M. Guiu Casanova

Libros para mi hijo

I

CANTIDAD y NÚMERO

Ilustraciones de Llaverías

LIBROS PARA MI HIJO

I

CANTIDAD Y NÚMERO

LIBROS PARA MI HIJO

I

CANTIDAD Y NÚMERO

POR

MANUEL GUIU CASANOVA

Licenciado en Ciencias

Director de la ACADEMIA GUIU

Lauria, 53, pral., Barcelona

Ilustraciones de Llaverías

IMPRENTA DE A. ORTEGA

Aribau, 7 — BARCELONA

Prólogo ingenuo

No es este el primer libro que escribo. He escrito varios (v. obras del autor).

Pero este es el segundo (1) de los escritos con absoluta independencia; sin programa ajeno que seguir ni libros que *fusilar* (2).

Y como no busco fama sino provecho, debo parecerte más terco que prudente. Con la agravante de que esta vez la edición va por mi cuenta y riesgo (3).

Claro que soy optimista, lo fuí siempre, y mi optimismo de hoy se funda en que si tú, lector discreto, has comprado este libro para tu hijo, me consta que no te has de arrepentir, antes bien, quedarás satisfecho y mostrarás tu satisfacción a tus parientes y amigos. Y como hay tantos papás...

Además, yo tengo un hijo de 12 años, y quiero que reciba de mi propia experiencia todo lo posible. Me veré pues muy honrado y pagado con que él solo recoja el fruto.

Hablemos del libro.

---

(1) El primero fué "*Lo que es la Química*". Primera edición 1910 (1000 ej.). Segunda edición, 1921; total diez años. Dióme honra, que ya es algo, mas no provecho.

(2) La mayoría de las obras de texto son compilaciones. Si el autor no domina las cuestiones, el idioma de la obra de consulta y el idioma en que escribe, por uno o más de estos portillos se le ve el cañamazo; pretender originalidad suele ser tarea vana; bastante será aclarar lo que en los otros parezca turbio. Aun así, puede haber quien le llame *asesino*. Por esto merecen alabanzas los profesores que escriben libros de tal condición, especialmente cuando los venden baratos.

(3) Dios le dé a vuesa merced buena manderecha diríame Cervantes.

En él empleo un método de exposición que no puedo bautizar y que me atrevo a llamarle *mi manera* de enseñar, después de treinta años de labor continua, estudiando (1) y enseñando. Así he podido observar y conocer muchas cosas de profesores y de estudiantes, como son los unos y como los otros. Voy a decirte, a mi manera, como son:

Hay tres clases de estudiantes: abiertos, A; (figs. 1. 2 y 3), semiabiertos, B; y cerrados, C.

Y tres clases de profesores:

Rectilíneos, P (Fig. 1ª), que procuran transmitir el *flúido científico* preparando y exponiendo la cuestión de tres ma-

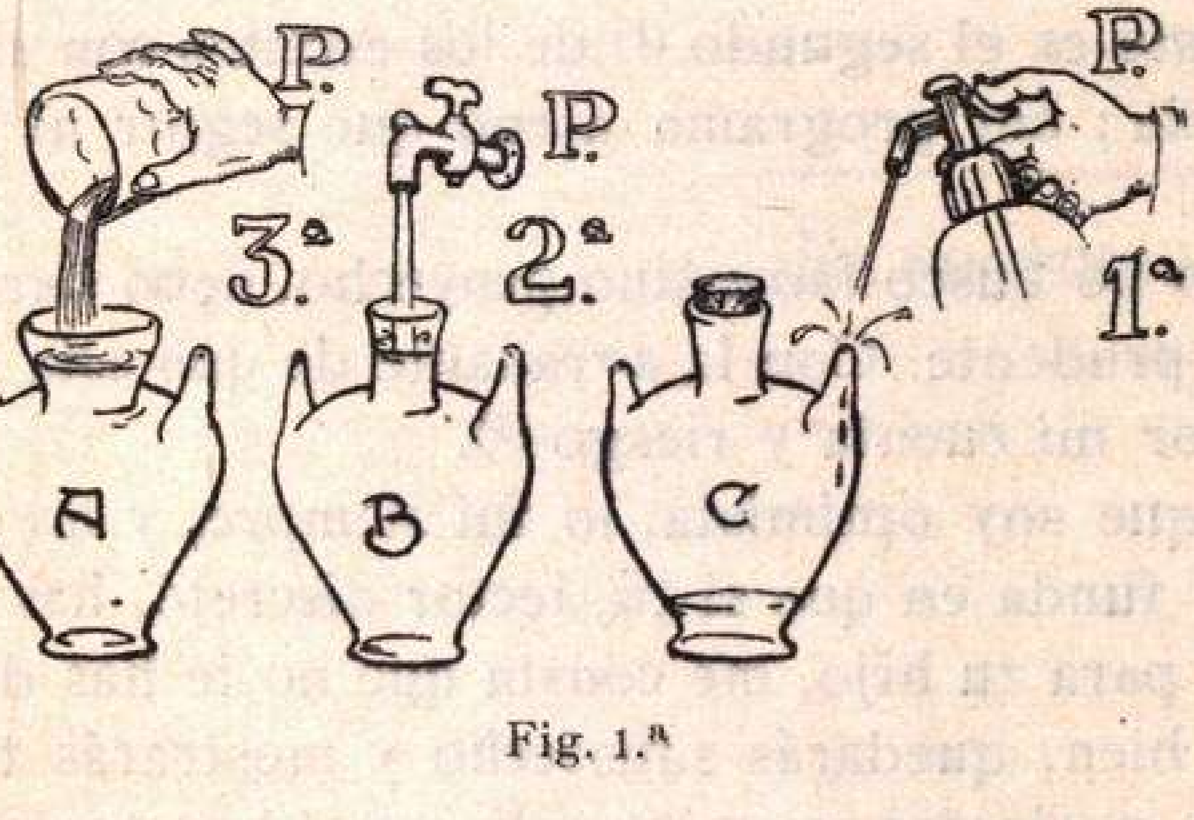


Fig. 1.ª

neras: (1ª) en forma apropiada para el discípulo cerrado. (2ª) Repetición del tema preparado para los *semiabiertos* y, por último, (3ª) lo expone en el sentido corriente del lenguaje científico. Consigue así, con toda seguridad: colmar la capacidad A, llenar la B, y... algo se pesca en C.

Profesores *arborescentes*, Q (Fig. 2ª). Con frecuencia se van por las ramas y jamás se esfuerzan en llenar los vasos (2).

---

(1) Todos los profesores son o deben ser estudiantes. En mi cátedra digo con frecuencia: "Para vosotros no soy más que un estudiante viejo. Vuestro cerebro es como el mío, más lozano todavía; cuando aprendáis a serviros de este misterioso órgano para estudiar, seréis muy jóvenes, pero de la misma ciencia que os enseño sabréis, por lo menos, tanto como yo".

(2) Caracterízanse estos en el acto de examinar. Como van hacia las ramas

Profesores *reconcentrados*, R (Fig. 3ª). Excesivamente sabios, sin poder de transmisión, todo se va por las nubes.

Cabe observar que en cada una de estas clases de profesores los hay con diferente grado de cultura y suelen ser los R y Q más doctos que los P. Claro es que si necesitas y puedes escoger el profesor de tu hijo, lo buscarás rectilíneo antes que sabio (1).

Fig. 2.ª

Fig. 3.ª

Observa también que lo dicho se presta a serias meditaciones, para que reflexiones, lector, si te place.

Y basta del método.

(detalles y nimiedades), nunca hacia el tronco o raíz (fundamento y principios), siempre yerran; suelen reprobar a muy buenos estudiantes, y lo que es peor, aprobar a bastantes malos.

(1) La mayoría de los rectilíneos españoles están entre los que paga el público, en la enseñanza privada. Los Q. y R. abundan en la enseñanza oficial, donde desgraciadamente no puedes escoger. Claro que es triste. ¿Un remedio?

Muy sencillo: Suprímase la enseñanza oficial, jubílense todos los actuales catedráticos, permítase a estos y a los futuros que abran sus cátedras (esto ya es y se permite a cualquiera), como los médicos sus clínicas. Entonces solamente habría profesores rectilíneos, y los estudiantes acudirían a donde mejor se les llenara el vaso. Aquellos seguramente se asociarían por disciplinas, surgirían claustros y universidades con la más ideal de las autonomías. ¡Cómo brillaría así el talento español! ¡Qué asombrosa fecundidad para nuestro ambiente preñado energías!

Doctrina que contiene: Las nociones precisas, indispensables, para que el estudiante de matemáticas tenga una clara e imborrable idea del sujeto de esta ciencia: La cantidad. Si contiene mucho más, es muy pertinente al mismo asunto, y si encuentras que hay demasiadas cosas fuera del tema, ello es debido a *mi manera* de hacer comprender y no tiene remedio.

—Pero si para definir cantidad y número sé yo que en muchos tratados elementales, y aun diría en todos, apenas si se emplean ocho líneas.

—Efectivamente, y yo sé también que hay, tal vez por eso, infinidad de bachilleres, bastantes licenciados y no pocos doctores que tienen de este librito gran necesidad.

—Vanidosillo pareces.

—Veraz seguramente.

Además, el libro servirá para conocer si tu hijo vale o no, para el trabajo científico. Si tu hijo, apesar de ser atento y aplicado, no emborrona ninguna de las páginas o líneas que se le han reservado, nada hay que esperar de él en este terreno. Si se interesa en hacerlo, llenando los huecos y, faltándole espacio, emborrona otros papeles, déjale, que sea Ingeniero, que se dedique a las Ciencias.

Que por qué, en la portada, dice LIBROS PARA MI HIJO?

—Porque esta doctrina matemática, Dios mediante, se continuará en tomos sucesivos.

Casi todos los estudiantes muestran excelentes aptitudes para los deportes porque saben o aprenden a servirse de sus brazos y de sus piernas, sin necesidad de maestros: con maestro, todos campeones. En cambio, con maestros, llegan muchos a bachilleres, y más arriba, ignorando la manera de servirse del órgano del entendimiento; porque aquéllos, sin dejar de torturarle y aun de mellarle el seso, nunca se cuidaron de ponerle luces, ni de descubrir las que un profesor *rectilíneo* ve chispear, en la ocasión propicia, abriendo, como por encanto, la capacidad de los estudiantes C (Fig. 1ª).

He dicho esto para que no te sorprendas al ver que la introducción de mi libro, parece toda fuera del tema. Es para remediar en lo posible aquella desgracia. Tu hijo ha de saber siquiera, que tiene dentro del cráneo un colosal depósito de energía y que todo su porvenir depende de emplear bien esta energía, esto es, de saber pensar.

Y aquí te dejo, lector prudente, con mi cordial saludo. Permíteme que vaya a conversar con mi hijo... o con el tuyo.

Manuel Guiu Casanova

Barcelona, 1º de Enero de 1923.

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

§ I

El camino de la victoria

Me inspira más lástima un recién nacido que un anciano: a la postre, éste está cerca de la paz y el otro ha de empezar su guerra (1).

Tú, hijo mío, eres uno de los niños felices; con tu cuerpo sano y vigoroso, con tu alma cristiana, siempre risueña y tranquila, has recibido hasta ahora, con los cuidados y caricias de tus padres, toda la dicha que cabe en la más plácida infancia. Sin embargo, alguna vez has llorado y no ignoras lo que son: dolor, penas, miedo. Algo, muy poquito, has sentido de la vida amarga. Dolores más intensos, penas más amargas te esperan y has de saber afrontarlas valeroso. Para vivir feliz hay que saber luchar y hay que vencer.

Hay muchos niños tan buenos y aun más buenos que tú, cuyos padres, privados de muchas cosas, no pueden darles buenos vestidos ni abundante alimento. Otros hay descuidados, abandonados, expuestos a todas las miserias. Esos ya empezaron su guerra; descalzos, desnudos, hambrientos, desamparados, seguirán su camino sin luz, sin guía.

---

(1) Angel Ruiz y Pablo.

No es la guerra de ejércitos, trincheras, cañones... Nada de armas ofensivas, porque ni has de matar ni siquiera intentar hacer daño a nadie. Todos somos hermanos y como hermanos debemos amarnos. La guerra de hombres es uno de los males de la vida, como lo es un terremoto.

Es una guerra de defensa contra los obstáculos que se oponen a tu avance y contra los enemigos que están, fuera de ti los menos peligrosos, dentro de ti mismo los más temibles.

Es lucha del individuo, cada cual la suya, y bien desigual por cierto. Unos, como tú, la empiezan bien guardados y protegidos, otros sin protección ni guía. De vosotros saldrán los hombres de mañana: éstos vencedores, aquéllos derrotados; señores o criados, ricos o pobres, seguirán luchando hasta la tumba, que es donde está la paz.

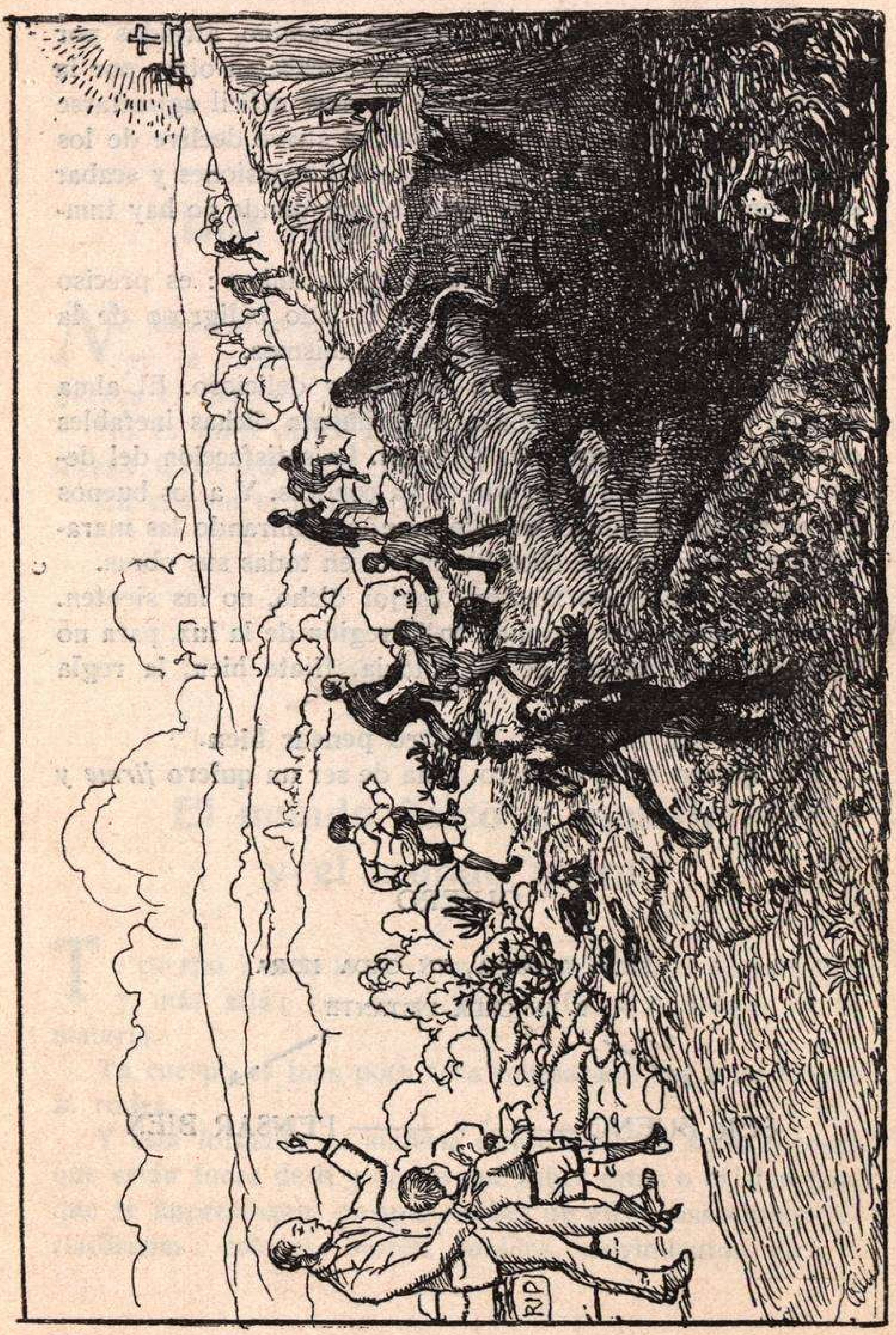
Yo podría continuar describiéndote esa guerra con frases o pensamientos que pudieran emocionarte y dejar en tu mente un recuerdo indeleble. Ni mi habilidad es tanta, ni tus pocos años permitirían conseguir mi deseo. Probaré de otro modo:

Mira ese cuadro donde he pretendido darte una idea gráfica del torbellino de la vida.

El camino tuyo es el camino de todos: pocas veces llano, casi siempre tortuoso y sembrado de obstáculos. Empieza muy cerca de la cuna y acaba siempre en una tumba.

Observa que hay una línea que divide el camino en dos regiones: una es la región de la luz, la otra es la región de la sombra y de las tinieblas.

Nunca salgas del camino luminoso por duro y escabroso que parezca. Esa luz es la de la perseverancia, de la virtud. Ese camino de luz es el de la victoria. No salgas nunca de él, procura siempre no pisar en la sombra aunque dentro y fuera de ti habrá fuerzas que te empujen hacia ella. La parte sombría es plana, suave y llena de atractivos. Verás que muchos van por ella, pero avanzan poco, siempre en zig-zag y con paso inseguro.


RIP

Mira como los desviados del buen camino, atraídos por los vicios, se dirigen hacia el abismo; resbalan otros por la pendiente de la perdición, donde es muy difícil aguantarse y volver atrás. Ruedan muchos por el suave declive de los placeres para atascarse en el fango de las pasiones y acabar su mísera existencia en ese agitado mar donde no hay tumba ni paz.

No he querido poner espanto en tu ánimo: es preciso que veas de algún modo cuál es el lado peligroso de la vida con sus terribles y horrorosos abismos.

La vida tiene su aspecto risueño y delicioso. El alma sencilla de limpia conciencia experimenta dichas inefables gozando puros y legítimos placeres. La satisfacción del deber cumplido es un goce que tú ya conoces. Y a los buenos les es permitido gozar en este mundo admirando las maravillas y encantos que Dios ha puesto en todas sus obras.

No, los malos no las ven: mejor dicho, no las sienten.

Para mantenerte siempre en la región de la luz, para no desviarte del camino de la victoria, fíjate bien, la regla es esta:

Quiero ser bueno...... Quiero pensar bien.

Ese **quiero** es lo primero, y ha de ser **un quiero** *firme y repetido.*

QUIERO

HOY, MAÑANA, EN CADA HORA

Y EN CADA INSTANTE

↙ ↘

SER BUENO —— Y —— PENSAR BIEN

§ II

Una regla para ser bueno

No hacer ni pensar hacer cosas que te cause pesar el que yo lo sepa, es decir: *Que nunca te pueda dar vergüenza el decirme lo que has hecho o pensado hacer.*

No es pués difícil empresa la que te propones cuando dices: QUIERO SER BUENO.

En cambio el *pensar bien* es difícil casi siempre.

§ III

El mundo físico o material y el mundo moral

Tu cuerpo y todo lo que hay fuera de él hasta las estrellas y más allá; eso es el mundo físico o mundo de la materia.

Tu cuerpo es bien poca cosa comparado con todo lo que le rodea.

Y está formado de materia como todos los seres o cosas que están fuera de ti y de las que sabes están o existen porque te impresionan, porque recibes de ellas sensaciones variadísimas: colores, olores, sonidos, movimientos, etc.

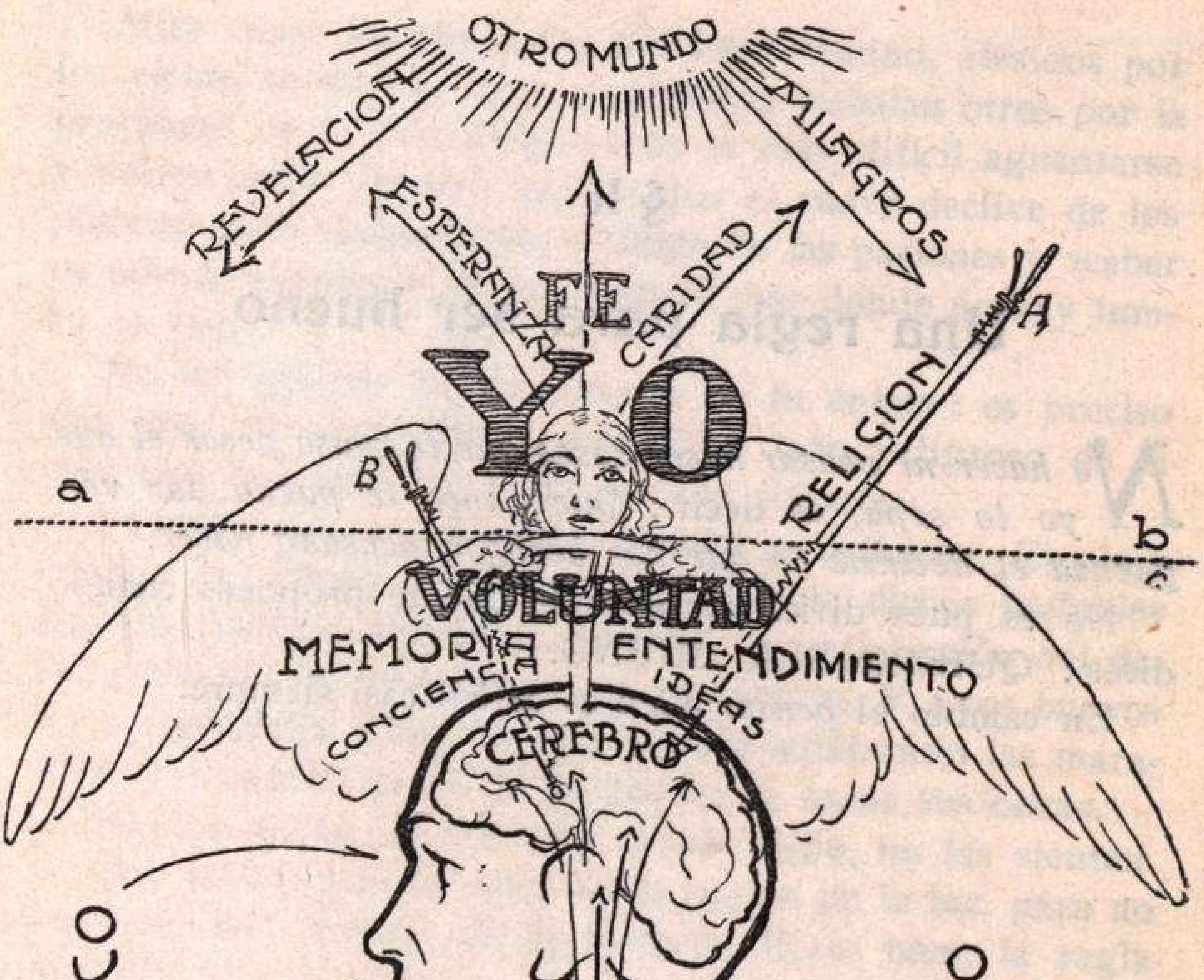

OTRO MUNDO
REVELACION
MILAGROS
ESPERANZA
CARIDAD
FE
YO
A
B
a
b
RELIGION
VOLUNTAD
MEMORIA
ENTENDIMIENTO
CONCIENCIA
IDEAS
CEREBRO
MUNDO FISICO
MUNDO FISICO
SENTIMIENTOS
PASIONES
CORAZON
ORGULLO
AMOR
ALEGRIA
PENA
AMBICION

Fig. 4.

Percibes lo que hay o lo que pasa fuera de ti mediante los órganos de los sentidos. No sienten los sentidos, son las puertas por donde recibe tu cuerpo las acciones del exterior, acciones que se transmiten hasta esa gran masa nerviosa que tienes dentro del cráneo: *el cerebro* (Fig. 4). En esa caja cerrada, en ese órgano misterioso está el lazo que une la materia con el espíritu, allí tiene tu alma su trono y sus cadenas. En tan pequeño espacio cabe más, mucho más, que en todo el espacio que te rodea.

Tu materia es nada, tu materia es polvo. Nada es tu cuerpo y aun tus nervios y tus sesos son poco más que los de una gallina o de un caballo. Pero tú piensas y el pensamiento es todo. Ese relámpago divino es energía extraterrena que, bien dirigida, dotará a tu alma del claro entendimiento que te hará triunfar en la vida.

Dentro de ti hay algo que no es materia y ese algo, que es el mundo de las ideas, es lo que se llama el *mundo moral*.

Pero tú no vives solo, los hombres viven en sociedad y de ello derivan una serie de conocimientos correspondientes al orden social o al *mundo social*.

Y por fin hay *otro mundo*, el que sigue después de la muerte. Los hechos y conocimientos de esta clase, constituyen el mundo de la *Religión*.

El mundo moral abarca los dos últimos. El mundo social y el religioso son dos aspectos del mundo moral.

§ IV

Es difícil pensar bien

PIENSA bien el que no se equivoca, el que sabe la verdad de las cosas. Pensar bien es dirigir el entendimiento hacia la verdad.

Hay diferentes clases de verdades, unas correspondientes al mundo físico, las otras al mundo del espíritu o mundo moral.

La verdad es algunas veces como un fantasma engañador que huye cuanto más se le persigue. Ver la realidad de las cosas presenta en ocasiones grandes dificultades y es necesaria la mayor prudencia para no caer en el error. En efecto, una misma cosa se nos ofrece o la percibimos con diferentes formas, aspectos o propiedades: ya porque realmente ella ha cambiado, ya porque han cambiado las condiciones de que nos servimos para percibir. Y también puede suceder, y esto es muy frecuente, que nuestro ánimo se encuentre como torcido y dispuesto a ver en las cosas lo que no hay, o más de lo que hay, es decir, que pensamos mal y llegamos a tener por verdadero lo que es falso. Puedo darte muchos ejemplos:

1º Mira esas rectas de la Fig. 5: te parecen convergentes, pues no lo son. Aquí la causa del error no está en ti ni en las rectas paralelas, sino en ese rayado especial. Por un efecto análogo te parecen exágonos los circulitos blancos de la Fig. 6.

2º Toca el vidrio de la ventana, y ahora toca la madera de la misma ventana. ¿Está más frío el vidrio?; pues no es verdad: tienen la misma temperatura. La culpa de este error tampoco está en ti, sino en la naturaleza de los cuerpos que has tocado.

3º Pon una mano en el agua bien fresca y la otra dentro de agua caliente: introduce ahora las dos manos en otra vasija que contiene agua templada. Las dos te engañarán; la mano fría la encuentra caliente, y la otra al revés. Este error depende de ti, de tu estado, mejor dicho, del de tus manos.

Fig. 5.

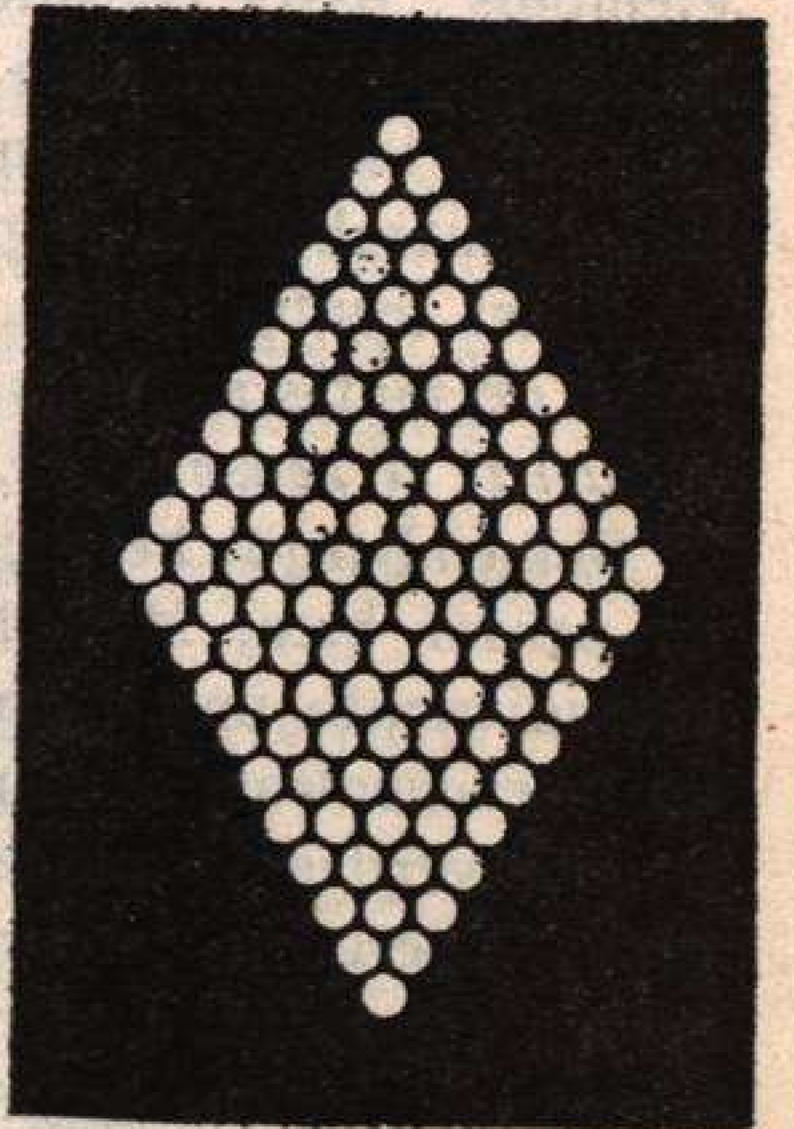


Fig. 6.

4º Aristóteles pesó una vejiga vacía y luego la pesó hinchada, llena de aire; y resultó que el peso era el mismo: luego el aire no pesa. Se engañó, y como Aristóteles era un sabio, los hombres creyeron durante mucho tiempo que el aire no pesaba. Hoy somos más prudentes y la autoridad de un sabio ya no tiene valor. Cuando alguno nos cuenta algo nuevo, cien o más sabios averiguan enseguida si se equivoca o no.

Si cuando te pones sobre una báscula te cojo por la cintura y te empujo hacia arriba, la báscula dirá que no pesas o que pesas muy poquito. Algo parecido sucedió con la vejiga vacía y llena de aire. El aire pesa; 1 metro cúbico de aire pesa unos 1300 gramos; pero hay que saberlo pesar.

Todos estos ejemplos corresponden a las cosas del mundo físico o de la materia cuyo conocimiento se sirve de los sentidos: son conocimientos de cosas que se ven y se tocan. Las cosas o verdades en el orden moral son todavía más difíciles de conocer: el pensar bien en el orden moral es más bien cosa de ángeles que de sabios. Y no hacen falta ejemplos; basta considerar que no todos los hombres son buenos, que muchos no somos tan buenos como debemos y que casi todos piensan no sólo según las circunstancias, sino, generalmente, según su conveniencia.

Y así resulta que si la verdad se nos esconde tantas veces y de tantas maneras, es difícil alcanzarla y, por lo tanto, *es difícil el pensar bien*.

Sin embargo, he dicho que para triunfar en la vida has de pensar bien. Más claro: **Has de pensar,** dirigiendo tu entendimiento por el camino de la verdad. Si muchas veces no la encuentras, nada pierdes; si otras veces yerras tomando por verdad lo que es falso, las consecuencias podrán ser graves, pero tu cerebro activo te dará la clave de aquel error; adquirirás experiencia para guiarte en futuros casos semejantes y, cuanto más viejo, mejor pensarás.

Como en todas las cosas: para hacerlas bien, hay que hacerlas muchas veces o con mucho cuidado. Así mismo para llegar a pensar bien hay que haber pensado mucho, esto es, muchas veces, y **no descuidando nunca ciertas reglas** muy sencillas.

§ V

Dos actos del entendimiento

Son las 6 cuando sales del colegio; tienes buen apetito, y piensas en la merienda. Ves la castañera de la esquina; las castañas asadas son tu golosina y piensas ahora en las castañas con más fuerza que antes en la merienda. No tienes dinero y entonces tu entendimiento trabaja; te hace pensar en cuál será el mejor medio para conseguir unos cuantos céntimos.

En este caso y en casi todos los casos, los actos del entendimiento son dos:

1º **Conocer qué es lo que piensas,** cuál y cómo es el objeto de tu pensamiento.

2º **Buscar los mejores medios** para realizar aquella idea o **para conseguir el fin** que nos hemos propuesto.

El primero es la parte *teórica,* especulativa o reflexiva.

El segundo comprende el aspecto *práctico,* para obrar para alcanzar el fin.

Las cuestiones de la vida suelen pues tener dos aspectos en nuestro entendimiento: **la teoría** y **la práctica.**

Así, en el asunto o cuestión de las castañas: **Teoría.** Tengo deseo de comer castañas; quiero comprarme algunas; para comprarlas necesito dinero y no tengo dinero. **Práctica.** Pediré 10 céntimos a... Papá ha salido, Mamá también. Mi hermana no puede darme 10 céntimos. ¿Los pediré a la cocinera? No. ¡Qué hacerle!, no comeré castañas; a comer lo que se pueda.

La parte teórica o especulativa. Mejor dicho, tu actividad pensante, el ponerte a pensar, nació de tu apetito y además de ser tiempo de castañas y principalmente del agradable tufillo que llegó a tu olfato al pasar cerca del asador. Has pensado así sin esfuerzo alguno. Siempre que las ideas vienen así o de nosotros o de lo que ordinariamente está con nosotros, sucede lo mismo. Se piensa bien sin dificultad. Las dificultades se presentan solamente en los casos extraordinarios.

En la parte práctica ya no sucede lo mismo. Por sencillo que sea el fin propuesto, son siempre diversos los medios que pueden adoptarse para conseguirlo; unos directos y otros más o menos tortuosos, unos buenos y lícitos, otros poco delicados, otros ilícitos. Has pensado muy bien quedándote sin comer castañas; pedir a la cocinera no era decoroso, recurrir a otros medios peores aún, ni pensarlo. Es muy conveniente saber renunciar a tiempo en todos los casos prácticos, cuando los obstáculos son muchos. Si el fin es tan fútil como el que nace de nuestros apetitos, no merece nuestra atención; lo más sano es renunciar pronto.

Los *altos fines*, aquellos cuya importancia es decisiva para nuestro bienestar, para la buena marcha de nuestros negocios, esos deben estudiarse mucho y bien.

Y tú ¿tienes ahora algún alto fin que cumplir? Alto y grandioso: hacerte apto para la profesión que has escogido. Quieres ser Ingeniero, alcanzar en su día el título de Ingeniero Industrial. ¿Para qué? Para alcanzar desde entonces todos los fines que suelen proponerse los Ingenieros: esto es, para resolver pronto y bien todos los problemas de ingeniería.

El **pensar bien** para ti, desde ahora, consiste en obrar continua y acertadamente para llegar a ser, no Ingeniero, sino muy buen Ingeniero.

Y ¿cuál es el mejor Ingeniero, el mejor médico, el mejor agricultor, etc., etc.? Aquél que más verdades conoce, o que con mayor claridad las conoce, sobre las cosas u objetos que a su profesión se refieren.

Las verdades que se van a ofrecer a tu entendimiento son las verdades ya conocidas que constituyen *la ciencia* del Ingeniero (1).

Esa ciencia consta de un conjunto de ciencias.

Vas a estudiar esas ciencias, con el debido orden, para aprenderlas bien. Vas a estudiarlas bien. Hay que saber estudiar. Las reglas que he de darte para pensar bien son las reglas para estudiar bien. De pasada veré si puedo darte algún consejo para no pensar mal en otros negocios.

§ VI

Atención! Siempre alerta! Mano al volante!

La primera condición que se necesita para pensar bien, para estudiar bien, para aprender pronto y mucho, es **atender bien**.

Atender es aplicar nuestro entendimiento a las cosas.

Atender bien es aplicarlo a una sola cosa ; atender a dos o más cosas a la vez es atender flojamente es atender mal, es distraerse o estar distraído.

El atender requiere un esfuerzo, como todos nuestros actos, pero cuando uno se acostumbra, cuando se adquiere el hábito de atender, de ser atento, nuestro entendimiento, sua-

(1) Todos los conocimientos que poseen los hombres y los que puedan adquirir en lo sucesivo constituyen *La Ciencia*. Nuestro limitado entendimiento no permite que una persona abarque toda esta Ciencia. Esa *ciencia total* se divide en diversas *ciencias*.

Una *Ciencia* es el conjunto de verdades ordenadas que se refieren al mismo objeto o que dependen de uno o más principios.

vemente, reposadamente, pasa de unas cosas a otras ; percibe con claridad y exactitud y atesora en poco tiempo un precioso caudal de ideas. Tienen este hábito los estudiantes **abiertos** (fig. 1ª). Los estudiantes **semiabiertos** son los que no han alcanzado la agilidad y flexibilidad necesarias para sacar de su atención el debido rendimiento ; su voluntad es firme y resuelta, **quieren** ser abiertos y no hay duda que tarde o temprano lo consiguen. Los estudiantes *cerrados* no han empezado todavía a ejercitar su atención, distraídos o ensimismados, retozones o atontados, su espíritu, o duerme o mariposea por diferentes cosas a la vez, recibiendo variadas impresiones que unas con otras se confunden, se embrollan y se borran (1).

Alerta pues : para adquirir el hábito de la atención, has de pensar así :

QUIERO CON FIRMEZA

SER

ORDENADO Y ACTIVO

ORDENADO. Orden en tus acciones ; cada cosa en su tiempo. Un horario fijo en los días de labor ; levantarte a hora fija, bien distribuídas tus horas de trabajo con las de tus clases y algún tiempo de asueto después de las comidas.

ACTIVO. Despierto y con tus sentidos abiertos dispuestos a percibir, a aprender lo que se presente ; *siempre el lápiz a mano y papel que no falte.*

Mira el esquema (fig. 7). Ese es el volante director, sujeto por la pereza (2), enemiga de la voluntad. ¡Mano al vo-

(1) Son, la mayor parte, niños retrasados, sin la debida preparación anterior: deben volver a la clase de párvulos o llevarlos por el camino que más convenga si se descubre en ellos alguna inclinación.

(2) La pereza es un terrible enemigo, es una repugnancia al trabajo; el trabajo fatiga, es la pereza como un instinto contra el cansancio. Lo más sencillo de hacer es no hacer nada. Es la enfermedad corriente de los malos estudiantes. Es *la madre de la pobreza,* porque la riqueza viene sólo del trabajo.

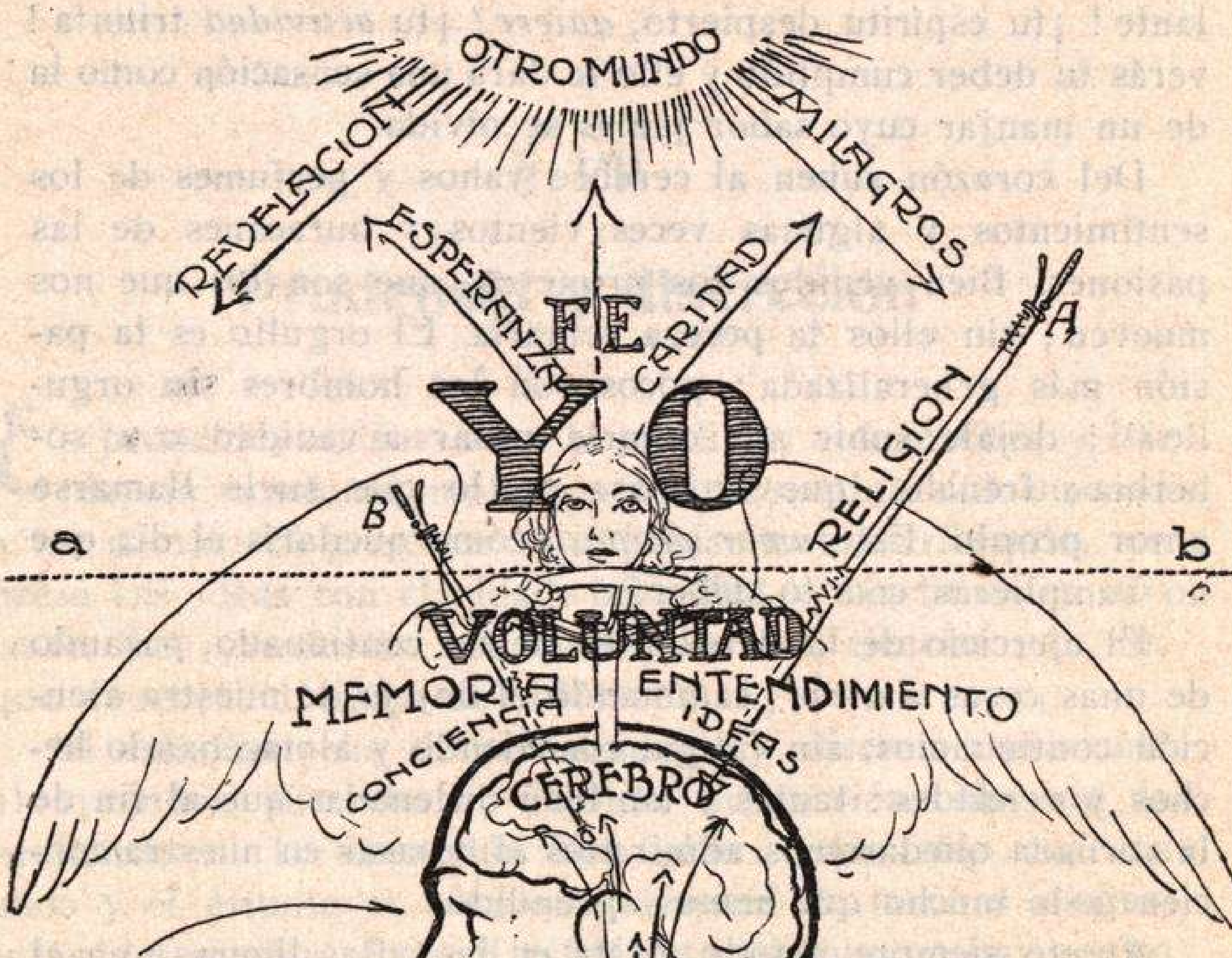

OTRO MUNDO
REVELACION
MILAGROS
ESPERANZA
CARIDAD
FE
YO
A
B
a
b
RELIGION
VOLUNTAD
MEMORIA
ENTENDIMIENTO
CONCIENCIA
IDEAS
CEREBRO
MUNDO FISICO
MUNDO FISICO
SENTIMIENTOS
PASIONES
CORAZON
ORGULLO
AMOR
ALEGRIA
PENA
AMBICION

Fig. 7.

lante! ¡tu espíritu despierto, *quiere!* ¡tu *actividad* triunfa! verás tu deber cumplido y ello te dará una sensación como la de un manjar cuyo sabor jamás se olvida.

Del corazón suben al cerebro vahos y perfumes de los sentimientos y algunas veces vientos y huracanes de las pasiones. Bien venidos los primeros, que son los que nos mueven; sin ellos la pereza reinaría. El orgullo es la pasión más generalizada: pocos son los hombres sin orgullo [1]; déjale subir sin dejarle pasar a vanidad o a soberbia; frénalo: que no pase de lo que suele llamarse **amor propio**. Este *amor propio* ¿cómo quedaría el día que no cumplieras con tu deber?

El ejercicio de la atención ha de ser continuado, pasando de unas cosas a otras; cambiando el objeto de nuestra atención continuamos, sin fatiga, conociendo y almacenando hechos y verdades: tantas y tan bien ordenadas que al fin de la jornada quedaremos admirados al repasar en nuestra conciencia lo mucho que hemos aprendido.

Atento siempre a todo, hasta en las cosas ligeras; en el recreo, en el paseo y especialmente en el trato con los demás. Cualidad inapreciable y poco común es la de tener un espíritu observador [2]. La primera condición para hacerte querer de los demás es ser bien atento y cortés con todos: este es el secreto para poder llegar a poseer ese talismán que se llama *don de gentes.*

---

(1) La vanidad y la soberbia son dos modos del orgullo que proceden de una exageración del amor propio. Son enemigos del bien pensar. Los vanidosos y los soberbios fracasan continuamente; el orgullo los ciega. Hay que usar los frenos A y B contra esa pasión, y contra todas, que es muy difícil de dominar. El hombre que frena bien al orgullo es el que puede llegar a poseer el más claro de los entendimientos.

(2) Es curioso notar lo poco que atendemos a las cosas, aun aquellas que diariamente vemos y tocamos. En efecto; pregunta, p. ej.: ¿Cuántas sillas hay en tu cuarto? ¿Cuántos botones lleva tu chaleco? Pocos veces responderán con certeza. ¿Las seis en tu reloj de bolstllo están en números arábigos o romanos? Dirán una de las dos cosas, pero seguramente será la minutera lo que está en el lugar de las seis.

§ VII

Prudencia y discreción

Es prudente, en sus actos y palabras, el que obra y habla sin ocasionar molestias o daños, ni a sí mismo ni a los demás. El *prudente* que, hablando o escribiendo, expresa sus ideas con claridad, brevedad y exactitud, es *discreto*. Los *prudentes y discretos* en las ciencias son los que merecen el título de *sabios*.

El estudiante ha de ser prudente y discreto: prudente al aprender, discreto al explicar su lección. No son la prudencia ni la discreción del sabio: éstas sólo con los años y el estudio se alcanzan, después de muchos disgustos y desengaños. Para el estudiante, aunque no hay reglas para ser prudente y discreto, hay en cambio preceptos que no deberás olvidar nunca so pena de ser imprudente y aun de pasar por necio.

Estos preceptos son:

1º Al fijar tu atención en la explicación del profesor, *anota todas las palabras y conceptos nuevos para ti. Anota también todo lo que despierte tu curiosidad* o que te parezca interesante.

2º Nunca interrumpas ni preguntes durante la clase. Mas si el maestro lo solicita, *no tengas ningún reparo en pedir que te aclare lo que no has entendido.*

3º Al estudiar tu lección tendrás delante las notas tomadas en clase y procurarás *no pasar*, en el libro, *de un concepto o cuestión a la siguiente sin haber adquirido la certidumbre de que la entiendes.*

4º Si después de haber cumplido el precepto anterior hay alguna *palabra de significado dudoso* o no comprendido, no tengas reparo en *preguntar al maestro oportunamente y cuanto antes mejor*. Porque te sería imposible cumplir después con el siguiente y último.

5º Al decir tu lección **jamás pronuncies palabra alguna cuyo significado no conozcas.**

Ejemplo. En la clase de Física has anotado: Eter físico... *imponderable... incoercible;* el profesor no ha explicado el significado de estas palabras. Al estudiar la lección encuentras en el libro de texto: El éter es un fluido *imponderable* e *incoercible* que llena todos los espacios, etc., etc. y no dice el significado de aquellas palabras. Si tienes un diccionario, búscalas y encontrarás: Imponderable... Lo que no se puede pesar. Incoercible... Lo que no se puede coger. Pero si no tienes el diccionario o si éste no te saca de dudas, pregunta, y pregunta hasta conseguirlo.

No terminaré este punto sin hacerte observar:

1º Que el humano saber es grandioso, aumenta continua y rápidamente, tanto que hoy es imposible que una persona abarque y domine todo lo sabido, no ya de una Ciencia, sino de alguna de sus ramas. Que será prodigioso, inmenso lo que se sabrá dentro de algunos siglos. Pero ni ahora ni después se habrá descorrido el velo que oscurece y limita el entendimiento humano, velo que no permite conocer nada de la esencia de las mismas cosas que continuamente estudiamos para obtener nuevos conocimientos y nuevas aplicaciones. Así, el más sabio ignora lo que son: La materia, la fuerza, la electricidad, la luz, el calor... El tiempo, la extensión, el espacio, la magnitud... La sensación, los sentimientos, el pensamiento, la idea, la vida...

Por lo tanto, serías imprudente queriendo indagar cuál es la esencia de esas cosas que todos ignoran.

2º Que apesar de tanta ignorancia presente y futura, el orgullo humano hace sabios imprudentes (1) que buscan

(1) Los de buena fe son enfermos del cerebro por una saturación de orgu-

con afán el modo de borrar todo lo que en el esquema (Fig. 7) está encima de la línea *ab*. Poquísimos de ellos son los que trabajan de buena fe, pero desgraciadamente, ni a los unos ni a los otros se les expulsa del templo de la ciencia.

3º Ten presente que en los libros hay siempre erratas, en número más o menos grande, y que si estudias bien seguramente las encontrarás. También pueden haber involuntarios errores y, aunque esto es poco frecuente nunca des por cierto lo que parece bien escrito; ten siempre una prudente desconfianza.

Y, por último, si alguna vez tropiezas con algún concepto que es contra las verdades de la religión cristiana, puedes seguir dos caminos: rechazarlo desde luego como falso o, si te sobra tiempo, estudiar *a fondo* la teoría científica que lo engendró; sin ningún reparo, porque seguramente tu fe no peligrará; antes bien saldrá más fortalecida, al comprender las falsedades de los incrédulos, viendo como la verdad científica jamás se opone a la verdad moral.

1lo. Los sectarios y asalariados están y se les permite estar en todas partes: en las cátedras, en las academias y en las sociedades científicas. Eso aun puede pasar; pero lo que no puede ni debe tolerarse es que, en libros de texto y en libelos de propaganda atea, se escriban errores y falsedades con escarnio de la Ciencia y tácita colaboración de los claustros y sociedades, que tendrán como verdad discutible el *libre albedrío,* pero en cambio tendrán por indiscutible e intangible la *libertad de la cátedra,* aunque en ella se rebuzne a ciencia y paciencia de la sana razón.

§ VIII

Clasificación de las ciencias

Las ciencias pueden clasificarse en dos grupos: ciencias *experimentales* que abarcan todos los conocimientos teórico-prácticos referentes a todos los seres del mundo físico; y ciencias de razonamiento *abstractas* o *especulativas* que abarcan las verdades del mundo moral. A su vez cada uno de estos dos grupos se subdivide en otros, como puedes ver en el siguiente incompleto cuadro:

- CIENCIAS
  - Experimentales
    - Naturales
      - Astronomía
      - Historia Natural
    - Físicas
    - Químicas
  - Abstractas
    - Exactas .... **Matemática**
    - Morales
    - Sociales

La carrera que has escogido comprende varias ciencias de ambos grupos, cuyas verdades corresponden principalmente a las tres siguientes: Matemática, Física y Química. La más importante es la Matemática.

De un modo general puede decirse que la Matemática es la ciencia que trata de la cantidad y del orden.

En el mundo físico o material ningún conocimiento serio escapa del de cantidad; por eso suele decirse que las Matemáticas son la base de las ciencias experimentales.

Vamos a empezar el estudio de esta importantísima ciencia aprovechando los conocimientos prácticos que ya tienes de ella; es decir, aprovechando todo lo que ya sabes de la Aritmética y Geometría prácticas.

§ IX

Fin y resumen

Antes de empezar nuestras lecciones sobre la cantidad y el número, he de encarecerte lo importante que es para ti todo lo que en esta introducción has aprendido. Preciso es que nunca se borre de tu memoria y para ello te doy el siguiente cuadro resumen de todo lo dicho.

Este cuadro debes copiarlo y tenerlo siempre a mano y en lugar visible. Las palabras **Voluntad, Quiero, Alerta** debes repetírtelas tantas veces como sientas flaquear tu *actividad* atraída hacia la *sombra* o combatida por la *pereza*.

Si, por desgracia, en alguna ocasión, te dejas vencer, faltando al cumplimiento de tus deberes, *haz un borrón* en el cuadro sobre el **YO.** Allí has de ver tantos borrones como faltas hayas cometido.

La vergüenza de ver ese **Yo** tan sucio y rebajado, despertará en tu ánimo el adormecido **Amor propio** y volverás a dibujar ese cuadro que ha de ser el espejo de tu alma.

YO

con firme

VOLUNTAD

Quiero

SER BUENO **PENSAR BIEN**

Fe

Esperanza

Caridad

LUZ

Para conseguir todo fin **lícito.**

Me propongo un alto fin: Ser Ingeniero?

He de estudiar bien

Quiero ser

Atento **Ordenado**

Prudente

y

Discreto

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

I

CANTIDAD Y NÚMERO

La peor definición, pensada y expresada por el estudiante, es mejor que la más sabia definición clavada en su mente.

I

Cantidades que se cuentan y cantidades que se miden

Albricias, hijo mío: basta de guerra, de tristes presagios y de plática seria. Vamos a entrar en el campo de la **Ciencia matemática** que es un encanto. Atractivo, risueño y sencillo será ahora el paisaje: feliz tú si con el tiempo penetras en el templo de la **Matemática pura** y llegas a poderte recrear, con tu espíritu a solas, incomunicado con la materia. Contemplarás entonces la verdad pura y bella. Sentirás la dicha del sabio y la emoción del artista.

En la ciudad o en el campo mira a tu alrededor, ¡qué sinnúmero de cosas puedes contemplar! No has de ser un perfecto observador para ver que las hay muy parecidas unas a otras y que las hay muy diferentes. Pero en las más diferentes o distintas puedes encontrar siempre algo que se parece, algún carácter común.

¿En qué se parece un huevo a una castaña? Aunque cambies la castaña o el huevo o los dos por cualquiera cosa o ser, natural o artificial, real o ideal, podrás siempre contestar: *En que existen.*

Y cuando se trata de cosas materiales solamente, se pueden dar varias buenas respuestas: *En que pesan, en que ocupan espacio, en que pueden moverse*, etc., etc.

Ya ves cuán parecidos son un huevo y una castaña y cuán errónea la chistosa contestación: *En nada.*

En las cosas materiales siempre hay, aparte de la existencia, algún o algunos caracteres comunes que las asemejan de tal modo que, prescindiendo (1) de todo lo demás, pueden considerarse como *homogéneas,* del mismo género o de la misma especie.

Si te castigan a transportar el peso, p. ej., de una arroba, esa arroba podrá ser de cualquier cosa: ¿qué importa?

Las cosas homogéneas se diferencian entre sí por su grandor o tamaño: El peso de un huevo de gallina es mayor que el peso de una castaña, y comprendes bien lo que quiero decir si te pregunto: ¿Cuántas castañas pesa un huevo?

Cuando compras p. ej. castañas, te dan una cantidad de castañas por otra cantidad de dinero. Por 10 céntimos dan 7 castañas. Una cantidad de castañas puede apreciarse de diversos modos: La castañera, que te las vende a ti, las compra por litros y el comerciante las compra por arrobas.

Hay varias clases de cantidades y una misma cantidad se puede apreciar de diversas maneras.

Todas las cosas materiales son *divisibles en partes.*

Toda cantidad es siempre un conjunto de cantidades, más pequeñas, de su misma especie.

Las partes o elementos de una cantidad pueden estar separados realmente como las castañas de un saco, los huevos que contiene un cesto, las líneas de esta página, las letras de esta línea, etc., etc.

Estas cantidades *se pueden contar.* Cada elemento u objeto de los que componen una totalidad o conjunto se llama **unidad objeto.** La cantidad o total de objetos viene

---

(1) Prescindir mentalmente de ciertos caracteres o propiedades es lo que se llama *abstraer* o hacer *abstracción.* Por abstracción: un huevo es un peso y una castaña también y todos los cuerpos materiales son pesos perfectamente comparables entre sí.

siempre expresada por un **número entero**, que es el *número de veces* que se repite o está repetida la unidad: una, dos, tres, cuatro,... veces. Así, después de haberlas contado, *expresarás* los valores de aquellas cantidades diciendo, p. ej.: 235 castañas, 34 huevos, 36 líneas en esta página, 52 letras en esta línea.

Cuando entre los elementos o partes que constituyen un todo o totalidad no hay separación efectiva, como sucede p. ej. con el volumen de una castaña, con el peso de un huevo, con la distancia entre dos puntos, etc. etc., no puede apreciarse la cantidad tan sencillamente como en el caso anterior. En primer lugar, la **unidad** no existe como en el caso anterior, has de escoger arbitrariamente, a tu gusto o conveniencia, el *elemento unidad,* **unidad medida**: y después ver o averiguar cuántas veces este elemento unidad está contenido o repetido en la cantidad total de su misma especie. Pero como estos elementos están unidos los unos a los otros, *casi nunca podrás contarlos.* En este caso la cantidad es **continua** y no se cuenta; *se mide.*

Y para medir necesitas siempre un aparato, más o menos complicado. Y necesitas saber manejar este aparato. Y la medida casi nunca dará un número entero por resultado; la unidad que escojas no cabrá exactamente; habrá generalmente un sobrante más pequeño que el elemento escogido por unidad. Ejemplo:

Quieres medir la longitud de la recta AB (Fig. 8), esto es, la distancia entre dos puntos A y B. Has de empezar por escoger la unidad, otra recta o distancia, p. ej.: el centímetro, la pulgada, la distancia *ab* entre las dos puntas de un compás abierto a tu antojo. Y ves que cabe dos veces hasta C y que sobra CB menor que la unidad *ab* que escogiste.

Tendrás que dividir *ab* en partes iguales, p. ej. en seis y ver cuántas veces esta parte alícuota $\frac{1}{6}$ cabe en CB: Cabe 4 veces y sobra DB.

Y si quieres apreciar la longitud DB, has de subdividir ahora el sexto de *ab*... y esto ya cansa. Podría ser cosa de nunca acabar; DB es poquito, prescindamos de DB.

Has medido la distancia AB, obteniendo el siguiente resultado *aproximado:* 2 y $\frac{4}{6}$, esto es, 2 unidades y 4 sextos. Has despreciado DB

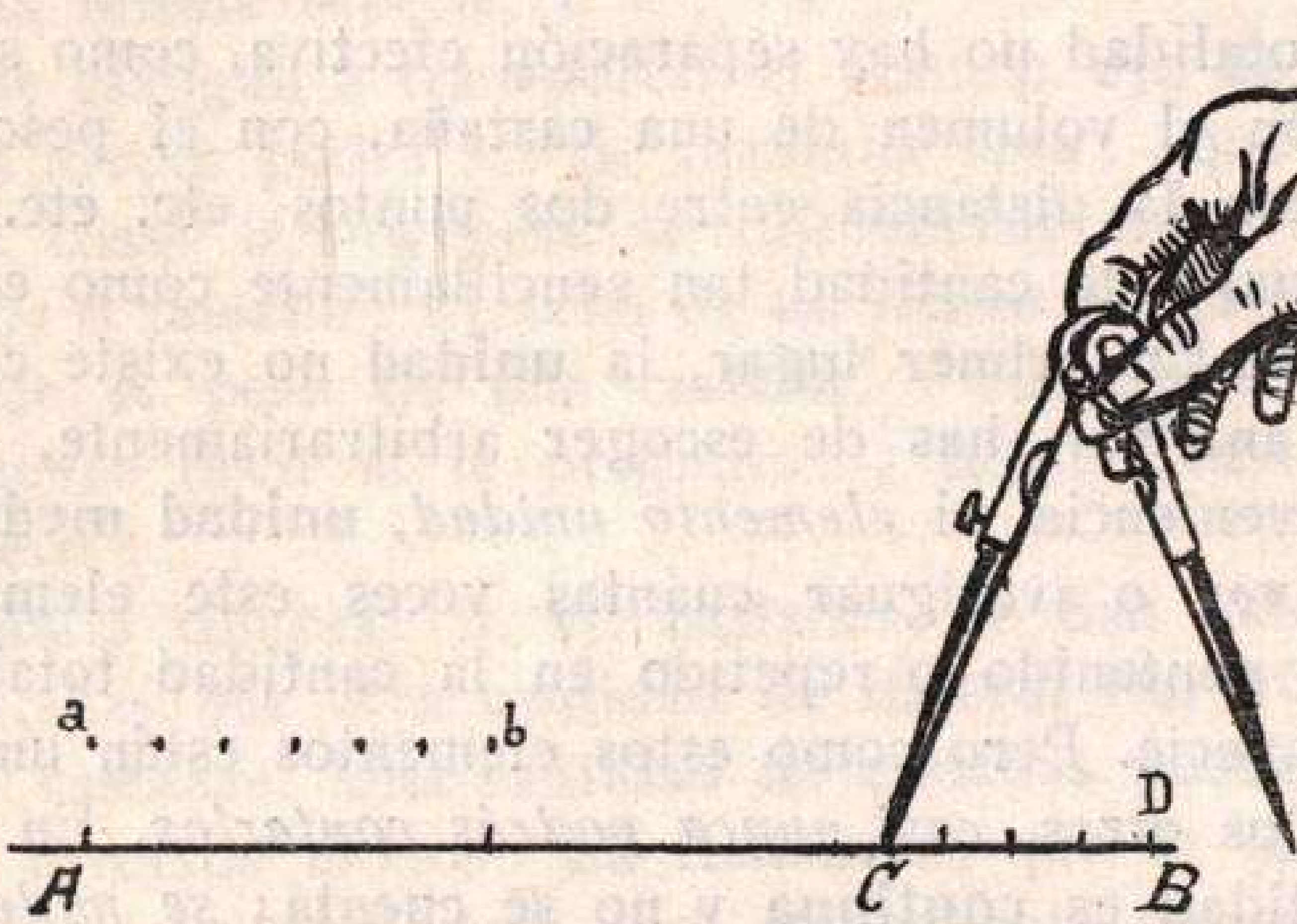


Fig. 8.

Puede suceder que la cantidad no contenga exactamente a la unidad ni a ninguna de sus partes alícuotas, por pequeñas que éstas sean. Esto sucedería si la recta AB fuese, p. ej., la diagonal de un cuadrado, y la abertura *ab* de compás, escogida por unidad, fuese el lado de dicho cuadrado; la expresión de la medida de AB sería exactamente $\sqrt{2}$, *número irracional.* Entonces se dice que AB y su unidad *ab* son inconmensurables.

El número $\sqrt{2}$ no es entero ni fraccionario. Es un número irracional que no se puede expresar exactamente, pero sí, con tanta aproximación como se quiera.

Por oposición a esta clase de números, los números enteros y fraccionarios se llaman *racionales.*

Análogamente, empleando instrumentos adecuados, podrás apreciar o medir *aproximadamente* otras cantidades continuas, obteniendo resultados como éstos: La longitud de esta mesa es de 1 metro y 17 centímetros; esta castaña tiene un volumen de 5 y $1/2$ centímetros cúbicos; este huevo pesa 0,095 kgrs.

En resumen: Hay cantidades *discontinuas* y cantidades *continuas*.

Las discontinuas, llamadas también discretas, se aprecian o valoran **contando** y el resultado de la cuenta es siempre un **número entero** o **natural**.

Las cantidades continuas se **miden** y el resultado de la medición es, generalmente, un **número fraccionario**.

La importancia de esta división está en esas dos formas de la expresión de la cantidad: **número entero** y **exacto** cuando se cuenta, **número** generalmente **fraccionario** y *siempre* inexacto, esto es, **aproximado**, cuando se mide.

Otras divisiones verás de la cantidad.

Importa que te fijes en que no es lo mismo cantidad que número. Cantidad es materia o cualidad de la materia; responde a la pregunta **¿qué?** Número es expresión de la cantidad después de contarla o medirla, y responde a la pregunta **¿cuánto?**

Has comido ¿qué? castañas, una cantidad de castañas. ¿Cuántas? 8, $1/2$ litro, 50 gramos.

◆ ◆ ◆

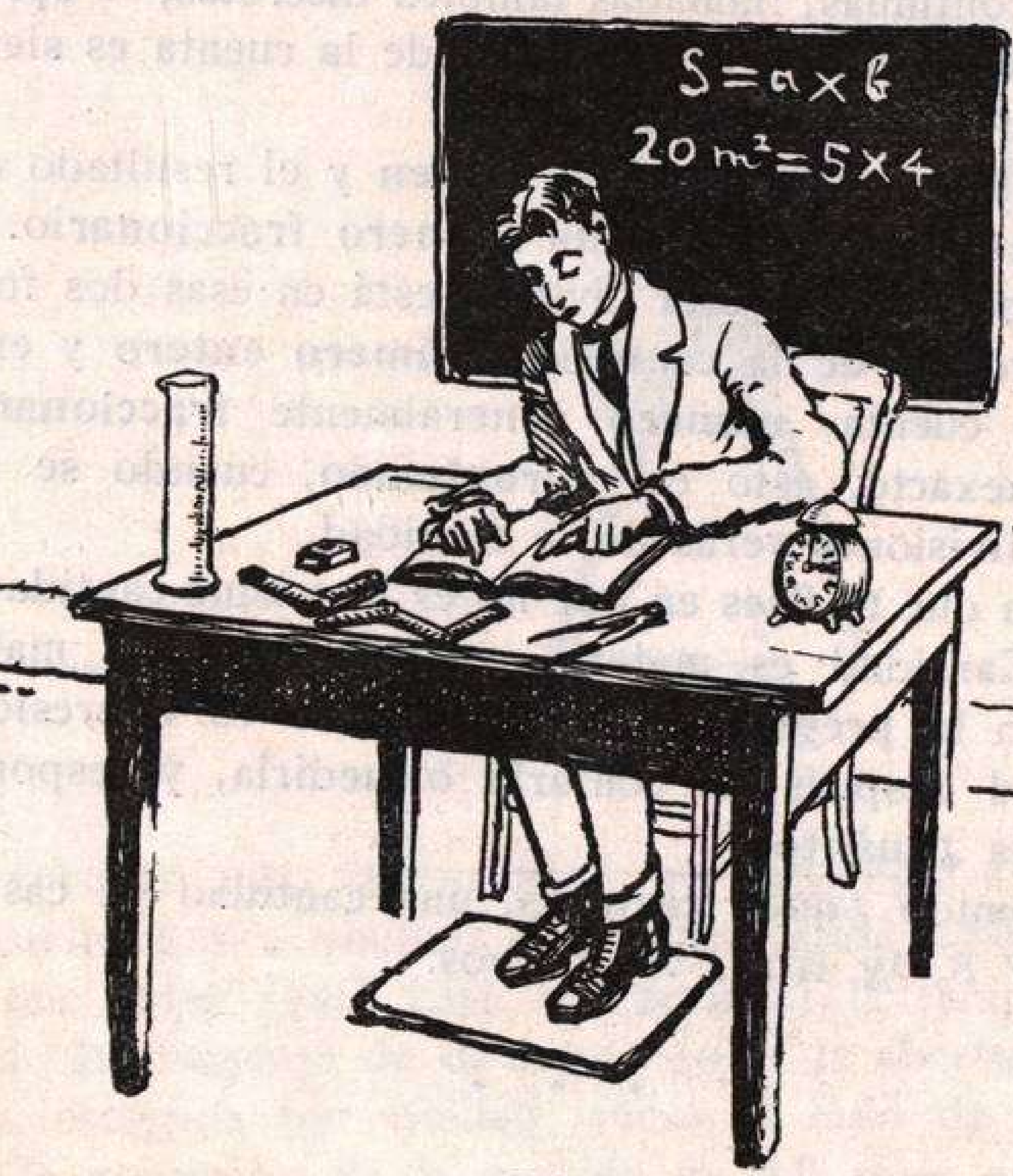
Cada individuo tiene sus inclinaciones y, cuando obra con entera libertad, emplea su actividad haciendo lo que es más de su agrado.

Ahí tienes a Luis, que es uno de mis buenos discípulos (Fig. 9).

Son las 3, la hora del recreo. ¿Qué hace? Está contando las líneas que contiene esa libreta que acaba de comprar.

Ha contado primero el número de hojas: 80 hojas. Cada hoja, 2 páginas, total $2 \times 80 = 160$ páginas.

En cada página 25 líneas; total $160 \times 25 = 4000$ líneas. Y esas fórmulas, escritas en la pizarra, indican que antes hizo alguna otra cosa análoga. Seguramente ha medido la superficie de su cuarto: 20 metros cuadrados; resultado de multiplicar 4 metros que tiene de ancho por 5, que es el número de metros que el cuarto tiene de largo.



Fig, 9.

Esta afición a medir la tiene desde que le dije que el Ingeniero tiene que saber medir toda clase de cantidades. Tan fuerte es en él esta afición que, observa como en su mesa todos los objetos son instrumentos de medir: una probeta graduada, un reloj, un metro, un compás,... y precisamente, en este momento, está preocupado buscando un aparato que compró para pesar, cuando su herma-Pedro, que va tomando afición a medir, entra diciendo:

—Mira Luis, el beby pesa 3 kilos y medio.

—Vaya una ocurrencia; y ¿por qué haces eso?

—Para demostrarte que el beby es una cantidad. Mira, el dinamómetro dice que el beby tiene 3 kilos y medio de perro.

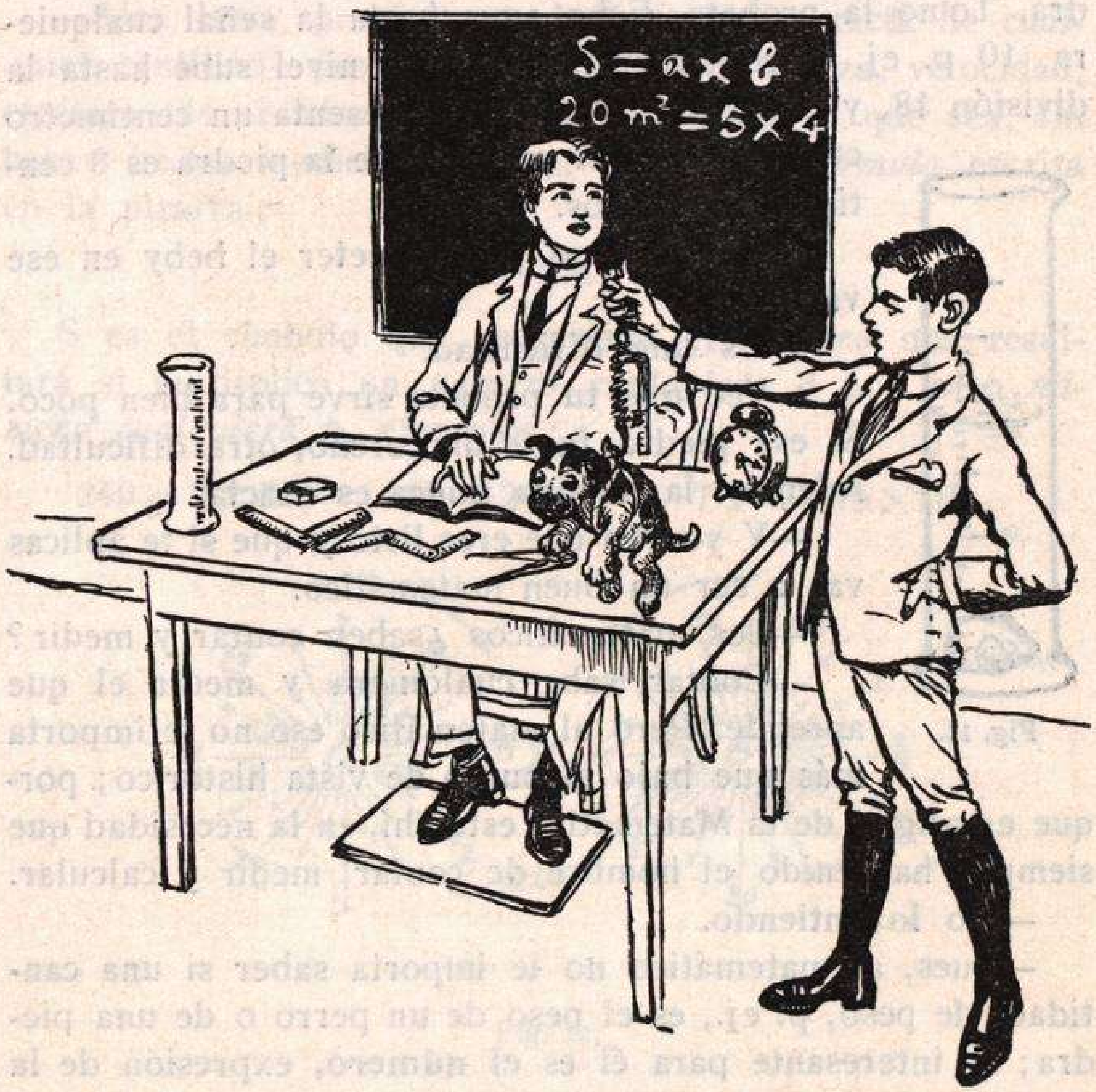


Fig. 10.

—¡Echa disparates! El beby y cualquier otro perro, como cantidad perruna, es y vale 1 perro, *singular* uno. Pero el peso que marca el aparato es la expresión aproximada del peso de ese perro. En la China podrías vender tus 3 ½ kilos de perro como en nuestros mercados se vende el buey o el carnero. Si tanto te interesa lo que tiene que ver la cantidad con tu perrito, podrías contar los pelos que tiene en el rabo o las veces que ladra en una hora,...

—Lo que me gustaría saber es su volumen.

—Mira, ahora voy a medir el volumen de esta piedra. Tomo la probeta. Echo agua hasta la señal cualquiera, 10 p. ej. Introduzco la piedra, el nivel sube hasta la división 18, y como cada división representa un centímetro cúbico, luego el volumen de la piedra es 8 centímetros cúbicos.

Fig. 11.

—Pero yo no puedo meter el beby en ese vaso.

—Es una dificultad.

—Veo que tu probeta sirve para bien poco. Si esa piedra fuese un corcho, otra dificultad. Además, la medida nunca es exacta.

—Y yo veo que eres listo y que si te aplicas vas a ser un buen matemático.

—Los matemáticos ¿saben contar y medir?

—Contar sabe cualquiera y medir el que aprende. Pero al matemático eso no le importa **más que bajo el punto de vista histórico**; porque el origen de la Matemática está ahí, en la necesidad que siempre ha tenido el hombre de contar, medir y calcular.

—No lo entiendo.

—Pues, al matemático no le importa saber si una cantidad, de peso, p. ej., es el peso de un perro o de una piedra; lo interesante para él es **el número,** expresión de la cantidad. *Hace abstracción* de la materia y aun de sus cualidades, excepto de la cualidad **extensión** y razona solamente con el **número,** y con la **extensión** (1).

—¡Qué manera de abstraer!

—Abstrae más todavía; suele también prescindir del

(1) La ciencia de los números es la Aritmética y la ciencia de la extensión es la Geometría.

valor numérico expresando o representando la cantidad con un símbolo. Los símbolos que emplea son las letras del alfabeto: *a, b, c,...* [1]

—Ya entiendo, eso es como cuando se dice: *fulano tiene x pesetas.*

—Una letra, p. ej. *a,* es la expresión exacta de cualquier cantidad: peso, longitud, tiempo, fuerza, velocidad, etcétera; es el número, *cualquier número,* el que sea, sin haber hecho medición alguna. Mira esa *fórmula* escrita en la pizarra:

$$S = a \times b$$

S es el símbolo que representa el *número* que resultará si multiplico un *número cualquiera a* por otro *número cualquiera b,* ejemplos:

$$240 = 3 \times 80, \qquad 10 = 2 \times 5, \qquad 7'5 = 0'75 \times 10, \ldots$$

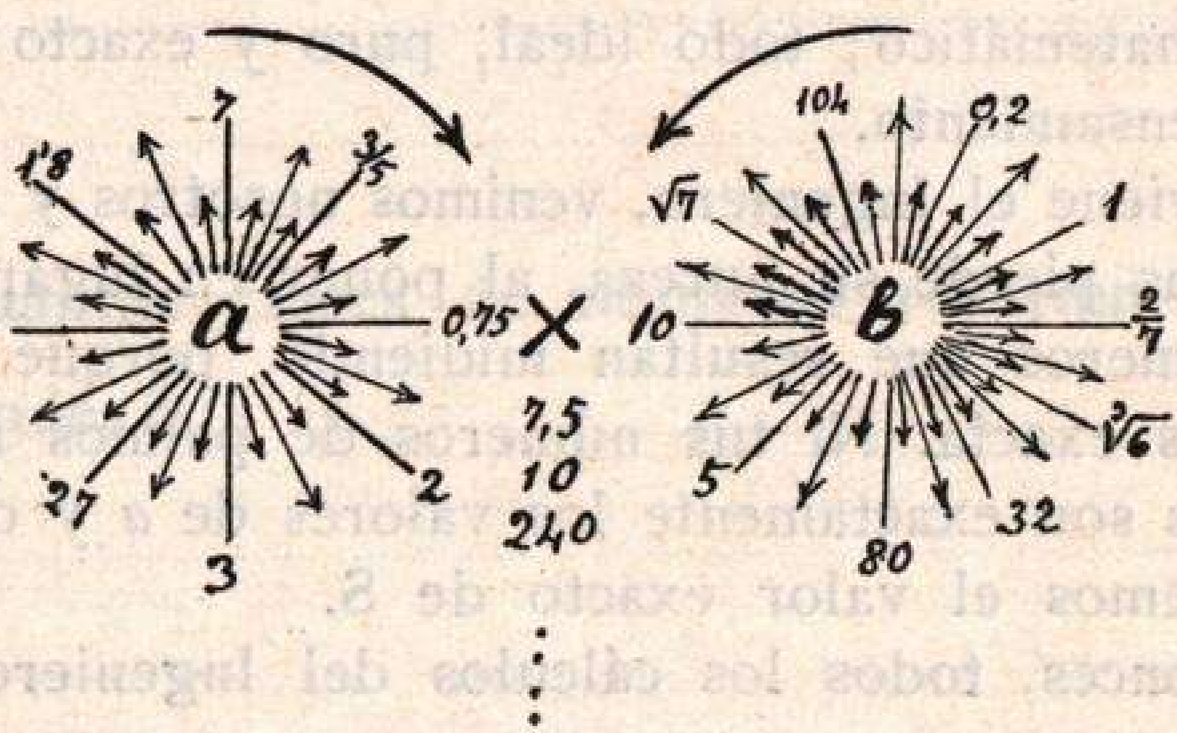


Fig. 12,

así indefinidamente tendré una infinidad de valores para S. El esquema (fig. 12) es una representación gráfica de estas ideas. Infinidad de radios parten de *a* y de *b,* cada radio es un número; hazlos girar y cada producto de los

(1) Algunas veces con tildes: a', a'', a'''... otras con subíndices b_1, b_2, b_3.... En algunos casos, mayúsculas: A, B,... y en otros, letras del alfabeto griego: α, β, γ ...

dos números que están más próximos, uno al otro, será un *caso particular* de la *fórmula general* $S = a \times b$; un *valor numérico* de S.

—¿Y qué quiere decir lo que has escrito en la pizarra:

$$20\,m^2 = 4 \times 5\,?$$

—Dice que la superficie de este cuarto es *aproximadamente* 20 metros cuadrados, resultado de multiplicar el número de metros, 4, que resulta de medir la anchura del cuarto, por el número de metros, 5, que resulta de medir su longitud.

—Así, esta mesa tiene una superficie de 28 palmos cuadrados, porque mira: anchura 4 palmos, longitud 7 palmos y, $28 = 4 \times 7$.

—Efectivamente; $S = a \times b$ es, bajo este aspecto geométrico, la *expresión exacta* del área de cualquier superficie rectangular cuyas dimensiones *exactas* son *a* y *b*. Así es para el matemático; todo ideal, puro y exacto: todo está en su pensamiento.

Pero viene el Ingeniero, venimos nosotros y al aplicarla a las cosas pierde su pureza, al poner en lugar de *a* y de *b* los números que resultan midiendo, porque nunca una medida es exacta. Ni tus números de palmos ni los míos de metros son exactamente los valores de *a* y de *b* y nunca hallaremos el valor exacto de S.

—Entonces, todos los cálculos del Ingeniero son mentira.

—¡Cuidado! son aproximados y *prácticamente exactos* cuando mide bien, esto es, cuando mide con la aproximación suficiente que en cada caso particular se precisa. Y basta de conversación, que es hora de estudiar.

* * *

Procura ahora contestar, como puedas, a las preguntas siguientes, escribiendo esmeradamente tus respuestas.

Piensa antes de contestar consultando en este capítulo lo referente a cada pregunta.

1. ¿Qué es cantidad? ....

....

....

2. ¿Qué es número? ....

....

....

3. ¿Cómo se clasifican las cantidades atendiendo al modo de apreciarlas? ....

....

....

4. ¿Cuántas clases de números resultan al medir las cantidades? ....

....

....

....

5. ¿Qué números se llaman racionales? ....

....

6. ¿Qué es número irracional? ....

....

....

7. ¿Qué es abstraer? ....
....
....
....

8. Pon algún ejemplo de abstracción. ....
....
....
....
....

9. ¿Cómo se representa la cantidad matemáticamente? ....
....
....

10. ¿Qué es una fórmula? ....
....
....
....

11. En la fórmula $V = a \times b \times c$, calcula cuatro valores de V correspondientes a los siguientes casos particulares:

1º $a=3$, $b=4$, $c=6$
2º $a=1$, $b=0{,}1$, $c=0{,}01$
3º $a=20$, $b=60$, $c=0{,}1$
4º $a=175$, $b=248$, $c=173$

1º $V = 3 \times 4 \times 6 = 12 \times 6 = 72.$
2º ....
3º ....
4º ....

12. La unidad ***ha de ser siempre de la misma especie que la cantidad*** **que se mide, pero tú sabrás ingeniarte para expresar :**

1º Una distancia en kilogramos. ....

....

....

....

....

2º Expresar un peso en horas ....

....

....

....

II

Serie natural
Sistemas de numeración

AHORA quiero hacerte discurrir, quiero que discurras sobre cosas que ya conoces bien:

Tú sabes contar: *uno, dos, tres,... mil,... un millón,* etc.

Y sabes escribir y nombrar cualquier número de la *serie natural*:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots$$

ilimitada, que *nunca* se acaba (1). Por grande que sea un número siempre se le podrá añadir 1.

Esa n es cualquier número de esta serie. Por lo tanto n es *cualquier número entero*; en *esta cuestión*, n no puede ser ni fraccionario ni irracional; porque así lo quiero. Como cantidad, n, lo mismo que a y b (fig. 12) puede recibir cualquier valor *mientras no se establezcan condiciones* o *hipótesis*; p. ej., la que acabo de imponer. La letra n suele guardarse para este empleo. El *octavo* término de la serie natural es el número 8; el *décimo sexto* es el número 16,... pues el *enésimo* término es el número n.

¿Entiendes?: n es el número que ocupa el *enésimo* lugar en la serie, es el *término general*, es *cualquier tér-*

---

(1) Serie, en Matemáticas, es toda sucesión *ilimitada* de cantidades. Cada una de estas cantidades es *un término* de la serie. El término *enésimo* se llama *término general* de la serie.

mino, él solo es *toda la serie* infinita. Es p. ej. $n = 74$, le sigue $n + 1 = 75$; si $n = 1000$, le precede $999 = n - 1$.

13. Ocupas tú el *undécimo* lugar en una fila de 25 estudiantes, contesta:

1º ¿Cuántos estudiantes hay delante de ti? ....

....

2º ¿Cuántos hay detrás de ti? ....

....

3º ¿Qué lugar ocupas contando al revés, esto es empezando por el último? ....

....

14. Generalización del anterior. **Ocupas el *enésimo* lugar en una fila de m estudiantes,** contesta:

1º ¿Cuántos estudiantes tienes delante? ....

....

2º ¿Cuántos detrás? ....

....

3º ¿Qué lugar ocupas contando al revés? ....

....

15. Hay 25 sillas, una para cada estudiante; pero la numeración de las sillas empieza por cero, y se corresponden así:

0, 1, 2, 3,... 24 sillas
1, 2, 3, 4,... 25 estudiantes.

Contesta: 1º Al estudiante del lugar *enésimo*; ¿qué silla le corresponde? ....

....

2º ¿Qué estudiante es el de la silla 19ª? ....

....

3º ¿Y el de la *enésima*? ....

....

En el capítulo anterior te dije que la Matemática trataba de la *cantidad* y de la *extensión*, ahora debo añadir y del *orden*, pues son muchísimas y muy importantes las cuestiones o problemas que podría proponerte, p. ej. con esos estudiantes y esas sillas u otros objetos, sin atender a la cantidad, atendiendo solamente: al orden de colocación, correspondencia, maneras de agruparse, etc.

Vamos a ver si resuelves la siguiente cuestión:

16. ¿Hay en Barcelona dos personas que tengan el mismo número de cabellos? Contesta fundándote en los siguientes datos: en Barcelona hay más de 100.000 habitantes y ninguna persona tiene más de 45,000 cabellos.

....

....

....

....

....

....

* * *

4786

cuatro mil setecientos ochenta y seis

Es decir: cuatro millares, más siete centenas, más ocho decenas, más seis unidades.

Y así escribes y nombras *cualquier* número, por grande que sea; para cada uno tienes su nombre y su signo.

¡Es bien curioso! ¡Si tuvieras que distinguir, no una infinidad, sino solamente 4786 cosas con nombre y signo diferente para cada una!

Sabes escribir y leer cualquier número porque conoces las *reglas* del *sistema* de numeración *decimal,* llamado así porque la base es *diez.* Este es el sistema empleado universalmente.

0	*cero,* para indicar la carencia de unidades.	
1	*uno,* unidad fundamental.	
	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.	
10	*diez, decena,* **base** de este sistema.	
	11, 12,...... *veinte,* ...... *treinta,......*	
100	*ciento, centena,*	diez decenas.
	101, 102,......	
1000	*mil,*	diez centenas.
	1001, 1002,......	
10000	*decena de millar*	diez millares.
	10001, 10002,......	
100000	*centena de millar*	diez decenas de millar.
	100001, 100002,......	
1000000	*millón*	diez centenas de millar.
	etc., etc.,	etc.

Algunas veces conviene emplear otro sistema de numeración.

Y lo que a ti te conviene mucho es discurrir. Esta gimnasia intelectual es utilísima y agradable.

Análogamente y con las mismas reglas que ya conoces, vamos a ver otros sistemas de numeración.

Escojamos la base, p. ej. *cuatro*. Sistema *cuaternario*.

Cifras que necesitamos: 0, 1, 2, 3.

La unidad fundamental es la misma en todos los sistemas: **uno 1.**

Contaremos ahora de 4 en 4 lo mismo que antes de 10 en 10.

La *decena* consta de 4 unidades; le habríamos de llamar *cuatrena*, (no inventemos nombres); le llamaremos *diez* y se escribirá 10. La *centena* es cuatro veces cuatro, esto es, cuatro decenas, que le llamaremos *cien* y escribiremos 100. Así mismo, 4 veces 16 es *mil*; y 4 veces 64, 10000 *decena de millar*, etc., etc.

He aquí, paralelamente, los números de la serie natural en los sistemas decimal y cuaternario:

Decimal.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cuaternario.	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33	100

17	18	19	20	21	22	23	24	....	64	....
101	102	103	110	111	112	113	120	....	1000	....

Ejercicio.—El número 3221 *tres mil doscientos veintiuno* del sistema cuaternario ¿qué número es en el sistema decimal?

3 millares	del	cuaternario	son	$3 \times 64 =$	192	decimal.
2 centenas	»	»	»	$2 \times 16 =$	32	»
2 decenas	»	»	»	$2 \times 4 =$	8	»
1 unidad	»	»	es	$1 =$	1	»
				Total.	233	»

Recíprocamente.—El número 233 decimal ¿cómo se escribe en el sistema cuaternario?

En 233 unidades, hay: $\begin{array}{r|l} 233 & 4 \\ \cline{2-2} 33 & 58 \text{ decenas} \end{array}$

y sobra **1**

En 58 decenas, hay: $\begin{array}{r|l} 58 & 4 \\ \cline{2-2} 18 & 14 \text{ centenas} \end{array}$

y sobran **2**

En 14 centenas, hay: $\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \text{ millares.} \end{array}$

y sobran **2**

El número pedido consta de: 3 millares, 2 centenas, 2 decenas, 1 unidad, **3221**.

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|r|r|l} 233 & 4 & & \\ \cline{2-2} 33 & 58 & 4 & \\ \cline{3-3} 1 & 18 & 14 & 4 \\ \cline{4-4} & 2 & 2 & 3 \end{array} \quad \mathbf{3221}$$

Contesta tú a las siguientes preguntas:

17. Escribir en el sistema decimal el número 21023 del sistema cuaternario.

....

....

....

18. ¿Qué número del sistema cuaternario es el 4897?

....

....

....

....

19. Sistema binario.—Base 2, dos se escribe 10.

Cifras necesarias: 0, 1.

Escribe enfrente de cada número decimal su equivalente binario.

Decimal.	Binario.
1	....
2	....
3	....
4	....
5	....
6	....
7	....
⋮	
19	....
⋮	
36	....

Sistema duodecimal.—Base *doce* que se escribirá 10.

Cifras necesarias: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*.

Hemos tenido que inventar dos signos o cifras: *a* que es el *diez* y *b* que será el *once*. He aquí la serie natural en este sistema:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*, 10, 11, 12, 13 .... 1*a*, 1*b*, 20 ....
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 .... 22, 23, 24 ....

30 .... 100 .... 1*ab* ....
36 .... 144 .... 275 ....

20. Escribe 3470 en el sistema duodecimal.

....

....

....

....

21. ¿El número duodecimal 39ab7 cómo se escribe en el sistema decimal?

....

....

....

....

III

Grande y pequeño
Igual, mayor y menor

De ninguna cosa, *sola* o aislada, puede decirse que es grande o que es pequeña.

Cuando digo que una cosa es grande o pequeña es porque la comparo con otra de su misma especie: tácita o expresamente siempre existe la comparación; y una misma cosa es *grande* o *pequeña,* según con cual otra, de su misma especie, se la compara. Así, la longitud de *un metro* es *pequeña* comparada p. ej. con la distancia entre Barcelona y Mataró; pero es *grande* comparada con la altura de una letra de este libro.

Las figuras 13 y 14 se diferencian solamente en el tamaño. La *disposición* u *orden de colocación* de los objetos es la misma en ambas figuras y los tamaños de las cosas de la 13 están todos disminuídos en la 14, en la misma proporción.

Las dos figuras son *semejantes.* La 14 es una reducción de la 13, o la 13 es una ampliación de la 14.

Vistas separadamente, son la misma figura, ni grande ni pequeña. Miradas como están, la 14 es pequeña y la 13 grande; pero ésta sería pequeña junto a cualquiera ampliación suya y la 14 sería grande junto a su miniatura.

Si ese muchacho es Luis, Luis y su bastón están representados por cualquiera de esas dos figuras y por cualquiera ampliación o miniatura de las mismas.

Imagina ahora lo que sucedería si mañana, al despertar, fuera tu cuerpo 1000, p. ej., veces mayor que hoy; serías un gigante !... Pero si tus zapatos, ropas, tu habitación y todo lo que hay en ella, tu casa y todas, absoluta-

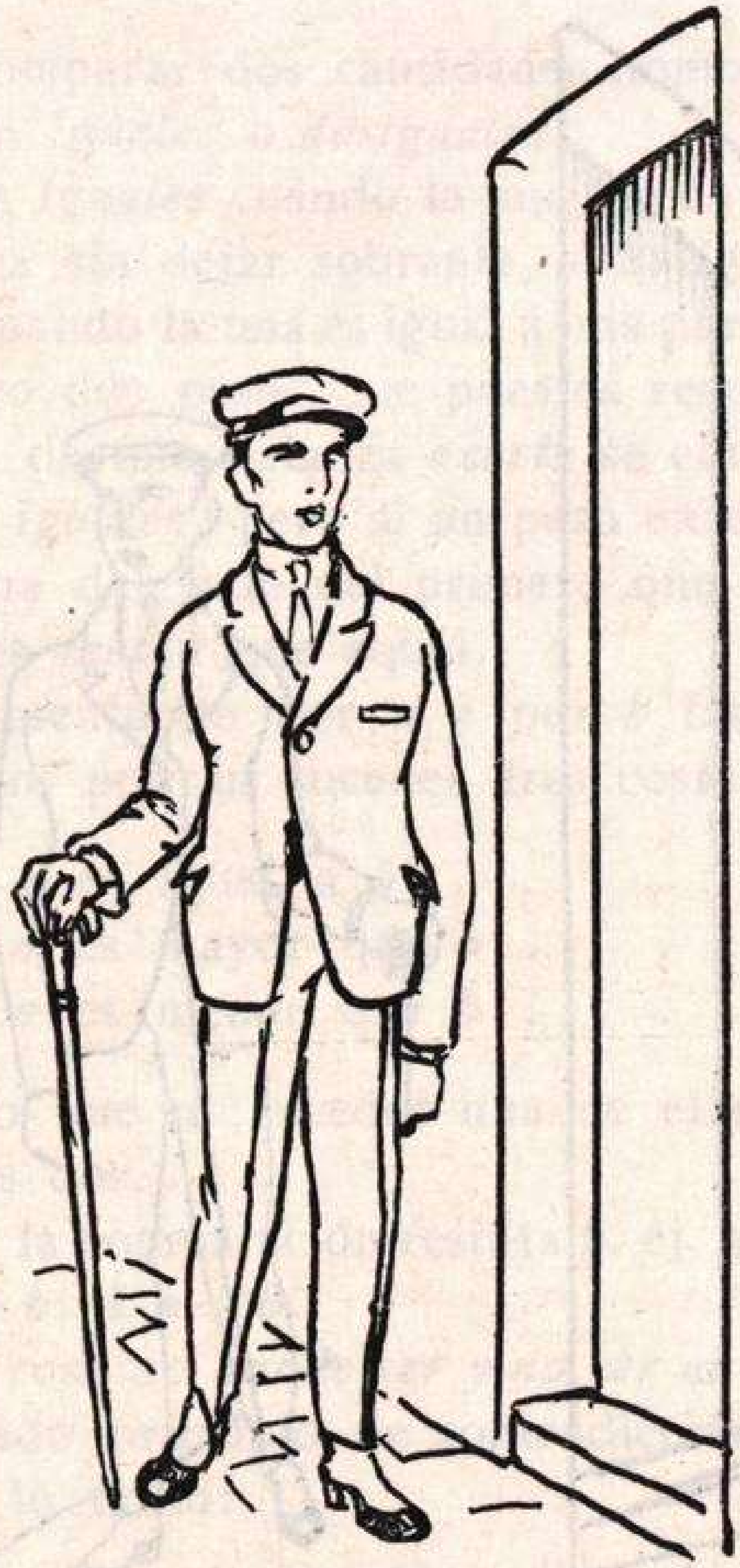


Fig. 13.

Fig. 14.

mente todas las cosas del mundo físico se hubieran hecho también 1000 veces más grandes, ¿qué pasaría? *Nada;* nadie se enteraría del cambio. El metro sería un kilómetro el kilogramo sería una tonelada, ...; pero el kilómetro sería 1000 veces mayor y la tonelada también.

Puedes engrandecerte o achicarte cuanto gustes, pues si todo aumenta o disminuye en igual proporción, nadie podrá contradecirte.

Pero si tú solo cambiaras de tamaño, o cambiaran to-

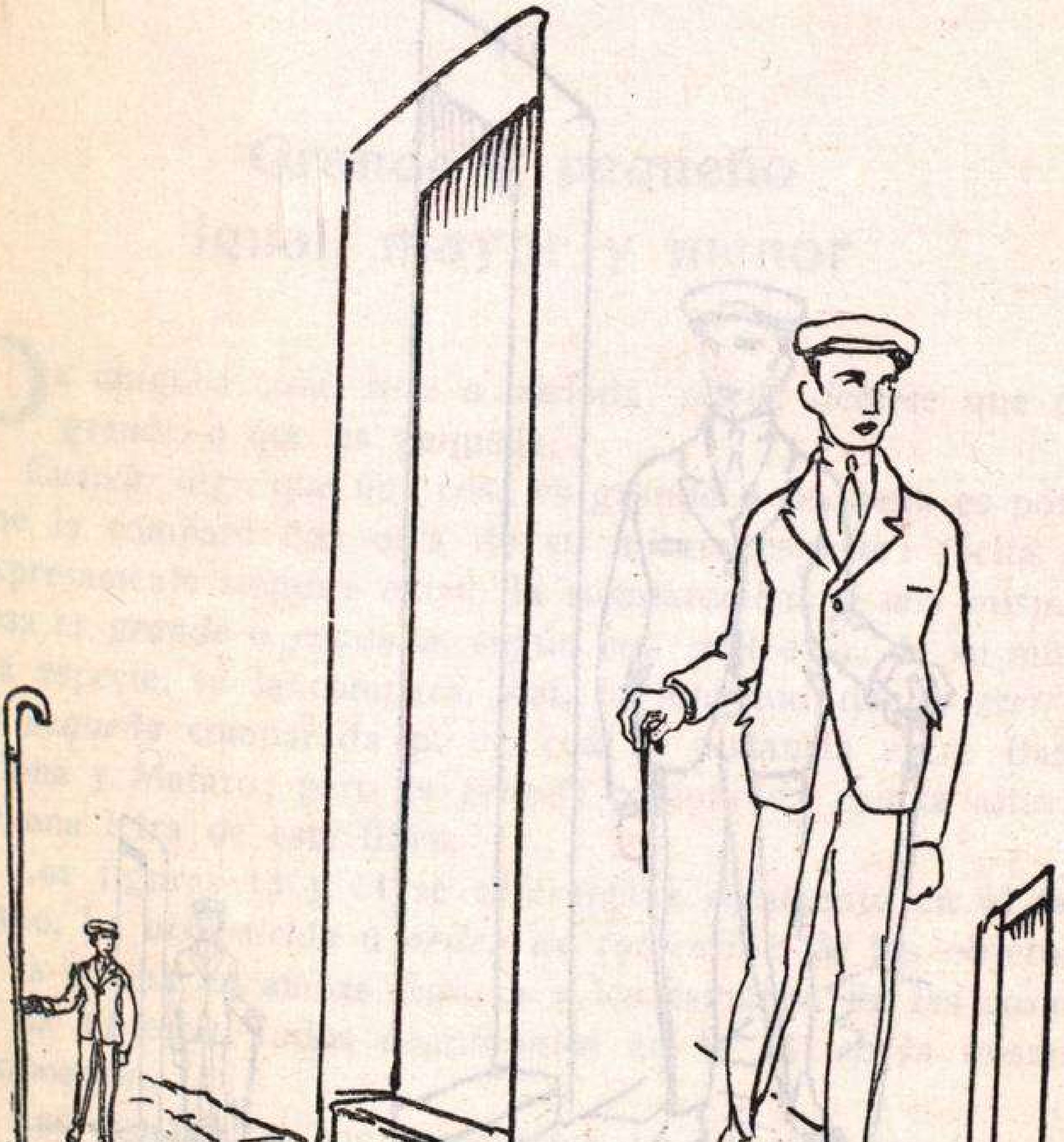


Fig. 15.

Fig. 16.

das las cosas en igual proporción, excepto tú, tanto podría ser que quedaras gigante como enano. Cambiemos de lugar la figura de Luis, solamente, en las figuras 13 y 14; entonces aparece el contraste de las figuras 15 y 16. En la primera aparece Luis como el capitán Gulliver en el país de los gigantes y en la segunda, Luis está en el país de los enanos.

◆ ◆ ◆

Al comparar dos cantidades homogéneas puede suceder que sean *iguales* o *desiguales*.

Serán *iguales* cuando la una pueda sustituir o reemplazar a la otra sin dejar sobrante, y *desiguales*, en el caso contrario, cuando la una es igual a una parte de la otra. Ejemplo:

Tengo dos pesos que puestos respectivamente sobre los platillos de una balanza *exacta* se equilibran; estos dos pesos *son iguales;* pero si un peso excede al otro, la balanza se inclina del lado del primero que es *mayor* que el otro o éste es *menor* que aquél.

Representando por a y por b las cantidades (1) que se comparan, podrán suceder tres cosas:

a es igual a b . . . . . $a = b$
a es mayor que b . . . . $a > b$
a es menor que b . . . . $a < b$

Claro que al suceder una de ellas, quedarán excluídas las otras dos.

Si de la comparación resulta p. ej. que $a = b$, *no podrá ser* que $a > b$ ni $a < b$.

Una cosa no puede ser y no ser al mismo tiempo. Este es el llamado principio de contradicción.

Por lo tanto:

si $a = b$, también será $b = a$
si $a > b$, » » $b < a$

(1) Cuando en lugar de las cantidades iguales se emplean los números que las representan, serán éstos iguales cuando ambas cantidades homogéneas se midan con la misma unidad. Una misma cantidad viene expresada por números muy diferentes según la unidad adoptada: así, 1 metro = 100 centímetros = 0,001 kilómetros, etc.

Fíjate; eso que acabo de escribir dice: en la primera línea, que *una igualdad se puede invertir*, cambiar sus miembros: y en la segunda, que *se puede invertir una desigualdad* pero cambiando al mismo tiempo $>$ por $<$ o viceversa.

Si $a=b$ y $a=c$, es evidente que:
$b=c$ o que $a=b=c$; expresión del conocido axioma que dice: *Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.*

Además de los tres signos afirmativos: $=$ igual, $>$ mayor, $<$ menor, se emplean también otros tres signos de negación, que son: $\neq$ no igual, $\ngtr$ no mayor y $\nless$ no menor.

Tú puedes contestar, sin esfuerzo, las siguientes preguntas. Hazlo empleando los signos $=$, $>$, $<$, $\neq$, $\ngtr$ y $\nless$.

22. Si a no es mayor que b ¿qué es? ....

....

23. Si x no es igual a y ¿qué es? ....

....

24. ¿Qué deduces de estas dos igualdades? $\begin{matrix} a=x \\ x=5 \end{matrix}$

....

25. Deduce lo que puedas de las siguientes:

1ª $\begin{matrix} a>c \\ b=c \end{matrix}$ ....

2ª $\begin{matrix} x>a \\ x<b \end{matrix}$ ....

3ª $a>b>c>d$ ....

....

4ª $\begin{matrix} a>b \\ c\ngtr b \end{matrix}$ ....

....

5ª $a \not< b$ ....
$\quad x \not> b$

....

....

....

Cada término de la serie natural resulta agregando 1 al término anterior; luego podremos escribir:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots\ldots n-1 < n < n+1 < \ldots\ldots$$

26. Escribe las relaciones de magnitud entre los siguientes números: 4 y 50 „ 8 y n „ n y 200 „ n y $n-4$ „ $n+1$ y $n+3$ ....

....

....

....

....

27. ¿Qué es una igualdad? ....

....

28. ¿Qué es una desigualdad? ....

....

IV

Cantidades opuestas y números opuestos

VAMOS a jugar los dos, no importa a que juego.

Tampoco importa que las cantidades que juguemos sean de pesetas, fichas o garbanzos.

Lo importante es que vamos a jugar cuatro partidas, y que cada partida constará de dos jugadas, y que no se paga ni se cobra hasta haber acabado las cuatro partidas. Por lo tanto, es preciso que se lleve cada uno la cuenta de cada jugada para calcular, al final de las cuatro partidas, lo que hay que cobrar o pagar.

El juego ha terminado. Tu cuenta es esta:

Partidas	Jugada 1.ª	Jugada 2.ª	Total
1ª	Gano 5	Gano 7	Gano 12
2ª	Pierdo 8	Pierdo 9	Pierdo 17
3ª	Gano 6	Pierdo 6	Gano *nada*
4ª	Gano 10	Pierdo 14	Pierdo 4

Resumen. . .	Ganancias 12 Pérdidas 21
He perdido. . .	9

Que está bien, pero tantas palabras de *gano*, *pierdo*, para indicar el carácter de las cantidades anotadas la hacen larga y embrollada. Mira la mía:

Partidas	Jugada 1.ª	Jugada 2.ª	Total	
1ª	— 5	— 7	—12	
2ª	8	9		17
3ª	— 6	6	— 0	
4ª	—10	14		4
			—12	+21

He ganado 9.

La ganancia es opuesta a la pérdida. Las cantidades ganadas las llamo *positivas* y les pongo delante el signo +, o mejor, *no les pongo nada;* las cantidades perdidas son, por oposición, *negativas* y las señalo con el signo —.

Cuando tú escribes *gano*, yo entonces *pierdo* y pongo —.

Cuando tú escribes *pierdo*, yo entonces *gano* y pongo +.

Es decir que *la misma cantidad*, si para ti es positiva para mí es negativa, y al revés.

Y son muchos los casos en que una cantidad puede ser, existir, o tomarse en dos sentidos contrarios u opuestos, es decir que hay muchas clases de cantidades opuestas, así : Son cantidades opuestas : las que se escriben en el *haber* y en el *debe*, la subida y la bajada, el avance y el retroceso, el tiempo pasado y el tiempo futuro, etc. Y en todos los casos, se llaman *positivas* a las cantidades de un sentido y *negativas* a las de sentido opuesto ; precedidas las primeras del signo +, o sin ningún signo, y las negativas precedidas del signo —, *menos*.

Así pues, en la cantidad hay que distinguir dos cosas : el valor numérico y el signo o cualidad (positiva o negativa) :

5 metros de subida, equivale a — 5 metros de bajada.
— 8 pesetas de pérdida son 8 pesetas de ganancia.
Ganar — 8 pesetas significa perder 8 pesetas.
Avanzar 15 metros equivale a retroceder — 15 metros, etc.

Fíjate en tu cuenta o en la mía como se suman las cantidades de las dos jugadas. En la tuya dices :

gano 5, gano 7; total, gano 12.

Es lo mismo que decir:

5 de ganancia + 7 de ganancia = 12 de ganancia.

Y más brevemente:

$$5 + 7 = 12.$$

Cuando escribes:

pierdo 8 y pierdo 9; total pierdo 17.

Es lo mismo que decir:

8 de pérdida + 9 de pérdida = 17 de pérdida.

Y más brevemente:

$$-8 - 9 = -17$$

Luego, las cantidades *del mismo signo* se suman, *sumando sus valores numéricos* y *el resultado es del signo común.* Pero las cantidades *de signo contrario* se suman *restando sus valores numéricos* y el resultado es del mismo signo que *la mayor*. Como ves en tu cuenta cuando dices:

Gano 10 y pierdo 14; total, pierdo 4.

Es lo mismo que decir:

10 de ganancia + 14 de pérdida = 4 de pérdida.

Y más brevemente:

$$10 - 14 = -4.$$

Claro que al establecer los dos sentidos positivo y negativo para la cantidad aparecen los *números positivos* y *negativos*: 10 pesetas de ganancia, $+10$ ó 10; y 14 pesetas de pérdida, -14.

Pero los números negativos aparecen también en la operación de restar, en el caso de ser imposible esta operación, esto es, cuando el sustraendo es mayor que el minuendo:

De 20 resta 14. Quedan **6.**

De 20 resta 20. Queda *cero,* nada.

De 20 resta 25. *No puede ser;* de 20 no se puede restar 25. Pero yo podría, sin ningún reparo, hacer lo siguiente : De 20 restaré, primeramente, la parte 20 del sustraendo y después, de lo que queda, que es *cero*, restaré las cinco unidades que falta restar, así : 0 — 5 ; y este es el resultado de la resta 20 — 25. Y como *cero* es nada, 0 — 5 = — 5 luego :

$$20 - 25 = -5.$$

Bajo este aspecto, todo *número negativo* es como un *sustraendo* dispuesto a restar su valor del número que se le presente.

En este caso el resto, — **5,** sumado con el sustraendo, que es 25, da :

$$25 - 5 = 20$$

y 20 es el minuendo, conforme con la prueba de la sustracción. El minuendo es igual a la suma del sustraendo con el resto.

Porque sumar o añadir un número negativo es restar su valor ; los números positivos son *opuestos* a los números negativos, y lo mismo que antes, con las ganancias y pérdidas, diremos :

— 5 ,	sumado	con	— 7 , da	— 12
— 8 ,	»	»	14 , da	6
— 8 ,	»	»	5 , da	— 3

Si de un número entero cualquiera, p. ej. 12, voy restando sucesivamente los números de la serie natural como indico a continuación :

					12					
....	16	15	14	13	12	11	10	9	8	....
....	— 4	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	....

Resulta la serie natural prolongada indefinidamente en ambos sentidos ; hacia la derecha del cero los números *positivos* y hacia la izquierda del mismo los *negativos*.

Serie que podemos escribir así:

$$\ldots\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \ldots\ldots$$

Puesto que cada término resulta de sumar $+1$ con el anterior: y también, un término cualquiera resulta sumando -1 con el que le sigue. Es decir, que cada número de esta serie es *mayor* que todos los que le anteceden y *menor* que todos los que le siguen. Luego los números negativos tienen las siguientes propiedades:

1ª *Todo número negativo es menor que cero.*

2ª *Los números negativos son menores que cualquier número positivo.*

3ª *De dos números negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.*

Contesta las siguientes preguntas:

29. Si subes 20 escalones y bajas 7, ¿Qué total de escalones has subido? ....

....

¿Cuántos has bajado? ....

....

30. Si ganas 20 y pierdes 35, ¿Cuánto ganas? y ¿cuánto pierdes? ....

....

....

31. Si cobras —7 y pagas —10, ¿Qué total has cobrado y pagado? ....

....

32. Qué es mejor: ganar 50 y perder 75 o ganar — 17 y perder — 80. ....

....

....

33. Hoy es 8 de Enero. Qué fecha *será* dentro de — 3 días y que fecha *fué* hace — 7 días. ....

....

....

34. Tienes 12 años. Qué edad tendrás :

1º Dentro de 50 años. ....

....

2º Dentro de — 7 años. ....

....

Y que edad tenías :

3º Hace 15 años. ....

....

4º Hace — 6 años. ....

....

35. ¿Qué son cantidades opuestas? ....

....

....

36. ¿Qué son cantidades negativas? ....

....

....

37. ¿Cómo se expresa que un número es positivo o negativo? ....

....

....

38. Sabiendo que: $a > o$, $b < o$, $c < b$, $d > a$; dí cuáles de las cuatro cantidades: a, b, c, d, son positivas y cuáles son negativas. ....

....

....

✦ ✦ ✦

Todavía hemos de hablar un poco de cantidades positivas y negativas.

La distancia de Madrid a Barcelona es la misma que la de Barcelona a Madrid, pero no es lo mismo ir a Barcelona que volver de Barcelona por el mismo camino; para el viajero son dos caminos opuestos, su posición final es Barcelona o es Madrid. Cuando vas a un lugar determinado has de caminar hacia dicho lugar, pues alejarse es lo contrario de acercarse.

Así en la figura 8, la distancia AB es exactamente igual que la distancia BA, pero si se considera esta distancia engendrada por el movimiento de un punto, las distancias recorridas en un sentido son opuestas a las recorridas en sentido contrario. Si las distancias recorridas de izquierda a derecha son positivas, las recorridas de derecha a izquierda serán negativas. Así AB y BA son *igualmente opuestas*, esto es, AB = — BA y por lo tanto AB + BA = 0, las dos se neutralizan; efectivamente el punto A, después de recorrer las distancias AB y BA, se encuentra en el mismo origen o punto de partida. La posición final es la misma que si no se hubiera movido.

Sobre una recta ilimitada, a partir de un punto fijo O, *origen*, (fig. 17), tomo partes iguales a la unidad *arbitraria* en ambos sentidos; si tomo como positivas las distancias contadas hacia la derecha, deberemos llamar negativas a las que se cuenten o recorran hacia la izquierda. Numerando los puntos de división por sus distancias al origen aparece la serie natural doblemente ilimitada.

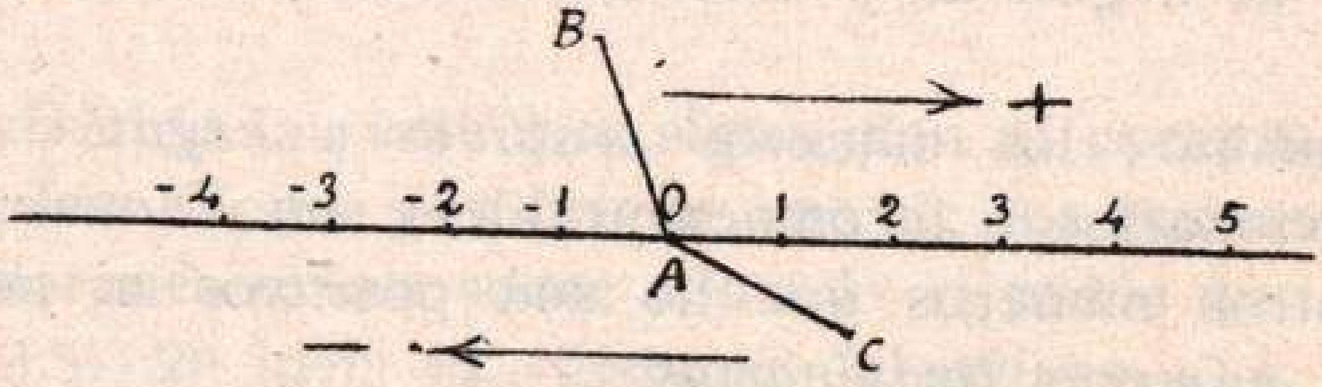


Fig. 17.

Un punto cualquiera de esa recta quedará determinado, esto es, conoceré su posición si conozco su distancia al origen. El punto estará a la derecha de O si aquella es positiva y a la izquierda si es negativa.

Pero la distancia de un punto al origen, en general, no vendrá expresada por un número entero puesto que el punto podrá estar situado en el intervalo comprendido entre dos enteros consecutivos p. ej. entre el 2 y el 3.

Dividiremos cada uno de estos intervalos iguales en un número de partes iguales p. ej. en 5 (partes alícuotas) y la recta indefinida vendrá numerada en *quintas partes* de la unidad, así:

$$\ldots\ldots -\mathbf{1} -\frac{4}{5} -\frac{3}{5} -\frac{2}{5} -\frac{1}{5}\ \mathbf{0}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{5}\ \mathbf{1}\ \frac{6}{5}\ \frac{7}{5}\ \frac{8}{5}\ \frac{9}{5}\ \mathbf{2} \ldots\ldots$$

He aquí una serie fraccionaria doblemente ilimitada donde cada término resulta añadiendo $\frac{1}{5}$ al anterior.

Y es claro que la unidad fraccionaria podrá ser tan pequeña como convenga mientras pueda leerse o apreciarse sobre la recta o eje. En general, la unidad fraccionaria sera $\frac{1}{n}$, siendo n un entero cualquiera y la serie será:

$$\underset{-1}{\cdots\cdots -\frac{n}{n}} \cdots\cdots -\frac{1}{n}\; 0\; \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\cdots \underset{1}{\frac{n}{n}}, \frac{n+1}{n}, \cdots\cdots \underset{2}{\frac{2n}{n}} \cdots\cdots$$

Las cantidades positivas y negativas se llaman **cantidades reales,** porque hay otras cantidades que no son positivas ni negativas y estas se llaman cantidades *imaginarias.*

Así mismo; los números *positivos y negativos* (enteros, fraccionarios o inconmensurables) son *números reales* y hay otros números que no son positivos ni negativos llamados *números imaginarios.*

Proceden estos números llamados imaginarios de una operación imposible (1). Ya has visto como también los números negativos tienen su origen en la operación de restar cuando la resta es imposible.

Pero las cantidades imaginarias *son algo* importantísimo que vas a comprender enseguida.

La recta indefinida 0, 1, 2, 3,... de la figura 17 es el eje real o de las cantidades reales; positivas a la derecha de **O** y negativas a la izquierda. Ese es el camino en el cual se mueve un punto para acercarse o alejarse de una posición o punto determinado, situado sobre el eje. Este es, por ejemplo, el camino de tu casa y las distancias que en él recorres son *reales:* positivas o negativas.

---

(1) En su lugar aprenderás que, p. ej., la operación $\sqrt{-4}$ es imposible; $\sqrt{-4}$ no es $+2$, ni es -2; $\sqrt{-4}$ es un *número imaginario.*

Pero es indudable que, a partir del origen **O** , se puede marchar en cualquiera de las infinitas rectas o direcciones que pasan por él ; pues bien, cualquier distancia como la OC o como la OB que no son recorridas en la dirección del eje real, no serán ni positivas ni negativas, son *imaginarias*. Con más propiedad, las cantidades de cualquier dirección contadas desde un origen O reciben el nombre único de *vectores* y también el de *cantidades dirigidas*.

39. ¿Qué son cantidades reales? ....

....

40. ¿Qué son cantidades imaginarias? ....

....

41. Divide la recta que sigue, con el compás, en partes iguales. Toma por origen uno de los puntos de división y después señala sobre ella : 1º el punto que dista del origen 3,5. 2º idem id., distante del origen — 4. 3º Señala el que dista de este último 6 unidades y el que dista del mismo — 2. ....

....

....

....

....

V

Cantidades constantes y variables

Todas las cosas materiales, todos los seres del mundo físico, cambian, se transforman, se mueven; son o empiezan a ser y desaparecen o dejan de existir, esto es, pasan del ser al no ser.

Fig. 18.

Es verdad, dirás al mirar ese ciclista, aquellas golondrinas, el agua de un arroyo, la superficie del mar; en fin, todos esos cambios o movimientos de los cuales te das cuenta clara e inmediata.

Pero tu casa, la montaña, aquella roca te parecen quietas, inmutables; son las mismas que vieron nuestros abuelos y que podrán contemplar, tal vez, los hombres del siglo xxx. Sin embargo cambian y cambian continuamente, y los cambios que experimentan son tan variados y complejos como los de todos los seres. Todo está en el modo de variar y en el tiempo que dura la variación.

En primer lugar, piensa que moviéndose la Tierra, no podemos decir de ninguno de sus puntos que esté en reposo. Señala un punto; dentro de un segundo ese punto se hallará a unos 18 kilómetros de su posición anterior. La tierra lo lleva consigo como a ti te lleva el tren cuando estás bien quieto en tu asiento.

La altura de esta habitación no es la misma en verano que en invierno, el calor dilata los cuerpos. Es verdad que algunas de estas variaciones son insignificantes y lentas, pero son variaciones.

Esa montaña no estuvo siempre ahí; en ella hay canteras y en esas canteras se encuentran restos de animales marinos que son la prueba de que en tiempos anteriores el agua del mar cubría lo que ahora es tierra firme. El suelo que pisamos no es tan fijo como parece y esa montaña que surgió del mar, tal vez volverá a hundirse, quizá se está hundiendo ya. Además el viento y las lluvias la van desmoronando y dentro de algunos miles de años o de siglos nada quedará de ella.

Ahora comprenderás por qué son tan raras y extrañas las definiciones del metro y del gramo.

El *metro patrón* es la longitud de una regla *de platino*, que se guarda en los archivos, cuando dicha regla está colocada *en el hielo fundente*.

Claro; la unidad patrón ha de reunir las mayores garantías de invariabilidad, hemos de tener la seguridad de que no varía. Por eso se construyó con el material más inalterable que existe, el platino. Y aunque el platino no se oxida, ni lo alteran la humedad ni los ácidos, no escapa a la ley general de la dilatación; se dilata y se contrae según que su temperatura aumente o disminuya, y, por lo tanto, ya ves como es necesario tomar la longitud a una temperatura fija, la del hielo fundente, cuando se quiere exactitud o, mejor dicho, gran aproximación. Porque la exactitud no puede ser. Dos reglas de platino a la misma temperatura nos parecerán siempre iguales si se diferencian en menos de 0,00001 milímetro porque esta longitud cae fuera de nuestra percepción auxiliada de los más delicados aparatos.

El *gramo* unidad de peso es lo que pesa *en París, en el vacío* un centímetro cúbico de agua *pura* y a *cuatro grados centígrados.*

Aquí aun aparecen más condiciones para la invariabilidad:

En París, podría ser Barcelona, un lugar determinado del globo; porque el peso de un mismo cuerpo varía de unos lugares a otros. *En el vacío,* porque el peso de un cuerpo, en el aire, varía con el estado de este aire. *Agua pura,* porque el peso del agua varía con las impurezas. *A cuatro grados,* pues con la temperatura su volumen varía y ha de ser precisamente 1 cm^3.

Ya ves confirmada, con estas precauciones, la variabilidad de todas las cosas materiales. La materia que las compone cambia continuamente. La materia es divisible y las partes más pequeñas de la materia están separadas unas de otras y en continua agitación.

Pero la materia es *inerte,* esto es, no puede moverse ni cambiar su movimiento sin *algo* que le haga cambiar; ese algo es la fuerza o energía. La energía es la causa de todos esos cambios o fenómenos, de ese continuo rodar y circular de la materia.

Materia y energía son el objeto de estudio de las ciencias físicas y el principio fundamental de estas ciencias es el siguiente:

La materia y la energía ni se crean ni se destruyen, solamente se transforman.

De manera que la cantidad total de materia del Universo es constante y la cantidad de energía también. Esas son las únicas y *desconocidas* o *inmensurables* cantidades constantes. Las demás cantidades que nosotros podemos apreciar o medir son, en rigor, variables todas.

◆ ◆ ◆

Mira las golondrinas de la figura 18, ni tú ni nadie puede decirnos como varían sus respectivas distancias; es imposible contestar las siguientes preguntas: ¿Qué puntos del espacio ocupaban hace dos minutos? ¿Cuándo las tres estarán en línea recta? Y no se puede contestar, porque se mueven sin ley alguna; la variación de sus respectivas distancias no está sujeta a ninguna condición, y los caminos que siguen en sus vuelos nadie sabe cuales serán.

En cambio, en la figura 19 están representados tres móviles: el Sol, la Tierra y la Luna en la posición propicia para que algunos observadores de la Tierra tengan un eclipse de sol y tú sabes como los astrónomos calculan y precisan el momento en que esos tres astros estarán en línea recta para poder anunciar: *tal día, a tal hora el sol se eclipsará y el eclipse será visible en tales lugares.* ¡Es prodigioso! ¿Y cómo puede saber esto el astrónomo? Muy sencillo; sabe matemáticas para aplicarlas al caso del movimiento de cuerpos *inertes* cuyos caminos u órbitas son líneas sujetas a *leyes* geométricas y en las que se mueven aquéllos según las *leyes* llamadas de la atracción universal.

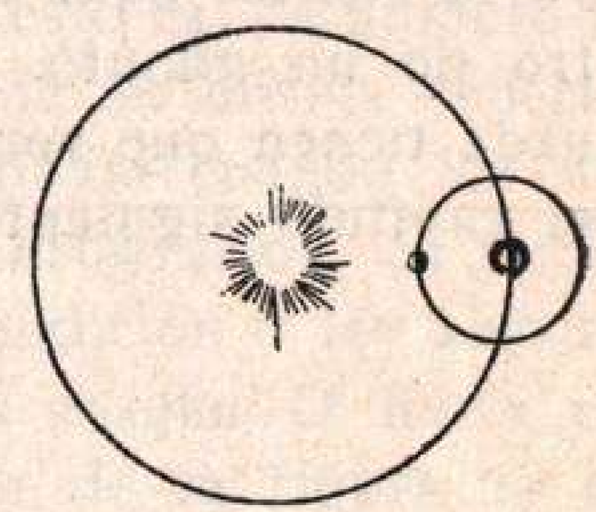


Fig. 19.

Las golondrinas no son inertes, hay en ellas energías vitales dependientes de tantas cosas variables que, si no se mueven al acaso, nunca el hombre podrá predecir como el astrónomo diciendo: *por este punto pasará, a tal hora, aquella golondrina.*

Las leyes que rigen los fenómenos o variaciones de las cosas constituyen el verdadero conocimiento científico en el orden físico o natural. Conociendo las leyes naturales puede el hombre llegar a predecir todos los fenómenos como el astrónomo predice los eclipses. Si no lo puede hacer en muchos casos es porque todavía ignora muchas leyes o relaciones matemáticas entre las cantidades variables que intervienen en la cuestión. Conociendo *todas las variables* y las *relaciones* entre estas variables siempre se puede deducir del estado que tiene un cuerpo el que tendrá en un instante determinado.

Porque las *leyes naturales* son constantes y el principio de *causalidad,* base de toda ciencia, dice que: en cualquier instante (tiempo) y en cualquier lugar (espacio) las mismas causas producen los mismos efectos. Es decir que si se realizan los mismos hechos se reproducen los mismos fenómenos. *Si sueltas la piedra que tienes en la mano, caerá,* ya la sueltes aquí o en la calle, ya la sueltes ahora o dentro de un minuto. La variación del espacio o del tiempo nada tienen que ver. Y que son el espacio y el tiempo? En el capítulo siguiente hablaremos de estas cantidades.

✦ ✦ ✦

La más importante división que el matemático hace de la cantidad es esta: Cantidad *variable* y cantidad *constante.*

¿Pues no acabo de decir que todas las cantidades son variables?

¡Cuidado! El matemático piensa y razona sin mirar al mundo físico, al mundo real. El físico es quien lucha para encontrar y apreciar caracteres constantes.

La altura de tu habitación, la superficie de la misma, el peso de una piedra, etc., etc., aunque en rigor varían, puedes tenerlas como constantes.

Mas para el matemático ni hay materia ni energía ni pesos cuando habla de cantidad o de número. Por abstracción, una cantidad a podrá conservar únicamente su calidad, lo que sea, (extensión, tiempo, peso, etc.), pero será una cantidad constante si le impongo la condición de *no poder cambiar de valor* al compararla con la *unidad fija e invariable* de su misma especie. Es decir que a será un número, *el que sea:* $5, \frac{1}{2}, \sqrt{2}$ pero *siempre el mismo* mientras la unidad no cambie.

De aquí que los números como representación de cantidades son la *más genuina* representación de las constantes. Así: $8, 200, \frac{3}{5}, \sqrt{5}$ son cantidades constantes. Y las primeras letras del alfabeto: $a, b, c,...$ suelen representar también cantidades constantes.

Por el contrario, con las últimas letras del alfabeto: $x, y, z, u,$ se representan las cantidades variables. Una cantidad x es variable cuando cambia de valor, esto es, de número al compararla con la *unidad invariable* de su misma especie.

Una variable x se llama *independiente* cuando los valores que recibe son completamente arbitrarios, es decir, su modo de variar, no está sujeto a condición o ley alguna.

Ejemplo: La distancia x desde el origen O hasta un punto móvil sobre la recta indefinida de la figura 17 es una variable *independiente* o *arbitraria,* mientras no se imponga condición o ley para aquel movimiento.

Con una abertura de compás cualquiera puedes dibujar una circunferencia (fig. 20). El radio puedes tomarlo a tu antojo, puede tener cualquier valor OA, OB, OC,... este radio x es una variable arbitraria o *variable independiente.*

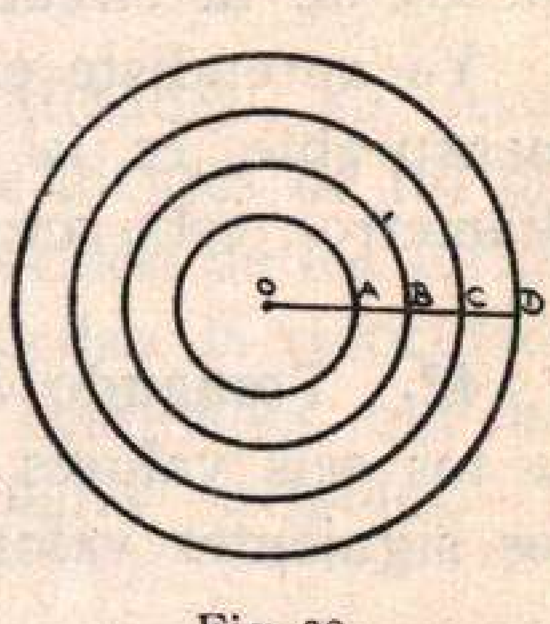


Fig. 20.

Pero la circunferencia correspondiente a cada uno de estos radios no será arbitraria, será de una longitud que dependerá de la longitud que tenga el radio. La longitud variable y de la circunferencia es una *variable dependiente* de la variable radio. Las variables dependientes de otras variables se llaman *funciones*. Así diré: la variable y (longitud de una circunferencia) es *función* del radio x de la misma. La *función* está ligada con su variable independiente mediante una *ley*. En este caso la ley es:

$$y = 2\pi x$$

Tú puedes dar a x los valores *que quieras;* para cada valor de x, la fórmula (la ley matemática establecida en esa fórmula) dará otro valor para y. Así:

Valores de x	Valores correspondientes de y
$x = 0$	$y = 0$
$x = 1$	$y = 2\pi$
$x = 2$	$y = 4\pi$
$x = 50$	$y = 100\pi$
$x = \frac{1}{2}$	$y = \pi$
⋮	⋮

Obtendremos así una interminable lista de pares de valores; arbitrarios los del radio x, impuestos por la fórmula los de la circunferencia y.

Ya aprendiste en Geometría que π es un número inconmensurable, es la razón *constante* de la circunferencia al diámetro; esta *constante* es el número 3,14159...

42. Tomando 3,14 por valor aproximado de π, calcula los seis valores de la circunferencia correspondientes a los siguientes valores del radio: 3, 5, 0‘7, 1‘25, 8‘36, 200.

....

....

....

....

....

....

43. Qué es cantidad constante. ....

....

....

44. Qué es cantidad variable. ....

....

....

45. Qué es variable independiente. ....

....

....

46. Qué es variable dependiente o función. ....

....

....

47. En una bicicleta p. ej. son cantidades: su peso, los radios de sus ruedas, los números de dientes de los piñones, la tensión de los neumáticos, la presión de los tornillos, el número de vueltas que dan las ruedas, la velocidad, las distancias recorridas, etc. De estas cantidades que he nombrado dí cuales son constantes y cuales variables.

....

....

....

....

....

....

48. En el caso anterior de la bicicleta dime si hay alguna variable que sea función de otra u otras.

....

....

....

49. Recuerda la fórmula $S = a \times b$.

Decíamos allí que cada par de valores arbitrarios de *a* y de *b* (largo y ancho) daban un valor para S *superficie* de un rectángulo. Contesta :

1º Qué son las cantidades : S, *a*, *b*.

....

....

2º ¿Hay en esa fórmula variables independientes ?

....

....

3º ¿Hay alguna variable dependiente o *función?*

....

....

50. Encuentras alguna diferencia entre las variables y constantes de la bicicleta y las variables y constantes de una fórmula p. ej. de la fórmula, $y = 2\pi x$?

VI

Tiempo y espacio

Todo el mundo sabe lo que es el tiempo, lo que es el espacio, como pasa el tiempo, como se recorre el espacio. Sin embargo, meditemos un poco.

Cuando te acuestas son las 22; despiertas a las 7 del siguiente día. Has dormido, de un tirón, 9 horas. Pero dime: esas 9 horas que has dormido ¿son como las 9 que vas a pasar despierto? Verdad que el tiempo *dormido* parece que no ha existido? Siempre te despiertas un instante después de dormirte.

Es que no ha pasado nada en tu entendimiento, supongo que no has soñado; y si nada pasa, mejor dicho, si nada observas ni fuera ni dentro de ti, no ves *sucederse*, unas cosas *después* de otras si no sientes, si no piensas... *no hay tiempo,* el tiempo no existe fuera de ti, el tiempo está en ti mismo.

Al contrario. Suena el despertador a las 7; el sueño te vence y no obedeces a la llamada; te duermes y sueñas. Y sueñas una larga historia, haces un largo viaje, hablas con varias personas... Despiertas recordando el ruido del timbre y piensas que ha transcurrido mucho tiempo. Miras el reloj. Son las 7 y 2 minutos. ¿Es posible que en dos minutos hayas visto y hecho tantas cosas en el país de los sueños?

La idea del tiempo nace y está con nosotros al mirar, al observar, sentir, pensar las cosas unas *después* de las otras. Todo se sucede y nos hacemos cargo, tenemos conciencia de las cosas una después de la otra, esta antes de esta otra; lo que fué no es (tiempo pasado). Y el tiempo pasado no vuelve ya aunque las cosas se repitan. La 4ª vez. Pasaron la 3ª y la 2ª,... Sigue la 5ª,... ¡Si yo las contemplara todas a la vez!

La péndola del reloj:

uno, dos, tres, cuatro,...... segundos
uno, duermo un siglo, *dos*, duermo un siglo, *tres*,......

Es curioso: ahí tienes la serie natural:

0, 1, 2, 3, 4,...... segundos o siglos

y la serie fraccionaria

$$\mathbf{0}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots\ldots \mathbf{1}, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots\ldots \mathbf{2} \ldots\ldots$$ siglos o segundos.

La idea de número está pues bien unida a la idea de tiempo. Tanto, que se ha llegado a decir que la Matemática es la ciencia del tiempo y del espacio.

Si todo se viera o se contara *de una vez* no habría sucesión, no habría pasado ni futuro, todo sería presente. Luego el tiempo es o existe porque nuestra *pobre inteligencia* no puede apercibirse de todas las cosas a la vez. Bien podríamos decir que el tiempo es hijo de nuestra limitada inteligencia.

Algo análogo sucede con el espacio.

Es bien sencillo y evidente, para todo el mundo, que dos cuerpos no pueden ocupar *a la vez* el mismo lugar. Y también es imposible que un cuerpo ocupe *al mismo tiempo* dos lugares diferentes.

Percibimos el mundo exterior y lo representamos en nuestra mente distinguiendo unas cosas de otras, porque no se confunden, cada una tiene su lugar, cada cosa está en su sitio. Y cualquier cosa puede moverse, esto es, cambiar de lugar. Pero donde ahora está, no hay otra cosa más que ella y donde antes estaba ya no está.

Tal vez has entrado en una sala donde todas las paredes, el suelo y el techo son espejos ; o donde se han colocado espejos convenientemente y disimuladamente para que te veas rodeado de imágenes ilusorias que existen a la vez en lugares diferentes y que apesar de haber mucha luz, no sabes orientarte. Tropiezas con las paredes y aunque ves muchas puertas no puedes salir por ninguna. Te han hecho perder el conocimiento del espacio.

Dí, que pasaría, si en un momento determinado, cambiara nuestro modo de percibir de manera que allí donde hay un hueco viéramos un bulto y al revés. Pues que llevaríamos muchos coscorrones, hasta que llegaran a tener experiencia suficiente los que pudieran contarlo.

◆ ◆ ◆

Las cantidades de espacio y de tiempo son las más importantes. Añadiendo la cantidad de peso o masa (1), tenemos las cantidades *fundamentales* o cantidades *simples*. Todas las demás cantidades dependen de estas. Cualquier cantidad es *función* más o menos complicada de alguna o algunas de estas tres : *longitud, masa* y *tiempo*.

Por esto en el sistema universal adoptado por los físicos para medir toda clase de cantidades : geométricas, mecánicas, eléctricas, etc., etc., las unidades fundamentales son : el *centímetro*, el *gramo* y el *segundo*. Todas las demás unidades son derivadas de estas tres.

El tiempo y el espacio son cantidades *continuas*, esencialmente *divisibles* en partes *tan pequeñas como se quiera imaginar*.

---

(1) La masa de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene.

No es lo mismo peso que masa. La masa de un cuerpo es la misma en cualquier lugar (es independiente del espacio). El peso de ese mismo cuerpo varía de un lugar a otro, porque el peso es debido a la atracción de la Tierra y esta atracción varía con la latitud, con la altitud, etc.

La unidad de masa es la masa que en París pesa un gramo.

VII

Sistema de coordenadas cartesianas

Acuérdate de nuestras excursiones de pesca en Blanes. Allí conociste la habilidad de nuestro *pescador* para encontrar el punto preciso del mar donde habíamos sumergido las *nansas*. Una visual por la punta de la aguda roca A y la lejana y blanca casita B era la recta indefinida en

Fig. 21.

la cual estaban nuestros cestos. Navegando con este rumbo, siempre en la recta AB, llegaba a encontrar la otra *coordenada* otra recta CD que es la visual que pasa por la punta del campanario y la punta C. *Caparrot* no sabía lo que son coordenadas ni que dos rectas tienen un solo punto común ; pero una vez enfiladas las dos visuales, bien pronto pescaba las nansas.

¿Y no vas a saber tú más matemáticas que ese buen pescador? El sistema de *coordenadas cartesianas* o de Descartes sirve para determinar la posición exacta de un punto en el plano mediante dos números.

Se escogen dos ejes fijos (rectas indefinidas) en el plano: el eje de las *equis* o de *abcisas* XX′ y el eje de las *ies* o de las *ordenadas* YY′ (fig. 22). Los dos ejes, a partir de O que es el *origen de coordenadas*, podemos dividirlos en partes iguales. Lo mejor es emplear *papel cuadriculado.*

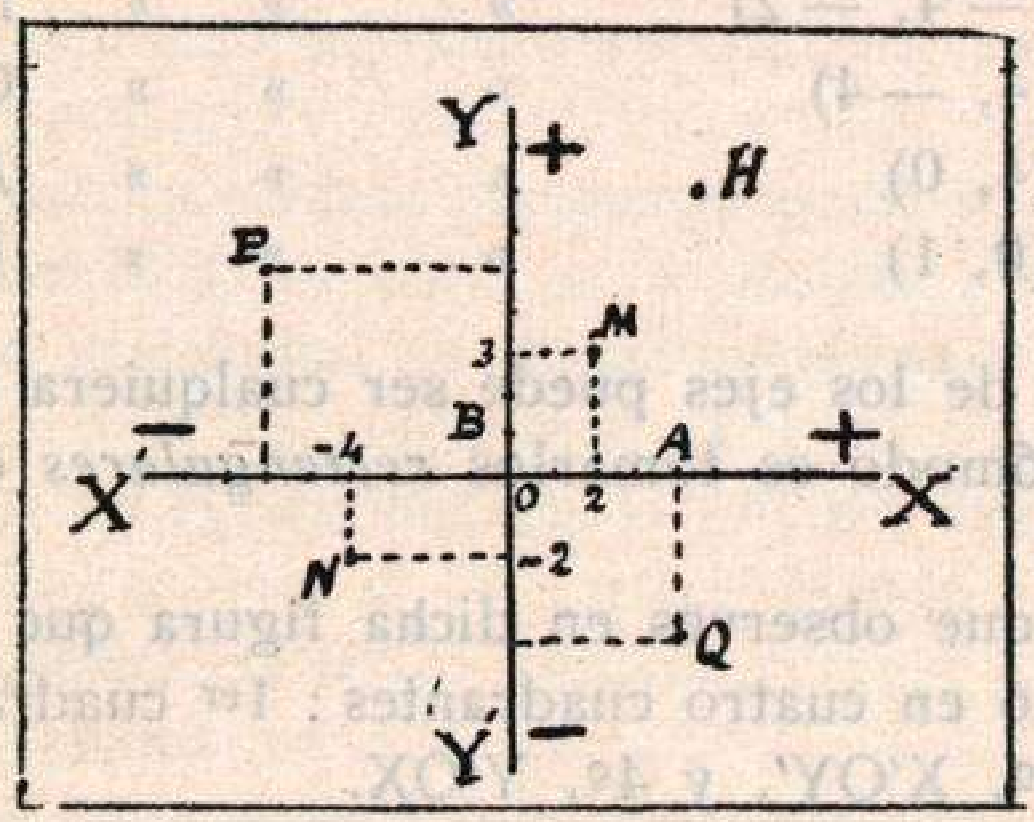


Fig. 22.

Las *abcisas* o distancias contadas sobre el eje XX′ son positivas desde O hacia la derecha y negativas hacia la izquierda. Las *ordenadas* o distancias contadas sobre el eje YY′ son positivas desde O hacia arriba y negativas hacia abajo.

Un punto cualquiera del plano, p. ej. M, tiene dos coordenadas: *abcisa* 3M, o su igual 2, que es la distancia al eje de las *ies* y *ordenada* M2, o su igual 3, que es la distancia de M al eje de las *equis*. Las coordenadas del punto M son (2,3) el punto M, diremos, es el punto (2,3) poniendo siempre en el paréntesis: primero la abcisa, una coma, y después la ordenada. Un punto cualquiera es el punto (x, y); abcisa x, ordenada y.

Recíprocamente. Dadas las coordenadas de un punto, por ejemplo (— 6, 5) hallar este punto. Bastará contar la abcisa — 6, desde O y contar enseguida 5 unidades, hacia arriba, sobre la paralela al eje YY′, llegaremos así al punto P cuyas coordenadas son (— 6, 5).

Facilmente verás, sobre todo si el papel es cuadriculado, como en la fig. 22, que las coordenadas de un punto cualquiera p. ej. el H son: (4'5, 7) y que a las coordenadas:

(0, 0)	corresponde	el	punto	O
(— 4, — 2)	»	»	»	N
(4, — 4)	»	»	»	Q
(4, 0)	»	»	»	A
(0, 1)	»	»	»	B

El ángulo de los ejes puede ser cualquiera pero lo más corriente y cómodo es tomarlos *rectangulares* como los de la figura 22.

Conviene que observes en dicha figura que los ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes: 1er cuadrante: XOY; 2º, YOX′; 3º, X′OY′, y 4º, Y′OX.

Además debes observar:

1º Que los puntos situados en el 1er cuadrante tienen sus dos coordenadas positivas. Los del 2º cuadrante tienen la abcisa negativa y la ordenada positiva. Los del tercero tienen sus dos coordenadas negativas. Y los del 4º tienen abcisa positiva y ordenada negativa.

2º Que todos los puntos situados sobre el eje de las abcisas tienen ordenada *nula*, cero. Y los situados sobre el eje de las ordenadas tienen abcisa *nula*.

51. Dibuja dos ejes rectangulares y determina sobre el plano los siguientes puntos: A(5, 3), B(0, — 4), C$(-2, 5)$, D$(-3, 0)$, E$\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, F$(-3'5, -4)$, G$(0, 6)$, H$(5, 0)$.

VIII

Representación gráfica de las variables

La temperatura del aire varía durante el día y también durante la noche. La temperatura varía con el tiempo: la temperatura es una *variable función* de la *variable* tiempo.

Pero tanto la temperatura del ambiente como la longitud de tus cabellos dependen no sólo de la variable tiempo, sino de otras muchas variables de naturaleza más o menos conocida.

No se conoce la ley o relación matemática que enlaza la temperatura con el tiempo. Ni la que rige el crecimiento de tus cabellos con el tiempo. En estos casos y todos sus análogos la función se llama *empírica*. La variable temperatura es función empírica del tiempo.

La circunferencia es función del radio, $y = 2\pi x$, esta es función *matemática*. Dado el radio x, la fórmula nos dirá enseguida el valor de la circunferencia. En las funciones empíricas no suele haber fórmula; si la hay es solamente aproximada.

En las funciones empíricas: A cada valor de la variable corresponde un valor de la función y estos valores no los dá el *cálculo* sino la *experiencia*. Ejemplo: Desde las 24, de cierto día que es la hora *cero* del día siguiente, el termómetro consultado, de hora en hora, nos permitió establecer la siguiente lista de valores. Cada par de valores supone una *experiencia* o experimento: leer en el cronómetro y en el termómetro.

Tiempo en horas				Grados de temperatura
A las	0	El termómetro	marca	7,5
»	1	»	»	5
»	2	»	»	4
»	3	»	»	4
»	4	»	»	4
»	5	»	»	4
	⋮			⋮
»	12	»	»	18
	⋮			⋮

Esta lista es el resultado de nuestras observaciones y de nuestras experiencias y nos dice como ha variado la temperatura durante el tiempo que aquellas duraron p. ej. durante un día completo.

Podemos continuar haciendo lo mismo cada día durante un mes. Entonces tendremos 30 listas como esa, más o menos parecidas; nunca iguales, y de muy difícil comparar.

En lugar de esas listas dibujemos sus gráficos correspondientes y estas representaciones gráficas vas a ver cuantas ventajas tienen sobre sus respectivas listas.

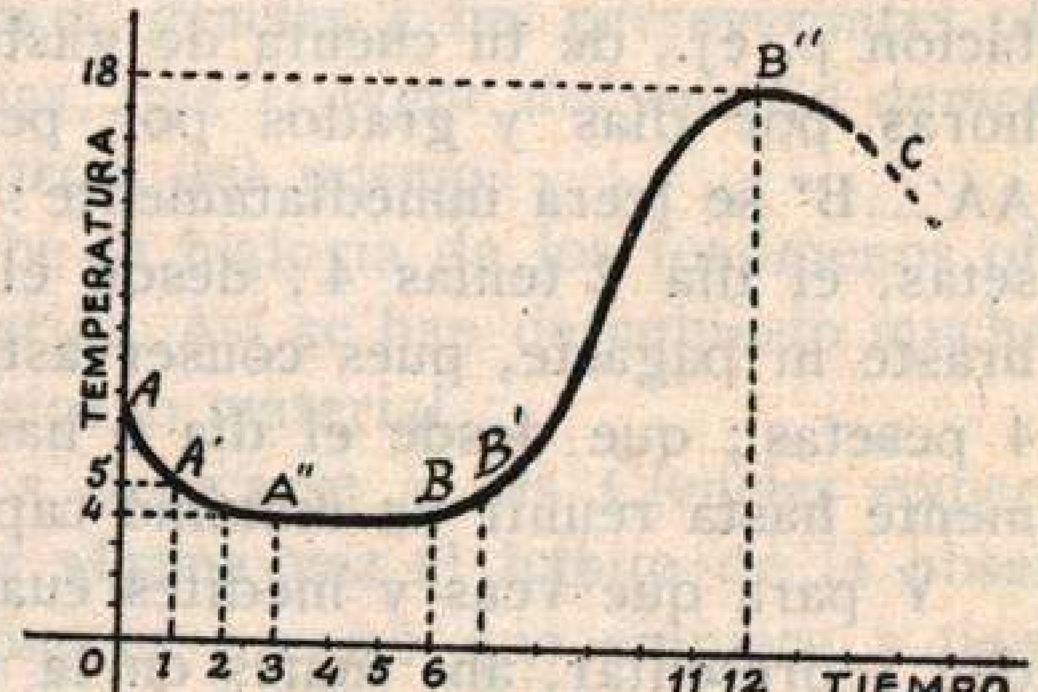


Fig. 23.

En el eje de abcisas (fig. 23), contamos el tiempo, cada unidad representa una hora. Sobre el eje de ordenadas contamos la temperatura, cada unidad es *un grado*. Cada par de valores correspondientes (abcisa, ordenada) determinan un punto del plano. Así:

(0, 7'5) da el punto A
(1, 5) da el punto A'
⋮ ⋮
(12, 18) da el punto B''

Y uniendo todos estos puntos por un trazo continuo tengo la curva AA'A''...B''C, representativa de la variación de temperatura. Curva que, en un instante, me dice o señala aquellas variaciones con todas sus particularidades p. ej. que desde las 2 hasta las 6 la temperatura se mantuvo constante y fué la mínima de 4 grados. Que desde las 6 creció continuamente para llegar a la máxima de 18 grados a las 12. Además, si quiero comparar las gráficas de los diferentes días, saltarán a la vista las semejanzas y los contrastes.

Estas representaciones gráficas son utilísimas para el ingeniero y para todo el mundo. Gráficamente puedes representar todo aquello que te convenga o que, siendo variable, te interese tener una *historia* clara de su variación. Así la misma curva de la figura 23 podría ser la representación p. ej., de tu cuenta de gastos e ingresos. Cambiarás horas por días y grados por pesetas y así en la curva AA'...B'' se leerá inmediatamente: que el día 1 tenías 5 pesetas, el día 2 tenías 4; desde el día 2 hasta el 6 no cobraste ni pagaste, pues conservaste constante tu capital de 4 pesetas; que desde el día 6 hasta el 12 cobraste diariamente hasta reunir un máximo capital de 18 ptas., etc.

Y para que veas y medites cuantas curiosidades se pueden representar, ahí tienes en la figura 24 la variación de longitud de tus cabellos durante algunas semanas.

Las abcisas representan tiempo en semanas, cada unidad una semana, las ordenadas representan milímetros.

Para poder construir esta curva representativa ha sido preciso medir, siquiera una vez a la semana, la longitud de tu cabello, no importa de que manera.

La curva AB señala como y cuanto creció tu cabello durante las tres primeras semanas de experiencia. La curva se rompe en B al empezar la cuarta semana, tu cabello tiene longitud *cero*. Eso revela que o bien, por cualquier accidente, te quedaste calvo o que en la peluquería te afeitaron la cabeza. Así debió de ser porque de la 4ª a la 6ª semana tu cabello ha crecido como indica la curva 4C. Al fin de la 5ª semana otra ruptura indica que has vuelto a la peluquería, pero esta vez no te han afeitado, te han rapado dejándote el cabello con la longitud de medio milímetro. Y así pueden leerse las curvas sucesivas.

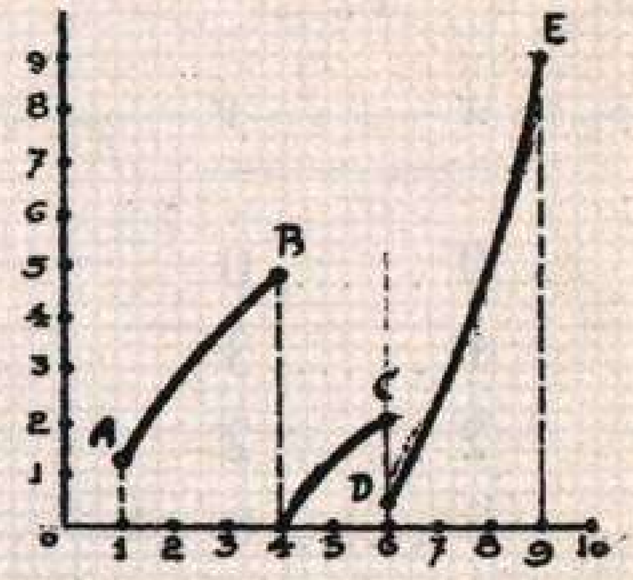


Fig. 24.

Pero en la última DE hay algo muy notable y es que desde la 6ª a la 9ª semana te creció el pelo mucho más que entre la 1ª y la 4ª. Esta rareza ¿a qué es debida? Tal vez a la frecuencia de las rapaduras.

Continúa tus observaciones y tus gráficos y tal vez se repita ese accidente en todos los casos análogos y entonces habrás llegado a descubrir, gracias a tus perseverantes observaciones y experiencias, que *el vigor del cabello aumenta* con los *frecuentes cortes* del mismo.

Así es como se escribe la historia de los fenómenos observados en los laboratorios. Así se han descubierto muchas verdades en el orden físico o material.

Si el joven que va a dedicarse a las Ciencias experimentales ha de adquirir alguna vez el hábito de la observación y experimentación, es preciso que empiece a tiempo. Sabes ya lo que es la cantidad variable, y sabes cómo se representa gráficamente la variable que es *función* de otra variable, pues... a emborronar papel cuadriculado siempre que se presente ocasión de más o menos utilidad.

En la página cuadriculada puedes escoger los ejes y representar gráficamente las siguientes funciones *empíricas*.

52. Representa gráficamente las tres funciones de las que te doy las series de valores correspondientes que siguen:

1.ª

x	y
0	0
1	3
2	2
3	0
4	-2
5	-1
6	0
7	0
8	0
9	5
10	20

2.ª

x	y
-4	2
-3	0
-2	-1
-1	-2
0	-1
1	2
2	3
3	5
4	3
5	3
6	3

3.ª

x	y
0,5	3
2	4,5
3	$\frac{5}{2}$
4	0
5	$-0{,}5$
6	-3
7	0,1
8	1
9	-1
10	-5

* * *

Hasta ahora todo ha sido empirismo en la representación gráfica, porque las funciones eran empíricas.

¿Y si las funciones son matemáticas? ¿Qué se hace entonces?

Se hace lo mismo pero las curvas representativas que resultan son curvas *geométricas:* una recta, una circunferencia, una elipse,...... Y entonces puedes estudiar las propiedades de estas figuras sin necesidad de representarlas, atendiendo solamente a sus fórmulas o *leyes analíticas*. Y esta es una rama de la Matemática llamada *Geometría Analítica*, que estudiarás cuando tengas la preparación suficiente.

Y no quiero terminar sin darte siquiera un ejemplo de función matemática. Es preciso que veas el contraste, la

gran diferencia entre el resultado obtenido en las gráficas *empíricas* o *experimentales* y el resultado gráfico de una *ley matemática.*

Ejemplo: Representar gráficamente la función

$$y = 3x$$

Aquí ni hay observaciones ni experiencias que hacer. Allí los valores eran tantos como experiencias o experimentos se hacían.

Dale a x los valores *que quieras*, la función $y = 3x$ *te dará* los valores correspondientes de la ordenada.

Así:

$x = 0 \ldots \quad y = 3 \times 0 = 0$

$x = 1 \ldots \quad y = 3 \times 1 = 3$

$x = 2 \ldots \quad y = 3 \times 2 = 6$

$x = 3 \ldots \quad y = 3 \times 3 = 9$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x = -1 \ldots \quad y = 3 \times -1 = -3$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x = 20 \ldots \quad y = 3 \times 20 = 60$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

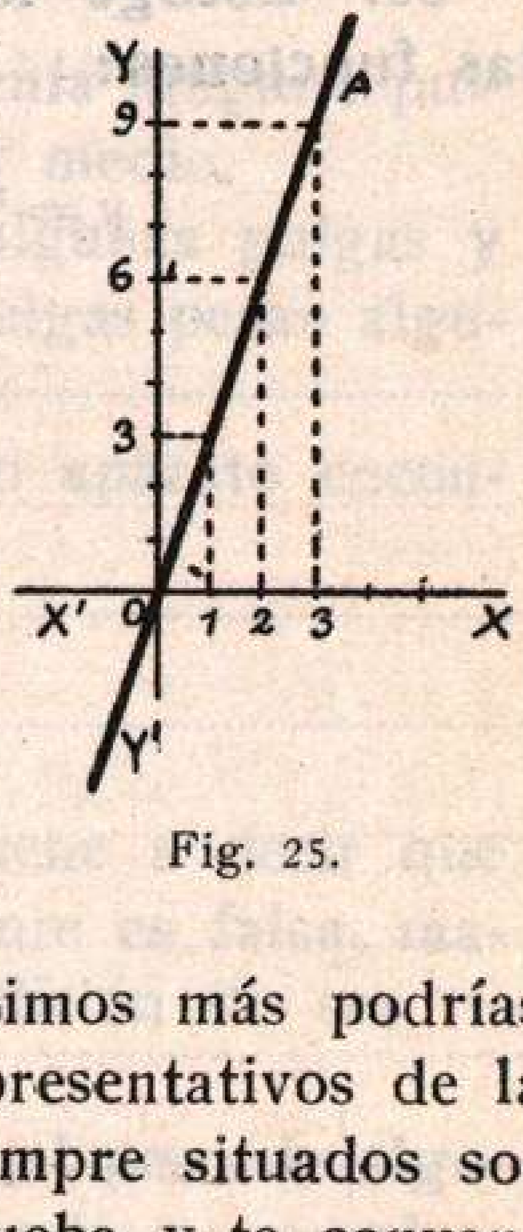


Fig. 25.

Muchos valores te he puesto, muchísimos más podrías poner, pero todos, todos, los puntos representativos de la función $y = 3x$ están y te resultarán siempre situados sobre *la recta* OA, figura 25. Haz la prueba y te convencerás. Puedes dar a x el valor que te se antoje; el valor que *te dará* la fórmula para y siempre hará caer el punto sobre esa recta. Si en lugar de ser $y = 3x$; la función fuese $y = 8x$ (de la misma forma que aquélla), obtendrás *otra recta* que también pasará por el origen. En fin, que toda fórmula de la forma general $y = ax$, *representa una recta que pasa por el origen de coordenadas.*

Y claro es que sabiendo esto ¿para qué dar tantos valores a x? Si *yo sé* que $y = mx$ es una recta que pasa por O, con hallar otro punto de ella tendré bastante para dibujarla.

En el ejemplo que te he puesto, dando a x cualquier valor, p. ej. $x = 3$, tengo el punto A que unido con O dará la *recta ilimitada* representación *exacta* de la función $y = 3x$.

¡Es admirable!: $y = 3x$ *fórmula, ley matemática.*

Recta OA, *línea geométrica, expresión gráfica* de $y = 3x$.

53. Escoge los ejes y representa gráficamente estas funciones:

$$y = 5x \ldots y = -4x \ldots y = \frac{1}{2}x.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

IX

Cantidades finitas y cantidades infinitesimales

Los perros suelen tener pulgas.

El perrito de Pedro (fig. 10) no tenía ninguna pulga cuando supimos que pesaba 3 kilos y medio.

Ahora nos consta que el beby tiene algunas pulgas y las pulgas pesan. Supongamos que estas pulgas pesan algunos centigramos ; x centigramos.

Pero al pesar el perrito con el mismo aparato encontramos el mismo peso : 3,50 kilogramos.

Luego :

$$3{,}50 = 3{,}50 + p.$$

Esta igualdad parece absurda, pues viene a decir que *una parte es igual al todo*. Matemáticamente es falsa, matemáticamente será verdadera con la condición de ser $p =$ cero.

Pero una pulga tiene peso y p, que es el peso de algunas pulgas, no es cero. Sin embargo el aparato que empleamos para pesar no es sensible para señalar la presencia de las pulgas. Según ese aparato las pulgas no pesan.

Luego la igualdad :

$$3{,}50 = 3{,}50 + p$$

es *empíricamente verdadera* cuando se pesa con ese aparato.

Supongamos ahora, que ese aparato es el más *sensible* o *exacto* de todos los aparatos que el físico ha construído para pesar: pues bien, entonces no hay manera de apreciar p y se dice que:

p es un *infinitamente pequeño físico.*

Siempre que en nuestras mediciones *con los aparatos más perfeccionados* se nos presente una igualdad de la forma anterior, esto es:

$$a = a + h$$

si la medida se ha hecho bien, diremos que h es un *infinitamente pequeño físico.*

No creas, sin embargo, que esos infinitamente pequeños *materiales* son rebeldes a toda medida. Son todavía *infinitamente grandes* con respecto a otros elementos contenidos en ellos, y si no hay aparatos con que puedan apreciarse directamente, hay medios *indirectos* para medir cantidades que caen fuera de toda percepción. En este terreno es donde la Física y la Matemática casi se confunden.

El mundo físico podríamos dividirlo en dos mundos, o mejor en dos categorías: El mundo *sensible perceptible* con o sin aparatos y el *mundo infinitesimal.*

* * *

En el mundo especulativo, también las cantidades se dividen en dos grupos o categorías, podríamos decir también, en dos mundos: el mundo de las *cantidades finitas* y el de las *cantidades infinitesimales.*

El mundo de las *cantidades finitas* es el mundo del *¿cuánto?*, es decir, el de aquellas cantidades *constantes* o *variables* cuyos valores son perfectamente *numerables* o que podemos expresar con números. Si son constantes tienen un valor ¿cuánto?, el que sea, que vendrá representado por un número grande o pequeño. Si son variables tendrán o podrán recibir infinidad de valores, pero todos *perfectamente determinables*, esto es, comprendidos entre ciertos *límites* que son cantidades constantes.

El mundo *infinitesimal* es el de los *infinitamente grandes* y el de los *infinitamente pequeños*, es decir, el de las *variables infinitamente grandes* y el de las *variables infinitamente pequeñas*.

De aquí la división de las *variables* en tres categorías:

1ª categoría. Variables *infinitamente grandes* son aquellas que creciendo pueden tomar valores mayores que toda cantidad dada por grande que sea y continuar creciendo *indefinidamente*, más allá de todo límite.

Ejemplo: x es un *infinitamente grande* si varía tomando sucesivamente los valores crecientes de la serie natural: 1, 2, 3, 4,...

2ª categoría. Variables *infinitamente pequeñas* son aquellas cuya ley de variación es tal que decrecen, llegando a ser su valor *menor* que cualquier cantidad, por pequeña que sea, y continuar decreciendo *indefinidamente*. Tienden a anularse, a desaparecer, *tienden a cero*, pero jamás son cero.

Ejemplo: Si x es una variable infinitamente grande como la del ejemplo anterior, y es un *infinitamente pequeño*, si su variación se rige por la ley $y = \frac{1}{x}$, puesto que los valores de y serán:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{100}, \ldots\ldots$$

jamás será cero el valor de este quebrado, pero siempre podrá ser más pequeño que la más pequeña cantidad que tú pienses.

3ª categoría. La de las *cantidades finitas*, tal y como hemos dicho que son las del mundo finito o del *quantum*, esto es, las cantidades constantes y las variables que no son ni infinitamente grandes ni infinitamente pequeñas.

Ejemplo de *variable finita*: $y = 3 + \frac{1}{x}$ siendo x una variable infinitamente grande. Puesto que los valores de y serán:

$$3 + \frac{1}{1}, 3 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, \ldots, 3 + \frac{1}{1000}, \ldots, 3 + \frac{1}{1000000}, \ldots$$

esto es, 3 más un *infinitamente pequeño*, suma que *se aproxima* a 3 *indefinidamente*.

⁂

Nuestra inteligencia es limitada. Ya lo hemos dicho en otro lugar.

Piensa en la variable infinitamente grande x; que *siempre* pasa del valor más grande que imagines; *siempre más*. Otro más grande, y *siempre más*. Tu entendimiento flaquea, te coge como un mareo, no comprendes ese *indefinido* más allá, *¡siempre más!... El infinito*, suele decirse; y cerramos ese camino indefinido con un *broche*, esto es, con un símbolo que nada significa *ni es cantidad*. El símbolo es este: ∞ y se lee *infinito*. Sirve siquiera para que no te marées y cese tu pensamiento de seguir esa carrera loca *¡siempre más!*

Piensa ahora en el *infinitamente pequeño*, y; que siempre *será menor* que la más pequeña de las cantidades que te imagines; *¡siempre menor!* piensa en una *cien mil billonésima*, y podrá ser menor, y jamás será *cero*. Todavía esa *cien mil billonésima* se puede dividir en un *trillón* de partes iguales, y será menor que cualquiera de ellas. Tu entendimiento flaquea, pero no sientes mareo. Lo pequeño no suele asustarnos. ¿Será porque *nada* no puede hacernos daño?

Después de estas sencillas meditaciones que no te han hecho salir del mundo de las ideas, pero que debilitan tu entendimiento hasta reconocerlo impotente para ir más allá, creo que puedes llegar a admirarte y aún emocionarte cuando sepas que, esos *vacíos incomprensibles:* uno entre la cantidad finita y el ∞ y otro entre *nada* y la cantidad finita, son como *dos ventanas* por donde la razón humana ha podido hacer *conquistas estupendas.*

En efecto, manejando esas variables infinitesimales que son perfectamente comparables unas con otras, dentro del mismo orden, nació el **cálculo infinitesimal,** rama sublime de la Matemática que trae al dominio de nuestra razón y de nuestros cálculos todo aquello que parece escaparse a toda medida por extremadamente pequeño o por inmensamente grande.

54. ¿Qué son cantidades infinitesimales? ....

....

....

....

55. ¿Qué son variables finitas? ....

....

....

....

56. Pon un ejemplo de variable finita. ....

....

....

....

57. Suponiendo *x* infinitamente grande, dí qué clase de variable es *y* en las siguientes funciones:

$$1^{a} \quad y = \frac{1}{x} + a. \quad 2^{a} \quad y = \frac{2}{3 + x}. \quad 3^{a} \quad y = 1 + x$$

58. ¿Es lo mismo infinito pequeño *físico* que infinito pequeño *matemático*?

59. ¿Qué es el cálculo infinitesimal?

60. ¿Qué es el infinito? ....

....

....

61. ¿Cuántas clases de *cero* has visto? ....

....

....

....

62. ¿Qué clase de cantidades son el *cero* y el *infinito*? ....

....

....

....

X

División de la Matemática

La ciencia matemática estudia los principios y leyes que rigen la variación de la cantidad.

El sujeto de esta ciencia es la *cantidad* y el *orden*.

La Matemática se divide en muchas ramas ; es una ciencia que comprende o abarca ciencias diversas.

He procurado, en todo lo que precede, hacerte comprender primero las cosas del mundo físico que por una sencilla abstracción te llevaran a esas regiones de la pura especulación. Por esto creo que vas a comprender ahora perporque te has visto obligado, como yo, a hacer matemáticas en tres grupos :

Matemáticas *puras, mixtas* y *aplicadas*.

Matemática pura. Trata de la cantidad, del orden o de ambas cosas *abstractas*, esto es, sin nada que las ligue a la materia ; lo único que puede quedar en estos conceptos es el tiempo o el espacio, o los dos.

La matemática pura se subdivide en : **Aritmética**, ciencia de los números, y **Geometría**, ciencia de la extensión.

Tanto la Aritmética como la Geometría se dividen a su vez :

La Aritmética en : Aritmética vulgar, Aritmética universal, Algebra y Análisis infinitesimal.

Y la Geometría en : Geometría gráfica o descriptiva y Geometría analítica.

Matemática mixta. Cuando es menos abstracta, porque a los conceptos puros de cantidad, orden, tiempo y espacio se agregan otros, como: *fuerza, masa, trabajo,* etc. Así, son ciencias de la Matemática mixta: la Mecánica racional, ciencia del *movimiento* y del *equilibrio,* y todas las teorías matemáticas de la luz, calor, electricidad, etc., que constituyen la llamada Física matemática.

Matemática aplicada. Cuando se pone ya en contacto con los objetos, con la materia. Cuando se opera con los valores de las mediciones o apreciaciones más o menos aproximadas de la magnitud. Pertenecen a este grupo casi todas las ciencias del Ingeniero y del Arquitecto, y todas las reglas de aplicación para los cálculos de uso corriente en las artes y oficios.

Podemos resumir esta división en el siguiente cuadro:

- Matemática
  - Pura
    - Aritmética
      - Aritmética vulgar
      - Aritmética universal
      - Algebra
      - Análisis
    - Geometría
      - Gráfica
      - Analítica
  - Mixta
    - Mecánica racional
    - Física matemática
  - Aplicada
    - Astronomía
    - Perspectiva
    - Estereotomia
    - Hidráulica
    - Electrotecnia
    - Termotecnia
    - Topografía
    - etc., etc.

APÉNDICE

Me veré muy honrado y pagado con que él solo, mi hijo, recoja el fruto. Esto digo en el prólogo. Mas ahora, que los tengo, me doy cuenta de que, de 3000 tomos me sobran 2999 y para ser *ingenuo* debo decirte que este peso *me pesa,* y me horroriza el pensar que sea *una constante*. Variable lo quiero y *variable decreciente* y rapidísimamente decreciente.

Quisiera, lector amable, que fueras profesor, y profesor de los que yo llamo *rectilíneos*. Porque supongo que ves claro a donde voy y que te placen mis lecciones, no por su mérito, que es bien poco, sino por su intención. Y te placen porque tú comprendes lo *rutinario* que es hablar a los principiantes con el *purísimo* lenguaje científico y porque te has visto obligado, como yo, a hacer matemáticas experimentales para evitar a tus discípulos el tormento de *aprender* la lección antes de haberla *comprendido*.

Por otra parte; ¿lo que es rutinario en la cátedra no lo será también en el libro? El estudiante que no tenga otro maestro que el libro ¿dónde podrá sentir aquellas experiencias?

Sin despertar el interés del alumno es muy difícil obtener provecho. Tan convencido me tiene de esta verdad mi propia experiencia, que todavía creo que he pecado de discreto en mis recursos experimentales. En mi cátedra los empleo a granel.

Además, a ti te molesta el oir decir que *las Matemáticas son difíciles,* cuando te consta que sin matemáticas *todo es difícil,* porque ellas son las únicas simplificadoras de todo.

Contribuye pues a aligerarme de este peso si no quieres ver finir esta doctrina con un auto de fe que lo haga leve.

Haz que lean este librito: los que empiezan, los que ya empezaron y los que ya han terminado el estudio de la Matemática. Los primeros porque les conviene y los últimos por si les conviene enseñarlas de este modo cuyo rendimiento *es probado.*

RESPUESTAS

1.—Cantidad es todo lo que se puede expresar, exacta o aproximadamente, por un número.

Es todo lo que es susceptible de aumento o disminución.

Es todo lo que se puede contar o medir, etc.

2.—Número es la expresión exacta o aproximada de una cantidad.

Es el resultado de contar o de medir.

3.—En discontínuas o discretas, que son las que se cuentan, y contínuas que son las que se miden.

4.—Tres clases de números: Enteros, al contar; Fraccionarios e inconmensurables, al medir.

5.—Se llaman números racionales los enteros y fraccionarios.

6.—Son irracionales los números que resultan al medir la cantidad cuando ésta no contiene exactamente a la unidad ni a ninguna de sus partes alícuotas.

7.—Abstraer es prescindir mentalmente de una o más cualidades de una cosa u objeto para pensar o tratar, solamente, de las cualidades restantes.

8.—Esta regla es el doble decímetro, prescindo de todas sus propiedades excepto de su longitud.

Me interesa solamente el color de las cosas.

9.—Con los números, esto es, con el número que la representa y, prescindiendo del valor particular del número, con letras.

10.—Toda expresión en la que figuran letras o letras y números enlazados por los signos del cálculo.

11.—2º $V = 1 \times 0'1 \times 0'01 = 0'001$

3º $V = 20 \times 60 \times 0'1 = 1200 \times 0'1 = 120$

4º $V = 175 \times 248 \times 173 = 7508200.$

12.—1º Puedo expresar una distancia, p. ej., con los kilogramos de alambre que se necesiten para medirla con este alambre. Si un metro de este alambre pesa p. ej., 5 gramos: La distancia de un kilómetro equivaldrá a 5 kilogramos de este alambre.

2º Seis horas de combustible (de gastar combustible) representará p. ej., 6 kilogramos de combustible si se gasta un kilogramo por hora.

13.—1º: 10. 2º: 14. 3º El décimo quinto.

14.—1º $n - 1$. 2º $m - n$. 3º El $(m - n + 1)^{\text{ésimo}}$

15.—1º Al de lugar $n^{\text{ésimo}}$ le corresponde la silla $(n - 1)^{\text{ésima}}$

2º El vigésimo.

3º El $(n + 1)^{\text{ésimo}}$

16.—Sí, señor. Hay en Barcelona dos personas que tienen igual número de cabellos.

Porque si todas tuvieran diferente número de cabellos habría 45001 personas que tendrían respectivamente:

0, 1, 2, 3,......45000 cabellos.

Si ninguna persona tiene más de 45000 cabellos, el individuo 45002 tendría, necesariamente, tantos cabellos como alguno de los 45001 de la lista anterior. Luego en toda ciudad donde haya más de 45001 personas, hay necesariamente dos que tienen igual número de cabellos.

17.

2 decenas de millar	....	$2 \times 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 =$	512 decimal.
1 millar	....	$4 \,.\, 4 \,.\, 4 =$	64 »
2 decenas	....	$2 \times 4 =$	8 »
3 unidades	....	$3 \times 1 =$	3 »
21023 sistema cuaternario	....	$=$	589 »

18.

4897	4						
08	1224	4					
09	024	306	4				
17	0	26	76	4			
1		1	36	19	4		
			0	3	4	4	
					0	1	**1030101**

El número decimal 4897 equivale al 1030101 cuaternario.

19.

1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
⋮	⋮
19	10011
⋮	⋮
36	100100

20.

$$\begin{array}{r|l}
3470 & 12 \\
\hline
107 & 289 \;|\; 12 \\
110 & 49 \;\; 24 \;|\; 12 \\
2 & 1 \;\; 0 \;\; 2
\end{array}
\qquad \mathbf{2012}$$

21.

3 decenas de millar	$3 \times 12.12.12.12 = 62208$
9 millares	$9 \times 12.12.12 = 15552$
a centenas	$10 \times 12.12 = 1440$
b docenas	$11 \times 12 = 142$
7 unidades	$= 7$

$39ab7$ duodecimal, equivale a .... $= 79349$ decimal.

22.—Si $a \not> b$, será igual o será menor que b.

si $a \not> b$, será $a = b$ o $a < b$.

23.—Si $x \neq b$, será $x > b$ o $x < b$.

24.—De las igualdades $\begin{matrix} a = x \\ x = 5 \end{matrix}$ se deduce que $a = 5$.

25.—1ª De $\left.\begin{array}{l} a > c \\ b = c \end{array}\right\}$ se deduce que $a > b$.

2ª De $\left.\begin{array}{l} x > a \\ x < b \end{array}\right\}$ se deduce que $a < b$.

3ª De $a > b > c > d$, resulta que. $a > d$, $a > c$, $b > d$

4ª De $\left.\begin{array}{l} a > b \\ c \not> b \end{array}\right\}$ se deduce $a > c$.

5ª De $\left.\begin{array}{l} a \not< b \\ x \not> b \end{array}\right\}$ podrá resultar que: $a = x$, $a > x$, puesto que esta expresión equivale a estas:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ x = b \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} a = b \\ x < b \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} a > b \\ x < b \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} a > b \\ x = b \end{array}\right\}.$$

De la primera resulta $a = x$ y las tres últimas dan $a > x$.

26.—1º $4 < 50$

2º 8 es igual, es mayor o es menor que n, porque n es cualquier número de la serie y por lo tanto puede ser el mismo 8 u otro cualquiera anterior o posterior.

3º Por la misma razón $n \gtreqless 200$.

4º $n > n - 4$.

5º $n + 1 < n + 3$ pues, implícitamente, n representa el mismo número en ambos.

27.—Una igualdad es la expresión que manifiesta que dos cantidades son iguales; p. ej., $a = b$. Todo lo que hay delante del signo $=$ es el primer miembro de la igualdad, y lo que hay detrás, es el segundo miembro.

28.—La expresión que dice, que dos cantidades son desiguales, es una desigualdad: $a > b$. También consta de dos miembros, como la igualdad.

29.—He subido 13 escalones.
He bajado — 13.

30.—Si gano 20 y pierdo 35:
Gano — 15, pierdo 15.

31.—Si cobro — 7 y pago — 10; es como si pagara 7 y cobrara 10. Luego: Cobro 3 o pago — 3.

32.—Ganar 50 y perder 75, es como perder 25.
Ganar — 17 y perder — 80, es perder 17 y ganar 80, esto es, ganar 63.
Luego es mejor ganar — 17 y perder — 80.

33.—Dentro de — 3 días es hace 3 días, luego la fecha *fué* 5 de Enero. Hace — 7, es dentro de 7 días; *será* 15 de Enero.

34.—1º 62 años.
2º Tenías (hace 7 años) 5 años.
3º Tenías — 3 años, 3 años antes de nacer.
4º Tendrás (dentro de 7 años) 18 años.

35.—Las que son iguales y de signo contrario, p. ej., 3 y — 3.

36.—Las de sentido, o modo de ser, opuesto al de las positivas.

37.—Positivo, con el signo + o sin ningún signo. Negativo, anteponiendo el signo — *menos*.

38.—Son positivas *a* y *d* y negativas *b* y *c*.

39.—Son reales las cantidades positivas y las negativas.

40.—Son imaginarias las cantidades que ni son positivas ni negativas.

41.—1º En el punto medio de la división $3 - 4$.
2º El punto situado en 4, a la izquierda del origen.
3º El punto distante **6** unidades del -4 es el $+2$.
4º El que dista -2 del -4 es el -6.

42.

Radio	Circunferencia
x	$y = 2\pi x$
3	2 . 3'14 . 3 = 18,84
5	2 . 3'14 . 5 = 31,4
0'7	2 . 3'14 . 0'7 = 4,396
1,25	2 . 3'14 . 1'25 = 7,85
8,36	2 . 3'14 . 8'36 = 52,5008
200	2 . 3'14 . 200 = 1256

43.—La que siempre conserva el mismo valor.

44.—La que varía, cambia de valor o de número, respecto a la misma unidad.

45.—La variable es independiente o arbitraria cuando su variación no está sujeta a ninguna ley.

46.—Una variable es dependiente o función cuando sus valores varían según una ley.

47.—Constantes: el peso, los radios, número de dientes. Variables: tensión de los neumáticos, presión de los tornillos, número de vueltas, velocidad, distancia.

48.—La distancia recorrida por el ciclista es función de la velocidad y ésta es función del número de vueltas por segundo y del rozamiento con el suelo, etc.

49.—1º S es variable *función* de las variables a y b.
2º a y b son variables independientes y pueden considerarse como tales dos cualquiera de ellas.

3º S es función de a y de b y cualquiera de ellas es función de las otras dos.

50.—Las constantes de la bicicleta no son constantes matemáticas; las consideramos constantes, pero en realidad varían. Las constantes: 2 y π, de la fórmula $y=2\pi x$, tienen siempre el mismo valor. Las variables x e y de esta fórmula están ligadas por una *ley matemática.*

Las variables que intervienen en el movimiento de la bicicleta podrán sujetarse a alguna ley matemática, pero jamás la cumplirán exactamente.

51.—Están bien tus gráficos.

52.—Idem.

53.—Idem.

54.—Cantidades infinitesimales son las variables infinitamente grandes y las infinitamente pequeñas.

55.—Toda variable que no es ni infinitamente grande ni infinitamente pequeña es finita.

56.—Suponiendo que x es un infinitamente pequeño, es finita la variable $7+\frac{x}{3}$; tiende a valer 7.

57.—1ª y es *finita* porque $\frac{1}{x}+a$ tiende a valer a.

2ª y es *infinitamente pequeño,* tiende a *cero.*

3ª y es *infinitamente grande.*

58.—Infinito pequeño físico es la cantidad que no se puede apreciar con ningún aparato conocido, depende por lo tanto de la perfección de nuestros aparatos de medida. El infinito pequeño matemtico es variable *abstracto* que tiende, sin cesar, a *cero.*

59.—El cálculo de las cantidades infinitesimales se llama *cálculo infinitesimal.*

60.—Lo que no tiene fin o crece sin fin, como toda variable indefinidamente grande. El símbolo ∞

61.—El cero *carencia* de unidades de cualquier orden en la numeración. El cero *origen* de números positivos y negativos que lo mismo es $+0$ que -0. Y el cero *límite* de los indefinidamente pequeños.

62.—Ni el cero ni el infinito son cantidades ni sus símbolos 0, ∞ son números. Sin embargo el *cero* tiene diversas acepciones, como has visto en la respuesta anterior y se le emplea muchas veces como número.

CARRERA DE INGENIERO INDUSTRIAL

Los Ingenieros industriales tienen categoría igual a la de Doctor, su título les habilita para desempeñar las cátedras de ciencias exactas y naturales en las Universidades e Institutos, en las Escuelas de Artes y Oficios y demás centros de enseñanza.—Gran número de Ingenieros industriales trabajan al servicio del Estado, constituyendo cuerpos oficiales con el correspondiente escalafón.

Tienen todavía más vasta aplicación los conocimientos del Ingeniero en la industria particular, no concibiéndose en la actualidad la existencia de un gran establecimiento industrial sin un ingeniero al frente; y aquí podríamos citar el sin número de empresas fundadas en cada una de las múltiples manifestaciones del trabajo industrial.

Si se considera el lamentable estado de la industria en muchas regiones de España, que merced a sus elementos de riqueza pudieran sobrepujar a las más florecientes, no es aventurado el asegurar que nunca será excesivo en nuestro país el número de Ingenieros industriales.

Los jóvenes que al estudio de tan brillante carrera se dediquen, tengan la seguridad de ver recompensados con un porvenir halagüeño los esfuerzos y sacrificios que al efecto se impongan.

◆ ◆ ◆

PLAN DE ESTUDIOS VIGENTE

Ingreso.—Para ingresar en las Escuelas de Ingenieros Industriales, los aspirantes han de sufrir examen de las asignaturas siguientes:

Aritmética y Álgebra.—Geometría y Trigonometría.—Nociones de Física y Geología.—Dibujo de adorno.—Dibujo lineal y lavado.—Francés, Inglés o Alemán.

Aprobadas estas materias, necesitan además acreditar, para el ingreso en la Escuela, que tienen también aprobadas, en algún Instituto de segunda enseñanza, las asignaturas siguientes:

Lengua Castellana.—Geografía general y de Europa.—Id. especial de España.—Historia de España.—Historia Universal.

Observaciones.—Hay examen de ingreso en Mayo y en Septiembre.

Los peritos industriales tienen derecho al ingreso directo, sin examen.

◆ ◆ ◆

CARRERA

PRIMER CURSO.—Análisis matemático hasta las aplicaciones geométricas del cálculo diferencial.—Geometría descriptiva.—Química inorgánica y orgánica.—Dibujo artístico, industrial y topográfico.

SEGUNDO CURSO.—Cálculo integral y Mecánica racional.—Estereotomía.—Física industrial, primer curso.—Dibujo de taller.

TERCER CURSO.—Teoría general de las máquinas.—Física industrial, segundo curso.—Topografía y Nociones de Geodesia.—Análisis químico.—Mecánica aplicada a la construcción.—Dibujo de proyectos.

CUARTO CURSO.—Química industrial inorgánica.—Física industrial, tercer curso; electricidad.—Metalurgia general y siderurgia.—Teoría especial de máquinas, primer curso.—Dibujo de proyectos.

Quinto curso.—Teoría especial de las máquinas, segundo curso.—Química industrial orgánica.—Física industrial, cuarto curso; Tecnología eléctrica.—Construcción y Arquitectura industrial.—Dibujo de proyectos.

Sexto curso.—Tintorería y artes cerámicas.—Tecnología mecánica.—Ferrocarriles.—Construcción de máquinas.—Economía política. Legislación industrial y Estadística.—Dibujo de proyectos.

CARRERA DE PERITO INDUSTRIAL

Constituyen los peritajes un bachillerato industrial, o sea el 2º grado en orden a la enseñanza general técnica, ofreciendo a los jóvenes una verdadera carrera que les habilita en pocos años para dedicarse en edad temprana a las artes e industrias.

Los títulos de **Perito Industrial** dan opción a las cátedras de las Escuelas Industriales o de Artes y Oficios en todos sus grados, de Profesores de entrada, de ascenso y de término, con escalafón especial del Estado y con asimilación de derechos a los catedráticos de Institutos de 2ª enseñanza.

Pueden optar asimismo los **Peritos mecánicos y electricistas** a las cátedras de las Escuelas de Náutica y Maquinistas Navales en su especialidad respectiva.

Los **Peritos electricistas** ocupan cargos en el Ministerio de Hacienda en calidad de auxiliares técnicos de la Inspección; y en general les competen todos los cargos auxiliares de orden técnico en la esfera oficial.

Por R. O. de 22 Enero 1907 se declara que el título de **Perito mecánico electricista** autoriza para firmar proyectos según su categoría e informar como Peritos en cuestiones de su especial competencia.

Finalmente la industria particular, y en especial la eléctrica en los servicios públicos de alumbrado y fuerza motriz, utilizan ventajosamente los servicios de los Peritos para importantes cargos en las centrales eléctricas.

Más de 2000 alumnos han asistido a nuestras aulas ✶ *Ellos os informarán*

PLAN DE ESTUDIOS

Real Decreto y Reglamento de 16 Diciembre 1910

CURSO PREPARATORIO

* Aritmética y Geometría prácticas.—* Nociones de ciencias físicas, químicas y naturales.

PERITOS MECÁNICOS

PRIMER GRUPO

* Aritmética y Algebra.—* Geometría plana y del espacio.—Geografía industrial.—* Francés, primer curso.—* Dibujo geométrico, primer curso.—Prácticas de taller, primer curso.

SEGUNDO GRUPO

* Trigonometría y Topografía.—Ampliación de Matemáticas.—Mecánica general.—Física general.—* Francés, segundo curso.—* Dibujo geométrico, segundo curso.—Prácticas de taller, segundo curso.

TERCER GRUPO

Geometría descriptiva.—Mecánica aplicada.—Termotecnia. — Química general. — Dibujo industrial, primer curso.—Prácticas de Termotecnia.—Prácticas de Química.—Prácticas de taller, tercer curso.

CUARTO GRUPO

Mecanismos y máquinas herramientas.—Motores.—Economía y Legislación industrial.—Dibujo industrial, segundo curso.—Prácticas de taller, cuarto curso.

PERITOS ELECTRICISTAS

El primero y segundo grupo de los peritos mecánicos

TERCER GRUPO

Geometría descriptiva. — Termotecnia. — Magnetismo y electricidad.—Química general.—Dibujo industrial, primer curso.—Prácticas de Termotecnia.—Prácticas de Química.—Prácticas de Electricidad.—Prácticas de taller, tercer curso.

CUARTO GRUPO

Electroquímica.—Electrotecnia.—Economía y Legislación industrial.—Dibujo industrial, segundo curso.—Prácticas de Electroquímica.—Prácticas de Electricidad.—Prácticas de taller, cuarto curso.

PERITOS QUÍMICOS

El primer grupo de los peritos mecánicos

SEGUNDO GRUPO

* Trigonometría y Topografía.—Física general.—Mecánica general.—Química general.—* Francés, segundo curso.—* Dibujo geométrico, segundo curso.—Prácticas de taller, segundo curso.—Prácticas de Química.

TERCER GRUPO

Termotecnia. — Magnetismo y electricidad. — Química inorgánica.—Análisis químico.—Dibujo industrial.—Prácticas de Termotecnia.—Prácticas de Electricidad.—Prácticas de Química inorgánica.—Prácticas de Análisis químico.

CUARTO GRUPO

Electroquímica. — Química orgánica. — Metalurgia. — Economía y Legislación industrial.—Prácticas de Electroquímica.—Prácticas de Química orgánica.—Prácticas de Metalurgia.

NOTA: Las asignaturas marcadas * en la relación anterior, que se hayan aprobado en el Bachillerato, tienen validez académica para la carrera de Perito Industrial.

ÍNDICE

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

I. Cantidad y número

ACADEMIA GUIU

PARA INGENIEROS Y PERITOS INDUSTRIALES

Lauria, 53, pral. - Barcelona

RESULTADOS OBTENIDOS

CONVOCATORIAS DE MAYO	1912-13	1913-14	1914-15	1915-16	1916-17	1917-18	1918-19	1919-20	1920-21	1921-22
Número total de alumnos que aprobaron el ingreso completo.	9	2	5	5	9	7	2	8	6	6
De ellos fueron preparados en esta Academia	7	2	4	5	9	7	2	8	6	6

Exito análogo en la enseñanza de Peritos mecánicos, quimicos y electricistas de las Escuelas de Tarrasa y Villanueva

OBRAS DEL MISMO AUTOR

Apuntes de Geometría Analítica, con arreglo al programa de la Escuela de Ingenieros Industriales, 1900 . . . . Agotada

Apuntes de Química General, adaptados al programa de la Facultad de Ciencias, 1902 . . Agotada

Resúmen de las lecciones de Física general, según el programa de la Facultad de Ciencias, 1903 . . . . Agotada

Apuntes de Técnica Física, con arreglo al programa de la Facultad de Farmacia, 1905 . Agotada

Nociones de Física, Química e Historia Natural, programa de la Escuela de Comercio, 1905 . . . . Agotada

Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, Respuestas al programa oficial para el Ingreso en las Escuelas de Ingenieros Industriales, (3ª edición), 2 tomos . . . . . . 30 ptas.

Nociones de Física y Geología, (3ª edición). Agotada

Nociones de Física General . . . . 20 ptas.

Lo que es la Química, (2ª edición) . . . . 5 ptas.

Memento de Química, (2ª parte de «Lo que es la Química») . . . . 7 ptas.

Meteorología y Geología, (en prensa)

Libros para mi hijo, II. Elementos de cálculo, (en preparación).

Erratas advertidas

Página	Línea	Dice	Debe decir
92	6	x centígramos	p centígramos
102	10	por que te has visto...	fectamente la división de la Matemática en tres grupos