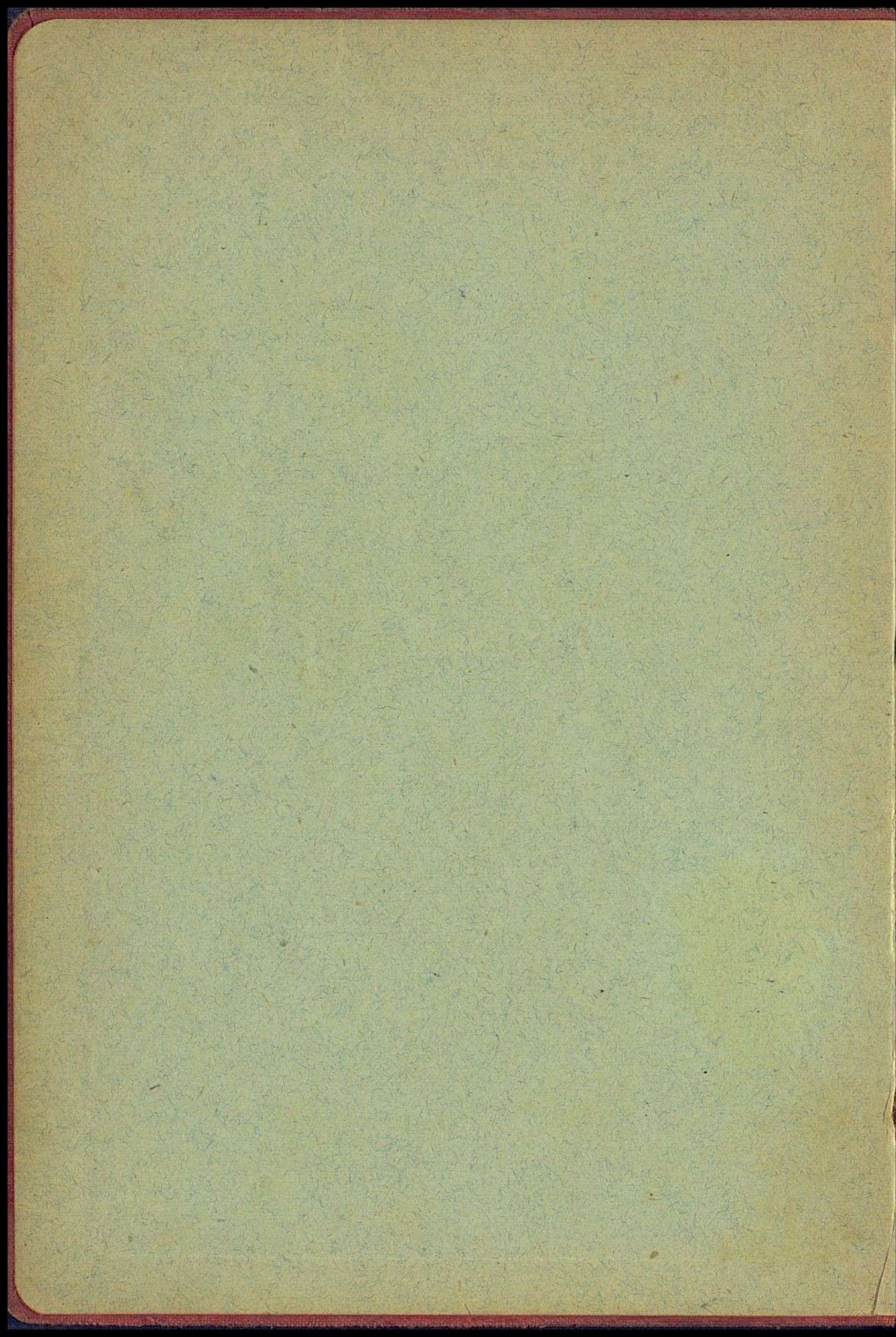


A. Commelezan

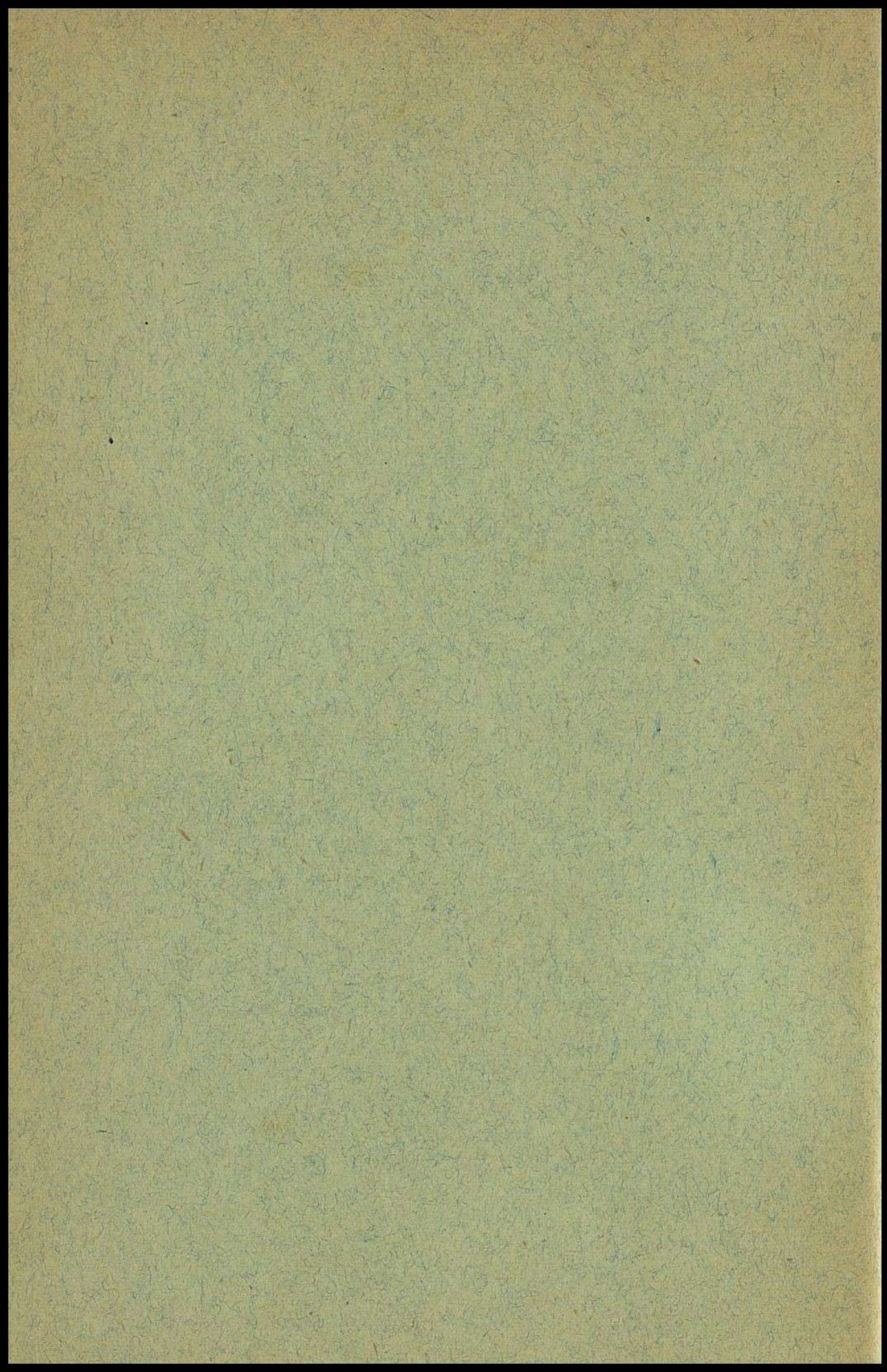
DIBUJO

2^a
2. parte

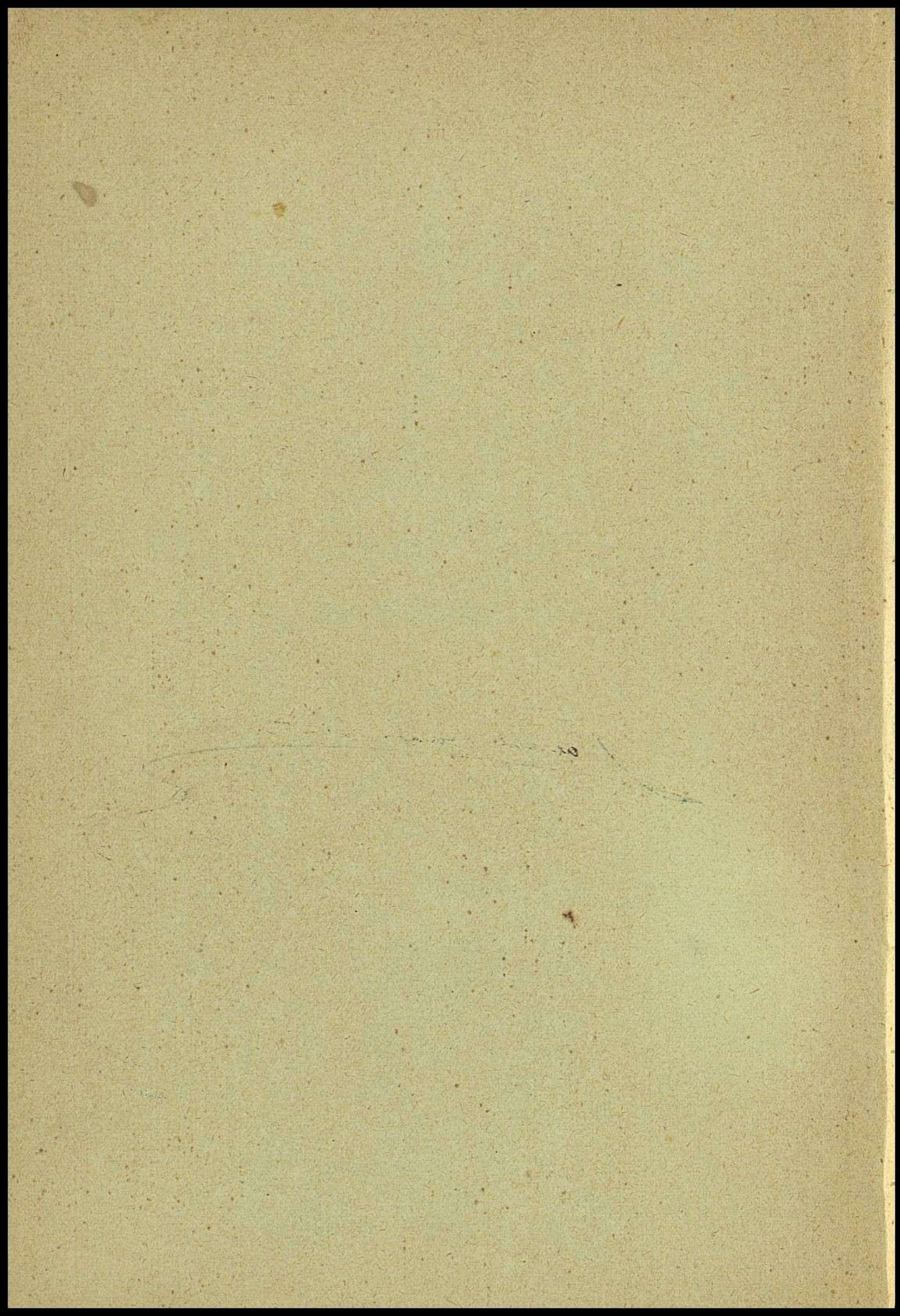


741

16



TRATADO ELEMENTAL DE DIBUJO



454

TRATADO ELEMENTAL
DE
DIBUJO

PARA LA ENSEÑANZA DE ESTA ASIGNATURA
EN LAS ESCUELAS DE ARTES É INDUSTRIAS

POR
D. ALBERTO COMMELERÁN

PROFESOR NUMERARIO EN LA ESCUELA SUPERIOR DE ARTES É INDUSTRIAS
DE MADRID

Manuel Gonal Marti

SEGUNDA PARTE



MADRID
LIBRERÍA DE PERLADO, PÁEZ Y C.[^]
(Sucesores de Hernando)
Calle del Arenal, 11.

1904

—
ES PROPIEDAD
—

R. 13286

PROYECCIONES ORTOGONALES

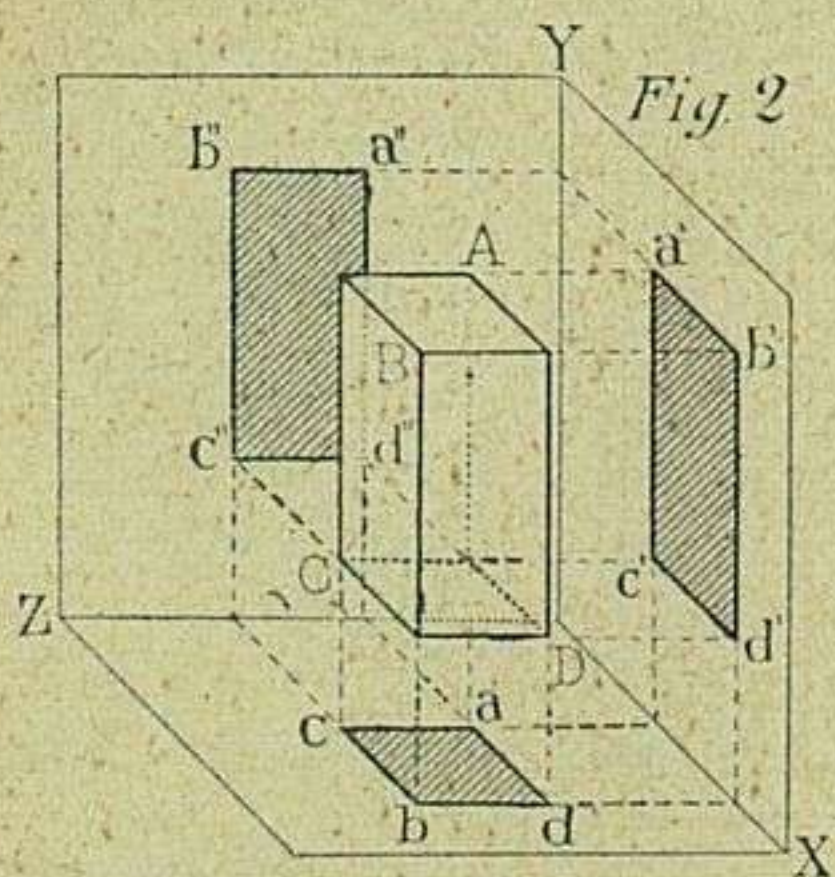
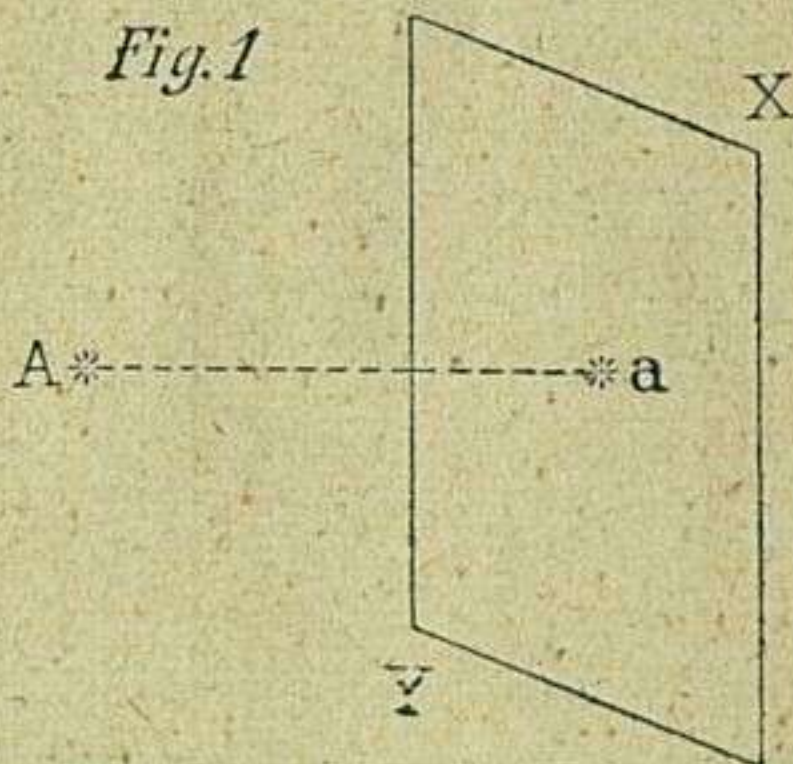
NOCIONES

1. Entre los varios sistemas de representación gráfica, el que más se practica en las artes y en la industria es el de *proyecciones ortogonales*.

Esta manera de representar se distingue de otras, en que las formas de los cuerpos se proyectan mediante perpendiculares á los planos de proyección tiradas desde los puntos que más caracterizan dichas formas.

2. En la representación de cualquier forma corpórea, ha de tenerse en cuenta que todo cuerpo está limitado por superficies, que los contornos de dichas superficies están determinados por líneas, y lo que es más importante; la magnitud, posición y forma de estas líneas, se determina por dos ó más puntos, según sean rectas ó curvas. Por tanto, queda reducida la cuestión principal á saber representar en proyecciones la posición de un punto, con relación á otras que se consideran parte integrante de líneas, superficies ó cuerpos.

3. Para determinar la proyección de un punto (fig. 1.) se hace pasar por el punto A, situado en el espacio, la perpendicular Aa al plano XY . El punto a en que dicha perpendicular encuentra á este plano, será y se llamará *proyección* del punto A, y á su vez la perpendicular Aa se denomina *proyectante* (1).



recto A B C D, cuya proyección sobre el plano XY , llamado vertical, está

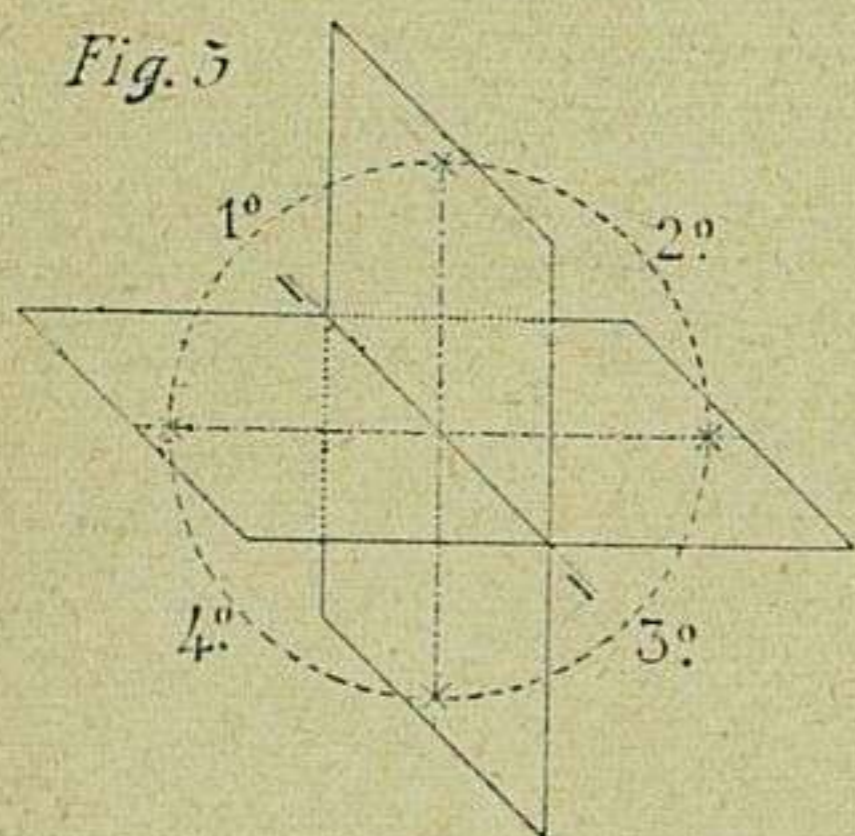
(1) Para que puedan entenderse con relativa facilidad los principios en que se funda el procedimiento, tanto la figura 1 como todas las siguientes que tengan carácter descriptivo se representan en perspectiva.

representada por el paralelogramo $a' b' d' c'$. La otra proyección, $c a d b$, se verifica sobre el plano XZ, denominado horizontal, y que forma un ángulo diedro recto con el XY, y la tercera sobre otro plano vertical ZY.

De estos dos planos toman su nombre las proyecciones; llamándose proyección vertical la que está contenida en dicho plano, y horizontal la que se verifica en el plano horizontal (1). La línea que separa estos dos planos se llama *línea de tierra*.

Gracias á las dos mencionadas proyecciones se pueden obtener con toda precisión las dimensiones del paralelepipedo. Así en la proyección horizontal se aprecian ac y ad , que respectivamente representan su anchura y profundidad, y en las dos verticales $a'b'$, $a'e'$, y $a''b''$, $a''e''$ referentes á su anchura y altura sobre cada uno de los planos verticales de proyección.

5. Planos de proyección. — Convenido en principio que la representa-



ción mediante proyecciones se ha de verificar cuando menos sobre dos planos perpendiculares (fig. 3), cortándose según la línea de tierra (que en esta figura y en las sucesivas se distingue por dos guiones en los extremos), ocurre que, por su intersección, dichos planos formarán cuatro ángulos diedros rectos, designados con los nombres 1.º, 2.º, 3.º y 4.º y situados en el orden que la figura indica; pero en la práctica del dibujo, lo común ó corriente es que las formas proyectadas se representen en el primer ángulo, excepto en muy con-

tadas ocasiones en que las condiciones de posición de los datos exijan para la solución del problema operaciones en alguno de los otros tres ángulos (2), por tanto, mientras las circunstancias no exijan lo contrario, todas las operaciones y representaciones se supondrán verificadas dentro del primer ángulo.

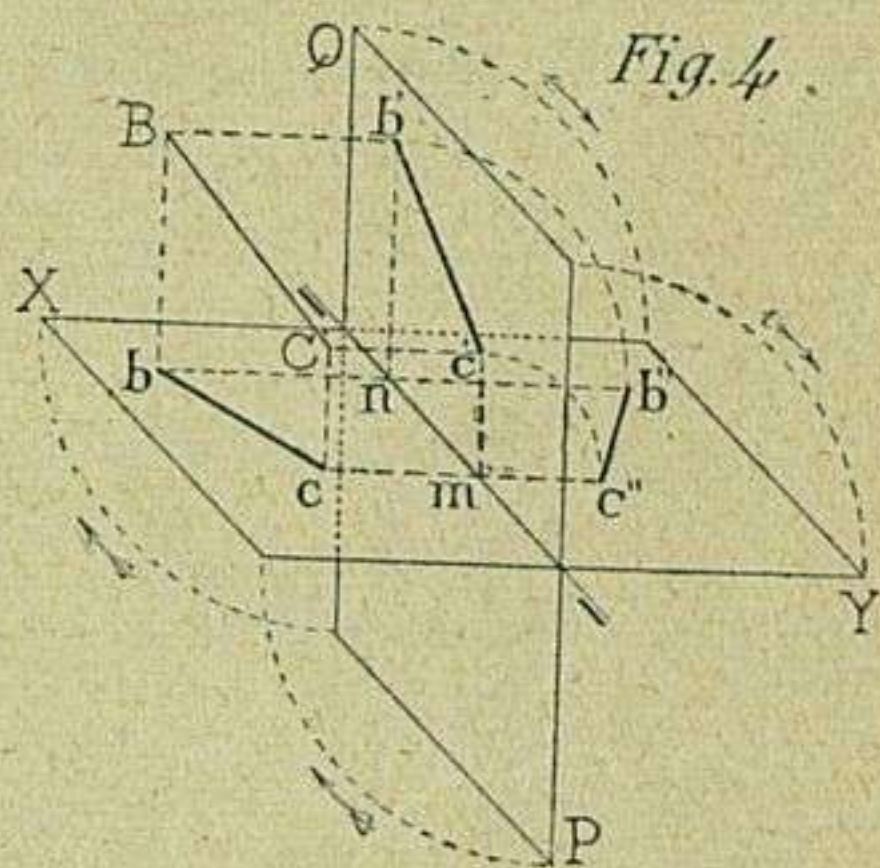
6. Se ha indicado que para la representación de un objeto son necesarios, cuando menos, dos planos de proyección perpendiculares entre sí; esto interpretado al pie de la letra, presentaría dificultades en la práctica, porque equivaldría á tener que disponer dos tableros formando ángulo recto, y sobre ellos dibujar alternativamente la planta y el alzado del objeto que se pretendiere proyectar.

Para orillar esta que parece dificultad, bastará suponer (fig. 4) que el

(1) Vulgarmente se llama *planta* la proyección horizontal, y *alzado* la proyección vertical.

(2) Las condiciones en que se plantea el problema influyen, como es natural, en la mayor ó menor suma de dificultades que puedan presentarse hasta llegar á la solución, y como en todo caso el operador se encuentra libre, no solamente para elegir los procedimientos, sino también las posiciones relativas de los objetos que hayan de proyectar, claro está, que el buen sentido práctico exige el que se decida por aquellos más sencillos y exentos de complicaciones, que después de todo han de conducirle á idénticos resultados.

plano vertical PQ gira alrededor de la *línea de tierra* hasta coincidir con el horizontal XY. Al verificarse esta rotación en el sentido que indican las flechas, las proyecciones verticales $b' c'$, de la recta BC, describen cada una su arco de 90° hasta colocarse sobre el plano XY en b'' y c'' respectivamente. Entonces las proyectantes del punto B, representadas por $b n$, $b' n$ se convertirán en una sola recta, que con el nombre de *línea de correspondencia* unirá los puntos $b b''$, siendo perpendicular á la línea de tierra en el punto n ; otro tanto ocurrirá con las proyectantes del punto C convertidas en la perpendicular $c c''$ que pasa por el punto m .



De este modo tan sencillo se reducen á un solo plano los dos de proyección. En virtud de esta reducción á un plano de representación único, conviene tener en cuenta: 1.^o Que tal plano queda dividido por la línea de tierra en dos partes (fig. 5); la superior se denomina plano vertical y la inferior plano horizontal. 2.^o Que toda la proyección situada sobre uno de los dos planos de proyección toma su nombre de aquel en que se halle; así, se llamarán proyecciones horizontales las que estén contenidas en el plano horizontal, y verticales las que se hallen en el plano vertical de proyección (1). 3.^o Que las proyecciones vertical y horizontal de un punto se corresponden en línea recta y perpendicular con la de tierra, á la que ya se ha dado el nombre de *línea de correspondencia*.

PROYECCIONES DE PUNTOS

3. Situación del punto con relación á los planos de proyección.—

Considerando un punto dentro del primer ángulo (fig. 5 y 5 bis) puede, en general, ocupar las tres posiciones siguientes: 1.^a Separado de los planos de proyección, tal como el punto A, cuyas proyecciones son $a, - a'$ (2). 2.^a Situado

(1) Esta afirmación no ofrece duda, siempre que las operaciones hayan de verificarse en el primer ángulo; pero cuando por exigencias del problema éste se extienda en su desarrollo á cualquiera de los tres ángulos restantes, entonces podrá muy bien ocurrir que, á causa del giro de los planos de proyección expuesto en el núm. 6, aparezcan puntos que pertenezcan al plano horizontal, situados sobre el vertical ó al contrario. Ejemplos de esta excepción pueden verse en las figuras 32 y 42, donde se explica el por qué de ella.

(2) Con objeto de relacionar la notación y el concepto que representa, todas las letras empleadas para designar proyecciones van acompañadas de un acento para distinguirlas de las que, por referirse á proyecciones horizontales, no le llevan.

Cuando se trata de la designación de un punto mediante sus proyecciones, se expresará por la letra correspondiente á cada proyección, intercalando un guión entre las dos. Por consiguiente, $n - n'$ se entiende que es la designación de un punto por su proyección horizontal n y por la vertical n' .

La designación de una recta se expresa en esta forma: $a b - a' b'$, mediante las letras

sobre uno cualquiera de los planos de proyección, como lo están los puntos B y C representados respectivamente por las proyecciones $b - b'$ y $c - c'$. 3.^a Encontrarse á la vez sobre los dos planos de proyección. En este caso se halla el punto D, representado por las proyecciones $d - d'$.

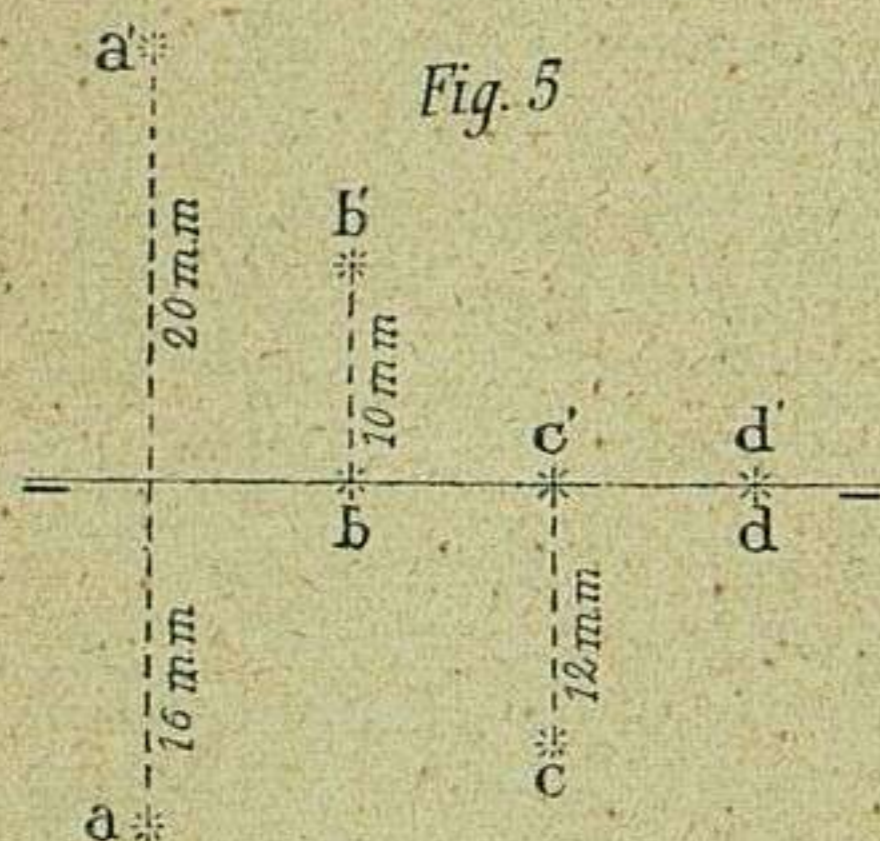
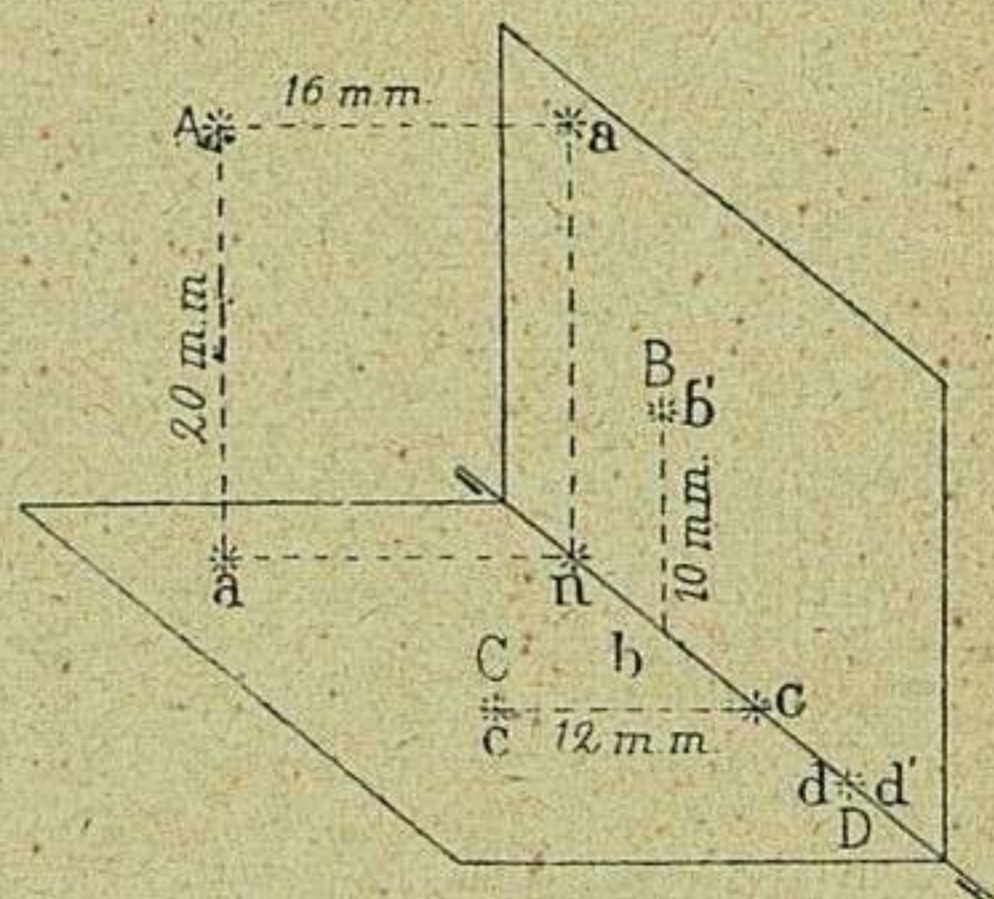


Fig. 5 bis



8. En el primer caso (fig. 5 bis) se puede observar que las proyecciones $a - a'$ del punto A se encuentran más ó menos separadas de la línea de tierra. Consecuencia de esto; que dicho punto está situado, respecto del plano vertical, á una distancia representada por $n a$ y del horizontal por otra igual á $n a'$.

9. En el segundo caso se nota que cuando como el B, el punto se halla sobre el plano vertical, la proyectante horizontal que va á dicho plano es nula, razón por la cual, la proyección horizontal b se encuentra sobre la línea de tierra. Lo mismo ocurre con la proyección vertical c' del punto C', que se supone situado sobre el plano horizontal.

10. Por último, en el caso de que el punto D se halla situado á la vez sobre los dos planos de proyección, se puede apreciar que sus proyecciones $d - d'$ coinciden con dicho punto, puesto que las proyectantes horizontal y vertical han quedado reducidas á cero.

11. De lo expuesto se deduce que conocidas las proyecciones de un punto es fácil determinar su situación. Para conseguirlo es suficiente imaginar el punto de intersección de las proyectantes y éste corresponderá á la indicada situación. Así, por ejemplo, en la figura 5 bis, donde se dan las proyecciones a y a' del punto A, puede comprobarse sin gran esfuerzo mental, que este punto se encuentra situado en la intersección A de las proyectantes que arrancan de a y a' . También este sencillo y fundamental problema puede resolverse cuando son conocidas las longitudes de las proyectantes (1), porque será

correspondientes á las proyecciones de dos de sus puntos, y en este orden, la de un polígono, por las proyecciones de sus vértices en esta otra $a b c d - a' b' c' d'$, separando siempre con un guión las letras que significan proyecciones horizontales, de las que se refieren á verticales.

(1) En absoluto, la posición de un punto no puede decirse que esté determinada sola-

suficiente reconstituir el rectángulo $A a' n a$, perpendicular á los planos de proyección, con las longitudes $0^m,020$ y $0^m,016$ que respectivamente corresponden á las proyectantes $a A$ y $a' A$, según puede verse en las figuras 5 y 5 bis.

PROYECCIONES DE LA LÍNEA RECTA

y sus posiciones respecto á los planos de proyección.

Proyección de una línea sobre un plano, es otra línea formada por las proyecciones de todos los puntos de la primera. En el caso de ser recta la línea dada, su proyección será otra recta, que pasará por las proyecciones de dos puntos extremos. También en este caso conviene observar (fig. 6), que las respectivas proyectantes de los puntos de la recta OP forman dos planos paralelos á cada uno de los de proyección; el $OP, o'p'$ y el OP, op , que se denominan *planos proyectantes de la recta*.

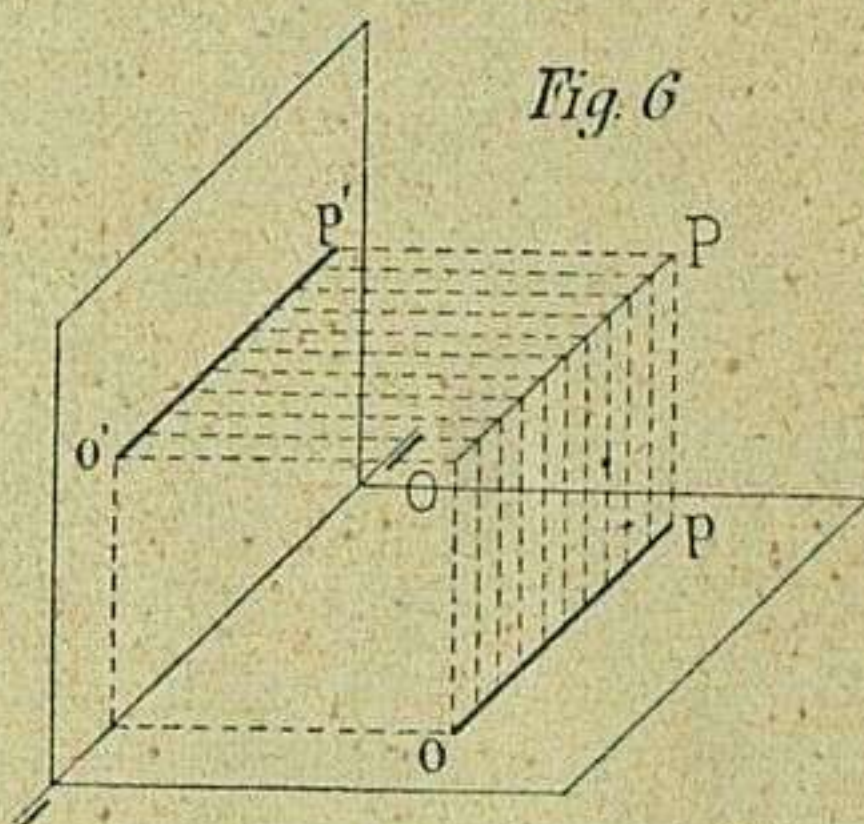


Fig. 6

Situada una recta en el primer ángulo formado por los planos de proyección, puede ocupar las siguientes posiciones:

Oblicua á los dos planos de proyección.

Oblicua á un plano y paralela al otro.

Paralela á los dos planos.

Paralela á un plano y perpendicular al otro.

Oblicua á un plano y situada sobre el otro.

Paralela á un plano y situada sobre el otro.

Perpendicular á un plano y situada sobre el otro.

Perpendicular á la línea de tierra y oblicua á los dos planos.

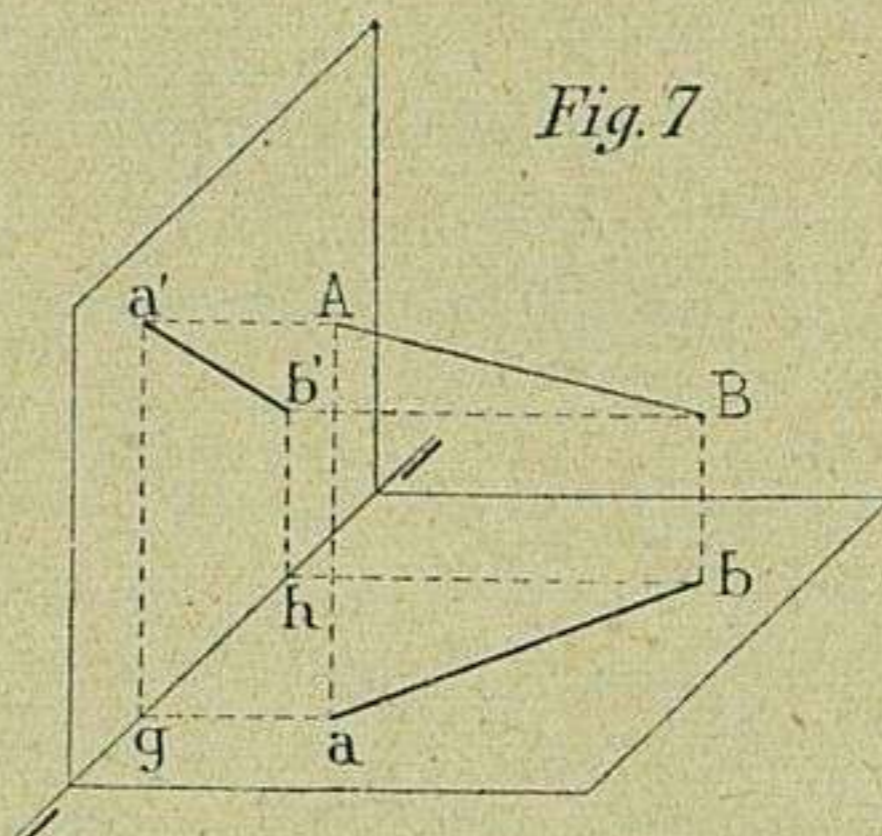
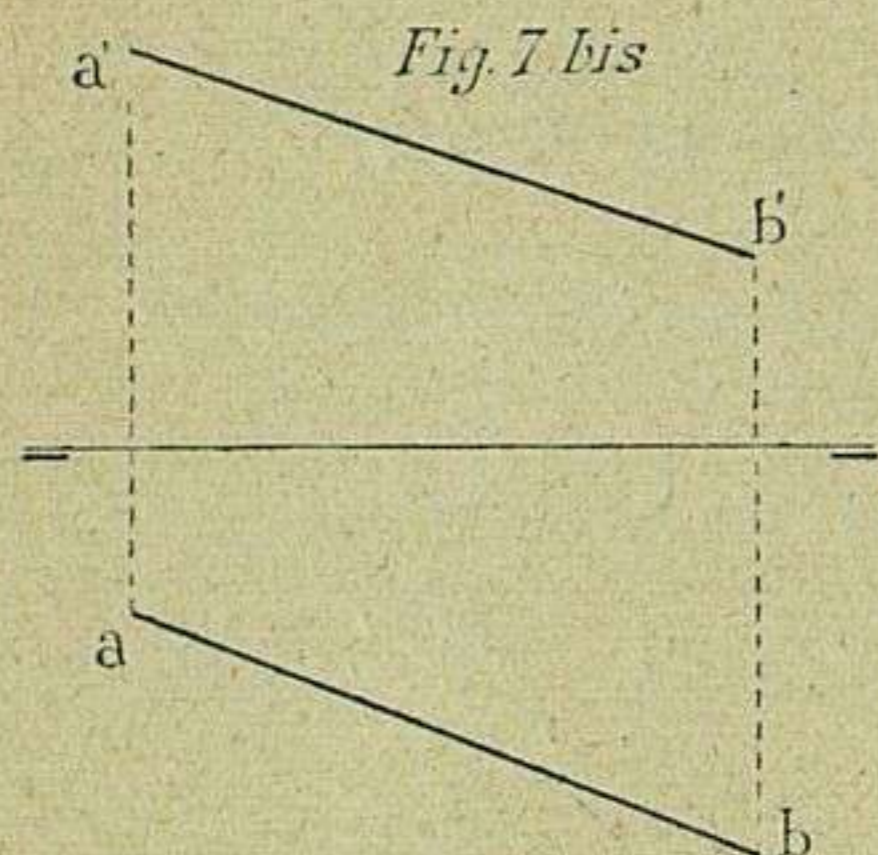
Coincidiendo con la línea de tierra.

12. Representación de la recta oblicua á los planos de proyección. — Sea la recta AB (fig. 7) (1). Determinadas las proyecciones horizontales a, b , y las verticales $a' b'$ de los puntos A y B de dicha recta (véase 3), y

mente por el conocimiento de la intersección de dos proyectantes, porque en este caso todos los puntos de una línea paralela á la de tierra que equidistaran respectivamente del plano horizontal y vertical una longitud igual á la de cada una de dichas proyectantes, satisfarían la misma condición; pero aun entonces siempre podrá elegirse el punto en cuestión de entre los que pertenecen á la citada paralela.

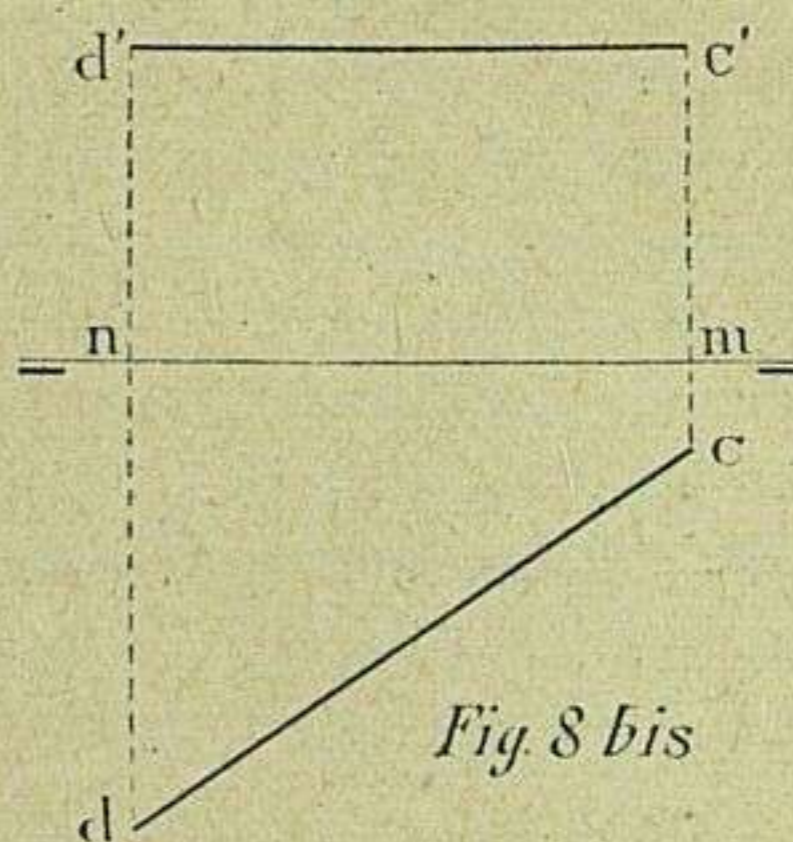
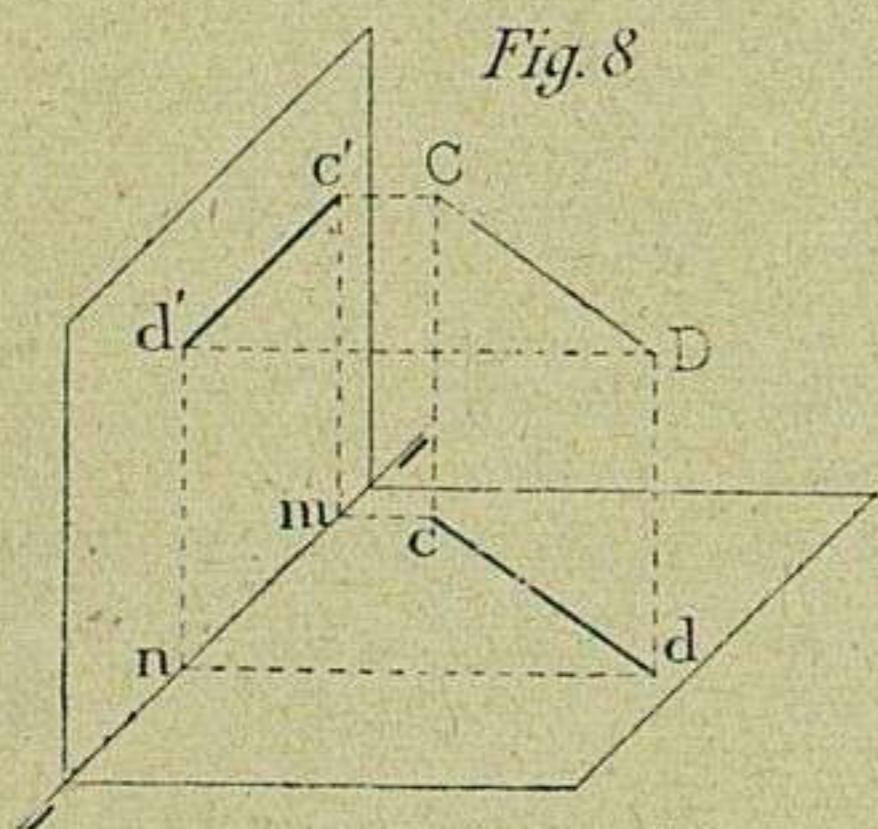
(1) Para facilitar en lo posible la inteligencia de éste y ejemplos siguientes, se ha creído conveniente emplear dos figuras correlativas; la primera perspectiva de la segunda, pues de este modo se evitarán ciertas confusiones hijas de la falta de costumbre en los principiantes para imaginarse las formas de los cuerpos en el espacio y sus posiciones relativas con los planos de proyección.

uniendo estas proyecciones por rectas, se tendrán ab , proyección horizontal, y $a'b'$, proyección vertical de la recta AB , que se ha supuesto oblicua á los dos planos de proyección. Puede observarse, y conviene tenerlo en cuenta,



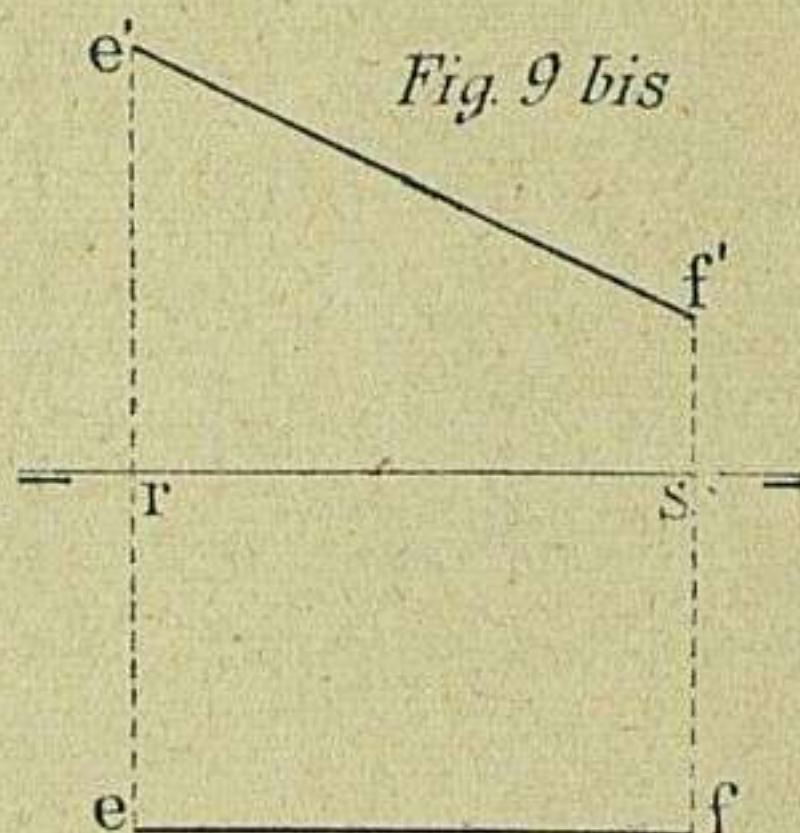
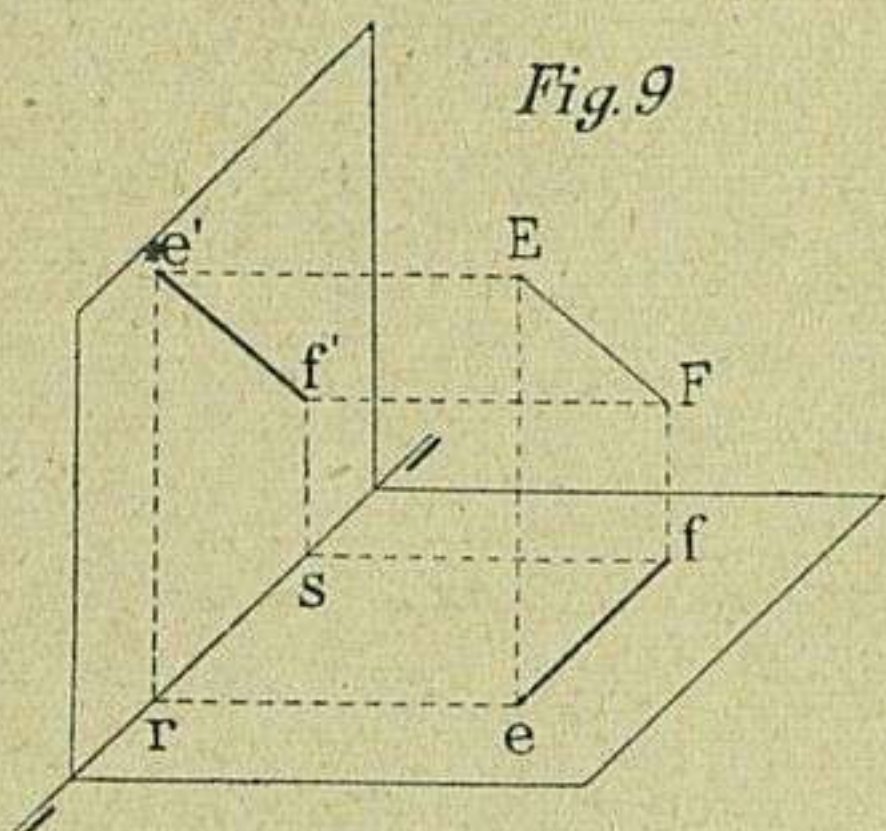
que cuando una línea es oblicua á un plano, su proyección ortogonal sobre este plano, es una recta menor en longitud que la dada. De aquí se deduce el que *toda recta oblicua á uno de los planos de proyección, no se proyecte sobre él en su verdadera magnitud.*

13. Representación de la recta oblicua á un plano y paralela al otro. — Dentro de esta posición caben dos variaciones: que la recta sea paralela al plano horizontal y oblicua al vertical, ó paralela al plano vertical y oblicua al horizontal. Sea CD (figs. 8 y 8 bis) la recta dada, como ejemplo de

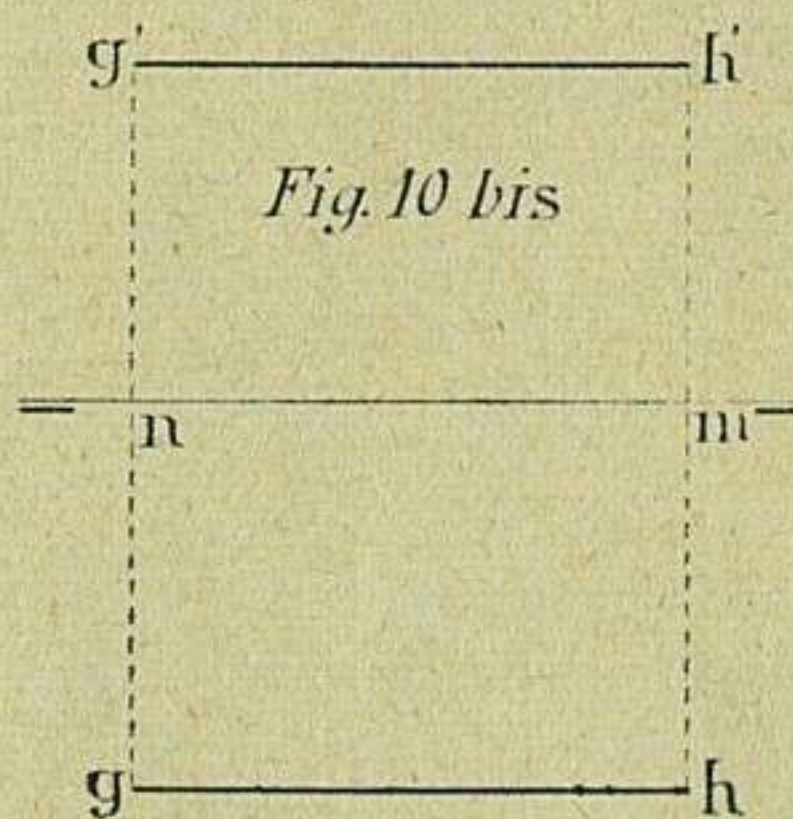
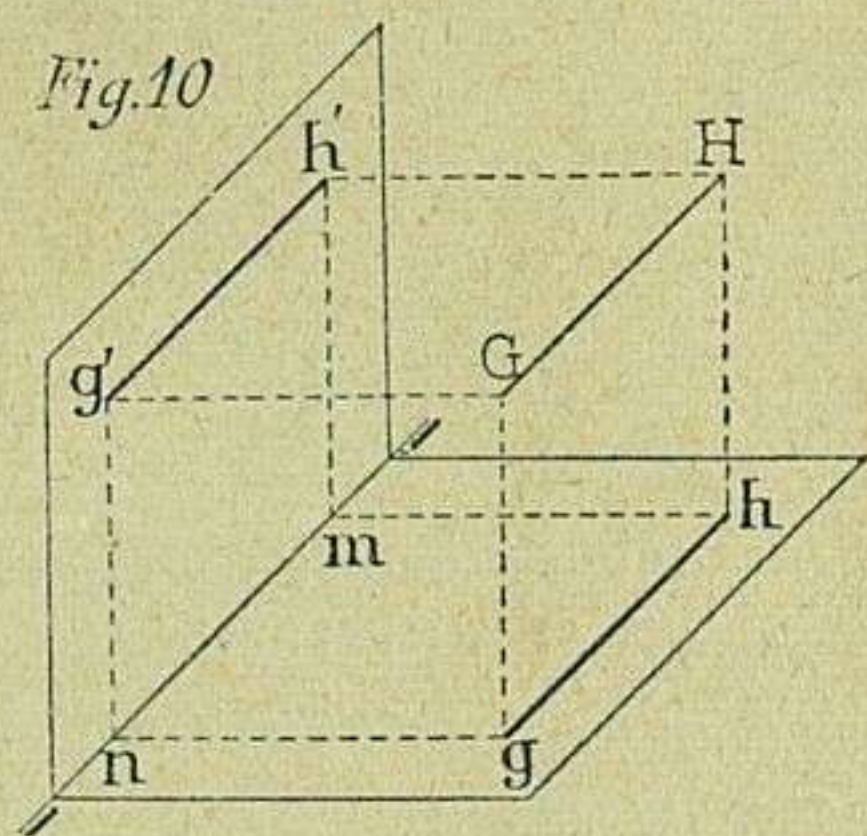


la primera variación. Desde luego se nota que por ser esta recta paralela al plano horizontal, sus proyectantes Cc y Dd (fig. 8) son iguales, lo mismo que los segmentos nd' y mc' de líneas de correspondencia; de aquí resulta que la proyección vertical $d'c'$ sea paralela á la línea de tierra. Las mismas consideraciones pueden hacerse con el segundo ejemplo, al que corresponden las figuras 9 y 9 bis, resultando también que la proyección ef es paralela al plano vertical por ser las proyectantes Ee' y Ff' iguales en longitud. De estos dos ejemplos y otros parecidos se puede deducir que la proyección de una recta

sobre un plano paralelo á ella, es otra recta de igual longitud, por consiguiente; *toda recta paralela á uno de los planos de proyección, se proyecta sobre él en su verdadera magnitud. Lo mismo sucede respecto al ángulo que orma con el otro plano.*



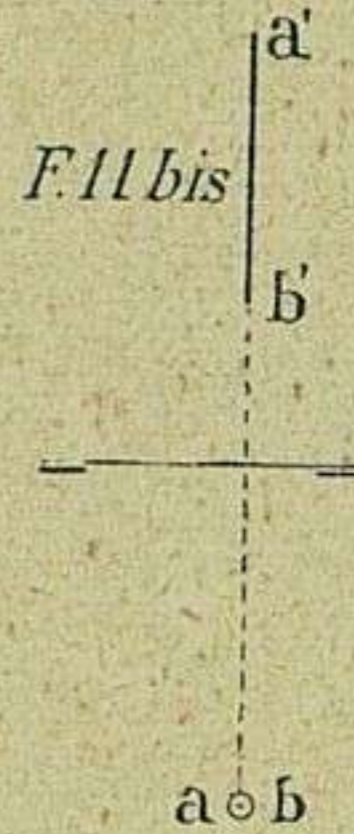
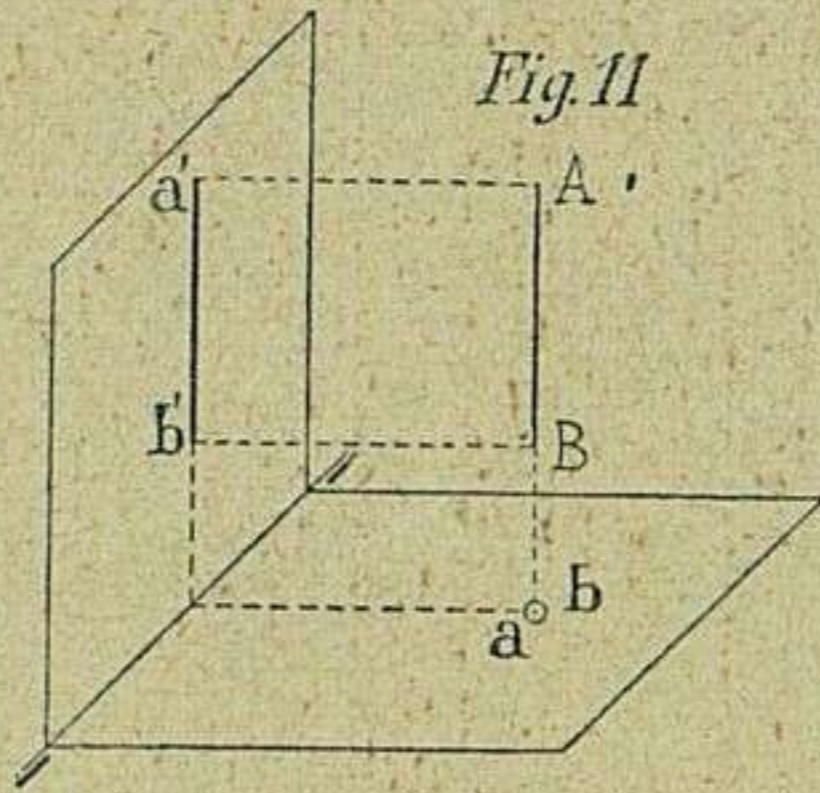
14. Representación de la recta paralela á los dos planos de proyección. — Sea GH la recta dada (fig. 10). En este caso la proyección horizontal gh y la vertical $g'h'$, son paralelas á la línea de tierra, puesto que, tanto las proyectantes horizontales Gg , Hh como las verticales Gg' , Hh' , son respectivamente iguales. También ocurre, que por ser paralelas á la línea de tierra las proyecciones gh , — $g'h'$ (fig. 10 bis), resultan iguales los segmentos de línea de correspondencia gn y hm , y lo mismo sucede con los $g'n'$ y $h'm$.



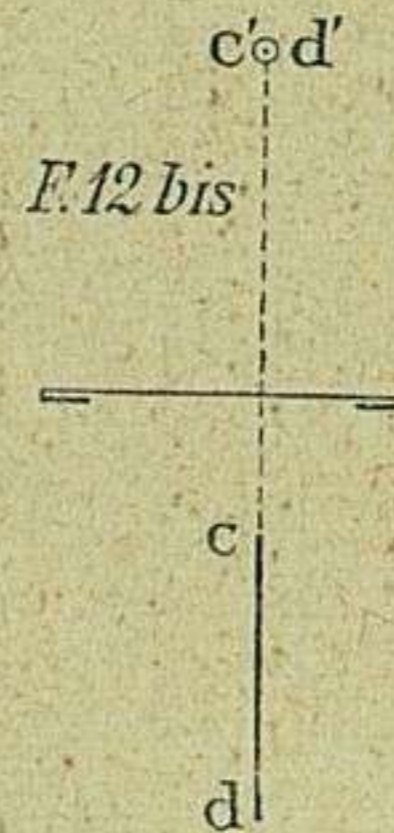
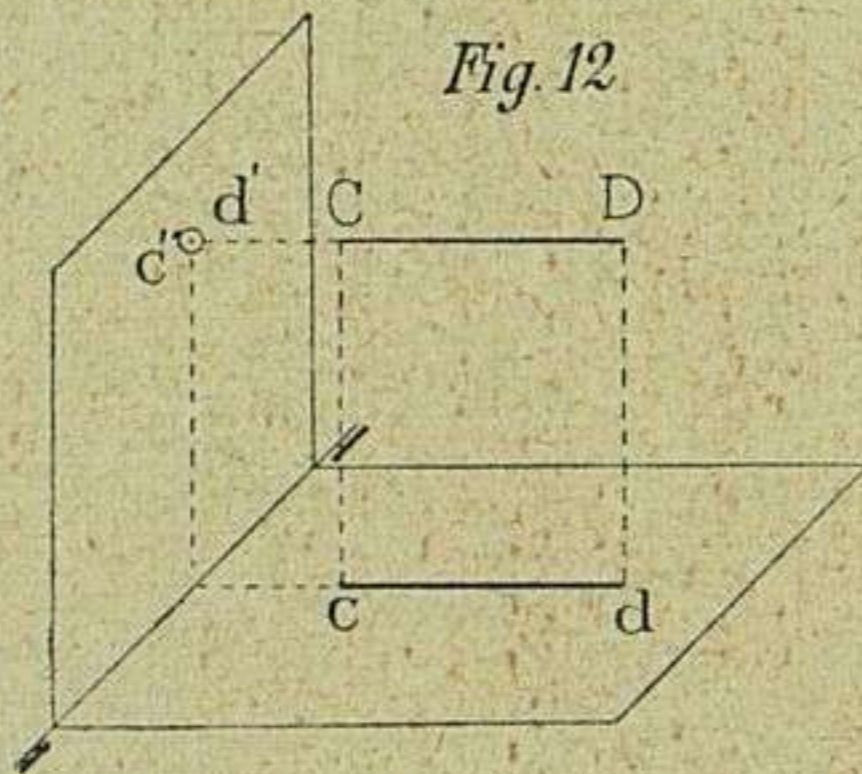
Teniendo en cuenta para este caso lo expuesto en el núm. **13**, resulta que, *cuando una recta es paralela á los dos planos, se proyecta sobre cada uno de ellos en su verdadera magnitud.*

15. Representación de la recta paralela á un plano y perpendicular al otro. — Dos variaciones se distinguen en este caso, según que la recta proyectada sea perpendicular al plano horizontal ó al vertical. Ejemplo de la primera variación son las figuras 11 y 11 bis, y de la segunda las figuras 12 y 12 bis. Tanto en la una como en la otra se observa que sobre el plano á que la recta es perpendicular coinciden en un solo punto las proyecciones a

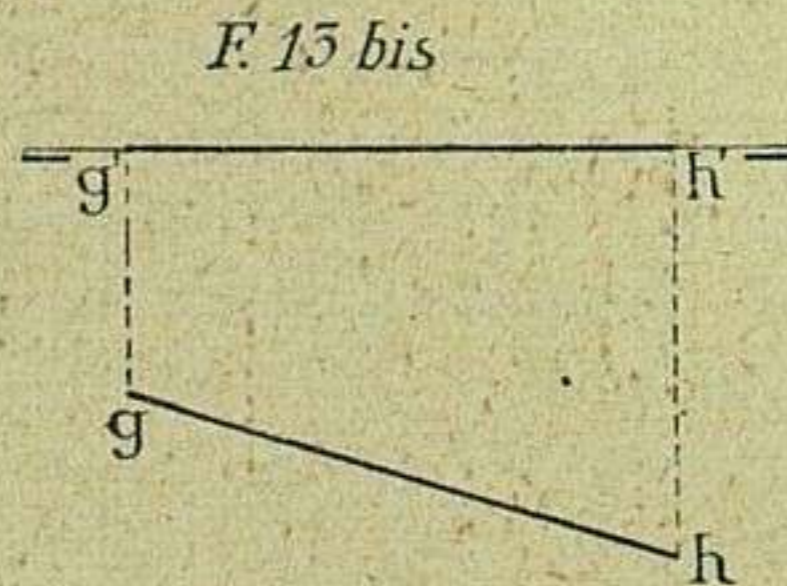
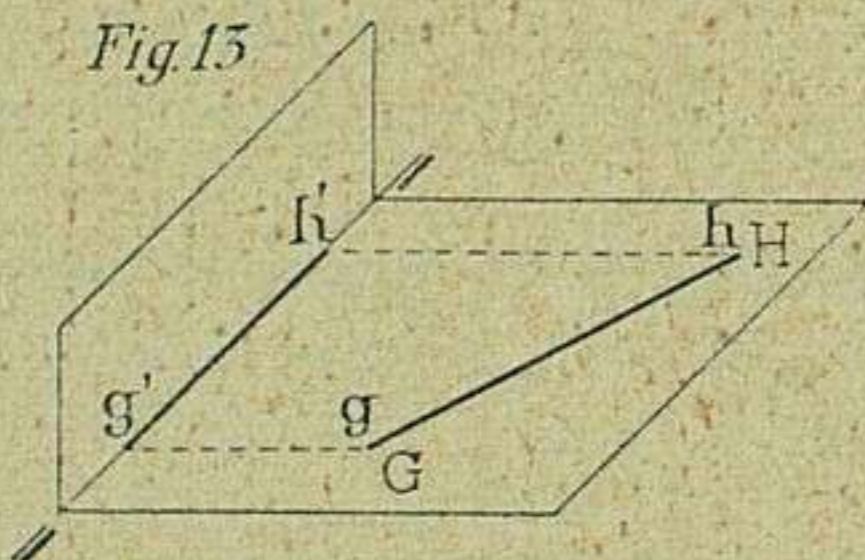
y b de sus extremos (figs. 11 y 11 bis), sucediendo lo propio con las c' y d' (figs. 12 y 12 bis). Esta coincidencia tiene su razón de ser, pues las proyectantes Aa y Bb (fig. 11), por ser perpendiculares al plano horizontal, siguen la



misma dirección que la recta AB , perpendicular también al plano horizontal, coincidiendo por esta causa perpendicular y proyectantes en una sola recta, y sus proyecciones horizontales en un solo punto. A las mismas consideraciones se presta la recta CD , perpendicular al plano vertical (figs. 12 y 12 bis).

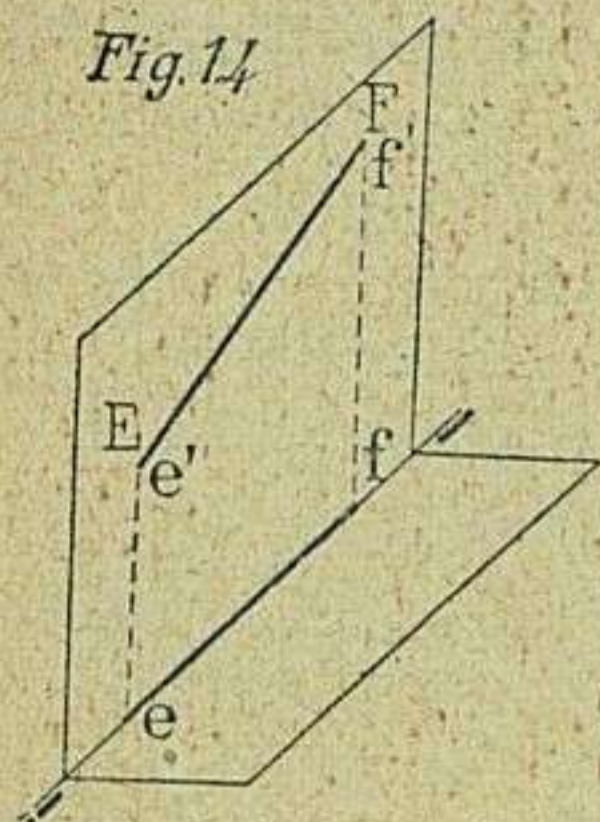


Puesto que los planos de proyección son perpendiculares entre sí, toda recta perpendicular al uno será necesariamente paralela al otro. De donde se deduce que *cuando una recta es perpendicular á uno de los planos de proyección, se proyecta sobre el otro en su verdadera magnitud.*

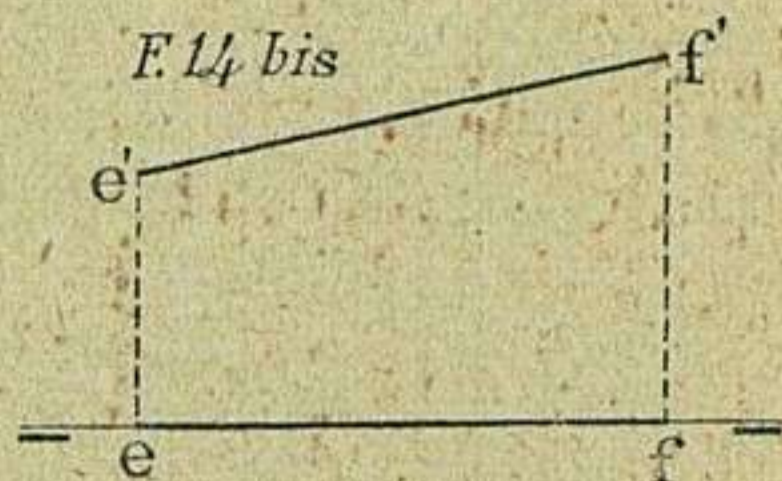


16. Representación de la recta oblicua á un plano y situada so-

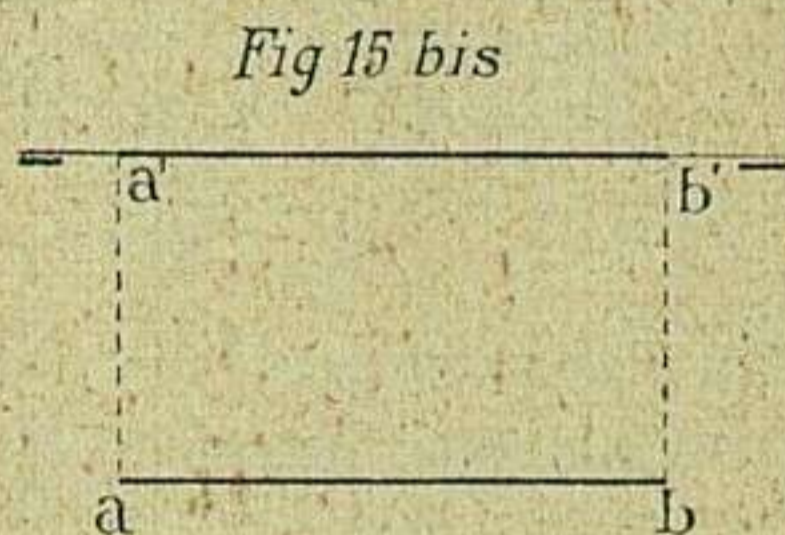
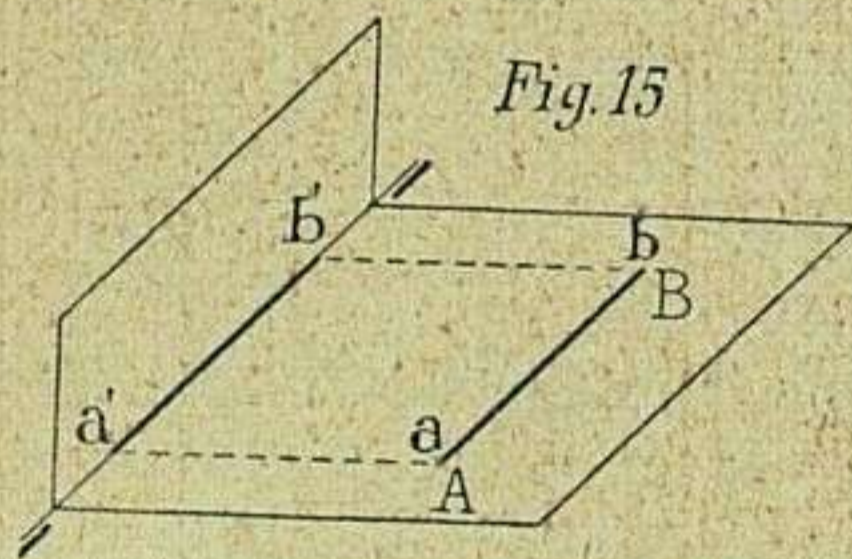
bre el otro. — Dos variaciones ofrece este caso, según que la recta esté situada sobre el plano horizontal (figs. 13 y 13 bis) ó sobre el plano vertical (figs. 14 y 14 bis).



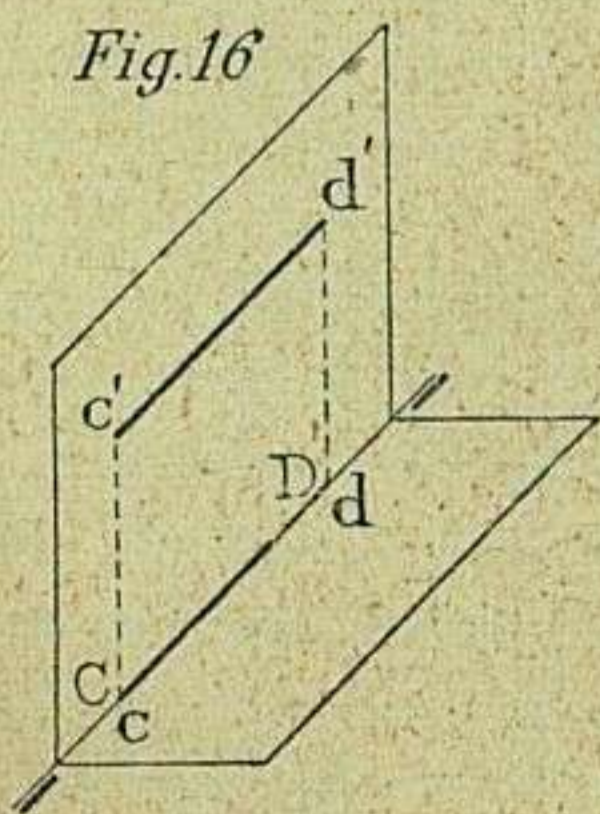
Entre este caso y el expuesto en el núm. **13** no hay diferencias esenciales. Únicamente ha de tenerse presente que cuando la recta GH (fig. 13) está situada sobre el plano horizontal, las proyectantes verticales de dos de sus puntos quedan reducidas á cero, y lo mismo sucede con las proyectantes horizontales de la recta EF (fig. 14) cuando está situada sobre el plano vertical.



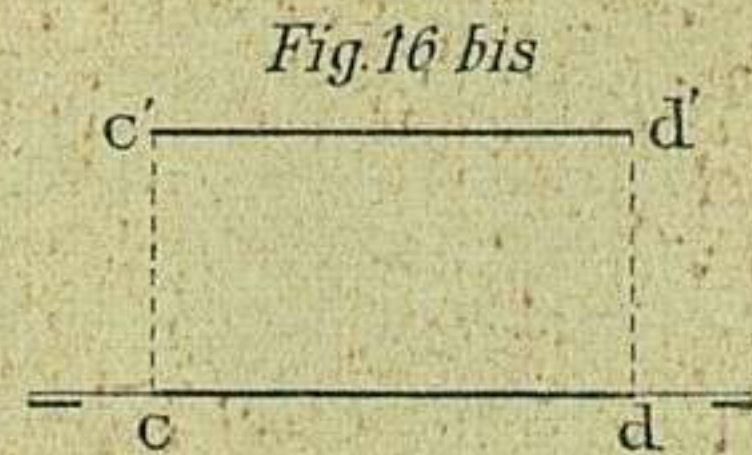
De la situación especial de las rectas GH y EF se deduce una importante consecuencia, pues no solamente se proyectan dichas rectas en su verdadera magnitud sobre el plano que las contiene, sino que además el ángulo que forman con la línea de tierra se conserva invariable en las respectivas proyecciones. Así, cuando una recta se halla contenida en uno de los planos de proyección, el ángulo que forma con la línea de tierra se proyecta en su verdadera magnitud, verificándose lo propio cuando dicha recta está contenida en un plano paralelo al de referencia.



17. Representación de la recta paralela á un plano y situada sobre otro de los de proyección. — En este caso,



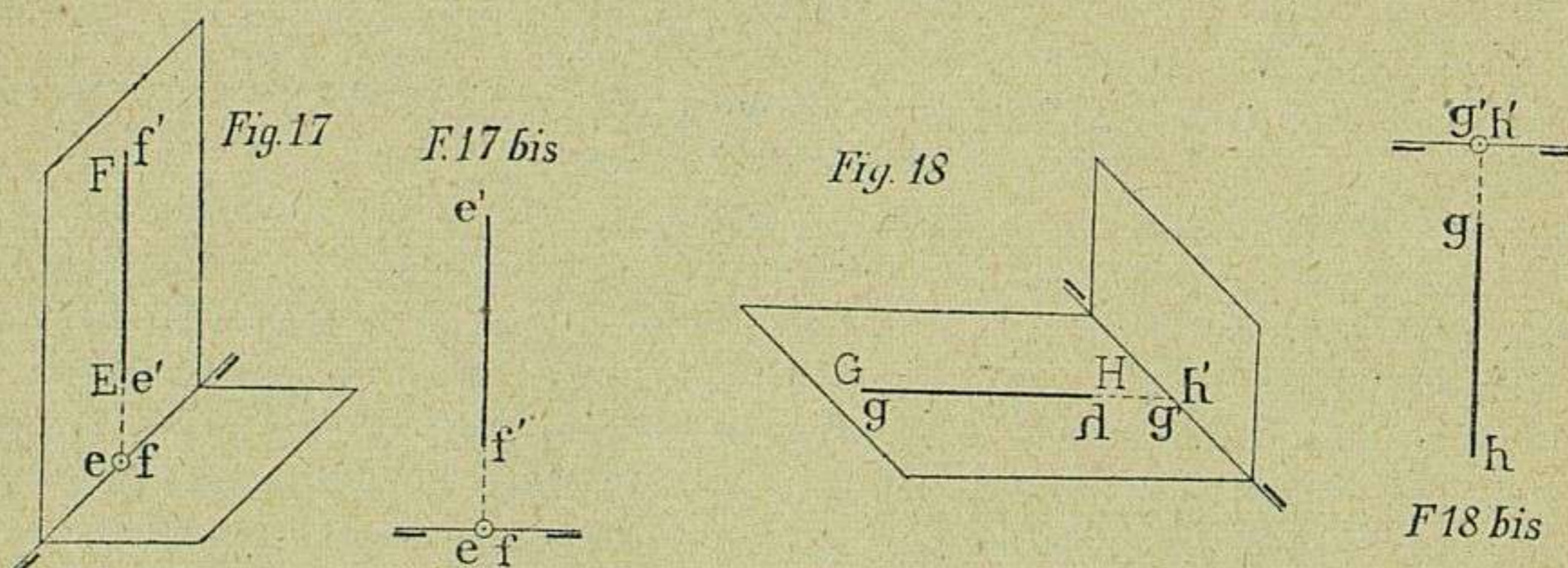
como en los anteriores, se ofrecen dos variaciones; según que la recta esté contenida en el plano horizontal ó vertical (figs. 15 y 15 bis, 16 y 16 bis), queda reducido á lo expuesto en el núm. **14**, sin más que considerar nulas las proyectantes verticales de AB (figs. 15 y 15 bis), y las horizontales de la recta CD (figs. 16 y 16 bis); por consiguiente, y en consideración á lo expuesto



en los números **13**, **14**, **15** y **16**, también aquí se proyectan las rec-

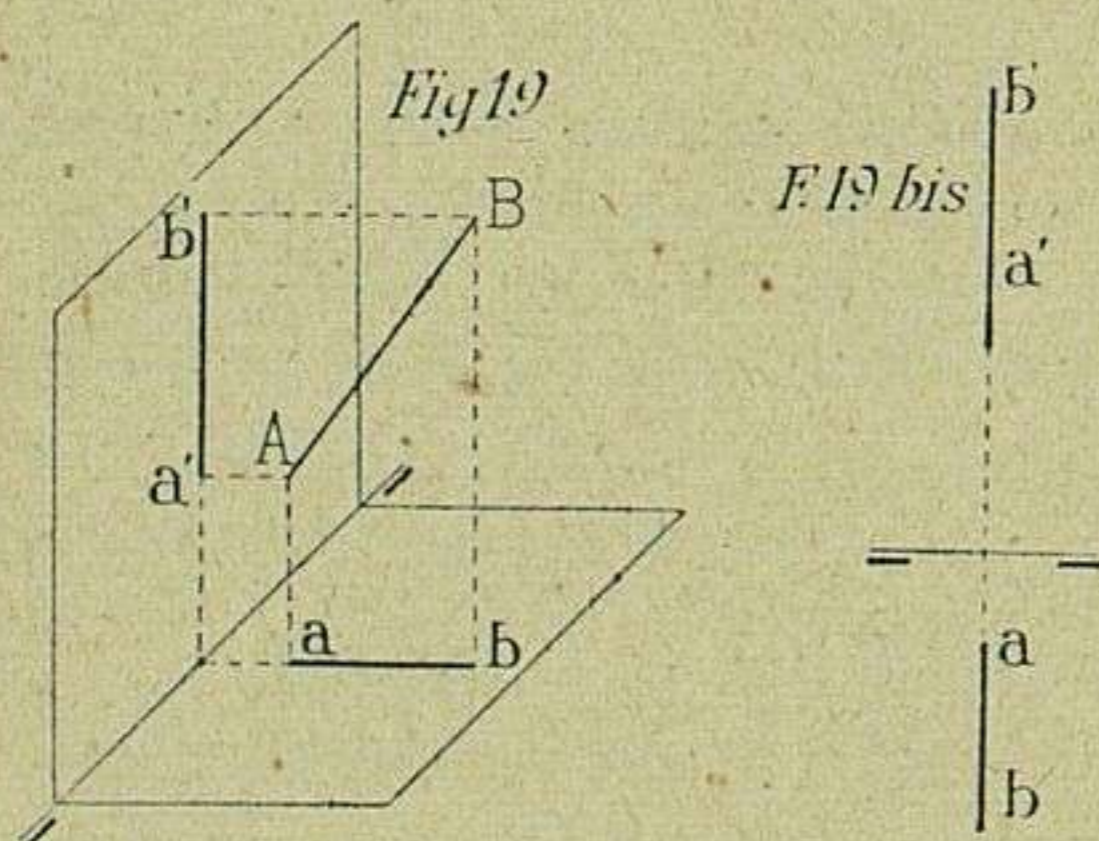
tas en su verdadera magnitud sobre los planos de proyección al que son paralelas.

18. Representación de la recta perpendicular á un plano y situada sobre otro de los de proyección. — Entre este caso y el expuesto en el número **15** no hay otra diferencia sino que la recta perpendicular proyectada está contenida en uno de los planos de proyección. Por esta condición, cuando la recta $E F$ (figs. 17 y 17 bis) se supone contenida en el plano vertical, las proyecciones horizontales $e f$ de dos de sus puntos se encuentran sobre la línea de tierra, puesto que las proyectantes horizontales son nulas.



Las mismas consideraciones pueden hacerse sobre las figuras 18 y 18 bis, en las que las proyectantes verticales de la recta $G H$ quedan también anuladas por estar situada dicha recta sobre un plano horizontal. Por lo demás, también en este caso se verifica que las rectas $E F$ y $G H$ se hallan proyectadas en su verdadera magnitud sobre el respectivo plano de proyección que las contiene.

19. Representación de la recta perpendicular á la línea de tierra y oblicua á los planos de proyección. — Dos condiciones pueden notarse



en este caso, según que la recta corte á la línea de tierra ó que sin cortarla, sea perpendicular á dicha línea. Tanto de una manera como de otra, la recta dada $A B$ (fig. 19) se hallará contenida en un mismo plano proyectante $b' B b$, perpendicular á los de proyección: debido á esta circunstancia, las dos proyecciones $a b$ y $a' b'$ (fig. 19 bis) se encuentran enfiladas perpendicularmente á la línea de tierra, por lo que, con sólo estos datos, se hace imposible conocer

la situación de $A B$ en el espacio, siendo preciso, para darse cuenta exacta de ella, conocer las proyecciones de los extremos A y B , ó mejor aún, las longitudes de cada par respectivo de proyectantes $B b$, $B b'$ y $A a$, $A a'$. Si la recta dada corta á la línea de tierra, bastará conocer solamente las longitudes de las

proyectantes de un punto extremo, porque el otro quedará suficientemente determinado en la intersección de la recta dada con la de tierra.

20. Representación de la recta situada sobre la línea de tierra.—

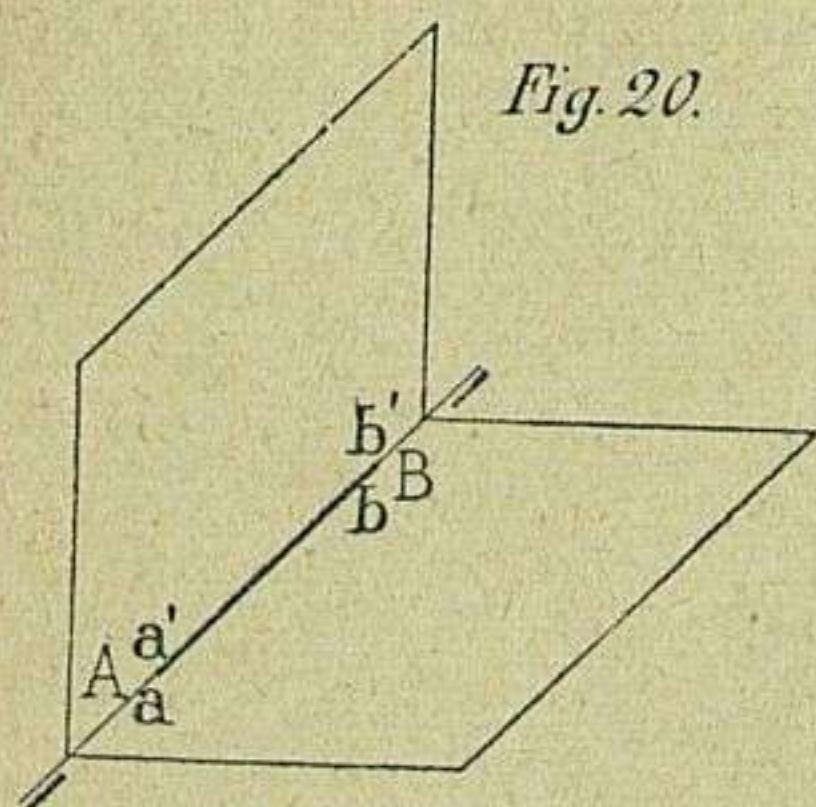
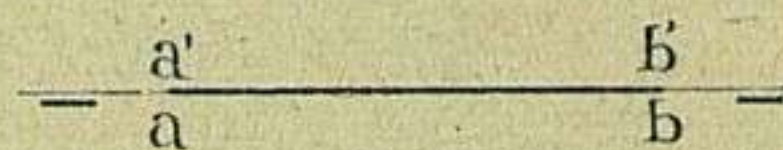


Fig. 20.

En este caso especialísimo la recta $A B$ (figs. 20 y 20 bis) se confunde con su proyección horizontal $a b$ y vertical $a' b'$; en una palabra, sus proyectantes horizontales y verticales son nulas. También en el caso actual, por estar contenida la recta $A B$ en los dos planos de proyección á la vez, se proyecta en su verdadera magnitud.

Hasta aquí se ha tratado de la representación de las rec-

Fig. 20 bis



tas, limitándolas á las proyecciones de sus puntos extremos; pero hay casos, como inmediatamente se verá, en que conviene determinar otros puntos de particular interés; tales son, aquellos que resultan de la intersección de una recta al prolongarla, con uno ó los dos planos de proyección. Á estos puntos de intersección se les nombra *trazas de la recta*. Los siguientes ejemplos pueden servir para aclarar conceptos.

21. Dada por sus proyecciones una recta oblicua á los dos planos, hallar sus trazos (figs. 21 y 21 bis).— Sean $a b$, la proyección horizontal y $a' b'$ la vertical de la recta $A B$. Se prolonga la proyección horizontal $a b$ hasta que se encuentre al plano vertical, lo que se verificará precisamente en

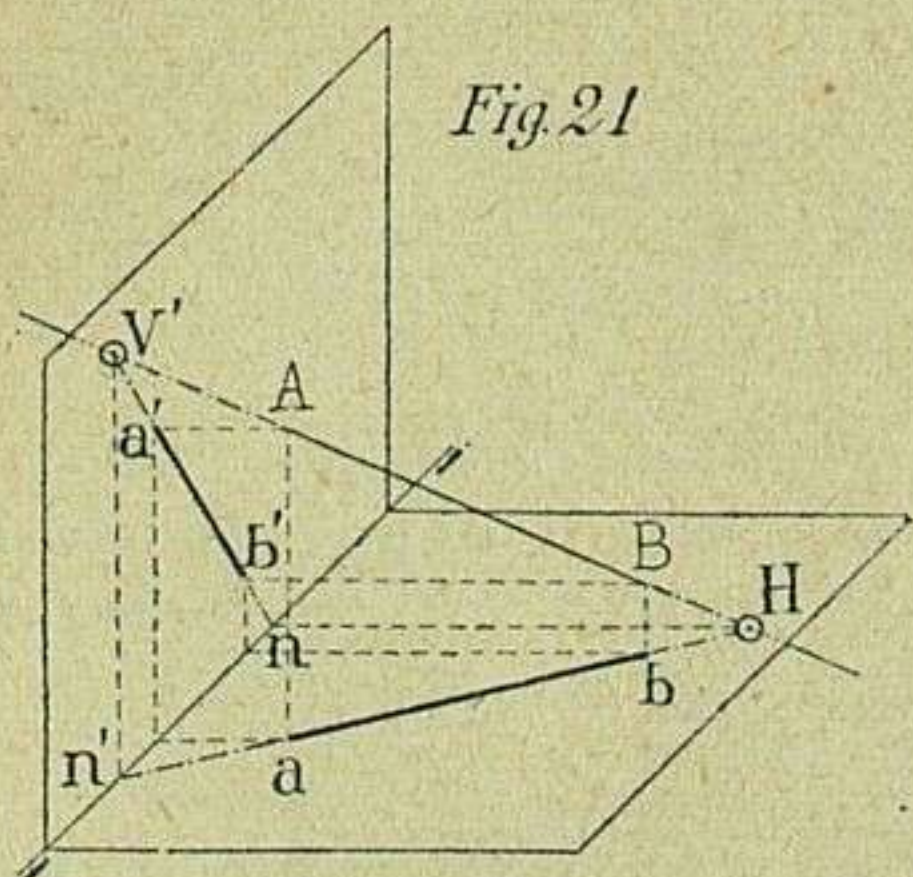


Fig. 21

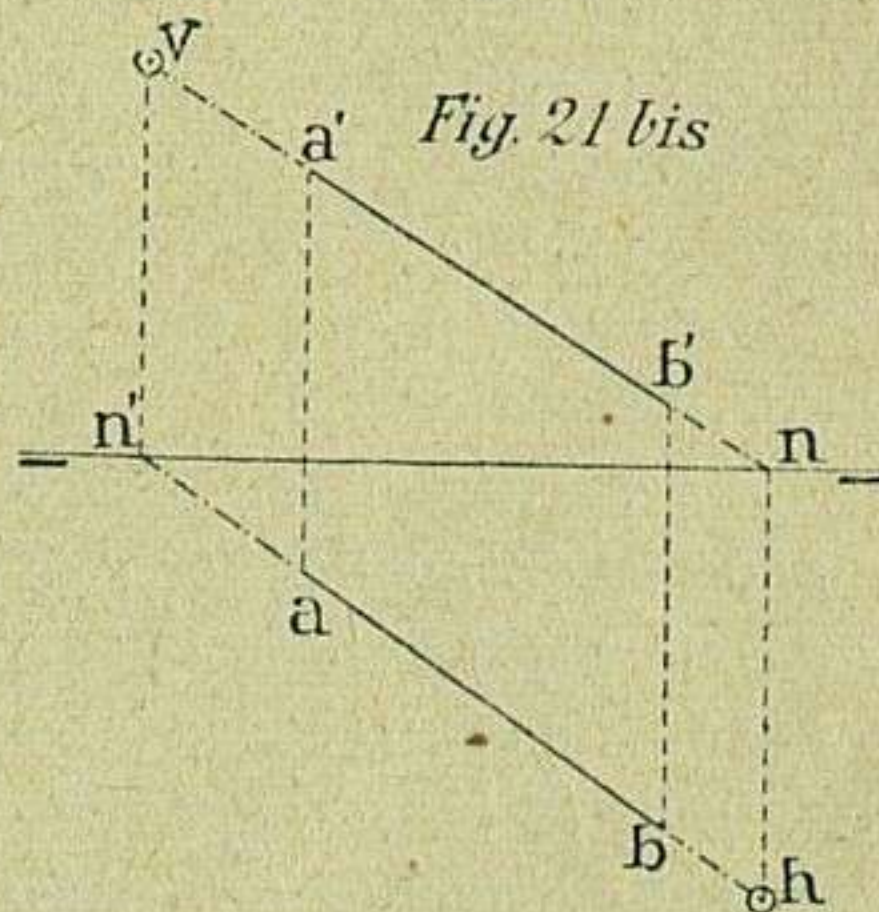
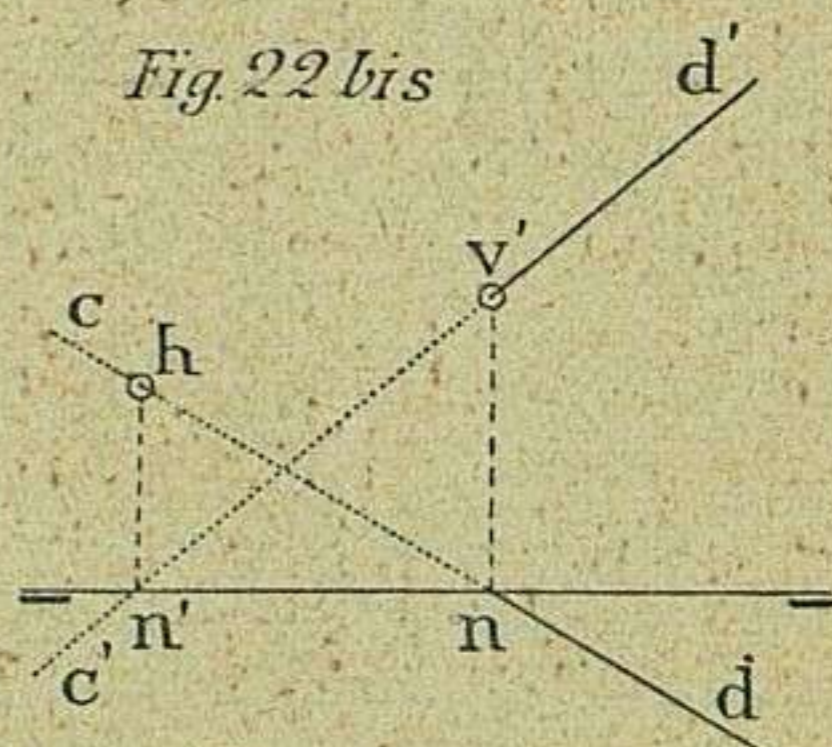
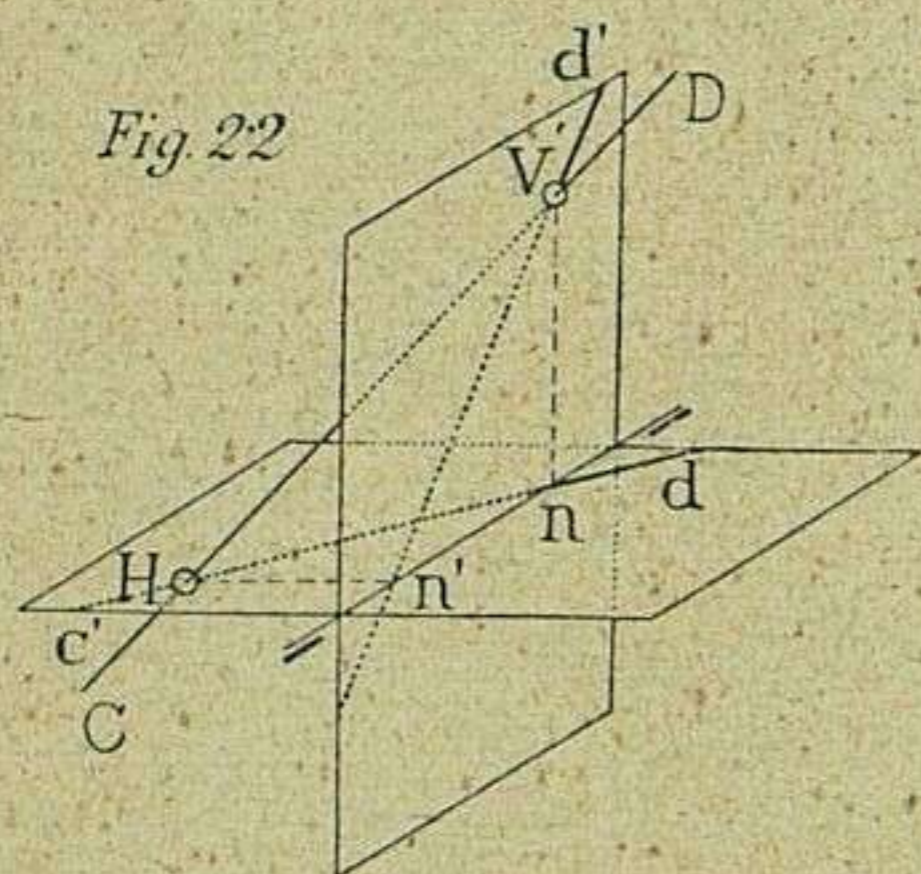


Fig. 21 bis

el punto n' de la línea de tierra; desde n' se levanta línea de correspondencia hasta que corte á la prolongación de la proyección vertical $a' b'$ en v , punto que representa la traza vertical. Para determinar la traza horizontal h , se prolonga la proyección vertical $a' b'$ que encontrará al plano horizontal en n , desde cuyo punto se bajará línea de correspondencia hasta cortar en h á la proyección horizontal $a b$.

22. Puede muy bien ocurrir, á causa de la posición especial de una

recta oblicua, que alguna de sus trazas se encuentre fuera del primer ángulo. Sean (figs. 22 y 22 bis) nd y $n'd'$ las proyecciones de la recta CD . Procediendo como en el núm. 21 se prolonga la proyección horizontal ed , hasta que en n encuentre á la línea de tierra; desde este punto se levantará línea de correspondencia que en su intersección con la prolongación de la $e'd'$ dará en el punto c' una de las trazas de la recta, la vertical. Para determinar la otra traza se pro-



longa la proyección vertical hasta n' , y desde este punto se levanta línea de correspondencia, que al cortar á la prolongación de ed determinará el punto h , traza horizontal de la recta dada. En este ejemplo se da el caso poco frecuente, de que la traza horizontal h ocupe, en apariencia, un sitio que, en tal supuesto, no le corresponde sobre el plano vertical. Esta duda, que pudiera ocurrir, quedará desvanecida al considerar que prolongando la recta en el espacio pasa del primer ángulo al segundo, penetrando en h á la parte de plano horizontal correspondiente á la región posterior. Por eso, al suponer verificado el giro de planos de proyección á que se refiere el núm. 6, aparece el plano horizontal posterior y los puntos en él contenidos, coincidiendo con la región superior del plano vertical.

En general, para hallar la traza horizontal de una recta, se prolongará la proyección vertical de ella hasta que encuentre á la línea de tierra en un punto, desde el que se trazará una perpendicular á dicha línea de tierra. El punto donde esta perpendicular corte á la proyección horizontal de la recta dada será la traza horizontal que se busca.

Para obtener la traza vertical, se prolongará la proyección horizontal de la recta hasta que encuentre á la línea de tierra, y desde este punto se levantará una perpendicular, que al cortar á la proyección vertical determinará la traza vertical.

Conviene tener presente, que cuando una recta es paralela á un plano ó á los dos de proyección, no puede tener traza con ellos por razón de su paralelismo. Cuando la recta es perpendicular á uno de los planos de proyección, será necesariamente paralela al otro; por tanto, sólo tendrá una traza sobre el plano perpendicular á dicha recta.

REPRESENTACIÓN DEL PLANO

y posiciones que puede tener respecto á los de proyección.

23. Toda superficie plana ó plano, puede considerarse, para los efectos de su representación en proyecciones, en una de estas dos categorías: plano ilimitado y plano limitado ó definido. A la primera clasificación pertenecen aquellos que carecen de contorno, propiamente dicho, pero cuya existencia puede deducirse de ciertos signos peculiares y característicos de las superficies planas. Á la segunda pertenecen toda clase de poligonos planos cuya forma está claramente definida por su contorno, incluyéndose entre ellos el círculo y demás curvas planas.

Los signos que denuncian la existencia del plano ilimitado, pueden consistir: en dos rectas que se corten, ó en dos rectas paralelas, y también en una recta y un punto ó tres puntos que no estén en línea recta.

La consideración de plano ilimitado lleva consigo la idea de que extendiéndose encontrará y, por consiguiente, cortará á los dos planos de proyección, según rectas. Estas rectas, intersecciones del plano supuesto con los de proyección, se llaman *trazas del plano*.

La representación del plano por medio de sus trazas facilita extraordinariamente las operaciones del dibujante, por ser la señal que más directamente da á conocer la posición que ocupa el plano á quien representan; así es, que en los ejemplos sucesivos ellas servirán de datos.

24. Un plano cualquiera, con relación á los de proyección, puede ocupar las posiciones siguientes:

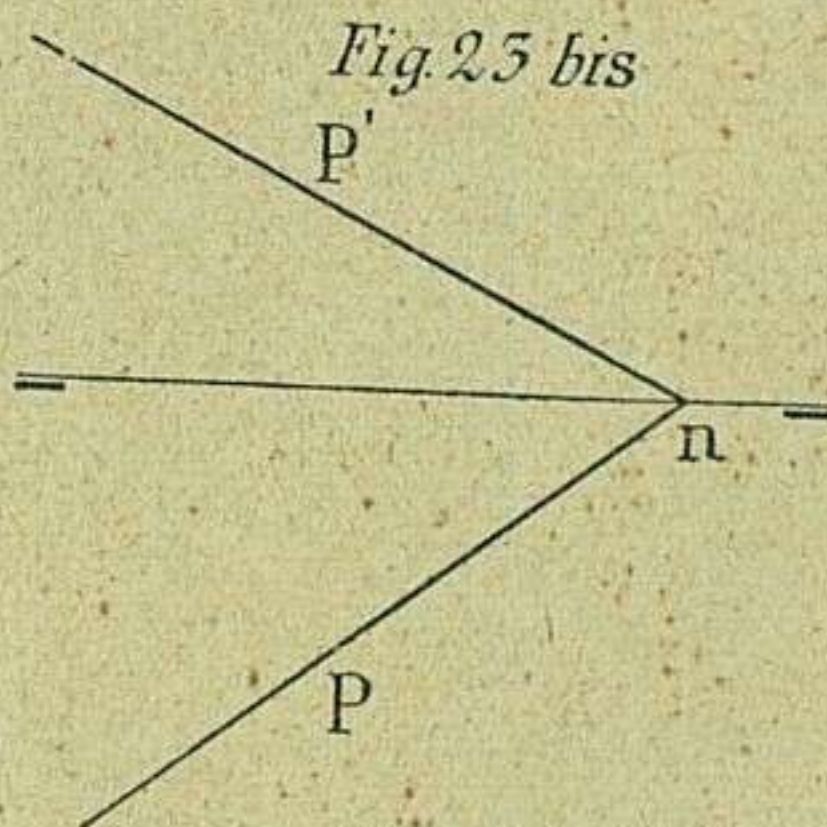
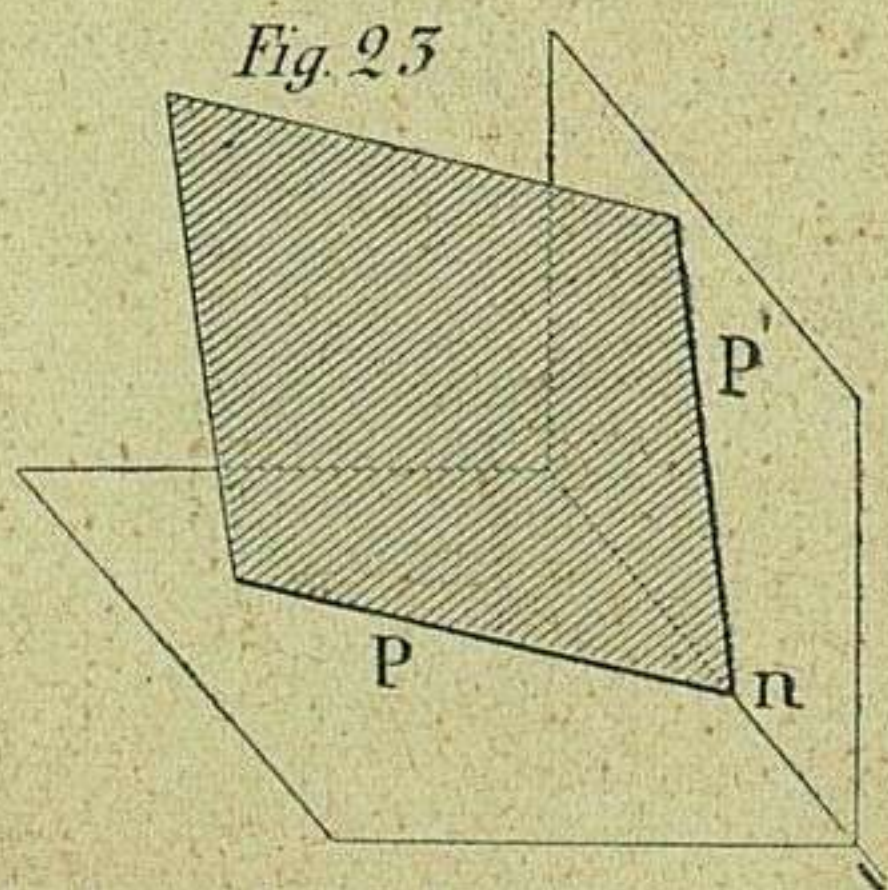
Puede ser oblicuo á los dos planos de proyección.

Puede ser perpendicular al uno y oblicuo al otro.

Puede ser perpendicular á los dos planos.

Puede ser paralelo á uno de los planos.

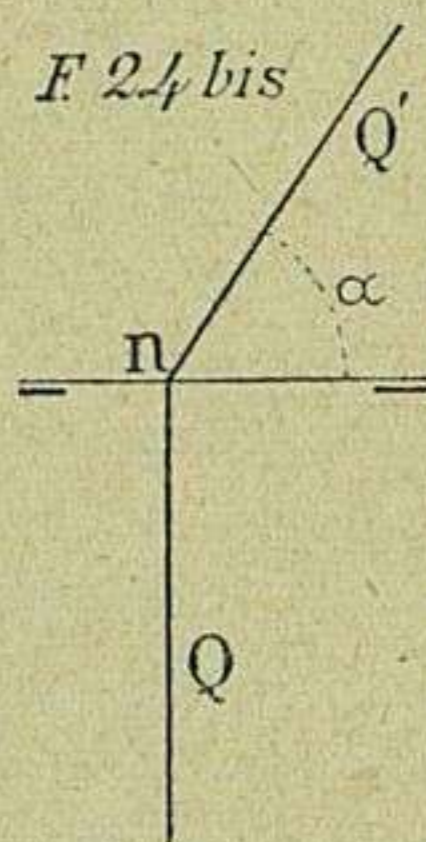
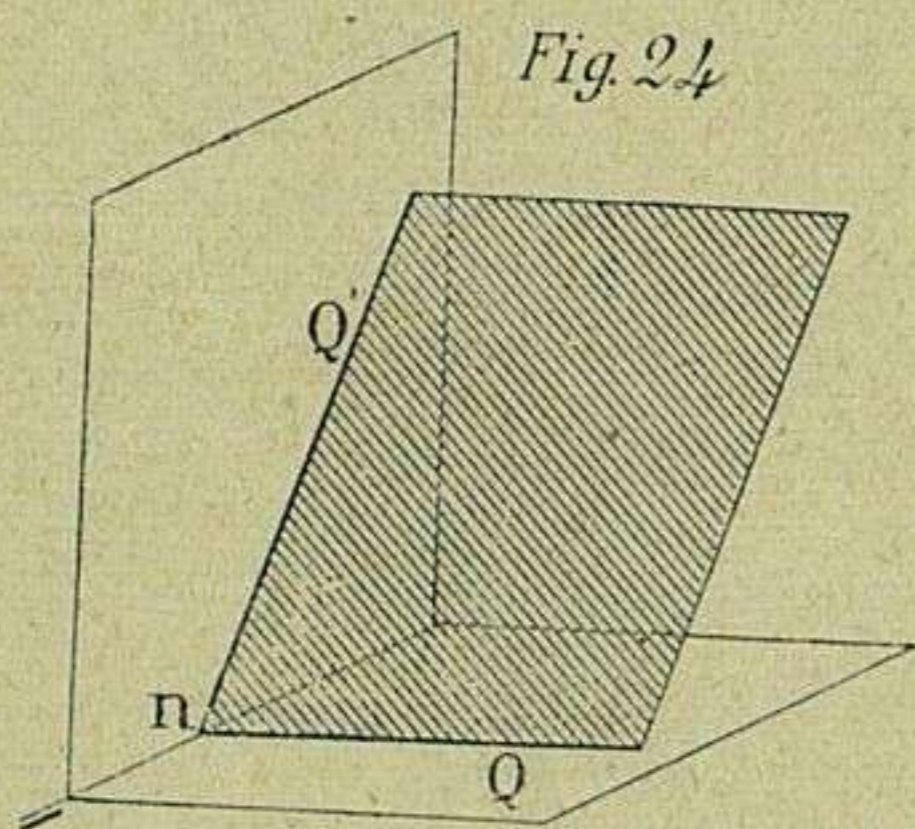
Puede ser paralelo á la línea de tierra.



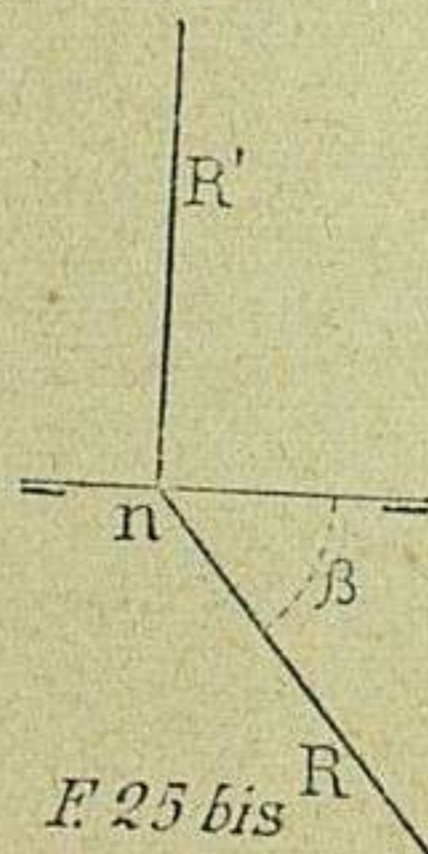
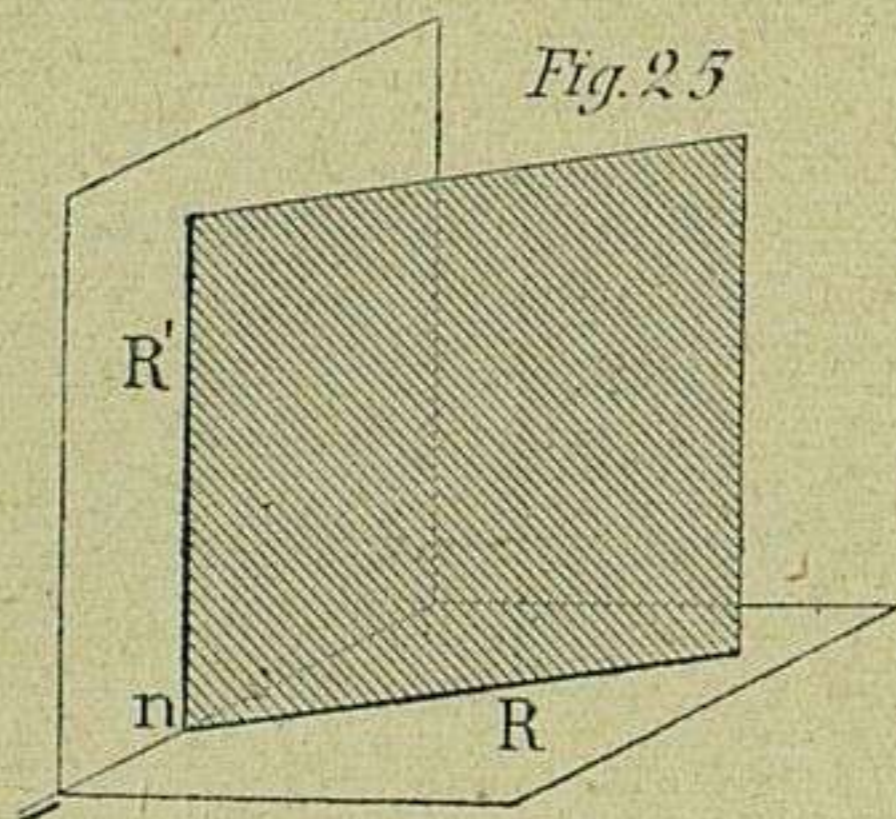
25. Representación de un plano oblicuo dado por sus trazas.— Sean nP y nP' (figs. 23 y 23 bis) las trazas del plano dado. Definidas ya las

las trazas del plano (V. 24) y teniendo en cuenta que estas han de cortarse en un punto de la línea de tierra, quedará representado el plano oblicuo, por las líneas $n P$ y $n P'$ (trazas del plano) que estando contenidas en los planos de proyección respectivos, son necesariamente oblicuas á la línea de tierra, reuniéndose además en un punto n de ella.

26. Representación por medio de trazas de un plano perpendicular á uno de los de proyección y oblicuo al otro (figs. 24 y 24 bis). — Sea, por ejemplo, un plano oblicuo al horizontal, y perpendicular al vertical, determinado por las trazas $n Q$ y $n Q'$. Desde luego se nota en este



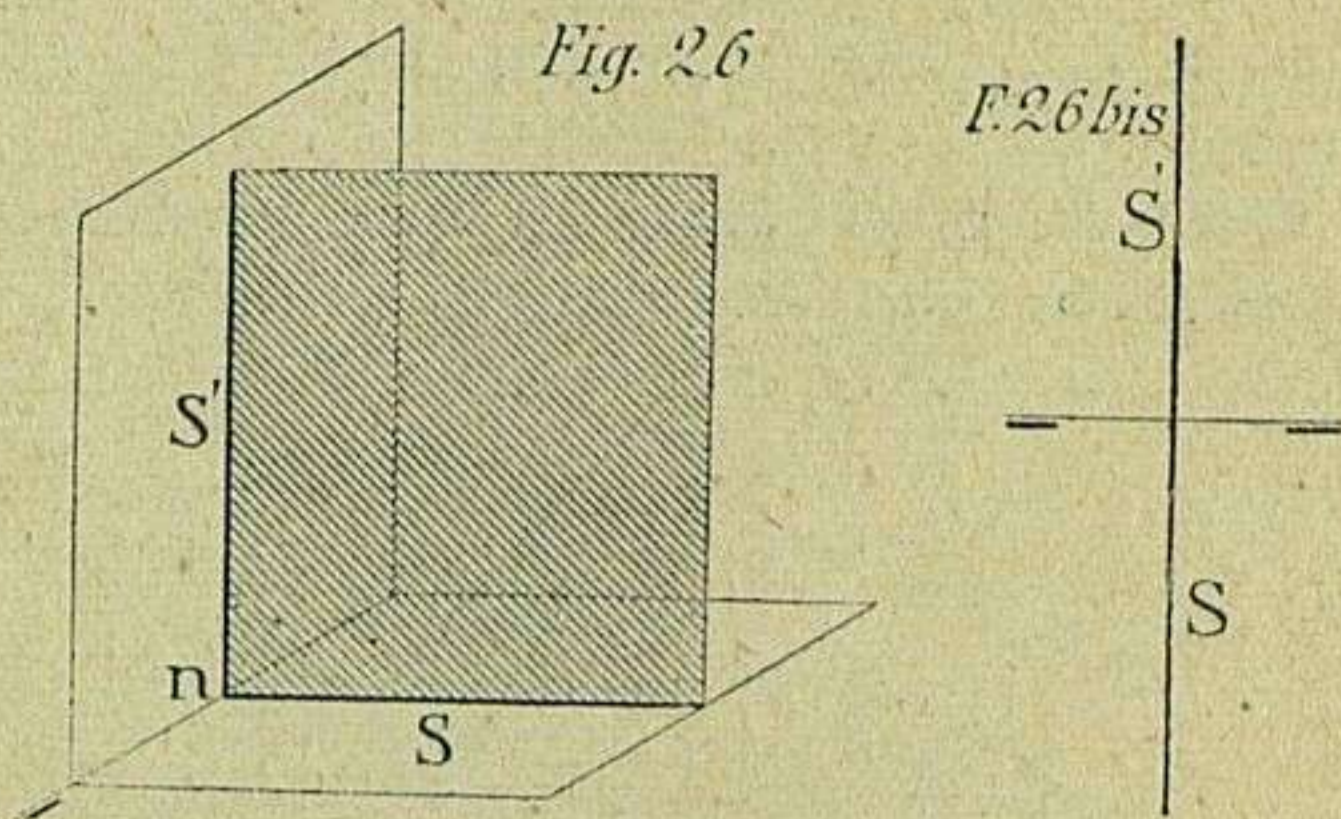
caso que la traza vertical $n Q'$, además de traza es proyección vertical del plano dado, á causa de su perpendicularidad al vertical de proyección. Esta coincidencia de traza y proyección permite poder averiguar directamente la medida del ángulo diedro, formado por el plano de las trazas y uno de los de proyección. Así, el ángulo α (fig. 24 bis), formado por la traza vertical $n Q'$, con la línea de tierra, es el que sirve de medida al citado ángulo diedro.



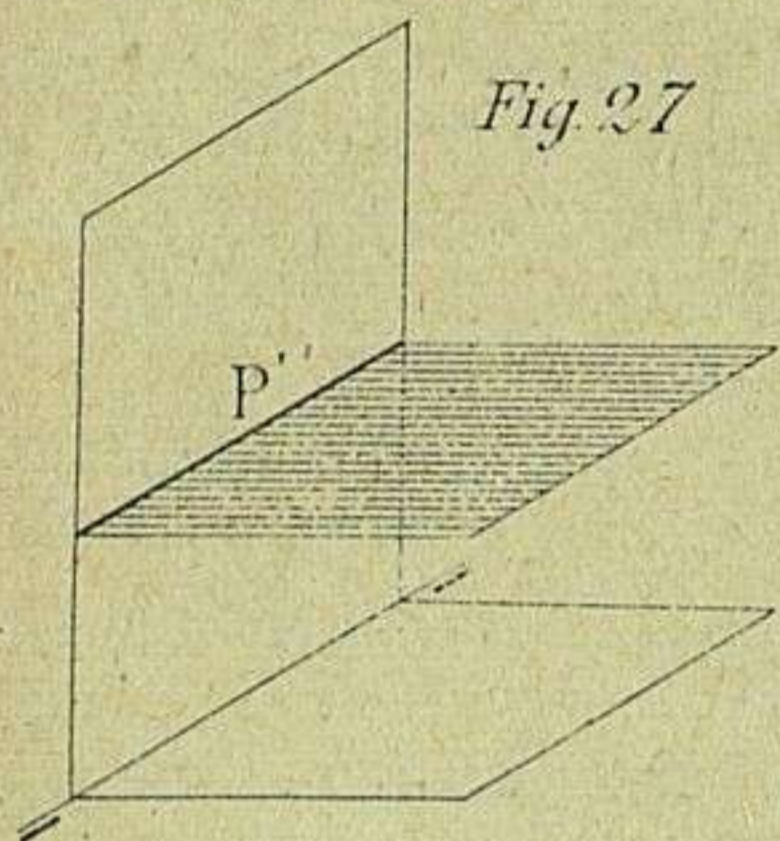
Análogas deducciones se pueden sacar cuando el plano dado por sus trazas es perpendicular al horizontal de proyección (figs. 25 y 25 bis). En este caso, la traza $n R'$ es perpendicular á la línea de tierra, y el ángulo β , formado por

la traza $n R$ con la línea de tierra, se proyecta en su verdadera magnitud. También puede tener infinidad de posiciones el plano dado, según el ángulo que forme la traza oblicua con la línea de tierra.

27. Representación del plano perpendicular á los de proyección dado por sus trazas (figs. 26 y 26 bis). — Del examen de la posición relativa del plano dado por las trazas $n S$ y $n S'$

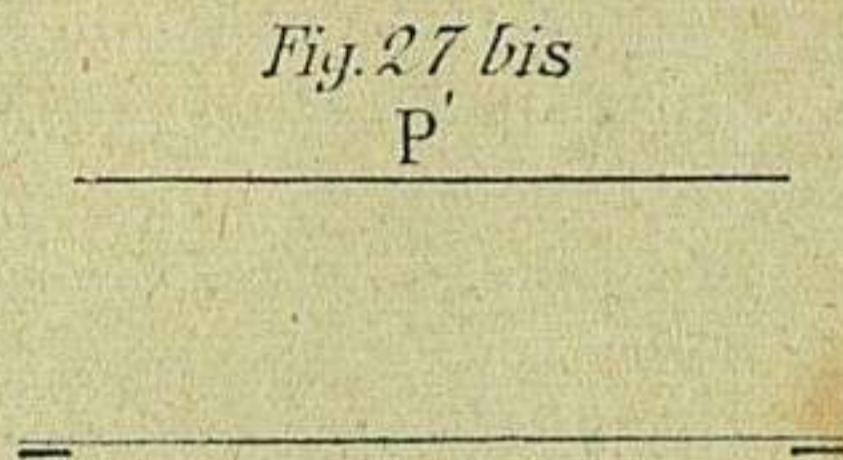


(fig. 26) se deduce que, cortándose dichas trazas en la línea de tierra, y siendo además perpendiculares á ella, el plano que determinan será por necesidad perpendicular á los de proyección. En el caso actual, las trazas son, además, proyecciones del plano, que por ser perpendicular á los dos de proyección, no admite otra representación que la consignada en la figura 26 bis. El plano en esta posición es usado, según se verá más adelante, como plano auxiliar de proyección en muchos casos; entonces toma el nombre de *plano de perfil*.

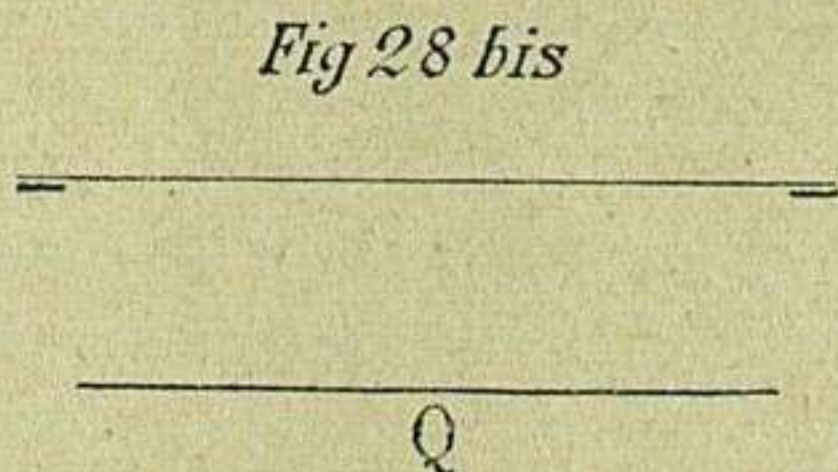
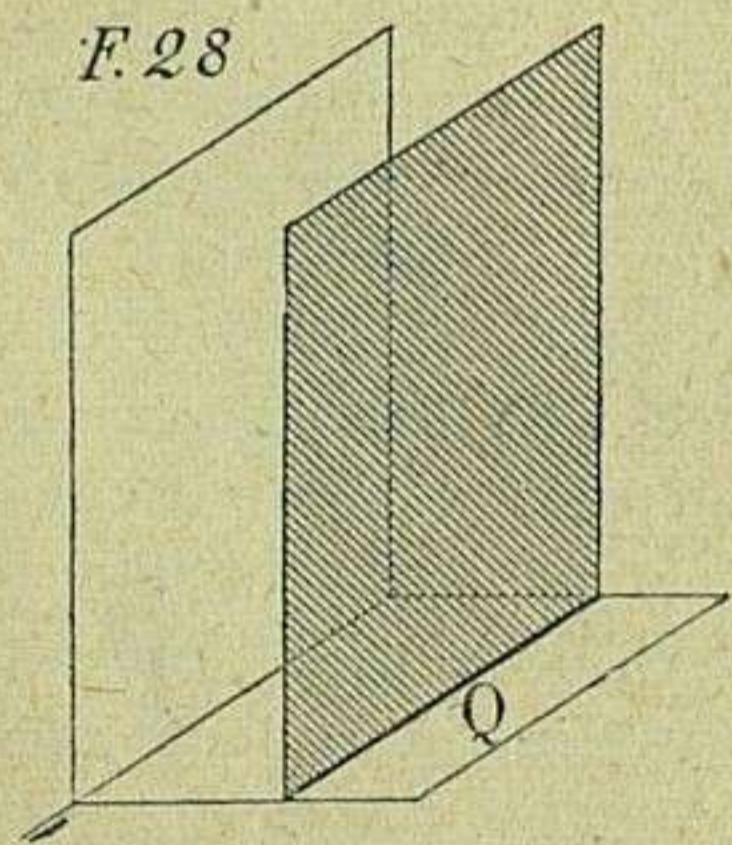


28. Representación del plano paralelo á uno de los de proyección

(figs. 27, 27 bis y 28 y 28 bis). — Según puede observarse en las correspondientes figuras 27 y



28, sólo permite para su representación este plano una sola traza. En efecto, si el plano es paralelo al horizontal de proyección (figura 27) no encontrará á éste, es decir, que carecerá de traza horizontal, y únicamente existirá la traza vertical P' , representada por una paralela á la línea de tierra, puesto que el plano que la produce es paralelo al horizontal de proyección.



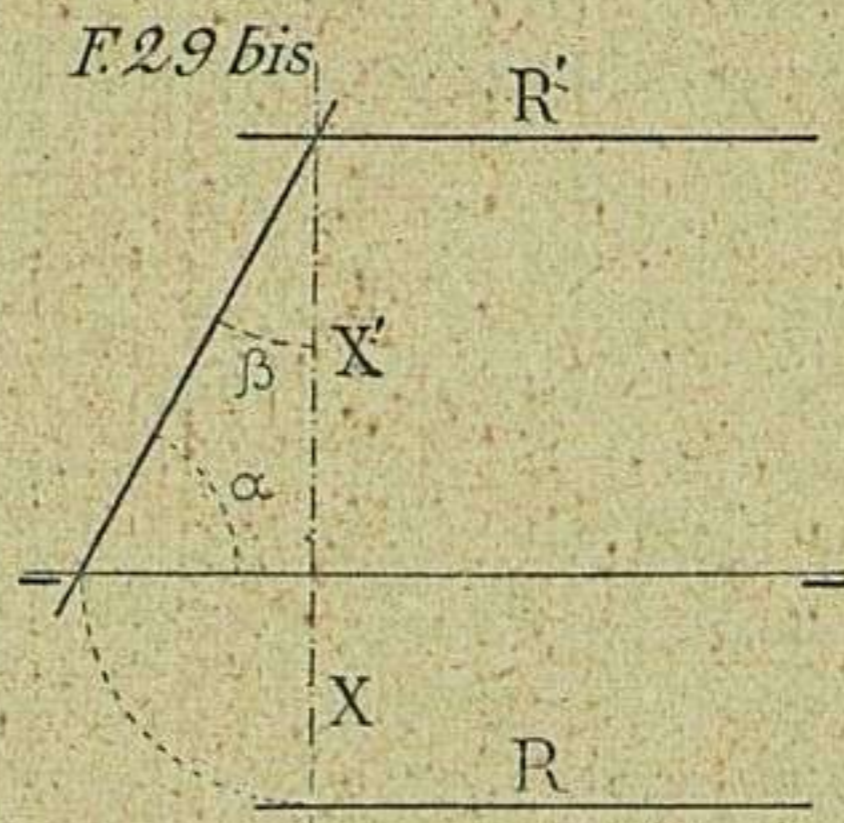
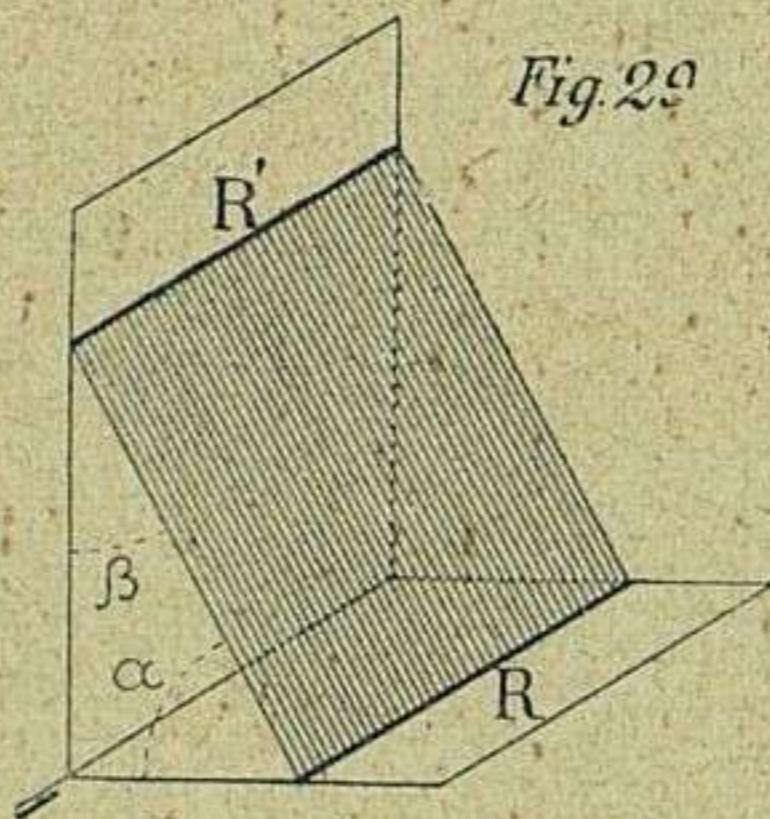
Seguiendo los anteriores razonamientos se vendrá á deducir que, cuando el plano dado es paralelo al vertical de proyección

(fig. 28), sólo está representado por la traza horizontal Q .

El que un plano sea paralelo á uno de los de proyección, supone la propie-

dad de ser perpendicular al otro; de consiguiente, la traza vertical ú horizontal de un plano representado en las citadas condiciones es además, proyección horizontal ó vertical, según el plano de proyección donde se verifique el encuentro.

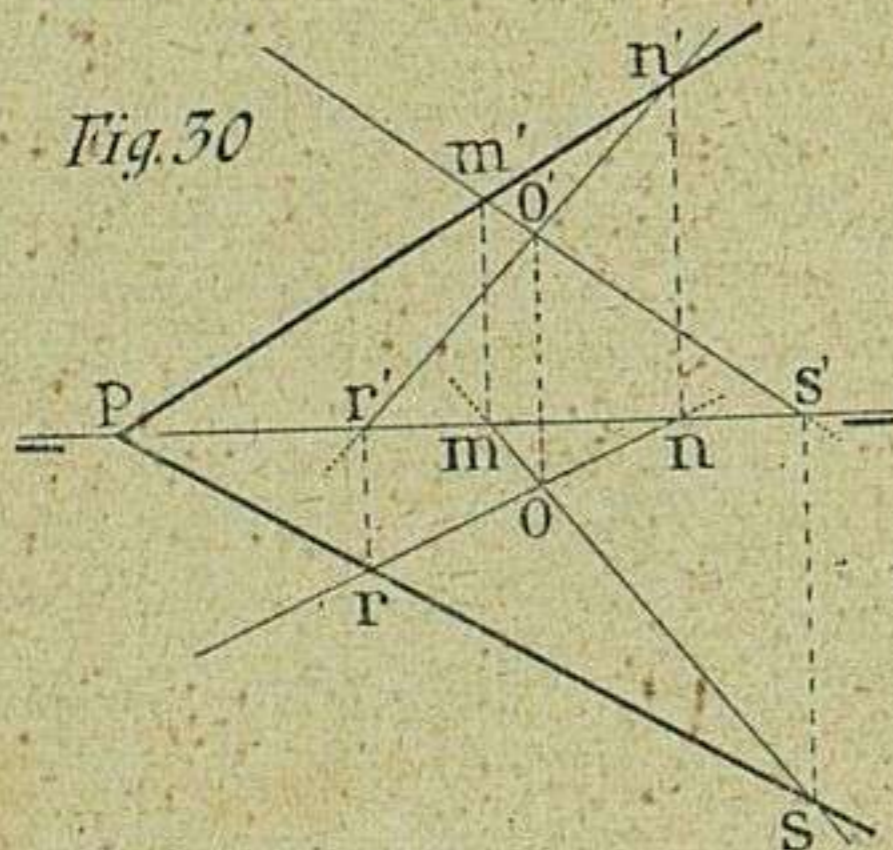
29. Representación por medio de trazas de un plano paralelo á la línea de tierra (figs. 29 y 29 bis). — En este caso, las trazas $R R'$ del plano son siempre paralelas á la línea de tierra, sea cualquiera el ángulo diedro que forme



con cada uno de los planos de proyección, y sin dejar, por supuesto, de ser paralelo á la línea de tierra. Los ángulos α y β , que el plano dado por las trazas $R R'$ forma con los de proyección, se aprecia en su verdadera magnitud sobre un plano de perfil, cuyas trazas son $X X'$, el cual se ha colocado paralelo al vertical por un movimiento de rotación alrededor de X' .

Cuando la existencia de un plano esté indicada por dos rectas que se cortan, dos rectas paralelas ó una recta y un punto, es fácil deducir la situación de las trazas del plano en cada caso, como puede verse prácticamente por los siguientes ejemplos :

30. Dado un plano por dos rectas que se cortan, hallar sus trazas.



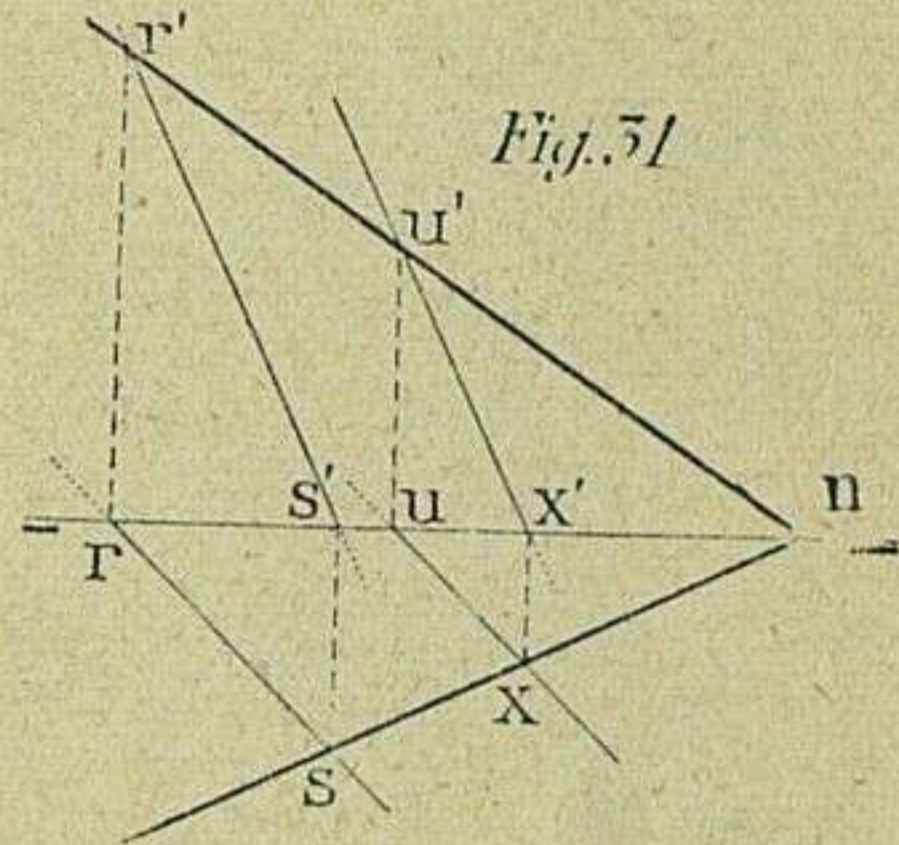
Sean (fig. 30) $r n - r' n'$ y $m s - m' s'$ las proyecciones de dos rectas que se cortan en $o o'$ (1). Si un plano que se supone ilimitado es cortado por los de proyección, todas las rectas contenidas en dicho plano seguirán la misma suerte, es decir, que también serán cortadas por ellos, con la particularidad de que los puntos de intersección de las rectas (traza de la recta) se hallarán situados sobre las rectas intersecciones del plano (trazas del plano).

De aquí se deduce que para resolver este sencillo problema, se determinarán las trazas horizontales $r s$ y las verticales $m' n'$ de las rectas dadas (V. 22), bastando

(1) Para que dos rectas representadas en proyecciones se corten, es necesario que los puntos en que esto se verifique estén situados sobre una línea perpendicular á la de tierra.

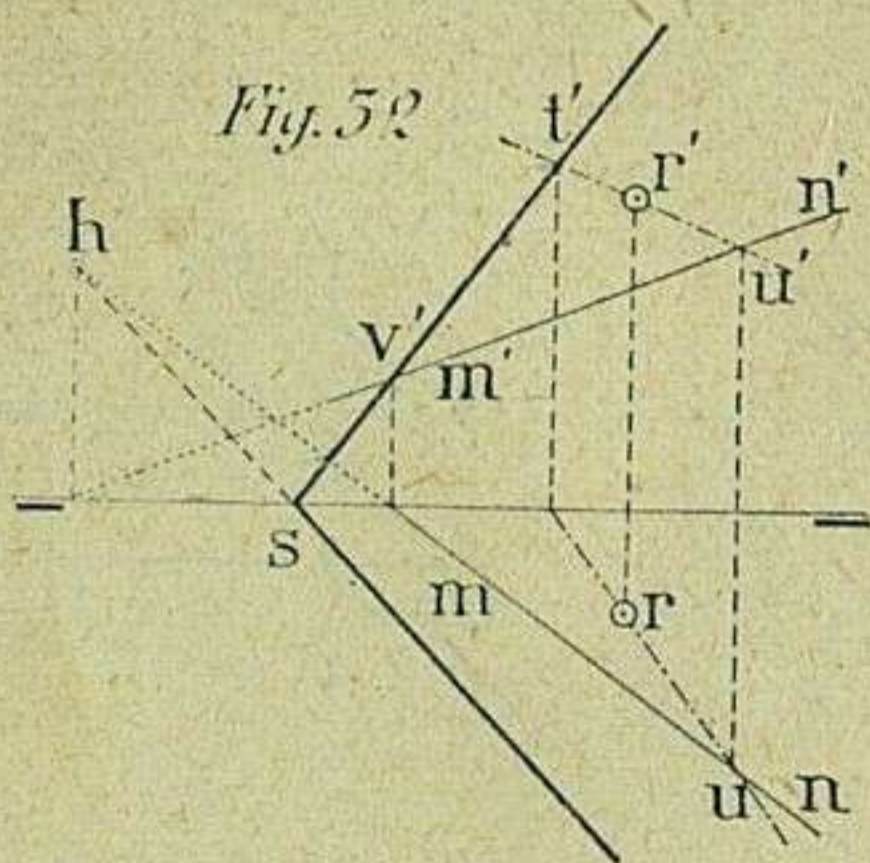
hacer pasar por las trazas $r s$ una recta hasta P, la que representará la traza horizontal del plano, y otra recta por los $m' n'$, que corresponderá á la traza vertical del mismo. Las dos trazas del plano han de concurrir necesariamente al punto P, vértice del ángulo triedro, formado por los planos de proyección y el dado.

31. Dado un plano por dos rectas paralelas, determinar sus trazas.—Sean (fig. 31) $r s - r' s'$ y $x u - x' u'$ las proyecciones de dos rectas paralelas. Procediendo como en el ejemplo anterior, se obtendrá la traza horizontal del plano en la recta que pasa por los puntos s y x , trazas horizontales de las respectivas paralelas, y la vertical, en la recta que pasa por los r' y u' , trazas verticales de las ya citadas paralelas. Puede ocurrir que una de las cuatro trazas de las rectas dadas, la u' , por ejemplo, no pudiera obtenerse dentro de los límites del dibujo, y en tal caso, no disponiendo en el plano vertical más que del punto r' , se hace difícil la determinación de la traza vertical del plano dado.



Tal dificultad desaparece al recordar que las dos trazas del supuesto plano han de concurrir necesariamente á un punto de la línea de tierra (V. 25), y como este punto ha sido determinado en n por la traza horizontal de dicho plano, se tirará por n' y por r' una recta, que será la traza vertical propuesta.

32. Dado un plano por una recta y un punto, hallar sus trazas.

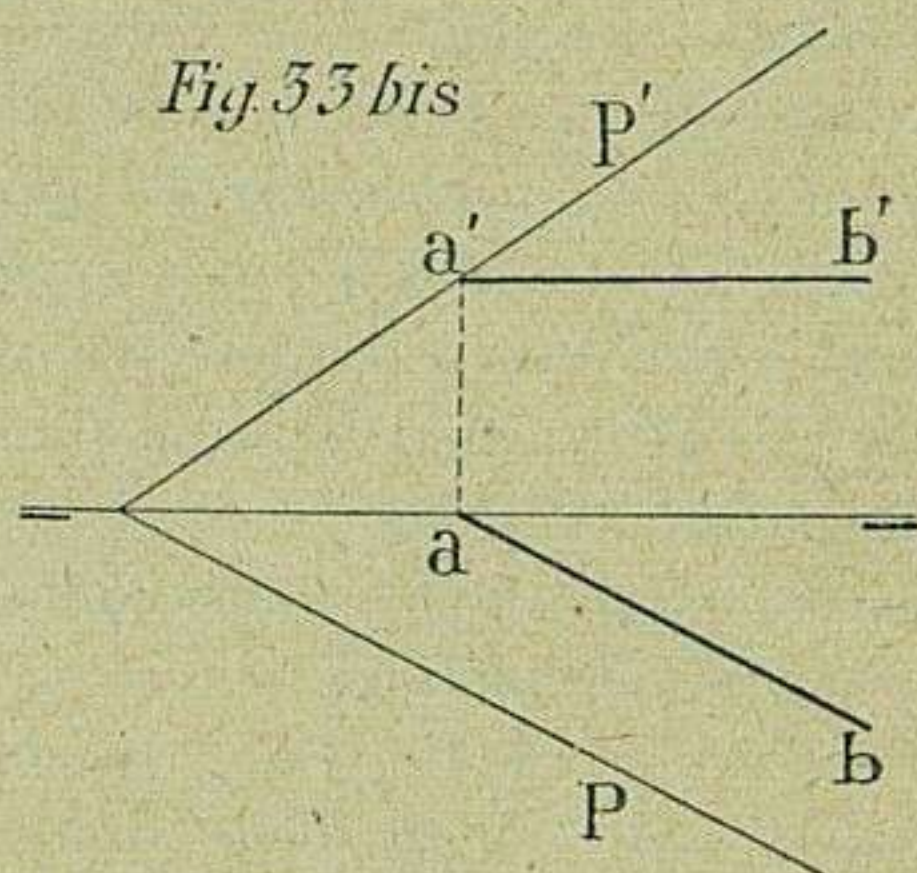
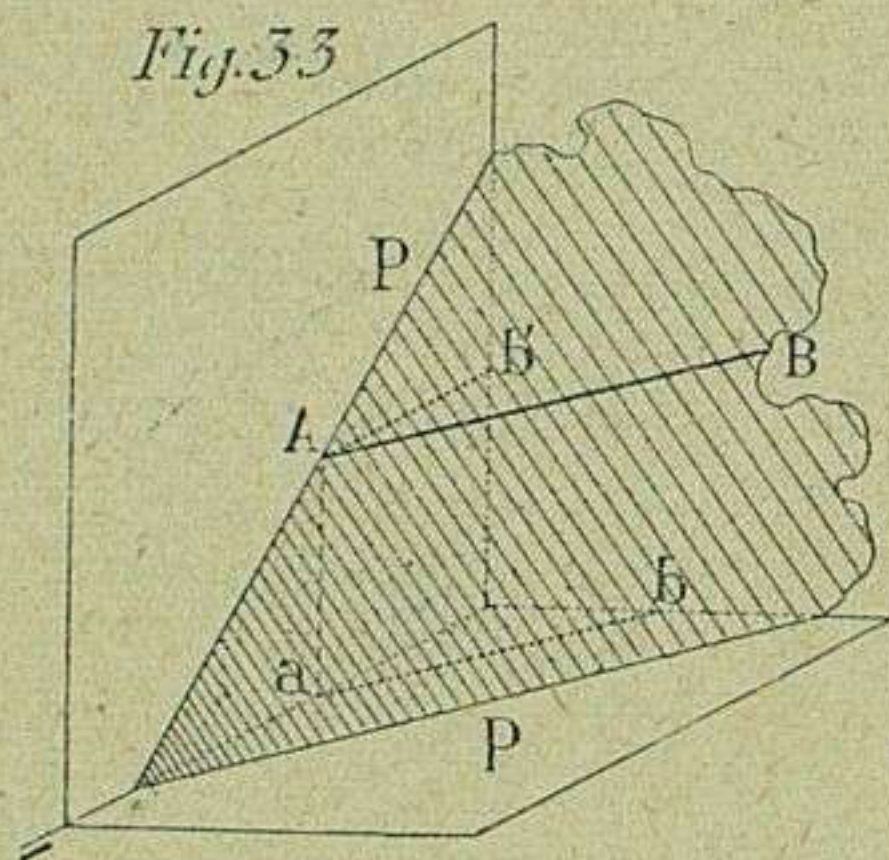


Sean (fig. 32) $m n - m' n'$ las proyecciones de la recta, y $r - r'$ las del punto. Considerando que por el punto $r - r'$ se hace pasar una recta que corta á la dada en un punto cuyas proyecciones son $u - u'$, queda este caso reducido al de hallar las trazas de un plano dado por dos rectas que se cortan (V. 30); mas, á causa de la situación de la traza h de la recta $m n - m' n'$, parece ofrecer alguna dificultad la determinación de las trazas del plano, y conviene fijarse en la marcha seguida.

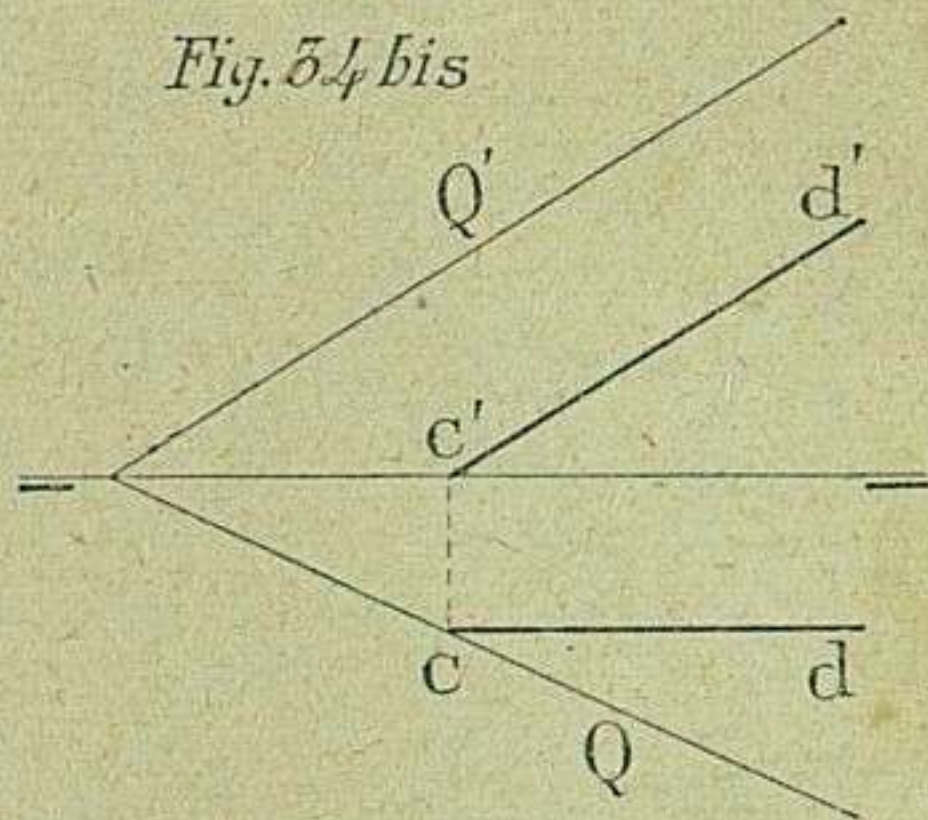
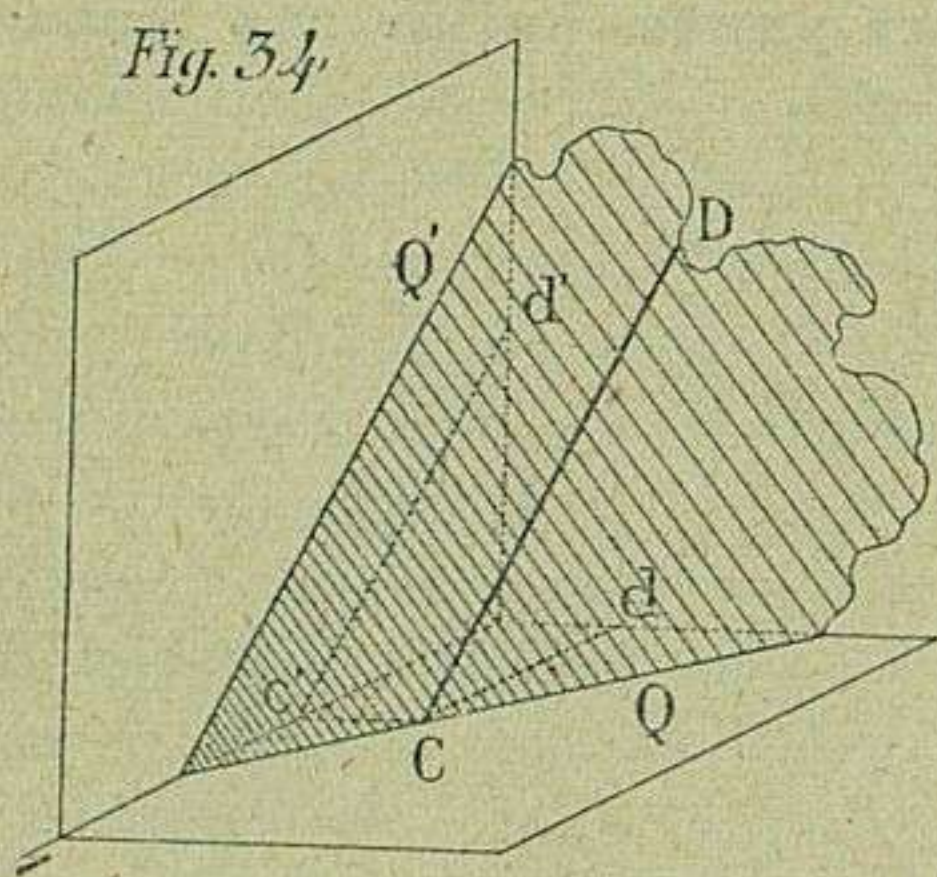
Desde luego se hallan la traza horizontal h y la vertical v' de la recta $m n - m' n'$ y, por otra parte, la traza vertical de la recta $r u - r' u'$ (V. 22). Por las trazas v' y t' se hace pasar, hasta que corte en s , una recta, que será la traza vertical del plano. Por el punto s , en que dicha traza corta á la línea de tierra, y por la traza h , se enfila otra recta, y ésta será la traza horizontal del plano.

Entre las rectas contenidas en planos, que por su situación especial y claramente definida merecen citarse, siquiera sea por la utilidad que reportan como auxiliares en la resolución de muchos problemas, se distinguen los llamados *horizontales* y *verticales del plano*.

33. Horizontal del plano.—Así se denomina una recta $ab - a'b'$ (figuras 33 y 33 bis), que estando contenida en el plano dado por las trazas $P = P'$ es, además, paralela al plano horizontal de proyección. Por la circunstancia de



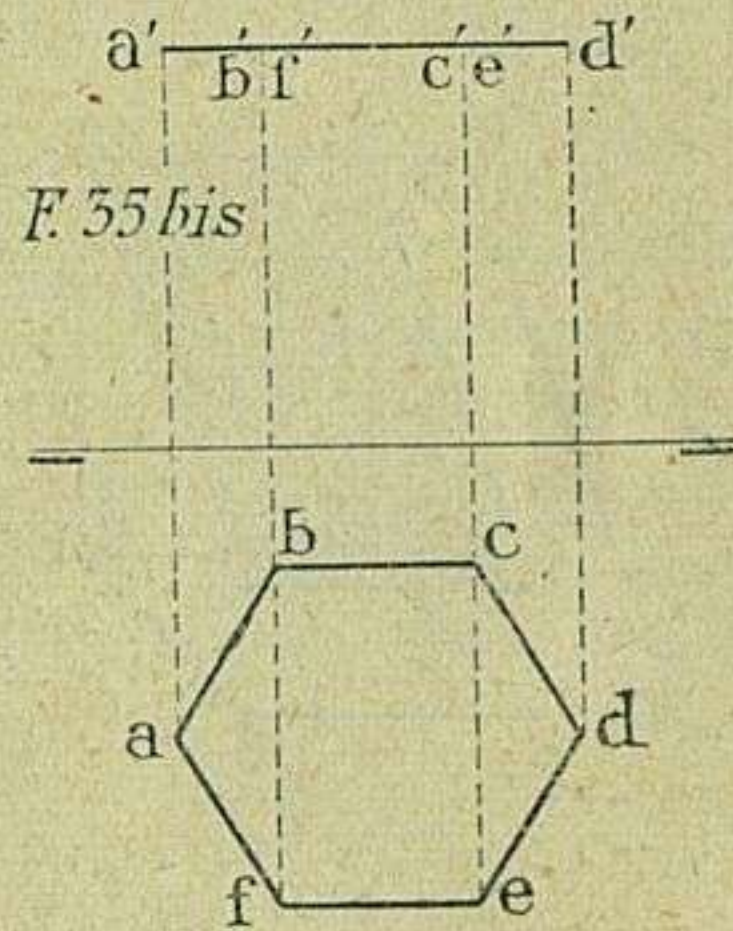
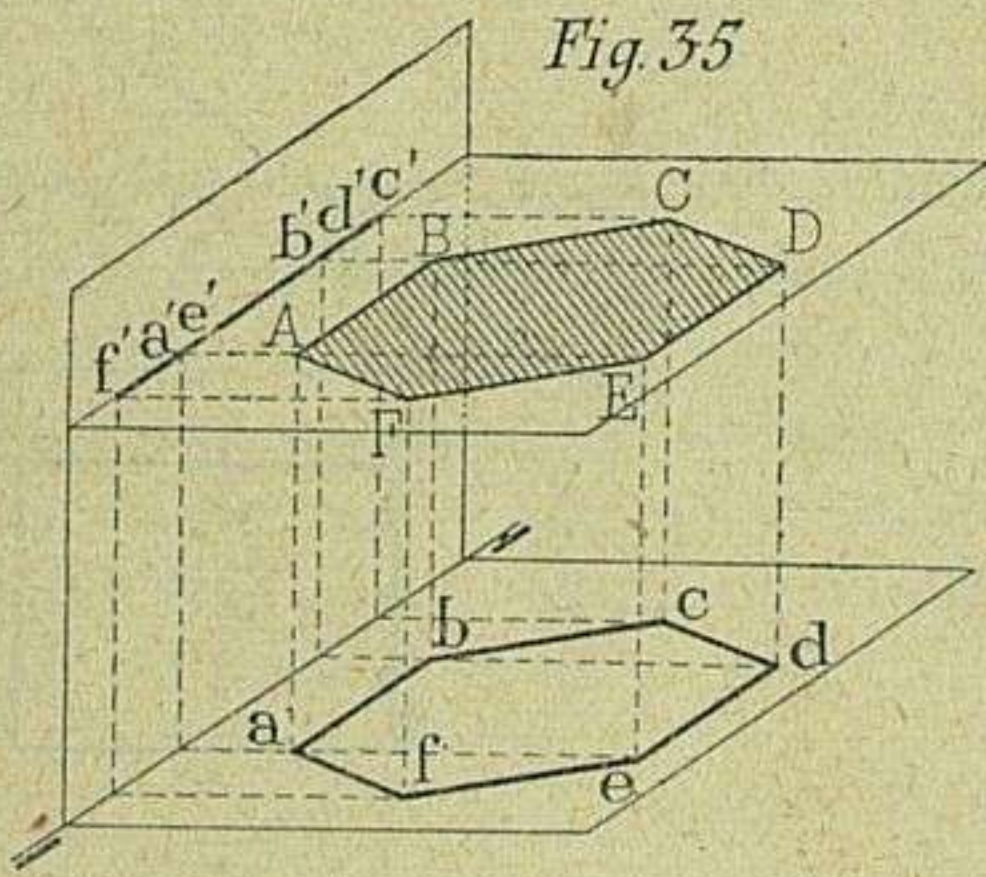
estar situada sobre el plano $P - P'$, la traza a' de ella coincidirá con la traza P' del plano, y por ser, además, dicha recta paralela al plano horizontal de proyección, la proyección vertical $a'b'$ será paralela á la línea de tierra, al paso que la horizontal ab será necesariamente paralela á la traza P del plano, en donde está contenida.



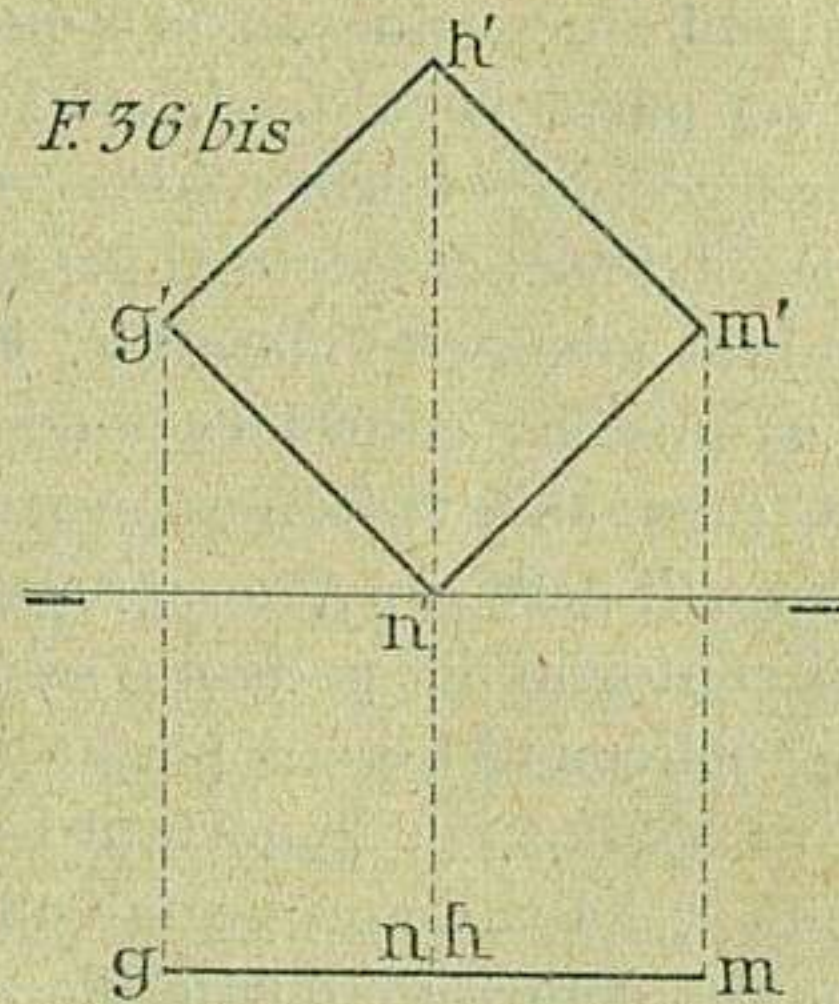
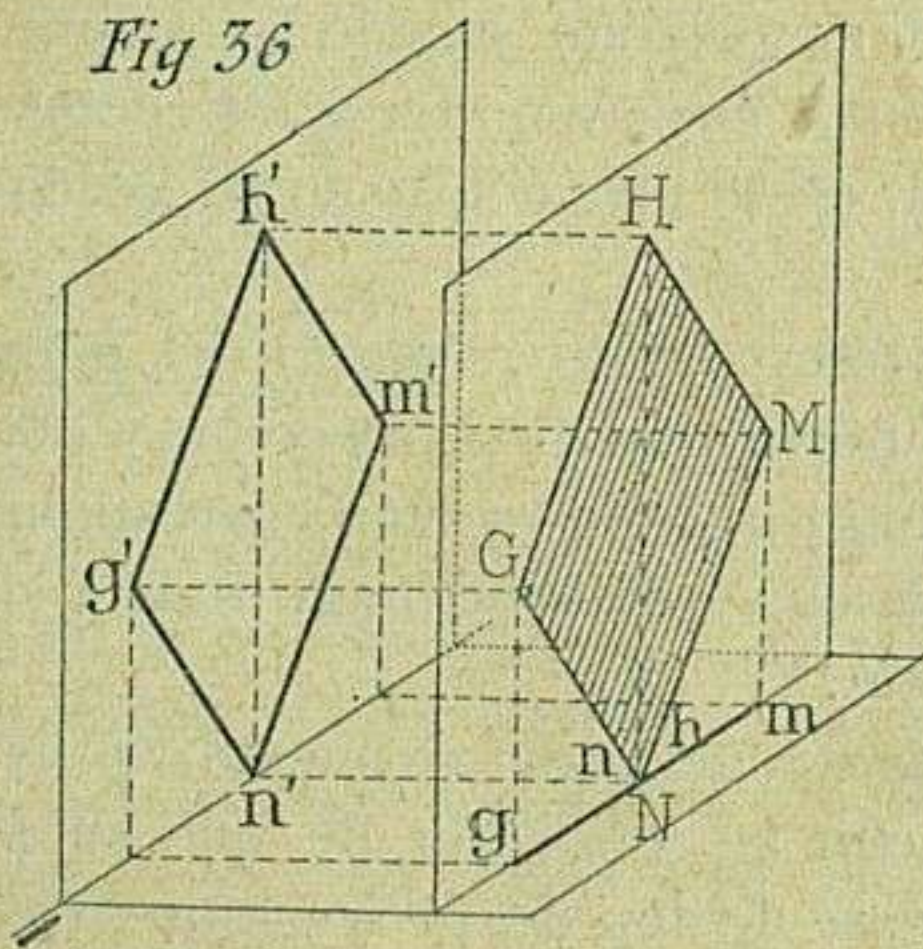
34. Vertical del plano.— Por análogas consideraciones la *vertical del plano* $cd - c'd'$ (figuras 34 y 34 bis) se distingue de la *horizontal* en que cd , proyección horizontal de dicha recta, es paralela á la línea de tierra, y la vertical $c'd'$ paralela á la traza q' del plano donde está contenida.

REPRESENTACIÓN DE FORMAS PLANAS LIMITADAS

35. Cuando las formas que han de representarse están definidas por contornos de líneas rectas ó curvas, al proyectarlas, pueden ocurrir tantos casos como posiciones pueda tomar el plano de ellas, con respecto á los de proyección; pero en la práctica estos casos se reducen á tres, según que el plano del polígono que ha de proyectarse sea paralelo á uno de los de proyección, oblicuo al uno y perpendicular al otro, ó bien sea perpendicular á los dos de proyección. Cuando ocupa esta última posición se dice que el polígono está contenido sobre un *plano de perfil* (V. **29**): ejemplos de cada caso.



36. Representación de un polígono cuyo plano es paralelo á uno de los de proyección (figs. 35 y 35 bis). — Sea el polígono un exágono regular A B C D E F. Por estar formado su contorno de líneas paralelas al

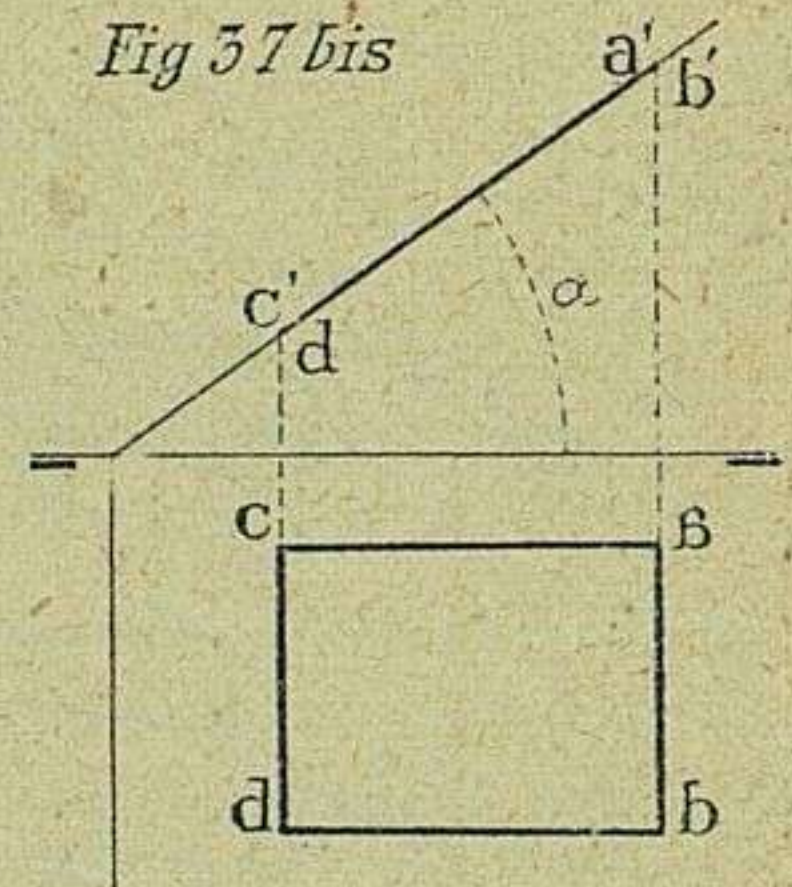
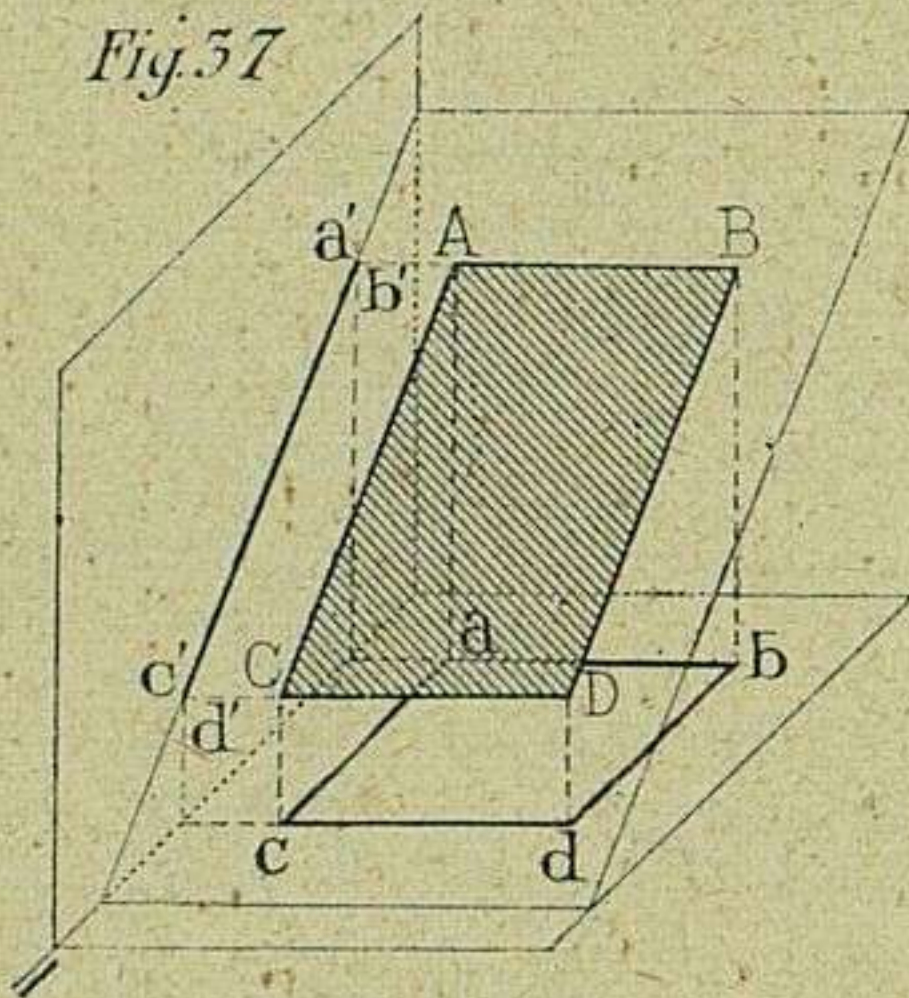


plano horizontal de proyección, al proyectarle sobre él, resultará otro polígono *abcdef*, de la misma forma y magnitud (V. **13**). La proyección vertical

estará representada por la recta $f' c'$, que contiene todas las proyecciones verticales de los vértices del polígono, á causa de ser el plano de éste perpendicular al vertical de proyección.

Si el polígono fuese paralelo al plano vertical de proyección (figs. 36 y 36 bis), entonces la proyección $g' h' m' n'$, obtenida sobre éste plano, será otro polígono igual al dado, y la horizontal quedará determinada en la recta $g m$. El caso expuesto en estas dos variaciones es el que con más frecuencia se presenta en la práctica.

37. Representación de un polígono cuyo plano sea oblicuo al horizontal de proyección y perpendicular al vertical (figs. 37 y 37 bis). —



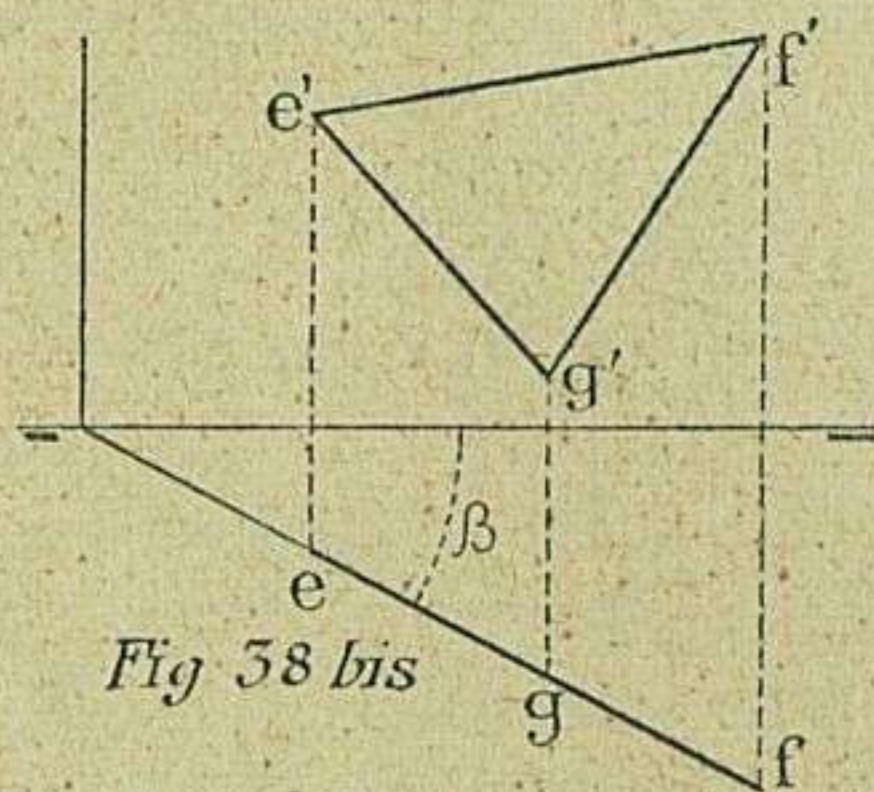
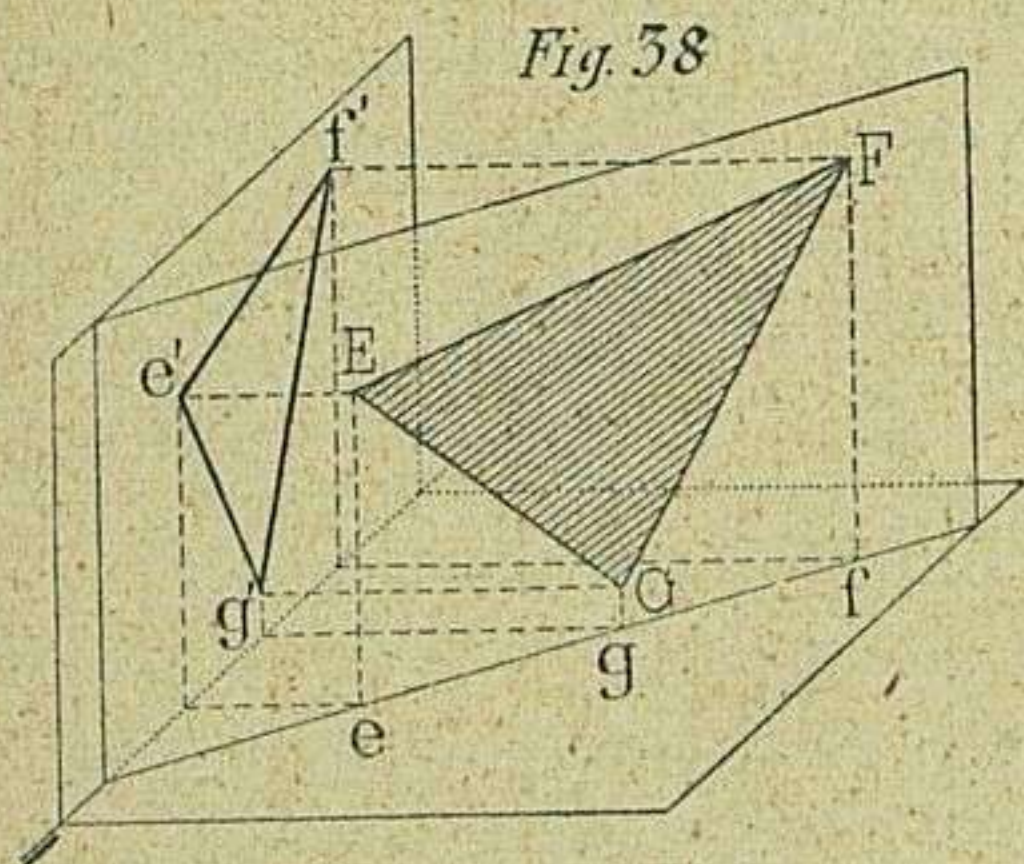
La condición de ser perpendicular el plano del polígono $A B C D$ al vertical de proyección, da por resultado sobre éste; al verificar su proyección, una sola recta, la $a' c'$. Sobre el plano horizontal las proyecciones $a b$ y $c d$, correspondientes á los dos lados $A B$ y $C D$ del polígono, se proyectan en su verdadera magnitud en consideración á que siendo perpendiculares al plano vertical, son á su vez paralelas al horizontal de proyección; pero no sucede lo mismo con las proyecciones horizontales $a c$ y $d b$, que por corresponder á las rectas $A C$ y $B D$, oblicuas respecto al plano horizontal, no se proyectan en su verdadera magnitud sobre este plano (V. 12).

Las mismas consideraciones deben hacerse cuando el plano del polígono $E F G$ (figs. 38 y 38 bis) es perpendicular al horizontal de proyección y oblicuo al vertical; pero conviene notar que aquí ninguna de las rectas correspondientes al contorno del polígono se proyecta en su verdadera magnitud, á causa de ser oblicuas á los dos planos de proyección.

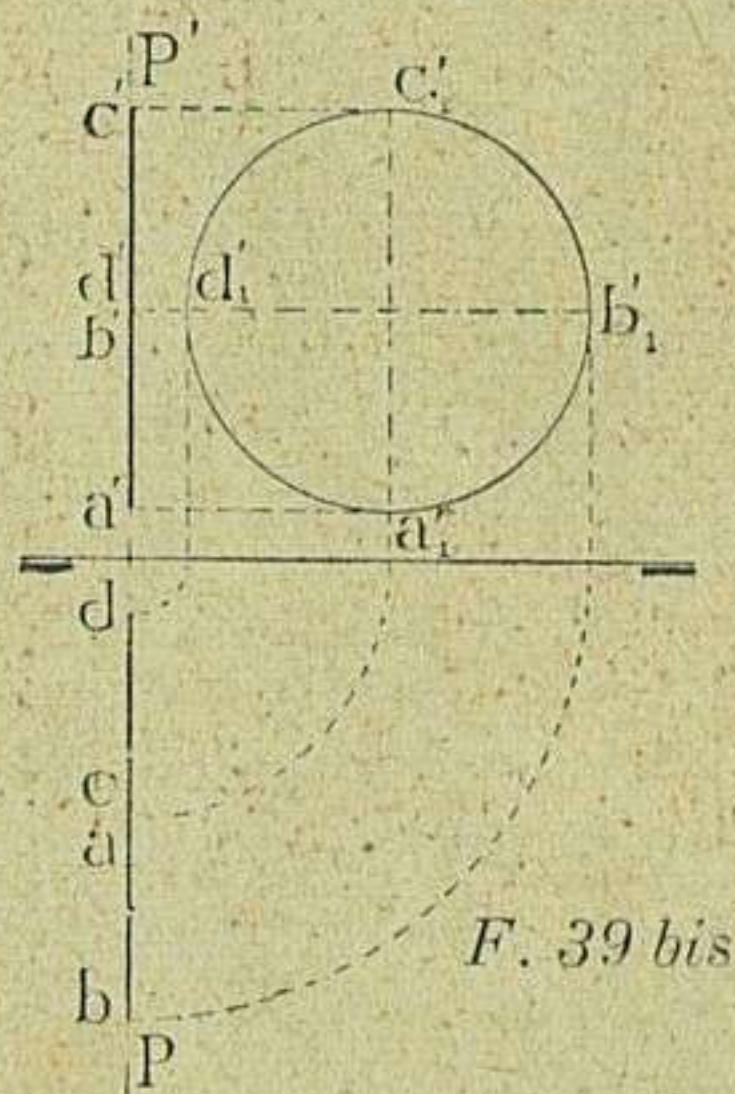
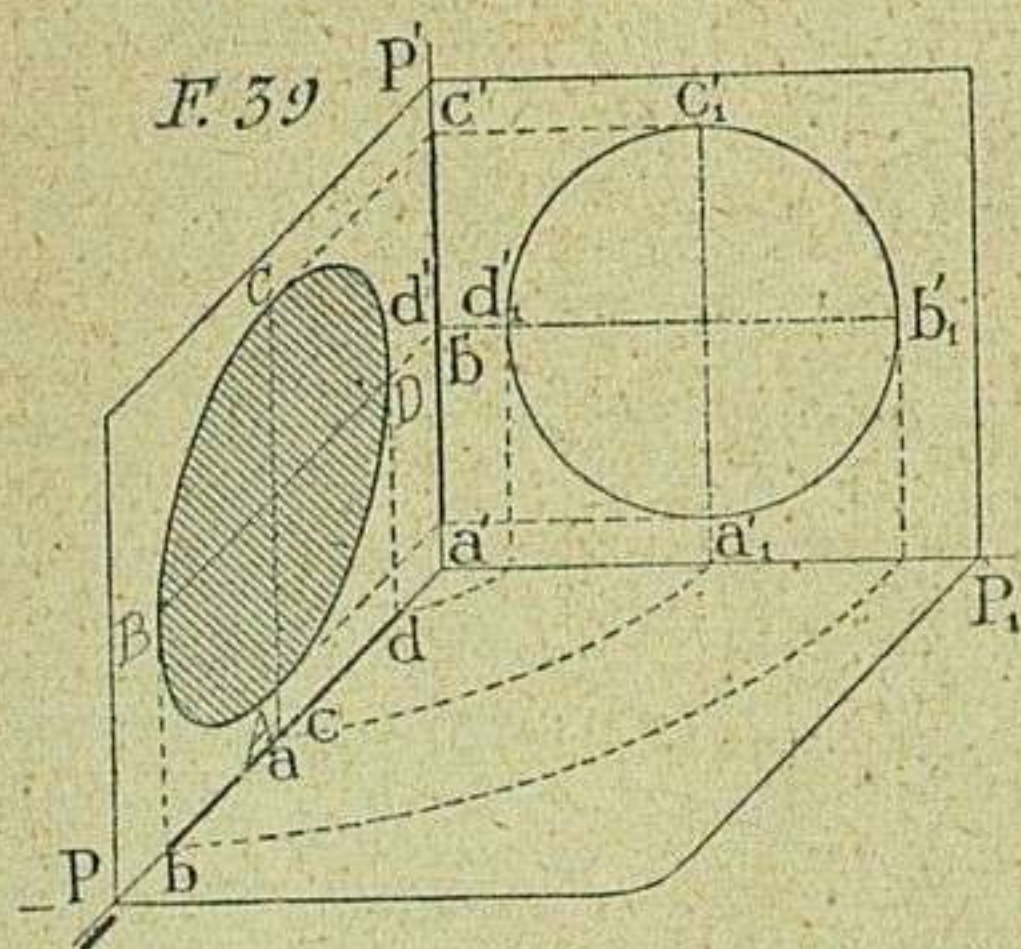
Una deducción importante se puede sacar del caso expuesto, y es que cuando se haya de proyectar un polígono, con la condición de que su plano forme un determinado ángulo con cualquiera de los de proyección, bastará construir dicho ángulo con la línea de tierra, y la traza no perpendicular á dicha línea.

Así el ángulo α (fig. 37 bis) comprendido entre la traza vertical $o P$ y la

línea de tierra, es el mismo formado por el cuadrilátero A B C D con el plano horizontal de proyección, como también el β (fig. 38 bis), es idéntico al que forman los planos vertical de proyección y del triángulo E F G.



38. Representación de un círculo cuyo plano es perpendicular á los dos de proyección. — Sea el círculo A B C D (figs. 39 y 39 bis). Es evidente que en la posición indicada las proyecciones vertical y horizontal del círculo corresponderán á dos rectas $b'd$ y $a'c'$ (fig. 39 bis), perpendiculares á la línea de tierra, que además representan las trazas del plano que contiene al círculo. Claro es que estas proyecciones son insuficientes para conocer la forma



de la figura propuesta y aun para proyectarla, sin echar mano de un tercer plano de proyección; el $P' a' P_1$ (fig. 39). Al efecto, suponiendo que sobre la traza $a' P'$ como charnela se hace girar el plano $P a' P'$ con el círculo que contiene, hasta que P venga á P_1 sobre el plano vertical de proyección se podrá obtener sin más sobre éste, la proyección de dicho círculo en su verdadera magnitud.

De tal suposición se deduce la manera de operar en este caso, que consiste en trazar sobre uno de los planos de proyección la forma propuesta $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ (fig. 39 bis), y desde cada uno de estos puntos tender paralelas á la línea de

tierra, que al encontrar á la traza P' , darán sobre dicha traza, la proyección vertical del círculo. La proyección horizontal $b a d c$ se obtendrá sobre la traza P , haciendo girar el plano del círculo con todos los puntos alrededor de la traza vertical $a' P'$ hasta colocarle en posición perpendicular á los planos de proyección. El camino recorrido por cada uno de los citados puntos está representado por un cuadrante de circunferencia, según puede apreciarse en las figuras correlativas (39 y 39 bis).

Esta proyección complementaria sobre un tercer plano de perfil ha sido ya mencionada en los números 27 y 29.

INTERSECCIONES DE PLANOS

39. Sabido es que la intersección de dos planos se verifica siempre según una línea recta; por tanto, la determinación de las dos proyecciones de dicha recta constituirá el problema planteado en los ejemplos siguientes:

Dados dos planos por sus respectivas trazas, hallar la común intersección (figs. 40 y 40 bis).—Sean $P-P'$ las trazas de un plano, y $Q-Q'$

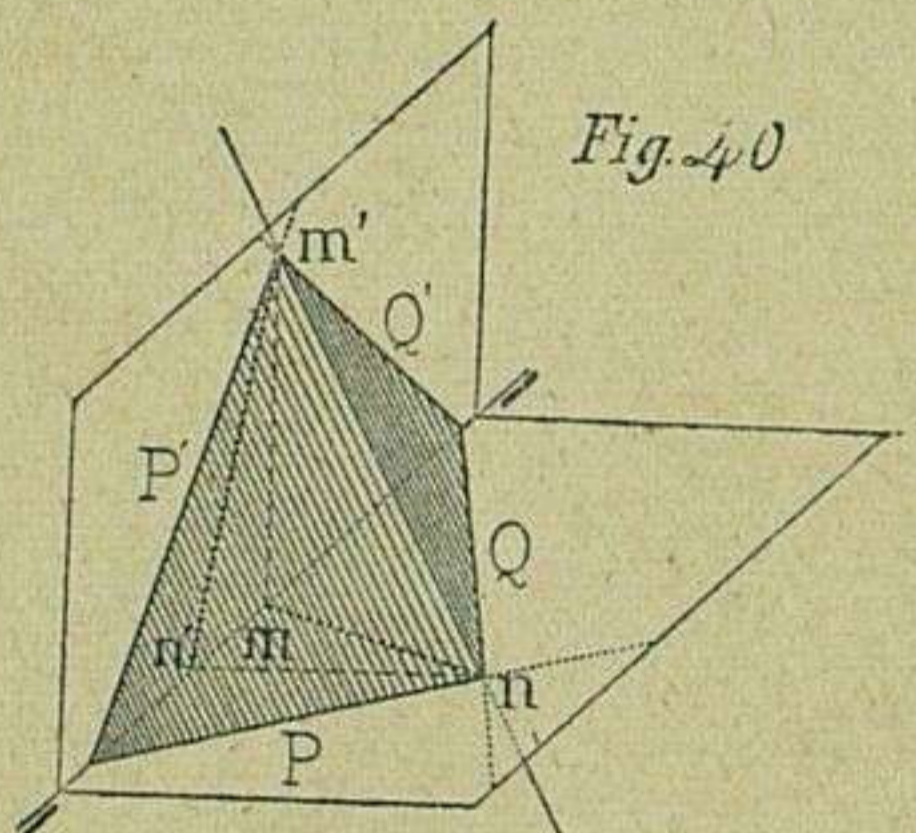


Fig. 40

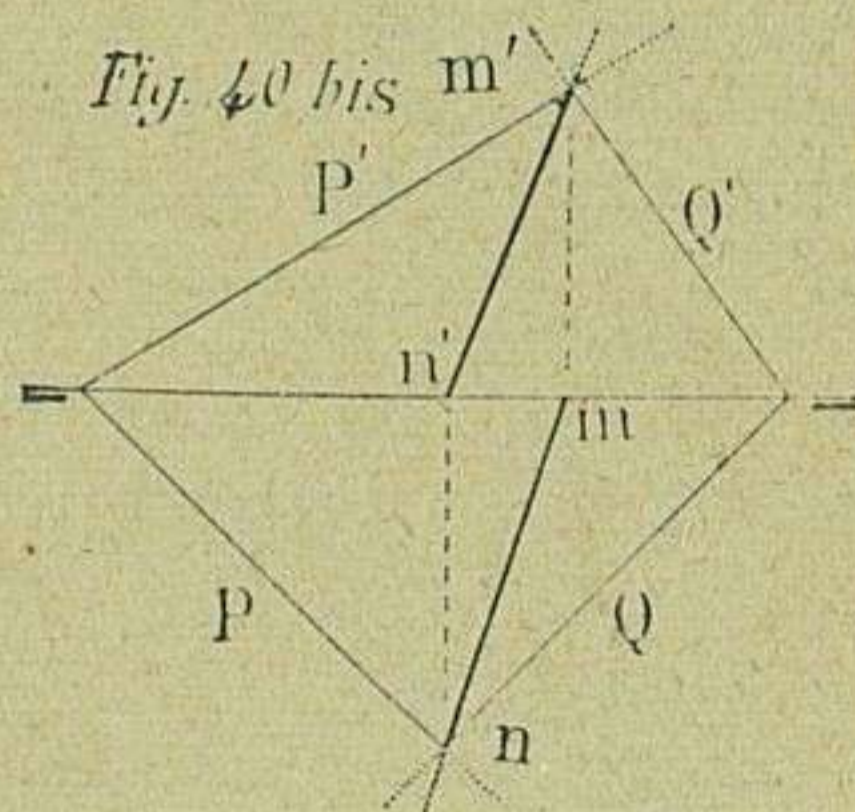


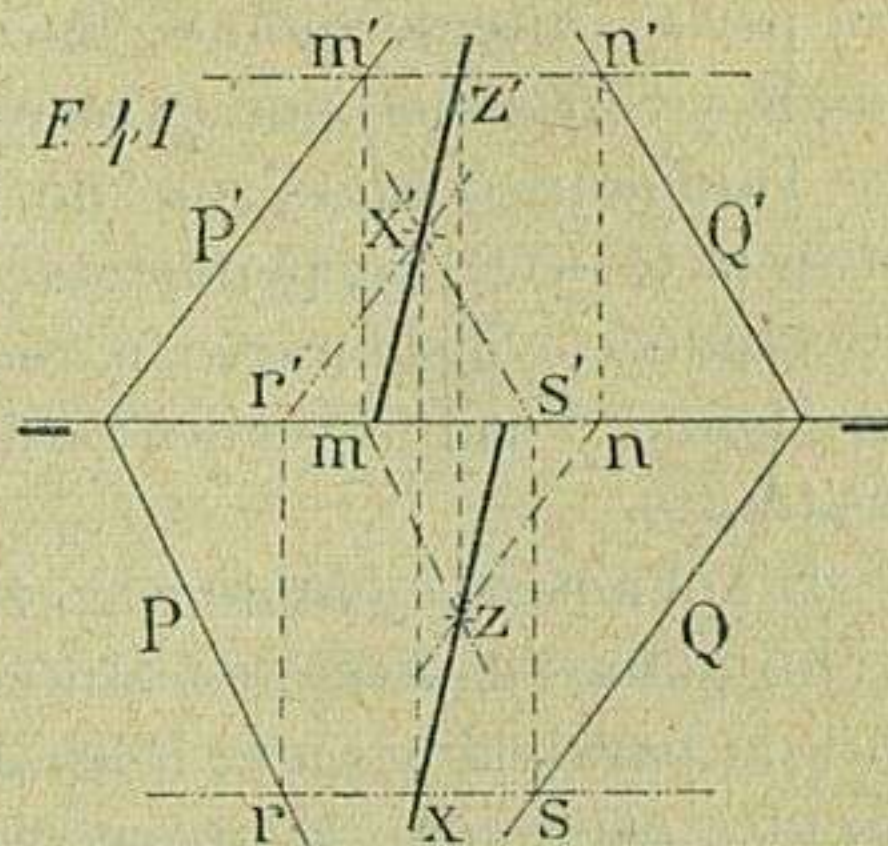
Fig. 40 bis

las del otro. El problema se reduce á determinar las proyecciones de dos puntos pertenecientes á la recta intersección de los planos $P-P'$ y $Q-Q'$. Es indudable que los puntos donde se cortan dichas trazas pertenecen á la intersección de los planos, y que estos puntos no pueden ser otros que el n y m' ; por consiguiente, determinando sobre la línea de tierra el m (V. 9) proyección horizontal de m' y el n' proyección vertical de n , será suficiente trazar por las proyecciones verticales $n'-m'$ una recta, que será la proyección vertical de la intersección, y por las $n-m$ otra recta, que representará la proyección horizontal de dicha intersección.

40. No siempre se encuentran las trazas del plano en las condiciones del caso expuesto; puede ocurrir que dichas trazas no se corten en los límites del dibujo, como sucede con las $P-P'$ y $Q-Q'$ (fig. 41), y entonces tener que recurrir, para salir del paso, á los buenos oficios de las *horizontales* ó *verticales del plano*, líneas que, por estar contenidas en el plano y dar la dirección de las trazas del mismo, son las indicadas como auxiliares para determinar puntos

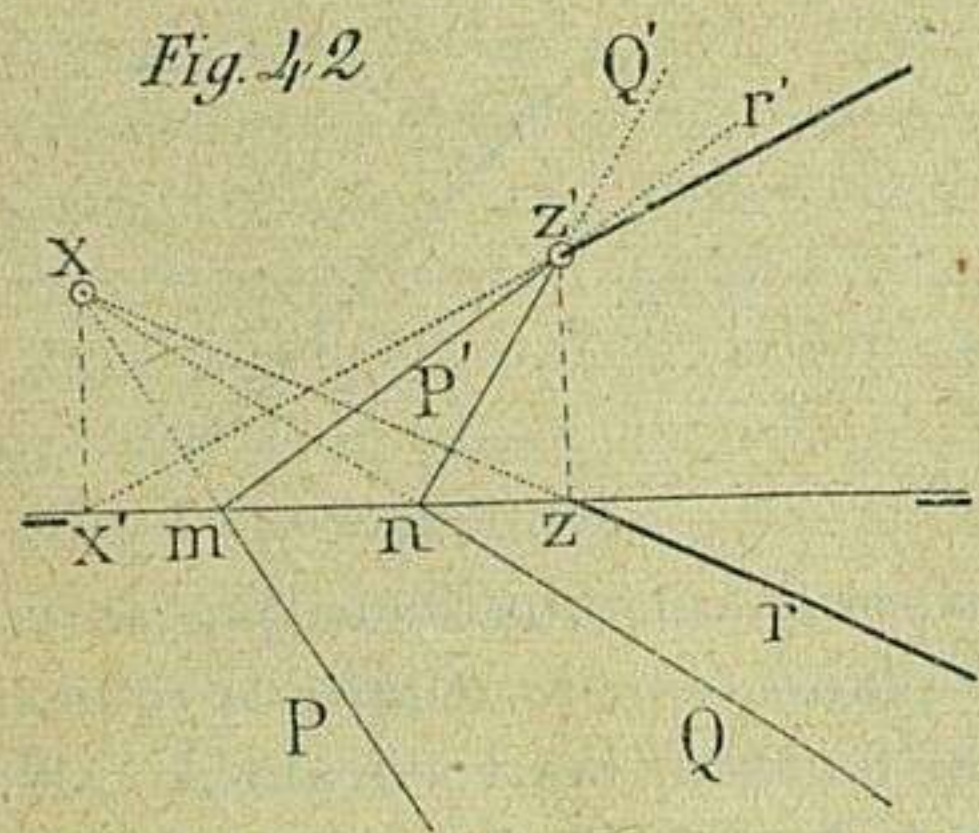
de intersección en ambos planos dentro de los límites del campo de operaciones; véase la manera de resolver el problema en el caso actual:

Trazada la *horizontal* $n' m'$, común á los dos planos, y determinadas las respectivas proyecciones horizontales $m s$ y $n s$ (que, como es sabido, han de ser paralelas á cada una de las trazas P y q , véase **33**), se cortarán en s , punto que pertenece á la proyección horizontal de la recta intersección de los dos planos. La proyección vertical s' se hallará sobre la horizontal $m' n'$, en el encuentro de ésta con la línea de correspondencia levantada desde s .



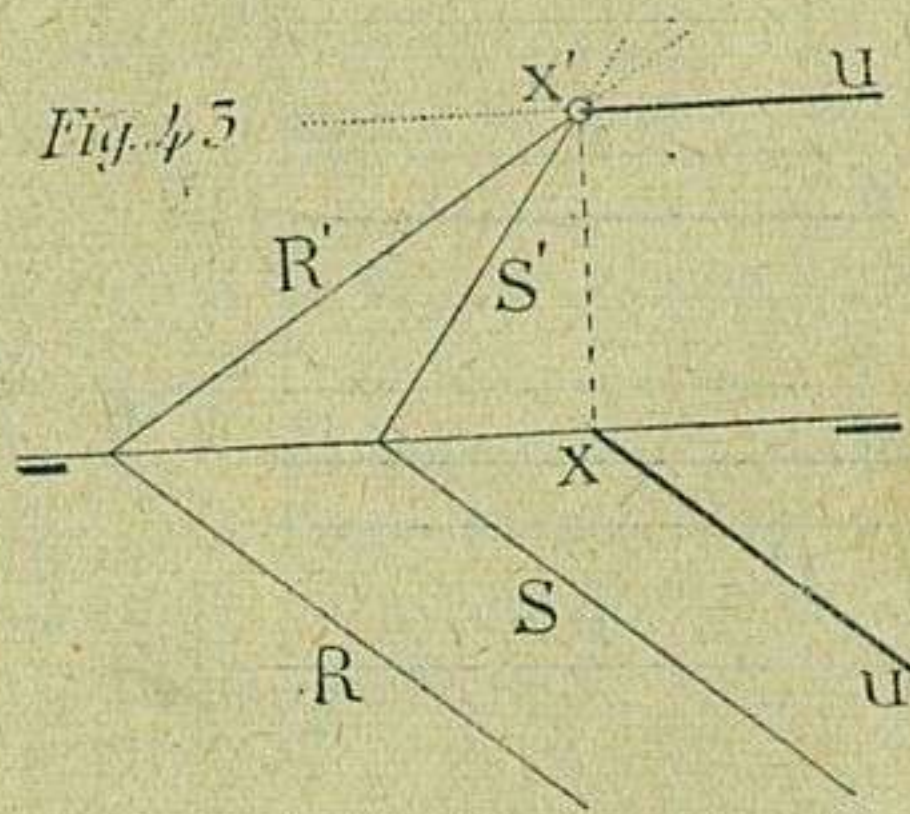
De manera análoga se obtendrán, mediante la *vertical* $r s$, común á los dos planos, las proyecciones x y x' , del otro punto, también perteneciente á la recta intersección propuesta; y ahora sólo faltará para la solución del problema trazar la recta $x s$, proyección horizontal, y la $x' s'$, proyección vertical de la intersección de los dos planos.

41. Puede también suceder que las trazas horizontales ó verticales vayan á cortarse fuera del primer ángulo formado por los planos de proyección; así ocurre en la figura 42. Siguiendo la marcha indicada en el núm. **39**, se determinará el punto x en la intersección de las trazas P y Q de los planos dados, cuya intersección se verifica sobre el plano horizontal de la región



posterior. Desde la proyección vertical x' de dicha intersección se dirige una recta á pasar por s' , punto de intersección de las trazas verticales, y se tendrá en $x' r'$ la proyección vertical de la recta intersección de los dos planos. La proyección horizontal $x r$ quedará determinada, sin más que enfilar dicha recta desde el punto x por el s .

42. Cuando las trazas horizontales ó verticales de los planos dados sean paralelas, las proyecciones de la recta intersección serán: la una paralela á las dos trazas paralelas y la otra paralela á la línea de tierra. Así sucede en la figura 43, en que la intersección $x u - x' u'$ de los planos

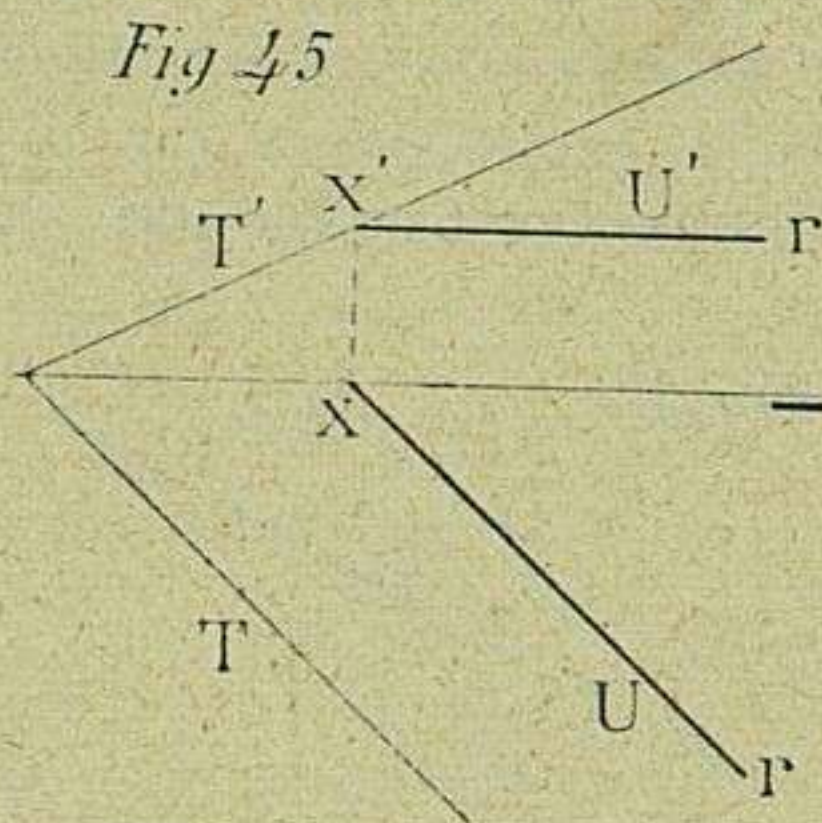
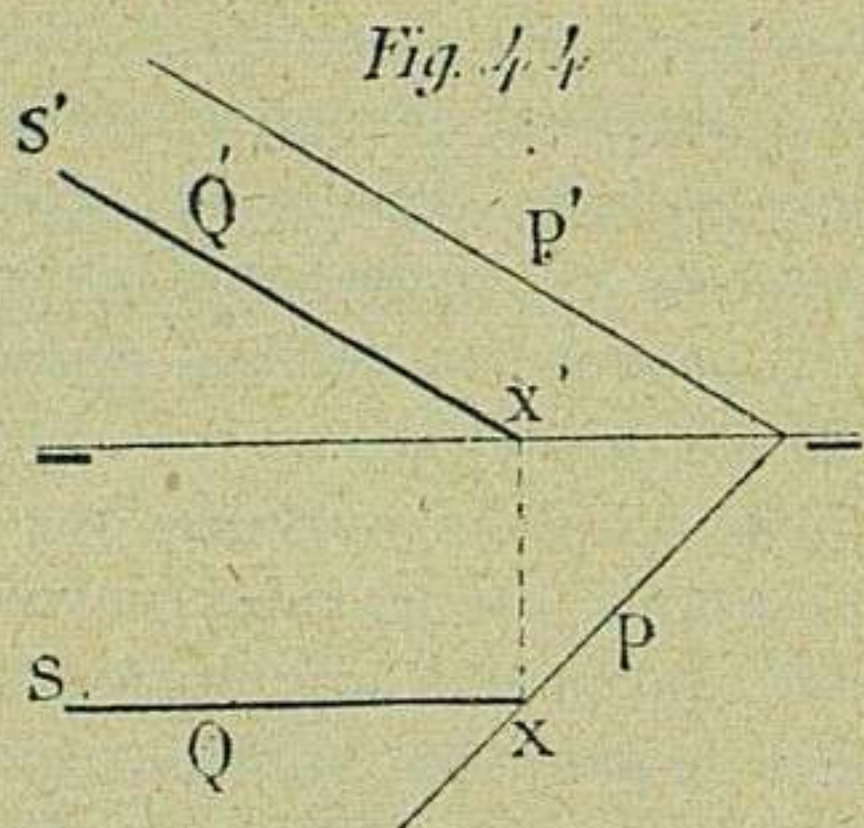


$R - R'$ y $S - S'$ puede considerarse como una horizontal común á ellos (V. **33**) y por tanto, conocida de antemano como es la dirección de cada

una de las proyecciones de dicha intersección, no habrá más que trazarlas con la condición de que pasen, la una, $x' u'$, en dirección paralela á la línea de tierra por x' , intersección de las trazas R' y S' , y la otra, $x u$, paralela á las trazas R y S pasando por x , proyección horizontal de x' .

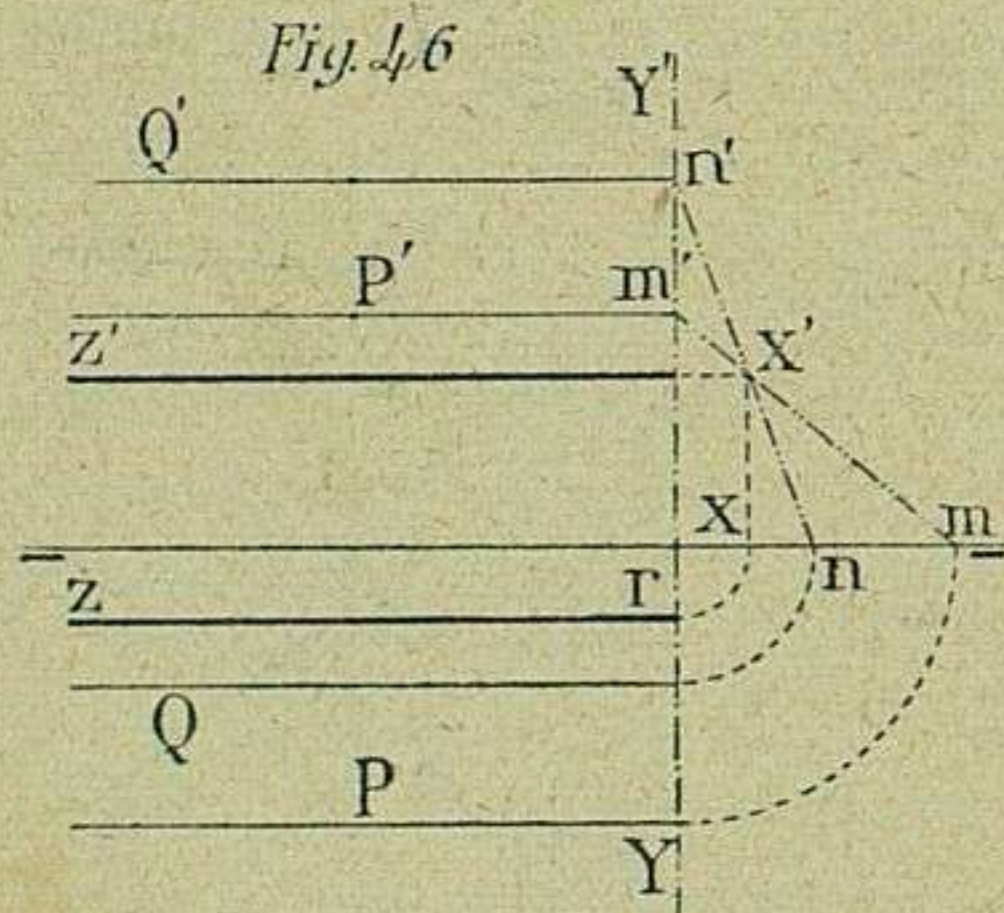
También, cuando uno de los planos (fig. 44), el $P - P'$, es oblicuo, y el otro, el $Q - Q'$, perpendicular á cualquiera de los de proyección y oblicuo al otro, puede considerarse la recta intersección $S x - S' x'$ identificada con la horizontal ó con la vertical del plano que pasa por el punto donde se cortan las trazas.

En el actual ejemplo (fig. 44) se verifica que las trazas horizontales P y q de los planos dados se cortan en x ; por consiguiente, desde este punto se trazará la paralela $x s$ á la línea de tierra, que coincidiendo con la traza Q dará, sin otra operación, la proyección horizontal de la intersección propuesta. La



proyección vertical $x' s'$ se obtiene haciendo pasar por x' una recta que, como es sabido, ha de ser paralela á la traza P' del plano oblicuo. Claro es, que si en lugar de cortarse las trazas horizontales lo hicieran las verticales U', T' , como se verifica en la figura 45, entonces la recta $U x - U' x'$, resultaría iden-

tificada con la horizontal del plano que pasa por $x - x'$, punto de intersección de dichas trazas.



43. En el caso de que los planos sean paralelos á la línea de tierra, su intersección también será paralela á dicha línea. Para determinarla (fig. 46), se tropieza desde luego con una dificultad, originada por el desconocimiento del punto de intersección de las trazas $P - P'$, $Q - Q'$, á causa de ser paralelas, pero esta dificultad queda orillada sin más que echar mano del consabido plano de perfil.

Sea, pues, $Y - Y'$ la traza del plano de perfil, el que, al girar hasta acoplarse con el plano vertical de proyección, pondrá de manifiesto en $m m'$ la traza del perfil correspondiente al plano $P - P'$, y en $n n'$ la del $Q - Q'$; pero

como estas trazas se cortan en x' , este será el punto por donde, una vez deshecho el giro, pasará la recta intersección de los dos planos representada por las proyecciones $s - s'$.

44. En estos variados casos de intersección de planos y otros que puedan presentarse, la manera de resolver el problema es idéntica en el fondo. *Consiste en determinar las proyecciones de una recta que pase por las intersecciones de las trazas de ambos planos, y en el caso en que las trazas horizontales ó verticales de los planos sean paralelos, la recta intersección correspondiente también será paralela.*

Si los planos cuya intersección se busca estuvieran definidos por cualquiera de los elementos á que se refieren los núms. **30, 31** y **32**, se podría llegar á la determinación de sus trazas por los medios que allí quedan indicados, y entonces el problema se reduciría á los términos últimamente expuestos.

INTERSECCIONES DE RECTAS CON PLANOS

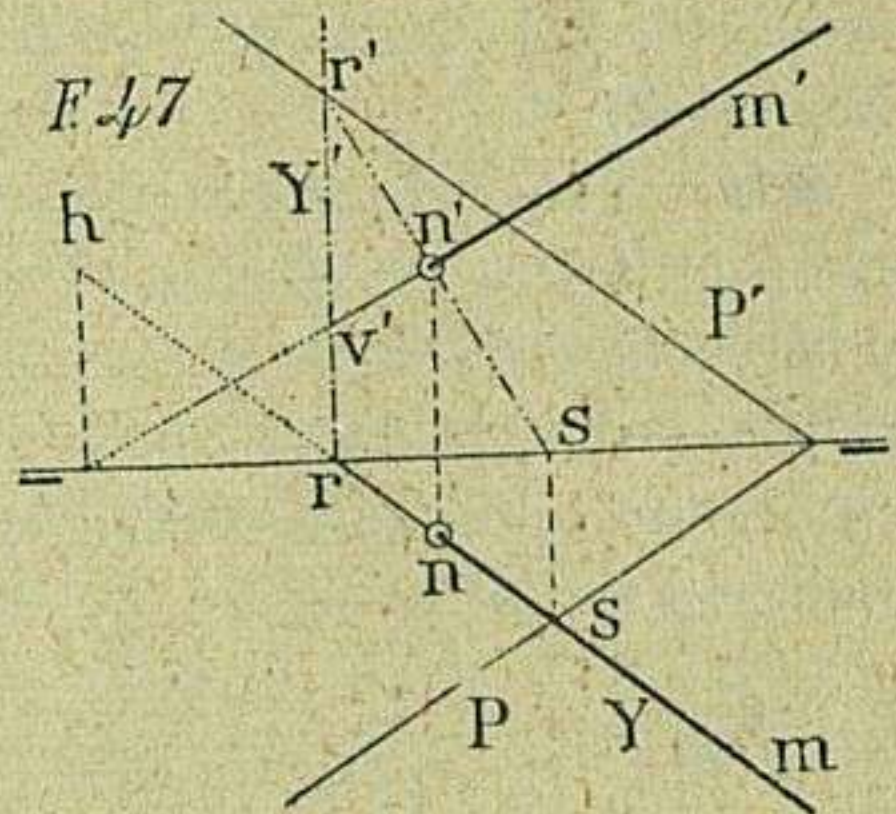
45. Planteado el problema en términos generales, esto es, cuando la recta $mh - m'v'$ y el plano $P - P'$ (fig. 47) han de encontrarse oblicuamente, la manera más propia de resolverlo será valerse de un plano auxiliar que, pasando por las trazas v y h , contenga á la recta propuesta. Para facilitar la operación se ha elegido el $Y - Y'$, plano proyectante vertical de la recta $mh - m'v'$ (1).

De este modo, al cortarse el plano $P - P'$ con el auxiliar $s - s'$, según la recta $rs - r's'$, también será cortada la recta $mh - m'v'$, precisamente en el punto $n - n'$, situado sobre dicha recta intersección, y entonces este punto común á la recta y al plano propuestos, dará la solución del problema.

De lo anterior se sigue que, *la intersección de una recta con un plano se encuentra en el punto donde la recta dada corta á la intersección producida entre el plano dado y otro auxiliar, que pasará por las trazas de dicha recta.*

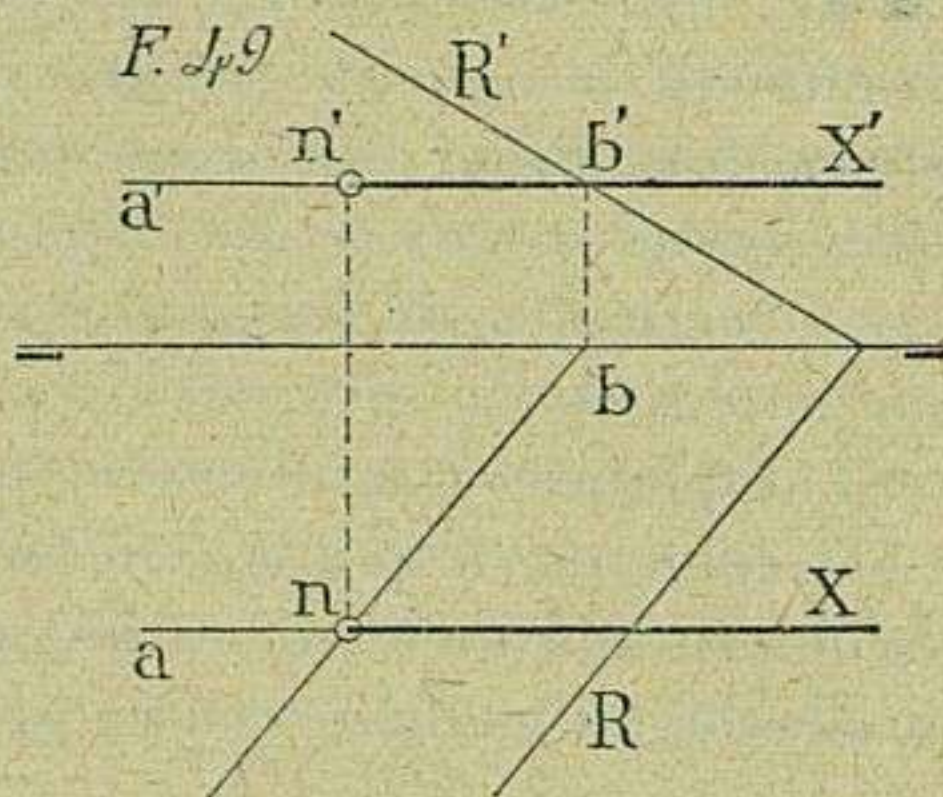
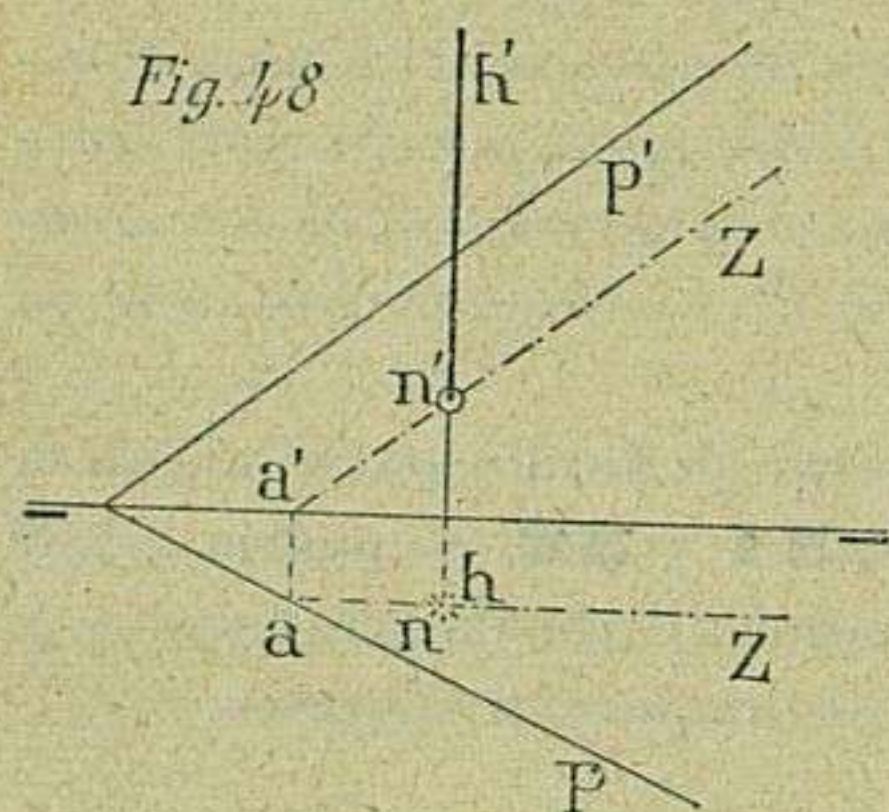
Véase como se aplica esta teoría en la resolución de algunos casos particulares.

46. Sea la intersección propuesta (fig. 48) entre el plano $P - P'$, oblicuo á los de proyección, y la recta $nh - n'h'$ perpendicular al plano horizontal. Procediendo conforme á la marcha indicada en el número anterior, y valiéndose del plano auxiliar $s - s'$, que pasando por h , única traza de la recta dada,



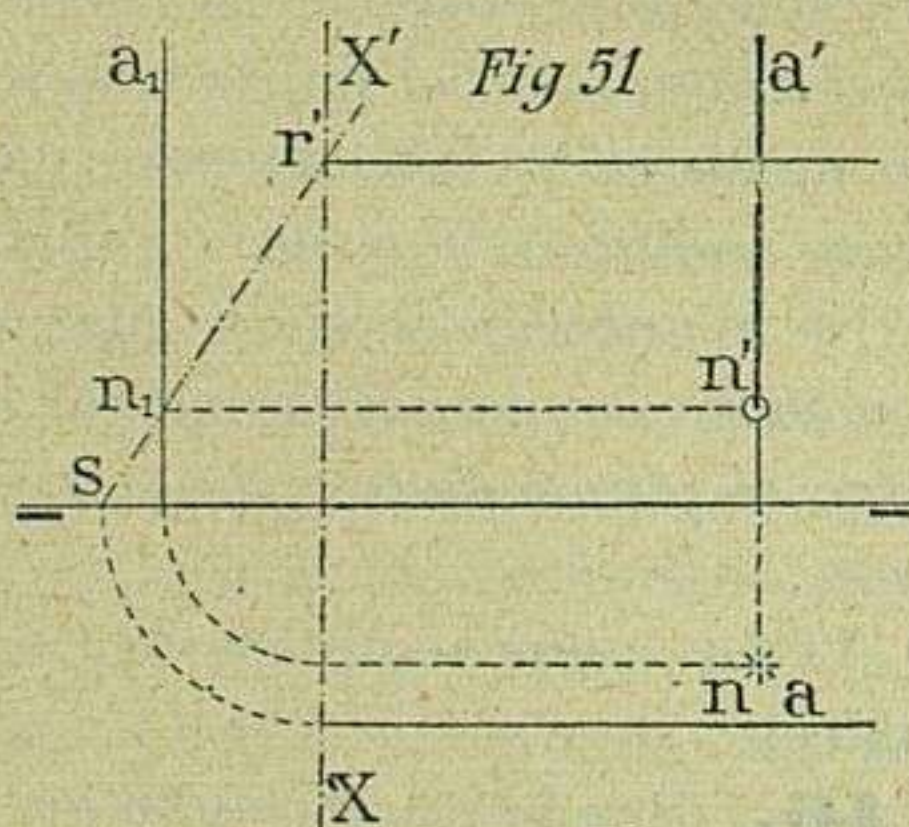
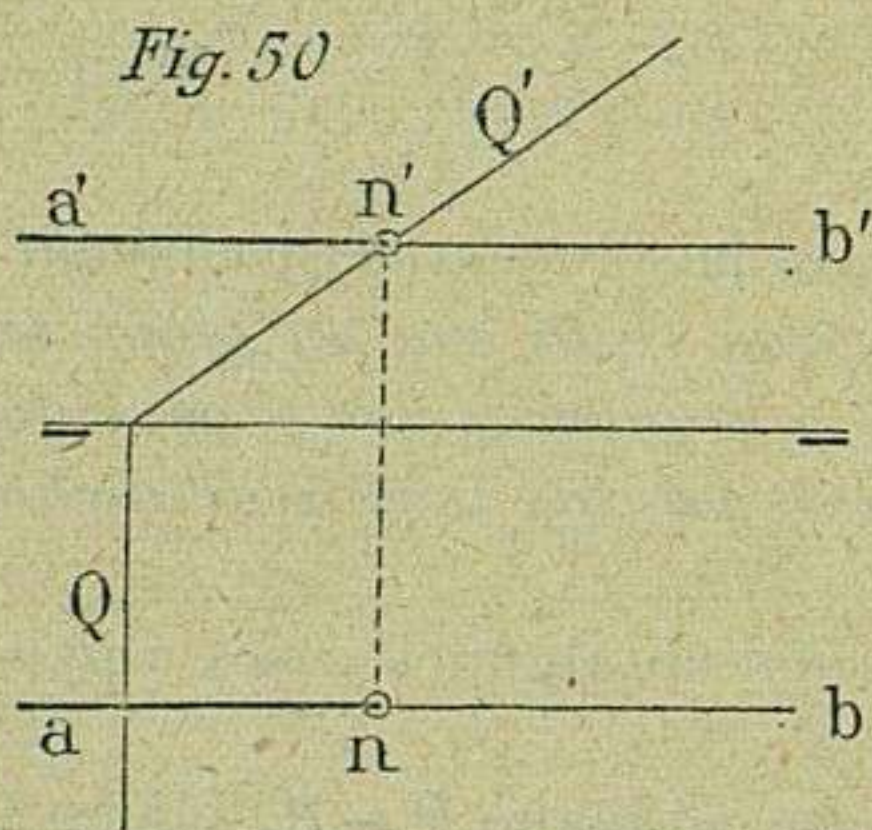
(1) De entre los infinitos planos que pueden pasar por la recta propuesta, se elige aquel que más convenga; pero siempre con la condición de que las trazas del plano pasen por las de la recta, pues de otra manera la recta no estará contenida en el plano.

es paralela al plano vertical de proyección, se hallará la intersección propuesta en el punto $n - n'$, situado sobre la $a s - a' s'$, intersección del plano $p - p'$ con el auxiliar $s - s'$, que contiene á la recta en cuestión.



47. Cuando el plano $R - R'$ (fig. 49) es oblicuo á los de proyección, y la recta que ha de encontrarle $a X - a X'$ es paralela á los mismos, se tomará como plano auxiliar el $X - X'$ que, conteniendo á la recta $a X - a X'$, es paralelo al horizontal de proyección; el punto que se busca se hallará situado en $n - n'$ sobre la recta $n' b - n b'$, intersección del plano $P - P'$ con el auxiliar $X - O'$ (2).

48. Con relativa facilidad se resuelve el problema cuando, según se indica en la figura 50, el plano $P - P'$ es perpendicular á uno de los de proyección y la recta $a b - a' b'$ es paralela á la línea de tierra. En este caso la intersección $n - n'$ de la recta con el plano, se obtiene directamente sin plano auxiliar en el punto donde se cortan el plano representado por la traza P' con la recta dada $a b - a' b'$.

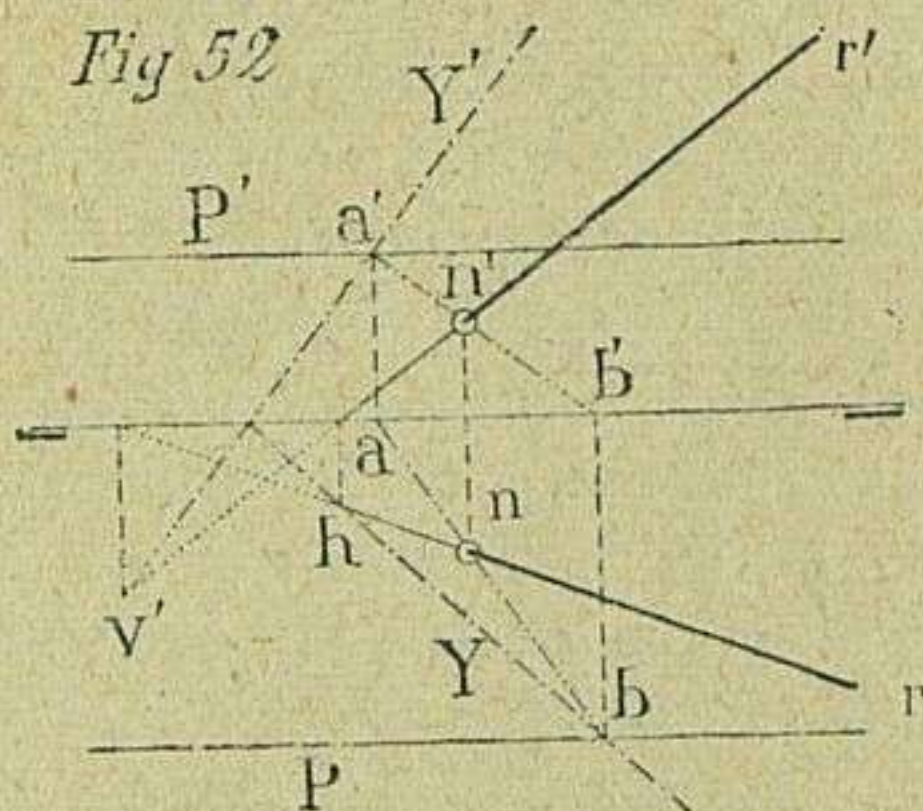


49. Si la intersección propuesta (fig. 51) hubiera de verificarse entre un plano paralelo á la línea de tierra y la recta $a n_1 - a' n_1'$ perpendicular á uno de los planos de proyección, al horizontal, por ejemplo, se determinará mediante el giro del plano de perfil $X - X'$ en la intersección n_1 de la traza $r' s$ con la

(2) Este caso de intersección de planos está previsto en el núm. 42 (fig. 45).

recta dada. Este punto n_1 , al deshacer el giro, se trasladará paralelamente al plano horizontal hasta encontrar á la recta $a n - a' n'$ en n' , punto de intersección que definitivamente resuelve el problema.

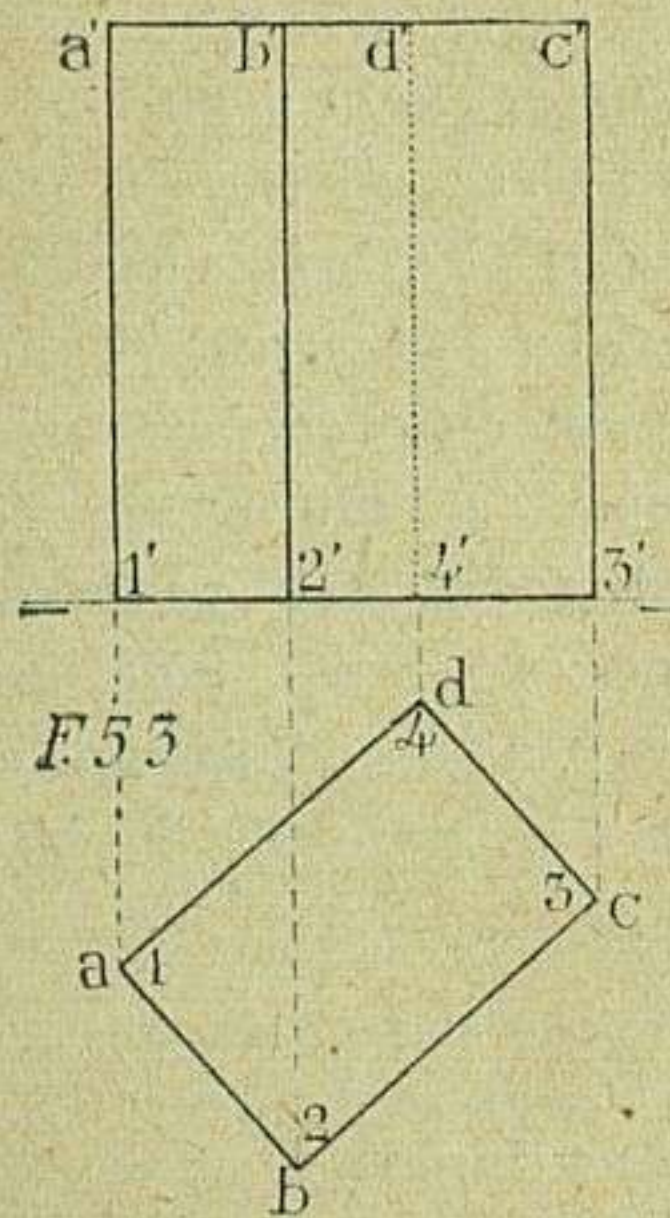
50. En el caso de que el plano $P - P'$ (fig. 52) fuese, como el anterior, paralelo á la línea de tierra, y la recta que con él ha de encontrarse $h r - v' r'$ oblicua á los de proyección, se tomará como plano auxiliar el $Y - Y'$ que pasa por v' y h , trazas de la recta dada, y hallada la intersección $a b - a' b'$, correspondiente á los planos $P - P'$ y $Y - Y'$ en ella se encontrará el punto $n - n'$, intersección del plano $P - P'$ con la recta $h r - v' r'$.



REPRESENTACIÓN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

La casi totalidad de formas correspondientes á utensilios, muebles, detalles arquitectónicos, órganos de máquinas y demás productos que á la actividad del hombre rinden el arte y la industria, se concretan ó asimilan á tipos geométricos definidos que se clasifican en dos grupos: *poliedros* y *cuerpos redondos*. Al primer grupo pertenecen el *prisma*, la *pirámide* y los poliedros regulares, cuyos principales tipos son: *tetraedro*, *cubo*, *octoedro*, *dodecaedro* é *icosaedro*. En el segundo figuran el *cilindro*, *cono* y *esfera*.

Por tanto, estas formas de relativa simplicidad, en las que se cifran la mayor parte de las demás, serán el tema preferente de ejercicios que en calidad de ejemplos figuran á continuación.



51. Representación del prisma recto (1).— El prisma proyectado en la figura 53 tiene por bases dos paralelogramos rectángulos iguales, $a b c d - a' b' c' d'$ y el $1 2 3 4 - 1' 2' 3' 4'$. Tanto este plano como el otro, por ser paralelos al horizontal de proyección, aparecen sobre él en su verdadera magnitud (V. **36**). Las aristas $a' 1'$, $b' 2'$, $c' 3'$ y $d' 4'$ se proyectan sobre el plano vertical en su verdadera magnitud, por la circunstancia de ser paralelas á este plano (V. **15**). Á la condición de ser el prisma recto se debe el que la base superior $a b c d$, coincida con la inferior $1 2 3 4$ sobre el plano horizontal.

(1) La calificación de recto supone que las aristas laterales son perpendiculares á las bases.

52. Para que la representación del prisma ó la de cualquiera otro cuerpo tenga la apariencia de verdad que su posición exige, se necesita distinguir de algún modo, en cada una de las dos proyecciones, las aristas que se notan á simple vista de las que se ocultan á causa de estar situadas en la parte opuesta á aquella desde que se mira dicho prisma. Así, pues, suponiendo que la vista se dirige sobre la proyección horizontal en dirección perpendicular, de arriba hacia abajo, únicamente se verán las aristas de la base superior $a b c d$, que por este motivo se representarán con líneas vistas. En cuanto á las demás aristas, las de la base inferior $1 2 3 4$, se confunden con las de la superior, y las que corresponden á las caras laterales, por ser perpendiculares al plano horizontal, coinciden sus proyecciones horizontales con los respectivos vértices de los poligonos de las bases. En resumen, de esta proyección horizontal sólo se ve el polígono $a b c d$, cuyos lados forman la silueta del prisma, que recibe el nombre de *contorno aparente* (1).

Haciendo análogas consideraciones respecto á la proyección vertical y dirigiendo la mirada perpendicularmente á dicho plano se verá desde luego el *contorno aparente* $a' c' 3' 1'$ y además la arista $b' 2'$, que aparece en primer término, por lo que, tanto el uno como la otra se representarán con línea vista.

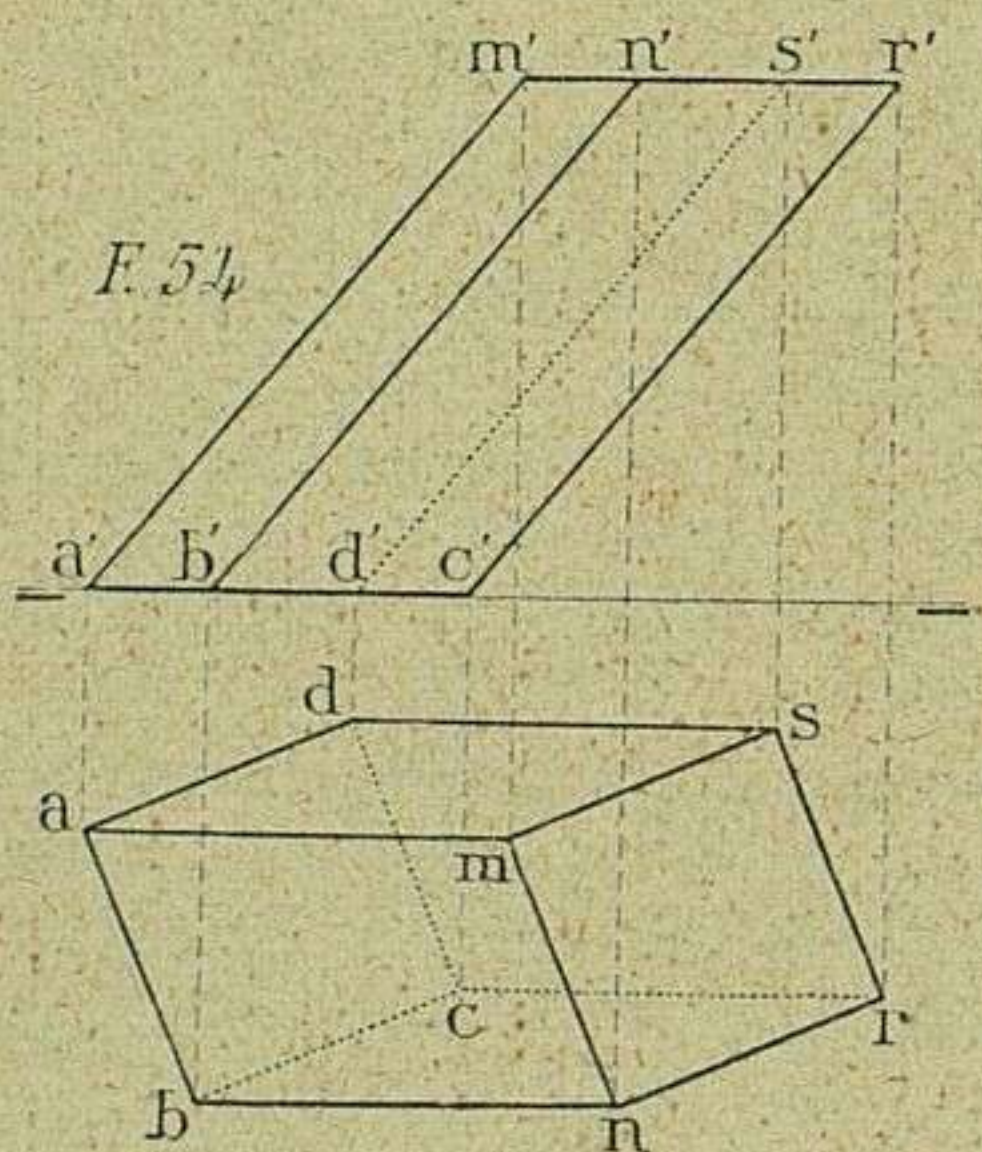
No así la arista $d' 4'$, que por estar situada en la parte posterior del prisma es oculta, y se representa por una línea de puntos.

De lo expuesto se deduce la siguiente regla general:

Se representará con líneas vistas el contorno aparente de la forma proyectada, más las aristas situadas en la parte superior, si se trata de proyección horizontal, ó en la anterior, si es vertical; y con líneas ocultas se representarán las demás aristas situadas en la parte opuesta á las vistas, teniendo presente que el contorno aparente es siempre el limite que separa las aristas vistas de las ocultas.

53. Representación del prisma oblicuo (2). — El prisma proyectado en

la figura 54 tiene la base inferior $a b c d - a' b' c' d'$ sobre el plano horizontal, y la $m n r s - m' n' r' s'$ paralela á dicho plano, razón por la cual estas dos ba-



(1) El llamado *contorno aparente* viene á ser el polígono formado sobre cada uno de los planos de proyección por las trazas correspondientes á los planos proyectantes que envuelven é integran la forma proyectada. Claro es que cuando se trata de cuerpos formados por superficies curvas, el contorno aparente lo compondrán líneas curvas ó mixtas, y los planos serán en este caso substituidos por superficies cilíndricas también proyectantes.

(2) Se dice oblicuo este prisma porque las aristas que limitan las caras laterales son oblicuas á las bases $a b c d - a' b' c' d'$ y $m n r s - m' n' r' s'$.

ses se proyectarán en su verdadera magnitud y forma, sobre el plano horizontal de proyección.

Las aristas $a m - a' m'$, $b n - b' n'$, $c r - c' r'$ que limitan las caras laterales del prisma, además de ser paralelas entre sí, son también paralelas al plano vertical, de donde resulta que, la longitud de estas aristas y la abertura del ángulo que forman con el plano horizontal de proyección, están representadas en su verdadera magnitud sobre el citado plano vertical (V. **13**).

Teniendo en cuenta la regla formulada en el núm. **52**, se han representado con línea vista; el contorno aparente (proyección horizontal) $a b n r s d a$, y las tres aristas que se reúnen en m , punto situado en la parte superior del prisma; y en cuanto á la proyección vertical, el contorno aparente $a' c' r' m' a'$, mas $b' n'$ arista, situada en la parte anterior del citado cuerpo.

Con líneas ocultas se ha representado las tres aristas que en proyección horizontal se reúnen en c , punto opuesto al m , y la proyección $d' s'$ de la única arista que sobre el plano vertical aparece oculta por estar situada en la parte posterior del prisma.

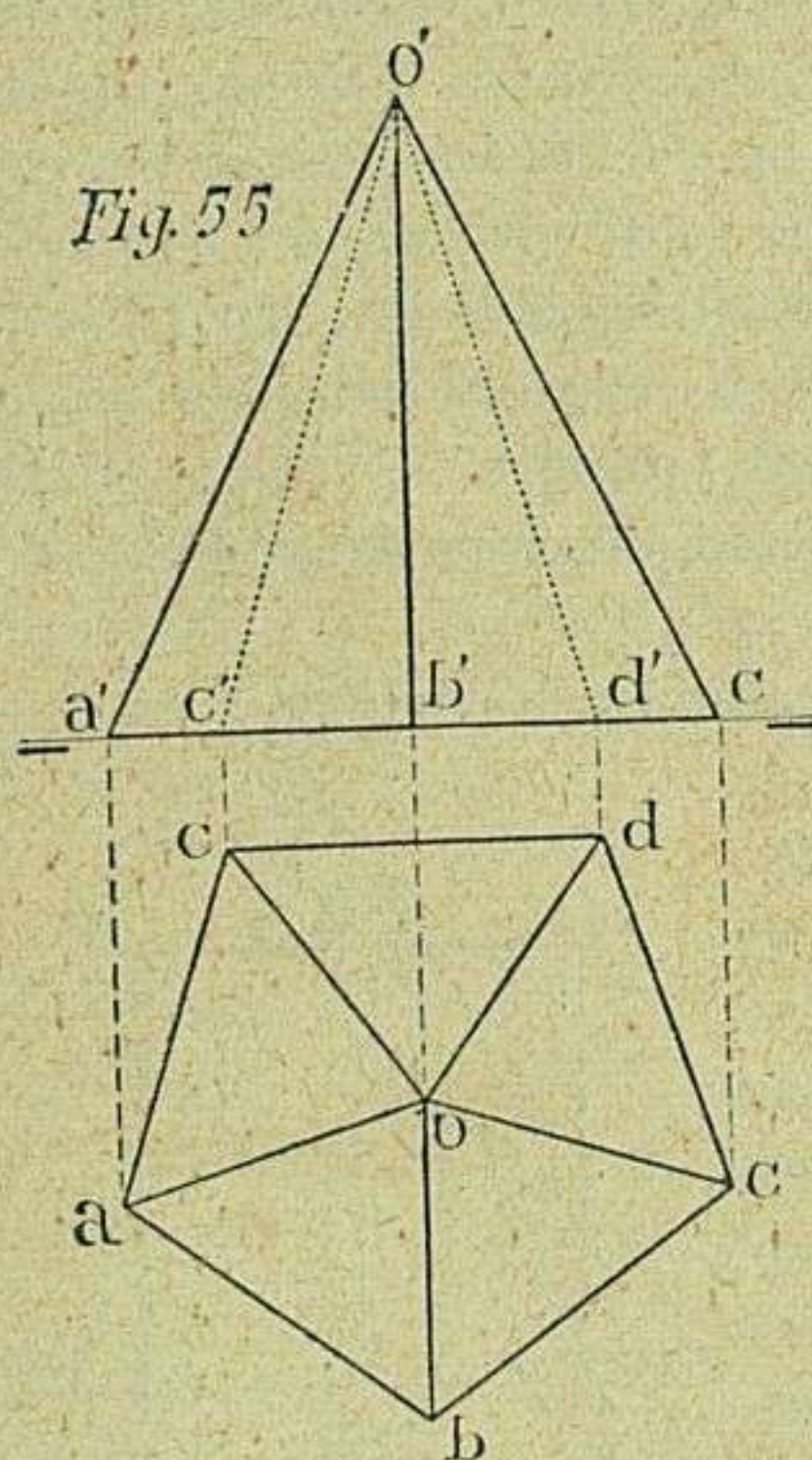


Fig. 55

54. Representación de la pirámide recta (1). — La pirámide que se representa en la figura 55 tiene por base el pentágono regular $a b c d e - a' b' c' d' e'$, situado en el plano horizontal, sobre el que, como es consiguiente, se proyecta en su verdadera magnitud y forma. Las aristas de las caras laterales que, partiendo de los vértices del pentágono de la base, se reúnen en la cúspide $o - o'$ de la pirámide, son todas iguales y oblicuas á los dos planos de proyección. Esta oblicuidad de las aristas, según se indicó en el núm. **12**, impide conocer directamente la verdadera magnitud de cualquiera de ellas (2).

Por la configuración propia de la pirámide recta y por la posición que en este caso ocupa respecto á los planos de proyección, todas las aristas proyectadas sobre el horizontal se representan con líneas vistas, además del contorno aparente $a' c' o'$ y de la arista $b' r'$, que se halla situada en la parte anterior de la pirámide representada en la proyección vertical.

(1) Es recta la adjunta pirámide, porque su altura $o' b'$ viene á caer en el centro o del polígono de la base.

(2) Hay un medio para conocer la longitud de una cualquiera de dichas aristas, puesto que todos son iguales. Considerando, por ejemplo, que la $b' o'$, altura de la pirámide, y la proyección horizontal $a o$ de una de sus aristas son catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa $a' o'$ es desconocida, todo quedará reducido á resolver el problema del triángulo rectángulo, en el que figuran como datos conocidos las longitudes de los dos catetos. (V. el núm. **31** de la primera parte de este Tratado.)

Con líneas ocultas sólo se representan las proyecciones verticales de las aristas $e' o'$ y $d' o'$, situadas en la parte opuesta á la que ocupa la $b' o'$.

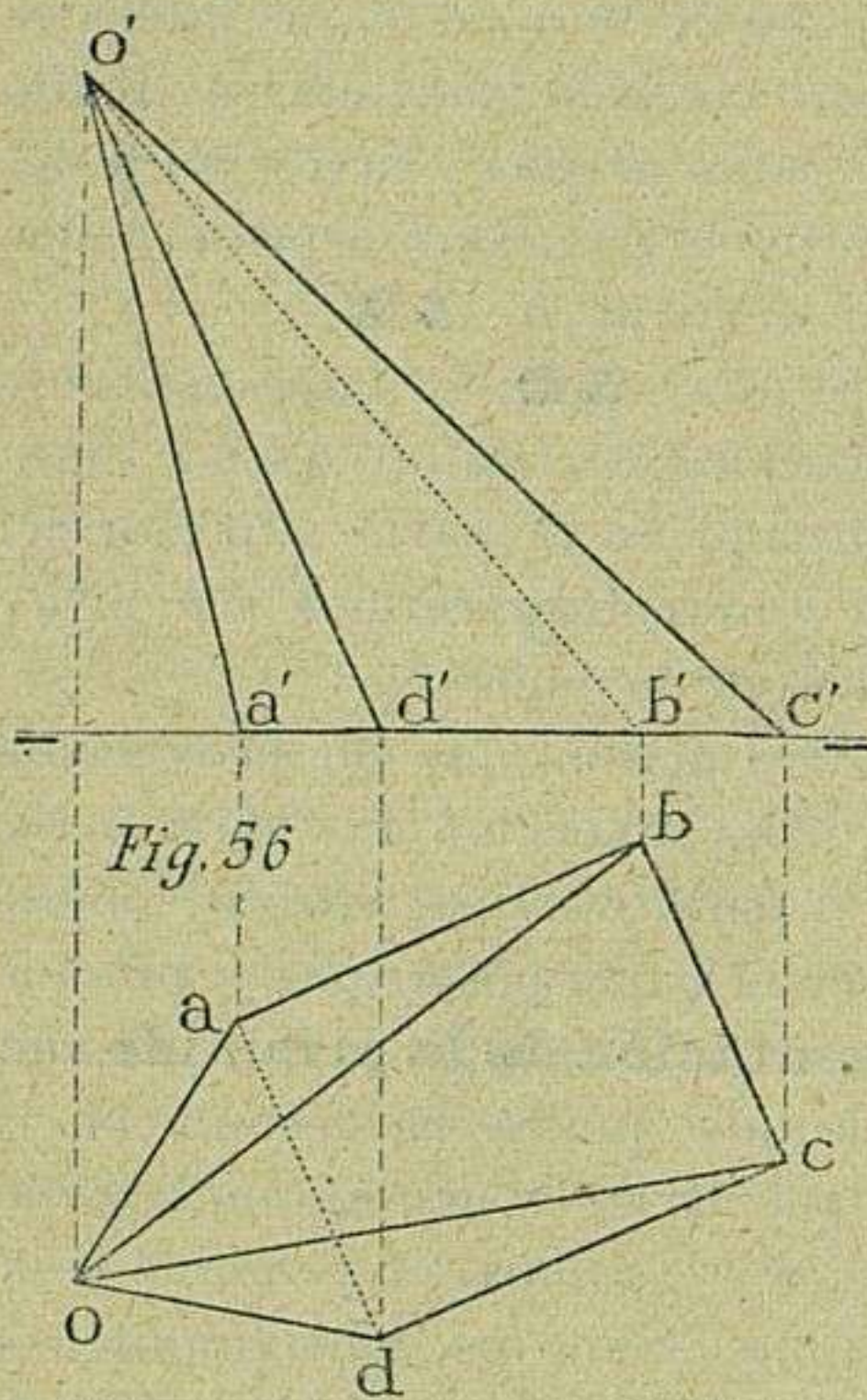


Fig. 56

55. Representación de la pirámide oblicua (1).—La pirámide proyectada, según la figura 56, sólo presenta en su verdadera forma y dimensiones la proyección horizontal $a b c d$, correspondiente al polígono de su base. Las demás aristas concurrentes en la cúspide $o - o'$ son oblicuas á los planos de proyección, por cuyo motivo no se proyectan en su verdadera longitud.

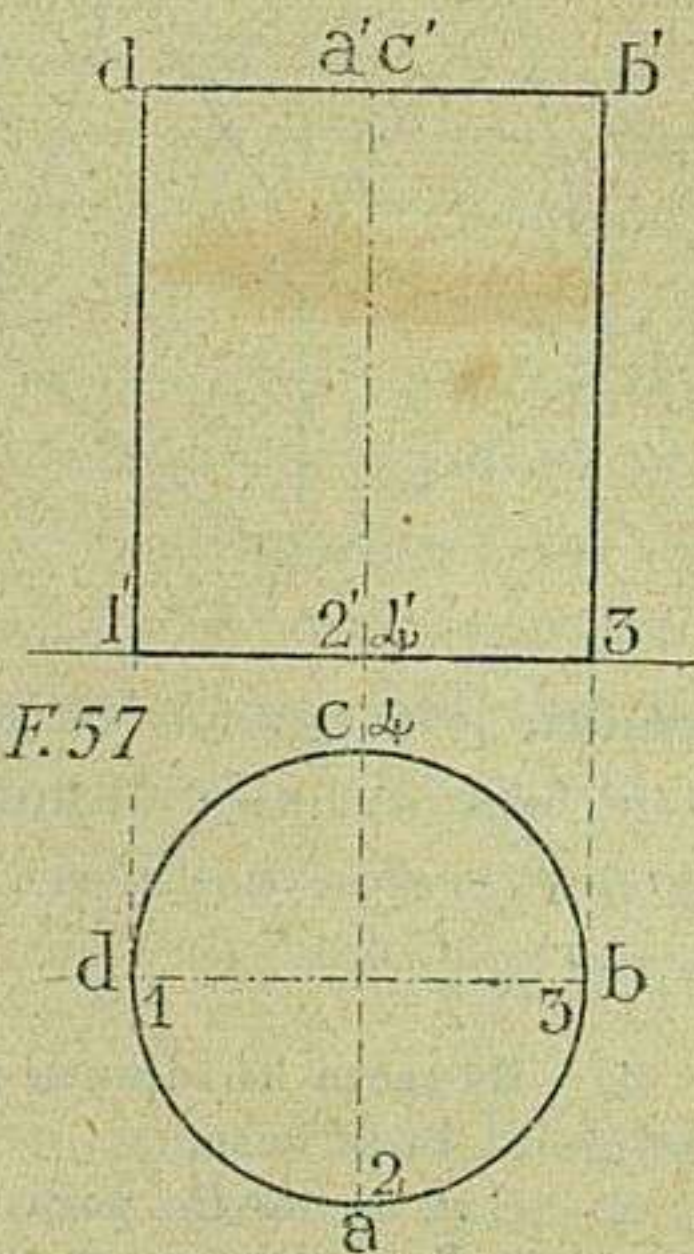
En la proyección horizontal, las aristas del contorno aparente $a b c d o$, juntamente con las $d o$, $e o$, situadas en la parte superior de la pirámide, se representan con líneas vistas, excepto la $a b$, única que se representa oculta, por estar situada en la parte inferior del contorno aparente. En la proyección vertical se representan con línea vista el contorno aparente $a' c' o' a'$ y la arista $d' o'$, situada en la parte anterior de la pirámide.

La arista $b' o'$ se representa oculta por estar situada en la parte posterior de la pirámide.

56. Representación del cilindro recto (2).

— El cilindro proyectado, según la figura 57, tiene sus generatrices $a 2 - a' 2'$, $b 3 - b' 3'$, etc, perpendiculares á las dos bases $a b c d - a' b' c' d'$, y $1 2 3 4 - 1' 2' 3' 4'$ que, á su vez, son paralelas al plano horizontal, razón por la que este cilindro es recto.

Por ser paralelas al plano vertical todas las aris-



F. 57

(1) Esta pirámide es oblicua porque su altura se proyecta fuera del centro del polígono de la base.

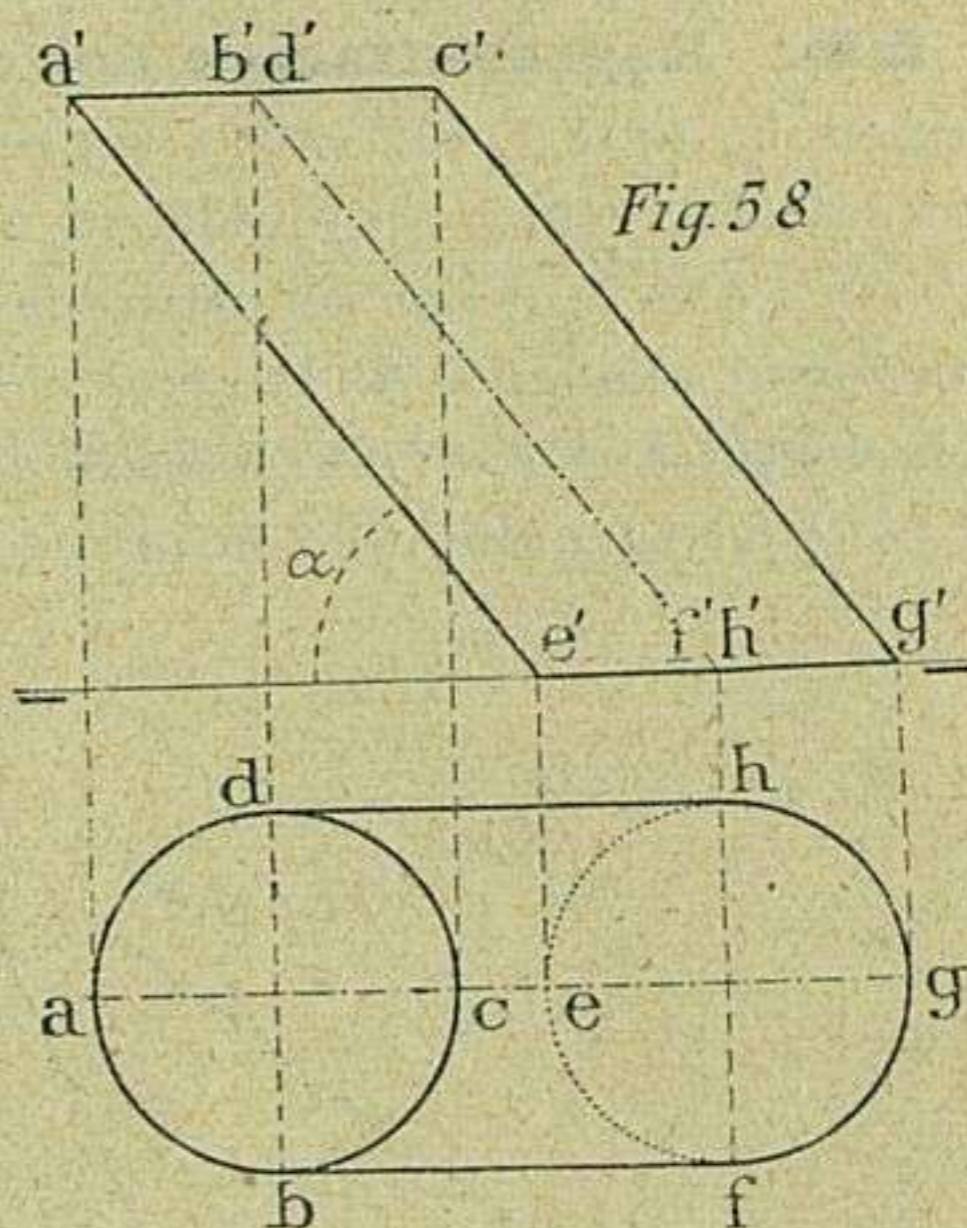
(2) En general, un cilindro se compone de dos bases paralelas, limitadas respectivamente por curvas iguales, y además de una superficie curva que se engendra por el movimiento de una recta llamada *generatriz*, al recorrer todos los puntos que forman los contornos de las bases, conservando durante este recorrido la posición inicial, que puede ser oblicua ó perpendicular á dichas bases.

Cuando las generatrices son oblicuas á las bases (fig. 58), el cilindro se llama oblicuo, y se denomina recto si las generatrices son perpendiculares á las bases. Cilindro de revolución es el que, además de recto, tiene por base un círculo (fig. 57).

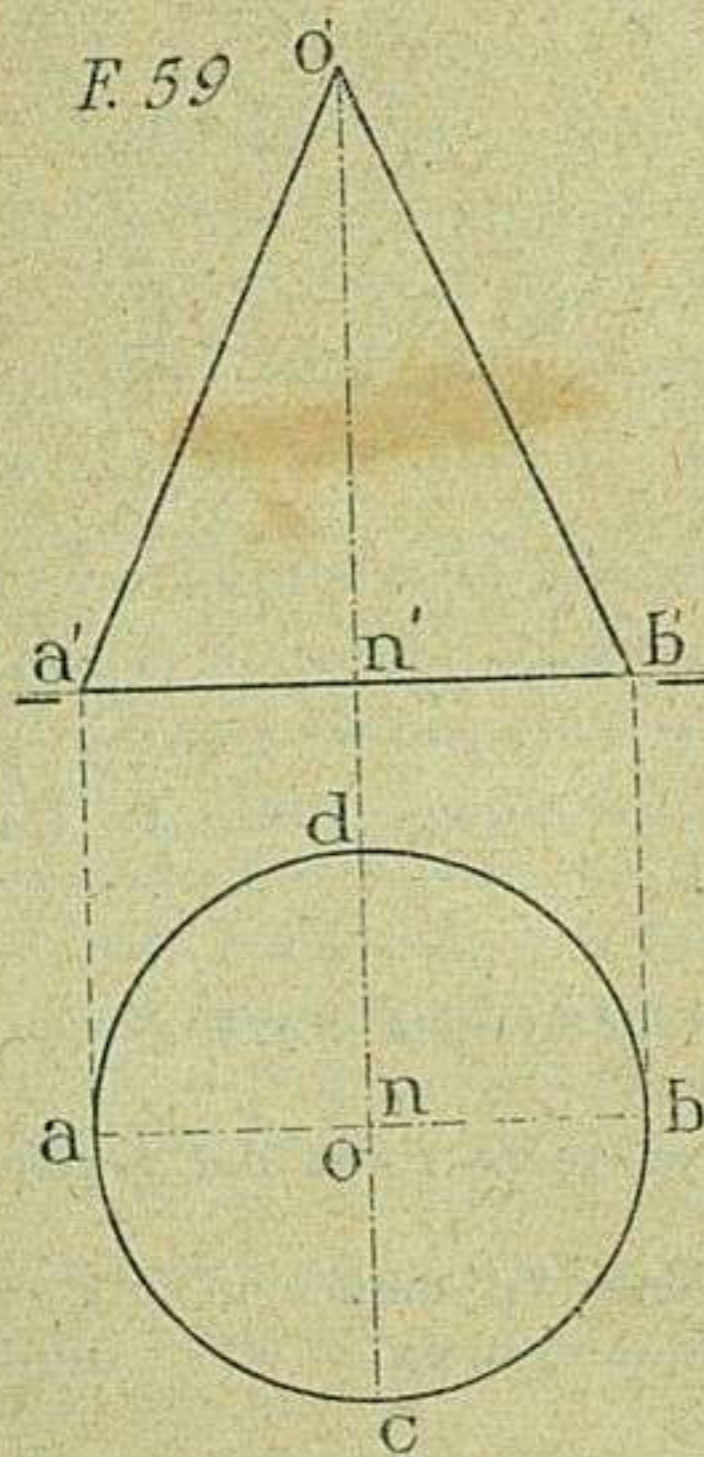
tas, se proyectan sobre él en su verdadera magnitud, y en lo tocante á las líneas que deben aparecer vistas, lo son las que forman el contorno aparente del cilindro, tanto en proyección horizontal como en vertical.

57. Representación del cilindro oblicuo (1).

Este cilindro (fig. 58), sin ser de revolución, tiene por bases los círculos $abcd - a'b'c'd'$ y $efgh - e'f'g'h'$; el uno contenido en el plano horizontal, y el otro paralelo al mismo, por cuyo motivo se proyectan sobre dicho plano horizontal en su verdadera forma y magnitud. También las generatrices $ae - a'e'$, $bf - b'f'$, etc., por ser paralelas al plano vertical, se proyectan sobre él en su verdadera magnitud y en iguales condiciones, el ángulo que cada una de ellas forma con el plano horizontal, cuyo verdadero valor α puede apreciarse en la proyección vertical.



Se representa con líneas vistas el contorno aparente de la proyección horizontal $abfghda$, junto con la media circunferencia b, c, d , perteneciente á la base superior del cilindro. Con línea oculta sólo se representa la semicircunferencia bcd , situada en la base inferior del cilindro, cuya oblicuidad impide el que se vea. En la proyección vertical no hay líneas ocultas.



58. Representación del cono recto (2).

El cono representado en la figura 59 tiene por base el círculo $a, c, b, d - a'b'$, paralelo al plano horizontal y, por consiguiente, se proyecta en este plano en su verdadera forma y magnitud. En su cualidad de cono recto y de revolución, todas las generatrices son iguales, por lo que, cualquiera de las dos, que forman el contorno aparente a', b, o' , dará la verda-

(1) El presente cilindro es oblicuo porque sus generatrices $ae - a'e'$, $bf - b'f'$, etc., no son perpendiculares á las bases $abcd - a'b'c'd'$ y $efgh - e'f'g'h'$.

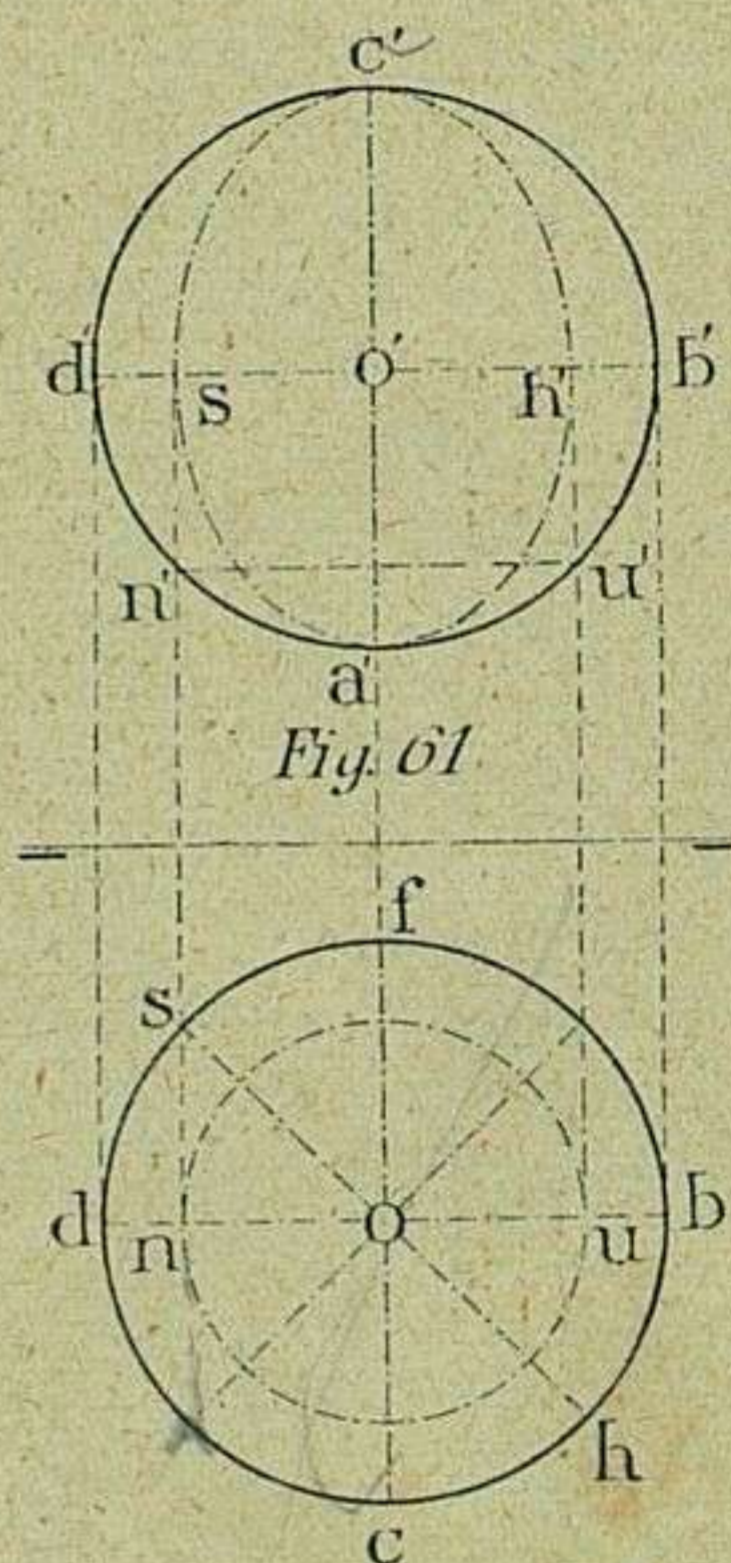
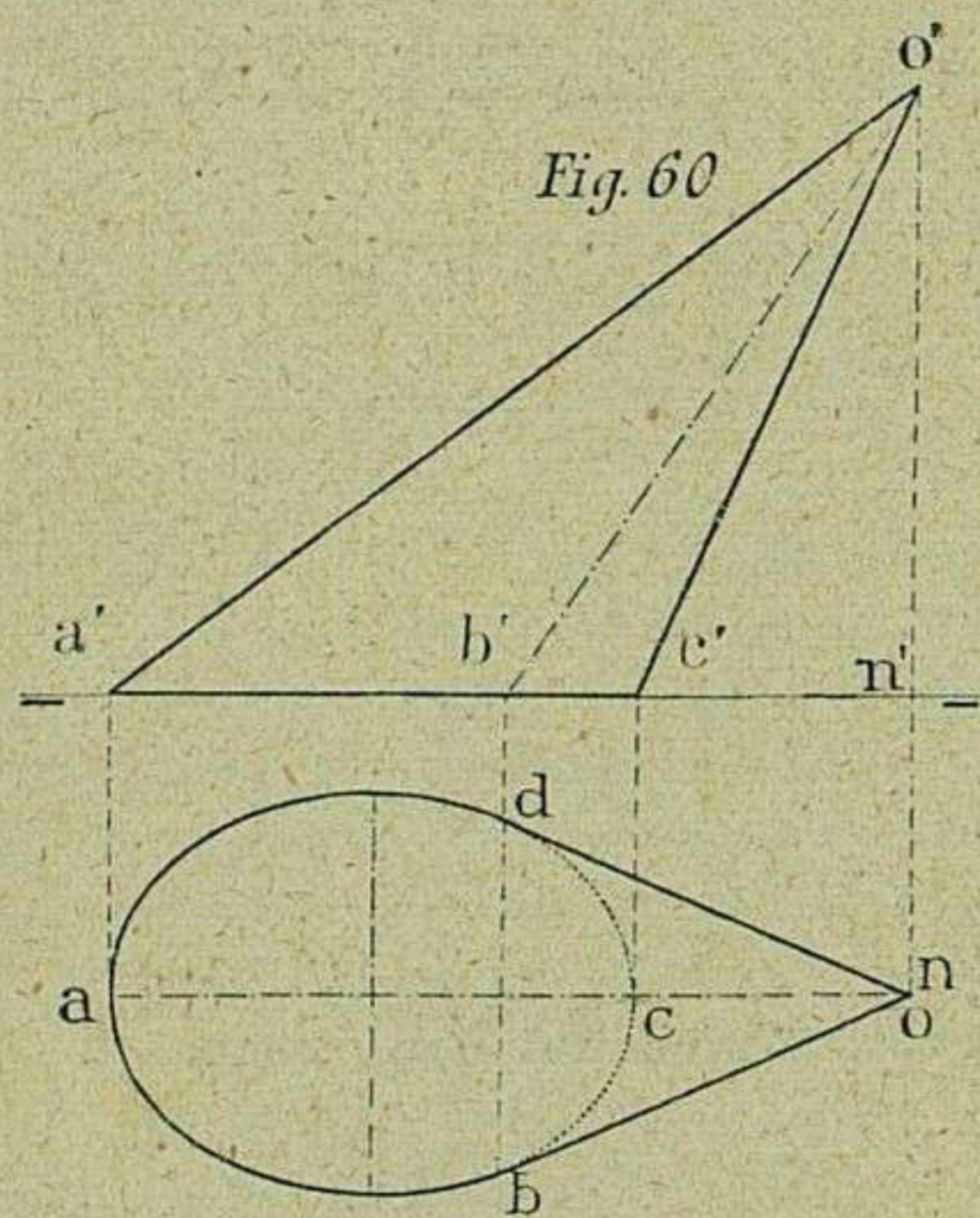
(2) El cono se considera formado de una sola base, cuyo contorno es una línea curva, y además, de la superficie curva engendrada por la generatriz recta que, unida á un punto fijo situado fuera de dicha base, recorre todos los puntos de su contorno. Por esta circunstancia, tanto la superficie lateral de cilindro, como la del cono, reciben el nombre de *superficies regladas*.

Llámase cono recto (fig. 59) aquel cuya altura $on - o'n'$ viene á parar en el centro de la base $acbd - a'b'$, á la que, por supuesto, es perpendicular.

Cono de revolución es el engendrado por la recta $ao - a'o'$ que, sin separarse del

dera longitud de todas las demás. Los contornos aparentes de la proyección horizontal y vertical se representan en este ejemplo con línea vista.

59. Representación del cono oblicuo (1). — En el cono proyectado, según la figura 60, están representados en su verdadera magnitud la base $a b c d$, por estar contenida en el plano horizontal, y las generatrices $a' o' — a' o'$ y $c o — c o'$ por ser paralelas al plano vertical. Figuran con línea vista el contorno aparente de la proyección horizontal $a b o d a$, y el correspondiente á la vertical $a' c' o'$; con línea oculta sólo va representado el segmento de elipse $d c b$, correspondiente á la proyección horizontal de la base.



60. Representación de la esfera (2). — La esfera proyectada en la figura 61, presenta el contorno aparente d, e, b, f, d , correspondiente á la proyección horizontal, y el $d' a' b' c' d'$ en la vertical, exactamente iguales, y correspondiendo á la verdadera forma y magnitud de este cuerpo redondo. La

punto $o—o'$, vértice del cono, recorre todos los puntos de la circunferencia a, c, b, d , cuyo círculo es perpendicular al eje $o n—o' n'$ del indicado cono.

(1) Cono oblicuo es aquel en que la altura $o n—o' n'$ se proyecta fuera del centro poligono de la base.

(2) La esfera (fig. 61) se considera engendrada por el movimiento del semicírculo $a' b' c'$, que gira alrededor del diámetro $a' c'$; de este modo, la semicircunferencia a', b', c' , funciona de generatriz, y el diámetro $a' c'$ representa el eje.

En este concepto, la esfera es un cuerpo redondo de revolución, cuyas principales propiedades son: equidistar todos los puntos que componen la superficie curva del centro o, o' , dar círculos en cualquiera de las secciones planas que en ella se produzcan y quedar dividida en dos *hemisferios* por cualquier plano que pase por el centro $o—o'$. Cuando el plano

distinción entre líneas vistas y ocultas no ofrece dificultad desde el momento que se considera desprovista á la esfera de aristas; por tanto, no hay más línea vista que la del contorno aparente.

REPRESENTACIÓN DE POLIEDROS REGULARES ⁽¹⁾

61. Dada una de las aristas del tetraedro, determinar las proyecciones de este poliedro y su desarrollo (fig. 62). —

Sea la longitud de la arista dada 29^{mm} . Sobre el plano horizontal de proyección se construirá el triángulo equilátero abc , tomando para cada lado 29^{mm} (V. **43**, primera parte) y se trazarán las bisectrices an , bn , cn (V. **14**, primera parte), proyecciones horizontales de las aristas reunidas en n . Sin más, quedará el poliedro representado en proyección horizontal.

Las proyecciones verticales de los vértices a , b , c , contenidos en el plano horizontal, se hallarán sobre la línea de tierra en $a' b' c'$, respectivamente.

La altura á que se encuentra la proyección n' del vértice respecto del plano horizontal, equivale al cateto nn_1 del triángulo rectángulo construido con la hipotenusa $an_1 = ab$ y el otro cateto an (V. **32**, primera parte).

Colocada, pues, esta altura nn_1 sobre la respectiva línea de correspondencia, desde la línea de tierra hasta n' , sólo queda trazar las rectas $n' a'$, $n' b'$,

secante pasa por el eje de la esfera, las circunferencias de las secciones que se obtienen se llaman *meridianos*, y todos corresponden á círculos máximos.

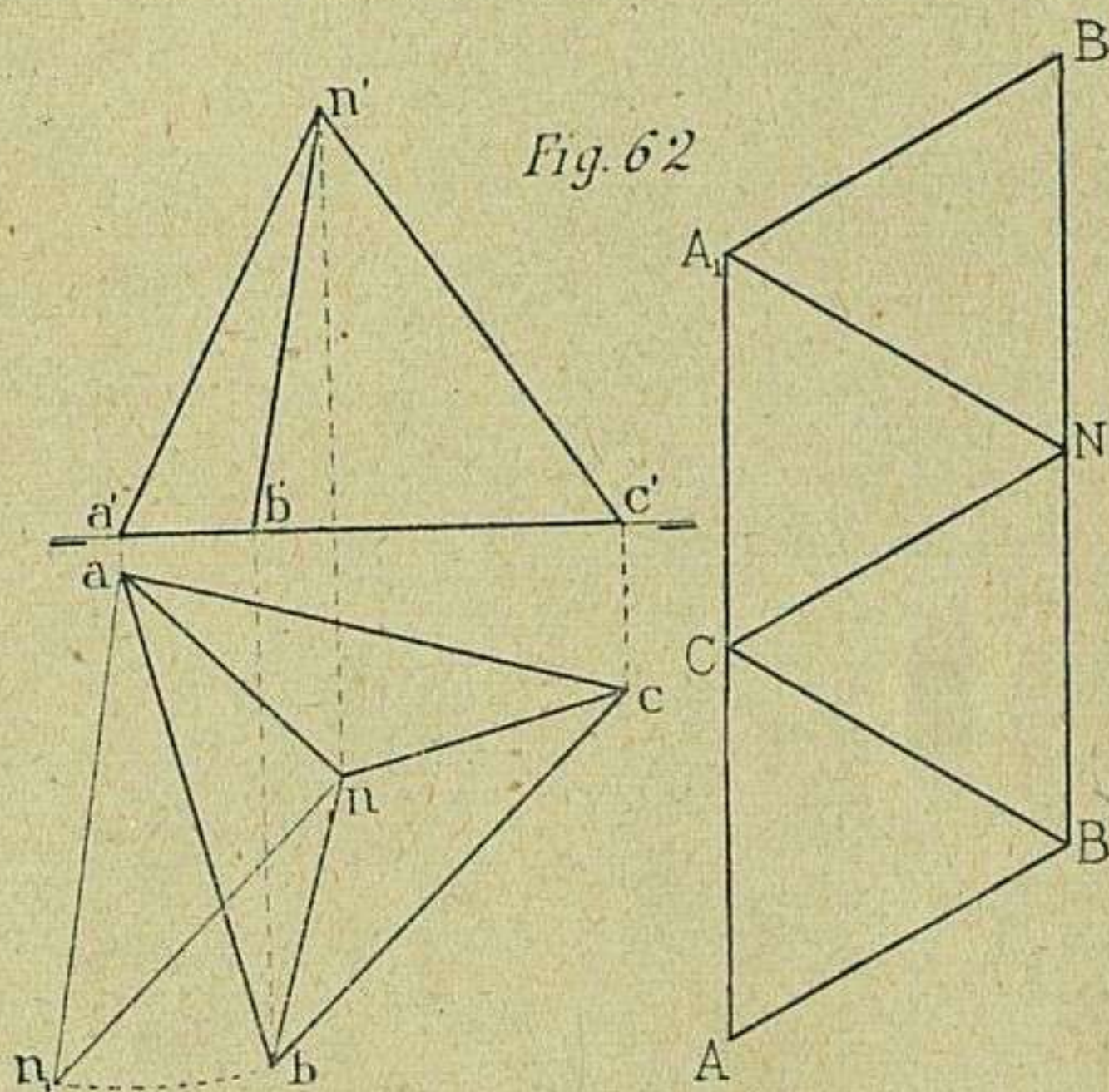
Si el plano secante es perpendicular al eje, se tendrá un solo círculo *máximo*, cuando el plano pasa por el centro, é infinito número de *minimos*, cuando dicho plano secante y perpendicular al eje no pasa por el centro.

En el primer caso, la circunferencia del único círculo máximo se llama *ecuador*, y las de los demás círculos mínimos perpendiculares al eje, *paralelos*.

La existencia de *meridianos*, *paralelos* y *ecuador* es peculiar á toda superficie de revolución no reglada.

⁽¹⁾ Según queda indicado, los principales poliedros regulares son: *tetraedro*, *cubo*, *octaedro*, *dodecaedro* y el *icosaedro*.

El *tetraedro* está limitado por cuatro triángulos equiláteros iguales. El *cubo* por seis cuadrados iguales. El *octaedro* por ocho triángulos equiláteros iguales. El *dodecaedro* por



$n' e'$ que serán las proyecciones verticales de las aristas laterales, para dar por terminada la representación del tetraedro, en la que no se registra ninguna línea oculta.

Desarrollo. — Para verificar el desarrollo se toma la longitud de un lado (1) y se construirán cuatro triángulos equiláteros unidos, de tal modo, que los cuatro formen el paralelogramo $A B A_1 B_1$.

62. Determinar las proyecciones de un cubo, dada la longitud de una de sus aristas (fig. 63). — Sean 21^{mm} los que corresponden á la longitud de una arista. Tomando como lado la longitud de 21^{mm} , se construye sobre el plano horizontal un cuadrado (V. 44, primera parte), en el que se

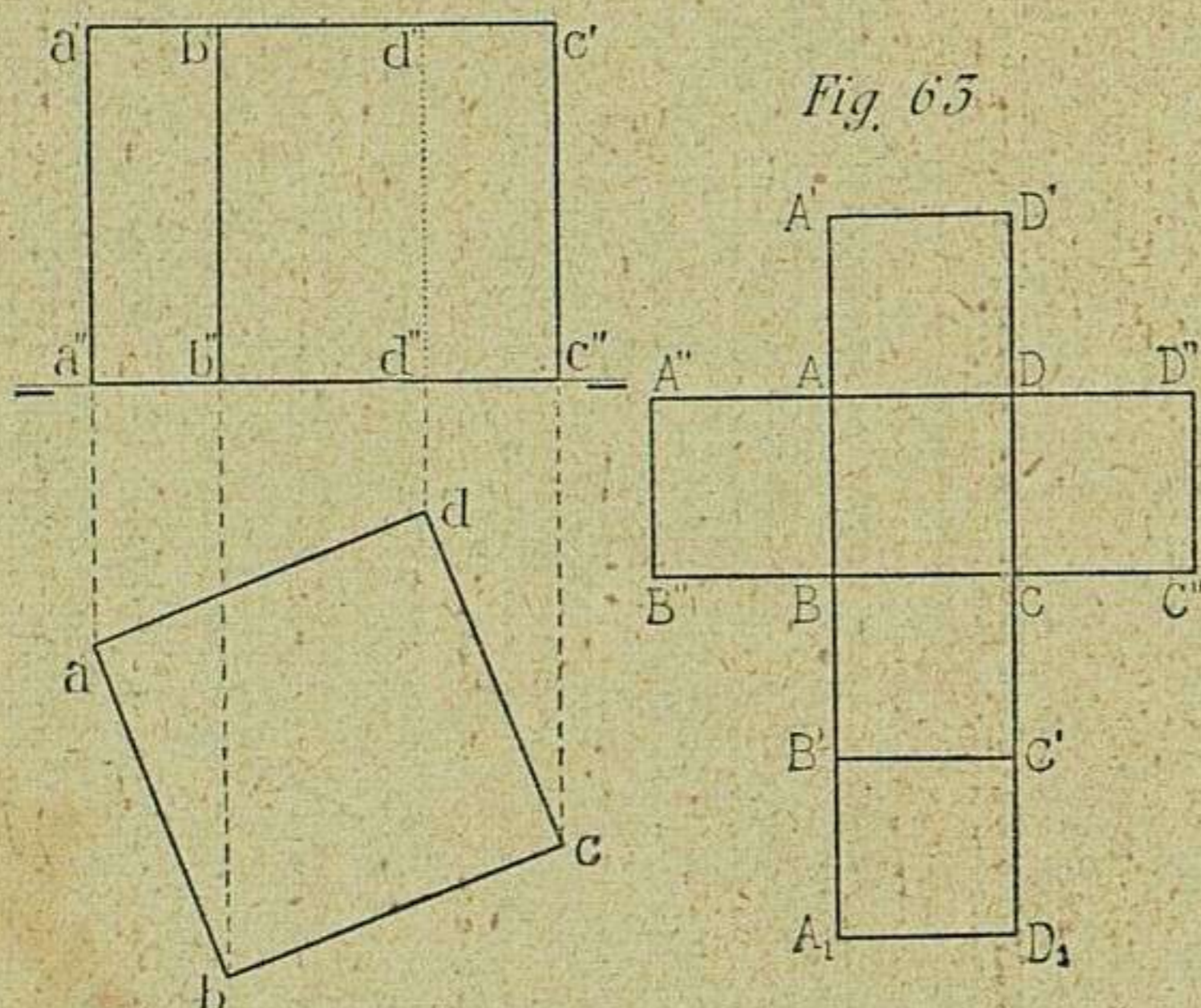


Fig. 63

tendrá la proyección horizontal $a b c d$. Desde estos puntos se levantan las líneas de correspondencia $a a'$, $b b'$, $c c'$, $d d'$, como es sabido, perpendiculares á la altura, y sobre ellas, partiendo de la línea de tierra, se tomarán las longitudes $a'' a'$, $b'' b'$, $c'' c'$, $d'' d'$, iguales todas ellas á 21^{mm} . De a' en c' y de a'' en c'' se trazarán dos rectas que, representando las respectivas proyecciones de las bases, completa-

rán la proyección del cubo sobre el plano vertical. En esta proyección, sólo la arista posterior $d' d''$ está oculta, y en la horizontal aparecen vistos los lados del cuadrado correspondiente á la cara superior, que coinciden con los de la inferior, efecto de la conformación del poliedro.

Desarrollo. — El desarrollo del cubo, por la misma razón que el del tetraedro, aparece reducido á la cuarta parte de su extensión superficial, ó sea á la mitad de su medida longitudinal. El problema, como puede notarse en la figura 63, se ha resuelto, uniendo en una plantilla plana, formando cruz, los seis cuadrados que constituyen las caras del cubo.

doce pentágonos regulares é iguales. El *icosaedro* por veinte triángulos equiláteros iguales.

Las aristas, en cada uno de estos polígonos, son iguales, como también los ángulos diedros y poliedros. Además, tanto los vértices como los centros de los polígonos, equidistan del centro del poliedro á que pertenecen.

(1) En la figura 62 se ha reducido la longitud del lado á los $\frac{3}{4}$ para que dicho desarrollo ocupe menos espacio.

63. Proyecciones del octaedro deducidas de la longitud de una de sus aristas (fig. 64).—Este poliedro regular se supone dispuesto de modo que la diagonal $n' n_1$ sea perpendicular en n al plano horizontal y que una de sus aristas mida 20^{mm} . En tal supuesto, la proyección horizontal se reduce á trazar, dando á cada lado 20^{mm} , el cuadrado $a b c d$, con sus diagonales $a c$ y $d b$ que, al cortarse en n , limitarán las cuatro caras de la mitad superior del poliedro, las que, por esta circunstancia, aparecen vistas.

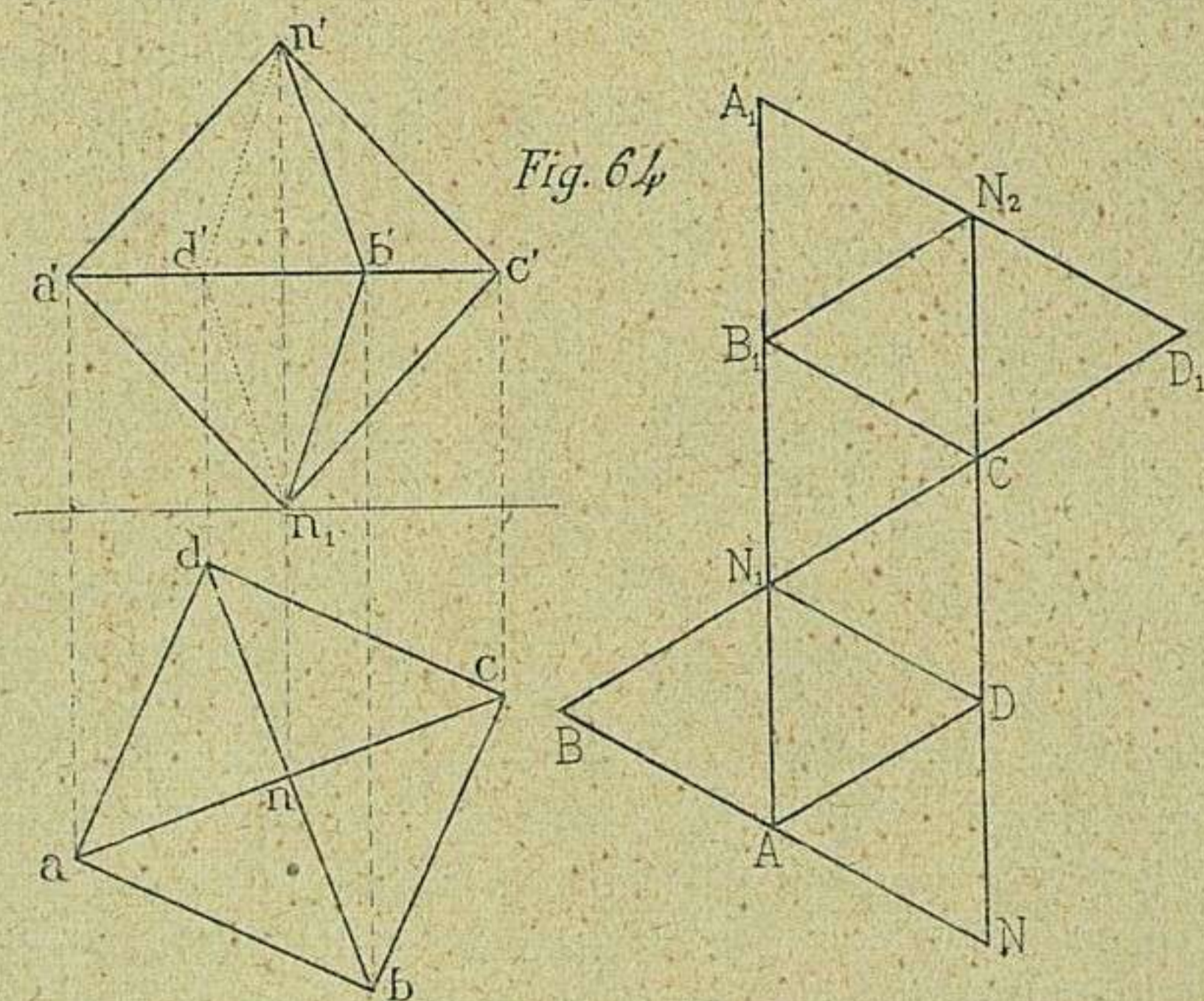


Fig. 64

La proyección vertical se determina colocando sobre la $n n'$, perpendicular á la línea de tierra, desde n_1 á n' , una longitud $a c$ ó $d b$, igual á la de cualquiera de estas diagonales del cuadrado, y trasladando los puntos $a b c d$ á los $a' b' c' d'$ en la proyección vertical, sobre la línea $a' c'$ perpendicular trazada en el punto medio de la $n' n_1$; se completará la parte vista del octaedro sin más que unir, mediante rectas, los puntos $a' d' b' c'$ con los respectivos extremos n' y n_1 , á las que se añaden las aristas $n' b'$ y $b' n_1$. Las otras aristas $n' d'$, d , n_1 se representan ocultas, puesto que están situadas en la parte posterior del poliedro proyectado sobre el plano vertical.

Desarrollo. — El desarrollo en la figura 64 se representa á los $\frac{3}{4}$ de su verdadero tamaño; se obtiene sobre un plano, por el ensamble de ocho triángulos equiláteros iguales. Para el trazado de cada uno de estos triángulos véase (núm. 43, primera parte).

64. Representación en proyecciones del dodecaedro regular (figura 65). — Para mayor facilidad, supóngase colocado este poliedro de manera que una de sus caras coincida con el plano horizontal de proyección; en tal caso la proyección de dicha cara sobre el citado plano se reducirá al trazado

del pentágono regular $a78910$ (véase núm. 45, primera parte), al que se añadirá el $acmr$, que, además de ser igual, tiene con el anterior el lado común $10, a$.

Desde o , centro del primer pentágono, se trazan, por una parte, la recta om , por otra la ob , y una tercera que, pasando por r , sea perpendicular

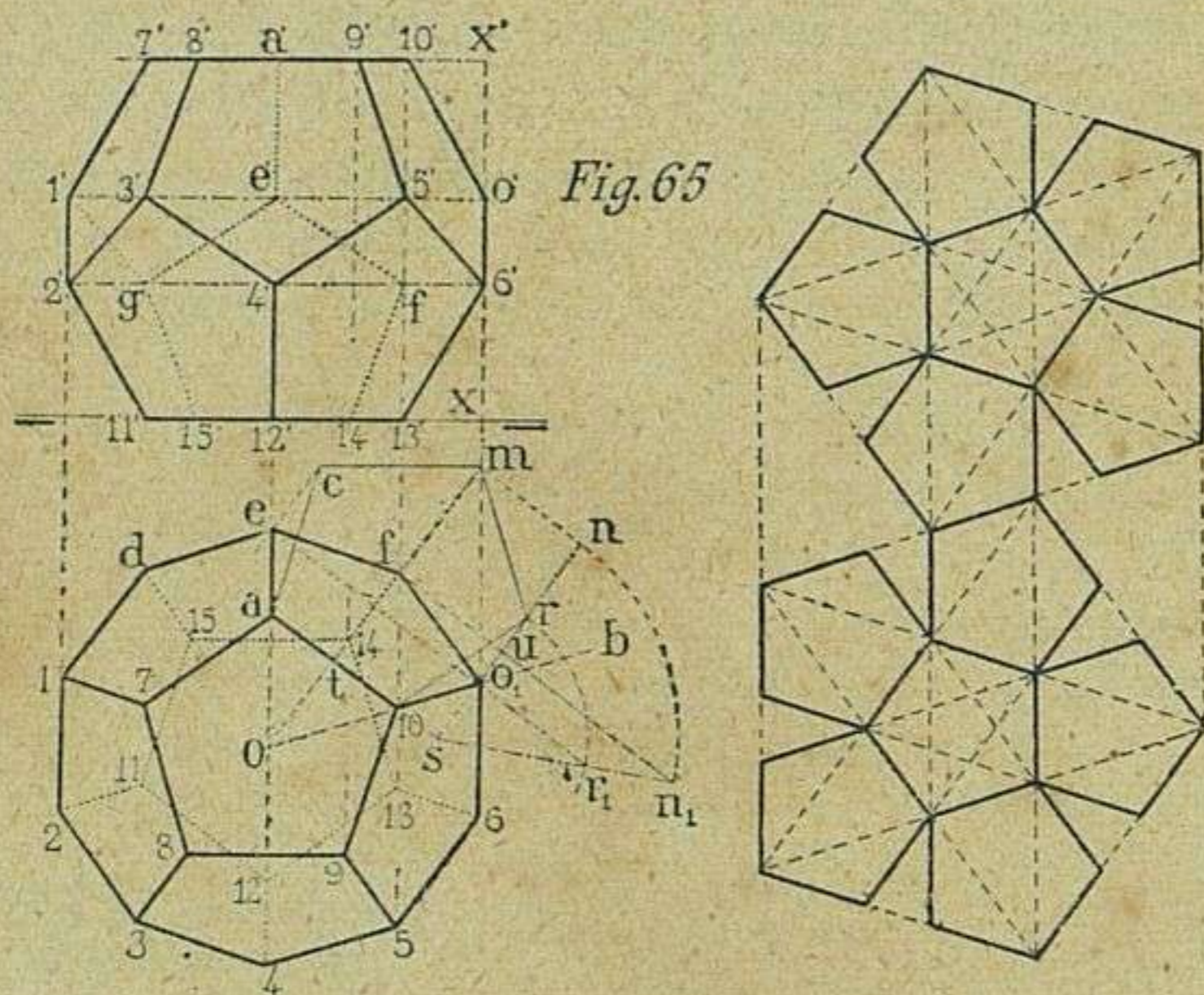


Fig. 65

á $10, a$ en el punto s . En la intersección de ob con sr se encuentra el punto o_1 , uno de los que pertenecen y figuran como vértices del contorno aparente en la proyección horizontal, contorno que, según puede verse (figura 65), corresponde al de un decágono regular inscrito en la circunferencia de radio o, o_1 , y cuyo trazado no

ofrece dificultad (V. núm. 41, primera parte). Uniendo, mediante rectas, los puntos respectivos $1-7, e-a, o_1-10, 5-9$ y $3-8$ se tendrá la parte superior del poliedro vista en proyección horizontal; la oculta corresponde á la mitad inferior de la figura, que por eso se representa con líneas de puntos.

Para determinar la proyección vertical, lo importante es fijar las alturas á que se encuentran los planos $2'6', 1'o'$ y $7'x'$ respecto al horizontal de proyección.

Para conseguirlo se describe desde s , con radio sr , un arco que en su intersección con la recta que pasa por eo_1 dará el punto r_1 . Por este punto y por s se traza una recta que al cortarse con la fu , paralela á er_1 , dará el punto n_1 .

Con esta sencilla operación (1) quedan determinadas la altura $x6' = o_1r_1$, la $xo' = un_1$ y la $xx' = un_1 + o_1r_1$. Ahora, sobre cada uno de los planos $2'6', 1'o'$ y $7'x'$, se determinarán los puntos correspondientes de la proyección horizontal, según líneas de correspondencia. Se procederá al trazado del contorno aparente vertical $1'7'10'o'6'13'11'$ y $2'$, al de las aristas vistas que se reúnen en $3', 4'$ y $5'$, puntos situados en la parte anterior del dodecaedro y, por último, se representarán las aristas ocultas, que son las que se reúnen en los puntos $g'e'f'$, situados en la parte posterior del poliedro.

Desarrollo. — El desarrollo se obtiene por el ensamble de doce pentá-

(1) Estas operaciones que se han expuesto, tienen su razón de ser en el giro del pentágono $acmr10$, alrededor de $a10$. Todas ellas dependen de la determinación de o_1 , punto que se halla en la intersección de ob con sn , líneas que á su vez representan las trazas de dos planos perpendiculares al horizontal de proyección.

gonos regulares é iguales, dispuestos en la forma que la figura 65 indica. Conviene fijar la atención no sólo en las correspondencias que señalan las líneas de trazos, sino en que cada agrupación de seis caras está inscripta en un pentágono regular.

Para armonizar el tamaño del desarrollo con el de las proyecciones se ha reducido aquél á $\frac{2}{3}$ del tamaño verdadero.

65. Proyecciones del icosaedro regular (fig. 66).—Para representar

fácilmente este poliedro se situará la línea $v'v''$, que une dos vértices opuestos, perpendicular al plano horizontal de proyección, y además se supondrá compuesto el icosaedro de dos pirámides pentagonales, cuyas bases son comunes á las de un sólido que tiene por caras laterales triángulos equiláteros.

Hecha esta advertencia, la proyección horizontal se reduce al trazado de dos pentágonos regulares cuyos vértices corresponden á los puntos que resultan de dividir la

circunferencia circunscripta en 10 partes iguales. Así, uno de estos pentágonos, el $1b753$; juntamente con las líneas que desde estos vértices van al centro V , representa la pirámide superior. La inferior $a'c642$ es oculta, y por eso se representa por líneas de puntos.

En la proyección vertical, los datos necesarios son las alturas $a'v''$ y $5'v'$, correspondientes á las pirámides inferior y superior, y además la distancia $a', 5'$, que media entre las bases de dichas pirámides representadas respectivamente por $3', 7'$ y $2', c'$.

Estos datos indispensables, los proporciona el triángulo rectángulo $b'cn$, construido sobre el cateto $b'c$, dada la hipotenusa $cn = ca$ (véase primera parte, núm. 32), en el que $b'c$ es igual á cada una de las alturas $v''a'$ ó $v'5'$ y $b'n$, á la distancia $a'5'$ que media entre las bases de las pirámides representadas en proyección vertical por $3', 7'$ y $2', c'$ respectivamente.

Por consiguiente, colocadas estas medidas sobre el eje $v''v'$, referidos los vértices de la proyección horizontal á la vertical, hecho el deslinde de líneas vistas y ocultas, y determinado el contorno aparente $v''2'3'u'7'c'$, que deberá resultar exágono regular de lado $b'n$, quedará terminada la representación de este poliedro.

Desarrollo. — Se determina por el ensamble sobre un mismo plano de doce triángulos equiláteros iguales, dispuestos en la misma forma que se indica

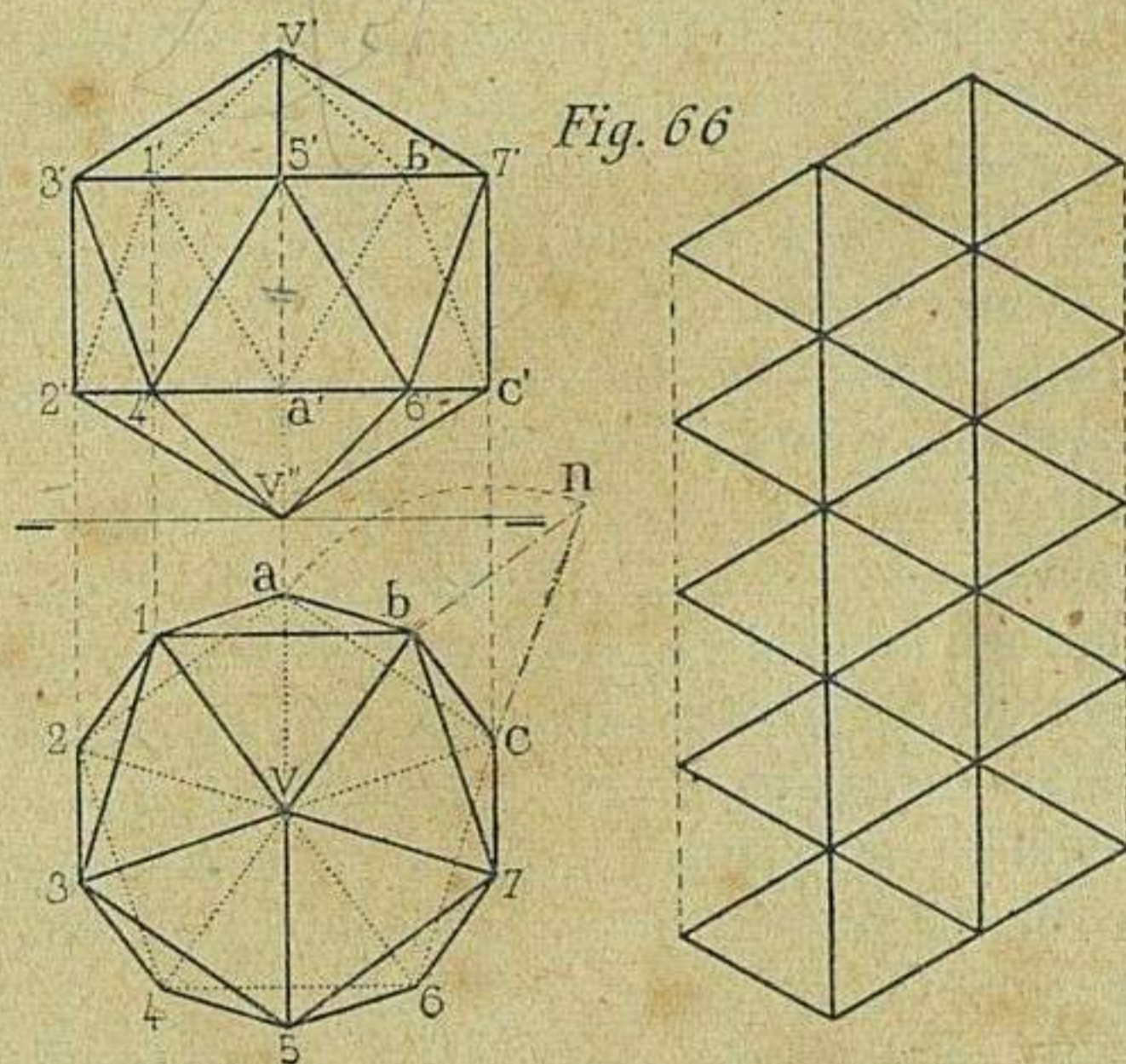


Fig. 66

en la figura 66, donde aparece el desarrollo reducido á los $\frac{2}{3}$ del tamaño que le corresponda.

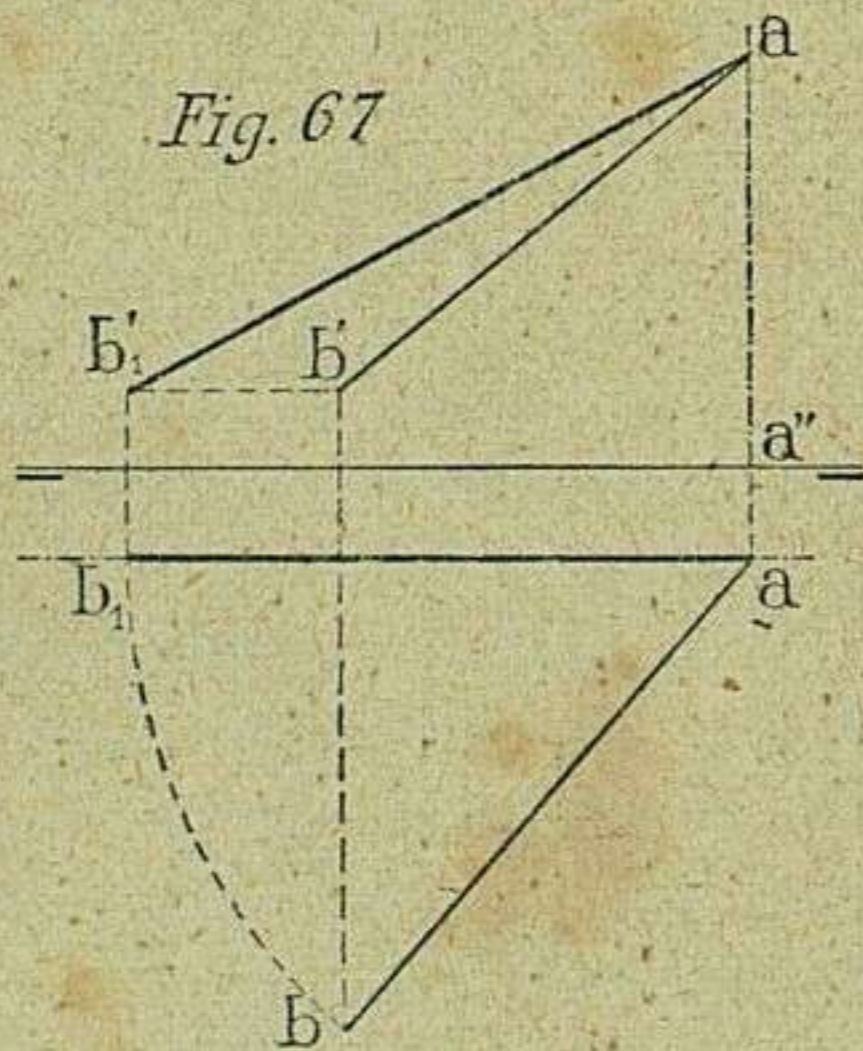
VERDADERAS MAGNITUDES DE RECTAS y planos limitados.

Los conocimientos anteriormente expuestos son suficientes para resolver el problema de las proyecciones ortogonales, planteado en condiciones favorables y sin salirse de ciertos límites; esto es, atemperándose á los vuelos é importancia que el proyecto puede alcanzar en la práctica del taller, dentro de la esfera en que al artifice obrero le toca desarrollar sus iniciativas; pero aquellos conocimientos son insuficientes algunas veces.

Sucede, y este es el caso más frecuente, que el obrero se ve en la necesidad de interpretar el proyecto que otro ha ideado, y entonces, obligado por los apremios que dicha interpretación trae consigo, ha de tomar para realizarla medidas que no siempre aparecen en su verdadera magnitud; ha de obtener formas reales de otras aparentes; en suma, ha de verificar el trazado de plantillas sin otros datos, reales ó aparentes, que los que el proyecto le suministre.

A facilitar los medios conducentes á la justa interpretación del proyecto, contribuirá prácticamente la resolución de los problemas que á continuación se exponen:

66. Hallar la verdadera magnitud de una recta oblicua á los dos planos (fig. 67). Primer procedimiento.



— Sean $ab - a'b'$ las proyecciones de una recta dada. Se recordará que cuando una recta es paralela á un plano se proyecta sobre él en su verdadera magnitud (V. 13). Por tanto, la solución del problema consistirá en colocar la recta paralela á uno de los planos de proyección.

Para conseguirlo se hará girar la proyección ab alrededor del eje $a'a''$ (1), quedando fijo el punto a y describiendo el b un arco de circunferencia hasta colocarse en b_1 , punto en que precisamente la proyección horizontal, antes oblicua, resulta ahora paralela á la línea de tierra.

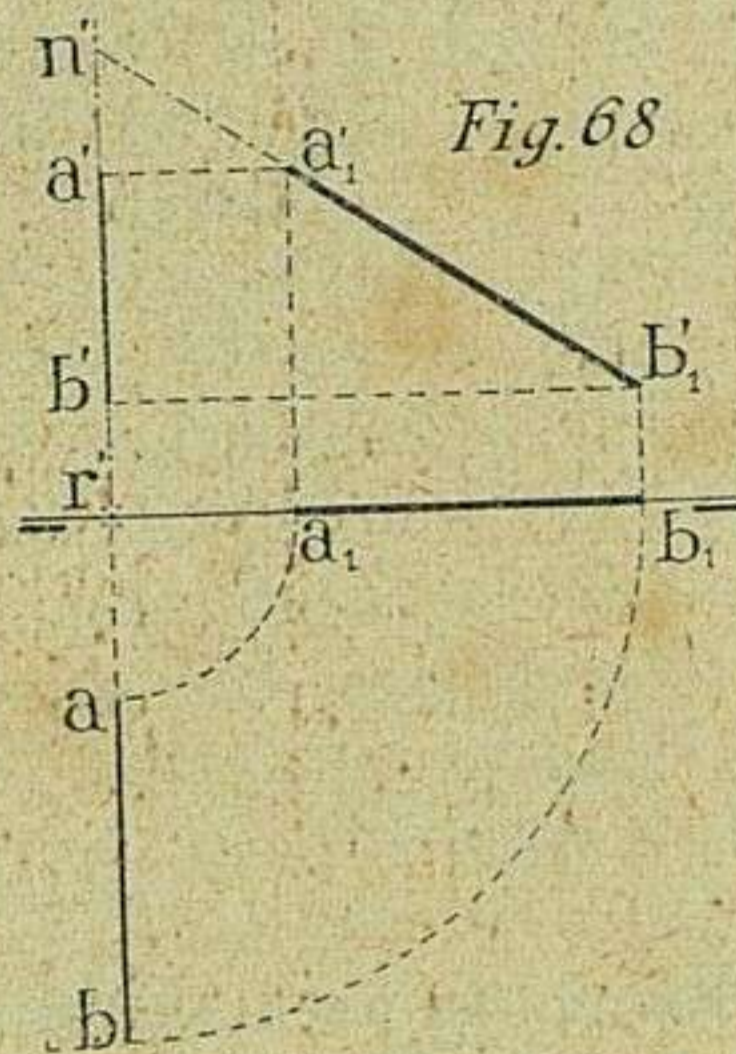
Al relacionar la nueva posición horizontal con la vertical, se tendrá pre-

(1) Éste y otros ejes de giro se eligen casi siempre perpendiculares á uno de los planos de proyección y en contacto con uno de los puntos extremos de la recta para simplificar las operaciones anexas á la resolución del problema.

sente que el punto $a - a'$ no se ha movido, y que la proyección vertical del arco $b b_1$ corresponderá á la recta $b' b'_1$, paralela á la línea de tierra, por estar el citado arco contenido en un plano paralelo al horizontal de proyección.

De esta manera, la línea que une al punto a' con el b'_1 , colocada en posición paralela al plano vertical de proyección por medio tan sencillo, representará la verdadera magnitud de la recta en el espacio.

67. Determinación de la verdadera magnitud de una recta oblicua, pero contenida en un plano perpendicular á los de proyección (fig. 68). — Sean $a b - a' b'$ las proyecciones de la recta dada.



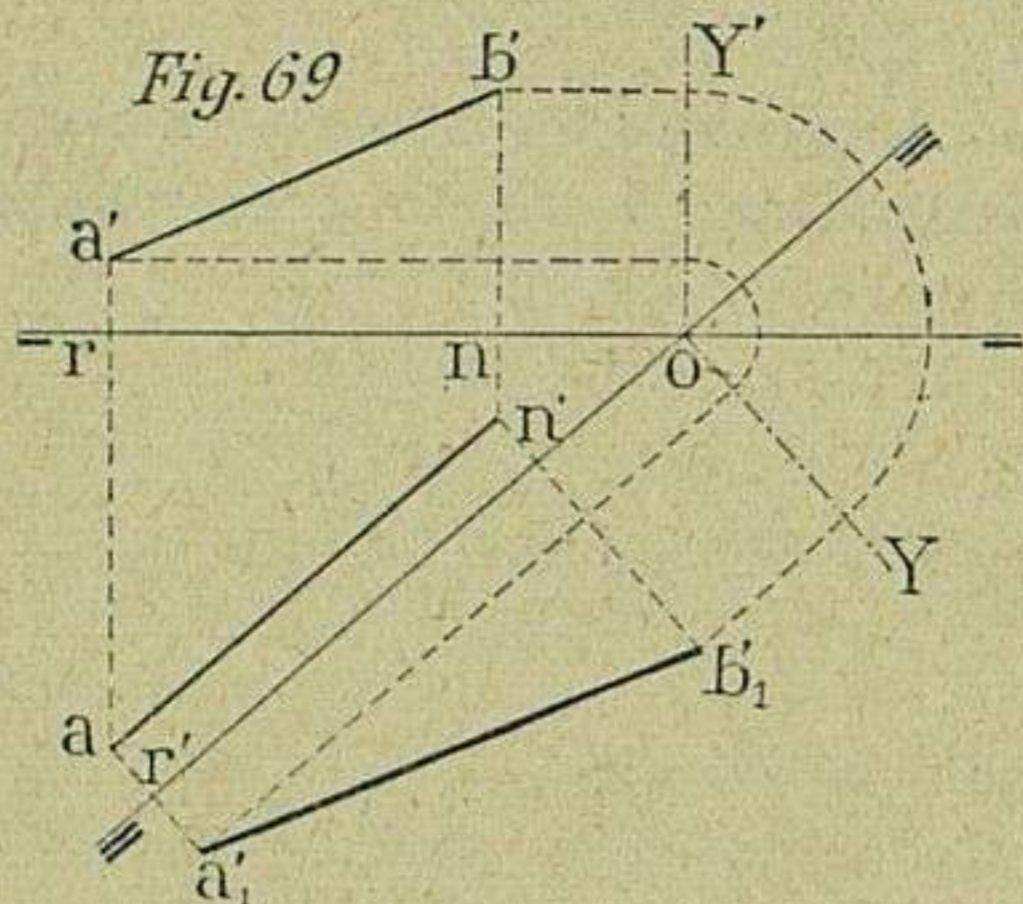
Tomando como eje de giro la traza vertical $r' n'$ del plano que contiene á la recta dada, se describirán, concéntricos en r' , los arcos $a a_1$, $b b_1$, por lo que la proyección horizontal de la recta coincidirá en $a_1 b_1$ con la línea de tierra. Desde los puntos $a' b'$ se trazarán paralelas á dicha línea, y desde a_1 y b_1 se levantarán líneas de correspondencia, que en sus respectivas intersecciones con las paralelas, darán los puntos a'_1 , b'_1 , extremos de la proyección vertical de la recta, que de este modo quedará colocada en posición paralela al plano vertical, y donde, como es consiguiente, podrá apreciarse su verdadera magnitud en la longitud $a'_1 b'_1$. El procedimiento es igual que el seguido para resolver el anterior problema; solamente que en éste se han girado los dos extremos de la recta.

No en todos los casos conviene emplear iguales procedimientos, y más disponiendo de algunos que, aunque se diferencian en los medios, conducen al mismo fin. El disponer de alguna variedad en los procedimientos, aunque muy limitada, permite elegir los medios que las circunstancias y condiciones que acompañan al problema reclaman como más adecuados.

En el siguiente ejemplo puede verse cómo se determina la verdadera magnitud de una recta mediante el cambio de planos de proyección.

68. Hallar la verdadera magnitud de una recta oblicua á los planos de proyección (fig. 69). *Segundo procedimiento.* — Sean $a n - a' b'$ las proyecciones de la recta dada. Desde luego se coloca uno de los planos de

proyección, el vertical, por ejemplo, en condiciones de ser paralelo á la recta dada. Para conseguirlo se trazará por $r'n'$ (1) una paralela á la proyección horizontal de la recta dada; la cual se toma como nueva línea de tierra para los efectos del cambio de plano vertical. Éste se determina trazando desde los

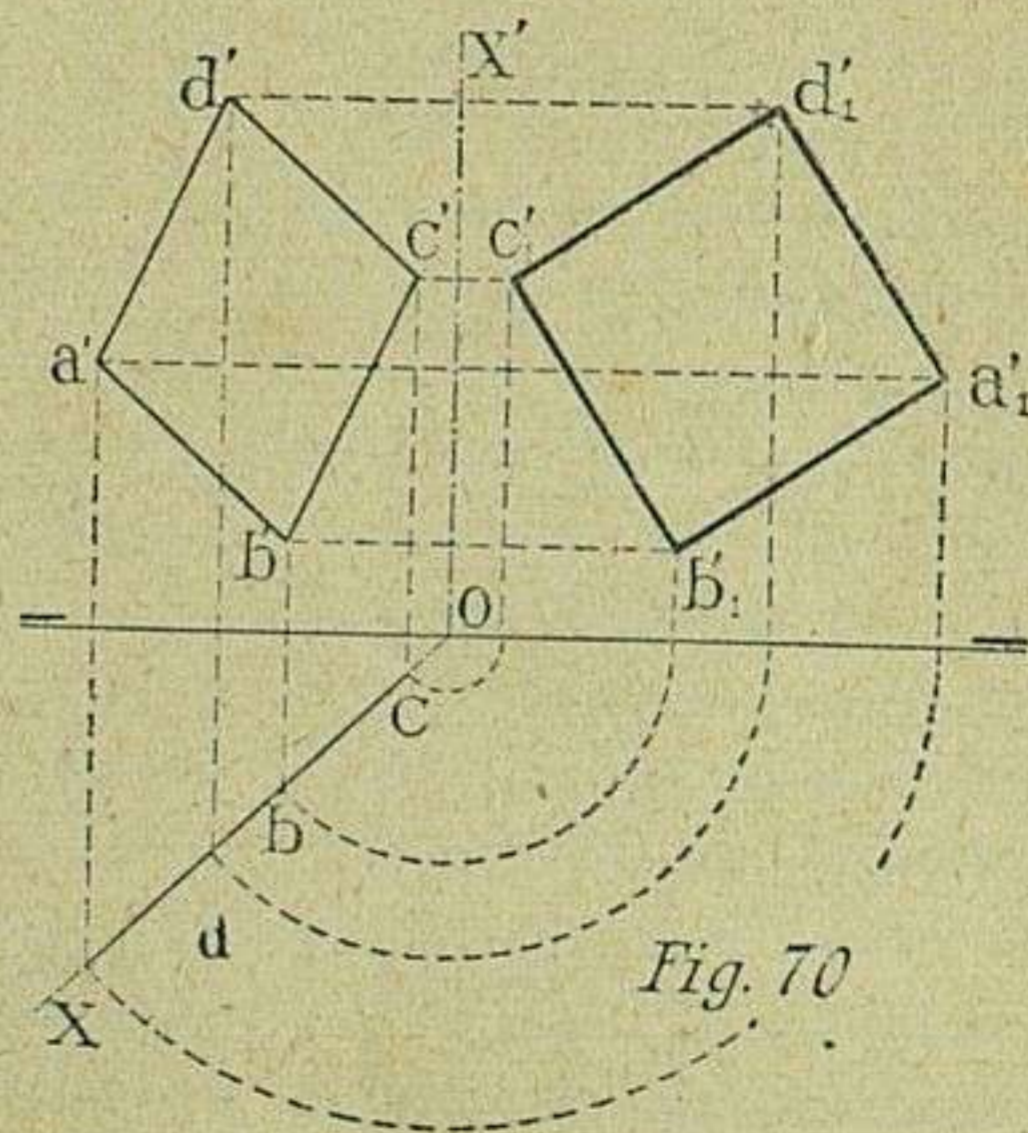


extremos a y n , perpendiculares á la nueva línea de tierra, y sobre ellos se trasladan $r'a'_1 = r'a'$ y $n'b'_1 = n'b'$. En la longitud de la recta que une los puntos $a'_1 b'_1$ se tiene la verdadera magnitud de la línea proyectada sobre el nuevo plano vertical de proyección paralelo á ella.

69. El mismo resultado se obtiene llevando los puntos $a' b'$ paralelos á la línea de tierra hasta encontrar $o Y'$, perpendicular á ro , y describir con ellos arcos concéntricos en o ; luego dirigirlos desde su intersección con $o Y$, paralelamente á la nueva línea de tierra, para que, á su vez, se encuentren éstas paralelas en a'_1 y b'_1 , con las respectivas perpendiculares levantadas en r' y n' sobre la nueva línea de tierra. La recta, pues, que una el punto a'_1 con el b'_1 representará la verdadera magnitud que se busca.

70. Verdadera magnitud de un polígono situada en un plano perpendicular al horizontal y oblicuo al vertical de proyección.—Sean

X' y X las trazas del plano que contiene al cuadrilátero $x d b c - a' d' c' b'$. Desde el centro o , describiendo arcos de circunferencia, se llevarán sobre la línea de tierra los puntos x, d, b, c , y desde cada uno de ellos se levantarán líneas de correspondencia, que en su intersección respectiva con las paralelas á la línea de tierra, tiradas desde los vértices $a' b' c' d'$, darán los puntos $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$, vértices de un cuadrilátero, que por haberse colocado sobre el plano vertical de proyección aparece sobre él en su verdadera magnitud.



Examinando la figura 70 se ve, desde luego, que la operación verificada ha

(1) La nueva línea de tierra señalada con dos trazos en los extremos, y paralela á la proyección horizontal de la recta, lo mismo que pasa por los puntos $r'n'$ podía pasar por otros cualesquiera, y hasta confundirse con dicha proyección. Es decir que lo esencial está en el paralelismo, no en la distancia que media entre las paralelas.

consistido sencillamente en girar el plano y los puntos en él contenidos alrededor de la traza x' como eje de rotación hasta emparejar con el plano vertical de proyección. Esta facilidad en la resolución del problema se debe á que el plano girado es perpendicular á uno de proyección; pero, aun suponiéndole oblicuo á los dos, la operación, si bien algo más complicada, seguirá el mismo camino, como se ve en el siguiente ejemplo, al que precede para mayor claridad, una explicación acerca del abatimiento del plano oblicuo sobre cualquiera de los de proyección.

71. Abatir un plano oblicuo sobre cualquiera de los de proyección (fig. 71). — Sean P y P' las trazas del plano que han de abatirse sobre el horizontal de proyección. Córtese el plano PP' por otro auxiliar perpendicular á la traza P , que además de ser perpendicular al plano dado, lo será al horizontal de proyección.

La sección de este plano auxiliar producirá el triángulo $sn n'$, rectángulo en n , que proporciona los datos para la operación.

Trazada en n la perpendicular $nn_1 = nn'$, se tendrá uno de los catetos, cuyo extremo n_1 , unido al s del otro cateto, dará la hipotenusa de dicho triángulo, desarrollado así en su verdadera magnitud. Colóquese sn_1 de s en x , y la recta P'_1 , que une el punto o con x , corresponderá á la traza P' del plano abatido sobre el horizontal de proyección.

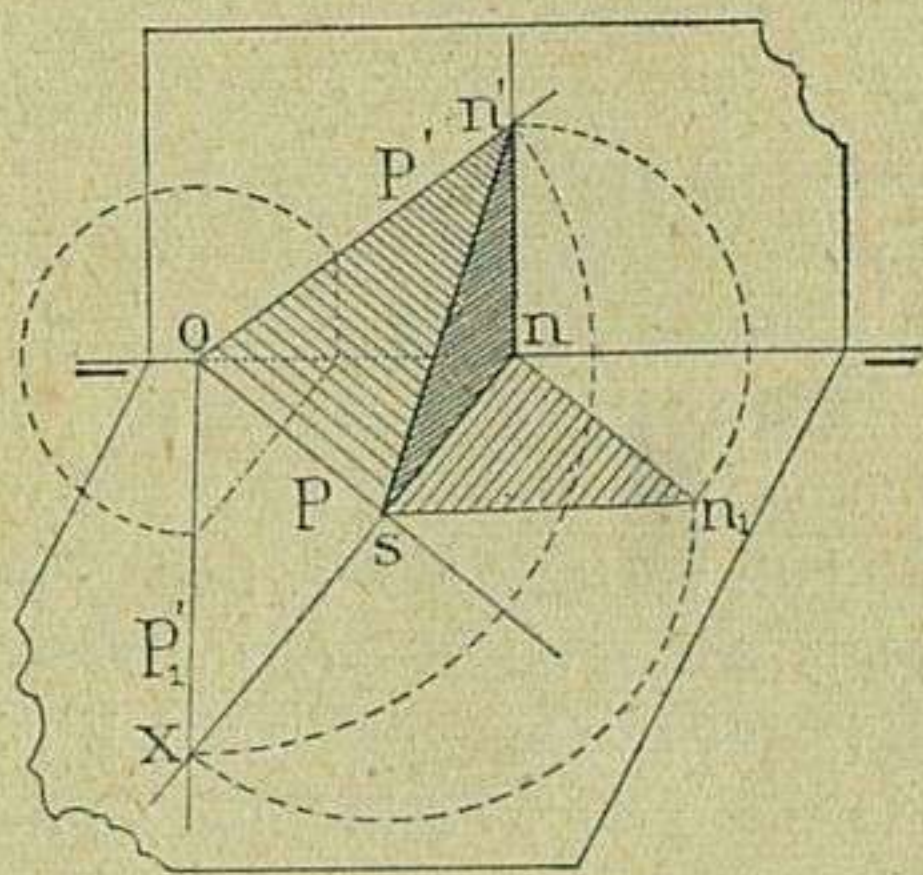
Es de notar que al verificarse el abatimiento, un punto cualquiera n' de la traza vertical P' viene á situarse en x sobre la traza P'_1 , tan equidistante de o como el n' ; como que el camino seguido está representado por el arco $n'x$.

De aquí se desprende que, en la práctica, los arcos $n'n_1$ y n_1x , se substituyan por uno solo.

En resumen, para verificar la operación de abatir el plano $P - P'$ sobre el horizontal de proyección, se tomará el punto n' de la traza P' , y por su proyección horizontal n , se trazará ns perpendicular á la traza P . Desde o , con radio on' , se describe un arco, cuya intersección con la perpendicular trazada por ns , dará en X el punto por donde pasa á reunirse con o la nueva posición de la traza P' , correspondiente al plano abatido sobre el horizontal (1).

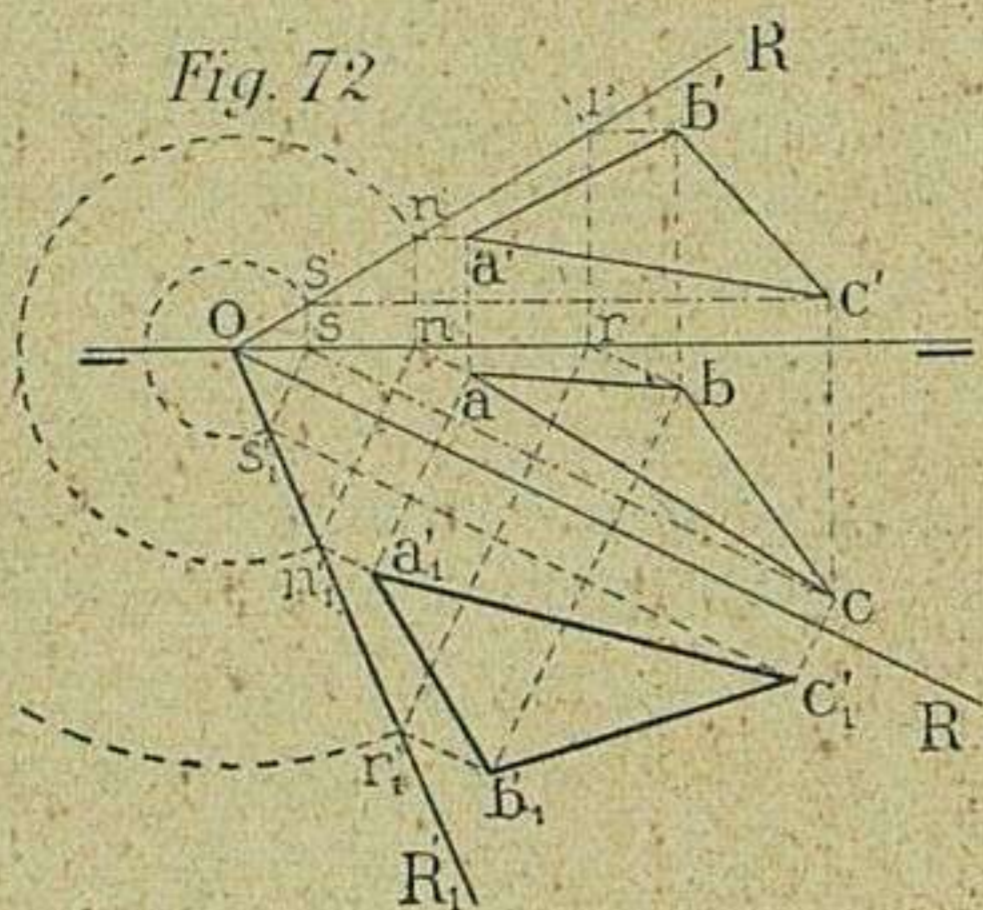
72. Determinar la verdadera magnitud y forma de un polígono situado sobre un plano oblicuo (fig. 72). — Sean R y R' las trazas del

Fig. 71.



(1) Ocioso es decir que si el plano ha de abatirse sobre el vertical de proyección, entonces la posición del plano secante auxiliar será perpendicular á la traza vertical P' .

plano en el que se encuentra situado el triángulo dado por las proyecciones $abc - a'b'c'$. Verificado el abatimiento de oR' sobre el plano horizontal (véase 71) en oR_1 , se procederá á la determinación de los vértices $a'_1 b'_1 c'_1$ del triángulo en su verdadera magnitud.



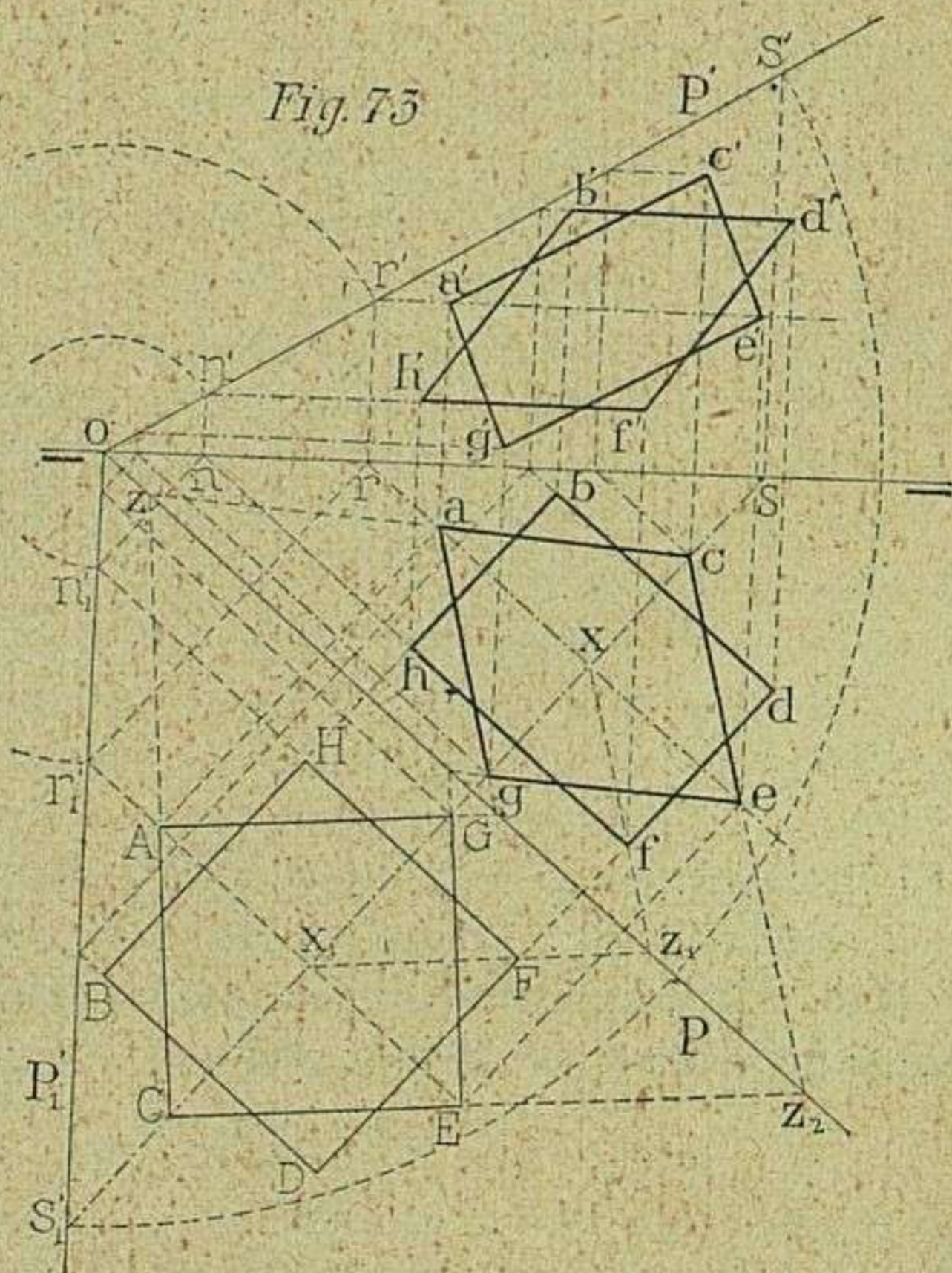
Para conseguir esto, se trazarán por a', b', c' las horizontales $a'n', b'r'$ y $c's'$; se trasladarán los puntos $s' n' r'$, mediante arcos concéntricos en o , sobre la traza R'_1 , sucesivamente en $s'_1 n'_1 r'_1$, y trazando paralelas desde ellos á la traza R , en la intersección respectiva de estas paralelas con las perpendiculares á dicha

traza que pasan por a, b, c , se encontrarán los puntos $a'_1 b'_1 c'_1$, vértices del triángulo abatido sobre el plano horizontal, y presentado en su verdadera magnitud y forma.

73. Del examen de la figura 72 se deduce que se puede resolver el problema prescindiendo de la proyección vertical del triángulo. Basta considerar que un vértice, el a'_1 , por ejemplo, corresponde á otro de un paralelogramo rectángulo, en el que los lados nn'_1 y aa'_1 son perpendiculares á oR , y sus extremos se apoyan; los del primer lado nn'_1 en la línea de tierra y en la traza R_1 , respectivamente, y los del segundo a y a'_1 corresponden á cada uno de los vértices del triángulo proyectado y del abatido. Esto mismo se verifica con los dos vértices restantes b'_1 y c'_1 .

74. **Determinar las proyecciones de un polígono sobre un plano dado por sus trazas** (fig. 73). — Sean P y P' las trazas del plano dado y octógono estrellado el polígono que en él ha de proyectarse. Este problema, inverso del anterior, se resuelve por el mismo procedimiento.

Se comenzará por abatir la traza oP' en oP'_1 sobre el plano horizontal (V. 71). En el plano $P'_1 oP$ se colocará como dato el octógono estrellado $A B C... G H$. De esta proyección se pasará á



la horizontal $a b c \dots g h$, mediante los paralelogramos antes mencionados (V. 23); así, para determinar el punto e , se construirá el paralelogramo $E r'_1 r e$; el a se construirá en el paralelogramo $A r'_1 r a$, y los restantes del mismo modo.

Las proyecciones verticales $a' b' c' \dots g' h'$ se hallarán por medio de horizontales del plano (V. 33); así, por ejemplo, el punto a se determinará por la horizontal $a r - a r'$, y de esta manera los demás $b' c' d' e' \dots h'$.

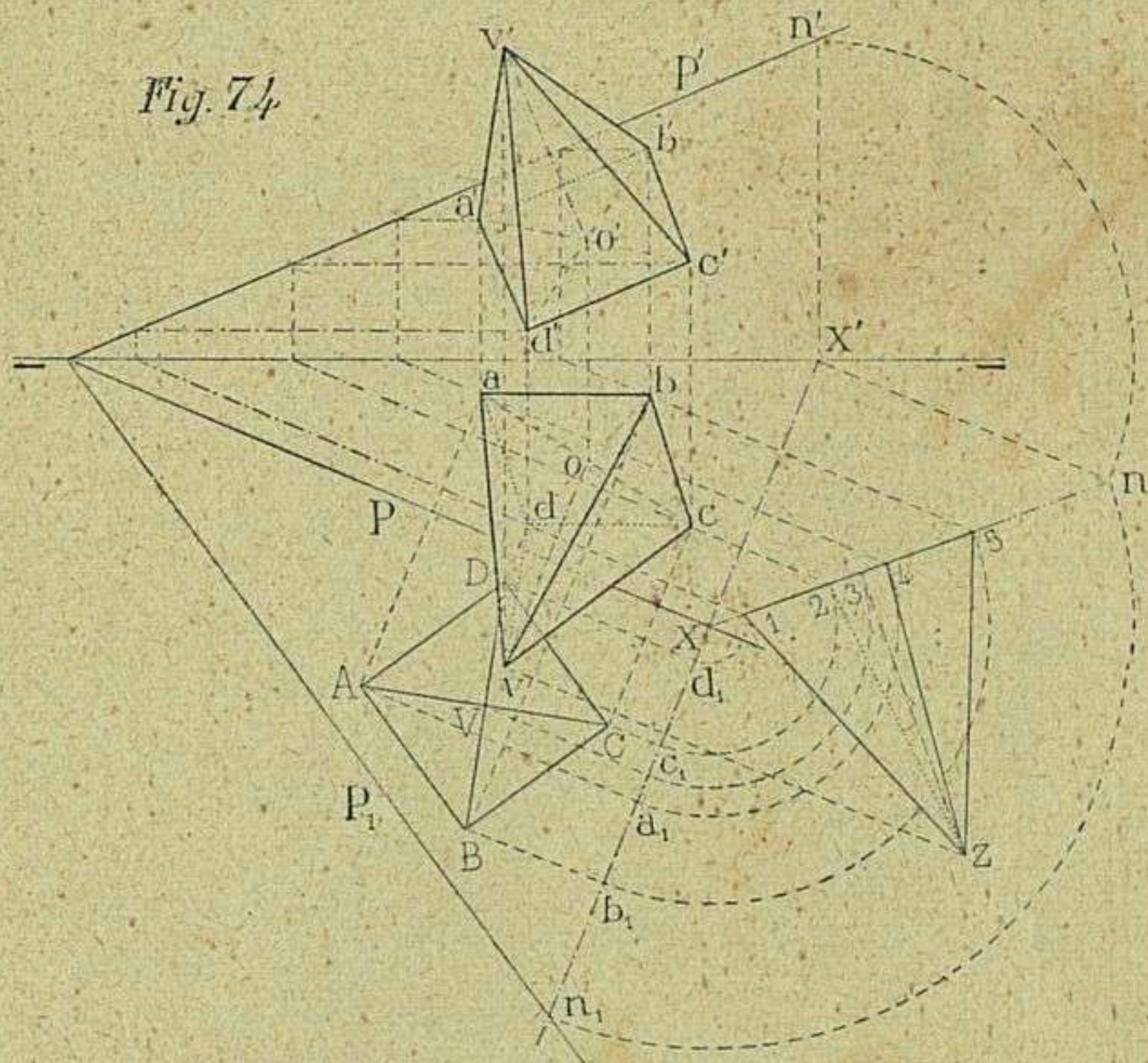
Conviene notar que las prolongaciones de algunos lados, tales como los $C A$ y $c a$, se reúnen en un punto s de la traza $o P$. De esta particularidad se saca partido para simplificar algo las operaciones.

25. Projectar una pirámide recta con la base situada en un plano dado por sus trazas (fig. 74). — Sean P y P' las trazas del plano y P_1 la traza vertical abatida, dando por hecha esta sencilla operación (V. 21). Colóquese como en el ejemplo anterior (V. 24) la planta de la pirámide dato en $A B C D V$ sobre el plano abatido, y el alzado $1, 2, 3, 4, 5, s$ sobre $x n = x n_1$, intersección abatida del plano $P P'$ con el auxiliar secante $x x' n'$.

Para situar el alzado de modo que se corresponda con la planta como es debido, se correrán perpendicularmente los puntos $A B C D$ sobre $x n_1$ en $d_1 c_1 a_1 b_1$. Desde aquí, mediante arcos concéntricos en x , se trasladarán estos puntos sobre $x n$ en $1, 2, 3, 4, 5$, y en el punto 3 se levantará la perpendicular $3 s$, altura de la pirámide, cuyo alzado se terminará trazando las aristas.

Preparada la operación de esta manera, el problema se resuelve con relativa facilidad. Los puntos $a b c d o$ de la proyección horizontal se hallan en las intersecciones respectivas de rectas perpendiculares entre sí, que parten de puntos que se corresponden en el alzado y la planta respectivamente. Por ejemplo, el punto a se encuentra en la intersección de dos rectas; la $A a$, paralela á $x x'$, y la $4 a$, paralela á $P x$.

El punto v , cúspide de la pirámide, se determina en la intersección de $s v$,



paralela á Px con la perpendicular á ésta trazada desde o . Los puntos a, b, c, d , de la base se unirán mediante las aristas con v , y quedará completa la proyección horizontal.

Los puntos $a' b' c' d' o'$ de la proyección vertical se obtienen por medio de horizontales del plano PP' (V. 33) y el v' , por la intersección de la línea de correspondencia vv' con la perpendicular trazada desde o á la traza P' . Ahora se trazan las aristas entre los puntos $a' b' c' d'$ y el v , y el problema queda terminado.

PLANOS TANGENTES Á LOS CUERPOS REDONDOS

36. Entre las superficies curvas que limitan estos sólidos, es necesario distinguir, para ulteriores aplicaciones, las que son regladas de las que no lo son.

Las superficies regladas que forman parte del cilindro y del cono, admiten generatrices rectas, mientras que la esfera y otros cuerpos de revolución, engendrados por líneas curvas, no tienen generatrices rectas.

De aquí se deduce que el contacto de un plano tangente al cilindro ó al cono, se verifica á lo largo de una de sus generatrices, y respecto á la esfera y demás cuerpos similares, en un solo punto.

Sentados estos precedentes, y antes de pasar á resolver problemas, convendrá, además, tener en cuenta:

1.^o Que á lo largo de una generatriz ó en un punto de una superficie curva no reglada, sólo se puede trazar un plano tangente.

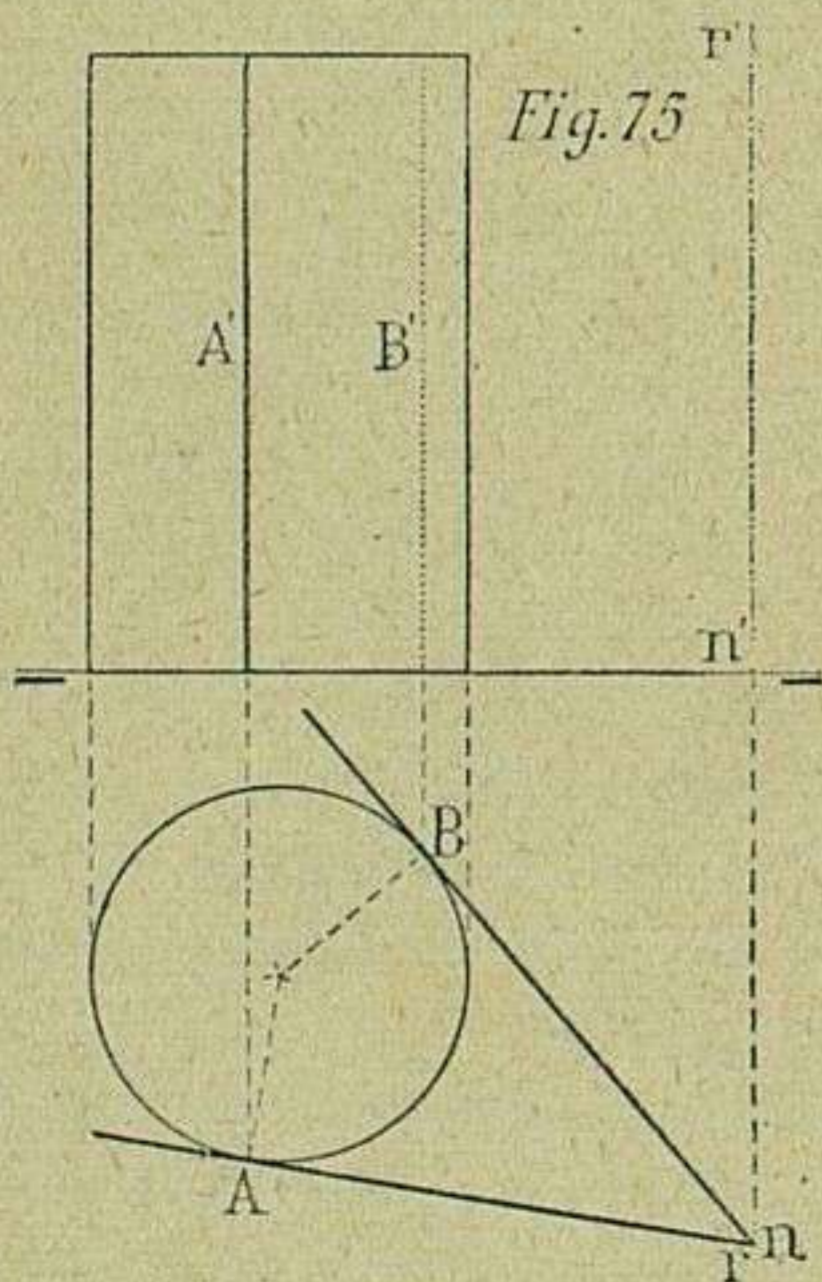
2.^o Que desde un punto fuera se pueden trazar al cilindro, al cono, y á la esfera, dos planos tangentes á cada uno de estos cuerpos.

3.^o Que la intersección de cada par de planos tangentes, conteniendo el punto dado, será paralela á las generatrices de contacto en el cilindro, y pasará por el vértice en el cono.

Á esto se reduce lo más esencial de la teoría de planos tangentes.

37. Trazado del plano tangente en un punto del cilindro (fig. 75).—Sean $A - A'$ las proyecciones del punto dado sobre el cilindro de revolución que se muestra en la figura 75.

Teniendo en cuenta que cuando dos rectas se cortan constituyen un plano, el tangente propuesto quedará determinado con



la generatriz que pasa por A' y la tangente á la circunferencia de la base del cilindro trazado en A , punto que corresponde á la proyección horizontal de la generatriz de contacto.

78. Trazado de planos tangentes al cilindro desde un punto exterior (fig. 75). — Sean $r - r'$ las proyecciones del punto, y $AB - A'B'$ las de un cilindro recto de revolución.

Por el punto r' se traza, paralela á las generatrices del cilindro, la recta $r'n'$, cuya proyección horizontal corresponde en rn . Desde este punto (pues los rn se confunden en uno solo), se trazarán á la circunferencia base del cilindro las tangentes en A y en B (V. **62**, primera parte), desde las cuales se alzarán en proyección vertical las correspondientes generatrices de contacto A' y B' .

Los planos tangentes están representados por la recta $nr - n'r'$, intersección común de los dos, y por las tangentes nA, nB , trazas horizontales de cada uno de ellos.

79. Determinación de planos tangentes, comunes á dos cilindros (figura 76). — Sean $GE - G'E'$ y $FH - F'H'$ las proyecciones respectivas de dos cilindros rectos de revolución. La operación en este caso se reduce á trazar en EF y GH rectas tangentes exteriores, comunes á las dos circunferencias (véase **66**, primera parte), bases respectivas de cada cilindro, y á levantar las generatrices de contacto G' y E' del primer cilindro, F' y H' del segundo.

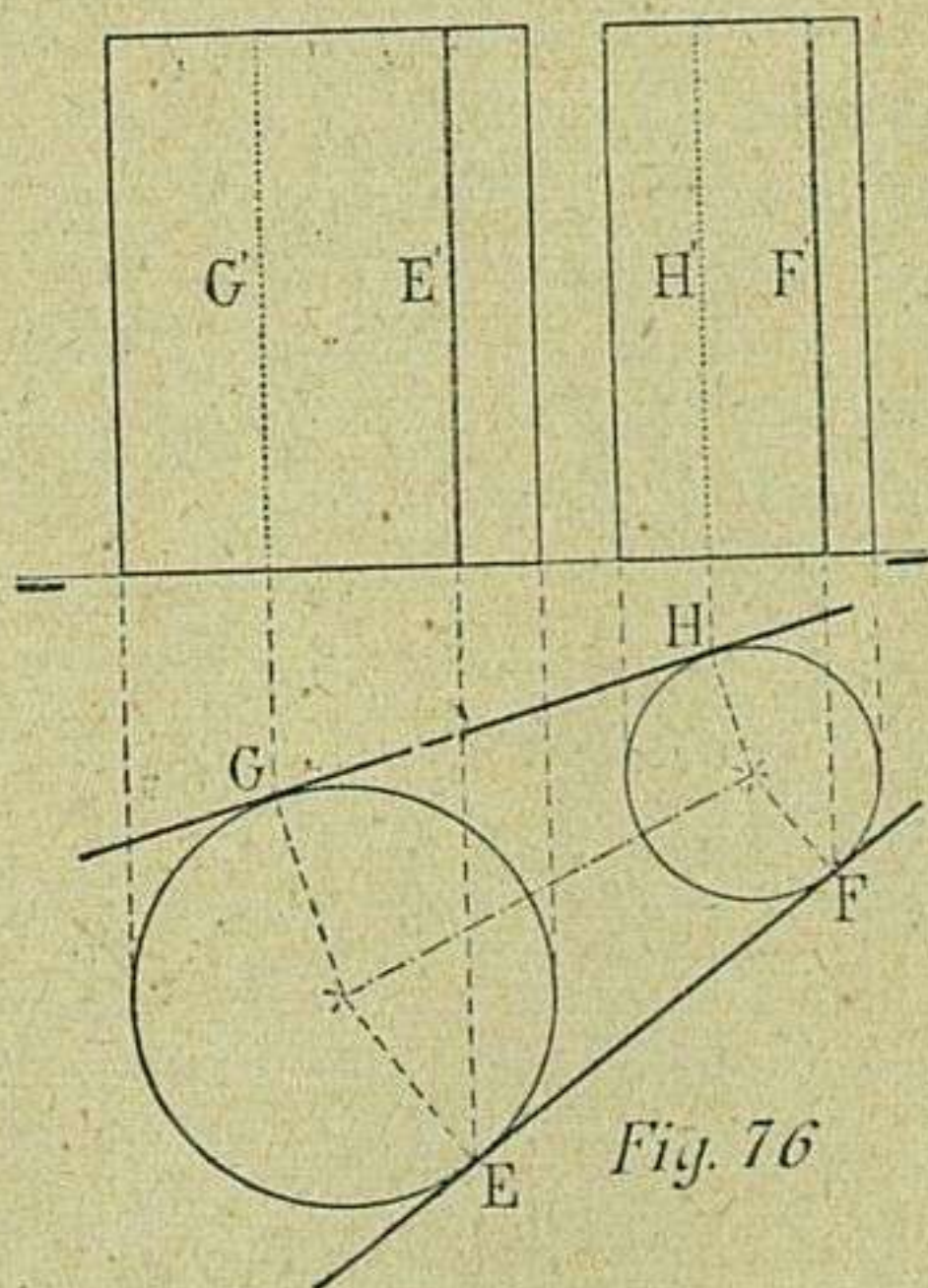


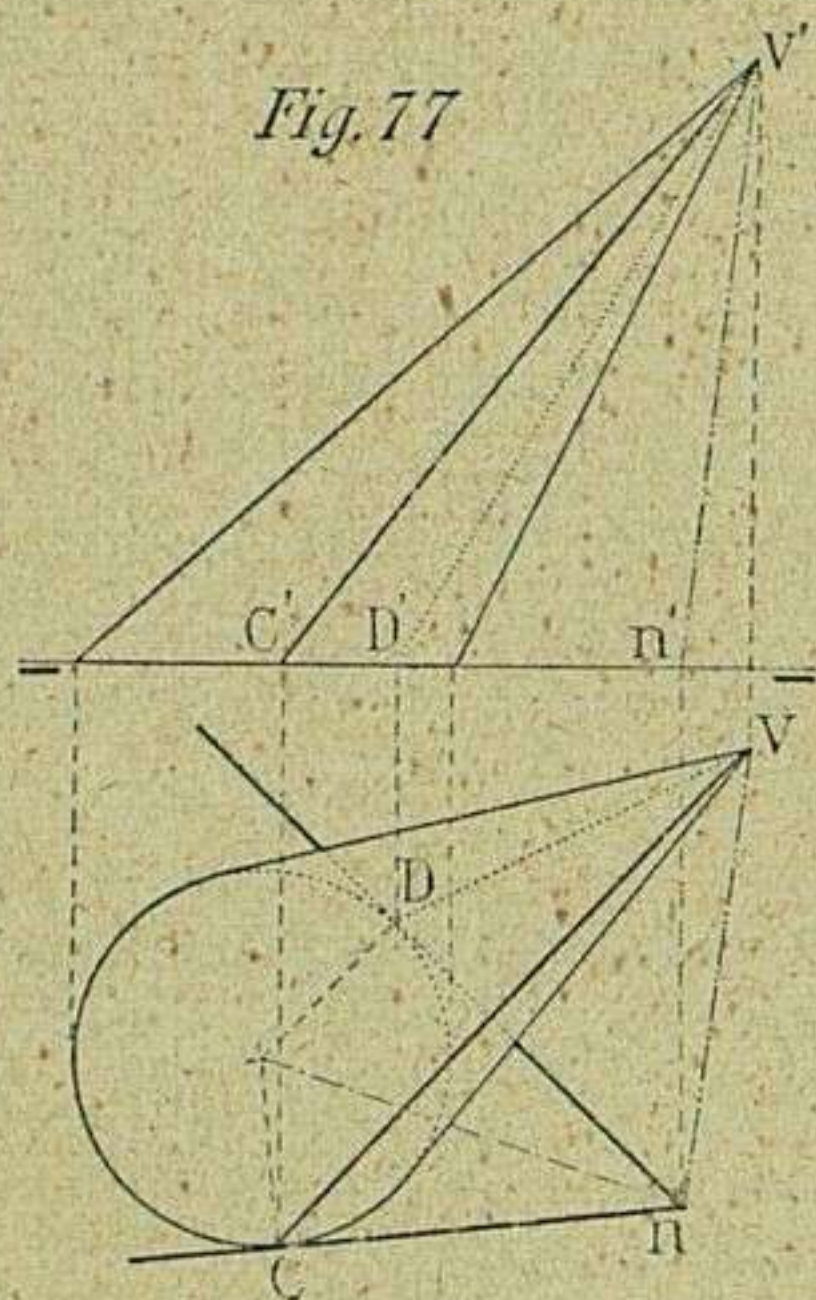
Fig. 76

Las generatrices E' y F' constituyen juntamente con la traza EF el plano tangente anterior, y los G' y H' el plano tangente posterior cuya traza es GH .

Si los planos tangentes que se piden hubieran de ser tangentes interiores, la única variación que debería introducirse sería la de trazar tangentes inte-

teriores á las dos circunferencias (véase 66, primera parte) de las bases correspondientes á los cilindros.

80. Plano tangente en un punto del cono (fig. 77).—Sean $C - C'$ las



proyecciones del punto dado. La generatriz de contacto en el caso presente será la recta que, pasando por $C - C'$, termina en $v - v'$, vértice del cono; la cual, en unión de la tangente en C á la circunferencia base del cono, constituyen el plano tangente propuesto.

81. Trazado de planos tangentes al cono desde un punto fuera de él (fig. 77).—

Sea el mismo cono representado en la figura 77, y $n - n'$ las proyecciones del punto exterior. Desde n se trazarán á la circunferencia de la base las tangentes $n C$ y $n D$, y desde C y D respectivamente las generatrices de contacto $C v - C' v'$ y $D v - D' v'$. La recta $n v - n' v'$ representa la intersección de los dos planos tangentes.

Dichos planos tangentes están representados por el triángulo $v C n$, el anterior, y por el $v D n$ el posterior.

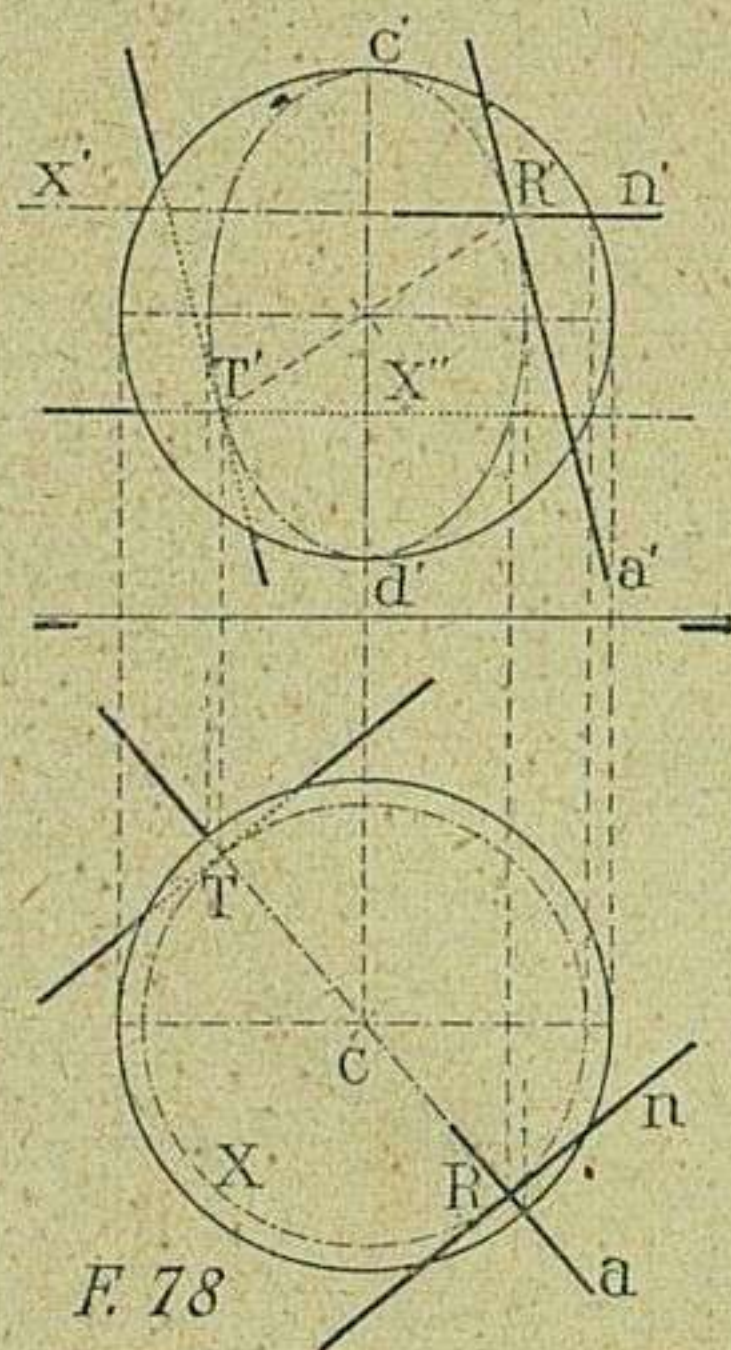
Las tangentes $n C$ y $n D$ representan las respectivas trazas horizontales de cada uno de los citados planos.

82. Determinación del plano tangente en un punto de la esfera (fig. 78).—Sean

$R - R'$ las proyecciones del punto dado sobre la esfera. Córtese ésta según el paralelo X' que pasa por R' , cuya proyección horizontal corresponde á la circunferencia $T X R$. En el punto $R - R'$ trácese la tangente $n R - n' R'$ á dicha circunferencia.

Vuélvase á seccionar la esfera por el plano meridiano $c T R - c' T' d' R'$, que pasa por $R - R'$, y determinese en este punto la tangente $a R - a' R'$ á la elipse $c' T' d' R'$ (V. 90, primera parte, ó 93 de la segunda edición). El plano tangente quedará suficientemente determinado por las rectas $R a - R' a'$ y $R n - R' n'$, que, como se ha visto, son á su vez tangentes en $R - R'$ á las respectivas secciones causadas por los planos paralelo y meridiano.

Un plano tangente trazado en $T - T'$, punto opuesto al $R - R'$, será paralelo al anterior, y quedará determinado por dos rectas respectivamente, paralelas á las $R n - R' n'$ y $R a - R' a'$.



SECCIONES PLANAS Y DESARROLLOS

83. Se entiende por sección plana en un cuerpo, el corte producido por un plano que, al dividirlo, produce dos planos limitados iguales, cuya forma depende de la dirección del plano secante respecto de las aristas, si es poliedro, ó en relación con las generatrices y eje, si es cuerpo redondo.

La materia de que se trata no aparece por primera vez en esta obra; tanto es así, que el contenido de los números **39** al **44**, ambos inclusive, puede considerarse como un avance de las secciones planas. La diferencia, si la hay, es poca ó ninguna; allí se trata de intersecciones de planos, ó sea de secciones entre planos, y aquí de secciones de planos combinados, formando la superficie externa de los cuerpos. En el primer caso, el resultado de la sección es una línea, y en el segundo varias líneas, que forman el polígono correspondiente al contorno de la sección.

84. Desarrollar un cuerpo es acoplar sobre un plano la superficie exterior del mismo, ya sea poliedro ó cuerpo redondo desarrollable. Ya se sabe que sólo el cilindro y el cono son desarrollables.

En los poliedros, la operación consiste en ensamblar sobre un plano todas las caras componentes de su superficie, y en los cuerpos redondos desarrollables (1), en colocar sobre un plano todas las generatrices rectas sin que la superficie sufra el más mínimo aumento ó disminución en su medida, ni más variación que la originada por el cambio de lugar en algunos de sus elementos.

Ya en los números **61**, **62**, **63**, **64** y **65** se practican las primeras nociones en los desarrollos de los poliedros regulares, problema en este caso de fácil resolución, reducido al ensamble de polígonos regulares é iguales sobre un plano. Pero cuando se trata de prismas y pirámides, ó cilindros y conos, el problema ofrece más complicación, aumentando ésta cuando los cuerpos están seccionados por planos.

Las dificultades que trae consigo la resolución del problema en aquellos casos más típicos, aparecen allanadas en los siguientes ejemplos:

85. Sección y desarrollo de un prisma recto (fig. 79). — Sea un paralelepípedo recto, seccionado por un plano $P P'$, perpendicular al vertical de proyección.

(1) No se consideran como desarrollables, la esfera y otros cuerpos análogos por carecer de generatrices rectas.

La sección proyectada en $abcd - a'b'c'd'$, aunque se sabe que es un cuadrilátero, no da idea de su verdadera magnitud. Ésta se obtiene en $A B C D$ por el abatimiento del plano secante $P n P'$ sobre el plano vertical (véase 71).

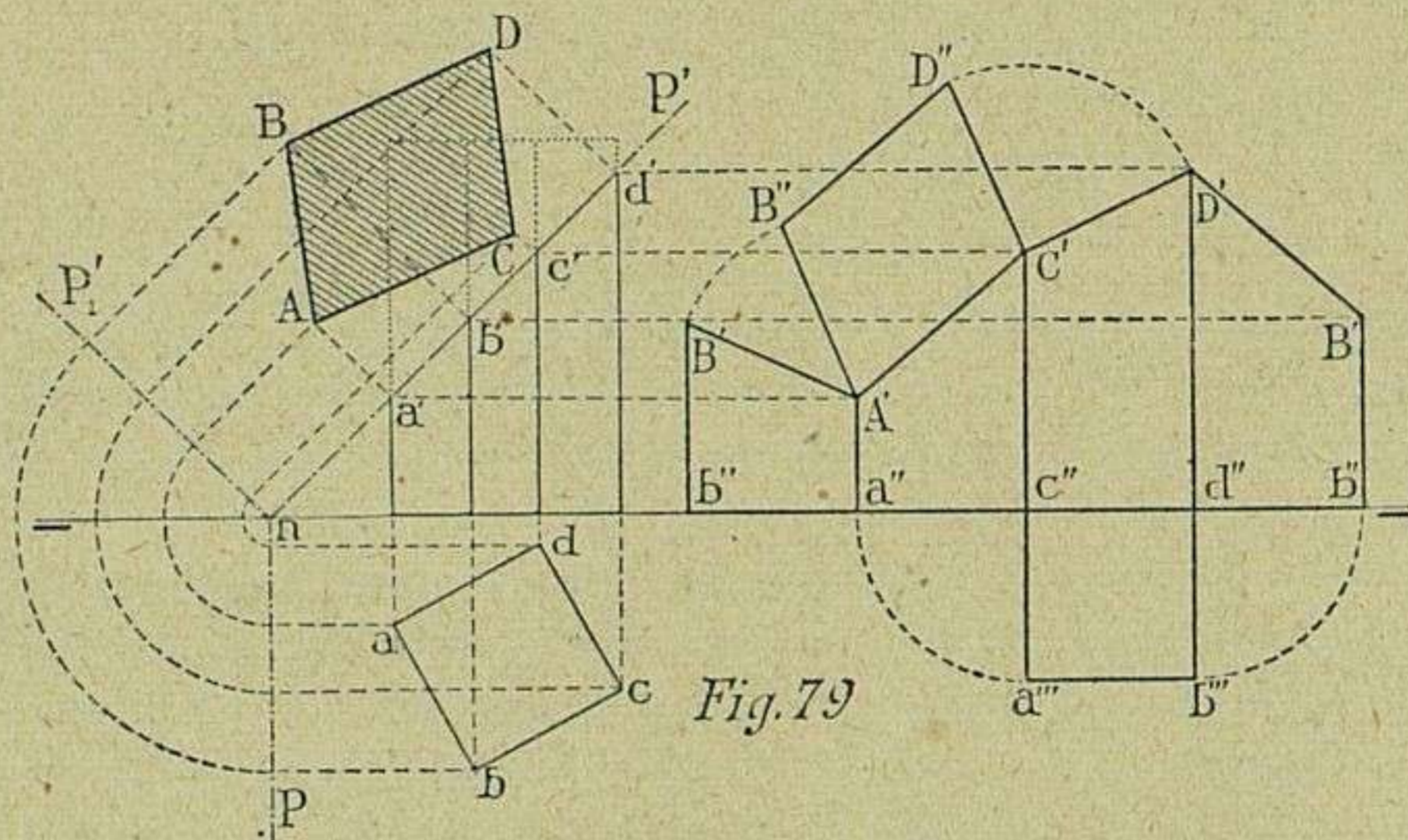


Fig. 79

Desarrollo. — El desarrollo del tronco del prisma comprendido entre la base $abcd$ y la sección, se obtiene colocando sobre una línea recta en $b'' a'' c'' b''$, el perímetro $bcda$ del cuadrado de la base, y levantando perpendiculares en los puntos b'' , a'' , c'' , d'' y b'' , sobre las que se colocan las alturas $b'' B'$, $a'' A'$, $c'' C'$ y $d'' D'$, correspondientes á las respectivas aristas laterales, que por ser paralelas al plano vertical se proyectan sobre él en su verdadera magnitud. Los extremos de estas perpendiculares se unirán por la línea poligonal $B' A' C' D' B'$, que se llama *transformada*. Por último, se añadirán en $c'' d''$ el cuadrado $abcd$, correspondiente á la base, y en $A' C'$ el romboide $A B C D$, verdadera magnitud de la sección.

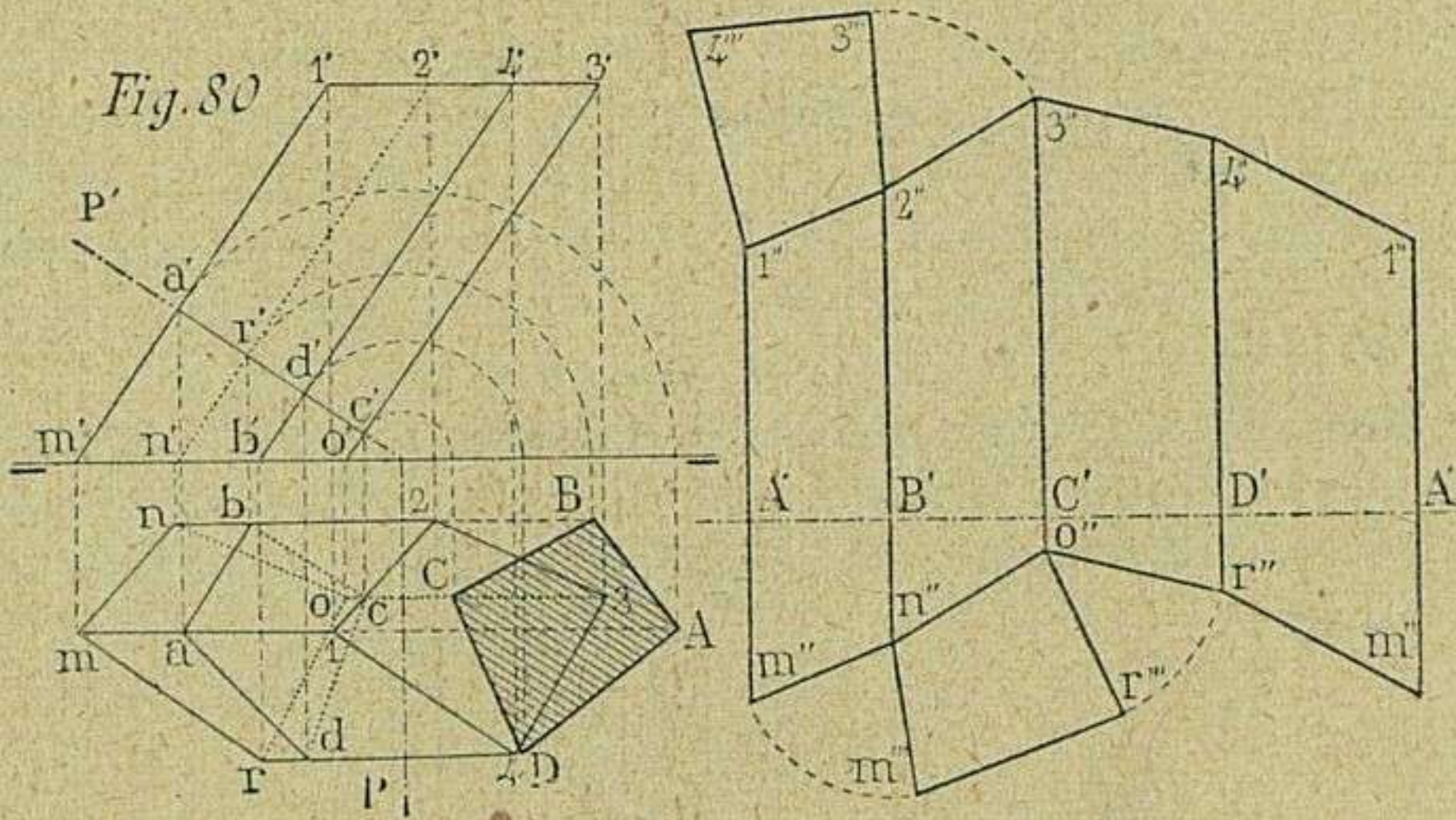
86. Determinación de la sección recta en un prisma oblicuo y desarrollo (fig. 80). — Sea un prisma oblicuo dado por sus proyecciones, cuyas aristas laterales son paralelas al plano vertical, y $P P'$ las trazas del plano secante.

Se llama *sección recta* á la que se produce por un plano perpendicular á las aristas laterales de un prisma ó á las generatrices de un cilindro.

En el primer caso se encuentra la sección originada por el plano $P - P'$ perpendicular á las aristas del prisma.

Tiene la propiedad la *sección recta* de que su *transformada* sea una línea recta, á la que permanecen perpendiculares en el desarrollo las aristas laterales ó las generatrices, según se trate de un prisma ó de un cilindro. Esta propiedad se aprovecha para verificar los desarrollos de prismas ó cilindros oblicuos con relativa facilidad, pues de otro modo sería necesario hallar la verdadera magnitud de las caras laterales, mediante giros ó abatimientos sucesivos.

Determinada la sección en $a b c d - a' b' c' d'$ y hallada su verdadera magnitud por abatimiento del plano secante $C D A B$ (V. 72), puede procederse al desarrollo completo del prisma.



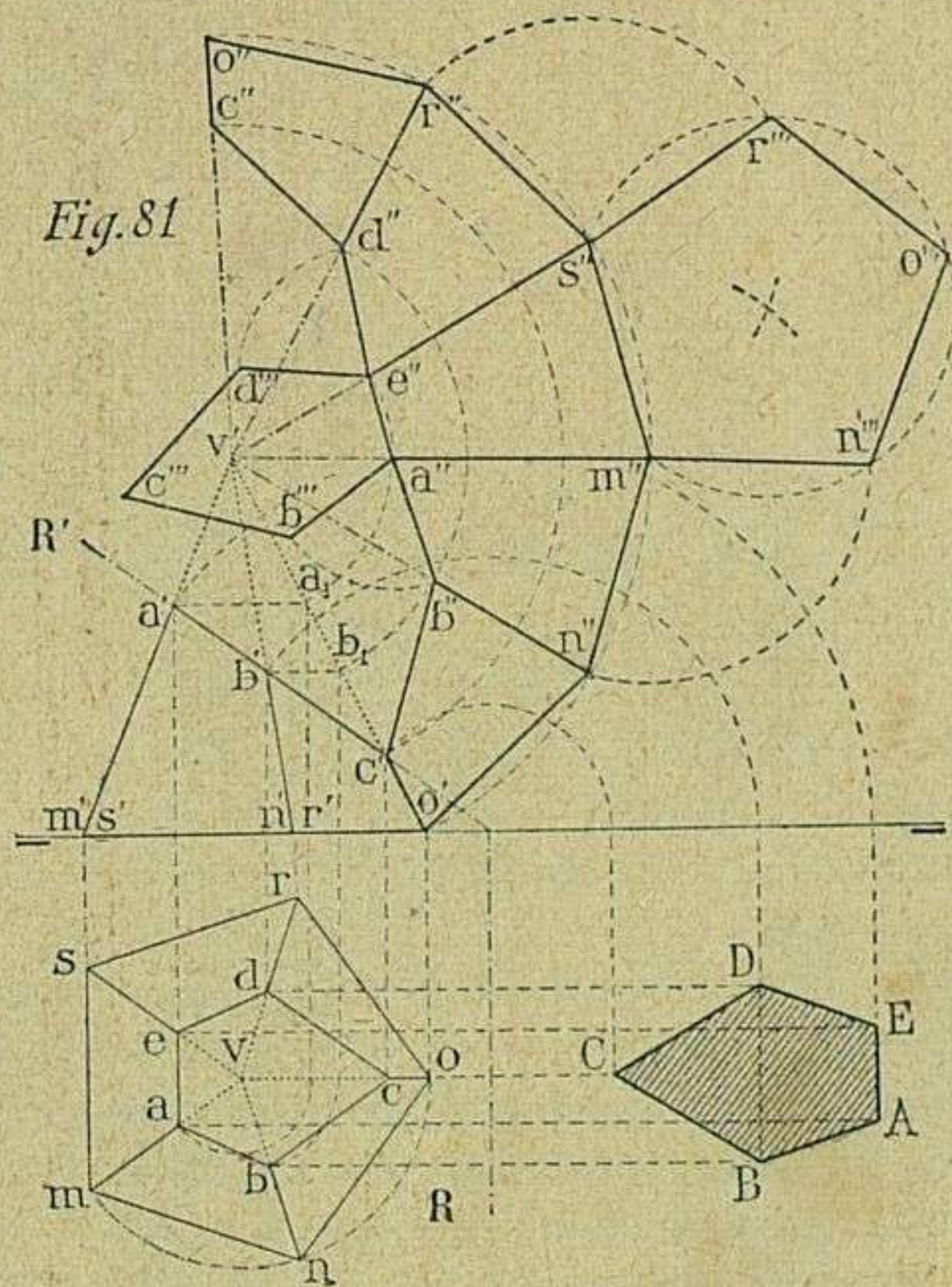
Para ello, se colocará el perímetro $A B C D$ sobre $A' B' C' D'$ en línea recta. Por estos puntos se trazarán perpendiculares, y siguiendo la marcha del problema anterior, se tomarán á uno y otro lado de la transformada los extremos de las aristas laterales, puntos que, unidos por las respectivas líneas poligonales $m'' n'' o'' r'' m''$ y $1'' 2'' 3'' 4'' 1''$, darán la superficie lateral, á la que se agregarán para completar el desarrollo, en lugar oportuno, cada una de las bases $m''' n''' o''' r'''$ y $1''' 2''' 3'''$ y $4'''$.

87. Sección y desarrollo de una pirámide (fig. 81).

— Sea una pirámide pentagonal recta, y R, R' , las trazas del plano secante.

La sección producida, según el plano secante $R R'$, perpendicular al horizontal de proyección, es un pentágono representado por $a b c d e - a' b' c' d' e'$, cuya verdadera magnitud $C B A E D$, se ha obtenido por abatimiento del plano secante sobre el horizontal de proyección (V. 72).

Desarrollo del tronco. — Con radio $v o'$, verdadera magnitud de una arista,



la única paralela al plano vertical, se describirá desde o un arco de circunferencia, sobre el que se colocarán en $o' n'' m'' s'' r'' o''$ los lados del pentágono de la base, puntos desde los que se trazarán las aristas que concurren en o , correspondiente á la cúspide.

Las verdaderas magnitudes de los segmentos de arista $b'' n''$, $a'' m''$, etc., se determinan mediante giros (V. 66) en $o' b_1$, $o' a_1$, etc., precisamente sobre la arista $vo - v'o'$, paralela al plano vertical.

Después de trazar la transformada $c' b'' a'' e'' e''$, se terminará este desarrollo con la adición de la base $m n o r s$ en $m'' n''' o''' r''' s''$, y la verdadera magnitud de la sección $A E D C B$ colocada en $a'' e'' d''' c''' b'''$.

SS. Desarrollo de una pirámide oblicua (fig. 82). — El desarrollo de esta pirámide se llevará á término, construyendo uno tras otro los triángulos $V' D E$, $V E N$, etc., á la que se agregará el polígono de la base en $A B_1 C_1 D_1 E_1 N$.

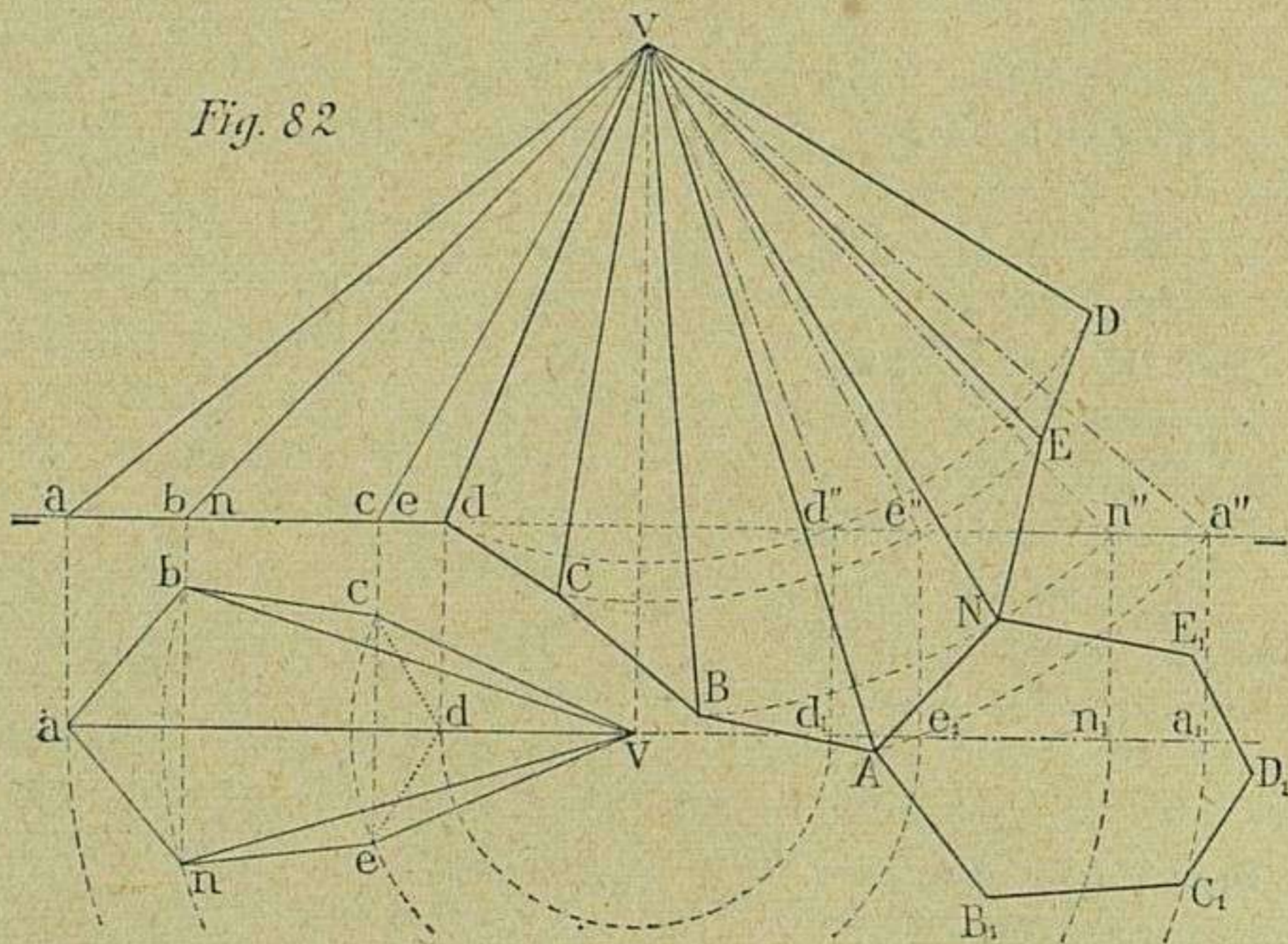


Fig. 82

Como entre los datos precisos para la construcción de estos triángulos se cuentan las aristas laterales, y éstas (excepto las $va - v'a'$ y $vd - v'd'$), no se proyectan en su verdadera magnitud, se procederá á determinarla en cada una, colocando, mediante giros (V. 66), las $vn - v'n'$, $ve - v'e'$, etc., paralelas al plano vertical en $vn_1 - v'n''$ y $ve_1 - v'e''$.

Teniendo en cuenta que el desarrollo lateral, por la estructura de la pirámide, resulta simétrico, puede esta circunstancia aprovecharse, reproduciendo simétricamente la mitad $v' A D$, al otro lado del eje $v' A$, sin necesidad de más operaciones.

89. Sección y desarrollo de un cilindro (fig. 83). — Sean P y P' las trazas del plano secante oblicuo á los de proyección y, por otra parte, el cilindro recto de revolución con las generatrices paralelas al plano vertical.

Siendo el cilindro y prisma dos cuerpos semejantes en su estructura, las operaciones de sección y desarrollo deben seguir igual camino en el uno que en el otro, sin otras diferencias que las de tomar las generatrices como aristas, rectificar la circunferencia de la base $a b c d$, equivalente á la longitud de la sección recta desarrollada, y la de substituir la transformada poligonal del prisma por la curva $c' 2_1 c_1$ en el actual cilindro.

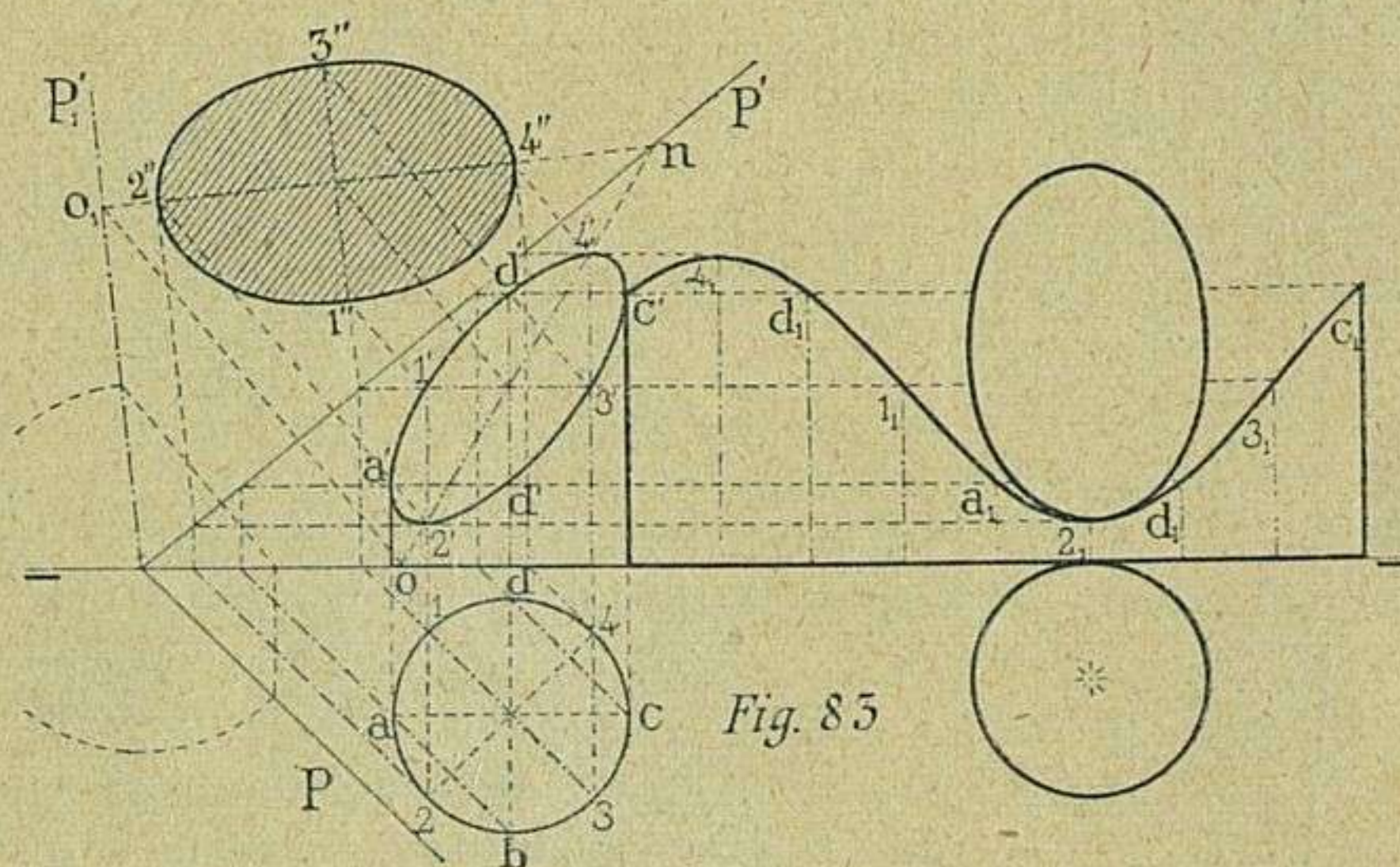


Fig. 85

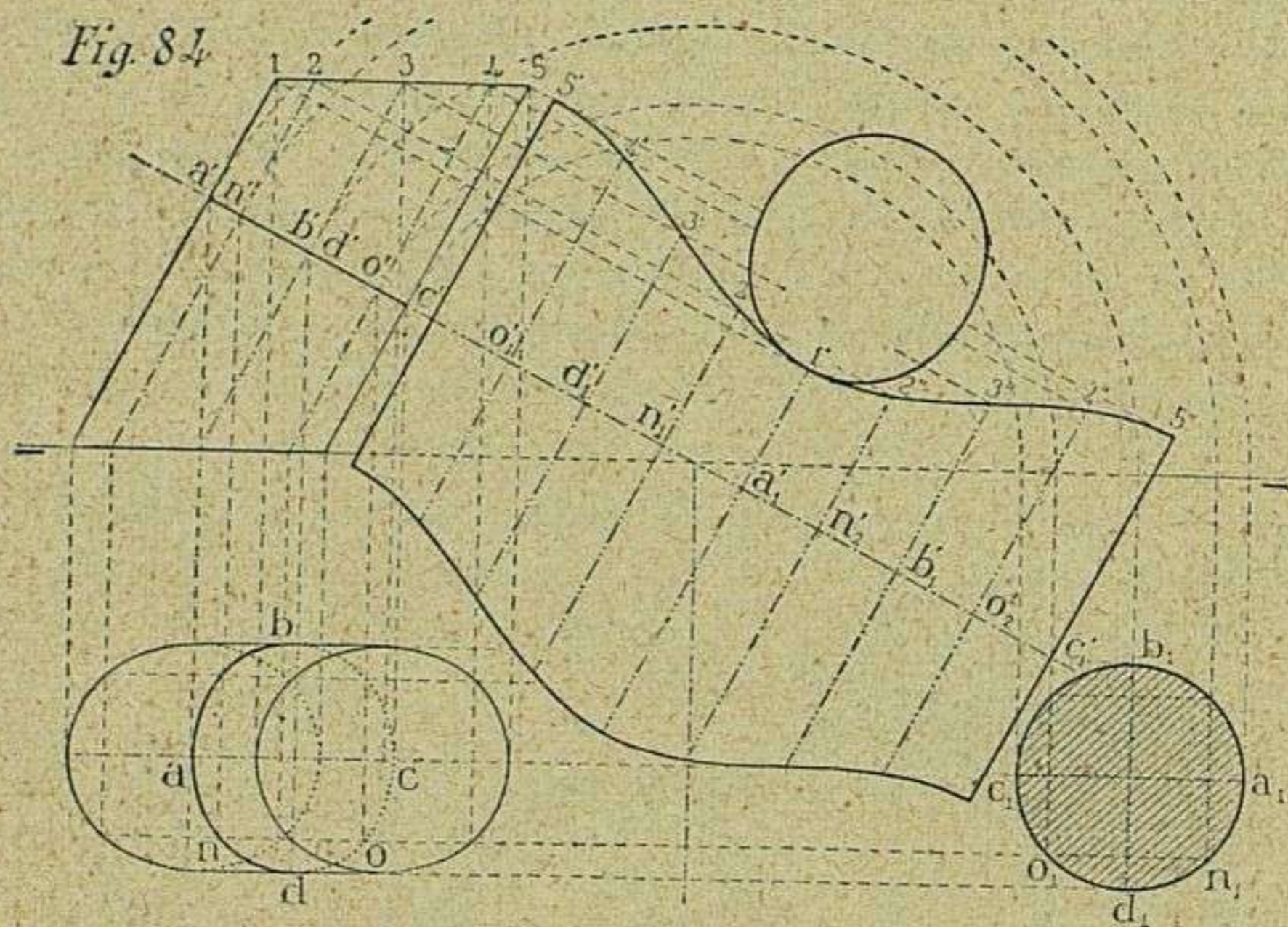
Aparte de esto, conviene notar que el contorno de la sección resulta ser una elipse en la que los diámetros conjugados corresponden en sus extremos á los puntos $1' 3'$ y $2' 4'$, que se han determinado por horizontales del plano $P P'$ (V. **33**). Esta particularidad permite trazar la elipse directamente (véase **90**, primera parte), y sin necesidad de más datos.

También es digno de notarse que en la operación de abatir el plano $P P'$, los diámetros conjugados $1' 3'$, $2' 4'$ de la sección se convierten en los ejes $1'' 3''$, $2'' 4''$, al pasar á verdadera magnitud de la citada elipse, y que cada par, compuesto de diámetro y eje, tienen su punto de reunión, tal como los n y m , en la traza charnela P' . De todo esto, como en la figura se ve, puede sacarse algún partido para resolver el problema con sencillez y exactitud.

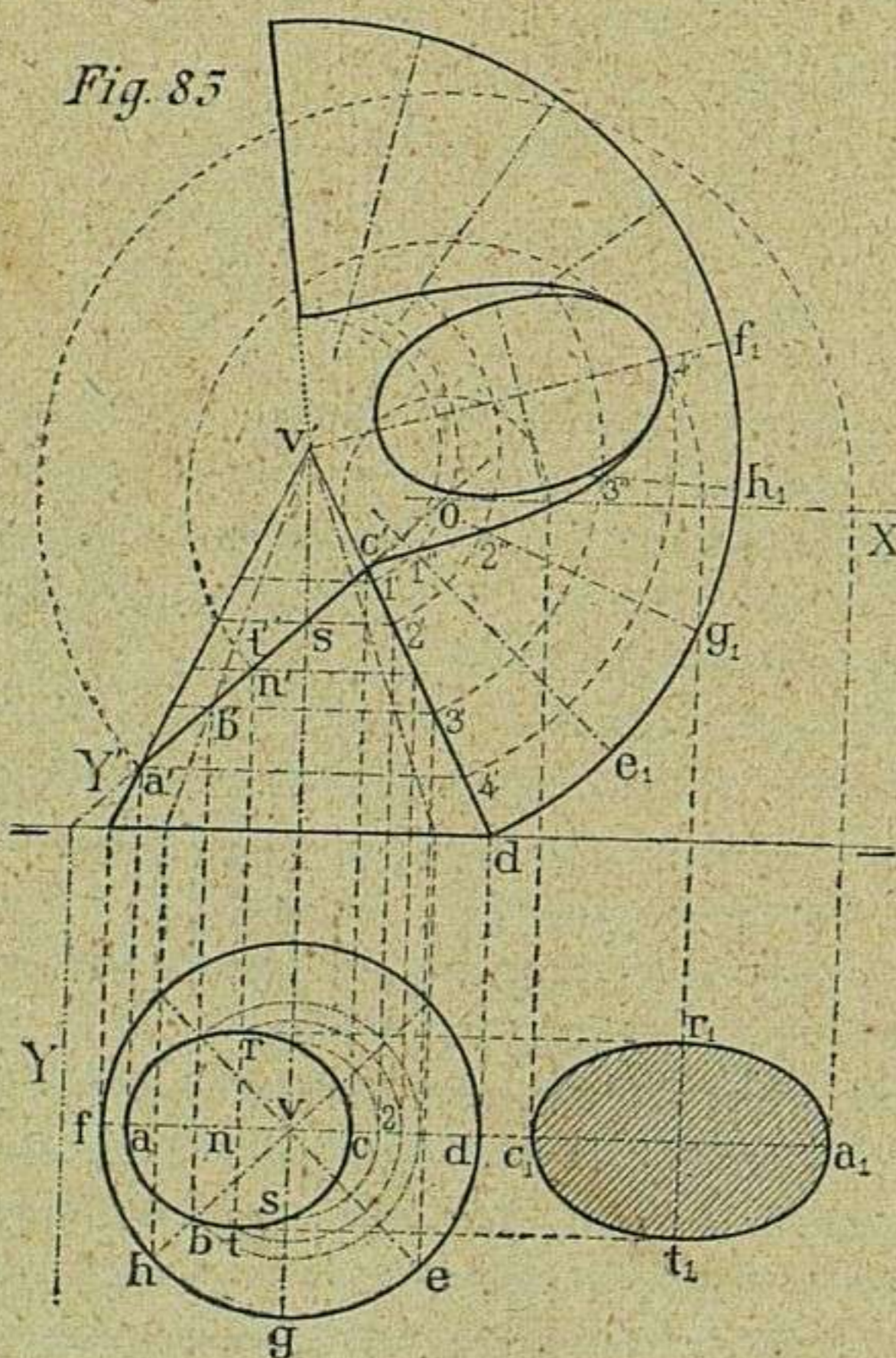
90. Desarrollo de un cilindro oblicuo de revolución (fig. 84). — Se conoce que el cilindro dado es de revolución, en que la verdadera magnitud $a_1 b_1 c_1 d_1$ de la sección recta $a' c'$, resulta círculo. De aquí que, cuando se quiera representar un cilindro de revolución, se tomará por diámetro del círculo de la sección la perpendicular $a' c'$, comprendida entre las dos generatrices del contorno aparente del cilindro, ó también la $b d$, paralelas ambas á sus respectivos planos de proyección.



Dadas las semejanzas y parentesco entre el prisma y cilindro oblicuos, es



lógico que la marcha seguida y procedimientos empleados para dar solución al



problema en uno y otro caso, sean los mismos. Por consiguiente, rectifíquese la circunferencia $a_1 b_1 c_1 d_1$ (V. 58, primera parte), procedente de la sección recta $a' e'$; colóquese de e' en e'_1 con los puntos $o'_1 d'_1 n'_1 a'_1 n'_2 b'_2 o'_2$, igualmente distanciados; trácense por ellos las generatrices perpendiculares al desarrollo, de la sección. y, en una palabra, llévase á cabo todas las operaciones indicadas para el desarrollo del prisma oblicuo (V. 86).

91. Sección del cono de revolución por un plano que corte á todas las generatrices y desarrollo (fig. 85).—Sean un cono de revolución dado por sus proyecciones y el plano secante por las trazas $Y Y'$.

Se procederá de igual manera que en la sección y desarrollo de la pirámide (V. 87); en la del cono se obtendrá una elipse con sus ejes co-

rrespondientes. El eje menor se halla proyectado sobre el plano vertical en

$t' n'$, punto medio de $a' c'$, y sobre el horizontal en $t r$, y el mayor en $a c$ — $a' c'$, datos suficientes para construir la elipse (V. **82**, primera parte):

La verdadera magnitud de la sección abatida sobre el plano horizontal (haciendo centro en o), es otra elipse dada por los ejes $e_1 a_1$ y $t_1 r_1$, que se traza ó construye como la anterior.

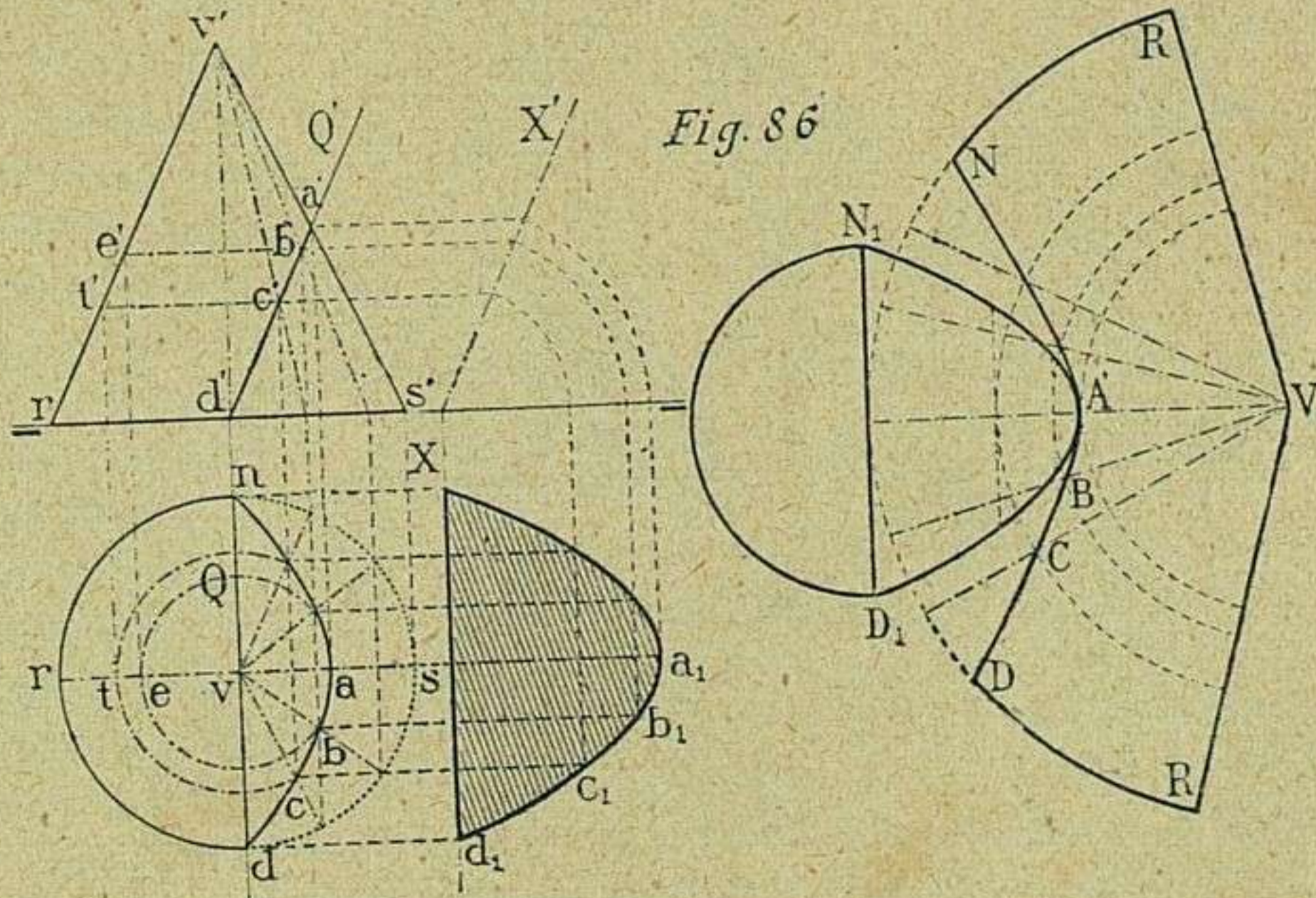
Desarrollo. — Desde v , como centro, con radio $v d$, se describe un arco, en el que se colocarán, una tras otra, $d e_1, e_1 g_1, g_1 h_1$, etc., las ocho partes iguales en que se ha dividido la circunferencia de la base. Partiendo de cada punto $e_1 g_1 h_1$, etc., se trazarán las generatrices, y tomando nuevamente centro en v , se describirá un arco que, partiendo desde $4'$, determine en su intersección con la generatriz $f_1 v$, el punto $4''$; luego otro que, partiendo de $3'$, determine el $3''$ en la generatriz $h_1 v$, y así los $2'', 1''$, que juntamente con el c' corresponden á la mitad de la transformada, que por ser simétrica puede sencillamente completarse al otro lado del eje de simetría $v f_1$.

Los segmentos de generatriz $4'' f_1, 3'' h_1, 2'' g_1$, etc., están desarrollados en su verdadera magnitud, porque la generatriz $d v'$, de donde proceden, es paralela al plano vertical de proyección.

El desarrollo del cono se completa agregando oportunamente la sección en su verdadera magnitud, y el círculo de la base, omitido este último en la figura por evitar que ocupe mayor extensión.

92. Sección del cono de revolución por un plano paralelo á una de las generatrices, y su desarrollo (fig. 86).

Sean el cono de revolución proyectado y un plano secante $Q Q'$ paralelo á la generatriz $r v'$.



La sección proyectada horizontalmente en $d a n$ es una parábola á la que en proyección vertical corresponde $a' d'$.

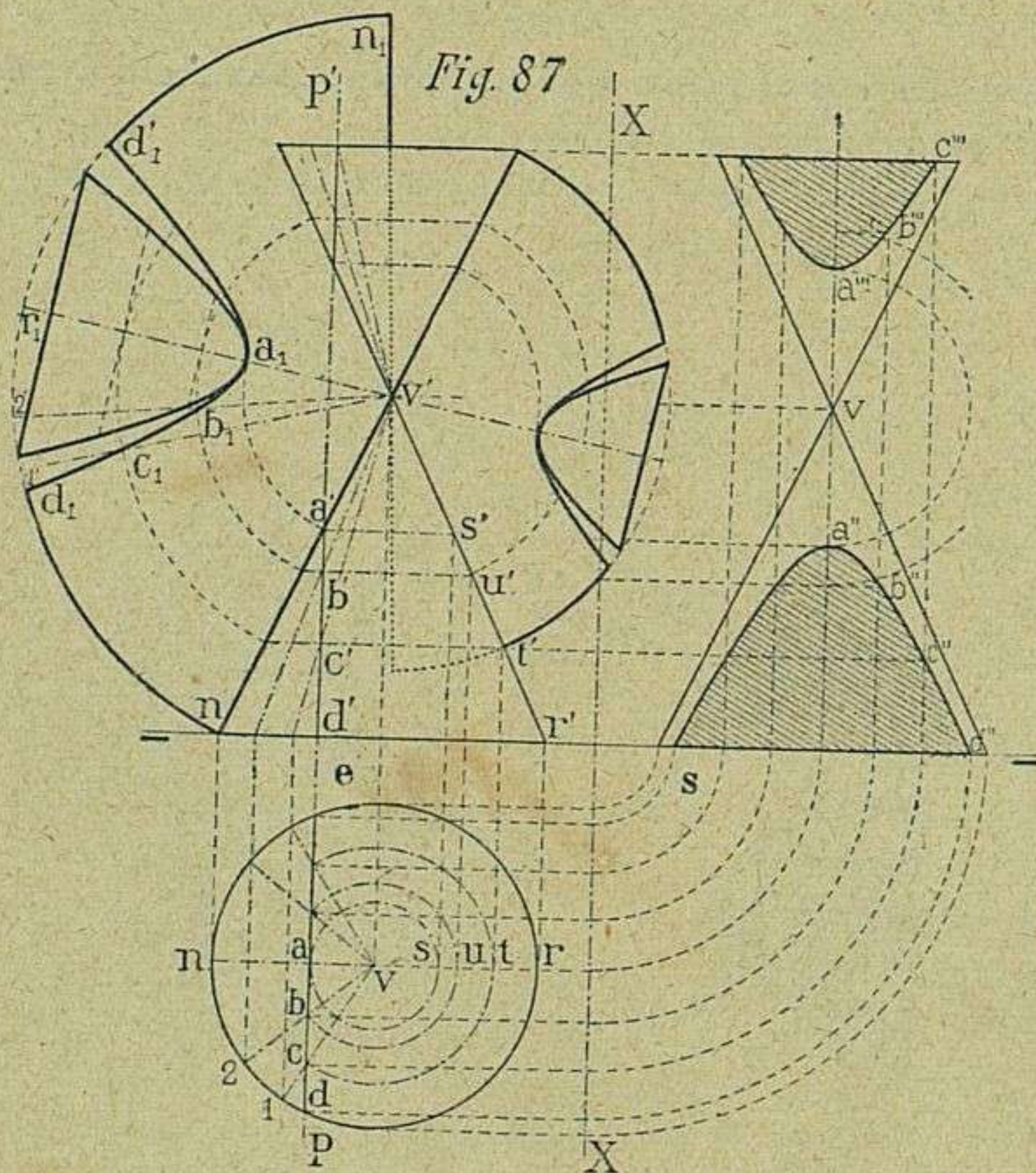
El punto $a - a'$ se halla situado en la intersección de la generatriz $v s$ — $c' s'$ con el plano $Q - Q'$. Otros puntos de la curva, los b, c , se obtienen por

medio de planos auxiliares secantes paralelos al horizontal que pasan por los puntos e' y t' ; ó también por las intersecciones de generatrices con el plano $Q - Q'$, á semejanza de como se ha hallado el punto $a - a'$.

La verdadera magnitud de la sección se determina abatiendo sobre el plano horizontal de proyección el plano $X - X'$ paralelo al $Q - Q'$, que se ha corrido un poco hacia fuera para evitar confusión en el trazado.

Desarrollo. — El desarrollo de la superficie curva con las generatrices en ella contenidas, se hace en la misma forma que el anterior (V. 91). Los puntos $A'BC$ por donde pasa la mitad de la transformada, se obtienen por intersecciones respectivas de las generatrices con los arcos descritos desde V con radios $VA' = v'a'$, $vB = v'e'$ y $VC = v't'$. El punto D se halla sobre el arco descrito con radio $VR = v'r'$, á una distancia RD equivalente á la cuarta parte rd de la circunferencia de la base del cono. La otra mitad del desarrollo se reproduce simétricamente, con relación al eje $A'V$, y se le añade, tangente en A' la verdadera magnitud de la sección, que al unirse por la arista $N_1 D_1$ al semicírculo de la base del cono, completan el desarrollo total.

93. Sección del cono de revolución por un plano paralelo al eje y su desarrollo



(fig. 87). — Sean dos conos de revolución engendrados por la misma generatriz y seccionados por el plano $P - P'$ paralelo al eje común. La sección en este caso es hipérbola, una de cuyas ramas tiene su proyección vertical en $a' d'$, y lo horizontal en $d a e$.

La proyección vertical de la sección en verdadera magnitud se representa por $s a'' d''$, abatiendo el plano que la contiene sobre el vertical de proyección.

Los planos auxiliares horizontales tra-

zados por $a' b' c'$ sirven, en su intersección con las aristas $v 1, v 2, v n$, no sólo para determinar los puntos $a b c$ de la proyección horizontal, sino que además, prolongados hacia el plano abatido en la proyección vertical, deter-

minan, en la intersección con las líneas de correspondencia respectivas que tienen su origen en $abcd$, los $a'' b'' c'' d''$, puntos por donde pasa la mitad de la rama inferior de la hipérbola. La otra mitad se reproducirá simétricamente, respecto al eje a'' y a''' , y la rama superior se reproduce también simétrica al otro lado del eje $v'v$.

Desarrollo. — Para verificarle deben repetirse las operaciones indicadas en el problema anterior (V. 91), teniendo á la vista la marcha seguida por las líneas auxiliares y la notación correspondientes á la figura 87.

94. Además de la importancia que la resolución de los anteriores problemas (V. 91, 92 y 93) tienen como ejercicios prácticos, hay particularidades en ellos que no deben pasar desapercibidas.

Nótese que, según la posición del plano secante respecto al eje ó respecto á las generatrices, el contorno de la sección podrá ser, respectivamente, circunferencia, elipse, parábola ó hipérbola.

El conocimiento por adelantado de la existencia de cualquiera de estas curvas, en especial la elipse, es de gran utilidad para el dibujante por lo que simplifica sus trabajos y por la exactitud que á ellos puede proporcionar, pues en lugar de andar á caza de puntos en los dos planos de proyección y á veces en otros auxiliares (operación que debe dejarse para cuando no hay otro remedio), verifica desde luego sin rodeos el trazado de la curva de referencia allí donde sospeche que pueda existir, con pleno conocimiento de lo que hace.

Así pues, la existencia de cualquiera de las mencionadas curvas quedará confirmada, en los casos siguientes:

Cuando el plano secante corta á todas las generatrices del cono, la sección producida es una *elipse*.

Si el plano secante es paralelo á una generatriz; cortando á otras, la sección que resulte será *parábola*.

En el caso de que el plano secante sea paralelo al eje del cono, la sección resultante será *hipérbola*.

Además de estos resultados dependientes de las tres posiciones del plano secante, hay otros que conviene conocer.

Cuando el plano secante es perpendicular al eje del cono, la sección puede ser entonces: un punto, si el plano pasa por el vértice, ó un *circulo*, tanto mayor cuanto más se aleja el plano secante del vértice.

Si el plano secante pasase á lo largo del eje del cono, la sección resultante estaría representada por dos rectas, generatrices opuestas que se conocen con el nombre de *asíntotas* de la hipérbola.

De todo esto se deduce, que por la posición del plano de sección, se viene en conocimiento de la clase de curva resultante. Cuyo conocimiento puede proporcionar, como anteriormente se ha indicado, positivas ventajas en todos aquellos trazados que corresponden al dibujo geométrico, principalmente en lo tocante á sombras y proyecciones axonométricas.

95. Sección plana de la esfera (fig. 88).— Sea $Y—Y'$ el plano secante que pasa por el centro de la esfera.

La proyección horizontal de la sección será una elipse determinada por los

ejes $a e$ y $c 2$, y en proyección vertical por $a' e'$ y $c' 2'$. Los puntos $b - b'$,

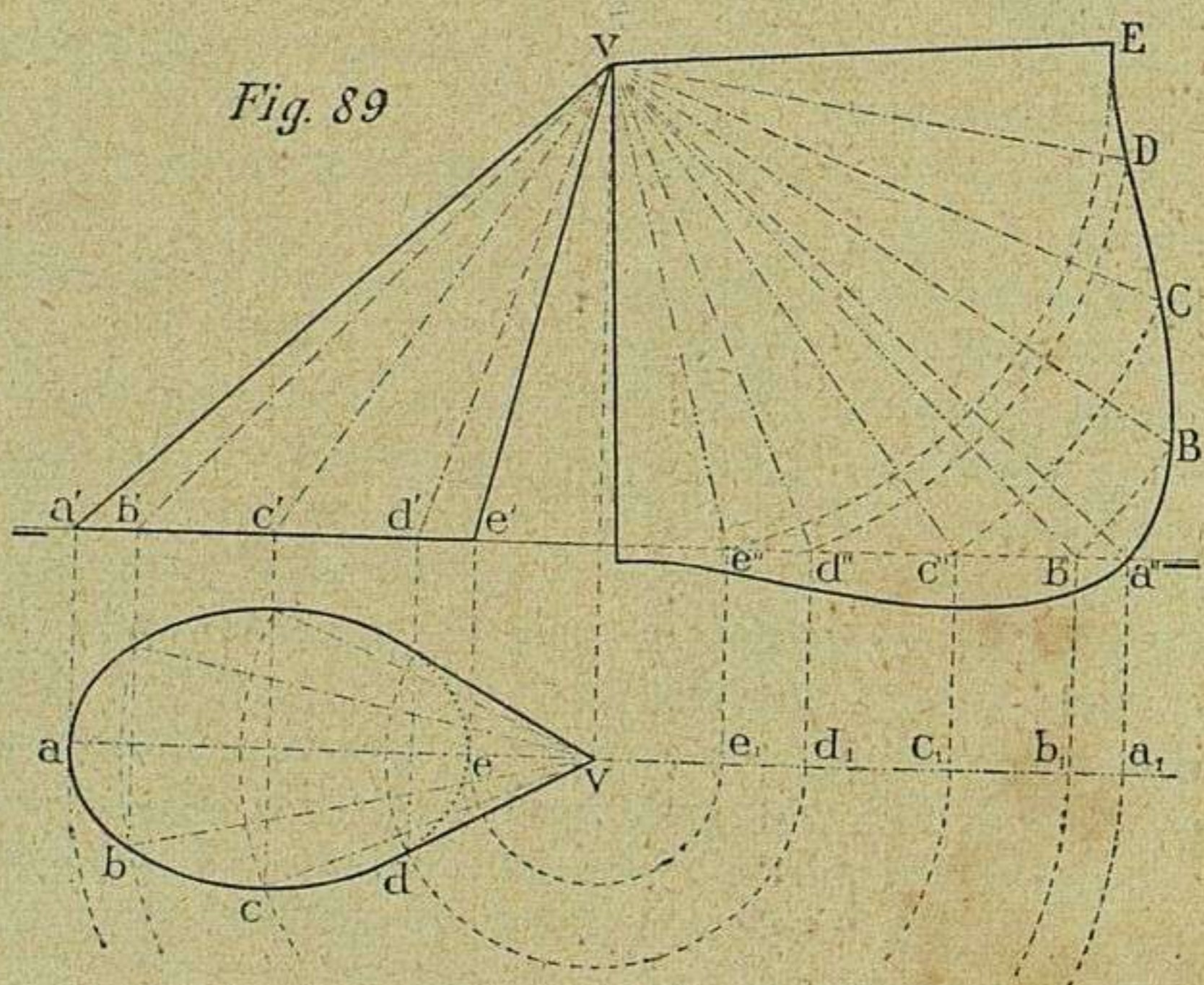
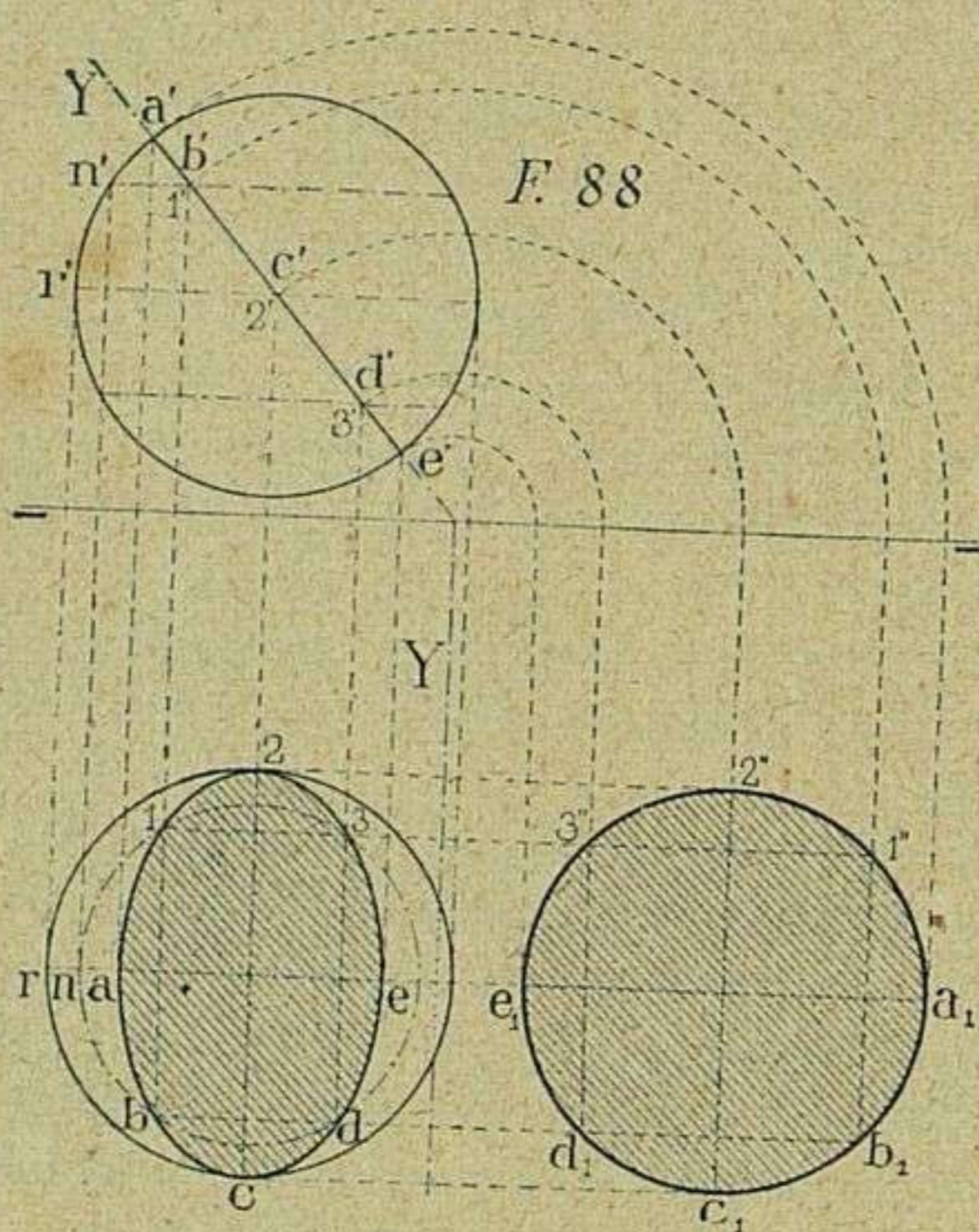
$1 - 1, 3 - 3$, etc., se han determinado por planos horizontales que pasan, respectivamente, por $n, r...$

La verdadera magnitud de la sección, que aquí resulta un círculo máximo, se ha obtenido en $a_1 b_1 c_1...$ $2'' 1''$ por abatimiento del plano secante sobre el horizontal de proyección.

Si el plano secante no pasara por el centro, la sección sería entonces un círculo mínimo, tanto más pequeño cuanto más lejos se encontrara del centro de la esfera, hasta llegar a reducirse a un punto cuando el plano secante, en fuerza de alejarse, fuera tangente a la superficie esférica.

96. Desarrollo del cono oblicuo (fig. 89).

Para no prodigar trazados tan complicados como innecesarios, se colocarán las generatrices de modo que se correspondan, en proyección vertical, las de la parte anterior con las de la posterior. De esta manera no habrá más que



resolver el problema en la mitad del cono, y la otra mitad se reproducirá simétrica al eje $v' a''$.

Las verdaderas magnitudes de las generatrices $v b - v' b''$, $v c - v' c''$, etc., se

obtienen mediante giros (V. 66) alrededor de $v v'$, sobre un plano paralelo al vertical en $v' e''$, $v' d''$, $v' c''$, etc.

Ahora, á semejanza de lo hecho en el desarrollo de la pirámide oblicua (Véase 88), se construirán ordenadamente los triángulos $v' E D$, $v' D C$, etc., en los que los lados $E D$, $D C$, etc., que forman parte de la transformada, corresponden á segmentos de elipse equivalentes, respectivamente, á $d e$, $d e$, etcétera, situados en la base del cono.

Este desarrollo será completo añadiéndole la elipse correspondiente á la base del cono.

INTERSECCIÓN DE RECTAS Y CUERPOS

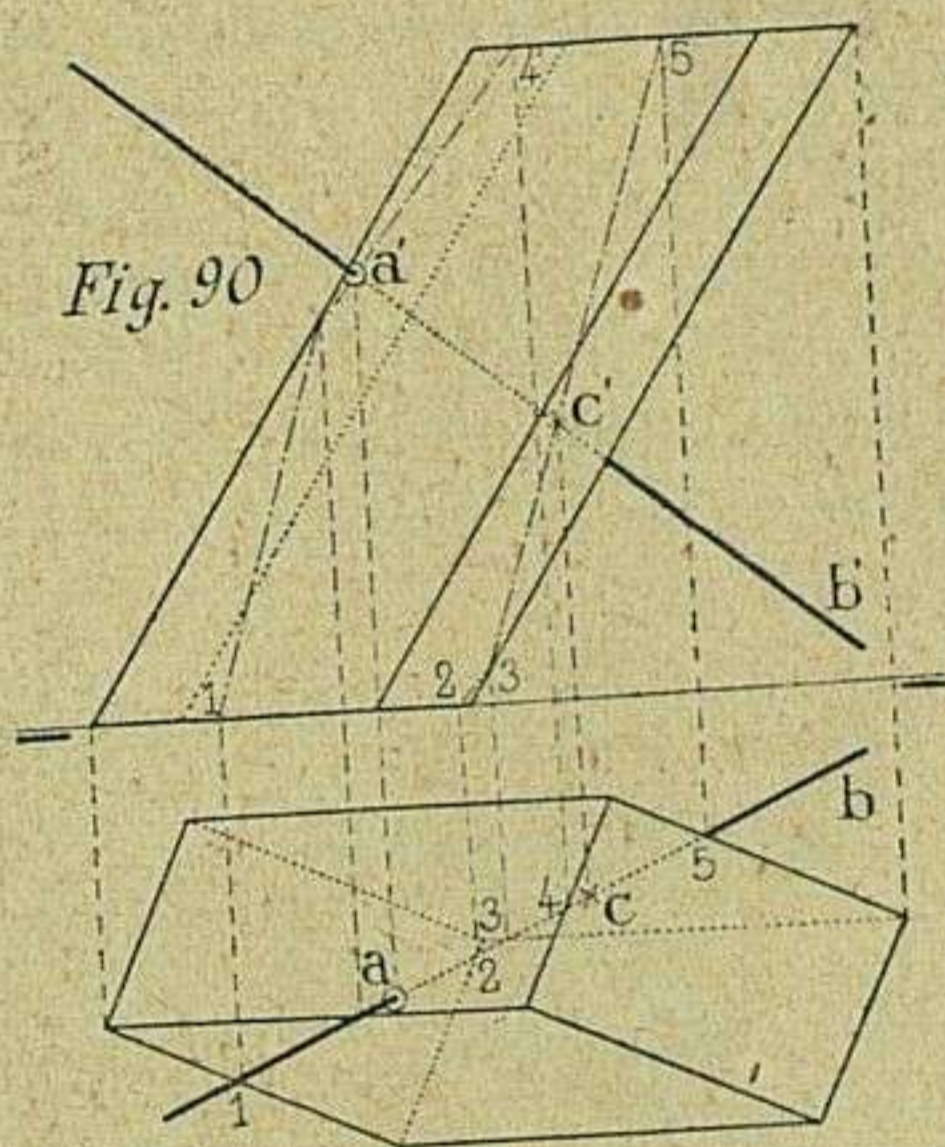
97. La intersección de una recta con un cuerpo se origina de la penetración de ella á través del cuerpo. En esta operación, lo que más interesa es fijar bien la situación de los puntos de entrada y salida al penetrar en el cuerpo dicha recta.

El procedimiento general para solucionar el problema no puede ser más sencillo. Consiste en el empleo de planos secantes que pasen por la recta, cuyos puntos de entrada y salida se hallarán contenidos en la intersección de dicha recta con el contorno de la sección plana. Los siguientes problemas contribuirán á fijar el alcance del procedimiento expuesto (1).

98. Intersección de una recta con un prisma (fig. 90). — Sean $a b$ —

$a' b'$ las proyecciones de la recta. Entre los infinitos planos que pueden pasar por la recta, se ha elegido el proyectante vertical de ella.

El contorno de la sección producida por este plano en el prisma, se proyecta sobre el vertical de proyección en $1' 2' 3' 5' 4'$ y las intersecciones de dicho contorno con la recta dada se verificarán en $a - a'$, punto de entrada, y en $c - c'$ de salida.



(1) Estos problemas son precursores de los que se refieren á intersecciones de cuerpos, y además, los procedimientos empleados son análogos á los que se aplican más adelante en la determinación de sombras de poliedros y cuerpos redondos.

99. Intersección de rectas con la pirámide (fig. 91). — Sea una pirámide recta exagonal dada por sus proyecciones, y $n - n' n''$, $c s - c' s'$ las dos rectas, perpendicular la una al plano horizontal, y oblicua respecto á los dos planos de proyección, la otra.

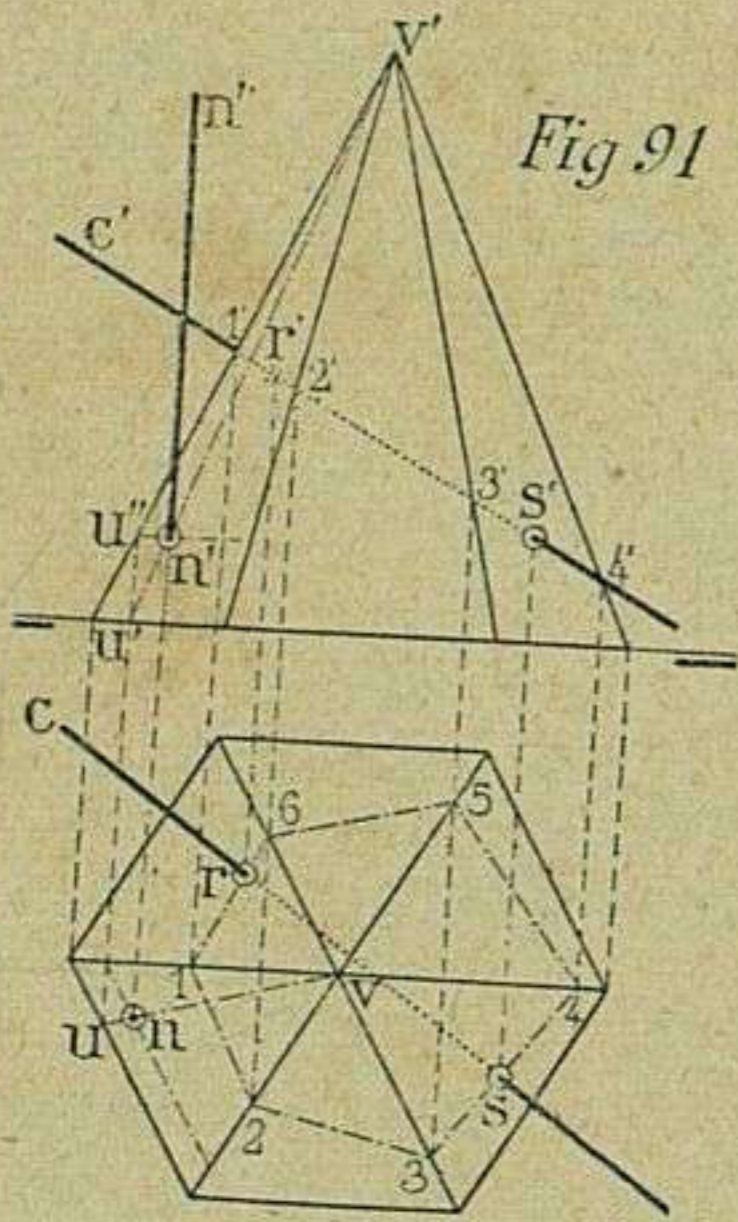


Fig. 91

La intersección de la recta perpendicular se halla mediante el plano vertical que, pasando por ella, corta á una de las caras de la pirámide, según la recta $v u - v' u'$, en la que se encuentra el punto $n - n'$, que da en este caso solución al problema.

Los puntos $r - r'$ y $s - s'$, correspondientes á las intersecciones de la recta oblicua, se hallan sobre $1 2 3 4 5 6$, contorno de la sección producida por un plano proyectante de la recta, perpendicular al vertical de proyección.

100. Intersección de rectas en el cilindro (fig. 92). — Sea un cilindro recto dado por sus proyecciones, y $d h - d' h'$, $b g - b' g'$, las de dos rectas oblicuas á los planos de proyección.

Los puntos $d - d'$ y $h - h'$, intersecciones de la primera recta con el cilindro, se hallan respectivamente en las generatrices $1 - 1'$ y $2 - 2'$, originadas por un plano que, siendo paralelo á las generatrices, contiene á la recta en cuestión.

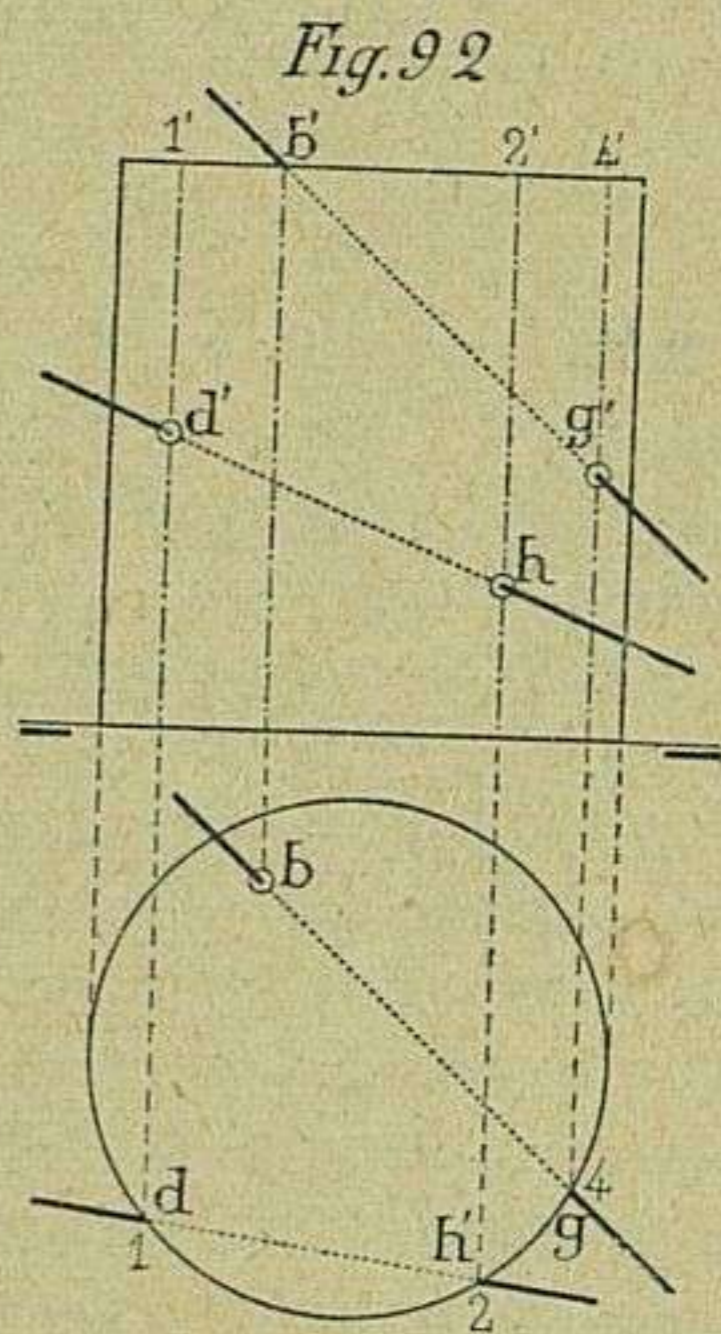


Fig. 92

La misma operación se ha verificado para determinar los $b - b'$ y $g - g'$, pertenecientes á las intersecciones de la otra recta con el cilindro, solamente que el $b - b'$ ha resultado sobre la base superior del mismo.

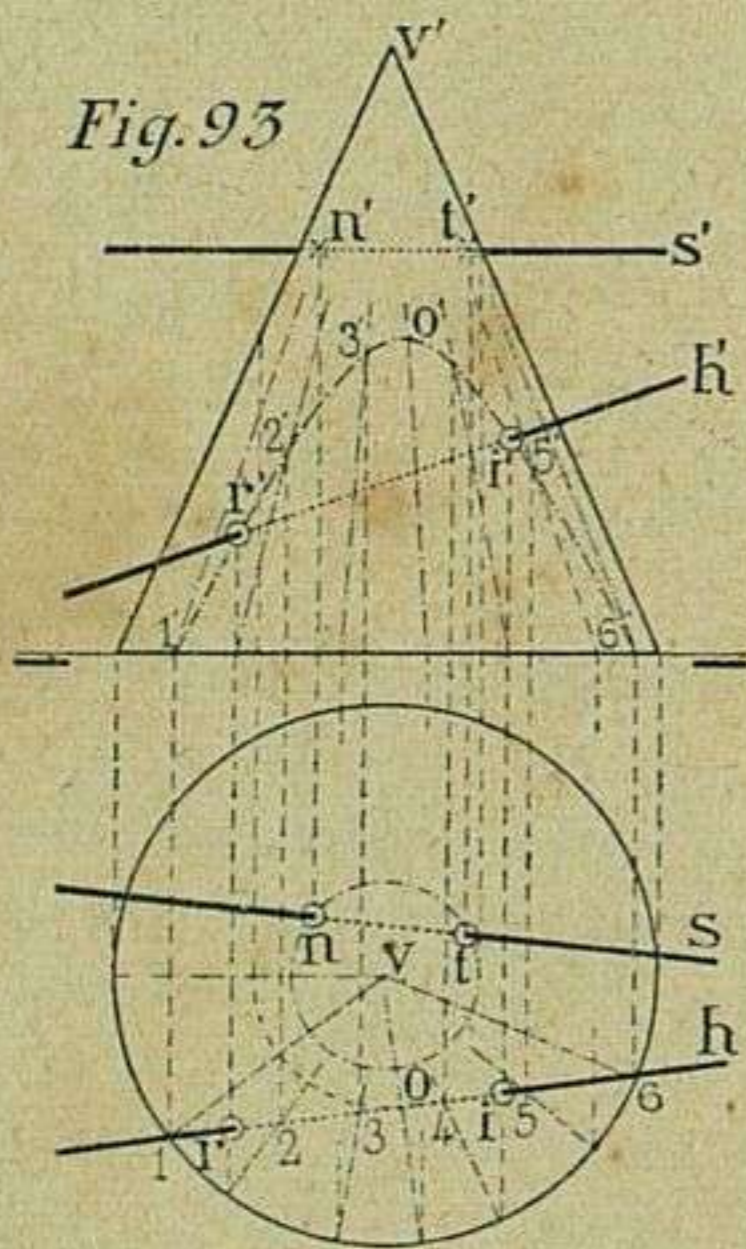


Fig. 93

101. Intersección de rectas en el cono (fig. 93). — Sea un cono recto de revolución, una recta paralela al plano horizontal dada por las proyecciones $n s - n' s'$, y otra recta $r h - r' h'$ oblicua á los dos planos de proyección.

Para determinar $n - n'$ y $t - t'$, puntos de intersección de la primera recta (paralela al plano horizontal) con la superficie cónica, lo más sencillo será valerse de un plano paralelo al horizontal, cuya sección, en la proyección del mismo nombre, será un círculo. Las intersecciones de la circunferencia de este círculo

con la recta dada, determinarán en $n - n'$ y $t - t'$ los puntos que solucionen el problema.

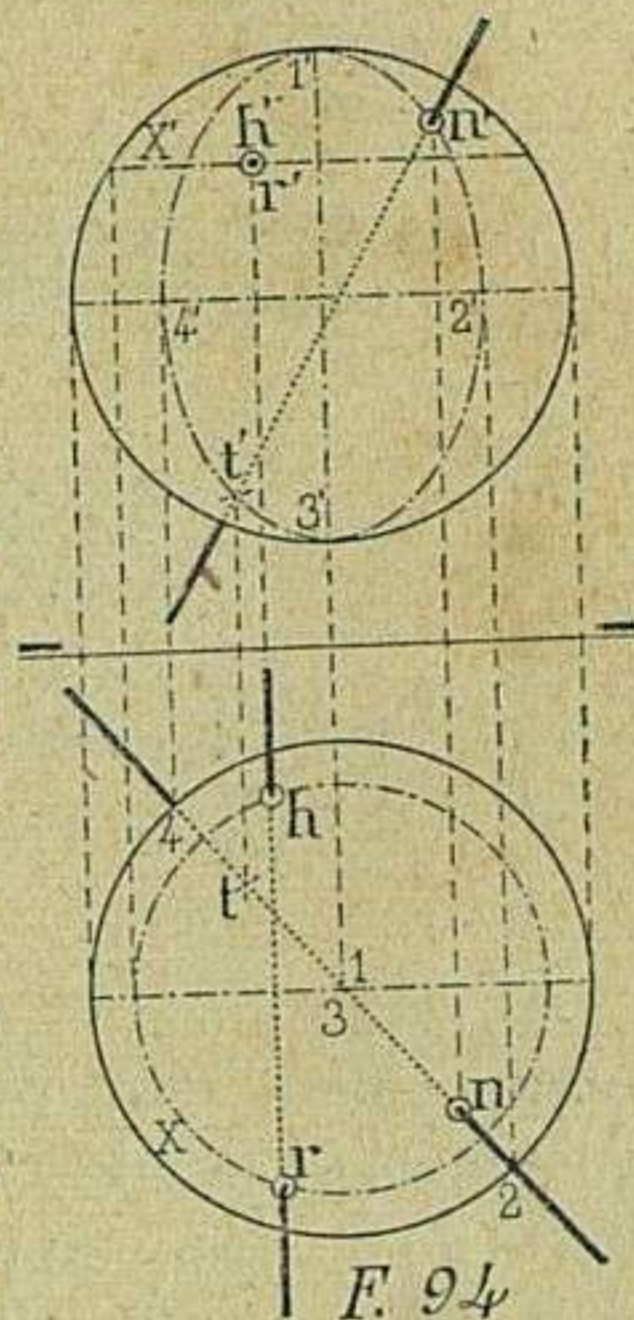
Para hallar los puntos de intersección en el caso de la segunda recta, lo más conveniente es valerse de un plano proyectante vertical que, pasando por ella, cortará al cono, según la hipérbola $1' 0' 6'$ (V. **93**). En las intersecciones de esta curva con la recta dada estarán los puntos $r - r'$, $i - i'$ que se buscan.

102. Intersección de rectas con la esfera (fig. 94). — Dos rectas son las que penetran en la esfera dada $r h - r' h'$, la una perpendicular al plano vertical de proyección, y $t n - t' n'$ la otra, oblicua á los dos planos.

La primera tiene sus puntos de intersección situados en $r - r'$, $h - h'$ sobre el paralelo $x - x'$, que contiene á dicha recta.

La segunda en $t - t'$, $n - n'$ sobre el meridiano $1 2 3 4 - 1' 2' 3' 4'$, que pasa por esta recta. Este meridiano es una elipse proyectada sobre el plano vertical, cuyos ejes corresponden á $1' 3'$ y $2' 4'$.

Si se tratara de hallar la intersección de la citada recta, con una superficie de revolución cualquiera, deberá seguirse el mismo procedimiento indicado para determinar su intersección con la esfera; es decir, emplear para conseguirlo planos paralelos ó meridianos, según los casos, con la condición de que estos planos pasen por la recta dada.



INTERSECCIONES DE SÓLIDOS Y DESARROLLOS

Explicación de las láminas incluídas en la Serie C.

Al llegar aquí, el problema de las proyecciones se desarrolla en toda su complicación. Para resolverlo intervienen otros ya explicados anteriormente, problemas de detalle, tales como los referentes á secciones planas, intersecciones de planos y de rectas con planos, verdaderas magnitudes, etc., que contribuyen como auxiliares á la solución del problema de conjunto.

Este cúmulo de operaciones suele ocasionar dificultades cuando no se disponen atinadamente los procedimientos, y no solamente los procedimientos, sino también la colocación de los datos respecto á los planos donde han de proyectarse.

Las intersecciones entre cuerpos pueden verificarse de dos modos: por *penetración* ó por *mordedura*.

En la *penetración*, uno de los cuerpos atraviesa al otro, produciéndole dos brechas opuestas en su superficie, una de entrada y otra de salida. Cada una de estas brechas está limitada por un contorno cerrado.

La intersección por *mordedura* da ocasión á que se produzca una sola brecha, y, por consiguiente, sólo se obtiene un contorno común á la intersección de los dos cuerpos.

Los problemas de intersecciones que se plantean y resuelven en las doce primeras láminas de referencia, tienen por objeto hacer uso de los conocimientos adquiridos, demostrando, además, prácticamente el partido que puede sacarse en cada caso con la buena elección del procedimiento adecuado para conseguir el fin que se persigue.

LÁMINA 1.^a **Intersección de dos prismas** (fig. 1.^a). — Sean dos prismas, el uno cuadrangular con las aristas laterales perpendiculares al plano horizontal, y el otro triangular con dichas aristas paralelas á los dos planos vertical y horizontal de proyección.

Según se ve, con solas dos proyecciones no puede apreciarse en el prisma triangular, á causa de su especial posición, la forma y verdadera magnitud de

las bases. Esta deficiencia se remedia con una segunda proyección vertical auxiliar, situada en el plano de perfil $X X'$.

La nueva proyección, además de presentar la intersección de costado, facilita extraordinariamente la solución del problema.

Para la determinación de los puntos $1' 5' 6' 2' 4' 8' 7' 3' 1'$, que constituyen el contorno de la intersección, se debe echar mano del procedimiento más indicado en casos como éste. Consiste en hallar las respectivas intersecciones de las aristas de uno de los prismas con las caras del otro.

Así, los puntos $1' 2'$ y $3' 4'$ se han determinado por el encuentro de cada una de las aristas $a a'$ y $b b'$ con las horizontales de correspondencia trazadas desde $1'' 2'' 3'' 4''$.

Por otra parte, las verticales de correspondencia, levantadas en 5 y 7, darán en su intersección respectiva con las aristas $n' 7'$ y $r' 8'$ los otros cuatro puntos $5' 6'$ y $7' 8'$, que completan el citado contorno.

Como los dos cuerpos están limitados por caras planas, el contorno de su intersección se formará con líneas rectas, uniendo punto á punto los $1' 5' 6' 2' \dots 3' 1'$, según el orden indicado en la figura. Tanto los lados de dicho contorno, situados en la parte posterior de los prismas, como los segmentos de aristas que penetran en los mismos, se representarán con líneas ocultas.

Desarrollos de la superficie lateral del prisma cuadrangular y del contorno de la intersección (fig. 2).—Sobre una recta $c d a b c$ se desarrollará el perímetro de la base del prisma. Levantando perpendiculares por cada uno de dichos puntos, se tendrán las aristas laterales, á las que se les dará igual altura $a m$ que la que les corresponde en proyección vertical (fig. 1). Además se trazarán, paralelas á la arista $a m$ (fig. 2), la recta $3 4$, á una distancia igual $d 8$, tomada en la proyección horizontal (fig. 1) y otra, la $5 6$, separada de ella una cantidad $a 5$, tomada de la proyección horizontal antes citada.

Observando que el contorno de la intersección es simétrico con relación á un eje que se supone, atravesando por los puntos medios de cada arista, deberá aprovecharse esta propiedad en beneficio de la exactitud del resultado. Al efecto, por los puntos medios de las aristas (fig. 2) se trazará el eje $H N$, y partiendo de él, se colocarán á uno y otro lado de la arista $a m$ los puntos 1 y 2 , trasladando para ello la mitad de la distancia que en la proyección vertical (figura 1) hay entre $1'$ y $2'$.

Los demás pares de puntos simétricos 4 y 3 , 8 y 7 , 5 y 6 se obtendrán del mismo modo, trasladados de la respectiva arista ó línea auxiliar de la proyección vertical, á la correspondiente arista ó línea auxiliar del desarrollo. Estos puntos se unirán ordenadamente por medio de rectas, y se tendrá terminado el desarrollo del contorno que en la figura 2 aparece rayado para acusar la forma con más claridad.

LÁMINA 2.^a **Intersección de dos prismas** (fig. 1). — Sea uno de los prismas exagonal y el otro cuadrangular. En el exagonal las aristas que unen las caras laterales son perpendiculares al plano horizontal, y las del cuadrangular paralelas al vertical, pero oblicuas al horizontal.

En este problema de penetración se prescinde en absoluto del plano de perfil, y en su lugar, para determinar la verdadera magnitud de la base $t s r n - 1' s' r' n'$ se abatirá ésta en $t s_1 r_1 n_1$ sobre el plano $X t'$, paralelo al horizontal de proyección.

Los puntos $7'$ y $1'$ se hallan en la intersección de la arista $n 1 - n' 1'$ con las dos caras anteriores del prisma exagonal. Los $2', 5', 8', 12'$ se obtienen en la intersección de las aristas $d' 6'$ y $a' 9'$ con el plano vertical que conteniendo á dichas aristas tiene su traza horizontal en $b h$, y, por último, los puntos $3' 4' 5'$ y $9' 10' 11'$ se encuentran en las intersecciones respectivas de las aristas $t' 11', s' 10'$ y $r' 9'$ con las caras correspondientes á los costados del prisma exagonal.

Estos puntos, lo mismo que en el anterior ejercicio, se unirán mediante rectas vistas ú ocultas, según su situación, y se tendrán los contornos correspondientes á las brechas de entrada y salida.

Desarrollo del prisma exagonal y de los contornos de penetración (figura 2). — Verificado el desarrollo de la superficie lateral de dicho prisma con sus aristas y líneas auxiliares, conforme á la marcha seguida en el ejercicio contenido en la primera lámina, se procederá al desarrollo de los contornos de la penetración, trasladando las longitudes $11' a'$ (fig. 1) sobre $v 11$ (figura 2), $9' a'$ sobre $v 9$, $10' a'$ sobre $s 10$, y de esta manera se continuará el traslado de longitudes desde la proyección vertical (fig. 1) al sitio que les corresponde en el desarrollo (fig. 2). Estas longitudes son verdaderas, puesto que se toman de aristas y líneas de correspondencia, paralelas todas al plano vertical de proyección; por consiguiente, los puntos de referencia extremos de estas longitudes ocuparán en el desarrollo el sitio que les corresponde.

El resultado de la operación se reduce á dos contornos iguales, el $1 2 3 4 5 6$ y el $7 8 9 10 11 12$, formados, como es consiguiente, de líneas rectas, puesto que se trata de la intersección entre cuerpos determinados por caras planas.

LÁMINA 3.^a **Penetración de pirámide en prisma** (fig. 1). — Sean estos poliedros rectos, regulares y colocados de tal suerte que sus ejes (1) se corten perpendicularmente.

El contorno de la brecha de salida es un cuadrado semejante al de la base $a b c d$ de la pirámide, como que es la sección producida por la cara $m' s'$ del prisma paralela á dicha base.

(1) Cuando además de rectos los prismas y pirámides tienen por bases polígonos regulares, admiten ejes en el mismo concepto que los tienen el cilindro y cono de revolución. En el prisma se considera eje la línea que pasa por los puntos medios de las bases, y en la pirámide, la que une el centro de la base con la cúspide.

La cara inferior $r' n'$, que también es paralela á la anterior, dará como sección otro cuadrado no contenido por entero en dicha cara, quedando limitado en la anterior, lo mismo que en la posterior, por los puntos 2, 4 — 2' 4' y sus simétricos respecto del eje $d b$.

El punto 3 — 3 se encuentra en la intersección de las rectas que, partiendo de los puntos 2' y 4', y siendo respectivamente paralelas á las aristas $d' v'$ y $b' r'$ concurren en dicho punto.

Desarrollo de la pirámide y contornos de la penetración (fig. 2).— Como se trata de una pirámide recta en la que las caras laterales son triángulos isósceles iguales, bastará ensamblar cuatro de éstos en un mismo plano, cuidando de que el vértice v sea común á todos.

Hecho el desarrollo de la superficie lateral, se describirá desde v , con radio $v 6 = v' 8'$, un arco que encontrará á las aristas del desarrollo en 6, 7, 8, 7', 6'; puntos que, unidos mediante rectas, darán el desarrollo del perímetro del cuadrado pequeño que representa la brecha de salida.

De igual manera se obtendrá el contorno de la brecha de entrada sobre el arco 1, 5, 1, descrito desde v con radio $v 1 = v' 1'$. Sobre las cuerdas respectivas, y partiendo de los puntos 1 y 5, se trasladarán á uno y otro lado en 4' y 4', 2 y 2' distancias iguales tomadas de 1, 2 (fig. 1).

Por último, desde los puntos 2, 4 y 4' 2' se trazarán paralelas respectivas á las aristas $V d_1$, $V a_1$ y $V b$, y sin más puede darse por terminada esta parte del desarrollo.

Desarrollo de los contornos de penetración en el prisma (fig. 3). — Para obtenerle con la mayor exactitud posible, dando por hecho el desarrollo de las caras laterales del prisma, se trazará el eje de simetría $A C$ que pasa por los puntos medios de las aristas, cuya situación se corresponde con la de la recta $a c$ (figura 1).

En el promedio de las caras $r'_1 n'_1$ y $m s_1$ se trazarán las rectas $D B$ y $D' B'$ perpendiculares á la $A C$. Ahora en el punto donde se cortan los ejes $D B$ y $A C$, estará el centro del cuadrado 6, 7, 8, 7', correspondiente al contorno de salida; así como también el centro del contorno de entrada 1, 2, 4', 5, 4', 2', 1', que es parte de otro cuadrado, se hallará en el punto de intersección de los ejes $A C$ y $B' D'$.

Los puntos 3 y 3' que faltan, son vértices del ángulo que forman los lados iguales de los respectivos triángulos isósceles 2, 3, 4 proyectados verticalmente en su verdadera magnitud; así es, que se trasladarán por duplicado al desarrollo en 2 3 4 y 2' 3' 4'.

LÁMINA 4.^a — **Intersección de dos cilindros de ejes perpendiculares** (fig. 1).— Sean dos cilindros de revolución cuyos ejes $P' q'$ y $m' n'$ son perpendiculares en cuanto á su dirección.

Para resolver fácilmente este problema, conviene valerse del plano de perfil $x x'$, abatido sobre el vertical de proyección; de este modo se dispone de

una nueva proyección de costado, muy útil para la determinación de puntos correspondientes á los contornos de la intersección.

El procedimiento empleado para este caso, consiste en valerse de planos paralelos al vertical de proyección. Dichos planos cortarán á uno y otro cilindro, según generatrices, y los puntos en que estas generatrices se cortan formarán parte de los contornos de la intersección de los dos cilindros.

Así, por ejemplo, el plano secante que pasa por b 5 cortará al cilindro vertical, según dos generatrices, una de ellas la $3'$ $5'$, y al horizontal, según otras dos, que encontrarán á las anteriores en dichos puntos $3'$ y 5 . La serie de planos secantes estará comprendida en el espacio que media entre los puntos $4''$ y $10''$. Los planos que pasan por estos puntos, sin dejar de cortar al cilindro vertical, son tangentes á lo largo de las generatrices del horizontal que pasan por los puntos $4'$ y $10'$.

Desarrollo del cilindro vertical y de las curvas de penetración (figura 2).— Verificado el desarrollo del cilindro juntamente con las generatrices distanciadas, conforme se encuentran en la proyección horizontal (figura 1), y teniendo en cuenta el carácter simétrico de las curvas de penetración, se trazará, pasando por los puntos medios de las generatrices desarrolladas el eje de simetría p_1 q_1 (fig. 2).

A uno y otro lado de p_1 q_1 y en la generatriz que corresponde se colocarán dos puntos igualmente distanciados, tales como el 1 y 7 , que se habrán tomado con el compás de la generatriz correspondiente que figura en la proyección vertical (fig. 1).

De esta manera se irán trasladando pares de puntos desde las generatrices de la proyección vertical á las que figuran en el desarrollo. Además, como las curvas son simétricas en dos sentidos, es decir, de estructura perpendicular (V. 1.^a parte), se obtendrán, con este motivo, dos pares de puntos con una sola medida y dos curvas iguales, representación de los contornos de entrada y salida correspondientes á la penetración.

LÁMINA 5.^a. — **Intersección de prisma con cilindro** (fig. 1). — Sean un prisma cuadrangular recto con las aristas perpendiculares al plano horizontal, y un cilindro también recto de revolución, con las generatrices paralelas á los planos vertical y horizontal.

En éste, como en el anterior problema, el plano de perfil x x' es un excelente auxiliar que proporciona facilidades para la solución.

Las caras a d — a' d' y b c — b' c' del prisma cortarán el cilindro, según dos elipses iguales, por hallarse situadas en planos paralelos. Los ejes que corresponden á estas elipses, son: el mayor h' h'' = t' t'' y el menor n' o' = s' r' . De estas elipses sólo se utilizan para la intersección los segmentos $4'$ o' $4'''$, en la primera, y los $6'$ t'' $3'$, $6'''$ t' $3'''$ de la segunda.

El segmento de elipse $3'$ $2'$ $1'$ $2'''$ $3'''$ corresponde á la sección producida en el cilindro por la cara a b — a' b' del prisma. Un punto cualquiera, el $2'$ ó

el $2'''$ se halla, tomándole en 2 sobre la traza $a b$, pasándole al plano de perfil en $2''$, y trazando por él una horizontal, que al encontrarse con la vertical levantada en 2 , dará el punto $2'$ que se busca; procediendo de igual manera se encontrarán todos los que se quieran.

La cara $d c - d' c'$ dará, en su intersección con el cilindro, los arcos simétricos de elipse $4' 5' 6'$ y $4''' 5''' 6'''$, de los cuales se conocen los puntos extremos situados en los anteriores arcos. Un punto intermedio, el 5 , se determina procediendo de igual modo que para hallar el $2'$ explicado en el párrafo anterior.

Conviene tener presente, que siempre que sea posible se deben trazar las elipses, valiéndose de los ejes ó diámetros conjugados; pues de este modo gana la curva en exactitud todo lo que se pierde de complicación por el procedimiento de hallar puntos á la ventura.

Desarrollo de la intersección en el cilindro (fig. 2). — Verificado el desarrollo del cilindro con las generatrices en él contenidas (V. **S9**) se trasladarán á él (fig. 2), en concepto de ordenadas, las varias distancias que á partir del plano de perfil determinan la posición de cada uno de los puntos de la intersección que figuran en la proyección vertical. Por ejemplo: en la generatriz $n' u'$ (fig. 1), que funciona como eje de simetría, se toman las distancias $u' r'$, $u' l'$ y $u' o'$ y se colocan respectivamente en el desarrollo (fig. 2) de u en r , de u en l y de u en r' . La operación, que se repetirá cuantas veces sea necesario para obtener los varios puntos del desarrollo de la intersección es sencilla, y más si se tiene presente que los puntos restantes son simétricos dos á dos, respecto del eje $n' r'$.

La observación de la figura donde se ha procurado conservar cierta correspondencia en la notación relativa de proyección y desarrollo, disipará cualquier duda que pudiera ofrecerse.

LÁMINA 6.^a Intersección de dos cilindros de revolución de ejes oblicuos (fig. 1.^a). — Sean los ejes de estos cilindros paralelos al plano vertical, pero oblicuos el uno respecto del otro sin cortarse.

Para resolver este problema convendrá valerse de planos auxiliares paralelos al vertical de proyección, que cortarán á los dos, según generatrices, procedimiento que ya se ha empleado para hallar la intersección de los cilindros representados en la lámina 4.^a; pero como aquí no se dispone de plano de perfil, es preciso valerse de algún medio que permita determinar la posición correspondiente de las generatrices $7' 3'$, $8' 4'$ y sus simétricas en el cilindro de eje $h m$, lo que se consigue cortando éste por el plano $V u$, perpendicular á sus generatrices, y abatiendo la sección paralela al vertical de proyección, según el círculo de radio $o a$.

En este círculo se encuentra el punto b , por el que pasa la generatriz $b 2'$, proyección vertical correspondiente á la horizontal $6 2$. Ahora bien: este punto b procede de c en la planta, el cual, siguiendo la marcha del abatimiento, ha

pasado por c_1 á c' en la proyección vertical; desde c' concéntrico en o' ha descrito el pequeño arco suficiente á encontrar el eje $h m$, para dirigirse paralelamente á $u v$, hasta cortar en b al referido círculo. Esta operación es análoga á la verificada supliendo el plano de perfil en la intersección de prismas proyectados en la lámina 2.^a.

Las operaciones que restan, propias para determinar puntos correspondientes á la intersección, que ya se puede calificar de mordedura, se han explicado anteriormente. Se reducen á intersecciones de generatrices, y son tan fáciles, que con sólo pasar la vista por la figura puede resolverse el problema sin el menor tropiezo.

Intersección de dos conos rectos de revolución que tienen sus ejes paralelos (fig. 2.^a). — Por la situación de los conos se calcula al momento que la intersección es penetración, con una sola brecha de salida sobre la superficie curva del cono mayor.

Para determinar los puntos extremos $r' s'$ del contorno de la intersección, se procederá á trasladar, por un movimiento de rotación alrededor del eje $o o'$, el cono de eje $v v'$ en v_1 , de tal manera, que el plano que pasa por ambos ejes quede abatido sobre el vertical de proyección. En esta disposición, los puntos r'' y s'' , trasladados en r' y s' respectivamente, al deshacer el abatimiento, formarán parte del contorno de la sección.

Los demás puntos se obtienen mediante los planos secantes horizontales x', y', z' , que producirán círculos en ambos conos, y en las respectivas intersecciones de las circunferencias correspondientes á estos círculos, se hallarán los puntos $1 - 1', 2 - 2', 3 - 3', 4 - 4', 5 - 5'$ y $6 - 6'$, correspondientes á dicho contorno.

LÁMINA 7.^a **Intersección de prisma y cono** (fig. 1.^a). — Sea un cono de revolución, con el eje perpendicular al plano horizontal y un prisma recto cuadrangular, cuyas aristas laterales son paralelas á los dos planos de proyección.

La cara $p q - p' q'$ del prisma, por ser paralela al eje del cono, cortará á éste, según una hipérbola. La determinación de puntos pertenecientes á esta curva se consigue trasladándolos por un movimiento de rotación desde $1, 2, 3, 4$ (proyección horizontal) á la generatriz $v' m'$, paralela al plano vertical, en $r' 2''' 3''' 4'''$, puntos por los que se hacen pasar los planos horizontales $A' B' C'$ y z' , los que, en sus intersecciones con las respectivas generatrices, darán los puntos $1' 2' 3' 4'$, etc., por donde pasa la proyección vertical de la hipérbola.

La cara posterior del prisma, por contener al eje del cono, cortará á éste, según los segmentos de generatrices $t' r'$ y $n' s'$.

Otra de las caras del prisma, la $y q - y' q'$, cortará al cono, según un círculo (V. 99), del que sólo corresponde al contorno de la sección, la semicircunferencia $t h n$. Asimismo la cara $p z - p' z'$, paralela á la anterior, cor-

tará al cono según otra circunferencia (proyección horizontal) de radio $r s$, de la que sólo pertenecen á la intersección los segmentos $1 r$ y $7 s$.

Desarrollo del contorno de mordedura en la superficie cónica (fig. 2.^a). Suponiendo verificado el desarrollo de la superficie cónica (V. 91), y colocadas las generatrices en sus sitios respectivos, observando la simetría con relación al eje $v a$, se trasladará al desarrollo en $v, t_1, 4, 3, 2, r_1$ y m_1 la generatriz $r' m'$ de la proyección vertical con todos los puntos en ella contenidos.

Desde estos puntos se describirán arcos concéntricos en v , de los cuales, los que pasan por $4, 3, 2$ y r_1 respectivamente, darán en sus intersecciones con las generatrices correspondientes puntos de la hipérbola desarrollada.

Los segmentos de arco $r_1 1'$ y $7' s_1$ se trasladarán al desarrollo, formando parte del arco de radio $v s_1$, lo mismo que la semicircunferencia $t h n$ quedará desarrollada en el arco $t_1 h_1 n_1$ concéntrico al anterior. Los segmentos $t' r'$ y $u' s'$ se han trasladado de la proyección vertical (fig. 1) al desarrollo (fig. 2), situándolos respectivamente en $t_1 r_1$ y $u_1 n_1$ sobre las generatrices $V m_1$ y $V n_1$, y con esto queda terminado el desarrollo.

Desarrollo del contorno de mordedura en el prisma (fig. 3.^a). — Hecho el desarrollo del prisma (V. 85), y colocado el eje de simetría $h 4$ perpendicular á las aristas, pasando por los puntos medios de ellas, se trazará la rama de hipérbola, valiéndose de las paralelas auxiliares que pasan por A, B y C, puntos trasladados de la proyección vertical en la misma situación que en ella se encuentran, así como los $3'$ y 5 , $2'$ y 6 , que se hallan respectivamente equidistantes del eje $h 4$, tanto en la proyección como en el desarrollo.

Lo demás del contorno se reduce al traslado de la semicircunferencia en $t h u$ al de los arcos $r 1'$ y $7 s$, y al de las rectas $r t$ y $o u$, que se unen á los anteriores arcos cerrando el contorno. Estos elementos del contorno se encuentran proyectados (fig. 1.^a) en su verdadera magnitud, porque los planos donde están contenidos son paralelos á uno ú otro de los de proyección.

LÁMINA 8.^a Intersección del cilindro y cono de ejes perpendiculares (figura 1). — Sean, por una parte, el cilindro recto de generatrices paralelas á los dos planos, y por otra el cono, también recto, con el eje perpendicular al plano horizontal; ambos cuerpos son de revolución.

Para simplificar cuanto es posible las operaciones que conducen á la solución de este problema, se vuelve otra vez á usar como proyección auxiliar, la que se origina del plano de perfil $X - X'$, abatido sobre el plano vertical. En ella puede apreciarse directamente el procedimiento seguido, que consiste, como en casos anteriores, en el empleo de planos secantes paralelos al horizontal de proyección que pasan por los puntos $1'' 3'' 6'' 8'' 9''$ y otros menos importantes.

Estos planos secantes producen en el cono círculos y en el cilindro generatrices, cuya respectiva intersección puede primeramente apreciarse en la proyección horizontal desde donde pasan dichas intersecciones representadas por

los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, mediante verticales de correspondencia, á la proyección vertical en 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8' y 9', operación que se repite con la otra mitad de la figura, que es simétrica respecto al eje $v v'$.

La proyección auxiliar correspondiente al plano de perfil, ayuda mucho en el deslinde de las partes de línea ocultas ó vistas que forman el contorno de la mordedura.

Desarrollo del contorno de mordedura en la superficie del cono (figura 2). — Sólo figura en el desarrollo aquella parte de superficie cónica suficiente á contener el contorno de dicha mordedura, cuidando de situar convenientemente las generatrices relacionadas con ella, simétricas respecto de la $v a$ que se ha tomado como eje de simetría.

Las distancias que median entre una y otra generatriz se toman, como es sabido, de a en b , de b en c , etc., puntos situados en la base del cono, sobre el plano horizontal, donde se hallan proyectados en su verdadera magnitud en cuanto á las distancias que median entre ellos. Ahora, con trasladar la generatriz $v'' m$, desde el plano de perfil con todos sus puntos, al desarrollo (fig. 2), en p, s, y, x, n, t, s, r , y describir arcos concéntricos en v desde cada uno de ellos, se tendrán en las intersecciones respectivas de arcos con generatrices, los puntos que forman el contorno de mordedura sobre la superficie cónica, no faltará ya más que verificar su trazado por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y demás puntos simétricos situados en generatrices simétricas de las anteriores respecto al eje $v a$.

Desarrollo de la mordedura en la superficie cilíndrica (fig. 3). — Trazado el eje de simetría $9 1$, se colocarán perpendiculares á él y en su lugar debido, las generatrices comprendidas desde el punto 1 al 9. Las respectivas distancias que median entre ellas se tomarán ordenadamente de la base del cilindro proyectado en el plano auxiliar de perfil, donde se hallan en su verdadera magnitud.

Hecho esto, y observando que cada par de puntos situados sobre cada una de las generatrices, equidistan del eje $9 1$, se tomarán estas distancias de la proyección vertical donde figuran en su verdadera magnitud, y se trasladarán á las generatrices correspondientes del desarrollo, donde por los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y sus simétricos 8' 7' 6' 5' 4' 3' 2', se podrá trazar el desarrollo de dicho contorno sobre la superficie del cilindro.

LÁMINA 9.^a **Intersección de prisma y esfera** (fig. 1). — Sea el prisma recto, triangular, con las aristas perpendiculares al plano horizontal y la esfera centrada en $o - o'$.

Pocas dificultades presenta este ejercicio, pues todas las secciones planas verificadas en la esfera se traducen en círculos máximos ó mínimos, cuyos centros son fáciles de determinar. Así, la cara posterior del prisma que pasa por el centro de la esfera cortará á ésta; según un círculo máximo proyectado

sobre el plano vertical en su verdadera magnitud al que pertenece el arco $e' h' d'$ descrito desde o como centro.

La sección producida por la base $1 2 3 - 1' 2' 3'$ del prisma, estará representada por el arco de círculo mínimo $z v$, descrito desde o con radio $o v$ proyectado en su verdadera magnitud sobre el plano horizontal.

Finalmente, las caras anteriores del prisma seccionarán á la esfera según dos círculos mínimos de radio as , que proyectados verticalmente darán en $v' a' t' d'$ y $s' y' n' e'$ dos segmentos simétricos de elipse, cuyos semiejes, respectivamente iguales, figuran en $s' a'$, $s' t'$ y $r' y'$, $r' n'$.

Desarrollo del contorno de mordedura (fig. 2). — Como la superficie de la esfera no es desarrollable, no queda otro recurso que verificar dicha operación sobre el desarrollo del prisma, donde, después de trasladar líneas auxiliares y centros de arcos en la forma y disposición que la figura indica, se describirán éstos en el orden siguiente:

El arco $e_1 h_1 d_1$ con radio $o_1 e_1 = o' h'$, el $z_1 v_1$ con radio $o_1 v_1 = o v$ y los arcos simétricos $d_1 t_1 a_1 v_1$ y $s_1 y_1 u_1 e_1$ con radio $s_1 a_1 = s a$.

LÁMINA 10.^a **Intersección de esfera y cilindro** (fig. 1). — Sea una esfera de centro a' y un cilindro recto de revolución con las generatrices paralelas á los dos planos, de tal manera dispuestos dichos cuerpos, que la generatriz $m n - m' n'$ del cilindro sea tangente en el punto $7 - 7'$ de la esfera.

Para determinar la curva intersección en este caso, conviene valerse del plano de perfil $X - X'$, abatido sobre el vertical de proyección, y emplear el socorrido procedimiento de planos secantes paralelos al vertical de proyección, que como es sabido, proyectarán sobre este plano, al seccionar la esfera, círculos, y del cilindro generatrices. Unos y otras determinan en su respectiva intersección, puntos pertenecientes al contorno de la intersección, como ya se ha indicado en esta serie de ejercicios.

Desarrollo del contorno de la intersección (fig. 2). — Después de verificado el desarrollo de la superficie cilíndrica (V. 94 y 95) con sus generatrices y ejes de simetría, se puede proceder á la determinación de puntos por los que ha de pasar la curva intersección.

Según debe notarse, esta curva es simétrica con relación á los dos ejes $7 7'$ y $1 1'$, motivo por el cual solamente interesa la traslación de las medidas correspondientes á una cuarta parte de la curva; por ejemplo, las comprendidas entre 1 y 7 , puesto que las otras tres cuartas partes se reproducen simétricamente.

Debe tenerse en cuenta que las medidas de referencia se toman desde el eje $r' e'$ (proyección vertical) en cada una de las generatrices que pasan por los puntos $1', 2', 3', 4', 5'$ y $7'$ (esta última nula por estar situada en el eje) para trasladarlas á las correspondientes generatrices del desarrollo.

LÁMINA 11.^a **Intersección de cono y esfera y desarrollo de la curva intersección** (fig. 1.^a). — Sean la esfera de radio $x' 4''$ y un cono recto de revolución de eje perpendicular al plano horizontal, cuya generatriz $v' d'$ es tangente á la esfera en el punto $4''$.

Para resolver este problema se sigue aplicando, como en otros que le han precedido, el procedimiento de planos secantes, empleado con preferencia en la determinación de intersecciones entre superficies de revolución.

Aquí los planos secantes se han elegido paralelos al horizontal de proyección, porque de este modo, las secciones producidas, tanto en el cono como en la esfera, dan en dicho plano circunferencias cuyas respectivas intersecciones se traducen en puntos de la curva intersección. Así, por ejemplo, uno de los planos secantes, el que pasa por $x' x''$, corta al cono, según el círculo de radio $5' x'$, y á la esfera, según otro círculo de radio $x' x''$. La intersección de las circunferencias de estos círculos, verificada en la proyección horizontal, dará dos puntos simétricos, uno de ellos el $5 - 5''$, pertenecientes á la intersección.

Desarrollo del contorno de intersección sobre la superficie del cono (fig. 1.^a). — Suponiendo que ya se han verificado varias operaciones preliminares, como son el trazado de generatrices por los puntos de la curva intersección (fig. 1.^a) y el traslado de estas generatrices á las posiciones respectivas que han de ocupar en el desarrollo, se procederá á señalar en la $v a$ (fig. 2) que funciona de eje de simetría, los puntos $1, z, y, x, v, u, 8$, copiados fielmente de los $1' z' y' x' v' u' 8'$ que figuran en la correspondiente generatriz $v' a'$.

Por cada uno de estos puntos en el desarrollo, excepto por el 1 y el 8 , se describirán arcos concéntricos en v , arcos que, al encontrarse con las respectivas generatrices, darán en las correspondientes intersecciones puntos pertenecientes al desarrollo de la curva intersección.

LÁMINA 12.^a **Intersección de un prisma con un toro de revolución** (fig. 1.^a). — Sea un prisma recto, cuadrangular, con las aristas laterales perpendiculares al plano horizontal, y un toro de eje $o o'$, en el cual figuran como diámetros del círculo generador y director, respectivamente, las rectas $s' s''$ y $1' 1''$ (1).

Los puntos que han de formar el contorno de la intersección de estos cuerpos, unos se encuentran situados sobre las caras del prisma, y otros, los más importantes, sobre las aristas.

El procedimiento seguido para la determinación de dichos puntos consiste en el empleo de planos secantes paralelos al horizontal de proyección, que seccionarán al toro, según círculos, y al prisma, según cuadrados confundidos en la base $1 2 4 6 8$. Ahora bien: para determinar el punto de intersección de una arista con el toro, es preciso que en la proyección horizontal, arista y cir-

(1) El toro de revolución se considera engendrado mediante el movimiento de rotación de un círculo, cuyo centro recorre los puntos todos de una circunferencia correspondiente á otro círculo perpendicular al eje de rotación, que pasa por su centro. El círculo móvil que en su prolongación contiene al eje de rotación se llama *generador*. El círculo fijo perpendicular á dicho eje se llama *director*.

Esta superficie no se puede desarrollar sobre un plano.

cunferencia originada por el correspondiente plano secante, tengan un punto común.

Por ejemplo, el paralelo $q - q''$, que se ha hecho pasar por 6, proyección horizontal de la arista $u' v'$, dará en proyección vertical el punto 6', intersección de la arista $u' v'$ con el plano secante q'' . Los puntos 1' y 8' se hallan sobre el ecuador $m' n'$ en su intersección con las verticales de correspondencia, levantadas respectivamente en 1 y en 8.

De igual manera se hallarán los puntos restantes facilitando su determinación la forma simétrica del contorno de la intersección que tiene por eje la recta $m' 8'$.

Desarrollo de la intersección en la superficie cilíndrica (fig. 3.^a). — Verificado el desarrollo del prisma, colocadas en sus sitios respectivos las verticales de correspondencia, incluso el eje de simetría 1, 8, todo lo demás se reduce á trasladar de la proyección vertical (fig. 1.^a) las distintas magnitudes que en aristas y verticales de correspondencia hay entre el eje de simetría $m' 8'$ (fig. 1.^a) y los respectivos puntos de la intersección. No será ocioso advertir que en dicha traslación ha de seguirse el orden indicado por la notación, como ya se ha hecho en anteriores ejercicios.

Intersección del cilindro con el toro de revolución (fig. 2.^a). — Sea un cilindro recto de revolución con las generatrices perpendiculares al plano horizontal y, por otra parte, sea el toro descrito en el anterior ejercicio.

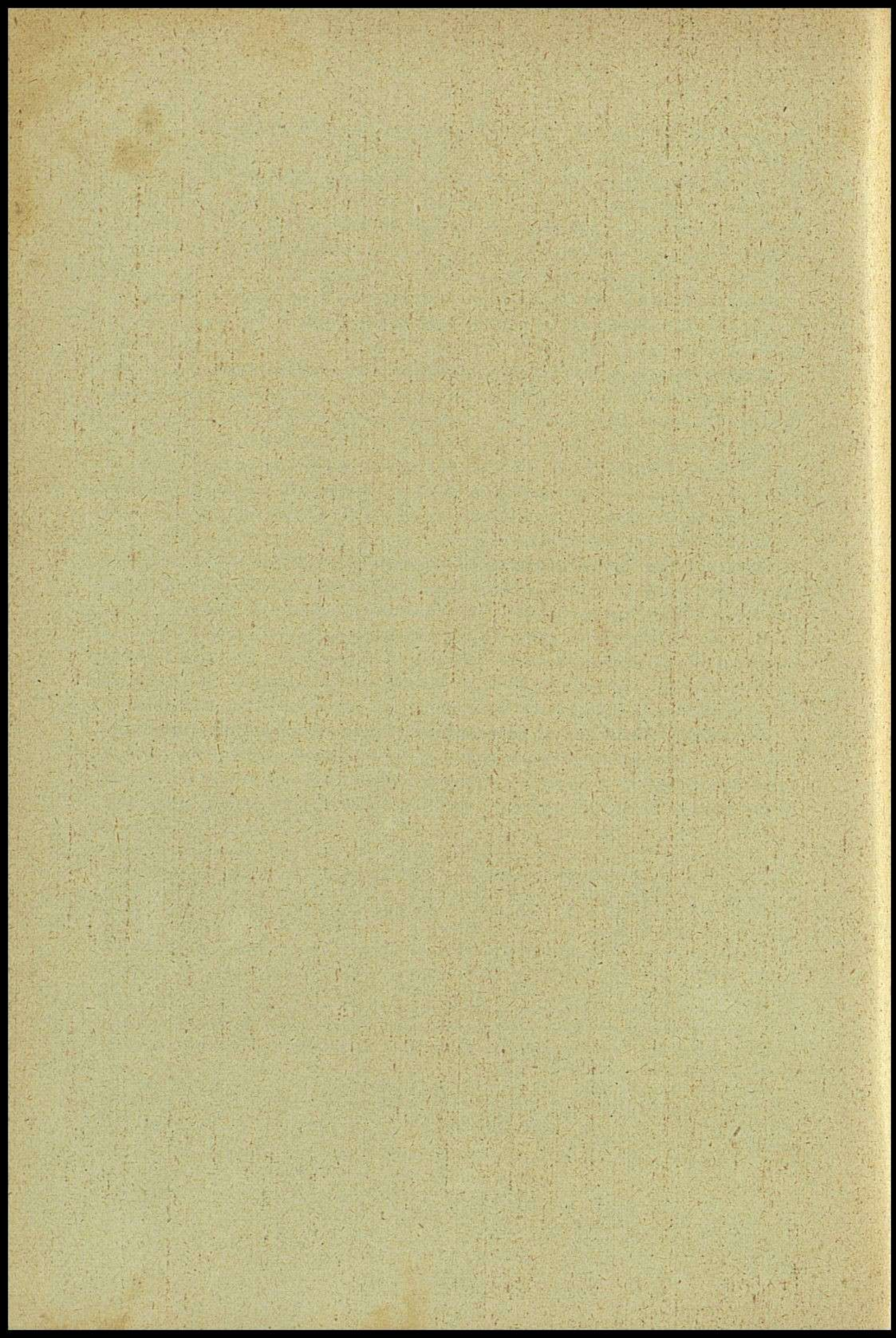
La curva intersección, que también es simétrica respecto al eje $10'' n'$, se hallará procediendo por planos secantes, en la misma forma que en la anterior intersección, sin más que hacerse la cuenta que las aristas y verticales de correspondencia del prisma son substituídas por generatrices en el cilindro.

Desarrollo de la curva intersección sobre la superficie cilíndrica (fig. 4.^a). — Para verificar esta operación se procederá de manera idéntica á la expuesta en el anterior ejercicio, bastando la observación de la figura 4.^a en sus relaciones con la (fig. 2.^a) para salir adelante con la solución de este problema.

Advertencia. — Con estos ejercicios, parece natural que terminase en este Tratado la parte destinada á exposición teórica y práctica de los procedimientos en que se funda la representación gráfica por medio de proyecciones ortogonales; pero en lo tocante á prácticas, aun queda por explotar un nuevo filón, del que se pueden sacar provechosos frutos.

Consiste tan recomendable práctica en el corte de plantillas, sacadas en papel fuerte, de los desarrollos verificados en las doce láminas que anteceden, ó de otras en donde figuren nuevos datos; de modo que, plegadas y convenientemente armadas estas plantillas, representen los cuerpos ensamblados por sus intersecciones. Así, cualquier error de cálculo ó defecto de delineación se hace tangible, traduciéndose en un desajuste que, sin esta comprobación, quizá hubiera pasado desapercibido.

Además, aunque otra razón no existiera para abonar la necesidad de este ejercicio, bastaría recordar que la finalidad utilitaria del Dibujo se cifra en realizar á ciencia cierta con la materia, lo que la imaginación concibe en el proyecto.



TRAZADO GEOMÉTRICO DE SOMBRAS

EN EL SISTEMA DE PROYECCIONES ORTOGONALES

1. La sombra se produce en la superficie de los cuerpos allí donde no alcanza la acción de los rayos luminosos.

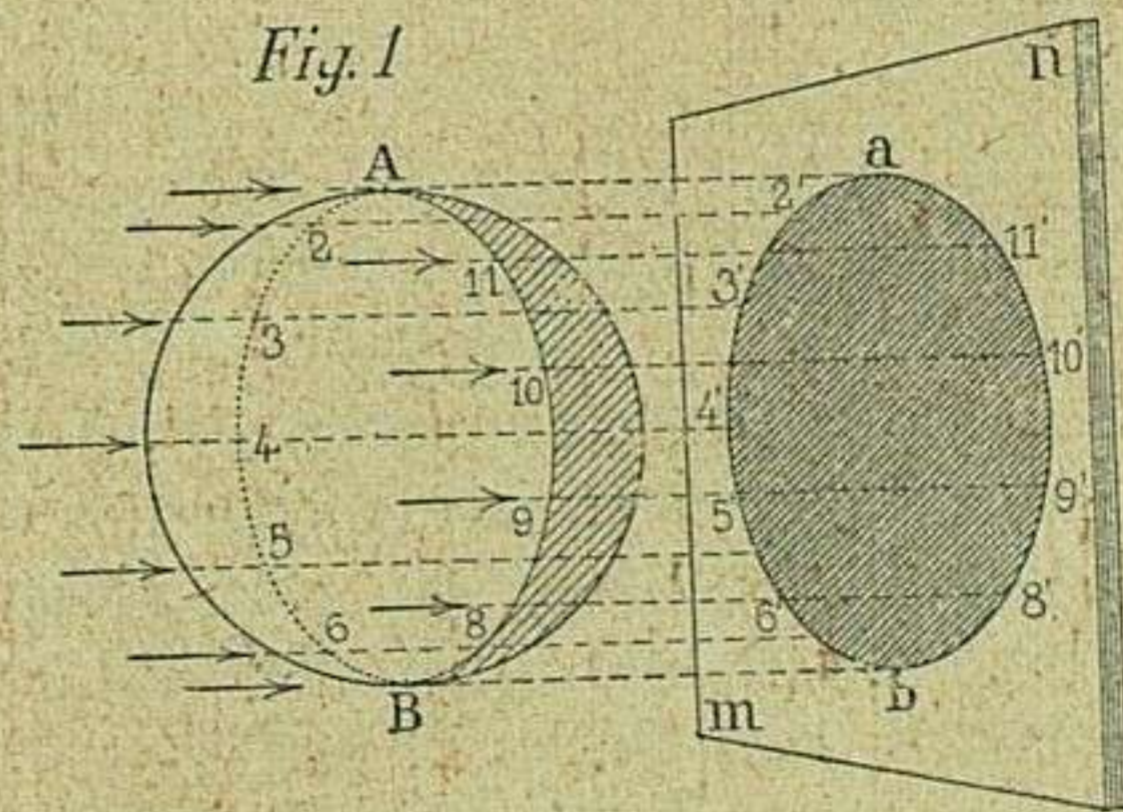
2. La iluminación de los cuerpos puede realizarse por un foco de luz cualquiera; pero en la práctica del dibujo geométrico está admitido y sancionado por tradicional costumbre, que solamente se consideren iluminados por la luz del sol.

Sentado este precedente, es necesario admitir que los rayos del sol, además de propagarse en línea recta, son paralelos entre sí (1).

3. Las sombras se clasifican en *propias* y *arrojadas*. La *sombra propia* se produce en aquella parte de la superficie de un cuerpo adonde no llegan los rayos luminosos por impedirlo otra parte opuesta del mismo cuerpo que se supone opaco.

Así, por ejemplo, en la esfera A B (fig. 1), puede observarse que el hemisferio iluminado de la izquierda impide la llegada de la luz al otro hemisferio de la derecha, razón por la cual permanece en la sombra. Estos dos hemisferios quedan perfectamente deslindados por la circunferencia A 2 3... B... 10, 11 A, conocida por la denominación de *línea de separación de luz y sombra*.

Esta línea, que representa el papel más importante en el problema de sombras (2), se considera formada por los infinitos puntos de contacto con otros



(1) Aunque en absoluto no es cierto, bien pueden suponerse paralelos estos rayos si se tiene en cuenta que el sol, considerado como foco de luz, es 1.300.000 veces mayor que la tierra, viniendo a robustecer dicha hipótesis la enorme distancia de 24 000 radios terrestres á que aproximadamente se encuentra la tierra del astro del día.

(2) Tal problema en gran número de casos no tiene más finalidad que la determinación de la *línea de separación de luz y sombra*.

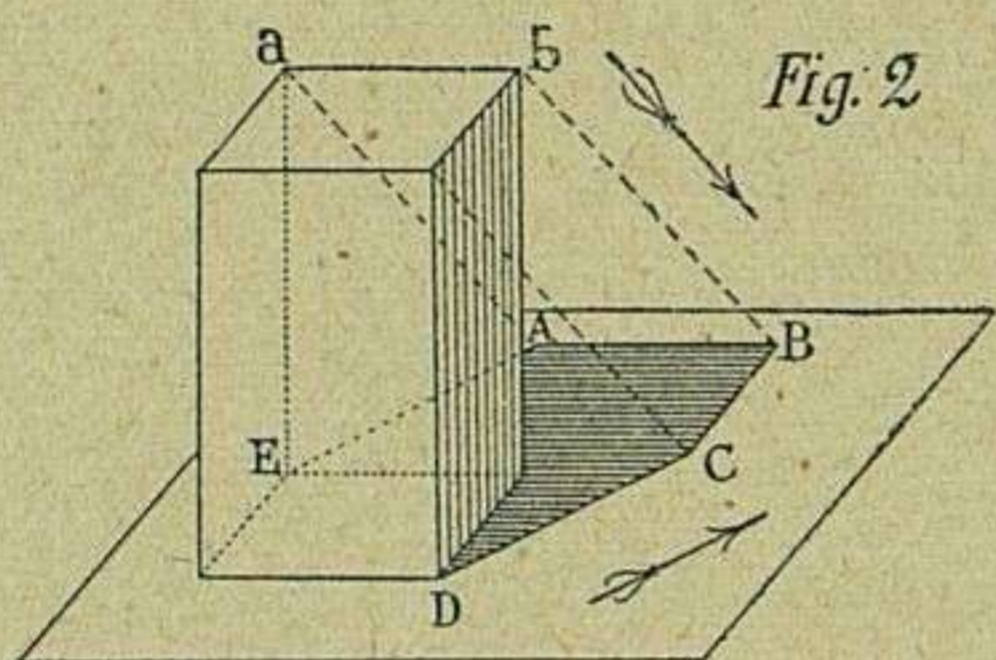
tantos rayos luminosos tangentes, que por ser paralelos á la dirección indicada por las flechas, corresponden á las generatrices de un cilindro tangente á su vez y que sirve de envoltura á la esfera.

4. La *sombra arrojada* se produce por la interposición de un cuerpo opaco entre el foco luminoso y una superficie directamente iluminada.

En el ejemplo anterior, la *sombra arrojada* se produce sobre la superficie $m n$, por interposición de la esfera $A B$ entre el foco luminoso y dicha superficie. Esta sombra se considera relacionada y dependiente de la propia. Para convencerse de ello, basta considerar que el contorno de la sombra arrojada $a 2' 3' 4' \dots 10' 11' a$, no es más que la traza sobre el plano $m n$ de la superficie cilíndrica, tangente á la esfera en los puntos $A 2 3 4 5 6 B 8 \dots 11$.

5. Dirección de los rayos luminosos. — Admitido en absoluto que los rayos solares han de ser paralelos entre si, sólo falta, para entrar de lleno en el procedimiento, conocer la dirección más conveniente que deben seguir respecto á los planos de proyección.

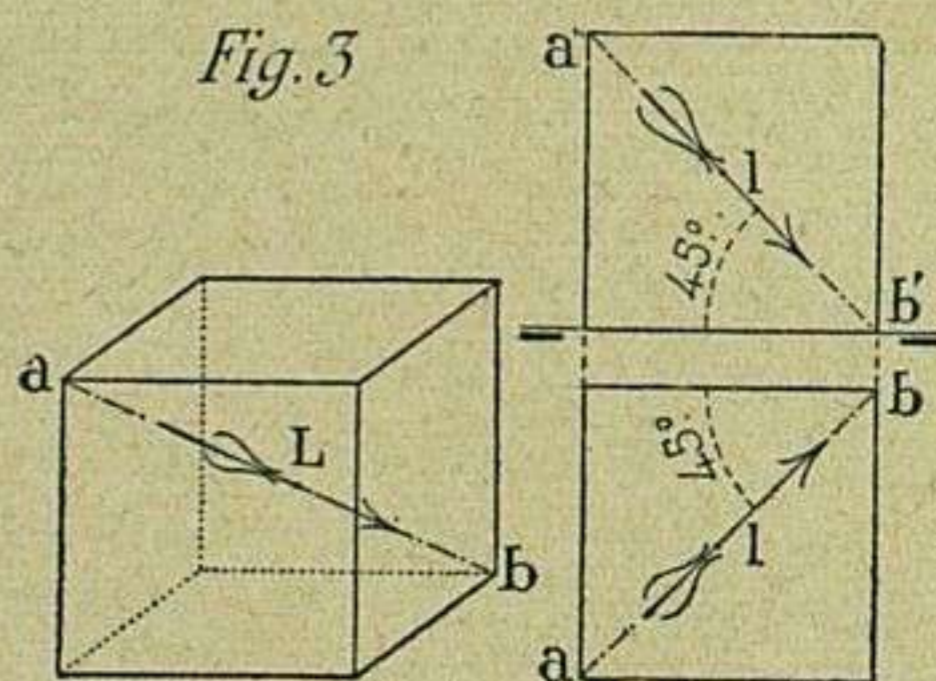
Claro está que esta dirección puede elegirse en consonancia con los efectos de claro-oscuro que se deseen obtener.



Así, en la figura 2, por ejemplo, la dirección de los rayos luminosos que están indicados en proyección horizontal y vertical por las respectivas flechas, se ha escogido en condiciones tales, que dichos rayos no resulten paralelos á ninguna de las aristas del prisma; porque en este caso, si fuesen paralelos á las aristas de las caras laterales del citado prisma, la *sombra arrojada* $E A B C D$ no se extendería más allá de la base $E D$, y la *sombra propia* no existiría por encontrarse igualmente iluminadas las caras laterales.

Si, por el contrario, se adoptara otro partido extremo, como sería dirigir los rayos luminosos paralelos á cualquiera de las aristas de las bases, suponiendo el plano horizontal ilimitado, se obtendría sobre él una *sombra arrojada* también ilimitada.

Ya en este camino, y para no incurrir en exageraciones como las apuntadas, lo mejor es atenerse á una dirección fija de los rayos luminosos comprendida en su justo medio. Esta dirección fija, adoptada universalmente en los dibujos de arquitectura y mecánica, consiste en que los rayos luminosos sean paralelos á la diagonal de un cubo que tenga dos de sus caras perpendiculares á los planos de proyección.



En la figura 3 pueden verse las proyecciones horizontal a, b , y vertical a', b' ,

correspondientes á la diagonal L de un cubo proyectado en las condiciones indicadas y observar, que tanto la a, b , como la a', b' , forman con la línea de tierra un ángulo de 45° . De consiguiente, queda establecido el convenio de que las proyecciones de los rayos luminosos, tanto verticales como horizontales, formarán ángulos de 45° con la línea de tierra (1). No obstante, si alguna vez en el curso de este tratado conviniera variar la dirección de la luz respecto á una ó á las dos proyecciones, se indicará por las oportunas flechas.

SOMBRA DEL PUNTO ⁽²⁾ DE LA LÍNEA

y del plano limitado, obtenidas sobre superficies planas.

6. Sombras arrojadas del punto y de la línea. — Sea $m s$ (fig. 4), un plano sobre el que se quiere proyectar la sombra de un punto tal como el n , extremo de la curva $n r$.

Elegida la dirección que han de seguir los rayos luminosos, se hará pasar uno de ellos por el punto n hasta que encuentre al plano $m s$ en N . Este punto N representará la sombra de n .

De aquí se deduce que, *la sombra arrojada de un punto sobre un plano, se encuentra en la traza del rayo luminoso que pasa por el punto, al tocar en dicho plano.*

De la misma manera que se ha determinado la sombra N del punto n sobre el plano $m s$, se pueden determinar las sombras $1', 2', 3', 4' \dots R$, correspondientes á los puntos de la curva $1, 2, 3, 4, \dots r$, y tomar estos puntos tan próximos como sea preciso, para que al trazar pasando por ellos la línea $N R$, sea ésta la sombra más aproximada posible de la curva $n r$ sobre el plano $m s$.

Conviene insistir en que los infinitos rayos luminosos que pueden pasar por los puntos de la curva $n r$, son otras tantas generatrices de una superficie cilíndrica, cuya directriz es $n r$, y que esta superficie, en su intersección con el plano $m s$, dará la *sombra arrojada* $N 1' 2' 3' 4' \dots R$, correspondiente á la curva $n 1 2 3 4 \dots r$.

De donde también se deduce que, *la sombra arrojada de una línea curva*

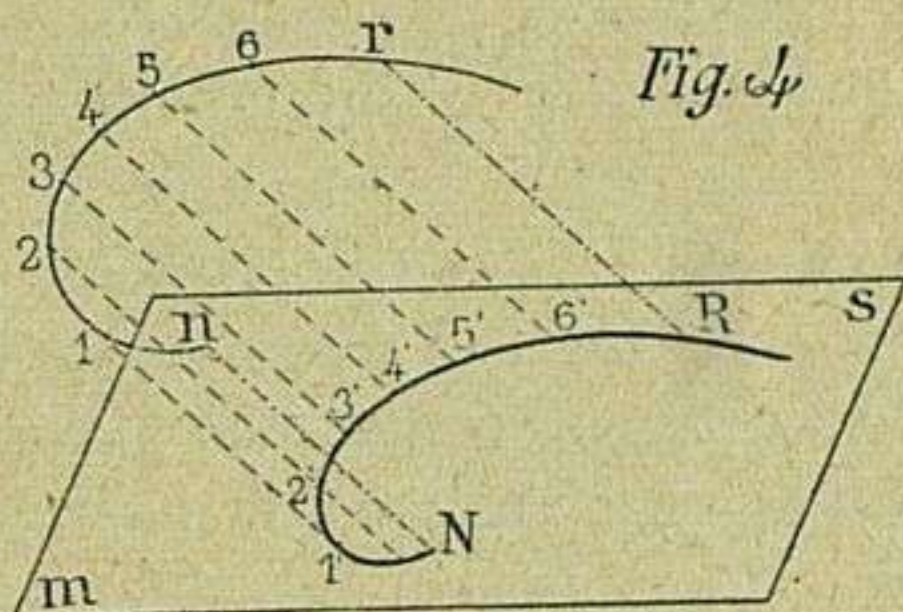


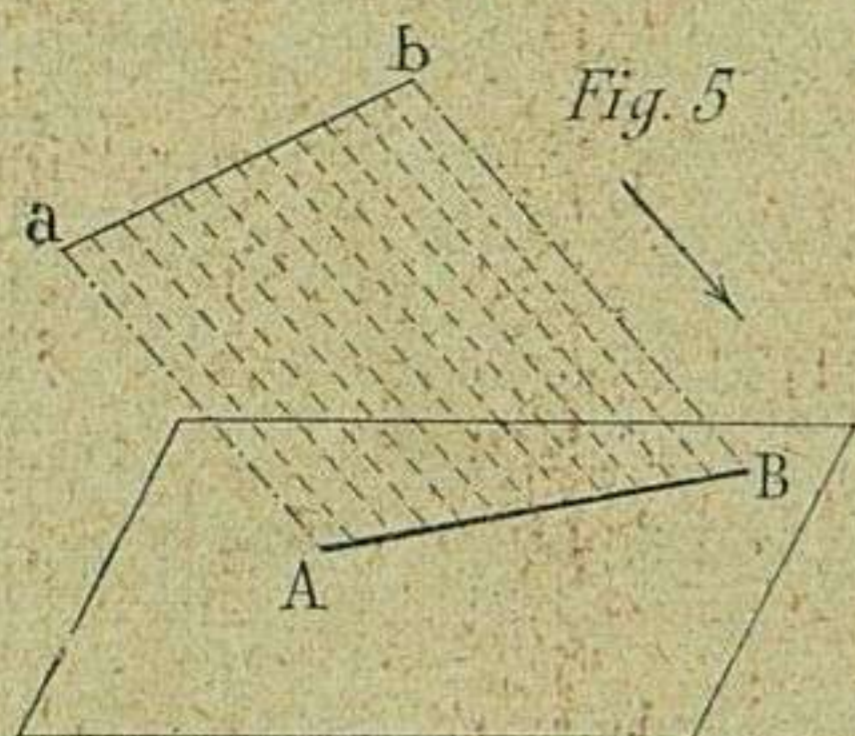
Fig. 4

(1) Una de las ventajas que hacen recomendable la dirección del rayo luminoso á 45° , es la de que con una sola proyección sombreada, se pueden conocer al primer golpe de vista los vuelos ó salientes de las molduras, espesores de muros, alturas, etc. Basta considerar que el rayo luminoso es hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales, cuyos extremos corresponden el uno, al punto más saliente del vuelo, y el otro, al límite de la sombra arrojada sobre el muro en donde sobresale la moldura.

(2) Del punto representado gráficamente debe entenderse.

sobre un plano, se encuentra en la traza del cilindro formado por los rayos luminosos que al pasar por los puntos de la curva dada, encuentran á dicho plano.

7. Haciendo las mismas consideraciones respecto á la sombra arrojada por una línea recta ab (fig. 5), se llegará á comprender que los infinitos rayos luminosos que pasan por ella, forman un plano que en su intersección con el dado, dará como *sombra arrojada* la recta AB correspondiente á la ab .

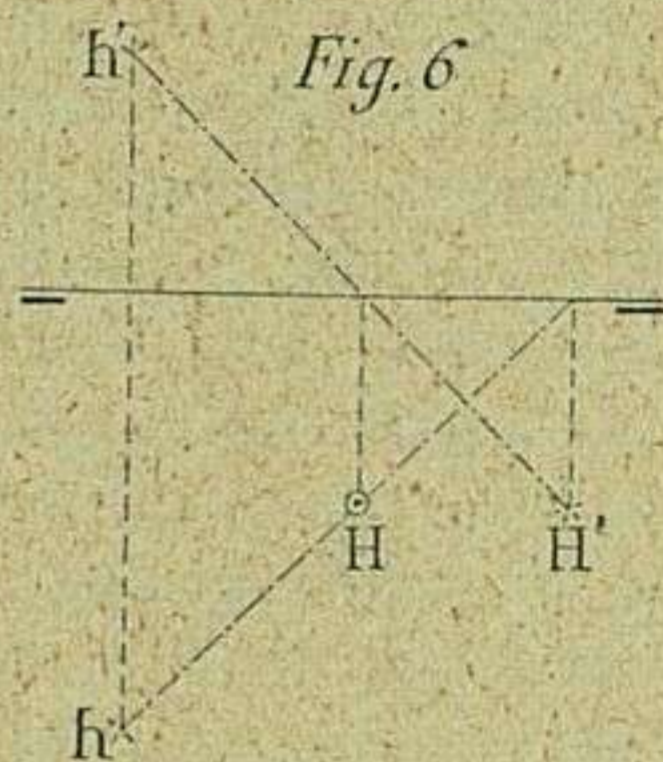


Por consiguiente, la sombra arrojada de una recta sobre un plano, estará determinada por la recta que une la sombra de los puntos extremos de la recta dada, ó bien por la traza del plano luminoso (1) con el plano dado.

Expuesta la teoría que antecede, y sin perderla de vista, ya se puede pasar á la resolución de algunos problemas asimilados á los casos que más frecuentemente suelen plantearse en la práctica del dibujo.

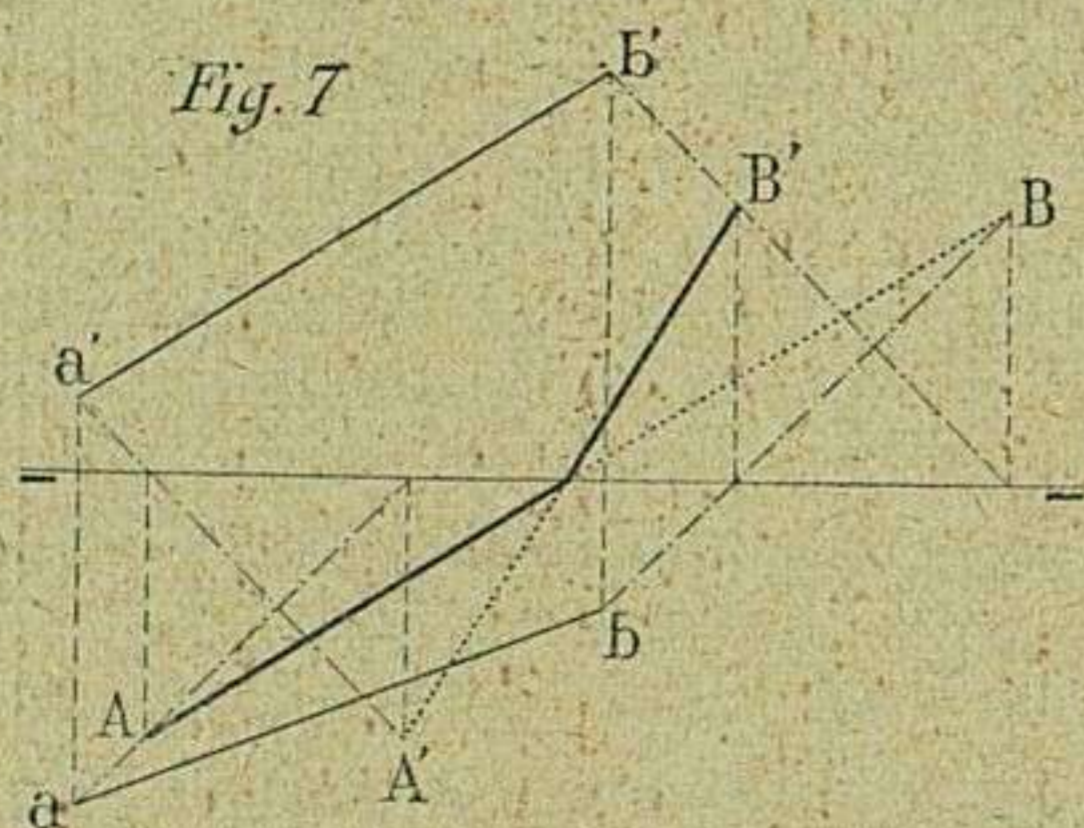
8. Dadas las proyecciones de un punto en el espacio, determinar la sombra arrojada de dicho punto sobre los planos de proyección. — Sean $h - h'$ (fig. 6) las proyecciones del punto dado.

La sombra arrojada sobre el plano horizontal se encontrará en la intersección de dicho plano con el rayo luminoso que pasa por el punto. Por consiguiente, el problema queda reducido á encontrar las trazas horizontal y vertical de dicho rayo luminoso



(V. 22, *Proyecciones octogonales.*) De estas dos trazas, solamente la H re-

presenta la sombra visible del punto, pues la H' , por pertenecer á la prolongación inferior del plano vertical, permanece oculta.



9. Determinar la sombra arrojada de una recta oblicua sobre los planos de proyección. — Sean $ab, a'b'$ (fig. 7) las proyecciones horizontal y vertical respectivamente de la recta dada. La solución del problema estriba en hallar la sombra arrojada de los puntos extremos de la recta.

Para ello se procederá como en el problema anterior, determinando por

(1) Se entiende por plano luminoso, el que contiene todos los rayos luminosos que pueden pasar por una recta.

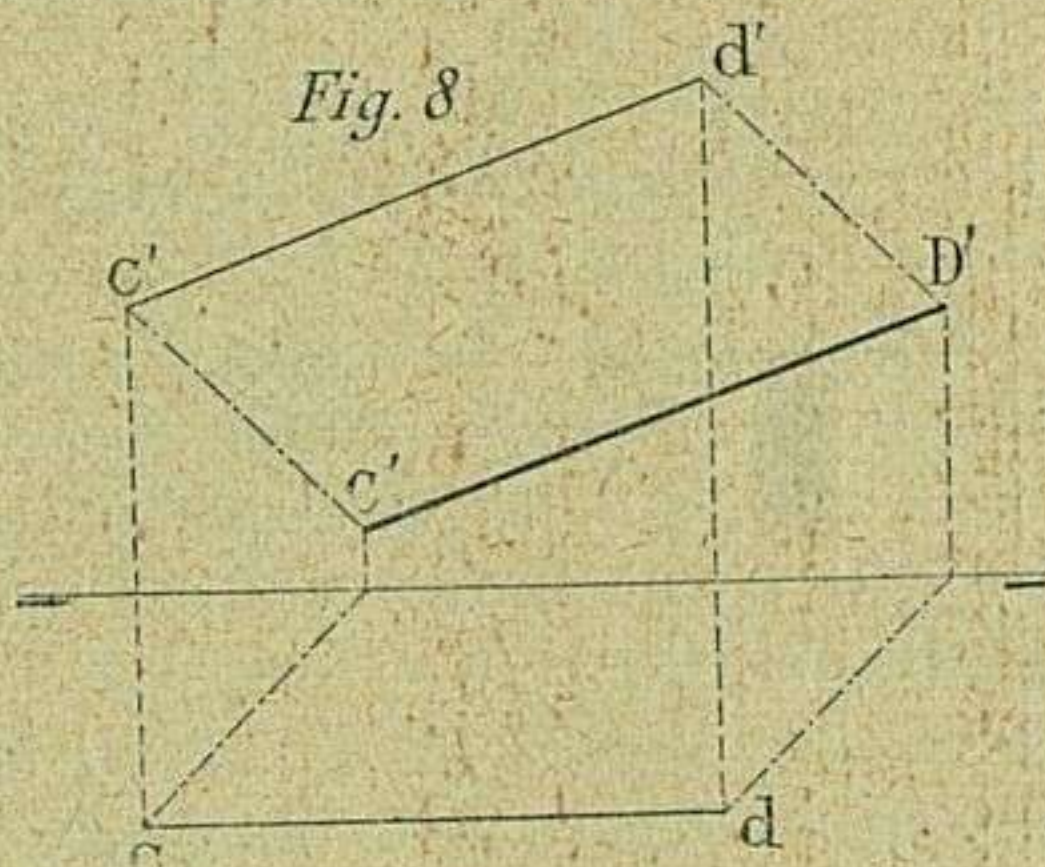
una parte las trazas A y A' del rayo luminoso, cuyas proyecciones respectivas pasan por a y a' , y por otra las B y B' del mismo que pasa por b y b' . Lo demás se reduce á unir mediante rectas la traza A con la B, y la A' con la B', para obtener en la línea quebrada A B', la *sombra arrojada* visible de la recta dada por las proyecciones $a b, a' b'$.

Es de notar, que la sombra A B' se quiebra precisamente en la línea de tierra. Así debe ser, pues ha de tenerse en cuenta que dicha sombra en sus dos segmentos, representa las trazas vertical y horizontal correspondientes al plano que contiene los rayos luminosos que pasan por la recta dada en el espacio. La otra recta quebrada A' B, corresponde á las trazas vertical y horizontal del plano luminoso, que permanecen ocultas por encontrarse en las prolongaciones posterior é inferior de los planos horizontal y vertical de proyección.

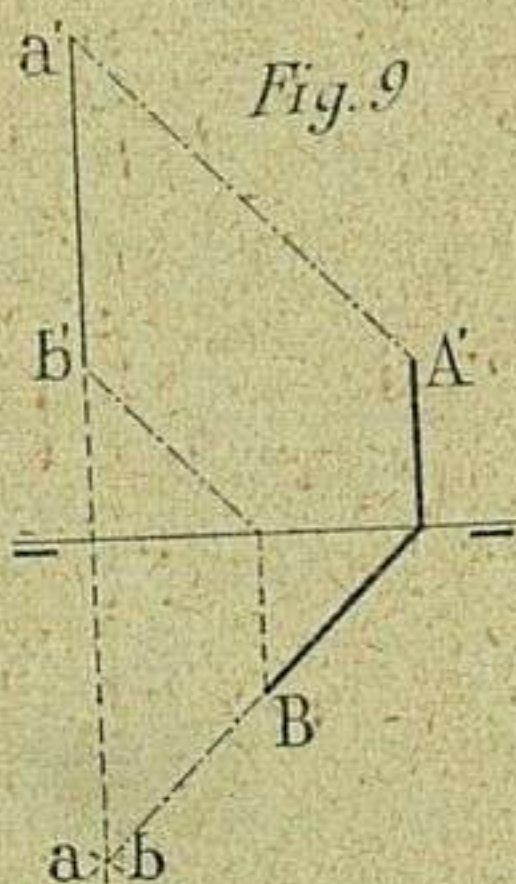
10. Hallar la sombra arrojada sobre el plano vertical por una recta paralela á dicho plano. —

Sean $c d, c' d'$ (fig. 8) las proyecciones de la recta dada. Para hallar su sombra se determinarán las sombras arrojadas de los extremos ($c c', d d'$) y la recta C' D' que une las sombras de dichos extremos, será la que corresponde á la de la recta dada.

Cuando como en el caso actual, la recta dada es paralela al plano sobre que se proyecta su sombra, recta y sombra son paralelas é iguales.



11. Dada una recta perpendicular á uno de los planos de proyección, hallar su sombra arrojada. — Sean ab —

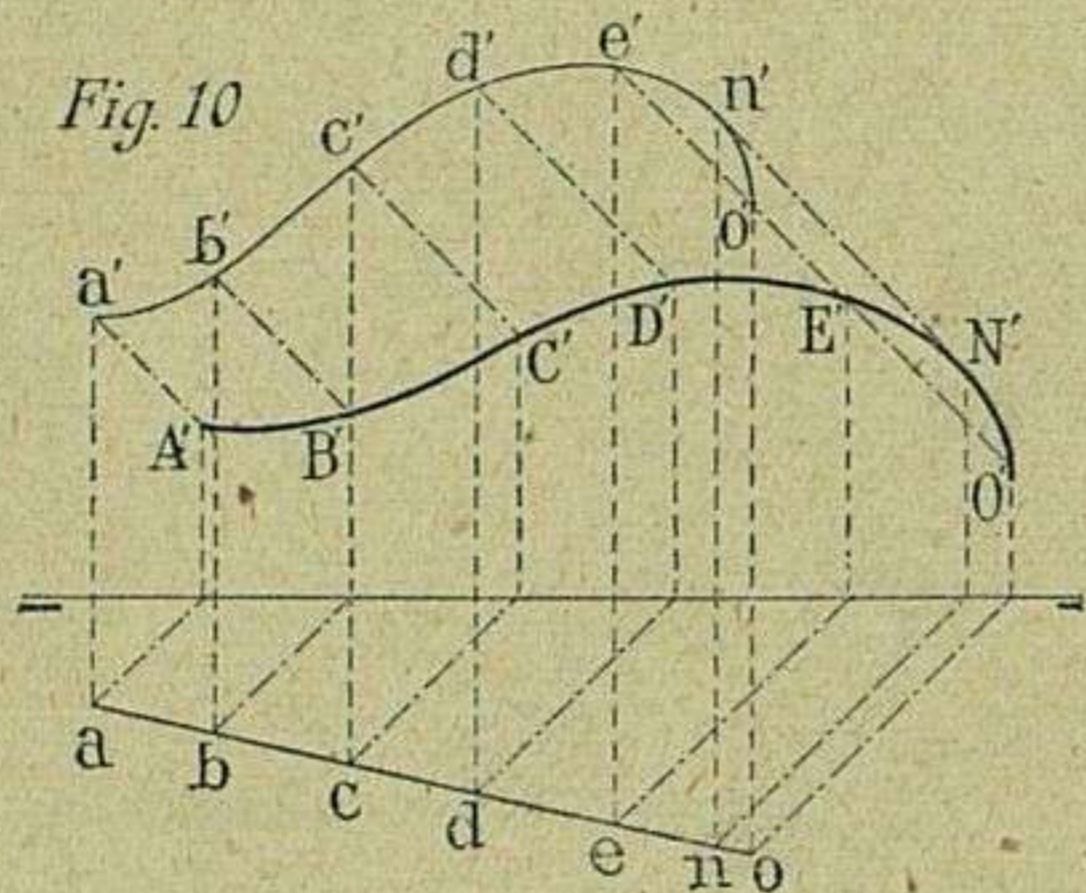


$a'b$ (fig. 9) las proyecciones de una recta perpendicular al plano horizontal. Del mismo modo que los anteriores problemas, se hallarán en éste las sombras B y A' de los puntos extremos de la recta dada, que corresponderán, como es consiguiente, á las trazas de los rayos luminosos que pasan por dichos extremos. Así, la línea quebrada comprendida entre A' y B, será la sombra que se busca; debiendo advertir que el segmento de sombra contenido sobre el plano horizontal sigue la dirección de 45° á partir de ab , y el proyectado sobre el plano vertical es paralelo á la proyección $a' b'$, verificándose la unión de los dos segmentos en la línea de tierra.

Á poco que se observe la sombra B A' se llegará á comprender que los dos segmentos componentes de ella, corresponden á las trazas de un plano perpendicular al horizontal y oblicuo, de 45° al vertical de proyección y que este plano, no es ni puede ser otro, que el formado por los rayos luminosos que pasan por la recta dada.

12. Dadas las proyecciones de una curva plana, hallar la sombra

arrojada. — Sean $a o - a' o'$ (fig. 10) las proyecciones horizontal y vertical de la curva dada, cuyo plano por más señas es perpendicular al horizontal de proyección.

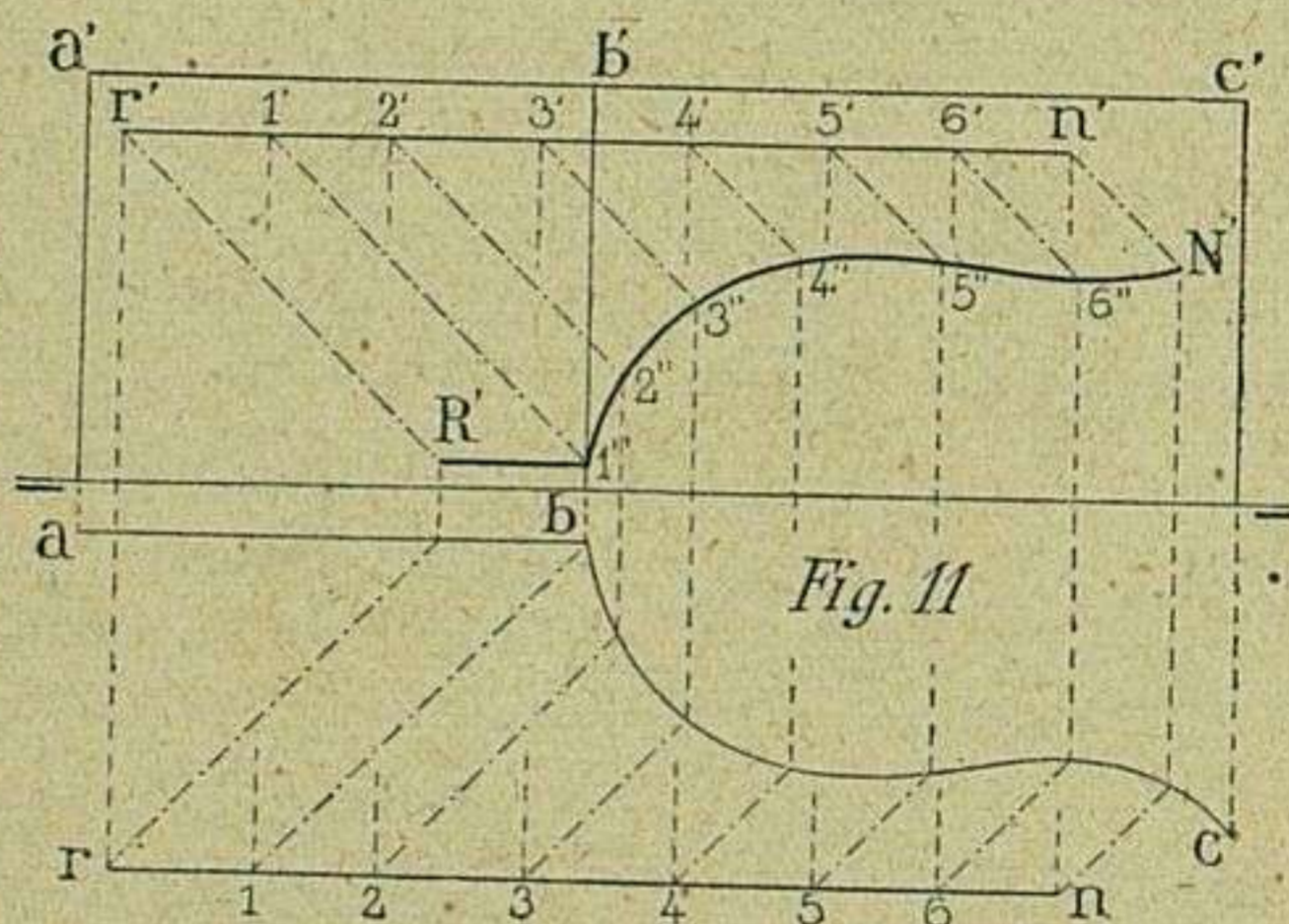


Recordando lo expuesto en el número 6, la solución del problema es muy sencilla. Se reduce á tomar puntos de la curva, que se correspondan en ambas proyecciones, tales como $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$... $o - o'$, y hacer pasar por ellos rayos luminosos de 45° , cuyas trazas con el plano vertical, serán A, B, C ... O; puntos por los que se trazará una curva á pulso

que será la sombra de la línea dada. Esta sombra resulta dentro del plano vertical, á causa de que los puntos de la curva en el espacio están más distanciados del plano horizontal que del vertical.

13. Hallar la sombra arrojada de una recta sobre un plano y una superficie cilíndrica. — Sean $r n - r' n'$ (fig. 11) las proyecciones de la

recta dada, y a, b, c la traza horizontal de una superficie compuesta del plano $a b - a' b'$ y de la superficie cilíndrica $b c - b' c'$; debiendo notarse que tanto el plano $a b - a' b'$ como las generatrices de la superficie curva son perpendiculares al horizontal de proyección. Particularidad por la que resulta también perpendicular la recta intersección de las dos superficies $b b'$.



Á primera vista el problema parece presentar alguna variación, según que la *sombra arrojada* vaya á caer sobre el plano ó sobre la superficie curva; pero como se verá, tal variación no afecta al procedimiento.

Se toma, como en el anterior problema, sobre la recta $r n - r' n'$ los puntos $r - r'$, $1 - 1'$, $2 - 2'$, $3 - 3'$... $n - n'$, de modo que sus proyecciones se correspondan y por ellos se trazan rayos luminosos de 45° , hasta que encuentren al plano ó superficie curva dados en los puntos R' , $1''$, $2''$, $3''$... N' . La línea mixta que pase por estos puntos, será la sombra propuesta.

La determinación de estos puntos ha de verificarse, considerando las trazas $a b$ y $b c$ para los efectos de la operación, como si fuesen líneas de tierra.

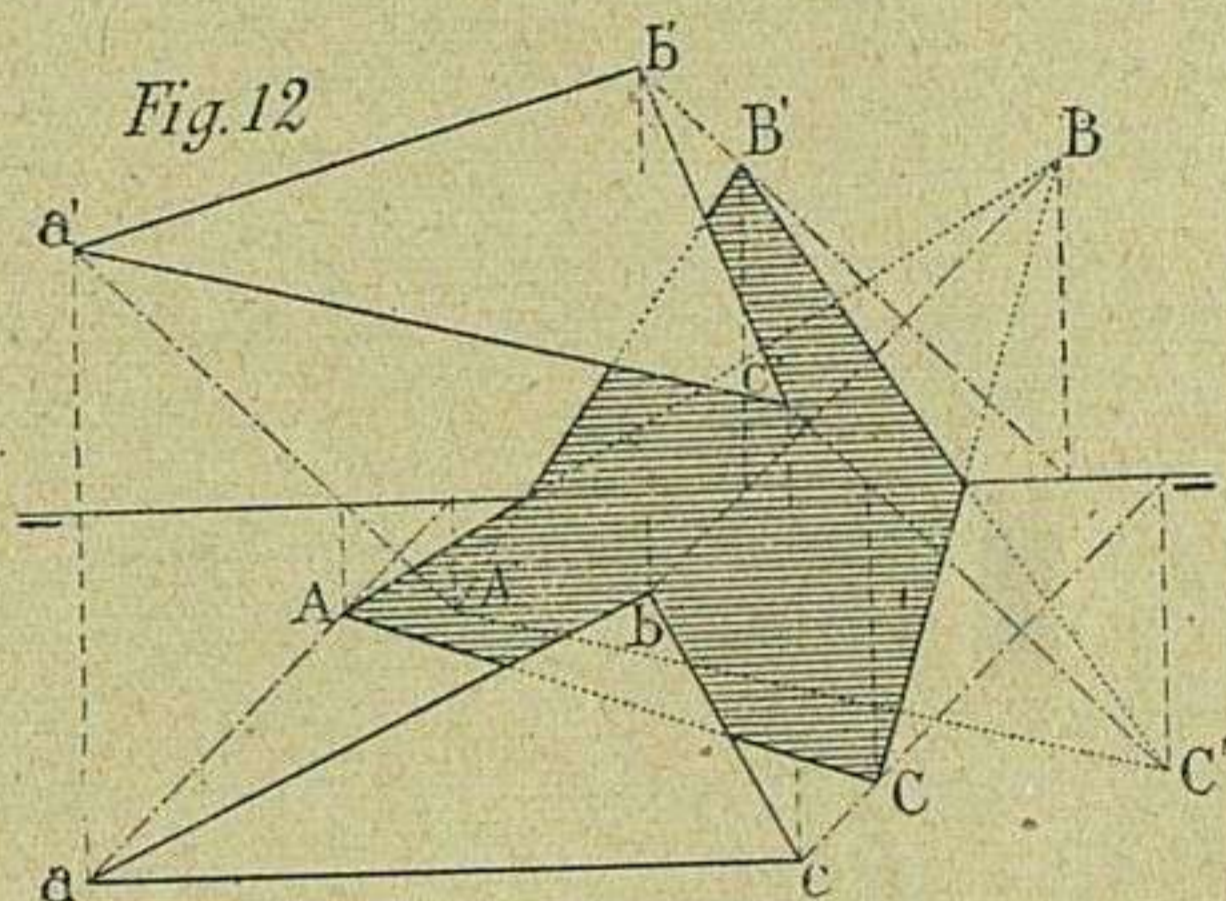
El punto $1''$, situado en la recta divisoria de las dos superficies, se determina trazando por b un rayo luminoso de 45° que encontrará á la proyección horizontal de la recta en 1 ; este punto se llevará á la proyección vertical en $1'$,

y desde él, se trazará el rayo luminoso de 45° que en su intersección con la recta $b b'$ dará por último el punto $1''$.

La única novedad que ofrece este problema consiste en que la parte de sombra $1''$, $2''$, $3''$... N, obtenida sobre la superficie cilíndrica, sea una línea curva. En efecto: así debe ser, puesto que dicha curva es resultado de la intersección del plano de 45° que contiene los rayos luminosos que pasan por la recta $r n - r' n'$ con la ya citada superficie cilíndrica.

14. Dadas las proyecciones de un plano limitado, hallar la sombra arrojada sobre los planos de proyección (caso general).— Sean

$a b c - a' b' c'$ (fig. 12) las proyecciones de un triángulo, cuyo plano es oblicuo á los de proyección. Este problema no ofrece dificultades para solucionarlo desde el momento que se sabe hallar la sombra de un punto. Así, las operaciones principales se ciñen á determinar sobre los planos de proyección las trazas de los rayos luminosos de 45° que pasan por las vértices del triángulo dado. (V. 22, *Proyecciones ortogonales.*)



Determinadas, pues, las trazas horizontales A, B, C, de los rayos luminosos que pasan respectivamente por $a - a'$, $b - b'$ y $c - c'$, se formará, uniendo dichas trazas mediante rectas, el triángulo ABC, que representará en su parte visible, la *sombra arrojada* sobre el plano horizontal.

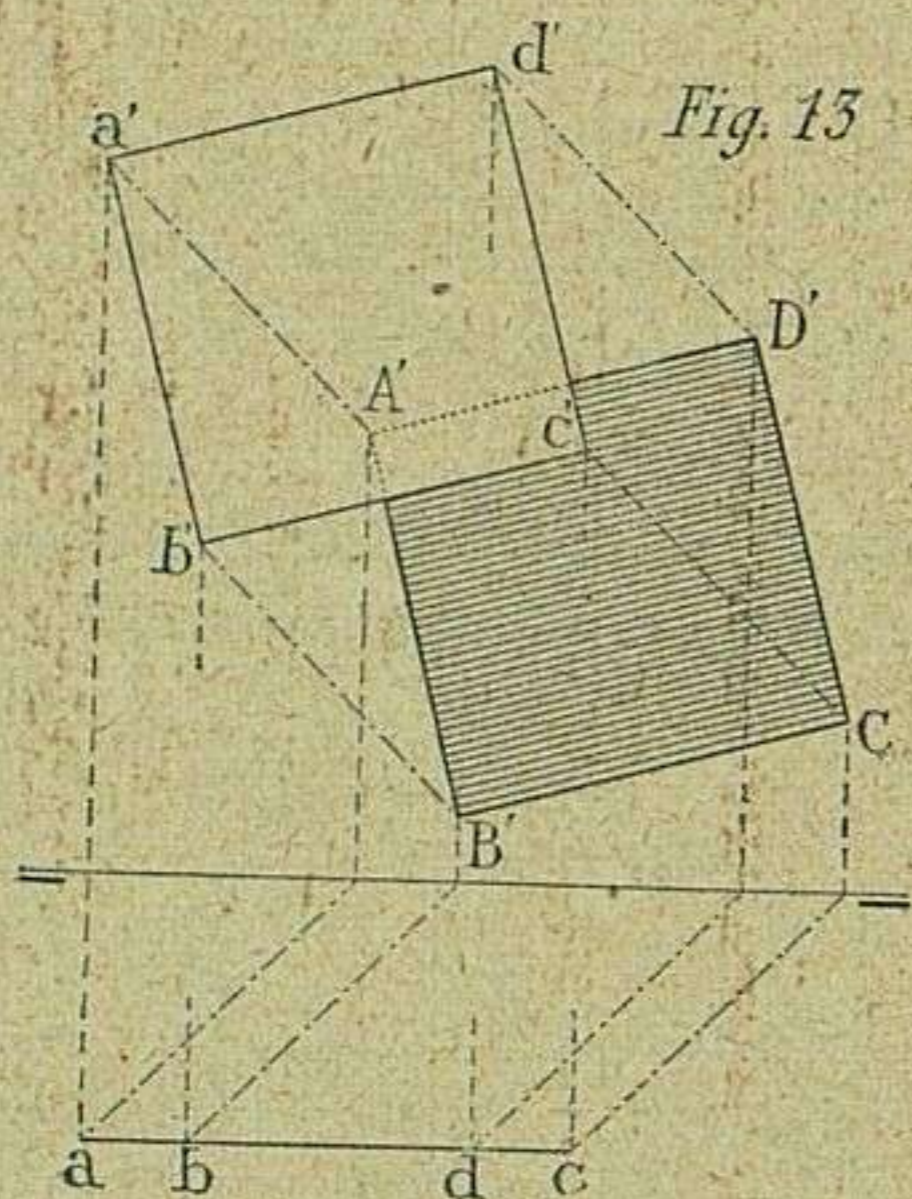
De manera idéntica se obtendrá la sombra arrojada en su parte visible sobre el plano vertical, representada por el triángulo A', B', C' , cuyos vértices corresponden á las trazas verticales.

Para comprobar la exactitud de la operación, ha de tenerse presente que la intersección de las rectas AB y $A'B'$ se verifica precisamente en la línea de tierra (V. 9); lo mismo sucede con las BC y $B'C'$ y en general con todas aquellas líneas que se extralimitan del ángulo principal formado por los planos de proyección. Dicha extralimitación, que da lugar á las líneas quebradas AB' y $B'C$, es causa también de que la sombra del triángulo se quiebre en la línea de tierra, dando como resultado aparente en el caso actual, un polígono de cinco lados.

Para formar concepto cabal, debe notarse que la sombra arrojada de un polígono sobre los planos de proyección no es otra cosa que la intersección de estos planos con el prisma que tenga por caras laterales los planos luminosos de 45° que contengan ó pasen por los lados del polígono dado en el espacio.

16. Hallar la sombra arrojada de un cuadrado paralelo á uno de los planos de proyección.— Sean $a b d c - a' b' c' d'$, (fig. 13), las

proyecciones del cuadrado paralelo al plano vertical. Determinados los puntos



$A' B' C' D'$, como en anteriores problemas; es decir, hallando las trazas verticales de los rayos luminosos de 45° que pasan por los vértices del polígono dado, queda resuelto el problema sin más que formar el cuadrado $A' B' C' D'$.

En el caso actual se registra una particularidad digna de notarse: la sombra $A' B' C' D'$, resulta ser un cuadrado exactamente igual al $a b c d$ de donde procede la sombra, con los lados del uno respectivamente paralelos á los del otro.

Esta coincidencia de igualdad entre el polígono y su sombra se verifica siempre que el plano del polígono dado y el que contiene á su sombra sean paralelos. En efecto; admitido que los planos luminosos

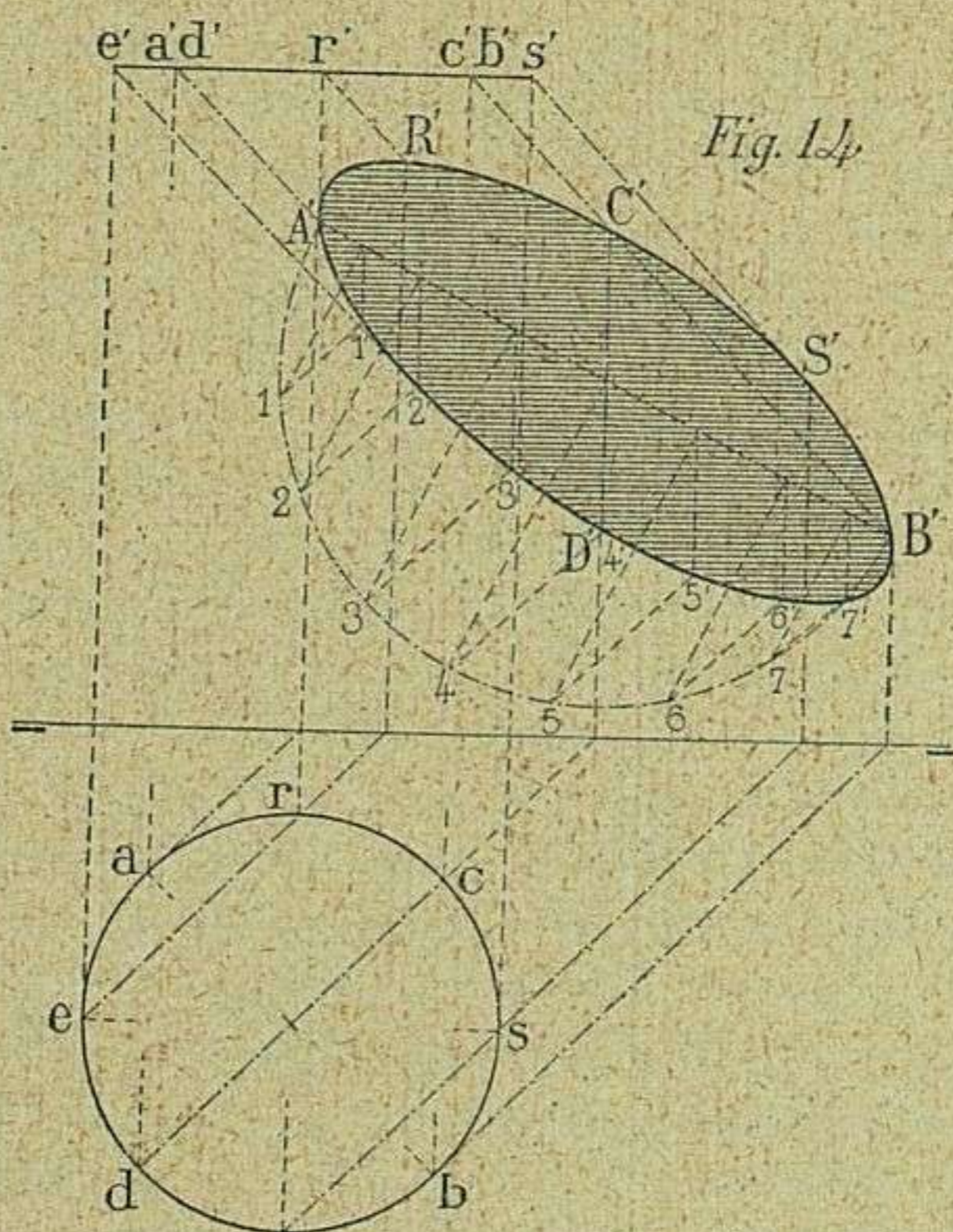
que pasan por los lados del polígono forman un prisma, la intersección de este prisma con un plano paralelo al del polígono director será otro polígono igual y correspondiente á la sombra del primero, y además, las aristas $a' A'$, $b' B'$, $c' C'$, y $d' D'$, correspondientes al prisma luminoso, serán iguales.

De esta igualdad entre las citadas aristas se deducen simplificaciones de alguna importancia en el trazado, pues en casos como éste basta conocer la sombra de uno de los vértices dados para construir, partiendo de él, un polígono igual, y con sus lados respectivamente paralelos del polígono dado para tener en él la sombra arrojada que se busca.

17. Determinar la sombra arrojada de un círculo sobre uno de los planos de proyección. — Sean $e, a, r...$

$b e - e' a' r' ... b' e'$ (fig. 14) las proyecciones horizontal y vertical de un círculo paralelo al plano horizontal, lo suficientemente distanciado de éste para que la sombra que se busca no se extralimite del plano vertical de proyección.

Ante todo, conviene tener en cuenta que los infinitos rayos luminosos que



pueden pasar por los puntos de la circunferencia del círculo dado, serán las generatrices de un cilindro, que al ser cortado oblicuamente en todas ellas por el plano vertical de proyección, dará como sección una elipse. Es decir, que *à priori* puede calcularse cuando, como en el caso actual y en las condiciones expuestas, la sombra arrojada de un círculo ha de resultar una elipse.

Primer procedimiento. — Sentado este precedente, se divide la proyección horizontal del círculo en ocho partes por lo menos, de modo que cada par de puntos de división, excepto *a* y *b*, estén situados en la proyección de un mismo rayo luminoso de 45° (1), y trasladando dichos puntos *a, r, c, s, b...* á la proyección vertical en *a, r, c, s, b...*, se determinará la sombra respectiva de cada uno en *A' R' C' S', ...* y, finalmente, se trazará por ellos la media elipse que empieza y termina respectivamente en los extremos del diámetro *A'* y *B'*. Los demás puntos que se necesitan para completar la elipse se determinan en la misma forma, pero con más facilidad, por estar ya trazadas gran parte de las líneas auxiliares.

Segundo procedimiento. — Sabiendo á ciencia cierta que la sombra del círculo, dadas las condiciones del problema, ha de ser una elipse, lo más sencillo para resolverlo es determinar algunos de los datos indispensables para el trazado de esta curva. Así, por ejemplo, puede observarse que la línea que une los puntos *A'* y *B'* obtenidos según el primer procedimiento, es diámetro conjugado con el *C' D'* y reciprocamente.

Por consiguiente, el problema queda reducido, una vez hallados los puntos extremos de los diámetros *A' B'* y *C' D'* al trazado de la elipse dados dichos diámetros conjugados, problema cuya resolución puede verse en el n.º **89** de la 1.ª parte de este Tratado.

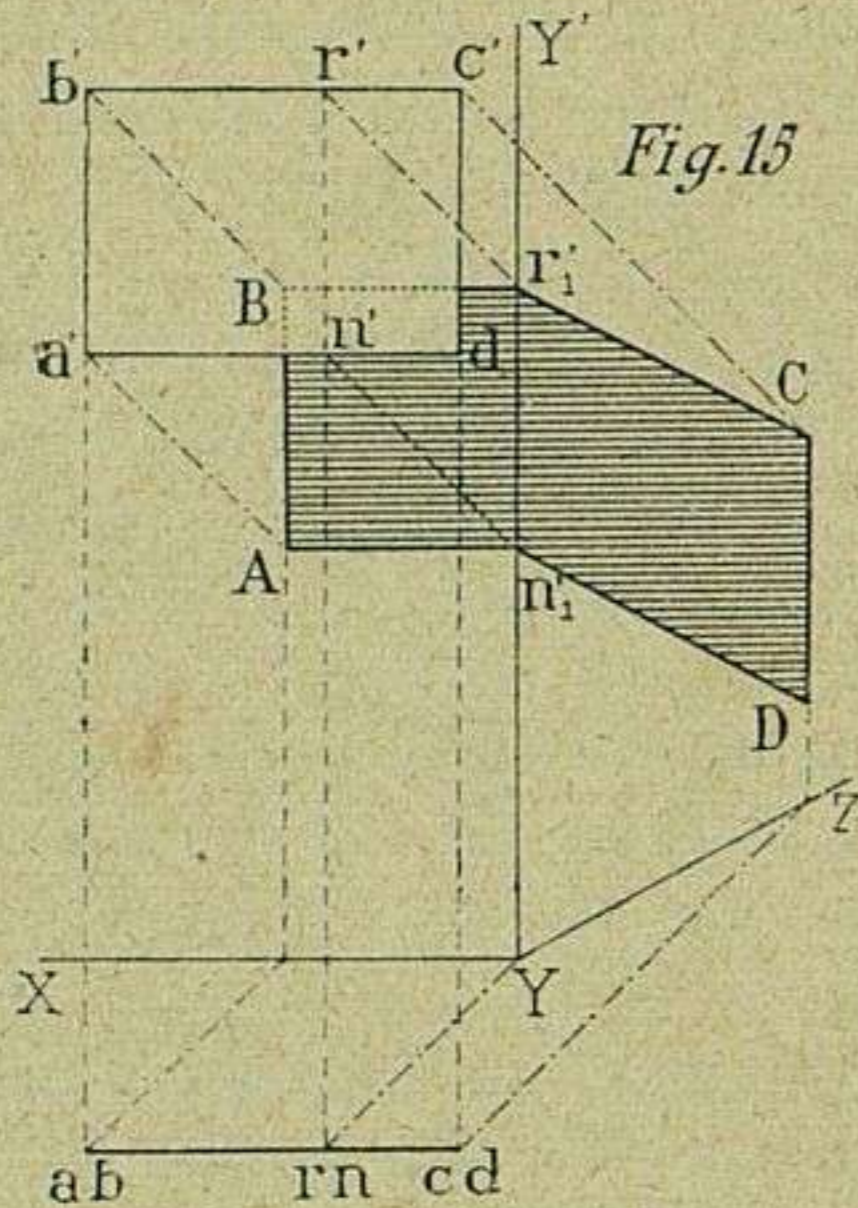
De los dos procedimientos expuestos, es preferible el segundo por su sencillez y la exactitud que proporciona á los trazados. Á él debe acudir siempre que sea posible determinar los datos indispensables para el trazado de la elipse. Estos datos pueden ser diámetros conjugados como en el caso actual, ó también ejes como los que se registran en los problemas á que se refieren las figuras 30, 31, 32 y 33.

En ocasiones no se conocen más datos que uno de los ejes y un punto cualquiera de la elipse. Entonces puede llegarse á la determinación del otro eje, procediendo como se indica en el núm. **86** de la 1.ª parte de este Tratado, y el trazado de la elipse no ofrece dificultad.

Para construir la elipse dados los ejes, se exponen varios procedimientos en los núms. **84, 85, 87** y **114**, que también pueden consultarse en la 1.ª parte de este Tratado. Todos ellos tienen aplicación en el caso actual; pero al que debe darse preferencia, por lo que tiene de práctico, es al que se explica en el núm. **87**, puesto que, mediante una tira de papel y sin necesidad de hallar los focos, se pueden con relativa facilidad determinar puntos de la elipse en un trayecto limitado ó en la totalidad de dicha curva.

(1) Esta condición tiene por objeto simplificar el trazado quitándole la complicación que pudiera sobrevenir del exceso de líneas auxiliares.

18. Hallar la sombra arrojada de un polígono sobre dos planos dados por sus trazas.—Sean X y Z (fig. 15) las trazas de dos planos perpendiculares al horizontal de proyección, y que cortándose oblicuamente, según Y Y', han de contener la sombra arrojada de un paralelogramo dado por las proyecciones $a b c d - a' b' c' d'$.



Como en ejemplos anteriores (V. **13**), las sombras A B C D, correspondientes á los vértices, se hallarán en la intersección de los rayos luminosos de 45° que pasan por dichos vértices, con los planos X y Z.

Los puntos r'_{1} , n'_{1} , situados en la arista Y Y', merecen especial atención. Para determinarlos, se hará pasar por dicha arista un plano vertical de 45° , que cortará á las proyecciones del polígono en $r - r'$, $n - n'$, y tanto desde r' como desde n' , se trazarán

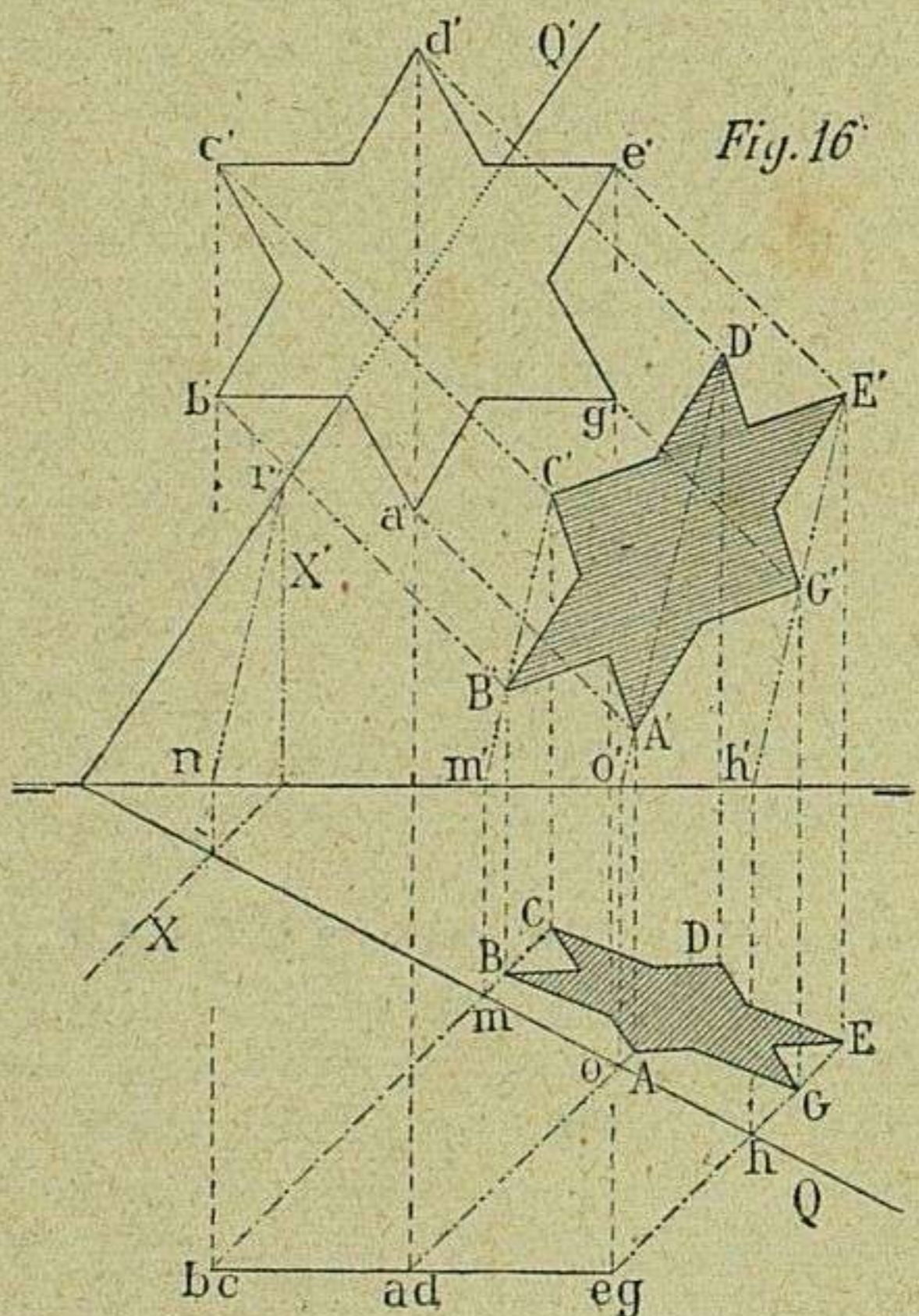
líneas de 45° , que en su intersección con la arista Y Y', darán respectivamente los puntos r'_{1} , n'_{1} , donde precisamente se quiebra la sombra del paralelogramo. Estos puntos, unidos mediante rectas con los A, B, C, D, formarán el contorno de la sombra arrojada objeto del problema.

líneas de 45° , que en su intersección con la arista Y Y', darán respectivamente los puntos r'_{1} , n'_{1} , donde precisamente se quiebra la sombra del paralelogramo. Estos puntos, unidos mediante rectas con los A, B, C, D, formarán el contorno de la sombra arrojada objeto del problema.

19. Sombra arrojada de un polígono sobre un plano cualquiera dado por sus trazas (caso general). — Sean por una parte $a b c d g - a' b' c' d' g'$ (fig. 16) las proyecciones de un polígono estrellado cuyo plano es perpendicular al horizontal de proyección, y por otra el plano dado por las trazas Q — Q', sobre el que ha de proyectarse la sombra del polígono.

El procedimiento apropiado en éste como en el caso anterior, consiste en el empleo de planos auxiliares verticales de 45° , tales como el X X', cuya intersección con el Q Q' es $n r'$, línea que da la dirección paralela á todas las demás intersecciones que puedan obtenerse entre el plano Q Q' y los planos auxiliares verticales de 45° que se tracen por los vertices del polígono $e' d' e'$.

Así, por ejemplo, en la paralela á la intersección $n r'$, trazada por $m - m'$,



se hallarán los puntos de sombra B' y C' , determinados por el encuentro de los respectivos rayos luminosos que pasan por b' y c' . A los puntos B' y C' corresponderán en la proyección horizontal los B y C .

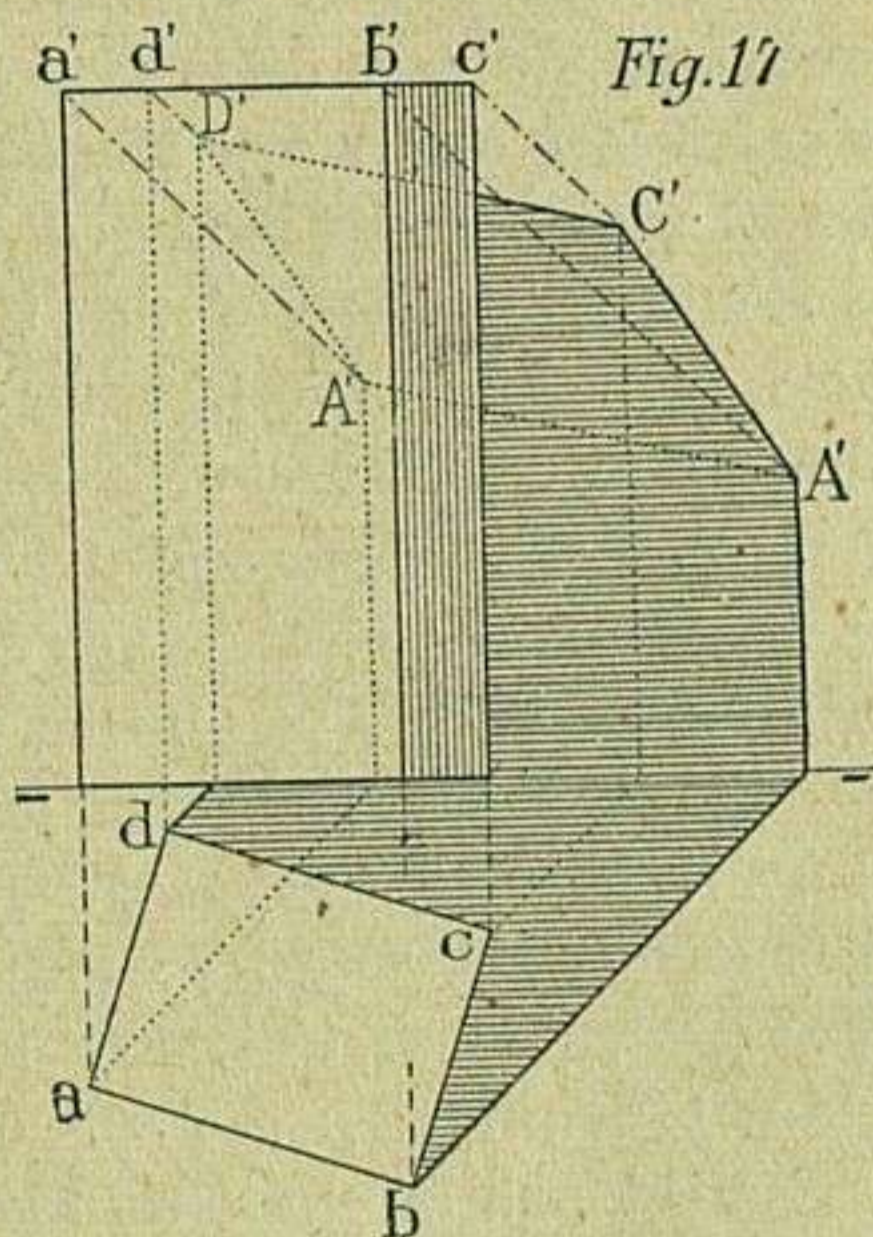
Por igual procedimiento se determinarán los puntos $A' D'$, situados en la paralela á la intersección que pasa $o - o'$, y los $G' E'$ en la paralela á las anteriores trazada por $h' - h'$. Después se forma con estos puntos el respectivo polígono estrellado correspondiente á la sombra del dado sobre cada uno de los planos de proyección.

DETERMINACIÓN DE SOMBRAS

en poliedros y cuerpos redondos.

20. Sombras propia y arrojada de un prisma recto, cuya base coincide con el plano horizontal de proyección (fig. 17). — Según la dirección de los planos luminosos que envuelven al prisma, pasando por las aristas laterales bb' , dd' , y por las de la base superior $d'e'$ y $b'c'$, resulta que la línea de separación de luz y sombra se formará con dichas aristas. La base superior $abcd - a'b'c'd'$ y las caras $ab - a'b'$ y $ad - a'd'$ quedarán iluminadas; las otras tres caras del prisma resultan en sombra, que únicamente es visible en la cara $b'e'$ de la proyección vertical.

Sombra arrojada. — Se hallarán las trazas $A' B' C' D'$ de los rayos luminosos de 45° que pasan por $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ y $d - d'$, respectivamente, en las que se tendrá la sombra arrojada de la base superior del prisma sobre el plano vertical, uniéndolas con rectas. Teniendo en cuenta que las aristas laterales bb' y dd' son perpendiculares al plano horizontal, se procederá, para determinar la sombra que proyectan, según las instrucciones expuestas en el núm. 11; dicha sombra estará contenida en los dos planos, y se unirá en los puntos A' y D' á la sombra de la base superior del prisma.



21. Sombras propia y arrojada de una pirámide recta, cuya base coincide con el plano horizontal de proyección (fig. 18). — Sombra propia.

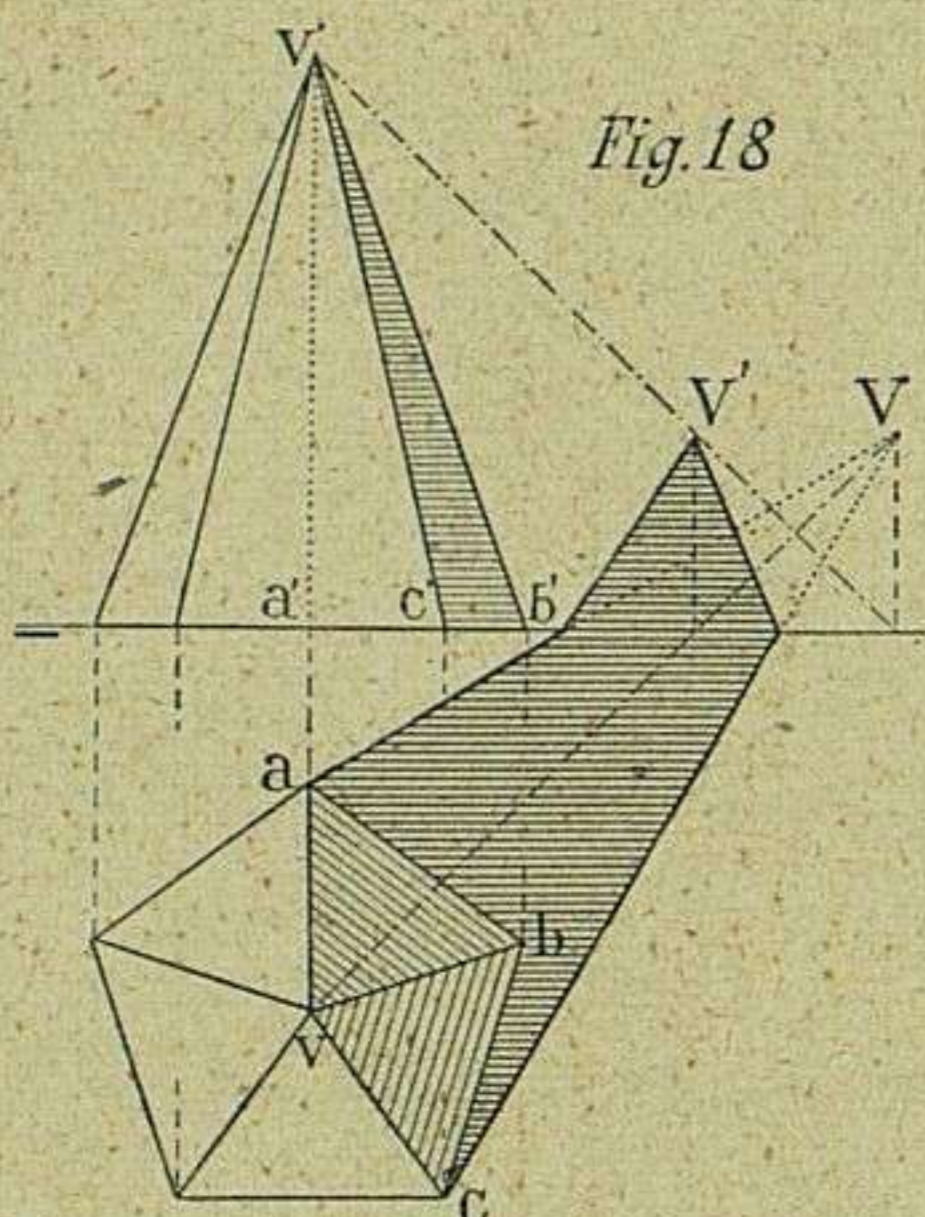


Fig. 18

Los planos luminosos de 45° que envuelven la pirámide pasarán por las aristas $va - v'a'$ y $vc - v'c'$, las que por este motivo constituyen el contorno de separación de luz y sombra. Por tanto, la sombra propia visible quedará reducida á las caras vab, vbc de la proyección horizontal y $v'e'b'$ de la vertical.

Sombra arrojada. — Á causa de la proximidad de la pirámide al plano vertical, la sombra arrojada viene á proyectarse sobre los dos planos. En este caso lo que procede es hallar las trazas V y V' del rayo de 45° que pasa por $v - v'$, trazar desde V las rectas Va y Vc , y se tendrá en la

parte de plano horizontal que estas rectas limitan, la sombra arrojada sobre dicho plano. La que se proyecta en el vertical, queda determinada mediante rectas que unen el punto V' con las intersecciones producidas por la línea de tierra en las citadas rectas Va y Vc .

22. Sombras propia y arrojada de un cilindro de revolución de bases paralelas al plano horizontal (figura 19). — Sombra propia. Se trazarán planos de 45° tangentes al cilindro (V . proyecciones ortogonales, 17), y las generatrices de contacto $a - a'$ y $b - b'$ determinarán el limite de luz y sombra, visible solamente en nb' .

Sombra arrojada. — Quedará determinada sobre el plano horizontal, por las trazas de los planos tangentes en a y b , y en el vertical por la elipse de diámetros conjugados $A'B'$ y $C'D$, originados de los diámetros ab y cd , correspondientes al círculo de la base superior del cilindro (V . 17).

Las sombras arrojadas sobre el plano vertical por los segmentos de cada una de las generatrices de contacto, corresponden á las trazas verticales de los

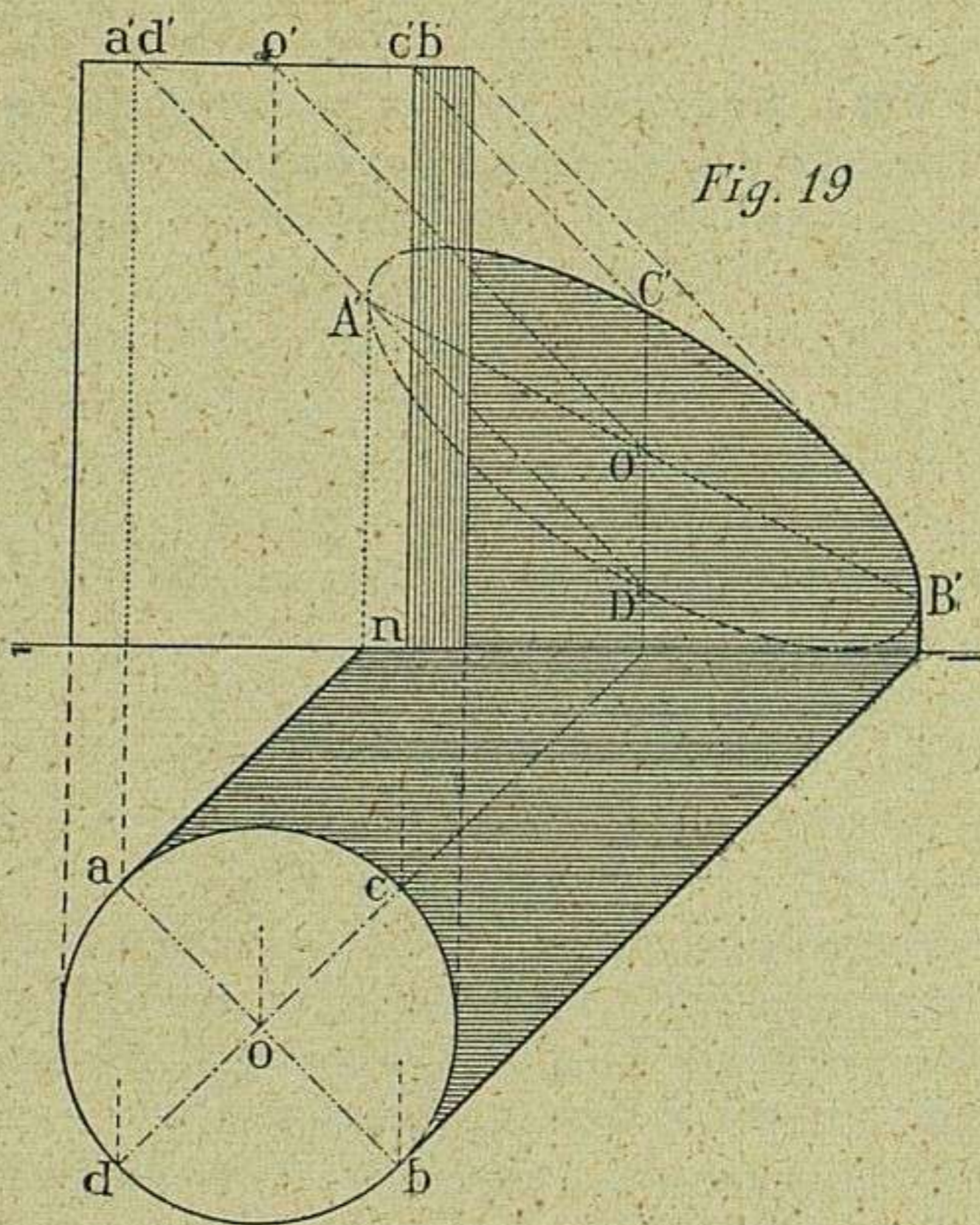
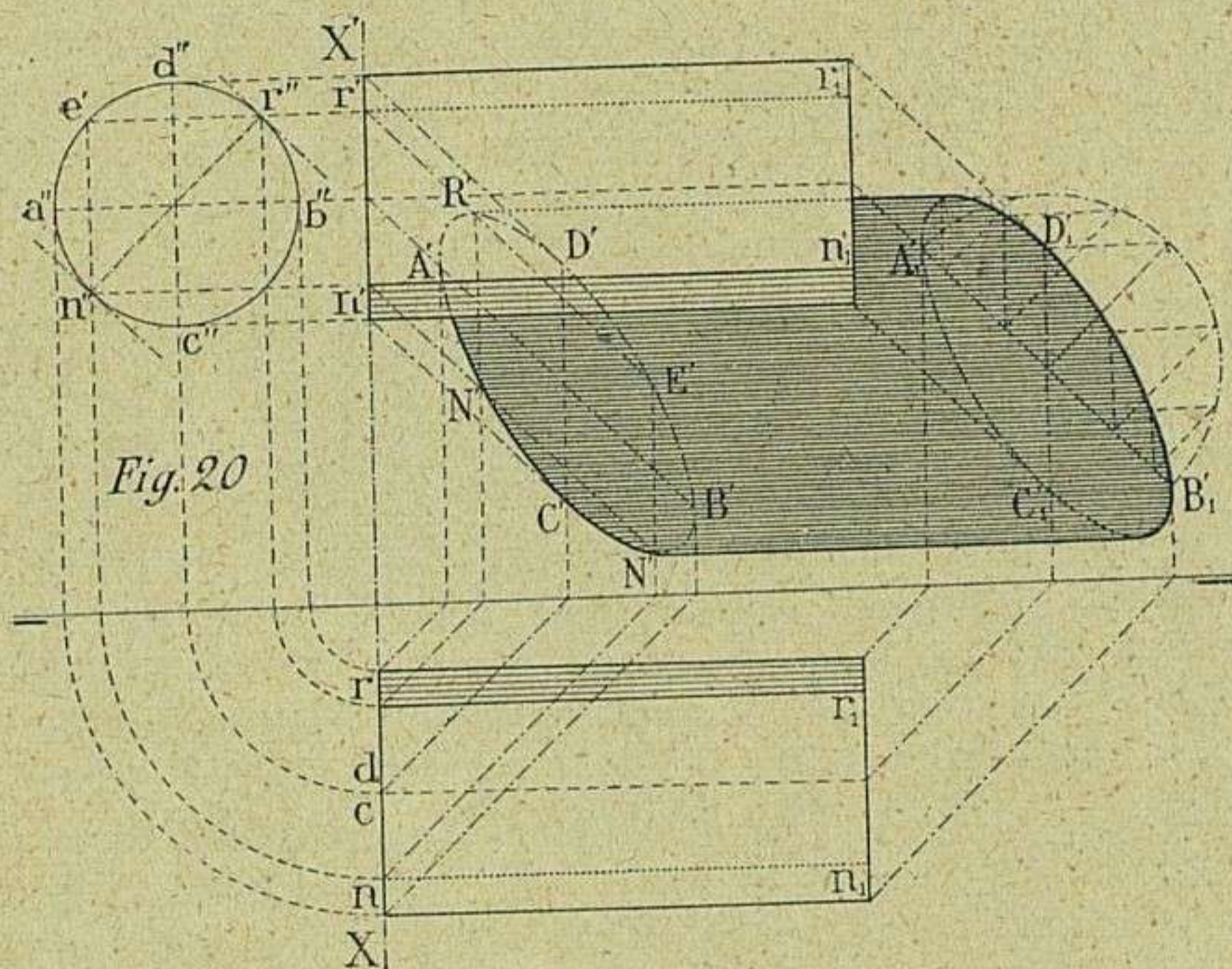


Fig. 19

planos de 45° tangentes al cilindro, trazas que respectivamente han de ser tangentes á la elipse en los extremos A' y B' del mayor de los diámetros conjugados.

23. Sombras propia y arrojada de un cilindro de revolución con el eje paralelo á la línea de tierra (fig. 20). — *Sombra propia.* Por la posición paralela del eje de este cilindro á la línea de tierra, resultan insuficientes las dos proyecciones que de ordinario se emplean, haciéndose necesario el auxilio de una tercera vertical de perfil, donde puedan verificarse las operaciones relacionadas con las bases del cilindro. Indicada esta proyección por las trazas $X - X'$ de dicho plano de perfil, se determinarán en la base del cilindro los puntos $n' r''$, por donde pasan las generatrices contenidas en los planos de 45° tangentes á la superficie cilíndrica.



De estas generatrices de contacto que pertenecen al contorno de sombra propia, sólo son visibles, en proyección horizontal, la $r r_1$, y en vertical la $n' n'_1$.

Sombra arrojada. — El contorno de esta sombra contenido sobre el plano vertical, queda determinado por la sombra arrojada de las generatrices $r r_1$, $n' n'_1$, juntamente con la de las bases del cilindro, que, como ya se ha indicado, son elipses tangentes á las sombras de las citadas generatrices.

De estas dos elipses, la una se ha obtenido determinando las sombras de varios puntos de la base del cilindro en $A' R' D' E' B' N'' C'$ y N' (V. **S**), y la otra hallando solamente los $A'_1 B'_1$, $C'_1 D'_1$, extremos de los diámetros conjugados mediante los cuales se traza esta curva (V. **S9**, 1.^a parte). Por muchas razones es preferible el procedimiento de los diámetros conjugados.

24. Sombras propia y arrojada de un cilindro, cuyo eje es paralelo al plano vertical y oblicuo al horizontal (fig. 21). — *Sombra propia.* Se toma como plano auxiliar el de perfil P X, abatido sobre el vertical de proyección; á dicho plano se traslada en $y'' x''$ la proyección del rayo luminoso mediante un cambio de plano horizontal (V. proyecciones ortogonales, **68**), y se proyecta la base del cilindro según la circunferencia $a'' d'' b'' c''$.

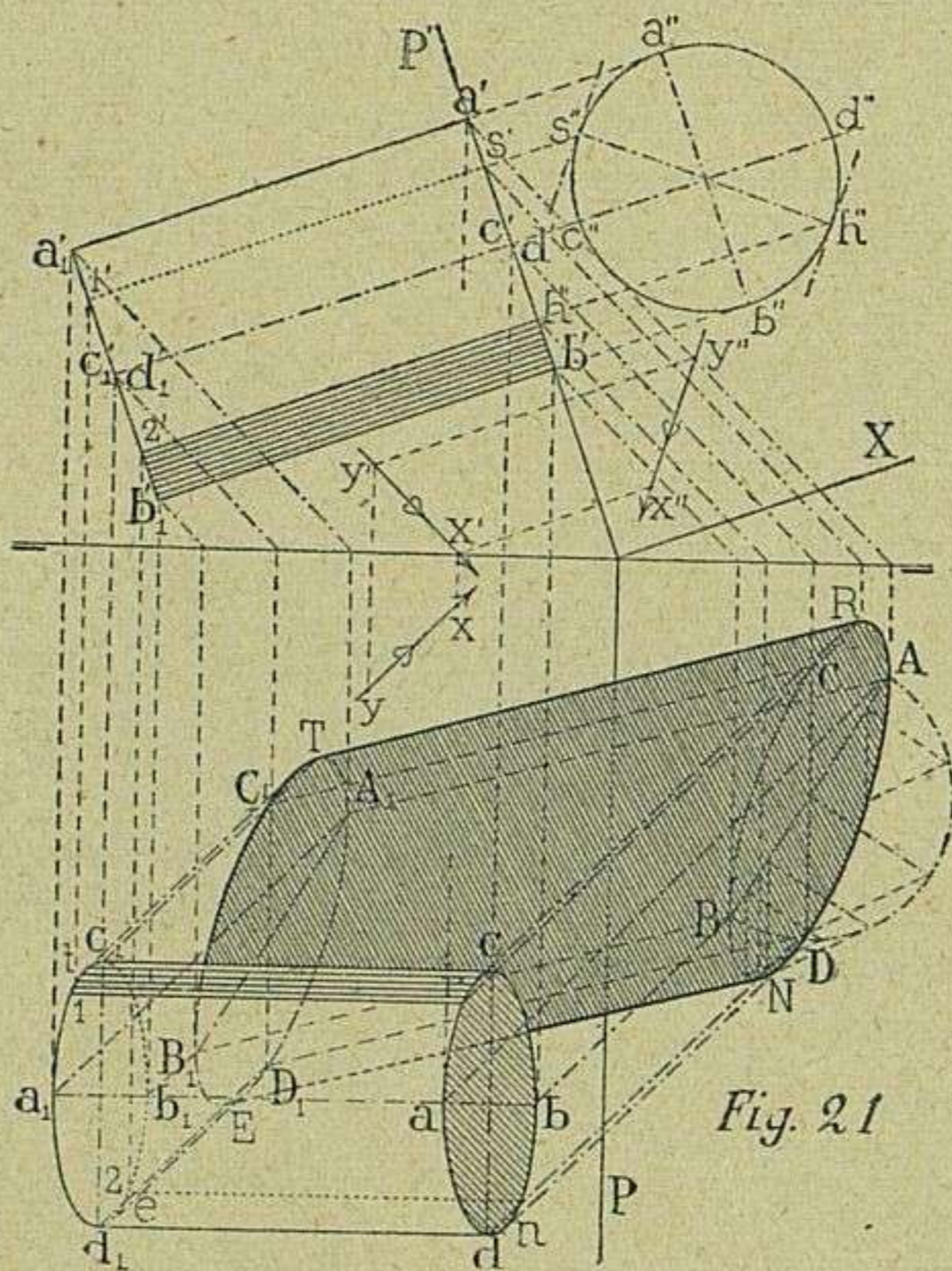


Fig. 21

Trazando dos tangentes paralelas al rayo luminoso proyectado en $x'' y''$, se determinarán en dicha circunferencia los puntos $s'' h''$, proyecciones de las generatrices de separación de luz y sombra, de las que solamente son visibles $2' h'$ en la proyección vertical y $1 r$ en la horizontal.

La base $a b d c$, proyectada sobre el plano horizontal, corresponde á la sombra propia.

Sombra arrojada. — Esta sombra, que figura en su totalidad sobre el plano horizontal, se obtiene hallando (V. **23**) las sombras $A_1 B_1, C_1 D_1$ y $A B, C D$, correspondientes á los diámetros conjugados de las respectivas elipses que forman las bases, las cuales, en unión de las sombras arrojadas $T R$ y $E D$, por las generatrices $1 r$ y $2 n$, forman el contorno de la sombra arrojada.

25. Sombras propia y arrojada de un cono de revolución cuyo eje es perpendicular al plano horizontal (fig. 22). — *Sombra propia.* — Está

limitada en la parte visible por la generatriz $o'_1 s'$, y en la no visible, por las $o s$, $o r$ y $o'_1 r'$. Todas ellas representan en su respectiva proyección las líneas de contacto con dos planos tangentes al cono, que se cortan, según el rayo luminoso $o x - o'_1 x'$.

La solución del problema estriba, pues, en el trazado de planos tangentes al cono que pasen por $x - x'$ (V. Proyecciones ortogonales, **81**), traza del rayo luminoso con un plano paralelo á la base del cono.

En la actual operación, para reducir la extensión de la figura, se considera substituida la base del cono por el círculo de la sección, producida mediante el plano horizontal $x' s_1$, resultando, por consiguiente, los puntos de contacto en $r_1 - r'$, $s_1 - s'$. La recta que pasa por s' y o'_1 es la generatriz de contacto que sirve de límite á la sombra propia visible.

Esta substitución del cono, hecha en las debidas condiciones, es decir, conservando el mismo eje para los dos conos y continuando paralelas las generatrices, en nada altera la dirección de las normales, únicos elementos insubstituíbles para la determinación de puntos de contacto.

Sombra arrojada. — Primeramente se determinan las trazas O_1 y O'_1 del rayo luminoso que pasa por $o - o'$, centro de la base del cono. De estas trazas, la horizontal O_1 sirve de centro, á la circunferencia de radio $O_1 D = o d$ que limita en su parte visible $p t$ la sombra arrojada sobre el plano horizontal. Esta coincidencia, que aquí se traduce en igualdad de radios, se ofrece siempre que el polígono ó forma plana que produce la sombra, y el plano que la recibe, son iguales (V. **13**).

Por consiguiente, tomando centro en O_1 con radio $O_1 D = o d$, se describirá una circunferencia, á la cual desde o se le trazarán las tangentes $o p$ y $o q$, y sin más, quedará determinada la sombra arrojada por el cono sobre el plano horizontal, de la que solamente es visible la que está contenida en la parte de dicho plano que pertenece al primer ángulo.

La sombra arrojada por la base del cono sobre el plano vertical resultará una elipse, cuyos diámetros conjugados $A' B'$ y $C' D'$ se cortan en o'_1 , traza vertical del rayo de 45° , que pasa por el centro de la circunferencia. Trazada dicha elipse (V. primera parte, **89**) y la recta á ella tangente desde h , queda

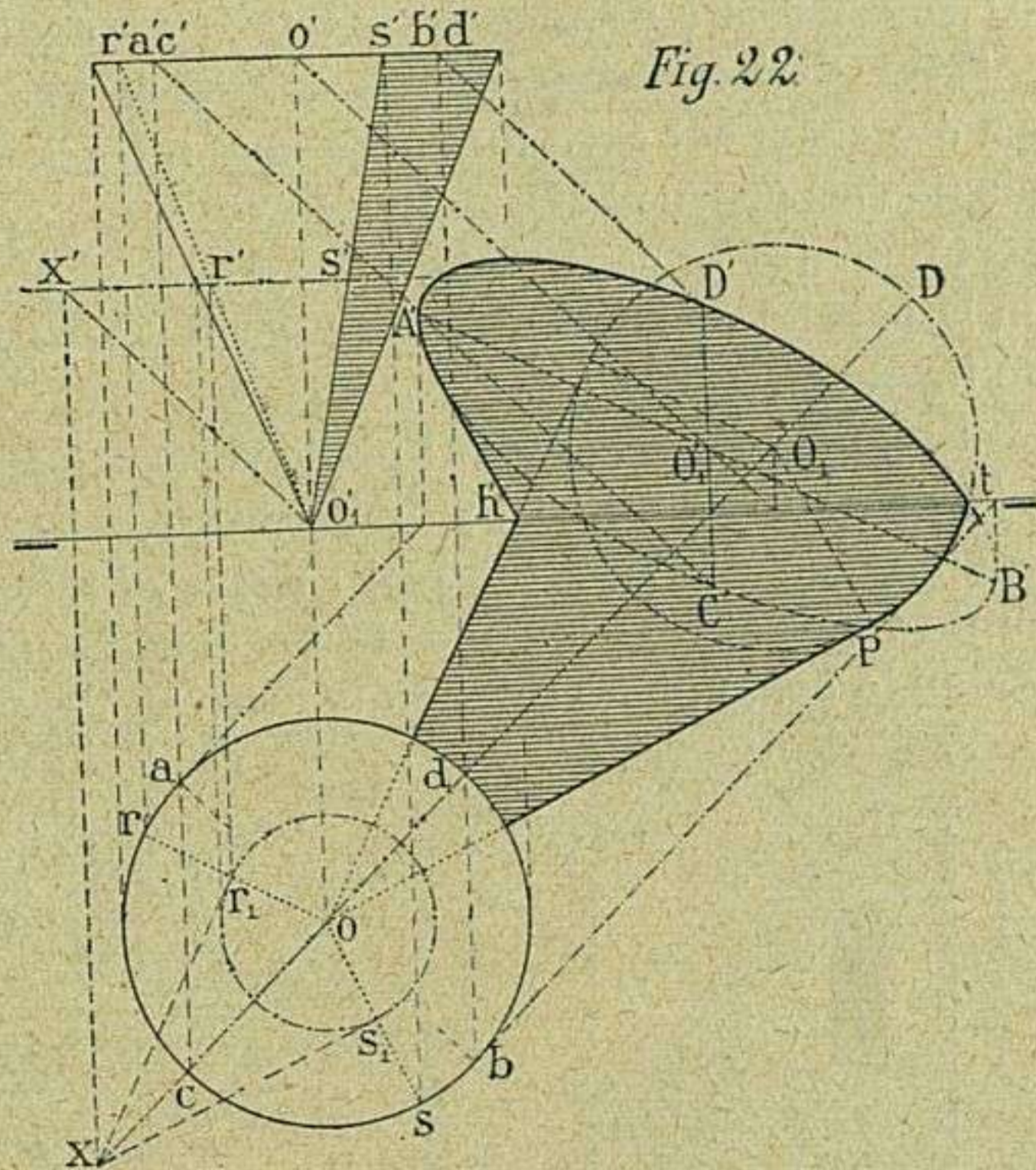


Fig. 22

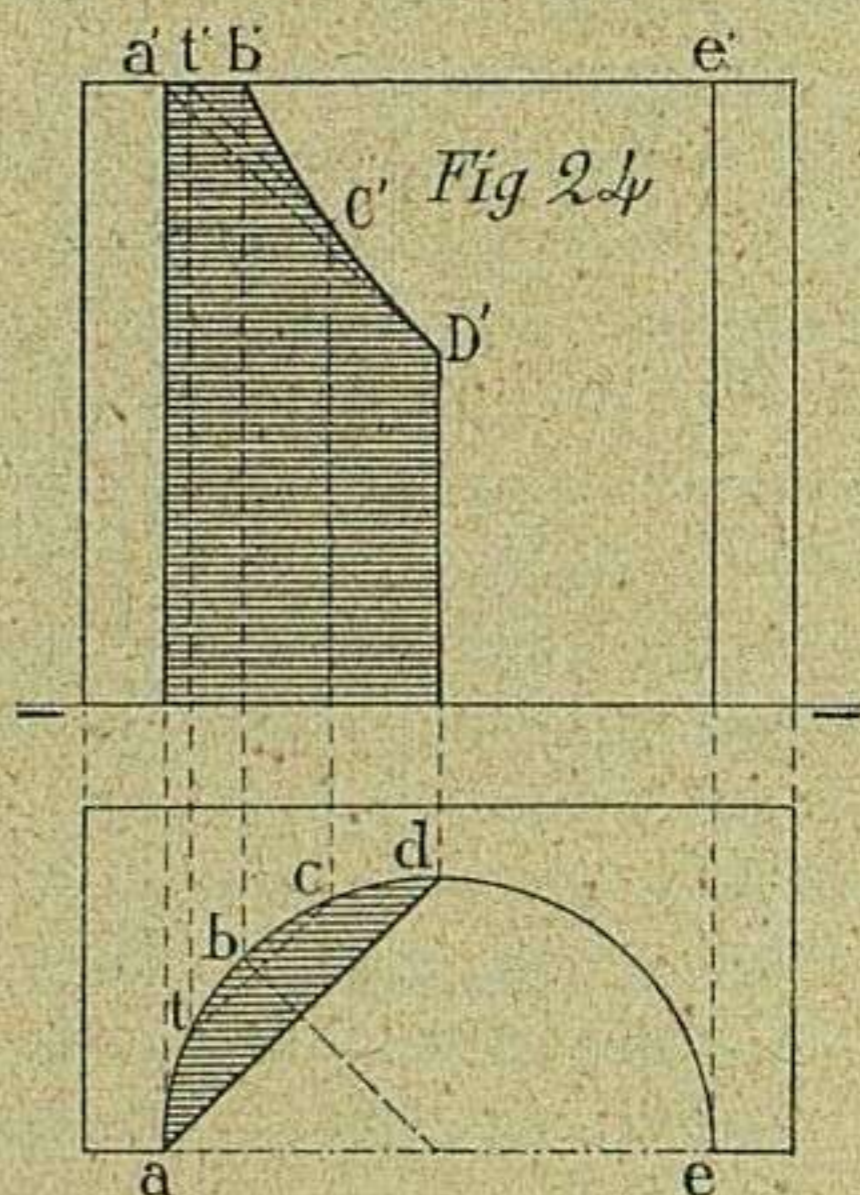
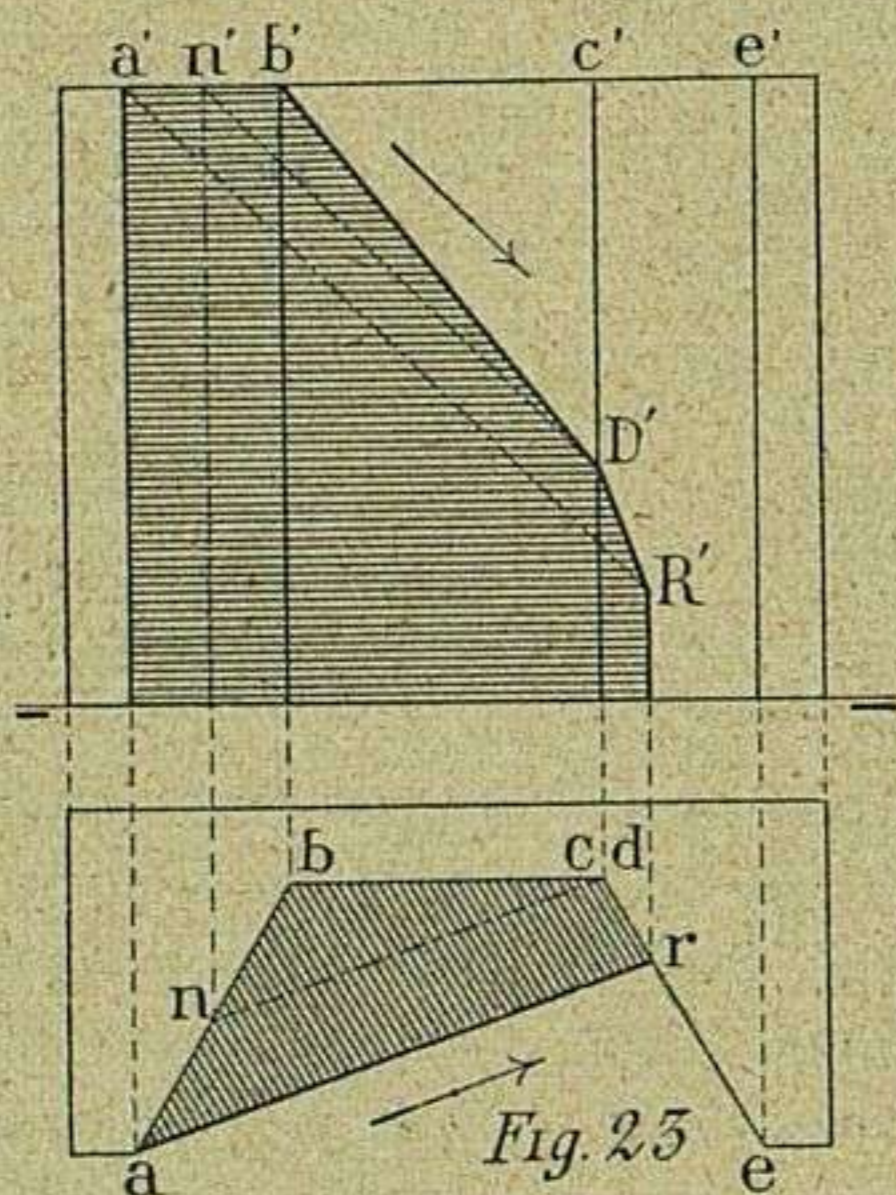
terminado el contorno de la sombra arrojada sobre los dos planos de proyección.

Conviene fijar la atención en que el punto t , donde la sombra se quiebra, es común á la circunferencia, elipse y línea de tierra.

26. Determinación de sombras en un prisma cóncavo (fig 23). — La dirección del rayo luminoso, que no es la ordinaria, está indicada por la de las flechas proyectadas en la figura.

Comienza el contorno de la sombra en b' , sigue en D' y R' para terminar en la paralela á las aristas laterales, trazada por R' en su centro con la línea de tierra.

El punto b' pertenece al plano vertical paralelo al rayo luminoso, rasante á la arista $b - b'$. El D , punto situado en la arista $c - c'$, se determina por la intersección del rayo luminoso $nd - n' D$ con la citada arista, y el R en el punto donde el rayo $ar - a' R'$ encuentra á la cara $e' e'$ del prisma (V. 18), tomando como plano secante el vertical que contiene el rayo luminoso.



27. Sombra en un semicilindro cóncavo (fig. 24). — Mediante el plano tangente á la superficie cilíndrica, quedará determinado en b' el extremo de la generatriz de contacto, punto que pertenece á la sombra propia y primero de la arrojada por el arco $atb - a' t' b'$ sobre la superficie interior del cilindro.

El punto D' corresponde á la sombra del $a - a'$, así como también la generatriz $d D'$ pertenece á la sombra arrojada por la arista $a a'$.

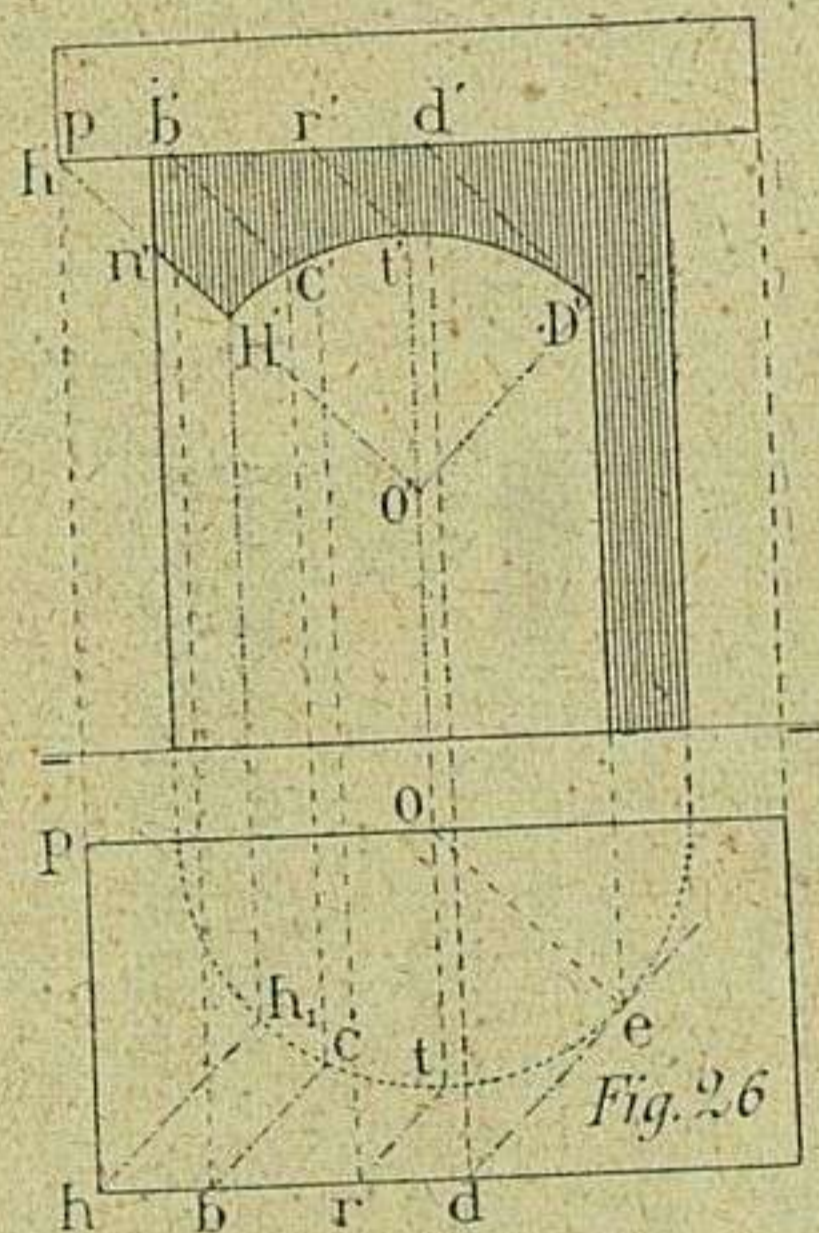
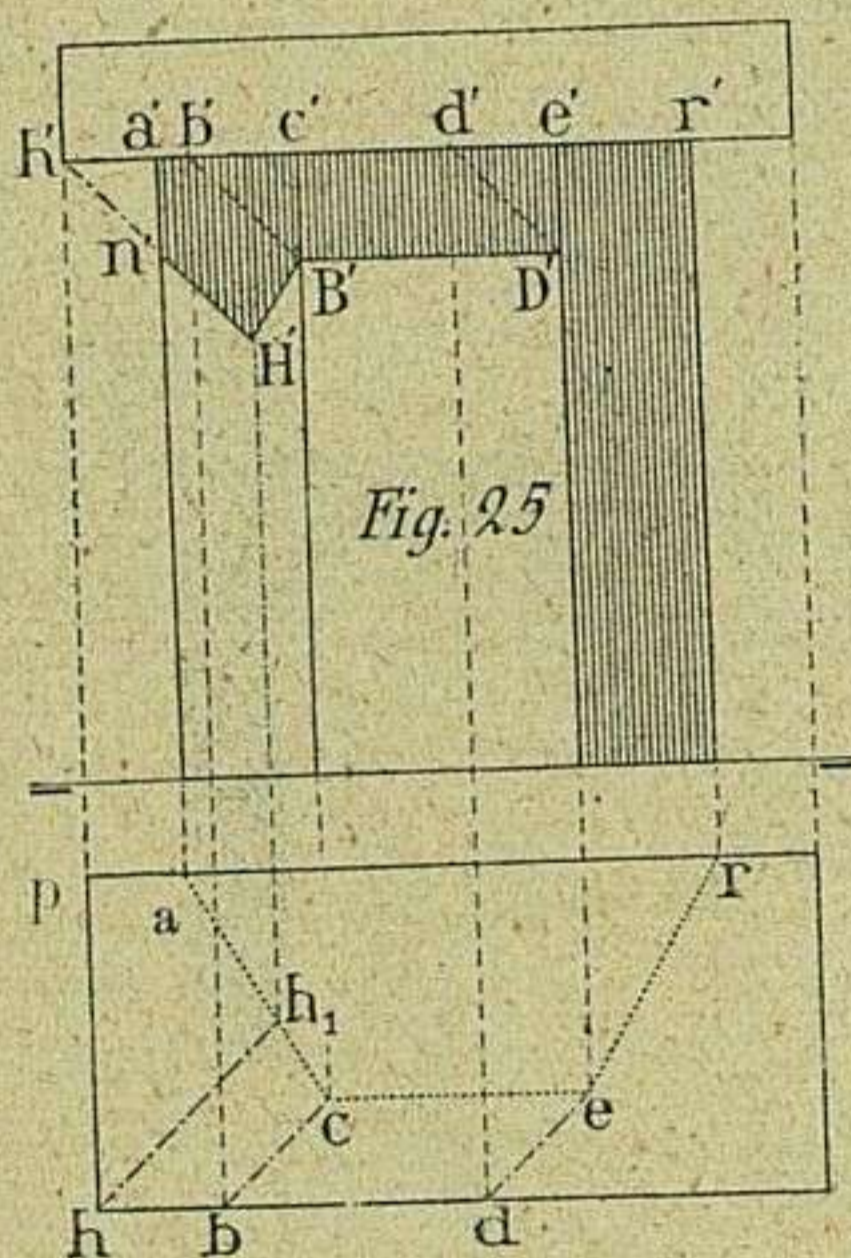
Cortando el cilindro por un plano vertical, paralelo al rayo luminoso, se obtendrán las generatrices $t t'$ y $c C'$. Sobre esta última, en la intersección del rayo de 45° trazado por $t - t'$, se hallará el punto C' intermedio de dicha sombra arrojada. Ahora sólo hace falta trazar la curva $b' C' D'$, la cual, en unión de la generatriz que pasa por D' , formará el contorno de sombra propuesto en la proyección vertical.

En la proyección horizontal se reduce la sombra al segmento de círculo $a d$.

28. Determinación de sombras en una combinación de prismas cuadrangular y trapezoidal (fig. 25). — Los puntos que dan forma al contorno de la sombra arrojada por el prisma cuadrangular sobre el trapezoidal, son como sigue:

El H' intersección del rayo de 45° que pasa por $h - h'$ con la cara $a - a'$ — $a' c'$. El n , determinado por la intersección de la arista $a - a'$ con el plano luminoso que se apoya en la arista $h p - h'$ del prisma cuadrangular.

Los puntos B' y D , determinados en la respectiva intersección de las aristas $c c'$ y $e e'$ con el plano paralelo al rayo de 45° que pasa por la arista $b d - b' d'$, y por último, la sombra $n H$, producida sobre la cara $a' b'$ por los rayos luminosos que se apoyan en la arista $p h$.



29. Sombras de un prisma cuadrangular sobre un semicilindro (fig. 26). — Los puntos n' y H' , pertenecientes á la porción recta del contorno de la sombra arrojada, se determinan de igual manera que sus correspondientes en el ejercicio anterior (V. 28). Ha de tenerse en cuenta, que esta porción $n' H'$ resulta recta, porque se debe á la intersección de la superficie cilíndrica con un plano luminoso que, apoyándose en la arista $h p - h' p'$, es perpendicular al plano vertical de proyección.

El D se halla en la intersección del rayo de 45° , que pasa por $d - d'$, con la generatriz que sirve de límite á la sombra propia, y esta generatriz es de contacto con el plano vertical luminoso que contiene el rayo $d e - d' D'$.

Los demás puntos c' y t' intermedios se hallan procediendo por planos secantes verticales y paralelos al rayo luminoso (V. 29).

Cuando, como en el caso actual, la arista $h d - h' d'$ y el eje del cilindro son paralelos al plano vertical de proyección, y además la dirección del rayo luminoso es de 45° , se verifica que la curva $H' D'$ pertenece á una circunferencia de radio igual al de la base del cilindro, cuyo centro se halla situado

en o' , punto de intersección del plano luminoso $h' H'$ con el eje del citado cilindro.

30. Sombras de un semicilindro sobre un prisma (fig. 27).— El procedimiento seguido en éste y los demás ejercicios anteriores para la determinación del contorno visible de sombra arrojada (V. **28** y **29**), es análogo, ó mejor dicho, idéntico.

Redúcese al empleo de planos secantes verticales, paralelos á la dirección del rayo luminoso de 45° .

Así, el plano que pasa por la arista $1, 1'$, contiene al rayo que pasa por $a - a'$, cuya intersección con dicha arista determina el punto A, primero de la sombra arrojada. De igual modo se obtienen los B y C.

Para determinar los $1''$ y $2''$ se hacen pasar los planos secantes de referencia hacia los intermedios de las caras del prisma.

Fig. 27

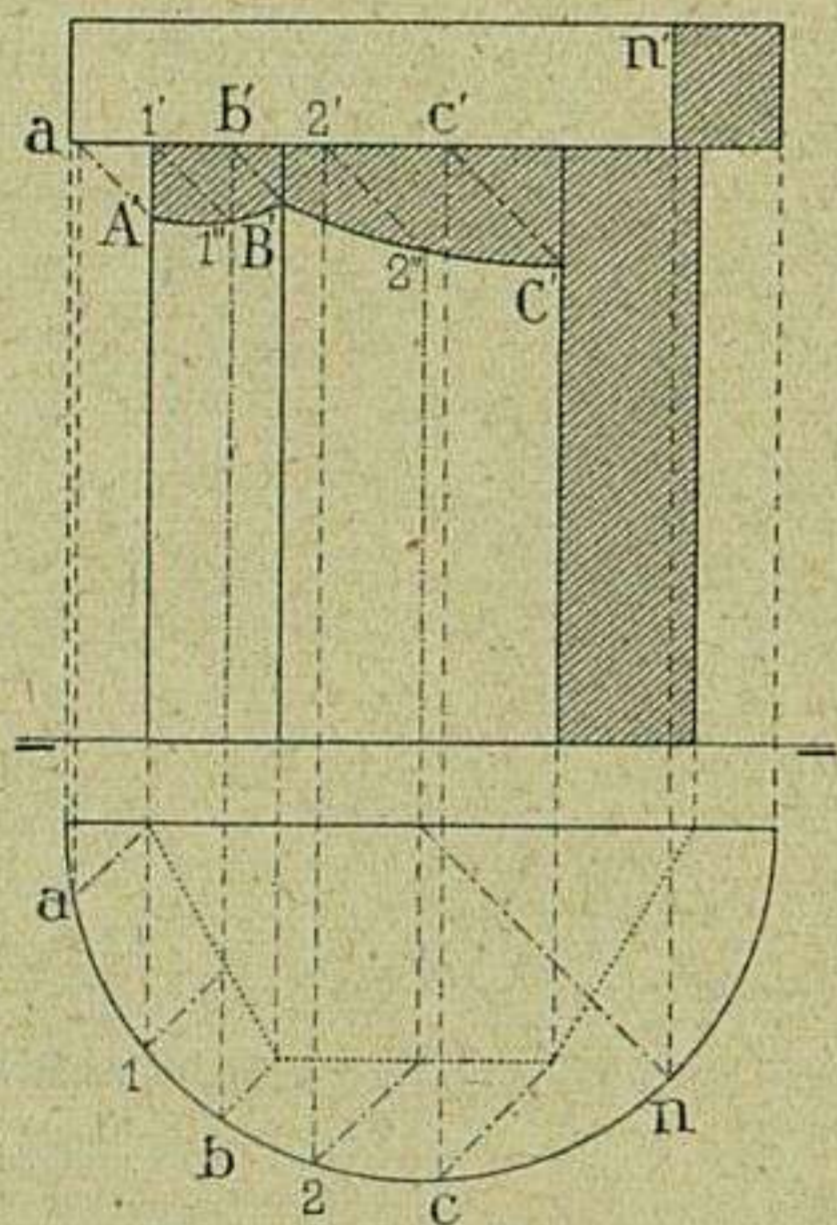
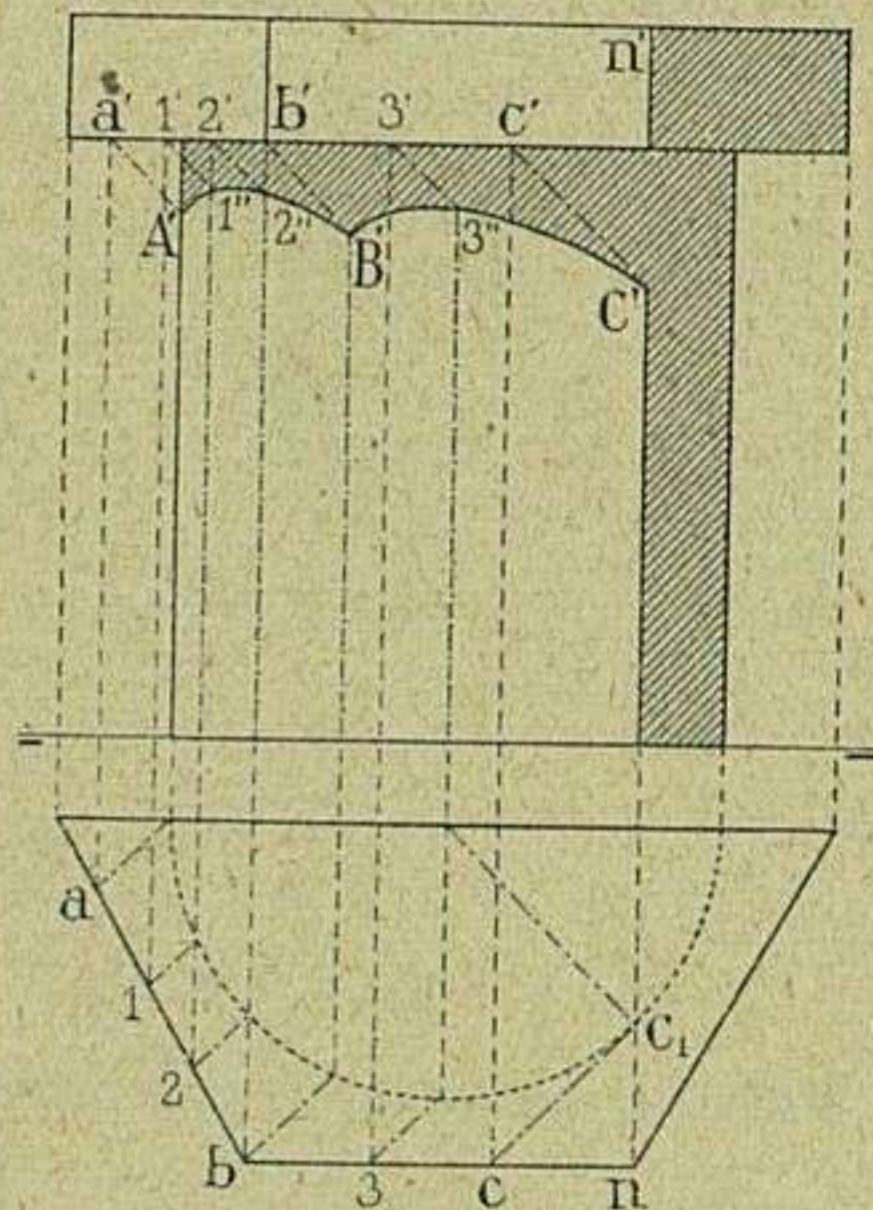


Fig. 28



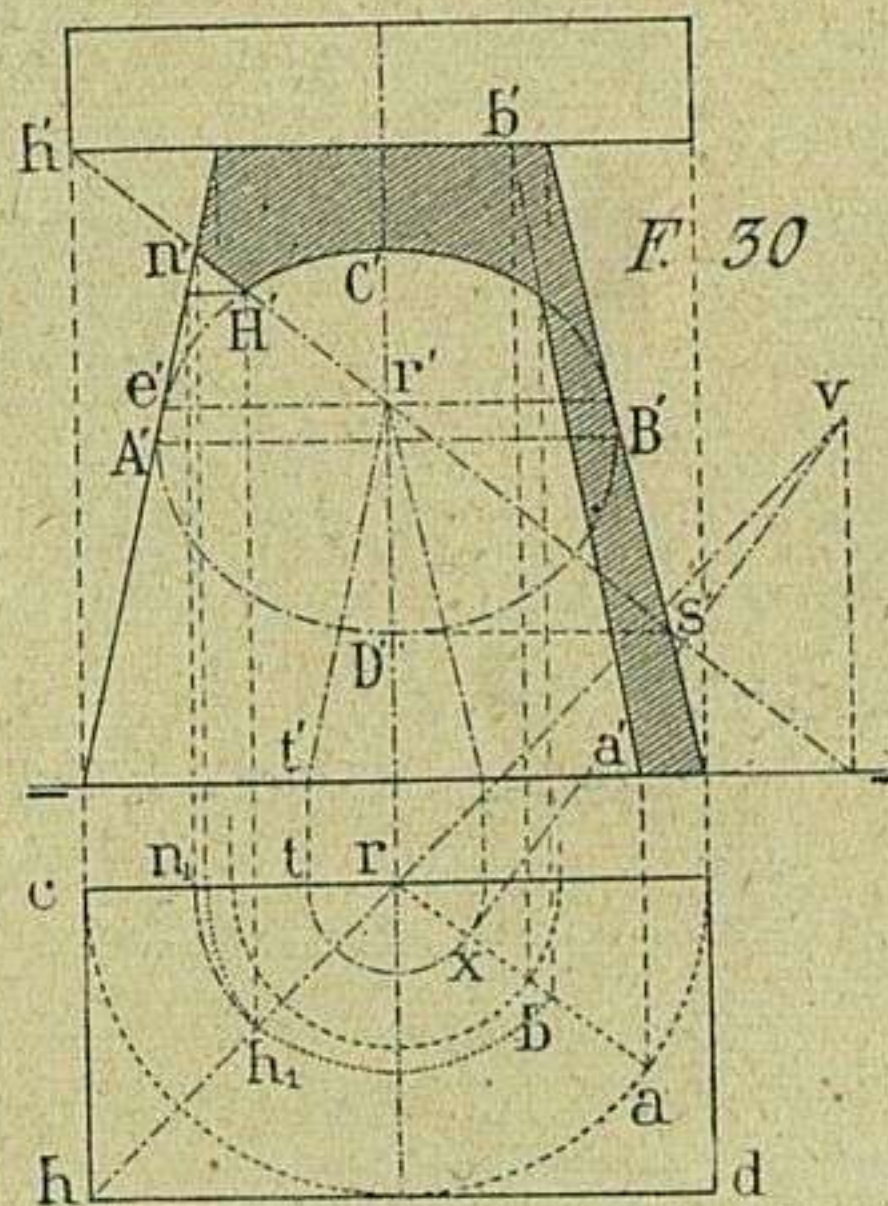
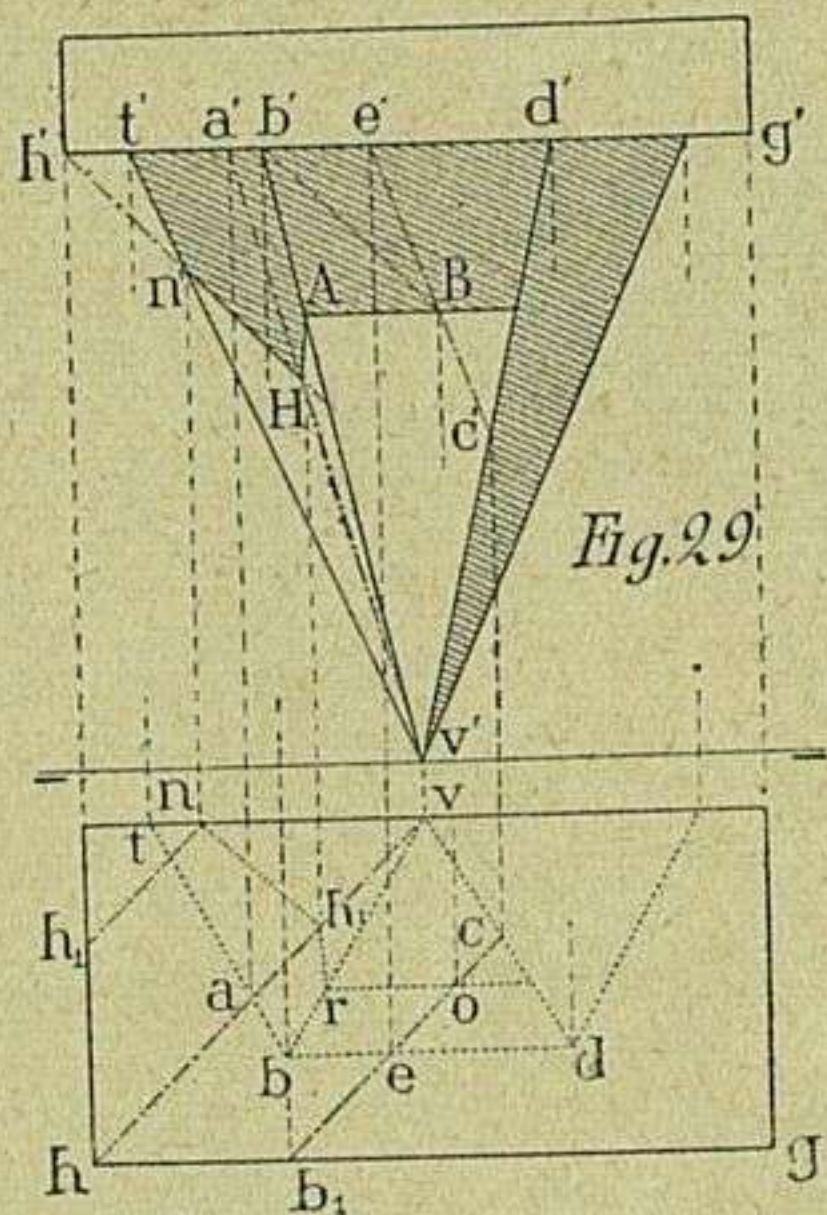
31. Determinar las sombras en una combinación de prisma y cilindro (fig. 28).— También en este caso, como en los tres correspondientes á los anteriores ejercicios (V. **28**, **29** y **30**), los puntos $A', 1'', 2'', B', 3'', C'$, que forman el contorno de la sombra arrojada del prisma sobre la superficie cilíndrica, se determinan mediante el procedimiento de planos secantes verticales, paralelos á la dirección del rayo luminoso.

32. Hallar las sombras arrojadas por un prisma sobre una pirámide (fig. 29).— La sombra del punto $h - h'$ se determina por medio del plano vertical secante que contiene al rayo luminoso $h h_1 - h' H$. Este plano cortará á la cara $t' v' b'$ de la pirámide, según la recta $a' v'$, la cual en su intersección con el rayo luminoso que pasa por $h - h'$ dará el punto H, sombra arrojada del h' .

El punto B se halla, cortando la cara $bvd - b'v'd'$ de la pirámide por otro plano secante paralelo al anterior, cuya intersección está determinada en $ec - e'e'$. Ahora bien; la paralela al rayo de 45° trazada por b' dará, al encontrar la $e'e'$, el punto B, que pertenece á la sombra arrojada del $e - e'$ situado en la arista $hg - h'g'$.

Otros puntos de sombra arrojada sobre la cara $b'v'd'$, podrían hallarse de idéntica manera; pero comprendiendo que dicha sombra está limitada por una paralela á la $h'g'$, no hay más que trazarla por B, y de este modo, queda además determinado el punto A en la intersección de la citada paralela con la arista $b'v'$.

El punto A se une con el H y éste con el n' , y se obtendrá así el contorno de dicha sombra. No debe olvidarse que la arista $d'v'$ constituye el límite de la sombra propia visible en la pirámide.



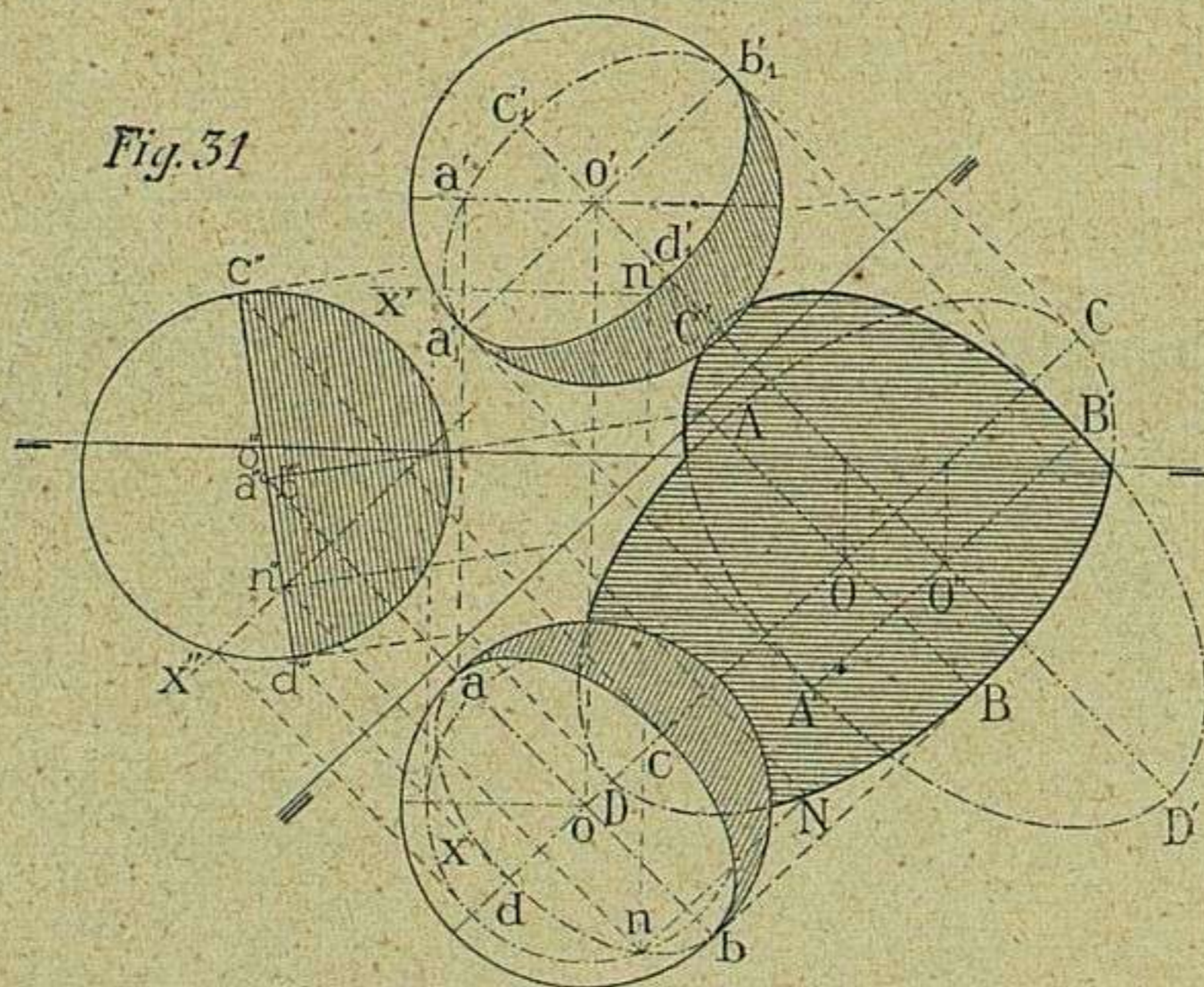
33. Sombras arrojadas por un prisma sobre una superficie cónica (fig. 30).

El plano formado por los rayos luminosos que se apoyan en la arista $hc - h'$, produce la sombra $n'H'$, en su intersección con la superficie cónica. Asimismo, el plano luminoso formado por los rayos que se apoyan en la arista $hd - h'b'$, cortaría á la superficie cónica si fuera completa, según una elipse, cuyo eje menor $C'D'$ estará comprendido entre las paralelas horizontales trazadas, respectivamente, por los puntos n' y s' , en los que, las generatrices extremas de la superficie cónica, son cortadas por el plano de 45° que pasa por la arista $hc - h'$.

El eje mayor de esta elipse se determina fácilmente conociendo el menor y

el punto H perteneciente á dicha curva (V. 1.^a parte, **86**). Claro está, que solamente se utiliza para el contorno de la sombra arrojada, el segmento que comienza en H y termina en la generatriz $a' b'$, límite de la sombra propia. Esta generatriz se ha determinado valiéndose del pequeño semicono $tr - tr'$ de eje común y generatrices paralelas á las de la superficie cónica dada.

34. Determinación de las sombras propia y arrojada de la esfera (fig. 31). — *Sombra propia.* — Los rayos luminosos que envuelven la esfera forman un cilindro, cuya línea de contacto, ó de separación de luz y sombra, es la circunferencia de un círculo máximo perpendicular á la dirección de dichos rayos luminosos.



Para determinar las proyecciones de la indicada línea de separación, lo más oportuno es valerse de un plano auxiliar paralelo al rayo luminoso, indicado en la figura por la segunda línea de tierra paralela á la proyección horizontal de dicho rayo. En resumen: este plano auxiliar es consecuencia de un cambio de plano vertical con objeto de preparar los datos en condiciones ventajosas para la solución del problema.

Proyectada en el nuevo plano vertical la esfera y el rayo luminoso de 45° (V. *Proyecciones ortogonales*, **68**), que ahora formará con la nueva línea de tierra un ángulo de 35° , quedará reducida la representación de la circunferencia de contacto al diámetro $c'' d''$; puntos que debidamente trasladados á la proyección horizontal, en unión de los $a'' o''$, corresponderán en $a b$ y $c d$ á los extremos de los ejes de una elipse, que después de trazada (V. 1.^a parte, **28**) dará en $a c b$, la línea de separación visible en proyección horizontal.

Teniendo en cuenta que la dirección del rayo luminoso es de 45° , el contorno de separación $a'_1 d'_1 b'_1$, proyectado sobre el plano vertical, es simétrico con el de la proyección horizontal, de la que se puede fácilmente deducir.

Sombra arrojada sobre los planos de proyección. — Volviendo á las consideraciones anteriores ocurrirá, que al encontrar el cilindro de contacto á cualquiera de los planos de proyección, su traza sobre cada uno de ellos será una elipse cuyos ejes se deducirán de los que corresponden á las dichas curvas que limitan la sombra propia.

Para conseguirlo por los puntos c'' y d'' de la proyección auxiliar se trazarán rayos luminosos á 35° , cuyas trazas horizontales C y D corresponderán á los extremos del eje mayor de la elipse que representa la sombra arrojada sobre el plano horizontal.

Los extremos A y B del eje menor corresponden á las respectivas trazas también horizontales de los rayos que pasan por $a - a''$ y $b - b''$.

La sombra arrojada sobre el plano vertical, por ser la dirección del rayo luminoso de 45° , quedará determinada por otra elipse de ejes iguales á los de la anterior, cuyo centro O' coincidirá en la traza del rayo luminoso que pasa por $o - o'$, centro de la esfera.

Trazadas las dos elipses (V. 1.^a parte, **S5**), solamente se utilizará de cada una la porción de contorno visible en el plano de proyección correspondiente; debiendo notarse, que los puntos de intersección de dichas elipses coinciden en la línea de tierra.

Fundándose en la propiedad indicada, se puede determinar la sombra arrojada sobre uno de los planos de proyección, siempre que se conozca la situación de la otra y uno de los ejes. En efecto, la situación de la sombra arrojada sobre el plano horizontal, por ejemplo, permitirá conocer un punto de la elipse; aquel en que corta la línea de tierra á esta curva.

Por consiguiente, el problema se reduce en el caso actual al trazado de la elipse, dado un punto de ella y uno de los ejes (V. 1.^a parte, **S6**).

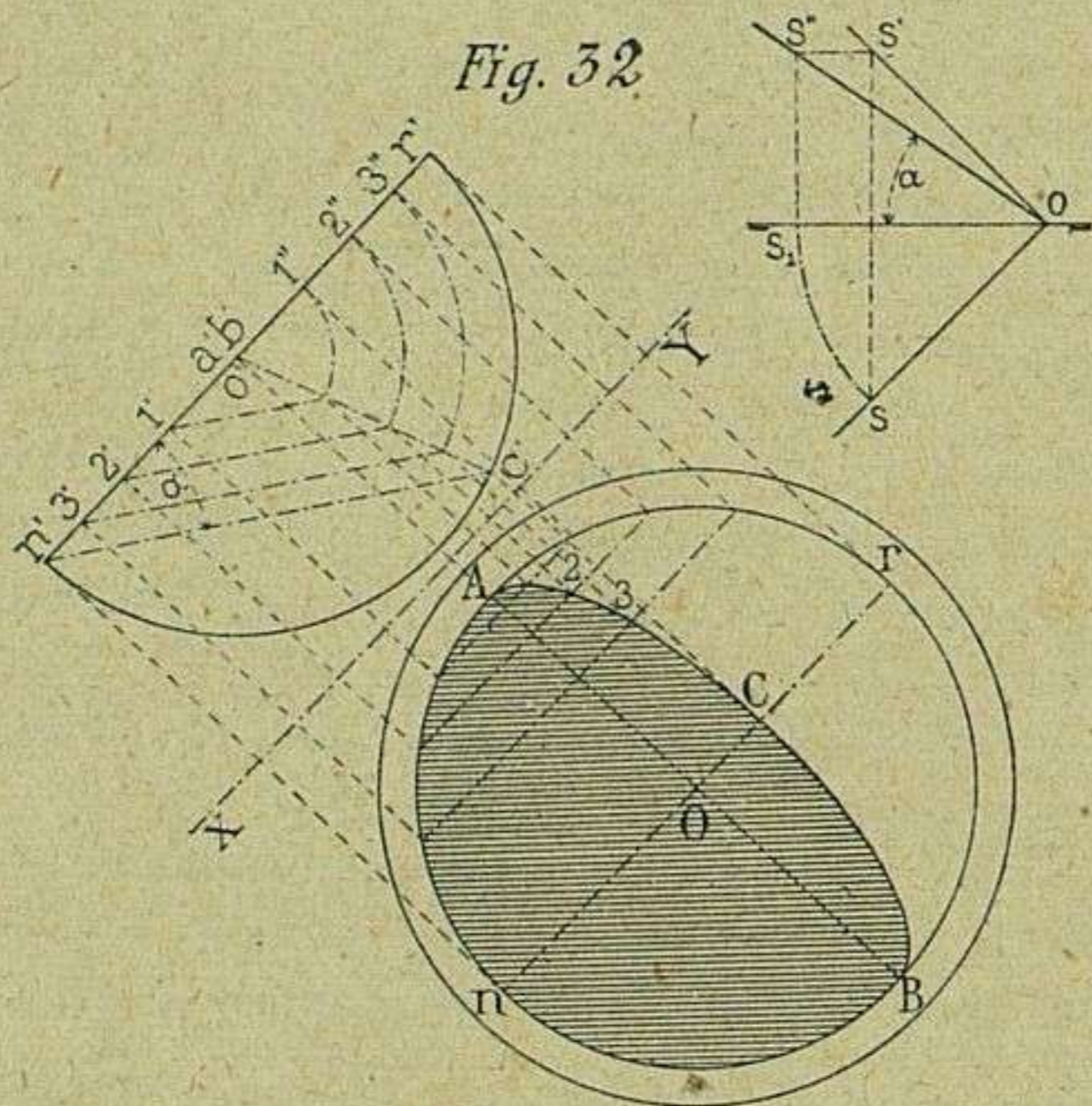
Para la determinación de sombras de la esfera se ha procedido hallando los extremos de los ejes de las respectivas elipses, y trazando estas curvas mediante dichos ejes. Este es el procedimiento más sencillo, correcto y, por tanto, recomendable; pero no es obstáculo para exponer la manera de hallar un punto cualquiera de los que pertenezcan á la línea de separación de luz y sombra.

Sea el $n - n'$. Sobre la línea $c'' d''$ de la proyección auxiliar se toma dicho punto, y por él se hace pasar el plano X' paralelo al horizontal, en cuya proyección horizontal X se hallará n , que pasa á ocupar su sitio n' en la vertical, donde se cortan el plano X con la línea de correspondencia levantada en n .

La sombra arrojada de este punto coincide en N con la traza del rayo luminoso que pasa por $n - n''$.

35. Determinar la sombra en la superficie cóncava de una semi-esfera (fig. 32). — La sombra propuesta es producida por los rayos de 45° que, apoyándose en la semicircunferencia A n B, encuentran á la superficie cóncava de la esfera en los puntos A, 2, 3, C, etc.

Para determinar esta sombra con relativa facilidad, se echa mano del plano auxiliar de proyección indicado por X Y, paralelo á la proyección nr del rayo luminoso. Contribuyen además al resultado, una serie de planos secantes paralelos á dicho rayo luminoso, que en la proyección auxiliar figuran concéntricos en o' , descritos con los radios $o'1''$, $o'2''$, $o'3''$, y $o'r'$.

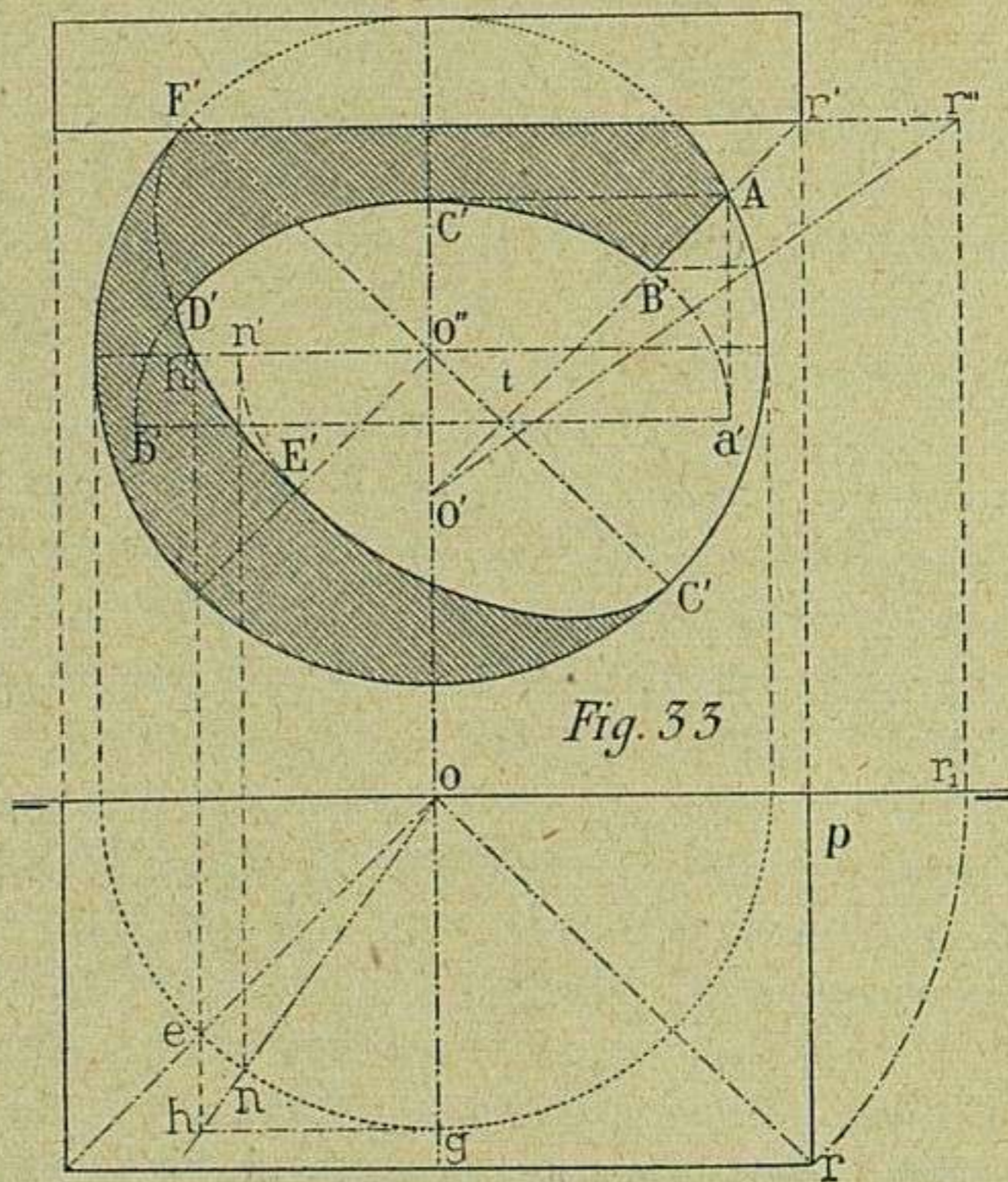


Los rayos luminosos contenidos en cada uno de los planos de la serie, que pasan respectivamente por n' , $3'$, $2'$, $1'$, formarán con X Y ángulos α , de 35° y su respectiva intersección con los arcos centrados en o' , estará situada en la recta $o'c'$, desde donde mediante líneas de correspondencia pasarán á la proyección en A, 2, 3, c y simétricos con relación á nr , donde forman el contorno de la sombra arrojada por la semicircunferencia A n B sobre la concavidad esférica.

36. Sombra arrojada de un prisma cuadrangular sobre la esfera (fig. 33).

— Esta sombra arrojada se compone de la recta $A'B'$ y del arco de elipse $B'C'D'$. La recta $A'B'$ es producida por la sección del plano luminoso, perpendicular al vertical que se apoya en la arista $r'p - r'$ (V. 29).

El arco de elipse BCD corresponde á la sección originada en la esfera por el plano luminoso que se apoya en la arista $F'r'$. El eje mayor $a'b'$ de esta elipse es paralelo á la línea de tierra, pasa por la intersección t de $F'C'$, con $r'o'$ y uno de sus extremos, el a' , se halla en el punto donde encuentra á dicho eje la vertical de correspondencia bajada desde A. El semieje menor es igual á la longitud Aa' .



El punto B' queda determinado en la intersección de $r' o'$ con la semielipse $a' c' b'$; aunque también puede hallarse deshaciendo el giro del rayo luminoso $o' r''$, con cuya operación, el punto donde el contorno de la esfera es cortado por el rayo paralelo al plano vertical vendrá á colocarse en B'.

Además de la sombra arrojada descrita, figura la propia de la esfera, cuya obtención queda explicada anteriormente. (V. 34).

La ocasión se presta, en esto de sombra propia, para dar á conocer un procedimiento simplificado, que sólo puede aplicarse cuando la dirección del rayo luminoso es de 45° .

Consiste la operación: en tirar eh y gh respectivamente paralelas á og y or_1 ; en trazar á continuación la recta oh proyectando el punto de intersección n en n' y al deshacer el giro trasladarle á E, punto perteneciente al extremo del eje menor.

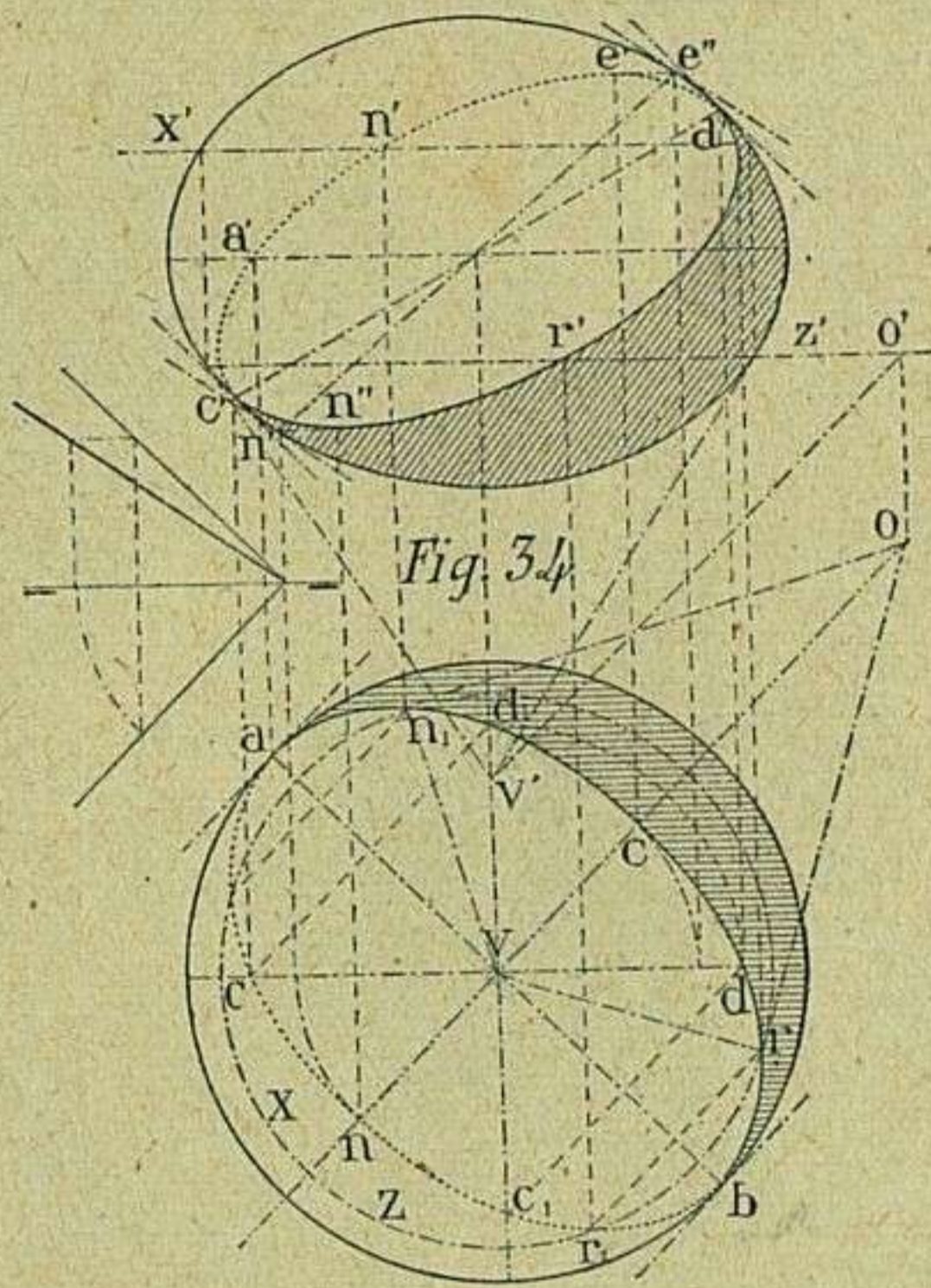
37. Sombra propia de un elipsoide de revolución (fig. 34). — Los puntos $a - a'$ y $b - b'$ situados en el ecuador del elipsoide se determinan mediante planos tangentes proyectantes verticales del rayo luminoso de 45° en a y b .

Sobre el meridiano cuyo plano es paralelo al vertical de proyección, se encuentran en $c - c'$ y $d - d'$, los puntos de contacto correspondientes á planos luminosos tangentes de 45° . Los puntos c_1 y d_1 son respectivamente simétricos de los c y d respecto al plano luminoso no .

Se obtienen los $n - n''$, $c - e'$, por el giro y contragiro de los rayos tangentes en los puntos opuestos del meridiano. Esta operación consiste en suponer verificado un giro (V. proys. ortogs., 66) con los rayos luminosos de 45° hasta colocarlos paralelos al plano vertical de proyección tangentes respectivamente en n' y e'' , es decir, formando un ángulo de 35° con el horizontal. Después se deshace el giro y entonces el punto n pasa á n'' , el e'' á e' acompañados como es de suponer de sus correspondientes proyecciones horizontales.

Un punto cualquiera de la línea de separación de luz y sombra se determina, mediante un cono de revolución que se supone tangente al elipsoide según una circunferencia de contacto que contendrá el punto que se busca, en la generatriz límite de la sombra propia del cono de contacto.

Tomando como base de dicho cono la sección producida en el elipsoide por el plano horizontal $z - z'$, y representando dicho cono por las generatrices $v' c'$ y $v' z'$ tangentes al elipsoide en puntos comunes á la circunferencia de



dicha base, se tendrá : que determinado por el procedimiento ordinario (Véase **25**) el punto de sombra propia $r_1 - r'$, será también el que corresponde á la línea de separación en el elipsoide (1); pues es evidente que dicho punto está

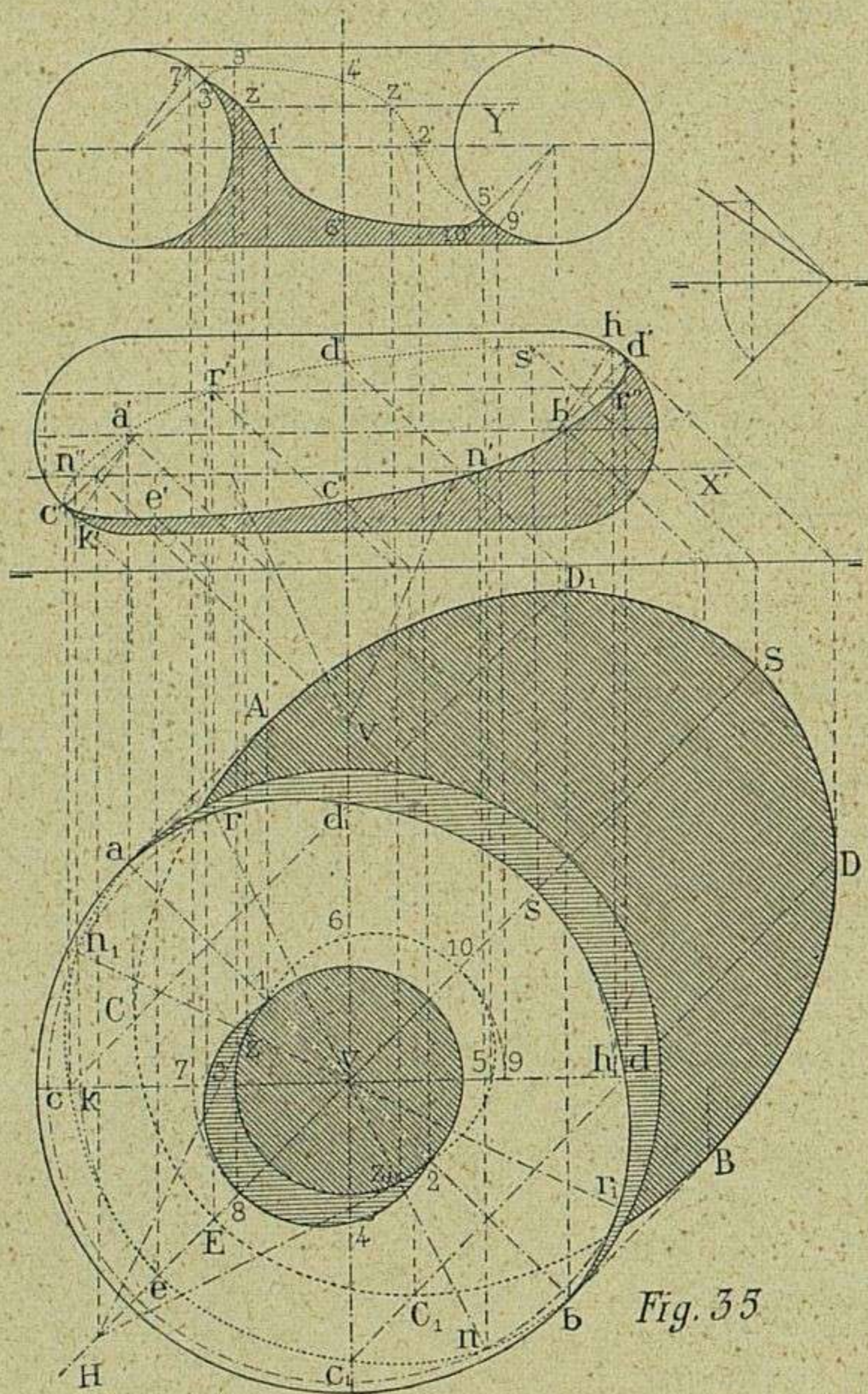


Fig. 35

situado en la circunferencia de contacto común á las dos superficies de revolución. Por igual procedimiento se ha obtenido el punto n' situado en el plano x' simétrico del s' respecto al ecuador.

38. Sombras propia y arrojada del toro de revolución

(fig. 35). — Esta superficie aparece representada por una proyección horizontal y dos verticales. En una de las proyecciones verticales se muestra la sombra correspondiente á la parte exterior del toro y en la otra la interior.

Sombra propia. — Una vez trazado el diámetro $a - b$ perpendicular en dirección al rayo luminoso de 45° H S, se hallan sobre dicho diámetro, desde luego, cuatro puntos; los $a - a'$ y $b - b'$ pertenecientes á los extre-

mos de dicho diámetro contenidos en el ecuador y los $1 - 1'$, $2 - 2'$ que per-

(1) Con objeto de reducir las dimensiones de la figura, se ha invertido en ella la dirección del rayo luminoso que pasa por $v - v'$. Consecuencia de esto, la traza horizontal de dicho rayo; punto de partida de las tangentes en n_1 y r , queda situada en o , precisamente en posición opuesta á la que debía ocupar; pero sin gran esfuerzo de imaginación se llega á comprender, que tratándose de puntos simétricos respecto de ab , puede encaminarse la operación en el sentido ó dirección que más convenga, siempre que el resultado final sea el que deba ser. En realidad, no hace falta trazar generatrices ni tangentes; basta con las normales que determinan los puntos de contacto.

teneen á la intersección de dicho diámetro con el círculo de garganta (1).

Las normales trazadas desde a' y b' á los rayos de 45° tangentes en las circunferencias generatrices del toro, darán en c' y d' dos puntos el primero y último respectivamente de la curva de separación, visibles en la proyección vertical, los que pasan á la horizontal en c y en d .

En la proyección vertical que representa el semitoro interior, también se hallarán mediante las normales de 45° los puntos $3-3'$, $5-5'$.

Puntos simétricos de estos, con relación al plano H S se encuentran en c_1-c'' , d_1-d'' de la curva exterior y en $4-4'$, $6-6'$ de la interior.

Mediante el giro y contragiro del rayo luminoso tangente al mediano (Véase 37), se encuentran los puntos $e-e'$ y $s-s'$ de la curva de separación exterior y los $8-8'$, $10-10'$ situados en la curva interior.

Por último, los puntos $n-n'$, n_1-n'' de la curva de separación exterior y los $s-s'$, s_1-s'' de la interior se determinan mediante el cono de contacto (V. 37); así como los $r-r'$, r_1-r'' y demás puntos simétricos.

Sombra arrojada sobre el plano horizontal. — Los puntos A, D_1 , S, D, B, C_1 , E, C, por donde pasa el contorno de la sombra arrojada, corresponden á las trazas horizontales de cada uno de los rayos luminosos que pasan por $a-a'$, d_1-d'' , $s-s'$, $d-d'$, etc., puntos de la curva exterior de separación de luz y sombra.

La línea de separación correspondiente al interior del toro, no produce sombra arrojada visible en el caso actual.

39. Sombras propias de un cabeto de revolución (figura 36). — Sobre la circunferencia de garganta situada en el plano horizontal v', o' , coincidiendo con los extremos del diámetro perpendicular al rayo luminoso de 45° , se encuentran, a_1-a'' y $a-a'$, primeros puntos de la curva de separación de luz y sombra.

Siguen los $n-n'$, n_1-n'' obtenidos sobre el plano $X-X'$ paralelo al horizontal de proyección mediante el cono de contacto (véase 37) substituido en esta ocasión

por el de generatrices paralelas y eje común r, v, n_2-r', v', n'' (V. 25).

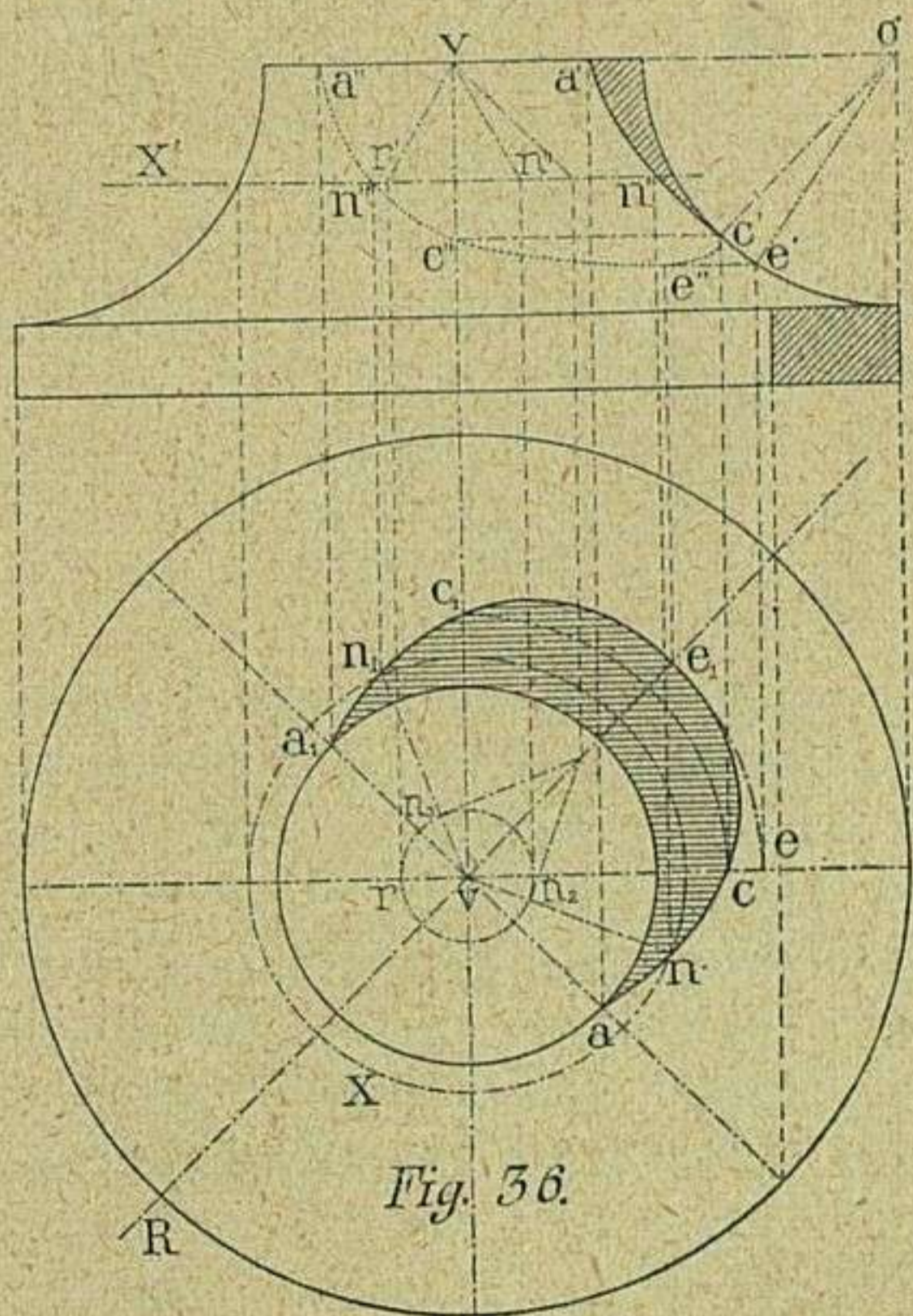


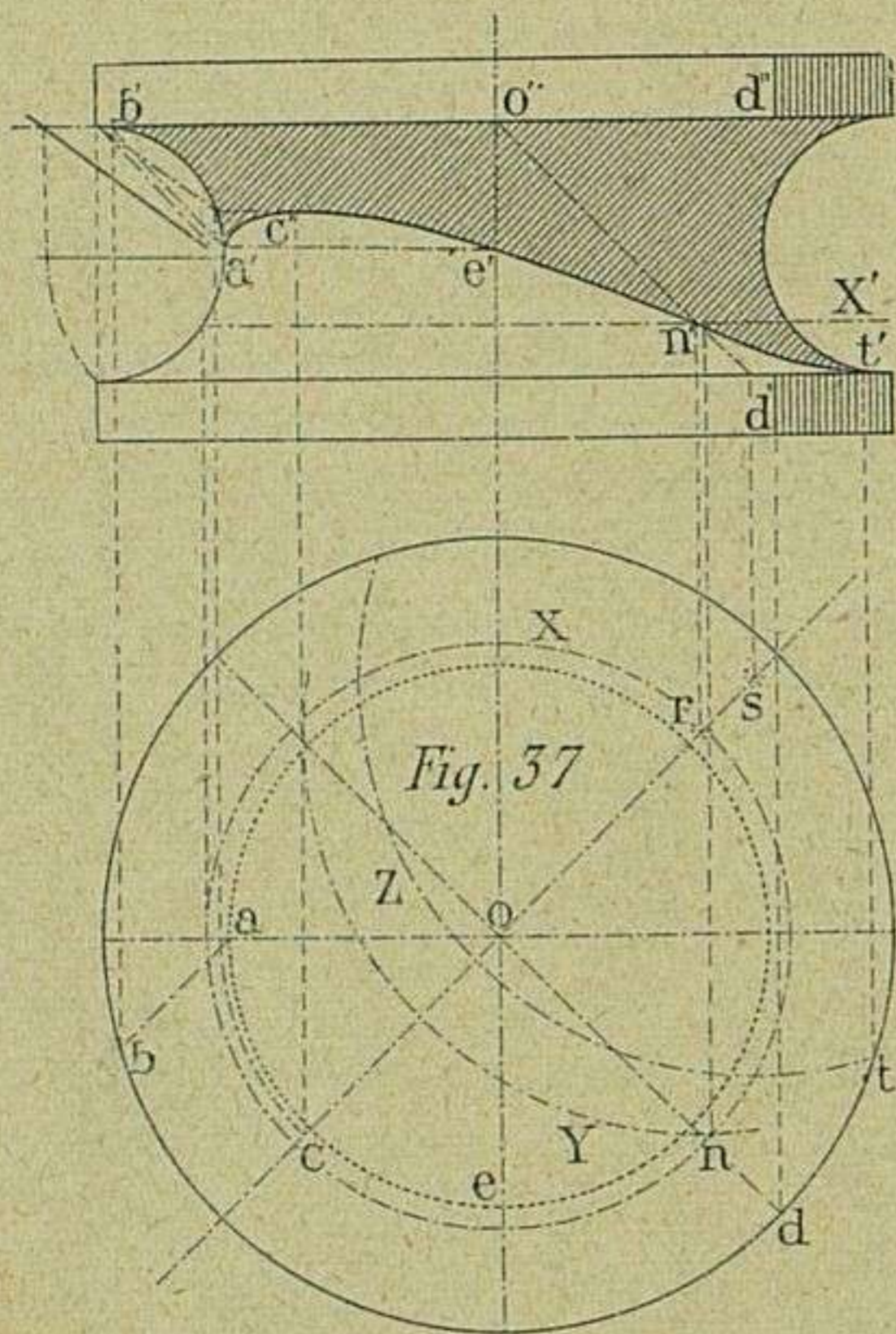
Fig. 36.

(1) Este círculo de garganta está situado en la figura actual, sobre el plano del Ecuador; los dos planos tienen el mismo centro y es el menor círculo que puede obtenerse seccionando el toro por planos paralelos al horizontal de proyección.

El punto $c - c'$ se halla en el contacto del rayo luminoso, tangente al perfil del cabeto. Se ha determinado, no por el rayo tangente, sino por la normal correspondiente o', c' .

Finalmente, el punto más bajo de la curva de separación se ha obtenido en $e_1 - e''$ mediante el giro y contragiro de la normal $o' - e'$ (V. 37).

40. Sombra de una rueda de polea (fig. 37). — Se determina por la sombra que arroja el arco $bd - b'd'$, sobre la superficie anular de la polea.



El contorno visible correspondiente á dicha sombra en proyección vertical; se compone de los puntos a', c', e', n' y t' .

El punto $a - a'$ se obtiene mediante el plano vertical secante $ba - b'a'$, por la intersección del rayo de 45° contenido en dicho plano, con el perfil de garganta (1). En el plano horizontal que pasa por a' , se halla el punto $e - e'$, simétrico del $a - a'$, respecto al plano luminoso c, s .

El punto más alto de la curva queda situado en e' , mediante el giro y contragiro del correspondiente rayo luminoso (V. 37).

Para determinar un punto cualquiera, se trazará un plano secante $X - X'$, paralelo al horizontal de

proyección; en la intersección de las circunferencias que limitan este plano y el de sombra arrojada por el círculo $bo d - b'o' d'$, se hallará el punto $n - n'$ que se busca. Esta misma operación, verificada sobre el plano del círculo ot , dará el punto $t - t'$.

Conviene tener presente, que para describir estos círculos auxiliares, lo esencial es hallar la sombra arrojada del centro correspondiente sobre el paralelo elegido. Así, la sombra respectiva de dichos centros corresponde en r y s á las trazas del rayo de 45° que pasa por $o - o'$; con cada uno de los planos paralelos $X - X'$ y $t - t'$.

(1) A causa de la situación extrema del plano secante, el contorno de la sección producida por dicho plano en la polea, se diferencia muy poco y hasta se confunde con el cuadrante $b'a'$, correspondiente al perfil de garganta; por eso no hace falta trazarle en éste ni en casos análogos.

41. Sombras en una moldura de revolución (fig. 38). — El conjunto de sombras, unas propias y otras arrojadas, se compone:

1.º De la sombra propia del cilindro mayor, determinada por la normal $o - g$.

2.º De la arrojada por la base de dicho cilindro sobre el talón en a_1', r', m' .

3.º De la sombra propia del talón en b', n', t', e' .

4.º De la arrojada por dicho contorno de sombra propia, en b_1', n_1', d' .

5.º De la sombra arrojada por la base del talón sobre el cilindro menor, en $u' 7' 10$.

Los contornos de todas estas sombras, excepto algunos puntos especiales en ellos situados, se hallan mediante el empleo de planos secantes; procedimiento usado en algunos ejercicios anteriores (V. **29** á **31**), pero que en éste adquiere todo el desarrollo que su aplicación permite.

Cortando la moldura en conjunto por el plano vertical $H o$, se producirá en la proyección vertical, el contorno $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 12'$, correspondiente á la sección; el cual, excepto en las superficies planas y cilíndricas, se compondrá de líneas curvas.

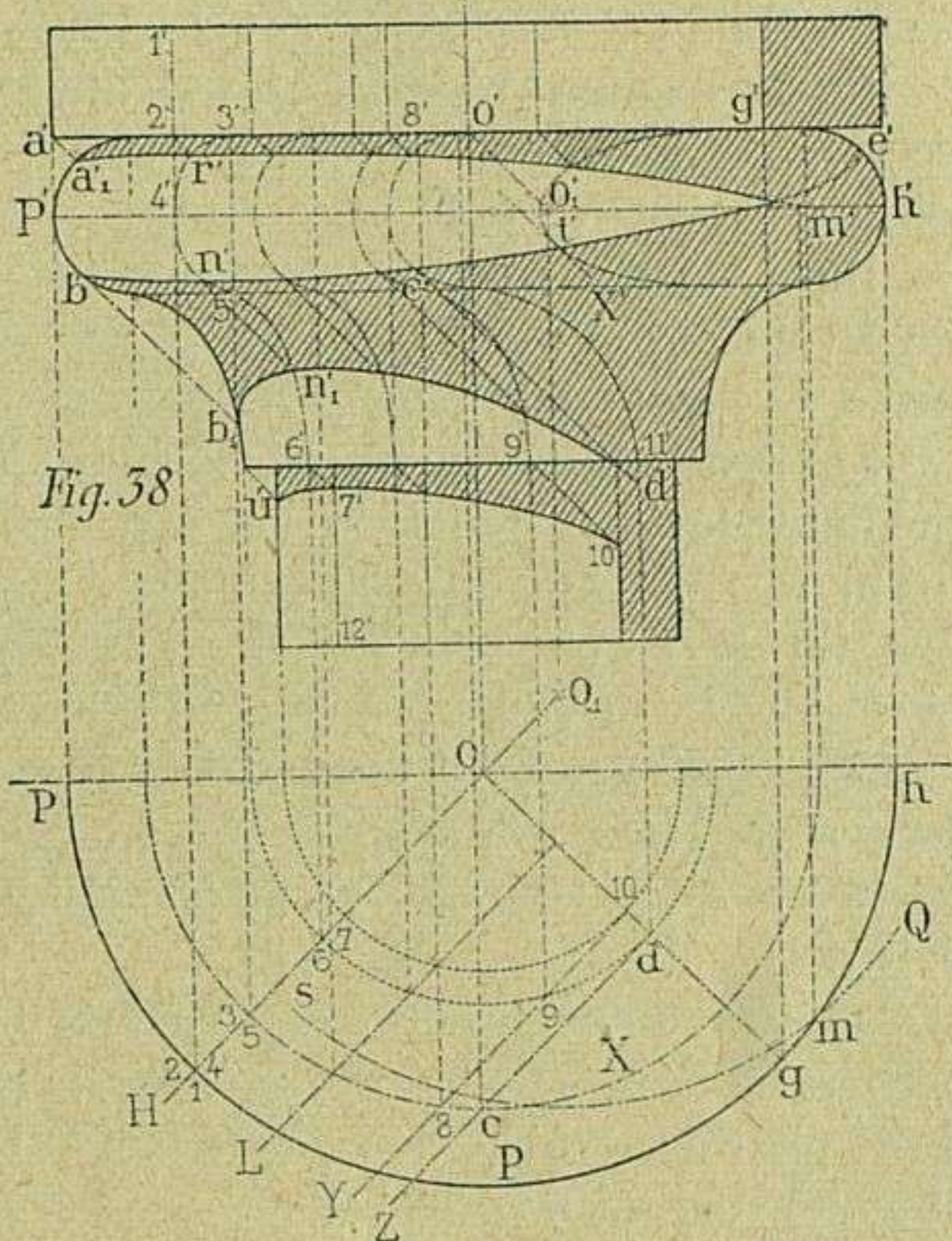
Dada la forma del contorno, las tangentes de 45° trazadas por los puntos salientes de él, han de encontrarle en otros puntos relativamente entrantes; puesto que tangentes y contorno se hallan en el mismo plano. De donde se deduce, que el contorno de sombra propia pasará exclusivamente por todos los puntos de contacto con rayos de 45° , y el de sombra arrojada quedará determinado por las intersecciones respectivas de estos mismos rayos de 45° con los contornos de sección en su parte entrante ó cóncava.

Así por ejemplo, el rayo luminoso trazado por $2'$ determinará en r' un punto del contorno de la sombra arrojada sobre la superficie del talón.

El punto n' , en el que se verifica el contacto del rayo luminoso de 45° , pertenece al contorno de la sombra propia del talón.

La intersección de este mismo rayo de 45° con el contorno de la sección, determina en n'_1 un punto perteneciente á la sombra arrojada b_1, d' .

El rayo luminoso que pasa por $6'$ determinará en su intersección con la generatriz $7', 12'$, el punto $7'$ que corresponde al contorno de sombra arrojada $u', 10$, sobre la superficie del cilindro menor.



El punto $10 - 10'$ se encuentra, valiéndose del plano Y, tangente en la generatriz límite de sombra propia del cilindro menor. De la misma manera se determina el $d - d'$ por el plano Z.

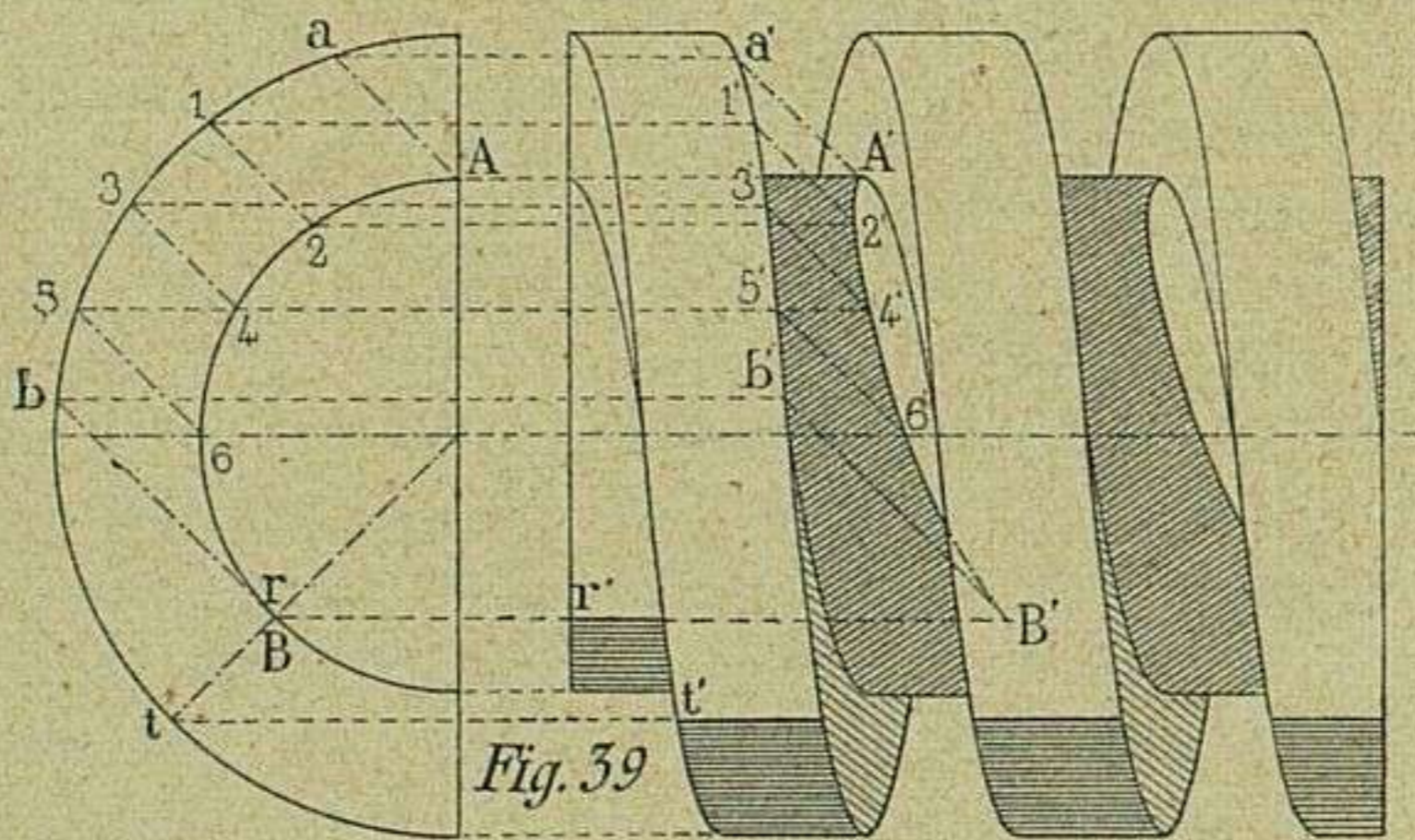
En el ecuador $P h - P' h'$, se halla el punto $m - m'$, situado en la intersección del círculo de sombra arrojada por la base a', e' , sobre el plano de dicho ecuador (V. 40).

De la determinación del punto b' ya se ha tratado en las sombras del toro de revolución (V. 38) como también de los a'_1, b_1 , (V. 40), situados en el perfil de esta moldura.

Los demás puntos que carecen de notación en la figura, se determinan mediante los planos secantes L, y Z, procediendo en igual forma que para hallar los puntos relacionados con el plano H o. Es de notar, que los puntos de sombra situados en el plano secante H o, corresponden á los puntos más bajos en el contorno de sombra propia y á los más altos en los de sombra arrojada.

42. Sombras del tornillo de filete cuadrangular cuyo eje es paralelo á la línea de tierra (fig. 39).—Efecto de la posición del tornillo respecto á la dirección del rayo de 45° , el trazado de sus sombras no ofrece dificultad.

La sombra arrojada por el segmento de hélice $a' 1' 2' 3' 5' 6'$ sobre la superficie cilíndrica del núcleo, se obtiene con suma facilidad, mediante el auxilio de planos secantes, que conteniendo al rayo luminoso, son perpendiculares al plano vertical de proyección.



Según lo indicado, el primero de estos planos secantes, cuya traza es $A a$, corta á la hélice antes citada en a' , y al núcleo cilíndrico, según la generatriz, $A A'$. Ahora bien, en el encuentro del rayo luminoso de 45° trazado por a' con dicha generatriz, se halla el punto A' , primero de los que constituyen el contorno de sombra arrojada. Esta operación, repetida con ayuda de los planos secantes $1 2, 3 4, 5 6$ y $b B$, dará por resultado dicho contorno, determinado en los puntos $A' 2' 4' 6' B'$.

La sombra propia correspondiente á cada uno de los cilindros exterior y

del núcleo, quedará determinada conforme á lo expuesto en el núm. 22, por las respectivas generatrices trazadas en t' y r' .

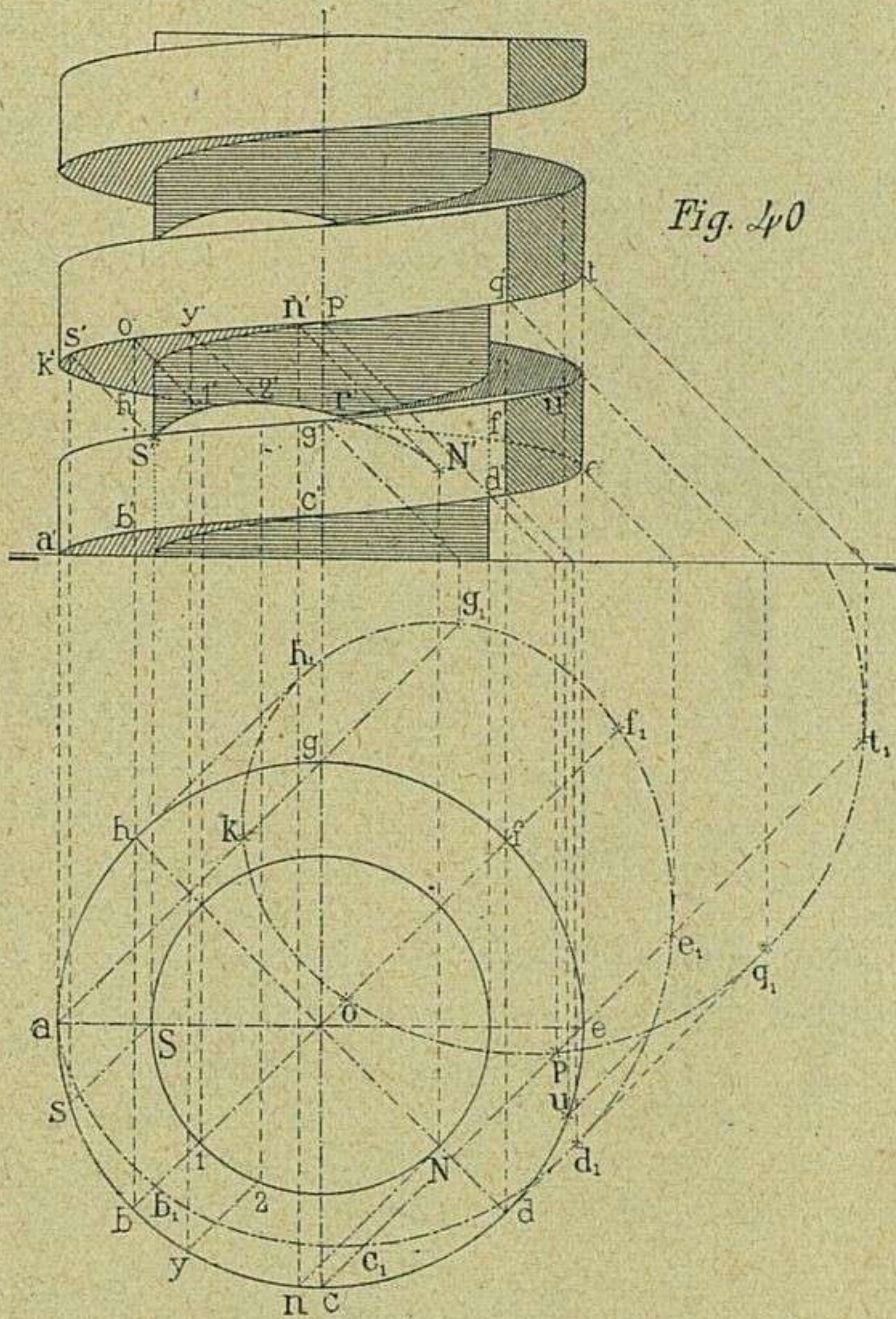
43. Sombras del tornillo de filete cuandrangular cuando el eje es perpendicular al plano horizontal (fig. 40). — Se procederá por planos secantes verticales paralelos al rayo luminoso (V. 41), obteniéndose el contorno de sombra $s' 1' 2' r' N'$ arrojada por la hélice $k' p' t$ sobre la superficie cilíndrica del núcleo.

La porción de este contorno situada sobre la superficie helizoidal (1) da principio en r' y termina en u' , diferenciándose muy poco de la línea recta.

Para determinar $u-u'$, se hallará primero la sombra arrojada por la hélice $k' s' o' v' p' q'$, etc., sobre el plano horizontal en $a b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 h_1 k o p$, etc., en el trayecto de dos espiras; lo que se conseguirá mediante el procedimiento de planos verticales secantes y paralelos al rayo luminoso (Véase 41). Desde el punto donde se cortan los segmentos $d e_1$ y $p q_1$ de esta sombra, se trazará una paralela á la proyección horizontal $b f$ del rayo de 45° , la cual en su intersección con la circunferencia $a c e g$ dará el punto u , que se trasladará á la proyección vertical en u' .

Desde el punto donde se cortan los segmentos $d e_1$ y $p q_1$ de esta sombra, se trazará una paralela á la proyección horizontal $b f$ del rayo de 45° , la cual en su intersección con la circunferencia $a c e g$ dará el punto u , que se trasladará á la proyección vertical en u' .

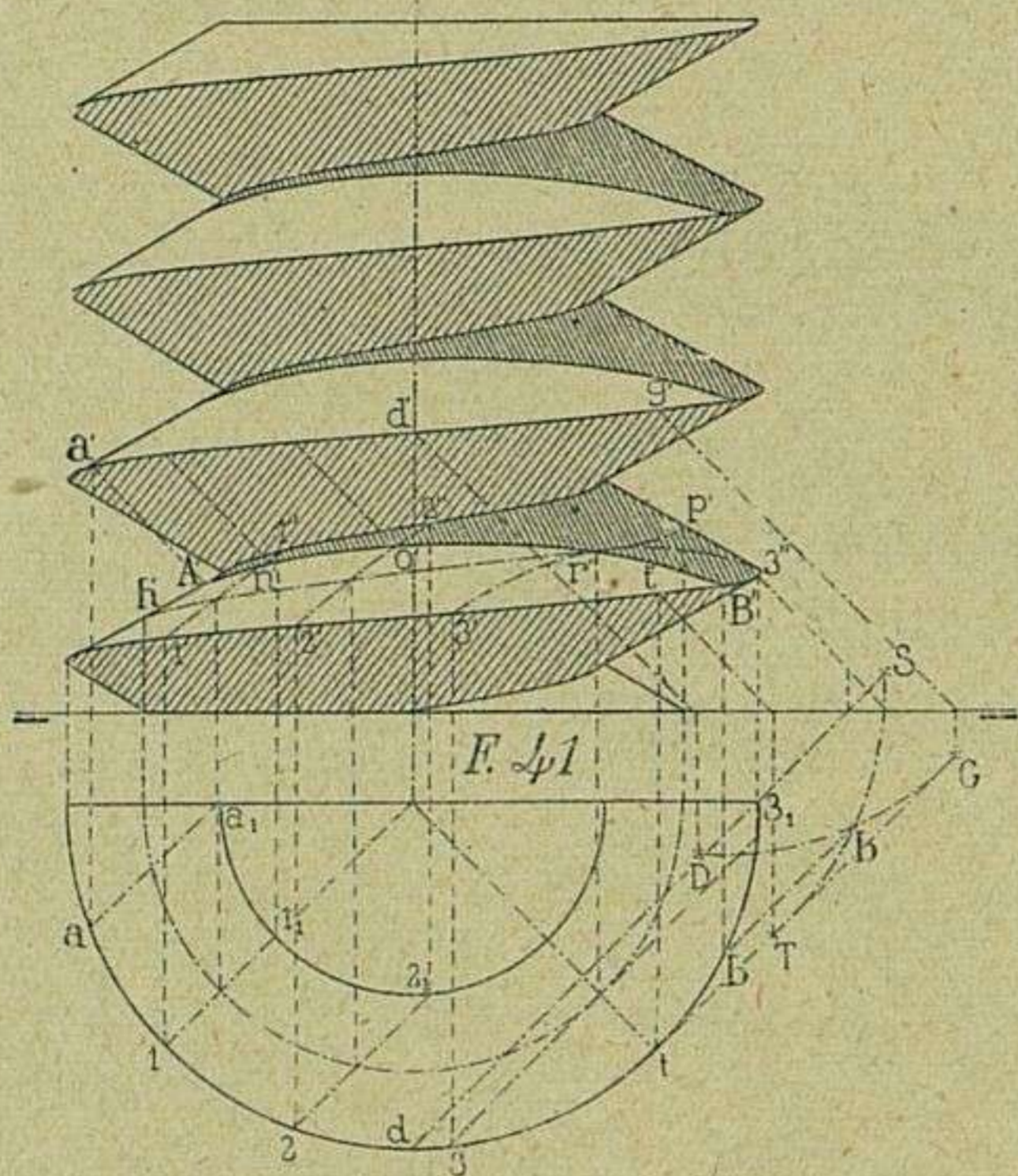
44. Sombras del tornillo de filete triangular cuyo eje es perpendicular al plano horizontal (fig. 41). — Como en el ejercicio anterior, en



(1) Superficie helizoidal es la engendrada por una recta que, apoyándose en la hélice y en el eje del cilindro correspondiente, recorre todos los puntos de la hélice, conservando una inclinación constante sin perder el contacto con el eje. En algunos casos, el eje se sustituye por un cilindro y hasta por un cono de revolución; entonces la recta generatriz permanece tangente al cilindro ó al cono durante los movimientos combinados de rotación y traslación.



éste se emplea el procedimiento de planos secantes para dar solución fácil al problema. Un punto cualquiera n' de la sombra arrojada sobre la superficie helizoidal por el correspondiente de la arista $a' g'$, se determina mediante el



plano secante vertical que, conteniendo al rayo luminoso, corta á la superficie helizoidal según la curva $1' 1''$ de la misma especie que las $2' 2''$ y $3' 3''$ donde respectivamente se hallan los o' y r' pertenecientes á dicho contorno. Estas curvas de sección $1' 1''$, $2' 2''$ y $3' 3''$ se han trazado con el auxilio de la hélice intermedia $h' p'$.

El punto $b - B'$, donde termina el contorno de sombra, se encuentra como el análogo que figura en el ejercicio anterior (V. **43**), sin otra novedad que la de hallar únicamente la parte de sombra arrojada en proyección horizontal que representan los segmentos DG y TS , los que en su intersección dan el punto

b' por donde pasa la paralela al rayo luminoso á encontrar el arco $t 3_1$ en b , punto que se traslada á la proyección vertical en B' .

PUNTOS Y LÍNEAS BRILLANTES

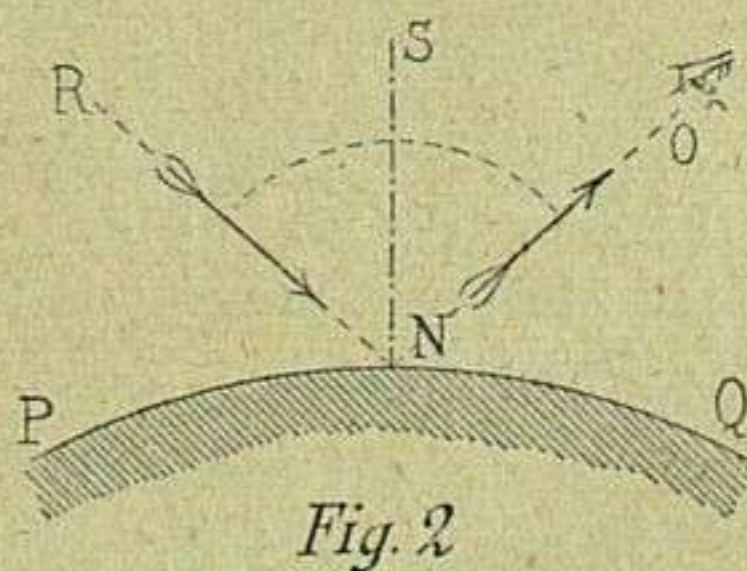
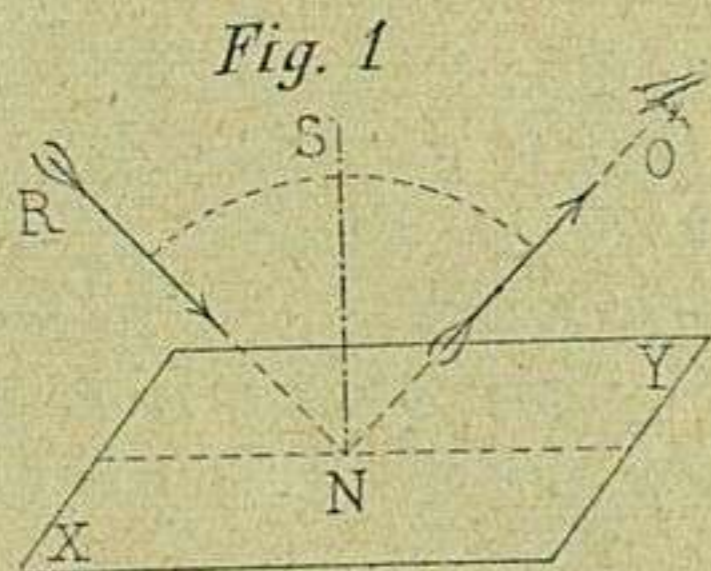
1. Al verificarse la iluminación de los cuerpos por un foco de luz cualquiera, además de los efectos de sombra y en contraposición con ellos, se producen otros de luz que sirven de complemento para la cabal representación gráfica.

El conocimiento de los principios y procedimientos de ellos derivados, interesa tanto por lo menos, como el de aquellos que se relacionan con la teoría y práctica de las sombras.

Los efectos de luz se producen siempre en relación con la naturaleza de las superficies iluminadas. Así, se observa que, en las superficies pulimentadas estos efectos se destacan con más vigor y realce que en las no pulimentadas ó mates, traduciéndose en toques claros cuya situación respectiva en la superficie puede señalarse á ciencia cierta, mediante puntos y líneas que se determinan, ajustándose á procedimientos muy semejantes á los expuestos, al tratar de las sombras en el sistema de proyecciones ortogonales.

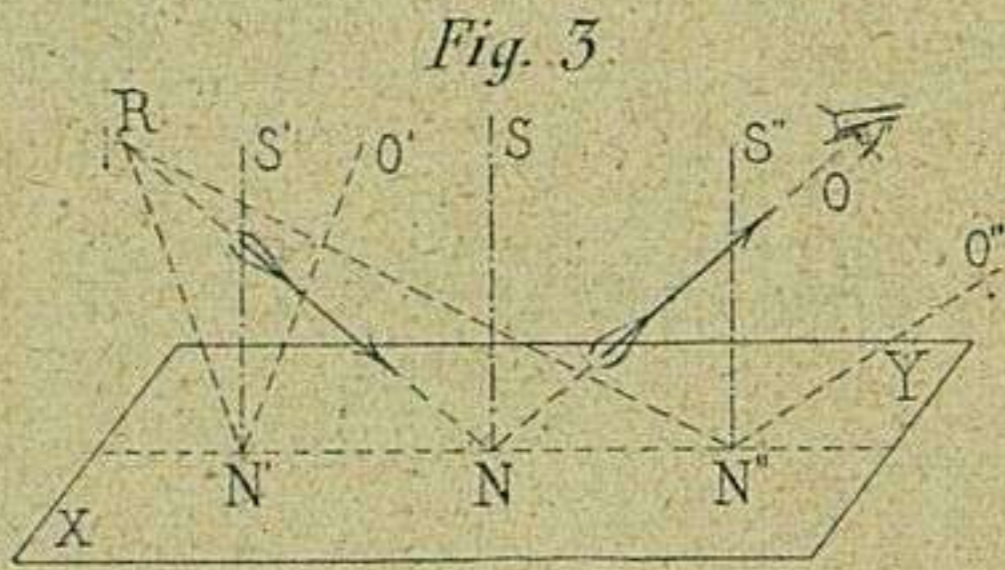
Claro está, que estos *puntos y líneas brillantes*, según se ha convenido en llamarles, no significan ni representan otra cosa que la localización del toque más ó menos claro, en el sitio que ocupa la línea ó el punto.

2. Sea XY ó PQ (figs. 1 y 2) una superficie pulimentada y R un rayo luminoso que al encontrar á cualquiera de ellas en N, es reflejado en la dirección NO, hacia el ojo del espectador. Al RN se le denomina *rayo de incidencia* y al NO *rayo de reflexión*.



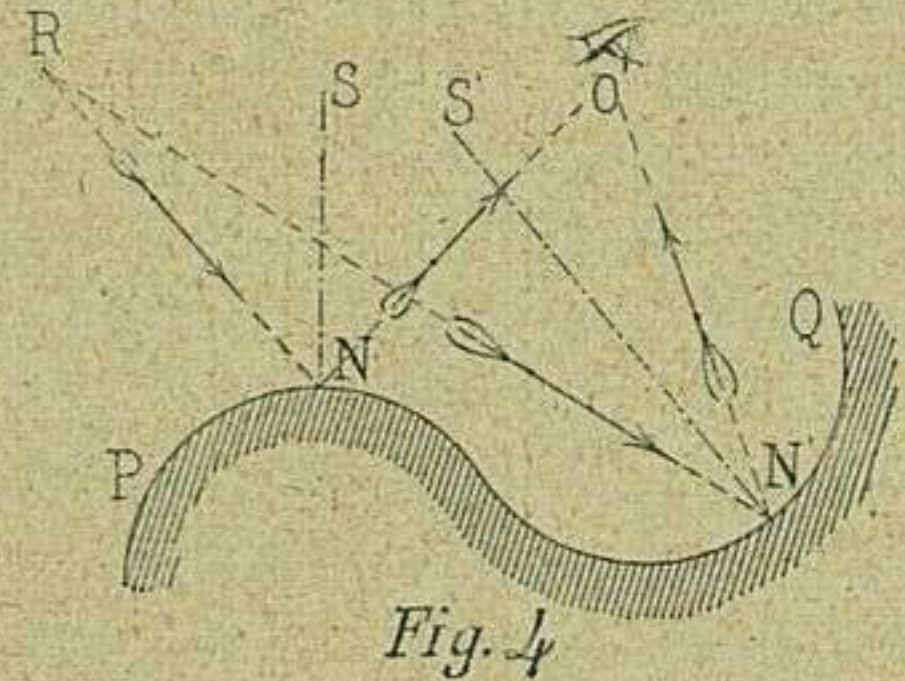
Las rectas que representan los rayos mencionados se hallan situadas en el mismo plano que la normal NS formando con ella dos ángulos iguales el RNS, que toma el nombre de *ángulo de incidencia*, y el SNO, llamado *ángulo de reflexión*.

3. Es evidente que un espectador no puede percibir desde un punto fijo O (fig. 3) más que un sólo punto brillante N.



Para percibir varios, como se demuestra en la figura adjunta, sería necesario trasladar el punto de observación en o' y también en o'' , según se quisiera percibir el punto N' ó el N'' ; todo lo cual sería contrario á la condición de fijeza otorgada al punto de observación.

4. No sucede lo mismo cuando se trata de superficies compuestas tales cual la P Q (fig. 4). En el caso actual, la superficie sometida á los efectos de la luz pasa de cóncava á convexa; por eso refleja dos distintos rayos, $N o$ y $N' o$, que se reúnen en el punto o de observación, después de haber determinado por incidencia en N y N' respectivamente dos puntos brillantes, situado el primero en la superficie convexa y el segundo en la cóncava.



De aquí se desprende que en una superficie compuesta se pueden obtener tantos puntos ó líneas brillantes cuantas sean las variaciones que la superficie experimente, favorables á dicho objeto.

Por regla general, queda determinada en una superficie la situación de un punto brillante, cada vez que la bisectriz S N del ángulo formado por los rayos de incidencia y de reflexión es normal en dicho punto á la superficie.

5. En el sistema de representación mediante proyecciones ortogonales, se supone el punto de vista (ojo del espectador) alejado á una distancia infinita del plano de proyección; por consiguiente, los rayos *visuales* (1) además de ser perpendiculares al respectivo plano de proyección, son paralelos entre sí. De esta segunda propiedad gozan los rayos luminosos cuando, según convenio establecido (*V. Sombras ortogonales*, 2), se suponen iluminados exclusivamente los cuerpos por la luz del sol.

Para concretar; cuando se considera un dibujo en proyección horizontal, los rayos visuales son verticales; y cuando se considera en proyección vertical, son horizontales. En uno ó en otro caso, los rayos visuales son perpendiculares al plano de proyección que se considera.

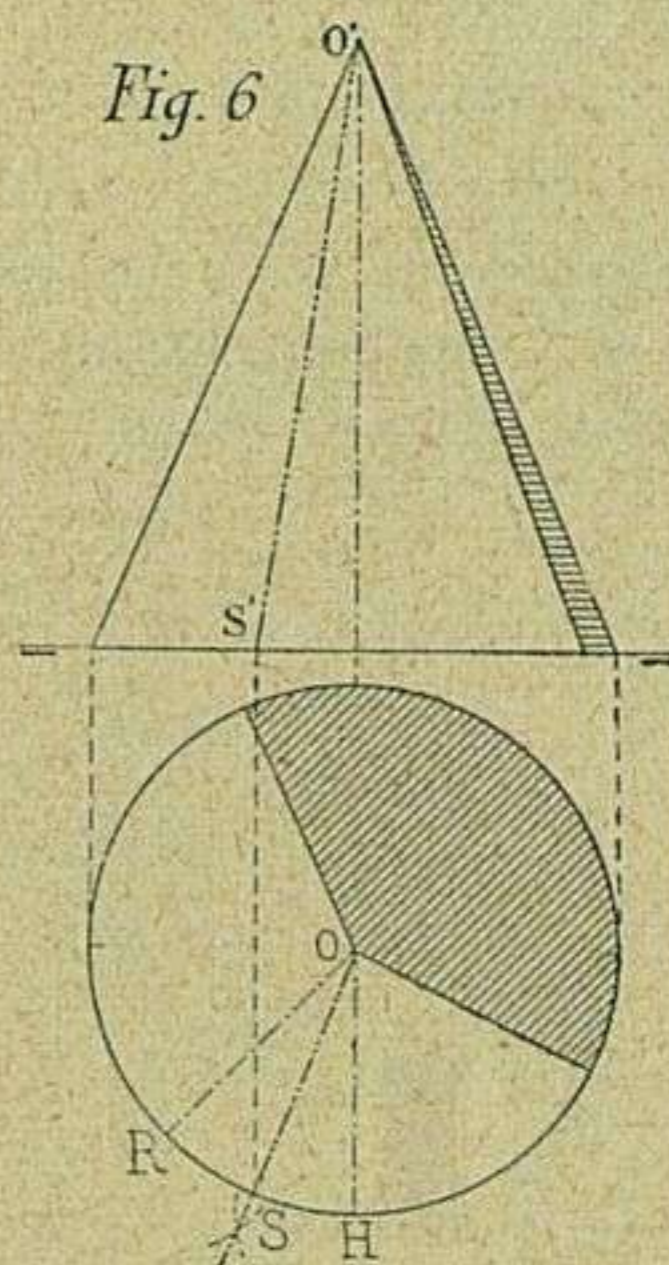
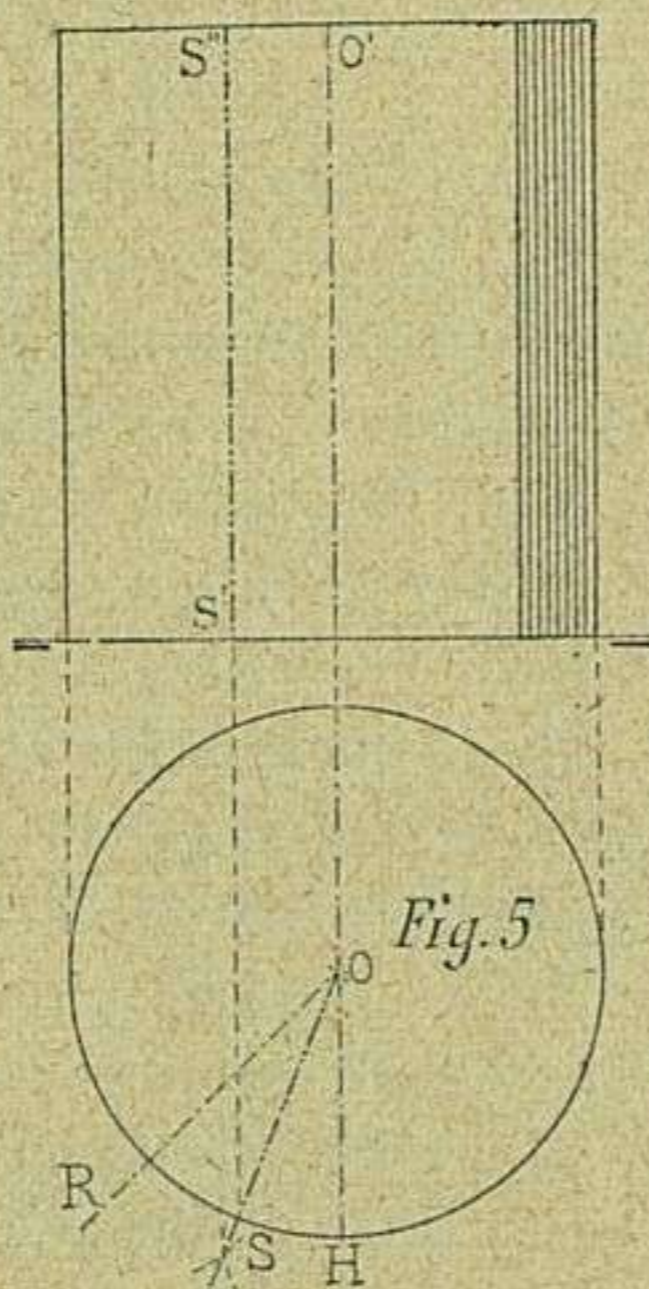
Los rayos luminosos, sin perder su paralelismo, pueden tomar la dirección que más convenga; pero lo más conveniente será que conserven la de 45° , establecida para la determinación de sombras.

(1) Se entiende por rayo visual una recta imaginaria que va del ojo del espectador á un punto del objeto que se ha de representar, ó al contrario. Por comparación resulta que *rayo visual* y *rayo de reflexión* son la misma entidad.

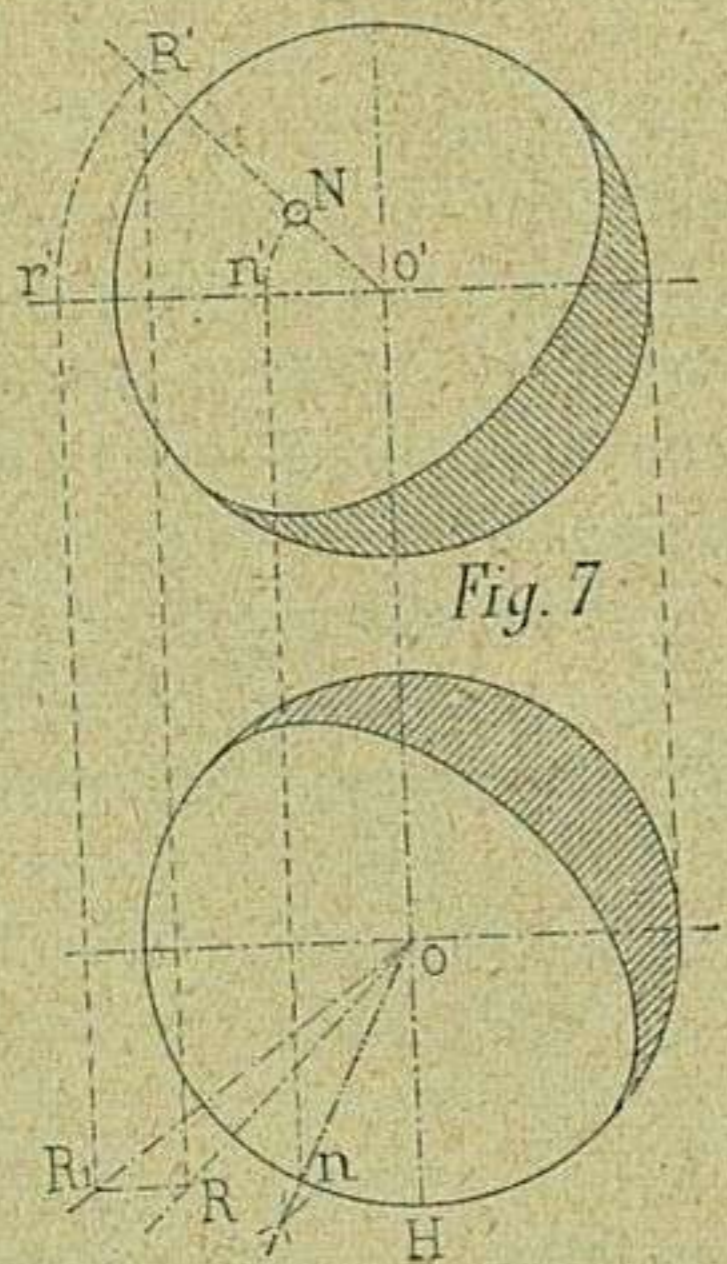
Estas ligeras nociones son suficientes para resolver algunos problemas con algún conocimiento de causa.

6. Determinación de líneas brillantes en las superficies cilíndricas y cónicas (figs. 5 y 6.)—

En el cilindro y en el cono, dada la naturaleza de cada una de las superficies que forman estos cuerpos, habrá tantos puntos brillantes cuantos puedan situarse en una recta, que además de estar contenida en cualquiera de estas superficies curvas, sea perpendicular á la bisectriz del ángulo formado por el rayo visual y el rayo luminoso. Esta recta, lugar geométrico de los citados puntos brillantes, no puede ser otra que la generatriz brillante correspondiente á la superficie cilíndrica ó á la cónica. Por consiguiente :



Considerando que oH y oR , proyecciones horizontales respectivas del rayo visual y del rayo luminoso, forman un ángulo cuya bisectriz es oS , el punto S , donde dicha bisectriz encuentra á la base, será la proyección horizontal de la generatriz brillante $s's''$, correspondiente al cilindro; como también, teniendo en cuenta las mismas razones, $so - s'o'$ será la generatriz brillante en el cono.



7. Punto brillante en la esfera (fig. 7.)—

En la esfera y demás superficies de revolución de generatriz curva no cabe suponer la existencia de líneas brillantes. Considerando el caso de la esfera sólo pueden en ella determinarse dos puntos brillantes: uno correspondiente á la proyección vertical y el otro á la horizontal; puntos que se necesita determinar por separado en cada proyección.

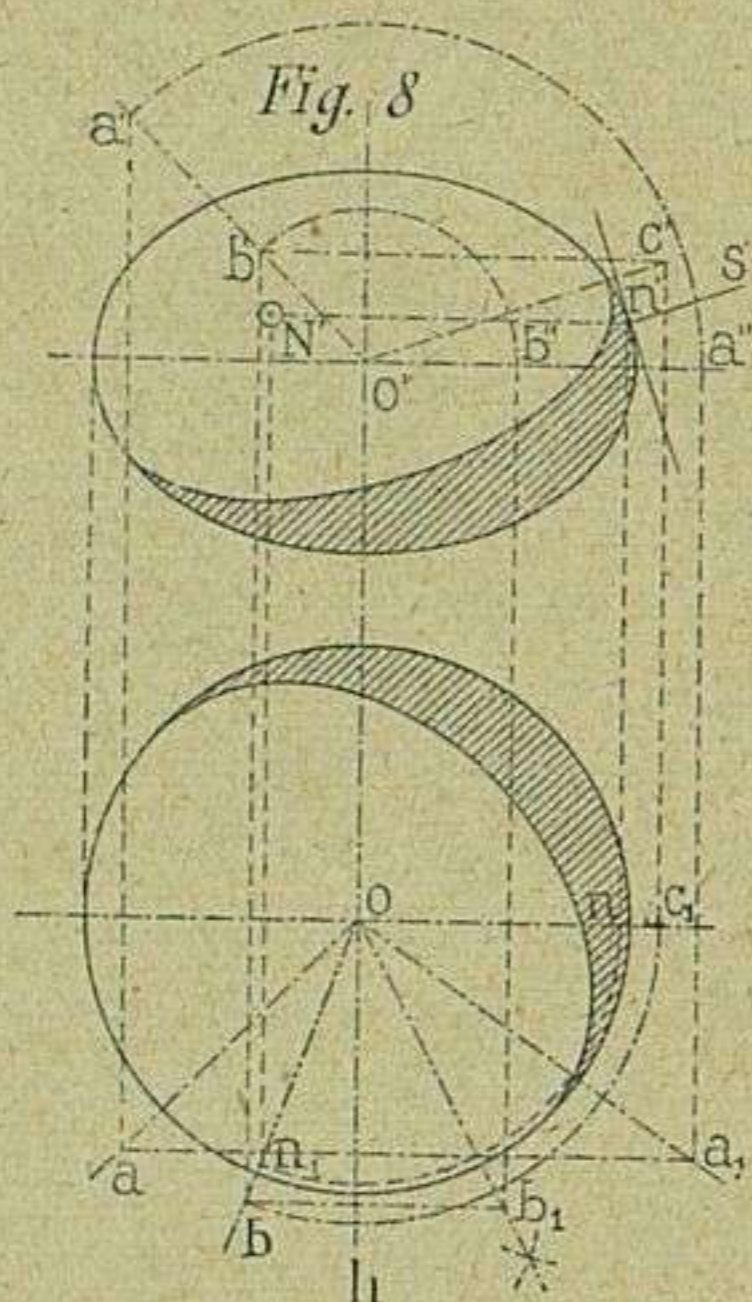
Proyección vertical del punto brillante. — Se determinan las proyecciones $oR - o'R'$ del rayo luminoso á 45° que pasa por el centro de la esfera, cuyo rayo, mediante giro (V: *Proyecciones ortogonales*, 66), se colocará en $o'r' - oR_1$, paralelo al plano horizontal de proyección.

En esta situación, el ángulo HoR_1 será el mismo que forman el rayo visual

con el rayo luminoso; es decir, el ángulo en su verdadera magnitud. La bisectriz de este ángulo en su intersección con el ecuador de la esfera, dará en $n - n'$ un punto, que una vez deshecho el giro antes verificado, quedará situado en N sobre la proyección vertical $o' R'$ del rayo luminoso. N es el punto brillante que corresponde á la proyección vertical de la esfera.

Proyección horizontal. — Se verificarán las mismas operaciones que para determinar la proyección vertical; únicamente al llegar al giro del rayo luminoso se colocará éste paralelo al plano vertical de proyección.

8. Determinación del punto brillante en un elipsoide de revolución (fig. 8.) — *Proyección vertical.* — Determinadas las proyecciones del



rayo luminoso en $o a - o' a'$ que pasan por el centro del elipsoide, se considerará que éste y el rayo visual se hallan contenidos en un mismo plano perpendicular al vertical. Ahora, abatiendo este plano hasta colocarle en $o' a'' - o a_1$ paralelo al horizontal, se conseguirá en la proyección $h o a_1$ la verdadera magnitud del ángulo que forman los rayos luminoso y visual.

Trácese la bisectriz $o b_1$ del ángulo $h o a_1$, que también se hallará contenida en el plano de dicho ángulo, y tomando uno cualquiera de sus puntos, el b_1 , se trasladará, deshaciendo el abatimiento, á la proyección vertical en b' y de ésta á la horizontal en b . La recta que une el punto o con el b representa la proyección horizontal de la bisectriz.

Como el punto brillante ha de obtenerse en la intersección de la superficie del elipsoide con una normal paralela á dicha bisectriz, $o b$ se supondrá pasando por ella, un plano meridiano que se abatirá paralelo al vertical en $o c_1$. El punto c_1 pasará á la proyección vertical en c' , y uniéndole con el o' , dará la proyección de la bisectriz paralela al plano vertical.

Sólo falta trazar la normal $s' n'$ paralela á $o' c'$, que encontrará al elipsoide en $n - n'$, y deshaciendo el abatimiento, trasladar n á n_1 , punto que, referido á la proyección vertical, representará en N' el punto brillante que corresponde á dicha proyección.

Proyección horizontal. — Al verificar las mismas operaciones llevadas á cabo para obtener el punto brillante en proyección vertical, habrá de tenerse en cuenta que el plano del ángulo formado por el rayo luminoso y el rayo visual, se colocará perpendicular al plano horizontal de proyección.

9. Punto brillante en la superficie de garganta de una polea (figura 9.) — Descrito el procedimiento para determinar los puntos brillantes en el elipsoide, nada hay que añadir ni variar en él, sino seguirle al pie de la letra para determinar en este caso el único punto brillante visible en la proyección vertical de la polea. En este caso, la normal $n' o$, sin dejar de ser

paralela á la bisectriz $v'c'$, pasará por el centro o de la semicircunferencia, que constituye el perfil de la garganta en la polea.

Advertencia.—Con los conocimientos expuestos en estos dos capítulos referentes á sombras y puntos brillantes, hay suficiente para resolver el problema de la iluminación de los cuerpos en los casos más comunes; pero antes de dar por terminada esta materia, conviene hacer ligeras consideraciones que afectan al citado problema.

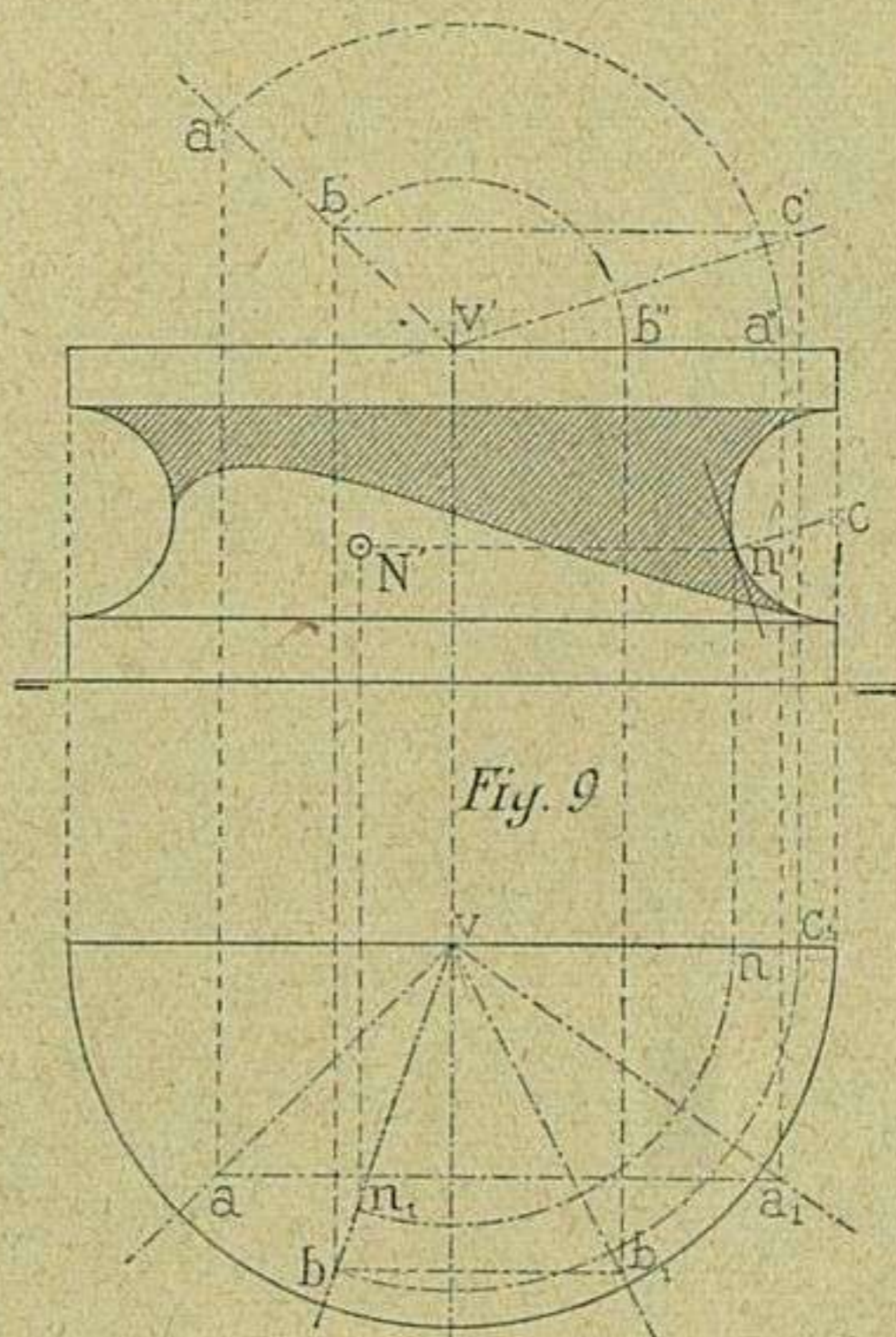
Así como las líneas y puntos brillantes determinados en las distintas superficies, sólo significan la localización del efecto de luz; así también, el paso de la luz á la sombra, señalado por una línea, en las sombras propias, no significa otra cosa que la localización de la mancha, limitada por la línea de separación de luz y sombra. Este paso ó transición, se verifica mediante cierta graduación,

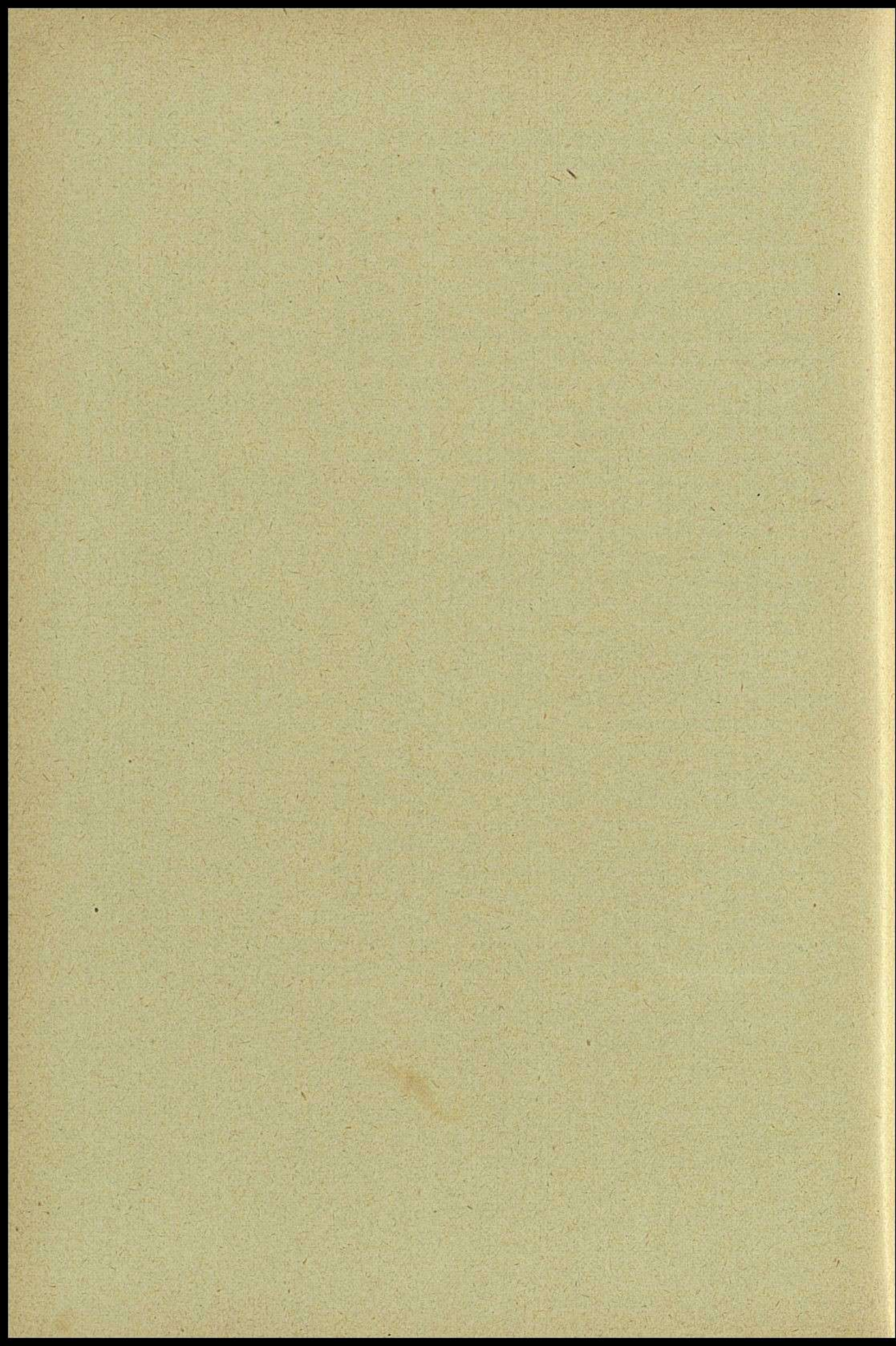
de claro obscuro, en la cual se establezca una tonalidad por la que resulten armónicamente fundidos, el obscuro con la media tinta y ésta con el claro.

Aún hay más: la mancha de sombra propia, no suele resultar uniforme en su totalidad. Existe, sobre todo, las superficies curvas, una parte que recibe la luz reflejada por otras superficies más ó menos próximas.

En ocasiones, sobre todo tratándose de grandes manchas cuando cubren molduras salientes, se observa que, efecto de la luz reflejada, se produce aunque débil, otra sombra arrojada secundaria cuya orientación es opuesta á la primitiva. Por esta razón se le ha dado el nombre de *contrasombra*.

Estos y otros efectos, que á las veces, dependen de la naturaleza de los materiales que han de representarse, conviene estudiarlos en el natural, cuya observación, bien dirigida, produce seguramente mejores resultados que todos los convencionalismos de receta.





EJERCICIOS DE SOMBRAS

Explicación de las láminas incluídas en la serie F (1)

LÁMINA 1.^a **Sombras de una manivela.** — Contiene tres figuras, señaladas con cada una de las letras (M), (N) y (H), las cuales corresponden á tres proyecciones verticales de una manivela. Representan (M) la parte anterior, (N) la manivela vista de costado y (H) la parte posterior de ella. La dirección del rayo luminoso es de 45° .

SOMBRAS EN LA PROYECCIÓN (M). — La sombra arrojada por la tuerca, visible sobre los planos A y B, y limitada por el contorno $d' e''' i''' b''' b''$, se determina fácilmente con la cooperación de la proyección (N). Así, un punto cualquiera de este contorno, el i''' , por ejemplo, se ha determinado en la intersección del rayo de 45° trazado por i'' con la horizontal que pasa por i' (proyección N), punto donde encuentra á la superficie B otro rayo luminoso trazado por i .

La sombra arrojada por el círculo A sobre el plano B será un arco de igual radio del que corresponde á dicho círculo (2), unidos ambos por la tangente $a a'$, cuya longitud es igual á $I'' I'''$, distancia que media entre el centro I'' y su sombra I''' , obtenida mediante el rayo de 45° $I I'$ en la proyección (N).

Por la parte inferior de la proyección (M) se producen sombras análogas á la descrita, arrojadas por el trozo de árbol que sobresale en la superficie C, cuyos contornos $f f' 3'' e' e, g g''' g''' g'$, en lo que tienen de arcos, se determinan como el anterior $a' b'''$, correspondiendo, por su parte, las rectas $g g'', f f', g' g'''$ y $e e'$ á las trazas de planos verticales de 45° tangentes á cada uno de los cilindros que forman el árbol en los respectivos puntos f, g, g' y e . En caso de duda, puede consultarse el contenido de los números **12, 16 y 22**.

(1) De la mayoría de los problemas que en estos ejercicios se plantean se han dado explicaciones á su debido tiempo. Por consiguiente, para no caer en repeticiones, se citará cuando sea oportuno, como ya se viene haciendo, el número del artículo que debe consultarse para resolver el problema parcial de referencia.

(2) El plano A que produce la sombra y el B que la recibe no son paralelos, razón por la cual el segmento $a' b'''$ debería ser un arco de elipse; pero es tan poco lo que le falta al plano B para ser paralelo al A, que entre el arco de elipse y el de circunferencia no hay diferencia apreciable con los instrumentos usuales; por eso se ha preferido trazarle con el compás.

SOMBRAS EN LA PROYECCIÓN (N). — La sombra que merece fijar más la atención es la $m' n' o' p$, arrojada por el arco $7 8 9 10$, correspondiente á la arista $m 5$, sobre la superficie cilíndrica del muñón de la manivela. Para determinarla se recurrirá á la mediación de planos verticales secantes de 45° , tales como los $7 7' m'$, $8 8' n'$, $9 9' o'$, procediendo de la misma manera indicada en los casos á que se refieren los núms. **30** y **41**.

Para trazar el pequeño contorno $n t$, situado en el árbol, así como también otro análogo colocado en q , á la terminación de la sombra propia $p' q$ del muñón, se tendrá presente lo expuesto en el núm. **39** para la determinación de la sombra propia del cabeto de revolución, puesto que de eso mismo se trata en este caso.

Las demás sombras son fáciles de hallar; se reducen á las propias del prisma y cilindro rectos (V. **20** y **22**).

SOMBRAS EN LA PROYECCIÓN (H). — En esta proyección se repite el mismo caso observado en la (M), pues en los dos se trata de sombras arrojadas por formas cilíndricas, sobre planos respectivamente perpendiculares á los ejes de dichas formas. Por consiguiente, se aplicará el mismo procedimiento, tomando como auxiliar la proyección (N) para la determinación del contorno $h j r' h'$, y su simetría respecto al eje $4'' 5'$.

LÁMINA 2.^a **Sombras de un fragmento arquitectónico, compuesto de ménsula y cornisa.** — La presente lámina comprende una proyección vertical de frente; otra vertical de perfil, señalada con la letra (H), y otras dos también verticales, señaladas, respectivamente, con las letras (M) y (N), donde solamente se representa el perfil de la ménsula. Estas proyecciones sirven para distribuir entre ellas las operaciones parciales, evitando la aglomeración de líneas auxiliares en una sola proyección de perfil. La proyección vertical del rayo luminoso forma con la línea de tierra, ó en su defecto con una paralela á ella, un ángulo de 34° .

SOMBRAS EN LA PROYECCIÓN DE FRENTE. — Las sombras arrojadas que se producen en las molduras de la cornisa están todas limitadas por líneas rectas paralelas á las aristas horizontales de dichas molduras. Puede servir de ejemplo la sombra $a' a''$, cuya situación ha sido determinada por el rayo luminoso $a a'$, al encontrar el perfil de dicha moldura en a' .

El rayo luminoso trazado por d (proyección H) determina, en su intersección con el plano A de la ménsula, el punto d' por donde pasa la horizontal $f d'''$, límite de la sombra arrojada por la arista inferior de la cornisa. Esta misma arista proyecta su sombra en las dos pirámides situadas en la cabeza de la ménsula, según rectas que se unen en los respectivos puntos donde el plano luminoso que pasa por $d f'$ encuentra á las aristas de las citadas pirámides.

Los contornos de sombra $h' 1'''$ y $n' 2'''$, situados sobre distintas superficies cilíndricas de la ménsula en C y D, se han obtenido con el auxilio del

perfil (M), operando del mismo modo que el indicado en el núm. 29 para hallar la sombra de un semicilindro cóncavo.

La sombra arrojada por la arista $10'' r''$, y proyectada en $r''' i''$ sobre la superficie cilíndrica C, se ha obtenido con ayuda del perfil (N), hallando las intersecciones de la superficie C con los rayos luminosos rasantes á la arista $r'' 10''$.

Todas las sombras arrojadas por aristas que limitan formas planas paralelas al plano en donde se proyectan, aunque abundan en este ejercicio, son fáciles de obtener; pues ya se recordará que, cuando un polígono es paralelo á un plano sobre el cual proyecta sombra, dicha sombra es igual en forma y magnitud al polígono de donde procede (V. 16).

Por último, el contorno de sombra arrojada por varias aristas de la ménsula sobre los planos G, H y moldura de la cartela, se determina en los puntos $f'' g''' h'' 10''' 11'' i''' 8''' 4''' 5''' 6''' 7''' 9'''$, donde se verifica la intersección de cada uno de los planos G, H y moldura, con los rayos luminosos que se apoyan en las varias aristas de referencia. Esta operación se ha llevado á cabo con el auxilio de las proyecciones de perfil (N) y (H), en las que, siguiendo atentamente la marcha de las líneas auxiliares que intervienen en dicha operación, y la notación de los puntos obtenidos mediante ellas, no se necesitan más explicaciones para dar cima y comprender este ejercicio, en el cual, así como en el anterior, debe notarse la particularidad de que todas las sombras se han determinado sin la intervención de proyección horizontal de ninguna especie.

SOMBRAS EN LA PROYECCIÓN. (H). — Las sombras obtenidas en la proyección de frente se pasan con facilidad á la de perfil (H) sin más que trazar paralelas horizontales desde los puntos correspondientes que deban figurar en las sombras de la proyección (H).

LÁMINA 3.^a **Sombras de una rueda dentada cilíndrica.**—Esta lámina contiene una proyección vertical que representa la rueda de costado, señalada con la letra (M); otra proyección, también vertical, en que aparece de frente, señalada (N), y una tercera proyección, que representa la sección producida en la rueda por un plano P Q, perpendicular al vertical que pasa por el eje de la rueda, proyectado en V, señalada por (A). Las proyecciones horizontal y vertical del rayo luminoso R o — R' o se encuentran representadas en (H), así como también el ángulo R' o R'', que forma dicho rayo con el plano vertical.

SOMBRAS EN LA PROYECCIÓN (N). — En esta proyección se distinguen las sombras obtenidas sobre la misma rueda, de las arrojadas por ella sobre el plano vertical de proyección, distanciado del punto V una longitud igual L' V (1).

(1) El punto V se halla situado en el plano anterior del cubo de la rueda, ó sea en el plano más alejado del vertical de proyección.

Para determinar unas y otras sombras se comenzará por trazar la recta PQ , paralela á la proyección vertical del rayo luminoso, y en V la NM , perpendicular á dicha proyección.

De V en L' (proyección N) se tomará una distancia, que es la que se calcula ha de mediar entre el plano anterior del cubo de la rueda $L-L''$ y el plano que ha de contener la sombra arrojada, ambos paralelos. Á continuación de L' se colocarán en $8', 7', 5', 6'$, sobre MV , los puntos $8, 7, 5, 6$, que, trasladados de la proyección (A), marcan las respectivas distancias que median entre los planos anterior del cubo y de la llanta en $L' 8'$, anterior de la llanta y de los brazos de la rueda en $8' 7'$, anterior y posterior de los brazos en $7' 5'$, etc.

Desde los $8', 7', 5'$ y $6'$ se trazarán paralelas á $L'T'$ que formen en $8, 7, 5, 6$, con la recta PQ , ángulos iguales al R' o R'' (proyección H), puntos que corresponden á los centros de los varios círculos de sombra arrojada sobre el plano vertical. Ahora, todo se reduce á trazar cada uno de estos círculos con el centro y el radio que les corresponda.

Así, por ejemplo, el arco $G'G''$ es la sombra arrojada por el GT , situado en el plano anterior de la llanta; por consiguiente, el centro del círculo de sombra arrojada estará en 8 , y su radio $8G'$ será igual á VG (1).

De los mencionados círculos de sombra arrojada sólo son visibles algunos pequeños segmentos, como sucede con el $g''' 10$, perteneciente á la sombra arrojada por la arista posterior de la llanta NsM . Otras, como los círculos $e'f'$ y $e''f''$, no son visibles en sombra alguna, pero su trazado se aprovecha en concepto de auxiliar para determinar otras sombras.

En dichos círculos $e'f'$ y $e''f''$ se han determinado, mediante intersección de los correspondientes rayos luminosos, los puntos $g'g''$, $h'h''$, desde los cuales, trazando las rectas $g'g_1$ y $h''h'''$ paralelas á nn'' , queda hallada la sombra arrojada por los brazos X , así como también en las $h'h''$, $g''g'''$, paralelas á mm'' , se obtiene la arrojada por los brazos Y .

La sombra arrojada sobre el plano vertical por uno de los dientes, el $bcd a$, se obtiene por la intersección de los respectivos rayos luminosos con los correspondientes arcos CQ , $G'G''$ y JJ' concéntricos en 8 , centro de sombras arrojadas por los arcos contenidos en el plano anterior de la llanta, así como también el punto 6 es centro de las sombras arrojadas por los arcos de círculo situados en el plano posterior.

Para la determinación de sombras arrojadas por unos planos sobre otros, en la misma rueda, deberá seguirse el mismo procedimiento, puesto que se trata de círculos y planos paralelos al vertical de proyección, con la diferencia de que ahora entra en funciones como auxiliar la sección (A).

Para proceder á la determinación de las mencionadas sombras, se trazan

(1) El arco GT y su sombra $G'G''$ que se han tomado como ejemplo, corresponden á la circunferencia primitiva, y aunque el GT no da sombra efectiva, se utiliza para determinar puntos intermedios correspondientes á la sombra arrojada por los perfiles de las caras de los dientes, tales como el d' .

rayos luminosos contenidos en el plano P Q, perpendicular al vertical, que formen con este último ángulos iguales al R' o R'' (V. H). De este modo, el rayo trazado en dichas condiciones que pasa por s' cortará al plano X' en r', cuya distancia r' r'' se trasladará (proyección N) de V en 3, punto este último donde se hará centro para trazar con radio 3 r = V' r' la sombra que arroja la arista N s M de la llanta sobre el plano X — X', común á los seis brazos de la rueda. En el mismo caso se encuentran todos los segmentos del contorno visible de sombra arrojada sobre el plano Z — Z', pertenecientes á una circunferencia de radio 1 i = V' r'', descrito desde el punto 1 tomado por centro, así como también los que corresponden al arco que pasa por j, descrito desde 4 con radio 4 j = V' k'.

La sombra arrojada por las aristas n n'' y m m'', situada en el plano Z — Z', se determina sobre el X — X' por la intersección del rayo luminoso u k. Al efecto, desde n y n'' se trazarán paralelas á P Q, y colocando de n en n' y de n'' en n''' la longitud k' k, trasladada de la sección (A), se tendrá en la recta que pasa por n' n''' la sombra arrojada por la arista n n''. De la misma manera, colocando k' k en m m' y m'' m''', se conseguirá en la recta m' m''' la sombra arrojada sobre el plano X — X' por la arista m m''.

Finalmente, las sombras arrojadas por los dientes de la rueda sobre la superficie cilíndrica exterior de la llanta (proyección M); tal como la 8, 9''', 8', se determinan procediendo como si se tratara de hallar la sombra en la superficie cóncava de un cilindro recto (V. 27).

En igual caso se encuentra la sombra 11, 12, 13 del semicilindro interior de la sección (A).

LÁMINA 4.^a **Sombras del capitel toscano.** — El capitel propuesto para este ejercicio se ha representado en dos proyecciones: vertical (A) y horizontal (H), dibujadas conforme á las proporciones establecidas por Viñola. Se compone de abaco, cuarto bocel, filete, collarino, astrágalo (compuesto de junquillo y filete) y el fuste ó caña de la columna. Excepto el abaco, todas las molduras mencionadas son de revolución.

Se supone que las proyecciones de los rayos luminosos forman ángulos de 45° con la línea de tierra.

En el abaco, la arista a' a'' proyecta su sombra en la recta A' B', intersección del plano luminoso que se apoya en a' a''.

Para determinar el contorno 2' m' e' s' e'' 4', correspondiente á la sombra propia del cuarto bocel, superficie análoga á la llamada toro de revolución, se procederá según la manera indicada en el núm. 38.

El contorno v e'' r e', simétrico respecto á r v, producido por el plano secante luminoso que contiene á la arista h' s', se determina de manera análoga al caso explicado en el núm. 36: solamente que como aquí, la superficie seccionada es un cuarto bocel de revolución, no resulta como allí, una elipse el contorno de referencia; pero se obtienen puntos de dicha curva simé-

tricos, por medio de planos auxiliares horizontales. Así, los puntos e' y e'' situados en el plano yr , están distanciados á uno y otro lado de r , una longitud igual ee_1 ; los e' y e'' , respecto de n , otra longitud igual ee_1 y los d' y b'' simétricos también respecto del eje vr se encuentran separados de él, una distancia igual bb_1 ; estas longitudes ee_1 , ee_1 y bb_1 se toman de la proyección (H).

Los puntos v y r se hallan situados en el eje; el primero á la altura de 1 y el r á la del T .

El contorno $56E'g'$ representa la sombra arrojada por el cuarto bocel sobre el filete, y los puntos que le forman se determinan mediante planos secantes verticales procediendo conforme á lo expuesto en el núm. **41**. Por supuesto, de este contorno sólo es visible una pequeña parte en 7 y otra mayor de E' á g'' . Desde E' á j , se describe un pequeño arco de circunferencia desde o' con radio $o'E'$, cuyo arco representa la sombra arrojada por la arista $h's'$; véase para su determinación el núm. **29**.

Sobre la superficie cilíndrica del collarino se dibuja el contorno $89C10G'k'$, compuesto de segmentos de sombra arrojada de distintas procedencias. El segmento $9C$, continuación del $h'3$, procede de la intersección del plano luminoso que pasa por la arista $hp - h'p'$ (V. **23**), cuyo extremo C se halla situado en la intersección de la recta $1, O'$, con la generatriz $C16$ contenida en el plano PO . La parte de contorno comprendida entre C y 10 , es un arco de circunferencia descrito desde O' con radio $o'c$, el cual se origina como el $E'j$ de la sombra arrojada por la arista $hs - h's'$; para su trazado, véase el núm. **29**.

Los puntos 10 y G' , extremos de la sombra arrojada por el segmento de arista jj'' , quedan determinados mediante el procedimiento de planos secantes (V. **30**), en la intersección de los respectivos rayos de 45° trazados por j y G' .

El segmento $G'k'$ representa la sombra arrojada por el $e'x'$ sobre la superficie cilíndrica del collarino; así es que los puntos situados en este segmento pueden hallarse también por el procedimiento de planos secantes indicado en el número **41**. Procedimiento que también se emplea para la determinación de los demás contornos de sombras propias y arrojadas que figuran trazados en las superficies del astrágalo y caña de la columna.

LÁMINA 5.^a **Sombras de un fragmento de cuerpo de bomba.**— Dos proyecciones comprende esta lámina: horizontal (H) y vertical (N), en las que se representa la parte superior de un cuerpo de bomba seccionado por un plano paralelo al vertical de proyección, que pasa por el eje DO . La dirección del rayo luminoso es de 45° .

SOMBRA EN LA PROYECCIÓN (N). El contorno $a'b'j$, así como el kzL , corresponden en uno y otro á las sombras del semicilindro concavo, y se determinan de la manera indicada en el núm. **27**.

Sobre la superficie esférica, también cóncava, se proyecta de B en t_1 la sombra arrojada por el arco de circunferencia Bp' ; para su trazado véase la explicación correspondiente al núm. **35**.

Un punto cualquiera del contorno $t_1 m' u_1'$ perteneciente á la sombra arrojada por el arco $t' u'$ sobre el interior del cuerpo de bomba, el m' , por ejemplo, se determina; en la intersección del rayo luminoso $xm - x'm'$, con la superficie cilíndrica cuya traza horizontal representa el arco $u s_1$. La continuación de dicho contorno se halla por la intersección de rayos de 45° , tales como el $u'u_1'$, que apoyándose en la arista $u'u$ forman un plano luminoso, que al encontrar al cilindro, según la generatriz $u_1'u_1$, da en ella la sombra arrojada por la arista $u'u$.

El contorno os , es continuación del sL y se origina por la intersección del plano secante vertical $s s_1$ que contiene á la arista levantada en s' . Un punto cualquiera de esta intersección, el $y - y'$, por ejemplo, se determina en el encuentro de la traza $s s_1$ del plano secante vertical con el arco py , proyección horizontal del paralelo $p'y'$.

La curva $f n' r' s$ que corresponde al contorno de sombra arrojada por la semicircunferencia que une la superficie esférica con la cilíndrica, se determina, procediendo por planos secantes horizontales como se indica en el núm. **40**; así se han encontrado los puntos $h - h'$ y $r - r'$, intersecciones respectivas del paralelo $x - x'$ con la sombra arrojada por la semicircunferencia de unión antes mencionada.

El punto n' , por ser el más alto de dicha curva, merece especial mención. Se determina trazando por s' el rayo luminoso $N n_1$ que forma un ángulo de 35° con la horizontal $L s'$; es decir, que representa al rayo de 45° colocado en situación paralela al plano vertical. En dicha situación cortará en n_1 al arco $s' u'$, y desde n_1 , suponiendo deshecho el giro, pasará en definitiva á n' , intersección del rayo de 45° con la horizontal $n_1 n'$.

El contorno de sombra situado sobre la superficie anular cóncava, que forma el tubo de la derecha, pasa por los puntos $j d_1 e$ y h .

El punto j quedó determinado al hallar la sombra del cilindro á que pertenece. El d_1 se halla cortando la superficie anular por el plano meridiano DE de 45° , abatiendo la sección hasta colocarla paralela al plano vertical y trazando el rayo luminoso de $35^\circ d d'$. El punto d' en que este rayo encuentra á la sección abatida, se trasladará una vez deshecho el abatimiento, en d_1 . Desde este punto al e' , el contorno de sombra resulta simétrico respecto al eje DE .

Sobre el contorno $d_1 e'$, en la intersección del mismo con el rayo luminoso de 45° trazado por f , se halla el e , sombra arrojada del f .

Abatido en $f g c$ el plano de intersección de la esfera con la superficie anular, se trazará una normal al rayo $f c$ que encontrará á la semielipse en g , punto que una vez deshecho el abatimiento, se trasladará en h' , extremo del contorno de sombra en la superficie anular.

Sombras en la proyección horizontal (H). — Los contornos de estas sombras, fuera de las rectas $1'1$ y $2'2$ se reducen al segmento de elipse $E H G$, sombra propia de la superficie esférica exterior y al cuadrante de dicha curva

$E 3 H_1$ que pertenece al contorno de la sombra arrojada por la esfera, sobre el plano horizontal que pasa por el centro de ella.

El segmento $E H G$, se determina por el procedimiento explicado en el número **36** y el cuadrante de elipse $E 3 H_1$, hallando en $H_1 - h_1$ la intersección del rayo de 45° trazado por $H - H'$, con el plano horizontal $O - O'$, la cual corresponde al extremo del semieje mayor; así es, que conociendo el semieje menor $O E$, puede ya trazarse este cuadrante de elipse (V. 1.^a parte **87**).

La recta $1' 1$, es producida por la intersección de la superficie esférica con el plano vertical de 45° tangente en 1 al cilindro de radio $o 1$, y la otra recta $2' 2$, corresponde á la intersección de dicha superficie con el plano vertical de 45° que pasa por el punto 2 , paralelo al anterior.

LÁMINA 6.^a **Sombras de un jarrón.** — Esta lámina contiene dos proyecciones, horizontal (N) y vertical (A). La dirección del rayo luminoso se ve indicada en la figura (H), donde la proyección horizontal de dicho rayo forma un ángulo de 45° con la línea de tierra y la vertical otro ángulo de 35° con la misma línea. Cuando el plano del ángulo de 35° se coloca paralelo al vertical de proyección, el valor de este ángulo se reduce á 27° .

Sombras de la proyección (A). — El contorno $1' 2' 3' 4'$ representa la sombra arrojada por la arista circular $a' b'$; para su trazado, ó sea la determinación de los puntos $1' 2' 3'$ puede, en caso de duda, consultarse en el número **40**. El punto 4 , último de este contorno, se halla en la intersección del meridiano $6' h''$ con el rayo luminoso que pasa por b' .

El meridiano $6' h''$ corresponde á la intersección del cabo de revolución con el plano vertical de 45° , cuya traza horizontal está en $o e$. El segmento $6' 4'$ representa la única sombra propia visible en dicho cabo.

El siguiente contorno $8' 7'$ se traza, empleando idéntico procedimiento al que se explica en el núm. **39**.

Al trazar los contornos $12' 10' n'$ y $n' 9'$ correspondientes á la sombra propia del bocelón, ha de considerarse que esta moldura se compone de dos superficies anulares análogas á la del toro de revolución, unidas por contacto según la circunferencia del círculo de diámetro $A' B'$. Por consiguiente, se dibujarán separadamente estos contornos (V. **38**), los cuales tendrán en n' un punto común situado en la circunferencia de contacto $A' B'$.

El punto $n - n'$ se ha determinado mediante el cono de contacto en $A' B'$, cuyo procedimiento queda explicado en el núm. **37**.

Para no alargar más estas explicaciones, que habrían de ser, en tal caso, repetidas, convendrá consultar para hallar las sombras que faltan, en caso de duda, el contenido de los números **22, 37, 38, 39, 40** y **41**.

PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS

NOCIONES

1. Cuando se han de representar formas corpóreas en detalle, tales como órganos de máquinas, fragmentos de arquitectura ó elementos de construcción, ninguno de los procedimientos fundados en la Geometría descriptiva resulta tan atractivo como el de *Proyecciones axonométricas*, que también se conoce con el nombre de *perspectiva axonométrica*. La principal ventaja que lleva al sistema de proyecciones ortogonales, es la de que en una sola proyección puede apreciarse desde luego la forma y dimensiones del objeto representado con apariencias de perspectiva.

2. Elementos componentes del triedro. — El procedimiento axonométrico se funda en la combinación de tres ejes, que reunidos en un punto, siguen respectivamente la dirección en que se consideran cada una de las dimensiones, longitud, latitud y altura del cuerpo que ha de representarse. Estos ejes se proyectan ortogonalmente sobre un plano generalmente oblicuo á las tres direcciones de dichos ejes, disponiendo de tal modo su situación, que el eje correspondiente á la dimensión altura aparezca proyectado en posición vertical.

3. Conviniendo en que cada eje ha de seguir una de las tres direcciones, longitud, latitud ó altura, necesario será suponer que dichos ejes son perpendiculares entre si. En tal posición, los ejes corresponden á las aristas de un ángulo triedro trirectángulo, en el que cada dos de ellos determinarán un plano perpendicular á los otros dos planos.

Para concretar: los elementos principales del triedro serán (fig. 1) tres planos: XoY , YoZ , ZoX y las aristas oX , oY , oZ pertenecientes á dichos planos. Los planos y las aristas reciben el nombre de *planos coordenados* y *ejes coordenados*, respectivamente.

4. El plano generalmente oblicuo á los tres ejes (1) de que se ha hecho mención en el núm. **2**, corresponde al del triángulo pqr , conocido con el nombre de *triángulo de las trazas*, puesto que sus lados representan las intersecciones respectivas de dicho plano con los *coordenados* XoY , YoZ , ZoX .

Mediante el *triángulo de las trazas* se pueden conocer las direcciones y

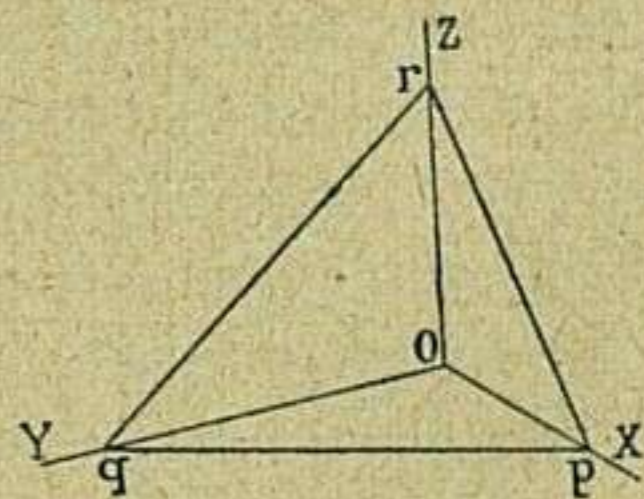


Fig. 1

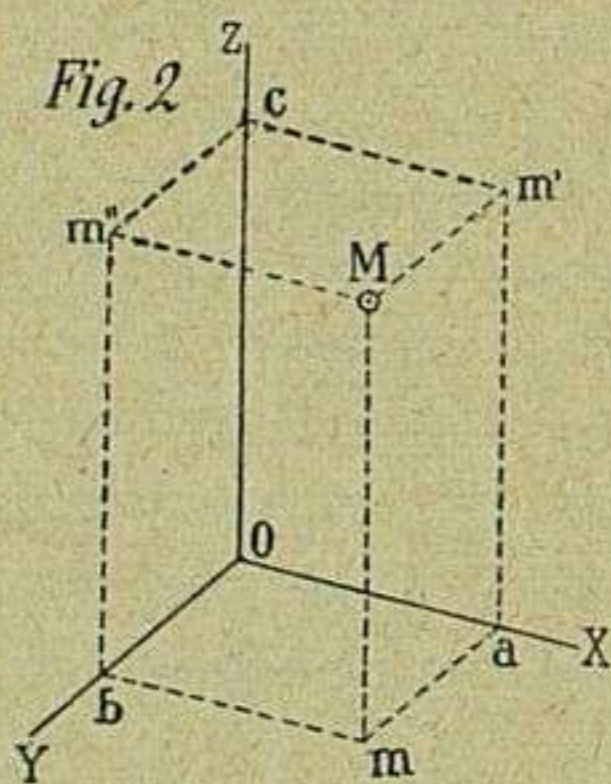
(1) En la *perspectiva caballera* este plano es paralelo á los ejes X y Z .

magnitudes de los segmentos de los ejes proyectados. Además, y esto es lo que importa entender, la posición del *triángulo de las trazas pqr*, es idéntica ó paralela á la que ocupa el plano del tablero en que se dibuja, llamado con este motivo *plano principal*.

En la práctica del dibujo le está asignado al *plano principal* el papel más importante, puesto que en último término sobre él vienen á representarse los resultados del problema axonométrico. Los tres *planos coordenados*, ú otros que les sean paralelos, si bien se utilizan para proyectar, es en concepto de planos auxiliares, sobre los que parcialmente se obtienen los datos necesarios para llegar al resultado final contenido en el *plano principal*.

5. Para fijar ideas conviene estudiar la situación de un punto M proyectado con arreglo á los principios del procedimiento.

Sean (fig. 2) *o X*, *o Y*, *o Z* las proyecciones ortogonales de los ejes considerados perpendiculares en el espacio. Suponiendo que el punto M haya de estar levantado sobre el plano *X Y* una distancia determinada, se tomará esta



distancia desde *o* en *c* sobre el eje *o z*, que es el que corresponde á las alturas. Conocida la separación que media del punto M al plano *Y Z*, se colocará esta distancia ó separación desde *o* en *a*, sobre el eje *X* correspondiente á las longitudes. Por último, sabida la distancia que media entre el citado punto M y el plano *X Z*, se colocará á semejanza de las dos anteriores desde *o* en *b* sobre el eje *o Y*, destinado á contar sobre él las latitudes. En resumen, conociendo ya las distancias respectivas de M á los planos coordenados, ó sean las coordenadas *o a*, *o b* y *o c*, no hay más que trazar por una parte las rectas, *a m* igual y paralela á *o b*; *a m'* y *b m''*,

paralelas é iguales á *o c*; y por otra, trazar respectivamente desde los puntos *m*, *m'*, *m''*, paralelas á los ejes *o Z*, *o Y*, *o X*, las que al reunirse en M determinarán con exactitud la posición del punto M en el espacio.

El procedimiento en principio no puede ser más sencillo; todo se reduce al trazado de paralelas á los ejes, contándose las dimensiones desde el origen *o* en los sentidos *o X*, *o Y*, *o Z*.

6. Se ha dicho (V. 2) que los segmentos de eje *o p*, *o q* y *o r* se proyectan ortogonalmente sobre un plano oblicuo á ellos, el *plano principal*. Por consiguiente, la longitud de los segmentos proyectados, será menor necesariamente (V. *Proyecciones ortogonales*, 12) que la longitud de dichos segmentos considerados en el espacio. Esta reducción de longitud, que corresponde á los segmentos de los ejes después de proyectados, debe determinarse con la mayor precisión, puesto que de su conocimiento depende la relación que ha de establecerse entre las dimensiones reales de un cuerpo y las proyectadas. Relación que en el caso más frecuente, es decir, cuando se conocen las proyecciones de los segmentos de los ejes, se obtiene fácilmente por el desarrollo de la pirámide formada por los tres planos coordenados y el *plano principal*.

7. Desarrollo del triedro. — Sean *o p*, *o q*, *o r* (fig. 3) las proyecciones

de los segmentos de los ejes. Uniendo dos á dos por medio de rectas los puntos $p q$, $q r$ y $r p$, queda determinado el *triángulo de las trazas* $p q r$, sobre cuya plano, para obtener su desarrollo, han de abatirse las tres caras del ángulo triedro formado en o . Considerando que los triángulos $p o q$, $q o r$ y $r o p$ son rectángulos en o , y que sus respectivas hipotenusas son precisamente los lados del triángulo de las trazas, la solución del problema se reduce á determinar la posición que tomará el punto o , vértice común de los tres ángulos que forman el dicho triedro al verificar los respectivos abatimientos, tomando ordenadamente como charnelas las hipotenusas $p q$, $q r$ y $r p$.

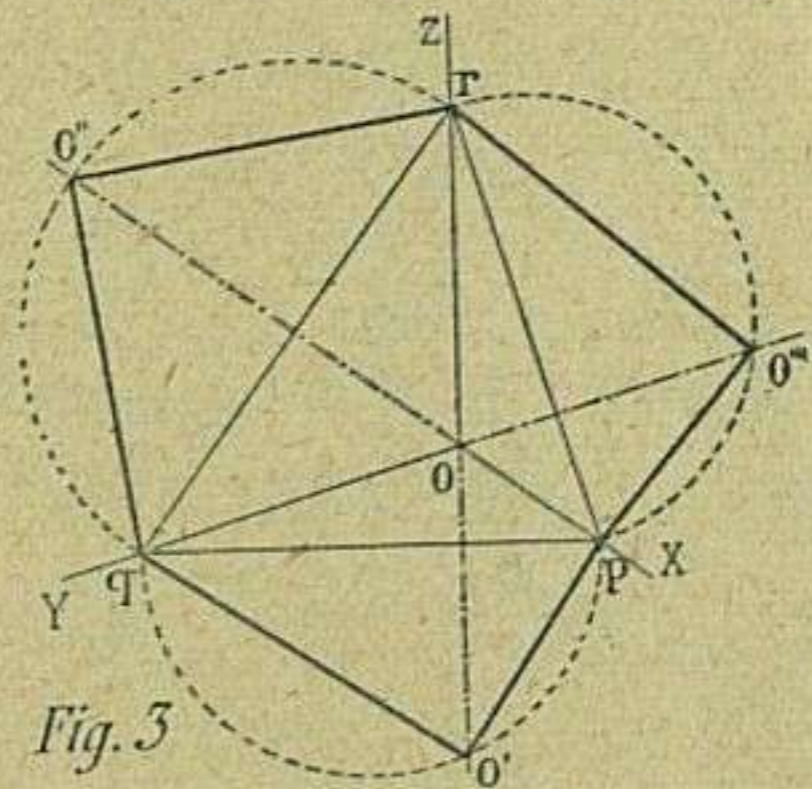


Fig. 3

Dando principio á la operación por el triángulo $p o q$, se le hará girar alrededor de $p q$. En este movimiento de rotación describirá el punto o un arco de circunferencia proyectado ortogonalmente según la recta $o o'$.

Como se sabe de antemano que el ángulo cuyo vértice está contenido en la recta $o o'$ ha de ser recto, bastará trazar una semicircunferencia sobre el lado $p q$, para que en la intersección de dicha circunferencia con la perpendicular $o o'$ (1) se determine el punto o' , que unido respectivamente con los p y q , darán el triángulo $p o' q$, verdadera magnitud del proyectado según p, o, q , en el que, los lados $o' p$, $o' q$ representan las verdaderas magnitudes de los segmentos respectivos $o q$, $o p$, correspondientes á los ejes X é Y.

De la misma suerte se determina la verdadera magnitud del segmento $o r$ que corresponde al eje Z, sin más que proceder al desarrollo de cualquiera de los triángulos $q o r$ ó $r o p$, en la forma indicada, y se tendrán $o'' r$ y $r o'''$, verdaderas magnitudes de $o r$.

Si solamente se conociera la dirección de los ejes dada por sus proyecciones, se procederá á determinar el triángulo de las trazas, haciendo que cada uno de los lados $p q$, $q r$ y $r p$, sea perpendicular á la proyección del opuesto eje; puesto que, siendo cada uno de los ejes perpendicular al plano de los otros dos, sus proyecciones ortogonales sobre el plano principal serán perpendiculares á los lados opuestos del triángulo de las trazas; entonces, con esta ampliación de datos, se podrá verificar el desarrollo en la forma indicada en el párrafo anterior.

Verificado el desarrollo del triedro, puede ya procederse á la investigación de las relaciones que puedan existir entre las verdaderas longitudes de los segmentos de los ejes y sus proyecciones respectivas.

(1) Siendo la semicircunferencia el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos cuyos lados pasan por los extremos del diámetro, sólo faltaba fijar sobre ella el vértice del único ángulo recto que resuelve el problema y esto se ha conseguido en o' por la intersección de la perpendicular $o n$ con la circunferencia $q o' p$.

8. Coeficiente de reducción. — Para determinar (fig. 4) gráficamente la reducción que corresponde á un segmento situado, por ejemplo, sobre el eje ox , se toma sobre él desde o' hasta a una unidad cualquiera de longitud; sea un centímetro, y por el punto a se traza una paralela á la $o'o$, que al encontrar en a' al eje ox , dará el segmento oa' , cuya longitud es 0,825 de centímetro. Á esta relación que existe entre la longitud del segmento proyectado y su valor absoluto, se le llama *coeficiente de reducción* (1).

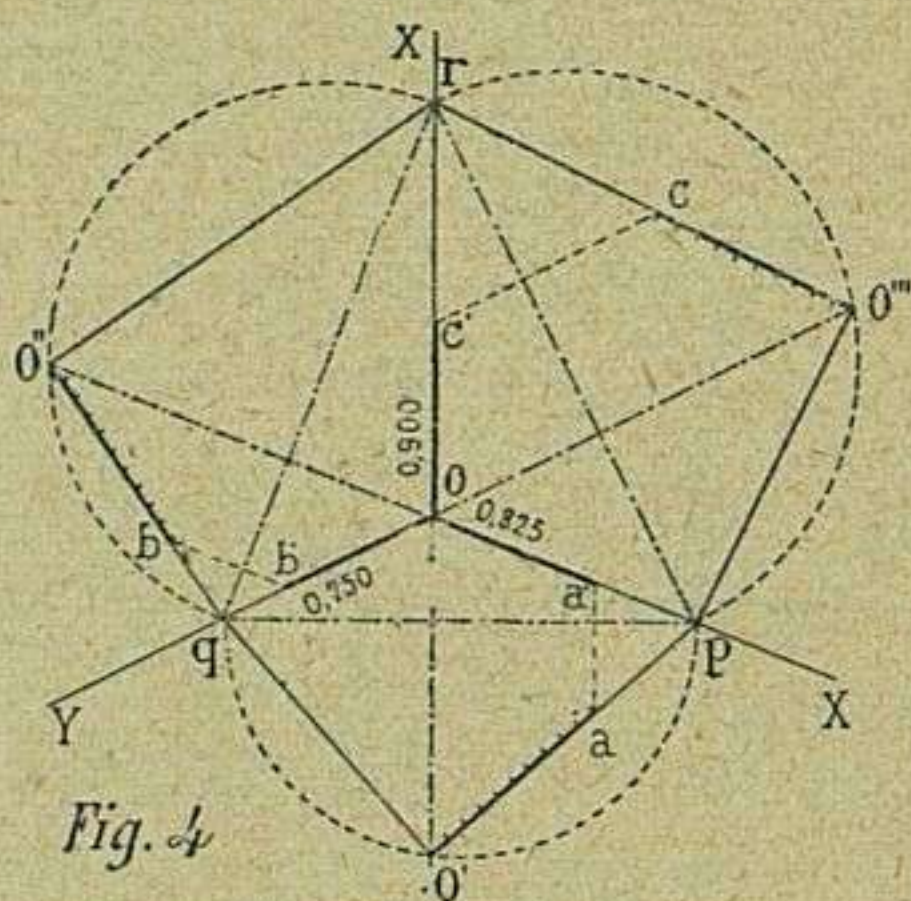


Fig. 4

Procediendo de la misma manera con los otros dos ejes, se obtendrán en la proyección del segmento ob' 0,750 para cada centímetro contado en la verdadera magnitud $o''b$ del eje oy ; y por otra parte, 0,900 en la proyección oc' que corresponderá á otro centímetro tomado en $o'''c$ sobre la verdadera magnitud del eje oZ . Así los otros dos *coeficientes de reducción* con relación á la unidad serán en este caso: para el eje oY , 0,750, y para el eje oZ , 0,900.

De lo expuesto se deduce, que para representar un objeto axonómicamente, habrán de tomarse sobre las proyecciones de los ejes, no las dimensiones reales de longitud, latitud y altura, sino las dimensiones reducidas que correspondan á la proyección en cada uno de los ejes (2).

9. Si para cada una de las numerosas medidas que paralelamente á los ejes deben apreciarse en el objeto proyectado, se hubiera de hacer la respectiva operación para reducirla en razón de su coeficiente, el trabajo resultaría enojoso, y al procedimiento, que autores de nombrada han denominado *perspectivas rápidas*, habría que negarle esta cualidad.

Por eso, para determinar de una vez la reducción que corresponde en determinados casos á cada una de las tres dimensiones proyectadas y sus paralelas, es necesario valerse de escalas apropiadas á cada uno de los ejes, cuya razón será la que existe entre la magnitud real y la proyectada. Á estas escalas se las da el nombre de *escalas de reducción*.

(1) El valor longitudinal del coeficiente de reducción es el mismo para todas las rectas paralelas á un eje determinado; depende de la magnitud del ángulo que forma el segmento de eje considerado en el espacio, con su proyección sobre el plano principal. Así, á medida que dicho ángulo es más agudo, va aumentando el valor del coeficiente de reducción hasta que el segmento en el espacio y su proyección coinciden ó son paralelos; entonces el coeficiente es igual á la unidad, es decir, que segmento y proyección son iguales.

Por el contrario, si el citado ángulo aumenta, el valor del coeficiente disminuye, puesto que la longitud de la proyección del segmento también va disminuyendo hasta que se reduce á un punto cuando el ángulo es recto, siendo entonces cero su valor.

(2) Entre el valor del segmento de eje considerado en el espacio y el de su correspondiente proyección, existe la misma relación que entre las dimensiones del objeto á representar y las proyecciones de estas mismas dimensiones que dan forma al objeto sobre el plano principal.

La representación gráfica de las referidas escalas es sencillísima; bastará, tratándose por ejemplo del sistema de ejes consignados en la figura 4.^a, tomar sobre una recta 0,825 de decímetro, longitud que se dividirá en diez partes iguales, subdividiendo una de éstas en otras diez (1) para tener formada con centímetros y milímetros la escala X, con la que se miden las longitudes paralelas á dicho eje X.

De igual suerte las otras dos escalas Z é Y se obtendrán gráficamente tomando para la Y 0,750 de decímetro y para la Z 0,900. Con la escala Y se medirán las latitudes paralelas á este eje, así como con la Z se aprecian las alturas dirigidas paralelamente al eje Z.

10. Escalas axonométricas.—Se da este nombre á la expresión de relaciones que existen entre las longitudes respectivas de los ejes proyectados (2).

Así, por ejemplo, de la expresión $1 : \frac{1}{2} : \frac{9}{10}$ que se supone corresponde á las longitudes respectivas de los ejes *o* X, *o* Y, *o* Z, se deduce que con el valor de un segmento del eje *o* X, tomado como unidad, se relaciona otro sobre el eje *o* Y que vale la mitad de dicha unidad y un tercero considerado sobre el eje *o* Z, cuyo valor es nueve décimas de la misma unidad. Como es consiguiente, estos tres valores se relacionan á su vez con el de la *escala natural*, que es con la que se miden las longitudes en el espacio ó mejor dicho las dimensiones de los cuerpos antes de proyectarlos.

En la práctica de representación axonométrica ocurre con frecuencia el caso de tener que someter el sistema de ejes y posición relativa del plano principal á condiciones impuestas por la preferente, de atenerse á determinadas escalas. Esto sucede cuando el dibujante, para producir un efecto premeditado, trata de acentuar los escorzos sobre la forma aparente del objeto, en el sentido de uno de los ejes, el que más le convenga al fin que se persigue. Entonces el problema se formula y plantea de esta manera.

11. Dadas las escalas axonométricas, determinar la dirección de los ejes.—Sean las *escalas axonométricas* $1 : \frac{1}{2} : \frac{9}{10}$ correspondiendo por su orden á los ejes X, Y, Z.

(1) El dispositivo que figura en la página 111 de la primera parte de este tratado, ó en la 116 de la 2.^a edición, se recomienda por estar indicado en la presente ocasión para obtener con gran facilidad las divisiones y subdivisiones de estas escalas.

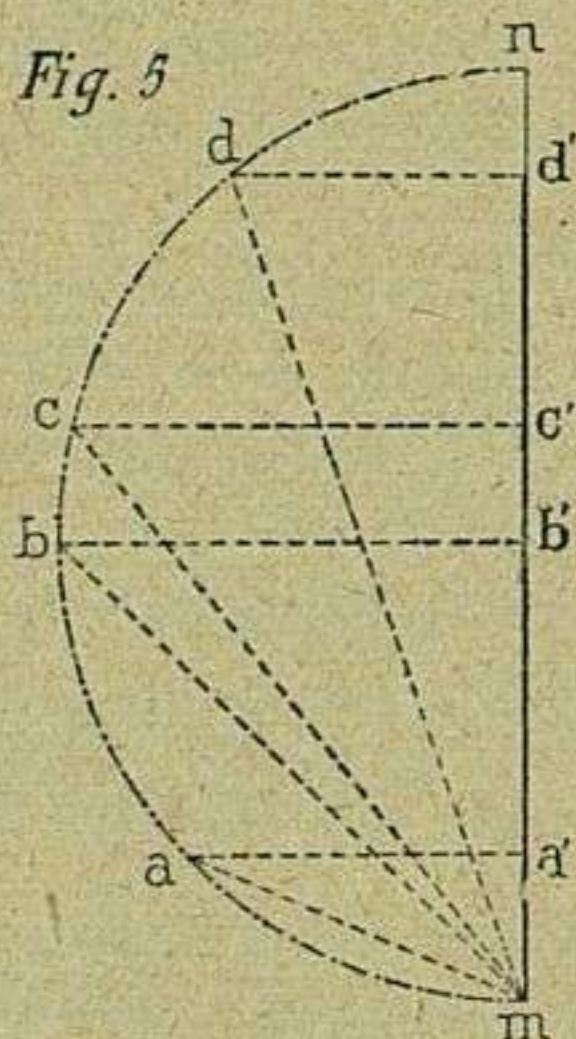
(2) Entre las *escalas de reducción* y las *escalas axonométricas* hay diferencias que saltan á la vista.

Las *escalas de reducción* (V. 9), son la expresión gráfica que existe entre el coeficiente del mismo nombre, y la unidad; se obtienen para cada eje con absoluta independencia de las *escalas axonométricas*.

Mediante las llamadas *escalas axonométricas* se establecen *á priori* relaciones entre los ejes, procurando sean las más sencillas posibles; haciendo depender la dirección de dichos ejes de la relación de escala á ellos asignada.

Esta sencillez de relaciones contribuye extraordinariamente á la rapidez del procedimiento; pues permite hacer uso del compás de reducción sin necesidad de construir escalas de reducción de uso más embarazoso que las axonométricas.

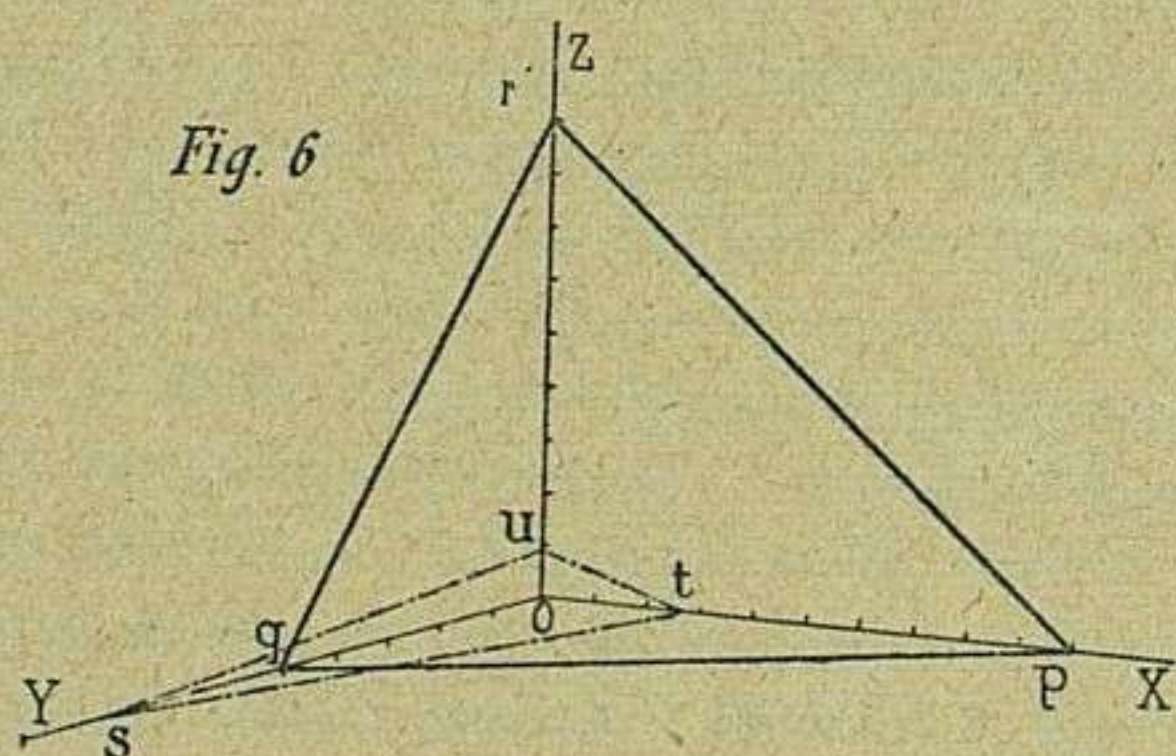
Desde luego se advierte que la solución de este problema estriba en hallar la dirección de las proyecciones de los ejes sobre el plano principal. Para conseguirlo, se traza una semicircunferencia (fig. 5) de diámetro mn , midiendo éste poco más ó menos vez y cuarto la longitud del dato mayor.



Colocando desde m las tres longitudes correspondientes á 1 , $\frac{1}{2}$ y $\frac{9}{10}$, según las cuerdas mc , ma , mb , se trazarán perpendiculares al diámetro mn desde los puntos a , b , c , á los a' , b' , c' . Los segmentos de diámetro $a'm$, $b'm$, $c'm$, corresponderán á los lados de un triángulo, en el que las bisectrices de sus ángulos coincidirán con las proyecciones de los ejes X , Y , Z . Además, tomando la mitad de la suma de las longitudes ma' , mb' , mc' , colocándola sobre el diámetro desde m hasta d' y trazando la perpendicular dd' , se tendrá en $d'm$ la longitud de la escala natural (1).

Ahora, con estos datos, la solución es sencilla; sólo estriba en determinar las bisectrices que han de dar la dirección de los ejes.

Para ello (fig. 6) se toman dichos segmentos ma' , mb' , mc' , se construye con ellos el triángulo s, t, u , (V. 26, 1.^a parte); se trazan las bisectrices oX , oY , oZ (V. 14, 1.^a parte), en las que se tendrán los correspondientes ejes coordinados, y tomando sobre ellos, en el X un segmento cualquiera de o en p ; sobre el



otro segmento mitad del anterior; en el Z de o á r , el tercer segmento de nueve décimas respecto al primero, se tendrá el triángulo p, q, r de las trazas, sin más que unir mediante rectas estos tres puntos, y el problema quedará resuelto en las condiciones exigidas.

Los coeficientes de reducción relativos á cada uno de los ejes son : para el eje X , 0,985; para el Y , 0,493; para el Z , 0,887.

(1) Esta construcción gráfica se funda en el teorema de Schlömilch, que dice : *Las proyecciones ortogonales de tres ejes rectangulares son las bisectrices de los ángulos de un triángulo, cuyos lados y semiperímetro son proporcionales á los cuadrados de las escalas axonométricas y de la natural.*

Como el propósito del autor de este tratado se cifra en no extenderse con demostraciones que le apartarian del fin esencialmente práctico que se ha propuesto, renuncia á demostrar la certeza de este teorema; pero si alguien deseara enterarse de éste y otros extremos, puede satisfacer su deseo con el excelente opúsculo titulado *Axonometría ó perspectiva axonométrica*, publicado en 1879 por su autor D. Eduardo Torroja, catedrático de Geometría Descriptiva de la Universidad de Madrid.

La operación descrita es buena para sabida, y aun para hacer uso de ella en el caso de tener que sujetarse á condiciones especiales respecto al tamaño de los ejes; pero de no ser así, este trabajo, que no deja de ser entretenido, puede evitarse tomando del *cuadro de relaciones y valores* que á continuación se expone, los elementos más precisos relacionados con el sistema de escalas axonométricas que mejor parezcan al dibujante para el efecto de perspectiva que desee producir.

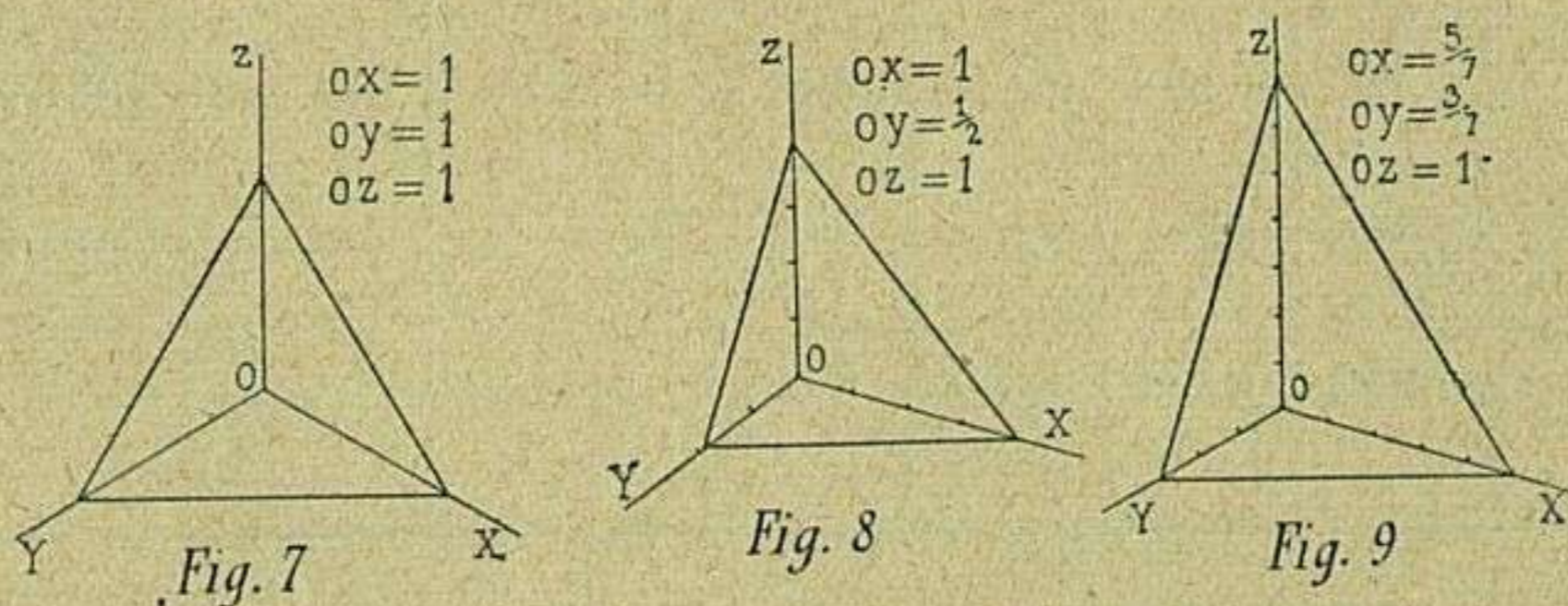
12. De la variedad ó unidad de relaciones entre los ejes se originan distintas clasificaciones en cuanto al sistema característico de los ejes, que es bueno conocer.

Si las escalas correspondientes á los tres ejes son iguales, el sistema de ejes se llama *isométrico*. El triángulo de las trazas, en este caso, será equilátero.

Si las escalas axonométricas son iguales para dos ejes y corresponde al tercer eje otra escala distinta, el sistema se llama *dimétrico*. El triángulo de las trazas será isósceles en tal caso.

En el caso de que dichas escalas sean distintas para cada uno de los tres ejes, el sistema se denomina *trimétrico*. Por consiguiente, el triángulo de las trazas será escaleno.

Ejemplos de cada uno de estos tres sistemas se ven en las figuras 7, 8 y 9. La figura 7 representa el sistema *isométrico*, la figura 8 el *dimétrico* y la 9 el *trimétrico*.



Como resumen de lo expuesto conviene consignar :

1.º Los ejes X, Y, Z, considerados en el espacio, son perpendiculares entre sí; se proyectan ortogonalmente sobre el *plano principal*, y cada par de ellos forman uno de los tres planos coordenados X o Y, Y o Z, Z o X.

2.º El *plano principal*, determinado por el *triángulo de las trazas*, se considera paralelo ó identificado, en cuanto á su posición respecto de los ejes, con el del tablero donde se verifica el dibujo.

3.º La posición del *plano principal*, cortando á los tres ejes, puede producir, á partir del origen o, segmentos iguales en los tres, iguales en dos, ó desiguales en los tres ejes, dando lugar á cada una de estas tres clasificaciones de sistema Isométrico, Dimétrico y Trimétrico.

CUADRO DE RELACIONES Y VALORES DE LOS ELEMENTOS COMPONENTES DEL TRIEDRO, SUPONIÉNDOLE TRIRRECTÁNGULO

ESCALAS axonométricas.	VALORES de los coeficientes de reducción con relación á la unidad.			VALORES de los ángulos que forman cada par de ejes proyectados.			SISTEMAS
	X	Y	Z	Z X	X Y	Y Z	
1 : 1 : 1	0,816	0,816	0,816	120°	120°	120°	Isométrico.
1 : $\frac{3}{4}$: 1	0,883	0,662	0,883	106° 20'	126° 50'	126° 50'	Dimétrico.
1 : $\frac{2}{3}$: 1	0,904	0,603	0,904	102° 50'	128° 35'	128° 35'	Ídem.
1 : $\frac{1}{2}$: 1	0,942	0,471	0,942	97° 11'	131° 24'	131° 24'	Ídem.
1 : $\frac{1}{3}$: 1	0,973	0,324	0,973	93° 11'	133° 24'	133° 24'	Ídem.
1 : $\frac{1}{2}$: $\frac{7}{8}$	0,872	0,498	0,996	92° 51'	168° 18'	98° 51'	Trimétrico.
1 : $\frac{1}{2}$: $\frac{9}{10}$	0,985	0,493	0,887	95° 11'	157°	107° 49'	Ídem.
1 : $\frac{1}{2}$: $\frac{16}{18}$	0,880	0,495	0,990	94° 23'	161° 13'	104° 24'	Ídem.
1 : $\frac{1}{3}$: $\frac{23}{24}$	0,951	0,331	0,993	92° 16'	157° 28'	110° 16'	Ídem.

PROBLEMAS

13. Determinar las proyecciones axonométricas de un punto, conociendo las coordenadas correspondientes á cada uno de los ejes y las escalas $1 : \frac{1}{2} : \frac{9}{10}$ (fig. 10). — Sean los valores de las coordenadas expresados en milímetros; 24 para la dimensión altura, paralela al eje Z; 15 para la coordenada paralela al eje x , correspondiente á las longitudes, y 18 para la coordenada paralela al eje Y, correspondiente á las latitudes ó profundidades. Después de trazar los ejes (V. **12**, Cuadro de relaciones y valores), formando con cada par de ellos el ángulo respectivo indicado en el séptimo renglón, columnas 5.^a, 6.^a y 7.^a

Lo que en primer término debe procurar el dibujante es la realización gráfica de las escalas axonométricas. Para conseguirlo, y adoptando como unidad

el centímetro, se buscará en el *Cuadro de relaciones y valores* el coeficiente de reducción que corresponde á x , con arreglo al sistema de escalas $1 : \frac{1}{2} : \frac{9}{10}$.

Con este valor, 0,985, que se encuentra en el séptimo renglón, segunda columna, se construirá la escala X, primera de las tres que hay al pie de la figura, empleando los procedimientos de división y subdivisión indicados para la construcción de una escala cualquiera (V. **133**, 1.^a parte ó **136**, 2.^a edición).

Para construir la escala Y que figura á continuación, se tomará de la escala X la distancia comprendida entre 10 y 5, que corresponde á la *mitad* del centímetro reducido, y se colocará en la línea siguiente las veces que se quieran, cuidando de dividir el primer centímetro en 10 milímetros.

Sobre la tercera y última recta se colocarán *nueve* partes iguales, equivalentes cada una, á *una décima* del centímetro reducido que figura en la escala X, que es igual á tomar 9 milímetros de dicho centímetro. Con esto, y después de subdividido el primer centímetro en 10 milímetros, se tendrá la escala Z.

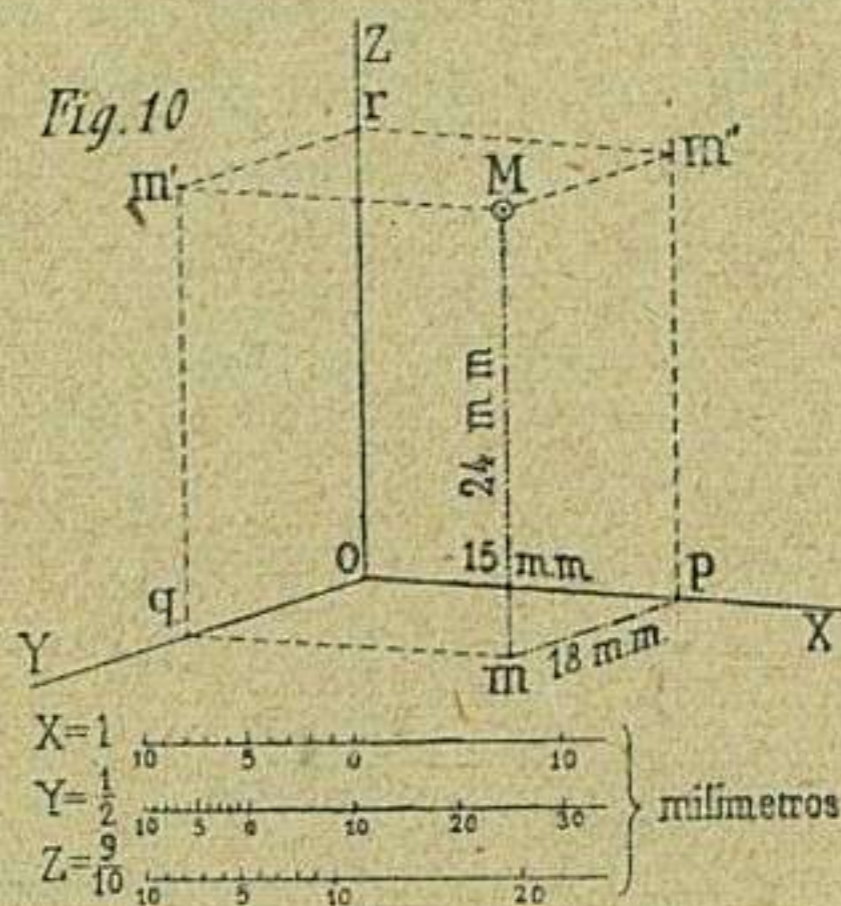
Dispuestas las escalas axonométricas en la forma indicada, se tomarán 15 milímetros de la escala X y se colocarán de o en p sobre el eje X. Desde p se trazará una paralela al eje Y, en la que se acotarán de p en m 18 milímetros, tomados de la escala Y. Por último, desde m se trazará una paralela al eje Z, en la que se consignarán de m en M 24 milímetros, tomados, como es consiguiente, de la escala Z, quedando, sin más, determinada en M la proyección del punto propuesto.

Como se ha visto en el anterior ejemplo, el punto M es el único que satisface las condiciones establecidas, puesto que, según las coordenadas que han servido para determinarle, se encuentra distanciado del plano YZ 15 milímetros, del XZ 18 milímetros y del XY 24 milímetros.

Si una de estas distancias ó coordenadas se anulara, sea, por ejemplo, la mM , la proyección del punto M se hallaría situada sobre el plano XY, á la distancia de 15 milímetros del plano YZ, según la coordenada op , situada sobre el eje X, y á la de 18 milímetros respecto del plano XOZ, según la coordenada pm , paralela al eje Y.

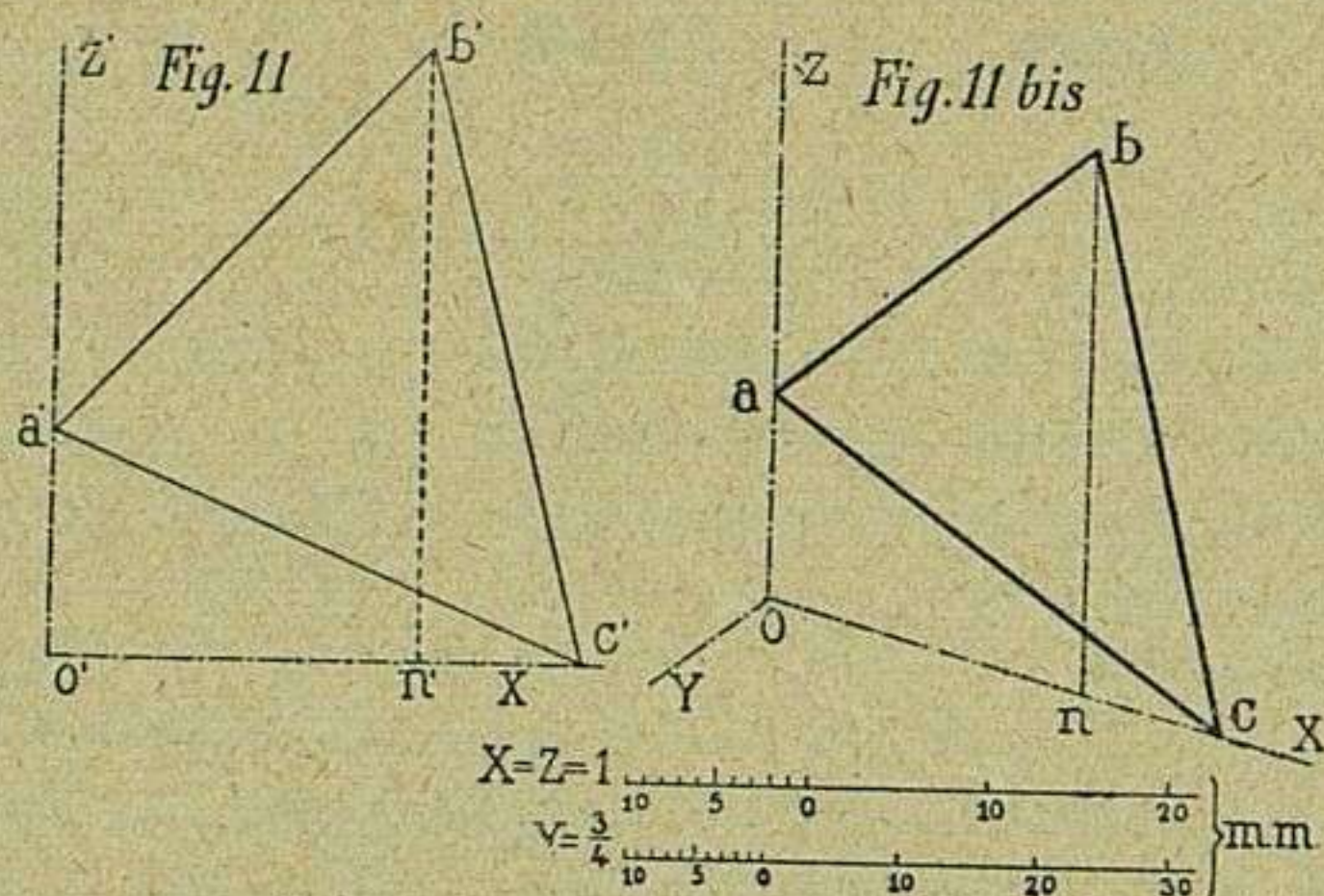
Por análogas consideraciones, el punto M se hallaría en m' sobre el plano YZ cuando la coordenada op se anulase, subsistiendo las otras dos. Así como también, en el caso de anularse la coordenada pm quedando las otras dos, la proyección del punto M se encontraría en m'' sobre el plano XZ.

Si para determinar la proyección de M se diese una sola coordenada, dicho punto se hallaría situado sobre el eje X, ó sobre el Y, ó sobre el Z, según que esta coordenada se considerase respectivamente paralela al eje X, ó al Y, ó bien al Z.



14. Dada la proyección ortogonal de un triángulo, representarle en proyección axonométrica conforme á las escalas $1 : \frac{3}{4} : 1$. —

Sea $a' b' c'$ (fig. 11) la proyección ortogonal del triángulo dado, que desde luego puede suponerse ha de estar contenido en el plano XZ , coincidiendo respectivamente los vértices a' y c' con los ejes Z y X , dados también en proyecciones ortogonales.



Suponiendo trazados los ejes en función de sus ángulos respectivos (véase *Cuadro de valores*) y determinadas las dos escalas (puesto que el sistema es *dimétrico*) en el modo y forma descrito (V. **13**), se empezará por tomar de la escala Z , 11 milímetros, que mide la coordenada $o' a'$ (fig. 11), y se colocará de o en a (fig. 11 bis). La misma operación se hará respecto á las coordenadas $o' c'$ y $o' n'$ (fig. 11), cuyos valores, tomados en la escala X , se colocarán (fig. 11 bis) de o en n los 18 milímetros, y de o en c los 26 milímetros. Para determinar el punto b que falta, se trazará desde n una paralela al eje $o' Z$, y sobre ella, desde n en b , se acotarán 30 milímetros, tomados de la escala Z . Ahora, uniendo los puntos a con b y b con c y c con a mediante rectas, se tendrá la proyección axonométrica del triángulo dado por sus coordenadas, en las condiciones propuestas.

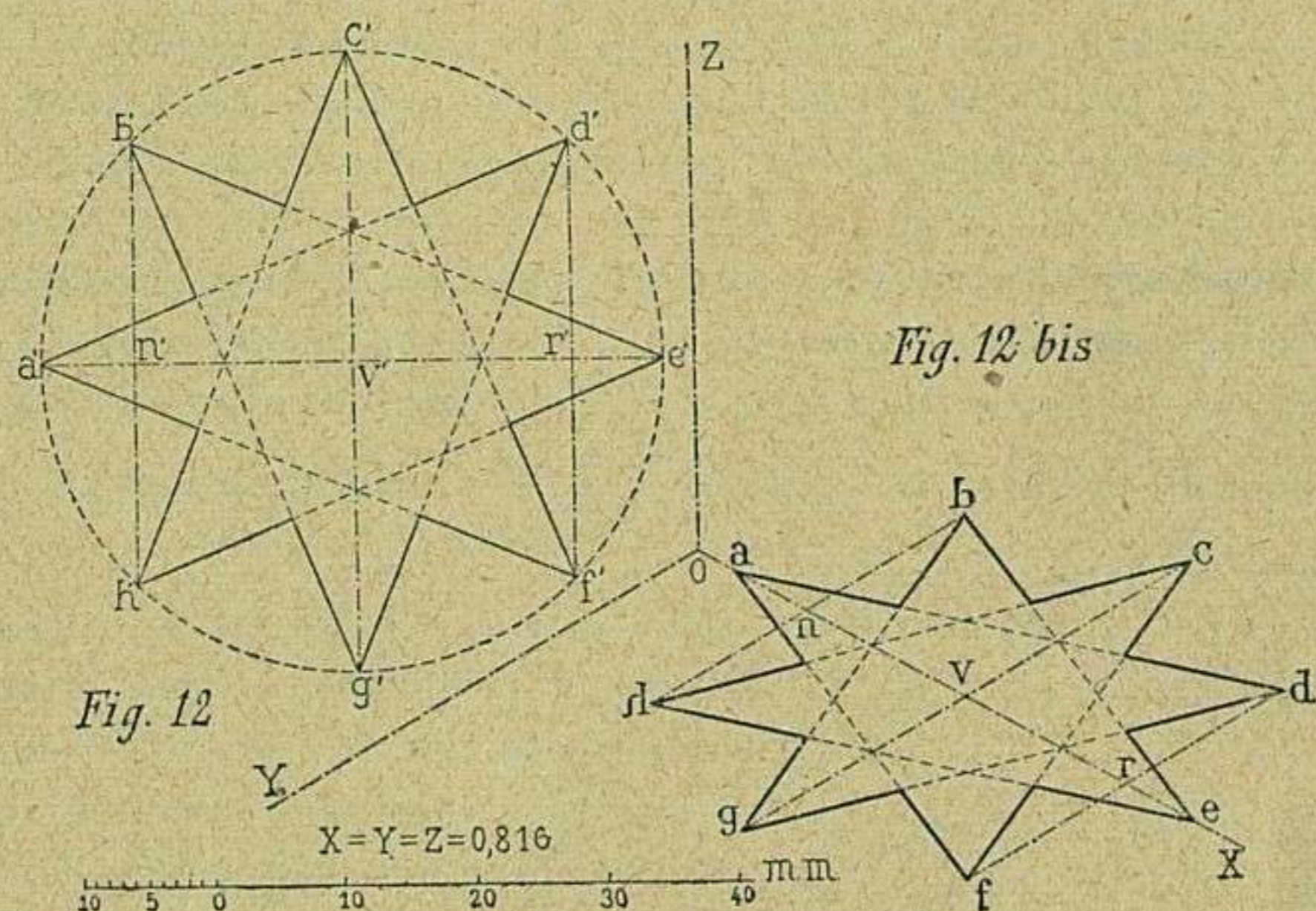
15. Representación axonométrica de un polígono regular estrellado, dada su proyección ortogonal (figs. 12 y 12 bis). — Sea el polígono dado, que ha de representarse sobre el plano XY , el octógono $adgbehecf$.

Construidos los ejes y la única escala (V. **13**) (puesto que el sistema de ejes es *isométrico*), se tomarán de ella 20 milímetros, longitud correspondiente al radio $V a'$ (fig. 12), y se colocará (fig. 12 bis), á partir de V (1), sobre el eje X en a y en e . Del mismo modo se situarán los puntos n y r , distanciados á uno y otro lado del V 14 milímetros, tomados de la escala.

Por los puntos n , V , r , se trazarán paralelas al eje Y ; sobre ellas se tomarán

(1) Este punto puede situarse en cualquiera de los del eje X y también en el Y , ó en cualquier punto del plano XY , según convenga.

de n en b y en h , como también de r en d y en f , 14 milímetros, y de V en c y en g 20 milímetros, valores todos ellos correspondientes á coordenadas paralelas al eje Y , que se trasladarán de la única escala.

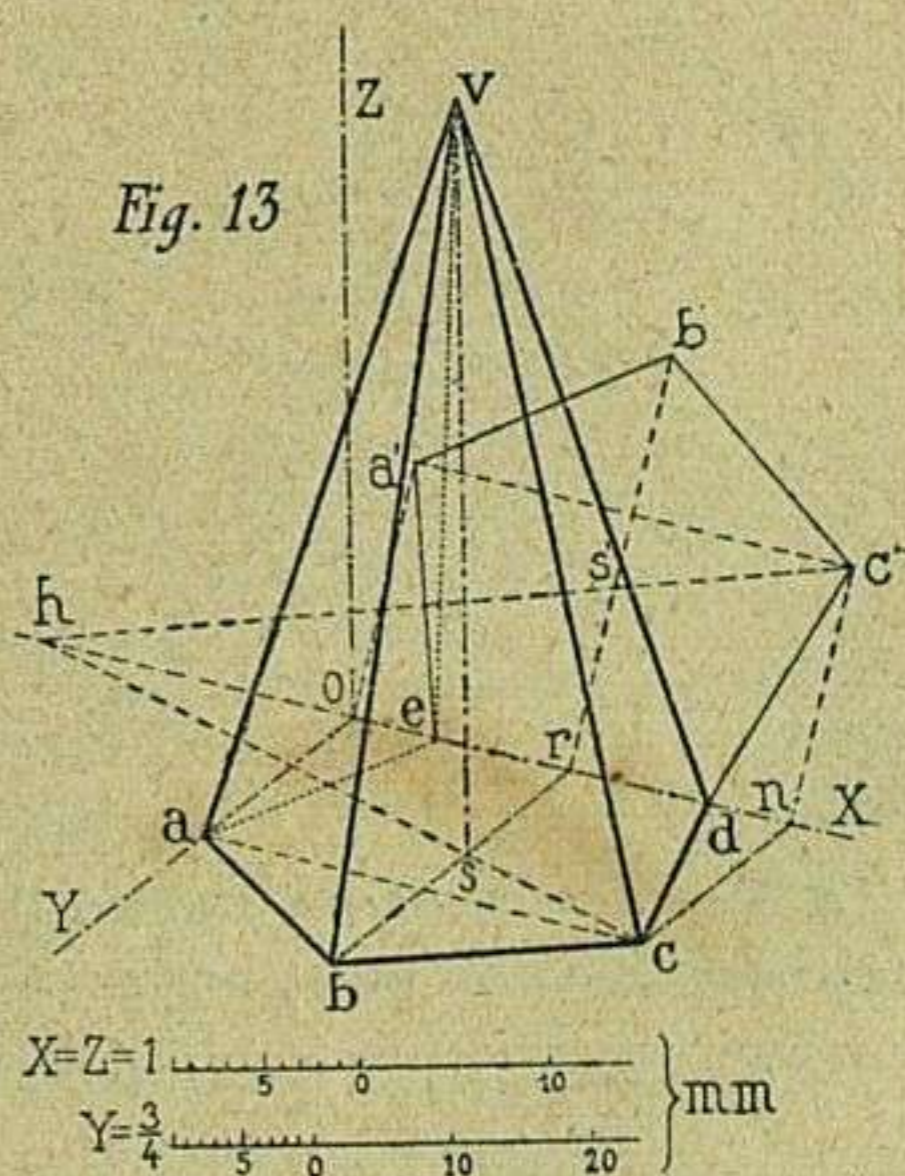


Determinados los vértices $abcde \dots h$ (fig. 12 bis), se unirán mediante rectas en la misma forma que lo están en la proyección ortogonal (fig. 12): el a con el d , el d con el g , el g con el b , el b con el e , etc., y se tendrá la proyección axonométrica propuesta.

16. Representación de una pirámide recta, dadas su altura y el polígono de la base en proyección ortogonal. — Sea (fig. 13) SV la altura, cuya longitud es 40 milímetros; $a'b'c'de$, la proyección ortogonal del pentágono, cuyo lado mide 15 milímetros, y $1 : \frac{3}{4} : 1$ la relación de escalas axonométricas.

Construidos ejes y escalas (V. 13), y suponiendo que el plano del pentágono de la base ha de situarse sobre el XY , se medirán sobre el eje ox de e á d 15 milímetros, tomados de la escala X ; y considerando esta longitud como lado de un pentágono regular, se trazará (V. primera parte, 45), quedando así determinada la proyección ortogonal $a'b'c'de$.

Desde los puntos a' , b' , y c' , en dirección perpendicular al eje X , se trazarán las rectas $a'o$, $b'r$ y $c'n$, cuyas longitudes respectivas, medidas con la escala X , serán $a'o = 14$ milímetros, $b'r = 22$ milímetros y $c'n = 14$ milímetros. Ahora, desde los puntos o , r , n se trazarán paralelas al eje Y , acotando en ellas, de o en a 14 mi-

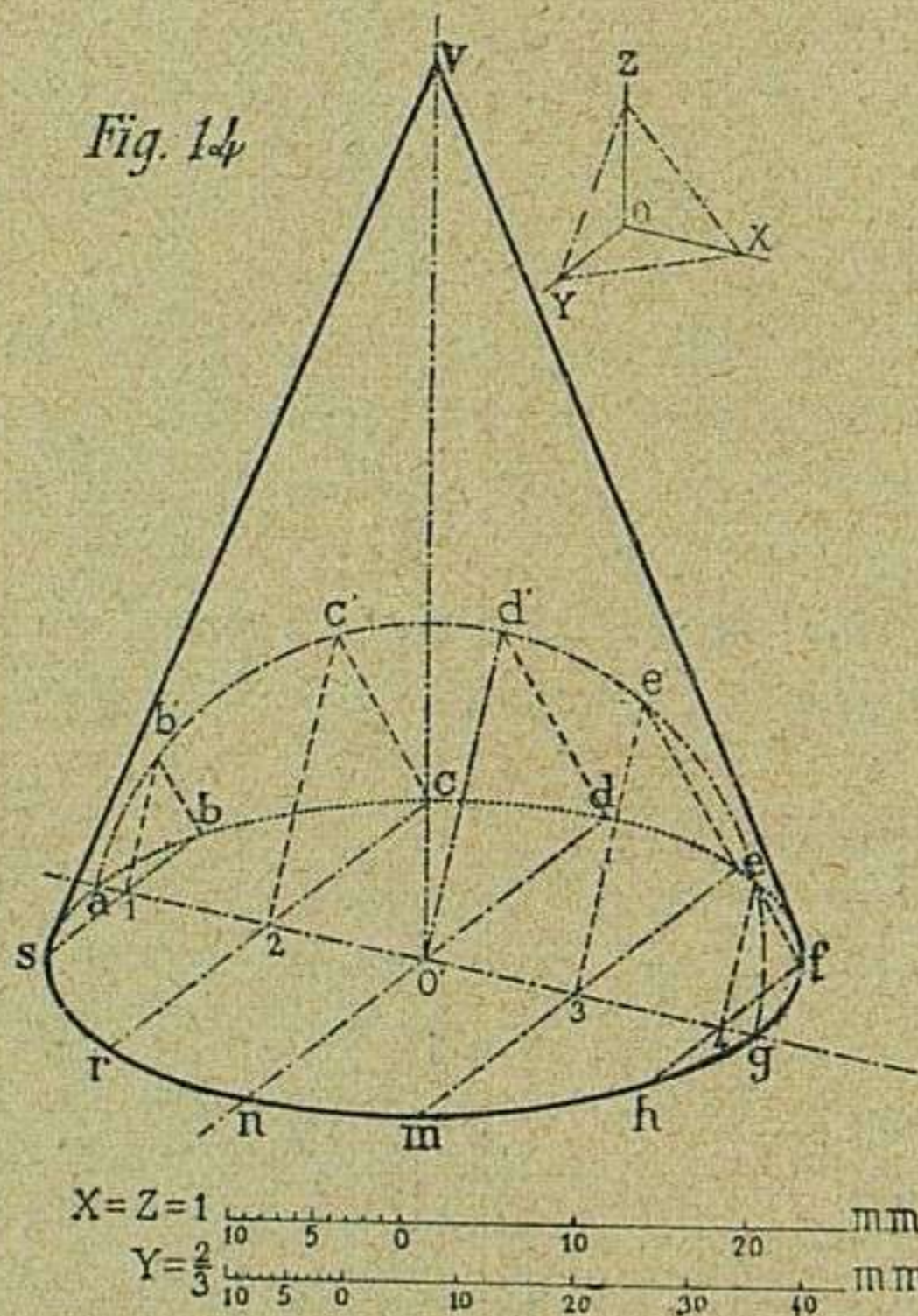


límites, de r en b 22 milímetros y de n en c 14 milímetros, tomados de la escala Y. De este modo quedarán determinados en proyección axonométrica los vértices $a b c d e$ correspondientes a la base de la pirámide.

Desde el centro s , determinado por la línea auxiliar ch , se levanta la altura su paralela al eje oz , cuya longitud es igual a 40 milímetros, tomados de la escala Z. Finalmente, trazando las aristas que desde los puntos a, b, c, d, e de la base concurren a la cúspide V , se tendrá representada la pirámide en las condiciones requeridas (1).

17. Representación axonométrica del cono de revolución, dados el radio de la base y la altura (fig. 14). — Sean $o'v$ la altura del eje, que mide 52 milímetros de la escala Z; $o'd' = o'a$ el radio del círculo de la base, que a su vez mide 20 milímetros de la escala X, y $1 : \frac{2}{3} : 1$ las escalas correspondientes a los ejes X, Y, Z.

Dando ya por trazados ejes y escalas según se ha hecho en anteriores figuras, se procederá a representar el círculo de la base. Para ello se considerarán como diámetros de la elipse que ha de resultar: por una parte, la recta ag , de 40 milímetros, paralela al eje X, y por otra, la nd , también de 40 milímetros (tomados de la escala Y), paralela al eje Y, cortándose con la anterior en el punto medio o .



La operación, pues, queda reducida al trazado de la elipse $a, b, c, d, e, f, g \dots s$, dados los diámetros conjugados ag y nd (V. primera parte, 89), del cual trazado se han conservado las líneas auxiliares.

Paralela al eje Z se trazará la altura $o'V$, en la que se tomarán de o' en V 52 milímetros de la escala Z. Desde el punto V se trazarán las dos tangentes vs y vf a la elipse (V. 91, primera parte ó 94, 2.ª edición) $abcdefg \dots s$,

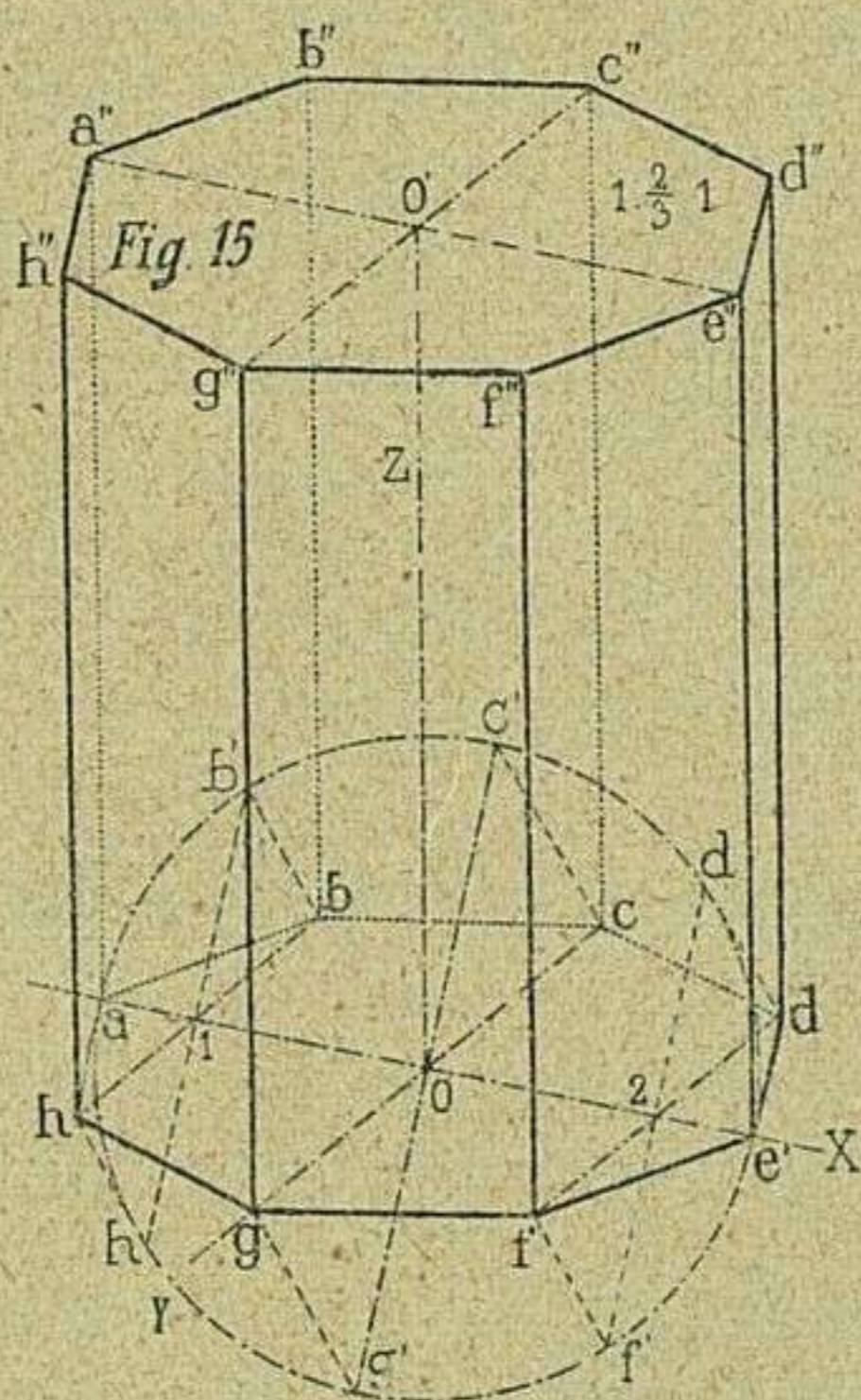
correspondiente a la base del cono, y sin más quedará terminada la representación axonométrica del mismo.

18. Dado el polígono de la base y la altura de un prisma recto, representarle en proyección axonométrica (fig. 15). — Sean $oo' = 45$ milímetros la altura del prisma conforme a la escala Z; $oa = 18$ milímetros

(1) El deslinde de líneas vistas y ocultas se hará conforme a lo expuesto anteriormente (V. *Proyecciones ortogonales*, 52), con tanta más claridad en este caso, cuanto que la apariencia de perspectiva facilita esta operación.

el radio de la circunferencia circunscripta al octógono regular base del prisma, cuyo longitud se tomará de la escala X, y $1 : \frac{2}{3} : 1$ las relaciones correspondientes á las escalas axonométricas, que como son las mismas establecidas en el anterior trazado del cono (V. 17), se utilizarán sin necesidad de construir otras nuevas para la representación del prisma.

Trazados los ejes, se tomará de o en o' sobre el eje Z, conforme á esta escala, 45 milímetros, y sobre el eje X, haciendo centro en o , con radio $oa = 18$ milímetros de la escala X, se describirá una circunferencia dividida en ocho partes iguales, indicadas por los puntos $a b' c' d' e' \dots h$.



Los pares de puntos h y b' , g' y e' , f' y d' , se unirán mediante las respectivas perpendiculares al diámetro ae , trazadas en los puntos 1, 0 y 2. Además, por cada uno de estos tres puntos se trazarán las rectas respectivas hb , cg y fe , paralelas al eje Y, colocando de paso á un lado y otro de o en c y g sobre el eje Y, 18 milímetros, según la escala Y.

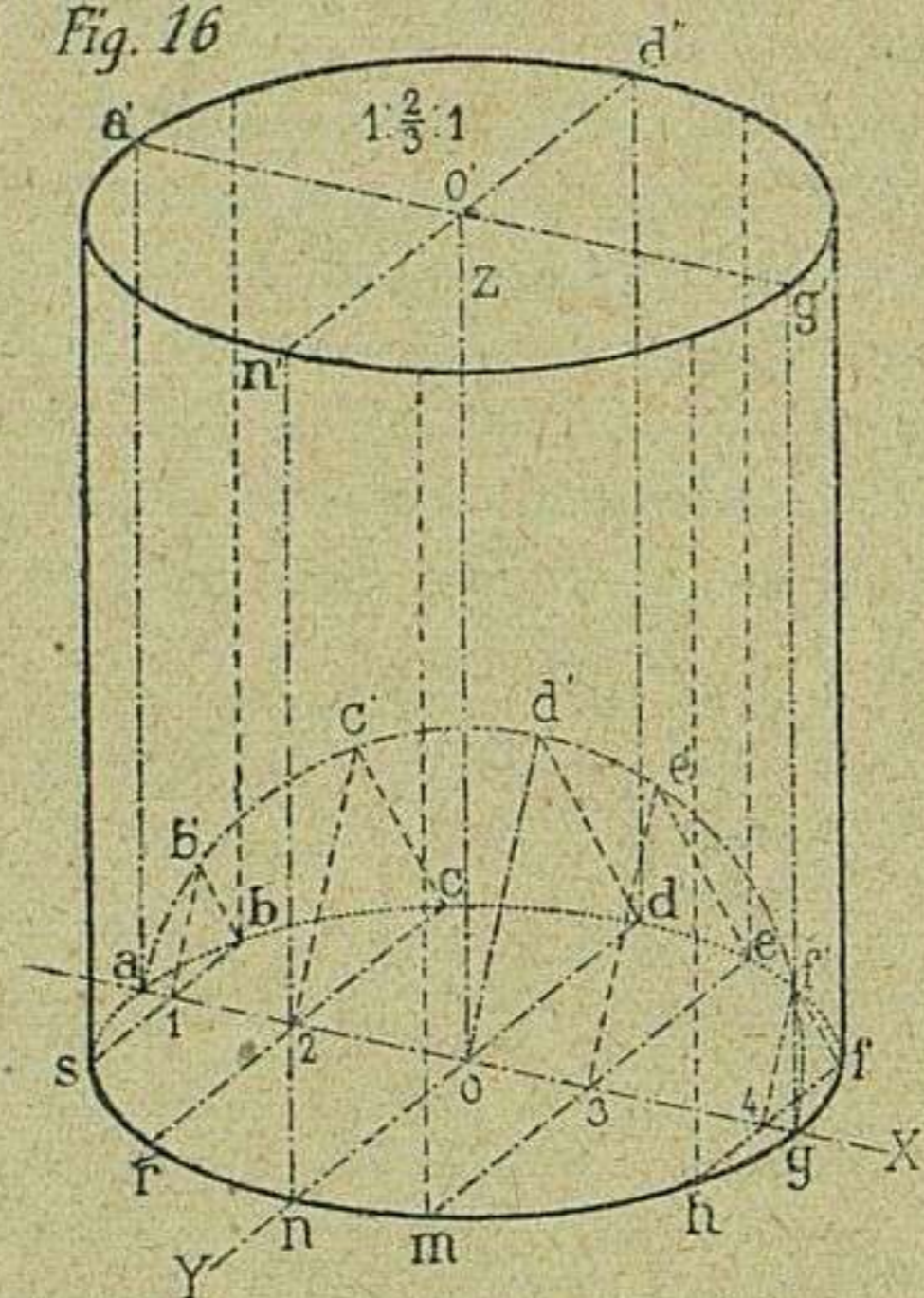
Á partir de aquí, se determinarán los demás vértices del octógono de la base $abcdefgh$ como si fueran puntos de una elipse, cuyos diámetros conjugados se dan en ae y cg (V. 89, Primera parte).

Las aristas laterales, puesto que son paralelas é iguales en longitud á la altura oo' , determinarán en sus respectivos extremos superiores $a'' b'' c'' d'' f'' g'' h''$ (al asignarles los 45 milímetros de la escala Z) los vértices del octógono correspondiente á la base superior.

19. Representación axonométrica de un cilindro de revolución

dadas la altura y radio del círculo de la base (fig. 16).— Sean $oo' = 45$

Fig. 16



milímetros la altura del cilindro conforme á la escala Z; $oa = 18$ milímetros el radio del círculo de la base medido con la escala Y; y $1 : \frac{2}{3} : 1$ la expresión de escalas axonométricas.

Para determinar los puntos $a b c d \dots r s$ correspondientes á la base inferior, se procederá como en el núm. **17**, valiéndose de los diámetros conjugados ag y nd ; asignando al ag 36 milímetros de la escala X y otros 36 milímetros al nd , tomados de la escala Y, y utilizando las escalas de la fig. 14, puesto que están expresados por idénticas relaciones $1 : \frac{2}{3} : 1$.

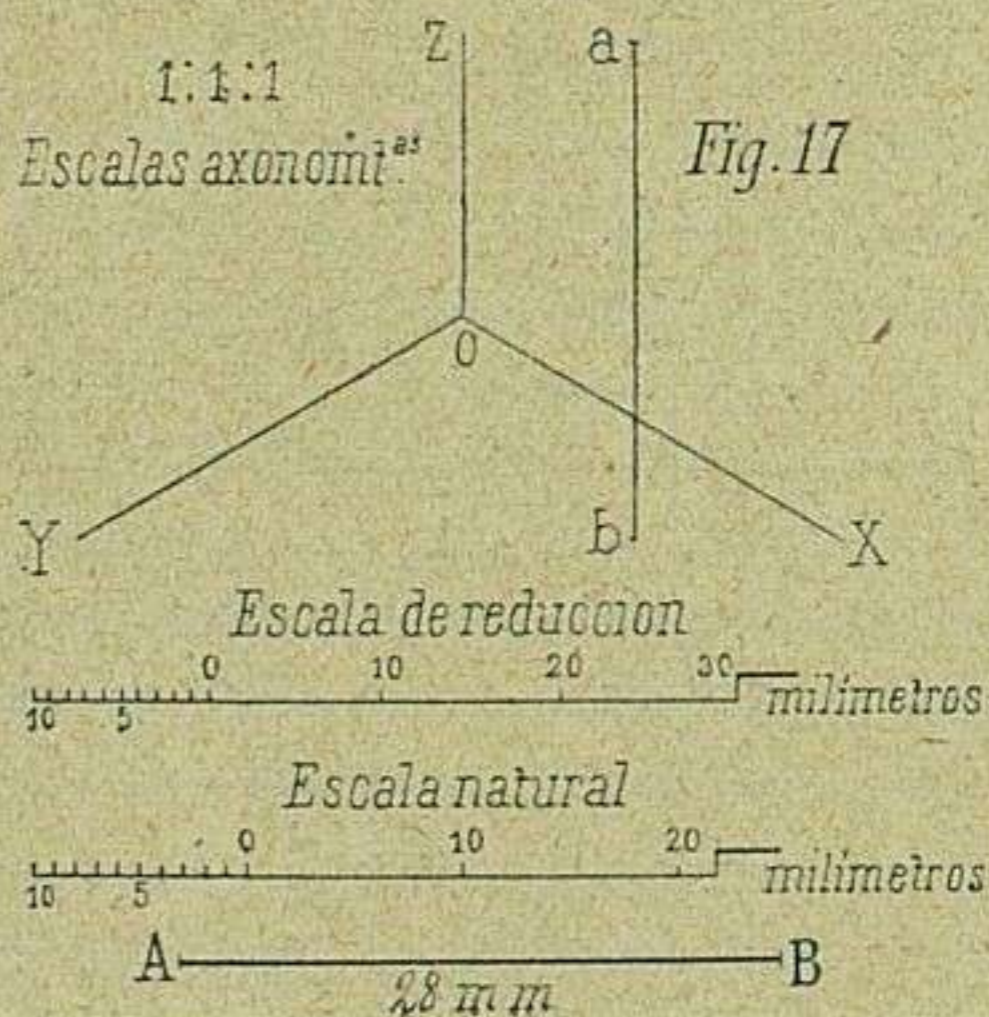
El trazado de la base superior $a' d' q' n'$ se verificará de modo semejante al del prisma recto (V. **18**), sin más que considerar las aristas de aquél como generatrices en éste.

VERDADERAS MAGNITUDES DE RECTAS

Hallar la verdadera magnitud de una recta es problema de alguna importancia, que suele plantearse con bastante frecuencia en la interpretación de proyectos.

Tres casos pueden ocurrir: 1.º Que la recta sea paralela á uno de los ejes coordenados. 2.º Que sea oblicua á dos ejes, y esté contenida en un plano paralelo á uno de los coordenados. 3.º Que sea oblicua á los tres ejes sin estar contenida en plano alguno paralelo á cualquiera de los coordenados.

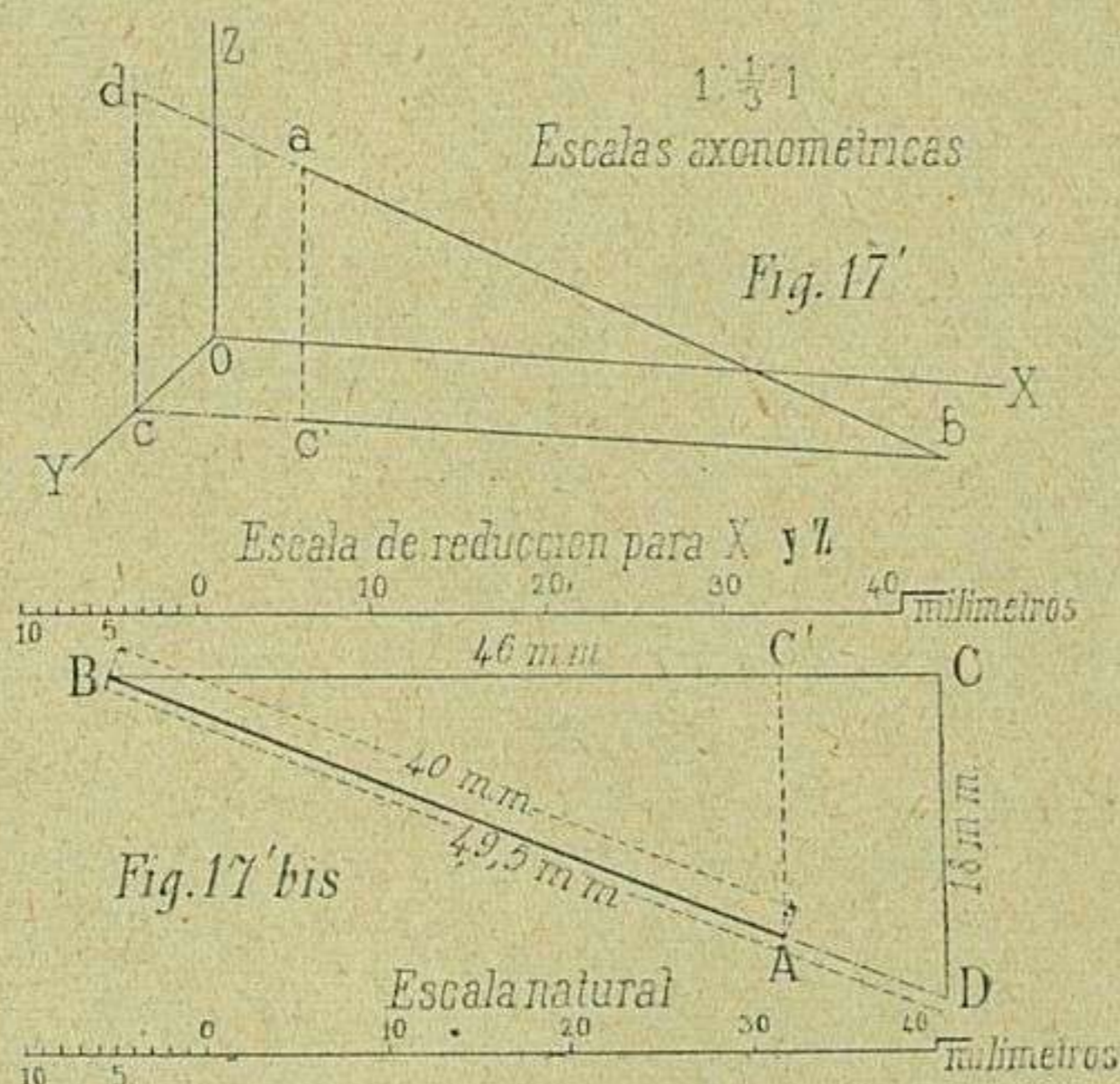
20. PRIMER CASO.—Verdadera magnitud de una recta paralela á uno de los ejes (fig. 17).—Sea ab una recta que proyectada sobre el plano principal es paralela al eje Z y $1:1:1$ las relaciones correspondientes á las escalas axonométricas. En este caso se medirá la recta ab sobre la escala de reducción del eje Z; escala que se construirá ateniéndose al único coeficiente de reducción $0^m,816$ (V. Cuadro de relaciones, pág. 124), puesto que el sistema de ejes



es isométrico. Ahora, los 28 milímetros que mide la recta ab respecto á la escala de reducción, habrá que tomarlos de la escala natural y acotarlos en la recta AB que representa la verdadera magnitud propuesta.

21. SEGUNDO CASO. — **Verdadera magnitud de una recta oblicua á dos de los ejes y contenida en un plano paralelo á otro de los coordenados** (figs. 17' y 17' bis).—Sea db la recta contenida en el plano bcd paralelo al coordenado XZ y $1 : \frac{1}{3} : 1$ las relaciones correspondientes á las escalas axonométricas.

Teniendo en cuenta que la recta db es hipotenusa del triángulo bcd rectángulo en c , la operación se reduce á determinar el valor longitudinal de dicha hipotenusa conocido el de cada uno de los catetos dc y bc , ó sea construir el triángulo dados los catetos (V. Primera parte, núm. **31**).



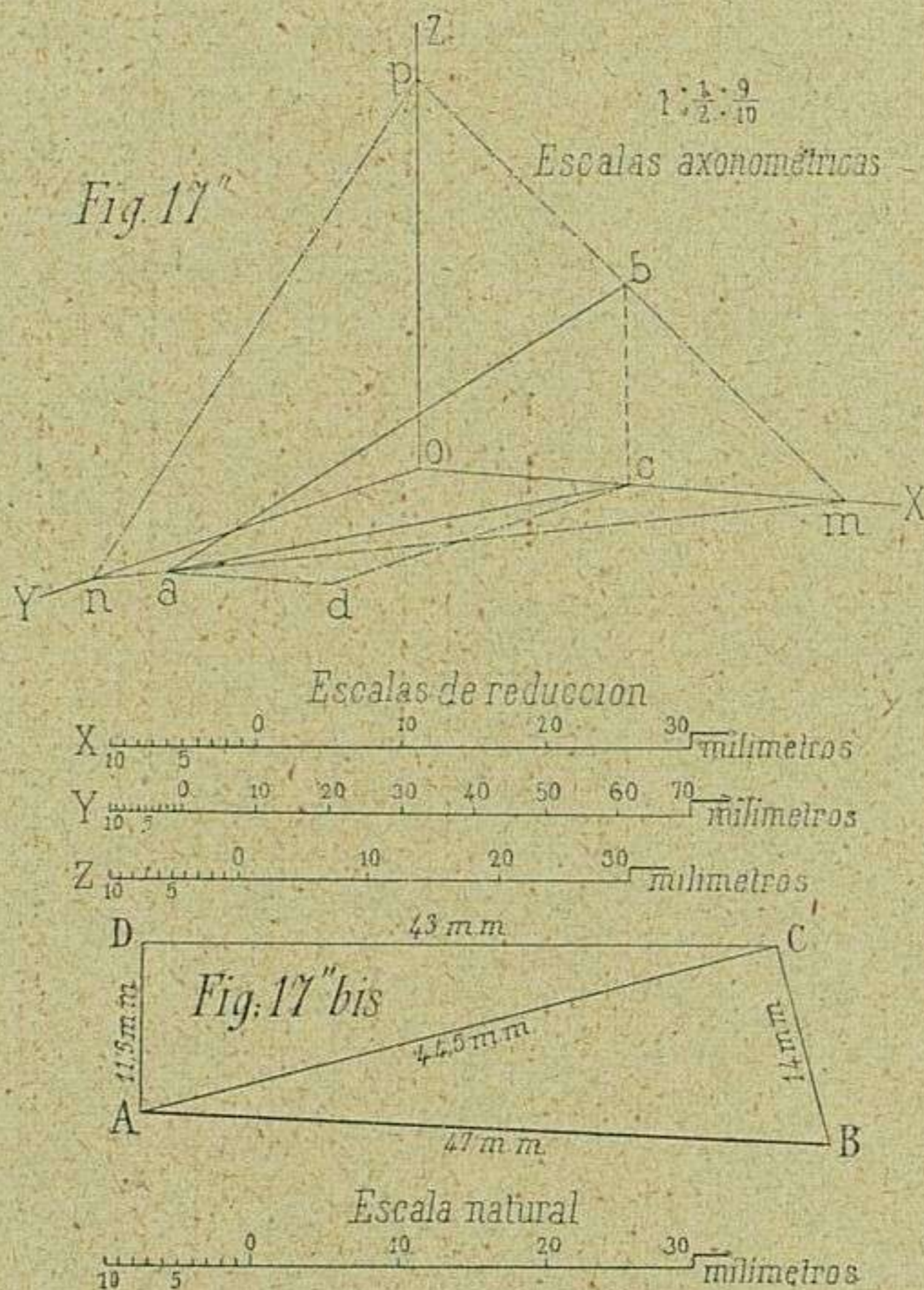
Por consiguiente, se construirá dicho triángulo con el cateto $cb = 46$ milímetros de la escala de reducción X , los que tomados de la natural (fig. 17' bis) se colocarán de C en B ; y el otro cateto $cd = 18$ milímetros, que medido en iguales condiciones vendrá á colocarse perpendicular al anterior en DC . La hipotenusa $BD = 49,5$ milímetros representará la verdadera magnitud de la recta bd .

Si en lugar de toda la hipotenusa db quisiera medirse una parte, por ejemplo, el segmento ab , se tomará la longitud $c'b = 37$ milímetros de la escala de reducción X y se colocarán traducidos de la natural, de B en C' . Desde C' se trazará una paralela á CD , que al encontrar á BD dará en A , el punto que unido al B representará en AB la verdadera magnitud del segmento ab .

22. TERCER CASO. — **Verdadera magnitud de una recta oblicua á los**

tres ejes, contenida en un plano oblicuo á los planos coordenados (figs. 17" y 17" bis).—Sea ab la recta dada contenida en el plano mnp oblicuo á los tres coordenados, según puede notarse por las respectivas trazas mn , np , pn (1).

Por la recta ab se hará pasar un plano paralelo al eje OZ , cuyas trazas serán: bc , con el XZ , y ac , con el plano XY .



Desde el punto a se trazará ad paralela al eje X , y por el c la recta cd paralela al eje Y . Así quedará formado el triángulo acd rectángulo en d , del cual se conocen fácilmente las longitudes de los catetos ad y dc mediante las respectivas escalas (fig. 17" bis) de los ejes X é Y .

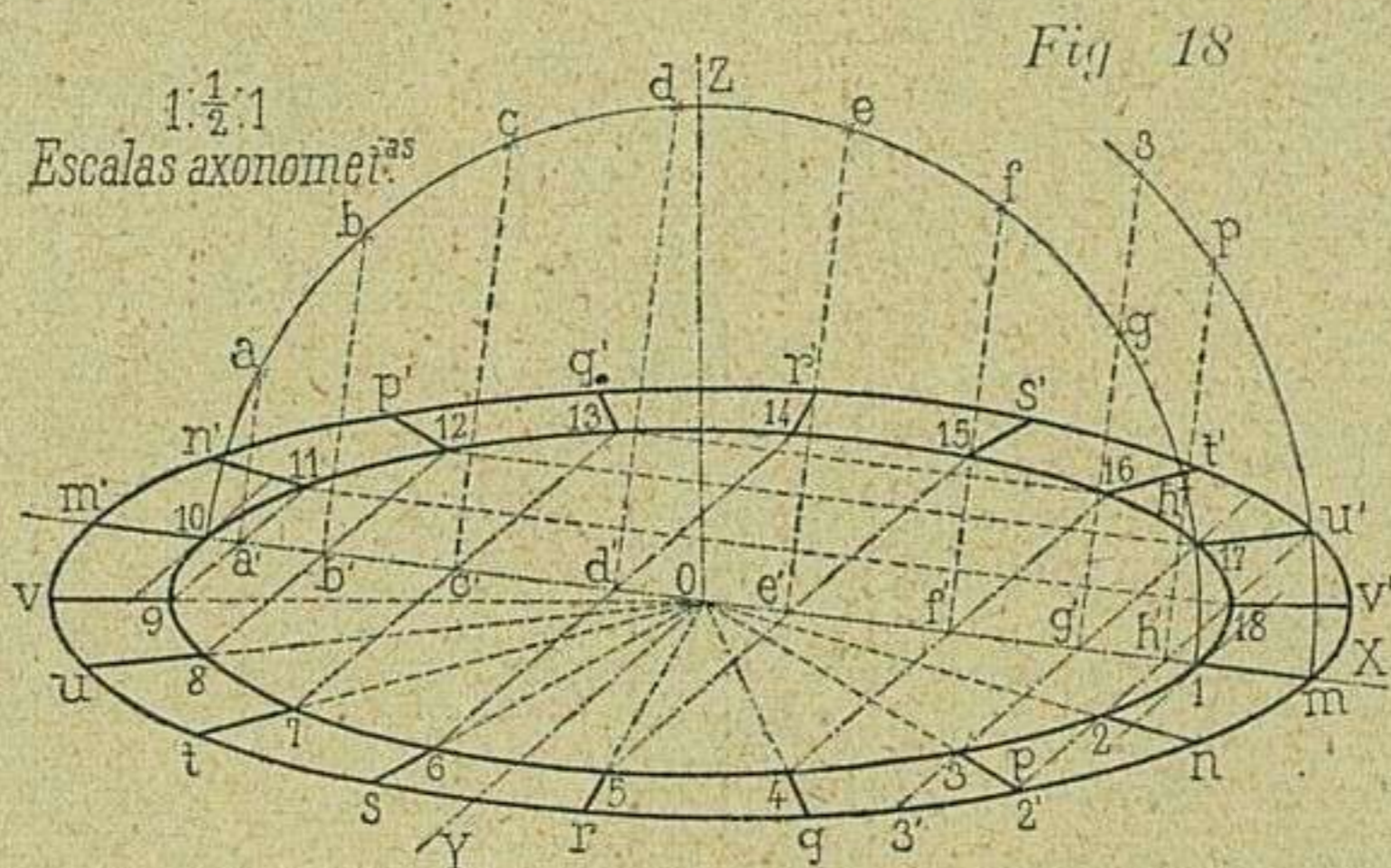
Por consiguiente, resuélvase el triángulo verificando las operaciones descritas en los casos primero y segundo (V. 20 y 21), y se obtendrá en ADC (fig. 17" bis) la verdadera magnitud del triángulo adc , cuya hipotenusa $AC = 44,5$ milímetros sirve de dato (en concepto de cateto) juntamente con cd para resolver el nuevo triángulo rectángulo en c , cuya hipotenusa ab en verdadera magnitud, se busca como resultado final.

(1) Todos los elementos descritos en la parte dedicada á las proyecciones ortogonales representan idéntico papel y conservan las mismas propiedades dentro del sistema de proyecciones axonométricas. Esta es la razón de por qué no se repiten aquí dichas descripciones.

Verificadas las operaciones de medir los datos en la escala de reducción respectiva y demás operaciones conducentes al objeto (V. **20** y **21**), que dará determinado en la hipotenusa A B la verdadera magnitud de la recta *a b*.

EJERCICIOS

23. Dividir la proyección axonométrica de una circunferencia en partes iguales (fig. 18).—Sea dada la circunferencia por el diámetro *10*, *1*, representada sobre el plano X Y, según las escalas $1 : \frac{1}{2} : 1$, y sean 18 el número de partes iguales en que se ha de dividir.



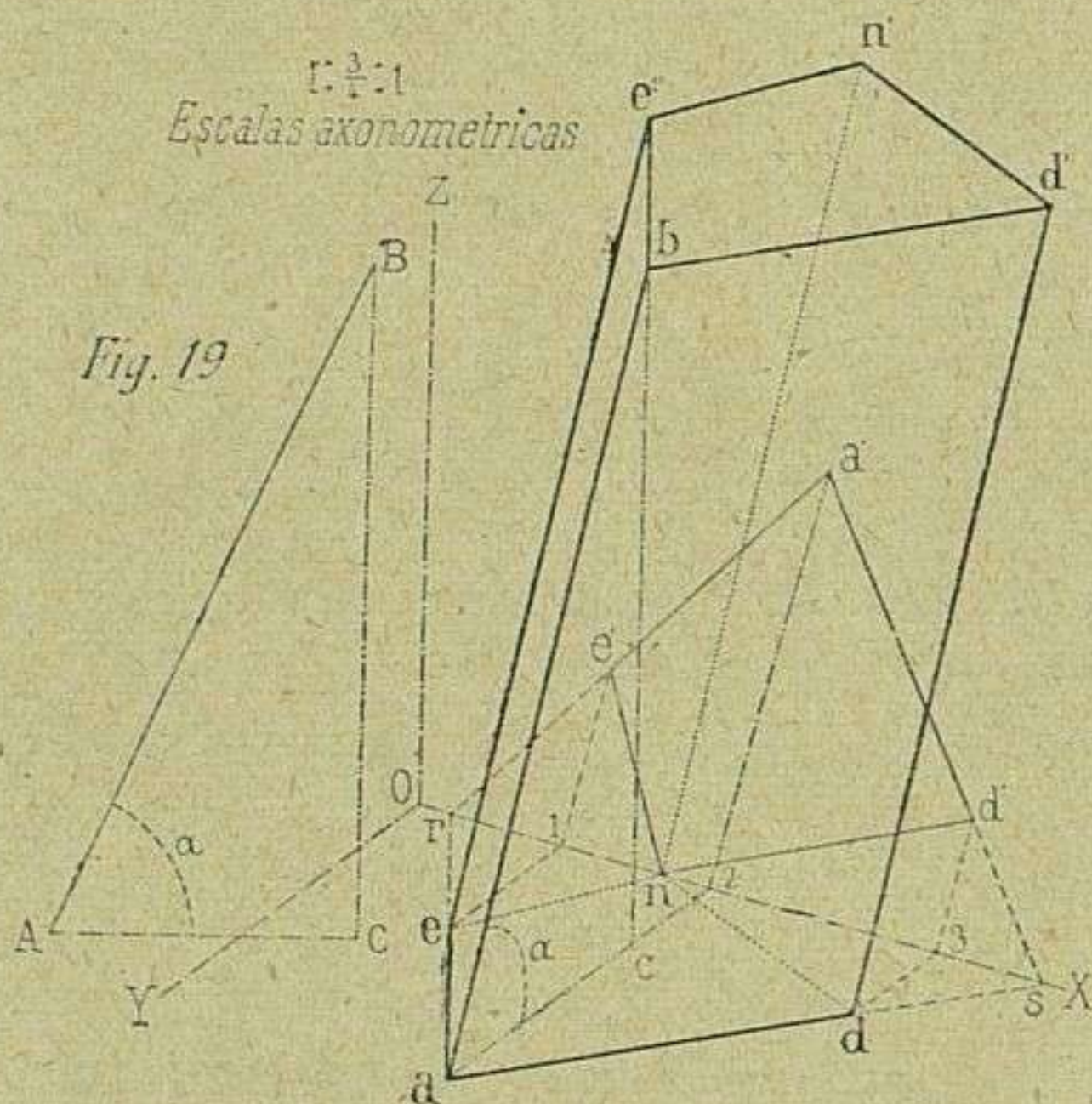
Desde el centro *o* se describirá la semicircunferencia *10 d 1*, la que se dividirá en nueve partes iguales (V. Primera parte, **22** y **25**), separadas por los puntos *10, a, b, c, d, h, 1*. Por cada uno de éstos se levantarán rectas perpendiculares al diámetro en *a' b' c' d' g' h'*, y á su vez, pasando por estos puntos, paralelas al eje Y. Estas paralelas encontrarán á la elipse (perspectiva de la circunferencia) por el orden siguiente :

La paralela que pasa por *a'* tocará á la elipse en los puntos *9* y *11*, la que pasa por *b'* en los *8* y *12*, y sucesivamente en los *7* y *3* la paralela que pasa por *c'*, etc. De este modo se transmiten las partes iguales de la semicircunferencia á la elipse, según el mismo procedimiento ya indicado, para determinar puntos de esta curva valiéndose de los correspondientes diámetros conjugados (V. **19**).

En el caso de que hubiera una segunda circunferencia exterior concéntrica dispuesta á ser dividida en el mismo número de partes iguales, tal como la exterior que se ve en la figura, bastará trazar partiendo de *o* radios por los puntos de división, para trasladarlos de la primera e ipse á la segunda. Así, el radio que pasa por *9* dará el punto *v*, el que pasa por *8* dará el *u*, etc.; obteniéndose los puntos *t, s, r, q, n', m'* por intersecciones respectivas de la elipse con los demás radios en la forma indicada.

24. Representación de un prisma oblicuo (fig. 19). — Sea base del prisma, el cuadrilátero irregular $a' e' n d'$ dado en proyección ortogonal, y $A B$ una de las aristas laterales, cuya oblicuidad con el plano $X Y$ está determinada por el ángulo α , suponiendo que el plano de este ángulo es paralelo al coordenado Z, Y , y sean $1 : \frac{3}{4} : 1$, las escalas axonométricas.

Planteado el problema en estas condiciones, se prolongarán los lados $a' e'$ y $a' d'$ del polígono hasta que encuentren al eje $o x$ en r y s respectivamente. Por los puntos e', a' y d' se bajarán perpendiculares á $o X$ y desde las intersecciones $1, 2$ y 3 , se trazarán al eje Y , las paralelas $1e, 2a$ y $3d$.



Desde 2 hasta a se tomarán $\frac{3}{4}$ de la distancia $2a'$ (1) y uniendo el punto a' simultáneamente con los r y s y el n con los e y d situados en las respectivas intersecciones de las paralelas $1e$ y $3d$, con ar y as , se tendrá la proyección axonométrica de la base del prisma en $a e n d$.

Para representar la oblicuidad de una arista bastará determinar en $a c b$ la proyección axonométrica del triángulo $A B C$ rectángulo en C (V. 14), teniendo en cuenta que su plano es paralelo al coordenado $Z Y$ y que su hipotenusa corresponde á la arista $a b$.

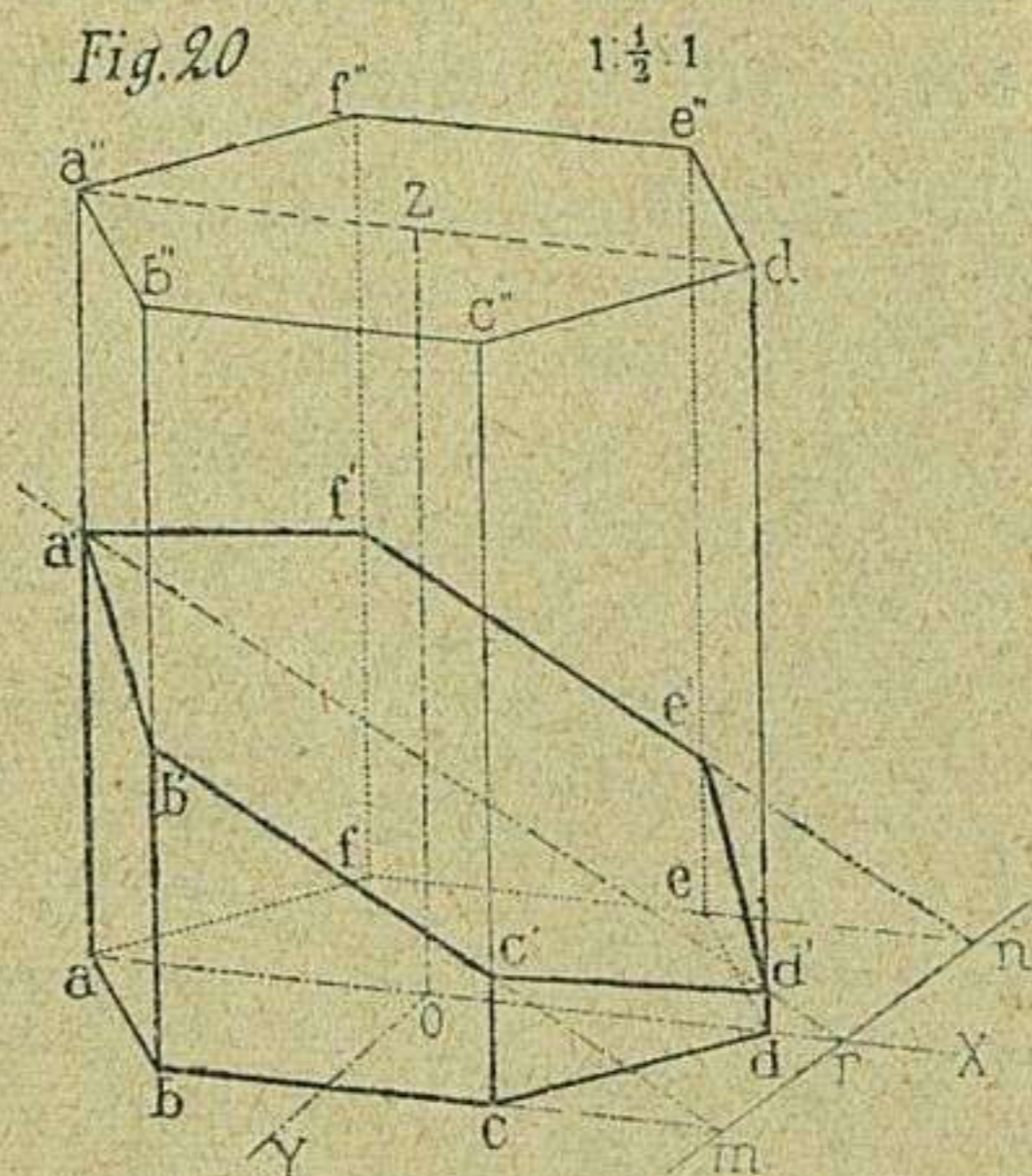
Las tres aristas laterales restantes parten de los vértices e, n y d en dirección paralela á la $a b$; terminando respectivamente con la misma longitud en los puntos $e'' n' d''$, vértices de la base superior del prisma, cuya representación queda sin más terminada.

(1) Conviene tener presente que las dimensiones $a' 2, 1 3$ y $C B$ que figuran como datos, han de tomarse de las respectivas escalas de reducción X ó Y .

25. Sección producida en un prisma recto por un plano dado por sus trazas (fig. 20). — Suponiendo ya representado el prisma recto exagonal, sea $m n$ una de las trazas del plano secante contenida en el coordenado $X Y$ y $r a'$, la otra traza situada en el $X Z$.

Por los puntos b y f se trazarán paralelas al eje X hasta que encuentren a la traza $m n$ en estos mismos puntos.

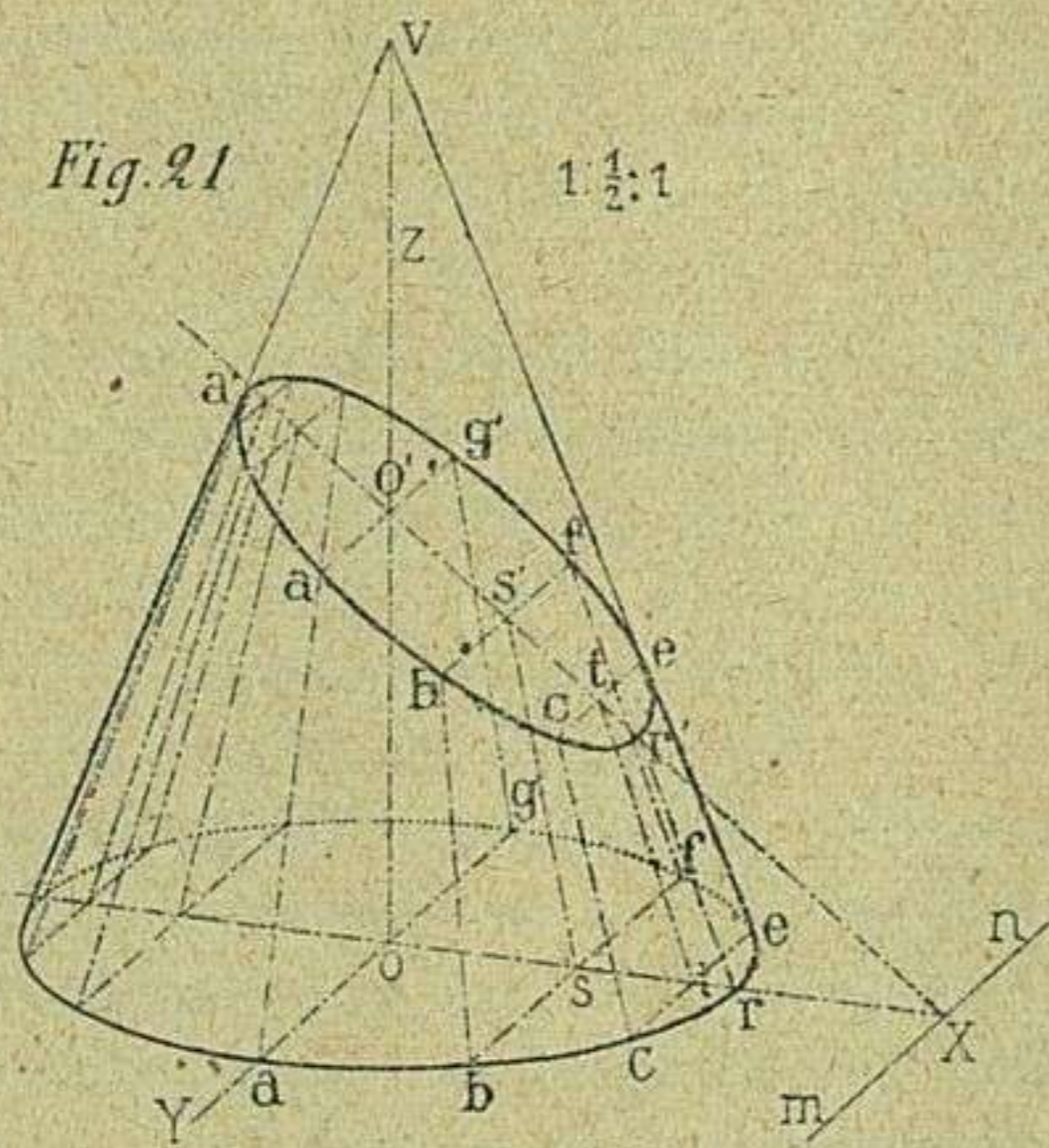
Desde m y n se tirarán otras tantas paralelas a la traza $r a'$, las cuales constituirán el plano secante, cuyas intersecciones con las aristas del prisma se verifican en los puntos $a' b' c' d' e' f'$ vértices del exágono correspondiente a la sección propuesta (1).



26. Sección originada en un cono de revolución por un plano dado por sus trazas (fig. 21). — Sean las trazas del plano secante $m n$ y $X a'$; contenida la $m n$ en el plano coordenado $X Y$, y la otra, ó sea la $X a'$ en el coordenado $X Z$.

Pasando por el vértice del cono, se trazarán una serie de planos auxiliares $v c e$, $v b f$, $v g a$, etc., de modo que cortando al cono según generatrices, sean sus respectivas trazas $c e$, $f b$, $g a$, etc., situadas sobre el plano de la base, paralelas a la traza $m n$.

Fig. 21



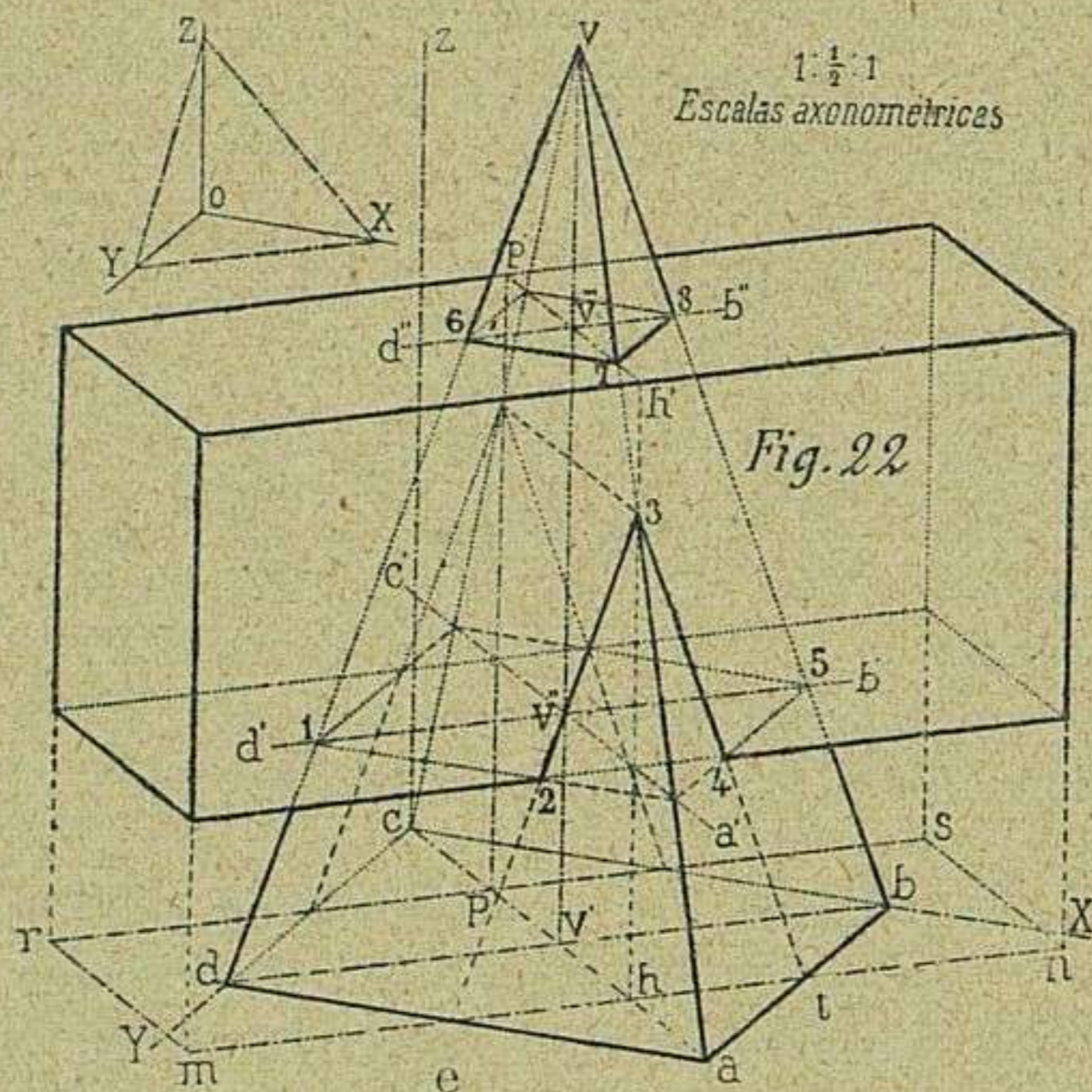
Por los puntos medios t , s , o , etc. de dichas trazas situados en el eje X se dirigirán rectas al vértice del cono, las cuales cortarán a la traza $X a'$ en los puntos t' , s' , o' , etc. Ahora por estos puntos t' , s' , o' se trazarán paralelas a la traza $m n$, y estas paralelas en sus respectivas intersecciones con las generatrices correspondientes, darán puntos de la elipse que limita la sección.

Así, por ejemplo, la paralela trazada por o' , encontrará a las respectivas generatrices $v a$ y $v g$ en los a' y g' , puntos del contorno de la sección, y de este modo se hallarán todos los demás, excepto los a' y r' que se encuentran en las intersecciones de las respectivas generatrices $v r$ y $v a'$ con la traza $X a'$.

(1) Si el plano secante fuere oblicuo a los coordenados, se puede salir del paso, mediante líneas auxiliares que funcionen como horizontales del plano.

22. Intersección de prisma y pirámide de ejes perpendiculares (figura 22). — Desde luego, se suponen los dos sólidos proyectados (V. **16** y **18**), según las escalas $1 : \frac{1}{2} : 1$ y dispuestos de modo que los lados bc y cd de la base de la pirámide coincidan con los respectivos ejes X é Y ; siendo además la altura $v'v$ paralela al eje z .

El prisma que se considera levantado sobre el plano $X Y$, á una distancia



determinada en $v'v''$, tiene las aristas de las caras superior é inferior proyectadas sobre dicho plano en $m n s r$, respectivamente paralelas á las diagonales db y ac . Las demás aristas laterales, son paralelas al eje Z (1).

La cara superior del prisma, al seccionar la pirámide, determina el cuadrado $678p'$, cuyos lados y diagonales resultan paralelos á los lados y diagonales del cuadrado de la base $abcd$ de la pirámide.

El punto donde se cortan las diagonales se determina tomando sobre la altura de la

pirámide desde v'' á v''' , una distancia igual á la que media entre la cara inferior y la superior del prisma.

La intersección de la cara inferior del prisma con la pirámide, también produce otro cuadrado, que aunque incompleto, tiene sus lados y sus diagonales $a'c'$ y $d'b'$ respectivamente paralelos á los lados y diagonales de la base de la pirámide. Claro es que estas diagonales se cortan en v'' , punto que pertenece al eje ó altura de la pirámide y á la cara inferior del prisma, que es paralela á la superior.

El contorno 234 , correspondiente á la sección producida por la cara anterior del prisma sobre las $vd a$, vab de la pirámide, se determina trazando por e una paralela á la arista dv y por t otra paralela á la vb ; reuniéndose las dos en el punto 3 situado sobre la arista va . De igual modo se hallará el contorno simétrico de éste, situado en la cara posterior del prisma.

El deslinde de líneas vistas y ocultas pertenecientes al contorno de la sección se calcula con relativa facilidad, tratándose de proyecciones axonométricas, por la apariencia de relieve que presta á los cuerpos mediante ellas repre-

(1) La penetración de prisma y pirámide que proyectada ortogonalmente figura en la lámina 3.^a, serie C, es idéntica á la actual, por lo que convendrá tenerla á la vista para facilitar la inteligencia de las descripciones.

sentados. Así es, que con la observación de la figura se conseguirá más que con repetidas explicaciones sobre este particular.

28. Intersección de cilindro y cono cuyos ejes se cruzan en dirección perpendicular (fig. 23). — Dando ya por representados estos cuerpos en proyecciones axonométricas (V. **17** y **19**), con arreglo á las escalas $1 : \frac{1}{2} : \frac{7}{8}$, coincidiendo la base del cono con el plano X Y, como también el eje del mismo con el coordenado Z, y siendo paralelas las bases del cilindro al plano Z Y, se puede proceder á la determinación de puntos de la curva intersección.

Para ello, lo mejor será valerse de una proyección auxiliar contenida en un plano paralelo al Z Y, análoga á la que se verifica sobre el plano de perfil en las proyecciones ortogonales. En esta proyección auxiliar se nota desde luego que la generatriz $V'm$ es tangente al cilindro en 1 , punto que va á situarse sobre la generatriz V A del cono, cortándose con la del cilindro que pasa por 1 .

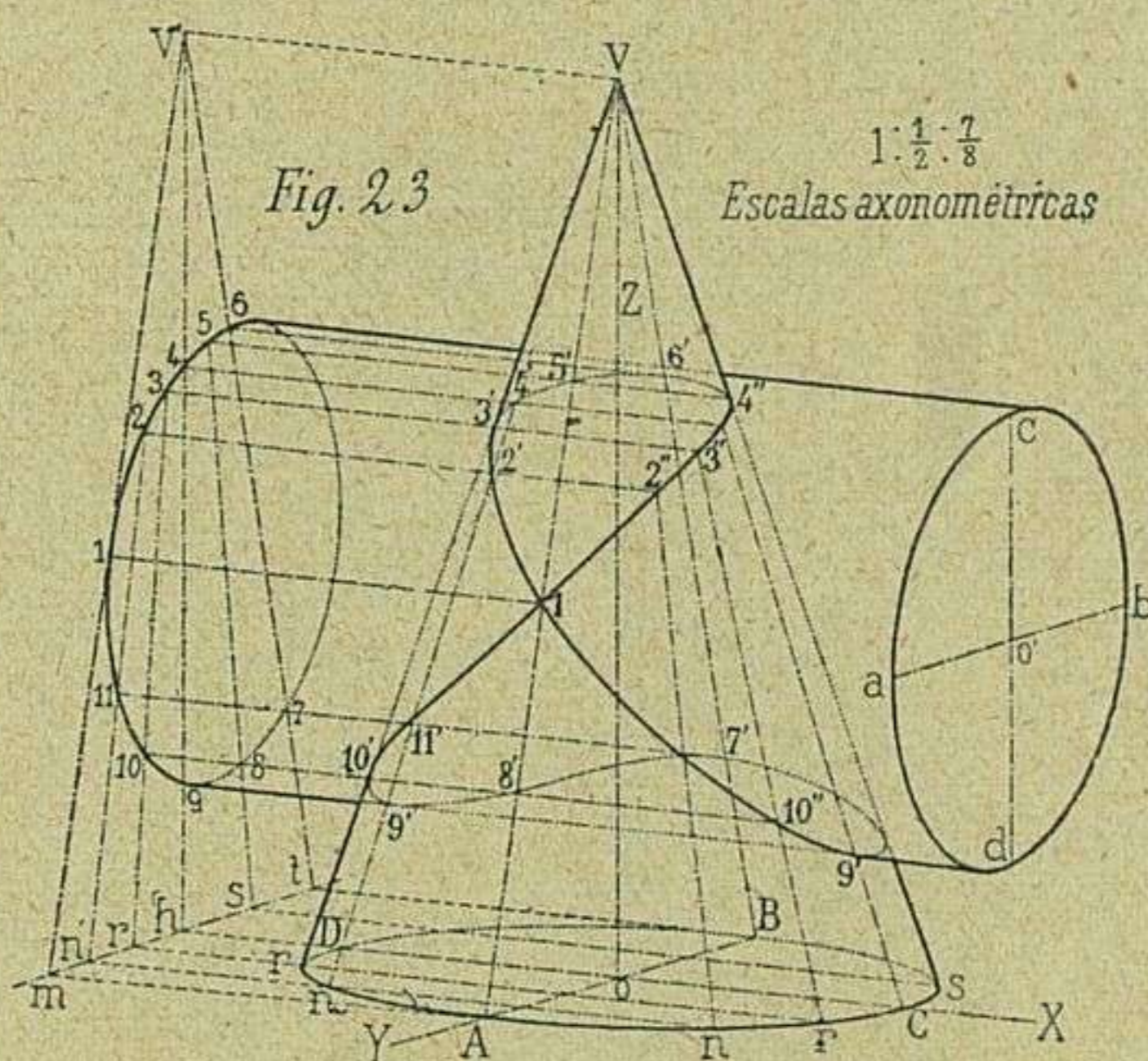
Los demás puntos de la curva intersección se determinan, mediante planos secantes que cortan al cilindro y al cono según generatrices. De este modo, en las intersecciones respectivas de dichas generatrices, se hallarán los citados puntos.

El procedimiento es el mismo empleado con anterioridad para determinar la sección plana en el cono de revolución (V. **26**).

Los planos secantes para que respondan á su cometido, se disponen de manera que, pasando por el vértice del cono, sean paralelos á las generatrices del cilindro.

Así, por ejemplo, el plano $V'r'r'$ corta al cono según las generatrices Vr y Vr' , y al cilindro según otras generatrices que pasan respectivamente por los puntos 3 y 10 , situados en el plano de perfil. Resultan, pues, en la generatriz Vr del cono las intersecciones $3'$ y $10'$, producidas por las generatrices del cilindro que pasan por 3 y 10 , como también estas mismas generatrices, al encontrar á la Vr' , determinan en $3''$ y $10''$ otros dos puntos que, al igual de los $3'$ y $10'$, pertenecen á la curva intersección.

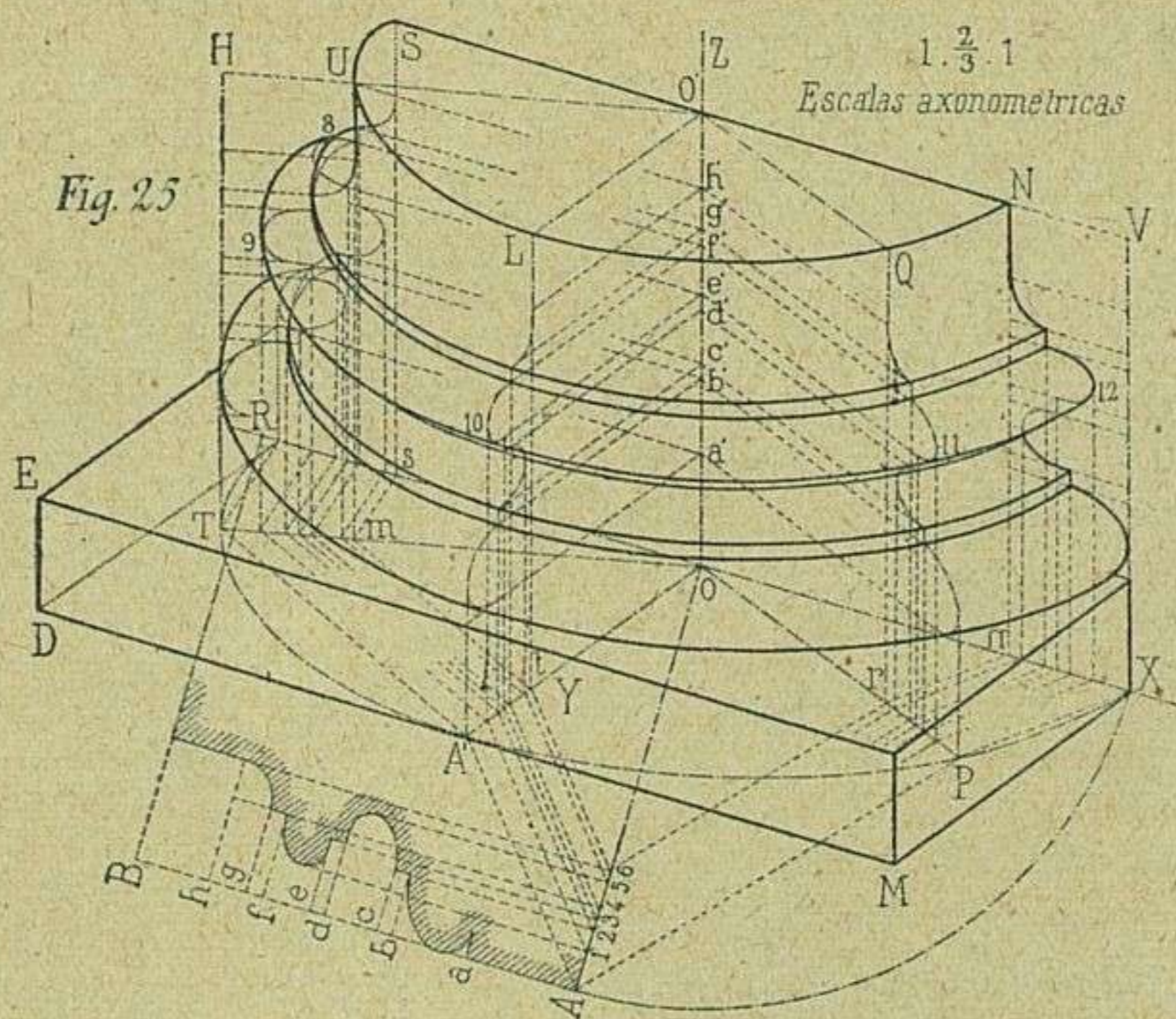
El plano $V'tB$, secante respecto al cilindro, es tangente al cono según la generatriz VB , razón por la cual sólo produce en su intersección, con las co-



Para trazar el contorno $Hcden''r''...m$, situado en la otra cara $HSML$ del prisma, se procederá de igual manera que en la anterior, siendo aprovechables las construcciones verificadas en la primera $HSNI$, sin más que extenderlas por prolongación de aristas ó generatrices, según puede observarse en la figura, siguiendo la marcha indicada por la notación.

Para no recargar dicha figura de contornos, se han suprimido los que pertenecen á las secciones producidas en la moldura por las caras laterales posteriores del prisma.

30. Representación de media basa (fig. 25). — Esta basa, compuesta de superficies de revolución, excepto el plinto $EDMX$, puede considerarse engendrada por el perfil de moldura contenido en el plano BAo , cuando se coloque en condiciones de girar alrededor del eje oZ . En este movimiento de rotación se supone que dicho perfil ocupa las posiciones $R s S$, $T m U$, $A' t L$, $P r Q$ y $X n N$.



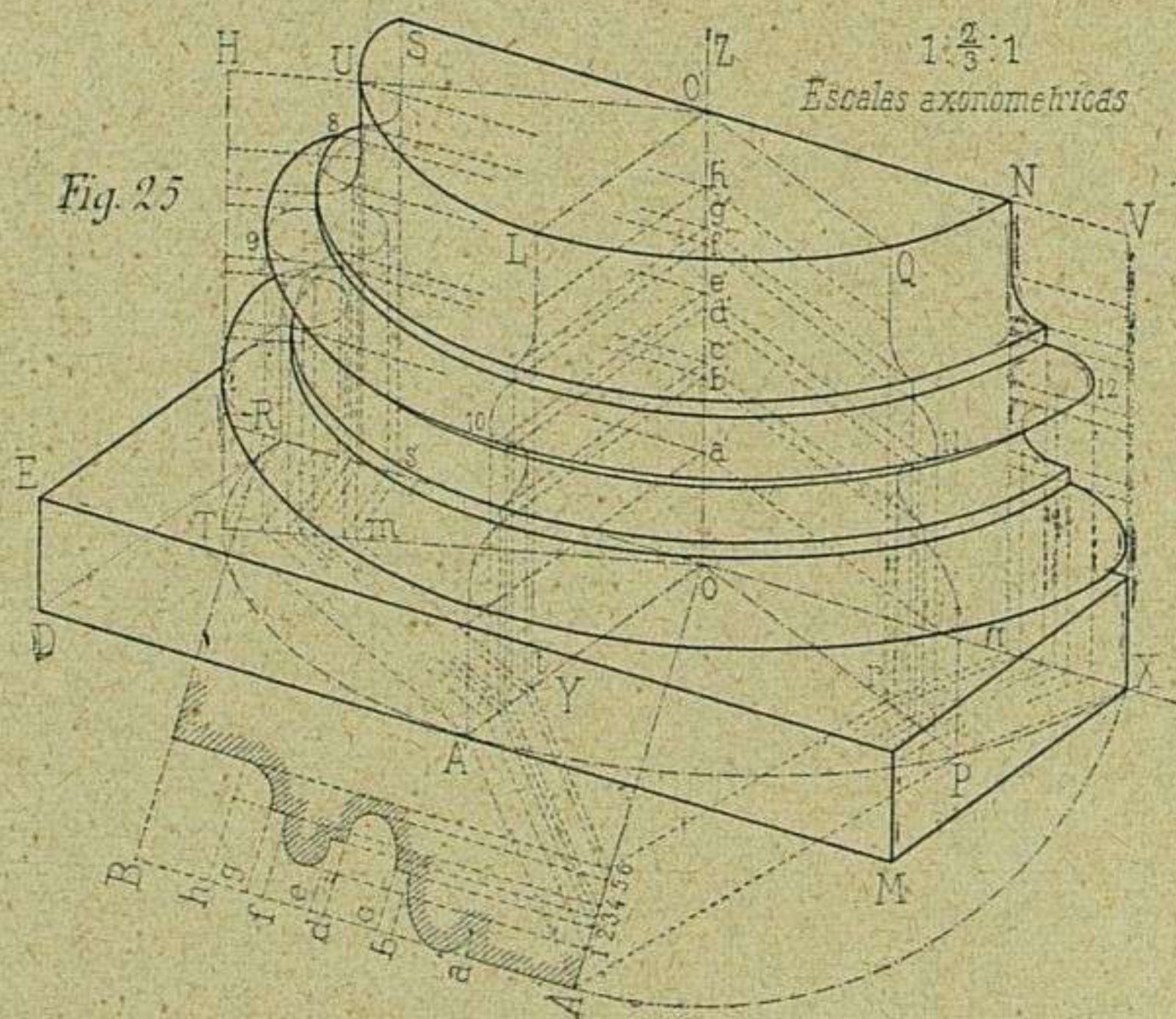
En estas distintas posiciones, que pueden obtenerse tan próximas como se quiera, las ordenadas ó alturas correspondientes á los puntos comprendidos entre o y o' permanecen invariables, midiéndose dichas alturas según la escala Z .

Por el contrario, las abscisas comprendidas en $R s$, $T m$, $A' t$, $P r$ y $X n$, varían en relación de la posición que ocupan en el supuesto giro alrededor del eje Z . Así, las $R s$ y $n X$ son iguales, y se miden por la escala X ; las abscisas comprendidas entre A' y t se miden por la escala Y , y las comprendidas en $T m$ y $P m$, no paralelas á ningún eje, se obtienen proporcionalmente en función de las anteriores.

De estas consideraciones se deduce que para representar la media basa, se trazará, en primer lugar, la semielipse $RTA'PX$ (V. **17** y **19**), y luego des-

de $A o$ (base del perfil ortogonal) se trasladan proporcionalmente los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, de A' en t , sobre el semidiámetro $A' o$ (V. primera parte, **120**, ó 2.^a edición, **123**), previamente ajustadas sus longitudes á la escala de reducción correspondiente al eje X. La operación de trasladar puntos de la línea $o A$, mediante paralelas, se repetirá con respecto á $T m$ y $P r$, pasando de éstas, por el mismo procedimiento, á las $R s$ y $n X$.

Ahora bien: concretando la operación al perfil situado sobre el plano $L t A$, se trazarán desde los puntos comprendidos entre A' y t , y desde los $o', h', g', f', e', d', c' b' a'$, paralelas respectivas al eje Z y á la recta $A' o$, de modo que al formarse una cuadrícula de coordenadas, situada sobre el plano $A' o o' L$, pueda dibujarse por su mediación el perfil de la moldura generatriz $A' 10 L$.



En los demás planos $R s S$, $T m U$, $P r Q$ y $X n N$ se construirán las correspondientes cuadrículas, en las que la dirección de las paralelas horizontales habrá de ajustarse á la de los respectivos semidiámetros $o R$, $o T$, $o P$ y $o X$, y sobre estas cuadrículas se dibujarán esmeradamente los perfiles $S 8 R$, $U 9 T$, $Q 11 P$ y $N 12 X$, los cuales pueden considerarse como otros tantos meridianos de la superficie de revolución que integra el conjunto de molduras de que se compone la basa.

En este punto la operación, no queda más que dibujar las aristas y el contorno aparente de cada una de las molduras en detalle. Así, el contorno aparente del toro superior se ha trazado haciendo pasar una línea curva tangente en 8, 9, 10, 11 y 12 á los respectivos perfiles del toro, situados en cada uno de los meridianos de referencia.

Por estos medios podrán dibujarse los contornos parciales que forman el conjunto, y teniendo en cuenta que en la figura 25 se han conservado el mayor

número de líneas auxiliares, se podrán suplir explicaciones demasiado prolijas con la observación de ella, y á ser posible, también con la del natural, acomodándole por supuesto á los convencionalismos de la teoría axonométrica.

PERSPECTIVA CABALLERA

31. Con este nombre se designa á un caso particular de la proyección axonométrica. Caso que se origina cuando el plano principal ó de representación se supone paralelo á dos de los ejes coordenados ó bien al plano formado por ellos, que generalmente es el XZ (fig. 26).

Cuando esto sucede, el triángulo de las trazas (V. 4) se convierte en el ángulo formado por las nuevas trazas Yp y qY , paralelas respectivas á los ejes X y Z .

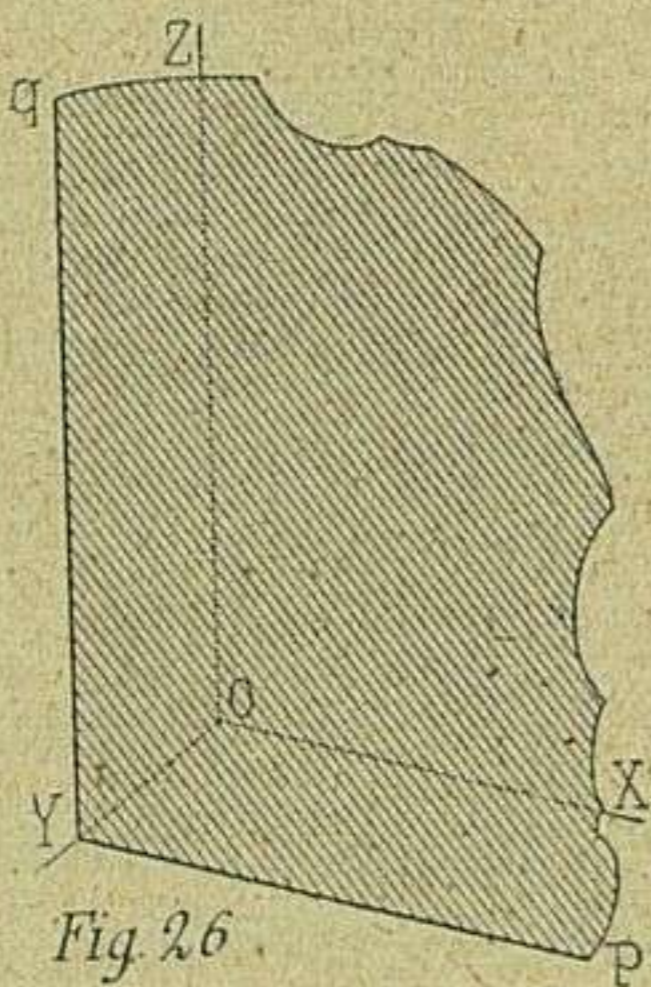


Fig. 26

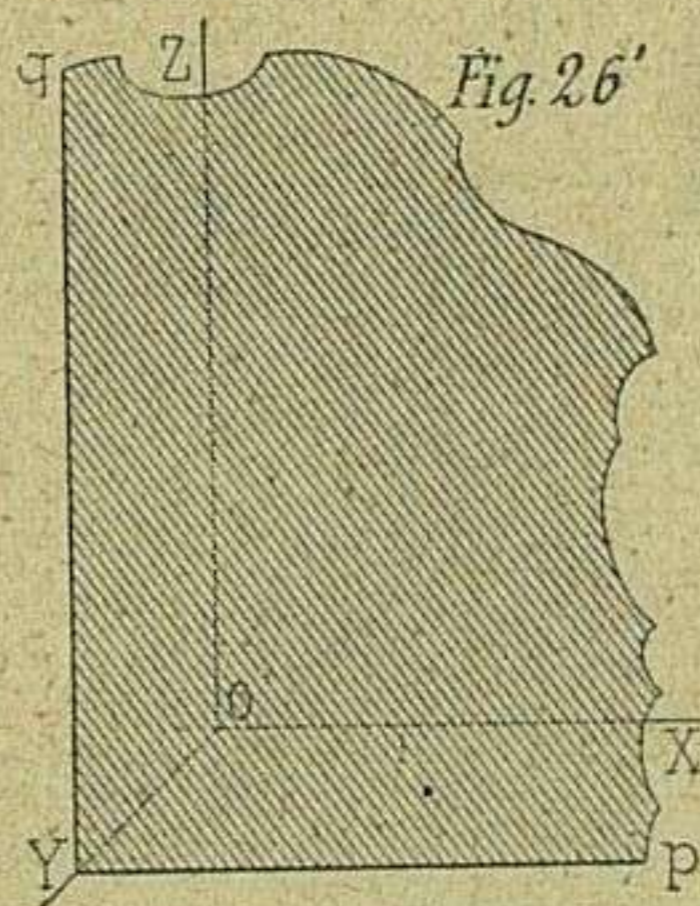


Fig. 26'

Ya en este camino, nada impide suponer que proyectándose los ejes ortogonalmente sobre el plano principal, y siendo éste paralelo al XoZ , dichas proyecciones oX y oZ formarán el mismo ángulo recto que forman en el espacio, tal como se representan en la figura 26; por consiguiente, dicho plano principal, al identificarse con el plano del tablero donde se dibuja, ha de presentar sus trazas qY y pY , formando un ángulo de 90° (1).

Este cambio de posición trae consigo algunas consecuencias que deben conocerse por lo que influyen en el procedimiento de representación, reduciéndole á fórmulas más sencillas.

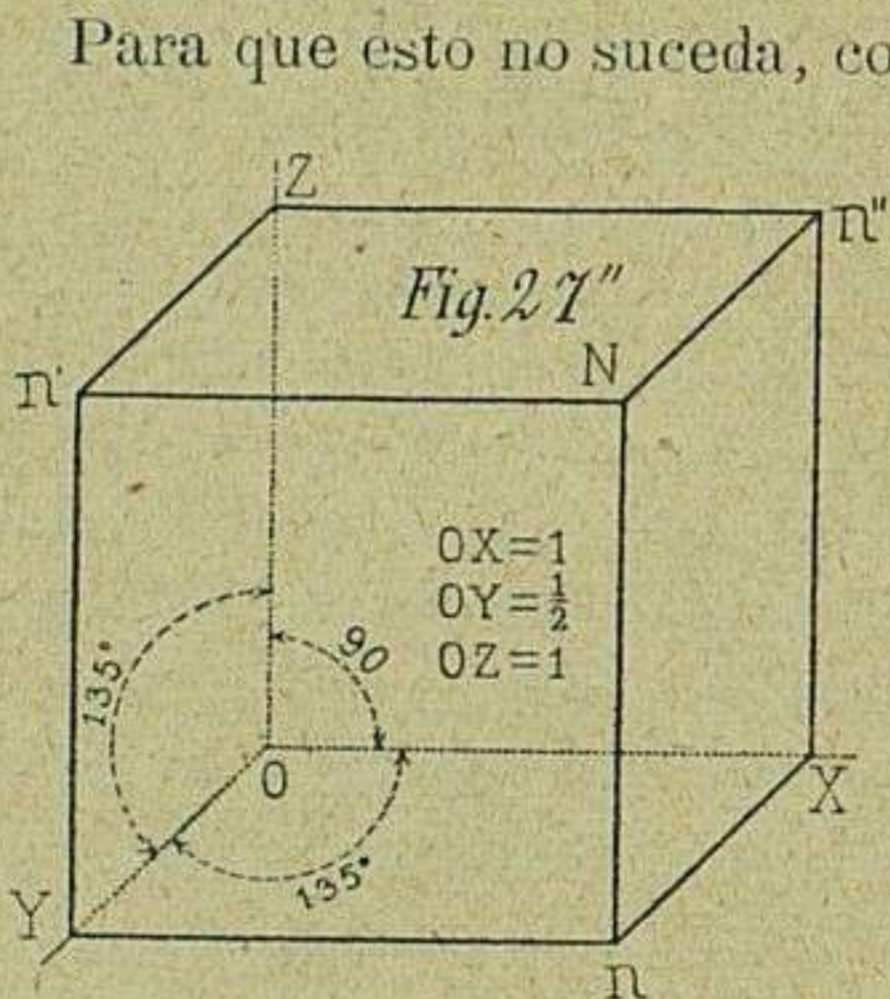
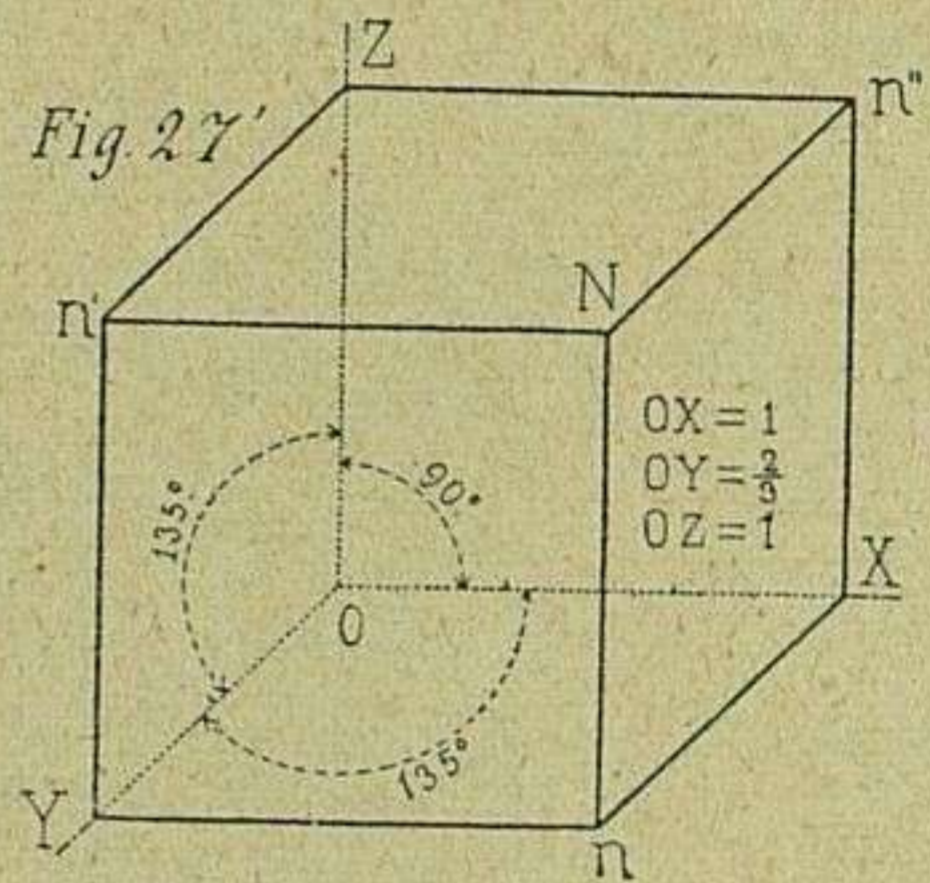
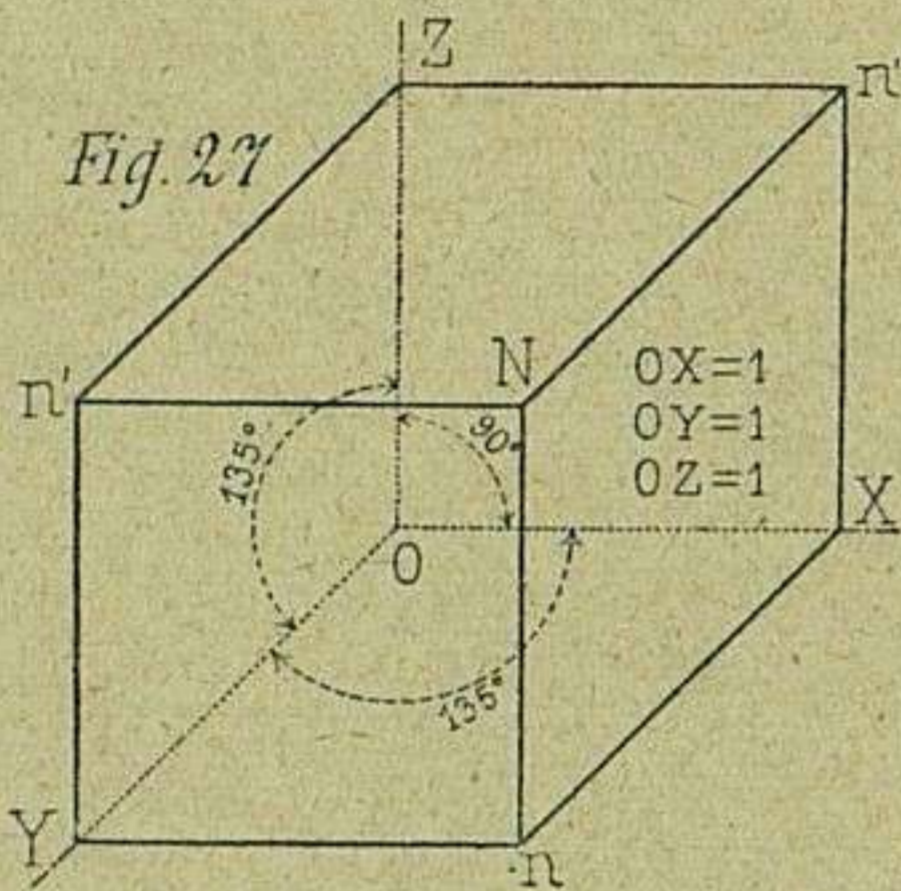
Nótase desde luego que al situar los ejes oX y oZ paralelos al plano principal, una longitud cualquiera de eje en el espacio es igual á su proyección sobre el citado plano principal; por tanto, el respectivo coeficiente de reducción queda igualado á la unidad para los dichos ejes oX y oZ .

(1) No debe olvidarse que los ejes son perpendiculares entre sí, puesto que el triedro formado por los planos coordenados sigue siendo trirrectángulo.

El eje Y, en el caso supuesto y con motivo de ser perpendicular al plano principal, se proyectará en él según un punto. Entonces el coeficiente y la escala de reducción son cero (V. S); es decir, que uno de los ejes, el o Y, se anula y desaparece. Resultado inadmisibles para los fines propuestos en la representación axonométrica.

Este inconveniente se evita proyectando dicho eje como si no fuera perpendicular al plano principal, dándole una dirección determinada y asignándole una escala igual ó menor que la unidad, relacionando, por supuesto, dirección y escala con las proyecciones de los otros dos ejes.

32. Desde el momento que se deja libre la dirección del eje o Y y su relación de magnitud respecto á los o X y o Z, puede dar lugar en la práctica si no se regula esta libertad á infinidad de combinaciones de ejes que en su mayoría, suelen aportar al dibujo más dificultades que ventajas.



Para que esto no suceda, conviene conocer las combinaciones de ejes más generalmente adoptadas por los dibujantes que se dedican á esta especialidad. Clasifícanse en dos grupos, según que el eje o Y forme ángulos iguales ó desiguales con los otros ejes.

Al primer grupo pertenecen las combinaciones de ejes correspondientes á las figuras 27, 27' y 27'', en las que aparece representado el exaedro ó cubo. En las tres figuras puede observarse que el eje X forma con cada uno de los o Y, o Z ángulos de 135° . Lo que únicamente diferencia una de otra á las

tres combinaciones es la distinta relación de longitud que existe entre el eje o Y y los o X, o Z.

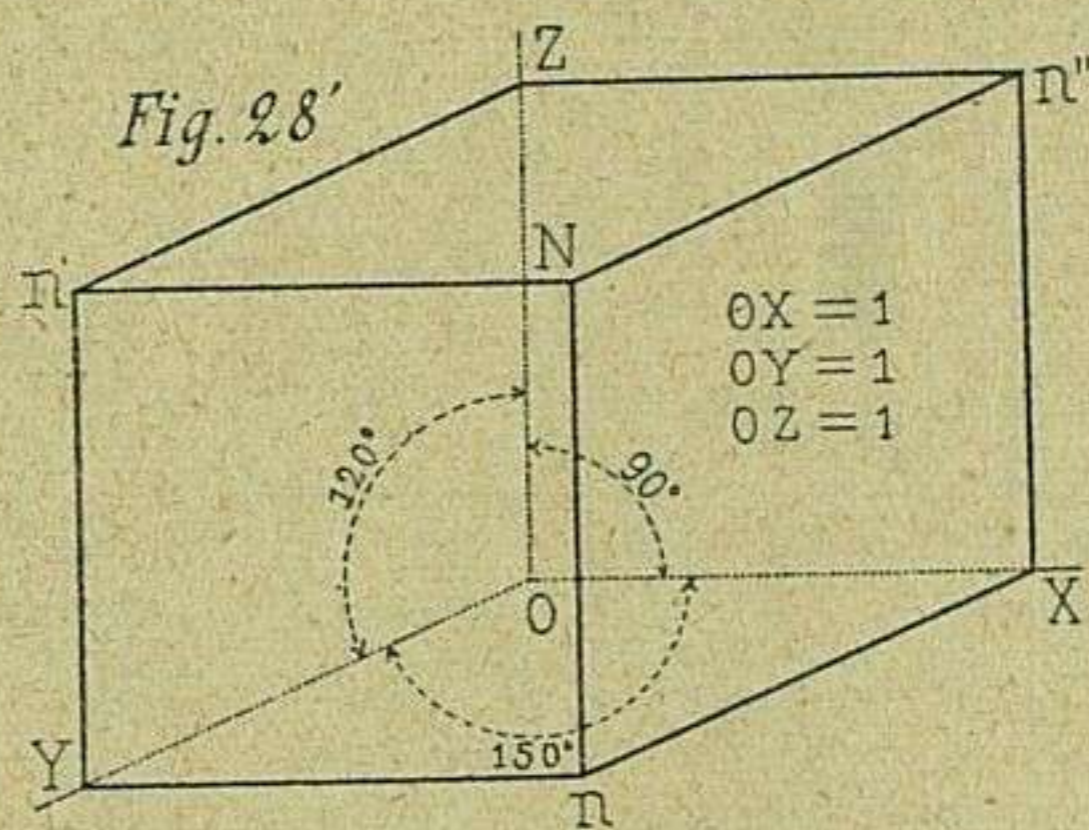
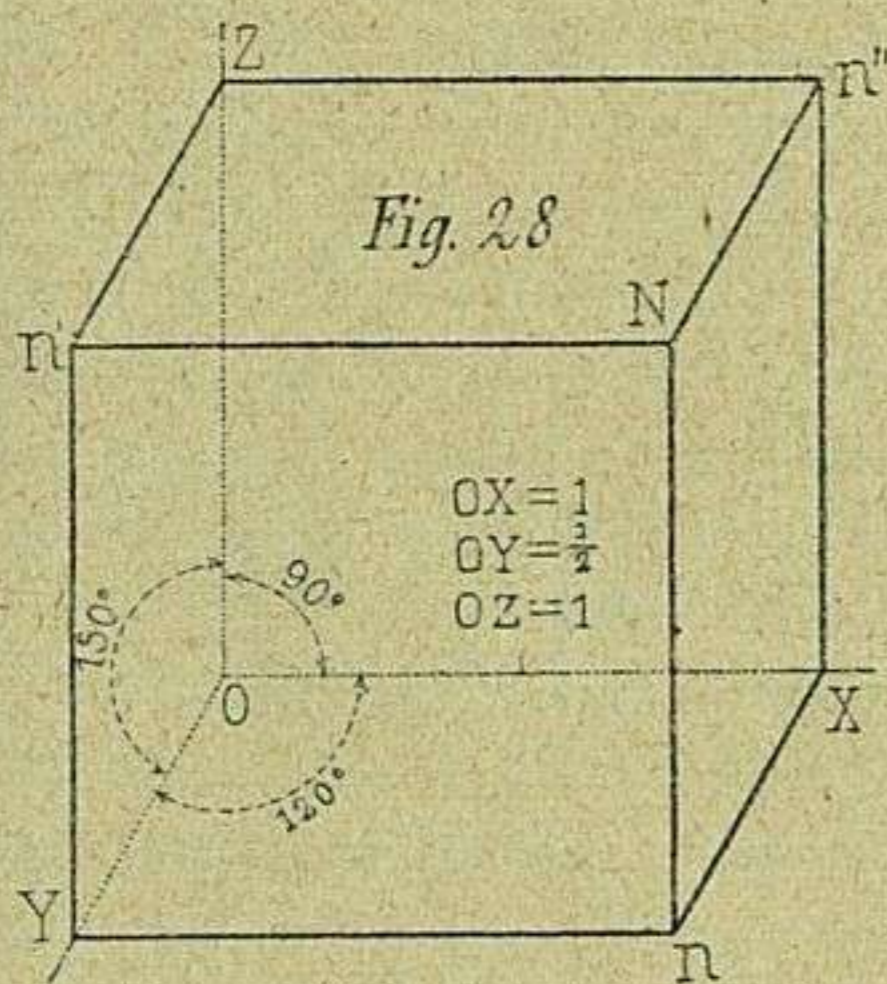
En la figura 27 las relaciones establecidas entre los ejes son 1:1:1. Por eso, el cubo representado conforme á dichas relaciones mide igual de ancho que de largo y de alto.

Las relaciones ó escalas admitidas para la combinación de ejes proyectados

en la figura 27', son $1:\frac{2}{3}:1$, de lo cual se deduce que el cubo representado según ellas, tendrá las dimensiones paralelas á los ejes X y Z iguales; pero la dimensión paralela al eje Y, quedará reducida á los dos tercios de cualquiera de las otras dos.

Las mismas consideraciones pueden hacerse respecto al cubo proyectado en la figura 27''; únicamente la dimensión paralela al eje Y, aparece aquí reducida á la mitad de las otras, de conformidad con las relaciones adoptadas $1:\frac{1}{2}:1$.

33. Ejemplos de combinaciones de ejes clasificados en el segundo grupo, se muestran en las figuras 28 y 28', donde sigue exhibiéndose el cubo como tipo más sencillo de representación.



En la figura 28 el eje Y, cuya relación con los otros es $\frac{1}{2}$, forma con el eje X un ángulo de 120° , y con el Z otro de 150° . Á esta proyección se le da el nombre de *horizontal vertical*, á causa de que las formas proyectadas en los planos horizontal X Y y vertical de frente X Z, se presentan con mayor desarrollo ó menos escorzadas.

En la combinación de ejes adoptada para la representación del cubo en la figura 28', cuyas escalas quedan consignadas en la expresión $1:1:1$, el eje Y forma con el eje X un ángulo de 150° , y con el Z otro de 120° . En este caso, la proyección recibe el nombre de *lateral vertical*, en razón á que las formas proyectadas sobre los planos lateral vertical Y Z y vertical de frente X Z aparecen menos escorzadas que las trazadas sobre el otro plano.

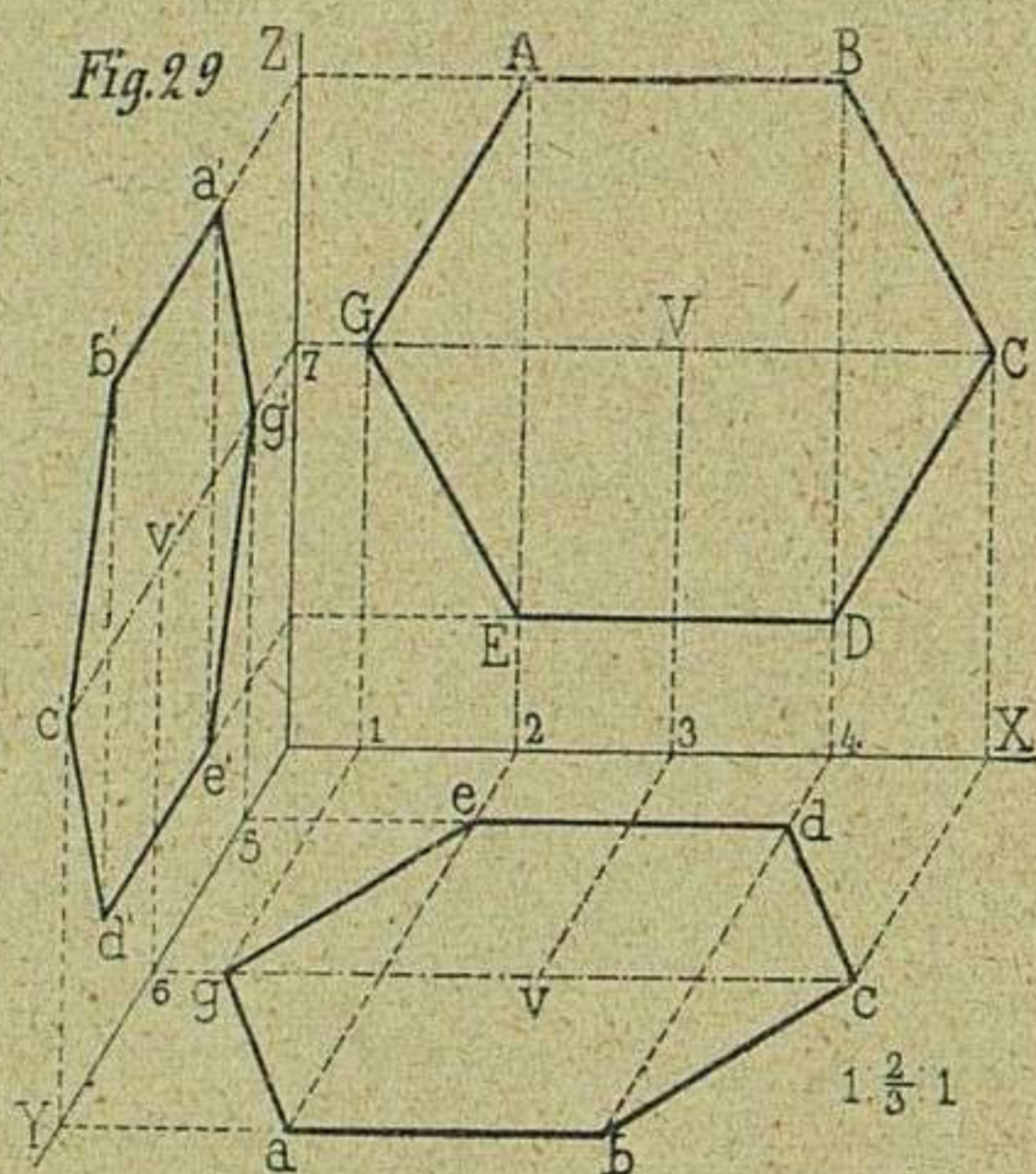
En resumen: esta variedad en la combinación de ejes permite, cuando se quiere producir un determinado efecto de perspectiva, elegir aquella que mejor se preste á conseguir el efecto deseado (1). De las relaciones que pueden

(1) El autor se ha limitado á exponer aquellas combinaciones de ejes más generalmente admitidas, ó que más facilidades proporcionan en la práctica del Dibujo; esto no

establecerse entre los segmentos de los ejes, resulta que, en perspectiva caballera, sólo caben dos sistemas: isométrico y dimétrico.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

34. Representación de un mismo polígono en cada uno de los planos coordenados (fig. 29). — La combinación de ejes corresponde á la clasificada como *horizontal vertical* (V. **33**), expresando $1:\frac{2}{3}:1$ la relación



de las escalas de dichos ejes; es decir, que una longitud contada sobre el eje Y, es un tercio menor que su correspondiente longitud considerada en cada uno de los otros ejes.

Sea el exágono regular $A B C D E G$, al que se le supone contenido en el plano $X Z$, razón por la cual se proyecta sobre dicho plano en su verdadera magnitud y forma, puesto que no existe escala alguna de reducción que lo impida (V. **31**).

Del plano $X Z$ pasa la proyección $A B C D E F G$ al $X Y$ con suma facilidad, trazando perpendiculares desde los vértices del polígono al eje X en los puntos $1. 2. 3. 4. X$. Desde estos puntos se trazarán otra serie de para-

lelas al eje Y , en los que se colocarán sucesivamente: de 1 en g , y de X en c , una longitud igual á $\frac{2}{3}$ de $G 1$; de 2 en e , y de 4 en d , otra longitud igual á $\frac{2}{3}$ de $E 2$; por último, de 2 en a , y de 4 en b , otra longitud igual á $\frac{2}{3}$ $A 2$.

Ahora no queda más que unir, mediante rectas, los puntos $a b c d e g$, proyecciones de los vértices del exágono sobre el plano $X Y$.

Para proyectar este mismo polígono sobre el plano $Y Z$ se utilizarán las paralelas al eje Y , trazadas en $Z b'$, $7 e'$ y $e' d'$, reducidas en su longitud á dos tercios de la que tienen sus correspondientes paralelas al eje X , en la proyección vertical de frente. Por lo demás, procediendo del modo indicado para la proyección $X Y$, quedarán determinados en el plano $Y Z$ los vértices

obstante, cada cual puede emplear la combinación que más le plazca, siempre y cuando dé razón de ella, haciendo constar las relaciones de los ejes y el valor de cada uno de los ángulos formados por dichos ejes, puesto que en caso contrario la omisión de estos datos esenciales impediría la inmediata verificación de magnitudes, al tener que interpretar un objeto proyectado.

$a' b' c' d' e' g'$ de dicho polígono, los cuales, unidos mediante rectas, constituirán una segunda proyección vertical lateral.

35. Intersección de dos prismas (fig. 30). — Sean dos prismas rectas, de base cuadrada y de ejes perpendiculares, cuya situación respecto á los planos coordenados está determinada por $a b d c$, base del prisma vertical, y $j e f g$, proyección del prisma horizontal. Datos ambos que figuran proyectados ortogonalmente sobre un plano horizontal asimilado al $X Y$.

En la figura constan, además, las escalas axonométricas $1 : \frac{2}{3} : 1$, de las que se deduce que, á una magnitud determinada en uno de los ejes X ó Z , corresponde otra en el Y , reducida á los dos tercios de aquélla; y en cuanto á la combinación de ejes, se ve, por el pequeño diagrama adjunto, que el Y forma ángulos iguales de 135° con cada uno de los otros ejes.

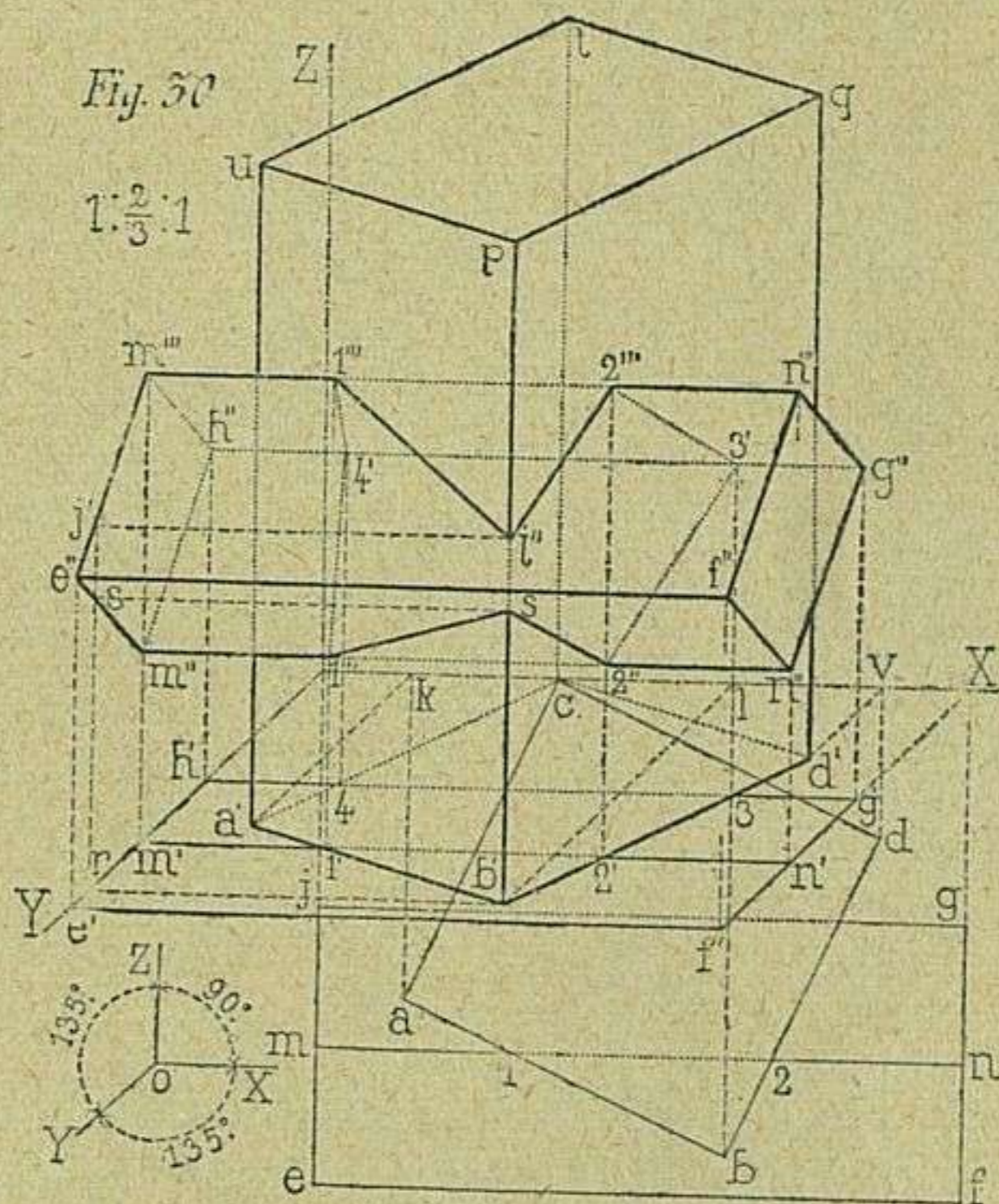
Expuesta la situación y relaciones de los datos, la operación que ha de verificarse constará de dos partes: la primera se concretará á representar la proyección axonométrica del grupo de prismas, y la segunda á determinar el contorno de la común intersección.

Las perpendiculares al eje X , tales como $f' X$, $d v$, bl , etc., situadas en la planta ortogonal auxiliar, pasan á ser paralelas respecto al eje Y , disminuidas en un tercio de su longitud. De este modo se obtienen sobre el plano $X Y$ las proyecciones axonométricas combinadas $a' b' d' e$ y $h' e' f' g'$ de cada prisma, respectivamente.

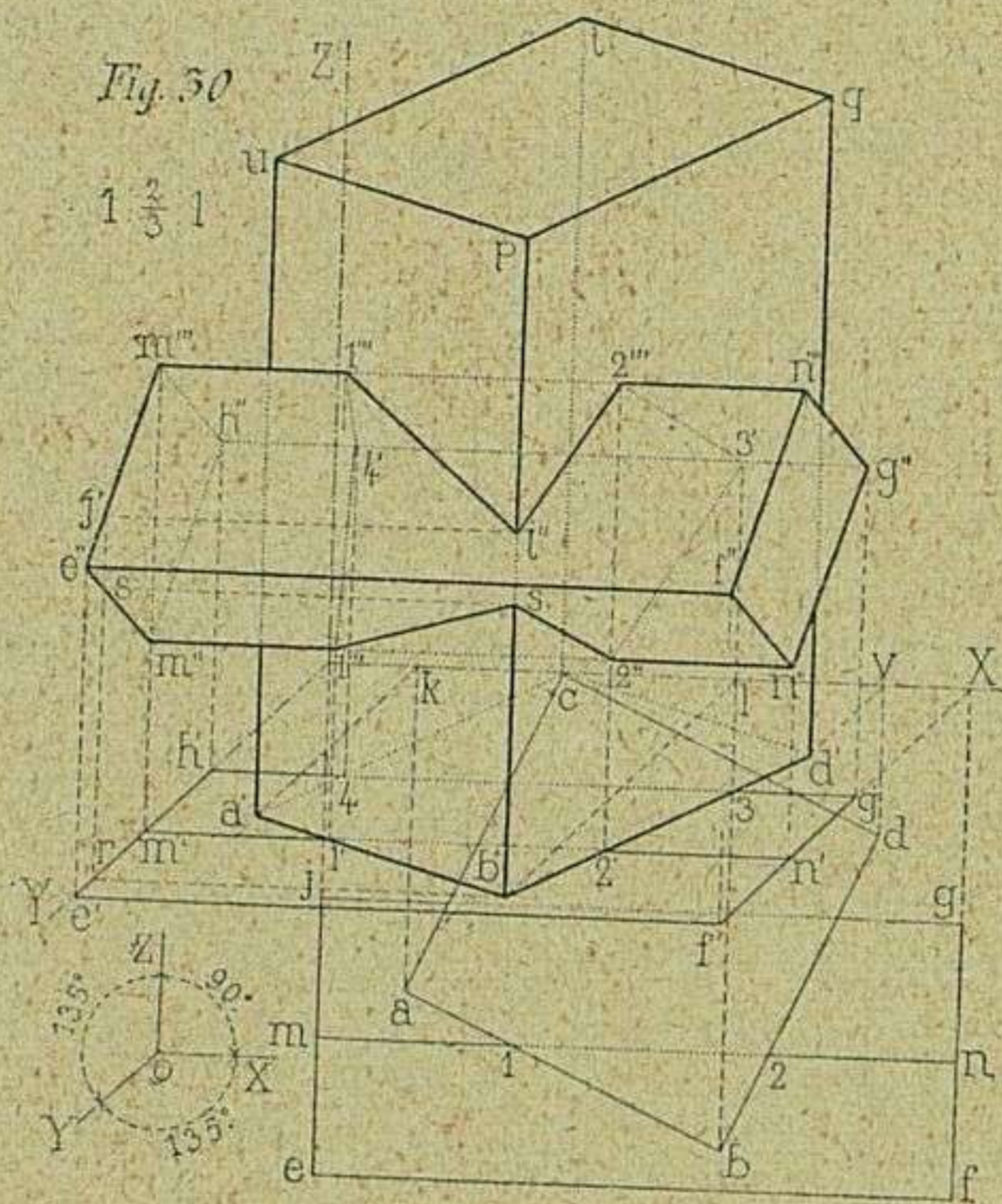
Desde cada uno de los puntos $a' b' d' c$ se levantan las paralelas $a' u$, $b' p$, $d' q$ y $c t$ al eje Z , dándoles á todas la misma altura, y se tendrá sobre el plano principal la proyección axonométrica del prisma vertical sin más que unir, mediante rectas, los extremos de las aristas laterales n , p , q , t .

Para la representación axonométrica del otro prisma se levantarán, á partir del eje Y , las paralelas al Z en $e' e''$, $m' m''$ y $h' h''$, cuyos extremos $e'' m'' h'' m''$ corresponden á los vértices del cuadrado, base del prisma situado sobre el plano $Y Z$. Desde los vértices de esta base se trazan las aristas laterales $m''' n'''$, $e'' f''$, $m'' n''$ y $h'' g''$, paralelas al eje X é iguales todas, puntos los $n''' f'' n''$ y g'' que, unidos por rectas, formarán la otra base paralela á la $e'' m'' h'' m''$.

El contorno de la intersección $s 2'' 3' 2''' j'' 1''' 4' 1' s$ se obtiene fácil-



mente, pues se reduce á determinar puntos de intersección de rectas con planos, correspondientes unas y otros á las aristas y caras respectivas de los prismas de referencia. Esta operación se realiza en el sistema axonométrico por idénticos procedimientos que los empleados en el ortogonal.



Así es que para hallar las intersecciones j'' y s de la arista $b'p$ con las caras $m''e''f''n'''$ y $e''m''n''f''$, se trazará de b' á r una paralela al eje X; desde r otra paralela al eje Z, que cortará á las respectivas aristas $e''m''$ y $e''m'''$ en s y j' , puntos desde donde se correrán paralelas al eje X, las que encontrarán á la arista $b'p$ en s y j'' , los cuales pertenecen á la intersección que se busca.

La determinación de otros puntos del contorno de intersección, tales como el $2''$ y $2'''$, aun se verifica más directamente; basta levantar desde el punto $2'$, intersección de la proyección $m'n'$ con la $b'd'$, una paralela al eje Z que, al cortar á las respectivas aristas $m''n''$ y $m'''n'''$, dará en los puntos $2''$ y $2'''$ las intersecciones propuestas.

Determinados de igual manera los puntos que restan, se unirán mediante rectas que representan, en este caso, intersecciones de planos; teniendo cuidado de distinguir las líneas vistas de las ocultas, operación que ofrece pocas dificultades en la proyección axonométrica, por la apariencia de perspectiva que tienen los cuerpos mediante ella representados.

36. Intersección de dos cilindros de revolución, cuyos ejes se cortan perpendicularmente (fig. 31).—Sean círculos iguales las bases de estos cilindros, situadas las del cilindro vertical, paralelas al plano X Y y las del

horizontal paralelas al X Z. De este modo, el eje $o o'$ del cilindro vertical será paralelo al coordenado Z, y el $V V'$ del cilindro horizontal paralelo al Y; con la particularidad de que los ejes de ambos cilindros se cortan en A, punto medio de ellos.

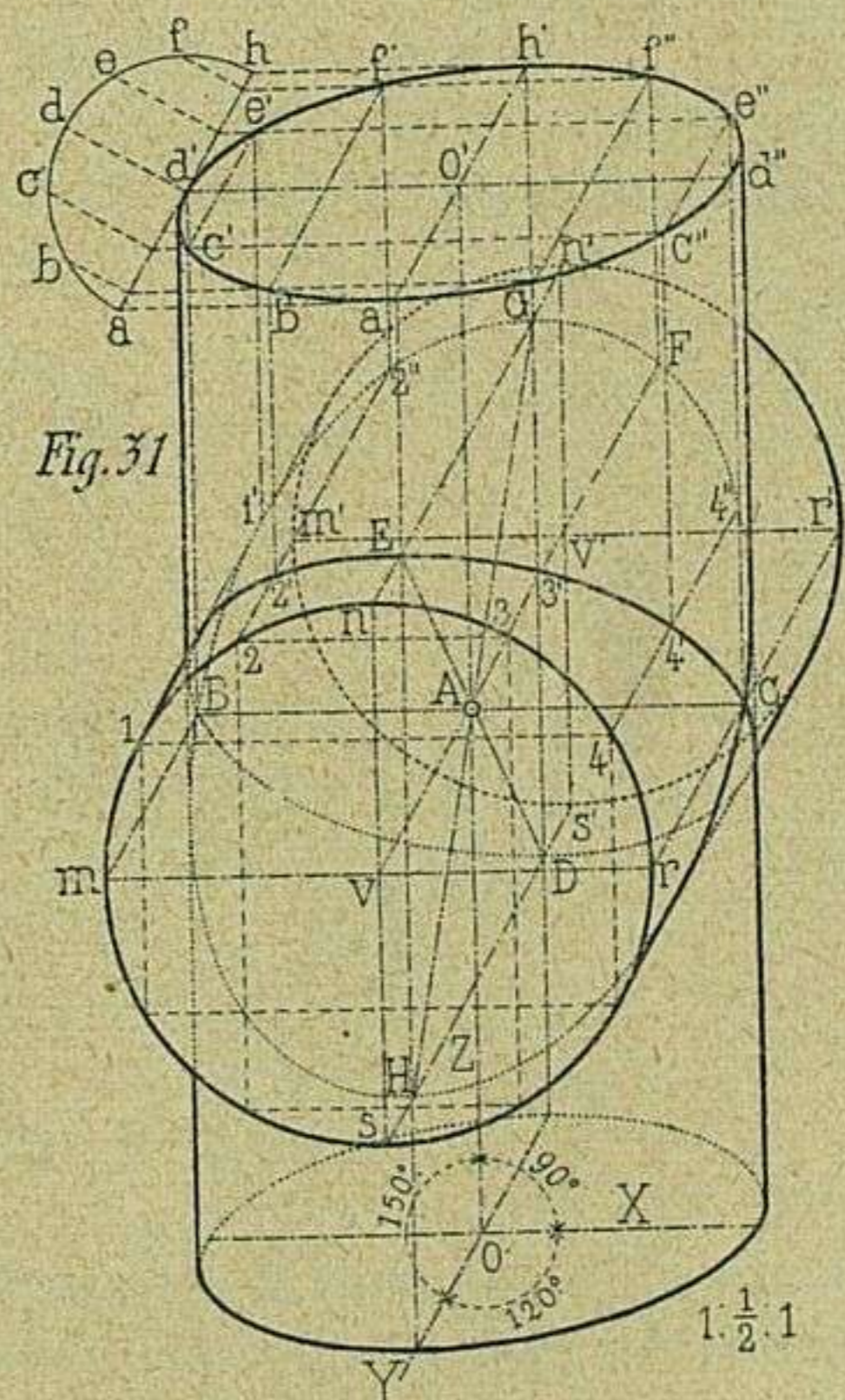
La combinación de ejes adoptada, es la horizontal vertical (V. 33) y las escalas axonométricas $1 : \frac{1}{2} : 1$.

Desde luego se comenzará por la representación de los cilindros conforme á los datos expuestos. Para ello se trazarán los ejes $o o'$ y $V V'$ respectivamente, paralelos á los coordenados Z é Y, con la condición establecida de que se corten en el punto A equidistante de los extremos $V V'$ y $o o'$. Desde los puntos V y V' se describirán círculos de radio $V m$, que representarán las bases del cilindro horizontal paralelas al plano X Z.

La base superior del cilindro vertical es, como la inferior, una elipse cuyos diámetros conjugados $d' d''$ y $a h'$ son respectivamente paralelos á los ejes X é Y, siendo la longitud del $a h'$, la mitad de la que corresponde al $d' d''$. El trazado de esta elipse mediante sus diámetros conjugados, puede verse en la primera parte de este tratado, núm. 89; aunque también se entiende con suficiente claridad en la adjunta figura 31, siguiendo atentamente la marcha de la notación y trazado de líneas auxiliares. Trazadas que sean las dos elipses, bases del cilindro vertical, se completará su representación, así como la del horizontal, con los dos pares de generatrices correspondientes al contorno aparente de los respectivos cilindros.

En el caso actual, la intersección de los cilindros se verifica según dos elipses, que teniendo el mismo centro en A, se cortan perpendicularmente según el diámetro común BC; distinguiéndose la una de la otra en la diferente longitud de los respectivos diámetros DE y GH conjugados con el BC.

Los diámetros DE y GH corresponden á las diagonales del paralelogramo EHDG, compuesto con las generatrices que resultan de cortar ambos cilindros por el plano que forman los dos ejes $o o'$ y $V V'$. Así es, que la intersección quedará determinada, después de trazar, mediante sus diámetros conjugados, las dos elipses de referencia; mejor aún, puesto que estas elipses tienen el diámetro común BC igual y paralelo al $d' d''$, se utilizará esta propiedad para deducir directamente de los puntos $a n' c'' d'' e'' f'' \dots c', b'$, que forman la elipse base superior del cilindro vertical, los correspondientes en las elipses



de la intersección, procediendo en esta operación como se indica en el número **90** de la primera parte de este tratado (segunda edición).

37. Representación axonométrica del dodecaedro regular (fig. 32).

Sean $1 : \frac{1}{2} : 1$, las escalas axonométricas y la combinación de los ejes tal, que el Y forme ángulos de 135° con los X y Z respectivamente, según se ve en

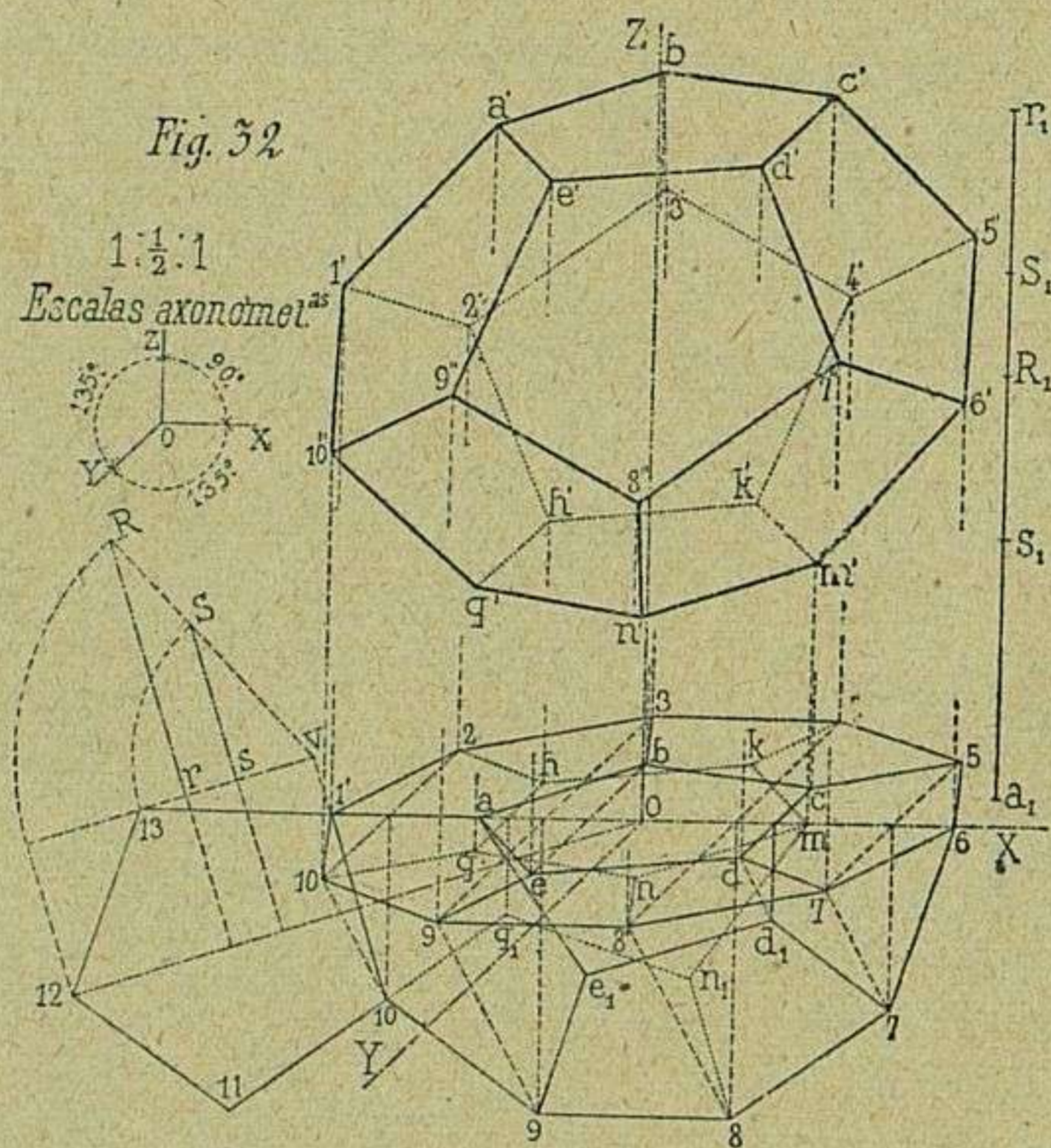


Fig. 32

1:1/2:1
Escala axonométrica

la adjunta figura 32. Además, se dispone como dato indispensable del pentágono regular $1', 10, 11, 12, 13$, correspondiente á una de las caras del dodecaedro que se ha de representar.

Con arreglo á este dato, se construirá en planta la mitad de la proyección ortogonal $1' 10 9 8 7 6$, de dicho poliedro (V. **64**, *Proyecciones ortogonales*) á partir del eje X; de cuya mitad se deducirá la proyección axonométrica completa situada sobre el plano X Y en $1' 2 3 4 5 6 7' 8' 9' 10'$ (V. **18**).

Siguiendo el procedimiento empleado para la representación del dodecaedro en proyecciones ortogonales (V. **64**, *Proyecciones ortogonales*), se acotarán sobre la recta $a_1 r_1$, que se ve á un lado de la figura, las distintas alturas que han de corresponder á las respectivas series de vértices situados en planos paralelos al X Y. Así es que, $a_1 s_1$ representa la altura que media entre el plano X Y y el del polígono $n' m' k' h' q'$, cuyos vértices se obtienen en los extremos de las paralelas al eje Z, levantadas en $n m k h q$, iguales cada una de ellas á la longitud $a_1 s_1$.

La longitud $s_1 R_1 = s S$ (V. **64**, *Proyecciones ortogonales*), añadida á la anterior, dará la altura $a_1 R_1$ que media entre el plano X Y y los vértices $8'' 6' 4' 2' 10''$, extremos de las paralelas al eje s , levantadas en los respectivos puntos de la planta $8' 7' 4 2$ y $10'$.

La tercera serie de vértices $9'' 7'' 5' 3' 1'$ se halla distribuida en los extremos de las paralelas al eje Z, levantadas en $9' 7' 5 3 1$, cuya longitud $a_1 S_1$ se ha determinado, añadiendo de s_1 á S_1 la cantidad lineal $r R$ (V. **64**, *Proyecciones ortogonales*).

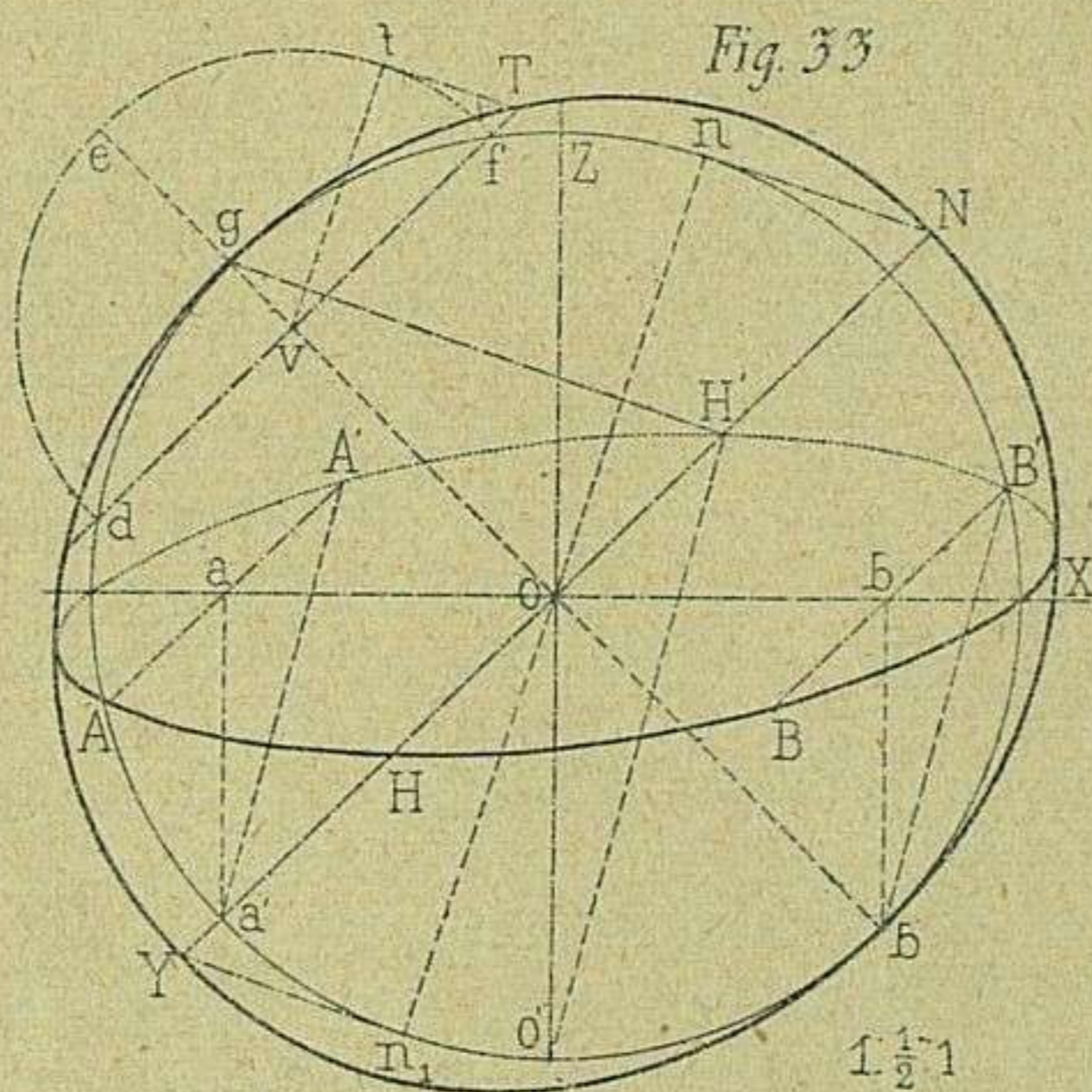
En igual forma se determinará la cuarta y última serie de vértices $a' b' c' d' e'$, situados en un plano horizontal, cuya separación respecto al X Y es igual $a_1 r_1$, longitud total de la línea, donde se han consignado las anteriores

alturas. Esta última altura se ha determinado añadiendo de S_1 en r_1 la longitud $R_1 s_1$.

Ahora sólo falta unir uno á otro, mediante las correspondientes aristas, los vértices del poliedro que se han obtenido, guiándose para el deslinde de líneas vistas y ocultas que resulta algo complicado, por la proyección representada en el plano $X Y$.

38. Representación axonométrica de la esfera (fig. 33). — Sean $a' b' n g$ un círculo máximo de la esfera paralelo al plano $X Z$, $1 : \frac{1}{2} : 1$ las escalas axonométricas adoptadas, y sea dispuesta la situación de los ejes de modo que el Y forme con cada uno de los otros ejes ángulos iguales de 135° .

Mediante el diámetro del círculo dado y el conjugado $H H'$ se trazará la elipse $A A' H' B' B H$ (V. **39**, 1.^a parte), cuyo plano coincide con el coordenado $X Y$, representando el ecuador de dicha esfera.



Suponiendo á la esfera envuelta en un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje Y , la intersección de este cilindro proyectante con el plano principal será el contorno aparente de dicha esfera, representado por una elipse, puesto que resulta de cortar el cilindro envolvente por el plano principal oblicuo á sus generatrices.

La dirección de dichas generatrices (obtenida mediante al abatimiento del plano $Y o N$ sobre el $X Z$), corresponde á la hipotenusa $g H'$ del triángulo rectángulo $g o H'$, donde el cateto $o H'$ es igual á la mitad del $o g$.

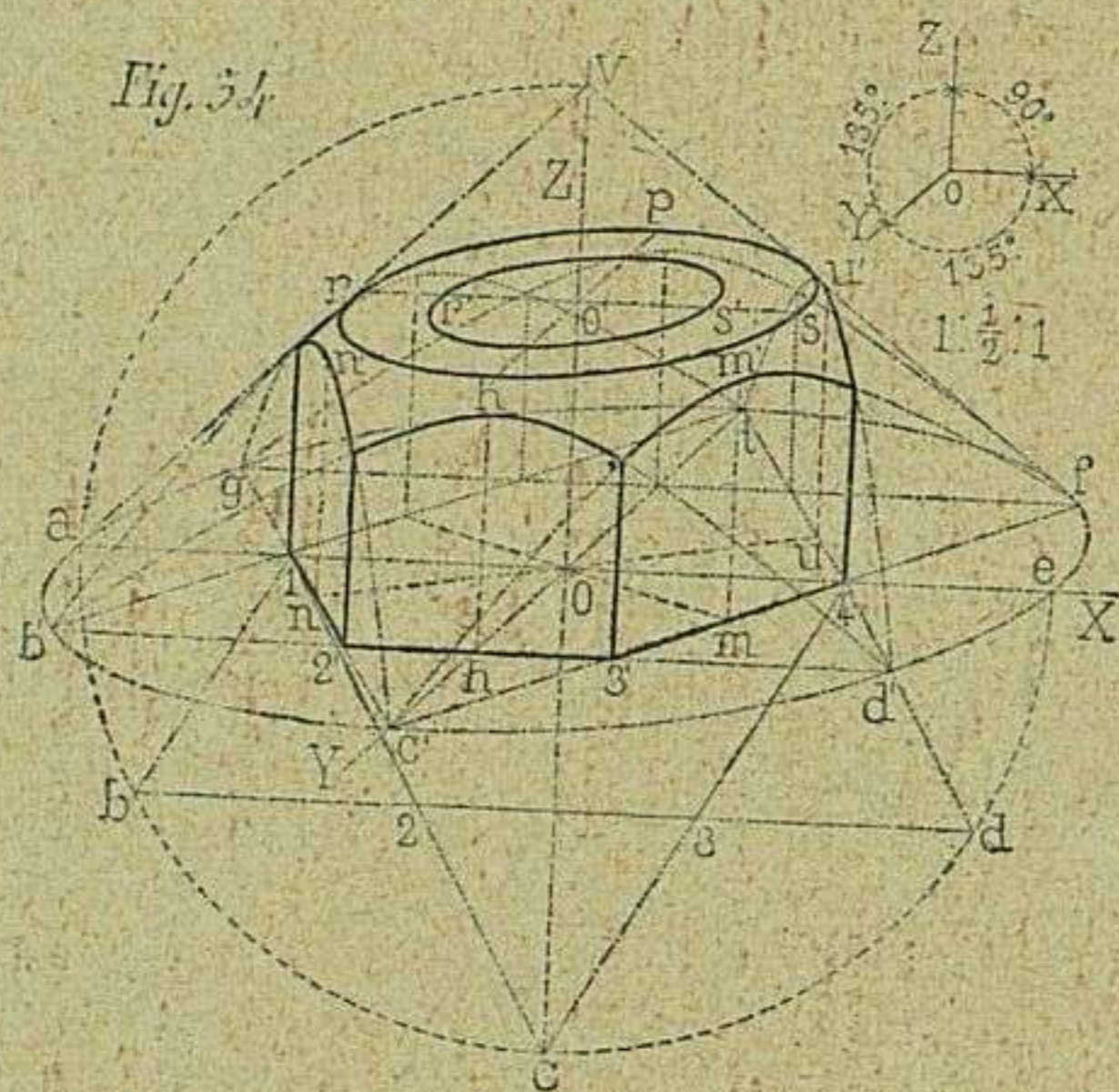
Trazando, pues, en n y n' las tangentes respectivas paralelas á $g H'$, quedarán determinados en N é Y los extremos del eje mayor de la elipse correspondiente al contorno aparente, cuyo eje menor $g b$ es diámetro del círculo que figura como dato.

Un punto cualquiera se determina cortando la esfera por un plano perpen-

dicular al XZ , cuya traza df sea paralela al eje Y . Abatido este plano según el semicírculo def , la tangente que pasa por t , paralela á la dirección gH' , dará en su intersección con la traza df el punto T que pertenece al contorno aparente de referencia.

39. Representación de una tuerca (fig. 34). — Sean las escalas axonómicas $1 : \frac{1}{2} : 1$ y de 135° los respectivos ángulos que forman los ejes XoY y ZoY .

La tuerca que se representa en este ejercicio aparece inscrita en un cono de revolución $nc'etv$, del cual se ha formado, cortándole por seis planos paralelos al eje Z , cuyas trazas sobre el plano XY , coinciden con los lados de un polígono estrellado, inscripto en la base del cono, y además seccionando dicho cuerpo redondo por otro plano paralelo al XY , representado por las rectas rs y hp .



En primer lugar, se traza la proyección axonómica del círculo de la base $gb'e'd'f't$ valiéndose de la ortogonal $bced$ (V. 17), y trazada que sea la elipse, que pasá por los puntos de referencia, se unirán éstos de tres en tres, de manera que sobre

el plano XY quede representado el exágono estrellado de segunda especie, cuyos lados $b'd'$, $d't$, $t'b'$, gc' , $c'f$ y fg , corresponden á las trazas de una serie de planos, que por ser paralelos al eje ov del cono, originan en su intersección con esta superficie curva otras tantas ramas de hipérbola igual. Para determinar algunos puntos de ellas, además de los consignados, véase el núm. 93 de proyecciones ortogonales.

Los citados planos, al cortarse unos con otros en 1, 2, 3, 4, etc., lo verifican según rectas paralelas al eje Z , limitando las caras laterales que forman la superficie prismática de la tuerca. Las aristas curvas situadas en $n'h'm'n'$, etcétera, son los segmentos correspondientes á las respectivas hipérbolas, que se utilizan en la representación de la tuerca.

La elipse rhp pertenece al contorno de la sección producida por un plano paralelo al XY , que se supone corta perpendicularmente al eje del cono á la altura o' . Esta elipse y la $r's'$ que se halla en el mismo plano que su concéntrica en o' , se trazan mediante los respectivos diámetros conjugados (V. 17), paralelos á los ejes X é Y .

La operación puede darse por terminada con el deslinde de líneas vistas y ocultas.

40. Representación del nicho esférico (fig. 35). — Sean las escalas

axonométricas adoptadas $1 : \frac{1}{2} : 1$ y el eje Y dirigido de manera que forme con los otros dos ángulos de 135° .

El nicho esférico en su parte visible se compone de la superficie cilíndrica $a h u_1 p b a''$ y de la esférica $a m b$, unidas ambas por la curva de contacto $a a'' b$. Estas dos superficies son cóncavas, y el eje común de ellas $o o'$, identificado con el coordenado Z, está además contenido en el plano del muro, que á su vez es paralelo al X Z.

En estas condiciones, el plano del muro corta al cilindro y esfera combinados, según el contorno $a d b p h$, compuesto de una semicircunferencia á la que son tangentes en a y b respectivamente dos generatrices del cilindro, cortadas en sentido perpendicular por la recta $h p$ que cierra dicho contorno.

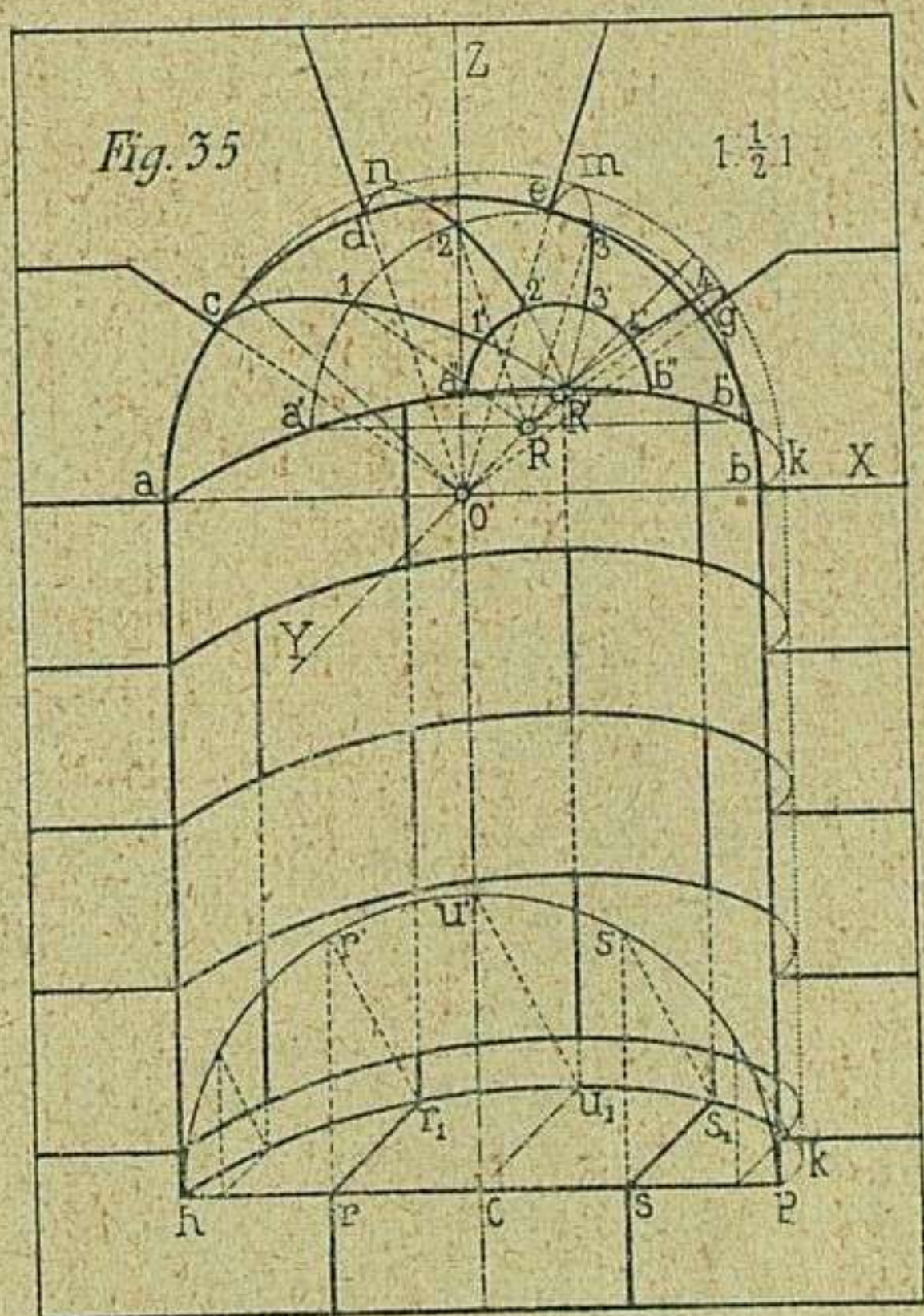
Para trazar la semielipse $h r_1 u_1 s_1 k p$, correspondiente á la base del semicilindro, se procederá según se indica en el núm. 17, valiéndose de los diámetros conjugados $h p$ y $o u_1$, paralelos á los ejes respectivos X é Y.

Las semielipses que limitan las hiladas de sillares, incluyendo las que pertenecen á las bases del cilindro, son todas iguales y están situadas en planos paralelos, razón por la cual se trazarán equidistantes, valiéndose de las generatrices del cilindro para conseguir dicha equidistancia, al mismo tiempo que para determinar las líneas de junta verticales. Además, dichas semielipses se trazan tangentes á la generatriz $k k'$, contorno oculto del cilindro, como $k g m n c$ lo es de la esfera, trazado el de este último cuya explicación se ha dado en el núm. 38.

Las líneas de junta que desde los puntos c, d, e, g van á concurrir en R' , marcan, en unión del contorno $a'' 1', 2', 3', 4' b''$ del trompillon, el despiece de las dovelas correspondientes al intradós de la bóveda esférica.

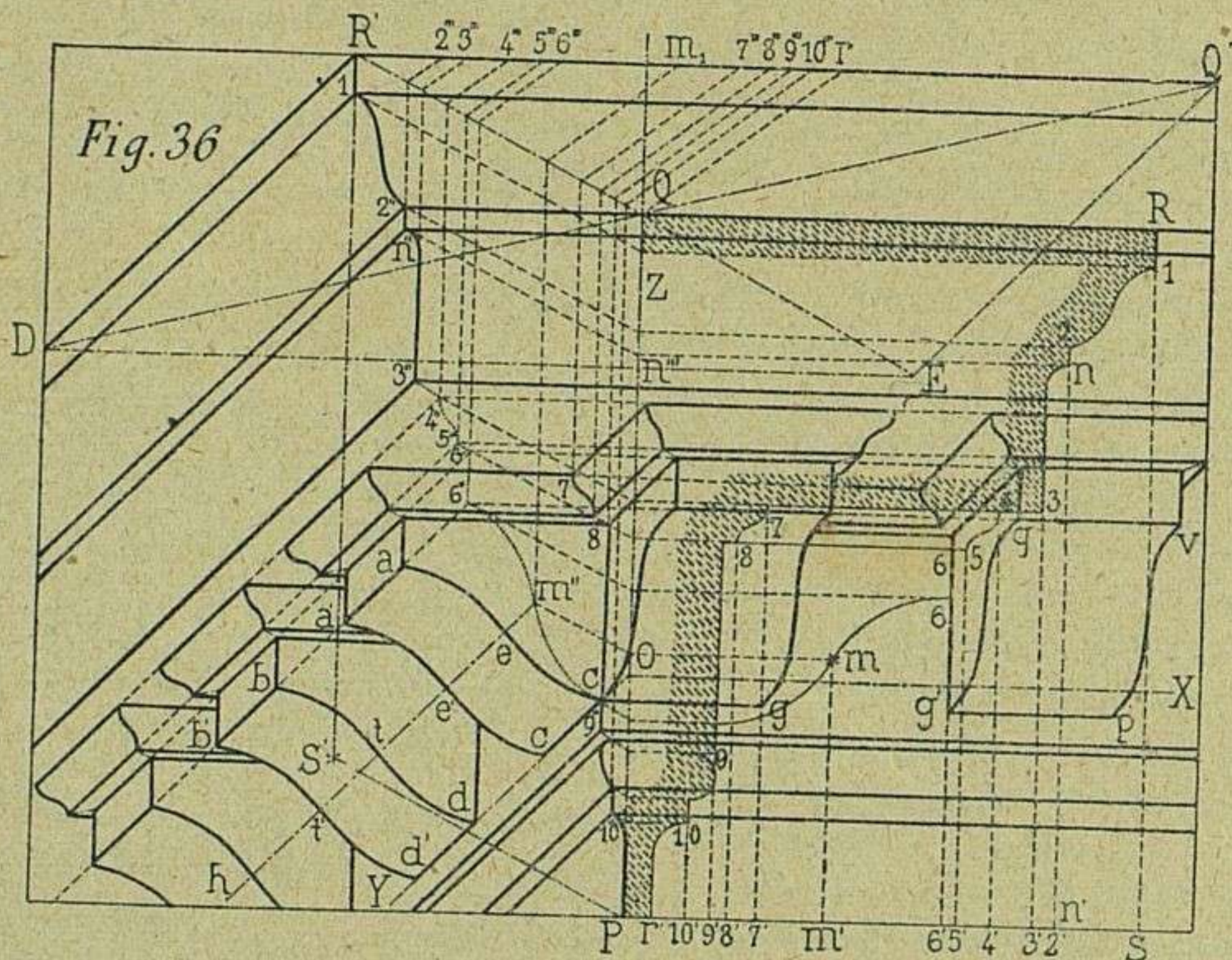
Trazada desde R' la semicircunferencia que sirve de contorno al trompillon, situada en un plano paralelo al X Y, se procederá á describir desde R otra semicircunferencia $a' 1 2 3 4 b'$, promediada entre la del trompillon y la máxima situada en la superficie del muro y paralela, como ellas, al plano X Z.

Ahora bien: cada una de estas semicircunferencias se dividirá en cinco partes iguales, cuyos puntos de división servirán de paso para el trazado de los segmentos de elipse que representan las líneas de junta de las dovelas. Así, por ejemplo, el segmento que comienza en c pasa por los puntos 1 y 1' para



terminar, con los demás, en R'; el siguiente da principio en d, es tangente en n al contorno de la esfera y pasa por los puntos 2 y 2' para concluir en R'. Siguiendo esta marcha, se trazarán los segmentos em 3 3' y g 4 4' que faltan, con lo cual quedará terminada la representación del nicho esférico.

41. Representación axonométrica de molduras (fig. 36).— Las molduras representadas en esta figura forman una cornisa sostenida por ménsulas (1). El eje Y forma ángulos de 135° con los otros dos ejes coordenados, y las escalas axonométricas son $1 : \frac{1}{2} : 1$.



Lo más importante de la operación que ha de verificarse consiste en trazar la proyección axonométrica del perfil de las molduras en conjunto, situado sobre el plano R' S' P Q (2), llamado *inglete*, el cual está determinado por la recta R' Q y el eje Z. La recta R' Q corresponde á la mitad de la diagonal R' E del paralelogramo R' D E Q, cuyos lados son respectivamente paralelos á los ejes X é Y.

Así, pues, para trazar el perfil sobre el plano de inglete, se colocará sobre el Q R S P, paralelo al X Z, la proyección ortogonal del citado perfil, provista

(1) Los datos para este ejercicio, se han tomado de la fig 2.^a, lámina 17, serie A, perteneciente á la Primera parte de este Tratado.

(2) Conviene entender que el plano R' S' P Q es bisector del ángulo diedro recto formado por los planos D R' S' y Q R' S', respectivamente paralelos á los coordenados Y Z y Z X. De donde resulta la línea R' Q bisectriz del ángulo recto formado por las rectas R' Q y R' D paralelas á los respectivos ejes X é Y.

de una cuadrícula auxiliar, compuesta de ordenadas y abscisas, cuyo objeto, tanto en la proyección ortogonal como en la axonométrica, es determinar los puntos principales del perfil en las intersecciones de las coordenadas respectivas.

Al relacionar la cuadrícula ortogonal con la axonométrica situada en el inglete, es preciso tener en cuenta que, si bien la dimensión PQ , paralela al eje Z , no varía (por ser común á los dos planos $R'QP$ y RQP), la Sr , por el contrario, ha de sufrir, al colocarla de R' en Q , una reducción de la que proporcionalmente, participarán los puntos de división en ella contenidos. Esta operación se verifica trasladando los puntos $s\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ 6'\ m'\ 7'\ 8'\ 9'\ 10'\ r'$ sobre $R'Q'$ en $R'\ 2'''\ 3'''\ 4'''\ 5'''\ 6'''\ m_1'''\ 7'''\ 8'''\ 9'''\ 10'''\ r$, y luego de aquí á la semidiagonal $R'Q$ (V. primera parte, **120**, ó segunda edición, **123**), desde cuyos puntos se trazan paralelas al eje X , que en combinación de las otras paralelas á la diagonal $R'E$, forman la cuadrícula auxiliar axonométrica trazada en el plano de inglete.

De modo que, para comprender mejor la idea, un punto n , perteneciente al perfil en proyección ortogonal, pasa á situarse en n''' , siguiendo dirección paralela al eje X , y de n''' , trazando otra paralela á la diagonal $R'E$, encontrará á la ordenada correspondiente, paralela al Z , en $2''$, punto situado en el perfil axonométrico como el n corresponde al ortogonal.

Desde n'' y demás puntos análogos se trazarán paralelas á los ejes X é Y , las cuales representarán las respectivas aristas que corren á lo largo de las molduras del frente y costado en la presente cornisa.

Para la representación de las ménsulas há de tenerse presente que, por ejemplo, á una longitud qv , situada en una de ellas y paralela al eje X , corresponde otra en bb' , que por ser paralela al eje Y , queda reducida á la mitad. Al contrario, los vuelos de las ménsulas adosadas al plano XZ , equivalen á la mitad de los que corresponden á las otras ménsulas que sobresalen en el plano YZ .

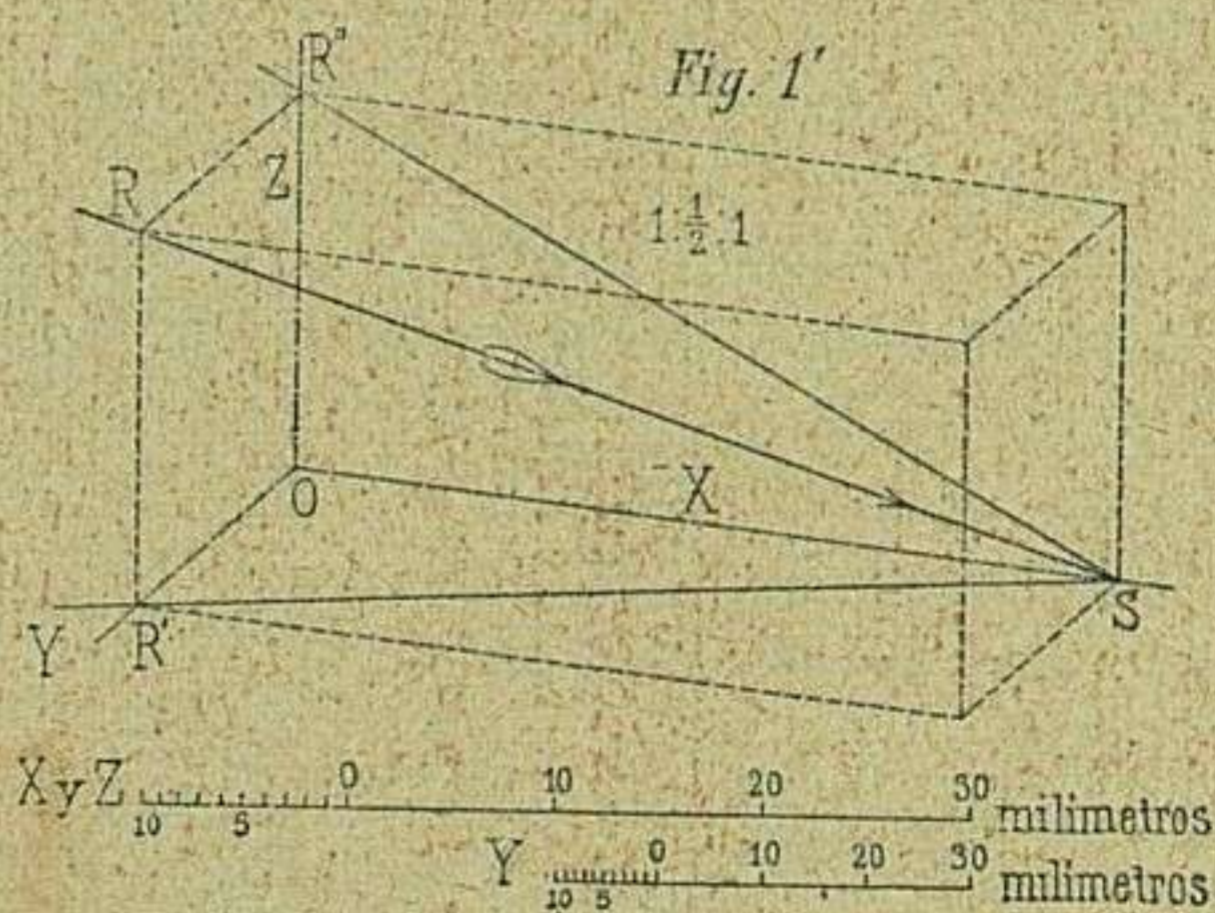
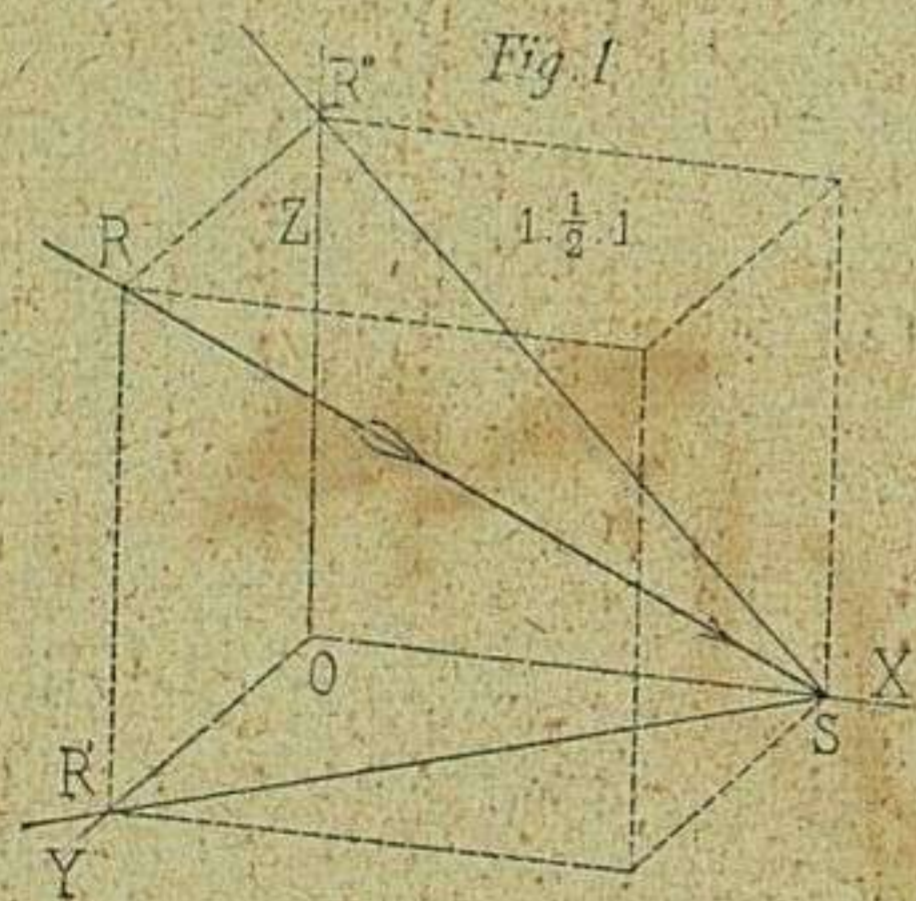
La terminación del dibujo es ya sumamente fácil, suponiendo, como es natural, que se han resuelto con anterioridad problemas análogos.

TRAZADO DE SOMBRAS

EN EL SISTEMA DE PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS

1. La determinación de sombras en los objetos proyectados, según el sistema axonométrico, se funda en los mismos principios que ya se expusieron al tratar de las sombras en el sistema ortogonal. Por consiguiente, los procedimientos que se empleen han de ser análogos, si bien en este caso más fáciles de aplicar, pues ya habrá habido ocasión de notar que en axonometría no existen las dificultades de representación que á cada paso se ofrecen en el sistema ortogonal.

La dirección de los rayos luminosos, que también se suponen paralelos, no tiene aquí más trascendencia que la de producir efectos armónicos en la combinación de luz y sombra, ayudando á la apariencia corpórea que debe darse á los cuerpos. Lo mismo puede convenir que sean paralelos á la diagonal del cubo que á la de un paralelepipedo rectangular, pero con la condición de que, sea cubo ó sea prisma el que se prefiera para establecer mediante su diagonal la dirección del rayo luminoso, tres de las aristas que forman uno de los ángulos triedros han de coincidir con los ejes coordenados X Y Z, ó ser paralelas á dichos ejes.



2. Sean (figs. 1 y 1') un cubo y un paralelepipedo rectangular, proyectados conforme al sistema dimétrico $1 : \frac{1}{2} : 1$, coincidiendo las aristas SO , $R'O$ y $R''O$ con los respectivos ejes X , Y , Z . En ambos la diagonal RS indica la dirección que los rayos luminosos han de seguir en el espacio.

Proyecciones auxiliares del rayo luminoso se consideran la recta $R'S$, dia-

gonal del cuadrilátero situado en el plano X Y, y la R'' S, diagonal de otro cuadrilátero situado en el plano X Z.

El rayo R S, con la proyección R' S, forma un plano luminoso, paralelo al eje Z, cuya traza R' S indica la dirección que sobre el plano X Y han de seguir las sombras de rectas paralelas al eje Z.

Asimismo, el rayo R S, con su proyección R'' S, constituye otro plano luminoso, paralelo al eje Y, cuya traza R'' sirve para indicar sobre el plano X Z la dirección de sombras correspondientes á líneas que sean paralelas al eje Y.

Sobre el plano Z Y no se considera proyección alguna del rayo luminoso en razón á que dicho plano, dada la orientación acostumbrada de la luz, queda por completo cubierto de sombra (1).

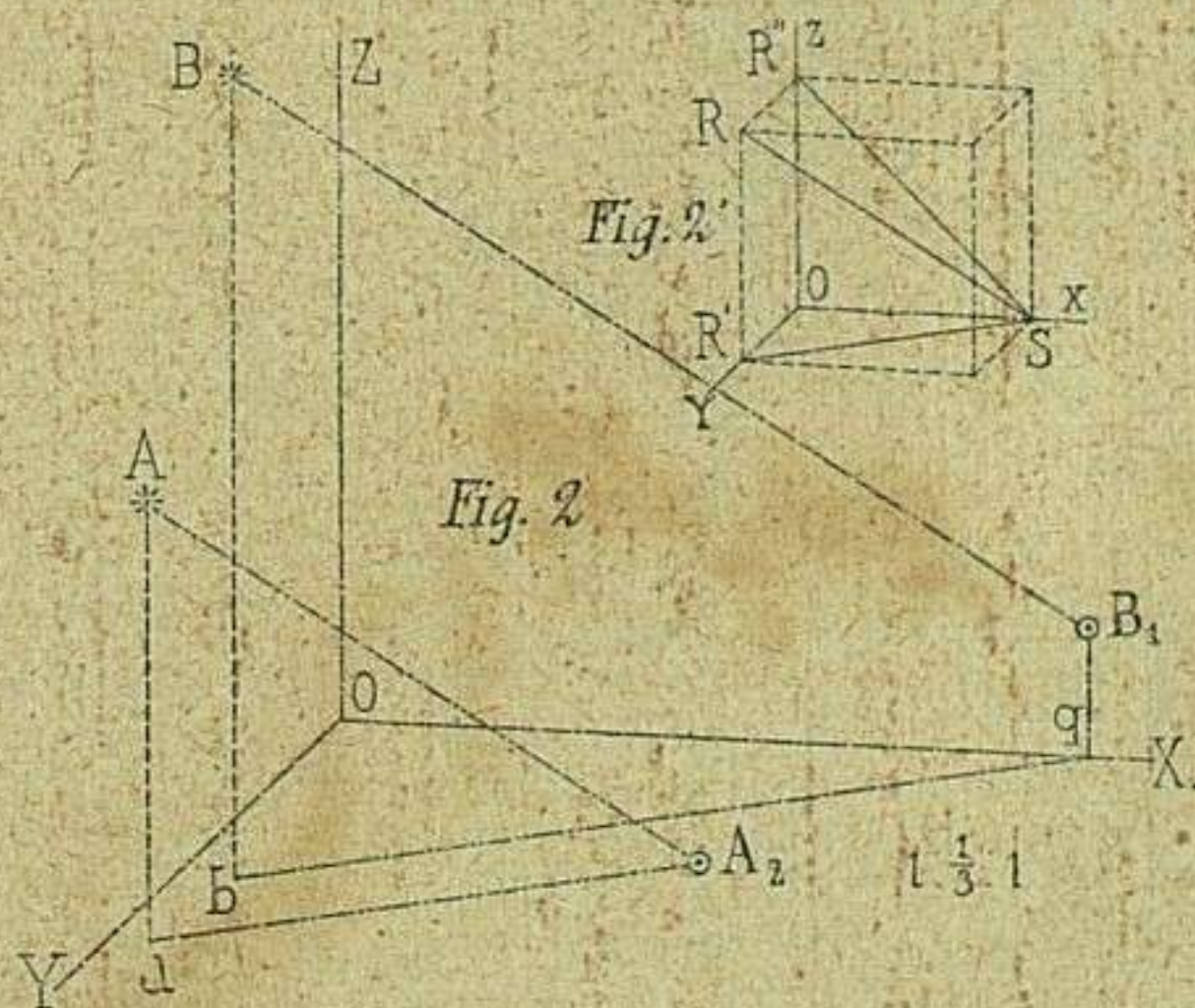
Para mayor claridad y menos redundancia en las descripciones, á cada problema ó ejercicio de los que á continuación se exponen, acompañan, además de las relaciones de escalas axonométricas, un pequeño diagrama, donde se puntualiza la dirección del rayo luminoso y sus proyecciones sobre dos de los tres planos coordenados.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

3. Sombras arrojadas de un punto sobre los planos coordenados (fig. 2). — Sean los puntos A y B, situados en el espacio, y R S (fig. 2') la dirección del rayo luminoso indicada por la diagonal de un cubo proyectado en el sistema dimétrico $1 : \frac{1}{3} : 1$.

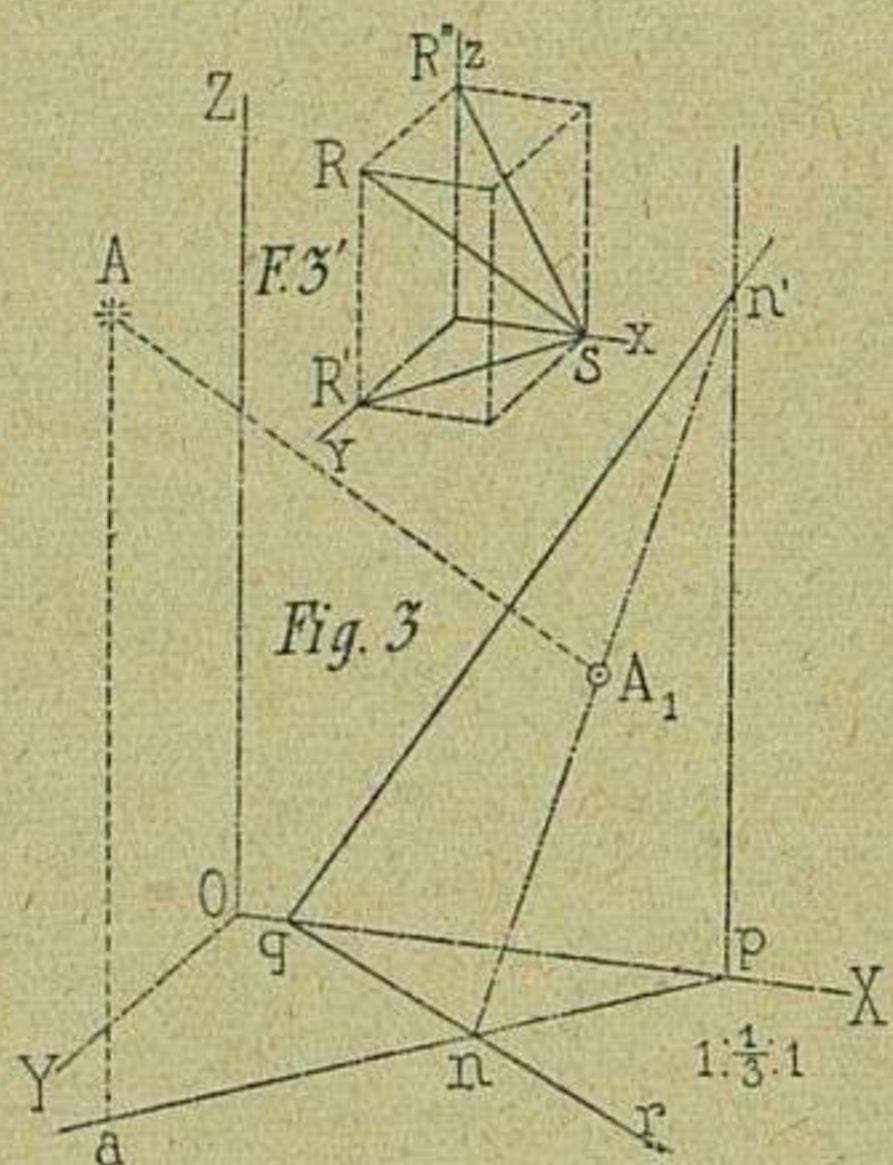
Se comienza por determinar en a sobre el plano X Y la proyección del punto A, mediante la paralela A a al eje Z. Ahora, por A se traza una paralela al rayo luminoso R S (fig. 2'), y por a otra paralela á la proyección R' S. La intersección de estas paralelas dará en A_2 la sombra arrojada por A sobre el plano X Y, que no es otra cosa más que la traza del rayo luminoso con dicho plano.

De igual manera se conduce la operación para determinar la sombra del punto B, sólo que, en este caso, la paralela á R' S, trazada por b , encuentra al plano X Z en q , punto desde el cual se levanta una paralela al eje Z, que en su intersección con la otra paralela al rayo R S, que pasa por el punto B, dará en B_1 dicha sombra. Este punto B_1 corresponde á la traza, sobre el plano X Z, del rayo luminoso que pasa por B.



(1) Se acostumbra en la mayoría de los casos á considerar los rayos luminosos en

4. Sombra arrojada de un punto sobre un plano cualquiera dado por sus trazas (fig. 3).



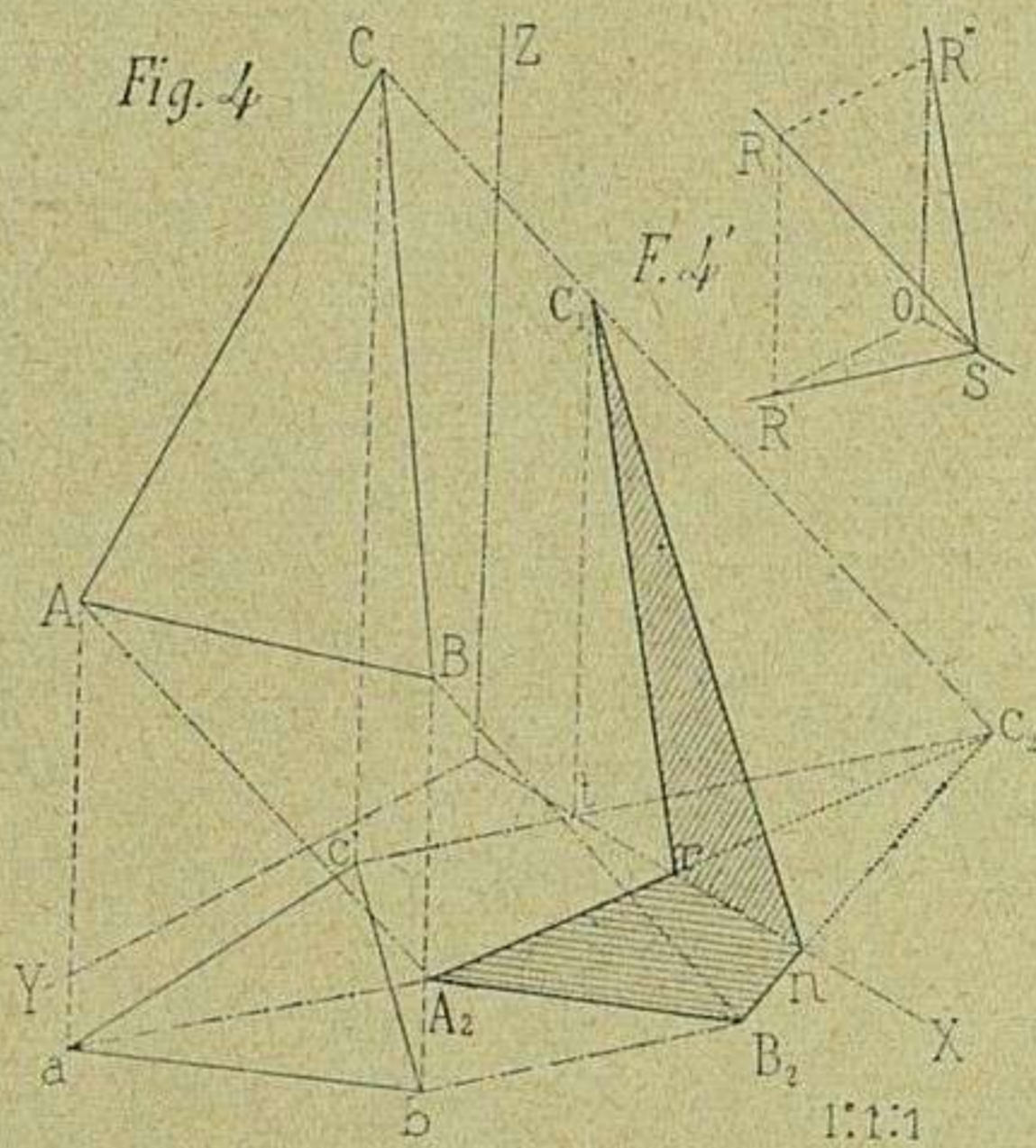
— Sean $r q$ la traza del plano dado sobre el $X Y$; $q n'$ la otra traza sobre el plano $X Z$; $R S$ (fig. 3') la diagonal del prisma identificada con la dirección del rayo luminoso proyectado conforme al sistema métrico $1 : \frac{1}{3} : 1$ y, finalmente, A el punto dado en el espacio cuya sombra se trata de hallar.

Determinada sobre el plano $X Y$, la proyección a del punto A , se hará pasar por $A a$ un plano luminoso auxiliar cuya traza $a p$ sea paralela á la proyección $R' S$ (fig. 3') del rayo luminoso. Hállese la intersección de los planos $a p n'$ y $r q n'$, que resultará en $n n'$; pues bien, el encuentro del rayo luminoso que pasa por A , con la recta intersección $n n'$, dará en A_1 la sombra arrojada por el punto sobre el plano $r q n'$.

Este problema se reduce á determinar la intersección de una recta con un plano dado por sus trazas (V. *Proyecciones ortogonales*, 45) y la operación se verifica de igual manera que otra análoga explicada en el núm. 19, correspondiente á las sombras en el sistema ortogonal.

5. Sombra arrojada por un triángulo sobre los planos coordenados (fig. 4).—Sean por una parte $A B C$ el triángulo dado juntamente con su proyección $a b c$, sobre el plano $X Y$ y por otra $R S$ (fig. 4') la dirección del rayo luminoso, todo ello representado conforme al sistema isométrico expresado por las escalas $1 : 1 : 1$.

Procediendo como queda indicado en el número 3, se hallarán las trazas sobre el plano $X Y$ de los rayos luminosos que pasan por $A B C$, vértices del triángulo. Dichas trazas quedarán situadas en $A_2 B_2 C_2$, y unidas mediante rectas, darán la sombra arrojada



dirección más ó menos opuesta al plano $Y Z$; pero alguna vez se quebranta la costumbre, como sucede en la lámina 8.^a, serie F, donde por conseguir ciertos efectos, se ha tomado la dirección $R S$, en opuesto sentido al plano $X Z$, por lo cual se ha prescindido de dicha proyección sobre el plano $X Z$ para determinarla en el $Y Z$, que es donde se utiliza.

del triángulo en el plano X Y; pero de esta sombra sólo es visible en este plano, la parte $r A_2 B_2 n$. Por consiguiente, se determina en C'_1 la traza del rayo luminoso $C C_2$ con el plano X Z (V. 3), y uniendo mediante rectas los puntos n y r con el C_1 , se tendrá la sombra arrojada de dicho triángulo sobre el plano X Z.

6. Sombra arrojada de un cuadrilátero sobre uno de los planos coordenados y otro dado por sus trazas (fig. 5). — Sean el cuadrilátero A B C D paralelo al plano Y Z, proyectado en $a b c d$ sobre el X Y conforme al sistema dimétrico $1 : \frac{2}{3} : 1$; el plano oblicuo á los coordenados X Y y X Z está dado por sus trazas $h r$ y $r q$; finalmente, sea R S (fig. 5') la dirección del rayo luminoso.

Procediendo según se indicó en el número 4, se harán pasar por los lados A B y D C del cuadrilátero, planos luminosos, en cuya intersección con el plano dado por sus trazas y los coordenados Z X y X Y coincidirán respectivamente las sombras arrojadas por dichos lados.

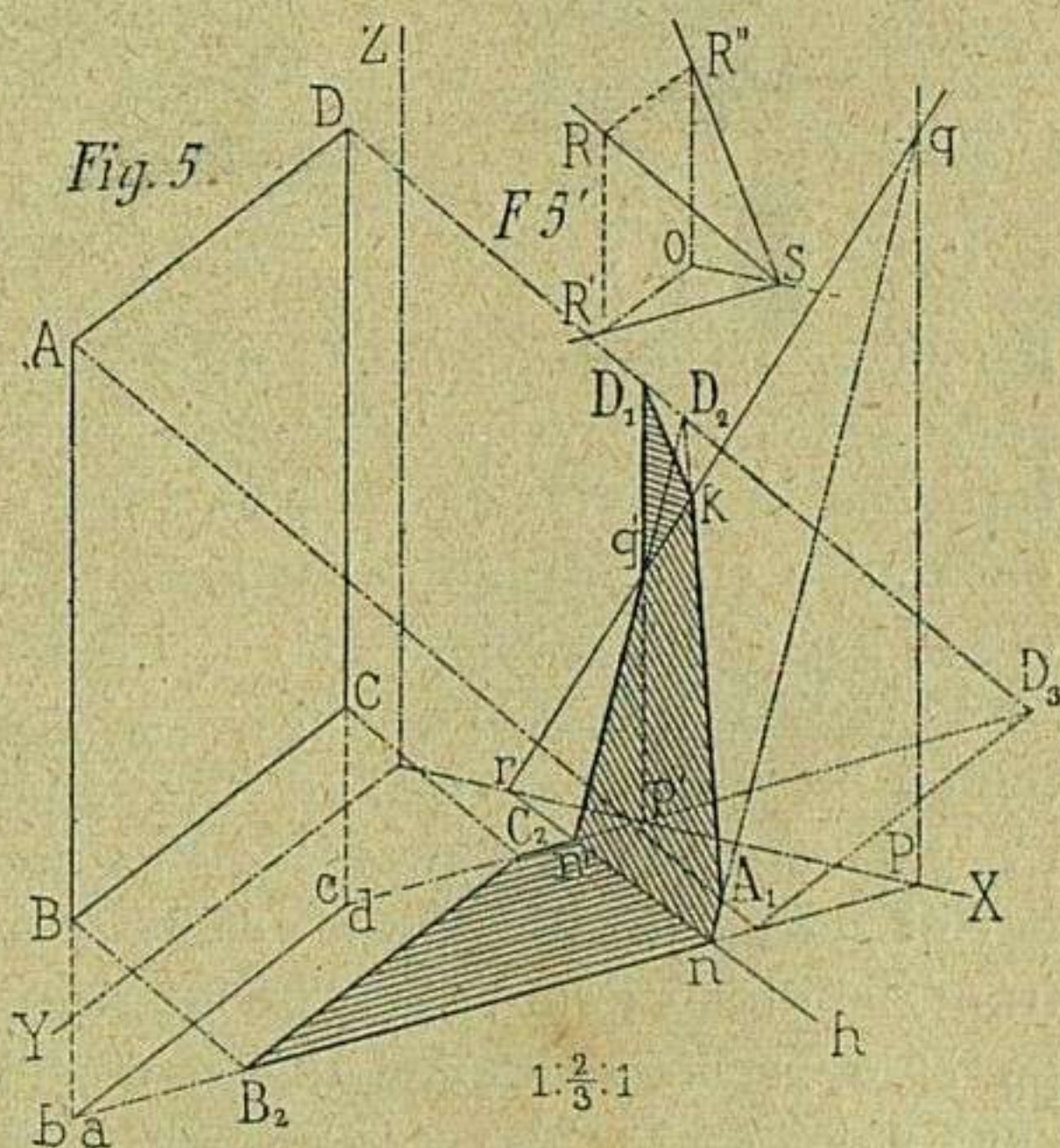
Así, el plano luminoso que pasa por A B cuyas trazas son, $a p$ paralela á R' S (fig. 5') y $p q$ paralela al eje Z, se cortan con el $h r q$ según la recta intersección $n q$ (V. núm. 19, *Sombras en el sistema ortogonal*), de la cual solamente se utiliza para el contorno de la sombra el pequeño segmento $n A_1$. El punto A_1 se halla situado en la intersección de $n q$ con el rayo luminoso que pasa por A.

Del mismo modo en $n' q'$ paralela á la $n q$ é intersección del plano dado por sus trazas, con el luminoso

que pasa por D C, se encuentra D_2 precisamente en el encuentro del rayo que pasa por D, punto que, unido mediante rectas al A_1 y n' , dará la sombra arrojada por los lados A D y D C sobre el plano $h r q$.

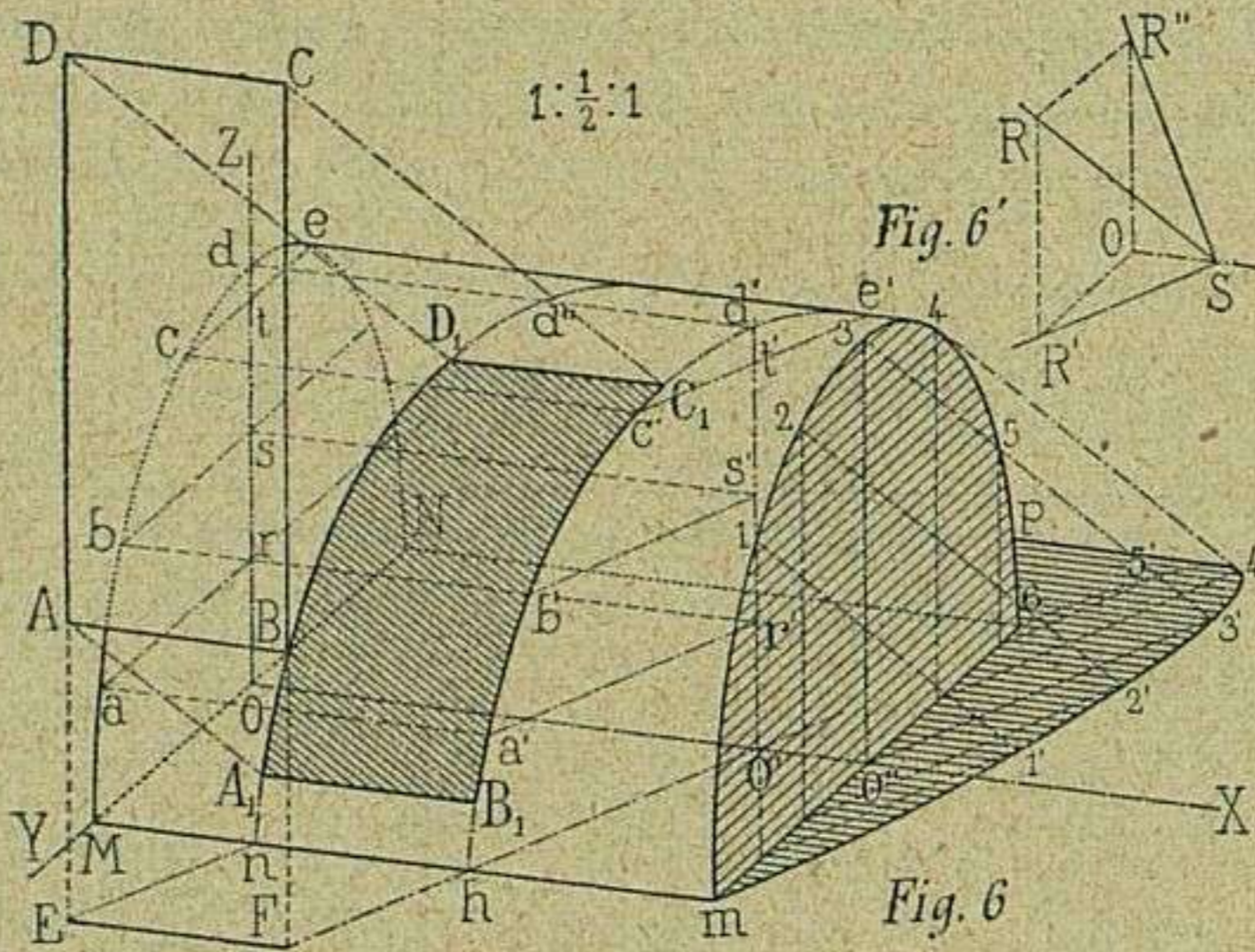
El contorno de sombra arrojada por A B sobre el plano X Y corresponde en $n B_2$ á la traza $b p$ del citado plano luminoso, y el de C D sobre dicho plano X Y, coincide con la traza $d D_3$ paralela á la $b p$. Dicho contorno queda limitado en B_2 por el rayo luminoso trazado por B; y en C_2 , según el que pasa por C. Estos y los demás rayos luminosos se trazan, como es consiguiente, paralelos al R S (fig. 5').

También los segmentos $q' D_1$ y $D_1 k$ situados en el plano X Z y paralelos respectivamente al eje Z y á la proyección $R'' S$ del rayo luminoso, corresponden á la intersección de los respectivos planos luminosos que se apoyan en D C y D A.



7. Sombra arrojada de un polígono sobre una superficie cilíndrica

(fig. 6).—Desde luego se suponen representados conforme á las escalas $1:\frac{1}{2}:1$, el semicilindro de revolución cuyo eje $o o''$ coincide con el coordenado X; el



paralelogramo rectángulo A.B.C.D. paralelo al plano X Z y la dirección del rayo luminoso (fig. 6').

Tal como el problema se plantea, queda reducido á determinar las varias secciones del cilindro, originadas por planos luminosos rasantes á los lados del paralelogramo ABCD. Así, á la sección producida por el plano luminoso que apoyándose en el lado BC, corta oblicuamente á

las generatrices del cilindro, corresponderá una elipse, cuyos semidiámetros conjugados son $o' h$ y $o' d'$, los cuales se determinan; el $h o'$, trazando por F (proyección de C B sobre el plano X Y), una paralela á R' S (fig. 6') hasta que encuentre en o' al eje del cilindro; y el $o' d'$ tirando por o' otra paralela al eje Z, hasta que encuentre en d' á la generatriz que pasa por d .

Para trazar el arco de elipse $h a' b' c' d'$, se procederá á deducir estos puntos de los $a b c d$ correspondientes á una de las bases del semicilindro dado (V. Primera parte, segunda edición, núm. 90). Por ejemplo, para determinar el punto b' , se trazarán $s s'$ y $b b'$ paralelas á $o o'$ eje del cilindro, encontrándose dicho punto b' en la intersección de $b b'$ con la recta que pasando por s' , es paralela al semidiámetro $h o'$. De igual modo se determina otro punto cualquiera de los que restan, y en cuanto al trazado del arco de elipse $n d''$, como se origina de otro plano secante paralelo al anterior, pasará por los puntos $n A_1 \dots D_1 d''$ respectivamente equidistantes de los $h B_1 \dots C_1 d'$ situados en puntos extremos correspondientes á segmentos de generatrices que marcan el ancho de la sombra arrojada.

Las intersecciones del cilindro con los planos luminosos que se apoyan en los lados A B y D C se verifican según las rectas respectivas $A_1 B_1$ y $D_1 C_1$ que resultan generatrices del cilindro, porque el plano luminoso que las produce es paralelo á ellas. De esta manera queda terminado el contorno de la sombra propuesta.

También la base $m 3 6$ del cilindro proyecta sombra en el plano X Y. El contorno de ella pasa por los puntos $m 1' 2' 3' 4' 5' 6$. Un punto cualquiera de éstos se determina; el $3'$, por ejemplo, en la intersección del rayo luminoso que, paralelo á R S (fig. 6') pasa por 3, con la recta paralela á R' S (fig. 6') que pasa por o'' .

Este contorno queda terminado con la tangente tP , paralela á las generatrices del cilindro.

S. Sombra arrojada de un polígono sobre una superficie cónica (fig. 7). — Sea, por una parte, el semicono de revolución $rth'V$ adosado al plano YZ , coincidiendo además su base con el XY ; por otra, el paralelogramo rectángulo $ABCD$, paralelo al plano XZ , y acompañado de la proyección MN sobre el XY . Estos datos figuran proyectados con arreglo á las escalas $1 : \frac{2}{3} : 1$.

La dirección del rayo luminoso se ha tomado en el caso actual, paralela á la diagonal RS (fig. 7') del cuadrilátero rectángulo contenido en el plano coordenado YZ ; así su proyección sobre el XY será $R'S$ y $R''S$ sobre el XZ .

La sombra arrojada por el paralelogramo $ABCD$ sobre el plano ZY , queda determinada entre kA_1 y BB_1 , mediante las respectivas paralelas trazadas á RS (fig. 7') por los puntos A y B .

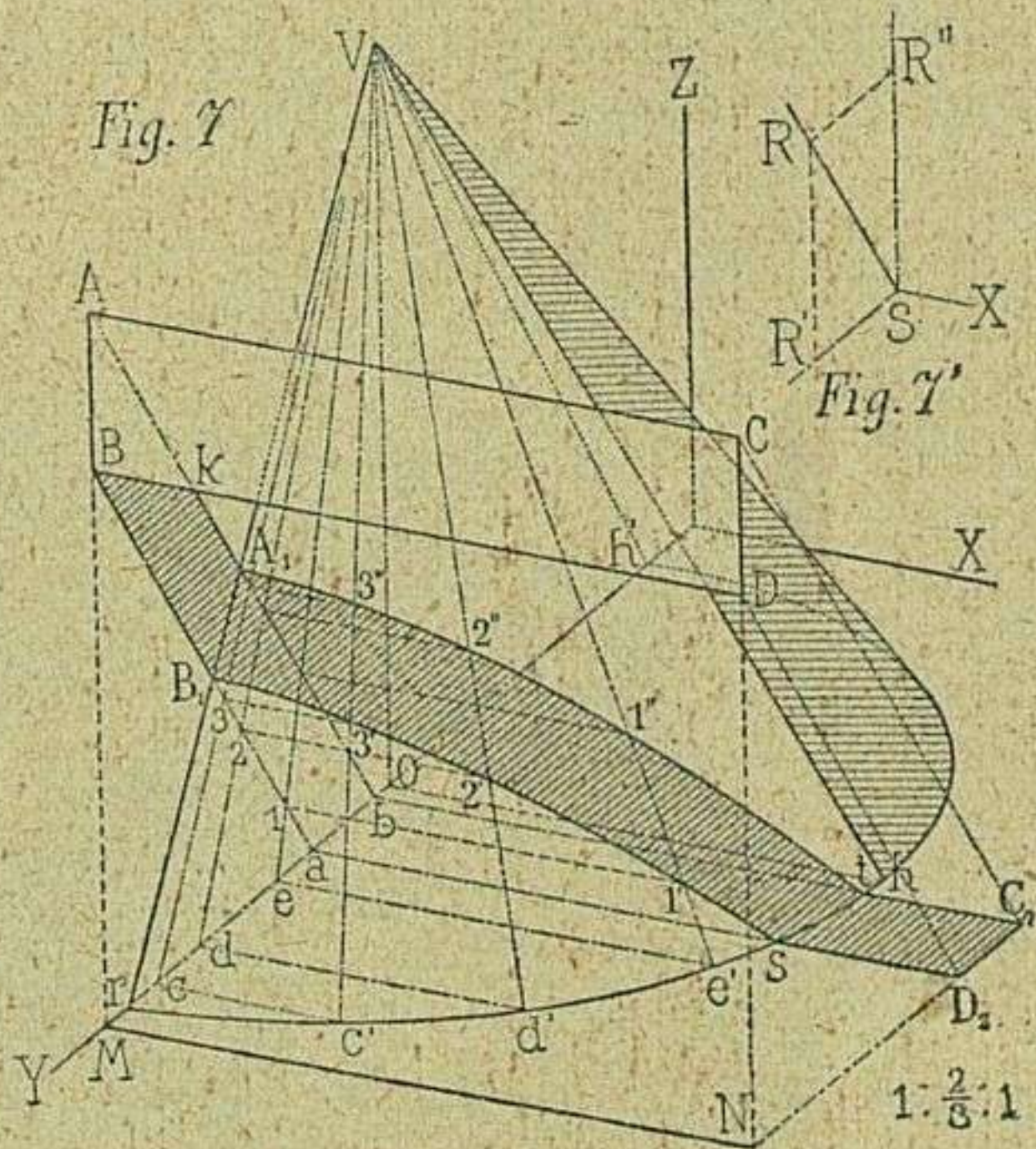
Para determinar la sombra arrojada de dicho paralelogramo sobre el plano XY , se trazarán aD_2 y bC_2 , paralelas al eje X , correspondientes á las trazas de los planos luminosos que se apoyan respectivamente en los lados BD y AC , y por N otra paralela á $R'S$

(fig. 7'), que cortando á las anteriores en D_2 y C_2 completará el contorno de sombra sobre dicho plano coordenado.

El plano luminoso que se apoya en el lado BD del paralelogramo, por ser paralelo á una de las generatrices del cono, cortará á la superficie curva de éste, según el segmento de parábola B_1S . Otro tanto ocurre con el plano luminoso que se apoya en AC , del cual se origina el otro segmento también de parábola A_1t .

Los puntos $1' 2' 3'$, pertenecientes á la parábola, se determinan mediante el empleo de planos auxiliares que, pasando por el vértice V del cono, tengan sus trazas sobre el plano XY , paralelas al eje X . Claro es que, en tales condiciones, dichos planos cortarán al cono según generatrices.

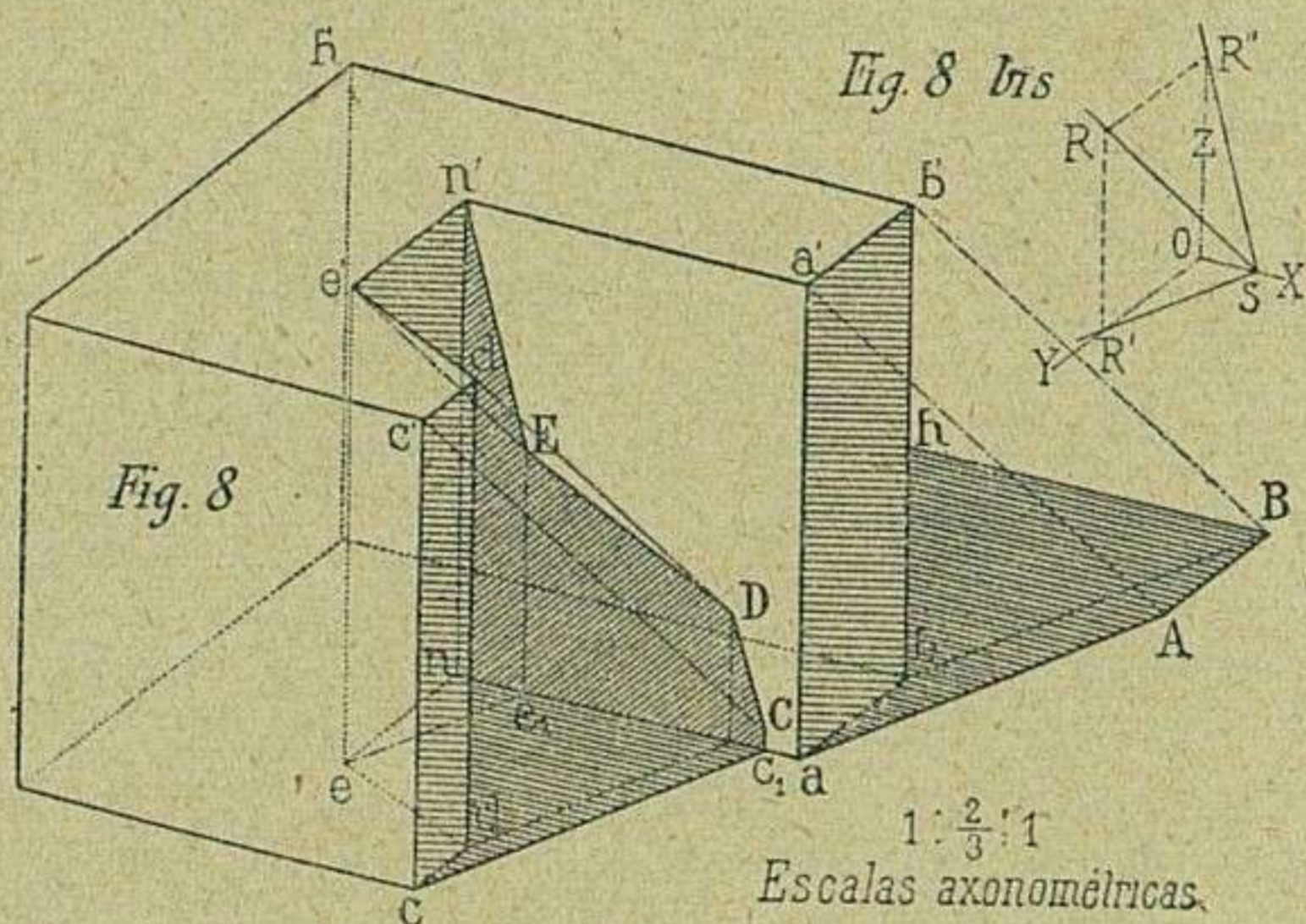
Así, pues, el punto $1'$ se hallará en la intersección del plano luminoso BaD_2D con el auxiliar secante $Ve'e'$ sobre la generatriz Ve' . El $2'$ queda determinado en la intersección del mismo plano luminoso con el auxiliar $Vd'd'$ sobre la generatriz Vd' , y de esta manera tan sencilla se hallarán cuantos puntos sean necesarios.



Procediendo en igual forma, sin más que substituir el plano luminoso $B a D_2 D$ por el $A b C_2 C$, utilizando los mismos planos auxiliares, se hallan en $1'' 2'' 3''$ los puntos intermedios del otro segmento de parábola que comienza en A_1 y termina en t .

9. Sombras de un cuerpo prismático (fig. 8.^a). — Se da por supuesto que el cuerpo de referencia ha sido proyectado con arreglo á las escalas $1 : \frac{2}{3} : 1$, y que la dirección del rayo luminoso $R S$, así como sus proyecciones sobre los planos $X Z$ y $X Y$ están representadas en la figura 8 bis.

En el actual ejercicio se distinguen dos especies de sombras, las propias que corresponden á los planos $c d d' c'$, $e n n' e'$ y $a b b' a'$, paralelos al coordenado $Z X$, los cuales, por estar colocados en situación opuesta á la dirección del rayo luminoso $R S$ (fig. 8 bis), no pueden ser alcanzados por la luz.



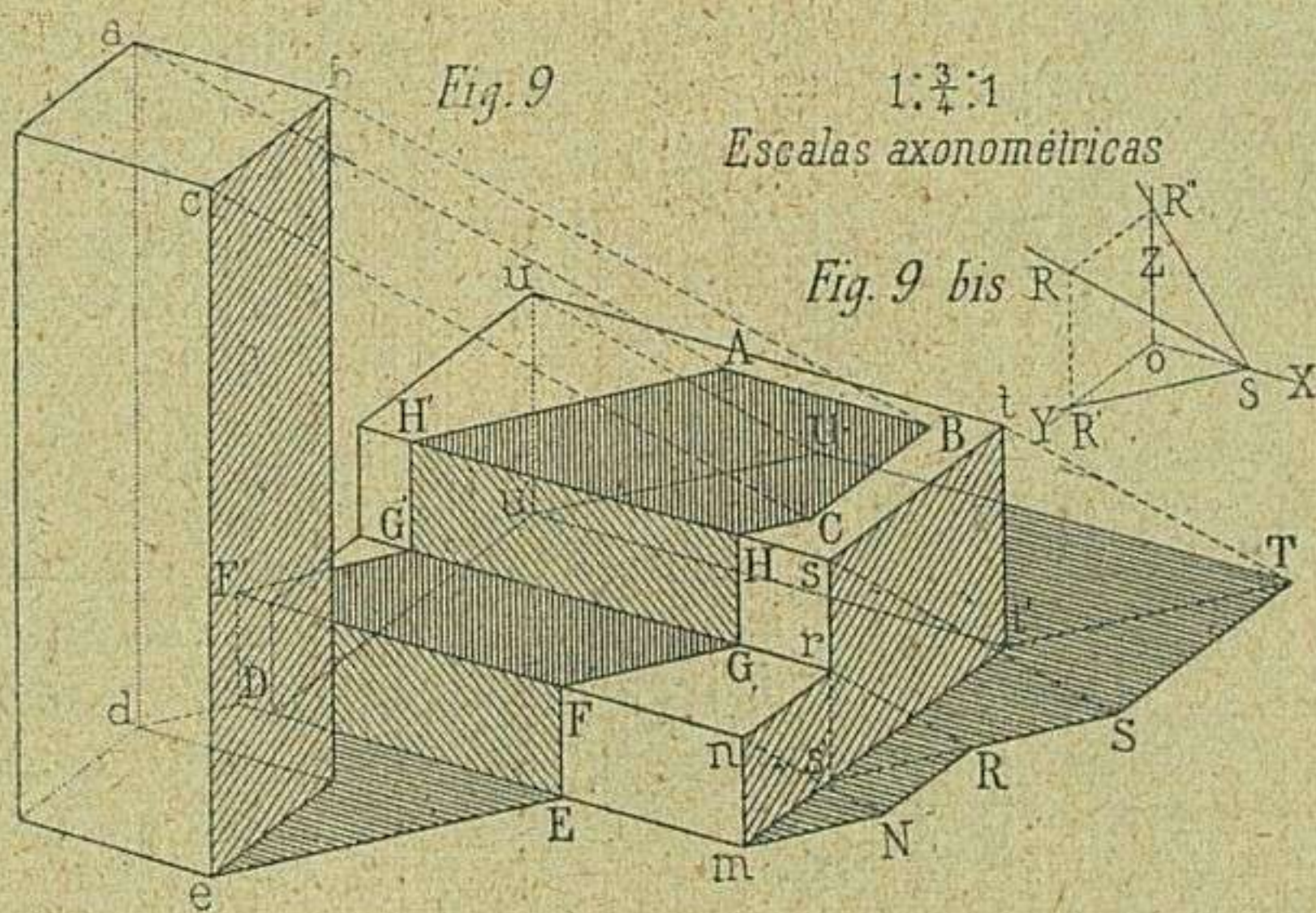
El contorno de sombra arrojada $c c_1 C D E n'$ se compone de la recta $c c_1$, paralela á $R S$ (fig. 8 bis), traza del plano luminoso vertical, que pasa por $c c'$, y de la línea quebrada $c_1 C D E n'$, cuyos puntos $C D E$ corresponden á las trazas de los rayos luminosos, paralelos á $R S$, que pasando por los puntos respectivos $c' d' e'$, encuentran al plano $n a a' n'$ paralelo al coordenado $X Z$.

La recta que une los puntos n' y E , debe resultar paralela á $R'' S$ (fig. 8 bis), por corresponder á la sombra arrojada de $n' e$ sobre el plano $n a a' n'$ paralelo al $X Z$ (V. 2).

Los puntos A y B , que en unión de los $a h$, forman el otro contorno de sombra arrojada sobre el plano $X Y$, se obtienen: el A , en la intersección del rayo luminoso trazado por a' con la recta $a A$, paralela á $R' S$ (fig. 8 bis) y el B , en el punto donde se encuentran el rayo luminoso trazado por b' y la paralela á $R' S$ que pasa por b . Este contorno se completa con la recta $h B$, que por corresponder á la sombra de la $h' b'$ se traza paralela á ella.

10. Sombras propia y arrojada en una combinación de prismas (fig. 9). — Compónese esta combinación de un prisma que proyecta su sombra sobre los peldaños de una gradilla, la que á su vez también arroja sombra en el plano X Y.

El prisma, la gradilla y la dirección del rayo luminoso están representados conforme á las escalas $1 : \frac{3}{4} : 1$.



Por la dirección del rayo luminoso (fig. 9 bis) se llega á comprender que la cara $e c b$ correspondiente al prisma, y el costado $m t' t$ de la gradilla quedan cubiertos de sombra propia.

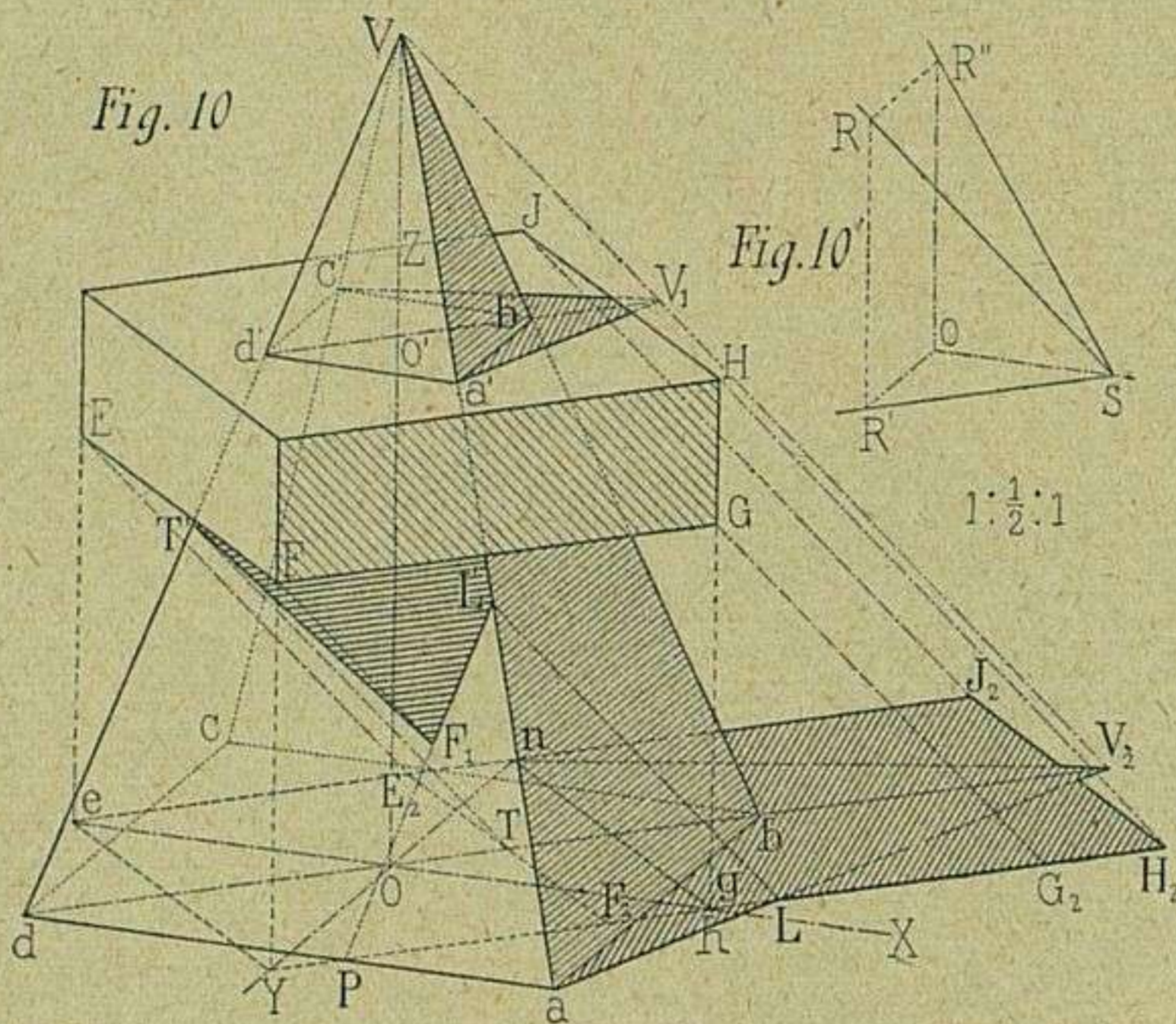
El contorno $m N R S T U$, que pertenece á la sombra arrojada por la gradilla sobre el plano X Y, se obtiene por los mismos procedimientos empleados en iguales circunstancias del ejercicio anterior (V. 9).

En cuanto á la sombra arrojada por el prisma sobre la gradilla, debe tenerse presente que los peldaños de ésta se componen de planos respectivamente paralelos á los coordenados Z X y X Y; por consiguiente, la sombra arrojada por la arista $e c$ corresponderá á la línea quebrada $e E F G H C$, en la cual los segmentos $e E$, $F G$, $H c$ son paralelos á $R' S$ (fig. 9 bis), y los $E F$, $G H$ paralelos á la arista $e e$.

El punto B, que unido á los A y C completa el citado contorno, se determina en la intersección del rayo luminoso trazado por b , con cualquiera de las respectivas paralelas trazadas por A ó por C á cada uno de los lados $a b$ ó $c b$ que forman la base superior del prisma.

11. Sombras en una combinación de pirámide y prisma (fig. 10).—
Figuran como datos en este ejercicio, además del prisma y pirámide rectos y cuadrangulares, la dirección del rayo luminoso (fig. 10') con las proyecciones del mismo sobre los planos coordenados YX y ZY , todo ello representado conforme á las escalas $1 : \frac{1}{2} : 1$.

En la intersección del rayo que pasa por V con la paralela trazada desde O á la proyección $R'S$ (fig. 10'), se encontrará el punto V_2 correspondiente á la sombra arrojada por la cúspide V sobre el plano XY . La unión de este punto V_2



mediante rectas con los e y a , dará por resultado la sombra de la pirámide en dicho plano XY .

El mismo rayo luminoso VV_2 al encontrar la recta $d'V_1$ paralela á OV_2 y situada en el plano $Jd'H$, dará el punto V_1 , que unido mediante rectas á los a' y e' , dará por resultado el contorno de sombra arrojada por la pirámide, visible en el citado plano $Jd'H$.

Los puntos $E_2F_2H_2$ correspondientes al contorno de sombra arrojada por el prisma sobre el plano XY , se obtienen en las trazas de los planos luminosos que pasan respectivamente por EF y JH con el citado plano XY . Es de notar la particularidad de que la cara $F_2G_2H_2$ del prisma y el plano luminoso formado por el rayo RS y su proyección $R'S$ (fig. 10') son paralelos.

Por su situación respecto al rayo luminoso, la cara aVb de la pirámide se halla ocupada por sombra propia.

La determinación del punto L' , situado sobre la arista aV , se verifica, trazando desde L intersección de las sombras arrojadas F_2G_2 y aV_2 una paralela al rayo luminoso RS (fig. 10') hasta que encuentre á la citada arista aV .

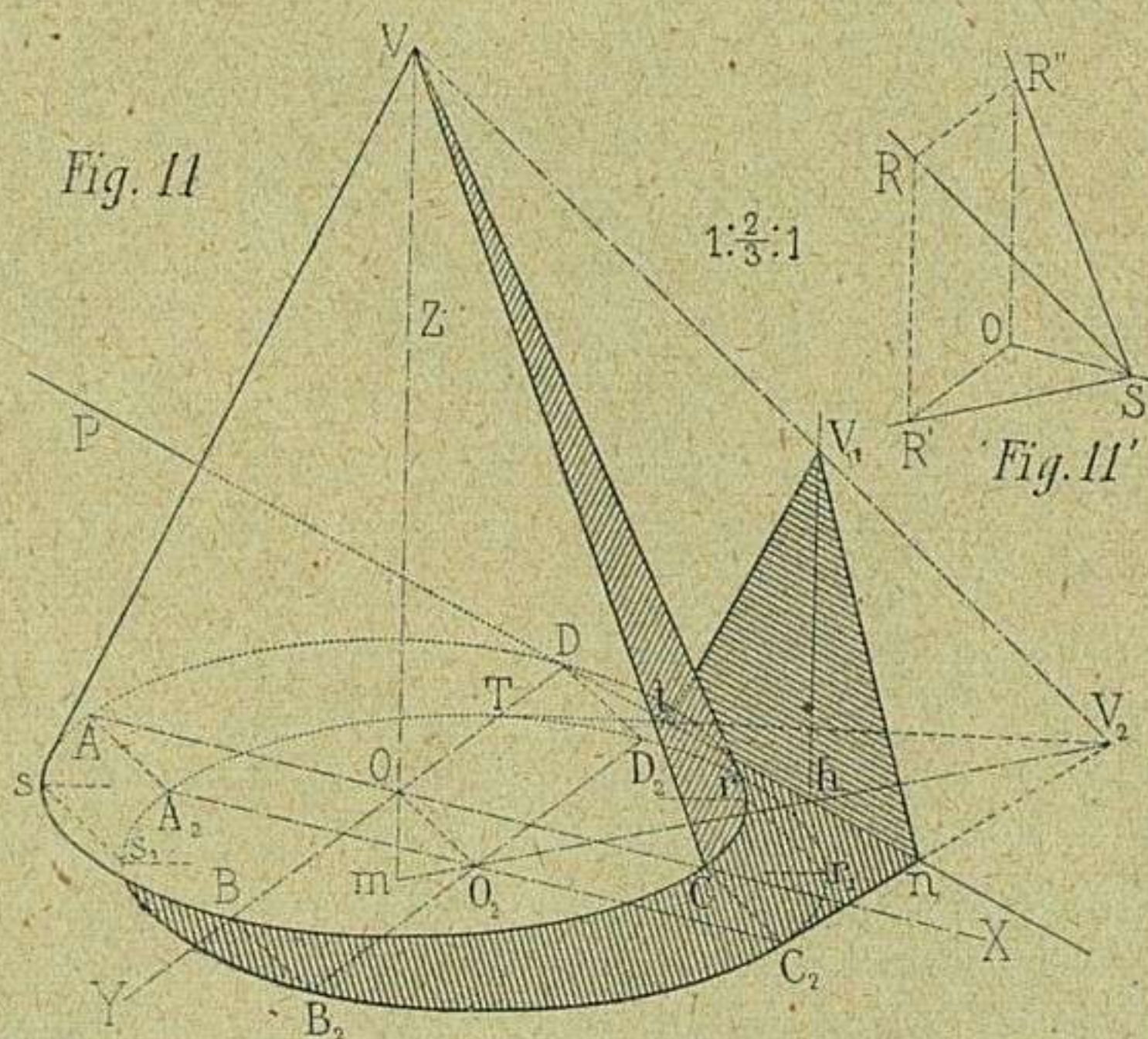
El punto F_1 correspondiente á la sombra arrojada de F sobre la cara Vda de la pirámide, se obtiene, por la intersección de la recta $L'P$ con el rayo luminoso que pasa por F . Esta recta LP corresponde á la intersección del plano luminoso Yh y de la cara Vda de la pirámide.

Por último, el punto T' situado sobre la arista Vd se determina en la intersección de ésta, con el rayo luminoso trazado desde T , punto donde se cortan las respectivas trazas de los planos luminosos VdV_2 y EE_2F_2F .

12. Sombras propia y arrojada sobre los planos coordenados, de

un cono de revolución (fig. 11). — En el cono que sirve de dato, se verifica que su eje $o V$ coincide con el coordenado Z , y el plano $A B C D$, correspondiente á la base, además de ser paralelo al $X V$, se halla separado de él, una distancia representada por $o m$ en la prolongación del eje del citado cono. La dirección del rayo luminoso está representada en la figura 11' y todo proyectado según las escalas $1 : \frac{2}{3} : 1$.

La sombra arrojada por la base $A B C D$ del cono, se encuentra sobre el plano $X Y$ en $A_2 B_2 C_2 D_2$. Esta sombra se obtiene, hallando la traza O_2 sobre $X Y$ del rayo luminoso que pasa por O (V. **3**) y trazando por este punto las rectas $A_2 C_2$ y $B_2 D_2$ respectivamente paralelas á los diámetros conjugados $A B$ y $C D$, que figuran en la elipse correspondiente á la base del cono. Ahora, haciendo pasar rayos luminosos por los puntos A, B, C, D , quedarán determinados en las respectivas intersecciones de éstos con los diámetros trazados por O_2 , los puntos $A_2 B_2 C_2 D_2$ por los cuales se dibuja el contorno de la elipse (V. Primera parte, **S9**) correspondiente á la sombra arrojada propuesta.

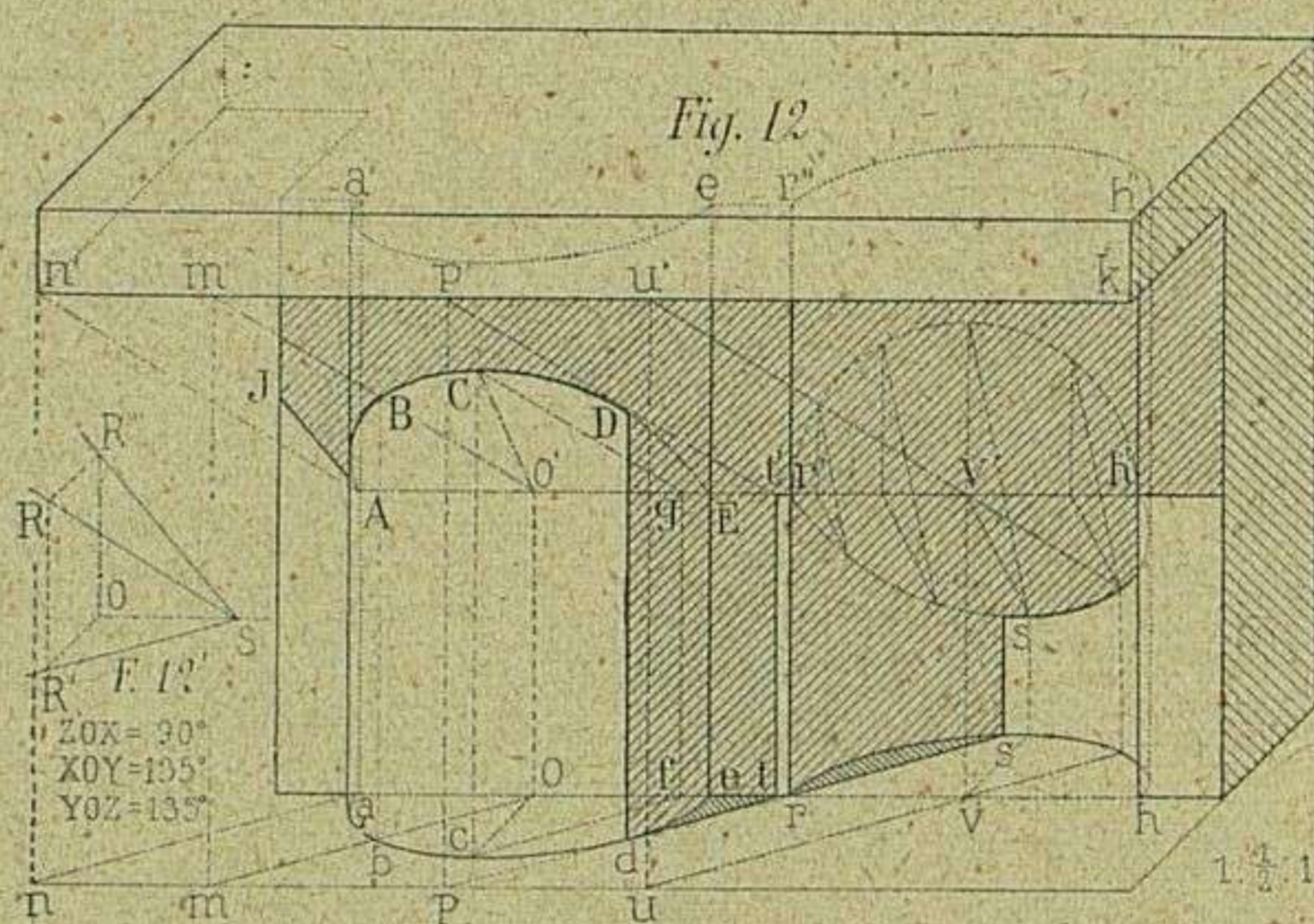


Por los extremos V y m del eje del cono, se hacen pasar rectas paralelas respectivas á $R S$ y $R' S$ (fig. 11'), y en la intersección de ellas V_2 , se hallará la sombra arrojada por el vértice V del cono, sobre el plano $X Y$. Desde este punto, se trazan las tangentes $V_2 C_2$ y $V_2 T$ á la elipse de sombra $A_2 B_2 C_2 D_2$ (V. Primera parte, **91** y en la segunda edición **94**), cuyos segmentos $T t$ y $C_2 n$, completan el contorno de la sombra arrojada por el cono sobre el plano $X Y$.

La sombra proyectada sobre el plano $X Z$ se obtiene, uniendo mediante rectas, el punto V_1 con cada uno de los t y n . Este punto V_1 corresponde á la traza del rayo $V V_2$ situada en el plano $X Z$ (V. **3**).

13. Sombras en una combinación de prisma y cilindro (fig. 12).— La adjunta combinación, representada en perspectiva caballera, se compone de dos semicilindros rectos é iguales, dispuestos de modo, que sus ejes estén contenidos en un mismo plano, presentando respectivamente convexa y cóncava la superficie cilíndrica de cada uno. En la parte superior de la combinación, se halla situado un prisma á manera de abaco, el cual proyecta su sombra sobre las superficies cilíndricas y planos con ellas combinados.

La dirección del rayo luminoso y la de sus proyecciones en los planos Y X y X Z, están consignadas en la figura 12', así como también la combinación de ejes y escalas axonométricas.



El plano luminoso que se apoya en la arista $n'k$ del prisma, corta al plano que pasa por los ejes oo' , vv' de los semicilindros, según la recta Ah' , de la cual, los segmentos AE y $r'h'$, son diámetros de las semielipses ACE y $r'sh'$ respectivamente correspondientes á la sección producida por dicho plano luminoso, en las superficies cóncava y convexa de cada uno de los semicilindros.

El trazado de esta semielipse, se verifica, según se ve en la $t'sh'$, valiéndose del semidiámetro $v's$ conjugado del $r'h'$ (V. Primera parte, **89**).

Un punto cualquiera, el B, por ejemplo, se determina en la intersección del rayo $m'o'$ con la generatriz levantada en b . Esta generatriz se origina en la intersección del plano luminoso vertical $mm'o$, con la superficie cilíndrica. Así también, el plano $p'pt$ paralelo al anterior, y tangente á dicha superficie, determina en la generatriz de contacto dD , el contorno de sombra propia del primer semicilindro, y además, en sus respectivas intersecciones con los planos $n'ah$ y $r'r''e$, el de sombra arrojada $dt't'$. El pequeño segmento $t'r'$ pertenece á la sombra arrojada por la arista $n'k'$ sobre el plano dado por los ejes oo' y vv' .

El contorno de sombra arrojada $rs's'$ se obtiene mediante la intersección del plano luminoso que, apoyándose en $r'r''$, corta en rs al plano $n'ah$, y, según la generatriz $s's'$, á la superficie cóncava del segundo semicilindro.

La recta J A, que corresponde á la sombra arrojada por la arista $n' i$, se traza (V. 1) desde A paralela á la $R'' S$ (fig. 12').

14. Sombras del nicho esférico (fig. 13). — La representación axonométrica de este elemento arquitectónico, explicado en el núm. 40 (*Proyecciones axonométricas*), se ha verificado según las escalas $1 : \frac{1}{2} : 1$. En la diagonal R S del cubo situado en la parte superior de la figura se tiene la dirección del rayo luminoso y las de sus proyecciones $R'' S$ y $R' S$ sobre los respectivos planos Z X y X Y.

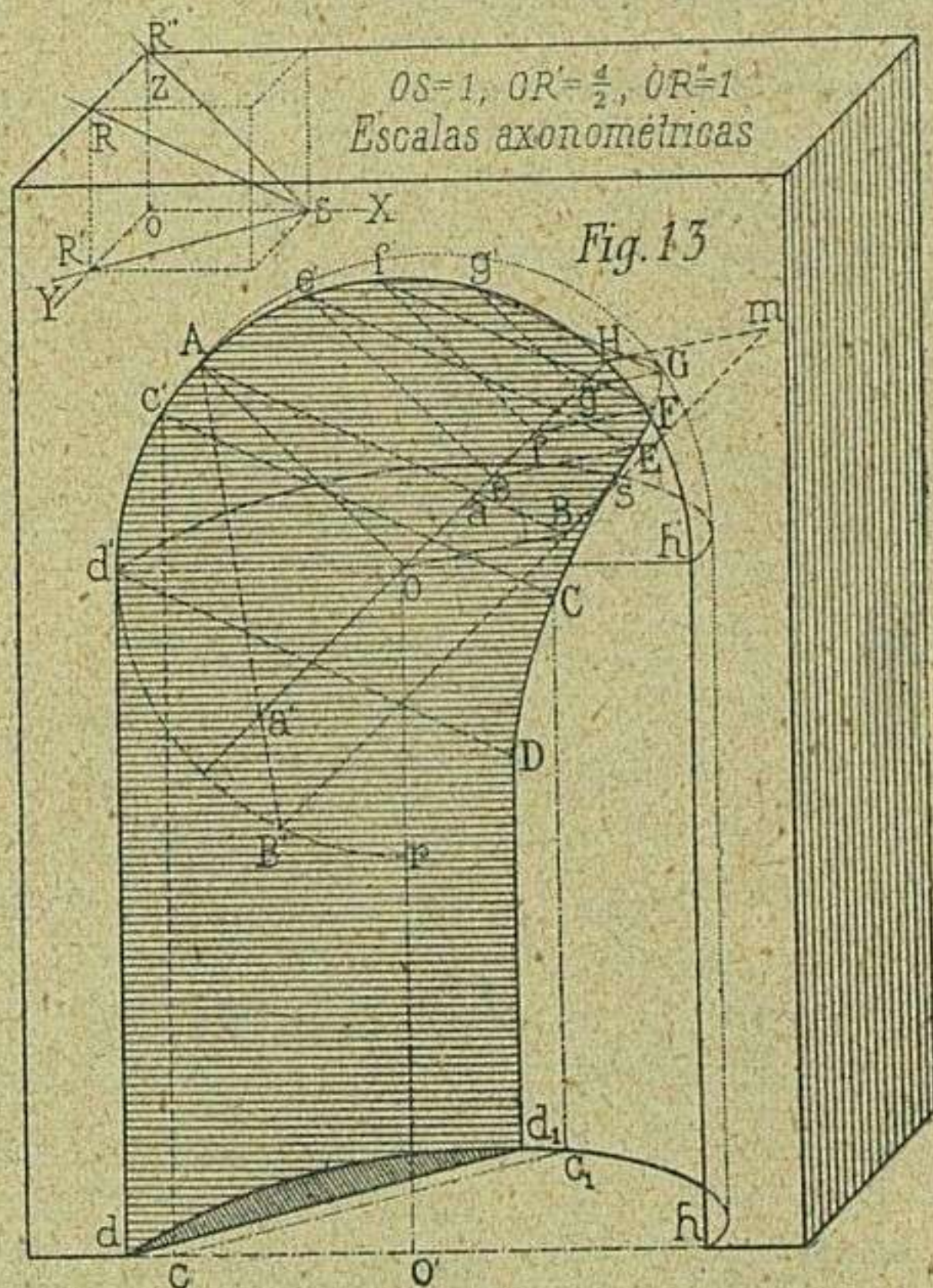
El contorno total de sombra se compone: de la curva H G s, sombra arrojada por el arco $H e' d'$ sobre la superficie esférica; de la línea, también curva, s C D, sombra arrojada sobre la superficie cilíndrica por el mismo arco $H e' d'$, y de las rectas $D d_1$ y $d_1 d$, sombras arrojadas respectivas por la arista $d d'$ sobre la superficie cilíndrica y el plano $d d_1 h$, paralelo al X Y.

La curva H G S corresponde á un segmento de elipse cuyos semidiámetros conjugados son $o H$ y $o B$. El $o H$ coincide con el radio de la circunferencia $r e' h'$, trazado en dirección paralela al eje Y.

Para determinar el semidiámetro $o B$, se levanta en o el radio $o A$, perpendicular al $o H$. Desde A se traza una paralela al rayo luminoso R S, que encuentra en a al semidiámetro $o H$. Se toma el duplo de $o a$ y se coloca de o en a' , por cuyo punto, y partiendo de A, se trazará una recta que cortará en B' á la circunferencia $r e' h'$. Por el punto B' se traza una paralela al eje Y, que, al encontrar á la recta que pasa por A a , dará el punto B, correspondiente al semidiámetro que se busca (1). Ahora, la determinación de los puntos E F G se verifica en función de los semidiámetros conjugados $o H$ y $o B$. (V. Primera parte, 89).

El punto s, queda determinado en virtud de la intersección de los segmentos H B y $d' h'$.

Los puntos C y D se hallan en las respectivas intersecciones de la super-

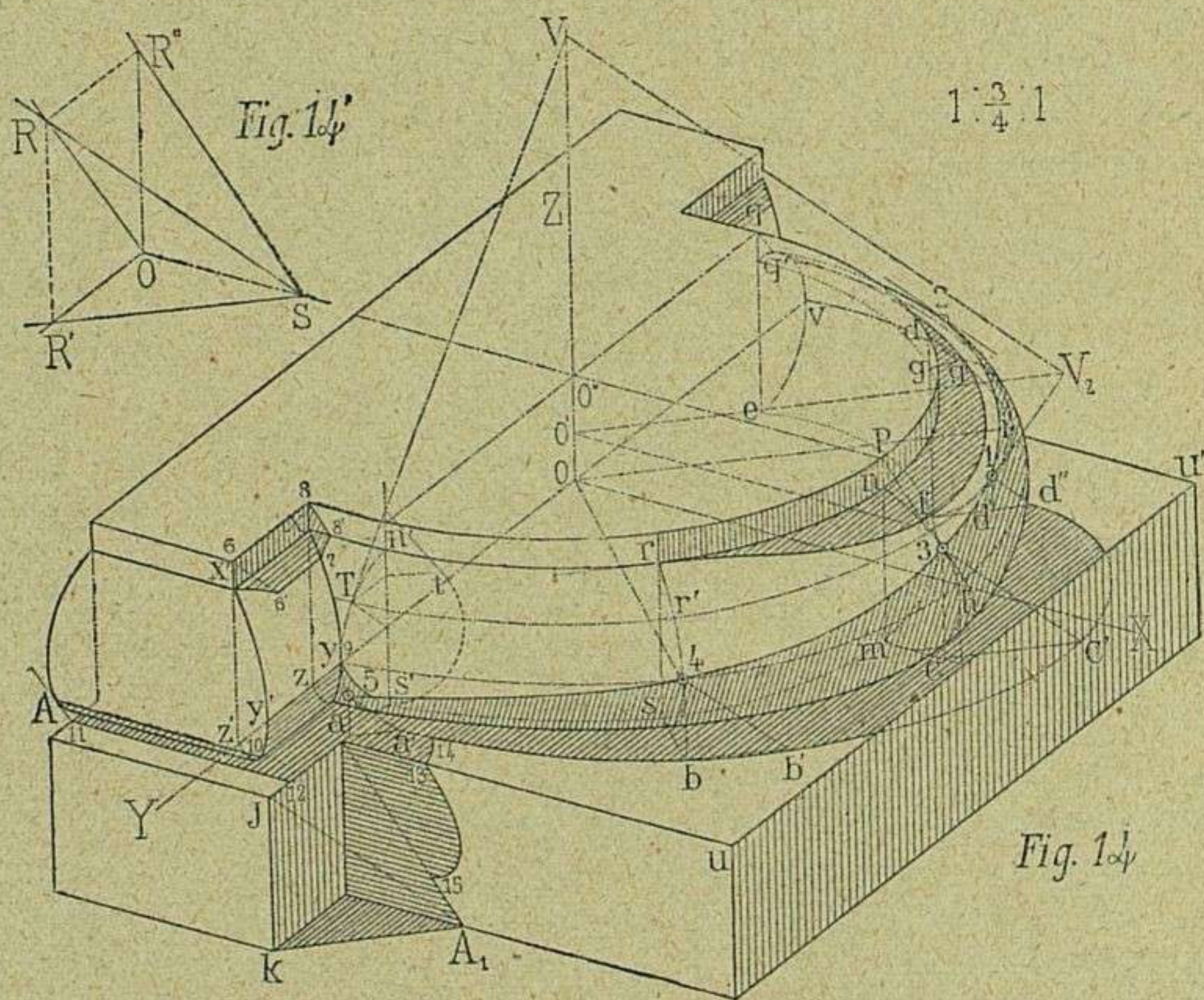


(1) Con esta operación lo que se ha hecho, es colocar mediante un giro (V. *Proyecciones ortogonales*, 66), el rayo luminoso $A a$, paralelo al plano X Z, para luego de obtenido el punto B' trasladarle á B, deshaciendo el giro de dicho rayo luminoso.

ficie cilíndrica con los rayos luminosos, paralelos al R S, que pasan por c' y d' . (V. 13).

La recta $D d_1$ corresponde á la intersección de la superficie cilíndrica con el plano luminoso que pasa por la arista $d' d$ y la $d d_1$ por otra parte, representa la traza de dicho plano luminoso sobre el X Y.

Determinación de sombras en una basa de columna (fig. 14). — El problema relacionado con el trazado de esta basa se supone resuelto en la misma forma que el explicado en el núm 30; pero con arreglo al sistema di-métrico, expresado en las escalas $1:\frac{3}{4}:1$. La dirección del rayo luminoso se halla indicada por R S, así como la de sus proyecciones $R'' S$, R O, $R' S$ sobre los planos respectivos Z X, Y Z, X Y en la figura 14'.



Para mayor facilidad, se adopta en este ejercicio una combinación de meridianos y paralelos que permite, con reducido número de ellos, obtener nada más que los puntos indispensables para el trazado de las curvas que forman el contorno de la sombra arrojada y el de separación de luz y sombra en la propia. Como aun así puede originarse alguna confusión, debida á la aglomeración de líneas, se procederá por partes, dando principio por la:

15. Sombra propia del toro de revolución. — Está representada por el contorno de separación, que pasa por los puntos 5 4 3 1 y 2.

El punto 4 se halla sobre el ecuador gh , en la intersección de éste, con la

generatriz que limita la sombra propia del cilindro tangente al toro, según dicho ecuador.

El punto 3, situado en el meridiano $n h m$, cuyo plano es paralelo, ó mejor dicho, coincide con el $X Z$, se halla, en el punto de contacto de una recta tangente á dicho meridiano y paralela á $R'' S$ (fig. 14'). De igual manera se determina el punto 5, situado en el meridiano $n' y s'$, mediante la tangente paralela á $O R$ (fig. 14'), puesto que el plano de dicho meridiano es paralelo al coordenado $Y Z$.

Un punto cualquiera del contorno de separación, el 1, por ejemplo, se halla mediante el cono de contacto cuya base corresponda al paralelo $T r' q'$, y tomando como generatriz la recta $T V$, tangente al meridiano $n' y s'$. De esta manera, trazando por V el rayo luminoso $V V_2$, paralelo á $R S$ (fig. 14'), y desde V_2 la tangente $V_2 1$ (V. Primera parte, segunda edición, 92) á la elipse representada en dicho paralelo, se obtendrá en el contacto 1 el punto que se busca. El punto 2 está situado sobre el contorno aparente del toro allí donde se verifica el contacto de una recta paralela á la $R S$ (fig. 14').

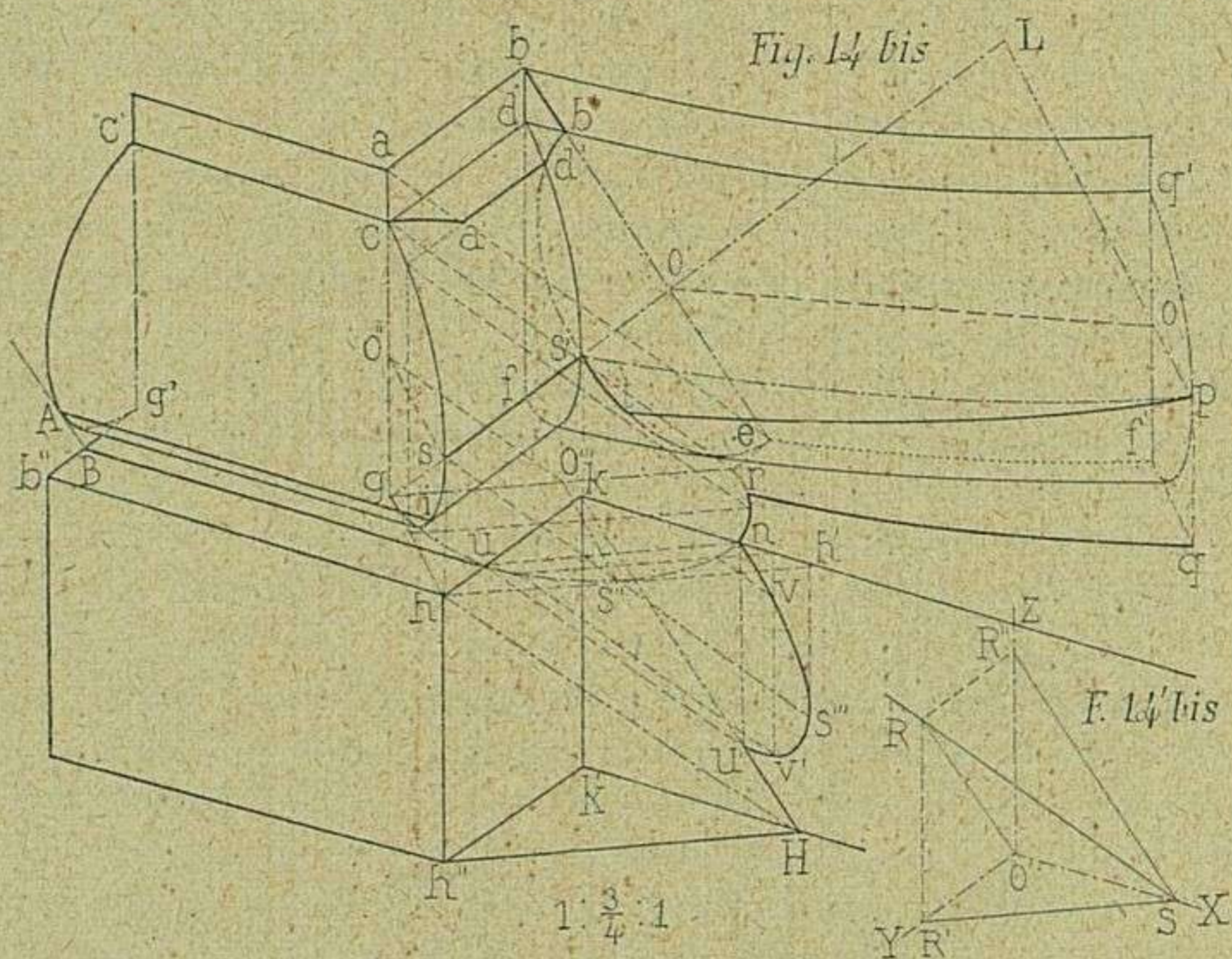
16. Sombra arrojada por el toro sobre el plinto. — Este contorno de sombra arrojada recorre los puntos $a' b' c' d''$, los cuales se obtienen en las trazas situadas sobre el plano $J u u'$, procedentes de los rayos paralelos á $R S$ (fig. 14'), trazados por puntos pertenecientes al contorno de sombra propia del toro, tales como los 5, 4, 3, 1 y 2. Así, por ejemplo, el punto b' queda determinado en la intersección de las rectas que pasando, respectivamente, por los puntos 4 y b , son paralelas, también respectivamente, al rayo luminoso $R S$ y á su proyección $R' S$ sobre el plano $X V$ (fig. 14').

17. Sombra propia del filete y arrojada sobre el toro. — La parte visible del contorno de esta sombra comienza en r y termina hacia d , pasando por los puntos f y g . El punto r pertenece al extremo inferior de la generatriz de separación de luz y sombra del filete cilindrico, la cual generatriz se determina por el contacto de un plano tangente á dicho cilindro que sea paralelo al plano formado por el rayo $R S$ y su proyección $R' S$ (fig. 14') sobre el coordenado $X Y$.

El punto f se halla en la intersección de la semielipse meridiana $n 3 m$, con la recta $p f$, que, situada en dicho plano meridiano, y pasando por p , es paralela á la $R'' S$ (fig. 14'), y el punto g' en la intersección de la meridiana $g i f$, con la recta $d g'$, paralela á $R S$ y situada también en este plano meridiano.

La variedad de sombras que se originan en este ejercicio, y la concurrencia de líneas y puntos que deben conservarse para la inteligencia de la marcha seguida en la resolución del problema, unidos á las sombras halladas, traerían la confusión allí donde es más necesaria la claridad; para evitar este inconveniente, dando por hallados en la figura 14 los contornos $X 6' 7 8' 8, 5 9 10 A 11 12, k A_1 15 13 14$, se trasladará la atención á la figura 14 bis, donde con relativa claridad, debida á la ampliación de dicha figura, podrá seguirse el curso del problema, que en lo que falta, se reduce á la determinación de sombras en el toro cilindrico y en el plinto.

18. Sombra del filete prismático sobre el toro (fig. 14 bis). — El contorno visible de esta sombra se reduce á los segmentos $b'd'$ y $s't$, los cuales forman parte de la semielipse $b's'e$, la cual se origina al seccionar el toro en su parte cilíndrica (1) por un plano luminoso que, pasando por la arista ab , es paralelo al $RR'S$ (fig. 14 bis). Su trazado se verifica mediante los semidiámetros conjugados $o's'$ y $o'b'$ (V. Primera parte, **89**), cuyos semidiámetros se han obtenido: el $b'e'$, sobre la recta trazada desde b , paralela á $R'S$, en el trayecto comprendido entre los dos planos paralelos superior é inferior que limitan el toro, y el $o's'$, sobre el radio dirigido desde L , centro del ecuador, por o' , punto medio del diámetro $b'e$. El punto s' queda deter-



minado en la intersección de dicho radio, con la prolongación recta tangente al arco que pasa por p , correspondiente al ecuador.

La recta bb' corresponde á la sombra arrojada de la arista ab sobre la prolongación plana del filete.

Por d' , punto donde se cortan los segmentos de elipse $b's'$ y $d's'$, se traza la generatriz $d'a'$, correspondiente á la sombra arrojada por ab sobre la superficie cilíndrica $cs's'd$. El punto a' que se obtiene en la intersección de dicha generatriz, con el rayo luminoso ae , corresponde á la sombra arrojada

(1) Da la casualidad de que esta sombra viene á caer en el intervalo donde se unen por contacto las dos superficies del toro cilíndrico y anular. En este supuesto, el plano secante producirá en el toro cilíndrico un segmento de elipse, y en el de revolución ó anular otro segmento de una curva, que, aunque no es elipse, se aproxima tanto á ella en el caso actual, que bien puede adoptarse su trazado como si lo fuese, puesto que además sólo afecta al pequeño segmento $s't$.

por el a . Desde este punto al c se traza un pequeño segmento de elipse, el cual representa la sombra arrojada por la arista vertical ca .

La generatriz $s's$, perteneciente á la sombra propia de la citada superficie cilíndrica, se ha determinado trazándola por s , punto de contacto de un plano paralelo al $RR'S$ (fig. 14' bis) con la arista csq , y la Ai sombra propia de la superficie cilíndrica $c'Aq'i$ mediante el plano tangente ABu , paralelo al ROs (fig. 14' bis). La recta Bu pertenece á la sombra arrojada por Ai sobre el plano $b'hk$.

19. Sombras arrojadas por el perfil del inglete $acsghh''$ sobre varios planos.—El contorno de sombra arrojada por la semielipse del inglete csq sobre la base superior del plinto es otra semielipse, la $gs''r$, en la cual el diámetro gr representaría la sombra del cq sobre dicha base, así como también el semidiámetro $o''s''$ resultaría ser la sombra arrojada por el $o''s$. Trazada la semielipse $gs''r$ mediante sus diámetros conjugados (V. Primera parte, **89**), sólo se utilizará para el contorno de sombra arrojada el pequeño segmento rn .

La recta $h''H$, sombra arrojada por la arista hh'' sobre la prolongación de la base inferior del plinto, se traza desde h , paralela á $R'S$ (fig. 14' bis), y la kH , que á su vez representa la sombra arrojada por la arista hk sobre la cara anterior de dicho plinto, se obtiene en otra paralela á $R''S$, trazada por k , aunque de este contorno sólo es visible el segmento Hu' .

Finalmente, el contorno $nv s''''v'u$, sombra arrojada por la semielipse csq , sobre la cara $Hk'k$, se ha determinado deduciéndola directamente del segmento de elipse $us''n$, situado en la base superior del plinto. De este contorno de sombra se conoce desde luego el punto n , situado en la arista kh' .

Los puntos $v s''''v'n'$ que constituyen el citado contorno se hallan situados en las trazas respectivas de los rayos luminosos que, apoyándose en la curva $us''n$, encuentran, según ellas, al plano $k'kh'$ (V. **3**). Así, por ejemplo, en la intersección del rayo luminoso que pasa por u , con la vertical trazada desde n , se hallará el punto u' , sombra que corresponde al u . Bueno será tener presente que la vertical nu' representa la intersección del plano $k'kh'$ con el formado por el rayo luminoso un' y su proyección un ; plano que debe ser paralelo al RSR' (fig. 14, bis).

INDICACIONES PARA EL TRAZADO DE SOMBRAS

en dos láminas de la serie F.

LÁMINA 7.^a — En esta lámina se representa una cruz monumental, proyectada con arreglo á las escalas axonométricas $1 : \frac{1}{2} : 1$. Por otra parte, se fija la dirección del rayo luminoso en la recta R S que, acompañada de sus proyecciones respectivas R" S y R' S, figura en el correspondiente diagrama, según costumbre observada en los ejercicios precedentes.

Para la representación lineal de esta cruz conviene recordar lo expuesto en problemas parciales correspondientes á los números **13**, **15** y **18** (véase *Proyecciones axonométricas*), valiéndose para conseguir dicha representación de la proyección auxiliar que figura en concepto de planta sobre un plano paralelo al X Y.

Dada la estructura de la cruz, terminada por caras planas, el trazado de sombras propias y arrojadas ofrece pocas dificultades.

Cubre la sombra propia todas aquellas caras ó planos que son paralelos al cuadrilátero R" R R' O que figura en el diagrama situado en la parte superior de la actual lámina. También alcanza á cubrir otros planos que, aunque no son paralelos al citado cuadrilátero, están situados en dirección opuesta á la que siguen los rayos luminosos paralelos al R S.

Parte de las sombras arrojadas se producen en las mismas caras que forman la cruz, y otra parte va á proyectarse sobre los planos del suelo y del muro, respectivamente paralelos á los coordenados Y X y X Z.

La proyección auxiliar sobre el plano X Y (1), que tan buen servicio ha prestado para la representación lineal, aun le presta más valioso si cabe en la determinación de sombras arrojadas. Buena prueba de ello son los puntos A y B. Estos puntos, que pertenecen á la sombra arrojada sobre los planos Y X y X Z, no hubieran podido determinarse sin el concurso de las respectivas proyecciones *a* y *b* situadas en la planta, ó sea en el plano X Y (V. **3**).

(1) Entiéndase que las acepciones *plano X Y* ó *plano paralelo al X Y*, aunque en realidad no son iguales, para los efectos del dibujo axonométrico, se supone que equivalen, usándose indistintamente.

Para evitar la confusión y mal efecto que producen los trazados auxiliares indispensables para resolver el actual problema de conjunto, se han suprimido casi todos ellos. Esta determinación se ha tomado en el supuesto de que todos los problemas parciales que puedan presentarse en esta lámina han de ser repetición de otros ya resueltos con antelación. No obstante, si ocurriesen dudas, debe consultarse el contenido de los números **7, 9, 10, 11 y 13.**

LÁMINA 8.^a — Se representa en esta lámina (fig. 1) parte de una armadura á dos aguas (1), delineada en proyecciones axonométricas, con arreglo á las escalas $1 : \frac{1}{2} : 1$ (fig. 2). En este problema de conjunto no existe nada nuevo que no se haya explicado en los problemas parciales relativos á líneas, polígonos y prismas.

La dirección del rayo luminoso se halla representada por la recta RS (figura 3), juntamente con sus proyecciones $R'S$ y $R''S$, situadas en los respectivos planos coordenados YZ y XY .

Para la mejor inteligencia del trazado de sombras propias y arrojadas, se ha tomado el partido de presentar aisladas en las figuras 4, 5, 6 y 7 las soluciones de los problemas parciales respectivos, puesto que el reducido tamaño de la figura 1.^a, donde se representa el conjunto, no consiente la permanencia de líneas auxiliares, que más que á otra cosa contribuirían á empañar la claridad con que deben estar representados elementos tan importantes como son los ensambles de dicha armadura.

Sombra del par sobre el tornapunta (fig. 4). — Sobre el plano formado por la arista op y la recta ob (que es paralelo al coordenado XZ), se traza la vertical $n'n$ y por los respectivos extremos de ella n y n' se hacen pasar, Nn' paralela al rayo luminoso SR' (fig. 3) y nN paralela á SR' , proyección de dicho rayo sobre el plano XY . El punto N , donde se juntan las citadas paralelas, será un punto del contorno de la sombra arrojada que se busca. Otro punto cualquiera, el R por ejemplo, se determina en igual forma, mediante las rectas rR y $r'R$ que, paralelas respectivamente á SR y SR' , se reúnen en el citado punto R . Ahora la recta que pasa por los puntos N y R pertenecerá al contorno de sombra arrojada por la arista qb del par, sobre la cara superior del tornapunta.

Sombra arrojada del cabio ó contrapar, sobre la correa (fig. 5). — Se construye el cuadrado auxiliar $abcr$ que representa una sección en la correa perpendicular á las aristas y paralela al plano ZX , haciendo que el plano secante coincida con la cara anterior del cabio. Desde el punto r se levanta

(1) La armadura que se encuentra proyectada ortogonalmente en la lámina 15.^a de la serie D, ha servido de croquis acotado para la actual representación lineal axonométrica. Conviene tenerla á la vista para ponerse al tanto de los nombres correspondientes á cada uno de sus elementos.

la vertical $r r'$, que con la arista $d g$ de la correa forma un plano paralelo al $Z Y$; por consiguiente, trazando por r' una paralela á $R'' S$ (fig. 3), dará en su encuentro con la arista $d g$, paralela al eje Y , el punto R perteneciente á la sombra propuesta. Para hallar otro, se levanta en c la vertical $c n'$ y se traza por n' una paralela á la $r' R$, la cual en su intersección con la arista de la correa que pasa por c , dará en N el otro punto que se busca. La recta que une el punto R con el N , constituye el contorno de la sombra arrojada por el cabio sobre la cara $d c g$ de la correa.

Sombra de la hilera sobre el javalcón (fig. 6). — Atendiendo á la circunstancia de que la cara $n r h$ del javalcón es paralela al plano $Z Y$, la determinación de la sombra arrojada por la arista $c d$ sobre dicha cara es fácil de conseguir. Para ello se trazará sobre la cara inferior de la hilera el cuadrilátero $a b r n$, que representa la unión del javalcón á dicha cara, y se prolongarán los lados $a n$ y $a r$ hasta encontrar la arista $c d$ en n' y r' . Por el punto n' , se trazará una paralela al rayo $R S$ (fig. 3) y por el n , otra también paralela á la proyección $R'' S$ de dicho rayo, las cuales, al encontrarse en N darán un punto del contorno de sombra. Otro punto será el R , determinado de igual manera, en la intersección de las paralelas al rayo $R S$ y á su proyección $R'' S$, trazadas respectivamente por r y r' . Ahora, en la recta que pasa por N y R se tendrá la sombra arrojada por la arista $c d$.

Sombra arrojada del cabio ó contrapar, sobre la hilera, el pendolón y el par. — Seccionado el cabio por la prolongación del plano $b e c$, que por cierto es paralelo al coordenado $Y Z$, se obtendrá el cuadrilátero $a r' r s$ como contorno de dicha sección. Por los vértices r' y s se trazan paralelas á $R'' S$ (fig. 3), las cuales sirven de contorno en la faja de sombra arrojada por el cabio sobre el costado de la hilera y del pendolón en $r' R$ y $s S$.

La recta $s S$, al encontrarse con la cara superior del par en S , deja señalado el punto donde comienza el contorno $S h$ de la sombra arrojada por la arista $s p$ sobre el indicado par.

Las demás sombras arrojadas se hallan de igual manera que las ya determinadas, y en cuanto á las propias, basta considerar que se encuentran situadas en todos los planos paralelos al cuadrilátero $R'' R R' O$ (fig. 3) y también en algunos, que sin ser paralelos á dicho cuadrilátero, se hallan en posición opuesta á la que sigue el rayo luminoso.

CROQUIS ACOTADO

Se llama croquis acotado un dibujo que se hace generalmente á pulso, indicando las construcciones geométricas que se relacionan con su estructura, consignando al par de ellas, con la mayor exactitud, las dimensiones que en conjunto y detalle corresponden al objeto representado.

Se hace necesaria la intervención del croquis cuando han de copiarse del natural objetos que después hayan de reproducirse sin otros datos que los que proporciona dicho croquis acotado, ó también cuando, pensado y madurado un proyecto, se ha de proceder á su representación gráfica inmediata, y como consecuencia, á la ejecución de la obra proyectada.

En el primer caso, el croquis sirve de base y de arsenal de datos para la representación de un asunto realizable en el natural; y al decir realizable, debe entenderse que el objeto representado, ya sea órgano de máquina ó máquina completa, elemento ó conjunto de construcción, mueble, etc., pueda resultar, después de construido en el taller, en idénticas condiciones de funcionamiento y con las mismas propiedades que tenía el modelo de donde se tomó el croquis.

En el segundo caso, se considera el croquis como un avance, anteproyecto ó boceto, del cual depende la realización gráfica del proyecto en su última fase, ó sea el *dibujo en limpio* (1).

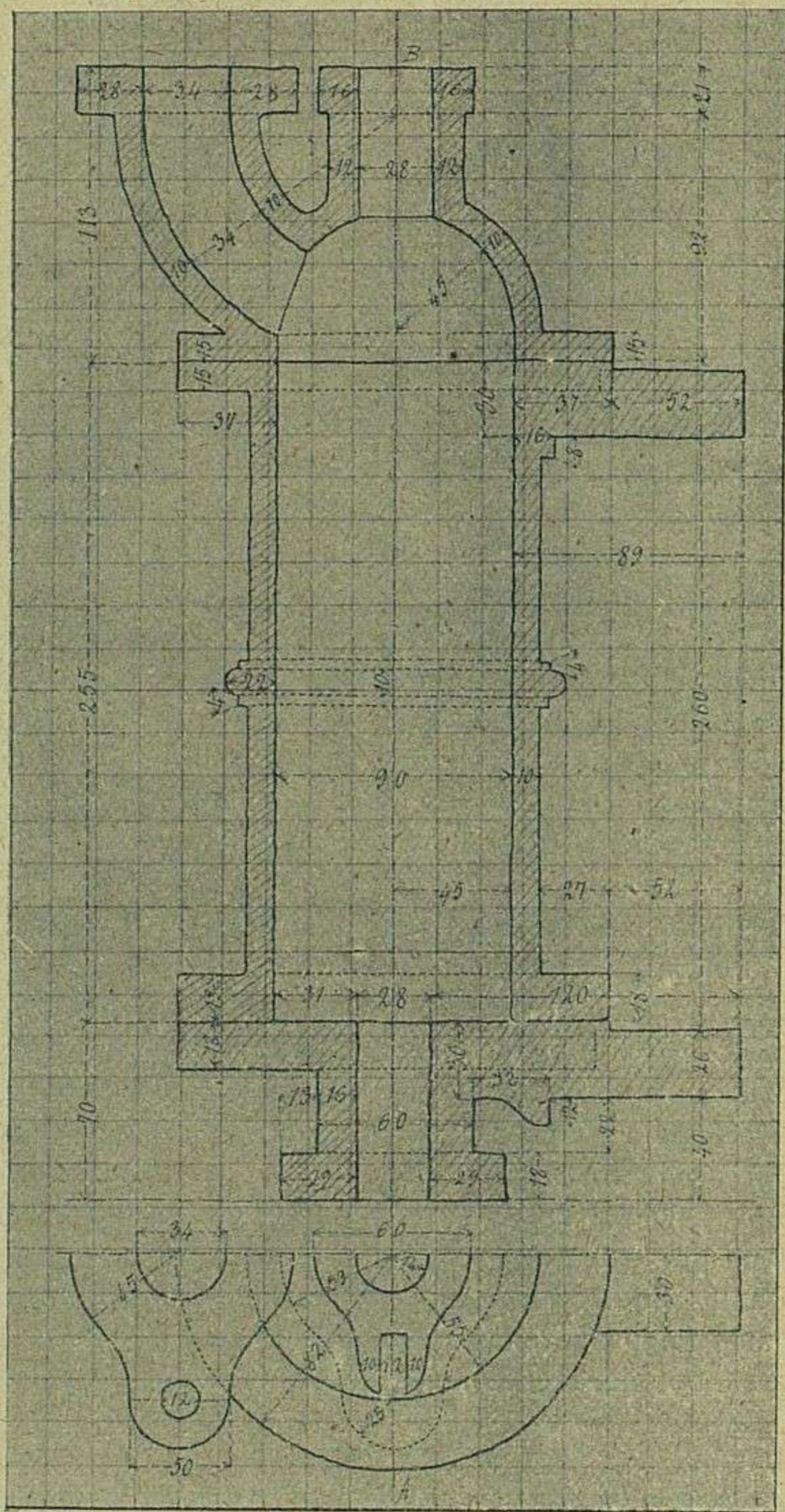
Tanto en uno como en otro caso, el croquis acotado se caracteriza por su sencilla delineación, carencia de efectos de luz y sombra, y prolijidad en las medidas ó acotaciones que han de constar en él, verificadas con la mayor exactitud; en resumen: croquis acotado, en su verdadera acepción, es un dibujo en el que predominan las medidas.

Este carácter especial del croquis permite aprovecharle como un medio rápido de expresión gráfica, algo así como taquigrafía del dibujo.

Conforme á los fines expuestos, el croquis acotado de un objeto se verifica de ordinario en proyecciones ortogonales, por ser este sistema el más á propósito para obtener acotaciones que puedan comprobarse á la simple

(1) Llámase *dibujo en limpio* al que, mediante los datos que suministra el croquis, se hace con arreglo á los procedimientos geométricos, representando el objeto en proyecciones ortogonales ó axonométricas, proporcionado á la escala correspondiente, determinando los efectos de luz y sombra y acuarelando el conjunto con tintas convencionales que den idea de los materiales que hayan de emplearse en la construcción del objeto representado.

vista, libres de coincidencias extrañas. Esta representación comprende en su mayor desarrollo la planta ó proyección horizontal, el alzado ó proyección vertical, y, en ocasiones, cuando la descripción del objeto que ha de representarse lo exige, se hacen necesarias otras proyecciones auxiliares, en las que



figuran secciones que sirven para poner de manifiesto la estructura interior del objeto representado.

La figura que acompaña este artículo puede dar idea aproximada de lo que es el croquis acotado. En él se representa un cuerpo de bomba en planta y alzado, desprovisto de las demás piezas accesorias.

En la proyección horizontal el croquis se reduce á representar la mitad de la planta, que como es simétrica de la otra mitad que falta, basta con ella para conocer las dimensiones completas.

La proyección vertical contiene en una sola figura los datos y acotaciones correspondientes al alzado y á la sección, producida por un plano paralelo que pasa por el eje A B.

Cuando se ha de hacer un croquis de conjunto, se procederá, después de dibujado el contorno, á trazar líneas rectas de trazos, dirigidas respectivamente en el sentido de cada una de las dimensiones que merezcan figurar en el croquis. Los extremos de estas rectas, para que se aprecie con toda claridad la respectiva longitud que abarcan, se terminarán con unos tracitos en forma de punta de flecha, y hacia el promedio se escribirá con números claros y legibles la medida correspondiente, que por lo común suele expresarse en milímetros. Si la longitud de la línea de trazos fuese tan pequeña que no diese espacio para escribir la cifra, se sacará fuera por medio de dos líneas divergentes, entre las cuales quedará consignada la citada cifra correspondiente á la acotación.

De las circunferencias y arcos de circunferencia que figuren en croquis, solamente se acotará el radio respectivo.

Si el croquis contiene detalles que por su tamaño reducido pudieran presentar dificultades para conseguir la debida claridad en sus acotaciones, se representarán estos detalles en croquis aparte, ampliados á tamaño conveniente. Otro tanto se hará con los cortes ó secciones que hayan de estudiarse con algún detenimiento, en las cuales se cubrirán de un ligero rayado los planos que las secciones originen.

El papel que debe emplearse para dibujar un croquis, aunque puede ser cualquiera, conviene más que sea cuadriculado, del que ordinariamente se expende en el comercio, puesto que con el auxilio de la cuadrícula se obtienen más facilidades en el trazado, y se consigue en menos tiempo la terminación del croquis que usando otro papel desprovisto de cuadrícula.

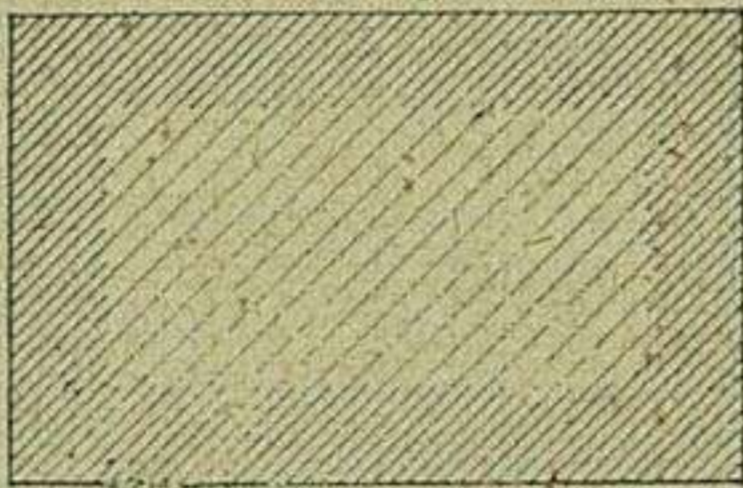
Para la medición del objeto que ha de representarse en el croquis son indispensables un metro, el doble decímetro dividido en milímetros y medios milímetros y un buen compás de espesores ó calibrador, provisto de nonius, á ser posible. Además, y esto es lo más necesario, la dirección y consejo del profesor, para que el discípulo aprecie y vea sobre el terreno, puestos en práctica los procedimientos más adecuados, según la índole del trabajo que se le encomienda.

REPRESENTACIÓN CONVENCIONAL

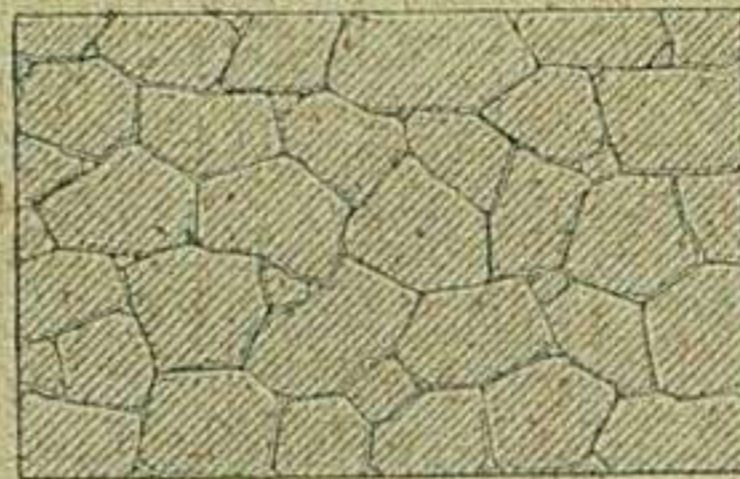
de algunos materiales empleados en construcción.

En la nota incluida en la página 173 se ha definido lo que se entiende por *dibujo en limpio*. Según se desprende de la definición, es la aplicación suma de todos los conocimientos que pueden adquirirse, según un programa com-

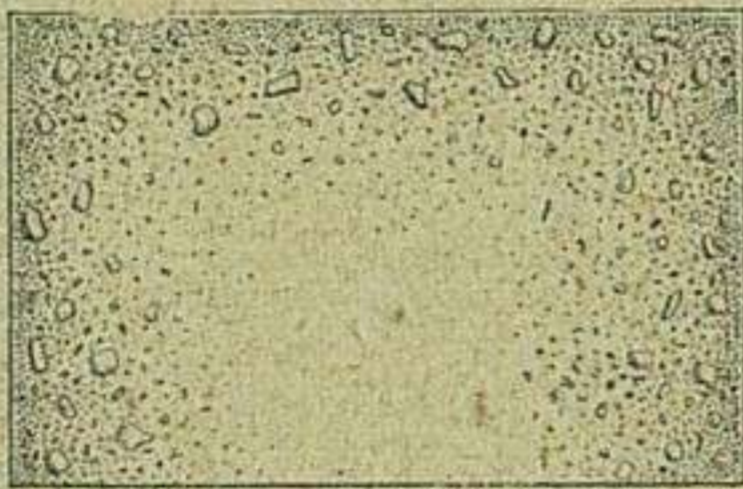
Grandes superficies



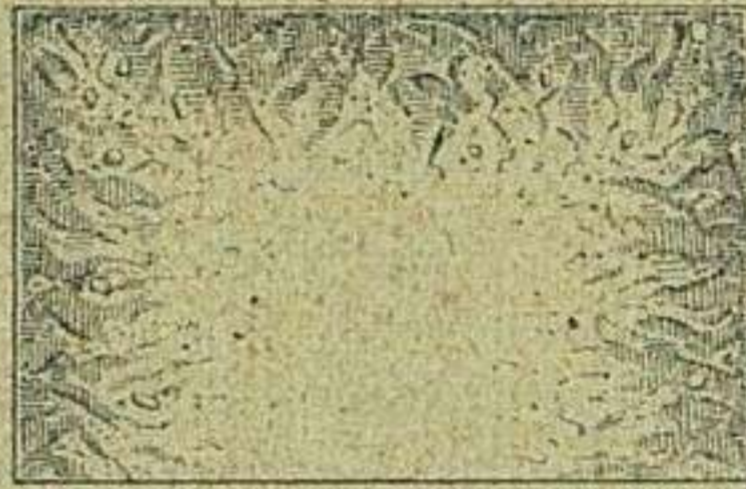
Mampostería



Hormigón



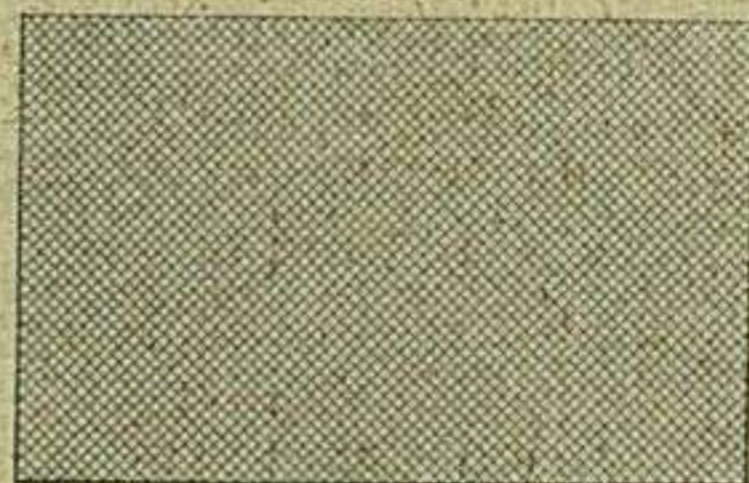
Terreno



Hierro



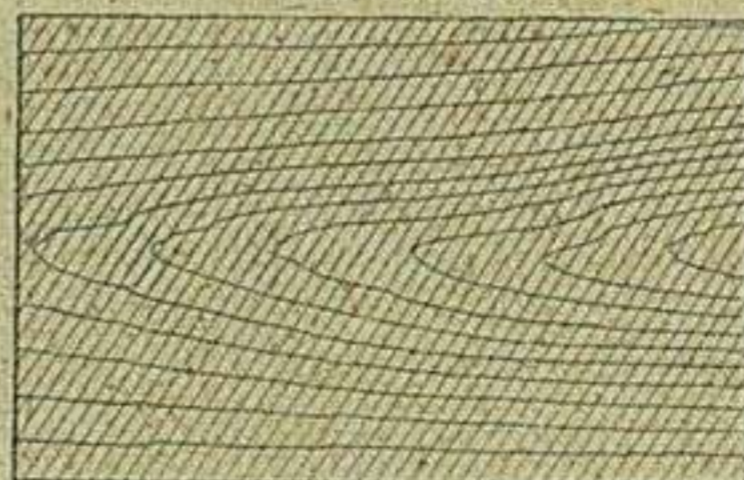
Acero



Bronce ó cobre



Madera



pleto de la asignatura de Dibujo geométrico; pero en muchas ocasiones, la representación gráfica no alcanza vuelos semejantes, puesto que se ciñe á lo que da de sí una delineación clara y exacta.

En tal caso, la representación convencional de materiales se verifica mediante rayados hechos en su mayoría con el tiralíneas, ó combinados otras veces con delineación á pulso, según las exigencias de dicha representación.

Estos rayados, que solamente se aplican en las secciones de los objetos proyectados, se llevan á efecto en la forma que indican cada una de las ocho figuras adjuntas, en las que por vía de muestra se especifica el material y la manera de representarlo en cada caso.

Bueno será advertir que solamente cuando en la construcción del objeto proyectado entran varios materiales, que precisa distinguir unos de otros, es cuando conviene representar cada uno mediante el rayado que le corresponde. En otro caso, es decir, cuando en la construcción del objeto representado entra un solo material, la madera, por ejemplo, entonces las superficies resultantes de la sección se suelen cubrir con el rayado corriente, sin el aditamento de vetas que distingue á la madera de otros materiales, pues que ya se sabe que al no haber más material distinto de la madera en la construcción representada, no existe posibilidad de confundirle con otro, ni por tanto, la necesidad de tenerlo que distinguir mediante el veteado que en tal caso debería corresponderle.

APLICACIÓN DEL TRAZADO Á LA ESTEREOTOMÍA

Indicaciones acerca de los problemas resueltos en las láminas que componen la serie D.

Nueve láminas contiene esta serie, titulada *Aplicación del trazado á la Estereotomía* (1). Tratándose de un obra de Dibujo, la interpretación de este título no puede alcanzar más trascendencia que la que buenamente se deduce de su significado. Esto quiere decir, que el contenido de la serie D se relaciona menos con la Estereotomía, en lo que tiene de construcción, que con lo que pudiera llamarse Dibujo de la Estereotomía. Desde este punto de vista, pocos asuntos podrán resultar más á propósito para ejercitar las aptitudes del discípulo obrero y aplicar los conocimientos adquiridos en el estudio de las proyecciones ortogonales y axonométricas que el referente al corte y disposición de la madera y de la piedra en su aspecto gráfico.

Comienza esta serie D en la lámina 13.^a, terminando en la 21.^a, y contiene: ensambles, empalmes, armadura á dos aguas y una puerta de dos hojas, perteneciente todo esto á la Estereotomía de la madera. Por otra parte, representación y despiezo del arco de medio punto, acuerdo de muros, arco de medio punto practicado en el talud de un muro y bóveda por arista, asuntos éstos que corresponden á la Estereotomía de la piedra.

LÁMINA 13.^a — Ensamblés varios. — Contiene esta lámina cuatro variedades de ensambles, proyectados en ocho figuras, puesto que de cada una se hacen dos representaciones, una en proyección ortogonal, y la otra en proyección axonométrica.

Figuras 1 y 2. — **Ensamble recto á caja y espiga.** — En este ensamble, la espiga tiene un espesor igual al tercio del que corresponde á la pieza donde ha de labrarse á lo largo de la fibra de la madera. La caja ó entalladura tiene las mismas dimensiones que la espiga; pero á fin de que no tropiece en el fondo de ella, conviene dejar dicha espiga un poco más corta que la profundidad de la citada caja.

Las dimensiones acotadas se han deducido considerando iguales el espesor y el ancho de las piezas, y tomando como unidad de medida el tercio de cualquiera de estas dimensiones.

(1) Estereotomía es la ciencia que trata del corte de materiales de construcción.

Según ya se ha indicado, la figura 2 es reproducción en perspectiva caballera de la figura 1, verificada conforme á las medidas que en la primera figuran acotadas. Además de ésta, la representación axonométrica de las figuras 4, 6 y 8 de esta lámina 13.^a, se ha hecho con arreglo á las escalas $1 : \frac{1}{2} : 1$, siguiendo el eje Y la dirección de la bisectriz del ángulo XOZ (V. *Perspectiva caballera*, 32).

Figuras 3 y 4. — **Ensamble oblicuo con barbilla y espera.** — Este ensamble se usa cuando hay que unir piezas concurrentes en dirección oblicua, caso que ocurre con bastante frecuencia en los ensambles de los pares con el tirante en las cerchas de armadura (V. lámina 15).

Para determinar las dimensiones correspondientes á los cortes que dan forma á este ensamble, se ha tomado como unidad de medida la sexta parte del espesor de una de las piezas.

Figuras 5 y 6. — **Ensamble de cola de milano con refuerzo.** — Se llama así, por la forma de la espiga, más ancha por el extremo que por la base; esta disposición impide desencajar dicha espiga por tracción ejercida á lo largo de la pieza donde se ha labrado.

El refuerzo está formado por un prisma que corresponde á la base de la cola de milano y que tiene por objeto, como su nombre indica, dar consistencia á la parte débil de la espiga.

Para apreciar las dimensiones de los cortes verificados en este ensamble, se considera dividido el ancho de la pieza en seis partes iguales, de las que se toma una como unidad. Las proporciones de la cola de milano están relacionadas con la cuadrícula que le sirve de encaje (V. fig. 5).

Figuras 7 y 8. — **Ensamble á inglete de espiga aparente.** — El encuentro de las piezas se verifica en ángulo recto, y solamente por una de las caras se manifiesta como plano de junta de ambas piezas el inglete, que consiste en un corte perpendicular al plano de frente, el cual sigue la dirección de la bisectriz del ángulo recto formado por las dos piezas ensambladas.

El corte de inglete solamente suele profundizar, según se observa en esta figura 8, la tercera parte del espesor de una de las piezas.

Suele emplearse este ensamble en el armado de cercos de puertas y ventanas, marcos de cuadros, etc., cuando están decorados con molduras.

Para apreciar la proporción y medida de los cortes correspondientes á este ensamble, se considera dividido en seis partes iguales el espesor de una pieza.

LÁMINA 14. **Empalmes horizontales y verticales** (1). — Contiene esta lámina cinco variedades de empalmes, los que, á semejanza de la anterior, se

(1) Reciben una ú otra denominación teniendo en cuenta la posición que han de ocupar en su destino final.

han proyectado en los dos sistemas, ortogonal y axonométrico, resultando, por consiguiente, diez figuras. Las seis primeras representan empalmes horizontales y las cuatro últimas empalmes verticales.

Figuras 1 y 2. — **Empalme á media madera.** — No hace falta describir este sencillo empalme; con verlo en las figuras 1 y 2 basta. El ajuste y seguridad de las piezas empalmadas se consolida, en este caso, con pernos que atraviesan las medias maderas, impidiendo el que puedan desencajarse por tracción ejercida en dirección longitudinal.

Se toma como unidad de medida, para la debida proporción de los cortes, la mitad del espesor de una de las piezas.

La representación en perspectiva caballera de este empalme (fig. 2) y la de los correspondientes á las figuras 4 y 6, se verifica con arreglo á las escalas 1 : 1 : 1 mediante la combinación de ejes llamada lateral vertical (*V. Perspectiva caballera, 33*).

Figuras 3 y 4. — **Ensamble á media madera con doble cola de milano.** — Este ensamble se distingue del anterior en que las dos piezas quedan trabadas al encajar mutuamente las respectivas colas de milano de que ambas se hallan provistas. En virtud de tal disposición, las piezas pueden resistir empujes que, actuando en dirección de su longitud, tiendan á desunirlas.

Se obtiene la unidad de medida para acotar las proporciones de los cortes en este empalme, dividiendo el ancho de la pieza en seis partes iguales. La forma del corte de cola de milano está relacionado con la cuadrícula que se ve en la figura 3.

Figuras 5 y 6. — **Empalme de rayo de Júpiter con llave.** — Se llama así á causa de la línea quebrada que se forma por la unión de las dos piezas. La llave ó clavija, según se ve en la figura 6, es una pieza auxiliar que, obrando como cuña, comprime las dos piezas extremando el ajuste de la una con la otra.

Para medir las dimensiones de los cortes en este empalme, se toma como unidad la quinta parte del espesor de una de las piezas.

Figuras 7 y 8. — **Empalme á caja y espiga lateral.** — Este género de empalme, como todos los verticales, ofrecen pocas garantías de solidez, razón por la cual se acorta la longitud de las espigas para darles mayor resistencia, y hasta se emplean, en algunos casos, piezas auxiliares de hierro, tales como zunchos y grapas, para evitar el desquiciamiento de las piezas empalmadas.

El empalme de espiga lateral está indicado, para el caso de tener que adosar las piezas ó maderos empalmados á un tercero, por la cara donde se manifiesta la espiga. De este modo se impide el desencaje por el único sitio donde sería de temer.

Las proporciones de los cortes se aprecian, tomando como unidad de medida la mitad del ancho ó espesor de una de las piezas.

Figuras 9 y 10. — **Empalme de espiga cruzada.** — Se clasifica como el anterior entre los verticales, diferenciándose de él en que, merced á la disposición de la espiga en forma de cruz, se evita el desquiciamiento en sentido lateral, sin tener que recurrir á otros medios auxiliares.

La unidad de medida corresponde á la cuarta parte del ancho ó espesor de una de las piezas.

La representación axonométrica ó perspectiva caballera, correspondiente á las figuras 8 y 10, se ha verificado según las escalas $1 : \frac{2}{3} : 1$, siendo el eje Y bisectriz del ángulo formado por los otros dos (V. *Perspectiva caballera*, 32).

LÁMINA 15.^a **Armadura á dos aguas con tirante** (1). — Tres figuras contiene esta lámina. La figura 1 representa en proyección vertical parte del frente de dicha armadura, en la que se pueden apreciar la forma y disposición de uno de los cuchillos ó cerchas (2). Como la cercha es simétrica respecto al eje que pasa por R A, sólo se ha representado una mitad de ella.

La figura 2 representa otra proyección vertical que permite apreciar la composición de dicha armadura vista de costado. Comprende esta proyección un tramo, ó sea la porción de armadura que se apoya en dos cerchas inmediatas; éstas se suceden de tramo en tramo, y su número depende de la longitud de la armadura.

La figura 3 es una ampliación á doble tamaño, en la cual se pone de manifiesto el ensamble de los pares con el pendolón.

La nomenclatura que corresponde á cada una de las piezas de que se compone la armadura, va incluida en esta lámina, señalando cada pieza y su nombre con la letra respectiva.

Por último, las acotaciones pertenecientes á cada una de las piezas, lo mismo que al conjunto de ellas, están consignadas en metros y centímetros.

LÁMINA 16.^a **Puerta de tableros moldada á dos haces.** — Esta puerta es de dos hojas, corresponde al tipo de las que se construyen para el interior de las habitaciones, y está representada en alzado por una de sus caras ó haces.

Las molduras que aquí representan un papel esencialmente decorativo, están labradas en las mismas piezas, y aparecen enrasadas sin sobresalir del mayor grueso de dichas piezas.

Los nombres de las piezas de que generalmente se compone una puerta son: *T.* tableros, *L.* largueros, *P.* peinazos y *C.* cabios. Las acotaciones, que

(1) Armadura es el conjunto de piezas de madera ó hierro destinadas á sostener el tejado ó cubierta de un edificio. Armadura á dos aguas es aquella cuya cubierta se descompone en dos vertientes ó planos inclinados formando ángulo diedro, cuya arista corresponde al caballete situado en la parte más alta de la armadura.

(2) Los *cuchillos* ó *cerchas* son entramados verticales que sirven de apoyo á la armadura, desempeñando un papel análogo al de las vigas maestras en los pisos.

en esta lámina 16.^a se ciñen únicamente al conjunto, se hallan expresadas en centímetros.

LÁMINA 17.^a Detalles de una puerta de tableros.—Esta lámina es continuación de la anterior, y contiene dos figuras. La primera representa la sección originada por un plano secante que pasa por A. B (V. lámina 16.^a), en la cual aparecen acotadas las dimensiones correspondientes al grueso de las piezas, las de las molduras y otros detalles que, por su reducido tamaño, no se han podido consignar en la anterior lámina. Estas acotaciones de la sección se expresan en milímetros, y, además, la figura va acompañada de una escala que permite aquilatar aquellos pocos detalles sin medida asignada.

La figura 2 representa en perspectiva caballera un detalle del ensamble á caja y espiga entre el cabio y el larguero, así como también el del tablero con las dos piezas mencionadas; este último se verifica á ranura y lengüeta. La parte que en las piezas corresponde á las molduras, ensambla por medio de inglete.

La representación axonométrica de este detalle se ha verificado según las escalas $1 : \frac{1}{2} : 1$, con arreglo á la combinación de ejes llamada horizontal vertical (V. *Perspectiva caballera*, **33**).

LÁMINA 18.^a Arco de medio punto en muro recto.—Comprende dos figuras. La primera representa el citado arco en planta y alzado, proyectado según el sistema ortogonal, y en la segunda el desarrollo de una de las dovelas, la que está señalada con la letra B.

Del examen de planta y alzado se saca en consecuencia que los planos de junta que pasan por $o r'$, $o h'$, $o e'$, etc. (proyección vertical), son perpendiculares á los paramentos del muro, y, por tanto, cortan á la superficie cilíndrica, ó sea al intradós del arco, según las generatrices $m m''$, $n n''$, $d d''$, etc. (proyección horizontal), circunstancia que conviene tener presente al hacer el desarrollo de la dovela B, como igualmente al verificar la representación axonométrica que figura en la siguiente lámina 19.^a

El desarrollo (fig. 2) se ha verificado considerando dicha dovela como un cuerpo prismático en su mayor parte, cuyas bases $a b c d e g$ y $a' b' c' d' e' g'$ corresponden á los paramentos exterior é interior del muro, que por ser paralelos al plano vertical se proyectan en su verdadera magnitud; y tomando por caras laterales de este prisma los demás planos de junta, más la superficie cilíndrica $d n d'' n''$ (planta) correspondiente al intradós.

La longitud de la dovela de referencia, ó sea la distancia que media entre las citadas bases, se encuentra proyectada en verdadera magnitud, en $c c''$ sobre la planta, de donde se ha trasladado á $c c'$ (fig. 2), puntos por los cuales se trazan las rectas $g g'$ y $g'' g'''$ perpendiculares á la $c c'$, las cuales representan el desarrollo del perímetro correspondiente á cada una de las caras

$abcdeg$ y $a'b'c'd'e'g'$. Finalmente, y para no alargar esta descripción, después de verificadas todas las operaciones necesarias para el desarrollo de un prisma recto (V. *Proyecciones ortogonales*, **85**), se obtendrá la plantilla total de la dovela, compuesta de las parciales correspondientes á sus ocho caras, tal como aparece en la figura 2 (1).

LÁMINA 19.^a **Arco de medio punto en muro recto.**—Esta lámina se considera como continuación de la 18.^a; en ella se trata el mismo asunto representado en proyecciones axonométricas. Con ella á la vista se forma idea más completa, no solamente de la estructura del arco, sino también de la que corresponde á cada una de las dovelas.

Tres figuras contiene esta lámina. En la primera puede verse el efecto del conjunto, en la segunda la disposición de los ejes X, Y, Z, y en la tercera la forma que toman las caras de algunas dovelas, situadas en el paramento exterior del muro, después de proyectadas axonométricamente, con objeto de trasladar dichas caras en $A'B'D'$, á formar parte de las dovelas que figuran sueltas, y que aparecen aumentadas respecto de sus semejantes ABC , en la relación 7:5.

La representación axonométrica del conjunto y detalles del arco de medio punto, se ha verificado sin otros datos que los proporcionados por los segmentos de los ejes proyectados (fig. 2). Como entre dichos segmentos no hay relación exacta que exprese sus magnitudes relativas, tampoco existen escalas axonométricas; pero en substitución de ellas, se pueden construir escalas de reducción con los valores 0,854, 0,593 y 0,965, correspondientes á los coeficientes X, Y, Z, (V. *Proyecciones axonométricas*, **8** y **9**), que es lo que se ha hecho, por más que no figuren en esta lámina las citadas escalas de reducción.

La representación de las dovelas señaladas con las letras A' , B' y C' , se facilita, encajándolas en un paralelepípedo, de modo que en sus bases queden inscriptas las caras correspondientes á los paramentos del muro; procurando además el mayor número de coincidencias de planos y aristas en la dovela, con arista y planos de su envoltura auxiliar, según se ve en la figura.

LÁMINA 20.^a **Acuerdo entre dos muros y arco de medio punto en el talud de un muro** (2).—El acuerdo ó contacto se verifica entre un muro en talud (cuya oblicuidad se puede apreciar en el perfil $r u e m$, situado en el alzado) y otro muro cónico proyectado en $a V c - a' c' c''$. Para conseguir

(1) El desarrollo, corte y armado de cada una de las plantillas de las dovelas, para después construir con ellas el arco, aparte de ser una excelente práctica, constituye la mejor comprobación para juzgar del acierto y precisión con que se han llevado á cabo las operaciones relacionadas con el desarrollo de las citadas plantillas.

(2) Muro en talud es aquel cuyo paramento exterior está inclinado ó fuera de plomada, formando con el plano horizontal del terreno un ángulo diedro menor de 90° sin llegar á 45° , porque entonces tomaría el nombre de rampa.

dicho acuerdo, se traza el paramento del talud, tangente al del muro cónico según la generatriz de contacto $vc - c'e''$ (V. *Proyecciones ortogonales*, **80** y **81**). En esta misma generatriz se verificarán los contactos de las líneas de junta correspondientes á las hiladas horizontales de ambos muros.

Las otras líneas de junta discontinuas que alternan con las primeras, siguen dirección perpendicular á las horizontales, mientras no salen del talud, pues en pasando al paramento del muro cónico, se convierten en generatrices que desde el vértice V se dirigen á los puntos 1, 2, 3 y 1', 2', 3'.

La figura 2 es un detalle en perspectiva caballera donde se representan dos hiladas de sillares del muro cónico, el cual no tiene más objeto que dar á conocer con más claridad la estructura de dicho muro y su unión por contacto con el de talud, según la generatriz cc' .

La apertura del arco de medio punto, sobre el muro en talud, equivale en lo que tiene de problema, á la penetración de un cilindro (arco de medio punto) en una prisma (muro en talud).

Para resolver este problema, ha de tenerse en cuenta que el eje del cilindro es perpendicular en o' al plano vertical de proyección, pero oblicuo al paramento exterior del muro; por consiguiente, la curva intersección del cilindro con dicho paramento, será una semielipse cuyos semiejes son: en el mayor, tomado en el perfil $ruem$ del muro y $o7 - o'7'$ el menor, que se proyecta en su verdadera magnitud, tanto en la planta como en el alzado.

Un punto cualquiera de esta elipse, el $6 - 6'$, por ejemplo, se determina con ayuda del plano de perfil $R - R'$, donde el punto $6 - 6'$ corresponde al p . También en la representación del despiezo, interviene de manera directa el citado plano de perfil, facilitando la correspondencia entre las dos proyecciones horizontal y vertical.

En la figura 3 se representan en verdadera magnitud las plantillas de cada uno de los planos de junta que, reuniéndose en el eje del cilindro, pasan por los puntos $4', 5', 6'$ y simétricos.

Para construir estas plantillas, se desarrolla el intradós del arco con las generatrices que pasan por $4, 5, 6$, etc.; desarrollo que equivale al de un tronco de cilindro (V. *Proyecciones ortogonales*, **89**), obteniéndose después las verdaderas magnitudes que completan el trazado de dichas plantillas, en la proyección del perfil $ruem$, correspondiente al muro. Así, las longitudes $t'p, s'n, rm$, se han tomado respectivamente de tp, sn, rm , verdaderas magnitudes proyectadas en dicho perfil.

LÁMINA 21.^a **Bóveda por arista.** — Contiene tres figuras: la primera representa en planta y dos alzados la estructura de dicha bóveda, la cual corresponde á la intersección de dos semicilindros ó cañones de igual altura, cuyos ejes son perpendiculares y están contenidos en el plano de arranque $acab$, paralelo al horizontal de proyección.

Uno de los cañones, el AGB , es de medio punto (cilindro de revolución), y el otro $C'G'A'$ corresponde en su perfil al de un arco rebajado elíptico. Como

el radio de la semicircunferencia $A G B$ y el eje menor de la semielipse $C' G' A$ son iguales, la intersección de los dos medios cañones se verificará según las aristas $a e$ y $b c$ que se cortan en el punto más alto de la bóveda $o - o' - o''$.

Tanto la una como la otra, estas aristas son semielipses, cuyo semieje menor $o 4$ es igual al radio del cañón de medio punto y el eje mayor á cualquiera de las proyecciones horizontales $a e$ y $b c$ de las citadas aristas.

Los planos de junta correspondientes á las hiladas de dovelas, pasan por el eje en el cañón de medio punto, y siguen la dirección de las normales á la elipse, determinadas en $h d$, $g f$ y $p g$, respecto al medio cañón rebajado elíptico (fig. 2). Estos planos cortan á uno y otro cañón, según generatrices rectas. Los demás planos de junta se consideran respectivamente perpendiculares á cada uno de los ejes oo' , oo'' , razón por la cual las secciones producidas en el cañón de medio punto, por estos planos, son arcos de circunferencia, y en el elíptico, segmentos de elipse.

Las dovelas pertenecientes á la arista forman parte de ambos cañones, presentando dos frentes ó caras perpendicularmente situadas. La dovela del centro, única que no tiene par, llamada clave de la bóveda, también forma parte de dichos cañones, pero con la circunstancia de que presenta cuatro frentes opuestos y perpendiculares, dos á dos. Además, en $o - o'$, punto medio del intradós correspondiente á la clave, se verifica el encuentro de las dos aristas $a e$ y $b c$.

En la figura 3 se representa el desarrollo del intradós de esta bóveda y la verdadera magnitud y forma de los planos de junta normales que separan las hiladas de dovelas, correspondiendo la parte superior de dicha figura al desarrollo del intradós del cañón de medio punto, y la inferior al intradós del medio cañón elíptico.

Estos desarrollos se hacen en igual forma que los de superficies cilíndricas (*Proyecciones ortogonales*, 89). Para obtener la verdadera magnitud de una de las plantillas de referencia, la $I A D d$, por ejemplo (fig. 3), se tomará en el alzado del cañón de medio punto la longitud $I' D$, y se colocará de A en D , sobre el desarrollo. Por los puntos A y D se trazan perpendiculares á la recta $A D$, y desde los puntos m , z , situados en la planta, se correrán paralelas, las cuales, en sus respectivas intersecciones con las $A I$ y $D d$, darán los puntos 1 y d que, con los D y A , forman los vértices de la plantilla, no sólo del plano de junta que pasa por I' , sino también de su simétrico, que pasa por m' .

Operaciones análogas se verifican para obtener las plantillas $F D 2 F$ y $G F 3 g$, así como también, con los mismos procedimientos empleados para obtener el desarrollo y plantillas del cañón de medio punto, se obtendrán el desarrollo y plantillas correspondientes al medio cañón elíptico.

La representación axonométrica de una de las dovelas situadas en las aristas, ó de la clave misma (que no han podido tener cabida en esta lámina), constituirán un ejercicio provechoso é instructivo.

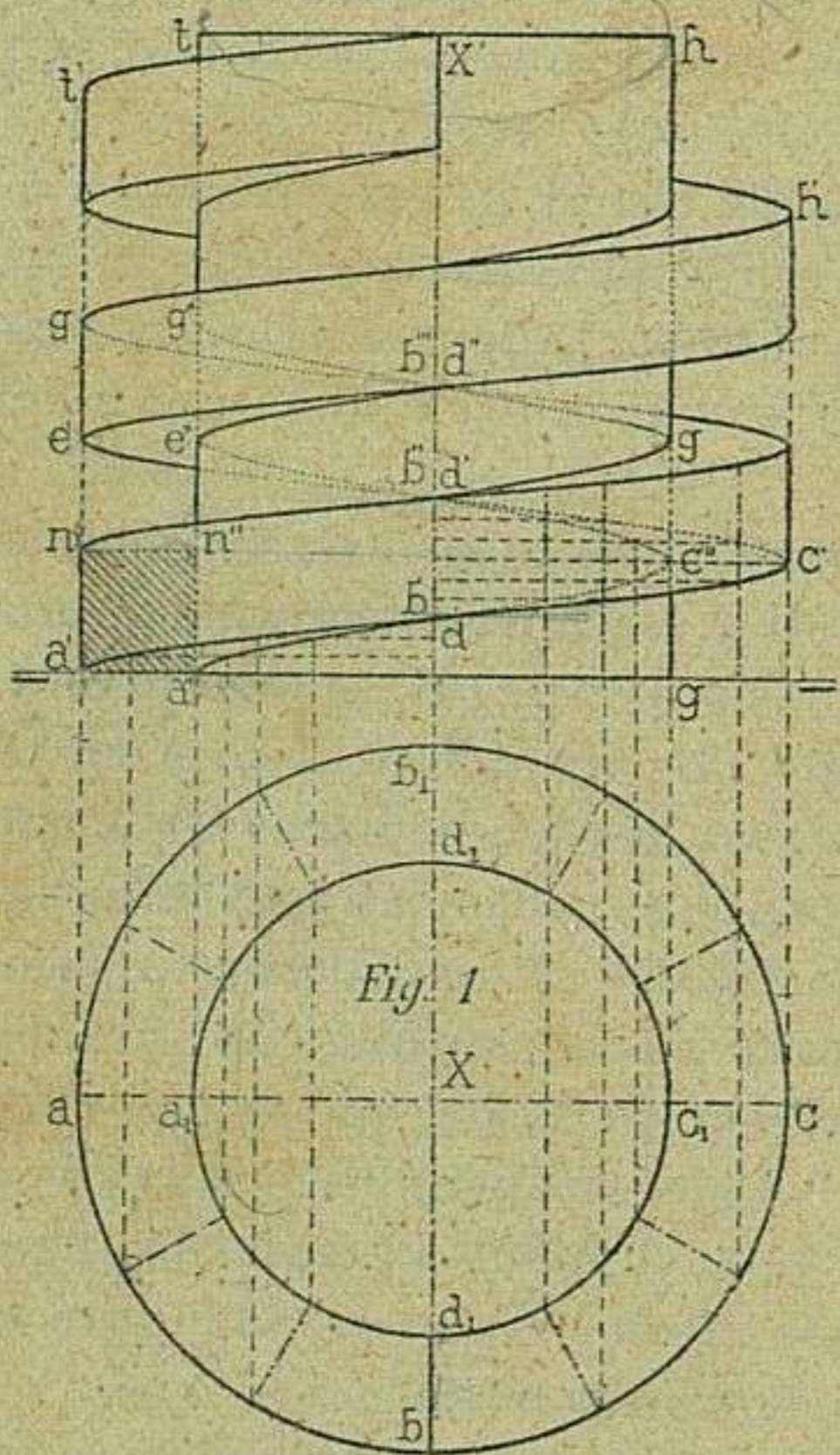
Para poder apreciar dimensiones de conjunto y detalle, hay al pie de la figura 3 una escala de 25 milímetros por metro.

TRAZADO Y PROPORCIÓN DE ÓRGANOS DE MÁQUINAS

Con este título figuran en la serie E, distribuidos en once láminas, algunos ejemplos referentes á ensambles de piezas metálicas, en los que intervienen roblones, pernos, chavetas y manguitos, además de otros que se relacionan con el trazado de engranajes.

Antes de hacer la acostumbrada reseña acerca del contenido de las láminas que componen la serie E, conviene, por exigirlo así la índole de la materia que se va á tratar, dedicar capítulo preferente á la descripción de dos entidades mecánicas de reconocida importancia; tales son los pernos, considerados como elementos esenciales de ensamble, y los engranajes, órganos destinados á la transmisión del movimiento.

1. Pernos. — Reciben este nombre órganos elementales que sirven para unir ó ajustar piezas generalmente de hierro, y algunas veces de madera. La forma



es la de un cilindro, terminado en un extremo por un remate prismático (V. figs. 12 y 13), cilíndrico (V. figs. 15 y 16), ó de segmento esférico (V. fig. 14), que se llama cabeza; y por el otro, en un tornillo de igual diámetro que el del cilindro. Á este tornillo se arrosca una pieza llamada tuerca (V. figs. 10 y 11), cuyas funciones consisten en sujetar, comprimiendo las piezas que atraviesa el perno, situadas entre la cabeza y la tuerca.

El trazado de una rosca ó tornillo depende del perfil correspondiente al filete (1). Éste suele ser, por lo común, triangular ó cuadrangular, según dicho filete sea engendrado por un triángulo ó por un cuadrilátero.

Trazado del tornillo de filete cuadrangular (fig. 1). — Sea $a' a'' n'' n'$ el cuadrilátero generador del filete, cuyo plano, paralelo al vertical de proyección y pasando por el eje $X X'$ del cilindro, se supone gira alrededor de él, recorrien-

(1) Se llama filete al prisma helicoidal engendrado por el triángulo ó cuadrilátero, cuyo plano pasa por el eje del cilindro al recorrer dos de sus vértices, hélices situadas en la superficie cilíndrica.

do al mismo tiempo el vértice a' todos los puntos de la hélice $a' - b' - c' - b'' - e' \dots$, previamente trazada, tomando el lado $a' n'$ como paso (V. **102**, 1.^a parte, ó **110**, 2.^a edición).

Durante el recorrido del cuadrilátero $a' a'' n'' n'$ en las condiciones apuntadas, ocurrirá que cada uno de los citados vértices describirá su correspondiente hélice. Las cuatro hélices resultantes tendrán el mismo paso y estarán situadas dos á dos en cilindros de eje común y radio distinto, cuya diferencia se representa por $n' n'' = a' a''$. Así, las hélices $a' b' c' b'' e'$ y $n' b'' e' b''' g$, trazadas sobre el cilindro mayor de generatriz $a' t'$ y la $a'' d' e'' d' e''$ con la $n'' b'' g b''' g''$, trazada sobre el cilindro menor, cuya generatriz es $a'' t$, forman las cuatro aristas del filete cuadrangular propuesto.

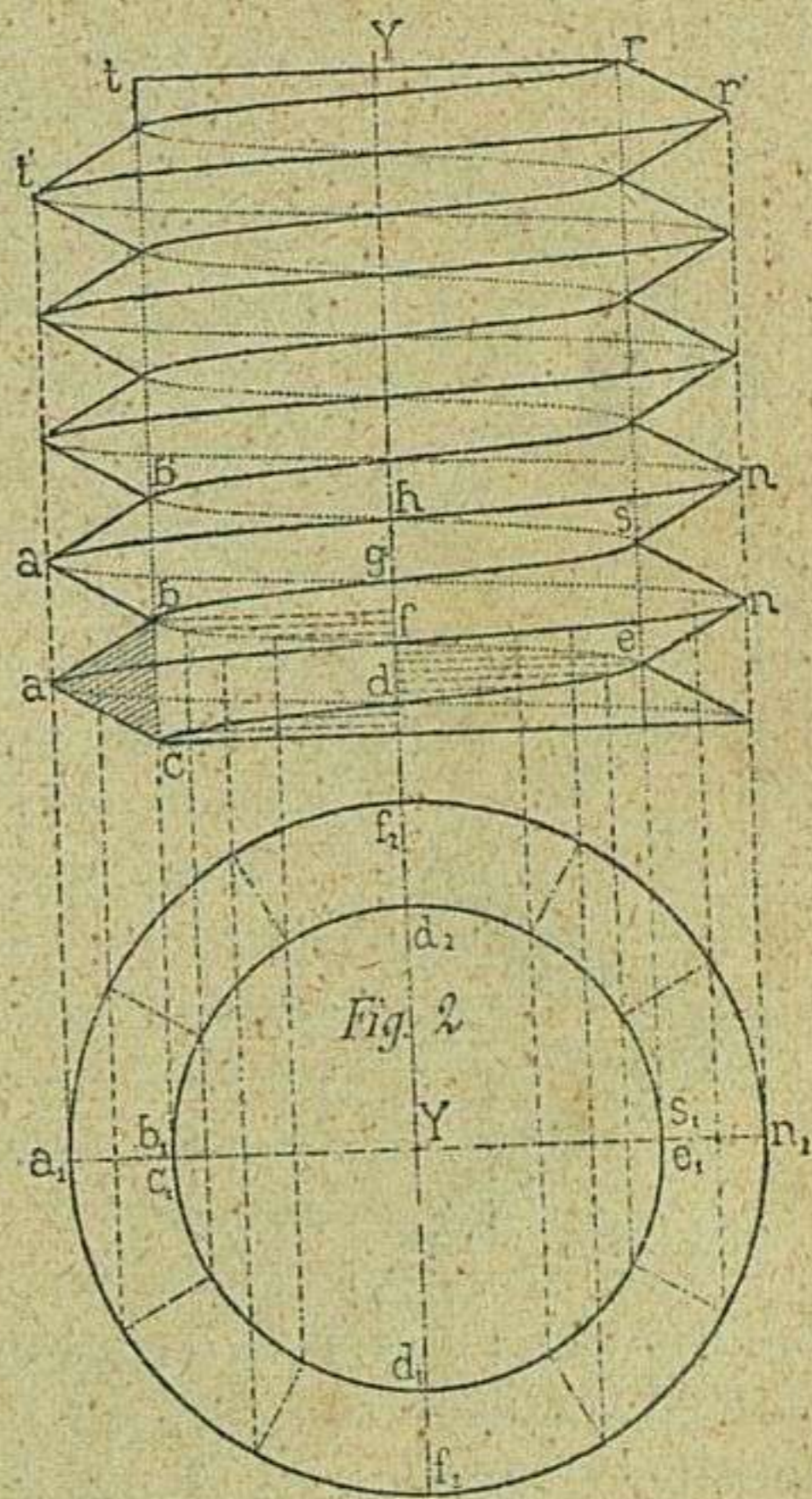
Trazado del tornillo de filete triangular (fig. 2). — Sea abc el triángulo generador del filete; haciendo iguales consideraciones que las ya expuestas al tratarse del tornillo de filete cuadrangular, se observará que al recorrer el vértice c del triángulo generador, el camino indicado por la hélice $cdefb \dots$, los otros vértices a y b describirán hélices del mismo paso, representado por $cb = aa'$. De estas hélices, las $cdefb \dots$ y $bgshb' \dots$ están situadas sobre el cilindro interior de generatriz ct . La tercera hélice $afnga' h n \dots$ se halla trazada en el cilindro exterior, cuya generatriz es at' .

Representación convencional de filetes de tornillo. — Se ve por las anteriores figuras 1 y 2, que la representación del tornillo requiere operaciones complicadas para el trazado de la hélice.

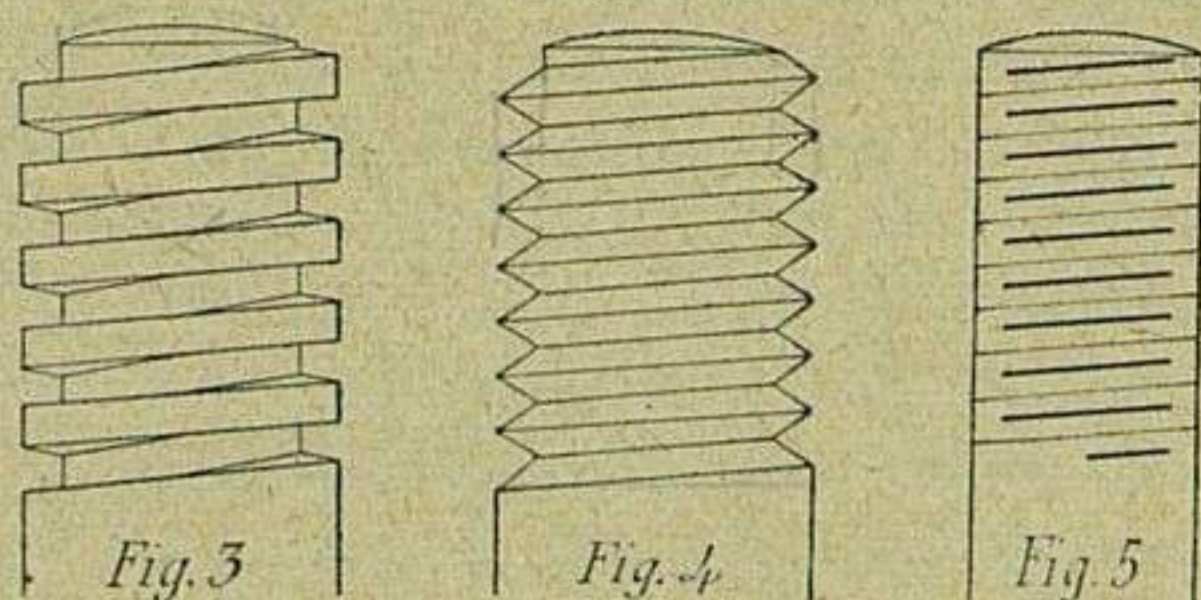
La dificultad que presentan dichas operaciones sube de punto cuando se han de dibujar tornillos pequeños, caso que ocurre con harta frecuencia. Para evitarla, se ha convenido en substituir las hélices por líneas rectas paralelas (V. figs. 3, 4 y 5), innovación que en nada afecta las proporciones del tornillo, puesto que conserva los datos más esenciales: el diámetro y el paso.

Cuando el tornillo es de filete cuadrangular, su representación convencional se ajusta á la de la figura 3, y si es de filete triangular, se suele representar de las dos maneras expuestas en las figuras 4 y 5, siendo más generalmente aceptada la forma que se indica en la figura 5.

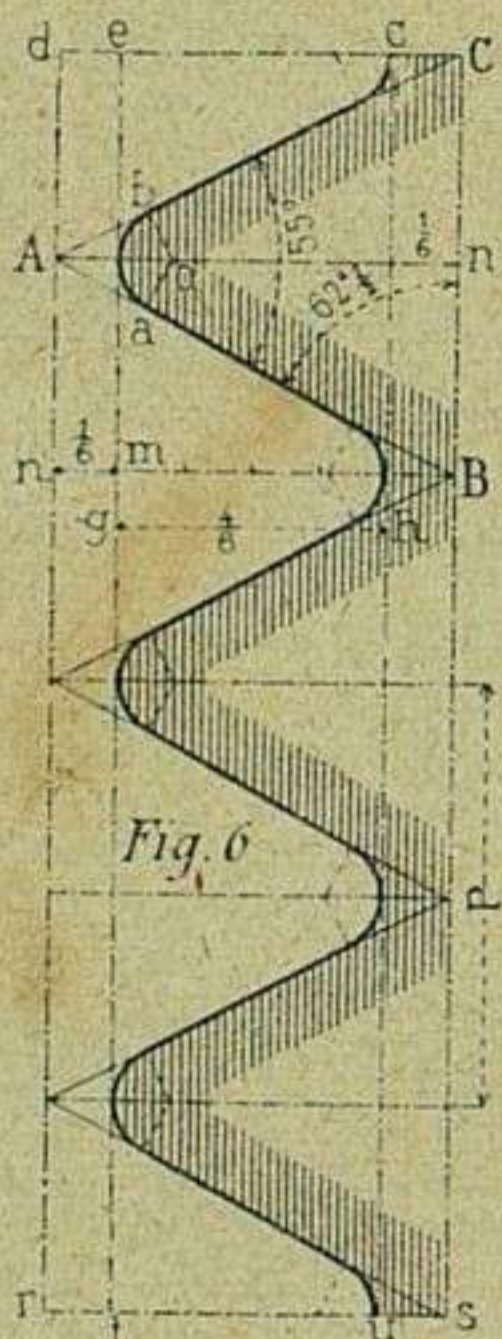
De todos modos, sea una ú otra la forma en que se represente el tornillo, el paso corresponderá en las figuras 3, 4 y 5 la distancia que media entre tres paralelas inmediatas de las que substituyen á las hélices.



Diferentes sistemas del paso de rosca. — El tornillo de filete triangular es el que más se usa, sobre todo tratándose de pernos; pero sus proporciones y hasta la forma del perfil varían según su procedencia.



Estas variedades se reducen á tres tipos adoptados respectivamente en Inglaterra, en Norte América y en Francia y otras naciones.

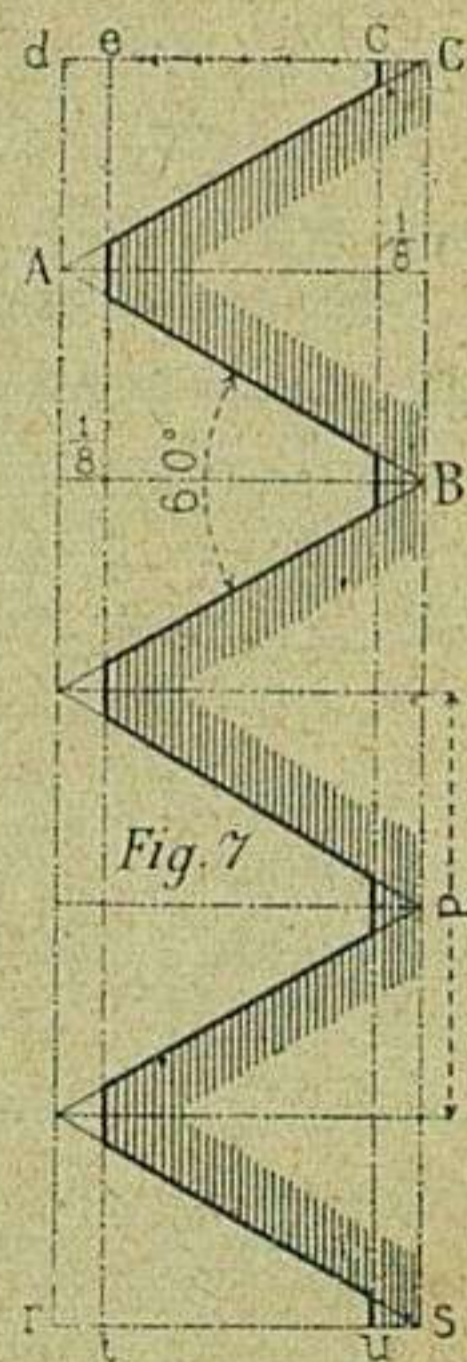


TIPO INGLÉS (fig. 6). — El triángulo generador del filete es isósceles, formando los lados correspondientes al perfil ángulos entrantes y salientes de 55° . Dicho triángulo A B C, está cortado por dos paralelas te y uc , equidistantes de la base BC y del vértice A, un sexto de la altura An . La forma del perfil se completa describiendo arcos tangentes á los lados AB, AC y á las paralelas et y uc , tales como el ab , los cuales tienen por objeto dar forma redondeada al filete. Este tipo, propuesto por Whitworth, se usa en toda Inglaterra desde 1841.

TIPO NORTEAMERICANO (fig. 7). — El triángulo generador es equilátero y se halla cortado por las paralelas te y uc , equidistantes de la base BC y del vértice A un octavo de la altura cd de dicho triángulo.

Este tipo, que fué propuesto por Sellers, viene usándose en los Estados Unidos desde 1865.

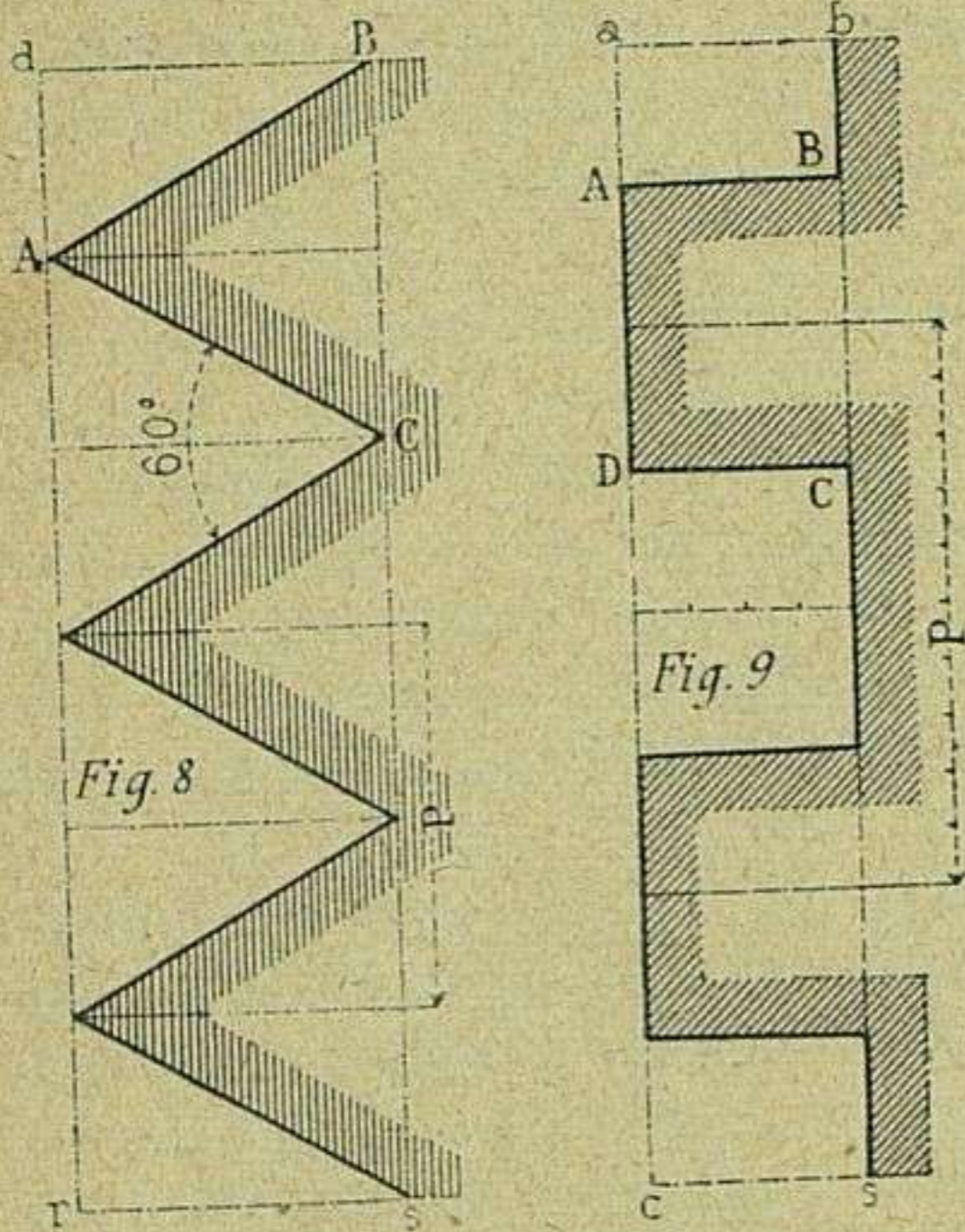
TIPO FRANCÉS (fig. 8). — El triángulo generador es equilátero, aunque en ocasiones suele tener embotados los ángulos entrantes y salientes del perfil, á semejanza de lo que ocurre con el de tipo inglés. De las variedades indicadas, la más extendida en Europa es la correspondiente al tipo francés de tornillo de filete triangular (1), que alterna en algunos casos con el de filete cuadrangular.



(1) Es de sentir no se haya llegado en absoluto á establecer un canon universal para los filetes de tornillos y tuercas, que permitiera la inmediata substitución de estas piezas en casos de avería. Mucho se hizo en tal sentido por el Congreso Internacional de Zurich, reunido en 1898.

La Comisión encargada de intentar la unificación de tipos, redactó una circular en

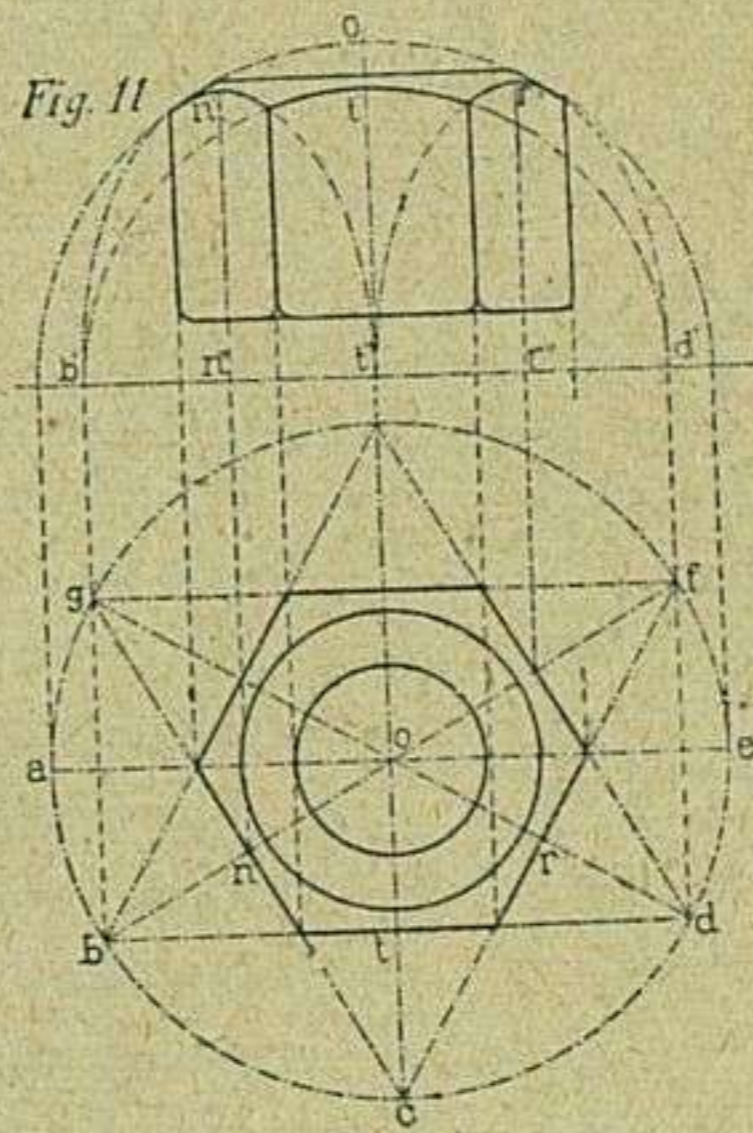
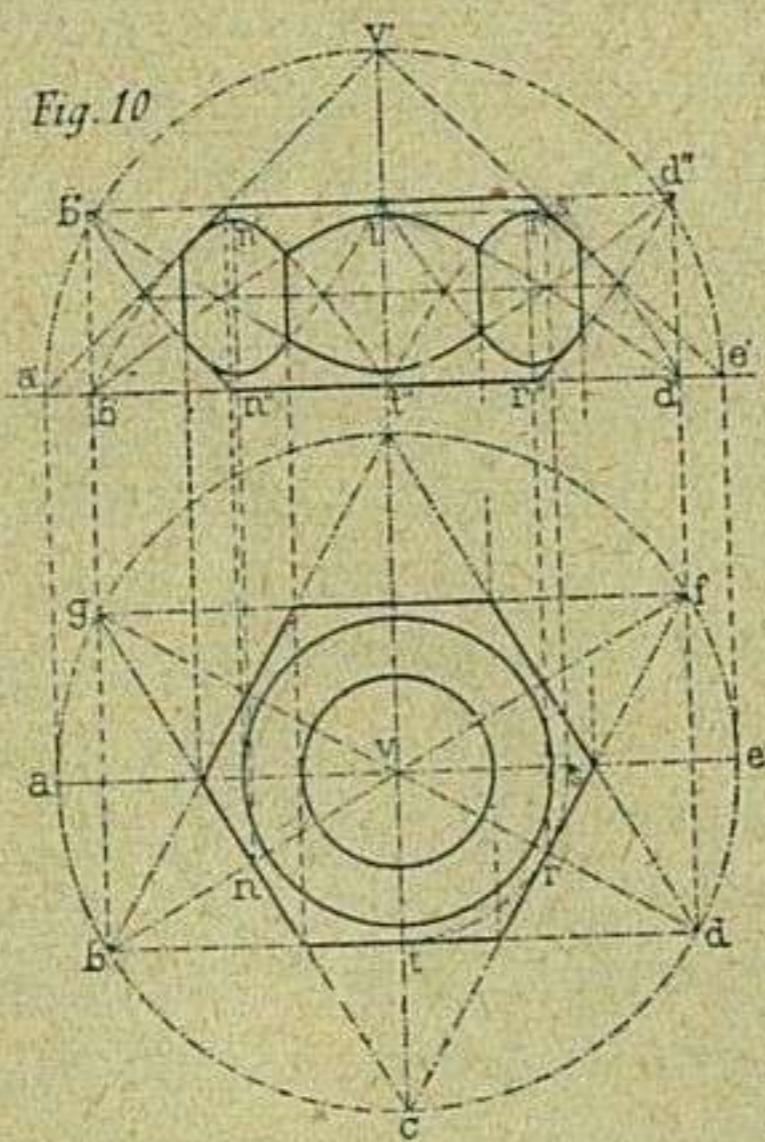
Las dimensiones del cuadrilátero generador del filete cuadrangular (figura 9), se determinan tomando para longitud del lado A B, cuatro quintos de la que mide el A D. El diámetro es igual á 10 veces el paso.



Trazado de tuercas (figs. 10 y 11). — La forma de una tuerca se asemeja á la de un prisma por lo común exagonal, terminada hacia las bases por superficies cónicas, como en la figura 10, ó esférica, como en la figura 11.

La tuerca representada en la figura 10 se obtiene de la intersección de un cono con un prisma exagonal, rectos ambos y coincidiendo los ejes. En este supuesto, las caras del prisma, por ser paralelas al eje del cono, cortarán esta superficie según hipérbolas (V. *Proyecciones ortogonales*, 93), tales como las $b' n' t''$, $b' t' d'$, etc.

En la figura 11 se representa otra tuerca cuya base superior es esférica, la cual resulta de la intersección de un prisma exagonal con una semiesfera que



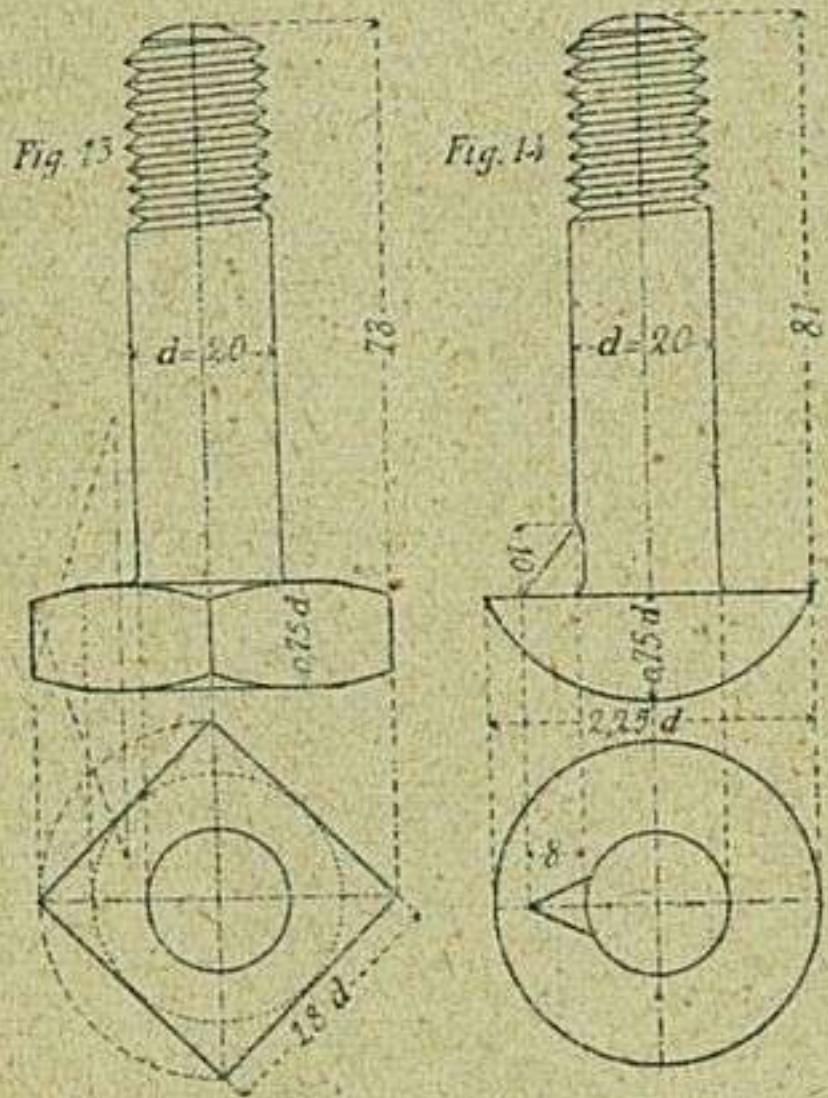
tiene su centro en el eje del prisma. En estas condiciones, las caras del prisma cortarán á la superficie esférica, según arcos de circunferencia $b' n' t''$, $t'' r' d'$

Octubre de 1900, en la que se establecen las proporciones del tipo único llamado *Sistema internacional*, en el cual, el triángulo generador corresponde al tipo Sellers, pero la relación entre el diámetro y el paso se deduce de la fórmula: $d = \frac{P(P + 8)}{1,3} - 1,5$ en la que el diámetro se designa por d y el paso por P .

Chaveta es una especie de clavija que tiene por objeto impedir el desprendimiento de la tuerca. Hay gran variedad de formas que responden al uso á que se les destina (V. lámina 23, serie E); la *ab*, representada en la fig. 12 bis, atraviesa la espiga del perno por encima de la tuerca en el momento de su ajuste, y una vez colocada, se le redoblan los extremos hacia afuera para impedir su salida.

No siempre la forma y dimensiones de los pernos se ajustan á la del representado en la figura 12.

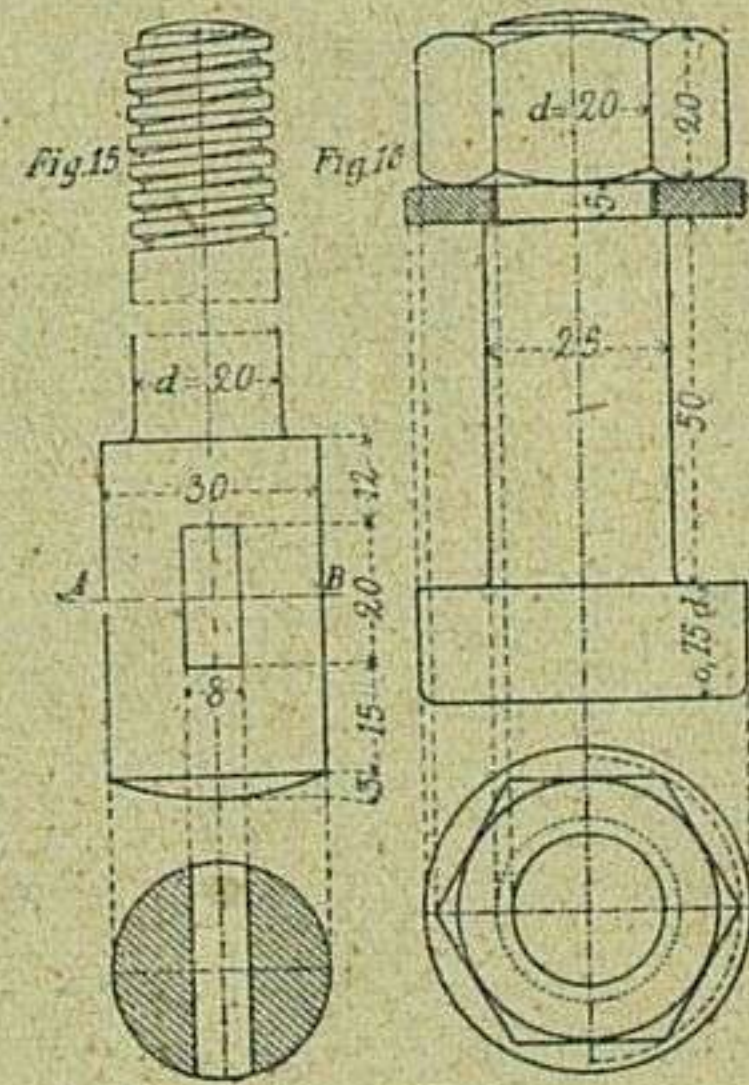
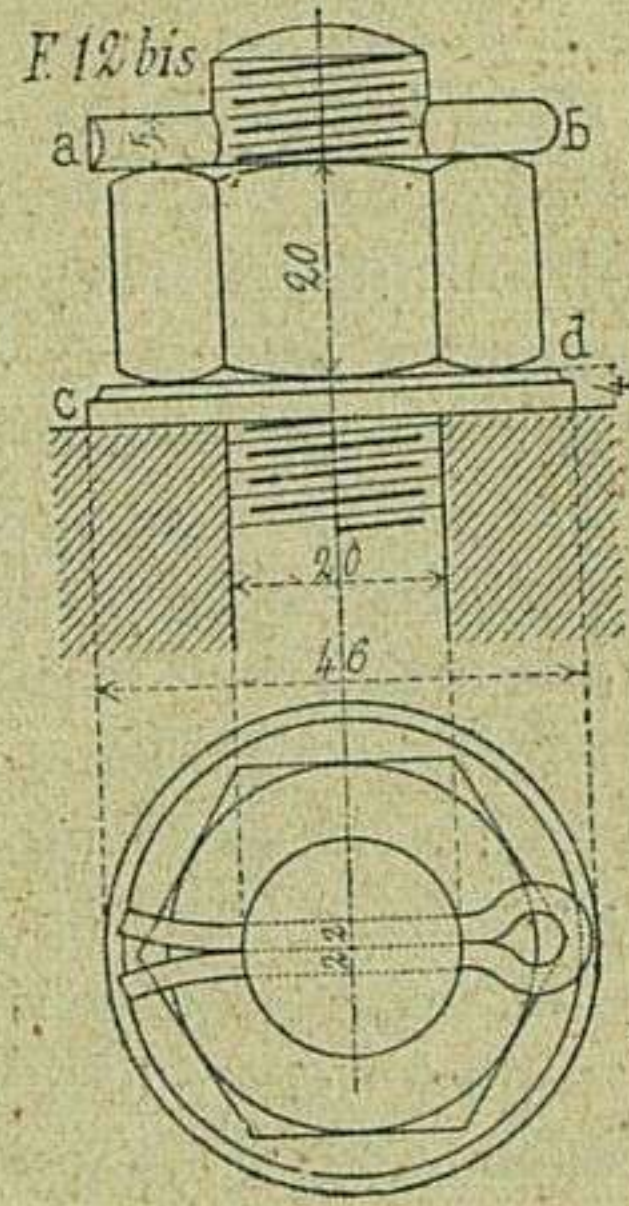
Varian una y otras, según las necesidades; así, por ejemplo, los que se representan en las figuras 13 y 14 se emplean en obras de madera. El primero (fig. 13), tiene la cabeza y la tuerca cuadradas, y el segundo (figura 14), en forma de segmento esférico, con un apéndice ó contrachaveta que, unido á la cabeza y á la espiga, queda embutido en la madera, impidiendo que el perno dé vueltas al ajustarle la tuerca, que suele ser cuadrada ó



también de orejas en los pernos de poco diámetro.

El perno representado en la figura 15 tiene la cabeza cilíndrica prolongada en el sentido de su eje. En esta cabeza se abre una caja á la cual se ajusta una chaveta ó pasador: pernos de esta especie se emplean para suspender piezas que se apoyan en la chaveta que atraviesa la cabeza.

Se representa en la figura 16 otra variedad de perno cuyo oficio consiste en servir de eje de rotación. Al efecto, la espiga de este perno, al disminuir de diámetro por el extremo opuesto á la cabeza, forma como un retallo, en el que se detiene la arandela obligada por la presión de la tuerca, impidiéndose de este modo el roce de la pieza que gira alrededor del perno como eje.

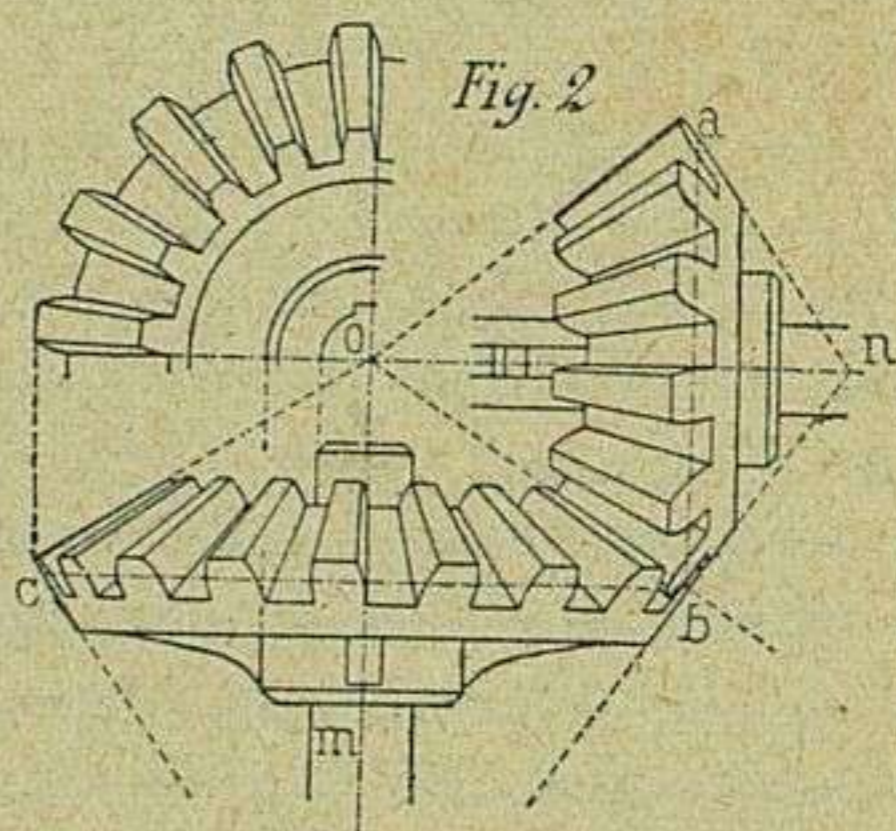
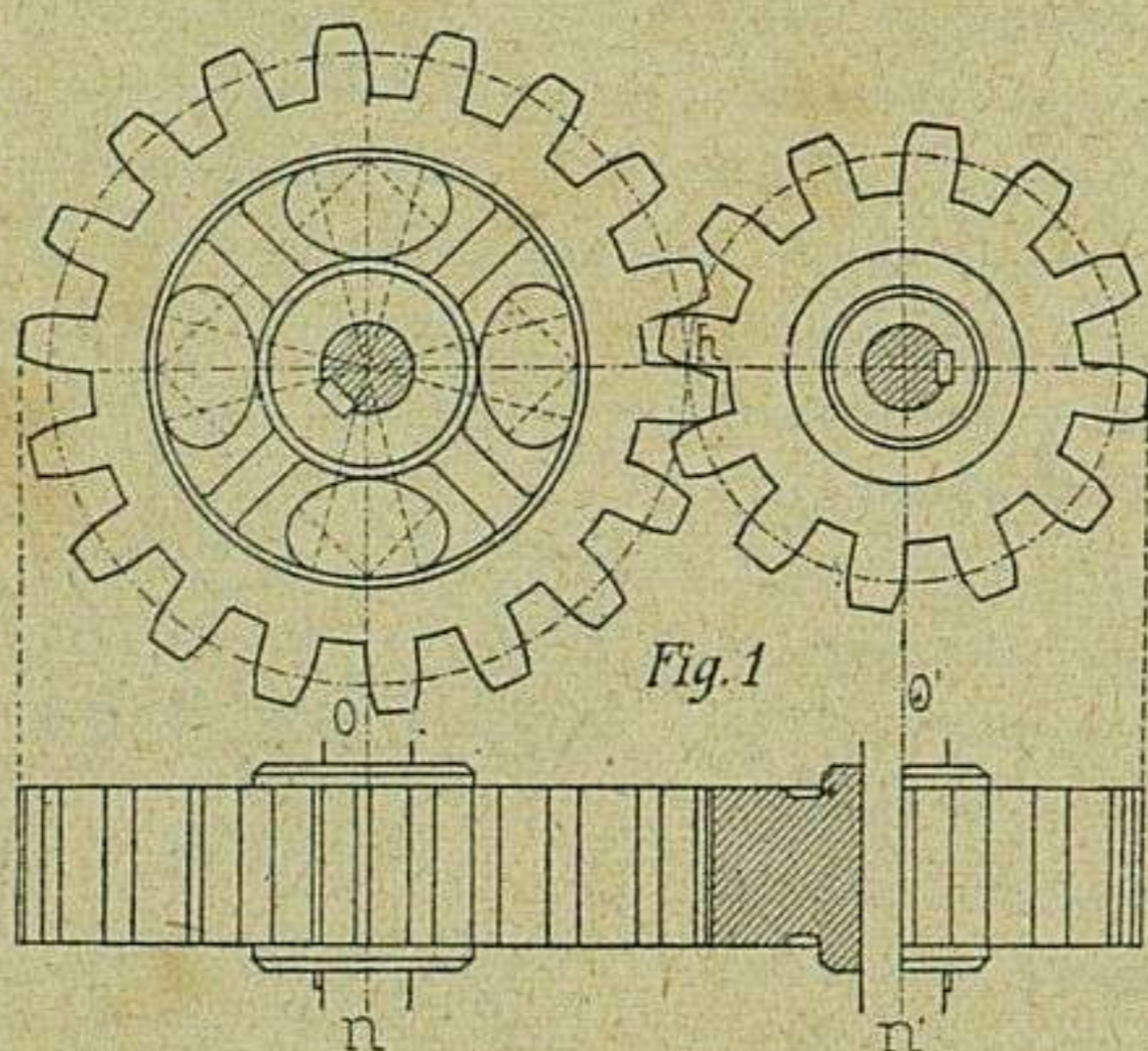


TRAZADO DE ENGRANAJES

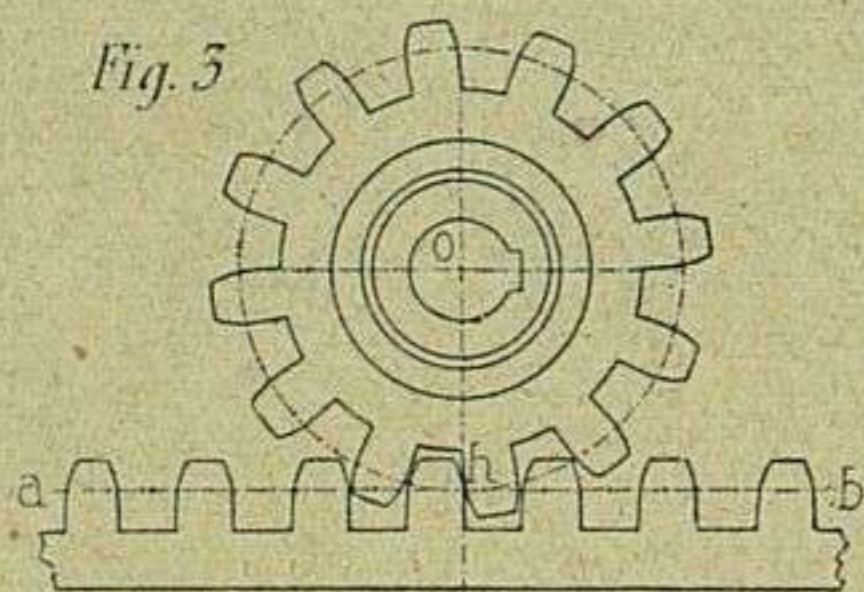
Para dibujar la más sencilla rueda dentada de manera que se armonicen la forma y proporción con las condiciones mecánicas á que ha de responder su funcionamiento, es necesario conocer la relación que existe entre cada uno de los elementos que forman el conjunto. Hay más: los principios geométricos relacionados con su trazado son los mismos que presiden la construcción de tan importante organismo mecánico. Así, no es aventurado asegurar que una vez resuelto el problema gráfico en todas sus partes, también se habrá resuelto el que atañe á la construcción de dicho organismo.

1. La rueda dentada, como puede verse en las figuras adjuntas, se caracteriza por la serie de dientes que lleva implantados en la *corona* ó *llanta*, todos iguales é igualmente espaciados.

Cuando dos ruedas se combinan de modo que los dientes de una encajan en los espacios que dejan los de la otra, en tal forma dispuestos que girando una alrededor de su eje se comunica el movimiento de rotación á la otra, entonces estas ruedas constituyen lo que se llama un *engranaje*. La rueda que comunica el movimiento se llama *motora*, y aquella que lo recibe *receptora*.

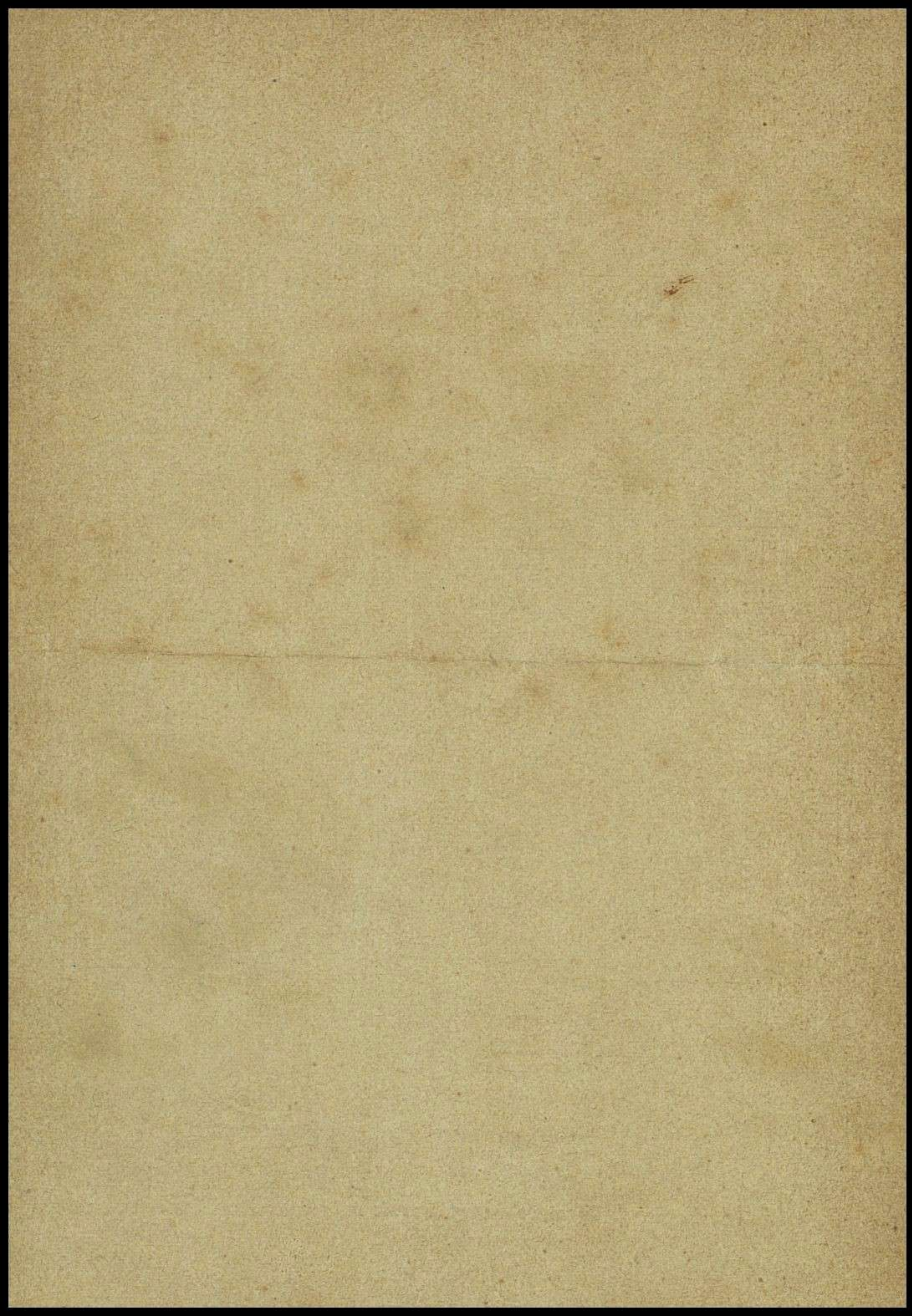


2. El engranaje de dos ruedas se denomina *recto* ó *cilindrico* cuando los ejes de ellas son paralelos (fig. 1). Si estos ejes se cortan ó se encuentran, el engranaje en este caso se llama *de ángulo* ó *cónico* (fig. 2).



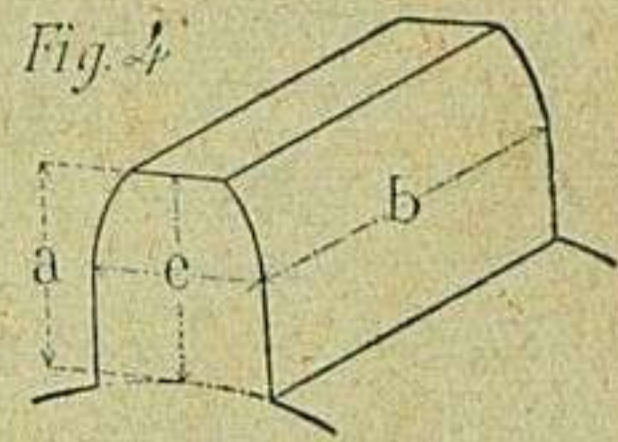
3. Si en un engranaje recto se supone que una de las ruedas tiene el centro distanciado al infinito, la circunferencia de ella en este caso se habrá convertido en una recta, y entonces la llanta ó corona tomará la forma de barra dentada (fig. 3), á la que se da el nombre de *cremallera*.

4. Descripción y forma de los dientes. — Este importante elemento



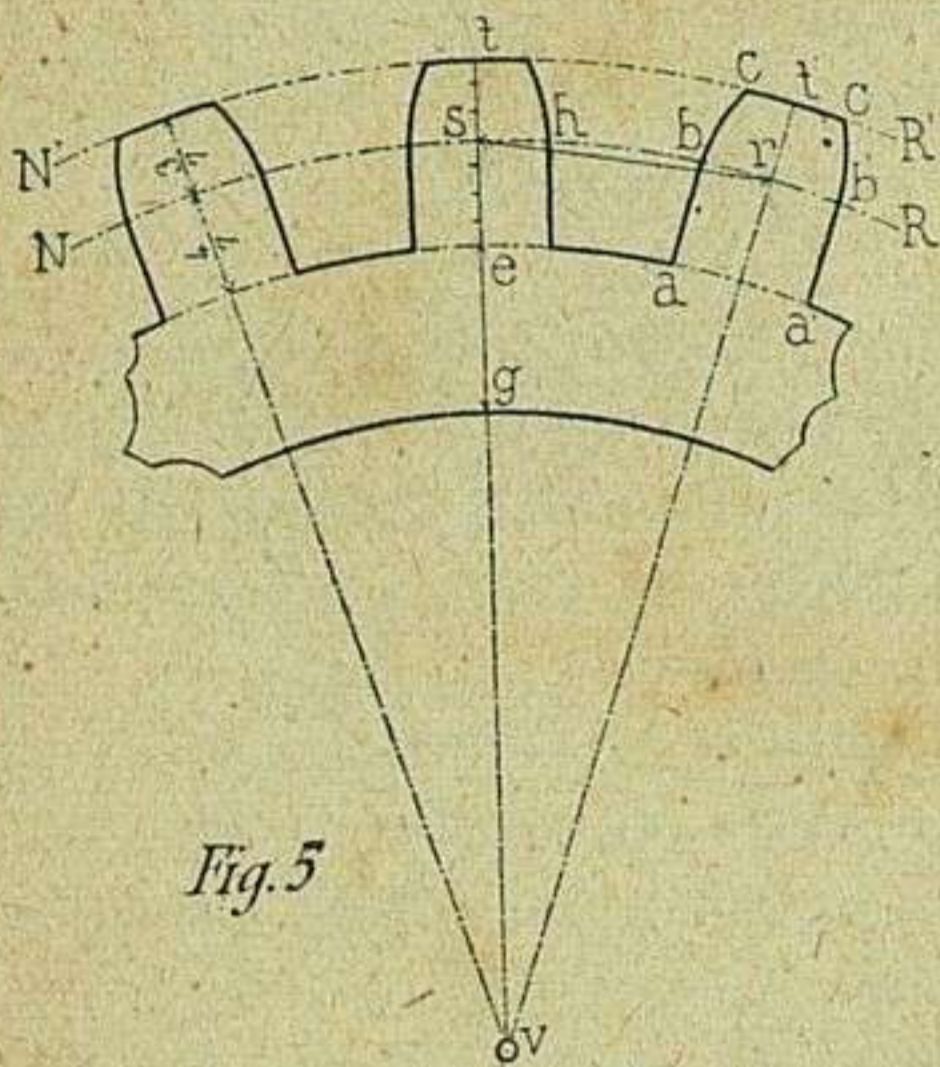
afecta la forma prismático-cilíndrica cuando pertenece á un engranaje recto, y la tronco piramidal-cónica cuando forma parte de un engranaje de ángulo. Para determinar sus proporciones, que es de lo que se trata, se tomará como tipo el diente prismático-cilíndrico, puesto que la manera de apreciar las proporciones del piradimal-cónico en poco se diferencia respecto al prismático-cilíndrico.

5. En todo diente (fig. 4) se considera su *altura*, contada en *a*; su *grueso espesor*, que se mide en *e*, y su *ancho*, representado por *b*.



6. Con relación al conjunto, ó sea á la rueda completa, deben tenerse en cuenta:

La *circunferencia primitiva* ó circunferencia del paso, cuyo radio se consi-



dera en *vs* (fig. 5). El *paso*, que se mide por el segmento de arco *sr*, situado en la *circunferencia primitiva*, comprendido entre los radios contiguos *vs* y *vr*. El *espacio* ó encaje *hb*, el que, según su nombre indica, corresponde al hueco donde encaja el diente de otra rueda. Por último, la *circunferencia exterior* ó total, correspondiente al radio *vt*, que en ningún caso debe confundirse con la *circunferencia primitiva*. Sobre la primitiva se miden exclusivamente el *paso*, el *espesor* y el *espacio* de un diente á otro; además, sobre ella se hace el reparto de dientes. Los elementos descritos se relacionan en cuanto á sus dimensiones del siguiente modo:

7. El *espesor* de un diente es igual á la mitad del *paso*.

Un *espacio* es igual al *espesor* del diente (1), y el *espacio* más el *espesor* dan la medida del *paso*.

8. Las dimensiones de altura, espesor y ancho de un diente también están relacionadas entre sí. El espesor, según los casos, se obtiene en función de la potencia del diente relacionada con la velocidad que ha de transmitir la rueda dentada á que pertenezca (2).

(1) En teoría se entiende, pues en la práctica suele dársele prudencial holgura al *espacio* para que pueda encajar el diente de la otra rueda con el menor rozamiento posible. Este aumento ú holgura no debe pasar del 9 por 100 sobre el espesor del diente.

(2) El número de metros que desarrolla la circunferencia primitiva de una rueda por segundo se hallará multiplicando la longitud de dicha circunferencia por el número de vueltas dadas en un minuto y dividiendo este producto por 60 segundos. Obtenida la velocidad en metros por segundo, se hallará la *potencia* multiplicando el número de caballos que haya de transmitir por 75 kilogramos, y el producto se dividirá por el número de metros desarrollados en un segundo. Este resultado, que expresa kilográmetros, repre-

La altura no debe pasar de los *cuatro tercios* del espesor del diente. La diferencia de radios entre el de la circunferencia exterior y el de la primitiva de una misma rueda es igual á *tres séptimos* de la altura del diente. Los otros *cuatro séptimos* que completan dicha altura corresponden, como es natural, á la distancia que media entre la circunferencia primitiva y la base del diente. De aquí se deduce que la situación de los dientes queda claramente definida por la circunferencia primitiva tomándola como término de comparación.

El *ancho* de un diente depende del funcionamiento de la rueda donde vaya implantado. Para ruedas de marcha lenta ó servidas á mano, el *ancho* suele ser doble del *espesor*. Para ruedas en que la velocidad no llegue á 3 metros por segundo, bastará para el diente un ancho triple del *espesor*. Para aquellas ruedas en que la velocidad se halla comprendida entre 3 y 15 metros por segundo, el *ancho* suele estar comprendido entre tres y cuatro veces el *espesor* del diente.

9. Según más arriba se indicó, la forma de un diente de rueda cilíndrica es en parte prismática y en parte cilíndrica, completándose con dos bases que corresponden á la parte plana de la llanta. Á cada una de estas bases se le da el nombre de *cara* del diente.

La *cara* de un diente (fig. 5) se forma por un contorno simétrico con relación á su eje $v t'$. Este contorno se compone de las rectas ab y $a' b'$, aristas comunes de la cara y de los planos de cada costado, llamados *flancos*; de las curvas bc y $b' c'$, tangentes en b y b' á las anteriores rectas, y del pequeño arco cc' , correspondiente á la circunferencia exterior.

Las curvas simétricas bc y $b' c'$ son las directrices de la superficie cilíndrica de los dientes, en las que se verifica el contacto durante el movimiento. Así, pues, el trazado de estas curvas es de la mayor importancia, puesto que de él dependerá el buen funcionamiento de un engranaje cuyo trabajo consiste en resbalar los dientes de una rueda sobre los de la otra, comunicando el movimiento con el menor ruido y rozamiento posible.

Este buen resultado sólo se consigue haciendo que las curvas ab y $a' b'$ sean evolventes de círculo ó epicloides, ó también cicloides cuando se trate de una cremallera, puesto que estas son las únicas curvas cuya generación se acomoda racionalmente al movimiento combinado de los engranajes.

10. Trazado del diente evolvente (fig. 6).—Descrita la circunferencia primitiva de radio $v N$, y determinado el espesor del diente en bb' , se dará comienzo al trazado por las aristas de los flancos ab y $a' b'$. Estas rectas, que en teoría se suponen concurrentes al centro v de la circunferencia primitiva, en la práctica se trazan tangentes exteriores á una circunferencia concéntrica

senta la *potencia* del diente, cuya raíz cuadrada, multiplicada por un factor que varía según que la fundición sea de hierro ó de bronce, dará el valor del *espesor* en esta forma:

$$\text{Para hierro colado} \dots \quad e = 105 \times \sqrt{P}$$

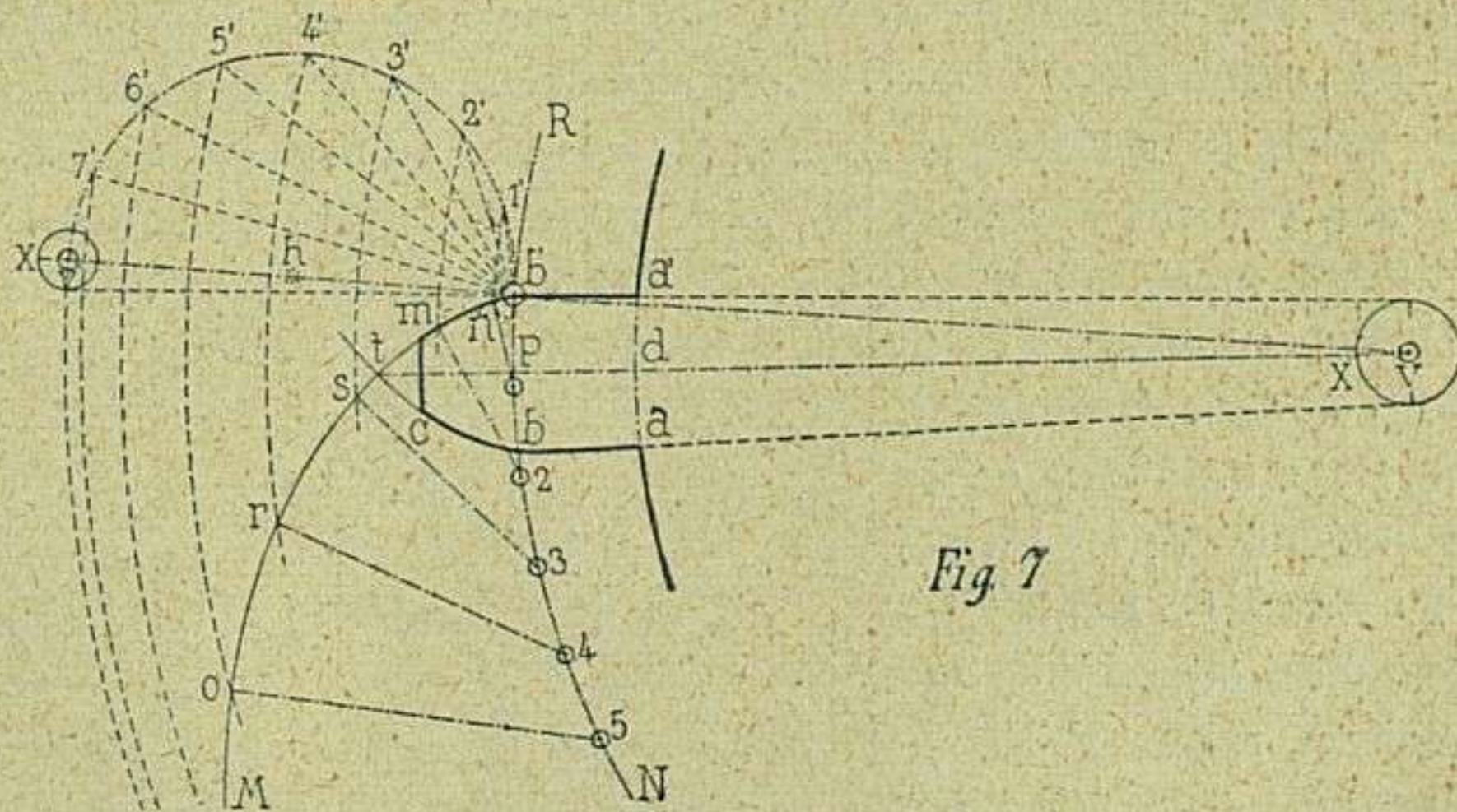
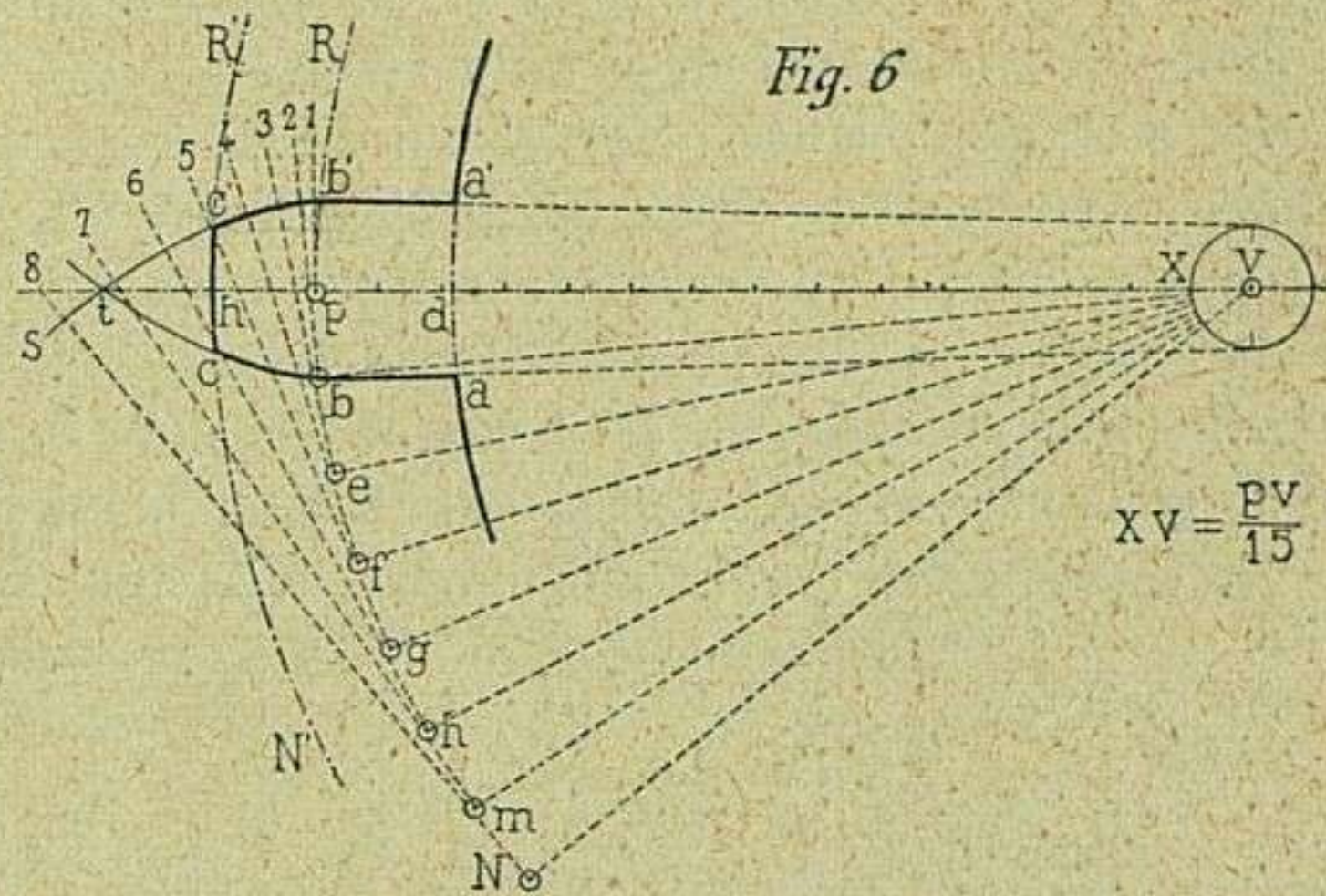
$$\text{Para bronce} \dots \dots \dots \quad e = 131 \times \sqrt{P},$$

representando por e el *espesor* y por P la *potencia*.

también en v , pero cuyo radio no debe pasar de $\frac{1}{15}$ del que corresponde á la circunferencia primitiva; tal variación, que sólo afecta á la parte plana de los flancos, tiene por objeto reforzar el diente por su base, donde más resistencia necesita.

Trazadas desde b y b' las tangentes en la forma indicada, y partiendo de dichos puntos b y b' en sentido opuesto, se procederá á dibujar las ramas de evolvente dc , $d'c'$ (V. 1.^a parte, **S2**), cuyo círculo director es el que corresponde á la circunferencia primitiva, situando en ella los centros de la rama $b't$ en p , b , e , f , g , h , m , N , á distancias iguales.

Determinada la altura del diente (V. **S**) se tomarán desde p , sobre el eje vt , $\frac{4}{7}$ de ella de p á d y otros $\frac{3}{7}$ de p en h y por los puntos p y h , haciendo centro en v , se trazarán los arcos que limitan el diente por su base en la llanta y por su terminación en la circunferencia exterior. De esta última, forma parte el arco cc' , terminando así el contorno propuesto.

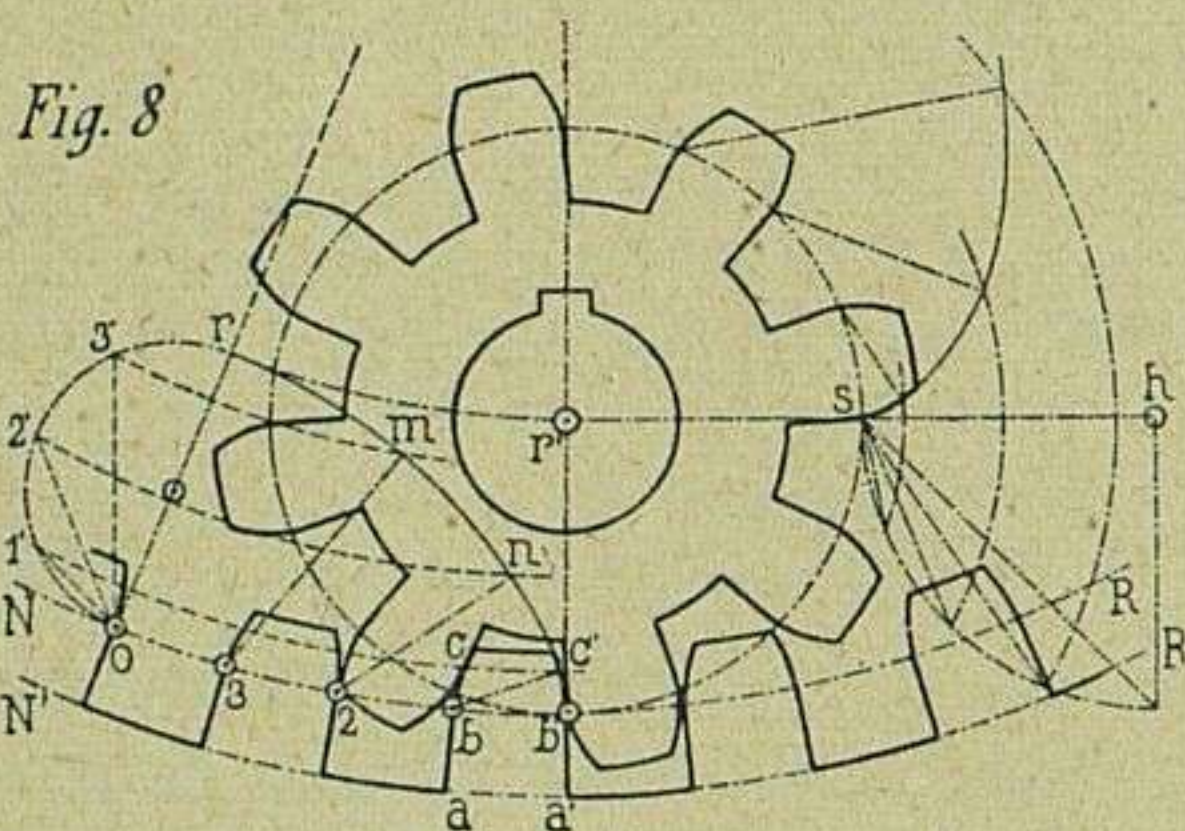


11. Trazado del diente epicicloidal (fig. 7). — Para el trazado del diente epicicloidal se necesitan conocer como datos indispensables, además del espesor del diente, las longitudes de los radios de las dos ruedas que componen el engranaje. Sean bb' el espesor del diente y vb' el radio de la circunferencia primitiva de la rueda donde se encuentra el diente que se ha de trazar, y $b'h$ el radio de la circunferencia primitiva perteneciente á la otra rueda. Trazados los contornos de los flancos en las mismas condiciones que se ha indicado en el núm. **10**, se procederá comenzando en b' , el trazado de

la rama de epicycloide $b' n m s r$ (V. 1.^a parte, núm. **101**, ó 2.^a edición, **104**) tomando como círculo director el de radio vp y como generador el de radio $b'h$. La altura del diente se obtendrá, en igual forma y ateniéndose á las mismas dimensiones indicadas en el número **S**.

Para obtener la mayor precisión y uniformidad en los trazados de cada uno de los sistemas de dientes expuestos, es necesario construir una plantilla de la cara del diente, cuyo contorno se recortará con exactitud y primor, sobre todo la parte correspondiente á las curvas. Este procedimiento de trazado mediante plantilla, se recomienda al dibujante, y muy especialmente al operario que ha de construir los modelos para la fundición de estos engranajes.

El trazado del diente epicycloidal tal como se ha descrito en el párrafo

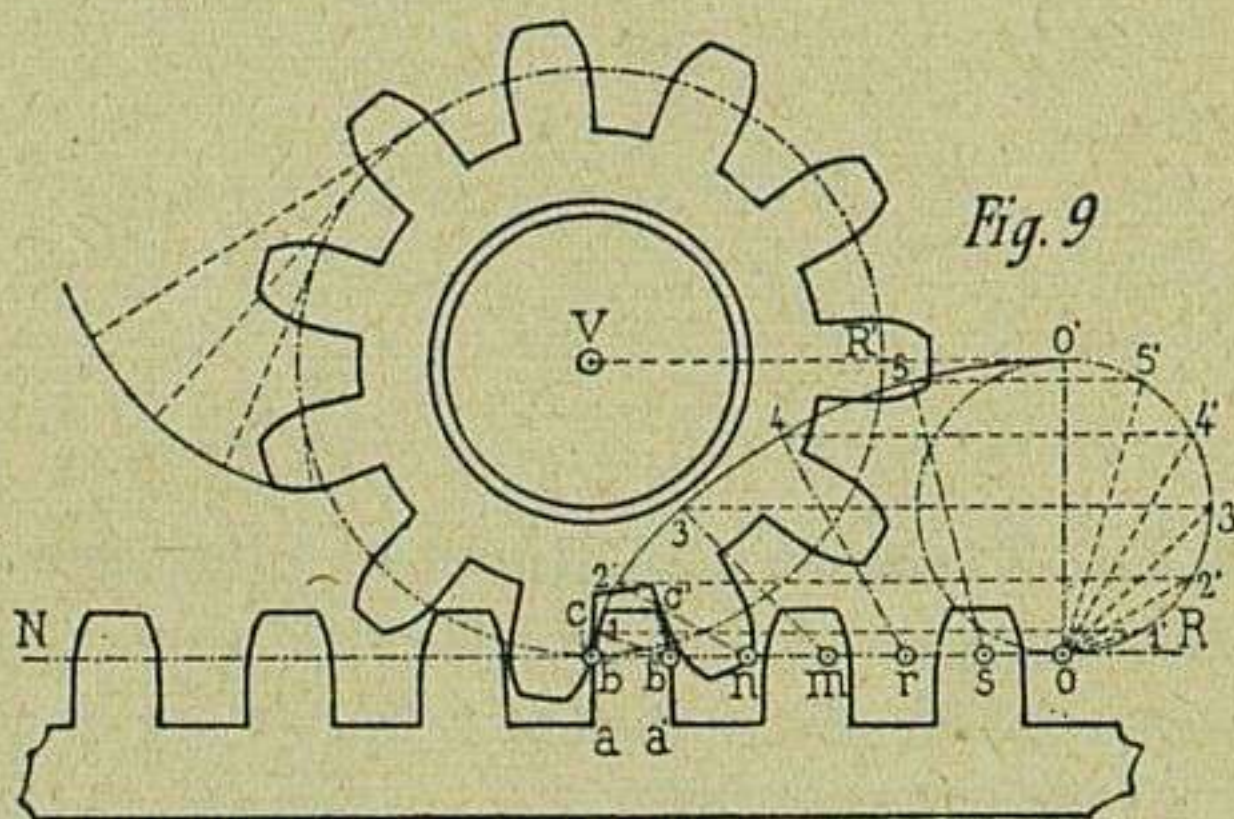


anterior, conviene solamente en el caso de que las circunferencias primitivas de las ruedas correspondientes al engranaje cilíndrico sean tangentes *exteriores*.

12. Para el caso en que las circunferencias primitivas sean tangentes *interiores*, como se verifica en el engranaje representado en la figura 8, debe considerarse la circunferencia pri-

mitiva NR de la rueda mayor, como directriz y el radio br' de la menor como diámetro del círculo generador de la rama de epicycloide interior br , que forma los contornos bc y $b'e'$ en cada uno de los dientes implantados sobre la superficie interior de la llanta. El trazado de una de las dos ramas de epicycloide (las dos son simétricas), puede verse descrita en el núm. **102** de la Primera parte de este Tratado ó en el **105** de la segunda edición.

13. En los engranajes de rueda y cremallera (fig. 9) las curvas bc y $b'e'$ de los dientes de esta última, son ramas simétricas de cicloide. Su trazado se obtiene (V. 1.^a Parte, **100**, ó 2.^a edición, **103**) tomando como diámetro del círculo generador el radio VR' de la circunferencia primitiva correspondiente al piñón, y por directriz la recta NR tangente á dicha circunferencia, situada entre los tres y cuatro séptimos de la altura del diente.



Las curvas del contorno de la cara de los dientes en el piñón, están formadas necesariamente por ramas de evolvente de círculo trazadas en igual forma que la indicada en el núm. **10**.

14. Los dientes de sistema evolvente, así como también los epicicloidales, en lo que al funcionamiento de los engranajes concierne, presentan sus ventajas y sus inconvenientes.

Los evolventes engranan con los de cualquiera otro sistema, sean de rueda ó cremallera, sin otra condición que la de tener el mismo paso (1). Esto se comprende fácilmente sin más que considerar que el trazado de la evolvente sólo está relacionado con la circunferencia primitiva de la rueda á que pertenece. De aquí, la facilidad con que puede substituirse una rueda en un engranaje de sistema evolvente sin que el funcionamiento se altere gran cosa.

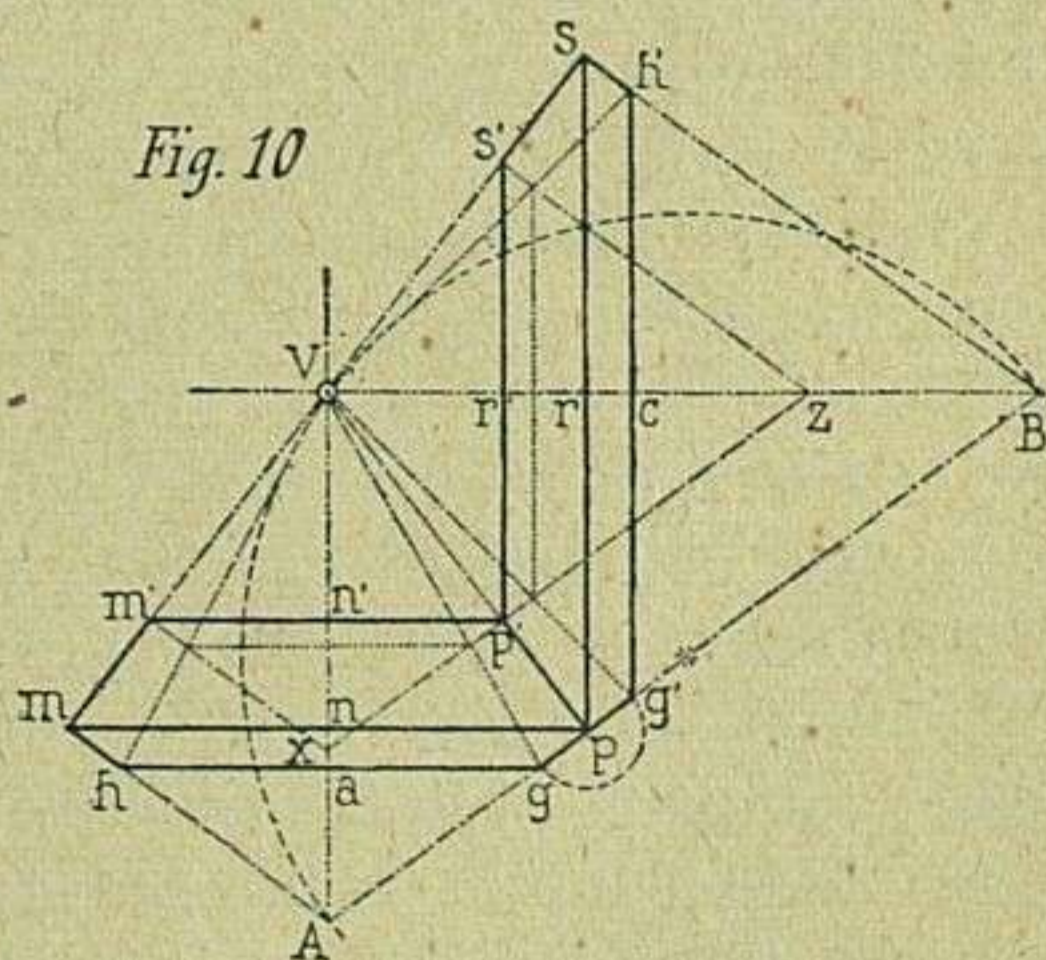
Presentan además la ventaja de que para cortar estos dientes á máquina, sólo se necesitan ocho cuchillas ó fresas, mientras que para construir el diente epicicloidal en iguales condiciones, hay que disponer de veinticuatro.

Los engranajes epicicloidales requieren más cuidado en su construcción, pues cualquier error es causa de averías durante el funcionamiento; en cambio cuando los dientes están cortados sin defecto, se distinguen de los evolventes por su corrección en la marcha y carencia de ruido.

El sistema epicicloidal debe preferirse para dientes de gran tamaño y engranajes de fundición. Por último, ha de tenerse en cuenta que dependiendo la generación de las epicicloides de la relación entre radios de las correspondientes circunferencias primitivas de un engranaje, no es permutable la rueda que altere por la longitud de su radio dicha relación de antemano establecida. Debido á las circunstancias apuntadas, las ruedas de dientes evolventes han alcanzado al presente mayor éxito en la construcción de máquinas que las de sistema epicicloidal.

15. Engranajes cónicos.—El diagrama de un engranaje cónico (fig. 10) se compone: de dos conos cuyo vértice común se halla situado en V, punto de encuentro de los ejes de rotación VA y VB. De las *circunferencias primitivas* mnp y prs , correspondientes á las bases de cada uno de los conos; y de las *circunferencias primitivas complementarias* $m'n'p'$, $p'r's'$.

Las superficies cónicas comprendidas respectivamente entre mpV y psV , se llaman *conos primitivos*; las generatrices Vm y Vs reciben el nombre de *extremas* y la Vp común á los dos conos, se denomina *generatriz de contacto*. Del mismo modo las superficies cónicas mAp y pBs se llaman *conos de cabeza exteriores* y las de la misma especie $m'xp'$ y $p'zs'$ *conos de cabeza interiores*.



(1) Por supuesto, las dos ruedas que forman el engranaje han de ser cilíndricas ó cónicas.

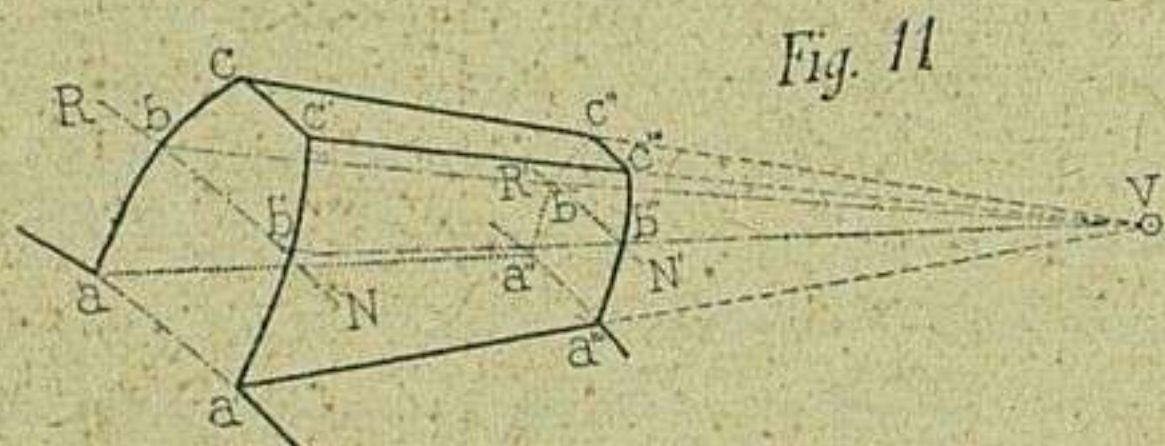
Como consecuencia de lo expuesto y para los efectos del trazado de un engranaje cónico, ó de ángulo, es necesario tener en cuenta que:

Los ejes, al reunirse en V , forman un ángulo que es necesario conocer como dato preferente.

Los ángulos $V p A$, $V p B$, formados por la generatriz de contacto de los conos primitivos $V p$ y las *extremas* $p A$, $p B$, de los *conos de cabeza exteriores*, son rectos, Así también los ángulos $V m A$ simétrico de $V p A$, y $V s B$ simétrico del $V p C'$ también son rectos. Estos cuatro ángulos deben ser siempre rectos cualquiera que sea el ángulo que los ejes formen en el punto V .

Las generatrices de los *conos de cabeza interiores* $m' x p'$, $p' s s'$ son respectivamente paralelas á las generatrices correspondientes de los *conos de cabeza exteriores*, por lo que resultan rectos también los ángulos $V m' x$, $x p' V$, $V p' s$ y $s s' V$.

16. Trazado de un diente de rueda cónica (fig. 11). — Para trazar estos dientes, debe tenerse en cuenta todo lo expuesto para el trazado de ellos en engranajes cilíndricos, si bien haciendo aquellas variaciones que el caso requiere, Así como en el diente de engranaje cilíndrico (fig. 4) las aristas y



generatrices de los flancos son paralelas entre sí, en el cónico (fig. 11) dichas aristas y generatrices, partiendo de los puntos a, b, c, c', b', a' situados en la cara mayor, van á concurrir en el punto V , vértice común de los conos primitivos del engranaje.

Esta cara mayor del diente va recortada sobre la superficie curva del cono exterior de cabeza de la rueda á que pertenece, así como la cara menor situada sobre el cono interior de cabeza es resultado de la intersección del diente, prolongado hasta V , con dicho cono interior (1).

Para el trazado de la cara máxima del diente es preciso desarrollar en todo ó en parte la superficie del cono exterior de cabeza (véase lám. 32, fig. 2) obteniendo al mismo tiempo la transformada de la circunferencia primitiva, cuyo radio es $V'' b$. Sobre este desarrollo, y tomando como término de comparación dicha transformada, se dibujará la plantilla de la cara máxima de los dientes, ateniéndose al espesor, altura, trazado de la parte curva de los flancos y otros extremos expuestos en los núms. **9**, **10** y **11**, que son de común aplicación al trazado de los dientes de engranajes cilíndricos y cónicos.

La citada plantilla servirá para transportar el contorno de la cara máxima de los dientes, sobre el cono exterior de cabeza en el modelo destinado á la fundición de la rueda; pero de ningún modo será aprovechable para dibujar estos mismos contornos en el trazado de una rueda en proyecto, pues la situación de los dientes sobre la superficie cónica hace que escoree y, por tanto,

(1) El espesor de un diente de engranaje cónico se considera acotado para los efectos del cálculo de resistencia, en la sección de un plano equidistante de las caras máxima y mínima.

varie más ó menos dicho contorno, en razón de su oblicuidad con los planos de proyección (V. lámina 32, fig. 1).

Por lo demás, las proporciones del diente cónico formando parte de un engranaje son las mismas que las del diente recto en análogas circunstancias. Es decir, que desde b y b' , puntos de la circunferencia primitiva $R N$, á la base aa' , median $\frac{4}{7}$ de la altura total del diente, contándose los otros $\frac{3}{7}$ en la distancia que media desde bb' hasta cc' . El trapecio isósceles b, b', b'', b''' , denota el contorno de la sección producida por el cono primitivo que tiene su vértice en el punto V , siendo bb'' y $b'b'''$ generatrices respectivas de dicho cono.

CONSECUENCIAS

derivadas de las relaciones que existen entre los elementos componentes de un engranaje.

17. El engranaje completo se compone, por lo menos, de un par de ruedas, motora la una y receptora la otra. Cuando estas ruedas funcionan en condiciones normales, á cada cantidad lineal (1) recorrida por un punto de la circunferencia primitiva de la rueda motora, corresponderá otra cantidad igual recorrida por la receptora al impulso de la primera.

Si las dos ruedas son de igual diámetro, es evidente que á cada vuelta de la motora corresponderá otra vuelta completa de la receptora.

En el caso de que la rueda motora tenga un diámetro doble que el de la receptora, mientras la primera da una vuelta la segunda dará dos. Por el contrario, si la receptora tiene un diámetro doble que el de la motora, en el tiempo que ésta dé una vuelta, la rueda receptora dará media.

18. En un engranaje de rueda y cremallera, la longitud de ésta dependerá de la del arco recorrido por un punto situado en la circunferencia primitiva correspondiente á la rueda. La medida lineal de dicho arco puede ser una parte de circunferencia su totalidad, ó equivaler á varias veces ésta; por consiguiente, la rectificación del indicado arco deberá ser igual á la longitud de la cremallera medida en su línea primitiva.

19. De las consideraciones expuestas en el núm. **17** se deduce que *las velocidades transmitidas de una á otra rueda están en razón inversa de los diámetros respectivos*, ó lo que es igual: á mayor diámetro de la rueda receptora corresponde menor velocidad en ella, y á menor diámetro mayor velocidad en igualdad de tiempo.

20. El número de dientes que corresponden á cada una de las ruedas de un engranaje está en relación directa con la longitud del diámetro de la circunferencia primitiva propia de su rueda; es decir, que á mayor diámetro

(1) Esta cantidad lineal equivale á la rectificación del arco recorrido por el punto elegido sobre la circunferencia primitiva.

corresponderá mayor número de dientes; á igual diámetro en las ruedas del engranaje igual número de dientes para cada una; y á menor diámetro menor será dicho número en la rueda á que pertenezca; relaciones que tienen su expresión en esta igualdad:
$$\frac{\text{Diámetro de la rueda motora}}{\text{Diámetro de la rueda receptora}} = \frac{\text{número de dientes de la motora}}{\text{número de dientes de la receptora}}$$
 mediante la cual podrá determinarse cualquiera de sus términos, siempre que se conozcan los otros tres.

Las relaciones entre los demás elementos que componen un engranaje son de identidad. Así, pues, el *paso*, el *espesor* de los dientes, su *altura* y su *ancho* son siempre iguales; tanto los que pertenecen á la rueda *motora* como los que se consideran en la *receptora*.

Cuando se ignora el valor de alguno de estos términos esenciales, su determinación no ofrece dificultad mediante la intervención de relaciones ya conocidas, expresadas en fórmulas sencillas.

Alguno ejemplos, acomodados á los casos que con más frecuencia se registran en la práctica, podrán servir para aclarar los conceptos expuestos; pero antes de resolver el problema que en cada caso puede plantearse, bueno será hacer reseña de los términos que como datos pueden figurar, expresando su relación y la manera concisa de representarlos.

Se representa por <i>e</i> , el <i>espesor</i> de un diente	$= \frac{1}{2}$ del <i>paso</i> .
» <i>a</i> , la <i>altura</i>	» $= \frac{4}{3}$ del <i>espesor</i> .
» <i>b</i> , la <i>anchura</i>	» $= 2$ á 5 veces <i>espesor</i> .
» <i>e'</i> , el <i>espacio</i> entre dos dientes	$=$ <i>espesor</i> .
» <i>p</i> , el <i>paso</i>	» $=$ <i>espesor</i> + <i>espacio</i> .
» <i>n</i> , el número de dientes	$=$ número de <i>pasos</i> .
» <i>C</i> , la circunferencia <i>primitiva</i>	$= 2 \pi \times R$ (1).
» <i>D</i> , el diámetro de <i>C</i>	$= \frac{C}{\pi}$.
» <i>C'</i> , la circunferencia <i>total</i>	$= 2 \pi \times R$.
» <i>D'</i> , el diámetro de <i>C'</i>	$= D + \frac{6}{7}$ de <i>a</i> . (V. S).

PROBLEMAS

21. *Dados el paso y número de dientes de una rueda, determinar el radio de la circunferencia primitiva.* — Se dan el *paso* que representa una parte de la circunferencia (2) y el número de dientes, que es igual al número de veces

(1) El valor de π es 3,14159; que multiplicado por la longitud de un diámetro representado por $2R$, dará la longitud de su correspondiente circunferencia.

(2) En los Estados Unidos de América, el *paso* le deducen en función del diámetro en vez de obtenerlo como se hace en Europa, en función de la circunferencia primitiva. Por

que el *paso* está contenido en la circunferencia primitiva; por consiguiente, multiplicando la longitud del *paso* por el número de dientes, se tendrá la de la circunferencia; longitud que dividida por π , dará la del diámetro, del que deducida su mitad, se tendrá la del radio que se busca. Traducido esto en la fórmula $\frac{P \times n}{\pi} = 2 R$; sustituyendo valores por letras y verificando las operaciones indicadas, se tendrá $\frac{12 \text{ mm.} \times 24}{3,14159} = 91,6 \text{ mm.}$, cuya mitad 45,8 milímetros es la longitud del radio propuesto.

Los valores sustituidos en la fórmula anterior corresponden á los elementos de la rueda representada en la lámina 30.^a, fig. 2, y si bien el valor obtenido para el radio, 45,8 mm., no se ajusta exactamente á los 46 mm. acotados en dicha lámina, la diferencia de dos décimas de milímetro es tan poco, que bien puede aumentarse sin escrúpulo al radio, sobre todo si se considera que la relación del diámetro á la circunferencia no es más que aproximada.

Solución gráfica. — Este mismo problema se puede resolver gráficamente. Tómese una recta de longitud igual á 24 veces 12 mm., ó sean 288 milímetros, y se tendrá en ella la circunferencia rectificada. Divídase esta recta en 22 partes, y tomando 7 de éstas se tendrá la longitud del diámetro con bastante aproximación. Lo demás se reduce á describir la circunferencia primitiva sobre el diámetro obtenido, dividiéndola en 24 partes iguales, y téngase la seguridad que si la operación se ha conducido con la debida precisión, á cada una de estas 24 partes ó pasos corresponderán 12 mm. de medida.

22. *Dados el número de dientes y el diámetro de la circunferencia primitiva, calcular el paso.* — Para resolver el problema, se cuentan en concepto de datos, el diámetro que, multiplicado por π , dará la longitud de la circunferencia primitiva y á su vez esta longitud, dividida por el número de dientes igual al de pasos, dará por resultado el valor del paso conforme al enunciado.

Planteado tan sencillo problema según la fórmula $\frac{\pi \times 2 R}{n} = P$; sustitú-

esta circunstancia le llaman *paso diametral*: así es, que el diente medido según este sistema, representa una parte del diámetro de la mencionada circunferencia. Un ejemplo bastará para comprender lo que es el *paso diametral*.

Sea una rueda con 30 dientes, cuyo diámetro mide 5 pulgadas (allí se mide por pulgadas); el paso diametral será el que se obtiene de dividir $\frac{30}{5} = 6$, resultado que expresa el número de dientes que corresponde á cada pulgada del diámetro. Por consiguiente, una rueda de paso 6, tendrá 6 dientes por cada pulgada del diámetro de la circunferencia primitiva ó un paso circular cuya medida lineal será $\frac{\pi = 3,14159}{5} = 0,6283$ de pulgada.

No hay que decir que el espesor de un diente se determina dividiendo la longitud del paso circular por el número de dientes en él contenido. Así en este caso se obtiene $\frac{0,6283}{6} = 0,1047$ de pulgada para dicho espesor. Entre este procedimiento para el reparto de un engrane y el procedimiento gráfico para dividir en partes iguales la circunferencia, también en función del diámetro (V. núm. 24, 1.^a Parte), hay marcada analogía.

yendo valores y verificando las operaciones indicadas, resultará $\frac{3,14159 \times 64}{10}$
 = 20,1 mm.

En éste, como en el anterior ejemplo, los valores correspondientes á los datos y resultado concuerdan con los que figuran acotados en el *piñón*, representado en la fig. 1 de la Lámina 30.^a La longitud 20 mm. obtenida para el *paso* se reparte entre el *espacio* y el *espesor* de un diente; corresponden al *espesor* 9,6 mm. y al *espacio* 10,4. Resulta, por tanto, para el *espacio* una holgura de 8 décimas de milímetro que representa el 8 por 100 del *espesor*.

Solución gráfica. — Se consigue dividiendo la circunferencia primitiva descrita con el radio dado, en tantas partes iguales como sea el número de dientes (V. Primera parte, **22** y **25**); y siendo el número de éstos 10, la longitud del paso resultará igual á la décima parte de la circunferencia.

23. *Dados los radios respectivos de las circunferencias primitivas correspondientes á un engranaje de rueda y piñón y el número de dientes de la rueda, hallar los que ha de tener el piñón.* — Teniendo en cuenta que la razón que pueda existir entre los diámetros, es igual á la que pueda haber entre el número de dientes de cada una de las ruedas (V. **20**). Lo primero que se necesita conocer es si las longitudes de los diámetros tienen un máximo divisor común. Si no le tienen, tampoco existirá este divisor común entre el número de dientes de una y otra rueda, pudiendo en tal caso suceder que se obtenga como resultado un cierto número de dientes y una fracción de diente. En este supuesto, la solución no es aceptable, á menos que esta fracción sea por defecto ó por exceso, resulte tan pequeña, que repartida entre el número total de dientes, aumente ó disminuya éstos en una cantidad tan insignificante, que sea difícil apreciarla con los instrumentos usuales.

Si, por el contrario, las longitudes de los diámetros tuvieran un divisor común ó uno de ellos estuviera contenido en el otro un número exacto de veces, entonces también sucedería lo propio entre el número de dientes de la rueda y piñón, obteniéndose en estas condiciones un número exacto de dientes para el piñón. Un ejemplo servirá de apoyo á lo expuesto en el párrafo anterior.

Sea la lámina 32.^a, fig. 1 una rueda de engranaje cónico (1), con 28 dientes, cuyo paso mide 16 mm. y el diámetro de su circunferencia primitiva $p'p$ 142 milímetros, á la cual se trata de conectar un piñón cuyo diámetro de circunferencia primitiva mida 71 mm.; ¿qué número de dientes corresponderá al piñón?

Desde luego se nota que en la razón de diámetros $\frac{142}{71}$, es doble 142 respecto á 71; por consiguiente, si ha de haber la misma relación entre el número de los dientes de la rueda y los del piñón, el número de los del piñón ha de ser tal, que multiplicado por 2, dé como resultado 28, número de dientes de

(1) Para el caso actual lo mismo da engranaje cónico que cilíndrico, puesto que no se trata de la forma característica del diente.

la rueda conocida. Este número es 14, el cual indica los dientes que tendrá el piñón, quedando así resuelto el problema en las condiciones de posibilidad antes expuestas (1).

El problema comprendido en el anterior ejemplo también puede resolverse gráficamente como los anteriores; por cierto que la solución mediante el compás ofrece alguna novedad, por tratarse de un engranaje cónico.

Solución gráfica. — Sea $V p' V' p$ (Lám. 32.^a, fig. 3) el diagrama de la rueda cónica dada (2), cuyo eje es $V V'$ y $p' p$ el diámetro de la circunferencia primitiva.

Teniendo presente que la *generatriz de contacto* $V p$ y la *extrema* $V r$, correspondientes al *cono primitivo*, forman con el diámetro $p r$ un triángulo isósceles; el trazado de éste dependerá de la determinación del vértice r . Este punto r se encontrará en la intersección común del arco trazado desde p , con radio $c p, = \frac{1}{2}$ de $p' p$, y al arco trazado desde V con radio $V p$.

Trazado el triángulo isósceles $V p r$, se bajará desde V , vértice común de los dos conos, la perpendicular $V V''$ al diámetro $p r$; esta perpendicular representa el eje del piñón.

Prolongando la generatriz $V' p$ hasta V'' y uniendo este punto con r , se tendrán $V'' p$ y $V'' r$, generatrices del *cono exterior de cabeza* correspondiente al piñón. El ancho de la llanta se determina trazando desde q la recta $q r'$, paralela á la $p r$ y el grueso $p s'$, describiendo desde P el arco $s s'$ y trazando por s una paralela á la $p r$. Por último, el *cono interior de cabeza* en dicho piñón se representa trazando las *generatrices extremas* $q x'$ y $r' x'$, paralelas respectivas de $p V'$ y $r V''$.

Para la distribución y trazado de los 14 dientes que ha de tener el piñón, lo mismo que para el de las curvas de sus flancos, véase núm. **16**.

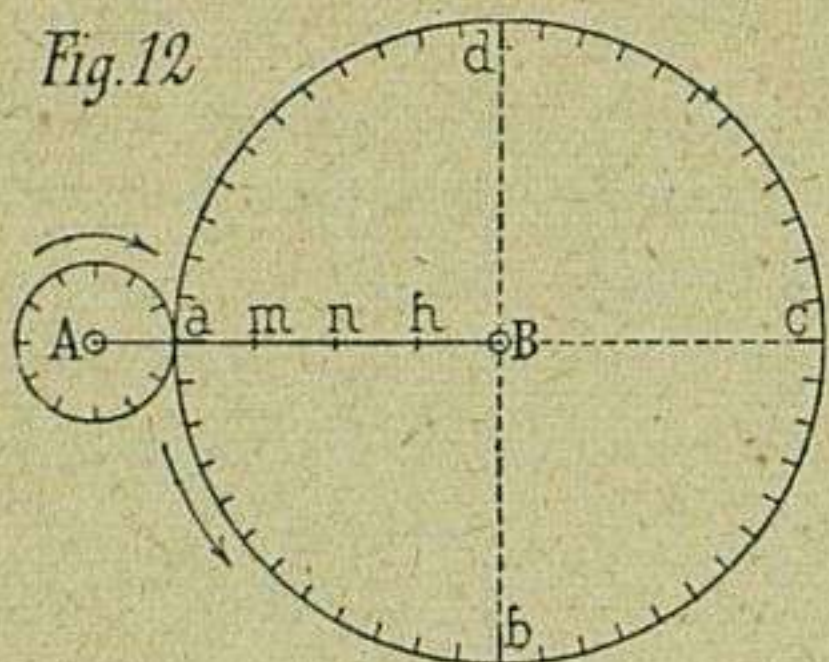
24. *Dada la distancia entre dos puntos situados en los extremos de una recta, trazar el diagrama de un engranaje cilíndrico en el que la rueda transmita al piñón una velocidad cuatro veces mayor que la inicial de dicha rueda, con la condición de que los ejes respectivos de la rueda y piñón correspondan á los extremos de la recta dada.*—Supóngase el problema resuelto y sean (fig. 12) A y B los puntos extremos de la recta dada donde han de situarse los ejes respectivos de la rueda y piñón. Del enunciado anterior se deduce que la circunferencia $a b c d a$ será recorrida cuatro veces justas por la

(1) En realidad este caso sólo puede ocurrir cuando en la transmisión del movimiento se quiere acelerar ó retardar éste, tomando como término de comparación el tiempo que emplea la rueda motora en dar una vuelta completa. Así, por ejemplo, cuando la relación que hay entre los diámetros de una y otra rueda es $\frac{5}{1}$, significa que mientras la primera rueda dé una vuelta, la segunda habrá dado cinco en igual tiempo.

(2) Este diagrama corresponde en reducida escala á la proyección vertical de la rueda cónica representada en la figura 1 de la misma lámina. De su trazado no se indica nada, por no repetir lo expuesto en el núm. **15**, figura 10.

pequeña circunferencia centrada en A, cuyo punto de contacto a , en cada una

Fig. 12



de estas vueltas, coincidirá sucesivamente con los puntos $d c b$ hasta volver al origen a . Estas cuatro coincidencias suponen que la longitud de la pequeña circunferencia será igual á la de un cuadrante de la grande; de donde la longitud de la circunferencia mayor equivaldrá á cuatro veces la circunferencia pequeña.

Establecida la relación 1 : 4 para las respectivas circunferencias primitivas, también será

la misma para los diámetros, y entonces no cabe duda que el de la rueda ha de ser cuatro veces mayor que el diámetro del piñón. Por consiguiente, se dividirá la distancia A B en cinco partes iguales (V. núm. 12, 1.^a parte), comprendidas en A a — $a m$ — $m n$ — $n h$ — $h B$, de las que una, la A a , se tomará como radio, y haciendo centro en A, se describirá la circunferencia primitiva del piñón. La distancia que resta desde a hasta B, en la que se comprenden las otras cuatro partes, se tomará como radio de la circunferencia primitiva de la rueda que, una vez descripta, resultará tangente á la del piñón en el punto a .

Ahora se procederá á la distribución de los dientes comenzando por los del piñón. Como esta distribución depende del número de ellos, el número del *paso*, el *paso* del *espesor* y el *espesor* depende de la potencia que una rueda ha de transmitir á otra, el *espesor* del diente será el dato que en primer término hay que averiguar.

Conocido el espesor del diente y suponiendo que en este caso particular equivale á la veinticuatroava parte de la circunferencia del piñón (1) se tendrá por seguro que el paso es la dozava parte de dicha circunferencia, y se vendrá en conocimiento de las demás dimensiones del diente sin más que recordar las relaciones entre ellas establecidas.

Así, pues, dividida la pequeña circunferencia en 12 partes ó *pasos*, y cada uno de los cuadrantes $a b$, $b c$, $c d$ y $d a$, de la mayor en otras 12, se tendrán para la circunferencia primitiva de la rueda 48 partes iguales á las 12 de la circunferencia del piñón, resultado de multiplicar 12 por 4, y sin más quedará resuelto el problema de conformidad con el enunciado.

La terminación del dibujo se reducirá al trazado de los dientes, que no ofrece dificultad alguna desde el momento que se conoce el *paso* deducido del *espesor* del diente.

(1) En el caso de que la longitud obtenida para el *espesor* del diente no fuese contenida en la circunferencia un número par y exacto de veces, el residuo resultante que á lo sumo llegaría á una fracción de *espesor*, se repartirá por igual entre las unidades del cociente, que precisamente habrán de estar expresadas por cifra par, pues no debe olvidarse que cada dos espesores equivalen á un paso, y de no ser par la cifra que exprese el número de espesores, no sería exactamente divisible por dos, que es precisamente lo que hace falta para deducir el número de *pasos*.

INDICACIONES

relacionadas con el trazado de las láminas que forman la serie E.

LÁMINA 22.^a Ensamblés por medio de roblones. — El *roblón* es una espiga generalmente de hierro (en algunos casos de cobre), provista de cabeza; sirve para unir planchas ó llantas, formando una especie de cosido. Es decir que esta unión se verifica atravesando las planchas con la espiga del roblón, que se coloca en taladros hechos de antemano, y formando con el sobrante de dicha espiga otra cabeza análoga mediante la robladura. Esta operación se hace en caliente por medio de una estampa ó troquel que lleva en hueco la forma de la cabeza.

Contiene la presente lámina siete figuras. La figura 1 representa un roblón colocado en su sitio, con el sobrante de espiga que se necesita para formar la robladura ó segunda cabeza.

En las figuras 2 y 3 aparece la segunda cabeza terminada, de forma cónica en la figura 2 y en forma de segmento esférico en la figura 3.

Para valuar las dimensiones de un roblón, se suele tomar como unidad el diámetro. En este sentido figuran las acotaciones contenidas en esta lámina.

El diámetro de un roblón es igual á una vez y media el espesor de la plancha, mas 4 milímetros, y la separación que suele mediar entre los ejes de dichos roblones está comprendida entre dos diámetros, y dos diámetros más 10 milímetros.

Las figuras 4, 5, 6 y 7 representan varios ejemplos de ensamble, y muestran además la situación de los roblones en cada caso.

El ensamble representado en la figura 4 se hace solapando las planchas, es decir, colocando una sobre otra sujetas con una sola fila de roblones. En la figura 5 se representa otro ensamble de la misma especie, pero en él se emplea para la unión de las planchas, doble fila de roblones, dispuestos al tresbolillo.

Los ensambles correspondientes á las figuras 6 y 7 se han realizado por medio de tapajuntas, que así se llaman cuando las planchas se unen al tope y se coloca encima otra más estrecha que sirve para cubrir y sujetar las anteriores (fig. 6). En ocasiones el ensamble se hace con doble tapapuntas (fig. 7).

LÁMINA 23.^a — Medios de asegurar los pernos en los ensambles. — Las oscilaciones, golpes y trepidaciones á que están expuestas ciertas piezas

ensambladas por medio de pernos, contribuyen más ó menos pronto á que se aflojen las tuercas, causando averías en las máquinas de que forman parte.

Para evitar el aflojamiento de las tuercas, se emplean contratuercas (véase lámina 29.^a, fig. 1); pero no bastando en algunos casos este remedio, se recurre á otros, como son los de asegurar las tuercas por medio de chavetas, de cuyos ejemplares se ven muestras en las cinco figuras pertenecientes á esta lámina 23.^a

En la figura 1 aparece sujeta la tuerca mediante una clavija que atraviesa ésta y el tornillo.

En la figura 2 es una chaveta la que, atravesando el tornillo, impide el que la tuerca se afloje.

En la figura 3, la chaveta encaja á la vez en dos ranuras abiertas en el tornillo y en la tuerca cuando están emparejadas.

En la figura 4, la tuerca tiene seis taladros, que corresponden cada uno al centro de su respectiva cara lateral. Estos taladros, cuando se arroca la tuerca, van pasando por enfrente de una ranura practicada á lo largo del tornillo, y en este momento, si se considera oportuno, se encaja á golpe de martillo en el orificio un clavo hendido por el extremo opuesto á la cabeza, cuyas dos ramas, al abrirse, ocupan parte de la ranura, impidiendo girar á la tuerca.

Por último, en la figura 5, queda inmóvil la tuerca, por medio de una placa llamada de seguridad, la cual se sujeta por un lado con un perno, y por el otro, cortada á modo de llave, se ajusta exactamente á una parte de la tuerca, lo suficiente á impedir que gire.

LÁMINA 24.^a — Llaves diversas. — Contiene cuatro distintos modelos de llaves, usados para atornillar ó desatornillar tuercas. El representado en la figura 1 es de boca exagonal fija y cerrada, y por tanto, no sirve más que para un determinado tamaño de tuercas. El correspondiente á la figura 2 se distingue del anterior en que es abierto de boca.

La llave representada en la figura 3 es de boca variable, como igualmente la correspondiente á la figura 4. Esta última es de mayor resistencia que la representada en la figura 3, pudiendo servir el modelo representado, cuya longitud total es de 166 mm. para tuercas de 25 mm.

LÁMINA 25.^a — Ensamblajes por medio de chavetas. — Cuatro figuras contiene esta lámina, en las que se pueden ver otros tantos medios de asegurar el ajuste de piezas metálicas. En las figuras 1 y 2 se verifica el ajuste por una chaveta en forma de tronco de pirámide que atraviesa tres piezas, sujeta con un pasador en el modelo representado en la figura 1, y con una tuerca que permite el ajuste gradual en el que corresponde á la figura 2. Tanto el pasador como la tuerca, están situados en el extremo más estrecho del tronco de pirámide.

El ensamble representado en la figura 3 queda asegurado con dos piezas combinadas, chaveta y contrachaveta, cuyo ajuste se gradúa con una tuerca y su correspondiente tornillo, que forma parte de la contrachaveta. Este sistema de ensamble se usa en las cabezas de las bielas.

En la figura 4 se representa el ensamble del cubo de una rueda con el árbol ó eje de transmisión. Se verifica el ajuste por medio de una chaveta encajada á un mismo tiempo en una ranura labrada en el cubo y á lo largo del árbol, sujeta á su vez por un tornillo que atraviesa hasta llegar á ella el espesor del cubo de la rueda.

LÁMINA 26.^a — **Empalmes por medio de manguitos ó virolas.** — Tienen razón de ser los empalmes, cuando se necesita unir piezas unas á continuación de otras, cuya mayor dimensión es la longitud. Estas piezas son por lo común árboles de transmisión.

El empalme de árboles representado en la figura 1 se verifica de igual manera que su análogo, llamado empalme á media madera (V. serie D, lámina 14, figura 1). El manguito es de una sola pieza, y su ajuste se consigue mediante una chaveta que encaja por igual á lo largo del manguito y del árbol.

En la figura 2 se unen al tope las dos piezas del ensamble, y el manguito, dividido en dos mitades, se ajusta al árbol por medio de pernos embutidos. La seguridad del ajuste se consolida por una chaveta encajada á lo largo, entre el árbol y el manguito.

El empalme representado en la figura 3 también se verifica al tope, merced á un manguito compuesto de dos discos, que se ajustan ó unen mediante pernos. Estos discos se sujetan al extremo respectivo del árbol, que ha de empalmarse por medio de chavetas, independientes la una de la otra.

LÁMINA 27.^a — **Soporte.** — Sirve el soporte propiamente dicho de sostén á los ejes ó árboles de transmisión, situados en posición horizontal. Se compone ordinariamente de dos piezas: la inferior A, donde se apoya el árbol, y la B, llamada cubierta ó sombrerete, que ensambla con A por medio de dos fuertes pernos que figuran uno á cada lado.

Entre estas dos piezas hay unos casquillos ó cojinetes de cobre que están en contacto con el árbol, á los cuales afluye la grasa que contiene un recipiente C colocado en la parte superior de la cubierta B. Para apreciar con mayor claridad ciertos detalles de forma, se han dado en el soporte dos cortes ó secciones, una vertical según la traza *a b*, y otra horizontal según la *c d*.

LÁMINA 28.^a — **Tejuelo.** — Este nombre recibe el soporte cuando está destinado á sostener árboles de transmisión en posición vertical. El recipiente en-

grasador forma parte de los cojinetes y el extremo del árbol remata en una pieza de acero, que se apoya en un quicio del mismo metal; por lo demás, las piezas de que se compone este soporte vienen á ser las mismas que las del representado en la lámina 27.^a, pero dispuestas en otra situación.

LÁMINA 29.^a — **Excéntrico.** — Este órgano de máquina sirve para transmitir el movimiento transformándole de rectilíneo alternativo, en circular continuo ó al contrario. Se compone, á semejanza del soporte, de dos piezas unidas por pernos, entre las cuales encaja un disco giratorio, al que va ensamblado fuera del centro el árbol donde se verifica el movimiento circular. Este grupo de piezas se une al extremo de una barra, en la que se produce el movimiento rectilíneo de vaivén.

La figura 2 representa en diagrama cuatro posiciones circulares del excéntrico en *a*, *a'*, *a''*, *a'''* que se traducen en la cantidad rectilínea recorrida de *b* á *b''* por el extremo opuesto de la barra.

LÁMINA 30.^a — **Engranajes cilíndricos.** — Contiene dos figuras, de las cuales la primera representa un engranaje en que el perfil de los dientes es evolvente, y en el de la figura 2 este mismo perfil está formado con epicloides. La descripción del trazado de los dientes y otros extremos muy importantes quedan ya expuestos en los núms. **6, 7, 8, 9, 10, 11, 21 y 22** (*Trazado de engranajes*).

LÁMINA 31.^a — **Rueda dentada cilíndrica.** — De las tres figuras que contiene esta lámina, las dos primeras representan en proyección ortogonal la sección y frente de una rueda cilíndrica de veinte dientes. Conforme con los datos que proporcionan estas proyecciones ortogonales, se ha representado dicha rueda (fig. 3) en proyecciones axonométricas, teniendo en cuenta para hacer el reparto de los dientes el procedimiento empleado en el núm. **23** (*Proyecciones axonométricas*), para dividir circunferencias en partes iguales.

LÁMINA 32.^a — **Rueda dentada cónica.** — Tres figuras contiene esta lámina. La primera representa en proyecciones ortogonales una rueda cónica de veintiocho dientes, cuya distribución ó reparto se hace en la proyección horizontal. En la fig. 2 se ve parte del desarrollo del cono exterior de cabeza, con las plantillas de las caras de los dientes; desarrollo que se verifica como el de un cono de revolución cualquiera (V. *Proyecciones ortogonales*, **91**).

Las rectas correspondientes á los flancos se trazan tangentes á la circunferencia de radio $v'' h$ (V. **10**, *Trasado de engranajes*), y para lo tocante á otros trazados que no se mencionan, véanse los números **15** y **16** (*Trasado de engranajes*).

Por último, la figura 3 representa en diagrama un engranaje cónico, en el cual se resuelve gráficamente el problema correspondiente á este enunciado. *Dados los radios respectivos de las circunferencias primitivas correspondientes á un engranaje de rueda y piñón y el número de dientes de la rueda, hallar los del piñón.* Para su explicación y demás detalles véase *Trasado de engranajes*, núm. **23**.

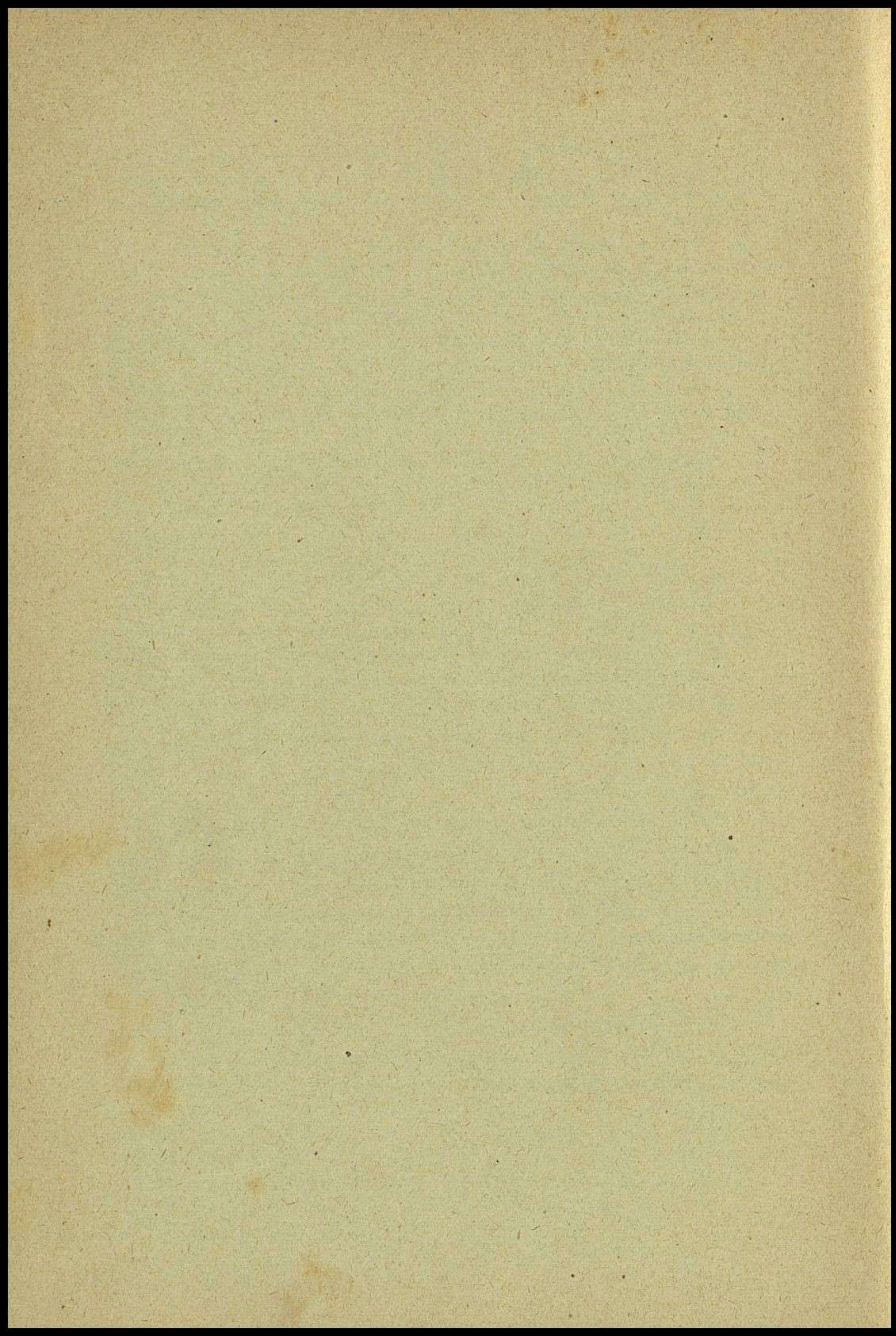
ADVERTENCIA

El fruto que puede reportar para el alumno la serie de ejercicios que antecede, no consiste precisamente en copiar la estampa, como podría hacerlo un habilidoso delineante, sino en la interpretación racional de dichos dibujos considerándoles para el caso como otros tantos croquis acotados. Estos ejercicios de interpretación gráfica deben consistir:

1.º En la representación aislada de algunos detalles que hayan de estudiarse en mayor escala, determinando nuevas fases de ellos, sin más datos que los consignados en el croquis.

2.º En convertir la representación ortogonal en axonométrica, ateniéndose, como en el primer caso, á las acotaciones que en concepto de croquis se consignan en la proyección ortogonal del modelo.

3.º En la determinación de sombras correspondientes á cualquiera de los dos sistemas, ortogonal ó axonométrico, y lavado del dibujo en tintas convencionales.



ERRATAS

PÁGINA	LÍNEA	DICE	LÉASE
3	38	proyecciones van	proyecciones verticales van
12	2	nd y $n'd'$	nd y $v'd'$
14	1	(V. 24)	(V. 23)
18	3 y 4	los llamados	las llamadas
18	6	$P = P'$	$P - P'$
26	8	$n'b - nb'$	$nb - n'b'$
26	11	el plano $P - P'$	el plano $Q - Q'$
26	14	traza P'	traza Q'
29	36	$b'r'$	$b'o'$
32	5	$a'o' - a'o'$ y $co - co'$	$ao - a'o'$ y $co - c'o'$
34	17	perpendiculares á la altura	perpendiculares á la de tierra
37	26	$1b453$;	$1b753$
45	2	trazado en A	trazada en A
49	21	R, R,	$R - R'$
49	25	horizontal	vertical
49	31	vo'	$v'o'$
50	1	desde o	desde v'
50	3	en o	en v'
63	5	$3 - 3$	$3 - 3'$
66	38	$t'r' - n's'$	$t'r' - u's'$
66	41	thn	thu
69	25	y del cilindro	y en el cilindro
80	11	$abcd$	$a'b'c'd'$
81	10	$arcsb$	$a'r'c's'b'$
83	7 y 8	uno de los planos de proyección	{ una de las proyecciones del plano $Q - Q'$
86	16	TR y ED	TR y EN
87	21	$x's_1$	$x's'$
88	9	en su centro	hasta su encuentro
94	15	ángulos α	ángulos α
94	35	BCD	$B'C'D'$
100	19	$a'1'2'3'5'6'$	$a'1'3'5'b'$
107	26	sobre todo, las	sobre todo en las
109	21	$ff'3''e'e, gg''g''g'$	$ff'3''e'e, gg''g''g'$

PÁGINA	LÍNEA	DICE	LEÁSE
122	15	en $d' m$	en $d m$
127	24	$a' o, b' r$ y $e' n$	$a' o, b' r$ y $c' n$
130	4 y 5	escala Y;	escala X;
133	16	7 y 3	7 y 13
139	23	T m y P m	T m y P r
141	14	figura 26;	figura 26';
142	24 y 25	X forma con cada uno de los o Y	Y forma con cada uno de los o X
144	27	igual a $\frac{2}{3} A 2$	igual a $\frac{2}{3}$ de A 2
147	2	y el $r r'$	y el $v v'$
147	9	$o o'$ y $r r'$	$o o'$ y $v v'$
153	13	al eje X	al eje Z
153	19	en $2''$	en n''
163	3	X V	X Y
165	2	(V. 1)	(V. 2)
171	25	el plano X Y	el plano principal

En la página 55, líneas 36 y 37, debe suprimirse «generatrices opuestas que se conocen con el nombre de *asintotas* de la hipérbola».

A las letras V con que se designan las proyecciones verticales respectivas, de la cúspide de la pirámide y vértice del cono representados en las figuras 82 y 89 de las páginas 50 y 56, se les debe suplir el acento que les falta.

En la página 122, fig. 5: La longitud $m d'$ no es igual, como debería ser, a la mitad de $m a' + m b' + m c'$.

En la página 162, fig. 10: La recta $V_2 n$ debe unir el punto V_2 con el c , no con el n , según está.

En la lámina 22.^a, serie E, fig. 2: Donde dice $a = 6 d$, debe leerse $a = 0,6 d$.

También en la misma lámina, figuras 4, 6 y 7, donde dice $E = 2 d$ debe leerse $E = 2 d + 4 \text{ mm}$.

C = 84 / 1 = 84

