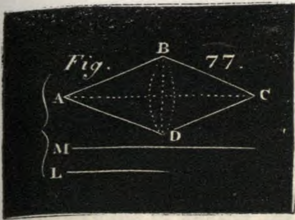
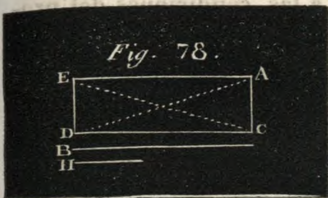
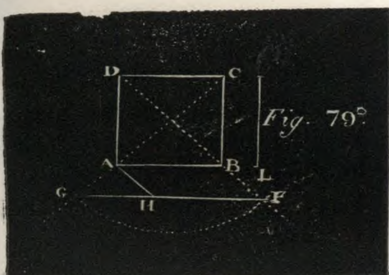


El *rombo* se diferencia del anterior, en que tiene iguales todos sus lados; como ABCD (fig. 77).



El *rectángulo* tiene los lados consecutivos desiguales, pero iguales todos sus ángulos; tal el ACDE (fig. 78).



El *cuadrado* tiene iguales sus ángulos y sus lados; como ABCD (fig. 79).

3. *La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á 4 rectos.*

Para convencernos de esta verdad tirarémos en el cuadrilátero una diagonal; y de este modo quedará dividido en dos triángulos; pero la suma de los ángulos de estos triángulos, identica á la suma de los ángulos del cuadrilátero, es igual á 4 rectos: luego, etc.

4. *La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos iguales.*

Esta igualdad se conocerá tan pronto como reparemos en que los triángulos tienen iguales respectivamente sus ángulos y sus lados.

5. *Construir un trapecio simétrico, conocidas la base mayor B la altura H, y la longitud L de los lados no paralelos,* (fig. 76).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; levantarémos sobre esta recta una perpendicular EF, igual á la altura H; por el punto F tirarémos una paralela á CD; desde los puntos C, y D, con un rádio igual á L, describiremos dos arcos, cada uno de los cuales cortará en dos puntos á esta paralela; uniendo ahora á los extremos de la base CD las intersecciones A, H, mas próximas al punto F, tendrémos formado el trapecio simétrico AHCD.

6. *Construir un romboide conociendo la base B, la altura H y la longitud* L *de los lados que encuentran á la base* (fig. 76).

Trazarémos una recta CD, igual á la base B; en un punto cualquiera E levantarémos una perpendicular EF igual á la H. Por el punto F tiraremos una paralela á CD; trazaremos despues desde los puntos C, D, con un rádio L, dos arcos, cada uno de los cuales cortará á la paralela en dos puntos; finalmente uniendo á los C, D, las intersecciones A,B, ó H, I, tendrémos los dos paralelogramos ABCD, CDIH que satisfarán á las condiciones del problema.

7. *Trazar u rombo conociendo un lado L y una diagonal M,* (fig. 77).

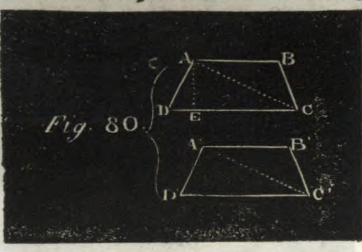
Tiraremos una recta AC igual á M; desde los puntos A, C, con un rádio L, trazarémos dos arcos que se cortarán en dos puntos B, D; dirigiendo ahora los cuatro rádios, determinados por las intersecciones, nos resultará el rombo ABCD.

Esta figura tiene muchas aplicaciones en las artes, los dibujos de las telas, la ebanisteria etc. nos ofrece este ejemplo á cada paso.

8. *Formar un rectángulo dada la base B y la altura H,* (fig. 78).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; en el punto C ó en el D, levantaremos una perpendicular DE igual á H; por el punto E tirarémos una paralela á CD. y por C otra paralela á DE, la interseccion A de las paralelas determinará el rectángulo ACDE.

Son muy numerosas las aplicaciones del rectángulo: el sítio de un edificio es ordinariamente rectangular; en la agrimensura ocurre con frecuencia medir ó construir rectángulos.



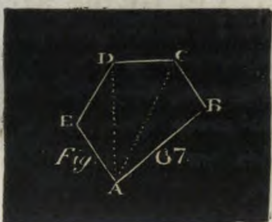
9. *Construir un cuadilátero igual á otro dado* ABCD (fig. 80).

Para esta construccion no hay mas que tirar la diagonal AC, y formar sobre una recta A′C′=AC, dos triángulos A′B′C′, A′C′D′. respectivamente iguales á los triángulos ABC, ACD.

§. V. *De los polígonos de cualquier número de lados,—De los polígonos regulares inscritos y circunscritos,*

1. La suma de los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos; determinar el valor de cada uno de los ángulos en el polígono regular.—2. La suma de los ángulos exteriores de un polígono, vale 4 rectos.—3. Que entendemos por centro del polígono regular? Qué es rádio, apotema y ángulo del centro?—4. Cómo se determina el ángulo del centro?—5. Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.—6. Inscribir un polígono regular de cualquier número de lados.—7. Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados.—8. Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro de igual número de lados.—9. El lado del hexágono regular es igual á su rádio.—10 Inscribir el hexágono regular; la circunferencia vale mas de tres diámetros; inscribir el triángulo equilátero.—11. Inscribir un cuadrado.—12. Dado un cuadrado inscrito circunscribir otro: la circunferencia vale menos de cuatro diámetros.—13. Determinar la relacion de la circunferencia con el diámetro: relacion hallada por Arquimedes: relacion de Mecio.

1. *La suma de los angulos de un polígono cualquiera* ABCDE (fig. 67). *vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*



Para convencernos de esta verdad, desde un mismo vértice A, dirigirémos diagonales á los demas vértices; estas diagonales dividirán el polígono en tantos triángulos, como lados tiene menos dos; luego la suma de los ángulos de estos triángulos será tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos; pero esta suma es idéntica á la de los ángulos del polígono; luego etc.

Si se nos pide, p. ej., el valor de los ángulos de un polígono de 20 lados, quedará determinado de este modo: valor:$=(20-2)\times 2$ rectos$=20\times 2$ rectos-2×2 rectos $=40$ rectos -4 rectos. Cuyo resultado nos dice que para determinar el valor de los ángulos de un polígono, duplicarémos el número de sus lados, de este producto restarémos 4 rectos; y la diferencia que resulte, expresará el número de ángulos rectos, que valen los del polígono.

Corolario. El teorema precedente nos conduce á la determinacion de cada uno de los ángulos en el polígono regular. Este polígono, como ya sabemos, tiene todos sus ángulos iguales; de consiguiente dividiendo el valor de todos sus ángulos por su número, obtendrémos el valor de cada uno; pero el número de ángulos es igual al de los lados; podemos pues dividir por el número de lados. Si queremos, p. ej., hallar el ángulo del decágono regular dirémos: ángulo$=\frac{20R-4R}{10}=\frac{16R}{10}=1{,}6$ de R,$=144.°$

2. *Si prolongamos los lados del polígono* **ABCDE**, *la suma de los ángulos exteriores que resultan, es igual á 4 rectos.* (fig. X).

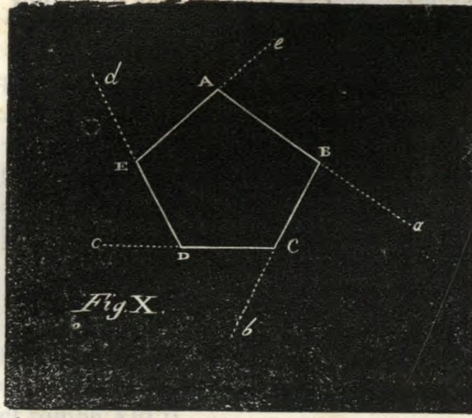


Fig. X.

En efecto, eAB+BAE=2R
aBC+CBA=2R
bCD+DCB=2R
. . . . ;

Donde vemos claramente que la suma de los ángulos interiores y exteriores del polígono vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono. Asi pues, la suma total excede á la de los ángulos interiores en 4 rectos; luego la suma de los exteriores será igual á 4 rectos.

3. Llámase *centro* de un polígono regular inscrito **ABCDE** (fig. 84), el centro mismo O del círculo.

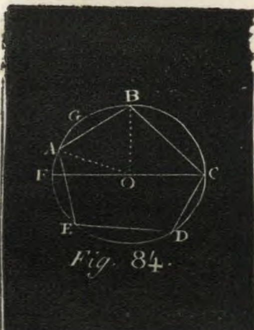


Fig. 84.

Entendemos por *rádio* del polígono regular el rádio del círculo circunscrito; y se dice *apotema* la distancia del centro á cualquiera de los lados, ó sea el rádio del círculo inscrito. De donde se infiere que en el polígono regular son iguales sus rádios y sus apotemas.

Se llama *ángulo del centro* el ángulo AOB, formado por dos rádios AO, OB, dirigidos á dos vertices contiguos.

4. Si consideramos que todos los triángulos formados por los rádios y lados del polígono, son iguales, como lo manifiesta la igualdad respectiva de los lados de este triángulo, conocerémos que todos los ángulos del centro son iguales entre sí. Luego para determinar el ángulo del centro, dividirémos por el número de lados del polígono los 4 rectos ó 360.°, valor de todos los angulos que al rededor de un punto se pueden formar.

Si queremos p. ej. hallar el ángulo del centro en el pentágono regular procederémos del modo siguiente: ángulo del centro$=\frac{360.^{\circ}}{5}=72.^{\circ}$: este ángulo pues, tendrá por medida el arco AGB, que será la quinta parte de la circunferencia.

5. *Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.*

1.° Porque en el polígono regular son iguales los rádios; luego si con el radio del polígono trazamos una circunferencia, esta circunferencia pasará por todos los vértices del polígono.

2.° Los apotemas son iguales; luego si con el apotema describimos una circunferencia, esta será tangente á todos los lados del polígono regular.

6. *Inscribir un polígono regular de cualquier número de lados.*

Fórmese el ángulo del centro; descríbase la cuerda de su arco; esta cuerda será el lado del polígono que nos proponemos inscribir.

7. *Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados* (fig. 88).

Divídase el arco correspondiente tal como el AIB, en dos arcos iguales AI, IB; desde el punto I tírense las cuerdas IA, IB; cada una de estas cuerdas será el lado del polígono pedido.

8. *Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro de igual número de lados.*

Por todos los vértices del polígono inscrito tirarémos tangentes á la circunferencia; estas tangentes determinarán el polígono que queremos circunscribir.

9. *El lado del hexágono regular es igual á su rádio* (fig. 88).

Formarémos el triángulo AOB, el cual no puede menos de ser equiángular, como resulta de las consideraciones siguientes. El ángulo del centro

$$AOB=\frac{4}{6}\text{ de recto}=\frac{2}{3}=60.^\circ;$$

luego la suma de los otros dos ángulos A y B valdrá 120.° ; pero estos dos ángulos son iguales, por ser iguales los lados AO, BO; luego cada uno de estos ángulos valdrá la mitad de 120.°, ó sea 60.° Asi pues, este triángulo es equiangular y por consiguiente equilátero. Luego AB=AO=BO.

10. *Inscribir el hexágono regular* (fig. 88).

Tómese el rádio OA, y desde el punto A lo colocarémos seis veces sobre la circunferencia; uniendo los seis puntos asi determinados, obtendrémos el hexágono regular ABCDEF, cuyo perimetro, por consiguiente, sera igual á seis rádios ó tres diámetros del círculo circunscrito.

1.° **Corolario.** De donde se infiere que, siendo la circunferencia mayor que el polígono inscrito *toda circunferencia será mayor que tres diámetros.*

2.° Para inscribir un triángulo equilateral podemos hacer la construccion siguiente.

Trácese el diámetro AB (fig. 85), y desde el punto B, con una abertura de compas igual al rádio, describase un arco que corte la circunferencia en los puntos C, D; la línea DC será el lado del triángulo equilátero que nos proponemos inscribir.

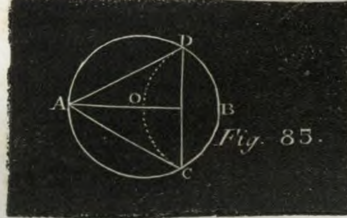


Fig. 85.

11. *Inscribir un cuadrado.*

Tirénse los diámetros AB, CD perpendiculares entre sí; despues, por medio de las rectas DB, DA, CB, CA, unanse los cuatro puntos A, C, B, D; quedará de este modo inscrito el cuadrado pedido.

12. *Dado un cuadrado inscrito circunscribir otro cuadrado.*

Sea el cuadrado ACBD (fi. 86): desde los puntos B y D, con un rádio cualquiera, mayor que la mitad de BD, trazarémos dos arcos que se corten en F; uniendo este punto con el centro O, la línea FO determinará el punto G; hágase lo mismo con los demas puntos tomados dos á dos; tirando ahora cuatro tangentes á la circunfencia por los puntos determinados de este modo, tendrémos el cuadrado circunscrito PERS.

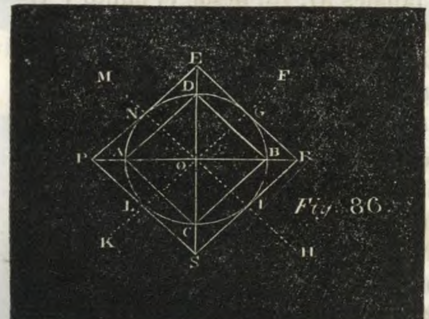


Fig. 86.

A primera vísta se percibe que el perímetro de este cuadrado es igual á cuatro diámetros.

De aqui resulta que, siendo el polígono circunscrito mayor que la circunferencia inscrita, *el valor de esta no llegará á cuatro diámetros.*

13. *La determinacion del perímetro del circulo consiste en hallar una línea recta, igual en longitud á la circunferencia, para compararla con el rádio ó con el diámetro.*

Para resolver este problema no tenemos otros medios que los de aproximacion; aproximacion que podemos llevar hasta tal punto que equivalga á la exactitud.

Supongamos, inscrito uno, y circunscrito otro, dos polígonos regulares de un número indefinido de lados, p. ej. de 32768 lados, no cometerémos un error muy grande, si tomamos uno de estos polígonos por el círculo. En este caso el perímetro se habrá convertido en la circunferencia, y el apotegma en el rádio.

El polígono de 32768 lados inscrito á un circulo cuyo rádio es un pié, tiene un perímetro representado por 6,2831852. La relacion de este número con el diámetro que vale dos rádios, será 3,1415926. Asi pues, la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro está expresada por el número

3,1415926, número que no difiere del verdadero en una diezmillonésima; es decir que la circunferencia contiene la diezmillonésima parte del diámetro, mas de 31415926, veces y menos de 31415927 veces.

Esta relacion se designa generalmente en los tratados de Geometría con la letra π del alfabeto griego.

Como la relacion de la circunferencia con el diámetro es de un uso tan frecuente, en lugar del número 3,1415926, poco accesible á la memoria, se suele tomar la razon menos exacta, pero mas sencilla, 22:7. Este número, convertido en decimales, produce la fraccion 3,142 etc. y conviene con el anterior 3,1415 etc. hasta centésimas inclusive. Bastará, pues, en los casos ordinarios tomar para circunferencia de una figura circular 3 veces el diámetro mas un $\frac{1}{7}$. El descubrimiento de esta relacion se debe á Arquímedes.

La relacion encontrada por Mecio es mas aproximada que la de Arquímedes, y al mismo tiempo muy facil de conservar en la memoria. Esta razon está expresada por el número $\frac{355}{113}$ que muy pronto reproduciremos, si retenemos en la memoria el número 113355, que resulta del conjunto de las cifras del denominador y del numerador.

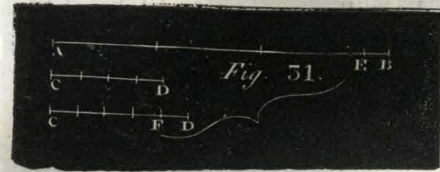
§. VI. *De las líneas proporcionales y de los polígonos semejantes.*

1. Razon de dos líneas.–2. Medida comun de dos lineas, y como se determina su relacion.–3. Qué son líneas comensurables é incomensurables.–4. Cuándo se dicen proporcionales cuatro lineas?–5. Qué son triángulos semejantes? Qué son polígonos semejantes?–Qué son lineas homólogas?–6. Si dos rectas son cortadas por paralelas, y los segmentos de la una son iguales entre si, tambien lo son los de la otra.–7. Si dos rectas concurrentes en un punto son cortadas por dos paralelas, los segmentos de la una so proporcionales á los de la otra.–8. Si en un triángulo tiramos una recta paralela á uno de sus lados, resulta un otro triángulo semejante al primero.–9. Dos triángulos semejantes son equiangulares, y reciprocamente.–10. Dos triángulos que tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, son semejantes.–11. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos, son semejantes.–12. Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales: dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.–13. Propiedades del triángulo rectángulo.–14. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.–15. Dividir una recta en partes iguales.–16. Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas–17. Construir un triángulo semejante á otro dado, y por consecuencia un polígono semejante á otro.

1. Cuando comparamos entre si dos líneas ó dos números el resultado de esta comparacion se llama *razon*.

2. Entendemos por *medida comun* de dos líneas, una tercera línea contenida exactamente en las dos primeras.

Para hallar la razon de dos líneas AB, CD (fig. 51) se coloca la mas pequeña CD sobre la mayor AB, tantas veces como puede ser contenida; si cabe un número exacto de veces, la razon entre las dos líneas tendrá por expresion un número entero, y la operacion quedará terminada.



Pero supongamos que la línea AB contiene tres veces á la CD, quedando el residuo EB; sobrepondrémos este resíduo EB à la CD, y si cabe p. ej. exactamente 4 veces, la línea AB igual á tres veces la línea CD, mas el resíduo EB, contendrá 13 veces la EB; de donde resulta que la razon de CD á AB será $\frac{4}{13}$, pudiendo formar la siguiente proporcion: AB: CD :: 13 : 4.

La línea EB, que cabe 4 veces en la CD, y 13 en la AB, es la *comun medida* de estas dos líneas.

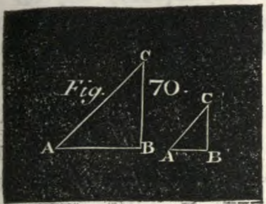
3. Llámanse *líneas comensurables entre sí* aquellas cuya razon se puede expresar numéricamente, como las líneas AB, CD del ejemplo precedente.

Por el contrario, se llaman *incomensurables* aquellas cuya razon no se puede expresar numéricamente, ó en otros términos, aquellas que no tienen una medida comun. Sin embargo, podemos valuar la relacion de estas lineas hasta tal grado de aproximacion, que equivalga á la exactitud.

En efecto, supongamos la línea AB (fig. 51) dividida en un número cualquiera de partes iguales, y que una de estas partes se coloca sobre la CD tantas veces como sea susceptible: en esta division claro es que nos quedará un resíduo, por ser las líneas incomensurables; pero este resíduo, menor que una de las divisiones de AB, será tanto mas pequeño é inapreciable, cuanto mayor sea el número de partes en que la línea AB haya sido dividida. Si se divide la línea AB en un millon de partes iguales p. ej. y si CD contiene 456546 de estas divisiones, la razon de CD á AB será 0,456546, aproximada hasta menos de una millonésima, es decir que CD contendrá la millonésima parte de AB mas de 456546 veces, y menos de 456547 veces.

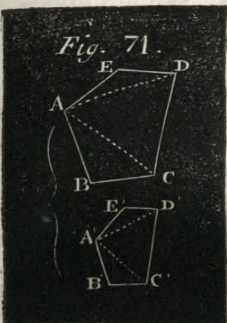
4. Cuando la razon de dos líneas A y B es igual á la razon de otras dos líneas C y D, de modo que podamos formar la proporcion A:B::C:D, se dice que las cuatro líneas A,B,C,D, son *proporcionales*.

5. Entendemos por triángulos *semejantes*, aquellos que tienen sus lados proporcionales, de modo que podamos decir (fig. 70) AB : A′B′::BC:B′C′::CA:C′A′.

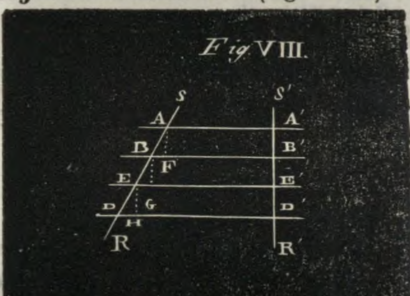


Dos polígonos se dicen *semejantes* siempre que se puedan descomponer en igual número de triángulos respectivamente semejantes y colocados en el mismo órden; como los de la fig. 71.

En los polígonos semejantes se llaman *líneas homólogas* las líneas que unen los *puntos correspondientes* de estos polígonos. Para conocer en los triángulos semejantes cuales son los lados homólogos, tomarémos en consideracion sus ángulos respectivamente iguales, y los lados opuestos á estos ángulos, serán los homólogos.

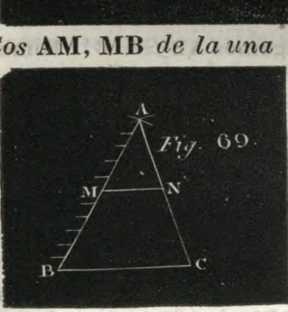


6. *Si tenemos dos rectas cualesquiera* SR, S′R′, *cortadas por un número cualquiera de paralelas* AA′, BB′, CC′, DD′, *siendo iguales entre sí los segmentos de la una, lo serán tambien entre sí los segmentos de la otra* (fig. VIII).



Para manifestar esta verdad, tirarémos las rectas AF, BG. EH... paralelas á la S′R′. Los triángulos ABF. BEG... serán iguales, porque tienen un lado igual, AB=BE..., adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, BAF=EBG..., y ABF=BEG...: de donde AF=BG..., por consiguiente A′B′=B′E′.

7. *Si se nos dan dos rectas* AB,AC, *concurrentes en un punto* A, *cortadas por dos paralelas* MN, BC *los segmentos* AM, MB *de la una son proporcionales á los segmentos* AN, NC *de la otra* (fig. 69.)



Supongamos para esto que la razon entre AM y MB sea $\frac{5}{6}$, es decir que MB se haya dividido en 6 partes iguales, y que AM contenga 5 de estas partes: si por los puntos de division de la AB dirigimos paralelas á la BC, dividirán la AC en partes iguales, segun acabamos de demostrar. AN contendrá 5 de estas partes y NC 6; la razon pues entre estas dos rectas, será tambien $\frac{5}{6}$, resultando por consiguiente la proporcion:

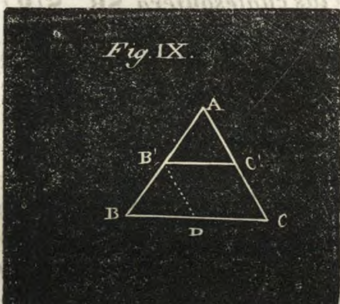
AM:MB::AN:NC. L. Q. Q. D.

Asi mismo, conteniendo la AM 5 de las 11 partes iguales en que AB está dividida, y AN otras 5 de las 11 partes iguales de AC, podemos formar la proporcion:

AM:AB::AN:AC, y por la misma razon
MB:AB::NC:AC, y dividiendo la primera por la segunda.
AM:MB::AN:NC.

Cualquiera puede conocer que tambien es verdadera la recíproca, es decir *que si la línea* MN *divide á las rectas* AB, AC *en partes proporcionales*, la MN *será paralela á la* BC.

8, *Toda recta* B′C′ *tirada en el plano de un triángulo* ABC *paralelamente à uno de los lados* BC, *forma un segundo triángulo* AB′C′ *semejante al primero*, de suerte que resultará (fig. IX.)



AB:AB′::AC:AC′::BC:B′C′.

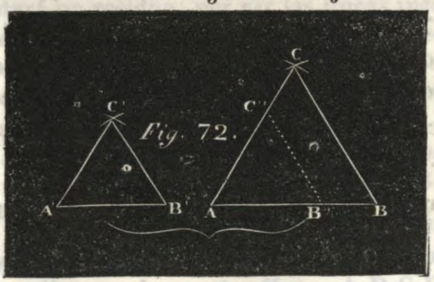
En efecto resulta de lo dicho

AB:AB′::AC:AC′.

Si ahora dirigimos la B′D paralela á la AC, tendrémos.

AB:AB′::BC:CD, pero CD=B′C′;
asi AB:AB′::BC:B′C′; luego etc.

9. *Dos triángulos semejantes* ABC, A′B′C′ (fig. 72) *son equiangulares entre sí, y reciprocamente dos triángulos equiangulares entre sí, son semejantes.*



1.º Supongamos AB>A′B′. Tómese sobre AB una longitud AB″,=A′B′, y por el punto B″, diríjase la B″C″ paralela á BC; habrémos formado de este modo un triángulo AB″C″ semejante al ABC; pero segun nuestra suposicion el ABC es semejante al A′B′C′: luego los dos triángulos AB″C″ y A′B′C′ son semejantes entre sí, é iguales al mismo tiempo, porque teniendo el lado AB″=A′B′, los otros lados tendrán entre sí la misma relacion de igualdad; asi pues, los triángulos AB″C″ y A′B′C′, ademas de ser semejantes, son tambien iguales. Los triángulos ABC, AB″C″ son equiangulares entre sí; tambien lo serán pues ABC y A′B′C′, y por consiguiente A=A′, B=B′, C=C′.

2.° Siendo ABC y A′B′C′ equiangulares entre sí, AB″C″ y A′B′C′ lo serán tambien. Pero AB′′=A′B′; luego AB′′C′′ y A′B′C′ que tienen gual un lado y todos sus ángulos, serán iguales; asi pues, ABC y A′B′C′ son semejantes.

Corolario 1.° *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.*

2.° *Dos triángulos isósceles son semejantes, cuando tienen iguales los ángulos de la base ó los del vèrtice.*

3.° *Dos triángulos rectángulos que tienen igual un ángulo agudo, son semejantes.*

10. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo igual,* A=A′, *comprendido entre lados proporcionales, AB: A′B′ ;: AC: A′C′ (fig, 72.)*

Para demostrar este teorema, harémos la misma construccion que en el caso anterior. Los triángulos semejantes ABC, AB″C″ nos dan la siguiente proporcion AB: AB″:· AC: AC″. Combinando esta proporcion con la supuesta en el teorema, resulta A′B′: AB″:: A′C′: AC″, y como A′B′=AB″, tambien A′C′=AC′′. Asi pues, los triángulos A′B′C′, AB′′C′′ son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido: luego ABC y A′B′C′ serán semejantes.

11. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos son semejantes.*

Los triángulos que se hallan en este caso, no pueden menos de tener sus ángulos respectivamente iguales, como vamos á manifestar.

Los ángulos de estos triángulos ó son iguales ó suplementarios, segun demostramos en otra parte; veamos si los 6 ángulos de los dos triángulos, tomados dos á dos, pueden ser suplementarios. Si asi fuese, los ángulos de estos triángulos valdrian 6 rectos; lo cual es imposible. Tampoco pueden ser suplementarios 4 de estos ángulos tomados dos á dos, porque la suma de los 6 pasaria de 4 rectos.

Asi pues, dos ángulos por lo menos de un triángulo son respectivamente iguales á dos del otro. Luego etc.

12. *Dos poligonos son semejantes, cuando tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales*, de suerte que A=A′, B=B′, etc.; y al mismo tiempo A′B: ÀB′ :: BC: B′C... (fig. 71).

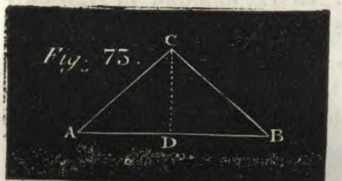
La demostracion de este teorema se reduce á descomponer de un modo cualquiera los dos polígonos en igual número de triángulos, manifestando al mismo tiempo la semejanza de estos triángulos, tomados dos á dos, del modo siguiente.

Los dos triángulos ABC, A′B′C′ p. ej. que tienen un ángulo B=B′, y proporcionales los lados que lo forman, serán semejantes. De donde resulta que las diagonales AC, A′C, tienen entre sí la misma relacion que los lados homólogos de los polígonos; y que los ángulos ACD, A′C′D son iguales, como diferencias de los ángulos iguales ACB, A′C′B. Luego los triángulos ACD, A′C′D′ son tambien semejantes, por tener el ángulo C=C′, formado por lados proporcionales.

Lo mismo podemos decir de todos los triángulos formados al rededor del punto A. Luego etc.

Corolario. *Dos polígo os regulares del mismo número de lados son semejantes*; y considerando el círculo como un polígono regular de infinitos lados, estamos autorizados para decir que *todos los círculos son semejantes entre sí.*

13. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC (figura 73), *bajamos una perpendicular CD sobre la hipotenusa AB:* 1.° *los dos triángulos ADC, CDB son semejantes al triángulo* ABC; 2.° *los otros triángulos* ADC, CDB *son semejantes entre sí;* 3.° *la perpendicular CD es media proporcional entre los dos segmentos AD, BD de la hipotenusa.*



4.° *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.*

1.° El ángulo A es comun á los dos triángulos ADC, ABC; ademas, cada uno de ellos tienen un ángulo recto; luego son semejantes: luego el ángulo ACD=CBD.

Lo mismo sucede con los triángulos CDB, y ACB.

2.° Los dos triángulos ADC, CBD tienen cada uno un ángulo recto, y ademas, el ACD del uno igual al CBD del otro; luego son semejantes.

3.° Si comparamos los lados homólogos de los triángulos semejantes ACD, CDB, nos resultará la proporcion AD: CD:: CD: DB; á la línea CD que está contenida en la AD, tantas veces como ella contiene á la DB, la llamamos medio proporcional entre AD y DB; luego etc.

4.° La comparacion de los triángulos semejantes ACB, ADC, nos da la proporcion AD: CA:: CA:: AB.—Del mismo modo la comparacion de los triángulos semejantes CDB y ACB nos darán la proporcion DB: CB:: CB: AB; luego cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.

Llámanse *cuestiones numéricas* todas las cuestiones de geometría que se pueden resolver por medio de las reglas de aritmética.

14. *En un triángulo rectángulo* ABC (73), *el cuadrado del valor numérico de la hipotenusa* AB *es igual á la suma de los cuadrados de los valores numéricos de los catetos.*

En efecto, si con las dos últimas proporciones:

AD: CA:: CA: AB, y DB: CB:: CB: AB, formamos el producto de medios igual al de los extremos, resultará:

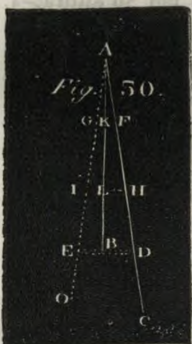
$$CA \times CA \text{ ó } CA^2 = AD \times AB \text{ , y } CB \times CB \text{ ó } CB^2 = DB \times AB.$$

Sumando estas dos igualdades, tendrémos:

$CA^2 + CB^2 = (AD + DB) \times AB$; pero $AD + DB = AB$; luego $CA^2 + CB^2 = AB \times AB = AB^2$ L. Q. Q. D.

Sea la hipotenusa $AB = 10$ pies, $AC = 6$ pies, y $CB = 8$ pies, resultará 10×10 ó $10^2 = 6^2 + 8^2$, es decir, $100 = 36 + 64$.

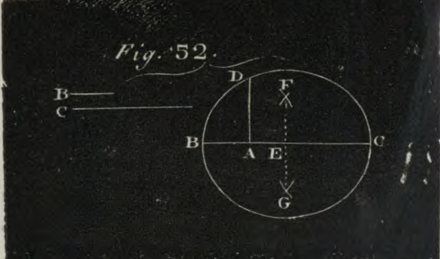
15. *Dividir una recta* A B *en un número cualquiera de partes iguales.* (*fig.* 50).



Supongamos que se quiere dividir en tres partes.

Tirarémos por una de sus extremidades una recta cualquiera AC, tomando en ella una longitud, tal que la suma AD de tres partes iguales á esta longitud, sea sensiblemente mayor que AB; unirémos el punto D al B; desde el punto A, con un radio AD, trazarémos un arco que corte á la prolongacion de DB en el punto E, y uniendo el punto A con el punto E, tendríamos A E=A D; por consiguiente podrémos colocar exáctamente sobre AC las tres partes de AD. Uniendo ahora los puntos de division F y G, H é I por medio de rectas, estas rectas, que dividen las líneas AD, AE en partes iguales serán paralelas entre sí, y las divisiones AK, KL, LB, formadas por las paralelas, serán iguales.

16. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas b, c.* (fig. 52).



Sobre una recta BC colocarémos las dos dadas, b, c, la primera desde B hasta A, y la segunda desde A hasta C; sobre la recta BC, como diámetro, describirémos una semi-circunferencia; levantando sobre el punto A una perperdicular que corte en D á la semi-circunferencia, esta perpendicular será medio proporcional entre las rectas b y c.

17. *Construir un triángulo semejante á otro triángulo dado ABC, sobre una recta A'B', dada como homóloga al lado AB.*

Podemos resolver este problema de muchos modos, haciendo aplicacion de los casos de semejanza entre los triángulos. Una de las construcciones podrá ser la siguiente. Trácense sobre los estremos de la recta A'B' dos ángulos A' y B', respectivamente iguales á los ángulos A y B del triángulo dado; la interseccion de las nuevas rectas que forman los ángulos, determinará un triángulo semejante al dado.

Corolario. Para construir un polígono semejante á otro dado, bastará descomponerlo en triángulos, y trazar sucesivamente un número igual de triángulos semejantes y colocados en el mismo órden.

§. 7. *De las superficies de las figuras planas.*

1. Qué se entiende por área? 2. Qué es medir una superficie, y qué unidad se elije generalmente?–3. Un rectángulo se mide por el producto de su base por su altura.–4. Todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura.– 5 Todo triángulo es igual á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura: de donde el área del triángulo tiene por espresion la mitad del producto de su base por su altura.– 6. El área del trapecio es igual á la semi-suma de sus bases, multiplicada por su altura.– 7. Un polígono cualquiera se puede medir descomponiéndolo en triángulos.– 8. El área del polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad del apotema.- 9. La superficie del círculo es igual al cuadrado del radio multiplicado por 3,14159.— 10. Problema de la cuadratura del círculo.

1. Llámase *área* la superficie de una figura.

2. Medir una superficie es indagar cuantas veces cabe en ella otra que se toma por unidad.

Generalmente se elige por unidad el cuadrado construido sobre la unidad lineal que podrá ser la pulgada, el pie, la vara, etc.

3. Cualquiera que sea la unidad de superficie que elijamos, un rectángulo la contendrá tantas veces como nos indica el producto de su base por su altura, midiendo esta base y altura con la base y altura de la unidad elegida.

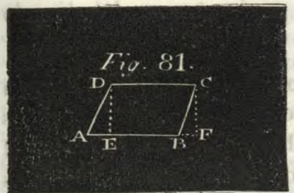
En efecto, supongamos que la unidad sea un pie cuadrado, y que con ella queremos medir el rectángulo A B C D (fig. 83); si el lado del cuadrado cabe 6 veces en la base C D, obtendrémos 6 fajas rectangulares, tirando las paralelas á CD por los puntos de division; y si el mismo lado está contenido 8 veces en la altura AD, quedará dividida cada una de estas fajas en 8 cuadros iguales, por medio de las paralelas á AB dirigidas por las divisiones de AD. Pero es indispensable que para obtener el número total 48 de cuadrados que hay en el rectángulo, basta multiplicar 8, longitud de la altura AD, por 6, longitud de la base CD.

Si se quiere, pues, medir en pies cuadrados la superficie de un rectángulo, ABCD, bastará medir su base y su altura con el pie lineal, y formar el producto de los números que resulten de esta medicion.

Lo mismo sucederá si tomamos por unidad la pulgada, la vara, etc.; de donde podemos deducir la espresion general.

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

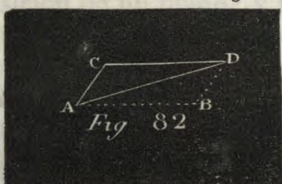
4. *Todo paralelógramo* **ABCD** *es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura* (fig. 81).



Esta verdad se hará muy perceptible, si bajamos sobre la base AB y sobre su prolongacion las perpendiculares DE, CF; de cuya construccion nos han resultado los dos triángulos iguales DAE, CBF; por tener sus ángulos y sus lados respectivamente iguales. Si á cada uno de los dos triángulos añadimos el trapecio DEBC, tendrémos; el triángulo DAE mas el trapecio DEBC=al triángulo CBF mas el mismo trapecio DEBC; pero el primer triángulo y el trapecio componen el paralelógramo ABCD; el segundo triángulo y el mismo trapecio forman el rectángulo DEFC de la misma base y altura que el paralelógramo; luego etc.

Como en el cuadrado la base y la altura son iguales, estamos autorizados para decir que el área del cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.

5. *Todo triángulo* **ADC** (fig. 82) *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura.*



Por los puntos A y D dirigirémos las líneas AB, DB respectivamente paralelas á CD, AC; habrémos formado de este modo el paralelógramo ABCD, dividido por la diagonal AD en dos triángulos iguales ADC, ADB; luego el triángulo ADC es la mitad del paralelógramo ABCD que tiene la misma base y altura.

De donde se infiere *que el área del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

6. *El área del trapecio es igual á la semi-suma de sus bases, multiplicada por su altura* (fig. 80).

Descompondrémos para esto el trapecio en dos triángulos, cada uno de los cuales tiene por base uno de los lados paralelos, y por altura, la misma del trapecio. De aqui resultará:

$$ACB=AB\times\frac{1}{2}EA\text{, y } ACD=DC\times\frac{1}{2}EA\text{, y sumando:}$$

$$ACB+ACD=(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA\text{, ó lo que es lo mismo trapecio } ABDC=$$

$$(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA.$$

7. Para medir un polígono cualquiera, podemos descomponerlo en triángulos y hallar la superficie de cada uno de estos triángulos; la suma total será igual á la superficie del polígono.

8. *El área del polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad del apotema.*

Para demostrar este teorema, descompondrémos el polígono regular en triángulos que tengan un vértice comun en el centro. Todos estos triángulos tienen por altura el apotema del polígono, y por base uno de los lados. El producto, pues, de la suma de los lados por la mitad del apotema, ó lo que es lo mismo, el perímetro multiplicado por la mitad del apotema, nos dará el área del polígono regular.

9. Considerado el círculo como un polígono regular de infinitos lados, cuyo apotema se ha convertido en el rádio, y el perímetro en la circunferencia, podemos decir que:

La superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio.

Luego si llamamos r al rádio, C á la circunferencia, y S á la superficie del círculo, se podrá expresar esta del modo siguiente:

$$S=C+\frac{1}{2}r.$$

Y si en lugar de C sustituimos su valor con respecto al rádio, resultará la expresion:

$$S=2r\times3,14159\times\frac{1}{2}r=\frac{2r^2\times3,14159}{2}=r^2\times3,14159.$$

Luego la superficie del círculo es igual al cuadrado del rádio multiplicado por el número 3,14159.

10. El *problema de la cuadratura del círculo* tiene por objeto hallar un cuadrado que tenga la misma superficie que el círculo. Han sido inútiles hasta el presente todos los esfuerzos que se han hecho para resolver este problema.

SEGUNDA PARTE,—DE LOS PLANOS Y DE LAS LINEAS RECTAS EN EL ESPACIO.

§ I. *De los planos en general.*

1. Por dos puntos, pueden pasar muchos planos ; por tres puntos que no están en línea recta, solamente puede pasar un plano : dos líneas que se cortan, determinan la posicion de un plano : dos paralelas están siempre en un mismo plano.–2. Cuándo se dice que una recta y un plano son paralelos? ¿Cuándo dos planos son paralelos entre sí?–3. Cuándo una línea es perpendicular á un plano? ¿Y cuándo oblícua?–4. Qué entendemos por ángulo diedro? ¿Cómo se designa?–5. Qué es ángulo poliedro? ¿Qué entendemos por vértice del ángulo poliedro?–6. Qué es ángulo triedro, tetraedro, pentaedro, etc?–7. Si una recta es perpendicular en el plano á otras dos dirigidas por su pié, lo será á todas las rectas que por el mismo punto se puedan describir en el plano; de donde se infiere que si una recta es perpendicular á otras dos tiradas por su pié, en un plano, lo será tambien á este plano.–8. La perpendicular es la línea mas corta que desde un punto podemos bajar al plano.–9. Si desde un punto bajamos al plano una perpendicular y diferentes oblícuas, resultará: 1.° que las oblícuas equidistantes del pie de la perpendicular serán iguales; 2.° que de dos oblícuas que no disten igualmente del pié de la perpendicular, será mayor la que mas se aparte ; de donde se infiere que, si tomamos un punto cualquiera de la perpendicular al plano, puede servir este punto para trazar en el plano una circunferencia cuyo centro será el pié de la perpendicular.

1. Asi como un punto no determina la posicion de una recta, del mismo modo dos puntos tampoco son suficientes para determinar la posicion de un plano ; y asi como por un punto pueden pasar infinitas rectas, del mismo modo por una recta pueden atravesar infinitos planos. En efecto, si suponemos que un plano gira al rededor de una línea como eje, las infinitas posiciones que el plano tenga en esta vuelta, serán otros tantos planos que pasarán por aquella recta.

Pero asi como dos puntos determinan la posicion de una recta, del mismo modo tres puntos, que no esten en línea recta, determinan la posicion de un plano ; de manera *que por tres puntos no situados en línea recta solamente puede pasar un plano.*

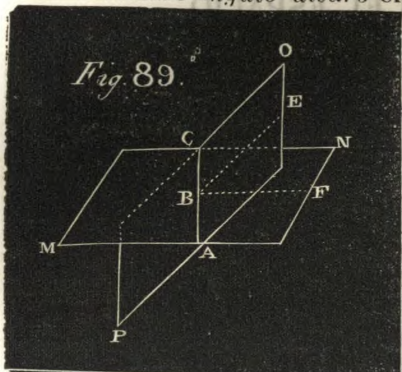
De donde se infiere: 1.° *que dos líneas, que se cortan, determinan exactamente la posicion de un plano*; 2.° *que dos paralelas estan siempre en un mismo plano*, como resulta de su misma definicion.

2. Una recta y un plano se dice que son *paralelos entre sí* cuando, prolongados indefinidamente, no se pueden encontrar; del mismo modo, dos planos son *paralelos* cuando en su prolongacion indefinida no se encuentran.

3. Llámase *perpendicular* á un plano aquella recta que lo sea á todas las que en el plano pasan por su pie; por el contrario, dícese *oblí-*

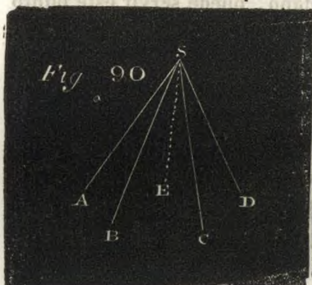
cua aquella que no sea perpendicular á todas las que situadas en el plano pasen por su pié.

4. Llámase *ángulo diedro* el espacio ilimitado, comprendido entre dos planos MNOP (fig. 89) que se cortan. La interseccion de los dos planos se llama *arista*: y los planos, *caras* del ángulo diedro.



Asi como el angulo plano lo designábamos con la letra del vértice cuando este no era comun á otros ángulos, del mismo modo anotaremos en igual caso el ángulo diedro con dos letras correspondientes á la arista; pero cuando esta arista sea comun á otros diedros, añadirémos dos letras que designarán respectivamente las dos caras del ángulo, interponiendo siempre, cuando queramos expresarlo verbalmente, las letras de la arista.

5. Entendemos por ángulo *poliedro* ó ángulo *sólido*, la porcion indefinida de espacio comprendido entre tres ó mas planos que se cortan en un mismo punto *S* (fig. 90).



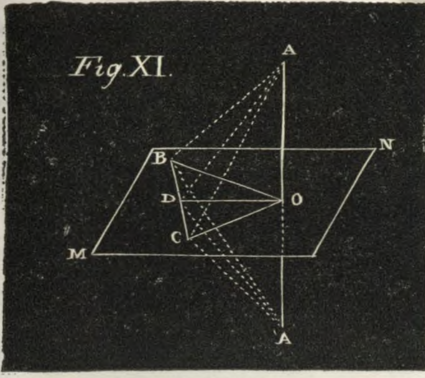
Llámase *vértice* del ángulo poliedro, el punto comun S de interseccion; *cara*, cada uno de los ángulos planos ASB, BSD, ASD, etc., que forman el ángulo poliedro.

El ángulo poliedro se designa por medio de la letra de su vértice.

6. Si querémos indicar el número de caras del ángulo poliedro, sustituirémos á esta denominacion general, la de ángulo *triedro*, *tetaedro*, *pentaedro*, etc., segun que el número de sus caras sea *tres*, *cuatro* ó *cinco* etc.

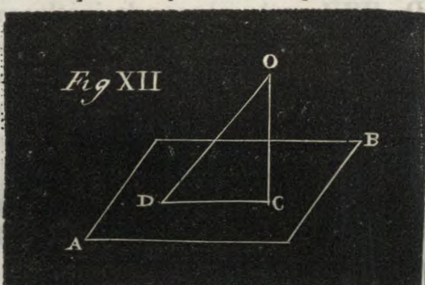
El *ángulo triedro* es el mas sencillo de los ángulos poliedros.

7. *Si una recta OA es perpendicular á otras dos OB, OC tiradas por el punto O, pie de esta perpendicular, lo será á todas las rectas que por el mismo punto se pueden trazar en el plano M N de las dos primeras.* (fig. XI).



Supongamos que OD sea una de estas rectas; el teorema quedará demostrado, si manifestamos que OA es perpendicular á OD. Para esto prolongarémos la OA por la otra parte del plano en una cantidad OA′=OA; sobre las dos rectas OB OC, tomarémos dos puntos cualesquiera, B, C; tirarémos la BC, y sea D el punto de interseccion de BC con OD; finalmente tirarémos las rectas AB, AC, AD, A′B, A′C, A′D. Esta construccion nos manifiesta la igualdad de los triángulos ABC y A′BC, segun vamos á ver. El lado BC es comun á los dos triángulos; el AB=A′B por ser oblicuas equivalentes del pie O de la perpendicular; por la misma razon AC=A′C. Luego estos dos triángulos son iguales entre sí, de manera que en la sobreposicion las rectas AD y A′D coincidirán exactamente; por consiguiente OD será perpendicular á OA y recíprocamente.

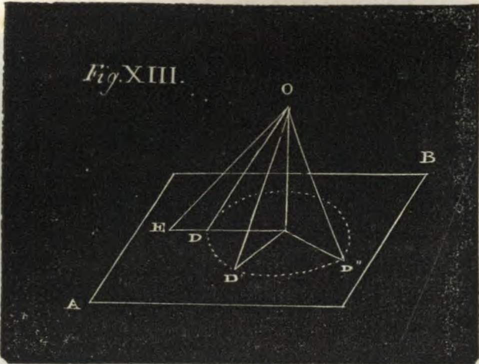
Corolario. *Si una recta es perpendicular á otras dos rectas tiradas por su pie en un plano, lo será tambien á este plano.*



8. *La perpendicular OC (figura XII) al plano AB desde un punto exterior O, es el camino mas corto de este punto al plano.*

Supongamos una oblícua cualquiera OD bajada desde el punto O al plano AB. Tirando la recta CD, formarémos un triángulo rectángulo OCD, cuya hipotenusa será la oblicua OD; de donde se infiere que OC < OD.

Corolario. *La perpendicular bajada de un punto á un plano mide la verdadera distancia del punto al plano.*



9. Si desde el punto O, (figura XIII) que suponemos fuera del plano *AB*, bajamos la perpendicular OC, y diferentes oblícuas, OD, OD′, OD″... ..... OE.

1.° *Las oblícuas OD, OD′ equivalentes del pie de la perpendicular, son iguales.*

2.° *De dos oblícuas OD, OE que no distan igualmente del pie de la perpendicular, la que mas se apartará, á saber, la OE, es mayor que la segunda.*

1.° Resulta de la suposicion que hemos hecho, que $CD=CD'=CD''$; y de aqui la igualdad de los triángulos OCD, OCD′, OCD″; cuya igualdad nos dice que

$$OD=OD'=OD'';$$

y *generalmente*: Si desde el punto C, como centro y con un radio igual á CD, trazamos una circunferencia en el plano AB, todas las oblícuas que unen el punto O con los diferentes puntos de la circunferencia, serán iguales.

2.° Si suponemos en línea recta los tres puntos C, D, E, resultará

$$CE > CD,$$

y por consecuencia $OE > OD.$

Si los tres puntos C, D, E, no se hallasen en línea recta, obtendríamos el mismo resultado, reemplazando la oblícua OD con otra OD′ que tenga la misma distancia del pie de la perpendicular.

Corolario. *Desde un mismo punto podemos tirar á un plano una infinidad de rectas iguales*, (con tal que sean mayores que la perpendicular).

Ademas, equidistando estas rectas del pie de la perpendicular, se infiere que

Un punto cualquiera O de la perpendicular OC al plano, puede servir para trazar en este plano una circunferencia, cuyo centro será el pie de la perpendicular.

§. 2.º *De la interseccion de los planos, del ángulo diedro y del triedro.*

1. Qué entendemos por interseccion de dos planos?—2 La interseccion de dos planos es una recta— 3 Qué entendemos por ángulo correspondiente á un ángulo diedro?— 4 El ángulo diedro se mide por su ángulo correspondiente.—5 En todo ángulo triedro una de sus caras es menor que la suma de las otras dos.—6 En todo ángulo triedro la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos: de donde se infiere: 1.º con los ángulos del triángulo equilátero solamente se pueden formar ángulos sólido de 3, 4, y 5 caras; 2.º que con los del cuadrado uno de tres caras, 3.º y con los del pentágono otro.

1. Entendemos por *interseccion de dos planos* la série de puntos que están situados á la vez sobre dos planos.

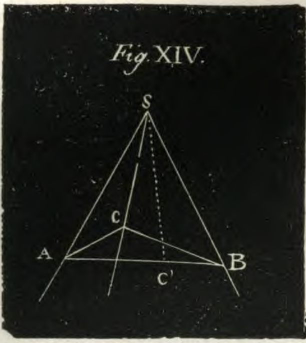
2. *La interseccion de dos planos MN, OP (fig. 89) es una línea recta.*

Los puntos A, B, C, etc. comunes á los dos planos MN, OP, pertenecen necesariamente á una misma recta; porque si el punto C no estuviese situado en la recta que une el punto A con el B, resultaria que los dos planos MN, OP, que tienen comunes tres puntos no situados en la línea recta, formarian un solo plano.

3. Si sobre la arista AC del ángulo diedro (fig. 89) tomamos un punto B, y sobre él levantamos una perpendicular en cada una de sus caras, resultará el *angulo plano* EBF: este ángulo se llama *ángulo correspondiente* al diedro PACN: así pues entendemos por *ángulo correspondiente á un ángulo diedro el formado por dos perpendiculares á la arista, levantadas respectivamente en cada una de sus caras desde uno de sus puntos.*

4. Para medir el ángulo diedro, nos valemos de su ángulo correspondiente, autorizándonos para esta sustitucion la proporcion que siempre existe entre los ángulos driedros y sus ángulos correspondientes.

5. *En todo ángulo triedro, S, una de sus caras es menor que la suma de las otras dos.* (fig. XIV).



Para manifestar la verdad de este teorema supondrémos que la cara ASB $>$ ASC, y que la misma cara ASB $>$ BSC; en una palabra, que ASB sea mayor que cualquiera de las otras dos, tomadas separadamente. Nos proponemos demostrar que ASB $<$ ASC $+$ BSC. Para esto tirarémos una recta AB desde un punto cualquiera A de la arista SA á otro punto B de la arista SB: Despues, desde el punto S, y en el plano ASB, trazarémos la recta SC$'$ que forme un ángulo BSC$'$ $\pm$ BSC, y que corte á la AB en un punto C$'$: sobre la arista SC tomarémos una lonjitud SC$=$SC$'$. Finalmente tirarémos las rectas AC y BC.

Segun esta construccion, los triángulos BSC y BSC$'$ serán iguales por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido; luego BC$=$BC$'$. Pero en el triángulo ABC tenemos que

$$AB < AC + CB, \text{ ó } AC' + C'B < AC + CB;$$

luego

$$AC' < AC;$$

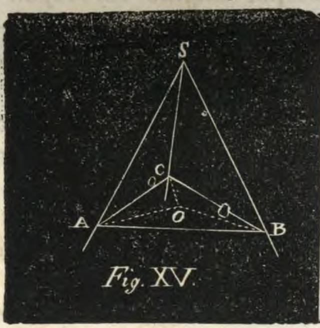
y por consiguiente

$$ASC' < ASC.$$

Añadiendo á los dos miembros de esta inecuacion, al uno la cantidad BSC, y al otro la BSC$'$, tendrémos:

$$ASC' + BSC' < ASC + BSC, \text{ ó } ASB < ASC + BSC. \text{ L. Q. Q. D.}$$

6. *En todo ángulo triedro, S, la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos.* (fig. XV).



Para demostrar este teorema tirarémos un plano que corte las caras segun las líneas AB, AC, BC; despues desde un punto cualquiera O, tomado en el triángulo ABC, dirijirémos las rectas OA, OB, OC. Habrémos formado tres triángulos que tendrán respectivamente por bases las rectas AB, AC, BC, y el punto S por vértice comun. Con la construccion precedente habrán resultado otros tres triángulos, que tendrán respectivamente las mismas bases, y su vértice en el punto O. El ángulo CAB, compuesto de la suma de los ángulos OAC y OAB, es menor que la suma de los ángulos SAC y SAB, segun el teorema precedente; por la misma razon ABC $<$ SBA $+$ SBC, y BCA $<$ SCB $+$ SCA: así pues, la suma de los ángulos de la base, en los triángulos que tienen su vértice en O, es menor que la suma de los ángulos de la base en los triángulos que tienen su vértice en S. Pero la suma de los ángulos de los tres triángulos es la misma en los dos casos ; luego la suma de los ángulos en S es menor que la de los ángulos en O ; y como esta vale cuatro rectos, se infiere que la primera es menor que cuatro ángulos rectos L. Q. Q. D.

Esta proporcion es igualmente aplicable á cualquier ángulo poliedro.

Corolario. 1.° *No se pueden formar con los ángulos de un triángulo equilátero sino ángulos sólidos de tres, cuatro y cinco caras.*

Segun el teorema precedente, si queremos formar ángulos poliedros de ángulos planos iguales, debemos atender al número de estos y al valor de cada uno de ellos. Cada ángulo del triángulo equilátero vale $^2/_3$ R ; (designando con la letra R el ángulo recto) ; y el ángulo sólido de 3, 4, 5 caras que haya de tener cada ángulo del vértice igual al del triángulo equilátero, ha de satisfacer al principio anterior que se acaba de establecer ; lo cual solamente se verifica en las tres primeras inecuaciones que siguen ; $3 \times {}^2/_3 R < 4 R$; $4 \times {}^2/_3 R < 4 R$; $5 \times {}^2/_3 R < 4 R$; $6 \times {}^2/_3 R = 4 R$; $7 \times {}^2/_3 R > 4 R$; por consiguiente pasa de 4 R la suma de mayor número de ángulos planos, iguales al del triángulo equilátero.

2.° *Con los ángulos del cuadrado solo se puede formar el ángulo sólido de tres caras.*

Porque el valor del ángulo del cuadrado es R ; y $3 \times R < 4 R$; $4 \times R = 4 R$; $5 \times R > 4 R$; excediendo de 4 R las sumas de un número mayor de ángulos del cuadrado.

3.° *Con los ángulos del pentágono regular solamente se puede formar el ángulo poliedro de tres caras.*

El ángulo del pentágono regular vale $^6/_5$ R ; por consiguiente $3 \times {}^6/_5 R < 4 R$; $4 \times {}^6/_5 R > 4 R$.

4.° *Con los ángulos del exágono regular no puede formarse ángulo sólido, y lo mismo sucede con los ángulos de los polígonos que tengan mas lados.*

En efecto, el ángulo del exágono es $^4/_3$ R ; y resulta que $3 \times {}^4/_3 R = 4 R$; $4 \times {}^4/_3 R > 4 R$; de suerte que ni aun se puede formar el triedro, que es el ángulo sólido mas sencillo. El ángulo del heptágono es mayor ; de consiguiente tampoco con él podemos formar ningun ángulo sólido : y con mas razon se puede asegurar lo mismo de los ángulos de polígonos regulares, que tengan mayor número de lados.

§. 3.° *De los poliedros en general.*

1. Qué se entiende por poliedro?– 2. Qué es prisma?– Cuándo se dice triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.? Cuándo será recto y cuando oblicuo? Que se entiende por tronco de prisma? 3. Qué se entiende por paralelepípedo? Cuándo se llama recto y cuándo rectangular? Qué es cubo ó exaedro regular?– 4. Qué es pirámide?– 5. Cuándo se dice triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.? – 6. A qué se llama tronco de la pirámide?– Qué se entiende por poliedro regular, y cuántos son? Qué entendemos por tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo, y dodecaedro?

1. Entiéndese por *poliedro* un espacio enteramente circunscrito, ó en otros términos, un sólido terminado por muchos planos que se cortan dos á dos (fig. 91).


Fig. 91.

El poliedro, pues, está limitado por una serie de polígonos que reciben el nombre de *caras*, y cuyo conjunto constituye la superficie del poliedro; los lados de estas caras son las *aristas* del poliedro; y los puntos de interseccion de las aristas se llaman *vértices*.

2. Entre los poliedros merecen particular atencion el *prisma* y la *pirámide*.

Entendemos por *prisma* un poliedro que tiene por caras dos polígonos iguales y paralelos, y una serie de paralelógramos igual en número á los lados de cada polígono (fig. 92); los paralelógramos AB′, CD′, DE′, EA′, constituyen las *caras laterales* del prisma, y todas ellas la superficie lateral.

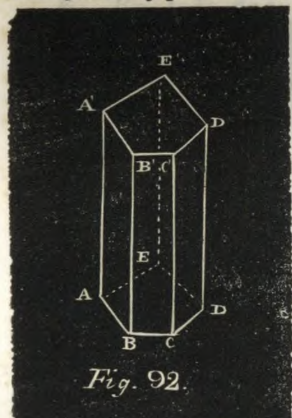
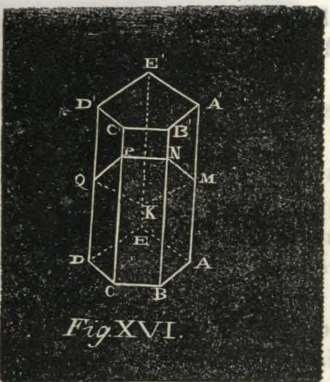


Fig. 92.

Llámanse *bases* del prisma los dos polígonos ABCDE, A′B′C′D′E′; y *altura* la distancia de las bases ó la perpendicular comun á sus planos.

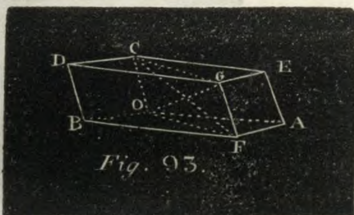
Un prisma será *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base sea un triángulo, un *cuadrilátero*, un *pentágono*, etc. Si estas bases son polígonos regulares, el prisma se dice *regular*.

Un prisma se llama *recto*, cuando sus aristas laterales son perpendiculares al plano de las bases; en cuyo caso cada arista será igual á la altura del prisma, y las caras serán rectángulos: en el caso contrario el prisma se dice *oblicuo*.



Llámase *tronco de prisma* ó *prisma truncado* cada uno de los trozos que resultan por medio de un plano MNPQR, que no sea paralelo á las bases (fig. XVI).

3. Entendemos por *paralelepipedo* un prisma que tiene por bases dos paralelógramos.



Resulta de esta definicion que el paralelepípedo tiene por caras 6 paralelógramos (fig. 93.)

Llámase *recto* el paralelepípedo cuyas caras son perpendiculares á la base, y *rectangular*, el que tiene todas sus caras rectangulares.

Entendemos por *cubo ó exaedro regular* un prisma cuyas caras todas son cuadrados; el cubo, pues, será un sólido terminado por seis cuadrados iguales; tales son los dados de jugar.

4. La *pirámide* es un poliedro que tiene por caras un polígono de cualquier número de lados, y una série de triángulos, cuyo vértice es comun á todos (fig. 95).

Si queremos obtener la pirámide, unirémos por medio de rectas los vértices de un polígono ABCDE á un punto cualquiera S, colocado fuera de su plano.

Los triángulos formados de este modo constituyen las *caras laterales* de la pirámide; el polígono será su *base*; el vértice comun de los triángulos se llama *cúspide* de la pirámide; y *altura*, la perpendicular SO bajada al plano de la base (figura 95).

Una pirámide se dice *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base es un *triángulo*, *cuadrilátero*, *pentágono*, etc.: se llama *regular* cuando su base es un polígono regular.

6. Si por medio de un plano entre el vértice y la base cortamos todas las aristas laterales de una pirámide SABCDE (fig. 95). la figura que-

dará dividida en dos trozos; uno, S'A'B'C'D'E', es una segunda pirámide, y el otro, ABCDE, A'B'C'D'E', se llama *tronco de pirámide* ó *pirámide truncada*.

7. Llámase *poliedro regular* aquel cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales entre sí.

Es muy reducido el número de poliedros regulares, porque, segun hemos visto, con el ángulo del triángulo equilátero solamente se pueden formar ángulos poliedros de tres, de cuatro, y de cinco caras; con el del cuadrado, únicamente un ángulo de tres caras; é igualmente con el ángulo del pentágono.

Por esta razon solamente se pueden concebir cinco cuerpos regulares, que son: el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*, cuyas caras en todos son triángulares; el *exaedro* ó *cubo*, limitado por seis cuadrados; y el *dodecaedro*, cuyas caras son pentagonales.

Fig. 94.

El *tetraedro regular* es un poliedro que tiene cuatro caras triangulares SAB, SAC, SBC, ABC, regulares é iguales entre sí. (fig. 94).


Fig. XVI.

Entiéndese por *octaedro* un sólido terminado por 8 triángulos regulares é iguales (fig. XVI).

Fig. XVII.

Llámase *icosaedro* el poliedro terminado por veinte triángulos iguales y equiláteros (fig. XVII).

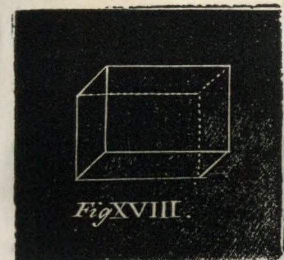


Fig. XVIII.

Entendemos por *cubo* ó *exaédro regular* un sólido limitado por seis cuadrados iguales. (figura XVIII).

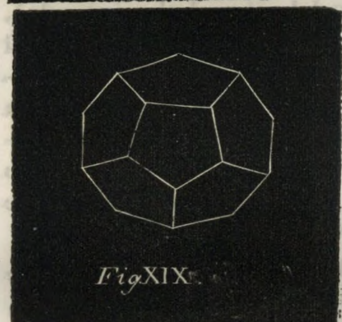


Fig. XIX.

Entiéndese por *dodecaedro* un poliedro formado por doce pentágonos regulares é iguales entre sí. (fig. XIX).

§. 4.º *De los cuerpos redondos.*

1. Qué son cuerpos redondos? Cuerpos redondos que considera la geometría elemental.— 2. Qué es cilindro?— 3. Qué es tronco de cilindro?— 4. Qué es un cono— 5. Qué se entiende por tronco de cono?— 6. Qué es la esfera?— 7. Qué son emisferios, círculos máximos y círculos menores?— 8. Aplicaciones de la esfera á las artes.

1. Llámanse generalmente *cuerpos redondos* los sólidos terminados por superficies curvas.

En la geometría elemental solo tres figuras redondas se toman en consideracion: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

2. Entendemos por *cilindro* un sólido producido por la revolucion de un rectángulo CO, CO′ (fig. 96) al rededor de uno de sus lados OO′.

Fig. 96.

Supongamos inmovil el lado OO′, y hagamos girar el lado CC′; este lado CC′ describirá en su revolucion una superficie curva que se llama cilíndrica; y el espacio cerrado por dicha superficie y los planos en que se mueven las líneas OC, O′C′, recibe el nombre de *volúmen cilindrico.*

Los planos circulares trazados por los lados CO, C′O′ se llaman *bases* del cilindro; finalmente el lado inmovil OO′ es la *altura* ó el *eje* del cilindro. Si la recta OO′ pasa por los centros de los círculos, el cilindro será *recto*; en otro caso será *oblicuo*.

3. Llámase *tronco de cilindro*, ó *cilindro truncado*, el espacio limitado por una superficie cilíndrica y por los dos planos no paralelos.

4. Entendemos por *cono*, un sólido engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo COS al rededor uno de sus catetos SO (figura 97).

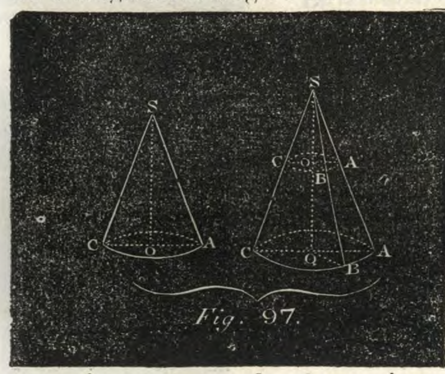


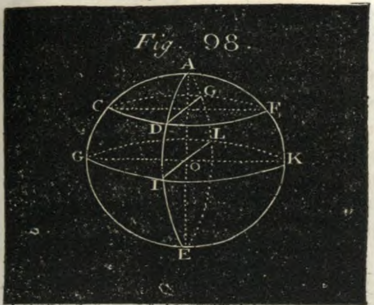
Fig. 97.

El lado inmovil SO es el *eje* ó la *altura* del cono; el plano circular, producido en la revolucion por el otro lado CO se llama *base* del cono; la superficie engendrada por la hipotenusa SC, se denomina *superficie cónica*; y el espacio cerrado por esta superficie y por la base se llama *volúmen cónico*.

5. Entiéndese por *tronco de cono*, ó *cono truncado*, el espacio comprendido entre la superficie cónica, la base y otro plano que corte á todo el cono. Llámanse *bases* del tronco los planos que lo limitan. Si estos planos son paralelos, el tronco se llama de *bases paralelas*.

Un tronco de cono de bases paralelas CA′ (fig, 97) lo podemos considerar como engendrado por la revolucion de un trapecio OA′ rectángulo en O y en O′, que gira al rededor del lado OO′, como eje.

6. La *esfera* es un sólido formado por la revolucion de una semicircunferencia GAK (fig. 98) al rededor del diámetro GK. Cada punto de la semicircunferencia describirá en esta vuelta un círculo, cuyo radio será la distancia del punto al diámetro inmovil GK. Este diámetro se llama *eje* de la esfera, y sus dos extremos G, K, reciben el nombre de *polos*.



La esfera es en el espacio, relativamente á las superficies curvas, lo que el círculo con respecto á las curvas planas.

Así, se llama *centro* el punto interior O, del cual equidistan todos los puntos de la superficie esférica; *radio*, la distancia constante del centro á la superficie; y *diámetro*, toda recta que, pasando por el centro, termina por sus extremos en la superficie. Las dos porciones en que un plano divide la superficie esférica se llaman *casquetes esféricos*: los dos tozos de la esfera, *segmentos esféricos*; y la parte de su superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos, *zona esférica*.

7. Todo plano que pasa por el centro de la esfera, la divide en dos partes iguales, que se llaman *emisferios*. Esta interseccion produce un *círculo máximo* que tendrá el mismo centro y el mismo rádio de la esfera; los círculos GIKL, AIEL, serán, segun esto, dos círculos máximos.

Si el plano no pasa por el centro, la seccion será un *circulo menor*, que tendrá un radio mas pequeño que el de la esfera: tal es el círculo CDFG (fig. 98).

8. Son muy numerosas las aplicaciones de la esfera en las artes del tornero, del ebanista, etc. Las bolas del villar son unas esferas de marfil; la luz de los quinqués se hace inofensiva á nuestra vista por medio de esferas de cristal deslustrado, etc.

§. V. *De las superficies de los poliedros.*

1. Cómo se puede determinar el área de un poliedro?-2 La superficie lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de su base por una de sus aristas: de donde se infiere: 1.° la superficie total de un prisma regular; 2.° la superficie lateral de un cilindro recto; 3.° la superficie total de un cilindro circular recto.-3. La superficie lateral de un prisma oblícuo es equivalente á la de un prisma recto que tenga por base una seccion perpendicular á las aristas del prisma oblícuo, y las aristas iguales á las del primero; de donde se deduce que el área de la superficie lateral del prisma oblícuo tiene por medida el producto del perímetro de una seccion perpendicular á las aristas multiplicado por su longitud.-4. La superficie lateral de una pirámide, cuya base sea un polígono regular, tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema de los triángulos laterales. ¿Cuál es el área total de una pirámide cuya base sea un polígono regular? ¿Cuál la del cono circular? ¿Cuál la superficie total? ¿Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide de bases paralelas? ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de cono circular de bases paralelas?-5. Cómo se determina la superficie de la esfera?

1. Siendo el *área* de un poliedro igual á la suma de las áreas de las diferentes caras que lo terminan, bastará para determinar aquella hallar sucesivamente la superficie de cada una de las caras. Por esta razon nos contentarémos con demostrar algunos teoremas necesarios para la ilustracion de esta materia.

2. *La superficie lateral de un prisma recto tiene por medida el producto del perímetro de su base por una de sus aristas.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de rectángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun una de las aristas y cuyas bases componen el perímetro de la base del prisma.

Corolarios. 1.° *La superficie total de un prisma regular tiene por medida el producto del perímetro de su base por la suma de una arista y de la apotema de esta base.*

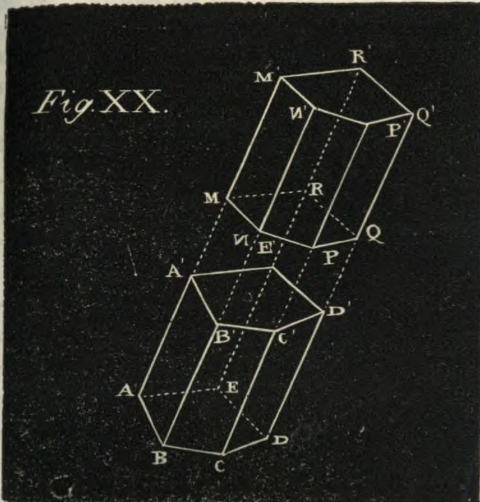
2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, estamos facultados para decir que:

La superficie lateral de un cilindro recto es equivalente á la de un rectángulo que tenga por base la circunferencia de la base del cilindro, y su arista por altura.

Por consiguiente.—*La superficie lateral del cilindro recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por una arista.*

3.° *La superficie total de un cilindro circular recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por la suma de su arista y el rádio de esta base.*

3. *La superficie lateral de un prisma oblicuo ABCDE A′B′C′D′E′ es equivalente á la de un prisma recto que tenga por base una seccion MNPQR, perpendicular á las aristas del prisma oblícuo, y las aristas iguales á las del perímetro* (fig. **XX**).



Para manifestar esta verdad, prolongarémos indefinidamente en un mismo sentido las aristas laterales AA′, BB′, CC′, DD′; cortarémos estas prolongaciones con un plano perpendicular MNPQR; despues tomarémos en la misma direccion las líneas MM′, NN′, PP′, QQ′, RR′ iguales entre sí y á las aristas del prisma oblícuo: la figura MNPQRM′N′, P′Q′R′ determinada de este modo será un prisma recto de las mismas aristas laterales que el prisma propuesto, y que tendrá por base la seccion perpendicular á las aristas.

Pero los paralelógramos AB′, BC′, CD′.... tienen respectivamente las mismas bases y alturas que los rectángulos MN′, NP′, PQ′,....: luego aquellos paralelógramos, tomados uno á uno, son equivalentes á los rectángulos: *luego* etc.

Corolario. *El área de la superficie lateral del prisma oblícuo tiene por medida el producto del perímetro de una seccion perpendicular á las aristas, multiplicado por la longitud de una de estas.*

4. *La superficie lateral de una pirámide regular tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema de los triángulos laterales.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de triángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun el *apotema* de la pirámide, ó sea la distancia de la cúspide á los lados de la base, componiendo la suma de sus bases el perímetro de la base de la pirámide.

Colorarios. 1.° *El área total de una pirámide regular tiene por medida la mitad del perímetro de su base por la suma de las apotemas respectivas de la pirámide y de la base.*

2.° Considerando el cono circular como una pirámide regular de infinitas caras, podemos decir que:

La superficie lateral del cono circular tiene por medida la mitad del *producto de su arista por la circunferencia de su base; ó el producto de su arista por una seccion equidistante de la base y de la cúspide.*

3.° *La superficie total de un cono circular recto tiene por medida la mitad del producto de la circunferencia de su base por la suma de una arista y del radio de la base.*

4.° *El área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas tiene por medida el producto de la semi-suma de los perimetros de sus bases por su apotema;* ó lo que es lo mismo, *el producto del perimetro de una seccion hecha á igual distancia de las bases, multiplicado por la apotema.*

5.° *El área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto de bases paralelas tiene por medida el producto de su arista por la semi-suma de las circunferencias de las bases; ó el producto de su arista por la circunferencia dada perpendicularmente al eje á igual distancia de las bases.*

5. *La superficie de la esfera es igual al producto de la circunferencia del circulo máximo por su diámetro y cuadruple de la de su circulo máximo.* (fig. XXI).

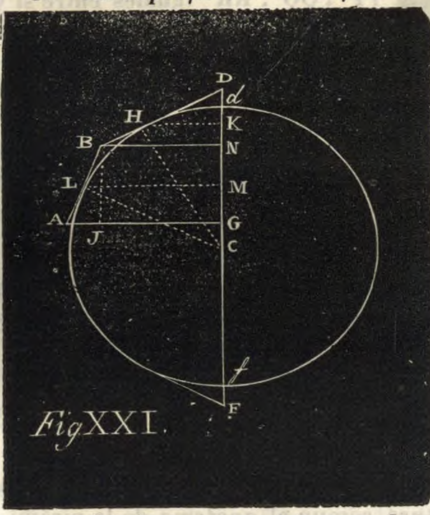


Fig XXI.

Si suponemos que el semipolígono regular DBA...F′, circunscrito al semicírculo dHL....f, gira al rededor del diámetro d f, no hay duda que en esta revolucion engendrará tantas figuras cónicas como lados tiene, y la superficie total será la suma de estas figuras. El lado BD producirá un cono cuya superficie, suponiendo HK una perpendicular bajada al diámetro desde H, punto medio de BD, será; s= BD ×*circ.* HK. Dirigiendo ahora el rádio HC, perpendicular necesariamente al lado tangente BD, resultarán los triángulos HCK y BND, semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares; cuya semejanza nos dará la siguiente proporcion:

HC:HK::BD:DN.

Por otra parte, las circunferencias trazadas con los rádios HC y HK son proporcionales á estos rádios; y sustituyendo, la proporcion anterior se convertirá en la siguiente:

***Circ.* HC: *Circ.* HK :: BD : DN; de donde**

Circ. $HC\times DN$=*Circ*. $HK\times BD$; y colocando la primera cantidad en lugar de la segunda en la expresion de la superficie cónica engendrada por BD será s=*Circ*. $HC\times DN$.

La superficie del tronco cónico engendrado por BA será tambien s'=*circ*. $LM\times AB$, suponiendo la LM perpendicular bajada al diámetro desde L, punto medio de AB. Tirando el rádio LC, por la misma razon anterior, los triángulos semejantes LCM y ABJ dan esta proporcion:

circ. LC : *circ*. LM :: AB : BJ ; de donde

circ. $LC\times BJ$=*circ*. $LM\times AB$. Sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta la expresion de la superficie producida por AB, que será

s'=*Circ*. $LC\times BJ$; ó lo que es lo mismo:

s'=*Circ*. $LC\times NG$.

Del mismo modo se demuestra, que cada figura redonda, engendrada por la revolucion de cada lado, tiene por medida el producto de la circunferencia trazada con el rádio de la esfera, por la parte de diámetro igual á la altura del cuerpo engendrado. La suma de todas estas superficies parciales compone la superficie total de la figura engendrada por la revolucion del semipolígono circunscrito, y como este semipolígono se puede aproximar cuanto se quiera al semicírculo, podremos tomar el cuerpo engendrado por aquel, como si fuera producido por la revolucion de una semicircunferencia: es decir, podemos considerar como una esfera, sin peligro de grande equivocacion, el cuerpo originado por el semipolígono.

Si reunimos, pues, las superficies parciales de los diferentes conos producidos en la revolucion, la suma total representará la superficie de la esfera: y asi, sumando ordenadamente las ecuaciones anteriores

s=*Circ*. $HC\times DN$

s'=*Circ*. $LC\times NG$

. . . .

tendrémos $s+s'$=*Circ*. $HC\times DN$+*Circ*. $LC\times NG$

ó lo que es lo mismo $s+s'$=*Circ*. HC $(DN+NG)$.

Y llamando S á la suma de las superficies parciales $s+s'$...., C á la circunferencia del círculo máximo, 2r al diámetro de la esfera, ó á la suma $DN+NG$...., nos resultará:

$$S=C\times 2r$$

y sustituyendo en esta ecuacion el valor de $C=2r\pi$, se habrá convertido en esta expresion

$$S=4r^2\pi$$

Esta fórmula nos dice que, para determinar la superficie de la esfera, debemos cuadruplicar el producto del cuadro de su rádio por π y al mismo tiempo nos manifiesta, que el área de la esfera es cuadrupla de la del círculo máximo, supuesto que esta es igual á $r^2\pi$.

§. VI. *De los volúmenes.*

1. ¿Cuál es la unidad de medida para los volúmenes?—2. ¿Cómo se determina el volumen de un paralelepipedo rectangular? ¿Cuál es el volumen del cubo?—3. ¿Cuál es la expresion del volumen de cualquier paralelepipedo?—4. ¿Cuál es el volumen de un prisma cualquiera? ¿Cuál es el volumen del cilindro?—5. ¿Cómo se determina el volumen de una pirámide? ¿Cuál es el volumen del cono?—6. ¿Cuál es la expresion del volumen de la esfera?

1. Asi como para medir las superficies planas tomamos el cuadrado por unidad, del mismo modo para medir los volúmenes nos servirá de unidad el cubo construido sobre una arista, igual á la unidad lineal.

2. *El volumen de su paralelepípedo rectangular es igual al producto de la superficie de su base multiplicada por la altura* (fig. XXII.)

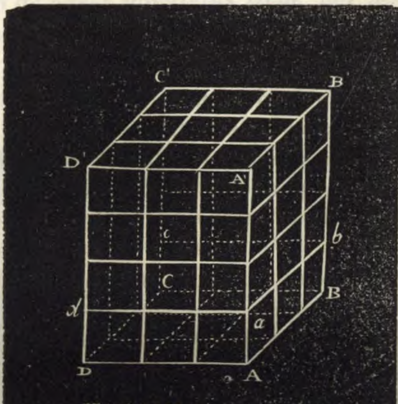


Fig. XXII.

En efecto, supongamos que la altura AA' contiene cuatro veces á la altura de la unidad de medida. Si cortamos el paralelepípedo por todos los puntos de division y paralelamente á la base, quedará dividido en cuatro primas de la misma base y altura; por consiguiente del mismo volumen. Todos estos primas, pues, contendrán la unidad de medida el mismo número de veces, y para determinar la medida del prisma total, será suficiente multiplicar este número por el número 4 de los prismas pequeños que han resultado. Pero el primero Ac contiene á la unidad de medida tantas veces como su base, que es la base A B C D del prisma grande, puede contener á la base cuadrada de esta unidad, es decir, tantas veces como designa la superficie del prisma AC.' Asi, pues, el volumen de un paralelepípedo rectangular se obtiene multiplicando la superficie de la base por la altura. En el caso presente es 9; y el volumen será por consiguiente $9\times4=36$ pies cúbicos.

Corolarios. 1.° *El volumen de un paralelepípedo rectangugular es igual al producto de tres aristas adyacentes, ó que forman un ángulo triedro.*

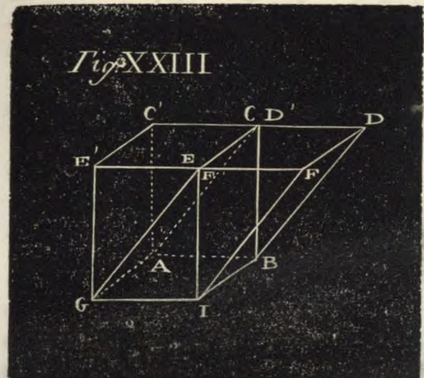
2.° Siendo iguales en el cubo todas las aristas,

El volúmen del cubo es igual á la tercera potencia de una de sus aristas.

Por esta razon se llama *cubo* la tercera potencia de cualquier cantidad.

3. *Todo paralelepípedo AF, recto ú oblicuc, tiene el mismo volúmen que un paralelepípedo rectangular de base equivalente y de la misma altura.*

Sean AD y GF las caras opuestas que tomamos por bases, y las aristas AG, BI, CE, DF, perpendiculares á las bases, en el paralelepípedo recto AF



(fig. XXIII). Tirarémos por las rectas AG, BI, dos planos perpendiculares á los planos paralelos AI, CH. Los planos tirados de este modo cortarán respectivamente las caras laterales AD, GF segun las rectas AC′ y BD′, GE′ é IF′, y suponiendo estas rectas terminadas en el plano de la cara opuesta CF, resultará un nuevo paralelepípedo AF′. Pero este paralelepípedo es rectangular, porque AC′ y sus paralelas son perpendiculares á los planos AI, CF, y por consiguiente á las rectas AB, CD′; de donde resulta que las caras AD′, GF′, que podemos tomar por bases, serán rectángulos; y ademas las aristas laterales AG, BI, son perpendiculares á los planos de estas bases.

Ahora bien, los dos paralelepípedos AF, AF′ que tienen sus bases equivalentes AD, AD′ y una misma altura AG, serán iguales en volúmen.

En efecto, los dos prismas determinados, el uno por las aristas laterales AG, CE, C′E′, y el otro por la BI, DF, D′F′, son iguales luego, restándolos separadamente de la figura total AGBI DFC′E′, obtendrémos dos diferencias iguales.

Pero una de estas rectas es el paralelepípedo AF, y la otra el paralelepípedo AF′. Luego etc.

Corolario. *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

4. *El volúmen de un prisma cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

Acabamos de demostrar este teorema general relativamente á los paralelepípedos, y las reflexiones siguientes nos harán conocer que es igualmente aplicable á todos los prismas.

En efecto, si en un paralelepípedo cualquiera tiramos un plano diagonal que pase por dos aristas laterales, nos resultarán dos prismas triángulares, que, por tener una misma base y altura, serán iguales en volúmen. Así pues, cada uno de ellos será la mitad del primitivo; pero el primitivo tiene por expresion de su volùmen el producto de su base por la altura: luego el volúmen de cada uno de ellos será igual al producto de la mitad de la base del paralelepípedo por la misma altura; pero la mitad de la base del paralelepípedo primitivo es puntualmente la base de cada uno de los dos que han resultado: luego el volúmen del prisma triangular será equivalente al producto de su base por la altura.

Como todos los prismas se pueden dividir en triangulares por medio de planos diagonales, se infiere que el volúmen total del prisma tomado en consideracion será igual á la suma de los volúmenes parciales de los prismas triangulares. Teniendo cada uno de estos por expresion de su volúmen el producto de su base por la altura comun, resulta que la suma de estas bases, ó sea la base total del prisma multiplicada por su altura, expresará su volúmen total.

Corolarios. 1°. *Dos prismas que tienen bases equivalentes y alturas iguales son equivalentes en volúmen.*

2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, podemos decir que:

El volúmen del cilindro tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.

5. *Toda pirámide es equivalente á la tercera parte de un prisma de la misma base y altura* (fig. XXIV).

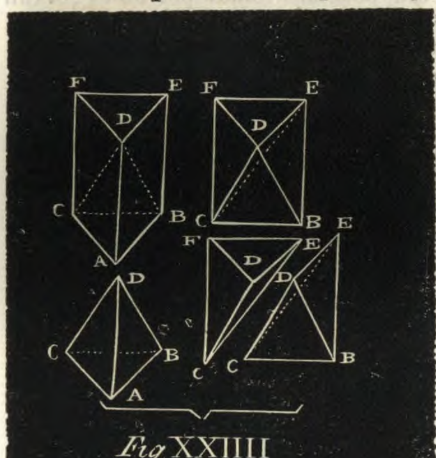


Fig XXIIII

Supongamos que la pirámide en cuestion sea un tetraedro ABCD ; y el prisma de la misma base y altura el triangular ABCDEF. Tirarémos las rectas DB, DC, y por ellas harémos pasar un plano CDEB, cuya seccion nos dará dos pirámides, una triangular ABCD, y otra cuadrangular CBEFD. En la cuadrangular CBEFD tirarémos un plano CDE, determinado por las aristas CD, DE, de cuya seccion resultarán otras dos pirámides triangulares que tendrán una altura comun y las bases iguales. Quedará, pues, descompuesto el prisma triangular en tres tretraedros equivalentes, á saber; el ABCD=DEFC, por tener iguales la base y la altura, que son puntualmente las del prisma. Si en la pirámide DEFC, consideramos como base el triángulo EFC, y como cúspide el punto D, esta pirámide será equivalente á la CBED, por tener iguales la base y altura: así, pues, la pirámide DEFC=ABCD=CBED. Luego cada una de ellas es la tercera parte del prisma primitivo.

Ademas, pudiendo dividir toda pirámide en tetraedros de la misma altura que este, y que tengan respectivamente por bases los triángulos parciales en que su base queda descompuesta, la proposicion es igualmente aplicable á cualquier pirámide.

Corolario. 1.° *La pirámide tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

2.° Si consideramos el cono como una pirámide de infinitas caras, esta consideracion nos conducirá á decir que:

El volúmen del cono se mide por la tercera parte del producto de su base por la altura.

6. *El volúmen de una esfera tiene por medida el tercio del producto de su superficie multiplicada por el radio.*

Podemos considerar la superficie esférica como compuesta de una infinidad de poliedros planos infinitamente pequeños; de donde resulta que la esfera se puede concebir como compuesta de pirámides, que tengan por bases cada uno de los planos del polígono, y por altura el radio de la esfera. Pero cada una de estas pirámides tiene por medida la tercera parte del polígono de su base por el radio de la esfera; luego el conjunto de todas ellas, ó sea la esfera, tendrá por medida el tercio del rádio por la suma de todos los polígonos que componen la superficie esférica.

Corolario. Si designamos con la letra V el volúmen de la esfera, con S la superficie, y con R el radio, resultará la expresion:

$$V = S \times \frac{r}{3};$$

pero $S = 4\, r^2 \pi$

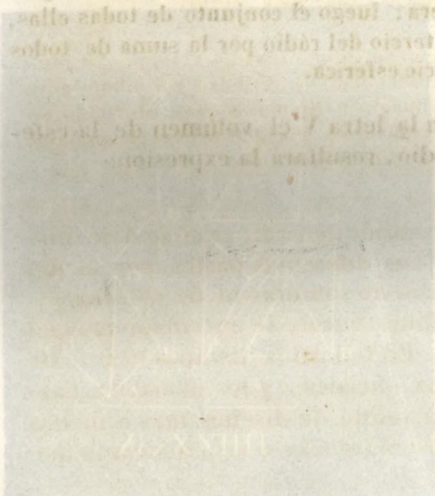
luego $V = \frac{4}{3} \pi\, r^2$

lúmen de cada uno de ellos será igual al producto de la mitad de la base del paralelepípedo [illegible] paralelepípedo [illegible] que [illegible] al producto de su base por la altura.

Como todos los prismas se pueden dividir en triangulares por medio de planos [illegible] con-sideracion será igual á la suma de los volúmenes [illegible] producto de su base por la altura [illegible] volúmen total.

Corolarios. 1.° *Dos prismas que tienen bases equivalentes y alturas iguales son equivalentes en volúmen.*

[illegible]



[illegible] Supongamos que la pirámide en cuestion sea un tetraedro ABCD; y el [illegible] del [illegible] ABCEF. Tirarémos las rectas DB, DC, y por ellas harémos pasar un plano CDEB, cuya seccion nos dará dos pirámides, una triangular ABCD, y otra cuadrangular CBEFD. En la cuadrangular CBEFD tirarémos un plano CDE, determinado por las aristas CE, DE, de cuya seccion resultarán otras dos pirámides triangulares, que tendrán una altura comun y las bases iguales. Quedará, pues, descompuesto el prisma triangular en tres tretraedros equivalentes, á saber: el ABCD=DEFC, por tener iguales la base y la altura, que son puntualmente las del prisma. Si en la pirámide DEFC, consideramos como base el triángulo EFC, y como cúspide el punto D, esta pirámide será equivalente á la CBED, por tener iguales la base y altura: así, pues, la pirámide DEFC=ABCD=CBED. Luego cada una de ellas es la tercera parte del prisma primitivo.

CAPITULO II.

DIBUJO LINEAL.

1.ª SECCION.=DEL DIBUJO LINEAL.

§ 1.° *Definicion, utilidad y aplicaciones del dibujo lineal.*

1. Qué se entiende por dibujo lineal?– 2. Orígen del dibujo lineal.– 3. En qué se diferencia del trazado geométrico y del dibujo académico?– 4 Utilidad del dibujo para las clases industriales.– 5. Division del dibujo lineal.– 6. En qué consiste el dibujo lineal á ojo?– 7. En qué consiste el dibujo lineal gráfico?– 8. Por qué debe el principiante ejercitarse antes en el dibujo sin instrumentos?

1. *El dibujo lineal*, tomado en un sentido general, es el arte de imitar los contornos de los cuerpos y de sus diferentes partes, por medio de simples delineamientos y sin el auxilio de sombras ni de colores.

2. Si retrocedemos al orígen del dibujo lineal, le encontrarémos en el nacimiento de las artes industriales. En todos los tiempos el gefe de un taller, para hacerse entender de sus oficiales, y los oficiales igualmente para entenderse entre sí, se han valido de diseños mas ó menos exáctos, con el objeto de prepararse para el trabajo, ó de practicar lo que habian concebido.

3. No debemos confundir el dibujo lineal con el *trazado geométrico* que se ejecuta con el compas y con laregla, ni con el *dibujo académico*, que rara vez suele conciliar la exactitud con la elegancia. El dibujo lineal es la reunion del uno y del otro.

4. El dibujo lineal, útil á casi todas las profesiones, lo es principalmente para aquellas cuyos trabajos consisten en la imitacion de las figuras. Los carpinteros, los albañiles, los ebanistas, los aserradores, los torneros, los grabadores sobre metales y madera, con particularidad los oficiales que se dedican á la construccion de máquinas é instrumentos, si no conocen á fondo este arte, con dificultad darán un paso en su profesion, porque no podrán comprender ni transmitir sus ideas á los obreros. Si cualquier hombre, en la posicion social mas elevada, tiene en muchas ocasiones necesidad de transmitir claramente su pensamiento por medio de una figura al artesano de que se sirve, el artesano á la vez debe entender el arte del dibujo para comprender los objetos que se le piden, y al mismo tiempo dibujarlos para comunicar sus ideas á los obreros subalternos. Así, el albañil, el carpintero de ribera, el de taller, el ebanista, el aserrador, etc., en una palabra, un artesano cualquiera no puede hacer con perfeccion una pieza de su arte, si antes no se ha dado cuenta por medio de un diseño de las dimensiones de todas las partes. El dibujo lineal, pues, es de primera necesidad para las clases inferiores de la sociedad.

5. Hay dos especies de dibujo lineal: *dibujo lineal á pulso ó sin instrumentos, y dibujo lineal gráfico* ó *con instrumentos.*

A esto podemos añadir las nociones sobre el *método general* del dibujo, sobre las *proyecciones*, sobre la *arquitectura* y sobre la *perspectiva.*

6. El *dibujo lineal* que se hace á *pulso* consiste en representar los objetos que hay á nuestra vista con una precision, no matemática, sino aproximativa, que en muchos casos es suficiente.

El dibujo á pulso, practicado por algun tiempo, dá al ojo aquel tino de que tanto necesita, soltura á los dedos y gracia á los contornos.

7. *El dibujo lineal gráfico* consiste en representar los objetos con una exactitud rigorosa, como se requiere en la aplicacion. Pero esto no se puede conseguir sin el auxilio de ciertos instrumentos geométricos, como la regla, el compas, la escuadra, el semicírculo, etc.

8. Antes de entrar en el dibujo gráfico, debe el discípulo ejercitarse en el dibujo sin instrumentos. Este dibujo parece á primera vista mas dificil que el dibujo con instrumentos; pero la experiencia no tarda mucho tiempo en manifestar lo contrario. Los discípulos se ven en los primeros dias muy embarazados en el dibujo sin instrumentos; pero muy pronto quedarán sorprendidos de la facilidad con que en breve tiempo trazan las figuras mas complicadas. Adiestrados en este dibujo, habrán conseguido aquel desembarazo en los dedos, tan necesario para hacer el uso conveniente del compas, la regla, y demas instrumentos matemáticos.

Si se quiere conciliar los dos métodos, el discípulo deberá trazar el dibujo, primero á ojo, y despues con instrumentos. De este modo podrá rectificar las inexactitudes que en el primero haya cometido.

Cualquiera que sea el dibujo de que hagamos uso, su aplicacion será siempre á las figuras que en último análisis se reducen á dos elementos, la *línea recta* y la *línea curva*, aisladas ó combinadas entre sí.

§ 2.º *Aplicaciones de la línea recta en el dibujo lineal á pulso.*

1. Qué es línea vertical y horizontal? Qué es plomada?– 2. Construccion de la línea horizontal y vertical en la pizarra. Cómo se comprueban la vertical y la horizontal?– 3. Que se entiende por escala de proporcion?– 4. Cuáles son los elementos geométricos del dibujo lineal relativos á la línea recta?– 5. Concluidos estos elementos ¿qué deben dibujar los discípulos?– 6. Dibujar una ensambladura de carpintería.– 7. Escuadras.– 8. Alineacion de un camino.– 9. Pilastra.– 10. Jamba.– 11. Persianas.– 12. Estrado.– 13. Escalera.– 14. Chimenea.– 15. Reja.– 16. Ventana de seis tableros.– 17. Puerta de dos tableros. 18. Puerta de tableros desiguales.– 19. Embaldosados.– 20. Enrejado.– 21. Tresbolillo. 22.– Pared formada de piedra de sillería.

1. Llámase *línea vertical* la recta que en su descenso describe un cuerpo, obedeciendo á la fuerza de gravedad. Esta línea está muy bien representada por el hilo de la plomada: entiéndese por *plomada* un hilo sostenido por uno de sus extremos, y que por el otro tiene un pesito ordinariamente de plomo.

Llámase *horizontal* á la recta perpendicular á la vertical.

2. La construccion de la línea horizontal no ofrece dificultad alguna: no sucede lo mismo con la vertical, á causa del hábito que tenemos de dar á la escritura alguna inclicacion de derecha á izquierda.

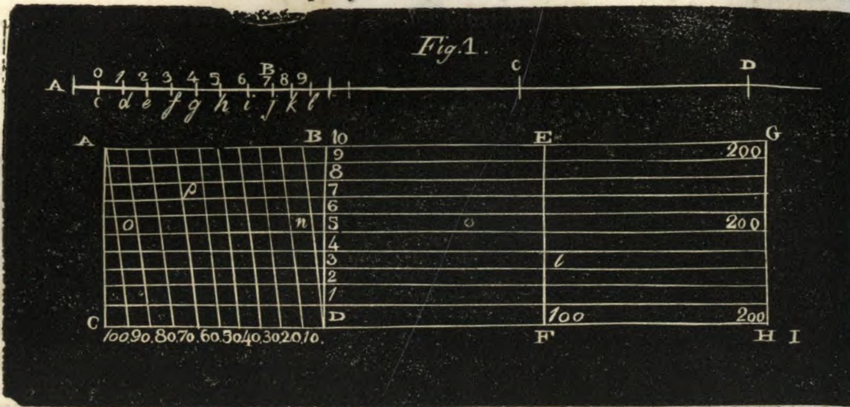
Si dibujamos sobre la pizarra ó sobre un tablero, la horizontal debe ser paralela al borde superior ó al inferior; y la vertical, á uno de los bordes laterales.

Si queremos formar estas líneas con la regla, tomarémos dos puntos equidistantes, ó del borde horizontal ó del lateral, tirando una recta por estos puntos.

Para comprobar la línea horizontal, medirémos las distancias desde sus extremos al borde superior ó inferior; si esta distancia es igual por ambos extremos, la horizontal estará bien construida.

Si queremos conseguir una verificacion mas precisa, harémos uso de la plomada, que deberá confundirse con la línea en toda su longitud, si la vertical está trazada.

3. Llámase *escala de proporcion* una línea AD (fig. 1), dividida en



partes iguales, cada una de las cuales representa la longitud que se le quiera atribuir; de modo que la figura que representa el objeto tenga con esta escala la misma proporcion que el objeto mismo tiene con su medida real.

4. La construccion de la horizontal y de la vertical pertenece á los elementos geométricos del dibujo lineal, relativos á la línea recta.

Estos elementos comprenden todo lo que dice relacion con el trazado de la línea recta en sus diferentes posiciones, la division de esta línea en muchas partes, la construccion de los ángulos y su division, la formacion de los polígonos, es decir, de los triángulos, del trapecio, del rombo, del rectángulo, del cuadrado, la representacion de la pirámide, del prisma, del paralelepípedo, del cubo, etc.; construcciones que en su mayor parte se hallan ya indicadas en las nociones de geometría que preceden á este tratado.

5. Terminados los elementos geométricos, los discípulos entran á dibujar las figuras que se componen de varias rectas combinadas de diferentes modos.

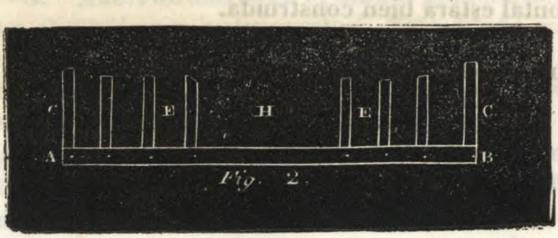
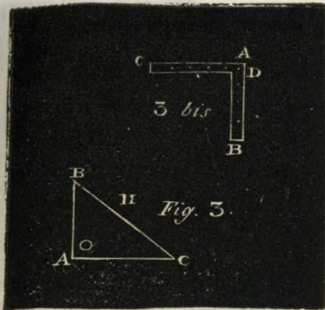


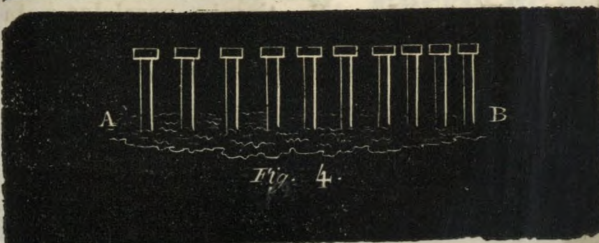
Fig. 2

6. **Ensambladura de carpintería.** Divídese en partes iguales la solera AB (fig. 2), y levántanse perpendiculares segun el grueso y la distancia de los maderos.

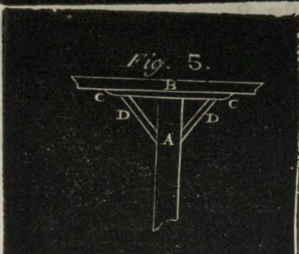


7. **Escuadras.** Para dibujar la *escuadra ordinaria*, trazarémos el lado AC, sobre este levantarémos la perpendicular AB, y finalmente tirarémos la hipotenusa BC (fig. 3).

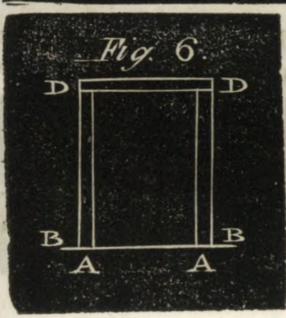
La escuadra representada en la fig. 3, se dibuja tirando paralelas á AB y AC, segun la anchura D que se quiere dar al hierro ó á la madera, de que se compone el instrumento.



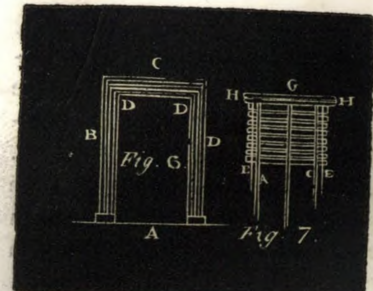
8. **Alineacion de un camino.** Levántese sobre una base AB varias verticales igualmente separadas. Estas líneas figuran unas estacas que se llaman *jalones* (fig. 4),



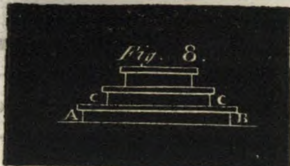
9. **Pilastra.** Se tirarán líneas verticales, horizontales y oblicuas, segun el grueso de la pilastra A, de la viga B, del capitel C, y de los puntales D. (fig. 5).



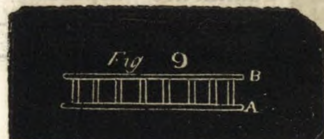
10. **Jamba.** Tómese una base A de la anchura de la puerta; levántense las perpendiculares BD, de una altura que con poca diferencia sea doble de la anchura, y únanse por medio del dintel D. (fig. 6).



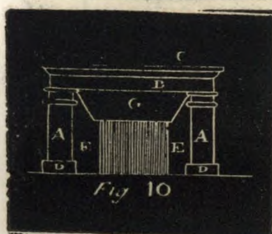
11. Persianas. Consisten en paralelas equidistantes, dispuestas de dos en dos, para representar de este modo la anchura de las varillas. (fig. 7).



12. Estrado. Se tirarán paralelas á la base AB, haciéndolas sucesivamente mas cortas, segun se vayan apartando de la misma. (figura 8).

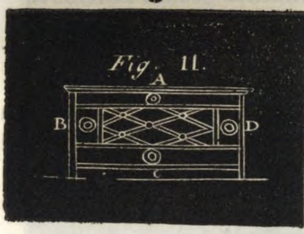


13. Escalera. Los largueros A, B, deben ser un poco convergentes, y los escalones equidistantes. (fig. 9).



14. Chimenea. Trácense verticalmente los lados ó jambas A; el travesero B, y la cornisa C que se representan con líneas horizontales: las partes D, D se llaman *zócalos*. (fig. 10).

15. Reja. Trácense las guarniciones A, B, C, D, y unánse por medio de rectas los ángulos opuestos de la guarnicion interior, así como tambien los puntos medios de cada travesero. En la interseccion de los barrotes se ponen unos botoncitos que podrán ser de cobre dorado. El antepecho A debe estar adornado con una pequeña moldura. (fig. 11).



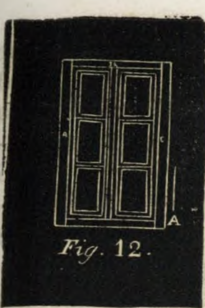
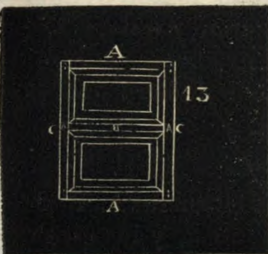


Fig. 12.

16. Ventana de seis tableros, etc. Se tirará una línea, dos ó tres veces mayor que A; se levantará una perpendicular que tenga con la primera la misma relacion que D con A; fórmese el bastidor A BCD y la armazon E; finalmente, háganse las tres divisiones de la altura y las dos de la base, y quedará representado lo restante de la ventana. (fig. 12).



13

17. Puerta de dos tableros. La altura de una puerta podrá ser con poca diferencia doble de la anchura; las líneas C representan las aristas exteriores de la armazon; los tableros son iguales y ensamblados por medio de ranuras con la armazon A, así como el traverso B; y ademas están adornados con una pequeña moldura, (figu-

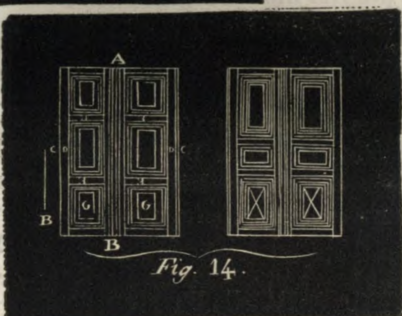


Fig. 14.

18. Puerta de tableros pequeños y grandes. Las aristas esteriores de la guarnicion están representadas por medio de las líneas C; y por AB la union de las hojas de la puerta. (fig. 14.)

19. Embaldosados. No hay mas que tres especies de polígonos regulares que se puedan ajustar exactamente, sin dejar entre sí ningun vacío; el triángulo, el cuadrángulo y el exágono. Si queremos, pues, embaldosar una pieza con ladrillos iguales que se ajusten exactamente, emplearémos uno de los polígonos mencionados. (fig. 15).

Fig. 15

Si se hace uso del octágono, se llenan los vacíos con cuadrados, que tengan su lado igual al del octágono. Cuando el embaldosado se hace con el cuadrado ó con el rombo, ordinariamente se elijen de diferentes colores. (figura 16).

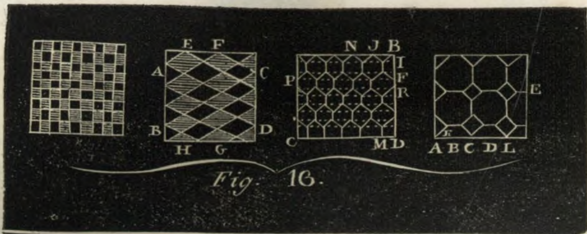


Fig. 16.

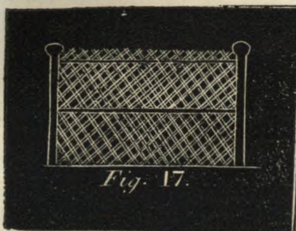


Fig. 17.

20. **Enrejados.** En los enrejados, que tienen sus agujeros cuadrados y oblícuos, todas las barras son paralelas, igualmente apartadas unas de otras, é inclinadas 45°, sobre el horizonte. (fig. 17).

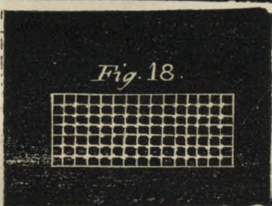


Fig. 18.

21. **Resbolillo.** Esta figura, muy comun en la jardinería, consiste en disponer los árboles de tal manera que presenten calles en todas direcciones. (fig. 18).

22. **Pared formada de piedra de sillería.** Las junturas de las piedras son, unas verticales, y otras horizontales: por consiguiente, para trazar esta figura, tirarémos líneas horizontales y verticales, de modo que se encuentren alternativamente, como se ve en la figura 20.

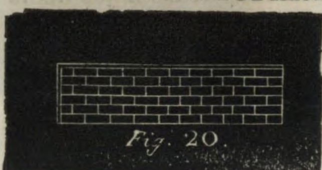


Fig. 20.

§ 3.° *Aplicaciones de la línea curva en el dibujo lineal á pulso.*

1. Cómo se traza á ojo un círculo? Modo de comprobarlo.– 2. Cuáles son las principales figuras curvilíneas?– 3. Qué es elipse? Cómo se traza á ojo?– 4. Elipse del jardinero: asa de cesta: óvalo espiral.– 5. Objeto de los elementos geométricos del dibujo lineal.– 6. Cómo se traza una media luna?– 7. Dibujar un mapa-mundi — Construccion del trasportador.– 9. Cómo se traza una estrella de seis rayos?

1. Si se nos pide trazar á pulso un círculo sobre la pizarra ó sobre el tablero negro, podrá ser un círculo arbitrario, ó de un radio determinado, ó que tenga su centro en un punto dado.

Por medio de un ejercicio muy sostenido, consiguen los discípulos describir los círculos y marcar su centro con una exactitud que difiere muy poco de la del compás.

Si en la construccion se nos dan ciertos datos, p. ej., el centro ó el radio del círculo, será ya mas difícil que la formacion de un círculo arbitrario.

Para comprobar un círculo harémos uso del compás.

2. Las principales figuras curvilineas son: la *elipse ordinaria*, la *elipse de jardinero, el asa de cesta, el óvalo y la espiral.*

3. Entiéndese por *elipse una curva cerrada, tal que la suma de las distancias de uno de sus puntos á otros dos que se llaman focos, es siempre igual á la línea que pasa por dichos focos y que termina por sus extremos en la curva.*

Para trazar una elipse, tirarémos dos rectas perpendiculares; se tomarán dos partes iguales por arriba y por abajo, otras dos partes iguales, diferentes de las primeras, á derecha é izquierda del punto de interseccion. Estas líneas, que en el artículo son todas iguales, no lo son en la elipse sino dos á dos; llámase la una *eje mayor*, y la otra *eje menor* de la elipse. (fig. 21). Hecha esta construccion, se traza la curva, cuidando mucho de que no resulten corcobos, ni se pierda la continuidad. Los cuatro segmentos formados por los dos ejes deben ser exactamente iguales, de modo que, si se dobla la figura por uno de los ejes, los trazos de las curvas coincidan perfectamente cayendo el uno sobre el otro.

Fig. 21.

De este modo podemos construir á pulso la elipse; bien es verdad que no será con aquella exactitud reservada al trazado geométrico, de que se hablará mas adelante; contentándonos con imitar por el primer medio el contorno gracioso de esta curva.

Cuanto mas disminuya el eje menor con relacion al mayor, la elipse será mas prolongada; y cuanto mas aumente, tanto mas se aproximará al círculo. Así pues, podemos concebir una infinidad de elipses segun la mayor ó menor desigualdad de los ejes.

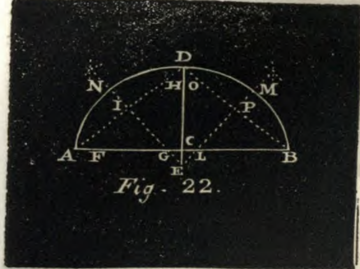


Fig. 22.

4. La *elipse del jardinero* es semejante á la elipse ordinaria; pero se construye de otra manera, como verémos mas adelante.

El *asa de cesta* es una curva formada por otras cuatro, de los cuales **AN, BM** son iguales. (fig. 22.)

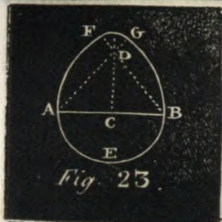


Fig. 23.

El *óvalo* es una figura circular formada por cuatro curvas, de las cuales solamente las dos, **BG** y **AF** son iguales (fig. 23).

Fig. 24.

La *espiral* es una línea, que al paso que da vueltas se aparta mas de su centro. (figura 24).

5. Los elementos geométricos del dibujo lineal relativos á la línea curva, comprenden todo lo que tiene conexion con el trazado del círculo, segun los diferentes datos que para este objeto se nos den, la construccion de los arcos, de las tangentes, de los polígonos inscritos ó circunscritos, de los cilindros rectos ú oblícuos, de los conos rectos ú oblícuos, de la esfera, etc.; construcciones que en su mayor parte se han manifestado ya en las nociones de geometría.

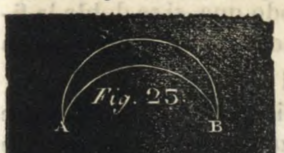


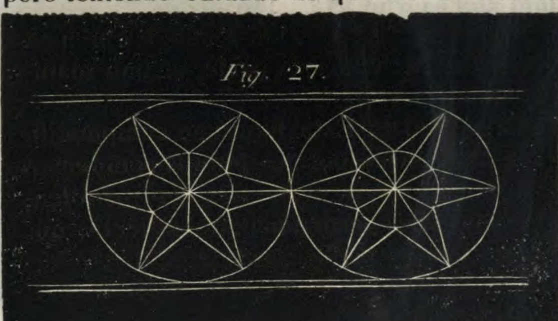
Fig. 25.

6. **Media-luna.** Esta figura se compone de dos arcos, que pasan por dos puntos comunes **A** y **B**, y están trazados desde dos centros tomados sobre una línea perpendicular á la recta, que une los puntos **A** y **B** (fig. 25).

7. **Mapa-mundi.** Para hacer esta construccion trazarémos dos esferas con sus meridianos y círculos menores, que dividan la esfera en zonas. (fig. 26).

8. **Trasportador.** Consiste este instrumento, como ya en otra ocasion manifestamos, en un semicírculo, cuyo borde está dividido en 180°. Para dibujar un trasportador sobre el papel, se traza desde luego un semicírculo con su diámetro, procediendo á la division de su limbo del modo siguiente: sobre la circunferencia colocarémos tres veces su radio; y de este modo quedará dividida en tres arcos iguales, cada uno de 60°: despues dividirémos por su mitad cada uno de los anteriores, cuyo valor será de 30°; harémos con los últimos la misma operacion, de donde resultarán arcos de 15°; dividirémos cada uno de estos en tres partes iguales, y el semicírculo quedará dividido de 5 en 5 grados; finalmente cada uno de estos se dividirá en 5 partes iguales, y la operacion quedará terminada.

9. **Estrella de seis rayos.** Trácense desde luego dos círculos concéntricos, es decir, que tengan su centro comun; sus radios serán el uno la mitad del otro; tírense dos diámetros, uno vertical y el otro horizontal; colóquese seis veces desde uno á otro extremo el radio mayor sobre una circunferencia, y de este modo quedará dividida en seis arcos iguales. Hágase lo mismo con el radio menor sobre un círculo; pero teniendo cuidado de que las divisiones del uno principien desde las estremidades del diámetro vertical, y las del otro, desde el horizontal. Solo falta ya tirar los diámetros correspondientes á los puntos de division, y las oblícuas que unen alternativamente á estos puntos dos á dos. (fig. 27).



§. 4. *Aplicacion de las lineas rectas y curbas combinadas en el dibujo lineal á ojo.*

1. De qué clase de lineas se componen los dibujos usados en las artes?– 2, Qué proporciones debe guardar un dibujo?–3. Cuáles son las superficies mas agradables á la vista?– 4. Qué son molduras?– Cuántas clases hay?– 5. Cuáles son las principales molduras rectas?– 6. Cuáles son las principales molduras circulares?–7. Regla general para la ejecucion de la mayor parte de estos dibujos.–8. Dibujar un arco.–9. Construccion de las poleas y aparejos.– 10. Dibujo de rejas.— 11. Rejas de balcon; rejas de articulos tangentes, etc.— 12. Ruedas hidráulicas.– 13. Engranaje.– 14. Astrágalo.– 15. Cornisa. –16. Florero.– 17. Jarron.

1. Los dibujos usados en las artes se componen en su mayor parte de la línea recta y de la curva, combinadas entre sí.

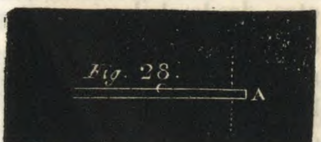
2. Para que los modelos sean graciosos y elegantes, es preciso que sus diferentes partes sean fracciones sencillas, que desde luego se puedan apreciar. La mitad, la tercera, la cuarta parte, son casi las únicas, á que nuestra vista se puede acostumbrar; saliendo de estas fracciones, entra ya la confusion, porque no podemos juzgar de las proporciones. Esta es la razon, porque el hueco de una puerta ó de una ventana debe ser con corta diferencia dos veces mas alto que ancho.

3. Las superficies llamadas de *revolucion*, como el cilindro, el cono y la esfera, son las mas agradables á la vista; cada seccion perpendicular al eje produce un círculo, curva que inmediatamente reconocerémos donde quiera que se encuentre.

4. Las molduras son las partes salientes que sirven de adorno en la arquitectura.

Hay tres clases de molduras: las rectas, las circulares y las compuestas.

5. Las principales molduras rectas son: el *filete*, el *larmiea*, y la *faja de la corona*.



El *filete* es una moldura cuadrada y estrecha, tal como nos la presenta la figura 28.

El *listel* es una moldura cuadrada unida inmediatamente en una curba.

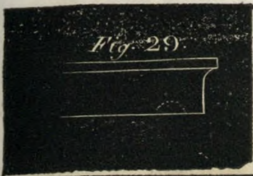


Fig. 29.

El *larmiea* es una moldura ancha y saliente ahuecada por abajo, y que se coloca en las cornisas para defender el edificio de las lluvias. (fig. 29).

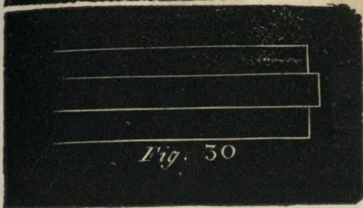


Fig. 30

La *faja de la corona* es una moldura ancha y un poco saliente. (fig. 30).

6. Las principales molduras circulares son: *el cuarto-bocel, el junquillo, el toro, la gorguera, el cabeto, la escocia, el talon, y la gola.*

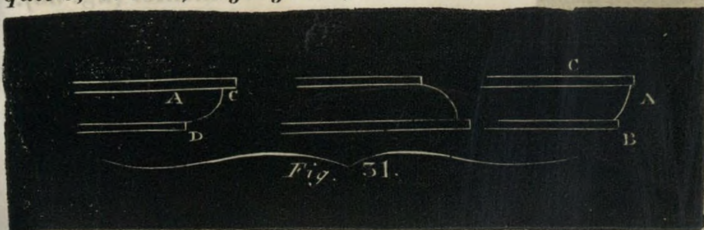


Fig. 31.

El *cuarto-bocel* es una moldura formada por un cuadrante de círculo y un filete. (fig. 31).

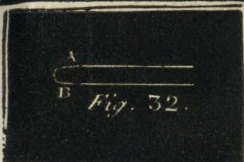


Fig. 32.

El *junquillo* es una moldura saliente semicircular, y muy estrecha. (fig. 32).

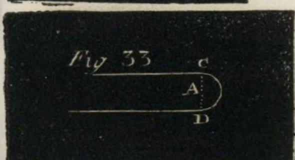


Fig 33

El *toro* es una moldura semicircular que ordinariamente se usa en las bases de las columnas. (fig. 33).

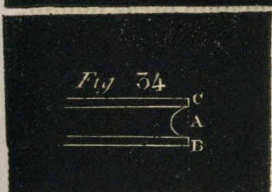
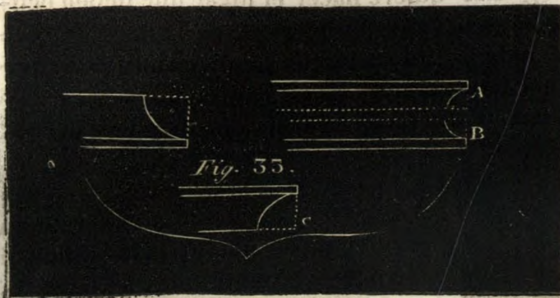
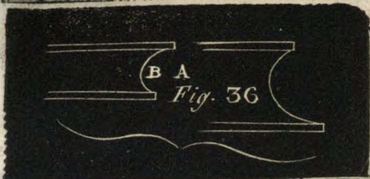


Fig 34

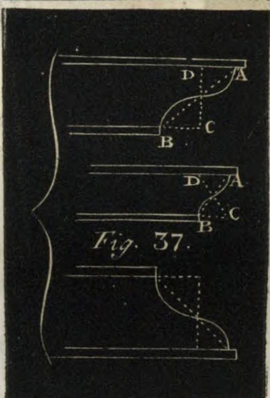
La *gorguera* es una moldura ahuecada semicircular. (fig 34).



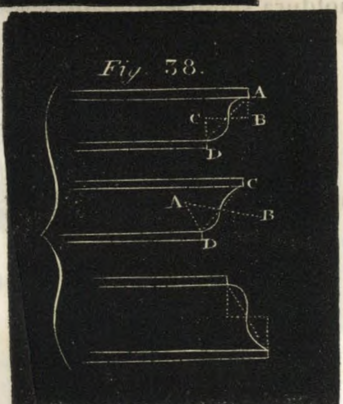
El *cabeto* es un cuarto-bocel ahuecado por debajo. (fig. 35).



La *escocia* es una moldura ahuecada compuesta de muchos cabetos, cuyos centros se toman arbitrariamente. (fig. 36).



El *talon* es una moldura compuesta de un caurto-bocel y de un cabeto. (fig. 37).



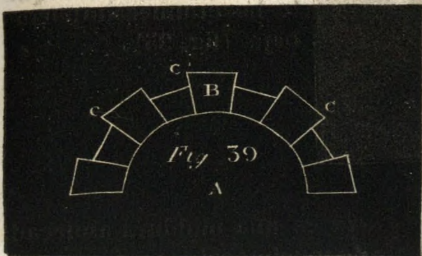
La *gola* es un talon vuelto al revés. (figura 38).

Todas estas molduras se combinan de diferentes maneras formando otras molduras compuestas.

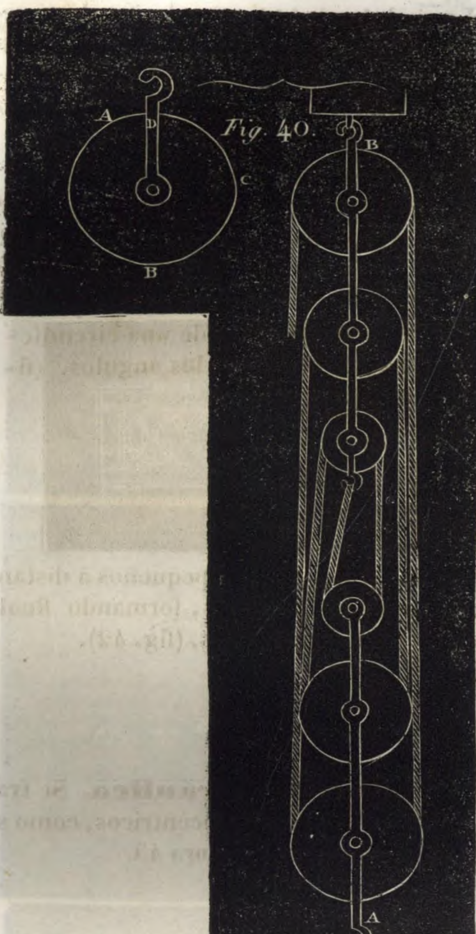
7. En la mayor parte de estas figuras hay una vertical que divide simétricamente el dibujo. Para hacer correctamente estos dibujos, es preciso trazar desde luego este eje, y ajustar los contornos de los dos lados del eje, de modo que resulte en el dibujo una exacta simetría; podemos conseguir este objeto observando la regla siguiente:

Señalar sobre el dibujo que se quiere hacer el lugar que deben ocupar los límites de la parte superior y de la inferior, de la derecha y de la izquierda; marcar en seguida las líneas de las subdivisiones principales, y despues las de menor importancia.

8. **Arco de ventana.** Esta figura se compone de nueve partes,



que representan igual número de piedras de sillería; la del medio B se llama *clave*; las junturas se determinan por medio de radios tirados desde el centro A; y las extremidades, por las cuerdas de los arcos de una circunferencia que pasa por los ángulos. (figura 39).



9. Poleas y aparejos. La *polea* se representa por medio de un círculo, á cuyo centro esté adherida la chapa D, figurada por dos líneas rectas que terminan en dos arcos de radios diferentes. (fig. 40),

Llámase *aparejo* un conjunto de poleas colocadas sobre dos chapas diferentes: una de las poleas, A, es móvil, y la otra B, inmóvil, (fig. 40 bis).

10. Rejas. Despues de haber dibujado la guarnicion, se describen arcos entrelazados, cuyos centros deben estar en la prolongacion de los lados, tirando en seguida los travesaños del medio, como se manifiesta en la figura 41.

11. **Reja de balcon.** La anchura de las partes destinadas á recibir los arcos tangentes, deben ser un tercio de su altura; lo restante de la guarnicion se dividirá, segun el modelo, describiendo despues los arcos y tirando las rectas del interior, como se representa en la figura 42.

Rejas de círculos tangentes. Para dibujar la primera, entrarán desde luego las guarniciones, de modo que su longitud sea doble que su altura; en seguida se describirán los arcos y los círculos, cuyos centros se hallan todos en una recta horizontal, que divide los lados en dos partes iguales. (fig. 42).

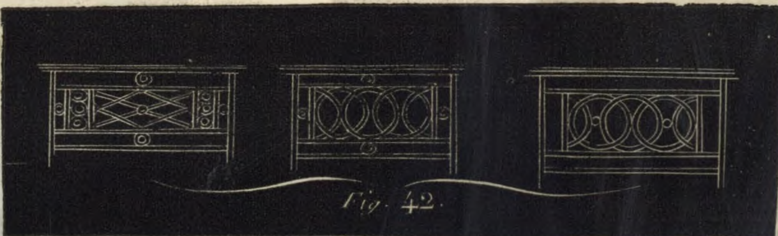


Fig. 42.

Para dibujar la segunda se trazarán unos círculos pequeños á distancias iguales, y otros mayores tangentes á los primeros, formando finalmente la guarnicion segun la magnitud de los círculos. (fig. 42).

Fig. 43.

12. **Rueda hidráulica.** Se trazarán varios círculos concéntricos, como se nos manifiesta en la figura 43.

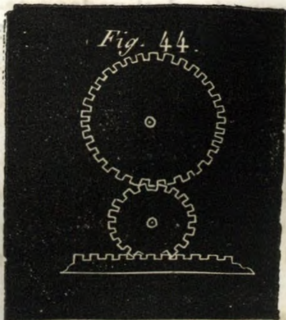


Fig. 44.

13. **Engranaje.** Se dividirán las ruedas en partes iguales, para que los dientes se correspondan y engarganten con facilidad. (fig. 44).

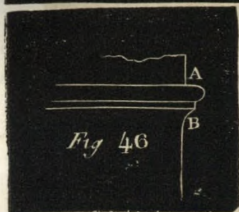


Fig 46

14. **Astrágalo.** Esta figura se compone de un junquillo y un filete. (fig. 46).


Fig. 47.

15. **Cornisa.** Se compone de un filete, un cuarto bocel, otros dos filetes, una faja, otro filete, y un talon, como aparece en la figura 47.

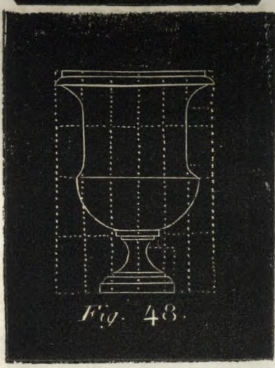


Fig. 48.

16. **Florero.** Esta figura se compone de rectas y de arcos de círculos. Los dorados del pie tienen su centro en la línea punteada. (figura 48.)

Fig 49.

17. Jarron. Este vaso, formado de un óvalo prolongado, descansa sobre un pie; las asas están formadas por dos círculos concéntricos. (fig. 49).

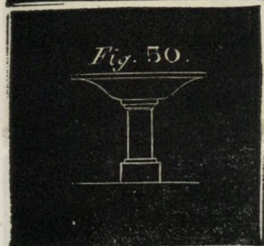


Fig. 50.

Mesa de jardin. En esta figura, cuya tabla es comunmente de mármol, y la columna de piedra, la moldura es una escocia suave. (fig. 50).

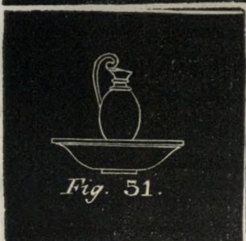


Fig. 51.

Jarro y aguamanil. Es una semi-elipse que se une de extremo, á extremo sin garrotes, á dos cuartos de círculo; el pie del vaso, su ángulo y cuello son curvas llamadas de *capricho*, porque se trazan sin ley determinada. (fig. 51).

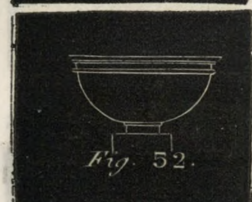


Fig. 52.

Bol. Véase esta figura (52) que consiste en un semicírculo adornado de filetes paralelos, montado sobre un pedestal muy bajo.

Fig. 53.

Tonel. Los fondos se representan por dos elipses, y los lados por arcos. (fig. 53).

Fig. 54.

Sopera. Una semi-elipse sobre un pedestal figura su capacidad, y la cubierta una curba de capricho; las asas se representan por dos círculos y dos líneas paralelas. (fig. 54).

Fig. 55.

Jarron—fuente. Una especie de columna corta sostiene una capacidad formada por una moldura; un globo esférico sostiene la cebolla que ha de verter el líquido. (fig. 55).

Fig. 56

Tetera. La parte principal está formada por un círculo; el asa y el pico son curbas de capricho. (fig. 56).

Fig. 57.

Garrafa. Se compone de dos partes de elipse; la inferior se pierde en la moldura que sirve de base, y la superior está en armonía con dos arcos. (fig. 57).

Fig. 58.

Candelabro. Esta figura se construye por medio de la vertical; un plinto, un filete y una escocia vuelta forman el pie; la terminacion del árbol se figura por una parte de elipse, (fig. 58).

Rosetones. Se forman estas figuras con un gran círculo, en el que se colocan diversos arcos; por ejemplo, de un punto cualquiera de la circunferencia, se traza con su radio un arco de círculo; se repite seis veces la misma construccion, tomando por centros los puntos de

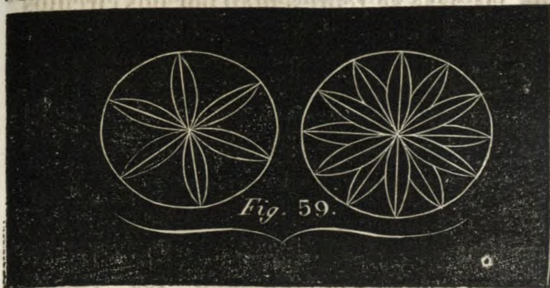


Fig. 59.

interseccion, y se tienen seis partes iguales, que son las seis hojas del floron ó roseton. Para hacerle de doce, basta reproducir la operacion precedente, tomando por centro el punto medio de los primeros arcos. (fig. 59).

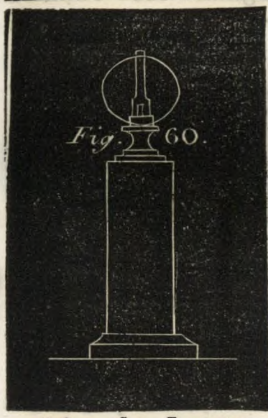


Fig. 60.

Lámpara. Esta figura está compuesta de un cilindro montado por un globo de cristal y tubo cilíndrico, que encierra la mecha y su llama: estas lámparas son muy usadas. (fig. 60)

Ojo de buey. A veces las puertas cocheras se construyen de arcada en cimbra entera, es decir, semicircular, y en ella se abre una ven-

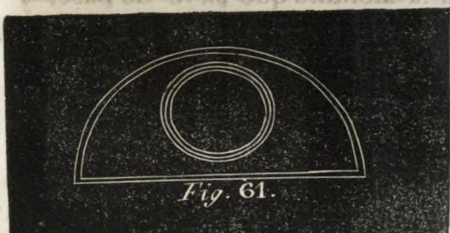


Fig. 61.

tana ó agujero redondo ú oval, llamado *ojo de buey*. Para trazar este, se levanta una vertical, cuyo medio es centro de arco de 90° y el círculo interior de estas ventanas es tangente á la cuerda. (figura 61).

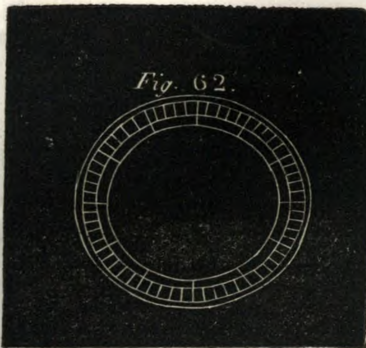


Fig. 62.

Cuadrante de reloj. Se describen cuatro circunferencias concéntricas; se divide el espacio comprendido entre las dos inferiores en doce partes para las doce horas; y el espacio de hora en dos para las medias; los minutos se marcan entre las dos medias. (fig. 62).

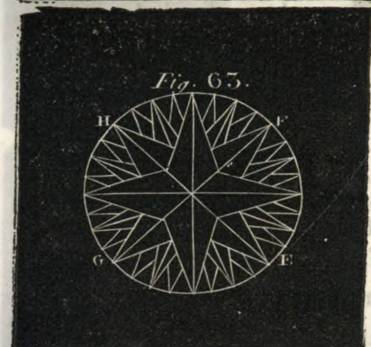


Fig. 63.

Rosa naútica. Los cuatro puntos principales designan los rumbos cardinales, *sud*, *norte*, *este*, y *oeste*; los cuatro colaterales, *sud-este*, *nord-este*, *sud-oeste* y *nord-este* son indicados por los puntos E, F, H, G, etc. Para construir la rosa náutica, es menester describir muchas circunferencias y trazar las líneas indicadas por los puntos de division (figura 63).

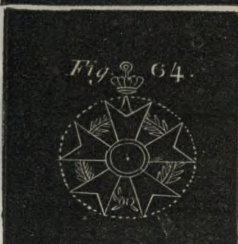


Fig. 64.

Cruz de honor. Descríbase un círculo, que se divide en diez arcos iguales; los puntos de la division terminan en pequeñas bolas, que figuran los rayos de la estrella: los diámetros correspondientes marcan la inclinacion de las ramas. Se trazan otros dos círculos concéntricos al primero, para recibir, el uno la leyenda, y el otro las ramas de laurel. (fig. 64).

Fig. 65.

Portada de tienda. Los cruzados están compuestos de ocho cuadrados; los bastidores están separados por una columna medio-saliente, que sirve de apoyo á los arcos que forman la cimbra de los cuadrados superiores; el basamento G es de cuarterones tallados á punta de diamante, y el friso AB está destinado á recibir el rótulo (fig. 65).

2.ª SECCION.=DEL DIBUJO LINEAL GRÁFICO.

§. 1.º *Del dibujo lineal gráfico en general.*

1. Qué instrumentos son necesarios para el dibujo lineal gráfico?– 2. Descripcion y usos de la regla y compás.– 3. Qué es tira-líneas? Sus usos.– 4. Cuáles son los elementos geométricos del dibujo lineal gráfico?

1. Los instrumentos necesarios para el dibujo lineal gráfico son: la *regla*, el *compas* con su *tiralineas* y su *porta lapiz*, un *semicirculo* de talco, un *tiralineas*, y una *escala de proporcion.*

2. En las nociones de geometría hemos hecho la descripcion de la regla y del compas, manifestando al propio tiempo el uso de estos instrumentos.

3. El tiralíneas se compone de dos lengüetas de acero muy delgadas y terminadas en puntas romas. Para hacer uso del tiralíneas, se llena de tinta el espacio comprendido entre las dos lengüetas, cuya operacion se llama cargar el tiralíneas. Para esto se sumerge en la tinta, habiéndolas humedecido antes con la boca ó en agua, y teniendo cuidado de limpiar su exterior. Cargado el tiralíneas, se corre á lo largo de la regla; el vestigio de tinta que deje será una recta, cuyo grueso dependerá de la separacion de las lengüetas. Para aproximarla, segun queramos, tiene una de ellas un tornillo, por medio del cual se puede acercar á la segunda, segun el grueso que á la línea se quiera dar.

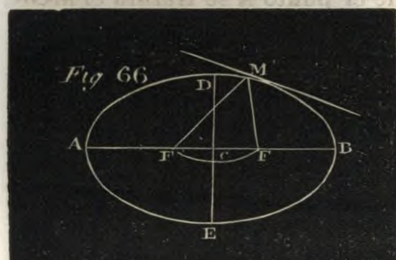
4. Los elementos geométricos del dibujo lineal gráfico comprenden todas las construcciones relativas á las líneas rectas, oblícuas, perpendiculares y paralelas; la formacion de los ángulos, del cículo, de los polígonos, etc., construcciones que hemos indicado ya en la geometría.

§. 2.º *Del dibujo lineal gráfico, de las figuras curvilíneas y de las molduras.*

1. Cómo se dibuja gráficamente una elipse ordinaria? Qué debe hacerse cuando se nos da el eje menor solo?— 2. Cómo trazarémos una elipse de jardinero cuando se nos dan los dos ejes?— 3. Cómo dibujarémos el asa de cesta, conocidas la base y altura?— 4. Cómo se dibuja el óvalo?— 5. Dibujar la espiral.— 6. Trazar un cuarto bocel,— 7. Modo de trazar el junquillo.— 8. Cómo dibujarémos el toro?— 9. Dibujar la gorguera.— 10. Modo de dibujar el talon.

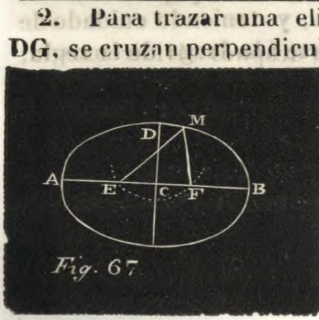
1. Para trazar una elipse ordinaria se tirará la recta AB de la longitud de la elipse que se quiere dibujar; se divide esta línea en tres partes iguales AK, KH, HB; sobre la parte HK se formarán los triángulos equiláteros HEK, HDK; finalmente, desde los puntos H y K, como centros, trazarémos los arcos LAC, IBG, hasta los lados prolongados de los triángulos, y desde los puntos E y D, y con un radio igual á EL se describen los arcos LG, CL. (fig. 21).

Podemos tambien construir la elipse del modo siguiente: tomando por centro la extremidad del eje menor, y por radio el semi-eje mayor AC, se traza FF′ que cortará el eje mayor en F y F′, puntos que se denominan *focos* de la elipse; despues, tomando un cordon, cuya longitud sea AB se fijan sus dos extremos el uno en F y el otro en F′. Si por



medio de un punzon ponemos tirante el cordon, para que tome la figura de una línea polígonal F′MF, el punto M corresponderá á la elipse. (fig. 66). Si solamente se nos diese el eje menor, lo prolongaríamos una cuarta parte, con lo cual tendrémos el mayor, y operaríamos del modo que se acaba de indicar.

2. Para trazar una elipse de jardinero, conocidos los dos ejes AB, DG, se cruzan perpendicularmente y por su mitad: desde la extremidad



D del eje menor, y con una avertura de compas igual á la mitad AC del mayor, se describe el arco EF que corte al eje mayor en E y en F; tómase despues un hilo ó un cordon de igual lonjitud al eje mayor; y fijando sus extremos, el uno en E y el otro en F, se corre el punto por el pliegue M del cordon. (fig. 67).

3. Para construir el *asa de cesta* de base y altura conocidas, levantarémos sobre la mitad de la base, AB, la perpendicular DC, igual á la altura del asa; uniremos las extremidades de esta base al punto D de la perpendicular; desde el ángulo C se colocará en F la altura CD, y desde D se pondrá en O y en H la diferencia AF de los semi-ejes; levantando sobre el medio P é I de BO y AI las perpendiculares PE, IE, que se encuentran en el punto E del eje CD prolongado, los puntos L y G serán los centros de los arcos BM, AN, y el punto E el del arco MDN. De este modo tendrémos la figura que queremos construir. (fig. 22).

4. Si queremos trazar un *óvalo*, sobre la mitad de AB levantarémos la perpendicular CD; desde C se colocará en D la lonjitud AC; se tiran las rectas AB, BD prolongadas mas allá del punto D; desde el punto C, y con su radio igual á AC, se describirá la semicircunferencia AEB, desde las extremidades A y B del eje menor se trazarán los arcos BG, AF; finalmente, desde la interseccion D se describe el arco FG, y tendrémos construido el óvalo. (fig. 23),

5. Para trazar la *espiral*, se tiran las cuatro líneas AB, cd, E f, g H, de modo que formen un cuadrado. A será el centro del primer arco cd, G, del arco de, E del ef, y C del arco fg, y si se da una segunda revolucion, A será todavía el centro del arco gh, etc. (fig. 24).

6. Para construir un *cuarto bocel*, tomarémos la altura perpendicular AD de la salida de la moldura, y desde el punto A se trazará el arco CD. (fig. 31),

7. Para trazar el *junquillo*, describirémos una semicircunferencia, cuyo centro será el punto medio de la perpendicular AB, que representa el alto de la moldura. (fig. 32).

8. El *toro* se construye trazando una semicircunferencia, cuyo centro sea la mitad de la perpendicular CD, que manifiesta la altura del toro. (fig. 33).

9. Para trazar la *gorguera*, se describe una semicircunferencia que tenga por centro el punto medio de la perpendicular CB, y por radio la mitad CA de la altura de la gorguera. (fig. 34).

10. Para trazar el *talon*, se tira la línea AB; despues dividirémos la salida de la moldura por medio de la perpendicular D, y prolongarémos la línea B; el punto D será el centro del cuarto bocel, y el punto C el del cabeto que forma el talon. (fig. 37).

4.ª SÉCCION.=APÉNDICE AL DIBUJO LINEAL.

1.º *Del método general para dibujar las figuras.*

1. A qué puede reducirse toda figura, por complicada que sea?— 2. Es necesario ocuparse del conjunto antes de dibujar los detalles?— 3. Qué marcha debe seguirse para poner cada parte de un dibujo en su lugar, ó en otros términos, para trazar bien un conjunto?—4. Debe permitirse siempre al discípulo el uso de cuadrados, y por qué puede suplirlos?— 5. Cómo se reducen los dibujos á menores dimensiones?

1. Toda figura, por complicada que sea, puede reducirse á rectangulos ó á círculos. Es necesario, pues, que los alumnos ejecuten correctamente rectángulos de un lado horizontal y otro vertical; ejercitandoles seguidamente en dividir los lados en mitades, cuartos, etc. Lo mismo practicarán con los círculos.

2. Deben anticiparse los discípulos á ocuparse del conjunto con preferencia al dibujo de los detalles. El que traza los delineamientos aproximadamente para expresar en seguida todos los detalles que percibe en los contornos de su modelo, abraza á la vez un gran número de relaciones, que no pueden marcar. Ademas, la distancia entre dos trazos próximos que haya formado, le sirve de escala para apreciar la distancia á que debe sujetar el trazo siguiente; pequeños errores en cada evaluacion; conducen de uno en otro á errores mayores por la acumulacion, y los contornos exteriores salen de tal modo deformes que es imposible reconocer el modelo en la copia.

Al contrario, si el conjunto se traza aproximadamente bien en la copia, los detalles vendrán á colocarse en ella con facilidad; los errores que se hayan podido cometer, serán mucho menos sensibles é influirán considerablemente menos en el aspecto general. Así es, que, si se ensayase hacer una rueda dentada, dibujando desde luego diente por diente, jamás se lograría el objeto, pero, si se comienza trazando el círculo de la rueda, y se divide en partes próximamente iguales, nada será mas fácil que hacer una figura de las dichas, bastante regular.

3. Para colocar cada parte de un dibujo en su lugar propio, ó en otros términos, para trazar bien un conjunto, basta saber dibujar circunferencias y rectángulos.

Se dividen en mitades, cuartos, etc., segun la extension, las dos líneas verticales opuestas que forman el cuadro del modelo; por los puntos de division del mismo rango se tiran líneas horizontales, que forman bandas; se practica otro tanto en las dos bandas superior é inferior del cuadro, y se tira una série de verticales equidistantes; en fin, se hace absolutamente lo mismo en la hoja que debe recibir el dibujo. De este modo el modelo y la hoja quedan descompuestos en rectángulos iguales. Se marcan en seguida sobre esta hoja, en cada rectángulo los puntos que en él ocupen el mismo lugar que los que se han distinguido, mas notables en el modelo, y se ejecuta en seguida el conjunto del dibujo.

4. Cuando el discípulo ha adquirido por este procedimiento un hábito suficiente de trazar los rasgos principales, se le acostumbra poco á poco á pasar sin cuadrados, despues á hacerlos mas extensos, luego haciéndole sustituir líneas ideales á las matemáticas de la cuadrícula. No deberá trazar estas rectas sino sobre el papel; de ningun modo en el modelo, donde se contentará con imajinarlas. Podrá servirse de un doble decímetro ó de su porta lápiz; sosteniéndole vertical ú horizontalmente delante del ojo, se servirá como de un nivel ó de un hilo á plomo, que le permitirá distinguir en el modelo los puntos principales de sus direcciones, evaluar las distancias de los puntos próximos, y colocarlos en los cuadrados de su papel.

Mas adelante el discípulo ya no trazará cuadrados, ni aun en la copia. À falta de rasgos reguladores, podrá colocar todos los puntos principales del conjunto, unirlos por trazos, indicar por la figura circular las curbaturas de los contornos, descender á los detalles, completar, en fin, su dibujo.

Este método puede aplicarse al dibujo de la *naturaleza*.

Para reducir los dibujos á menores dimensiones, se hace primeramente en el papel un cuadro semejante al del modelo; se dividen los dos rectángulos por un número igual de horizontales equidistantes, y se hace lo mismo con las verticales; estas líneas dividirán las dos superficies en otros tantos rectángulos geométricamente semejantes de dos partes; los rectángulos hechos en el modelo serán iguales entre sí; lo serán tambien en la copia; pero los primeros no lo serán respecto á los segundos. El resto de la operacion no consiste en otra cosa que en trasportar cada punto notable del modelo que le conviene á la copia, es decir, al rectángulo del mismo rango, y en un punto de este rectángulo, colocado como está el del orijinal.

Los ejercicios versarán despues sobre reducciones sin el socorro de la cuadrícula en el modelo, y luego sin servirse de ningun rectángulo.

Si la copia debiese ser mayor que el modelo, se seguiría la misma marcha, pero en sentido opuesto.

§. 2. *De las proyecciones.*

1. Qué se llama proyeccion, y cuál es su utilidad?– 2. Cuántas proyecciones se distinguen?– 3. Qué es la proyeccion de una recta sobre un plano?– 4. Cuál es la lonjitud de toda recta en el espacio?– 5. Cómo se proyectan las figuras sobre un plano paralelo al de la superficie?– 6. Cuáles son las proyecciones de dos rectas paralelas ó perpendiculares en el espacio?– 7. Cómo se obtiene la proyeccion de un círculo situado en el espacio?— 8. Cómo deben representarse las partes de un edificio, y cómo se llama este dibujo?— 9. Qué se hace para acabar de determinar las partes notables del edificio, y cómo se llama este dibujo?– 10. Cómo se proyecta un prisma, un cilindro, etc.– 11. Cómo se disponen los planos en la práctica de una manera que se preste á las construcciones, y qué resulta de aquí?– 12. Cuántas proyecciones se necesitan para tener idea exacta de un objeto?– 13. Cómo se puede conocer por medio de sus proyecciones, las dimensiones de una recta, de un círculo, de una elipse y de un óvalo? Aplicaciones.— 14. Dibujo de un tejado comun y otro de Mansard.– 15. Un rayo de Júpiter.– 16. Una cómoda.– 17. Una cama de barco.– 18. Un escritorio.– 19. Una silla.– 20. Una prensa.– 21. Una bomba aspirante.– 22. Utiles de hortelano. —23. Un gato y un tornillo de cerrajero.

Fig. 68.

1. Se llama *proyeccion* de un punto sobre una línea ó sobre un plano el pie de la perpendicular bajada desde este punto sobre la línea ó sobre el plano.

Asi en la figura 68, B es la proyeccion de A sobre BG, y D es su proyeccion sobre GD. Respecto á los planos DAB, GAB (fig. 71), que se suponen perpendiculares entre si, E es la proyeccion del punto F, supuesto en el espacio sobre el plano DAB, y G su proyeccion sobre el plano GAB.

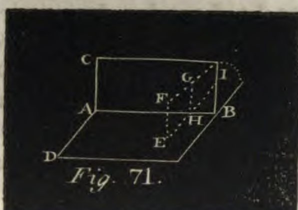


Fig. 71.

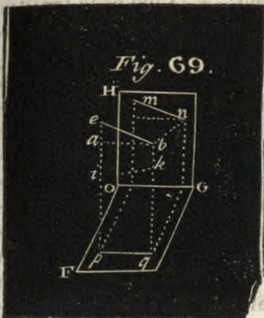
Es indispensable estudiar la teoría de las proyecciones. En efecto, un dibujo, por fiel que sea, puede muy bien dar una idea de la forma exterior de los cuerpos y de sus situaciones mútuas; pero no podria servir de guia seguro al operario que quisiese deducir la figura y las dimensiones de las piezas de que se compone; porque alguna de estas piezas no está vista bajo su verdadera forma, y por que la disminucion de la perspectiva altera el tamaño y la situacion relativa. Esto, que no puede obtenerse en un dibujo ordinario, se halla fácilmente por las proyecciones.

2. Hay dos especies de proyecciones: la *horizontal* y la *vertical*. Se llama horizontal la que está sobre la línea ó el plano horizontal; y vertical la que está sobre la linea ó plano vertical.

3. La proyeccion de una recta sobre un plano es otra recta, de

lonjitud y direccion diferentes, que determinan las proyecciones de sus dos extremidades ó de dos de cualesquiera de sus puntos.

En efecto, imaginemos dos planos, el uno horizontal FG, el otro vertical GH, y una línea recta *b*, *c*, situada en el espacio. (fig. 69).



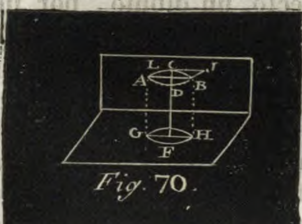
Si de todos sus puntos se tiran perpendiculares al plano FG, para tenerlas proyecciones de los puntos de la recta, los pies de estas líneas marcarán sobre este plano la línea recta *pq*, que será la proyeccion horizontal de *b c*. De la misma manera las perpendiculares tiradas sobre el plano vertical GH darán la proyeccion vertical *mn*.

4. La lonjitud de toda recta en el espacio es el lado mas grande de un triángulo rectángulo, cuyos dos lados del ángulo recto sean, el uno la proyeccion horizontal recta; el otro, la diferencia del nivel de los dos términos de su proyeccion vertical. (fig. 69).

5. Si las figuras son paralelas al plano sobre que se las proyecta, las proyecciones son iguales y semejantes; pero, si el plano de proyeccion no es paralelo al de la superficie, la igualdad ya no existe. Un círculo, por ejemplo, se proyecta segun una elipse; esta, segun otra elipse.

6. Dos rectas paralelas en el espacio tienen sus proyecciones paralelas; pero las proyecciones de dos perpendiculares no son perpendiculares entre sí.

7. Para obtener la proyeccion de un círculo situado en el espacio, es necesario, si el círculo es paralelo á uno de los planos, proyectar sobre este plano su diámetro AB (fig. 70), sobre el cual se describe una



circunferencia EGFH, que es la proyeccion del círculo dado; sobre el otro plano será una recta IJ, igual al diámetro del círculo, pero, si es oblícuo con relacion á los planos, se proyectan dos diámetros AB, GD, cruzados perpendicularmente, y sus proyecciones EF, GH son los ejes de la elipse que tiene la proyeccion sobre el plano horizontal; del mismo modo se opera relativamente al plano vertical.

Asi es como se proyectan elipses, círculos, ect.

8. Para representar las partes de un edificio, se imajina un plano horizontal, sobre el cual se traza un dibujo semejante al que determinan los pies de las perpendiculares que se tirarian á este plano de las di-

ferentes partes del edificio. Este dibujo se llama *plano geométrico.*

9. Para acabar de determinar las partes notables del edificio, se concibe otro plano perpendicular al primero, sobre el cual se traza un dibujo semejante al que determinarian los pies de las perpendiculares que se tirasen á este plano de las partes notables del edificio. Este plano, da la altura de los objetos sobre el plano geométrico.

La figura que resulta se llama *elevacion*, si no hace ver mas que las partes exteriores; *perfil*, si el objeto se vé lateralmente y segun una dimension estrecha; en fin, *corte*, si demuestra el interior de un cuerpo, de un edificio, de una máquina.

10. Todo prisma, ó todo cilindro, elevado perpendicularmente á un plano, se proyecta en él segun su base, asi como todas las figuras trazadas, segun su superficie.

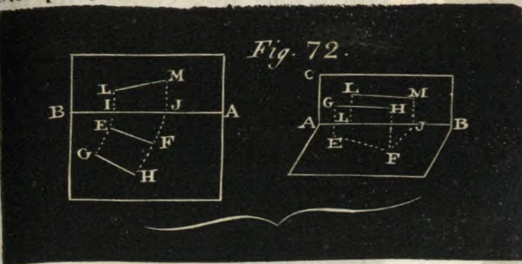
Un plano es proyectado sobre la horizontal, segun una recta, asi como todo lo que se ha trazado sobre este plano; una vigueta vertical lo es segun el rectángulo de su base, etc.

11. En la práctica, para disponer los planos de una manera que se presten á las construcciones, se imajina que el plano vertical ABG (figura 71) ha jirado al rededor de la interseccion AB, que hace con el plano horizontal, hasta el que se encuentra en la prolongacion de este. En esta rotacion, toda línea, GH, perpendicular á la interseccion AB, describe un plano que le es perpendicular, y por consiguiente, esta línea GH se halla en la misma direccion que la línea EH que la corresponde en el plano horizontal.

Resulta de aqui que las dos proyecciones E y F de un mismo punto F, se hallan sobre una misma línea, EI, perpendicular á la interseccion de dos planos.

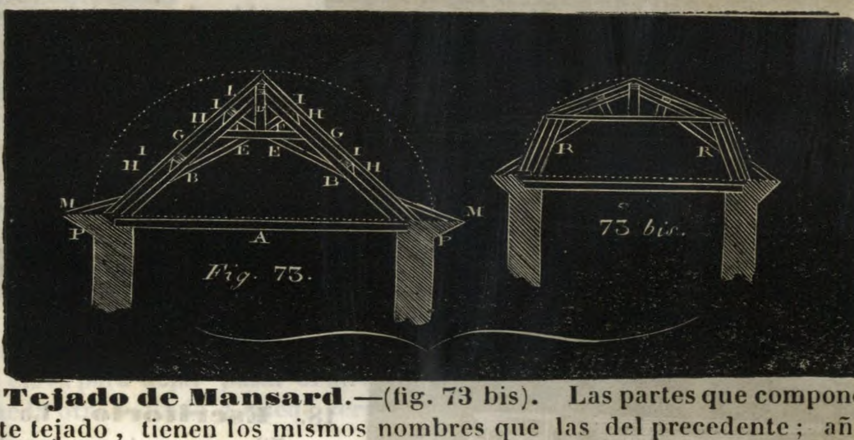
12. Para formarse una idea justa de un objeto, es necesario conocer á lo menos dos proyecciones diferentes de este objeto. La proyeccion vertical determina la lonjitud del objeto, lo que no hace la proyeccion horizontal; de suerte que por medio de estas dos proyecciones se podria ejecutar el objeto dibujado.

13. Para determinar la lonjitud de una recta por el conocimiento de sus proyecciones, se tiran á las extremidades de la proyeccion horizontal EF (fig. 72), las perpendiculares EG, FH, iguales á LL, JM, y se tira la recta GH, que da la lonjitud pedida; porque, si se imajina que EFGH, LMGH son planos elevados perpendicularmente, el primero sobre la proyeccion horizontal EF, y el segundo sobre la proyeccion vertical LM, su interseccion comun ha de ser precisamente la recta buscada.



Se determinan las dimensiones de un círculo, operando sobre las proyecciones de su diámetro, como acabamos de hacerlo sobre las de la recta; las de una elipse y de un óvalo, operando de la misma manera sobre la lonjitud de los ejes.

14. **Tejado.** El *tirante* ó *solera* A debe apoyarse sobre el muro P en los dos tercios de su espesor; la circunferencia que termina la altura puede tener el largo del edificio por diámetro. La pieza B se denomina *par*; G *tirante falso;* D *punzon;* E *jabalcon;* F *cadena*; G *cabrial;* I *viga*; H *puente;* L *caballete;* M *plataforma:* y P *es el muro.* (figura 73).



Tejado de Mansard.—(fig. 73 bis). Las partes que componen este tejado, tienen los mismos nombres que las del precedente; añadiendo la pierna de fuerza R.

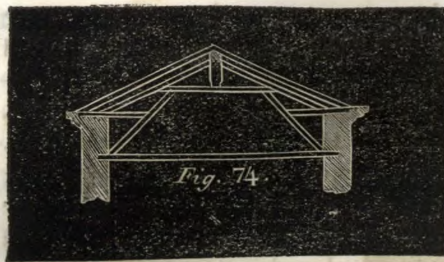


Fig. 74.

Estas dos especies de tejados no se hallan mas que en los edificios antiguos, porque en el dia se hacen de construccion menos pesada y costosa. La figura 74 representa la forma que se les da en la actualidad.


Fig. 73.

Rayo de Júpiter.— (fig 75). Los carpinteros llaman asi el corte que les sirve para reunir sólidamente dos extremos de maderaje para no hacer mas que uno solo, cuando no tienen madera de bastante largo para hacer el mueble de una sola pieza.


76 *bis*. Fig. 76.

16. **Cómoda.** Este mueble, cuya elevacion se ve en la figura 76, se construye por medio de horizontales y verticales. La figura 76 *bis*, representa el corte de lado é indica la profundidad del mueble; las paralelas sombreadas dan los cortes de los cajones.

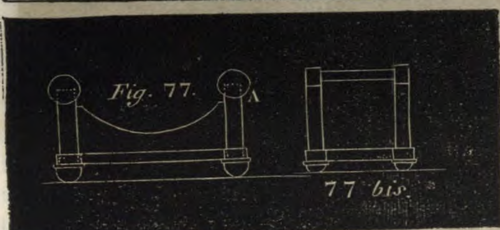


Fig. 77. 77 *bis*.

17. **Camas de barco.** La figura 77 representa su largo; las extremidades A de los rodillos se ven de frente; la figura 77 *bis*, indica el largo del mueble.

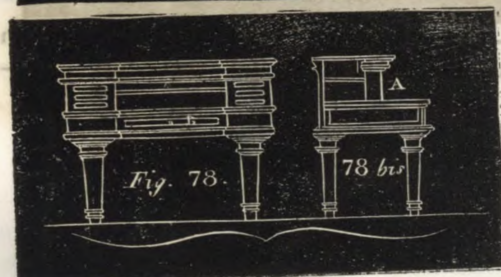


Fig. 78. 78 *bis*

18. **Escritorio.** La figura 78 representa un escritorio; y la parte B un cajon; la figura 78 bis, representa su proyeccion visto de lado; A es el vuelo que hace de mesa.

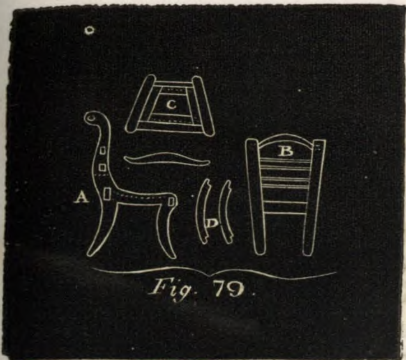


Fig. 79.

19. **Sillas.** La figura 79 da las diferentes proyecciones de una silla: A es la vista de perfíl; B es el respaldo; C la sillá en vuelo, y D los traveseros.

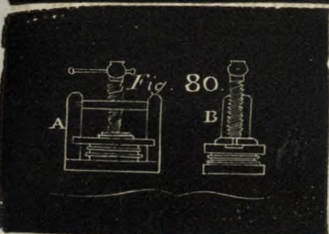


Fig. 80.

20. **Prensa.**— (figura 80). A representa la altura y el largo de la prensa vista de frente, y B su grueso visto de lado.

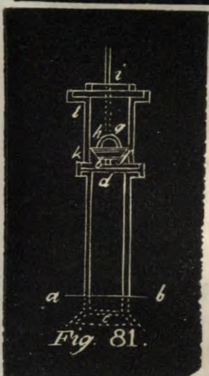


Fig. 81.

21. **Bomba aspirante.** La figura 81 es el corte de una bomba aspirante; *ab* es el nivel del agua en el reservatorio ó cubeta del tubo de aspiracion *cd*, y que cierra en su parte superior la válbula *d*. El piston *f*, provisto al rededor de un cuero, cierra herméticamente el cuerpo de bomba *kl*; este piston está unido sólidamente á un estribo de hierro *g*, que saca é introduce necesariamente la vara *g'*. Una válbula *h* abre y cierra uno despues de otro un canal *f* que abre el piston en su lonjitud; cuando se levanta el piston, la aspiracion hace el vacío en el interior y fuerza al agua á subir en virtud de la presion del aire exterior sobre el agua *ab* del reservatorio, porque la válbula *d* se abre y la *h* queda cerrada; cuando vuelve á descender el piston es al contrario *h* la que se eleva para dejar pasar el aire ó el agua encima del piston, mientras que la otra válbula *d* queda cerrada bajo la presion.

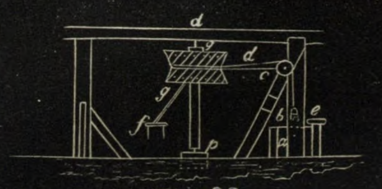


Fig. 82.

22. Utiles de los labradores. La figura 82 representa la elevacion de la máquina de los hortelanos para sacar agua del pozo *a*, por medio de un balde *b*, y verterla en una pila *e*, por donde marcha adonde conviene dirijirla. La cuerda *dc*, pasada por la polea *c*, saca el balde y se enrolla sobre un tambor haciendo jirar el árbol vertical *pd* que se pone en movimiento por medio de un manubrio. Y un caballo sujeto á *af*, ya un hombre, obrando sobre la extremidad de la bara *fg*, da vueltas al rededor del árbol *pd*. La cuerda, enrollándose en el tambor, hace subir uno de los baldes mientras desciende el otro, y es necesario voltear el árbol en sentido contrario para hacer subir á su vez el que se ha llenado, y bajar el primero que está vacío.

Fig. 83.

23. Gato. Máquina destinada á levantar pesos. (fig. 83).

Fig. 84.

24. Torno de cerrajero. Como demuestra la figura 84.

§. 3. *De la arquitectura.*

1. Qué es la arquitectura?— 2. Cuántos órdenes hay de arquitectura?- 3. Cuántas partes principales se distinguen en los cinco órdenes?- 4. Cómo se distinguen los cinco órdenes?- 5. Qué relaciones se establecen entre los tres principales órdenes de arquitectura?— 6. Qué proporciones guardan las columnas?- 7. A qué se llama módulo y cómo se divide el módulo?- 8. Cuál es la altura total de cada uno de los cinco órdenes? Cuál es la distancia de las columnas ó el intercolumnio en cada órden?- 9. Qué son pilastras?- 10. Cuál es la forma de la columna, y cómo se traza su disminucion? -11. Qué es una voluta? Cómo se traza la voluta jónica?- 12. Qué es un frontis y cuáles son sus proporciones? — 13. Qué se llama imposta, archivolta y artesonado? -14. Qué ha de hacerse para dibujar un órden de una altura dada?

1. La *arquitectura* es el arte de construir ó edificar.

2. Hay cinco órdenes de arquitectura: el *toscano*, el *dórico*, el *jónico*, el *corintio* y el *compuesto*.

3. Se distinguen tres partes principales en cada órden: la *columna*, el *entablamento* ó *cornisamento* y el *pedestal* que la sostiene.

Estas tres partes no se hallan siempre en la ejecucion de cada uno de los órdenes, porque la atribucion del nombre de un órden á un edificio no depende siempre de las columnas, sino tambien de las proporciones observadas en el conjunto de sus partes: á veces tampoco hay columnas, y el pedestal está con frecuencia reemplazado por un plinto.

Cuando el pedestal circuye á todo el edificio se llama *estylobato* ó *basamento*; cuando el entablamento no es de friso, la cornisa descansa inmediatamente en la *arquitectura*, y se llama entonces *arquitecturado*.

4. Se distingue el toscano por la simplicidad de sus partes, que no admiten adorno alguno; el dórico, por los tríglifos y las metopas del friso; el jónico, por las volutas de su chapitél; el corintio, por la doble fila de hojas de acanto y las ocho volutas de su chapitél; en fin, el compuesto, por el chapitél corintio unido á las volutas del jónico.

Ademas de estos caractéres, los diversos órdenes se distinguen tambien por las proporciones respectivas de sus partes:

5. El pedestal, la columna y el entablamento se divide cada uno en tres partes.

El pedestal.	en *cornisa*.	*neto*.	y *base*;
la columna.	en *base*.	*fuste*.	y *chapitel*;
el entablamento. .	en *arquitectura*. . .	*friso*.	y *cornisa*.

4. En todos los órdenes el entablamento tiene por altura la cuarta parte de la columna, y el pedestal, la tercera.

6. El grosor de la columna es proporcionado á su órden, á su altura y á la elevacion total del edificio.

La columna toscana tiene por altura, comprendiendo la base y el chapitel, siete veces su diámetro; la dórica, ocho veces; la jónica, nueve veces; la corintia y la compuesta, diez veces.

7. Se llama *módulo* el radio de la columna ó la mitad de su grosor, que, una vez determinado, da la altura del piso, de la cornisa, del fuste, etc.

El módulo está dividido en 12 lonjitudes iguales ó minutos en el órden toscano y el dórico, y en 18 en los otros tres.

8. Véase la tabla de la altura total y del *intercolumnio* ó intérvalo de las columnas en cada órden:

	ALTURA TOTAL.	SIN PEDESTAL.	INTERCOLUMNIO.
O. toscano módulos.	22 1/2	17 1/2	4 1/2
O. dórico	25 1/3	20	5 1/2
O. jónico.	28 1/2	22 1/2	4 1/2
O. corintio.	31 2/3	25	4 2/3
O. compuesto.	31 2/3	25	4 2/3

9. Las *pilastras* son columnas cuadradas (paralelepípedos) que rara vez se aislan; se las embute en la pared dejando saliente como un tercio ó un cuarto de módulo. Por lo demas, sus adornos, como chapiteles, base, y todas las proporciones en fin, se arreglan segun los preceptos del órden á que pertenecen.

10. La columna es ordinariamente cilíndrica hasta el medio de su altura, desde cuyo punto va disminuyendo; de manera que el diámetro de su parte superior es un sexto menor que el de su parte inferior. Ciertos arquitectos la hacen disminuir abajo.

Veamos la manera de trazar la dimension de la columna.

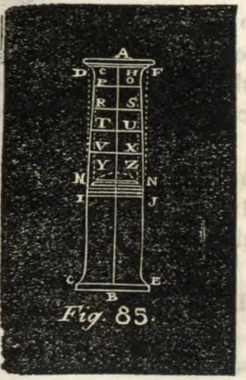


Fig. 85.

Despues de haber tirado el eje A B (fig. 85) de la columna, trazando las paralelas CD, EF, y llevando de D á G y de F á H la diminucion dicha, se tira el diámetro IJ, en su tercio; se describe sobre este diámetro la semicircunferencia IMNJ: se tiran en seguida GM, paralela á CD hasta encontrar la semicircunferencia; se divide el arco IM en seis partes iguales, y por estos puntos se tiran paralelas al diámetro IJ: MN será siempre igual á GH. Se ejecutarán las otras paralelas por órden hasta las dimensiones de la columna PO, RS etc., y sus extremidades sarán los puntos por donde deberian pasar las curbas que denotan la disminucion de la columna.

Si la disminucion debiese comenzar en la parte inferior de la columna, se haría en CE lo que se ha dicho en IJ.

11. La *voluta* es un adorno del chapitel en forma espiral.

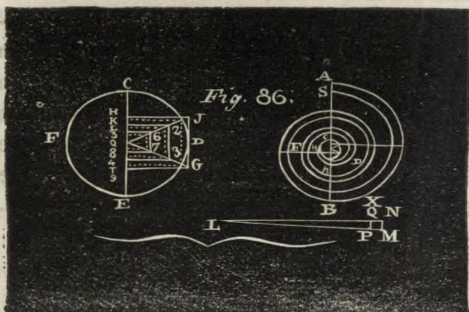
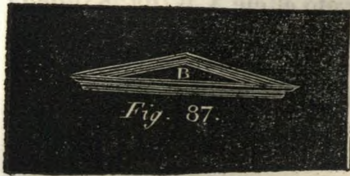


Fig. 86.

Sea AB la altura de la voluta jónica (fig. 86): se la divide en 16 partes iguales ó minutos; de la 9.ª division O y un radio igual á un minuto, se describe el ojo CDEF de la voluta; se construye sobre la recta 9 H, compuesta de la mitad de los radios OC, OE el cuadrado HJG 9; se forman ángulos J y G en el centro O, con las rectas JO, GO; se divide el lado H 9 en 6 partes iguales; se construye su cuadrado sobre 1, 4 y sobre 5, 8; los ángulos HJG 9 serán los centros de la 1.ª vuelta, que comienza en A; los ángulos 1, 2, 3, 4, los de la segunda y 5, 6, 7, 8 los de la 3.ª, que debe terminar en C.

Para determinar los centros de la 2.ª revolucion, se tira una recta MC=AH; se lleva el largo del listel de M á P ó se eleva la perpendicular PQ; se junta el punto N al punto L; se lleva PQ al eje de la voluta de O á K y T; se divide TK en seis partes iguales; se renueva la operacion hecha en H 9 y los ángulos de los 3 cuadrados puntuados son los centros de la segunda revolucion de la voluta, que se describe en el mismo órden que la 1.ª á partir de la segunda division S.

12. El *frontis* es un adorno de arquitectura ordinariamente triangu-



lar (fig. 87). El espacio B comprendido entre las cornisas que le forman, se llama *tímpano*: es susceptible de recibir esculturas, objetos alegóricos, etc., hasta cierta extension.

La altura de los frontis varía: los pequeños tienen por altura la mitad de la base; pero esta altura disminuye á medida que la base es mayor; algunas veces, en este último caso, la altura no es mas que un quinto de la base.

13. Se llama *imposta* la parte de un pie recto sobre el cual comienza un arco.

Las *archivoltas* son bandas largas y arqueadas, salientes sobre el nudo de una pared.

Los *artesonados* son diversas esculturas, que sirven para adornar la plataforma de los entablamentos y de las cornisas.

14. Para dibujar un órden en una altura dada, se divide esta altura en 19 partes iguales; se dan 4 al pedestal, 12 á la columna y 3 al entablamento. La altura de la columna se fija de esta manera: si se trata del órden toscano, se la divide en 7 partes iguales, si del dórico, en 8; si del jónico, en 9; si del corintio ó compuesto, en 10. Cada una de estas partes será el diámetro inferior de la columna del órden que se quiera construir; el módulo de la escala sobre la cual se han de determinar las otras partes del órden, debe ser igual á la mitad del diámetro.

§. 4. *De la Perspectiva.*

1. Qué es la perspectiva?– 2. Cuál es el fundamento de toda la perspectiva, y qué resulta de él?– 3. Qué se llama cuadro, plano geométrico, línea de tierra, linea de horizonte, punto de vista y punto de distancia?– 4. Qué se llama punto de huida y dónde se halla?– 5. Cuál es la perspectiva de una linea recta, de lineas paralelas entre sí, y de una vertical?– 6. Cómo se halla la perspectiva de un punto y de una recta situadas sobre el horizonte?– 7. Cómo se pone en perspectiva un polígono sobre el plano geométrico? De un cuadrado situado sobre el horizonte paralelamente á la línea de tierra de un empedrado en baldosas cuadradas. — 8. Cómo se determina la perspectiva de un círculo trazado sobre el horizonte?– 9. Cómo se halla la perspectiva de un punto situado en el espacio?– 10 Qué se hace cuando el objeto en perspectiva está dibujado? —11. Cuál es el límite de aproximacion de los objetos que han sido dibujados? Aplicaciones.– 12. Dibujar la perspectiva de un dibujo.– 13. De una cómoda. 14. De una silla.– 15. De un vaso.– 16. De una série de piezas de carpinteria á escuadra.– 17. De una serie de arcos vistos diagonalmente.

1. La *perspectiva* es el arte de representar los objetos tales como los vemos, por el solo conocimiento de sus posiciones relativas y de sus dimensiones geométricas.

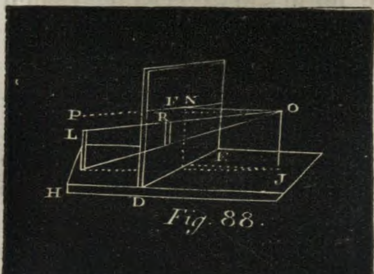


Fig. 88.

2. Véase el fundamento de toda la perspectiva. Imagínese que un cristal D N E (fig. 88.) interpuesto entre los objetos y el ojo del dibujante. De este ojo parten los rayos visuales que siguen los contornos del objeto, y va cada uno á encontrar el cristal en un punto, donde dejan una impresion. Es claro que si se da á la imágen determinada por este contorno colores semejantes á los del objeto, este aparecerá en el cristal cuando se quite: esta semejanza es lo que se llama perspectiva.

Resulta de aqui que todo objeto paralelo al cristal no cambia, ni de forma, ni de direccion en la imágen que en él determinan los rayos visuales; pero que esta imágen disminuye de tamaño á medida que el objeto se aleja del espectador.

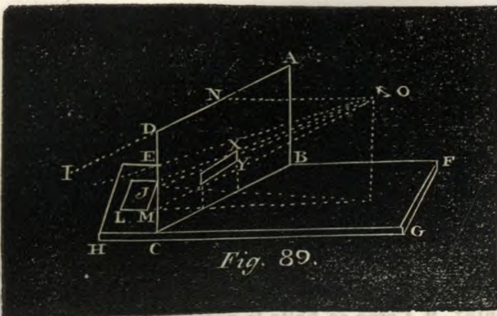


Fig. 89.

3. El plano A B C D. (figura 89.) se llama *cuadro*; la recta B C, *línea de tierra*: el plano E F G H, *plano geométrico;* sobre este plano se encuentra la proyeccion de los objetos que se quieren poner en perspectiva.

La línea A I, paralela á la línea de tierra B C, que se imagina pasar por la proyeccion N del ojo, se llama *línea de horizonte*; el punto N, *punto de vista;* y el punto I, distante del punto O, como el ojo lo está del cuadro, *punto de distancia.*

4. Se llama *punto de huida* el punto del cuadro por donde pasa la prolongacion de las perspectivas de todas las paralelas. Se le halla en la parte del cuadro donde pasa la reeta dirigida del ojo paralelamente á las líneas dadas.

5. La perspectiva de una recta es siempre una recta; esto es claro.

Las líneas palalelas entre sí, pero que no lo son al cristal, tienen sus perspectivas convergentes á un mismo punto, que es el de huida; una calle de árboles nos ofrece un ejemplo de esto.

La perspectiva de una vertical es siempre vertical, pues que es paralela al cuadro.

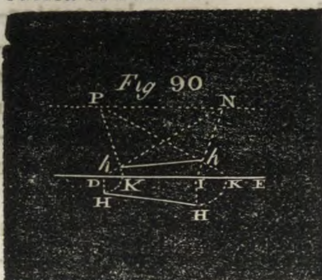


Fig 90

6. Para hallar la perspectiva de un punto H situado sobre el horizonte (fig. 90) se se baja desde este punto la perpendicular H I á la línea de tierra D E, y se tira desde I la linea I N, que va al punto de vista N; se toma en seguida I K=I H, y se lleva desde K la línea K P al punto de distancia opuesto: estas rectas I N, P K se cruzarán en el punto *h*, que es la perspectiva de H.

Reproduciendo la misma construccion para todos los puntos que se quiera, situados sobre el plano geométrico, y juntando por rectas las perspectivas asi obtenidas, se tendrá la perspectiva.

Resulta que para hallar la perspectiva *h h'* de una recta H' H trazada sobre el horizonte (fig. 90 y 91) basta buscar la perspectiva de dos puntos H H' de esta recta.

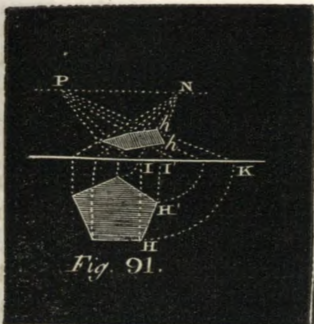


Fig. 91.

7. 1.º Para poner en perspectiva un polígono dado sobre el plano geomètrico, se buscan las perspectivas de todas las extremidades superiores (fig. 91.)

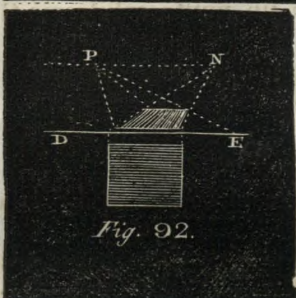


Fig. 92.

2.º Si se trata de un cuadrado situado sobre el horizonte paralelamente á la línea de tierra (fig. 92) se ve que las perspectivas de los lados paralelos de la línea de tierra, son tambien pararelas á esta línea; pero que los lados perpendiculares tienden al punto N.

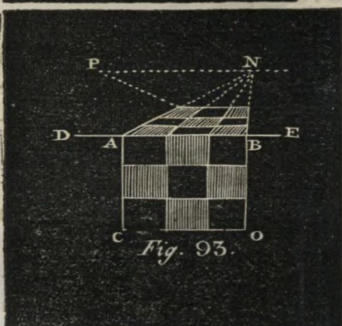


Fig. 93.

3.º Si se trata de un piso embaldosado de losas cuadradas (fig. 93) se llevan, á partir de A en D E, las lonjitudes sucesivas iguales al lado del cuadrado de las baldosas, y por estos puntos de division, se tiran líneas al punto de vista N; despues desde B se dirige una línea B P al punto de distancia opuesto P; la cual cortará á las primeras en los puntos, por los cuales se tirarán paralelas á la línea de tierra D E, y los cuadrados asi formados serán la perspectiva pedida.

8. Para hallar la perspectiva de un círculo colocado sobre el horizonte, se divide la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo en 6; se busca la perspectiva de cada uno de los puntos de division que determina el paso de la curva y se obtiene una elipse, perspectiva del círculo.

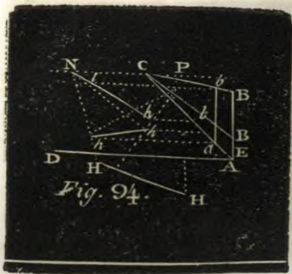


Fig. 94.

9. Para hallar la perspectiva de un punto situado en el espacio (fig. 94) se busca desde luego la proyeccion horizontal H de este punto, de donde se tira la perspectiva *h*; la de una vertical indefinida levantada en H es tambien una vertical *hl*. Ya no falta mas que determinar el punto *l* en donde debe limitarse la vertical, y este punto será la perspectiva pedida.

Para conseguirlo, se tira aparte una vertical A B, de la misma altura que la correspondiente al punto H, y de las dos extremidades A B, se tiran rectas A C, B C á un punto arbitrario C de la línea de horizonte; con lo cual se forma un triángulo A B C. Tirando la línea *h a* horizontalmente se tiene un punto *a* de seccion con A C; la vertical *ab* será la altura buscada; asi será menester tomar *hl*= *ab* y *l* será la perspectiva del punto del espacio; *hl* será la de la vertical levantada en H: esta vertical es el eje de una columna, de un árbol, la arista de encuentro de los dos muros etc.: hecho esto se obtendrá asi la perspectiva.

Si se tiene una serie de objetos de iguales alturas á iguales distancias del cuadro, sus proyecciones estarán sobre una recta paralela á la línea de tierra D E; se tendrán facilmente las perspectivas de las bases, y la altura *ab* será la misma: estas perspectivas serán tambien equidistantes, si los objetos están igualmente separados; en el caso contrario, se repite en cada uno de ellos la construccion precedente. Esto se aplica á las series de columnas, calles de árboles y soportales.

Por medio de este método es fácil hallar la perspectiva de una pirámide, de una línea oblícua en el espacio, de un prisma recto, de un cubo, un cono, un cilindro, etc.

10. Cuando el objeto en perspectiva está dibujado, se borran las líneas de construccion, y las proyecciones horizontales para no dejar en el papel sino la perspectiva obtenida en la montea ó planta.

11. No se ven distintamente de un golpe sino los objetos comprendidos en la abertura de un ángulo de 60.° ó á lo mas de 90.°: esta primera condicion determina un límite de aproximacion de los objetos que se quieren dibujar. Por otra parte, si estamos muy alejados de los detalles, no se les puede apreciar; lo cual da otro límite en sentido contrario, segun la multitud y delicadeza de estos detalles.

12. Perspectiva de una mesa.—(fig, 95). El punto de vista está en O, un poco elevado, pues que mira la parte superior de la mesa; el punto de distancia está en P, á una distancia del punto O igual á la del ojo respecto á la mesa y en la misma direccion horizontal.

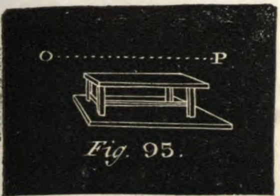


Fig. 95.

13. De una cómoda. (fig. 96). El punto de vista O está en una posicion contraria á la del dibujo precedente, como igualmente el punto de distancia P; lo cual hace ver el objeto en un sentido diferente. El ojo del observador está en una posicion horizontal con relacion á O, y á una distancia OP.

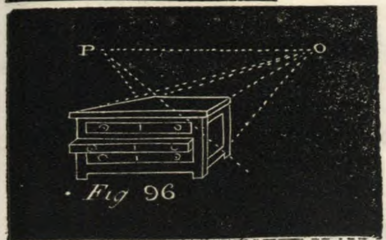


Fig 96

14. De una silla. (fig. 97). Los puntos de vista y huida están en la parte donde las paralelas horizontales ABCDEF etc., van á encontrarse por la convergencia; estas línas se suponen perpendiculares á la linea de tierra de la mesa que recibe la perspectiva.

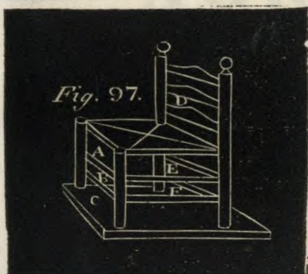


Fig. 97.

15. De un vaso.—(fig. 98). Este vaso se supone de una grande dimension, pues que el punto de vista, colocado en frente del medio de la altura, permite percibir la parte superior del pie y la inferior de la moldura superior.


Fig. 98.

16. La figura 99 es la perspectiva de una série de piezas de armaduras puestas á escuadra colocadas las unas hácia abajo, las otras horizontalmente, formando hileras sucesivas. La mayor parte de los talleres de manufacturas, de los almacenes, etc., están construidos de esta manera.


Fig. 99.

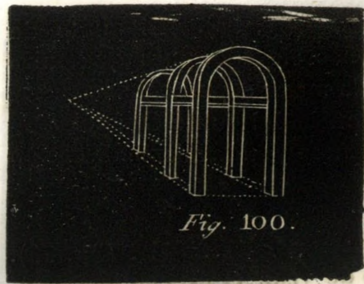


Fig. 100.

La figura 100 es la perspectiva de una série de arcadas vistas lateralmente.

CAPITULO III.

APLICACIONES USUALES DE LA GEOMETRIA.

PRIMERA PARTE.

AGRIMENSURA.

PRIMERA SECCION.

TEORIA DE LA AGRIMENSURA PROPIAMENTE DICHA.

§. 1.° *De la agrimensura en general.*

1. Qué es agrimensura?- 2. De dònde proviene la palabra agrimensura, y cuando se usa de la palabra cubicacion?- 3. Cuál es el oríjen presunto de la agrimensura?- 4. En cuántas partes se divide la agrimensura?- 5. En qué consiste la teoría de la agrimensura?

1. La *agrimensura* es el arte de medir y determinar la extension superficial de un terreno.

Comprende ademas la reparticion de las heredades entre los propietarios, la deslindacion de los campos, la preparacion de las labores, reparticion de plantacion, etc.

2. La palabra *agrimensura* viene de *agri* (campo) *mensura* (medicion) palabras de oríjen latino.

La de *cubicacion* tiene su oríjen en la unidad de medida que generalmente se toma, y es el pie cúbico.

3. Desde el momento en que las sociedades se formaron, los pueblos han debido recurrir á la agricultura: de aqui la necesidad de fijar y reconocer los lindes de los campos.

«Los Egipcios, dice Rollin, para conocer sus tierras cubiertas todos los años por las inundaciones del Nilo, tuvieron precision de acudir á la *agrimensura*, que bien pronto les ha enseñado la geómetría y el levantamiento de planos.» Tal es el oríjen presunto de la agrimensura.

4. La agrimensura se divide en tres partes: 1.ª la *agrimensura propiamente dicha*; 2.ª el *levantamiento de planos*, ó el arte de representar en pequeño sobre papel, la forma y los accidentes de un terreno, conservando las proporciones del conjunto y sus detalles; 3.ª la *aguada de los planos*, ó el arte de distinguir sobre un plano las diferentes especies de tierras ó cultivos, por tintas convencionales, con cuyo medio se reconoce al momento lo que es viñedo, bosque, prado, pantano, etc.

5. La teoría de la agrimensura consiste en dividir el terreno, sea en *triángulos ordinarios*, sea en *triángulos rectángulos*, y en *trapecios rectangulares*, sea en fin, en *triángulos rectángulos* y en *rectángulos*. Los dos últimos medios son los mas simples y fáciles de practicar.

§. 2. *Instrumentos de la agrimensura.*

1. A que se reducen las operaciones prácticas de la agrimensura sobre el terreno y como se ejecutan estas operaciones?—2. Cuáles son los instrumentos necesarios para medir?—3. Qué son jalones?—4. Qué es la escuadra del agrimensor y el palo de esta escuadra?—5. Cómo se verifica la escuadra del agrimensor?—6. Qué es la cadena del agrimensor y como se verifica?—7. Qué son las hileras?

1. Las operaciones prácticas de la agrimensura sobre el terreno pueden reducirse á dos cosas muy simples; 1.° medir y trazar líneas rectas; 2.° levantar perpendiculares para subdividir el terreno en triángulos, trapecios ó rectángulos.

Estas operaciones se ejecutan con el auxilio de algunos instrumentos poco complicados.

2. Los instrumentos necesarios al agrimensor son: los *jalones* y la *escuadra* para trazar las líneas rectas y las perpendiculares; 2.° la *cadena* y diez piquetes para medir las distancias y las líneas.

Fig. 1

3. Los piquetes son estaquillas de madera de cuatro á cinco pies, con una tablita en el extremo superior pintada de blanco: la otra extremidad A (fig. 1) terminada en punta, debe exceder de la tablita como una pulgada para facilitar la alineacion.

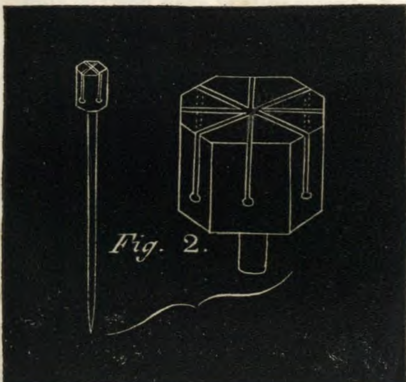


Fig. 2.

4. La *escuadra de agrimensor* (figura 2) se llama generalmente *octágono*, por estar formada de un prisma recto de cobre hueco, de 8 caras iguales de cerca de 5 á 6 centímetros de ancho con doble altura. Un tubo está clavado en su base para recibir la redondeada punta de un baston que debe ajustar bien, y cuyo extremo inferior acaba en punta de hierro, para que la caña pueda fijarse verticalmente en el suelo (fig. 2).

En la parte superior del instrumento hay hendiduras verticales que se llaman *pinulas.* Aplicando el ojo por una de estas hendiduras se ven distintamente por la opuesta los objetos situados del otro lado; para lo cual hay una pequeña abertura practicada á lo largo de la hendidura. Cada uno de los lados está provisto de una pínula semejante, de manera que estando estas hendiduras abiertas dos á dos en ángulos rectos, es evidente que el instrumento determina las cuatro direcciones perpendiculares.

El palo de la escuadra está dividido en su parte superior en decímetros, centímetros y milímetros. En él se coloca ordinariamente una plomada para determinar su posicion vertical.

5. Para comprobar la escuadra se elije un terreno bien horizontal en donde se fija. Se clavan á una gran distancia piquetes en las cuatro direcciones perpendiculares dadas por las cuatro caras opuestas del octágono. En seguida se hace jirar la escuadra sobre su eje, sin cambiarla de lugar ni trastornar la verticalidad, y si se corresponden los piquetes por las pínulas correlativas de las otras caras, es prueba de la perfeccion de la escuadra.

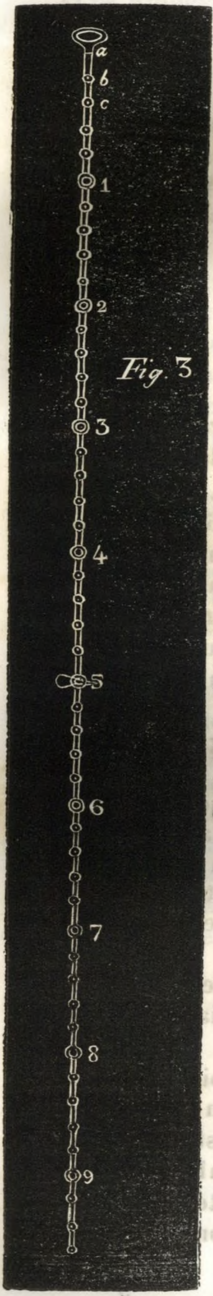
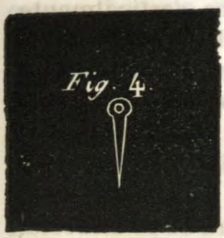


Fig. 3

6. La *cadena de agrimensor*, usada por los franceses, es la cadena métrica: tiene 10 metros y 1 decámetro de lonjitud. Está formada (fig. 3) de 50 aníllos ó eslabones de alambre grueso *ab*, *bc* etc. de 2 decímetros de largo y unidos entre sí. Cada série de 5 eslabones, 1, 2, 3, 4, 5 etc. está marcada con un anillo de cobre é indica los metros. El 5.º metro, que es la mitad de la cadena, se distingue por una señal arbitraria. Cada punta de la cadena termina en una empuñadura de hierro sujeta al eslabon contiguo.



7. Los fijos no son mas que piquetes de alambre de hierro, de cerca de medio metro, terminados en punta por uno de sus extremos y en forma de anillo por el otro (fig. 4.).

Es muy cómodo el número de 10 fijos porque sirve para advertir el agrimensor que ha medido una extension 10 veces mayor que su cadena, es decir, 100 metros (sobre 307 pies y 10 pulgadas.)

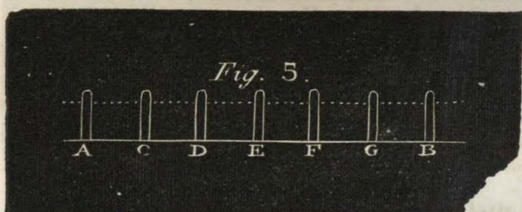
§. 3. *Uso de los instrumentos de agrimensura.*

1. Para qué sirven los piquetes? — 2. Cómo se traza en el terreno una línea y que guia se toma para la alineacion?—3. Cómo se comprueba la verticalidad de los piquetes?—4. Cómo se traza una línea cuando una extremidad no se percibe desde la otra? —5. Cómo se mide una distancia marcada ya con los jalones? á que se reduce esta operacion?— 6. Cuál es el uso de la escuadra?— 7. Cómo se baja y levanta con la escuadra una perpendicular á una línea?

1. Los piquetes sirven para tirar una recta sobre el terreno.

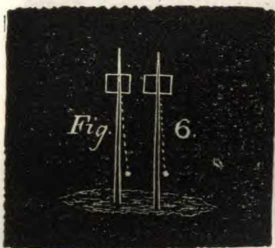
Sirven tambien para marcar los ángulos y las irregularidades del terreno en que se debe operar.

2. Dásenos á trazar una línea que se estiende desde A á B (figura 5). Si la distancia es corta, basta plantar dos piquetes, uno en el punto A y otro en el B; pero, si esta distancia es considerable, es menester entre estos fijar otros piquetes C, D, E, F, G. Para colocar estos piquetes en la direccion AB, se coloca uno á tres ó cuatro pasos del piquete A; se tira una visual, de suerte que este cubra al piquete B, y en seguida se colocan los otros intermediarios guardando siémpre la línea recta. Si la operacion está bien hecha, todos los piquetes, cualquiera que sea su número, deben confundirse cuando se mira por una de sus extremidades.



Esta operacion se llama *alinear*, ó *enfilar*.

3. Es importante que los piquetes estén colocados verticalmente.



Para asegurarse de su verticalidad, se emplea en tanto que se va adquiriendo el hábito, una plomada que se suspende de la extremidad superior del piquete. Conforme el hilo coincida ó no con el piquete (fig. 6), asi este estará bien ó mal colocado.

4. Con frecuencia se encuentra en la direccion de la línea que se quiere trazar, un obstáculo ó un montecillo que impide ver un extremo de la línea desde el otro. En este caso se debe colocar sobre el montecillo mismo ú sobre un punto cualquiera de la línea, desde donde se divisen al través de las pínulas las dos extremidades.

Sea C este punto (fig. 7). Se coloca la escuadra en un punto D

que se supone estar en la alineacion, se dirije una de las pínulas hácia A y se mira por la pínula opuesta para percibir el punto B.

Si B no enfila con D y A, se coloca la escuadra en otro punto E, y se repite la misma operacion hasta tanto que por medio de algunos tanteos se encuentra el punto C. Obtenido este punto, se clava en él un piquete; se enfila con el punto F, y luego es muy fácil fijar los piquetes G, H, I, etc.

5. La manera de medir una distancia señalada ya con jalones, se reduce á tres cosas: 1.° á tener estendida por igual la cadena; 2.° á tenerla en nivel; 3.° á caminar en línea recta.

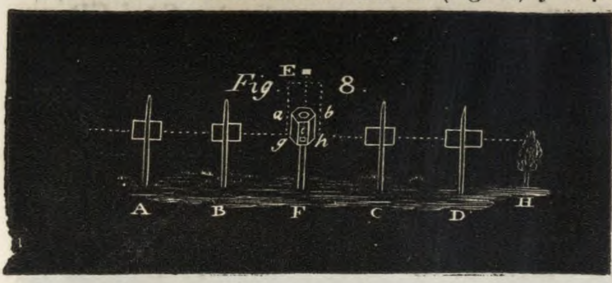
1.° El agrimensor toma una de las empuñaduras de la cadena y la coloca en el punto A (fig. 7); el *ayudante* ó *porta-cadena* toma en la mano izquierda 10 fijos y en la derecha la empuñadura de la cadena. El agrimensor ajusta la cadena al punto de partida, apoyándola segun los casos, en el palo de la escuadra, en un piquete ó en una de sus rodillas. El ayudante va andando hasta que encuentra resistencia y cuando la cadena está suficientemente tendida, clava un fijo lo mas verticalmente posible y continúa su camino sin volver la cabeza. Llega el agrimensor al fijo que ha dejado su ayudante, le sujeta verticalmente para descansar en él su empuñadura y la saca para continuar su camino. El porta-cadena fija sucesivamente el 3.° 4.° 5.° fijo, hasta que estén los 10, los cuales han ido pasando por manos del agrimensor, quien los devuelve luego á su ayudante, y escribe en su libro un *tiro*, es decir, una distancia de 100 métros.

2.° Cuando se mide un terreno inclinado, el ayudante debe levantar la mano en que tiene la cadena, al nivel del extremo opuesto y dejar caer verticalmente de esta misma mano un *fijo* para clavarlo en el lugar en que caiga. Si, por el contrario, el terreno viene cuesta arriba, el agrimensor es quien debe levantar la mano.

3.° Cuando la línea está trazada por los jalones, basta para seguirla, marchar por la alineacion, teniendo cuidado de pasar á algunos decímetros de los piquetes, para no tropezarles con la cadena. Pero cuando la línea no está marcada; el porta-cadena debe suponer en esta línea un punto lejano en la parte posterior que le sirva de direccion; sin lo cual el agrimensor, que le sigue y puede juzgar si su ayudante sigue ó no la línea, se veria obligado á llamarle á la derecha ó á la izquierda, en lo cual se perderia mucho tiempo.

6. La escuadra sirve principalmente para bajar ó levantar perpendiculares sobre una línea.

1.° Sea la línea trazada ABCD (fig. 8) y el punto E fuera de la línea, desde donde se ha de bajar la perpendicular; coloco la escuadra en el punto en que supongo que debe caer la línea, ajusto las pínulas *a* y *b* de modo qne mirando por la abertura *a*, perciba CDH en la misma direccion, y mirando por la hendidura *b*, vea A y B confundirse en la linea visual. Esta operacion se llama poner *la escuadra en línea*. Supongámosla en *g*. Observo por la abertura *c* si enfilo con el piquete clavado en E; si todavía estoy distante, como lo muestra la figura, pongo la escuadra en *h*, donde bien pronto reconozco que he avanzado demasiado; entonces la fijo en F, donde me quedo, y la perpendicular buscada es E F.

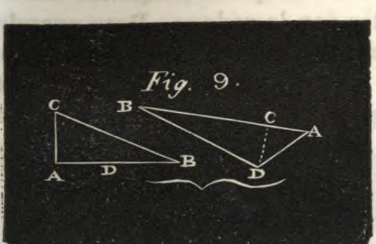


2.° Nada mas fácil que levantar desde el punto F una perpendicular FE sobre el terreno. Se pone el instrumento en este punto, se enfilan y clavan los jalones marcando la línea FE mirando por la pínula *c*.

SEGUNDA SECCION.

PRÁCTICA DE LA AGRIMENSURA SOBRE EL PLANO HORIZONTAL.

1. Cómo se mide un terreno de forma triángular?– 2. Cómo, de forma rectángular?– 3. Cómo se mide un terreno de forma de un trapecio, y cual es la linea que se toma por base de la operacion?– 4. Qué se verifica cuando muchos trapecios están separados por lineas cuyo paralelismo parece muy probable?– 5. Cómo se mide un terreno de la forma de un cuadrilátero irregular?



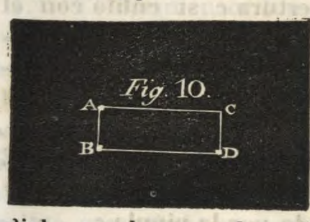
1. Supongamos que se nos da á medir un terreno de forma triangular (fig. 9). La superficie de un triángulo se mide multiplicando la base por la mitad de la altura, ó lo que es lo mismo, tomando la mitad del producto de la base por la altura. Señálese con jalones por medio de la escuadra la base AB del triángulo; mídase la lonjitud de esta base con la cadena y anótese el producto. Levantando en seguida con la escuadra la perpendicular CA ó CD que pasa por el vértice A ó D del triángulo, se mide esta perpendicular despues de marcada con los piquetes correspondientes, y la mitad del producto de las dos dimensiones expresa la superficie.

Sea AB=36,05ᵉ. y CA=20,50ᵉ. la tendrá de *superficie* ABC=

$$\frac{36{,}05^{e}. \times 20{,}50^{e}.}{2} = \frac{739{,}0250^{e}.}{2} = 369{,}5125^{e}.$$

Sea AB=37,25ᵉ. y CD=19,15ᵉ., se tendrá en *superficie* ABD= 356,6687ᵉ.

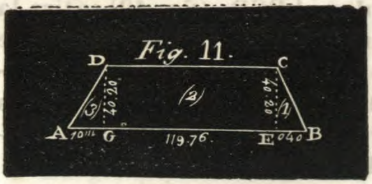
2. Sea para medir un terreno de forma rectangular ABCD (fig. 10).



La superficie de un rectángulo se mide multiplicando la base por la altura.

Antes de proceder á la medicion, se principia por dar una vuelta al rededor del terreno para cerciorarse de su forma. Si los tres ángulos A, B, C son rectos, el 4.º D lo será tambien necesariamente, y no hay para qué medirlo con la escuadra. Se fijan desde luego piquetes en A, B, C y D; se pone la escuadra en A y se enfila con el piquete B; si la visual corta el piquete en C, el ángulo CAB es recto. Lo mismo se practica con B y con C. Terminadas estas operaciones, resta medir AB y BC.

Sea AB=22,35^e. y BC=44, 70^e. se tendrá en *superficie* ABCD= 22,35^e. × 44,70^e.=999,045^e. ó 1000$^{e.c.}$; y como 576$^{e.c.}$ valen 1 fanega, la superficie del rectángulo será por consiguiente, de 1,736 fanegas castellanas.



Supongamos que se haya de medir un terreno de la forma del trapecio ABCD. (fig, 11).

La superficie de un trapecio se mide multiplicando por la altura la semi-suma de sus lados paralelos.

Se toma el lado mayor A B por base de la operacion, se bajan á esta base desde los puntos D y C, las dos perpendiculares DG, CE y el trapecio se encuentra asi reducido á un rectángulo y dos triángulos.

Tratase ahora, pues, de medir los lados paralelos A B, C D y la altura C E=D G.

1.° Sea C E=40,20^e. y E B=11,40^e.; se tendrá la

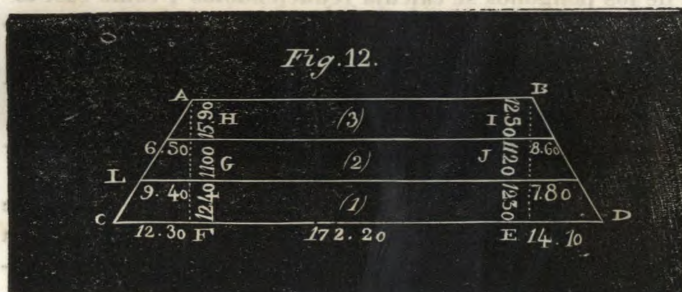
$$superficie\ BCE=\frac{40,20^e.\times 11,40^e.}{2}=229,140^e.$$

2.° Sea GE=119,76^e.; se tendrá en *superficie* GECE= 119,76^e.×40, 20^e.=4824,352.

3.° Sea AG=119^e.; se tendrá en *superficie*

$$AGD=\frac{40,20^e.\times 10}{2}=201,000.$$

Luego la *superficie* ABCD iguala el total de estas tres sumas ó 5244,492$^{e.c.}$, es decir, 9 596 fanegas castellanas aproximadamente.



4. Si varios trapecios contiguos están separados por líneas cuyo paralelismo parece muy probable (fig. 12) se les puede medir por una sola operacion.

Se toma C D por base, y se bajan de los puntos A, B las perpendiculares AF, BE, las que cortarán los cuadrilateros en H, en G, en I y en J, habiéndose formado trapecios en las extremidades inferiores de los trapecios, y triángulos en las superiores del trapecio. La lonjitud FE, servirá para los tres rectángulos intermediarios. Se calcularán todas estas figuras, de la manera que acabamos de decir (nos. 1, 2, 3,) y se obtendrá la superficie total de los trapecios contiguos.

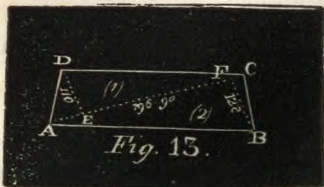


Fig. 13.

5. Si el terreno tiene la forma de un cuadrilátero irregular, ABCD, (fig. 13) se tira la diagonal AC que se marca con piquetes y se mide; luego se levanta en E una perpendicular que pase por D; se busca tambien con la escuadra el punto F de la perpendicular que pasa por B; y se miden estas dos perpendiculares.

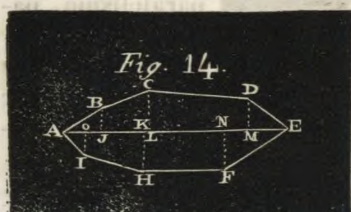
El cuadrilátero se encuentra asi reducido á dos triángulos, cuya valuacion superficial es fácil, pues puede hacerse por medio de una sola operacion multiplicando por la base AC la semisuma de las dos alturas DE, BF.

Sea DE= 110e.; BF=125e. y la base AC=296,90e. se tendrá en *superficie* ABCD = $\frac{110^e. + 125^e.}{2} \times 296{,}90^e. = 117{,}50^e. \times 296{,}90^e. = 34885{,}75^e$ ó 62,56 fanegas castellanas.

§. 2. *Medicion de los polígonos de mas de cuatro lados.*

1 Cuál debe ser el cuidado del agrimensor en la medicion de los polígonos de mas de 4 lados?—2. Cómo se mide un terreno de forma de un polígono irregular de un número cualquiera de lados? —3. Cómo se mide un polígono cerrado por un lado por una línea curva? —4. Cómo se mide un polígono en dos de cuyos lados son líneas curvas? —5. Cómo se mide un terreno de forma sinuosa contínua?

1. La superficie de los polígonos se calcula reduciéndolos", como casi todas las superficies agrarias á triángulos, rectángulos ó trapecios. El cuidado del agrimensor debe ser, simplificar en cuanto le sea posible las operaciones, como asimismo tomar por base la recta mayor que se pueda tirar en el polígono y que por esta razon se llama *directiva*.



2. Désenos para medir el polígono irregular A B C D E F H I (fig. 14.)

Se fijan piquetes en todos los vértices de los ángulos A, B, C, D, E, F, H, I; se tira la directiva A E; se levantan sobre esta diagonal perpendiculares que pasan por los vértices de los ángulos B, C, D, F, H, I; y se forman por este medio cuatro triángulos A B J, D E M, E N F, I O A, y cuatro trapecios B C K J, C D M K, F N L H, H L O I cuya superficie debe valuarse por medio de los datos siguientes.

Perpendiculares encima de la directiva.

B J =45,75e. ; CK=54,25e.; D M=47,15e.

Perpendiculares por bajo de la directiva.

O I=46,35e.; L H=55,05e.; N F=51, 45e.

Directiva superior.

A J=48,20e.; J K=53,65e.; K M=98,55e.; M E 46,95e.

Directiva inferior.

A O=2470e.: OL=82,05e.; L N=70,85e.; N E=68,75e.

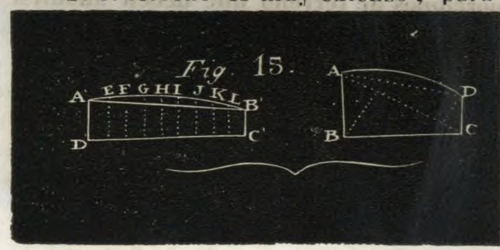
Luego, si *para cada triángulo* es necesario multiplicar la base por la semialtura, y *para cada trapecio* la semi-suma de las dos bases paralelas por la altura; se puede, pues, en lugar de tomar la mitad de cada producto, sumar todos los productos y tomar la mitad de esta suma.

Triángulo	ABJ =	48, 20 e. × 45, 75e.		=	2204,75 e.
trapecio	BCKJ =	(45, 75 e. + 54, 25e.)	56,65 e.	=	5721,65 »
trapecio	CDMK =	(54, 25 e. + 47, 15e.)	98,85 e.	=	10091,52 »
triángulo	DEM =	46, 95 e. × 47, 15e.		=	2213,8925»
triángulo	ENF =	68, 75 e. × 51, 45e.		=	3537,1875»
trapecio	FNLH =	(51, 45 e. + 55, 05e.)	70,55 e.	=	7545,525 »
trapecio	HLOI =	(55, 05 e. + 46, 35e.)	82,05 e.	=	8319,87 »
triángulo	IOA =	46, 35 e. × 24, 70e.		=	1144,845 »
				Total .	40779,2400e.
				Mitad.	20389,62 »

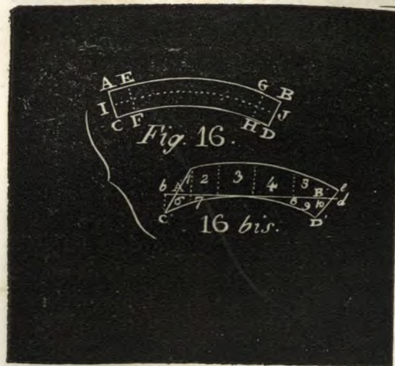
La superficie total del polígono es pues de 20389,62e.c. ó 35,39 fanegas castellanas.

3. Un terreno poligonal puede presentar líneas curvas. Pero una curva debe considerarse como un conjunto indefinido de líneas rectas; luego cuantas mas perpendiculares se bajen sobre la directiva, tanto mas se aproximará el resultado á la verdad. Asi la figura 15 se descompondria en 9 trapecios, cuyos lados AE, EF, FG, etc. pudieran ser considerados sin error sensible como otras tantas líneas rectas.

Si el terreno es muy extenso, para evitar la multiplicidad de subdivisiones, se tira con piquetes una línea recta de un punto de la curva á otro, y se forma por este medio un cuadrilátero rectilíneo A' B' C' D' (fig. 15) el cual se calcula segun las reglas dadas, y una figura curva que se valua segun el procedimiento precedente.

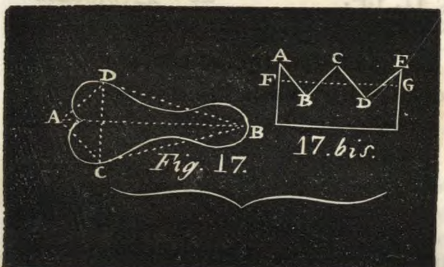


4. Cuando un polígono tiene dos líneas curvas opuestas AB, CD, (figura 16) que siguen casi una misma direccion, se obtiene su superficie multiplicando la lonjitud del medio por la semi-suma de las lonjitudes EF, GH, tomadas en las extremidades.



La lonjitud del medio I J compensa lo que la línea CD tiene de menos y lo que la línea AB tiene de mas; de suerte que la figura queda redueida á un trapecio cuyas líneas EF, GH son los lados paralelos, y la línea IJ la altura.

Si el terreno tiene mucha extension (figura 16 *bis*) se tira la base b A' B' D, se bajan en seguida perpendiculares para obtener trapecios y triángulos, y se obtendrá su superficie, si despues de haber calculado cada figura, se excluyen los triángulos A'b C' y B'*de*.



5. Para medir un terreno de forma sinuosa contínua (fig. 17) se puede calcular su superficie por la trasformacion de esta figura en un polígono de una extension semejante. Es menester plantar piquetes en los puntos A,B,C,D, y trazar el polígono, tratando de *regularizar* los límites del terreno y compensar las porciones que deben sustraerse por las que se añadan: operacion fácil, y que, con algun hábito, se puede ejecutar á simple vista. No obstante, para no cometer errores, será conveniente medir separadamente las porciones de terreno que se añadan y las que se sustraigan.

Tendria que operarse de la misma manera si se hubiesen de convertir en regulares y rectos los límites angulares A, B, C, D, E de un campo (figura 17 *bis*) Despues de medidas las porciones de terreno que deben añadirse ó quitarse, se traza la línea de separacion F. G.

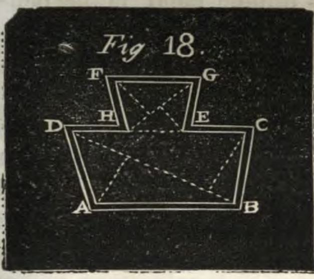
§. 3.° *De algunas dificultades que suelen encontrarse en la práctica.*

1. Cómo se mide un cercado y que debe hacerse respecto á él?—2. Cómo se mide la distancia de dos puntos cuando solo uno es accesible?—3. Cómo se mide la distancia de dos puntos inaccesibles?—4. Qué regla práctica debe seguirse para medir un terreno triangular en que un obstáculo cualquiera impide tirar la perpendicular?—5. Cómo se miden las praderas y los caminos?—6. Qué regla debe observarse en la medicion de los terrenos inaccesibles?

1. La medicion de los cercados ofrece dos dificultades: efectivamente en ellos no se puede trazar con facilidad la directiva, ni es facil ejecutarla en el terreno inmediato.

En cuanto á la directiva, debe ser tirada por dos personas, de las cuales una busca por medio de la escuadra un punto de la línea correspondiente á cada uno de los puntos extremos desde el cual tira una visual, mientras que la otra la señala con uno ó muchos piquetes.

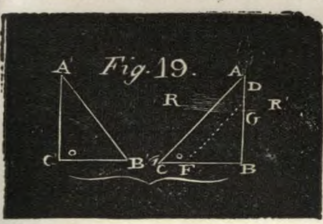
Para evitar la entrada en otra propiedad, se miden los cuadriláteros por la diagonal.



Supongamos que se nos dá á medir el terreno ABCEGFHD (fig. 18.)

Se divide este terreno en dos cuadrílateros ABCD, HEGF; pero, si se adoptase AB por base á fin de bajar á ella las perpendiculares desde los puntos C y D, seria necesario salir hácia A y hácia B. Es preciso, pues, en cada cuadrilátero formar por medio de las diagonales BD y HG dos triángulos que se calculan segun el método ordinario.

Si el muro de cerca no es medianero ó divisorio es necesario comprenderlo todo en la superficie; si lo es, se toma la mitad de su espesor.



2. Dásenos á medir la distancia de dos puntos B, A (fig. 19) de los cuales solo uno es accesible á causa del rio RR'. Es menester, ademas de la escuadra de medicion, tener una escuadra de dibujar cuya base y altura sean de igual dimension.

Se coloca la escuadra de agrimensor en el punto B, se tira una recta desde B á A, despues otra línea recta desde B á C, perpendicular á la línea AB, y se señala con jalones bastante próximos. Entonces se anda hácia atrás á lo largo de BC con la escuadra de dibujar en las manos colocada horizontalmente á la altura del ojo, y la base B' C' vuelta al lado opuesto del rio. Se mira por el ángulo C de esta escuadra hasta que se perciben á la vez los puntos A, B en la direccion de las líneas CA, CB; en fin se planta un piquete en el punto C, y se mide la línea CB cuya lonjitud es igual á la dela línea AB.

Para medir el ancho D G del rio se emplea el mismo medio. Pero si el punto F, por ejemplo, fuese el punto de estacion, es decir, el punto desde donde el ojo aplicado á la escuadra de dibujar pudiese descubrir á la vez los puntos D y B, sería necesario descontar la lonjitud BG de la línea BD y la diferencia GD daria lo ancho del rio.

3. Sea para medir la distancia de los dos puntos A, B, (fig. 20) inaccesibles ó por el pantano M M′ ó por el rio R R′ que separa al agrimensor de la línea AB.

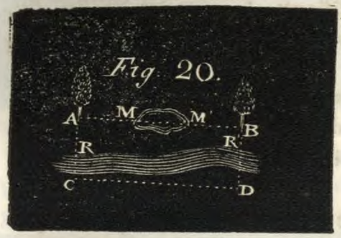


Fig. 20.

Se tira con la escuadra la línea recta CD; desde los puntos C y D se levantan dos perpendiculares, la una hácia A, la otra hácia B, y se mide la línea CD. Su lonjitud será precisamente igual á la distancia del punto A al punto B. Sea para medir el terreno triangular ABC (fig. 21) en donde cualquier obstáculo impide bajar la perpendicular.

Fig 21

1.° Se suman las lonjitudes de los 3 lados; 2.° se toma la mitad; 3.° se extraen sucesivamente de esta semi-suma las lonjitudes de los 3 lados; 4.° se multiplican entre sí las 3 restas; 5.° se multiplica el producto por la semi-suma de los tres lados; y 6.° se extrae la raiz cuadrada del resultado.

Sea $AB=23,15^{e}.$; $AC=45,35^{e}.$; y $BC=38,64^{e}.$

He aquí el detalle de la operacion:

1.° $23,15^{e}. + 45,35^{e}. + 38,64^{e}. = 107,14^{e}.$

2.° $\dfrac{107,14^{e}.}{2} = 53,57^{e}.$

3.° $30,42^{e}.$; $-8,22^{e}.$; $-14,93^{e}.$

4.° $30,42^{e}. \times 8,22^{e}. \times 14,93^{e}. = 3733,282332^{e}.$

5.° $3733,282332^{e}. \times 53,57^{e}. = 199991,93452524^{e}.$

6.° La raiz cuadrada de $199991,93452524^{e}. = 447,2045^{e}.^{e}$

La superficie del triángulo es pues de $447,2045\ ^{e}.^{e}.$

3. **Praderas.** La medicion de las praderas no tiene otra dificultad que la de estar comunmente limitadas por un rio que serpentea, ó por sotos ó por zanjas.

Si la pradera está limitada por curvas, se sigue lo dicho ya anteriormente

Si está limitada por sotos ó zanjas se practica lo dicho respecto á los cercados.

Si está atravesado por un rio ó riachuelo que no se pueda vadear, se descompone el terreno en dos porciones que se miden separadamente.

Caminos. En muchos parajes, cuando un camino atraviesa una pieza de tierra, hace parte de ella y debe ser comprendido en su medicion. En otros paises los caminos pertenecen al dominio público.

4.° Cuando se quiere medir la superficie de un terreno en donde no se puede penetrar, tal como un bosque, pantano, etc., es necesario comprenderla y limitarla en una figura geométrica cuya superficie se pueda hallar fácilmente, como un cuadrado, un rectángulo ó un cuadrilátero irregular. Se sustraen de la superficie total de esta figura las partes del terreno que se han añadido, y el resíduo expresa la superficie que se busca.

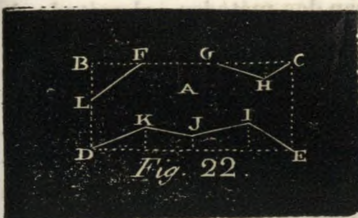


Fig. 22.

Supongamos que tenemos que medir un bosque ó un pantano A (fig. 22).

Se colocan piquetes en el vértice de cada uno de los ángulos del bosque ó pantano en F, G, H, C, E, I, J, K, D, L,; se tiran las dos rectas BC, DE y las dos perpendiculares D B, CE; y se tiene de esta manera un rectángulo que circuye perfectamente el bosque ó pantano A, Se mide la base y la altura de este cuadrilátero para obtener su superficie; se miden en seguida todos los triángulos y los trapecios que están *fuera* de los límites del bosque ó pantano; se calcula la superficie de cada uno en particular y se suman, restando del valor total del rectángulo el de las figuras *excedentes*; la diferencia ó resta expresará la superficie del bosque ó pantano A.

TERCERA SECCION.

PRACTICA DE LA MEDICION DE UN SUELO INCLINADO.

§. 1.° *De los diferentes métodos de medicion empleados para un plano inclinado.*

1. Cuántos métodos se emplean para medir un suelo inclinado?—2. En qué consiste el método de desarrollo?—3. Cuál es el valor de un planc horizontal con relacion á un plano inclinado, y cómo se llama la superficie horizontal?—4. Cómo se llama la superficie inclinada? — Porqué no se emplea en la medicion?—5. Cuál es el método de cultelacion, y de donde viene esta palabra?—6. Cuáles son los conocimientos necesarios para practicar la cultelacion?

1. Para medir el suelo inclinado se emplean dos métodos, el *método de desarrollo* y el *método de cultelacion.*

2. El método de desarrollo consiste en medir la superficie, tal como se presenta, sin atender á su inclinacion. Se siguen en este caso las reglas ordinarias, y si el terreno es inaccesible, se emplean lineas auxiliares por su perímetro. Debe solamente notarse que, para marcar con piquetes una directiva, es necesario, si está inclinada, multiplicar los piquetes en razon de su pendiente, pues sin esta precaucion podria suceder que á pocos pasos de descenso se perdiese de vista el piquete.

3. Un plano horizontal da una superficie menor que un plano inclinado. La superficie horizontal se llama *base productiva.*

4. La superficie inclinada se llama *base de desarrollo*; pero como se ha reconocido por esperiencia que los planos inclinados no conservan la humedad, que las lluvias los deterioran, y que su cultivo es penoso, se ha convenido en no medir mas que la base productiva.

5. Se llama *método de cultelacion* el procedimiento por el cual se refiere un terreno inclinado á su base productiva.

Este método se llama asi, porque consiste en reducir á porciones horizontales la pendiente del terreno inclinado.

6. Para practicar la cultelacion es necesario conocer la *nivelacion.*

§. 2, *De la nivelacion.*

1. Qué es nivelar ó hacer una nivelacion? Qué es línea de nivel? Qué es la diferencia de nivel?—2. Cómo se llama la línea inclinada que parte de la vertical á unirse con la horizontal?—3. Cuántas líneas hay que considerar cuando se nivela un terreno inclinado?—4. En qué casos se emplea la nivelacion?—5. Qué instrumentos se usan para nivelar dos puntos bástante próximos? Qué es el nivel de aire? Qué es el nivel de plomada ó de albañil?—6. Cómo se halla con el nivel de albañil la diferencia de altura entre dos puntos bastante próximos?—7. Cómo se hace si no puede obtenerse el nivel con una sola operacion?—8. Qué nivel se emplea para nivelar dos puntos muy distantes? Describir el nivel de agua. Que es una escala? Qué es un índice?—9. Cómo se halla con el nivel la diferencia de altura entre dos puntos muy distantes?—10. Qué son estaciones?—Què son puntos de señal?

1. *Nivelar ó hacer una nivelacion* es determinar la altura comparativa de muchos puntos de un terreno.

Se llama *línea de nivel* la horizontal sobre que se encuentran dos puntos. La *diferencia de nivel* es la diferencia que hay entre la altura del uno y la del otro.

Fig. 23.

2. Se llama *talud* la línea inclinada CA (figura 23) que parte de la vertical BC para unirse á la horizontal AB. Cuando los taludes tocan al suelo natural toman tambien el nombre de ramplas.

3. Cuando se nivela un terreno inclinado, hay que considerar tres líneas: 1.º la *horizontal*, que fija el nivel; 2.º la *vertical*, que indica la altura buscada entre dos puntos; 3.º el *talud.*

Estas tres líneas tomadas colectivamente, determinan sobre el terreno un sólido, cuyo *corte* ó *perfil* se presenta bajo la forma de un triángulo que tiene por base la 1.ª, por altura la 2.ª, y por hipotenusa la 3.ª

4. La nivelacion se emplea en tres casos: 1.º en la construccion de caminos, en la conduccion y direccion de agua, en el desagüe de pantanos; 2.º en la suputacion cúbica de los trabajos de terraplen; 3.º en el método de cultelacion.

5. Para nivelar dos puntos próximos nos servimos de dos especieo de nivel; el *nivel de aire* y el *nivel de plomada* ó de *albañil.*

El nivel de aire es muy sensible. Está formado de un tubo de cristal colocado sobre un plano AB (fig. 24) que le permite adaptarse sobre una regla. Cuando la burbuja de aire que se halla en el líquido del tubo, se detiene en medio de dos puntos marcados, es una prueba de que están á nivel.

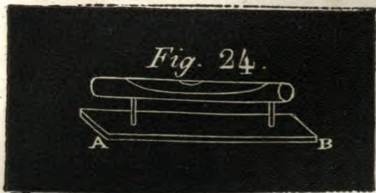


Fig. 24.

Se suple este nivel por el de albañil.

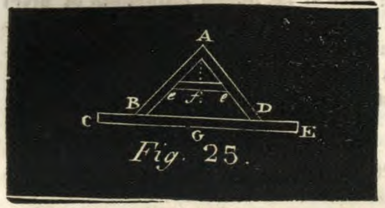


Fig. 25.

Este nivel se compone de dos regletas iguales AB, AD (fig. 25) unidas en A por una muesca, en *c* y en *e* por una traviesa. En el medio de la traviesa hay una raya *f* por donde debe pasar la plomada cuando el nivel esté exacto.

Con este nivel se hace uso de dos reglas de lonjitud de 2 ó 4 metros, de 1 ó 2 toesas. Estas reglas deben estar divididas en pies, pulgadas, etc. cuando se mide por toesas, en decímetros y centímetros cuando se mide por metros.

6. Para hallar con el nivel de albañil la altura comparativa de dos puntos próximos A B (fig. 26) el agrimensor coloca horizontalmente la regla DB; mientras que su ayudante va á colocar en A la vertical AD. Hecho esto, se pone el nivel sobre la regla DB, que se baja ó levanta sucesivamente hasta que el nivel esté exacto; la medida hallada EA es la altura buscada.

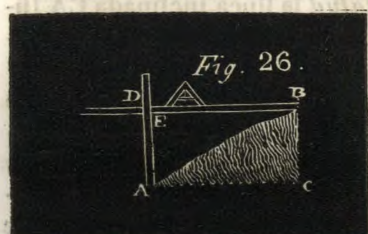


Fig. 26.

7. Si la nivelacion no puede ejecutarse de una vez (fig. 27) se mide primero OP, luego QR, despues S M, se suman las tres mediciones obtenidas; y la suma de estas tres verticales es igual á la línea NB como la suma de las tres horizontales SR, QP, ON es igual á la base MB.

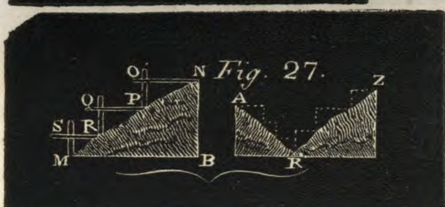
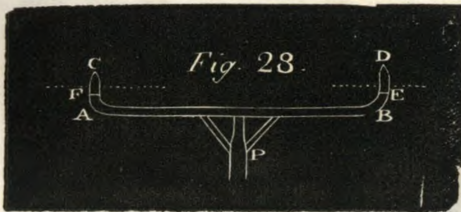


Fig. 27.

Si se quiere obtener la diferencia de nivel entre dos puntos A, Z y un tercero R (fig. 27) se suman las extensiones verticales que se hallan descendiendo de A á R, y las que se hallan subiendo de R á Z; se resta en seguida la suma menor de la mayor y el resíduo es la diferencia buscada.

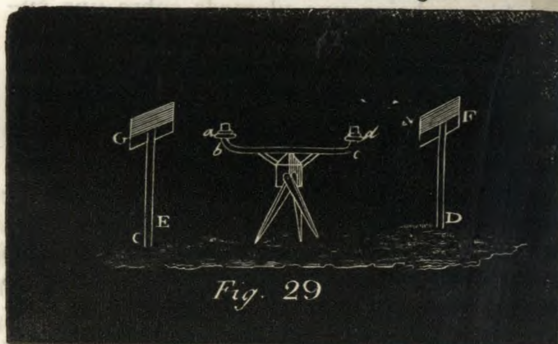
8. Para nivelar dos puntos muy distantes se emplea el *nivel de agua*.



El nivel de agua se compone de un tubo AB de hoja lata (fig. 28) soldado por sus dos extremos, en los que están perfectamente ajustados dos cilindros de cristal C, D; se sostiene el tubo horizontalmente sobre un pie en P; se vierte agua colorada en uno de los cilindros y hay nivel cuando se eleva á la misma altura en los dos.

Con el nivel de agua nos valemos de una escala y un índice. La escala es una regla de 3 á 4 metros de altura dividida en metros, decímetros y centímetros. El índice es una segunda regla que resbala á lo largo de la escala y que indica la diferencia de nivel en metros, decímetros y centímetros.

9. Para hallar con el nivel de agua la diferencia de altura de los puntos C



y D (fig. 29) se fijan en estos puntos dos piquetes, mitad blancos, mitad negros, divididos en porciones métricas: despues se coloca el instrumento en un punto, desde donde se puedan ver los dos piquetes F y G. El agrimensor envia al punto C á su ayudante que levanta ó baja segun la señal, la extremidad superior movible del piquete, mientras que él enfila su nivel. Si, fijo el ojo en él divisa el punto de índice del piquete, es decir, la línea formada por la separacion de los dos colores, hace señal á su ayudante para que tenga inmovil la parte superior del piquete; el ayudante anota entonces los metros y las partes de metro sobre el piquete, contando desde el suelo hasta el punto de índice. Para saber la diferencia de altura entre D y C es necesario deducir la altura del piquete FD, y se tiene en EC la diferencia buscada.

10. Si el terreno es muy desigual, es necesario cambiar muchas veces de plano, que es lo que se llama *una alineacion parcial*; los puntos donde verifica las operaciones el agrimensor, se llaman estaciones. La suma de las alturas parciales obtenidas asi dan la altura total buscada.

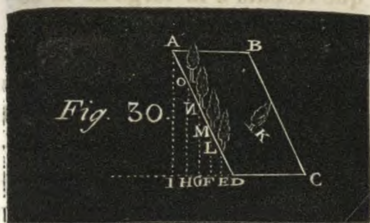
Se llaman puntos de *señal* los que se anotan dos veces en la operacion.

§. 3. Método de cultelacion.

1. Qué nombre se da á la base productiva?—2. De dónde proviene el nombre de base productiva?—3. Cómo se reduce un terreno á su base productiva?—4. Cuál de los dos métodos, de cultelacion ó desarrollo es preferible?

1. La base productiva que se llama tambien *proyeccion horizontal* es el plano de nivel supuesto debajo de la pendiente del terreno inclinado. La superficie, que corresponde á plomo debajo de la superficie real, es pues la proyeccion horizontal.

Asi la proyeccion horizontal de un terreno inclinado no es otra cosa que

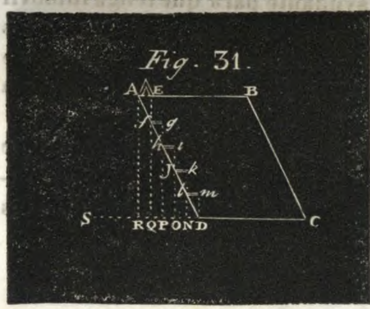


la figura IAD (fig. 30) que se podria trazar, si de todos los ángulos de este terreno se hiciese bajar una plomada sobre una superficie nivelada ID.

La *base productiva* se llama asi, porque está admitido como principio de economía rural que un campo inclinado produce en razon, no de su estension real, sino de su proyeccion horizontal. En efecto, si este campo producia en razon de su superficie, no podria esto suceder sino en el caso de que los vegetales crecieran perpendicularmente á esta superficie, tal como el árbol K (fig. 30), lo cual no es asi; porque la esperiencia demuestra que crecen verticalmente como los árboles L, M, N, O, que, colocados á lo largo de la línea DA, ocupan toda la proyeccion horizontal de esta línea.

3. Si el terreno que se quiere reducir á su base productiva es de inclinacion suave, se mide con la cadena, como ya se dijo anteriormente.

Si la inclinacion del terreno es rápida, en vez de cadena, se emplea una



regla de 5 á 6 métros (fig. 31) provisto de una plomada. Se le traslada sucesivamente de A á E, de *f* á *g*, de *h* á *i*, de *j* á *k* etc. Se ve que la extension AE=RQ, *fg*=QP, *hi*=PO, *jk*=ON, *lm*=ND; luego la suma de las porciones horizontales que se obtiene midiendo una línea inclinada, es absolutamente la misma que se obtendría si se midiese horizontalmente y de una sola vez esta linea inclinada; en otros términos igual á la de la proyeccion horizontal.

4. Si la pendiente es suave, debe emplearse el método de desarrollo, porque entonces el error es casi nulo; en caso contrario el método de cultelacion merece la preferencia.

4.ª SECCION.=DIVISION DEL TERRENO HORIZONTAL INCLINADO.

§. 1. *De la restitucion de terrenos.*

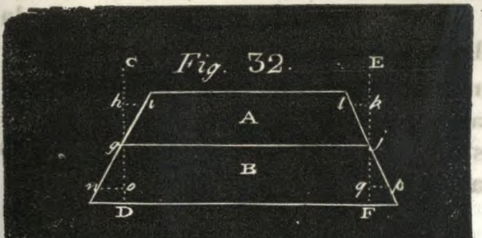
1. El arte del agrimensor se limita á determinar la estension de una superficie?- 2. Qué debe hacer el agrimensor cuando, de dos terrenos contiguos, tiene el uno menos y el otro mas de la medida?- 3. Cómo se restituye un terreno partierdo de una base encontrada por oblícuas que forman á sus extremidades 1.° ángulos agudos, 2.° ángulos obtusos?- 4. Cómo se restituye un terreno sobre un cuadrilátero rectilíneo ó curvilíneo, en que una de las extremidades es mas larga que las otras?

1. El arte del agrimensor no se limita á buscar la superficie de un terreno; es necesario tambien que tenga medios: 1.° para determinar exactamente lo que en él se halla, sea de mas ó de menos, relativamente á los títulos; 2.° para dividir la propiedad en las proporciones que aquellos indiquen.

2. Cuando de dos terrenos contiguos el uno tiene mas y el otro menos de lo que les corresponde, y el agrimensor es llamado para restituirlos á su capacidad legal, debe: 1.° examinar los títulos de cada propietario; 2.° medir los campos en masa en la direccion comun á todas las piezas, á menos que la línea divisoria no esté fijada por setos ó algun foso, y 3.° medir cada campo en particular.

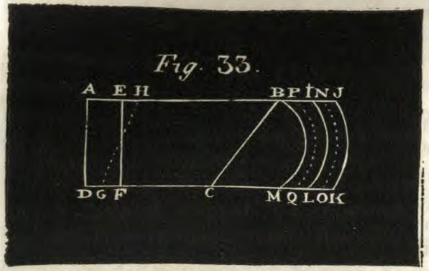
Pues la medicion en masa da mas exactamente la superficie total que la suma de las piezas medidas en particular, porque el cálculo es tanto mas exacto en general cuanto menos se repiten las operaciones. La diferencia de los dos resultados debe ser repartido proporcionalmente á cada pieza.

3. 1.° Para restituir un terreno, partiendo de una base encontrada por las oblícuas que forman en sus extremidades ángulos agudos, se divide el número de métros que han de tomarse de una superficie por la lonjitud de esta superficie; pero como esta operacion supone un rectángulo, se tendria de menos la suma de los pequeños triángulos exteriores *ghi klj* (fig. 32). Es necesa rio, pues, dividir la suma de estos triángulos por la lonjitud de la superficie, disminuidas las bases *hi, kl*.



2.° Si las oblícuas forman ángulos obtusos (fig. 32) como sucede en la superficie B, es evidente que debe operarse de una manera inversa, pues que los pequeños triángulos son interiores.

5. 1.º Para restituir un terreno sobre un cuadrilátero rectilíneo en que una de las extremidades es mas larga que la otra, se divide el número de métros que hay que tomar por un lado ACD, del trapecio ABCD (fig. 33). Supongamos que nos resulte 1,50 est. por cociente; si se saca 1,50 est. de DF para añadirlo á AE, se tendrá una cantidad igual al rectángulo, y la línea opuesta á la base, seguirá la oblicuidad necesaria.



2.º En un cuadrilátero curvilíneo la curva JK (fig. 33) puede ser considerada como la base de un rectángulo, luego dividiendo por JK la cantidad del terreno que se ha de restituir, se tendrá por cociente la anchura IN, LO, IP, LQ.

Si las extremidades BJ, MK, son oblícuas suficientemente pronunciadas se las toma en consideracion como hemos dicho, núm. 4.

§. 2, *De la particion de propiedades.*

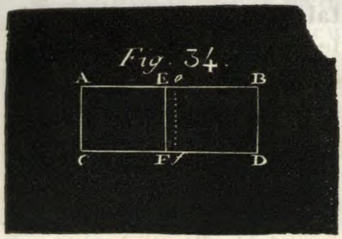
1. En qué consiste la dificultad de la particion de las propiedades?- 2. Cuáles son los conocimientos necesarios para la particion de propiedades?– 3. Cómo se divide un campo de forma rectangular, en 2, 3...... partes iguales?- 4. Cómo se divide en varias partes iguales un campo de forma triangular, paralelográmica, ó de un trapecio? - 5. Da da una superficie, cómo se le dá la forma de un cuadradilongo, ó en otros términos, cómo se convierte un terreno de forma irregular en un rectángulo de un valor equivalente?– 6. Cómo se divide en cierto número de partes iguales un campo de forma poligonal irregular?

1. La particion de las propiedades es por lo comun necesaria por efecto de una herencia ó por venta.

Esta particion es generalmente dificil. No basta en efecto, dividir la propiedad en porciones de una extension perfectamente igual, sino que es tambien necesario atender á la calidad del terreno. Hay fanega de terreno que vale por 2 y 3 de inferior calidad. La operacion de la particion exije, pues, mucha habilidad unida á una acrisolada buena fé.

2. La geometría nos ofrece un gran número de construcciones propias para la particion de propiedades; la aritmética nos proporciona el medio mas fácil, una simple division. En la práctica se combinan estos dos medios que se auxilian mútuamente.

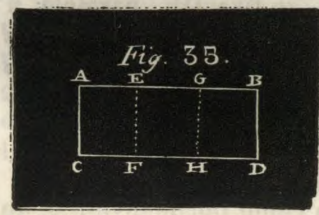
3. 1.° Para dividir en dos partes iguales un campo de forma rectangular, se comienza por señalar con jalones una línea en la direccion FE (fig. 34) que divida lo mejor posible este campo en dos partes iguales. Se mide separadamente cada una de estas dos mitades; se suman sus dos superficies y se toma la mitad, la cual será la capacidad de cada una de las dos partes del campo.



Si la línea FE no llena esta condicion se mide su lonjitud; se divide por el valor lineal de FE el número de varas cuadradas que deben añadirse á la mitad menor, y el cociente dará la distancia lineal á que debe colocarse la línea de particion.

Si la porcion B D F E contiene, por ejemplo 50 varas cuadradas de mas, á la porcíon ACFE deben restituirse 25. Pero supongamos FE=20 varas; dividiendo 25 por 20 de lonjitud tenemos por cociente 1,25 varas; es decir, que la línea de particion FE debe aproximarse hácia BD de 1,25 varas en *ef*.

1.° Si el rectángulo ABCD (fig. 35) debe ser dividido en 3 partes iguales, se trazan aproximativamente con jalones las dos líneas FE, GH que deben limitar las 3 partes de la pieza. Se mide separadamente cada una de estas 3 partes, se suman sus superficies y se toma el tercio, que deberá ser el contenido de cada parte.



Si una de ellas AEFC, por ejemplo, es menor de 40 varas cuadradas, se mide la lonjitud de la línea FE=20 varas; se dividen las 40 varas cuadradas por 20, y se tiene 2 por cociente; es decir que debe retrocederse 2 varas hácia HG la línea de particion F E. Se procede de la misma manera en la segunda porcion EGHF; en fin la tercera GBDH tendrá su medida exacta si la operacion ha sido bien hecha.

De la misma manera se operaría si el campo debiese dividirse en mayor número de partes.

4. 1.° Para dividir en tres partes iguales un campo de forma triangular dispuesto de tal suerte que cada partícipe quiera gozar de su pozo ó de una salida á uno de los vértices, basta dividir la base AB (fig. 36) en tres partes iguales y tirar rectas desde el vértice á todos los puntos de division.

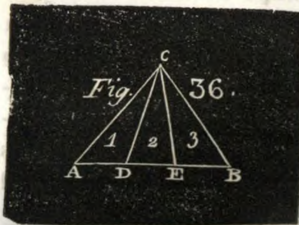


Fig. 36.

Si el triángulo debe ser dividido en cuatro partes iguales, se toma un punto C (fig. 37) en la mitad del lado AB; otro punto en D, en la mitad del lado AF; despues otro punto E, en la mitad del lado FB; se unen DE, DC, CE, y se obtienen las cuatro partes equivalentes.

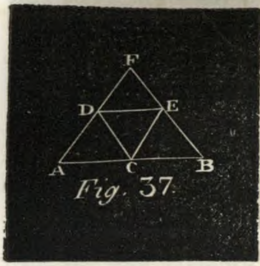


Fig. 37.

Otro procedimiento. Se toma un punto D, en la mitad de AC (fig. 38), se tira DE, paralela á AB; se dividen las líneas AB, DE en tres partes iguales, se unen los puntos de division por medio de las rectas FH, GI y el triángulo resulta dividido en cuatro partes equivalentes.

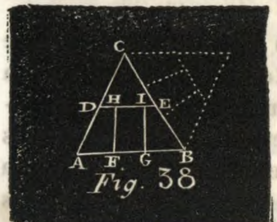


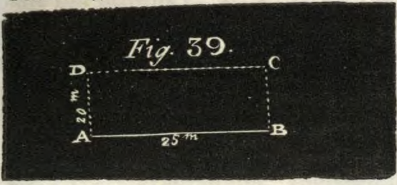
Fig. 38

2.° Por la figura 38 se ve tambien la manera como puede dividirse un paralelógramo en 8 partes iguales.

3.° Finalmente podrémos siempre, como lo indica el trapecio ADEB, dividir un trapecio en un número cualquiera de partes, siendo para ello suficiente tener en cada base del trapecio un número de partes iguales.

5. Conocida la superficie de un terreno para darle la forma de un cuadrilongo, ó para convertir un terreno de forma irregular en un rectángulo de superficie equivalente, se mide la lonjitud de uno de sus lados, que será la destinada á uno de los del cuadrilongo y se divide esta lonjitud por el número de estadales cuadrados que deba contener la figura: el cociente será el número de métros que debe darse á la altura del rectángulo pedido.

Supongamos que se ha de trazar una pieza de terreno rectangular que contenga 500 estadales cuadrados de superficie y cuya base sea la línea AB (fig. 39). Supongamos AB=25 estadales; dividiendo 500 estadales cuadrados por 25 estadales, obtendrémos por cociente 20, que será la altura que deben tener los lados AD y BC. Tirando entonces las dos líneas paralelas AD, BC, de una lonjitud de 20 estadales, perpendiculares á la AB, y paralela á esta la DC, obtendrémos el rectángulo pedido ABCD, cuya superficie es 500 estadales cuadrados.



6. Para dividir entre varios herederos y en partes iguales un campo de forma poligonal irregular, se mide la totalidad del terreno en estadales cuadrados, se divide el número obtenido en varias porciones iguales, como en 2 mitades, 3 tercios, 4 cuartos, 5 quintos, 8 octavos, etc., segun el número de participes, y la extension de la porcion que debe tocar á cada uno; ó lo que es lo mismo, se hace le division por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. partes, segun las circunstancias, y se obtiene así el número de estadales cuadrados que cada heredero puede reclamar como su herencia. Hecho esto, se buscan y trazan sobre el terreno los límites de cada superficie parcial, dándoles en cuanto sea posible la figura de un cuadrado, un rectángulo, ó un trapecio, elijiendo, si el terreno lo permite, la figura que mejor convenga á los copartícipes.

Supóngase que tenga que dividirse entre tres personas un campo cuya extension superficial sea de 10.000 estadales cuadrados, de manera que el primero tenga la mitad del todo; el segundo, la tercera parte; y el tercero la sexta. El 1.º tendrá, pues, los $^6/_{12}$ del todo, es decir, 500 estadales cuadrados; el 2.º $^4/_{12}$, es decir, 3333 estadales cuadrados, y el 3.º $^2/_{12}$, es decir, 1667 estadales cuadrados. Estas diversas superficies se convierten en rectángulos equivalentes segun el método indicado, núm. 5.

SEGUNDA PARTE.

Levantamiento de planos y modo de darles la aguada.

PRIMERA SECCION.

LEVANTAMIENTO DE PLANOS.

§. *I. Definiciones.—Escala.—*

1. Qué es levantar un plano, y que relacion tiene este arte con la agrimensura?—2. Qué es una escala simple de proporcion y cual es su uso?—3. De qué depende el tamaño de una escala? ¿Cuál es la mas cómoda?—4. Cuál es la escala de los décimos y su uso?

1. *Levantar un plano* es trazar sobre un papel la forma de un terreno con todos sus detalles, en dimensiones reducidas que conserven la proporcionalidad de sus lados y la igualdad de sus ángulos.

Aunque el arte de levantar planos difiera de el del agrimensor, ambos se prestan mútuo auxilio.

2. La *escala simple de proporcion* es una línea que representa la lonjitud que debe ocupar en un plano, tal ó cual número de estadales en el terreno, sirviendo para poner todos los lados del plan en proporcion.
(Véase dibujo lineal pag, 86 fig. 1.)

Si la escala AB representa diez estadales, Ao ó Ac representará 1 estadal; el *Ai* ó *Ad*, 2 estadales; A 2 ó Ae, 3 estadales etc. Si necesitásemos, pues, representar una lonjitud de 7 estadales $^1/_2$, colocaríamos una punta del compás sobre la cifra 7, abriéndole hasta que la otra punta llegase á la mitad de *Ao* ó *Ac*.—Si una línea del plano fuese mayor que la escala, se coloca una abertura de compás igual á AB, sobre la línea del plano cuantas veces sea posible, y si queda alguna resta, se gradua en estadales y por medio de la escala.

3. El tamaño de una escala sencilla es arbitrario, y se le hace depender generalmente del plano. Sin embargo las escalas decimales ó de 10, 100 etc. partes son de un uso mas fácil que las arbitrarias.

4. Llámase escala de *décimas*, la que nos da las décimas de una medida cualquiera.—El dibujo lineal nos dió su trazado pag. 86 fig. 1.—Veamos ahora su construccion.

Sobre una línea indefinida CI se colocan varias aberturas de compás arbitrarias, de las cuales, cada una CD, DF, FH, etc. representan 100 partes. En los puntos C, D, F, H, etc. se levantan las perpendicularas CA, DB, FE, HG, etc. sobre cada una de las cuales se colocan 10 aberturas iguales de compás, pero arbitrarias. Se tira entonces ABG: se divide CD y se colocan las 10 partes sobre AB, se tiran en seguida trasversales y de este modo queda dividida CD en 100 partes. Finalmente por los puntos de division correspondientes de CA, DB, DE, se tiran líneas rectas que son otras tantas paralelas á CD.

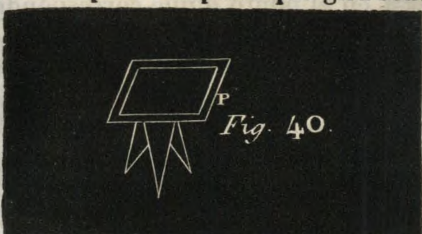
Sea CD=100 estadales, tendrémos tambien DF ó FH=100 estadales.

Para 100 estadales se tomará, pues, con el compás de F á D;
Para 103 estadales . . . . de *l* á *n*
Para 94 estadales . . . . de *o* á 4
Para 47 estadales . . . . de *p* á 7

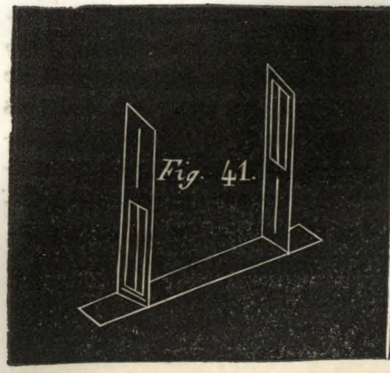
§. 2. *Del levantamiento de planos por la plancheta.*

1. Qué esl plancheta?—Su descripcion —¿Qué es alidada?—Por qué todo terreno cuyo plano se levanta con la plancheta, resulta medido por el método de cultelacion? 2.—Cómo se mide un ángulo con la plancheta?—3. Cómo se mide por la plancheta un terreno poligonal desde un punto del mismo? —4. Qué se verifica cuando uno puede entrar en el terreno que va á medir? —5. Qué se necesita para cerrar exactamente un polígono?—Cómo se llama este método?—6. En qué consiste el método de interseccion? ¿Cuáles son sus ventajas?

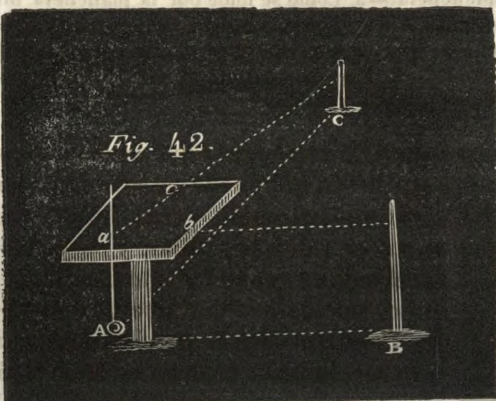
1. La *plancheta* es una tablita en forma de rectángulo que se coloca sobre un palo ó trípode que gira sobre sí, á fin de que pueda colocarse en una posicion horizontal.—Una bolita que se coloca sobre la tablita, y rueda hácia el lado en que se halla la pendiente, indica que debe levantarse de este lado. Unos tornillos de presion detienen este movimiento cuando ha llegado á obtenerse la horizontabilidad. (fig. 40)



Una hoja de papel está estendida y encolada por los lados con goma.

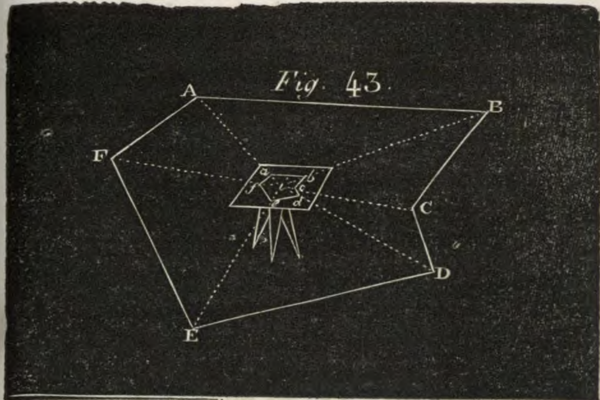


Se emplea tambien ademas una *alidada* (fig. 41.) Consiste en una regla de cobre á cuyos extremos se hallan ajustadas con unos goznes dos láminas metálicas que pueden levantarse perpendicularmente y detenerse en esta posicion. Estas láminas tienen dos hendiduras ó pínulas y ventanas mas anchas en las cuales está estendido un pelo ó cerda vertical. Mirando por estas hendiduras pueden dirijirse los rayos visuales hacia los puntos del terreno. De lo que resulta que el plano de un terreno levantado con la plancheta, está siempre representado por el método de cultelacion, puesto que este procedimiento busca siempre la proyeccion horizontal.



2. Para medir con la plancheta sobre un terreno el ángulo CAB (fig. 42), se coloca desde luego en A el instrumento en una posicion horizontal, se clava en seguida una aguja en el punto *a* que corresponde verticalmente al punto del terreno; se tira la línea *ac* por medio de la alidada aplicada contra la aguja y alineada sobre C; luego, sin separar el instrumento, se apoya de nuevo la alidada contra la aguja dirijiéndola hácia B, para tirar la línea *ab*, obteniendo asi el ángulo *cab*, cuya medida nos dará á conocer el semicírculo graduado.

3. Para medir con la plancheta un terreno poligonal ABCDEF (figura 43) en el que nos hallemos colocados, marcarémos desde luego sobre el papel un punto *i* para representar allí el lugar de estacion, donde se clava una aguja, como en el ejemplo anterior; se dirije en seguida la alidada hácia el punto A; se traza á lo largo del borde de la regla la línea *ia*A que va á su vértice; se mide la distancia de la estacion al punto A; y se coloca sobre el papel la distancia *ia* con tantas unidades de la escala como estadales contiene *i* A: *a* será, pues, el plano de A.— Se tirarán del mismo modo las rectas *ib*B, *ic*C; y se medirán las longitudes *i* B, *i* C... para hallar los planos *b*, c,... de B, C... Finalmente uniendo estos diversos puntos, el polígono *abcdef* será el plano del polígono ABCDEF.



Se comprueba el polígono del plano, colocando sobre la escala una abertura de compás igual á uno de sus lados, y midiendo sobre el terreno el mismo lado; con lo cual se viene en conocimiento de la identidad del resultado. Hecha esta prueba, se trazan en el interior del plano los accidentes que se encuentren en el terreno, como los edificios, caminos, arroyos, etc.

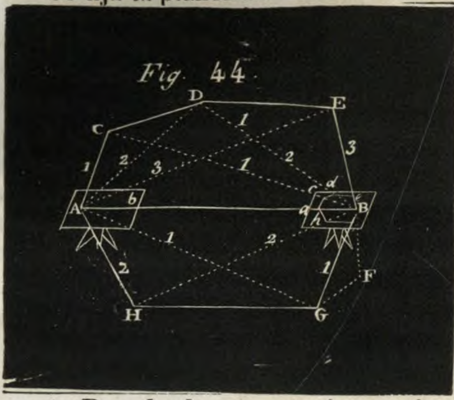
4. Si uno no pudiese colocarse en un punto del terreno, se coloca desde luego la plancheta en A (fig. 43) y se describe el ángulo BAF; se mide en seguida el lado AF, cuya distancia tomada en la escala se traslada al plano donde queda representada por *af*. Despues de haber colocado bien horizontalmente la plancheta en el punto F, se mide el ángulo AFE, y se traza la línea *fe*, sobre la cual se coloca una abertura de compás tomada sobre la escala igual á la distancia FE. En el punto E, se repite la operacion hecha en A y en F. Finalmente llegando al punto B, es preciso que enfilada la alidada con A, la línea tirada desde el punto *b* venga á unirse exactamente á la línea en que se encuentra el punto de partida *a*. Si se consigue, se dice que se ha *cerrado el polígono*.

5. Para cerrar exactamente un polígono, uso bastante raro y siempre difícil, es necesario; 1.º que la plancheta esté perfectamente horizontal en cada estacion; 2.º que las medidas se tomen con mucho cui-

dado; 3.º que la alidada este bien dirijida sobre la alineacion; 4.º que las distancias tomadas sobre la escala correspondan sin error á las del terreno.

6. El *método de interseccion* consiste en establecer sobre el terreno una base, para obtener por medio de triángulos diversos puntos que sirven para la construccion del plano.

Se fija la plancheta en uno de los vértices A del polígono ACDEBFGH (fig. 44): se trazan sobre el papel las direcciones AC, AD.. que van al vértice, y se anotan estas líneas con los números 1, 2, 3... yendo de izquierda á derecha tanto de un lado como de otro de la base A*b*. Se mide la distancia de la estacion A con el punto B, y se coloca sobre la línea A*b* una longitud igual en partes de la escala á esta distancia: *b* representará la estacion B.—Se traslada uno á este punto B, y desde esta estacion se tiran visuales al punto A con la alidada, que trazará la recta AB.—Estando el instrumento horizontalmente fijo sobre su pie, se clava una aguja en el punto *b* que está verticalmente encima de B.—Finalmente tirando visuales desde el punto B, á los diversos vértices C, D,.... se trazan en el papel rectas tendentes á estos puntos y se marcan estas líneas con los números 1, 2, 3... yendo siempre de izquierda á derecha de los dos lados de AB.—Las líneas indefinidas de los mismos números que se habrán trazado, tanto en la estacion A como en la B, se cortarán dos á dos y cada punto de interseccion determinará el vértice *e, d,*... Asi el plano del polígono levantado será *acedbfgh*.



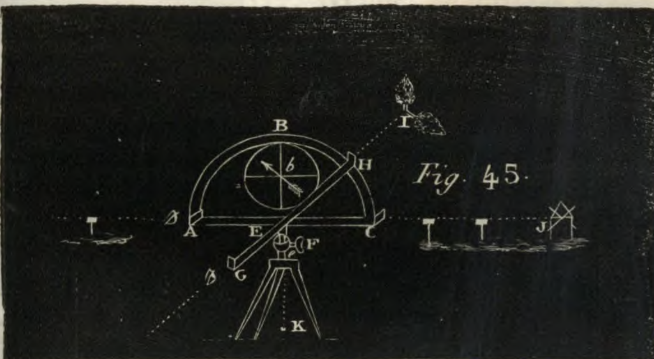
Si algun punto F invisible de A no ha podido determinarse con este procedimiento, se vá á estacionar en un lugar G, ya determinado sobre el plano, y podrémos trazar una línea *gf* que contenga este punto; por otra parte se ejecuta en los puntos B y *b* como si B*b* fuese una base medida.

El método de interseccion presenta la doble ventaja de no tener que medir mas que una línea, y que el plano se encuentra todo trazado, aun suponiendo que el terreno sea horizontal, porque las pínulas dan por medio de radios prolongados ó subidos, los diversos puntos del terreno, hallándose todas estas líneas reducidas á la horizontal.

§. 3. *Del levantamiento de planos con el grafómetro.*

1. Qué es el grafómetro?– Su descripcion.– A qué se llama vernier?– Cuál es la brújula del grafómetro?– 2. Cómo se comprueba el grafómetro?– 3. Cuál es su uso?– 4. Cómo se hallan los ángulos con el grafómetro y como se hace la evaluacion de los minutos del vernier?– 5. Cómo se evalúa una perpendicular?– 6. Cómo se mide un polígono?– 7. Cómo se mide la altura de una torre.

1. El *grafómetro* es un instrumento destinado á medir los ángulos que forman las líneas ó visuales que desde el ojo del observador van á las diferentes señales que se pueden ver en un terreno. Consiste en un semicírculo de cobre ABC (fig. 45) cuyo limbo está dividido en 180.°, y cortado por un diámetro AEC que forma cuerpo con el instrumento; pero el diámetro CH solo está sujeto á él por el centro E, y se mueve para



recorrer la semicircunferencia desde 0° á 180.° El primero se llama *alidada inmovil*, el 2.° *alidada móvil*. Las dos alidadas están terminadas por dos pínulas verticales para mirar los jalones. La alidada móvil está provista en uno de sus extremos de un vernier, que da las fracciones de los grados. Este *vernier* (1) consiste en un arco de cobre concéntrico á la semi-circunferencia, y cuya division difiere del limbo; puesto que señala 30′; por manera que la comparacion de estas dos divisiones permite añadir á los grados marcados sobre el limbo los minutos que da el vernier. Entre el limbo y la alidada inmóvil hay una pequeña brújula *b* que sirve para orientar el plano, esto es, para reconocer la posicion del plano con relacion al meridiano; es una línea dirijida de *norte* á *sur:* una perpendicular á ella dá los otros dos puntos cardinales, *este* y *oeste*. Finalmente para que el instrumento tome las diversas inclinaciones necesarias para ponerse de nivel, está montado sobre una bola F, llamada *rodilla*, que se adapta á una especie de concha que se cierra á voluntad por medio de un tornillo.

(1) Para la teoria del vernier, véanse las nociones de la fisica.

2. Para comprobar el grafómetro, se traza un triángulo sobre el terreno, y se miden sus angulos separadamente. Si su suma llega á 190°; ó hay una muy lijera diferencia, es prueba de que el instrumento es bueno. Se pueden tambien marcar al rededor del observador un cierto número de objetos, y medir sus ángulos con el instrumento: la suma de estos ángulos debe ser igual á 360.° valor de 4 rectos.

4. El *grafómetro* sirve: 1.° para medir los ángulos; 2.° para levantar ó bajar una perpendicular sobre una recta dada; 3.° para medir alturas inaccesibles.

4. Para medir un ángulo se coloca exactamente el grafómetro en el vértice del ángulo que se quiere medir. Hé aquí como se consigue; 1.° se suspende al trîpode una plomada FK (fig. 45) que correspondiendo al centro del instrumento caiga verticalmente sobre el punto del vértice E; 2.° se nivela en seguida el limbo; porque si se inclinase á derecha ó izquierda haria cometer un gran error en la medida de los ángulos. Conseguido el nivel y colocado el centro del instrumento precisamente en el vértice del ángulo, se alínea la alidada inmóvil AC sobre el lado en que están colocados los jalones CJ: se fija en seguida el limbo cerrando el tornillo de presion *a;* y colocando luego el ojo sobre la pínula G se vuelve la alidada hasta tanto que el punto *Y* del otro lado se encuentre en el rayo visual. Entonces queda formado el ángulo y solo resta contar los grados y partes de grados comprendidos en el arco CH para obtener su medida. Los grados y los semi-grados no ofrecen ninguna dificultad; pero no sucede le mismo con los minutos. Sea AB (fig. 46) la porcion del limbo empleada en medir el ángulo YEJ, y *ob* el *vernier* ajustado á la alidada móvil. Si el 0 del *vernier* correspondiese exactamente á la diferencia Ab del 50°, se contarían 50° para la medida del ángulo. Si por el contrario cayese sobre el punto *g* de los semi-grados, leeriamos 50° y 30′; pero si el 0° del vernier cae sobre una porcion de semi-grado que la vista no pueda apreciar con exactitud, es necesario buscar hasta que la señal de los minutos 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., corresponda á una señal de grados ó semi-grados del limbo. Aqui es la señal 1.ª de minutos que corresponde á la señal 55°, de donde se sigue que la medida buscada del ángulo es 50° y 10′. Cuando en vez de partir de

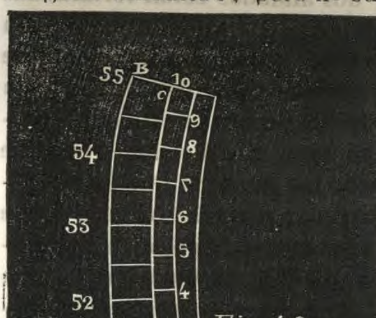


Fig. 46.

0º sobre el limbo, se procede desde 180º para estimar los grados. los minutos se cuentan á la inversa.

5. Para levantar una perpendicular sobre una recta dada AB (figura 47) se coloca el grafómetro en el punto C; se dirije la alidada inmóvil segun la direccion AB, y basta entonces dirijir la alidada móvil por el grado 90 del limbo para obtener la direccion CD que es la perpendicular pedida.

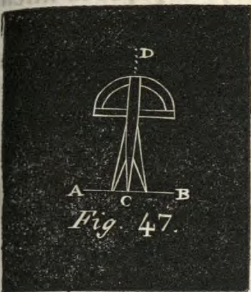


Fig. 47.

Para bajar una perpendicular del punto D, sobre AB, se coloca la alidada móvil sobre el grado 90 del limbo; se dirije la alidada inmóvil en la alineacion AB, y se busca por medio de tanteos un punto sobre la linea AB tal que las pínulas de la alidada móvil correspondan al jalon colocado de antemano en D. El punto C que corresponde á la direccion de las dos alidadas es el punto buscado; y DC será por consiguiente la perpendicular bajada de D sobre AB.

6. Luego que por medio del grafómetro, se ha calculado la amplitud numérica de los ángulos de un polígono, solo resta medir sus lados con la cadena métrica, y trazar en seguida el plano, segun el croquis y las medidas tomadas sobre el terreno.

7. Se puede, con el grafómetro, medir alturas inaccesibles porque por medio de la rodilla es fácil darle una situacion vertical.

Supongamos que se haya de medir la altura de una torre BD (fig. 48).

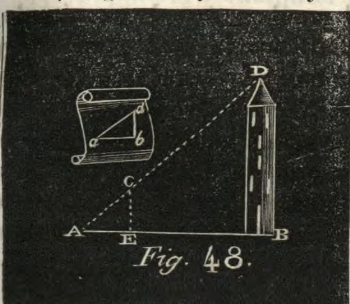


Fig. 48.

Despues de tomada la base AB se mide el ángulo BAD; se tira en seguida la línea *ab* que contenga tantas partes iguales de la escala, como estadales contiene AB; se forma con el semi-círculo graduado el ángulo *dab* igual al ángulo DAB, y finalmente se levanta en el punto *b* la perpendicular *bd*: su punto de interseccion con *ad* determinará la altura BD.

Si la base no fuese horizontal se coloca el instrumento en el punto A, tomado arbitrariamente (fig. 49); se miden los ángulos CAD y DAB; se tira en seguida sobre el papel la línea *ab* que contenga tantas partes iguales como estadales tenga la base AB; se forman en el punto los ángulos *cad* y *dab*, iguales á los ángulos CAD y DAB; finalmente del punto *b* se tira una perpendicular *bc* á *ad*: la lonjitud comprendida entre los puntos *b* y *c*, llevada á la escala, nos dará la altura BC.

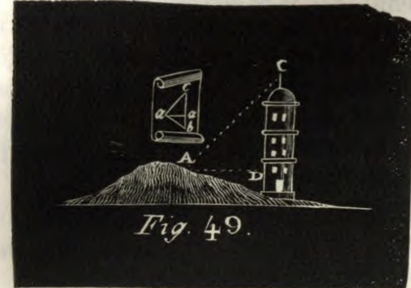


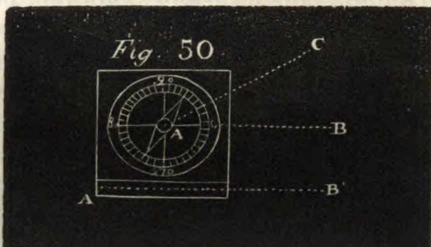
Fig. 49.

§. 4. *Del levantamiento de planos con la brújula.*

1. Qué es la brújula del agrimensor?—Su descripcion —2. Sobre qué propiedad está fundado el levantamiento de planos con la brújula?—3. Y cuáles son las ventajas é inconvenientes de las brújulas?—5. Qué precauciones deben tomarse en el uso de la brújula?—6. Cómo se orienta un plano?

1. La *brújula del agrimensor* es una caja cuadrada y chata (figura 50) que se coloca horizontalmente sobre un pie. En esta caja está encerrada una aguja imantada que gira libremente sobre un quicio vertical en el centro de un círculo. Su circunferencia está graduada y cubierta con un cristal que permite leer los diversos grados en que se detiene la aguja, segun la direccion dada al instrumento.—En uno de los bordes de la caja, paralelo al diámetro que va de 0° á 180° está unida una *alidada*, y para dirigirse hácia cualquier objeto, es necesario hacer girar la brújula entera al rededor del eje central colocado sobre un trípode. La alidada es ademas móvil sobre un eje en medio de su lonjitud y puede moverse en sentido vertical.

Fig. 50



2. El levantamiento de planos por medio de la brújula está fundado sobre la propiedad que tiene la aguja magnética de tomar una direccion próximamente constante hácia el norte, por manera que trasportando la brújula á un paraje cualquiera, la aguja toma en él una posicion paralela á la precedente.

3. Para medir con la brújula un ángulo CAB (fig. 50) se coloca horizontalmente el instrumento en el vértice A, y se tiran visuales con la alidada á uno de sus puntos B, que determinan los lados del ángulo. Como este punto B está distante, la direccion visual A'B' es sensiblemente paralela á AB, y la aguja sedetendrá en un punto del limbo cuya graduacion leerémos por ejemplo 24°. — Se muda en seguida la caja para dirigir al otro punto C; en este movimiento la aguja permanecerá fija en el espacio, ó á lo menos, despues de algunas oscilaciones volverá á tomar su direccion primitiva. Ahora bien, esta posicion no corresponderá ya al mismo punto del arco graduado, leyendo, por ejemplo, 88° La difeferencia de 24° á 88° ó 64° es la cantidad angular en que la caja ha girado sobre su eje, y por consecuencia el ángulo pedido BAC.

4. El agrimensor halla en la brújula las ventajas de no tener que tirar dos visuales para cada estacion, de obrar por esta misma razon con mayor rapidez, y de residir horizontalmente como con la plancheta, cualquier ángulo de un terreno inclinado.—Por otra parte tiene el inconveniente de no dar la medida exacta de los ángulos, puesto que no pueden obtenerse sino aproximados hasta un cuarto de grado. No pueden por consiguiente levantarse con este instrumento planos de terrenos muy extensos.—Es sin embargo muy ùtil para levantar planos de las sinuosidades de un sendero, de un arroyo, de una calle de un bosque, etc. especialmente cuando no es posible en cada estacion percibir mas que el punto donde debe estacionarse en seguida.

5. La brújula debe nivelarse en cada estacion, ya por el golpe de vista, ya por el nivel del aire. Es necesario colocar el centro en el punto preciso de la estacion, y antes de contar los grados, apartar la cadena, los piquetes, ó cualquier otro instrumento de hierro que pueda atraer la aguja en una direccion falsa.

6. Para orientar un plano, se observa, al levantar los ángulos del terreno, el ángulo que forma la aguja imantada de la brújula con la alidada inmóvil del grafómetro sobre una base de operacion: este ángulo da el *norte*.

La aguja imantada se separa aproximadamente 22.° de la línea que va de *norte á sur;* y esta desviacion se llama *declinacion*. Es necesario, pues, al trasladar el ángulo de la meridiana, dar à su abertura 22 ° de menos al dirigirse del lado noroeste. Asi, si el ángulo ha sido 145.°, se contará de 123.°

La parte superior del plano, debe siempre en cuanto sea posible designar el norte.

§. *Del dibujo, copia y reduccion de planos.*

1. Qué se entiende por dibujar un plano, y á que se llama relacion de un plano?—2. Qué instrumentos son necesarios para levantar un plano-croquis? — 3. Cómo debe hacerse la delineacion?—4. De cuántos modos puede copiarse un plano?—5. Cómo se reduce un plano.

1. *Dibujar un plano* es trazar todas las líneas que contiene, y figurar, segun las convenciones, los diferentes detalles, como los caminos, edificios, fosos etc. — Esta operacion se llama *relacion del plano*.

2. El dibujo ó relacion de un plano exige, no únicamente destreza, sino tambien el uso de varios instrumentos, como una *mesa, papel para lavar*, una *escuadra* de cobre ó boj, un *semicírculo graduado* de cobre ó asta, una *escala de proporcion*, una *regla* de nogal, *lapices*, un *compás* y un *tira-líneas*.

3. La *delineacion* debe formarse enteramente en lapiz para poder hacer todas las correcciones necesarias. Luego se reemplazan las líneas de lapiz por otras de tinta de china.—Las curvas de los caminos, rios, etc. y los árboles, se dibujan con la pluma, usando al efecto de las de cuervo, que son susceptibles de cortarse muy finas.

4. Ocurre frecuentemente tener que *copiar un plano*, por ejemplo, cuando despues de levantado por la plancheta, el plano-minuta no conserva toda la frescura necesaria.

De dos modos podemos *copiar un plano*: ó *picándole*, ó por medio del calcado.

Picar un plano.—Para esta operacion se coloca debajo del plano que se quiere copiar, el pliego que debe recibirle; se estiende con cuidado, y luego por medio de un instrumento llamado *picador*, se pica cada punto extremo de las líneas que han de servir para su construccion. Se delínea en seguida el plano con una pluma y tinta de china, teniendo siempre cuidado de consultar el plano para no cometer errores.

Calcar un plano.—Se calca un plano al cristal, colocando en un papel blanco, y siguiendo la de lineacion con la punta fina de un lapiz. Pero siendo muy cansada esta operacion puede reemplazarse por la siguiente.

Colócase el plano en una mesa bien lisa; se aplica sobre él un pliego de papel trasparente y muy fino, llamado *papel vejetal*, ó á falta de este otro papel muy fino dado de aceite y bien limpio; luego se copia como al cristal el plano cuyos delineamientos permite distinguir la trasparencia del papel.

5. La reduccion de un plano se hace como hemos visto en el *dibujo lineal*.

SECCION SEGUNDA.

Lavado de los Planos.

1. A qué está reducido el lavado de un plano?—2. De qué manera se considera la luz en un plano?—3. Cómo se conoce la buena calidad de la tinta de China? — 4. Qué colores se necesitan para el lavado de los planos?—5. Por qué medio se conoce la buena calidad de los pinceles?—6. De qué manera se lavan la tierra de labor, las viñas, las praderas, los bosques, los sotos, los arbolados? las huertas, los estanques, los rios, y arroyos? —los páramos?—los arenales?—los peñascos y canteras?—las montañas? los edificios?

1. El *lavado* es el arte de dar á cada especie de terreno el colorido mas análogo á su naturaleza con el objeto de distinguir perfectamente todas sus desinencias.

2. Los planos se consideran iluminados por un rayo de luz que va á herir los objetos bajo un àngulo de 45.º en la direccion de izquierda á derecha. La parte por la que reciben los objetos la luz, se da con un trazo muy delgado, y mas grueso por el lado opuesto. La sombra se da con la tinta de China.

3. Es de la mayor importancia para el trazado y para las sombras, una tinta de China de buena calidad. La mala tinta de China forma grumos, no tiene lustre y da un color negro muy sucio al paso que la buena es muy dura, quebradiza y lustrosa, si se frota una barrita con la uña mojada, se deslie con mucha facilidad, produce un color muy brillante y las líneas que con esta tinta se tiran, no sufren alteracion alguna, cuando despues de secas, se procede al lavado por medio del pincel.

4. Los colores necesarios para el lavado de los planos, son *la tinta de China*, la *sepia*, la *gutagamba*, el *azul de Prusia* ó *añil*, el *carmin* y el *verde de vejigas*.

5. Los pinceles son de marta cebellina, y serán de buena calidad si despues de mojados presentan una punta muy afilada, cuya elasticidad resista á los esfuerzos que con la mano hagamos para destruirla. Se necesitan por lo menos dos, de los cuales el uno sirve para coger la tinta, y el agua el otro á fin de dar con ella la aguada conveniente.

Cuando hayan de mezclarse dos colores, se tomará cada uno de ellos con distinto pincel, y luego se extenderán hasta que hayan adquirido la tinta conveniente.

6. Los diversos objetos que puede contener un plano, se lavan de la manera siguiente.

Para las *tierras de labor* se emplean dos tintas ligeras, la una muy clara de carmin y gutagamba, y de verde claro la otra, señalando los sulcos con puntos de un color subido y análogo á su cultivo, bien sea verde, etc.

Las *viñas* se representan delineando con la tinta de China unas estaquillas envueltas en un trazo parecido á una S, y se lavan con una mezcla de tinta de China, de carmin, sepia y añil.

El lavado de las *praderas* se da con una tinta verde compuesta de una poca gutagamba y mayor cantidad de azul.

Para los *bosques*, y *sotos* se emplean dos tintas, de bastante gutagamba y algun carmin la una, y la otra de verde mezclado con la primera.

Se figura la elevacion de los *árboles* por medio de su tallo y hojas á fin de imitar su naturaleza y poder distinguir con la vista un chopo, por ejemplo, de una encina ó de un árbol frutal. Se representan echados hácia el lado opuesto á aquel por donde viene el rayo luminoso, y se lavan con verde de vejiga bastante espeso.

Las *huertas* se lavan con una tinta verde muy clara.

Para los *estanques*, *rios* y *arroyos* se emplea el azul de Prusia muy claro, figurando las ondulaciones por medio de algunas líneas de color mas subido é indicando su corriente con una flecha cuya punta señala su direccion.

El lavado de los *pantanos y lagunas* se da con una tinta azul y algunas pinceladas verdes en las orillas.

En los *eriales* se emplea una tinta verde menos subida que en los prados.

Los *matorrales* se lavan matizándoles de verde y color de rosa: el primero se compone de gutagamba y azul, y de carmin y agua el segundo.

Los *páramos* reciben el lavado con dos tintas, de verde mate la una, y de carmin y gutagamba la otra.

En los *arenales* se emplea la gutagamba y un poco de carmin; y luego se les señala con puntos.

Los *peñascos* y *canteras* se delinean procurando que esten bien caracterizados. La parte de sombra se lava con una tinta compuesta de carmin, tinta de China y gutagamba, y se indican las hendiduras con el mismo color algun tanto mas subido. Se dan algunas pinceladas de color azul en la parte que figura estar iluminada.

Como en los peñascos, se modifica en las *montañas* la tinta de arriba á abajo; el lado opuesto á la luz es mas intensa y las faldas se representan por medio de unas rayitas cruzadas que constituyen la sombra.

Los edificios se dibujan con tinta colorada señalando las partes que están en sombra por medio de una línea de carmin y el espesor de sus paredes con una tinta igual y muy clara de carmin. Lo propio se verifica en todas las demas construcciones.

con distinto pincel, y luego se extenderán hasta que hayan adquirido la tinta conveniente.

6.ª Los diversos objetos que puede contener un plano, se lavan de la manera siguiente.

Para las *tierras de labor* se emplean dos tintas ligeras, la una muy clara de carmin y gutagamba, y de verde claro la otra, señalando los surcos con puntos de un color subido ó análogo á su cultivo, bien sea verde, etc.

Las *viñas* se representan dibujando con la tinta de China unas estaquillas cavadas en un trazo parecido á una S, y se lavan con una mezcla de tinta de China, de carmin, sepia y añil.

El lavado de las *praderas* se da con una tinta verde compuesta de una poca gutagamba y mayor cantidad de azul.

Para los *bosques*, y *sotos* se emplean dos tintas, de bastante gutagamba y algun carmin la una, y la otra de verde mezclado con la primera.

Se figura la elevacion de los *árboles* por medio de su tallo y hojas á fin de imitar su naturaleza y poder distinguir con la vista un chopo, por ejemplo, de una encina ó de un árbol frutal. Se representan echados hácia el lado opuesto á aquel por donde viene el rayo luminoso, y se lavan con verde de vejiga bastante espeso.

Las *huertas* se lavan con una tinta verde muy clara.

Para los *estanques, rios y arroyos* se emplea el azul de Prusia muy claro, figurando las ondulaciones por medio de algunas líneas de color mas subido ó indicando su corriente con una flecha cuya punta señala su direccion.

El lavado de los *pantanos y lagunas* se dá con una tinta azul y algunas pinceladas verdes en las orillas.

En los *criales* se emplea una tinta verde menos subida que en los prados.

Los *matorrales* se lavan matizándoles de verde y color de rosa: el primero se compone de gutagamba y azul, y de carmin y agua el segundo.

Los *páramos* reciben el lavado con dos tintas, de verde mate la una, y de carmin y gutagamba la otra.

En los *arenales* se emplea la gutagamba y un poco de carmin, y luego se les señala con puntos.

Los *peñascos y canteras* se delinean procurando que esten bien caracterizados. La parte de sombra se lava con una tinta compuesta de carmin, tinta de China y gutagamba, y se indican las hendiduras con

CAPITULO IV.

FISICA.

PRELIMINARES.

1. Objeto de la física.– Explicacion de la palabra naturaleza. Qué es física?– 2. En qué acepcion se toma la palabra naturaleza?– 3. Cómo puede definirse hoy la física y cuál es su objeto?– 4 A qué llamamos cuerpo ó materia?– 5. Qué entendemos por espacio?– 6. Qué es extension?– 7. Qué dice Pouillet acerca del espacio, la extension y la impenetrabilidad?– 8. En cuántos grupos pueden subdividirse los cuerpos? 10. Qué se entiende por fenómeno?– 11. Qué es fuerza ó ajente? 12. En cuántas partes pueden dividirse los fenómenos naturales?– 13. Qué se entiende por teoría física?– 15. Qué se entiende por sistema en física?

1. **Objeto de la física.— Explicacion de la palabra naturaleza.** La *física*, segun la etimología de esta voz, es la ciencia de la *naturaleza*.

2. Esta palabra presenta diversas acepciones. Unas veces expresa el poder jeneral productor de cuanto existe, ó el mundo físico ó la reunion de los séres que constituyen el universo; otras veces la progresion de las cosas y el órden con que los séres nacen y se suceden; ya el principio interior del movimiento del individuo animal ó vegetal: ya la esencia particular de una cosa, ya en fin la ley fundamental establecida por la suprema inteligencia para la perpetuidad del universo.

3. El estudio de la física con los adelantos de las ciencias naturales se ha limitado, y hoy dia puede definirse la física, diciendo que es *la ciencia que trata de las propiedades de los cuerpos, y de las acciones que ejercen los unos sobre los otros sin alterar su naturaleza intima.* La *física*, pues, tiene por objeto el estudio de la *materia*, esto es, de todo lo que es *extenso* é *impenetrable*.

4. **Del cuerpo**. Llamamos *cuerpo* á todo lo que puede producir en nosotros un conjunto de sensaciones, esto es, toda sustancia dotada de propiedades que la distinguen del espacio que la rodea, y que la hacen sensible.

5. **Del espacio y la extension**. Si nos figuramos una esfera de un diámetro cualquiera que se aniquila instantáneamente dejando vacío el lugar que ocupaba; si esta esfera la agrandamos en nuestra imajinacion hasta suponerla igual al globo de la tierra, y la suponemos aniquilada como la primera; si agrandamos aun mas esta esfera hasta suponer que abraza no solo nuestro sistema planetario sino todos los sistemas imajinables, y que esta esfera se aniquila y deja vacío el lugar que ocupaba, podrémos formarnos idea de lo que entendemos por *espacio*.—Los metafísicos le llaman *espacio puro*, los físicos *espacio vacío*.

6. Una porcion limitada del espacio es lo que llamamos *extension*.

7. «La idea del espacio, dice Pouillet, es una idea completa, puesto que nosotros podemos concebir el espacio enteramente vacío, sin que por esto sea una idea exclusiva en la cual nada podamos asociar. En el espacio podemos concebir la *impenetrabilidad*, y la impenetrabilidad es la materia. No hay pues razon para decir que la materia tiene dos propiedades esenciales: la *extension* y la *impenetrabilidad*: pues estas no son propiedades, sino una definicion. Concebimos la impenetrabilidad y la llamamos *materia*: hé aqui todo.»

8. Los *cuerpos* pueden subdividirse en dos grupos: 1.º cuerpos pesados llamados por esta razon *ponderados*; 2.º cuerpos que no son pesados ó por lo menos que no sehan logrado hasta ahora pesar, llamados por esta razon *imponderados*. Estos se llaman tambien *flúidos* y son los siguientes:

El flúido *calórico* ó el *calor*.
El flúido *lumínico* ó la *luz*.
El flúido *eléctrico* ó la *electricidad*.
El flúido *magnético* ó el *magnetismo*.

Los cuerpos ponderados son todos los demas de la naturaleza.

9. Esta distincion de los cuerpos ha servido de base á la clasificacion de la física en dos partes: la 1.ª comprende el estudio de los cuerpos ponderados; la 2.ª el de los imponderados.

Antes de entrar en el estudio de estas dos partes, definirémos para mayor claridad algunas palabras que deberémos emplear.

10. **Fenómeno**. En el lenguaje de la ciencia, se llama *fenómeno* á un cambio de la naturaleza de estado ó de las propiedades de un cuerpo, como *la caida de una piedra, el rocio, la lluvia*, etc.

11. **Fuerzas, ajente.** Todo lo que puede obrar sobre los cuerpos, hacerles sufrir modificaciones, en una palabra, producir *fenómenos*, se denomina *fuerza* ó *ajente*.

12. Los ajentes naturales pueden dividirse en tres grandes clases, á saber:

1.º Las fuerzas vitales ó de organizacion.

2.º La atraccion universal, ó la accion de la materia sobre la materia, que comprende: la *gravitacion*, la *pesantez* ó *gravedad*, y la *atraccion molecular*.

3.º Los flúidos imponderados, causa de todos los fenómenos *caloríficos*, *magnéticos*, *eléctricos* y *luminosos*.

13. **Ley.** Una *ley* física es la relacion necesaria que existe entre un fenómeno y la causa de que depende.

14. **Teoría.** Una *teoria* física es la relacion coordinada de las leyes relativas á una misma clase de fenómenos, las cuales sirven para explicar la dependencia que existe entre todos sus efectos y sus causas.

15. **Sistema.** Llámase *sistema* una hipótesis formada sobre la naturaleza de los ajentes para encadenar todos los hechos dependientes de una misma causa, y todas las leyes que los rijen á un principio único cuyas leyes parciales se deduzcan todas como corolarios.