ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS

POR EL

DR. RICARDO BALTZER,

PROFESOR EN LA UNIVERSIDAD DE GIESSEN, MIEMBRO EN EJERCICIO DE LA SOCIEDAD DE BUENAS LETRAS DE LEIPZIG.

TRADUCIDOS DIRECTAMENTE DEL ALEMAN, CON AUTORIZACION DEL AUTOR,

POR

E. JIMENEZ Y M. MERELO.

DOCTORES EN CIENCIAS.

TRIGONOMETRÍA.

MADRID:

IMPRENTA DE SEGUNDO MARTINEZ

Travesía de San Mateo, 1.

1881.

…MENTOS DE MATEMÁTICAS

POR EL

Dr. RICARDO BALTZER,

…N LA UNIVERSIDAD DE GIESSEN, MIEMBRO EN EJERCICIO DE LA SOCIEDAD
DE BUENAS LETRAS DE LEIPZIG.

…DUCIDOS DIRECTAMENTE DEL ALEMAN, CON AUTORIZACION DEL AUTOR,

POR

E. JIMENEZ y M. MERELO.

DOCTORES EN CIENCIAS.

TRIGONOMETRÍA.

MADRID:
…PRENTA DE SEGUNDO MARTINEZ
Travesía de San Mateo, 12.

1881.

Al Sr. Dn. Ambrosio Moya
su ant. discípº amº y paisº
E. Jimenez

TRIGONOMETRÍA.

(Traduccion de la 5.ª edicion alemana, 1878.)

ÍNDICE.

Capítulos.

TRIGONOMETRÍA.

I. — Del Seno.

1. Cuando una figura coincide con otra por el solo hecho de tener con ésta ciertos elementos comunes, se dice que está *determinada de un modo único* por estos elementos. Así, por ejemplo, una recta, por dos puntos; un círculo, por tres puntos; y una esfera, por cuatro puntos, están determinados de un modo único (sin ambigüedad). Mas, cuando existen *m* figuras *diferentes*, con ciertos elementos comunes, y otra figura dada coincide con una de aquéllas por tener comunes con la misma los expresados elementos, dícese que la figura está determinada por estos elementos de *m modos*. Así, por ejemplo, un triángulo, por dos lados y el ángulo comprendido, por un lado y los dos ángulos adyacentes y por los tres lados, está determinado de un solo modo; pero lo estará de dos modos, por dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos. Un círculo está determinado por tres tangentes, de cuatro modos; una esfera está determinada por cuatro planos tangentes, de ocho modos; etc.

Para la determinacion de un triángulo son necesarios $3 = 2.3 - 3$ elementos; para la de un cuarto punto sobre el mismo plano del triángulo son necesarios 2 elementos más; y, por consecuencia, para la determinacion de un cuadrángulo, de un quinquángulo, ... de un n-ángulo, son precisos

$$2.4 - 3, \quad 2.5 - 3, \ldots 2n - 3$$

elementos que sean independientes entre sí. Y en lugar de estos elementos pueden darse otras tantas funciones de los mismos, tambien entre sí independientes.

Para la determinacion de un cuarto punto en el espacio, son necesarios 3 elementos más; y, por consecuencia, para determinar un cuadrángulo alabeado son precisos $6 = 3.4 - 6$ elementos; y para determinar un quinquángulo, un sexángulo ... un v-ángulo no plano, serán precisos

$$3.5 - 6, \quad 3.6 - 6, \ldots 3v - 6$$

elementos.

Observacion. Para la determinacion de un poliedro que no sea prismático, ni más ó ménos regular, son necesarios tantos elementos como aristas tenga (*). Supongamos que el poliedro tenga v vértices, c caras y a aristas. Segun acabamos de ver, la posicion mútua ó respectiva de los v vértices sería, en general, determinada por $3v - 6$ elementos; mas, en la hipótesis de que las caras del poliedro tengan $n_1, n_2, n_3 \ldots$ lados respectivamente, ocurrirá que $n_1 - 3$ vértices de la primera cara, $n_2 - 3$ vértices de la segunda, ... caerán en cada

(*) Legendre (*Géom. Note* 8); Möbius (*Statik*, 246).

caso sobre el plano de los 3 vértices restantes; y, de consiguiente, la determinacion de cada uno de aquellos puntos exige un elemento ménos. Luego el poliedro será determinado por

$$3v - 6 - (n_1 - 3) - (n_2 - 3) - (n_3 - 3) - \ldots$$

elementos. El número de los sustraendos incluidos en los paréntesis es c; la suma $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ es $2a$; y además $3v + 3c - 6 = 3a$ (*Estereom.* 90); y, por consecuencia:

$$3v - 6 - (n_1 - 3) - (n_2 - 3) - \ldots = a.$$

El número a adquirirá el valor $3v - 6$ en el caso de que todas las caras del poliedro sean triángulos. Entónces, en efecto, es $3c = 2a$; etc.

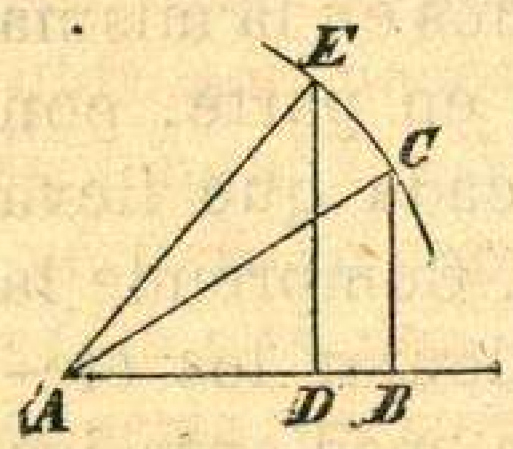
2. Con el conocimiento de que una figura está determinada por n de sus elementos se enlaza estrechamente el problema, no sólo de *construirla* mediante los n elementos determinantes (dados), sino de *calcular* tambien los elementos restantes determinados (desconocidos). Los métodos de construccion de las figuras se hallan contenidos en la misma Geometría pura, y perfeccionados, en parte, con fines técnicos, en la disciplina aplicada que lleva el nombre de *Geometría descriptiva.* Comprende la *Trigonometría* los métodos para calcular los elementos determinados de una figura mediante los elementos determinativos de la misma. En la Geometría se enseña, ciertamente, cómo se calcula un ángulo de un polígono plano, mediante los restantes ángulos del mismo polígono; un lado de un triángulo rectángulo mediante los otros lados; el área de un triángulo mediante su base y su altura,

ó sus tres lados, etc. Mas existen otras relaciones métricas todavía entre los elementos de una figura, que se apoyan en el uso de las funciones llamadas trigonométricas, y éstas son, principalmente, las que constituyen el objeto de la *Trigonometría* propiamente dicha.

Las partes especiales de la Trigonometría, en que se consideran las relaciones métricas entre los elementos de un cuadrángulo, de un polígono, de un tetraedo, ó de un poliedro, llevan los nombres de *Tetragonometría*, *Poligonometría*, *Tetraedrometría*, ó *Poliedrometría.* Tambien se suele llamar Trigonometría *plana* la que trata de relaciones métricas entre los elementos de figuras planas; y *esférica*, la que estudia bajo el mismo punto de vista las figuras esféricas.

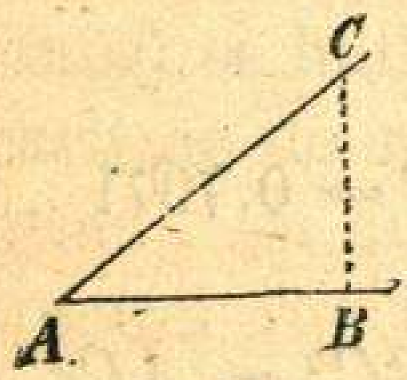
3. En todo triángulo rectilíneo está determinada por los ángulos la proporcion de los lados; puesto que dos triángulos, que tienen sus ángulos respectivamente iguales, son semejantes; etc.

Si el triángulo, en particular, es rectángulo, mediante un ángulo agudo del mismo se determinará la razon de cada dos de sus lados: como, por ejemplo, la razon del cateto opuesto al ángulo agudo con la hipotenusa. Si dicho ángulo agudo crece, crece tambien la razon del cateto opuesto á la hipotenusa. Así, cuando $BAE > BAC$ y la hipotenusa AE es igual á la hipotenusa AC, el cateto DE será mayor que el cateto BC *(Planim.* 40); y, por lo tanto: $DE : AE > BC : AC$. Luego *la razon de un cateto con la hipotenusa* de un triángulo rec-



tángulo es una *funcion determinada* del ángulo opuesto á dicho cateto, *gonométrica* ó *trigonométrica*, que se llama *seno del ángulo* (*) *(Álgebra-II)*.

4. Bajo el nombre de *seno* de un ángulo agudo, por consecuencia, se comprenderá la razon del cateto opuesto á dicho ángulo con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cualquiera, cortado del ángulo expresado. El



seno del ángulo A se expresará por $sen\,A$; y, si BC es normal al brazo AB del ángulo A, tendremos:

$$sen\,A = \frac{BC}{AC}$$

El seno de un ángulo agudo es un número abstracto (razon), comprendido entre 0 y 1; por ser un cateto de un triángulo rectángulo menor que la hipotenusa.

Si el ángulo crece desde 0° hasta 90°, su seno crecerá desde 0 hasta 1; pues, en la hipótesis de que la hipotenusa AC no varíe de longitud, el cateto BC alcanzará el valor 0 cuando el ángulo se anule; y el valor AC, cuando el ángulo llegue á ser recto. De lo cual se desprenden los valores-límites:

$$sen\,0 = 0 \quad y \quad sen\,90° = 1.$$

(*) La palabra *sinus* es traduccion latina de una voz técnica usada por los árabes desde Albatenius señaladamente (Al Batani hácia el año 900). La traduccion latina de una obra de Astronomía de Al Batani, hecha en el siglo XII por Plato Tiburtinus, impresa (1537) en Nüruberg, es el primer escrito conocido, en que se ve la palabra *sinus* y el principio de una transformacion de la Trigonometría griega *(De motu stellarum Capítulo 3, p. 6.)* V. Pfleiderer 1802 *(Trigon. 14)*. Delambre *(Hist. de l'Astron. du moyen âge* 1819).

5. Los senos de los ángulos susceptibles de construccion elemental pueden calcularse mediante teoremas conocidos de la Planimetría. Si $A = 45°$, $BC = AB$ y $2BC^2 = AC^2$, segun el teorema de Pitágoras. Luego

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{AC} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad sen\,45° = 0{,}7071\ldots$$

$$\text{Si } A = 60°, AB = \frac{1}{2}AC, \quad \frac{1}{4}AC^2 + BC^2 = AC^2.$$

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad sen\,60° = 0{,}8660\ldots$$

$$\text{Si } A = 30°, BC = \frac{1}{2}AC, \quad sen\,30° = 0{,}5.$$

Si $A = 18°$, el cateto BC es igual á la mitad de la seccion áurea de la hipotenusa AC (*Planim.* 92); y, por consecuencia:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad sen\,18° = 0{,}3090\ldots$$

De los ángulos que son sumas ó diferencias, duplos ó mitades, etc., de ángulos cuyos senos ya conocemos, pueden calcularse tambien los senos, apoyándose en el teorema de Ptolomeo (*Planim.* 125), ó en su correspondiente goniométrico (31 y 32). Tambien ofrece la Análisis matemática el medio más general y comprensivo para calcular directamente el seno de todos los ángulos (*Arit. univ.* 188).

Tenemos, por consecuencia, los elementos necesarios para formar *Tablas* que contengan, no solamente los senos de los ángulos desde 0 hasta 90°, sino tambien los logaritmos vulgares de estos senos con aproximacion suficiente (*). Los logaritmos de los senos son negativos y generalmente tienen la característica negativa — 10, que se omite por lo mismo en las tablas y los cálculos.

En las Tablas de senos (de los logaritmos de los senos) se halla para cada ángulo dado, su seno (logaritmo de su seno); y para cada seno dado (logaritmo), su ángulo correspondiente, con la aproximacion que la de los números contenidos en las Tablas determinan. Las interpolaciones precisas se efectúan por las mismas reglas que en las demás tablas matemáticas (*Álgebra* 14 y *Aritm. universal* 111).

I.—En las Tablas de senos (**) se halla el ángulo

(*) Los griegos calcularon, para todos los ángulos centrales desde 0 hasta 180°, de medio en medio grado, las razones de sus cuerdas respectivas al rádio, dividiendo éste en 60 partes (μοῖραι), cada parte en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Las obras más antiguas que tratan de las relaciones métricas, precisas, entre las cuerdas del círculo, fueron escritas por Hiparco y Menelao, segun el testimonio de Theon (en el *comment. al Almagesto*). Las tablas de las razones de las cuerdas, y un método sencillo para construirlas, fueron publicados por Ptolomeo (*Almag. I*, 9). V. Kästner (*Géom. Abhandl. I, p.* 525, *II, p.* 354.) Por ser el seno de un ángulo periférico la razon de la cuerda opuesta con el diámetro, lograron los árabes deducir inmediatamente de las tablas ptolomáicas las de los senos expresados en partes sexagesimales, sin más que bisecar los ángulos centrales y las razones correspondientes de sus cuerdas con el rádio. En lugar de los quebrados sexagesimales, introdujeron los decimales en las tablas de los senos los astrónomos alemanes Peurbach y Regiomontano 1450. Los logaritmos (naturales) de los senos fueron descubiertos por Neper 1614; en seguida, 1628, Briggs y Blacq calcularon tablas de la forma usada actualmente.

(**) J. H. T. Müller, 2.ª *ed.* 1860.

de 23° 17′ comprendido entre el de 23° 10′ y el de 23° 20′, cuya diferencia es 10′; y el *sen* 23° 17′, por consecuencia, entre 0,3934 y 0,3961, cuya diferencia es 0,0027. Si, pues, el ángulo 23° 10′ aumenta en 10, 1 y 7 minutos, su seno aumentará en 27, $\frac{27}{10}$ y $\frac{27.7}{10}$ diezmilésimas. Luego *sen* 23° 17′ = 0,3934 + 0,0019 = 0,3953.

Así se halla *log sen* 23° 17′ = 9.5948 + 0,0021 = 9.5969, mediante los valores de *log sen* 23° 10′ y *log sen* 23° 20′, cuya diferencia es 0,0030, multiplicando esta diferencia por 0,7, en atencion á ser 7′ la diferencia de los ángulos, y agregando el producto á *log sen* 23° 10′.

La característica — 10 se sobreentiende agregada ó unida.

II.—En la columna de los senos está *sen* $x = \frac{3}{4}$ = 0,7500, entre 0,7490 y 0.7509, cuya diferencia es 0,0019; y el ángulo x, por lo tanto, entre los ángulos 48° 30′ y 48° 40′ cuya diferencia es 10′. Aumentando, pues, el seno 0,7490 en 19, 1 y 10 diezmilésimas, su ángulo correspondiente aumentará en 10, $\frac{10}{19}$ y $\frac{10.10}{19}$ minutos. Luego x = 48° 30′ + 5′,3 = 48° 35′,3.

Dado *log sen* x = 9,8751 (se sobreentiende la característica — 10), se halla x = 48° 35′,4. En efecto, los ángulos correspondientes á los logaritmos 9,8745 y 9,8756 difieren en 10′; y estos 10′ deben multiplicarse por $\frac{6}{11}$, y agregar el producto á 48° 30′, que es el ángulo correspondiente al logaritmo 9.8745 que se diferencia del logaritmo dado en 0,0006, y del siguiente de la tabla en 0,0011.

6. La ecuacion (4)

$$sen\,A = \frac{BC}{AC}$$

que subsiste para el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es AC, y define el seno del ángulo A, expresa la *relacion entre la hipotenusa, un cateto y el ángulo opuesto á este cateto*, de un triángulo rectángulo. Segun ésto:

$$BC = AC.\,sen\,A \quad \text{y} \quad AC = \frac{BC}{sen\,A}$$

Un *cateto* es el producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto.

La *hipotenusa* es el cociente de un cateto por el seno del ángulo opuesto al cateto.

En particular, una *cuerda circular* es el producto del diámetro por el seno del ángulo periférico que insiste sobre ella; por ser recto el ángulo periférico que insiste sobre el diámetro.

Estas ecuaciones contienen las soluciones de los problemas trigonométricos siguientes: 1.° Dados la hipotenusa y un cateto, calcular el ángulo opuesto al cateto. 2.° Dados la hipotenusa y un ángulo agudo, calcular el cateto opuesto á este ángulo. 3.° Dados un cateto y su ángulo opuesto, calcular la hipotenusa.

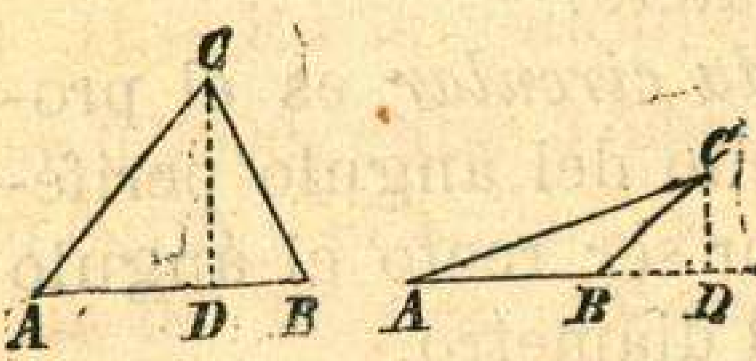
EJEMPLOS.

BC	718	$log\,BC$	2,8561
AC	922,4	$log\,AC$	2,9649
A	51°7′	$log\,sen\,A$	9,8912

AC	5,27	$\log AC$	0,7218
A	41°26′	$\log \operatorname{sen} A$	9,8207
BC	3,487₅	$\log BC$	0,5425
BC	25,7	$\log BC$	1,4099
A	81°47′	$\log \operatorname{sen} A$	9,9955
AC	25,96₅	$\log AC$	1,4144

7. El *área de un triángulo* es la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos. Advirtiendo que por *seno de un ángulo obtuso* debe comprenderse el seno de su ángulo suplementario agudo. Designando por Δ el área del triángulo ABC, debe ser

$$\Delta = \frac{1}{2} AB.BC. \ \operatorname{sen} CBA.$$

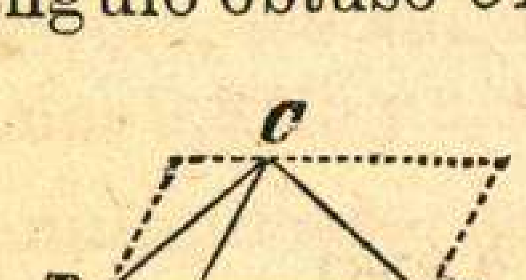


DEMOSTRACION. La altura DC del triángulo ABC es un cateto del triángulo rectángulo BCD, cuya hipotenusa es BC. Luego (*Planim.* 82):

$$DC = BC. \operatorname{sen} CBD \ (6)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} AB \, . \, DC = \frac{1}{2} \, AB \, . \, BC . \operatorname{sen} \ CBA$$

en el caso de ser CBA agudo, ó de ser sustituido el ángulo obtuso CBA por su suplemento agudo DBC.



APLICACION. El *área de un paralelógramo* es el producto de dos lados contíguos por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

El *área de un cuadrilátero* es la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo de las mismas.

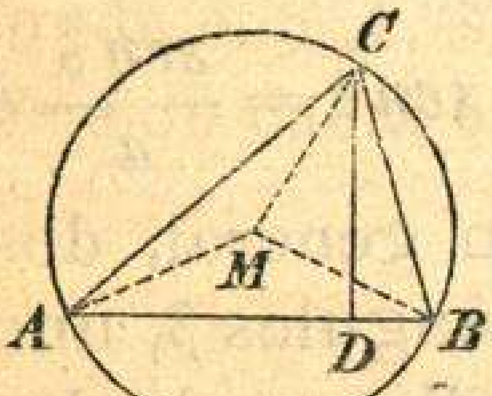
8. Los *lados de un triángulo* son entre sí como los senos de sus ángulos opuestos respectivamente (*). Los lados divididos por los senos de los ángulos opuestos dan cocientes iguales, cuyo valor comun, tanto expresa el cociente del producto de los lados por el duplo del área, como el diámetro del círculo circunscrito al triángulo (*Teorema del seno*).

DEMOSTRACION. Hemos hallado (7):

$$\frac{DC}{BC} = sen\, CBA, \quad \frac{DC}{CA} = sen\, BAC$$

y, por consecuencia:

$$CA : BC = sen\, CBA : sen\, BAC; \text{ etc.}$$



Designando los lados BC, CA y AB por a, b y c respectivamente, los ángulos opuestos por α, β y γ (**), el área por Δ, y por r el radio del círculo circunscrito, tenemos (7):

$$2\Delta = bc\, sen\, \alpha = ca\, sen\, \beta = ab\, sen\, \gamma$$

$$\frac{abc}{2\Delta} = \frac{a}{sen\, \alpha} = \frac{b}{sen\, \beta} = \frac{c}{sen\, \gamma} = 2r;$$

Porque las cuerdas a, b y c son opuestas á los ángulos periféricos ó inscritos α, β y γ (6).

(*) En la Trigonometría antigua era esta ley tautológica; porque AB es la cuerda del ángulo céntrico $AMB = 2ACB$; etc. Sobre las otras relaciones véase la *Planimetría* (135).

(**) Esta notacion expresiva fué introducida por EULER; y al mismo se debe el uso comun en las fórmulas de expresiones, como $sen\,\alpha$, cuyos valores particulares se designaban ántes de otro modo con letras especiales (*Nov. Comm. Petrop.* 5, *página* 164).

OBSERVACION. Por ser $b = a \dfrac{sen\beta}{sen\alpha} = 2r\,sen\beta$ y $a = 2r\,sen\alpha$, es

$$2\Delta = a^2 \frac{sen\beta\,sen\gamma}{sen\alpha} \quad \text{y} \quad \Delta = 2r^2 sen\alpha\,sen\beta\,sen\gamma$$

Y mediante estas expresiones puede calcularse el área del triángulo, conociendo sus ángulos y uno de sus lados ó el rádio del círculo circunscrito.

9. El teorema del seno contiene *la relacion entre dos lados de un triángulo y sus ángulos opuestos*, y sirve, de consiguiente, para resolver los problemas: 1.º Dados dos ángulos de un triángulo y el lado opuesto á uno de ellos, calcular el lado opuesto al otro ángulo. 2.º Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, calcular el ángulo opuesto al otro lado. Así, dados a, α y β, tenemos:

$$b = \frac{a}{sen\alpha} sen\beta. \quad \text{Y, dados } \alpha, a \text{ y } b, \quad sen\beta = \frac{sen\alpha}{a} b$$

El segundo problema admite, en general, dos soluciones; puesto que existen dos ángulos β, uno agudo y obtuso el otro, cuyos senos tienen el mismo valor (7).

Si, en particular, el lado a, opuesto al ángulo dado α, fuese menor que $b\,sen\alpha$, sería $sen\beta > 1$ y no real el ángulo buscado β. Lo cual significa que no existe ningun triángulo con los elementos dados.

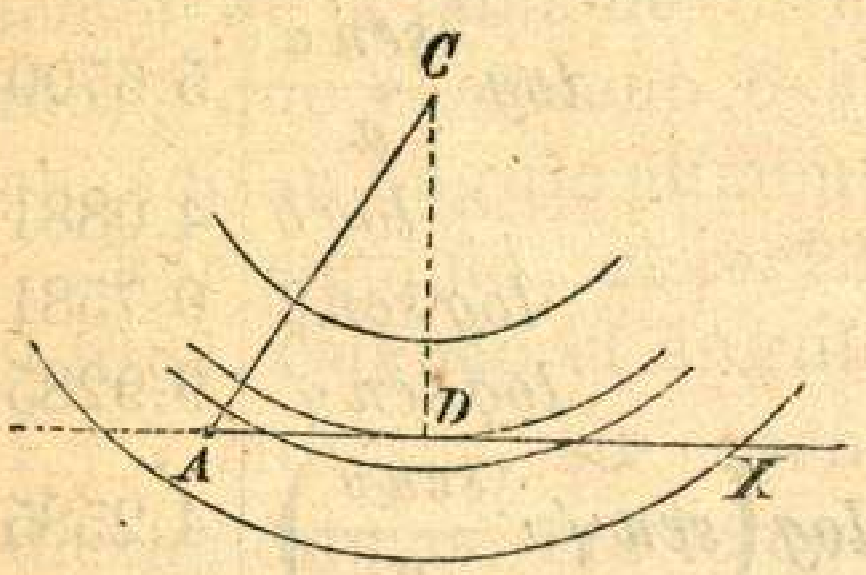
Si fuese $a = b\,sen\alpha$, sería $sen\beta = 1$, $\beta = 90°$.

Si a estuviese comprendido entre los límites $b\,sen\alpha$ y b, seria $sen\beta > sen\alpha$, el ángulo buscado β tendria el valor de un ángulo agudo, mayor que α y que el valor del ángulo obtuso suplementario.

Si $a = b$, debe ser $sen\beta = sen\alpha$; y β sólo podria tener el valor α y no el $180° - \alpha$.

Si $a > b$, será $sen\,\beta < sen\,\alpha$; y β sólo podrá ser agudo y menor que α; porque obtuso, deberia oponerse al mayor lado, contra la hipótesis establecida.

Con esta determinacion concuerda perfectamente la construccion del triángulo ABC con los elementos dados. En efecto, el círculo descrito alrededor del centro C con el rádio a, tiene con el brazo AX del ángulo α, dos puntos comunes, imajinarios, ó reales (unidos ó separados), segun que a sea menor, igual ó mayor que la altura $CD = b\,sen\,\alpha$. Cuando $a = b$, el segundo punto de interseccion se confunde con A. Si $a > b$, el segundo punto de interseccion caerá en el ángulo adyacente del α.



EJEMPLO 1.°

a	325	$\log a$	2.5119
β	46°15′	$\log sen\,\alpha$	9.9873^5
γ	57°30′	$\log \frac{a}{sen\,\alpha}$	2.5245^5
$\beta + \gamma$	103°45′	$\log sen\,\beta$	9.8588
α	76°15′	$\log sen\,\gamma$	9.9260
b	241,7	$\log\left(\frac{a}{sen\,\alpha}\,sen\,\beta\right)$	2.3833^2
c	282,2		
Δ	33130	$\log\left(\frac{a}{sen\,\alpha}\,sen\,\gamma\right)$	2.4505^5
		$\log \frac{1}{2}$	9.6990
		$\log\left(\frac{1}{2}\,bc\,sen\,\alpha\right)$	4.5202

EJEMPLO 2.°

α	$23°4'$	$log\ sen\ \alpha$	9.5931
a	8377	$log\ a$	3.9231
b	12249	$log \frac{sen\ \alpha}{a}$	5.6700
β'	$34°57',2$	$log\ b$	4.0881
$\alpha+\beta'$	$58°1',2$	$log\ sen\ \beta$	9.7581
γ'	$121°58',8$	$log\ sen\ \gamma'$	9.9285
c'	1813_4	$log\left(sen\ \gamma' : \frac{sen\ \alpha}{a}\right)$	4.2585
β''	$145°2',8$	$-\ log\ sen\ \gamma''$	9.3138
$\gamma''=\beta'-\alpha$	$11°53',2$	$log\left(sen\ \gamma'' : \frac{sen\ \alpha}{a}\right)$	3.6438
c''	4403		

II. — Del Coseno.

10. El seno del complemento de un ángulo se llama *coseno* de este ángulo (*). El coseno del ángulo α se designa por $cos\ \alpha$. Segun la definicion

$$cos\ \alpha = sen\,(90° - \alpha),\ cos\,(90° - \alpha) = sen\ \alpha$$

$$cos\,32° = sen\,58°,\quad cos\,45° = sen\,45°$$

$$cos\,0 = sen\ 90° = 1$$

$$cos\,90° = sen\,0° = 0$$

Si el ángulo agudo α crece, su complemento mengua y tambien el seno de este complemento (3): lo cual quiere decir que, cuando el ángulo aumenta, su coseno disminuye.

(*) La abreviatura *coseno* de *complementi sinus* procede de Gunter, contemporáneo de Briggs, segun asercion de Keppler. *Trigon.* de Pfleiderer *p.* 101).

Sustituyendo todos los ángulos por sus complementos, la Tabla de los senos ó de sus logaritmos se convertirá en Tabla de cosenos ó de los logaritmos de estos cosenos. Sólo hay que notar en la interpolacion de la tabla de los cosenos ó de sus logaritmos, que el coseno ó su logaritmo disminuyen cuando su ángulo aumenta, y recíprocamente.

Por ejemplo, el $cos 23^\circ\ 17'$ cae entre 0,9194 y 0,9182. Cuando el ángulo $23^\circ\ 10'$ aumenta en 10, 1 y 7 minutos, su coseno mengua en 12, $\frac{12}{10}$ y $\frac{12.7}{10}$ diezmilésimas. Por lo cual:

$$cos 23^\circ\ 17' = 0{,}9194 - 0{,}0008 = 0{,}9186.$$

Del mismo modo se halla:

$$log\, cos\, 23^\circ\ 17' = 9{,}9635 - 0{,}0006\,\tfrac{7}{10} = 9.9631$$

Si $cos\, x = 0{,}8347$, el ángulo x está comprendido entre $33^\circ\ 20'$ y $33^\circ\ 30'$. Cuando el valor 0,8355 del coseno disminuye en 16, 1 y 8 diezmilésimas, su ángulo aumenta en 10, $\frac{10}{16}$ y $\frac{10.8}{16}$ minutos. Por lo cual es $x = 33^\circ\ 25'$.

Dado $log\, cos\, x = 9.7336$, se halla

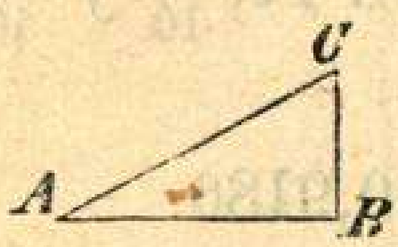
$$x = 57^\circ\ 10' + 10'\,\tfrac{6}{20} = 57^\circ\ 13'$$

Observacion. Si α es obtuso, tenemos (7):

$$sen\, \alpha = sen\, (180^\circ - \alpha) = cos\, [90^\circ - (180^\circ - \alpha)]$$
$$= cos\, (\alpha - 90^\circ)$$

Así, por ejemplo: $sen 138^\circ\ 23' = cos 48^\circ\ 23'$. Es más sencillo, realmente, sustraer 90° del ángulo obtuso, que sustraer este ángulo de 180°; y por esto el seno de un ángulo obtuso debe buscarse en la tabla del coseno.

11. En un triángulo rectángulo, el coseno de un ángulo agudo es la razon del cateto adyacente con la hipotenusa. Un cateto es el producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo agudo, adyacente al cateto. La hipotenusa es el cociente de un cateto por el coseno del ángulo agudo, adyacente al mismo cateto.



Demostracion. En el triángulo rectángulo ABC, cuya hipotenusa es AC, tenemos (6):

$$\cos A = \operatorname{sen} C = \frac{AB}{AC}$$

$$AB = AC.\cos A,\ AC = \frac{AB}{\cos A}$$

Observacion. Segun el teorema de Pitágoras:

$$\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = 1 \ (*)$$

$$\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A} = \sqrt{(1 + \operatorname{sen} A)(1 - \operatorname{sen} A)}$$

Por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(45^\circ - \alpha)}$$

Los senos de los ángulos superiores á 45° pueden calcularse mediante los senos de los ángulos menores que 45°.

Del valor dado de $\operatorname{sen} x$ ó de $\log \operatorname{sen} x$, puede

(*) Se escribe $\cos^2 A$ ó $\cos A^2$, y $\cos ma$, por $(\cos A)^2$, y $\cos(ma)$.

deducirse el de $\cos x$ ó $\log \cos x$, mediante la interpolacion en las tablas, sin determinar el ángulo x. Sea, pues, $\operatorname{sen} x = 0{,}3016$ que está comprendido entre los senos 0,3007 y 0,3035; $\cos x$ lo estará entre los cosenos 0,9537 y 0,9528. Ahora bien, si el seno 0,3007 aumenta en 28, 1 y 9 diezmilésimas, el coseno 0,9537 mengua en 9, $\frac{9}{28}$ y $\frac{9.9}{28}$ diezmilésimas. Luego $\cos x = 0{,}9534$.

Para calcular el cateto BC, dados la hipotenusa AC y el otro cateto AB, se busca en las tablas $\cos A = AB : AC$, á cuyo lado está $\operatorname{sen} A$; y así se halla $BC = AC \operatorname{sen} A$, con mayor facilidad que calculando la raíz $\sqrt{AC^2 - AB^2}$.

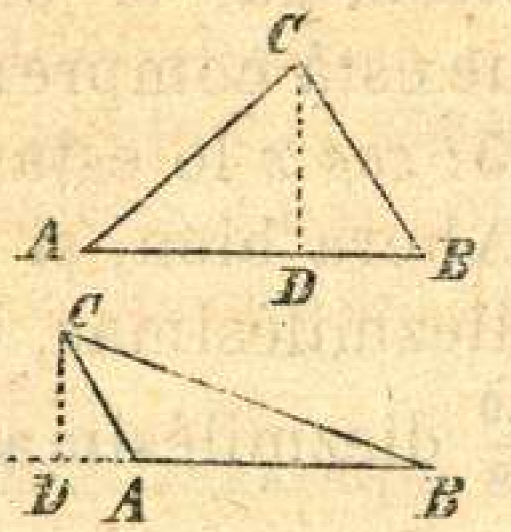
12. *El cuadrado de un lado de un triángulo* es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados ménos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo entre ellos comprendido (*Teorema del coseno*). Aquí debe comprenderse por *coseno de un ángulo obtuso* el coseno negativo de su suplemento agudo (*). Segun la notacion admitida (8):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Si α es recto, $\cos \alpha = 0$, y $a^2 = b^2 + c^2$. Si α es obtuso, $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, y $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(180^\circ - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{sen}(\alpha - 90^\circ)$.

(*) Este teorema, que comprende el de Pitágoras como caso particular, se halla en EUCL. *II*, 12 y 13, sin la expresion trigonométrica del último término (*Planim.* 126).

DEMOSTRACION. Trazando en el triángulo ABC la altura CD, por el teorema de Pitágoras tenemos:



$$BC^2 = DB^2 + CD^2$$

Si el lado BC se opone al ángulo agudo A, es $DB = AB - AD$; y, por consecuencia:

$$BC^2 = AB^2 - 2AB.AD + AD^2 + CD^2$$

Y como $AD^2 + CD^2 = AC^2$, resulta finalmente:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AD.$$

Mas, si el lado BC es opuesto al ángulo obtuso A, será el segmento $DB = DA + AB$; y, por lo tanto:

$$BC^2 = AB^2 + 2AB.DA + DA^2 + DC^2$$
$$= AB^2 + AC^2 + 2\,AB.DA$$

En el triángulo rectángulo ADC, tiene AD, en el primer caso, el valor $AC \cos A$ (11); y, en el segundo, el valor $AC \cos (180 - A)$; etc.

Este segundo caso queda incluido en el primero por la definicion adoptada para el coseno de un ángulo obtuso.

OBSERVACION. Segun (10), cuando α es obtuso tenemos:

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} [90^\circ - (180 - \alpha)] = \operatorname{sen} (\alpha - 90^\circ)$$

$$\cos \alpha = - \operatorname{sen} (\alpha - 90^\circ)$$

Así, por ejemplo, en lugar de $\cos 127^\circ\ 46'$ tomaremos $- \operatorname{sen} 37^\circ\ 46'$; porque es más fácil sustraer

90° del ángulo dado que sustraer este ángulo de 180°.

13. El teorema del coseno contiene la *relacion entre los tres lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos;* y sirve, por lo tanto, para resolver los problemas trigonométricos siguientes: 1.° Dados dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos comprendido, calcular el lado opuesto á este ángulo. 2.° Dados los tres lados, calcular los ángulos opuestos á los mismos. 3.° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, calcular el tercer lado.

Dados, $b = 3921$, $c = 4652$ y $\alpha = 27°\ 38'$, se halla

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = 2168$$

Dados, $a = 246,9$, $b = 163,9$ y $\gamma = 113°\ 16',4$, se halla

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\, sen\, 23°\ 16',4} = 346,1$$

Este cálculo se facilita mediante las tablas de Gauss (*Aritm. univ.* 113); pero el primer problema se resuelve con mayor facilidad todavía aplicándole el doble teorema de Gauss (23).

14. Para el cálculo del ángulo α, dados los lados a, b y c, se usa la ecuacion $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, de la cual se deduce:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Si $a^2 = b^2 + c^2$, es $\cos \alpha = 0$ y $\alpha = 90°$. Si $a^2 > b^2 + c^2$, es $\cos \alpha$ negativo, obtuso el ángulo α, y se busca en las tablas $\alpha - 90°$, despues de haber puesto $- \cos \alpha = sen\, (\alpha - 90°)$.

Si $b^2+c^2-a^2 \gtrless \pm 2bc$, ó $(b\mp c)^2-a^2 \gtrless 0$,

lo cual significa que la diferencia de dos lados es mayor, ó que la suma de los mismos lados es menor, que el tercero, $cos\,\alpha$ sale fuera de los límites 1 y — 1; el ángulo que se busca no es real, y el triángulo no es construible.

OBSERVACION. De las ecuaciones (7)

$$4\Delta = 2bc\,sen\,\alpha$$
$$b^2+c^2-a^2 = 2bc\,cos\,\alpha,$$

teniendo presente que $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$, se desprende la siguiente:

$$16\Delta^2 + (b^2+c^2-a^2)^2 = 4b^2c^2$$
$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

en la cual s representa la semisuma de los lados (*Planim.* 133).

Calculada el área Δ mediante los lados, los ángulos podrán calcularse por las ecuaciones (8):

$$sen\,\alpha = \frac{2\Delta}{abc}\,a,\quad sen\,\beta = \frac{2\Delta}{abc}\,b,\quad sen\,\gamma = \frac{2\Delta}{abc}\,c$$

Primeramente se calculan los ángulos opuestos á los lados menores, que son agudos. El ángulo opuesto al mayor lado será agudo ú obtuso; pero siempre de tal magnitud que, sumado con los otros, dé la suma de 180°

La resolucion numérica, más sencilla, del segundo problema, tiene por base las fórmulas que verémos más adelante (20).

15. Para el cálculo del lado c, dados los lados a

y b y el ángulo α, opuesto al lado a, se usa la ecuacion $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, de la que se deduce esta otra:

$$c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 - b^2$$

$$(c - b\cos\alpha)^2 = b^2\cos^2\alpha + a^2 - b^2 = a^2 - b^2 sen^2\alpha \quad (11)$$

$$c = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2 sen^2\alpha}$$

La cual prueba que, en general, existen dos valores para c. Estos valores no serán reales cuando sea $a < b\,sen\,\alpha$; serán reales é iguales entre sí, cuando $a = b\,sen\,\alpha$; y reales diferentes, cuando $a > b\,sen\,\alpha$. Si en este último caso fuera $a = b$ ó $a > b$, la raíz cuadrada valdria tanto ó más que $b\cos\alpha$, y el segundo valor de c, por lo tanto, se anularia, ó seria negativo: esto es, los segmentos AB' y AB'', correspondientes á los valores de c, tendrian direcciones opuestas (*Planim.* 111).

Esta determinacion coincide con la dada antes (9), y se confirma construyendo el triángulo ABC con los elementos propuestos. El cálculo directo del lado c, sin embargo, es ménos sencillo que el indirecto con el auxilio del ángulo γ.

III.—De la tangente y la cotangente.

16. El cociente del seno de un ángulo por el coseno del mismo se denomina *tangente* de dicho ángulo (*). La tangente del complemento de un

---

(*) Las tablas de tangentes fueron construidas por los árabes (AL BATANI 900), como nota BURCKHARDT; é introducidas en Occidente por REGIOMONTANO 1463 con la denominacion de *Tabula foecunda*. El nombre *tangente* procede de FINK (*Géom. rotundi* 1583). PFLEIDERER (*Trigon*, págs. 129, 141 y 161).

ángulo se llama *cotangente* de este ángulo. La tangente y la contangente del ángulo α se expresan por $tang\,\alpha$ y $cot\,\alpha$, y segun esta notacion:

$$tang\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha},\ cot\,\alpha = tang\,(90^\circ - \alpha)$$

Mas

$$tang\,(90^\circ - \alpha) = \frac{sen\,(90^\circ - \alpha)}{cos\,(90 - \alpha)} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \qquad (10)$$

Luego

$$cot\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \text{ y } tang\,\alpha \,.\, cot\,\alpha = 1$$

Es decir que la tangente y la cotangente de un mismo ángulo son recíprocas, y sus logaritmos igualmente opuestos.

17. La ecuacion $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ da:

$$1 + \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha},\quad \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} + 1 = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

ó, segun las definiciones anteriores:

$$1 + tang^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha},\quad cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

Y estas ecuaciones enseñan que del coseno de un ángulo puede deducirse inmediatamente su tangente, y del seno su contangente; y viceversa.

18. Si el ángulo crece desde 0 hasta 45°, y despues desde 45° hasta 90°, la tangente crece desde 0 hasta 1, y despues hasta el ∞; y su cotangente mengua desde ∞ hasta 1, y despues desde 1 hasta 0.

Porque

$$tang\,0 = \frac{sen\,0}{cos\,0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$tang\,45^\circ = \frac{sen\,45^\circ}{cos\,45^\circ} = 1$$

$$tang\,90^\circ = \frac{sen\,90^\circ}{cos\,90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

Si $\beta > \alpha$, será $sen\,\beta > sen\,\alpha$, $cos\,\beta < cos\,\alpha$ (4 y 10),

$$\frac{sen\,\beta}{cos\,\beta} > \frac{sen\,\alpha}{cos\,\beta} > \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

y, por lo tanto: $tang\,\beta > tang\,\alpha$. Por el contrario:

$$cot\,0 = \infty,\quad cot\,45^\circ = 1,\quad cot\,90^\circ = 0$$

$$cot\,\beta < cot\,\alpha.$$

Las Tablas de tangentes y cotangentes son susceptibles de interpolacion como las otras. Cuando el ángulo crece, su tangente crece y tambien el logaritmo de ella; miéntras que su cotangente y el logaritmo de ésta disminuyen; y viceversa.

Observacion. Si el ángulo α es obtuso, tenemos (12):

$$tang\,\alpha = \frac{sen\,(180^\circ - \alpha)}{-cos\,(180^\circ - \alpha)} = -\,tang\,(180^\circ - \alpha)$$

$$= \frac{cos\,(\alpha - 90^\circ)}{-\,sen\,(\alpha - 90^\circ)} = -\,cot\,(\alpha - 90^\circ)$$

Es decir que los ángulos suplementarios tienen tangentes y cotangentes igualmente opuestas.

19. En un triángulo rectángulo la tangente de un ángulo agudo es la razon del cateto opuesto á este ángulo con el otro cateto. La cotangente de un ángulo agudo es la razon del cateto adyacente á este ángulo con el otro cateto. Un cateto es el producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto, ó por la cotangente del ángulo adyacente al primero.

Demostracion. En el triángulo rectángulo ABC, cuya hipotenusa es AC, tenemos:

$$sen\,A = \frac{BC}{AC}, \quad cos\,A = \frac{AB}{AC}$$

y, por lo tanto:

$$tang\,A = \frac{BC}{AB}, \quad cot\,A = \frac{AB}{BC}$$

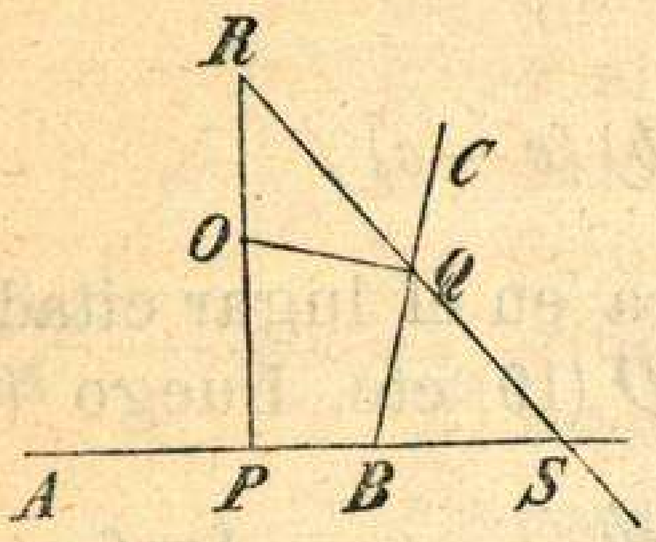
$$BC = AB.\,tang\,A = AB.\,cot\,C.$$

Aplicaciones. Con auxilio de este teorema se hallan los ángulos de un triángulo rectángulo, dados sus dos catetos; y un cateto, dados un ángulo agudo y el otro cateto.

Para calcular la hipotenusa, dados los catetos AB y BC, se busca en las tablas $tang\,A = BC : AB$, y á su lado se hallan $sen\,A$ ó $cos\,A$ (el mayor de los dos exige la interpolacion menor); y con ésto $AC = BC : sen A$ ó $AB : cos A$. Procedimiento más sencillo que el de aplicar la fórmula $\sqrt{AB^2 + BC^2}$ (11).

Sea O un punto cualquiera del ángulo CBA, y PO y QO sus distancias á los lados de dicho ángulo; la suma, PR, de estas distancias tiene con la suma de los segmentos PB y BQ la razon constante

$tang\frac{1}{2}CBA$ (*). En efecto, la recta QR corta del ángulo adyacente al dado el triángulo SQB, cuyos ángulos Q y S tienen iguales complementos y valen $\frac{1}{2}CBA$; por lo cual, $PS = PB + BQ$ y $PR : PS = tang\frac{1}{2}CBA$. Los segmentos PB y BQ serán negativos cuando sus direcciones sean opuestas á las direcciones AB y BC.



Si designamos por aa', bb' y cc' los ángulos que con los lados BC, CA y AB de un triángulo forman las medianas del mismo A_1A, B_1B y C_1C, tendremos:

$$AC^2 - BC^2 = 2AB.C_1C\cos cc'. \ (Planim. \ 112.)$$

$$4\Delta = 2AB.C_1C \ sen \ cc' \ (7)$$

$$\cot cc' = \frac{b^2-a^2}{4\Delta}, \quad \cot aa' = \frac{c^2-b^2}{4\Delta}, \quad \cot bb' = \frac{a^2-c^2}{4\Delta}$$

$$\cot aa' + \cot bb' + \cot cc' = 0 \ (^{**}).$$

20. Para hallar del modo más sencillo los ángulos α, β y γ de un triángulo, dados sus lados a, b

---

(*) De este lema se derivan leyes acerca de perímetros de polígonos y superficies de poliedros, que ha deducido LINDELÖF por otro camino (*Bulletin de Petersburg*, 1870, t. XIV, *página* 256.)

(**) FATZBENDER (*Arch. de Grunnert*, 49, p. 115). Véase adelante (66).

y c (14), se calcula *(Planim.* 133) el radio del círculo inscrito

$$d = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

y en la figura que se encuentra en el lugar citado se halla $cot D'AD = AD' : D'D$ (19) etc. Luego (*)

$$cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s-a}{d},\quad cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{s-b}{d},\quad cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s-c}{d}$$

$$cot\tfrac{1}{2}\alpha + cot\tfrac{1}{2}\beta + cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s}{d} = \frac{s^2}{\Delta} = cot\tfrac{1}{2}\alpha\, cot\tfrac{1}{2}\beta\, cot\tfrac{1}{2}\gamma$$

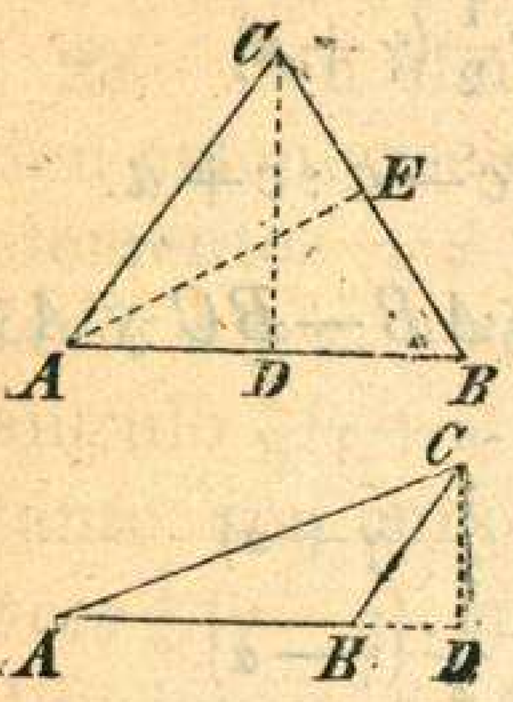
EJEMPLO.

a	3921	$log\,(s-a)$	3,1611
b	4652	$log\,(s-b)$	2,8561
c	2167	$log\,(s-c)$	3,5055
$2s$	10740	....	9,5227
s	5370	$log\,s$	3,7300
$s-a$	1449	$log\,d^2$	5,7927
$s-b$	718	$log\,d$	2,8963[5]
$s-c$	3203	$log\,cot\frac{1}{2}\alpha$	10,2647[5]
$\frac{1}{2}\alpha$	28° 31',5	$log\,cot\frac{1}{2}\beta$	9,9597[5]
$\frac{1}{2}\beta$	47° 39'	$log\,cot\frac{1}{2}\gamma$	10,6091[5]
$\frac{1}{2}\gamma$	13° 49'		

$$\alpha = 57°\,3',\quad \beta = 95°\,18'\quad \gamma = 27°\,38'.$$

(*) Joachim Rhäticus (Pfleiderer, *Trigon.*, p. 394).

21. Para calcular, dados dos lados y el ángulo comprendido, b, α y c, ó bien, b, γ y a, el ángulo β, opuesto á uno de los lados b, puede cortarse del ángulo β: ó por la altura CD, el triángulo rectángulo BCD cuyos catetos son $DB = AB - AD = c - b \cos\alpha$ y $DC = b \operatorname{sen}\alpha$; ó por la altura AE, el triángulo rectángulo BAE cuyos catetos son $BE = BC - EC = a - b \cos\gamma$ y $EA = b \operatorname{sen}\gamma$. Segun (19):



$$tang\, \beta = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{c - b\cos\alpha} = \frac{c \operatorname{sen}\gamma}{a - b\cos\gamma}.$$

Si el denominador se anula, esto es, si $AB = AD$, $tang\, \beta$ será infinito y β recto; si el denominador es negativo, ó si $AB < AD$, el ángulo β es obtuso, y entónces (18):

$$cot\, (\beta - 90^\circ) = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{b\cos\alpha - c},$$

conforme patentiza la figura.

La solucion más sencilla de este problema se funda en el teorema siguiente.

22. El producto de un lado de un triángulo por el seno (coseno) de la diferencia de los ángulos adyacentes es igual al producto de la diferencia (suma) de los dos lados opuestos á dichos ángulos por el seno (coseno) de la semisuma de los mismos ángulos.

La tangente de la semidiferencia de dos ángulos de un triángulo tiene con la tangente de su semisuma la misma razon que la diferencia de los lados opuestos con la suma de estos lados (*). Así, por ejemplo:

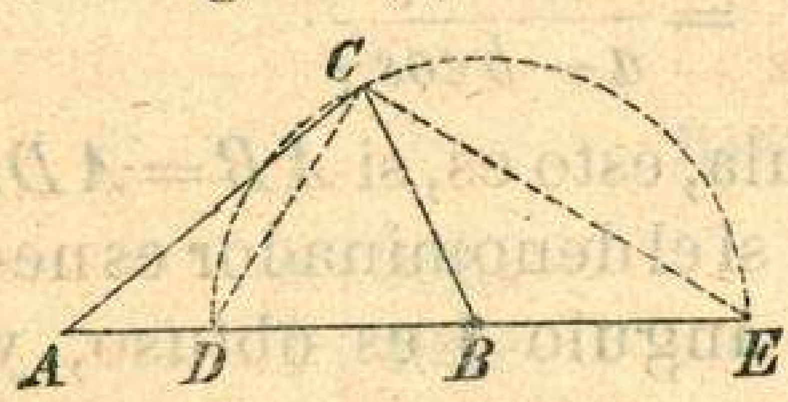
(*) Esta adicion que Fink (*Géom. rotundi* 583, p. 281) dedujo

$$b\,sen\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = (c-a)\,sen\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$b\,cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = (c+a)\,cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$tang\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) : tang\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = c-a : c+a.$$

Demostracion. Haciendo $AD=AB-BC$ y $AE=AB+BC$, serán los ángulos

$$DCB=BDC=\tfrac{1}{2}\,EBC=\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$ACD=ACB-\quad DCB=\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$

y el $DCE=90°$. En los triángulos ADC y AEC, será segun (8):



$$\frac{CA}{sen\,CDA}=\frac{AD}{sen\,ACD}$$
y
$$\frac{CA}{sen\,CEA}=\frac{AE}{sen\,ACE}$$

Mas $sen\,CDA=sen\,BDC$ (7); $sen\,CEA=cos\,EDC$, y $sen\,ACE=cos\,ACD$ (10). Luego:

$$\frac{b}{sen\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}=\frac{c-a}{sen\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}\ \text{y}\ \frac{b}{cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}=\frac{c+a}{cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$$

ó bien:

$$b\,sen\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)=(c-a)\,sen\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$b\,cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)=(c+a)\,cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

Y de estas ecuaciones se deduce por division la siguiente:

---

de una consideracion establecida por Ptolomeo y Regiomontano (24) (Pfleiderer, *Trigon.*, p. 356), es conocida, como la relativa al triángulo esférico con el nombre de *Analogía de* Neper. El teorema principal, como el correspondiente al triángulo esférico, lleva el nombre de *Teorema doble de* Gauss (50).

$$tang\,\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)=\frac{c-a}{c+a}\,tang\,\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

23. Con el auxilio del teorema precedente pueden calcularse del modo más sencillo los restantes elementos γ, α y b, de un triángulo, *dados sus dos lados* c y a, y *el ángulo por éstos comprendido* β. El ángulo $\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ es el complemento de $\frac{1}{2}\beta$; y, por lo tanto, son conocidos los productos $b\,sen\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ y $b\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, mediante cuyos valores se halla, por division, el de $tang\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$; y, como consecuencia, el de $sen\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ y el de $cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, y el del ángulo $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$. El lado b, puede calcularse por division de dos modos diferentes, y por último, de los valores de $\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ y $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ se deducen los de los ángulos γ y α.

EJEMPLO.

c	4652	$log\,(c-a)$	2,8639
a	3921	$log\,sen\,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$	9,9872
β	27° 38′	$log\,(c+a)$	3,9332
$c-a$	731	$log\,cos\,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$	9,3781
$c+a$	8573	$log\,b\,sen\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	2,8511
$\frac{1}{2}\beta$	13° 49′	$log\,b\,cos\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	3,3113
$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$	76° 11′	$log\,tang\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	9,5398
$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	19° 7′	$log\,sen\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	9,5151
γ	95° 18′	$log\,cos\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$	9,9754
α	57° 4′		
b	2167, 5	$log\,b$	3,3360

Observacion. Dados, un lado, b, de un triángulo, su ángulo opuesto β, y la razon $a:c=m$ de los otros lados, pueden calcularse los elementos restantes del triángulo, mediante las ecuaciones

$$tang\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)=\frac{c-a}{c+a}tang\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$=\frac{1-m}{1+m}tang\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$\frac{1}{2}(c-a)=\frac{1}{2}b\frac{sen\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{sen\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$$
$$\text{y }\frac{1}{2}(c-a)=\frac{1}{2}b\frac{cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$$

24. Como (8) $c:a=sen\gamma:sen\alpha$, si establecemos la condicion $sen\alpha:sen\gamma=m$, segun el teorema (22) tenemos:

$$tang\frac{1}{2}(\gamma-\alpha):tang\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)=\frac{sen\gamma-sen\alpha}{sen\gamma+sen\alpha}=\frac{1-m}{1+m}$$

Y, de consiguiente, *conocida la suma de dos ángulos y la razon de sus senos*, puede calcularse la diferencia de los ángulos; y, por lo tanto, estos ángulos mismos (*). Puede suponerse en la fórmula anterior $m=sen\,\mu$; etc.

Si la suma dada pasa de 180°, se tomará el ángulo $\gamma=180°-\gamma'$ y $\alpha=180°-\alpha'$, con lo cual:

$$tang\frac{1}{2}(\alpha'-\gamma'):tang\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')=\frac{sen\alpha'-sen\gamma'}{sen\alpha'+sen\gamma'}$$

Pero $\alpha'-\gamma'=\gamma-\alpha$; $\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')=180°-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$; y (18)

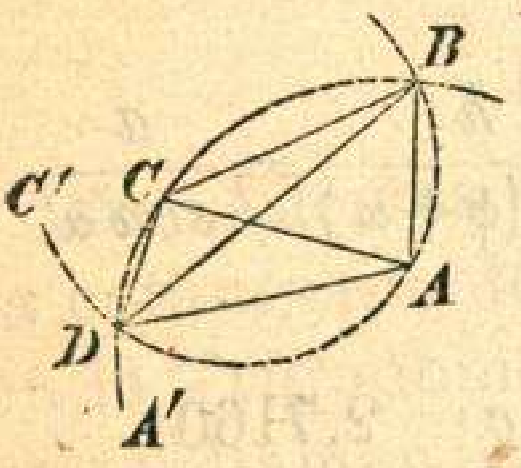
$$tang\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')=-tang\frac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

(*) Este problema y su resolucion gráfica fueron conocidos por PTOLOMEO y REGIOMONTANO. (Véase la nota al teorema 22.)

$$sen\,\alpha' = sen\,\alpha,\ sen\,\gamma' = sen\,\gamma$$

Luego, como antes:

$$tang\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) : tang\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \frac{sen\,\gamma - sen\,\alpha}{sen\,\gamma + sen\,\alpha}$$



Aplicacion. Sobre el plano del triángulo ABC existe un punto D, respecto del cual tienen los lados AB y BC magnitudes aparentes dadas. Este punto D es el segundo punto comun de los círculos ABC' y BCA', cuyas cuerdas AB y BC son vistas desde los puntos C' y A' respectivamente, bajo las magnitudes aparentes dadas; y permanece indeterminado cuando los dos círculos coinciden con el ABC.

Designemos por c, a y β los lados AB y BC, y el ángulo CBA, del triángulo ABC; y por γ' y α' los ángulos ADB y BDC. Con estos datos nos proponemos calcular los segmentos DA, DB y DC que representaremos por f, g y h (*). Para ésto, representando por φ y ψ los ángulos BAD y DCB, del cuadrángulo $ABCD$, tendremos:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\gamma'+\alpha'+\beta)$$

En los triángulos ABD y BCD se verifican las relaciones:

$$\frac{g}{sen\,\varphi} = \frac{c}{sen\,\gamma'} \text{ y } \frac{g}{sen\,\psi} = \frac{a}{sen\,\alpha'}$$

$$\frac{sen\,\psi}{sen\,\varphi} = \frac{c}{sen\,\gamma'} : \frac{a}{sen\,\alpha'} = m$$

(*) Snellius 1614, Pothenot 1692, Lambert 1765, y otros. Véase la *Trigon.* de Pfleiderer, p. 275. Este problema lleva el nombre de *Teorema* de Pothenot.

Mas, segun lo demostrado antes:

$$tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi):tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)=\frac{sen\,\varphi-sen\,\psi}{sen\,\varphi+sen\,\psi}=\frac{1-m}{1+m}$$

Con lo cual $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$, y, por consecuencia, φ y ψ están determinados. Para calcular f, g y h disponemos de las relaciones

$$\frac{f}{sen\,(\varphi+\gamma')}=\frac{g}{sen\,\varphi}=\frac{c}{sen\,\gamma'} \text{ y } \frac{h}{sen\,(\psi+\alpha')}=\frac{a}{sen\,\alpha'}$$

EJEMPLO.

c	520	$log\,c$	2,7160
a	312	$log\,sen\,\gamma'$	9,7346
β	65° 27′	$log\,(c:sen\,\gamma')$	2,9814
γ'	32° 52′	$log\,a$	2,4942
α'	23° 25′	$log\,sen\,\alpha'$	9,5993
		$log\,(a:sen\,\alpha')$	2,8949
$\frac{1}{2}(\beta+\gamma'+\alpha')$	60° 52′	$log\,m$	0,0865 (A)
$\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$	119° 8′	$log\left(1-\frac{1}{m}\right)$	—0,7433 $(-U)$
$\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	10° 6′	$log\left(1+\frac{1}{m}\right)$	0,2599 (S)
φ	129° 14′		
ψ	109° 2′	$log\,\frac{1-\ldots}{1+\ldots}$	—1,0032
g	742,2		
f	294,5	$log\,tang\frac{1}{2}(\beta+\ldots)$	10,2539
h	579,3		
		$log\,tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	9,2506
		$log\,sen\,\varphi$	9,8891
		$log\,sen\,(\varphi+\gamma')$	9,4877
		$log\,sen\,(\psi+\alpha')$	9,8680
		$log\,g$	2,8705
		$log\,f$	2,4691
		$log\,h$	2,7629

Como $m > 1$ y $tang\,\frac{\varphi+\psi}{2} = -tang\,\frac{\beta+\gamma'+\alpha'}{2}$,

$$\text{será } tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi') = \frac{m-1}{m+1}\, tang\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma'+\alpha')$$

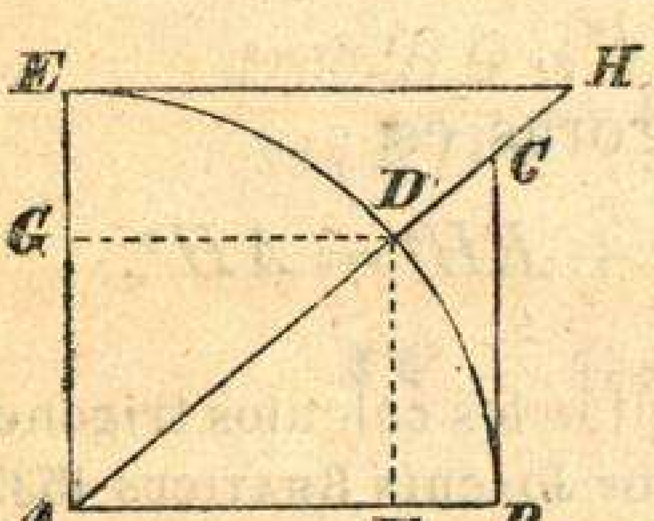
$$= \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}}\, tang\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma'+\alpha')$$

25. Ademas del seno, el coseno, la tangente y la cotangente de un ángulo α, se usan alguna vez en la Trigonometría otras funciones del ángulo α, que se llaman *secante* y *cosecante*, *seno verso* y *coseno verso* del mismo, y se designan por $sec\,\alpha$, $cosec\,\alpha$, $sen\text{-}vers\,\alpha$ y $cos\text{-}vers\,\alpha$. Las definiciones de estas funciones son:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha'},\quad cosec\,\alpha = \frac{1}{cos\,(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

$sen\text{-}vers\,\alpha = 1 - cos\,\alpha$, $cos\text{-}vers\,\alpha = 1 - cos\,(90^\circ - \alpha$ $= 1 - sen\,\alpha$.

Las denominaciones *secante*, *tangente* y *seno verso* son de orígen geométrico. Alrededor del vértice A, del ángulo BAC, descríbase con el rádio AB el arco circular BD y el cuadrante BE; y trácense las normales BC y DF al rádio AB, y las normales DG y EH al AE. Entónces:



$$sen\,BAD = \frac{FD}{AD},\quad cos\,BAD = sen\,DAE = \frac{GD}{AD}$$

$$tang\,BAD = \frac{BC}{AB},\quad cot\,BAD = tang\,DAE = \frac{EH}{AE}$$

$$sec\,BAD = \frac{AD}{GD} = \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AB}$$

$$cosec\,BAD = sec\,DAE = \frac{AH}{AE}$$

$$sen\text{-}vers\,BAD = 1 - \frac{AF}{AD} = \frac{FB}{AB}$$

$$cos\text{-}vers\,BAD = sen\text{-}vers\,DAE = \frac{GE}{AE}$$

Si tomamos el rádio por unidad de longitud, y $180 : \pi$ por unidad de ángulos, el arco circular BD será igual al ángulo central BAD (á su arco *Planim.* 108); y las expresiones anteriores se convierten en las siguientes:

$$sen BD = FG \qquad cos BC = GD$$
$$tang BD = BC \qquad cot BD = EH$$
$$sec BD = AC \qquad cosec BD = AH$$
$$sen\text{-}vers BD = FB \qquad cos\text{-}vers BD = GE$$

A las cuales corresponden los nombres de *tangente*, *secante*, *seno-verso*, etc. (*).

Segun el teorema de Pitágoras es

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ y $AE^2 + EH^2 = AH^2$, ó

(*) Una tabla de secantes para facilitar los cálculos trigonométricos fué calculada y publicada por JOACHIN RHÄTICUS 1539, con el título de *Canon hypotenusarum*, y por MAUROLYCO 1558, con el de *Tabula benefica*. Los nombres de *tangente* y *secante* proceden de FINK *(Géom. rotundi* 1583; el de *seno-verso* (en oposicion al de *seno-recto)* se usaba anteriormente) PFLEIDERER *(l. c.)*. El descubrimiento de los logaritmos hizo supérfluo el uso de las secantes en la *Trigonometría*.

$1 + tang^2 BD = sec^2 BD$ y $1 + cot^2 BD = cosec^2 BD$, como ya sabíamos (17).

Un arco es más largo que su seno; y más largo, por consecuencia, que la semicuerda del arco duple. El sector ABD es menor que el triángulo ABC; y el arco BD, por lo tanto, más corto que la tangente BC (*Planim.* 82).

Segun esto podemos establecer las limitaciones:

$$FD < arco\ BD < BC$$

$$sen BD < arco\ BD < tang BD$$

$$1 < \frac{arco\ BD}{sen BD} < \frac{1}{cos BD},\quad cos BD < \frac{arco\ BD}{tang BD} < 1$$

$$\frac{arco\ BD}{sen BD} - 1 < \frac{1}{cos BD} - 1,\quad 1 - \frac{arco\ BD}{tang BD} < 1 - cos BD$$

Disminuyendo el arco BD suficientemente, $sen BD$, $tang BD$ y $1 - cos BD$ serán arbitrariamente pequeñas; las diferencias menores se anularán; y para un arco infinitamente pequeño, de consiguiente, se verifican las igualdades

$$\frac{arco\ BD}{sen BD} = 1 \text{ y } \frac{arco\ BD}{tang BD} = 1$$

IV. — Goniometría.

26. Para la determinacion del ángulo fg, que las rectas g y f forman sobre un plano, es necesario conocer la *direccion positiva de cada una de aquellas rectas* (*Planim.* 111) y el *sentido positivo del plano*, esto es, el sentido del giro mediante el cual sean

descritos los ángulos positivos (y las áreas) del plano (*). Cuando la recta f, en el sentido dado (de derecha á izquierda, por ejemplo, para un observador situado sobre una cara determinada del plano) deba girar α grados hasta que su direccion positiva llegue á coincidir con la direccion positiva de la otra recta g, el ángulo designado por fg tendrá α grados. Podemos aquí sustituir α por $\alpha + 360^\circ, \alpha + 2.360^\circ \ldots \alpha + k.\,360^\circ$, siendo k un *entero*, positivo ó negativo (*Planim.* 12). Cuando, para llegar al mismo resultado, la recta f deba girar en el sentido dado 360 — β grados, ó β grados en sentido opuesto, el ángulo designado por fg tendrá $-\beta$ grados.

De lo dicho se desprende que la suma de ángulos, $fg + fg$, tiene el valor 0 ó $k.\,360^\circ$, y que los ángulos fg y gf son opuestamente iguales, esto es, $gf = -fg$.

Para tres rectas, f, g y h, sobre un plano, se verifica la igualdad

$$fg + gh + hf = 0$$

áun en el caso de que no pasen por un mismo punto. En efecto, por un punto del plano trázense las rectas f', g' y h', paralelas á las dadas y con idénticas direcciones positivas respectivamente. Los ángulos $f'g'$ y fg, $g'h'$ y gh, $h'f'$ y hf serán iguales (*Planim.* 16); y, por consecuencia:

$$fg + gh + hf = f'g' + g'h' + h'f' = 0.$$

(*) Estas determinaciones precisas son de Möbius (*Analyt. Sphärik* 1, *Kreisverwandtschaft* 8, y otros lugares).

De esta relacion se deducen las siguientes:

$$fg + gh = -hf = fh$$

$$fh = gh - gf = fg - hg; \text{ etc.}$$

En la designacion de un ángulo por tres letras, como el CBA, se subentiende que las direcciones positivas de sus lados van desde B hácia C y desde B hácia A; y en la notacion $AB^\wedge CD$, del ángulo formado por los segmentos AB y CD, se subentiende que las direcciones positivas de estos segmentos van desde A hácia B y desde C hácia D.

27. Si proyectamos normalmente un segmento cualquiera AB, de la recta h, sobre la recta x, y designamos la proyeccion por A_1B_1, *la razon de la proyeccion con el segmento proyectado*, $A_1B_1 : AB$, es independiente de la longitud y de la situacion del segmento sobre la recta h (*Planim.* 62); y varía, en general, cuando sufre una variacion el ángulo formado por las rectas x y h (3). Colígese de ésto que la razon expresada es una funcion determinada del ángulo xh, que lleva el nombre de *coseno* del mismo. Designándolo por $\cos xh$, será

$$\cos xh = A_1B_1 : AB \text{ y } A_1B_1 = AB \cos xh$$

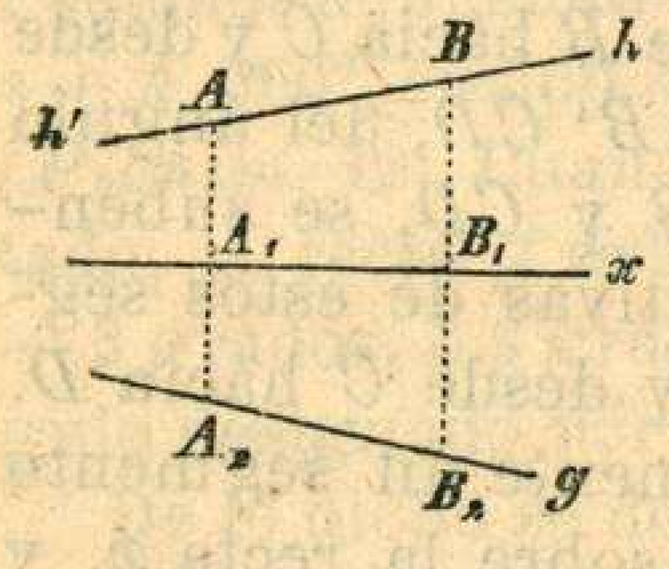
En esta definicion general del coseno de un ángulo cualquiera está comprendida la definicion del coseno de un ángulo agudo, dada en el *Cap. II* (Véase la figura del párrafo 25).

Dos ángulos, iguales y opuestos, tienen el mismo coseno; dos ángulos, cuya diferencia ó cuya suma valga 180°, tienen cosenos iguales y opuestos. Por ejemplo:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha = \cos(-\alpha + 180°)$$

Demostracion. Si la recta x biseca el ángulo gh, los ángulos hx y xg serán iguales; y los ángulos xg y xh, iguales y opuestos. Las rectas, que proyectan normalmente sobre x el segmento AB de la recta h, cortan á la recta x en los puntos A_1 y B_1, y á la recta g en los puntos A_2 y B_2; por lo cual, es



$$\cos xh = A_1B_1 : BA \quad \text{y} \quad \cos xg = A_1B_1 : A_2B_2.$$

Dando la vuelta la figura $A_1B_1B_2A_2$ alrededor del eje x hasta que A_2 coincida con A, la direccion positiva de g coincidirá con la direccion positiva de h, y B_2 se confundirá con B. Ahora bien, si AB es un segmento positivo (ó negativo) de h, será A_2B_2 un segmento positivo (ó negativo) de g: y, por consecuencia, las razones $A_1B_1 : A_2B_2$ y $A_1B_1 : AB$ tienen magnitudes idénticas y de idéntico signo: lo cual significa que $\cos xg = \cos xh$.

Mas, si las direcciones positivas de las rectas coincidentes, h y h', son opuestas, los ángulos xh y xh' se diferencian en 180°; y entónces, AB será un segmento positivo de h y al mismo tiempo un segmento negativo de h', y recíprocamente. En un caso tendrá la razon $A_1B_1 : AB$ el valor $\cos xh$; y, en el otro, el de $\cos xh'$; y, por lo tanto, $\cos xh$ y $\cos xh'$ serán iguales y opuestos.

Observacion. Cuando las rectas sean paralelas y de idéntica direccion positiva, el segmento de una de ellas tendrá igual tamaño y signo que su proyeccion normal sobre la otra; y cuando las rectas sean normales entre sí se anulará la proyeccion normal de una de ellas sobre la otra.

De donde se deduce que

$$\cos 0 = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -\cos 0 = -1, \quad \cos 270^\circ = 0; \text{ etc.}$$

28. De las propiedades estudiadas del coseno se desprenden las correspondientes al *seno*, en virtud de la definicion

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos (90^\circ - \alpha);$$

pues sustituyendo α por $90^\circ - \alpha$, resulta

$$\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Dos ángulos, cuya suma valga 180°, tienen el mismo seno. Dos ángulos, iguales y opuestos, y dos ángulos cuya diferencia valga 180°, tienen senos iguales y opuestos. Por ejemplo

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)$$

Porque $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \cos (90^\circ - 180^\circ + \alpha) = \cos (90^\circ - \alpha)$; en virtud de que los ángulos $-90^\circ + \alpha$ y $90^\circ - \alpha$ son iguales y opuestos. Por el contrario, $\operatorname{sen}(-\alpha) = \cos (90^\circ + \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha)$; en virtud de que la suma de los ángulos $90^\circ + \alpha$ y $90^\circ - \alpha$ vale 180°.

Los valores particulares

$$sen 0 = 0,\ sen 90^\circ = 1,\ sen 180^\circ = 0,\ sen 270^\circ = -1, \text{ etc.}$$

se deducen de los valores de $cos 90^\circ$, $cos 0$, etc. (Véase la fig. 25).

Para el uso de las tablas sirven las reducciones siguientes:

$$\begin{aligned} cos\,\alpha &= -sen(\alpha - 90^\circ) & sen\,\alpha &= cos(\alpha - 90^\circ) \\ &= -cos(\alpha - 180^\circ) & &= -sen(\alpha - 180^\circ) \\ &= sen(\alpha - 270^\circ) & &= -cos(\alpha - 270^\circ) \end{aligned}$$

29. De las propiedades encontradas para el coseno y el seno se deducen las correspondientes á las *tangentes* y las *cotangentes*, mediante las definiciones:

$$tang\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha},\quad cot\,\alpha = tang(90^\circ - \alpha),$$

y, como $sen\,(90^\circ - \alpha) = cos\,\alpha$ y $cos(90^\circ - \alpha) = sen\,\alpha$, tambien esta otra:

$$cot\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{1}{tang\,\alpha}$$

Dos ángulos, cuya diferencia valga 180°, tienen idénticas tangentes y cotangentes. Dos ángulos, cuya suma sea 0 ó 180°, tiene tangentes y cotangentes iguales y opuestas. Por ejemplo:

$$tang\,(\alpha + 180^\circ) = tang\,\alpha$$
$$tang\,(-\alpha) = tang\,(-\alpha + 180^\circ) = -tang\,\alpha$$

Puesto que en el tránsito desde α hasta $\alpha + 180^\circ$, el seno y el coseno cambian de signo; mientras que en el tránsito desde α hasta $-\alpha$ ó $-\alpha + 180^\circ$ sólo uno de ellos cambia de signo.

Los valores particulares

$$\begin{array}{lll} tang\, 0 = 0 & tang\, 45^\circ = 1 & tang\, 90^\circ = \infty \\ tang\, 135^\circ = -1 & tang\, 180^\circ = 0 & tang\, 125^\circ = 1 \\ tang\, 270^\circ = \infty & tang\, 315^\circ = -1 & \text{etc.} \end{array}$$

se deducen de los valores correspondientes del seno y del coseno.

Observacion. Mediante cada una de las ecuaciones, $cos\, x = a$, $sen\, x = b$ y $tang\, x = c$, puede recibir el ángulo incógnito x, un número infinito de valores determinados. Por $cos\, x = -a$, $sen\, x = -b$, y $tang\, x = -c$, pónganse éstas:
$sen\, (\alpha - 90^\circ) = a$, $sen\, (\alpha - 180^\circ) = b$, $cot\, (\alpha - 90^\circ) = c$.

Si α es una raíz de la ecuacion $cos\, x = a$, tambien será $-\alpha$ una raíz de la misma ecuacion. Y las otras raízes están comprendidas en las fórmulas $\alpha + k.360^\circ$ y $-\alpha + k.360^\circ$, en las que representa k un entero cualquiera (26).

Si β expresa una raíz de la ecuacion $sen\, x = b$, tambien $\beta + k.360^\circ$ y $180^\circ - \beta + k.360^\circ$ serán raízes de la misma ecuacion.

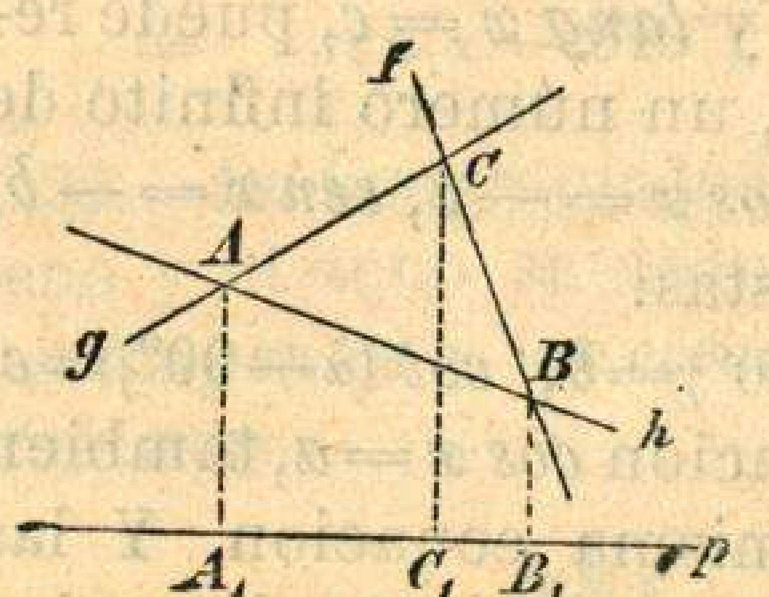
Si γ designa una raíz de la ecuacion $tang\, x = c$, tambien $\gamma + k.360^\circ$ y $\gamma + 180^\circ + k.360^\circ$ serán raízes de la misma ecuacion.

Los arcos de los ángulos hallados *(Planim.* 108) son designados en el análisis desde Euler por *arc cos a*, *arc sen b* y *arc tang c*, y tambien por *ang cos a* ó *arc (cos = a)*, etc.

30. Sean f, g y h, las rectas sobre las cuales se

hallan los lados de un triángulo, BC, CA y AB, y p una recta cualquiera del plano ABC. Presupuesto arbitrariamente el sentido positivo del plano (26) y las direcciones positivas de las rectas f, g, h, y p, los segmentos y los ángulos de la figura correspondiente quedan determinados tambien en cuanto á sus signos y relacionados entre sí por las ecuaciones siguientes (*):

$$BC\cos pf + CA\cos pg + AB\cos ph = 0$$
$$BC\,sen\,pf + CA\,sen\,pg + AB\,sen\,ph = 0$$
$$BC : CA : AB = sen\,gh : sen\,hf : sen\,fg$$



Demostracion. Designando por A_1, B_1 y C_1 las proyecciones normales de A, B y C sobre p, será $A_1B_1 = AB\cos ph$ (27), etc. Mas (*Planim.* 111) $B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = 0$. Luego:

$$BC\cos pf + CA\cos pg + AB\cos ph = 0.$$

Si la recta p gira 90°, el ángulo ph se convierte en ph—90°, y $\cos ph$ en $\cos(ph-90°) = sen\,ph$ (28), etc. Luego tambien:

$$BC\,sen\,pf + CA\,sen\,pg + AB\,sen\,ph = 0$$

Últimamente, haciendo coincidir la recta arbitraria p, primero con f, y despues con g, se hallan las ecuaciones:

(*) Véase despues (60). La expresion exacta de la tercer ecuacion se debe principalmente á Möbius (*Kreisverw*, en la introduccion).

$$CA\,sen fg + AB\,sen fh = 0,\ BC\,sen gf + AB\,sen gh = 0$$

que contienen la proporcion escrita arriba; en virtud de que $sen ff = 0$, $sen fh = - sen hf$ (28); etc.

Observacion. Si los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, son segmentos positivos de las rectas f, g y h y tienen los valores a, b y c, los ángulos BAC, CBA y ACB, designados por α, β y γ, son suplementarios de los gh, hf y fg. Y, como $sen\,\alpha = sen\,gh$ (28), etc.; será:

$$a : b : c = sen\,\alpha : sen\,\beta : sen\,\gamma \quad (8).$$

31. Si por BC, CA y AB ponemos en las anteriores ecuaciones sus valores proporcionales $sen\,gh$, $sen\,hf$ y $sen\,fg$, obtendremos las ecuaciones que subsisten para cada cuatro rectas cualesquiera f, g, h, p, de un plano:

$$sen\,gh\,cos\,fp + sen\,hf\,cos\,gp + sen\,fg\,cos\,hp = 0$$
$$sen\,gh\,sen\,fp + sen\,hf\,sen\,gp + sen\,fg\,sen\,hp = 0$$

de las que pueden deducirse las relaciones entre las funciones goniométricas.

Haciendo los ángulos

$$fp = \varkappa, \quad gp = \lambda, \quad hp = \mu,$$

serán

$$gh = \lambda - \mu, \quad hf = \mu - \varkappa, \quad fg = \varkappa - \lambda;$$

porque $gh = gp - hp$ (26), etc. Luego para tres ángulos cualesquiera, $\varkappa$, λ y μ, subsistirán las ecuaciones:

$$sen(\lambda - \mu)\,cos\,\varkappa + sen(\mu - \varkappa)\,cos\,\lambda + sen(\varkappa - \lambda)\,cos\,\mu = 0$$
$$sen(\lambda - \mu)\,sen\,\varkappa + sen(\mu - \varkappa)\,sen\,\lambda + sen(\varkappa - \lambda)\,sen\,\mu = 0$$

Dividiendo por $sen\,\varkappa\, sen\,\lambda\, sen\,\mu$, se obtiene esta otra:

$$\frac{sen(\varkappa-\lambda)}{sen\,\varkappa\, sen\,\lambda}+\frac{sen\,(\lambda-\mu)}{sen\,\lambda\, sen\,\mu}+\frac{sen(\mu-\varkappa)}{sen\,\mu\, sen\,\varkappa}=0;$$

y, para los ángulos $\varkappa$, μ y ν, la análoga:

$$\frac{sen\,(\varkappa-\mu)}{sen\,\varkappa\, sen\,\mu}+\frac{sen\,(\mu-\nu)}{sen\,\mu\, sen\,\nu}+\frac{sen\,(\nu-\varkappa)}{sen\,\nu\, sen\,\varkappa}=0$$

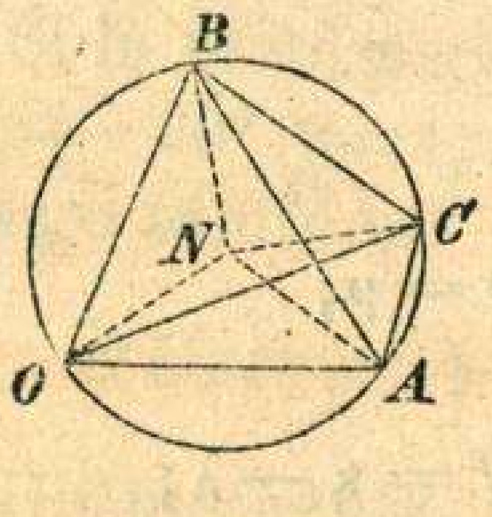
De las que por adicion (*) se halla

$$\frac{sen\,(\varkappa-\lambda)}{sen\,\varkappa\, sen\,\lambda}+\frac{sen\,(\lambda-\mu)}{sen\,\lambda\, sen\,\mu}+\frac{sen\,(\mu-\nu)}{sen\,\mu\, sen\,\nu}+\frac{sen\,(\nu-\varkappa)}{sen\,\nu\, sen\,\varkappa}=0$$

et cætera. En lugar de $sen\,\varkappa$,... pueden tomarse tambien como divisores $cos\,\varkappa$,...

Observacion. La anterior ecuacion fundamental de la *Goniometría* era sustituida en lo antiguo por el teorema de Ptolomeo (*Planim.* 125).

Para mostrar la razon de esto, debemos recordar que, si á los arcos descritos en idéntico sentido, AO, BO y CO, corresponden los ángulos centrales $2\varkappa$, 2λ y 2μ, á los arcos AB, BC y CA corresponderán los ángulos centrales $2\varkappa-2\lambda$, $2\lambda-2\mu$ y $2\mu-2\varkappa$. Mas la cuerda de un arco circular es el producto del diámetro por el seno de la mitad del ángulo central, correspondiente al arco (6) y cambia con éste de signo. Luego la ecuacion hallada produce esta otra:



(*) Carnot (*Géom. de pos.* 139 *y sig.*, 215 y 216.

$$\frac{AB}{OA.OB}+\frac{BC}{OB.OC}+\frac{CA}{OC.OA}=0, \text{ etc.}$$

32. Haciendo $\varkappa=\alpha$, $\lambda=\beta$ y $\mu=0$, resultan (31):

I. $sen(\alpha-\beta)=sen\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,sen\,\beta$

$sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,sen\,\beta$

Al cambiar β en $-\beta$, no cambia de signo $\cos\beta$, pero cambia $sen\,\beta$. Poniendo por α el ángulo $90^\circ-\alpha$, las ecuaciones anteriores dan:

II. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\,\alpha\,sen\,\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\,\alpha\,sen\,\beta$

Y haciendo en éstas $\beta=\alpha$, resultan (11):

$$\cos^2\alpha+sen^2\alpha=\cos 0=1$$

III. $sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\cos\alpha=2tang\,\alpha\cos^2\alpha=\dfrac{2\,tang\,\alpha}{1+tang^2\alpha}$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}=\frac{1-tang^2\alpha}{1+tang^2\alpha}$$

Y de esta última ecuacion se deduce

IV. $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha,\ 1-\cos 2\alpha=2sen^2\alpha$

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\cot^2\alpha$$

Observacion. Las ecuaciones precedentes contienen ó expresan la dependencia entre el seno y el coseno de un ángulo; entre el seno y el coseno de dos ángulos y el seno y el coseno de la suma y la diferencia de los mismos ángulos; entre el seno y el coseno de un ángulo y el seno y el coseno del ángulo doble ó mitad del ángulo dado. Y, por consecuencia, dado el seno de un ángulo, podremos calcular el seno de cuantos ángulos queramos.

Las relaciones entre funciones goniométricas eran expresadas antiguamente por ecuaciones entre cuerdas circulares (31 *Obs.*); y así, dada la cuerda de un ángulo central, calculaban las cuerdas de un número cualquiera de ángulos centrales. Un teorema que para ésto empleaban, cuya expresion goniométrica es la ecuacion

$$sen^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} sen\,\alpha\, tang \frac{1}{2}\alpha$$

que coincide con la primera de las dadas ántes (III), se halla en ARQUÍMEDES (*Cyclom. p.* 114 *de la traduccion* de NIZA.

Si en la figura (25) se hace el rádio $AB = r$, el arco $BD = r\varphi$ y $DC = h$, tenemos:

$$cos\varphi = \frac{r}{r+h} \text{ y } 1 - cos\varphi = 2\,sen^2 \frac{1}{2}\varphi = \frac{h}{r+h}$$

Y el cuadrado de la cuerda BD es entónces

$$4r^2\,sen^2 \frac{1}{2}\varphi = \frac{2r^2h}{r+h}$$

Luego $sen^2 \frac{1}{2}\varphi = h : 2r$ y $BD^2 = 2rh$, con error despreciable, cuando $h : r$ sea suficientemente pequeño.

33. De las ecuaciones (32) se deducen las siguientes:

$$sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta) = 2sen\,\alpha\, cos\,\beta$$
$$sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta) = 2cos\,\alpha\, sen\,\beta$$
$$cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta) = 2cos\,\alpha\, cos\,\beta$$
$$cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta) = 2sen\,\alpha\, sen\,\beta$$

Y estas ecuaciones enseñan que la multiplicacion de dos senos ó de dos cosenos puede referirse á la adicion ó la sustraccion de dos senos ó de dos cosenos. Este método (προςθ—αφαίρεσις) perdió su utilidad en el cálculo numérico con la invencion de los logaritmos.

Multiplicando las ecuaciones halladas, y sustituyendo (32) por $sen 2\alpha$ el producto $2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha$, ... se obtiene:

$$sen^2(\alpha+\beta) - sen^2(\alpha-\beta) = cos^2(\alpha-\beta) - cos^2(\alpha+\beta)$$
$$= sen 2\alpha\; sen 2\beta.$$

Y dividiéndolas se encuentra del mismo modo:

$$\frac{sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)}{sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)} = \frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta}$$

$$\frac{cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)}{cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)} = tang\,\alpha\; tang\,\beta$$

Las ecuaciones anteriores, haciendo $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$, ó $\alpha=\frac{1}{2}(x+y)$ y $\beta=\frac{1}{2}(x-y)$, adquieren las formas:

$$sen\,x + sen\,y = 2 sen\tfrac{1}{2}(x+y)\; cos\tfrac{1}{2}(x-y)$$
$$sen\,x - sen\,y = 2 cos\tfrac{1}{2}(x+y)\; sen\tfrac{1}{2}(x-y)$$
$$cos\,y + cos\,x = 2 cos\tfrac{1}{2}(x+y)\; cos\tfrac{1}{2}(x-y)$$
$$cos\,y - cos\,x = 2 sen\tfrac{1}{2}(x+y)\; sen\tfrac{1}{2}(x-y)$$
$$sen^2x - sen^2y = cos^2y - cos^2x = sen(x+y)\; sen(x-y)$$

$$\frac{sen\,x - sen\,y}{sen\,x + sen\,y} = \frac{tang\frac{1}{2}(x-y)}{tang\frac{1}{2}(x+y)} \quad (24)$$

$$\frac{\cos y - \cos x}{\cos y + \cos x} = \tang \tfrac{1}{2}(x-y)\tang \tfrac{1}{2}(x+y)$$

34. De las ecuaciones (32) se deducen tambien:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta, \quad \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \cot\beta \pm \cot\alpha$$

$$\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 \mp \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta, \quad \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \cot\alpha\cot\beta \mp 1$$

En las que, cuando β se convierte en $-\beta$, cambiarán de signo $\operatorname{tang}\beta$ y $\cot\beta$.

Por division se encuentran:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}, \quad \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}.$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}, \quad \cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

En particular, por ser $\operatorname{tang} 45^\circ = 1$, resultan:

$$\operatorname{tang}(45^\circ + \beta) = \frac{1 + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\beta}$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

Observacion. Si un ángulo dado se divide en las partes x é y, de modo que la razon $\operatorname{sen} x : \operatorname{sen} y$ ó la $\cos x : \cos y$ tenga un valor dado, para calcular $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha - y)$, etc. Si son dados $\operatorname{sen} x \cos y$ ó $\operatorname{tang} x : \operatorname{tang} y$, podremos calcular $\operatorname{sen}(x-y)$. Dados $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ ó $\operatorname{tang} x \operatorname{tang} y$, se hallará $\cos(x-y)$. Si se conoce $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$, se hallará $\cos\frac{1}{2}(x-y)$. Si es dada la suma $tang\,x + tang\,y$, se determinará $cos\,(x - y)$, etc.

35. La ecuacion trigonométrica, establecida (30), cuando la recta p coincide sucesivamente con las f, g y h, produce el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} BC \qquad\quad &+ CA\, cos\, fg + AB\, cos\, hf = 0 \\ BC\, cos\, fg &+ CA \qquad\quad + AB\, cos\, gh = 0 \\ BC\, cos\, hf &+ CA\, cos\, gh + AB \qquad\quad = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por BC, la segunda por CA y la tercera por $-AB$, se halla:

$$BC^2 + CA^2 - AB^2 + 2.BC.CA\, cos\, fg = 0$$

en conformidad con la (12); por ser $cos\, fg = -cos\, ACB$, cuando BC y CA representen segmentos positivos de las rectas f y g (30-*Obs.*).

Designando, como de costumbre, los lados del triángulo ABC por a, b, c, y los ángulos respectivamente opuestos por α, β, γ, hallamos, como antes (14):

$$cos\,\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

De esta ecuacion se deducen las siguientes:

$$1 - cos\,\gamma = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \frac{(-a+b+c)\,(a-b+c)}{2ab}$$

$$1 + cos\,\gamma = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{2ab}$$

Pero (32):

$$\frac{1 - cos\,\gamma}{1 + cos\,\gamma} = tang^2 \tfrac{1}{2}\gamma$$

Luego:

$$tang^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$

donde $a+b+c=2s$ (20).

36. Si los ángulos del triángulo formado por las rectas f, g y h, se designan del mismo modo, por α, β y γ, tendremos:

$$1-cos^2 gh - cos^2 hf - cos^2 fg + 2 cos gh\, cos hf\, cos fg = 0$$
$$1-cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma - 2cos\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\gamma = 0\ (*)$$
$$sen^2\alpha + sen^2\beta - sen^2\gamma - 2sen\,\alpha\, sen\,\beta\, cos\,\gamma = 0$$

$$(sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma)(-sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma)$$
$$(sen\,\alpha - sen\,\beta + sen\,\gamma)(sen\,\alpha + sen\,\beta - sen\,\gamma)$$
$$= 4 sen^2\alpha\, sen^2\beta\, sen^2\gamma$$

DEMOSTRACION. La primera ecuacion se desprende de las establecidas ántes (35), por la eliminacion de los segmentos CA y AB. Encuéntrase la misma ecuacion, y su correlativa, geométricamente, describiendo un círculo con el rádio igual á la unidad de longitud, é inscribiendo en él un triángulo ABC cuyos lados son BC, CA y AB, y cuyos ángulos son α, β y γ. Hecho ésto, y teniendo en cuenta el signo (31-*Obs.*), se hallan:

$$BC = sen\,\alpha, \quad CA = sen\,\beta, \quad AB = sen\,\gamma$$

y, por consecuencia (35):

$$sen^2\alpha + sen^2\beta - sen^2\gamma - 2sen\,\alpha\, sen\,\beta\, cos\,\gamma = 0$$

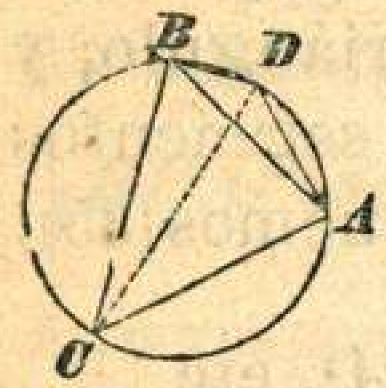
Trazando ahora el diámetro CD, ó serán

(*) EULER (*Acta Petrop.* 6, *I*, *p.* 3).

$$AD = \cos\beta,\quad DB = \cos\alpha,\quad \cos BDA = -\cos\gamma,$$

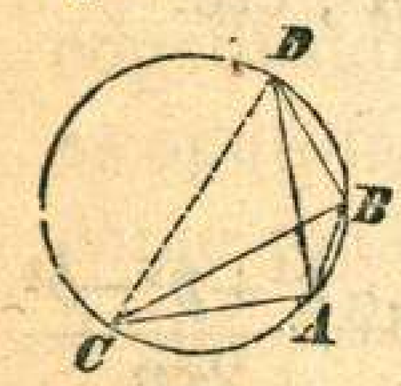
ó

$$AD = \cos\beta,\quad DB = -\cos\alpha,\quad \cos BDA = \cos\gamma:$$



segun que B esté fuera del semicírculo CAD, ó sobre el mismo. Mas $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2\,AD.\,DB \cos BDA$ (35). Luego en todo caso:

$$sen^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$



Estas ecuaciones se deducen de las (32), observando que $sen\,\gamma = sen\,(\alpha+\beta)$ y $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$; por ser $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$. Hállase así:

$$sen^2\gamma$$
$$= sen^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\, sen^2\beta + 2 sen\,\alpha\, sen\,\beta\cos\alpha\cos\beta$$
$$= sen^2\alpha + sen^2\beta - 2 sen^2\alpha\, sen^2\beta + 2 sen\,\alpha\, sen\,\beta\cos\alpha\cos\beta$$
$$= sen^2\alpha + sen^2\beta + 2 sen\,\alpha\, sen\,\beta\cos(\alpha+\beta)$$

ó bien:

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2 sen\,\alpha\, sen\,\beta\cos\alpha\cos\beta$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

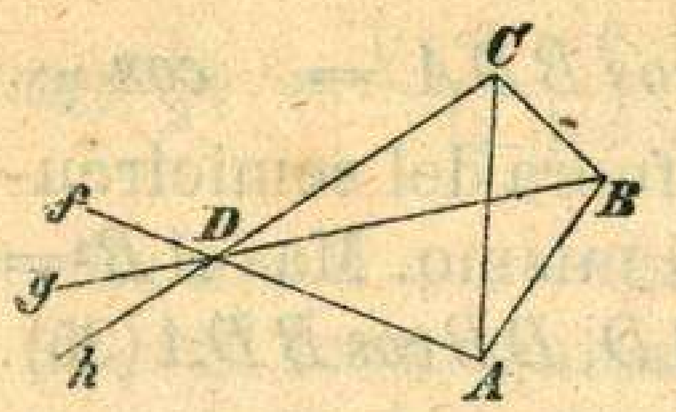
La tercera ecuacion se deduce aún más sencillamente de la establecida *(Planim.* 133):

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 16\Delta^2$$

sustituyendo en ella los lados a, b y c, del triángulo, por los productos del diámetro $2r$, del círculo circunscrito, por los senos de los ángulos opuestos á aquellos lados. Ahora bien (8):

$$\frac{\Delta^2}{r^4} = 4\, sen^2\alpha\, sen^2\beta\, sen^2\gamma$$

Luego, etc.



Observacion. Designando por f, g y h las rectas que unen los vértices A, B y C, del triángulo ABC, con un cuarto punto D; por a, b y c los lados del triángulo; y por p, q y r los segmentos DA, DB y DC, tenemos (35):

$$2DA.DB\cos fg = AD^2 + DB^2 - BA^2, \text{ etc.}$$

Y, por lo tanto:

$$\cos fg = \frac{p^2+q^2-c^2}{2pq}, \cos gh = \frac{q^2+r^2-a^2}{2qr}, \cos hf = \frac{r^2+p^2-b^2}{2rp}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion

$$1 - \cos^2 fg - \cos^2 gh - \cos^2 hf + 2\cos fg \cos gh \cos hf = 0$$

se obtiene la siguiente:

$$1 - \frac{(p^2+q^2-c^2)^2}{4p^2q^2} - \frac{(q^2+r^2-a^2)^2}{4q^2r^2} - \frac{(r^2+p^2-b^2)^2}{4r^2p^2}$$
$$+ \frac{(p^2+q^2-c^2)(q^2+r^2-a^2)(r^2+p^2-b^2)}{4p^2q^2r^2} = 0$$

Y desarrollando (*):

$$\begin{aligned} & a^2p^2(b^2+c^2-a^2+q^2+r^2-p^2) \\ & + b^2q^2(c^2+a^2-b^2+r^2+p^2-q^2) \\ & + c^2r^2(a^2+b^2-c^2+p^2+q^2-r^2) \\ & - a^2q^2r^2 - b^2r^2p^2 - c^2p^2q^2 - a^2b^2c^2 = 0 \end{aligned}$$

Ecuacion que expresa la dependencia entre los

(*) Euler *(l. c.)*.

seis segmentos que unen cuatro puntos sobre un plano.

37. El área del triángulo ABC, formado por las rectas f, g y h, está expresada (7) por una de las fórmulas iguales entre sí (30):

$$\frac{1}{2}BC.CA\,sen fg,\quad \frac{1}{2}CA.AB\,sen gh,\quad \frac{1}{2}AB.BC\,sen hf,$$

áun respecto del signo. La fórmula $\frac{1}{2}AC.CB\ sen gf$, constituida del mismo modo para el área de ACB, es opuesta é igual á la fórmula $\frac{1}{2}BC.CA\ sen fg$: así como son iguales y opuestas las áreas de los triángulos ABC y ACB (*Planim.* 74).

El área del cuadrángulo $ABCD$ está determinada por los lados AB, BC, CD y DA, y la suma de dos ángulos no consecutivos, tal como $CBA + ADC$. Porque, tomando en cuenta los signos de los triángulos, en todos los casos se verifica la igualdad

$$ABCD = ABC + CDA$$

Designando por u el área del cuadrángulo; sus lados por a, b, c y d; y sus ángulos CBA y ADC, por α y γ, tenemos:

$$4u = 2ab\,sen\,\alpha + 2cd\,sen\,\gamma$$

Mas (35);

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma$$

Luego:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\gamma.$$

Elevando ahora al cuadrado las dos ecuaciones anteriores y sumando, se obtiene esta otra:

$$16u^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8acbd\,(cos\,\alpha\,cos\,\gamma - sen\,\alpha\,sen\,\gamma).$$

Ó bien:

$$16u^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 - 8abcd\,cos(\alpha+\gamma)$$

Y recordando (32) que

$$cos\,(\alpha+\gamma) = 2cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) - 1 = 1 - 2sen^2\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

hállase:

$$16u^2 = 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 - 16abcd\,cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$
$$= 4(ab-cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + 16abcd\,sen^2\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

Haciendo para abreviar (*Planim.* 139):

$$4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 16v^2$$
$$4(ab-cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 16v_1^2$$

en las que $v^2 - v_1^2 = abcd$, resulta finalmente (*):

$$u^2 = v^2 - abcd\,cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = v_1^2 + abcd\,sen^2\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

De esta ecuacion se colige que v es el valor máximo, y v_1 el valor mínimo, que puede recibir el área u, de la superficie definida por los lados a, b, c y d. Adquiere esta área, en efecto, su valor máximo cuando $cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) = 0$, $\alpha + \gamma = 180°$, y el cuadrángulo, por lo tanto, está inscrito en un círculo y es de tal naturaleza que su contorno no se corta ó

(*) STREHLKE (*Arch. de Grunn.* 2, p. 326; 4. p. 447, y 34, p. 12).

pliega *(Planim.* 147); y su valor mínimo, cuando $sen\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)=0$, $\alpha+\gamma=0$, y el cuadrángulo está inscrito en un círculo y tiene su contorno plegado (*).

En el primero de estos dos casos es $\cos\gamma=-\cos\alpha$, y, por consecuencia:

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Y de esta ecuacion se deduce, como ántes (35):

$$1-\cos\alpha=\frac{-(a+b)^2+(c+d)^2}{2ab+2cd}$$

$$=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{2ab+2cd}$$

$$1+\cos\alpha=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2ab+2cd}=\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{2ab+2cd}$$

$$tang^2\frac{1}{2}\alpha=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}=\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}$$

en el supuesto de que $a+b+c+d=2s$ *(Planimetría,* 139). Valores semejantes se obtienen en el segundo caso, en que $\cos\gamma=\cos\alpha$.

38. Designamos por A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC; por M, el centro del círculo ABC; por N, el punto comun de las alturas OA, PB y QC; por α, β y γ los

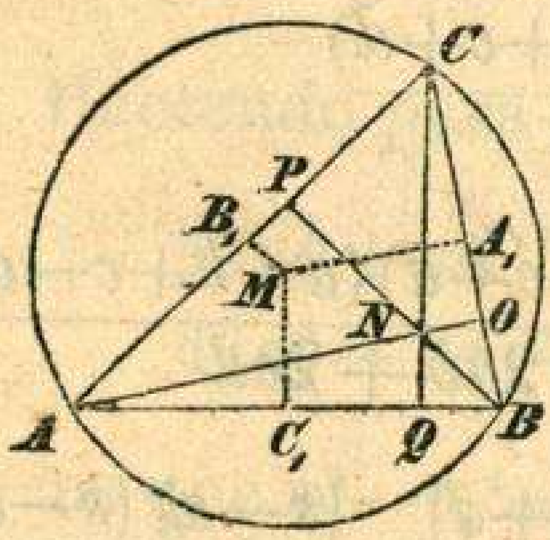
(*) Esta propiedad del cuadrángulo inscrito en un círculo, que tiene su contorno plegado, fué hallada por L'Huilier *(De relatione mutua... p.* 23).

ángulos del triángulo; por r, la distancia del punto M á los A, B y C; y por ρ, la distancia del punto N á los lados OP, PQ y QO del triángulo OPQ (*Planimetria*, 49). Con estos datos se verifican las ecuaciones siguientes:

$$A_1M = r\cos\alpha \qquad B_1M = r\cos\beta \qquad C_1M = r\cos\gamma$$
$$NA = 2r\cos\alpha \qquad NB = 2r\cos\beta \qquad NC = 2r\cos\gamma$$
$$ON = 2r\cos\beta\cos\gamma \quad PN = 2r\cos\gamma\cos\alpha \quad QN = 2r\cos\alpha\cos\beta$$
$$QP = r\,sen\,2\alpha \qquad OQ = r\,sen\,2\beta \qquad PO = r\,sen\,2\gamma$$

$$OPQ : ABC = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \rho : r \text{ (*)}.$$

DEMOSTRACION. Las direcciones positivas de las rectas f, g y h, sobre las cuales se hallan los lados BC, CA y AB, se determinan de modo que estos segmentos sean positivos; las direcciones positivas de sus normales f', g' y h', se determinan de suerte que los ángulos ff', gg' y hh' valgan 90° cada uno; y las direcciones positivas de las rectas k y l, sobre las que están los segmentos AM y BM, de manera que estos segmentos tengan el valor r. Entónces,



$$C_1M = AM\cos kh', \quad kh' = \tfrac{1}{2}kl = \gamma;$$

y, por consecuencia: $C_1M = r\cos\gamma$, etc. El segmento NC tiene idéntica direccion que el C_1M y es duplo de éste (*Planim.* 100). Además $ON = CN$

(*) FEUERBACH (*Das geradhinige Dreieck* 23 y sig.).

$\cos h'f'$; $h'f' = hf = 180° - \beta$ y $ON = NC \cos\beta$, etc.; y por ser $PA = BA \cos gh = AB \cos\alpha$ y $AQ = AC \cos gh = CA \cos\alpha$, se verifica la proporcion.

$$PAQ : CAB = PA.AQ : CA.AB = \cos^2\alpha, \text{ etc.}$$

Y sustrayendo del ABC los triángulos PAQ, QBO y OCP, resulta (36):

$$OPQ : ABC = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$$
$$= 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

Por otra parte, como los puntos B, C, P y Q caen sobre un círculo, los triángulos APQ y ABC son semejantes, y $QP : PA = BC : AB$; por lo cual:

$$QP = BC \cos\alpha = 2r \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = r \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$2PQN = \rho r \operatorname{sen} 2\alpha, \ldots;$$

$$2OPQ = \rho r (\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma).$$

Ahora bien:

$$2ABM = AB.C_1M = 2r^2 \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma = r^2 \operatorname{sen} 2\gamma, \ldots$$

Luego:

$$2ABC = r^2 (\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma).$$
$$OPQ : ABC = \rho : r$$

Para el producto $QN.NC$ se halla el valor

$$4r^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 2r\rho$$

en coincidencia con el ya encontrado (*Planimetría* 117); en virtud de ser r el diámetro del círculo OPQ (*Planim.* 100).

39. Si las distancias d y f, desde los puntos D y F á los lados del triángulo ABC, son iguales, y

D se halla dentro del triángulo, y F fuera de la bisectriz del ángulo BAC, segun la notacion anterior (38) serán:

$$AD = 4r\,sen\tfrac{1}{2}\beta\, sen\tfrac{1}{2}\gamma \qquad AF = 4r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$d = 4r\,sen\tfrac{1}{2}\alpha\, sen\tfrac{1}{2}\beta\, sen\tfrac{1}{2}\gamma \qquad f = 4r\,sen\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

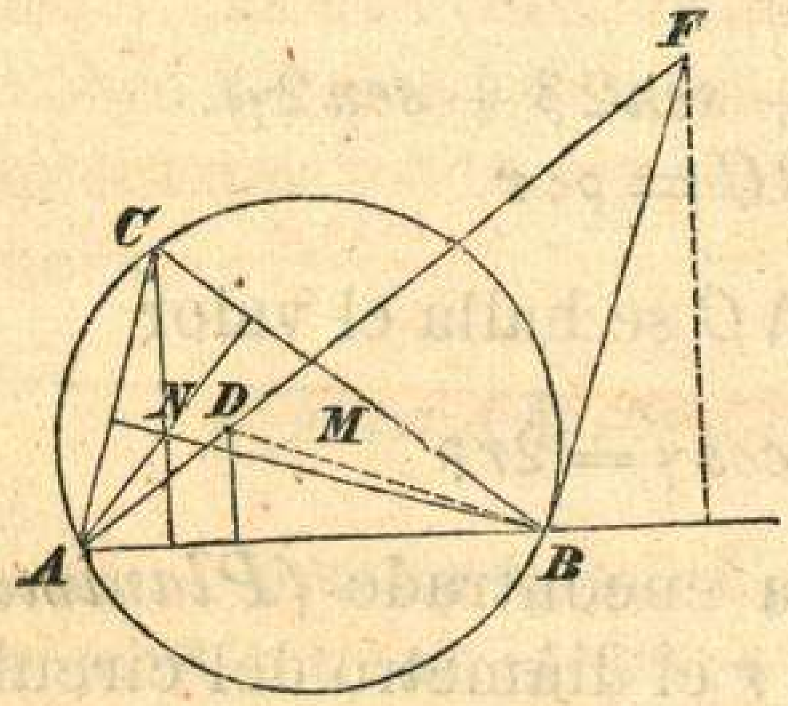
$$ND^2 = 2d^2 - 2r\rho \qquad NF^2 = 2f^2 - 2r\rho \text{ (*)}.$$

Demostracion.—Designemos por x é y las rectas de las que son AD y BA segmentos positivos. Entónces (30): $AD : AB = sen\,yh : sen\,yx$, $hx = \frac{1}{2}\alpha$, $hy = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $xy = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Por lo tanto:

$$AD = \frac{AB\,sen\,\frac{1}{2}\beta}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{2r\,sen\gamma\, sen\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = 4r\,sen\tfrac{1}{2}\beta\, sen\tfrac{1}{2}\gamma.$$

El ángulo FBA excede en 90° al ángulo DBA; y, de consiguiente, es $AF : AB = \cos yh : \cos yx$; y

$$AF = \frac{AB\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{2r\,sen\gamma\cos\frac{1}{2}\beta}{sen\frac{1}{2}\gamma} = 4r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$



Mas

$$d : AD = f : AF = \cos h'x = \cos(hx - 90^\circ) = sen\tfrac{1}{2}\alpha$$

Luego, etc.

En el triángulo AND tenemos (35):

$$ND^2 = NA^2 + AD^2 + 2NA.AD\cos xf'$$

(*) Feuerbach (*l. c.* 51 *y sig.*); pero dando por equivocacion á NF^2 el valor $2f^2 + 2r\rho$.

Y, como $xf' = xh + hf + ff' = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, será:

$$ND^2 = NA^2 + AD^2 - 2NA.AD\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

$$= 4r^2\cos^2\alpha + 16r^2 sen^2\frac{1}{2}\beta sen^2\frac{1}{2}\gamma$$

$$- 16r^2\cos\alpha\, sen\frac{1}{2}\beta\, sen\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

$$= 16r^2 sen^2\frac{1}{2}\beta\, sen^2\frac{1}{2}\gamma + 4r^2\cos^2\alpha - 16r^2\cos\alpha\, sen^2\frac{1}{2}\beta$$

$$sen^2\frac{1}{2}\gamma - 16r^2\cos\alpha\, sen\frac{1}{2}\beta\, sen\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$$

$$= 32r^2 sen^2\frac{1}{2}\alpha\, sen^2\frac{1}{2}\beta\, sen^2\frac{1}{2}\gamma - 4r^2\cos\alpha(sen\beta\, sen\gamma - \cos\alpha)$$

$$= 2d^2 - 2r\rho \ (38).$$

Del mismo modo se halla:

$$NF^2 = NA^2 + AF^2 - 2NA.AF\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

$$= 4r^2\cos^2\alpha + 16r^2\cos^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma$$

$$- 16r^2\cos\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

$$= 16r^2\cos^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma + 4r^2\cos^2\alpha - 16r^2\cos\alpha\cos^2\frac{1}{2}\beta$$

$$\cos^2\frac{1}{2}\gamma - 16r^2\cos\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\, sen\frac{1}{2}\beta\, sen\frac{1}{2}\gamma$$

$$= 32r^2 sen^2\frac{1}{2}\alpha\cos^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma - 4r^2\cos\alpha(sen\beta\, sen\gamma - \cos\alpha)$$

$$= 2f^2 - 2r\rho$$

Observacion. Si sobre la recta AB se toman los segmentos $KA = CA$ y $BL = BC$, el triángulo

KLC tendrá sobre su lado $KL = 2s$ los ángulos $\frac{1}{2}\alpha$ y $\frac{1}{2}\beta$; y, por lo tanto:

$$\frac{KL}{sen\,KCL} = \frac{LC}{sen\,LKC},$$

$$\frac{2s}{cos\,\frac{1}{2}\gamma} = \frac{2a\,cos\,\frac{1}{2}\beta}{sen\,\frac{1}{2}\alpha} = \frac{4a\,cos\,\frac{1}{2}\alpha\,cos\,\frac{1}{2}\beta}{sen\,\alpha}$$

$$\frac{s}{2cos\,\frac{1}{2}\alpha\,cos\,\frac{1}{2}\beta\,cos\,\frac{1}{2}\gamma} = \frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} = 2r$$

40. El círculo de FEUERBACH, OPQ, es tocado por los círculos tangentes á los lados del triángulo ABC: interiormente por el círculo inscrito, y exteriormente por los tres exinscritos (*Planim.* 100).

En efecto, el centro M, del círculo OPQ, es el punto medio de MN; y, por lo tanto (*Planim.* 118):

$$M_1D^2 = \frac{1}{2}\,MD^2 + \frac{1}{2}\,ND^2 - M_1N^2$$

$$M_1F^2 = \frac{1}{2}\,MF^2 + \frac{1}{2}\,NF^2 - M_1N^2$$

Por otra parte (*Planim.* 114):

$$MD^2 = r^2 - 2rd \;\text{ y }\; MF^2 = r^2 + 2rf$$

El rádio del círculo OPQ vale $\frac{1}{2}r$; y el punto N es el centro del círculo inscrito en aquel triángulo, cuando los ángulos α, β y γ son agudos; ó el de un círculo tangente á los lados del triángulo OPQ, cuando uno de los ángulos expresados sea obtuso;

por lo cual es ρ negativo. En todo caso, pues, segun la fórmula usada para MD^2, se verifica la ecuacion

$$M_1N^2 = \frac{1}{4}r^2 - r\rho$$

Y, por lo tanto:

$$M_1D^2 = \frac{1}{2}r^2 - rd + d^2 - r\rho - \frac{1}{4}r^2 + r\rho = \left(\frac{1}{2}r - d\right)^2$$

$$M_1F^2 = \frac{1}{2}r^2 + rf + f^2 - r\rho - \frac{1}{4}r^2 + r\rho = \left(\frac{1}{2}r + f\right)^2$$

Ahora bien, M_1D es la diferencia de los rádios de los círculos (M_1) y (D); M_1F es la suma de los rádios de los círculos (M_1) y (F); y, por consecuencia, el círculo (M_1) será tocado interiormente por el círculo (D), y exteriormente por el círculo (F) *(Planim.* 21); etc.

Designando por G y H los centros de los otros dos círculos, tangentes á los lados del triángulo ABC, y por g y h sus rádios, tendremos:

$$M_1D = \frac{1}{2}r - d,\ M_1F = \frac{1}{2}r + f,\ M_1G = \frac{1}{2}r + g,$$
$$M_1H = \frac{1}{2}r + h$$

$$M_1D + M_1F + M_1G + M_1H = 2r + f + g + h - d = 6r$$
(Planim. 114. *Obs.).*

V.—Trigonometría esférica.

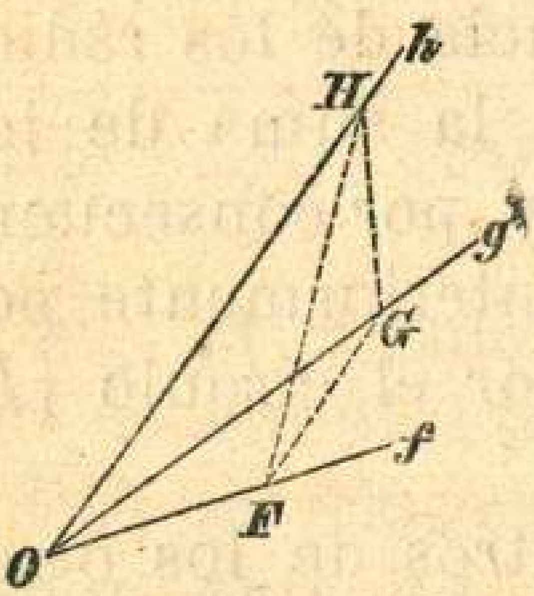
41. En el estudio de las figuras esféricas, bajo el punto de vista trigonométrico, se supone generalmente que es la unidad de longitud el rádio de la

esfera sobre cuya superficie se consideran aquéllas. Y por esta razon, los arcos de círculo máximo son sustituidos por sus ángulos centrales correspondientes (25).

Cuando los lados AB y BC, de un triángulo esférico, son normales entre sí, se tiene (*):

$$\cos AB \cos BC = \cos CA$$

DEMOSTRACION. Admitamos que por el punto O pasan las rectas f, g y h, de tal modo que los planos fg y gh sean normales entre sí. Designando por G la proyeccion normal del punto H de la recta h, sobre la recta g, y por F la proyeccion normal de G sobre la recta f, será GH normal al plano OFG, y OF normal al plano FGH (*Estereom.* 12);



(*) Los primeros teoremas de la *Trigonometría esférica* se encuentran en el libro 3.° de la *Esférica* de MENELAO y en el libro 1.° del *Almagesto* de PTOLOMEO. Desarrollados fueron despues por los árabes para el estudio de la *Astronomía*, y en el siglo XV, por REGIOMONTANO y otros. Propúsose EULER deducir de leyes sencillas toda la *Trigonometría esférica* (*Mém. de Berlin* 1753, *p.* 234 *y Acta Petrop.* 1779, *I*, *p.* 72) que fué reducida á un solo principio por LAGRANGE (*J. de l'École polyt. Cah.* 6, *página* 270) cuyo trabajo recibió de GAUSS un esencial complemento en las adiciones que hizo este analista á la traduccion por SCHUMACHER de la *Géom. de pos.* de CARNOT, *II*, *p.* 373. La primitiva limitacion de la *Trigonometría esférica* al triángulo, cuyos lados y ángulos no excedieran de 180°, fué rota por MÖBIUS (*Analyt. Sphärik* 15 *y sig. Leipziger Beriehte* 1860, *p.* 51) cuyos principios reproducimos esencialmente en este capítulo.

y, por lo tanto, F proyeccion normal de H sobre f. Segun (27) tenemos:

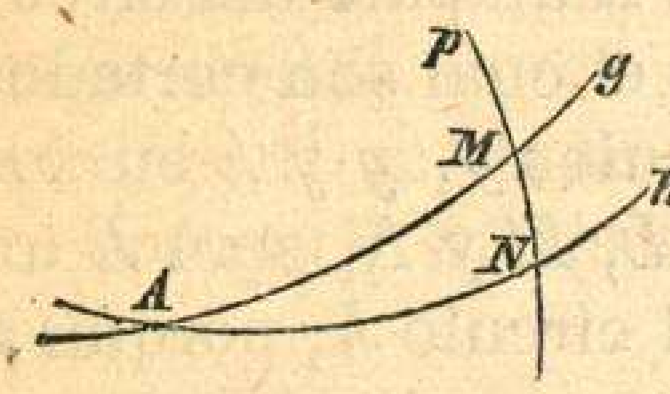
$$OF = OG \cos fg, \quad OG = OH \cos gh, \quad OF = OH \cos hf$$

y, de consiguiente, $\cos fg \cos gh = \cos hf$. Ahora bien, si la esfera, cuyo centro es O y cuyo rádio es la unidad de longitud, corta en A, B y C á las direcciones positivas de las rectas f, g y h, el arco AB será igual al ángulo fg, etc.

42. Cuando AM, AN y NM son arcos de los círculos máximos g, h y p, y A es un polo de p, se verifica la proporcion:

$$\operatorname{sen} MN : \operatorname{sen} NA : \operatorname{sen} AM = \operatorname{sen} hg : \operatorname{sen} gp : \operatorname{sen} ph.$$

Demostracion. Determinando primeramente el sentido positivo de los círculos máximos g, h y p, de modo que $AM = 90^\circ$, $AN = 90^\circ$, y A sea el polo de la izquierda del círculo p; y suponiendo tambien que los ángulos positivos son descritos por rotaciones hácia la izquierda, el arco MN será igual al ángulo gh (*Estereom.* 38), $gp = 90^\circ$, $hp = 90^\circ$; y, de consiguiente:



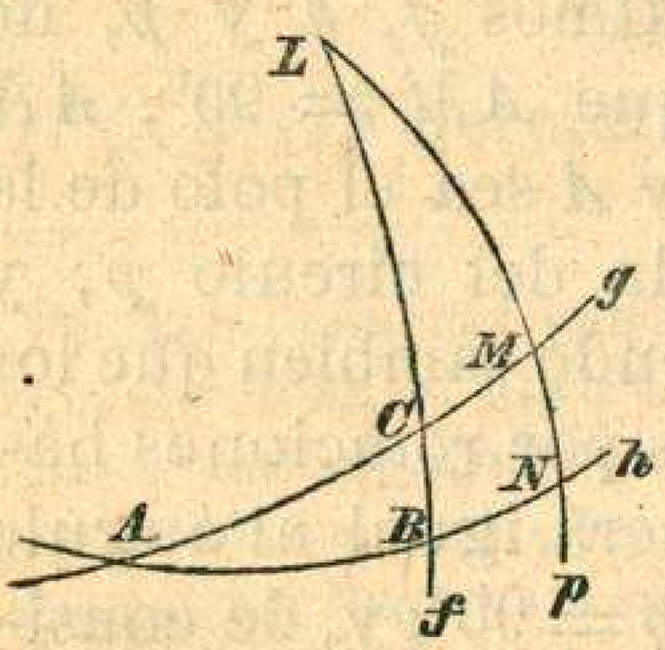
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} MN : \operatorname{sen} NA : \operatorname{sen} AM &= \operatorname{sen} gh : -1 : \ \ 1 \\ &= \operatorname{sen} hg : \ \ 1 : -1 \\ &= \operatorname{sen} hg : \operatorname{sen} gp : \operatorname{sen} ph \end{aligned}$$

Si los ángulos positivos se suponen descritos por rotaciones hácia la derecha, $\operatorname{sen} hg$, $\operatorname{sen} gp$ y $\operatorname{sen} ph$ recibirán valores iguales y opuestos (28); pero las razones $sen\,hg : sen\,gp : sen\,ph$ permanecerán inalterables. Si el sentido positivo de p se determina de modo que A sea polo de la derecha, el arco MN cambiará de signo y los ángulos hp y pg variarán cada uno en 180°; por lo cual tampoco sufrirá alteracion la proporcion expresada. Y tampoco la sufrirá, aunque uno de los otros dos círculos máximos, el g, por ejemplo, se tome en sentido opuesto, y cambien por lo tanto de signo, $sen\,AM$, $sen\,hg$ y $sen\,gp$.

43. Si BC, CA y AB son arcos de los círculos máximos f, g y h, y h es normal á f, tenemos:

$$sen\,gh = \frac{sen\,BC}{sen\,AC} sen\,hf,\quad sen\,gf = \frac{sen\,AB}{sen\,CA} sen\,hf.$$

Demostracion. Designando A un polo del círculo p por el cual son cortados los círculos f, g y h en los puntos L, M y N, será L un polo del círculo h; porque p y f son normales á h. Tambien es p normal á g; y, por lo tanto, en el triángulo CML será (41):



$$cos\,CM\,cos\,ML = cos\,LC$$

Por otra parte como $CM = CA + AM$, y AM puede valer uno, ó tres cuadrantes, $cos\,CM$ tendrá (28) en el primer caso, el valor $-sen\,CA$, y en el segundo el valor $+\,sen\,CA$; y, en todo caso, el valor $-sen\,CA\,sen\,AM$, etc.; y por lo tanto:

$$sen\,CA\,sen\,AM\,sen\,MN\,sen\,NL = -\,sen\,BC\,sen\,LB.$$

Ahora bien, en los triángulos MNA y BNL se verifican (42) las proporciones

$$sen\,AM : sen\,MN = sen\,ph : sen\,hg$$
$$sen\,NL : sen\,LB = sen\,fh : sen\,hp$$

Y por multiplicacion se halla:

$$sen\,CA\;sen^2 AM\,sen^2 NL = sen\,BC\,sen^2 LB\,\frac{sen\,fh}{sen\,hg}$$

en virtud de que $sen\,ph = -sen\,hp$. Pero $sen^2 AM = 1$, etc. Luego

$$sen\,CA = sen\,BC\,\frac{sen\,hf}{sen\,gh}$$

Y esta ecuacion es equivalente á la primera de las escritas en el enunciado; estableciéndose la otra de un modo semejante.

Adicion. En los triángulos MNC y BNC, segun (41) es

$$cos\,MN\,cos\,MC = cos\,CN = cos\,NB\,cos\,BC$$

En el supuesto de que los arcos AM y AN valgan 90° cada uno, el arco MN será igual ó igualmente opuesto al ángulo gh; y, por lo tanto, $cos\,MN = cos\,gh$. Además:

$$cos\,MC = cos\,(CA + AM) = -\,sen\,CA$$
$$cos\,NB = cos\,(AN - AB) = \;\;sen\,AB$$

Luego:

$$-\,cos\,gh\,sen\,CA = sen\,AB\,cos\,BC$$

44. Conservando la notacion anterior son ciertas tambien las ecuaciones:

$$-\cos gh = \frac{\tang AB}{\tang CA}$$

$$-\tang gh = \frac{\tang BC}{\operatorname{sen} AB} \operatorname{sen} hf$$

$$\cos BC = -\frac{\cos gh}{\operatorname{sen} fg} \operatorname{sen} hf, \quad \cos AB = -\frac{\cos fg}{\operatorname{sen} gh} \operatorname{sen} hf$$

$$\cos CA = \cot fg \cot gh.$$

Demostracion. Segun acabamos de ver (43-*Adicion)*:

$$-\cos gh = \frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} CA} \cos BC = \frac{\operatorname{sen} AB \cos CA}{\operatorname{sen} CA \cos AB} \text{(41); etc.}$$

De las ecuaciones (43)

$$\operatorname{sen} gh \operatorname{sen} CA = \operatorname{sen} BC \operatorname{sen} hf$$
$$-\cos gh \operatorname{sen} CA = \operatorname{sen} AB \cos BC$$

se deduce por division el valor de $-\tang gh$.

De las ecuaciones (43)

$$\cos BC \operatorname{sen} AB = -\cos gh \operatorname{sen} CA$$
$$\operatorname{sen} AB \operatorname{sen} hf = \operatorname{sen} fg \operatorname{sen} CA$$

se deduce por division el valor de $\cos BC$. Y del mismo modo se obtiene el de $\cos AB$.

Y de las ecuaciones

$$\cos BC = -\frac{\cos gh}{\operatorname{sen} fg} \operatorname{sen} hf \text{ y } \cos AB = -\frac{\cos fg}{\operatorname{sen} gh} \operatorname{sen} hf$$

se deduce por multiplicacion (41):

$$\cos CA = \cot fg \cot gh \operatorname{sen}^2 hf$$

en la que $\operatorname{sen}^2 hf = 1$.

Observacion. Si BC, CA y AB representan arcos positivos de los círculos máximos f, g y h, y tienen los valores a, b y c respectivamente, los ángulos BAC, CBA y ACB, designados por α, β y γ, del triángulo esférico ABC, serán suplementarios de los ángulos gh, hf y fg. Y por consecuencia, para el triángulo rectángulo, cuyo ángulo $\beta = 90^\circ$, se verificará el sistema de ecuaciones siguiente (*)

$$\cos b = \cos a \cos c$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}, \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} b}, \quad \cos\gamma = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{sen} c}, \quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} a}$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}, \quad \cos c = \frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

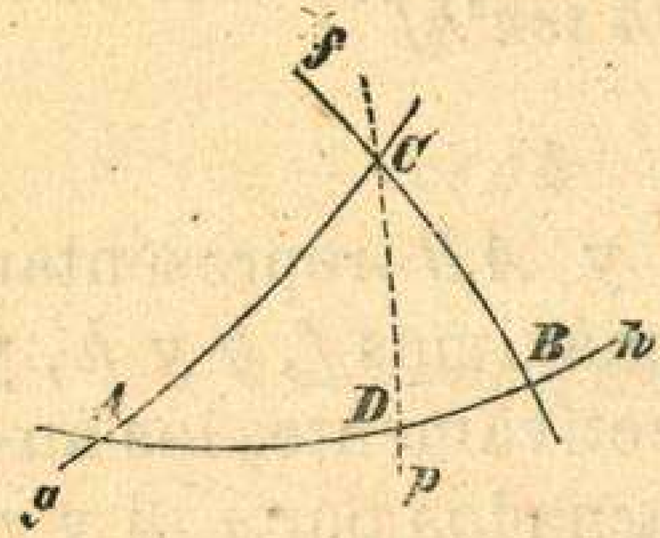
$$\cos b = \cot\alpha \cot\gamma.$$

45. En todo triángulo esférico ABC, cuyos lados BC, CA y AB son arcos de los círculos máximos f, g y h, se verifica la proporcion (**)

(*) Euler (*Mém. de Berlin* 1753, *p.* 233).

(**) Este teorema fundamental de la *Trigonometría esférica* figura expresado de otro modo en Menelao (*Sphaerica III*, 2). Su generalidad completa se debe á Möbius (41).

$$sen\,BC : sen\,CA : sen\,AB = sen\,gh : sen\,hf : sen\,fg$$



Demostracion. Por el vértice C trázese el arco de círculo máximo p, normalmente al h que corta en D. En los triángulos ADC y CDB tenemos (43):

$$sen\,gh = \frac{sen\,DC}{sen\,CA}\,sen\,hp, \quad sen\,hf = \frac{sen\,CD}{sen\,BC}\,sen\,ph$$

y dividiendo:

$$\frac{sen\,gh}{sen\,hf} = \frac{sen\,BC}{sen\,CA}$$

Puesto que $sen\,CD = -\,sen\,DC$ y $sen\,ph = -\,sen\,hp$; etc.

46. En el triángulo esférico ABC se verifica la ecuacion (*)

$$cos\,BC = cos\,CA\,cos\,AB - sen\,CA\,sen\,AB\,cos\,gh$$

Demostracion. En el triángulo BCD tenemos (41):

$$cos\,BC = cos\,CD\,cos\,DB$$

Y, como $DB = DA + AB$, será segun (32):

(*) De esta ecuacion, establecida por Euler (*Mém. de Berlin* 1753, *p.* 242) de la que se da una demostracion sencilla (60), pueden deducirse, mediante la eliminacion, las demás ecuaciones de la *Trigonometría esférica*, segun lo hicieron Lagrange 1799. (*J. de l'École polyt. Cah.* 6, *p.* 280), y más sencillamente Gauss en las *Adiciones* á la traduccion por Schumacher de la *Géom. de pos.* de Carnot, *II, p.* 373.

$$\cos BC = \cos CD \cos DA \cos AB - \cos CD \operatorname{sen} DA \operatorname{sen} AB$$

Pero:

$\cos CD \cos DA = \cos CA$ (41)

$\operatorname{sen} AD \cos DC = -\cos gh \operatorname{sen} CA$ (43-*Ad.*)

$\cos CD = \cos DC, \operatorname{sen} DA = -\operatorname{sen} AD$. Luego, etc.

47. En el triángulo esférico ABC es (*)

$$-\operatorname{tang} hf = \frac{\operatorname{tang} CA \operatorname{sen} gh}{\operatorname{sen} AB + \operatorname{tang} CA \cos AB \cos gh}$$

Demostracion. En el triángulo BCD tenemos (44):

$$-\operatorname{tang} fh = \frac{\operatorname{tang} DC}{\operatorname{sen} BD} \operatorname{sen} hp = \frac{\operatorname{sen} DC \operatorname{sen} hp}{\cos DC \operatorname{sen}(BA + AD)}$$

Mas

$\operatorname{sen} DC \operatorname{sen} hp = \operatorname{sen} CA \operatorname{sen} gh$ (45)

$\cos DC \operatorname{sen} BA \cos AD = -\operatorname{sen} AB \cos CA$ (41)

$\cos DC \cos BA \operatorname{sen} AD = -\operatorname{sen} CA \cos AB \cos gh$ (46)

$\operatorname{tang} fh = -\operatorname{tan} hf$. Luego:

$$-\operatorname{tang} hf = \frac{\operatorname{sen} CA \operatorname{sen} gh}{\operatorname{sen} AB \cos CA + \operatorname{sen} CA \cos AB \cos gh}$$

Y de esta ecuacion, dividiendo el numerador y el denominador por $\cos CA$, resulta la que deseábamos demostrar.

48. Conservando la notacion ordinaria para los elementos del triángulo esférico ABC (44-*Obs.*), tenemos segun lo dicho:

(*) Euler (*l. c.*, *p.* 251).

$$sen\,a : sen : b : sen\,c = sen\,\alpha : sen\,\beta : sen\,\gamma$$

$$cos\,a = cos\,b\,cos\,c + sen\,b\,sen\,c\,cos\,\alpha$$

$$tang\,\beta = \frac{tang\,b\,sen\,\alpha}{sen\,c - tang\,b\,cos\,c\,cos\,\alpha}$$

Designando de igual manera, por a', b' y c', los lados del triángulo $A'B'C'$, polar correspondiente al ABC, y por α', β' y γ' sus ángulos *(Estereometría* 39):

$$\alpha' + a = 180°, \quad \beta' + b = 180°, \quad \gamma' + c = 180°$$
$$a' + \alpha = 180°, \quad b' + \beta = 180°, \quad c' + \gamma = 180°$$

De los valores de $cos\,a'$ y $tang\,\beta'$ se deduce inmediatamente:

$$cos\,\alpha = -\,cos\,\beta\,cos\,\gamma + sen\,\beta\,sen\,\gamma\,cos\,a$$

$$tang\,b = \frac{tang\,\beta\,sen\,a}{sen\,\gamma + tang\,\beta\,cos\,\gamma\,cos\,a}$$

49. Para el cálculo de un ángulo mediante los tres lados, se usa la ecuacion (48)

$$cos\,\alpha = \frac{cos\,a - cos\,b\,cos\,c}{sen\,b\,sen\,c}$$

que se transforma como sigue (32 *y sig.)*:

$$1 - cos\,\alpha = \frac{cos(b-c) - cos\,a}{sen\,b\,sen\,c}$$

$$1 + cos\,\alpha = \frac{cos\,a - cos\,(b+c)}{sen\,b\,sen\,c}$$

$$sen^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{sen(s-b)\,sen(s-c)}{sen\,b\,sen\,c}$$

$$cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{sen\,s\,sen(s-a)}{sen\,b\,sen\,c}$$

$$tang^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{sen(s-b)\,sen(s-c)}{sen\,s\,sen\,(s-a)} \quad (*)$$

Siendo $a + b + c = 2s$ (35).

Combinando además la ecuacion $\alpha+\beta+\gamma=2\sigma$, con la del triángulo polar, $a'+b'+c' = 2s'$, serán $2s' + 2\sigma = 3.\ 180^\circ$, $s' + \sigma = 270^\circ$, $s' - a' + \sigma - \alpha = 90^\circ$. Y con esto, de los valores de $sen^2\frac{1}{2}\alpha'$ y $cos^2\frac{1}{2}\alpha'$ se deducen los siguientes:

$$cos^2\frac{1}{2}a = \frac{cos(\sigma-\beta)\,cos(\sigma-\gamma)}{sen\,\beta\,sen\,\gamma}$$

$$sen^2\frac{1}{2}a = \frac{-\,cos\,\sigma\,cos\,(\sigma-\alpha)}{sen\,\beta\,sen\,\gamma}$$

$$cot^2\frac{1}{2}a = \frac{cos(\sigma-\beta)\,cos(\sigma-\gamma)}{-\,cos\,\sigma\,cos(\sigma-\alpha)}$$

En el triángulo esférico ordinario se halla σ comprendido entre 90° y 270° (*Estereom.* 35); y, por lo tanto, es positivo $-cos\,\sigma$.

Las fórmulas que dan $tang^2\frac{1}{2}\alpha$ y $cot^2\frac{1}{2}\alpha$ son apropiadas para el cálculo numérico de un ángulo, dados los tres lados; y de un lado, conocidos los tres ángulos.

50. En el triángulo esférico ABC, cuyos lados y

(*) Euler *(l. c.)*.

cuyos ángulos no excedan ninguno de 180°, se verifican las ecuaciones (*):

$$sen\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,sen\,\tfrac{1}{2}c = sen\,\tfrac{1}{2}(a-b)\,cos\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,sen\,\tfrac{1}{2}c = sen\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,sen\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$sen\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,cos\,\tfrac{1}{2}c = cos\,\tfrac{1}{2}(a-b)\,cos\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,cos\,\tfrac{1}{2}c = cos\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,sen\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

DEMOSTRACION. Desarrollando $sen\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ segun la fórmula (32), y poniendo en ésta los valores (49) de $sen\,\frac{1}{2}\alpha$, $sen\,\frac{1}{2}\beta$, $cos\,\frac{1}{2}\alpha$ y $cos\,\frac{1}{2}\beta$, despues de sencillas reducciones se halla la fórmula

$$sen\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{sen\,\frac{1}{2}(a-b)}{sen\,\frac{1}{2}c}\sqrt{cos^2\tfrac{1}{2}\gamma}$$

En el triángulo esférico, ordinario, es $sen\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ positivo, cuando $\alpha > \beta$; y, por lo tanto, sólo hay que tomar en esta fórmula la raíz positiva. Etc.

Se obtiene una determinacion completa median-

(*) Llámanse de GAUSS que las introdujo en la Trigonometría práctica *(Theoria motus, 54)*. Publicadas fueron al mismo tiempo por DELAMBRE *(Connaiss. des temps, 1808, p. 445)* y por MOLLWEIDE (ZAEH *monatt. Corresp. 1808, Nov., t. 18, p. 394*). Por construccion las estableció GUDERMANN *(Niedere Sphärik, 144* y siguientes); y más sencillamente, como en el texto se hace, ESSEN *(Arch. de Grunert, 27, p. 38)*.

te el procedimiento siguiente (*). Segun (48):

I. $(sen\,\alpha - sen\,\beta)\, sen\, c = (sen\, a - sen\, b)\, sen\,\gamma$

II. $(sen\,\alpha + sen\,\beta)\, sen\, c = (sen\, a + sen\, b)\, sen\,\gamma$

Combinando las ecuaciones (48)

$$sen\, b\, sen\, c\, cos\,\alpha = cos\, a - cos\, b\, cos\, c$$
$$sen\, a\, sen\, b\, cos\,\gamma = cos\, c - cos\, a\, cos\, b$$

resulta esta otra:

$$sen b\, sen c\, cos\,\alpha + sen\, a\, sen b\, cos b\, cos\,\gamma = cos\; a - cos\, a\, cos^2 b$$

ó más sencillamente:

$$sen\, c\, cos\,\alpha + sen\, a\, cos\, b\, cos\,\gamma = cos\, a\, sen\, b$$

Cambiando mútuamente a por b y α por β, se obtiene tambien:

$$sen\, c\, cos\,\beta + sen\, b\, cos\, a\, cos\,\gamma = cos\, b\, sen\, a.$$

Y sumando:

III. $(cos\,\alpha + cos\,\beta)\, sen\, c = sen\,(a + b).(1 - cos\,\gamma).$

La ecuacion correlativa

IV. $sen\,(\alpha + \beta).(1 + cos\, c) = (cos\, a + cos\, b)\, sen\,\gamma$

se halla sin más explicaciones, tomando en cuenta el triángulo polar.

Si en las anteriores ecuaciones (I-IV) introduci-

(*) De las ecuaciones I-III dedujo Legendre solamente *(Trigonometría,* 83) las analogías de Neper subordinadas á las ecuaciones de Gauss. La gran utilidad de las ecuaciones I-IV fué demostrada por Gauss en sus *Lecciones*, como refiere Wittstein *(Stereom.* 213).

mos (33) los semiángulos y los semilados, y establecemos las abreviaciones:

$$
\begin{array}{ll}
sen\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,sen\frac{1}{2}c=l & sen\frac{1}{2}(a-b)\,cos\frac{1}{2}\gamma=\lambda \\
cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,sen\frac{1}{2}c=m & cos\frac{1}{2}(a-b)\,cos\frac{1}{2}\gamma=\mu \\
sen\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,cos\frac{1}{2}c=r & sen\frac{1}{2}(a+b)\,sen\frac{1}{2}\gamma=\rho \\
cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,cos\frac{1}{2}c=s & cos\frac{1}{2}(a+b)\,sen\frac{1}{2}\gamma=\sigma
\end{array}
$$

obtendremos las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
ls &= \lambda\sigma \\
mr &= \mu\rho \\
ms &= \rho\sigma \\
rs &= \mu\sigma
\end{aligned}
$$

De las dos últimas, teniendo presente la segunda, resulta esta otra:

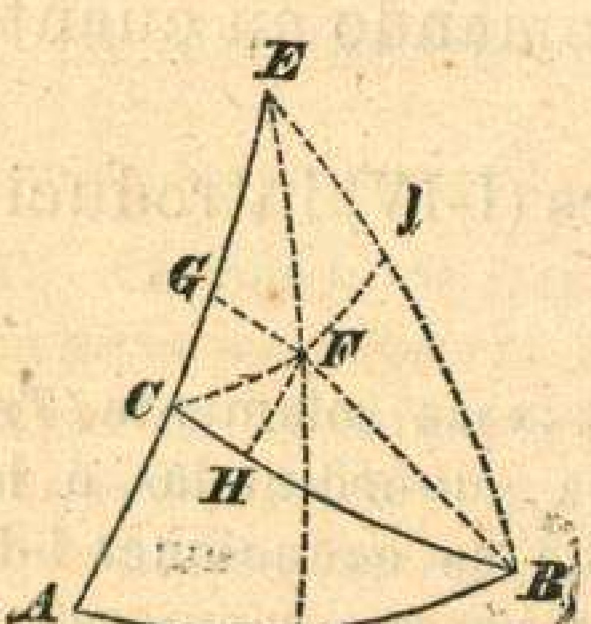
$$s^2 = \sigma^2$$

Y por consecuencia:

1) $s = \sigma$ y $l = \lambda$, $m = \rho$, $r = \mu$
2) $s = -\sigma$ $l = -\lambda$, $m = -\rho$, $r = -\mu$.

Lo cual deseábamos demostrar.

La semidiferencia de dos lados a y b, y la de los ángulos opuestos α y β, se obtienen en el triángulo ABC por la construccion siguiente. El círculo máximo que divide por mitad el arco AB, cortándole normalmente en el punto D, corta al CA en E, de modo que $BE = EA$ y DE biseca al ángulo AEB. El círculo máximo



que biseca el ángulo BCE corta al arco DE en F, de modo que F es el centro del círculo inscrito en el triángulo BCE. Ahora bien, FG, FH y FJ son normales á EC, CB y BE respectivamente; y, por lo tanto:

$$CG + EJ + BH = \tfrac{1}{2}(CE + EB + BC)$$
$$EJ + BH = EB$$
$$CG = \tfrac{1}{2}(BC - CA)$$

Por otra parte, es el ángulo $FCG = 90° - \frac{1}{2}ACB$; y $FBD = \frac{1}{2}(BAC - CBA) + CBA = \frac{1}{2}(BAC + CBA)$ $GFC + HFB + JFE = 180°$, $HFB + JFE = BFE$; y, de consiguiente, $GFC = DFB$, cuando AB no pasa de dos cuadrantes. En los triángulos rectángulos GFC y DFB se tiene (44-*Obs.*)

$$sen\,GFC = \frac{sen\,CG}{sen\,FC} \qquad cos\,CG = \frac{cos\,GFC}{sen\,FCG}$$
$$sen\,DFB = \frac{sen\,DB}{sen\,BF} \qquad cos\,DB = \frac{cos\,DFB}{sen\,FBD}$$

Y, por lo tanto:

$$\frac{sen\,CG}{sen\,DB} = \frac{sen\,FC}{sen\,BF} = \frac{sen\,FBC}{sen\,BCF}(45), \quad \frac{cos\,CG}{cos\,DB} = \frac{sen\,FBD}{sen\,FCG};$$

en las cuales están contenidas la primera y la tercera de las que deseamos demostrar.

Designando por B_1 el punto opuesto al B, se verificarán para el triángulo adyacente AB_1C las ecuaciones:

f

$$sen\tfrac{1}{2}(\alpha' - \beta)\, sen\tfrac{1}{2}c' = sen\tfrac{1}{2}(a' - b)\, cos\tfrac{1}{2}\gamma'$$

$$sen\tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta)\, cos\tfrac{1}{2}c' = cos\tfrac{1}{2}(a' - b)\, cos\tfrac{1}{2}\gamma'$$

Mas $\alpha'+\alpha=180^\circ$, $\gamma'+\gamma=180^\circ$, $a'+a=180^\circ$, $c'+c=180^\circ$ Luego:

$$sen\tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta)=cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad sen\tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta)=cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$sen\tfrac{1}{2}(a'-b)=cos\tfrac{1}{2}(a+b),\quad cos\tfrac{1}{2}(a'+b)=sen\tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$sen\tfrac{1}{2}c'=cos\tfrac{1}{2}c,\quad cos\tfrac{1}{2}c'=sen\tfrac{1}{2}c,\quad cos\tfrac{1}{2}\gamma'=sen\tfrac{1}{2}\gamma$$

Y mediante estas sustituciones se obtienen la cuarta y la segunda de las ecuaciones cûya demostracion buscábamos.

Observacion. Dados dos lados y el ángulo comprendido, a, b y γ, por ejemplo, se calcula sencillamente, en primer lugar, el valor de $sen\frac{1}{2}(\alpha-\beta) sen\frac{1}{2}c$ y de $cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) sen\frac{1}{2}c$; y, por division, después, el de $tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Luégo los valores de $sen\frac{1}{2}(\alpha+\beta) cos\frac{1}{2}c$ y $cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) cos\frac{1}{2}c$; y por ellos, el de $tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. De $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ y $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ se deducen los valores de α y β; y de $sen\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ó $cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, y de $sen\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ó $cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, se deduce finalmente, de dos maneras, el valor de $\frac{1}{2}c$.

Así se ordena el cálculo tambien cuando son conocidos un lado y los dos ángulos adyacentes; pero, cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, como a, b y α, por ejemplo, debe calcularse primeramente el ángulo β (45); y despues, con el auxilio de las ecuaciones anteriores, $tang\frac{1}{2}\gamma$ y $tang\frac{1}{2}c$. Análogo procedimiento se emplea cuando son conocidos dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.

Los siguientes valores, deducidos de las ecuaciones de GAUSS,

$$tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),\ tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\ tang\tfrac{1}{2}(a-b),\ tang\tfrac{1}{2}(a+b)$$

hace mucho tiempo que están en uso. Publicados fueron por NEPER, el inventor de los logaritmos naturales (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614, II, 6) y expresados por proporciones que llevan el nombre de *Analogías de* NEPER.

51. Determinando el sentido positivo de las alturas de un triángulo esférico de modo que cada una con el lado á que es normal forme un ángulo de 90°, los productos del seno de cada lado por el seno de la altura correspondiente tienen un mismo valor, d; y los productos del seno de cada ángulo por el seno de la altura correspondiente tienen tambien un mismo valor δ. (*)

En efecto (45):

$$sen\,DC\,sen\,hp = sen\,CA\,sen\,gh = sen\,BC\,sen\,hf$$

y como $sen\,hp = 1$, empleando la notacion establecida tenemos:

$$\begin{aligned} sen\,c\,sen\,DC &= sen\,b\,sen\,c\,sen\,\alpha = sen\,c\,sen\,a\,sen\,\beta \\ &= sen\,a\,sen\,b\,sen\,\gamma = d \end{aligned}$$

(*) LEXELL (*Acta Petrop.* 1782, *I p.* 71). GUDERMANN (*Niedere Sphärik* 124).

$$sen\,\gamma\, sen\, DC = sen\,\beta\, sen\,\gamma\, sen\, a = sen\,\gamma\, sen\,\alpha\, sen\, b$$
$$= sen\,\alpha\, sen\,\beta\, sen\, c = \delta$$

De estas ecuaciones se deducen inmediatamente:

$$\frac{sen\, a\, sen\, b\, sen\, c}{d} = \frac{sen\, a}{sen\,\alpha} = \frac{sen\, b}{sen\,\beta} = \frac{sen\, c}{sen\,\gamma} = \frac{d}{\delta}\ (*)$$
$$\frac{sen\,\alpha\, sen\,\beta\, sen\,\gamma}{\delta} = \frac{sen\,\alpha}{sen\, a} = \frac{sen\,\beta}{sen\, b} = \frac{sen\,\gamma}{sen\, c} = \frac{\delta}{d}$$
$$\delta = \frac{d^2}{sen\, a\, sen\, b\, sen\, c},\ d = \frac{\delta^2}{sen\,\alpha\, sen\,\beta\, sen\,\gamma}$$

De las ecuaciones

$$d = sen\, b\, sen\, c\, sen\,\alpha$$
$$cos\, a - cos\, b\, cos\, c = sen\, b\, sen\, c\, cos\,\alpha\ (48)$$

se deduce:

$$d^2 = sen^2 b\, sen^2 c - (cos\, a - cos\, b\, cos\, c)^2$$
$$= 1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2\, cos\, a\, cos\, b\, cos\, c$$

Ahora bien (32):

$$d^2 = 4 sen\, b\, sen\, c\, sen^2 \tfrac{1}{2}\alpha .\ sen\, b\, sen\, c\, cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$d^2 = 4\, sen\, s\, sen\,(s-a)\, sen\,(s-b)\, sen\,(s-c)\ (49).$$

Si d' recibe la misma significacion para el trián-

(*) LAGRANGE (*J. de l'École polyt. Cah.* 6 *p.* 272). FRANÇAIS (en el mismo *Diario Cah.* 14 *p.* 190); GUDERMANN (*Niedere Sphärik* 142). Los valores de d^2 fueron dados por EULER (*Nov. Comm. Petrop.* 4 *p.* 158); los de δ^2 se hallan en la *Memoria* de LEXELL.

gulo polar $A'B'C'$, que d para el triángulo ABC, segun (48) será

$$d' = sen\,b'\,sen\,c'\,sen\,\alpha' = sen\,\beta\,sen\,\gamma\,sen\,a = \delta;$$

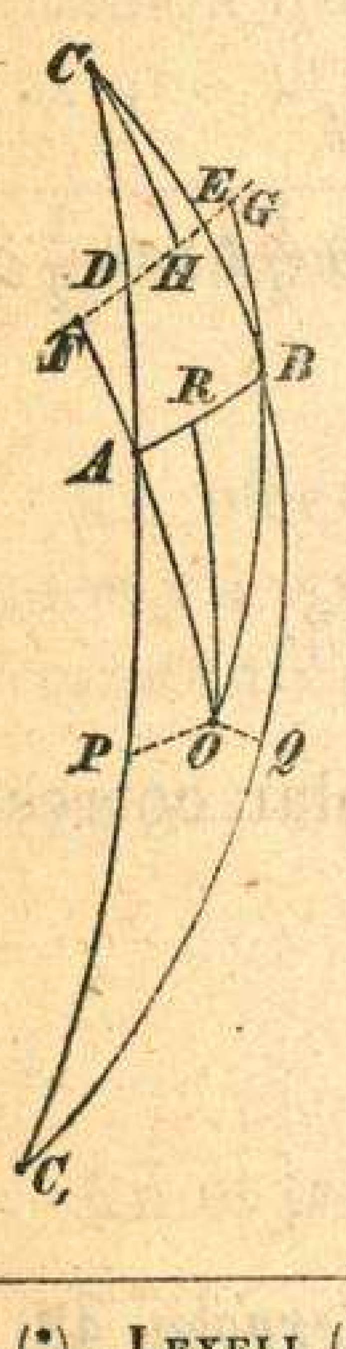
y, por consecuencia:

$$\delta^2 = 1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma - 2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma$$
$$= -4\,cos\,\sigma\,cos\,(\sigma - \alpha)\,cos\,(\sigma - \beta)\,cos\,(\sigma - \gamma)$$

52. Designando por r y ρ los rádios esféricos, que no excedan de un cuadrante, de los círculos, circunscrito é inscrito, para el triángulo esférico cuyos lados a, b y c, y cuyos ángulos α, β y γ, no pasen ninguno de 180°, serán (*):

$$cot\,r = \frac{d}{4\,sen\frac{1}{2}a\,sen\frac{1}{2}b\,sen\frac{2}{2}c},\; tang\,\rho = \frac{\delta}{4\,cos\frac{1}{4}\alpha\,cos\frac{1}{2}\beta\,cos^{1}\gamma}$$

Demostracion. Sea C_1 el punto opuesto al C; O el centro esférico del círculo ABC_1; P, Q, R, D y E, los puntos medios de AC_1, C_1B, BA, CA y BC. Entónces los arcos DP y QE serán cuadrantes; PO, QO y RO, normales á AC_1, C_1B y BA respectivamente; y, por consecuencia, D y E serán polos de PO y OQ, y DE polar de O. Si HC es una altura del triángulo CDE, y DE es cortada por OA y OB en los puntos F y G, los triángulos rectángulos DHC y DFA, EHC y EGB serán iguales y semejantes; D y E, los puntos medios de FH y HG; y, por lo tanto:



(*) Lexell (*l. c, p.* 72 *y sig.*). Gudermann (131 y 137).

$$hC = AF = 90^{\circ} - OA$$

$$DE = \tfrac{1}{2}FG = \tfrac{1}{2}FOG = AOR$$

Por otra parte, en los triángulos CDE y ORA se tiene (51):

$$sen\, DE\, sen\, HC = sen\, EC\, sen\, CD\, sen\, DCE$$

$$sen\, A\,OR\, sen\, OA = sen\, RA \text{ (44-Obs.)}.$$

Y, designando por a, c y b los lados C_1B, BA y AC_1, y por γ el ángulo $DCE = BC_1A$, resultan:

$$sen\, AOR\, cos\, r = cos\, \frac{1}{2}\, a\, cos\, \frac{1}{2}\, b\, sen\, \gamma$$

$$sen\, A\,OR\, sen\, r = sen\, \frac{1}{2}\, c$$

Luego:

$$cot\, r = \frac{cos\, \frac{1}{2}\, a\, cos\, \frac{1}{2}\, b\, sen\, \gamma}{sen\, \frac{1}{2}\, c} = \frac{d}{4\, sen\, \frac{1}{2}\, a\, sen\, \frac{1}{2}\, b\, sen\, \frac{1}{2}\, c}$$

habiendo puesto d por

$$4\, sen\, \frac{1}{2}\, a\, cos\, \frac{1}{2}\, a\, sen\, \frac{1}{2}\, b\, cos\, \frac{1}{2}\, b\, sen\, \gamma.$$

Del mismo modo, en el triángulo polar correspondiente será

$$cot\, r' = \frac{d'}{4\, sen\, \frac{1}{2}a'\, sen\, \frac{1}{2}b'\, sen\, \frac{1}{2}c'}$$

Pero r' es el complemento de ρ (*Estereom.* 43),

$d' = \delta$, $sen\frac{1}{2}a' = cos\frac{1}{2}\alpha$; etc. (51). Luego:

$$tang\,\rho = \frac{\delta}{4\,cos\frac{1}{2}\alpha\;cos\frac{1}{2}\beta\;cos\frac{1}{2}\gamma}$$

Para los rádios de los círculos, circunscritos é inscritos, respecto de los triángulos adyacentes al propuesto, se encuentran ecuaciones análogas considerando las relaciones de los lados y los ángulos de aquellos triángulos con los lados y los ángulos de éste; de las cuales se deducen luégo las que existen entre los rádios de los expresados círculos.

53. Objeto han sido de especial estudio las funciones de la suma $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, mediante la cual se determina el *área del triángulo esférico,* cuyos ángulos son α, β y γ *(Estereom.* 30). Empleando la notacion que ántes, desde luego podemos demostrar que subsiste la ecuacion (*)

$$-\,cos\,\sigma = \frac{d}{4\,cos\frac{1}{2}a\;cos\frac{1}{2}b\;cos\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2}\delta\,tang\,r.$$

En efecto, designando por a, b, c y α, β, γ, los lados y los ángulos del triángulo ABC (de la figura precedente), tenemos:

$$2OAB + 2OBC_1 + 2OC_1A = 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + \gamma$$
$$2OBC_1 + 2OC_1A = 2\gamma$$
$$OAB = 180^\circ - \sigma.$$

En el triángulo OAR es (44-*Obs.).*

(*) Lexell *(l. c. p.* 68.)

$$\cos OAR = \frac{\operatorname{tang} AR}{\operatorname{tang} OA}$$

y, por otra parte (52):

$$\cot OA = \frac{\operatorname{sen} BC_1 \operatorname{sen} C_1 A \operatorname{sen} BC_1 A}{4 \operatorname{sen}\frac{1}{2} BC_1 \operatorname{sen}\frac{1}{2} C_1 A \operatorname{sen} AR}$$

$$= \frac{d}{4 \cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \operatorname{sen}\frac{1}{2}c}$$

Luego:

$$-\cos\sigma = \frac{d}{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}$$

Y segun (51):

$$-\cos\sigma \cot r = \frac{d^2}{2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{1}{2}\delta$$

54. Para $\operatorname{sen}\sigma$, $-\cot\sigma$ y $-\operatorname{tang}\sigma$ se obtienen las notables expresiones siguientes (*):

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b + \operatorname{sen}\frac{1}{2}a \operatorname{sen}\frac{1}{2}b \cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}$$

(*) La primera ecuacion se enlaza con la última que fué dada por LAGRANGE (*l. c. p.* 278) y LEGENDRE (*Géom. Note* 10). Las otras son de EULER (*Acta Petrop.* 1778, *II*, *p.* 31. *Nova Acta* 10 *p.* 47).

$$= \frac{\cos^2\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}c - 1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$-\cot\sigma = \frac{d}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

$$-\tang\sigma = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b + \cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}$$

DEMOSTRACION. En los triángulos OAR y CDE tenemos:

$$\cos AR \operatorname{sen} OAR = \cos ROA \text{ (44-Obs.)}$$

$$\cos ROA = \cos DE = \cos EC \cos CD + \operatorname{sen} EC$$
$$\operatorname{sen} CD \cos DCE \text{ (46)}$$

é introduciendo en estas fórmulas los valores conocidos (53):

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}$$

El numerador de este quebrado, multiplicado por $4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, se convierte en

$$4\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos\gamma$$
$$= (1 + \cos a)(1 + \cos b) + \cos c - \cos a \cos b$$
$$= 1 + \cos a + \cos b + \cos c$$
$$= 1 + \cos a + 1 + \cos b + 1 + \cos c - 2$$
$$= 2\cos^2\frac{1}{2}a + 2\cos^2\frac{1}{2}b + 2\cos^2\frac{1}{2}c - 2$$

Mediante estas expresiones se obtienen inmediatamente los valores, segundo y tercero, de *sen* σ.

La segunda expresion de *sen* σ puede tambien deducirse de la correspondiente a' — *cos* σ (53). Puesto que:

$$sen^2 \sigma = 1 - cos^2 \sigma = \frac{(4 cos\frac{1}{2}a\, cos\frac{1}{2}b\, cos\frac{1}{2}c)^2 - d^2}{(4 cos\frac{1}{2}a\, cos\frac{1}{2}b\, cos\frac{1}{2}c)^2}$$

$$(4 cos\frac{1}{2}a\, cos\frac{1}{2}b\, cos\frac{1}{2}c)^2 = 2(1 + cos\, a)(1 + cos\, b)(1 + cos\, c)$$

$$d^2 = 1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2 cos\, a\, cos\, b\, cos\, c$$

Y, por consecuencia, el numerador del último quebrado tomará el valor $(1 + cos\, a + cos\, b + cos\, c)^2$. Et cætera.

La tercera expresion de *sen* σ puede hallarse tambien directamente empleando para el cálculo de $cos\, ROA$ el triángulo plano, formado por las cuerdas f, g y h de los arcos BC_1, C_1A y AB. (*). Designando, en efecto, por O' la proyeccion normal del centro O sobre el plano ABC_1, el ángulo $BO'A$ será una seccion normal del diedro que forman los planos de los círculos máximos OB y OA. Pero el ángulo central $BO'A$ es doble del periférico, formado por las cuerdas f y g, que es, por lo tanto, igual al ROA. Luego (35):

$$cos\, ROA = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$$

(*) Gudermann 152. Schulz (*Sphärik II*, 79).

Y como:

$$f = 2 sen \tfrac{1}{2} B C_1 = 2 cos \tfrac{1}{2} a,\ g = 2 sen \tfrac{1}{2} C_1 A$$

$$= 2 cos \tfrac{1}{2} b,\quad h = 2 sen \tfrac{1}{2} c$$

será

$$cos A R\, sen\, O A R = cos R O A = \frac{cos^2 \tfrac{1}{2} a + cos^2 \tfrac{1}{2} b - sen^2 \tfrac{1}{2} c}{2 cos \tfrac{1}{2} a\, cos \tfrac{1}{2} b}$$

Para hallar ahora el valor de $-cot\,\sigma$ se divide $-cos\,\sigma$ (53) por la segunda expresion de $sen\,\sigma$.

Y, últimamente, se obtiene el valor de $-tang\,\sigma$, dividiendo la primera expresion de $sen\,\sigma$ por

$$-cos\,\sigma = \frac{sen\,a\, sen\,b\, sen\,\gamma}{4 cos \tfrac{1}{2} a\, cos \tfrac{1}{2} b\, cos \tfrac{1}{2} c} = \frac{sen \tfrac{1}{2} a\, sen \tfrac{1}{2} b\, sen\,\gamma}{cos \tfrac{1}{1} c}$$

Observacion. Del valor de $-tang\,\sigma$ se deduce lo siguiente:

Si en un triángulo esférico permanecen invariables un ángulo y el producto de las cotangentes (ó de las tangentes) de los semilados que incluyen dicho ángulo, la suma de los otros dos ángulos, y, por lo tanto, el área del triángulo, tambien permanece invariable. Y cuando un lado y el producto de las tangentes de los semiángulos adyacentes no varien, el perímetro del triángulo esférico tampoco variará.

55. De las funciones de σ encontradas antes, todavía se deduce esta otra:

$$tang^2 \tfrac{1}{2} (\sigma - 90^o)$$

$$= tang\tfrac{1}{2}s\ tang\tfrac{1}{2}(s-a)\ tang\tfrac{1}{2}(s-b)\ tang\tfrac{1}{2}(s-c)$$

cuando $a+b+c=2s$ (*).

Demostracion. Segun la tercera expresion de $sen\,\sigma$ (54) es

$$1-sen\,\sigma=\frac{1-cos^2\frac{1}{2}a-cos^2\frac{1}{2}b-cos^2\frac{1}{2}c+2cos\frac{1}{2}a\,cos\frac{1}{2}b\,cos\frac{1}{2}c}{2\,cos\frac{1}{2}a\ cos\frac{1}{2}b\ cos\frac{1}{2}c}$$

El numerador de este quebrado tiene el valor (51)

$$4\,sen\tfrac{1}{2}s\ sen\tfrac{1}{2}(s-a)\ sen\tfrac{1}{2}(s-b)\ sen\tfrac{1}{2}(s-c)$$

Por otra parte es (53)

$$-cos\,\sigma=\frac{\frac{1}{2}d}{2cos\frac{1}{2}a\ cos\frac{1}{2}b\,cos\frac{1}{2}c}$$

Y de consiguiente:

$$\frac{1-sen\,\sigma}{-cos\,\sigma}=\frac{4sen\frac{1}{2}s\ sen\frac{1}{2}(s-a)\ sen\frac{1}{2}(s-b)\ sen\frac{1}{2}s(-c)}{\sqrt{\{sen\,s\ sen(s-a)\ sen(s-b)\ sen(s-c)\}}}$$

Ahora bien:

$$1-sen\,\sigma=1-cos(\sigma-90^\circ)=2sen^2\tfrac{1}{2}(\sigma-90^\circ)$$

(*) L'Huilier segun dice Legendre (*Géom. Note* 10). Esta fórmula es un caso particular de la que Lexell (*l. c., p.* 88) habia desarrollado para la suma de los ángulos de un cuadrángulo esférico, inscrito en un círculo.

$$-\cos\sigma = \operatorname{sen}(\sigma - 90^\circ) = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^\circ)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^\circ)$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}s}{\operatorname{sen} s} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}s}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}s} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s, \text{ etc.}$$

Y mediante esta sustitucion se obtiene el valor escrito de

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^\circ).$$

Observacion. A las fórmulas desarrolladas corresponden las que sirven para calcular el perímetro de un triángulo esférico, dados los tres ángulos, ó un lado y los dos ángulos adyacentes. Fórmulas semejantes existen tambien para $\sigma-\alpha$, $\sigma-\beta$, $\sigma-\gamma$, por una parte, y para $s-a$, $s-b$, $s-c$, por otra. Véanse: Lexell *(l. c.)*; Schulz *(II*, 34 *y sig.)*; Gudermann (132 *y sig.*)

56. Si por un punto dado, S, de la esfera, se trazan círculos máximos que corten á un círculo dado de la misma en A y A', B y B',... los productos

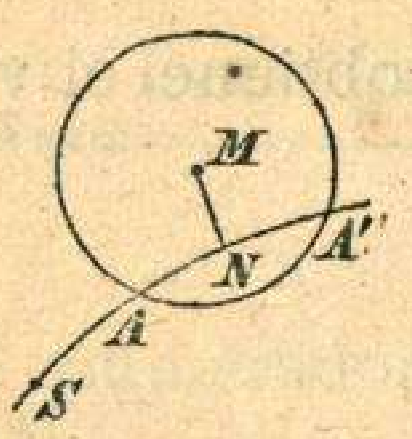
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SA\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SA', \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SB\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SB', \ldots$$

son de la misma magnitud; y este valor constante se llama *potencia esférica del punto S, respecto del círculo.* Si sobre un círculo máximo s, existen puntos desde los cuales parten tangentes esféricas, a y a', b y b',... á un círculo dado en la misma esfera, los cocientes

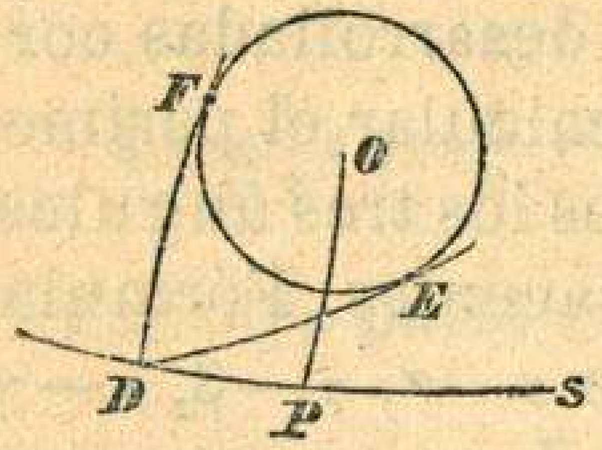
$$\frac{tang\frac{1}{2}s\,a}{tang\frac{1}{2}s\,a'},\quad \frac{tang\frac{1}{2}s\,b}{tang\frac{1}{2}s\,b'},\ldots$$

tienen igual valor (*)

DEMOSTRACION. Trazando desde el centro M el círculo máximo MN normal á SA, en los triángulos SMN y AMN tendremos (41):



$$\cos MN = \frac{\cos SM}{\cos SN} = \frac{\cos AM}{\cos AN}$$



y, por consecuencia:

$$\frac{\cos AN}{\cos SN} = \frac{\cos AM}{\cos SM}$$

$$\frac{\cos AN - \cos SN}{\cos AN + \cos SN} = \frac{\cos AM - \cos SM}{\cos AM + \cos SM}$$

Mas $SN + AN = SA'$, $SN - AN = SA$. Luego (33):

$$tang\tfrac{1}{2}SA\; tang\tfrac{1}{2}SA'$$

$$= tang\tfrac{1}{2}(SM - AM)\; tang\tfrac{1}{2}(SM + AM)$$

permanece constante para todo círculo máximo que pase por S y corte al círculo dado en A y A'.

La segunda parte se demuestra inmediatamente como sigue. Por el punto D del círculo máximo s

---

(*) LEXELL (*l. c. p.* 65). STEINER (*J. de Crelle A.* 2 *p.* 59). SCHULZ (*II,* 54). El teorema correlativo lo añadió GUDERMANN (*Nied. Sphärit,* 296).

pasan las tangentes esféricas, DE y DF, al círculo (O). Trazando OP normal á s, en los triángulos ODE y ODP tenemos (44):

$$sen\,OD = \frac{sen\,EO}{sen\,EDO} = \frac{sen\,PO}{sen\,PDO}.$$

Y, de consiguiente:

$$\frac{sen\,PDO}{sen\,EDO} = \frac{sen\,PO}{sen\,EO}$$

$$\frac{sen\,PDO - sen\,EDO}{sen\,PDO + sen\,EDO} = \frac{sen\,PO - sen\,EO}{sen\,PO + sen\,EO}$$

Mas $PDO - EDO = sa$, $PDO + EDO = sa'$.

Luego

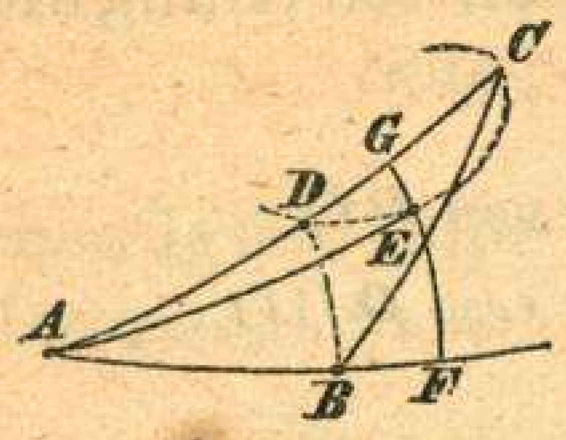
$$\frac{tang\frac{1}{2}s\,a}{tang\frac{1}{2}s\,a'} = \frac{tang\frac{1}{2}(PO - EO)}{tang\frac{1}{2}(PO + EO)}$$

conserva el mismo valor para todo punto del círculo máximo s, del cual partan las tangentes esféricas, a y a', al círculo dado.

Observacion. Por el mismo procedimiento se halla que $cos\,AU : cos\,BU = cos\,AV : cos\,BV$, siempre que UV sea normal á AB, y recíprocamente; y que los puntos de la esfera, con potencias iguales respecto de dos círculos, caen sobre un círculo máximo; etc. (*Planim.* 112, *Estereom.* 69, Gudermann, *l. c.* 308 *y sig.*).

Para construir el triángulo isósceles que tenga comunes con el triángulo esférico ABC, el ángulo

A y el área, hagamos $AD = AB$ sobre el lado AC; por C y D trázese un círculo cualquiera, luego su tangente esférica AE; y, por último, tómese $AF = AG = AE$. Con estos datos resulta:



$$tang\tfrac{1}{2}AF\,tang\tfrac{1}{2}AG = tang^2\tfrac{1}{2}AE$$

$$= tang\,\tfrac{1}{2}AD\,tang\,\tfrac{1}{2}AC = tang\,\tfrac{1}{2}AB\,tan\tfrac{1}{2}AC$$

Y, por consecuencia (54-*Obs.*) el área $AFG = ABC$.

57. Designando por F el punto medio del lado CA en el triángulo ABC, es

$$cos\,AB + cos\,BC = 2cos\tfrac{1}{2}CA\;cos\,FB.$$

Y, si f es el círculo máximo, bisector del ángulo ca, que forman dos de los círculos máximos a, b y c, tendremos (*):

$$cos\,ab + cos\,bc = 2cos\tfrac{1}{2}c\,a\;cos\,fb$$

Demostracion. Trazando el círculo máximo BN, normal á CA, en los triángulos rectángulos ABN y BCN tenemos:

$$cos\,AB = cos\,BN\,cos\,NA\,,\quad cos\,BC = cos\,CN\,cos\,BN,$$

$$cos\,AB + cos\,BC = cos\,BN\,(cos\,CN + cos\,NA)$$

(*) Gudermann (*l. c.*, 400), (*Planim.* 128).

Mas $\cos CN + \cos NA = 2\cos CF \cos FN$ (33), y $\cos FN \cos BN = \cos FB$ (41). Luego:

$$\cos AB + \cos BC = 2\cos CF \cos FB$$

Para demostrar directamente el teorema correlativo, por el punto comun B, de los círculos máximos c y a, trázese el círculo máximo n que corte normalmente en N al círculo máximo b. En el supuesto de ser $sen\, bn = 1$, tenemos (44):

$$\cos ab = \cos BN\, sen\, an, \quad \cos bc = \cos BN\, sen\, cn$$
$$\cos ab + \cos bc = \cos BN\,(sen\, an + sen\, cn)$$

Mas $sen\, an + sen\, cn = 2\, sen\, fn \cos cf$, y $\cos BN\, sen\, fn = \cos fb$.

Luego, etc.

Aplicacion. Si señalamos los puntos medios de los arcos opuestos BC y DA, CA y DB, AB y DC, del cuadrángulo esférico $ABCD$, por E y E_1, F y F_1, G y G_1 respectivamente, se verificarán las ecuaciones:

$$\cos AB + \cos BC = 2\cos\tfrac{1}{2} CA \cos FB$$
$$\cos CD + \cos DA = 2\cos\tfrac{1}{2} CA \cos FD$$

Ahora bien: $\cos FB + \cos FD = 2\cos\tfrac{1}{2} DB \cos FF_1$. Luego (*):

$$\cos AB + \cos BC + \cos CD + \cos DA$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2} CA \cos\tfrac{1}{2} DB \cos FF_1$$

(*) Steiner (*J. de Crelle t. 2 p.* 292). Gudermann (*l. c.*) *Planimetría* 130.

Para los cuadrángulos *BCDA* y *CABD* se encuentran del mismo modo las expresiones:

$$\cos BC + \cos CA + \cos AD + \cos DB$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}AB\cos\tfrac{1}{2}DC\cos GG_1$$
$$\cos CA + \cos AB + \cos BD + \cos DC$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}BC\cos\tfrac{1}{2}DA\cos EE_1$$

Y, si en los círculos máximos a, b, c y d suponemos que los ángulos ca y db son bisecados por los círculos máximos f y f_1, análogamente encontraremos:

$$\cos ab + \cos bc + \cos cd + \cos da = 4\cos\tfrac{1}{2}ca\cos\tfrac{1}{2}db\cos ff_1$$

Y así sucesivamente.

58. Segun la hipótesis de la *Geometría vulgar*, la esfera se confunde con uno de sus planos tangentes; y una figura esférica, con su proyeccion normal sobre este plano; cuando el rádio del punto de contacto se supone infinitamente grande. Puesto que los rádios que tienen por punto comun el centro de la esfera, infinitamente distante, llegan á ser paralelos, y normales por añadidura al plano con el que se confundió la esfera. Y los arcos de círculos máximos vienen á confundirse tambien con sus cuerdas y con sus proyecciones normales sobre el expresado plano.

Si consideramos una figura esférica sobre una esfera, cuyo rádio contenga r unidades, y sentamos que los arcos de los círculos máximos de aquella figura comprendan a, b, c... unidades respectivamente, los ángulos centrales correspondientes (sus arcos, *Planim.* 108) serán expresados por los cocientes $a : r$, $b : r$, $c : r$,... Ahora bien, cuanto mayor sea r, tanto más menguarán los arcos ó cocientes expresados, y se aproximarán $sen\,(a : r)$ y $tang\,(a : r)$ al valor $a : r$ (25); al paso que $cos\,(a : r)$ propenderá á confundirse con $1 - a^2 : 2r^2$; por ser (32)

$$cos\frac{a}{r} = 1 - 2sen^2\frac{a}{2r},$$

y aproximarse indefinidamente $sen^2\frac{a}{2r}$ al valor $\frac{a^2}{4r^2}$.

Con la sustitucion expresada, de toda ecuacion trigonométrica entre los elementos de una figura esférica puede deducirse la ecuacion para los elementos correspondientes de la figura plana, con la cual coincide la esférica, en el supuesto de crecer indefinidamente el rádio de la esfera (*). Designando, *v. gr.*, por α, β y γ los ángulos de un triángulo esférico; por a, b y c las longitudes de los lados opuestos; y por r, la del rádio de la esfera, tendremos (48):

$$sen\frac{b}{r}sen\frac{c}{r}cos\,\alpha = cos\frac{a}{r} - cos\frac{b}{r}cos\frac{c}{r}$$

Mediante la sustitucion de $sen\frac{a}{r}$ y $cos\frac{a}{r}$ etc. por sus valores, cuando r aumenta se convierte la última ecuacion en la siguiente:

$$\frac{bc}{r^2}cos\,\alpha = 1 - \frac{a^2}{2r^2} - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right)$$

(*) Lagrange *(l. c. p. 291)*. Euler *(Acta Pretrop. 1778, II p. 33)*.

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}-\frac{b^2c^2}{4r^2}$$

$$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2-\frac{b^2c^2}{2r^2}$$

Y esta ecuacion, cuando $r=\infty$, coincide con la deducida (35), cuya expresion es $2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$. De la ecuacion esférica (48):

$$\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma-\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\frac{a}{r}=0,$$

por el mismo procedimiento, se halla para el triángulo plano esta otra:

$$\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)=0$$

de acuerdo con el teorema relativo al triángulo plano, expresado por la igualdad $\alpha+\beta+\gamma=180.^\circ$ Etc.

59. Si las razones de los lados de un triángulo esférico con el rádio de la esfera son muy pequeñas, el área de dicho triángulo (y su exceso, *Estereom.* 36) podrá calcularse como la del triángulo plano, formado por los mismos elementos. Mas los ángulos del triángulo esférico sobrepujarán cada uno en la tercera parte del exceso á los ángulos del triángulo plano que tenga sus lados respectivamente iguales á los de aquél (*).

Demostracion.—Si el arco $\frac{x}{r}$ es pequeño, pueden

(*) Legendre (*Mém. de Paris* 1787, *p.* 338; y *Trigon. Append. V*); Lagrange (*J. de l'École polyt. Cah.* 6 *p.* 293); Gauss (*Disq. gener. circa superficies curvas. Comm. Gotting. VI*, 1827); Crelle (*J.* 22, *p.* 96); Merten (*Schlömilch Zeitschrift* 1875, *t.* 20, *p.* 248).

tomarse *(Aritm. univ.* 189) para su coseno y su seno los valores

$$\cos\frac{x}{r} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{x^4}{24r^4} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{x}{r} = \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3}$$

Y sustituyendo estos valores en la ecuacion (58)

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\operatorname{sen}\frac{b}{r}\operatorname{sen}\frac{c}{r}}.$$

se obtiene un quebrado, cuyo numerador es

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} - \frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4}$$

y cuyo denominador es

$$\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$$

Ahora bien, con suficiente aproximacion podemos hacer

$$\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}} = 1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$$

Y, en consecuencia:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{24bcr^2}$$

Si designamos por α', β' y γ' los ángulos, y por Δ

el área del triángulo plano, cuyos lados tienen tambien las longitudes a, b y c, serán (14):

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha'$$

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4=4b^2c^2 \operatorname{sen}^2 a'=16\,\Delta^2$$

Y por sustitucion de estos valores se obtiene:

$$\cos\alpha=\cos\alpha'-\frac{bc\operatorname{sen}^2\alpha'}{6r^2}=\cos\alpha'-\frac{\Delta}{3r^2}\operatorname{sen}\alpha'$$

El número $\Delta : 3r^2$ expresa el arco correspondiente al ángulo céntrico $(\Delta : 3r^2)(180^\circ : \pi)$ cuya magnitud es tan pequeña que su seno no difiere apénas de $\Delta : 3r^2$, ni su coseno de 1; y, por lo tanto (32):

$$\cos\alpha=\cos\left(\alpha'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^\circ}{\pi}\right),\quad \alpha=\alpha'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^\circ}{\pi}$$

Por iguales consideraciones se hallan:

$$\beta=\beta'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^\circ}{\pi}\qquad \text{y} \qquad \gamma=\gamma'+\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^\circ}{\pi}$$

Y, en suma:

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'+\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^\circ}{\pi}=180^\circ+\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^\circ}{\pi}$$

Lo cual significa que el exceso del triángulo esférico vale $\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^\circ}{\pi}$. Y efectivamente: un triángulo birectángulo de la esfera dada, cuyo tercer ángulo comprenda 180°, tiene una área de πr^2 unidades cuadradas (*Ester.* 129); y, por consecuencia, el triángulo esférico dado, cuyo exceso es $\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^\circ}{\pi}$, tendrá un área de Δ unidades cuadradas.

OBSERVACION.—Si, por ejemplo, son conocidos b, c y α, podremos calcular:

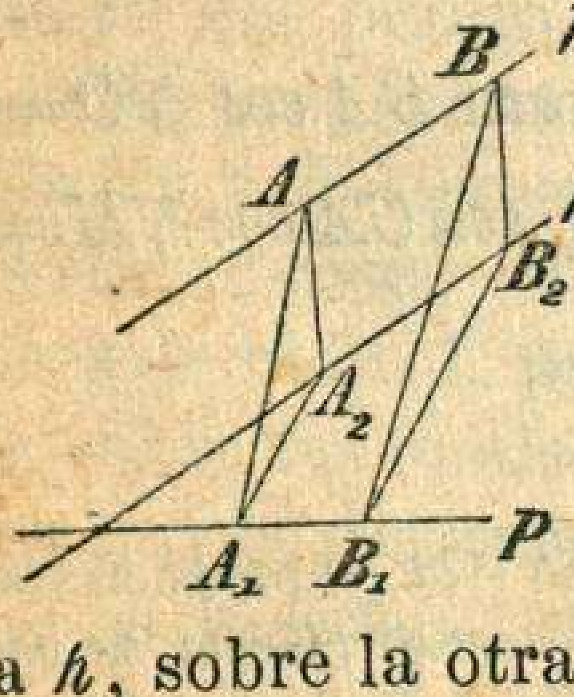
$$\Delta = \frac{1}{2} bc\, sen\, \alpha, \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{r^2}\frac{180^\circ}{\pi} \quad \text{y} \quad \alpha' = \alpha - \frac{1}{3}\varepsilon.$$

De los elementos b, c y α' pueden deducirse, segun las reglas de la Trigonometría plana, los elementos β', γ' y a. Y entónces:

$$\beta = \beta' + \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{y} \quad \gamma = \gamma' + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

VI.—Poligonometría y poliedrometría.

60. Si las rectas h y p no están sobre un mismo plano, y se proyecta el segmento AB de la recta h sobre el plano que contiene á la otra recta p y es paralelo á la primera h, por las normales á este plano A_2A y B_2B, el cuadrilátero $AA_2\ B_2B$ es un rectángulo. Proyectando el segmento A_2B_2 de la recta h', paralela á la recta h, sobre la otra recta p, mediante las normales A_1A_2 y B_1B_2, los planos AA_1A_2 y BB_1B_2 y las rectas AA_1 y BB_1 serán normales á p; y el segmento A_1B_1, la proyeccion normal del AB sobre aquella



recta p. Ahora bien: $A_2B_2 = AB$ y $ph' = ph$; y, por lo tanto (27):

$$A_1B_1 = A_2B_2 \cos ph' = AB \cos ph$$

Las ecuaciones (30 y 31):

$$BC \cos pf + CA \cos pg + AB \cos ph = 0$$
$$\operatorname{sen} gh \cos pf + \operatorname{sen} hf \cos pg + \operatorname{sen} fg \cos ph = 0$$

se verifican, por consecuencia, áun cuando la recta p no se halle sobre el plano ABC. Si OF, OG, OH y OP son rádios de una esfera, iguales á la unidad de longitud, y tienen las mismas direcciones positivas que las rectas f, g, h y p, la ecuacion (*)

$$\operatorname{sen} GH \cos PF + \operatorname{sen} HF \cos PG + \operatorname{sen} FG \cos PH = 0$$

subsistirá para tres puntos F, G y H de un círculo máximo, y otro punto cualquiera, P, de la esfera. Aplicándola al triángulo esférico ABC, sobre cuyos lados CA y AB existen los cuadrantes AM y AN, hallamos:

$$\operatorname{sen} AN \cos BC + \operatorname{sen} NB \cos AC + \operatorname{sen} BA \cos NC = 0$$
$$\operatorname{sen} AM \cos NC + \operatorname{sen} MC \cos NA + \operatorname{sen} CA \cos NM = 0$$

Y para este caso:

(*) Esta relacion, que en la *Planimetría* (132) expresa el teorema de STEWART, fué investigada por CARNOT (*Géom. de pos.* 344) con auxilio del teorema esférico (46) y hallada por SCHULZ (*Sphärik II*, 49); pero MÖBIUS la repuso en su verdadero orígen, haciéndola fundamental en la Trigonometría esférica (Leccion en 1839. V. *Anal. Sphärik* 7).

$$\cos BC - \cos CA \cos AB - \operatorname{sen} AB \cos NM = 0$$

$$\cos NC + \operatorname{sen} CA \cos NM = 0$$

$$\cos BC - \cos CA \cos AB + \operatorname{sen} CA \operatorname{sen} AB \cos NM = 0$$

en conformidad con la ecuacion (48):

$$\cos a - \cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos a = 0.$$

61. Determinadas arbitrariamente las direcciones positivas de las n rectas que forman un polígono plano ó alabeado, supongamos que los lados AB, BC, CD,... de este polígono, tengan los valores respectivos a_1, a_2, a_3,... Designando por p una recta cualquiera, cuya direccion positiva se haya determinado tambien arbitrariamente, y por $\cos_{pi}$ el coseno del ángulo que con la recta p forma la recta sobre la cual está el lado i^o del polígono, que tiene el valor a_i, será (*):

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

Puesto que $a_i \cos_{pi}$ es la proyeccion normal del lado i^o del polígono sobre la recta p; y la suma de estas proyecciones normales ya sabemos que es nula (30 y *Estereom.* 132).

Aplicaciones. Trazando por el centro de una esfera de rádio 1, paralelas á la recta p, y á las rectas, sobre las cuales se hallan los lados del polígono y cuyas direcciones positivas corten en P, A_1, A_2,... á la esfera, el $\cos_{pi}$ será igual al coseno del

(*) Esta ley fundamental de la *Poligonometría* es de Lexell (1775 *Nov. Comm. Petrop.* 19, *p.* 187). Compárese: L'Huilier (*Poligon.* 1789) y Carnot (*Géom. de pos.* 254 y sig.)

arco de círculo máximo PA_i; y, por lo tanto (*):

$$a_1 \cos PA_1 + a_2 \cos PA_2 + \ldots + a_n \cos PA_n = 0$$

Esta ecuacion, en la que P representa un punto cualquiera de la esfera, enseña que el centro de gravedad de los puntos $a_1 . A_1$, $a_2 . A_2 \ldots a_n A_n$ cae sobre el centro O de la esfera. Trazando, en efecto, por los puntos $A_1, A_2, \ldots A_n$ paralelas con OP, que sean cortadas por el plano normal á OP, trazado por O, en los puntos $B_1, B_2, \ldots B_n$, será

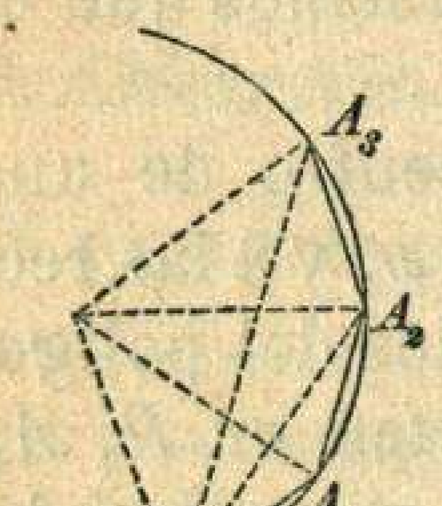
$$\cos PA_1 = B_1A_1, \qquad \cos PA_2 = B_2A_2, \ldots$$

Y, por consecuencia, para toda direccion de las paralelas que son cortadas normalmente por el plano que contiene el punto O, se verificará la ecuacion

$$a_1 . B_1A_1 + a_2 . B_2A_2 + \ldots + a_n . B_nA_n = 0$$

La cual expresa que el centro de gravedad del sistema dicho cae en O. *(Estereom.* 133.)

Si en un círculo, cuyo radio sea la unidad longitudinal, se trazan las cuerdas iguales AA_1, $A_1A_2, \ldots A_{n-1}A_n$, y designamos por α y $\alpha + \beta$ los ángulos que con una recta cualquiera p forman los segmentos AA_1 y A_1A_2, los segmentos $A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$ formarán con la misma recta p los ángulos $\alpha + 2\beta, \ldots \alpha + (n-1)\beta$; los ángu-



(*) El fundamento de la *Esférica analítica* de Möbius, 1846.— Véase el teorema de Steiner *(J. de Crelle A.* 2 *p* 291).

los A_1AA_2, A_2AA_3,... tendrán el valor comun $\frac{1}{2}\beta$; el ángulo A_1AA_n tendrá el valor $\frac{1}{2}(n-1)\beta$; y el segmento AA_n formará con p el ángulo $\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta$. Ahora bien, la suma de las proyecciones de AA_1, A_1A_2,... $A_{n-1}A_n$, sobre la recta p, es igual á la proyeccion del segmento AA_n sobre la misma recta. Mas estas proyecciones tienen los valores respectivos

$$AA_1 cos\,\alpha,\ AA_1 cos\,(\alpha+\beta),\ldots AA_1 cos\,[\alpha+(n-1)\beta],$$
$$AA_n cos\,[\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

y ademas (5):

$$AA_1=2sen\tfrac{1}{2}\beta,\qquad AA_n=2sen\tfrac{1}{2}n\beta$$

Luego sumando (*):

$$cos\,\alpha+cos\,(\alpha+\beta)+\ldots+cos\,[\alpha+(n-1)\beta]$$
$$=\frac{sen\frac{1}{2}n\beta}{sen\frac{1}{2}\beta}cos\,[\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

Y sustituyendo α por $\alpha+90°$:

$$sen\,\alpha+sen\,(\alpha+\beta)+\ldots+sen\,[\alpha+(n-1)\beta]$$
$$=\frac{sen\frac{1}{2}n\beta}{sen\frac{1}{2}\beta}sen\,[\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

(*) La expresion geométrica de esta sumacion se halla en *Arquímedes (Sph. et Cyl. I, 22 y 23)*.

Estas sumas pudieran tambien obtenerse reuniendo el primero y el último términos, el segundo con el penúltimo, etc. (33). EULER *(Introd. I,* 258).

62. La proyeccion normal de una figura plana sobre otro plano es el producto de la misma figura por el coseno del ángulo que forma su plano con el de proyeccion (*).

DEMOSTRACION. La proyeccion normal de la figura plana puede considerarse como la seccion normal de un prisma cuya base sea dicha figura; y, por lo tanto, la razon de la proyeccion con la figura proyectada es *(Estereom.* 103) la razon de la altura del prisma con una arista lateral. Pero la altura del prisma es la proyeccion normal de la arista lateral sobre una normal á la base, y la arista lateral es normal al plano de proyeccion. Luego la razon de la proyecion normal de la figura plana con esta misma es igual al coseno del ángulo que forman las normales á los dos planos, el de la figura y el de proyeccion, ó sea al coseno del ángulo diédrico que forman estos dos planos (*Estereom.* 14).

Para determinar el signo se fijarán primeramente las direcciones positivas de las normales á los planos, y después el sentido positivo de éstos, de modo que coincidan ó concuerden para observadores colocados sobre los mismos planos en situacion de que les parezcan las normales, dirigidas hácia arriba ó ascendentes (*Estereom.* 38). Por el perímetro de la figura dada se determina el de su proyeccion. Y así queda determinado sin ambigüedad, tanto el coseno del ángulo de los planos ó de sus normales

(*) EULER (*Introd. II, App.* 64).

respectivas, como el signo de cada una de las dos áreas, la de la figura y la de su proyeccion. Si para la normal á uno de los planos tomamos como positiva la direccion opuesta, y para el plano, por consecuencia, tambien como positivo el sentido opuesto, una área y el coseno cambiarán de signo.

Aplicacion. Supongamos una figura esférica, dada, dividida arbitrariamente en partes infinitamente pequeñas, una de las cuales, α, tenga su baricentro en A; que se proyecte aquella figura por normales sobre un círculo máximo; y que A_1 y α_1 representen las proyecciones de A y α; f, el área de la figura dada; f_1, el área de su proyeccion; O el centro de la esfera; y últimamente, h la altura del baricentro del área esférica sobre el plano del círculo máximo. El producto fh entónces es igual (*Estereom.* 142) á la suma de todos los productos $\alpha . A_1 A$. Pero sabemos que

$$A_1 A = OA . \cos OAA_1 = OA . \cos \alpha_1 \alpha$$
$$\alpha . A_1 A = OA . \alpha \cos \alpha_1 \alpha = OA . \alpha_1 ;$$

y que la suma de todos los productos $\alpha . A_1 A$, por lo tanto, es igual al producto de OA por la suma de todas las α_1. Luego $fh = OA . f_1$ y $h : OA = f_1 : f$. (*).

63. Cuando los perímetros de las n caras de un poliedro satisfacen á la ley de las aristas (*Estereom.* 113) y se fijan arbitrariamente los sentidos positivos de los n planos en que están las caras del poliedro, las áreas de estas caras tendrán valores

(*) Giulio (*J. de Liouville A.* 4 *p.* 386). Besgue (*J. de Liouville A.* 7 *p.* 516). (*J. de Crelle* A. 50 *p.* 322).

determinados sin ambigüedad, tales como $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Tomando ahora otro plano, cualquiera, cuyo sentido positivo se fija también arbitrariamente, y designando por cos_{pi} el coseno del ángulo que con este último plano forme el plano, en que está la superficie que tiene por valor α_i, se verificará la ecuacion

$$\alpha_1 cos_{p1} + \alpha_2 cos_{p2} + \ldots + \alpha_n cos_{pn} = 0$$

Ecuacion que expresa que la suma de las proyecciones normales sobre un plano cualquiera de las caras del poliedro desaparece ó se anula (*).

DEMOSTRACION. Sea, por ejemplo, $ABCD$ la primera cara del poliedro, y $BAE\ldots$, $CBF\ldots$, $DCG\ldots$, $ADH\ldots$, los perímetros determinados de las caras contíguas. Designando por $A_1B_1C_1D_1$, $B_1A_1E_1\ldots$ las proyecciones normales de aquellas caras, y por O un punto arbitrario del plano de proyeccion, tenemos *(Planim.* 77):

$$A_1B_1C_1D_1 = OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1D_1 + OD_1A_1$$

y así de las demas. Luego las suma de las proyecciones de todas las caras del poliedro será:

$$\begin{array}{l} A_1B_1C_1D_1 + B_1A_1E_1 \ldots + C_1B_1F_1 \ldots + \ldots \\ = OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1D_1 + OD_1A_1 \\ + OB_1A_1 + OA_1E_1 + \ldots + OC_1B_1 + OB_1F_1 + \ldots \\ \qquad + \ldots \qquad + \ldots \qquad\qquad + \ldots \end{array}$$

Y como esta suma, en la cual, segun la ley de las

(*) Lugares citados de L'HUILIER y CARNOT. Escrito del autor sobre las determinantes, § 17.

aristas, al lado de cada triángulo, como el OA_1B_1 se halla tambien su opuesto OB_1A_1, se anula ó desaparece; y $A_1B_1C_1D_1 = ABCD\cos_{p1}$, etc. (62); resulta que tambien desaparece la suma $\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots$

64. Determínense los sentidos positivos de los planos que contienen las caras de un poliedro, y juntamente las direcciones positivas de sus normales (62); y sobre estas normales constrúyanse segmentos, cuyos valores $a_1, a_2, \ldots a_n$ en magnitud y signo sean entre sí respectivamente como los valores $\alpha, \alpha_2, . \alpha_n$, de las áreas de las caras del poliedro. Todo sistema de semejantes segmentos es de tal suerte que, por traslaciones de éstos paralelamente á sí mismos, llega á formar un polígono cerrado. En efecto, de la ecuacion (63):

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$$

se deduce, segun la hipótesis establecida respecto de $a_1, a_2 \ldots a_n$, que

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

Esta última ecuacion expresa que la suma de las proyecciones normales de los segmentos tomados en las normales á las caras del poliedro, cuyos valores son $a_1, a_2 \ldots a_n$, sobre la normal á un plano cualquiera, se anula ó desaparece; y, por consecuencia (*Estereom.* 132), que es cerrado todo polígono formado por dichos segmentos, moviéndolos paralelamente á sí mismos.

Síguese de ésto que *á todo poliedro de* n *caras está subordinado ó corresponde un polígono de* n *lados;* y que de toda ecuacion entre los lados y los ángulos de este polígono surge otra ecuacion entre las caras y los ángulos diédricos del poliedro. La parte de la Poliedrometría que trata de las relaciones entre las caras y los ángulos diédricos de los poliedros, se halla, por lo tanto, contenida en aquella otra parte de la Poligonometría que comprende las relaciones entre los lados y los ángulos de los polígonos (*).

65. De la ecuacion (61)

$$a_1 cos_{p1} + a_2 cos_{p2} + \dots + a_n cos_{pn} = 0$$

haciendo coincidir sucesivamente la recta arbitraria p con los lados del polígono, se desprenden las siguientes:

$$a_1 + a_2 cos_{12} + \dots + a_n cos_{1n} = 0$$
$$a_1 cos_{21} + a_2 + \dots + a_n cos_{2n} = 0$$
$$\cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot$$
$$a_1 cos_{n1} + a_2 cos_{n2} + \dots . + a_n = 0$$

Multiplicando las ecuaciones de este sistema por $a_1, a_2, \dots a_n$ respectivamente, y tomando en cuenta que $cos_{ik} = cos_{ki}$, se hallan:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2cos_{12} + 2a_1a_3cos_{13} + \dots .$$
$$+ 2a_2a_3cos_{23} + \dots + \dots = 0$$

$$-a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_2a_3cos_{23} + 2a_2a_4cos_{24} + \dots -$$
$$+ 2a_3a_4cos_{34} + \dots + \dots = 0$$

(*) Determinantes—17, 2.

et cætera. (*). En un cuadrángulo (plano ó no plano) se tiene:

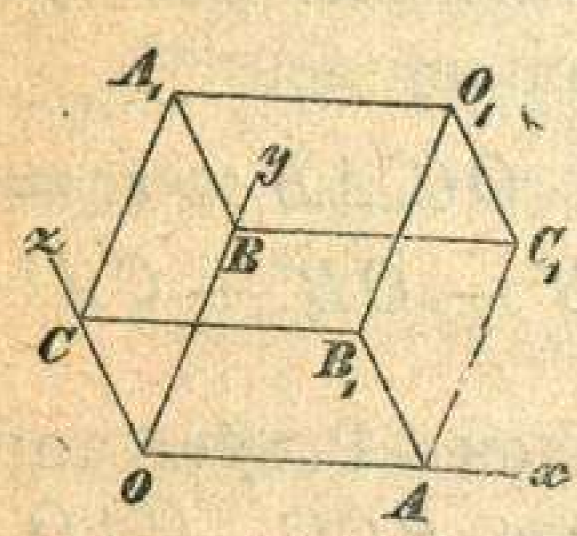
$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 cos_{12} + 2a_2 a_3 cos_{23} + 2a_3 a_1 cos_{31};$$

y análogamente, en un tetraedro (**):

$$\alpha_4^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 cos_{12} + 2\alpha_2 \alpha_3 cos_{23} + 2\alpha_3 \alpha_1 cos_{31}$$

En el supuesto de que los lados y las caras respectivas de las dos formas sean *partes positivas* de las rectas y los planos correspondientes en que están, la expresion cos_{12} será en las ecuaciones precedentes igual y de signo contrario al coseno del ángulo que formen ó incluyan los dos primeros lados ó las dos primeras caras; y así todas las demás (30).

OBSERVACION. Desígnense, en el paralelepípedo $OABC\ldots$, por x, y, z las rectas sobre las que se hallan las aristas OA, OB y OC cuyas longitudes son a, b y c; y fíjense arbitrariamente sus direcciones positivas. En el cuadrángulo OAB_1O_1 se verifica la ecuacion:



$$OO_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$+ 2ab\, cos\, xy + 2bc\, cos\, yz + 2ca\, cos\, zx$$

De esta ecuacion se deduce el valor de AA_1^2, cambiando a en $-a$; el de BB_1^2, cambiando b en $-b$; y el de CC_1^2, cambiando c en $-c$. Y de este modo (***):

(*) L'HUILIER y CARNOT (lugares citados).
(**) LAGRANGE (*Pyram. 12. Mém. de Berlin* 1773).
(***) LEGENDRE (*Géom. Note V*).

$$OO_1^2 + AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = 4\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

(Planim. 129).

Designando ahora por φ, χ y ψ los planos OBC, OCA y OAB, en que están las caras BOC, COA y AOB cuyas áreas son α, β y γ, y fijando arbitrariamente sus sentidos positivos, en el tetraedro $OABC$ tenemos (*).

$$ABC^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\cos\varphi\chi + 2\beta\gamma\cos\chi\psi + 2\gamma\alpha\cos\psi\varphi$$

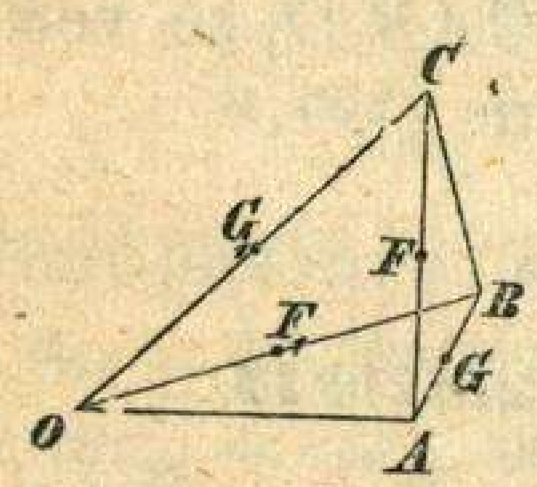
De esta ecuacion se deduce $B_1C_1O^2$ por el cambio de α en $-\alpha$; $C_1A_1O^2$, por el cambio de β en $-\beta$; $A_1B_1O^2$, por el cambio de γ en $-\gamma$. Y así resulta:

$$ABC^2 + B_1C_1O^2 + C_1A_1O^2 + A_1B_1O^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

66. Si en el cuadrángulo $OABC$ (plano ó no plano) se designan por x, y, z, a, b y c las rectas sobre las que se hallan los segmentos OA, OB, OC, BC, CA y AB, se verifican las ecuaciones (**)

$$OA.BC\cos xa + OB.CA\cos yb + OC.AB\cos zc = 0$$

$$2OA.BC\cos xa = OC^2 + AB^2 - OB^2 - CA^2$$



Demostracion. Proyectando los perímetros BCO, CAO y ABO sobre las rectas x, y, z respectivamente, se obtienen las ecuaciones :

$$BC\cos xa + CO\cos zx + OB\cos xy = 0$$

$$CA\cos yb + AO\cos xy + OC\cos yz = 0$$

$$AB\cos zc + BO\cos yz + OA\cos zx = 0$$

(*) Lagrange *(l. c.)*

(**) Carnot *(Mém. sur la relation qui existe...*

Multiplicando la primera por OA, la segunda por OB y la tercera por OC, y sumándolas luégo, se halla la primera de las que deseamos demostrar, en atencion á que $OA.COcoszx + OC.OAcoszx = 0$; et cætera. De las ecuaciones (35)

$$2OA.BCcosxa + 2CO.OAcos zx + OA.OBcosxy = 0$$

$$2CO.OAcos zx + CO^2 + OA^2 - CA^2 = 0$$

$$2AO.OBcos xy + AO^2 + OB^2 - AB^2 = 0$$

se desprende la segunda de las enunciadas.

La primera enseña que z y c deben ser normales entre sí, cuando lo sean x y a, como tambien y y b. (*Planim.* 49 y *Estereom.* 81).

Adicion. Si F, G, F_1 y G_1 son los puntos medios de CA, AB, OB y OC, las rectas FG y F_1G_1 serán paralelas con a; las rectas FG_1 y F_1G, paralelas con x; y el segmento $F_1G_1 = -FG = -\frac{1}{2}BC$; et cætera. Segun esto:

$$2GF.FG_1 cos xa + GF^2 + FG_1^2 = GG_1^2$$

$$2FG_1.G_1F_1 cos xa + FG_1^2 + G_1F_1^2 = FF_1^2$$

y, por lo tanto:

$$OA.BCcosxa = 4GF.FG_1cosxa = GG_1^2 - FF_1^2.$$

Y así de los demás.

Aplicacion. En la hipótesis de que los puntos A', B' y C' caigan sobre las rectas BC, CA y AB; y los segmentos $A'A$, $B'B$ y $C'C$, sobre las rectas a' b' y c', al lado de la ecuacion

$$2BC.A'A cos aa' = BA^2 - CA^2 + CA'^2 - BA'^2$$

subsistirá esta otra: $2BC.A'A\, sen\, a a' = 4\Delta$ (7). De las que resulta:

$$4\Delta \cot aa' = BA^2 - CA^2 + CA'^2 - BA'^2$$

y las análogas. Y sumándolas despues, la siguiente:

$$4\Delta(\cot aa' + \cot bb' + \cot cc')$$
$$= CA'^2 - BA'^2 + AB'^2 - CB'^2 + BC'^2 - AC'^2$$

Si las normales á las BC, CA y AB en sus puntos A', B' y C' se encuentran en un mismo punto, el segundo miembro de la última ecuacion se anula (*Planim.* 112); y tambien, en consecuencia, la suma de las cotangentes (19).

Si el punto C'' cae sobre AB de modo que las normales á las rectas BC, CA y AB en sus puntos A', B' y C'' tengan un punto comun, será

$$0 = CA'^2 - BA'^2 + AB'^2 - CB'^2 + BC''^2 - AC''^2$$

Restando esta ecuacion de la anterior se obtiene esta otra:

$$4\Delta(\cot aa' + \cot bb' + \cot cc')$$
$$= BC'^2 - AC'^2 - BC''^2 + AC''^2 = 2AB.C'C''$$

y haciendo $2\Delta = AB.\, h$,

$$\cot aa' + \cot bb' + \cot cc' = C'C'' : h.$$

67. Representando por x, y, z, a, b y c los círculos máximos en que se hallan los arcos OA, OB, OC, BC, CA y AB, en el cuadrángulo esférico $OABC$, se verificarán las ecuaciones (*):

(*) La primera es de Gauss (*Disq. gener. circa superficies*, 2 *VI*). Véanse Staudt (*J. de Crelle, A.* 24 *p.* 252) y (*la Teoría de las*

$$sen\,OA\,sen\,BC\,cos\,xa = cos\,OB\,cos\,CA - cos\,OC\,cos\,AB$$

$$sen\,OA\,sen\,BC\,cos\,xa + sen\,OB\,sen\,CA\,cos\,yb + sen\,OC\,sen\,AB\,cos\,zc = 0.$$

Demostracion. Si E es un punto de interseccion de los círculos máximos x y a, tenemos (46):

$$\begin{aligned} cos\,OB &= cos\,BE\,cos\,EO - sen\,BE\,sen\,EO\,cos\,xa \\ cos\,CA &= cos\,CE\,cos\,EA - sen\,CE\,sen\,EA\,cos\,xa \\ cos\,OC &= cos\,CE\,cos\,EO - sen\,CE\,sen\,EO\,cos\,xa \\ cos\,AB &= cos\,BE\,cos\,EA - sen\,BE\,sen\,EA\,cos\,xa \end{aligned}$$

En la fórmula $cos\,OB\,cos\,CA - cos\,OC\,cos\,AB$ quedan los productos que contienen el factor $cos\,xa$ solamente. Ahora bien:

$$\begin{aligned} &- sen\,CE\,cos\,BE\,(sen\,EA\,cos\,EO - cos\,EA\,sen\,EO) \\ &+ cos\,CE\,sen\,BE\,(sen\,EA\,cos\,EO - cos\,EA\,sen\,EO) \\ &= sen\,(EA - EO)\,sen\,(BE - CE) = sen\,OA\,sen\,BC \end{aligned}$$

Y, por consecuencia, etc. De las ecuaciones

$$\begin{aligned} sen\,OA\,sen\,BC\,cos\,xa &= cos\,OB\,cos\,CA - cos\,OC\,cos\,AB \\ sen\,OB\,sen\,CA\,cos\,yb &= cos\,OC\,cos\,AB - cos\,OA\,cos\,BC \\ sen\,OC\,sen\,AB\,cos\,zc &= cos\,OA\,cos\,BC - cos\,OB\,cos\,CA \end{aligned}$$

se obtiene por adicion la otra de las ecuaciones establecidas.

Determ. del autor § 16. 4). La otra ecuacion fué añadida por Joachimsthal (*J. de Crelle A.* 40, *p.* 45.) De la dependencia entre estas ecuaciones esféricas y las poligonométricas anteriores se trata después (74).

68. La condicion, bajo la cual puede ser satisfecho el sistema de ecuaciones lineales (65)

$$
\begin{array}{l}
a_1 + a_2 \cos_{12} + \ldots + a_n \cos_{1n} = 0 \\
a_1 \cos_{21} + a_2 + \ldots + a_n \cos_{2n} = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_1 \cos_{n1} + a_2 \cos_{n2} + \ldots + a_n = 0
\end{array}
$$

para valores no evanescentes de a_1, $a_2 \ldots$, es la ecuacion entre los cosenos de los ángulos de n rectas (ó planos) sobre las cuales se toman los lados (ó caras) de un polígono (ó poliedro). Escribamos esta ecuacion de condicion en la forma más sencilla que es la de una determinante (*Álgebra*, 35):

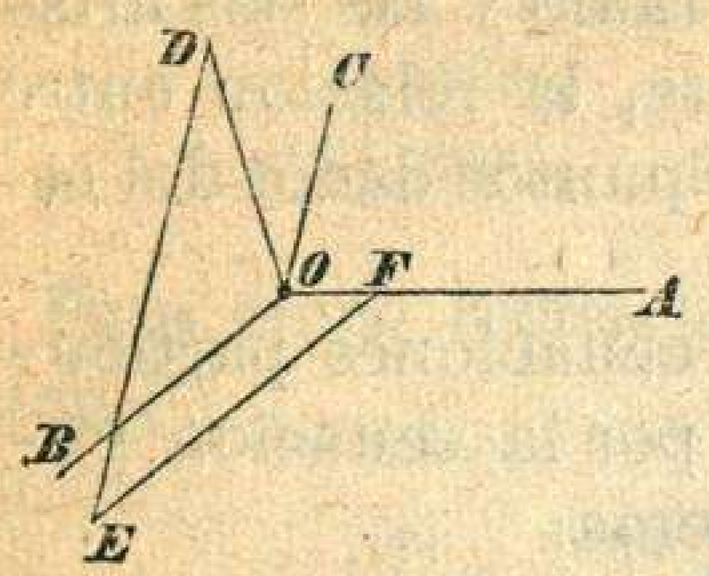
$$
\begin{vmatrix}
1 & \cos_{12} & \ldots & \cos_{1n} \\
\cos_{21} & 1 & \ldots & \cos_{2n} \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\
\cos_{n1} & \cos_{n2} & \ldots & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

Tres rectas, paralelas á un plano, son paralelas á los lados de un triángulo; y por consecuencia, para los ángulos de tres rectas que sean paralelas á un plano se verificará la ecuacion

$$
\begin{vmatrix}
1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\
\cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\
\cos_{13} & \cos_{23} & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

que coincide con la desarrollada ántes (36).

Cuatro rectas, en las que no hay tres paralelas á un plano, son paralelas á los lados de un cuadrilátero alabeado; porque son normales á cuatro planos que pueden formar un tetraedro. Para construir semejante cuadrilátero trázense por el punto arbitrario O las rectas OA, OB, OC y OD paralelas con las rectas dadas. Si el plano AOB es cortado en E por la recta paralela á la OC, que pasa por D; y la recta OA es cortada en F por la recta paralela á la OB, que pasa por E; la figura $ODEF$ es un cuadrilátero alabeado cuyos lados son paralelos á las rectas dadas. Y, por lo tanto, para los ángulos de cuatro rectas, entre las que no haya tres paralelas á un plano, se verificará la ecuacion (*):



$$\begin{vmatrix} 1 & cos_{12} & cos_{13} & cos_{14} \\ cos_{12} & 1 & cos_{23} & cos_{24} \\ cos_{13} & cos_{23} & 1 & cos_{34} \\ cos_{14} & cos_{24} & cos_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuacion subsiste para los ángulos diédricos de cuatro planos entre los cuales no haya tres paralelos á una recta; y contiene, por consecuencia, la relacion que existe entre los ángulos diédricos de un tetraedro, y la subsistente entre los lados y las diagonales de un cuadrilátero esférico.

De la misma se deduce la ecuacion entre el rádio de la esfera circunscrita á un tetraedro y las caras

(*) Carnot (*Géom. de pos.* 350).

y las aristas de un vértice del mismo; como tambien la que existe entre dicho rádio y las seis aristas del tetraedro; y, finalmente, la relacion entre los segmentos que unen cinco puntos dados del espacio (*Determinantes* § 16).

69. Si en el sistema de las ecuaciones particulares (65) es una reemplazada por la ecuacion general (61) resulta este otro sistema:

$$\begin{array}{l} a_1 cos_{p1} + a_2 cos_{p2} + \ldots + a_n cos_{pn} = 0 \\ a_1 cos_{21} + a_2 \qquad\quad + \ldots + a_n cos_{2n} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1 cos_{n1} + a_2 cos_{n2} + \ldots + a_n \qquad\quad = 0 \end{array}$$

Y la ecuacion de condicion para que este sistema subsista es

$$\begin{vmatrix} cos_{p1} & cos_{p2} & \ldots & cos_{pn} \\ cos_{21} & 1 & \ldots & cos_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ cos_{n1} & cos_{n2} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La cual expresa la relacion entre los cosenos de los ángulos que forman entre sí y con una recta (ó un plano) cualquiera, los lados (ó caras) de un polígono (ó un poliedro). En particular, si tenemos cuatro rectas, y tres de ellas, las señaladas por los números 1, 2 y 3, son paralelas á un plano, el valor de cos_{p1} se deducirá de los valores de cos_{p2}, cos_{p3}, cos_{12}, cos_{13} y cos_{23} mediante la ecuacion

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & \cos_{p3} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para cinco rectas (ó planos) se verifica la ecuacion (*)

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & \cos_{p3} & \cos_{p4} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} & \cos_{24} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 & \cos_{34} \\ \cos_{14} & \cos_{24} & \cos_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De lo cual se desprende que se anulan incondicionalmente todas las determinantes (parciales) de grado superior al tercero, que corresponden al sistema anteriormente establecido de n^2 cantidades; y que la proporcion entre los lados (ó las caras) de un polígono (ó un poliedro) no puede ser expresada goniométricamente.

Sólo para el triángulo y el cuadrángulo alabeado (ó tetraedro) puede deducirse del sistema lineal (65) la expresion goniométrica de la proporcion entre sus lados (ó caras). Así se halla (*Algebra* 45, y *Determinantes* 17, 3):

$$a_1 : a_2 : a_3 = sen_{23} : sen_{31} : sen_{12}$$

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = sen_{234} : -sen_{341} : sen_{412} . - sen_{123}$$

donde por abreviar y en analogía con $sen^2{}_{12}$ hemos escrito

(*) Magnus (*Anal. Géom. des Raumes* § 9.) Véase la nota de autor en el *J. de Crelle A.* 46 *p.* 145, y su *Teoría de las determinantes* § 17, 3.

$$sen^2_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & cos_{\alpha\beta} & cos_{\alpha\gamma} \\ cos_{\alpha\beta} & 1 & cos_{\beta\gamma} \\ cos_{\alpha\gamma} & cos_{\beta\gamma} & 1 \end{vmatrix}$$

Si por $a_1, a_2 \ldots$ ponemos sus valores proporcionales en la ecuacion (60), obtendremos ecuaciones goniométricas generales (Véase 75).

70. Cuando el polígono es plano, no sólo se verifica la ecuacion (61)

$$a_1 cos_{p1} + a_2 cos_{p2} + \ldots + a_n cos_{pn} = 0,$$

sino tambien esta otra (*):

$$a_1 sen_{p1} + a_2 sen_{p2} + \ldots + a_n sen_{pn} = 0$$

Esta ecuacion se deriva de la anterior, tomando en lugar de la recta p, otra que forme con ella un ángulo de 90°. Con lo cual la expresion cos_{p1} se convierte en $-sen_{p1}$ (28).

La ecuacion general, hallada, contiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} * \quad + a_2 sen_{12} + \ldots + a_n sen_{1n} = 0 \\ a_1 sen_{21} \quad * \quad + \ldots + a_n sen_{2n} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_1 sen_{n1} + a_2 sen_{n2} + \ldots + \quad * \quad = 0. \end{array}$$

71. El área de un polígono plano, de n lados, está

(*) Lexell y L'Huilier (l. c).

determinada por $n-1$ lados y sus ángulos; y su expresion es la semisuma de los valores que se desprenden de la fórmula

$$s_{ik}=a_i a_k sen_{ik},$$

cuando por i y k se ponen cada vez dos números diferentes de la série $1, 2, \ldots n-1$, de todos los modos posibles y bajo la condicion $k>i$ (*)

Demostracion. El polígono $A_1A_2\ldots A_n$ se compone del polígono $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ y del triángulo $A_1A_{n-1}A_n$ (*Planim.* 77); y, por consecuencia (37):

$$2f_n=2f_{n-1}+2A_1A_{n-1}A_n=2f_{n-1}+a_{n-1}a_n sen_{n-1,n}$$

siendo f_n el área del polígono de n lados. Pero segun acabamos de ver (70):

$$a_n sen_{n-1,n}=a_1 sen_{1,n-1}+a_2 sen_{2,n-1}+\ldots+a_{n-2} sen_{n-2,n-1}$$

y, por lo tanto:

$$2f_n=2f_{n-1}+s_{1,n-1}+s_{2,n-1}+\ldots+s_{n-2,n-1}$$

Ahora bien, si $2f_{n-1}$ es la suma de los valores

$$\begin{array}{l} s_{12}+s_{13}+\ldots+s_{1,n-2} \\ \quad +s_{23}+\ldots+s_{2,n-2} \\ \qquad +\ldots \\ \qquad\qquad +s_{n-3,n-2} \end{array}$$

(*) L'Huilier 1789 (*Polygon* p. 8).

que se derivan de la forma s_{ik}, poniendo en ella por i,k los ambos que pueden hacerse con los números 1, 2... $n-2$, será $2f_n$ la suma de los valores que surgen de la misma forma, si en ella por i,k se escriben los ambos de los números de la série 1, 2,...$n-1$ (*Aritm. univ.* 136). Y, como $2f_3 = s_{12}$; y, por consecuencia, $2f_4 = s_{12} + s_{13} + s_{23}$; resulta lo que deseábamos demostrar.

72. Si los planos de los polígonos $AA_1A_2 \ldots A_m$ y $BB_1B_2 \ldots B_n$, dada una determinacion arbitraria de sus sentidos positivos, forman el ángulo φ, y sus áreas son a y b; y se designan por p y q dos números de la série 1, 2,... m; y por r y s, dos números de la série 1, 2... n; y, finalmente, las rectas AA_p y BB_r, dada una determinacion cualquiera de sus direcciones positivas, forman un ángulo cuyo coseno representa la expresion cos_{pr}, en cuyo caso el producto $AA_p . BB_r \, cos_{pr}$ está expresado por c_{pr}; el producto $4\,ab\cos\varphi$ será la suma de los $(m-1)$ $(n-1)$ valores que se derivan de la fórmula

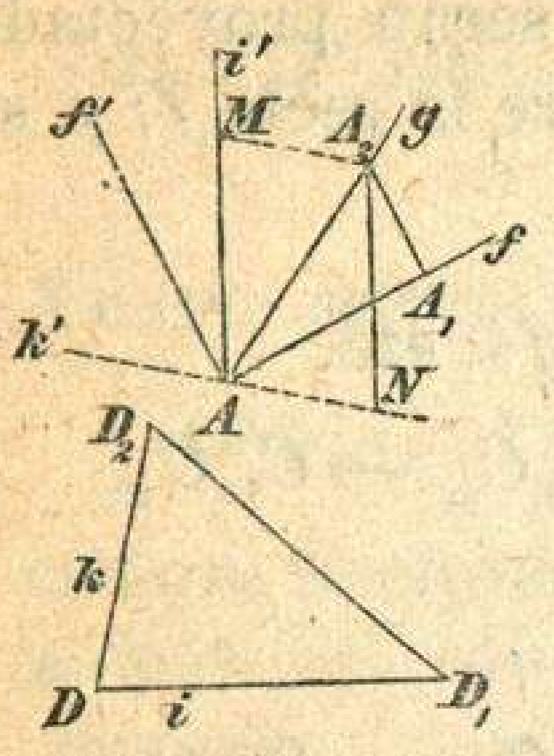
$$c_{pr}\, c_{qs} - c_{ps}\, c_{qr}$$

poniendo en ella cada vez por p, q, dos números consecutivos de la série 1, 2,... n (*).

Demostracion. Supongamos que sobre el plano

(*) *Teorema de* Staudt (*J. de Crelle A.* 24, *p.* 25.)

AA_1A_2 está el triángulo DD_1D_2. Designemos por f, g, i, k las rectas de que son parte los segmentos AA_1, AA_2, DD_1, y DD_2; y tracemos por A las rectas i', k', f' que formen con las i, k, f el ángulo de 90°. Completando el paralelógramo AMA_2N, cuyos lados caen sobre las rectas i' y k', tenemos (37):



$$2AA_1M = MA \,.\, AA_1 \operatorname{sen} i'f = AA_1 \,.\, AM \cos fi$$
$$2DD_1D_2 = D_2D . DD_1 \operatorname{sen} ki = DD_1 . DD_2 \cos i'k$$

Por ser MA_2 normal á k, las rectas AM y AA_2 tendrán sobre k proyecciones normales, iguales, esto es:

$$AM \cos ik = AA_2 \cos gk.$$

Y multiplicando las dos ecuaciones anteriores, en virtud de esta última se encuentra:

$$4AA_1M.DD_1D_2 = AA_1.DD_1 \cos fi \,.\, AA_2.DD_2 \cos gk.$$

De la cual, cambiando D_1 en D_2, i en k, i' en k', y M en N, se deduce:

$$4AA_1N.DD_2D_1 = AA_1 . DD_2 \cos fk . AA_2 . DD_1 \cos gi.$$

Pero $DD_2D_1 = - DD_1D_2$; $AA_1M + AA_1N = AA_1 A_2$ (*Planim.* 75); y, por lo tanto:

$$4AA_1A_2.DD_1D_2 = AA_1.DD_1 \cos fi . AA_2 DD_2 \cos gk$$
$$- AA_1.DD_2 \cos fk . AA_2 . DD_1 \cos gi.$$

Ahora bien, si $DD_1D_2 = BB_1B_2 \cos \varphi$ es la proyeccion normal de BB_1B_2 sobre el plano AA_1A_2 (62), los segmentos BB_1 y DD_1 serán proyectados mediante los mismos planos sobre la recta *f;* y segun la notacion admitida:

$$BB_1 \, cos_{11} = DD_1 cos fi; \text{ etc.}$$

$$4AA_1A_2.BB_1B_2cos\varphi = CC_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}$$

y, en general:

$$4AA_pA_q.BB_rB_s cos\varphi = C_{pr}C_{qs} - C_{ps}C_{qr}$$

Mas *(Planim.* 77):

$$AA_1A_2 \ldots A_m = AA_1A_2 + AA_2A_3$$
$$+ \ldots + AA_{m-1}A_m$$
$$BB_1B_2 \ldots B_n = BB_1B_2 + BB_2B_3$$
$$+ \ldots + BB_{n-1}B_n$$

Luego $4ab cos\varphi$ = etc.

Observacion. Si por el centro de una esfera, cuyo rádio es la unidad, se trazan paralelas á las rectas de que son parte los segmentos AA_1, AA_2, BB_1 y BB_1, cuyas direcciones positivas corten á la esfera en los puntos F_1, F_2, G_1 y G_2; y el sentido positivo de los círculos máximos que pasan por F_1 y F_2, G_1 y G_2 respectivamente, se supone idéntico al de los planos paralelos á los mismos, será $2AA_1A_2 = AA_1.AA_2 sen\, F_1F_2$, etc; y, por consecuencia:

$$4AA_1A_2.BB_1B_2$$
$$= AA_1.AA_2.BB_1.BB_2 sen\, F_1F_2 sen\, G_1G_2.$$

Mas (67):

$$sen\,F_1F_2\,sen\,G_1G_2\cos\varphi = \cos F_1G_1 \cos F_2G_2 - \cos F_1G_2 \cos F_2G_1.$$

Luego, segun la notacion admitida:

$$4AA_1A_2 . BB_1B_2 \cos\varphi = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

et cætera. Recíprocamente puede de esta ley poligonométrica deducirse el teorema esférico (67).

Cuando $n = m$, y los puntos B, B, ... B_n coinciden respectivamente con los A, A_1, ... A_m, será $\cos\varphi = 1$, $c_{pr} = c_{rp}$, $c_{pp} = AA_p^2$; y la fórmula $c_{pr}c_{qs} - c_{ps}c_{qr}$ conserva su valor aunque se sustituya p por r, y simultáneamente q por s. Resulta pues:

$$\begin{aligned}4a^2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 + c_{22}c_{33} - c_{23}^2 + c_{33}c_{44} - c_{34}^2 + \dots \\ + 2(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) + 2(c_{13}c_{24} - c_{14}c_{23}) + \dots \\ + 2(c_{23}c_{34} - c_{24}c_{33}) + \dots \\ + \dots\end{aligned}$$

Esta expresion se diferencia esencialmente de la obtenida ántes para $2a$ (71); pues sólo contiene los segmentos que parten de un vértice del polígono.

La fórmula hallada para $4ab\cos\varphi$, y la comprendida en ella para $4a^2$, tienen de notable que las cantidades c_{pr} que en las mismas entran pueden ser expresadas por cuadrados de los segmentos que unan los vértices de un polígono con los vértices del otro. Puesto que (66):

$$2AA_p . BB_r \cos_{pr} = AB_r^2 - AB^2 - (A_pB_r^2 - A_pB^2)$$

Y de aquí se desprende que $16\,ab\cos\varphi$ es una funcion entera de los cuadrados de los segmentos que unen los vértices de uno de los polígonos con los vértices del otro; y, en particular: $16a^2$ es una funcion entera de los segmentos que unen los vértices de un polígono entre sí. Las áreas del triángulo y del cuadrángulo inscrito en un círculo fueron ya estudiadas bajo este concepto en la *Planim.* 133 y 139. Véase la *Teoría de las Determ.* § 16-13.

73. Supongamos que las direcciones positivas de las rectas en que están las aristas AB, AC y AD, de un tetraedro $ABCD$, corten á una esfera con el centro en A y el rádio igual á la unidad, en los puntos L, M y N; y designemos por $l\,m$ y n, λ, μ y ν los lados y los ángulos del triángulo esférico MNL, y la suma $l+m+n$ por $2s$. Llamando ***seno del ángulo sólido*** A (69) al valor de los productos iguales (51):

$$sen\,l\,sen\,m\,sen\,\nu = sen\,m\,sen\,n\,sen\,\lambda = sen\,n\,sen\,l\,sen\,\mu,$$

en cuyo caso es

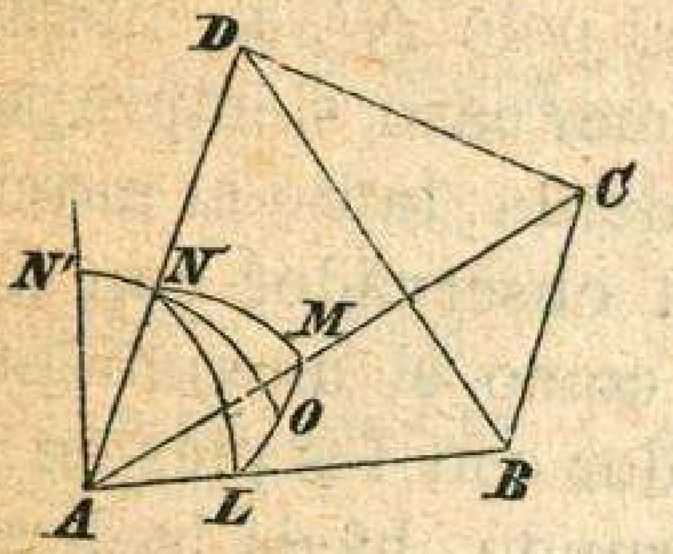
$$\begin{aligned} sen^2(A) &= 1-\cos^2 l-\cos^2 m-\cos^2 n+2\cos l\cos m\cos n \\ &= 4\,sen\,s\,sen\,(s-l)\,sen\,(s-m)\,sen\,(s-n), \end{aligned}$$

el volúmen del tetraedro $ABCD$, áun repecto del signo, será (*)

$$ABCD = \frac{1}{6}\,AB.AC.AD\,sen\,(A)$$

(*) Euler (*Nov. Comm. Petrop.* 4 *p.* 158). Möbius (*Baryc. Calcul* 19 y *Statik* 63). La oportuna expresion, *seno del ángulo sólido*, fué empleado primeramente por Staudt (*J. de Crelle A* 24, *p.* 252).

DEMOSTRACION. — La base ABC, del tetraedro $ABCD$, tiene (72-*Obs.*) el valor $\frac{1}{2} AB.AC \operatorname{sen} LM$.



La altura del tetraedro es la proyeccion normal de la arista AD sobre una normal al plano ABC, y tiene el valor $AD \cos NN'$, si N' es el punto en que corta á la esfera la direccion positiva de la normal al plano ABC, trazada por A. Luego el volúmen del tetraedro será

$$\frac{1}{6} AB.AC.AD \operatorname{sen} LM \cos NN'.$$

Esta fórmula conserva su valor áun cuando se tome como positiva la direccion opuesta de una de las rectas de que son parte las aristas AB, AC y AD; porque con tal cambio mudan de signo simultáneamente AB y $\operatorname{sen} LM$, ó AC y $\operatorname{sen} LM$, ó AD y $\cos NN'$. Pero, si se toma como direccion positiva de la normal al plano ABC la direccion opuesta, $\cos NN'$ cambiará de signo, y la fórmula tambien.

Por direccion positiva de las normales á un plano se toma la ascendente para un observador, situado en el plano, que determina el sentido positivo tambien de este mismo (61). Si se consideran positivos los ángulos y las superficies descritas por giros hácia la izquierda, la direccion positiva de la normal al plano del círculo máximo n por el centro A, pasará por el polo de la izquierda de este círculo máximo que designamos por N'.

Cuando la base ABC, del tetraedro $ABCD$, tiene valor positivo, el volúmen del tetraedro tendrá el mismo signo que su altura; y, por consecuencia, aquel volúmen será positivo ó negativo, segun que el vértice D caiga ó no, con el polo N', al mismo lado de la base. Pues, en el primer caso, siempre parecerá efectuado hácia la izquierda, tanto el movimiento de A hácia B para el observador con los piés en C y la cabeza en D, como el movimiento de C hácia D para el observador con los piés en A y la cabeza en B; y, en el segundo, hácia la derecha (*Estereom.* 82).

Para el círculo máximo NN', que tiene comun con el n el punto O, se determinará el sentido positivo de modo que forme en O con el n un ángulo de 90°; y entónces será el arco $ON' = 90°$, $\cos NN' = \operatorname{sen} ON$, y
$\operatorname{sen} LM \cos NN' = \operatorname{sen} n \operatorname{sen} ON = \operatorname{sen} n \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \mu$ (51); etc.

El volúmen determinado por la expresion $ABCD$, y su valor $\frac{1}{6} AB.AC.AD \operatorname{sen}(A)$, cambian al mismo tiempo de signo, si dos cualesquiera de los vértices B, C y D se permutan; pues con ésto $\operatorname{sen}(A)$ cambia de signo.

Observacion.—Las expresiones $ABCD$, $BADC$, $CDAB$ y $DCBA$ coinciden en su signo. Escribamos los valores análogos:

$$ABCD = \frac{1}{6} AB.AC.AD \operatorname{sen}(A)$$
$$BADC = \frac{1}{6} BA.BD.BC \operatorname{sen}(B)$$
$$CDAB = \frac{1}{6} CD.CA.CB \operatorname{sen}(C)$$
$$DCBA = \frac{1}{6} DC.DB.DA \operatorname{sen}(D)$$

y designemos por a, b y c, a_1, b_1 y c_1, los valores de los segmentos BC, CA y AB, DA, DB y DC; y por v el del volúmen. Será (*)

$$6v = a_1 bc\, sen(A) = ab_1 c\, sen(B) = abc_1\, sen(C)$$
$$= a_1 b_1 c_1\, sen(D).$$

$$\frac{abc}{6v} = \frac{a : a_1}{sen(A)} = \frac{b : b_1}{sen(B)} = \frac{c : c_1}{sen(C)} = \frac{abc : a_1 b_1 c_1}{sen(D)}$$

Si en la ecuacion $144v^2 = 4a_1^2 b^2 c^2 sen^2(A)$ se expresan los valores de $cos\, l$, $cos\, m$ y $cos\, n$ por las aristas, como (36-*Obs.*), se halla para calcular el volúmen del tetraedro en funcion de las aristas, ó sea para $144v^2$, la misma fórmula que en el lugar citado se anula (**).

74. De la expresion hallada para el volúmen del tetraedro $ABCD$ se deduce otra que contiene dos caras, el ángulo de las mismas y su arista comun, del modo siguiente: Designemos por $DA\,CB$ el ángulo ó giro que debe efectuar el plano ACD, al rededor del eje AC y á la izquierda de un observador con los piés en A y la cabeza en C, hasta coincidir con el plano ABC de modo que los triángulos ACD y ACB tengan el mismo signo (*Estereom.* 14); entónces $D\overline{AC}B = B\overline{CA}D$, etc.; y, por consecuencia (73):

$$6ABCD = AB.AC.AD\, sen\, BAC\, sen\, CAD\, sen\, D\overline{AC}B$$

$$2ABC = AB.AC\, sen\, BAC, 2ACD = AC.AD\, sen\, CAD$$

(*) BRETSCHNEIDER (*Géom.* 677).

(**) JUNGIUS (1610) (*Biografía de* GUHRAUER *p.* 297). EULER (*Nov. Comm. Petrop.* 4 *p.* 158).

$$3ABCD = 2ABC.ACD\frac{sen\,D\overline{AC}B}{AC}$$

$$= 2ABC.CAD\frac{sen\,D\overline{CA}B}{CA}\ (*)$$

Del mismo modo:

$$3BADC = 2BAD.BDC\frac{sen\,C\overline{DB}A}{DB}$$

Y, por lo tanto:

$$9ABCD^2 =$$

$$4ABC.ACD.CBD.BAD\frac{sen\,D\overline{CA}B\,sen\,C\overline{DB}A}{CA.DB}$$

A esta expresion acompañan otras dos, en cada una de las que figuran un par de aristas opuestas, y los ángulos diédricos, correspondientes á las mismas. Designando por v el volúmen del tetraedro; por α, β, γ y δ las caras CBD, ACD, BAD y ABC, opuestas respectivamente á los vértices A, B, C y D; y por a y a_1, b y b_1, c y c_1 las aristas opuestas BC y DA, CA y DB, AB y DC; y tambien por ellas los diedros

$$C\overline{AB}D,\ A\overline{BC}D,\ B\overline{CA}D$$

$$B\overline{DC}A,\ C\overline{DA}B,\ A\overline{DB}C,$$

tendremos:

$$9v^2 = 4\alpha\beta\gamma\delta\,\frac{sen\,b\,sen\,b_1}{bb_1} = \text{etc.}$$

(*) *Ann. de Gerg.* 3 p. 323.

$$\frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{9v^2} = \frac{aa_1}{sen\,a\,sen\,a_1} = \frac{bb_1}{sen\,b\,sen\,b_1} = \frac{cc_1}{sen\,c\,sen\,c_1} \quad (*)$$

Si en esta ecuacion sustituimos los ángulos diédricos de las caras consideradas como positivas por los ángulos formados por sus respectivas normales positivas, obtendremos expresiones de los productos de las aristas opuestas, mediante las cuales se convierte la primera ecuacion (66) en la segunda (67).

75. De la fórmula encontrada (73) para el tetraedro se deduce ésta:

$$36v^2 = AB.AC sen\,n.\,AC.AD sen\,l.AD.AB sen\,m$$

$$\frac{sen^2(A)}{sen\,l\,sen\,m\,sen\,n}.$$

Ahora bien: $AB.AC sen\,n = 2ABC$; etc. Luego, si por *sen (A')* se designa el seno del ángulo sólido correlativo al *A* en el tetraedro polar, de modo que las secciones esféricas de los dos ángulos sólidos sean figuras esféricas polares, tendremos (51):

$$sen(A') = \frac{sen^2(A)}{sen\,l\,sen\,m\,sen\,n};$$

y, por consecuencia, usando la notacion de ántes:

$$36v^2 = 8\beta\gamma\delta\,sen(A') = \text{etc. } (**)$$

$$\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{9v^2} = \frac{\alpha}{sen(A')} = \frac{\beta}{sen(B')} = \frac{\gamma}{sen(C')} = \frac{\delta}{sen(D')}.$$

(*) BRETSCHNEIDER *(l. c.)*

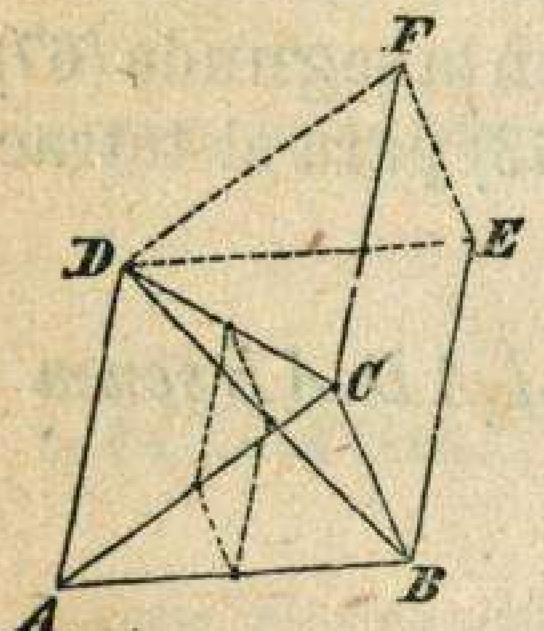
(**) BRETSCHNEIDER *(l. c.)*. LAGRANGE *(Sur les pyram. 17)*.

Mediante estos valores de α, β, γ, y δ, se deduce de la ecuacion general (62) la goniométrica:

$$sen(A')cos_{p1} + sen(B')\,cos_{p2} + sen(C')\,cos_{p3} + sen(D')cos_{p4} = 0.$$

Y las demas (69).

76. Otras expresiones para el tetraedro se encuentran mediante su comparacion con un prisma que tenga comunes con él un ángulo sólido y las aristas que en éste concurren. Trazando, por ejemplo, BE y CF iguales á AD y en su misma direccion, el tetraedro $ABCD$ será la tercera parte del prisma cuyas aristas



longitudinales son AD, BC y CF. Los lados EF y FC, del paralelógramo $EFCB$, son iguales á las aristas opuestas del tetraedro, BC y DA, y de su misma direccion; y tienen doble longitud que los lados de la seccion media del tetraedro, paralela á las expresadas aristas BC y DA. Si designamos como ántes las aristas del tetraedro; sus ángulos planos por aa_1, bb_1 y cc_1; sus distancias normales por f_a, f_b, y f_c; y por θ_a, θ_b y θ_c las secciones medias, será:

$$4\theta_a = aa_1 sen\, aa_1,\; 4\theta_b = bb_1\, sen\, bb_1,\; 4\theta_c = cc_1\, sen\, cc_1$$
$$6v = f_a aa_1\, sen\, aa_1 = f_b bb_1\, sen\, bb_1 = f_c cc_1\, sen\, cc_1 \text{ (*)}$$
$$3v = 2f_a\theta_a = 2f_b\theta_b = 2f_c\theta_c.$$

(*) *(Ann. de Gergonne* 18 *p.* 250). STEINER *(J. de Crelle A.* 32 *p.* 279.) Véase la *Estereometría* (109).

Observacion. Las caras del prisma, $FCBE$, $EBAD$ y $DACF$, son entre sí como los lados del triángulo, en que es cortado aquél por un plano normal á sus aristas longitudinales; y á la misma proporcion están sometidas las áreas designadas por $2\theta_a$, γ y β. Conservando la anterior notacion para las caras y los ángulos diédricos, tendremos, por lo tanto (35):

$$4\theta_a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos a_1$$

y del mismo modo:

$$4\theta_b^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cos b_1$$

$$4\theta_c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos c_1.$$

Pero (65):

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta \cos c_1 - 2\beta\gamma \cos a_1 - 2\gamma\alpha \cos b_1 = \delta^2$$

Luego (*):

$$4\theta_a^2 + 4\theta_b^2 + 4\theta_c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

Si ahora representamos por h_α, h_β, h_γ, y h_δ, las alturas del tetraedro, será $3v = \alpha h_\alpha$, etc.; y sustituyendo

$$2\theta_a = \frac{3v}{f_a}, \ldots, \alpha = \frac{3v}{h_\alpha}, \ldots,$$

se obtiene inmediatamente:

(*) Bretschneider *(l. c.)*.

$$\frac{1}{f_a^2}+\frac{1}{f_b^2}+\frac{1}{f_c^2}=\frac{1}{h_\alpha^2}+\frac{1}{h_\beta^2}+\frac{1}{h_\gamma^2}+\frac{1}{h_\delta^2}$$

De las ecuaciones (74):

$$3va_1 = 2\beta\gamma\, sen\, a_1$$

$$\beta^2+\gamma^2-4\theta_a^2 = 2\beta\gamma\cos a_1$$

se desprende la siguiente:

$$(3va_1)^2 = 4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-4\theta_a^2)^2.$$

La cual *(Planim.* 133) dice que el triple producto del tetraedro por una arista es igual al cuádruplo del triángulo cuyos lados son las dos caras que tienen dicha arista comun y el duplo de la seccion media, paralela á la misma arista (*).

77. El séxtuple producto del tetraedro por el rádio de la esfera circunscrita es igual al triángulo cuyos lados son los productos de las aristas opuestas (**).

DEMOSTRACION. Sea r el rádio de la esfera $ABCD$; y designemos por A_1, B_1 y C_1 los puntos en que las rectas DA, DB y DC son cortadas por un plano, paralelo al tangente en D á la esfera, y distante

(*) J. H. T. MÜLLER *(Trigon. Anhang. p.* 291.)

(**) El rádio de la esfera fué ya calculado mediante los elementos del tetraedro inscrito por JUNGIUS *(Biografía de Guhrauer* 1850 *p.* 297); LAGRANGE *(Pyram.* 21); LEGENDRE *(Géom. Note V)*; CARNOT *(Mém. sur la relation,* 12). En la fórmula de CARNOT, y en la de CRELLE *(math. Aufsätze I p.* 117), que no difiere esencialmente de aquélla, está contenido el teorema del texto que demostró geométricamente STAUDT *(J. de Borchardt A.* 57 *p.* 88) como allí se hace.

de éste la longitud h_1, de tal suerte que *(Planimetría* 123):

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1 = 2rh_1 = p,$$

$$A_1B_1 = p\frac{AB}{DA.DB}, \quad B_1C_1 = p\frac{BC}{DB.DC},$$

$$C_1A_1 = p\frac{CA}{DC.DA}.$$

Haciendo $DA.DB.DC = q$, tendremos:

$$A_1B_1 = \frac{p}{q}DC.AB, \quad B_1C_1 = \frac{p}{q}DA.BC,$$

$$C_1A_1 = \frac{p}{q}DB.CA.$$

De donde se deduce que el triángulo $A_1B_1C_1$ es semejante al triángulo cuyos lados tienen los valores $DC.AB$, $DA.BC$ y $DB.CA$, respectivamente *(Planim.* 88); y cuya área, calculándola segun ya dijimos *(Planim.* 133), tiene el valor ε.

Ahora bien (73):

$$DABC : DA_1B_1C_1 = \frac{DA.DB.DC}{DA_1.DB_1.DC_1} = \frac{q^2}{p^3}$$

$$6DA_1B_1C_1 = 2A_1B_1C_1.h_1 = 2\varepsilon\frac{p^2}{q^2}\frac{p}{2r} = \frac{\varepsilon}{r}\frac{p^3}{q^2}$$

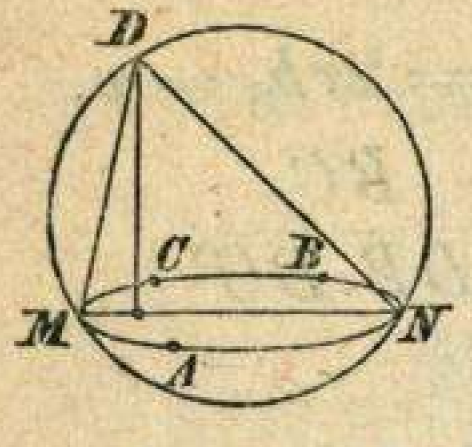
Y, por consecuencia:

$$6DABC = \varepsilon : r.$$

Observacion. Designando por h la distancia del punto D al plano ABC, tendremos:

$$6DABC = 2h.ABC = \varepsilon : r, \quad 2rh.ABC = \varepsilon.$$

Trazando por D el círculo máximo que corte normalmente al círculo ABC en M y N, la normal al plano ABC, designada por h, caerá sobre el plano DMN: siendo DM el más corto, y DN el más largo, de los segmentos que unen el punto D con la periferia del círculo ABC (*Estereom.* 16).



Mas, por estar inscrito el triángulo DMN en un círculo máximo, es (*Planim.* 134):

$$DM.DN = 2rh.$$

Luego: $DM.DN.ABC = \varepsilon$, como ya sabíamos (*Planim.* 136).

78. Designemos por α y β los volúmenes de dos poliedros dados, $AA_1A_2A_3 \ldots$ y $BB_1B_2B_3 \ldots$; por AA_p uno de los segmentos AA_1, $AA_2 \ldots$; por BB_r uno de los segmentos BB_1, BB_2, ...; y por c_{pr} el producto $AA_p.BB_r cos_{pr}$ (72). El producto $36\alpha\beta$ puede ser expresado de varios modos por tres cantidades de la forma c_{pr}; y el producto $288\alpha\beta$ es una funcion entera de los cuadrados de los segmentos que unen los vértices de un poliedro con los del otro (*)

Demostracion. Por el punto A trácense las normales t, u y v, á las caras BB_2B_3, BB_3B_1 y BB_1B_2, del tetraedro $BB_1B_2B_3$; y sobre estas normales constrúyanse las aristas AT, AU y AV, del paralelepípedo cuya diagonal es AA_3, de tal modo que las

(*) Staudt (*J. de Crelle A.* 24 *p.* 255). Véase la *Theorie und Anw. der Determinanten* § 16, 13 por el autor.

secciones esféricas del ángulo sólido A del paralelepípedo, y del ángulo sólido B del tetraedro, sean figuras esféricas polares. Si n representa la normal á la cara AA_1A_2, y por a y b se designan las rectas de que son parte los segmentos AA_3 y BB_3, será (73):

$$3AA_1A_2V = AA_1A_2 . AV \cos nv$$

$$3BB_1B_2B_3 = BB_1B_2 . BB_3 \cos bv$$

La diagonal AA_3 puede ser compuesta por las aristas AT, AU y AV, moviéndose paralelamente á sí mismas. Mas, por ser AT y AU normales á los planos BB_2B_3 y BB_3B_1, lo serán tambien á la recta BB_3; y, por lo tanto, AA_3 y AV tendrán iguales proyecciones normales sobre b, ó sea

$$AA_3 \cos ab = AV \cos bv$$

Luego:

$$9AA_1A_2V . BB_1B_2B_3$$
$$= AA_1A_2 . BB_1B_2 \cos nv . AA_3 . BB_3 \cos ab$$

Y, segun la notacion establecida (72):

$$4AA_1A_2 . BB_1B_2 \cos nv = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

y, por consecuencia:

$$36AA_1A_2V . BB_1B_2B_3 = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\, c_{33}$$

De esta fórmula, con la sustitucion de $B_1B_2B_3$ por $B_2B_3B_1$; de t, u y v por u, v y t; y el cambio correspondiente de los segundos índices de la letra

c, referentes á los puntos B, se deduce la siguiente:

$$36\, AA_1A_4T.BB_2B_3B_4 = (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})\, c_{31}$$

y del mismo modo:

$$36\, AA_1A_2U.BB_3B_1B_2 = (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})\, c_{32}$$

Mas (*Estereom.* 111):

$$BB_1B_2B_3 = BB_2B_3B_1 = BB_3B_1B_2;\ \text{y}$$

$$AA_1A_2T + AA_1A_2U + AA_1A_2V = AA_1A_2A_3$$

Luego:

$$36\, AA_1A_2A_3.BB_1B_2B_3 = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\, c_{33}$$
$$+ (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})\, c_{31} + (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})\, c_{32}$$

Combinando de igual manera cada tetraedro del primer poliedro con cada tetraedro del segundo, se demuestra la primera parte del teorema enunciado; y se obtiene la demostracion de la segunda, expresando las cantidades $2c_{pr}$ mediante cuadrados de segmentos, como ántes hicimos (72-*obs.*).

Una expresion semejante de $(36\alpha\beta)^2$, por productos de pares de caras y el coseno de sus ángulos, se halla en el Tratado del autor sobre las *Determinantes* § 16, 16.

Si los puntos B, B_1, B_2, ... coinciden respectivamente con los A, A_1, A_2, ..., será $288\alpha^2$ funcion entera de los cuadrados de los segmentos que unen los vértices del poliedro. Para el tetraedro fué expresada la cantidad $144\alpha^2$ en funcion de los cuadrados de las aristas por Jungius y Euler (73).

VII.—Fórmulas proyectivas.

79. Dados los puntos A, B y C, sobre una recta, dirémos en adelante que la fórmula $AC:BC$ es la razon segun la cual es dividido el segmento AB por el punto C *(Planim.* 62). Esta razon tendrá un valor positivo ó negativo, segun que los segmentos AC y BC tengan el mismo signo (direccion) ó signos opuestos *(Planim.* 111); y, por lo tanto, segun que el punto C esté fuera ó dentro del segmento AB. Mediante la razon $AC : BC$ se determina, respecto de dos puntos, el tercero, de un modo único. Cuando la razon $AC: BC$ tiene el valor 1, el punto C está en el infinito; pues

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AB+BC}{BC}=\frac{AB}{BC}+1$$

alcanza el valor 1, cuando el quebrado $AB:BC$ desaparece. Cuando la razon $AC : BC$ tiene el valor — 1, es C el punto medio de AB.

Si la recta AB es cortada en C por otra recta, de que es parte el segmento PQ, la razon de las áreas será

$$APQ:BPQ=AC:BC$$

Porque los triángulos APQ y BPQ tienen comun la base PQ, y la razon de sus alturas es $AC: BC$ *(Planim.* 80).

Si la recta AB es cortada en C por el plano del triángulo PQR, será la razon de los volúmenes:

$$APQR:BPQR=AC:BC$$

Porque los tetraedros $APQR$ y $BPQR$ tienen comun la base PQR y la razon de sus alturas es $AC:BC$ (*Estereom.* 108).

En las proporciones anteriores, los triángulos APQ y BPQ, como los tetraedros $APQR$ y $BPQR$, tendrán el mismo signo ó signos opuestos, segun que el segmento AB sea dividido en C exterior, ó interiormente, por la recta PQ, ó por el plano PQR.

Designando por S un punto cualquiera, y por a, b y c las rectas que le unen con los puntos A, B y C de otra recta fija, será

$$AC:BC = SAC:SBC = (\mathit{sen}\, ac:\mathit{sen}\, bc)(SA:SB)$$

Porque, cualesquiera que sean las direcciones positivas que adoptemos para las rectas a, b y c, siempre será $2SAC = SA\,.\,SC\,\mathit{sen}\, ac$ (37); etc.

En general, cuando las rectas a, b y c caen sobre un plano, ó son paralelas á un plano, la forma $\mathit{sen}\, ac:\mathit{sen}\, bc$ se llama la razon de los senos, segun la cual es dividido el ángulo ab por la recta c, ó por una paralela á esta recta. Esta razon tendrá el valor -1 ó 1, segun que c biseque el ángulo ab, ó el adyacente á este ángulo. Mediante la razon $\mathit{sen}\, ac$: $\mathit{sen}\, bc$ se determina respecto de las dos rectas a y b, la recta c que pase por el punto comun de las dos primeras, de un modo único: lo mismo que se determina el punto C de la recta AB, mediante la razon $AC:BC$. En efecto, segun (34) es

$$\frac{\mathit{sen}\, ac}{\mathit{sen}\, bc} = \frac{\mathit{sen}\,(ab+bc)}{\mathit{sen}\, bc} = \mathit{sen}\, ab\,(\cot bc + \cot ab)$$

Ahora bien, si se verifica la igualdad $sen\, ac' : sen\, bc' = sen\, ac : sen\, bc$, será $cot\, bc' = cot\, bc$; y, por lo tanto, c' paralela á c.

La razon, segun la cual es AB dividido en C por la recta PQ, ó el plano PQR, se designará en adelante por los símbolos (*):

$$(A, B, C), \quad (A, B, PQ), \quad (A, B, PQR),$$

y del mismo modo, la razon $sen\, ac : sen\, bc$ por (a, b, c). Los valores (A, B, C) y (B, A, C), (a, b, c) y (b, a, c), son recíprocos.

80. Si O es un punto cualquiera de la recta AB, las razones, segun las cuales es dividido el segmento OA en B, y el OB en A, tienen por suma 1, á saber:

$$(O, A, B) + (O, B, A) = 1.$$

Si O es un punto cualquiera del plano ABC, las razones, segun las cuales son divididos los segmentos OA, OB y OC respectivamente por las rectas BC, CA y AB, dan de suma 1, á saber:

$$(O, A, BC) + (O, B, CA) + (O, C, AB) = 1.$$

Si O es un punto cualquiera del espacio, y $ABCD$ un tetraedro dado, las razones, segun las cuales son divididos los segmentos OA, OB, OC y OD por los planos BDC, CDA, ADB y ABC respectivamente, producen una suma, igual á 1. (**), á saber:

(*) Möbius (*Baryc. Calcul.* 180 y sig.)

(**) El segundo teorema es de Euler 1780 (*Mém. de Peters. Tomo V*, 1812 *p.* 96). El tercero está en los *Ann. de Gerg.* 9, *p.* 116 y 277. Möbius (*Baryc. Calcul* 160 y Chasles (*Aperçu hist.*).

$$(O, A, BDC) + (O, B, CDA) + (O, C, ADB) + (O, D, ABC) = 1$$

Demostracion.—Si O cae sobre la recta AB, será (*Planim.* 111) $AO + OB = AB$; y, por consecuencia:

$$\frac{AO}{AB} + \frac{OB}{AB} = 1 = \frac{OB}{AB} + \frac{OA}{BA}$$

Si O está sobre el plano ABC, y las rectas OA, OB y OC son cortadas en A', B' y C' por las rectas BC, CA y AB, tendremos (79):

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OBC}{ABC}, \quad \frac{OB'}{BB'} = \frac{OCA}{BCA}, \quad \frac{OC'}{CC'} = \frac{OAB}{CAB}$$

Pero (*Planim.* 76):

$$OBC + OCA + OAB = ABC = BCA = CAB$$

Luego:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

Si las rectas OA, OB, OC y OD son cortadas en A', B', C' y D' por los planos BDC, CDA, ADB y ABC, tendremos (79):

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OBDC}{ABDC}; \text{ etc.}$$

Pero (*Estereom.* 112):

$$OBDC + OCDA + OADB + OABC = DABC = ABDC = \ldots$$

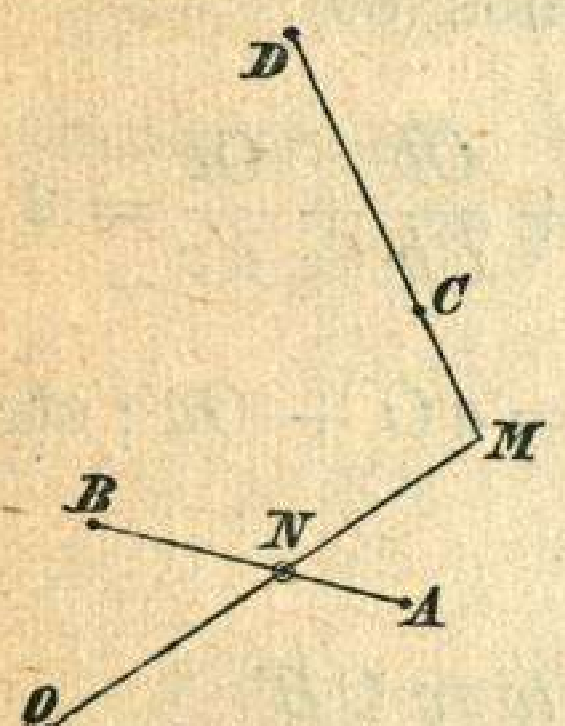
Luego:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

Bueno es advertir que el tercer teorema puede deducirse de los dos anteriores. En efecto, la recta CD tiene con el plano OAB el punto comun M; y, por lo tanto:

$$(O, A, BM) + (O, B, MA) + (O, M, AB) = 1.$$

Al mismo tiempo, la recta OM tiene con la AB el punto comun N; y, por consecuencia:



$$(O, C, DN) + (O, D, NC) + (O, N, CD) = 1$$

Mas $(O, M, AB) = (O, M, N)$; $(O, N, CD) = (O, N, M)$: y $(O, M, N) + (O, N, M) = 1$

Luego finalmente:

$$(O, A, BDC) + (O, B, CDA) + (O, C, ADB) + (O, D, ABC) = 1.$$

Observacion.—Por ser $(O, BC, A) = 1 - (O, A, BC)$, segun el primer teorema, y así las otras expresiones análogas, tendremos:

$$(O, BC, A) + (O, CA, B) + (O, AB, C) = 2$$

$$(O, BDC, A) + (O, CDA, B) + (O, ADB, C) + (O, ABC, D) = 3.$$

81. Si sobre una esfera, cuyo rádio es la unidad, representa O un punto cualquiera del círculo máximo AB, será $AO + OB = AB$; y, por lo tanto (34):

$$\frac{sen\,OB}{sen\,AB}\cos OA + \frac{sen\,OA}{sen\,BA}\cos OB = 1$$

Si O designa un punto cualquiera de la esfera, y los lados BC, CA y AB, de un triángulo esférico ABC, son cortados por los círculos máximos OA, OB y OC en los puntos A' B', y C'; y representamos por a, b, c y a', b', c' las proyecciones centrales de A, B, C, y A', B', C' sobre el plano tangente á la esfera en el punto O; tendremos (80):

$$\frac{Oa'}{aa'} + \frac{Ob'}{bb'} + \frac{Oc'}{cc'} = 1, \qquad \frac{Oa}{a'a} + \frac{Ob}{b'b} + \frac{Oc}{c'c} = 2$$

Mas $Oa = tang\,OA$ (25); y $aa' = aO + Oa'$; etc.

Luego:

$$\frac{tang\,OA'}{tang\,AO + tang\,OA'} + \frac{tang\,OB'}{tang\,BO + tang\,OB'} + \frac{tang\,OC'}{tang\,CO + tang\,OC'} = 1$$

$$\frac{tang\,OA}{tang\,A'O + tang\,OA} + \frac{tang\,OB}{tang\,B'O + tang\,OB} + \frac{tang\,OC}{tang\,C'O + tang\,OC} = 2$$

Estas ecuaciones pueden trasformarse, como se hizo (24), y convertirse en las que siguen :

$$\frac{sen\,OA'}{sen\,AA'}\cos OA + \frac{sen\,OB'}{sen\,BB'}\cos OB$$
$$+\frac{sen\,OC'}{sen\,CC'}\cos OC = 1$$

$$\frac{sen\,OA}{sen\,A'A}\cos OA' + \frac{sen\,OB}{sen\,B'B}\cos OB'$$
$$+\frac{sen\,OC}{sen\,C'C}\cos OC' = 2$$

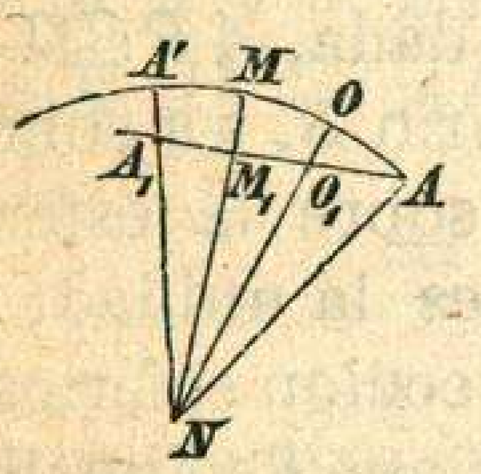
De las cuales por sustraccion, se deduce la siguiente:

$$\frac{sen\,(AO+A'O)}{sen\,AA'}+\frac{sen\,(BO+B'O)}{sen\,BB'}+\frac{sen\,(CO+C'O)}{sen\,CC'}=1\ (*).$$

OBSERVACION. La suma

$$\frac{sen\,OA'}{sen\,AA'}+\frac{sen\,OB'}{sen\,BB'}+\frac{sen\,OC'}{sen\,CC'}$$

conserva inalterable su valor en el solo caso de que el punto O describa sobre la esfera un círculo concéntrico (ó paralelo) con el círculo



ABC (**). Sea, en efecto, M el centro esférico del círculo ABC; N el centro de la esfera; y O_1, A_1, B_1 y C_1 las proyecciones centrales de O, A', B', y C' sobre el plano ABC. Segun (80) tendremos:

$$\frac{O_1A_1}{AA_1}+\frac{O_1B_1}{BB_1}+\frac{O_1C_1}{CC_1}=1;$$

(*) EULER *(l. c.)* y GUDERMANN *(Nied. Sphärik* 394).

(**) STEINER *(J. de Crelle A,* 2 *p.* 190) y GUDERMANN *(Nied. Sphärik* 393).

Segun (79):

$O_1A_1 : AA_1 = (sen\ OA' : sen\ AA')\ (NO_1 : NA)$; etc.

Y, por consecuencia:

$$\frac{sen\ OA'}{sen\ AA'} + \frac{sen\ OB'}{sen\ BB'} + \frac{sen\ OC'}{sen\ CC'} = \frac{NA}{NO_1}$$

De lo cual resulta que la suma en cuestion, arriba escrita, no cambiará de valor, mientras el punto O_1 conserve inalterable su distancia al punto N, esto es: cuando NO_1 describa un cono de revolucion cuyo eje es NM; y el punto O, un círculo cuyo centro esférico es M. En estas condiciones se verifican las igualdades:

$$NM_1 = NA\ cos\ AM = NO_1\ cos\ OM$$

$$\frac{sen\ OA'}{sen\ AA'} + \frac{sen\ OB'}{sen\ BB'} + \frac{sen\ OC'}{sen\ CC'} = \frac{cos\ OM}{cos\ AM}$$

82. Supongamos que una figura dada, $ABCD$... se proyecta desde un centro arbitrario S, ya sobre un plano cualquiera, ya tambien sobre la esfera cuyo centro es el S y cuyo radio es la unidad; y designemos por $A'B'C'D'$... la proyeccion esférica, y por $A''B''C''D''$... la proyeccion plana de aquella figura. Si el punto M de aquella figura dada cae sobre la recta AB, su proyeccion esférica, M', caerá sobre el círculo máximo $A'B'$; y su proyeccion plana M'', sobre la recta $A''B''$. De manera que (79):

$$\frac{AM}{BM} = \frac{sen\ A'M'}{sen\ B'M'}\,\frac{SA}{SB'}, \qquad \frac{A''M''}{B''M''} = \frac{sen\ A'M'}{sen\ B'M'}\,\frac{SA''}{SB''}$$

De las razones, segun las cuales son divididos los segmentos de la figura dada, pueden deducirse fórmulas cuyos valores sean independientes de las distancias SA, SB,... Estas fórmulas toman el nombre de *proyectivas* (*); porque conservan sus valores, áun cuando la figura á que se refieren sea sustituida por una proyeccion central, plana, de ella misma; ó, aunque cada segmento de los que contiene sea sustituido por el seno de su proyeccion central esférica. Así, por ejemplo, cuando M y N caen sobre la recta AB, la fórmula $(AM:BM)(BN:AN)$ es proyectiva; porque

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{AN}=\frac{\operatorname{sen} A'M'}{\operatorname{sen} B'M'}\frac{\operatorname{sen} B'N'}{\operatorname{sen} A'N'}=\frac{A''M''}{B''M''}\frac{B''N''}{A''N''}$$

Cuando los puntos M, N, O,... R caen sobre los lados AB, BC, CD,... FA de un polígono respectivamente, la fórmula

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\cdots\frac{FR}{AR}=\frac{\operatorname{sen} A'M'}{\operatorname{sen} B'M'}\frac{\operatorname{sen} B'N'}{\operatorname{sen} C'N'}\cdots\frac{\operatorname{sen} F'R'}{\operatorname{sen} A'R'}$$
$$=\frac{A''M''}{B''M''}\frac{B''N''}{C''N''}\cdots\frac{F''R''}{A''R''}$$

es proyectiva (**). El valor de una fórmula proyectiva puede deducirse de una proyeccion especial de la figura, que tenga algunos puntos en el infinito.

Si OP es el medio armónico (*Algebra* 9) de los n

(*) Poncelet (*propr. proj.* 5; y *J. de Crelle A.* 3 *p.* 213).

(**) Un *Vieleckesschnittsverhältniss* segun Möbius (*Baryc. Calcul.* 215).

segmentos OA, OB, OC,... de una recta, tendremos:

$$n=\frac{OP}{OA}+\frac{OP}{OB}+\frac{OP}{OC}+\ldots$$

O, sustrayendo cada uno de estos cocientes de

$$1=\frac{OA}{OA}=\frac{OB}{OB}=\ldots,\quad \frac{PA}{OA}+\frac{PB}{OB}+\frac{PC}{OC}+\ldots=0.$$

De esta ecuacion se desprenden las que siguen:

$$\frac{sen\,P'A'}{sen\,O'A'}+\frac{sen\,P'B'}{sen\,O'B'}+\frac{sen\,P'C'}{sen\,O'C'}+\ldots=0$$

$$\frac{P''A''}{O''A''}+\frac{P''B''}{O''B''}+\frac{P''C''}{O''C''}+\ldots=0$$

Las cuales prueban que la dada es proyectiva; y $O''P''$ el medio armónico de los segmentos $O''A''$, $O''B''$, $O''C''$,... (*)

83. El producto de las razones (ó razones de senos) segun las cuales quedan divididos los lados AB, BC, y CA, de un triángulo rectilíneo (ó esférico), por las rectas (ó círculos máximos) que unen un punto arbitrario O del plano (ó de la esfera) ABC, con los puntos C, A y B, tiene el valor -1 (**)

(*) Poncelet (*J. de Crelle A.* 3 *p.* 235); Möbius (*J. de Crelle A.* 4 *p.* 111); y más generalmente Grassmann (*J. de Crelle A.* 24 *p.* 273).

(**) J. Ceva (*De lineis se invicem secantibus, Mediol.* 1678). El concepto del producto de las razones de las secciones ó partes de division, y la determinacion de los signos, corresponde á Möbius (*Baryc. calcul* 198).

Demostracion. En el cuadrángulo plano $ABCO$ es (79):

$$(A, B, CO)\ (B, C, AO)\ (C, A, BO)$$

$$= \frac{ACO}{BCO}\,\frac{BAO}{CAO}\,\frac{CBO}{ABO} = -1;$$

porque $ACO = - CAO$; etc.

Designando por P, Q y R los puntos de division de BC, CA y AB; y por A', B', ... una proyeccion central esférica de los puntos A, B, .. (82), será

$$\frac{BP}{CP}\,\frac{CQ}{AQ}\,\frac{AR}{BR} = \frac{sen\,B'P'}{sen\,C'P'}\,\frac{sen\,C'Q'}{sen\,A'Q'}\,\frac{sen\,A'R'}{sen\,B'R'}$$

una fórmula proyectiva. Para hallar su valor, proyéctese la figura desde un centro arbitrario S sobre un plano paralelo al QRS. En la proyeccion $A''B''$ ...., será $C''A''$ paralela con $B''O''$, y $A''B''$ paralela con $O''C''$; en virtud de que los puntos Q'' y R'' — proyecciones de los Q y R, en que las rectas OB y OC cortan á las CA y AB — están en el infinito. Por lo cual es un paralelógramo el cuadrángulo $C''A''B''O''$; y

$$\frac{BP}{CP}\,\frac{CQ}{AQ}\,\frac{AR}{BR} = \frac{B''P''}{C''P''} = -1$$

Recíprocamente: si la fórmula plana

$$\frac{BP}{CP}\,\frac{CQ}{AQ}\,\frac{AR}{BR},$$

ó la esférica

$$\frac{sen\,BP}{sen\,CP}\,\frac{sen\,CQ}{sen\,AQ}\,\frac{sen\,AR}{sen\,BR},$$

tiene el valor — 1, las rectas (ó círculos máximos) AP, BQ y CR forman un haz, esto es: pasan por un mismo punto. Porque, si AP es cortada en O por BQ, y AB por CO en R', deberia ser

$$\frac{BP}{CP}\,\frac{CQ}{AQ}\,\frac{AR'}{BR'}=-1;$$

y, como consecuencia, diferente de — 1 la fórmula $\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR}$: contra la hipótesis; etc.

Aplicaciones. Si los lados BC, CA y AB, de un triángulo rectilíneo (ó esférico), tocan á un círculo en los puntos P, Q y R, las rectas (ó círculos máximos) AP, BQ y CR formarán un haz (*). Puesto que uno, ó los tres segmentos, BC, CA y AB, serán divididos internamente por los puntos de contacto P, Q y R; y como $AR = AQ$, etc. El mismo teorema subsiste para las proyecciones centrales de la figura plana sobre un plano, y para las proyecciones estereográficas de la figura esférica (*Estereom.* 70).

Si AP, BQ y CR bisecan el perímetro del triángulo rectilíneo ó esférico ABC, serán P, Q y R los puntos de contacto del círculo inscrito en el triángulo; y, por lo tanto, AP, BQ y CR formarán un haz.

Tanto en el triángulo esférico, como en el rectilíneo ABC, formarán AP, BQ y CR un haz, cuando P, Q y R sean los puntos medios de los lados (**); ó cuando AP, BQ y CR bisequen el

(*) *Ceva.*
(**) Schulz (*Sphärik II*, 52).

área (*). Pues, en el primer caso, es $sen\,BP : sen\,CP = -1$, etc.; y, en el segundo, segun la ecuacion $ARC = CRB$ (53), será

$$\frac{sen\frac{1}{2}AR}{sen\frac{1}{2}RB} = \frac{cos\frac{1}{2}CA}{cos\frac{1}{2}BC}, \text{ etc.};$$

y, por consecuencia:

$$\frac{sen\frac{1}{2}AR}{sen\frac{1}{2}RB}\,\frac{sen\frac{1}{2}BP}{sen\frac{1}{2}PC}\,\frac{sen\frac{1}{2}CQ}{sen\frac{1}{2}QA} = 1$$

Al mismo tiempo, de la ecuacion de las áreas CAR y QAB (54) se deduce

$$cot\tfrac{1}{2}CA\,cot\tfrac{1}{2}AR = cot\tfrac{1}{2}QA\,cot\tfrac{1}{2}AB, \text{ etc.}$$

$$\frac{cot\frac{1}{2}AR}{cot\frac{1}{2}RB}\,\frac{cot\frac{1}{2}BP}{cot\frac{1}{2}PC}\,\frac{cot\frac{1}{2}CQ}{cot\frac{1}{2}QA} = 1.$$

Y, multiplicando el cuadrado de la primera ecuacion por la segunda, se halla:

$$\frac{sen\,AR}{sen\,RB}\,\frac{sen\,BP}{sen\,PC}\,\frac{sen\,CQ}{sen\,QA} = 1,$$

$$\frac{sen\,AR}{sen\,BR}\,\frac{sen\,BP}{sen\,CP}\,\frac{sen\,CQ}{sen\,AQ} = -1$$

84. El producto de las razones, segun las cuales son divididos los lados de un polígono por una rec-

(*) STEINER (*J. de Crelle A.* 2 *p.* 52) y GUDERMANN (*J. de Crelle A.* 8 *p.* 368 y *nied Sphärik* 132).

ta ó un plano, es 1. Este mismo valor tiene el producto de las razones de senos, segun las cuales son divididos los lados de un polígono esférico por un círculo máximo (*).

Demostracion. Si ABC es un triángulo rectilíneo y MN una recta de su plano, tenemos (79):

$$(A, B, MN)\,(B, C, MN)\,(C, A, MN) = \frac{AMN}{BMN}\,\frac{BMN}{CMN}\,\frac{CMN}{AMN} = 1$$

Et cætera. Si $ABCD$ es un cuadrángulo alabeado, y MNO un plano cualquiera, se halla:

$$(A, B, MNO)\,(B, C, MNO)\,(C, D, MNO)\,(D, A, MNO) = 1$$

expresando la fórmula simbólica (A, B, MNO), y las demás análogas, por razones tetraédricas (79).

Designando los puntos de division de AB, BC, ..., por P, Q, ...; y por A', B', ... una proyeccion central esférica de los puntos A, B, ...; la fórmula

$$\frac{AP}{BP}\,\frac{BQ}{CQ}\cdots = \frac{\operatorname{sen} A'P'}{\operatorname{sen} B'P'}\,\frac{\operatorname{sen} B'Q'}{\operatorname{sen} C'Q'}\cdots$$

es proyectiva. Para hallar su valor proyectemos la figura desde un punto cualquiera del plano MNO sobre otro plano, paralelo á aquél. Claro es que en la proyeccion $A''B''$... los puntos P'', Q''.... estarán infinitamente distantes; y, por consecuencia, la fórmula proyectiva tendrá el valor 1.

(*) Menelao (*Sphaerica III*, 1). Este teorema, como se deduce del Almagesto I, 9, era el fundamento de la antigua Trigonometría esférica. Schubert (*Nov. Act. Petrop.* (1796) 12 *p.* 165). La extension de este teorema fué determinada por Carnot (*Transvers.* 3) y Möbius (*baryc. calcul* 198).

Recíprocamente: Si el producto de las razones (ó razones de senos), segun las cuales son divididos los lados de un n-gono plano ó alabeado (ó esférico), tiene el valor 1; y $n-1$ puntos de division caen sobre una recta ó un plano (ó un círculo máximo), tambien el último punto caerá sobre la misma recta ó el mismo plano (ó círculo máximo). Véase (83).

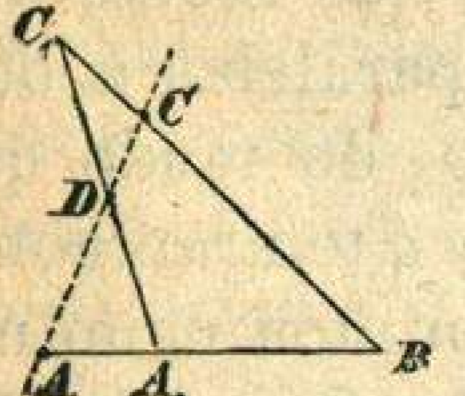
Aplicaciones. Si los puntos P, Q y R caen sobre BC, CA y AB; designamos por f, g, h, p, q, r las rectas de que son parte BC, CA, AB, AP, BQ, CR; y hacemos

$$m = \frac{BP}{CP}\,\frac{CQ}{AQ}\,\frac{AR}{BR}, \quad \mu = \frac{sen gp}{sen hp}\,\frac{sen hq}{sen fq}\,\frac{sen fr}{sen gr}$$

será $m\mu = -1$; puesto que (79):

$$BP : CP = (sen\, hp : sen\, gp)\,(AB : AC); \text{ etc.}$$

En el caso de que las rectas AP, BQ y CR pasen por un punto, se tendrá (83) $m = -1$; y, por consecuencia, $\mu = 1$. Cuando los puntos P, Q y R caigan sobre una recta, será $m = 1$; y por lo tanto, $\mu = -1$.



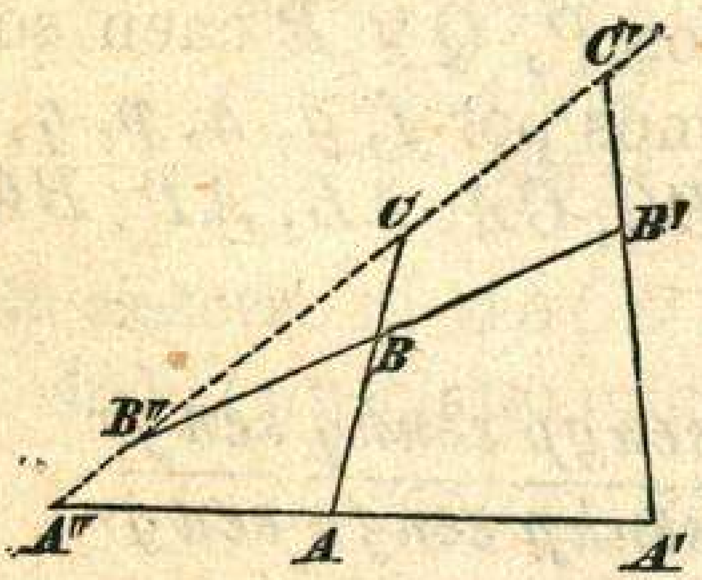
Si en un triángulo permanecen invariables, un ángulo y la suma (ó la diferencia) de los lados que lo forman, el punto medio del tercer lado caerá sobre una recta determinada (*). Los lados A_1B, BC_1 y C_1A_1 son cortados por una recta en A, C y D, de modo que

(*) Leibnitz (*Acta Erud.* 1685, p. 501. *Demonstratio geometrica, et cætera*). Steiner (*J. de Crelle A.* 24, p. 191). *Planimetría* (96).

$$\frac{C_1D}{A_1D}\,\frac{A_1A}{BA}\,\frac{BC}{C_1C}=1$$

Ahora bien, si la razon $A_1A : C_1C$ es dada, lo es tambien la razon $C_1D : A_1D$; y el punto D, del lado C_1A_1, caerá sobre la recta AC.

Si son iguales las razones, segun las cuales son divididos los segmentos AB y $A'B'$ en C y C', por una recta ó un plano, serán tambien iguales las razones, segun las cuales son divididos los segmentos AA' y BB' en A'' y B'', por la misma recta ó el mismo plano (*). En efecto,

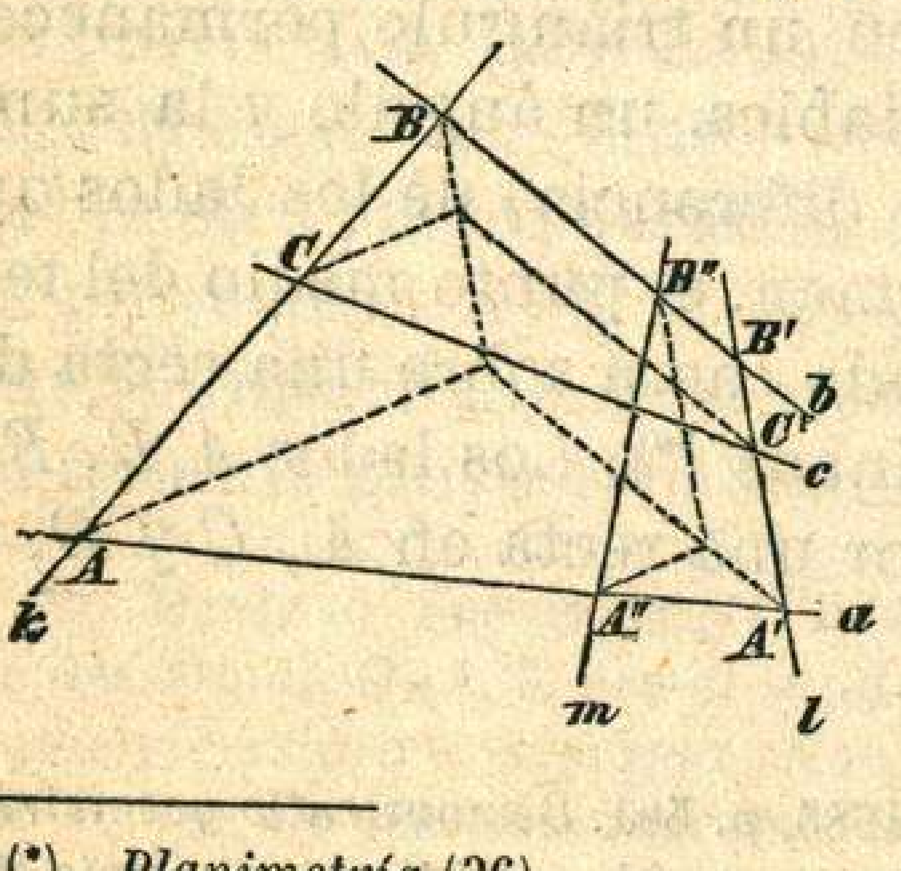


$$\frac{AA''}{A'A''}\,\frac{A'C'}{B'C'}\,\frac{B'B''}{BB''}\,\frac{BC}{AC}=1$$

Ahora bien, si

$$\frac{A'C'}{B'C'}\,\frac{BC}{AC}=1,\ \text{será}\ \frac{AA''}{A'A''}\,\frac{B'B''}{BB''}=1$$

Si las tres rectas a, b y c, son paralelas á un plano, y las rectas k, l y m paralelas á otro plano, de modo que a, b y c tengan con k los puntos comunes A, B y C, y con l los puntos comunes A', B' y C'; y a y b con la tercera recta m los puntos comunes A''



(*) *Planimetría* (36).

y B''; la tercera recta c, del primer grupo tendrá tambien un punto comun con la tercera m, del segundo (*). En efecto (*Estereom.* 7):

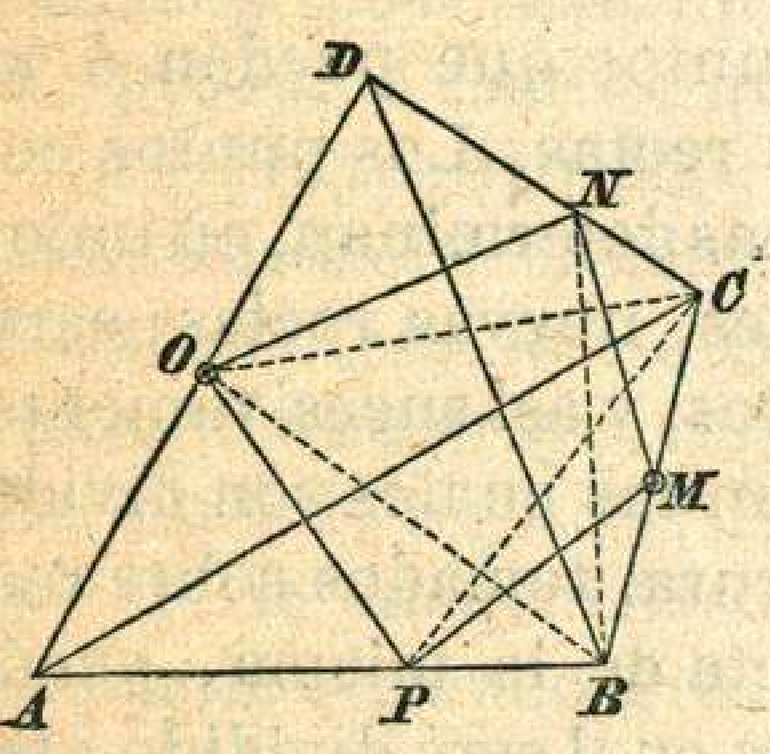
$$\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} \quad \text{y} \quad \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

Luego:

$$\frac{AA''}{A'A''} \frac{A'C'}{B'C'} \frac{B'B''}{BB''} \frac{BC}{AC} = 1$$

Y, C, por lo tanto, cae sobre el plano $A''C'B''$

Si un plano divide por mitad dos aristas opuestas de un tetraedro, tambien divide por mitad su volúmen (**). El plano que biseca las aristas BC y AD en M y O, y las aristas CD y AB en N y P, divide el tetraedro en dos cuerpos: uno, compuesto por las pirámides que tienen el vértice comun D y las bases $MNOP$ y OND; y el otro, por las pirámides cuya cúspide es C y cuyas bases son $MPON$ y AOP. Las pirámides cuadrangulares son de igual volúmen; porque tienen la misma base, y, segun la ecuacion $BM = MC$, iguales alturas. Por otra parte:



(*) En este teorema estriba la descripcion doble de un paraboloide reglado (*Estereom.* 8). Meier Hirsch (*geom. Aufgaben II*, 182).

(**) Bobillier segun la *Coleccion de* Lafremoire *VI*, 1.) *Ann. de Gerg.* 1, *p.* 36.

$$BOD : AOP = (DO : OA)\,(AB : AP)$$

$$BODN : AOPC = (DO : OA)\,(AB : AP)\,(ND : CD)$$

$$\frac{AP}{PB}\,\frac{BM}{MC}\,\frac{CN}{ND}\,\frac{DO}{OA} = 1$$

Mas $\frac{DO}{OA} = 1$, $\frac{BM}{MC} = 1$; y, por lo tanto:

$$\frac{PB}{AP} = \frac{CN}{ND},\quad \frac{AB}{AP} = \frac{CD}{ND}$$

Luego: $BODN : AOPC = 1$.

Las rectas, que unen cuatro puntos de un plano, determinan tres nuevos puntos que pueden á su vez unirse por otras tantas rectas. Los puntos comunes de estas rectas últimas determinan, en union con los puntos preexistentes, nuevas rectas; estas nuevas rectas, nuevos puntos; y así sucesivamente. Conocidas las razones segun las cuales son divididos dos segmentos de la figura, tomados sobre rectas diferentes, por una recta de la misma, puede calcularse la razon segun la cual será dividido otro segmento por una recta de la misma figura tambien. El teorema esférico correspondiente tiene un enunciado análogo.

Los planos, que son determinados por cinco puntos del espacio, determinan á su vez otros puntos por los cuales son determinados nuevos planos. Estos planos últimamente construidos determinan otros puntos; estos puntos, otros planos, etc. Conocidas las razones segun las cuales son divididos cada uno de tres segmentos de la figura, tomados sobre rectas diferentes y no situados los tres en un mismo plano, por un plano de la misma, puede calcularse la razon segun la cual será dividido otro segmento por un plano de la figura misma (*).

85. El producto de las razones, segun las cuales son divididos los lados de un polígono por un círculo ó una esfera, es igual á 1 (**).

Designando por (A) la potencia del punto A respecto del círculo ó la esfera, tenemos en efecto:

$$\frac{(A)}{(B)}\frac{(B)}{(C)}\frac{(C)}{(A)}=1$$

áun cuando cada uno de los pares de puntos de intersección fuese imaginarios.

El producto escrito, que tiene el valor constante 1, es proyectivo (82); y, por consecuencia, no sólo subsiste el teorema correspondiente de la Geometría esférica, sino que tambien puede sustituir al círculo una proyeccion central plana del mismo (una línea de segundo grado); y á la esfera, un relieve de la misma (*Estereom.* 61 — una superficie elíptica de segundo grado).

86. Cuando el segmento AB es dividido en los puntos C y D, el cociente de razones $(AC:BC)$: $(AD:BD)$, se llama la ***doble razon de los puntos*** A, B, C y D (en este órden) y se designa por (A, B, C, D). Así:

$$(A, B, C, D)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\frac{BD}{AD} \quad ***$$

(*) Möbius (*baryc. Calcul.* 155 y 198).

(**) Carnot (*Transo.* 9 y 10). Poncelet (*Propr. proj.* 34).

(***) Las dobles razones fueron estudiadas por Möbius (1827) bajo el nombre de *dobles razones de secciones* y designadas como

Cuando el ángulo de las rectas a y b es dividido por las rectas c y d, el cociente de las razones de senos,

$$(sen\ ac : sen\ bc) : (sen\ ad : sen\ bd)$$

se llama la *doble razon de las rectas a, b, c* y *d*, que forman un haz plano; ó, por lo ménos, son paralelas á un plano; y se designa por (a, b, c, d).

Cuando el diedro de los planos α y β es dividido por los planos γ y δ, el cociente de las razones de senos

$$(sen\ \alpha\gamma : sen\ \beta\gamma) : (sen\ \alpha\delta : sen\ \beta\delta)$$

lleva el nombre de *doble razon de los planos* α, β, γ y δ, que forman un haz, ó son paralelos á una recta, y se designa por $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

En la Esférica, por *doble razon de los puntos A, B, C* y *D*, de un círculo, se comprende la fórmula

$$(A, B, C, D) = \frac{sen\ AC}{sen\ BC} : \frac{sen\ AD}{sen\ BD};$$

y por *doble razon de los círculos máximos a, b, c* y *d*, de un haz, la fórmula

$$(a, b, c, d) = \frac{sen\ ac}{sen\ bc} : \frac{sen\ ad}{sen\ bd}$$

---

en el texto *(Baryc. Calcul.* 182). Más extensas aplicaciones geométricas de las mismas se deben á STEINER (1832). *(System. Entwickelung,* etc.). La denominacion elegida por CHASLES de *razon anarmónica,* presupone que cuatro elementos, cuya doble razon es — 1, se llamen *armónicos*. La doble razon de cuatro elementos en el espacio fué definida por STAUDT con independencia del concepto de magnitud *(Geometrie der Lage* 1847).

La doble razon de puntos de una recta, (A, B, C, D), tiene un valor positivo, cuando los puntos C y D están simultáneamente dentro ó fuera del propio segmento AB; y un valor negativo, cuando uno de aquellos puntos está dentro del segmento AB, y el otro fuera. Tiene el valor 1, cuando D coincide con C á distancia finita ó infinita (79); y tiene el valor -1, cuando los puntos C y D dividen al segmento AB, el uno interiormente y el otro exteriormente, segun la misma razon. En este último caso, los puntos C y D se llaman *armónicos conjugados* de los A y B (*Planim.* 66).

La doble razon de rectas de un haz plano, (a, b, c, d), tiene un valor positivo, cuando las rectas c y d dividen el ángulo ab (y el opuesto por el vértice) ambas internamente ó externamente; y un valor negativo, cuando la una le divide internamente, y la otra externamente. Tiene el valor 1, cuando d coincide con c; y el valor -1, cuando c y d dividen el ángulo ab, una internamente y la otra externamente, segun la misma razon de senos. En este último caso, el haz se llama *armónico* (*Planim.* 67). Del mismo modo se razona sobre la doble razon de planos de un haz; de puntos de un círculo máximo y de círculos máximos de un haz.

Si permutamos el primer elemento con el tercero y el segundo con el cuarto, el valor de la doble razon permanece invariable. Así:

$$(C, D, A, B) = (A, B, C, D)$$

$$\frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

k

Si el primer elemento se cambia por el segundo, ó el tercero con el cuarto, la doble razon adquiere su valor recíproco. Así:

$$(A, B, D, C)\ (A, B, C, D) = 1;$$

porque $\left(\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}\right)\left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right) = 1$. Del mismo modo se halla, en general (*):

$$(A, B, C, D)\ (A, B, D, E) = (A, B, C, E)$$

87. La doble razon de puntos de una recta es proyectiva (82). Si los puntos A, B, C y D de una recta, se proyectan desde un punto cualquiera S por las rectas a, b, c y d, sobre una recta cualquiera del plano SAB, y las proyecciones se designan por A', B', C' y D', tenemos (79):

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = (A', B', C', D')\ (**)$$

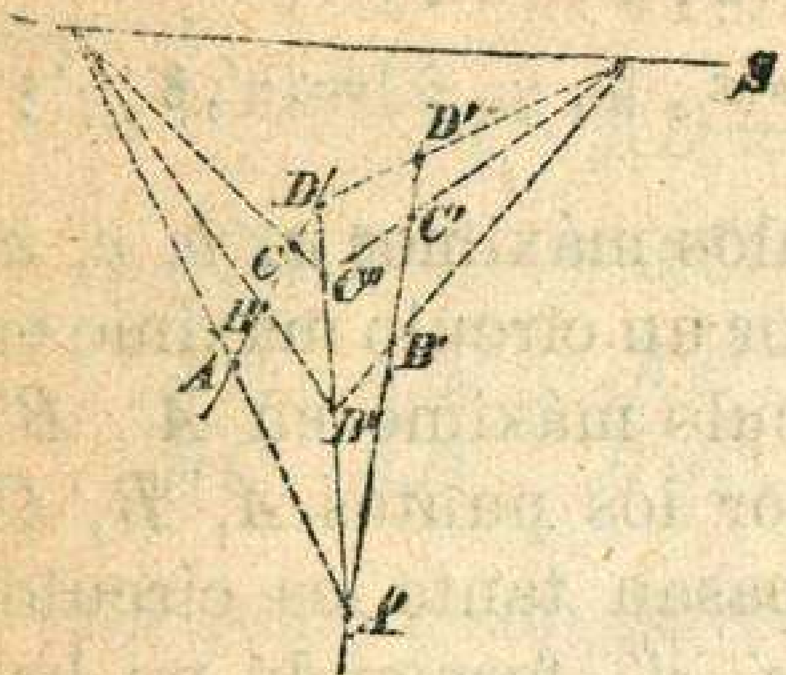
La doble razon de puntos de una recta conserva su valor áun cuando los puntos sean proyectados por un haz de planos sobre otra recta (***).

(*) Möbius (*Baryc. calcul.* 184).

(**) Esta ley fundamental ya se encuentra entre los lemas á los *Porismos* de *Euclides* en la *Coleccion de* Pappus VII, 129 y sig. Chasles (*Les porismes d'Euclide* 1860).

(***) Este teorema fué demostrado para los elementos armónicos por Carnot (*Transvers.* 19); y, en general, por Möbius (*Baryc. Calcul.* 196).

Los planos α, β, γ, δ que tienen comun la recta s, pasan por los puntos A, B, C y D de una recta, y cortan á una segunda recta en A', B', C' y D'. La recta $A'D$ será cortada en B'' y C'' por los planos β y γ, de modo que las rectas AA', BB'' CC'', y $B''B'$, $C''C'$, DD' forman cada tres un haz plano. Y, por consecuencia, segun el teorema anterior:



$$(A, B, C, D) = (A', B'', C'', D) = (A', B', C', D')$$

Si el haz plano de las rectas a'', b'', c'' y d'' es una seccion normal del haz de planos α, β, γ, δ, se tiene idénticamente:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a'', b'', c'', d'')$$

Si las rectas a'', b'', c'', d'' son cortadas por una recta cualquiera de su plano, en los puntos A'', B'', C'', D'', segun el teorema anterior:

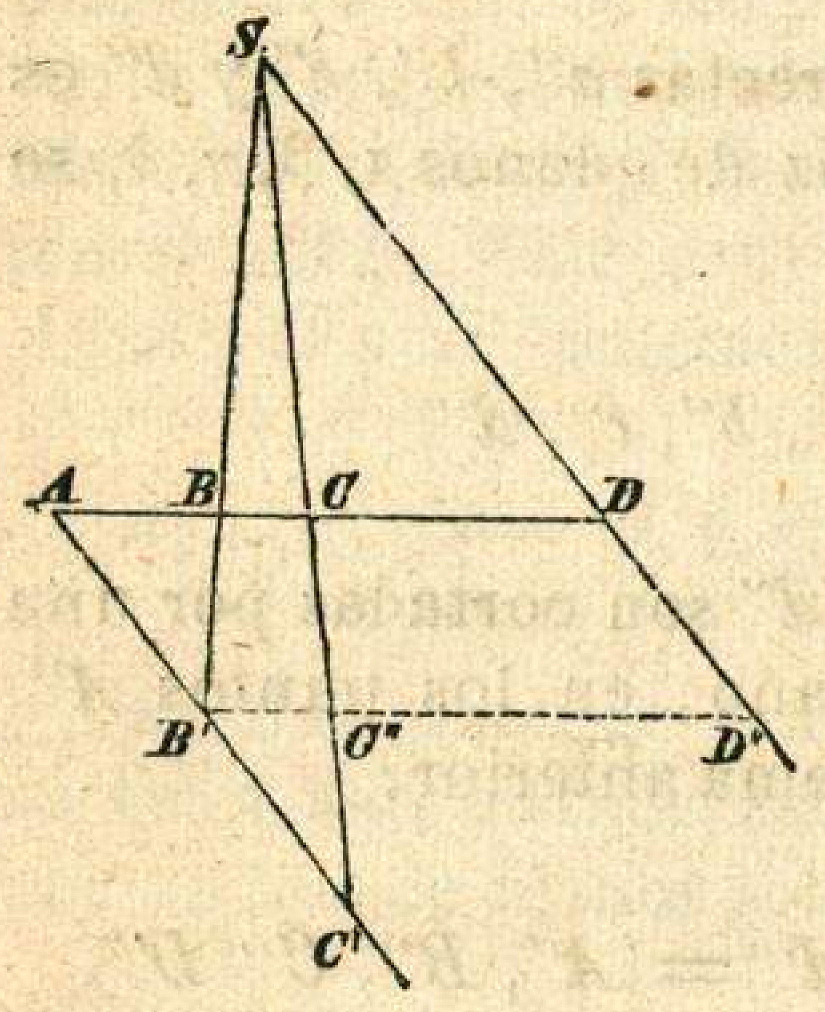
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a'', b'', c'', d'') = (A'', B'', C'' D'')$$
$$= (A, B, C, D)$$

Si, pues, los puntos A, B, C, D de una recta, se proyectan por los hazes de rectas a, b, c, d y a', b', c', d', ó por los hazes de planos α, β, γ, δ y α', β', γ', δ', tendremos:

$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = (a', b', c', d')$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$
$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d') = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

Cuando un haz de círculos máximos a, b, c, d, de una esfera, es cortado por un círculo máximo en A, B, C, D, y por otro círculo máximo en A', B', C', D'; y cuando además por los puntos A, B, C, D de un círculo máximo, pasan tanto los círculos a, b, c, d como los a', b', c', d', formando un haz cada cuatro de éstos, será (*):

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = (A', B', C', D')$$
$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = (a', b', c', d')$$



Observacion. Para hallar el valor de la doble razon de puntos de una recta, (A, B, C, D), se proyecta la figura $ABCD$ desde un punto cualquiera S sobre la recta que pasa por A y es paralela á DS. En la proyeccion AB' ... cae el punto D en el infinito, y, por consiguiente:

$$(A, B, C, D) = (A, B', C') = AC' : B'C'.$$

Trazando ahora por B' la paralela á la AD, que

(*) Steiner (*System. Entw.* 29 y 34). Gudermann (*Nied. Sph.* 177 *y sig.*).

corta en C' á CS, y á DS en D'', se halla inmediatamente:

$$BC : BD = B'C'' : B'D'',$$

$$AC : B'C'' = AC' : B'C', AD = B'D''.$$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{B'C''} : \frac{AD}{B'D''} = AC' : B'C'.$$

La doble razon de rectas ó de planos de un haz, (a, b, c, d) ó $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, puede expresarse del modo más sencillo por (A', B', C'), suponiendo que una recta, paralela al rayo d ó al plano δ, corta á los expresados hazes en los puntos A', B', C' y en el infinitamente distante.

88. Si la doble razon de puntos de una recta (A, B, C, D), ó de rayos de un haz, $(a, b, c, d,)$, tiene el valor n, será (*):

$$\frac{n-1}{AB} = \frac{n}{AC} - \frac{1}{AD}$$

$$\frac{n-1}{tang\, ab} = \frac{n}{tang\, ac} - \frac{1}{tang\, ad}$$

Haciendo, en efecto, en la ecuacion

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = n \quad \text{ó} \quad n.AD.BC - AC.BD = 0,$$

$BC = AC - AB$, $BD = AD - AB$, se obtiene la siguiente:

$$n.AC.AD - n.AD.AB - AC.AD + AC.AB = 0$$

(*) Möbius (*Dioptr. Bilder; Leipz. Berichte* 1855, *p.* 8).

de la cual, por division, se deduce la primera de las establecidas.

De esta primera puede deducirse la segunda. En efecto, cortando los rayos a, b, c, d de un haz plano, por una recta normal al rayo a en los puntos A, B, C, D, tenemos:

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = n \ (87).$$

$$AB : AC : AD = \tan ab : \tan ac : \tan ad \ (81);$$

y, por consecuencia, etc. Mas tambien (87):

$$\frac{\operatorname{sen} bd}{\operatorname{sen} ad} - n \frac{\operatorname{sen} bc}{\operatorname{sen} ac} = 0$$

ó $$\frac{\operatorname{sen}(ad - ab)}{\operatorname{sen} ad \operatorname{sen} ab} - n \frac{\operatorname{sen}(ac - ab)}{\operatorname{sen} ac \operatorname{sen} ab} = 0$$

Luego:

$$(\cot ad - \cot ab) - n(\cot ac - \cot ab) = 0; \text{ etc.}$$

Si, en particular, los elementos dados son armónicos, y entónces $n = -1$, tendremos:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD},$$

$$\frac{2}{\tan ab} = \frac{1}{\tan ac} + \frac{1}{\tan ad}$$

En este caso, el punto medio M del segmento AB, y la recta m que biseca el ángulo ab, adquieren propiedades especiales, expresadas por las ecuaciones (*):

(*) Apollonio *(Con. I,* 37). Lahire *(Sect. con.* 1685, *p.* 1 *y sig.)*, Poncelet *(Propr. proj.,* 31), (Gudermann *Nied. Sphärik,* 196).

$$MB^2 = MC.MD,\ AC^2 : AD^2 = MC : MD.$$

$$tang^2 mb = tang\, mc \,.\, tang\, md,$$

$$sen^2 ac : sen^2 ad = sen 2 mc : sen 2 md$$

Puesto que: $AD.BC + AC.BD = 0$, ó bien:

$$(AM + MD)\,(BM + MC)$$
$$+ (AM + MC)\,(BM + MD) = 0$$

Y, como $AM = MB = -BM$, etc. Por otra parte:

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AC.CB}{AD.BD} = \frac{(AM + MC)\,(MB - MC)}{(AM + MD)\,(MD - MB)}$$
$$= \frac{MB^2 - MC^2}{MD^2 - MB^2} = \frac{MC}{MD}$$

Si las rectas a, b, c, d, m tienen comun el punto S, y son cortadas en A, B, C, D, M por una normal á m, será

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = -1,$$

y M el punto medio de AB. Ahora bien:

$$MB : MC : MD = tang\, mb : tang\, mc : tang\, md$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{sen\, ac}{sen\, ad}\,\frac{SC}{SD}\ (79),\ SC \cos mc = SD \cos md,$$

$$tang\, mc \cos^2 mc = \frac{1}{2} sen 2 mc, \text{ etc.};$$

Aplicaciones. Una recta, que pasa por el centro de gravedad S, del triángulo ABC, corta á los lados de este triángulo en A', B', C', y á la recta por su vértice C paralela al lado opuesto AB en T, de modo que las rectas CS, CT, CA, CB y los puntos S, T, A', B' son armónicos. Por consecuencia:

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} = \frac{2}{ST} = \frac{1}{C'S}$$

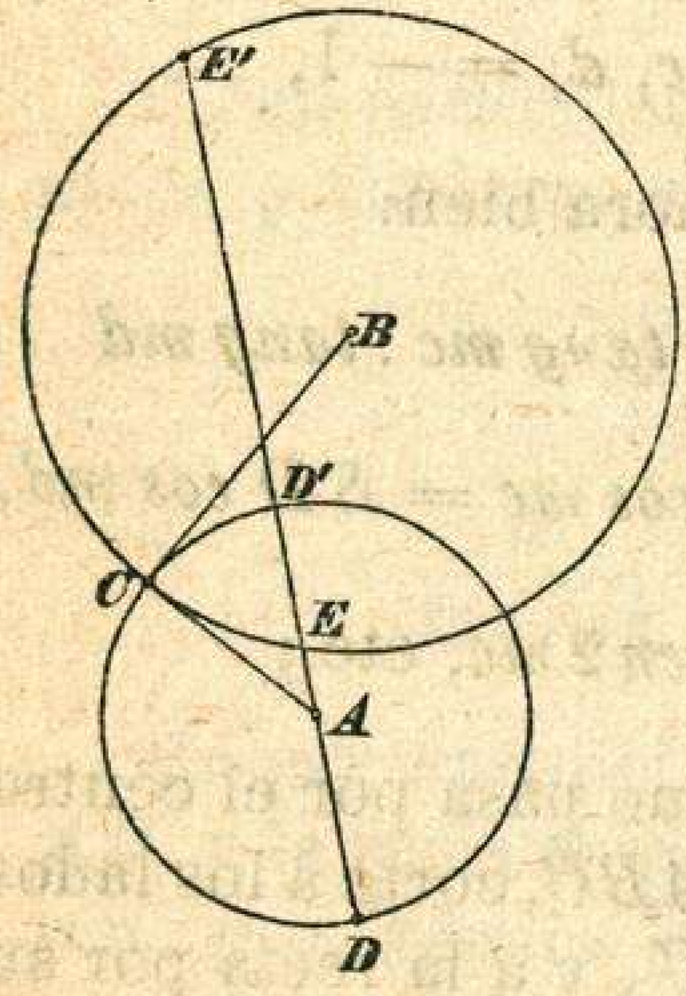
$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = 0 \; (*)$$

Una recta que pasa por el centro de gravedad S, del tetraedro $ABCD$, corta á sus caras en A', B', C', D'; y á los planos paralelos, uno que pasa por la arista AB y el otro por la CD, en los puntos U y V, de modo que tanto los planos CDS, CDV, CDA, CDB, como los puntos S, V, A', B', son armónicos; y, por consiguiente:

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} = \frac{2}{SV}, \; \frac{1}{SC'} + \frac{1}{SD'} = \frac{2}{SU}$$

Mas el punto S, es el medio de UV (*Estereom.* 75). Luego:

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} + \frac{1}{SD'} = 0$$



Si dos círculos, (A) y (B), se cortan normalmente, cada uno de ellos divide armónicamente al diámetro del otro (**). Si C es un punto comun de los dos círculos, AC será una tangente al círculo (B); y, si el diámetro DD' del círculo (A) es cortado en E y E' por el círculo (B), será

(*) MACLAURIN. (*Tract. de lin. géom. prop. Apénd. al Álgebra* 1748, § 98).

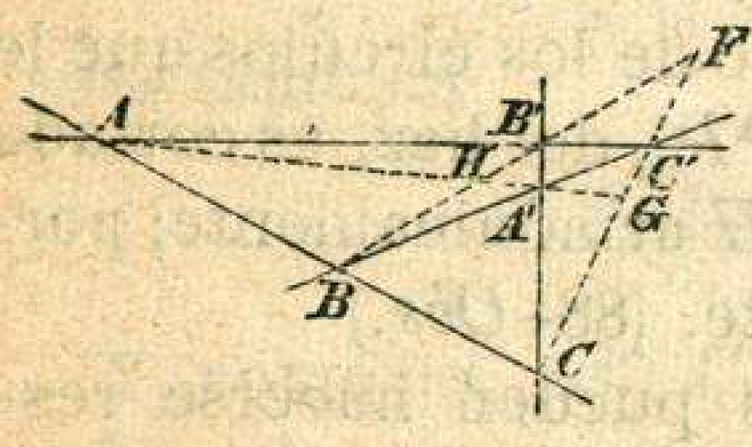
(**) PONCELET (*Prop. proj.* 79).

$$AE \cdot AE' = AC^2 = AD'^2 \text{ y } (D, D', E, E') = -1.$$

Lo mismo sucede con dos esferas que se corten normalmente. El teorema correspondiente para dos círculos de una esfera que se corten normalmente fué dado por Gudermann en su *Nied. Sphärik*, 307.

89. Las diagonales del cuadrángulo determinado por cuatro rectas de un plano se dividen entre sí armónicamente (*).

Demostracion. Las rectas AB, BA', $A'B'$ y $B'A$, forman tres cuadrángulos, con las diagonales AA', BB' y CC': de tal modo que AA' es dividida armónicamente por las otras dos BB' y CC'; etc. La doble razon de los puntos A, A' y los dos, en que AA' es cortada por BB' y CC', se designa (79) por (A, A', BB', CC'). Para hallar su valor, proyéctese la figura desde un punto cualquiera S del espacio, sobre un plano, paralelo al $CC'S$. La proyeccion del cuadrángulo $ABA'B'$ será un paralelógramo (83); las proyecciones de AA' y BB' se



bisecarán mútuamente; y la proyeccion de CC' será la recta infinitamente distante. Por lo cual es $(A, A', BB', CC') = -1$. Del mismo modo se encuentra que

$$(B, B', CC', AA') = -1 \text{ y } (C, C', AA', BB') = -1.$$

(*) En Pappus VII, 131 se halla un recíproco de este teorema antiguo, reproducido por Desargues *(Brouillon projet.* 1639 *éd. Poudra, Paris* 1864, *I p.* 186), y por Carnot *(Géom. de pos.* 225). Poncelet *(Propr. proj.* 155).

El mismo teorema subsiste para las diagonales del cuadrángulo esférico, determinado por cuatro círculos máximos de una esfera.

OBSERVACION. Designando los puntos comunes de las diagonales por F, G y H, y sus puntos medios por A'', B'' y C'', tenemos (88):

$$A''A^2 = A''G \,.\, A''H, \quad B''B^2 = B''H \,.\, B''F,$$
$$C''C^2 = C''F \,.\, C''G$$

Y estas igualdades enseñan que la tangente desde A'' al círculo FGH (hasta su punto de contacto) tiene la longitud $A''A$, etc.; y, por lo tanto, que los círculos, cuyos puntos opuestos son A y A', B y B', C y C', cortan normalmente al círculo FGH. Estos círculos forman un haz (*Planim.* 121); y el centro de su círculo ortogonal FGH, con los puntos comunes P y P', de este haz, cae sobre la línea de iguales potencias respecto de los círculos que le forman. La cuerda comun PP', del haz, es cortada por el círculo ortogonal FGH armónicamente; porque pasa por el centro de éste. (88–*Obs.*)

Análogas consideraciones pueden hacerse respecto de la figura esférica (*).

Si los lados de un triángulo FGH, son divididos armónicamente segun razones dadas cuyo producto es 1, tenemos (83 y 84):

$$FC : GC = FC' : C'G = p : q$$
$$GA : HA = GA' : A'H = q : r$$
$$HB : FB = HB' : B'F = r : p$$

(*) GUDERMANN (*Analyt. Sph*, p. 138). MÖBIUS (*Leipz. Berichte*, 1854, p. 87).

Y los círculos, de los cuales son puntos opuestos A y A', B y B', C y C', forman un haz. Los puntos comunes de estos círculos, P y P', guardan respecto de los puntos F, G y H una situacion, definida por la proporcion:

$$FP : GP : HP = FP' : GP' : HP' = p : q : r$$

(*Planim.* 66).

90. Si el segundo elemento de una razon doble se cambia por el tercero, esta razon doble adquiere el valor complementario respecto de 1 (*). Así:

$$\text{I.}\quad (A,\ B,\ C,\ D) + (A,\ C,\ B,\ D) = 1$$

En efecto, haciendo (87-*Obs.*)

$$(A, B, C, D) = (A, B', C')$$

será tambien:

$$(A, C, B, D) = (A, C', B')$$

Y, como $(A, B', C) + (A, C', B') = 1$ (80), resulta, etc.

Dados en un plano cuatro puntos, A, B, C y D, y una recta EF, tendremos:

$$\text{II.}\quad (A,\ B,\ CD,\ EF) + (A,\ C,\ DB,\ EF) + (A,\ D,\ BC,\ EF) = 1.$$

Y para cinco puntos, A, B, C, D y E, y un plano FGH del espacio, será

(*) Möbius (*Baryc. Calcul.* 184).

III. $(A, B, CED, FGH) + (A, C, DEB, FGH)$
$+ (A, D, BEC, FGH) + (A, E, BCD, FGH) = 1.$

Designándose, como sabemos, en estas dobles razones, por la recta CD, ó el plano CED, puestos al lado de los puntos A y B, la interseccion de aquella recta, ó aquel plano, con la recta AB, etc. Proyectemos, pues, desde un punto cualquiera S el plano $ABCD$ sobre otro plano que pase por A y sea paralelo al EFS; y representemos la proyeccion por AB'... Segun (87):

$$(A, B, CD, EF) = (A, B', C'D'), \text{ etc.}$$

Y de este modo se obtiene la ecuacion II de la segunda de las demostradas antes (80). La ecuacion III se deduce de la II por el mismo procedimiento que la tercera se dedujo de la segunda de las ecuaciones (80); y tambien puede hallarse directamente por la consideracion de una figura que sea colineal y esté en perspectiva respecto de la figura espaciosa dada (*Estereom.* 61), y en la cual correspondan puntos infinitamente distantes á los puntos del plano FGH.

91. De la ecuacion (90–I) se deduce inmediatamente para cuatro puntos, A, B, C y D, de una recta, esta otra:

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0$$

Véase (*Planim.* 125).

Para cinco puntos, A..., E, de un plano, las dobles razones de puntos de una recta (A, CE, B, DE) y (A, C, BE, DE), tienen el mismo valor que la doble razon de cuatro rectas (AE, CE, BE, DE). Para seis puntos del espacio, $A,.., F$, las dobles razones (A, CEF, B, DEF) y (A, C, BEF, DEF) tienen el mismo valor (87). Por consecuencia, en estos casos tambien es

$$(A, B, CE, DE) + (A, C, BE, DE) = 1$$
$$(A, B, CEF, DEF) + (A, C, BEF, DEF) = 1$$

Expresando las razones, en que son divididas AB y AC, por razones de áreas de triángulos ó de volúmenes de tetraedros (79), se halla (*):

Para cinco puntos de un plano:

$$ABE.CDE + BCE.ADE + CAE.BDE = 0$$

Para seis puntos del espacio:

$$ABEF.CDEF + BCEF.ADEF$$
$$+ CAEF.BDEF = 0.$$

De la ecuacion (90–II) se deduce tambien para seis puntos de un plano:

$$ABC.DEF + ACD.BEF + ADB.CEF$$
$$= BCD.AEF.$$

Y para siete puntos del espacio:

$$ABCG.DEFG + ACDG.BEFG + ADBG.CEFG$$
$$= BCDG.AEFG.$$

De la ecuacion (90-III) se deduce para ocho puntos del espacio:

(*) Monge y Möbius. Véase la *Teoría de las Determ.* 3, 44.

$$BCDE.AFGH + ACED.BFGH + ADEB.CFGH$$
$$+ ABEC.DFGH + ABCD.EFGH = 0.$$

Observacion. —La ecuacion (90-I) subsiste áun cuando sean sustituidos en ella los puntos de una recta por rectas paralelas á un plano. Por consecuencia:

$$(a, b, c, d) + (a, c, b, d) = 1 \; (*)$$
$$\operatorname{sen} ab \operatorname{sen} cd + \operatorname{sen} bc \operatorname{sen} ad + \operatorname{sen} ca \operatorname{sen} bd = 0$$

(31). Si las rectas a, b, c y d pasan por un mismo punto de un círculo, al cual cortan además en los puntos A, B, C y D, las cuerdas AB, BC... son entre sí como los senos de los ángulos inscritos que incluyen; y, por lo tanto:

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0$$

como ya (31) se demostró.

Si el triángulo ABC se proyecta desde un punto cualquiera S por las rectas a, b y c, tenemos (73):

$$SABC = \frac{1}{6} SA.SB.SC \operatorname{sen} abc.$$

Y con esto, de las ecuaciones halladas para triángulos de un plano surgen las relaciones poligonométricas para cinco y seis rectas del espacio (**):

$$\operatorname{sen} abc \operatorname{sen} cde + \operatorname{sen} bce \operatorname{sen} ade + \operatorname{sen} cae \operatorname{sen} bde = 0$$
$$\operatorname{sen} abc \operatorname{sen} def + \operatorname{sen} acd \operatorname{sen} bef + \operatorname{sen} adb \operatorname{sen} cef$$
$$= \operatorname{sen} bcd \operatorname{sen} aef$$

(*) Möbius (*J. de Crelle*, *A.* 24, *p.* 90).

(**) La posibilidad de semejantes relaciones fué indicada por Poncelet (*Propr. proj.* 45 y *J. de Crelle* 3, *p.* 265).

92. I.—Si las dobles razones de puntos que caen, cada cuatro, sobre una recta (A, B, C, D), y (A', B', C', D') tienen el mismo valor, y las tres rectas de union, AA', BB', CC', pasan por el punto S, las cuatro rectas AA', BB', CC' y DD' formarán un haz plano.

En efecto, existen (87) las dobles razones:

$$(AS, BS, CS, DS) = (A, B, C, D)$$

$$(A'S, B'S, C'S, D'S) = (A', B', C', D')$$

Y $(AS, BS, CS, DS) = (A'S, B'S, C'S, D'S)$.

Ahora bien, si AS coincide con $A'S$, BS con $B'S$, y CS con $C'S$, coincidirá tambien DS con $D'S$ (79).

Si es $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$, las rectas AA', BB' y CC' formarán un haz plano (*). Designando, en efecto, por S el punto comun de las rectas AA' y BB', tendremos:

$$(AS, BS, CS, DS) = (A'S, B'S, C'S, DS)$$

Luego, si AS coincide con $A'S$, y BS con $B'S$, tambien CS coincidirá con $C'S$.

II.—Cuando las dobles razones de rectas de hazes planos (a, b, c, d), y (a', b', c', d'), son iguales, y los puntos de interseccion aa', bb' y cc' caen sobre una recta r, los rayos d y d' se cortan tambien sobre la misma recta r. En efecto, segun la hipótesis, las dobles razones de puntos, (ar, br, cr, dr) y $(a'r, b'r, c'r, d'r)$ son iguales entre sí; y, por lo

(*) Pappus (VII, 136 y 142). Steiner (*Syst. entw.* 14 y 31.) Chasles (*Géom. sup.* 38.)

tanto, si ar coincide con $a'r$, br con $b'r$, y cr con $c'r$, tambien coincidirá dr con $d'r$.

Si, en particular, $(a, b, c, d) = (a', b', c', d)$, los puntos aa', bb' y cc' caerán sobre una recta. Porque la recta, en que están los puntos aa' y bb', debe ser cortada por las rectas del segundo haz de modo que $(aa', bb', c, d) = (aa', bb', c', d)$, etc.

III.—Cuando los planos α, β, γ, δ y α' β', γ', δ' forman dos hazes, y entre las rectas $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ hay dos cualesquiera que tengan un punto comun, todas ellas le tendrán tambien. En efecto, el punto comun de las rectas $\alpha\alpha'$ y $\beta\beta'$ cae sobre los planos α, β, α', β'; y, por consiguiente, sobre la recta ó intersección comun, tanto de los planos α, β, γ, δ como de los planos α', β', γ', δ'; y, de resultas, sobre los planos γ, δ, γ', δ', esto es: sobre las rectas $\gamma\gamma'$ y $\delta\delta'$.

Si las dobles razones de planos que forman hazes, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ y $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, son iguales, y las rectas $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ caen sobre un plano ε, las rectas $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ formarán un haz plano. Porque estas rectas tienen un punto comun, y las dobles razones de rectas, $(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon)$ y $(\alpha'\varepsilon, \beta'\varepsilon, \gamma'\varepsilon, \delta'\varepsilon)$ son iguales: por lo cual $\delta'\varepsilon$ y $\delta\varepsilon$ se confunden, es decir: $\delta\delta'$ cae tambien sobre el plano ε.

Si, en particular $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta)$, las rectas $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ formarán un haz plano. Porque las rectas $\beta\gamma$ y $\beta'\gamma'$ están sobre el plano δ y tienen por ésto un punto comun que cae sobre los planos β, γ, β', γ'; y, por lo tanto, sobre las rectas $\beta\beta'$ y $\gamma\gamma'$. Designando por ε el plano de las rectas $\beta\beta'$ y $\gamma\gamma'$, las dobles razones de rectas $(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon)$ y $(\alpha'\varepsilon, \beta'\varepsilon, \gamma'\varepsilon, \delta'\varepsilon)$ serán iguales; y, de consiguiente, la recta $\alpha\varepsilon$

coincidirá con la $\alpha'\varepsilon$, esto es: la recta $\alpha\alpha'$ cae tambien sobre el plano ε.

Aplicacion. Si los triángulos planos (ó esféricos) ABC y $A'B'C'$, están en perspectiva (*Estereom.* 57), los puntos comunes de las rectas (ó círculos máximos) correspondientes, AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, CA y $C'A'$, caerán sobre una recta (ó un círculo máximo); y recíprocamente (*). Designado por F el punto comun de las rectas, AB y $A'B'$, en virtud de la situacion en perspectiva de las figuras serán iguales las dobles razones de puntos (A, B, CC', F) y (A', B', CC', F); y lo serán tambien las de rectas (AC, BC, CC', FC) y ($A'C'$, $B'C'$, CC', FC'). Luego los puntos comunes de las rectas AC y $A'C'$, BC y $B'C'$, caen, juntamente con el punto F, sobre una recta. Etc.

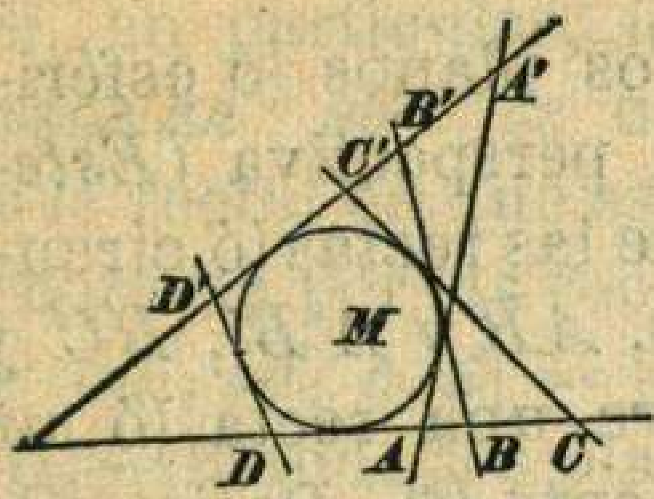
93. Si dos tangentes á un círculo, ó á una proyeccion central plana (una línea de segundo grado) del círculo, son cortadas por otras cuatro tangentes á la misma curva, la una en los puntos A, B, C, D, y la otra en los puntos A', B', C', C', las dobles razones de los puntos correspondientes son iguales (**).

Si dos puntos de un círculo, ó de una proyeccion central plana del círculo, están unidos á cuatro puntos de la misma curva, el uno por las rectas a, b, c, d, y el otro por las rectas a', b', c', d', las dobles razones de las rectas correspondientes son iguales.

(*) Gudermann (*Nied. Sphärik* 211). Chasles (*Géom. sup.* 36).

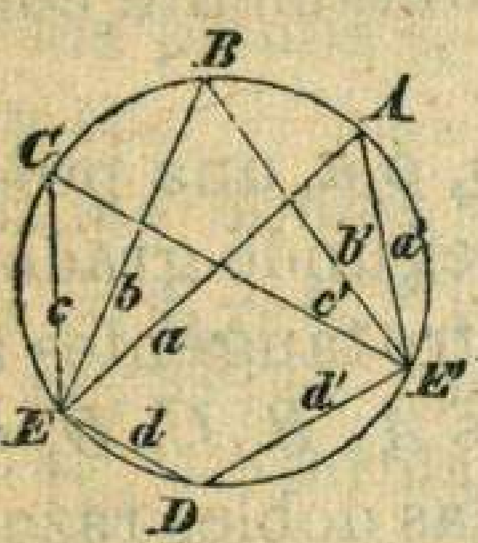
(**) Los teoremas contenidos en este artículo que, juntamente con los derivados de ellos, subsisten para las proyecciones esféricas del círculo, se deben á Steiner (*System. Entw.* 37 *y sig.*)

Demostracion. Designando por M el centro del



círculo, los ángulos $2AMA'$, $2BMB'$, $2CMC$ y $2DMD'$ tendrán valores iguales (*Planim.* 53) Si la figura $MABCD$ gira en su plano al rededor del punto M, hasta que el punto A caiga sobre la recta MA', los puntos B, C y D caerán sobre las rectas MB', MC' y MD'. Luego $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$ para todas las secciones planas de un cono proyectante de la figura dada (87).

Por otra parte, los ángulos $2aa'$, $2bb'$, $2cc'$, y $2dd'$ tienen un mismo valor, cuando sus vértices caen



sobre un círculo (*Planim.* 26). Si la figura $abcd$ gira en su plano, al rededor del punto ab, hasta que la recta a llegue á colocarse paralelamente á la a', las rectas b, c y d llegarán tambien á ser paralelas respectivamente á las b', c' y d'. Luego $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$ para todas las secciones planas de un cono, proyectante de la figura dada.

Recíprocamente:

Si cada grupo de puntos, A, B, C, D y A' B', C', D', cae sobre una recta del mismo plano, de modo que $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$, las rectas AA', BB', CC' y DD' serán tangentes á una línea determinada de segundo grado, á la cual son tangentes las líneas AB y $A'B'$.

Si cada grupo de rectas a, b, c, d y a', b', c', d', forma un haz sobre un mismo plano, de modo que

$(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$, los puntos aa', bb', cc', dd' caerán sobre una línea determinada de segundo grado, que pasa por los puntos ab y $a'b'$.

Demostracion. Supongamos que dos tangentes á una curva de la especie dada, sean cortadas por tres tangentes á la misma curva en los puntos A, B, C y A', B', C' respectivamente; y por otra recta cualquiera en D y D', de modo que $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. Entónces DD' será tambien tangente á la curva propuesta; porque, si no fuese DD', sino otra recta DE', la tangente, por el teorema directo: $(A, B, C, D) = (A', B', C', E')$, diferente de (A', B', C', D'). Etc.

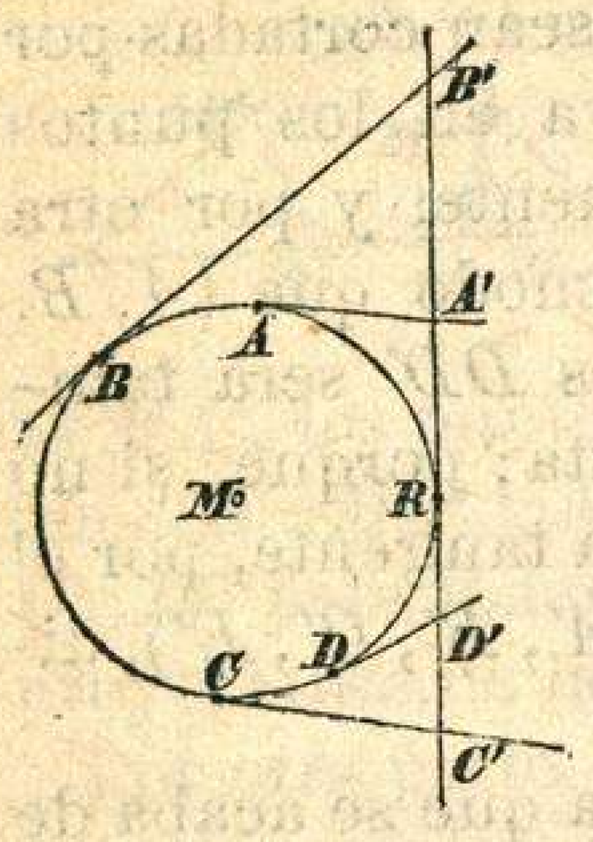
Observacion. El doble teorema que se acaba de demostrar puede tambien expresarse ventajosamente como sigue:

Cuatro tangentes fijas á una línea de segundo grado determinan sobre todas las demás tangentes á la misma iguales razones dobles de puntos, á saber: $(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = \ldots$ Por *doble-razon de cuatro tangentes á una línea de segundo grado*, se comprende la doble razon de puntos que estas tangentes, dadas, determinan sobre cualquiera otra tangente.

Cuatro puntos fijos de una línea de segundo grado determinan, con todos los demas puntos de la misma línea, iguales dobles-razones de rectas, á saber: $(AE, BE, CE, DE) = (AE', BE', CE', DE') = \ldots$ Por *doble razon de cuatro puntos de una línea de segundo grado* se comprende la doble-razon de rectas que unen los puntos dados con cualquiera otro de la línea.

Segun ésto, cuatro tangentes á una línea de segundo grado, ó cuatro puntos de la misma, son *armónicos*, cuando su razon *anarmónica* tiene el valor — 1.

La doble-razon de cuatro tangentes á una línea de segundo grado tiene el mismo valor que la doble-razon de sus puntos de contacto (*). En efecto, sean A, B, C, D, R puntos de un círculo, y A', B', C', D' los puntos en que la tangente en R corta á las tangentes en los otros puntos A, B, C y D. Las rectas RA, RB, RC y RD son normales respectivamente á las rectas que unen los puntos A', B', C', D' con el centro M. Girando en su plano la figura $RABCD$, al rededor del punto R, hasta que RA se ponga paralela con MA', las rectas RB, RC y RD se habrán puesto tambien paralelas á las MB', MC' y MD'. Luego:



$$(RA, RB, RC, RD) = (MA', MB', MC', MD')$$
$$= (A', B', C', D')$$

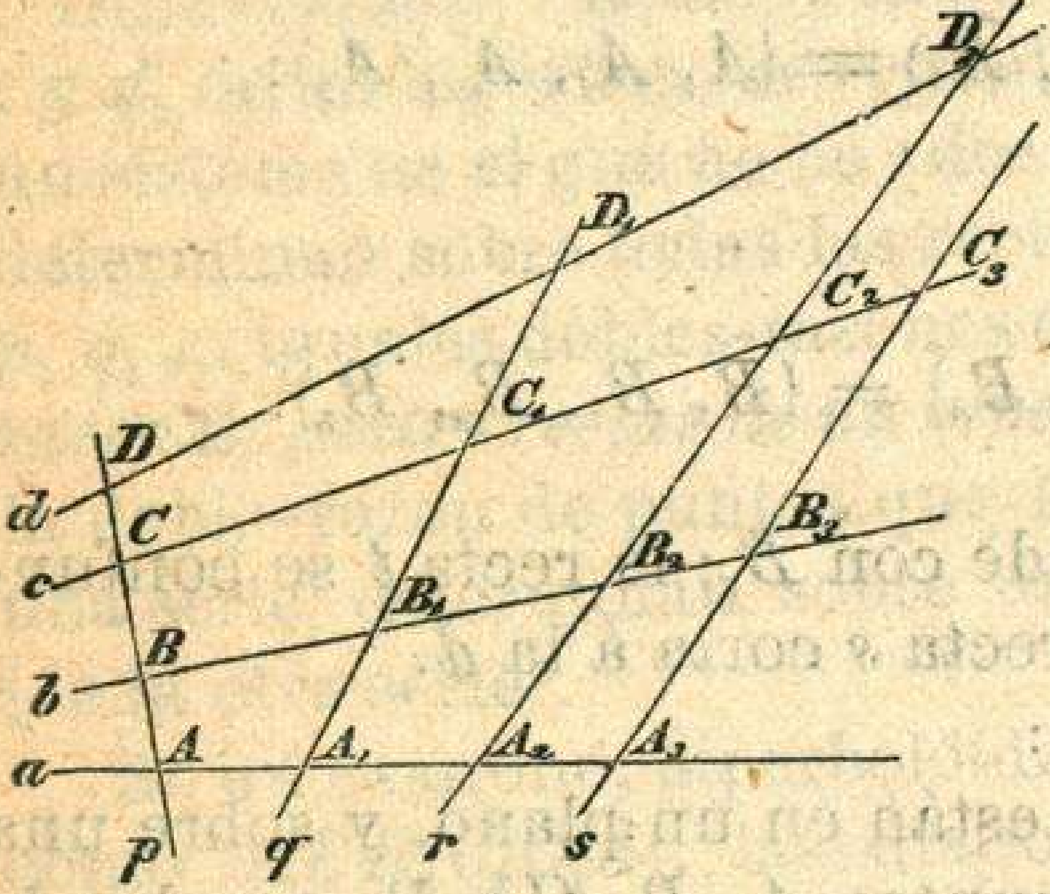
94. Si con cada una de tres rectas p, q, r, de las cuales no haya dos en un mismo plano, tiene cada una de otras cuatro rectas a, b, c, d, un punto comun, las dobles-razones de puntos

$$(pa, pb, pc, pd), \ (qa, qb, qc, qd), \ (ra, rb, rc, rd)$$

(*) Steiner (*System. Entw.* 43). Chasles (*Géom. sup.* 663). Véase adelante (101).

tienen igual valor. Una recta s, que tenga un punto comun con cada una de tres de las rectas a, b, c, d, tendrá tambien un punto comun con la cuarta; y caerá, por consecuencia, sobre el hiperboloide reglado, determinado tanto por las líneas p, q, r, como por las líneas a, b, c (*Estereom.* 8) (*).

DEMOSTRACION. Sobre la recta q señalemos cuatro puntos cualesquiera, A_1, B_1, C_1 y D_1; y supongamos que los planos pA_1, pB_1, pC_1 y pD_1, corten á la recta r en los puntos A_2, B_2, C_2 y D_2, de modo que las rectas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 y D_1D_2, designadas por a, b, c y d, tengan con la recta p los puntos comunes A, B, C y D. Segun (87):



$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (pA_1, pB_1, pC_1, pD_1)$$
$$= (A_2, B_2, C_2, D_2)$$
$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (rA_1, rB_1, rC_1, rD_1)$$
$$= (A, B, C, D);$$

y, por consecuencia:

(*) STEINER (*System. Entw.* 51, *III*). Las dos séries de rectas del hiperboloide hiperbólico fueron descubiertas en un caso especial por WREN (1669); y, en general, por MONGE (1795). CHASLES (*Aperçu hist.*).

$$(A, B, C, D) = (A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$$

Por un punto cualquiera A_3, de la recta a, trázese la recta S que corte en B_3 y C_3 á las b y c; y otra recta t que corte á las b y d en B_4 y D_4. Segun el teorema demostrado:

$$(B, B_1, B_2, B_3) = (A, A_1, A_2, A_3)$$
$$(B, B_1, B_2, B_4) = (A, A_1, A_2, A_3);$$

y, por lo tanto:

$$(B, B_1, B_2, B_4) = (B, B_1, B_2, B_3).$$

Luego B_4 coincide con B_3; la recta t se confunde con la s; y esta recta s corta á la d.

Recíprocamente:

Si dos rectas no están en un plano, y sobre una de ellas se dan los puntos A, B, C y D, y sobre la otra los puntos A', B', C' y D', de modo que se verifique la igualdad $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$, las rectas AA', BB', CC' y DD' caerán sobre un hiperboloide reglado que contiene las rectas AB y $A'B'$. Y, si las dobles razones $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ y $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, de planos que forman cada grupo un haz, son iguales entre sí, las rectas $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ y $\delta\delta'$, caerán sobre un hiperboloide reglado que contiene las rectas $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$. En efecto, una recta r, que corte á las rectas AA', BB' y CC', tiene tambien un punto comun con la recta DD'; porque las dobles razones de planos,

$$(rA, rB, rC, rD) \text{ y } (rA', rB', rC', rD')$$

son de igual valor; y, por consiguiente, los planos rD y rD' coinciden. Y la misma recta r, que corta á $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ y $\gamma\gamma'$, tiene un punto comun con la $\delta\delta'$; porque las dobles razones de puntos

$$(r\alpha, r\beta, r\gamma, r\delta) \text{ y } (r\alpha', r\beta', r\gamma', r\delta')$$

son de igual valor; y, de resultas, los puntos $r\delta$ y $r\delta'$ coinciden.

Observacion. Estas mismas cuatro rectas a, b, c y d, de un hiperboloide reglado, que pertenecen á un sistema en el que no hay dos en un mismo plano, determinan sobre todas las rectas del otro sistema, p, q, ... iguales dobles-razones de puntos. ***Por doble razon de cuatro rectas de un hiperboloide*** se entiende la doble-razon de puntos que las rectas dadas (de una série) determinan sobre una recta cualquiera (de la otra série).

En un exágono, hiperbolóidico (ó parabolóidico), como $ABB_2C_2C_1A_1$, las diagonales AC_2, BC_1 y B_2A_1, pasan por un mismo punto (*Estereometría*, 57-*Obs.*) (*).

95. En el exágono $ABCDEF$, inscrito en un círculo (ó en un línea, plana ó esférica, de segundo grado), los puntos de interseccion de los lados opuestos, AB y DE, BC y EF, CD y FA, caen sobre una recta, llamada ***recta de*** Pascal (**).

En el exágono $abcdef$, circunscrito á un círculo (ó á una línea, plana ó esférica, de segundo grado),

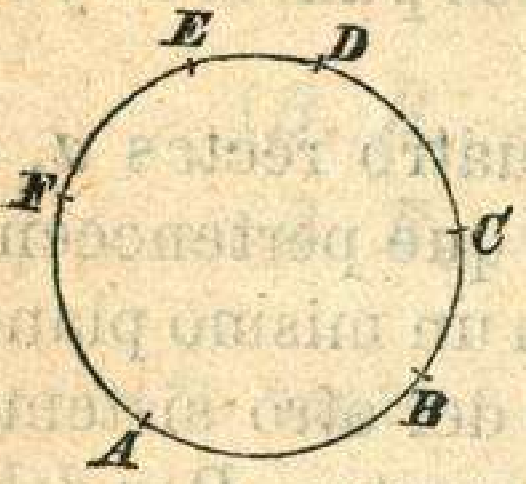
(*) Dandelin (*Ann. de Gerg.* 15, *p.* 393 y 16, *p.* 229). Hesse (*J. de Crelle, A.* 24 *p.* 40.)

(**) Pascal (*Essai pour les coniques* 1640 *lemme* 1) sin demostracion. La pequeña adicion se funda en las obras de Desargues (*Oeuvres de Pascal éd. Lahure II, p.* 354-7). El exágono inscrito fué llamado por Pascal *exagrammum mysticum* (*l. c. p.* 639.)

las rectas que unen los puntos opuestos, *ab* y *de*, *bc* y *cf*, *cd* y *fa*, pasan por un punto, llamado *punto de* Brianchon (*).

Demostracion. Las dobles-razones de rectas,

$$(FC, FD, FE, FA) \quad \text{y} \quad (BC, BD, BE, BA),$$



tienen un mismo valor: el valor de la doble-razon de cuatro puntos, determinados, de una línea de segundo grado (93-*Observacion*). Los hazes de rectas, á que se refiere la doble-razon escrita, determinan, el uno sobre la recta CD, y el otro sobre la recta DE, las dobles-razones, iguales, de puntos:

$$(C, D, FE, FA) \text{ y } (BC, D, E, BA)$$

Luego pasarán por un punto:

La recta que une el punto C con el punto comun de las BC y DE, esto es: la recta BC.

La recta que une el punto comun de las rectas CD y FE con el punto E, esto es: la recta EF.

La recta que une el punto comun de las CD y FA con el punto comun de las rectas AB y DE.

Y, por consecuencia, la tercera recta pasa por el punto comun á las dos primeras.

La demostracion del teorema correlativo se obtiene de un modo semejante, cambiando mútuamente entre sí rectas y puntos.

Recíprocamente: Todo exágono que tenga una línea de Pascal, ó un punto de Brianchon, está ins-

---

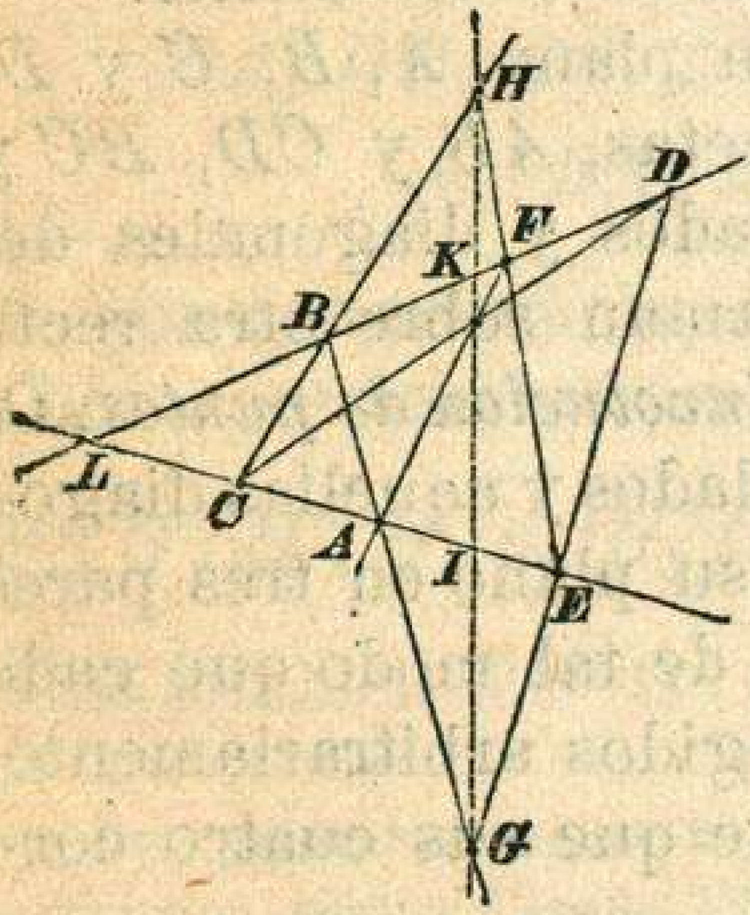
(*) Brianchon, 1806 (*J. de l'École polyt. Cah.* 13, *p.* 301.)

crito ó circunscrito, respecto de una línea determinada de segundo grado.

Observacion. Por seis puntos, ó seis tangentes, de una línea de segundo grado, se determinan varias rectas de Pascal, ó varios puntos de Brianchon, que á su vez poséen propiedades particulares (*).

96. Los teoremas que se acaban de demostrar (95) subsisten áun cuando la línea de segundo grado sea sustituida por dos rectas ó por dos puntos.

Si tres vértices, no consecutivos, A, C y E, de un exágono $ABCDEF$, están sobre una recta, y los vértices restantes sobre otra, los puntos de interseccion de los lados opuestos de dicho exágono AB y DE, BC y EF, CD y FA, caerán sobre una recta.



Si tres lados, no consecutivos a, c y e, de un exágono $abcdef$, pasan por un punto, y los lados restantes por otro punto, las rectas que unen los vértices opuestos, ab y de, bc y ef, cd y fa, pasarán por un mismo punto (**).

Demostracion. Sea G el punto comun de AB y DE; H, el punto comun de BC y EF; I, el punto comun de GH y ACE;

(*) Estudiadas por Steiner (*System. Entw.* p. 311) y Kirkmann. Véase *Planim.* 30; y el *J. de Crelle A*, 5 *p.* 268. 41 *p.* 269 y 66, 18 *p.* 174, 68 *p.* 193 y 75 *p.* 1.

(**) El primer teorema se halla en Pappus VII, 138 y 139; el otro es de Poncelet (*Propr. proj.* 169). Steiner (*System. Entw.* 23, *III y* 312).

K, el punto comun de *GH* y *BDF*; *L*, el punto comun de *ACE* y *BDF*. Tendremos (87):

$$(L, I, A, E) = (L, K, B, D)$$

$$(L, I, E, C) = (L, K, F, B)$$

De donde por multiplicacion (86) se obtiene:

$$(L, I, A, C) = (L, K, F, D)$$

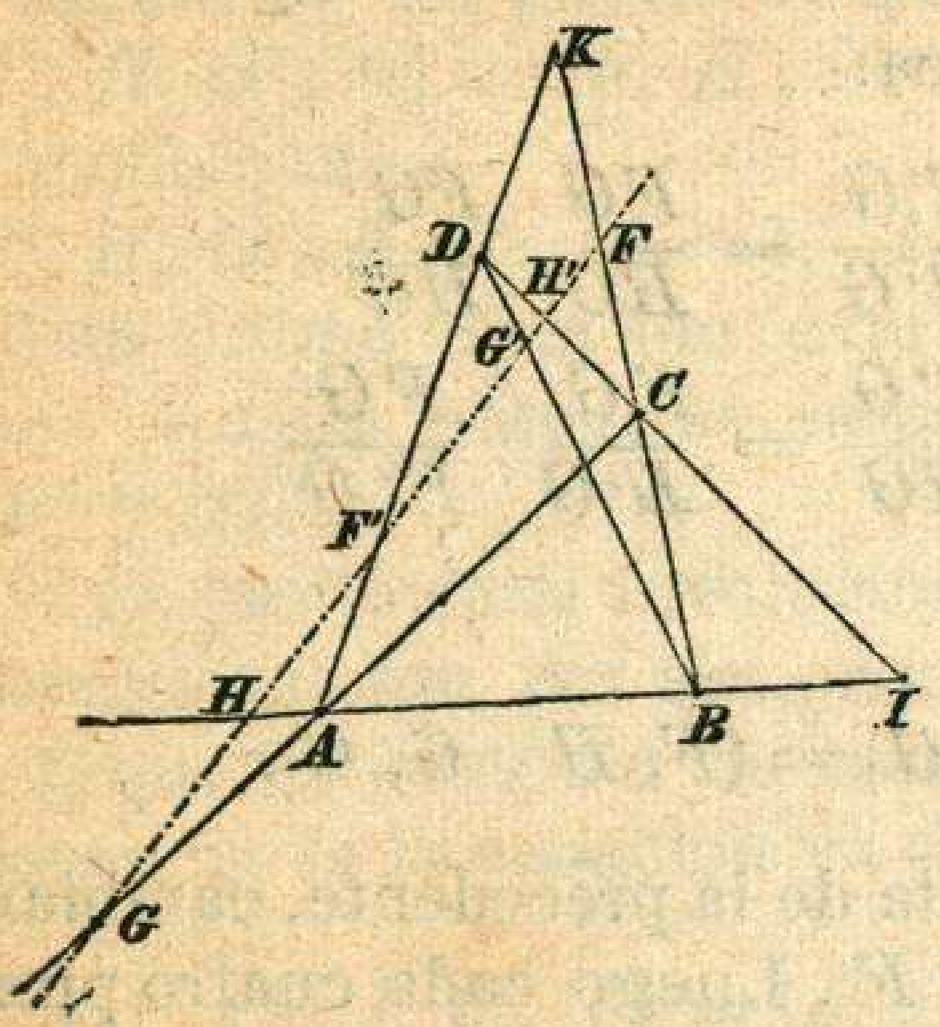
Luego (92) las rectas *IK*, *AF* y *CD* pasan por un punto: lo cual es decir que el punto comun de *CD* y *FA* cae sobre la recta *IK* ó *GH*.

El teorema correlativo, por el cambio mútuo de rectas y puntos, se demostrará análogamente.

97. Cuatro puntos de un plano, *A*, *B*, *C* y *D*, determinan tres pares de rectas, *AB* y *CD*, *BC* y *AD*, *AC* y *BD*, que son lados y diagonales del cuadrángulo *ABCD*, y forman sobre otra recta cualquiera de su plano una ***involucion de puntos***. O, en otros términos: aquellos lados y aquellas diagonales cortan á otra recta de su plano en tres pares de puntos correspondientes, de tal modo que cada cuatro de estos puntos, elegidos arbitrariamente, tienen la misma razon doble que sus cuatro correspondientes.

Cuatro rectas de un plano, *a*, *b*, *c* y *d*, determinan tres pares de puntos, *ab* y *cd*, *cb* y *ad*, *ca* y *bd*, que, unidos con otro punto cualquiera de su plano, forman una ***involucion de rectas***. O, en otros términos: aquellos tres pares de puntos, unidos á otro, determinan tres pares de rectas de tal modo que la doble-razon de cuatro cualesquiera de ellas es la misma que la de sus cuatro correspondientes (*).

Demostracion. Supongamos que la recta, tomada arbitrariamente sobre el plano, tenga con las BC, CA y AB los puntos comunes F, G y H; y con las rectas AD, BD y CD, los puntos correspondientes á los primeros, F', G' y H'. Segun (87):



$$(DA, DB, DC, DG) = (A, DB, C, G)$$
$$= (BA, BD, BC, BG)$$

Y, por consecuencia, sobre la recta que corta estos hazes, se verificarán las igualdades:

$$(F', G', H', G) = (H, G', F, G) = (F, G, H, G')$$

Mas tambien (90—I):

(*) Del primer teorema tuvieron conocimiento los geómetras griegos segun Pappus VII, 130. Entre los modernos fué Desargues (*l. c. p.* 171) el primero que estudió la involucion de puntos é introdujo esa palabra. Véase: Brianchon (*Lignes du 2 ordre* 8) y Poncelet (*Propr. proj.* 178). Staudt (*Géom. der Lage* 16). De la *proyectividad* de las involuciones se infiere la exactitud de los teoremas expresados para la Esférica. Por analogía con las involuciones *binarias* (de pares) se han considerado involuciones *ternarias*, *cuaternarias*, etc. Möbius (*Leipziger Berichte* 1855-6). Jonquieres 1859 *Annali di Mat. t. 2 p.* 86). Cremona (*Curve piane* 21).

$$(F', H', G', G) = (F, H, G, G')$$

ó, expresando estos símbolos con los signos corrientes de la Aritmética:

$$\frac{F'G'}{H'G'} : \frac{F'G}{H'G} = \frac{FG}{HG} : \frac{FG'}{HG'}$$

$$\text{ó} \quad \frac{F'G'}{HG'} : \frac{F'G}{HG} = \frac{FG}{H'G} : \frac{FG'}{H'G'}$$

Y, por lo tanto:

$$(F', H, G', G) = (F, H', G, G')$$

Esta ecuacion resulta de la precedente, cambiando H por H', ó F por F'. Luego cada cuatro puntos elegidos entre los tres pares, F y F', G y G', H y H', tienen la misma razon anarmónica que sus puntos correspondientes.

El teorema correlativo se demuestra del mismo modo.

Observacion. La ecuacion $(F, G, H, G') = (F', G', H', G)$, por la cual está determinada la involucion de los tres pares de puntos, F y F', G y G', H y H', situados en una recta, puede ser tambien expresada de este modo :

$$\frac{F'H'}{G'H'} \frac{G'F}{HF} \frac{HG}{F'G} = 1$$

ó, cambiando F por F' y G por G', de este otro:

$$\frac{FH'}{GH'} \frac{GF'}{HF'} \frac{HG'}{FG'} = 1$$

que se deduce de (84).

Si un punto de la involucion, el G, por ejemplo, se aleja al infinito, su correspondiente G' se confundirá con un punto O, que, segun la relacion $(F', H, G', G) = (F, H', G, G')$, se halla situado de modo que:

$(F', H, O)\,(F, H', O) = 1$, $FO.F'O = HO.H'O$.

Esta última ecuacion expresa que el punto O tiene iguales potencias respecto de los círculos FF' y HH'.

Si un punto de la involucion se confunde con su correspondiente, por ejemplo, H con H' en el punto I, que es comun á las rectas AB y CD, á consecuencia de la ecuacion ya citada, será

$$(F, I, G, G') = (F', I, G, G') = 1$$

Si además coinciden F' y F en el punto K, comun á BC y AD será $(K, I, G, G')^2 = 1$; y, como GG' no puede desaparecer simultáneamente, queda (89):

$$(K, I, G, G') = -1.$$

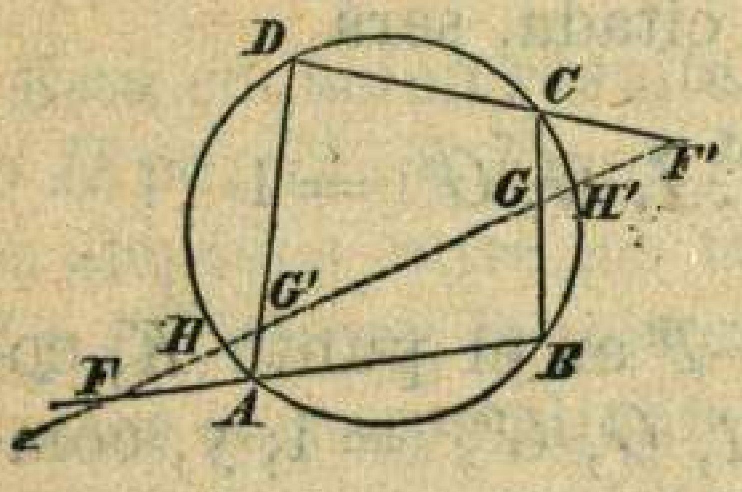
Tres pares de puntos, ó de tangentes, de una línea de segundo grado forman una involucion, cuando cada cuatro, escogidos de entre ellos, ó ellas, conforme con la significacion antes establecida (92-*Obs.*), tienen la misma razon doble que sus correspondientes puntos, ó tangentes. Las rectas que unen los puntos correspondientes pasan por un mismo punto; los puntos comunes á las tangentes correspondientes caen sobre una recta (99).

Tres pares de rectas de un hiperboloide, entre las cuales no haya dos en un plano, forman una involucion, cuando cuatro cualesquiera de entre ellas tienen la misma razon doble (94-*Obs.*) que las rectas correspondientes.

98. Dos puntos de una línea de segundo grado y los dos pares de lados no contíguos de un cuadrángulo inscrito determinan una involucion de puntos (*).

Dos tangentes á una línea de segundo grado y los dos pares de vértices no consecutivos de un cuadrángulo circunscrito determinan una involucion de rectas.

DEMOSTRACION. Si H y H' son puntos de un círculo circunscrito al cuadrángulo $ABCD$, y los lados AB y CD, BC y DA son cortados por la recta HH' en los puntos F y F', G y G', la doble razon de los puntos B, D, H, H' estará expresada tambien (93-*Obs.*) por la de las rectas



$$(AB, AD, AH, AH') = (CB, CD, CH, CH')$$

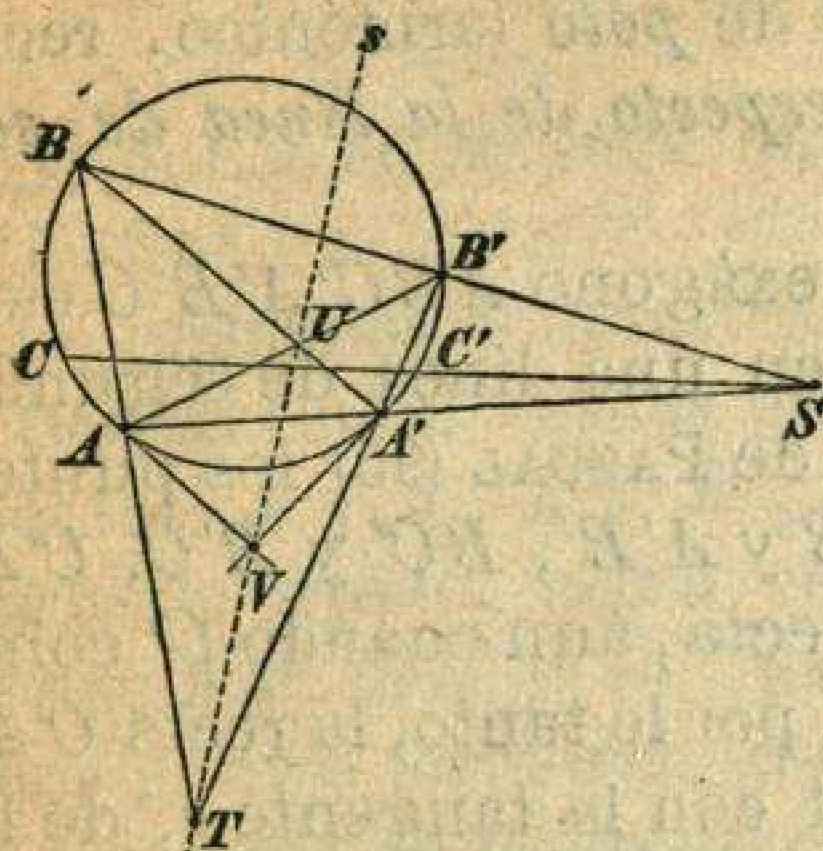
Y, por consecuencia (87):

$$(F, G', H, H') = (G, F', H, H') = (F', G, H', H)$$

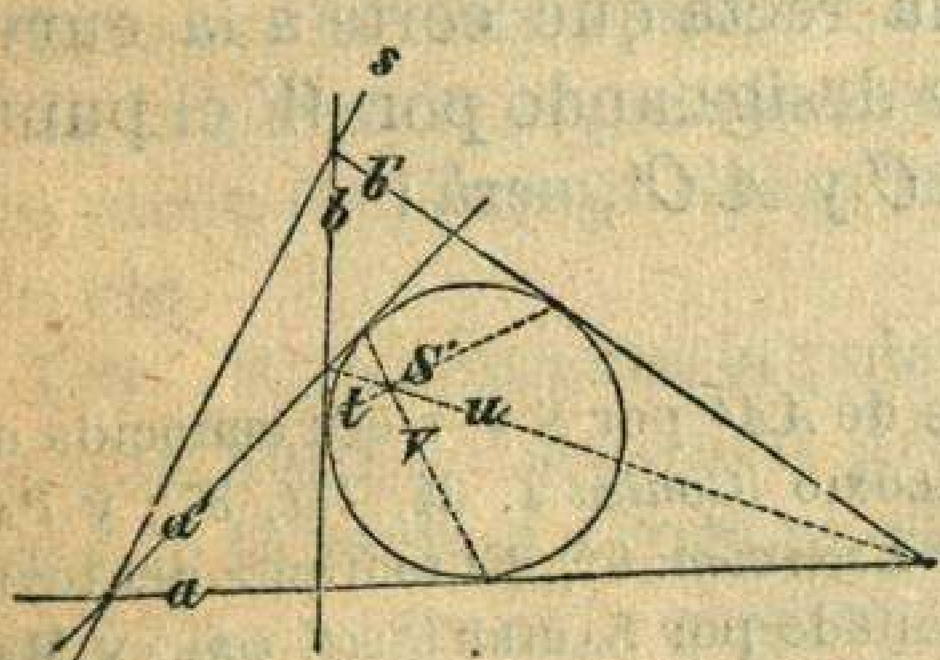
Lo mismo se demuestra el teorema correlativo.

(*) DESARGUES (*l. c.*). PASCAL (*Essai p. les coniques*, édition Lahure II, pág. 356); PONCELET *l. c.*) CHASLES (*Géom. sup.* 656 y 667).

99. Si en una línea de segundo grado están inscritas las figuras AB ... y $A'B'$ ..., de modo que las rectas de union de los puntos correspondientes AA', BB', ... pasan por un punto S, los puntos comunes de las rectas correspondientes, AB y $A'B'$, ... AB' y $A'B$, ... y de las tangentes en los puntos correspondientes, caen sobre una recta s. Todo par de puntos correspondientes es armónico conjugado con el *punto* S y el punto, en que corta á la recta de union de aquel par de puntos la *recta s*. Esta recta s toma el nombre de *polar* (armónica, recíproca) *del punto* S, *respecto de la línea de segundo grado.*



Si á una línea de segundo grado están circunscritas las figuras *ab*... y *a'b'*..., de modo que los puntos *aa'*, *bb'* ... que tienen comunes las rectas correspondientes *a* y *a'*,... caen sobre una recta *s*, las rectas que unen los puntos correspondientes, *ab* y *a'b'*,... *ab'* y *a'b*,... y los puntos de contacto de las tangentes correspondientes, pasan por un punto S. Todo par de tangentes correspondientes es armónico conjugado



con la *recta* s y la que pasa por el *punto* S. Este punto S lleva el nombre de *polo* (armónico, recíproco) *de la recta* s*, respecto de la línea de segundo grado* (*).

Demostracion.—Si el exágono $ABC'A'B'C$ está inscrito arbitrariamente en una línea de segundo grado, segun el teorema de Pascal (95) los puntos comunes de los lados AB y $A'B'$, BC' y $B'C$, $C'A'$ y CA, caerán sobre una recta, áun cuando C' coincida con A' y C con A; y, por lo tanto, la recta $C'A'$ con la tangente a', y CA con la tangente a, de la curva dada. Designando, pues, los puntos comunes de AA' y BB', AB y $A'B'$, AB' y $A'B$, a y a', por S, T, U y V, los puntos T, U y V caerán sobre una recta. Ahora bien, las rectas AB, $A'B'$, TS y TU forman un haz armónico (89); y, por consecuencia (87), tambien:

$$(A, A', S, TU) = -1$$

$$(AV, A'V, SV, UV) = -1$$

Trazando por S una recta que corte á la curva en los putos C y C', y designando por W el punto comun de las rectas AC y $A'C'$, será:

(*) La division armónica de AA' por S y s era conocida de los geómetras griegos: Apollonio (*Conica I*, 34, *III*, 37), y Pappus VII, 161. (*Planim.* 115 y *Estereom.* 62). El teorema del texto fué más completamente fundado por Lahire (*Sect. con.*) y Maclaurin *De lin. géom. propr. II*, *Ap. del Algebra*). Poncelet (*Propr. proj.* 186. 194). La ámplia significacion del teorema fué conocida particularmente por Brianchon (*J. de l'Éc. polyt. Cah.* 13, *p.* 297). Steiner (*System. Entw.* 44). Chasles (*Géom. sup.* 675 *y siguientes*; y la *Obs.* en la *Estereom.* 9).

$$(AV, A'V, SV, WV) = -1$$

De donde se deduce que W cae sobre la recta UV. Etc.

Lo mismo se demuestra el teorema correlativo.

Observacion. Si los pares de puntos correspondientes, A y A', B y B', C y C', de una línea de segundo grado, están situados de modo que las rectas AA', BB' y CC' pasan por un punto S, dichos puntos formarán una involucion (97-*Obs.*). Y, si los pares de tangentes correspondientes a y a', b y b', c y c', á una línea de segundo grado, están de modo que sus puntos comunes aa', bb', cc', pertenezcan á una recta, dichas tangentes formarán una involucion. Puesto que los puntos comunes de las rectas AB y $A'B'$, AC' y $A'C$, AC y $A'C'$, caen sobre una recta, que es la polar del punto S. Luego (87):

$$(AA', AB, AC', AC) = (A'A, A'B', A'C, A'C')$$

Esto es: la doble razon de los puntos A', B, C' y C de la línea de segundo grado, es igual á la doble razon de los puntos correspondientes A, B', C, C'; etc.

100. Si la recta s es la polar del punto S, respecto de una línea de segundo grado, el punto S será el polo de la recta s. Porque, si fuese T el polo de s, para dos tangentes a y a', que desde un mismo punto de s tocasen en A y A' á la curva, se verificaria la ecuacion

$$(A, A', s, T) = (a, a', s, T) = -1.$$

Y, por consecuencia, la doble razon (A, A', s, S) seria diferente de -1. Si s es la polar de S y tiene con la curva el punto comun E, la recta SE será tangente á la misma. Si la recta s tuviese con la curva otro punto comun E', deberia ser

$$(E, E', s, S) = -1$$

Pero, como E cae sobre s, tambien E' caerá sobre s, esto es: EE' desaparece ó se anula. Luego toda cuerda de la curva es polar del punto comun de las tangentes á esta curva en los extremos de la cuerda. En particular: toda tangente es la polar de su punto de contacto.

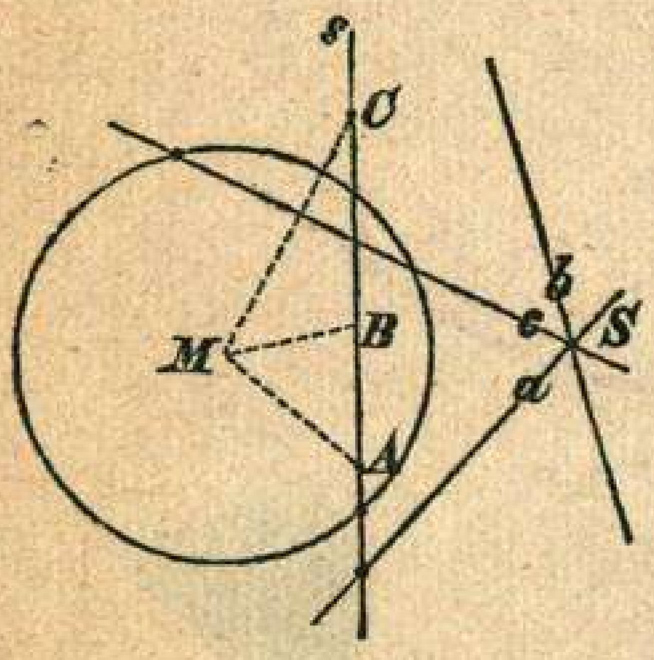
Si las rectas t, u, v, ... pasan por el punto S, sus polos caerán sobre la polar s de dicho punto. En efecto, si la recta t corta á la curva en los puntos P y P', su polo será el punto en que se encuentran las tangentes á la curva en P y P', que cae sobre la polar de S (99). Si la recta u es tangente á la curva, su polo es su punto de contacto que cae sobre la polar de s. Y, si la recta v no corta ni toca á la curva, por el punto sv pasarán dos tangentes á esta curva que determinan un haz armónico, tanto en union de v y su polo V, como en union de S y s; y como v pasa por S, debe caer V sobre s.

Cuerdas paralelas de una línea de segundo grado que tienen comun el punto infinitamente distante S, son bisecadas por la polar s de este punto; y las polares de los puntos infinitamente distantes son *diámetros* de la curva. La polar del punto medio de un diámetro pasa por el punto infinitamente distante de este diámetro y por el polo infinitamente distante del mismo, y está, por consecuencia, infinitamente distante. Toda recta, pues, que pasa por el punto medio de un diámetro tiene un polo infinitamente distante y es un diámetro de la curva dada. Todos los diámetros de esta curva, por consecuencia, tienen un punto medio comun, polo de la recta infinitamente distante (*Estereometría* 4), que se llama *centro* de la línea de segundo grado.

101. Cuando los puntos A, B, C y D están sobre una recta, sus polares, respecto de una línea de segundo grado, a, b, c y d, forman un haz: verificándose la ecuacion

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) \text{ (*)}.$$

Demostracion. Designando por S el polo de la recta s, respecto del círculo (M), por aquel punto



S pasarán las polares a, b, c y d de los puntos A, B, C y D situados sobre s (101). Las rectas MA, MB, ... son normales á las a, b, ... Girando en su plano la figura MAB ... alrededor del punto M, hasta que MA se ponga paralela á la recta a, las MB, MC y MD se pondrán tambien paralelas respectivamente á las b, c y d; y, por consiguiente:

(*) Möbius (*Baryc. calcul.* 290). Magnus (*Aufgaben I, p.* 65) Chasles (*Géom. sup.* 691).

$$(MA, MB, MC, MD) = (a, b, c, d)$$
$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

como ya demostramos ántes (93-*Obs.*) para el caso de que los puntos A, B, C y D fueran de una línea de segundo grado.

FIN DE LA OBRA.

Véndese este libro en las principales librerías, al precio de TRES PESETAS.

En las mismas se hallarán los siguientes:

Aritmética vulgar.	**2 pesetas.**
Aritmética universal . . .	**4** »
Álgebra.	**3** »
Planimetria.	**4** »
Estereometria	**3** »
Y las Tablas de Gauss. . .	**0,50**

Los pedidos de estas obras, acompañados de su importe con las rebajas cons... guientes, se dirigirán á D. Eduardo San... chez Pardo, calle de la Verónica, núm. ... segundo izquierda, en Madrid.