y . . $x=\frac{15+180,50}{192}\cdot 254,838=256,59$ toesas=598,04 varas, altura de la Carolina sobre el nivel del mar.

273. Este resultado es en efecto menos exacto que el que se habria obtenido si se hubiese tomado el término medio de las alturas barómetrica y termométrica. Pero aun puede lograrse mayor exactitud que por este método, empleando las tablas de Oltmanns que se ponen á continuacion, y valiéndose de la fórmula . . . . . .

$x=h+h'\times(\mathrm{T}+\mathrm{T}')+\frac{1897}{1000}\times 2\ (t+t')$: en la cual

h=altura barométrica de la estacion inferior reducida á milim.
h', ———— de la estacion superior en iguales términos;
T, temperatura en la estacion inferior del termómetro unido al barómetro;
t ———— del aire libre en dicha estacion;
T′, ———— en la estacion superior del termómetro unido al barómetro; y por fin
t', ———— del aire libre en la misma, reducida como las anteriores á centígrados.

Esta fórmula y tabla, se usan del modo que sigue.

Se buscará en la primera de ellas el número que corresponde á h, llámesele a; igualmente el que corresponde á h', llámesele b, y c al número generalmente muy pequeño que está en la segunda tabla en frente de T—T′. Si este es positivo, la altura aproximada será $a-b-c$; y si negativo, lo que se verificará siempre que T′ sea mayor que T, será aquella $a-b+c$. Para aplicar á esta altura aproximada la correccion correspondiente por las temperaturas de las capas del aire bastará, segun dice la fórmula, multiplicar la milésima parte de ella por la doble suma de los termómetros libres $2\ (t+t')$; y la correccion será positiva ó negativa segun lo sea $t+t'$. (*)

La segunda correccion es la de la latitud, por la disminucion de la gravedad. Se buscará en la tercera tabla verticalmente el número que corresponde á la latitud, y horizontalmente el que corresponde á la altura aproximada. Esta correccion que no puede pasar de 28 metros es siempre adictiva.

En los rarísimos casos en que la estacion inferior se halle muy elevada sobre el nivel del mar, se hará una correccioncita al resultado, cuyo valor se hallará en la tabla cuarta del modo siguiente.

Sea h altura de la estacion inferior $=600$ milímetros;
y la diferencia de nivel. . . . . $=1500$ metros.

Se hará la proporcion $600 : 0,63 :: 1500 : 0,95$; y la diferencia de nivel corregida será 1500, 9. Esta correccion será siempre adictiva.

Aplicacion de la fórmula.

Sea la latitud del punto de observacion. . . 21°.
Altura barométrica en la estacion superior $=h'$ — 600,95 mil.
Termómetro unido al barómetro. . . .$=T'+21°,3$
——— libre. . . , ...$=t'+21°,3$
Altura barométrica á la altura del mar. .$=h$ 763,15
Termómetro unido al barómetro. . . .$=T+25,3$
——— libre. . . . .$=t+25,3$

(*) $(t+t')$ será cantidad positiva si ambas indicaciones caen sobre el cero ó la congelacion; y lo serán tambien, aun cuando una de ellas esté encima y otra debajo, si t es mayor que t': $(t+t')$ será cantidad negativa si ambas caen debajo de cero, y aun estando una encima y otra debajo, si t' es mayor que t, (vease la nota segunda, párrafo 270).

$$\text{En la tabla } 1.^a \left\{ \begin{array}{l} h = 763{,}15 \ldots \ldots 6183{,}5 = a \\ h' = 600{,}95 \ldots \ldots 4280{,}7 = b \end{array} \right.$$

$$2.^a \quad T - F' = 4^\circ \ldots \ldots \ldots 5{,}9 = c$$

$a - b - c$, altura aproximada. . 1896,9

$1.^a$ correccion $= \dfrac{1897}{1000} + 2\,(t + t') = 176{,}8$

Suma. . . . 2073,7

$2.^a$ correccion, tabla $3.^a$, por 2073 altura aproximada, y 21° latitud. . . } + . . 10,6

Altura hallada en metros. 2084,3

En toesas por la razon de 1 : 0,51307; ó bien por las tablas . . . . } . . 1069,4

Y en varas castellanas 2495 varas, 9 pulgadas, 7 líneas (*).

(*) Puede verse sobre esta fórmula y su aplicacion, el tratado de Geodesia de Puissant.

Tablas

DEL ALMANAQUE NÁUTICO.

TABLA PRIMERA. ARGUMENTO *h′ y h.*

Milímetros.	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*
	m		*m*		*m*
370	418,5	395	939,2	420	1427,9
371	440,0	396	959,3	421	1446,8
372	461,5	397	979,4	422	1465,7
373	482,9	398	999,5	423	1484,6
374	504,2	399	1019,5	424	1503,4
375	525,4	400	1039,4	425	1522,2
376	546,6	401	1059,3	426	1540,8
377	567,8	402	1079,1	427	1559,5
378	588,9	403	1098,9	428	1578,2
379	609,9	404	1118,6	429	1596,8
380	630,9	405	1138,3	430	1615,3
381	651,8	406	1157,9	431	1633,8
382	672,7	407	1177,5	432	1652,2
383	693,5	408	1197,1	433	1670,6
384	714,3	409	1216,6	434	1680,0
385	735,0	410	1236,0	435	1707,3
386	755,6	411	1255,4	436	1725,6
387	776,2	412	1274,8	437	1743,8
388	796,8	413	1291,1	438	1762,1
389	817,3	414	1313,3	439	1780,3
390	837,8	415	1332,5	440	1798,4
391	858,2	416	1351,7	441	1816,5
392	878,5	417	1370,8	442	1834,5
393	898,8	418	1389,9	443	1852,5
394	919,0	419	1408,9	444	1870,4

TABLA PRIMERA. ARGUMENTO h' y h.

Milímetros.	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*
	m		m		m
445	1888,3	475	2407,9	505	2895,6
446	1906,2	476	2424,6	506	2911,3
447	1924,0	477	2441,3	507	2927,0
448	1941,8	478	2458,0	508	2942,7
449	1959,6	479	2474,6	509	2958,4
450	1977,3	480	2491,3	510	2974,0
451	1994,9	481	2507,9	511	2989,6
452	2012,6	482	2524,3	512	3005,2
453	2030,2	483	2540,8	513	3020,7
454	2047,8	484	2557,3	514	3036,2
455	2065,3	485	2573,7	515	3051,7
456	2982,8	486	2590,2	516	3067,2
457	2100,2	487	2606,6	517	3082,6
458	2117,6	488	2622,9	518	3097,9
459	2135,0	489	2639,2	519	3113,3
460	2152,3	490	2655,4	520	3128,6
461	2169,6	491	2671,6	521	3143,9
462	2186,9	492	2687,9	522	3159,2
463	2194,1	493	2704,1	523	3174,4
464	2221,3	494	2720,2	524	3189,7
465	2238,4	495	2736,3	525	3204,9
466	2255,5	496	2752,3	526	3220,0
467	2272,6	497	2768,3	527	3235,1
468	2289,6	498	2784,4	528	3250,2
469	2306,6	499	2800,4	529	3265,3
470	2323,6	500	2816,3	530	3280,4
471	2340,5	501	2832,2	531	3295,3
472	2357,4	502	2848,1	532	3310,3
473	2374,2	503	2864,0	533	3325,3
474	2391,1	504	2879,8	534	3340,2

TABLA PRIMERA. ARGUMENTO *h' y h.*

Milímetros.	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*
	m		*m*		*m*
535	3335,1	565	3789,5	595	4201,5
536	3370,0	566	3803,6	596	4214,9
537	3384,8	567	3817,7	597	4228,2
538	3399,6	568	3831,7	598	4241,6
539	3414,4	569	3845,7	599	4254,9
540	3429,2	570	3859,7	600	4268,2
541	3443,9	571	3873,7	601	4281,4
542	3458,6	572	3887,6	602	4294,7
543	3473,3	573	3901,5	603	4307,9
544	3487,9	574	3915,4	604	4321,1
545	3502,5	575	3929,3	605	4334,3
546	3517,2	576	3943,1	606	4347,4
547	3531,8	577	3956,9	607	4360,5
548	3546,3	578	3970,7	608	4373,7
549	3560,8	579	3984,5	609	4386,7
550	3575,3	580	3998,2	610	4399,8
551	3589,8	581	4011,9	611	4412,8
552	3604,2	582	4025,6	612	4425,9
553	3618,6	583	4039,3	613	4438,9
554	3633,0	584	4052,9	614	4451,9
555	3647,4	585	4066,6	615	4464,8
556	3661,7	586	4080,2	616	4477,7
557	3676,0	587	4093,8	617	4490,7
558	3690,3	588	4017,3	618	4503,6
559	3704,6	589	4120,8	619	4516,4
560	3718,8	590	4134,3	620	4529,3
561	3733,0	591	4147,8	621	4548,1
562	3747,2	592	4161,3	622	4554,9
563	3761,3	593	4174,7	623	4567,7
564	3775,4	594	4188,1	624	4580,5

TABLA PRIMERA. ARGUMENTO h' y h.

Milímetros.	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*
	m		m		m
625	4593,2	655	4966,6	685	5323,2
626	4606,0	656	4978,7	686	5334,8
627	4618,7	657	4990,9	687	5346,4
628	4631,4	658	5003,0	688	5358,0
629	4644,0	659	5015,1	689	5369,6
630	4656,7	660	5027,2	690	5381,1
631	4669,3	661	5039,2	691	5392,7
632	4682,0	662	5051,2	692	5404,2
633	4694,5	663	5063,3	693	5415,7
634	4707,1	664	5075,3	694	5427,2
635	4719,7	665	5087,2	695	5438,7
636	4732,2	666	5099,2	696	5450,1
637	4744,7	667	5111,2	697	5461,5
638	4757,2	668	5123,1	698	5472,9
639	4769,7	669	5135,0	699	5484,3
640	4782,1	670	5146,9	700	5495,7
641	4794,6	671	5158,8	701	5507,1
642	4807,0	672	5170,6	702	5518,4
643	4819,4	673	5182,5	703	5529,8
644	4831,7	674	5194,3	704	5541,1
645	4844,1	675	5206,1	705	5552,4
646	4856,4	676	5217,9	706	5563,7
647	4868,7	677	5229,7	707	5575,0
648	4881,0	678	5241,4	708	5586,2
649	4893,3	679	5253,2	709	5597,5
650	4905,6	680	5264,9	710	5608,7
651	4917,8	681	5276,6	711	5619,9
652	4930,0	682	5288,3	712	5631,1
653	4942,2	683	5300,0	713	5642,2
654	4954,4	684	5311,6	714	5653,4

TABLA PRIMERA. ARGUMENTO h' y h.

Milímetros.	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*	*Milímetros.*	*Metros.*
	m		*m*		*m*
715	5664,6	741	5949,0	766	6213,2
716	5675,7	742	5959,7	767	6223,6
717	5686,8	743	5970,4	768	6234,0
718	5697,6	744	5981,2	769	6244,4
719	5709,0	745	5991,9	770	6254,7
720	5720,1	746	6002,5	771	6265,0
721	5731,1	747	6013,2	772	6275,4
722	5742,1	748	6023,8	773	6285,7
723	5753,1	749	6034,4	774	6296,0
724	5764,2	750	6045,1	775	6306,2
725	5775,1	751	6055,7	776	6316,5
726	5786,1	752	6066,3	777	6326,7
727	5797,1	753	6076,9	778	6337,0
728	5808,0	754	6087,5	779	6347,2
729	5819,0	755	6098,0	780	6357,4
730	5829,9	756	6108,6	781	6367,6
731	5840,8	757	6119,1	782	6377,8
732	5851,7	758	6129,6	783	6388,0
733	5862,5	759	6140,1	784	6398,2
734	5873,4	760	6150,6	785	6408,3
735	5884,2	761	6161,1	786	6418,5
736	5995,1	762	6171,5	787	6428,6
737	5995,9	763	6182,0	788	6438,7
738	5916,7	764	6192,4	789	6448,8
739	5927,5	765	6202,8	790	6458,9
740	5938,2				

TABLA SEGUNDA.

ARGUMENTO T—T′

TERMÓMETRO CENTÍGRADO DEL BARÓMETRO.

o	m	o	m	o	m	o	m
0,2	0,3	5,2	7,6	10,2	15,0	15,2	22,4
0,4	0,6	5,4	7,9	10,4	15,3	15,4	22,7
0,6	0,9	5,6	8,2	10,6	15,6	15,6	22,9
0,8	1,2	5,8	8,5	10,8	15,9	15,8	23,2
1,0	1,5	6,0	8,8	11,0	16,2	16,0	23,5
1,2	1,8	6,2	9,1	11,2	16,5	16,2	23,8
1,4	2,1	6,4	9,4	11,4	16,8	16,4	24,1
1,6	2,3	6,6	9,7	11,6	17,1	16,6	24,4
1,8	2,6	6,8	10,0	11,8	17,4	16,8	24,7
2,0	2,9	7,0	10,3	12,0	17,6	17,0	25,0
2,2	3,2	7,2	10,6	12,2	17,9	17,2	25,3
2,4	3,5	7,4	10,9	12,4	18,2	17,4	25,6
2,6	3,8	7,6	11,2	12,6	18,5	17,6	25,9
2,8	4,1	7,8	11,5	12,8	18,8	17,8	26,2
3,0	4,4	8,0	11,8	13,0	19,1	18,0	26,5
3,2	4,7	8,2	12,1	13,2	19,4	18,2	26,8
3,4	5,0	8,4	12,4	13,4	19,7	18,4	27,1
3,6	5,3	8,6	12,6	13,6	20,0	18,6	27,4
3,8	5,6	8,8	12,9	13,8	20,3	18,8	27,7
4,0	5,9	9,0	13,2	14,0	20,6	19,0	28,0
4,2	6,2	9,2	13,5	14,2	20,9	19,2	28,2
4,4	6,5	9,4	13,8	14,4	21,2	19,4	28,5
4,6	6,8	9,6	14,1	14,6	21,5	19,6	28,8
4,8	7,1	9,8	14,4	14,8	21,8	19,8	29,1
5,0	7,4	10,0	15,0	15,0	22,1		

TABLA TERCERA.

ARGUMENTO. LATITUD SEXAGESIMA DEL LUGAR.

(Correccion siempre adictiva.)

Alt. aprox.	0°	5°	10°	15°	20°	25°
	m	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
200	1,2	1,2	1,2	1,0	1,0	1,0
400	2,4	2,4	2,4	2,2	2,0	2,0
600	3.4	3.4	3.4	3.2	3.0	2,8
800	4.5	4.5	4.5	4.3	4.1	3,8
1000	5,7	5.7	5,7	5.3	5.1	4.8
1200	7.0	7.0	6.8	6.4	6,0	5,8
1400	8,2	8,2	8,0	7.6	7.1	6,7
1600	9.2	9.2	9.0	8.8	8,2	7.6
1800	10,4	10,4	10,2	9.8	9.4	8,6
2000	11,6	11,5	11,3	11,0	10,4	9,6
2200	12,8	12,6	12,6	12,1	11,4	10,6
2400	14,0	14,0	13,8	13,3	12.5	11,6
2600	15,2	15,2	15,0	14.4	13,6	12,6
2800	16,6	16,5	16,4	15,6	14.8	13,6
3000	17.9	17.7	17,6	16,8	15.8	14,6
3200	19.1	18,9	18,7	18,0	17,0	15,7
3400	20,5	20,3	20,1	19.3	18.4	16,9
3600	21,8	21,7	21,4	20,4	19.6	18,0
3800	23,1	22,9	22,6	21,6	20,6	19.1
4000	24.6	24.4	24,0	22.9	21.9	20,3
4200	25,9	25,7	25,3	24.3	23,0	21,6
4400	27,5	27,3	26,8	25,8	24,3	23,0
4600	28.9	28,7	28,2	27.1	25,6	24,3
4800	30.4	30,2	29,6	28,4	27,0	25,5
5000	31.8	31,6	30,9	29.8	28,4	26,7
5200	33,0	32,8	32,1	31,0	29.7	28,0
5400	34,3	34,1	33,5	32,4	30.8	29.2
5600	35,7	35,5	34,8	33,7	32,1	30,2
5800	37,1	36,9	36,1	35.0	33,2	31,3
6000	38,5	38,3	37,5	36,3	34,3	32,3

CONTINUACION DE LA TABLA TERCERA.

Alt. aprox.	30°	35°	40°	45°	50°	55°
	m	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
200	0,8	0,8	0,6	0,6	0,6	0,4
400	1,8	1,7	1,4	1,2	1,0	0,8
600	2,6	2,4	2.0	1,8	1,6	1,2
800	3,5	3,1	2,8	2,4	2,0	1,7
1000	4,3	3,8	3,4	3,1	2,6	2,2
1200	5,1	4,6	4,2	3,6	3,1	2,6
1400	6,1	5,4	4,8	4,2	3,6	3,0
1600	7,0	6,2	5,6	4,8	4,1	3,4
1800	8,0	7,0	6,3	5,4	4,6	3,8
2000	8,8	7,8	7,0	6,0	5,1	4,2
2200	9,7	8,6	7,6	6,6	6,6	4,6
2400	10,6	9,4	8,4	7,2	6,1	5,1
2600	11,6	10,5	9,2	8,0	6,8	5,6
2800	12,6	11,4	10,0	8,8	7,4	6,2
3000	13,6	12,2	10,8	9,4	8,0	6,6
3200	14,6	13,1	10,5	10,1	8,6	7,0
3400	15,7	14,1	12,4	10,9	9,2	7,7
3600	16,7	15,0	13,4	11,6	9,8	8,2
3800	17,7	15,9	14,3	12,4	10,5	8,7
4000	18,7	17,0	15,1	13,1	11,2	9,4
4200	19,9	18,0	15,9	14,0	12,0	10,1
4400	21,1	19,1	16,9	15,0	12,9	10,8
4600	22,3	20,3	18,0	15,9	13,6	11,5
4800	23,4	21,3	19,0	16,7	14,3	12,1
5000	24,6	22,3	19,9	17,4	15,0	12,7
5200	25,7	23,3	20,8	18,2	15,7	13,3
5400	26,7	24,3	21,7	19,1	16,4	13,9
5600	27,8	25,3	22,6	19,9	17,2	14,5
5800	28,9	26,3	23,6	20,7	17,8	15,1
6000	30,0	27,3	24,6	21,5	18,5	15,7

TABLA CUARTA.

CORRECCION PARA 1.000^m *DE ALTURA.*

h	*Metros.*	*h*	*Metros.*
400	1,71	600	0,63
450	1,36	650	0,42
500	1,11	700	0,22
550	0,86	750	0,03

274. Cuando se empleen termómetros de diferentes escalas, pueden reducirse estas á una sola ó á la del centígrado. En tal caso, para usar las tablas barométricas ya insertas, se añaden las siguientes, cuyo uso es bien sencillo, por ejemplo:

Se quieren reducir á milímetros 23 pulgadas 4 líneas españolas

Por 23 pulgadas (tabla 9)		533,94
——4 líneas . . . (tabla 9) . .		7,94
	Milímetros	541,98

Las 541,98 milímetros se quieren en pulg. y líneas españolas

Por 500 milímitros (T. 10)	21,53779
——40	1,73302
—— 1	0,04307
——0,9	0,3870
——0,08.	344
	23 pulgs. 4 líns.

TABLA QUINTA.

Reduccion de las pulgadas y milésimos ingleses, á milímetros, medida francesa.

Pulgadas inglesas.	*Milím.*	*Décimos cents. y milésim.*	*Milímetros.*		
12	304,80				
13	330,20	1	2,54	0,25	0,02
14	355,60	2	5,08	0,51	0,05
15	381,00	3	7,62	0,76	0,07
16	406,40	4	10,16	1,02	0,10
17	431,80	5			
18	457,20	6	12,70	1,27	0,13
19	482,60	7	15,24	1,52	0,15
20	508,00	8	17,78	1,78	0,18
21	533,40	9	20,32	2,03	0,20
			22,86	2,28	0,23
22	558,80				
23	584,19				
24	609,59				
25	634,99				
26	660,39				
27	685,79				
28	711,19				
29	736,59				
30	761,99				
31	787,40				
32	812,80				

TABLA SESTA.

Reduccion de milímetros á pulgadas inglesas.

Milím.	*Pulgadas.*
1	0,03937
2	0,07874
3	0,11811
4	0,15758
5	0,19685
6	0,23622
7	0,27559
8	0,31496
9	0,35433
10	0,39370
20	0,78740
30	1,18110
40	1,57480
50	1,96850
60	2,36220
70	2,75590
80	3,14960
90	3,54330
100	3,93700
200	7,87401
300	11,81102
400	15,74802
500	19,68503
600	23,62204
700	27,5590
800	31,4960
900	35,4336
1000	39,3707

TABLA SÉPTIMA.

Reduccion de las pulgadas, líneas y décimos de línea francesa á milímetros.

Pulgs.	*Milím.*	*Líneas.*	*Milím.*
12	324,84	1	2,25
13	351,91	2	4,51
14	378,98	3	6,76
15	406,05	4	9,02
16	433,12	5	11,28
17	460,19	6	13,53
18	487,26	7	15,79
19	514,33	8	18,04
20	541,40	9	20,30
21	568,47	10	22,56
22	595,54	11	24,81
		déc.	
23	622,64	1	0,22
24	649,68	2	0,45
25	676,75	3	0,67
26	703,88	4	0,90
27	730,92	5	1,12
28	757,99	6	1,35
29	785,03	7	1,58
30	812,40	8	1,80
31	839,47	9	2,03

TABLA OCTAVA.

Reduccion de milímetros á pulgadas y líneas francesas.

Milím.	*Pulgs.*	*Mil.*	*Líneas.*
1	0,03694	1	0,44329
2	0,07388	2	0,88659
3	0,11082	3	1,32988
4	0,14776	4	1,77318
5	0,18470	5	2,21647
6	0,22164	6	2,65977
7	0,25859	7	3,10306
8	0,29553	8	3,54636
9	0,33247	9	3,98965
10	0,36941	10	4,43295
20	0,73882	20	8,65907
30	1,10824	30	13,29886
40	1,47765	40	17,73181
50	1,84706	50	22,16477
60	2,21648	60	26,59772
70	2,58589	70	31,09067
80	2,95530	80	35,46363
90	3,32472	90	39,89648
100	3,69413		
200	7.38826		
300	11,08239		
400	14,77653		
500	18,47066		
600	22,16479		
700	25,85893		
800	29,55306		
900	33,24719		
1000	26,94132		

TABLA NOVENA.

Reduccion de las pulgadas, líneas y décimos de línea españolas, á milímetros, medida francesa.

Pulgs.	*Milím.*	*Líneas*	*Milím.*
14	325,01	1	1,93
15	348,22	2	3,97
16	371,44	3	5,90
17	394,65	4	7,94
18	417,87	5	9,87
19	441,08	6	11,80
20	464,30	7	13,84
21	487,51	8	15,88
22	510,73	9	17,71
23	533,94	10	19,74
24	557,16	11	21,68
		Decs.	
25	580,37	1	0,19
26	603,59	2	0,39
27	626,80	3	0,59
28	650,02	4	0,79
29	673,23		
30	696,45	5	0,98
31	719,66	6	0,18
32	742,88	7	0,38
33	766,09	8	0,58
34	789,31	9	1,77

TABLA DÉCIMA.

Reduccion de milímetros á pulgadas y líneas españolas.

Milím.	*Pulgadas.*	*Mil.*	*Líneas.*
1	0,04307	1	0,51690
2	0,08615	2	1,03381
3	0,12922	3	1,55072
4	0,17230	4	2,06762
5	0,21537	5	2,54453
6	0,25845	6	3,10144
7	0,30153	7	3,61835
8	0,34460	8	4,13525
9	0,38768	9	4,65216
10	0,43075	10	5,16907
20	0,86151	20	10,33814
30	1,29226	30	15,50721
40	1,72302	40	20,67627
50	2,15379	50	25,84535
60	2,58453	60	31,01441
70	3,01529	70	36,18348
80	3,44604	80	41,35255
90	3,87680	90	46,52162
100	4,30756	100	51,69069
200	8,61511		
300	12,92267		
400	17,23023		
500	21,53779		
600	25,84535		
700	30,15290		
800	34,46046		
900	38,76802		
1000	43,07558		

275. Para ejercicio se ponen aqui las siguientes observaciones, hechas por el teniente coronel de ingenieros don Tomas Cortés en
Fig 133 15 de abril de 1837 en el monte de Gibralfaro, á cuyo pie se halla la ciudad de Málaga.

PUNTOS DE ESTACION.	Alturas en métros sobre el nivel del mar.	Alturas en pies castellanos sobre el nivel del mar.		Diferencias relativas.	
		Pies.	*Pulg.*	*Pies.*	*Pulg.*
A Pico del torreon, el mas N. O. de la montaña..	186,6	643	10		
				47	6
B. Pico de Juan Morales, el mas E. S. de la misma. . . .	170,8	597	4		
C. Pico de la batería esterior, mas E del castillo. . . .	178,9	626	1	28	8
D. La entrada interior del mismo.	172,9	605	1	021	1
E. La entrada esterior del mismo.	150,1	525	2	079	11
F. La puerta de la Coracha.	115,8	405	3	120	11

El barómetro usado era de escala francesa dividida en pulgadas. Se supuso la altura del mercurio al nivel del mar, de 28 pulgadas . . . . 2 líneas. . 0,8 : y la temperatura de 10° Réaumur, ó 12°, 5 centígrado. Las observaciones se hicieron entre once y una del dia. La mayor distancia horizontal entre los puntos de estacion fué de 3000 pies. Solo faltó la série de observaciones que sirven para deducir la temperatura normal de la estacion inferior. En fin, los resultados obtenidos están en relacion con las diversas elevaciones, de modo que es de presumir que no hubo errores de consideracion.

276. La siguiente nota de alturas halladas por el barómetro ofrecerá algun interés al lector:

Puntos.	*Varias alturas sobre el nivel del mar.*
Aranjuez.	620 varas.
Madrid.	800
Venta de Cercedilla.	1561
Puerto de Navacerrada. . . .	2200
San Ildefonso (Palacio). . .	1384
París	26
Lóndres.	casi nada.

Medicion de distancias horizontales con el barómetro.

277. Si se quisiere trazar rápidamente la topografía de un pais de montañas, será utilísimo el barómetro, consiguiéndose por su medio, despues de haber determinado las elevaciones, calcular las distancias horizontales comprendidas entre las verticales de las mismas elevaciones. Para esto, dos observadores deben tomar simultáneamente las distancias al zenit (141), en las estaciones en que se sitúe el barómetro.

La fórmula $x = 2 \cot \frac{1}{2}(a - a')$ dará x, ó la distancia buscada. Cuando $a = a'$, ó cuando los dos ángulos al zenit son iguales, en este solo caso la distancia x no puede determinarse. (*)

Uso del Círculo, y Pantómetra ó Cartabon de agrimensor, para trazar y medir líneas accesibles ó inaccesibles, levantar y bajar perpendiculares, y tirar paralelas.

278. Si se trata de marcar la línea ADHLO para medirla despues, se colocará verticalmente el pie del círculo ó pantómetra

(*) Los que deseen mas conocimientos sobre esta materia, pueden consultar las observaciones astronómicas y físicas hechas en el Perú por los señores don Jorge Juan y don Antonio Ulloa; las indagaciones sobre la atmósfera por Deluc; el tratado de física de Haüy; el memorial topográfico militar del depósito de la guerra en Francia; los tratados de Geodesia y topografía de Puissant; etc.

en D; y mirando por las pínulas de uno de sus diámetros, se alinearán en el llano los jalones A, B, C, y en la bajada los E, F, G.

*Fig*134 Trasládese despues el instrumento á H; y dirigiendo la visual á los últimos jalones, alinéanse con el mismo diámetro los Y, K, en la subida. En fin, colocado en L el instrumento, y alineado el diámetro con estos, se establecen los M, N, O; y se observa desde esta estacion L si la visual que pasa por los puntos L, M, N, O, pasa exactamente por los D, C, B, A, como debe suceder para que la operacion esté bien hecha.

279 Para levantar una perpendicular en el punto A de la línea BE se coloca el instrumento verticalmente en A, y se alinéa uno de los diámetros, mirando por sus dos pínulas opuestas 4, 3, á los jalones colocados en los puntos estremos B, E. Los jalones que se coloquen en la direccion de las otras dos pínulas, 1, 2, marcarán los puntos por donde ha de pasar la perpendicular que se intenta levantar en A, la que podrá prolongarse cuanto se quiera.

Fig. 51

280. Si el punto, sobre que la perpendicular ha de levantarse, está en el estremo de la línea, se colocará el círculo en él, alineando las pínulas de uno de los diámetros sobre el otro estremo.

Cuando la línea, sobre que se quiere levantar la perpendicular, es un muro, palizada, etc., se ponen dos piquetes *b*, *e*, á igual distancia de los B, E, valiéndose de una escuadra de albañil; y se levanta la perpendicular sobre la nueva línea *be* paralela á la dada BE.

*Fig*135 Para bajar desde H una perpendicular á la línea AB se coloca el instrumento, alineado uno de sus diámetros con AB, en uno de los puntos de aquella, por ejemplo G, que parezca estar mas perpendicularmente enfrente de H. Si tirando la visual GK, se ve que no pasa por este punto, se elije otro, por ejemplo F; y como tampoco la visual FY pasa por H, se traslada á otro E, en que por fin se verifica.

*Fig*136 281. Si el punto H, por el que ha de pasar la perpendicular no se descubre desde el correspondiente de la línea AB, se envia un hombre que pegue fuego á una porcion de yerba ó ramas secas; y se va buscando como en la operacion anterior la visual perpendicular sobre AB, que se dirige cuanto sea posible hácia el sitio donde se levanta la columna de humo. Sea por ejemplo DG la visual que no pasa por H, y sí por G, desde donde se divisa el H: levántese en G la perpendicular G*n*, y mídase exactamente: tómese D*c* igual á ella; y levántese en cualquier punto F, de la GD, otra perpendicular FE, tambien igual á la CD. La línea que pasa por los puntos C, E, será la perpendicular pedida, que pasará por H.

282. Por este medio se puede trazar entre dos puntos dados A, B, una vereda ó camino en un bosque espeso. Un hombre en B grita, dispara una arma de fuego, ó tira un cohete; y el que *Fig* 137
está en A dirige una visual en la direccion del ruido ó señal, en cuanto le es posible. Se hace aclarar un poco el terreno en aquella direccion; y si la visual no va derecha á B, y sí hácia otro punto C, como sera lo mas regular, se levanta en este una perpendicular CB que se medirá bien. En otro cualquier punto E de la AC se levantará otra perpendicular ED, cuya longitud se tendrá por la proporcion AC : BC : : AE : ED, que dará el punto D; y por igual medio otros en la direccion de los A, B, con lo que podrá trazarse la línea AB de la vereda ó camino.

Cuando la distancia AB es muy grande, el punto C podrá resultar tan distante, que desde él no se descubra el B: entonces el hacer nuevos tanteos seria largo y penoso; por lo que hay que emplear otros instrumentos y acudir á otras operaciones, como se dirá en su lugar.

283. Para tirar por Y, en un llano, una paralela á la AB se levanta con el círculo la perpendicular KY; se coloca en Y el *Fig* 136
instrumento alineando un diámetro con YK; y situando el otro en ángulo recto, marcará la YL, que es la paralela buscada.

284. Para hallar la longitud de la línea AB inaccesible en parte, se coloca el círculo ó pantómetra en B; se levanta la perpenlar indefinida, BC; se tira desde un punto E de ella la visual EA *Fig* 138
al estremo A; y se levanta la perpendicular ED hasta que encuentre la AB prolongada; con lo que, siendo DB : BE : : BE : AB, y pudiendo medirse las DB y BE, se tendrá la AB.

285. Si en el punto B no se puede levantar una perpendicu-
Fig 139 lar, se prolonga la AB hasta C por ejemplo, en que ya pueda tirarse la CE de cualquier magnitud: en E se levanta la perpendicular EF: desde F se dirige la visual FA que cortará á la CE en un punto D; se miden las CD, DE, EF, BC; y se tendrá. . . . . .

$$DE : DC :: EF : AC \;.\; y \;.\; AC - BC = AB.$$

Fig 140 *y* 141 286. Las figuras 140 y 141 manifiestan, sin necesidad de esplicacion, otro modo de resolver el mismo problema.

La inspeccion de la figura y la ecuacion siguiente

Fig 142
$$AB \cdot BD = BE \cdot BF \;.\;.\;.\;.\;.\; y \;\; AB = \frac{BE \cdot BF}{BD};$$

dan á conocer el procedimiento para la misma resolucion, porque AD y EF son cuerdas que se cortan dentro del círculo que pasa por los puntos A, E, D, F; pues por construccion, los puntos E,F se elijen de modo que los ángulos AFD, AED sean rectos.

Levantar el plano de un terreno, y medir su superficie con el círculo, ó con la pantómetra ó cartabon de Agrimensor.

Fig 143 287. Sea AYKLMNOFBD. . . el terreno de que se trata, y dentro del cual se puede operar. Tírese la línea AB, y levántense en ella las perpendiculares de un mismo lado aY, xK que se medirán, asi como las partes Aa, ax de la base AB; retrocédase desde B, levantando y midiendo las perpendiculares del otro lado, ED, xC, y las partes BE, Ex, xA: con lo que se habrá medido dos veces la base para cerciorarse de la exactitud, disminuir el indispensable error, y evitar la confusion que se originará de irse levantando las perpendiculares, ya á un lado ya á otro.

Sujetos los puntos C,D,E,F, se tiran las bases AC, CD, DE, Fg, para poder levantar perpendiculares que marquen todas las tortuosidades de los rios ó caminos que encierra el terreno, cuyo plano se quiere sacar. Se traslada despues esta figura al papel, lo que es bien fácil; y calculando las superficies de los triángulos ACx, AaY, las de los trapecios y demas cuadriláteros CDEx, aYKx, se tendrá el area total del terreno comprendido. Si las sinuosidades que presenta el terreno son muchas, como sucede por lo general en las orillas de los rios, de los caminos, &c., es claro que medida la base mas próxima á ellos, y medidas tambien las perpendiculares que se levanten y que deben estar tanto mas inmediatas entre sí, cuanto mayor sea la exactitud apetecida, se hallarán los puntos que marcan las sinuosidades, y se tendrá dividido el espacio en areas, que podrán apreciarse ó medirse como en la figura se nota.

En muchas ocasiones bastará una sola base para medir el terreno propuesto, segun lo manifiesta tambien la figura. *Fig* 144

288. Pocas veces serán iguales las superficies de un mismo terreno halladas por dos ó mas agrimensores; ya porque no se marcaron unos mismos límites ya porque las cadenas no son exactamente iguales ó no se han tendido igualmente; ya porque las alineaciones no se han hecho con precision; ya en fin, por la mayor ó menor aproximacion de los cálculos segun las fracciones que se desprecien. Si las dos superficies halladas solo se diferencian en $\frac{1}{60}$, respecto á un espacio que no pase de una fanega de sembradura, se miran las operaciones como exactas; pero aquel quebrado debe ser tanto menor, cuanto mayor sea la superficie; y aun llega á considerarse grande para la fanega, si esta es de mucho valor.

289. Si no pudiesen hacerse las operaciones en lo interior del terreno, cuyo plano ha de levantarse, se opera por la parte esterior tirando, por ejemplo, una línea *ab* que sirve de base. Sobre ella se levantan las perpendiculares *ab*, *ac*, y se tira la *cd*, alineándola si se puede, como en este caso, con una parte AB del terreno; y se tendrá la superficie de este por la ecuacion $S=(ad+bc)\frac{ab}{2}-s$. *Fig* 145

Representandos la suma de las superficies de todos los triángulos y cuadriláteros, esteriores al espacio que quiere medirse, es claro que de su valor deberia rebajarse el de los espacios *t,t*, si la línea en vez de ser *bc*, hubiese convenido que fuese *b'c'*, por ejemplo.

Como debe haberse observado en la operacion anterior, se procura circunscribir cuanto se puede el rectángulo en que se inscribe el espacio en cuestion; asi por ser de este modo mas sencillos los cálculos, como tambien por presentarse mas fácil la rectificacion de las operaciones.

290. No es solo el cuadrilátero lo figura en que puede inscri-

birse el espacio de que se trata; podrá tambien serlo en un triángulo rectángulo, ó en otra figura polígona.

291. Si se quiere levantar por el método esplicado, el plano de un término, ó terreno que contenga propiedades de distintos particulares, conviene calcular primero la superficie del todo, y de esta inferir despues la de cada parte.

Si la suma de todas estas compone el total, se tendrá una prueba de la exactitud de la operacion, economizando medidas en el terreno, lo que es de mucha ventaja: asi es, que solo debe practicarse la medicion parcial cuando no sea posible la total.

292. Si en el terreno hay hondonadas y elevaciones, como suele suceder, solamente en un espacio de muy poca estension puede prescindirse de reducir las diferentes rampas á sus bases horizontales (222); pues de otro modo resultaría una superficie mas grande, y cuya figura no seria la verdadera.

293. Muchas veces, como se ha visto (278), una parte de las
Fig 134 líneas está en un llano, mientras que otra corre sobre pendientes.
Fig 146 En este caso se toman las distancias AD,DH,HL separadamente, y los ángulos de inclinacion DHQ, LHR; apuntándolo todo en un registro. Sea ABCD el espacio cuyos lados ó bases esten en planos diferentes, de manera que las AC,CD pasen por laderas ó ribazos; se formará el registro siguiente:

Bases.	*En llanura.*	*En rampa.*	*Reduccion.*	*Bases reducidas.*	*Ángulos de elevacion.*
AB	....	130	....	117,63	28° subiendo.
AC	*Ae*, 40	*ef* 50	47,55	202,51	20° bajando.
	*g*C, 78	*fg* 40	36,96		25 subiendo.
CD	*h*D, 50	*h*C 90	......	134,19	23 subiendo.
BD	BD, 150	....	......	150	....

Se ve por el anterior estado, que A*e* está en llano, que el punto *f* está en una hondonada, que el *g* corresponde á la parte superior de la colina C etc. Al mismo tenor será fácil hallar las distancias reducidas K, *l* de los puntos donde deben levantarse las perpendiculares que han de servir para la medicion.

Por igual método podrá medirse la diagonal BC, ó la AD; y sino lo permitiese el terreno, tampoco harian falta estas distancias halladas directamente, pues bastará tener en los lados que forman los ángulos opuestos á aquellas diagonales dos distancias, con que poder tomar un ángulo horizontal.

294. Puede evitarse todo esto, teniendo cuidado al tomar las medidas con la cadena, de ponerla de nivel siempre que se aplica al terreno; asi como de suspenderla el ayudante delantero en las bajadas, y el ayudante opuesto en las subidas.

Si la inclinacion fuese mucha se pone la cadena horizontal, reduciéndola á la mitad de su longitud, ó usando reglones de cuatro varas. (52)

295. Generalmente para apreciar el valor de los terrenos se calcula la superficie horizontal; porque siendo aquel valor correspondiente á la cantidad de las producciones, y creciendo las plantas en direccion vertical, un terreno inclinado contendrá el mismo número de ellas que el horizontal. Y si bien no es rigurosamente exácta la observacion respecto á las plantas rastreras, siempre resulta que el terreno llano tiene á su favor, y en compensacion de la menor superficie, el que se labra mas facilmente, y con menor costo que el inclinado; que se siembra mejor por quedar la semilla esparcida con igualdad; que las lluvias no se llevan los abonos; y en fin, que la humedad se conserva mas largo tiempo, en igualdad de las demas circunstancias de las tierras.

De los Lindes.

296. En el caso de que solo quiera saberse exactamente la estension ó superficie de una posesion rústica, y en el de intentar dividirla por cualquier motivo, es preciso conocer antes su término, *lindes* ó linderos, cotejando lo que conste en la escritura ó títulos de propiedad, con lo que resulte al examinar el terreno. Para ello es indispensable ver, si la figura y posicion de las señales ó *mojones* (*) es cual en los documentos de propiedad se espresa; si

(*) Estos mojones son, como se ve, puntos fijos de separacion, generalmente situados en los ángulos de la figura, señalados con piedras grandes me-las distancias corresponden respectivamente con las allí marcadas; y y si los rios, arroyos, caminos, etc. terminan ó circuyen las partes que se designan.

297. En esta rectificacion puede suceder, que no parezca alguno de los mojones citados en los títulos; y entonces, para hallar el sitio donde estuvo, se procede como sigue:

Fig 147 Sean ABCDEF los lindes de una heredad, en que no parece el mojon A. Por los títulos de propiedad debe tenerse sabido el valor de las distancias AG, AB, de modo que si ademas se conociese la direccion de una de estas, ó el ángulo que forma con las GB ó BC, el punto A quedaria determinado.

No conociéndose el ángulo, puede tirarse y medirse la recta BG; y conocidos en el triángulo ABG los tres lados, se hallará el ángulo AGB, ó el ABG, por cuyo medio se determinará el punto A. Si no se pudiese tirar la AG ó AB, se calculan, en uno de los triángulos AGI ó ABI, la perpendicular AI y las distancias GI ó BI.

298. Si los mojones A, B, no existiesen, y hubiesen variado los puntos ó ángulos en que se los consideró al formar el plano, podria creerse que, no siendo ya la misma la base AB, no puede servir el plano para hallar los otros mojones: sin embargo hay recursos para calcular los lados y ángulos de la figura, y venir asi en conocimiento de lo que se busca. Fig 148

Por ejemplo, se tendrán los lados ... $AC = \sqrt{(Ab^2 + bC^2)}$

$CD = \sqrt{(Cr^2 + Dr^2)}$

Calculando y sumando despues los ángulos ACb, DCr, y aña-

dio enterradas, setos, arboles etc. Muchas veces los rios, arroyos, caminos, fuentes, y estanques sirven de límites entre las propiedades, á pesar de las variaciones á que estan espuestos aquellos objetos. Sean cuales fueren los mojones ó señales, debe marcarse en el plano la exacta posicion y longitud de las líneas que forman, y la abertura de sus ángulos.

Todo propietario puede obligar á su vecino al deslinde entre sus posesiones. Seria tambien útil que pudiese cercar enteramente su posesion, dejando libres los pasos ó *servicios* á que por sus títulos esté sujeta. Al código rural corresponde establecer las reglas para evitar las disputas sobre linderos, asi como fijar las penas para los que cieguen los fosos ó zanjas, destruyan las cercas vivas ó muertas, arranquen los setos, dañen á las bardas, varíen ó quiten las mojoneras, árboles, ú otros objetos que hagan de tales.

diendo 90° á la suma, se tendrá el ángulo ACD. Sumando luego á CDr, y EDs, que pueden calcularse, se tiene el CDE. Conocidos asi los lados y ángulos de la figura, si hay seguridad de que dos puntos cualesquiera como D, E, no han variado, podrán establecerse las demas mojoneras pedidas: pues se tendrá la direccion y la longitud de CD, con lo que se establecerá C; desde este se marcará A; y asi las demas.

Si los puntos determinados estuvieren en D y N, se imaginará la línea DN, y se buscará el ángulo que debe formar con la CD, por ejemplo, con lo cual se determinará la direccion de esta última. El ángulo CDN se halla, resolviendo; 1.° el triángulo ACD para conocer á CDA; y 2.° el triángulo AND para encontrar el ángulo ADN, que añadido al ADC da el CDN buscado.

Division de heredades ó posesiones.

---

299. La division del terreno, que constituye una posesion ó heredad, puede hacerse de dos maneras: 1.° por medio del cálculo: 2.° levantando el plano de la hacienda, y verificando despues la division sobre él. Por lo tanto se indicarán aqui ambos métodos de ejecucion.

300. Considerando las diferentes figuras que puede formar el terreno, y manifestando el modo de proceder en cada una, se tendrán los medios para la division de cualquier heredad; ya sea en partes iguales; ya en partes que estén en una razon dada; ya pasando la línea divisoria por puntos determinados; ya en fin, bajo de otras condiciones.

301. Sea el triángulo ABC al que se quiere dividir en un número n, de partes iguales ó equivalentes, desde el ángulo B. *Fig* 149

Divídase la base AC en el número n de partes iguales que se pidan; y tírense por los puntos de division d, e, las rectas Bd, Be, &c. Si las partes hubieren de ser dos desiguales y en razon de $r : m$, se hallará el punto d por la proporcion,

$$r+m : AC :: r : Ad = \frac{r \cdot AC}{r+m}$$

:

Si las partes hubiesen de ser tres, en la razon de r, m, p, es tendria igualmente

$$r+m+p : \mathrm{AC} :: r : \mathrm{A}d = \frac{r \cdot \mathrm{AC}}{r+m+p},$$

$$:: m : de = \frac{m \cdot \mathrm{AC}}{r+m+p},$$

$$:: p : e\mathrm{C} = \frac{p \cdot \mathrm{AC}}{r+m+p}.$$

302. Si la condicion fuere, que en vez de hacerse la division *Fig* 150 en tres partes desde un ángulo, se haga por líneas paralelas á un lado por ejemplo al AC, se hallaran las partes BD, BE por la proporcion

$$\mathrm{ABC} : \mathrm{BDE} :: \mathrm{AB}^2 : \mathrm{BD}^2;$$

y siendo por suposicion . . . . $\mathrm{BDE} = \frac{\mathrm{ABC}}{n}$;

será. . . . . $\mathrm{BD} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{AB}^2}{n}\right)}$,

y . . . . $\mathrm{BE} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{BC}^2}{n}\right)}$:

luego BD y BE serán medias proporcionales entre AB y $\frac{\mathrm{AB}}{n}$, entre BC y $\frac{\mathrm{BC}}{n}$.

Y como tambien $\begin{cases} \mathrm{BD} = \mathrm{AB}\sqrt{\frac{1}{n}} \\ \mathrm{BC} = \mathrm{BC}\sqrt{\frac{1}{n}} \end{cases}$

se tendrá el valor numérico correspondiente á la estension que se busca.

Del mismo modo $\mathrm{ABC} : \mathrm{BFG} :: \mathrm{AB}^2 : \mathrm{BF}^2$.

y. . . . . $\mathrm{BF} = \sqrt{\frac{\mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{BFG}}{\mathrm{ABC}}}$;

y como . . . $\mathrm{BFG} = 2\mathrm{BED} = \frac{2\mathrm{ABC}}{n}$,

será. . . . . $\mathrm{BF} = \sqrt{\frac{\mathrm{AB}^2 \cdot 2\mathrm{BED}}{\mathrm{ABC}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{ABC}}{n.\mathrm{ABC}}} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \mathrm{AB}^2}{n}\right)}$

$$y \ldots \left\{ \begin{array}{l} BF = AB\sqrt{\frac{2}{n}} \\ BG = BC\sqrt{\frac{2}{n}} \end{array} \right.$$

Luego, por las primeras espresiones propias del resultado, gráfico, BF y BG son medias proporcionales entre AB y $\frac{2AB}{n}$, y entre BC y $\frac{2BC}{n}$; y por las segundas se tendrán las correspondientes al valor numérico.

Hechos estos cálculos, como el triángulo ABC es conocido, se toman las longitudes BD, BE, BF, BG sobre el terreno para tirar las líneas que han de dividir al triángulo.

303. Si la division en tres partes equivalentes se hubiese de hacer desde un punto D situado en el lado AC del triángulo ABC, cuya superficie sea S; supónganse hallados los puntos G, F, y tírense las DF y DG, cuyos valores se deducen imaginando las perpendiculares Gh, Fg; pues se tendrá, Fig 151

$$Gh = \frac{2S}{3AD} \text{ y } Fg = \frac{2S}{3CD};$$

y si AGD$=s$, será $s = \frac{1}{3}S$, y como $s = \frac{1}{2}AD \cdot Gh$, será $Gh = \frac{2S}{AD}$

Conocidas ya estas líneas, se tendrán las CF y AG por las proporciones; BE : BC : : Fg : CF. . . BE : AB : : Gh : AG: ó bien conociendo la AE ó EC, se encontrarán las Ah, Cg, y se levantarán las perpendiculares en h, y g, hasta que corten los lados AB y BC.

304. Podria suceder que uno de los dos cocientes Gh, ó Fg fuese mayor que la altura BE. Entonces las dos líneas GD, DF, deberán cortar el mismo lado AB ó BC, porque cuando Fg=BE, ya los puntos F y B se confunden, lo que indicaria que respecto á la porcion DC de la base no habria altura hacia el lado BC capaz de dar un triángulo igual al tercio del total. Será por consiguiente preciso tomar la altura hacia el otro lado y sobre la otra porcion de base A D, y encontrar el triángulo equivalente á los dos tercios de la superficie total. Asi se tendrá: Fig 152 Fig 151 Fig 152

$$S.\ ADF = AD.\ \tfrac{1}{2}\ Fg = \tfrac{1}{3}\ S,$$

$$Fg = \frac{S}{3} \times \frac{2}{AD} = \frac{2S}{3AD},$$

$$S.\ AGD = AD.\ \tfrac{1}{2}\ Gh = \tfrac{2}{3}\ S,$$

$$Gh = \frac{2S}{3} \times \frac{2}{AD} = \frac{4S}{3AD}.$$

Es claro que la altura Fg será la mitad de la Gh, y que tomando succesivamente alturas por mitad de las anteriores se irán hallando triángulos la mitad menores.

Esta fórmula será general si observando la marcha de las anteriores ecuaciones se hace m igual al número de partes equivalentes en que quiere dividirse el triángulo, y que se esprese las que componen á este; pues será, llamando a la altura, y b la base comun, $a = \frac{2n-(n-m)S}{n \cdot b}$.

Para resolver la cuestion gráficamente, se divide AC en tres partes iguales en a, b, por cuyos puntos se tiran las paralelas
Fig 153 aG, bF, á la BD, y las líneas Ba, Bb; y desde el punto dado D las DG, DF, que dividirán el triángulo en los de igual superficie ADG, GDF, FDC: porque siendo el triángulo $aBA = \tfrac{1}{3}$ ABC, y el triángulo $AGD = ABa$, será $AGD = \tfrac{1}{3}$ ABC.
Tambien se tiene $CBb = \tfrac{2}{3}$ ABC;
pero . . . $CBb = CFD$; luego $CFD = \tfrac{2}{3}\ ABc$,
no quedando que hacer mas que tomar en la escala las distancias BG y BF, y trasladar sus correspondientes sobre el terreno.

Fig 153′ La inspeccion de la figura basta para conocer el procedimiento que debe seguirse, en el caso que el punto D estuviese entre A y b, ó entre b y C.

Por el método descrito puede dividirse el triángulo en el número de partes que se quiera, sin necesidad de medir antes su superficie: ésta sin embargo es fácil de obtener, siempre que hubiere sido pedida.

Fig 154 305. Si el punto D′ estuviera en el interior del triángulo, y se pidiese que una de las líneas de division vaya á parar á uno de los ángulos, por ejemplo al B, mídanse las perpendiculares $D'h$, D′h′, y se tendrá $BG = \frac{2S}{3D'h}$ Si el triángulo BD′C fuese igual á $\frac{1}{3}$ S, la operacion estaria terminada, y las líneas de division serian D′B, D′C, D′G; pero veáse como ha de procederse cuando el triángulo sea mayor ó menor.

En el primer caso, divídase la diferencia por $\frac{D'f}{2}$ que habrá que medir, y se tendrá el valor de CF.

En el 2.° divídase la diferencia por $\frac{D'h'}{2}$, y se tendrá el punto de division sobre BC.

306. Si en el mismo supuesto de estar D en lo interior, se pide que una de las líneas de division Df, por ejemplo, sea perpendicular al lado AC, *Fig* 155

hágase. . . . $Ah = x$, $Gh = y$, $Af = a$, $Df = b$, $AH = c$, $BH = d$;

y se tendrá $y : x :: d : c$, ó . . $cy = dx$; y en fin $y = \frac{dx}{c}$.

La superficie del trapecio. . $GhfD = (b + y)\left(\frac{a - x}{2}\right)$.

La del triángulo . . . . $AGh = \frac{xy}{2}$

y . . . . $AGDf = \frac{1}{3}S = (b + y)\left(\frac{a - x}{2}\right) + \frac{xy}{2}$;

en donde sustituyendo por y el valor hallado,

se tendrá. . . . . $x = \frac{(\frac{2}{3}S - ab)c}{ad - bc}$;

y en general. . . . . $x = \frac{(\frac{2}{n}S - ab)c}{ad - bc}$.

Del mismo modo se obtendrá. . . . . . $Cg = \frac{(\frac{2}{n}S - Cf \cdot b)e}{Cf \cdot d - b \cdot CH}$.

En fin, tambien se encontrarán las Fg, Gh, sustituyendo en y el valor hallado de x; ó bien se tendrá con las Ah, y hG, en

AhG la AG para rectificar la posicion de G, y en CgF á CF; ó bien por último, resolviendo estos dos triángulos.

Fig 153, 154 y 155. Este problema puede aplicarse al caso en que se quieran hacer sendas ó veredas como DG, DF; ó DG, DB, DF; ó en fin, DG, DF, Df, que terminen en un punto comun D.

307. Si se trata de dividir el triángulo ABC en un número n de partes en una razon dada, pero de modo que una de ellas resulte tirando una línea DE opuesta á uno de los ángulos B, y la

Fig 150 mas corta posible, hágase $BE = BD = \sqrt{BC \frac{AB}{n}}$,(*) y ED será la distancia mas corta que segun las divisiones pedidas podrá tirarse dentro del ángulo EBD; por consiguiente podrá aplicarse al caso en que se quisiere construir un muro de division, ó poner una cerca entre dos propiedades con el menor costo posible.

Fig 156 308. Queriendo dividir el triángulo ABC en dos partes que estén en la razon de $m : n$ por medio de una perpendicular DE á el lado AC, se tendrá. . . . . $DE = \frac{Bh \cdot CD}{Ch}$;

tambien. . . . . $CDE : S - CDE : : m : n$,

ó. . . . . $CDE\,(m+n) = mS$,

y . . . . $\frac{m \cdot AC \cdot Bh}{2m+n} = \frac{CD \cdot Bh \cdot cD}{2ch}$,

ó . . . . $CD^2 = \frac{m \cdot Ac \cdot Ch}{m+n}$.

Si. . . . . $m = n$, será $CD^2 = \frac{Ac \cdot ch}{2}$.

Si CD resultare mayor que Ch, la operacion será la misma, tomando AD′ en vez de CD, y Ch en lugar de Ah.

La resolucion no ofreceria mayor dificultad aun cuando se propusiese dividir el triángulo en un número cualquiera n de partes equivalentes, porque la primera division seria. $CD^2 = \frac{AC \cdot ch}{n}$,

(*) Las resoluciones de este problema han demostrado que el triángulo BED es isósceles: véanse los tratados d' *Arpentage* de Lefebre y de *Topografie* de Puissant, (artículo division de superficies).

la segunda . . . . $CD^2 = AC \frac{2Ch}{n}$, y asi sucesivamente.

Por este medio se puede levantar una perpendicular DE sobre una recta AC, y de modo que el triángulo CDE sea igual á una superficie dada. Al efecto levántese en cualquier punto d la perpendicular de que se medirá asi como á Ce. Calcúlese la superficie del triángulo rectángulo Cde, y se tendrá $CDE : Cde :: CD^2 : Cd^2$; de donde se sacará la CD y se levantará en D la perpendicular DE pedida.

309. Si se quisiere determinar dentro de un triángulo conocido un punto D tal, que se halle á igual distancia de cada uno de los tres ángulos, y averiguar ademas en que razon están las partes en que queda dividido el triángulo, se procederá del modo siguiente. *Fig* 154

Llámense a, b, c, los tres lados del triángulo propuesto; r el radio del círculo circunscrito; y a', b', c', los tres ángulos en el punto D que se busca, comprendidos entre las tres distancias r', y opuestos respectivamente á los lados a, b, c:

se tendrá . . . . $Am = r \operatorname{sen} \frac{1}{2} a'$,

$d'm = r \cos \frac{1}{2} a'$,

y . . . . $S\ AD'B = r^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a' \cos \frac{1}{2} a'$.

Del mismo modo $S\ BD'C = r^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} b' \cos \frac{1}{2} b'$,

$S\ AD'C = r^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c' \cos \frac{1}{2} c'$,

$$y\ S\ ABC = r^2 (\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a' \cos \tfrac{1}{2} a' + \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} b' \cos \tfrac{1}{2} b' + \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c' \cos \tfrac{1}{2} c')$$

$$= \frac{r^2}{2} (\operatorname{sen} a' + \operatorname{sen} b' + \operatorname{sen} c') = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a' + b');$$

pero como. . . . . $a' + b' + c' = 360°$,

será. . . . . $\operatorname{sen} \frac{1}{2} c' = \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a' + b')$:

ademas se tiene. $\operatorname{sen} \frac{1}{2} a' = \frac{a}{2r}$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2} b' = \frac{b}{2r}$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2} c' = \frac{c}{2r}$,

por consiguiente $S = 2r^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a' \operatorname{sen} \frac{1}{2} b' \operatorname{sen} \frac{1}{2} c'$, que es la superficie del triángulo, ó $s = \frac{abc}{4r}$;

y de aqui. . . . . $r = \frac{abc}{4s}$ (*)

(*) Véase la Topografía de Puissant, segunda edicion, página 283.

Teniendo ya á r, se determinan los ángulos a', b', c', y los tres lados del triángulo serán entre sí : : sen a' : sen b' : sen c'.

Se vé por esta resolucion el modo de hallar la superficie de un triángulo, del cual no se conocen mas que los tres lados. (*)

310. Si se trata de dividir un cuadrilátero irregular en dos
Fig 157 partes equivalentes desde un punto dado h en uno de sus lados, se tiran las Bh, hC; se baja la perpendicular ho; y se miden los triángulos ABh, BCh; y se tendrá,

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{B}f.\,oh = \mathrm{S}\ \mathrm{B}hf = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ABCD} - \mathrm{AB}h,$$

$$\text{ó} \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{B}f = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{ABCD} - \mathrm{AB}h}{\frac{1}{2}oh} = \frac{\mathrm{ABCD} - 2\,\mathrm{AB}h}{oh},$$

$$\text{y} \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{C}f \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\mathrm{ABCD} - 2\,\mathrm{CD}h}{oh}.$$

Y si el número de partes fuese n, las fórmulas serian

Fig. 158

$$\mathrm{C}f = \frac{\frac{1}{n}\mathrm{ABCD} - \mathrm{CD}h}{\frac{1}{2}oh},$$

$$\mathrm{B}n = \frac{\frac{1}{n}\mathrm{ABCD} - \mathrm{AB}m}{\frac{1}{2}lm}.$$

En fin, si la division hubiere de ser en la razon de los números p, r, t, se tendrá; $p+r+t : p : : \mathrm{ABCD} : \dfrac{p \times \mathrm{ABCD}}{p+r+t}$:

y siendo $\mathrm{ABCD} : p+r+t : : \mathrm{AB}m + \mathrm{B}mn = \mathrm{AB}m + \tfrac{1}{2}ml \times \mathrm{B}n : p$;

$$\text{será} \ldots\ \mathrm{B}n = \frac{p}{p+r+t} \times \frac{\mathrm{ABCD} - \mathrm{AB}m}{\frac{1}{2}lm},$$

$$\text{y} \ldots\ldots\ \mathrm{C}f = \frac{p}{p+r+t} \times \frac{\mathrm{ABCD} - \mathrm{CD}h}{\frac{1}{2}oh}.$$

Y si se hacen $p=2$, $r=3$, $b=4$, se tendrán,

$$\mathrm{B}n = \frac{\frac{2}{9}\mathrm{ABCD} - \mathrm{AB}m}{\frac{1}{2}lm},$$

$$\mathrm{C}f = \frac{\frac{2}{9}\mathrm{ABCD} - \mathrm{CD}h}{\frac{1}{2}oh}.$$

(*) La fórmula para este caso es $\mathrm{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; en la que p representa el semiperímetro del triángulo, y a, b, c, los lados del mismo. Puede tambien aplicarse á los polígonos, pues que se dividen en triángulos. Véase la Geodesia de Puissant, y el tratado de Topografía del mismo autor, (division de superficies.)

Para verificar esta division gráficamente, se tira por B la Be Fig 159
paralela á AD; y se dividen ambas en tantas partes iguales, cuantas sean las que se quieran del cuadrilátero. Sean dos por ejemplo, en h, K; tírense las líneas CK, Kh, y se tendrá el cuadrilátero CKhD, mitad del propuesto. En efecto, aquel se compone del hKeD, y del triángulo CKe mitad del BCe.

Queriendo que la figura sea menos irregular, se tirará por C la línea Ch, y se tendrá. . . $Cfh\text{D}=\text{CK}h\text{D}=\text{C}h\text{D}+\text{CK}h$:
pero. . . . . $\text{CK}h=Cfh$;
luego. . . . . $Cfh\text{D}=\text{C}h\text{D}+\text{C}hf$.

Tratándose de dividir el cuadrilátero en tres partes equivalentes, se dividirán la paralela Be y el lado AD en tres partes iguales; se buscará, como se acaba de hacer la línea fh que forma el cuadrilátero CfhD, tercio del propuesto; y el restante ABfh se dividirá en dos partes equivalentes por una operacion igual; procediendo de un modo análogo si el número de divisiones fuese mayor de tres.

Si se quiere dividir la figura en partes que tengan entre si cierta razon, como por ejemplo la de los números 2, 3, 4, se dividirán la paralela y la base en nueve partes iguales; y se procederá sobre la 2.ª y 5.ª division, del mismo modo que si se tratase de dividir la figura en dos partes iguales.

Esta particion puede aplicarse á nueve herederos, tres de los cuales acepten las seis partes correspondientes á los otros; tomando uno de ellos una parte, otro dos partes, y el último las tres restantes.

311. Si la division del cuadrilátero ABDC en dos partes Fig 160
iguales se quisiese por una línea il paralela á uno de los lados BD por ejemplo, supónganse los AB, DC prolongados hasta su concurso en e; hállese la superficie del triángulo ACe, del que se conocen AC, y los ángulos CAe, ACe suplementos de los BAC, ACD; y se tendrá $\text{BD}e : eil :: \text{B}e^2 : ei^2 :: \text{D}e^2 : el^2$;

de aqui . . . $ei=\text{B}e\sqrt{\left(\frac{eil}{\text{BD}e}\right)}$; $el=\text{D}e\sqrt{\left(\frac{eil}{\text{BD}e}\right)}$. Como en el triángulo ACe se pueden hallar Ae y Ce restándolas de ei, el, se tendrán tambien Ai, Cl.

Si la línea de division hubiese de ser paralela al lado AC, se tiraria paralelamente á este la lm, y se tendria,

$$AeC : elm :: Ae^2 : em^2 : Ce^2 : el^2.$$

312. Pidiéndose que el cuadrilátero se divida en cualquier
Fig 161 número n de partes equivalentes, por medio de líneas paralelas al lado AB, se empleará la misma fórmula.

Sean $ADCB=q$, $ECD=t$, $Ef=x$, $Eg=x'$, $Eh=x''$, etc.

se tendrá $x=BE\sqrt{\left(\frac{t+\frac{q}{n}}{t+q}\right)}$, $x'=BE\sqrt{\left(\frac{t+\frac{2q}{n}}{t+q}\right)}$, $x''=BE\sqrt{\left(\frac{t+\frac{3q}{n}}{t+q}\right)}$; con lo que se tirarán las paralelas ff', gg', hh', á la AB.

Tambien seria fácil la division, si las partes que se piden hubiesen de estar en una relacion dada.

Fig 162 313. Cuando se quiere que la línea hh' sea perpendicular á uno de los lados AB, y que el cuadrilátero quede dividido, por ejemplo, en dos partes, que tengan entre si la razon de los números m,n, se determina la superficie del cuadrilátero ACDB; y las partes buscadas se tendrán por medio de la proporcion $m+n : m :: ACDB : ACh'h=\frac{m \cdot ACDB}{m+n}$. Si de esta espresion se resta el triángulo ACc, quedará la superficie $Cchh'$; reduciéndose luego la cuestion á dividir el cuadrilátero $CcdD$ en dos partes que estén en la razon dada, lo que se ejecuta como ya se dijo.

314. Se ha resuelto el problema penúltimo bajo el supuesto de conocerse los lados y ángulos de la figura, y la superficie del cuadrilátero; pero si por haberse levantado el plano de aquella con
Fig 163 el círculo de agrimensor no se conocieren los ángulos, la resolucion se obtendrá midiendo sobre el terreno las aD, ac, cB, y las perpendiculares aC, Ac; pues $aD \cdot eb=aC \cdot bD$ . . . . . . (1)

$$Bc \cdot eb=Ac \cdot Bb.$$

Y como . . . $Bb=BD-bD$, será. . . $Bc \cdot eb=Ac\,(BD-bD)$, (2) y eliminando á bD entre las ecuaciones (1), (2)

resultará. . . . . $eb=\frac{aC \cdot Ac \cdot BD}{Ac \cdot aD+aC \cdot Bc}$. (3)

La superficie de ABDC es conocida; supóngase EF la línea de division, y que se trata de partir el cuadrilátero en n partes

$$\text{equivalentes; será}\left\{\begin{array}{l}\text{AFEC}=\dfrac{\text{S}}{n},\ \text{siendo S la superficie del cuadrilátero,}\\[2ex] \text{BD}e=\dfrac{\text{BD}\cdot eb}{2}=\text{S}',\end{array}\right.$$

y se tendrá. . . . . $e\text{CA}=\text{S}'-\text{S}=\text{S}''$;

y por consiguiente. . . . . $e\text{EF}=\text{S}''+\dfrac{\text{S}}{n}=s$.

Pero siendo. . . $\text{S}' : s :: eb^2 : ez^2=\dfrac{eb^2\cdot s}{\text{S}'}$,

será . . . . $ez=\sqrt{\left(\dfrac{s\cdot eb^2}{\text{S}'}\right)}$,

y . . . . $eb-ez=\text{E}p=\text{F}q$.

Faltan aun por hallar las partes Dp, Bq, para tener los puntos en que deben levantarse las perpendiculares Ep, Fq, que corten en los lados del triángulo los puntos E, F: para ello se tiene,

$$a\text{C} : a\text{D} :: \text{E}p : p\text{D}=\frac{a\text{D}\cdot\text{E}p}{a\text{C}},$$

y tambien. . . . . B$q=\dfrac{c\text{B}\cdot\text{F}q}{\text{A}c}$.

Del mismo modo se hallarian los puntos G,I,K,H.

315. Si se tratase de dividir el cuadrilátero ABCD en tres partes equivalentes desde los puntos h,i, situados en el lado AB, se tendria segun lo dicho en el párrafo 310, *Fig* 164

$$\text{C}k=\frac{\frac{1}{6}\text{ABCD}-\text{CB}i}{ir}$$

$$\text{D}l=\frac{\frac{1}{6}\text{ABCD}-\text{AD}h}{sh}.$$

Tírense en el terreno las iC, iD, hD, hC; y mídanse los triángulos CBi, CBh, CDi, ChD, y el lado CD; se hallarán . . . . . .

$$\text{C}k=\frac{\frac{1}{3}\text{ABCD}-\text{CB}i}{\text{CD}i}.\text{CD},$$

$$\text{D}l=\frac{\frac{1}{3}\text{ABCD}-\text{AD}h}{\text{C}h\text{D}}.\text{CD},$$

espresiones iguales á las anteriores; pues $\dfrac{\text{CD}}{\text{CD}i}=\dfrac{2}{ir}$, $\dfrac{\text{CD}}{\text{C}h\text{D}}=\dfrac{2}{\text{S}h}$.

316. Podrá hacerse gráficamente la division pedida desde los

puntos h, i, convirtiendo antes el cuadrilátero ABCD en el trián-
Fig 165 gulo BCF, conforme se enseña en la Geometría, y dividiendo la base BF de este en tres partes iguales en g, v. Tírense las Cg, Cv; y quedará hecha la division del triángulo. Tírense luego las Ci, Ch y á estas las paralelas gK, vl; y se tendrá,

$CiK = Cig$: luego. . . $CiK + BCi = Cig + BCi$ ó $BCKi = BCg$,

$Chl = Chv$. . . . . $Bclh = Bcv$,

y. . . . . $ADlh = CFv$,

317. Si la division del cuadrilátero ABCD en tres partes
Fig 166 equivalentes, se quiere que sea desde uno de los ángulos, por ejemplo desde el C, tírese la AC; mídase el triángulo ABC; véase si es demasiado grande para formar una parte, como se supone en la figura; y divídase el tercio de la superficie del cuadrilátero por la mitad de la perpendicular Cg: el cociente será Bh; pues siendo. . . . . $BCh = \frac{1}{3}S = Bh : \frac{Cg}{2}$,

resulta . . . . $Bh = \frac{S}{3} : \frac{Cg}{2}$,

é igualmente. . . . . $Df = \frac{S}{3} : \frac{CK}{2}$.

318. En la práctica, en vez de la reduccion á triángulo, se tira la diagonal BD opuesta al ángulo C desde el cual se quiere hacer la division; se divide la diagonal en tres partes iguales en
Fig 167 los puntos g, o; se tiran las líneas Ao, Co y la diagonal AC, y si á esta se tira la paralela of, y en fin la línea Cf, CDf será el tercio del cuadrilátero propuesto, como se vé facilmente. Haciendo lo mismo en g, se tendrá la division pedida.

Fig 168 319. Para dividir el cuadrilátero ABCD en cuatro partes iguales por líneas tiradas desde uno de los ángulos A por ejemplo, tírese la AC, y hállense las superficies del cuadrilátero dado, y del triángulo ADC; véase si la segunda es menor que el valor de las tres cuartas partes de la primera; divídase la cuarta parte y despues la mitad de esta por la perpendicular Ar; y se tendrán dos cocientes, que darán los valores de Dg y Df. En fin, divídase la cuarta parte por $\frac{Ap}{2}$, y se tendrá la Co.

Esto se entiende sin dificultad despues de lo dicho en los ejemplos anteriores.

Si fueren seis las partes pedidas, y se quisiere la division desde el otro ángulo C, se prolonga la BC hasta o, y se halla la superficie del triángulo ABo. Si esta no es igual á las $\frac{4}{6}$ partes de la del cuadrilátero, se divide sucesivamente el sesto, el tercio, y la mitad de la superficie del mismo por la mitad de la perpendicular Bs, y se encuentran los valores de Af, Ag, Ah. *Fig* 169

Réstese la superficie de las tres partes halladas de la del triángulo ABo, y se tendrá la parte oBh, que restada del sesto de la superficie del cuadrilátero, dará por resultado la del oCi.

Divídase esta por la mitad de la perpendicular Ci, y se tendrá el valor de Ol; con lo cual, dividiendo por medio en m la parte Dl, se tendrán todos los puntos buscados.

320. Para la division del exágono irregular ABCDEF en tres partes equivalentes por líneas tiradas desde los puntos p, g, en el lado AB, se tirarán las pc, pD, gD. Mídase la superficie del triángulo pCB, y réstese de la del tercio del polígono; divídase luego la diferencia por la mitad de la perpendicular ap; y el cociente será el valor de la parte Cm. Hecho esto, mídanse las superficies de los triángulos Dpm, Dpg, y si su suma es menor que el tercio de la superficie de la figura dada, el punto i caerá en el lado DE; réstese aquella suma del tercio de la superficie de la figura; divídase la resta por la mitad de la perpendicular gd; y el cociente dará el valor de la parte Di. *Fig* 170

Esto es bien claro, pues. . $mp\text{C}=\frac{1}{3}\text{S}-\text{B}p\text{C}$,

ó. . . . . $m\text{C}\cdot\frac{1}{2}ap=\frac{1}{3}\text{S}-\text{B}p\text{C}$,

y. . . . . $m\text{C}=(\frac{1}{3}\text{S}-\text{B}p\text{C}):\frac{ap}{2}$.

321. Si se quisiere dividir el exàgono en la relacion, por ejemplo de m' á n, desde el punto D, se reducirá la figura al triángulo BCK; se dividirá la base BK en las partes Bm, mK que estén en la razon dada; se tirará la Cm; y los triángulos CBm, CmK serán entre sí, como sus bases. Tírese en seguida la CD; y á esta por m la paralela mO, hasta que encuentre en O la CP prolongada: en tal caso se tendrá. . . . CDO=CDm. *Fig* 171

Tírese la DP, y á esta por o la paralela Oi, con lo cual la línea Di verifica la division pedida; pues $BCoD = CDo + BCD$,

y. . . . . . . $BCm = CDm + BCD$:

luego. . . . . $BCoD = BCm$.

Y como. . . . $DOi = Poi$;

será. . . . . $Por = ird$,

y. . . . . . $BCPiD = BCm$.

Fig 172 322. Tratándose de dividir la figura ABC. . en seis partes equivalentes desde el punto A, si S representa el sesto de la superficie de dicha figura, se tendrá,

$$Ca = \frac{S - ABC}{\frac{1}{2}AK} \ldots ac = \frac{S}{\frac{1}{2}AK} = \frac{2S}{AK} \ldots Do = \frac{S - AcD}{\frac{1}{2}Al}$$

$$Ev = \frac{S - oAE}{\frac{1}{2}Am}, \ldots Fy = \frac{S - AFv}{\frac{1}{2}Am}$$

Fig 173 323. Si la figura tuviese un ángulo entrante D, y se la quisiese dividir en dos partes equivalentes por ejemplo, se buscaria primeramente sobre que lado debe caer el punto h de division, á cuyo efecto se mide la superficie ABCD; y si esta es menor que la mitad de la superficie de la figura, claro es que aquel punto no cae sobre CD. Divídase la diferencia entre dicha mitad y la parte ABCD por $\frac{1}{2}An$; y el cociente dará la parte Dh.

Debe observarse que en los ejemplos anteriores la mayor ó menor facilidad de la operacion, regularidad, y continuidad de las partes, dependen de la posicion del punto, desde el cual ha de dividirse la figura. Por lo tanto, si el punto no está determinado, podrá elejirse el mas ventajoso, ó que mas acomode á los interesados en la particion.

324. Para dividir el pentágono $AiBP$ en tres partes equivalentes desde un punto F en su interior, y de modo que la línea
Fig 174 AF marque una de las divisiones, supóngase que S represente el tercio de la superficie del pentágono; y se tendrá como anteriormente. . . . . $On = \frac{S - AFO}{\frac{1}{2}Fp}$, $ie = \frac{S - AFi}{\frac{1}{2}Fr}$

Gráficamente se resuelve esta cuestion, reduciendo la figura á un triángulo equivalente FGH; dividiendo la GH en tres partes
Fig 175 iguales; tomando una de estas HK; y trasladándola á AD: de don-

de resultará que el triángulo ADF será igual al tercio del FGH.

Tírense la Fi, su paralela De, y la eF; con lo cual el triángulo Fei, tomado en vez de su igual FiD, dará el cuadrilátero $AFci$, tercio del pentágono propuesto. Hágase $Al = AD$, y se tendrá. . .

$AlF = ADF = \frac{FGH}{3}$. Prolónguese AO hasta que encuentre en m la lm paralela á AF; supóngase la línea Fm; y tírese la Fn; resultará $AFnO = AlF = \frac{FGH}{3}$

325. Si se tratare de dividir la figura ABCD por líneas paralelas al lado AB sin operaciones gráficas, ni suponer prolongados los lados AD, BC, como se hizo en el caso de la figura 160; ó lo que es igual, que se rebaje de una figura dada una parte tambien dada, se procederá del modo siguiente: *Fig* 176

Mídase la superficie total de la ABCD, y supóngase que la línea GH determina los límites de la primera division. Fácilmente se verá que queda resuelta la cuestion, en cuanto se conozcan la perpendicular AO, ó la paralela GH.

Para conocerlas, ó encontrar una de estas dos cantidades, levántese sobre AB una perpendicular indefinida Ai; y tírese por un punto cualquiera o de esta la EF perpendicular á Ai: con lo que resultara el trapecio ABFE, cuya altura Ao se mide, así como sus dos lados AB, EF. Supóngase para abreviar

$$AB = a,\ EF = b,\ Ao = c,\ GH = x,\ AO = y,$$

y la superficie conocida $ABGH = s$.

Se tendrán las dos ecuaciones. $\begin{cases} (a+x)y = 2s \\ (a+x)y - (b+x)y - c = (a+b)c; \end{cases}$

en las cuales despejando y, é igualando, resultará. . . . .

$$\frac{2s}{a+x} = \frac{(a+b)c - (b+x)c}{a-b}$$

Quitando luego los denominadores; reduciendo, trasladando, y cambiando los signos; resultará $a^2c + 2bs - as = cx^2$,

y. . . . . $x = \sqrt{\left(\frac{a^2c + 2bs - 2as}{c}\right)}$,

ó. . . . . $x = \sqrt{\left(a^2 + (b-a)\frac{2s}{c}\right)}$.

Ahora igualando los valores de x sacados de las dos primeras ecuaciones, se tendrá $\frac{2s-ay}{y}=\frac{ac+by-ay}{c}$; y hechas todas las operaciones . . . . $y=-\frac{ac}{b-a}\pm\sqrt{\left(\frac{ac^2}{(b-a)^2}+\frac{2s}{b-a}\right)}$

Si a es mayor que b, se cambiará el signo del primero y tercer término, poniendo $a-b$ en vez de $b-a$.

Si se halla el valor de x, se tomará desde A hasta d, y desde B hasta e; y por estos puntos se tirarán á las AD, y BC, las paralelas dH, eG. Si el valor hallado fuese el de y, se trasladará sobre la Ai; y suponiendo que sea AO, se levantará en O la perpendicular OH prolongándola hasta G. Las fórmulas de que se sacan los valores de x, é y, no varian, aunque EF caiga debajo de GH.

326. Si la disposicion de la figura fuese tal, que la cantidad
Fig 177 s=ABFHGE no pueda formar un trapecio, tírese EF paralela á AB; hállese el valor de AO$=y$; y levántese en O la perpendicular gh, que resolverá la cuestion, si se halla enteramente en el plano de esta figura. Pero como los triángulos Lgt, Fvh no son parte de ella, se necesita encontrar un trapecio tGHv, que sea igual á la suma de dichos dos triángulos.

Para esto fórmese el trapecio $tg'h'v$; y búsquese el nuevo valor de y, con el que se determinarán los puntos G, H, como anteriormente. Los límites de las demas divisiones se determinan de un modo semejante.

327. Si no se pudiere operar en lo interior de la figura, se medirán los ángulos A, B; se supondrá Ao de tal magnitud, que la paralela EF forme un trapecio ABFE; y se tendrá . EF=AB +Eo+FK: Eo y FK se calcularán por medio de los triángulos rectángulos AoE, BKF, en cada uno de las cuales se conocen los ángulos y un lado del ángulo recto; y teniendo la EF se tendrán tambien los valores de x, y, por las fórmulas anteriores.

328. Si se puede operar en lo esterior, y aun á distancia del
Fig 176 perímetro de la figura, se buscará x para determinar los puntos G, H, por medio de las paralelas eG, dH. Pero no pudiendo tirar-

se estas, se calculará y; y se determinarán despues las AG, BH en los triángulos AOG, BKH.

329. Se ha visto que las fórmulas, por donde se sacan los valores de x y de y, suponen el conocimiento de una perpendicular Ao, y de una paralela EF. Pero puede no necesitarse este conocimiento, haciendo la tangente trigonométrica de $\mathrm{GAO}=m$, y la de $\mathrm{FBK}=p$; y siendo el rádio igual á la unidad, se tiene

$$\mathrm{OG}=my. \;.\;.\; \mathrm{KH}=py;$$

y por consiguiente. . $\mathrm{OG}+\mathrm{HK}=(m+p)y$,

y. . . . . GH, ó, $b=a+(m+p)y$.

Pero como. . . . . $\mathrm{ABGH}=s$;

será. . . . . $(2a+y(m+p))y=2s$,

é. . . . . $y=\frac{a}{m+p}\pm\sqrt{\frac{a^2}{(m+p)^2}+\frac{2s}{m+p}}$

Si los ángulos en A y B fuesen agudos, se tendría $a>b$; y entonces cambiarian los signos del primero y tercer términos de esta fórmula.

Si uno de los ángulos fuese agudo ú obtuso, y el otro recto, se pondria en la formula m, ó p, en lugar de $(m+p)$; pero si el uno fuese agudo y el otro obtuso, y fuesen suplemento uno de otro, *Fig* 178 se tendria $a=b$; esto es, que la figura seria un paralelógramo, cuya altura y se hallaria mas facilmente que por la fórmula anterior del trapecio, porque se tendria en tal caso. . $y=\frac{s}{a}$

Por último, si la suma de dichos ángulos fuese menor ó mayor que el valor de dos ángulos rectos, se tendria $b=a\mp(m+p)$.

330. Muchas veces los linderos de dos haciendas forman una línea tortuosa AB, que puede convenir á los propietarios colindantes convertir en recta sin alterar la respectiva superficie de cada posesion. Para ello levántese sobre AC la perpendicular gh; y mí- *Fig.* 178 danse las superficies que á su derecha é izquierda forma esta con las partes de la línea tortuosa AB. Si las superficies de un lado fuesen iguales á las del otro, la perpendicular seria la línea pedida; pero si hay alguna diferencia, se la dividirá por $\frac{gh}{2}$, y el cociente se marcará á la derecha ó izquierda del punto g.

Sea por ejemplo . . . $a+c+e>b+d+f$.

Haciendo $r =$ á la diferencia de estas cantidades será . . .

$gD = \frac{r}{\frac{1}{2}gh} = \frac{2r}{gh}$, y la línea Dh será la que deje de igual superficie las dos posesiones.

Debe observarse, que la anterior solucion, bien sencilla, no exige el conocimiento de las dos superficies contiguas.

Reflexiones relativas á la division de las propiedades rústicas.

331. La diferencia de los terrenos, de que se componen las posesiones rústicas, hace que los productos de estas no sean proporcionales á la superficie ó estension respectiva; y de aqui es que la division de las propiedades exige conocimientos locales, equidad, y destreza en el agrimensor, para que á cada partícipe toque igual porcion de terreno, bueno, mediano, y malo.

Si la posesion tiene por límite un rio, camino, bosque, &c. cada division debe tener su parte de lindero sobre el límite, para que participe del bien ó mal que de su vecindad resulte; y cuando esto no sea posible, debe tenerse en consideracion.

Si la naturaleza del terreno es variable, como cuando está sugeto á inundaciones, deberán compensarse sus calidades con la estension, hasta equilibrar á los partícipes. Quiere decir que si, por ejemplo, una parte de la posesion produce 5 por $\frac{0}{0}$ y otras 10, será justo dar doble terreno de la primera clase que de la segunda.

332. Las tablas y medidas que siguen, son de útil conocimiento y uso en las operaciones de agrimensura.

TABLA PRIMERA.

Para reducir las nuevas medidas agrarias francesas á las antiguas, y á las españolas.

N.	Miriar. en leg. cuad.	Hectar. en arpents.	Metros c. en toesas c.	Décim. c. en pies c.	Hectar. en fanegas c.	Areas en estadales.	Metros c. en varas c.	Décim. c. en pies c.	Décim. c. en pulg. c.	Cént. c. en lineas c.
1	0,0324	2,92494	0,26324	0,09477	1,55290	8,94469	1,43115	0,12880	18,5477	26,7087
2	0,0648	5,84989	0,52649	0,18954	3,10580	17,88938	2,86230	0,25761	37,0974	53,4174
3	0,0972	8,77483	0,78973	0,28430	4,65869	26,83408	4,29345	0,38641	55,6431	80,1261
4	0,1296	11,69977	1,05298	0,37907	6,21159	35,77877	5,72460	0,51521	74,1909	106,8348
5	0,1620	14,62471	1,31622	0,47384	7,76449	44,72346	7,15575	0,64402	92,7386	133,5435
6	0,1944	17,54966	1,57947	0,56861	9,31739	53,66815	8,58690	0,77282	111,2863	160,2522
7	0,2268	20,47460	1,84271	0,66338	10,87029	62,61284	10,01805	0,90162	129,8340	186,9609
8	0,2592	23,39954	2,10596	0,75814	12,42318	71,55753	11,44920	1,03043	148,3817	213,6697
9	0,2916	26,32449	2,36920	0,85291	13,97608	80,50222	12,88036	1,15923	166,9294	240,3784
10	0,3240	29,24943	2,63245	0,94768	15,52898	89,44691	14,31151	1,28804	185,4771	267,0871

TABLA SEGUNDA.

N.	Leg. cuad. en miriar.	Arpents. en hectar.	Toesas c. en metros c.	Pies c. en décim. c.	Fanegas c. en hectar.	Estadales en áreas.	Varas c. en metros c.	Pies c. en décim. c.	Pulg. c. en décim. c	Lineas c. en cént. c.
1	30,8642	0,341887	3,79874	10,5521	0,643957	0,111798	0,698738	7,76376	0,05392	0,03744
2	61,7284	0,683774	7,59749	21,1042	1,287915	0,223596	1,397477	15,52752	0,10783	0,07488
3	92,5926	1,025661	11,39623	31,6563	1,931872	0,335394	2,096215	23,29128	0,16175	0,11232
4	123,4568	1,367548	15,19498	42,2084	2,575829	0,447192	2,794954	31,05504	0,21566	0,14976
5	154,3210	1,709435	18,99372	52,7605	3,219787	0,558990	3,493692	38,81880	0,26958	0,18720
6	185,1852	2,051322	22,79247	63,3126	3,863744	0,670788	4,102430	46,58256	0,32350	0,22464
7	216,0494	2,393209	26,59121	73,8647	4,507701	0,782586	4,891169	54,34632	0,37741	0,26208
8	246,9136	2,735096	30,38996	84,4168	5,151659	0,894384	5,589907	62,11008	0,43133	0,29952
9	277,7778	3,076983	34,18870	94,9689	5,795616	1,006182	6,288646	69,87384	0,48525	0,33696
10	308,6420	3,418870	37,98745	105,5210	6,439574	1,117981	6,987384	77,63760	0,53917	0,37440

333. *La legua legal española*, llamada horaria porque un hombre la anda sin esfuerzo en una hora, es tambien la legua marítima: consta de 20⑧ pies, y 20 de ellas hacen un grado terrestre; aunque no con rigorosa precision, por la varia longitud de los grados. Antiguamente llamaban legales de Castilla las que tenian 5000 varas, y eran de $26\frac{1}{2}$ al grado.

334. El *estadal*, que es el marco real, ó de ley, para medicion de tierras, tiene cuatro varas ó doce pies de largo.

335. La *aranzada de tierra* equivale á un cuadrado de 20 estadales lineales por lado; y por consiguiente su superficie es de 400 estadales cuadrados.

336. La *fanega de tierra* equivale á un cuadrado de 24 estadales lineales por lado; y por lo tanto su área contendrá 576 estadales cuadrados. Divídese la fanega en 12 *celemines*, y cada uno de estos en cuatro *cuartillos*. Los múltiplos de la fanega son:

La *yugada de tierra* equivalente á 50 fanegas, y la *caballería* á 60 fanegas.

337. En Castilla la Vieja, la *obrada* tiene 168337,5 pies superficiales; consta de 600 *palos* superficiales, y cada palo tiene de longitud $10\frac{3}{4}$ pies.

338. En la provincia de Sevilla el estadal cuadrado tiene $4\frac{1}{8}$ varas lineales de lado, y $17\frac{1}{4}$ varas cuadradas. La fanega tiene 500 estadales ú $8507\frac{13}{15}$ varas cuadradas; y el cuartillo tiene $10\frac{5}{12}$ estadales. La *cuartilla* ó cuarta parte de la fanega se subdivide en tres celemines.

La aranzada de Sevilla tiene 400 estadales de la provincia.

339. La *cahizada* en Aragon hácia Tamarite tiene 7200 varas cuadradas.

En Zaragoza, segun el conde de Sástago, la cahizada tiene 62.720 pies cuadrados, y se divide en 20 cuartales.

340. La fanega de secano en Lorca tiene 8000 varas cuadradas; la de regadío 4000: la primera se divide en cinco *tahullas*, y la segunda en $2\frac{1}{2}$; cada tahulla es un cuadrado de 40 varas de lado.

341. En el reino de Valencia la *jovada* tiene seis cahizadas, cada una de seis *anegadas*, y cada una de estas de 200 *brazas*

cuadradas, ó de 16200 *palmos* valencianos. Cada braza tiene nueve palmos, y cada palmo 972 pulgadas. La medida valenciana escede á la de Castilla en un 8 por $\frac{o}{o}$ próximamente.

342. En Granada el *marjal* contiene 100 estadales del marco general, y es la cuarta parte de la aranzada.

343. La fanega de Malaga tiene 540 estadales de 16 varas cuadradas, ú 8640 varas cuadradas; y no se conoce la aranzada.

344. En Cataluña la *majada* es un espacio de 45 *canas* catalanas de lado, ó bien de 24 estadales, cada uno de 3½ varas de Búrgos; es decir, que la majada tiene 2055 canas, ó 576 estadales catalanes cuadrados. La majada se divide en dos *cuarteras*.

El *jornal* de tierra ó majada de Urgel consta de 5600 varas.

345. En la provincia de Badajoz la fanega de tierra (de marco real) consta de 9216 varas cuadradas ó 576 estadales cuadrados.

Las *sogas* son de ocho, y tambien de diez varas de largo. De las primeras caben en la fanega 144 cuadradas, y $92\frac{1}{6}$ de las segundas.

En Almendralejo, Acebuchal y Villafranca, la fanega es de 8750 varas.

346. En la isla de Cuba la caballería de tierra tiene 18 *cordeles* de lado, cada cordel 24 varas de largo; ó lo que es igual, la caballería de tierra es de 186,624 varas cuadradas, y equivale por consiguiente á 20,23 fanegas de tierra. La caballería se divide tambien en $172\frac{5}{8}$ solares, cada uno de 40 varas de fondo y 27 de frente, ó 1080 varas cuadradas. El solar es la unidad de medidas en el repartimiento de tierras para poblacion.

La vara en la isla de Cuba tiene dos dedos mas de largo que la de Búrgos; ó sean 0,013 de metro, ó seis líneas 0,725 de Búrgos. (*)

347. Del resultado que presentan las aranzadas del marco general, de contenerse 25 en cuadrado de 400 varas de lado y 100 en el de 800, se hace una aplicacion ventajosa para medir una

(*) La vara de Búrgos está mandada observar como unidad de medida por real órden de 26 de enero de 1801, inserta en la Novísima recopilacion, folio 9.º tít. 9.º, ley 5.ª estension considerable de terreno. Sea el perímetro que se ha de medir el *mnrs*; divídase en cuadrículas de 100 y de 25 aranzadas de cabida. Es claro que contendrá 375 aranzadas, mas las fracciones de 25 que corresponden á los espacios 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7. Para encontrar estas fracciones se disponen, en una porcion de papel transparente P, seis cuadrados de 25 aranzadas; y se dividen en aranzadas y fracciones de estas, que en la figura se suponen cuartos. Aplicando este papel, de modo que los puntos *a*, *b* coincidan con los *a'*, *b'* del plano, se hallarán las contenidas en los espacios 1, 2, 3 y 4; y poniendo despues aquellos sobre *a''b''* se tendrán los que corresponden á 5, 6 y 7; y por último el total con suma sencillez. *Fig. C. L.* 16.

El perímetro de la isla mayor del Guadalquivir se cerró con una buena plancheta de Troughton, sin mas operaciones relativas al levantamiento de su plano, en cuatro dias; y en igual número de horas se midió del modo esplicado su cabida de 60,642 aranzadas, operacion notable bajo cualquiera de los conceptos que se considere.

A este método lo único que podrá objetarse, es que en la apréciacion de las fracciones de aranzada podrá cometerse algun error; pero no debe perderse de vista, que este es siempre muy pequeño, enteramente aislado, y sin ningun influjo en los valores de las grandes cuadrículas. La division de la superficie hecha por rectángulos y trapecios es mas larga y engorrosa; y no puede considerarse exenta del mismo inconveniente, cuando el perímetro está terminado por una línea curva irregular, como en el caso en que se indicó el método espresado.

348. En Francia el *arpent* real, ó de aguas y bosques, era de 100 *pértigas* cuadradas; cada *pértiga* de 22 pies lineales franceses, y de consiguiente equivalente á 45686 estadales cuadrados. La pértiga en algunas partes era de 18 pies de Rey, medida francesa.

Hoy la unidad de las medidas agrarias en aquella nacion se llama *Area*, que es un cuadrado de un decámetro ó 10 metros de lado, y por consiguiente de 100 metros de superficie. La *hectárea* equivale á 100 *áreas*, ó á un *hectómetro* cuadrado, ó á 10000 metros cuadrados: la *miriárea* á 10000 *áreas*, ó á un *kilómetro* cuadrado, ó á un millon de metros cuadrados. (*).

349. En Inglaterra el *rood* equivale á 40 estadales ingleses cuadrados, ó 90,48 estadales cuadrados españoles.

El *acre* legal consta de cuatro *roods*, y de consiguiente es de 361,92 estadales cuadrados españoles.

El estadal inglés varia de $16\frac{1}{2}$ á 28 pies ingleses.

350. En Portugal no hay una unidad de medida general para todo el reino: midiéndose los terrenos en Lisboa con varas de cinco palmos, como los de Castilla, que llaman *Cabreiros*, ó de ley; en Santaren por *Sirgas* de 17 varas cabreiras; en Coimbra con *aguilhadas* de 14 palmos. Una *geira* tiene 60 aguilhadas de ancho y 12 de largo, ó 141,120 palmos cuadrados, ó 720 aguilhadas cuadradas ó $\frac{4}{5}$ próximamente de la fanega española.

351. En Dinamarca el *Album* equivale á 40 *fuons* cuadrados, ó 12,687 estadales cuadrados españoles.

El *Touder* contiene 96 albums, y equivale á 1217,952 estadales cuadrados, ó á 2,1145 fanegas.

352. En Holanda el *arpent* del Rhin es de 120 *rodens* cuadrados, y equivale á 150,228 estadales españoles cuadrados.

353. El *morguen* del Rhin es de cinco arpents, y equivale á 751,14 estadales cuadrados, ó 1,304 fanegas españolas.

(*) Para evitar las dificultades que podria traer la nueva nomenclatura, el gobierno francés, conservando siempre el metro como única denominacion de la unidad fundamental del sistema métrico, ha dispuesto que pueda usarse indiferentemente para medidas de longitud, de las voces *percha ó decámetro* y para las de superficie de *arpent*, *ó héctara*, *percha ó área cuadrada*, *metro cuadrado ó centiárea*. Tambien parece que en España se ha mandado, que los agrimensores ademas de las medidas provinciales pongan al mismo tiempo la legal, único medio de generalizarla; porque una costumbre se destruye introduciendo otra, que insensiblemente la sustituya como mas ventajosa. El uso general de una misma medida en toda una nacion, y aun entre varias naciones, será un gran progreso, pero semejante resultado es sumamente lento: en Francia todo el poder de Napoleon no logró desterrar la *aune* para introducir el metro: tal será siempre lo que se esperimente, cuando se quieran cambiar repentinamente las costumbres arraigadas.

Operaciones prácticas con el grafómetro.

354. Este instrumento puede emplearse en las operaciones hasta aqui descritas, produciendo un resultado mas exacto; y tambien en otras de mayor consideracion. Cuando se quiera medir un ángulo, es menester que el plano de este se halle en el del instrumento; y cuando se busquen las proyecciones de los lados del ángulo, entonces el plano del grafómetro ha de ponerse horizontal.

355. Se trata de tirar por un punto B una paralela á la línea LA. Colóquese horizontalmente el instrumento, y de modo que su centro caiga sobre cualquier punto L de la recta dada; diríjase el anteojo ó telescopio inmóvil al punto A, y el móvil á B; pásese despues á este el instrumento, de suerte que su centro caiga sobre el mismo punto B. Entonces sin mover de su marcacion al anteojo movible, se le ajustará en la direccion BL; se notará el punto K, por ejemplo, adonde ó en cuya direccion va la visual del inmóvil, ó lo que es igual se formará el ángulo LBK=ALB; y la BK será la paralela pedida. *Fig.* 179

356. Puede tirarse por el punto C una paralela CD á la AB, supuesta inaccesible, dirijiendo desde C las visuales AC, CB, y midiendo el ángulo ACB. Búsquese despues un punto E, desde el cual se vean los objetos A, B por un ángulo AEB=C; mídase el ángulo AEC; y hágase en C el ángulo igual ECD. La línea CD será la paralela pedida, por ser AEC=ABC: *Fig.* 180

luego. . . . . ABC=BCD &c.

357. Para medir la distancia ab, inaccesible en a, se pone el grafómetro en b' de tal modo, que su plano pase por los puntos a, c; se coloca en c' una señal, que sea igual á la altura del instrumento; y se mide el ángulo abc. Cámbiese la señal á b', y el instrumento á c', cuidando de darle la misma altura sobre este punto; y obsérvese el ángulo acb. Si la $c'b'$ sobre el terreno es una línea recta horizontal, ó inclinada, se medirá; y como en este supuesto es igual á cb, el triángulo podrá resolverse. *Fig.* 181

Sean por ejemplo, . $b=60°$ . . $c=70°$ . . . $bc=457$ pies.

:

Se tendrá (45), $\left\{\begin{array}{l}\text{sen } b = 60^\circ \ldots\ldots\ \text{C. L. (*) } 0{,}0624694 \\ \text{al lado} \ldots\ldots bc = 457 \text{ pies L. } 2{,}6599162, \\ \text{como seno del ángulo } c = 70^\circ \text{L. } 9{,}9729898 \\ \hline \text{es al lado } ab = 496 \text{ pies} \ldots\ldots 2{,}6953714\end{array}\right.$

Fig 182 358. Si la distancia es inaccesible, podrán los puntos de estacion de los estremos de la base estar ó no con los a, b, en un plano; ya se halle horizontal, ya inclinada la $c'd'$, pero siempre en el supuesto de que sea una línea recta.

En el primer caso, (que se conoce fácilmente colocando el grafómetro en d, de modo que el centro del limbo corresponda á d', y una señal en c' de igual altura que el instrumento), si el plano del limbo pasa por ab, y girando el anteojo móvil hasta descubrir c, su eje va á parar á este punto, los cuatro puntos estarán en un plano; y midiendo la $c'd'$ esta es igual á cd, bien sea la ab horizontal, bien inclinada.

Sean por ejemplo $cd = 888$ pies, $cda = 48^\circ$, $adc = 32^\circ$, $bdc = 48^\circ + 32^\circ = 80^\circ$, $bcd = 30^\circ$; acb ó $l = 70^\circ$.

En el triángulo bdc se tiene; sen $s = 70^\circ$. C. L. 0,0270142

al lado. . . . . $cd = 888$ pies L. 2,9484130,

como seno. . . . . . $r = 30^\circ$. . . . L. 9,6989700

al lado. . . . . $bd = 472$ pies L. 2,6743972.

Tambien en el triángulo adc se tendrá;

sen.. $t = 48^\circ$. . . . . C. L. 0,1289265

al lado $cd = 888$ pies. . . . . L. 2,9484130

como sen.. $c = 100^\circ$. . . . . L. 9,9933515.

al lado $ad = 1177$ pies. . . . . . . L, 3,0706910.

Teniendo ya en el triángulo adb ademas del ángulo n los lados ad, bd, se hallará el ángulo o por la proporcion (47 1.°);

$ad + db = 1649$ pies. . . . . . . C L 6.7827794

á $ad - db = 705$. . . . . L. 2,8481891

como tangente $\frac{1}{2}(o + b) = 66^\circ$. . . . . L. 10,3514169

á tangente $\frac{1}{2}(o - b) = 43^\circ\ 50'$ . . . . L. 9,9823454;

(*) La letra L quiere decir logaritmo, y las CL complemento logarítmico.

y por consiguiente el ángulo $o=66^\circ-43^\circ\ 50'=22^\circ\ 10'$.
Y por último se tendrá, sen $o=22^\circ\ 10'$..... C. L. 0,4233108
al lado $bd=472$ pies ..... L. 2,6739420
como el seno $n=48^\circ$......... L. 9,8710735

á la distancia $ab=930$ pies........... L. 2,9683263.

En el segundo caso, esto es, si dirijiendo el anteojo móvil á c no pasa por este, como sucederá generalmente, la prolongacion de su eje, los cuatro puntos no estarán en un plano, y cada uno de los ángulos tendrá su plano particular. Entonces deberán observarse separadamente los tres que se formen en el punto c con los a, b, d, y en el d con los a, b, c; porque no estando las tres visuales en un plano forman un ángulo triedro, en quo la suma de dos de los ángulos será siempre mayor que el tercero. Se incurrirá pues en error, si se tomare la suma total de los ángulos como se dice en algunos tratados de práctica.

Los dos ángulos triedros forman un mismo tetraedro irregular, y los ángulos que se observan son los correspondientes á los ángulos c, d. La existencia de los ángulos en diferentes planos no altera el valor de los lados, que para ser comunes estan necesariamente representados por las aristas del poliedro.

359. De todo ello se infiere, que para estas operaciones es indispensable que el eje del anteojo móvil sea exactamente paralelo al plano del limbo del grafómetro. Grandes errores se orijinarán de cualquiera variacion aunque lijera; por lo cual las pínulas ordinarias no sirven para estas operaciones, y sí para aquellas en que se usa el grafómetro como plancheta ó en un plano horizontal; en cuyo caso tambien será indiferente el paralelismo del anteojo. Si este instrumento se quisiese perfeccionar, de modo que diese los ángulos en su plano, se convertiria en un teodolito imperfecto, y degeneraria de su primitivo uso y aplicacion. Un grafómetro con el anteojo de eje paralelo al plano del limbo ó alidada en que se conozca la visual, que precisamente será tambien paralela, podrá servir á un ingeniero como un buen teodolito; aunque su uso sea mas molesto, y sus resultados menos exactos.

360. A veces ocurre resolver triángulos en que no se tienen

todos los datos precisos; pero muchas veces podrán hallarse teniendo presentes los problemas anteriores, como lo manifiesta el ejemplo siguiente:

Supóngase que se trata de resolver el triángulo ABC, en el
Fig 183 cual solamente se conoce á AB y el ángulo b: la CB no puede medirse á causa de la laguna h, como tampoco el ángulo DCA por que el obstáculo i impide tirar la visual AC.

Tómese CD ó CD′ en la línea CB ó en su prolongacion, de suerte que desde D ó D′ se vea el punto A; resuélvase el triángulo ADB ó AD′B, en los cuales se conocen un lado y todos los ángulos, y se hallará DB ó D′B; súmese CD, ó réstese CD′; y se tendrá la CB, por cuyo medio podrá resolverse el triángulo ABC.

Si no fuese posible la medicion de CD ó CD′, mírese la CB como distancia del todo inaccesible; y midiendo otra base CE ó CE′, podrá hallarse la CB ó la CA por lo dicho anteriormente.

361. Cuando, tratándose de conocer la distancia inaccesible ab, solamente puede medirse la base CD, y no pueden observarse án-
Fig 184 gulos en sus estremos, pero sí en los puntos a, b, mídase una nueva base ef que no presente aquella dificultad, con objeto de hallar la distancia Db. Como por suposicion son conocidos los ángulos abD, y a, se podrá resolver el triángulo abD, y tener la ab.

362. Hay un método ingenioso para resolver el mismo caso sin medir nuevas bases, ni hacer otra operacion.

Conforme lo manifiesta la figura, es claro que en nada alterará el valor de los ángulos el suponer á la ab una longitud arbitraria ar. Resultan entonces los nuevos triángulos aqt, atr, equiángulos, y por consiguiente semejantes á los aCD, aDb, de la figura primitiva.

Bajo de este supuesto, resolviendo los triángulos raq, art, qrt, se hallará la qt, que no será la verdadera, pero podrán hacerse las

proporciones. . . . $\left\{\begin{array}{l} at : a\text{D} :: tq : \text{CD}, \\ at : a\text{D} :: ar : ab; \end{array}\right.$

ó. . . . . $tq : \text{CD} :: ar : ab;$

ó lo que es lo mismo, . . tq hallada : CD base : : ar parte medida : ab longitud total buscada.

Es indudable, que, averiguado por alguno de los medios anteriores el ángulo a ó el b, podrá tirarse por cualquier punto C ó D, una paralela DA′ ó BC′ á la línea inaccesible ab; y conseguida esta, podrá ya bajarse desde cualquier punto de la CD una perpendicular á la misma inaccesible ab.

363. Si se quisiere hallar el diámetro de una torre accesible hasta su pie; se colocará el semicírculo en un punto L, desde el cual se tirarán las visuales tangentes LT, Lx, y la visual LB que divida por medio el ángulo TLx: hecho esto, se supondrá en T la perpendicular TC. *Fig* 185

En el triángulo obliquángulo LBT se conoce el ángulo TLC, mitad del observado, y el ángulo LTB; porque en el triángulo rectángulo TLC es conocido el tercer ángulo C, y en el isósceles TBC el CTB, que restado del recto CTL dará el LTB; pudiéndose en su consecuencia hallar la cuerda TB (45): y en el triángulo isósceles se hallará con este mismo lado TB y los ángulos, el rádio CT ó CB, y por consiguiente el diámetro. Podria hacerse la misma averiguacion, considerando en el punto B la perpendicular BR, y resolviendo el triángulo BRL para hallar á BR y LR, cuya suma será igual á LT, por ser RB = RT; y en fin, en el triángulo rectángulo LTC se podria encontrar á TC, rádio de la torre.

364. Si esta fuere inaccesible, mídase una base LF; colóquese el grafómetro succesivamente en los estremos L, F, de suerte que se vean los otros F, L, con el anteojo fijo; tírense con el móvil *Fig* 186 las visuales tangentes LT, Lx, FB, FH; divídanse por medio con las visuales LC, FC, los ángulos formados por las tangentes desde un mismo punto; y añadiendo los ángulos xLF, BFL, se tendrá el triángulo CLF. En él, ademas de la base LF, se conocen los ángulos, y podrá hallarse el lado CL, ó el CF; y ademas en el triángulo rectángulo CTL habrá los datos necesarios para su resolucion (44) y para hallar el rádio CT.

Medicion de alturas.

365. No sean ya las distancias que se tratan de medir horizontales ni inclinadas, y sí verticales ó alturas, como la del ejemplo siguiente accesible hasta su pie. Colóquese el instrumento en un punto m tal, que la distancia ma parezca á la vista proxima- *Fig* 187

mente igual á la altura buscada; dóblese el semicírculo hasta que esté en la situacion vertical, y el anteojo fijo quede horizontal, dirijiendo con él la visual *cd* y con el movible otra á la cúspide *b*. Mídase entonces á *me'*, á la cual se añadirá el semi-lado *ce* de la torre por cuyo medio en el triángulo rectángulo *dcb* se hallará la *bc*, que sumada con *ca* dará la altura total de la torre, ú objeto de que se trate.

Sea por ejemplo $dc = 100$ varas castellanas,
y el ángulo . . . . . . $bdc = 84^\circ\ 48'$;
se tendrá, ... R = ... 1,000000
á tangente. . . . . $d = 84^\circ\ 48'$ L, 1,042326,
como . . . . . . $dc = am = 100$ varas L, 2,000000

es á $bc = 110$ varas castellanas . . . . . 2,042326, alt. de la torre.

Fig 188 366. Si se tratase de medir la distancia *a'b'* inclinada, accesible, en un terreno irregular; puesto el grafómetro con el limbo vertical en *a'*; dirijida por el anteojo fijo la visual horizontal *ac* que se medirá, y tirada con el movible la *ab*; se observará el ángulo *bac*; con lo que se resolverá el triángulo rectángulo *bac*, y se hallará $ab = a'b'$.

Esta operacion es indispensable cuando se trata de medir distancias inaccesibles, y no se presta el terreno á que se trace una base en línea recta; porque la horizontal *ac* despues de medida solo podrá servir cuando la recta que pasa por *a'b'* sea horizontal. Teniendo $a'b' = ab$, la resolucion es ya como se dijo (365).

Fig 189 367. Cuando la torre es inaccesible, colocado el grafómetro como anteriormente en un punto A', obsérvense los ángulos CAD, DAD'; retírese el instrumento á otro punto B', de modo que se halle su limbo en el mismo plano vertical que en la posicion anterior; y en él obsérvese el ángulo CBD. Mídase la distancia A'B'; y como se conoce tambien el ángulo CAB, se tendrán en el triángulo CAB los datos necesarios para calcular la AC, y en el DBA la AD.

Con esta se averiguará en el triángulo rectángulo ACD' la altura CD', y en el DAD' la DD', que rebajada de la CD' dará la CD que se desea.

Tambien puede hacerse la operacion sobre una base AN, horizontal ó inclinada, que corte á la CD; lo que da igualmente la pirámide triángular, con la diferencia de que dos de sus caras son verticales.

368. Del mismo modo podrá hallarse la altura de una montaña accesible ó inaccesible AP. Para ello se medirá una base EB, y los ángulos en E,B; en seguida se hallará la AE, y en el triángulo rectángulo EAC la altura AC, y tambien la EC, distancia horizontal entre los puntos E,A. La pendiente AD de la montaña, supuesta inaccesible, se hallará tirando la visual BD para conocer á DE; calculando como se ha dicho poco há el lado AE, y midiendo el ángulo comprendido AED, se averiguará AD en el triángulo ADE. Si el punto D no se viese desde B, lo que será raro, se podrá medir una nueva base hacia E, formando alli otro triángulo para hallar la ED.

369. Cuando se quiera medir una profundidad, y por no po- *Fig* 191
der operar en el plano inferior haya que hacerlo desde el borde, como se representa en la figura respecto á un barranco, se elije prudencialmente un punto B′, de modo que la visual vaya á parar á A′, pie de la profundidad.

Aun es mejor el observar el ángulo BCC′, con lo que se resolverá este triángulo, y se hallará el ángulo CBC′; réstense de 180°, CBA, + CBC′, y se tendrá el ABA′; y el triángulo ABA′ dará la AA′.

370. Para hallar la distancia AB desde *c*, mídase el ángulo *e*; *Fig* 192
y hallando en el triángulo rectángulo A*c*B la altura A*c*, como se ha dicho ó de otro modo, y teniendo *c*BA$=$*e*, se calculará la AB.

371. La inspeccion de la figura basta para ver como se procederia, si se quisiese medir la altura de una torre AD desde otra
BC situada en una eminencia, conociendo la altura de esta y la *Fig* 193
de la BC.

Correcciones que deben hacerse en las medidas halladas.

372. Cuando las alturas que se miden están á una distancia considerable, es preciso hacer dos correcciones en los resultados hallados, para tener la altura verdadera.

1.ª Si bd representa el horizonte del punto a de estacion, y or
Fig 195 el de la cúspide r de una altura re buscada, se notará que solamente se ha calculado el triángulo rab para hallar rb: luego habrá que añadirla la parte be para tener toda la altura re. Esta parte be es igual á $\frac{ab^2}{2be}$ (*)

Podrá obtenerse la altura total re sin la consideracion anterior: pues siendo $bae = \frac{1}{2}c$, será $rae = rab + \frac{1}{2}c$; y el triángulo rae, en que se conocen ae y los ángulos por suponer el e recto, dará la re.

Fig 196 373. Ademas, siendo el ángulo esterno $rba = 90^\circ + c$, no se debió considerar el triángulo rba como rectángulo; pero siendo el ángulo c muy pequeño, este error no merece llevarse en cuenta, porque pueden mirarse como paralelos dos radios de la tierra correspondientes á los puntos estremos de la distancia que se quiere medir, aun cuando esta fuese mucho mayor que lo son en semejantes operaciones.

374. 2.ª Los rayos de luz Lm vienen de los cuerpos luminosos torciendo continuamente su direccion al atravesar las capas nn, $n'n'$ de la atmósfera, á causa de que las mas bajas de estas son de mayor densidad que las mas altas.

Si mm' representa esta mudanza ó cambio de direccion á que se llama refraccion, (**) se tendrá el desvio de la primera direccion Lm del rayo de luz; y como la visual dirijida al punto m es tangente á la curba amn por la cual se ve el objeto, resulta, que en el instrumento se mide el ángulo bac, debiendo ser solo el mac, cuya diferencia causa que la altura mc resulte mayor de lo
Fig 194 que es en realidad. Es pues preciso hallar el valor del triángulo bam, y rebajarlo del total bac para tener la verdadera altura.

Siendo. . . . . $c = 180^\circ - cra - car$,

y. . . . . $\left\{ \begin{array}{l} cra = 90^\circ - ira, \\ car = 90^\circ + bar, \end{array} \right.$

será. . . . . $c = 180^\circ - 90^\circ + ira - 90^\circ - bab$,

ó. . . . . $c = ira - bar$; . . . . (1)

(*) be es la diferencia del nivel aparente al verdadero entre los puntos a, b, cuya materia toca á la nivelacion, de que se tratará en la 4.ª parte.

(**) La refraccion es muy variable cerca de la superficie de la tierra, y sumamente inconstante aun en el mismo lugar.

ecuacion que se verificaria siempre á no ser por la refraccion raf, que convierte el ángulo rab en el fab. Asi pues, si desde el punto r se observa el punto a, habrá la misma refraccion gra, y el ángulo ira solo será irg. Llamando r la refraccion $far = gra$ se tendrá en este caso, $ira = irg + r$,

$$rab = fab - r;$$

y sustituyendo en la ecuacion (1) $c = irg + r - fab + r$,

ó. . . . . $2r = fab - irg + c$,

resultará. . . . . $r = \frac{fab - irg + c}{2}$.

Lo que quiere decir, que para hallar el valor del ángulo de refraccion que debe rebajarse, hay que observar los fab, irg, y calcular el c, una vez que sean conocidos ab y el radio ac de la tierra.

375. De repetidas observaciones ha resultado que el efecto de la refraccion es $\frac{1}{14}$ ó $\frac{1}{18}$ del ángulo c, ó arco terrestre interceptado; lo que puede servir como regla práctica para apreciar la refraccion.

376. Para evitar el cálculo de la refraccion puede emplearse la fórmula de M. Delambre $re = ae \operatorname{tang} \frac{1}{2}(h+d)$: en la que h representa el ángulo rab de elevacion, d el ángulo ira de depresion aparente, y ae puede obtenerse calculando, primero el ángulo c en el triángulo rectángulo bac, y despues los demas datos, para resolver en seguida el oblicuángulo bae.

Observaciones relativas á las medidas tomadas con el grafómetro.

377. En la medicion de distancias horizontales ó inclinadas Fig 182
debe procurarse que la base cd sea cuando menos, y en cuanto pueda conocerse á la simple vista, igual á $\frac{1}{10}$ del lado ca ó db, que se busca, y mejor si es $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ ó igual.

378. Deben evitarse los ángulos muy agudos ú obtusos, conviniendo que sea equilátero, el triángulo en que se quieran hallar dos lados.

379. La medicion de alturas por los métodos hasta aqui descritos no resultará exacta, pues siendo regularmente pequeño el ángulo de elevacion, un leve error en la medicion de éste será muy reparable con respecto á la altura buscada. Y es fácil de incurrir

en error, ya por causa de la pequeñez del instrumento; ya por la inconstancia de las refracciones; ya por la oscilacion que ofrecen los objetos en el anteojo, efecto de los vapores terrestres; ya en fin porque el viento ó la atraccion de las montañas no permitan dirijir bien la plomada para dar al semicírculo del grafómetro la situacion vertical (*).

380. La altura que no presenta una arista, no puede medirse exactamente porque no hay medio de poner el plano del instrumento en el vertical, que pasa por la altura y el punto de estacion.

Situar por medio del grafómetro los puntos principales de un terreno ó pais de corta estension, ó sea levantar su plano topográfico.

---

381. Supóngase que quiera trasladarse al papel el pais representado por la figura, ó sea situar los pueblos, puentes, y demas objetos, tales cuales se hallan los unos respecto de los otros.
Fig 197 Primeramente, en los parages elevados como torres &c., desde donde se descubren muchos puntos de los que se desean situar en el plano, se trazarán en un papel líneas que sigan próximamente la direccion de los mismos puntos ú objetos, y se escribirán al lado sus nombres; con lo que se tendrá un bosquejo de las operaciones que habrá que ejecutar en el terreno.

382. Despues se elejirá el sitio mas llano y horizontal posible, para medir una línea de longitud proporcionada á la estension del terreno y clase de triángulos con que haya de cubrirse su superficie; cuya línea se llama *base* porque desde ella parten todas las operaciones. Se procurará que sus estremos sean puntos visibles, como casas, árboles, etc., para que no sea necesario el uso de señales, que el viento ó personas mal intencionadas pueden derribar ó arrancar; y se observará en fin, para la medicion de esta base lo dicho (207 y 218). Suponiendo medida la base entre Manzanares y la Solana, y que sus estremos estén en las entradas de estos pueblos; se situará el grafómetro horizontalmente en uno de los dos

(*) Véase la obra *L' atraction des montagnes et ses effets sur les fils á plomb ou sur les niveaux des instruments* etc. por el baron de Zach.

puntos: y resultará que los ángulos que se tomen estarán reducidos al horizonte, y que las distancias encontradas serán horizontales.

383. Sea, por ejemplo, el punto elegido el correspondiente á Manzanares. Alinéese el anteojo fijo con el punto correspondiente á la Solana; y con el móvil diríjanse visuales á todos los puntos visibles al rededor del primero ó de estacion, como Argamasilla, Casa del Soso, venta del Quegigal, venta de Quesada, Casas de don Juan, Daimiel &c. En adelante se designarán estos puntos por sus letras iniciales.

Se apuntan en un cuaderno ó registro por el orden de observacion los ángulos que las visuales formen con la base, dando una vuelta entera al rededor del horizonte con el anteojo móvil hasta tomar el último ángulo *ams*.

Se traslada en seguida el grafómetro al otro estremo de la base correspondiente á *s*, y se ejecuta igual operacion dirijiendo visuales, no solamente á los mismos puntos que puedan verse, sino tambien á otros que de nuevo se descubran y se quieran situar, apuntando siempre en el registro los correspondientes ángulos.

384. Para continuar las operaciones se toma para nueva base uno de los lados de los triángulos ya calculados, vg. $a'c'$, en cuyos estremos se ejecuta lo mismo que en la primera base, con respecto á los puntos de su alrededor.

385. Si aun se quisiere estender mas el plano, se medirá una nueva base entre Daimiel y Quesada, en cuyos estremos se ejecutará lo dicho respecto á las dos bases anteriores. De este modo quedará formada una *red* de triángulos, que enlazen los principales puntos. Determinando por igual método otros intermedios; formando nuevos triángulos mas pequeños; copiando en fin y trasladando al papel el terreno comprendido en aquella *red*, por medio de la plancheta, brújula, ú otros instrumentos, segun mas adelante se esplica, *quedará levantado el plano del terreno.*

386. Concluido todo el indicado trabajo, y resolviendo los triángulos que resulten por el orden de las apuntaciones, se hallarán las distancias de unos puntos á otros.

387. A veces sucederá que en alguno de dichos triángulos aparezca á primera vista no haber los datos necesarios para su

resolucion, porque en la série de las operaciones se olvidó medir alguno ó algunos ángulos, ó bien por imposibilidad de hacerse, sin que por esto dejen de encontrarse medios para resolverlos.

Por ejemplo, si en los triángulos *ab*C, *b*C*t* se conocieren solamente las distancias *ab*, *bt*, y los ángulos observados en C, y se supusiere ademas que los tres puntos *a*, *b*, *t* estén en línea recta; se trazará un círculo que pase por *t*, *b*, C, y otro por *a*, *b*, C, cuyos centros están en *i*, y en e'; tírense los radios *ia*, *ib*, *be*, *et*; y bájense las perpendiculares *es*, *ir*.

Todo el artificio consiste en llegar á conocer en los triángulos *a*C*b*, *b*C*t* propuestos, algun otro dato, como por ejemplo, algunos de los lados *a*C, *b*C, C*t*; con lo cual ya se tendrá lo bastante para la resolucion de que se trata.

En el triángulo rectángulo *bes* se conoce, ademas del ángulo *bes*=*b*C*t* observado en C, el lado *bs*, semidistancia entre *b* y *t*; con lo que podrá hallarse el lado *eb*. Asimismo en el triángulo rectángulo *rbi* se conoce, ademas de *bir*=*a*C*b* observado en C, la semidistancia *br*: con esto se calculará el lado *bi*. Júntense los centros de los dos círculos con la recta *ie*, precisamente perpendicular sobre la cuerda *a*C; y en el triángulo *bei*, adonde se conocen los lados *be*, *bi* que acaban de hallarse, y el ángulo comprendido *ebi* suplemento de los *ebs*, *ibr*, se tendrá el ángulo *bie*, que duplicado dará el *bi*C. En el triángulo *b*C*i*, en que se conocen los lados *bi*, C*i*, y el ángulo comprendido *bi*C, se hallará el lado *b*C distancia del punto C, al *b*; y en el triángulo *a*C*b* habrá datos bastantes, pues que se conocen el ángulo observado en C, y los lados *ab*, *b*C, para calcular el otro lado. Por último en el triángulo *b*C*t*, en que igualmente se conocen dos lados y un ángulo, se hallará con la misma facilidad la distancia C*t*.

Pero si los puntos *a*,*b*,*t*, no estuviesen en línea recta, y sí como los q,v, c', observados desde q', hágase para resolver los triángulos qvq', qvc' pasar como antes una circunferencia por los puntos v,q,q', y otra por los v,q',c'; siendo e' el centro de la primera, $e'i$ el de la segunda. Tírense los radios $e'v$, $e'g$, $i'v$, $i'c'$; y bájense las perpendiculares $e'g$, $i'n$ sobre los lados vq, y vc'.

En el triángulo rectángulo $ve'g$, en el que se conocen la vg semidistancia entre v y g, y el ángulo $ve'g = vq'q$, se hallará la $e'g$, y luego el ángulo $e'vg$.

En el triángulo rectángulo $vi''n$ son conocidas, la semidistancia vn, y el ángulo $vi''n$ suplemento de $vi''k = vq'c'$; con lo cual podrá calcularse vi''.

Y siendo. . . . . $e'vg - c'vg = c'v'c$,
se tendrá . . . . . , $i'vn - e'v'c = i've'$.

Por este medio podrá encontrarse en el triángulo $i've'$, el ángulo $vi'e'$, y su duplo $vi'q'$, comprendido entre los radios $i'v$, iq' conocidos. Y en el triángulo $vi'q'$ podrá ya calcularse el lado vq': con lo que habrá lo bastante para resolver los triángulos $c'vq'$, $q'vq$ (*).

Observaciones sobre estas prácticas.

388. 1.ª Antes de empezar las operaciones indicadas, debe haberse rectificado el instrumento para conocer su error central, de paralelismo ó colimacion, y de division.

2.ª Es necesario marcar en el registro el punto preciso, del objeto á que se dirige la visual: por ejemplo, si es á una torre

(*) Los lados de los triángulos de la red trazada tienen, en razon del terreno despejado en que se opera, una estension suficiente para que se lleve en cuenta la curvatura terrestre, y se calculen los puntos en que las verticales bajadas de sus vértices encontrarian la superficie, que se considerase como prolongacion de la que forman las aguas del mar. Pero esto haría salir la presente obra de su límite: pues supondría el conocimiento de la trigonometría esférica, y la aplicacion de teorias que solo los ingenieros, ó personas que se ocupan esclusivamente de su estudio, pueden aplicar con acierto. Estas operaciones requieren ademas suma exactitud en las observaciones, mucha delicadeza en las operaciones materiales, y una multitud de conocimientos accesorios. Asi es, que las operaciones de primera importancia en la geodesia se han reservado siempre para los sabios mas eminentes en todos los paises. Podrán consultarse sobre estos puntos las obras de Geodesia de Puissant, y Francoeur. Sin embargo la triangulacion hecha sin tantos requisitos, podrá ser sumamente útil en muchos casos sin conducir á errores de consideracion, por ejemplo, en la faja del terreno para el proyecto de un camino ó de un canal aislado; donde, por mucha que sea la estension, no se necesita apreciar la espresada circunstancia de la curvatura terrestre, sino cuando se supone en relacion con puntos situados en una carta. Muchos de los trabajos de esta especie, que hacen los injenieros militares, se hallan en el mismo caso de no necesitar tener en cuenta aquella curvatura.

hay que espresar si se dirije la visual á la veleta, ó á cierta arista &c.; si á una casa, advertir que es el palomar, tal chimenea &c., para saber en las operaciones subsiguientes adonde fijamente deben dirijirse las visuales, que desde otros puntos de estacion se tiren á los mismos objetos.

389 A veces será preciso establecer señales, por no ofrecer el terreno torres ú otros objetos, ó no presentarse estos convenientemente dispuestos para la direccion de las visuales, á efecto de que los triángulos que se formen tengan las circunstancias correspondientes. Las señales pueden consistir en árboles de tronco bien recto, ó en ramas que se unen por sus puntas, despues de clavadas en tierra circularmente por la parte inferior que es la mas gruesa, de modo que formen una choza cónica, con aberturas en la direccion de los lados de los triángulos. Se construyen tambien pirámides cuadradas de piedra, las que á veces convendrá pintar para distinguirlas bien. Las hogueras pueden emplearse útilmente; y en fin de noche las lámparas de reverbero servirán lo mismo, y con especialidad si la atmósfera no hace oscilar el sitio aparente de la luz. De todos modos deben preferirse las observaciones durante el dia.

Si á una señal piramidal se le dan de altura $\frac{3}{20000}$ de la longitud del lado mayor del triángulo, y al lado de su base $\frac{1}{3}$ de aquella altura, se descubrirá dicha señal desde poco menos de 72.000 varas de distancia; y por consiguiente las señales serán facilmente visibles en las distancias mucho menores usadas en la topografía.

La forma piramidal es preferible para las señales, cuando se puede descubrir el vértice; porque no se padece error en la direccion de las visuales. Cuando el vértice no se descubre bien, es mas conveniente que las señales tengan la forma de un paralelipípedo de base cuadrada.

390. 3.ª Importa para la exactitud de las operaciones, que la magnitud de la base sea, en cuanto se pueda, igual al lado que se busca (377): de donde nace que la circunstancia mas ventajosa de un triángulo para su exacta resolucion es, que sea equilátero; porque tambien los ángulos se observan mas facilmente,

y los errores pequeños en su medida influyen menos en la longitud de los lados. Si no pudiere hacerse la base sensiblemente igual al lado que se busca, se la determinará lo mas aproximada que se pueda, procurando que sean iguales los ángulos en sus dos estremos. Los triángulos deben ser tambien proporcionados á la estension del terreno cuyo plano se levanta.

No será tan facil en el terreno el encontrar señales, que ofrezcan la ventaja de que los triángulos resulten equiláteros, pero tampoco será necesario, cuando se use el círculo repetidor: pues aun en el caso de que el lado mayor del triángulo sea de 10 á 11 leguas; que el instrumento dé los ángulos con la diferencia de $3''$, 2; y que esta se verifique en un ángulo de $25.^{\circ}$, el error no influirá ni aun en las unidades de vara. Por consiguiente dicho ángulo de $25.^{\circ}$ será el menor que se adopte en los triángulos usados en las operaciones geodésicas. Además, los errores no se acumulan en un solo sentido con respecto á los lados de los triángulos de que se saca la última línea de la red; sino que por el contrario se compensan hasta cierto punto, cuando son muchos los triángulos con las condiciones prescritas.

391. Para manifestar como pueden coordinarse las estaciones *Fig* 197′ entre sí de modo que conduzcan á operaciones exactas, sean a, b, c, los lados de un triángulo rectilíneo cualquiera, y A, B, C, los ángulos respectivamente opuestos. Se tendrá . . . .
$a \,.\, \text{sen}\, B = b \,.\, \text{sen}\, A$ (1) ecuacion que dá el lado a, cuando se conocen A, B, y b.

Pero supóngase que se ha cometido un error pequeño y en la medida de A, é y' en la de B, y que b sea exacto: es claro que se empleaban valores errados, y que en lugar de A, B, se han tomado realmente $A+y$, $B+y'$. De aqui es que en la ecuacion (1) saldrá el valor de a con un error x, por lo que deben ponerse en ella $a+x$ en lugar de a; $B+y'$ en el de B; y $A+y$ en el de A. Será pues, $(a+x)\ \text{sen}\ (B+y') = b\ \text{sen}\ (A+y)$; y como y é y' son siempre muy pequeños, se podrán poner los arcos por sus senos, y 1 por sus cosenos, con lo que la fórmula se convertirá en . . . . . .
$(a+x)\ (\text{sen}\ B + y' \cos B) = b\ (\text{sen}\ A + y \cos A)$.

Reduciendo segun la primera espresion, y suprimiendo el producto xy' cos B que es de segundo orden, saldrá

$$x \text{ sen } B + ay' \cos B = by \cos A;$$

y poniendo. . . . $\frac{a.sen\ B}{sen\ A}$ en lugar de b,

se tendrá. . . . . . $x = a(y \cot A - y' \cot B)$:

cuyo error x recae sobre el lado a á causa de los errores de observacion y é y', en los ángulos A y B.

Pero x será tanto mas pequeño cuanto mas se acerque A á ser igual á B, al mismo tiempo que y á y'. El error será nulo cuando estos sean iguales y en el mismo sentido; y que A = B. En este caso, aunque operando con valores angulares defectuosos, el lado a se obtendrá exactamente por el cálculo: y si los errores y é y' sobre A, B son iguales y de signos contrarios, la ecuacion será, . . $x = ay(\cot A + \cot B)$, que la condicion A = B reduce á un *mínimo*: en efecto se tiene,

$$x = ay\left(\frac{\cos A}{\text{sen } B} + \frac{\cos B}{\text{sen } B}\right) = ay\frac{\text{sen}(A+B)}{\text{sen } A.\ \text{sen } B}.$$

Y restando entre sí las dos ecuaciones (26), se halla

$$2 \text{ sen}A \text{ sen}B = \cos(A-B) - \cos(A+B) = \cos(A-B) + \cos C;$$

luego. . $x = ay\frac{2 \text{ sen } C}{\cos(A-B) + \cos C}$,

en la que haciendo A = B, resulta visiblemente la espresion la mas pequeña posible.

Se vé, pues, la ventaja de que los triángulos sean equiláteros para disminuir los errores de los ángulos, bien estén dichos errores en el mismo, bien en opuesto sentido, resultando nulo entonces el error de a. De aqui el tenerse por cierto, que cuando los lados son casi iguales á la longitud medida, el error de los ángulos es casi insensible. Pero siendo muchas veces imposible llenar esta condicion, hay que contentarse con no admitir ángulo que sea menor de 30^{o} para acercarse á ella en cuanto se pueda: entonces se dice que *el triángulo está bien formado.*

Se ha supuesto que la medida del lado b era exacta; pero si no fuere asi, siempre que los valores de A y B sean conocidos con precision, el valor de b, se convertirá en $b+z$, y se tendrá,

$$(a \pm x) \text{ sen B} = (b + z) \text{ sen A};$$

de donde, x sen B $= z$ sen A, y $x = z \dfrac{\text{sen A}}{\text{sen B}}$

De modo que cuanto mas pequeño es B, tanto mas influye el error z del lado opuesto en el valor que se encuentra por a; ó lo que es lo mismo se aumenta este error. Cuando B $= 30°$, valor por otros respectos conveniente, se tiene sen B $= \frac{1}{2} \ldots x = 2z$ sen A,

Pero entonces A + C $= 150°$, y cada uno de los ángulos A, C debe aproximarse á $75.°$; sen A difiere poco de 1, y x de $2z$. Asi el error z del lado b se traslada al lado a en consecuencia del cálculo que da á conocer su longitud, y aun puede el error llegar á ser doble. Aumentándose asi de triángulo en triángulo, pueden al fin obtenerse valores sumamente defectuosos de los lados que terminan la cadena ó red de triángulos.

De todo lo dicho resulta, que en un triángulo bien formado un pequeño error en la longitud de un lado es de mayor consideracion que los que se cometen en los ángulos; porque el primero se agranda con el cálculo de los otros lados del triángulo, y aun puede llegar á ser doble en casos, por otra parte favorables; mientras que los errores de los ángulos puede suceder que no alteren en modo alguno el valor de los lados que se deducen de ellos. De aqui es que debe medirse la base con la mayor exactitud, para que los errores no se vayan acumulando en los cálculos sucesivos de los triángulos de la red.

392. 4.ª Despues de varias operaciones convendrá medir otras bases para calcular de nuevo las distancias ya determinadas; y si se hallan iguales, se tendrá una rectificacion del trabajo hecho, ó se conocerán los errores cometidos.

393. 5.ª Antes de dejar un punto de estacion, conviene calcular cuantos triángulos se pueda; pues si se deja este trabajo para despues, podrá suceder que luego se encuentren errores, que obliguen á volver á un punto de que ya se estaba muy distante.

394. 6.ª El registro que debe llevarse para el cálculo de los lados ó distancias podrá tener la forma siguiente:

Número de los triáng.	*Nombres de las señales.*	*Angulos medidos.*	*Logarit. senos de los áng.*	*Cálculo aproximativo de los lados.*	*Lados en varas.*	*Angulos verticales.*
				C.L. » »		
	Solana.	180°.54′54′	» »	L. » »		
				L. » »		
	s					
1	Manzan.	41 3 6	» »	Suma » »		
	lla			L. » »		
	Argam.	30 2	» »	L. » »		
		180 0 0		Suma » »		
2	&.	&	&.	&.	&.	&.

Operaciones prácticas con el Teodolito.

395. Despues de lo dicho al hablar del uso de este instrumento, y de las operaciones con el grafómetro, bastará el problema siguiente, que abraza el modo de hallar distancias horizontales, inclinadas y verticales.

Fig 198 Sea la distancia inaccesible ab la que se quiere medir: para ello elíjase una base pq, y sino es horizontal encuéntrese la diferencia de alturas de sus estremos. Colóquese el instrumento en e; obsérvense los ángulos men, y ner; nótese la altura del instrumento sobre el punto p contado desde aquel en que gira el anteojo vertical, á fin de evitar la correccion de la altura de este sobre el limbo, pues son los mismos los resultados. Hágase igual operacion en e'; es decir, obsérvense los ángulos $m'e'n'$, $n'e'r'$, y tómese la altura del instrumento: como los ángulos observados en diferentes planos horizontales son los mismos que sus proyecciones ó reducciones al horizonte, resultará, que podrá calcularse la distancia horizontal que separa las alturas ar, bn.

Además si en la estacion e' se toman con respeto al plano horizontal determinado los ángulos verticales $be'r'$, $ae'n'$, que dan las br', an', se tienen en el triángulo aob los datos necesarios para su resolucion; pues que $ob=n'r'$, y $ao=an'-br'$. Si se quisiesen las alturas de a y b sobre el plano horizontal que pasa por p, habria que añadir á las an' y br' la altura del instrumento en e', y el desnivel de la base. Los ángulos verticales pudieran haberse observado en la estacion e, y la resolucion habria sido casi idéntica. El resolverse por el uno ú el otro punto depende de los datos y circunstancias del problema. En las prácticas de la Academia de Ingenieros de Cádiz en 1813, se resolvió con el teodolito este problema bajo la direccion del profesor D. Bartolomé Amat, Capitan entonces y hoy Coronel de aquel cuerpo, para medir la distancia aérea entre el estremo del fanal en el castillo de S. Sebastian, y el remate de la garita en la Puerta de la Caleta; y se encontró ser de 1.100 varas, 1 pie, 8 pulgadas castellanas.

Levantamiento de Planos topográficos con el Teodolito.

396. Del mismo modo que se ha empleado el grafómetro para la formacion de la red de triángulos con que se determina la situacion de diferentes puntos de un pais, se haria uso del teodolito; cuyo limbo colocado horizontalmente daria los ángulos reducidos al horizonte; y cuyo anteojo superior serviria para tomar los ángulos de altura de los diferentes objetos, ó vértices de los ángulos sobre dicho plano. Estas dos ventajas hacen preferible el teodolito al grafómetro, pues dando el primero la proyeccion del ángulo y la inclinacion de sus lados, queda el valor del ángulo determinado con una sola operacion.

Reduccion de los triángulos de un plano á otro.

397. Si desde los ángulos de un triángulo dbc, que tenga una inclinacion cualquiera respecto al plano P, se bajan á este las perpendiculares dd', bb', y se tiran las líneas $b'd'$, $b'c$, cd', que unan los puntos d', b', c, el triángulo $d'b'c$ que resulta, será la Fig 199

proyeccion del dbc en el plano P. Y si conociendo este triángulo, se quisiere resolver aquel, se tendrá, que en el triángulo $b'bc$ rectángulo en b' se conocen bc, y el ángulo bcb', inclinacion del plano con la visual bc; con lo que se hallarán bb', $b'c$.

En el triángulo $dd'c$ se hallarán del mismo modo dd', $d'c$, é imaginando $b'm=dd'$, y tirando dm, resultará el triángulo rectángulo dmb, en el cual se conocen db, y $bm=bb'-dd'$, hallándose $dm=b'd'$. En el triángulo $b'd'c$, en que se conocen los tres lados, se podrán hallar sus ángulos; con lo cual quedará resuelto el problema.

Fig.200 398. Si se quisiere medir un terreno ABCD cuyos ángulos están en planos diferentes, sin que pueda el observador tomarlos en el horizontal, ni situarse dentro del terreno, márquense con piquetes los ángulos A, B, C, D; y mídanse en D, el ADC en el plano mismo del instrumento, los CDE, ADF, como ángulos de alturas, y la línea CD. En C, el DCB en el plano, el BCL de altura, y la línea CB. En B, el ángulo CBA, y BA. En A, tómense BAD y BAG. Mídase en fin AD, é imagínese la diagonal BD; con lo que la figura quedará dividida en dos triángulos.

La resolucion del problema consiste tan solo en reducir cada lado á su distancia horizontal, y en seguida buscar el área de cada triángulo.

En los CDE, ADF, BCL, se conocen los lados CD, AD, CB; los àngulos rectos en E, F, L; y los DCE, DAF, CBL, complementos de los de altura: habrá, pues, que hallar las horizontales de, el, lf, fd.

La inspeccion de la figura, y la correspondencia de los números y letras bastan para la total intelijencia de este caso; en el que, hecho el cálculo en las dos circunstancias, se conocerá el error que resultaria de haber mirado desde luego como situados en un plano horizontal todos los ángulos de la figura.

399. Puede suceder que la cadena, con que se hayan medido las diferentes líneas para hallar las superficies, difiera de la longitud que se la supone por no haber sido comprobada ó verificada. Para deshacer el error que de ello se haya producido, si a representa la longitud de la cadena verdadera, b la de la usada, c

la superficie hallada, y d la verdadera, se tendrá,

$a^2 : b^2 :: c : d = \frac{b^2 c}{a^2}$; y como $a^2 = 1$ será $d = b^2 c$, ó que la superficie rectificada es igual al producto, del cuadrado de la longitud de la cadena usada por la superficie hallada con ella.

409. Si se conoce el área del triángulo que se proyecta ortogonalmente (*), que se llamará S, y el ángulo de la inclinacion de su plano con el de proyeccion que se representará por a, la superficie del triángulo proyectado será $S' = \frac{S}{\cos a}$; ó si esta es conocida, se deducirá $S = S' \cos a$; y finalmente si son dadas S y S′, se tendrá $\cos a = \frac{S}{S'}$. Esta espresion, que tiene grande uso en la geometría analítica y en la mecánica, es general, porque se verifica en todas las figuras con tal que sean planas: se demuestra con suma facilidad por la siguiente consideracion. Supónganse el área de la figura y su proyeccion divididas en elementos lineales por un plano, que en todas las posiciones sea perpendicular á su interseccion; es evidente, que un elemento de la figura será igual á su proyeccion multiplicada por el coseno del ángulo que hacen entre sí. De donde resulta, que la suma de los primeros elementos que componen el área de la figura es igual, á la suma de los elementos que forman su proyeccion multiplicada por el coseno del ángulo de inclinacion que resulta factor comun. Los que deseen tener una demostracion independiente de la consideracion anterior en cantidades finitas, y solo para los triángulos, podrán consultar la geometría analítica de Zorraquin, pagina 146, teorema primero.

401. Se copia de la geometría descriptiva de G. Monge la resolucion gráfica para reducir los ángulos al horizonte; que, como *Fig* 201
todas las de este libro clásico y célebre en la historia de la geometría y de sus aplicaciones, debe mirarse como un modelo de precision, sencillez y claridad.

"*Dado el ángulo formado por dos rectas, y los que estas forman con el plano horizontal, encontrar la proyeccion del primero sobre este plano.*"

(*) Véase la nota del párrafo 485.

"Sea *b'* la proyeccion horizontal del centro del ángulo pedido, y *b'd* la de uno de sus lados: será pues necesario construir la del otro lado *b'c*. Supóngase que el plano vertical de proyeccion pasa por *b'd*; que se tira por *b'* la vertical indefinida *bb'*; y que *b* es la representacion en el plano vertical del centro del ángulo observado. Hecho esto, si por el punto *b* se tira la *bd*, que haga con la horizontal el ángulo *tdb'*, será el punto *d* el de su encuentro con el plano horizontal. Igualmente si se tira por el punto *b* la recta *bc*, que forme con la horizontal un ángulo *bcb'* igual al que el segundo lado forma con el horizonte, y si desde el punto *b'* como centro, y con un radio *b'c*, se describe un arco de círculo *c,c*, el segundo lado no podrá encontrar al plano horizontal sino en un punto de este arco, y solo faltará hallar la distancia de este punto á algun otro conocido como *d*."

"Esta distancia está en el plano del ángulo observado. Por lo tanto si se tira *bn*, de modo que el ángulo *ndb* sea igual al observado, y si se traslada *bc* de *b* á *n*, la recta *dn* será igual á esta distancia: luego si desde el punto *d* como centro con un intérvalo igual á *dn* se describe un arco de círculo *c*, *on*, el punto *c* en que cortará al arco trazado anteriormente, será donde el segundo lado encuentre al plano horizontal. De consiguiente *b'c* será la proyeccion horizontal de este lado, y *c*, *b'c* la del ángulo observado."

Monge, al trazar las circunferencias que dan la solucion, considera los arcos que producen la interseccion en el sentido que se cuenta el lado buscado; pero no está demas observar, que, considerándose completas las circunferencias, hay dos puntos de interseccion *c* y *o*, y de consiguiente dos ángulos *ob'c*, *c,b'c*, que resuelven la cuestion.

Para no incurrir en error se nota, al observar el ángulo, si *b'c* está á la derecha ó izquierda de *bd*.

Dos circunferencias que existen en un plano, solo pueden tener tres relaciones de posicion: se cortan ó tienen dos puntos comunes; se tocan ó tienen comun un punto; ó no tienen ninguno. Cada uno de estos casos que puede ofrecer la solucion del problema, tiene su significacion: el 1.°, es el del problema arriba resuelto; el 2.°, cuando el ángulo observado y los de inclinacion están en un mismo plano vertical; y el 3.°, cuando el problema no tiene solucion, porque los datos son absurdos. Para convencerse de esto basta considerar, que en el punto *b* los lados del ángulo forman con la vertical un ángulo triedro, cuyos ángulos son el observado y los complementos de las inclinaciones de sus lados. Si el ángulo observado es mayor que la diferencia de los complementos, existe el ángulo triedro, que es el primer caso; si es igual á la diferencia, lo que equivale á que la suma de dos sea igual al 3.°, el ángulo triedro se convierte en plano, que es el 2.° caso; y si es menor que la diferencia, ó bien si la suma de dos es menor que el 3.°, la solucion es imposible, pues no puede formarse ángulo triedro cuando la suma de dos ángulos es menor que el otro.

402. La figura 202 tiene por objeto presentar otra disposicion del problema, cuando el punto *b* esté fuera de los planos de proyeccion, y sea fija la posicion del primer lado *b'd* con respecto á la direccion de la aguja; incluyendo el caso en que uno *Fig* 202
de los lados presenta su inclinacion con el horizonte por la espalda de la observacion. Basta examinar la figura para enterarse de las modificaciones que sufre el problema, aunque su solucion dependa como en el anterior de las intersecciones *c* y *o*; y para conocer que debe admitirse la *c* para tener la proyeccion *b'c'* del 2.° lado, que es la prolongacion de *cb'*. (*)

(*) No puede prescindirse de enunciar tres cuestiones importantes de topografía, que presenta Monge en la obra citada, y que son de grande interés por sus aplicaciones.

"1.ª Un ingeniero que reconoce un pais montañoso, bien sea para estudiar su disposicion, ó para hacer el proyecto de alguna obra pública que dependa de ella, se ha provisto de un mapa topográfico, en que tiene las proyecciones de los diferentes puntos y las acotaciones que corresponden á cada uno de ellos sobre el plano horizontal de proyeccion. Encuentra un punto importante que no está en el mapa, sea porque se omitió, ó porque se ha hecho notable despues de su levantamiento; y se supone que el ingeniero lleva un grafómetro con una plomada para medir ángulos. Se pide que, sin mudar de posicion, construya sobre el mapa el punto en que se encuentra; y que determine la acotacion que corresponde al mismo sobre el plano horizontal de proyeccion."

"2.ª Siendo las mismas las circunstancias que en la cuestion precedente, con la diferencia de no poderse tomar los ángulos con la vertical, se pide

Levantamiento de planos topográficos con el grafómetro, sestante, y círculo de reflexion, cuando su anteojo móvil no sale del plano paralelo al del limbo.

403. Del mismo modo que se ha operado con el grafómetro anteriormente, se haria ahora, cuando, suponiendo el limbo del instrumento en el plano de los objetos ó ángulos, no pudiese darse movimiento vertical al anteojo móvil, y debiera permanecer paralelo al limbo: por lo que habrá que reducir los ángulos al plano horizontal, y por consiguiente hallar los de altura ó con la vertical.

Bien se deja ver, que lo dicho debe entenderse igualmente respecto al sestante y círculo de reflexion, cuyos planos se ponen al operar en el de los ángulos.

En fin en el registro de apuntaciones se pone en estos casos una casilla para los ángulos de las visuales con la vertical, ó ángulos verticales; y habrá que añadir otra para el cálculo de la reduccion de los ángulos al horizonte (*).

que, sin salir de la estacion, determine el ingeniero sobre el mapa la posicion del punto en que se halla y su acotacion correspondiente."

"3ª Un general que manda un ejército al frente del enemigo, no tiene mapa del pais que este ocupa, y le es indispensable reconocerlo para determinar un plan de ataque que premedita; pero puede disponer de un globo aerostático, y encarga á un ingeniero que ascienda en él, y tome las medidas necesarias para formar un mapa y una nivelacion aproximada. Por temor de que el enemigo conozca su intencion, permite al ingeniero que suba á diferentes alturas de la atmósfera si fuese necesario; prohibiéndole empero el mudar de situacion sobre el terreno. Se trata de determinar las medidas, que tendrá que tomar el ingeniero para dar cumplimiento á las órdenes de su general, en el supuesto de que tiene un instrumento para observar los ángulos, que forman las visuales entre sí y con la vertical."

La resolucion de estas cuestiones se obtiene por los puntos que son comunes á tres superficies de revolucion. Estos puntos se encuentran por las intersecciones de dichas superficies que son fáciles de determinar; y aunque por ellas se hallan varios puntos, que satisfagan á aquella condicion, uno solo fácil de distinguir entre todos, resolverá el problema sin la menor ambigüedad.

(*) Se ha incluido en esta obra la descripcion y el uso de los círculos repetidor y de reflexion, como un ejemplo de la perfeccion á que han llegado los instrumentos para tomar ángulos, y para hacer ver el artificio con que se ha

Reduccion de los ángulos al centro de la estacion ó eje de la señal.

404. Si en la serie del trabajo se hacen las estaciones A, B, dirigiendo visuales al punto C, y hay luego que trasladarse á este para continuar el plano, es evidente, que, no podrá colocarse el observador en dicho punto C, si conforme se ha indicado es el estremo de una veleta, campanario &c. En tal caso no quedará otro arbitrio, que hacer la operacion en las inmediaciones de aquel punto; pero resultará evidentemente, que el ángulo que se tome no será el verdadero. La operacion para corregir el que se tomare, y tener el que verdaderamente deba ser, es lo que propiamente se llama la *reduccion de un ángulo al centro de la estacion.* *Fig.* 203

405. Es claro, que, con respecto al centro C, se podrá colocar el observador de uno de los tres modos siguientes: 1.°, en los puntos D, *d*, F, *f*, que estan en las direcciones de las visuales ó en su prolongacion; 2.°, en los arcos DF, *df*; y 3.°, en los D*f*; F*d*.

406. En el primer caso, siendo el ángulo observado . . . . ADB=ACB+DBC,
será . . . . ACB=ADB−DBC:
y por la misma razon. . . . . ACB=AFB−FAC.

Esto es; que, cuando el observador está entre el centro y el objeto, y se quiere tener el ángulo del centro, se ha de restar del ángulo observado el ángulo que se forma en el objeto, y cuya base es la distancia entre el centro y el punto de estacion.

Tambien se tendrá . . . . . ACB=AFB+FAC,
y. . . . ACB=ADB+DBC.

Lo cual significa; que, cuando el observador está situado en la prolongacion de las visuales AC, CB, *y se quiere tener el ángulo del centro, hay que añadir al ángulo observado el ángulo que se forma en uno de los objetos, cuya base es la distancia del observador al centro de la torre.*

conseguido atenuar el error de que no puede prescindirse, reduciéndolo á una pequeña fraccion del mismo; pues por lo demás su uso es casi esclusivamente para las observaciones astronómicas y para las geodésicas del primer órden.

407. En el segundo caso, siendo el ángulo observado . . . . $ADB=ADF+BDF$,

Fig204 y . . . $\begin{cases} ADF=ACD+DAC, \\ BDF=BCF+DBC, \end{cases}$

será . . . . $ADB=ACD+DAC+BCF+DBC$;

ó . . . . $ADE=ACB+DAC+DBC$,

y . . . . $ACB=ADB-DAC-DBC$.

Tambien en el punto d se tendrá $ACD=AdF+CAd$,

ó . . . . $BCD=BdF+CBd$;

Fig203 y sumando estas ecuaciones. . . . . $ACB=AdB+CAd+CBd$:
ó lo que es lo mismo, que, *cuando el observador se halla en uno de los puntos de los arcos* DF, D*f*, *el ángulo del centro es igual al ángulo observado, menos la suma de los dos ángulos formados en los dos objetos cuyas bases son las distancias del observador al centro de la torre, si la observacion es en el arco* DF, *y mas la suma, si es en el arco df.*

408. En el tercer caso, siendo. . $AOB=ADB+DAC$,

y . . . . . . $AOB=ACB+DBC$,

será. . . . . $ADB+DAC=ACB+DBC$;

de donde . . . $ACB=ADB+DAC-DBC$,

Fig205 y del mismo modo. . . . . . . $ACB=AdB=dBC-CAd$;
espresion que, como las anteriores, se traducirá facilmente al lenguaje comun.

409. Como se ve en todo lo que precede, se necesita para la correccion de que se trata empezar por conocer el ángulo, cuyo vértice está en uno de los objetos, y cuya base es la distancia desde el punto en que se halla el observador hasta el centro de la
Fig203 torre punto de estacion, y sustituir despues su valor en las ecuaciones anteriores; esto es, se necesita empezar por conocer á DBC, ó FAC, que hay que añadir ó restar.

Para esto en el triángulo DCB se tiene la distancia CB calculada en el ACB, el ángulo DBC que se observa, y la distancia CD que se mide: con lo que podrá hallarse el ángulo DBC.

Fig206 410. Si se imagina que pasa una circunferencia por los puntos A, B, C, y se supone que el punto de estacion D, que en las anteriores figuras se eligió arbitrariamente, se trasladó á un punto

D′ de dicha circunferencia, como el ángulo observado BD′A seria igual al del centro BCA de la torre, no habrá correccion que hacer: la dificultad queda, pues, reducida á colocarse en un punto de aquella circunferencia. Pero observando que el ángulo CDA es entonces CD′A=ABC, si en el instrumento se lleva ya formado el ángulo, AD′C=ABC, y se da la vuelta al rededor del centro C, colocando el instrumento en diferentes parages hasta un sitio D′, en que los anteojos se dirijan á los puntos A, C, es claro; que entonces se estará en la circunferencia, y por consiguiente no habrá que correjir el ángulo.

Para abreviar esta operacion puede hacerse á un mismo tiempo por dos observadores con dos instrumentos; de modo que mientras uno busca á la derecha del centro C el punto D′, el otro vaya hácia la izquierda en busca del D″, en que el ángulo CD″A=180°−B, pues tal es su valor en el cuadrilátero inscrito ABCD″. Como estas operaciones se harán por lo regular en los corredores ó galerias de las torres, se podrán hallar en ellas los puntos de circunferencia del modo arriba dicho.

411. Si en el punto C de estacion se imagina la tangente GH, y en esta los puntos E, F próximos á aquel, se tendrá

$$AEC=180^\circ-ACE-CAE;$$

y como CAE es muy pequeño y por consiguiente despreciable, y ACE=CBE $\Big\}$. AEC=180°— CBE.

En el triángulo EAF es . . . . . AFE=180°— AEF—EAF.

Omitiendo EAF, y sustituyendo por AEF su igual 180°—ABF, será AFE=180°—180°+ABF=ABF.

Conocerá, pues, el observador que se halla en los puntos E, F de la tangente, siempre que se verifique que los ángulos formados por la direccion al centro de estacion y al objeto de la izquierda sean iguales, el uno á 180°— CBE, y el otro á ABF; y como los ángulos AEB, AFB en los puntos E, F de la tangente, son casi iguales á ACB, será lo mismo situarse en la tangente que en la circunferencia, para evitar la correccion.

412. Si fuese preciso colocarse fuera del edificio, ó si el centro de este estuviese ocupado por una viga ú otro obstáculo semejante, no se podrá observar desde el punto de situacion el ángulo formado

*Fig*207 por uno de los objetos y el centro de estacion ó del edificio, ni medir la distancia desde aquel punto al espresado centro; datos, que, como se ha visto, son precisos para calcular la reduccion al centro de estacion.

413. Sea por ejemplo la pirámide Z, á cuya cúspide C se han dirigido las visuales: es claro, que, como no se puede penetrar en la pirámide, no habrá modo directo de observar el ángulo ADC, ni de medir á DC.

Levántese en el punto h, mitad de la cara fg, la perpendicular $hi = \frac{1}{2} fg = h$C, suponiendo que la base sea un cuadrado ó un rectángulo; tírense Di, Dh; y por un punto cualquiera p de la iD, la pr, paralela á hi. Tómese $rn = np$: con lo que el punto r estará en la direccion de C, y podrá ya observarse el ángulo ADC. Tambien se tendrá la distancia DC por ser igual á Dr + rC = Dr + ri.

En esta construccion se necesita hacer $hi = h$C, y por consiguiente conocer la longitud de este radio recto del polígono; lo que ha sido muy fácil por la suposicion hecha respecto á la figura de *Fig.*208 la base de la pirámide. Pero si esta figura fuese otra cualquiera, como X, se formaría el triángulo esterior fgi totalmente igual al interior fcg, pues se supone conocido el ángulo del polígono; y bajando ih perpendicular á fg será igual á ch, que se busca: siguiendo despues la construccion en un todo igual á la anterior, como lo manifiesta la figura.

Fijar los objetos con relacion á un meridiano y su perpendicular.

414. Determinados por los medios esplicados los ángulos entre los objetos, y las distancias de unos á otros, para fijarlos en un plano, ya elegida su escala de que se hablará mas adelante se toman de esta tantas partes cuantas contengan las distancias ó diferentes lados de los triángulos; y por medio de intersecciones, hechas con estos intérvalos como radios, se irán situando todos los puntos, que antes solo se tenian en borrador ó anotados en el registro.

Estas intersecciones, cuando los vértices de los ángulos no son rectos, no quedan determinadas con toda precision, por la oblicuidad con que se cortan los arcos que sirven para situar los ángulos: entonces el error, pequeño en cada punto, puede llegar á ser de entidad cuando son muchos los puntos que hay que situar, y tienen mútua dependencia entre sí. Deben, pues, fijarse los objetos por medio de intersecciones perpendiculares, como vá á enseñarse suponiendo sabidas las primeras nociones de cosmografía.

415. Conocida la direccion del meridiano, se hallan los ángulos que este forma con cada punto ú objeto; y, tirando á aquel su perpendicular, se tendrá en el triángulo rectángulo JBM, conocida la hipotenusa ya calculada JM y el ángulo JMB formado por el meridiano Y, el objeto J; y con esto podrá resolverse, encontrándose las distancias JB, JE del punto J al meridiano NS y á su perpendicular XZ. Igualmente en el triángulo rectángulo DMC se conoce la hipotenusa MC, y el ángulo DMC=JMC—JMD; por cuyo medio podrán hallarse las distancias CD, CF del punto C al meridiano y perpendicular que pasan por Manzanares. *Fig.* 209

En fin, en el triángulo rectángulo MAG, en el que se conocen AM y GMA=GMC+CMA, se calcularán las distancias AG, AH.

Una vez halladas de este modo las distancias de los objetos de un pais al meridiano y su perpendicular, y trazado el 1º en el papel, como se ha enseñado, se podrán ir estableciendo ó señalando todos los puntos ú objetos A, C, F, por medio de intersecciones perpendiculares tomando las partes MH, MG, iguales á las AH, AG halladas; las MD, MF iguales á las CF, CD: y levantando perpendiculares en los puntos H, G, D, F.

416. El registro para anotar las distancias al meridiano y su perpendicular, podrá tener la forma siguiente:

Nombres de los pueblos.	*Distancias de estos pueblos.*	
	Al Meridiano de Manzanares.	A su perpendicular.
	varas	varas
Argamasilla.	. . . . »	. . . . . »
Casa de		
Venta &c,		

417. No será importuno, como ejemplo de levantamiento de planos topográficos, dar aqui un estracto de lo ejecutado para el de las salinas é inmediaciones de la Isla de San Fernando; ora se mire relativamente al interes histórico y local del pais; ora al método, órden, y precision de las operaciones ejecutadas para la operacion (*).

Programa del trabajo que ha de ejecutarse en tal.

417. »Se compondrá:

1.° De una coleccion de planos y cartas.

2.° De los apuntes y memorias indispensables para ilustrar la representacion gráfica del pais, y dar la idea mas completa de una posicion militar tan interesante.

Planos.

419. N.° 1.° Triangulacion general de la Isla de Leon, y sus inmediaciones, calculada con arreglo á los mejores métodos conocidos.

2.° Plano general de la Isla comprendida entre *tales líneas*, é incluyendo *tales puntos*, en escala de $\frac{1}{6000}$ (0,6 por 100 varas).

3.° El mismo plano, limitado á la indicacion de la forma natural del terreno por curvas horizontales, trazadas en consecuencia de un nivelamiento esmerado y prolijo.

4.° Carta en *tantas* hojas, que contendrá un reconocimiento detenido del campo de operaciones principales del sitio, desde la embocadura del Guadalquivir hasta Tarifa.

5.° Atlas de los trabajos parciales ejecutados en las anteriores operaciones, que se compondrá del plano general número 2.° dividido en hojas, y en escala de *tal* relacion, (triple, cuádrupla, &. de la empleada).

(*) Este trabajo se debe en la mayor parte al celo, laboriosidad, y conocimientos del Sr. D. Manuel Varela y Limia, Oficial distinguido del Cuerpo de Ingenieros, y hoy 1.° de la Secretaría del Ministerio de la Guerra.

6.° Atlas particular de los fuertes, baterias, puntos mas interesantes, y edificios militares en la escala de. . .

Apuntes y memorias.

---

420 1.ª Programa del trabajo . . método general seguido en su ejecucion . . instrumentos empleados . . análisis comparativos de los planos conocidos de esta posicion.

2.ª Memoria militar descriptiva de la Isla . . breve discusion de su ataque, y defensa.

3.ª Otra sobre el sistema, usos, y propiedades de las salinas.

4.ª Esposicion particular del sistema de triangulacion.

5.ª Otra sobre el nivelamiento.

6.ª Coleccion de notas de aplicacion relativas á cada hoja de los dos atlas particulares; individualizando la descripcion topográfica, y descendiendo á los pormenores que no puedan tener lugar en la memoria general.

421. Como se vé en la figura que representa una parte de lo ejecutado, se dividió el terreno en secciones; se midió sobre el camino real una base AB de 1206 varas; y desde sus estremos se *Fig* 210
tiraron visuales á todos los puntos de sus alrededores : llevando el registro correspondiente bajo la forma que sigue.

TRIÁNGULO NUMERO 1°. . . . . A,B.PALMA.

Nombre de la base AB medida sobre el arrecife de Cádiz.
Su longitud en varas, 1206: su logaritmo . . . 3,081347.

Vértices de los ángulos.	*Nombres de los lados.*	*Valor de los ángulos.*			*Log. senos de los ángulos.*
A.	B . . . . Palma.	75°	20′	25″	9,985627
B.	A . . . . Palma.	70°	48′	14″	9,975155
Palma.	A . . . . B	33°	51′	21″	9,745937
	Suma . . .	180	0	0	

CÁLCULO.

Primer lado A: Palma.

1.ª proporcion, 3,081347 : x : : sen 33° : sen 70°.

$$
\begin{array}{r}
+9,975155 \\ \hline
13,057902 \\
-9,745937 \\ \hline
3,311965.
\end{array}
$$

2.ª proporcion, 3,081347 : x : : sen 33° : sen 75°

$$
\begin{array}{r}
+9,985627 \\ \hline
13,066974 \\
-9,745937 \\ \hline
3,320937.
\end{array}
$$

Denominador.	*Numerador.*	*Denominador.*	*Numerador.*
Log. sup. . . 3,311966	Log. dado. . 3,311965	Log. sup . . 3,320977	Log. dado. . 3,320937
Log. inf. . . 3,311754	Log. inf. . . 3,311754	Log. inf. . . 3,320769	Log. inf. . . 3,320769
212	211	208	168

Fraccion $= \frac{211}{212} = 0{,}995$,

Distancia definitiva del punto
A á la Palma. . . . . . . 2050,995.

Fraccion $= \frac{168}{208} = 0{,}807$,

Distancia definitiva del punto
B á la Palma . . . . 2093,807.

En otra hoja se escribe bajo la misma forma anterior cuanto corresponde al triángulo núm. 2.° B. Palma, Torre Alta: é igualmente en otras hojas lo respectivo à cada uno de los restantes triángulos;

Anotaciones de detall.

422. 1.ª Zona que comprende desde el puente Suazo á la batería de Sangenis de izquierda à derecha, y frente à lo esterior.

Número 1.º (*) de la 1.ª Zona. Salina de la Magdalena.

Las salinas representadas en esta hoja se hallan establecidas á... varas de la ciudad de San Fernando, paralelamente á la misma: su frente sigue la direccion del rio Santi-Petri, y termina por la izquierda en el puente Suazo, y por la derecha en el caño de Zaporito; comprendiendo 837417 varas cuadradas de superficie, inclusas las dos orillas de Santi-Petri. Para la ejecucion de esta hoja se emplearon 24 estaciones, y mas de 4786 varas de medicion.

Las orillas de Santi-Petri han sido determinadas en baja mar por medio de la interseccion de visuales dirigidas sobre una serie de puntos muy próximos entre sí, y marcados con jalones. Esta salina solo tiene una toma de agua, á cuyo fin sirve su única compuerta, designada en el plano con una C. La L demuestra los largaderos, y la S las naves ó reunion de los tajos. Las otras esclusillas, que se ven en el plano, corresponden á las demas retenidas de agua, que se han esplicado en las observaciones generales sobre las salinas. Desde la compuerta hasta su entrada en los tajos las aguas recorren mas de 5981 varas, ó cerca de una legua.

Objetos adyacentes á esta Salina.

Cuartel de Marina ó del Castillo.

Su historia y aplicacion anterior y actual; sus circunstancias de construccion; su descripcion, cabida, defectos, enmienda, y util destino.

(*) Se refiere al número de la hoja de los planos parciales.

Cuartel de . . . . Almacenes de . . . . Casas de resguardo . . . . y Cuerpo de guardia . . . . (iguales detalles y descripcion).

Caño del Zaporito.

Sus dimensiones horizontales se manifiestan en el plano; su profundidad es de . . : el fondo está formado por una arista en vertiente. La retenida de agua del Molino de Ureña deja el canal en seco durante la baja mar, pero la calidad del terreno no permite atravesarle á pie firme.

El caño del Zaporito se comunica con el de Santi-Petri, con el de S. Pedro que rodea la Isla del Vicario; y finalmente con el de Zurraque, que corta la comunicacion entre la batería del Portazgo y el arrecife de Chiclana.

La inmediacion del Zaporito á la ciudad de S. Fernando la ha convertido en una especie de puerto, á donde vienen á parar las embarcaciones de tráfico de levante que conducen á dicha ciudad frutas, granos, y otros comestibles; como tambien una gran parte del carbon preciso para el consumo de la poblacion. Con igual sencillez, claridad, y minuciosidad se van espresando cuantas circunstancias son de conocido interés, y no pueden marcarse en los planos.

Horizonte. Vuelto el espectador hácia la parte esterior de la ciudad, su horizonte aparece limitado, á la izquierda por el puente del Suazo; á su frente en último término de 4 á 8 leguas de distancia; de izquierda á derecha descubre la sierra de Ronda, la cabeza del Moro, &c. Vense al frente, y mas inmediatas, las baterías que se distinguen por *tales nombres &c.* Mas allá de estas baterías el rio presenta *tales* circunstancias. La batería *tal* se percibe imperfectamente.

Caminos. Su localidad: su descripcion: y circunstancias particulares.

Objetos mas notables. . . . .

&c." . . . .

En fin el raciocinio, la lectura de obras sobre la materia, y esta pequeña muestra servirán de guia para las descripciones que deben acompañar á los planos (*)

Operaciones topográficas con la brújula.

423. Tambien la brújula puede emplearse para medir distancias, tirar paralelas, levantar y bajar perpendiculares; y para llenar, considerada como instrumento de detall, los triángulos de la red, ó para levantar con ella sola un plano sin datos anteriores.

424. Lo 1.º se concibe facilmente; pues midiendo los ángulos en el estremo de una base, ó el ángulo comprendido entre dos lados conocidos &c, se podrá, como se ha hecho con el grafómetro, hallar distancias accesibles ó inaccesibles.

425. No es mas dificil el inferir desde luego el modo de tirar paralelas.

Fig 211 Se trata, por ejemplo, de abrir dentro de un bosque desde C un camino paralelo al AB Obsérvese en A el ángulo nAB que la aguja ns forma con la direccion AB; hágase en C el ángulo n'CD formado por la aguja $n's'$, igual al nAB; y se tendrá la direccion CD pedida.

426. Si se quiere bajar desde el punto D en un bosque una perpendicular á la línea A'F, se observará en A' el ángulo n''A'B'; y restando de él 90° se tendrá el n''A'd'. Pásese la brújula al punto D: y haciendo en él el ángulo $n'DE = n''A'd'$, la DE paralela á d'A' será la perpendicular pedida sobre la A'F.

Fig 212 427. Si se quisiere trazar un camino AB que atraviese el bosque z, se colocará la brújula en los puntos A, C, D, &c.; se anotarán los ángulos que la direccion de la aguja forma con la de los lados AC, CD &c.; y se medirán estos. En el triángulo ACD se tiene además el ángulo, que podrá construirse,

$$ACD = nCD + nCA;$$

y como se conoce á . . $CDE = 180 - (cDs' + n'DE)$,

se tendrá . . . . $ADE = CDE - ADC$:

(*) Respecto á la descripcion, cálculos, y demás, puede verse la obra de Delambre sobre la medida de un arco del meridiano terrestre, entre Dunquerque y Barcelona.

con el cual, y los lados DE, AD se hallarán todas las demás partes del triángulo ADE, y del mismo modo las del EAB.

Llegados á E se tiene la EA del triángulo anterior, y se observará el ángulo BEA. Por A tírese una recta AB que haga con nA el ángulo nAB=s''EA; y como se conoce la EB, se tendrá tambien el punto B en el terreno, y la AB pedida. Su prolongacion se obtiene por el ángulo n'''Bd de la aguja.

428. Una vez marcados en el papel, valiéndose del teodolito, círculo repetidor, &c , los principales objetos del terreno por medio de la red de triángulos, cuando se trate de llenar el espacio comprendido entre aquellos puntos; esto es, cuando se quiera espresar todos los accidentes del terreno, ó marcar en el plano todos los detalles del mismo, se emplean los otros instrumentos, que si bien no dan resultados tan exactos como los primeros, son sin embargo muy cómodos para este fin.

Levantamiento de planos con la brújula.

---

429. Usando, por ejemplo de la brújula, trátase de trasladar al papel, ó levantar el plano de una parte de la vega de Málaga, entre el rio Guadalhorce, el mar, la ciudad, y las montañas al O. *Lám* 13
Supóngase que se quiere empezar desde la salida de Málaga por el camino de Churriana. Colóquese el observador en un punto *a* con la brújula, que pondrá horizontal; y por cuya alidada dirijirá las visuales *ab*, *ac*, *ad*, *at*, en las direcciones de la boca del rio Guadalmedina, calle de salida hasta la orilla del mismo rio, ferreria, camino de Antequera, orilla del jardin de Abadia, y demás puntos que determinan la configuracion del terreno al rededor del de estacion *a*.

La aguja debe haberse conservado en una misma direccion, en las diferentes posiciones que sucesivamente ha tenido que darse á la brújula, para dirigir las espresadas visuales. Apúntense en un registro, ó en un bosquejo del plano que quiera levantarse, los ángulos formados por aquella direccion y las visuales; esto es, el ángulo formado en el fondo de la caja de la brújula por la direccion constante de la aguja, y el diámetro paralelo á la alidada; como se vé en la figura, que representa al mismo tiempo el espresado borrador del terreno.

Mídanse, y anótense tambien las distancias horizontales *ab*, *ac*, *ad*, *at*, &c.; y teniendo de este modo diferentes puntos que marquen los recodos ó estremos de los caminos, puntos de la costa, límites de los bosques ó jardines, sinuosidades é inflexiones de los rios &c., será fácil trazar los polígonos ó curvas que terminen la direccion de los primeros, la configuracion de los segundos, las orillas de los rios, los linderos, en fin las diferentes posesiones, cultivos, &c.

Pásese á otro punto *d*, en el que se operará semejantemente á lo hecho en *a*, dirigiendo visuales á los objetos notables del terreno, como á los puntos salientes y entrantes de la costa, recodos del camino, &c. Anótense los ángulos formados por estas visuales y la direccion constante de la aguja; que será paralela á la que tuvo en *a*, asi como en todas las demás estaciones.

Recórranse los puntos *e*, *m*, *n*, *r*..., hasta cerrar el perímetro ó volver al punto de salida *a*; y, del mismo modo que en los anteriores, se determinará la configuracion de veredas, caminos, y arroyos, la situacion de los cortijos, caserios &c.: y por consiguiente se tendrá la configuracion del terreno comprendido en esta parte; y despues desde *t* se seguirá marcando los *o*, *l*, *h*, &c.

Si llegando al punto B se quisiere determinar la orilla izquierda del Guadalhorce, se establecerian las estaciones convenientes 7, 6, 5, 4, &c., para determinar su configuracion, y la de la orilla opuesta como se ve en la figura.

Los diferentes anchos del rio se pueden hallar de camino, tirando desde los estremos de las líneas 3,2, 3,4 visuales á un mismo punto de la orilla opuesta; y anotando los ángulos que estas visuales forman con aquellas líneas. Haciendo lo mismo para saber la situacion y el ancho de los arroyos que entran en el rio, se tendrán todos los detalles del plano que se ha querido levantar.

430. Como no se puede poner la mayor confianza en la exactitud de los planos levantados con la brújula (106 y sig.), y como esta es por otro lado muy cómoda para los detalles, conviene tener establecidos los puntos principales del plano, como pueblos,

castillos, &c., conforme á lo dicho (381), empleando otros instrumentos; y sirviéndose de la brújula, tan solo para marcar las distancias y direccion de los puntos intermedios.

El método para el levantamiento del plano en este caso, será el mismo que el anteriormente enseñado, con la sola diferencia de que habrá que situar el punto D por ejemplo, desde donde se ha de empezar el trabajo, con relacion á los puntos A, B, C ya establecidos, y que forman el triángulo ABC que se trata de llenar con la brújula; mientras que antes dicho punto D se tomó arbitrariamente.

Para esto, observados en D los ángulos CDA, CDB, ADB; y en A,B,C los que con la direccion de la aguja forman las visuales, DB, DC, DA, el punto en que estas se corten será el D correspondiente al del terreno.

Modo de poner en limpio el bosquejo del plano levantado con la brújula, comprobarlo, y rectificarlo.

439. Ya anotados en el bosquejo los ángulos que forman los diferentes objetos del pais con la direccion de la aguja, y las distancias correspondientes, se pasa á realizar dicho plano; esto es, á trasladarlo al papel con la abertura de los ángulos y representacion de las distancias tales como son efectivamente, todo arreglado á lo escrito en el borrador ó bosquejo: tomando los primeros con el transportador, y las segundas en una escala arbitraria (477), que contiene las varas, pies &c.

Señálese en el papel un punto *a*, que represente aquel en que se empezó la operacion en el terreno; hágase pasar en cualquiera direccion una línea que se supone ser la de la aguja; y fórmense con un semicírculo, ó transportador, ó por la escala de cuerdas, á su derecha é izquierda, los ángulos *nab*, *nac*, *nad*, que están apuntados en el bosquejo, y que manifiestan la disposicion de los objetos con respecto á la aguja. Tomense despues en la escala las varas, pies, &c., que las *ab*, *ac*, *ad*, contienen en el terreno, que tambien están escritas en el bosquejo: y se tendrá el plano, ó la verdadera situacion de los puntos que se han querido determinar. Asi se situan los *r*, *x*, *o*, &c, que servirán para marcar las longitudes, direcciones, y recodos de las partes de caminos y demas. Al mismo tiempo será fácil ir dibujando el terreno inmediato á dichas distancias y puntos; como sembrados, bosques, &c., que tambien estarán indicados en el bosquejo.

Establecido ya en el papel por este método el punto *t*, se procederá como antes, y se situarán sucesivamente del mismo modo los otros puntos *d*, *c*, *m*: con lo que se llegará á trasladar al papel el plano de todo el pais á la izquierda del rio.

Puede escusarse el tener que situar tantas veces el semicírculo en el papel, usando el método siguiente. En un punto cualquiera D de los ya fijados póngase el centro del semicírculo; y, suponiendo trazada la línea norte-súr, fórmense á su derecha é izquierda ángulos iguales á los que la aguja fórma con las visuales en los puntos 1′, 2′, 3′: como se tienen ya estos puntos 1′, 2′, 3′, se tirarán por ellos paralelas á sus correspondientes en D, con lo que se tendrá el plano como anteriormente. Para evitar la confusion, que podria resultar de este segundo método, convendrá numerar las visuales ó lados de los ángulos en D con los mismos números 1, 2, 3, que tengan sus paralelas correspondientes en 1′, 2′, 3′.

440. Conviene, para comprobar el trabajo hecho, anotar en un punto cualquiera D los ángulos que la aguja forma con las visuales tiradas á objetos ya colocados, ó que se van á colocar; pues si trazados aquellos ángulos, los lados que con la aguja los forman van á parar á las torres, caseríos, ó á A,B,C; esto es, á los mismos puntos que en el borrador ó bosquejo, irá bien hecho el trabajo.

Pero supóngase que al hacer la comprobacion en el punto *s*, por ejemplo, del plano que se va levantando, y formados en E,F,L, los ángulos que la direccion de la aguja hace con las visuales á *s*, estas no concurren en *s*, y sí en *s*′; es claro que este, y no otro, será el verdadero punto de estacion.

Observaciones.

Fig 213 441. De lo dicho (116) se infiere, que, teniendo en el plano situados diferentes puntos A,B,C, sin sujecion á otros establecidos con un buen instrumento, para orientar dicho plano, ó saber la verdadera posicion de los objetos con respecto á los cuatro cardinales N, S, E, O, es preciso trazar en uno de aquellos puntos C del plano el ángulo NCN′ que la direccion de la aguja forma con el meridiano; esto es, hacer un ángulo igual á la declinacion de la aguja: con lo que quedará marcada la verdadera NS, y su perpendicular EO.

Del mismo modo, si el plano se hubiese levantado con relacion á puntos precisos; esto es, si la brújula hubiese servido solo para situar los puntos intermedios, será preciso marcar la línea NS, y formar en un punto cualquiera C el ángulo NCN′ de declinacion, para hallar CN direccion de la aguja, y poder continuar el plano por medio de paralelas á esta, como se ha esplicado.

442. La brújula ofrece en el levantamiento de los planos la ventaja de la comodidad con que se sitúan los puntos con solo tirar una visual BC: pues siendo constante la direccion Bn, bastará formar el ángulo nBC para tener la verdadera posicion de BC respecto de BA; mientras que con otro instrumento se necesitaria dirijir las dos visuales BA, BC para tener el ángulo ABC, y lo mismo para marcar otros puntos D,F,D.

443. Como nada indica el parage en que varía la aguja, habria que hacer continuamente observaciones, para ver si la variacion ó la declinacion es la misma en todos los puntos. Este trabajo es molestísimo: tanto mas, cuanto que la aguja no solo varía por si misma, como se ha dicho, sino que sufriendo la atraccion de los metales, y siendo facil al levantar los planos acercarse á minas de hierro ocultas, no se podrá tener seguridad de la exactitud de estos planos. La misma razon obliga á usar este instrumento con mucha precaucion y desconfianza en el levantamiento de planos de los pueblos, &c., en que los balcones, cerraduras, y demas herrage pueden atraer la aguja y ocasionar por consiguiente errores de entidad. En fin, es precisa toda precaucion, alejando los compases, evitando la proximidad de otra brújula, &c.

Si á todo lo dicho se agrega la dificultad de contar los ángulos con precision (tanto por el vaiven de la aguja, cuanto por la pequeñez del radio que es la causa del error de la division), á una con la facilidad de cometer al medir las distancias equivocaciones, que lleguen á ser de entidad por la multiplicacion de medidas que haya que tomar, se concluirá; que la brújula no es un instrumento bastante perfecto para levantar planos, y que solo debe emplearse para los detalles entre puntos establecidos con precision.

444. Aunque es cierto que la declinacion de la aguja cambia en un mismo lugar en un periodo de diez á quince años, segun una ley desconocida hasta el dia, tambien lo es, que en pocos meses ó en un año no esperimenta alteracion sensible. Asi pues, si durante este periodo se encuentra su declinacion, y se marca la NS desapareciendo la *ns* magnética, el plano quedará orientado para siempre. Mas si un mismo plano levantado con la brújula en dos épocas muy distantes se quisiera orientar, habiendo diferencia en las declinaciones de la aguja, resultaria para cada parte del plano una línea NS; lo cual es absurdo, porque la direccion ha de ser única. Para evitar esto y hacer que la operacion sea mas aproximada á la realidad, se sobreponen las dos direcciones de la NS hasta que se confundan en una: resultarán entonces en cada punto de estacion dos declinaciones n'B, n''B, y el ángulo comprendido por ellas n'Bn'' será el de la variacion en el espacio que ha mediado entre las operaciones. Cuando las direcciones n'B, n''B, son los límites de la variacion, la recta *ns* que divide por medio el ángulo n'Bn'' se llama la direccion media del lugar, ó su variacion media de este á el ángulo n'Bn.

Operaciones topográficas, y levantamiento de planos con la Plancheta.

Medidas de distancias.

445. Este instrumento dá las distancias reducidas al horizonte, las cuales se hallan, como se dijo al indicar su uso (150), tomando con el compás desde los estremos de una base medida, ó puntos de estacion marcados en la plancheta, las distancias á los objetos ó puntos de interseccion, y aplicándolos sobre la escala, el número de partes de esta que aquellas contengan, este mismo tendrán en el terreno las distancias.

Lo dicho sobre el uso de la plancheta y operaciones con el grafómetro, cuya aplicacion es idéntica en igualdad de circunstancias, basta para saber operar en estos casos.

Si la distancia que quiere medirse con la plancheta es inclinada, tal como la *bc*, y accesible solo en uno de sus estremos *b* es necesario marcar en la alidada la visual paralela al tablero de la plancheta; y colocada despues esta en el plano de los ángulos en el punto *b*, tirar la visual *bc*, y medir la $ab=a'b'$ visual á otro punto a' Pásese despues á este la plancheta, alineando *ab* con $a'b'$, y quedando el tablero en el plano de los puntos *a,b,c* á la altura marcada, y la visual *ac* que se tira paralela al tablero. Se construye aparte el triángulo *mnr* igual al *abc*; en él se miden con el transportador los ángulos *a,b* para hacer los *m,n* iguales; y sobre la escala se toma la *ab*, para trasladarla á *mn*. Este triángulo podrá calcularse con los datos obtenidos, y los ángulos que sirven para ello quedarian medidos desde luego, si el marco de la plancheta estuviere graduado. *Fig* 214

446. Cuando la distancia inclinada es del todo inaccesible, como la *cd*, dispuestas la alidada y plancheta como anteriormente se elije un punto por ejemplo a', en que se coloca la plancheta; se tiran las visuales *ad, ac*, á los estremos *c,d*; y se pasa el instrumento á otro punto b', tal que pueda medirse la $a'b'$: con la que, y los ángulos que se formen en a,b' con las visuales tiradas desde ellos á los estremos *c,d* se averiguarán, como en el caso anterior, las *ac, ad*. Con estas y el ángulo *a* podrá construirse gráficamente el triángulo $mnr=adc$, y conocer $mr=dc$. *Fig* 215

447. Facil es, sin necesidad de esplicacion, saber tirar en el terreno con la plancheta paralelas por puntos dados á líneas determinadas; y tambien bajar y levantar perpendiculares en el mismo caso, teniendo un semicírculo ó transportador para medir y trazar los ángulos correspondientes, alternos, &c. iguales á los que existen en la plancheta, formados por las visuales tiradas, ó líneas marcadas.

448. Para medir alturas con la plancheta se pone su tablero vertical, en cuya posicion es muy conveniente que la alidada esté sujeta á un punto del tablero, alrededor del cual gire sin separar-

se de aquel. Este punto fijo seria tambien conveniente, pero no indispensable, para cuando la plancheta se pone inclinada como en los casos anteriores.

Fig 216 Sea la altura accesible $p'q$: colocada la plancheta con el tablero vertical en a', y dirigida á la cúspide la visual aq, se tiene lo necesario para continuar gráficamente el triángulo rns, igual á apq, que da $rs=pq$.

449. Si la altura fuere inaccesible, se medirá una base $a'b'$; se tirarán las visuales aq, bq; y con los ángulos en a, b, y el lado ab podrá formarse el triángulo $mnr=abq$, y conocerse aq. En el aqp habrá tambien los datos necesarios para su construccion, y para averiguar ó medir la pq; añadiendo á la cual pp' se tendrá toda la altura pq buscada.

Si la altura no fuese una arista vertical, sino que correspondiese al interior de un edificio, montaña, &c., seria indispensable que el plano de las visuales fuese paralelo al del tablero como se dijo, sin cuyo requisito no podria hacerse uso del instrumento.

Levantamiento de planos con la Plancheta.

450. Se quiere emplear la plancheta en el detall de un plano, cuyos puntos principales se han establecido geométricamente.

Supóngase, por ejemplo, que se trate de representar el pais

Lám 13 á la izquierda del rio Guadalhorce; y que se quiera principiar las operaciones desde el punto a, á la salida de la ciudad, como se hizo antes con la brújula. Este primer punto de estacion es arbitrario; pero conviene que sea conocido, y tal, que sobre él ó su centro pueda colocarse la plancheta: lo que no sucede en los puntos trigonométricos, ó elegidos para dirigir las visuales, como torres, palomares, &c. Si se determinase un punto en el terreno por medio de otros tres conocidos, podria no quedar exactamente situado. Por lo tanto lo mejor es colocarse, ó hacer la primera estacion, en uno de los estremos de la base trigonométrica, que sirvió para la formacion de la red de triángulos.

Oriéntese la plancheta (150) en dicho punto a; tírense las visuales ab, ac, ad. . . ; y tomando en la escala sus longitudes correspondientes á las del terreno, trasládense á dichas visuales: se tendrán los recodos ó puntos del rio Guadalmedina, de la costa, y de los caminos, &c. Pásese á otro punto *vg*, *d*; oriéntese la plancheta; tírense visuales á los objetos del rededor; y operando como antes se tendrán otros puntos. En fin tirando visuales á los objetos que se quieran situar, y bajo el método anterior, se marcarán desde las estaciones *e*, *m*, *n*, *r* . . . . todos los puntos que se muestran en la figura.

451. Si el detall quisiere hacerse sin brújula, por recelar que esta tiene variacion, se procederá del modo siguiente. En el punto mismo en que se advirtió esta circunstancia, punto que se supone estar exactamente situado, se alinéa la plancheta con otro de los yá marcados en las anteriores operaciones, de modo que la línea que los une en el papel corresponda con la del terreno. Por este medio queda la plancheta *alineada*; voz con que se distingue este método del empleado para conseguir lo mismo con la brújula, en cuyo caso se dice quedar *orientada* la plancheta.

452. En los dos métodos anteriores, bien orientando ó bien alineando la plancheta, ha sido preciso medir las distancias para situar en ella los puntos; operacion incómoda donde quiera, por que la medicion ha de ser horizontal, y por consiguiente mucho mas en los paises montuosos: entonces se emplea el método de interseccion (150).

Supónganse establecidos en el plano los puntos principales, y orientada ó alineada la plancheta: se fijarán los intermedios, tirando visuales desde los estremos de cada base ó línea, para que la interseccion de las visuales dé los puntos buscados. Despues se pasa á estos puntos, y en ellos se marcan los que no pudieron descubrirse desde los anteriores.

Comprobacion y rectificacion del trabajo.

453. En cualquier punto á que hayan llegado las operaciones, se puede comprobar lo ejecutado, ó verificar el trabajo hecho; esto es, cerciorarse de si el punto del terreno corresponde al de la plancheta. Para ello, desde el punto en cuestion se dirigen visua-

les á los otros puntos principales del pais; y si estas visuales pasan por sus correspondientes en la plancheta, el punto estará bien establecido. De lo contrario, habrá que hallar el verdadero, ó *rectificar el trabajo*. Para esto, orientada la plancheta, se tiran dos visuales que pasan por dos puntos principales del pais, y por sus correspondientes en la plancheta: el punto en que dichas visuales se corten será el buscado, y desde el podrá ya continuarse el trabajo.

454. Si se quisiere hacer la verificacion y rectificacion sin
Fig 217 orientar la plancheta, teniendo en esta los tres puntos *l*, *m*, *j*, correspondientes á los del pais L, M, J, será preciso hallar un punto *n* en el que se verifique que las visuales *nl*, *nm*, *nj*, vayan á parar á los correspondientes puntos L, M, J del terreno. El punto *n* debe corresponder en la plancheta á aquel, en que está el observador.

Pero como sería muy cansado hallar los puntos por este método de tanteo, despues de observar los ángulos L*n*M, J*n*M, se trazan sobre las *lm*, *mj*, arcos de círculo capaces de contener dichos ángulos; y el punto *n* en que estos arcos se cortan, será el buscado.

La razon de esta práctica es evidente; pues debiendo el punto *n* ser tal, que desde él se vean á un mismo tiempo los L, M, J, por los mismos ángulos *lnm*, *mnj*, que deben hallarse cada uno en su circunferencia, no puede ser otro que el *n*, el punto en que ambas circunferencias se cortan.

El mismo método puede servir para el caso de haberse perdido el punto de estacion; ya por no encontrarse la señal que en él se dejó; ya porque no se quiera, ó no se pueda ir á los puntos del terreno marcados en la plancheta; habiéndose de continuar el trabajo desde aquel en que se halla el observador, sin tener marcada la línea norte-sur, ó teniéndola.

Establecimiento del sondeo de los puertos, rios, &c.

455. Es necesario, para la seguridad de los buques á la en-
Lam 13 trada y salida de los puertos y bahias, y para la navegacion de los rios y lagos, conocer las diferentes profundidades, ó fondo del agua, y saber donde estan los escollos, bajos, etc, para que los bu-

ques puedan evitarlos. El marcar los fondos ó profundidades con sujecion á puntos de la costa es lo que se llama *sondar*; operacion que se hace generalmente con la plancheta, pero que del mismo modo podrá ejecutarse con cualquiera de los otros instrumentos que dan los ángulos; como se inferirá de lo que va á esplicarse.

456. Se quiere por ejemplo sondear la entrada del puerto ó parte de costa de Málaga, y marcar en el plano los puntos de la sonda con sus acotaciones. Para esto, supóngase que se han situado en dicho plano por medio de las operaciones anteriores, los puntos *d*, *e* . . ; y que se conocen las distancias *de*. . . . Colóquese una plancheta en *d*, y otra en *e*, que se alinearán en la direccion *de*. El que ha de sondear irá en un bote á situarse en los puntos convenientes 5, 8, 11, 14, etc.; en cada uno de los cuales izará una banderola, ó pondrá la señal convenida de antemano, para que los de las planchetas, en el momento que la vean, dirijan á ella su respectiva visual. Verificado esto, los de las planchetas hacen otra señal, tambien convenida de antemano, y el sondador pasa ya á otro punto; en el que ejecuta lo mismo que en el primero, así como los de las planchetas.

457. Para que no resulte confusion, el sondador apunta en un registro el número de brazas (*) de profundidad que encuentra en cada punto, anotando el órden de estos con los números 1, 2, 3, de este modo:

Número de las sondas.	*Acotacion.*	
	Brazas.	Pies.
1.ª	6 . . .	»
2.ª		2
&c.	&c. . . .	&c.

Los de las planchetas señalan sus visuales con los mismos números correspondientes al órden del sondéo, y de este modo se

(*) La sonda se señala siempre en brazas ó pies. Cada braza ó estado tiene dos varas castellanas.

sabe el punto de sonda que se determina en cada operacion. De paso pueden situarse los estremos, ó puntos convenientes de los islotes, y los bajos que suelen encontrarse cerca de las costas.

458. Concluida la operacion, en una de las planchetas se tomará la distancia *de* antes hallada; y se formarán en el estremo *d* de la *ed* los ángulos en él formados en la otra plancheta. Asi se tendrán, por la interseccion de los otros lados de dichos ángulos, los puntos del sondéo y sus distancias á la costa; quedando tan solo escribir en cada uno de ellos la profundidad hallada, ó la sonda.

El sondéo debe ejecutarse cuando las aguas tienen menos altura; esto es, en lo mayor de la bajas marcas; pues asi se asegura la navegacion en todas circunstancias. (*)

(*) El punto en que se halla el que sonda, puede fijarse desde el mismo bote, por medio del instrumento que va á describirse, y que podrá llamarse
Fig. 218 fijador de estacion ó simplemente *estacionador*, *triple regla*, ó *triple arco*. (*Station Pointer* de los ingleses).

Se compone de tres reglas A, B, C, reunidas en un centro comun, sobre el cual jiran para formar los ángulos que se quieran. La regla B está unida al arco de círculo *b*, la C al *c*, y la del medio A á los dos nonios *a*, *a*, que se ajustan á los dos citados arcos. Estas tres reglas tienen unos alambres ó cerdas *m*, *n*, *r*, que corren en toda la longitud de ellas, y que prolongadas concurririan en el centro de los arcos. Este centro es un agujero por el cual puede entrar un punzon *p* de acero; para hacer coincidir bien el centro con el papel cuando el instrumento está ya en su posicion, de manera que quede marcada la estacion requerida.

Supónganse marcados en el plano los tres puntos de la costa D, E, F, y que se quiere situar con relacion á ellos el de la sonda. Mídanse con un sestante desde el bote los ángulos formados por los objetos E,F, y D,E; ábranse las reglas del instrumento, de modo que formen estas entre sí los ángulos observados. Colóquese el instrumento sobre la carta ó plano, moviéndolo hasta que tome la posicion correspondiente, ó que los tres alambres se ajusten con los puntos D, E, F, de la carta: y entonces el centro del instrumento marcará con el punzon el punto donde se halla el bote, ó el de la sonda.

Puede suplirse el fijador ó *estacionador* por un pedazo de papel transparente, en el cual se trazen los ángulos observados con el sestante ú otro instrumento, entre los objetos de la costa, en virtud de las tres líneas que se corten; y colocando el papel sobre la carta, de modo que los lados de los ángulos pasen por los respectivos puntos D, E, F, de la costa en el plano. Igualmente puede emplearse como *estacionador*, un cristal bien plano, en el que esté descrito un arco de círculo graduado, para formar sobre él los ángulos observados: puesto el cristal encima del plano, y ajustando los lados sobre los objetos situados en éste, el centro del arco marcará el punto de estacion.

459. Al situar los puntos de la sonda se han hallado implícitamente distancias, accesibles solo en uno de sus estremos; y si desde las mismas bases se hallase el ancho de islotes, bajos, &c., que hubiese, se habrian encontrado distancias inaccesibles. Pero aun sin necesidad de las intersecciones se puede determinar la longitud de las líneas; como si por ejemplo, se quisiere medir la distancia AB que atraviesa un bosque, y cuyo estremo B solo se descubre *Fig* 220
desde A. Se medirán las líneas A*c*, *ce*, *ef*, *f*B, asi como los ángulos que entre sí forman. En A se formará el ángulo BA*c*, alineando la plancheta con A*c*, y dirigiendo una visual al punto B: con lo que quedará terminada la operacion en el terreno, dando la escala del plano la longitud de la A B.

Si se suponen bajadas sobre esta las perpendiculares *go*, *fm*, *eh*, *cd*, se podrá en el triángulo rectángulo A*dc*, en que se conocen A*c* y *d*A*c*, hallar A*d*; y en el *eic* se calculará *ei*=*dh* Del mismo modo se hallarán *hm*=*fl*, *gn*=*mo*; y en fin *o*B, cuya suma deberá ser igual á toda la AB Este será un método de rectificacion para todos los casos semejantes, y para los presentados en los ejemplos de la aplicacion de la escuadra de agrimensor. Las líneas indican en la figura lo que podria hacerse para hallar la A*h'*, cuyo estremo *h'* no se descubriese desde el punto A.

Otras operaciones con la plancheta.

Trazar en el terreno el proyecto de un camino, edificio, etc.; y levantar el plano de estos.

---

460. La plancheta se emplea para trazar en el terreno la di-

* En fin, puede determinarse este punto geométricamente del modo que sigue. Sean A, B, C, los tres puntos en la costa; y obsérvense desde el bote en D, los ángulos CDB=40°, BDA=60°. Hágase en A el ángulo SAB=60; levántese en el medio de AB la perpendicular F*g*, y en A la AF á la AS: el *Fig* 219
punto F en que se encuentran estas dos perpendiculares, será el centro del círculo. Haciendo lo mismo respecto al punto C, se tendrá el otro centro E; y como estos centros serían los puntos de estacion del bote cuando se hallase dentro de cada círculo, el punto D en que ambas circunferencias se cortan será el de estacion buscado.

Fácilmente se conoce que el mismo efecto puede obtenerse en tierra con el *estacionador*, por los medios esplicados.

reccion de un camino, la planta de una poblacion, ó cualquier otro proyecto trazado en el papel con sujecion al terreno, cuyo plano se tiene ya levantado con toda la exactitud posible.

Fig222 461. Supóngase que se trata de trazar en el terreno el camino AB marcado en la plancheta: se tomarán CA, ó AK, iguales á sus correspondientes en ésta. En A se alineará la respectiva línea de la plancheta con la AC del terreno; se ajustará la alidada exactamente sobre la correspondiente á la AB para marcar la direccion del camino; y á medida que se vaya aclarando el bosque, se irán poniendo jalones, con la mayor precision de alineamiento en direccion de la alidada.

Fig221 462. Trátase de levantar el plano de un pueblo, ó sea *formar su planta*; esto es, representar en un plano horizontal la configuracion de sus manzanas, casas, iglesias, y demas edificios, suponiendo que dicho plano pasa por sus cimientos.

Sea Tarifa el pueblo elejido: se empezarán las operaciones en cualquier punto, *vg.* en el medio *a* de la plaza del castillo, donde se colocará la plancheta sin brújula; y se dirijirán visuales á todas las entradas *b*, *c*, *d*, *e*.... de las calles, á los ángulos de los edificios, y á la torre Y de la iglesia Mídanse las distancias horizontales *ab*, *ac*, *ad*, *af*, *ag*, y márquese sobre sus correspondientes en la plancheta. Pásese á otro punto cualquiera *f*, en el que se alineará *af* con su correspondiente del terreno, y se tirará la visual *fr* al medio de la entrada de la otra calle; mídase *fr*; pasando á *r* alinéesele con la *rf*, y tírese la *rs* que se medirá; en *s*, *t*, *v*, *x*, *u*, háganse las mismas operaciones; y tírese en *u* la *ui* á la entrada *i* del puente. Lo mismo se ejecutará en los otros puntos *d*, *e*, *g*: y se seguirá por las calles, fijando las esquinas de estas, los lados de las manzanas, los puentes y configuracion del rio. Para fijar la torre Y, desde cualquier punto *s* en el curso de las operaciones se tirará la visual *s*Y; que córtará la *a*Y, y teniendo asi á Y, se podrá comprobar el trabajo desde otro cualquier punto, como Q, torre de Guzman.

Fig222 463. Si el plano que se trata de levantar fuese el de las fortificaciones de una plaza de guerra, supóngase la plancheta en A centro de la gola de un baluarte; tírense las visuales A*b*, A*c*, A*l*, *Ae*, *Af*, á todos los ángulos; pásese la plancheta á otro punto D; alinéese con DA; y dirijanse visuales á los mismos puntos anteriores: con esto quedarán determinados en el plano los ángulos *b*, *f*, *c*, *e*. del flanco y espalda, y la longitud de los flancos *bc*, *ef*. Midiendo despues las horizontales D*l*, A*g*, se tendrá el ángulo flanqueado *l*, la longitud de las caras *cl*, *le*, y las direcciones del terraplen y cortina *fh* Alineándose en seguida en la estacion *g* con el punto A, se podrán ir marcando las líneas del otro baluarte despues de establecida la plancheta en los puntos *n*, *m*, como se vé en la figura.

Tírense paralelas á dichas líneas, interior y esteriormente, á las distancias correspondientes, y se tendrá el ancho del terraplen, el de su declivio, y el de la banqueta; el espesor del parapeto; &c.

Se establecerá la plancheta en el foso en un punto *y*, que podrá hallarse ó bien por lo dicho (454), ó alineándose en la direccion *oy* que atraviesa la poterna, y que se habrá marcado desde lo interior en relacion con las operaciones que por esta parte se hicieron Desde *y* se situarán todos los demas puntos visibles de la contra escarpa y gola de la terraza, y desde estos la del rebellin; y desde *r* se marcará el ángulo flanqueado de este. Se subirá al camino cubierto; y se seguirá levantando el plano del resto de las fortificaciones.

Las operaciones para el levantamiento de este plano, pudieron igualmente haberse empezado por la parte esterior, ó desde cierta distancia, como puede ser conveniente en el sitio de una plaza: situando por el concurso de las visuales, dirigidas desde los estremos de las bases que se crean oportunas, los puntos salientes ó ángulos de las obras, conforme lo manifiesta la figura.

464. Para levantar el plano de las trincheras, paralelas, y demas trabajos de ataque, se situarán en la plancheta los puntos A′, A′, A′, que señalan la cola de la trinchera, (454) por medio de los puntos conocidos de la plaza; y saliendo desde A,′ A′, A′, midiendo el largo de los ramales A′B, y desde B, el de los BC′, y alineándose sucesivamente con los anteriores, se tendrán los retornos de las trincheras, las paralelas hasta el pie de la esplanada, y las obras sobre esta.

465. El plano de un campamento ó línea de batalla se le-
Fig223 vantaria, midiendo una base AB; desde la cual se situarian por intersecciones las alas del ejército, el frente de banderas de infantería y caballería, las posiciones de la artillería, los apoyos de las alas, los pueblos, las obras de campaña, y los accidentes del terreno.

466. Para levantar el plano de las minas se puede emplear tambien la plancheta; pero á veces es preciso hacer su tablero mas pequeño, y sus pies mas cortos. Colocada aquella en S, centro del pozo, se dirige la visual *sp* al medio del ancho del recodo contiguo;
Fig224 se mide SP y se traslada sobre la *sp*; se pasa la plancheta al punto P, se alinéa con la PS, y se tira la *pt*: y bajo el mismo método se marcan los ramales *to*, *om*... Las señales que se establezcan en los puntos P, T, para dirigir á ellos las visuales y para la alineacion de la plancheta, consistirán en dos luces que se colocarán en medio del ancho de cada recodo (*).

Marcados estos puntos y los *c*, *q*, 3, *v*, se tendria la *v*3 en la direccion de la *ps*: de que se infiere, que si el problema hubiese sido marcar esta direccion en el terreno, para hacer la galeria 3V en línea recta con la PS sin poderse atravesar la piedra viva P, podria, construido el pozo S lograrse el objeto de un modo análogo al esplicado para levantar el plano de las minas.

Algunos problemas útiles para el uso de la Plancheta.

467. Luego que el papel colocado sobre la plancheta está lleno, hay que poner otro para poder seguir levantando el plano. Supóngase, que se hayan de continuar las operaciones por la parte nor-oeste 1, 2, 3, 4, &c. Se trasladarán al nuevo papel, picán-
Lám13 dolos con una aguja, los puntos marcados: á los cuales habrá que volver al cerrar la figura del espacio que se levanta. Se trazará despues en el borde de ambos papeles una línea comun, que servirá para ajustarlos; y se prolongará la línea NS sobre el segundo papel ú hoja, ó se tirará una paralela á ella. Se saldrá desde uno de

(*) Con la brújula podria tambien levantarse el plano de las minas, como es fácil conocer; pero se tocan los inconvenientes espresados, al tratar de aquel instrumento.

dichos puntos, 4 por ejemplo, prefiriendo al que dependa de menos estaciones, pues que seguramente será el mejor situado; se tirará la visual $4,4''$ alineando antes la plancheta con la 4,5; y se pondrá la brújula sobre la NS para ver si se ajusta la aguja con ella, ó da el mismo ángulo de declinacion que en el primer pliego: de lo contrario, los puntos 1, 2, 3, ó la NS se han colocado mal en el segundo pliego, y habrá que rectificar su posicion.

Una vez enmendada esta posicion, se coloca un jalon en $4'$, y se sigue como se ha esplicado; añadiendo despues nuevas hojas segun sea preciso. Para unir estas hojas bastará hacer coincidir los puntos que tienen comunes, y pegar un papel con otro ajustando las líneas trazadas en los bordes de las hojas.

468. Si en el segundo papel ú hoja se quisiere marcar un punto C hallado trigonométricamente, ó en la red de triángulos, que no cupo en el primer pliego, se prolongará la meridiana A*n* de este *Fig* 225
para marcarla en aquel; y como son conocidas las distancias de los puntos á la meridiana y á su perpendicular, lo serán tambien á A*b*; y por consiguiente levantando en *b* la perpendicular *b*C conocida, se tendrá la posicion del objeto C. Del mismo modo podria marcarse otro punto *f* por las perpendiculares *ce*, *ef*; y con ellos se podria ya verificar y rectificar el trabajo hecho.

469. Si no se hubiesen podido observar en la red de triángulos puntos mas allá del C, parece que quedaría sin medios de verificacion y rectificacion el trabajo que se hiciera en los demas pliegos, que se vayan colocando en la plancheta. Sin embargo, pueden situarse en la nueva hoja, puntos ú objetos trigonométricos, aun suponiendo que no se hallen en la parte que se está levantando.

Se quiere, por ejemplo, situar en la plancheta X un punto C', cuya posicion verdadera está en la precedente, y de modo que dicho punto pueda servir para verificar las operaciones que se están ejecutando en el nuevo pliego.

Para ello, trázese una línea arbitraria C*g*, prolongándola suficientemente en la nueva plancheta; y para mayor facilidad tómese una parte alicuota cualquiera de dicha línea, vg. $\frac{1}{2}$, desde *g* á C', y anótese. Síganse las operaciones como de ordinario, saliendo desde el punto ya marcado *h*, y luego que se llega al *i*, desde donde se descubre el C del terreno, se orienta la plancheta, se traza ig, y se toma $gK = \frac{1}{2}\, ig$; se coloca la alidada sobre los puntos K y C′; y si las operaciones se han hecho bien debe descubrirse el C, porque los triangulos $g\ i\ C$, $g\ KC'$ son semejantes.

Saliendo de i, tal vez no se verá el punto C desde los l, m, n; pero en llegando á uno o en que se descubra, y en el que se quiera verificar el trabajo, se tira la línea og'; se toma $g'p' = \frac{1}{2}\, og'$; y $g'C'' = \frac{1}{2}\, Cg'$. Colocada la plancheta en la direccion $g'C''$, debe verse por sus pínulas el punto C del terreno. Se ha de cuidar de que los puntos arbitrarios g, g' no esten muy cerca de los C′, C″; porque cuanto mas disten los K, p', mas fácilmente se colocará la alidada.

470. Si se tuviese en la plancheta el punto D en que pueda
Fig 226 usarse la brújula, y desde el que se vea C, y se pidiese situar este punto, bajo del supuesto de no poderse medir la DC. ni ver á C desde otra estacion, pero sí un objeto A marcado en el plano, se colocará la plancheta en C; se dirijirá á D la alidada; y se jirará ésta al rededor de A, hasta que la visual pase por el correspondiente A del terreno La línea indefinida que se traze, cortará la CD en un punto C, que será el correspondiente á C en el terreno. Tambien, despues de orientada la plancheta por medio de la brújula en el punto C, bastará tirar desde este las visuales que pasen por los puntos D, A, correspondientes del terreno; y la interseccion de aquellas dará el punto C. De este modo podrá situarse con prontitud en la plancheta el punto que se desée.

471. Teniendo situados en la plancheta dos puntos A. B, se
Fig 227 pide trazar una línea DC, que no puede verse desde A, ni B, ni desde sitio alguno en relacion con estos puntos en la plancheta. Si se tuviere brújula, se marcarán en la plancheta los puntos C, D, como acaba de decirse: pero careciendo de ella, se trazará una línea cualquiera cd en la plancheta; se colocará ésta en el punto C; y se dirijirán visuales á los objetos A, B del terreno. Mídase la DC en éste; y hágase á cd en el papel de igual longitud respecto á la escala. Trasládese el instrumento al otro punto D; y alineado con C, dirijánse visuales á los mismos objetos A, B: lo que dará en la plancheta los puntos a, b. Construyendo ahora sobre AB los

triángulos *abc*, *abd*, se tendrán los puntos D, C, de la base que se quería marcar.

472. Puede tener aplicacion en la práctica el siguiente problema. Conociendo un triángulo ABC, se pide situar en su interior, sin quitar la plancheta del punto A en que está colocada, los puntos D, E; permitiéndose tomar medidas en uno de los lados AB, ó AC, pero sin colocar instrumento alguno en ellos. *Fig* 228

Desde A tírense visuales á los objetos D, E; colóquense en las direcciones CE, CD, dos piquetes F, G; mídanse AG, y AF, ó BF, GF: con esto se podrán construir en la plancheta los triángulos semejantes A*cg*, A*cf*, y los puntos *e*, *d*, de interseccion serán los buscados.

Observaciones sobre las prácticas con la plancheta.

473. Cuanto se ha ejecutado con este instrumento podrá hacerse con cualquiera otro de los descritos para tomar ángulos, apuntándolos en un registro, asi como la longitud de los lados; ó bien escribiendo uno y otro en los respectivos sitios del borrador, ó bosquejo que se forma.

474. El uso de la plancheta tiene los inconvenientes que siguen:

1.° Los puntos quedan determinados por medio de las intersecciones de las visuales, que se dirigen desde los estremos de las bases á los diferentes objetos; y como dichas visuales se cortan con mas ó menos oblicuidad, resulta, que no puede determinarse con exactitud el punto de interseccion, señalándolo tal vez (sin poderlo evitar) donde no corresponde.

2.° En la mudanza de la plancheta á otro punto es muy dificil la coincidencia del estremo de la línea en la plancheta con la correspondiente del terreno.

3.° Para conocer el valor de los ángulos y de las distancias hay que emplear el semicírculo de estuche, y el compás; lo que es menos exacto que el cálculo trigonométrico: proporcionando este ademas el poder rectificar el trabajo, por medio de ángulos calculados con precision.

4.° Todo esto hace, que, aumentándose los errores á proporcion que crece el número de estaciones, suceda no coincidir el punto de que se salió con el mismo, cuando se vuelve á él por diferentes rodeos. Este inconveniente se remedia, es verdad, midiendo nuevas bases de distancia en distancia, pero queda aun el peligro de que estas estén desorientadas.

5.° Se añade á lo dicho la dificultad de transportarla, el desarreglo que sufre con el viento; y el que tanto por éste como por la lluvia no puede trabajarse con ella.

En fin, hay necesidad de pegar ó preparar el papel, el cual sufre dilataciones y contracciones por la variacion atmosférica: bien que esto podria evitarse barnizando la tabla, y trabajando sobre ella sin papel, y estando llena se trasladará á este lo hecho, borrándolo en seguida en aquella, con subaccetate de plomo, para poder continuar las operaciones.

475. El grafómetro, teodolito, &c, serán mejores: mas al fin tambien hay que construir los ángulos con el semicírculo de estuche al poner el plano en limpio, ó sea realizar el bosquejo; lo que destruye la exactitud conseguida antes.

476. Mas los inconvenientes de la plancheta están compensados en parte.

1.° Por la ventaja de levantar el plano sin necesidad de borrador ó bosquejo (*).

2.° Porque se ahorra tiempo, en razon á no haber que calcular triángulo alguno; lo que hace á la plancheta muy apreciable para los detalles.

3.° Porque se tiene el gusto de comprobar el trabajo á medida que se adelantan las operaciones, y ver figurado el pais de los alrededores.

Facilmente se conoce, que es conveniente ejercitarse mucho en figurar á la simple vista con ligereza y exactitud, cuantos objetos se encuentren á la derecha é izquierda de las visuales, y puntos marcados en la plancheta; como lagunas, sembrados, arroyos, bosques, &c.

(*) Se ha llamado asi en esta obra á lo que generalmente se llama *croquis*.

Determinacion de las escalas (*) *para los planos.*

477. Antes de emprender las operaciones topográficas es preciso determinar la escala, que manifieste la estension lineal que ha de tener el plano con relacion al terreno que ha de contener.

478. Por lo regular la escala se pone en un lado en la parte inferior de la figura que se mide, ó terreno que se copia en el papel; esto es, cuyo *plano* se *levanta*. Para ello se traza una línea recta dividida en partes iguales que se numeran: estas divisiones representan la unidad de medida que se elije; como vara, pie, legua, toesa, &c. La division primera de la izquierda, y cuya acotacion es cero, se destina para representar las partes de unidad; que serán pies, pulgadas, líneas, y puntos en la vara, medias leguas, y cuartos en la legua, &c. Por lo tanto, si en la escala que espresa varas, pies, y pulgadas se pone una de las dos puntas del compás en el número 5, y la otra en el 4 de las pulgadas, se tendrá una longitud de 5 varas, 2 pies, y 8 pulgadas. *Fig* 229

479. Si se hubiera usado la division métrica, la parte que está á la izquierda de cero estaria dividida en 10 partes iguales; y los números 1, 2, 3, de las otras divisiones de la derecha representarían metros.

480. Al lado ó sobre las escalas se escribe en cifras, la relacion entre las distancias tomadas en el plano y las reales entre los objetos del terreno. Asi se dice, que la escala es de una pulgada por cada 100 varas, cuando el plano es la 3600 ava parte del terreno; porque 100 varas tienen 3600 pulgadas.

481. Si un milímetro representa un decámetro, se dice, que el plano corresponde á un diezmilésimo; porque un decámetro consta de 10.000 milímetros. Los planos de la carta de Francia por Cassini corresponden á la 36.400 ava parte; porque cada línea representa 100 toesas, y estas contienen aquel número de líneas.

482. Cuando la parte de la escala que representa la unidad de medida elejida es muy pequeña, y se quieren tomar con exac-

(*) Este nombre, tal vez, trae su origen de la forma particular, parecida á la de las *escalas* ó *escaleras* que se daban á dichas líneas, conforme se vé en los planos antiguos.

titud fracciones de ella, se usa de la escala de transversales, conforme se enseña en la geometria especulativa.

483. Como la estension del plano, respecto á la del terreno que aquel representa, puede estar en cualquier relacion, resulta ser infinito el número de escalas que pueden adoptarse. En Francia la comision encargada para determinar las escalas mas convenientes de los planos correspondientes á los varios ramos del servicio público adoptó las escalas decimales, las duplas de estas, y las subduplas; esto es, las representadas por $\frac{1}{10.^m}$, $\frac{2\times1}{10.^m}$, y $\frac{1}{2\times10.^m}$

Si en la 2.ª se hace $m=o$, y en la 3.ª $m=7$, se tendrán ... $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{20,000,000}$; que son las dos escalas estremas acomodadas para dichos ramos. Pero como desde $m=o$, y $m=7$ inclusive, hay ocho valores enteros de m, resultarán por los tres datos 24 escalas; entre las cuales cada ramo del servicio público ha tomado la que mas le conviene del modo siguiente:

Designacion.	*Suposicion.*	*Dúplas.*	*Decimales.*	*Subduplas.*
		ESCALAS.		
1.ª	$m=$ 0	2	1	$\frac{1}{2}$
2	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
3	2	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$
4	3	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1,000}$	$\frac{1}{2,000}$
5	4	$\frac{1}{5,000}$	$\frac{1}{10,000}$	$\frac{1}{20,000}$
6	5	$\frac{1}{50,000}$	$\frac{1}{100,000}$	$\frac{1}{200,000}$
7	6	$\frac{1}{500,000}$	$\frac{1}{1,000,000}$	$\frac{1}{2,000,000}$
8	7	$\frac{1}{5,000,000}$	$\frac{1}{10,000,000}$	$\frac{1}{20,000,000}$

Bien se deja conocer, que, una vez adoptadas las escalas, estas solas deberán usarse para los diferentes ramos del servicio público, con lo que se establecerá la uniformidad en los trabajos gráficos, y serán mas fáciles las reducciones que puedan convenir para la union de los planos.

Principios generales sobre la construccion de las escalas.

---

484. Como las medidas manuales de las longitudes topográficas usadas en cada pais están subdivididas de distinto modo, y son mayores que los pliegos de papel empleados generalmente para el levantamiento de planos, la construccion de las escalas relativas á una medida determinada se reducirá, en general, á *buscar del modo mas sencillo las longitudes que deben representar en el papel las unidades, las decenas, las centenas, los millares, &c. de dicha medida; y esto, empezando por el número entero mas pequeño de la última subdivision marcada en el patron ó tipo, que ha de colocarse en la márgen del plano.*

485. Represente $\frac{1}{e}$ la relacion entre las dimensiones del plano y las correspondientes del terreno; y m el número de subdivisiones del patron ó tipo, con respecto al cual quieren espresarse aquellas dimensiones. Es claro, que la longitud de m subdivisiones de la medida empleada, tomada en el plano, debe representar la longitud de un número e de estas medidas tomadas en el terreno. (*)

Búsquese, pues, el mayor divisor comun de m y de e, y sea

(*) Si se suponen verticales, levantadas en todos los puntos visibles del terreno hasta encontrar un plano horizontal que pase por un punto cualquiera, estas verticales podrán mirarse como paralelas entre sí, y sus estremos marcarán en el plano la proyeccion *ortogonal* (perpendicular) de la estension natural del terreno. Esta proyeccion se llama *carta topográfica natural*; que es la representacion del mismo terreno, considerando tomadas horizontalmente las distancias entre los puntos, y es el concepto en que ha de entenderse la palabra *terreno*, usada en el levantamiento del plano de este tratado. Si el terreno lo forman uno ó muchos planos horizontales, se verificará lo mismo; pero si fuesen inclinados, el plano ortogonal estará representado por la estension en el sentido horizontal.

d: hágase la division; se tendrá.... $\frac{e}{d} = e' = \frac{m}{d} = m'$. Estos cocientes e', m', serán exactos; y tales, que la longitud de m' subdivisiones representará en el plano la longitud real de e' medidas. Generalmente la longitud total de m' subdivisiones podrá marcarse en una línea recta, trazada á lo largo de la márjen del plano.

Hállense despues los factores comunes de e': los cuales indicarán las divisiones gráficas, que sucesivamente deberán hacerse en la longitud total de las m' subdivisiones de la medida adoptada para tener en el plano la longitud que represente una sola de estas medidas.

De esto se sigue, que si entre dichos factores se encuentran 2, y 5, como el producto de estos es 10, se tendrá, omitiéndolos, la longitud que en el plano debe representar una docena de medidas. Igualmente, si se hallaren los factores 2, 2, 5, 5 de 100, se tendrá con omitirlos la longitud que debe representar en el plano la de una centena de medidas.

486. Puede suceder, que los factores de 10, 100, 1000, no sean en el todo ó en parte los mismos que los de e'. En tal caso se puede proceder de dos modos diferentes: 1.º. Se omiten los factores de 10, 100, &c. comunes á e'; se divide la longitud de m' subdivisiones del patron segun indiquen los otros factores; y se añaden en seguida á las que resulten tantas partes como unidades hay en el producto de los otros factores de 10, 100 &c. que no se hallen en e.

Por ejemplo: sea $e' = 105$, ó $3 \cdot 5 \cdot 7$; y trátase de obtener la longitud de la decena de medidas. Para ello se divide la longitud total de m' medidas del patron elegido, primero en siete partes iguales, y despues cada una de estas en tres: entonces las partes que resulten representarán cada una cinco, que es el factor omitido de 105. Con esto, para tener la longitud que en la escala debe representar la decena de medidas; solo habrá que añadir á estas cinco, dos de las mismas partes, por el factor 2 de 10, que no se encuentra entre los 3, 5, 7 de e'.

2.º Se completan los factores de 10, 100, &c. que faltan entre los de e'; se multiplica este número y el m' por el producto p

de los factores que faltan; y se toma despues una longitud igual á pm' subdivisiones del patron elejido, para dividirla en tantas partes como hay unidades en el producto de los factores del número pe' no comunes á 10, 100, &c.

Sea por ejemplo el mismo caso de $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = e'$. Introdúzcase el factor 2 de 10, que falta entre los correspondientes de e'. Se dirá que $2m'$ subdivisiones del patron deben representar $2e'$, ó $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$ medidas.

Bastará, pues, dividir sucesivamente por 7 y por 3 la longitud total $2m'$ subdivisiones, para obtener la de la decena de medidas de la escala.

Este método es indispensable, cuando las divisiones sucesivas de la longitud de m' subdivisiones del patron, indicadas por los factores de e' no comunes á los números 10, 100, &c., dan longitudes muy pequeñas, sobre las que no puede operarse.

487. En todo lo dicho se ha supuesto que tienen un divisor comun d, tanto el número m de subdivisiones del patron, cuanto el denominador e, de la escala espresada por una fraccion cuyo numerador es la unidad; y tambien se ha supuesto que el número e' cociente de $\frac{e}{d}$ no es un número primo: pero hay casos en que ambas suposiciones no se verifican.

En el caso de que no se verifique la primera, la longitud total de la medida será la línea mas pequeña, de que pueden inferirse las de las longitudes de las unidades, decenas, centenas, &c., de las medidas en el plano. Desaparecen, pues, en este caso las ventajas, que en otros ofrece la subdivision del patron.

Faltando la segunda suposicion, esto es, siendo e' un número primo, se perderá igualmente la ventaja de obtener las longitudes buscadas por divisiones gráficas sucesivas; operacion mas fácil de ejecutar, que el subdividir una sola division en muchas partes iguales.

Aplicacion de los principios precedentes.

Construccion de las escalas decimales relativas al sistema métrico.

488. Tómese por ejemplo para aplicar lo espuesto, la fraccion tercera de la designacion cuarta de la tabla (483), que es $\frac{1}{2000}$; y trátese de construir la escala en el sistema métrico.

La espresion $\frac{1}{2000}$ indica, que un métro de longitud en el plano debe representar 2000 en el terreno; ó bien, por ser los milímetros las subdivisiones menores en los patrones de la medida métrica, que 1000 milímetros deben representar 2000 métros.

El máximo comun divisor de estos dos números, es 1000; luego un milímetro representa dos métros. Pero como dos es un número primo, y factor de 10, 100, 1000, &c., resultará, que una longitud de 10 métros, estará representada por 5 milímetros; la de 100, por 50 milímetros; y asi sucesivamente.

En seguida, para formar la escala bajo de este concepto, se trazarán once líneas paralelas equidistantes, que formarán 10 fajas iguales del ancho que se quiera. Representando en esta escala un milímetro dos métros, la longitud de un métro es bien perceptible. Asi se marcarán desde *a* hácia *d*, en la paralela inferior, 10 lon-
Fig 230 gitudes iguales de 5 milímetros cada una, equivalentes á 10 metros; y á continuacion se marcará hácia *c* el número que se quiera de longitudes iguales á diez de las anteriores, que cada una representará 100 métros.

En los puntos marcados por estas longitudes se tirarán líneas en cualquiera direccion; pero mejor en la perpendicular, por ser mas fijos los puntos de interseccion con las paralelas ya tiradas.

Basta la inspeccion de la figura, y lo esplicado en la geometría relativo á las líneas proporcionales, para hacerse cargo del resto de la construccion y uso de esta escala. Si, pues, se quisieran tomar en ella 145 métros, se pondria una punta del compás sobre la línea *cc'*, ó de la série de las 100, pero en el punto *e* en que la corta la quinta paralela, ó línea de la série de las unidades, y la otra punta se pondría en el punto f, interseccion de dicha paralela con la transversal 40: con lo que se tendrá,

$$eg+gh+hf=100+5+40=145.$$

Si al contrario, fuere dada la distancia ó longitud, y se quisiere saber el número de partes ó métros de que consta aquella: se tomará con el compás dicha longitud; y se llevará sobre la línea inferior ac de modo, que estando la punta derecha del compás en una de las perpendiculares de las centenas, caiga la otra sobre la parte de la misma línea en que estan las perpendiculares de las decenas: con lo cual se tendrán las centenas y decenas. Se obtendrán las unidades, llevando la punta derecha del compás, siempre sobre la perpendicular en que se halla, hácia los puntos de interseccion de las paralelas con ella; viendo que punto de interseccion de estas con las transversales cae la punta izquierda; y leyendo la graduacion.

Construccion de escalas decimales respecto á un sistema cualquiera de medidas.

---

489. Supóngase que se quiera construir una escala, qué permita tomar la diezmilésima parte de las distancias medidas con la toesa.

La escala será de $\frac{1}{10000}$ relativamente á la toesa; esto es, una toesa, ú 864 líneas, deberán representar 10,000 toesas.

Búsquese el máximo comun divisor 16; hágase la division de los dos términos $\frac{864}{10000}$, y se tendrá que 54 líneas deben representar 625 toesas. Y como $625=5.5.5.5$, si se toma una longitud de 54 líneas, y se divide en 5,5,5, partes iguales, se tendrá la longitud de 5 toesas en la escala, por ser 5 el factor suprimido; y la suma de estas dos longitudes dará la de las decenas de toesas.

La longitud de las centenas de toesas se obtendrá, dividiendo la longitud de 54 líneas por 5,5 partes iguales que representarán 5.5 ó 25 toesas, producto de los factores omitidos; y, siendo . . . $4{\cdot}25=100$, es evidente, que uniendo cuatro de las porciones halladas, se tendrá la longitud que represente 100 toesas.

Para construir esta escala, cosa ya fácil, tírense once paralelas horizontales equidistantes; córtense perpendicularmente por otras á la distancia hallada para representar 100 toesas; escríbase cero en la segunda perpendicular; en la distancia que queda entre esta y la del estremo márquense distancias iguales á las longitudes halladas para representar las decenas de toesas; hágase lo mismo en la parte superior; y tírense las transversales. Todo esto es facil de ejecutar teniendo presente lo hecho para la formacion de la anterior escala.

490. Si se quisiera aplicar lo dicho á la vara castellana en el mismo ejemplo de $\frac{1}{10000}$, esto es, que una vara ó 432 líneas representen 10,000 varas, se buscaria el máximo comun divisor de ambos números, que es 4; y haciendo la division se tendria, que 54 líneas deben representar 1210 varas, siendo los factores simples de esta cantidad 2.5.5.5.5.

Asi pues, tomando en una recta una longitud de 54 líneas, y dividiéndola en 5,5,5 partes iguales, se tendrán en la escala 10 varas, porque 2 y 5 son los factores omitidos; y siguiendo lo practicado anteriormente se tendrá la longitud de las centenas, y el todo de la escala correspondiente.

491. Sirva de tercer ejemplo la construccion de la escala de $\frac{1}{1000}$ con respecto á la longitud del paso medio del hombre. Este paso tiene 468 líneas españolas, que deberán representar 10.000 pasos. El máximo comun divisor de los dos números $\frac{468}{10000}$ es 4, y dará $\frac{117}{2500}$; y los factores simples de 2500 serán 2.2.5.5.5.5.

Divídase la longitud $ab = 117$ líneas dos veces por dos, y despues cuatro veces sucesivas por 5: se tendrán las longitudes de 5 pasos, y unidas dos de estas, las de 10; despues las de 100; &c.

Construccion de escalas para cualquiera clase de medidas.

492. Supóngase que se elije el pie de Búrgos por unidad de medida; que se reunen cada tres de estos, ó se forman varas; y que de cada cuatro de ellas se hacen otras medidas ó estadales.

Es claro, que ya no habrá que subdividir en decenas y centenas de pie; y sí en varas y estadales, ó en porciones de tres, y de doce pies.

Si se trata de reducir la escala en la razon de $\frac{1}{420}$; esto es, que un pie represente 420 pies, ó lo que es igual que 144, número de líneas que contiene un pie, represente 420 pies, se dividirán estos dos números por 12, máximo comun divisor de ellos, y se tendrá espresada dicha relacion por $\frac{12}{35}$; que quiere decir, que 12 líneas deben representar 35 pies.

Los factores simples de 35 son 5.7, y los de 12 3.4; y como hay que hallar la longitud de la vara, ó de tres pies, y este número no es factor de 35, habrá que introducirlo (486): y resultará que 36 líneas deben representar 105 pies.

Asi pues, dividiendo la longitud *ab* en cinco partes, y despues cada una de estas, como *cd*, en 7, estas representarán la longitud de una vara ó de tres pies, único factor omitido de 105; y, tomando la suma de 4 de estas, se tendrán las longitudes *de*, *eb*, cada una de 4 varas, ó un estadal. *Fig* 231

Determinadas las longitudes de la vara y estadal se forma la escala del modo siguiente.

Tírese la línea $ab=36$ líneas; y á ella tres paralelas. En los puntos *c*, *d*, *e*, *b*, levántense perpendiculares hasta encontrar la paralela superior: con lo cual las partes de las paralelas á la derecha de la perpendicular *dg* quedarán divididas en porciones de 4 varas, ó 12 pies, ó 1 estadal, y las partes á la izquierda de la misma en 7 porciones de á vara, ó de 3 pies cada una. Uniendo por diagonales como *dh* los puntos de division de *cd* con los correspondientes de *fg*, estas diagonales cortarán las paralelas á *ab* en partes iguales en longitud á la que debe tener una vara; y finalmente se inferirá que las porciones de las tres paralelas comprendidas entre la primera diagonal *dh*, y la perpendicular *dg* representan sucesivamente 1, 2, 3 pies. Márquense las acotaciones como se ve en la figura, y la escala quedará concluida.

Si con esta escala se quisiere trazar una longitud, v. g. de dos estadales, dos varas, y un pie, se pondrá una pierna de compás en el punto *p* en que la perpendicular 2 corta la primera paralela á la *ab* y en que marcará un pie; y se pondrá la otra punta en el punto *r* en que la diagonal 2 de varas corta la misma paralela: la distancia interceptada por las piernas del compás será igual á la longitud pedida, porque se compondrá de $po + rs + so = 2$ estadales $+ 2$ varas $+ 1$ pie.

Eleccion de escalas.

493. La eleccion de las escalas para los planos no es indiferente. Ante todo han de determinarse los objetos que aquellos deben contener, la estension del terreno que se trate de representar, y los detalles ó pormenores que quieran espresarse.

Por lo tanto, cuando se quieran detalles en el plano, la escala que se elija debe ser tal que los haga visibles, y tanto mayor deberá ser cuanto mas detallado se desee el plano: lo mismo sucede cuando se quiere trazar en el terreno un proyecto cualquiera con la mayor exactitud.

494. El *depósito de la guerra* en Francia ha adoptado de las escalas marcadas (483) las siguientes (*)

Núm. 1.° $\frac{1}{200}$ .. Para planos de ciudades, villas, aldeas, plazas de guerra, caminos, canales, fortificaciones de campaña.

2.° $\frac{1}{50.000}$. Para reducir el plano levantado con la escala anterior.

3.° $\frac{1}{10.000}$ .. Topografía completa de un pais, campamento. marchas é itinerarios de los ejércitos; y nivelaciones del terreno.

4.° $\frac{1}{20.000}$ .. Reconocimientos en campaña, y planos de batallas; y tambien para reduccion del plano anterior.

5.° $\frac{1}{50.000}$ .. Grabado de la topografía levantado con la escala de $\frac{1}{10000}$.

(*) Es evidente que la estension que represente la unidad de medida debe ser proporcionada á la magnitud del papel, y tal que se pueda tomar con el compás; lo que no sucederia siendo estremadamente pequeña. Asi la estension mínima será de tres líneas. Las puntas del compás destruyen la escala luego que se han tomado muchas medidas, por lo que se graba en laton: pudiéndose de este modo renovarla, siempre que se ofrezca, trasladándola á un papel fuerte pegado sobre un liston, ó regla de madera dura y bien seca. Tambien pueden tomarse las medidas en la regla de laton; pero entonces las puntas del compás deberán ser secas.

495. Para otros objetos que no son del servicio de la guerra, parece haberse adoptado tambien en dicho pais las siguientes escalas.

1 *centésimo por cada* 500 *metros*, *ó* 1 *pulgada por treinta leguas*, *ó* 72[illegible] *toesas.* Para las cartas de una ó muchas partes del globo destinadas á la relacion de viages; ó para manifestar los accidentes geográficos, ó las divisiones políticas.

1 *por* 20000, ó 1 *por* 12 *leguas.* Para la de un reino, su geografía física, sus divisiones ó subdivisiones, y sus principales caminos.

1 *por* 10000, ó 1 *por* 6 *leguas.* De una provincia grande ó de una considerable estacion de pais, detallando su geografía física; y para una carta itineraria.

1 *por* 5000, *ó* 1 *por* 3 *leguas.* De una provincia pequeña, ó de un pais de corta estension con detalles geográficos, físicos, y administrativos, con subdivisiones políticas.

1 *por* 2000, *ó uno por* 1 *legua.* De la misma clase, pero aun mas detallada; indicando las alturas, detalles mineralógicos, los canales, los caminos; la descripcion del distrito (canton), la relacion de una campaña, &c.

1 *por* 100, *ó uno por* $\frac{1}{2}$ *leguas.* Detalles de un canton, de una comarca física, de una operacion militar, de un proyecto de abertura de camino ó canal, &c.

1 *por* 500, *ó* 1 *por* $\frac{1}{4}$ *legua.* De los contornos de una ciudad, plano de una batalla, ó cuanto corresponde á los detalles del terreno.

496. Las escalas adoptadas por el cuerpo de ingenieros militares en España son como se indican en la lámina 16.

1.ª Escala para el mapa de un Reino ú estado.
2.ª ——— una provincia.
3.ª ——— un partido.
4.ª ——— término de ciudad, villa, &c.
5.ª ——— porcion de frontera, ó costa marítima.
6.ª ——— plaza de guerra con sus contornos hasta una legua de su centro.
7.ª ——— plano magistral de una plaza con algunos alrededores, espresando su interior; para los

pueblos abiertos, sus calles, plazas, avenidas, huertas, &c.

8.ª ——— su perfil.

9.ª ——— plano y perfil de una porcion de plaza de guerra, con uno ó dos frentes de fortificacion.

10. ——— plano y perfil de obras sueltas de fortificacion.

11. ——— plano y perfiles de edificios militares y civiles.

12. ——— toda pieza de piedra, madera, ó hierro, y pormenores de garitas de piedra ó ladrillo.

13. ——— bronces, maderas, ó herrajes para usos de la Artillería.

497. Para la formacion de los modelos del departamento del Cuerpo de Injenieros en el Museo militar, no ha habido regla fija; pero comparando los resultados, segun las escalas que aquellos tienen, parece poder determinarse como mejores las siguientes:

1 *pulgada por* 10 *varas*, *y tambien* 1 ½ *pulgadas por* 10 *varas*. Para los modelos de sistemas de fortificacion, y bajo de este concepto se han hecho los de Carnot y Bousmard. (*)

1 *pulgada por* 6 *varas*. Los de plazas de guerra con la exacta distribucion de manzanas, casas, detalles de las fachadas de estas y demas de su poblacion. (El hermoso modelo de Cádiz, formado por el teniente coronel, injeniero ordinario, D. Alfonso Jimenez.)

1 *pulgada por* 4 *varas*. El no menos curioso de Figueras.

1 *pulgada por* 30 *varas*. Plazas de guerra de gran estension y sin los detalles menores de la poblacion. (Modelo de Gibraltar.)

1 *pulgada por* 6 *varas*. Castillos, y fuertes.

1 *pulgada por* 1 *vara*. Obras de campaña. (Reducto cuadrado de instruccion, por el coronel de Injenieros D. Bartolomé Amat.)

9 *pulgadas por* 100 *pies*. Obras civiles. (Acueducto de Segovia.)

(*) En la eleccion de estas escalas, si bien tienen las consideraciones principales su lugar preferente, hay tambien que llevar en cuenta las dimensiones del local en que han de colocarse los modelos, el aprovechamiento de espacio, la clase de maderas, la economía de construccion, etc.

1 *pulgada por* 7 *pies.* Puentes militares, y objetos de esta clase. (Puente de Alcántara; cortado su arco mayor, y su habilitacion con cuerdas.)

1 *pulgada por* 1 ½ *pies.* De máquinas, montéa, y objetos de esta especie.

498. Si teniendo el plano y perfiles de un sistema cualquiera, por ejemplo el de Carnot, lámina 9.ª, 3.ª edicion, se quisiere formar el modelo correspondiente, de modo que en él sean visibles las banquetas, casamatas, surtidas y demás pormenores, se empezará por determinar la superficie del tablero que el modelo ha de ocupar. Para ello tómese en la escala de la lámina el número de metros del lado ó estension del frente fortificado, y valiéndose de la razon de 1 : 1,19631 se tendrá el número de varas que deberá representar el lado del tablero; y como cada 10 de estas han de corresponder á una pulgada, se sabrá el número real de pulgadas de que constará el lado, ó frente del tablero.

Despues, la proporcion 1 : 1,19631 : : el número de métros de la escala del plano : al número de varas correspondientes á la nueva escala del modelo, manifestará las divisiones que en esta deban hacerse; siendo ya indiferente al trazar el modelo, usar de una ú otra de las escalas espresadas.

499. Suelen ponerse en una misma carta los planos de varias partes, separados unos de otros, y con diferentes escalas que se marcan en la parte inferior de la carta. De esto resulta, que tal vez puede tomarse una escala por otra; y para rectificar el error que de esta equivocacion pueda haberse producido al trasladar los planos ó al hacer otra operacion, se procederá del modo siguiente.

Sean, a, la longitud de la escala del plano en que se opera; b, la de la escala de que se ha hecho uso; c, superficie hallada; d, la que debió resultar usando de la escala del plano.

Se tendrá, ... $a^2 : b^2 : : c : d = \frac{b^2 c}{a^2}$

500. Puede haberse olvidado el poner la escala en el plano, ó que con el uso se haya esta inutilizado, y que se quiera proveer á su falta.

Para ello, elíjase en el plano un triángulo cuya superficie sea conocida; redúzcase á un cuadrado equivalente; divídase el lado de este en tantas partes iguales, como unidades hay en la raiz de la superficie; y una de estas partes será una de las de la escala que se desea.

Si la superficie elegida no da un cuadrado exacto, su raiz contendrá necesariamente subdivisiones de la unidad principal. En este caso, multiplíquese la raiz por un número tal, que estas subdivisiones desaparezcan, y auméntese la media proporcional en la misma relacion para tener la línea ó escala, que se dividirá en tantas partes iguales, como unidades contenga aquella raiz multiplicada.

En el primer supuesto, esto es, cuando resulta un cuadrado exacto; sea la superficie del triángulo=169 varas: una media proporcional entre su base y la mitad de su altura, dará el lado del cuadrado equivalente; y como 13 es la raiz de 169, si se divide dicho lado en trece partes iguales, una de estas será el valor de una de las divisiones de la escala.

En el segundo supuesto, la superficie del triángulo es 182,25; su raiz será 13,5: multiplíquese por 2 para que desaparezca el quebrado, y se tendrá 27: duplíquese tambien la media porporcional, y divídase en 27 partes iguales: una de estas será una de las divisiones de la escala. Si la media proporcional no se duplicase, cada dos de las 27 partes en que se divida serán iguales á una de las divisiones de la escala.

501. Cuando la fraccion de la raiz contenga centésimos ó milésimos, no tendrá lugar el método anterior. Habrá que contentarse en la práctica con elejir un triángulo, cuya superficie se acerque, cuanto sea posible, á un cuadrado exacto; y entonces la escala que se construya diferirá muy poco de la verdadera.

En el caso de no hallar un triángulo con la espresada circunstancia, se elige otra figura, que se reduce á un triángulo equivalente. Si no se consigue hallar una figura cuya superficie se aproxime mucho á un cuadrado exacto, se elije la que mas se le acerque; se halla la media proporcional; se construye en ella la escala dividiéndola en un número de partes igual á la raiz cuadrada mas próxima de la superficie de la figura; y se determina la relacion de su longitud con la de la escala verdadera.

Sea, por ejemplo la raiz de la superficie elegida . . 16,32. Tómese la décimasesta parte de la media proporcional; y con ella se construirá la escala, que, estará con la verdadera en la razon de 1600: 1632, ó de 50; 51; esto es, que una division de la escala hallada valdrá 1,02 de la del plano, y las superficies halladas en este con la escala aproximada habrá que multiplicarlas por 1,0404, cuadrado de 1,02.

Agrimensura y division de los bosques.

502. La medida y division de los bosques tiene por objeto general arreglar la corta y aprovechamiento de sus maderas, del modo mas conveniente para que resulte el mayor producto. Pero hay una diferencia entre los bosques pertenecientes al estado, y los de propiedad particular; y consiste en que, en los primeros se prescinde del interés anual que podria sacarse, por atender principalmente á las construcciones y demas de utilidad general, mientras que en los segundos se busca una renta anual máxima y constante.

503. Para arreglar la corta ó saca debe tenerse presente la mayor ó menor vida de cada clase de árboles, su lozanía y sanidad segun el suelo, esposicion y temperatura que gozan: los productos de las cortas de los árboles, en igualdad de circunstancias, son segun su edad, y asi deben cortarse cuando hayan concluido de crecer, y antes de que empiecen á decaer. Siendo muy jóven el árbol, da menos madera y de peor calidad: por el contrario cuando es muy viejo, se descompone su textura, y pierde la consistencia.

504. El determinar la edad de madurez de cada especie de árboles pende solo de observaciones continuadas, en que se tenga presente la calidad del terreno. De ellas se inferirá la edad en que deba hacerse la corta segun la altura y calidades que tenga el árbol, dejando en cada corta cierto número de ellos que se derriban al año siguiente; todo lo cual debe hallarse determinado en las ordenanzas de bosques.

Hecha la correspondiente clasificacion de las especies, edad, y estado de los árboles, se dividen en porciones llamadas *cortas determinadas*, tales que den anualmente la misma renta, para lo que es preciso la medicion exacta de los bosques.

505. Si estos tienen el mismo valor en toda su estension, y el terreno está igualmente cubierto, se dividirá el total espacio por el número de cortas, y se tendrán determinadas las superficies de estos; pero si varia su valor, ó hay partes vacias ó *despobladas*, habrá que valuar cada porcion y rebajar despues los vacios.

Si se lleva un registro exacto de las diferentes cortas, se podrá formar un estado comparativo de los productos segun los terrenos, edad, y especie de los árboles, comprendiendo la chamarasca, y el carbon ó leña. Este estado podria tener la forma siguiente:

Producto de los terrenos (*).

Años de las cortas.	Buenos.	Medianos.	Malos.	(**) Valor de la unidad de medida (332)

506. De las indicaciones hechas se sacarán útiles consecuencias sobre el mayor ó menor producto de las diferentes especies de árboles, sobre su estado de lozanía y madurez, sobre los que empiezan á decaer, tiempo en que tan solo son buenos para leña, y tiempo en que ya son útiles para construccion.

507. Tratándose de aplicar lo dicho (299) á la medicion y *Fig* 232 division de los terrenos de los bosques basta la inspeccion de la figura, para manifestar la marcha que ha de seguirse. Circunscrito el bosque por el cuadrilátero ACDB se rebajarán las superficies

(*) Este producto se espresa en medidas usadas para la venta de maderas y leñas.

(**) En Francia, antes del sistema métrico, habia para las leñas la medida llamada *cuerda*, equivalente á 112 pies cúbicos franceses ó 177,4665 pies cúbicos españoles. Para las maderas la *soliva*, que equivalia á 3 pies cúbicos franceses, ó 4,7536 españoles.

desnudas, asi como la parte B *i* M D; porcion que, segun lo determinado por la ordenanza de bosques, deberá reservarse para la reproduccion en los pertenecientes al estado. Hechas las deducciones, se divide el resto por el número de cortas que se quieren establecer, y se tiene la superficie de cada una.

Si el terreno lo permite, lo mas fácil será dividir los lados A*i*, C*l*, en las partes iguales pedidas; se tirarán las líneas correspondientes; y se tendrán las superficies buscadas, que no serán iguales entre sí, pero compondrán juntas la total.

Alguna de aquellas superficies, por ejemplo la inmediata al lado AC, quedaria mucho menor que las otras, á causa de las tortuosidades ó recodos de esta parte; por lo que habria que tirar la línea *rs* como se dijo (330), y ya las líneas *ri*, *se*, se dividirian en las partes pedidas.

Este método tiene los inconvenientes de dar muchas veces porciones muy desiguales en superficies; de no practicarse con tanta facilidad como parece ofrecer la figura, por no poderse separar de su perímetro; y en fin de diferir mucho los cuadriláteros de la forma cuadrada, que es la mas conveniente segun en- *Fig*233
seña la práctica. Para remediar todos estos inconvenientes se sigue el método representado en la figura: tal es, medir la superficie ABCD &c., restar de ella la porcion dejada en reserva; y dividir el resto por el número de porciones ó cortas pedidas, con lo que se tendrá la superficie de cada una. Tírese despues una línea NE para marcar la direccion de la vereda divisoria, que se forma rozando el monte con mas ó menos anchura segun la estension total. Mídase la superficie NABCDE valiéndose de los lados y ángulos; divídase por el valor hallado de cada corta; y se tendrá el número de divisiones ó porciones. Si queda alguna resta, es claro que habrá que variar la direccion de la vereda divisoria; para lo que se hará la proporcion, AEN: AN : : la resta: N*o*; y la línea será *o*E

Para trazar las cortas en el papel se divide la superficie de una de ellas por la perpendicular próximamente media *ks*, y el cociente dará la longitud *oe* sobre la vereda divisoria. Para ver si es exacta esta division, levántese en *e* la perpendicular *ed*; por los puntos A, c tírense á estas las paralelas Aa, cb; y mídanse las superficies ANa, Aabc, $bcde$, cuya suma debe componer la superficie determinada para cada corta. Pero si hubiere alguna diferencia, se dividirá esta por la ed, y el cociente dará la distancia que debe añadirse ó rebajarse de la parte oe para determinar el verdadero punto e. Del mismo modo se determinan las otras porciones de las partes NABDE, y NMLK. . . . .

508. Para trasladar al terreno lo trazado en el papel se toman en oE todas las partes oe, ef, &c. que marcan los anchos de las cortas inferiores, fijando piquetes en los puntos o, e, &c. hasta E; desde donde se volverá despues hácia o, y se marcarán los anchos correspondientes á las cortas superiores: cuidando de que los nuevos piquetes se diferencien de los primeros.

Se levantarán perpendiculares en todos estos puntos, y se abrirán pequeñas veredas divisorias para separar unas cortas de otras.

Resumen de las operaciones del Catastro, ó registro público de la calidad y valor de las tierras y bienes raices, relativamente á la agrimensura.

589. Este resumen podrá ser útil bajo diferentes aspectos interesantes á la administracion de la hacienda pública; tanto mas, cuanto no dejará ya de pensarse en España en principiar unos trabajos, que aseguren la igualdad del repartimiento de las contribuciones que gravitan sobre los bienes raices. Parece, pues, que convendrá esponer aunque sucintamente el método seguido en el dia en Francia para las operaciones del Catastro; fundadas en lo que la práctica constante ha enseñado desde el año de 1802, en que aquellas tuvieron principio, despues de muchas reclamaciones sobre la conveniencia y necesidad de este registro público (*).

(*) En cuanto es posible se ha procurado adaptar esta materia al estado actual de nuestra administracion.

Orden de las oper.s	*Clasificacion de operaciones.*
1.ª	Deslinde de los partidos y su division en secciones.
2.ª	Triangulacion de los mismos.
3.ª	Levantamiento del plano de las secciones.
4.ª	Verificacion del plano sobre el terreno.
5.ª	Registro de los cálculos de superficies.
6.ª	Formacion de carpetas, y comunicacion á los propietarios.
7.ª	Clasificacion de propiedadades.

510. El Gefe Político ó Prefecto de cada provincia nombra el agrimensor principal ó geómetra, que ha de hacer la medicion de las secciones en que se han dividido los partidos.

El agrimensor principal nombra los de su clase que le han de ayudar, los paga, y responde de su desempeño; y estos no pueden proceder á las operaciones sin el permiso por escrito de la autoridad civil.

Cada agrimensor ó cooperador se encarga de la medida de las secciones de un partido, y aun de las de varios si están contiguos; lo cual se determina en la distribucion, que anualmente debe hacer el Prefecto.

Cada cooperador puede tener uno ó dos auxiliares, si el agrimensor principal lo aprueba.

La autoridad civil forma todos los años la relacion de los partidos, que deben medirse en el siguiente; y la presenta al consejo de departamento, ó sea la diputacion provincial, con el cálculo de los gastos que causarán las correspondientes operaciones. Para formar aquella relacion debe el Prefecto tener á la vista el estado que le pase el encargado de las contribuciones, y se concertará con el agrimensor principal para la determinacion de los partidos.

Deslinde.

511. El prefecto avisa á los jueces de primera instancia, y vecinos del partido que se trata de medir. El agrimensor principal pre-

viene al del partido el dia en que empezará sus operaciones de deslinde, y el del partido avisa á sus ausiliares.

El agrimensor recorre, acompañado de las autoridades y de los prácticos nombrados por ellas, todos los linderos ó límites del partido, formando un bosquejo de su circuito, en el que se espresan los nombres de los dueños de las propiedades colindantes; asi como los de los rios, caminos, y demas objetos que puedan servir de datos para el sumario del deslinde, que se firma por todas las autoridades concurrentes y el agrimensor.

Si alguna de las autoridades no quisiere firmar, se insertarán á continuacion del sumario los motivos que para ello esponga.

El agrimensor debe emplear todos los medios para que se arreglen los partidos, si hubiere contestaciones sobre los límites.

Si no lo consigue, espresará en el sumario los linderos que cada parte pretende; esponiendo su parecer sobre la preferencia, bajo el concepto del derecho que da la contribucion, carga ó impuesto pagado, y atendiendo á la conveniencia general.

El Prefecto decide, despues del informe del agrimensor principal y el del encargado de las contribuciones, á qué partido corresponde el terreno en cuestion; ya pague en ambos partidos; ya no pague en ninguno de ellos.

Cuando la contestacion se refiere á terrenos que corresponden á distintas provincias, se juntan los ayuntamientos de los dos partidos que se creen con derecho, y su deliberacion informada por el Prefecto se remite al Ministerio de lo Interior ó de la Gobernacion. Iguales formalidades se observan para el cambio de terrenos, ó sustitucion de unos linderos por otros, con el objeto de que sean naturales é invariables: en cuyos casos el agrimensor traza el proyecto en el bosquejo, y espresa en el sumario la proposicion.

Los terrenos de un partido, encerrados ó *enclavados* entre los de otro, deben reunirse á este, sin que en el sumario se esprese reclamacion alguna en contra.

Si dichos terrenos se hallan en un partido perteneciente á otra provincia, el parecer de los respectivos Concejos departamentales, y el de los prefectos, se remite á el ministerio de lo Interior.

Division en secciones.

512. La division de partidos en secciones se hace despues de calculada la superficie de aquellos.

Se procura que las secciones sean lo mas regulares posible, y que sus respectivas superficies difieran poco entre sí.

La superficie de cada seccion será de 50 á 60 fanegas, ó del número que resulte por la division de todo el partido en 1000 partes. Cada seccion se clasifica con una letra mayuscula, y el nombre principal del objeto que contenga.

Triangulacion.

513. Hecho el deslinde se traza en el terreno la base, y pueden mencionarse en el sumario los puntos por donde pasa, y secciones que atraviesa. Se procede en seguida á la triangulacion del partido, con el objeto de determinar la posicion respectiva de muchos puntos elejidos, ó que se hallen en el terreno, y convengan para la formacion, ó levantamiento del plano. Se procura elejir en cada seccion puntos, que puedan servir para la reunion de los trabajos parciales en un solo plano del partido, que contendrá todas las secciones.

Antes de empezar esta operacion los agrimensores presentan á las autoridades civiles de los partidos la orden por escrito, que para ello han recibido del Prefecto; y aquellas habrán ya hecho fijar en sus respectivos partidos y colindantes el aviso, que indique el dia en que han de principiarse las operaciones.

Conviene tener presente todo lo dicho (381), en el concepto de que las operaciones catastrales tienen por objeto principal determinar cierto número de puntos de un pais ó terreno, sin enlazarlos con otros esteriores. Estos puntos se considerarán geométricamente establecidos, siempre que pueda medirse el tercer ángulo, para cotejar si conviene con el que resultó por el cálculo; en el que entraron como datos, los formados por las visuales dirijidas desde el estremo de la base. Cuando el tercer ángulo no puede medirse, se sitúa el punto por la interseccion de una tercera visual.

Hecha la triangulacion, se refieren los puntos al meridiano y á su perpendicular (414), formando el registro de los cálculos; y se traslada la triangulacion, ó se sitúan en el plano los puntos principales en la proporcion que marca la escala (483), de $\frac{1}{5000}$ Todo este trabajo se remite al agrimensor principal para su exámen.

Levantamiento de los planos de los partidos, secciones, y partes de estas.

---

514. El plano del partido ó de *reunion* debe abrazar el perímetro del partido; marcar la division de este en secciones; espresar los caminos públicos, las montañas, los rios, la posicion de la capital, la de la casa principal de cada pueblo, los bosques del estado y del comun, y en jeneral todas las grandes masas de cultivo, los molinos, batanes, y otras máquinas. La escala será de 1 á 10,000; y aun á 20,000 segun la estension del partido.

Para las operaciones de detalles solo se permite el grafómetro, la plancheta con la aguja magnética, la brújula, el círculo, la pantómetra ó cartabon de agrimensor, y la cadeneta.

El agrimensor principal rectifica, antes de usarla, la cadeneta de los cooperadores; y examina las escalas de los planos, las cuales pueden ser de $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{2500}$, $\frac{1}{1250}$ segun el mayor ó menor número de partes en que se haya dividido el terreno. Asi, pues, la primera escala servirá para cuando cada parte contenga 3, ó 4 fanegas; la segunda, si es de 6 á 8; y la tercera, si de 10 ó mas.

La escala se determina por el Prefecto, segun lo que espongan el agrimensor principal, y el recaudador de contribuciones; pero, respecto á las partes que puedan exijir mayor ó menor detalle, el agrimensor principal elejirá entre las tres la que crea mas conveniente.

Se cuidará de no dejar de un dia para otro el trasladar al plano el trabajo que se haga con otro instrumento, que no sea la plancheta.

La dimension del papel para los planos de las partes debe estar determinada por reglas fijas.

Las partes mas detalladas y que por consiguiente se hacen con la escala de 1 á 1250, se ponen en hojas separadas, ó en los ángulos del plano general, con un número correspondiente al que tiene en aquel la parte que representa. Tambien podrán colocarse en un solo pliego todas las partes mas detalladas de una misma seccion.

Los cooperadores remiten al agrimensor principal el dia 25 de cada mes los *estados de situacion*, ó relaciones del estado de sus respectivos trabajos, espresando las dificultades que hallan en el curso de sus operaciones por cualquier causa, y lo concerniente á contestaciones sobre linderos. El agrimensor principal da parte al ministerio, al principio de cada mes, del estado de los trabajos por partidos, tanto respecto al terreno como al bufete.

Prevenciones relativas á los planos particulares.

515. En la medicion de estos planos los agrimensores tendrán presentes las prevenciones que siguen.

A medida que se vayan levantando los planos, avisarán á la autoridad correspondiente del paraje en que se van á principiar las operaciones, para que lo adviertan á los propietarios interesados, y estos puedan por sí ó por sus apoderados asistir á las mediciones, y dar las noticias convenientes para determinar los linderos. Si á pesar de este aviso no asistieren, los agrimensores continuarán su trabajo. Estos pedirán á las autoridades los peritos que necesiten, y que sean de los labradores del partido.

La medicion se hace segun el estado presente de las cosas, sin relacion á los litigios ó contestaciones que pueda haber entre los propietarios, y procurando antes avenirlos: marcando en caso contrario con líneas de puntos los linderos que aparentemente hubiese, y dando á cada parte lo que parezca corresponderle, sin perjuicio de rectificacion si se decide la contestacion antes de concluirse el plano. Por lo regular el agrimensor principal informado por el comisionado da noticia de ello al Prefecto, y este suele invitar al tribunal correspondiente para la mas pronta terminacion del juicio.

Si no aparecen lindes, se forma un solo plano particular que incluye las propiedades en litigio, dejando para cuando este se termine el hacer la division.

Si, por hacer mucho tiempo que un mismo colono labra varias posesiones contiguas, no se supiere cuales son los límites entre ellas, el agrimensor hará que de los registros, escrituras, &c. se saquen los datos necesarios para deslindarlas, darles sus nombres respectivos, y conocer sus propietarios.

En la medicion de bosques correspondientes á varios propietarios deben estos, ó bien costear las zanjas divisorias que marcan los lindes respectivos; ó bien convenirse en la estension que á cada uno corresponde, de modo que marcadas todas en el plano la suma de ellas componga la estension total.

El Prefecto invita al pronto deslinde de las propiedades, que por indivisas aun no tienen marcados sus términos; figurándose el todo en el plano como una sola porcion, hasta que la division tenga lugar.

Las fábricas rurales forman un solo plano particular. Las casas contiguas con distintas entradas, aunque pertenezcan á un mismo dueño, tendrán asi mismo un plano particular cada una.

De una casa cuyos diferentes pisos son de diversos dueños, solo se levanta el plano del piso bajo: los demas únicamente se inscriben en el registro correspondiente á los propietarios del partido.

No se levantan planos de los pueblos, por adelantar el trabajo y disminuir costos.

Las canteras, las minas, los depósitos de aguas, las escavaciones, los caminos de uso particular, las acequias para aguas de los molinos ferrerias ú otras fábricas ó máquinas, las destinadas al riego y á las mismas fábricas exijen planos particulares.

Los prados, bosques, tierras de sembradura, aunque pertenezcan á una sola posesion de un mismo dueño, requieren tantos planos particulares, como clases de terrenos de una naturaleza absolutamente distinta contenga la posesion. Pero respecto á las balsas ó lagunas de agua, depósitos de piedras, y las rocas, no se hará plano particular, si su superficie no pasa del décimo de la de la posesion. Las tierras incultas ó las malezas, los bosques pequeños, líneas de frutales ó viñas, que por su corto espacio no se verian en el plano, pueden requerir planos particulares si su superficie es de cierta estension, como de 100 estales cuadrados.

Para distinguir en una misma posesion las variedades de terreno, se separan sus contornos en el plano con líneas de esta forma — • — •

No se consideran como de distinta naturaleza los terrenos por su labor accidental, sino que se ponen en el plano formando un todo con la denominacion del cultivo principal de ellas.

Un terreno del mismo cultivo, perteneciente á un solo propietario, pero dividido en muchas partes por medio de cercas, fosos, tapias, caminos públicos, arroyos ú otros límites fijos, requiere un número igual de planos particulares.

Los caminos de servidumbre y las sendas no se miran como límites fijos; á menos que sean invariables, ó que tengan sus bordes plantados de bardas vallados ó setos, ó que separen dos terrenos de nombre diferente.

Se marcan en los planos las sendas y caminos variables que cortan las posesiones, pero sin que por la division que causan hayan de tener estas números distintos.

Los caminos que cortan las haciendas para su servicio deben comprenderse en la superficie de la posesion.

Si dichos caminos atraviesan varias posesiones, y sirven para otras contiguas, los planos particulares de estas incluirán la superficie de aquellos en proporcion á su longitud.

No se figuran en los planos los detalles de los jardines, paseos, juegos de aguas, y demas de recreo ó adorno, ni los cercados de muros, vallados ó fosos; aunque formen masas divididas por sendas ó veredas.

Las casas rurales se figuran en los planos particulares. Los terrenos del comun y los alrededores de las fortificaciones se ponen como tales, sin detallar estas.

No se levanta el plano de los espacios ocupados por ventisqueros, porque cesa la medicion donde el terreno deja de ser productivo; y por lo mismo no se miden las rocas enteramente desnudas de tierra, en que terminan propiedades diferentes; pero sí cuando corresponden en su totalidad á un solo partido.

Se levanta el plano de los rios ó arroyos, hasta donde llega el agua salada de la mar.

Se figuran en los planos las dunas no cultivadas, y los terrenos áridos á lo largo de las costas hasta la línea de las maréas mas altas.

Las radas no se comprenden en los planos particulares; pero sí los terrenos que deja el mar, ó que se conquistan sobre él. Tampoco se ponen las pesquerias reducidas á tender los anzuelos ó cordeles lo mas lejos posible para que el agua los cubra dos veces al dia.

Levantando el plano del partido, y concertado el agrimensor principal con el Prefecto para la division en secciones, se forma la relacion de los nombres de los dueños de las posesiones comprendidas en los planos particulares, numerando cada una de las posesiones desde una hasta donde lleguen.

En seguida avisa el agrimensor á los propietarios ó apoderados, para que se enteren de las indicaciones hechas por los peritos, y se rectifique el trabajo.

Verificacion.

516. El agrimensor principal comprueba los trabajos, y el Prefecto puede nombrarle un acompañado en caso de duda. La comprobacion del plano se hace segun lo ya esplicado en los artículos correspondientes, cotejando las operaciones con la minuta de cálculos y medidas, y antes de proceder á los cálculos de superficies.

Se miden tres polígonos ó planos particulares en cada seccion, para ver si están exactos; y se averiguan los nombres de veinte propietarios de las mismas, para cotejarlos con los de la relacion. El verificador se separa de las grandes direcciones medidas, para examinar los detalles; sea recorriendo el terreno por las diferentes líneas marcadas; sea cerrando de cualquier modo, y midiendo las diagonales y lados de los polígonos, caminos, distancias de una division á otra, &c.

Debe estar fijado con anticipacion el error que en cada clase de planos se tolera; como por ejemplo, $\frac{1}{300}$ de mas ó menos en los generales; $\frac{1}{150}$ en los de detall, y $\frac{1}{50}$ en los de fábricas.

Comprobados los planos, el agrimensor principal forma y certifica una relacion de las rectificaciones que hace.

Cuando la diferencia de las mediciones en la verificacion escediese de las cantidades marcadas, espresará el agrimensor aparte los cálculos y detalles de la comprobacion, para que decida el Prefecto, y se levante de nuevo la parte defectuosa; pero sin que de ello resulte cargo al agrimensor.

Cálculo de las superficies de las fincas.

517. Una vez comprobado y admitido el plano de un partido, se procede por el agrimensor principal á la formacion de los cálculos de las superficies como sigue. 1.º Se halla la superficie de cada seccion: 2.º la de los caminos públicos, calles, plazas, rios, arroyos, &c, formando un estado de todos los objetos: y 3.º la de cada plano particular en el órden de sus números.

Como para la medicion de los planos particulares se descompondrán estos en triángulos trazados con lápiz, se formará un registro que se llamará *primer registro de cálculos*; y en otro segundo se anotarán las superficies de las secciones.

El prefecto pone su V.º B.º en el primer registro, una vez que esté reconocido exacto; y el agrimensor añade en el estado la superficie de cada plano particular.

Formacion de cuadernos para los propietarios.

518. Los agrimensores reunen en un cuaderno todos los planos particulares correspondientes á cada propietario con las anotaciones necesarias, y sus superficies en medida legal y en las del pais.

Se ponen avisos en el partido y en los inmediatos, del dia en que los agrimensores recibirán á los propietarios para manifestarles sus hojas respectivas, y hacer en ellas despues de examinadas las enmiendas que sean justas; espresándolas los agrimensores en los planos delante de los interesados, que satisfechos firman sus respectivas hojas, haciéndolo la autoridad local por los que no sepan escribir.

En fin, la autoridad da al agrimensor principal un certificado, en que conste; que se fijaron los avisos para los propietarios ó sus apoderados; que se les facilitó por aquel el reconocimiento y exámen de los planos y relaciones correspondientes á sus propiedades; y que se atendieron sus reclamaciones: espresando el dia en que se dió principio á esta operacion, y el en que se concluyó.

El agrimensor principal examina las hojas, estados, relaciones, registros y certificados, y los remite á la autoridad civil.

Si despues de las comprobaciones insiste algun propietario en reclamar sobre la estension de su propiedad, dispone el Prefecto que se haga nueva medida por otros agrimensores. Si la reclamacion fuere justa, serán los gastos de cuenta de los agrimensores; y si lo contrario los pagará el propietario.

Los dueños que deseen tener copia de los planos de sus propiedades, se dirijen al agrimensor principal para que los facilite; abonando aquellos lo establecido por tarifa, segun hayan de ser los planos delineados, lavados con mas ó menos detalles, &.

Clasificacion de propiedades.

519. El Consejo departamental *califica* cada propiedad; esto es, determina las clases en que debe dividirse cada posesion segun los diversos grados de fertilidad del terreno.

Para verificar esta clasificacion se hace antes un reconocimiento general de los partidos por el comisionado del perceptor de contribuciones y dos clasificadores nombrados entre los propietarios por el Consejo departamental. Estos dos señalan los terrenos particulares que han de servir de tipo para cada una de las clases de propiedad.

Clasificadas las propiedades forma el Consejo la tarifa de valuacion; estableciendo antes la mas justa proporcion entre las cuatro principales clases de cultivos, y valuando las otras clases relativamente á una de las principales con quien tenga mas analogía.

Las casas se valúan con iguales proporciones á los bienes rurales, y segun la situacion y ventajas que ofrecen.

Las casas de las poblaciones y las de artefactos se valúan cada una en particular por los clasificadores sobre el mismo terreno.

El Consejo departamental puede pedir al Prefecto, prácticos para que ausilien á los clasificadores.

Los propietarios pueden concurrir á la clasificacion, y hacer sus observaciones; y los clasificadores pueden hacerse acompañar de personas que les den aclaraciones, ó noticias útiles.

Los clasificadores ejecutan su trabajo por secciones, haciendo las divisiones correspondientes de las propiedades particulares segun las clases determinadas por el Consejo.

Un representante de la recaudacion de contribuciones presencia estas operaciones; teniendo á la vista copia del plano y estados, observando si aquel está bien levantado, y anotando los errores cometidos.

Concluida la clasificacion dicho representante forma la relacion de las secciones, y el registro catastral, que se remite á los ayuntamientos con una minuta para cada contribuyente; advirtiendo haberse remitido á aquellos los espresados documentos, y señalado término para las reclamaciones contra la clasificacion.

Estas reclamaciones se hacen al representante de la recaudacion de contribuciones, que se informa de los clasificadores; quedando á los propietarios la facultad de pedir que se nombre un nuevo perito, que con otro por parte del Prefecto examine la clasificacion. Si esta resultase bien hecha, será de cuenta del reclamante el pagar los gastos causados.

Como frecuentemente habrá variacion en las propiedades y en los dueños de estas, el encargado de las contribuciones, despues de avisar á los propietarios por carteles en los sitios públicos, pasa al partido con anticipacion proporcionada, y se entera de las espresadas variaciones. Conocidas estas dispone que se escriban las declaraciones de las partes; en las que deben constar los nombres del vendedor y comprador, el fólio del registro á que corresponden las propiedades, la indicacion del plano particular y de la seccion, número del plano general ó de *reunion*, la naturaleza de la propiedad, su estension, y su renta.

Este documento firmado por el comisionado y declarantes se remite á la oficina de contribuciones y al Consejo de departamento, para que se hagan en los registros las variaciones correspondientes, y en los planos particulares las enmiendas á que den lugar aquellas variaciones. Cuando los registros ó los planos tengan ya muchas adiciones, enmiendas, &c., dispondrá el Prefecto que se saquen nuevas copias.

520. Los modelos que siguen son convenientes, y completarán la sucinta idea que sobre el catastro se ha creido útil dar en esta obra.

ESTADO NUMERO . . . . .

Situacion del partido: sitio y naturaleza de las propiedades; sus dimensiones, estension, propietarios, colindantes, cargas, &c.

Partido de . . . . . situado entre . . . . . provincia. . . . . camino &c.

Situacion, lindes, dimensiones, y propietarios de las posesiones.				Nat. y sup. de cada situacion.			CARGAS.			
							Renta			
Situacion.	*Propietarios.*	*Dimensiones y situac. de los lad.*	*Línd.*	*Tier.*	*Prad.s*	*Viñ.s*	*Perpet.*	*Vital*	*Imp.*	*Valuacion.*
		N.º Log. Direc.								

ESTADO

QUE INDICA LAS VARIACIONES OCURRIDAS EN EL POLÍGONO.

(A) *Seccion. . . . . . durante* 15 *años.*

Partido de. . . . . . .

Núms.	1810	1811	1812	1813	1814	1815	1816	1817. . . .	1825
		a							
5.	. . . .	*b*							
		c							
3.	. . . .	. . . .	. . . .	. . .	*a*. .	. . . .	$a+c$		
					b. .	. . . .	$b-c$		
				a					*c*
6.	. . . .	vendid	. . . .	*b*. .	. . . .	. . . .	. . . .	*b*.	*d*
									e
&.									
9, 10	. . . .	. . . .	reunid						

Bien facilmente se percibe, que la posesion número 5 estaba en 1811 dividida en tres partes *a*, *b*, *c*; que la tercera en 1814 se dividió en dos partes *a*, *b*; que la parte *a*, adquirió en 1816 la parte *c*, á costa de la *b*; que el número 6 se vendió en 1811; que en 1813 se dividió *ab* en dos partes: que en 1817 se dividió la parte *b*, en las *c*, *d*, *e*; y en fin que los números 9 y 10 se reunieron en un solo propietario en 1812. La variacion de una parte, por ejemplo, la *a*, en el mismo año 1811, se puede marcar con una estrellita ú otra señal. Se vé que es facil espresar de un modo convencional todas las variaciones ocurridas.

REGISTRO DETALLADO

DE LAS VARIACIONES OCURRIDAS EN EL POLÍGONO.

(A).
Partido de......
Seccion de........

					VARIACIONES.					
Núms.	*Natur.*	*Super.*	*Valor.*	*Nomb. de los props.*	*Fecha.*	*Núms.*	*Natur.*	*Super.*	*Valor.*	*Nomb. de los nuevos propietar.*

Cuarta parte.

NIVELACION.

Definiciones.

521. El arte de nivelar es de aplicacion frecuente, y necesario á muchas clases de la sociedad: el simple albañil, el carpintero, el arquitecto para la construccion de los edificios; el fontanero, el agricultor para el repartimiento de las aguas y del riego; el ingeniero en general, para la construccion de canales, caminos y puentes, para la navegacion de los rios, desague ó desecacion de las lagunas ó pantanos, para la formacion de inundaciones que aumentan la defensa de las plazas y líneas, para la traza y disposicion de las obras de fortificacion, la desenfilada de estas, &c.; todos estos y otros muchos mas necesitan cada instante acudir á la nivelacion.

522. Tiene esta por objeto hallar la mayor ó menor altura de un punto de la superficie de la tierra, con respecto á otro; ó lo que es lo mismo, determinar cual es la diferente distancia á que del centro de la tierra se hallan.

523. La teoria de la nivelacion se funda en las leyes de la hidrostática y en el conocimiento de la figura de la tierra, la cual aunque es un elipsoide de revolucion aplastado por los polos, para la nivelacion se supone esférica.

524. Se llaman puntos de nivel verdadero los que distan igualmente del centro C de la tierra; como los de la circunferencia de esta *aqhy*, ó los de cualquiera otra *j*K, *fgd*, concéntrica á aquella. Fig 234

La línea *ad* tangente á un punto cualquiera de la superficie de la tierra, ó perpendicular al radio C*a* ó línea vertical, que es la direccion que toma un hilo ó cuerda con un peso en su estremo, se llama *horizontal ó línea de nivel aparente*. En ella solo estarán de nivel verdadero los puntos *d*, *f*, *l*, *p*, que distan igualmente del punto de contacto a, porque entonces será $Cf=Cd$, $Cp=Cl$, distancias al centro C.

526. La parte $dh=ag$, donde dista mas d que a del centro C, es la diferencia del nivel aparente al verdadero entre los dos puntos d y a: esta diferencia será mayor á proporcion que d se aleje de a.

527. De lo dicho se infiere, que, si se trata de nivelar dos puntos, ó saber cuanto está e mas alto que a con respecto á la superficie de la tierra, habrá que averiguar el valor de $eq=ar$, diferencia entre la altura de dichos dos puntos. Como por los métodos que van á esplicarse solo se hallará la altura le, que hay desde e hasta la horizontal ad, habrá que añadir á la le la parte lq, diferencia del nivel aparente al verdadero en la distancia al.

Para calcular esta parte se tiene, $ql=lo-2cq$;

pero siendo . . . . . . $ql : al :: al : lo$. será $lo=\dfrac{al^2}{ql}$,

y sustituyendo, será . . . $ql=\dfrac{al^2}{ql}-2cq$

ó . . . . $ql^2=al^2-2cq \cdot ql$ (1):

con lo que se calculará ql rigorosamente.

Mas como ql es siempre muy pequeña en comparacion del diámetro de la tierra, puede reducirse esta ecuacion á. . . .

$$o=al^2-2cq \cdot ql, \quad ó\ldots ql=\frac{al^2}{2cq}.$$

Y si para abreviar se hace $ql=h$, $al=d$, $cq=r$,

se tendrá. . . . . . . $h=\dfrac{d^2}{2r}$;

y la ecuacion (1) será. . . . $h=-r\pm\sqrt{(r^2+d^2)}$.

En ambas ecuaciones hay que saber antes el valor del rádio de la tierra, el cual segun varias observaciones es de 7,627,270 varas. Conocida tambien d, y haciendo el cálculo segun ambas fórmulas, solo variarán los resultados obtenidos en la quinta cifra decimal; por lo que, siendo tan corta esta diferencia, deberá preferirse la fórmula primera.

Conocida la altura h de nivel aparente para una distancia d, se calcularán facilmente las alturas h', h'' para otras distancias

d', d''. . . pues se tendrá $h'=\frac{d'^2}{2r}$, y por consiguiente. . . .

$h : h' :: \frac{d^2}{2r} : \frac{d'^2}{2r} :: d^2 : d'^2$; lo que quiere decir, que las espresadas alturas, ó diferencias de nivel, son como los cuadrados de las distancias correspondientes, y que conociendo la diferencia de nivel respecto á cierta distancia se sabrá la de otra cualquiera. Por este medio se ha calculado la tabla del número (530).

Es de advertir que la distancia que verdaderamente se mide no es *al*, sino la *aq*; pero la diferencia es despreciable, aun respecto de las mayores distancias usadas en la nivelacion.

Efectos de la refraccion terrestre en las diferencias de nivel.

528 Asi como en las operaciones topográficas ya descritas hubo que tirar visuales á los objetos que ofrece el terreno, ó á señales establecidas á propósito en él, del mismo modo en la nivelacion hay que dirijir visuales á una señal que se llama *mira*; y, como en la medicion de alturas (372), habrá tambien en la nivelacion que hallar el error de la refraccion. Pero como este sea sumamente variable cerca de la superficie de la tierra, aun en el mismo sitio, de aqui la dificultad de establecer una regla fija. El error de la refraccion podria determinarse por la observacion; pero exijiendo esto dos observadores, es preferible, para no tener que llevarlo en cuenta, colocar el instrumento empleado para nivelar en la mitad de la distancia que hay entre los dos puntos, cuya diferencia de altura ó de nivel se busca.

Sea por ejemplo BB′ la línea del terreno, y OO′ una linea *Fig* 235
de nivel aparente obtenida por un instrumento colocado en A, á igual distancia de O y de O′. Es evidente, que las visuales AO, AO′ dirijidas á O, O′, sufrirán igual inflexion; de modo que los *o*, *o′*, puntos aparentes de los de mira O, O′, estarán á igual distancia del centro C de la tierra: por consecuencia siendo $Oo=O'o'$, se tendrá $O'B'-OB=o'B'-oB$. Luego si $o'B'$ fuera igual á oB, tambien sería $O'B'=OB$, y los dos puntos B, B′ estarían de nivel. Si $o'B'>oB$, ú $o'B'<oB$, entonces B′ estará mas bajo ó mas alto que B;

esto es, que en tal caso no necesitará llevarse la refraccion en cuenta.

529. Si no se pudiere colocar el instrumento en el punto medio, se calculará el efecto de la refraccion para una distancia dada, tomando los $\frac{8}{100}$ (372) del ángulo BCB′ formado por las dos verticales en las estremidades de dicha distancia, y se tendrá el valor medio de la refraccion de nuestro clima.

Asi pues, si r representa el ángulo de refraccion, C el de las verticales, y o el de la amplitud del arco correspondiente á la distancia, se tendrá, . . . $r=(0{,}08)\,C$.

En esta ecuacion r estará espresado en partes de grado: para que lo estuviese en varas, se tendria presente que $OAB=\frac{1}{2}OCA=\frac{C}{2}$; y como los ángulos OAo y $O'A\,o'$ son muy pequeños, será próximamente. . . . . $BO : Oo :: OAB : OAo$.

Representando á Bo por h y á Oo por E será $h : E :: \frac{c}{2} : r$,

ó . . . . $h : E :: \frac{c}{2} : (0{,}08)\,C$,

y . . . . $E=(0{,}16)h$;

esto es, que la refraccion, ó parte que deba rebajarse por ella, es igual á la altura del nivel aparente multiplicada por el número constante 0,16. Colocado el instrumento en el punto medio se puede prescindir, no solo de la refraccion, sino tambien de los errores del instrumento, y de la diferencia del nivel aparente al verdadero, con tal que se use el mismo instrumento en toda la operacion, y se emplee de una misma manera.

530. Antes se dió el medio de hallar para las respectivas distancias las diferencias del nivel aparente al verdadero, pero sin llevar en cuenta lo que debia rebajarse por causa de la refraccion. Ahora ya podrá llevarse en cuenta usando de la fórmula anterior, por cuyo medio se ha formado la tabla que sigue.

Tabla

de las alturas del nivel aparente sobre el nivel verdadero, y de lo que baja por la refraccion, desde la distancia de 100 *pies de Búrgos hasta la de* 40,000.

Distancia en pies de Búrgos.	Elevacion del nivel aparente sobre el verdadero.	Lo que baja á causa de la refraccion.	Esceso de la elevacion del nivel aparente sobre lo que baja por la refraccion.
100.	0,0002.	0,0000.	0,0002.
150.	0,0005.	0,0001.	0,0004.
200.	0,0009.	0,0001.	0,0007.
250.	0,0014.	0,0002.	0,0011.
300.	0,0020.	0,0003.	0,0017.
350.	0,0027.	0,0004.	0,0023.
400.	0,0035.	0,0006.	0,0029.
450.	0,0044.	0,0007.	0,0037.
500.	0,0055.	0,0009.	0,0046.
550.	0,0066.	0,0011.	0,0056.
600.	0,0079.	0,0013.	0,0066.
650.	0,0092.	0,0015.	0,0078.
700.	0,0107.	0,0017.	0,0090.
750.	0,0123.	0,0020.	0,0103.
800.	0,0140.	0,0022.	0,0118.
850.	0,0158.	0,0025.	0,0133.
900.	0,0177.	0,0028.	0,0149.
950.	0,0198.	0,0032.	0,0166.
1000.	0,0219.	0,0035.	0,0184.
1050.	0,0241.	0,0039.	0,0203.
1100.	0,0265.	0,0042.	0,0222.

1150.	0,0289.	0,0046.	0,0243.
1200.	0,0315.	0,0050.	0,0265.
1250.	0,0342.	0,0055.	0,0287.
1300.	0,0370.	0,0059.	0,0311.
1350.	0,0399.	0,0064.	0,0335.
1400.	0,0429.	0,0069.	0,0360.
1450.	0,0460.	0,0074.	0,0386.
1500.	0,0492.	0,0079.	0,0414.
1550.	0,0526.	0,0084.	0,0442.
1600.	0,0560.	0,0090.	0,0471.
1650.	0,0596.	0,0095.	0,0500.
1700.	0,0632.	0,0101.	0,0531.
1750.	0,0670.	0,0107.	0,0563.
1800.	0,0709.	0,0113.	0,0596.
1850.	0,0749.	0,0120.	0,0629.
1900.	0,0790.	0,0126.	0,0664.
1950.	0,0832.	0,0133.	0,0699.
2000.	0,0875.	0,0140.	0,0735.
2100.	0,0965.	0,0154.	0,0811.
2200.	0,1059.	0,0169.	0,0890.
2300.	0,1158.	0,0185.	0,0972.
2400.	0,1261.	0,0202.	0,1059.
2500.	0,1368.	0,0219.	0,1149.
2600.	0,1480.	0,0237.	0,1243.
2700.	0,1595.	0,0255.	0,1340.
2800.	0,1716.	0,0275.	0,1441.
2900.	0,1840.	0,0294.	0,1546.
3000.	0,1970,	0,0315.	0,1654.
3100.	0,2103.	0,0336.	0,1767.
3200.	0,2241.	0,0359.	0,1882.
3300.	0,2383.	0,0381.	0,2002.
3400.	0,2530.	0,0405.	0,2125.
3500.	0,2681.	0,0429.	0,2252.
3600.	0,2836.	0,0454.	0,2382.
3700.	0,2996.	0,0479.	0,2517.

3800.	0,3160.	0,0506.	0,2655.
3900.	0,3329.	0,0533.	0,2796.
4000.	0,3501.	0,0560.	0,2941.
4100.	0,3679.	0,0589.	0,3090.
4200.	0,3860.	0,0618.	0,3243.
4300.	0,4046.	0,0647.	0,3399.
4400.	0,4237.	0,0678.	0,3559.
4500.	0,4432.	0,0709.	0,3722.
4600.	0,4631.	0,0741.	0,3890.
4700.	0,4834.	0,0773.	0,4061.
4800.	0,5042.	0,0807.	0,4235.
4900.	0,5254.	0,0841.	0,4414.
5000.	0,5471.	0,0875.	0,4596.
5100.	0,5692.	0,0911.	0,4781.
5200.	0,5917.	0,0947.	0,4971.
5300.	0,6147.	0,0984.	0,5164.
5400.	0,6381.	0,1021.	0,5360.
5500.	0,6620.	0,1059.	0,5561.
5600.	0,6863.	0,1098.	0,5765.
5700.	0,7110.	0,1138.	0,5972.
5800.	0,7362.	0,1178.	0,6184.
5900.	0,7618.	0,1219.	0,6399.
6000.	0,7878.	0,1261.	0,6618.
6100.	0,8143.	0,1303.	0,6840.
6200.	0,8412.	0,1346.	0,7066.
6300.	0,8686.	0,1390.	0,7296.
6400.	0,8964.	0,1434.	0,7529.
6500.	0,9246.	0,1479.	0,7767.
6600.	0,9533.	0,1525.	0,8007.
6700.	0,9824.	0,1572.	0,8252.
6800.	1,0119.	0,1619.	0,8500.
6900.	1,0419.	0,1667.	0,8752.
7000.	1,0723.	0,1716.	0,9007.
7200.	1,1345.	0,1815.	0,9530.
7400.	1,1984.	0,1917.	1,0066.

7600. . .	1,2642. . .	0,2023. . .	1,0620.
7800. . .	1,3314. . .	0,2130. . .	1,1184.
8000. . .	1,4006. . .	0,2241. . .	1,1765.
8200. . .	1,4715. . .	0,2354. . .	1,2360.
8400. . .	1,5441. . .	0,2471. . .	1,2971.
8600. . .	1,6185. . .	0,2590. . .	1,3596.
8800. . .	1,6947. . .	0,2712. . .	1,4235.
9000. . .	1,7726. . .	0,2836. . .	1,4890.
9200. . .	1,8523. . .	0,2964. . .	1,5559.
9400. . .	1,9337. . .	0,3094. . .	1,6243.
9600. . .	2,0168. . .	0,3227. . .	1,6941.
9800. . .	2,1017. . .	0,3363. . .	1,7655.
10000. . .	2,1884. . .	0,3501. . .	1,8383.
10200. . .	2,2768. . .	0,3643. . .	1,9125.
10400. . .	2,3670. . .	0,3787. . .	1,9883.
10600. . .	2,4589. . .	0,3934. . .	2,0655.
10800. . .	2,5526. . .	0,4084. . .	2,1442.
11000. . .	2,6480. . .	0,4237. . .	2,2243.
11200. . .	2,7451. . .	0,4392. . .	2,3059.
11400. . .	2,8440. . .	0,4550. . .	2,3890.
11600. . .	2,9447. . .	0,4712. . .	2,4736.
11800. . .	3,0471. . .	0,4875. . .	2,5596.
12000. . .	3,1513. . .	0,5042. . .	2,6471.
12200. . .	3,2573. . .	0,5212. . .	2,7361.
12400. . .	3,3649. . .	0,5384. . .	2,8265.
12600. . .	3,4743. . .	0,5559. . .	2,9184.
12800. . .	3,5855. . .	0,5737. . .	3,0118.
13000. . .	3,6984. . .	0,5917. . .	3,1066.
13200. . .	3,8131. . .	0,6101. . .	3,2030.
13400. . .	3,9295. . .	0,6287. . .	3,3008.
13600. . .	4,0477. . .	0,6476. . .	3,4000.
13800. . .	4,1676. . .	0,6668. . .	3,5008.
14000. . .	4,2893. . .	0,6863. . .	3,6030.
14200. . .	4,4127. . .	0,7060. . .	3,7067.
14400. . .	4,5379. . .	0,7261. . .	3,8118.

14600.	4,6648.	0,7464.	3,9184.
14800.	4,7935.	0,7670.	4,0265.
15000.	4,9239.	0,7878.	4,1361.
15200.	5,0567.	0,8091.	4,2476.
15400.	5,1900.	0,8304.	4,3596.
15600.	5,3257.	0,8521.	4,4736.
15800.	5,4631.	0,8740.	4,5891.
16000.	5,6023.	0,8964.	4,7059.
16200.	5,7432.	0,9189.	4,8243.
16400.	5,8859.	0,9417.	4,9442.
16600.	6,0303.	0,9649.	5,0654.
16800.	6,1765.	0,9882.	5,1883.
17000.	6,3245.	1,0119.	5,3125.
17200.	6,4742.	1,0359.	5,4383.
17400.	6,6256.	1,0601.	5,5655.
17600.	6,7788.	1,0846.	5,6942.
17800.	6,9337.	1,1094.	5,8243.
18000.	7,0904.	1,1345.	5,9560.
18200.	7,2488.	1,1598.	6,0890.
18400.	7,4090.	1,1854.	6,2236.
18600.	7,5710.	1,2114.	6,3596.
18800.	7,7347.	1,2375.	6,4971.
19000.	7,9011.	1,2642.	6,6369.
19200.	8,0673.	1,2908.	6,7765.
19400.	8,2362.	1,3178.	6,9184.
19600.	8,4069.	1,3451.	7,0618.
19800.	8,5794.	1,3727.	7,2067.
20000.	8,7536.	1,4006.	7,3530.
20200.	8,9295.	1,4287.	7,5008.
20400.	9,1072.	1,4572.	7,6500.
20600.	9,2867.	1,5859.	7,7008.
20800.	9,4679.	1,5149.	7,9530.
21000.	9,6508.	1,5441.	8,1067.
21200.	9,8355.	1,5737.	8,2618.
21400.	10,0219.	1,6035.	8,4184.

21600.	10,2102.	1,6336.	8,5766.
21800.	10,4013.	1.6642.	8.7371.
22000.	10,5918.	1,6947.	8,8971.
22200.	10,7853.	1,7256.	9,0596.
22400.	10,9805.	1,7569.	9,2236.
22600.	11,1777.	1.7884.	9,3893.
22800.	11,3762.	1,8202.	9,5560.
23000.	11,5766.	1,8523.	9,7244.
23200.	11,7788.	1,8846.	9,8942.
23400.	11,9827.	1,9172.	10,0655.
23600.	12,1885.	1,9502.	10,2383.
23800.	12,3959.	1,9833.	10,4126.
24000.	12,6052.	2,0168.	10,5883.
24200.	12,8161.	2,0506.	10.7655.
24400.	13,0291.	2,0846.	10,9444.
24600.	13,2433.	2,1189.	11.1244.
24800.	13,4595.	2,1535.	11.3060.
25000.	13,6775.	2,1884.	11.4891.
25200.	13,8972.	2,2236.	11,6736.
25400.	14,1186.	2,2590.	11.8596.
25600.	14,3418.	2,2947.	12.0472.
25800.	14,5668.	2,3307.	12,2361.
26000.	14,7936.	2,3670.	12,4266.
26200.	15,0220.	2,4035.	12,6185.
26400.	15,2522.	2,4404.	12,8119.
26600.	15,4842.	2,4775.	13,0067.
26800.	15,7179.	2,5149.	13.2031.
27000.	15,9535.	2,5526.	13,4009.
27200.	16,1906.	2,5905.	13.6001.
27400.	16,4296.	2,6287.	13,8009.
27600.	16,6703.	2,6673.	14,0031.
27800.	16,9128.	2,7060.	14.2068.
28000.	17,1570.	2,7451.	14,4119.
28200.	17,4030.	2.7845.	14.6185.
28400.	17,6507.	2,8241.	14,8266.

28600. . .	17.9002. . .	2,8640. . .	15,0362.
28800. . .	18,1515. . .	2,9042. . .	15,2472.
29000. . .	18,4044. . .	2,9447. . .	15,4597.
29200. . .	18,6591. . .	2,9854. . .	15,6737.
29400. . .	18,9156. . .	3,0265. . .	15,8891.
29600. . .	19,1738. . .	3,0678. . .	16,1060.
29800. . .	19,4338. . .	3,1094. . .	16,3244.
30000. . .	19,6956. . .	3,1513. . .	16,5443.
30500. . .	20,3580. . .	3,2573. . .	17,1007.
31000. . .	21,0305. . .	3,3649. . .	17,6656.
31500. . .	21,7144. . .	3,4743. . .	18,2401.
32000. . .	22,4092. . .	3,5855. . .	18,8237.
32500. . .	23,1149. . .	3,6984. . .	19,4175.
33000. . .	23,8316. . .	3,8131. . .	20,0186.
33500. . .	24,5593. . .	3,9295. . .	20.6298.
34000. . .	25,2979. . .	4,0477. . .	21,2502.
34500. . .	26,0475. . .	4,1675. . .	21,8800.
35000. . .	26,8078. . .	4,2893. . .	22,5186.
35500. . .	27,5792. . .	4,4128. . .	23,1664.
36000. . .	28,3617. . .	4,5379. . .	23,8238.
36500. . .	29,1549. . .	4,6648. . .	24,4901.
37000. . .	29,9591. . .	4,7935. . .	25,1657.
37500. . .	30,7743. . .	4,9239. . .	25,8504.
38000. . .	31,6043. . .	5,0567. . .	26,5476.
38500. . .	32,4375. . .	5,1900. . .	27,2475.
39000. . .	33,2855. . .	5,3257. . .	27,9598.
39500. . .	34,1446. . .	5,4631. . .	28,6815.
40000. . .	35,0143. . .	5,6023. . .	29,4120.

Es fácil el uso de esta tabla: por ejemplo, se hallará que en la distancia de 6100 pies de Búrgos, la diferencia del nivel aparente al verdadero es de 0,8143. Lo que baja la altura por causa de la refraccion es 0,1303, y el esceso buscado 0,6840.

Cuando se quieran diferencias para distancias que no se hallen en la tabla, se calcularán como se ha dicho (527): asi pues, si se trata de conocer la elevacion del nivel aparente respecto á una distancia de 1062 pies de Burgos, se hará, $0,0219 : x :: 1000^2 : 1062^2$; de donde sale . . . . $x = \frac{0,0219\,(1062)^2}{1000^2} = 0,0247$.

Multiplicando este número (529) por 0,16 será 0,0039 el error de la refraccion; y el esceso de la elevacion del nivel aparente sobre el mismo error será de 0,0208.

Del mismo modo podria hallarse el esceso para una distancia mayor que la última de la tabla: en todo caso se facilitará mucho el cálculo por el uso de los logaritmos.

Descripcion y uso de los instrumentos empleados en la nivelacion.

531. Para hallar la diferencia de nivel entre dos ó mas puntos, solo hay dos medios: el uno se funda en el equilibrio que toman los líquidos cuando estan en reposo, y el otro en la propiedad, llamada *fuerza de gravedad*, que tiene todo cuerpo sólido de dirigirse hácia el centro de la tierra cuando se halla abandonado á su gravitacion. La direccion de esta fuerza es perpendicular al horizonte sensible, del punto terrestre en que se hace la estacion.

Fundados en estos dos principios se reducen á tres clases (si bien combinadas de diferentes maneras) los instrumentos empleados en la nivelacion; á saber, el nivel de perpendículo, el nivel de agua, y el de aire.

Primera clase.

Fig 236 532. Un hilo GP, en cuya estremidad se ata un peso P, se llama *plomada*.

El nivel mas sencillo de esta clase, usado particularmente en la carpinteria y albañileria, es el llamado *escuadra de albañil*, por que es en efecto una escuadra ABC de madera bien seca. Generalmente tiene mas de un pie de largo desde el vértice B hasta el travesaño ó liston DE, colocado á 3 ó 4 pulgadas de los estremos AH, IC, que tienen regatones de hierro y distan igualmente de B. La distancia FE se hace igual á la FB y desde B y por el medio de la GF se traza una línea BGF, la cual prolongada cortará perpendicularmente á la base AC.

Si se suspende un perpendículo en el punto G, y se coloca la escuadra sobre una regla de modo, que el hilo de la plomada P coincida con la recta GF, es evidente, que, siendo por naturaleza la direccion de la plomada perpendicular al horizonte, y tambien por la construccion y colocacion del instrumento perpendicular á la recta ó regla AC, esta se confundirá con la horizontal. La línea GF suele llamarse *línea de fé.*

533. Como el calor, el frio, y la humedad influyen en las di- *Fig* 237
mensiones de la madera, la recta GF podrá, dejar de ser perpendicular á la AC, y formar con la DE un ángulo que no sea recto. Si se supone que la plomada GP deba tomar la direccion GK, y se tira la horizontal AN, la línea AC que indica la direccion de la regla sobre que se coloca la escuadra ABC, hará con dicha horizontal un ángulo CAN, igual al FGK de la plomada GP con la perpendicular GK; porque los dos triángulos AFL, GFK, rectángulos en L y K, tienen además los ángulos AFL, GFK iguales.

Para cerciorarse de la exactitud de la escuadra se la cambia *Fig* 236
de posicion (una vez que la línea MN sea horizontal), de modo que el estremo IC quede colocado sobre el AH, y este sobre el IC: el perpendículo entonces en ambas posiciones deberá coincidir con la línea de fé.

Cuando el ángulo GFI es agudo, si se cambia la posicion de *Fig* 237
la escuadra en los términos dichos dejando la regla AC como estaba, la plomada, que debe formar con la perpendicular GK un ángulo igual al CAN, tomará otra direccion que hará con la GK un ángulo tambien igual al CAN. Si esta direccion es, por ejemplo, GO, se tendrá OGK=CAN=KGF. Luego el perpendículo no marcará la misma línea despues de cambiada la escuadra. Luego si se toma el punto K igualmente distante de O y de F, por él deberá pasar la línea de fé. Luego el nivel en virtud de estas operaciones se habrá verificado y rectificado.

534. Aunque no coincida la plomada con la línea de fé, si cambiada la posicion de la escuadra cae la plomada á una distan-

cia de aquella, igual á la que estaba en su primera posicion, es evidente; que la escuadra es exacta, pero que la AC, ó plano sobre que se coloca, no es horizontal.

535. El nivel de perpendículo ó escuadra sirve á los albañiles para colocar en posicion horizontal las hiladas de ladrillos ó de sillería, y á los carpinteros para los tirantes, vigas, &c.

*Fig*238 Puede el nivel ser sólido como el ABC, y tambien llevar pínulas en sus estremos, y colocarse sobre un pie; con lo que se podrán tirar visuales horizontales de bastante estension, segun la
*Fig*239 vista del que opera. Para las solerías, empedrados, &c. puede el nivel tener la forma S.

Los artilleros para apuntar los cañones y morteros podrian tambien servirse de un nivel de perpendículo construido á propósito, con su pié para ser colocado sobre la pieza, y su alidada que marque en un arco graduado el ángulo con que quiere apuntarse. Este sin embargo suele determinarse en los cañones á ojo, empleándose roscas ó cuñas para elevar la pieza: en los morteros se determina por una escuadra pequeña de metal con su semicírculo y plomada.

*Fig*240 536. El *Terasi*, único nivel conocido por los fontaneros de Constantinopla, es un nivel inverso de perpendículo. Se reduce á un triángulo ABC isósceles, suspendido por la base á igual distancia de los puntos A,B, con dos anillas K,K′; por las que pasa un cordon *bmb′* de 40 á 50 varas de longitud, cuyos estremos terminan en unas evillas *b*.*b′* enganchadas en los corchetes K,K′, que corren á lo largo de los jalones, perchas, ó miras TP, T′P′.

Si el cordon es del mismo grueso en toda su longitud, y los corchetes K,K′ están de nivel, su peso hará que forme una curva *bmb′* evidentemente simétrica con respecto á la vertical *mp*, que pasa por la mitad *m* del cordon. Asi pues, marcado el punto medio *m* es claro, que, luego que la plomada se ajuste con la línea de fé *m*F, los corchetes K,K′ estarán de nivel, esto es, que la línea *bb′* será la horizontal: y que asi como con la escuadra de perpendículo se halló el ángulo de inclinacion, y por consiguiente la altura de un punto sobre otro, asi tambien con el terasi, una vez verificada la coincidencia, habrá solo que restar KT de K′T′, y la diferencia tT' será lo que está mas alto el punto T que el T′, ó este mas bajo que el primero; contando con que las perchas ó jalones se hayan colocado bien verticales.

No es preciso que el terasi tenga una forma regular ni que sea homogéneo: basta que el cordon lo sea, que este tenga un mismo grueso en toda su longitud, y que esté bien determinada su mitad. En fin, es fácil de conocer el modo de marcar la línea de fé, y de verificar y rectificar este nivel; sea ó no homogéneo; tenga forma regular ó irregular.

537. El terasi puede emplearse para conocer directamente los puntos, que están de nivel con otro conocido; ó los que están mas altos ó mas bajos que éste una cantidad dada. Para ello basta marcar en las partes TK, T′K′, inferiores á los puntos de union K,K′, las alturas en la relacion conveniente al caso que se trata de resolver; poner sobre el punto conocido la mira que le corresponde; ir colocando la otra sobre los demas puntos del terreno; y hacer que el perpendículo en cada posicion de las dos miras coincida con la línea de fé.

Esta clase de nivel es sumamente sencilla y portátil, y su uso no ofrece incertidumbres. Las operaciones que exije no son embarazosas, y es fácil de construirlo en cualquier caso urgente. Es verdad que la poca longitud del cordel obliga á multiplicar las operaciones; pero tambien lo es que proporciona la ventaja de dar las distancias, á medida que se hacen aquellas, pues que la cuerda puede ser de una longitud determinada.

Niveles de perpendículo para pendientes ó CLITÓMETROS.

538. Los albañiles y empedradores emplean un método bien sencillo para poner de nivel, ó con una inclinacion dada, varios puntos. Se valen de tres ó mas muletillas de 2 y ½ pies de alto y 1 pulgada de grueso: dos de ellas se colocan en los puntos b,b' que están ya de nivel, y la tercera sobre el b'' que se quiere esté en la misma horizontal $ab'r$ de aquellas. Al efecto se sube ó baja la tercera muletilla por el reglon ó vara $b''f$, hasta que la parte superior sh de ella enrase con la superior de las situadas en b,b'. Póngase en b'' un montoncito de tierra ó piedras, ó clávese un piquete de la *Fig* 241

altura $b''t$, ó bien señálese esta en el baston; de cualquiera de estos modos se tendrá la parte $b''t$ que debe elevarse el punto b''; ó lo que deberia rebajarse, en caso de haber estado mas alto que t.

Facilmente se concibe, que si las cruces h de las muletillas b, b' están en un plano inclinado cualquiera, correspondiente al que pasa por los puntos b, b' del terreno, se tendrá el punto b'' con la misma inclinacion, enrasando como antes, la cruz ó parte superior h de la tercera muletilla con la de las primeras. Las muletillas en ambos casos se colocan verticalmente; y de modo que sus listones ó cruces h queden paralelas entre sí, y transversales á la línea que se quiere nivelar.

539. Se llaman niveles de *inclinacion* ó *pendientes* los instrumentos que se emplean para hallar el declivio, pendiente, ó inclinacion de una línea ó direccion de un terreno; y como estas voces y la de nivel se contradicen, se ha decidido llamar á estos instrumentos *clitómetros* ó *eclímetros*.

Fig 242 540. El mas sencillo de esta clase de niveles se reduce á una escuadra BAD de madera, en que $CI = IH = IG = 2$ y $\frac{1}{2}$ pies: AI es perpendicular á la GH ó á la BEFD. En la madera de GH hay embutida una plancha de metal, sobre la que se describe con centro en C un arco eaf de 5° desde a hasta e, y otros tantos desde a
Fig 243 hasta f. Cada grado se subdivide en 12 partes iguales: estas valen cada una 5′, y se toman de 10 en 10 para marcar la division de f á e con los números 0, 10, 20, 30, hasta 120.

Fig 242 Es claro, que, si en una posicion del eclímetro señala la plomada ó perpendículo la division 60 del medio, el plano sobre que esté el instrumento será horizontal. Pero si la plomada cae mas cerca del punto B que del D, el primero estará mas bajo que el segundo. Asi pues, poniendo el nivel de modo que las divisiones caigan á la derecha del observador colocado frente de la parte 120, si la plomada marca una division mayor que 60, la 80 por ejemplo, será prueba de que el plano ó regla, sobre que se halla el nivel, forma con el horizonte un ángulo de elevacion de $80 - 60 = 20$ divisiones $= 5' . 20 = 100' = 1°, 40'$. Y si en la misma disposicion del instrumento señálare la plomada una division menor que 60, tal como 45, la regla formará con el horizonte un ángulo de depresion de $60-45=15$ divisiones $=15.5'=75'=1^{\circ}, 15'$.

Es evidente, que, si la division se hubiese hecho á uno y otro lado de a, poniendo cero en este punto, habria que indicar con el signo $+$ los ángulos de elevacion, y con el $-$ los de depresion; pues el valor de los ángulos no bastaría á dar idea precisa de la direccion del plano. Pero por el medio adoptado se sabe sin necesidad de señales especiales, que, cuando el número que marca la plomada ó perpendículo es mayor que 60, el ángulo se forma sobre el horizonte; y debajo, cuando el número es menor.

541. A esta *escuadra-eclímetro* pueden añadirse pínulas con visagras para doblarlas sobre la base BD cuando convenga: y aun en el medio de esta puede añadirse un tallo, que se una á una rodillera y pie correspondiente, asi para dirigir por su medio visuales á la cúspide M de cualquier objeto; como para conocer el ángulo ICN$=$MBL, que forma con la BD la horizontal BL, y calcular en seguida en el triángulo rectángulo BML, sabida la distancia BL entre el objeto y el observador, la diferencia de nivel de los puntos B y M. *Fig*244

Sea por ejemplo BL$=500$ varas, y señale el perpendículo 80 será el ángulo MBL$=1^{\circ}, 40'$ (540), y se tendrá;

$$R : \text{tang } B :: BL : LM = \frac{BL \cdot \text{tang } B}{R},$$

$$\text{ó} \ldots\ldots\ldots\ldots \; LM = \frac{500 \cdot \text{tang } 1^{\circ}, 40'}{R};$$

esto es . . . . Log $500=2,6989700$

Log tang $1^{\circ}, 40'=8,4638486$

C.L.R$=0, \ldots\ldots$

ó . . . . LM$=1,1628186=14,^{vars.}548$

Réstense de este número la diferencia del nivel aparente al verdadero, y el error de la refraccion (tabla 530), ... 0,0046

con lo que la elevacion de M sobre B será . . . . 14,5434*vs.*

542. Puede evitarse el uso de los logaritmos en el cálculo que precede, siempre que en lugar de describir en el nivel el arco espresado se tire una recta BD perpendicular á la AI; y que

siendo esta, como se ha dicho, igual $ID=IB=2\frac{1}{2}$ pies, se suponga la CI dividida en 720 partes iguales ó medias líneas: con lo que la BD estará dividida en 1440, desde el punto D por ejemplo, en el cual se escribirá o, y el número 720 quedará en la division I del medio.

Si por las pínulas se dirije una visual á la cúspide de una montaña, ú otro cualquier objeto mas elevado ó mas bajo que el punto B, caerá el perpendículo á uno ú otro lado del punto I; y si estuviere separado de B la cantidad de BN, formará el triángulo rectángulo CIN semejante al BLM, los cuales darán la proporcion $CI : IN :: BL : LM = \frac{IN \cdot BL}{CI}$. Mídase BL con la cadenilla ó de otro modo, y sea$=675$ varas; véase el número de partes marcadas por el perpendículo, que se supondrá ser ahora 380; y se tendrá $LM = \frac{380 \cdot 675}{720} = 356$ varas 9 pulgadas.

Nivel de Agrónomo.

543. En la misma clase de eclímetros de perpendículo puede incluirse el nivel de agrónomo destinado á los usos de la agricultura, como el riego y otros.

Fig 245 Este nivel debe ser, ademas de sumamente sencillo, tal que baste un hombre solo para las operaciones que con él se hagan. Asi, sean AB y AC dos reglas de madera de $1\frac{1}{2}$ pulgadas poco mas ó menos de escuadría, y 4 pies de largo, que formen una especie de compás por su movimiento al rededor de A, en que habrá un tornillo con tuerca, y el mango A. En E y D de los lados AB, AC, se harán unas mortajas á igual distancia del eje A para atravesar otra tercera regla, que se sujetará á aquellos por dos tornillos. Las distancias entre AD y AE respecto á la abertura DE serán :: 4 : 6 por ejemplo; de modo que si AB=4 pies, DE tendrá 6 pies.

Se marcará el medio F; se colgará de una anilla en el tornillo A un perpendículo AG; y en fin se cortarán en esviaje ó al sesgo los estremos B y C, de los lados AB, AC.

Segun la anterior construccion el triángulo ADE es isósceles; y la línea AFG que pasa por el medio F de DE será perpendicular á esta, la cual es por consiguiente paralela á BC.

544. Para servirse de este instrumento se colocarán debajo de los estremos B, C dos planchas planas *ab*, *cd*, de hierro, ó pedazos de solera circulares de 5 á 6 pulgadas de diámetro, ambas de igual grueso, y con una escopleadura en sus centros para recibir perpendicularmente las puntas de hierro *f*, *f* que por la parte superior penetrarán en los estremos B, C: todo para impedir que los lados se introduzcan desigualmente en la tierra.

545. Los canales ó acequias de riego necesitan tener cierta inclinacion para facilitar la corriente del agua, y vencer la resistencia de los rozamientos. Cuanto mayor sea esta resistencia, tanto mas debe aumentarse la pendiente; y como aquella es, en igualdad de circunstancias, mayor en una acequia ó canal estrecho, que en uno anchuroso, de aqui el tenerse que aumentar la pendiente á proporcion que las acequias sean mas estrechas (*)

La esperiencia ha demostrado, que las acequias ó zanjas mas estrechas necesitan una pendiente igual á $\frac{1}{200}$ de su longitud. Por tanto á medida que la zanja va siendo mas grande, debe disminuirse progresivamente la pendiente á $\frac{1}{300}$, $\frac{1}{400}$ de su longitud.

Supóngase, que la línea BC del instrumento se ajuste con la BH de nivel del terreno; y que se le haga tomar despues la posicion BH′, línea dependiente de la zanja ó acequia que quiere construirse. Es claro, que el punto C vendrá á C′; que en este movimiento todas las partes del nivel tomarán una inclinacion igual al ángulo CBC′; y que la direccion AG de la plomada pasará á AG′ formando el ángulo $GAG' = CBC'$. Si BK representa la longitud de la acequia ó zanja, y KH′ perpendicular á BH la pendiente que quiere darse á aquella longitud, se tendrá en los triángulos semejantes BH′K, AFF′, que $BK : H'K :: AF : FF' = \frac{H'K}{BK} \times AF$; esto es, que para tener el punto F′, que ha de marcar la plomada para dar á la zanja la pendiente pedida, debe multiplicarse la AF, conocida por la relacion entre la pendiente y la longitud. Si $\frac{H'K}{BK} = \frac{1}{200}$, se tendrá $FF' = \frac{AF}{200}$; por consiguiente

(*) Fabre. *Traité sur les torrens et les rivières.*

tomando $\frac{1}{200}$ de AF, y llevándolo de F á F′, se determinará el punto F′ por el que debe pasar la plomada en este caso. Del mismo modo, si H K$=\frac{1}{300}$, se tendrá un nuevo punto F′ de $\frac{1}{300}$ de AF. Asi se hallarán sucesivamente en la línea DE los puntos de division que se quieran, y se marcarán con líneas en direccion del eje en A, grabando el número que determina el denominador de la relacion, y poniendo o en F, 200 en F′, &c.

SEGUNDA CLASE.

Niveles de agua.

Corobates ó niveles de agua de los griegos.

546. La primera idea de los niveles de agua debió dimanar de la propiedad de este líquido, cuando se halla en reposo, de quedar siempre horizontal su superficie superior; cuyo principio se aplicó sencillamente á la *corobates* de los griegos. Este instrumen-
Fig 246 to estaba reducido á un canal ó cajon CD de madera, de 20 pies de largo, con dos plomadas en sus estremos para colocarlo en la posicion horizontal. Se le echaba agua hasta la altura de algunas pulgadas, y cuando quedaba en reposo se veia si el terreno era horizontal; porque en tal caso era igual la distancia de todos sus puntos A,B á la superficie CD del agua contenida en el cajon.

Este instrumento de dificil transporte, reducia ademas las operaciones únicamente á 20 pies de distancia.

547. Despues del Corobates el mas sencillo de los niveles de que se trata es el conocido por *nivel de agua*; el cual bajo del mismo principio que aquel se compone de un tubo de cobre, laton, hojadelata, &c. MM′, con un recodo en sus dos estremos para colo-
Fig 247 car dos frascos cilíndricos F, F de cristal, abiertos en la parte superior. El todo está colocado por su mitad P sobre una rodillera, que se une á un trípode, para poder bajar, subir, inclinar y girar el tubo segun convenga.

548 Para servirse de este instrumento se vierte agua poco á

poco por uno de los frascos, hasta que suba en ambos como á los dos tercios de su altura; en seguida se tapa uno de los mismos frascos y se pone el tubo casi vertical, para que el aire en él contenido salga por el otro frasco.

En todo rigor, como lo prueba la esperiencia, las dos superficies g, g' del agua en los frascos no tienen perfectamente á nivel todos sus puntos; pues cuando el diámetro de los frascos es pequeño, las moléculas del agua en contacto con el cristal están mas elevadas que las correspondientes al medio ó eje de la columna flúida; por consiguiente las superficies son cóncavas. Este fenómeno proviene de la cohesion del líquido, y de la adherencia entre este y el cuerpo sólido (*).

549. De lo dicho se infiere, que, para que una visual tirada con este instrumento sea horizontal, deberá rasar los bordes superiores de las uñas ó lúnulas que se suponen iguales, $m\ n\ p$, $m'n'p'$; formadas por el fluido; ó aun mejor, los puntos mas bajos n, n' de las estremidades de las columnas de agua. Como á corta distancia del instrumento las superficies laterales de las lúnulas parecen líneas negras trazadas horizontalmente en el cristal, é indican con bastante exactitud la posicion de un plano horizontal, deberá el nivelador colocarse á distancia, que no sea grande; y dirigir sus visuales tangentes á las paredes esteriores de los frascos, y en los planos determinados por las mismas líneas. Esto puede ejecutarse de cuatro modos distintos, fáciles de comprender. *Fig* 248

550. Los frascos deben ser de cristal bien transparente, y tener iguales dimensiones; porque si el uno fuese de un diámetro interior mucho mas pequeño que el otro, las superficies superiores del flúido no estarian perfectamente de nivel entre sí, pues subiria mas la del estrecho, á causa del efecto capilar visible: de lo que

(*) El mercurio encerrado en un tubo de vidrio estrecho, como el del barómetro, ofrece un efecto contrario. Pero quitando á las paredes interiores del tubo la humedad, que por su interposicion disminuye la accion recíproca del cristal y del mercurio, la superficie superior de este perderá su convexidad, y será cóncava como la del agua. Véanse las teorías de los tubos capilares de Laplace, y el tratado de fisica de Haüy.

resultaria que la línea no seria horizontal, y sí algo inclinada al horizonte.

551. Si los frascos no tienen dimensiones iguales, resultará tambien que las visuales horizontales que se tiren, jirando el instrumento sobre su centro, no estarán todas en un mismo plano, si el tallo de la rodillera no es exactamente perpendicular á la horizontal.

Para probarlo supóngase, que el punto A se halle á igual distancia de los ejes FM, F′M′ de los dos frascos de una misma dimension; que el instrumento inclinado sobre su pie PP′ y en la direccion *ab*, dé la horizontal HH′; y que segun otra direccion *cd* sea KK′ la horizontal. Es evidente, que en este caso las porciones de líquido comprendidas en una y otra parte entre las dos secciones elípticas serán siempre del mismo volúmen, y que en cualquiera posicion del instrumento respecto á los puntos del horizonte todas las líneas, tales como las HH′, KK′, cortarán á la primera en un mismo punto A situado en el eje de rotacion AP, y en la horizontal HH′.

Pero si uno de los frascos, F′ por ejemplo, fuera de menor diámetro interior que el otro, los volúmenes que resultasen de la seccion del plano KK′ al pasar por el punto propuesto, no solo no serian equivalentes, sino que el mas pequeño corresponderia al frasco mas estrecho. Por manera que, si se supone que en este se haya elevado la superficie del agua ½ línea medida en el eje F′M′, aun deberá elevarse menos la del frasco mas ancho, pues que los volúmenes han de ser iguales: la línea de nivel KK′ cortará entonces necesariamente el eje de rotacion AP por debajo del punto A. Sin embargo, aunque los diámetros de los frascos sean sensiblemente desiguales, se podrá, con tal que ninguno sea capilar, usar del instrumento con toda confianza, cuidando de colocarlo á la derecha ó izquierda de la línea que une los dos puntos que quieren nivelarse, y de dirijir visuales á ambos sin variar la posicion del nivel.

552. Debe cuidarse de que durante las operaciones no se salga el agua por las juntas del tubo, y de que en los fuertes calores y las lluvias sean cortas las operaciones en cada estacion; porque en todos estos casos se aumenta ó disminuye el volúmen del agua.

553. Cuando se lleva el nivel de un punto de estacion á otro, se tapa uno de los frascos, y se inclina el tubo para que el agua no se vierta; porque de lo contrario se pierde tiempo en reponerla, y en desalojar el aire contenido en aquel. Despues de colocado el nivel se tapa de cuando en cuando uno de los frascos con el dedo, que luego se retira despacio: con esto se consigue al fin, disminuir en el agua la oscilacion producida por el movimiento del tubo cuando se le dirije al objeto, ó punto de mira.

554. En fin se tiñe el agua con algun color para hacerla mas visible; y cuando hay precision de nivelar durante los grandes frios, se hecha aguardiente.

555. Michelotti, ingeniero en Turin, logró hacer desaparecer varios de los defectos, que presenta en su uso el nivel de agua. Para ello tomó frascos cilíndricos de escelente cristal, y de igual forma que los vasos comunes de beber; los taladró por el fondo; y los encerró en unos tubos cilíndricos de laton: dividido cada uno de estos en el sentido vertical en cuatro partes iguales, dos de ellas alternadas en claro, y las otras dos de laton pintadas interiormente de negro. De este modo el agua de que se llena el tubo, por limpia que esté parece negra, y las dos superficies de nivel se cortan ó contraponen perfectamente en la atmósfera.

Los vasos tienen de 3 á 3 $\frac{1}{2}$ pulgadas de diámetro, con lo que son insensibles las uñas ó lúnulas. Para evitar los efectos del viento se tapan los vasos con planchas de metal, unidas á rosca al cilíndro metálico, y se las deja un agujerito en el centro; de todo lo cual resulta la comodidad de poderse echar el agua y de limpiar los vasos cuando convenga.

556. El autor del ensayo sobre la nivelacion, año de 1805, propone que los vasos entren en el tubo á rosca de cobre, con su zapata de cuero como en las bombas, para evitar la salida del agua; que las cubiertas de los vasos de metal estén forradas de cuero, como las tapas de las cajas de tabaco; que los agujeros de las cubiertas de los vasos tengan sus tapones; y que estos se pongan en un cono pequeño de cobre, formado á propósito á un lado de los agujeros para cuando se quieran dejar descubiertos los vasos.

557. En el principio sentado para la construccion del nivel de

agua, se funda la del instrumento que los fontaneros llaman *ventosa*; la cual les sirve para inferir por tanteos el paraje hácia donde está
Fig 249 rota, ó se filtra una cañería. Consiste la ventosa en un tubo *ab* de hojadelata, de $2\frac{1}{2}$ á 3 varas de alto, y una pulgada de hueco. Lleva en su estremo una parte curva *cb* para introducirla en la cañería; y en su largo diferentes tubitos *d*, *d*, que se cierran con tapones de corcho.

558. Si puesta la ventosa, por ejemplo en *e*, y tapando la cañería en *f*, sale el agua por el tubito d' poco mas bajo que el nivel del agua en el arca *g*, es claro, que entre esta y el punto *e* de la cañería no hay rotura alguna: lo mismo sería si saliese el agua por d'', d''', &c. Pero si colocada la ventosa en *h*, despues de haberlo estado en los puntos *e*, *i*, no sale el agua, se infiere que la detencion, ó escape por alguna rotura, se halla en el espacio *ih*. Y si en la misma posicion de la ventosa sale el agua por un tubito, por ejemplo d', no estando este á la misma altura que el agua en el depósito, se deduce haber un escape ó filtracion parcial.

La ventosa evita el tener que descubrir toda la cañería, pues basta hacer calas en los puntos convenientes, y encontrado el trozo donde está el mal, dejar al descubierto la parte correspondiente de cañería, para poder componerla.

TERCERA CLASE.

Niveles de aire.

Nivel sencillo de ampolla de Thévenot.

559. Consta este nivel de un tubo AB de cobre ó laton, con
Fig 250 una claraboya CD en el medio de su parte superior para dejar ver otro tubo *ee* de cristal, tambien cilíndrico, con sus estremidades cerradas herméticamente: el largo y diámetro del tubo son arbitrarios. Estos dos tubos, que vienen á formar uno solo, se colocan sobre una plancheta *ff* de cobre: el de cristal se llena casi enteramente, bien de alcohol, bien de áccido nítrico desleido en agua para resistir á las bajas temperaturas. El vacío, que queda sin llenar de líquido,

lo ocupa una ampolla de aire; la cual, al levantarse ó bajarse el nivel por uno de sus estremos, corre á lo largo del tubo, hasta que se fija debajo de una señal hecha en medio de la parte superior del tubo de cristal, bien perceptible á la vista. Cuando esto sucede, el plano sobre el cual está colocado el instrumento se halla en la posicion horizontal. Pero cuando la ampolla de aire se aproxime á uno de los estremos del tubo, el plano estará inclinado respecto al horizonte, y la parte elevada será aquella hácia donde se dirija la ampolla.

566. La exactitud de este nivel depende de que el tubo de cristal sea perfectamente cilíndrico, y de la estrema *sensibilidad* del instrumento; esto es, de la prontitud con que la ampolla de aire se separe del punto medio para correr hácia la estremidad mas elevada, cuando se dá al nivel una inclinacion por pequeña que sea. A pesar de ello se tendrá por un defecto el que la ampolla fuere demasiado inconstante. Importa que su longitud sea considerable, y en relacion con la del tubo; porque siendo esta muy pequeña, la ampolla es poco perceptible, parece pegada al cristal, y se mueve con dificultad. Su figura es mas ó menos oblonga segun la temperatura de la atmósfera.

561. Tambien en este instrumento se ponen pínulas, en las cuales están vaciados unos pequeños espacios cuadrados *a*, *a* para *Fig* 251
colocar dos hilos de cobre, que se cruzan perpendicularmente; y al lado, en correspondencia con cada uno de los espacios vaciados, para dirigir las visuales un agugerito *b*, *b'* muy pequeño, pero que por mucho que lo sea siempre ofrece un espacio bastante grande, para que pueda determinarse con precision el punto de nivel.

562. Puede tambien sustituirse á las pínulas un anteojo, con el cual se determinará exactamente un punto de nivel à distancia considerable. El nivel de aire tiene además la ventaja, de que para verificar la operacion basta, despues de tirada la visual, cambiar la posicion del anteojo, y observar si el centro de los hilos del cristal corta el mismo punto que antes del cambio.

563. *El nivel de Chezy*, de la clase de los de aire pero sumamente perfeccionado, es el que se usa mas generalmente. Las principales piezas de que se compone, son: un nivel pequeño de

Fig 252 aire N, suspendido á un anteojo acromático H K, cuyos dos tubos, y 252′ ocular y objetivo, pueden sacarse mas ó menos: la regla AB, que en A, B tiene dos apoyos ó pilares A*e*, B*g*, sobre los cuales se coloca el anteojo: el tallo TC con dos chapas ó carrilleras circulares C, C, y entre las cuales y sobre su centro, puede girar en el plano vertical el arco en que se reunen las ramas ó brazos, que sostienen la parte superior del instrumento: la mesilla *mp*, que se une á los pies, y en medio de la cual se afirma el tallo T: una charnela *d*, sobre la que puede girar el nivel N: un tornillo *c*, con el cual se acerca ó aparta el nivel al del anteojo: el tornillo sin fin S, que, en-
Fig 253 granando en los dientes del arco LL′, da al instrumento el movimiento de arriba abajo sobre el centro *c* como se ha dicho: el tornillo V de presion, para dejar libre ó apretar con el anillo *z* el tallo T que entra por el collar P asegurado á la mesilla del trípode por las tres alas *p* con sus tornillos, y para dar al instrumento el
Fig 252 movimiento veloz circular, ó quitárselo enteramente: y en fin el tornillo *y* tangencial ó de coincidencia, y que engrana en el tambor *gy*.

Verificacion y rectificacion del nivel de Chezy.

564. La verificacion se reduce: 1.°, á saber si el eje óptico, al pasar por el centro del ocular y la interseccion de los hilos del retículo, coincide exactamente con el eje del cilindro del anteojo: 2.°, á cerciorarse si dicho eje es exactamente horizontal, y paralelo á la línea del nivel del tubo en que está la ampolla de aire. La 1.ª verificacion y su correspondiente correccion se enseñaron mas arriba (129). Para la 2.ª verificacion póngase la ampolla de aire en el medio del tubo, valiéndose del tornillo S; mírese á un objeto; hágase describir al instrumento una semirrevolucion; sáquese el anteojo de los apoyos, y colóquese de nuevo en ellos, de modo que el ocular vuelva á quedar al lado del observador; corríjase la posicion de la ampolla, si fuese necesario, por medio del tornillo S; y diríjase otra vez la visual al objeto primero: si la visual entonces marca el mismo punto, es seguro que el eje óptico del anteojo es horizontal. Si no lo marcare, y pasare por encima ó debajo del punto, se aproximará ó apartará lentamente la estremidad *c* del nivel, por medio

del tornillo, haciendo coincidir la ampolla de aire en el centro del tubo por el tornillo S. Se verá el punto á que vá á parar el eje óptico, para tomarlo por nuevo punto de mira; y se repetirá la operacion, hasta que se logre que el eje óptico marque el mismo punto en las dos posiciones del instrumento.

En fin, en el uso de este se procura que la mesilla *mp* quede horizontal, para que despues de las espresadas correcciones todos los ejes ópticos, en las diferentes fracciones de arcos que describa al rededor del horizonte, estén en un mismo plano.

565. Puede usarse de un nivel mas sencillo, y por consiguiente de menos costo, de mas fácil manejo que el que acaba de describirse, y que reuna las mismas ventajas: tal es, el inventado por M. Busson. Se compone de una regla LZ que gira entre dos *Fig* 254
casquetes IA, GF, sobre su centro *e*: al casquete inferior está unido el tallo, y á este la nuez que entra en la rodilla P. L H, Z K son dos apoyos para el anteojo: el 1.° sube ó baja por medio del tornillo B; y el 2.° es fijo.

El tubo del ocular N puede correr interiormente; y esteriormente el tubo objetivo MP. En V hay un nivel transversal para poner siempre el anteojo en la misma posicion, de modo que la ampolla del nivel R corresponda constantemente al medio de su tubo. O es el tornillo para el ajuste de los hilos del retículo.

566. Se han discurrido ademas otras combinaciones para fa- *Fig* 255
cilitar el uso de estos niveles, y hacerlos mas exactos: una de ellas es la de que consten de dos anteojos, situados sobre una misma plancha de cobre, puestos sus ejes en sentido inverso, y entre los dos el nivel de aire; lográndose de este modo el dirijir visuales á objetos opuestos, sin variar la posicion del instrumento (*).

567. El nivel de Chezy, y los demas descritos, son únicamente para colocarse sobre la línea en que se opera, pues no hay medio de poner horizontal la mesita sobre que giran: tienen un

(*) Hay varios niveles que se usan poco; como los de Picard, Huyghens, Roemer, La Hire, y otros antiguos y modernos. El describirlos aumentaría el volúmen de esta obra; pero el profesor podrá darlos á conocer á sus discípulos, manifestando á estos sus ventajas y defectos, y facilitar por comparacion los medios de adelantar en este ramo.

movimiento de rotacion, es verdad, pero no es segura la horizontalidad mas que en una posicion. De este defecto está libre el nivel de Troughton, que, situado en un punto conveniente, sirve sin moverse para hacer 8, 10, ó mas niveladas. Esto resulta de hallarse montado sobre una platina parecida á la del Teodolito: tiene una ampolla de aire muy prolongada, y hay en el tubo unas señales que marcan la posicion de la ampolla. Se coloca el tubo en el plano de dos tornillos opuestos, y se nivela despues de hacer lo mismo con los otros dos; quedando su plano perfectamente horizontal, en términos que en toda posicion permanece la ampolla de aire sin variacion de sitio.

Eclímetro de aire de Mr. Chezy.

568. Asi como los niveles de perpendículo se han aplicado para hallar los grados de pendiente ó inclinacion; asi tambien se ha hecho uso de los de aire para el mismo objeto.

Fig 256 El Eclímetro se compone de una regla AB de un pie de largo, en la que está asegurado un nivel de aire *nn*: en los estremos A, B de la regla se levantan perpendicularmente dos pínulas formadas de un marco ó bastidor, la una AF de 48 líneas de altura, y la otra BE de 21. Este conjunto de piezas se une á otra regla CD por una charnela C, en cuyo centro gira aquella. En D hay una tuerca V, que engrana en el tornillo H para acercar ó retirar la regla AB de la CD; y en medio de ésta están aseguradas las planchas *h*, *fg*, y el tallo, nuez, &c.

Fig 257 *y* 258 Entre los largueros de la pínula grande AF hay un tablero RS, que se sube ó baja con prontitud empujando ó tirando del boton *p*, despues de desengranados los dientes K por medio del tornillo P. Si se quiere que el movimiento sea mas lento, ó insensible, se engranarán los dientes valiéndose del mismo tornillo P (*), y se dará vuelta en la direccion conveniente al *m*. En un lado del tablero hay un claro Z, y en él colocados dos hilos ó cerdas que

(*) La figura 258 es la misma 257 mas en pequeño, y vista por la otra cara.

se cruzan en ángulo recto: al otro lado, y á la altura del hilo horizontal, se taladra en el tablero un agujerito cónico L con su base hácia la parte interior, para que el nivelador dirija las visuales.

La pínula pequeña BE tiene tambien su tablero con su claraboya, y en esta los hilos cruzados y el agujerito L′, ambos en contraposicion de sus correspondientes en la pínula grande; de *Fig* 259 modo que al nivelar resulten estar el agujerito de la pínula pequeña, la interseccion de los hilos en la pínula grande, y el punto de mira, en una misma línea recta, haciendo para ello bajar ó subir el tablero de la pínula pequeña por el tornillo E de coincidencia.

569. Resta ya manifestar el modo de dividir el marco de la *Fig* 256 pínula mayor, para obtener las divisiones relativas á las pendientes, tanto por pie como por metro. Obsérvese respecto á esto, que teniendo la regla AB exactamente un pie de largo desde la cara esterior de la pínula pequeña hasta la esterior de la grande, solo *Fig* 257 hay que tomar desde N′ espacios de dos en dos líneas, los cuales se dividen en medias líneas, como se ve en la figura: los puntos de division N′, M′, O′, se numeran . . . 0, 1, 2, 3, 4, 5, por la razon que se esplicará luego.

Aunque las partes mas pequeñas del marco XT sean solo de medias líneas, se pueden tomar exactamente espacios menores con el auxilio de un nonio ó nuñez, construido en el tablero RS del modo siguiente.

Se trazarán otras divisiones iguales entre sí, pero de suerte que 12 de estas equivalgan á 11 de las partes mas pequeñas del marco; con lo que cada division del nuñez representará $\frac{11}{12}$ de línea.

La primera línea de division R′ marcada 0, se llama línea de fé; y cuando corresponde exactamente á la señalada 0 en el marco, debe próximamente quedar un pequeño intérvalo entre el borde *Fig* 256 inferior del tablero y la regla AB: porque de lo contrario podria *y* 257 suceder que las variaciones de longitud de RR′ y de XN′, causadas por la temperatura, no fueran exactasmente las mismas ó que no se pudiesen hacer coincidir las líneas R′0, N′0.

Si se ajusta sucesivamente cada línea de division del nonio con una línea de division del marco, la línea de fé 0R′ recorrerá, contando desde el punto de salida, $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12} \dots \frac{12}{12}$, del espacio mas pequeño del marco.

*Fig*260 Supóngase, que el lado CM del triángulo rectángulo CMN sea horizontal; en este caso, si CM es de una toesa y MN de una pulgada francesa, la pendiente de la recta indefinida CB será de una pulgada por toesa; y si C*m* es de un pie, *mn* será la pendiente por pie de la misma recta. Pero en los triángulos semejantes CMN, C*mn*, se tiene. . . . CM : MN : : C*m* : *mn*;
ó 1 toesa$=$72 pulgadas: 1 pulgada: : 1 pie$=$144 líneas : x líneas;
*Fig*257 luego $x=2$ líneas. He aqui la razon porque el espacio N′M′ que comprende 2 líneas, se marca solo con el número 1. Asi pues, el espacio de 4 líneas marcado 2 indica dos pulgadas de pendiente por toesa, el espacio de 6 líneas, 3 pulgadas de pendiente, &c.

De lo dicho resulta, que el mas pequeño espacio del marco da un cuarto de pulgada, ó 3 líneas de pendiente por toesa. Respecto á pendientes por toesa, que no son múltiplas exactas de 3 líneas, se las halla por medio del nonio; pues en efecto la coincidencia entre la primera línea de division de este y la primera del marco, indica $\frac{3}{12}$ ó un cuarto de línea de pendiente por toesa. Si fuese la segunda la que coincidiera, indicaria $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$ línea de pendiente por toesa, y asi sucesivamente.

Deben pues marcarse con 1 la cuarta línea de division del nonio, con 2 la octava, y con 3 la duodécima, para que estas mismas líneas manifiesten respectivamente por su coincidencia 1, 2, ó 3 líneas de pendiente por toesa.

Para graduar el instrumento, de modo que dé la pendiente por metro, si se quiere por ejemplo que á cada metro correspondan 5 milímetros de pendiente en el marco X′T′, y si es como antes la regla AB de un pie de largo, se tendrá:
1^{mar} : $0,^{m}005$: : AB$=$1 pie$=$0,32484 : $x=0,^{m}0016242$, magnitud de cada una de las mas pequeñas divisiones del marco x'T′.

Como no se podrian trazar desde luego, con exactitud estas divisiones, se multiplicará el valor de x por 64,(*) y el producto

(*) El factor 64 depende de la longitud encontrada para la pínula grande, ó lo que es lo mismo, del número de veces que pueden colocarse en ella 0^{m},0016242, que representa la pendiente de 0,005 por metro, en la longitud de pie francés dado á la regla sobre la que se coloca el nivel.

$0^m,1039488$ será el valor absoluto de nT'. Fijada ya esta altura, se la dividirá en 16 partes iguales, y se subdividirá cada una de ellas en otras cuatro, con lo que cuatro de estas últimas corresponderán á una pendiente de $4\times0^m,005=0^m,02$ por metro, y esto es lo que marca la cifra 2: por igual razon 8 espacios corresponderán á 4 centímetros de pendiente por metro, como lo indica el número 4; y asi de los demas números.

En cuanto al nonio se vé, que, pues cinco divisiones de él componen cuatro del marco, cada una de las primeras comprende un espacio relativo á $\frac{0,02}{5}=4$ milímetros de pendiente por metro. Asi la diferencia de una division del nonio á una division de la pínula corresponde á un milímetro de pendiente por metro.

Sería conveniente dar á la regla AB una longitud de 3, ó 4 decímetros, pues cuanto mas larga sea, tanto mas exacto será el instrumento; y siendo entonces partes exactas del metro las divisiones mayores de la pínula, se trazarán con mas facilidad.

Sea por ejemplo AB de tres decímetros: será preciso, para que las mayores divisiones del marco $X'T'$ den dos decímetros de pendiente por metro, que el espacio nm sea de seis milímetros; y en este caso se escribirá 2 sobre la línea de division m, haciendo el resto de la construccion como se ve en la figura.

571. Para cuando el instrumento que se use esté construido, como se ha esplicado, con medidas francesas, se harán las indicaciones convenientes, á fin de facilitar su aplicacion como si estuviese construido con medidas castellanas.

Como la subdivision de la toesa es en pies, pulgadas, &c., del mismo modo que la vara española, resulta; que, tomando la division 2 que equivale á 2 pulgadas por toesa ó 6 pies franceses, esta relacion será la de 1 á 3, y podrá aplicarse á la vara castellana, aunque las dimensiones sean en medidas francesas. La division 1 corresponderá á $\frac{1}{2}$ pulgada por vara, y el total de la regla que es 24 á 12. La $\frac{1}{2}$ pulgada por vara dividida en dos partes representa $\frac{1}{4}$, y la subdivision $\frac{1}{8}$.

Una diferencia del nonio será de 1,5 puntos; la division 1 del nonio, que antes marcaba 1 línea, corresponde ahora á 6 puntos; la division 2, á 12 puntos, ó una línea; que es lo que debia suceder, porque 3 pies son la mitad de una toesa, y por consiguiente todas las divisiones tienen en este caso un valor súbduplo para las relaciones buscadas. Le tendrian duplo, si la escala se quisiese aplicar á 12 pies en lugar de 6.

La division de metros sirve tambien en el marco ó bastidor para la aplicacion en medidas castellanas, pues que 12 pulgadas francesas, que es la longitud de la regla, valen en medida métrica lo mismo que 14 españolas. La escala sirve para pendientes de $0,^m 005$ por metro; tambien podria aplicarse en virtud de lo que se acaba de decir á las pendientes de $0,^m 0025$ y $0,^m 01$ con el nuñez respectiva mente de $0,^m 0005$, $0,^m 002$ y $0,^m 01$.

Seria fácil presentar una division de medidas castellanas, dando á la regla 12 ó 15 pulgadas españolas; pero, como esto no varia la esencia de las operaciones anteriores, se ha limitado la esplicacion al uso que deberá hacerse del instrumento francés, tal cual le ha ideado su inventor.

Verificacion, rectificacion y algunas aplicaciones del Eclímetro.

Fig 256 572. Para verificar este nivel, una vez que esté colocado el tallo verticalmente en su pie, la línea o del nonio en coincidencia con la misma de la pínula, y la ampolla en medio del nivel *nn* con el auxilio del tornillo V, se fijará en el terreno un punto en la direccion del agujero del tablero de la pínula grande, é interseccion de los hilos del de la pequeña. Hágase luego describir al instrumento una circunferencia: y, si queda la ampolla en el medio, entonces la visual que pasa por los puntos ya dichos de las pínulas, se dirijirá al mismo punto que en la primera posicion del instrumento; esta visual será horizontal; y el nivel resultará exacto, ó lo que es lo mismo quedará *verificado* el eclímetro. Pero si la visual marca otro distinto punto, será preciso hacerla coincidir con el primero; ó bien *rectificar* el instrumento,
Fig 259 ya inclinando en parte el tallo *t*, ya elevando ó bajando en parte el tablero de la pínula pequeña por medio del tornillo E, hecho

todo esto en operaciones repetidas hasta que desaparezca el error (*).

573. Este instrumento puede servir, como los otros niveles, para nivelar; y tambien para hallar ó arreglar las pendientes.

Para hacer uso de él como nivel, rectificado ya, colocado el tablero de la pínula pequeña á la altura conveniente, puesto en o el índice del tablero de la pínula grande, y fija la ampolla del aire perfectamente en el medio del tubo de cristal del nivel, se observa por los dos agujeritos para ver si la visual tirada al mismo objeto pasa en ambos casos por el mismo punto de interseccion de los hilos; y si pasare, en este estado ya puede usarse como nivel de aire.

574. Pero el eclímetro, empleado como tal tiene dos objetos, que son: trazar en un terreno líneas de inclinacion dada, y medir la pendiente de un terreno en una direccion tambien dada.

Para ejecutar lo primero, puesto el tablero de la pínula pequeña á la altura conveniente, se ajusta el o del índice del tablero de la grande, con el número que marque la inclinacion de la línea que se quiere trazar. Supóngase esta de 1 pulgada y 8 líneas por vara: se *Fig* 261
colocará el índice encima de la division marcada 1, y mas allá de la primera subdivision siguiente; y despues por medio del tornillo M se irá moviendo lentamente el tablero grande, hasta que una de las divisiones del nuñez se ajuste con otra del bastidor, lo que se verificará cuando la línea segunda, que cae debajo del 2 en las primeras divisiones, corresponda á la inmediata debajo del 3 en las segundas. Teniendo dispuesto asi el nivel, se le coloca en el punto estremo desde donde deba empezarse á contar la pendiente; y se dirije la visual por los hilos y el agujero, hasta cortar en la mira (568) un punto marcado de antemano á la altura correspondiente á la inclinacion dada, para lo cual se aleja ó aproxima la mira.

(*) Por la construccion del instrumento, esta verificacion no resulta siempre exacta, y aun puede echarse á perder la posicion que estaba bien; pues es claro que trayendo la parte C del instrumento á D, habrá que deprimir las reglas hasta obtener un plano horizontal, que no será el mismo que el 1.° si el nivel está bien arreglado. En los instrumentos en que el anteojo se saca de los collares, es en los que resulta exacta la verificacion por el método de cambio aqui espresado. *Fig* 256

Si se quiere prolongar la línea, mas allá del punto en que está la mira, se pasa el nivel al mismo punto, y se lleva la mira mas adelante para ejecutar igual operacion á la primera: asi se continuará para marcar otro tercer punto, y todos los demas que quieran unirse por líneas de una misma inclinacion.

Para lo segundo; esto es, para el problema inverso, ó para la averiguacion de la pendiente de un camino ó de una línea dada. Es claro, que con el eclímetro se podria hallar, asi como con otro nivel cualquiera, la diferencia de altura entre los dos puntos del camino ó línea; y que, dividiendo dicha diferencia por el número de varas ó pies que haya entre los espresados puntos, el cociente será la pendiente que corresponda á cada vara ó pie. Pero si se quiere hacer la operacion sin medir la distancia, el eclímetro dará desde luego la inclinacion buscada; como va á verse.

Fig 262 Sea AB la línea cuya inclinacion se trata de conocer. Colóquese el instrumento en un punto cualquiera P de ella; márquese con la plomada el punto D del terreno que corresponde verticalmente al *r* de la pínula pequeña; elíjanse cerca y equidistantes de D otros puntos E, F; póngase en o el índice de la pínula grande; y empléese el eclímetro como nivel para hallar las alturas EG, FH de la horizontal G*o*H, que pasa por el agujero *r* de la pínula pequeña, y sobre los citados puntos E, F. Llévese á larga distancia hácia uno de los estremos de la AB una mira con la altura IK$=$*r*D, mitad de la suma de las alturas halladas EG, FH; súbase el tablero de la pínula grande, de modo que se puedan ver por el agujero de la pequeña en el mismo rádio de la visual el punto de la mira K, y el hilo horizontal de la pínula grande: entonces el índice del tablero marcará la pendiente de la línea AB.

Nivel de reflexion. (*)

575. Se compone de un paralelipípedo de cobre PQRS de $2\frac{1}{2}$ pulgadas de lado, que tiene cubierta una de las caras con un espe-
Fig 263 jo, y remata en una anilla superior A, para colgarlo de uno de los

(*) Inventado por Mr. Burel, Teniente coronel del Cuerpo de Ingenieros militares de Francia.

dedos de la mano, ó de un baston. Tambien puede ponerse para las operaciones delicadas en una armadura R á propósito, apoyándolo sobre un pie T como el de los otros instrumentos, y quedando su es- *Fig* 253′
tremo superior entre dos ejes horizontales como las brújulas usadas en la navegacion; ó bien se suspende de una anilla, y una hebilla de alambre que forme dos ojos verticales, que se corten perpendicularmente. Para detener las oscilaciones, que colgado de este modo tendria el instrumento, é impedir los efectos del viento, hay una palanca *f* de metal, llamada *freno*, que con uno de sus brazos oprime la parte inferior del nivel, con mas ó con menos fuerza segun la posicion que se da á un contrapeso P en el otro estremo de la palanca.

El espejo está dividido por una línea MM grabada en él, para- *Fig* 263
lelamente al lado inferior, ó en la diagonal *mm*: las cuales deben *y* 263′
quedar exactamente horizontales, cuando el instrumento se suspenda de un punto cualquiera. En los estremos de las líneas MM, *mm*, hay unas puntas de acero *r*, *r*, ó bien una abertura oblonga, ó triangular *s*, por donde se dirijen las visuales.

576. El uso de este nivel está reducido á elevarlo á la altura de los ojos, teniéndolo suspendido de su asa ó anilla, hasta que la línea MM pase exactamente por medio de la pupila del ojo, y se confunda en el espejo con su imágen; pues entonces el radio visual caerá perpendicularmente sobre el plano del espejo.

En esta posicion, la visual que pasa por el ojo y por una ú otra de las puntas *r*, *r*, es una línea horizontal; por lo que si se coloca una mira en un punto determinado de la prolongacion de la misma línea, se podrá saber la altura del punto sobre el terreno.

577. La verificacion del nivel reflector consiste en asegurarse: 1.°, de que el plano del espejo es vertical; y 2.°, de que la línea MM es horizontal cuando el nivel queda suspendido libremente. Para cerciorarse de lo 1.°, colóquese el observador á 30 ó 40 varas *Fig* 264
al frente de un muro vertical MM′, teniendo la vista por ejemplo en O con respecto al espejo, el que se supone haya tomado la posicion PP′: y prolónguese la visual, que pasa por el ojo y uno de los puntos que terminan la recta proyectada en K, hasta encontrar el muro en un punto cualquiera M; á cuyo efecto se nece-

sitará un movimiento ligero de cabeza, para dirijir la visual á una de las puntas *r*, *r*. Trácese por el punto M en el muro una horizontal; y dese media vuelta al nivel sobre su eje de suspension, volviendo el nivelador la espalda al muro, que antes tenia al frente. El espejo tomará entonces la posicion QQ′; el ojo estará en O′; la visual que pasa por la imágen de M y por el centro del ojo, prolongada por detras del nivelador marcará en el muro un punto M′, por el que se trazará una segunda horizontal; y si por el punto H, medio entre los M, M′, se traza una tercera línea tambien horizontal, por ella pasará el plano horizontal correspondiente al ojo del nivelador. De aqui es, que este haya de volverse y hacer girar el instrumento, quedando uno y otro como al principio para repetir la observacion directa, dando al espejo tal posicion, que la visual prolongada pase por el punto H. Esta rectificacion se ejecuta por medio del tornillo sin fin VV′, que pasa por la tuerca CC′, en la cual está asegurada el asa AC′; de modo que variando las posiciones del centro de gravedad de todo el sistema, se verifica que en una de ellas, queda vertical el espejo MM. El tornillo VV de la figura 263′ tiene el mismo objeto que el VV′ de la 263.

La segunda rectificacion es una consecuencia de la primera; pues, si estando libre el instrumento en las dos posiciones no da la línea horizontal, las visuales producirán en el muro líneas inclinadas, que pasarán por los puntos M, M′; la horizontal pasará por el punto medio entre estos; y la correccion se hará por el movimiento de rotacion, que sobre su plano se dará al nivel.

La comision del cuerpo de Ingenieros de Francia, y la sociedad de fomento, hallan en el nivel de reflexion las ventajas siguientes: sencillez en la ejecucion y rectificacion; considerable longitud de la línea de mira, ó distancia desde el ojo del observador al plano del espejo; estabilidad; pequeño volúmen; y en fin, prontitud en las operaciones.

Enseres accesorios para la nivelacion.

578. Como lo nivelacion se hace sobre una línea determinada, es preciso marcarla en el terreno, y para ello se necesitan jalones

y piquetes. Para dirijir las visuales se emplean las *miras*, que marcan el punto adonde van á parar aquellas, y dan su altura sobre el terreno. En fin, se lleva la cadeneta para medir las distancias entre los puntos, cuyas alturas se tratan de determinar.

De los jalones y piquetes, para marcar la línea que ha de recorrerse estableciendo los puntos de señal y rectificacion ó *reparo*, se ha hablado ya, lo mismo que de la cadena (48): resta dar á conocer la *mira*.

579. Esta consiste en una chapa *abcd* rectángular, de madera delgada, de carton, ó mejor de hierro batido, de 10 á 11 pulgadas de ancho y 6 á 7 de alto; que corre á lo largo de una percha *Fig* 265
de madera, ó varal, de 2 pulgadas de escuadria, y $2\frac{1}{2}$ á 3 varas de longitud, dividida en pulgadas y líneas. La superficie *abcd* de la mira está partida en su mitad á lo largo por la línea *mn*, y tiene una parte pintada de negro y la otra de blanco: tambien puede compartirse el lado en cuatro fajas, como se representa en la figura. Para subir ó bajar la mira á lo largo de la percha está asegurada á una vírola, que abraza la misma percha, y se une á un liston que se empuja, y por cuyo medio se alza ó baja mas ó menos la mira, segun previene el nivelador al peon que tiene verticalmente la percha delante de sí. Por lo regular se dirigen las visuales á la línea *m n*, y entonces hay que añadir á la altura de la percha desde su pié hasta la línea *ab* la parte *am*. Cuando se coloca el instrumento para averiguar su diferencia de nivel, basta tomar las dos alturas de la percha hasta la línea *ab*, aun cuando las visuales se hayan dirigido á la *mn*.

Si se toma la *mn* por línea de mira, y esta tiene 6 pulgadas de alto, la primera division de la percha debe ser de 3 pulgadas; por que cuando la parte inferior de la mira coincide con la de la percha, está la *mn* precisamente elevada 3 pulgadas, ó la mitad de la altura de *ad*. De donde se infiere, que lo mas cómodo será señalar la línea *mn* en la regla ó liston que sirve de palanca de la mira, y marcar las divisiones hacia la parte posterior de la percha.

580. Puede tambien disponerse la mira de modo, que, sujeta á una regla, corra esta por entre dos rebajos hechos en la percha. En uno de los lados de esta se hace la division, empezando por o,

desde el pié ó parte inferior; y en el otro lado, al contrario, poniendo el o en la parte superior, y siguiendo la division hacia la inferior. La regla, que mueve la mira, se divide tambien de arriba abajo desde la línea *mn*, principiando su numeracion por 6 pulgadas, ó 72 líneas que se suponen de altura á la mira.

581. En el uso de la mira puede ocurrir: 1.°, que la visual caiga mas arriba de las 2 varas, pudiendo llegar hasta 4, altura total despues de corrido el todo de la regla. En este caso, alineada la visual con la parte inferior *ab*, ó con la *mn* del medio de la tabla, la *eg* línea superior de la percha marcará en una de las divisiones de la regla la altura encontrada. 2.° Que la visual vaya á parar entre las *de* y *mn*: entónces se subirá la mira hasta que la visual corte á la *mn*, la cual señalará en las divisiones laterales la altura obtenida. 3.° Que la visual encuentre la mira por debajo de la *mn*: en este caso, se subirá la mira hasta que la visual intercepte á la *ab*, la cual marcará la altura buscada. 4.° En fin; que la visual caiga por debajo de la *ab*: entónces habrá que volver la percha de arriba abajo, é ir subiendo la mira hasta que la visual encuentre á la *ab*, ó á la *mn*.

El tornillo P, que está en la cara posterior de la percha, sirve para oprimir la regla contra los bordes del rebajo en aquella, luego que ya se ha hecho la coincidencia de la visual con la línea del medio, con la superior, ó con la inferior de la tabla de mira.

La mira debe ponerse verticalmente en cuanto sea posible, y sin moverla del sitio en que se situa. Si se pone sobre un tronco de árbol, ó sobre cualquier señal de piedra, &c., se cuidará de trazar una línea ó figura al rededor de su pié, de modo que pueda reconocerse perfectamente el punto cuando se contínúe la nivelacion.

582. Nada debe omitirse para la seguridad de la exacta anotacion ó apuntacion de las divisiones halladas en la mira. Al efecto, si despues de haber dirigido visuales y hecho varias señas al peon que lleva la mira se está seguro de hallarse su mitad interceptada por la visual; se coteja la altura escrita con la dada por el peon y se ve si coinciden con la que marca la mira. Es tan facil equivocarse; ya al leer en esta; ya al dar el peon al nivelador la altura hallada; ya al escribirla el último; que todas tres operaciones, por sí

tan sencillas, son causa fecunda de errores. Por lo tanto será conveniente que se vea la altura en la mira á un mismo tiempo por el peon que la lleva, y por el de la cadena ú otra persona, quedando fija la mira hasta que el ingeniero ó nivelador coteje todas las alturas por sí mismo.

Práctica de la nivelacion.

583. Se distinguen dos clases de nivelacion; la *simple*, y la *compuesta*. La primera es la que puede hacerse tirando una sola visual; ya colocando el instrumento en uno de los puntos estremos ó términos que se tratan de nivelar, (en cuyo caso la distancia no debe pasar de 300 varas, si se usa el nivel de agua); ya poniendo el nivel entre los dos términos, y mirando de una y otra parte, sin que se varie de situacion, en cuyo segundo caso la distancia entre dos puntos podrá ser de 600 varas.

La nivelacion *compuesta* es una série de nivelaciones simples hechas entre dos puntos: lo que tiene lugar cuando la distancia que ha de nivelarse pasa de las 600 varas, ó cuando el terreno presenta pendientes muy rápidas. De esto se infiere, que la nivelacion compuesta es la mas comun en la práctica; ora se trate de formar el proyecto de un camino; ora de conducir las aguas de uno á otro punto, para el consumo de los pueblos, desagüe de lagunas, &c.

584. Cuando desde un punto se tira una sola visual, la operacion se llama *nivelada sencilla*, para diferenciarla de la *nivelada doble*, en que se dirigen dos visuales desde un mismo punto.

Nivelacion simple.

585. El método mas sencillo, y al mismo tiempo mas exacto, es el de colocar el nivel K*s* precisamente en el medio *s* de la distancia E*sr*; pues asi no hay que llevar en cuenta el error de la refraccion (528), ni la diferencia del nivel aparente al verdadero. El punto *s* de estacion puede sin inconveniente estar fuera de la recta E*r* que une los dos puntos estremos. *Fig* 266

Fig 267

586. En todas las prácticas de nivelacion, de que se va á tra-

tar, se supone el uso del nivel de agua. En este concepto, cuando no fuere posible colocarse entre los dos puntos, y se quisiere saber cuanto está el punto *h* mas alto que el *s* siendo la distancia *sh* de 200 á 300 varas, colóquese el nivel en *s* verticalmente por medio de la plomada, y la mira en *h* del mismo modo. Hecho despues lo prevenido (548), se tirará la visual *pzq*, rasando con la superficie del agua en los dos frascos *oa*, *zb*; el peon subirá ó bajará la mira *q* segun las señales establecidas de antemano por el nivelador; y la fijará cuando este se lo dé á entender con otra señal, por haber coincidido la visual con la línea divisoria de la mira. Mídanse la *hq* y la altura K*s* del instrumento; réstese aquella de esta; y la diferencia dirá la elevacion del punto *h* sobre el *s*, pues el objeto es conocer á $hV = qV - qh = sK - qh$.

*Fig*267′ Pero si el punto *h* fuese la cúspide de una montaña, no se podria obtener la altura *hb* sino por varias niveladas sucesivas. Para hallar la horizontal *cb*, distancia entre los puntos *ch*, habria que calcularla por trigonometría, ó ir colocando el reglon ó cadena horizontalmente.

*Fig*266 587. Si la distancia es poco mas ó menos de 300 á 600 varas, y se puede colocar el nivel próximamente en el punto medio *s*, y una mira en cada punto E,L, se hace asi: despues se dirije desde *a* la visual XZG á la mira en L, y desde *b* la ZXV, que será prolongacion de la primera. Réstese LG de EV; y la diferencia será L*r*, diferencia de altura entre los puntos L,E.

*Fig*267″ 588. En el ejemplo anterior estaban los dos términos de la nivelacion debajo de la visual ó línea de nivel; pero pueden tambien hallarse de modo que vengan á estar, ya los dos sobre dicha línea, ya uno encima y otro debajo. En el primer caso, si se averigua el valor de las *fg* y *de*, su diferencia *fn* dirá cuanto está mas
Fig 268 alto el punto *a* que el *b*, respecto de la línea de nivel aparente *ge*. En el segundo, añadiendo á la altura CA la parte DE, se tendrá BF, diferencia de nivel entre los puntos D,B.

Nivelacion compuesta.

*Fig*269 589. Trátase ya de nivelar distancias mayores de 600 varas, y sirva de primer ejemplo la de 1563 varas entre los puntos A, O. Es claro, que, para averiguar con cuantas niveladas dobles podrá hacerse la operacion, habrá que partir 1563, distancia entre los términos de la nivelacion, por 600 varas, que es el mayor espacio que permite la nivelada doble con el nivel de agua. Pocas veces será el cociente un número entero: en el caso propuesto es 2 y mas de $\frac{1}{2}$; de que resulta que con dos niveladas dobles en M, C, y otra en H, de modo que RO sea algo mas larga que la mitad de SR, se tendrá hecha la operacion. Pero como no es del mayor interés que las AS, SR y RO sean iguales, podrá hacerse que AS y SR tengan cada una menos de 600 varas, y de este modo se igualarán con poca diferencia las tres distancias.

590. Supóngase que saliendo de A se quiera nivelar la subida AD, cuyo punto culminante (*) D está mas elevado respecto de A, que la mayor altura de la mira. *Fig* 270

Determinado el número de distancias ó niveladas, que se supondrán ser tres, AB, BC, CD, concíbanse por los tres puntos B, C, D, verticales, y por el A una horizontal, ó de nivel. $DA'=NA$ será la diferencia del nivel buscado entre los dos términos A, D de la nivelacion; pero como $DA'=AN=Af+fg+gN$, tan solo habrá que hallar el valor de estas tres últimas líneas.

La visual kk' de la 1.ª estacion da . . . $Af=B1=Ak-Bk'$;
——— ll' de la 2.ª . . . . . . $Bg'=C2=Bl-Cl'$;
y como $Bg'=fg$, resultará. . . . . . . $fg=C2=Bl-Cl'$.
En fin. . mm' de la 3.ª. da. . . . . . . $Ch=D3=Cm-Dm'$:
pero. . . $Ch=gN$; . . . . luego. . . . . $gN=D3=Cm-Dm'$.

Sustituyendo cada uno de estos tres valores en la espresion de AN, se tendrá . . $DA'=AN=Ak+Bl+Cm-Bk'-Cl'-Dm'$,
ó . . . . . . $DA'=Ak+Bl+Cm-(Bk'+Cl'+Dm')$.

Pero los tres primeros términos son las alturas de la mira en los puntos de la espalda, y los otros tres las de la mira hácia el frente; luego *en la nivelacion compuesta, en un terreno que va siempre subiendo, la diferencia de nivel entre los dos términos*

(*) Esta voz se ha hecho de uso frecuente en España en las relaciones topográficas, y en las operaciones militares.

consiste en la suma de las alturas de la mira á la espalda, menos la suma de las de la mira del frente.

591. Sea la diferencia de nivel que se busca, la que hay entre los puntos D, E en la bajada DE; y supónganse tres las estaciones en los puntos D, O, P. Para hallar la diferencia de nivel en este caso, concíbanse como antes las verticales y horizontales correspondientes.

La diferencia de altura entre D, y E es . . . .

$$DE' = ES = Sr + rq + qE;$$

pero. . . . . $Sr = Oh' = Om'' - Dm'$,

$$rq = Pu = Pt' - Ot,$$

$$qE = Ex - Pu';$$

luego sustituyendo. . . . .

$$DE' = Es = (Om'' + Pt + Ex) - (Dm' + Ot + Pu').$$

Es decir, que la diferencia de nivel entre los dos términos de la nivelacion, en un terreno que vá siempre bajando, es igual á la suma de las alturas de la mira del frente, menos la suma de las de la mira á la espalda.

Como la ecuacion anterior puede ponerse bajo la forma $DE' = -ES = (Dm' + Ot + Pu') - (Om'' + Pt' + Ex)$, podrá tambien en este caso seguirse la regla del anterior, pues la diferencia de signo solo indicará la circunstancia de ir el terreno bajando, si en aquel iba subiendo.

592. Si se aplica lo dicho en los dos anteriores números, (como sucederá cuando se busque la diferencia de nivel entre los puntos A, E, para lo cual hay que hacer tres estaciones subiendo y tres bajando), concíbanse lo primero las verticales y horizontales por los correspondientes puntos A, B, C, D, O, P, E. Habiendo ya hallado $AN = (AK + Bl + Cm) - (BK' + Cl' + Dm')$, y $ES = (Om'' + Pt' + Ex') - (Dm' + Ot + Pu')$; y observando que la diferencia de nivel entre A y E es AN—SE (pues NS es una línea horizontal), se tendrá . . . .

$$Az = Ey = (AK + Bl + Cm + Dm' + Ot + Pu') - (BK' + Cl' + Dm' + Om'' + Pt' + Ex).$$

En esta ecuacion el primer término es la suma de las alturas de la mira de la espalda, y el segundo el de las correspondientes al frente; de que se sacará la regla que sigue. *En las nivelaciones de terrenos que presentan subidas y bajadas la diferencia de nivel entre los dos términos es siempre igual, á la suma de las alturas de la mira de la espalda menos la suma de las de la mira del frente.* De aqui se deduce:

1.º Que si la suma de las alturas de la mira de la espalda es mayor, que la suma de las del frente, el término ó punto de salida estará mas bajo que el de llegada.

2.º Que si la primera suma es menor que la segunda, el primer término estará mas elevado que el segundo, y la diferencia de nivel será negativa.

3.º Que si las dos sumas son iguales, los dos términos estarán de nivel.

Es evidente que la fórmula hallada se simplificará, cuando haya alturas de mira de la espalda iguales á otras del frente.

Registro de nivelacion.

593. Como la nivelacion se hace sin emplear la cadeneta, ó empleándola, el modelo de registro que se pone á continuacion servirá para uno y otro caso, con solo añadir para el segundo la casilla, que esprese las longitudes entre las estaciones.

Núm. de las estac.	*Alt. de la espalda.*	*Alturas de frente.*	*Observaciones.*
1 . .	3 vs. 5 pulg. (*a*)	0,4 pulg.	(*a*) Término de la salida marcado por una cruz en el umbral de la puerta de la casa de campo de. . . . .
2 . .	2 6. . . .	0,3	
3 . .	3 4. . . .	0,8	
4 . .	1 9. . (*b*)	1,2	(*b*) Señal para confrontar marcada en la roca tal por una cruz ó barreno etc. en la hacienda de. . . . . .
5 . .	0 8. . . .	3,4	
6 . .	0.2p.s 9. . (*c*)	4,6	(*c*) Término de llegada marcado con una cruz en el pilar etc. del puente......
Totales	*varas pies pulgs.* 10 2 5	*varas pies pulgs.* 8 2 3	

Siendo la suma de las alturas de la espalda mayor que la de las del frente en 2 varas y 2 pulgadas, esta cantidad será lo que el punto de salida está mas bajo que el de llegada.

Fig 271 594 Cuando al trasladar al terreno un proyecto la línea de trazado *a*, *b*, *c*, *g*, forma varios ángulos *b*, *c*, *g*, como por lo regular debe suceder en los paises montuosos, se hace la nivelacion por el camino mas directo; pero cuidando de marcar desde las estaciones mas próximas las alturas de mira, correspondientes á los ángulos que no esten en el camino seguido por la nivelacion. Estos puntos intermedios entre los dos términos no corresponden verdaderamente ni á los de la espalda, ni á los del frente; pero pueden mirarse como puntos de estacion particular, y de este modo se apuntan en un registro las niveladas tiradas desde un mismo punto.

Asi, por ejemplo, suponiendo *a*, *g*, los términos de una sola estacion, y que sin variar la posicion del instrumento se tomen sucesivamente las alturas de mira en los puntos *a*, *b*, *c*, *g*, podrá mirarse la distancia como compuesta de tres estaciones particulares, cuyos términos de espalda y frente son, respectivamente á la primera *a*, *b*; á la segunda *b*, *c*; y á la tercera *c*, *g*: bajo este concepto se forma el siguiente

Modelo de registro de nivelacion, en que se tiran varias niveladas desde un mismo punto de estacion.

Núm. de las estacs.	*Longitud entre las nivelaciones.*	*Alturas de la espalda.*	*Alturas del frente.*	*Observaciones.*
1.ª	65 vs. 2 ps. (*a*)	1 v. 2 ps. 3 pulg.	0....1....5	(*a*) Término de tal.
	93.			
	108 &c.		&c.	
2.ª	20. . . (*d*).	. . . .	.	Señal tal.
	130			
	60			
	77. . . (*f*)	. . . .	.	(*f*) Señal de rectificacion ó comprobacion fuera de la línea en tal punto, etc.

Nivelacion con el círculo repetidor.

595. El círculo repetidor puede emplearse con la mayor exactitud en todas las operaciones de la nivelacion, como nivel de aire, y como eclímetro. *Si conocida la distancia horizontal* m *entre dos puntos* a, l *se quisiese su diferencia* ql *de nivel verdadero, suponiendo que solo uno de los puntos* l *sea inaccesible*, mídase la inclinacion de la direccion aparente al sobre el horizonte de a, ó bien el ángulo zenital de l $lag=h$, complemento del de inclinacion. Si se llama c el ángulo, que forman en el centro c las verticales en los puntos a, l, será $r=(0{,}08)\cdot c$; y el ángulo Fig 234

$$lag=h+0{,}08\cdot c=h+r.$$

En el triángulo lac se tiene, $lq+qc=ac\dfrac{\text{sen}\,(h+r)}{\text{sen}\,(h+r-c)}$: haciendo $h+r=t$ será $lq+qc=\dfrac{\text{sen}\,t}{\text{sen}\,(t-c)}$; y $lq=-qc+\dfrac{\text{sen}\,t}{\text{sen}\,(t+c)}$.
Y llamando S la distancia de a al centro de la tierra, será. . . .

$lq=\text{S}\left(-1+\dfrac{\text{sen}\,t}{\text{sen}(t-c)}\right)=\text{S}:-\dfrac{\text{sen}\,t-\text{sen}\,(t-c)}{\text{sen}\,(t-c)}$. Asi se vendrá á parar en la fórmula (*). . . . .

$$lq=2\text{S}\frac{1}{\text{R}^2}\cot\left(t-\frac{c}{2}\right)\tan\frac{c}{2}+2\text{S}\frac{1}{\text{R}4}\cot^2\left(t-\frac{c}{2}\right)\tan^2\frac{c}{2}\ \&\text{c.}$$

Serie en la cual basta calcular el primer término, y suponer S igual al rádio de la tierra, en el concepto de esférica.

Tipo del cálculo.

Sea la distancia horizontal entre ae, de. . . . 4000 pies, y la distancia zenital aparente de l tomada en a $h=90°\ 6'$.
El ángulo formado en el centro por las dos verticales será (372)

$$c=0{,}3812''\ \frac{c}{2}=0{,}1906''.$$

(*) Puissant, tratado de Geodésia, página 230 y siguientes.

El error de la refraccion (529). . . . $r=0{,}08c=0^\circ{,}152''$,
será. . . . . $t=h+r=90^\circ{,}360+0{,}112''\ldots 90^\circ{,}512''$,

y. . . . . . . $t-\frac{c}{2}=90^\circ{,}512''-0{,}1906=89^\circ{,}2206''$.

El radio de la tierra (527) $s=7{,}627{,}270$ varas,

$$\text{Log. } 2\,s=\text{L. } 15254540=7{,}183400,$$

$$+\text{L.cot}\left(t-\frac{c}{2}\right)=\text{L.cot } 89^\circ{,}2206''=7{,}82976,$$

$$+\text{L.tan}\frac{c}{2}\ =\text{L'tan } 0^\circ{,}1906''=7{,}96568.$$

Suma $=$ . . . . $22{,}978844$,
-2L. radio de las tablas . . . . . . 20.

L. altura . . . . . $2{,}97884=953$ pies

596. *Tambien se puede encontrar la diferencia de nivel verdadero entre dos puntos accesibles, sin saber antes la distancia horizontal que hay entre ellos.*

Se tomará en el punto a con el círculo la distancia zenital aparente de e, y en este la de a; ó bien lo que es mejor, dos observadores toman á un mismo tiempo las dos espresadas alturas zenitales. El error de la refraccion en ambas puede suponerse igual, y tener las verdaderas distancias zenitales $t=h+r$, $t'=h'+r$.

El triángulo lac dá. . . . . $cl=cm\,\dfrac{\text{sen } cal}{\text{sen } cla}$:
ahora, si fuese $ca=s$, como
antes. . . . . . . $lq+s=s\,\dfrac{\text{sen } t}{\text{sen } t'}$,

resultaria . $lq=s\,\dfrac{\text{sen } t}{\text{sen } t'}-s=s\,\dfrac{\text{sen } t-\text{sen } t'}{\text{sen } t}$;

en donde solo habria que sustituir por t,t' sus valores $h+r$, y $h'+r$, averiguando al efecto el valor de r.

En el triángulo acl, en que c es el valor del ángulo formado en el centro por las dos verticales en a y l, se tiene. . . . .

$$acl=qal-alc, \text{ ó } c=t-(180^\circ-t'),$$

y sustituyendo. . . . . $c=h+r-180^\circ+h'+r$:
pero. . . . . $r=0{,}08c$,
de donde. . . . . $c=\frac{r}{0{,}08}=\frac{100}{8}\,r$,
y por otra parte. . . . $c=\frac{100}{8}r=h+h'-180^\circ+2r$;
luego. . . . . $r=\frac{8}{84}(h+h'-180^\circ)$.

Pudiera darse al valor de lq una fórma mas cómoda para el cálculo segun se ha hecho en el caso anterior, (*) y se tendria. . . .

$$lq = 2s\frac{1}{R^2}\cot\left(\frac{t+t'}{2}\right)\tang\left(\frac{t-t'}{2}\right) + \&c.$$

597. *Si* a *fuese el horizonte del mar y uno de los estremos de la distancia; si el otro estremo* l, *desde donde se descubre el mar estuviese elevado; y se quisiera la diferencia de nivel* lq *entre ambos términos*, se tendria; que, siendo r la refraccion correspondiente al ángulo azimutal, este ángulo ya correjido será $t = h + r$. El ángulo del centro $c = t - 180^\circ = h + r - 180^\circ$: porque el triángulo lac es rectángulo en a y dá

$$cl = ca\frac{R}{\cos c}, \text{ ó}\ldots s + lq = s\frac{R}{\cos c},$$

y de aquí. . . . $lq = s\dfrac{R - \cos c}{\cos c}$.

Pero como. . . $R - \cos c = \dfrac{2}{R}\,\text{sen}^2\dfrac{c}{2}$ (**),

se tendrá. . . . . $lq = s\,\dfrac{2}{R}\,\text{sen}^2\left(\dfrac{c}{2}\right)\dfrac{1}{\cos c}\cdot\dfrac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, c}$,

y . . . . $lq = s\,\dfrac{2}{R}\,\text{sen}^2\left(\dfrac{c}{2}\right)\dfrac{\tan c}{R}\cdot\dfrac{1}{\text{sen}\, c}$.

Y siendo tambien . . . . $c = \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{c}{2}\right)\cos\left(\dfrac{c}{2}\right)$,

el valor anterior será $lq = s\,\dfrac{\text{sen}\left(\frac{c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}\cdot\dfrac{\tan c}{R}$,

ó en fin. . . . . $lq = s\dfrac{1}{R^2}\tan\left(\dfrac{c}{2}\right)\tan c$;

forma adecuada para el cálculo logarítmico: pero en que hay que calcular tambien, como en los dos casos anteriores, la refraccion r, por que ha entrado en el valor de c.

(*) Véase Puissant, ya citado; y Berkaven, tratado de nivelacion.

(**) Véanse las proposiciones de trigonometría al principio de este tratado.

598. Si se recuerda lo dicho (267) respecto al barómetro para medir alturas, se inferirá fácilmente, que tambien con él se hallan las diferencias de altura ó nivel entre los varios puntos, con una exactitud comparable á la que se obtiene empleando los diversos niveles descritos.

599. Por estos medios se han obtenido las alturas de muchos puntos de la tierra, de los que solo se pondrán aqui los que ofrecen mayor interés.

	Montañas.		*Varas castellanas sobre el nivel del mar.*
Monte blanco	(*Alpes.*)	Europa.	5713,
Mulhacen	(*Granada.*)	Europa.	4254,
Etna	(*Sicilia.*)	Europa.	3837,
Canigon	(*Pirineos.*)	Europa.	3327,
Olimpo	(*Grecia*)	Europa.	2379,
Vesubio	(*Nápoles*)	Europa.	1434,
Chimborazo	(*Perú.*)	América.	7812,
Propocatepoc.	(*Méjico, volcan.*)	América.	6461,
Pico de Orizaba.	(*Méjico.*)	América.	6335,
Picos de Himalaya.	(*Tibet.*)	Asia.	9357,
Monte Líbano		Asia.	3477,
Elburit	(*Cúspide del Caucaso.*)	Asia.	2108,
Pico de Tenerife		Africa.	4439,
Hacho de Ceuta. Abila.	Columnas de Hércules.	Africa.	229,
— de Gibraltar. Calpe.	Columnas de Hércules. (*España.*)	Europ.	510.

Pasos de los Alpes.

Paso del Gran San Bernardo	2941,
— del pequeño	2623,
— de San Gothardo.	2483,
— del Simplon	2399.

De los Pirineos.

Puerto de Pineda	3010,
——— Gavarnia	2791,
——— Cabarero	3062,
——— Tourmalet	2625. (*)

Sitios habitados.

Quito	(*Perú.*)	3479,
Méjico		2724,
Palacio de San Ildefonso.	(*Castilla.*)	1382,
Madrid		728,
Moscou		359,
París		88,
Roma	(*Capitolio.*)	56,
Berlin		41.

Alturas de algunos edificios.

La pirámide mas alta de Egipto	175,
La cúpula de San Pedro de Roma sobre el suelo de la Plaza	158,

(*) Los límites de la vejetacion de algunos árboles y plantas pueden servir para indicar aproximadamente las alturas de las montañas.

La viña no vejeta, sobre el nivel del mar, á	840 varas.
El maiz	1013
El nogal	1316
El fresno	1732
El abeto	2273
El pino	2453

Del mismo modo el límite de las nieves perpetuas que es de:

Bajo del ecuador	5743
A 45° latitud	3050
A 65° etc.	1795

La cúpula de San Pablo de Lóndres.	132,	
La aguja de los inválidos de París.	126,	
La columna de la Plaza de Vendome.	52,	(*)
La Giralda de Sevilla	116, 2pies.	
La torre de la Catedral de Málaga	110.	

Del perfil del terreno.

Fig272 600. Si ACDEFGHK representa una línea cualquiera trazada sobre la superficie de la tierra, ya siguiendo una sola direccion, ya muchas; si por un punto cualquiera de ella se supone que pasa una línea horizontal AB; y si desde los C, D, E, F, G, H, K, se bajan perpendiculares sobre la horizontal; es claro, que conocida la longitud de cada una de ellas, y tambien las distancias de unas á otras tomadas en la AB, se tendrá la altura de todos los puntos de la ACD, &c. Esta línea se podrá describir sobre el papel conforme á una escala determinada, tal como se halla en el terreno, y resultará lo que se llama el *corte* ó *perfil* de este; que como se vé, *es la línea* ACDE, &c. *con la altura de sus puntos, y la distancia respectiva sobre la horizontal.*

Su objeto es espresar sobre el papel todas las desigualdades de altura de una línea tirada en el terreno; mientras que el plano manifiesta su situacion horizontal en la superficie.

Las undulaciones ó curvas del terreno se trazan tomando puntos mas ó menos próximos, cuyas distancias á un plano horizontal son conocidas: en el perfil, este plano se halla representado por una recta, que puede tomarse como eje de abscisas, para dar posicion á las alturas ú *ordenadas* en cuyos estremos se encuentran los puntos de las undulaciones ó curvas.

(*) La torre de la Catedral de Sevilla fué construida en tiempo de los Arabes, hácia el año de 1000, por Heber arquitecto y matemático natural de aquella ciudad. En su principio solo tuvo los 250 pies de altura, que hay hasta el arranque del cuerpo en que hoy están las campanas. En 1568 el insigne arquitecto Fernan Ruiz, natural de Córdova, la aumentó 100 pies, que se hallan distribuidos en los tres cuerpos que terminan la torre; de modo que desde el nivel del terreno de su asiento hasta las plumas del capacete de la figura llamada *giralda* tiene 350 pies.

La línea del perfil sobre el terreno será generalmente una línea quebrada, ó curva, la cual se encontrará sobre la superficie de un cilindro, cuyas generatrices serán las verticales que pasan por los diferentes puntos de aquella. Como se sabe que esta superficie puede desarrollarse, se estenderá en un plano, valiéndose de la rectificacion del trazo, que es conocido con solo unir los puntos en el plano. Dando á las perpendiculares á la línea del trazo, que pasan por estos puntos, el valor que las corresponda, se conseguirá la transformacion de la línea del perfil, sea la que quiera; y si esta línea forma inflexiones, la operacion se hará con igual facilidad.

Como en el papel no puede representarse, en todo rigor, la línea de perfil formando ángulos; y, aunque se pudiera, como apenas resultaria de ello ventaja alguna, se espresan en una misma línea recta, asi el eje como la línea del perfil.

601. Si bien la posicion del eje de las abscisas es arbitraria considerada aisladamente, (pudiendo por ello pasar este por el punto que se crea mas conveniente, con tal que se conozca su posicion con respecto al sitio desde donde se principia la nivelacion); con todo no lo es asi cuando median condiciones dadas, á que es preciso atender.

Si despues de haber referido las ordenadas al eje AB, se quieren considerar con respecto á otro eje A′B′, ó A″B″, tirado por encima ó por debajo del 1.º en cierta cantidad conocida AA′, AA″, es claro, que las nuevas ordenadas serán. . . . .

respecto al punto A. . . . . $\begin{cases} o - AA' = -AA', \\ o + AA'' = AA''; \end{cases}$

respecto al... C.. $\begin{cases} o - CC'' = -CC'' = -(C''C' - CC') = CC' - AA', \\ o + CC''' = CC''' = C''C''' + CC'' = AA'' + C''C'''; \end{cases}$

y asi respecto á los demas puntos. En cuanto á las abscisas, deben referirse al principio del eje, y éste al punto ó término de salida: por consecuencia, en el caso presente, á la vertical A′A″ que pasa por A. Pero si se las quiere referir á otro punto S ó S′, á derecha ó izquierda de A en cierta cantidad conocida, no habrá mas que aumentar ó disminuir á cada abscisa las partes AS′ ó AS. El valor de las abscisas se tiene por medio de la medicion con la cadeneta.

602. Hay dos clases de perfiles, el longitudinal y el transver-

sal: el 1.º es el tomado á lo largo de la línea del medio de un proyecto, ó de una obra existente.

El 2.º ó transversal corta al traves, y en direccion perpendicular, al longitudinal; y por consiguiente al proyecto ú obra.

Cuando el perfil pasa por una pendiente cuyo declivio varía de modo que resulte aquel muy irregular, hay que formar muchos perfiles transversales entre dos puntos de estacion, y siempre perpendicularmente al perfil lonjitudinal.

En el transversal se distinguen su derecha é izquierda, suponiendo que el nivelador marcha por el eje longitudinal en la direccion de la corriente del agua, si la hay ó debiere haberla; ó en el sentido de sus operaciones, cuando no la hay. En este caso la derecha é izquierda del perfil serán las mismas que las del nivelador. Cada una de estas partes debe ser de estension bastante para abrazar todas las dependencias del proyecto, ó del objeto que se trata de cortar.

Fig 273 *y* 274 603. Se propone aqui como ejemplo de un perfil longitudinal, el que pasa por la línea *k g d a* del terreno comprendido entre el arroyo *r* y el pantano X; cuya nivelacion se ha hecho para conocer, si es posible desaguar en el rio el pantano, como lo será en efecto, si las aguas del segundo están mas altas que las del primero, y pueden llevarse por la espresada línea. Una vez hecho el perfil se sabrá la profundidad y pendiente que deba tener el canal de desagüe, su costo, tiempo que se tardará en la ejecucion, y demás.

Sean *a*, *b*, *c*, *d*, los puntos en que se haya colocado la mira, ó el nivel. Tírese una línea indefinida $a' k'$, que será el eje longitudinal, ó de las abscisas, ó línea de nivel, que se supondrá pase por *a*; mídanse con la cadena las distancias *ab*, *bc*, *cd*, &c., y tómense las correspondientes en la escala adoptada, mas ó menos perceptible, segun se quiera el perfil mas ó menos especificado. Con estas distancias señálense sobre la $a' k'$ los puntos b', c', d', en los que se levantarán las perpendiculares $b'l$, $c'm$, $d'n$, &c., igual cada una á su valor encontrado al nivelar; y pasando una curva por los puntos *l*, *m*, *n*, se tendrá el perfil, el cual será poco detallado si se supone mucha la distancia entre los puntos a', b', c'. . .

Para hallar las desigualdades ó alturas intermedias g, g, g, entre los puntos a',b; l,m; m,n; &c.; considérese solo la parte $a'l$, y lo mismo se ejecutará en las demas partes sucesivamente. Colóquese la mira x en todos los puntos g de desigualdad del terreno; póngase el nivel en el punto 1 en que antes estuvo, ó en otro punto cualquiera, pero en la misma direccion $a'l$; y anótense las alturas az, gz, que marca la mira en a, y en g, g. Levántese en el papel la perpendicular az, igual á la az de la nivelacion, segun escala; tírese la horizontal zz paralela á la $a\,b'$; tómense las distancias zz, zz; y bájense desde z, z, z perpendiculares iguales á los valores respectivos de las zg. Con esto se tendrán los puntos g, g, intermedios buscados; y haciendo pasar por ellos una curva, esta representará el perfil, con tanta mas perfeccion, cuanto mayor número de veces se haya colocado la mira zg.

604. Como la superficie del terreno, aun en los parages que parecen mas llanos, está formada de desigualdades mas ó menos considerables, si todas estas se hubieran de representar en el perfil, la operacion seria interminable. Por lo mismo considerándolo formado de un número conveniente de pequeñas porciones de línea recta, bastará tomar la altura de la mira en los puntos en que la superficie del terreno cambia de direccion, ya para subir, ya para bajar; siendo superfluo tomar otra altura entre los puntos g, g. Igualmente, si se considera una línea tirada desde el punto n al punto f, pasará aquella por encima del punto t; lo que manifiesta la necesidad de colocar la mira en el punto e', siempre que la sagita correspondiente á t, pueda ser sensible en el perfil en cuestion; lo que dependerá de la escala mas ó menos grande que se adopte. De todo esto resulta, que el perfil exijirá mayor número de ordenadas, á proporcion que la escala sea tambien mayor.

605. Es claro, que la idea que mas naturalmente ocurre respecto á la eleccion de escala para el perfil, es la de que, una vez fijada su magnitud con arreglo á los pormenores que en él se apetezcan, sea aquella una misma para ambas coordenadas, así la del perfil longitudinal, como la del transversal. Sin embargo para evitar estensiones muy largas, se suele usar de una escala para las alturas; y de otra, mas pequeña, para las distancias horizontales.

De aqui resulta el inconveniente, de no poderse juzgar de las pendientes sino por la comparacion de los números de altura y longitud, necesitándose un cálculo que consume tiempo y exije atencion; cuando, si fuera una misma la escala, se juzgaría de ellas desde luego á la simple vista, y solo se recurriría á la escala, cuando se quisiese conocer la relacion entre las distancias y las alturas con toda exactitud.

Si el perfil corta puentes, acueductos, y otras obras semejantes, las bóvedas aparecerán en forma de punto levantado, aun cuando sean muy rebajadas; y habrá que recurrir al compás para distinguir su forma verdadera.

Pero á pesar de todo, cuando el principal objeto del perfil es marcar las alturas, como ya entonces no ofrece utilidad la unidad de escalas, puede admitirse la diversidad de ellas si hubiere de resultar aquel, largo en demasía.

606. El perfil longitudinal de un camino, canal, acueducto &c., puede dirijirse por el eje de estas obras; pero el de un rio habrá de trazarse por una de las orillas, siguiendo el límite de las aguas elevadas á su mayor altura habitual para no tener que interrumpir las operaciones. Sentado esto, se plantarán en los puntos oportunos piquetes que sirvan de señales fijas, mas ó menos próximos, segun la mayor ó menor rapidez de la corriente; y por medio del perfil transversal se tendrán en frente de los puntos correspondientes del perfil longitudinal, los puntos y líneas de las aguas mas bajas, medias, y mas altas, y las diversas profundidades.

607. Para el perfil transversal no se necesita de nivel; basta sondar por medio de la plomada colgada á distancias conocidas en la cadeneta; que se pone bien tirante sobre la superficie del agua, ó se sujeta á jalones, botes, ó lanchas, segun permita ó no la profundidad del agua atravesar el rio á pie á los peones que la llevan. La cadeneta estendida tiene que formar por su gravitacion una curva; por lo tanto debe ser de poca estension: ó en su lugar habrá de usarse de una cuerda delgada, á causa de que se aparta menos de la horizontal. Es verdad que aun asi sus divisiones varian segun la mayor ó menor tension. Para enmendar este defecto se estenderá la cuerda, y despues de haberla mojado

bien, se la dividirá en varas: en seguida se hará uso de ella, teniendo cuidado en el discurso de la operacion de remojarla de cuando en cuando, para no dar lugar á que se seque.

Por último, cuando se ha llegado con el nivel á la orilla de un lago, rio, &c., se puede medir su ancho directamente, ó por los medios esplicados para las distancias inaccesibles: despues de lo cual se sacará el perfil de aquellos, valiéndose de botes, á los que se sujeta la cadeneta ó cuerda. En fin, el punto de llegada á la márgen del agua se enlaza con el de enfrente de la orilla opuesta, en la direccion de la línea del perfil, bordeando con niveladas el lago hasta llegar al punto opuesto.

Nivelacion con el eclímetro.

608. Para hallar la diferencia de altura entre dos puntos x, i, *Fig* 275 cuya distancia horizontal dm es conocida, se coloca en x el eclímetro de perpendículo, ú otro; se tira la visual dh á la mira colocada en i; y se ve el punto e que señala la plomada f. Haciendo en seguida el cálculo esplicado (541 y siguientes), se tendrá cuanto i está mas alto que x, que es lo que se buscaba:

pues . . . . $ii' = hi' - hi$;

pero. . . . . $hi' = hm + mi'$, y $mi' = dx$;

luego. . . . . $ii' = hm + dx - hi$.

Pero el triángulo dmh rectángulo en m, es semejante al triángulo cde que lo es en d, y tienen ademas uno y otro sus ángulos h, e, iguales por alternos internos: luego darán la proporcion. . .

$$cd : de :: dm : hm = \frac{de \cdot dm}{cd}.$$

De aqui. . . . . $ii' = \dfrac{de \cdot dm}{cd} + dx - hi$.

Conocida ii', se tiene la pendiente que á cada vara corresponderá; pues $xi' : i'i :: 1$ vara : á la pendiente que á esta corresponde $= \dfrac{ii'}{xi'} \cdot 1$ *vara*.

Si se tomára la altura hi de la mira igual á la dx del pié del instrumento, las fórmulas anteriores serian aun mas sencillas;

pues siendo $cd : de :: dm : ii' = \frac{de \cdot dm}{cd}$, se tendria la de pendiente por vara por la proporcion $cd : de :: 1 : \frac{de}{cd} \cdot 1$, cuyos factores los da el mismo instrumento.

De las tablas ó registros de nivelacion.

609. Despues de lo dicho sobre el modo de nivelar y el de formar el perfil del terreno, bastará encabezar las casillas de los modelos de registro, para conocer como y con qué se habrán de llenar sus columnas.

Modelo N.° 1.° Registro de un canal de riego.

Núm. de los piquetes ó puntos de mira, y de las señales de verificacion.	*Distancia de un punto ó piquete, señal de verificacion, al que le precede.*	*Distancia total hasta el 1.°*	*Altura en cada piquete ó señal de verificacion, por encima ó por debajo de la horizontal en A.*	*Pendiente del piso, de piquete á piquete.*	*Pendiente desde el piquete 1.°*	*Altura de cada señal ó término de verificacion por encima del fondo.*

Modelo 2.º Para un canal de navegacion.

Núm. de las señales.	*Distancia etc.*	*Distancia total.*	*Altura de cada punto sobre tal línea.*	*Altura del fondo sobre el eje.*	*Altura de cada señal de verificacion sobre el fondo.*	*Alturas ascendentes del fondo entre una señal y la anterior para igualar por esclusas.*	*Altura descendente B.*	*Suma de las alturas descendentes desde la 1ª señal.*

Modelos para un canal de riego y navegacion; &c.

Se forman de las casillas necesarias combinando los anteriores modelos.

En el registro de un camino, que ha de construirse, habrá que poner las casillas correspondientes á las partes ascendentes y descendentes, como en los modelos anteriores; y ademas las alturas de los terraplenes en cada señal ó término de verificacion, y las profundidades de las escavaciones.

En el de un camino en uso, habrá que introducir en el modelo las alturas de las señales superiores é inferiores al punto del medio del camino.

En el de un rio deberán ponerse casillas que manifiesten, la altura de las señales sobre la superficie del agua; la profundidad de esta enfrente de la señal; y la pendiente de la superficie del agua al pasar delante de ellas.

Nivelacion topográfica aplicada á los proyectos de caminos y canales.

610. Despues de haber enseñado el modo de nivelar el terreno con niveladas simples y compuestas, y de formar el perfil que dimana de esta nivelacion aplicándolo á un caso de desagüe, parece que solo resta manifestar, como se traza en el terreno el proyecto de un camino: porque, dado este ejemplo, ya no habrá que hacer despues sino las modificaciones consiguientes, cuando se quiera trazar el proyecto de un canal, acueducto, &c.

En el proyecto de un camino hay que determinar la direccion que debe llevar, y los desmontes y terraplenes á que obliga la naturaleza del terreno: todo lo cual ejecutará el ingeniero por medio de la nivelacion, combinando los procedimientos de modo que los terraplenes equivalgan á los desmontes, cuando el camino no puede establecerse sobre el terreno natural. Y deberá tener presente para esto, que las tierras estraidas de estos que se colocan en aquellos, aumentan próximamente $\frac{1}{10}$ cuando son lijeras ó sueltas; $\frac{1}{8}$ las medias; y $\frac{1}{6}$ las que fueren fuertes, compactas, ó comunes.

Para formar el proyecto de un camino se empieza por hacer una nivelacion aproximada del terreno por donde ha de pasar, para conocer asi los parajes que por tener menos pendiente ofrecen la mayor comodidad posible á los carruajes; y se tantea despues si el camino podrá seguir una ó muchas alineaciones rectas, ó si habrá intermedios donde sea forzoso trazar curvas que las unan.

Se clavan piquetes en los puntos asi elejidos en esta primera nivelacion, y por ellos, ó su proyeccion, pasará el eje ó sea la directriz del camino. Sobre esta se hará la segunda nivelacion longitudinal exacta, y la de las correspondientes transversales perpendicularmente al eje; mas ó menos largas segun fuere mayor ó menor la pendiente en este sentido. Estos perfiles se referirán á la misma horizontal, ó eje de las abcisas del perfil longitudinal; ó lo que es mejor, cada uno á una horizontal que pase por el punto del terreno correspondiente al plano proyectante del eje: en seguida se arreglan las pendientes.

Los ingenieros para distinguir á primera vista las acotaciones del terreno con respecto al plano de comparacion, de las del proyecto relativamente al terreno, escriben estas con tinta encarnada, de donde toman el nombre de *acotaciones rojas*; y tambien las distinguen escribiéndolas en sentido contrario, esto es, de abajo arriba si estaban escritas las otras de arriba abajo, y vice versa.

611. Representen, P toda la pendiente de una línea que corre sobre una horizontal a, y p su pendiente por vara; se tendrá. . .

$a : P :: 1 : p = \frac{P}{a}$. Sea $a = 120$ varas, y $P = 3$ varas; será. . .

$p = \frac{3}{120} = 0{,}025$.

Sean C, B, dos puntos del terreno referidos á la horizontal *Fig* 276
$ab = a$; sea CB una línea de proyecto; y supongamos que se quiera hallar la BD, que, como se ha dicho, se marca de encarnado.

Llámese p' la pendiente que quiere darse á cada vara de la línea CB del proyecto, y P' la total BB' del mismo: es claro, que se tendrá, $P' = ap' = BB'$

Pero como $DB = aC - bB = bB' - BB' = P - P' = P - ap'$; subsistiendo los mismos datos, y suponiendo $p' = 0{,}01$ vara, se tendrá $BD = 3 - 120 \times 0{,}01 = 1^{vs.}, 8$.

612. Si el punto C tuviese una acotacion roja, esto es, si estu- *Fig* 277
viese en A, por ejemplo, y la línea de proyecto fuese AB, se tendria $BD = BS + SN - ND = P' + AC - P = (p' - p)\,a + AC$ . . . (1).

Esta ecuacion es general atendiendo á los signos que corresponden á las pendientes; los cuales serán negativos en los ángulos de depresion ó cuando aquellas sean descendentes; y positivos cuando los ángulos fueren de elevacion, ó subieren aquellas. El signo correspondiente á la acotacion AC, cambiará segun A caiga debajo ó encima de C, ó del terreno.

Asi pues, sean $p' = 0.015$. . $a = 120$. . . $P = 3$. . . $AC = 1{,}7$; será . . . . , . . $P' = 1{,}8$:
y se tendrá $BD = 1{,}8 + 1{,}7 - 3 = 0{,}5$. Como este valor es positivo, el punto B cae sobre el D del terreno; por consiguiente habrá que hacer el relleno ó terraplen ABCD.

Si A cayere debajo de C, y fuere la pendiente del proyecto $p' = 0{,}01$, será $P' = ap' = 120 - 0{,}01 = 1{,}2$; y $DD = 1{,}2 - 1{,}7 - 3 = -3{,}5$; es decir, que el punto B cae ahora debajo del terreno, y que por consiguiente habrá que escavar el volúmen ABCD, comprendido entre la línea del terreno CD, y la del proyecto, que pasa por debajo de él en este caso.

Si las pendientes no estuviesen en el mismo sentido; y fuesen, el acotamiento rojo $AC=3,^{vs}3$, $p'=-0{,}008$, y $P=1,^{vs}4$, sería $P'=120\times-0{,}008=-0{,}96$; y $BD=-0{,}96+3{,}3-1{,}4=0{,}94$. Luego, aun ahora la línea del proyecto caerá encima de la del terreno.

Fig 278 613. Si se hace $P=5.^{vs}2$, $p'=0{,}003$, $AC=3^{vs}$, $a=200,^{vs.}$ se tendrá . . . . . $BD=ap'+AC-P=200.0{,}003+3-5{,}2=-1,^{vs}6$; esto es, que suponiéndose el punto A superior al del terreno, el B cae debajo: luego la línea del terreno CD estará cortada en un punto E, por ejemplo, por la línea de proyecto AB. Este punto E se llama *punto de paso* ó *punto cero*, y hay que determinarle para calcular el volúmen de terraplen AEC, y el de desmonte DEB.

Los triángulos semejantes AEC, BDE dan,

$$AC : BD :: CE : ED,$$

ó . . . . $AC+BD : AC :: CE+ED=CD : CE.$

Tambien se tiene. . $CD : CE :: ab : ac;$

luego. . . . . . . $AC+BD : AC :: ab : ac;$

y. . . . . . . $ac=a'E=\dfrac{AC\,.\,ab}{AC+BD}$. . . . . . (a):

lo que equivale á dividir la línea ab en la relacion de AC á BD.

Suponiendo aun los mismos valores á las pendientes y acotaciones rojas, y que sea $aA=2,^{vs}2$,

se tendrá. . . . $a'E=\dfrac{3\cdot200}{3+1,6}=130,^{vs}434$

Para prueba podria calcularse. . . . . . $cb=\dfrac{1{,}6\cdot200}{4,6}=69{,}566$

$\Big\}=ab=200.$

De.. . . . . $BD=P'+AC-P,$

se saca. . . . . $AC-BD=P-P',$

ó por suponerse BD negativa, como tirada debajo del terreno. . . $\Big\}$ $AC+BD=P-P'=ap-ap'=a\,(p-p')$.

Y sustituyendo en. . . . . (a).

$$a'E = \frac{AC \cdot AB}{AC + BD} = \frac{AC \cdot a}{AC + BD} = \frac{AC \cdot a}{a\,(p - p')} = \frac{AC}{p - p'}. \quad . \quad . \quad (b).$$

Pero. . . $a = 200 : P = 5,2 :: 1 : p = 0{,}026$;

y por otra parte $P = Aa + AC = 2,'' 2 + 3 = 5{,}2$;

$p = \frac{5,2}{200} = 0{,}026$; luego sustituyendo, se tendrá por fin . . . $a'E = \frac{3}{0{,}026 - 0{,}003} = 130{,}434$, como antes.

Si interesára conocer la vertical cE, se tendria . . .

$cE = aC - a'C = aC - \frac{P \cdot ac}{ab}$; por ser $ab : P :: ac : a'C =$

$$\frac{ac \cdot P}{ab} = P - AC\frac{p - p}{ab} = \frac{aP \cdot AC}{(p - p')\,a} = \frac{p \cdot AC}{(p - p')\,a};$$

luego $cE = aC - \frac{p \cdot AC}{p - p'}$. . . . . (c)

614. Para aplicar lo que se acaba de decir al proyecto de un camino, despues de elejir los puntos que marcan su alineamiento, se medirán las distancias horizontales que los separan, y los ángulos que estas forman entre sí; despues de lo cual se harán las nivelaciones necesarias para trazar el perfil longitudinal, y los transversales que cortan perpendicularmente en proyeccion sus diversas direcciones, ó que dividen en dos partes iguales los ángulos que estas forman. *Fig* 279

Sean AB, BC dos alineamientos rectos que forman ángulo en B; el cual no debe conservarse, porque sustituyéndole una línea quebrada ó curva, resulta mas economía, y mayor comodidad para la carretería en el tránsito de AB á BC. Supóngase que los puntos o, r, sean los elejidos para su union con el alineamiento curvo; y que las porciones oB, y rB se dividen en un mismo número de partes iguales o,1; 1,2; 2,B; y 2r, 1,2; 1B. Si se tiran las rectas o1, 1, 2; y las r,2; 2, 1, resultará el polígono $opqr$, para unir las AB y BC del modo mas ventajoso. Para tener un alineamiento perfectamente curvo entre o y r, se haria mayor cuanto se quisiera el número de las divisiones de oB y rB; lo que aumentaria otro tanto el número de lados del polígono. Cuando $oB = rB$ en virtud de la construccion, la curva es simétrica con respecto á la recta que divide en dos partes iguales el ángulo que forman los alineamientos, y por lo tanto es su eje: en cualquiera de los dos casos, la curva es un arco de parábola. (*)

En lo que se va á manifestar se supone que la union se hace por el polígono *opqr*; pues se podria sustituir el número conveniente de cuerdas, aunque en realidad fuese una curva, á no ser que se la quisiera considerar rigorosamente tal: en cuyo caso se emplearian medios, que exijen conocimientos superiores á aquellos de que se hace uso en esta obra.

615. Determinada la posicion de los perfiles transversales en los puntos del terreno, en que forman ángulos las rectas que se sustituyen á su perfil longitudinal, y trazada la directriz del proyecto A*opqr*C, se representarán aquellos en proyeccion horizontal
*Fig*280 por las rectas M, N, O, P, Q, R, S. Desarrollado el perfil sobre un plano, como se demuestra en la figura, por *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, se referirán sus ordenadas á un mismo plano de comparacion, ó eje de abscisas x; y trazando despues la directriz del proyecto DD, se conocerán inmediatamente los puntos de paso, ó de interseccion con el terreno, y el valor de las ordenadas ó verticales comprendidas entre este y la directriz, ó sean las acotaciones rojas. Esta construccion hecha con las debidas precauciones en escalas proporcionadas, siendo las de las verticales 10, 20, 30, &c. veces mayor que la correspondiente á las horizontales, es mas que suficiente para la práctica. Si no obstante esto el proyecto fuere de tanta importancia, que haya de desearse mayor exactitud, se hará uso de las fórmulas encontradas (1) (a) (b) (c) Para proceder en este caso con la debida claridad se numeran las ordenadas del perfil, y se escriben al lado de ellas, asi el valor encontrado por la nivelacion, como la medida de las horizontales, referidas todas al eje de las abscisas. Con estos datos es fácil hallar la relacion de las pendientes del terreno; y como las del proyecto son conocidas, no habrá dificultad en designar valores á las cantidades que entran en dichas fórmulas.

(*) *Zorraquin, Geometría analítica, página* 311, *teorema VIII*.

Los perfiles transversales, representados tambien por rectas, que se sustituyen á la curva del terreno, tienen por objeto facilitar la inteligencia de la definicion ó generacion de su superficie, haciendo conocer esta de una manera aproximada lo bastante, para que despues sean fáciles tambien las aplicaciones. Es sabido, que un trozo recto de camino está formado por una porcion de rectas, paralelas entre sí y á la línea del medio ó directriz, que pueden obtenerse por una serie de planos verticales paralelos á aquella. Si ademas se supone, que estos planos corten al terreno en línea recta entre dos perfiles transversales, su superficie estará formada por una recta, que apoyándose en los mismos esté contenida en todas sus posiciones en planos verticales paralelos al eje del proyecto. Las posiciones de superficie *gaucha* ó alabeada, formadas por esta generacion corresponden á la de 2.° grado llamada paraboloide hiperbólico (*); y solo en los casos en que las rectas de los perfiles ó directrices de la generacion sean paralelas, ó que prolongadas se corten, se convierte la superficie en plano: en todos los demas es siempre paraboloide hiperbólico.

616. Trátase ya de determinar las acotaciones rojas, y puntos de paso de las otras líneas del proyecto. Sean, MM y NN los perfiles transversales correspondientes á las mismas letras en la figura 279; y *ab* la directriz del proyecto. Háganse jirar estos perfiles al rededor de las horizontales contenidas en ellos, y que pasan por el punto en que el plano proyectante de la directriz corta al perfil del terreno, hasta que aquellos queden en la posicion horizontal. En esta posicion el perfil correspondiente á MM, será el *caj*, y NN, á el *cbj*: habrá, pues, que marcar en cada uno de ellos el perfil del proyecto *c*, *d*, *h*, *i*, *j*, (**). Fig 281

(*) Geometria analítica de Zorraquin, página 389, párrafo 302.

(**) El perfil de un camino consta, de la caja que recibe el firme para el carreteo; de paseos ó banquetas laterales para los caminantes; y de dos cunetas que recojen sus aguas, ó las que corran hácia él de terrenos mas elevados. La parte mas esencial es el firme, cuya anchura y construccion, segun corresponda á camino ó carretera general, provincial, de 1.ª, ó 2.ª clase, ó vecinal, si pueden sufrir alteracion será muy poca. No sucede asi con los paseos, que se suprimen en muchas circunstancias, como v. g. en los caminos de montaña; ni con las cunetas, de las cuales podrá prescindirse donde no tengan que recojer aguas.

Es evidente, que, si se construyeran los perfiles transversales para el perfil longitudinal, resultarian inmediatamente como se ha dicho las acotaciones rojas, y que si no hubiera puntos de paso se tendrian los datos necesarios para establecer el proyecto; pero si existieren estos puntos, como sucede en el ejemplo de la figura, se procederá del modo siguiente. Un plano vertical que pasára por una línea del proyecto, cortaría el terreno segun una recta, como se acaba de decir; de modo que podrian aplicarse las fórmulas indicadas para hallar los puntos de paso p, q, l, t, v, &, que unidos por rectas formarian la interseccion del proyecto con el terreno.

617. La línea de paso puede determinarse gráficamente con bastante exactitud. Considérese un plano vertical de proyeccion paralelo al eje del proyecto, el cual cortará al de comparacion en x, y, ó en x', y', segun pase este por el punto mas elevado ó mas bajo del terreno: $a'b'$ será entonces la proyeccion vertical del perfil del terreno en direccion del eje del proyecto, y las horizontales M′M′, N′N′ tiradas por a', b', indicarán las trazas verticales de los perfiles transversales, cuando sus planos han tomado la posicion horizontal girando sobre las horizontales proyectadas verticalmente en a' y b'. Para tener la recta del proyecto contenida en el plano vertical que pasa por ab, se prolongará ésta hácia los perfiles, hasta que los corte en los puntos f, f, cuyas proyecciones verticales se hallarán sobre las M′M′, N′N′. Si estos planos toman ahora su posicion natural, subsistiendo fijas las horizontales consideradas en a', b', sus trazas se confundirán con xx, yy'; los puntos $f'f'$ irán por arcos de círculo á caer sobre estas rectas; y la $f'f'$ será la proyeccion vertical de la línea del proyecto correspondiente al plano vertical, que pasa por ab, $a'b'$: de consiguiente t', es la proyeccion vertical del punto en que se cortan, y t es la horizontal. La misma construccion se repetirá para la oo, que dará los puntos s, s', y asi en los demas: luego si se unen estos puntos por rectas, se tendrá la línea de paso $n\,p\,q\,r\,h\,l\,t\,v\,k\,s\,z$. Los planos que forman el proyecto cortan por lo comun la superficie del terreno, definido del modo que se ha hecho, en arcos de parábolas ó hipérbolas, á los que se sustituyen sus cuerdas: no obstante esto, podrán deter-

minarse estos arcos, trazándolos tales como son en la realidad, en los casos que asi convenga.

618. Como el ángulo, bajo el cual se encuentran las rectas $a'b'$, $f'f'$, será las mas veces agudo, puede mirarse esta circunstancia como un inconveniente para emplear la construccion gráfica. Pero esto se evita, tomando sobre xx', $f_{,}f'=f'a'$; y sobre yy', $f_{,}f'=f'b'$; la nueva recta $f_{,}f_{,}$ pasará tambien ahora por t'; lo que se verificaria igualmente si las $f_{,}f'$, fuesen múltiplos de $f'a'$ y $f'b'$. Si con esta variacion no se encontrare un resultado satisfactorio, ó si el espacio en que se haya de ejecutar la construccion lo impidiere, se variará la $a'b'$ con referencia á la recta $f_{,}f_{,}$, de modo que $a_{,}b_{,}$ pase igualmente por t': y en consecuencia quedará por un encuentro de dos rectas determinada su posicion, que difiere poco de la rectangular.

Lo que se acaba de hacer no es mas, que una aplicacion á las construcciones gráficas de las propiedades de las líneas proporcionales que se demuestran en la geometria elemental.

619. Cuando los perfiles transversales no son paralelos, como los P, Q, la proyeccion horizontal se determinará del mismo modo; con la diferencia, que ahora las rectas que sirven de charnela para ponerlos horizontales, no son paralelas ni perpendiculares al plano vertical de proyeccion, aunque esta última circunstancia podrá tenerla una de las rectas en algunos casos. *Fig* 279

Con relacion á estas rectas, se marcará el terreno del mismo modo que se ha hecho en los perfiles MM, NN, de la figura 281; y las rectas *ab*, *af*, *bf*, que en proyeccion horizontal formaban una sola, serán ahora diferentes, porque las *af*, y *bf*, serán perpendiculares á la direccion de los perfiles que se han supuesto convergentes. Para trazar en estos los perfiles del proyecto se considerará un perfil perpendicular, para tener asi la posicion de sus rectas longitudinales cuyo encuentro con los planos transversales dará los perfiles buscados. El plano vertical de proyeccion se elegirá paralelo á la directriz; los puntos del proyecto que se correspondieren por verticales con los del terreno, estarán sobre una misma, perpendicular á la comun interseccion de los planos coordenados, pero no se confundirán con las trazas verticales de los perfiles; lo que en manera alguna altera la esencia de la resolucion que se ha esplicado. No habria inconveniente en emplear un plano de perfil transversal como vertical de proyeccion, antes al contrario se economizarian algunas construcciones.

620. Se ha indicado, que en los alineamientos curvos se sustituye para estas operaciones el número de cuerdas que se crea conveniente. Pero tambien puede emplearse el método de tomar por distancia, entre dos perfiles transversales consecutivos, la porcion de curva rectificada que estos interceptan: entonces se toman para longitudes de los sólidos situados á derecha é izquierda del eje transversal las curvas de union rectificadas, que pasan por el medio de sus latitudes, y que sin duda por esta razon se llaman *longitudes medias ó reducidas.* Este método para determinar las dimensiones de los sólidos, no es exacto: pero es cómodo y suficientemente aproximado para las aplicaciones.

621. Cuanto se ha dicho tiene, con las modificaciones naturales, inmediata aplicacion á los proyectos de canales de navegacion, á los de riego, ó á los de ambos objetos á la vez; á los acueductos; y á las demas obras en que sea preciso conocer el perfil del terreno. Pero, en los canales principalmente, se necesitan perfiles en que se manifiesten respecto á las escavaciones los volúmenes de tierra y los de piedra, para inferir el verdadero costo.

*Fig*282 Sea AB una porcion del perfil longitudinal de un canal; CD la línea de fondo del proyecto; A′B′ la línea superior de los caminos laterales ó de sirga; y la horizontal EF el eje de las abscisas.

Supóngase que en la parte GH no haya profundidades ni eminencias de consideracion; y que, sondando el terreno en G, H, y otros puntos en el intermedio de estos á distancias medidas desde los mismos, se encuentre una capa de piedra debajo de la de tierra. Los gruesos de estas capas se tienen por la sonda, y se marcan por la línea KL de su perfil superior ó inferior. La parte comprendida entre GH y KL por un lado, y los perfiles transversales por otro, será el volúmen de tierra que habrá que escavar; y la parte comprendida entre estos, y las KL y CD será el de piedra.

Fórmense los perfiles transversales OPQ, RST, correspondientes á los puntos G, H; y con ellos descríbanse los del canal proyectado, *abcdefg*Q, *hiklm*T. Si en los primeros, y á distancias determinadas á derecha é izquierda de los puntos P, S se sondea, se determinará la posicion de la roca ó su superficie, que se supone representada por *nopq*; *noesr*, *hpqkt* serán las secciones de los volúmenes de tierra; *ndo*, *ipq* las de los volúmenes de roca que hay que sacar; y *abcr*, *sfg*Q, *tlm*T las secciones de los terraplenes.

En *h* se ha supuesto, que el borde superior del canal encuentra el terreno, y que R*h* puede servir de camino; pero si este punto *h* fuera inferior á la superficie del terreno, aquel desapareceria entre G y H frente de un punto, tal como V. Formaríanse entonces dos cuñas ó primas que se unirian hácia V, cuyas bases estarian hácia G y H; el primer volúmen seria de terraplen, y el segundo de desmonte; y habria que determinar este punto V de paso, para tener EV′, FV′, y calcular dichos volúmenes. En la figura está hecha la construccion, en el supuesto que *h* corresponda al terreno y al proyecto.

622. Para hallar los desmontes y terraplenes se ha supuesto, *Fig*283
que la parte GH sea sensiblemente una línea recta; pero si no fuese asi, la cara del volúmen de tierra terminado por las líneas *rs*, *ht* padeceria alteracion de forma, y no seria exacto el cálculo.

Por lo tanto, cuando en un perfil longitudinal como en ABCDE se hallaren profundidades y eminencias de consideracion, se descompondrá en las partes AB, BC, CD, DE, tomadas de manera, que las líneas rectas tiradas de A á B, de B á C, &c., coincidan próximamente con estas partes: los puntos A, B, C serán ahora los por donde deban pasar los perfiles transversales.

Si una parte del perfil longitudinal tuviere la forma ABCDEF, *Fig*284
es claro, que habrá que terraplenar la parte BCDE; y que, segun lo que acaba de decirse, tambien corresponderán perfiles transversales en los puntos C, D.

Cálculo de los terraplenes y desmontes.

623. Los datos que facilita la nivelacion para el proyecto de un camino ó canal, se hallan tan enlazados con el cálculo de los terraplenes y desmontes, que no es posible dejar de tratar de este habiéndolo hecho de aquella. El modo particular con que se han

dispuesto las nivelaciones, y la averiguacion de las acotaciones rojas, tienen por objeto proporcionar sencillez y comodidad para encontrar los resultados, presentando una de las aplicaciones mas interesantes de las matemáticas. En la figura 281 se indica sombreada la parte del proyecto que está sobre el terreno, y en blanco la que está debajo; de modo que hay un gran volúmen de terraplen, y otro de desmonte. Estos dos volúmenes se subdividen, con planos verticales que pasan por las líneas del proyecto, en prismas, cuyas secciones perpendiculares á las aristas verticales son triángulos, trapecios, ó rectángulos; en los cuales una de sus bases corresponde al proyecto, y la otra á la superficie del terreno.

Fig 285 624. Para hallar el volúmen de un prisma triangular de aristas desiguales, sean bcd la base, y bm, nc, rd, las alturas.

Si se toma $bm' = nc$, $r'd = nc$, y se tiran las $m'n$, $m'r'$, $r'n$, se tendrá el prisma recto de bases paralelas; cuyo volúmen, llamando B la superficie de su base, será igual á $B\left(\frac{bm'+cn+dr'}{3}\right)$. En la parte superior del prisma ha quedado en virtud de la construccion una pirámide, cuyo vértice está en n, que tiene por base el trapecio $mm'r'r$, y que se divide por la diagonal $m'r$ en dos pirámides: estas, por tener la altura comun, tienen sus volúmenes en razon de sus bases $mm'r$, $m'rr'$, las cuales lo estan en la de sus alturas por tener una misma base $m'r$. De este modo las pirámides están en la relacion de mm', rr'. Pero el volúmen de la pirámide $m'nr'$, es $m'nr'\frac{r'r}{3} = B\frac{r'r}{3}$; luego el de la otra $m'mrn$, será $B\frac{mm'}{3}$. Sumando estas espresiones con la encontrada para el prisma de bases paralelas, se tendrá el volúmen total.

$$V = B\left(\frac{bm'+cn+dr'+r'r'+mm'}{3}\right) = B\left(\frac{bm+dr+cn}{3}\right).$$

Si en esta ecuacion se hace $bm = a$, $dr = a'$, $cn = a''$, se obtendrá la fórmula general, $V = B\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right)$.

Es evidente, que B representa el área de una seccion perpendicular á las aristas del prisma; pero si este estuviese cortado por dos planos inclinados, la espresion seria la misma, y a, a', a'', indicarian las porciones de verticales comprendidas entre dichos planos. Si uno de ellos corresponde al proyecto, y el otro á la superficie del terreno, las porciones tendrán acotaciones rojas; y como el espacio comprendido por estas verticales en proyeccion horizontal es el área de la seccion perpendicular del prisma, si se multiplica esta por el tercio de la suma de dichas acotaciones, se tendrá el volúmen buscado. He aquí la razon, por que ha sido indispensable disponer los datos de la manera que se ha hecho anteriormente.

Esta demostracion se simplifica cuando dos de las aristas son iguales, ya sean las mayores, ya las menores. En el primer caso, hecha la construccion indicada, la base de la pirámide es rectángular en lugar de trapecia; y en el segundo se presenta una pirámide, cuya base es desde luego el triángulo $m'nr'$. Es tambien evidente, que la fórmula será igualmente cierta cuando una ó dos verticales se reduzcan á cero, y esto ocurrirá siempre que haya puntos de paso.

625. Sea ahora el sólido de base trapecia, $bcde$; bc, ed los lados paralelos; sb, nc, rd, me las aristas desiguales, de tal modo que $sb+nc=rd+me$; y por último supónganse que esté terminado por una porcion de paraboloíde hiperbólico, engendrado por una recta sn que en todas sus posiciones 1,1; 2,2; &c., sea paralela á la cara $asnc$ del prísma, apoyándose durante el movimiento en las sm, nr: lo que se consigue tirando planos p, p' paralelos al $nsbc$, que es propiamente el plano director de la superficie. Esto supuesto, prolónguense la bs una cantidad $sb'=nc$; la nc, otra $ne'=sb$; y hágase lo mismo con me y rd respecto una de otra. Unanse los puntos b', c', d', e', y quedará formado un prísma trapecio de bases paralelas, dúplo del dado; luego si se halla su volúmen, y se divide por 2 su espresion, se tendrá la formúla para el prísma trapecio. *Fig 286*

Tiradas las diagonales ec, $e'c'$, el plano que pasa por ellas y las aristas correspondientes, dividirá al prisma trapecio en dos triángulares de bases paralelas, cuyos volúmenes (si se les llama v', v''; si se les llama B', B'' á sus basas; y si se hace . . . . $sb=a$, $nc=a'$, $rd=a''$, $me=a'''$) serán los siguientes:

$$v'=B'\left(\frac{bb'+cc'+ee'}{3}\right)=B'\left(\frac{2a+2a'+a''+a'''}{3}\right);$$

$$v''=B''\left(\frac{e'e+dd'+cc'}{3}\right)=B''\left(\frac{2a''+2a'''+a+a'}{3}\right).$$

De donde resulta, que . . . . (*)

$$V = \frac{v'+v''}{2} = B'\left(\frac{2a+2a'+a''+a'''}{6}\right) + B''\left(\frac{2a''+2a'''+a+a'}{6}\right).$$

Si las cuatro alturas fueren iguales, ó si dos fueren iguales sobre los lados paralelos; por ejemplo, si $a=a'$, y $a''=a'''$, se tiene. . . $V = B'\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right) + B''\left(\frac{a+a''+a'''}{3}\right)$; cuya espresion en cada uno de estos supuestos podria simplificarse todavia; pero es mas cómodo dejarla bajo esta forma, porque tambien abraza la espresion del prisma trapecio en que las alturas resulten desiguales truncándole por un plano.

La fórmula (1) deducida por consideraciones elementales, en virtud de una condicion establecida entre los valores desiguales de a, a', a'', a''' es general, é idéntica á la que se hallaria por el cálculo integral (*).

Cuando el sólido tiene por base un paralelógramo, y la área de este es $B = B' + B''$, como $B' = B''$, serán $B' = \frac{2}{B}$, $B'' = \frac{B}{2}$; y sustituyendo en la fórmula (1) se tendrá,

$$V = \frac{B}{2}\left(\frac{3a+3a'+3a''+3a'''}{6}\right) = B\left(\frac{a+a'+a''+a'''}{4}\right).$$

Iguales consideraciones á las que se hicieron ya para el prisma triangular, pueden hacerse sobre estas fórmulas, que son las que se usan mas comunmente para los proyectos de caminos y canales.

(*) Véase el *Tratado de cálculos* publicado por el comandante de Ingenieros don Antonio García San Pedro, profesor de la Academia del Cuerpo, página 312, párrafo 381.

Quinta parte.

DIBUJO TOPOGRAFICO.

626. Se comprenden bajo este título; primero, los métodos que se emplean para copiar los planos, aumentando ó disminuyendo sus dimensiones, ó sea *reduciéndolos* segun se dice usualmente: segundo, la representacion geométrica del terreno: tercero, la aplicacion de las sombras para espresar su superficie, y los accidentes naturales ó artificiales de ella: y cuarto, la formacion de vistas, bien se construyan unidas á los perfiles, encontrados por la nivelacion, &c.; bien separadas, para dar idea de alguna parte del terreno que por su importancia merezca ser representada con particularidad, es decir, reduciendo los planos, aumentando ó disminuyendo sus dimensiones.

Métodos para copiar.

627. Cuando sea necesario copiar un plano en su misma magnitud, se podrá hacer como enseña la Geometría elemental, construyendo el marco y determinando por intersecciones los principales puntos. Esta operacion está reducida á trazar triángulos, iguales á los que se señalan con lapiz sobre el original, ó que se imaginan formados en aquellos puntos. Los de menos importancia se encuentran por otros triángulos mas pequeños, cuyas bases son por lo comun los lados de los primeros. Pero si unos y otros puntos corresponden á líneas curvas, es preciso multiplicar mucho esta operacion, consumiéndose en ella bastante tiempo: á no ser que estuvieren formadas por rectas, que se prolongan hasta encontrar los lados del marco, en cuyo caso es fácil darlas posicion en la copia.

628. Si á lo que se acaba de indicar se agrega la circunstan-

44

cia de ser detallado el plano, es indispensable abandonar este método, y adoptar el del cálcado al trasluz sobre un cristal. Para hacer esta operacion se necesita que concurran dos circunstancias: primera, que el papel del plano y el de la copia sean bastante transparentes, para que puedan verse las líneas trazadas sobre el primero; y segunda, que la estension del plano no sea muy grande, para que se puedan manejar bien los pliegos, manteniéndolos sobrepuestos sin variar en un ápice. Asegurado el que ha de hacer la copia del concurso de estas dos circunstancias, colocará el papel de la copia sobre el plano en la posicion conveniente; y sujetará en seguida los bordes de ambos papeles con unas pinzas de metal ó madera, hechas al intento, ó con unos toques de cola de boca muy lijeros para que puedan despegarse uno y otro fácilmente. Hecho lo cual, si se aplica el papel sobre el cristal, y se pasa un lápiz de punta fina por todos los contornos del plano, resultará la copia. Esta será fiel y exacta, si se han alejado todas las causas que pueden producir error; porque al cabo, el fundamento de esta operacion, ejecutada con la perfeccion ideal con que la concibe el entendimiento, es un axioma de la Geometria del plano, que sirve de base á muchas demostraciones.

629. Supóngase que falta la primera circunstancia; es decir, que el papel del plano es grueso, ó que reunidos los dos lo son tanto, que no es posible distinguir con claridad las líneas y objetos trazados en él. Entonces se toma un papel transparente, y colocándole sobre el plano se hace el traslado de este, señalando sus contornos en aquel con tinta de china; únese en seguida el papel transparente al de la copia; y se concluye la operacion como se ha dicho antes. Si el papel de la copia es demasiado grueso, se hace polvo fino de lápiz, y se estiende por el respaldo del traslado hecho en el papel transparente, con un pedazo de papel ó una muñeca de lienzo. Despues de esta preparacion se le coloca sobre el papel de la copia con el dibujo para arriba; y por encima de sus contornos se pasa una punta de metal bastante aguda, pero que no lo sea tanto que corte el papel. La presion, que esta produce en su marcha, estampa linealmente el polvo del respaldo del papel superior en la cara del inferior, dejándola marcada. Es necesario advertir, que en

esté método las líneas no resultan delgadas: sin embargo, despues de hecha la operacion se puede retocarlas, pasando por el medio de ellas un lápiz de punta fina, y corrijiéndolas en la parte en que hayan podido quedar defectuosas. Este medio se emplea tambien cuando no concurre la segunda circunstancia, en cuyo caso el papel de la copia debe estar pegado á un tablero perfectamente plano. Si no se tiene á mano papel transparente, puede usarse papel comun, y un aceite volátil como el de espliego, ú otro. Sujeto sobre el plano el papel comun, se estiende el aceite con un pincel en una porcion de su superficie, la cual va quedando transparente: despues que se ha copiado con lápiz, sobre esta porcion se continua estendiendo como antes el aceite en la direccion en que se hace el traslado, y copiando en seguida: poco despues el aceite se volatiliza, y el papel vuelve á tomar su color natural, si aquel está tan bien desleido que no contenga partículas que le hagan granujiento.

630. Hasta aqui se ha considerado el caso, en que la copia es de igual tamaño que el original: ahora se supondrá para mayor generalidad, que las líneas de la primera guarden con las del segundo una relacion, espresada por $m:n$. En el plano ABCD, se formarán un gran número de cuadrados pequeños, trazados con la mayor exactitud por medio de un lápiz de punta fina manejado suavemente. Se construye en otro papel un rectángulo *abcd*, semejante al plano, de modo que AB : *ab* : : AD : *ad* : : m : n. Si se divide *abdc* en el mismo número de cuadrados que ABDC, la operacion estará reducida á figurar en cada uno de los cuadrados de la copia, los objetos que se hallen en los correspondientes del original. Para hacerlo asi se pueden adoptar las intersecciones; reduciendo en la relacion de $m:n$, del modo que va á manifestarse, todas las dimensiones tomadas sobre el original. Esta construccion es conocida con el nombre de *método de las cuadrículas*. Cuando el original es un documento apreciable, en el que no deban tirarse líneas, se trazan las cuadrículas en un papel transparente que se aplica y sujeta sobre el primero. *Fig* 287

Para efectuar las reducciones de las rectas, hay diferentes medios. El mas sencillo, y el que dá mas prontos resultados, es el *compás de puntas dobles ó de proporcion*, muy conocido de los dibujantes. Las piernas de este compás se cruzan en el punto que conviene, para que la distancia entre sus dos puntas (que se colocan sobre los puntos estremos de una recta del plano), sea á la distancia que separa las dos puntas opuestas, como la relacion dada $m : n$.

A falta de compás de proporcion se hace uso frecuentemente del
Fig288 *ángulo reductor ó de reduccion*, construyendo un triángulo isósceles ABC, en que $AB = AC = m$, y $BC = n$. Si se toma sobre AB una parte AB′ igual á una recta cualquiera del orijinal, y se traza con ella el arco $B'nC'$, la cuerda B′C′ es la correspondiente para la reduccion; porque se tiene $AB' : B'C' :: m : n$. Esta última relacion puede estar representada por dos rectas cualesquiera; pero por lo comun son las escalas del orijinal y la copia, ó una parte de ellas.

631. Cuando las áreas de dos figuras semejantes deben tener la relacion $p : q$, como son tambien proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos; si se llama A una de las líneas del original y a su homóloga de la copia, se tendrá. . . . .

$$p : q :: A^2 : a^2; \text{ de donde. . . } a = \sqrt{\left(\frac{q}{p} A^2\right)}.$$

De este modo a seria una media proporcional entre A y $\frac{q}{p}$A;
Fig289 pero este problema tiene una resolucion geométrica mas sencilla. Tómese en una recta la parte AB igual á $p+q$; sobre ella como diámetro, descríbase el semicírculo ACB; levántese en el estremo D de $AD = p$, la perpendicular DC; y tírense por el punto C las rectas indefinidas CAM, CBN: los cuadrados de las cuerdas CA, y CB estarán en razon de los segmentos AD, DB, ó de $p : q$. Por lo tanto si se toma CM igual á una línea cualquiera del original, y por el punto M se tira la MN paralela á AB, la recta CN será la línea homóloga de la copia.

Despues de encontrar por este método la relacion que deben tener las escalas, la cuestion se convierte naturalmente en otra ya conocida, que es la de la reduccion de las líneas del plano: hecha esta, es claro que el área de la copia guardará con la del original la relacion pedida.

Estos métodos de aumentar ó disminuir planos, aunque son muy sencillos, obligan en los que presentan muchos detalles á consumir mucho tiempo por la muchedumbre de operaciones que deben hacerse. A pesar de esto son los mas usados, á no ser que se emplee un instrumento á propósito para esta operacion, tal como el *pantógrafo* ó el *micrógrafo*, cuya aplicacion no está aun generalizada entre nosotros. Los que deseen enterarse del mecanismo de estos instrumentos y su uso, podrán consultar la topografía de Puissant, página 228 y siguientes.

De la representacion geométrica del terreno.

632. Levantado, conforme á lo dicho (381) el plano de un terreno, se tendria una idea muy imperfecta de la forma de su superficie, si se mirára esta únicamente como compuesta de una série de puntos aislados, cualquiera que fuese su número. Pero si se conciben planos horizontales equidistantes, las intersecciones de estos con la superficie del terreno producirán curvas horizontales; que, proyectadas ortogonalmente sobre uno de los planos secantes, manifestarán las inflexiones é irregularidades del terreno, y servirán para conocer la mayor ó menor inclinacion de las pendientes.

633. Cuando es pequeña la estension del terreno que quiere *Fig* 290
figurarse, las curvas horizontales, que forman puede decirse su esqueleto ó armazon, estarán de nivel, y la línea Ax del terreno, perpendicular al mismo tiempo á todas ellas, medirá la pendiente. Esta línea, que generalmente será de doble curvatura, se llama *línea de mayor pendiente*; porque en efecto, la inclinacion de un elemento cualquiera Am de ella es mayor, que la del correspondiente Am' de otra cualquiera línea Ax' del terreno, que tenga con la primera un punto comun A. Aparece de aqui, que, en un plano inclinado respecto al horizonte, sus líneas de mayor pendiente son rectas, perpendiculares á todas las horizontales trazadas en su superficie.

De todo lo anterior se infiere, que tanto las montañas como los menores accidentes del terreno podrán espresarse en un plano ó carta; bien por líneas de nivel, que se supongan trazadas á igual distancia entre sí sobre la superficie de la tierra; bien por normales á las proyecciones de ellas.

634. En la práctica es á veces imposible determinar inmediatamente las curvas horizontales; pero se suple por nivelaciones hechas sobre líneas rectas, paralelas entre sí cuando se puede y cuando no tiradas en diferentes direcciones, para tener los correspondientes perfiles ó secciones verticales. Por ejemplo, si la línea curva *abcdef* representa un perfil del terreno por la $a'f'$ del plano; si las *of*, 1*e*, 2*d*, 3*c*, 4*b*, representan las secciones horizontales equidistantes; y si los puntos *b*,*c*,*d*,*e*,*f*, de la superficie del terreno se hallan proyectados en b',c',d',e',f', sobre el plano, estos determinarán otros por donde deben pasar las curvas de nivel buscadas.

Cortando otros perfiles $a''f''$, $a'''f'''$...., ó los $a'f''$, $a'f'''$, se obtendrán otros puntos de éstas mismas curvas, las cuales se marcan en los planos especiales con líneas delgadas de tinta; y con puntos las que, como *zz*, correspondiendo á una seccion accesoria no perteneciente al sistema general de equidistancia, acaban de caracterizar las formas del terreno: siendo unas y otras sumamente útiles tanto para idear los proyectos de obras, como para ejecutarlas.

Las curvas de nivel deben distar mas ó menos entre sí, segun se quieran mas ó menos determinadas ó visibles las irregularidades ó inflexiones del terreno; debiendose tener presente que por lo general es preciso consultar las acotaciones de altura, ó las vertientes de las aguas, para no equivocarse respecto al sentido ó direccion de las pendientes.

635. En los planos de pequeña escala se prefiere, y es mas cómodo, el figurar el terreno por medio de las líneas de mayor inclinacion, que sirven tambien para manifestar las diversas inclinaciones de las pendientes. De ellas se hace uso en el dia esclusivamente para representar las cordilleras y sus degradaciones en las cartas geográficas. Por lo comun, en los planos topográficos no se trazan las curvas horizontales: lo que se hace es tener cuidado de que las líneas de mayor pendiente se interrumpan al llegar á ellas, con el fin de poder comparar las inclinaciones de sus diferentes puntos.

636. Para medir la inclinacion del terreno se colocará, en la direccion que á ojo pareciere ser la línea de mayor pendiente, un jalon, en el cual ha de marcarse una altura igual á la de un ins-

trumento propio para medir ángulos verticales; y se dirijirá por el anteojo una visual á la altura marcada en el jalon: el eje óptico de aquel determinará entonces con la horizontal el ángulo de inclinacion buscado.

Para asegurarse de que este ángulo es el de mayor pendiente, se dan al anteojo, bajo del mismo ángulo, diferentes direcciones á derecha é izquierda de la observada; y, si colocando el jalon como se ha dicho quedáre este por debajo, será prueba de que solo podrá verse bajo un ángulo menor, y de que de consiguiente el ángulo observado es el de la mayor inclinacion. No debe perderse de vista, que, cuando esta operacion se hace sobre una línea curva, el jalon á menos de ser de poquísima consideracion la curvatura debe estar próximo al instrumento.

Este tanteo, molesto ya de suyo por las repetidas operaciones que exije, está ademas espuesto á errores; y por eso es siempre mas ventajoso conocer las líneas de pendiente por medio de las curvas de nivel, determinadas del modo que se ha indicado.

637. Teniendo el plano de un terreno, y por consiguiente teniendo ya sujetos ó determinados los puntos que se quieran, con mas la base ó configuracion de las eminencias ó montañas, podrán emplearse en muchas ocasiones el teodolito, el círculo repetidor, y hasta la plancheta para trazar las curvas de nivel. En efecto, colocando uno de estos instrumentos horizontalmente en un punto conocido, y dirijiendo con el anteojo ó alidada visuales á diversos puntos de las eminencias, situados ó que se situen en el plano, en los que se hayan colocado jalones, es claro; que todas las visuales, que vayan á parar al pie de estos ó marquen en ellos la misma altura, determinarán igual acotacion, ó serán puntos que estarán en el mismo plano horizontal. La posicion de estos puntos en el plano levantado podrá obtenerse, midiendo sus distancias al punto de estacion. Si bajo el mismo método se va adelante con el instrumento, situándole de modo que su plano pase por secciones á alturas determinadas, quedarán trazadas las curvas horizontales, cuyas acotaciones se tendrán por las correspondientes nivelaciones y perfiles.

638. Cuando se tienen trazadas las curvas horizontales con

sus respectivas acotaciones, la superficie del terreno está determinada completamente; y la geometría facilita medios para hacer sobre ella cuantas operaciones se necesiten, como puede verse en las memorias de Monge, Meusnier, Say, Noizet, y otros, sobre la desenfilada de la fortificacion.

639. Algunos ejemplos evidenciarán esta verdad. Un plano inclinado al horizonte, que se corte por planos horizontales, estará representado por una série de paralelas equidistantes, correspondientes á los planos horizontales que pasan por las acotaciones del terreno. La mayor ó menor proximidad de estas paralelas indicará si la pendiente del plano es mas ó menos rápida. Una perpendicular á estas horizontales es la *escala del plano ó su linea de máxima pendiente*, como ya se ha dicho. Mr. Bellonet, mayor de Ingenieros de Francia, ha aplicado á esta teoría la propiedad del
Fig 291 rectángulo, de no alterarse la estension de sus lados paralelos cuando se convierte en romboide. Para ello ha construido un marco de madera *acdb*, en cuyos dos lados *ac*, *db*, estan sujetos los estremos de varias sedas paralelas entre sí, y á los lados *ab*, *cd*: los cuatro lados son movibles en sus estremos, donde hay unos pernos ó ejes: asi el marco puede tomar la figura de un rectángulo, ó de un oblicuángulo, mas ó menos oblicuo.

Las cabezas de los pernos deben encastrarse perfectamente en la madera. Las sedas entran en los dos lados en muescas á propósito para evitar su roce sobre estos; y por igual causa deben pegarse por debajo de los mismos unas alzas ó zoquetitos de madera.

El número de sedas debe ser por lo menos igual al de curvas horizontales del plano de que se trata; y estas deben distar entre sí 5 varas de la escala correspondiente. Para la facilidad de la lectura de las acotaciones se pueden escribir alternativamente de
Fig 291 dos colores; con lo que las negras, por ejemplo, distarán 10 varas
y 292 entre sí, y 5 de las encarnadas. La division de los lados, y la centralidad y posicion de los ejes han de ser muy exactas. En las figuras, para mayor sencillez, se han representado las acotaciones de altura por 0, 1, 2, 3, &c.; y estos mismos números corresponden á las sedas respectivas.

640. Segun se abra el marco mas ó menos, variará la dis-

tancia entre las sedas; pero sin perder el paralelismo á su primera direccion. La pendiente del plano, cuyas horizontales están representadas por las sedas, será en la misma proporcion mayor ó menor; y en la misma tambien habrá jirado el marco sobre el eje ó charnela horizontal, representada precisamente por la seda que permanezca invariable sobre el plano.

Si por el contrario no se varia la figura del marco, ó si se da otra direccion á las sedas, la inclinacion del plano será la misma que anteriormente: y este habrá descrito una superficie cónica de revolucion, en el caso de que una de las horizontales haya jirado al rededor de uno de sus puntos. Si la distancia entre las sedas varia durante el movimiento, y ademas el plano está sujeto á pasar por un punto, la superficie será cónica; y será la superficie una particular desarrollable, en el caso de que aquel no tenga semejante sujecion En estos dos casos la particularidad de la superficie consiste, en que sus planos tangentes no pueden tener mas inclinaciones, que las que proporciona el marco desde que forma un rectángulo, hasta que se convierte en línea recta; á cuyo tiempo representa un plano vertical. En fin, cuando varien á la vez la figura del marco y la direccion de las sedas, la inclinacion del plano y el eje ó charnela habrán tambien variado á la par. El plano del marco se habrá movido de un modo arbitrario; engendrando una superficie, que siempre será del género de las desarrollables con las circunstancias que se acaban de indicar.

641. Este instrumento puede ser muy útil, para hacer tanteos en planos en que no se quieran trazar líneas, y producirá resultados con prontitud; pero hasta ahora no da medios para obtenerlos exactamente. Es probable, que con el tiempo se vaya perfeccionando: y una de las mejoras que acaso reciba, será (para tener en cada plano dos puntos de la escala de pendiente acotados) el prolongar la regla *cd* hasta un punto *n*; y el hacer que del estremo *b'* salga otra *b's*, de modo que jire en *b'*, y se mueva por uno de los brazos de una escuadra corrediza *e*, mientras la *dn* recorra el otro. Es claro, que las diversas posiciones de la *b's* serian entonces perpendiculares á la *dn*; y que, si en el eje *b'* y en el centro *e* de la escuadra móvil hubiese dos puntas de acero, estas *Fig* 291

marcarian con exactitud, en cada una de las posiciones que tomáran las sedas, dos puntos de la escala de pendiente del plano pertenecientes á las acotaciones estremas del marco.

Los Ingenieros militares, para el establecimiento de las obras de fortificacion, necesitan con frecuencia planos de situacion, que, pasando por ciertas rectas ó puntos determinados del terreno, dejen por debajo su superficie, tocándola en uno ó mas puntos. En otros casos, cuando la inclinacion del plano de situacion es independiente de la naturaleza de la fortificacion, es indispensable asegurarse que el terreno queda debajo del plano; y en caso contrario hay que indagar, cual es la parte de que deben precaverse las obras, ó cual el desmonte que deba ejecutarse para quitar este inconveniente.

Fig 292 642. Trátase de aplicar el marco ó instrumento descrito, para encontrar un plano de situacion que pase por los puntos a, b, cuya acotacion es de 4, y 6; y para hacer que el plano de comparacion pase por la curva o, determinándole ademas en el supuesto de que este plano sea tangente á la superficie del terreno.

Colóquese el marco de modo, que pasen las sedas 4, 6, por los puntos a, b; y examínese en esta posicion si las otras sedas cortan, ó dejan por debajo las curvas de una acotacion.

En el primer caso, el plano que representa la posicion $p\,m\,n$ o del marco seria de pendiente muy suave; y en el segundo, en que esta es $p'm'n'$o, seria de muy rápida pendiente. En fin, en la de PMNo, el marco toma la inclinacion conveniente, y pasa rasante á la curva cuya acotacion es 1; pues la seda de esta la toca en el punto t, al mismo tiempo que las de la o, 2, &c., no tienen ningun punto comun con las curvas que por esta razon quedan debajo del plano. En esta posicion, sin mover el marco, trácese una perpendicular á la direccion de las sedas horizontales; y márquese en ella la diferencia que las separa: se tendrá inmediatamente la escala acotada de mayor pendiente del plano de situacion. Si á este método propuesto por Mr. Bellonet se sustituyera el que se ha indicado, ú otro equivalente, es indudable que la operacion seria mas exacta.

Si subsistiendo la condicion de pasar el plano por los puntos a, b, su inclinacion fuere dada, y se representáre por la posicion de las sedas cuando el marco tiene la *pmno*, se hará pasar como en el ejemplo anterior por los puntos a, b, las sedas de igual acotacion; y en esta posicion se señalarán los puntos en que encuentran las curvas horizontales á las sedas de su acotacion correspondiente, ó lo que es lo mismo á las horizontales del plano dado, contenidas en las de las curvas. Por este medio se determinarán los puntos c, d, intersecciones de la curva o con la horizontal; ó los e, l, intersecciones de la 1 con la seda 1; y asi los demas. De modo que uniendo estos puntos por una curva *cdl....e* se tendrá la base del desmonte, ó del terreno superior al plano. Cuando la inclinacion de este es tal, que las sedas no tienen ningun punto comun con las curvas de la misma acotacion, es señal de que no hay contacto ni interseccion; y que el plano pasa por encima de todos los puntos que forman la superficie del terreno.

Aplicacion de las sombras para representar la superficie del terreno y sus accidentes.

643. La representacion geométrica del terreno, que acaba de esplicarse, da una idea exacta de la estructura de las montañas y de sus menores irregularidades; y la dará mas exacta todavia si se multiplican suficientemente las curvas de nivel. Pero este medio, único adoptado por los ingenieros para la representacion del terreno en los planos particulares, no puede ser aplicable á las cartas topográficas de grande estension; porque la pequeñez de la escala no da campo para espresar los pormenores, que permite individualizar por lo comun un plano particular. Las líneas de máxima pendiente, trazadas con uniformidad del mismo grueso en todos sentidos, formarian una sombra monótona, que no daria idea de las montañas, torrentes, grandes barrancos, márjenes de los rios, &c.; cuyas circunstancias importa conocer á la vez, sin necesidad de seguir el curso de las líneas de máxima pendiente, ó de consultar á cada paso las acotaciones de altura.

Es pues indispensable emplear un medio auxiliar de buen efecto, para espresar el relieve de las montañas; y este medio auxiliar es lo que se llama la *aplicacion de las sombras.*

Si la superficie de la tierra se supusiere iluminada por rayos de luz paralelos, que formen con el horizonte un ángulo oblicuo, producirán contraposiciones de claro-oscuro, y reflejos, que harán percibir mas distintamente la forma de los cuerpos Esta suposicion es enteramente conforme con la realidad, segun se ve en la naturaleza.

Cuando la superficie del terreno está determinada, se encuentran las líneas de separacion de claro-oscuro, ó las semiluces que corresponden á las de contacto de los rayos de luz; y la terminacion de las sombras cortadas, que es la interseccion de los rayos tangentes con el terreno La superficie tangente podrá determinarse con mas ó menos exactitud, y de esta dependerá la del resultado; el cual siempre deberá buscarse ensayando este medio, á no ser que se carezca absolutamente del conocimiento de las verticales. En este caso se estudiará el terreno para dibujarle con tal esmero, que el retrato dé una idea suficientemente aproximada del original. Los planos proyectantes de los rayos de luz pueden servir para determinar las líneas de separacion y de sombra cortada, construyendo las secciones que causan en el terreno. Estas secciones serán líneas curvas; cuyas tangentes, si fueren paralelas á la direccion de la luz, darán en sus puntos de contacto la línea de separacion; y, si encontráren á las curvas de seccion, darán puntos de la línea de sombra cortada.

644 La descripcion gráfica de las sombras, ó el conocimiento de las partes de una montaña que reciben luz, y de las que no la reciben ó estan á oscuras, no basta por sí solo para establecer la degradacion de las tintas. Esta se consigue teniendo presente, que la intensidad de la luz para cada punto de una superficie, está en razon directa, del seno del ángulo que forma el rayo incidente, en el supuesto de que los rayos sean paralelos: de donde se deduce, que los límites de esta intensidad, están comprendidos entre 0° y 90°. El ángulo de incidencia se mide en las superficies curvas, por el que forma el rayo de luz con el plano tangente tirado por su punto de encuentro; de modo, que siempre depende del ángulo que una recta forma con un plano. Ahora bien, creciendo las tintas en intensidad en la misma razon que el seno del ángulo de

incidencia mengua, es claro, que se podrá conocer por ella la posicion de un plano ó de una superficie curva con respecto al rayo luminoso. Hay ademas otra circunstancia que debe tenerse presente: la luz reflejada que hace percibir los cuerpos mengua de intensidad, al paso que va atravesando mas aire atmosferico. Es verdad que la ley de esta disminucion es desconocida hasta el dia; pero sábese con certidumbre, que por ella la claridad que corresponde á las partes espuestas á la luz mengua, y que, á la inversa, lo mismo sucede á la oscuridad de las partes que estan en sombra. Estas pueden modificarse ademas por los reflejos de otros cuerpos; lo que se conocerá examinando el viaje de la luz reflejada, y las circunstancias de la reflexion.

Estos principios de la perspectiva aérea se aplican en el dibujo topográfico en sentido vertical; y por eso en las partes elevadas se espresan mas distintamente la claridad y las sombras, debilitando las que corresponden á los puntos mas bajos de los valles. Por este medio se consigue en el sombreado de las montañas un grande efecto, que hace formar idea del terreno á la simple vista. Las tintas para las partes en sombra no deben tener mas intensidad que la puramente necesaria, con el fin de que puedan distinguirse los objetos situados en ellas

645. La representacion de los accidentes naturales del terreno, como bosques, pantanos, lagunas, rios, quebradas, escarpados, &c., se hace por una proyeccion horizontal exacta mas ó menos detallada con proporcion á la escala. Otro tanto debe hacerse con los accidentes artificiales; como v. g. los perímetros de las poblaciones, las líneas de comunicaciones de caminos ó canales, las huertas, las tierras de labor, los arboles en cultivo, &c., objetos todos, á los que deberán darse las sombras correspondientes.

646. La direccion de la luz en proyeccion horizontal se supone que viene de izquierda á derecha, formando ángulo de 45° con el lado superior del marco, y haciendo el mismo ángulo de inclinacion con el plano horizontal; de donde resulta, que la estension de las sombras destacadas por los cuerpos en un plano horizontal es igual á su altura. Hase elejido la direccion de la luz por un ángulo de 45°, solo con el objeto de lograr mayor comodidad para la

ejecucion del dibujo. Con arreglo á estos principios se ha dibujado la montaña colocada en la parte inferior de la figura 293. En ella está marcada la proyeccion *lp* de un rayo de luz, cuyo plano proyectante se ha hecho jirar al rededor de su traza hasta aplicarle al horizontal, para tener asi el ángulo de inclinacion *l'pl*.

Los mismos principios han servido tambien para dibujar las montañas, y demas accidentes naturales ó artificiales que se espresan en las figuras siguientes:

Figura 112. *Lámina* 7.ª Indica el modo de representar en proyeccion horizontal los edificios. Cuando en la representacion de las poblaciones la escala no permite indicar mas, que los perímetros de las manzanas de cuya reunion se forman, suelen dibujarse del modo que aparece en la figura 111.

Figura 122. *Lámina* 8.ª Planta de una casa con el plano geométrico de un jardin, cuyas diferentes partes son fáciles de distinguir por el método particular de representacion que á cada una de ellas corresponde.

Figura 183. *Lámina* 11. Demuestra una laguna contigua á una pequeña altura, con prados á su inmediacion.

Figura 184. Proyeccion horizontal de una loma que desde su mesa desciende suavemente hacia las márgenes elevadas de un rio, que en parte la rodea.

Figura 212. *Lámina* 12. Representa un bosque en proyeccion horizontal, con las sombras de los árboles.

Figura 223. *Lámina* 15. Plano topográfico de una parte de la vega del Campanillas, en la confluencia de este rio con el Guadalhorce en la Holla de Málaga: el terreno desde una sierra elevada hasta el Guadalhorce sigue en degradacion por estribos mas ó menos aplanados que separan las vertientes. En la confluencia de los rios está la hacienda del Campanillas; y en las márgenes del Guadalhorce hay frondosas alamedas y tierras de labor.

Tambien se representa en esta figura una línea de batalla, cuando las tropas y la artillería están en posicion. Un rectángulo, semejante al que ocupan las tropas en su órden habitual de batalla, con una bandera en su medio es el signo convenido para representar un batallon ó escuadron. Cuando en los rectángulos para infantería se ponen tres banderas, se indica con ellas un regimiento ó media brigada, y en la caballería para lo mismo se ponen cuatro: las compañías ó pelotones sueltos no tienen este signo. Por las sombras dadas á los rectángulos se podrán distinguir inmediatamente los cuerpos en línea, tanto de infantería como de caballería; las columnas de granaderos y cazadores; la artillería; y los zapadores. Las columnas se representan, como se vé, á retaguardia de las tropas; y los movimientos se indican con líneas de puntos y una flecha que demuestra su direccion.

647. Algunos ingenieros han querido, que la luz formase con el plano horizontal un ángulo de 60° á 80°, con el fin de achicar las sombras en términos que casi desapareciesen; sin que por eso dejára de conservarse en los objetos representados cierta contraposicion de claro-oscuro, que no destruye su buen efecto. Esta suposicion es conveniente, y aun indispensable en los planos topográficos de pequeña escala; pero no debe aplicarse á todos indistintamente. Por lo demas los principios son los mismos, como puede observarse en la parte superior de la figura 293, donde se representa una montaña igual á la dibujada en la parte inferior con esta modificacion: *lp* es la proyeccion horizontal de un rayo de luz, y *l'pl* el ángulo de inclinacion.

Los ejemplos incluidos en las láminas correspondientes á esta clase de dibujo son:

Figura 273. *Lámina* 19. Espresa tres colinas de pequeña altura, entre un rio y una laguna, con un pueblo á su orilla.

Lámina 13. Plano geométrico de las inmediaciones de la ciudad de Málaga, cuya poblacion está representada por perímetros irregulares, entre los cuales pasa el Guadalmedina, formando una espaciosa rambla. Del barrio del Perchel parten los caminos de Antequera, de Alaurin y de Churriana; el terreno que hay á la derecha del primero es correspondiente á la Sierra que forman los montes de Málaga; y aunque su superficie no se ha determinado por curvas horizontales, se ha procurado aproximarse todo lo posible al resultado de su representacion. La superficie del terreno comprendido entre esta parte del camino, la playa del Mediterráneo, y el Guadalhorce, está formada de pequeñas lomas que se derivan de los puntos mas elevados; desvaneciéndose segun se van acercando á la costa. Los accidentes naturales mas importantes son, el curso del rio, y el terreno pantanoso que forman las aguas de las vertientes cuando llegan al mar, donde entran filtrándose por las arenas de la costa. La mayor parte de la estension del terreno, que comprende el plano, está ocupada por tierras de labor con algunas haciendas de arbolado, y ademas un gran olivar hacia el estremo del camino de Antequera. Junto al vado y barca del camino de Churriana, en el Guadalhorce, hay en su márgen derecha un bosque con limonares: encuéntranse por último muchas huertas y jardines contiguos á la poblacion.

En la hidrografía está ya admitido unir por medio de curvas horizontales las sondas de igual profundidad, del modo que se indica en la costa hacia la desembocadura del Guadalmedina; marcando no obstante en las curvas, tanto los puntos que ofrezcan mayor confianza por bien sondados, como los que correspondan á los rumbos mas importantes.

La escala de este plano de 2500 pies por pulgada es demasiado pequeña para representar los caminos y árboles en sus verdaderas dimensiones, por cuya razon se han exagerado un poco, así como las plumadas de las montañas que en rigor debian ser mucho mas finas. En todo lo demás hay conformidad con la escala. Con la de 500 pies por pulgada se levantó este plano para reducirlo á la mitad, ó sea 1,000 pies por pulgada, que es todavia suficiente para dar á conocer los detalles.

648. El ángulo de inclinacion de la luz se ha llevado por otros ingenieros hasta su límite mayor de 90°, en cuyo caso los rayos de luz son verticales, por lo cual tambien ha solido llamársela *luz al zenit* ó *zenital*. Como en este supuesto, la intensidad de la luz para una superficie, cuya inclinacion con el plano horizontal no varía sea la que quiera la situacion en que se la coloque, es la misma; se ha creido sacar gran partido de esta circunstancia para el conocimiento de las inclinaciones, valiéndose de la intensidad de
Fig 295 las tintas. Con este fin, se ha ideado la escala de degradacion de tintas ó de pendientes que demuestra la figura. Las divisiones ó degradaciones se aumentan mas ó menos en proporcion á la mag-

nitud de la escala lineal del plano. La figura que se representa corresponde aqui á una escala mediana; y espresa las pendientes de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, por 1, producto que indica la distancia entre dos planos consecutivos de las curvas horizontales. El blanco del papel representa la superficie sin inclinacion ú horizontal. Las pendientes intermedias á las que designa la escala, se representan por la inmediata superior. Esta circunstancia, unida á la ninguna utilidad que ofrece este método en sus resultados cuando se desconocen las curvas de nivel, ha sido causa de que, aun cuando cuenta con muchos partidarios, no se haya seguido generalmente.

La figura 294 manifiesta una montaña igual á las anteriores dibujada por estos principios. En la representacion de los accidentes desaparecen las sombras, y sin estas no hay recurso ninguno para reforzar los contornos de aquellos mas de un lado que de otro. De esto resulta, que se pierde toda idea de contraposicion y buen efecto; aunque la representacion geométrica del terreno sea exacta, por ser como anteriormente una proyeccion horizontal. En Francia se ha ajitado mucho la importante cuestion del dibujo topográfico, y al cabo se ha dado la preferencia á los dos primeros métodos, que en realidad no son mas que uno: por él se han decidido el Depósito de la guerra de aquella nacion, y los ingenieros de mas nota de Europa. Se ha procurado representar las montañas del plano de Málaga por un método, que guarda cierta semejanza con el seguido por los ingenieros militares españoles que mas se han distinguido en este dibujo desde fines del siglo último.

649. Si las tintas, límites de la escala de pendiente, fuesen el blanco y el negro con un diapason muy dividido para las tintas intermedias, y se añadiesen capas de diferentes colores para los accidentes, se vendria á parar al dibujo topográfico aleman, ó puramente convencional. Para desacreditar este método han bastado solos los esfuerzos de sus mismos apasionados en las aplicaciones que de él han hecho: pues, como dice Puissant, pocas cosas habrá mas impropias, *que el que se represente un cono con una capa igual de tinta, tanto mas fuerte cuanto menor es su ángulo en el vértice; que el que un cono, ó una semi-esfera, se figuren del*

mismo modo cuando presentan su convexidad ó concavidad; y por último, que no se establezca diferencia entre las partes horizontales situadas á diferentes alturas sobre el nivel del mar (*).

650. Desde la mas remota antigüedad se empleó con mas ó menos perfeccion otra clase de dibujo topográfico, que tomó su oríjen en la imájen que presenta un terreno, cuando se le mira desde una grande elevacion. Una de sus primeras aplicaciones sería para figurar las batallas, sitios de fortalezas, campos atricherados, &c.; por cuya razon se llama en los tratados antiguos *Perspectiva militar*, y tambien *Caballera* ó *Caballeresca.* Despues ha solido llamársela *media perspectiva*, ó *imitacion* de las *perspectivas de punto alto.*

Los Geómetras griegos hicieron de esta perspectiva aplicaciones útiles, para manifestar las propiedades de la estension. Posteriormente su conocimiento ha estado mas ó menos descuidado; pero ha habido épocas en que aplicándose sin discernimiento este método á la geografía y topografía, se ha hecho de él un abuso lastimoso, faltando á sus reglas fundamentales. En el dia, sin un detenido exámen, se le quiere abandonar completamente: al menos asi lo aconseja Puissant.

Pero ¿influyen acaso los principios de la perspectiva Caballera en la disparatada aplicacion de ellos que presentan algunos planos, amalgamando objetos en proyeccion geométrica, y objetos en perspectiva, con otros figurados por signos convencionales? El salpicado de los montecitos en vista, que se ponian en las cartas geográficas para indicar las cordilleras de montañas, ¿tiene algo de comun con la perspectiva caballera de estas montañas? No ciertamente. Luego si no son los métodos de la perspectiva caballera los que han inducido á esta grosera mescolanza, sino su desatinada aplicacion; y si, errores por errores, tan grandes y en tanto número como en esta perspectiva pueden cometerse en cualquiera proyeccion, siempre que los dibujantes desconozcan la teoría de su trazado: fuerza será conservar este método, que aunque, como todos, tiene sus inconvenientes, tambien en cambio de esto reune

(*) Véanse las láminas de la obra alemana de Mr. Bachemberg.

propiedades que le hacen sin género de duda de suma utilidad en muchos casos.

651 Trátase ahora de ver, si en efecto los antiguos conocian bastante bien este modo de representacion. El P. jesuita Rieger, cosmógrafo mayor del rey de España, imprimió en latin en principios del siglo XVII, unos elementos de arquitectura que se tradujeron en 1763. Al dar idea de la perspectiva militar entre otras cosas dice :.... "sin necesidad de inmutar el plano geométrico, porque »la tabla (asi llama al plano de proyeccion ó del cuadro) en esta »delineacion se pone paralela, no al que la mira sino al horizonte »y muy inmediata al objeto De donde se sigue que en una distan»cia infinita de la vista, no parece que la tabla dista sensiblemente »del objeto. Luego las líneas tiradas desde los ángulos del objeto á »la tabla, y convergentes hácia la vista del espectador, representan »en la tabla una apariencia del objeto, que no se diferencia sen»siblemente de su misma magnitud. Las líneas verticales se hacen »entre sí paralelas como lo son en el objeto, y conservan las mismas »medidas que en el objeto tienen, &c." Mas adelante para dar en posicion estas alturas que se estienden, dice: "en el sentido en »que cae la vista se pone una línea de estacion, como por *base y »direccion de las perpendiculares que han de levantarse*, la que »se llama tambien *línea fundamental*"

Para esplicar estas ideas en la figura 296 sea *cde* un prisma triangular de base horizontal; sea *ac* una de sus aristas verticales; y supóngase un plano horizontal P. Si se proyecta el triángulo *cde* por líneas paralelas oblicuas que formen ángulos de 45°, su proyeccion será $c'd'e' \doteq cde$: y con respecto á *ca* se encontrará $c'a'$ igual á ella en virtud de los triángulos isósceles rectángulos coc', aoa'. Como las líneas de 45° pueden tirarse en todos sentidos, la proyeccion, si solo se diera este dato, seria indeterminada; pero estableciendo la *línea fundamental xy*, á la cual deben ser perpendiculares los planos que contienen el ángulo que forman las líneas proyectantes, la proyeccion queda ya determinada. Un resultado igual ofreceria un plano vertical de proyeccion P', aunque segun el pasaje citado no lo considerasen asi los antiguos: pues el triángulo $c''d''e''$ seria igual al *cde*, porque es una seccion subcontraria ó *Fig* 296 antiparalela del prisma proyectante; la altura $c''a''=ca$ por lados opuestos de paralelogramo; y $c''a''$ seria perpendicular á $x'y'$, interseccion de los planos P′ y el horizontal, ó sea la línea fundamental trazada en la planta. Ademas resulta, que $cn'=n'c''$; ó, lo que es lo mismo, que en la proyeccion oblicua la distancia de un punto á la línea fundamental es igual á la distancia de la proyeccion de aquel á la misma línea. La seccion subcontraria subsiste en el cilindro oblicuo, sea la que quiera su curva directriz; de modo que lo dicho respecto del triángulo puede aplicarse á cualesquiera curvas planas.

Esta propiedad de la proyeccion oblícua de 45° han pensado algunos que provenia de la reunion impropia de dos proyecciones; pero, como se acaba de ver, no es mas que una proyeccion deducida naturalmente de los métodos generales de proyectar. Como en las aplicaciones las líneas que mas importa conocer son las horizontales y verticales, se elije el plano vertical que mas conviene para representar en su superficie los cuerpos; valiéndose de la *perspectiva militar ó Caballera*, cuyo nombre merece conservarse. Su utilidad es grande para los apuntes que hacen los ingenieros y arquitectos en las obras y proyectos; y usada con discernimiento producirá en muchos casos su aplicacion á la topografía, ventajas conocidas.

*Fig*297 652. *La figura* 297, indica la perspectiva de un edificio cuya planta *abcd* es rectangular, y cuya línea fundamental es xy. El modo de encontrar aquella es tirar por los diferentes puntos a, b, c, d, r, s, t, á la xy, &c., las perpendiculares aa', da', cc', &c.; en las que se toman las alturas sobre los puntos de la planta, para determinar las armaduras que forman su techumbre.

*Fig*298 *La figura* 298, demuestra igual operacion para una montaña, en la que se conocen las curvas horizontales aa, bb, cc, dd. Trazada la línea fundamental xy, se tirará la perpendicular ad; y se tomarán sobre ella las alturas aa', bb', cc', &c., con respecto al plano de comparacion, que aquí se supone ser el nivel del mar. Se trazarán por los puntos a', b', c', &c., las curvas horizontales iguales á aa, bb, cc, &c., y del mismo modo dispuestas con relacion á ad'. No hay necesidad de trazar estas curvas en su primera posicion, pues basta el conocimiento de los puntos *a*, *b*, *c*, &c., que estan sobre la recta *ad'*. Si se tiene la línea de máxima pendiente *rstv*, su proyeccion será *r's't'v'*: para obtener la cual se tirarán por los puntos *r*, *s*, *t*, *v*, perpendiculares á la línea fundamental, y se tomarán sobre ellas las partes *rr'*, *ss'* *tt'*, *vv'*, iguales á las alturas correspondientes á dichos puntos.

653. La direccion de la luz mas conveniente para el mejor efecto de esta perspectiva es la que en proyeccion horizontal forma ángulo de 45° con la línea fundamental, que comunmente es la inferior del marco; procediéndose en el supuesto de que la propagacion se hace de izquierda á derecha. El ángulo de inclinacion, que es tambien de igual número de grados, se halla representado en esta proyeccion por *lox*, y la direccion de la luz por *lo*.

654. La montaña de la *figura* 299, está dibujada por este método: de su efecto podrá juzgarse comparándola con las otras *Fig* 299 puestas para ejemplo. Es indudable, que asi como en proyeccion rectangular la estension de las superficies inclinadas se achica, en esta esperimenta aumento y reduccion de una manera uniforme, y fácil de conocer por la línea fundamental. Tanta podria llegar á ser la reduccion, que ocultára la superficie, en cuyo caso es un defecto; pero indudablemente será una ventaja, y ventaja debida á este método, si se aumentáre convenientemente la proyeccion de la parte que importa representar.

Con el fin de dar una idea de este método de representacion en algunos accidentes del terreno, se han dibujado por sus principios las figuras siguientes.

Figura 126. *Lámina* 8. Demuestra un trozo de muralla con parapeto; y *la* 127 una torre con sombra cortada.

Figura 211. *Lámina* 12. A la derecha se representa un bosque con monte bajo ó matorral; y á la izquierda árboles en cultivo, como olivos, naranjos, &c., y arbustos rastreros como parras, pequeños frutales, &c.

Figura 182. *Lámina* 11. Un gran recodo de un rio con algunas porciones del terreno inmediato.

Figura 190. Montaña á la cual faldea un rio de márgenes quebradas.

Figura 105 *á* 108. *Lámina* 7. Indica el curso de un rio con los terrenos contiguos. En el correspondiente á la márgen derecha hay una casa con tierras de labor, á las que sirve de límite un afluente; despues una quebrada con arbolado, bosques claros, y matorrales, con algunas tierras de labor en los intermedios; y al estremo árboles en cultivo. En la parte del rio, que confronta con estos, hay un islote cubierto de maleza. El terreno contiguo á la márgen izquierda presenta algunos árboles en cultivo, varias alamedas en la misma orilla, una vertiente, y una porcion de pantano. El resto son tierras de labor y eriales.

Figura 110. Un bosque con algunas tierras de labor, y un trozo de rio. *La* 109 una hacienda ó caserío con bosques, y algunas tierras de labor en los intermedios.

De las Vistas.

655. En tres supuestos diferentes pueden sacarse las vistas: primero, cuando el ojo del espectador está sujeto á pasar por los puntos de una superficie; segundo, cuando está fijo en un punto; y tercero, cuando recorre los puntos de una línea. En todos ellos debe existir una superficie que intercepte los rayos visuales que determinan los contornos y líneas particulares de los objetos: la cual es plana cuando se representan estos en el papel, aunque tambien podria ser una superficie curva cualquiera.

656. Si el ojo de un espectador pasa por los puntos a, a', a'', &c. de un plano p con el fin de determinar la vista de una montaña sobre el plano P, y en cada una de sus posiciones se toman
*Fig*300 unicamente las visuales perpendiculares á P que van á parar á los diferentes puntos de la montaña, sus encuentros con este plano formarán la curva b, b', b'', &c. de la vista buscada. Esta resolucion directa es casi impracticable por los tanteos que sería forzoso hacer; inconveniente que se evita por una resolucion inversa, tirando desde los diferentes puntos B, B$'$, B$''$, &c. de la montaña á P perpendiculares, cuyos pies darán los puntos b, b', b'', &c., que formarán la vista. Los puntos correspondientes á otros objetos se determinarán del mismo modo; por egemplo, la vista del árbol RS será R$'$S$'$. Si se prolongan las perpendiculares hasta el plano p, se

tendrán las diferentes posiciones del ojo: de modo que estas vistas son proyecciones verticales rectangulares, muy útiles en la arquitectura civil en la que se conocen con el nombre de *alzados*. En la fortificacion y obras públicas se llaman *vistas por una recta*, y se acostumbra unirlas á los perfiles de toda clase de proyectos y obras, en cuyo caso el plano del perfil es secante y de proyeccion al mismo tiempo. Estas vistas se conocen con el nombre de *vistas geométricas*, en correspondencia con la denominacion de *plano geométrico*, por ser una representacion vertical hecha en los mismos supuestos. Las vistas geométricas de terrenos de grande estension son dificiles de sacar, porque exijen conocimiento exacto de todas las alturas referidas á un plano de comparacion, y de su posicion relativamente á la línea de tierra: de modo que solo en circunstancias particulares y en terrenos de corta estension podrán ser aplicables. Estas vistas no son susceptibles de una esplicacion satisfactoria; porque si en realidad el ojo del espectador estuviese situado á una distancia infinita, no podria juzgar de los objetos; y si para conseguirlo pasase sucesivamente por los puntos de una superficie como se ha dicho, es una suposicion muy limitada del uso que se hace de este órgano, y no guarda conformidad con la instantánea prontitud con que se juzga de la existencia de los cuerpos.

Los principios de perspectiva aérea, necesarios para el dibujo de las vistas del terreno, son los mismos que se han indicado para representar en plano su superficie.

Los ejemplos de estas vistas que presentan las láminas son:

Figura 187. *Lámina* 11. Vista geométrica de una torre con árboles á su inmediacion.

Figura 193. *Lámina* 11. Vista de una porcion de terreno quebrado.

Figura 120. *Lámina* 7. Indica el perfil de un terreno, y la vista por ángulo de un caserío.

Figura 130 *Lámina* 8. Idem de un castillo antiguo sobre rocas.

657. Los inconvenientes que se han indicado hasta aqui desaparecen en las *vistas perspectivas*, porque son la escritura fiel del modo con que se presentan á la vista los cuerpos. En ellas no es

hace ninguna hipótesis contraria al modo con que se verifica la vision. Es cierto, que reproducen la sensacion que hizo la vista de un objeto desde un punto determinado; pero tambien lo es, que se pierde en ellas la verdadera magnitud de las distancias, aunque sean paralelas al cuadro: todas las representadas son aparentes, y guardan cierta relacion con las verdaderas. La observacion y la práctica hacen no obstante apreciar aproximadamente su verdadera estension, cuando en las perspectivas hay objetos naturales ó artificiales de conocidas dimensiones.

Las perspectivas que forman los pintores de paisages y arquitectura destinadas á producir sensaciones determinadas exijen un estudio profundo de la naturaleza; siéndoles permitido separarse de las severas reglas de la Geometría, siempre que con esto el genio del artista consiga mejor el fin que se propone. Pero nunca deberán olvidarlas completamente: porque si asi lo hicieran, perderian el medio mas eficaz y seguro de plantear sus cuadros. Por el contrario, las perspectivas destinadas á manifestar las circunstancias de un terreno donde se proyecta egecutar una obra pública, deben sacarse fielmente, sacrificándolo todo á la exactitud y á su objeto.

658. Si de los diferentes puntos de un cuerpo se conciben rayos dirijidos hácia el ojo, que atraviesen una superficie transparente dejando sus trazas impresas del color y tinta propia que corresponden á los puntos de que parten, el conjunto de estas trazas formará sobre la superficie la representacion completa del objeto. Esta definicion de la perspectiva, dada por Monge, es la mas clara y completa que puede imaginarse. De ella se deduce su division en *lineal* y *aérea*: esta última puede decirse que corresponde enteramente á la física.

Fig 301 Sea V la posicion del ojo, ó *punto de vista*: los rayos Cv, Ov, &c., que parten de los puntos del objeto al ojo, forman una superficie cónica, llamada *cono óptico*, cuya interseccion con el plano P del cuadro dará la perspectiva buscada. Si se tira desde V una perpendicular al cuadro, su pie p será el *punto principal*: la horizontal hh, que pasa por él en el cuadro se llama *linea de horizonte*; y la rs, que con igual circunstancia es perpendicular á la *hh* se apellida *vertical del cuadro.* Se da el nombre de *línea de tierra* á la recta *mo*, lado inferior del cuadro; la cual corresponde á los puntos M, O, primeros que se descubren en el terreno.

La estension que se presenta á los ojos, llamada *campo de vista*, es limitada, y cada posicion presenta un ejemplo de esta verdad. Las perspectivas serian impropias para suplir ó recordar la vision real, si ademas de las circunstancias espresadas no tuviesen esta última; es pues indispensable, que el cono óptico se limite en todos sentidos, formando los rayos en el vértice ángulos que esten comprendidos entre 20° y 80°, segun los casos; y solo en algunos de estos muy particulares podrán llegar hasta 90°. De aqui se deduce la distancia del cuadro á que el punto de vista puede colocarse; distancia que varía entre el triple de la mayor dimension del objeto, tomada en el cuadro, y la mitad de la misma. Este punto una vez determinado es invariable para cada perspectiva; aunque las diferentes partes de esta, sean vistas bajo diversos ángulos comprendidos entre los límites que se acaban de señalar.

659. Cualquiera que conozca la Geometría descriptiva encontrará métodos para determinar esta proyeccion, y sus propiedades particulares. Lo que se va á decir se limitará á consideraciones prácticas aplicables á las vistas perspectivas del terreno. Como el cuadro generalmente es un rectángulo *mont*, la perspectiva está limitada por las caras de la pirámide cuadrangular *montv*; y el ángulo óptico horizontal es el *hvh* igual á su proyeccion *m'v'o'*, cuyos lados *v'm'*, *v'o'* prolongados en el plano comprenden la parte del terreno que se representa en el cuadro. Pueden tomarse dos lados contiguos de este por ejes coordenados, para referir la posicion de los puntos de la perspectiva, disponiendo dos reglas *hh*, *rs*, que se muevan respectivamente paralelas á los lados ó ejes *mo*, *mt*.

Sea C un punto de la montaña, cuya perspectiva quiera determinarse. Para lograrlo elévese la regla *hh* hasta *h'h'* en que la visual *v*C rasa su borde; y si asegurando la regla en esta posicion se mueve la *rs* hasta otra *r's'* en que la misma visual sea rasante á ella, es evidente, que el punto buscado, debiendo ser comun á los bordes de las reglas, no puede ser otro que el de su interseccion c. Como $h'h'$ es paralela á mo, y $r's'$ lo es á mt, resulta $h'c=ms'$, $cs'=h'm$, ecuaciones por las que, si de antemano estuvieren divididos los ejes mo, mt, y si en los estremos h, s, de las reglas movibles hubiere un nuñez, se tendrá el valor de las coordenadas de c con tanta exactitud cuanta se quiera.

660. Este método se suple en la práctica por el *perspectógrafo* de cuadrículas, cuando no es necesaria grande precision. *Fig302* Consiste este instrumento en un marco mn de madera, cuyo claro se divide en cuadrículas por medio de sedas: hácia la mitad del lado inferior del marco hay una regla cuadrada rs (cuyo eje es perpendicular al plano del cuadro) con movimiento en el sentido de su longitud, que es el triple de la latitud del cuadro. Esta regla está dividida con las rayas convenientes, para saber á que ángulos ópticos corresponden sus diversas posiciones: y en r paralelo al cuadro lleva un alambre recto vv', que tiene en su estremo superior una planchuela circular v barnizada de negro para la comodidad de la vision, con un agujerito en el centro donde se considera el punto de vista. La posicion de este punto puede ser mas ó menos elevada, y dar diferentes puntos principales p, p', &c., con sus correspondientes líneas de horizonte. El perspectógrafo se adapta, como se demuestra en la figura, á un trespies de los instrumentos que se han esplicado para formar ángulos y nivelar.

661. Cuando se quieren sacar vistas perspectivas con este instrumento, se prepara de antemano un tablero con papel pegado; trázanse en este el mismo número de cuadrículas que forman las sedas; y se coloca el perspectógrafo verticalmente en el paraje designado, debiendo quedar horizontal el lado superior ó inferior del marco. Hecho esto, se aplica el ojo al agujerito de la planchuela, observando los puntos en que los contornos principales del terreno se cruzan con los lados de las cuadrículas; cuya distancia á uno de los ángulos contiguos se tomará entonces al aire con un compás, permaneciendo el ojo en su posicion. Tras esto se irán marcando estos puntos en las cuadrículas correspondientes del tablero, con el compás ó aproximadamente, para trazar los contornos y líneas principales de la perspectiva. Los detalles de esta se

ponen á ojo, estudiando el objeto con sujecion á los puntos determinados. Este medio da las perspectivas bastante correctas, sin los defectos en que caerian los que careciendo de práctica quisiesen tomarlas á ojo.

Esta figura es una vista de la sierra de Caparain, frente á los *Fig* 303
célebres baños minerales de Carratraca, en la provincia de Málaga, sacada con el marco de cuadrículas. En esta vista P es el punto principal; HH la línea de horizonte; y LT la de tierra: enfin, el punto de vista se ha colocado distante del cuadro, vez y media su anchura. Las rectas de puntos indican, ó bien sedas de otro color para separar las cuadrículas de 9 en 9, ó bien dos tiras de papel entrelazadas con las sedas, las cuales se corren en el sentido en que se lleva el trabajo, para hacerlo con comodidad, sin esponerse á equivocaciones.

Figura 192. *Lámina* 11. Perspectiva de un faro situado en- *Fig* 192
tre unas peñas, representándose tambien la superficie del mar.

Las vistas perspectivas no pueden unirse á los perfiles, sin partir del supuesto al sacarlas que la superficie secante es el cuadro. He aquí el caso que se considera en toda perspectiva, en que el cuadro corta al objeto que se ha de representar. Y si esta suposicion no pudiere tener lugar, se hacen separadas la perspectiva y el corte, lo que se verifica igualmente cuando no hay precision de unirla al perfil.

662. La vista, en que el ojo pasa por los diferentes puntos de una línea, es mista, ó compuesta de las dos anteriores; por cuya razon podria llamarse *vista geométrico-perspectiva*. Sirve ventajosamente para hacer mas espedita la ejecucion de la vista, al mismo tiempo que se saca el perfil: pues por una parte no hay necesidad de la multitud de datos que requieren las geométricas, y por otra hay la facilidad que ofrecen las perspectivas para determinar la representacion de las alturas. Sea *abc* la recta que recorre *Fig* 304
el ojo, y P el cuadro. Si de los rayos visuales, que parten de los diferentes puntos de la recta, se aprovechan solamente los que contienen los planos verticales *a*MN, *b*M′N′, &c., perpendiculares á P, se tendrán sobre sus trazas MN, M′N′, &c, las perspectivas *o*′, *m*′, *n*′ de los puntos *o*, *m*, *n*, del terreno; y sus distancias en el

sentido de las horizontales serán las mismas que en la vista geométrica. Si la línea fuere curva, y producida en el terreno por la seccion de un plano vertical que es el caso mas corriente, la construccion se traza del mismo modo con respecto á los puntos *d*, *b*, *e*, &c.; la línea que describe el ojo es paralela á la del perfil en la distancia conveniente; y sus posiciones se obtienen con facilidad por dos reglas unidas perpendicularmente entre sí. Una de ellas se coloca vertical para determinar las alturas, y en el estremo de la horizontal se pone el punto de vista.

Si el perfil formase ángulos entrantes y salientes, las vistas para cada una de sus líneas cuando se aplican á un plano se separarian por verticales, tiradas por los puntos á que corresponden los vértices de los ángulos del perfil. Tambien pudieran darse á los planos verticales direcciones converjentes ó diverjentes, si el ángulo del perfil fuese entrante ó saliente del lado de la vista. Si el perfil fuese una línea curva, las direcciones se fijarian por las normales á su superficie proyectante, ó proyeccion horizontal; pero en estos dos casos la vista pierde la propiedad de ser geométrica para las horizontales.

Las vistas de este género van siempre unidas á perfiles, como puede observarse en los ejemplos incluidos en las láminas, que son:

Fig 189 *Figura* 189. *Lámina* 11. El perfil de un barranco, y una altura con la vista geométrica-perspectiva de aquel, de una torre, y de una faja de terreno mas elevado que el perfil.

Fig 133 *Figura* 133. *Lámina* 8. Vista geométrico-perspectiva del castillo de Gibralfaro (Málaga), arreglada próximamente por un croquis, y de algunas alturas tomadas con el barómetro.

Parte adicional.

663. Ha parecido conveniente agregar á esta obra algunas noticias sobre las cartas geográficas, sobre sus diferentes usos, y sobre el modo de construirlas. Al mismo tiempo, y atendiendo á que esta materia corresponde esencialmente á la instruccion general, se ha creido necesario tratarla con la mayor sencillez y claridad, para que su inteligencia y aplicaciones esten al alcance de mayor número de personas. Se ha omitido el esplicar los medios con que se obtienen los datos que exije su construccion; asi por necesitarse para ello una instruccion especial, como porque aun los que forman las cartas, como que el adquirir los datos por si mismo es cosa muy costosa, se sirven en muchos casos de los que estan ya publicados. De este modo, al paso que se evitará el hacer uso equivocado de las cartas, se conseguirá sacar de ellas la mayor utilidad posible.

Cartas geográficas.

Usos y definiciones de ellas.

664. Las *cartas* ó *mapas* sirven para enseñar la Geografía, esto es, para representar los accidentes naturales de las partes del globo, y de los estados ó provincias; y para fijar en la memoria la forma y configuracion de los continentes y de los mares, el curso de los rios, direccion y altura de las cadenas de montañas, y sus ramificaciones. Sirven tambien para indicar las divisiones generales y subdivisiones políticas y administrativas; para guiar á los viajeros y comerciantes, presentándoles la posicion relativa de los lugares y la traza de las diferentes comunicaciones; y para facilitar al navegante un medio seguro para dirijirse á puntos muy lejanos. Por úl-

timo ofrecen medios, al militar para combinar sus operaciones y trazar la marcha de los ejércitos; á los hombres instruidos ó solamente curiosos, para conocer el camino llevado por los viajeros; y á todos, para seguir con fruto la série de los acontecimientos políticos.

665. La varia aplicacion de las cartas á distintos usos produce por consecuencia variedad tambien en su estension y disposicion.

Se llama *mapa-mundi*, al mapa que representa toda la superficie de la tierra dividida en dos hemisferios.

Es claro, que solo sobre una esfera ó globo se pueden representar las partes de la tierra en situaciones semejantes á las que realmente ocupan. Asi las cartas ó mapas, siendo como son superficies planas, no pueden dar una perfecta semejanza; puesto que todas las partes del globo terrestre no están en el mismo plano. Pero como no es esto lo que precisamente se busca, y sí el poder juzgar aproximadamente de las posiciones para determinados usos, de aquí la utilidad de la construccion de las cartas.

666. Llámanse *cartas generales*, las que abrazan una de las cuatro partes del mundo, ó contienen los grandes estados: *particulares ó corográficas*, las que representan una provincia: y en fin *topográficas*, las que solo contienen una corta estension, como las cercanias de una ciudad, &c.

667. Su disposicion varía segun la aplicacion á que se destinen. Asi serán *físicas*, cuando solo manifiesten la forma natural del terreno; *políticas* cuando espresen la division de los estados; *administrativas*, cuando trazen las subdivisiones de estos; *hidrográficas*, si se refieren especialmente á todo lo correspondiente á la navegacion; *itinerarias*, si espresan los caminos y distancias entre los pueblos; *militares*, cuando contienen bastantes detalles para servir de base á las operaciones de la guerra; *marítimas*, cuando tienen por objeto las costas, desembocadura de los rios, y la posicion de los puertos, &c.

Segun el uso á que se destine una carta, asi debe ser su redaccion ó construccion; sin cargarla de pormenores que no corresponden á aquel, y que la harian dificil de consultar, ó tal vez ininteligible.

El objeto de una carta determina la estension del pais que ha de abrazar; la magnitud de su escala; sus pormenores; y lo que debe omitirse, para que resulten mas fácilmente las cosas que conviene descubrir desde luego. Asi por ejemplo, no debe llenarse con la representacion de montañas una carta destinada para manifestar las divisiones administrativas, ni herizar de rios una carta itineraria.

Cartas elementales.

668. Las cartas para los tratados de Geografia, y atlas generales, deben solo contener las masas principales, sin otros detalles que los apropiados á la estension del terreno que representen. Por lo tanto la carta de una parte del mundo será de instruccion suficiente, si manifiesta los rios y cadenas de montañas que corren por los diversos estados; la division y límites de estos; y las capitales y pueblos principales en ellos situados.

Las noticias ó conocimientos mas estensos pueden buscarse en las cartas particulares, que deben amplificar lo contenido en las elementales.

Cartas físicas.

669. Su objeto es representar la configuracion y relieve del terreno; por consiguiente deben contener los rios, arroyos, lagos, montañas, valles, &c.; pero no la situacion de los pueblos, ni la direccion de los caminos y canales.

Si estas cartas fueren *generales*, esto es, si hubieren de comprender todo el globo ó una parte de él, ó un reino, tendrán una escala menor, y por consiguiente serán menos detalladas que las *particulares*, ó correspondientes solo á una provincia ó distrito. En las primeras, se indica el curso de los rios, las grandes cadenas de montañas, y sus ramificaciones principales: pero en las segundas, se marca ademas el curso de los grandes arroyos; espresánse mejor las pendientes de los terrenos; manifiéstanse los valles pequeños; se muestran las elevaciones aisladas; y en fin, se acota la altura de los puntos mas elevados ó culminantes. A estas cartas, útiles para los trabajos geolójicos y mineralójicos, deben acompañarse los correspondientes perfiles de los terrenos.

Cartas políticas.

670. Deben solo contener los accidentes geográficos que se refieren á la política de los Estados, y á su division particular; tales por ejemplo como las cadenas de montañas, y los rios que separan las naciones ó provincias: debiéndose trazar aquellas y estos con preferencia á otros accidentes, que aunque mas considerables respecto á la geografía física, fueren indiferentes respecto á la política.

Solo se pondrán las elevaciones, lagos, &c, á que se refieran las discusiones políticas ó acontecimientos de la guerra. Igual regla debe seguirse en la eleccion de pueblos, situando los que son de grande importancia administrativa, las plazas fuertes y los puntos de frontera por donde atraviesan las comunicaciones: si la escala lo permite, se trazarán asi mismo los caminos de interés general.

Estas cartas son muy interesantes para la lectura de la historia; y para la inteligencia de los acontecimientos referidos en los papeles públicos. No lo son menos para los que se ocupan de la economía pública, del comercio, é industria; y para los hombres de estado, ó encargados de los grandes intereses nacionales.

Cartas administrativas.

671. Basta que en estas se espresen los grandes rios, las principales cadenas de montañas, y demas que puedan dar una idea en globo de la configuracion del pais. Deben espresarse las divisiones, y subdivisiones políticas; las capitales, y residencias de las principales autoridades civiles y militares; y todo lo que pueda dar á conocer la organizacion de tal ó cual parte de la administracion de un Estado.

Asi, por ejemplo, una carta que solo tuviese por objeto el servicio del Cuerpo de Injenieros militares, debería indicar la estension ó límites de las direcciones y subinspecciones, la residencia de los directores, las comandancias, las plazas fuertes, los puntos de acuartelamiento, &c.

La correspondiente al Ministerio de Gracia y Justicia espresaría los puntos en que se hallan establecidos los Tribunales Supremos, las Chancillerías, y Audiencias; los territorios en que egercen jurisdiccion; los pueblos en que residen los Juzgados de primera instancia; y la demarcacion del territorio de los partidos judiciales.

Cartas hidrográficas.

672. Su objeto es manifestar todas las comunicaciones por agua de un estado ó provincia, ya para el transporte de materiales y efectos, ya tambien para formar proyectos de canalizacion

Se deben, pues, espresar en estas cartas todos los rios navegables, ó que puedan sostener balsas ó almadías, y todos los canales; pero no las aguas que no sirven para alimentar estos. Se manifestarán en cuanto sea posible las esclusas, los puertos, y depósitos de agua. Solo se colocan sobre las líneas de navegacion los pueblos que sirven de puertos, ó que abastecen los barcos en su travesía, ó en que se hallan establecimientos administrativos de caminos y canales, &c. Se ve que estas cartas, ademas de exijir detalles construidos en una escala bien grande, exijen tambien nivelaciones, y memorias estensas.

Cartas itinerarias.

673. Estas, cuando la escala es pequeña, contendrán los principales caminos, y las ciudades de consideracion por donde atraviesan. Pero, cuando es grande, se espresan no solo todos los caminos reales ó carreteros, sino tambien los principales de herradura; y hasta los que solo sirven para las comunicaciones entre los pueblos vecinos, ó sean *caminos vecinales*. Tambien se ponen los pueblos situados sobre los caminos, y las casas de postas.

Si las cartas son itinerarias militares, se colocan especialmente los pueblos llamados de *etapa*, donde las tropas en sus marchas deben hacer descanso, ó recibir raciones.

A estas cartas pueden acompañar estados semejantes al que sigue:

ITINERARIO DE..... MARCANDO.....

Nomb.s de los pueb.	Distancias.	Tiempo en que se andan.			Total.	Observaciones.
		Llano	Subida	Bajada	Horas	
»	. . » . .	. » .	. » .	. » .	. » .	. »

Cartas marinas.

674. Solo deben representar las costas y embocaduras de los rios, y los puertos; espresando si aquellas estan cortadas á pico ó *acantiladas*; si son bajas y unidas; si de arena que forme playas ó dunas, ó de rocas. Se figuran en ellas los bancos cubiertos ó descubiertos en las mareas. Se notan las rocas, arrecifes, y rompientes; los tajos; y en fin las acotaciones de las sondas. Tambien se situan con precision los faros y demás señales.

Como regla general debe tenerse presente, que suponiéndosele al que se sirve de estas cartas dentro de la mar hay que indicarle todo lo que pueda descubrir al acercarse á las costas; como montañas principales, picos, piedras, y otras cualesquiera señales, útiles para dirigir el rumbo: dándole con este objeto á conocer los sitios en que se encuentra, y aquel adonde debe llegar.

Todo lo interior de la carta se deja en blanco: pero en la parte litoral, única marcada, pueden colocarse los puntos mas importantes; que son los que por su situacion, comercio, é industria ofrecen recursos á los puertos cercanos.

Cartas militares.

675. Necesitan de escala grande, porque han de espresasr los menores detalles: se han de trazar en ellas los arroyos, los caminos y veredas, las desigualdades del terreno, las pequeñar alturas, las cañadas, lagunas, pantanos y marismas; y señalar los lindes de los bosques, las posiciones, las casas aisladas, los molinos, y los puentes. En suma deben presentar la imágen exacta y completa del pais: muy esmeradamente lo que sea útil para las operaciones de la guerra, como la situacion de las plazas fuertes, reductos, obras destacadas, cabezas de puentes y desfiladeros: y en fin, todo lo que conviene para dirijir la marcha de las tropa, para acamparlas ó acantonarlas, para establecer los campos retrincherados, y para formar las líneas.

Cartas científicas.

676. Se forman estas para partes especiales de las ciencias por lo cual se distinguen en cartas mineralógicas, geológicas, zoológicas, &c., con el objeto de manifestar la distribucion geográfica de las producciones de la naturaleza. Tambien tienen por objeto los trabajos estadísticos; asi como los respectivos á la economía pública, á la industria, &c.

677. Despues de lo espuesto sobre la eleccion de escalas (493), la tabla siguiente completará las noticias que conviene tener sobre las medidas, respecto á las cartas.

	Cada grado.	*Longitud.*
España.		Varas.
Legua legal	$16\frac{2}{3}$ . .	7985,3693.
Horaria.	20 . .	6654,4744.
Portugal.		
Legua.	18 . .	7393,8657.

	Cada grado.	Longitud.
		Varas.
Francia.		
Legua geográfica ú ordinaria.	25	5323,5795.
De posta de 2000 toesas.		4662,6164.
Marítima	20	6654,4744.
Alemania.		
Milla grande.	12.	11090,7507.
Ordinaria ó geográfica	15	8872,5527.
Milla de Bohemia.	16	8317,9434.
De Sajonia.	$12\frac{1}{5}$	10769,1826.
De Hungria	$13\frac{1}{3}$	9981,7116.
De Prusia	14,37	9269,9669.
Inglaterra.		
Milla legal.	$69\frac{1}{8}$	1925,3413.
Marina ó geográfica.	60	2218,1980.
Legua marina.	20	6654,4744.
—— de Escocia.	50	2661,7898.
—— de Irlanda.	40	3327,2372.
Dinamarca.		
Milla	14,77	9010,7266.
Marina.	9	14792,3732.
Paises bajos.		
Milla de Brabante.	20	6654,4744.
—— de Holanda.	21,05	7004,3951.
—— de Luxemburgo.	28	4753,1789.
Succia.		
Milla	$10\frac{5}{8}$	12797,0477.

	Cada grado.	Longitud.
		Varas.
Noruega.		
Milla	10 . .	13308,9488.
Rusia.		
Wertts comun.	104 ¼ . .	1276,6303.
Milla geográfica de 6 Wertts . .	17,453 .	7625,7585.
Legua de Polonia.	20 . .	6654,4744.
Italia.		
Legua de Bolonia.	20 . .	6654,4744.
—— de Milan	67 ¼ . .	1979,0197.
—— de Nápoles	57,71 .	2306,1268.
—— de Roma	74,7 . .	1760,8487.
—— de Toscana.	68 ¼ . .	1949,5905.
—— de Venecia.	60,62 .	2195,4681.
—— del Piamonte	48 . .	2772,6877.
Asia.		
Legua de Arabia.	57 ⅕ . .	2326,7033.
—— del Indostan	35 . .	3802,5551.
—— de China.	192,4 . .	691,7064.
Gros de Coromandel.	11 . .	12099,0008.
—— de Malabár	10 . .	13308,9488.
América.		
Legua de Cayena.	28 . .	4753,1789.
—— del Canadá.	28,54 .	4663,2164.

678. Todas las clases de planos y cartas deben acompañarse con memorias descriptivas que se refieran á los objetos espresados en el modelo que sigue.

TABLA *de los pueblos, circunstancias, y*

	ATMÓSFERA.			
	LOCALIDAD.		TEMPERATURA.	
Nombres de los partidos y pueblos.	Longitud.	Latitud.	Calor m.º	Frio id.
Partido de...........				

ANIMALES.					
				Tierras de labor.	
Domésticos.	Caseros.	Colmenares.	Gusanos de seda.	Fanegas.	Prados.

INDUS

MOLINOS.									
De aceite.		*De pan.*			SIERRAS.		FERRERIAS.	
De viento.	De agua.	Agua.	Viento.	Vapor.	Agua.	Vapor.	Agua.	Vapor.

COMERCIO.								
ESPORTACION.				IMPORTACION.				COMUNICA
Prim. mater.	Subsistenc.	Manufact.	Produc. de art.	Id.	Id.	Id.	Id.	Tierra.

recursos de la Provincia, Partido, &c.

ESTADISTICA.

POBLACION.

Aguas.	Terrenos.	N.º de casas.	Varones.	Hembras.

NATURALEZA DE LOS BIENES.

Viñedos.	Bosques.	Huertas.	Olivares.	Dehesas.	Canteras.	Minas.	Incultas.

TRIA.

FUNDICIONES.			ARTES Y OFICIOS.			
De reverbero.	Alta presion.	Catalana.	Agricult.	Acarreo.	Albañiles.	Carpinteros. etc.

ADMINISTRACION.

CIONES.	GOBIERNO.		JURISDICCIONES.		CONTADURIAS.		
Agua.	Civiles.	Militar.	1.ª Instan.	Audiencia	General.	Local.	Hospitales

OBSERVACIONES.

Atmósfera. Causa de las lluvias constantes, de las abundantes ó raras, y de la sequedad: vientos favorables ó dañosos: puntos espuestos á granizo: nieves perpetuas, ó temporales: nieblas, y sus efectos: causas de salubridad, ó insalubridad: &c.

Aguas. Origen y desembocadura de los rios; dimensiones; corriente; navegables, ó no; confluencias con otros rios; altura; crecientes, y lecho; vados; barcas; puentes; puntos favorables para establecimiento de estos, y sus dimensiones; objetos de transporte, coste de él, y naturaleza de navegacion; abundancia ó escasez de peces; superficie; calidad y uso de las aguas; practicables para gente de á pie, de á caballo, ó de carruaje; máquinas hidráulicas; &c. Lagunas y pantanos; posibilidad de desagüe; arbustos; mimbres; juncos; &c.

Terreno. Puntos mas elevados; inclinacion; direccion; cadenas á que corresponden, y vertientes; accesibilidad, ó inaccesibilidad; cultivo; pastos; áridos; escuetos, ó con árboles; hielos, nieves ventiscas; calidad de las rocas; materias volcánicas, conchas, y petrificaciones. Esposicion de las causas secundarias de variaciones; atmósfera, sequedad, lluvias, é innundaciones; grado de fertilidad; propension para determinadas producciones; salubridad, estension, calidad y propiedades del suelo.

Estadística. Fecha del último padron; relacion entre viejos, jóvenes, niños, y entre los sexos; personas útiles é inútiles; oficios; relacion de todos estos datos con la superficie del pais; &c. Las causas generales de riqueza, pobreza, &c.; la religion, y constitucion del pais; costumbres, y alimentos; calidad, y aplicacion dada á los animales; su precio; su fomento, y manutencion; &c.

Bienes. Cultivo; recoleccion; calidad y precio de los terrenos; abonos; plantas; relacion entre siembra y cosecha, bondad y salida; circunstancias de los bosques, y aprovechamiento de ellos; consumo de frutos; plantacion; árboles frutales; su especie, cultura, producto; &c.

Industria. Calidad de los metales, elaboracion, aplicacion, precio, y su producto: fábricas de armas: tierras de alfareria ó tejares: máquinas para laminár: naturaleza, valor y calidad de los combustibles empleados, sitios de donde se sacan, y medios de transporte: &c.

Comercio. Clase de comunicaciones, y sus circunstancias: compañías, y asociaciones.

Administracion. Hospitales, su estado, fondos: casas de beneficencia: escuelas, número de alumnos: bibliotecas públicas: establecimientos científicos: &c. Obras, y monumentos públicos: juegos públicos, producto, y efectos.

Historia. Epocas de conquistas, gobiernos, invasiones, tradiciones, gusto, opiniones políticas y religiosas, adelantos de ciencias y artes. Trabajos, empleos, rasgos de beneficencia y humanidad, hombres célebres y virtuosos. Egemplos útiles ó perjudiciales: efecto de las revoluciones. Monumentos antiguos, inscripciones, obras maestras de arquitectura, ú otras, guerras en que el pais haya sido el teatro de ellas, indagacion de los campos de batalla y posiciones.

Figura y dimensiones de la tierra.

679. Conviene, antes de tratar de las líneas que sirven para la division de la superficie de la tierra y cuyo desarrollo forma las proyecciones de las cartas, dar algunos pormenores sobre la forma y magnitud del globo.

La tierra no es exactamente redonda, pues está aplastada hacia los polos $\frac{1}{130}$; y aunque no es necesario espresar este aplastamiento en los globos destinados á la instruccion, ni en las cartas cuya escala es pequeña, deberá llevarse en cuenta siempre que se pueda.

Dimensiones del globo.

	Varas.
Radio del ecuador, ó semi-eje mayor del elipsóide terrestre.	7,632,960.
Radio del centro al polo, ó semi-eje menor	7,610,008.
Aplastamiento en el polo, ó esceso del radio ecuatorial sobre el polar.	22,952.
Radio de la tierra suponiéndola esférica.	7,621,422.
Circunferencia del ecuador.	47,958,673.

De los grados de longitud y latitud.

680. Las definiciones de los círculos imaginarios que dividen la superficie del globo, y que se trazan en las cartas geográficas, son necesarias para la inteligencia de lo que se va á decir sobre los grados de longitud y latitud.

*Fig*305 681. Llámase *eje de la tierra* á la línea sobre que esta jira. Las estremidades de esta línea son los *polos*: el uno A se llama *boreal*, *ártico*, ó simplemente polo del *Norte*; y el otro B, *austral*, *antártico*, ó del *Sur*.

682. Se han imaginado otras líneas ó círculos que se cruzan con el objeto de poder determinar exactamente la posicion de todos los puntos de la superficie de la tierra.

Se llaman *círculos máximos*, á los que pasan por el centro de ella y tienen toda la magnitud que puede tener un círculo sobre el globo: tales son el ecuador, y el meridiano. Los otros círculos, que no tienen toda la magnitud posible, se llaman *círculos menores*, y son paralelos al *ecuador*. Este EC, ó CQ divide la tierra en dos partes iguales, y tiene todos sus puntos á igual distancia de uno y otro polo. La parte septentrional EBC, ó CB'Q se llama *hemisferio boreal*, ó *del norte*; y la otra EAC, ó CA'Q *hemisferio austral*, ó *del Sur*.

683. El *meridiano* AEB, ó ACB, pasa por los dos polos, y corta perpendicularmente el ecuador dividiendo la tierra en dos partes iguales, la una *oriental*, la otra *occidental*: pero este meridiano no es único, porque se pueden suponer tantos meridianos como puntos tiene el ecuador.

684. Entre los círculos menores paralelos al ecuador se distinguen el *trópico de cancer* TP al Norte, y el de *capricornio* SR al Sur; y ademas de estos dos el *círculo polar ártico* YH al Norte, y el *circulo polar antártico* LK al Sur. Los otros paralelos como *e*, no tienen nombres particulares; y su número, como el de los meridianos, es infinito, porque se pueden suponer tantos como puntos diferentes hay sobre el meridiano.

685. El ecuador sirve como de línea de salida, á la que se re-

fieren las distancias á los otros puntos. Dividiendo la circunferencia del meridiano en 360 grados se dice, que todos los puntos situados al norte del ecuador están á tantos *grados*, *minutos* y *segundos de latitud septentrional*; y que los colocados al Sur del mismo círculo, estan á *tantos grados*, *minutos* &c. *de latitud meridional*: asi Madrid se halla á 40°, 10′ de latitud septentrional. Es pues la *latitud de un lugar*, la distancia de este al ecuador. Pero no basta, para determinar la situacion de un punto sobre la superficie de la tierra, conocer su distancia, ó lo que está mas bajo ó mas alto, si puede hablarse asi, respecto al ecuador: se necesita ademas emplear otro círculo máximo, convencionalmente fijado con anterioridad, que se dirija en un sentido tal que marque hacia que parte á derecha ó izquierda se halla el punto; y entonces se procede sobre uno de los círculos máximos ó meridianos perpendiculares al ecuador. Como este meridiano es de puro convenio, los geógrafos varían en su eleccion: asi los franceses suponen que pasa por París; los ingleses por Greenvvich; los alemanes por la isla de Hierro; y los españoles por Madrid, ó por el observatorio de San Fernando en la isla de Leon, y por el pico de Tenerife en las Canarias. Este último meridiano es el generalmente usado por los marinos. Por lo regular cada nacion tiene su meridiano particular, el cual pasa por la respectiva capital ú observatorio de mayor importancia.

Los puntos situados al este del primer meridiano se dice, que están á tantos grados, minutos, y segundos de *longitud oriental*; y los colocados al oeste á tantos de *longitud occidental*. Madrid por ejemplo, está á 2°, 32′ longitud oriental del meridiano de Cádiz. Luego la *longitud de un lugar* es la distancia que hay desde este punto al primer meridiano.

686. Los grados de latitud se cuentan sobre el meridiano del lugar: tienen todos la mismos longitud; y son ademas iguales entre sí.

En las cartas se escribe al lado de cada meridiano un número, que indica los grados que dista del convencional ó principal; y lo mismo al lado de cada paralelo para marcar lo que se aparta del ecuador.

687. Los grados de longitud se cuentan sobre el ecuador, ó

sobre los paralelos, y como estos van siendo cada vez mas pequeños á proporcion que avanzan hacia los polos, resulta que los grados de longitud van tambien achicándose, á medida que se aproximan á los polos.

Veáse esta disminucion en los principales grados:

Grado de latitud bajo del ecuador, ... 132,430 varas; á 45° . . . . 133,025; bajo del polo, ... 400,848.

Construccion de los globos artificiales.

Fig 305 688. Constrúyase una esfera de cobre ó carton; (*) elíjanse en ella dos puntos diametralmente opuestos A, B que representen los polos; y descríbase una circunferencia de círculo máximo ECQ equidistante de ambos. Tómese un punto en esta circunferencia, que representará el ecuador (ó *línea equinocial*) para desde él contar las longitudes; divídasela en 360 partes ó grados; y por cada 30 ó por cada 15° de estos y los polos descríbanse círculos máximos, para tener los 12 horarios que dividen al ecuador en veinte y cuatro partes iguales. Se cuenta como primer meridiano el que pasa por el punto elejido; y su cuadrante se divide en 90 partes ó grados para describir sobre él los paralelos al ecuador ó círculos de latitud de 10° en 10°. Entre los paralelos se marcan con líneas dobles los dos trópicos SR, TP, distantes 23 $\frac{1}{4}$ del ecuador; y tambien los dos círculos polares YH, LK, á distancia de 23 $\frac{1}{4}$ de cada polo. Por la interseccion del primer meridiano con el ecuador se describe un círculo máximo EOCQ, tangente á los trópicos, marcándolo igualmente con líneas dobles: llámasele la *ecliptica*. Esta se divide en doce partes, que representan los doce *signos del zodiaco*; y cada una en 30°, empezando desde la interseccion del primer meridiano con el ecuador.

, 306 y 306′ 689. Es indispensable el desarrollo aproximado de la esfera para la delineacion de sus partes, que despues se sobreponen en el globo del modo siguiente. Tírese la EQ, igual á la circunferencia rectificada del círculo que hace de ecuador en el globo; divídasela

(*) Tambien se hacen los globos de goma elástica, ó de papel preparado, llenándolos de aire; lo que proporciona comodidad para transportarlos.

en doce partes iguales EF, FH...., y á cada una de estas en 30 que representan grados: es claro, que cada tres de aquellas formarán un cuadrante. Divídanse ademas las EF, FH, &c. por medio en X, Z, &c., y se tendrán 24 partes cada una de 15°; hágase pasar por dichos puntos las perpendiculares MN, OP&c; ó tómense las NX, XM, PZ, OZ iguales á 90° tomados sobre la EQ; y por los puntos N, E, M trázese el arco de círculo NEM que será el primer meridiano, y tras este los PFO, NFM, PHO, que tambien serán meridianos. Desde X sobre MN córtense Xh, Xh' de $23°\frac{1}{4}$; y, tirando paralelas á EQ que corten todos los segmentos, se tendrán los trópicos. Desde M, N, P, O tómense sobre las mismas NM, PO, las distancias Nt, Mt', Pu, Ou' de $23°\frac{1}{4}$; y tirando paralelas á la EQ se tendrán los dos círculos polares: del mismo modo se describirán los demas círculos paralelos al ecuador.

Para la eclíptica se toman desde F en los meridianos FN, FP, $11°\frac{1}{2}$, que es la declinacion de ella al fin de Aries y principio de Tauro; desde H en los meridianos HP, HR, se toman 20° y 12′, declinacion al fin de Tauro y principio de Géminis: pasando por estos puntos la curva En'' se tendrá el primer cuadrante de la eclíptica, que se señala con los caracteres de cada signo. Lo mismo se hace respecto á los otros tres cuadrantes. Colóquense en seguida en los segmentos los principales lugares de la tierra, segun su longitud y latitud; y, cortando lo superfluo entre los segmentos, quedan unos *husos* de papel que se acomodan sobre la superficie de la esfera. Los puntos N, P, R, &c. concurren rematando en uno solo, y forman el polo boreal; del mismo modo los M, O, S, &c. forman el austral.

Debe observarse, que, como al mojarse el papel se estiende ó alarga, hay que llevar en cuenta esta dilatacion para que se ajuste el ecuador, formando una verdadera circunferencia del globo. Sentado esto, si se observa que el papel empleado se dilata una sexagésima parte, á la EQ solo se la darán 354°, para que con los 6° del aumento tenga ajustadamente los 360°.

Proyeccion de las cartas.

690. La proyeccion de partes mas ó menos estensas del globo

terrestre en planos llamados *cartas* tiene por objeto el espresar los pormenores, que en un globo, ni aun cuando fuera del mayor diámetro ó eje posible, podrian figurarse; haciéndolos asi de uso mas manual, y de adquisicion menos costosa. Si se hiciera en particular la proyeccion de cada punto que se quisiese representar, el número de operaciones seria sobradamente considerable. Para remediar este mal solo se construyen las líneas, que son las perspectivas de los meridianos y paralelos, cuyas intersecciones determinan la posicion geográfica.

691 Se llama *eje óptico* la línea recta tirada desde el centro de una esfera al punto de vista, y que pasa por el círculo máximo que separa el hemisferio visible del invisible. Para que un globo esté dividido en dos superficies iguales en perspectiva sencilla, es preciso que el punto de vista esté á una distancia considerable.

La proyeccion de la esfera puede ser *ortográfica* y *estereográfica*. La primera representa la superficie del globo en un plano que pasa por su centro, suponiendo el punto de vista á una distancia infinita de los dos hemisferios. En la segunda, la superficie de la esfera se representa en uno de los círculos máximos, suponiendo el punto de vista en el polo de dicho círculo. Se mira, pues, el globo como transparente; y el hemisferio representado es el opuesto al en que se supone la vista.

Estas dos proyecciones tienen mas ó menos ventajas y defectos. En la ortográfica los espacios disminuyen desde el centro á la circunferencia, por la oblicuidad con que se presentan las partes laterales de la esfera á su plano diametral. Por lo tanto para obviar este inconveniente se prolonga el eje óptico fuera de la esfera, hasta el punto en que la desigualdad de los espacios sea la menor posible. En la estereográfica los espacios comprendidos entre dos meridianos y dos paralelos consecutivos aumentan del centro á la circunferencia; lo que proviene de la oblicuidad de las visuales, que se separan de la que es perpendicular al plano.

Fig 307 692. En esta proyeccion los meridianos y paralelos quedan representados como círculos, como va á demostrarse.

Sea MRNS la esfera; MN el círculo máximo cuyo plano es de proyeccion ó del cuadro; V el punto de vista, ó la posicion del ojo; y ab un círculo menor, cuya perspectiva ó proyeccion estereográfica quiere determinarse.

Es evidente, que, si se considera por el centro de la esfera el del círculo menor y el punto de vista un plano que se tome por vertical de proyeccion, los planos del cuadro y del círculo menor serán perpendiculares á dicho plano, y en consecuencia se representarán por líneas rectas. Fácilmente se concibe, que, cualquiera que sea la disposicion de los círculos, puede traerse el plano vertical de proyeccion á esta posicion por un jiro fácil de ejecutar al rededor de Vc; de consiguiente lo que se va á demostrar servirá para todos los casos. Los rayos visuales que parten de V, y van á parar á la circunferencia del círculo ab, forman un cono oblícuo de base circular; y como se sabe que todo cono de esta especie tiene otro sistema de secciones paralelas entre sí, llamadas antiparalelas ó subcontrarias, que producen círculos no paralelos á la base, si se demuestra que el plano MN está en estas circunstancias, la perspectiva mn de ab será un círculo.

Para demostrar esta proposicion basta que, dispuesto ya el cono del modo que indica la figura, el plano MN corte á los lados ó generatrices estremas del cono en m, n bajo los mismos ángulos que se forman en a y b: la medida del ángulo nmV es entónces. $\frac{\text{arco NV}+\text{arco M}a}{2}$. El abV tiene por medida $\frac{\text{arco MV}+\text{arco M}a}{2}$, y como MV=NV, será el ángulo $nm\text{V}=\text{ang } ab\text{V}$; el M$n$V tiene por medida $\frac{\text{arco MV}+\text{arco N}b}{2}$; y el baV $\frac{\text{arco NV}+\text{arco N}b}{2}$. Luego M$n$V=$ba$V: y por consiguiente la proyeccion estereográfica del círculo ab está representada por otro mn, cuyo centro se encuentra en la mitad de esta recta.

Aplíquese lo que se acaba de decir á la determinacion de la perspectiva de un círculo máximo, haciendo girar la esfera al rededor de cV hasta que este círculo esté representado por RS. Se trazarán las VR, VS′; y los puntos R′ y S′, en que cortan al cuadro MN ó á su prolongacion, fijarán el diámetro de la proyeccion, cuyo centro está en el medio O de aquel.

Del Mapa-mundi.

Fig 305 693. Se llama *Mapa-mundi* la carta que representa la superficie de toda la tierra: se divide en dos hemisferios. Cuando estos se trazan de manera que tengan por circunferencia un meridiano determinado, el cuadro es en este caso el plano del meridiano; el ojo está colocado en el polo del círculo; y se verifica entónces la proyeccion llamada *por un meridiano.*

Estos mapa-mundis tienen el inconveniente de separar las partes adyacentes del globo y de ofrecer de un modo satisfactorio; tan solo la situacion respectiva, y configuracion de las regiones colocadas hacia el medio de la carta.

694. El Mapa-mundi es la carta mas útil para adquirir los conocimientos generales de geografía. El trazado de su proyeccion es bastante embarazoso, por la mucha magnitud de los radios de los arcos de círculo que hay que describir.

El método siguiente puede servir para las cartas destinadas únicamente al estudio de la geografía.

En la horizontal EQ márquese su mitad C; y este punto será el en que los dos hemisferios se tocan. Desde C, con una abertura de compás igual al radio que quiera darse á cada hemisferio, se marcan los puntos X, Z, por los cuales se tirarán á la EQ las perpendiculares AB, A′B′.

Desde X y Z como centros, y con la misma abertura de compás, se describen dos circunferencias que serán tangentes· los círculos que ellas comprenden representarán los dos hemisferios. La línea EQ, que pasa por los dos centros, será el desarrollo del ecuador; y las líneas verticales AB, A′B′, que van del uno al otro polo y cortan los hemisferios en dos partes iguales, serán los meridianos Divídanse los cuadrantes y los radios XC, XQ, ZC, ZE en nueve partes iguales, que serán por consiguiente de á 10° cada una; y hallando el centro del círculo, que debe pasar por los tres puntos asi obtenidos, quedarán descritos los paralelos y meridianos.

Cuando no se necesita una exactitud rigurosa, ó es el mapa-mundi sobradamente grande para admitir el empleo del compás en la descripcion de los meridianos y paralelos, entónces ó bien se hace uso de una regla flexible, ó bien por medio de tablas se saben las intersecciones en cada grado, y haciendo pasar líneas por ellas se formará la curva buscada.

Proyeccion estereográfica sobre un meridiano.

695. El punto de vista se coloca en el centro del hemisferio opuesto al que se quiere representar, en la circunferencia del ecuador: la proyeccion de este es por consecuencia una recta, perpendicular á la línea que pasa por los polos ó ejes de la tierra.

Trazado de los meridianos.

Sea la línea AB la proyeccion del ecuador; DE el eje de la tierra; y C el centro del hemisferio, ó la proyeccion del punto de vista sobre el plano del meridiano ADBE, que puede considerarse como el primero. Entonces todos los meridianos tendrán á DE por seccion comun; y siendo sus proyecciones círculos, cuyas circunferencias han de pasar necesariamente por D y E, sus centros estarán en la línea AB. *Fig* 308

Divídase el arco AD en nueve partes iguales; tírense los diámetros 1 — 19, 2 — 20, . . . y las rectas EA, E1. . . . que cortarán á AB y su prolongacion en los puntos m', m'', &c, n', n'', n''', &c. Estos serán las proyecciones de las estremidades del diámetro del meridiano de la carta, que pasa por el punto de longitud correspondiente al primer meridiano DAE; y serán tambien proyecciones de las estremidades de los diámetros de los meridianos de 10 en 10°.

Si desde el punto F, medio entre m', n', como centro y con un rádio igual á esta mitad se describe el arco Dm'E, se tendrá la proyeccion de un meridiano; y si se hace lo mismo desde las mitades de $m''n''$, $m'''n'''$ se obtendrán sucesivamente las proyecciones de los otros meridianos. Por una consecuencia natural de la simetría de la figura, lo que se haya hecho en un semicírculo DAED, servirá para el otro semicírculo DBED; y el meridiano, cuyo plano es perpendicular al cuadro ADB, estará representado por la recta DE.

Trazado de los paralelos.

Fig309 Como estos deban representarse por árcos de círculo, que pasen por los puntos de division 1 — 17, 2 — 16, ... sus centros estarán situados indispensablemente en la prolongacion del eje DE; y se encontrarán por una operacion muy sencilla. Trátese, por egemplo, de hallar el centro de la proyeccion del paralelo 8 — 10. Se tirarán las líneas B8, B10, que cortarán á la DE en los puntos s, s'; y la distancia ss' será el diámetro de dicho paralelo. Este ademas estaba ya determinado por los tres puntos conocidos 8, s, 10; y por lo tanto, describiéndolo desde el medio D con el rádio D8, se tendrá en la carta el paralelo correspondiente á los 80° de latitud. Lo mismo se hará para trazar los otros paralelos, como lo indica la figura respecto al 5 — 13.

Proyeccion ortográfica sobre un meridiano.

696. El objeto de esta proyeccion es figurar cada uno de los hemisferios terrestres, suponiéndo el punto de vista á una distancia infinita: de este modo los rádios visuales pueden considerarse como paralelos.

Trazado de los meridianos.

Fig310 Las líneas AB, CD, cortándose en ángulo recto, serán el meridiano del medio de la proyeccion y el ecuador; y el punto de interseccion E será el centro del plano de proyeccion y del de el hemisferio.

Divídase la circunferencia de 10° en 10°, y únanse los puntos de division por los diámetros aa', bb', cc', &c.: estos serán las secciones comunes del plano del meridiano con el del ecuador.

Los ángulos AED, bED, cED, indican la inclinacion de los meridianos con el plano de proyeccion. Ahora bien, bajando desde los puntos a, b, c, sobre el rádio ED las perpendiculares $a1'$, $b2'$, $c3'$, estas serán los senos de aquellos ángulos; y las partes E1', E2', E3''' serán los senos versos, y por consiguiente los ejes menores de las elipses que deben representar los meridianos.

La línea AB, proyeccion del eje del globo, es el eje mayor de las elipses; para trazar las cuales puede adoptarse cualquiera de los medios conocidos, y como uno de ellos el que sigue. *Fig* 311

Colóquense aparte los dos ejes dados, de modo que se corten perpendicularmente; descríbase sobre cada uno de ellos una circunferencia, que se dividirá en partes lo mas pequeñas posible é iguales; y tírense por todas ellas cuerdas, paralelas en el círculo menor al eje mayor, y á la inversa en el círculo mayor al eje menor: los puntos a, a, a, en que se cortan ambas paralelas corresponderán á la elipse buscada, la cual se trazará pasando por ellos una curva (*).

Trazado de los paralelos.

Estos se obtienen uniendo por líneas rectas los puntos de division de la circunferencia ADBC, equidistantes del diámetro CD proyeccion del ecuador. Por lo tanto, las cuerdas $a1$, $b2$, $c3$, serán las proyecciones de los paralelos, los cuales en este caso están representados por líneas rectas. *Fig* 310

Proyeccion estereográfica polar, ó sobre el plano del ecuador.

697. Los meridianos se proyectan en líneas rectas, y los paralelos en círculos concéntricos paralelos al del ecuador. La razon de esto es, porque los conos proyectantes se convierten en conos rectos que tienen un eje comun; y las secciones subcontrarias vienen á ser paralelas á la base con un centro comun.

Para construir esta proyeccion se trazará el círculo ADBC que representará el ecuador; el rádio AE corresponderá al de la tierra; y el punto E será el de vista colocado en el polo, ó la proyeccion del eje óptico. *Fig* 312

Trazado de los meridianos.

Como los planos de los meridianos se cortan todos en el eje

(*) Véase Zorraquin, Geometria analítica, página 224.

de la tierra, el cual es perpendicular al círculo ADBC, la proyeccion del primer meridiano podrá representarse por un diámetro cualquiera, AB por ejemplo Divídase la semicircunferencia ACB en 18 partes iguales, 1, 2, 3, &c; y tírense por todos estos puntos los diámetros 1 — 19, 2 — 20, ... : estos serán las proyecciones de los meridianos correspondientes á las longitudes A1, A2, A3,. . . . La diferencia de las longitudes será de 10°, pues el cuadrante AC se ha dividido en 9 partes iguales.

Trazado de los paralelos.

Para determinar los rádios de los círculos concéntricos, que representen los paralelos ó círculos de latitud de 10 en 10°, se tirarán las rectas D1, D2, ... , que cortarán el diámetro AB en los puntos g^1, g^2, ... : si se trazan en seguida desde E como centro, y con los rádios Eg^1, Eg^2, ... : las correspondientes circunferencias, se tendrán los paralelos buscados.

Proyeccion ortográfica polar.

Trazado de los meridianos.

Fig 313 698. La circunferencia ADBC representa el horizonte, ó el ecuador; las líneas AB, CD dos meridianos que se cortan en angulo recto; y el punto E es la proyeccion del polo. Se dividirá la circunferencia de 10° en 10°, y se tirarán los diámetros 1 — 1′, 2 — 2′, ... : estos serán los meridianos.

Trazado de los paralelos.

Se bajarán desde los puntos 1, 2, 3, &c., sobre el rádio ED, las perpendiculares 1a, 2b, ... que determinarán los rádios Ea, Eb, Ec, &c., con los que se describirán los círculos paralelos al ecuador.

Proyeccion estereográfica horizontal.

699. El plano de proyeccion es el horizonte racional del sitio de estacion; el punto de vista se supone en el polo de este proyectado en el mismo horizonte; y el meridiano que pasa por el sitio de estacion se representa por una línea, llamada generalmente *meridiano principal.*

Sea AEBD el espresado horizonte: *c* será la proyeccion del punto de vista ó de su polo, y AB representará el meridiano principal. *Fig* 314

Si el ángulo PCA es igual á la altura del polo, y si DE es perpendicular á AB, la recta PD cortará la AB en un punto *p*, que será la proyeccion del polo elevado del globo. Prolongando despues la DP′, hasta que corte la prolongacion de la AB en *p′*, este punto será la proyeccion del otro polo del globo.

Las proyecciones de los meridianos (que pasan todos por los puntos *p.p′*,) tendrán sus centros en la línea *ss′*; por lo que se llama *línea de los centros de los meridianos*, y es perpendicular á la *pp′* en el punto F de su mitad. Por esto, para trazar la proyeccion de los meridianos, falta solo hallar otro tercer punto; y este se hallará de la manera que va á esplicarse.

Trazado de los meridianos.

El plano del meridiano, perpendicular al principal representado por AB, tiene que cortar al horizonte en la direccion de la DE perpendicular á AB: luego si desde el punto F como centro, y con el intérvalo F*p*, se traza un arco de círculo D*p*E, este será la proyeccion del meridiano, que pasa por la longitud de 90° contando desde el principal AB.

La proyeccion del ecuador será el diámetro QQ′ perpendicular á PP′, y su proyeccion en la carta será *qq′*: por consiguiente si desde el punto R, mitad de *qq′*, con un radio igual á esta mitad se traza un arco D*q*E, se tendrá la proyeccion de la mitad del ecuador.

Desde un punto arbitrario B de la línea AB, ó de su prolongacion, bájese la perpendicular BK sobre le PP'; llévese BK de F á K'; desde aqui con un radio mayor que FK' descríbase una circunferencia; divídase esta en 36 partes iguales; y tírense las $K'n$, $K'n'$, $K'n''$, &c.: estas cortarán á la línea VV' en los puntos n, n', n'', que estarán en los planos de los meridianos. Tírense despues por dichos puntos y el centro de la carta las rectas ncV, $n'cV'$, $n''cV''$, &c; y los diámetros nV, $n'V'$ &c, serán las trazas de los planos de los meridianos: debiendo todos los cuales pasar por el polo p se tendrán tres puntos de cada uno de ellos, y será fácil trazar los círculos que los representan.

Si por falta de espacio no pudiere llevarse la BK desde F á K', se llevará á K''; y las operaciones serán iguales.

Trazado de los paralelos.

Como los planos de los paralelos son perpendiculares al meridiano principal AB, se tendrán los diámetros de sus proyecciones del mismo modo que se tuvo el del ecuador. De consiguiente, dividiendo la circunferencia ADBE en 36 partes iguales desde el punto P, y tirando de dos en dos las aD, bD, &c., la parte tt' interceptada en el meridiano AB será el diámetro de un paralelo.

Esta construccion, aunque bien sencilla, no se puede ejecutar respecto á los paralelos muy distantes del polo, porque el punto t se encontraria muy lejos del centro de la carta. Es, pues, preciso trazar las intersecciones de los planos de los paralelos con el de proyeccion ADBE; las cuales serán paralelas al diámetro DE.

Si la latitud es austral, el polo p será el boreal; y en vez de
Fig 315 llevarlo á la parte CA se llevará á la CB. Seguiráse de aqui, que si á una distancia x de la recta DE se tira á esta la paralela de, los puntos d,e, comunes á esta paralela y á la circunferencia ADBE, corresponderán al paralelo que se busca, el cual debe pasar por un punto tal como V, determinado por el método anterior. Y he aqui obtenidos ya los tres puntos necesarios para trazar una circunferencia.

Proyeccion ortográfica horizontal.

Trazado de los meridianos.

700. En esta proyeccion los meridianos son elipses; cuyos ejes mayores coinciden con las mismas trazas de aquellos, determinadas en la proyeccion estereográfica horizontal de que acaba de hablarse. Restará ya tan solo hallar los ejes menores. A este fin se forma el *Fig*316
angulo DCP igual á la altura del polo: Vz será entonces la traza del meridiano, y DE la proyeccion del meridiano principal.

El punto p, proyeccion ortográfica ó rectangular del polo, se tendrá bajando sobre CD la perpendicular Pp.

Tambien se tendrá el ángulo del plano del meridiano VRz con el meridiano del plano del cuadro ú horizontal de proyeccion, bajando desde p sobre la Vz la perpendicular pR, haciendo $p\text{R}'=p\text{R}$, y tirando R$'$P; la cual formará con DE el ángulo que se busca. Tírese Cn paralela á R$'$P, y desde n la recta nt paralela á Pp; descríbase desde C con un radio igual á Ct el arco tn', terminado en la Cn' perpendicular á Vz: y la Cn' será la proyeccion del radio Cn, ó el eje menor buscado.

Trazado de los paralelos.

Si los puntos a,b se proyectan sobre el meridiano principal DE, la $a'b'$, será el eje menor de la proyeccion del paralelo.

El mayor se tendrá, dividiendo en partes iguales y en número par la cuerda ab; marcando en DE la proyeccion de todos los puntos de division (como se ha hecho con los a, b,), despues de tirar por los mismos puntos perpendiculares al diámetro del semicírculo $a\ x\ b$; y llevando sobre las lineas correspondientes de la elipse que se va á trazar, las longitudes de las perpendiculares. Tendranse así los puntos de dicha curva; y la línea yx del medio será el semieje mayor.

Mapas-planos, ó Planisferios.

Construccion de cartas marinas por desarrollo cilíndrico, ó cartas reducidas de Mercator.

701. En esta proyeccion, que es la usada para construir las cartas marítimas ó hidrográficas generales y particulares, los meridianos y paralelos estan representados por líneas rectas, que se cortan perpendicularmente.

La esfera se considera en esta proyeccion como un cilindro desarrollado; los meridianos son entre sí paralelos y equidistantes; y los paralelos, si bien guardan el paralelismo, se van apartando mas unos de otros á medida que se acercan à los polos. Esta separacion es inversa precisamente de la disminucion en la esfera de los grados de longitud; lo que produce intérvalos en esta direccion, que, con respecto á los de la latitud correspondiente, tienen la misma relacion que en el globo.

Para construir esta proyeccion bastará, pues, determinar la magnitud que quiere darse al grado del ecuador; y tomar un grado, ó cinco, ó diez, segun el número de paralelos que se quieran trazar.

Fig 317 Tírese una línea AB que será el ecuador, y hágasele del largo que deba tener la carta. Divídasele en las partes correspondientes para tener los meridianos de 10° en 10°; ó de 5 en 5; ó bien de grado en grado. En las estremidades de dicha línea levántense las perpendiculares indefinidas DAC, EBF; en ellas deberán marcarse los puntos estremos de todos los paralelos, valiéndose de las tablas de *latitudes crecientes*, que indican el aumento de la estension de cada grado de latitud á proporcion que se aproxima al polo.

Pueden tambien hallarse las distancias entre los paralelos, por medio de la tabla siguiente; en la que se indican aquellas en partes llamadas *meridionales*.

Grados.	*Partes meridionales.*	*Grados.*	*Partes meridionales.*	*Grados.*	*Partes meridionales.*
1	60	31	1958	61	4649
2	120	32	2029	62	4775
3	180	33	2100	63	4905
4	240	34	2171	64	5039
5	300	35	2244	65	5179
6	361	36	2318	66	5324
7	461	37	2393	67	5474
8	482	38	2468	68	5631
9	542	39	2545	69	5791
10	603	40	2623	70	5976
11	664	41	2702	71	6146
12	725	42	2782	72	6335
13	787	43	2863	73	6534
14	848	44	2946	74	6746
15	910	45	3030	75	6970
16	973	46	3116	76	7210
17	1035	47	3203	77	7467
18	1098	48	3292	78	7745
19	1161	49	3382	79	8046
20	1225	50	3474	80	8375
21	1289	51	3569	81	8739
22	1354	52	3665	82	9145
23	1419	53	3764	83	9606
24	1484	54	3865	84	10137
25	1550	55	3968	85	10765
26	1616	56	4074	86	11533
27	1684	57	4183	87	12522
28	1751	58	4294	88	13916
29	1819	59	4409	89	16300
30	1888	60	4527	90	*infinito.*

Por ejemplo: correspondiendo al paralelo de 30°, 1888, y al de 31°, 1958 partes, (distancia al ecuador), la diferencia 70 entre estas dos cantidades será la distancia que deberá haber entre los dos paralelos propuestos. Si se toma en la tabla el número de partes 1225 correspondiente á 20° en el ecuador, y se divide este número por 60, se tendrán 20°, 25′. Tómese esta distancia en una escala de partes iguales, y trasladándola sobre las perpendiculares en los estremos del ecuador AB desde los puntos A, B, márquense los 0 — 20; 0 — 20: entónces no resta ya por hacer otra cosa, que tirar por los 20—20 el paralelo de los 20° por encima y por debajo del ecuador. Del mismo modo se marcarán los otros paralelos 40°. Pero cuando la escala es grande, no será fácil marcar estos por sus distancias directas al ecuador, y será mejor verificarlo por las distancias que los separan entre sí: por ejemplo.

A los 40° distancias meridionales.	2623
— — 20°.	1225
Diferencia. . . .	1398
Dividida por 60. . . .	23°, — 18′;

y en lo demas como anteriormente.

En las cartas que exijen mucha exactitud, ó que están construidas con escala grande, los paralelos deben distar entre sí menos de 20°, y hasta solo 10°. En las partes en que se aproximan a los polos, desde 60° de latitud, la separacion de los paralelos llega á ser considerable; por lo que conviene multiplicarlos para tener mas puntos de situacion

702. Cuando se carece de la tabla anterior, podrá construirse esta proyeccion del modo siguiente.

Fig. 318 Supóngase que se quiera proyectar la carta entre 0° y 90° lonjitud, y entre 0°, 70° latitud norte. Tírese la línea AB que será el ecuador; désela el largo que deba tener la carta; divídase en 9 partes iguales; en los puntos de division levántense perpendiculares, que serán los meridianos; haciendo centro en B descríbase el cuadrante AC, que tambien se dividirá en 9 partes iguales; y, por último, desde B tírense los radios á estas divisiones. Las distancias, que aquellos interceptan en la perpendicular Y*z*, darán los intérvalos que deben separar los grados de latitud. De esta manera, tomando desde B la parte interceptada por la Y*z* en el radio correspondiente á 10 en el cuadrante, y trasladándola desde B y A sobre las perpendiculares en estos puntos, se tendrán los 10—10 correspondientes al paralelo 10° de latitud. Tomando igualmente desde B la parte interceptada del radio 20 por la Yz, y trasladándola desde los puntos 10—10 sobre las perpendiculares AE, BD, se tendrá el paralelo de 20°; y los demas podrán obtenerse de la misma manera.

En las cartas construidas de este modo, como se aumenta considerablemente la superficie de las regiones á medida que se van acercando á los polos, no deben buscarse, ni las relaciones entre la estension de los paises, ni la exacta imágen de su configuracion: sin embargo, habrá semejanza si las porciones del globo fueren pequeñas.

Estas cartas sirven á los marinos, para determinar con exactitud el punto del mar en que se hallan.

Cartas particulares ó especiales.

703. Para la construccion de la carta de una de las partes del mundo, ó de un gran estado, se determinará primeramente la magnitud del cuadro que se quiere Sea este ABCD: se trazará el meridiano principal EF perpendicularmente sobre la AB, y á la distancia conocida del primer meridiano que pasa por el observatorio de París, Grenwich, la isla de Hierro, Madrid, San Fernando, &c. Este meridiano llevará el número 1, aun suponiendo que no esté representado en la carta que se forma; y los demas se marcarán desde 1 hasta 180. *Fig* 319

Trazado el meridiano principal, único en línea recta, los demas (que son curvas tanto mas convexas, cuanto mas distan de aquel), y los paralelos se trazan determinando los puntos de interseccion de otras curvas. Para ello se emplean las tablas en que están calculadas las distancias de cado punto al primer meridiano, y á la perpendicular tirada á la misma latitud sobre este meridiano.

Se encuentra asi la posicion de los puntos de interseccion de los meridianos y paralelos; despues de lo cual, para determinarlos en el papel y formar las curvas, se construye la escala que se haya adoptado, y se marcan en cada ángulo del cuadro las distancias en varas al meridiano y á su perpendicular.

Se quiere, por ejemplo, hallar el punto G de interseccion. Tómese en la escala la distancia marcada en la tabla de este punto al meridiano principal que pasa por la mitad de la carta, y sea EH; trasládesela á la parte superior é inferior del cuadro marcando los puntos H, I; tómese la distancia del punto G al lado AB ó al DC, perpendiculares al meridiano; llévesela á los lados AD, BC; márquense los puntos L, K; y tírense las HI, LK: el punto G de interseccion será indefectiblemente el buscado.

Por el mismo método pueden marcarse los demas puntos de interseccion; y, marcados estos, es cosa llana que las líneas que pasen por ellos serán las curvas pedidas. Pero como esta operacion seria muy larga, pueden solo marcarse tres puntos de cada curva; y describirla por medio de la regla flexible, ó con el compás de varas, despues de hallado el centro del círculo que ha de pasar por dichos tres puntos.

704. Arrowsmiht geógrafo inglés da el método siguiente para construir una carta *corográfica*, ó que abraza una corta estension de la superficie del globo. Supóngase que se quiere formar una carta, que comprenda desde el paralelo de 41° latitud norte, hasta el de 44°; y desde el meridiano de 2° lonjitud occidental de Madrid, hasta el 6° de la misma direccion.

Se ve que esta carta debe comprender tres grados de latitud, y cuatro de lonjitud; y por lo tanto, que la base inferior del cuadro ha de ser una estension igual á 4 grados del paralelo de 41°, mientras la estension de ambos lados laterales habrá de ser de tres grados de círculo máximo ó de meridiano. Como los lados han de ser perpendiculares á los estremos de la base, serán paralelos entre sí, y quedará formado un paralelogramo rectángulo. Mas siendo en este los grados del paralelo de 44°, que se han de marcar en la parte superior, mas cortos que los del paralelo de 41° ó parte inferior, es evidente, que aquella contendrá mas grados de lonjitud que esta.

De lo dicho se infiere, que si se toma una línea, ó porcion de línea, que represente en la carta la estension de un grado de meridiano, ó de cualquier otro círculo máximo, se tendrá conocida la estension de los lados laterales del rectángulo de la carta. Del mismo modo, teniendo la estension de un grado del paralelo que ha de ser la base ó lado inferior de la carta, se tendrá esta base ó este lado inferior, solo con trasladar para que sirva de tal aquella estension tantas veces, cuantos sean los grados de lonjitud de la cuestion. Se traza despues el meridiano que pasa por el punto medio de la carta; y á su derecha é izquierda, en la parte superior é inferior, se toma la estension del grado correspondiente á cada paralelo.

Sea, por ejemplo, AB la estension que se quiere dar al grado *Fig* 320
de círculo máximo, segun el objeto á que se destina la carta, ó segun el tamaño del papel. Para averiguar qué estension debe tener un grado de los paralelos de 41° y 44°, hay dos medios. El primero se reduce á tomar la AB por escala, y dividiéndola en sesenta partes recurrir luego á la tabla (que está mas adelante), en la que se hallará; que el grado del paralelo de 41° debe constar de 45,283 de estas partes, y el de 44° de 43,160 de las mismas. Consiste el segundo medio en tomar la distancia AB como radio, describiendo en seguida desde el punto B como centro el arco indefinido AG; y en formar en B como vértice el ángulo ABC=41°, y el ABD=44°: entonces como EB es el coseno de 41°, este será la estension de un grado del paralelo, caso de que el radio AB manifieste la de un grado del ecuador, meridiano, ú otro cualquier círculo máximo. Por la misma razon representará FB la estension de un grado del paralelo de 44°.

Sea AB la línea, base inferior de la carta: sobre ella se llevará cuatro veces la distancia EB (figura 320), que es la estension de un grado del paralelo de 41°; ó bien, valiéndose de la tabla, se llevará cuatro veces sobre la espresada base una distancia de 45,283 partes de la escala. En B se pondrá el número 2; y en las otras divisiones hacia la izquierda ú occidente los 3, 4, 5: con lo que quedará graduado el paralelo inferior. En cada uno de los lados AD, BE perpendiculares á los estremos de la base AB, se marcará tres veces la distancia AB de la figura 320. Al lado de A y B se escribirá el número 41, que espresa el grado del paralelo inferior,

Fig 321

y en los demas puntos de division lateral hacia arriba ó norte se escribirán los números 42, 43, 44: con lo que, tirada la DE, quedará formado el cuadro de la carta. Levántese luego en el punto medio 4(*) de la base la perpendicular 4C; en C escríbase tambien 4; tómese la distancia FB de la figura 320, ó bien, segun la tabla, 43,160 partes de la AB de la misma figura; llévense á derecha é izquierda de C sobre la DE; en los puntos de division escríbanse los mismos números correspondientes de la parte inferior; y desde aquellos tírense las líneas 2 — 2, 3 —3, 5 — 5, 6 — 6, que serán los meridianos de la carta: entónces, tirando por las 42 y 42, 43, y 43 laterales las 42 — 42, 43 — 43, se tendrán los paralelos. De este modo queda la superficie de la carta dividida en cuadrículas parciales, de un grado de lonjitud y de otro de latitud cada una. Para graduar el número de minutos sobre esta carta, se acostumbra generalmente dividir la estension de la línea, comprendida entre grado y grado en los cuatro lados del cuadro, en doce partes iguales Asi, cada una de estas partes en los lados laterales corresponderá á 5 minutos de un grado del meridiano; y por consiguiente representará tambien una estension de cinco millas (**).

Se ve que en esta clase de cartas no se necesita de escala para estimar sobre ella cualquier distancia, pues bastará trasladar esta sobre la AD, ó BE, ó *meridianos graduados*; pero no puede hacerse lo mismo sobre las AB, DE, porque los grados que estas manifiestan no son de círculo máximo. Por lo tanto no representan tres minutos de ellos la estension de una legua; y solo en las cartas que principian ó terminan en el ecuador se puede tomar este por escala.

Cuando la carta representa parte del hemisferio austral, se pone el paralelo de menos latitud en la parte superior de la carta, y el de

(*) Si el número de grados de la base hubiera sido impar, la línea 4C se levantaria en el punto medio del grado intermedio.

(**) La estension de la legua marina, ó de 20 al grado, se ha fijado sobre la estension de un grado de círculo máximo terrestre; y es la vijésima parte del grado: porque constando la legua marina de 6684 varas, que corresponden á tres minutos de grado, el tercio de la legua marina, que se llama *milla*, corresponderá á un minuto del grado y constará de 2216 varas castellanas.

mayor latitud en la inferior. Esto se funda en el método establecido para contar las latitudes, y en el convenio de considerar el norte en la parte superior de la carta, el sur en la inferior, el este á la derecha y el oeste á la izquierda.

705. La anterior construccion tiene dos defectos: primero, que de los grados de los paralelos, solo los del paralelo inferior AB y superior DE son de una estension rigurosamente exacta, careciendo de ella los grados de los paralelos intermedios. Y segundo, que todas las estensiones de los meridianos, comprendidas entre los paralelos, carecen de la exacta igualdad que debieran conservar entre sí; pues siendo el 4C el único meridiano que corta á los paralelos perpendicularmente, todos los demas meridianos serán mas largos.

706. *Tabla que manifiesta la estension de un grado de cada paralelo de la tierra, espresada aquella en minutos del ecuador, ó en millas.*

Latitud.	*Estension.*	*Diferiencia.*	*Latitud.*	*Estension.*	*Diferiencia.*	*Latitud.*	*Estension.*	*Diferiencia.*
0°	60,000	0,009	30°	51,962	0,532	60°	30.000	0,911
1	59,991	0,028	31	51,430	0,547	61	29,089	0,921
2	59,963	0,045	32	50,883	0,563	62	28,168	0,929
3	59,918	0.064	33	50,320	0,578	63	27,239	0,937
4	59,854	0,082	34	49,742	0,595	64	26,302	0.945
5	59,772	0,101	35	49,549	0,608	65	25,357	0,953
6	59,671	0,118	36	48,541	0,623	66	24,404	0,960
7	59,553	0,137	37	47,918	0,637	67	23,444	0,988
8	59,416	0,155	38	47,281	0,652	68	22,476	0,974
9	59,261	0,137	39	46.629	0,666	69	21.502	0,981
10	59,088	0,190	40	45,963	0,608	70	20,521	0,987
11	58,898	0,209	41	45,283	0,694	71	19,534	0,993
12	58,689	0,227	42	44,589	0,708	72	18,541	0,999
13	58,462	0,244	43	43,881	0,721	73	17,542	1,004
14	58,218	0,262	44	43,160	0,734	74	16.538	1,009

15	57,956	0,280	45	42,426	0,746	75	15,529	1,014
16	57.676	2,298	46	41,680	0,760	76	14,515	1,018
27	57,378	0,315	47	40,920	0,772	77	13,497	1,022
18	57,063	0,332	48	40,148	0,784	78	12.475	1,026
19	56,731	0,349	49	39,364	0,797	79	11,449	1,030
20	56,382	0,367	50	38,567	0,808	80	10,419	1,033
21	56,015	0,384	51	37.759	0,8 9	81	9,386	1,036
22	55,631	0,401	52	36,940	0,831	82	8,350	1,038
23	55,230	0,417	53	36.109	0 842	83	7,312	1,040
24	54,813	0,435	54	35,267	0,852	84	6,272	1,043
25	54,378	0,450	55	34,415	0,863	85	5,229	1,044
26	53.928	0,468	56	33,552	0,874	86	4,185	1,045
27	53,460	0,483	57	32,678	0,883	87	3,140	1,046
28	52,977	0,500	58	31,795	0,893	88	2,094	1,047
29	52,477	0,515	59	30,902	0,902	89	1,047	
30	51,962		60	30,000				

Representacion de cartas por desarrollo cónico.

707. La imposibilidad del desarrollo de las superficies esféricas decidió á reemplazarlas por otras superficies, que pudiendo desarrollarse tuvieran la mayor analogia posible con las esféricas: estas cualidades creyose encontrarlas con razon en las porciones de superficies cónica y cilíndrica.

La primera proporciona la gran ventaja, de que una pequeña zona cónica no difiere casi de la esférica; propiedad, á que se debe que los desarrollos cónicos den las mejores proyecciones de las cartas, cuando no son estas muy estensas. De aqui procede, que sean las generalmente empleadas para la construccion de las cartas particulares: pudiendo, con respecto á la estension, abarcar aunque sea toda la Europa; pero no mas territorio, á causa de los muchos inconvenientes que de ello se seguirian.

Se supone en dicha construccion, que una zona esférica se confunde con la superficie de un cono truncado que la es tangente.

*Fig*322 Sea AB el rádio de la esfera; C un punto en la latitud DC; y EC la cotangente de esta latitud: transformada esta en la del paralelo medio, es claro, que su desarrollo será un círculo que tenga por rádio la cotangente de su latitud, y por amplitud el arco igual á la circunferencia cuyo rádio es CF. Desde el punto E′ como centro, y con un rádio E′*c*, descríbase el arco indefinido GG′; tómese EH por el meridiano del medio de la carta; y hágase el ángulo *c* E′G igual á la mitad del número de grados contenidos en el paralelo medio. Suponiendo que este paralelo comprenda 25° sobre el globo, y que la diferencia de los paralelos estremos sea de 30°, el paralelo medio tendrá sobre la carta un número de grados, espresado por $\frac{CF}{EC} \cdot 25^\circ$; porque los números de grados contenidos en dos arcos de la misma longitud están entre sí en razon inversa de sus radios.

Para marcar en la proyeccion los paralelos estremos se toman sobre el eje EH dos partes C*a*, C*b*, iguales á la mitad de la diferencia de latitud de los paralelos estremos; esto es, á 15° en el caso propuesto. Se representan en seguida los paralelos por los arcos

KK′, II′, y se determina la proyeccion de la carta dividiendo el meridiano del centro y el paralelo medio en partes iguales.

Como esta proyeccion tiene dos defectos; á saber, no conservar la igualdad entre los espacios, y no dar las distancias justas sino en el sentido de los meridianos, hay que corregir ambas cosas: y á este intento se han ensayado dos medios, que se reducen, el uno á tomar en lugar del cono tangente un cono inscrito en su totalidad ó en parte, y el otro á alterar la proyeccion rectilínea de los meridianos.

Si en lugar del arco *ab* se tomare la cuerda que le subtende para lado del cono que ha de desenvolverse, serán *a*E′, *b*E′ los rádios de las proyecciones de los paralelos estremos; y la carta tendrá una exactitud rigurosa en estos paralelos, pero no en los intermedios. Asi pues, este medio será bueno tan solo para cartas de corta estension.

Se puede hacer que el cono entre en la esfera de modo que la corte en dos paralelos, colocados cado uno á igual distancia del paralelo medio y de uno de los dos paralelos estremos. Por este arbitrio la carta tendrá en los dos paralelos la misma dimension que la correspondiente del globo, y su totalidad diferirá bien poco de la del pais que debe representar; porque el escedente, que se halle en las dos estremidades de la carta, estará al menos compensado en parte con la merma que con respecto á la zona esférica tendrá la porcion inscrita del cono.

Este método ofrece muchas ventajas para las cartas generales, que comprenden una porcion considerable de la superficie del globo.

Puede aun modificarse la proyeccion cónica, sustituyendo á la determinacion de los paralelos que deben ser comunes con la esfera, la del punto de concurso de las líneas rectas que representan los meridianos, y la del ángulo que dichas rectas forman entre sí cuando comprenden un grado de longitud. Los errores serán entonces iguales en las estremidades septentrional y meridional; y tambien serán iguales al mayor que pueda haber hácia el paralelo mayor de la carta. De todo esto se concluirá; que el punto E, concurso de todos los meridianos, debe colocarse mas allá del polo una cantidad igual á 5° de latitud, y que el ángulo de dos meridianos conseculivos debe ser de 48′, 44″.

Proyeccion de Tolomeo.

708. Hay muchas proyecciones que pueden emplearse con ventaja para las cartas especiales: una de ellas es la usada por Tolomeo en la redaccion del mundo conocido de los antiguos, la cual viene á ser una simple alteracion de la proyeccion cónica.

Supone el punto de vista en un meridiano cualquiera del hemisferio, y en la prolongacion del rádio de la esfera, que corta este meridiano á 45° de latitud Norte. Hace en seguida jirar el globo, de suerte que los meridianos se vayan presentando sucesivamente al ojo como líneas rectas que se reunen en el polo y los paralelos como arcos de círculo con su parte convexa hácia el Sur.

Las relaciones de los arcos de los paralelos se determinan en
*Fig*323 esta proyeccion por reglas matemáticas, cuyo resultado es hacer el arco de meridiano PF igual á 40,000 estadios (*), exactamente proporcionado al arco de paralelo de la latitud de Rodas HKL igual á 72,000 estadios. El paralelo de Thule OPQ y el ecuador BST tienen entre sí la misma proporcion que en el globo; pero son muy grandes comparados á HKL. Como Tolomeo estendia el mundo conocido hasta 16° al Sur del ecuador, marca á esta latitud el *antiparalelo* de Méroe, pueblo situado á 16° ½ al norte del ecuador; y dividiendo dicho arco (asi como el que pasa por Méroe) traza los meridianos, tirando rectas por estos puntos de division y los del ecuador.

709. El mismo autor usaba otra proyeccion. Suponia la vista en el plano del meridiano CED que dividia por medio el mundo
*Fig*324 conocido, y en la prolongacion del rádio GH de la esfera, tirado por la comun interseccion E de dicho meridiano y el paralelo de Syene medio del mundo conocido. En esta nueva proyeccion ACBD representa el círculo máximo del hemisferio; C, D, son los polos; y AEB el ecuador. Si se hace pasar por el punto E un círculo máxi-

(*) Medida griega de 125 pies geométricos.

mo, cuya mitad sea AEB, la vista se encontrará en el plano del círculo, porque lo está en la comun interseccion de él con el del meridiano CED. De aqui concluye el autor, que los semicírculos AEB, CED se presentarán como líneas rectas cortándose en ángulos rectos; que por el contrario, el ecuador y sus paralelos (en razon de que sus planos tienen la misma inclinacion con el plano del círculo máximo AEB en el que se halla el punto de la vista) se presentarán como arcos de círculos paralelos, con su parte convexa hácia el Sur: y en fin, que los meridianos situados á una y otra parte del meridiano medio CED se verán como arcos de círculo, cuya concavidad mirará hácia este meridiano, siendo cada vez mayor, á medida que aquellos se van apartando del meridiano medio. Para determinar las líneas de esta proyeccion se debe desde luego trazar un paralelógramo rectángulo ABCD; en el que el lado AB sea doble del AC, y en el que la perpendicular EF que le corte por medio se divida en noventa partes. Prolongada que sea esta perpendicular 91 partes y $\frac{1}{4}$ para tener el centro L, tómese ó bien FG=16 partes $\frac{5}{12}$, para trazar con la longitud LF el paralelo de Méroe SX; ó bien GH=23 $\frac{5}{12}$, para tener con la longitud LH el trópico de Cancér TY. Tómese asimismo GK=63 partes, y con el rádio KL descríbase el paralelo QR de Thule. Sobre estas tres partes de circunferencia SX, TY, QR, se marcarán los grados convenientes á los paralelos que les corresponden, y en la relacion que tienen con los del ecuador: despues de lo cual, pasando por los tres puntos correspondientes porciones de circunferencia, estas serán los meridianos pedidos. Estas proyecciones se emplean con ventaja para las cartas de Asia, Africa, y América. *Fig* 325

Proyeccion de Flamsteed.

710. La anterior proyeccion ha sido modificada por Flamsteed, y perfeccionada despues por Bonne. Todos los paralelos se describen desde un mismo centro tomado en el eje de la carta; y los puntos de interseccion de los grados de longitud se determinan segun la ley de su disminucion, y se unen por curvas que representan los meridianos.

Esta proyeccion, modificada del modo espresado, es la mas generalmente usada; por lo que se va á hablar de su construccion.

*Fig*326 Supóngase que se trata de aplicar lo dicho al desarrollo de un semihuso esférico, cuyo ángulo sea de 90°: el desenvolvimiento será la proyeccion de un triángulo de tres ángulos rectos, ó de la octava parte de la superficie de la esfera (*). Sea C*a* el rádio de la esfera propuesta, y *ao* una línea perpendicular é igual á C*a*. Si desde *a* se baja sobre CO la perpendicular *ae*, esta será el rádio del paralelo á la latitud de 45°, siendo P el polo, y *e* un punto del ecuador. Esto supuesto, se podrá considerar la *ao* como el lado del cono tangente á la esfera; y entonces la superficie del cono cerca del círculo de contacto coincidirá sensiblemente con la de la esfera. Pero como por una parte se trata de desenvolver solo el cuarto de la circunferencia de que *ae* es el rádio, ó lo que es igual, solo la cuarta parte de la superficie curva del cono recto, que tiene á *oa* por lado; y como por otra *ae* es el seno de 45° cuyo logaritmo y su seno se tiene, es cosa llana; que, teniéndose asimismo la estension de

*Fig*327 la cuarta parte de la circunferencia, cuyo rádio es *ae*, á una con la longitud del arco *a*M*b* descrito con un rádio $ao=1$, se hallará por una simple proporcion el valor del ángulo *aob*, ó amplitud del arco *a*P (fig. 326). Si se quieren tener ya los grados de longitud de

*Fig*322 5 en 5 se dividirá el arco *ab* en 18 partes iguales; y el medio M de este arco estará en el eje OM de la carta. Pero para determinar las posiciones de los otros paralelos y la longitud de sus grados respectivos será preciso construir una escala de partes iguales, segun

*Fig*328 el número de varas del rádio medio *a*C de la tierra (326). Para ello se llevará sobre una línea indefinida MC′ el número de partes, varas, &c., que deba tener el rádio; se tomará en la figura 326 el rádio *a*C, que se pasará á C′*a*′, formando un ángulo cualquiera con la MC′; y tirando paralelas por los puntos de la *c*′M quedará dividida en partes proporcionales á ella la *a*′C, sobre la cual debe construirse la escala de la fig. 327. Construida que sea, se tomará la longitud correspondiente á los grados del meridiano, contados de 5 en 5; y se la trasladará 9 veces por encima y por debajo del

(*) Véanse los tratados de Trigonometría esférica.

paralelo *ab*. Desde el punto O como centro describiránse despues arcos indefinidos, que pasen todos por los puntos de division del eje OM; y se tendrán los paralelos de 5 en 5 grados. En fin, sobre cada paralelo á uno y otro lado del eje se tomarán 9 distancias, iguales cada una á cinco veces el valor del grado de longitud en cada uno de los paralelos, segun las tablas geográficas; y en seguida, por todos estos puntos se trazarán las curvas, que serán los meridianos.

No puede desconocerse, que la amplitud de un arco de un paralelo cualquiera, determinado por este método, será algo mayor de lo justo; porque se da á la cuerda de un arco de 5 grados igual longitud que á este arco. Pero tambien salta á los ojos, que el error de aqui resultante será tanto menor, cuanto mas pequeña fuere la curvatura de los paralelos. En fin, si se quisiere obtener una exactitud rigurosa, fácil será de lograrla; determinando la amplitud de todos los paralelos (como se determina la del paralelo medio) por el ángulo que forman los dos rádios tirados á sus estremidades.

En vez de tomar arbitrariamente como en este ejemplo el rádio de la esfera, se fija generalmente su longitud en una escala construida de antemano, y cuyas partes tienen una relacion determinada con la unidad de medida.

Proyeccion de Casini.

711. Este geómetra, despues de haber levantado trigonométricamente la carta de toda la estension de la Francia, inventó una nueva proyeccion para reunir sus triángulos. Para ello trazó el meridiano que elejía para medio de su carta; y levantó sobre él perpendiculares, que representaban otros tantos círculos máximos de la esfera, cortándose todos á 90° del meridiano. En seguida, trazó paralelos al meridiano; que son tambien círculos máximos, que concurren todos en un punto á 90° de la perpendicular del lugar tomado por punto central. De este modo obtuvo en el centro de su proyeccion una superficie bastante acomodada á su intento; mas como los círculos máximos por él imaginados en el globo vienen á ser á manera de husos, es claro, que no podria continuar trazando aquellos en línea recta á considerable distancia de su centro, sin

dar á estos demasiado ensanche. En esta proyeccion, pues, la dilatacion al principio es poco sensible; mas luego va adquiriendo importancia: como se ve en las hojas estremas de la carta de Francia en que es ya cerca de 150 toesas en 40,000 respecto á un rádio de 360,000 toesas.

712. Hay otras muchas proyecciones y modificaciones ademas de las espuestas: las primeras no son de uso comun; y para trazar las segundas se necesitan combinaciones y cálculos, que exijen conocimientos matemáticos sumamente profundos que no entran en el plan de esta obra.

Algunas nociones sobre la formacion de las cartas.

713. Se ha hablado del modo de determinar las dimensiones que han de darse al cuadro de una carta, segun el objeto de su formacion: ahora se va á tratar del modo de construirla.

Las cartas deben construirse en el órden inverso de sus detalles, á saber: el plano topográfico se forma de la reunion de los planos levantados trigonométricamente sobre el terreno; la carta corográfica de la reunion y reduccion de los planos topográficos; y finalmente de la reunion y reduccion de las corográficas deberá formarse la geográfica.

Pero á todas estas operaciones debe preceder lo que se llama el *bosquejo* ó *borron* de las operaciones, es decir, las medidas trigonométricas de primer órden. Imaginando estendida una red de triángulos de primera clase (que son los de mayores dimensiones) por encima de la superficie del pais que se quiere representar, los lados de estos servirán de base para los de segunda clase encerrados dentro de los primeros. Dividida asi la superficie en triángulos de primera y segunda clase, procédese ya entonces á la construccion de los planos geométricos; levantando separadamente el de cada uno de los segundos triángulos por medio de la plancheta (*).

(*) Conviene hacer el trabajo de la plancheta como si no se tuviese el trigonométrico; observando cuidadosamente si con ambos se obtiene igual resultado, y haciendo, de no obtenerse esta igualdad, la rectificacion donde convenga.

En estas operaciones se emplea el número de individuos, que segun la mayor ó menor prisa fuere menester; usan todos de una misma escala; y cuidan en todo nuevo plano ú hoja de situar dos puntos, que ya lo esten en el anterior (443, 444).

714. Levantados que fueren estos planos geométricos, y formados en seguida de su mútuo enlace los topográficos, restará ya para formar los corográficos, no solo hacer la reunion general de los planos, sino tambien sujetarlos á la proyeccion que se haya adoptado Para ello, se trazan en los planos topográficos los meridianos y paralelos en líneas rectas, respectivamente paralelas y perpendiculares; como vienen á serlo los arcos pequeños de estos círculos, cuando no corresponden sino á una porcion muy corta de la superficie de la tierra. En la carta que ha de contener estos planos se traza el total de cuadrículas, ó se forma el cuadro del número de grados que ha de abrazar con arreglo al método elegido; y se trazan los meridianos y paralelos. Resta ya entonces tan solo, el marcar en estas nuevas cuadrículas cuanto estuviere comprendido entre los meridianos y paralelos de los planos topográficos.

Los cuadrilateros formados por los meridianos y paralelos de los planos topográficos no son enteramente semejantes á los cuadriláteros que los mismos círculos forman en la carta. Por lo tanto, si se desea una estremada precision, habrán de tomarse con respecto á los lados de los primeros las distancias de los principales puntos que encierran; se convertirán despues estas distancias en subdivisiones de los grados de latitud; y por último se tomarán otras semejantes, partiendo del meridiano y paralelo contiguos á los cuadriláteros correspondientes en la carta.

715. El paso de las cartas corográficas á las geográficas es semejante al que, se ha descrito de las topográficas á las corográficas. Redúcese á colocar, en las cuadrículas formadas por los meridianos y paralelos de las cartas geográficas, lo que contuvieren las correspondientes cuadrículas de las corográficas, juntando estas asi y reduciéndolas.

De esta série de operaciones necesarias para construir una carta geográfica se deduce; que en esta deberán forzosamenteha-berse acumulado los errores padecidos, asi en las operaciones trigonométricas del bosquejo ó red de triángulos, como en la construccion de los planos geométricos, de los topográficos, y de las cartas corográficas. Imposible seria de consiguiente evitar, ni por angostar, ni por dar mayor ensanche á la carta, el efecto por aquellos errores producido en el grande espacio que esta representa, si la Geodésia no ofreciera medios mas seguros para fijar la posicion de los lugares calculando directamente su longitud y latitud geográficas. Teniendo estas, se situan los principales puntos; se ven los errores; y se enmienda la posicion de los puntos intermedios. El error ó diferencia se reparte entre estos proporcionalmente: á menos que falte motivo para atribuir la inexactitud á determinados puntos, en cuyo caso debe rectificarse su posicion astronómica, y corregirla al tenor de lo que manifestaren las observaciones.

716. En los métodos empleados para la formacion de los planos topográficos se consideró estar el terreno que se queria representar en una superficie plana. Este supuesto solo es admisible cuando el plano corresponde á un espacio de corta estension; en cuyo caso se considera la superficie de esta sensiblemente confundida con el plano tangente, que pasa por el punto medio del espacio que se intenta representar. Pero en las cartas corográficas, y con mas razon en las geográficas, no cabe ya el prescindir de la curvatura de la tierra. Por lo tanto se debe conocer el límite entre los planos topográficos y las cartas corográficas hasta donde puede admitirse aquel supuesto.

*Fig*329 Sea $BB'B''B'''$ este límite, y sea la amplitud del arco $BAB''=1^\circ$: su longitud será de 20 leguas, puesto que la circunferencia de la tierra es de 47,942,697 varas. Por medio de las tablas trigonométricas se halló la diferencia entre el seno y la tangente de un arco de $\frac{1}{2}^\circ$, la cual es próximamente de $\frac{2}{10000000}$ del rádio de las tablas: ahora bien, siendo el rádio de la tierra, supuesta esférica, de 7,627,270 varas, resultará que la diferencia entre la tangente TA y el seno BS del arco terrestre $BA=\frac{1}{2}^\circ$ es poco mas ó menos de 1,525 varas. Asi pues con el error de menos de dos varas podrá tomarse el arco BAB'' por la tangente TAT'; ó lo que es igual, podrà suponerse que sobre la tierra un casquete $BB'B''B'''$ de 10 leguas de rádio, ó 20 de diámetro, es sensiblemente plano, y que cabe representarle como tal en una carta topográfica. Francoeur y otros autores distinguidos sientan la proposicion, de que solo pueden mirarse como rectilíneos los lados de los triángulos, cuando no escede su longitud de 800 á 1.200 varas.

Sin entrar en la discusion de estas opiniones es indudable, por haberlo demostrado la práctica, que planos de grande estension egecutados con inteligencia y minucioso esmero al favor de buenos instrumentos han resultado de una exactitud demostrada por toda especie de comprobaciones. Seria de desear, que, asi como se han impreso en el estrangero los detalles y resultados de grandes operaciones geodésicas, se imprimieran tambien los trabajos pertenecientes á varios planos topográficos de mucha estension levantados en España por oficiales de ingenieros; trabajos que hacen recomendables á sus autores. Asi se obtendrian sobre esta materia interesantes noticias, que formarian por sí solas un tratado de topografía práctica.

Algunas nociones sobre el dibujo de las cartas geográficas.

717. Las cordilleras de montañas que se alzan á uno y otro costado de los grandes rios, el curso de estos y de sus afluentes, los lagos, mares, costas, bosques, &c., se representan en las cartas geográficas del mismo modo que en las topográficas: pero disminuyendo en las primeras convenientemente su representacion, y debilitando las líneas de su contorno y sombreado, para que en manera alguna se confunda el dibujo con la escritura de los nombres de los objetos mas notables. Esta escritura debe ser clarísima para leer, y muy perceptible para dar en el lugar por ella designado con facilidad: su magnitud será proporcionada á la importancia respectiva de los objetos. Para conseguir esta útil cualidad convendrá á veces escribir en líneas curvas algunos nombres propios, con lo que se conseguirá que los renglones no pasen por encima de los objetos á que se refieren. Por egemplo, los nombres de rios ó de cordilleras de montañas se escribirán siguiendo las inflexiones de la curva de su representacion; mientras que los de las poblaciones deberán en cuanto fuere posible escribirse en rectas

paralelas al lado inferior del marco de la carta, para que puedan leerse con mas comodidad.

El curso de los rios, las principales líneas divisorias de aguas, las vertientes que separan las estribos de las cordilleras, y las orillas del mar con la configuracion de las costas que terminan los continentes son los objetos de primera atencion en las cartas geográficas.

Casi todas las demas circunstancias del terreno figuradas en la topografía, particularmente las referentes á su cultivo, no se espresan en las cartas generales, y solo en las especiales suelen representarse los bosques de mucha consideracion. Uno de los datos importantes que mas esmeradamente debe suministrar la geografía es el de la poblacion: advirtiendo sobre esto, que si mucho interesa saber el número de los habitantes, mucho y acaso mas interesa todavia tener conocimiento, de la manera en que se hallan distribuidos por las alquerías y poblaciones, y de la clase de estas. Por estos motivos se van á dar á conocer los signos convencionales, con que por lo regular se representan en la actualidad estas circunstancias. Se añaden tambien con igual objeto los signos que podrian usarse para indicar la residencia de las autoridades políticas, judiciales, militares y eclesiásticas; y en fin, las líneas-límites para la separacion y division de la monarquía española, las cuales podrán variarse para otras naciones que tengan otro sistema de gobierno.

Signos geográficos.

Fig. 1.ª, plaza fuerte de primer orden.--2.ª, de segundo or- *Lám.* 25 den.--3.ª, de tercer orden.--4.ª, ciudadela.--5.ª, castillo.--6.ª, ciudad cerrada de primer orden--7.ª, de segundo orden.--8.ª, de tercer orden.--9.ª, villa cerrada.--10, ciudad abierta de primer orden.--11, de segundo orden--12, de tercer orden.--13, villa abierta.--14, pueblo ó aldea.--15, caserío.--16, chozas reunidas.--17, aldea arruinada--18, ciudad id.-19, villa id.--20, castillo id.--21, caserío id.--22, capital de la monarquía ó residencia de las autoridades supremas del estado.--23, gefatura política.--24, subgefatura, cabeza de partido.--25, audiencia territorial.--26, juzgado de primera instancia.--27, capitanía general.--28, comandancia militar.--29, arzobispado.--30, obispado.--31, vicaría eclesiástica.

--32, líneas de fronteras.--33, de provincia.--34, de partido.--35, de capitanía general.--36, comandancia general.--37, pequeña jurisdicion.--38, términos de partidos.--39, id. de pueblos.

Cálcu o de las horas de las mareas.

---

718. Se da el nombre de *mareas* á los dos movimientos periódicos de las aguas del mar, por los cuales estas se elevan y bajan alternativamente dos veces al dia. Su mayor elevacion se llama *pleamar*, y la mayor depresion *bajamar.*

Tambien se llama *flujo ó marca entrante* al movimiento de las aguas que se elevan, y *reflujo ó marea saliente ó vaciante* al movimiento de las aguas que bajan.

719. Como en los planos conviene marcar las líneas-límites de las aguas en la alta y baja marea, no parecerá inoportuno se dé á conocer el modo de hallar la hora en que estas se verifican cualquier dia del año en el punto donde se opera.

720. Pero antes se necesita saber: primero, el *áureo número* ó el periodo en que se verificarán las fases semejantes de la luna, ó novilunios y plenilunios, en el año propuesto Para ello se añade á este una unidad, y añadido asi se le divide por 19 á fin de hallar el residuo de la division, que será el aúreo número de aquel año: por ejemplo en el actual, 1838 por sí y 1839 con el agregado de la unidad, hecha que fuere la division por 19, su residuo 15 será el aúreo número.

721. Segundo Las *epactas*, ó los números que indican en cada año *la edad* que próximamente tenia la luna al fin del año anterior. Por *edad de la luna* se entiende la diferencia de dias, que resulta al cabo de cualquier número de años por ser menor la duracion del mes lunar, *sinódico* ó *lunacion*, que la del mes solar.

La epacta correspondiente al aúreo número se halla menguándole en una unidad; multiplicando la resta por 11; y partiendo el producto por 30. Asi en el ejemplo anterior $\frac{(15-1)\cdot 11}{30}$ dará por residuo de la division (sin atender al cociente) el número 4, que será la epacta del año presente 1838.

722. Ahora podrá calcularse ya *la edad de la luna en un dia*

propuesto. Para esto, añádanse á la epacta tantas unidades, como meses hay desde marzo inclusive hasta el propuesto tambien inclusive, y ademas el número de dias del último ya transcurridos.

Si la suma resultare menor de 30, ella será la edad de la luna en el mes; y si mayor, lo será, el esceso á 30 si el mes propuesto es de 31 dias, ó el esceso á 29 si el mes es de 30. Supóngase, por ejemplo, que se quiera saber la edad de la luna el 6 de abril del año presente de 1838.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Epacta en dicho año. . . . . 4}\\ \text{Dos unidades por marzo y abril. . 2}\\ \text{Dias transcurridos . . . . 6}\end{array}\right\} = 12 \text{ dias de edad de la luna.}$$

Si el mes propuesto fuere el de enero ó febrero, á la epacta solo se añadirá la fecha del dia del mes.

723. Las mareas se atrasan de un dia á otro 48′. Cada $29\frac{1}{2}$ dias próximamente las mareas acaecen á la misma hora, y son las mas considerables; por lo que se llaman *cabezas de mareas*, ó *mareas vivas*. Lo mismo sucede cada 15 dias; de modo que si 15 dias antes de hoy hubo pleamar al medio dia, tambien habrá hoy pleamar al medio dia. Cuanto mas se eleva el mar cuando crece la marea, tanto mas baja cuando mengua; es decir que deja en descubierto mayor estension de playa que en las otras mareas.

724. Los vientos segun su fuerza, direccion, y duracion ocasionan elevaciones y depresiones irregulares en las aguas del mar, que á veces dificultan el conocimiento de las verdaderas mareas, ó mareas lunares, con las cuales no deben aquellas confundirse.

La cantidad de las mareas lunares depende de la estension de los mares, de su profundidad, y de la estension y figura de los canales de comunicacion del mar ancho con el que baña las costas.

La hora de la pleamar en lo interior de una bahia es posterior á la de la pleamar en su entrada, hora que á su vez es posterior á la en que se verifica el mismo fenómeno en alta mar; siendo de suponer que estas diferencias de horas serán próximamente las mismas en todos los casos semejantes. La diferencia constante entre la hora en que se verifica la pleamar en un puerto, y la hora en que debe verificarse en alta mar, es lo que se llama *establecimiento del puerto*.

725. Ya con estos datos puede preceptuarse el modo de calcular la hora de la marea para un lugar cualquiera, cuyo establecimiento del puerto es conocido. Habrá de procederse del modo siguiente: primero, calcúlese la edad de la luna (722); segundo, multiplíquesela por 48′ (723); y tercero, añádase á este producto el establecimiento del puerto. La suma, si no llega á 12 horas, ó si de ellas pasáre, aquella cantidad en que las escede, será proximamente la hora de la marea.

La tabla que sigue manifiesta el atraso de la pleamar correspondiente á cada dia de la edad de la luna, á razon de 48′ diarios.

Dias.	*Horas.*	*Minutos.*	*Dias.*
1	0	48	16
2	1	36	17
3	2	24	18
4	3	12	19
5	4	0	20
6	4	48	21
7	5	36	22
8	6	24	23
9	7	12	24
10	8	0	25
11	8	48	26
12	9	36	27
13	10	24	28
14	11	12	29
15	00	00	30

Egemplo 1.° Se quiere saber la hora de la pleamar en Cádiz el dia 6 de abril de 1838. El establecimiento de este puerto es de 1 hora, 10′: se halló ya (722) que en aquel dia la edad de la luna era de 12 dias: y en la tabla anterior se encuentra que á 12 dias corresponden 9 horas 36′. Añádanse á estas 1 hora y 10′, y se tendrán 10 horas 46′ para la de la pleamar en el citado dia.

Egemplo 2.° ¿A qué hora del dia 20 de julio de 1813 se verificó la pleamar en el Ferrol, sabiéndose ya que el establecimiento de su puerto es de 3 horas?

Haciendo el cálculo se hallará, que la edad de la luna en el dia propuesto era de 23 dias, que corresponden en la tabla á 6^h $24'$, sumadas las cuales con las 3 del establecimiento del puerto serán 9^h $24'$. Luego á las 9^h $24'$ tuvo lugar en el Ferrol la pleamar el citado dia.

Egemplo 3.° ¿A qué hora se verificaria la pleamar en Bayona de Francia el 15 de enero de 1813, siendo su establecimiento de puerto de 3^h $30'$?

Edad de la luna en dicho dia. . . .	14 dias.	
En la tabla	11^h	$12'$
Establecimiento de puerto	3	30
Suma.	14^h	$42'$
Restando. . . .	12	
Diferencia; hora de la pleamar . . . . ,	2^h	$4'$

726. Queda únicamente por esplicar el modo de *hallar el establecimiento de un puerto*, dato preciso para los anteriores cálculos. Para ello *se observa la hora de la pleamar en el lugar dado; y calculando la hora de la pleamar en alta mar, la diferencia de una hora á otra será el establecimiento del puerto de que se trate.*

Esta determinacion requiere para su mayor exactitud reiteradas observaciones egecutadas con cuidado, á causa de que durante cierto tiempo próximamente inmediato á la pleamar y bajamar las aguas suben y bajan con mucha lentitud; al reves de lo que sucede en los intermedios, durante los cuales ascienden y descienden rápidamente Permaneciendo las aguas, segun se acaba de decir, casi en un mismo ser poco antes y poco despues de la pleamar y bajamar, no hay otro medio para graduar el verdadero momento de la pleamar, que el de anotar, con precision, tanto el momento en que las aguas dejan de subir, como el en que principian á bajar; y tomar despues el promedio.

Modo de calcular la hora en que sale y se pone la luna.

727. No dejará de tener su utilidad, para los que ocupándose

de levantamientos de planos tienen frecuentes marchas que hacer como en muchas ocasiones en la guerra acaece á los ingenieros, el calcular las horas de la salida y ocultacion de la luna.

El modo que para lograr esta determinacion va á enseñarse dista del rigor astronómico, pero es mas que suficiente para el fin propuesto en estos y otros casos semejantes.

Es de advertir ante todo, que el dia del novilunio la luna sale y se pone casi al mismo tiempo que el sol; que el dia del cuarto creciente la luna sale cuando el sol está en el meridiano, esto es, al medio dia; que el del plenilunio la luna sale cuando el sol se pone; y en fin, que el dia del cuarto menguante la luna sale á media noche.

Se ha dicho (725) el modo de calcular la hora de la pleamar, que es la misma en que la luna pasa por el meridiano del lugar propuesto.

Igualmente se conocerá la hora en que el sol sale y se pone; bien por la simple observacion de los momentos del levantamiento y caida de este astro; bien por los medios que se enseñan en los tratados de cosmografía. Este conocimiento dará el tiempo que el sol tarda en describir el arco diurno, y por consiguiente su mitad; sea desde la salida de este astro hasta tocar en el meridiano; sea desde este punto hasta dar en su ocaso.

En fin, si se supone que la luna tarde lo mismo que el sol en describir el arco elevado sobre nuestro horizonte, bastará para hallar la hora de su nacimiento restar de la hora de su paso por el meridiano el intérvalo de tiempo correspondiente al semiarco diurno del sol; y á la inversa para hallar la hora de su ocaso habrá que añadir aquel intérvalo (*) á la hora del paso por el meridiano.

FIN.

(*) Para enterarse de los fundamentos de lo esplicado en este y en el anterior artículo, y conocer ademas estos asuntos con mas estension, puede verse el Tratado elemental de geografía matemática aplicada á la topografía etc., por D. Angel Laborde y Navarro, capitan de fragata de la real Armada, año de 1814.

de levantamientos de planos, [illegible] marchas que hace, como en muchas ocasiones en la guerra acontece, el calcular las horas de la salida y ocultacion de la luna.

El modo que para lograr esta determinacion va á enseñarse dista del rigor astronómico, pero es mas que suficiente para el fin propuesto en este y otros casos semejantes.

Es de advertir ante todo, que el dia del novilunio la luna sale y se pone al mismo tiempo que el sol; que el dia del cuarto creciente la luna sale cuando el sol está en el meridiano, esto es, al medio dia; que el del plenilunio la luna sale cuando el sol se pone; y en fin, que el dia del cuarto menguante la luna sale á media noche.

Se ha dicho (725) el modo de calcular la hora de la pleamar, que es la misma en que la luna pasa por el meridiano del lugar propuesto.

Igualmente se conocerá la hora en que el sol sale y se pone, bien por la simple observacion de los momentos del levantamiento y caida de este astro, bien por las tablas que se enseñan en los tratados de cosmografía. Esto supuesto, como el tiempo que el sol tarda en describir el semicírculo, y por consiguiente su [illegible] nes desde la salida de este astro hasta tocar en el meridiano, desde este punto hasta que [illegible] su ocaso.

En fin, si se supone que la luna tarda lo mismo que el sol en describir el arco diurno sobre nuestro horizonte, bastará para hallar la hora de su nacimiento restar de la hora de su paso por el meridiano el intervalo de tiempo correspondiente al semiarco diurno del sol; y á la inversa para hallar la hora de su ocaso habrá que añadir aquel intervalo (*) á la hora del paso por el meridiano.

FIN.

(*) Para enterarse de los fundamentos de lo explicado en este y en el anterior artículo, y conocer algunos otros asuntos con mas extension, puede verse el Tratado elemental de geografía matemática aplicada á la topografía, por D. Angel Laborde y Navarro, capitan de fragata de la real Armada, año de 1836.

14

INDICE

de las materias contenidas en este Tratado.

DEFINICIONES PRELIMINARES Y PLAN DE LA OBRA.

PRIMERA PARTE.

SEGUNDA PARTE.

TERCERA PARTE.

:

CUARTA PARTE.

Nivelacion.

QUINTA PARTE.

PARTE ADICCIONAL.

ERRATAS ESENCIALES.

PAGINA.	LINEA.	DICE.	DEBE DECIR.
2	25	B	*b*
5	última.	*b*, *c*	*a*, *c*
7	33	AX, CZ	(Bórrense.)
12	22	$\pm$ del numerador	$\mp$
13	3	NN′Q	NN′G
13	4	DE	DG
18	18	los senos	los senos y cosenos
18	20	Idem.	Idem.
19	3	calculando igualmente los cosenos	calculados los cosenos
24	última.	$\cos\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')$	$\cos\frac{1}{2}(a'-b')\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(a'+b')$
25	17	ED	CD
25	18	tang. *a*. . . . *c*D	tang. C . . . CD
26	24	y su	ó su
27	20	sen $(a+b)$: sen $(a-b)$	sen a+sen b : sen a—sen b
27			(La * se refiere á la proposicion siguiente.)
27	penúlt.ª	$DC+AD=\frac{(AB+BC)(AB-BC)}{AC}$	$DC+AD=AC$
28	2	AB, BC	AD, DC
36	14	C, 13*i*	C′, 13
49	31	*ac*	*c*
53	7		(Bórrese.) *Fig.* 56′
60	4	O	o′ (Escríbase al márgen.) *Fig.* 56‴
62	21	verticalmente	perpendicularmente
65	20	nivel *c*	nivel *s*
88	28	2*b*	+2 *b*
88	31	*dc*, *lm*	*dclmn*
113	30	4	5
114	26	coladas	clavadas
115	11	demasiado	mas
116	7	la medida reducida á la horizontal	el esceso dicho
118	22	la HA al estremo AHL á un piquete L en direccion de H, y BLA	la HL prolongacion de HB, la LA.
129	14	NO	B*a*′
129	17	tirará	supondrá
134	15	AC : : AB : *m*	AC : AB : :
134	17		$AC^2\ (m^2-n^2)$
136	última.	5,191,63	5191,63
159	23	*ab*, *ac*	*ad*, *bc*
164	7	tres partes	partes iguales
164	última.	$AB^2 \cdot ABC$	$AB^2.\ 2ABC$
166	1	G. ADF	ADF

Pagina.	Linea.	Dice.	Debe decir.
166	3	G. AGD	—AGD
166	9	*m*	*n*
166	10	se	*m*
166	11	á este	al que consideramos
166	16	en los	en los espacios
170	21	$\frac{\frac{2}{9}\,ABCD-ABm}{\frac{1}{2}\,lm}$	$\frac{2}{9}\times\frac{ABCD-ABM}{\frac{1}{2}\,lm}$
171	22	$\frac{\frac{2}{9}\,ABCD-CDh}{\frac{1}{2}\,oh}$	$\frac{2}{9}\times\frac{ABCD-CDh}{\frac{1}{2}\,oh}$
187	última.	$b=60^{o}$	$b=50^{o}$
188	1	sen $b=60^{o}$	sen $a=60^{o}$
188	16	*cda*	*bda*
191	2	A′,C′	A, C
193	4		(Póngase.) *Fig.* 190
194	2	*Fig.* 195	*Fig.* 194
194	4	2*be*	2*ce*
194	9	*Fig.* 196	*Fig.* 194
194	31	*bab*	*bar*
198	34	*e′i*	*i*
198	id.	*e′g*	*eq*
207	18		(Bórrese.) primero
208	25	cuenta	encuentra
209	10	566	560
212	6	ADE	ADB
212	9	*o′*	y
212	21	$=d$BC	$+d$BC
222	28	se tiene ademas el ángulo que podrá construirse	que podrá construirse se tiene ademas el ángulo.
227	última.	á una con	y
257	5	50 ; 51	50 : 51
259	13	*se*	*sl*
292	28	AB	AD
293	22	dependiente	de pendiente
309	3	*Fig.* 253′	*Fig.* 263′.
312	12	*de*	*dc*
317	22	0,4 pulgs.	o varas, o pies, 4 pulgs. : y la misma enmienda en los siguientes sumandos.
318	27	señal tal	*(d)* señal tal
333	penúlt.ª	DD	DB
343	31		(Bórrese.) si se les llama
344	1	(*)	(1)
344	penúlt.ª	Antonio Garcia	Fernando Garcia
420	24	(Las figuras 1, 2 y 3 de la lámina 25, deben ser de diferente magnitud proporcionada á la relacion entre las superficies del octágono, exágono y pentágono de un mismo lado).	