Tratado de Análisis Matemático

TOMO TERCERO

APLICACIÓN DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

AL ESTUDIO DE LAS FIGURAS PLANAS

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA
TIPOGRAFÍA DE E. CASAÑAL, COSO, 100
1904

GALDEANO

ANÁLISIS MATEMÁTICO

3

NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA—T. VI

Tratado de Análisis Matemático

TOMO TERCERO

APLICACIÓN DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

AL ESTUDIO DE LAS FIGURAS PLANAS

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA
TIPOGRAFÍA DE E. CASAÑAL, COSO, 100
1904

INTRODUCCIÓN

LO IMAGINARIO Y LO INFINITO EN GEOMETRÍA

CAPÍTULO PRIMERO

Geometría ordinaria ó euclídea

§ 1.º DISGRESIÓN HISTÓRICA ACERCA DEL INFINITO Y LO IMAGINARIO EN GEOMETRÍA

1. DESARGUES—La tendencia á hacer entrar en las reglas generales los conceptos singulares de lo imaginario y lo infinito es esencialmente moderna, y se halla justificada en la necesidad de simplificar la ciencia unificándola, y de generalizar sus proposiciones haciendo entrar en la misma ley hechos, al parecer, distintos. El formar un lenguaje cómodo y breve.

Desargues consideró como variedades de una misma curva las diversas secciones del cono, círculo, elipse, parábola, hipérbola y sistema de dos rectas. Dos rectas paralelas eran una variedad de dos rectas concurrentes en un punto.

Desargues aplicaba á los sistemas de rectas las propiedades de las curvas, porque un sistema de rectas se puede representar por una ecuación única, del mismo modo que una curva.

Considerando las dos diagonales de un cuadrilátero como una línea de segundo orden, el teorema de Desargues acerca de la involución en una cónica es una generalización del teorema de Pappus acerca de la involución.

2. MONGE.—Este geómetra empleó el método de generalización, considerando la figura sobre la cual se trata de demostrar alguna propiedad general, en circunstancias de construcción general, en las que la presencia de ciertos puntos, líneas ó planos que en otras circunstancias serían imaginarios, facilita la demostración. En seguida se aplica el teorema que se ha demostrado así al caso en que estos puntos, rectas ó planos serían imaginarios, es decir, que se le considera como verdadero en todas las circunstancias de construcciones generales que puede ofrecer la figura á que se refiere (*).

Este método parece fundado, según dice Chasles, en la observación de que una figura puede presentar, en su construcción más general, dos casos diferentes: en el primero, ciertas partes (puntos, líneas, planos ó superficies) de que no depende necesariamente la construcción general de la figura, pero de la que son consecuencias contingentes ó accidentales, son reales y palpables. En el segundo caso, estas mismas partes no aparecen. Se han hecho imaginarias, y sin embargo, las condiciones generales de construcción de la figura han permanecido las mismas.

Por ejemplo: al trazarse en el espacio una superficie de segundo grado y una recta, existirán dos casos, según que se encuentren ó no; pero los dos de igual generalidad, con la diferencia de que los dos puntos de intersección de la recta y de la superficie son reales en el primer caso é imaginarios en el segundo. Dichos dos puntos son una de las relaciones *contingentes* ó accidentales del sistema de la superficie y de la recta.

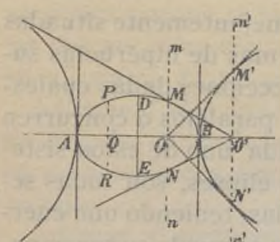
3. CARNOT.—Este geómetra trabajó por explicar las correspondencias existentes entre el Algebra y la Geometría por medio de las correlaciones directa, inversa y compleja que corresponden á los casos del signo positivo, negativo ó imaginario.

4. PONCELET.—Este geómetra extendió la idea de Carnot, dedicando gran parte de sus escritos á establecer el *principio de continuidad*.

Hallándose los puntos O y O′ ligados por la relación armónica $\frac{O'A}{O'B} = \frac{OA}{OB}$, por medio de ésta pueden obtenerse, independientemente de la intersección M y N de la cónica y la secante

(*) Chasles. *Aperçu historique*, p. 197.

mn; de manera que al estar determinada cualquiera de las entidades *mn*, *m'n'*, O, O', quedan determinadas las otras tres,



pues dado, por ejemplo, el punto O', quedan determinadas las dos tangentes O'M, O'N, que á su vez determinan la secante *mn* y el punto O de intersección con el diámetro AB, siendo O' el polo de MN.

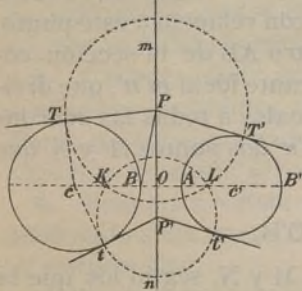
Pero permaneciendo la misma relación entre los puntos O, O' y las rectas *mn*, *m'n'*, independiente de la existencia de los puntos M y N (que desaparecen cuando *mn* se trasforma en *m'n'*), no hay ninguna razón para prescindir de ellos; y así como en Geometría hay palabras tales como la de los *infinitamente pequeños*, *infinitamente grandes* para expresar diversos modos de existencia, debe haberlas para expresar los de la no existencia, con objeto de conservar la analogía entre las ideas y el lenguaje; y al persistir en considerar á *m'n'* como secante, Poncelet adopta la denominación de *secante ideal* de la curva, distinguiéndola de la que es absolutamente inconstructible, que se denomina á su vez *recta imaginaria*. Además, O' será el *centro ideal* de la cuerda imaginaria que determina *m'n'*, O el *encuentro ideal* de las tangentes imaginarias que corresponden á los extremos de esta cuerda ó *cuerda de contacto* relativa á O. En fin, la recta *m'n'* será la *secante ideal de contacto* con relación á este punto.

Si habiéndose determinado el diámetro AB de la sección cónica, conjugado á la dirección de la secante ideal *m'n'*, que divide, por consiguiente, en dos partes iguales á todas las cuerdas que le son paralelas, se toman sobre *m'n'* dos puntos M' y N' que satisfagan á la relación

$$\overline{O'M'}^2 = p \cdot O'A \cdot O'B,$$

idéntica con la que define los puntos M y N, según los que la secante *mn*, paralela á la primera, encuentra realmente á la sección cónica, se obtendrá una longitud M'N' dividida en dos partes iguales por el punto O'; y continuando así la construcción, llega Poncelet á construir la *cónica suplementaria* de la primera, que es una hipérbola, si ésta es una elipse y viceversa, hallando también que cada cónica tiene infinidad de cónicas suplementarias, correspondientes á la infinidad de sistemas de diámetros conjugados.

Si dos elipses son semejantes y estan semejantemente situadas en un plano, existe una infinidad de sistemas de hipérbolas suplementarias á ellas, relativamente á direcciones dadas cualesquiera, cuyos diámetros de contacto son paralelos ó concurren en el infinito, de manera que, para cada uno de estos sistemas, las hipérbolas suplementarias á las elipses, son todas semejantes y estan semejantemente colocadas, teniendo una cuerda ó secante real común en el infinito, que se puede suponer paralela á la dirección dada, y por consiguiente, las elipses propuestas tienen una *secante ideal* común en el infinito, ó en otros términos, *dos puntos imaginarios* comunes en el infinito. Por último, si además de ser semejantes las hipérbolas y de estar semejantemente colocadas son concéntricas, serán tangentes en los dos puntos comunes del infinito, y por consiguiente, las elipses tendrán *una secante ideal de contacto en el infinito*, ó un *doble contacto imaginario en el infinito*. Y como dos círculos situados arbitrariamente en un plano son siempre homotéticos, tienen una secante ideal en el infinito; y en el caso de ser concéntricos, esta recta será la sola *secante ideal de contacto* común á dichos círculos; y como dos círculos cualesquiera situados en un plano, tienen otra secante común real ó ideal, á distancia dada ó finita, salvo el caso de ser concéntricos, en el que esta secante se confunde en el infinito con la primera, se pueden considerar como dos secciones cónicas que tienen *cuatro puntos comunes*, de los que dos son necesariamente *imaginarios* en el infinito (*los puntos circulares ó cíclicos*), mientras que los otros dos, á la vez *reales ó imaginarios* estan, en general, situados á distancia dada y finita.

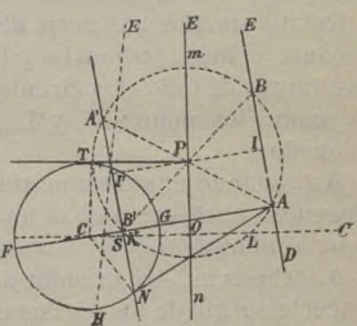


Como consecuencia de estas proposiciones, citaremos la siguiente: *Dados arbitrariamente tres círculos en un plano, las secantes reales ó ideales que les son comunes, dos á dos, se* *cortan necesariamente en un mismo punto, para el que las seis tangentes correspondientes son iguales,* que da un medio muy sencillo de construir la secante ideal de dos círculos en un plano; porque si se cortan por una tercera circunferencia, las dos secantes comunes reales que resultan, se encontrarán en la secante de que se trata.

Además, *todos los puntos de la secante común á una serie de círculos trazados en un plano son tales, que las polares correspondientes concurren en puntos pertenecientes á esta secante.*

Además, si suponemos una serie de círculos en un plano con una secante real ó ideal común *mn*, podremos decir que, *todo círculo que corta ortogonalmente á dos* C y C′ *de la serie propuesta, tiene evidentemente su centro en la secante* mn *común, y por consiguiente, corta según ángulos rectos á los demás círculos de la serie, de manera que forma parte de la serie ortogonal recíproca de la propuesta.*

Cuando la secante *mn*, común á la serie de círculos, es ideal, entre la infinidad de éstos hay dos de dimensiones infinitamente pequeñas, que se reducen á dos puntos K y L simétricamente colocados en la línea de los centros respecto á la secante común.



Por estos puntos pasan todos los de la serie ortogonal recíproca de la propuesta, que son los *puntos ó círculos límites* de esta serie. Los de la serie recíproca son evidentemente imaginarios, cuando los primeros son reales y *viceversa.*

Si A es un punto arbitrario del plano donde se halla una serie de círculos C, C′,... con una secante real ó ideal común *mn*, concibamos la circunferencia ABKL que corta ortogonalmente á todos los círculos de la serie, que tiene, por consiguiente, su centro P en *mn*; unamos A con el centro C de uno cualquiera de los círculos de la serie por una recta indefinida AC que encontrará al nuevo círculo P en B′, y determinará por sus intersecciones con C, el diámetro FG. Esto sentado, si T es uno de los puntos de intersección de P y C, el radio CT ó su igual CG será medio proporcional entre los segmentos CB′ y CA; pero el diámetro FG queda dividido en dos partes iguales en C, luego divide armónicamente á los puntos A y B′, y por consiguiente, el punto B′ es el conjugado armónico de A respecto al diámetro de que se trata.

Diremos, pues, que: *Todos los puntos medios de las cuerdas de contacto que corresponden á un mismo punto del plano de una serie de círculos que tienen una secante común, se hallan distribuidos en una circunferencia ortogonal á los primeros.*

Cuando la directriz DE pasa por uno de los puntos límites, la circunferencia degenera en dos rectas; y cuando, sin pasar DE por ninguno de los puntos límites, es paralela á la secante común *mn*, la sección cónica de los recíprocos degenera en dos rectas, de las que la una, polar del punto del infinito de DE, se confunde con la línea de los centros C C′ y la otra, paralela á la directriz, se halla simétricamente colocada al otro lado de la secante común *mn*.

La degeneración de la circunferencia en dos rectas es un concepto muy útil en la Geometría.

Relativamente á la serie de círculos arriba considerada, la secante común ordinaria y la secante ideal en el infinito, son los límites de todos los círculos respecto al *infinitamente grande*, como los puntos K y L lo son respecto al *infinitamente pequeño*.

Así, cuando una circunferencia se hace infinitamente grande, degenera en dos rectas; la una á distancia dada, y la otra á distoncia infinita (*).

5. Chasles.—El creador de la *Geometría Superior*, que supo hacerla surgir de los porismas de Euclides, reconstituídos sobre la base que le ofrecieron los escritos conservados de Pappus, halla en el concepto de las series homográficas un medio de interpretación de lo imaginario, introduciéndolo en Geometría como elemento de la misma importancia que lo real.

Dados dos puntos a y a', su punto medio α y el producto ν de sus distancias á un punto fijo M, situado en la recta determinada

(*) *Traité des propriétés projectives des figures*, pp. 34-48.

por a y a', se tiene

$$\nu = Ma \, . \, Ma' = \overline{M\alpha}^2 - \overline{\alpha a}^2$$

de donde

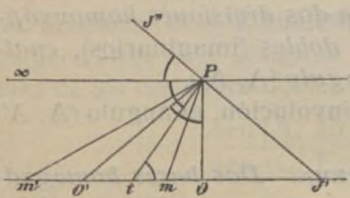
$$\overline{\alpha a}^2 = \overline{M\alpha}^2 - \nu \, , \; \alpha a = \pm \sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu}$$

La determinación de los dos puntos depende de la construcción de la expresión $\sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu}$; y las distancias de los dos puntos al origen M son:

$$Ma = M\alpha + \sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu} \quad \text{y} \quad Ma' = M\alpha - \sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu}$$

Puede decirse que dos puntos estan representados por un punto, que será su *medio*, y un *rectángulo*, que será el producto de sus distancias á un orígen común. Cuando $\overline{M\alpha}^2 < \nu$, los puntos son imaginarios.

Por *dos puntos imaginarios* se entenderá que los *datos ó elementos* que sirven para determinarlos, á saber, su punto medio y sus distancias á un orígen común, dan lugar á una expresión imaginaria de las distançias de este punto al orígen (*).



6. Divisiones homográficas. Teoremas. *Si dos divisiones homográficas formadas en una recta, no tienen puntos dobles, existe á uno y otro lado de la recta un punto desde el que se ven, según ángulos iguales y formados en el mismo sentido de la rotación, todos los segmentos comprendidos entre los puntos de la primera división y sus homólogos respectivos.*

En efecto; la homografía se expresa por la ecuación

$$Om \, . \, Om' - OI \, . \, mm' + OI \, . \, OO' = 0$$

ó
$$Om \, . \, Om' + OI \, . \, Om - OI \, . \, Om' + OI \, . \, OO' = 0$$

Pero siendo imaginarios los puntos dobles, los dos puntos O′ y J′ se hallan á distinto lado con relación al punto O (**); luego O′ é I estan al mismo lado, y el producto OI . OO′ es positivo.

(*) Chasles. *Traité de Géométrie supérieure*, p. 54.

(**) Chasles. *Traité de Géométrie supérieure*, p. 111.

Tomemos sobre la perpendicular trazada por el punto O el segmento $OP = \sqrt{OI \cdot OO'}$. La ecuación se escribe

$$\frac{Om}{OP} \cdot \frac{Om'}{OP} + \frac{OI}{OP}\left(\frac{Om}{OP} - \frac{Om'}{OP}\right) + 1 = 0$$

que da

$$\operatorname{tg} OPm \cdot \operatorname{tg} OPm' + \frac{OI}{OP}\left(\operatorname{tg} OPm - \operatorname{tg} OPm'\right) + 1 = 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg} OPm' - \operatorname{tg} OPm}{1 + \operatorname{tg} OPm \cdot \operatorname{tg} OPm'} = \frac{OP}{OI}$$

y finalmente $\quad \angle mPm' = \angle OIP = \text{const.}$

Los *puntos dobles* de las dos divisiones homográficas que consideramos, tienen por punto medio el O y por cuadrado de su distancia á este punto el producto $OO' \cdot OJ'$ ó $- OO' \cdot OI = - \overline{OP}^2$, de manera que estos puntos (imaginarios) no dependen de la magnitud del ángulo, según el que se ven desde P los segmentos aa', bb', ..., sino solamente de la posición de este punto, de lo que se concluye el siguiente

TEOREMA. *Si alrededor de un punto* P *como vértice se hace girar el ángulo* (A, A') *de magnitud constante, sus dos lados señalan sobre una transversal fija dos divisiones homográficas que tienen los mismos puntos dobles* (imaginarios), *cualquiera que sea la magnitud del ángulo* (A, A').

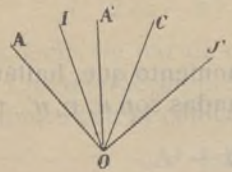
OBSERVACIÓN. En el caso de la involución, el ángulo (A, A') es recto.

7. HACES HOMOGRÁFICOS. TEOREMA. *Dos haces homográficos que tienen el mismo centro, cuyos rayos dobles son imaginarios, pueden considerarse como la perspectiva de dos haces, en los cuales los rayos homólogos forman entre sí ángulos iguales dirigidos en el mismo sentido de la rotación.*

Cortando los dos haces por una transversal cualquiera, se tendrán dos sistemas, $a, b, c, \ldots$; $a', b', c', \ldots$, que forman dos divisiones homográficas sin puntos dobles, á las que es aplicable el teorema anterior. Los rayos dobles se determinan por la ecuación

$$\left[\frac{\operatorname{sen}(A, M)}{\operatorname{sen}(C, M)}\right]^2 - \left[\frac{\operatorname{sen}(A, I)}{\operatorname{sen}(C, I)} + \frac{\operatorname{sen}(A \cdot J')}{\operatorname{sen}(C \cdot J')}\right] \frac{\operatorname{sen}(A, M)}{\operatorname{sen}(C, M)}$$
$$+ \frac{\operatorname{sen}(A, I)}{\operatorname{sen}(C, I)} \frac{\operatorname{sen}(A, A')}{\operatorname{sen}(C, A')} = 0$$

en la que I, J' son los rayos que corresponden en la primera y segunda división respectivamente, al mismo rayo C, considerado como perteneciente sucesivamente á la segunda y á la primera división.



Tendremos $\angle(C,I) = -\angle(AA')$, $\angle(A, I) = -\angle(C, A')$, $\angle(C, J') = \angle(AA')$, y la ecuación se reduce á

$$\left[\frac{\text{sen}\,(A, M)}{\text{sen}\,(C, M)}\right]^2 - \frac{\text{sen}\,(A, J') - \text{sen}\,(A, I)}{\text{sen}\,(A, A')}\,\frac{\text{sen}\,(A, M)}{\text{sen}\,(C, M)} + 1 = 0$$

Pero

$$\text{sen}\,(A, J,) - \text{sen}\,(A'I) = \text{sen}\,(AC + CJ') - \text{sen}\,(AC - CI)$$
$$= \text{sen}\,(AC + AA') - \text{sen}\,(AC - AA') - 2\cos AC \,.\, \text{sen}\,AA',$$

y $$\left[\frac{\text{sen}\,(A, M)}{\text{sen}\,(C, M)}\right]^2 - 2\cos AC\,\frac{\text{sen}\,(A, M)}{\text{sen}\,(C, M)} + 1 = 0.$$

Las raíces, son

$$\frac{\text{sen}\,(A, M)}{\text{sen}\,(C, M)} = \cos\,(A, C) \pm \text{sen}\,(A, C)\sqrt{-1},$$

su producto es $+1$, cualesquiera que sean los ejes fijos A y C, es decir, que si se designan por E y F las direcciones imaginarias de los dos rayos dobles de los dos haces, se tiene

$$\frac{\text{sen}\,(A, E)}{\text{sen}\,(C, E)}\,\frac{\text{sen}\,(A, F)}{\text{sen}\,(C, F)} = +1$$

Si el eje C es perpendicular á A, resulta

$$\text{tg}\,AM = \pm\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \text{tg}\,(A, E)\,\text{tg}\,(A, F) = +1.$$

Estas expresiones son independientes del ángulo (A, A').

8. LAGUERRE. En su *Note sur la théorie des foyers* (*), Laguerre deduce una relación muy importante entre los ángulos correspondientes de dos figuras homográficas.

Siendo (A, B) un ángulo de la primera figura y a', la relación anarmónica de los dos lados del ángulo (A', B') de la segunda figura y de las dos rectas trazadas desde el vértice de este ángulo, á los dos puntos que en esta figura corresponden á los dos puntos imaginarios en el infinito (puntos circulares), considera-

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t XII, 1853, p 57-55.

dos como pertenecientes á la primera figura, se tiene

$$(A, B) = \frac{\log a'}{2\sqrt{-1}}.$$

También es oportuno recordar en este momento que, hallándose un ángulo de dos rectas cuyas coordenadas son u, v, u', v', expresado por la fórmula

$$\alpha = \text{arc} . \cos \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{u'^2 + v'^2}},$$

Laguerre halló la importante expresión equivalente

$$\frac{i}{2}\log \frac{uu' + vv' + \sqrt{(uu' + vv')^2 - (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2)}}{uu' + vv' - \sqrt{(uu' + vv')^2 - (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2)}}$$

Tenemos, pues, el logaritmo del cociente de las raíces de

$$u^2 + v^2 + 2\lambda(uu' + vv') + \lambda^2(u'^2 + v'^2) = 0.$$

9. Clebsch. Pero la última ecuación es, según $u^2 + v^2 = 0$, la ecuación de los puntos circulares, si se sustituyen á u y v, las coordenadas $u + \lambda u'$, $v + \lambda v'$; y tendremos conforme se expresa Clebsch (*), el teorema siguiente: *El ángulo de dos rectas es igual al logaritmo, multiplicado por $\frac{i}{2}$, de la relación anarmónica que dichas rectas forman con las que unen el punto de intersección de las primeras con los puntos circulares.*

Clebsch en su Geometría, transforma las ecuaciones de los dos círculos

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0,$$

mediante la sustitución

$$x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} \frac{A}{C},$$

$$y = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} = \frac{B}{C},$$

en

$$A^2 + B^2 + 2a . AC + 2b . BC + cC^2 = 0 .$$
$$A^2 + B^2 + 2a' AC + 2b' . BC + c'C^2 = 0 ,$$

(*) *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, pág. 148.

que por sustracción se reducen á

$$C\,[2\,(a-a')\,A+2\,(b-b')\,B+(c-c')\,C]=0\,,$$

es decir, un par de rectas.

Las intersecciones dadas por $C=0$, son las de la recta del infinito con la cónica imaginaria desvanecente

$$A^2+B^2=0 \qquad \text{ó} \qquad x^2+y^2=0,$$

independiente de los coeficientes a, b, c, a', b', c' de las ecuaciones de los dos círculos. Tenemos, pues, que:

Todos los círculos pasan por los dos mismos puntos imaginarios que pertenecen á la recta del infinito.

Si eliminamos A, B y C entre las ecuaciones

$$A \pm iB=0\,, \quad C=0\,, \quad Au+Bv+C=0\,,$$

tendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = \pm\, iu - v = 0$$

El producto de los puntos circulares se representa por

$$u^2+v^2=0\,.$$

Las direcciones correspondientes á estos puntos estan dadas por

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=0 \qquad (\operatorname{tg}\alpha=\pm\sqrt{-1}\,.)$$

Luego: *Las asíntotas de todos los círculos son paralelas.*

Además: 1.º *Las direcciones asintóticas del círculo forman con las otras direcciones el mismo ángulo (infinitamente grande).* En efecto, por ser $\operatorname{tg}\alpha=i$, se tiene

$$\operatorname{tg}(\varphi-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-i}{1+i\operatorname{tg}\varphi}=-\,i\,,$$

resultado independiente de φ, y lo mismo para $\operatorname{tg}\alpha=-\,i$. Esto se explica, por ser el ángulo α infinitamente grande, pues

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\alpha=\int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2},$$

se hace infinita, cuando $\alpha=\pm\, i$.

Luego, mientras que los puntos cuya distancia á un punto cualquiera es infinitamente grande, se hallan situados en una recta (la recta del infinito), *las rectas que forman con otra recta cualquiera un ángulo infinitamente grande*, y que podrían llamarse rectas infinitamente alejadas, *envuelven un par de puntos, los puntos circulares imaginarios.*

2.° *Dos rectas perpendiculares forman un sistema armónico con las rectas trazadas desde su punto de intersección á los puntos circulares*, pues estas dos últimas rectas son las asíntotas de todo círculo cuyo centro es su punto de intersección; y las dos rectas dadas son diámetros conjugados de dicho círculo.

10. CAYLEY. En *A sixth Memoir upon Quantics*, Cayley desarrolla la idea de construir una Métrica proyectiva con referencia á una figura fundamental, á la que llama *lo absoluto*, que en la Geometría de una dimensión es un *par de puntos* situados en la recta que une los dos puntos dados y que en las geometrías de dos y de tres dimensiones son, respectivamente, una cónica y una cuádrica, que determinan análogamente en cada recta dos puntos, que son lo absoluto respecto á dicha recta.

Si P, P′ y P″ son tres puntos, se tiene que

$$\text{dist.}\,(P, P') + \text{dist.}\,(P', P'') = \text{dist}\,(P, P'')$$

lo mismo que para los ángulos, tomando el cuadrante como unidad de distancia.

Las expresiones de las distancias de dos puntos (x, y) y (x', y'), de dos rectas (ξ, η, ζ) y (ξ', η', ζ') y de un punto y una recta (x, y), (ξ, η, ζ), son respectivamente

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, \qquad \frac{\xi' x + \eta' y + \zeta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}$$

$$= \text{arc tg}\,\frac{\xi}{\eta} - \text{arc tg}\,\frac{\xi'}{\eta'}, \qquad \text{arc cos}\,\frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}$$

Tomando como ecuaciones de lo absoluto en coordenadas, puntos ó líneas respectivamente, las siguientes:

$$x^2+y^2+z^2=0, \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0,$$

las expresiones respectivas de la distancia de dos puntos

(x, y, z) y (x', y', z') ó (ξ, η, ζ) y (ξ', η', ζ') se expresan por

$$\text{arc cos}\,\frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$\text{ó arc cos}\,\frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}}$$

y la del punto (x, y, z) y la recta (ξ', η', ζ') se expresa por

$$\text{arc sen}\,\frac{\xi' x + \eta' y + \zeta' z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}}$$

Si en el plano, la cónica fundamental ó lo *absoluto* degenera en un par de puntos imaginarios, se tiene la determinación métrica usual ó Geometría euclidiana.

En el espacio lo absoluto es la cónica esférica, la intersección de la esfera con el cono concéntrico ó esfera desvanecente

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Por medio de la cónica fundamental ó absoluto, por construcciones sucesivas se divide una línea y un haz de rectas en una serie infinita de elementos infinitesimales, iguales. El número de elementos comprendidos entre los puntos de la serie ó dos rectas del haz, mide la distancia entre dos puntos ó dos líneas; y por medio del cuadrante, como distancia existente, lo mismo entre puntos que entre rectas, podemos comparar la distancia de dos puntos con la de dos rectas, y la de un punto y una recta puede representarse indistintamente como la de dos puntos ó la de dos rectas.

Como se ha dicho, en Geometría plana, lo absoluto degenera en los dos puntos circulares del infinito.

En resumen, las propiedades métricas de la figura, en la Geometría de Cayley, no son propiedades de las figuras consideradas en sí *(per se)*, sino propiedades consideradas en conexión con otra figura, ó sea lo absoluto. Y las nuevas definiciones de distancia y de ángulo, dependientes de la relación anarmónica, permiten considerar á la Geometría métrica, según expresa Cayley, como una parte de la Geometría descriptiva.

§ 2.º PUNTOS CIRCULARES Y RECTAS ISÓTROPAS

11. Definición. *Recta isótropa* es una recta cuyo coeficiente angular es $\pm\sqrt{-1}$. Por todo punto (α, β) pasan dos rectas isótropas, cuyas ecuaciones son

$$y-\beta+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0\,,\quad y-\beta-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0\,,$$

cuyo conjunto se representa por

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=0$$

Las dos rectas isótropas que pasan por el punto (α, β) forman un círculo de *radio nulo*, cuyo centro es (α, β). Se pueden considerar como asíntotas de todos los círculos cuyos centros se hallan en (α, β). Todas las rectas isótropas encuentran á la recta del infinito en dos puntos fijos, los *umbílicos* del plano.

12. Coordenadas de los puntos circulares. En coordenadas trilineales, la ecuación del círculo circunscrito al triángulo de referencia es

$$yz \operatorname{sen} A + zx \operatorname{sen} B + xy \operatorname{sen} C = 0 \quad \text{ó } ayz + bxz + cxy = 0$$

expresando A, B, C los ángulos del triángulo de referencia y a, b, c sus lados.

La ecuación de un círculo cualquiera se obtendrá agregando al primer miembro de esta ecuación términos de primer grado con relación á las coordenadas ordinarias, por ejemplo,

$$(ax+by+cz)\,(lx+my+nz)\,,$$

porque el primer factor es una constante y el segundo el doble del área del triángulo de referencia. Así la ecuación de un círculo cualquiera es

$$ayz+bxz+cxy+(ax+by+cz)\,(lx+my+nz)=0 \quad (1)$$

La ecuación general de las rectas isótropas, se obtendrá escribiendo que el primer miembro de esta ecuación es el producto de dos factores de primer grado, ó anulando su discriminante.

Si se corta la circunferencia (1) por la recta del infinito

$$ax + by + cz = 0 \tag{2}$$

se obtiene el mismo resultado que cortando la circunferencia

$$ayz + bxz + cxy = 0 \tag{3}$$

por la misma recta, luego: *Todos los pares de rectas isótropas encuentran á la recta en el infinito en los mismos dos puntos, cuyas coordenadas* x, y, z *son soluciones de* (3) *y* (2).

Eliminando z entre (2) y (3) se obtiene

$$(x^2 + y^2)\, ab + xy\,(a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

ó dividiendo por ab,

$$x^2 + y^2 + 2\,xy \cos \mathrm{C} = 0,$$

de donde

$$\frac{y}{x} = -\cos \mathrm{C} \pm i \operatorname{sen} \mathrm{C} = -e^{\pm \mathrm{C}i}$$

ó
$$\frac{y}{x} = e^{(\pi \pm \mathrm{C})\, i}, \qquad \frac{z}{x} = e^{(\pi \pm \mathrm{B})\, i}. \tag{4}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2) ó

$$x \operatorname{sen} \mathrm{A} + y \operatorname{sen} \mathrm{B} + z \operatorname{sen} \mathrm{C} = 0,$$

tendremos

$$\operatorname{sen} \mathrm{A} + e^{(\pi \pm \mathrm{C})\, i} \operatorname{sen} \mathrm{B} + e^{(\pi \pm \mathrm{B})\, i} \operatorname{sen} \mathrm{C} = 0.$$

Para que esta ecuación se verifique, es preciso tomar signos contrarios delante de C y B en las exponenciales. Las fórmulas (4) darán entonces

$$\frac{y}{x} = e^{-(\mathrm{A} + \mathrm{B})\, i}, \; \frac{z}{x} = e^{(\mathrm{A} + \mathrm{C})\, i} \quad \text{ó} \quad \frac{y}{x} = e^{(\mathrm{A} + \mathrm{B})\, i}, \; \frac{z}{x} = e^{-(\mathrm{A} + \mathrm{C})\, i}$$

El conjunto de los umbílicos puede representarse por las dos ecuaciones

$$ax + by + cz = 0, \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

§ 3.° FOCOS DE LAS CURVAS

12. DEFINICIÓN. Se llama *foco* de una curva plana un punto desde el que se pueden trazar á la curva dos tangentes isótropas ó los puntos de intersección de las dos tangentes imaginarias á la curva, trazadas por los umbílicos ó puntos circulares del plano (*).

Plücker por primera vez consideró el foco como centro de un haz en involución de rayos dobles imaginarios que pueden considerarse como tangentes á la curva (*), siendo recto el ángulo que forman cada dos rayos conjugados de la involución.

Siendo $x^2 + y^2 = e^2\gamma^2$ la ecuación de una cónica referida al triángulo autopolar $\alpha\beta\gamma$, es decir, el triángulo que se confunde con su polar recíproco, cuando las líneas de referencia son una directriz γ y dos rectas rectangulares $x = 0$, $y = 0$ cualesquiera, cortándose en el foco correspondiente á γ. El foco (x, y) es el polo de la directriz γ, y la polar de un punto cualquiera de esta directriz es perpendicular á la recta que une este punto con el foco. Además, las dos rectas imaginarias $x^2 + y^2 = 0$ son tangentes trazadas por el foco, y puesto que estas rectas son las mismas, cualquiera que sea γ, resulta la siguiente conclusión: *Todas las cónicas que tienen comun un foco, tienen dos tangentes imaginarias comunes que pasan por este foco;* luego: *Todas las cónicas confocales tienen cuatro tangentes imaginarias comunes, y pueden ser consideradas como inscritas en el mismo cuadrilátero.*

Las tangentes imaginarias $x^2 + y^2 = 0$ trazadas por el foco se confunden con las rectas que unen este foco á los puntos cíclicos, comunes á todos los círculos de un mismo plano, por consiguiente: *Las tangentes trazadas á una cónica por cada uno de los puntos cíclicos, forman un cuadrilátero que tiene dos vértices reales, á saber, los focos de la cónica* y *dos vértices imaginarios que pueden considerarse como focos imaginarios de esta cónica* (**).

PROBLEMA. *Determinar los focos de la cónica representada por la ecuación general.*

(*) Plücker. *Jour. Crelle*, vol. x, p. 84.—System d. analytis. Geom. p. 102.

(**) Laurent. *Traité d' Analyse*, t. II, p. 76.—Salmon, *Traité de Geom. analyt* p. 428.

Expresemos que la recta $x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1} = 0$ es tangente á la curva. Sustituyendo en la ecuación tangencial

$$Av^2 + Bu^2 + Cw^2 + 2Fuw + 2Gvw + 2Huv = 0$$

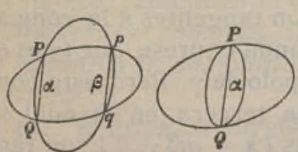
u, v, w respectivamente por $1, \sqrt{-1} - \alpha - \beta\sqrt{-1}$, é igualando separadamente el conjunto de los términos reales é imaginarios, se determinan los focos que se ve se encuentran en la intersección de dos hipérbolas equiláteras, partiendo de la ecuación del haz de tangentes trazadas por el punto (α, β), las cuales son paralelas á las direcciones isótropas.

Por cada punto circular se pueden trazar n tangentes á la curva. Estas $2n$ tangentes se encuentran en n^2 puntos, que son los focos.

Existe una excepción á esta regla, cuando la curva pasa i veces por los puntos circulares. Por cada punto circular se podrán trazar $n - 2i$ tangentes á la curva, distintas de las i tangentes que se pueden trazar por dicho punto circular y de las i tangentes confundidas con la recta del infinito; luego habrá $(n-2i)^2$ focos, intersecciones de estas rectas, distintas de las *tangentes singulares* que acabamos de citar.

Solamente $n - 2i$ de dichos focos son reales.

13. Tangentes y focos. Siendo $S=0$, $\alpha=0$, $\beta=0$, las ecuaciones de una cónica y de dos rectas, la ecuación $S - k\alpha\beta = 0$ representa una cónica que pasa por los cuatro puntos p, q, p', q', intersecciones de $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ con $S = 0$. Si p' y q' se aproximan respectivamente á p y q en el límite, una de las dos cónicas que suponemos pasan por los cuatro puntos, es tangente á la otra en P y Q, es decir, que: *La ecuación* $S - k\alpha^2 = 0$ *representa una cónica que tiene con la cónica* $S = 0$ *un doble contacto, según la recta* α.



Análogamente: *La ecuación* $\alpha\gamma = k\beta^2$ *representa una cónica tangente á las rectas* $\alpha = 0$ *y* $\gamma = 0$ *en los puntos de intersección de éstas con la recta* $\beta = 0$.

Si la recta $\alpha = 0$ es paralela á una asíntota de $S = 0$, es también paralela á la asíntota $S - K\alpha\beta = 0$, y esta ecuación representa un sistema de cónicas que pasa por cuatro puntos de los que uno está en el infinito. Si $\beta = 0$ es además paralela á la otra asíntota de $S = 0$, la ecuación $S = k\alpha\beta$ representa un sistema de cónicas que pasa por dos puntos en el infinito de la cónica $S = 0$.

La ecuación

$$S = k\beta \quad \text{ó} \quad S - (0 \,.\, x + 0 \,.\, y + k)\beta = 0,$$

expresa que *dos cónicas homotéticas se cortan siempre en dos puntos en el infinito, y por consiguiente, solo pueden encontrarse en dos puntos á distancia finita.*

La ecuación $S = k$ ó $S = k(0 \,.\, x + 0 \,.\, y + 1)^2$, representa una cónica que tiene con $S = 0$ un doble contacto, según la recta en el infinito. Las cónicas $S = 0$ y $S - k = 0$, además de ser homotéticas son concéntricas, luego: *Dos cónicas homotéticas y concéntricas, pueden considerarse como tangentes en dos puntos en el infinito.*

Siendo todas las circunferencias curvas semejantes cuyas ecuaciones solo difieren por sus términos de primer grado, resulta que: *Todas las circunferencias pasan por los mismos puntos imaginarios situados en el infinito, ó por los dos puntos cíclicos*, y además: *Todas las circunferencias concéntricas son tangentes en los puntos cíclicos.*

Considerando la ecuación $l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 = n^2\gamma^2$, que representa una cónica cuyo triángulo autopolar es $\alpha\beta\gamma$, puede escribirse bajo una de estas formas.

$$n\gamma^2 - m^2\beta^2 = l^2\alpha^2, \quad n^2\gamma^2 - l^2\alpha^2 = m^2\beta^2, \quad l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 = n^2\gamma^2.$$

La primera expresa que las rectas $n\gamma + m\beta = 0$ y $n\gamma - m\beta = 0$, cuya intersección es (β, γ), son tangentes á la cónica, siendo α su cuerda de contacto; la segunda expresa que (γ, α) es el polo de β y por consiguiente (α, β) el polo de γ. Pero esta conclusión puede tambien deducirse de la tercera, en la cual se expresa que las dos rectas imaginarias $l\alpha \pm m\beta\sqrt{-1}$ son tangentes á la cónica, siendo $\gamma = 0$ su cuerda de contacto. Estas rectas, en efecto, se encuentran en un punto real (α, β) polo de γ, interior á la cónica, puesto que las tangentes que pasan por este punto son imaginarias.

Observaciones. 1.ª La ecuación $\alpha\gamma = k\beta\delta^2$ expresa que: *El* *producto de las distancias de un punto cualquiera de una cónica á los dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito, está en una razón constante con el producto de las distancias de este mismo punto á los otros dos lados.*

2.º Cuando S = 0 es la ecuación de un círculo, S representa el cuadrado de la tangente trazada al círculo por el punto (x, y), y la ecuación $S - k\alpha\beta = 0$, que es la de una cónica cuyas cuerdas de intersección con el círculo son α y β, expresa el siguiente enunciado: *Si el cuadrado de la tangente trazada por un punto á un círculo fijo, está en una razón constante con el producto de las distancias del mismo punto á dos rectas fijas, este punto describe una cónica que pasa por los cuatro puntos de intersección de las rectas con el círculo.*

3.º Cuando el círculo es infinitamente pequeño, el enunciado anterior se transforma en el siguiente: *El lugar descrito por un punto tal, que el cuadrado de su distancia á un punto fijo se halle en una razón constante con el producto de sus distancias á dos rectas fijas, es una cónica.*

4.º Expresando S un círculo, de la ecuación $S = k\alpha^2$ resulta el siguiente enunciado: *El lugar de los puntos cuyas distancias á una recta fija están en una razón constante con las tangentes trazadas por estos puntos á un mismo círculo fijo, es una cónica tangente al círculo en los dos puntos de su intersección con la recta*, y recíprocamente: *Cuando un círculo tiene un doble contacto con una cónica, la tangente trazada al círculo por un punto de la cónica, está en una razón constante con la distancia de este punto á la cuerda de contacto.*

5.º Cuando el círculo es infinitamente pequeño, se llega á la propiedad fundamental del foco: *El foco de una cónica puede considerarse como un círculo infinitamente pequeño tangente á la cónica en dos puntos imaginarios situados sobre la directriz* (*).

14. Elementos impropios.—Bastará indicar que Staudt en su *Geometrie der Lage* estudia el punto, la recta y el plano en el infinito como *elementos impropios*.

(*) Salmon *Traité de Géom. analytique*, pp. 396-401.

CAPÍTULO SEGUNDO

Pangeometría

§ 1.º EXPOSICIÓN BASADA EN LA GEOMETRÍA DE CAYLEY (*)

15. MODIFICACÓN DE LA GEOMETRÍA DE CAYLEY.—El Sr. Klein no solo introdujo uno ventajosa alteración en la métrica de Cayley, sino que aplicó estas consideraciones al exámen comparativo de las tres especies de Geometrías. Indicaremos esta nueva doctrina.

Para determinar la distancia de dos puntos, se suponen unidos por una recta, la cual corta á la superficie fundamental en otros dos puntos que con los dos puntos dados forman cierta relación anarmónica, y entonces: *la distancia de los dos puntos dados es el producto del logaritmo de dicha relación anarmónica por una constante arbitraria* c.

Para determinar el ángulo de dos planos, se trazan por su intersección dos planos tangentes á la superficie fundamental, que forman cierta relación anarmónica con los dos primeros, y se dirá que *el ángulo de los dos planos dados es el producto del logaritmo de dicha relación anarmónica por una constante* c'.

Sea; en coordenadas—puntos ó en coordenadas—líneas la figura fundamental

$$f_{zz} = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \quad \text{ó} \quad \varphi_{ww} = \sum \alpha_{ik} w_i \; w_k = 0\,, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

y dos puntos $z_i = x_i$, $z_i = y_i$, las coordenadas de los puntos de la recta que los une estarán expresadas por $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$,

Para obtener el valor del parámetro $\frac{\lambda}{\mu}$ tendremos, sustituyendo

(*) *Sur la Géométrie dite non euclidienne. Automorf. Functionen.*

en la primera ecuación,

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\,\mu\, f_{xy} + \mu^2 f_{yy} = 0\,. \qquad (1)$$

Llamando D_{xy} la relación anarmónica de los puntos de intersección de la recta con la superficie fundamental y los dos puntos x_i , y_i y análogamente $D_{u,v}$ para el ángulo, serán

$$\Delta\,(x, y) = k \log \mathrm{D}_{x,\,y}\,, \qquad \mathrm{A}\,(u, v) = x \log \mathrm{D}_{u,\,v}$$

las expresiones de la distancia y del ángulo, respectivamente.

Resolviendo la ecuación (1), tendremos:

$$\Delta\,(x, y) = k \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f^{\,2}_{xy} - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f^{\,2}_{xy} - f_{xx} f_{yy}}}$$

$$\mathrm{A}\,(u, v) = \varkappa \log \frac{\varphi_{uv} + \sqrt{\varphi^{\,2}_{uv} - \varphi_{uu}\,\varphi_{ov}}}{\varphi_{uv} - \sqrt{\varphi^{\,2}_{uv} - \varphi_{uu}\,\varphi_{vv}}}$$

Pero siendo las tres relaciones anarmónicas de x, x', ó x' x'', ó xx'' con ξ y ξ'

$$\mathrm{R}_1\,(xx') = \frac{(x\,\xi)\;(x'\,\xi')}{(x\,\xi')\;(x'\,\xi)}\,, \quad \mathrm{R}_2\,(x'\,x'') = \frac{(x'\,\xi)\;(x''\,\xi')}{(x'\,\xi')\;(x''\,\xi)}\,,$$

$$\mathrm{R}_3\,(x,\,x'') = \frac{(x''\,\xi')\;(x\,\xi)}{(x\,\xi')\;(x''\,\xi)}$$

sabemos que en vez de $\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_3$, tenemos $\mathrm{R}_1 . \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_3$; y la función de las R que satisface á la condición de la suma, es el logaritmo. Podremos pues, expresando por M (x, x') la expresión de medida, que

$$\mathrm{M}\,(x\,x') = k \log \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^{\,2}_{xx'} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'\,x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^{\,2}_{xx'} = \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'x'}}}$$

Y puesto que el valor de la relación anarmónica para un dominio ternario, subsiste para el dominio binario, cuando se hace $x_3 = x'_3 = 0$, podremos emplear tambien el coseno y el seno en vez del logaritmo, y hacer

$$\cos \frac{i\,\mathrm{M}}{2\,k} = \frac{\Sigma\, xx'}{\sqrt{\Sigma_{xx}}\ \sqrt{\Sigma_{x'x'}}}\ ,\quad \operatorname{sen} \frac{i\,\mathrm{M}}{2\,k} = \frac{(xx')\ \sqrt{\Delta}}{\Sigma_{xx}\ \Sigma_{x'x'}}\ ,$$

expresando Δ el discriminante de $\Sigma_{xx} = 0$. (*)

La expresión de Laguerre se obtiene (**), considerando la relación anarmónica de los cuatro rayos

$$u_x = 0,\quad u'_x = 0\ ,\quad u_x + \lambda_1\, u'_x = 0\ ,\quad u_x + \lambda_2\, u'_x = 0\ ,$$

es decir

$$\mathrm{R}\,(u_x\ , u'_x, u_x + \lambda\ , u'_x\ ,\quad u_2 + \lambda_2\, u'_x) = \frac{u_{\xi'}.\ u'_{\xi}}{u_{\xi'}.\ u'_{\xi}}$$

Pero sustituyendo $1, i, 0$ y $1, -i, 0$ respectivamente por ξ y ξ' en las fórmulas

$$\cos \omega = k\ \frac{u_\xi\, u'_{\xi'} + u'_\xi u_\xi}{\sqrt{u_\xi\ u_{\xi'}.u'_\xi u'_{\xi'}}}\ \text{ y } \operatorname{sen} \omega = l\ \frac{u_\xi u'_{\xi'} - u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'}.u'_\xi u'_{\xi'}}}\ ,$$

obtenemos

$$\cos \omega = k\ \frac{(u_1 + iu_2)\,(u'_1 - iu'_2) + (u_1 - iu_2)\,(u'_1 + iu'_2)}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)\,(u'^2_1 + u'^2_2)}}$$

$$= \frac{2\ (u_1\, u'_2 + u_2 u'_2)}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)\,(u'_1 + u'_2)^2}}$$

$$\operatorname{sen} \omega = l\ \frac{(u_1 + iu_2)\,(u'_1 - iu_2) - (u_1 - iu_2)\,(u'_1 - iu'_2)}{\sqrt{(u_1^2 + u^2_2)\,(u'^2_1 + u'^2_2)}}$$

$$= -\ \frac{2i\,(u_1\, u'_2 - u_2 u'_2)}{\sqrt{(u_1^2 + u^2_2)\,(u'_1 + u'_2)}}$$

Comparando con las anteriores fórmulas, $l = -\dfrac{1}{2i} = \dfrac{i}{2}$, y

(*) *Vorlesungen über Automorfen Functionen*, p. 3.

(**) Klein. *Nicht-Euklidische Geometrie*, p. 44.

$$\cos \omega = \frac{1}{2} \frac{u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi \cdot u'_{\xi'}}}, \quad \operatorname{sen} \omega = \frac{i}{2} \frac{u_\xi u'_{\xi'} - u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} . u'_{\xi'} u'_{\xi'}}}$$

$$\cos \omega - i \operatorname{sen} \omega = \frac{u_\xi . \; u'_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} . \; u'_\xi u_{\xi'}}} = \sqrt{\frac{u_\xi . \; u'_{\xi'}}{u_{\xi'} . \; u'_\xi}} \sqrt{rel.\ anar.}$$

Pero $\cos \omega - i \operatorname{sen} \omega = e^{-i\omega} = \sqrt{R_a}$; luego

$$\omega = \frac{i}{2}\, rel.\ anarm.$$

16. Generalidades sobre la métrica.—El problema de la *medida* se reduce á la métrica relativa á la serie puntual rectilínea y á la métrica relativa al haz de rayos en el plano; pero sus propiedades métricas difieren esencialmente, pues la longitud de una puntual rectilínea ilimitada es infinitamente grande, por el contrario, la suma de los ángulos de un haz de rayos es finita. Un segmento de recta, salvo el signo, se determina de un modo uniforme; un ángulo solo se determina salvo un múltiplo de su periodo. A pesar de esas diferencias, las dos clases de determinaciones métricas tienen algo de común.

1.º Las dos métricas tienen de comun, que las diferencias de medidas *(Maassunterschied)* se suman entre sí, lo que se expresa así: $\overline{12} + \overline{23} = \overline{13}$. *Esta posibilidad de adicionar las diferencias de medidas* es una ley general dada *a priori* para todas las determinaciones métricas en las variedades de una dimensión. A esta posibilidad podemos agregar las propiedades que se expresan por $\overline{11} = 0$, $\overline{12} = -\overline{21}$.

2.º Las determinaciones métricas *no se alteran por un cambio en el espacio*. El ángulo de dos rectas no cambia cuando gira en un plano alrededor de su centro, ni la distancia de dos puntos de una recta, cuando resbala sobre sí misma.

Para la medida de los ángulos y de los segmentos de recta, se emplea una escala de elementos equidistantes que se aplican de un modo cualquiera al objeto que se ha de medir. El número de divisiones de la escala, comprendido entre dos elementos, da la diferencia de medida.

Por la inalterabilidad de la puntual ó el haz cuando se mueve *(se déplace)*, se puede construir la escala, por una sucesión de movimientos *(deplácements)*, lo mismo para la puntual que para el haz de rayos. Estos movimientos, desde el punto de vista de la Geometría proyectiva, entran en el concepto de *una transformación lineal, que transforma en sí á la figura elemental de que se trata.*

Consideremos dos elementos invariables, que se llamarán *elementos fundamentales*, y serán la base de un sistema de coordenadas, determinándose cada elemento por la relación $x_1 : x_2$, que llamaremos z, de modo que $z = 0$ y $z = \infty$ serán los elementos fundamentales.

La transformación que sirve de punto de partida para la construcción de la escala se expresará por la ecuación $z' = \lambda z$. Aplicando muchas veces sucesivas esta transformación á un elemento tomado arbitrariamente $z = z_1$, tendremos una serie de elementos

$$z_1, \quad \lambda z_1, \quad \lambda^2 z_1, \quad \lambda^2 z_1, \ldots\ldots$$

y esta serie de elementos será nuestra escala.

Designemos ahora *la división de la escala bajo el nombre de unidad de distancia*, y entonces las distancias de los elementos $z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1 \ldots\ldots$ al elemento z_1 serán respectivamente iguales á 0, 1, 2, 3, ...

Enseguida, para poder medir la distancia de otros elementos al elemento z_1 subdividiremos las divisiones de la escala, desde luego en n partes iguales. Se conseguirá esto, aplicando $(n-1)$ veces, á un elemento límite de una división de la escala la transformación lineal que, repetida n veces, reproduce la transformación $z^1 = \lambda z'$ es decir, la transformación $z'' = \lambda^{\frac{1}{n}} z'$ y llegaremos, en general, á

$$z = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{n}} z_1 ,$$

siendo α y β enteros. La distancia es igual á $\alpha + \dfrac{\beta}{n}$.

Si se concibe prolongada indefinidamente la subdivisión, se deberá considerar como distancia de un elemento z al elemento z_1, al exponente α que se debe atribuir á λ para que se tenga

$\lambda^{\alpha} z_1 = z$; y puesto que $\alpha = \log \frac{z}{z_1}$: $\log \lambda$, se dirá que:

La distancia de un elemento z *al elemento* z_1 *es igual al logaritmo del cociente* $\frac{z}{z_1}$ *dividido por la constante* $\log \lambda$. En vez de esta constante podrá escribirse c, transformándose la expresión de la distancia de dos elementos z y z' en $c \log \frac{z}{z'}$. (*)

17. Las tres especies de Geometría.—Se sabe que; se hallan caracterizadas; 1.º La Geometría de *Lobatschewsky ó hiperbólica* por ser la recta indefinida ó abierta, la suma de los ángulos de un triángulo menor que dos rectos y existir dos paralelas trazadas á una recta por un punto.

2.º La *Geometría euclídea* ó *parabólica*, por ser la suma de los ángulos de un triángulo igual á dos rectos y no admitir más que una paralela á una recta por un punto, siendo tambien la recta indefinida.

3.º La *Geometría de Riemann ó elíptica.* En ella la suma de los ángulos de un triángulo es superior á dos rectos y la recta es limitada. Las tres Geometrías son igualmente ciertas, solo puede preferirse la una á la otra por ser más cómoda, como dice el Sr. Poincaré.

Cuando los elementos fundamentales son imaginarios, resulta que: *La difereneia de medida de dos elementos no es una función uniforme, sino multiforme con una infinidad de determinaciones y un módulo de periodicidad,* que por tratarse de la función logarítmica, es $2c\pi i$. Y como el logaritmo se hace infinitamente grande cuando el valor de su argumento es 0 ó ∞, los elementos para los que, en la expresión $c \log \frac{z}{z'}$, se tiene $\frac{z}{z'} = 0$ ó $\frac{z}{z'} = \infty$, se hallan alejados infinitamente el uno del otro. Para esto es necesario y suficiente que uno de los dos elementos coincida con uno de los elementos fundamentales $z = 0$, $z = \infty$.

Supongamos dos puntos fundamentales reales O *y* O′. Si x é y

---

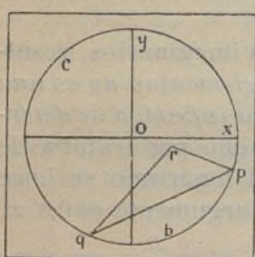
(*) Véase, F. Klein, *Sur le Géométrie dite non Euclidienne*, págs. 13-15.

son puntos reales de la recta en que se hallan O *y* O', formarán una relación anarmónica negativa ó positiva, segun que los segmentos xy y OO' se solapen ó no *(recouvrent en partie)*, de modo que: *La distancia de dos puntos* x, y *es una magnitud imaginaria ó real, segun que los segmentos* xy *y* OO' *se solapen ó no.*

El Sr. Klein en su memoria *Sur la Géométrie dite non Euclidienne* (*), se funda en la determinación métrica proyectiva de Cayley para dar una representación ó imagen de las tres Geometrías.

Desde luego observa que para la Geometría parabólica no es necesaria tal representación, porque coincide con la Geometría euclídea.

Respecto á las Geometrías elíptica é hiperbólica, se han dado, en el sentido de la determinación métrica euclídea representaciones; pero solo en lo concerniente á la parte planimétrica. Así, por ejemplo, Beltrami en su *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea*, hizo notar que la planimetría no Euclídea tiene su representación en las superficies de curvatura constante negativa. Con este objeto, considera dos sistemas coordenados de líneas geodésicas $u = const$, $v = const$, de modo que las geodésicas pertenecientes á cada uno de los dos sistemas sean respectivamente perpendiculares á las geodésicas $u = 0, v = 0$, y hace una representación de la superficie en el plano, comprendida en un círculo de radio a, por haber deducido que los valores admisibles de las variables u y v satisfacen á la relación



$$u^2 + v^2 \leqq a.$$

A dos cuerdas que se cortan dentro del círculo-límite corresponden dos geodésicas que se cortan en un punto á distancia finita según un ángulo comprendido entre 0° y 180°. A dos cuerdas que se cortan en la circunferencia del círculo-límite, corresponden dos geodésicas concurrentes hacia un punto situado á distancia infinita. Si pq es una cuerda del círculo y r un punto

(*) Traducida al francés por M. Laugel.

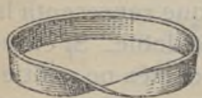
interior, á ella corresponde en la superficie pseudo-esférica una geodésica p' q' dirigida hacia los puntos del infinito p' y q', correspondientes á las p y q.

Establecida esta correspondencia, Beltrami demostró que no puede existir nada análogo á esta representación en el espacio.

La imagen la parte planimética de la Geometría elíptica, es la Geometría en la esfera, ó en las superficies de curvatura constante positiva, obteniendo el Sr. Klein (*) el siguiente resultado: *Si tomamos para la determinación métrica elíptica en el plano* $k' = \frac{i}{2}$, *ésta es semejante á la determinación métrica en la semiesfera.*

Pero sobre estas representaciones parciales el Sr. Klein, en diversos trabajos, establece para las tres Geometrías, tanto en el plano como en el espacio, representaciones que revelan sus caracteres propios y expresan su naturaleza íntima.

En la determinación métrica elíptica, la figura elemental es una cónica imaginaria *(nullteiliger)*, como fundamento de una determinación métrica proyectiva, esto es, la intersección del plano con el cono que pasa por el círculo imaginario del infinito, (**) siendo entonces la distancia entre dos puntos ó el ángulo de dos rectas del plano, iguales al ángulo segun el que se ve desde el punto elegido como vértice del cono, los dos puntos ó las dos rectas.



Considerando la *hoja de Moebius*, ó doble superficie formada por un rectángulo cuyos vértices opuestos A y D, B y C se unen constituyendo una superficie doble, el *plano elíptico* no queda dividido en dos partes por una línea cerrada trazada en él.

En la Geometría elíptica las espresiones de la diferencia de medida son

$$2\,c_1 \text{ arc cos } \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

(*) *F. Klein.* Nicht-Euklidische Geometrie I pág. 96.

(**) Y se igualarán c y c' á $\sqrt{-1} : 2$

$$2\, c_1 \text{ arc cos } \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

La longitud de la recta es igual á $2c_1\pi$.

La trigonometría plana fundada en esta determinación métrica, es análoga á la trigonometría esférica.

En la determinación métrica hiperbólica la cónica fundamental es real *(einteiliger)* (*).

Toda recta tiene dos puntos reales á distancia infinita.

La determinación métrica relativa á la Geometría parabólica (ordinaria) no emplea ninguna cónica como figura fundamental, constituye un caso límite, en que la cónica degenera en un par de puntos, *los puntos circulares en el infinito.*

Un par de puntos imaginarios, puede considerarse como una transición entre una cónica real y una cónica imaginaria, por lo cual, la Geometría parabólica, se ofrece como una transición entre la hiperbólica y la elíptica.

Una hipérbola cuyo eje imaginario permanece fijo, mientras que el eje real disminuye, tendiendo hacia cero, en este límite se reduce á una recta doble, el eje no transverso. Esta cónica sustituye á la sección cónica, mientras que se halle engendrada por puntos; pero si se considera como envolvente de rectas, degenera en dos puntos imaginarios conjugados, situados sobre la recta doble y cuya distancia es igual á la longitud del eje no transverso, que ha permanecido constante. Todas las tangentes se hacen imaginarias, excepto la recta doble, que representa la cónica, y debe considerarse como una tangente doble. Si enseguida el eje transverso se hace imaginario, la cónica no contiene ningun elemento real. Otras conexiones muy notables completan esta interesante exposición en la obra citada del señor Klein. Pero baste con lo expuesto, para formarse una idea general de la Pangeometría.

§ 2.º EXTENCIÓN DE LA DETERMINACIÓN MÉTRICA AL ESPACIO

18. NOCIONES SOBRE LOS GRUPOS.—Se sabe que las fórmulas

$$x_1 = x + a\,, \qquad y_1 = y + b\,,$$

(*) La expresión *n-teilig* indica una curva plana cerrada, que tiene *n* ramas *(Züge). Vorlesung. über d Theor d Automorf Funct.* (p. 5.)

expresan el grupo de dos paramétros de las translaciones en el plano, que comprende (∞^2 translaciones), así como las siguientes

$$x_1 = x \cos \alpha - y \text{ sen } \alpha , \qquad y_1 = x \text{ sen } \alpha + y \cos \alpha$$

el de las rotaciones en número ∞^1 alrededor de un punto.

Todos los movimientos (euclídeos) del espacio forman un grupo.

Las fórmulas de transformación en coordenadas rectangulares son

$$x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_0 , \quad y_1 = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_0 ,$$
$$z_1 = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_0 ,$$

con las condiciones

$$a_2^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0,$$

siendo el determinante

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = +1 .$$

Y puesto que contienen 12 parámetros que satisfacen á seis condiciones, constituyen un grupo de seis parámetros: el de los ∞^6 movimientos del espacio.

19. El grupo proyectivo general. — En la transformación proyectiva

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \qquad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \qquad (1)$$

entran nueve constantes, que se reducen á 8 dividiendo por c_3. Dichas fórmulas dan ∞^8 transformaciones proyectivas distintas.

Las ∞^8 transformaciones proyectivas del plano, forman un grupo contínuo. Podemos demostrar el siguiente:

Teorema. — *Toda transformación proyectiva del plano deja por lo menos un punto invariable,* pues suprimiendo los subíndices á x_1 é y_1, podemos escribir:

$$\rho x = a_1 x + b_1 y + c_1 , \qquad \rho y = a_2 x + b_2 y + c_2 ,$$
$$\rho = a_3 x + b_3 y + c_3 , \qquad (2)$$

$$(a_1 - \rho)\,x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + (b_2 - \rho) y + c_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + (c_3 - \rho) = 0$$

Llamando $\Lambda(\rho)$ al resultante correspondiente. Sea $\Delta(\rho) = 0$, que tiene por lo menos una raíz real. Sustituyéndola en (2), se reducen á dos ecuaciones:

$$\lambda x + \mu y + v = 0\,, \qquad \lambda' x + \mu' y + v' = 0\,.$$

Si el determinante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ no es nulo, las últimas ecuaciones representan dos rectas que se cortan; y si es nulo, dos rectas paralelas, lo que dá un punto fijo ó invariante á distancia finita ó infinita.

20. Cónica transformable en sí misma.—Existen ∞^8 transformaciones lineales en un plano; pero como solo existen ∞^5 cónicas, de modo que cada una de estas puede transformarse en sí misma por ∞^3 transformaciones.

Puesto que para cada transformación lineal del plano, los puntos de una cónica se combinan entre sí, resulta que para cada transformación de este género dos de los puntos de la cónica permanecen invariables, pues siendo o, p_1, p_2, p_3, ... puntos de la cónica y p'_1, p'_2, p'_3 ..... puntos que resultan de p_1, p_2, p_3, ... por una transformación lineal, los dos haces $o\,(p_1, p_2, p_3, ...)$ y $o\,(p'_1, p'_2, p'_3, ...)$ son proyectivos; y por consiguiente tienen dos rayos comunes $o\pi_1$, $o\pi_2$; luego los puntos π_1 y π_2 permanecen invariables en la transformación.

Pero si dos puntos de la cónica fundamental permacen invariables, lo mismo sucede con la recta que los une, las tangentes en estos puntos y su intersección, y por consiguiente con el triángulo formado. Tomando éste como triángulo de referencia, la ecuacion de la cónica es:

$$x_1\, x_2 - x_3^2 = 0\,.$$

La transformación lineal por la que la cónica se transforma en sí, debe ser de la forma

$$x_1 = \alpha_1\, y_1\,, \qquad x_1 = \alpha_2\, y_2\,, \qquad x_3 = \alpha_3\, y_3$$

La condición para que la cónica permanezca invariable, será:

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 = 0\,,$$

y como es una sola condición entre tres variables homogéneas, queda una infinidad simple de transformaciones que dejan invariables al triángulo y á la cónica.

Por estas transformaciones permanece invariable el cociente $\frac{x_1 x_2}{x_3^2}$, cualquiera que sea su valor; luego todas las cónicas de la forma

$$x_1 x_2 - k x_3^2 = 0 ,$$

se transforman en sí por dichas transformaciones.

Podemos decir, pués que: *En un movimiento (déplacement) del plano, no solo se transforma en sí la cónica fundamental, sino que esto sucede á cada cónica* (*cada círculo*) *que le es tangente en los dos puntos fijos.* Entre estas cónicas se halla el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, centro común de estos círculos. Diremos pues que el movimiento es *una rotación alrededor de este* centro (*).

21. Los movimientos en el espacio. — Los movimientos *(déplacement)* en número séxtuplamente infinito del espacio, corresponden á otras tantas transformaciones lineales, los cuales dejan invariable la superficie de los puntos del infinito. Pero como solamente las superficies de segundo grado pueden transformarse en sí por una infinidad séxtupla de transformaciones lineales, los puntos en el infinito forman una superficie de segundo grado, y los movimientos del espacio, se hallan comprendidos en el ciclo de las transformaciones lineales séxtuplemente infinito que dejan invariable una superficie de segundo grado.

22. Extensión al espacio de la interpretación geométrica.—El Sr. Klein ha extendido al espacio las interpretaciones de las tres geometrías. Entendiendo por esfera una superficie de segundo grado tangente á la superficie, segun una curva plana, siendo el centro de aquélla el polo del plano, en vez de los movimientos séxtuplemente infinitos que dejan invariable la determinación métrica ordinaria, considera un ciclo de otras tantas transformaciones lineales, pues la superficie fundamental, como toda superficie de segundo grado, en general, se transforma en sí misma después de un número séxtuplemente

(*) Klein. *Sur la Géométrie, dite non Euclidienne.* (pág. 36).

infinito de transformaciones lineales, que se dividen en dos clases, séxtuplamente infinitas, segun que se cambian ó no entre sí los dos sistemas de generatrices rectilíneas.

Cuando la superficie fundamental se cambia en una *cónica imaginaria*, se obtiene una Geometría de la misma naturaleza que la Geometría *parabólica* ordinaria. Si, particularmente esta cónica es el círculo imaginario del infinito, se obtiene precisamente la Geometría métrica ordinaria.

Pero la determinación métrica proyectiva general da tambien, para una superficie convenientemente elegida, una Geometría métrica que representa los conceptos de la Geometría elíptica y otra que representa los de la hiperbólica

Se obtiene una Geometría métrica correspondiente á la Geometría *elíptica* tomando una superficie fundamental *imaginaria*. Entonces ninguna recta tiene puntos en el infinito, de manera que la recta es como una curva cerrada de longitud finita. Le corresponden las fórmulas de la Trigonometría ordinaria, en la que el radio de la esfera está representado por la constante $\dfrac{c}{\sqrt{-1}}$.

Se obtiene una Geometría correspondiente á la Geometría *hiperbólica*, tomando una superficie fundamental real, no reglada. (*)

23. TEORÍA DE LIE.—Después de tratar, ya del espacio ordinario, ya del de *n* dimensiones en su relación con los grupos de transformaciones, especialmente del de seis parámetros de todos los movimientos euclídeos, de todas las transformaciones las transformaciones proyectivas que dejan invariante la cónica del infinito y de obtener los grupos proyectivos que dejan invariantes en el espacio ordinario, ya una superficie, ya una curva ó un punto, da Lie dos soluciones al problema de Rieman-Helmholtz relativo al espacio, que formula en los siguientes términos: *Pueden obtenerse propiedades tales, que pertenezcan tanto á los movimientos euclídeos como á los no-Euclídeos, y por las que se distinguen estas tres series de todas las demás series de movimientos posibles en una variedad numérica.*

(*) *Sur la Géom , dite non Euclidienne.* (Bulletin des sciences-math.), p. 347,48.

Basándose en el estudio de los espacios de curvatura constante, en los que puede moverse una figura sin alterar sus longitudes; y considerando estos movimientos, que para el espacio de tres dimensiones dependen de seis parámetros, llegó Lie á resolver dicho problema, introduciendo el nuevo concepto de libre movilidad infinitesimal *(im infinitesimalen, Der freien Beweglickeit), que se refiere á puntos infinitamente próximos;* de modo que *un grupo real finito del espacio de tres dimensiones tiene libre movilidad infinitesimal en un punto real* P, *cuando permaneciendo fijo dicho punto y un elemento lineal cualquiera trazado por él, aun es posible un movimiento continuo; y si por el contrario, se fija además de* P *y de aquel elemento lineal un elemento superficial cualquiera que pase por ellos, no es posible ningun movimiento continuo.*

Y cuando un grupo real continuo de tres dimensiones tiene en un punto real libre movilidad infinitesimal, es de seis parámetros y transitivo, siendo por una transformación puntual y real semejante, ya al grupo de movimientos euclídeos de este espacio, ya con ambos grupos de movimientos no-Euclídeos (de Riemann y de Lobatschewsky) de este espacio, ya con el grupo real continuo de seis parámetros, que deja invariable la superficie imaginaria $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$, *ó con el grupo continuo real proyectivo de la superficie no reglada* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

Si un punto real y_1^0, y_2^0, y_3^0, en posición general, se halla fijo, entonces todos los puntos x_1, x_2, x_3, con los que puede coincidir un punto x_1^0, x_2^0, x_3^0, satisfacen á una ecuación de la forma

$$W\,(y_1^0, y_2^0, y_3^0\ ;\ x_1^0, x_2^0, x_3^0\ ;\ x_1, x_2, x_3) = 0\,,$$

que no queda satisfecha por $x_1, = y_1^0$, $x_2 = y_2^0$, $x_3 = y_3^0$ y que representa una superficie real que pasa por el punto x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Además, alrededor del punto y_1^0, y_2^0, y_3^0 puede obtenerse una región de tres dimensiones tal, que al fijarse el punto $y_1^0\ y_2^0\ y_3^0$, otro punto cualquiera x_1^0, x_2^0, x_3^0 de dicha región puede, por mutación continua, coincidir con cualquier otro punto de la misma que satisfaga á dicha ecuación $W = 0$, y que se halle unido al primero por una serie continua de puntos; y á estas condiciones satisfacen el espacio ordinario ó Euclídeo y los dos espacios no-Euclídeos, ó sea los espacios en los que el grupo de los movimientos posibles es el grupo que transforma en sí misma una de las dos superficies: $x^2 + y^2 + z^2 \pm 1 = 0$.

Lie, pues, desarrolla el pensamiento de Helmholtz, determinando una función invariante que corresponde á ese *algo* que se llama la distancia de dos puntos, que subsiste durante su mutación en el espacio, y establece las propiedades exclusivas á los movimientos Euclídeos y no-Euclídeos, que los distingue de los demás movimientos. (*)

24. DEFINICIÓN DE LA DISTANCIA. — Helmholtz definió la distancia diciendo que: *Entre las coordenadas de los puntos que pertenecen á un cuerpo, tomados dos á dos, debe existir una ecuación correspondiente á la relación invariable que subsiste entre los dos puntos durante el movimiento del cuerpo, y que es la misma para todos los pares de puntos congruentes.* (**)

Los pares de puntos congruentes son los que pueden coincidir con el mismo par de puntos fijos del espacio.

Además, cinco puntos, A, B, C, D, E, dan diez pares distintos AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

Supongamos diez ecuaciones que, en el espacio de tres dimensiones, contengan quince coordenadas variables, de las que seis deban permanecer arbitrarias, si el sistema de los cinco puntos se ha de mover alrededor de un eje ó paralelamente á este eje. No se pueden determinar mediante estas diez ecuaciones mas que nueve coordenadas para las seis variables.

§ 3.º GEOMETRÍA DE n DIMENSIONES

25. GEOMETRÍA DE n DIMENSIONES. — El límite de una parte del espacio de n dimensiones (un cuerpo de n dimensiones) es una figura de $n-1$ dimensiones. Esta es divisible y su límite es una figura de $n-2$ dimensiones. La n sima figura es indivisible.

Postulado. — Por todo punto pasan figuras de $n-1$ dimensiones (*Planos*), que tienen las siguientes propiedades:

1. Por todo punto del plano de $n-1$ dimensiones, pasan fi-

(*) *Theorie der Transformationsgruppen.* Dritt. Absch., pags. 472, 479, 481, 507

(**) *Populare Wissenschaftliche.* Drittes Heft., p. 40.

guras de $(n-2)$ dimensiones, planos de $(n-2)$ dimensiones por cuya reposo aún es posible el movimiento del espacio.

2. Por este movimiento se puede alcanzar una posición por la que llegue el plano $(n-1)$ dimensional á coincidir en conjunto con su posición primitiva; pero invirtiéndose la posición de sus puntos.

3. En cada plano de $(n-2)$ dimensiones existe una figura de $(n-3)$ dimensiones tal, que permaneciendo fija, sea aún posible el movimiento del plano de $(n-1)$ dimensiones, describiendo cada punto una línea cerrada.

4. Las mismas hipótesis podemos hacer respecto á figuras de un número menor de dimensiones. En cada plano de ν dimensiones hay planos de $(n-1)$ y de $(n-2)$ dimensiones tales, que permaneciendo fijo el plano de $(n-2)$ dimensiones, aún sea posible el movimiento del de ν dimensiones, y cada plano de $(n-1)$ dimensiones de la figura móvil *(ruhende)* coincide con su posición primitiva, de manera que la posición de los puntos queda invertida.

a) Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, coincide con él.

b) Si un plano de ν dimensiones tiene comun con un plano de μ dimensiones $(\mu > \nu)$ un plano de $(\nu - 1)$ dimensiones, y además un punto, se halla contenido en él. (Si un P_ν tiene un $P_{\nu-1}$ y un punto comun con un P_μ se hallará contenido en P_μ).

c) Por un plano de ν dimensiones y un punto exterior al mismo, se puede trazar un plano de $(\nu+1)$ dimensiones.

d) Dadas $\varkappa$ rectas que se encuentran en un punto, puede trazarse por dos de ellas un plano de dos dimensiones. Si no se hallan tres de las rectas dadas en este plano, se puede trazar por las tres un plano de tres dimensiones; y si las $\varkappa$ rectas no se hallan en un plano de $(\varkappa-1)$ dimensiones, por ellas pasa un solo plano de $\varkappa$ dimensiones.

e) Si en un plano de $(\nu+1)$ dimensiones, uno de ν y otro de 2 dimensiones tienen un punto comun, se cortan segun un recta.

f) Si se hallan dos planos P_λ y P_μ en un P_ν, siendo $\lambda + \mu > \nu$, y tienen los dos primeros un punto comun, se cortan en un $P_{\lambda+\mu-\nu}$.

g) Si una recta es perpendicular á $\varkappa$ rectas por las que no pasa ningun plano de $(\varkappa - 1)$ dimensiones, será perpendicular á todas las rectas que pasen por el pie de ésta y se hallen contenidas en el plano P_χ determinado por los $\varkappa$ primeras rectas.

El teorema es cierto para $\varkappa = 2$. Supongamos que sea tambien cierto para λ rectas y el plano P_λ.

Tracemos por P_λ y otra de las rectas dadas un plano $P_{\lambda+1}$; y sea h una recta cualquiera trazada en el mismo por el pie de la perpendicular. Tracemos por h y $R_{\lambda+1}$ un plano de dos dimensiones que cortará á P_λ en una recta R'. Puesto que la recta dada es perpendicular á $R_{\lambda+1}$ y á R', será perpendicular á las que se hallan con las mismas en un plano P_2, como es la h.

h) Si $\varkappa$ rectas $R_1, \ldots\ldots, R_\chi$ son perpendiculares en un punto A á λ rectas $H_1, \ldots\ldots, H_\lambda$, determinando las primeras un plano P_χ de $\varkappa$ dimensiones y las segundas un plano P_λ de λ dimensiones, cada una de las rectas R del primer plano será perpendicular á cada una de las rectas H.

i) En un plano de ν dimensiones P_ν solo existe una recta perpendicular en uno de sus puntos á un plano $P_{\nu-1}$ de $\nu - 1$ dimensiones contenido y que sea perpendicular á éste. (*)

Basta con los enunciados expuestos para tener una idea de las proposiciones fundamentales de la Geometría de n dimensiones.

25. GEOMETRÍA DE CUATRO DIMENSIONES. — AXIOMA I. — *Un espacio corta á una variedad ó multiplicidad de cuatro dimensiones en dos partes separadas.*

AXIOMA II.—*Por cuatro puntos de un* E_4 (espacio de 4 dimensiones) *que no se hallan en un mismo plano, solo puede pasar un espacio.*

AXIOMA III.—*Un plano que tiene con un espacio 3 puntos comunes, que no se hallan en línea recta, se halla contenido en éste.*

AXIOMA IV.—*Una recta que solo tiene un punto comun con espacio, queda dividida por éste en dos partes separadas.* Si tiene 2 puntos comunes, se halla totalmente en él. Tenemos como consecuencia: Un plano π que solo tiene una recta r común con un E_3, quedará dividido por éste en dos partes se-

(*) W. *Killing* Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.

paradas. Pues una segunda recta r' trazada en π, encuentra á r en un punto P. (Dos rectas de un plano tienen siempre un punto común); r' quedará dividida por P en dos partes separadas. (Axioma IV). Dos puntos cualesquiera de ambas partes se hallan pues, á distinto lado de E_3, que son puntos de π; luego π se halla dividido por E_3 en dos partes separadas.

Teorema I.—*Dos espacios tienen siempre un plano comun* (*) (se cortan siempre en un plano). En efecto, sean E_3 y E'_3 los dos espacios. Supongamos que tienen solo el punto A comun, esto es, que A se halle en E_3 y E'_3. Tracemos por A, en E_3, dos rectas r y r', que se hallan divididas por E'_3 en dos partes separadas (segun el axioma IV), r en r_1 y r_2, r' en r'_1 y r'_2. Sean r_1 y r'_1 las que se hallan al mismo lado de E'_3. Uniendo un punto de r_1 con un punto de r'_2 por una recta, ésta se hallará contenida totalmente en E_3 puesto que r y r' se hallan en E_3; luego tambien se hallará en E_3, el plano determinado por r_1 y r'_2 que contiene la recta. Esta recta pasa por E'_3, puesto que une dos puntos á distintos lados del mismo, tendrá pues, un segundo punto B comun con E_3 y E'_3. La recta AB se halla en los dos espacios (axioma IV). Falta demostrar que si dos espacios tienen comun una recta, tendrán tambien un plano comun. Para ello, tracemos por la recta AB dos planos en E_3, que se hallan totalmente contenidos en él, y que segun el corolario del axioma IV, quedan divididos en dos partes por E'_3.

Unamos un punto de uno de los planos con otro de la parte del segundo plano separada por E'_3 mediante una recta, que se hallará totalmente contenida en E_3 y pasa por E'_3. Esta dará un tercer punto comun con E_3 y E'_3.

Teorema II.—*Un espacio y un plano tienen siempre una recta comun*. En efecto, supongamos que el plano π se halle en E_3. Puesto que E_3 y E'_3 tienen comun un plano π', la intersección r de dichos planos se hallará en π y en E'_3.

Teorema III.—*Un espacio y una recta* (que no se halla totalmente contenida en él) *tienen siempre un punto comun*, pues si r se halla en E_3, y los espacios E_3 y E'_3 tienen comun el plano π, el punto de intersección de r y π será comun á los dos espacios; y será el único punto comun á r y E'_3.

(*) Dos planos se cortan siempre en una recta (propia ó impropia).

TEOREMA IV.—*Dos planos de espacios distintos tienen siempre un punto comun,* pues si el plano π se halla en E_3 y el plano π' en E'_3, como ambos espacios tienen un plano π'' comun, las rectas intersecciones de π con π'' y de π' con π'' se cortan en un punto comun, que es el punto comun de los dos espacios.

TEOREMA V.—*Un plano y una recta, que no se hallan en un mismo espacio, no tienen nada comun,* pues si el plano π se halla en E_3 y la recta r en E'_3, r corta al plano comun π' de los espacios E_3 y E'_3 en un punto. A su vez π corta π' en una recta r', puesto que las dos se hallan en E_3. Y puesto que r se halla dividida por π' en dos partes, no encuentra á r', porque solo tiene con π' un punto comun exterior á r'.

TEOREMA VI.—*Dos rectas de E_4 un espacio de cuatro dimensiones no tienen, en general, nada comun.*

Sean P y P′ dos planos en dos espacios distintos, que segun el teorema IV solo tienen un punto comun A. Tracemos en cada plano una recta que no pase por A. (r en π y r' en π') Estas rectas no tienen nada comun. Diremos que estas rectas *se cruzan.*

TEOREMA VII.—*Por dos rectas de espacios distintos que se cruzan puede pasar siempre un espacio.*

En efecto, las dos rectas r y r' que se cruzan, pueden hallarse respectivamente en E_3 y E'_3. Hay que determinar un espacio E''_3 por medio de r y de r'.

El plano π comun á E_3 y E'_3 quedará cortado por r y r' respectivamente en los puntos p y p', puesto que el plano y cada una de las rectas se hallan en un mismo espacio. Tracemos ahora por r' y p un plano π' en el espacio E'_3, que tendrá con r tan solo el punto p comun. Pero, un espacio E''_3 queda determinado por un plano una recta que lo corta. En este espacio E''_3 se hallan, por consiguiente, r y el plano π' y con éstos la recta r', es decir, que el espacio E''_3 es el que se trataba de hallar.

Tracemos ahora en E_3 por r y p' un plano π'' que tendrá con r' tan solo el punto p' comun; luego queda determinado por π'' y r' un espacio E'''_3 en el que se hallan las rectas r y r'. Este espacio es idéntico con E''_3, porque tienen cuatro puntos comunes, es decir, que por dos rectas que se cruzan solo queda determinado un espacio.

Corolarios.—Un espacio queda pues determinado por 4 puntos que no se hallan en un plano, por un plano y un punto exterior al mismo, por un plano y una recta que lo corta, por dos planos que se cortan, por una recta y dos puntos exteriores (los dos puntos no se hallan en el plano de la recta y de uno de los puntos).

Teorema VIII.—*Tres espacios se cortan, cada dos, en un plano y cada tres de estos planos pasan por una recta.*

En efecto, un plano π y una recta r de dos espacios distintos no tienen en general nada comun (teorema v), π y r determinan un tercer espacio E''_3 que corta á E_3 en π y á E'_3 en un plano π'', que contiene á la recta r; π y π'' se hallan en el mismo espacio E''_3 y tienen por consiguiente una intersección r''. Esta intersección r'' se halla pues en los tres espacios; se halla en el plano de intersección de los espacios E_3 y E'_3 y contiene el punto p.

Teorema IX. — *Cuatro espacios tienen siempre un punto comun.*

Sean los espacios E, E', E'', E'''. Los espacios E y E' tienen un plano π comun (teorema I). π y E'' tienen una recta r comun (teor. II). r y E''' tienen un punto p comun.

Observaciones. — Dos rectas que se hallan en un plano sin cortarse, se llaman paralelas. Se dice que las rectas tienen una *dirección* comun.

Se dice que dos planos son paralelos, cuando tienen dos direcciones comunes. Tienen todas las direcciones comunes. Se dice en este caso que tienen una *orientación (Stellung)* comun. Una orientación se halla determinada por dos direcciones.

Dos planos paralelos tienen un elemento impropio en el infinito, una recta.

Dos espacios E_3 y E'_3 coinciden en una orientación, que es un plano comun. Si dos planos de dos espacios son paralelos á la intersección de éstos, se dice que los espacios son paralelos.

Teorema X.—*Si dos espacios coinciden en tres direcciones que no pertenecen á la misma orientación, coinciden en todas direcciones.*

Teorema XI.—*Una recta perpendicular á tres rectas de un espacio en un punto* (que no pertenecen á una misma orientación) *es perpendicular á todas las rectas que pasan por el mismo punto en dicho espacio.*

Sean r_1, r_2, r_3 tres rectas que pasan por el punto A del espacio E_3, á las que es perpendicular la recta r, y r_4 otra cualquiera recta que pasa por A en E_3.

Puesto que r, r_2 y r_3 determinan un espacio E'_3 (cuyo plano de intersección con E_3 es $[r_2\, r_3]$). En este espacio r es perpendicular al plano $[r_2\, r_3]$, porque es perpendicular á r_2 y r_3. El plano $[r_2\, r_3]$ corta al plano $[r_1\, r_4]$ en una recta r_5. Y puesto que r es perpendicular al plano $[r_2\, r_3]$, será perpendicular á las rectas r_5 y r_1 del plano $[r_1\, r_4]$; luego será perpendicular á todas las rectas de este plano y por consiguiente á r_4.

COROLARIO.—*Todo plano exterior á un espacio que es perpendicular á dos planos de este espacio que se cortan, es perpendicular á todos los planos del espacio.*

TEOREMA XII.—*Dos espacios que son perpendiculares á la misma recta son paralelos.* (*)

POLIEDROS REGULARES. (DIE REGULAREN POLYTOPE).—Pueden considerarse, en el espacio de cuatro dimensiones, en correspondencia con los cinco poliedros regulares del de tres, seis figuras regulares limitadas por tetraedros, exaedros, octaedros y dodecaedros, de tal manera, que en cada vértice concurren igual número de aristas, caras y cuerpos. Estas figuras son:

1.ª La de cinco células *(Fünfzell)* limitada por 5 tetraedros. —2.ª La de 8 *(Achtzell)*, limitada por 8 exaedros.—3.ª La de 16 *(Sechzehnzell)*, limitada por 16 tetraedros.—4.ª La de 24, limitada por 24 octaedros. — 5.ª La de 120 *(Einhundertwanzigzell)*, limitada por 120 dodecaedros.—6.ª La de 600 *(Sechshundertzell)* limitada por 600 tetraedros. Estos cuerpos que han de considerarse como *en proyección* en el espacio de tres dimensiones, dan la solución del problema de Estereometría: *Descomponer un tetraedro, exaedro, octaedro* ó dodecaedro en cuerpos de igual clase, de manera que en cada vértice concurran igual número de aristas, caras y cuerpos, y en cada arista igual número de caras y cuerpos. (**)

(*) Véase, Max Brückner *Die Elemente der vierdimensionale Geometrie*, donde además se hacen indicaciones de la Geometría analítica y de los poliedros *(Politope)*.

(**) *Schlegel.* Theorie der homogenen zusammengesetzten Raumgebilde.

LIBRO PRIMERO

GEOMETRÍA DIFERENCIAL PLANA

CAPÍTULO I

Cuestiones que dependen de infinitamente pequeños de primer orden

§ 1.º TANGENTES Y NORMALES

1. Coeficiente angular. — Dados dos puntos M y M′ cuyas coordenadas son x, y, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, se sabe que

$$\lim \operatorname{tang} M'Mx = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

puesto que el límite de la posición de la secante es la tangente. La ecuación de la tangente á la curva $y = f(x)$ es pues

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x). \qquad (1)$$

En el caso de darse la ecuación de la curva bajo la forma implícita $F(x, y) = 0$, se tiene que

$$Y - y = -\frac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{df}{dy}}(X - x) \text{ ó } (Y - y)\frac{df}{dy} + (X - x)\frac{df}{dx} = 0 \quad (2)$$

Si se hace homogénea la ecuación $f(x, y) = 0$ introduciendo la variable z, que se hara igual á 1, después de las diferenciaciones, se tendrá, según el teorema de Euler,

$$m f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (3)$$

La ecuación (2) puede escribirse

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

y por ser $f(x,y) = 0$ pasa un punto de la curva, la ecuación (3) se reduce á

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

luego la ecuación (4) se reduce observando que $Z = z = 1$, á

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

2. Condicion de contacto.—Sean

$$f(x,y) = 0 \quad (1) \qquad ax + by + cz = 0 \qquad (2)$$

las ecuaciones de una curva y de una recta, ésta escrita en forma homogénea.

Para expresar que son tangentes, se identificará la ecuación (2) con la de una tangente

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

Identificando esta ecuación con la (2) resulta

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{a} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{b} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{c} \qquad \text{ó} \qquad \frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b} = \frac{f_3}{c} \qquad (3)$$

para abreviar la escritura.

Siendo tangentes la recta y la curva, x, y, z han de satisfacer simultáneamente á la ecuación (3) y á la (1) y (2). Para eliminar x, y, z se puede sustituir el sistema (3) por el siguiente:

$$f_1 + a\rho = 0, \qquad f_2 + b\rho = 0, \qquad f_3 + c\rho = 0 \qquad (4)$$

Es preciso eliminar ahora x, y, z, ρ entre (4) y (2), lo que se reduce á eliminar estas cantidades entre las ecuaciones obtenidas igualando á cero las ecuaciones que resultan igualando á cero las derivadas de

$$f(x, y, z) + \rho(ax + by + cz) = 0$$

respecto á x, y, z y ρ.

EJEMPLO.—Hallar la condición de contacto de la recta

$$ax + by + c = 0$$

con la cónica

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0 .$$

Sumando al primer miembro $\rho(ax + by + cz)$, é igualando á cero las derivadas, el resultante del sistema obtenido será

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & a \\ B'' & A' & B & b \\ B' & B & A'' & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} = 0$$

3. GRADO DE LA ECUACIÓN DE LA TANGENTE.— Escribiendo la ecuación de la tangente bajo la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y$$

Parece que el segundo miembro es del grado m; pero vamos á ver que se rebaja dicho grado en una unidad. En efecto, sea

$$f(x, y) = u + u_1 + u_2 + \ldots\ldots ,$$

siendo u el conjunto de términos de grado m, u_1 el de los términos de grado $m - 1$, etc. Tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \ldots\ldots \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \ldots\ldots$$

Por consiguiente

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \left(x \frac{\partial u_1}{\partial x} + y \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \ldots\ldots ,$$

y aplicando el teorema de las funciones homogéneas,

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y=mu+(m-1)u_1+(m-2)u_2+\ldots..$$

$$=m(u+u_1+u_2+\ldots..)-u_1-2u_2-3u_3-\ldots..$$

Hallándose el punto (x, y) en la curva, se tiene

$$m(u+u_1+u_2+\ldots..)=0\,;$$

luego la ecuación de la tangente se reduce á

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{X}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{Y}+u_1+2u_2+3u_3+\ldots..=0\,,$$

ecuación que no contiene términos del grado m.

PROBLEMA *trazar á una curva* f(x, y) = 0 *una tangente por un punto exterior* (a, b).

La ecuación de la tangente en la que se sustituye X é Y por a y b, es

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\,.$$

Los valores de x é y obtenidos de las ecuaciones de la curva y de la tangente, determinan las coordenadas de los puntos de contacto, siendo los grados de dichas ecuaciones m y $m-1$ respectivamente, habrá m (m — 1) soluciones.

PROBLEMA. — *Trazar una tangente paralela á una recta* Y = a X.

Será $\dfrac{dy}{dx}=a\,,\qquad$ ó $\qquad\dfrac{\partial f}{\partial x}+a\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

Esta ecuación con la de la curva dará los puntos de contacto.

NORMAL.—Siendo la ecuación de la tangente

$$(\mathrm{X}-x)\,dy-(\mathrm{Y}-y)\,dx=0\,,$$

$$\text{ó}\quad (\mathrm{X}-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(\mathrm{Y}-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

la de la normal será en coordenadas rectangulares,

$$(\mathrm{X}-x)\,dx+(\mathrm{Y}-y)\,dy=0\quad\text{ó}\quad\frac{\mathrm{X}-x}{f_1}=\frac{\mathrm{Y}-y}{f_2}\,.$$

Para trazar por un punto (x_0, y_0) una normal á una curva $f(x, y) = 0$, se resolverá el sistema de ecuaciones

$$\frac{x_0 - x}{f_1} = \frac{y_0 - y}{f_2} \qquad f(x, y) = 0$$

que da en general m^2 soluciones.

5. Sub-tangente, sub-normal, etc. Sea la sub-tangente PT ó S_t. Tenemos

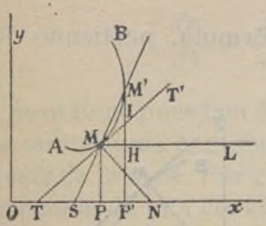


Figura 1.ª

$$PA = MP.\, tg\, TMP = y\frac{dx}{dy}; \quad S_t = y\frac{dx}{dy}$$

Sea la sub-normal PN ó S_n. Tenemos que

$$PN = PM.\, tg\, PMN, \quad ó \quad S_n = y\frac{dy}{dx}.$$

$$\text{La tangente } MT = T = \sqrt{y^2 + S_t^2} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{La normal } MN = N = \sqrt{y^2 + S_t^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$$

6. Tangentes en coordenadas polares.—Sea O el polo, OL el eje polar, AMM′ una curva representada por la ecuación $f(r, \theta) = 0$.

Para obtener la tangente en el punto M á dicha curva, hay que determinar el ángulo $TMO = \mu$ de ésta con el radio vector en M.

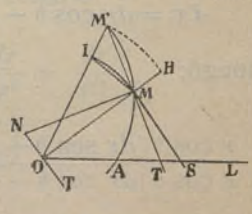


Fig. 2.ª

Sean r y θ las coordenadas del punto M, $r + \Delta r$, y $\theta + \Delta\theta$ las coordenadas del punto M′; y tracemos desde el punto O como centro, el arco MI. En el triángulo M′MI tendremos:

$$\frac{\text{sen } IM'M}{\text{sen } M'MI} = \frac{MI}{MI'} = \frac{MI}{\text{arc } MI}\,\frac{\text{arc } MI}{M'I} = \frac{MI}{\text{arc } MI}\,\frac{r\Delta\theta}{\Delta r}.$$

Si el punto M′ se aproxima indefinidamente al punto M, el ángulo IM'M se reduce al OMT ó μ y el ángulo M'MI á $90^\circ - \mu$. Por consiguiente

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\theta}{dr}$$

Hallando las expresiones del seno y coseno, tenemos

$$\cos \mu = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}, \qquad \operatorname{sen} \mu = \frac{r d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}$$

Tambien podemos llegar á la misma fórmula, partiendo de que

$$\operatorname{tg} \text{OMT} = \operatorname{tg} (\text{MT}x - \text{MO}x).$$

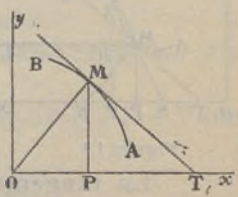


Fig. 3.ª

Pero

$$\operatorname{tg.} \text{MT}x = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg.} \text{MO}x = \frac{y}{x};$$

luego

$$\operatorname{tg} \text{OMT} = \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx}} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}$$

Ademas, $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$

$$dx = dr \cos \theta - r d\theta \operatorname{sen} \theta, \quad dy = dr \operatorname{sen} \theta + r d\theta \cos \theta,$$

luego:

$$\operatorname{tg} \text{OMT} = \frac{r \cos \theta\,(dr \operatorname{sen} \theta + rd\theta \cos \theta) - r \operatorname{sen} \theta\,(dr \cos \theta - rd\theta \operatorname{sen} \theta)}{r \cos \theta\,(dr \cos \theta - rd \operatorname{sen} \theta) + r \operatorname{sen} \theta\,(dr \operatorname{sen} \theta + rd\theta \cos \theta)}$$

y, reduciendo,

$$\operatorname{tg} \text{OMT} = \frac{r^2 d\theta}{r dr} = r \frac{d\theta}{dr}$$

Para la sub-tangente y sub-normal, etc., se tiene

$$S_t = OT = r \operatorname{tg} \mu = r^2 \frac{d\theta}{dr}, \qquad S_n = ON = \frac{r}{\operatorname{tg} \mu} = \frac{dr}{d\theta},$$

$$N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \qquad T = \sqrt{r^2 + r^4 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

7. APLICACIONES.—1.ª Todas las curvas que tienen la misma sub-normal, para el mismo ángulo polar, tienen igual $\frac{dr}{d\theta}$; de modo que,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr'}{d\theta} \quad \text{ó} \quad r = r' + \text{const.}$$

Se obtiene pues una de ellas, prolongando los radios vectores de la otra en una cantidad constante. Una de las curvas es la *concoide* de la otra. Por consiguiente, para trazar la normal á la concoide de una curva, basta trazar la normal á la curva y construir la sub-normal. Se obtendrá así la sub-normal de la concoide y, por consiguiente, su normal.

2.ª Si en una curva es constante la sub-normal, se tendrá

$$\frac{dr}{d\theta} = k, \qquad r = k\theta + \text{const.}$$

La curva es la *espiral de Arquímedes* ó de *Conon*.

Las concoides de estas espirales son también espirales iguales.

3.ª Sean r y r' los radios de dos curvas que, para un mismo ángulo θ tienen la misma sub-tangente. Se tendrá

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = r'^2 \frac{d\theta}{dr'} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dr}{r^2} = \frac{dr'}{r'^2}$$

$$\text{y} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \text{const.}$$

4.ª Si se trata de hallar las curvas que tienen la sub-tangente constante, se tendrá

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = k, \qquad \frac{1}{r} = k\theta + \text{const.}$$

Estas curvas se llaman *espirales hiperbólicas*, y se reducen á la $r\theta = \text{const}$, por un cambio de eje polar.

8. Podar de una curva.—Si desde un punto O se bajan las perpendiculares á todas las tangentes á una curva, el lugar de los pies de las perpendiculares es la podar de O con respecto á la curva dada. Sea

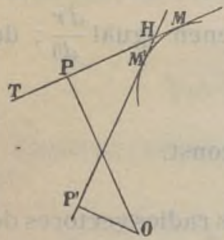


Fig. 4.

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha) \qquad (1)$$

la ecuación de una tangente á la curva en el punto (α, β).

La ecuación de la perpendicular á la tangente trazada por el origen es

$$y = -\frac{d\alpha}{d\beta}x \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) determinan el punto P. Eliminando $\frac{d\alpha}{d\beta}$, se obtiene la ecuación de la podar

$$y(y - \beta) = -x(x - \alpha) \qquad \text{ó} \qquad x^2 + y^2 - \beta y - \alpha x = 0,$$

ecuación de la circunferencia que pasa por O, P, M, cuyo centro está en el punto medio de OM.

La ecuación de la tangente es

$$Y - y = -\frac{2x - \alpha}{2y - \beta}(X - x)$$

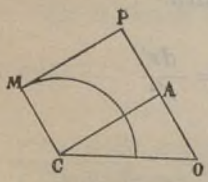


Fig. 5.ª

Ejemplos.—1.º *Podar del círculo.* La podar del círculo es una concoide de círculo, pues trazando la paralela CA á la tangente MP, AP es constante é igual al radio del círculo dado, y el lugar del punto P es la podar de este círculo y la concoide del círculo descrito sobre CO como diámetro.

Cuando el punto O está en la circunferencia C, la podar se llama *cardióide*.

Siendo $r = a \cos \theta$, la ecuación polar del círculo descrito sobre CO $= a$ como diámetro, la de la concoide será

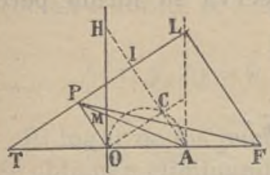


Fig. 6.ª

$$r = a \cos \theta + \text{const.}$$

2.º La podar de una parábola, siendo el pie de la directriz sobre el eje Ox el polo, es una estrofoide.

En efecto, sean F el foco, A el vértice, O el pie de la directriz, PT una tangente, P el pie de la perpendicular trazada desde O á la tangente.

Si desde el foco F se baja la perpendicular FL á la tangente, L se hallará en la tangente AL en el vértice; porque la podar de la parábola con respecto al foco es la tangente en el vértice.

Sean M la intersección de AP con la directriz, I el medio de PL. Los ángulos FLA, LAI. Además IAP, APO son iguales, y MOP=IAL; luego, IAL = MPO y MO = MP.

Esto sentado, podemos engendrar la estrofoide, dados un punto A y una recta fijos OH, trazando el radio vector AMP y tomando MP = MO. El lugar del punto P es la estrofoide.

§ 2.º Transformaciones por radios vectores recíprocos.

9. Definición.—Se dice que dos figuras son *transformadas recíprocas, la una de la otra ó por radios vectores recíprocos,* cuando para un mismo valor del ángulo polar, el producto de sus radios vectores permanece constante. Así

$$r = f(\theta)\,, \qquad r' = \frac{k^2}{f(\theta)}$$

son las ecuaciones polares de dos curvas transformadas, la una de la otra, por radios vectores recíprocos; y se tiene $rr' = k^2$, siendo k^2 el *módulo de la transformación.*

Teorema.—*La transformada de una recta es un círculo, y la transformada de un círculo es otro círculo, que puede reducirse á una recta, cuando el polo está en la circunferencia.*

En efecto, la ecuación del círculo es

$$r^2 + r\,(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta) + c = 0\,;$$

y cambiando r en $\frac{k^2}{r}$, esta ecuación conserva su forma; pero si $c=0$, toma la forma

$$r = -\frac{k^2}{a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta},$$

ecuación de una recta.

TEOREMA.—*Las tangentes en los puntos correspondientes de dos curvas transformadas la una de la otra por radios vectores recíprocos, forman ángulos iguales con el radio vector común.*

En efecto, se tiene para una de las curvas

$$\text{tg V} = r\frac{d\theta}{dr},$$

expresando V el ánguló que el radio vector r forma con la tangente y θ el ángulo polar. Tendremos para la otra

$$\text{tg V}' = r'\frac{d\theta}{dr'};$$

pero $$r' = \frac{k^2}{r} \qquad dr' = -\frac{k^2}{r^2}\,dr;$$

luego $\text{tg V}' = -r\frac{d\theta}{dr}$; luego V y V′ son suplementarios, y las tangentes á las dos curvas son *antiparalelas*.

§ 3.º ENVOLVENTES

10. Sea la ecuación $f(x, y, a)=0$ que contiene un parámetro a, y que representa una *familia* de curvas.

Consideremos dos curvas de esta familia cuyas ecuaciones son

$$f(x, y, a) = 0, \qquad f(x, y, a+\Delta a) = 0$$

ó el sistema equivalente

$$f(x, y, a) = 0 \qquad \frac{f(x, y, a+\Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0,$$

que en el límite se reduce á

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (1) \qquad \frac{d\,f(x, y, a)}{da} = 0\,. \qquad (2)$$

El lugar de los puntos de intersección de las dos curvas, que se obtienen eliminando a, es la envolvente de la curva propuesta, que se llama *envuelta* ó *involuta*.

Esta eliminación equivale á expresar que la ecuación propuesta admite una raíz doble en a.

11. TEOREMA.— *La envolvente de una familia de curvas es tangente á todas las involutas*.

En efecto, hemos obtenido la envolvente de la familia de curvas $f(x, y, a) = 0$ eliminando a, entre dicha ecuación y su derivada respecto de a.

Pero si suponemos ahora que a sea la función de x é y que se obtendría revolviendo la ecuación respecto de a, la ecuación (1) podrá considerarse como la de la envolvente.

Propongámonos hallar el coeficiente angular de la tangente á la envolvente y á la involuta en el punto (x, y).

Para ello, diferenciemos (1), considerando a como constante; y tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0\,, \qquad (3)$$

que dará el coeficiente angular $\frac{dy}{dx}$ de la involuta.

Diferenciemos ahora suponiendo que a es la función de x é y deducida de (2). Tendremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}\right) = 0\,. \qquad (4)$$

Pero en virtud de (2), esta ecuación se reduce á

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (5)$$

Esta ecuación no difiere de (3); porque a en (3) representa una constante y en (5) representa un función de x é y que tienen el mismo valor en el punto (x, y), común á la envolvente y á la involuta; luego (3) y (5) dan el mismo valor para $\frac{dy}{dx}$, y por tanto la envolvente y la involuta tienen la misma tangente.

TEOREMA II.—*Si se considera una familia de curvas, toda curva tangente á cada curva de la familia es su envolvente.*

En efecto, sea $f(x, y, a) = 0$ la ecuación de una familia de curvas. Si una curva C cuya ecuación es $F(x, y) = 0$ les es tangente, se podrá siempre determinar a en función de x é y, de modo que sea

$$f(x, y, a) = F(x, y),$$

cualesquiera que sean x é y. Entonces

$$f(x, y, a) = 0$$

podrá representar la curva C tangente á todas las curvas de la familia.

Suponiendo a variable, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

y suponiéndola constante,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

Si los dos valores de $\frac{dy}{dx}$ obtenidos por estas ecuaciones han de ser iguales para un mismo valor de x y de y es necesario que sea

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0;$$

porque $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx}$, no puede ser nulo, sin ser a constante; y además todos los puntos, para los que á la vez se tiene $f = 0$ y $\frac{df}{da} = 0$, pertenecen á la envolvente.

12. CASO DE DOS Ó MÁS PARÁMETROS.—1.º Sea

$$f(x, y, a, b) = 0, \tag{1}$$

con la relación

$$\varphi(a, b) = 0. \qquad (2)$$

Considerando á b como función de a, se tiene

$$f'_a + f'_b\, b' = 0 \quad \text{y} \quad \varphi'_a + \varphi'_b\, b' = 0\ ;$$

de donde

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} \qquad (3)$$

Luego: *En el caso de contener la ecuación propuesta dos parámetros ligados por una relación; para obtener la envolvente hay que eliminar los dos parámetros entre las dos ecuaciones y la ecuación adjuntada* (3).

2.º Sea

$$\left.\begin{array}{r} f(x, y, a, b, \ldots\ldots, l) = 0 \\ \varphi_1(a, b, \ldots\ldots, l) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{p-1}(a, b, \ldots\ldots, l) = 0, \end{array}\right\}$$

Tendremos que

$$f'_a + b' f'_b + \ldots\ldots + l' f'_l = 0$$
$$\varphi'_{1,a} + b' \varphi'_{1,b} + \ldots\ldots + l' \varphi'_{1,l} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi'_{p-1,a} + b' \varphi'_{p-1,b} + \ldots\ldots + l' \varphi'_{p-1,l} = 0$$

y eliminando $b', \ldots\ldots, l'$, resulta la ecuación

$$\begin{vmatrix} f'_a & f'_b \ldots\ldots & f'_l \\ \varphi'_{1,a} & \varphi'_{1,b} \ldots\ldots & \varphi'_{1,l} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varphi'_{p-1,a} & \varphi'_{p-1,b} \ldots\ldots & \varphi'_{p-1,l} \end{vmatrix} = 0$$

que debe agregarse al sistema propuesto para obtener, por la eliminación de los parámetros variables, la ecuación de la envolvente.

Ejemplos.—Sea

$P\,\alpha^2 + Q\,\alpha + R = 0$ (P, Q, R funciones enteras de x é y)

tendremos $2\,P\alpha + Q = 0 \quad , \alpha = -\dfrac{Q}{2\,P}$

La ecuación de la envolvente será $Q^2 - 4\,PR = 0$.

2.° Hallar la envolvente de las curvas cuya ecuación es

$$P \operatorname{sen} \varphi + Q \cos \varphi + R = 0\,.$$

Se eliminará φ entre esta ecuación y

$$P \cos \varphi - Q \operatorname{sen} \varphi = 0\,;$$

y resulta $\quad P^2 + Q^2 = R^2$

Se puede emplear la transformación

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

que se deduce, haciendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = t$, y que conducirá á una ecuación de segundo grado; y escribiendo que sus raíces son iguales, resultará la relación precedente.

3.° *Desde los diversos puntos de una parábola se bajan perpendiculares al eje y á la tangente en el vértice. Hallar la envolvente de la recta que une los pies de estas perpendiculares.*

Las ecuaciones de la parábola y de la recta son

$$y^2 = 2px\,, \qquad \frac{2\,p\,X}{y^2} + \frac{Y}{y} = 1 \quad ó \quad 2pX + Yy = y^2\,;$$

eliminando y entre esta ecuación y su derivada

$$Y = 2y\,, \text{ resulta} \qquad Y^2 + 8\,pX = 0\,.$$

También podemos obtener este resultado, haciendo homogénea la ecuación propuesta é igualando su discriminante á cero. Así tenemos

$$2p\,Xz^2 + Yy\,z - y^2 = 0\,.$$

$$\begin{vmatrix} 4\,pX & -Y \\ Y & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad ó \qquad 8\,pX + Y^2 = 0\,.$$

§ 4.° Coordenadas tangenciales

13. Definición.—Si se considera una recta

$$x\xi + y\eta = 1 \tag{1}$$

cuyas coordenadas en el origen son $\frac{1}{\xi}$, $\frac{1}{\eta}$, esta recta quedará determinada, cuando se den ξ y η. Estas cantidades se llaman *coordenadas tangenciales* de la recta, llamándose á las x é y de un punto *coordenadas cartesianas.*

Si existe entre ξ y η una relación tal que

$$f(\xi, \eta) = 0, \tag{2}$$

la recta (1) envolverá á esta curva cuya ecuación tangencial será la (2), siendo la (1) la ecuación en coordenadas cartesianas de una de sus tangentes, cuyas coordenadas son ξ y η.

Teorema.—*Toda ecuación de primer grado representa un punto.*

En efecto, supongamos que la ecuación (2) tiene la forma

$$a\xi + b\eta + c = 0. \tag{3}$$

En este caso establece una relación de primer grado entre ξ y η; y la ecuación (1) solo depende de un parámetro que entra en primer grado; luego representa un haz de rectas que pasan por un punto fijo, que es su envolvente. Para eliminar ξ, tendremos

$$\xi = -\frac{c + b\eta}{a} \quad , \quad -\frac{c + b\eta}{a}x + \eta y = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) representa una recta que pasa por la intersección de las dos rectas

$$\frac{c}{a}x + 1 = 0 \quad , \quad \frac{b}{a}x - y = 0$$

ó

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{-1}{c}$$

El punto representado por (3) tiene pues, por coordenadas $-\frac{a}{c}$ y $-\frac{b}{c}$

Recíprocamente: Si se trata de obtener la ecuación tangencial del punto cuyas coordenadas son x_0 é y_0, será necesario escribir que la recta (1) pasa por este punto, y tendremos la ecuación de condición

$$x_0 \xi + y_0 \eta = 1.$$

La recta cuyas coordenadas son 0 y ξ es paralela al eje de las y y la recta cuyas coordenadas son 0 y 0 es la recta del infinito.

La ecuación $a\xi = 1$ representa un punto cuya ordenada es nula; se halla pues, el eje de las x. La ecuación *constante* $= 0$ representa el origen de coordenadas;

$$a\xi + b\eta = 0$$

representa un punto en el infinito.

§ 5.º Figuras polares recíprocas

14. Definición.—Se llama *polar recíproca* de una curva

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

que escribimos en coordenadas homogéneas, con relación á una cónica

$$\varphi(x, y, z) =. 0, \qquad (2)$$

á la envolvente de las polares de los diversos puntos de la curva respecto á la cónica.

Para hallar la polar recíproca de (1) con respecto á (2), hallaremos la envolvente de la polar del punto (x, y, z), ó sea

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \qquad (3)$$

que puede escribirse

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + y \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Para ello eliminaremos x, y, z entre (1) y las ecuaciones

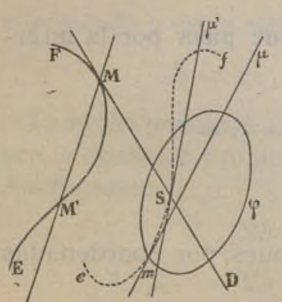


Fig 7.ª

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

ó sea

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

Teorema.—*La polar recíproca de una curva es también el lugar de los polos de sus diversas tangentes.*

En efecto: El polo de una recta

$$Ax + By + Cz = 0$$

respecto á la cónica (2) está dado por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : A = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : B = \frac{\partial \varphi}{\partial z} : C;$$

el polo de la tangente

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

á la curva (1) estará dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$

siendo ξ, η y ζ las coordenadas del polo.

Para obtener el polo, será necesario eliminar x, y; z entre estas ecuaciones y (1).

Este es el procedimiento empleado anteriormente para hallar la polar recíproca de (1).

De esto resulta que la polar recíproca de una curva tiene por polar recíproca la curva misma, lo que justifica la denominación de *polares recíprocas.*

Además, observaremos que la clase de una curva es igual al grado de su polar recíproca y *vice-versa,* porque si se considera una secante á la curva propuesta, la encontrará en m puntos expresando m el grado de la curva. Las polares de estos mismos puntos concurrirán en el polo P de la recta considerada, y serán tangentes á la polar recíproca. Serán además las solas tangentes que se puedan trazar desde P á esta curva. Es pues de la clase *m*.

Así la polar recíproca de una cónica es una cónica.

§ 2.º Aplicaciones

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, la sub-tangente, la sub-normal y las longitudes de la tangente y de la normal de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Solución: La ec. de la *tg*. es $\dfrac{Xx}{a^2}+\dfrac{Yy}{b^2}-1=0$

La ec. de la norm. es $\dfrac{Xy}{b^2}-\dfrac{Yx}{a^2}+xy\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)=0$

$$S_t=\frac{x}{1}(a^2-x^2),\qquad S_n=\frac{b^2}{a^2}x\qquad (e^2=a^2-b^2)$$

$$T=\frac{1}{ax}\sqrt{(a^2-x^2)(a^4-e^2x^2)},\qquad N=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-e^2x^2}$$

2. Idem para la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

La ec. de la *tg*. es $\dfrac{Xx}{a^2}-\dfrac{Yy}{b^2}-1=0$

La ec. de la norm. es $\dfrac{Xy}{b^2}+\dfrac{Yx}{a^2}-xy\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)=0$

$$S_t=\frac{1}{x}(x^2-a^2),\qquad S_n=x+\frac{b^2x}{a^2},\qquad (e^2=a^2+b^2)$$

$$T=\frac{1}{ax}\sqrt{(x^2-a^2)(e^2x^2-a^4)},\qquad N=\frac{b}{a^2}\sqrt{e^2x^2-a^4}$$

3. Idem para la parábola $y^2=2px$

$$ec \text{ tg: } yY = p\,(x + X)\ ,\ ec \text{ norm. } Y - y = -\frac{y}{p}(X - x)$$

$$S_t = 2x\ ,\quad S_n = p\ ;\quad T = \sqrt{2x\,(2x + p)}\ ,\quad N = \sqrt{p\,(2x + p)}$$

4. Idem para la logarítmica $y = a \log \frac{x}{m}$. $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}\right)$

$$Y = y = \frac{a}{x}(X - x)\ ,\quad Y - y = -\frac{x}{a}(X - x)$$

$$S_t = -xl\,\frac{x}{m}\ ,\qquad S_n = \frac{ya}{x} = \frac{a^2\,l\,\frac{x}{m}}{x}$$

5. Dada la curva $y = 2x^3 - x + 4$ hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto (2, 5)

Solución $Y - 5 = 9\,(X - 2)\ ;\quad Y - 6 = -\frac{1}{9}\,(X - 2)$

6. Para qué curva es la sub-normal constante é igual á a?

Solución $yy' = a\ ,\ y\,dy = a\,dx\ ;\ \frac{y^2}{2} = ax + c\ ;\ \ y^2 = 2\,ax + c$

7. Para que curva es la sub-tangente constante é igual á a?

Solución: $y = e^{ax}$.

8. Calcular para la elipse $x = a \cos\varphi$, $y = b \operatorname{sen}\varphi$ la sub-tangente, la sub-normal y las longitudes de la tangente y de la normal.

$$S_t = a\,\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\varphi}\ ,\qquad S_n = \frac{b^2}{a}\cos\varphi$$

$$T = \operatorname{tg}\varphi\,\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\varphi}\ ,\qquad N = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\varphi}$$

9. Idem para la espiral logarítmica $r = ae^{m\theta}$

Solución: $\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{m}\ ,\ S_t = \frac{r}{m}\ ,\ S_n = mr\ ,$

$$\mathrm{T} = r\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, \qquad \mathrm{N} = r\sqrt{1+m^2}.$$

10. *Hallar la ecuación de la tangente á la curva*

$$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Solución: La ecuación de la tangente es

$$y - y_0 = \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0}\cos\frac{1}{x_0}\right)(x - x_0)$$

Se obtendría el mismo resultado por coordenadas homogéneas, siendo las derivadas

$$f_1 = -\operatorname{sen}\frac{z_0}{x_0} + \frac{z_0}{x_0}\cos\frac{z_0}{x_0}, \quad f_2 = 1, \ f_3 = -\cos\frac{z_0}{x_0}.$$

11. *Hallar la tangente de*

$$(x^2 + y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + mx\sqrt{x^2+y^2} - ay = 0$$

Solución: Haciendo homogénea la ecuación, resulta

$$f_1 = 2x_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} - y_0 + m\frac{2x_0^2 + y_0^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$f_2 = 2y_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} + x_0 + \frac{m\,x_0\,y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} - a\,z_0 \; f_3 = -ay_0$$

12. *Hallar la envolvente de una recta de longitud constante que se apoya sobre dos rectas rectangulares.* Tenemos

$$bx + ay = ab \ (1) \qquad a^2 + b^2 = l^2 \qquad (2)$$

$$\begin{matrix} y - b + (x-a)\,b' = 0 \\ a + bb' \qquad = 0 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} y-b & x-a \\ a & b \end{vmatrix} = 0,$$

$$ax - by = -b^2 + a^2 \qquad (3)$$

De (1) y (3) resulta $(a^2+b^2)\,x = a^3$ ó $l^2 x = a^3$,

$$(a^2+b^2)\,y = -b^3 \quad \text{ó} \quad l^2 y = -b^3,$$

y de la (2) resulta $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$.

13. *Hallar la sub-tangente de la curva cuya ecuación es*

$$x = e^{\frac{x-y}{2}}; \qquad \textit{Solución} \quad S_t = \frac{x^2}{x-y}$$

14. Un ángulo constante A gira alrededor de su vértice fijo A; sus lados cortan á una recta fija PQ en dos puntos B y C. Hallar la envolvente del círculo circunscrito al triángulo ABC.

Solución: Sea a la perpendicular del punto A sobre PQ. Si consideramos esta perpendicular como eje de las x, el origen en A y el eje de las y paralelo á PQ, la ecuación de la envolvente es

$$(x^2+y^2)\left(x^2+y^2 - \frac{4\,ax}{\text{sen}^2 A} + \frac{4a^2}{\text{sen}^2 A}\right) = 0.$$

Está formada por un punto y una circunferencia.

Por cada punto P de una curva se trazan paralelas á los ejes de coordenadas, y se unen por una recta los puntos en que estas paralelas cortan á los ejes. Hallar la envolvente de esta recta.

Solución: Sean (α, β) las coordenadas del punto P y $f(\alpha, \beta) = 0$ la ecuación de la curva. La ecuación de la envolvente resulta de la eliminación de α y β entre las ecuaciones.

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \qquad \frac{x}{\alpha^2}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{y}{\beta^2}\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad f(\alpha, \beta) = 0$$

Si se toman sucesivamente por $f(\alpha, \beta) = 0$ una recta $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1$, una parábola $\beta^2 = 2p\alpha$ y una hipérbola $\alpha\beta = c^2 : 4$, se hallará

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = 1, \qquad y^2 = -8px, \qquad xy = \frac{c^2}{16}.$$

CAPÍTULO II

Cuestiones que dependen de un orden infinitesimal superior al primero

§ 1.º LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

15. DEFINICIÓN—Se llama *longitud* de un arco de curva al límite del perímetro de un polígono inscrito en este arco, cuyos lados decrecen indefinidamente, mientras que su número aumenta indefinidamente.

Para que esta definición, que permite comparar una recta con una curva sea aceptable, es necesario demostrar que la longitud límite del polígono inscrito *existe*, y que no depende de la ley según la que sus lados tienden hacia cero.

Sean x_0, y_0 y X, Y las coordenadas extremas del arco de curva; y tomemos, entre los extremos, $n-1$ puntos de división (x_1, y_1), ... (x_{n-1}, y_{n-1}). Uniendo dichos puntos, se obtendrá un polígono, y la longitud de sus lados estará expresada por

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} \quad \text{ó} \quad \sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}.$$

La longitud del perímetro será

$$s=\sum_{i=o}^{i=n-1}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2} \quad \text{ó} \quad s=\Sigma\,\Delta x_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}. \ (1)$$

Supondremos $\dfrac{dy}{dx}=y'$ creciente de y'_0 hasta Y'.

Sea $f(x)$ la ordenada del punto correspondiente á la abscisa x. Se tendrá, llamando θ á un número comprendido entre 0 y 1,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(x_i+\theta\,\Delta x_i),$$

y por consiguiente $$s = \Sigma \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(x_i + \theta \Delta x_i)]^2}\,.$$

Pero si sobre la ordenada correspondiente á la abscisa x_i se toma una longitud igual á $\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}$, el lugar de los extremos de las rectas así obtenidas será cierta curva GH expresada por la ecuación

$$\eta = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,; \qquad (3)$$

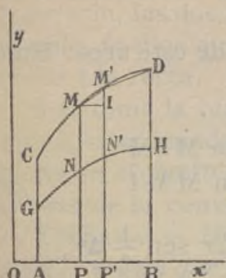


Fig 8.ª

y la expresión (2) de s será la expresión de cierta área, comprendida entre la suma de las áreas de los rectángulos de base Δx, inscritos y circunscritos á la curva (3). Pero las sumas de los rectángulos inscritos y circunscritos tienen un mismo límite, que es el área comprendida entre el eje de las x, las ordenadas y_0, Y y la curva (3), puesto que la diferencia de las mismas es igual á $\Sigma \Delta x \Delta y$, es decir, menor que $\Sigma M \Delta x$, expresando M el máximo de Δy que tiende hacia cero, ó que M $(X - x)$, que tiende tambien hacia cero; luego la expresión (2) de s tiene un límite finito. El teorema será tambien cierto cuando y' sea decreciente ó alternativamente creciente ó decreciente, siempre que estas alternativas no sean en número infinito.

Podemos ahora enunciar el siguiente:

TEOREMA.—*La diferencial* ds *de la longitud del arco de una curva cuyas abscisa y ordenada son* x *é* y, *está dada por la fórmula*

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad \text{ó} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

En efecto, hallándose representada la longitud s de un arco, á partir de un orígen O, por el área de la curva cuya ecuación es

$$\eta = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,;$$

si se da á la abscisa x el incremento dx, el área de la curva toma un incremento comprendido entre dos rectángulos de la misma base dx y cuyas alturas son η y $\eta + \Delta\eta$. Se puede pues tomar por incremento del área $\eta\, dx$, que será tambien su diferencial, y que es también la del arco s; luego

$$ds = \eta\, dx \quad \text{ó} \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

16. Diferencial de un arco de curva en coordenadas polares.

Sea $CM = s$ y $MM' = \Delta s$ el incremento de este arco. En el triángulo M'MI, se tiene MM'I

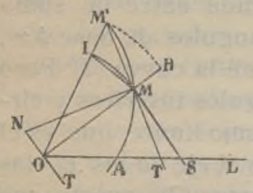


Fig. 9.ª

$$\frac{MM'}{MI} = \frac{\text{sen } M I M'}{\text{sen } M M'I}$$

y, por ser $\quad MI = 2r \text{ sen } \frac{1}{2} \Delta\theta$,

se tendrá

$$\frac{MM'}{\text{arc } MM'} = \frac{2r \text{ sen } \frac{1}{2} \Delta\theta}{\Delta s} \cdot \frac{\text{sen } MIM'}{\text{sen } MM'I};$$

y, pasando al límite

$$1 = r\frac{d\theta}{ds}\frac{1}{\text{sen } \mu}, \quad \text{de donde} \quad ds = \frac{r\, d\theta}{\text{sen } \mu};$$

luego $$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}$$

deduciéndose también, en virtud de las fórmulas obtenidas (p. 48).

$$\text{sen } \mu = r\frac{d\theta}{ds}, \qquad \cos \mu = \frac{dr}{ds}$$

Se obtiene el mismo resultado por un cambio de coordenadas. Así, haciendo $x = r \cos\theta$ é $y = r \text{ sen } \theta$, será

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{(dr \cos\theta - rd\theta \text{ sen } \theta)^2 + (dr \text{ sen } \theta + rd\theta \cos\theta)^2}$$

ó fiinalmente $$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}$$

17. Concavidad y convexidad. — Se dice que una curva es *cóncava* con respecto á una recta dada, en uno de sus puntos, cuando á partir de este punto, sus ramas principian á estar comprendidas en el ángulo formado por la recta dada y la tangente á la curva en el punto que se considera. Cuando, por el contrario, las dos ramas comienzan por hallarse fuera de este ángulo, se dice que la curva es *convexa* en este punto con respecto á la recta.

Si se toma la recta por eje de las x, en el caso de la concavidad, la ordenada de la curva debe ser menor que la de la tangente en el punto considerado; y lo contrario se verificará en el caso de la convexidad.

Teorema. — *Una curva será cóncava ó convexa en un punto, según que la derivada segunda, en dicho punto, sea negativa ó positiva.*

En efecto en el punto, M (x', y'), tenemos que

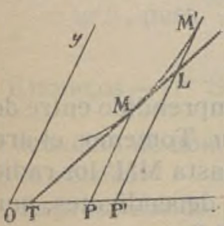


Fig. 10

$$M'P' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2!} + R$$

$$\text{y} \quad P'L = y + h \frac{dy}{dx}$$

son las ordenadas de la curva y de la tangente en los puntos correspondientes á la abscisa $x + h$; luego

$$M'L = M'L' - P'L = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2!} + R .$$

El signo de la diferencia de ordenadas depende del signo de $\frac{d^2y}{dx^2}$. De manera que si $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, las ordenadas de la curva serán mayores que las de la tangente; y si $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, serán menores las de aquélla que las de ésta.

Observación.—Puede suceder que $\frac{d^2y}{dx^2}$ se anula cambiando de signo; de manera que la curva de cóncava pasará á ser convexa ó inversamente, hallándose la curva á distinto lado de la tangente. Entonces se dice que el punto M es un *punto de inflexión.*

§ 2.º DIFERENCIAL DE UNA ÁREA DE CURVA PLANA

18. DIFERENCIAL DE UN SECTOR. — Ya se ha visto (tomo II, pág. 37) que designándose por u el área ACMP, se tiene

$$\Delta u > y\,\Delta x\,, \qquad \Delta u < (y + \Delta y)\,\Delta x$$

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y$$

Pasando al límite $\frac{du}{dx} = y\,,$ ó $du = ydx\,.$

Y cuando los ejes de coordenadas forman entre sí un ángulo θ,

$$du = y\,dx \operatorname{sen}\theta$$

Representamos por u un sector POM, comprendido entre dos radios vectores OP y OM. Sea $\mathrm{MOM'} = \Delta u$. Tomemos el arco MM′ bastante pequeño para que, desde M hasta MM′ los radios vectores sean constantemente crecientes ó decendientes, para fijar las ideas, por ejemplo, crecientes (fig. 2.ª)

Describamos desde el punto M como centro, los arcos de círculo MI y M′K terminados en los radios vectores $\mathrm{OM} = r$ y $\mathrm{OM'} = r'$. Se tendrá

$$\mathrm{OMI} < \Delta u < \mathrm{OM'K}\,,$$

y por ser $\mathrm{OMI} = \frac{1}{2}\,r^2\,\Delta\theta$ y $\mathrm{OM'K'} = \frac{1}{2}\,r'\Delta\theta\,,$

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta < \Delta\,u < \frac{1}{2}\,r'^2\,\Delta\theta \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{2}\,r^2 < \frac{\Delta u}{\Delta\theta} < \frac{1}{2}\,r'^2\,,$$

Pero en el límite r' se hace igual á r ; luego tendremos que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \qquad \text{ó} \qquad du = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \, .$$

Este cálculo conduce á una consecuencia útil. Se ha obtenido

$$\text{tg OMT} = \frac{xdy - ydx}{xdy + ydx} \qquad \text{y} \qquad \text{tg OMT} = r \frac{d\theta}{dr} \, .$$

Se tendrá pues, que $\dfrac{xdy - ydx}{xdx + ydy} = \dfrac{r^2 d\theta}{rdr}$.

Pero por ser $x^2 + y^2 = r^2$ se tiene $xdx + ydy = rdr$;

luego $$xdy - ydx = r^2 d\theta$$

Además $\frac{1}{2} r^2 \, d\theta$ es la diferencial del sector LOM ; luego esta diferencial es también igual á $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$.

También se deduce este resultado de

$$\frac{y}{x} = \text{tg}\, \theta \, , \text{ pues } \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \, , \qquad x^2 = \text{r}^2 \cos^2\theta \qquad \text{etc.}$$

Ejemplos.—1.° Sea $\qquad y^2 = 2px$

la ecuación de una parábola referida á su eje y á la tangente en el vértice.

Representando por u el área OMP , se tiene

$$du = ydx = \sqrt{2p\,x}\,dx = \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}} \, dx .$$

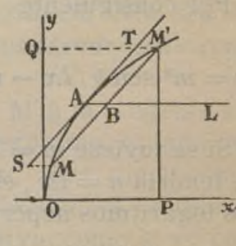


Figura 11

Pero
$$x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{3} d \, . \, x^{\frac{3}{2}} \, ;$$

luego

$$du = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \, dx^{\frac{3}{2}} = d\left(\frac{2}{3}\sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{3}{2}}\right) + \text{C} \, ;$$

Y pasando de las diferenciales á las integrales, será

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} + C\,;$$

Pero $\qquad u = 0$, cuando $x = 0$; luego $C = 0$

y finalmente $\qquad u = \frac{2}{3}\sqrt{2px}\,.\,x = \frac{2}{3}\,xy$

2.º Sea $xy = m^2$ la ecuación de una hipérbola referida á sus asíntotas.

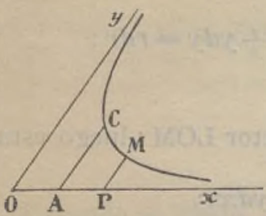


Fig. 12

Llamando u al área del segmento ACMP, se tendrá:

$$du = y \operatorname{sen} \theta\, dx = m^2 \operatorname{sen} \theta\, \frac{dx}{x}$$

$$= m^2 \operatorname{sen} \theta\, d.\log x\,;$$

luego u y $m^2 \operatorname{sen} \theta\,.\log x$ solo pueden diferir en una constante, y será

$$u = m^2 \operatorname{sen} \theta.\log x + C$$

Además, haciendo $\quad x = OA = m\,, \quad$ se tendrá

$$u = 0 \qquad \text{ó} \qquad 0 = m^2 \operatorname{sen} \theta.\log m + C\,;$$

luego el valor de la constante será $C = -\,m^2 \operatorname{sen} \theta\,.\log m$

Por consiguiente

$$u = m^2 \operatorname{sen} \theta\,.\,lx - m^2 \operatorname{sen} \theta\,.\,lm = m^2 \operatorname{sen} \theta\, l\left(\frac{x}{m}\right)$$

Si se tuviese $m = 1$ y $\theta = 90^{\circ}$, la hipérbola sería equilátera, y se tendría $u = lx$, es decir, que las áreas consideradas serían los logaritmos neperianos de las abscisas correspondientes.

§ 3.º Contactos de diversos órdenes, curvas osculatrices.

19. Ordenes de contacto.— Dadas dos curvas que tienen un punto común M, si una secante común NN′ las encuentra en los puntos N y N′, próximos al punto M′; pero formando con las tangentes en M y M′ ángulos finitos, las distancias MN, MN′ y NN′ serán, en general, de igual orden, porque los ángulos del triángulo MNN′ serán finitos, y sus senos también, de igual modo que sus razones MN : MN′ : NN′.

Pero si el ángulo NMN′ es infinitamente pequeño, ó lo que es igual, si las curvas son tangentes en M, los ángulos N y N′ son todavía finitos y MN′ son de igual orden, siendo NN′ de orden superior, porque se tiene (fig. 13).

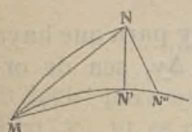


Fig. 13

$$\frac{MN}{\text{sen } N'} = \frac{MN'}{\text{sen } N} = \frac{NN'}{\text{sen } M},$$

y siendo N y N′ finitos y M infinitamente pequeño, es preciso que NN′ sea de orden superior.

El orden de NN′ es independiente de la orientación de la secante; porque si se considera otra secante NN″, en el triángulo NN′N″ la relación de NN′ á NN″ es la de los senos de los ángulos opuestos que, por hipótesis permanecen finitos.

Diremos pués que: *Dos curvas que tienen un punto* M *común, tienen en este punto un contacto de orden* n, *cuando el segmento de la secante, trazada en la proximidad de* M, *interceptado entre las dos curvas, es de orden* $n+1$, *suponiéndose que la posición límite de la secante no es la de una tangente en* M *á una de las curvas,* y recíprocamente: *si se puede hallar en dos curvas que tienen un punto común* M *dos puntos* N y N_1 *infinitamente próximos tales, que su distancia* NN_1 *sea de orden* $n+1$, *con relación á* MN, *las dos curvas tendrán un contacto de orden* n.

Por ejemplo, la distancia de un punto M′ á la tangente en el punto M infinitamente próximo, es infinitamente pequeño de 2.º orden, si se toma como infinitamente pequeño principal la distancia de los dos puntos de la curva, como se vé por la relación.

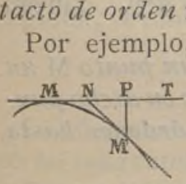


Fig. 14

$$M'P = MM' \text{ sen } M'MP$$

Para obtener las condiciones de contacto de orden n, consideremos las ordenadas y é y_1 que corresponden á la misma abscisa en las dos curvas. En el punto M se tiene $y = y_1$. Suponiento que el eje de las y no es paralelo á la tangente en M, podremos considerar una secante paralela á dicho eje, trazada en la proximidad de M, la cual cortará á las curvas en puntos cuyas coordenadas son

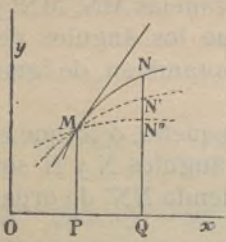


Fig. 15

$$(x + \Delta x, y + \Delta y) \quad \text{y} \quad (x + \Delta x, y_1 + \Delta y_1).$$

La magnitud de esta secante será $\Delta y - \Delta y_1$; y para que haya un contacto de orden n, será preciso que $\Delta y - \Delta y_1$ sea de orden n. Pero (t I., 79, *observación*).

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2!}d^2y + \ldots.. + \frac{1}{n!}d^ny + \ldots..$$

$$\Delta y_1 = dy_1 + \frac{1}{2!}d^2y_1 + \ldots.. + \frac{1}{n!}d^ny_1 + \ldots..;$$

luego

$$\Delta y - \Delta y_1 = dy - dy_1 + \frac{1}{2!}(d^2y - d^2y_1) + \ldots.. +$$

$$+ \frac{1}{n!}(d^ny - d^ny_1) + \ldots.;$$

y para que $\Delta y - \Delta y_1$ sea de orden $n + 1$, es necesario que

$$dy = dy_1, \quad d^2y = d^2y_1, \quad \ldots.., d^ny = d^ny_1 \quad ; \text{luego}$$

Teorema I.—*Para que dos curvas tengan en un punto* M *un contacto de orden* n, *es necesario y suficiente que en dicho punto las diferenciales y derivadas de sus diversos órdenes hasta el* n$^{\text{simo}}$, *sean iguales.*

Para expresar que dos curvas cuyas ecuaciones son

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0 \tag{1}$$

tienen un contacto de orden n, bastará escribir que son iguales los valores de y, y', y'', ..., y^n sacados de las ecuaciones propuestas y de sus derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{d^2 f}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

....

es decir: para que las curvas (1) tengan un contacto de orden n en (x, y), es necesario que en este punto las derivadas de f y F sean proporcionales hasta el orden n, inclusive.

REGLA.—*Para expresar qué dos curvas tienen un contacto de orden* n, *se diferenciará la ecuación de una de estas curvas, y se supondrá que las diferenciales que figuran en el resultado se sacan de la ecuación de la otra curva.*

EJEMPLO.—Sea expresar que la elipse

$$x = a \cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t$$

tiene un contacto de primer orden con la recta

$$y = mx + n.$$

Se escribirá desde luego $b \operatorname{sen} t = ma \cos t + n$,

expresando que las dos líneas se encuentran. Diferenciando enseguida, se tendrá

$$b \cos t = - ma \operatorname{sen} t.$$

Las dos curvas tendrán pues, la misma dx y dy. Por tanto, serán tangentes.

Esto se reduce á diferenciar $y = mx + n$, después de haber sustituído x é y por sus valores sacados de la ecuación de la elipse.

TEOREMA II.—*Si dos curvas variables*

$$y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x)$$

se cortan en n + 1 *puntos que llegan á confundirse en uno solo* M, *tienen en este punto un contacto de orden* n.

En efecto, llamando x, y las coordenadas de M, las abscisas de los puntos de intersección que se confunden en el límite con M, se pueden representar por $x + h_1, x + h_2, \ldots\ldots, x + h_{n+1}$; y entonces la diferencia $\varphi(x+h) - \psi(x+h)$ de las dos ordenadas de las dos curvas correspondientes á la abscisa $x + h$, se anula para $h = h_1, h_2, \ldots\ldots, h_{n+1}$; por consiguiente, podemos escribir (t. I, 26, *cor* 2.º):

$$\varphi(x+h) - \psi(x+h) =$$

$$= (h - h_1)(h - h_2) \ldots\ldots (h - h_{n+1})$$

$$\frac{\varphi^{n+1}(x+\mathrm{H}) - \psi^{n+1}(x+\mathrm{H})}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots(n-1)}$$

expresando H una media entre h, $h_1, \ldots\ldots, h_{n+1}$.

Si se hace tender $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_{n+1}$ hacia cero, esta fórmula se reduce á

$$\varphi(x+x) - \psi(x-h)$$

$$= h^{n+1}\,\frac{\varphi^{n+1}(x+\mathrm{H}) - \psi^{n+1}(x+\mathrm{H})}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots(n+1)}$$

que es de orden $n + 1$ cuando h es infinitamente pequeño principal. Las curvas φ y ψ tienen pues un contacto de orden n, cuando los $n + 1$ puntos considerados se confunden en uno.

Si n es par, será $n + 1$ impar, y entonces h^{n+1}, y por consiguiente QN — QN′ cambiará de signo con h, la curva que á la izquierda del punto de contacto estaba debajo á la derecha, estará encima; de manera que se atraviesan las dos curvas.

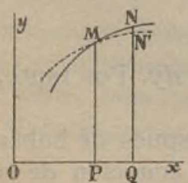


Fig. 16

Si n es impar $n + 1$ será par; y haciendo h suficientemente pequeño, QN—QN′ no cambiará de signo; las curvas no se atraviesan:

Luego: *Cuando dos curvas tienen entre sí un contacto de orden* IMPAR, *la una de ellas comprende á la otra; y dos curvas se atraviesan mutuamente en el punto de contacto, cuando tienen un contacto de orden* PAR.

DEFINICIÓN. – Cuando, atendido al número de parámetros variables, dos curvas tienen en un punto el contacto de orden más elevado posible, se dice que son *osculatrices.*

Cuando para ciertos puntos una curva tiene un contacto más elevado que en otros puntos se dice que hay *sobreosculación.*

Por ejemplo, el círculo, que por depender de tres constantes, tiene un contacto superior ú osculación de segundo orden, puede tener un contacto de tercer orden con una elipse en los vértices de ésta, donde es sobreosculador.

20. RECTA OSCULATRIZ. — Propongámonos determinar los coeficientes de la ecuación de la recta

$$y = ax + b\,, \tag{1}$$

para que sea osculatriz de una curva dada.

La ordenada de la recta y de la curva deben ser una sola para un mismo valor de x, así como sus derivadas primeras. Pero diferenciando, se obtiene.

$$dy = a\,dx\,, \tag{2}$$

debiendo verificarse simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), cuando á la y de la recta se haya sustituído la de la curva. Suponiendo que se haga esta sustitución, tendremos

$$a = \frac{dy}{dx}\,, \qquad b = y - x\frac{dy}{dx}\,.$$

La ecuación de la recta osculatriz será

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}\frac{dy}{dx} + y - x\frac{dy}{dx}\,,$$

siendo X é Y las coordenadas generales. Esta ecuación es la de la tangente, como era de esperar.

Busquemos para qué puntos hay *sobreosculación.* Diferenciando nuevamente, resulta

$$d^2y = 0\,. \tag{3}$$

La eliminación de a y b entre las ecuaciones (1), (2) y (3) conducirá á la relación que debe existir entre x é y para que haya sobreosculación. El resultado de esta eliminación es la misma ecuación (3).

Así, en los puntos en que la tangente pasa á ser sobreosculatriz, se tiene d^2y. Estos puntos se llaman *puntos de inflexión.*

De otro modo. Si tomamos la tangente en el punto de inflexión por eje de las x y la normal por eje de las y, la ecuación de la curva será de la forma

$$y = \varphi(x),$$

ó por la fórmula de Mac-Laurin

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots..$$

Para $x = 0$, se tiene $y = 0$, en virtud del sistema de coordenados adoptado; luego $a = 0$ para $x = 0$. Ademas $\frac{dy}{dx}$ es cero por la misma razón; luego $b = 0$; y por ser el contacto de segundo orden, la distancia de un punto á la tangente, en la proximidad del origen, debe ser de tercer orden; luego el término de x^2 debe desaparecer, y tendremos

$$y = dx^3 + ex^4 + \ldots..;$$

y cambia de signo con x para valores muy pequeños de x; luego el eje de las x corta y es tangente á la curva en el punto de inflexión.

En ciertas curvas existen puntos en que la tangente tiene un contacto de 3.º, de 4.º, este orden. Si hay contacto de tercer orden, la tangente no corta á la curva. El punto de inflexión existe; pero no es aparente. La ecuación de la curva es entonces de la forma

$$y = ex^4 + fe^5 + \ldots..$$

EJEMPLO.—La curva $y = a + x^{\frac{5}{3}}$ para $x = 0$, $y = a$ tiene un punto de inflexión para el que $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$.

21. HESSIANNA.—Sea la ecuación de la curva bajo la forma homogénea

$$f(x, y, z) = 0 . \tag{1}$$

Designemos para abreviar, por

$$f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, \ldots\ldots f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33}$$

las derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots\ldots \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial z^2}{\partial^2 f} .$$

Los puntos de inflexión se obtienen escribiendo $d^2y = 0$.

Por consiguiente, diferenciando (1) dos veces, escribiremos el término en d^2y que es nulo, y tendremos:

$$f_1\, dx + f_2\, dy = 0 ,$$

$$f_{11}\, dx^2 + 2f_{12}\, dxdx + f_{22}\, dy^2 = 0 ;$$

y eliminando x é y, resulta:

$$f_{11} f_2^2 + 2f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2 = 0 . \tag{2}$$

Esta ecuación, juntamente con la (1), determinará los puntos de inflexión.

Sin embargo, la ecuación (1) puede verificarse sin que exista punto de inflexión, si $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$; pero entonces dicha ecuación determina ciertos puntos singulares de que se tratará más adelante.

La ecuación (2) puede escribirse bajo la forma

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Si m es el grado de f, tendremos

$$\left.\begin{aligned} (m-1) f_1 &= f_{11}\, x + f_{12}\, y + f_{13}\, z , \\ (m-1) f_2 &= f_{21}\, x + f_{22} y + f_{23}\, z , \\ 0 = mf &= f_1\, x \;\; + f_2\, y \;\; + f_3\, z , \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Multipliquemos la primera columna de (3) por $-x$, la segunda por $-y$, y la tercera por $(m-1)$. Sumemos enseguida con estos productos las sumas de los anteriores, respectivamente; y resultará

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_1 & f_2 & -xf_1 - yf_2 \end{vmatrix} = 0;$$

y en virtud de la tercera de las ecuaciones (4), se obtiene :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

ecuación que juntamente con la (1) determina los puntos de inflexión.

Si f es algebráica de grado m, la ecuación (5) representará una curva de grado $3(m-2)$ que se llama la *Hessianna* de $f=0$, de manera que el número i de lospuntos de inflexión es

$$i = 3m(m-2).$$

22. Círculo osculador. — Puesto que la ecuación general del círculo contiene tres constantes arbitrarias, el círculo osculador será el que tenga con la curva un contacto de segundo órden. Sean ξ y η las coordenadas del centro y ρ el radio; podemos escribir bajo la forma

$$(x-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 = \rho^2 \tag{1}$$

la ecuación del círculo desconocido. Derivando dos veces, se obtienen inmediatamente las ecuaciones

$$x - \xi + (y'-\eta)\frac{dy'}{dx} = 0, \tag{2}$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx^2} + (y'-\eta)\frac{d^2y'}{dx^2} = 0. \tag{3}$$

Las tres ecuaciones (1), (2) y (3) determinan el radio y el centro del círculo osculador.

Pero se deben verificar las ecuaciones de condición

$$y' = y, \qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx^2}$$

Por consiguiente, sustituyendo en las ecuaciones (1), (2) y (3) los valores de la ordenada y sus dos derivadas, deducidos de la ecuación de la curva dada, se tendrá para determinar ξ, η y ρ el sistema de ecuaciones

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \rho^2, \tag{4}$$

$$(x-\xi) + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{5}$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{5}$$

siendo x é y las coordenadas del punto de contacto.

De estas ecuaciones resulta sucesivamente que

$$\eta - y = \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \xi - x = -\frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\rho^2 = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\frac{dy^2}{dx^2}}, \quad \rho = \pm\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dy^2}{dx^2}}$$

Siendo el numerador de esta expresión positivo, será preciso tomar el signo $+$ ó $-$ según que $\frac{d^2y}{dx^2}$ sea positivo ó negativo, para obtener el valor absoluto de ρ.

La ecuación (6) manifiesta $\eta - y$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ son siempre de igual signo; de manera que el centro del círculo osculador se halla siempre al lado de la concavidad de la curva.

Por tener la curva y el círculo osculador la misma tangente, el centro del círculo osculador estará en la normal á la curva en el punto (x, y), lo que también resulta de la ecuación (5) que puede escribirse bajo la forma

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\,\frac{dy}{dx}=-1,$$

que indica la perpendicularidad de la recta que une el punto de contacto y el centro del círculo osculador con la tangente, en el punto de contacto.

El círculo osculador tiene con la curva un contacto de segundo orden; luego es de orden par.

Por consiguiente, atraviesa á la curva, excepto en ciertos puntos particulares cuyo orden de contacto es superior. En este caso, si el contacto es de orden impar, la curva y la tangente se hallarán al mismo lado de la tangente común.

Ejemplo.—Sea la ecuación

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad (1)$$

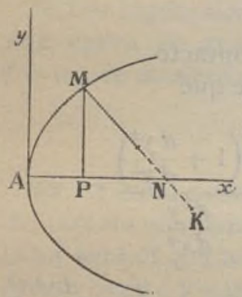


Fig. 17

que representa una cónica referida á uno de sus ejes y á la tangente en el vértice izquierdo. Tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p+qx}{y}, \qquad y\,\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=q$$

y eliminando $\dfrac{dy}{dx}$,

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p^2+2pqx+q^2x^2}{y^2}=q;$$

y en virtud de la ecuación (1), se tiene $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{p^2}{y^3}$

Sustituyendo en la fórmula del radio ρ, se tiene

$$\rho=\frac{y^3\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

El numerador es el cubo de la normal MN, pues

$$MN^2 = n^2 = y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}, \qquad n = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

luego $$y^3 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{n^3}{p^2}$$

Así: *En todo punto de una cónica, el radio del círculo osculador es igual al cubo de la normal dividido por el cuadrado del semi-parámetro.*

23. PARÁBOLAS OSCULATRICES.—Se designan con el nombre de parábolas de orden n las curvas comprendidas en la ecuación

$$y = a + bx_1 + cx_1{}^2 + \ldots\ldots + px_1{}^n$$

que contiene $n + 1$ parámetros arbitrarios a, b, ..., p.

Esta curva puede tener un contacto de orden n con otra curva $y = f(x)$ en un punto dado, pudiéndose determinar los parámetros de un modo muy sencillo.

Desarrollemos $y_1 = \varphi(x + h)$ según la fórmula de Taylor, observando que las derivadas de orden superior á n son nulas, y tendremos

$$f_1(X + h) = f_1(X) + h f_1{}'(X) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f_1{}^n(X);$$

pero las ecuaciones de osculación

$$f(x) = f_1(x), \qquad f'(x) = f'_1(x), \ldots\ldots, \qquad f^n(x) = f_1{}^n(x)$$

dan los valores de $f_1(x)$, $f'_1(x)$, ... por medio de los de la curva dada $f(x)$, $f'(x)$; ..... y sustituyendo h por $X - x$, tendremos

$$y_1 = f(x) + (X - x) f'(x) + \ldots\ldots + \frac{(X - x)^n}{n!} f^n(X),$$

que es la ecuación de la parábola osculatriz á la curva $y = f(x)$.

§ 4.º Curvatura de las curvas planas

24. Definiciones.—La curvatura de un arco convexo es el ángulo que formán entre sí las direcciones del primero y último elementos del mismo, es decir, el ángulo de las tangentes extremas. Expresa la cantidad en que la curva se ha desviado sucesivamente de la recta en la extensión del arco. Si este ángulo variase proporcionalmente al arco, se tendría la curvatura, por la unidad de longitud, dividiendo la de un arco cualquiera por la longitud del arco.

Pero si en una curva cualquiera, se divide dicho ángulo por la longitud del arco correspondiente, se tendrá tan solo su curvatura media, referida á la unidad de longitud, es decir; la de un arco igual á la unidad, en el caso de la proporcionalidad.

Siendo en la circunferencia de círculo, proporcional el ángulo de las tangentes extremas á la longitud del arco, la curvatura de un arco cualquiera, se obtendrá multiplicando la de un arco igual á la unidad por la longitud de este arco.

Esto sentado, si á partir de un punto cualquiera de una curva, se toma un arco arbitrario, su curvatura media variará á medida que este arco disminuya indefinidamente, y tenderá hacia un límite que se llama la *curvatura de la línea* en el punto que se considera. Este límite es la curvatura de un arco infinitamente pequeño referida á la unidad de longitud.

Si consideramos en una curva cualquiera un arco infinitamente pequeño, el producto de la curvatura, en uno de sus extremos, por la longitud de éste, será la curvatura en menos de una cantidad infinitamente pequeña de orden superior, puesto que la relación de la curvatura del arco á ésta difiere en una cantidad infinitamente pequeña del límite que hemos llamado curvatura en un punto; y al hallar la curvatura de un arco finito de una curva cualquiera, se procederá como si se tratase de una circunferencia, siempre que se divida dicho arco en partes infinitamente pequeñas, y se tome, para cada una de ellas, por curvatura de la unidad de longitud, la curvatura en uno cualquiera de sus puntos.

Teniendo la circunferencia una curvatura constante, es natural tomarla como término de comparación y dar á conocer la curvatura de una línea en uno de sus puntos, dándose el radio de un círculo cuya curvatura es la misma que la de la línea. Dicho círculo se llama *círculo de curvatura* y su radio, *radio de curvatura*.

La curvatura en una circunferencia es tanto mayor cuanto más pequeño es su radio, y se expresará por $\frac{1}{R}$ la medida de su curvatura.

Sean MT y M'T' las dos tangentes extremas en una circunferencia de radio R y ω su ángulo.

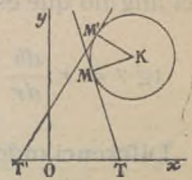


Fig. 18

Se tendrá $\quad \text{arc } MM' = R\omega, \quad \frac{1}{R} = \frac{\omega}{\text{arc } MM'}$

Si ahora consideramos una curva cualquiera EMM'F, y haciendo $CM = s$, $MM' = \Delta s$,

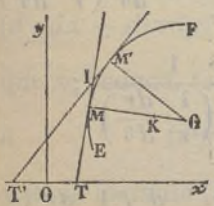


Fig. 19

$$\tau = \angle MTx, \quad \tau' = \angle M'T'x,$$

la curvatura en el punto M estará expresada por la relación

$$\text{lím} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} \qquad \text{ó} \qquad \rho = \frac{ds}{d\tau}$$

designando por ρ el radio de curvatura del círculo que tiene la misma curvatura que la curva considerada en el punto M.

Se llama *ángulo de contingencia* al ángulo $d\tau$ formado por las tangentes en los extremos de un arco infinitamente pequeño siendo τ el ángulo que forma con el eje de las x la tangente trazada á la curva en el punto (x, y); y podemos decir que: *la curvatura de una curva en un punto es igual al ángulo de contingencia dividido por la diferencial del arco.*

25. Teorema.—*El radio de curvatura es igual al radio del círculo osculador.*

En efecto

$$ds = dx\left(\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right), \quad d\tau = d\left(\text{arc tg}\,\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\frac{ds}{d\tau} = \rho = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{d\,\frac{dy}{dx} : dx} \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3:2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

26. Radio de curvatura en coordenadas polares.—Sea μ el ángulo que la tangente en M forma con el radio vector y θ el ángulo que éste forma con el eje de las x. Tendremos que

$$\operatorname{tg} \mu = r\,\frac{d\theta}{dr}\ ;\ \text{pero}\ \mu = \tau - \theta\ ; \quad \text{luego}\ \cot(\tau - \theta) = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}$$

Diferenciando esta fórmula, resulta

$$\frac{d\theta - d\tau}{\operatorname{sen}^2(\tau-\theta)} = d\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right),\ \frac{d\tau}{d\theta} = 1 - \operatorname{sen}^2(\tau-\theta)\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)$$

pero la ecuación (1) da $\quad \operatorname{sen}^2(\tau-\theta) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$;

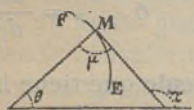


Fig. 20

luego $\quad \dfrac{1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)}{1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

Además, tenemos que $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = r\sqrt{\dfrac{dr}{r^2} + d\theta^2}$

ó $$\frac{ds}{d\theta} = r\left[1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

y dividiendo por (2): $$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr^2}{d\theta^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\,\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\,\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

27. Transformaciones. — 1.ª Cuando x é y se hallan expresadas en función de otra variable independiente sea cualquiera, no designada, tendremos la expresión

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - d^2x dy}.$$

2.ª Si tomamos el arco por variable independiente, reduciéndose la última fórmula á la siguiente

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(d^2ydx - d^2xdy)^2}{(dx^2 + dy^2)^3};$$

en virtud de $ds^2 = dx^2 + dy^2$, resulta $\frac{1}{R^2} = \frac{(d^2ydx - d^2xdy)^2}{ds^3}$

Pero tenemos idénticamente:

$$(d^2ydx - d^2xdy)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)(dx^2 + dy^2) - (dxd^2x + dyd^2y)^2$$

que se reduce, teniendo presente que, $d\,x\,d^2x + dy\,d^2y = 0$

á
$$(d^2ydx - d^2xdy)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)ds^2;$$

y de la fórmula (1) resulta

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

Las coordenadas ξ y η del centro de curvatura pueden escribirse así:

$$\xi = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad \eta = y + R\frac{dx}{ds}$$

Las derivadas $\frac{dx^2}{ds^2}$ y $\frac{d^2y}{ds^2}$ pueden expresarse en función de R. Para ello combinaremos la ecuación (3) con

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dy}{ds} = 0$$

que se obtiene diferenciando $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$.

Se obtiene entonces $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R}\frac{dx}{ds}$;

y siendo φ el ángulo que forma la tangente con el eje de las x,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R}\cos\varphi.$$

28. Teoremas respecto á ordenes infinitesimales.—1.º *La diferencia entre un arco infinitamente pequeño y su cuerda es del mismo orden que el cubo del arco.* En efecto, hallándose comprendido el arco entre la cuerda y la suma de las tangentes extremas, difiere de la una ó la otra menos que éstas difieren entre sí. Pero los ángulos de las tangentes con la cuerda son menores que los de las tangentes entre sí, que son del mismo orden infinitesimal que el arco.

Tenemos pues un triángulo con un lado infinitamente pequeño y los ángulos adyacentes del mismo orden que aquél, por lo menos; luego (t. I, 11. *f*) la diferencia entre dicho lado y la suma de los otros dos, es por lo menos del mismo orden que el cubo del lado, y con más razón la diferencia entre el arco y la cuerda.

29. Teorema.—*La diferencia entre un arco infinitamente pequeño y la tangente trazada por uno de sus extremos y terminada en la ordenada trazada por el otro extremo, es del orden del cuadrado del arco.*

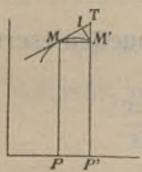


Fig. 21

Sean el arco MM′ y MT su tangente terminada en la ordenada P′M′. Desde luego vemos que el segmento M′T es de segundo orden, porque

$$\frac{M'T}{MM'} = \frac{\operatorname{sen} M}{\operatorname{sen} T}, \text{ de donde } M'T = \frac{MM' \operatorname{sen} M}{\operatorname{sen} T}$$

Pero el ángulo M es por lo menos del mismo orden que el arco ó la cuerda MM′ y T es finito; luego: *el segmento* M′T *de una secante cualquiera que forma un ángulo finito con la tangente, es del orden del cuadrado de* MM′, ó del arco propuesto.

Si ahora bajamos la perpendicular M′I á MT, MI diferirá de la hipotenusa MM′ en un infinitamente pequeño del orden del cubo de MM′ por lo menos (t. I, 11 *c*). Además IT es del orden del cuadrado de MM′ porque IT = M′T cos T.

Y siendo IT la diferencia de MT y MI, es la diferencia entre MT y el arco MM′, despreciando un infinitamente pequeño del cubo de MM′; luego esta diferencia es del orden del cuadrado del arco.

30. Teorema.—*La distancia de un punto de una curva á la tangente en un punto infinitamente próximo es igual, salvo términos de tercer orden, al cuadrado del arco dividido por el doble del radio de curvatura.*

En efecto, siendo la ecuación de la tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

la distancia p del punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ á esta tangente es

$$p = \pm \frac{dx\,\Delta y - dy\,\Delta x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm \frac{dx\,\Delta y - \Delta x dy}{ds}$$

pero

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \ldots, \quad \Delta x = dx + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{6}d^3x + ..$$

luego, despreciando los términos de tercer orden,

$$p = \pm \frac{1:2\,(dx\,d^2y - d^2y\,dx)}{ds} = \pm \frac{1}{2}\frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{ds^3}ds^2,$$

y, en fin, $$p = \frac{ds^2}{2R}$$

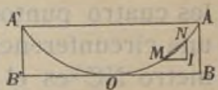


Fig. 21 bis

Ejemplo.—Sea la parábola $y = \dfrac{x^2}{2p}$

Tenemos $y' = \dfrac{x}{p}$, $y'' = \dfrac{1}{p}$, $R = \dfrac{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$

La normal N es $N = y\sqrt{1 + y'^2} = \dfrac{x^2}{2p^2}\sqrt{p^2 + x^2}$.

Cambiando y en $y + \dfrac{p}{2}$ la ecuación propuesta será

$$y = \frac{x^2 + p^2}{2p}$$

La expresión de R no cambia, pero la de N se reduce á

$$(x^2+p^2)^{3:2} \qquad \text{y se tendrá} \qquad R=2N\,.$$

Así, en la parábola, el radio de curvatura es doble de la normal, contada entre el punto de contacto y la directriz.

§ 5.º Evolutas y evolventes.

31. Definición.—Las coordenadas ξ y η del centro de curvatura correspondiente al punto M de la curva CM están determinadas por las ecuaciones

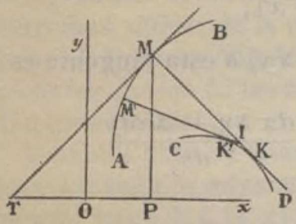


Fig. 22

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0\,,$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0\,,$$

Los centros de curvatura K, K_1, forman una nueva curva FF′ que se llama la *evoluta* de la curva CM, y esta se llama la *evolvente* de FF′

32. Teorema.—*El centro de curvatura es el límite del punto de intersección de dos normales infinitamente próximas.*

En efecto, siendo MT y M′N dos tangentes infinitamente próximas y C la intersección de las dos normales en M y M′ los cuatro puntos M, N, M′, C están en una circunferencia; y el límite de su diámetro NC es el mismo que el de MC ó M′C.

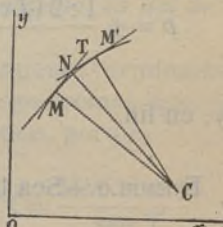


Fig. 23

El arco de círculo comprendido entre M y M′ difiere de su cuerda, y por consiguiente del arco MM′, en una cantidad infinitamente pequeña con respecto al mismo; luego se le podrá sustituir por éste, sin que resulte error en los límites de las relaciones.

Pero el ángulo inscrito MCM′ es igual al arco de circunferencia interceptado, dividido por el diámetro y es igual á TNM′;

luego $$\frac{TNM'}{\text{arc } MNM'}=\frac{1}{NC}\,.$$

Sustituyendo el arco de circunferencia MNM′ por el arco MM′ de la curva, se tendrá, pasando á los límites:

$$\lim \frac{\mathrm{TNM}'}{\mathrm{MM}'} = \frac{1}{\lim \mathrm{NC}} = \frac{1}{\lim \mathrm{MC}};$$

pero siendo $\lim \frac{\mathrm{TNM}'}{\mathrm{MM}'}$ la curvatura en M, es igual á la unidad dividida por el radio de curvatura.

Vemos por el teorema demostrado que: *la evoluta de una curva, es la envolvente de sus normales,* de lo que resulta inmediatamente la primera propiedad característica de las evolutas, es decir, que:

Las normales á la evolvente son tangentes á la evoluta.

Este teorema se deduce inmediatamente de las ecuaciones (1) y (2).

En efecto, tomando x por variable independiente, si diferenciamos (1), en la que y, $\frac{dy}{dx}$, ξ y η son funciones de x, se tendrá

$$dx - d\xi + (dy - d\eta)\frac{dy}{dx} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$dx\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2}\right] - d\xi - d\eta\frac{dy}{dx} = 0;$$

y, en virtud de (2),

$$d\xi + d\eta\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy}.$$

33. Teorema.—*La diferencia entre dos radios de curvatura* MK *y* $\mathrm{M_1K_1}$ *es igual al arco* $\mathrm{K_1K}$ *de la evoluta, comprendido entre los dos centros de curvatura correspondientes* (fig. 22)

En efecto, diferenciando la ecuación

$$\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

en la que y, ξ, η *y* ρ con funciones de x, se tiene

$$\rho\, d\rho = (x - \xi)(dx - d\xi) + (y - \eta)(dy - d\eta)$$

$$\rho d\rho = dx\left[x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx}\right] - (x - \xi)\,d\xi - (y - n)\,d\eta\,,$$

que se reduce, en virtud de (1), á

$$\rho d\rho = -(x - \xi)\,d\xi - (y - \eta)\,d\eta$$

y dividiendo por $\rho\sigma$, y designando con σ el arco FX, se tiene

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{\xi - x}{\rho}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{n - y}{\rho}\frac{d\eta}{d\sigma},$$

Pero el segundo miembro representa el coseno del ángulo que la recta MK forma con la tangente á la evoluta en el punto X, y como este ángulo es nulo, su coseno es igual á la unidad, y se tiene $d\rho = d\sigma$.

De esta ecuación resulta $\rho = \sigma + C$ é igualmente $\rho = \sigma_1 + C$.

Si imaginamos parte de un hilo arrollado en FK, hallándose la otra parte del mismo tendida en la dirección de la tangente K_1 M_1 terminando en M_1; si desarrollamos este hilo, teniéndolo siempre tendido, su extremo describirá la envolvente, y cada uno de sus puntos describirá otra envolvente. De manera que á una evoluta corresponden infinitas evolventes.

34. REGLA.—*Para obtener la evoluta de una curva, se eliminará* x *é* y *entre la ecuación de esta curva y las ecuaciones que se obtienen derivando dos veces la ecuación del círculo de curvatura ú osculador.*

Ejemplos.—Sea la parábola $y^2 = 2px$.—Hallar el radio del círculo osculador y la ecuación de la evoluta

Tenemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{p^2}{y^3}$, $\rho = \dfrac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$

Para hallar la ecuación de la evoluta, sustituiremos los valores obtenidos de $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0\,, \qquad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0\,,$$

y tendremos

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{p}{y} = 0\,, \quad 1 + \frac{p^2}{y^2} - (y - \eta)\frac{p^2}{y^3} = 0\,.$$

Para eliminar x é y, deduciremos de la última ecuación

$$1 + \frac{p^2}{y^2} - \frac{p^2}{y^2} + \frac{p^2\eta}{y^3} = 0 \qquad \text{de donde} \qquad \eta = -\frac{y^3}{p^2}\,.$$

Sustituyendo en la primera el valor de η, resultará,

$$x - \xi + p + \frac{y^2}{p} = 0\,, \qquad \text{de donde} \qquad \xi - p = 3x\,.$$

$$y^3 = -p^2\eta\,, \quad x = \frac{1}{3}(\xi - p)\,, \quad y^2 = 2px\,.$$

$$y^6 = p^3\eta\,, \quad y^6 = (2\mathrm{p}x)^3 = \left[\frac{2}{3}p(\xi - p)\right]^3.$$

Transportando el eje de ordenadas paralelamente á sí mismo hasta el punto O tal, que sea $AO = p$, la ecuación se simplifica, reduciéndose á la parábola *semi-cúbica*

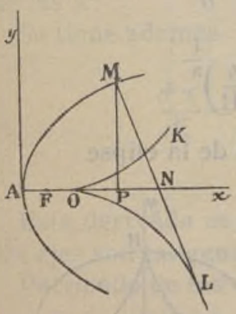


Fig. 24

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}\xi'^3 \quad \text{ó} \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{8}{27\,p}}\,\xi^{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo.— 2.° Sea la elipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}\,, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}\,,$$

$$\rho = \frac{\left(1 + \dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{b^4}{a^2\,y^3}} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^3)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

Para obtener la ecuación de la evoluta, haciendo las mismas operaciones que en el problema anterior con los valores de

$$\frac{dy}{dx} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{tendremos} \quad \frac{dy}{dx} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$a^4y^2 + b^4x^2y - a^2b^4(y - \eta) = 0$$

$$y - \eta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}$$

$$= \frac{a^4y^2 + b^2(a^2b^2 - a^2y^2)}{a^2b^4} y = \frac{(a^2 - b^2)y^2 + b^4}{b^4} y;$$

haciendo $a^2 - b^2 = c^2$, resulta

$$y - \eta = \frac{(b^4 + c^2y^2)y}{b^4} = y + \frac{c^2y^3}{b^4}; \qquad \eta = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

Permutando en esta ecuación x é y, a y b, lo que cambia c^2 en $-c^2$, se tendrá

$$\xi = \frac{c^2x^3}{a^4};$$

luego si se escribe, para abreviar, $\frac{c^2}{a} = \mathrm{A}$, $\frac{c^2}{b} = \mathrm{B}$, se tendrá

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{\xi}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{y}{b} = -\left(\frac{\eta}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

resultará $\left(\frac{\xi}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

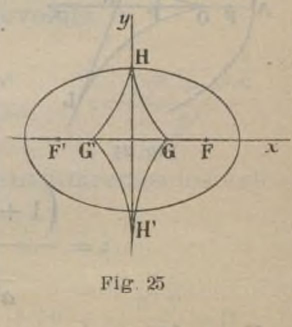


Fig. 25

curva simétrica respecto á los ejes.

Para $\eta = 0$, se tiene $\xi = \pm \mathrm{A} = \pm \frac{c^2}{a}$,

lo que dá los puntos F y F′.

De igual modo se obtendrán las intersecciones H y H′ con el eje de las y.

Diferenciando dos veces la ecuación de la evoluta á la elipse, tendremos

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\xi}{A} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\eta}{B} = 0\,,$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{d\xi^2}{A^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{d\eta^2}{B^2} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d^2\eta}{B} = 0\,,$$

deduciéndose

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{A^2} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{B^2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{3\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{B}}$$

Pero $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ es de igual signo que el denominador, porque el numerador es positivo; luego la derivada segunda tiene el mismo signo que η, y la curva vuelve su convexidad hacia el eje de las x.

Se tiene además

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\left(\frac{c}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{A}}{\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{B}} = -\left(\frac{A\eta}{B\xi}\right)^{+\frac{1}{3}} \frac{B}{A}$$

Esta derivada es nula para $\eta = 0$ é infinita para $\xi = 0$; luego los ejes son tangentes á la evoluta en los puntos G y G′ H y H′,

Partiendo de las ecuaciones de la elipse

$$x = a\cos\varphi\,, \qquad y = b\,\text{sen}\,\varphi\,;$$

la ecuación de la normal será

$$by\cos\varphi - ax\,\text{sen}\,\varphi + c^2\,\text{sen}\,\varphi\cdot\cos\varphi = 0\,.$$

Diferenciándola y eliminado φ entre esta ecuación y su derivada, multiplicándolas con este objeto, respectivamente por *sen* φ y *cos* φ, hallaremos

$$ax = - c^2 \operatorname{sen}^3 \varphi, \qquad by = c^2 \cos^3 \varphi,$$

que conducirán á $\quad (ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$

la cual escrita en forma racional será

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$$

Ejemplo 3.º—Para la hipérbola, tendremos

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \qquad \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 .$$

Pero si partimos de las ecuaciones

$$x = a\,\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \qquad y = b\,\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2},$$

llegaremos á

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

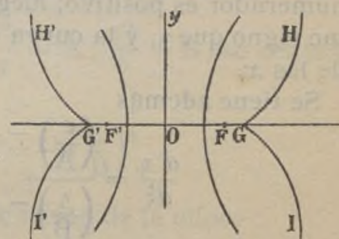


Fig. 26

La evoluta de la hipérbola equilátera es

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

ó $\quad (x^2 - y^2 - c^2)^3 - 27\,c^2x^2y^2 = 0$

Problema.—4.º *Hallar la evolvente del círculo.* — Con este objeto, busquemos el lugar de los puntos obtenidos tomando sobre las tangentes al círculo longitudes iguales al arco correspondiente, á partir de un punto fijo.

Haremos pasar el eje de las x por el punto fijo, siendo el centro del círculo el origen de coordenadas.

Llamando R al radio, Rω será el arco contado desde el punto fijo, y las coordenadas del punto correspondiente de la evolvente serán

$$x = \mathrm{R}\cos\omega + \omega\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\,,\qquad y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega - \omega\,\mathrm{R}\cos\omega. \qquad (1)$$

La podar de la evolvente del círculo, con relación al centro, tiene un radio vector igual á $\mathrm{R}\omega$, y es por tanto, una espiral de Arquímedes.

Sumando las ecuaciones (1), después de haberlas elevado al cuadrado, y haciendo $x^2 + y^2 = r^2$, se tendrá

$$\omega = \frac{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}}\,;$$

y resulta la ecuación siguiente:

$$r\cos\theta = \mathrm{R}\cos\frac{\sqrt{r^2-\mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}} + \sqrt{r^2-\mathrm{R}^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{r^2-\mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}}$$

§ 8.° Problemas

1. Forma de la curva $r\varphi = a$ respecto al polo.

Solución: Es cóncava respecto al polo.

2. Hallar los puntos de inflexión y la tangente de inflexión de $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Solución: Punto de inflexión $x = 1$, $y = f(1) = 0$.

tangente de inflexión $\quad \eta = -(\xi - 1)$ ó $\xi + \eta - 1 = 0$.

3. $$y = x^3$$

Solución: Punto de inflexión $x = 0$, $y = 0$. Tangente de inflexión $\eta = 0$.

4. $$xy^2 - a^2(a - x) = 0$$

Soluc. $\mathrm{P}\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{3}\sqrt{3}\right)$, $\quad \mathrm{P}\left(\frac{3a}{4}, -\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{P}(0, \infty)$

5. $$y = \frac{a^2x}{a^2 + x^2}$$

Solución: Puntos de inflexión

$$P_1(0, 0), P_2\left(a\sqrt{3}, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right), P_1\left(-a\sqrt{3}, -\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1, \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{1}{8}$$

6. $$r = \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

Solución: P. de infl.: $r = 8$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ y $r = 8$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$.

7. $$y = x^4 - 6x^2$$

Solución: $P_1(1, -5)$, $P_2(-1, -5)$.

Coeficientes angulares: $\operatorname{tg} \alpha_1 = -8$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = +8$.

8. $$y = 2x^3 - 6x^2 + 5x$$

Solución: P de infl. $(x = 1, y = 1)$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$.

9. $$y = x^3\left(x^2 - 5x + \frac{20}{3}\right) - \frac{8}{3}x$$

Solución: $x = 0, y = 0,\quad 8\xi + 3\eta = 0$

$x = 1, y = 0,\quad 7\xi - 3\eta - 7 = 0$

$x = 2, y = 0,\quad 8\xi + 3\eta - 16 = 0$

10. $$x^2y - 4x + 3y = 0$$

Solución: $x = 0, y = 0$; $x = 3, y = 1$; $x = -3, y = -1$

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}, \alpha_2 = -\frac{1}{6}; \alpha_3 = -\frac{1}{6}$$

11. $$x^3 - x^2y + a^2y = 0$$

Solución: La curva es convexa para todos los puntos comprendidos entre $x = +a$ y $x = +\infty$, y entre $x = -a$ y $x = -\infty$, y cóncava hácia abajo, entre $x = -a$, $x = -\infty$, $x = 0$, $x = a$. Tiene un punto de inflexión ($x = 0$, $y = 0$) y una tangente de inflexión $y = 0$.

12. $$y = \operatorname{sen} x\,.$$

Solución: $x = \pm n\pi$, $y = 0$; tg de *infl.* $\eta = \pm \xi$

13. Rad. de cur. de $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ en $(2, 0)$.

Solución: $y' = 2$, $y'' = 6$, $\xi = \frac{1}{3}$, $\eta = \frac{5}{6}$, $\rho = \frac{5}{6}\sqrt{5}$

14. Determinar el círculo osculador de la hipérbola

$$xy - a^2 = 0$$

Solución: $\xi = \frac{3x^2 + y^2}{2x}$, $\eta = \frac{x^2 + 3y^2}{2y}$, $\rho = \pm \frac{(x^2 + y^2)^{3:2}}{2xy}$

15. Determinar el círculo osculador de la curva

$$x = \varphi(t) = t\,, \qquad y = \psi(t) = t^3$$

Solución: $\xi = \frac{t}{2}(1 - 9t^4)$, $\eta = \frac{1}{6t}(+15t^4)$

$$\rho = \frac{t}{6t}(1 + 9t^4)^{2:3}$$

16. Hallar el radio de curvatura de

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$$

Solución: $$\mathrm{R} = \frac{1}{m-1}\,\frac{x^{m-2}\,y^{m-2}}{a^m\,b^m}\left(\frac{x^{2m-2}}{a^{2m}} + \frac{b^{2m-2}}{b^{2m}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

17. Hallar el radio de curvatura de la podar de la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ con relación al origen.

Solución: La ecuación de la podar es $r = \frac{a}{r} \operatorname{sen} 2\theta$; luego

$$\rho = \frac{(a^2 - 3r^2)^{3:2}}{2a^2 - 3r^2}$$

HALLAR EL CÍRCULO OSCULADOR Y LA EVOLUTA DE LAS CURVAS SIGUIENTES:

18. $3\,ay^2 = x^3$ (parábola semi-cúbica).

19. $$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$ (cisoide)

20. $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

21. $$y = ae^{\frac{x}{a}}$$ (logarítmica)

22. $$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$ (catenaria)

23. $$y + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} = 0$$ (tractriz)

24. $$r = ac^{\theta : m}$$ (espiral logarítmica)

25. $$r^2 = \cos 2\theta$$ (lemniscata)

SOLUCIONES

18. $$\rho = \frac{(2a + 3x)^3}{3a^2}$$

$$\xi = -\left(x + \frac{3x^2}{2a}\right), \qquad \eta = 14\,(a + x)\left(\frac{x}{3a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$81\,a\eta^2 = 16\left[2a \pm (a^2 - 6a\xi)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\pm\,(a^2 - 6a\xi)^{\frac{1}{2}} - a\right].$$

19. $$y' = \frac{(3a - x)^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y'' = \frac{3a^2 x^{-\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\rho = \frac{a\,(8a-3x)^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}}{3\,(2a-x)^2} \qquad 4096\,a^3\xi + 1152a^2\eta^2 + 27\eta^4 = 0\,.$$

20. $$\xi = x + 3\,(xy^2)^{\frac{1}{3}},\ \ \eta = y + 3\,(x^2y)^{\frac{1}{3}},$$

$$\rho^2 = 9\,(axy)^{\frac{2}{3}},\ \xi + \eta = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3,\quad \xi - \eta = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

$$(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi-\eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$

21. $$\rho = \frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay} \qquad \eta = \frac{a(2\,e^{\frac{2x}{a}}+1)}{e^{\frac{x}{a}}}\,,\ \ \xi = x - a\left(e^{\frac{2x}{\xi}} + 1\right)$$

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{\eta \pm (\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}\,, \qquad \frac{x}{a} = \log\,\frac{\eta \pm (\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}$$

$$\xi = a\log\,\frac{\eta \pm (\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a} - \frac{\eta^2 + 4a^2 \pm \eta\,(\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{8a}$$

22. $$\rho = \frac{y^2}{a}\,, \qquad \eta\,a = \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$\xi = x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$\xi = a\log\,\frac{\eta \pm (\eta^2 - 4a^2)^{\frac{1}{2}}}{2a} \pm \frac{\eta\,(\eta^2 - 4a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}$$

23. $$\rho = \frac{a\,(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}\,, \qquad \eta = \frac{a^2}{y^2}$$

$$\xi = -a \log \frac{a + (a^2 - 4^2)}{y}, \qquad \eta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{a}{\xi}} + e^{-\frac{a}{\xi}}\right)$$

24. Haciendo $$\frac{m}{(1+m)^{1:2}} = n.$$

se tiene $p = nr$, $\rho = \dfrac{r}{n}$, $p_1 = nr_1$ (siendo p_1 y r_1 las cantidades correspondientes en la evoluta á las cantidades p y r de la curva)

$$r_1^2 = r^2 + \rho^2 - 2p\rho, \qquad p_1^2 = r^2 - p^2$$

Para que la espiral logarítmica sea su evoluta, basta que el extremo de ρ, se halle en la curva.

Se debe pues, tener al mismo tiempo

$$r = ae^{\frac{\theta}{m}}, \quad r_1 = ae^{\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{m}}$$

Como además $r = mr_1$, la condición buscada se reduce á

$$m = e^{-\frac{(4k+1)\pi}{2m}} \qquad \text{ó} \qquad m^m = e^{-\frac{(4k+1)\pi}{2}}$$

Es necesario y suficiente que se pueda determinar un entero k que satisfaga á esta ecuación.

25. Se tiene

$$\rho = \frac{a^2}{3r} = h, \qquad \xi = \frac{2a\cos^3\theta}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \eta = \frac{2a \operatorname{sen}^3\theta}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right)\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{3} = h.$$

$$(h^2 - \xi^2 + \eta^2)^3 = \xi^2\eta^2(4\xi^2 - 4\eta^2 - 3h^2)$$

CAPÍTULO III

Estudio cinemático de algunas curvas planas.

§ 1.º Nociones cinemáticas

35. Definiciones.—La *cinemática* tiene por objeto el estudio del movimiento independiente de las fuerzas. La *Geometría cinemática* tiene por objeto el estudio del movimiento independientemente de las fuerzas y del tiempo.

Emplearemos la palabra *corrimiento* (*) para un movimiento en el que no se considera la velocidad.

En Geometría se emplean las propiedades geométricas relativas á los corrimientos de las figuras, como se emplean las diferenciales en Análisis. (**)

Las líneas descritas por los puntos, se llaman *trayectorias*.

36. Corrimiento finito de una figura en su plano.—*Dadas dos figuras iguales en un plano tales, que se las pueda hacer coincidir por resbalamiento sobre el plano, se podrá obtener la coincidencia por una simple rotación.*

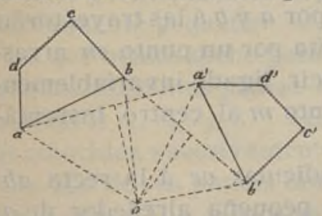


Fig. 27

Siendo iguales los cuadriláteros *abcd* y *a'b'c'd'*, supondremos que cuando coinciden los lados *ab* y *a'b'* también coinciden los cuadriláteros.

Vamos á demostrar que existe en el plano de los dos cuadriláteros un punto alrededor del cual se puede hacer girar el cuadrilátero *abcd* para que coincida con el *a'b'c'd'*.

Unamos el punto *a* con el *a'* por una recta y tracemos la perpendicular en el punto medio de la recta *bb'*. Estas dos perpendiculares se encuentran en un punto *o*.

(*) Traducción aunque no tan satisfactoria como fuera de desear de *déplacement*, que no tiene su correspondiente en castellano.

(**) *Mannheim. Cours de Géométrie Descriptive*, p. 159.

Resulta de la construcción que $ao = a'o$ y $bo = b'o$. Y se podrá hacer girar la figura alrededor de o de manera que a coincida con a' y b con b', y por consiguiente los cuadriláteros.

37. CORRIMIENTO INFINITAMENTE PEQUEÑO DE UNA FIGURA, CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN.—En un corrimiento infinitamente pequeño, el punto o se llama *centro instantáneo de rotación*. Las rectas tales como aa', bb', cc', ... son tangentes á las líneas descritas por los puntos de la figura móvil, durante su corrimiento infinitamente pequeño. Las perpendiculares levantadas á estas rectas en los puntos de contacto, son normales á las trayectorias, luego:

Por un corrimiento infinitamente pequeño de una figura en un plano, las normales á las trayectorias de los puntos de dicha figura pasan por el mismo punto, que es el centro instantáneo de rotación; y podemos por consiguiente decir, que: *Para una posición cualquiera de una figura plana que se mueve de una manera continua en su plana, las normales trazadas por los puntos de la figura á las trayectorias de estos puntos, pasan por el centro instantáneo de rotación.*

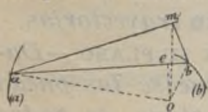


Fig. 28

Si por ejemplo la recta ab, de magnitud invariable, se mueve de modo que el punto a permanezca en su trayectoria (a) y el punto b en su trayectoria (b), el centro instantáneo de rotación es el punto de intersección de las normales trazadas por a y b á las trayectorias (a) y (b). La normal á la curva descrita por un punto m arrastrado por el movimiento de ab, es decir, ligado invariablemente á ab, es la recta mo, que une el punto m al centro instantáneo de rotación.

Bajemos desde el punto o la perpendicular oe á la recta ab. Después de la rotación infinitamente pequeña alrededor de o, el punto e se mueve sobre ab y queda en esta recta después del corrimiento de ésta, es pués la interseccion de ab con este segmento en su posición infinitamente próxima. Pertenece pués á la curva envolvente de ab.

Se determina pués, el punto en que la recta ab *es tangente á su envolvente, proyectando sobre esta recta el centro instantáneo de rotación.*

Aplicándose este razonamiento á una curva arrastrada al mismo tiempo que *ab*, se ve que: *El punto en que esta curva es tangente á su envolvente, es el pie de la normal trazada á la misma por el centro instantáneo de rotación.*

38. CORRIMIENTO CONTÍNUO DE UNA FIGURA EN SU PLANO. — Hemos visto que el corrimiento infinitamente pequeño de una figura plana en su plano es una rotación infinitamente pequeña alrededor del *centro instantáneo de rotación.* Consideremos ahora el movimiento contínuo de una figura en su plano.

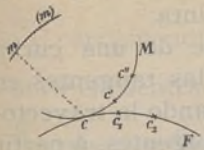


Fig. 29

Para las diversas posiciones de la figura múvil tenemos (fig. 29) en el plano fijo una serie de centros instantáneos de rotación c, c_1, c_2, ... En el plano de la figura móvil tenemos los puntos c', c'', c''', ... que pasan á ser sucesivamente estos centros de rotación. Los puntos c_1 c_1 c_2, ... pertenecen á una curva F que se halla en el plano fijo; los puntos c', c'', c''', ... se hallan en la curva M trazada en el plano de la figura móvil. Las dos curvas tienen común el punto c, que es el centro instantáneo de rotación para la posición de la figura que consideramos. *Las dos curvas* F *y* M *son tangentes entre sí en el punto* c.

En efecto, la distancia $c'c_1$ de los puntos c y c_1, que se hallan cada uno á una distancia infinitamente pequeña del punto c, es infinitamente con relación á cc', porque es menor que el arco descrito por el punto c' al girar alrededor de c en un ángulo infinitamente pequeño.

Lo que hemos dicho para el punto c es cierto sucesivamente para los diferentes puntos c', c'', c''', ... cuando coinciden con los puntos c_1, c_2, c_3, ... Tenemos pues una curva M cuyos puntos coinciden sucesivamente con los de la curva F, que es en cada uno de sus puntos tangente á la F. La curva M rueda sobre la curva F; y vemos así que *el corrimiento continuo de una figura en su plano, puede obtenerse considerando en el plano de la figura móvil cierta curva que rueda sobre una curva trazada en el plano fijo.*

La rodadura de una curva sobre otra, es un *movimiento epicicloidal.* Puede decirse que el *corrimiento contínuo de una figura plana en su plano es un movimiento epicicloidal.*

39. EVOLUTA Y EVOLVENTE. — Consideramos como curva fija una curva cualquiera y como línea móvil una recta tangente á dicha curva.

Durante la rodadura de esta tangente, cada uno de sus puntos describe una curva. Estas curvas encuentran según un ángulo recto á la tangente en cada una de sus posiciones. Son trayectorias ortogonales de las tangentes á la curva fija, y como interceptan en estas rectas segmentos iguales, son *curvas paralelas*. Todas estas curvas paralelas son las evolventes de la curva fija, que es su evoluta.

Fig. 30

Tracemos una evolvente de una curva cerrada, y consideremos las tangentes en los puntos 1, 2, 3, ... Tomando la trayectoria ortogonal de estas tangentes, á partir del punto m, se tiene por evolvente una rama que se extiende al infinito. Si tomamos las tangentes que parten de 1′, 2′, 3′, ... á la curva, en sentido opuesto, al considerado anteriormente, tenemos otra rama á partir de m, que se extiende también al infinito. Tenemos pués en m un punto para el cual existen dos ramas de curva, tangentes á la normal en m á la curva fija. El punto m es un punto de *retroceso de primera especie*, de manera que la *evolvente encuentra á la curva fija en un punto de retroceso de primera especie.*

Cuando las dos ramas de una curva son tangentes á una misma recta, y se hallan situadas á un mismo lado de ésta, se tiene un *punto de retroceso de segunda especie*, que se obtiene hallando la envolvente de una curva, que presenta un punto de inflexión.

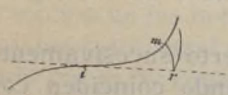


Fig. 31

Si tomamos la evolvente que parte de un punto m (fig 31) de una curva que tiene un punto de inflexión i, tenemos á partir m, la trayectoria ortogonal de las tangentes cuyos puntos de contacto son todos los puntos del arco mi. Enseguida encontramos en r á la tangente en el punto de inflexión; y á partir de este punto tenemos una rama de curva trayectoria ortogonal de las tangentes cuyos puntos de contacto se hallan en la prolongación del arco mi. La evolvente tiene en r un punto de retroceso de segunda especie.

§ 2.° Cicloide

40. Definición.—La cicloide es el lugar de las posiciones de un punto dado, M es una circunferencia que *rueda sin resbalar* sobre una recta indefinida Ax.

Tomemos por eje de abscisas la recta Ax, por orígen el punto A, donde se halla el punto generador en el orígen del movimiento, y por eje de las y la perpendicular Ay.

Se ve inmediatamente que la ordenada es máxima en el punto C correspondiente á la abscisa $AD = \frac{1}{2}$ circ. OH; que la curva encuentra de nuevo al eje de las x en un punto A′ cuya abscisa es igual á la longitud de la circunferencia generatriz, y se ve que la parte CA′ de la curva es simétrica de AC con respecto á CD. A la izquierda de A existe otro desarrollo igual é indefinido de la curva compuesta de arcos idénticos á ACA′.

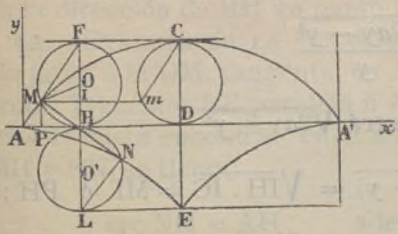


Fig. 32

Para hallar la ecuación de la curva, hagamos $MP = x$, $PM = y$, $MO = a$, $MOH = u$, y tracemos MO y MI perpendicular á GH.

Tendremos

$$x = AH - PH = \text{arc } MH - MI = au - \text{sen } u = a(u - \text{sen } u)$$

$$y = OH - IO = a - a \cos u = a(1 - \cos u).$$

Para eliminar u, entre las dos ecuaciones obtenidas, deduciremos el valor de $\cos u$, que es

$$\cos u = \frac{a - y}{a}; \text{ luego } u = \text{arc cos } \frac{a-y}{a},$$

$$\text{sen } u = \pm \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$$

sustituyendo este valor en la expresión de x, resulta:

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}.$$

Para explicar el doble signo, observaremos que si el punto M está en AC, se tiene $u < \pi$ y $\text{sen } u > 0$.

Pero si el punto M está en CA′ se tendrá $u > \pi$ y sen $u < 0$; luego el signo superior corresponde al arco AC y el inferior al CA′.

41. TANGENTE Y NORMAL. — Diferenciando las expresiones de x é y, tendremos:

$$dx = adu(1 - \cos u) = ydu, \quad dy = adu \operatorname{sen} u = du\sqrt{2ay - y^2};$$

y dividiendo la segunda expresión por la primera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}.$$

La subnormal en el punto M será $\sqrt{2ay - y^2}$.

Pero $\sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{y(2a - y)} = \sqrt{\mathrm{IH}\,.\,\mathrm{IG}} = \mathrm{MI}$ ó PH;

luego MH es la normal en el punto M, y por consiguiente, MG, perpendicular á MH, es la tangente en dicho punto.

De este resultado se deduce un procedimiento muy sencillo para construir la tangente en un punto M de la cicloide.

Tracemos la circunferencia CD sobre la ordenada máxima como diámetro. Tracemos una recta mM paralela á Ax. La paralela á Cm, trazada por M, será la tangente que se pide.

La expresión de la normal en M es

$$\sqrt{y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2}} = \sqrt{y^2 + 2ay - y^2} = \sqrt{2ay};$$

pero GH $= 2a$, IH $= y$. Esta longitud es pues, media proporcional entre IH y GH, es pues la recta MH.

42. RADIO Y CENTRO DEL CÍRCULO OSCULADOR.—Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1};$$

luego $$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2a}{y} - 1, \quad 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

Sustituyendo en la expresión de ρ, se obtiene

$$\rho^2 = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\frac{a^2}{y^4}} = \frac{8a^2y}{a^2}; \text{ luego } \qquad \rho = 2\sqrt{2ay};$$

pero $$\sqrt{2ay} = \sqrt{\mathrm{GH}.\mathrm{IH}} = \mathrm{MH};$$

luego el radio de curvatura es doble de MH ; y puesto que MH es la normal en M, se obtendrá el centro de curvatura, tomando en la dirección de MH un punto N tal, que MN = 2MH.

43. Evoluta de la cicloide. — Sea HN1 una circunferencia igual á la OM, tangente en H al eje Ax, encima de esta recta. Tracemos LE paralela á Ax y prolonguemos el diámetro CD hasta encontrar en E á LE. Siendo iguales los arcos MH y HN, se tiene

$$\text{arc NH} = \text{AH}, \qquad \text{además arc HNL} = \text{AD};$$

luego $$\text{arc NL} = \text{AD} - \text{AH} = \text{DH} = \text{LE}.$$

La evoluta de la cicloide se engendra pués por el movimiento de un punto N situado en la circunferencia de un círculo igual al círculo OM , pero que rueda sobre una paralela LE á Ax, debajo de esta recta y á una distancia de ésta igual al diámetro del círculo móvil. Esta evoluta, es pues, una cicloide igual á la primera.

44. Longitud de un arco de cicloide.—La recta MN , doble de HN, es el radio de curvatura correspondiente al punto M de la cicloide evolvente, ó la tangente trazada por N á la cicloide ANE evoluta de la primera. Además, en el punto A, el radio de curvatura es nulo, porque la normal MH se hace nula en este punto. Luego, como un arco de evoluta es igual á la diferencia de los radios de curvaturas extremas, se tiene

$$\text{arc AN} = \text{MN} = 2\text{NH}.$$

Volviendo á la cicloide propuesta, se puede decir que el arco CM es igual á 2MG.

Expresemos este arco en función de las coordenadas de sus extremos.

Se tiene arc CM $= 2\text{MG} = 2\sqrt{2a\text{MG}}$

y, por ser $\text{MQ} = 2a - y$, arc MC $= 2\sqrt{4a^2 - 2ay}$.

Si se hace $y = 0$, se tendrá

$$\text{arc CA} = 4a\text{ ; luego} \qquad \text{arc ACA}' = 8a\text{ ;}$$

luego: *el arco entero de la cicloide es igual á cuatro veces el diámetro del círculo generador.*

45. Especies de cicloides.—Se llama *trocoide* á la cicloide descrita por un punto unido al plano del círculo de radio a, situado á una distancia b del centro. Las ecuaciones paramétricas son en este caso

$$x = au - b \operatorname{sen} u\,, \qquad y = a - b \cos u$$

y la ecuación reducida

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{b} - \sqrt{b^2 - (a-y)^2}$$

Si $b > a$ el punto generador es exterior al círculo, la cicloide se llama *alargada;* se distingue de la ordinaria por tener en vez de puntos de retroceso, bucles que atraviesan á la base. Su perímetro es $> 8a$.

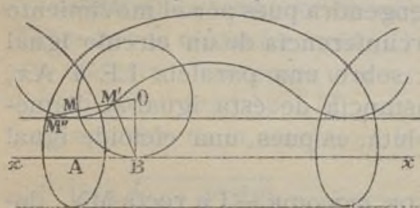


Fig. 33

Si $b < a$, la cicloide se llama *reducida*, su trazado ofrece analogía con el de la sinusoide; no tiene rotrocesos, ni admite tangentes perpendiculares al eje de las x. Admite puntos de inflexión. Su perímetro es $< 8a$ y $> 2\pi a$. El límite de esta cicloide es la recta paralela al eje de las x á la distancia a descrita por el centro del círculo móvil *(H. Brocard.* Notes de bibliog. des courbes).

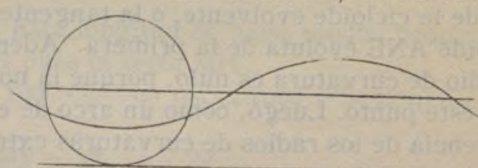


Fig. 34

Aplicación.—En la cicloide prolongada se tiene que

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{b\,(a \cos u - b)}{(a - b \cos u)^2}$$

Desde $u = 0$ hasta $u =$ arc cos $\frac{a}{b}$ la concavidad se vuelve hacia las y positivas. Para cos $u = \frac{a}{b}$ hay un punto de inflexión, y más allá se vuelve la concavidad hacia abajo.

§ 4.° Epicicloides.

46. Definición.—Epicicloide es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia.

Sean LL′ la curva fija y SS′ la curva móvil, M el punto de contacto para una posición cualquiera de SS′, A, la posición correspondiente del punto de SS′ (ó que está ligado invariablemente á SS′) y que describe la curva *(súplase la figura)*.

Tomemos sobre las dos curvas dos arcos infinitamente pequeños iguales MM′ y MM_1. Los puntos M′ y M_1 coincidirán cuando el punto de contacto de las dos curvas sea M_1, porqué según la definición de la rodadura sin resbalamiento, los arcos que separan puntos de contacto correspondientes, tomados en las dos curvas, deben ser iguales.

Para llevar el sistema móvil á la posición que entonces tendrá, se le puede hacer mover al principio de modo que todos los puntos describan rectas iguales y paralelas á $M'M_1$, lo que conducirá M′ á M_1. Enseguida, dejando fijo el punto en M, se hará girar el sistema alrededor de este punto, de manera que la tangente en M′ coincida con la tangente en M_1. En este último movimiento todas las rectas se inclinarán, con respecto á su primera dirección, un ángulo igual al de las tangentes en M′ y M_1, es decir, en la suma ó la diferencia de las curvaturas de los dos arcos MM′ y MM_1, según que estas dos curvaturas sean de sentido contrario ó de igual sentido. Si pues, trazamos AA′ igual y paralela á $M'M_1$, y desde M_1 como centro con un radio igual á $A'M_1$ que es el AM′, describimos un arco de círculo $A'A_1$ tal, que el ángulo $A'M_1A$ sea igual al de las tangentes en M′ y M_1, A_1 será la posición exacta de A, correspondiente al contacto en M_1; luego AA_1 será la secante cuyo límite será la direccion de la tangente buscada.

Pero siendo la unidad el límite de la relación de los lados MM' y MM_1 del triángulo rectilíneo $MM'M_1$, que comprenden un ángulo infinitamente pequeño, el tercer lado $M'M_1$ es infinitamente con respecto á los otros. Además, el ángulo de las tangentes en M' y M_1 es generalmente de primer orden, aún cuando las curvaturas son de igual sentido. Su igual será de primer orden, y lo mismo sucederá á la recta $A'A_1$, porque $A'M_1$ tiene una longitud finita; luego en el triángulo $AA'A_1$, el lado AA' es infinitamente pequeño con relación á $A'A_1$. Por consiguiente, el ángulo A_1 tiene por límite cero, y la dirección de la secante AA_1 tiene el mismo límite que $A'A_1$. Pero esta última tiende á formar un ángulo recto en A' con la recta $A'M_1$ cuya posición límite es AM; luego, por fin, el límite de la dirección AA_1 ó la tangente buscada, es perpendicular á AM.

47. Ecuación de la epicicloide.—Sean Ox y Oy las direcciones de dos diámetros perpendiculares del círculo O de radio a y un punto L de la circunferencia de radio b, que rodando sin resbalar sobre la primera, describe la epicicloide. Tendremos (suplánse los puntos B, G, L, I, Q), que

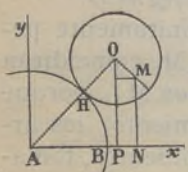


Fig. 35

$$x = OP + PQ = OQ\,, \quad y = OP - OG = LQ\,.$$

Expresando el ángulo PAO por u, se tiene

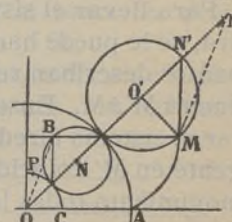


Figura 36

$$x = (a+b)\cos u + b \operatorname{sen}\left(\frac{au}{b} - 90^0 + u\right)$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen} u - b\cos\left(\frac{au}{b} - 90 + u\right)$$

$$x = (a+b)\cos u + b\cos\frac{a+b}{b}\,u \qquad (1)$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen} u - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\,u\,. \qquad (2)$$

Más generalmente, si el punto que describe la curva es un punto M de OL, á una distancia $OM = h$, se tendrá

$$x = AP + IM = AN\,, \qquad y = OP - OI = IP = MN$$

ó $$x = (a+b)\cos u + h \cos \frac{a+b}{b} u ,$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen} u - h \operatorname{sen} \frac{a+b}{b} u .$$

Si el círculo móvil es interior al círculo fijo, la curva engendrada se llama *hipocicloide*, y las ecuaciones correspondientes difieren de las anteriores por escribirse en vez de $a+b$, $a-b$.

48. Tangente y normal.—De las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos u - h\cos\frac{a+b}{b}u}{b\operatorname{sen} u - h\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}u}$$

Este resultado basta para la determinación analítica de la tangente; pero no da una construcción geométrica. Para conseguir este objeto, escribamos la ecuación de la normal

$$\left[\mathrm{Y} - (a+b)\operatorname{sen} u + h \operatorname{sen}\frac{a+b}{b}u\right]\left(b\cos u - h\cos\frac{a+b}{b}u\right)$$

$$= \mathrm{X} - (a+b)\cos u + h\cos\frac{a+b}{b}u\Big]\left(b\operatorname{sen} 0 - h\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}u\right)$$

Esta ecuación queda satisfecha para $\mathrm{Y} = a\operatorname{sen} u$ y $\mathrm{X} = a\cos u$; pero el punto cuyas coordenadas son $a\operatorname{sen} u$ y $a\cos u$ es el punto de contacto del círculo móvil y del círculo fijo, de donde resulta una construcción de la normal análoga á la de la cicloide.

49. Nomenclatura de las curvas cicloidales.

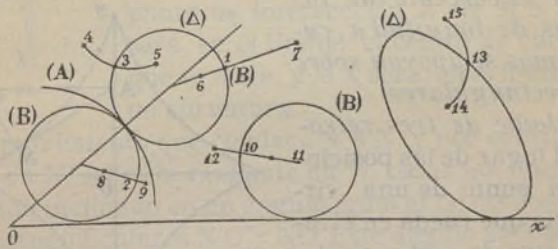


Fig 37

(A) círculo fijo de radio a. (B) círculo móvil de radio b.

(Δ) curva cualquiera que rueda sobre la circunferencia (A) ó sobre la recta OAx.

1, 2, ….. , 15 puntos generadores. *(Brocard*, N. d. b. d. courbes).

1. engendra la epicicloide.
2. „ „ hipocicloide.
3, 4, 5 „ „ epicicloidal, ó curva epicicloidal (los puntos 3, 5, 4 están ligados á Δ).
6, 7 „ epitrocoide (los puntos 6 y 7 unidos al círculo B)
8, 9, „ „ hipotrocoide (unidos al círculo B los puntos 8 y 9).
10. „ „ cicloide.
11. „ „ cicloide acortada (el punto 11 unido á B).
12. „ „ cicloide prolongada (el punto 12 unido á B).
13, 14 y 15 „ „ cicloidad ó curva cicloidal (13, 14, 15 unidos á Δ). (1)

50. Casos particulares.

Haciendo $h = b = a$, la ecuación de la epicicloide es

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a\,[(x - a)^2 + y^2]$$

Trasladando el origen al punto B , esta ecuación se reduce á

$$r = 4a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

y representa la epicicloide que se llama cardioide, por su forma particular *(Brocard*, obra citada).

Si en las ecuaciones precedentes se hace $b = \frac{a}{4}$, suponiendo interior el círculo móvil, se tiene

$$(a^2 - x^2 - y^2)^3 = 27a^2x^2y^2 \quad \text{ó} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

ecuación de la *astroide* ó *hipocicloide de cuatro retrocesos, que es la envolvente de los segmentos de longitud a, cuyos extremos se apoyan sobre dos ejes rectangulares.*

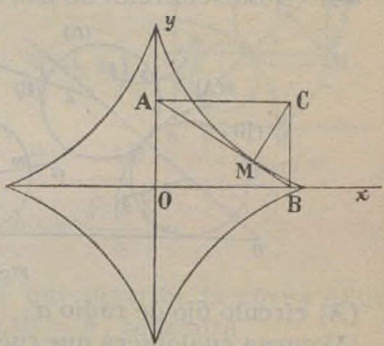


Fig. 38

Hipocicloide de tres retrocesos es el lugar de las posiciones de un punto de una circunferencia que rueda en el interior de otra de radio triple.

Se puede sustituir esta definición por las dos siguientes:

Dado un círculo OC de radio

a, la tangente Oy en O y el punto A del círculo, la hipocicloide de tres retrocesos es la envolvente del lado AF del triángulo isósceles OAF, ó la envolvente de la cuerda MS que une los extremos MS de dos arcos OM y OS, de los cuales el primero es la mitad del segundo (fig. 39).

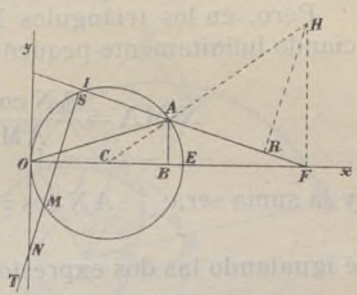


Fig. 39

Estas dos definiciones no son más que una; porque el triángulo OMN es isósceles, y el arco OI es doble del arco AE. *(Brocard* N. de B. des Courbes).

51. Radio de curvatura.—Dadas E′F′ y EF, de las que la primera rueda sin resbalar sobre la segunda, sea A el punto de contacto de ambas, correspondiente á una posición M del punto que ligado á la curva móvil, describe la curva cuyo radio de curvatura vamos á determinar.

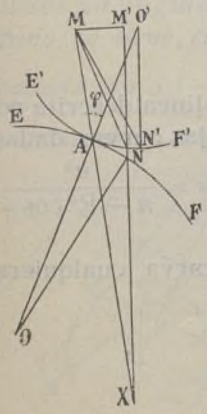


Fig. 40.

AM será la normal á la curva descrita por M. Sean n su longitud AM y φ el ángulo que forma con la normal común OO′ á las dos curvas dadas.

Tomemos en estas curvas dos arcos infinitamente pequeños iguales AN y AN′. Sea M′ la posición que habrá tomado M cuando N′ se haya aplicado sobre N; MN′ adquirirá la posición M′N y será normal en M′. El punto de intersección X de M′N y de MA será, en el límite, el centro de curvatura de que se trata, y MX será, en el límite, el radio de curvatura ρ.

En el movimiento que conduce N′ á N, y por consiguiente, la tangente en N′ sobre la tangente en N, todas las líneas del sistema se han inclinado en un ángulo igual al de las dos tangentes ó de sus perpendiculares N′O′ y NO. Este ángulo es $O + O'$, siendo su medida

$$\frac{AN}{R} + \frac{AN'}{R'} \quad ó \quad AN\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

por ser $AN = AN'$.

La recta N′M cuando llega á coincidir con M′NX, se ha inclinado un ángulo igual á N′MA + X.

Pero, en los triángulos N′MA y NAX se obtiene, despreciando infinitamente pequeños de orden superior,

$$N'MA = \frac{AN\cos\varphi}{AM}, \qquad X = \frac{AN\cos\varphi}{AX};$$

y la suma será: $\quad AN\cos\varphi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right);$

é igualando las dos expresiones de la rotación del sistema,

será $$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right)\cos\varphi$$

$$\rho = \frac{n^2(R + R')}{n(R + R') - RR'\cos\varphi}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} - \frac{RR'\cos\varphi}{n^2(R + R')}, \tag{2}$$

fórmulas que dan el radio de curvatura de la línea descrita por M, en función de los radios de curvatura de las curvas dadas.

Si la línea EF es recta, se tiene $R = \infty$ y $\rho = \frac{n^2}{n - R'\cos\varphi}$, fórmula aplicable á la cicloide.

Si E′F′ es una recta, siendo EF una curva cualquiera, se tiene $R' = \infty$ y la fórmula (1) se reduce á

$$\rho = \frac{n^2}{n - R\cos\varphi}.$$

Si además M está en la recta móvil, será $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\rho = n$.

El centro de curvatura estaría en el punto de contacto A, y la curva descrita sería la evolvente de la curva fija.

52. Aplicación á las epicicloides.—Si las dos curvas son circunferencias, el triángulo AMB da $\cos\varphi = \frac{n}{2R'}$, y se tiene

$$\rho = \frac{2n(R + R')}{R + 2R'} = n + \frac{nR}{R + 2R'}.$$

Para obtener el centro de curvatura, basta prolongar la normal AM en $AX = \dfrac{nR}{R + 2R'}$.

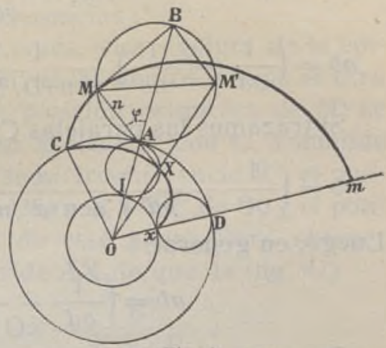


Fig. 41

Esta observación da un medio de obtener el centro de curvatura. Basta para ello trazar el diámetro MM′ y después la recta M′O, que encuentra á MA en el centro de curvatura X; porque siendo BM′ paralela á MA, se tiene $\dfrac{AX}{BM'} = \dfrac{AO}{OB}$ ó

$$\frac{AX}{n} = \frac{R}{R + 2R'} .$$

Si $R = \infty$, la curva se reduce á una cicloide.

53. Otra expresión del radio curvatura. Teorema.— *Dados un ángulo* (A, B) (fig. 43) *y un punto* o *cualquiera en su plano, se tiene, cualquiera que sea la dirección de una recta trazada por* o, $\left(\dfrac{1}{od} - \dfrac{1}{oc}\right)\dfrac{1}{\operatorname{sen} dom} = \text{constante.}$ (*)

Sean ab un segmento de una recta cualquiera M; m el polo de esta recta, A, B las polares de los puntos a, b con relación á una circunferencia o (fig. 42).

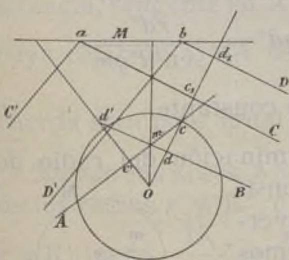


Fig. 42

Tracemos por los puntos a, b rectas paralelas cualesquiera C, D; y desde el punto o, bajemos una perpendicular á estas rectas, que corta á A y B en los puntos c y d, polos de C y D, y á estas en los puntos c_1 y d_1. Se tiene

$$c_1 d_1 = ab \operatorname{sen}(C, M) = ab \operatorname{sen}(D, M);$$

de donde
$$ab = \frac{c_1 d_1}{\operatorname{sen}(D, M)} .$$

Pero

$$c_1 d_1 = od_1 - oc_1 \quad \text{y} \quad od_1 = \frac{1}{od} \quad , \quad oc_1 = \frac{1}{oc} \quad ,$$

(*) Mannheim, *Transformation des propriétés métriques des figures* p. 3.

pues el radio de la curva directriz es siempre 1; luego

$$c_1d_1 = \frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\ ;$$

$$ab = \left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{\text{sen}\,(\mathrm{D},\mathrm{M})} = \left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{\text{sen}\,(d,m)}$$

Si trazamos las paralelas C′, D′, tendremos

$$ab = \left(\frac{1}{oc'} - \frac{1}{od'}\right)\frac{1}{\text{sen}\,(d',m)} = \left(\frac{1}{od'} - \frac{1}{oc'}\right)\frac{1}{\text{sen}\,d'om}$$

Luego, en general:

$$ab = \left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{\text{sen}\,dom}$$

De esta expresión se deduce el teorema, como sigue.

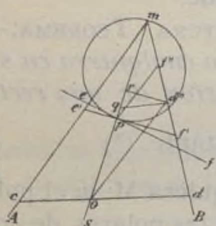


Fig. 43

Tracemos od'' paralela á A y $d''q$ paralela á cd. Tendremos entonces

$$\frac{co+od}{co} = \frac{md}{md''} = \frac{od}{qd''}$$

ó
$$\frac{co+od}{co.\,od} = \frac{1}{od} + \frac{1}{oc} = \frac{od}{qd''}\,.$$

Siendo rd'' perpendicular á om, se tiene (fig. 43), $qd'' = \dfrac{rd''}{\text{sen}\,d''qm}$

y
$$\left(\frac{1}{od} + \frac{1}{co}\right)\frac{1}{\text{sen}\,dom} = \text{constante.}$$

Apliquemos este teorema á la determinación del radio de curvatura de la epicicloide. Para ello consideraremos el ángulo mdo y las dos transversales mb y co que pasan por a. Tendremos

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{a\mu} = \left(\frac{1}{\mathrm{R_M}} - \frac{1}{\mathrm{R_F}}\right)\frac{1}{\text{sen}\,oad}$$

Llamando ρ al radio de curvatura $m\mu$ y φ al ángulo mac, la última fórmula puede escribirse así:

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{\rho - am}\left(\frac{1}{\mathrm{R_M}} + \frac{1}{\mathrm{R_F}}\right)\frac{1}{\cos\varphi}\,.$$

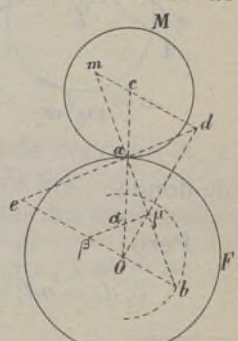


Fig. 44

Esta fórmula permite determinar ρ, conociendo el ángulo φ y la parte de normal *am* comprendida entre el punto generador y el de contacto de las dos circunferencias (*).

54. Evolutas de las epicicloides.—La evoluta de la epicicloide descrita por M es el lugar de los puntos X, que es otra epicicloide. En efecto, sea C la posición primitiva de M; se tiene entonces $AM = o$, y el punto X coincide con C. Tomando enseguida el arco CD igual á la semicircunferencia R′, el punto M estará en m á su distancia máxima $R + 2R'$ de O, y el punto X á su distancia mínima Ox de este punto. Para obtener ésta, haremos $n = 2R'$ en el valor de AX, lo que da (fig. 41)

$$Dx = \frac{2RR'}{R + 2R'}, \quad Ox = \frac{R^2}{R + 2R'},$$

haciendo $Ox = r$, $Dx = 2r'$, resulta

$$r = \frac{R^2}{R + 2R'}, \quad r' = \frac{RR'}{R + 2R'}; \quad \text{luego } r : r' : R : R'.$$

Esto sentado, describamos desde el centro o una circunferencia con r por radio, que cortará á OB en I; y sobre AI como diámetro, describamos una circunferencia cuyo radio será r'. Esta pasará por X, porque MA prolongada hasta esta circunferencia, tangente en A á la circunferencia O′, dará una cuerda cuya relación á MA será la de los radios $\frac{r'}{R'}$ ó $\frac{R}{R + 2R'}$; esta cuerda será pues igual á $\frac{nR}{R + 2R'}$ ó á AX.

Siendo los arcos AX y AM semejantes, estarán en la razón de los radios r' y R′, ó según lo que precede, en la relación de r á R; luego $\frac{IX}{AM'} = \frac{r}{R}$; pero $AM' = AD$, porque CD es igual á la semicircunferencia MAM′;

$$\text{luego} \quad \frac{IX}{AD} = \frac{r}{R} = \frac{Ox}{OD}, \quad IX = Ix;$$

luego el punto X está constantemente en la epicicloide descrita por un punto de la circunferencia de radio r' que rueda sobre la circunferencia de radio r, partiendo este punto de x.

(*) Mannheim, *Cours de Géométrie descriptive* (p. 180).

55. Doble generación de las epicicloides. — 1.º Sea el círculo interior al círculo fijo O, de radio AC y centro C, y M el punto generador, cuya posición primitiva era *m*. Se tendrá $AM = Am$. Por M hagamos pasar una circunferencia de radio OC y tangente á O. Bastará, para ello, trazar el radio OA′ paralelo á CM y tomar $OC' = AC = CM$. Resultará

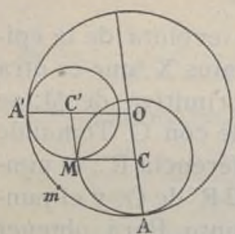


Fig. 45.

$$A'C' = OC = CM.$$

La circunferencia descrita desde el centro C′ con un radio igual á OC, pasará por M y será tangente en A′ al círculo O.

Esto sentado, se ve que los arcos A′M y B′*m* son iguales, pues OCMC′ es un paralelógramo y $\angle A'C'M = \angle MCA = \angle A'OA$;

luego $$\frac{A'M}{C'M} = \frac{AM}{AC} = \frac{AA'}{OA} = \frac{A'M + AM}{OA};$$

luego $AA' = A'M + AM$ y $A'M = A'm$; luego M pertenece á la epicicloide descrita por el círculo C′ que rueda interiormente sobre el círculo O en sentido contrario al C.

2.º Sea el círculo generador A exterior al círculo fijo, M el punto de A que describe la epicicloide, I su posición primitiva sobre O, arc $B'M$ = arc BI *(constrúyase la figura)*.

Tracemos por O un radio OB′ paralelo á AM.

Tomemos $OA' = AM$ y describamos una circunferencia desde A′ como centro con un radio A′B′ igual á la suma de los radios de los círculos dados. Este círculo será tangente en B′ al O; además pasará por M, porque MAOA′ es un paralelógramo, y por consiguiente $A'M = OA = A'B'$.

Siendo $\angle A = \angle A' = \angle O$, se tendrá

$$\frac{MB}{AB} = \frac{BB'}{OB} = \frac{MB'}{A'B'};$$

luego $$MB' = MB + BB' = IB + BB';$$

luego el punto M pertenece á la epicicloide descrita por un punto de la circunferencia A′ que rueda sobre O, al mismo lado que la circunferencia A.

LIBRO SEGUNDO

SINGULARIDADES DE LAS CURVAS PLANAS

CAPÍTULO I

Aplicación del Álgebra de las formas

§ 1.º FORMAS HOMOGÉNEAS, INVARIANTES, COVARIANTES, ETC.

56. DEFINICIONES.—Se da el nombre de *forma algebráica* á toda función algebráica homogénea, racional y entera de dos ó más variables, que será *binaria, ternaria,* etc., según que tenga dos, tres ó más variables. Se escriben estas formas abreviadamente así:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l , \dots .$$

Sustitución ó transformación lineal es la operación por la que se sustituyen, en una función, sus variables x, y, z,... por otras X, Y, Z,...ligadas á las primeras por las ecuaciones lineales

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + \dots \quad y = \lambda_2 X + \lambda_2 Y + \dots, \quad z = \lambda_3 X + \dots$$

Cuando se tienen dos sistemas de variables

$$x, y, z, \dots . \, (\alpha) \qquad \xi, \mu, \zeta, \dots \quad (\beta)$$

y se trata de sustituirlos por los otros dos

$$X, Y, Z, \dots (\alpha') \qquad X_1, Y_1, Z_1 \quad (\beta')$$

debemos distinguir dos casos:

1.º El sistema (α) se sustituye por el (α') mediante la sustitución (1)

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z \qquad y = \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z \\ \qquad\qquad z = \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z \end{array} \right\} (1)$$

y el sistema (β) por el (β') mediante la sustitución (2)

$$\left.\begin{array}{c} \xi = \lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1 \,, \quad \mu = \lambda_2 X_1 + \mu_2 Y_1 + \nu_2 Z_1 \,, \\ \zeta = \lambda_3 X_1 + \mu_3 Y_1 + \nu_3 Z_1 \,, \end{array}\right\} \quad (2)$$

de manera que el módulo de la sustitución sea idéntico en las dos sustituciones (1) y (2); entonces las dos sustituciones son *directas* y los sistemas de variables $x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \zeta, \ldots$ se denominan *cogredientes*.

2.º Si permaneciendo la misma la sustitución (1), el sistema (β) se sustituye por el (β') mediante la transformación (3):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta \qquad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta \\ Z_1 = \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta \end{array}\right\} \quad (3)$$

en la cual las nuevas variables se determinan en función de las primitivas, siendo el módulo el resultado de cambiar en el de la transformación (1) las líneas por columnas y las columnas por líneas, las dos sustituciones (1) y (3) se llaman *inversas* y los sistemas de variables $x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \zeta, \ldots$ *contragredientes*.

El objeto de la teoría de las formas se puede expresar del modo siguiente: *Si una forma de cualquier grado y de* k *variables se transforma en otra por medio de una sustitución lineal, la nueva forma y la primitiva tienen algunas propiedades comunes, y el estudio de dichas propiedades, que no se alteran por la sustitución lineal efectuada, constituye el objeto de la teoría de las formas.*

Se llama *invariante* toda función de los coeficientes de una forma tal, que si se efectúa en ésta una sustitución lineal, la nueva función de los coeficientes de las nuevas variables es igual á la función primitiva multiplicada por una potencia del módulo de la sustitución, que es el determinante de los coeficientes de ésta. Así, por ejemplo

$$a X^2 + 2b XY + c Y^2$$

se transforma por la sustitución

$$X = \lambda x + \mu y \quad , \quad Y = \lambda' x + \mu' y$$

en $a(\lambda x + \mu y)^2 + 2b(\lambda x + \mu y)(\lambda' x + \mu' y) + c(\lambda' x + \mu' y)^2$

ó en $$a' x^2 + 2b' xy + c' y^2$$

habiendo hecho, por brevedad,

$$a' = a\lambda^2 + 2b\lambda\lambda' + c\lambda'^2,$$
$$b' = a\lambda\mu + b(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + c\lambda'\mu',$$
$$c' = a\mu^2 + 2b\mu\mu' + c\mu'^2;$$

y se verifica que

$$a'c' - b'^2 = (ac - b^2)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2.$$

En general se tendrá

$$\varphi(a, b, \ldots) = \Delta^p \varphi(a', b', \ldots),$$

representado Δ el módulo de la transformación, cuando $p = o$, se tendrá

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots).$$

Entonces φ será un invariante *absoluto*.

Análogamente para un sistema de formas cuyos coeficientes son respectivamente

$$a, b, c, \ldots; \qquad a', b', c', \ldots; \qquad a'', b'', c'', \ldots$$

y los correspondientes de las transformadas

$$A, B, C, \ldots; \qquad A', B', C', \ldots; \qquad A'', B'', C'', \ldots$$

se tendrá

$$\varphi(A, B, \ldots, A', B', \ldots, A'', B'', \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, a', b', \ldots, a'', b'', \ldots).$$

Si las funciones de los coeficientes que hemos considerado, contienen también las variables, entonces tendremos un covariante expresado por la relación análoga

$$\varphi(A, B, \ldots, X, Y, \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots)$$

Si una forma $ax^n + \ldots$ se reduce á $AX^n + \ldots$ por una transformación, llamaremos *contravariante* á una función que contenga los coeficientes de la forma y las variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, transformadas por la sustitución inversa, si esta función es igual á la función correspondiente de los coeficientes y de las variables de la transformada, multiplicada por una potencia del módulo, es decir si

$$\varphi(A, B, \ldots, X_1, Y_1, \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, \xi, \eta, \ldots)$$

Análogamente se definen los *covariantes mixtos* por la fórmula

$$\varphi(A, B, \ldots, X, Y, \ldots, X_1, Y_1, \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots, \xi, \eta, \ldots)$$

57. Formación de variantes y de covariantes. — 1.º En la imposibilidad de tratar detenidamente esta cuestión, nos bastará indicar, respecto á los invariantes que: *cuando se conoce un invariante de una forma única, se puede deducir una serie de invariantes para un sistema de formas del mismo grado.* Dado el invariante

$$ac - b^2 \quad \text{de} \quad ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

y suponiendo que por una transformación lineal

$$\begin{array}{lll} ax^2 + 2bxy + cy^2 & \text{se reduce á} & AX^2 + 2BXY + CY^2\,, \\ a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 & \text{»} & A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2\,; \end{array}$$

por la misma transformación,

$$(a + ka')x^2 + 2(b + kb')xy + (c + kc')y^2$$

se reducirá á

$$(A + kA')X^2 + 2(B + kB')XY + (C + kC')Y^2\,.$$

Formando el invariante de esta última, tendremos

$$\begin{aligned}(A + kA')\,(C + kC') - (B + kB')^2 \\ = \Delta^2[(a + ka')\,(c + kc') - (b + kb')^2]\,.\end{aligned}$$

Pero siendo k arbitrario, podremos identificar los coeficientes de las mismas potencias de los dos miembros, y tendremos

$$AC - B^2 = \Delta^2(ac - b^2), \quad A'C' - B'^2 = \Delta^2(a'c' - b'^2)$$

$$AC' + A'C - 2BB' = \Delta^2(ac' + a'c - 2bb')\,.$$

Análogamente; si se tiene un invariante de $ax^n + \ldots.$, y se piden invariantes de un sistema de dos formas

$$ax^n + \ldots\ldots, \qquad a'x^n + \ldots\ldots,$$

sustituiremos en el invariante dado a por $a + ka'$, b por $b + kb'$ é identificaremos. Efectuando el desarrollo por la fórmula de Taylor, podremos decir que: *Si se tiene un invariante de una forma* $ax^n + \ldots\ldots$, y se efectúa sobre este invariante la operación

$$a'\frac{\partial}{\partial a} + b'\frac{\partial}{\partial b} + c'\frac{\partial}{\partial c} + \ldots\ldots,$$

se obtendrá un invariante del sistema de las dos formas

$$ax^n + \ldots\ldots \quad \text{y} \quad a'x^n + \ldots\ldots$$

Se puede repetir la operación .....; y si se efectúa la operación $a''\frac{\partial}{\partial a}+b''\frac{\partial}{\partial b}+\ldots\ldots$, se tendrá un invariante de un sistema de tres formas, y así sucesivamente.

2.º Si en una forma u sustituímos x por $x+kx'$, y por $y+ky'$, ..., debiéndose transformar $x', y', \ldots\ldots$, por la misma sustitución que $x, y, \ldots\ldots$ los coeficientes de las diversas potencias de k, que se pueden expresar todos por la misma fórmula simbólica,

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\ldots\right)^p u,$$

serán el primero, segundo, ... *emanante* de la forma. Cada uno es un covariante.

EJEMPLO.—Se ha visto (p. 122) que si la forma binaria $ax^2+2bxy+cy^2$ tiene por transformada $AX^2+2BXY+CY^2$, resulta

$$AC-B^2=\Delta^2(ac-b^2);$$

y se concluye, considerando el segundo emanante

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u$$

de una forma de grado cualquiera, que se tiene también

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial Y}\right)^2=\Delta^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right..$$

Se conocen muchos procedimientos para la formación de invariantes y de covariantes tales, como el de las funciones simétricas, el de la diferenciación de covariantes y de contravariantes, el empleo de las ecuaciones diferenciales

$$a_0\frac{\partial I}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial I}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial I}{\partial a_3}+\ldots\ldots=0,$$

$$na_1\frac{\partial I}{\partial a_0}+(n-1)\,a_2\frac{\partial I}{\partial a_1}+\ldots\ldots=0,$$

siendo I un invariante; lo que no es objeto de la presente obra.

Los ejemplos más sencillos de invariantes y covariantes son el resultante de un sistema de ecuaciones, el discriminante de una forma, el Hessiano y el determinante de Jacobi ó Jacobiano, que han sido empleados en esta obra.

§ 2.º APLICACIONES Á LAS FORMAS PROYECTIVAS Y Á LAS AFINIDADES LINEALES

58. DEFINICIONES.—La teoría de las formas homogéneas de dos variables tiene su interpretación geométrica en la geometría de las *series de puntos* ó de *haces de rayos*. La teoría de las formas ternarias tiene su representación en la geometría plana proyectiva y la de las formas cuaternarias en la de la geometría proyectiva de tres dimensiones.

Las geometrías de la recta y del haz se desarrollan, tanto en el plano como en el espacio.

59. INTERPRETACIÓN DE LAS FORMAS BINARIAS.—Dados dos puntos fijos A y B, si se designa por p la distancia de un punto móvil C á A y por q su distancia á B, será

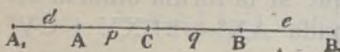


Fig. 46

$$p + q = c. \tag{1}$$

Un punto cualquiera de la recta estará determinado por la relación $\frac{p}{q}$, y con mayor generalidad por dos números x_1 y x_2 mediante las dos ecuaciones

$$\rho x_1 = ap \,, \qquad \rho x_2 = bq$$

siendo a y b dos constantes arbitrarias, de modo que á cada valor de $\frac{x_1}{x_2}$ corresponde un valor único de $\frac{p}{q}$, y por consiguiente un solo punto de la recta.

Los puntos de base están determinados por las ecuaciones

$$x_1 = o \,, \qquad x_2 = o.$$

La significación de la relación de distancia $\frac{x_1}{x_2}$, en el caso general que consideramos, es idéntica, para $a = b$, á la de un parámetro λ, por el que se representan los puntos de la recta que une dos puntos $(x_0, y_0;\ x_1, y_1)$, mediante las ecuaciones conocidas

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda} \,, \qquad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda} \,,$$

en coordenadas cartesianas.

Análogamente, en coordenadas tangenciales u y v, se pueden expresar las rectas de un haz referidas á dos $(u_0, v_0; u_1, v_1)$ por las ecuaciones

$$u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}, \quad v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda};$$

y si expresamos por r y s las distancias de un punto cualquiera de una recta del haz á las dos rectas de base y también por a y b dos constantes arbitrarias, podremos expresar las coordenadas x_0 y x_1 mediante las dos ecuaciones

$$\rho x_1 = ar, \quad \rho x_2 = bs.$$

60. Significación geométrica de las transformaciones lineales.—Si queremos sustituir los puntos de base A y B por otros dos puntos A_1 y B_1 tomados en la misma recta, representando A_1A y BB_1 por d y por e, tendremos

$$\sigma y_1 = \alpha(p + d), \quad \sigma y_2 = \beta(q + e)$$

$$c\sigma y_1 = \alpha[cp + d(p + q)], \quad c\sigma y_2 = \beta[cq + e(p + q)]$$

ó $$\sigma y_1 = \alpha[cp + d(p + q)], \quad \sigma y_2 = \beta[cq + e(p + q)],$$

escribiendo σ en vez de σc.

Si eliminamos p y q entre estas ecuaciones y

$$\rho x_1 = ap, \quad \rho x_2 = bq,$$

resulta $$\sigma y_1 = \alpha\rho\left(\frac{c+d}{a}x_1 + \frac{d}{b}x_2\right),$$

$$\sigma y_2 = \beta\rho\left(\frac{c+e}{b}x_2 + \frac{e}{a}x_1\right),$$

$$\sigma y_1 = \alpha[b(c+d)x_1 + adx_2],$$

$$\sigma y_2 = \beta[bex_1 + a(c+e)x_2];$$

pero $$\begin{vmatrix} b(c+d) & ad \\ be & a(c+e \end{vmatrix} = abc(c + d + e),$$

expresión que sólo podría ser nula si c ó $c + d + e$ fuesen nulos, es decir, en el caso de coincidir A con B ó A_1 con B_1, lo que no sucede; luego, *toda sustitución lineal, cuyo determinante no es nulo, es idéntica á un cambio de puntos fundamentales y de factores constantes, cuando un punto de una recta está representado por una razón entre las variables.*

Los coeficientes expresan las coordenadas de los nuevos puntos fundamentales con relación á los primitivos, puesto que, representando una ecuación lineal

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

un punto cuyas coordenadas son a_2 y $-a_1$; de las ecuaciones $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ de los nuevos puntos fundamentales A_1 y B_1, resulta

$$\frac{x'_1}{x'_2} = -\frac{ad}{b(c+d)}, \qquad \frac{x''_1}{x''_2} = -\frac{a(c+e)}{be},$$

designando por x'_1, x'_2 y x''_1, x''_2 las coordenadas de los nuevos puntos fundamentales.

Y en general, considerando una ecuación homogénea

$$f(x_1, x_2) = 0,$$

en la que $\frac{x_1}{x_2}$ es la variable, descompuesta en sus factores simples, podemos decir que: *una forma algebráica de orden* n *igualada á cero, representa un sistema de* n *puntos en línea recta.*

60. Invariantes y covariantes.—Dadas dos formas $f = 0$, $\varphi = 0$, efectuando en ellas la sustitución lineal

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \qquad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

se verá que su determinante funcional es un covariante simultáneo.

El determinante formado por las segundas derivadas de una función $f(x, y)$ ó Hessiano es un covariante, según puede verse efectuando los cálculos.

La condición de que la forma cuadrática

$$a_0 x_1^2 + 2\, a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

igualada á cero tenga dos raíces iguales, es que el invariante $a_0 a_2 - a_1^2$ sea nulo.

La condición para que dos formas lineales

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad \text{y} \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0,$$

tengan un punto común, es la anulación de su determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

La reducción á cero del discriminante de la ecuación que resulta de igualar á cero una forma, expresa la condición necesaria para que esta ecuación tenga raíces iguales, ó para que dos puntos del grupo de puntos que representa, coincidan.

El resultante de dos formas, es la función entera de sus coeficientes, que debe anularse para que un punto del grupo correspondiente á la primera, coincida con un punto del grupo correspondiente á la segunda.

61. Series proyectivas de puntos. — Adoptemos la notación de Clebsch

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2, \qquad \alpha_x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

en cuyo caso las representaciones simbólicas de las formas

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n, \qquad \varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n$$

serán $\qquad f = a_x^n, \qquad \varphi = \alpha_x^n.$

Una sustitución lineal

$$\rho\xi_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2,$$
$$\rho\xi_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2,$$

en la que los puntos de base quedan fijos, es la expresión analítica de una *afinidad lineal* ó *relación proyectiva*, por la que á cada punto de una recta asociamos otro punto de la misma recta.

Esta correlación será recíproca, cuando el determinante de la sustitución

$$r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

sea distinto de cero y *será idéntica á la correlación de dos series proyectivas.*

La correlación proyectiva está caracterizada por la relación anarmónica de cuatro puntos m_1, m_2, m_3, m_4

$$\frac{(m_1 - m_3)(m_4 - m_2)}{(m_3 - m_2)(m_1 - m_4)} = \alpha.$$

Para pasar de esta relación anarmónica á la de los cuatro puntos correspondientes dados por los parámetros n_1, n_2, n_3, n_4, se sustituirá, á cada factor, un factor correspondiente multiplicado por el determinante de la sustitución, que desaparecerá en el cociente; de manera que se tendrá

$$\frac{(m_1 - m_3)(m_4 - m_2)}{(m_3 - m_2)(m_1 - m_4)} = \frac{(n_1 - n_3)(n_4 - n_2)}{(n_3 - n_2)(n_1 - n_4)} ;$$

y concluiremos que: *los invariantes y covariantes de las formas binarias igualados á cero, dan ecuaciones que representan relaciones proyectivas entre elementos de series de puntos y haces de rayos.*

Podemos representar dos series proyectivas de puntos por las ecuaciones

$$a_x + \lambda b_x = 0 \quad , \quad \alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = 0 ,$$

admitiendo que dos puntos de las dos series, para los que λ tiene el mismo, se corresponden; λ representa el valor negativo de la relación de las distancias del punto móvil á los puntos fijos $a_x = o$ y $b_x = o$, multiplicado por un número constante; y por simetría, podemos sustituir á los puntos a_x, b_x, α_ξ, β_ξ los puntos $a_x + \lambda' b_x$, $a_x + \lambda'' b_x$, $\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi$, $\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi$; para lo cual será preciso sustituir al parámetro λ el parámetro

$$\mu = - \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''} , \tag{1}$$

en virtud de las identidades

$$a_x + \lambda b_x = \frac{(\lambda - \lambda'')(a_x + \lambda' b_x) - (\lambda - \lambda')(a_x + \lambda'' b_x)}{\lambda' - \lambda''} ,$$

$$\alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = \frac{(\lambda - \lambda'')(\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi) - (\lambda - \lambda'')(\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi)}{\lambda' - \lambda''} .$$

Para los puntos dobles se hará $x_1 = \xi_1$ y $x_2 = \xi_2$ en las ecuaciones

$$a_x + \lambda b_x = 0 \quad , \quad \alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = 0 ;$$

y se obtendrá

$$(a_1 + \lambda \beta_1) x_1 + (a_2 + \lambda b_2) x_2 = 0 ,$$

$$(\alpha_1 + \lambda \beta_1) x_1 + (\alpha_2 + \lambda \beta_2) x_2 = 0 ;$$

y eliminando x_1 y x_2, resulta

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 \\ \alpha_1 + \lambda \beta_1 & \alpha_2 + \lambda \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

ó $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

ó abreviadamente

$$(a\alpha) + \lambda\,[(a\beta) + (b\alpha)] + \lambda^2\,(b\beta). \qquad (2)$$

De manera que, excluyendo el caso de ser

$$[(a\beta) + (b\alpha)]^2 = 4\,(a\alpha)\,(b\beta)$$

correspondiente á la coincidencia de los puntos dobles, y representando por λ' y λ'' las raíces de las ecuaciones (2) podremos tomar como puntos fundamentales los puntos dobles X_1 y X_2, de modo que

$$(3)\quad \begin{aligned} a_x + \lambda' b_x &= X_1 = p_x\,, \\ a_x + \lambda'' b_x &= X_2 = q_x\,, \end{aligned} \qquad (4)\quad \begin{aligned} \alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi &= c\,\Xi_1 = c\,p_\xi, \\ \alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi &= c'\,\Xi_2 = c'\,q_\xi; \end{aligned}$$

y al tomar los nuevos puntos fundamentales, habremos de sustituir á λ el valor de μ dado por la ecuación (1); y será

$$X_1 - \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}\,X_2 = 0\,, \qquad \Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}\,\Xi_2 = 0;$$

ó abreviadamente, haciendo $\rho = \lambda - \lambda' : \lambda - \lambda''$,

$$X_1 - \rho\,X_2 = 0\,, \qquad \Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\rho\,\Xi_2 = 0\,.$$

Sin entrar en detalles ajenos al objeto de esta obra, bastará indicar que, empleando los valores de λ' y λ'', deducidos de la ecuación (2) y la identidad

$$(b\beta)\,a_x = (a\beta)\,b_x - (a\,b)\,\beta_x.$$

que se deduce del resultante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_1 & a_2 \\ b_x & b_1 & b_2 \\ c_x & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

de las tres identidades

$$a_x = a_1\,x_1 + a_2\,x_2\,, \quad b_x = b_1\,x_1 + b_2\,x_2\,, \quad c_x = c_1\,x_1 + c_2\,x_2.$$

Y sustituyendo en (3), de igual modo que haciendo las mismas sustituciones de los valores de λ' y λ'', y empleando la identidad

$$(b\beta)\,\alpha_\xi = (\alpha\beta)\,b_\xi - (\alpha b)\,\beta_\xi$$

en las ecuaciones (4) se llega (Clebsch) *Leçons sur la Géométrie* de al teorema siguiente:

La relación anarmónica formada por los puntos dobles y por dos puntos correspondientes de las dos series proyectivas, es igual á una constante; y esta constante se expresa por medio de los invariantes

$$k = (a\beta - b\alpha)$$

$$\text{y } l = [(a\beta) - (b\alpha)]^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta) = k^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta),$$

bajo la forma

$$\frac{c'}{c} = \frac{k + \sqrt{l}}{k - \sqrt{l}}\;;$$

y puesto que al parámetro ρ de la primera serie corresponde en la segunda un parámetro $\rho\,\dfrac{c'}{c}$, y á este, en una tercera serie proyectiva, un parámetro $\rho\left(\dfrac{c'}{c}\right)^2$, y así hasta un parámetro $\rho\left(\dfrac{c'}{c}\right)^n$ en una $(n+1)^{\text{sima}}$ serie proyectiva; se llega á obtener una serie de puntos

$$\rho,\ \rho\,\frac{c'}{c},\ \rho\left(\frac{c'}{c}\right)^2,\ \ldots\ \rho\left(\frac{c'}{c}\right)^n,$$

de los que cada uno corresponde al que precede, en virtud de la correlación proyectiva de las dos series; y si para el $(n+1)^{\text{simo}}$ punto se llega al punto inicial, tendremos

$$\left(\frac{c'}{c}\right)^n = \left(\frac{k + \sqrt{l}}{k - \sqrt{l}}\right)^n = 1.$$

A este sistema de puntos llama Clebsch *ciclo proyectivo*, enunciando el siguiente teorema:

Si la relación anarmónica que caracteriza una correlación proyectiva es igual á una raíz n$^{\text{sima}}$ *de la unidad, se puede, partiendo de cada uno de los puntos de la serie, obtener un sistema ciclo-proyectivo de* n *puntos.*

Y si, en vez de una serie de puntos, se toma un haz de rayos, eligiendo como rayos dobles de una transformación lineal, las dos rectas que, partiendo del centro del haz pasan por los puntos circulares imaginarios, dicha transformación es idéntica á una rotación del haz alrededor de su centro; y la condición de la proyectividad cíclica se transforma en la siguiente: un rayo vuelve á su posición inicial, después de haber girado n veces alrededor de su centro un ángulo dado por la relación $\frac{c'}{c}$; lo que conduce á las ecuaciones de la división del círculo.

62. Las colineaciones en las formas ternarias. — De igual manera que en las formas binarias, una transformación lineal de las formas ternarias puede considerarse como un cambio de coordenadas, ó como una relación entre puntos de dos planos diferentes ó de un mismo plano. Así, las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \rho y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \rho y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \rho y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

establecen entre los dos planos (x), (y) *una afinidad lineal ó colineación*, de modo que á cada punto x de uno de los planos corresponde un punto (imagen) y del otro plano. Esta relación no es inmediatamente recíproca, es decir, al punto y no corresponde de nuevo el mismo punto x; pero el punto correspondiente del primer plano se determina por la resolución de las ecuaciones (1) respecto á las x por medio de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3 , \\ \sigma x_2 &= A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3 , \\ \sigma x_3 &= A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3 , \end{aligned}$$

expresando las A_{ik} los determinantes menores formados con los elementos a_{ik}, según la regla conocida.

Si uno de los dos puntos considerados recorre una curva $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, el punto imagen recorrerá otra curva $F(y_1, y_2, y_3) = 0$.

Por ser lineales las ecuaciones de transformación: *A una curva algebráica corresponde en una afinidad lineal otra curva de igual orden.*

§ 3.º TEORÍA DE LAS POLARES

63. CONJUGADOS ARMÓNICOS DE DIVERSOS ÓRDENES.—Dados en una recta m puntos $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$, y un punto fijo P; otro punto P′ ligado á los anteriores por la relación

$$\frac{m}{PP'} = \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{PA_m}, \tag{1}$$

se llama *conjugado armónico* de los $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$ con respecto al P.

Dicha relación puede escribirse

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = 0,$$

llamando $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_m$ á las distancias $PA_1, PA_2, \ldots\ldots, PA_m$.

Conjugados armónicos de segundo orden, son los puntos P′ determinados por la relación:

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) = 0, \tag{3}$$

que es de segundo grado; luego hay dos puntos conjugados armónicos de segundo orden.

Los conjugados armónicos de $(m-1)^{\text{simo}}$ orden están determinados por la ecuación

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{m-1}}\right) = 0, \tag{4}$$

de los cuales hay $m-1$.

Y los conjugados armónicos de m^{simo} de orden están dados por

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_m}\right) = 0,$$

es decir, se confundirán con los puntos dados $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$.

La relación recíproca de los puntos conjugados armónicos se expresa de este modo:

Si el punto P′ *es conjugado armónico del* n^{simo} *orden del punto* P *con relación á los puntos* $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$, *el punto* P *es conjugado armónico del punto* P′ *del* $(m-n)^{\text{simo}}$ *orden, con relación á los mismos puntos.*

En general, un punto P′ conjugado armónico del punto p de orden n se halla definido por la ecuación

$$\sum\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r_1}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_n}\right)=0\,,$$

$$\sum\frac{1}{\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_1}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_n}\right)}=0.$$

Si se multiplican todos los términos por el producto

$$\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_1}\right)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_n}\right),$$

esta ecuación se reduce á

$$\sum\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'_{n+1}}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_m}\right)=0\,,$$

la cual expresa que el punto P es conjugado armónico del orden $m-n$ del punto P′.

64. Polares de los diversos órdenes.—Supongamos que por un punto fijo P se traza una secante cualquiera á una curva de grado m. Es evidente: que el lugar del conjugado P′ de primer orden de P, en cada secante, es una línea de primer grado, ó recta: que el lugar de los dos puntos conjugados P′ de segundo orden del punto P, sobre cada secante, es una curva de segundo grado, y así sucesivamente.

Dichos lugares sucesivos de los conjugados armónicos de los diversos órdenes se llaman *polares* de la curva propuesta, que tiene $m-1$ polares sucesivas.

Para obtener sus ecuaciones, sea en coordenadas homogéneas, la ecuación de la curva $f(x, y, z)=0$.

Tracemos una secante por el punto $p(x_0, y_0, z_0)$, y escribamos

$$x=x_0+ar\,,\qquad y=b_0+br\,,\qquad z=z_0\,;$$

tendremos $\quad f(x_0+ar,\ y_0+br,\ z_0)=0\,;$

y dividiendo por r^m, resulta

$$f\left(\frac{x_0}{r}+a\,,\ \frac{y_0}{r}+b\,,\ \frac{z_0}{r}\right)=0\,,$$

ecuación de la curva, que descompuesta en sus factores binomios, se reduce á

$$\mathrm{R}=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{r_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\right)=0 .$$

La ecuación de la polar de grado $m-1$ que se llama *primera polar,* es

$$\sum\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{m-1}}\right)=0 .$$

La ecuación de la segunda polar se podrá escribir de igual manera, conteniendo $m-2$ factores en cada término, y así sucesivamente; de manera que los conjugados armónicos de orden $m-n$ del punto (x_0, y_0, z_0) estarán dados por la fórmula

$$\frac{d^n f}{\left(d\,\frac{1}{r}\right)^n}=0 ,$$ ó haciendo

$$x'=\frac{x}{r}=\frac{x_0}{r}+a , \quad y'=\frac{y}{r}=\frac{y_0}{r}+b , \quad z'=\frac{z}{r}=\frac{z_0}{r} ,$$

$$\left[x_0\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{x_0}{r}+a\right)}+y_0\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{y_0}{r}+b\right)}+z_0\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{z_0}{r}+c\right)}\right]^{(n)}=0 .$$

que después de sustituir por a, b y c sus valores

$$\frac{x-x_0}{r} , \quad \frac{y-y_0}{r} , \quad \frac{z-z_0}{r} ,$$

se puede escribir bajo la forma simbólica

$$\left(x_0\frac{\partial f}{\partial x}+y_0\frac{\partial f}{\partial y}+z_0\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}=0 ,$$

pudiéndose enunciar el siguiente

TEOREMA.—*La polar recta del punto* (x_0, y_0, z_0) *es el lugar de los conjugados armónicos de primer orden de este punto; la polar cónica es el lugar de los conjugados armónicos de segundo orden, y así sucesivamente.*

De la proporción recíproca (83) resulta el siguiente

TEOREMA.—*Cuando el punto* P′ *se halla en la polar de orden* n *del punto* P, *el punto* P *se halla en la polar de orden* m — n *del punto* P′.

Por ejemplo, el lugar del punto P′ cuya recta polar pasa por el punto fijo, es la polar de grado $m-1$, ó la primera polar del punto P. De esto resulta el siguiente

COROLARIO.—*La polar recta de un punto* P, *con relación á una curva de orden* m, *tiene además del punto* P, *otros* $(m-1)^2-1$ *polos,* es decir, $(m-1)^2$ *polos,* pues al describir el punto M′ la polar recta de M, este punto se hallará en las polares de grado $m-1$ del punto M′, las cuales forman un haz ó red que pasa por $(m-1)^2$ puntos fijos, esto es, por otros tantos polos análogos al m.

De otro modo: *una recta admite* $(m-1)^2$ *polos;* porque si se toman dos puntos de ésta, los polos de la recta serán los puntos de intersección de las primeras polares de dichos dos puntos, que tienen $(m-1)^2$ puntos comunes.

Si se trata de obtener una polar de orden p, cuando se dan dos de sus puntos (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3), se tendrán para determinar su polo (x_1, y_1, z_1) dos ecuaciones de grado p,

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^p f = 0,$$

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_3} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_3}\right)^p f = 0,$$

que admiten p^2 soluciones. Los p^2 puntos que se obtienen, son los de intersección de las polares de orden $m-p$ de los dos puntos dados, de manera que:

TEOREMA.—*Por dos puntos dados pasan* p^2 *polares de orden* p, *cuyos polos respectivos son los puntos comunes á las polares de orden* m — p *de los dos puntos dados.*

Si el polo P se halla en la curva, la polar de grado n queda definida por la ecuación

$$\sum\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_n}\right)=0$$

ó $\Sigma r_{n+1}\, r_{n+2} \ldots\ldots r_m (r-r_1)(r-r_2)\ldots\ldots(r-r_n)=0,$

y si P es un punto simple, en cada secante hay un factor r_1 nulo, anulándose todos los términos que lo contienen; los demás admiten el factor $r - r_1$ ó r. La polar pasa pues, por el punto P.

Si la secante se convierte en tangente, haciéndose nulo un segundo factor, la ecuación última admite el factor r elevado al cuadrado; luego la tangente á la curva es también tangente á la polar. Así, *todas las polares de un punto de la curva pasan por el mismo y son tangentes en él á ésta.*

Podemos estudiar de una manera más general la teoría de las polares, lo que permite dar interpretación geométrica de algunos covariantes.

Si hacemos por brevedad $f = a_x^n$ y representamos por λ la relación de las distancias de un punto móvil x á dos puntos fijos y, z, podremos escribir

$$o = a_y^n + \frac{n}{1}\lambda a_y^{n-1}\, a_z + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2 a_y^{n-2}\, a_z^2 + \ldots + \lambda^n a_z^n .$$

Los coeficientes de esta ecuación son, como se ha visto, las sumas de las combinaciones de las raíces. Considerando en general, la ecuación

$$a_y^{n-r} a_z^r = 0 ,$$

cuando se suponga y fijo, los puntos z formarán el *sistema polar de orden* r^{simo} ó el $(n-r)^{\text{simo}}$ sistema polar del polo y, respecto al sistema dado de los n puntos x, y análogamente diremos, si consideramos á z como fijo. Podremos, pues, enunciar el siguiente teorema:

El r$^{\text{simo}}$ *sistema polar de un polo* z *relativamente á un sistema dado de* n *puntos, se compone de* n — r *puntos* y *que tienen la propiedad de ser para ellos nula la suma de las combinaciones* (n — r) *á* (n — r) *de las relaciones de sus distancias á dos puntos fijos.*

Si y *pertenece al* r$^{\text{simo}}$ *sistema polar del polo* z, z *pertenece al* (n — r)$^{\text{simo}}$ *sistema del polo* y.

Si se forma el grupo de los puntos del n$^{\text{simo}}$ *sistema polar de un polo* t, *después para este nuevo sistema de puntos, el* m$^{\text{simo}}$ *sistema de un polo* z *etc.; y se llega al fin á una ecuación de grado* l, *á la que corresponden* l *puntos* y, *el resultado será* *el mismo, si se cambian simultáneamente los puntos* y, z, t... *y los órdenes* m, n, l... *de los sistemas polares individuales.*

TEOREMA 1.º—*La polar de grado* m — 1, *ó primera polar, de una curva de grado* m, *relativa á un punto* P, *pasa por los puntos de contacto de las tangentes trazadas por* P (x_0, y_0, z_0), pues siendo

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

la ecuación de dicha polar, esta ecuación expresa también que la tangente en P pasa por x_0, y_0, z_0.

TEOREMA 2.º—*La clase de una curva de orden* m *es*, en general, m (m — 1), pues siendo la primera polar de grado $m-1$, corta á la curva en $m\,(m-1)$ puntos.

65. EMANANTES.—Hemos visto que si opera con la primera polar como con la curva propuesta, se obtiene la primera curva (supuesta algebráica).

$$x_0^2 f''_{xx} + y_0^2 f''_{yy} + z_0^2 f''_{zz} + 2\, y_0\, z_0 f''_{yz} + \ldots . = 0$$

de grado $m-2$, que contiene en segundo grado las coordenadas del polo; y cada una de las curvas se deduce de la anterior repitiendo la misma operación.

Esta definición es proyectiva. La polar de grado $m-1$, según hemos visto, pasa por los puntos de contacto de las tangentes á la curva propuesta, trazadas por el polo; y lo mismo sucede con cada polar, respecto á la anterior. De lo que resulta que si efectúa una transformación homográfica, es decir, si se efectúa una sustitución lineal en las variables x_0, y_0, z_0 y x, y, z, la nueva ecuación de la polar quedará formada con la nueva ecuación de la curva como primitivamente; de manera que, cualquiera que sea el triángulo de referencia elegido, las ecuaciones polares sucesivas se formarán del mismo modo con las coordenadas del punto y con el primer miembro de la curva dada. Analíticamente, esta propiedad resulta de que el primer miembro la ecuación de la polar de orden $m-p$, no cambia cuando se aplica á las variables x_0, y_0, z_0 y x, y, z la misma sustitución lineal; de manera que las funciones

$$\left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}\right)^n, \quad \left(x \frac{\partial f}{\partial z_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^n$$

son covariantes, que se llaman *emanantes*, verificándose la relación

$$\left(x'_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\right)^h f = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x'_2} + \ldots\right)^{m-h} f.$$

Podemos, en fin, enunciar el siguiente

TEOREMA.—*El Hessiano de una función es el discriminante de su segundo emanante.*

En efecto, el segundo emanante de f es

$$\Sigma\, x'_i\, x'_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

cuyo discriminante es

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

PROBLEMA.—*Determinar los emanantes primero y segundo de la forma*

$$U = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

Tendremos

$$\begin{aligned} E_1 = {} & y_1(a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3) \\ & + y_2(a_1 x_1^3 + 3a_2 x_1^2 x_2 + 3a_3 x_1 x_2^2 + a_4 x_2^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 = {} & y_1^2(a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2) + 2y_1 y_2(a_1 x_1^2 + 2a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2) \\ & + y_2^2(a_2 x_1^2 + 2a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2) \end{aligned}$$

CAPÍTULO II

Estudio particular de las curvas planas

66. Definición.—Se llama *asíntota* de una rama infinita de una curva otra curva ó una recta á la que aquélla se aproxima indefinidamente á medida que uno de sus puntos se aleja al infinito en dicha rama. No trataremos ahora mas que de las asíntotas rectilíneas.

67. Asíntotas paralelas al eje de las y.—Teorema.—*Si una recta* AB *paralela al eje de las* y *representada por la ecuación* $x-a=0$ *es asíntota á una rama de curva* CD, *la abscisa del punto* M *de la curva tiende hacia* a *cuando éste se aleja al infinito en dicha rama, es decir, cuando el valor de* y *se hace mayor que cualquier cantidad, por grande que sea.*

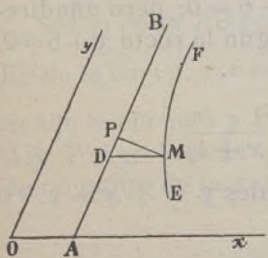


Fig. 47.

En efecto, trácense por M la perpendicular MP á la asíntota y la paralela MD al eje de las x, y llamando θ al ángulo de los ejes de coordenadas, tendremos

$$MP = MD \operatorname{sen} \theta , \tag{1}$$

y según la posición del punto M respecto á la asíntota

$$MD = \pm (x - a) ;$$

luego

$$MP = \pm (x - a) \operatorname{sen} \theta . \tag{2}$$

Por ser AB asíntota de la rama EF, MP tiende hacia cero; luego $a - x$ también tenderá hacia cero y x hacia a.

Recíprocamente: *Si la abscisa del punto* M *de la curva* EF *tiende hacia* a, *cuando* y *se hace superior á toda magnitud dada, la recta representada por la ecuación* $x - a = 0$, *es asíntota de dicha rama,* pues siendo

$$MP = \pm (x - a) \operatorname{sen} \theta$$

por tender $x - a$ hacia cero, MP tenderá hacia cero.

EJEMPLOS —1.º Sea la curva

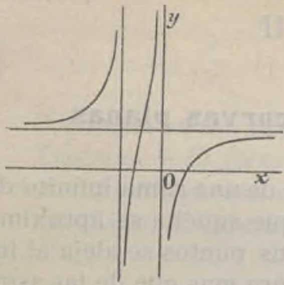


Fig. 48.

$$x^2y - 3x^2 + 2xy + 4 = 0 .$$

Las asíntotas paralelas al eje de las y son

$$x = 0, \qquad x + 2 = 0 .$$

La asíntota paralela al eje de las x es: $\quad y - 3 = 0$.

2.º. Sea la curva

$$y = \frac{4x + 7}{(x - 3)\,(x + 6)^2}$$

y se hace infinita cuando $x - 3 = 0$; luego la recta $x - 3 = 0$ es una asíntota. Lo mismo se dirá de $x + 6 = 0$; pero añadiremos que hay dos asíntotas confundidas según la recta $x + 6 = 0$.

3.º Sea la curva

$$y = \frac{(3x + 4)\,(2x - 7)}{(x + 2)\,(x - 4)\,(x^2 + x + 1)}$$

$x + 2 = 0$ y $x + 4 = 0$ serán asíntotas reales y $x^2 + x + 1 = 0$ representará dos asíntotas imaginarias.

4.º Sea $\qquad y = 3x - 1 \pm \dfrac{\sqrt{7x - 5}}{2x}$.

Para $x = 0$, y es infinito; pero y es imaginaria para valores de x muy próximos á cero. En este caso, se dirá para generalizar, que la recta $x = 0$ es asíntota á la curva dada; pero que las ramas que admiten esta recta como asíntota son imaginarias.

5.º Sea $\qquad y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Esta curva admite por asíntotas paralelas al eje de las y todas las rectas representadas por la ecuación

$$x = k\pi ,$$

siendo k un número entero cualquiera.

68. FORMA IMPLÍCITA.—Cuando la ecuación de la curva es de la forma $f(x, y) = 0$, podremos enunciar la siguiente

REGLA.—*Las asíntotas paralelas al eje de las* y *se obtienen igualando á cero el coeficiente de la mayor potencia de* y *en la ecuación de la curva dada.*

Análogamente: *se obtienen las asíntotas paralelas al eje de las* x *igualando á cero el coeficiente de la mayor potencia de* x.

En efecto, ordenemos la ecuación $f(x, y) = 0$ según las potencias descendentes de y, y tendremos

$$y^m f(x) + y^{m-1} f_1(x) + \ldots = 0 . \tag{1}$$

Dividiendo por y^m, obtendremos la ecuación de las inversas de las raíces de la ecuación $f(x, y) = 0$,

$$f(x) + \frac{1}{y} f_1(x) + \frac{1}{y^2} f_2(x) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Sea la recta AB paralela al eje de las y, asíntota á una rama EF de la curva; y se hace mayor que cualquier valor, mientras $\frac{1}{y}$ tiende hacia cero y x hacia a, si $x - a = 0$ representa la recta AB. Y si en la ecuación (2) x é y representan las coordenadas de un punto de la rama EF, tendremos, para $y = \infty$,

$$f(a) = 0 ,$$

es decir, que a es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Si en la ecuación (2) x tiende hacia a, una raíz por lo menos de esta ecuación en $\frac{1}{y}$ tenderá hacia cero, y una raíz al menos de la ecuación (2) se hará infinita.

Si k es el número de las raíces reales de (2) que tienden hacia cero, cuando x tiende hacia a, habrá k ramas reales de curva asíntotas á la recta $x - a = 0$, ya al lado de las abscisas negativas ya al de las positivas; y si l es el número de raíces imaginarias que tienden hacia cero, diremos que hay l ramas imaginarias de la curva asíntotas á la recta $x - a = 0$.

Si a es una raíz múltiple de grado p, diremos que la curva admite p asíntotas reales ó imaginarias confundidas con la recta $x - a = o$.

69. TEOREMA.—*En general hay dos ramas de curva asíntotas á una recta, dispuestas á ambos lados de ésta en los extremos opuestos*

En efecto, supongamos la recta dada paralela al eje de las y, lo que siempre puede verificarse por un cambio de ejes, y escribamos la ecuación de la curva en coordenadas homogéneas

$$y^p f_1(x, z) + y^{p-1} f_2(x, z) + \dots = 0. \qquad (1)$$

En el caso general, no existiendo relaciones entre los coeficientes de la ecuación dada, el valor α que anula á f_1 será raíz simple y $f_2(\alpha, z)$ no será nula. Podemos, pues, escribir

$$f_1(x, z) = (x - \alpha z)\, F_1(x, z), \text{ siendo } F_1(\alpha, z) \gtrless 0\,;$$

y la ecuación (1) obtendrá la forma

$$-\frac{1}{y}\left(f_2 + \frac{1}{y} f_3 + \dots\right) = (x - \alpha z)\, F_1\,. \qquad (2)$$

Para $x = \alpha$, tenemos $\frac{1}{y} = 0$, y el primer miembro solo admitirá una raíz nula en $\frac{1}{y}$, porque $f_2(\alpha, z) \gtrless 0$.

Para valores de x próximos á α, el primer miembro admite pues valores reales de y; porque si para $x = \alpha + \varepsilon$ admitiese el primer miembro de la ecuación (2), para $\frac{1}{y}$ una raíz $a + bi$, siendo a y b funciones de ε tales, que:

$$\lim a = 0 \text{ y } \lim b = 0 \text{ (para } \varepsilon = 0)\,,$$

dicha ecuación admitiría también la raíz $a - bi$, y obtendríamos dos valores nulos de $\frac{1}{y}$ cuando se hace $x = \alpha$, lo que es contrario á la hipótesis.

Este razonamiento subsiste para el caso de darse á x valores un poco superiores ó inferiores á α. Hay pues dos ramas reales de la curva en la proximidad de la recta, á uno y otro lado de ésta.

Para demostrar que están situados en los extremos opuestos, consideremos la ecuación (2) bajo la forma:

$$-\frac{1}{y} = \frac{(x - \alpha z)\, F_1}{f_2 + \frac{1}{y} f_3 + \dots}$$

Antes de llegar x al valor α, el signo del segundo miembro es contrario al de $\frac{F_1(\alpha, z)}{f_2(\alpha\, z)}$, cantidad que no es nula ni infinita. Después de pasar por el valor α, dicho segundo miembro tiene el signo de $\frac{F_1(\alpha, z)}{f_2(\alpha, z)}$; luego $\frac{1}{y}$ tiene un valor positivo antes y negativo después de pasar x por el valor α, ó inversamente. Esta es la *disposición normal* que corresponde al caso de no haber singularidades en la curva.

Gráficamente puede establecerse esta correspondencia de dos ramas de curva con la asíntota, ya situadas hacia el infinito positivo la una, hacia el infinito negativo la otra, ó bien las dos hacia el infinito positivo ó hacia el infinito negativo; pues proyectando la rama de curva MAM′ tangente á la recta A*b* en A, desde un punto S sobre un plano no paralelo al plano de la curva y paralelo al rayo SA, que proyectará al punto S en el infinito; y suponiendo que el plano proyectante pase por la tangente, de modo que la proyección de la tangente, asíntota á la proyección de la curva, sea cierta recta *b c*; si el punto A no es singular; la curva se hallará á un mismo lado de la tangente, siendo *bd* la traza del plano de la curva con el plano P. Entonces la curva MAM′ está delante del plano de la figura; luego una recta tal como SM, que atraviesa este plano en S, está delante de dicho plano, á partir de S en la dirección SM, y encuentra á P en un punto *m* delante de *bc*, el cual describe la rama *ma*. Al contrario, una recta tal como S′ M′, situada detrás del plano de la figura, encontrará á P en *m*′ detrás de *bc*, y describirá la rama *m*′ *a*′.

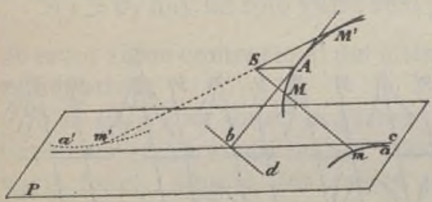


Fig. 49

Esta construcción sirve para ver la disposición de la asíntota en el caso de *un punto de inflexión en el infinito*, pues supondremos que, en vez de efectuar la proyección de un arco de curva exterior á su tangente se efectúa la de un arco de curva que atraviesa á su tangente; entonces se obtiene la fig. 50, y se ve que la curva está al mismo lado de la asíntota, cuando atraviesa á su tangente, es decir, si el contacto es de orden par, para la curva proyectada.

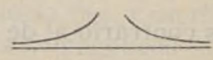


Fig. 50

70. Teorema. – *El número de ramas de la curva que son asíntotas á una recta es siempre par.*

En efecto, supongamos que α anula á las funciones $f_2, f_3, \ldots, f_{i-1}$, sin anular á f_i. Para $x=\alpha$, hay pues i valores de $\frac{1}{y}$ nulos

Para $x=\alpha-\varepsilon$ hay también i valores de $\frac{1}{y}$ en la proximidad de cero, entre ellos t reales y 2θ imaginarios, de manera que $i=t+2\theta$.

Para $x=\alpha+\varepsilon$ habrá además i valores de $\frac{1}{y}$ próximos á cero, t de ellos reales y $2\theta'$ imaginarios, de modo que $i'=t'+2\theta'$; luego $t+t'=2i-2\theta-2\theta'$.

Ejemplos.—Las figuras

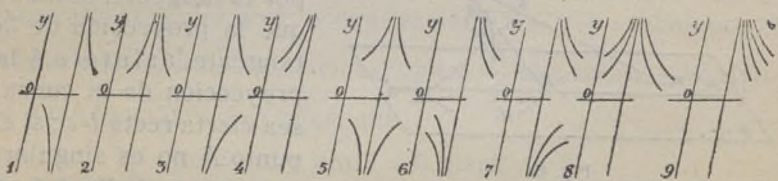


Fig. 51

corresponden á las ecuaciones

$$(1)\quad y=\frac{x^2}{x-1},\quad (2)\quad y=\frac{x}{(x-1)^2},\quad (3)\quad y^2=\frac{x}{x-1}$$

$$(4)\ y=\frac{1\pm\sqrt{1-x}}{1-x},\ (5\ y^2=\frac{x}{(x-1)^2},\ (6)\,y=\frac{1\pm(x-1)\sqrt{\alpha^2+1}}{x-1}$$

$$y^2=\frac{1\pm\sqrt{\alpha-1}}{1-x},\ y=\frac{2\pm\sqrt{(x-1)^2+1}}{(x-1)^2},\ y=\frac{2\pm\sqrt{\alpha-1}\pm\sqrt{x}}{x-1}\ (*)$$

(*) Véase *Longchamps*, Géométrie analytique.

EJEMPLO.—Estudiar la curva

$$x^2(1+x)+x(1-x)\frac{1}{y}+(1+x)\frac{1}{y^3}=0$$

en la proximidad del eje de las y.

Hagamos $x=\varepsilon$, $\frac{1}{y}=\mathrm{U}$. Al valor ε corresponden tres valores de U dados por la ecuación

$$\mathrm{U}^3+\mathrm{U}\,\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}+\varepsilon^2=0. \qquad (1)$$

La realidad de las raíces depende del signo de

$$\mathrm{V}=\frac{4\,\varepsilon^3(1-\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^3}+27\,\varepsilon^4=\varepsilon^3\left[27\,\varepsilon+\frac{4\,(1-\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^3}\right]$$

El límite de la cantidad entre paréntesis es 4 para $\varepsilon=0$; luego V tiene el mismo signo que ε.

Si $\varepsilon>0$, hay un solo valor real para $\frac{1}{y}$; y esta raíz, que ha de tener signo contrario al del último término $+\varepsilon^2$, es negativa.

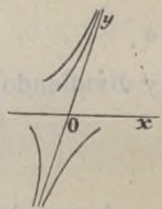


Fig. 52

Si se da á ε un valor negativo, la ecuación (1) tiene sus tres raíces reales; y como ofrece dos variaciones, admite dos raíces positivas y una negativa. Así, hay á la izquierda del eje de las y dos ramas dirigidas hacia el extremo superior y una tercera rama en el extremo inferior.

71. ASÍNTOTAS NO PARALELAS AL EJE DE LAS y.—Sea $y=f(x)$ la ecuación de la curva de grado m.

Toda asíntota no paralela al eje de las y tendrá la forma $y=kx+l$, siendo k y l finitos; y la rama de la curva podrá expresarse por la ecuación

$$y=kx+l+\mathrm{V},$$

tendiendo V hacia cero, cuando x tiende al infinito. De modo que

$$\frac{y}{x}=k+\frac{l+\mathrm{V}}{x}, \quad \lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=k,$$

$$y-kx=l+\mathrm{V}, \quad \lim\,(y-kx)=l.$$

Estas expresiones determinan el coeficiente angular y la ordenada en el origen de la asíntota.

Recíprocamente, los valores de k y de l así determinados para una rama real de la curva, corresponderán á una asíntota de esta rama, porque $\lim\,(y - kx) - l = 0$ para los puntos de la rama en los que el valor de x crece indefinidamente. Las asíntotas paralelas al eje de las x corresponderán á los valores de k iguales á cero.

Si la rama considerada se extiende al infinito por el lado de las x negativas, será preciso hallar los límites de $\dfrac{y}{x}$ y de $y - kx$ para $x = -\infty$.

Para hallar por este método las asíntotas paralelas al eje de las y, bastará permutar x é y en la ecuación de la curva.

Esto sentado, dividamos la ecuación $f(x, y) = 0$ en grupos homogéneos de grados m, $m - \alpha$, $m - \beta$ decrecientes

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots = 0,$$

ó

$$x^m f(u) + x^n f_1(u) + \ldots\ldots = 0,$$

y dividiendo por x^m, resulta

$$f(u) + \frac{1}{x^{m-n}} f_1(u) + \ldots\ldots = 0. \tag{1}$$

A medida que x aumenta, $f(u)$ se aproxima á cero; luego los valores límites de u, es decir, los valores de k son raíces de la ecuación $f(k) = 0$.

Para hallar el valor l correspondiente á un valor de k, hagamos $y - kx = t$, y busquemos el límite de t.

La ecuación de la curva, se reduce, por esta sustitución, á

$$x^m f\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^{m-\alpha} f_1\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots\ldots = 0;$$

y por ser $f(k) = 0$, se tiene que

$$f\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} f'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right),$$

hallándose θ comprendida entre 0 y 1. Se tiene pues

$$x^{m-1}\, t\, f'\left(k+\theta\,\frac{t}{x}\right)+x^{m-\alpha-1} f_1\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots\ldots=0,$$

$$t\, f'\left(k+\theta\,\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{\alpha}}\, f_1\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots\ldots=0.$$

Si $f_1(x) \gtrless 0$, tendremos

$$l=-\frac{f_1(k)}{f'(k)}.$$

Si $\alpha>1$ y $f_1(k)=0$, se tendrá

$$l=\lim t=0.$$

La asíntota pasará por el origen; si $f(k)\gtrless 0$, $f_1(k)\gtrless 0 \alpha>1$ si $\alpha<1$, creciendo indefinidamente los términos que contienen x, t no tendrá límite, y no habrá asíntota.

Si en el caso de ser $\alpha=1$ se tiene $f'(k)=0$ y $f_1(k)=0$. La ecuación de la asíntota adquiere forma indeterminada. Entonces, desarrollando hasta los términos de segundo orden tendremos

$$f(u)=\frac{t^2}{2x^2}\, f''\left(k+\theta_1\,\frac{t}{x}\right) \qquad (0<\theta_1<1)$$

y multiplicando por x^2 la ecuación (1) resulta

$$\frac{t^2}{2}\, f''\left(k+\theta_1\,\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{\alpha-2}}\, f_1(k)+\frac{t}{x^{\alpha-1}}\, f'_1\left(k+\theta\,\frac{t}{x}\right)+\ldots=0$$

Si $f_1(k)$ no es nulo, será necesario que α sea $=$ ó >2 para que haya una asíntota. El valor correspondiente de l será cero si $\alpha>2$, y si $\alpha=2$, será

$$l^2=-\frac{2\, f_1(k)}{f''(k)};$$

será pues necesario que el segundo miembro sea positivo; entonces l admitirá dos valores reales, iguales y de signo contrario.

Si $f''(k)=0$, se continuará del mismo modo el razonamiento.

72. Asíntotas como límites de tangentes.—Sea

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right)+x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots\ldots=0. \qquad (1)$$

Supongamos una dirección arbitraria para el eje de las y. Entonces $\frac{y}{x}$ tenderá hacia un límite finito k, raíz de la ecuación

$$f(k) = 0;$$

y representando por $\varphi(x, y)$ el primer miembro de la ecuación (1), tendremos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}$$

$$\varphi' x = -\frac{y}{x^2}\left[x^m f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right]$$

$$+ m\, x^{m-1} f\,\frac{y}{x} + n\, x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{x}\left[x^m f'\left(\frac{y}{x}\right) + f'_1\left(\frac{y}{x}\right) x^n + \ldots\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{m x^{m-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + n x^{n-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{x^{m-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots} \quad (2)$$

Si se hace crecer indefinidamente á x, $f\left(\frac{y}{x}\right)$ tenderá hacia cero, y la ecuación (2) dará

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{dy}{dx}$$

Así, *cuando una rama de curva tiene una asíntota, su dirección es el límite de la dirección de las tangentes á esta rama.*

Vamos ahora á obtener el límite del punto de intersección de la tangente con el eje de las y, ó la ordenada en el origen de la asíntota, es decir, el punto cuya ordenada es $y - x\frac{dy}{dx}$. De la ecuación (2) resulta

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{m x f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n}{x^{m-n-1}} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots} \quad (3)$$

Supongamos desde luego $n = m - 1$ ó $n < m - 1$, en cuyo caso la curva tiene una asíntota. Tendremos

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{mx\,f\left(\frac{y}{x}\right) + (m-1)\,f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.}{f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}, \quad (4)$$

ecuación que puede simplificarse. En efecto, dividiendo la ecuación (4) por x^{m-1} y suponiendo $n = m - 1$, tendremos

$$\lim\left[x\,f\left(\frac{y}{x}\right) + f_1\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0.$$

La ecuación (4) da

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim\frac{-f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.}{f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.},$$

y, por consiguiente,

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{f_1(k)}{f'(k)};$$

luego la tangente corta al eje de las y en un punto cuyo límite coincide con el en que este eje queda cortado por la asíntota.

Si suponemos $n < m - 1$, la función f_1 no existirá; y tendremos

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

La asíntota y el límite de las tangentes pasarán en este caso por el origen.

Si $n > m - 1$, entonces la rama de curva no tiene asíntota. Hagamos $n = m - 1 + \delta$; la ecuación (1) dividida por x^n dará

$$\lim\left[x^{1-\delta}\,f\left(\frac{y}{x}\right) + f_1\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0, \quad (5)$$

é introduciendo esta condición en la ecuación (3), resultará que $y - x\dfrac{dy}{dx}$ se hará infinita con x; luego no habrá límite.

Así pues se obtendrá el mismo resultado hallando la asíntota de una rama infinita que el límite de las tangentes.

73. ASÍNTOTAS EN COORDENADAS POLARES.—Si la ecuación se da en coordenadas ρ y θ y admite una rama infinita MN que tiene una asíntota AN, bajaremos desde el polo O una perpendicular $OA = \delta$ sobre la asíntota, y proyectaremos el punto M en P sobre OA.

Siendo cero el límite de PA, será $\lim OP = OA = \delta$; luego

$$\lim (OM \text{ sen } OMP) = OA. \tag{1}$$

Por tender el radio vector $OM = r$ hacia el infinito, es necesario que sen OMP y por consiguiente, que OMP tienda hacia cero.

Tracemos por el polo la recta ON_1 paralela á AN; y sea $\alpha = XON_1$ el ángulo que forma esta paralela con el eje polar.

El ángulo $$OMP = N_1OM = \pm (\theta - \alpha); \tag{2}$$

luego $$\lim (\theta - \alpha) = 0 \ , \quad \lim \theta = \alpha \ ;$$

La dirección límite del radio vector, cuando M *se aleja al infinito en la rama de la curva, da la dirección de la asíntota.*

Además las ecuaciones (1) dan

$$\delta = \pm \lim r \text{ sen } (\theta - \alpha) = \pm \lim r\,(\theta - \alpha),$$

porque $\lim \dfrac{\text{sen } (\theta - \alpha)}{\theta - \alpha} = 1$.

Observaremos que $\theta - \alpha > ó < 0$, según que la rotación de ON_1 es hacia OA, ó en sentido contrario. Se puede pues, tomar simplemente

$$\delta = \lim r\,(\theta - \alpha) \ ,$$

entendiendo que el signo + de δ corresponde al primer caso y el — al segundo.

Recíprocamente.—Si θ y $r(\theta - \alpha)$ tienden hacia límites determinados α y δ, cuando el punto M se aleja al infinito sobre una rama de curva, esta rama tiene una asíntota AN determinada por estos valores de α y de δ; porque la ecuación

$$\delta = \lim r\,(\theta - \alpha) = \lim r \text{ sen } (\theta - \alpha) = \lim OM \text{ sen } OMP$$

manifiesta que la distancia del punto M á esta recta tiene por límite cero.

EJEMPLO.—Sea la acuación de una cónica referida al foco como polo

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

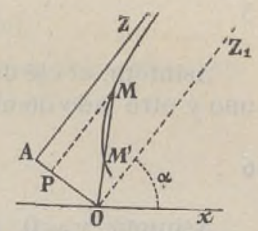


Fig. 52

Para que r crezca hasta el infinito, es necesario y suficiente que $1 - \varepsilon \cos \theta$ tienda hacia cero; luego

$$\cos \alpha = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Este ángulo α no puede ser real mas que cuando $\varepsilon < 1$, excluyéndose la elipse.

Para $\varepsilon > 1$, la ecuación da dos valores para el ángulo α, que corresponden á dos direcciones igualmente inclinadas respecto al eje polar. Además, se tiene

$$\lim r(\theta - \alpha) = p \lim \frac{\theta - \alpha}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{p}{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha}$$

si $\varepsilon = 1$, $\operatorname{sen} \alpha = 0$. No hay asíntota, lo que excluye la parábola. para la hipérbola $\varepsilon > 1$. Se tienen pues dos valores finitos

$$\delta = \pm \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

refiriéndose el signo $+$ á $\operatorname{sen} \alpha > 0$ y el signo $-$ á $\operatorname{sen} \alpha < 0$, lo que determina la longitud y el sentido de las perpendiculares OA bajadas sobre las dos asíntotas.

§ 2.º APLICACIONES

1 $$y^3 - 3axy + x^3 = 0.$$

Asíntota $\quad y = -x - a.$

2 $$xy^2 - x + 2y - 1 = 0.$$

Tres asíntotas $x = 0$, $y = +1$, $y = -1$.

3 $$y^3 + x^3 + \operatorname{sen} \frac{y}{x} = 0.$$

Una asíntota $\quad y = -x.$

4 $$y^2 = \cos \frac{y}{x}.$$

Dos asíntotas $y = +1$, $y = -1$.

5 $$y = a\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Asíntota: el eje de las x. La curva pasa alternativamente á uno y otro lado de un asíntota hasta el infinito.

6 $$y = a \operatorname{sen}\frac{b}{x}.$$

Asíntota: $y = 0$. La curva se aproxima indefinidamente al eje de las y en la parte comprendida entre $y = -a$, $y = +a$.

7 $$yx = \operatorname{sen} x.$$

Una asíntota $y = 0$.

8 $$xy^2 + 5x^2y + 4x^3 + xy - 9 = 0.$$

Asíntotas $y = -x + \frac{1}{3}$, $y = -4x - \frac{4}{3}$, $x = 0$.

9 $$x^3 + xy - 2y^2 - 4x - 2y = 0.$$

Asíntotas $x - y - 2 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$.

10 $$x^2 + 4xy - 6x + 4y = 0.$$

Asíntotas $x + 1 = 0$, $x + 4y - 7 = 0$.

11 $$x^3 - xy^2 - y^2 + y = 0.$$

Asíntotas $1 + x = 0$, $x - y - \frac{1}{2} = 0$, $x + y - \frac{1}{2} = 0$.

12 $$x(x^2 - a^2) - 2y(y^2 - a^2) - 3xy^2 - a^3 = 0.$$

Asíntotas $y = \frac{1}{2}x$, $y = -x \pm a$.

13 $$r^2 = a^2\frac{\operatorname{sen} 3\varphi}{\cos\varphi}.$$

Asíntota $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

14 $r\varphi = a$ (espiral hiperbólica).

Asíntota $r \operatorname{sen} \varphi = a$.

15 $$r \cos 2\varphi = a.$$

Asíntotas $\qquad r(\operatorname{sen}\varphi \pm \cos\varphi) = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

16 $\qquad r\cos\varphi = 2a\operatorname{sen}^2\theta$ (cisoide).

Solución: Dos ramas infinitas con una asíntota normal al eje polar, á la distancia $2a$ del polo hacia el lado $x > 0$.

17 Hallar las asíntotas de $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Se tiene $y = xe^{\frac{z}{x}}$, haciendo $z = 0$, $y = x$.

La curva tiene un punto en el infinito en la bisectriz del ángulo de los dos ejes. Además

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{\frac{z}{x}} + \frac{z}{x}e^{\frac{z}{x}}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = -e^{\frac{z}{x}}.$$

Para $y = x$, $z = 0$ se tiene $f_1 = -1$, $f_2 = 1$, $f_3 = -1$.

Luego, haciendo $z = 1$ para pasar á coordenadas cartesianas, resulta la

Solución: $\qquad y = x + 1$.

18 Asíntotas de $\qquad y = e^x$.

Tenemos $y = ze^{\frac{x}{z}}$, $x = xl\dfrac{y}{z} = zly - zlz$.

Para $z = 0$, se tiene la *solución:* $x = 0$.

§ 3.° Estudio de una curva en la proximidad de uno de sus puntos

74. Método de Newton.—Salmon lo emplea de la siguiente manera. (*) Si el origen es un punto ordinario, y puede desarrollarse bajo la forma

$$y = Ax + Bx^2 + \ldots;$$

cuando el origen es un punto singular, la forma de la ecuación será $y = Ax^m + Bx^n + \ldots$.

(*) A treatise on the higher plane curves (p. 46).

siendo m positivo y n el exponente que sigue en magnitud á n. Cerca del origen, la figura de la curva es próximamente la correspondiente á $y = \mathrm{A}x^m$, debiéndose determinar m con la condición de que los exponentes de dos ó más términos hayan de ser iguales entre sí y menores que los demás. Después se determina el coeficiente A, igualando á cero la cantidad multiplicada por términos con igual exponente. Podemos continuar el desarrollo haciendo $y = \mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^n$, después de haberse obtenido A y m, para obtener enseguida B y n. Sea por ejemplo la curva *(folium ú hoja de Descartes)*

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0.$$

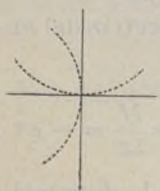


Fig. 53

El origen es un punto doble, tangente á los dos ejes.

Hagamos $y = \mathrm{A}x^m$ y tendremos

$$x^3 + \mathrm{A}^3x^{3m} - 3\,a\,\mathrm{A}x^{m+1} = 0.$$

Suponiendo iguales dos exponentes, por ejemplo, $3 = 3m$ ó $m = 1$, tendremos que desechar esta hipótesis, porque con ella los exponentes supuestos iguales resultan mayores que $m + 1$, exponente del otro término.

Si suponemos en seguida $3 = m + 1$, que da $m = 2$, obtendremos dos términos de grados iguales y menores que el grado del tercero; luego la ecuación se reduce á

$$(1 - 3\,m\,\mathrm{A})\,x^3 + \mathrm{A}^3x^6 = 0.$$

Si determinamos A de modo que se anule el coeficiente de x^3, resulta $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3m}$, $y = \dfrac{1}{3m}\,x^2 + \ldots$, siendo los exponentes de los demás términos superiores á 2.

La forma de una de las ramas de la curva, en el origen, se parece pues á la parábola $3\,ay = x^2$.

Si por último, igualamos los exponentes $3\,m$ y $m + 1$, obtendremos

$$m = \frac{1}{2},\ x^6 + \mathrm{A}^3\,x^3 - 3\,a\mathrm{A}\,x^3 = 0,\ \mathrm{A} = \sqrt{3a},\ y = \sqrt{3a}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Por consiguiente, cerca del origen, la rama considerada se aproxima á la parábola $y^2 = 3\,ax$.

Si hacemos, para continuar el desarrollo,

$$y = \frac{1}{3a} x^2 + Bx^n,$$

tendremos

$$x^3 + \frac{1}{27a^3} x^6 + \frac{1}{3a^2} Bx^{4+n} + \frac{1}{a} B^2 x^{2+2n}$$
$$+ B^3 x^{3n} - x^3 - 3aBx^{n+1} = 0$$

é igualando á cero los términos de menor grado, tendremos

$$\frac{1}{27a^3} x^6 + \frac{3}{3a^2} x^{4+n} - 3\,aBx^{n+1} = 0.$$

Si hacemos $n = 5$, podremos igualar el primero y el tercer términos, lo que da $B = \frac{1}{81a^4}$.

El mismo procedimiento sirve para obtener las ramas infinitas de la curva, desarrollando y según las potencias descendentes de x. Así en el ejemplo último, igualando los exponentes m y $3m$, tendremos $m = 1$, y el coeficiente correspondiente será $A^3 + 1$. Igualándolo á cero, resulta $A = -1$, y el desarrollo de y será $y = -x + Bx^n$. Para determinar B, haremos esta sustitución en la ecuación de la curva y tendremos

$$x^3 - x^3 - 3Bx^{m+2} - 3B^2 x^{1+2m} + B^3 x^{3m} + 3ax^2 - 3aBx^{1+m} = 0$$

Suponiendo $m = 0$, resulta $(A = -1)$:

$$-3B(B+a)x^2 = 0, \qquad B = -a;$$

luego, tendremos la asíntota

$$a + y + x = 0.$$

75. Triángulo de De Gua. — Es interesante el procedimiento de De Gua, empleado por Cramer en su célebre obra *Introduction á l' Analyse des lignes algébriques,* para conocer la forma de las curvas en el origen de coordenadas ó en un punto cualquiera de éstas al que se puede transportar dicho origen.

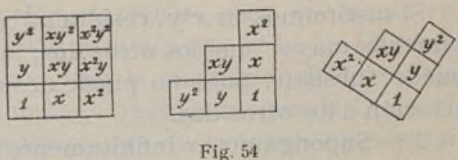


Fig. 54

Este método consiste en el empleo del *triángulo analítico* que es una modificación ventajosa del paralelógramo de Newton, donde se hallan ordenados los términos de una función algebráica entera del modo indicado en la fig. 53.

Mediante algunos ejemplos puede comprenderse cómo se utiliza este triángulo, ya para el estudio de las curvas representadas por una función algebráica, ya para el de las ramas infinitas.

EJEMPLO 1.º—Sea la ecuación $x^2 y + ay^2 - a^3 x = 0$.

Hemos de ver cómo podemos agrupar dos de los términos de modo que sean de igual orden infinitesimal para poder despreciar el tercero, que ha de resultar de orden superior.

1.º Supongamos primero x infinito.

Comparando $x^2 y$ con ay^2 que han de ser los infinitos de orden superior, para poder despreciar los demás términos, tendremos

$$x^2 y + ay^2 = 0, \quad x^2 y = -ay^2, \quad y = -\frac{x^2}{a};$$

luego y debe ser infinito de segundo orden; luego los términos $x^2 y$, ay^2 son infinitos de cuarto orden, respecto á los que se anula el infinito de primer orden $a^2 x$.

Comparando $x^2 y$ con $-a^2 x$, resulta

$$x^2 y - a^2 x = 0, \quad y = \frac{a^2}{x};$$

luego y debe ser infinitamente pequeño de primer orden y ay^2 un infinitamente pequeño de segundo que se anula respecto á los otros dos términos.

$$\text{Si} \quad ay^2 - a^2 x = 0, \quad \text{será} \quad y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}.$$

Si sustituímos en $x^2 y$, resulta $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}$. Este término es infinitamente mayor que los otros dos; luego la hipótesis hecha no puede subsistir, pues no puede despreciarse este término con relación á los otros dos.

2.º Supongamos x infinitamente pequeño.

Comparando ay^2 con $-a^2 x$, suponiéndolos infinitamente mayores que $x^2 y$, lo que no conduce á ningún absurdo, tenemos que haciendo $ay^2 - a^2x = 0$, resulta $y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ que, sustituído en x^2y da $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{5}}$, cantidad despreciable.

Haciendo $x^2y + ay^2 = 0$, resulta $y = -\frac{x^2}{a}$ que sustituyendo en x^2y, ay^2 da $-\frac{x^4}{a}$, $+\frac{x^4}{a}$ infinitamente pequeños de cuarto orden, que son despreciables respecto á $-a^2x$; luego esta hipótesis debe desecharse, lo mismo que la siguiente $x^2y - a^2x = 0$ que da $y = \frac{a^2}{x}$, es decir y infinito, resultando el término ay^2 infinitamente grande respecto á los otros dos.

Para el empleo del triángulo hay que seguir varias reglas en que no es necesario insistir, tales como por ejemplo que en dos rectas paralelas trazadas en el triángulo, los términos contenidos en la superior son de orden superior; que si se unen con una recta dos términos que deben ser de igual orden, también lo serán los comprendidos en esta recta, los cuales formarán en la ecuación que debe conservarse, etc.

Así pues, estableceremos la siguiente regla: *Si comparamos dos términos, suponiéndolos de igual orden, y se traza una recta por los centros de las casillas correspondientes á estos términos, todos los términos situados en las casillas cuyos centros se hallan en dicha recta, serán del mismo orden que los términos comparados.*

Además: *toda casilla cuyo centro se halla sobre la recta, contiene un término de orden superior, y si está debajo de la recta será de orden inferior,* lo que demuestra Cramer fácilmente fundándose en la disposición de los exponentes, según progresiones aritméticas.

De esto se deduce la regla siguiente, para distinguir en una ecuación indeterminada los términos que se hacen infinitamente mayores que los demás, por la suposición de ser x ó y infinitos ó infinitamente pequeños, (*) según la enuncia Cramer:

Trazado el triángulo analítico, se colocará cada término en

(*) Cramer. *Introd. a l' Analyse* Newton. *Metod. fluxiones Epist. ad Oldemburgum.*

la casilla correspondiente ó, mejor, se formará el triángulo con puntos dispuestos en tresbolillo (quinconce), *y se cambiará en un asterisco, cada punto que ocupe el lugar de uno de los términos de la ecuación. Después se colocará el triángulo sobre la fila sin* x *ó sin* y, *según que* x *ó* y *se supongan infinitas ó infinitamente pequeñas.*

Según esto, si la variable se ha supuesto infinita, se verá por qué casillas de las señaladas por asterisco se puede hacer pasar una regla, sin dejar encima ninguna casilla señalada. Los términos que ocupan estas casillas son los únicos de toda la ecuación, y la recta, que trazada á lo largo de la regla, determina los términos mayores, se llama una *determinatriz superior*, y análogamente se define una *determinatriz inferior.*

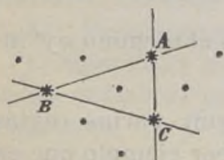


Fig. 55

Ejemplo 1.º—Sea la ecuación ya considerada

$$x^2y + ay^2 - a^2x = 0.$$

En este ejemplo hay tres determinatrices AB, BC, CA, de las cuales, colocando el triángulo de manera que su base sea la banda sin x, resultan ser superiores AB y AC, siendo BC inferior (fig. 56). Pero si colocamos el triángulo de manera que su base sea la banda sin y, se verá que la determinatriz AC es superior y las AB y BC inferiores (fig. 57). Así tenemos que

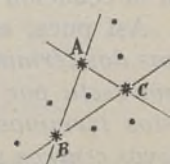


Fig. 56

AB	da	$x^2y + ay^2 = 0$	ó	$x^2 + ay = 0,$	(1)
AC	»	$x^2y - a^2x = 0$	»	$xy - a^2 = 0,$	(2)
BC	»	$ay^2 - a^2x = 0$	»	$y^2 - ax = 0.$	(3)

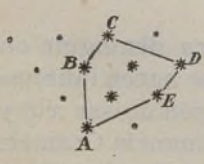


Fig. 57

Luego por la suposición de ser $x = \infty$, la ecuación propuesta se reduce á la (1) y (2) á que conducen las determinatrices superiores AB y AC, cuando el triángulo está sobre la banda sin x.

La hipótesis de ser x infinitamente pequeña conduce á la ecuación (3), que da la determinatriz inferior en la misma posición del triángulo.

Pero la hipótesis $y=\infty$ conduce á la sola ecuación (1) dada por la determinatriz AB superior en el triángulo colocado sobre la banda sin y. En fin, la hipótesis de ser y infinitamente pequeña conduce á las ecuaciones (2) y (3), que resultan de las determinatrices inferiores AC, BC en el triángulo colocado sobre la banda sin y.

Ejemplo 2.º—Sea la ecuación

$$x^2y^2 + axy^2 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + d^2xy + e^2x^2 + f^3y = 0.$$

Se obtienen cinco determinatrices que dan las siguientes ecuaciones

AB	$f^3y + axy^2 = 0,$	$xy + \dfrac{f^3}{a} = 0,$
BC	$axy^2 + x^2y^2 = 0,$	$x + a = 0,$
CD	$x^2y^2 + cx^3 = 0,$	$y^2 + cx = 0,$
DE	$cx^3 + e^2x^2 = 0,$	$x + \dfrac{e^2}{c} = 0,$
EA	$e^2x^2 + f^3y = 0,$	$x^2 + \dfrac{f^3}{c}\, y = 0.$

Colocando el triángulo sobre la línea de las y, en el caso de ser x infinita, resulta la CD como sola determinatriz superior; luego la ecuación se reduce á $y^2 + cx = 0$.

Si x es infinitamente pequeña, en la misma posición del triángulo, se ve que las determinatrices inferiores son AB y AC; luego la ecuacion propuesta se reduce á las dos

$$xy + \frac{f^3}{a} = 0, \qquad x^2 + \frac{f^3}{e^2}\, y = 0.$$

En el caso de suponerse y infinita ó infinitamente pequeña se colocaría el triángulo sobre la línea de las x.

Cuando una determinatriz pasa por más de dos casillas con términos de la ecuación propuesta, la que resulta tendrá más de dos términos.

Observaciones.—Se ve que la alteración de los exponentes en progresión aritmética, lo que da la colocación en línea recta de los términos de igual orden infinitesimal y la relación $k:l$

entre los exponentes de x é y, que lleva consigo la inclinación respecto á las líneas ó á las columnas que forman los términos del triángulo, son los conceptos en que se basa el procedimiento empleado por De Gua.

Así cuando $k = l$, la determinatriz se halla igualmente inclinada respecto á las bandas ó lados del triángulo. Si $\frac{k}{l} > 1$ ó $k > l$ la determinatriz se halla más inclinada respecto á las bandas verticales que á las horizontales y resta un segmento mayor en la banda sin y que en la banda sin x. Si $k = 0$, lo que sucede cuando la determinatriz es paralela al lado sin x, entonces á x infinita corresponden valores finitos de y; y cuando $l = 0$ á y infinita corresponden valores finitos de x determinados por las raíces de la ecuación.

$$ax^m y^n + bx^{m+k} y^{n+l} + cx^{m+2k} y^{n+2l} + \ldots . = 0$$

que corresponde á la determinatriz considerada, y que dividiendo por $x^m y^n$ se reduce á

$$a + bx^x + cx^{2x} + \ldots . = 0 \ (*)$$

76. Desarrollo en series. — Dada la ecuación

$$ay^3 - x^3 y - ax^3 = 0,$$

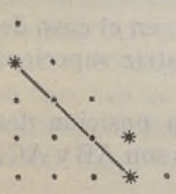


Fig. 58

desarrollar y en serie ascendente respecto á x.

Colocada sobre el triángulo, se ve que solo tiene una determinatriz inferior que da la ecuación $ay^3 - ax^3 = 0$ ó $y = x$.

Tendremos el primer término.

Para obtener el segundo, se sustituye y por $x + u$, y la ecuación se transformará en

$$3\,aux^2 + 3\,au^2 x + au^3 - x^4 - x^3 u = 0$$

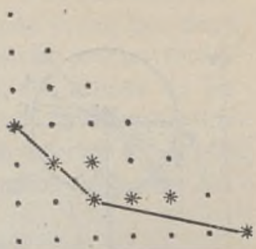
que colocada en el triángulo da dos determinatrices inferiores, una que da $3\,aux^2 - x^4 = 0$, ó $u = \frac{x^2}{3a}$ que es el segundo término de la serie, no teniéndose en cuenta la otra que pasa por las casillas $u^3, u^2 x, ux^2$ y que daría por segundo término $u = \mathrm{R}\,x$

(*) *Cramer*, obra cit., p. 173.

(representando R un número) que no da un exponente superior al obtenido en la primera operación.

Sustituyendo u por $\frac{x^2}{3a}+t$ en la ecuación precedente, resulta $3\,atx^2+tx^3+3\,at^2x+\frac{x^6}{27\,a^2}+\frac{tx^4}{3a}+t^2\,x^2+at^3=0.$

Colocándola en el triángulo analítico, se obtendrá la determinatriz inferior que da la ecuación



$$3\,atx^2+\frac{x^6}{27a^2}=0 \quad \text{ó} \quad t=-\frac{x^4}{81\,a^3}$$

que es el tercer término de la serie, cuya determinación podrá continuarse de igual modo, y que será

$$y=x+\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{81\,a^3}+\ldots\ldots$$

Cramer en su obra, de la que extractamos la presente teoría expone el procedimiento para calcular los términos *irregulares* de una serie, que son los dados por ecuaciones que tienen *raíces múltiples* ó *imaginarias*, y cómo se puede llegar á una serie regular.

Para conocer una rama infinita de curva representada por la serie

$$\mathrm{A}x^h+\mathrm{B}x^i+\mathrm{C}x^k+\mathrm{D}x^l+\ldots\ldots$$

hay que reconocer si los términos corresponden á parábolas ó hipérbolas, lo cual será objeto de otro capítulo.

§ 4.º Discusión de los puntos singulares

77. Teorema.—*Una ecuación algebráica con dos incógnitas representa en general una curva.* Sea la ecuación

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

que representa un polinomio entero de grado n con respecto á x é y.

Tracemos dos ejes rectangulares y tomemos en su plano un punto M (a, b). Las coordenadas de un punto próximo serán $a+h$ y $b+k$; y desarrollando la ecuación (1), resulta:

$$\frac{df}{da}h+\frac{df}{db}k+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{da^2}h^2+2\frac{d^2f}{dadb}hk+\frac{d^2f}{db^2}k^2\right)+\ldots=0\,. \quad (2)$$

Describamos desde M como centro y con un radio ρ suficientemente pequeño una circunferencia. Para hallar los puntos de esta circunferencia que satisfacen á la ecuación propuesta, haremos

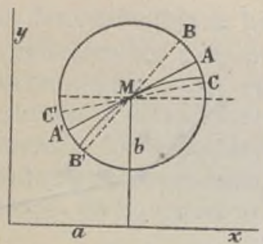


Fig. 59.

$$h=\rho\cos\theta\,,\qquad k=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

siendo θ el ángulo del radio vector con el eje de las x.

Podremos determinar un módulo H y un ángulo α de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial b}=\mathrm{H}\cos\alpha\,;$$

y la ecuación (1) se reducirá á

$$\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)+\mathrm{P}\rho+\mathrm{Q}\rho^2+\ldots\ldots=0\,. \quad (3)$$

Siendo ρ infinitamente pequeño, si H no es nula, la ecuación (3) sólo podrá quedar satisfecha por valores de θ próximos á los que anulan á sen $(\theta-\alpha)$, es decir, próximos á α ó á $180^\circ+\alpha$.

Tracemos por M una recta que forme el ángulo α con el eje de las x, y entonces los puntos que se buscan solo pueden hallarse en la proximidad de los puntos A y A' de intersección de dicha recta con la circunferencia.

En efecto, si damos á θ un valor que difiera de α ó de $180^\circ+\alpha$ en una cantidad superior ó igual al ángulo muy pequeño Θ, pero determinado, será posible obtener una cantidad e muy pequeña tal, que para todo valor ρ inferior ó igual á e, el primer término del polinomio

$$\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)+\mathrm{P}\rho+\mathrm{Q}\rho^2+\ldots\ldots \quad (4)$$

adquiera un valor numérico mayor que la suma de los demás términos, y que dé por consiguiente su signo al polinomio.

Consideremos la derivada

$$H \cos(\theta - \alpha) + \frac{dP}{d\theta}\rho + \ldots \quad (5)$$

del polinomio (4) con respecto á θ. Por no anularse el primer término de esta derivada para ningún valor de θ comprendidó entre $\alpha - \Theta$ y $\alpha + \Theta$, ó bien entre $180 + \alpha - \Theta$ y $180 + \alpha + \Theta$, pues el coseno de un ángulo muy pequeño tiende hacia la unidad, se podrá hallar una cantidad muy pequeña e' tal, que para todo valor de ρ inferior ó igual á e', exceda dicho primer término á la suma de todos los demás. Llamemos ε la menor de las cantidades e y e', supongamos que el radio de la circunferencia descrita alrededor del punto M sea igual ó inferior á ε, y tracemos las rectas BB' y CC' que formen á ambos lados de AA' el ángulo Θ.

De lo que precede resultará que:

1.º Siendo positivo el polinomio (4) para todos los puntos del arco BC' y negativo para todos los del arco B'C, dichos arcos no contienen ninguna solución de la ecuación (1); 2.º, este polinomio, que es función continua de θ, (por ser función del seno y coseno de un arco), tiene valores de signos contrarios en los extremos de cada uno de los arcos BC y B'C'; por consiguiente cada uno de estos arcos contiene, por lo menos, una solución de la ecuación propuesta; 3.º, no anulándose la derivada del polinomio (4) para ninguno de los puntos de los arcos BC y B'C', cada uno de estos arcos sólo contiene una solución.

Si ahora concebimos que ρ decrezca de una manera continua desde ε hasta cero, cada uno de los valores de ρ dará en cada uno de los ángulos infinitamente pequeños BMC y B'MC' un punto particular, y la serie de estos puntos formará una curva continua.

Teorema II.—*Si las coordenadas de un punto satisfacen á una ecuación algebráica $f(x, y) = 0$, pero sin anular simultáneamente á sus dos derivadas de primer orden; por este punto pasa una rama de curva simple con ó sin inflexión.*

En efecto, pudiendo ser el ángulo 2Θ tan pequeño como se quiera, la recta AA' cuya ecuación es la siguiente

$$\frac{df}{da}(x - a) + \frac{df}{db}(y - b) = 0,$$

es tangente á la curva en M.

Para estudiar la forma de la curva en la proximidad de M, hagamos $\theta = \alpha$ ó $\theta = 180^\circ + \alpha$ en el polinomio (4), que se reducirá á

$$P\rho + Q\rho^2 + \ldots \tag{6}$$

por anularse su primer término.

Podemos hallar una cantidad pequeña e'' tal, que para todo valor de ρ inferior ó igual á e'', el primer término del polinomio (6) que no se anula, dé su signo al polinomio.

Llamemos ε' á la menor de las cantidades ε y e'', y supongamos que la circunferencia descrita alrededor del punto M tenga un radio inferior á ε'. Además, para $\theta = \alpha$ y para $\theta = 180^\circ + \alpha$ los coeficientes P, Q,... tienen el mismo valor numérico, los coeficientes de orden impar con el mismo signo y los de orden par con signo contrario.

Si pues, el primer término que no se anula en el polinomio (6) es de orden impar, el polinomio (4) tendrá el mismo signo, por ejemplo, el signo $+$ en A y en A'; y, por consiguiente los dos puntos de la curva se hallarán el uno entre A y C, el otro entre A' y B', la curva será convexa y su concavidad estará dirigida en el sentido de las y negativas. Si el signo común fuese $-$, la curva sería también convexa, pero su concavidad estaría dirigida en sentido opuesto.

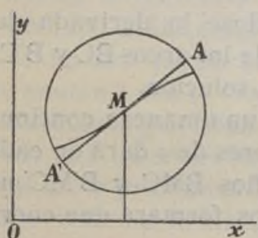


Fig. 60

En el caso de ser de orden par el primer término del polinomio (6) que no se anule; entonces, si en A es positivo y en A' negativo, uno de los puntos de la curva estará entre A y C y el otro entre A' y C' y habrá un punto de inflexión (figs. 59 y 60).

Siendo M un punto cuyas coordenadas satisfacen á las tres ecuaciones

$$f(x,y) = 0, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

la ecuación (3) se reduce á la forma general

$$\left(\frac{\partial^m f}{\partial a^m}\cos^m\theta + \frac{m}{1}\frac{\partial^m f}{\partial a^{m-1}\partial b}\cos^{m-1}\theta \operatorname{sen}\theta + \ldots\ldots + \frac{\partial^m f}{\partial b^n}\operatorname{sen}^m\theta\right)$$

$$+ S\rho + T\rho^2 + \ldots\ldots = 0, \tag{8}$$

Para satisfacer á esta ecuación, es necesario dar á θ valores próximos á los que anulan á su primer término, para lo que basta obtener las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^m f}{\partial b^m} \operatorname{sen}^m \theta + \frac{m}{1} \frac{\partial^m f}{\partial b^{m-1} \partial a} \operatorname{sen}^{m-1} \theta \cos \theta + \ldots \ldots \frac{\partial^m f}{\partial a^m} \cos^m \theta = 0. \tag{9}$$

Si $\frac{\partial^m f}{\partial b^m}$ no se anula, esta ecuación no queda satisfecha por $\cos \theta = 0$. Podremos, pues, dividir por $\cos^m \theta$, y obtendremos, haciendo $tg\theta = u$,

$$\frac{\partial^m f}{\partial b^m} u^m + \frac{m}{1} \frac{\partial^m f}{\partial b^{m-1} \partial a} u^{m-1} + \ldots\ldots = 0, \tag{10}$$

reduciéndose la ecuación general á la forma

$$\left(\frac{\partial^m f}{\partial b^m} u^m + \ldots\right) + \cos \theta \, S'\rho + \cos^2 \theta \, T'\rho^2 + \ldots\ldots = 0, \tag{11}$$

expresando S′, T′,... polinomios enteros respecto á u.

Consideremos las m soluciones de esta ecuación, que determinarán $2m$ puntos en la circunferencia, opuestos diametralmente, dos á dos.

Si se anulan los m' primeros coeficientes de la ecuación (9), esta ecuación se descompondrá en las dos

$$\cos^{m'} \theta = 0, \quad (12) \qquad \frac{\partial^m f}{\partial b^{m-m'}} u^{m-m'} = 0. \quad (13)$$

La primera da una raíz del grado m' de multiplicidad, que será $\theta = 90^\circ$ ó $\theta = 270^\circ$. La segunda dará $m - m'$ raíces distintas de las anteriores. De manera, que si hacemos variar á θ desde 0° hasta 180°, considerando los puntos diametralmente opuestos como una sola solución, podremos decir que la ecuación (9) tiene m raíces, de las que basta considerar las reales, simples ó múltiples.

Supongamos los puntos A_1, A_2, A_3,... y sus opuestos diametralmente en la circunferencia, A'_1, A'_2, A'_3,...; cada uno colocado entre dos puntos muy próximos á ellos, también en la circunferencia, de modo que tengamos en su orden de colocación:

$$c_1 A_1 b_1, \ldots c_2 A_2 b_2, \ldots, c_3 A_3 b_3, \ldots\ldots, c'_1 A'_1 b'_1, \ldots, c'_2 A'_2 b'_2 \ldots\ldots,$$

representando por Θ el ángulo menor que la menor de las diferencias de las raíces de la ecuación (9)).

El primer miembro de la ecuación (9) y por consiguiente el de la ecuación (8) no se anulan, conservando el mismo signo, si ρ es suficientemente pequeño en toda la extensión de los arcos $b_1 c_2, b_2 c_3, \ldots$; de manera que las soluciones sólo podrán encontrarse en los arcos exteriores á éstos, $b_1 c_1, b_2 c_2, \ldots$ que comprenden respectivamente á cada uno de los puntos $A_1, A_2, \ldots$

Pero los polinomios que consideramos tendrán, en los extremos de cada uno de estos arcos, el mismo signo ó signo contrario, según que corresponda dicho arco á una raíz de grado par ó impar de multiplicidad, pues ya en el caso de las m' soluciones $\theta = 90^o$ ó $\theta = 270^o$, ya en el de las otras $m - m'$ soluciones, el primer miembro de la ecuación (8) se podrá escribir bajo la forma

$$G \cos^{m'} \theta + S\rho + T\rho^2 + \ldots . \tag{14}$$

cuando existe una solución $\theta = 90^o$ ó $\theta = 270^o$; y no anulándose G para esta solución, dicho polinomio conservará su signo entre $90^o - \Theta$ y $90 + \Theta$ ó entre $270^o - \Theta$ y $270^o + \Theta$, para valores suficientemente pequeños de Θ. Y para las otras soluciones dicho polinomio se escribirá bajo la forma

$$G\,(u - u_0)^{m'} + S\rho + T\rho^2 + \ldots \ldots , \tag{15}$$

expresando u_0 la tangente del ángulo que se considera.

Así: *Cada uno de los arcos* $b_1 c_1, b_2 c_2, \ldots$ *contiene un número par* (incluído el cero) *ó impar de soluciones, según que el grado de multiplicidad correspondiente sea par ó impar.* Además *este número de puntos será á lo más igual al grado* m' *de multiplicidad;* porque si fuese mayor, sería preciso que la derivada de orden m' de los polinomios (14) y (15) se anulase en la extensión del arco de que se trata, lo que es imposible, por que ambas derivadas contienen un término de la forma $G \operatorname{sen}^{m'} \theta$ ó G. Las raíces simples dan una rama con ó sin inflexión. Estudiemos una raíz doble, $\theta = \alpha$, y sea AA′ (fig. 61) la recta correspondiente. Dividiendo por G los polinomios (14 y 15), tendremos

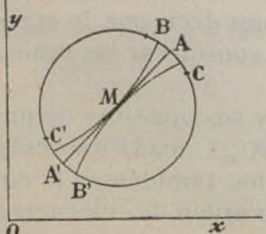


Fig. 61

$$\cos^2\theta + S'\rho + T'\rho^2 + \dots \quad (16) \qquad (u - u_0)^2 + S'\rho + T'\rho^2 + \dots \quad (17)$$

En los extremos de los arcos BC y B'C' estos polinomios tienen el signo $+$.

Si el primer término del polinomio $S'\rho + T'\rho^2 + \dots$, que para $\theta = \alpha$ ó $\theta = 180^\circ + \alpha$ no se anula, es de orden par, este término, y por consiguiente el polinomio tendrán el mismo signo en A y A'. Supongamos que sea el signo $-$. En este caso existe una solución á cada lado de los puntos A y A'; y la curva tiene la forma representada en la fig. 61.

Cuando este signo común es $+$, hay ambigüedad. Cada uno de los arcos BC y B'C' puede no contener solución alguna ó contener dos situadas á un mismo lado de A y A'. Si el primer término del polinomio $S'\rho + T'\rho^2 + \dots$ que no se anula para $\theta = \alpha$ ó $\theta = 180^\circ + \alpha$, es de orden impar, este primer término, y por consiguiente el polinomio, tendrá signos contrarios en A y en A'. Por ejemplo, el signo $-$ en A y el signo $+$ en A'. El arco contiene entonces dos soluciones, una á cada lado de A; pero hay duda para el otro arco B'C'. Para evitarla, escribamos los polinomios bajo la forma.

$$\cos^2\theta + \rho\,(S' + T'\rho + \dots), \qquad (u - u_0)^2 + \rho\,(S + T'\rho + \dots)$$

S' da su signo al paréntesis en toda la extensión del arco B'C'; y por consiguiente el polinomio, suma de dos cantidades positivas, no puede anularse. La curva ofrece un retroceso de primera especie (fig. 64).

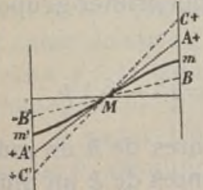


Fig. 62

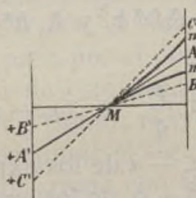


Fig. 63

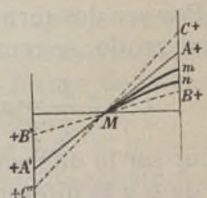


Fig. 64

Para salvar la ambigüedad que hemos encontrado en la discusión de la raíz doble consideremos dos paralelas al eje de las y distantes de éste en h, y hagamos $u = u_0 + u'h'$, lo que reducirá la ecuación (15) á

$$(u'^2 + P'_0 u' + Q_0) + Sh + \ldots\ldots = 0, \tag{18}$$

que se tratará, por consiguiente, como la ecuación (15).

Si $P'^2_0 - 4Q_0 < 0$, esta ecuación es imposible, y el punto M es aislado. Si $P'^2_0 - 4Q_0 > 0$, la ecuación que resulta igualando á cero el trinomio de la ecuación (18), admite dos raíces desiguales u'_0 y u'_1; y según que tengan el mismo signo ó signos contrarios, las dos ramas convexas, de que se compone la curva, se hallan situadas á un mismo lado ó á distinto lado de la tangente.

Cuando $P'^2_0 - 4Q_0 = 0$, si además S_0 es diferente de cero, la ecuación (18) admite, para una de las dos paralelas, dos soluciones próximas á u'_0, lo que da para u dos valores próximos de $u_0 + u'_0 h$. Hay un *retroceso de segunda especie* (fig. 64). Si S_0 es cero, habrá ambigüedad y se hará $u' = u'_0 + u'' h$, continuándose el razonamiento.

Vamos á ver cómo esta discusión se reduce al método de Newton y Puisseux, expuesto en el t. II (págs. 257-266), siendo la ecuación de la forma

$$\Sigma A h^\alpha k^\beta = 0. \tag{19}$$

Consideremos uno de los modos de agrupación de término de igual orden, representado por uno de los lados del polígono convexo formado, según la regla que allí se expuso.

Sea $\frac{p}{q}$ el valor correspondiente de μ, expresando una fracción irreducible, en la recta

$$x - \alpha_1 = -\mu(y - \beta_2).$$

Por ser dos términos $Ah^\alpha k^\beta$ y $A_1 h^{\alpha_1} k^{\beta_1}$ del primer grupo, de igual grado, se tendrá

$$\alpha + \beta \frac{p}{q} = \alpha_1 + \beta_1 \frac{p}{q} \quad \text{ó} \quad (\alpha_1 - \alpha) q = (\beta - \beta_1) p.$$

Y por ser la diferencia $\alpha_1 - \alpha$ de los exponentes de h un múltiplo de p y la diferencia $\beta - \beta_1$ de los exponentes de k un múltiplo de q, será

$$\alpha_1 - \alpha = np, \qquad \beta - \beta_1 = nq,$$

expresando n un número entero. El primer grupo se escribirá así:

$$Ah^\alpha k^\beta + Bh^{\alpha+bp} k^{\beta-bq} + Ch^{\alpha+cp} k^{\beta-cq} + \ldots + Gh^{\alpha+gp} k^{\beta-gp}$$

siendo $b, c,\ldots$ números crecientes. Para continuar las transformaciones, consideremos primeramente que sea q impar.

Si se hace $h = h'q$, $k = uh'^p$, siendo h' una nueva cantidad infinitamente pequeña de igual signo que h y u una cantidad finita, el primer grupo se reduce á

$$h'^{\alpha q + \beta p}\, u^{\beta - gp}\left[\mathrm{A}u^{gq} + \mathrm{B}u^{(g-b)q} + \ldots\ldots + \mathrm{G}\right],$$

Por contener todos los términos de la ecuación el factor $h'^{\alpha p + \beta p}$, se puede dividir por éste, reduciéndose dicha ecuación á la forma

$$u^{\beta - gp}\left[\mathrm{A}u^{gq} + \mathrm{B}u^{(g-b)q} + \ldots\ldots + \mathrm{G}\right] + \ldots\ldots = 0. \quad (1)$$

Debiendo ser infinitamente pequeño el primer grupo, para que pueda reducirse con los siguientes el valor finito de u, deberá diferir muy poco de una de las raíces de la ecuación

$$\mathrm{A}u^{gq} + \mathrm{B}u^{(g-b)q} + \ldots\ldots + \mathrm{G} = 0. \quad (2)$$

Y haciendo $u^q = v$, esta ecuación se reduce al grado g y se transforma en

$$\mathrm{A}v^{g} + \mathrm{B}v^{g-h} + \ldots\ldots + \mathrm{G} = 0 \quad (3)$$

Estudiemos cada una de las raíces de esta ecuación.

Si v_0 es una raíz simple de la ecuación (3), la ecuación (2) admitirá la raíz simple $u_0 = v_0^{1:q}$; y se demostrará, como anteriormente, que para cualquier signo de h', la ecuación (1) admite una raíz próxima á u_0 y una sola; por lo tanto, k tendrá un valor muy próximo á $u'_0 h'^q$. A esta raíz simple corresponde una rama de curva que pasa por el punto M y se extiende á la derecha y á la izquierda de este punto. La forma de la curva varía según que p es par ó impar, mayor ó menor que q.

1.º p impar. Cuando cambie el signo de h ó de h', cambia el signo de k, resultando una rama con inflexión, tangente á una paralela al eje de las x, si $\frac{p}{q} > 1$ (fig. 65, 1), á una paralela al eje de las y, si $\frac{p}{q} < 1$ (fig. 65, 2).

Cuando $p = q = 1$, la tangente se obtiene y no existe necesariamente inflexión.

2.º p par. Cuando h' cambia de signo, h conserva el mismo signo. Si $\frac{p}{q} > 1$, la curva tiene la forma convexa ordinaria y es tangente á una paralela al eje de las x (fig. 65, 3). Si $\frac{p}{q} < 1$, forma un retroceso de primera especie, cuya tangente es paralela al eje de las y (fig. 65, 4).

3.º Sea q par. Haremos

$$h = \pm h'^q, \qquad k = uh'^p, \qquad u^q = v,$$

siendo h' una cantidad infinitamente pequeña, positiva ó negativa y u una cantidad finita, que podremos suponer positiva, en virtud del doble signo de h' ó de h'^p, puesto que p es impar. Y afectaremos con el signo $+$ ó $-$ á la cantidad h'^q, según que se busquen puntos situados en la paralela á la derecha ó en la paralela á la izquierda.

Si consideramos la paralela á la derecha, será preciso hacer $h = h'^q$. La transformación es la misma que la efectuada anteriormente, llegándose á las ecuaciones (1), (2) y (3).

Si se considera la paralela á la izquierda, será preciso hacer $h = -h'^q$, y las ecuaciones (1), (2) y (3) quedarán sustituídas por las siguientes:

$$u^{\beta - gp}[\mathrm{A}u^{gp} + (-1)^b \mathrm{B}u^{(g-b)q} + \ldots + (-1)^g \mathrm{G}] + \ldots = 0 \quad (1')$$

$$\mathrm{A}u^{gp} + (-1)^b \mathrm{B}u^{(g-b)q} + \ldots + (-1)^g \mathrm{G} = 0 \quad (2')$$

$$\mathrm{A}v^g + (-1)^b \mathrm{B}v^{g-b} + \ldots + (-1)^g \mathrm{G} = 0. \quad (3')$$

Observaremos desde luego que las ecuaciones (3) y (3′) tienen sus raíces iguales y de signo contrario. Los valores de v únicamente admisibles son los positivos, dando origen los negativos á valores imaginarios de u. Sea pues, v_0 una raíz simple positiva de una de estas dos ecuaciones, por ejemplo, de la (3). La ecuación (2) admite la raíz real y positiva $u_0 = v_0^{1:q}$. Si en la ecuación (1) se dan sucesivamente á h' un valor positivo y un valor negativo, esta ecuación admite dos raíces reales próximas á u_0, Resultan pues, para k dos valores de signos contrarios próximos á $u_0 h'^p$. A esta raíz simple v_0 corresponde, por consiguiente, una rama doble de la curva situada á un mismo lado del punto M, á la derecha, en la hipótesis actual, que forma una rama convexa ordinaria, tangente á una paralela al eje de las y, si $\frac{p}{q} < 1$ (fig. 65, 5), ó un retroceso de primera especie tangente á una paralela al eje de las x, si $\frac{p}{q} > 1$ (fig. 65, 6).

En los casos analizados, resulta pues una rama simple que puede tener una inflexión ó un retroceso de primera especie.

Sea ahora una raíz cuyo grado de multiplicidad es n. El primer miembro de la ecuación (3) ó (3') es divisible por $(v - v_0)^n$ y el primer miembro de la (2) ó (2') por $(u' - u_0)^n$. Si se hace $u = u_0 + k'$, siendo k' una cantidad infinitamente pequeña, y se sustituye u por este valor, la ecuación (1) ó (1') tendrá todos sus términos infinitamente pequeños, y tomará la forma

$$\Sigma A' h'^{\alpha'} {}^{\beta'} = 0.$$

Se tratará esta ecuación como su análoga, la propuesta, siguiendo el procedimiento de Puisseux; y se examinarán las maneras de formar los grupos correspondientes, cada uno de las cuales conducirá á una ecuación análoga á la (19) cuando se haya escrito $h' = \pm h''^{q'}, k' = u'^{h''p'}, u'^{q'} = v'$. Las raíces simples de esta ecuación no ofrecerán ninguna dificultad. A una raíz simple corresponde un valor de k' de la forma $u'_0{}^{h''p'}$, y por consiguiente, un valor de k sensiblemente igual á $(u_0 + u'_0 k''^{p'})\, h'^{p}$.

Si q y q' son impares, h' y h'' tienen el signo de k, y se tiene una rama de curva que se extiende á la derecha y á la izquierda del punto M, lo que reproduce las formas representadas en la fig. 65 (1, 2, 3, 4).

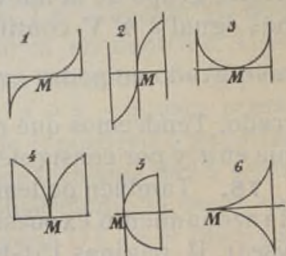


Fig. 65

Si q es par y q' impar, es necesario elegir el signo de h, lo que indica que la curva sólo se extiende á un lado, h' conserva el doble signo, h'' tiene el mismo signo que h'. Se tiene pues, para k, en una misma paralela, dos valores de signos contrarios, lo que reproduce una de las dos formas representadas por la fig. 65 (5, 6).

Si q es impar y q' par, h' tiene el mismo signo que h y h'' un doble signo. Pero será necesario elegir en la nueva ecuación el signo de h', lo que indica que la curva sólo se extiende á un lado. Conservando h'' el doble signo y siendo p' impar, se tiene para k, en una misma paralela, dos valores del mismo signo, lo que da un retroceso de segunda especie, cuya tangente es paralela al eje de las x ó de las y, según que $\frac{p}{q}$ sea $>$ ó <1 (fig. 66). Sin embargo, en el caso ser $p=q=1$, el retroceso es de primera especie, siendo oblicua la dirección de la tangente (fig. 63).

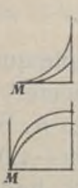


Fig. 66

Por último, si q y q' son pares, es necesario elegir el signo de h y después el de h', conservando h'' el doble signo Se tendrá todavía un retroceso de segunda especie (fig. 66).

Cuando la ecuación en v' tiene raíces múltiples reales, se hace $u' = u'_0 + k''$, y se efectúa una nueva transformación, análoga á las precedentes; y así sucesivamente, hasta llegar á una ecuación que no tenga ninguna raíz múltiple.

Ya se vió (t. II, p. 257) que el número de transformaciones es finito, pues si m es el grado de la ecuación, siendo el mayor exponente de k y de u en las ecuaciones $\Sigma = 0$ y (1), á lo más m, es evidente que el grado de la ecuación (3) no puede exceder á $\frac{m}{q}$. Cuando se sustituye u por $u_0 + k'$ en (1), el primer grupo da un término k'^n independiente de h'. El exponente de k' en el primer grupo de la nueva ecuación será, por consiguiente, á lo más igual á n. Y continuando así, llegaremos á una ecuación cuyo grado no podrá exceder á $\frac{m}{qq'q''\ldots}$, que será de primer grado. Tendremos que resolver, por último, una ecuación binomia en u, y por consiguiente, una ecuación de primer grado en v.

78. También podemos llegar al mismo resultado, siguiendo el razonamiento expuesto por M. Laurent en su *Cours d' Analyse* (t. II, páginas 154-162).

Sea
$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

Dando á x é y los incrementos ξ, η y desarrollando $f(x+\xi, y+\eta)$ tendremos

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \,\partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2\right) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Tomando el punto (x, y) como origen de coordenadas, estudiaremos el modo de cortar la curva á dos paralelas AB y A′B′ al eje de las y, trazadas á una distancia ξ, á uno y otro lado de éste.

Puesto que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son nulas, á la vez supondremos $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$, y haremos $\alpha = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\eta}{\xi} = a$; y podremos escribir

$$a - \alpha + \xi \mathrm{P} = 0\,, \tag{3}$$

expresando P una función de ξ y de a, finita para $\xi = 0$ y para valores finitos de a. Si se supone ξ muy pequeño, en virtud de (3) a converge hacia α, y el coeficiente angular $a = \frac{\eta}{\xi}$ de la secante OM trazada por el origen O, converge hacia el coeficiente angular de la tangente; y siendo la derivada de (3)

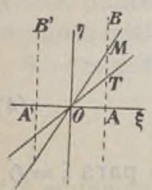


Fig. 67

$$1 + \xi \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial a} = 0\,,$$

la cual no puede anularse para valores muy pequeños de ξ, por conservar la derivada $1 + \xi \frac{\partial p}{\partial a}$ el mismo signo, el primer miembro de (3) sólo se anula una vez. La ecuación (1) tiene pues una sola raíz finita $a = \alpha$, y la curva encuentra á AB en un solo punto, pues para $a = \alpha$ el primer miembro de (3) tiene el signo de P; y, haciendo $a = \alpha + h$ ó $a = \alpha - h$, este primer miembro será, para valores pequeños de ξ, positivo ó negativo. Supongamos que P sea positivo. Entonces, la raíz de (3) estará comprendida entre a y $a - h$; y por consiguiente la curva cortará á AB debajo de OT, cortándola sobre OT en el caso contrario (fig. 67). Análogas conclusiones obtendremos respecto á la paralela A′B′ correspondiente á los valores negativos de ξ.

Si P tiene á ξ por factor, cambiará de signo con éste.

Para $\mathrm{P} > 0$ y $\xi > 0$, la curva corta á AB debajo de la tangente, y para $\xi < 0$, siendo $\mathrm{P} < 0$, la curva cortará á A′B′ en la región superior á la tangente. Hay pues inflexión.

Ahora bien; para que la curva $f(x, y) = 0$ presente una singularidad en x, y, es necesario que $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=0$; y además demostraremos que es suficiente.

Siendo nulas las derivadas primeras de $f(x, y) = 0$, tendremos que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\xi\eta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^1}\eta^2\right)+\ldots\ldots=0.$$

Esta ecuación debe tener un término independiente de ξ ó η, sin lo que sería divisible por una de estas variables, y la ecuación propuesta no sería irreducible. Supongamos $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\gtrless 0$. Dividiendo por $\frac{1}{2}\xi^2$, tendremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2a\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\xi Q=0, \tag{4}$$

expresando Q un polinomio que permanece finito para $\xi=0$, mientras que a no sea infinito. Distinguiremos tres casos:

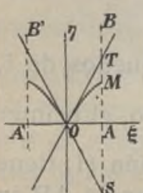


Fig. 68

1.º Que el trinomio escrito en la ecuación (4) se descomponga en dos factores reales y desiguales, por lo que se podrá escribir bajo la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha)(a-\beta)+\xi Q=0. \tag{5}$$

Suponiendo $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ positivo, tracemos las rectas OT y OS (fig. 68) cuyos coeficientes angulares son α y β; y podremos suponer Q distinto de cero para $a=\alpha$ ó $b=\beta$, sin lo que $f=0$ no sería ecuación irreducible. Supongamos además $\alpha>\beta$ y $Q>0$ para $a=\alpha$.

Haciendo $a=\alpha$ y $a=\alpha-h$, el primer miembro de (5) adquiere signos contrarios, cuando ξ es suficientemente pequeño. La ecuación (5) tiene pues una raíz a próxima á α, teniendo y un valor AM próximo á $\alpha\xi=$ AT; y la curva corta á AB en la proximidad de T (en el caso presente bajo el punto T) Se verá de igual manera que la curva corta á AB en la proximidad del punto S. Además no existe ningún otro punto próximo á O en la curva AB, porque la derivada del primer miembro de (5) ó (4) se reduce á

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2a\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \xi\frac{\partial Q}{\partial a},$$

y se anula tan solo una vez para valores finitos de a, cuando ξ es muy pequeño. Y es fácil determinar si estos puntos se hallan sobre ó bajo OS y OT, que siendo los límites de la secante, son tangentes. El punto O es pues singular, y en él se cruzan dos ramas de la curva. Es un *punto doble* ó *nodo simple*.

2.° Si el trinomio considerado no puede descomponerse en factores reales, la ecuación (4) conserva el signo de este trinomio (que no puede anularse) para valores pequeños de ξ. No existen puntos de la curva en la proximidad del punto O, que es un punto *aislado* ó *conjugado*.

3.° Si el trinomio es un cuadrado perfecto, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

y la ecuación (4) se reduce á la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha)^2 + \xi Q = 0. \qquad (6)$$

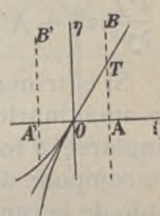


Fig. 69

Si trazamos la recta OT cuyo coeficiente angular es α, entonces a tiende hacia α para $\xi = 0$. Esta recta OT es por lo tanto una tangente. Si se hace $a = \alpha$, para $\xi > 0$, el primer miembro de (6) tiene el mismo signo que Q. Para otros valores de a es positivo.

Se concluye pues, que hay por lo menos dos intersecciones á ambos lados de la tangente en A'B'; y no hay mas que dos, pues la derivada del primer miembro de (6) es

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha) + \xi\frac{\partial Q}{\partial a},$$

que se anula una vez tan solo para valores pequeños de ξ. Análogamente razonaremos para el caso de ser Q negativo, cuando $a = \alpha$.

Pero si Q puede cambiar de signo con ξ, tendremos que escribir el desarrollo $Q = A + B\xi + C\xi^2 + \ldots\ldots$ Entonces (6) se reduce á

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha)^2 + A\xi + B\xi^2 + \ldots\ldots = 0. \tag{7}$$

Supongamos $A = 0$ para $a = \alpha$; y el primer miembro de (7) tendrá el mismo signo que B. Si pues B es negativo; como para $a \gtrless \alpha$, este primer miembro es positivo, la curva encontrará á cada una de las rectas AB y A'B' en dos puntos. La curva tiene dos ramas tangentes entre sí (fig. 59).

En el caso de ser B positivo, haremos $a = \alpha + \alpha'\xi$ y la ecuación (7) se reducirá á

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\alpha'^2\xi^2 + (A_0 + A'_0\xi\alpha' + \ldots)\xi + (B_0 + B'_0\xi\alpha' + \ldots)\xi^2 + \ldots = 0$$

expresando A_0, B_0, ... los valores de A, B, ... para $a = \alpha$; y dividiendo por ξ^2, tendremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\alpha'^2 + A'_0\alpha' + B_0 + \xi\left(\frac{A''_0}{2}\alpha'^2 + B'_0\alpha' + \ldots\right) + \ldots = 0. \tag{8}$$

Si el trinomio α', independiente de ξ es siempre positivo, α' es imaginario y O es un punto aislado. Si este trinomio puede anularse, a toma dos valores reales $\alpha + \alpha'\xi$ y $\alpha + \beta'\xi$; y la curva se compone de dos ramas situadas á uno y otro lado ó al mismo lado de la tangente común, según que α' y β' tengan signo igual ó contrario.

Si el trinomio en α' tiene raíces iguales, la ecuación (8) tiene dos raíces iguales.

Si el coeficiente de ξ es positivo cuando ξ es negativo, a tiene entonces dos valores de la forma

$$\alpha + (\alpha' + \varepsilon_1)\xi \quad \text{y} \quad \alpha + (\alpha' + \varepsilon_2)\xi,$$

siendo ε_1 y ε_2 muy pequeños con relación á α'. La curva se presenta bajo la forma de dos ramas situadas á un mismo lado de la tangente común, no cortando más que á una de las paralelas AB y A'B'. En el punto O hay un *retroceso de segunda especie.*

En resumen: Si las tres derivadas segundas de f no son nulas á la vez, la curva tiene en (x, y) un punto *singular ordinario*, que será *extraordinario*, cuando se anulen simultáneamente dichas tres derivadas, lo que exige un razonamiento más detallado.

Ejemplo.—Sea la curva

$$f(x,y) = x^5 y + ax^7 + bx^2 y^5 + cx^8 + dx^4 y^4 \\ + exy^7 + fx^4 y^5 + gy^9 + hy^{10} = 0 \qquad (1)$$

que tiene un punto séxtuplo en el origen.

Podremos despreciar, desde luego, los términos en los que el exponente de x es mayor que 5 y podremos despreciar el término en y^{10}, porque según la figura la construcción de Puiseux comienza en y^9. Tendremos por consiguiente,

$$x^5 y + bx^2 y^5 + dx^4 y^4 + exy^7 + fx^4 y^5 + gy^9 = 0. \qquad (2)$$

Según la construcción de Puiseux los términos correspondientes á lós puntos (0,9) y (2,5) pertenecen á un ciclo y juntamente con ellos el correspondiente al punto (1,7) en línea recta con los otros dos. Tendremos, pues, la ecuación

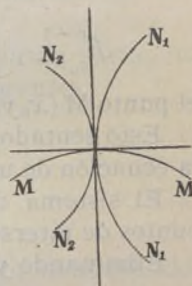


Fig. 70

$$C_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = 0. \qquad (3)$$

Para $y = 0$, resulta $x^2 = 0$; para $x = 0$, $y^4 = 0$; luego el eje de las x encuentra á la curva en dos puntos coincidentes y el de las y en cuatro. Haremos $x = x'^2$ é $y = y'$, resolviendo la ecuación de segundo grado que resulte. La curva C_1 se descompone en dos factores lineales $x' - m_1 y'$ y $x' - m_2 y'$. Siendo x comparable y^2, las dos curvas correspondientes á estos factores lineales, serán del tipo de la parábola, esto es:

$$x = m_1 y^2, \qquad x = m_2 y^2.$$

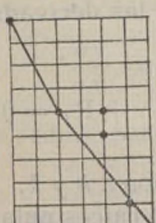


Fig. 71

La recta que une los puntos (2,5) y (5,1) da otro ciclo, representado por la ecuación

$$C_2 = x^3 + by^4 = 0. \qquad (4)$$

x^3 es comparable con y^4; por consiguiente la curva tiene en el origen un punto triple con tres tangentes que se confunden con $x = 0$, que corresponden á

$$x = \sqrt[3]{-by^4}$$

Hay pues dos ramas imaginarias y una real.

No existiendo más ciclos, según la figura, podremos completar la determinación del punto séxtuplo por la construcción de una rama aproximada, uniendo el punto (5,1) correspondiente al término x^5y con el punto (0,7) correspondiente al término ax^7 de la ecuación (1), lo que da

$$B = y + ax^2 = 0$$

que pertenece al tipo de la parábola.

DEFINICIÓN.—Si en la ecuación (1) se tiene, para $x = x_0$, $y = y_0$

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

$$f'_{x_0}(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_{y_0}(x_0, y_0) = 0,$$

$$f''_{x_0 x_0}(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_{x_0 y_0}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{p-1}_{x_0^{p-1}}(x_0, y_0) = 0, \ldots\ldots, f^{p-1}_{y_0^{p-1}}(x_0, y_0) = 0,$$

el punto M $(x_0 y_0)$ es un punto múltiplo de orden p.

Esto sentado, sea $\qquad y - y_0 = \lambda(x - x_0) \qquad (2)$

la ecuación de una secante que pasa por M.

El sistema de ecuaciones $f(x, y) = 0$ y (2) determina los puntos de intersección de la secante y de la curva.

Eliminando y,

resulta $\qquad f(x, y_0 + \lambda x - x_0) = 0, \qquad$ y haciendo

$$x = x_0 + h \qquad k = \lambda h,$$

se obtiene $\qquad f(x_0 + h, y_0 + k) = 0;$

y en virtud de las condiciones de anulación de las derivadas hasta el orden p,

$$\frac{1}{p!}\left[h^p \frac{d^p f(x_0 y_0)}{dx^p} + ph^{p-1}\frac{d^p f(x_0, y^0)}{dx^{p-1}dy}\right] + \ldots + R_p = 0,$$

siendo R_p de grado $p + 1$ por lo menos, con relación á h y k.

Podemos sustituir λh en vez de k y suprimir p raíces nulas. Por consiguiente la recta (2) encuentra á la curva en p puntos confundidos con M, quedando la ecuación reducida á la forma

$$\frac{1}{p!}\left[\frac{d^p f(x_0, y_0)}{dx^p} + p\lambda\frac{d^p f(x_0, y_0)}{dx^{p-1}dy} + \ldots\right] + h\,R'p = 0 \qquad (3)$$

Para que la secante se convierta en tangente, es necesario que un nuevo punto de intersección de la secante con la curva pase á M, ó que la ecuación (3) tenga una nueva raíz nula, lo que se consigue haciendo

$$\left(\frac{d^p f}{dx^p}\right) + p\lambda\left(\frac{d^p f}{dx^{n-1}\,dy}\right)_0 + \ldots + \lambda^p\left(\frac{d^p f}{dy^p}\right)_0 = 0. \quad (4)$$

Esta ecuación en λ determina las p tangentes á la curva en M; y obtendremos la ecuación del conjunto de las tangentes, eliminando λ entre la ecuación (4) y la (2).

§ 5.º Diferentes especies de puntos singulares

79. Punto múltiple es aquel por el cual pasan varias ramas de curva, admitiendo ésta en él varias tangentes.

Ejemplo.—Sea

$$y = \varphi(x) \pm (x - a\,(x - b)^{\frac{p}{q}},$$

representando $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible cuyo denominador es par.

La curva representada por la ecuación tiene dos ramas que se reducen á una $y = \varphi(a)$, para $x = a$.

La derivada

$$\frac{dy}{ax} = \varphi'(x) \pm (x - b)^{\frac{p}{q}} \pm \frac{p}{q}(x - a)(x - b)^{\frac{p}{q}-1}$$

se reduce para $x = a$ á

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(a) \pm (a - b)^{\frac{p}{q}}$$

expresión que da los coeficientes angulares de las dos tangentes en el punto $x = a$, $y = \varphi(a)$.

Si $a > b$, habrá dos tangentes distintas que se reducen á una sola, cuando $x = a$. El punto $x = a$, $y = \varphi(a)$ es un punto doble.

Si $a < b$, $\frac{dy}{dx}$ será imaginaria; no habrá tangente. No existe ningún punto de la curva en la proximidad del punto considerado, que es un *punto aislado*.

80. Puntos de inflexión están caracterizados por cambiar de signo el coeficiente angular de la tangente.

Ejemplo.—Sea la curva, llamada lemniscata

$$y = \pm x\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-x^2} \mp \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot = \pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Para $x = 0$, se tiene $\frac{dy}{dx} = \pm 1$

El punto $x = 0$ $y = 0$ es pues un punto doble. Además se tiene que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{\frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - 4x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)} = \pm\frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{2:3}}$$

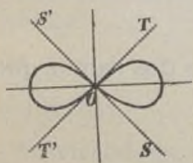


Fig. 72

Para $x = 0$, se tiene $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. El origen es un punto de inflexión.

En general, una tangente gira de una manera continua alrededor de la curva, mientras que su punto de contacto camina en el mismo sentido. Pero en un punto de inflexión dos tangentes sucesivas coinciden, de manera que mientras el punto continúa avanzando regularmente, la rotación de su tangente en el punto de inflexión es nula. Esta tangente (tangente estacionaria) se detiene un instante, para continuar su rotación en sentido opuesto.

En la figura 73, la curva está sustituída por un polígono. El punto (x) avanza sobre la recta envolvente (u), siempre en la misma dirección; pero esta recta, después de haber girado en el mismo sentido, de la posición u á u', pasa de u' á u'', girando en sentido opuesto. En u' la rotación es nula. Los ángulos de contingencia en u' se hacen infinitamente pequeños respecto á los que preceden y á los que les siguen.

La tangente en el punto de inflexión encuentra á la curva en tres puntos. Por consiguiente las curvas de segundo grado no tienen puntos de inflexión y las de tercero no pueden encontrarla en un nuevo punto. Pero las de órdenes superiores pueden encontrarlas en más puntos.

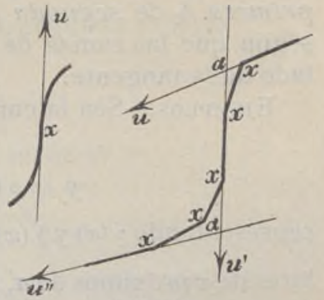


Fig. 73

Siendo AB una tangente de inflexión; si por cierta hipótesis se anula la distancia AB, el contacto equivaldrá á cuatro intersecciones. El punto será de *doble inflexión* ó de *serpenteo*, (fig. 75). Las inflexiones son alternativamente visibles é invisibles.

Ejemplos.—La parábola ordinaria $y = x^2$ solo tiene en el vértice un punto simple sin inflexión, solo la encuentra el eje de abscisas en dos puntos.

La parábola cúbica $y = x^3$ tiene una inflexión en el origen; $y = 0$ da $x^3 = 0$; luego las tres raíces iguales á cero manifiestan que el eje de abscisas encuentra tres veces á la curva en el origen y es á la vez tangente y secante (fig. 74).

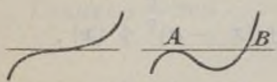


Fig. 74

Se verá que si en vez de $y = x^3$ se hace $y = x^3 - bx^2$, la curva considerada es tangente en A y secante en B, pues queda satisfecha por $x = 0$, $x = 0$, $x = b$; pero si AB disminuye sucesivamente (fig. 72), cuando sea cero, se pasará á la curva $y = x^3$ y á tres raíces nulas.

La parábola de cuarto grado $y = x^4$ tiene un punto de serpenteo. Podemos considerar la curva $y = x^4 - bx^3$ que tiene un punto de inflexión en el origen A y corta á la curva en B. Cuando la distancia AB se haya reducido á cero la raíz $x = b$ se reducirá también á cero.

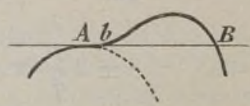


Fig. 75

La parábola cuadrado-cúbica, ó de quinto grado, tendrá un punto de triple inflexión en el origen.

PUNTOS DE RETROCESO son, como sabemos, aquellos en que terminan dos ramas que tienen una tangente común. Son de *primera* ó de *segunda especie*, como se ha visto (pág. 76), según que las ramas de curva están á distinto ó á un mismo lado de la tangente.

EJEMPLOS.—Sea la curva

$$y = \varphi(x) \pm (x - a)^{\frac{p}{q}} \psi(x),$$

representando $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos funciones reales y finitas para valores de x próximos de a, y suponiéndose la fracción $\frac{p}{q}$ positiva, irreducible y con denominador par.

Para cada valor de x superior á a, el segundo término tendrá dos valores reales iguales y de signo contrario.

Los dos valores distintos de y se hacen iguales para $x = a$ é imaginarios para $x < a$.

Dos ramas se reunen, pues, en el punto $x = a$, $y = \varphi(a)$. La derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \frac{p}{q}(x - a)^{\frac{p}{q}-1} \psi(x) \pm (x - a)^{\frac{p}{q}} \psi'(x).$$

Si $\frac{p}{q} > 1$, al valor $x = a$ corresponde $\frac{dy}{dx} = \varphi'(a)$.

Luego las dos ramas, que se reunen en el punto $x=a, y=\varphi(a)$, tienen la misma tangente, y dicho punto es de retroceso.

Para saber si es de primera ó de segunda especie, derivaremos, y resultará

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) \pm \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)\left(x - a\right)^{\frac{p}{q}-2} \psi(x)$$
$$\pm 2\frac{p}{q}(x - a)^{\frac{p}{q}-1} \psi'(x) \pm (x - a)^{\frac{p}{q}} \psi''(x).$$

Supondremos: 1.º $\frac{p}{2} - 2 > 0$, y se tendrá, para $x = a$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(a) .$$

Si pues $\varphi''(a)$ no es nula, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tiene el mismo signo en las dos ramas, y la curva tiene un retroceso de segunda especie.

2.º Si se tiene $$\frac{p}{q} - 2 < 0 ,$$

para un valor un poco superior á a, el término

$$\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)(x - a)^{\frac{p}{q} - 2}\psi(x) \qquad (\alpha)$$

será muy grande en valor absoluto, y no sucederá lo mismo á los otros términos de $\frac{dy^2}{dx^2}$ que todos, excepto el primero $\varphi''(x)$, convergen hacia cero, cuando x tiende hacia a.

Así, el término (α) da su signo á $\frac{d^2y}{dx^2}$; y por tener doble signo, resulta que, en el punto $[x = a,\, y = \varphi(a)]$, las dos ramas se hallan á los dos lados de la tangente común.

Ejemplo.—Sea

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}} .$$

A un valor positivo de x corresponden dos valores de y, que se hacen iguales para $x = 0$. La curva no tiene ningún punto al lado de las abscisas negativas. Por el lado de las abscisas positivas tiene dos ramas infinitas, la una hacia las y positivas, la otra hacia las y negativas, ésta, después de haber cortado al eje de las x en el punto $x = 1$ (fig. 76).

El límite de la relación $\frac{y}{x}$ es cero cuando $x = 0$, y cuando x se hace igual á cero, por el lado de las x positivas, los dos valores correspondientes de y son positivos; luego las dos ramas tienen la misma tangente en el origen, y se hallan situadas cerca de este punto al mismo lado de la tangente; por consiguiente el origen es un punto de retroceso de segunda especie.

Vemos además que

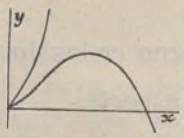


Fig. 76.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}.$$

Para $x = 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0 .$$

81. PUNTOS AISLADOS.—*Punto aislado* es aquél cuyas coordenadas satisfacen á la ecuación de la curva, sin que ninguna rama de ésta pase por el mismo.

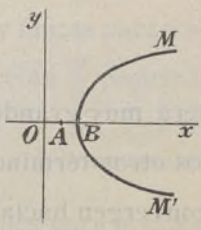


Fig. 77

EJEMPLO.—Sea

$$y = \pm (x - a) \sqrt{x - b} .$$

1.º Sea $a < b$. Para $x = b$ se tiene $y = 0$. Se tiene pues, un punto B en el eje de las x.

Si x aumenta desde b hasta $+\infty$, y aumenta desde 0 hasta $\pm\infty$, y se tiene una rama MBM'. Si $x < b$, será y imaginaria, excepto para $x = a$, correspondiendo $y = 0$ (fig. 77).

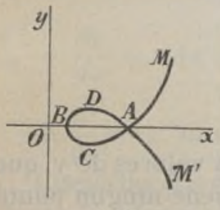


Fig. 78

El punto $x = a$, $y = 0$ es pues, un punto aislado.

2.º Si $a > b$, la curva tiene un bucle entre los valores $x = a$, $x = b$, correspondiendo en este intervalo dos valores de y á cada valor de x, que se reducen á cero para dichos valores extremos de x. Desde $x = a$ hasta $x = \infty$, y crece hasta el infinito, teniendo dos ramas infinitas que se cortan en el punto A, correspondiente á $x = a$, que es punto doble.

82. PUNTO DE PARADA.—Se entiende por *punto de parada* el punto en que una rama de curva se detiene.

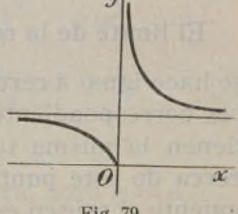


Fig. 79

EJEMPLO.—Sea

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Demos á x valores positivos.

Para $x=0$, se tiene $y=\infty$. Si x crece hasta $+\infty$, y decrece desde $+\infty$ hasta $+1$, lo que da una rama asintótica al eje de las y y á la recta $y=1$.

Cambiando x en $-x$ será $y=1 : e^{\frac{1}{x}}$. Para $x=0$ será $y=0$. La curva pasará por el origen. La ordenada aumentará con el valor absoluto de x hasta $y=1$.

Existirá una segunda rama asintótica á la recta $y=+1$ que se detendrá en el origen, viniendo á las x negativas.

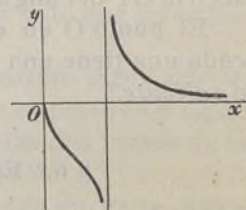


Fig 80

Hay un punto de inflexión (fig. 79) para

$$x=-\frac{1}{2}.$$

Ejemplo.—Sea

$$y=\frac{1}{lx}.$$

No se puede dar valores negativos á x, porque lx sería imaginario. Si le da á x valores positivos muy pequeños, la ordenada será muy pequeña y negativa y crecerá en valor absoluto con x hasta $x=1$, haciéndose igual á $-\infty$ para $x=1$.

Se tendrá pues, una rama de curva que parte del origen y cuya asíntota por el lado de las y negativas es la recta $x=1$. Si x crece á partir de 1 hasta ∞, y se hace positiva; y esta ordenada, al principio muy grande, decrece indefinidamente hasta cero, lo que da la rama MM'. El origen es un punto de parada (fig. 80).

83. Punto saliente ó anguloso.—Sea

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

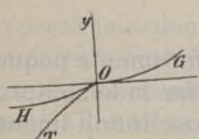


Fig. 81

Para $x=0$ se tiene $y=0$. El origen es un punto de la curva. Si en $\frac{y}{x}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ se hace $x=0$, se tiene $\lim \frac{y}{x}=0$. La rama OM tiene por tangente en el origen el eje de las x.

Si ahora hacemos $x=-z$, de donde $\frac{y}{x}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{z}}}$ para $x=-z=0$ se tiene $\lim \frac{y}{x}=1$; luego la rama ON situada en la parte inferior de las x negativas, tiene por tangente la bisectriz OT del ángulo de los ejes.

El punto O en el que terminan dos ramas de curva que cada una tiene una tangente distinta, se llama *punto anguloso ó saliente*.

§ 6.º Estudio de las ramas infinitas

Si consideramos, siguiendo la exposición de Cramer en su *Introduction á l'analyse des lignes courbes* la serie,

$$y=Ax^h+Bx^i+Cx^k+\ldots\ldots,$$

ordenada con arreglo á las potencias descendentes de x; para estudiar la rama de curva que representa, tendremos que examinar las curvas $y=Ax^h$, $u=Bx^i$, ... que se conocen con el nombre de *hipérbolas* ó de *parábolas*, según que los exponentes h, i, ... sean negativos ó positivos.

La ecuación $y^l=\alpha x^{-k}$ ó $y=Ax^{-k:l}$ se llama la familia de las hipérbolas de las que las más sencillas son la hipérbola ordinaria $xy=\alpha$ y la *hipérbola cúbica* $xy^2=\alpha$. Todas estas hipérbolas tienen por asíntotas sus ejes; porque en la ecuación

$$y=Ax^{-k:l}=\frac{A}{x^{k:l}},$$

al valor infinito de x corresponde un valor infinitamente pequeño de y, é inversamente; de manera que por un lado se aproxima infinitamente del eje de abscisas, alejándose infinitamente del de las ordenadas, y por el otro, se aproxima infinitamente del eje de las ordenadas, alejándose infinitamente del eje de las abscisas.

A su vez la parábola ordinaria origina, como la hipérbola una familia numerosa comprendida en las curvas que representa la ecuación general $y = x^{+k:l}$. Entre estas parábolas se encuentra la recta $y = x$, bisectriz del ángulo de las coordenadas rectangulares.

Las dos familias de curvas se pueden representar por la ecuación común $y^l = \alpha x^k$ ó $y = Ax^h$, que expresa parábolas, cuando $\frac{h}{l}$ ó k es positivo é hipérbolas, cuando es negativo.

La disposición de estas curvas respecto á los ejes de coordenadas depende del signo del parámetro α y de que los exponentes k y l sean pares ó impares. Así:

1.° Si k y l son impares, x^k tendrá el mismo signo que x; luego αx^k tendrá el mismo signo que x si α es positivo y signo contrario, si α es negativo, distribuyéndose las dos ramas de la curva en el 1.° y 3.er cuadrante ó en el 2.° y 4.°

2.° Si k es par y l impar, las ramas de cada curva se distribuirán en el 1.° y 2.° ó en el 3.° y 4.° cuadrantes.

3.° Si k es impar y l par, la distribución de las ramas será en el 1.° y 4.° ó en el 2.° y 3.°

4.° Si k y l son pares, la curva será imaginaria cuando α sea negativo; pero tendrá cuatro ramas reales, una en cada cuadrante, cuando α sea positivo.

Toda rama infinita, al alejarse al infinito adquiere insensiblemente la naturaleza de una rama hiperbólica ó parabólica, difiriendo de ella poco á una gran distancia, confundiéndose con ella en el infinito. Las ramas hiperbólicas tienen una asíntota y las parabólicas no tienen ninguna.

Esto hace que las ramas infinitas de las curvas se dividan en dos géneros: *ramas hiperbólicas* y *ramas parabólicas*.

Si la serie

$$Ax^h + Bx^i + Cx^k + \ldots\ldots$$

expresa la ordenada de una rama infinita, para conocer si esta rama es hiperbólica ó parabólica, se tomarán todos los términos en los cuales el exponente de x es positivo ó cero; y llamando v á su suma, si la línea cuyas coordenadas son x y v es una recta, la rama es hiperbólica y esta recta es la asíntota. La rama será parabólica, si la línea cuya cuya abscisa y ordenada son x y v no es una recta.

Si la línea cuyas coordenadas son x y v es una recta, la serie $v + \ldots\ldots$ es una rama hiperbólica cuya asíntota es dicha recta, porque todos los términos siguientes, en los que el exponente de x es negativo, tienen una suma tanto más pequeña cuanto mayor es x, reduciéndose á cero cuando x es infinita.

Para que los términos de v sean la ordenada de una recta, es necesario que x, en estos términos, no pase del primer grado.

Una rama hiperbólica que tiene una asíntota recta, tiene también una asíntota curva ó varias, porque cuantos más términos se tomen en la serie, más se aproximará á la ordenada de la curva. Luego si se describe una curva cuya abscisa sea x y la ordenada v con uno ó varios términos siguientes de la serie, esta curva será una asíntota de la propuesta, que se aproximará tanto más en el infinito, cuantos más términos se tomen después de v. Así, como el primer término de los que sigue á v vale infinitamente más que todos los demás, la curva cuya ordenada es v con el primer término que sigue, es decir, con el primer término de la serie en el que x tiene exponente negativo, es propiamente la que se llama asíntota curva de la rama infinita representada por dicha serie, y esta curva es una hipérbola cuya abscisa es CO (z) y cuya ordenada es ON (t);

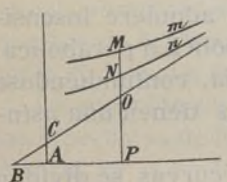


Fig. 82

porque siendo PM la ordenada de la curva propuesta Mm, PO (v), la ordenada de la asíntota BCO, PN ($v+t$) la ordenada de la asíntota curva Nn, (t) es el primer término de la serie en que x tiene un exponente negativo, por ejemplo $Cx^{-k:l}$; y las paralelas AC y PO dan AB: BC = AP: CO.

La razón $\frac{AB}{BC}$ está determinada por el triángulo ABC. Sea B : K la razón de AB á BC. Tendremos B : K = AP (x): CO (z); luego $z = \frac{Kx}{B}$ ó $x = \frac{Bz}{K}$, y la ordenada t ó sea $Cx^{-k:l} = \frac{CB^{-k:l}}{K^{-k:l}} z^{-k:l}$ ó $t^l = \frac{C^l K^k}{B^k} z^{-k}$, que es la ecuación de una hipérbola.

Si el coeficiente tiene en el infinito el mismo ó signo contrario que v, las ramas caen más allá ó más acá de la asíntota recta.

La rama infinita representada por una serie será parabólica, cuando en el primer término Ak^h el exponente es un número positivo distinto de la unidad ó cuando al ser igual á la unidad el exponente i del segundo término Bx^i sea positivo, pero inferior á la unidad.

Para obtener las ramas infinitas por medio del triángulo analítico, Cramer procede en su *Introduction á l' Analyse* de la manera siguiente:

Ejemplo 1.º—Sea la curva $xy^2 - a^2y - b^3 = 0$, que colocada en el triángulo analítico, da dos determinatrices

Fig. 83

(AB) $xy^2 - a^2y = 0$, (AC) $xy^2 - b^3 = 0$

que indican ramas hiperbólicas, designando, la primera, ramas que tienen por asíntota el eje de ordenadas y la segunda, ramas cuya asíntota es el eje de abscisas. La primera ecuación de $x = \frac{a^2}{y}$; expresa una asíntota curva que es una hipérbola cónica con parámetro positivo. Sus ramas se extienden en las coordenadas de igual signo.

La determinatriz AC da $y = \pm b^{3:2} x^{-1:2}$ que indica una hipérbola de tercer orden en los ángulos de las abscisas positivas.

Resuelta la ecuación propuesta respecto á y, se obtiene

$$y = \frac{a^2 \pm \sqrt{4b^3x + a^4}}{2x}$$

y se deduce la forma de la curva representada por la fig. 84.

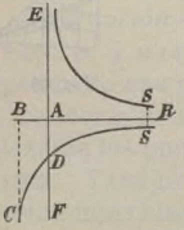


Fig. 84

Ejemplo 2.º—Sea $x^2y^2 - a^3y - b^3x = 0$. Colocando esta ecuación en el triángulo, se obtienen dos determinatrices AB y AC que corresponden á las ecuaciones

$$x^2y^2 - a^3y = 0, \qquad x^2y^2 - b^3x = 0$$

indican ramas hiperbólicas cuyas asíntotas son respectivamente los ejes de ordenadas y de abscisas.

La ecuación

$$y = \frac{a^3 \pm \sqrt{a^6 + 4b^3x^3}}{2x^2}$$

expresa la forma de la curva; y tiene dos valores. Tomando x positiva, uno de los dos valores de y es positivo y el otro negativo. Si $x = \infty$, estos dos valores se reducen á $\pm\, b^{3:2}x^{-1:2}$, siendo por lo tanto, infinitamente pequeños é iguales, pero de signo opuesto.

Cuando x es infinitamente pequeña, el valor positivo se reduce á $\frac{a^3}{x^2}$ y el negativo á cero.

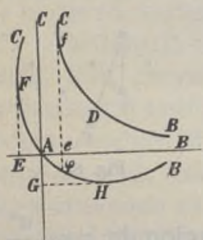


Fig. 85

El valor positivo representa pues, una rama BCD cuyas asíntotas son los dos ejes y el valor negativo una rama BHA cuya asíntota es el eje de las x, que pasa por el origen. Si se toma x negativa, los dos valores de y son positivos. La curva no tiene, por ser positivos los valores de y ramas en el ángulo de las coordenadas negativas; pero tiene dos ramas AF y FC en el ángulo de las abscisas negativas y de las ordenadas positivas, siendo $\mathrm{EF} = \frac{b^2\sqrt[3]{2}}{a}$ el valor de la ordenada correspondiente á la mayor abscisa negativa.

Resolviendo la ecuación respecto á x, tenemos

$$x = \frac{b^3 \pm \sqrt{b^6 + 4a^3y^3}}{2y^2}$$

que da para la ordenada extrema y su abscisa correspondiente, los valores

Fig. 86

$$\mathrm{GH} = \frac{a^2\sqrt[3]{2}}{b}, \qquad \mathrm{AG} = \frac{b^2}{a\sqrt[3]{4}}.$$

La curva tiene cuatro ramas hiperbólicas.

Ejemplo 1.º—Sea la ecuación

$$x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0.$$

Colocando la ecuación en el triángulo de De Gua (fig. 86), según el procedimiento expuesto por Cramer, la figura correspondiente indica dos ramas que pasan por el origen y una rama infinita dadas por las ecuaciones

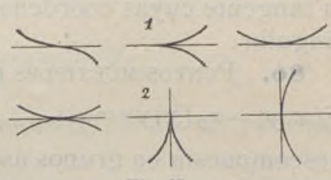


Fig. 87

$$x^3+2a^2y=0, \quad 2a^2x^3-b^3y^2=0,$$
$$x^2-by=0.$$

Y las ramas son de la forma expresada por la fig. 87,1.

Ejemplo 2.º—Sea la ecuación

$$x^3y^2+xy^5-y^7-x^7=0,$$

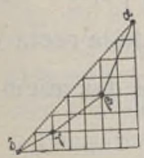


Fig. 88

Tendremos en el triángulo el polígono $\alpha\beta\gamma\delta$, que dará

$$y^2-x^4=0 \quad (\alpha\beta), \qquad x^2+y^3=0 \quad (\beta\gamma),$$
$$x-y^2=0 \quad (\gamma\delta),$$

representadas por la fig. 87,2.

84. Estudio de los puntos en el infinito.—La consideración de las asíntotas como tangentes en el infinito, permite clasificar las asíntotas y sus puntos de contacto como puntos singulares.

Para hallar las asíntotas de una curva $f(x, y, z)=0$, cuya ecuación está escrita en coordenadas homogéneas, se hará $z=0$, que representa la recta del infinito, y resolviendo la ecuación $f(x, y, 0)=0$, hallaremos las tangentes en los puntos (x, y) raíces de esta ecuación. La curva tendrá puntos singulares en el infinito, si

$$f_1=0, \qquad f_2=0, \qquad f_3=0,$$

que podrán ser de retroceso, dobles, triples, etc.

Observación.—El que la resultante de dos ecuaciones de grados m y n tenga menos raíces que indica el producto mn depende de que no se consideran las soluciones infinitas.

La teoría de las asíntotas da á conocer el número y la naturaleza de los puntos en el infinito.

85. Tangentes singulares.—Puede exponerse una teoría de tangentes singulares análoga á la de los puntos singulares. Sea la ecuación tangencial $f(\xi, \eta, \zeta)=0$; si se supone

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

la tangente cuyas coordenadas satisfacen á esta ecuación, será singular.

86. Puntos múltiples en el infinito *a)*.—Sea la ecuación

$$F(x,y) = \varphi_p(x) y^{m-p} + \varphi_{p+1}(x) y^{m-n-1} + \ldots + \varphi_m(x) = 0, \quad (1)$$

descompuesta en grupos ascendentes de diversos grados, y sea a una raíz simple de $\varphi_p(x) = 0$.

Cortemos la curva por una recta paralela á la recta $x = a$ y próxima á esta recta $x = a + \varepsilon$; la ecuación

$$\varphi_p(a+\varepsilon) y^{m-p} + \varphi_{p+1}(a+\varepsilon) y^{m-n-1} + \ldots + \varphi_m(a+\varepsilon) = 0 \quad (2)$$

dará las ordenadas de los puntos de intersección de la recta y de la curva. Hagamos $y = \frac{1}{z}$, y multipliquemos los dos miembros de la ecuación (2) por z^{m-p}, se obtendrá

$$\varphi_p(a+\varepsilon) + \varphi_{p+1}(a+\varepsilon) z + \ldots + \varphi_m(a+\varepsilon) z^{m-p} = 0. \quad (3)$$

A cada raíz infinitamente pequeña de la ecuación (3) corresponde una raíz infinitamente grande de la ecuación (2).

Supongamos

$$\varphi_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+2}(a) = 0, \quad \varphi_{p+q-1}(a) = 0,$$

y sea $\varphi_{p+q}(a)$ la primera de las cantidades de la forma $\varphi_i(a)$ que no se anula. La ecuación (3) tomará la forma

$$\varepsilon[\varphi'_p(a) + \ldots + z\varphi'_{p+1}(a) + \ldots]$$
$$+ z^q [\varphi_{p+q}(a) + \varepsilon' \varphi'_{p+q}(a) + \ldots] = 0. \quad (4)$$

Por ser a una raíz simple de la ecuación

$$\varphi_p(x) = 0, \quad \text{será} \quad \varphi'_p(a) \gtrless 0,$$

y los términos que siguen á los primeros términos en cada uno de los paréntesis tienen por factores, sea ε y z; y la ecuación (4) se podrá escribir

$$\varepsilon[\varphi'_p(a) + \alpha] + z^q [\varphi_{p+q}(a) + \beta] = 0, \quad (5)$$

siendo α y β tan pequeñas como se quiera, cuando se sustituye á z en los paréntesis una de las q raíces próximas á cero que adquiere la ecuación (4) para valores suficientemente pequeños de ε. Podremos, pues, representar por

$$Z^q = -\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}\varepsilon = -\mathrm{R}\varepsilon \tag{6}$$

los valores aproximados de las q raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (4).

Si q es impar la ecuación (6) sólo tiene una raíz real de signo contrario al de R, y supongamos que esta fracción es positiva. Para un valor positivo de ε, la raíz real de la ecuación (6) es negativa, y haciendo $\mathrm{OA} = a$ (fig. 89) se obtendrá un punto M′ hacia el lado de las y negativas en la recta $\mathrm{B_1 B'_1}$ cuya ecuación es $x = a + \varepsilon$. Cuando ε tiende hacia cero, esta raíz engendra la rama B′M′; y para valores negativos de ε se obtiene la rama BM. Estas dos ramas son asíntotas á uno y otro lado de la recta BB′ cuya ecuación es $x = a$, y el signo de la relación R da la posición de la curva con respecto á la asíntota.

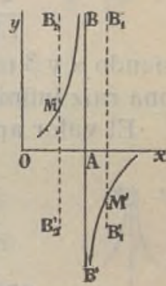


Fig. 89

Supongamos ahora q par y R positiva. Para valores positivos de ε, todas las raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (5) son imaginarias. Si al contrario, se da á ε valores negativos, dos de las raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (5) son reales, una positiva, la otra negativa. Se obtienen pues, en la recta $\mathrm{B_1 B'_1}$ (fig. 90) dos puntos situados, el uno en la región las y positivas, el otro en el de las negativas. Cuando ε tiende hacia cero, las dos raíces consideradas engendran las ramas MB y M′B′ situadas á un mismo lado de la asíntota.

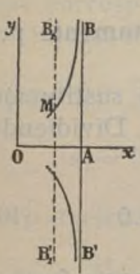


Fig. 90

Todo lo que se ha dicho respecto á la raíz a se dirá respecto á las demás, y se construirán las ramas de curva correspondientes á cada una.

b). Supongamos que a es raíz doble; en este caso será

$$\varphi'_p(a) = 0, \quad \varphi''_p(a) \lesseqgtr 0;$$

la ecuación (3) se podrá escribir así:

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a)+\ldots\ldots+\frac{\varepsilon^p}{p!}\varphi_p^{(p)}(a)$$

$$+\varepsilon\left[\varphi_{p+1}(a)+\varepsilon\varphi'_{p+1}(a)+\ldots\ldots\right]+\ldots\ldots$$

$$+\varepsilon^{m-p}\left[\varphi_m(a)+\varepsilon\varphi'_m(a)+\ldots\ldots\frac{\varepsilon^m}{m!}\varphi_m^m(a)\right]=0 \qquad (7)$$

Supongamos que a no anula á la función $\varphi_{p+1}(x)$; entonces la ecuación (7) podrá escribirse como sigue:

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}[\varphi''_p(a)+\alpha]+\varepsilon[\varphi_{p+1}(a)+\beta]=0, \qquad (8)$$

siendo α y β tan pequeñas como se quiera, cuando ε designa una raíz infinitamente pequeña de la ecuación (8).

El valor aproximado de ε es

$$\varepsilon=-\frac{\varphi''_p(a)}{\varphi_{p+1}(a)}\frac{\varepsilon^2}{1.2}=-R_1\frac{\varepsilon^2}{1.2}$$

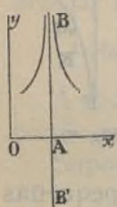


Fig. 91

A esta raíz corresponden dos ramas de curva análogas á las de la figura 91 construída en la hipótesis de ser $R_1>0$.

Consideremos el caso en que

$$\varphi_{p+1}(a)=0,\quad \varphi'_{p+1}(a)\gtrless 0 \quad \text{y}\ \varphi_{p+2}\gtrless 0,$$

siendo a una raíz doble de $\varphi_p(x)=0$.

La ecuación (3) tomará la forma

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a)+\varepsilon\varepsilon\varphi'_{p+1}(a)+\varepsilon^2\varphi_{p+2}(a)+\gamma=0, \qquad (9)$$

siendo γ la suma de los términos restantes, infinitamente pequeños respecto á los escritos.

Hagamos $\varepsilon=\zeta\varepsilon$. La ecuación (9), después de la sustitución contiene en su primer miembro á ε^2 como factor. Dividiendo por éste, resulta

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(a)+\zeta\varphi'_{p+1}(a)+\zeta^2\varphi_{p+2}(a)+\gamma'=0 \qquad (10)$$

siendo γ' la suma de términos que tienen todos á ε como factor. Para valores de ε infinitamente pequeños, la función ζ se aproximará cuanto queramos á una de las raíces de la ecuación

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(a)+\zeta\varphi'_{p+1}(a)+\zeta^2\varphi_{p+2}(a)=0. \qquad (11)$$

Sean éstas ζ_0 y ζ_1. Las dos raíces de la ecuación en z que tienden hacia cero, tendrán los valores aproximados

$$z=\zeta_0\,\varepsilon, \qquad z=\zeta_1\,\varepsilon.$$

Por consiguiente, si ζ_0 y ζ_1 tienen igual signo (positivo), la curva presentará una disposición análoga á la de la figura 92, y si ζ_0 y ζ_1 tienen signos contrarios, la curva tendrá la disposición de la fig. 93. Si las raíces de la ecuación (11) son imaginarias, no hay ramas reales asíntotas á la recta BB′. En fin, si las raíces de la ecuación (11) son iguales, tomará ésta la forma

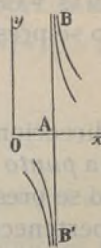


Fig. 92

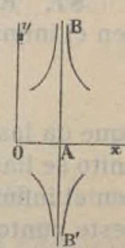


Fig. 93

$$\varphi_{p+2}(a)(\zeta-\zeta_0)^2+A\varepsilon+B\varepsilon^2+\ldots=0, \quad (12)$$

y por consiguiente

$$\zeta-\zeta_0=\pm\sqrt{-\frac{A\varepsilon+B\varepsilon^2+\ldots}{\varphi_{p+2}(a)}}.$$

Los dos valores aproximados de ζ que tienen por límite ζ_0 son

$$\zeta=\zeta_0\pm\sqrt{-\frac{A}{\varphi_{p+2}(a)}\,\varepsilon},$$

y darán á la curva una disposición análoga la de la figura 51,4 que corresponde al retroceso de segunda especie.

Vamos á tratar el caso

$$\varphi_{p+1}(a)=0,\quad \varphi_{p+2}(a)=0,\ldots\ldots\varphi_{p+N-1}(a)=0,\ \varphi_{p+N}(a)\gtrless 0,$$

$$\varphi'_{p+1}(a)=0,\quad \varphi'_{p+2}(a)=0,\ldots\ldots\varphi'_{p+n-1}(a)=0,\ \varphi'_{p+n}(a)\gtrless 0.$$

Introduciendo estas hipótesis en la ecuación (3), tendremos

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a)+\varepsilon z^n\varphi'_{p+n}(a)+z^N\varphi_{p+N}(a)+\delta=0.$$

Y podremos concluir:

1.º Si $n \geqslant N$, las ramas ofrecen la disposición de la figura 91 cuando N es impar, y cuando N es par, ó no hay ramas ó adoptan la disposición de la fig. 93.

2.º Si $N = 2n$ se obtiene la disposición de las figuras 51,5, y 51,7, si n es par y si las raíces de la ecuación en ζ^n

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(a) + \zeta^n \varphi'_{p+n}(a) + \zeta^{2n}\varphi_{p+2n}(a) = 0.$$

son reales y desiguales. (*)

87. Ramas parabólicas.—Cuando la dirección de un punto en el infinito se presenta como raíz simple de la ecuación

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \psi(z) = 0,$$

que da las direcciones de las ramas infinitas, el punto en el infinito se llama *punto hiperbólico;* y cuando la dirección del punto en el infinito se presenta como raíz múltiple de dicha ecuación, este punto pertenece generalmente á una rama parabólica, y á veces á varias ramas hiperbólicas con asíntotas paralelas ó coincidentes. En todos estos casos los puntos se llaman *parabólicos.*

Los *puntos parabólicos* son verdaderos puntos singulares situados en el infinito, y el coeficiente angular de la tangente en uno de ellos, se presenta bajo forma indeterminada, mientras nos limitemos á considerar ecuaciones de derivadas parciales de primer orden.

Los puntos hiperbólicos existen generalmente en las curvas, mientras que los puntos parabólicos solo se encuentran excepcionalmente, cuando existe una ó varias ecuaciones de condición entre los coeficientes de la ecuación de la curva.

Para construir las ramas parabólicas dadas por una dirección múltiple de los puntos en el infinito, puede seguirse el procedimiento empleado por el Sr. Biehler en su memoria arriba citada, de la cual extractamos los siguientes indicaciones:

Sea, como arriba se indicó,

$$F(x, y) = f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) + \ldots + f_0 = 0 \qquad (1)$$

la ecuación de la curva.

Cortémosla por la recta $x = \frac{1}{\lambda}$, y formemos el haz de rectas

(*) Véase *Biehler*, Théorie des points singuliers Nouv. Ann. t. XIX (1880) et t. XX (1881).

que unen el origen á los puntos de intersección de la recta y de la curva. Para ello, eliminaremos z entre las ecuaciones

$$f_m(x, y) + zf_{m-1}(x, y) + \ldots + z^m f_0 = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{z}{\lambda}.$$

La ecuación del haz de rectas será

$$f_m(x, y) + \lambda x f_{m-1}(x, y) + \ldots + \lambda^m x^m f_0 = 0. \tag{2}$$

Sea t la inversa del coeficiente angular de uno cualquiera de los rayos del haz. Tendremos $x = ty$. Sustituyendo en (2), resulta

$$f_m(1, t) + \lambda t f_{m-1}(t, 1) + \ldots + \lambda^m t^m f_0 = 0, \tag{3}$$

que escribiremos como sigue:

$$\varphi_m(t) + \lambda t \varphi_{m-1}(t) + \ldots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \tag{4}$$

Cuando la recta $x = \frac{1}{\lambda}$ se aleja del origen, es decir, cuando λ tienda hacia cero, uno ó varios de los valores de t deberán tender hacia cero, si existen ramas parabólicas en la dirección del eje de las y.

Pero la ecuación (4), desarrollada, se transforma en

$$\begin{gathered}\varphi_m(0) + t\varphi'_m(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''_m(0) + \ldots \\ + \lambda t\left[\varphi_{m-1}(0) + t\varphi'_{m-1}(0) + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{m-1}_{m-1}(0)\right] + \ldots \\ + \lambda^{m-1}t^{m-1}[\varphi_1(0) + t\varphi'_1(0)] + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Es necesario pues, que $\varphi_m = 0$ y $\varphi'_m(0) = 0$, para que la ecuación (5) pueda quedar satisfecha por un sistema de valores infinitamente pequeños de λ y de t, es decir, que la dirección del eje de las y sea una dirección doble de puntos en el infinito. La ecuación (5), en esta hipótesis, se reduce después de suprimir el factor t, á

$$\begin{gathered}\frac{t}{1.2}\varphi''_m(0) + \ldots + \lambda[\varphi_{m-1}(0) + t\varphi'_{m-1}(0) + \ldots] \\ + \lambda^{m-1}t^{m-2}[\varphi_1(0) + t\varphi'_1(0)] + \lambda^m t^{m-1}\varphi_0 = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

que se puede escribir bajo la forma

$$t\left[\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0) + \alpha\right] + \lambda[\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0 \tag{7}$$

de la que resulta

$$t = -\frac{\varphi_{m-1}(0) + \beta}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0) + \alpha}\lambda,$$

siendo α y β sumas de términos que contienen todos, sea t sea λ. como factor.

Cuando λ tiende hacia cero, una sola raíz de la ecuación (6) tenderá hacia cero, y la fórmula

$$t = -\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0)}\lambda \tag{8}$$

da un valor aproximado de la misma, suponiendo que $\varphi'_m(0)$ y $\varphi_{m-1}(0)$ sean diferentes de cero.

Para interpretar geométricamente estos resultados, sea OA (figura 94) la cantidad $\frac{1}{\lambda}$. A medida que λ disminuye, la recta AM, paralela al eje de las y se aleja del origen. En esta recta se halla el punto M de la curva, dado por la intersección de AM con un rayo OM muy próximo de Oy, cuyo coeficiente angular es la inversa de la raíz infinitamente pequeña representada por la fórmula (8). Cuando λ disminuye, el punto M engendra la rama MN, y la región en la que se halla dicha rama está dada por el signo de la relación $\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi''_m(0)}$.

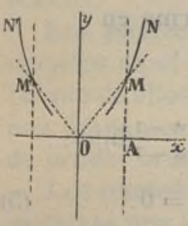


Fig. 94

Cuando λ cambia de signo, la raíz infinitamente pequeña cambia también de signo y da la rama N'M' situada al otro lado del eje de las y. La figura está construída en la hipótesis de ser positivo el coeficiente λ de la fórmula (8).

Supongamos que $\varphi_{m-1}(0)$ sea distinta de cero, y que cierto número de derivadas de $\varphi_m(t)$, para $t = 0$, sean

$$\varphi''_m(0)=0, \ldots \varphi_m^{(q-1)}(0)=0, \text{ y } \varphi_m^{(q)}(0) \lessgtr 0,$$

La ecuación (6) tomará la forma

$$t^{q-1}\left[\frac{\varphi_m^{(q)}(0)}{q!} + \alpha\right] + \lambda[\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0, \tag{9}$$

conteniendo α y β en todos sus términos, sea t ó sea λ como factor.

Si $q-1$ es impar, una sola de las $q-1$ raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (9), que tiende hacia cero, engendra una curva cuya forma general es análoga á la de la figura 94.

Si $q-1$ es par, dos de las raíces de la ecuación (9) son reales y de signo contrario; pero es necesario, para esto, que λ haya recibido un valor cuyo signo sea el de la relación $-\dfrac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi_m^q(0)}$; en este caso, la curva afecta una forma semejante á la fig. 95.

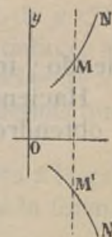


Fig. 95

Supongamos ahora $\varphi_{m-1}(0)=0$.

La ecuación (6) no quedará satisfecha por valores pequeños de λ y t, mientras que no sea $\varphi_m(0)=0$, $\varphi'_m(0)=0$, $\varphi''_m(0)=0$, es decir, mientras la dirección del eje de las y no sea triple. En este caso la ecuación (6) toma la forma

$$t\left[\frac{1}{3!}\varphi'''_m(0)+\alpha\right]+\lambda[\varphi'_{m-1}(0)+\beta]=0,$$

y se obtienen todavía ramas parabólicas análogas á las de la figura 94.

Pero si $\varphi_{m-1}(0)=0$ con $\varphi'_{m-1}(0)=0$ y si $\varphi''_{m-1}(0)$ es también nula, la ecuación podrá escribirse así:

$$t\left[\frac{1}{3!}\varphi'''_m(0)+\alpha\right]+\lambda^2[\varphi_{m-2}(0)+\beta]=0,$$

y la raíz infinitamente pequeña t engendra ramas MN y M′N′ (figura 96) situadas á uno y otro lado del eje de las y, en regiones opuestas del plano. La figura está construída en la hipótesis de ser $\dfrac{\varphi_{m-2}(0)}{\varphi'''_m(0)}$ negativa.

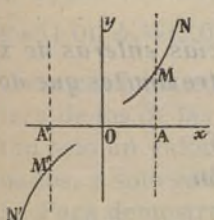


Fig. 96

Supongamos

$$\varphi_m(0)=0,\quad \varphi'_m(0)=0,\quad \varphi''_m(0)=0,$$

$$\varphi'''_m(0)=0,\quad \varphi^{\mathrm{IV}}_m(0)\gtrless 0$$

$$\varphi_{m-1}(0)=0,\quad \varphi'_{m-1}(0)=0,\quad \varphi''_{m-1}\gtrless 0 \text{ con } \varphi_{m-2}\gtrless 0.$$

La ecuación (6) se reduce á

$$t^2\frac{\overset{\text{IV}}{\varphi_m}(0)}{4!}+\lambda t\frac{\varphi'_{m-1}(0)}{2!}+\lambda^2\varphi_{m-2}(0)+\gamma=0$$

siendo γ infinitamente pequeño de orden superior.

Haciendo $t=\tau.\lambda$, todos los términos serán divisibles por λ^2, y obtendremos sucesivamente

$$\tau^2\frac{\overset{\text{IV}}{\varphi_m}(0)}{4!}+\tau.\frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2}+\varphi_{m-2}(0)+\gamma'=0 \tag{12}$$

$$\tau^2\frac{\overset{\text{IV}}{\varphi_m}(0)}{4!}+\tau\frac{\varphi''_{m-1}(0)}{2!}+\varphi_{m-2}(0)=0.$$

Cuya interpretación geométrica y ulteriores desarrollos pueden verse en la memoria citada de M. Biehler.

§ 7.º Reversión de las series

88. Sea la función

$$\Sigma(m,n)x^m y^n \equiv (1,0)x+(0,1)y+(2,0)x^2+(1,1)xy+\ldots$$

en la que el símbolo (m, n) expresa los coeficientes constantes.

En el caso de ser infinita la serie doble, la suponemos absolutamente convergente cuando mod x = mod $y = 1$, de manera que el coeficiente (m, n) será infinitamente pequeño cuando m ó n sean infinitamente grandes.

Teorema.—*Se puede obtener un valor, y solamente uno de* y *como función de* x, *tal que:*

1.º y *sea desarrollable en serie de potencias enteras de* x *para todos los valores de* x, *comprendidos entre límites que no se hallen infinitamente próximos.*

2.º y *tiene el valor inicial* 0 *cuando* x = 0.

3.º y *satisface idénticamente á la ecuación*

$$\Sigma(mn)x^m y^n=0. \tag{1}$$

Supongamos por ahora que puede obtenerse dicha serie. El término constante es nulo, en virtud de la 2.ª condición. La serie será pues, de la forma

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots . \tag{2}$$

Para que la sustitución de (2) en (1) la haga idéntica, debe ser posible hallar un valor de $x < 1$ tal, que (2) dé un valor de $y < 1$.

La serie (1), transformada por medio de (2), debe satisfacer al criterio de Cauchy, y poder ordenarse según las potencias de x. Para satisfacer á la tercera condición, es necesario además que los coeficientes de las potencias de x se anulen.

Convengamos en hacer $(0, 1) = -1$, lo que no afecta á la generalidad del razonamiento. La identidad (1) adquirirá la forma

$$\begin{aligned} y = &\{(1, 0)x + (2, 0)x^2 + (3, 0)x^3 + \ldots\} \\ &+\{(1, 1)x + (2, 1)x^2 + (3, 1)x^3 + \ldots\} y \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\{(0, n) + (1, n)x + (2, n)x^2 + (3, n)x^3 + \ldots\} y^n \end{aligned} \tag{3}$$

y sustituyendo en la (2), tendremos

$$\begin{aligned} &b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \\ &= \{(1, 0)x + (2, 0)x^2 + (3, 0)x^3 + \ldots\} \\ &+ \{(1,1)x + (2,1)x^2 + (3,1)x^3 + \ldots\}(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots)x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \{(0, n) + (1, n)x + (2, n)x^2 + \ldots\} (b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots)^n x^n \end{aligned} \tag{4}$$

é identificando,

$$b = (1,0),\ b_2 = (2,0) + (1,1)b_1 + \ldots,\ b_n = (n,0) + (1,1)b_{n-1} + \ldots \tag{5}$$

Cada coeficiente de una ecuación está expresado en función entera de los de las que le preceden; y puesto que la primera da tan solo un valor para b_1, todos los coeficientes están determinados, y solo se obtendrá un valor de y.

Para demostrar que el sistema (5) da una solución, hay que demostrar que para un valor de x cuyo módulo sea suficientemente pequeño, pero no infinitamente pequeño, las condiciones de la convergencia absoluta de (2) y (4) quedarán satisfechas cuando $b_1, b_2, \ldots$ tengan los valores dados por (5).

Los módulos de los coeficientes de la serie (3) son finitos é inferiores al módulo λ. Supongamos que en (3) λ sustituye á todos los coeficientes, siendo x positivo y < 1; tendremos

$$y = \lambda(x + x^2 + \ldots) + \lambda(x + x^2 + \ldots)\, y + \lambda(1 + x + x^2 \ldots) y^2 \ldots \quad (6)$$

Esta serie es convergente para $x < 1$ é $y < 1$, pues añadiendo $\lambda + \lambda y$ á los dos miembros, resulta

$$(1 + \lambda) y + \lambda = \frac{\lambda}{(1 - x)(1 - y)} \text{ ó sea } (1 + \lambda) y^2 - y + \frac{\lambda x}{1 - x} = 0.$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{4\lambda(1 + \lambda) x}{1 - x}}}{2(\lambda + 1)}\,; \quad (7)$$

pero mientras $4\lambda(1 + \lambda) x : (1 - x) < 1$, ó sea $x < 1 : (2\lambda + 1)^2$, el segundo miembro de (7) puede desarrollarse en serie absolutamente convergente, según las potencias enteras de x, cuyo término constante es nulo; luego, si $x < 1 : (2\lambda + 1)^2$, el valor de y dado por (7) es positivo y menor que 1. Luego (6) es convergente.

Para resolver el problema que consideramos, sea la serie que expresa y la siguiente:

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots; \quad (8)$$

las ecuaciones que determinan $C_1, C_2, C_3, \ldots$ se obtendrán haciendo $(1, 0) = (2, 0) = (1, 1) \ldots = \lambda$ en (5), es decir

$$C_1 = \lambda, \qquad C_2 = \lambda(1 + C_1 + C_1^2),$$
$$C_3 = \lambda(1 + C_2 + C_1 + C_1^2 + 2 C_1 C_2 + C_1^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots C_n = \lambda(1 + C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots C_1^n), \quad (9)$$

en las que $C_1, C_2, \ldots$ serán reales y positivas.

Y representando los módulos con un acento, será

$$b' = (1,0)' < \lambda < C_1,$$
$$b'_2 \not> (2,0)' + (1,1)' b'_1 + (0,2)' b'^2_2 < \lambda(1 + C_1 + C^2_1) < C_2,$$
$$b'_3 \not> (3,0)' + (1,1)' b'_2 + (2,1)' b'_1 + (1,2)' b'^2_2 + 2(0,2)\, b'_1 b'_2 + (0,3)' b'^3_1$$
$$< \lambda(1 + C_2 + C_1 + C_1^2 + 2\, C_1\, C_2 + C_1^3) < C_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Luego los módulos de los coeficientes de (2) son menores que los módulos en la serie (8), que es absolutamente convergente; luego la serie (2) es absolutamente convergente, siempre que $x < \frac{1}{(2\lambda+1)^2}$. Sólo falta demostrar que x puede elegirse (sin ser infinitamente pequeño) de manera que y, dada por (2) sea tal que $|y| > 1$. Tenemos, en efecto, que

$$|y| < |b_1||x| + |b_2||x|^2 + \ldots < C_1||x| + C_2|x|^2 + \ldots$$

$$< \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1+\lambda)|x| : (1 - |x|)}}{2(\lambda+1)} \tag{11}$$

Pero el segundo miembro de (11) es < 1 cuando $|x| < 1 : (2\lambda+1)^2$; luego si $|x| < 1 : 2\lambda + 1)^2$, las series (3) y (4) son convergentes, y (1) se reduce á una identidad.

Se ha demostrado, pues, que puede hallarse uno y tan solo un valor de y, desarrollable entre ciertos límites según las potencias de x, que satisfaga á la ecuación (1) y *las funciones de* x *y de* y *así determinadas, siendo representables por series potenciales, son continuas.*

Esto sentado, podremos enunciar el problema de la *reversión de las series,* como sigue:

Dada la ecuación

$$x = a_0 + a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + \ldots \tag{1}$$

en la que $a_m \neq 0$, *pero en la que* a_0 *puede ó no ser igual á cero, y la serie* $a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + \ldots$ *es absolutamente convergente, mientras* que $|y| \not> a$ *es una cantidad positiva* ρ, *hallar el desarrollo convergente de* y *según las potencias de* $x - a_0$.

Supongamos que ξ exprese el valor principal de la m^{sima} raíz de $\frac{x - a_0}{a_m}$ y ω_m una raíz primitiva de la unidad, entonces (1) es equivalente á m ecuaciones del tipo

$$\omega_m^r \xi = y\left(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} y + \frac{a_{m+2}}{a_m} y^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{m}} \tag{2}$$

Pero, siendo absolutamente convergente la serie entre paréntesis de (2), para todos los valores de y tales que $|y| \not> \rho$, resulta del teorema del binomio que podemos, tomando y entre ciertos límites, desarrollar el segundo miembro de (2) en serie según las potencias de y, y tendremos

$$-\omega_m^r \xi + y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \ldots\ldots = 0. \qquad (3)$$

Luego, según el teorema anterior, y mientras ξ no pase de cierto límite, tendremos que

$$y = b_1 \omega_m^r \xi + b_2 \omega_m^{2r} \xi^2 + b_3 \omega_m^{3r} \xi_3 + \ldots\ldots \qquad (4)$$

Tenemos, por consiguiente, m *de estos resultados, en los que los coeficientes* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *son los mismos, pero en los que* r *tiene los diversos valores* 0, 1, 2, ... (m — 1).

Cada una de estas soluciones es una función continua de x.

COROLARIO.—*Cuando* $a_0 = 0$ *y* $m = 1$, *tenemos la solución*

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots\ldots \qquad (5)$$

EJEMPLO.—Invertir la serie

$$z = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots \qquad (6)$$

Haciendo $z = 1 + x$, tendremos $x = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots..$ (7)

y para x entre ciertos límites $y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$ (8)

Establecida la existencia de la serie convergente (8), vamos á determinar los coeficientes. Incrementando (7), se tiene que

$$h = \frac{(y+k) - y}{1} + \frac{(y+k)^2 - y^2}{2!} + \frac{(y+k)^3 - y^3}{3!} + \ldots\ldots$$

y siendo
$$\lim \frac{(y+k)^n - y^n}{k} = n y^{n-1}$$

$$\text{tenemos } \lim \frac{h}{k} = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \ldots\ldots = 1 + x. \qquad (9)$$

Por otra parte, de (8) se deduce derivando

$$\lim \frac{k}{h} = b_1 + 2\,b_2\,x + 3\,b_3\,x^2 + \ldots\ldots \tag{10}$$

y combinando (9) con (10), resulta

$$b_1 + 2\,b_2\,x + 3\,b_3\,x^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots$$

é identificado, resulta $b_1 = 1,\, b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{3}$;

luego $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \ldots$

Esta expresión da la única rama de y desarrollable según las potencias de $z-1$, que se anula cuando $z = 1$.

89. Desarrollo de las varias ramas de una función algebráica.—No es necesario tratar detalladamente esta cuestión, que ya se expuso extensamente en el tomo II, págs. 254-266. Bastará suponer que la ecuación

$$A_n\,y^n + A_{n-1}\,y^{n-1} + \ldots\ldots + A_1\,y + A_0 = 0 \tag{1}$$

en la que $A_0, A_1, \ldots, A_n$ son funciones enteras de x, es irreducible, no excluyendo la irreducibilidad la existencia de raíces múltiples. Por cada valor de x *(punto-cero)* que hace $A_0 = 0$, una rama de y tiene un valor cero, por cada valor de x *(doble punto-cero)* que hace $A_0 = 0$ y $A_1 = 0$, dos ramas tienen un valor cero, etc.

Para cada valor de x *(polo)* que hace $A_n = 0$, una rama de y tiene un valor infinito; para cada valor de x *(doble polo)*, que hace $A_n = 0$ y $A_{n-1} = 0$, dos ramas de y tienen un valor infinito, y así sucesivamente.

También se demostró *que cada rama de una función algebráica es* (dentro de ciertos límites) desarrollable en series de potencias ascendentes ó descendentes, de manera que cada rama es, excepto en un polo, continua para todos los valores finitos de x. Podemos decir que: *si en el punto* x = a *la función algebráica* y *tiene un solo valor* y = b, entonces y — b *es, dentro de ciertos límites, desarrollable en una serie absolutamente convergente de la forma*

$$y - b = C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots \tag{2}$$

Sea $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, entonces la ecuación (1) se reduce á

$$(0, 0) + (1, 0)\xi + (0, 1)\eta + (2,0)\xi^2 + \ldots = 0. \quad (3)$$

Puesto que $y = b$ es una raíz simple de (1) correspondiente á $x = a$, cuando $\xi = 0$, la ecuación (3) da solo un valor cero de η; por consiguiente debemos tener $(0, 0) = 0$ y $(0, 1) \neq 0$, y del teorema (*p.* 200) resulta, entre ciertos límites, el único desarrollo

$$\eta = C_1\xi + C_2\xi^2 + C_3\xi^3 + \ldots$$

que satisface á la ecuación (3), esto es,

$$y = b + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + \ldots \quad (4)$$

que satisface á la ecuación (1).

La función determinada por (4) es continua, mientras que mod $(x - a)$ sea menor que el radio de convergencia de la serie, y tiene el valor $y = b$ cuando $x = a$.

Si todos los valores de y, á saber, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ correspondientes á $x = a$ son simples, para cada uno se tendrá un valor de y de la forma (4); luego

COROLARIO.—*Mientras no tengan un punto común dos ramas de una función algebráica, cada rama es una función continua de* x, *y el incremento de* y *en cada punto de una rama particular es desarrollable en una serie de potencias ascendentes de* x, *mientras que el módulo del incremento de* x *no exceda de cierto límite finito.*

Respecto al caso en $x = a$ es un punto múltiplo de la función y, se demostró ya (t. II p. cit.) que: *Para cada punto múltiplo de orden* q *que corresponde á un valor* q *— uplo* $y = b$, *se pueden obtener* q *desarrollos diferentes de* y *bajo la forma* $y = b + \Sigma C_r (x - a)^r$, *en los que los exponentes* r *forman una serie de quebrados positivos crecientes.*

Ya que se trató de esta cuestión, nos bastará decir que si η es desarrollable en serie absolutamente convergente de la forma

$$\eta = C_1 \xi^{\alpha_1} + C_2 \xi^{\alpha_1 + \alpha_2} + C_3 \xi^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \ldots\ldots$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ positivos, se puede establecer la serie de transformaciones

$$\eta = \xi^{\alpha_1}(C_1 + \eta_1),\ \eta_1 = \xi^{\alpha_2}(C_2 + \eta_2), \ldots\ldots, \eta_{n-1} = \xi^{\alpha_n}(C_n + \eta_n)$$

anulándose $\eta_1, \eta_2, \ldots$ para $\xi = 0$, siendo $C_1, C_2, C_3 \ldots$ independientes de ξ y

$$C_1 = \lim \frac{\eta}{\xi^{\alpha_1}},\quad C_2 = \lim \frac{\eta_2}{\xi^{\alpha_2}}, \ldots . C_n = \lim \frac{\eta_{n-1}}{\xi^{\alpha_n}},\ \text{para } \xi = 0.$$

Si hacemos $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, la ecuación (1) se reduce á

$$\Sigma\,(m,n)\,\xi^m\,\eta^n = 0 \tag{5}$$

y puesto que q valores de y se hacen iguales á b para $\xi = 0$, la menor potencia de η en (5) que no está multiplicada por ξ es η^q, hagamos

$$\eta = \xi^\lambda (C_1 + \eta_1) = \xi^\lambda\, v, \tag{6}$$

no siendo $C_1 = \lim \eta : \xi^\lambda$ ni cero ni infinitopara $\xi = 0$.

La ecuación (5) da $\quad \Sigma\,(m,n)\,\xi^{m+\lambda n}\,v^n = 0 \quad (7)$

La ecuación (7) dará valores de v finitos para $\xi = 0$, cuando se pueda determinar λ de modo que dos términos de (7) sean de igual grado positivo en ξ.

Ya sabemos (t. II, pág. 258, t. IV, pág. 168) que podremos escribir:

$$\delta = m_1 + \lambda n_1 = m_2 + \lambda n_2 = \ldots = m_r + \lambda n_r, (n_1 \not> n_2 \not> n_3 \ldots \tag{8}$$

$$\text{y}\quad \lambda = (m_1 - m_r) : (n_r - n_1),\quad \delta = (m_1 n_r - m_r n_1) : n_r - n_1 \tag{9}$$

Haciendo $\xi_1 = \xi^{\frac{1}{n_r - n_1}}$ de modo que $\xi_1 = 0$ cuando $\xi = 0$, y dividiendo por $\xi_1^{m_1 n_r - m_r n_1}$, obtendremos una ecuación de la forma

$$\psi\,(\xi_1, v)\,\xi_1 + (m_r, n_r)\,v^{n_r} + \ldots\ldots + (m_1, n_1)\,v^{n_1} = 0 \tag{10}$$

La $n_r - n_1$ raíces de (10) que no son nulas ni infinitas están dadas, como hemos visto en este tomo y en el II, por

$$(m_r, n_r) v^{n_r - n_1} + (m_{r-1}, n_{r-1})\, v^{n_r - 1 - n_1} + \ldots + (m_1, n_1) = 0 \tag{11}$$

Si los valores de v son simples, tendremos para cada valor de η_1 un desarrollo de la forma

$$\eta_1 = d_1\, \xi_1 + d_2\, \xi_1^2 + \ldots = d_1\, \xi^{\frac{1}{n_r - n_1}} + d_2\, \xi^{\frac{2}{n_r - n_1}} + \ldots \quad (12)$$

y cada uno de estos dará para η un desarrollo correspondiente de la forma

$$\eta = C_1\, \xi^{(m_1 - m_r) : n_r - n_1} + d_1\, \xi^{(m_1 - m_r + 1) : n_r - n_1} + \ldots\ldots \quad (13)$$

Si las raíces de un grupo de raíces de (11) son iguales, emplearemos una segunda transformación

$$\eta_1 = \xi_1^{\mu}\, (C_2 + \eta_2).$$

para separar las raíces de igual valor. Así podremos separar los q desarrollos correspondientes á las q raíces del punto q — upló, $x = a$.

Ejemplo.—Separar las ramas de la función s, correspondientes á $z = 0$, determinadas por la ecuación

$$D\xi^3 \eta^5 + C\xi^7 \eta^2 + E\eta^{10} + B\xi^{10} \eta + A\xi^{13} + L\xi^9 \eta^4 + J\xi^3 \eta^{11}$$
$$+ F\xi^3 \eta^{13} + K\xi^8 \eta^{10} + G\xi^6 \eta^{14} + I\xi^{14} \eta^7 + H\xi^{10} \eta^{12} = 0. \quad (14)$$

El término de menor grado en que está sola η es η^{10}, de manera que en $\xi = 0$ hay 10 raíces coincidentes, ó un punto múltiplo de orden 10.

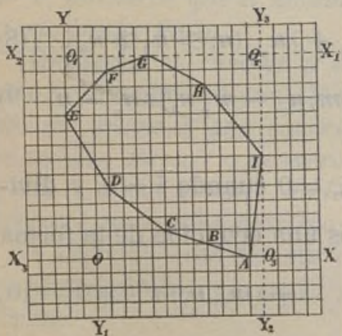


Fig. 97

Empleando el diagrama de Newton ó de Puiseux, se obtiene que las rectas ABC, CD y DE representan los grupos de las raíces. Haciendo, para mayor claridad

$$A = 2, \quad B = -3, \quad C = +1,$$
$$D = -1, \quad E = 1,$$

al grupo ABC corresponde

$$\lambda = \frac{6}{2} \quad \text{y} \quad v^2 - 3v + 2 = 0,$$

es decir, $v = 1$ ó $v = 2$, cuyos desarrollos correspondientes son

$$\eta = \xi^3 (1 + d_1 \xi^{\frac{1}{2}} + d_2 \xi^{\frac{2}{2}} + \ldots) \qquad \eta = {}^3\xi (2 + d'_1 \xi^{\frac{1}{2}} + d'_2 \xi^{\frac{2}{2}} + \ldots)$$

Para el grupo CD tenemos

$$\lambda = \frac{4}{3}, \qquad v^3 - 1 = 0,$$

y siendo los desarrollos correspondientes

$$\eta = \xi^{\frac{4}{3}} (1 + d_1 \xi^{\frac{1}{3}} + d_2 \xi^{\frac{2}{3}} + \ldots), \qquad \eta = \xi^{\frac{4}{3}} (\omega + d'_1 \xi^{\frac{1}{3}} + d'_2 \xi^{\frac{2}{3}} + \ldots),$$

$$\eta = \xi^{\frac{4}{3}} (\omega^2 + d''_1 \xi^{\frac{1}{3}} + d''_2 \xi^{\frac{2}{3}} + \ldots),$$

expresando ω una raíz primitiva imaginaria cúbica de la unidad.

Análogamente DE da desarrollos del tipo

$$\eta = \xi^{\frac{3}{5}} (\alpha + d_1 \xi^{\frac{1}{5}} + d_2 \xi^{\frac{2}{5}} + \ldots),$$

expresando α una de las cinco raíces de 1.

El grupo ABC da

$$A\xi^{13} + B\xi^{10}\eta + C\xi^7\eta^2 = 0 \quad \text{ó} \quad C\eta^2 + B\xi^3\eta + A\xi^6 = 0,$$

que se descompone en las dos ecuaciones

$$\eta + p\xi^3 = 0, \qquad \eta + q\xi^3 = 0$$

que dan dos funciones, cada de las cuales tiene una rama coincidente, *en una primera aproximación,* con una rama de η, que tiene cero por valor inicial.

De igual manera DC y DE dan respectivamente

$$C\xi^4 + D\eta^3 = 0, \qquad D\xi^3 + E\eta^6 = 0,$$

Volviendo al empleo del paralelógramo de Newton de que se ha tratado en el artículo anterior, especialmente para los casos en que x ó y se hacen infinitas, observaremos que:

1.° Suponiendo que el valor de y tienda hacia un límite finito b cuando x tiende hacia ∞; si hacemos $\eta = y - b$, $x = \xi$, tendremos una ecuación de la forma $\Sigma(m, n)\xi^m\eta^n = 0$ (15), que da $\eta = 0$, cuando $\xi = \infty$.

Si ξ^k es la mayor potencia de ξ que existe en (15), de manera que en la figura correspondiente $OO_3 = k$, haciendo $\xi = \frac{1}{\xi'}$ en (15) y multiplicando por ξ'^k, resultará

$$\Sigma(m, n)\xi'^{k-m}\eta^n = 0, \tag{16}$$

que es equivalente á (15)

Pero podemos emplear el diagrama de Newton tomando por nuevos ejes O_3X_3 y O_3Y_3, construyendo un contorno convexo respecto á O_3 como se construyó respecto á O, y obtendremos las ramas de η desarrollables según las potencias ascendentes de ξ' ó descendentes de ξ, que da $\eta = 0$ para $\xi = \infty$, esto es,

$$\eta = \xi'^{\lambda}(c + d\xi'^{\alpha} + e\xi'^{\beta} + \ldots) \text{ ó } (y - b)x^{\lambda} = c + \frac{d}{x^{\alpha}} + \frac{e}{x^{\beta}} + \ldots \tag{17}$$

donde λ, α, β son positivas y c finito de ambos modos *(both ways)*, es decir, ni nulo ni infinito, según la expresión de Morgan. (*)

2.º Si $x = a$ es un polo de y, es decir, que $y = \infty$ para $x = a$, haciendo $\eta = y$, $\xi = x - a$, de la ecuación correspondiente á los ejes OX y OY

$$\Sigma(m, n)\xi^m\eta^n = 0 \quad (18) \quad \text{se pasa á} \quad \Sigma(m, n)\xi^m\eta'^{l-n} = 0 \quad (19)$$

haciendo $\eta = \frac{1}{\eta'}$, y en la que l expresa el mayor exponente de η en (18).

En el diagrama de Newton los nuevos ejes son O_1X_1 y O_1Y_1. El contorno convexo respecto á O_1 es EFG, que da las ramas de η' ó de $\frac{1}{\eta}$ desarrollables según las potencias ascendentes de ξ, y tenemos

$$\eta\xi^{\lambda} = \frac{1}{c + d\xi^{\alpha} + c\xi^{\beta} + \ldots}$$

(*) Chrystal. *Álgebra*, t. II, pág. 366.

en la que λ, α, β son positivas y c finita de ambos modos, y sucesivamente,

$$\eta\xi^{\lambda} = \frac{1}{c + d'\xi^{\alpha} + \dots}, \quad \text{ó sea} \quad y(x-a)^{\lambda} = \frac{1}{c + d'(x-a)^{\alpha} + \dots}$$

3.° Si $y=\infty$, $x=\infty$, haciendo $x=\xi=\frac{1}{\xi'}$, $y=\eta=\frac{1}{\eta'}$ resulta

$$\eta' = \xi'^{\gamma}(c + d\xi'^{\alpha} + \dots), \quad \frac{y}{x^{\lambda}} = \frac{1}{c + \frac{d}{x^{\alpha}} + \dots} = \frac{1}{c + \frac{d'}{x^{\alpha}} + \dots}$$

Razonaremos análogamente considerando el contorno convexo GHI respecto á O_2. En resumen

si $y=0$	, $x=a(a \mp \infty)$	$\lim \frac{y}{(x-a)^{\lambda}}$	es finito de ambos modos
« $y=0$	, $x=\infty$,	$\lim y : x^{-\lambda}$	» » » »
» $y=\infty$,	$x=a(a\mp\infty)$	$\lim y:(x-a)^{-\lambda}$	» » » »
» $y=\infty$,	$x=\infty$,	$\lim y : x^{\lambda}$	» » » »

λ puede llamarse el *orden* del valor particular 0 ó ∞ de y. (*)

Respecto á las varias aproximaciones que pueden obtenerse, trataremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.°—Hallar la tercera aproximación de una de las ramas del grupo CD correspondiente á la ecuación (14).

Haciendo por sencillez, $D=1$, $C=B=A=-1$, dicha ecuación será

$$\xi^3\eta^2(\eta^3 - \xi^4) - \xi^{10}\eta - \xi^{13} + \dots = 0 \quad \text{ó} \quad \eta^3 - \xi^4 - \frac{\xi^7}{\eta} - \frac{\xi^{10}}{\eta^2} + \dots = 0. \quad (20)$$

La primera aproximación es $\eta = \xi^{4:2}$; y despreciando $\frac{\xi^{10}}{\eta^2}$ en la ecuación (20), tenemos

$$\eta^3 - \xi^4 - \xi^7 : \xi^{\frac{4}{3}} = 0, \quad \text{ó} \quad \eta = \xi^{\frac{4}{3}}(1 + \xi^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = \xi^{\frac{4}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\xi^{\frac{5}{3}}\right). \quad (21)$$

Empleando la segunda aproximación en $\frac{\xi^7}{\eta}$ y la primera en

$\frac{\xi^{10}}{\eta^2}$ que ahora se considera, la ecuación (20) da como tercera aproximación

$$\eta^3 - \xi^4 - \frac{\xi^7}{\xi^{\frac{4}{3}}}\left(1 + \frac{1}{3}\xi^{\frac{5}{3}}\right) - \frac{\xi^{10}}{\xi^{\frac{8}{3}}} = 0.$$

Y despreciando el penúltimo término,

$$\eta^3 - \xi^4 - \xi^{\frac{17}{3}} - \frac{2}{3}\xi^{\frac{22}{3}} = 0$$

que da

$$\eta = \xi^{\frac{4}{3}}\left(1 + \xi^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}\xi^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \xi^{\frac{4}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\xi^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{9}\xi^{\frac{10}{3}}\right),$$

según se deseaba, la tercera aproximación.

Ejemplo 2.º—Hallar la segunda aproximación para las ramas correspondientes á ABC en la ecuación (14), cuando $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, $D = -1$.

Los términos correspondientes á esta aproximación son ABC y D. Haremos

$$\xi^7(\eta - \xi^3)^2 - \xi^3\eta^5 = 0 \quad \text{ó} \quad (\eta - \xi^3)^2 - \frac{\eta^5}{\xi^4} = 0.$$

La primera aproximación es $\eta = \xi^3$ y la segunda está dada por

$$(\eta - \xi^3)^2 - \frac{\xi^{15}}{\xi^4} = 0 \quad \text{ó} \quad (\eta - \xi^3)^2 - \xi^{11} = 0;$$

por consiguiente $\qquad \eta - \xi^3 \pm \xi^{\frac{11}{2}} = 0,$

que da la segunda aproximación correspondiente al grupo. Estas son *dos;* porque en la primera aproximación las ramas coinciden. Este es un caso en el que es necesaria una segunda aproximación para distinguir las ramas.

Ejemplo 3.º—Hallar una segunda aproximación para grandes valores de ξ y η de la rama correspondiente á HI en la ecuación (14).

Si HI se mueve paralela á sí misma hacia O, el punto más próximo que encuentra es el G, la ecuación (14) se reduce á

$$H\xi^{10}\eta^{12} + I\xi^{14}\eta^{7}) + G\xi^{6}\eta^{14} = 0.$$

Haciendo, por sencillez, $H = 1$, $I = G = -1$, resulta

$$\eta^5 - \xi^4 - \frac{\eta^7}{\xi^4} = 0.$$

Limitándonos á una de las cinco primeras aproximaciones, á saber, $\eta = \xi^{\frac{4}{5}}$, la segunda es

$$\eta^5 - \xi^4 - \xi^{\frac{8}{5}} = 0 \quad \text{que da} \quad \eta = \xi^{\frac{4}{5}}\left(1 + \frac{1}{5}\xi^{-\frac{2}{5}}\right).$$

Ejemplo 4.º—Dada

$$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots$$

hallar una cuarta aproximación.

Solución: $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$. (*)

§ 7.º Aplicaciones á la construcción de curvas y determinación de puntos singulares

1. $$x^4 - ax^2y + by^3 = 0.$$

Solución.—El origen es un punto triple. Una de las ramas es tangente al eje de las x, las otras forman con este eje ángulos cuyas tangentes son

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

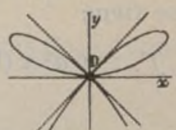


Fig. 98

2. $x^4 - 2ax^2y - 2x^2y^2 + ay^3 + y^4 = 0.$

(*) *Chrystal.* Algebra, An. elementary text. Book, t. II, pág. 360.

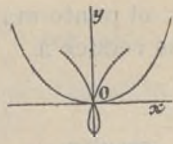


Fig. 99

Solución.—Punto triple en el origen, en este punto los valores de $\frac{dy}{dx}$ son $0,\ 2^{\frac{1}{2}},\ -2^{\frac{1}{2}}$.

3. $$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0.$$

Solución.—Tres puntos dobles

$$y = 0, \quad x = a, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

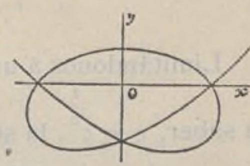


Fig. 100

$$y = 0, \quad x = -a, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = -a, \quad x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

4. $$x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0.$$

Solución.—Punto doble en el origen. Una tangente que pasa por el origen; pero diferente del eje de las x, cuyo punto de contacto es

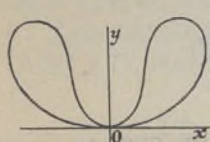


Fig. 101

$$x = \frac{2^{\frac{3}{2}}a}{3}, \qquad y = \frac{8a}{3}$$

5. *Determinar los puntos múltiplos de la curva*

$$(a^2x^2 + b^2y^3 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0.$$

Haciendo $P \equiv a^2x^2 + b^2y^2 - c^4$ y homogénea la ecuación, se tiene

$$f'_x \equiv 6a^2x(P^2 + 9b^2c^4y^2z^2), \quad f'_y \equiv 6b^2y(P^2 + 9a^2c^4x^2z^2)$$

$$f'_z \equiv 6c^4z(-P^2 + 9a^2b^2x^2y^2)$$

Igualando cada una de estas derivadas á cero, se obtienen las curvas

$$x = 0, \qquad P \pm 3bc^2yz\sqrt{-1} = 0, \qquad (1)$$

$$y=0, \qquad P \pm 3\,ac^2xz\sqrt{-1}=0,$$

$$z=0, \qquad P \pm 3\,abxy=0.$$

Si sus coordenadas no anulan á las derivadas segundas, son dobles, y la consideración de estas derivadas dará las tangentes en cada uno.

Haciendo $z=0$ en las dos primeras ecuaciones, se obtiene el mismo resultado

$$a^2x^2+b^2y^2=0; \qquad (2)$$

y como la recta $z=0$ forma parte de la tercera curva, los dos puntos así determinados en el infinito, que son imaginarios, son dos puntos múltiplos. Las derivadas segundas son

$$f_{11}{}^2=6\,a^2(P^2+4\,a^2Px^2+9b^2c^4y^2z^2)$$

$$f_{22}{}^2=6\,b^2(P^2+4\,Pb^2y^2+9a^2c^4x^2z^2)$$

$$f_{33}{}^2=6c^4(-P^2-4c^4Pz^2+9\,a^2b^2x^2y^2)$$

$$f_{12}{}^2=12\,b^2c^4yz(-2P+9\,a^2x^2),\ f_{31}{}^2=12\,a^2c^4zx(-2P+9\,b^2y^2)$$

$$f_{21}{}^2=12\,a^2b^2xy(2\,P+9c^4z^2)$$

Si se hace $z=0$, $a^2x^2+b^2y^2=0$, ó $z=0$, $P=0$, todas las derivadas se anulan, excepto la tercera; pero como el sistema de las tangentes es entonces $z^2=0$, es decir, dos rectas confundidas en el infinito, estos dos puntos son de retroceso. La ecuación $a^2x^2+b^2y^2=0$, manifiesta que son imaginarias.

Se encuentra además dos puntos de retroceso reales sobre el eje de las x, y otros dos sobre el eje de las y

$$y=0, \quad x=\mp\frac{c^2}{a}; \qquad x=0, \quad y=\mp\frac{c^2}{b}$$

Por otra parte, los tres sistemas de dos curvas de segundo grado pueden escribirse,

$$P=\pm 3\,bc^2yz\sqrt{-1}=\pm 3\,ac^2xz\sqrt{-1}=\pm 3\,abxy.$$

Si estos tres sistemas tienen puntos comunes, las dos últimas ecuaciones muestran que estos puntos se hallan sobre el sistema de rectas

$$\pm ax = \pm by = \pm c^2 z \sqrt{-1}$$

de lo que resulta, haciendo $z = 1$

$$x = \pm \frac{c^2}{a} \sqrt{-1}, \quad y = \pm \frac{c^2}{b} \sqrt{-1}$$

y se verifica que las coordenadas de cada uno de estos puntos, en número igual á cuatro, satisfacen á una de las dos ecuaciones (1) de que se compone cada polar, y por consiguiente á la de la curva.

Si tomamos el signo $+$, y sustituímos en las derivadas segundas, resulta que son distintas de cero y se obtiene para el sistema de tangentes en este punto las dos rectas distintas representadas por la ecuación

$$a^2 x^2 - abxy + b^2 y^2 - ac^2 \sqrt{-1}\, x - bc^2 \sqrt{-1}\, y - c^4 = 0$$

que se descompone así

$$2\, ax - by \left(1 \pm 3 \sqrt{-1}\right) - c^2 \left(\sqrt{-1} \pm 3\right) = 0.$$

La curva tiene dos puntos de retroceso imaginarios en el infinito y cuatro puntos dobles imaginarios simétricos respecto á los ejes y dos reales en cada eje; es la evolvente de la elipse.

Una recta de longitud constante se apoya en dos rectas rectangulares envolviendo á una epicicloide. Si se forma la podar de esta curva con relación á un polo P, tomado en la bisectriz del ángulo yOx, esta podar es una curva llamada *escarabea*.

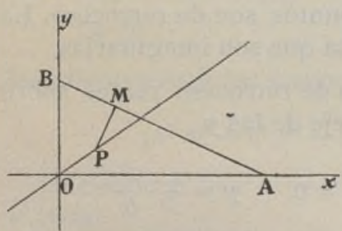


Fig. 102

De manera que la escarabea es *el lugar de las perpendiculares bajadas desde un punto fijo tomado en la bisectriz de un ángulo recto sobre una recta de longitud constante, cuyos extremos se mueven en los lados del ángulo en cuestión.*

Para obtener la ecuación de esta curva hagamos $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OP = a$, $AB = l$. Las coordenadas x é y del punto M satisfacen á la ecuación

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \tag{1}$$

de la recta AB en la que $\alpha^2 + \beta^2 = l^2$, y también satisfacen á la ecuación de la recta MP

$$\alpha\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \beta\left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0. \tag{2}$$

Para eliminar α y β, obtendremos $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{\beta}$ de (1) y (2) y sustituiremos en $\alpha^2 + \beta^2 = l^2$; escrita bajo al forma

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{l^2}{\alpha^2\beta^2}; \qquad \text{lo que da}$$

$$\left[y\left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + x\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2\left[\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$
$$= l^2\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Transportando el origen al punto P, tendremos

$$[x^2 + y^2 + a(x+y)\sqrt{2}]^2 (x^2 + y^2) = l^2x^2y^2, \tag{3}$$

que en coordenadas polares se reduce á

$$[r^2 + ra(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\sqrt{2}]^2\, r^2 = l^2\, r^4 \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta,$$

de la que resulta

$$r = a\sqrt{2}\,(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \pm l \operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

que sustituyendo θ por $\theta + \frac{\pi}{4}$ se simplifica reduciéndose á

$$r = 2a\cos\theta \pm \frac{l}{2}\cos 2\theta$$

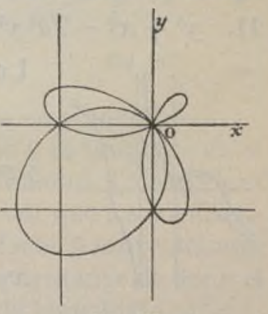


Fig. 103

La ecuación desarrollada es

$$(x + y^2)^3 + 2a\sqrt{2}\,(x^2 + y^2)^2 (x + y)$$
$$+ 2a^2(x+y)^2(x^2 + y^2) - l^2x^2y^2 = 0.$$

El origen es un punto cuádruplo. Los puntos

$$x=0, \quad y=-\frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad x=-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y=0$$

son dobles. Los umbílicos del plano son también dobles.

8. *Curva del diablo*. Su ecuación es

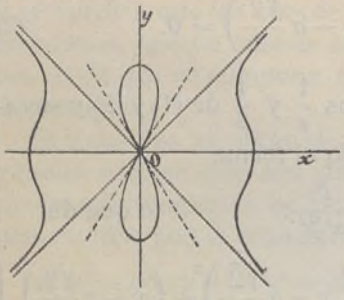


Fig. 104

$$y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0.$$

Se deduce de la ecuación de la hipérbola equilátera, sustituyendo y por y^2 y x por x^2. Haciendo $a = -24$, $b = 25$ se reduce á

$$y^4 - x^4 - 24\,y^2 + 25\,x^2 = 0.$$

Tiene un punto doble en el origen. Pasa por los umbílicos.

9. $(by - cx)^2 = (x - a)^5$.

Retroceso de primera especie para $x = a$.

10. $$16(y^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2) + (x^2 - 4a^2)^2 = 0.$$

Dos puntos dobles para $x = \pm\, 2a$. En estos puntos

$$\frac{dy}{dx} = \pm\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

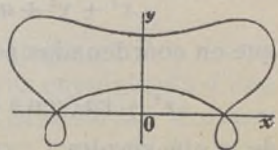


Fig. 105

Cuatro puntos de inflexión (fig. 106).

11. $y^4 + x^4 - 2a^2\,y^2 - 2b^2\,x^2 + b^4 = 0.$


Fig. 106

La ecuación se reduce á

$$y = \pm\left[\left(\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{a^2 - b^2 + x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$x = 0, \quad y = \pm\left[\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Puntos de inflexión: $y = 0$, $x = \pm\, b$ (fig. 105).

Puntos múltiplos para los que $\dfrac{dy}{dx} = \pm\,\dfrac{\sqrt{2}\,b}{a}$.

12. *Asíntotas de la curva* $y = e^x$.

Solución.—Haciendo homogénea la ecuación propuesta, resulta $y = ze^{\frac{x}{z}}$, y tenemos que

$$x = z \log \frac{y}{z} = z \log y - z \log z; \quad \text{para } z = 0, \quad \text{es } x = 0.$$

La curva tiene un punto en el infinito sobre el eje de las y. La asíntota correspondiente no podría hallarse á distancia finita, porque y no se hace infinita para ningún valor finito de x; y aumenta indefinidamente con x para $x > 0$. Lo mismo sucede á los dos términos del coeficiente angular $\frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$. La rama correspondiente de la curva es por consiguiente parabólica.

13. Discusión.—Observaremos la analogía que existe entre las curvas $y = e^x$, $y = xe^{\frac{1}{x}}$, cuyas ecuaciones homogéneas son $y = ze^{x:z}$, $y = xe^{z:x}$, deduciéndose la una de la otra cuando se permutan x y z, siendo $\frac{x}{z'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{x'}$ las fórmulas de transformación homográfica, que cuando $z = z' = 1$, se reducen á $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{y'}{x}$ en coordenadas cartesianas.

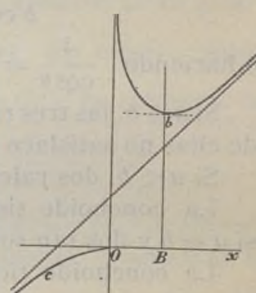


Fig. 107

Respecto á la curva $y = xe^{1:x}$, observaremos que, cuando x tiende hacia cero para valores negativos, hay un punto de parada en el origen, que es punto de contacto de la curva con el eje de las x, y otro en el infinito.

Para valores positivos de x, el eje de las y es tangente en el infinito. El origen es un punto de discontinuidad. La curva es discontinua entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$. Se puede observar que los coeficientes de la transformación considerada satisfacen á las relaciones que caracterizan la homología, en el caso particular de ser a el centro de homología, y la recta bB el eje de homología, $x = 1$, paralelo al eje de las y, trazado por el punto de intersección de las dos curvas (súplase en la figura la curva que pasa por b, cuya asíntota es el eje negativo de las x) que representa la curva $y = e^x$ es el de la segunda, para el que y es un mínimo.

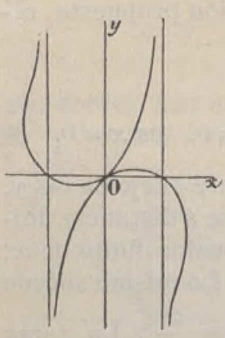


Fig 109

13. $$r^2 = \frac{a^2}{\theta}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta} r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2} = 0 \text{ ó } \infty,$$ condición para los puntos de inflexión.

Se tiene:
$$r = \frac{a}{\theta^{\frac{1}{2}}},\ \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2}\frac{a}{\theta^{\frac{2}{3}}},\ \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{3a}{4\theta^{\frac{5}{2}}};$$

luego $a^2(4\theta^2 - 1) = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$, $r = a\sqrt{2}$

14. $r = \sec\theta + b$. *(Conchoide).*

Se tiene: $$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta},\ \frac{d^2r}{d\theta^2} = a\frac{\cos^3\theta + 2\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^4\theta}$$

La ecuación $r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2} = 0$, se reduce á

$$b\cos^3\theta + 3a\cos^2\theta - 2a = 0$$

ó haciendo $\frac{1}{\cos\theta} = z$ $$2az^3 - 3az - b = 0 \qquad (1)$$

Si $a \geqslant b$, las tres raíces de la ecuación (1) son reales, pero una de ellas no satisface á la condición $-1 < \cos\theta < 1$.

Si $a < b$, dos raíces son imaginarias.

La conchoide tiene 4 puntos de inflexión si $a = b$ y dos tan solo, cuando $a < b$.

La conchoide tiene 2 puntos de inflexión si $a > b$.

15. $$r = a(tg\theta - 1)$$

Asíntotas para $0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

El origen es un punto doble.

La ecuación $21\,tg^3\theta + 31\,tg^2\theta + 3 = 0$, indica un punto de inflexión.

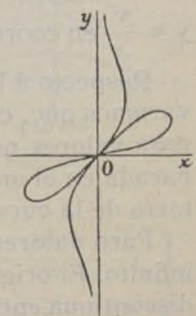


Fig. 109

16. $$r^2 = a^2 \operatorname{sen}\frac{3\theta}{\cos\theta}$$

Solución.—El eje de las *y* es una asíntota. Los puntos de inflexión, que no son el origen, se hallan determinados por la ecuación $8\cos^3 2\theta + 3\cos^2 2\theta + 6\cos\theta\, 2 + 10 = 0.$

LIBRO TERCERO

ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LAS FIGURAS PLANAS

CAPÍTULO I

Propiedades numerativas de las curvas (*)

§ 1.º NÚMERO DE CONDICIONES DE LAS CURVAS

90. NÚMERO DE PUNTOS. TEOREMA I.—*Una curva en general, está determinada por* $\frac{m(m+3)}{2}$ *puntos*. En efecto, suponiendo la ecuación homogénea, el número total de términos es

$$1+2+3+\ldots\ldots+m+1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Y como podemos dividir por uno de los coeficientes, sin alterar la ecuación, hay que restar 1 á dicho número, resultando el del enunciado.

La condición de que la curva pase por $\frac{m(m+3)}{2}$ puntos da este número de ecuaciones lineales, con igual número de coeficientes, de cuya eliminación resulta la ecuación de la curva que pasa por dichos puntos.

TEOREMA II.—*Si por* $\frac{m(m+3)}{2}$ *puntos dados pasa una curva* C *de orden* m *tal, que entre dichos puntos haya más de* mp

---

(*) La Geometría numerativa tiene por objeto determinar, entre ∞^r objetos definidos, el número de los que satisfacen á un número de condiciones equivalentes á r condiciones simples. En Geometría numerativa se encuentra el número de soluciones finitas de un sistema de ecuación dotadas de singularidades cualesquiera.

en otra curva C′ *de orden* p, *la curva* C *se descompondrá en una curva de orden* p *y en otra de orden* m — p.

En efecto, cortando la curva C á la C′ en más de mp puntos, las ecuaciones de ambas deben tener un factor común, y siendo C′ una curva irreducible, el primer miembro de su ecuación dividirá al primer miembro de la ecuación de C, que se descompondrá según indica el teorema.

TEOREMA III.—*Si entre los* $\frac{m(m+3)}{2}$ *que determinan una curva* C *de orden* m *hay en otra curva de orden* p, *más de*

$$mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

puntos, dicha curva se puede descomponer.

En efecto, si hubiese

$$mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$$

puntos en una curva A de orden p, por los

$$\frac{m(m+3)}{2} - mp + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - 1 = \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}$$

puntos restantes se podría hacer pasar una curva de orden $m-p$, que con la curva A formará otra de orden m que pasa por los puntos dados. Si pues la curva C es única, puede descomponerse. En general, dos curvas de orden m se cortan en m^2 puntos y se tiene que $m^2 \geqslant \frac{m(m+3)}{2}$, porque esta fórmula se reduce á $m^2 - 3m \geqslant 0$ ó á $m \geqslant 3$. Y si suponemos $m \geqslant 3$, se demuestra que $\frac{m(m+3)}{2}$ no determinan siempre una curva de orden m, ó lo que es igual, el siguiente

TEOREMA IV.—*Todas las curvas de orden* m *que pasan por* $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ *puntos dados, pasan por otros*

$$m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

puntos fijos.

En efecto, siendo $\varphi = 0$ y $\psi = 0$ las ecuaciones de las dos curvas de orden m que pasan por los puntos dados, $\varphi + \lambda \psi = 0$ será la de una curva que pasa por dichos puntos, que pasará además por las otras $m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1$ intersecciones de $\varphi = 0$ y de $\psi = 0$.

Pero representando la ecuación $\varphi + \lambda\psi = 0$ un haz de curvas que pasa por los puntos dados, la indeterminada λ permitirá hacer pasar á la curva que consideramos por un punto determinado. Pasará pues por $\frac{m(m+3)}{2}$ puntos dados.

TEOREMA V.—*Si se dan* $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ *de los puntos de intersección de dos curvas de orden* m, *se obtendrán los otros*

$$m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

puntos de intersección.

En efecto, dadas las ecuaciones de las dos curvas de orden m, sus intersecciones darán los puntos buscados.

TEOREMA VI.—*Si un polígono de* 2m *lados está inscrito en una cónica, los* m (m — 2) *puntos que se obtienen tomando la intersección de un lado cualquiera de orden par con los lados no adyacentes de orden impar, están situados en una curva de grado* m — 2.

En efecto, los lados de orden par forman un polígono de m lados, y los de orden impar otro. Entre los m^2 puntos de intersección de estas dos líneas de grado m hay $2m$ situados en una curva de segundo grado; luego los otros $m(m-2)$ se hallan en una curva de grado $m - 2$.

91. FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA CURVA.—La ecuación general de las curvas de grado m puede escribirse bajo la forma

$$\alpha\varphi + k\beta\psi = 0,$$

siendo α y β polinomios lineales, k un parámetro y φ, ψ polinomios del grado $m - 1$, pues el primer miembro contiene un número

$$(m-1)(m+2)+5=m^2+m+3>\frac{m(m+3)}{2}$$

de parámetros.

Una curva de grado m solo puede representarse en algunos casos bajo la forma

$$\alpha\beta\gamma\ldots\ldots+k\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots=0,$$

siendo $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\ldots,\alpha',\beta',\gamma',\ldots$ factores lineales en x é y, porque el número de parámetros del primer miembro es igual á $4m+1$, número menor que $\frac{m(m+3)}{2}$ desde que $m>5$.

Teorema VII.—*Si se corta á una curva de grado* m *por una recta cualquiera, y se trazan tangentes por los* m *puntos de intersección, los otros puntos de intersección de dichas tangentes con la curva se hallan en una curva de grado* m — 2.

En efecto, si $\beta=0$ es la secante dada, la ecuación de la curva puede escribirse bajo la forma

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_m+k\beta^2\varphi=0$$

siendo $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ funciones lineales y φ una función de grado $m-2$, porque esta ecuación contiene, aparte de β,

$$2m+1+\frac{(m-2)(m+1)}{2}=\frac{m(m+3)}{2}$$

constantes arbitrarias.

Las rectas $\alpha_1=0,\ldots\alpha_m=0$ son tangentes en los puntos de intersección con $\beta=0$; los otros $m(m-2)$ puntos de intersección de estas tangentes y de la curva se hallan en la curva $\varphi=0$.

§ 2.º Número de condiciones impuesto por la existencia de un punto singular

92. Teorema.—*La existencia de un punto múltiplo de orden* p *en una curva algebráica equivale á la existencia de* $\frac{p(p+1)}{2}$ *puntos simples, ó á la hipótesis de igual número de condiciones.*

En efecto, la hipótesis de un punto de orden p, implica las relaciones

$$f=0,\quad f_1=0,\quad f_2=0,\quad f_3=0,$$
$$f_{11}=0,\quad f_{12}=0,\ \ldots\ldots f_{13}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{1,p-1}=0,\ \ldots\ldots f_{p-1,\,p-1}=0,$$

comprendiendo las últimas á las demás, por lo que el número de condiciones se reduce al de términos de un polinomio homogéneo, de grado $p-1$, ó $\frac{p(p+1)}{2}$ con tres variables.

Dada la ecuación de la curva bajo la forma

$$u_1+u_2+\ldots\ldots+u_m=0$$

siendo $u_1, u_2, \ldots, u_m$ polinomios homogéneos de primero, de segundo, ..., de m^{simo} grado en x é y; por tener el polinomio u_1 dos coeficientes, un punto doble equivale á $1+2=3$ puntos simples; análogamente se ve que un punto triple equivale á $1+2+3=6$ puntos simples y, en general, un punto múltiplo de orden especial p á $\frac{p(p+1)}{2}$ puntos simples.

Podemos además concluir que: *un punto múltiplo de orden* p *procede de la reunión de* $\frac{p(p-1)}{2}$ *puntos dobles,* pues si se trazan diversas ramas de la curva, de manera que pasen exactamente por el mismo punto, como sucede en la fig. 110, en el caso de un punto cuádruplo, se ve que el número de intersecciones es $6=\frac{4.3}{2}$.

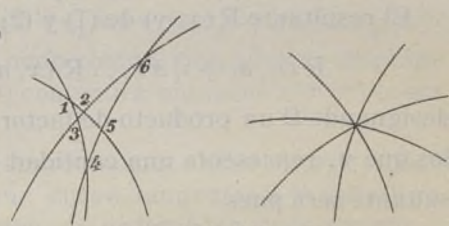


Fig. 110

93. Intersección de dos curvas.—Dos curvas de órdenes m y n respectivamente se córtan generalmente en mn puntos, pero pueden cortarse en menor número de puntos. Podremos enunciar el siguiente

Teorema.—*Dos curvas que pasan por un mismo punto* M *y tienen en éste un lazo de orden* i *y otro de orden* j, *deben considerarse como cortándose, por lo menos, en* ij *puntos confundidos.*

Sean las dos curvas con un punto singular común

$$\varphi_i(x, y) + \varphi_{i+1}(x, y) + \varphi_{i+2}(x, y) + \ldots\ldots = 0, \qquad (1)$$

$$\psi_j(x, y) + \psi_{j+1}(x, y) + \psi_{j+2}(x, y) + \ldots\ldots = 0 \qquad (2)$$

expresando $\varphi_i, \ldots, \psi_j, \ldots$ polinomios homogéneos de grados $i, i+1, \ldots, j, j+1, \ldots$; de manera que las curvas tendrán respectivamente, en el origen, un punto múltiplo de orden i y otro de orden j.

Haciendo $\frac{y}{x} = t$, podremos escribir la primera ecuación del modo siguiente:

$$x^i \varphi_i(1, t) + x^{i+1} \varphi_{i+1}(1, t) + \ldots\ldots = 0,$$

ó

$$\varphi_i(1, t) + x\varphi_{i+1}(1, t) + \ldots\ldots = 0. \qquad (3)$$

Para $x = 0$, esta ecuación se reduce á $\varphi_i(1, t) = 0$; luego, para $x = 0$, i raíces de la ecuación (3) se reducen á las i raíces $r_1, r_2, \ldots, r_i$ de $\varphi_i(1, t) = 0$, que pueden expresarse por $r_1 + \varepsilon_2$, $r_2 + \varepsilon_2, \ldots$, designando $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ cantidades infinitamente pequeñas en la proximidad de $x = 0$; luego i raíces y de la ecuación (1) estarán representadas por $a_1 x + \varepsilon_1 x, \ldots, a_i + \varepsilon_i x$.

El resultante R (x, y) de (1) y (2) será

$$R(x, a_1 + \varepsilon_1 x) \ldots R(x, a_i x + \varepsilon_1 x)\,\Omega = 0,$$

designando Ω un producto de factores tales como R (x, y_h), en los que y_h representa una cantidad finita para $x = 0$. Dicho resultante será pues

$$\Pi[\psi_j(x, a_k x + \varepsilon_k x) + \psi_{j+1}(x, a_k x + \varepsilon_k x) \ldots]\,\Omega = 0,$$

$$\Pi[x^j \psi_j(1, a_k + \varepsilon_k) + x^{j+1} \psi_{j+1}(1, a_k + \varepsilon_k) + \ldots]\,\Omega = 0,$$

$$x^{ij}\,\Pi[\psi_j(1, a_k + \varepsilon_k) + x\,\psi_{j+1}(1, a_k + \varepsilon_k) + \ldots]\,\Omega = 0,$$

$$x^{ij}\,\Pi[\psi_j(1, a_k) + \varepsilon_k \psi_j(1, a_k) + \ldots + x\,\psi_{j+1}(1, a_k) + \ldots]\,\Omega = 0,$$

Los términos de menor grado del resultante contendrán pues, x^{ij} como factor, y el teorema queda demostrado.

En el caso en que una de las cantidades $\psi_j(1, a_k)$ se anulase, las ecuaciones $\varphi_i(1, t) = 0$ y $\psi_j(1, t) = 0$ tendrían una raíz común; y puesto que estas ecuaciones son las del coeficiente angular de la tangente, dichas curvas tendrían una tangente común, y podremos enunciar el siguiente

TEOREMA.—*Si dos curvas tienen en un punto* M *nudos con* i *y* j *ramas, deberán considerarse como teniendo* i + j *puntos confundidos en* M, *más tantos puntos confundidos con éstos como tengan tangentes comunes en* M.

En efecto, sustituyendo t por $a_k + \varepsilon_k$ en (3), tendremos

$$\varphi_i(1, a_k + \varepsilon_k) + x\,\varphi_{i+1}(1, a_k + \varepsilon_k)(1, a_k + \varepsilon_k) + \ldots = 0,$$

$$\varphi_i(1, a_k) + \varepsilon_k\,\varphi'_i(1, a_k) + \ldots\ldots + x\,\varphi_{i+1}(a_k) + \ldots = 0,$$

$$\varepsilon_k = -\frac{\varphi_{i+1}(1, a_k)}{\varphi'_i(1, a_k)}\,x,$$

con una aproximación de segundo orden; ε_k será pues proporcional á x y de la forma $b_k x + \varepsilon'_k x$, anulándose todavía con x. Cuando $\varphi'_i(1, a_k)$ no sea nulo esta conclusión no es cierta.

Si suponemos pues $\varepsilon_k = b_k x + \varepsilon'_k x$ y $\psi_j(1, a_k) = 0$, $\varphi_i(1, a_k) = 0$, no sólo las curvas tienen un nudo común, sino además una tangente común. La fórmula (4) contendrá entonces x^{i+j+1} como factor.

94. INFLUENCIA DE LOS PUNTOS SINGULARES.—Siendo todas las polares de un punto de una curva tangentes á la misma en dicho punto, si éste es múltiplo de orden k, en cada secante k factores $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k$ son nulos.

Si $n < k$ la ecuación de la polar se reduce á una identidad, si $n \geqslant k$, la ecuación de la polar contiene el factor r^k, por consiguiente el punto P es también en cada polar un punto múltiplo de orden k. Las tangentes á la curva propuesta en el punto múltiplo son también tangentes á la polar. Entonces la polar de grado k es un sistema de k rectas. Así, la polar cónica de un punto doble se compone de dos rectas, que son las dos tangentes á la curva.

TEOREMA.—*Todo punto singular de una curva de grado* m *pertenece á la polar de grado* m — 1 *de un punto cualquiera del plano. Todo punto triplo de la curva es un punto de la polar de grado* m — 2 *y un punto doble de la polar de grado* m — 1 *de un punto cualquiera del plano. Todo punto cuádruplo es un punto de la polar de grado* m — 3, *un punto doble de la polar de grado* m — 2, *un punto triplo de la polar de grado* m — 1 *de un punto cualquiera del plano, y así sucesivamente.*

En efecto, un punto de la curva $f = 0$ para el que

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

pertenece á la curva

$$x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

que es la polar de orden $m - 1$ de un punto cualquiera (x_0, y_0, z_0).

Un punto triplo de la curva, para el que se tiene

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{13} = 0, \quad f_{22} = 0, \quad f_{23} = 0, \quad f_{33} = 0,$$

pertenece á la curva

$$x_0^2 f_{11} + y_0^2 f_{22} + z_0^2 f_{33} + 2 y_0 z_0 f_{23} + 2 x_0 z_0 f_{13} + 2 x_0 y_0 f_{12} = 0,$$

que es una polar de grado $m - 2$.

También se tiene para este punto, cualesquiera que sean x_0, y_0, z_0,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3) = 0, \quad \frac{\partial}{dy}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

y la polar de grado $m - 1$ tiene un punto doble, así sucesivamente.

También podemos demostrar que:

La tangente á la primera polar de un punto cualquiera es armónica conjugada á las tangentes de la curva primitiva, en el punto doble, y á la recta que une éste con el polo, pues pudiéndose escribir, en el caso del punto doble, la ecuación de la curva, bajo la forma

$$f = xyz^{n-2} + \varphi_3 z^{n-3} + \ldots\ldots = 0,$$

la ecuación de la polar en el punto x_0, y_0, z_0 será

$$\varphi = (x_0 y + y_0 x) z^{n-2}$$

$$+ \left[(n-2) xyx_0 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} x_0 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} y_0\right] z^{n-3} + \dots$$

Y la ecuación de la tangente en el origen y la de la recta que une el origen al polo son, respectivamente,

$$x_0 y + xy_0 = 0, \qquad x_0 y - xy_0 = 0.$$

TEOREMA.—*Si una curva tiene un punto de retroceso, ó en general, un punto singular con dos tangentes confundidas, la polar de grado* m — 1 *es tangente en este punto á la curva.*

En efecto, tomando por origen el punto singular, la ecuación de la curva será

$$z^{m-k} \varphi_k (x, y) + z^{m-k-1} \varphi_{k+1} (x, y) + \dots \varphi_m (x, y) = 0$$

expresando $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \varphi_{k-2}, \dots$ funciones homogéneas de grados $k, k+1, k+2 \dots$ La ecuación de las tangentes en el nudo es $\varphi_k (x, y) = 0$, la de la polar del punto x_0, y_0, z_0 es

$$0 = x_0 \left[z^{m-k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + z^{m-k-1} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x} + \dots\right]$$

$$+ y_0 \left[z^{m-k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + \dots\right] + z_0 \left[(m-k) z^{m-k-1} \varphi_k + \dots\right]$$

Los términos de menor grado en x é y son

$$z^{m-k} \left(x_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right);$$

luego la polar pasa por los puntos singulares, puesto que k es por lo menos igual á 2, si el origen es un punto singular, y el punto singular en el origen de la polar es de orden inmediatamente inferior al de la curva. Además la ecuación de las tangentes en el nudo de la polar es

$$x_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = 0.$$

Pero si $\varphi_k = 0$ tiene una raíz doble, y si en este caso, la curva tiene dos tangentes confundidas ó un retroceso, dicha raíz es simple para $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}$ y para $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}$; luego la tangente de la polar es la tangente doble en el nudo.

TEOREMA.—*Una curva de orden* m *es, en general, de la clase* m (m — 1); *pero un punto doble rebaja á ésta en dos unidades, un punto de retroceso en tres, un punto de orden de multiplicidad* n *en* n (n — 1) *unidades por lo menos.*

En efecto, puesto que todos los puntos de contacto de las tangentes trazadas por P (x_0, y_0, z_0) á la curva pertenecen á la polar de orden $m-1$ de P; si la curva no tiene puntos dobles, los puntos de intersección darán $m(m-1)$ tangentes. Pero si la curva tiene un punto doble, la polar pasará por este punto, y la recta trazada por P al punto singular no será propiamente tangente. Además la curva, en la proximidad del punto doble, cortará á la polar en dos puntos confundidos, y desaparecerán dos tangentes. Así *la presencia de un punto doble rebaja á la clase en dos unidades.*

Si el punto doble fuese de retroceso, la curva y la polar serían tangentes, y por consiguiente se cortarían en tres puntos confundidos. *La clase se rebajaría en tres unidades.* En fin, *al ser un punto de orden* n *de multiplicidad*, un punto de orden $n-1$ de la polar, la curva y su polar se cortan en dicho punto en $n(n-2)$ puntos confundidos y *la clase se rebaja, por lo menos en* n (n — 1) *unidades,* pues si el punto múltiplo considerado tuviese tangentes múltiples, la curva y la polar tendrían contactos que aumentarían el número de puntos comunes confundidos.

Tomando el polo por origen, la ecuación de la curva es

$$z^{m-k}\varphi_k(x,y) + z^{m-k-1}\varphi_{k+1}(x,y) + \dots\dots + \varphi_m(x,y) = 0.$$

El origen es un nudo, si $k > 1$. Por la ecuación de la polar de grado $m-1$,

$$(m-k)z^{m-k-1}\varphi_k(x,y) + z^{m-k-2}(m-k-1)\varphi_{k+1}(x,y) + \dots = 0,$$

se ve que tiene las mismas tangentes que la curva propuesta y que el número de puntos comunes á las dos curvas es superior al que tienen en el caso general.

En general, un punto múltiplo de orden p aparece como un punto en el que están condensados p puntos de la curva.

Aplicaciones.—Si una curva de segundo grado tiene un punto doble, una recta que pasa por este punto, no la corta, mientras no se confunda con ella; luego la curva se debe descomponer en dos rectas.

Si una curva de tercer grado tiene un punto doble, una recta que pase por éste, solo la cortará en otro punto.

Una curva de tercer grado no puede tener dos puntos dobles, porque la recta que pasase por ellos, encontraría á la curva en cuatro puntos y formaría parte de ésta que se descompondría en una recta y una cónica.

Una curva de cuarto grado no puede tener más de tres puntos dobles, porque una cónica que pasase por estos cuatro puntos y por un quinto punto, la cortaría en nueve puntos. Dicha cónica formaría parte de la curva, que se descompondría en dos cónicas, etc.

TEOREMA.—*Todas las polares primeras de una curva que tiene un punto de retroceso, encuentran á la misma en tres puntos coincidentes con éste, es decir, que la ecuación de que dependen las intersecciones de las dos curvas, tiene tres raíces iguales correspondientes al punto de retroceso.*

En efecto, la ecuación de la curva, en el caso del punto de retroceso, puede escribirse bajo la forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2 z^{n-2} + dy^3 z^{n-3} + \varphi_4 z^{n-4} + \ldots\ldots = 0,$$

pues hallándose confundidas dos tangentes en el punto de retroceso, la ecuación de la curva se reduce á

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2 z^{n-2} + \varphi_3 z^{n-3} + \ldots\ldots,$$

siendo φ_3 por ejemplo igual á

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3;$$

pero la recta $y = 0$ no se halla sujeta más que á la condición de pasar por el punto de retroceso. Podemos pues, dejando x fija, disponer de y y z de modo que los términos de tercer grado formen un cubo perfecto; haremos pues

$$y = y' + \lambda x, \qquad z = z' + \mu y' + \nu x$$

y f se transformará en

$$f = x^2 z'^{n-2} + \psi_3 z'^{n-3} \psi_4 z'^{n-4} + \ldots\ldots$$

Determinaremos λ, μ, y ν de modo que

$$\psi_3 = (n-2)\, x^2 (\mu y' + \nu x) + ax^3 + 3bx^2 (y' + \lambda x)$$
$$+ 3cx (y' + \lambda x)^2 + d (y' + \lambda x^3 = [(n-2)\nu + a + 3b\lambda + \ldots]\, x^3$$
$$+ [(n-2)\mu + 3b + \ldots]\, x^2 y + 3 (c + d\lambda)\, xy'^2$$

se reduzca á un término que sólo contenga y'^3, para lo que basta hacer

$$(n-2)\nu + a + 3b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 = 0,$$
$$(n-2)\mu + 3b + 6c\lambda + 3d\lambda^2 = 0,$$
$$c + d\lambda = 0,$$

y resultará la ecuación de la curva bajo la forma

$$f = x^2 z^{n-2} + dy^3 z^{n-3} + \varphi_4 z^{n-4} + \ldots\ldots = 0. \qquad (a)$$

Esto sentado, para demostrar el teorema, formaremos la ecuación de la polar de esta curva

$$\varphi = 2xx_0 z^{n-2} + [3\, dy_0 y^2 + (n-2)\, z_0 x^2]\, z^{n-3} + \varphi_3 z^{n-4} \ldots = 0.$$

La recta $x = 0$ es pues, también tangente á la primera polar; de manera que: *en un punto de retroceso, la primera polar de un punto cualquiera es tangente á la tangente de retroceso.*

95. Generación de un punto de retroceso.—Este puede obtenerse de un punto doble en el límite, porque de la ecuación (a) resulta

$$x = \sqrt{-dy^3},$$

expresión imaginaria para $d > 0$ desde que y se hace > 0, y teniendo su origen un punto doble en la existencia de un lazo ó bucle de la curva, cuando las dos tangentes, en dicho punto doble tienden á confundirse, la parte comprendida en su espacio angular tiende á anularse, porque no hay más allá del retroceso, ningún punto de la curva.

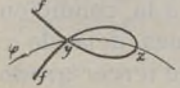


Fig. 111

Una recta ó curva, trazada por el punto doble, encuentra al bucle en un punto z, cuya distancia al punto doble tiene una distancia máxima dependiente del bucle;

pero al degenerar el punto doble en punto de retroceso, disminuye el bucle y por consiguiente su máximo hasta reducirse á un punto, lo que hace que en la ecuación

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$$

correspondiente al grupo homogéneo de segundo grado de la ecuación de la curva, la cantidad $\alpha\gamma - \beta^2$ se aproxime á cero. En este momento las dos tangentes en el punto doble coinciden con la recta trazada, y el tercer punto z de la rama considerada se confunde con el punto doble, originándose el punto de retroceso. Considerando la primera polar, tres de sus puntos de intersección quedan reunidos en el punto de retroceso de la curva primitiva.

§ 3.º Influencia de la Hessiana

96. Sabemos que la Hessiana $H = 0$ es una curva de grado $3(m - 2)$ que pasa por los puntos de inflexión de la curva dada (pág. 78). Dicha curva puede definirse también por la propiedad enumerada en el siguiente

Teorema 1.º—*La Hessiana de una curva es el lugar de los puntos para los que la polar cónica se reduce á dos rectas.*

En efecto, la ecuación de la polar cónica del punto (x, y, z) es

$$X^2 f_{11} + Y^2 f_{22} + Z^2 f_{33} + 2\,YZ f_{23} + \ldots\ldots = 0,$$

siendo X, Y, Z las coordenadas generales; y para que esta cónica se reduzca á dos rectas es necesario que $H = 0$.

Teorema 2.º—*La Hessiana es el lugar de los puntos dobles de la primera polar de la curva dada.*

En efecto, siendo la ecuación de la primera polar

$$x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

eliminaremos x_0, y_0, z_0 entre las ecuaciones

$$x_0 f_{11} + y_0 f_{12} + z_0 f_{13} = 0, \quad x_0 f_{21} + \ldots = 0, \quad x_0 f_{31} + \ldots = 0,$$

y el resultante, que es la Hessiana, será el lugar de los puntos singulares de la primera polar.

La teoría de las polares permite obtener directamente la ecuación de la Hessiana, pues si tomamos la tangente de inflexión por eje de las x, la ecuación

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \ldots \varphi_2 + \varphi_1 = 0$$

de la curva se reduce á la forma

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} \ldots + z^{m-3}(Ax^3 + \ldots) + z^{m-2}(ay^2 + bxy) + z^{m-1}y = 0;$$

porque siendo $\varphi_1 = 0$ la ecuación de la tangente $\varphi_1 = cy$; además el término en x^2 no puede figurar en φ_2, por ser el origen un punto triple, y x^3 figurará en φ_3.

Derivando $m-2$ veces, obtendremos la polar cónica

$$(m-1)(m-2)\ldots 2yz + (m-2)\ldots 2.1(ay^2 + bxy) = 0$$

que representa dos rectas, de las que una es el eje de las x.

Teorema.—*En un punto doble de la curva primitiva, la Hessiana tiene también un punto doble y las tangentes de las dos curvas en el punto doble son las mismas.*

En efecto, de $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ se deducen las ecuaciones derivadas cuyo resultante es la Hessiana.

Tomando por origen el punto singular, y solamente los términos de menor grado de la Hessiana, si representamos por φ característica de los grupos homogéneos de la ecuación de la curva, tendremos

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & (m-k-1)\varphi \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Si el punto es doble, φ es de segundo grado, y los términos de menor grado de la Hessiana son también de segundo, y ésta tendrá también un punto doble.

Si φ es de tercer grado, á un punto triplo de la curva corresponde un punto quíntuplo de la Hessiana.

En el caso de ser el nudo un punto doble, φ se reduce á xy y el determinante á

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & x \\ y & x & (m-3)xy \end{vmatrix} = -(m-5)xy.$$

La Hessiana tiene las mismas tangentes que la curva propuesta, á saber $x = 0$, $y = 0$.

En el caso de ser $\varphi = y^2$, la curva tendrá un punto de retroceso; dicho determinante será nulo. Entonces podremos escribir un término más, y tendremos la ecuación

$$z^{m-2} y^2 + z^{m-3} \theta + \ldots\ldots = 0,$$

y se tiene

$$H = \begin{vmatrix} z^{m-3}\theta_{11} & z^{m-3}\theta_{12} & (m-3) z^{m-4}\theta_1 \\ z^{m-3}\theta_{12} & 2z^{m-2} & 2(m-2) z^{m-3} y \\ (m-3) z^{m-4}\theta_1 & 2y(m-2) z^{m-3} & (m-3)\,m-2\,z^{m-4} y^2 \end{vmatrix} +$$

y no tomando del Hessiano más que los factores de menor grado, será $H = y^2 \theta_{11}$.

La Hessiana tiene pues un punto triplo y dos tangentes comunes con la curva propuesta.

Una rama de la Hessiana encuentra á cada rama de la curva primitiva en un punto doble y á otra en su solo punto, luego: *El número de puntos de intersección que pueden considerarse, en general, reunidos en un punto doble, es igual á seis.*

También puede verse que: *Las dos ramas tangentes entre sí de la Hessiana y de la curva se presentan respectivamente en su lado convexo.* Para demostrarlo, observemos, considerando las ramas tangentes á $x = 0$, que para un punto próximo, x es de un orden infinitesimal superior al de y. Hallándose pues la ecuación de la curva reducida á la forma

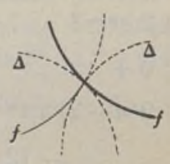


Fig. 112

$$f = xyz^{n-2} + f_3 z^{n-3} + \ldots\ldots = 0,$$

en la que $\qquad f_3 = ax^3 + 3bx^2 y + 3cxy^2 + dy^3,$

la primera agrupación de términos que podemos hacer, dará la parábola $x + dy^2 = 0$. Despreciando enseguida en el Hessiano $\frac{1}{6}[n(n-1)]^3 H$, cuyas tres primeras líneas verticales son

$$f_{11} z^{n-3} \quad z^{n-2} f_{12} z^{n-3} \quad (n-2) y z^{n-3} + (n-3) f_1 z^{n-4} + \ldots,$$
$$z^{n-2} + f_{12} z^{n-3} \qquad f_{22} z^{n-3} \qquad (n-2) x z^{n-3} + (n-3) f_2 z^{n-4},$$
$$(n-2) y z^{n-3} + (n-3) f_1 z^{n-4}; \; (n-2) x z^{n-3} + (n-3) f_2 z^{n-4};$$
$$(n-2)(n-3) xy z^{n-4} + (n-3)(n-4) f z^{n-5} + \ldots$$

(habiendo escrito solo los primeros términos cuyos términos de menor grado en x é y son

$$2(n-2)^2 xyz^{3n-8}(n-2)(n-3)xyz^{3n-8}=(n-1)(n-2)xyz^{3n-8})$$

los términos multiplicados por x, hallamos por coeficiente de z^{3n-9}, la expresión

$$2(n-2)(n-3)yf_2+(n-3)(n-4)f-(n-2)^2y^2f_{22}.$$

Si despreciamos nuevamente los términos multiplicados por x, buscando enseguida el factor de y^3 se obtiene para la rama correspondiente de la Hessiana, la parábola

$$(n-2)x-ndy^2=0,$$

cuya convexidad es opuesta á la de la primera parábola.

Para un *punto de retroceso*, hallándose las dos tangentes confundidas, por ejemplo con el eje $x=0$, la ecuación de la curva se reduce á

$$x^2z^{n-2}+y^3z^{n-3}+\ldots\ldots=0$$

y tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2z^{n-2} & 0+\ldots\ldots & 2(n-2)xz^{n-3}+\ldots \\ 0+\ldots\ldots & 6yz^{n-3} & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\ldots \\ 2(n-2)xz^{n-2}; & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\ldots; & (n-2)(n-3)x^2z^{n-4}+\ldots \end{vmatrix}$$

$$=-12(n-1)(n-2)yx^2z^{3n-9}+\Delta^{(4)}z^{3n-10}+\ldots$$

Los términos de menor grado en x é y de este determinante son del tercero, y la presencia del factor x^2 permite enunciar el siguiente

TEOREMA.—*En un punto de retroceso de la curva propuesta, la Hessiana tiene un punto triplo, y dos de sus ramas son tangentes á la tangente de retroceso, mientras que la tercera tiene una tangente separada,* pues podemos formarnos idea de la disposición de las ramas de la Hessiana, observando que la expresión Δ^4 contiene un término en y^4, á saber,

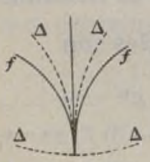


Fig. 113

$$12(n-1)(n-2)y^4z^{3n-10}$$

procedente de los términos

$$3(n-3)y^2z^{n-4},\quad 3(n-3)y^2z^{n-4},\quad 2z^{n-2}$$

mientras que los demás están multiplicados por x^2. Pero x es de un orden infinitesimal superior al de y, porque la distancia á la tangente, en un punto infinitamente próximo al de contacto, es de orden superior al segmento comprendido entre el pie de la perpendicular y dicho punto. Los términos que contienen x^2 pueden pues, despreciarse, en la proximidad del punto de retroceso, y la curva Hessiana puede reducirse á la curva

$$yx^2 + \delta y^4 = 0,$$

es decir, se compone de dos ramas de las que una es tangente á $y = 0$ y la otra pertenece al tipo del punto de retroceso.

La expresión $\delta = \frac{1}{2}\frac{n-3}{n-3}\, d$ indica que $\delta < d$; de manera que á un mismo valor de y corresponde un valor menor de x para H que para f; lo que explica la disposión de la figura.

Teorema.—*En el punto de retroceso se hallan reunidos ocho puntos de intersección de una curva y de su Hessiana.* Esto se ha demostrado cuando $2n > 7$. Pero es también cierto cuando $n = 3$, puesto que existen, en general, nueve puntos de inflexión; pero en el caso del punto de retroceso existe uno tan solo, pues hemos visto que f puede escribirse bajo la forma $f = x^2 z + y^3$, de donde

$$6^2 \Delta = \begin{vmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 6y & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24\, x^2 y.$$

Para $f = 0$, $\Delta = 0$, se tiene ó $x^2 = 0$ é $y^3 = 0$, lo que da seis puntos de intersección reunidos en el punto de retroceso, ó $y = 0$ y $x^2 z = 0$, lo que da dos intersecciones reunidas en el punto de retroceso y además el punto único de inflexión $y = 0$, $z = 0$.

96. Tipos fundamentales.—La discusión de una curva en un punto singular da origen á los tres tipos siguientes:

(I) $x^{2h+1} = y^{2k}$ *tipo de la parábola.*

(II) $x^{2h+1} = y^{2k+1}$ *tipo del punto de inflexión.*

(III) $x^{2h} = y^{2k+1}$ *tipo del punto de retroceso.*

§ 4.º Intersección de dos curvas

Teorema. – *Si un punto determinado debe ser un punto múltiplo de orden* q *en una curva algebráica, esta condición es equivalente á* $\frac{q(q+1)}{2}$ *condiciones lineales,* es decir, que para una curva de n^{simo} orden no se puede elegir más que

$$\frac{n(n+3)-q(q+1)}{2}$$

puntos arbitrariamente.

Sea la curva $f \equiv A\varphi + B\psi = 0$, y supongamos que en la proximidad de un punto P en que se cortan las dos curvas $\varphi = 0$, $\psi = 0$, la primera tenga un punto múltiplo de orden q y la segunda uno de orden r, de manera que se hallen reunidas en P, qr intersecciones de las curvas. Supongamos, para precisar, que $r \geqslant q$ y que las ramas no son tangentes entre sí.

Si tomamos como origen el punto P, todos los términos de grado 0, 1, 2, . . . , $(q-1)$ en f se anularán, por hipótesis; luego f tendrá un punto múltiplo de orden q, lo que da la anulación de

$$1+2+3+\ldots+q = \frac{q(q+1)}{2} \quad \text{constantes.}$$

Teorema.—*Si dos curvas* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *tienen respectivamente en uno de sus puntos de intersección* P *un punto múltiplo de orden* q *y un punto múltiplo de orden* r $(r > q)$, *es necesario, para que una curva que pasa por los puntos de intersección de* φ *y de* ψ *pueda expresarse bajo la forma*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

que dicha curva tenga en P *un punto múltiplo de orden* q, *y que si se toma como origen este último, los coeficientes de* f *hasta el* $(r+q-1)^{\text{simo}}$ *grado exclusivamente, satisfagan á* $rq - \frac{1}{2}q(q+1)$ *ecuaciones homogéneas.*

Siendo $r > q$ al teorema anterior hay que añadir otras condiciones, pues los términos de orden q, $q+1$, ... , $r-1$ de ψ son nulos. Por consiguiente los $(q+i+1)$ coeficientes de los términos del orden $(q+1)^{\text{simo}}$ en f (siendo $i=0, 1, \ldots, r-q-1$) dependen únicamente de los coeficientes de los términos de igual orden en el producto $A\varphi$. Estos últimos se obtienen respectivamente multiplicando términos de orden q en φ por términos de orden i en A, de orden $(q+1)$ en φ por términos de orden $i-1$ en A, ... de orden $(q+i)$ en φ por términos de orden 0 en A.

No pueden pues, representarse bajo la forma $A\varphi + B\varphi$ más que las funciones f, en las cuales los $q+i+1$ coeficientes de los términos de grado $(q+i)$ puedan expresarse linealmente por

$$1+2+\ldots\ldots+(i+1)=\frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

cantidades arbitrarias que son los coeficientes de A. Pero los términos de grado q^{simo}, $(q+1)^{\text{simo}}, \ldots (r-1)^{\text{simo}}$ en f contienen

$$(q+1)+(q+2)+\ldots+r=\frac{(q+r-1)(r-q)}{2}$$

coeficientes, por los que serán funciones lineales y homogéneas de los

$$1+2+3+\ldots+(r-q)=\frac{(r-q+1)(r-q)}{2}$$

coeficientes arbitrarios de los términos de grado $0, 1, \ldots, (r-q-1)$ en A. Es decir, que entre los coeficientes de los términos de $q, (q+1), \ldots\ldots, (r-1)$ grado de f deben existir las ecuaciones lineales homogéneas en número

$$\frac{(r-q)(r+q+1)}{2}-\frac{(r-q)(r-q+1)}{2}=(r-q)\,q, \qquad (1)$$

que resultan de la eliminación de los coeficientes de que se trata de A.

Pero la singularidad que presentan φ y ψ en el punto considerado, ejerce todavía su influencia en una serie de términos de orden más elevado, cuando f es representable por $A\varphi + B\psi$. En general, los términos de orden k en f se obtienen multiplicando en φ los términos de orden q por los de orden $k-q$ en A, los de orden $q+1$ por los de orden $k-q-1, \ldots$ los de orden k por los de orden 0, en φ y en A respectivamente

en ψ los de orden r	por los de $k-r$	en B
» » » » » $r-1$	» » » $k-r+1$	»
. . . .	. . . .	. .
» k	» 0	»

Podemos, por consiguiente, determinar el número de los coeficientes de A y B que entran en los de la función $A\varphi + B\psi$ hasta el orden k inclusive, y obtendremos

$$1+2+\ldots+(k-q+1)=\frac{1}{2}(k-q+2)(k-q+1),$$

$$1+2+\ldots+(k-r+1)=\frac{1}{2}(k-r+2)(k-r+1),$$

coeficientes de A y de B, respectivamente.

Por consiguiente $A\varphi + B\psi$ contiene en los términos contados hasta el grado k inclusive,

$$Q=\frac{1}{2}[(k-q+2)(k-q+1)(k-r+2)(k-r+1)]$$

parámetros, mientras que el número de coeficientes que se han de expresar por dichos parámetros en los términos de igual orden en f, es decir, en los comprendidos desde el orden q hasta el orden k, es

$$P=\frac{1}{2}(k+q+2)(k-q+1).$$

Si aumentamos k en 1, Q aumentará en

$$k-q+2+k-r+2$$

y los $k+2$ coeficientes de una forma binaria de grado $k+1$ se adjuntan á P, es decir, que P aumenta en $k+2$; y la diferencia P -- Q aumenta en $k-q-r+2$, que es el número de condiciones introducidas, cuando se toma el término de grado $(k+1)^{\text{simo}}$ además de los del $k^{\text{ésimo}}$. Si pues k es, en particular, igual á $q+r-2$, no se añade ninguna condición nueva, es decir, que: *Los coeficientes de los términos del grado* $(q+r-1)^{\text{ésimo}}$ *de* f *no quedan modificados por el punto singular*. Luego, si hacemos $k=q+r-2$, resulta

$$P - Q = rq - \frac{1}{2} q(q+1),$$

que es el número de ecuaciones lineales necesarias, entre las que se hallan comprendidas las $(r - q)\, q$ indicadas en (1). Como además se hallan impuestas $\frac{1}{2} q(q+1)$ condiciones por el punto múltiplo de orden q que f tiene en P, queda demostrado el teorema.

El recíproco de este teorema es cierto, es decir, que las rq condiciones halladas son *suficientes* para que f pueda presentarse bajo la forma $f = A + B\psi$. (2)

En efecto (*): Si las rq condiciones se hallan satisfechas, se pueden hallar dos series a, b ordenadas según las potencias ascendentes de x, tales que se tenga $f = a\varphi + b\psi$. Si pues, sustituímos el origen por un punto cualquiera, nos bastará demostrar el teorema siguiente:

Sean (α, β) *un sistema de soluciones de las ecuaciones* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *y* a, b *dos desarrollos según las potencias enteras positivas y ascendentes de* $(x - \alpha)$ *y* $(x - \beta)$. *Para que* f *sea de la forma* $A\varphi + B\psi$, *es necesario y suficiente que se puedan determinar* a *y* b *por la condición*

$$f = a\varphi + b\psi.$$

Supongamos, en primer lugar, $\varphi = x$, agrupemos en f, φ y B los términos independientes de x, y escribamos

$$f = xf' + F(y), \quad \psi = x\psi' + \Psi(y), \quad B = xB' + \mathfrak{B}(y).$$

Efectuando la misma agrupación en $(A\varphi + B\psi)$, y reteniendo tan sólo los términos independientes de x, se obtiene

$$F(y) = \mathfrak{B}(y)\,\Psi(y),$$

es decir, que *para la exactitud de la ecuación* $A\varphi + B\psi = 0$, *haciendo* $\varphi = x$, *es necesario que la parte independiente de* x *en* f *sea divisible por la parte independiente de* x *en* ψ. Esta condición es suficiente como se ve enseguida.

(*) Halphen *Sur une proposition d'Algèbre* (Bulletin de la Societé Mathématique de France), t. V, pág. 160.

Sea β una raíz de $\Psi(y)$, y supongamos satisfecha la condición (2) para el sistema 0, β; se concluye por el mismo razonamiento que $F(y) = b_1 y \Psi(y)$, siendo b_1 una serie convergente en la proximidad de $y = \beta$; luego F contiene á $(y - \beta)$ como factor, por lo menos con el mismo exponente que Ψ.

Si ahora sucede lo mismo para cada raíz de Ψ, resultará que F es divisible por Ψ. Luego la proposición queda demostrada para el caso de ser $\varphi = x$. Por medio de una sustitución lineal, se concluye que *la proposición queda probada también para el caso en que* φ *es un trinomio de primer grado en* x *é* y.

Pasemos al caso general. Supongamos variables los coeficientes de φ, y hagámosles variar de modo que el sistema de soluciones (α, β), múltiplo de rq, se cambie en rq sistemas diferentes (α_1, β_1), (α_2, β_2), ... Sean $P_1, P_2, \ldots$ trinomios de primer grado sujetos simplemente á las condiciones de anularse, P_1 para $x = \alpha_1$, $y = \beta_1$, P_2 para $x = \alpha_2$, $y = \beta_2, \ldots$

Al mismo tiempo, un segundo sistema de soluciones (α', β') múltiplo de orden $r' q'$, se cambia en $r' q'$ sistemas diferentes. Sean igualmente $P'_1, P'_2, \ldots$ trinomios sujetos á condiciones análogas, y así sucesivamente.

Sean Π el producto de todos estos trinomios y φ' el polinomio φ cuyos coeficientes se hacen variar. Siendo simples todas las soluciones comunes á $\varphi' = 0$ y $\psi = 0$, tenemos

$$\Pi = A' \varphi' + B' \psi',$$

siendo A′ y B′ polinomios enteros. Esta relación subsiste en el límite, cuando $\varphi' = \varphi$. Entonces $P_1, P_2, \ldots$ se anulan para $x = \alpha$, $y = \beta$, y lo mismo para las demás. Luego:

Si $P_1, P_2, \ldots$ *son trinomios de primer grado en* x, y, *sujetos simplemente á anularse para* $x = \alpha$, $y = \beta$; *si* $P'_1, P'_2, \ldots$ *son también trinomios sujetos á anularse para* $x = \alpha'$, $y = \beta'$, *y lo mismo para cada solución común á* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *se puede elegir el número de estos trinomios de modo que se tenga, expresando* Π *su producto y siendo* f *un polinomio cualquiera,*

$$\Pi f = C\varphi + D\psi,$$

siendo también C *y* D *polinomioscualesquiera.*

Supongamos ahora que se halle satisfecha la condición (2) en la proximidad de (α, β). Resulta entonces de la ecuación últimamente escrita y en los mismos límites

$$(a\Pi - C)\,\varphi + (b\Pi - D)\,\psi = 0;$$

luego $$C = a\Pi + c\psi,$$

expresando c un desarrollo análogo á a.

Consideremos separadamente en Π el factor P_1. Las soluciones comunes á $P_1 = 0$ y $\psi = 0$, distintas de (α, β), son simples y no anulan á φ; por consiguiente anulan á C, según una de las ecuaciones anteriores. En lo que concierne á la ecuación $C = a\Pi + c\psi$, puede considerarse como expresando que la condición (2) queda satisfecha con respecto á P_1 y ψ, haciendo C las veces de φ, ψ, f. Por otra parte, P_1 es un trinomio de primer grado; luego, según un resultado anterior,

$$C = C_1 P_1 + B\psi,$$

expresando C_1 y B polinomios enteros.

Sustituyendo el valor de C en $Hf \equiv C\varphi + C\psi$, tenemos

$$Hf = C_1 P_1 \varphi + (D + B\varphi)\,\psi.$$

Conteniendo Π á P_1 como factor, el coeficiente de ψ en esta última identidad contiene también este factor. Suprimiéndolo y llamando Π_1 al producto de los demás trinomios, tendremos

$$\Pi_1 f = C_1 \varphi + D_1 \psi.$$

Repitamos con respecto á esta ecuación y á P_2 el mismo razonamiento, y así sucesivamente. Conseguiremos al fin que desaparezan del coeficiente de f en $\Pi f = C\varphi + D\psi$ todos los trinomios relativos á la solución (α, β). Si ahora quedan satisfechas las condiciones análogas á (2) por f, para todas las soluciones comunes á $\varphi = 0$ y $\psi = 0$, se harán desaparecer también todos los trinomios $P', P'', \ldots$; luego f es de la forma $A\varphi + B\psi$, según se tenía que demostrar.

Citaremos el siguiente importante

Teorema.—*Una curva* $f = 0$ *que tiene en* P *un punto múltiplo de orden* $r + q - 1$ *y que pasa por los puntos de intersección de dos curvas* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *tales, que* φ *tenga en* P *un punto múltiplo de orden* q *y* ψ *un punto múltiplo de orden* r, *puede representarse bajo la forma*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

teniendo $A = 0$ *en* P *un punto múltiplo de orden* $r - 1$ y $B = 0$ *un punto múltiplo de orden* $q - 1$.

§ 5.º La dualidad de las singularidades

97. Conforme con el principio de dualidad, hay que tener en cuenta, no sólo los puntos, sino también las tangentes singulares. En efecto, según dicho principio, debemos figurarnos engendrada cualquiera curva de dos maneras distintas: como descrita por un punto ó como envuelta por una tangente móvil. El punto generador determina, en cada intervalo, una dirección; y esta dirección, que corresponde á un avance infinitamente pequeño, es la tangente á la curva en una de las posiciones del punto generador. De igual modo, la recta envolvente determina un punto para cada cambio infinitamente pequeño de posición, porque este cambio puede siempre considerarse como una rotación alrededor de un punto determinado, que será el de contacto de la recta de que se trata.

Obtendremos pues, la curva de que se trata, considerando constantemente la rotación de la recta como una función del avance de uno de sus puntos. Pueden presentarse algunas particularidades en esta dependencia respectiva de los dos movimientos, lo que da origen á los puntos y á las tangentes *singulares*. Estas circunstancias tienen lugar, ó cuando el elemento generador ó envolvente llega dos veces á una misma posición, ó cuando uno de los elementos cambia de sentido en el movimiento, mientras que el otro sigue su marcha continua. Ya se ha tratado de esto en los casos del *punto doble* y del *punto de inflexión* (80). Al punto doble corresponde dualísticamente la *tangente doble*, es decir, una tangente que tiene dos contactos diferentes (fig. 114) y correlativamente á las diferentes especies de *puntos múltiples* corresponde el mismo número de especies de *tangentes múltiples*.

Fig. 114

Pero debe notarse que una tangente doble no puede considerarse como una singularidad, mientras consideremos una curva como un lugar geométrico de puntos; porque, según veremos, la curva representada por una ecuación general en coordenados puntos posee cierto número de tangentes dobles, y también un punto doble solo debe considerarse como singularidad, cuando nos representemos á la curva como envolvente de una recta.

Si pues, en un elemento doble se presenta una indeterminación con respecto á la dirección de avance, es decir, del elemento próximo, no interviene por esto discontinuidad en el movimiento del punto y de la tangente, porque nos aproximamos al elemento doble en una rama determinada, y consideramos á la curva según su descripción. Pero no ocurre lo mismo cuando se trata del punto de inflexión, por consistir la singularidad en una relación entre el punto y la tangente, entrando en consideración una sola rama de curva. Un hecho análogo ocurre respecto al punto de retroceso, en virtud de la ley de dualidad, porque se ve inmediatamente en una figura que el punto cambia su dirección de avance, mientras que la tangente continúa su rotación en el mismo sentido.

Por medio de la investigación *simultánea* de dos especies de singularidades, se llega á resolver la contradicción aparente que surge cuando se trata de volver á pasar de la ecuación en coordenadas-líneas de una curva dada en coordenadas-puntos á la ecuación en coordenadas-puntos de que se partió. Hallaremos, en efecto, que no existe curva de orden superior al segundo que no contenga ni punto ni tangente múltiple, y que al contrario: *Toda curva de orden superior sin punto múltiplo, tiene necesariamente un número determinado de tangentes dobles ó múltiples, de igual modo que toda curva sin tangente múltiple necesariamente tiene un número determinado de puntos dobles ó múltiplos.* Si añadimos á esta observación que el número $n(n-1)$ que expresa la clase de una curva, sufre ciertas excepciones á consecuencia de haber un punto múltiplo, es claro que, según el principio de dualidad, el orden de una curva que tiene tangentes dobles no debe expresarse inmediatamente en función de la clase k por el número $k(k-1)$, y con esto queda salvada la contradicción aparente señalada. Lo mismo puede manifestarse respecto á las tangentes de inflexión y á los puntos de retroceso (*). Esta influencia de los puntos

(*) Clebsch. *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, pág. 341 ó trad. francesa, t. II, pág. 52.

dobles y de retroceso en la clase, resulta del modo de presentarse las polares de estos puntos, como vamos á ver.

Observaremos de paso, que las ecuaciones

$$k = n(n-1) \quad \text{y} \quad n = k(k-1)$$

son incompatibles, excepto cuando $x = n = 2$.

§ 6.º FÓRMULAS DE PLÜCKER

98. Se sabe que los puntos de contacto de las tangentes trazadas por un punto P á una curva de orden n se hallan en la intersección de esta curva y de la primera polar de P, que es del grado $n-1$, siendo por consiguiente en número de $n(n-1)$. Resultaría pues la igualdad de la clase k de la curva:

$$k = n(n-1),$$

si todos los puntos comunes á la curva y á la polar de P fuesen efectivamente puntos de contacto de las tangentes trazadas por P. Pero como los puntos dobles también están en la primera polar, haciendo pasar esta polar por la proximidad del punto doble, antes de hacerle pasar exactamente por dicho punto, se ve que un punto doble absorbe dos intersecciones de la curva y de la polar.

Para tener las tangentes efectivas trazadas por P, basta disminuir $\frac{n(n-1)}{2}$ en $2d$, expresando d el número de puntos dobles. Este razonamiento supone que la polar pasa por el punto doble, sin tener ninguna tangente común con la curva. Hay pues que hallar la tangente de la polar en el punto doble. Tomemos este punto por origen y las dos tangentes en el mismo por ejes de coordenadas. La ecuación de la curva será

$$0 = xy + \varphi_3(x, y) + \ldots\ldots,$$

y la de la polar del punto P (α, β)

$$0 = \alpha y + \beta x + \text{términos de 2.º grado al menos.}$$

La tangente en el origen

$$\alpha y + \beta x = 0$$

forma con los ejes y la recta OP un haz armónico, es pues distinta de las tangentes en el punto doble. Esta conclusión no es cierta, si las tangentes en el punto doble coinciden (punto de retroceso); entonces la tangente á la polar se confunde con la tangente en el punto de retroceso. Sea en este caso ox la tangente de retroceso; y la ecuación de la curva será

$$0 = y^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots\ldots,$$

y la primera polar

$$0 = 2\beta y + \text{términos de grado superior.}$$

De estas dos ecuaciones se deduce, multiplicando la segunda por y, la primera por -2β y sumándolas, la de una curva que tiene un punto triple en el origen, y que tiene los mismos puntos comunes con la polar que ésta con la curva propuesta; y desarrollando los cálculos, se ve que, en el caso general, esta curva no es tangente á Ox. Luego las tres ramas en o cortan á la polar en tres puntos simples, y el punto de retroceso absorbe tres de los puntos de intersección de la curva con la primera polar. Queda pues para la clase k de la curva de orden n la fórmula

$$k = n(n-1) - 2d - 3r, \tag{1}$$

designando d y r los números de los puntos dobles y de retroceso.

«Tratándose de puntos reales (*) se puede explicar la necesidad de esta reducción como sigue: Consideremos una curva sin punto doble, pero tal que dos de sus ramas se hallen tan próximas, que por medio de una pequeña deformación se obtenga una curva con punto doble. Se ve entonces cómo las dos tangentes u y v trazadas desde un punto y á dichas ramas (fig. 115) se confunden con la recta que une y al punto doble, cuando se ha efectuado la deformación, de modo que esta línea de unión se cuenta efectivamente dos veces como tangente propiamente dicha.» Y se ve también, en virtud de consideraciones precedentes respecto á la formación del punto de retroceso, mediante uno doble y un lazo, que dicha recta debe contarse tres veces en el punto de retroceso.

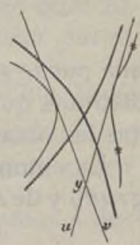


Fig. 115

(*) Clebsch. *Leçons de Géométrie*, t. I, pág 55.

Considerando la figura polar recíproca, se obtiene la fórmula correlativa

$$n = k(k-1) - 2t - 3w \tag{2}$$

designando t las tangentes dobles y w los puntos de inflexión.

Los puntos de inflexión se hallan en la intersección de la curva con la Hessiana; y como el grado de ésta es $3(n-2)$, se tendrá

$$w = 3n(n-2),$$

si no hay puntos singulares.

Pero como se ha visto que los puntos dobles y de retroceso de la curva propuesta se hallan también en la Hessiana, y se han dado las tangentes de esta curva en dichos puntos, resulta que: 1.º un punto doble absorbe seis puntos comunes á la curva y á la Hessiana; 2.º que un punto de retroceso absorbe ocho puntos comunes á las mismas, como ya hemos visto (p. 237); luego

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r. \tag{3}$$

Considerando la polar recíproca, tenemos la fórmula correlativa

$$r = 3k(k-2) - 6t - 8w. \tag{4}$$

Las fórmulas (1), (2), (3) y (4) son las llamadas *fórmulas de Plücker*, que no son independientes entre sí, pues restando las (1) y (3) ó las (2) y (4) se obtiene

$$3(k-n) = w - r, \tag{5}$$

que puede sustituir á las (2) y (4). Quedan pues, tres ecuaciones distintas que permiten calcular tres de las cantidades, conocidas las otras tres. (*)

La enumeración de las diversas especies de curvas de *tercer grado* y de *tercera clase* están dadas por los siguientes cuadros:

$n=3$					$k=3$			
d	r	k	w		t	w	n	r
0	0	6	9		0	0	6	9
1	0	4	0		1	0	4	3
0	1	3	1		0	1	3	1

(*) Rouché et Levy. *Analyse infinitésimal*, t. I, pág. 379.

No hay tangentes dobles, porque una de estas rectas tendría cuatro puntos comunes con la cúbica.

Las curvas de *cuarto grado* tienen además tangentes dobles, y dan lugar al siguiente cuadro, p es el género (pág. 253):

d	r	k	w	t	p
0	0	12	24	28	3
1	0	10	18	16	2
0	1	9	16	10	2
2	0	8	12	8	1
1	1	7	10	4	1
0	2	6	8	1	1
3	0	6	6	4	0
2	1	5	4	2	0
1	2	4	2	1	0
0	3	3	0	1	0

Las fórmulas de Plücker sugieren otra observación. Los números de los primeros miembros son siempre positivos ó nulos, de manera que el número de los puntos dobles no puede exceder de $\frac{n(n-1)}{2}$, según la fórmula (1) ni aun de $\frac{n(n-2)}{2}$, según la fórmula (3).

Pero estos límites son demasiado elevados, puesto que: *El máximo de puntos dobles de una curva de orden* n *no puede exceder á* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. (Puede alcanzar este máximo, como se ve tomando, por ejemplo, una cúbica con punto doble).

En efecto, se sabe que para determinar una curva de orden n es necesario dar $\frac{n(n+3)}{2}$ puntos. Esto sentado, vamos á demostrar que si hay más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles, por ejemplo

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1=d,$$

la curva comprende una curva de orden menor, y por consiguiente se descompone. Con este objeto, determinemos una curva de orden $n-1$ sujetándola á pasar por d puntos dobles y por otros $2n-3$ puntos, tomados en la curva propuesta, es decir, por

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1+2n-3=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

puntos. Las dos curvas se cortarán en $2n-3+2d$ puntos, porque los puntos dobles deben contarse por dos en la intersección, lo que hace $n(n-1)+1$ puntos comunes, es decir, uno de más que admite el teorema de Bezout para dos curvas de órdenes n y $n-1$, que no tienen una infinidad de puntos comunes. La curva de orden n por consiguiente, ó debe de componerse ó no tener más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles.

Si se da, por ejemplo, una curva de orden n, sin punto doble ni de retroceso, se tiene, como se ha visto

$$k=n(n-1),\quad w=3n(n-2),\quad t=\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9).$$

Pero según el principio de dualidad, el orden y la clase se corresponden recíprocamente, sucediendo lo mismo al punto doble y á la tangente doble, de manera que, como se ve, hay que sustituir en las fórmulas n por k y d por t.

Además, á una tangente de inflexión, recta que encuentra á la curva en tres puntos, corresponde un punto en el que se cortan tres tangentes sucesivas, es decir, un punto de retroceso, correspondiéndose w y r dualísticamente en las fórmulas anteriores. Para demostrarlo, comparemos la manera de ser de las tangentes en la proximidad de una tangente de inflexión con la de los puntos en la proximidad de un punto de retroceso. Transportándolo al origen, la ecuación de la curva es de la forma

$$f=x^2 z^{n-2}+y^3 z^{n-3}+\ldots\ldots=0.$$

Las coordenadas de la tangente de un punto (x, y, z) infinitamente próximo del origen serán, despreciando infinitamente pequeños de orden superior,

$$\rho u=\frac{\partial f}{\partial x}=2x z^{n-2},\quad \rho v=\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2 z^{n-3},$$

$$\rho w=\frac{\partial f}{\partial z}=(n-2)x^2 z^{n-3}+(n-3)y^3 z^{n-4}$$

Con auxilio de la ecuación $x^2 z + y^2 = 0$, se obtiene

$$4v^3 - 27u^2 w = 0,$$

ecuación á la que satisfacen las tangentes en la proximidad del punto de retroceso. Existe una curva de tercera clase, que presenta la sucesión de las tangentes consecutivas en la proximidad de dicho punto.

Haciendo pues, abstracción del factor numérico $\frac{4}{27}$, la curva en la proximidad del punto de retroceso, *si se considera como figura engendrada por un punto, es del tipo* $x^2 z + y^3 = 0$, *y si se le considera como engendrada por una recta, es del tipo* $u^2 w + v^3 = 0$, siendo $x = 0$, $y = 0$ las coordenadas del punto de retroceso y $v = 0$, $w = 0$ las de su tangente. Pero la última ecuación es la correspondiente dualística de la forma

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

característica del punto de inflexión, porque sólo hay que sustituir w por x, u por z, pues en $u^2 w + v^3 = 0$, las coordenadas de la tangente de retroceso están dadas por $v = 0$, $w = 0$, y en $xz^2 + y^3 = 0$, las del punto de inflexión lo son por $x = 0$, $y = 0$. La ecuación de la curva cerca del punto de inflexión es

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

y por consiguiente, las coordenadas de la tangente de inflexión

$$\rho u = z^2, \quad \rho v = 3y^2, \quad \rho w = 2xz,$$

que satisfacen á la condición

$$4v^3 - 27uw^2 = 0;$$

y si sustituímos de nuevo u por z, w por x, tendremos el tipo del punto de retroceso. *La ecuación de la curva en la proximidad del punto de inflexión es por consiguiente del tipo*

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

si se considera la curva engendrada por un punto; y si se considera engendrada por una recta, es del tipo

$$uw^2 + v^3 = 0.$$

Luego, *con relación á las cantidades infinitamente peque-*

ñas, el punto de retroceso se presenta como tangente de inflexión $x = 0$ *y el punto de inflexión como tangente de retroceso.*

Reuniremos estos resultados en el siguiente cuadro:

Coordenadas-puntos	*Coordenadas-líneas*
Punto doble con dos tangentes reales.	Tangente doble cuyos puntos de contacto son reales.
Punto de retroceso.	Tangente de inflexión.
Punto doble con dos tangentes imaginarias (punto aislado).	Tangente doble cuyos puntos de contacto son imaginarios (tangente aislada).
Punto de inflexión.	Tangente de retroceso.

Para hacer visible la proposición contenida en la fórmula (2), al menos mientras se trate de cantidades reales, partiremos de una curva que necesite deformarse un poco para tener una tangente doble. Dos ramas de la curva recorren un segmento para originar la tangente doble (fig. 116). Los dos puntos de intersección de una recta cualquiera (u) con dichas ramas se hallan entonces transportados á la tangente doble, y deben, como intersecciones impropiamente dichas, restarse del número $k(k-1)$, pues un punto de intersección de u con la curva está definido por la propiedad de poderse trazar dos tangentes coincidentes desde este punto á la curva, lo que se verifica para todo punto de una tangente doble. Si ahora se hacen coincidir gradualmente los dos puntos de contacto en la curva de tangente doble, se ve que un tercer punto de intersección de u se halla en la tangente doble, debiendo ser esta tangente de inflexión. Puede hacerse que las ramas, designadas por a en la figura, se confundan con la tangente doble, lo que origina la curva de puntos.

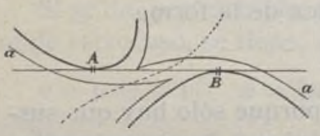


Fig. 116

§ 7.º GÉNERO DE UNA CURVA

99. DEFINICIÓN.—Se llama *género* de una curva, al exceso del número máximo de sus puntos dobles que exige su orden sobre el número de puntos dobles que tiene efectivamente. Designemos este exceso por p. Su introducción en las fórmulas de Plücker les da la forma más simétrica siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 2p-2 &= k+r-2n = n+w-2k \\ &= n(n-3)-2(d+r) = k(k-3)-2(t+w) \end{aligned}\right\} \quad 5$$

Definición.—Se llaman *curvas unicursales* aquellas para las que las dos coordenadas pueden expresarse *racionalmente* en función de un mismo parámetro.

100. Teorema.—*Las curvas de género cero son unicursales ó se descomponen.*

En efecto, hagamos pasar una curva (C′) de orden $n-2$ por los puntos dobles de la curva dada (C) y por otros $n-3$ puntos fijos de la misma, lo que es siempre posible de una infinidad de maneras, porque no se han fijado más que

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-3=\frac{(n-1)(n+1)}{2}-1$$

puntos de la curva de orden $n-2$, es decir, uno menos de los necesarios para determinarla. Y siendo lineales con relación á los coeficientes de la curva, las condiciones para que ésta pase por los puntos dados, el número de ecuaciones lineales será

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1 \quad \text{entre} \quad \frac{(n-2)(n+1)}{2} \text{ coeficientes,}$$

que permitirán expresar todos éstos en función lineal de uno solo, y finalmente la ecuación de (C′) se presentará bajo la forma

$$S+\lambda S'=0,$$

en la que λ es un parámetro arbitrario y S, S′ funciones de grado $n-2$, á lo más.

Las curvas (C) y (C′) se cortan en

$$n-3+2d=n-3+(n-1)(n-2)=n(n-2)-1$$

puntos fijos. Por consiguiente, tienen además un punto común; y se puede aprovechar la indeterminación de λ para que este punto sea uno cualquiera de (C). Busquemos las coordenadas de este punto.

Operaciones puramente algebráicas, permitirán eliminar una de las coordenadas, y por ejemplo, y se obtendrá una ecuación de grado $n(n-2)$ en x, de la cual se conocerán todas las raíces, excepto una, á saber: las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_d$ de los puntos dobles y las $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-3}$ de los puntos fijos dados; luego, dividiendo el primer miembro de la ecuación por

$$(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_d)^2(x-x'_1)\ldots(x-x'_{n-3}),$$

quedará una ecuación de primer grado en x, que permitirá conocer la abscisa del punto M en función racional de λ.

En el caso de que el último punto dejado como indeterminado fuese de los fijos, la indeterminación de λ permitiría hacer pasar todavía (C') por un punto de (C), y las dos curvas tendrían entonces $n(n-2)+1$ puntos comunes. Habría una curva plana común y (C) se descompondría.

RECÍPROCAMENTE.—*Toda curva unicursal tiene su máximo de puntos dobles ó es del género cero.*

Supongamos que las coordenadas se expresan racionalmente en función de un parámetro t por las fórmulas

$$x = \frac{\theta_1(t)}{\theta(t)}, \qquad y = \frac{\theta_2(t)}{\theta(t)} \qquad (1)$$

en las que una por lo menos de las funciones θ, θ_1, θ_2 es del grado n, pudiéndose suponer también que las fracciones son irreducibles.

Desde luego la curva es del grado n, porque los puntos de intersección con una recta cualquiera

$$ux + vy + w = 0$$

se hallan dadas por la ecuación de grado n

$$u\theta_1(t) + v\theta_2(t) + w\theta(t) = 0.$$

La ecuación de la curva se obtendrá eliminando t entre las dos ecuaciones (1), que expresaremos por

$$F(x, y) = 0; \qquad (2)$$

y se sabe que, en general, si esta ecuación resultante se verifica por un sistema de valores x_0, y_0, las ecuaciones (1) tienen tan sólo una raíz común; luego á todo punto de la curva (2) corresponde un solo valor de t, en general.

Sin embargo podría suceder lo contrario. Por ejemplo, si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

las ecuaciones

$$x = \frac{at^2 + bt + c}{a'' t^2 + b'' t + c''}, \qquad y = \frac{a' t^2 + b' t + c'}{a'' t^2 + b'' t + c''}$$

no representan una cónica, sino una recta recorrida dos veces, y á todo punto de la recta corresponden dos valores de t, ligados por la ecuación

$$(ab' - ba'')\, t_1 t_2 + (ac'' - ca'')(t_1 + t_2) + bc'' - cb'' = 0.$$

Pero vamos á demostrar que, si *todos* los puntos de una curva pueden obtenerse por varios valores del parámetro t, se puede hallar siempre otro parámetro T tal, que á todo punto de la curva corresponda un solo valor de T (á excepción de los puntos múltiplos).

Si se obtiene un mismo punto por dos valores t_1 y t_2 del parámetro, se obtendrán las dos condiciones

$$\frac{\theta_1(t_1)}{\theta(t_1)} = \frac{\theta_1(t_2)}{\theta(t_2)}, \qquad \frac{\theta_2(t_1)}{\theta(t_1)} = \frac{\theta_2(t_2)}{\theta(t_2)}$$

ó

$$\left.\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \theta_1(t_1)\,\theta(t_2) - \theta(t_1)\,\theta_1(t_2) = 0 \\ R_1(t_1, t_2) &= \theta_2(t_1)\,\theta(t_2) - \theta_2(t_2)\,\theta(t_1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Las dos funciones R y R_1 admiten evidentemente el divisor $t_1 - t_2$; pero puede existir un divisor de grado superior. Sea $D(t_1, t_2)$ el máximo común divisor, de modo que

$$\left.\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= D(t_1, t_2)\, Q(t_1, t_2) \\ R_1(t_1, t_2) &= D(t_1, t_2)\, Q_1(t_1, t_2) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

no pudiéndose anular Q y Q_1 más que para sistemas aislados de valores t_1 y t_2, lo que dará puntos dobles con ramas distintas, porque los valores de t infinitamente próximos de t_1 y de t_2, no anulan ya ni á R ni á R_1.

Ordenemos el polinomio D con relación á t_2:

$$D = At_2^m + A_1 t_2^{m-1} + \ldots\ldots + A_m$$

Uno por lo menos de los coeficientes A_h es de grado m en t_1; porque, si se permutan las letras t_1 y t_2, los polinomios R y R_1 cambian de signo, sin cambiar en valor absoluto, y por consiguiente su máximo común divisor D permanece el mismo, salvo un factor constante. Sea A_h uno de los coeficientes de grado m en t_1, los demás serán de igual grado ó de un grado menor. A será ciertamente de grado menor, porque debiendo anularse D para $t_2 = t_1$, no puede contener al término $t_1^m t_2^m$. Pero si se sustituye en D, sea t_2 sea t_1, para una t_i cualquiera de las m raíces de la ecuación $D = 0$, ésta quedará verificada todavía, y las dos ecuaciones

$$D(t_1, t_2) = A(t_1)\, t_2^m + A_1(t_1)\, t_2^{m-1} + \ldots + A_m(t_1) = 0,$$

$$D(t_i, t_2) = A(t_i)\, t_2^m + A_1(t_i)\, t_2^{m-1} + \ldots + A_m(t_i) = 0,$$

en cuyos coeficientes hemos puesto de manifiesto la variable, tendrán las mismas raíces en t_2; luego sus coeficientes serán proporcionales, y se tendrá

$$\frac{A_h(t_1)}{A(t_1)} = \frac{A_h(t_i)}{A(t_i)}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$. Si pues se hace $T = \dfrac{A_h(t)}{A(t)}$, (5)

el parámetro T tomará un valor único para los m valores t_1, $t_2, \ldots, t_m$, es decir, para el punto considerado de la curva.

Para demostrar ahora el teorema, supondremos que á un punto cualquiera de la curva definida por las ecuaciones (1) corresponde un solo valor del parámetro t (á excepción de los puntos múltiplos que vamos á buscar). Estos puntos se hallarán dados por las soluciones comunes á las ecuaciones (3). Dividamos R y R_1 por $t_1 - t_2$, para excluir la solución extraña $t_2 = t_1$; obtendremos las dos ecuaciones

$$S(t_1, t_2) = 0, \quad S_1(t_1, t_2) = 0 \tag{6}$$

simétricas en t_1 y t_2 y de grado $n-1$, con relación á estas letras. Hagamos

$$t_1 + t_2 = u, \qquad t_1 t_2 = v. \tag{5}$$

Por estar formadas las ecuaciones (4) con términos de la forma

$$A_{\alpha\beta}(t_1{}^{\alpha} t_2{}^{\beta} + t_2{}^{\alpha} t_1{}^{\beta}) = A_{\alpha\beta}(t_1 t_2)^{\beta}(t_1{}^{\alpha-\beta} + t_2{}^{\alpha-\beta}), \quad (\alpha > \beta)$$

y expresarse las sumas $t_1{}^k + t_2{}^k$, en virtud de la fórmula

$$t_1{}^k + t_2{}^k = (t_1{}^{k-1} + t_2{}^{k-1})\,u - v\,(t_1{}^{k-2} + t_2{}^{k-2}),$$

por funciones de grado k en u y v, la sustitución (5) en las ecuaciones (4) conducirá á ecuaciones de grado $n-1$, que tendrán $(n-1)^2$ grupos de soluciones comunes. Pero no todos estos grupos convendrán, pues para obtener las ecuaciones (3) hemos debido multiplicar por $\theta(t_1)$ y $\theta(t_2)$; y si t_1 y t_2 anulan á $\theta(t)$, el grupo correspondiente debe desecharse. Pero existen tantos de estos grupos como hay combinaciones de las n raíces de $\theta(t)$, dos á dos, $\dfrac{n(n-1)}{2}$; luego quedarán

$$(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

grupos de soluciones útiles, á cada uno de los que corresponde un punto doble. La curva tiene pues el máximo de puntos dobles; es del género cero.

Teorema.—*Las cónicas son unicursales*, pues son del género cero; sus expresiones son

$$P^2 + Q^2 = H^2, \quad P^2 - Q^2 = H^2, \quad P^2 = mQ.$$

Haciendo, respectivamente en cada uno de los casos

$$P = H\,\frac{2t}{t^2+1}, Q = H\,\frac{t^2-1}{t^2+1}; \ \frac{P+Q}{H} = \frac{H}{P-Q} = t; \ P = t, \ Q = \frac{t^2}{m}$$

las coordenadas de un punto móvil de la cónica en función de t se obtendrán resolviendo las ecuaciones respecto á x é y.

CAPÍTULO II

Transformaciones planas

§ 1.º Transformaciones cuadráticas

101. Definición.—La primera transformación de un plano en otro ha sido la *transformación proyectiva* ó *afinidad lineal*, en las que dos figuras se corresponden biunívocamente punto con punto. Ahora vamos á tratar de la *transformación cuadrática*, que consiste en una relación no lineal por la que se corresponden dos figuras de dos planos, que también pueden reducirse á uno solo, elemento por elemento, mediante las ecuaciones

$$\rho x_1 = y_0 y_3, \qquad \rho x_2 = y_3 y_1, \qquad \rho x_3 = y_1 y_2, \tag{1}$$

en las que x_1, x_2, x_3 é y_1, y_2, y_3 expresan las coordenadas homogéneas de los dos puntos correspondientes de cada uno de los dos planos ó de las dos figuras planas, siendo las fórmulas inversas, las siguientes:

$$\sigma y_1 = x_2 x_3, \qquad \sigma y_2 = x_3 x_1, \qquad \sigma y_3 = x_1 x_2. \tag{2}$$

A una recta $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ corresponde en virtud de (1), en el plano P_y, una cónica

$$u_1 y_2 y_3 + u_2 y_3 y_3 + u_3 y_2 y_1 = 0, \tag{3}$$

é inversamente, á una recta $v_y = 0$ corresponde en virtud de (2) y en el plano P_x, una cónica

$$v_1 x_2 x_3 + v_2 x_3 x_1 + v_3 x_1 x_2 = 0.$$

El carácter unívoco de esta correspondencia entre los dos planos resulta de las consideraciones siguientes: Al punto de intersección de dos rectas $u_x = 0$ y $u'_x = 0$ en P_x, corresponden en P_y los puntos de intersección de la cónica (3) con la cónica

$$u'_1 y_2 y_3 + u'_2 y_3 y_1 + u'_3 y_1 y_2 = 0.$$

Pero de estos cuatro puntos, tres son siempre los mismos, á saber: los vértices del triángulo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; luego:

A las rectas de uno de los planos corresponden en el otro cónicas que pasan por tres puntos fijos ó puntos fundamentales, y al punto de intersección de dos rectas, el cuarto punto de intersección móvil de las dos cónicas correspondientes

Podemos en general, definir esta transformación de la manera siguiente: Sentaremos como un hecho que el conjunto de las rectas en número doblemente infinito de un plano corresponde al conjunto de cónicas en número doblemente infinito de una red con tres puntos fundamentales. A las cónicas que pasan por un punto de uno de los planos corresponden entonces las rectas que pasan por un punto del otro plano. A cada punto de uno de los planos corresponde, por consiguiente, la intersección de dos rectas (y, por consiguiente, de una infinidad de rectas) del otro plano, y recíprocamente. Según esto, podemos concebir la representación algebráica de la transformación de una manera más general. Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q'_1, Q'_2, Q'_3 funciones cualesquiera lineales en y_1, y_2, y_3. Las dos ecuaciones lineales

$$Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_1 x_3 = 0, \quad Q'_1 x_1 + Q'_2 x_2 + Q'_3 x_3 = 0 \quad (4)$$

dan de nuevo la relación de que tratamos, porque resolviéndolas tenemos

$$\rho x_1 = Q_2 Q'_3 - Q_3 Q'_2, \ \rho x_2 = Q_3 Q'_1 - Q_1 Q'_3, \ \rho x_3 = Q_1 Q'_2 - Q_2 Q'_1,$$

y las ecuaciones $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ representan todavía tres cónicas con tres puntos fijos, á saber, los puntos fundamentales del plano P_y. La inversión de las fórmulas se obtendría ordenando las ecuaciones (4) según las y_i, y resolviendo.

Designaremos por $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ los puntos fundamentales del plano P_y, por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ los tres puntos fundamentales de P_x. *Para estos tres puntos, nuestra transformación no es ya de determinación única,* pues se encuentran puntos excepcionales, análogos en todas las transformaciones de orden superior. Al punto α_1 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) corresponden, en efecto, según (1) y (2), *todos* los puntos de la recta $\beta_2 \beta_3$ ($y_2 = 0$) en P_y, é inversamente á todo punto de esta recta corresponde un solo punto α_1 en P_x. Pero, como la recta $\overline{\beta_2 \beta_3}$ contiene los puntos $\beta_2 \beta_3$ á los que corresponden respectivamente las rectas totales $\overline{\alpha_3\,\alpha_1}$ y $\overline{\alpha_1\,\alpha_2}$, el teorema, según el que, á toda recta de uno de los sistemas corresponde en el otro una cónica que pasa por los tres puntos fundamentales, no sufre ninguna excepción para la recta $\beta_2\,\beta_3$.

Con auxilio de estas observaciones, podemos indicar las modificaciones que sufre una curva por la transformación de que tratamos. Es claro que á una curva C_n en P_x corresponde en P_y una curva C'_{2n} cuya ecuación se deduce de la ecuación C_n, sustituyendo simplemente $y_2\,y_3$ á x_1, etc. Pero como las rectas $\alpha_2\,\alpha_3, \alpha_3\,\alpha_1, \alpha_1\,\alpha_2$ se hallan cortadas, cada una, por C_n en n puntos á los cuales corresponde siempre el mismo punto (β_1, β_2 ó β_3) en P_y, C'_{2n} pasa n veces por cada uno de los puntos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; y estas n ramas de C'_{2n} tienen todas trayecto separado si los n puntos de intersección de C_n con las rectas fundamentales correspondientes del otro plano tienen una situación distinta, los unos con relación á los otros. Si, por el contrario, C_n pasa por un punto fundamental α_1, una parte fija, esto es, la recta $\overline{\beta_2\,\beta_3}$ que corresponde á α_1, se separa de la curva C'_{2n}, y queda solamente una curva de orden $2n-1$ que no pasa más que $n-1$ veces por β_2 y β_3; luego:

En general, á una curva de orden n^{simo}, *perteneciente á uno de los planos y que pasa respectivamente* k_1, k_2, k_3 *veces por los puntos fundamentales* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *de éste, corresponde respectivamente en el otro plano una curva de orden* $2n-k_1-k_2-k_3$ *que pasa respectivamente* $n-(k_2+k_3)$, $n-(k_3+k_1)$, $n-(k_1+k_2)$ *veces por los puntos fundamentales* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *de este último plano.* Así, por ejemplo, á una curva C_4, que tiene un punto doble en cada uno de los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, corresponde una cónica que no pasa por $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; y recíprocamente, á una de estas cónicas corresponde una curva C_4 que tiene tres puntos dobles en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

102. TRANSFORMACIÓN RACIONAL Ó DE CREMONA.—Hagamos

$$\rho y_i = f_i\,(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

siendo las f_i funciones racionales enteras de orden n con respecto á x_1, x_2, x_3 (sin factor común) cuyo determinante funcional no sea idénticamente nulo; y supongamos que resolviendo con relación á las x se tenga

$$\sigma x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

siendo las φ funciones también racionales y enteras de orden ν respecto de las y. Entonces diremos que las ecuaciones (1) determinan *una transformación birracional ó biunívoca plana,* en el sentido de que se podrá hacer corresponder los puntos de los dos planos P_x y P_y (que podrán considerarse también superpuestos) de modo que *á un punto del uno corresponda uno y solo uno del otro plano y recíprocamente.*

Esta transformación se llama *transformación birracional ó Cremoniana.* Una propiedad fundamental es que: *El grado de las* φ_i *sea el mismo que el de las* f_i. Además: *Para que la transformación sea biunívoca es necesario que la red formada por las tres curvas*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

tenga $n^2 - 1$ *puntos fijos (puntos fundamentales de la transformación).* Esta red en la que todas las curvas se encuentran dos á dos *en un solo punto móvil* se llama *red homaloídica.*

A las rectas $u_x = 0$ en P_x corresponden, en P_y, las curvas de $\nu^{\text{ésimo}}$ orden $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, y á las rectas $v_y = 0$, en P_y, corresponden las curvas $\Sigma v_i f_i = 0$ de orden n^{simo} en P_x. A los puntos de intersección de $u_x = 0$ y $\Sigma v_i f_i = 0$ corresponden los puntos de intersección de $v_y = 0$ y $\Sigma u_i \varphi_i = 0$.

Pero como el número de estas intersecciones debe ser necesariamente el mismo entre P_x y P_y, en virtud del carácter supuesto de determinación única, será $n = \nu$.

Las sustituciones biunívocas reversibles son del mismo orden que sus inversas. Si buscamos el punto x que corresponde á dos rectas v y w situadas en P_y, tendremos que eliminar x entre las ecuaciones

$$v_y \equiv \Sigma v_i f_i = 0, \quad w \equiv \Sigma w_i f_i = 0, \quad u_x = 0. \tag{3}$$

El resultado final, que contiene las u en el grado n^2, las v

y las w en el grado n, cada una, da la ecuación del producto de los n^2 puntos de intersección de los curvas (3). Entre estos debe hallarse el punto buscado, cuya ecuación está expresada por $\Sigma u_i \varphi_i = 0$; y si se hace

$$y_1 = v_2 w_3 - w_2 v_3, \quad y_2 = v_3 w_1 - w_3 v_1, \quad y_3 = v_1 w - w_1 v_2,$$

la expresión $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ es un factor del resultado de la eliminación. Pero $\Sigma \varphi_i u_i$ contiene también, en este caso, las v y w en el n^{simo} orden; y queda demostrado el teorema: *Dos curvas cualesquiera* $\Sigma \mathrm{v}_i \mathrm{f}_i = 0$ *del sistema se cortan en un solo punto móvil y en* $\mathrm{n}^2 - 1$ *puntos fijos que son los puntos fundamentales de la transformación.* Lo mismo sucede para el sistema de las curvas $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, en el otro plano. *Luego toda relación biunívoca de dos planos es una relación Cremoniana.*

Ejemplo.—Vamos á ver que puede obtenerse la representación conforme, de una curva simple (C) de *género uno* en una cúbica sin punto doble. Hagamos pasar por los

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$$

puntos dobles y por otros $n - 3$ puntos fijos de C una curva (C′) de orden $n - 2$. Su ecuación será de la forma

$$\alpha_1 \varphi_1 (x, y) + \alpha_2 \varphi_2 (x, y) + \alpha_3 \varphi_3 (x, y) = 0, \tag{1}$$

y cortará á (C) en

$$2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1\right] + n - 3 = n(n-2) - 3$$

puntos fijos y en otros *tres* puntos cuyas coordenadas dependerán de α_1, α_2, α_3. Hagamos

$$\mathrm{X} = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad \mathrm{Y} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}; \tag{2}$$

y entre estas dos ecuaciones y

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

eliminemos x, y. Obtendremos

$$F(X, Y) = 0 \tag{4}$$

A un punto m de (C) corresponde un solo punto M de esta nueva curva (Γ). Recíprocamente si X, Y satisfacen á la ecuación (4), las tres ecuaciones (2) y (3) adquieren una nueva solución común en x, y lo que hace en totalidad

$$n(n-2)-2,$$

y no pueden tener más, sin lo que la curva

$$\varphi_1 - X\varphi_3 + \lambda(\varphi_2 - Y\varphi_3) = 0$$

sólo tendría con (C) un punto de intersección cuyas coordenadas dependiesen de λ. Las coordenadas de este punto se expresarían racionalmente en función del parámetro λ; la curva C_n sería del género cero, lo que es contra la hipótesis. Así á todo punto de la curva Γ corresponde sólo un punto de la curva (C), siendo Γ una cúbica.

§ 2.° TRANSFORMACIONES ISOGONALES

103. FUNCIÓN ARMÓNICA.—Se vió en el cálculo diferencial que si $w = X + iY$ es una función monógena, satisface á las condiciones

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \text{ó á} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Toda función de las dos variables reales x é y que satisface á la última ecuación diferencial llamada *ecuación de Laplace*, se llama *función potencial ó armónica*. Y sabemos que:

Si w *es una función uniforme de* z, *tanto su parte real* X *como el coeficiente de* i *satisfacen á la ecuación de Laplace y recíprocamente si* X *é* Y *son funciones continuas de* x *é* y *que satisfacen á esta ecuación, podrán formar la parte real y el coeficiente de* i *de una función uniforme.*

Representando z los puntos de un plano (plano z) y w los puntos correspondientes de la función w en otro plano (plano w) (dichos planos pueden ser el mismo). Tenemos una *representa-*

ción isogonal, puesto que *el ángulo de dos líneas que se encuentran en un punto del plano z es igual al ángulo de las líneas correspondientes en el punto correspondiente del plano* w. Una representación que conserva los ángulos se llama *representación conforme.*

Un triángulo infinitamente pequeño del plano z es semejante al triángulo infinitesimal correspondiente del plano w.

104. TRANSFORMACIÓN POR RADIOS VECTORES RECÍPROCOS.— Ya se ha tratado de esta transformación que se llama también inversión. Observaremos desde luego que conserva los ángulos y es por tanto una representación conforme que puede considerarse como un caso particular de la transformación cuadrática, en la que uno de los puntos fundamentales es el origen y los otros dos los puntos circulares del plano.

Hemos visto que una función que tiene una derivada da el medio de transformar isogonalmente las figuras planas. Sea $u = \frac{1}{z}$. Si hacemos

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \quad \text{se tiene} \quad u = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

Cuando el punto z' describe la prolongación zl (fig. 117) del radio vector, el punto u' describe la recta uO aproximándose al origen. A la curva zz_1 corresponde la curva uu_1, y el ángulo b_1uO es igual al a_1zl. Hagamos girar la segunda figura alrededor del eje Ox. El punto u se aplica en m sobre el radio vector Oz, y la curva uu_1 toma la posición mn. Las tangentes za_1, mc á las curvas zz_1, mn forman ángulos iguales con el radio vector.

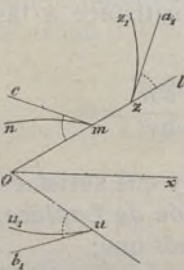


Fig. 117

Toda función que admite una derivada, trasforma un sistema de líneas ortogonales en otro. Consideremos, por ejemplo, la función $u = z^2$. Si se hace

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \qquad u = r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta'),$$

se tiene que $r' = r'^2$, $\theta' = 2\theta$.

A las rectas $r \operatorname{sen}\theta = b$, $r\cos\theta = a$, respectivamente paralelos á los ejes Ox y Oy, corresponden las parábolas homofocales

$$r' = \frac{2b^2}{1 - \cos\theta'}, \quad r' = \frac{2a^2}{1 + \cos\theta'}.$$

105. Transformación de Hirst.—Sean O un punto fijo y S una cónica. Tracemos por O la secante Omm' que encuentra á S en m y m'. Si a y a' son dos puntos conjugados armónicos de m y m', las figuras a y a' quedarán transformadas entre sí por el método de Hirst. Cuando la cónica es un círculo y el punto es su centro, la transformación se confunde con la transformación por radios vectores recíprocos.

§ 3.º Aplicaciones

106. Supongamos una curva (C) no susceptible de descomposición ó propiamente tal, de *género cero*. Por sus puntos dobles y por otros $n - 4$ puntos fijos hagamos pasar otra curva (C') de orden $n - 2$; como sólo hemos fijado $\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 2$ puntos, quedarán arbitrarios dos parámetros, y la ecuación de la curva (C') será de la forma

$$\alpha_1 \varphi_1(x, y) + \alpha_2 \varphi_2(x, y) + \alpha_3 \varphi_3(x, y) = 0 \qquad (1)$$

siendo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ funciones determinadas. La curva (1) tiene $n(n-2) - 2$ puntos fijos comunes con (C); y por cortarse éstas en $n(n-2)$ puntos, quedan solamente dos, cuyas coordenadas dependen de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Hagamos $$X = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Y = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}. \qquad (2)$$

Si x, y es un punto dado, X, Y queda determinado de una manera unívoca por estas fórmulas. Eliminemos x, y entre las ecuaciones (2) y la de (C), es decir, expresemos que las ecuaciones

$$\varphi_1 - X\varphi_3 = 0, \quad \varphi_2 - Y\varphi_3 = 0, \quad f(x, y) = 0 \qquad (3)$$

tienen por lo menos una solución común de más que las ya existentes. El resultado de la eliminación será

$$F(X, Y) = 0. \qquad (4)$$

A cada punto M de (4) corresponderá, por lo menos, un nuevo punto $m(x, y)$ de C común á las tres curvas (3); pero las dos primeras de éstas pertenecen al tipo (1), y por consiguiente tenían ya $n(n-2)-2$ puntos comunes con (C); luego si el punto X, Y está en la curva (4) tienen $n(n-2)-1$ puntos comunes con (C), y no pueden tener más, sin lo que la curva

$$\varphi_1 - X\varphi + \lambda(\varphi_2 - Y\varphi_3) = 0,$$

que tendría también $n(n-2)$ puntos comunes con (C) podría, por una reducción conveniente de X, tener $n(n-2)+1$ puntos en C y, por consiguiente formaría parte de (C) que se podría descomponer, contra lo supuesto. Luego, á un punto M de (4) corresponde un punto único M de (C).

Es importante observar que la ecuación (4) es la de una cónica. Basta, para probarlo, demostrar que á cada valor de X corresponden dos valores de Y, y recíprocamente. Ahora bien, si se da X, la primera ecuación (3) determina una curva de la red (1), es decir, una curva que corta á (C) en dos puntos solamente, cuyas coordenadas dependen de X. A cada uno de estos puntos corresponden por (2) un solo valor de Y; luego totalmente dos.

Por otra parte, una transformación homográfica seguida de una inversión, permite hacer corresponder á una cónica un círculo y después una recta. Queda pues establecido que, por una transformación birracional se puede hacer corresponder siempre, punto por punto, una curva cualquiera de género cero á una recta.

Se puede pues, obtener de una manera racional la representación con forma de una curva de género cero en una recta.

Hemos visto también como puede establecerse la representación conforme de una curva (C) propia de *género uno,* en una cúbica sin punto doble, haciendo pasar por los

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$$

puntos dobles y por otros $n-3$ puntos fijos de C una curva C′ de orden $(n-2)$ (*).

(*) Rouché et Levy. *Analyse infinitesimal.*

107. CURVAS ANALAGMÁTICAS. DEFINICIÓN.—Curvas *analagmáticas* son las que coinciden con sus transformadas por radios vectores recíprocos:

TEOREMA DE MOUTARD.—*Toda analagmática es la envolvente de una serie de círculos ortogonales á un círculo fijo llamado* DIRECTOR, *cuyos centros se mueven en una curva llamada* DEFERENTE.

En efecto, si se considera el cuadrilátero cuyos vértices son dos puntos infinitamente próximos de la analagmática y sus correspondientes, este cuadrilátero será inscriptible y el círculo circunscrito será tangente á la analagmática en dos puntos m y m'. Tracemos por el polo la secante Om que pasará por m', y tendremos Om. Om' $= k^2$, expresando k el módulo de la transformación.

Si se traza por O la tangente al círculo, será igual á k; y el círculo de radio k, que es el *círculo director*, será ortogonal al primero, considerado como envolvente de la analagmática.

Recíprocamente: *Toda envolvente de círculo que permanece ortogonal á un círculo dado es una analagmática.*

Demos una *deferente*, es decir, una curva á lo largo de la que se mueve el centro del círculo ortogonal al círculo fijo de radio k. Tomemos el centro de este círculo director por polo de la transformación de módulo k. La tangente á la deferente en el punto en donde se encuentra el centro del círculo generador de la analagmática es perpendicular á la recta que une los dos puntos en que el círculo móvil es tangente á su envolvente, pues por ser el círculo

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

ortogonal al $x^2 + y^2 = k^2$ (α, β es un punto de la deferente), su ecuación será

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + k^2 = 0;$$

su envolvente se obtiene eliminando α entre esta ecuación y su derivada $x + \beta' y = 0$, que expresa que el coeficiente angular β' de la tangente á la deferente es igual á $-\dfrac{x}{y}$. La tangente á la deferente es pues, perpendicular al radio vector de los dos puntos en que el círculo móvil toca á su envolvente.

Sea P el punto en que la tangente á la deferente encuentra al radio vector Omm' de los puntos en que el círculo móvil es tangente á la envolvente. Se tendrá

$$\mathrm{OP} = \frac{\mathrm{O}m + \mathrm{O}m'}{2}, \quad k_2 = \mathrm{O}m.\,\mathrm{O}m'.$$

Si se toma en OP un punto P′ tal que OP. OP′ $= k^2$, el punto P′ describirá la polar recíproca de la deferente con relación al círculo director.

De este razonamiento resulta el modo de construir la analagmática. Sea

$$f(x', y') = 0$$

la ecuación de la polar recíproca de la deferente con relación al círculo director, curva que llamaremos *segunda deferente*; por tener los puntos m y m', ó más bien uno de ellos (x, y) cuyo radio vector sea r; este valor r será raíz de la ecuación

$$r^2 - 2\mathrm{OP}r + k^2 = 0 \quad \text{ó} \quad r^2 - 2\frac{k^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + k^2 = 0.$$

Pero se tiene evidentemente que

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

de lo que resulta

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r^2 + k^2}{2k^2} = \frac{x^2 + y^2 + k^2}{2k^2};$$

luego $\left\{ x' = \dfrac{2k^2 x}{x^2 + y^2 + k^2}, \quad y' = \dfrac{2k^2 y}{x^2 + y^2 + k^2}; \right.$

la ecuación de la analagmática es

$$f\left(\frac{2k^2 x}{x^2 + y^2 + k^2}, \frac{2k^2 y}{x^2 + y^2 + k^2}\right) = 0,$$

ó si $f(x, y, z) = 0$ es la ecuación de la segunda deferente en coordenadas homogéneas,

$$f(2k^2 x, 2k^2 y, x^2 + y^2 + k^2) = 0.$$

La sustitución (2) transforma una curva en otra, que es la analagmática que tiene por deferente la polar recíproca de ésta.

108. ANALAGMÁTICAS DE TERCERO Y CUARTO ORDEN. — Sea $f(x, y, z) = 0$ la ecuación de la segunda deferente; hemos visto que la ecuación de la analagmática era

$$f(2k^2 x, 2k^2 y, x^2 + y^2 + k^2) = 0;$$

su grado es, en general, doble del de la segunda deferente. Si ésta es de segundo grado, la primera también lo será. Siendo la ecuación de la segunda deferente de la forma

$$1 + \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{4k^2} + \frac{2ax + 2by}{2k^2} = 0, \qquad (1)$$

la de la analagmática será

$$\left.\begin{aligned} &(x^2 + y^2 + k^2)^2 + 2(ax + by)(x^2 + y^2 + k^2) \\ &+ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Cuando la segunda deferente pasa por el origen, la ecuación de la analagmática es

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(ax + by)(x^2 + y^2 + k^2) = 0. \qquad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) son las ecuaciones más generales de las analagmáticas de tercero y cuarto grado, pues pueden escribirse bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} &(x^2 + y^2)^2 + 2(ax + by(x^2 + y^2) \\ &+ P + 2k^2(ax + by) + k^4 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$2(x^2 + y^2)(ax + by) + P + 2k^2(ax + by) = 0, \qquad (5)$$

siendo P un polinomio homogéneo de segundo grado.

EJEMPLOS.—1.º *Los óvalos de Cassini.* - Cuando la primera y por tanto la segunda deferente son curvas con centro situado en el polo de la transformación, la ecuación de la analagmática es de la forma

$$(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + Cy^2 + k^4 = 0.$$

El caso de ser $A = -C = 2c^2$ es notable. La segunda deferente es una hipérbola equilátera y la analagmática se llama *cassinoide, elipse de Cassini ó lemniscata*, cuya ecuación es

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) + k^4 = 0.$$

Si se hace $k^2 = c^4 - h^4$ esta curva es tal, que el producto de las distancias de uno de sus puntos á dos puntos fijos distantes entre sí en $2c$, llamados focos, sea igual á una constante h^2.

La cassinoide deja de ser analagmática cuando $c = h$. Su ecuación es entonces

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 - x^2)\, 2c^2 = 0;$$

pero es unicursal, y es la transformada por radios vectores recíprocos de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = \frac{K^2}{2c^2}$, entonces la cassinoide se llama *lemniscata de Bernoulli*.

2.º Los *óvalos de Descartes*. Sean F y G dos puntos y una recta r que corta en A á FG. Describamos desde F como centro un círculo con un radio cualquiera, y sea B una de sus intersecciones con FG. Determinemos en r un punto, de modo que sea $\frac{AC}{AB} = \lambda$, siendo λ constante. Tomemos en r el segmento $AR = AG$ y describamos alrededor de G una circunferencia con un radio CR que corta á la ya descrita en M. El lugar del punto M es un óvalo de Descartes.

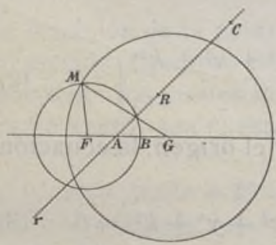


Fig. 118

Tenemos que

$$FM = FB = FA + AB = FA + \frac{1}{\lambda} AC,$$

$$GM = RC = AC - AR = AC - AG,$$

$$\lambda . FM - GM = \lambda . AF - AG;$$

haciendo por simetría $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$, será

$$\mu . MF + \nu . MG = \mu . AF - \nu . AG,$$

y haciendo $\mu . AF - \nu . AG = l$, se obtiene

$$\mu . MF + \nu . MG = l \qquad (1)$$

que traducida al lenguaje ordinario dice que: *Un óvalo de Des-*

cartes es el lugar de los puntos cuyas distancias á dos puntos fijos multiplicadas por dos números dados dan una suma constante.

Representando por a', b' y por a'', b'' las coordenadas de F y de G, tendremos

$$\mu \sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2}+\nu \sqrt{(x-a'')^2+(y-b'')^2}=l. \quad (2)$$

Haciendo $a'=-a''=a$, $b'=b''=0$, $x+iy=\frac{\xi}{\zeta}$, $x-iy=\frac{\eta}{\zeta}$, resultará

$$\mu \sqrt{(\xi-\alpha\zeta)(\eta-\alpha\zeta)}+\nu \sqrt{(\xi+\alpha\zeta)(\eta+\alpha\zeta)}=\lambda\zeta,$$

ó despejando los radicales,

$$[\mu^2(\xi-\alpha\zeta)(\eta-\alpha\zeta)-\nu^2(\xi+\alpha\zeta)(\eta+\alpha\zeta)]^2$$
$$-2l^2\zeta^2[\mu^2(\xi-\alpha\zeta)(\eta-\alpha\zeta)+\nu^2(\xi+\alpha\zeta)(\eta+\alpha\zeta)]+l^4\zeta^4=0. \quad (3)$$

Esta ecuación manifiesta que los puntos $(\xi=0, \zeta=0)$, $(\eta=0, \zeta=0)$ es decir, los puntos circulares del plano son puntos dobles de la curva (3). Las tangentes en el punto (ξ, η, ζ) están dadas por

$$[\mu^2(\xi-\alpha\zeta)-\nu^2(\xi+\alpha\zeta)]^2=0.$$

Este punto es un punto de retroceso ó cuspidal. Siendo

$$\xi=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}\, a\, \zeta$$

la ecuación de la tangente. Las dos tangentes cuspidales de los puntos circulares se expresan en coordenadas cartesianas, por las ecuaciones

$$x+iy=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}\, a, \qquad x-iy=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}\, a.$$

Las dos tangentes cuspidales (ó de retroceso) obtenidas, se cortan en el punto real cuyas coordenadas son

$$x=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}\, a, \qquad y=0$$

que es uno de los focos de la curva. (*)

(*) Dr. Gino Loria. *Specielle Algebr. u. Trans. ebene Kurven.*

109. TEOREMA DE NÖTHER. — *Por medio de una serie de transformaciones cuadráticas birracionales se puede siempre transformar una curva algebráica cualquiera en otra que solo tenga puntos múltiplos con tangentes separadas.*

En efecto, sabemos que las fórmulas de transformación cuadrática son de la forma

$$x' = \frac{U}{W}, \quad y' = \frac{V}{W},$$

expresando U, V, W tres polinomios de segundo grado en x é y, ó sea

$$\frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{z'}{W}, \qquad (1)$$

siendo x' y' z' coordenadas homogéneas y U, V, W funciones de las tres coordenadas homogéneas x, y, z.

En general, si se da el punto (x', y', z') las ecuaciones (1) representan las tres cónicas

$$Wy' - Vz' = 0, \;\; Uz' - Wx' = 0, \;\; Vx' - Uy' = 0. \qquad (2)$$

Sabemos ya, que si estas cónicas tienen tres puntos comunes A, B, C, las cónicas (2) pasarán por dichos tres puntos y sólo tendrán un punto de intersección variable, cuyas coordenadas serán funciones de x', y', z'; x, y, z serán entonces funciones racionales de x', y', z'.

Consideremos el triángulo ABC por triángulo de referencia, las fórmulas (1) tomarán la forma

$$\frac{x'}{Ayz + Bxz + Cxy} = \frac{y'}{A'yz + B'xz + C'xy} = \frac{z'}{A''yz + B''xz + C''xy} \qquad (3)$$

pero si se hace

$$\begin{array}{lll} \lambda A + \mu A' + \nu A'' = 1, & \lambda' A + \mu' A' + \nu' A'' = 0 & \lambda'' A + \mu'' A' + \nu'' A'' = 0 \\ \lambda B + \mu B' + \nu B'' = 0, & \lambda' B + \mu' B' + \nu' B'' = 1 & \lambda'' B + \mu'' B' + \nu'' B'' = 0 \\ \lambda C + \mu C' + \nu C'' = 0, & \lambda' C + \mu' C' + \nu' C'' = 0 & \lambda'' C + \mu'' C' + \nu'' C'' = 1 \end{array}$$

las cantidades λ, μ, ν están bien determinadas si

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

es decir, si U = 0, V = 0, W = 0 son distintas, y de (3) se deducirá

$$\frac{\lambda x' + \mu y' + \nu z'}{yz} = \frac{\lambda' x' + \mu' y' + \nu' z'}{zx} = \frac{\lambda'' x' + \mu'' y' + \nu'' z'}{xy}.$$

Una transformación homográfica de la figura x', y', z' reducirá estas fórmulas á la forma

$$\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{xz} = \frac{z'}{xy} \text{ y recíprocamente } \frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'},$$

de manera que *al punto x, y, z corresponde un solo punto x', y' z' y viceversa.*

Sea la transformación

$$\frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'}$$

que da $\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy}$.

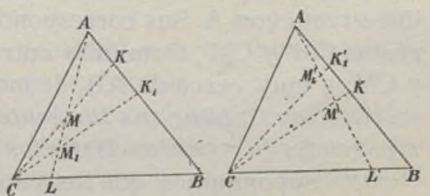


Fig. 119

Propongámonos el punto M (x, y, z), y veamos cómo se construye el punto M' (x', y', z').

Sean ABC el triángulo de referencia y X = 0, Y = 0, Z = 0 las ecuaciones de BC, CA, AB, respectivamente (fig. 119).

El punto M está en la intersección de las rectas CK y AL, representadas por las ecuaciones

$$\frac{Y}{y} = \frac{X}{x}, \qquad \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z};$$

luego el punto M' está en la intersección de las rectas CK' y AL'

$$\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}, \quad \frac{Z}{y} = \frac{Y}{z}.$$

Construyamos el punto M' en la otra figura. CK' y AL' serán rectas tales que $\angle$CAL' = $\angle$BAL, $\angle$BCK' = $\angle$ACK, luego:

1.° *A un punto* M, *no situado en el perímetro del triángulo de referencia, corresponde un punto* M' *no situado en el perímetro de referencia.*

2.° *Si el punto* M *experimenta una mutación* dx, dy, dz, *el punto* M' *sufrirá una mutación de igual orden* dx', dy', dy', *siempre que* M *no se halle en el perímetro del triángulo de referencia.*

3.° De esto resulta que, *si el punto* M *es un punto múltiplo de una curva, no situado en el perímetro del triángulo de re-*

ferencia, el punto M' *será un punto múltiplo de igual especie en la curva transformada.* Debiéndose entender por punto de igual especie, no sólo un punto de igual orden de multiplicidad, sino además un punto que tenga el mismo número de tangentes confundidas, teniendo las ramas de curva tangentes el mismo orden de contacto en la curva propuesta y en la transformada.

4.º Supongamos ahora que una curva tenga en C un punto múltiplo de orden ν. Veamos cómo se hallará situado su correspondiente y cuál será su naturaleza. Con este objeto, tomemos dos puntos M y M_1 en dos ramas de la curva, próximos á C y en línea recta con A. Sus correspondientes M' y M'_1 estarán en dos rectas CM' y CM'_1 formando entre sí el mismo ángulo que CM y CM_1 y muy cerca de AB, de modo que, *si el punto múltiplo colocado en* C, *tiene sus tangentes separadas, á este punto corresponderán* ν *puntos distintos en* AB.

5.º Supongamos que los puntos M y M_1 estén en ramas de la curva que tengan un contacto de orden n, MM_1 será de orden $n+1$ y $M'M'_1$ será de orden n. A las ramas tangentes en C corresponderán pues dos ramas tangentes de la curva transformada que sólo tendrán un contacto de orden $n-1$. Así pues: *Si el punto múltiplo colocado en* C *tiene tangentes confundidas con contactos de órdenes* n, n', n'', . . . , *á cada par de estas ramas corresponderán otras ramas que tienen un contacto de orden* n — 1, n' — 1, n'' — 1, . . .

Para demostrar el teorema de Nöther, coloquemos el vértice C del triángulo de referencia en un punto que tenga tangentes confundidas de la curva por transformar, y elijamos el triángulo de referencia, de manera que ninguno de sus lados sea tangente á la curva. La transformación cuadrática podrá introducir nuevos puntos múltiplos; pero ninguno tendrá tangentes confundidas. En cuanto al punto C, se ha sustituído por otros puntos simples ó múltiplos con ramas que tienen un contacto de orden menos elevado en una unidad que en la curva primitiva.

Operando sucesivamente transformaciones análogas, se podrán introducir nuevos puntos múltiplos, pero con tangentes separadas; y se terminará por hacer desaparecer todo contacto entre las ramas que pasan por un punto singular.

CAPÍTULO III

Estudio sistemático de las figuras planas

§ 1.º La polaridad y la invariación

110. Polaridad.—La teoría de las polares tiene gran importancia en la interpretación geométrica de las formas simbólicas empleadas en el Álgebra de las formas.

La representación simbólica conduce á un principio debido á Clebsch y que se llama principio de translación, por el que se pueden utilizar para las formas ternarias todos los teoremas conocidos acerca de las formas binarias.

111. Invariación. Citaremos los siguientes importantes Teoremas.—1.º *Toda formación invariante de un sistema de formas ternarias puede representarse por una reunión de productos simbólicos, cuyos factores son invariantes idénticos de la forma* u_x, (x, y, z) *ó* (uvw) ó sea

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

2.º *Todas las propiedades invariantes de una forma ternaria pueden representarse por la anulación de invariantes, ó por la anulación idéntica de covariantes, de contravariantes ó de formas mixtas de la forma primitiva.*

112. Principio de translación (*).—Sea el punto x referido á los puntos fundamentales y, z:

$$x_1 = \varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 z_1,\ x_2 = \varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 z_2,\ x_3 = \varkappa_1 y_3 + \varkappa_2 z_3.$$

Sustituyendo en $\quad f(x_1, x_2, x_3) = a_x^n = b_x^n = 0,$

(*) El *principio de translación* fué enunciado por Clebsch en (*Crelle Journ* L. IX).

los puntos de interseccción de la recta $\overline{yz}$ quedarán determinados por las n raíces $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ de la ecuación.

$$f = [\varkappa_1 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + \varkappa_2 (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)]^n$$
$$= (\varkappa_1 a_y + \varkappa_2 a_z)^n = 0.$$

Se sabe que puede escribirse bajo forma simbólica un número ilimitado de covariantes, cuya significación geométrica se deduce de la teoría de las polares. Citaremos covariantes caracterizados de una manera general por la condición de que la r^{sima} polar de un punto tenga una propiedad invariante determinada, por ejemplo, que la primera polar de un punto y relativamente á la curva fundamental

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots\ldots = 0$$

tenga un punto doble. El lugar de este punto es la Hessiana, cuyo orden es $3(n-2)$, que se obtiene eliminando las y_i (coordenadas del polo) entre las tres ecuaciones $\left(f_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)$

$$a_x^{n-2}\, a_y\, a_1 = \Sigma f_{1k} y_k = 0,\ \ a_x^{n-2}\, a_y\, a_2 = \Sigma f_{2k} y_k = 0,$$
$$a_x^{n-2}\, a_y\, a_3 = \Sigma f_{3k} y_k = 0.$$

Expresando para abreviar, a_y, a_z por α_1, α_2, obtendremos la forma binaria

$$\varphi = (\varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2)_\varkappa^n = \alpha_\varkappa^n = \beta_\varkappa^n,$$

que está representada geométricamente en la recta $\overline{yz}$ por los n puntos de intersección de ésta con la curva dada $f = 0$. Cada una de las propiedades proyectivas de este sistema de puntos tiene por condición la anulación de un intervariante de la forma binaria φ. Y dicho invariante se compone, según las proposiciones relativas á las formas binarias, de una reunión de productos cuyos factores están dados por determinantes simbólicos de la forma $(\alpha\beta) = \alpha_1 \beta_2 - \beta_2 \alpha_1$.

Si pues representamos este invariante por $I = \Sigma c \Pi (\alpha\beta)$, expresando las c factores numéricos que pueden encontrarse en aquél, y sustituímos de nuevo α, β por sus expresiones en y, z, resultará dada una propiedad invariante del sistema de los puntos de intersección, por una ecuación de la forma

$$I = \Sigma c \Pi (a_y b_z - b_y a_z) = 0.$$

Podemos, en fin, introducir las coordenadas líneas u; porque se tiene

$$\begin{aligned} a_y b_z - b_y a_z &= (a_1 y_1 + \ldots)(b_1 z_1 + \ldots) - (b_1 y_1 + \ldots)(a_1 z_1 + \ldots) \\ &= (a_1 b_2 - b_1 a_2)(y_1 z_2 - z_1 y_2) + (a_2 b_3 - b_2 a_3)(y_2 z_3 - z_2 y_3) \\ &\quad + (a_3 b_1 - b_3 a_1)(y_3 z_1 - z_3 y_1); \end{aligned}$$

y por ser los determinantes menores de las y, z proporcionales á las coordenadas de su recta de unión u, despreciando el factor de proporcionalidad, tendremos

$$a_y b_z - b_y a_z = (abu).$$

La condición para que el sistema de puntos de intersección de una recta u con la curva $f = 0$ tenga la propiedad invariante

$$\Sigma c \Pi (\alpha\beta) = 0$$

está dada por la ecuación

$$\Sigma c \Pi (abu) = 0.$$

Podemos pues, enunciar el principio de traslación de la manera siguiente: *Se sustituirá todo determinante binario* ($\alpha\beta$) *por un determinante ternario* (abu), *donde* a, b, . . . *son los símbolos de la forma ternaria que corresponden á los símbolos* $\alpha, \beta, \ldots$ *Además, todo factor lineal se sustituirá por un determinante* (auv), *donde las* v *se consideran como arbitrarias.*

Dicha transformación igualada á cero representa, en coordenadas u, *una curva (ó un sistema de curvas) cuyas tangentes cortan á la curva ó á las curvas dadas en puntos que gozan de propiedades invariantes especiales.*

113. Aplicaciones. — 1.ª El discriminante de una forma binaria cúbica

$$\alpha^3_x = \beta^3_x = \gamma^3_x = \delta^3_x \quad \text{es } (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (\alpha\gamma)(\beta\delta);$$

por consiguiente, la condición para que una recta u encuentre á una curva de tercer orden en dos puntos coincidentes, ó la ecuación de la curva en coordenadas líneas es

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) = 0.$$

La curva general de tercer orden es pues de sexta clase.

2.ª Propongámonos representar en coordenadas-líneas la ecuación de una cónica

$$a_x^2 = b_x^2 = 0.$$

La curva queda cortada por una recta u en un par de puntos dados por la ecuación

$$\alpha^2_\chi = (\alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2)^2 = 0.$$

Para una tangente, deben confundirse los dos puntos de intersección, es decir, que el discriminante $(\alpha\beta)^2$ de la forma α^2_χ debe ser nulo; luego la ecuación de la cónica se expresará por

$$(abu)^2 = 0.$$

Demostremos la identidad de esta ecuación con la dada. Tenemos

$$a_x^2 = b_x^2 = a_{11} x^2_1 + a_{22} x^2_2 + a_{33} x^2_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + \ldots$$

y hemos de hacer en $(abu)^2$, $a_i a_k = b_i b_k = a_{ik}$.

Desarrollando el determinante simbólico, resulta

$$(abu)^2 = u^2_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + u^2_2 (a_3 b_1 - b_3 a_1)^2 + \ldots$$
$$+ 2u_2 u_3 (a_3 b_1 - b_3 a_1)(a_1 b_2 - b_1 a_2) + \ldots$$
$$= 2u^2_1 (a_{22} a_{33} - a^2_{23}) + \ldots + 4u_2 u_3 (a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}) + \ldots$$

que da

$$(abu)^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.ª El discriminante de la forma binaria bicuadrática $\alpha_\chi^k = \beta_\chi^k = \ldots$ se representa por

$$i^3 - 6j^2, \quad \text{siendo} \quad i = (\alpha\beta)^4, \quad j = (\alpha\beta)^2 (\beta\gamma)^2 (\gamma\alpha)^2;$$

luego la ecuación de la curva de cuarto orden $\alpha_x^4 = 0$ es, en coordenadas-líneas,

$$\mathrm{I}^3 - 6\,\mathrm{J}^2 = 0, \quad \text{si se hace} \quad \mathrm{I} = (abu)^4, \quad \mathrm{J} = (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2.$$

La curva general de cuarto orden es pues de la duodécima clase.

Ahora, como se tienen métodos generales para formar el discriminante de una forma binaria, se puede establecer la ecuación en coordenadas-líneas de toda curva dada en coordenadas-puntos. Se puede pues indicar especialmente la clase general de una curva de orden n^{simo}, así como el grado de la ecuación en coordenadas-líneas con relación á los coeficientes. El discriminante de una forma binaria de orden n^{simo} es, en efecto, del grado $2(n-1)$ con relación á los coeficientes de ésta, de manera que contiene $2(n-1)$ símbolos diferentes, pero equivalentes entre sí, de la n^{sima} dimensión cada uno. Pero estas circunstancias no alteran, cuando se sustituye un determinante binario (ab) por el determinante ternario (abu); luego: *La ecuación en coordenadas-líneas de una curva de orden* n *es del grado* 2 (n — 1) *con relación á los coeficientes de su ecuación en coordenadas-puntos.*

De este resultado se deduce inmediatamente que: *Una curva de orden* n *es en general de la clase* n (n — 1) (*)

La anulación del discriminante de una forma binaria bicuadrática no es más que un caso particular de la condición de que su invariante absoluto $\frac{i^3}{j^2}$ tenga un valor dado, es decir, que los cuatro puntos fundamentales formen una relación anarmónica determinada. Correlativamente, la ecuación

$$\mathrm{I}^3 - k\,\mathrm{J}^2 = 0,$$

en la que k expresa un parámetro, representa según el principio de translación de Clebsch un sistema de curvas de la duodécima clase, tales que todas las tangentes de cada una encuentran á la curva dada de cuarto orden en un grupo cuaternario

(*) Clebsch, obra citada, t. I, pág. 347.

correspondiente á cierta relación anarmónica. Citaremos los siguientes resultados:

Las rectas que cortan equianarmónicamente á una curva dada de cuarto orden $a_x^4 = 0$, *envuelven una curva de cuarta clase* $I = (abu)^4 = 0$.

Las rectas que cortan armónicamente á esta misma curva, envuelven una curva de sexta clase $J = (abu)^3\,(bcu)^3\,(cau)^3 = 0$.

Las rectas, cuyos puntos de intersección con dos cónicas $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^2 = 0$, *forman una relación anarmónica determinada* $\varkappa$, *envuelven una curva de cuarta clase dada por la ecuación*

$$D'^2\,(\varkappa - 1)^2 - DD''\,(\varkappa + 1)^2 = 0,$$

si se hace $D' = (a\alpha u)^2$, $D = (abu)^2$, $D'' = (\alpha\beta u)^2$.

Esta curva se compone de la cónica $(a\alpha u)^2 = 0$, *contada dos veces, si la relación es armónica.* Podemos escribir inmediatamente *la ecuación del producto de los cuatro puntos de intersección de dos cónicas* $D'^2 - DD'' = 0$. (*)

§ 2.º Algunas curvas covariantes

114. Redes ó haces de curvas planas.—Si $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \ldots$ son las ecuaciones de $k + 1$ curvas planas de orden n, el sistema representado por

$$\lambda_1\, a_x^n + \lambda_2\, b_x^n + \ldots = 0$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ son $k + 1$ parámetros arbitrarios, constituye lo que se llama *un sistema lineal de especie* k. Para $k = 1$ se tiene *el haz*, para $k = 2$ la *red*.

Citaremos las siguientes proposiciones: *Un sistema lineal de especie* k, *está determinado por* $k + 1$ *curvas de orden* n *que no pertenecen á un mismo sistema lineal de especie inferior.*

Si $k > 1$, *las curvas del sistema no tendrán, en general, ningún punto común (puntos de base); pero si las* $k + 1$ *curvas que determinan el sistema tienen un punto común, este punto pertenece á las demás curvas del sistema.*

(*) Clebsch, obra citada, págs. 348-50.

Si k = 1, *habrá siempre* n^2 *puntos-bases del haz, es decir, puntos por los que pasan todas las curvas del sistema.*

Un sistema lineal de curvas de orden n *y de especie* k *determina en una transversal una involución de puntos de orden* n *y especie* k.

Entre las curvas de un sistema lineal hay (k + 1) (n − k) *que tienen un contacto de orden* k *con una recta dada, etc.*

Si se consideran dos haces de rayos que tienen por centros dos de los n^2 puntos-bases en un haz de curvas de orden n, y se consideran como correspondientes los dos rayos que son las tangentes trazadas desde los dos puntos-bases á una misma curva del haz, *los dos haces de rayos son proyectivos*, es decir, que *la relación anarmónica de las cuatro tangentes á cuatro curvas del haz en un mismo punto-base, es igual á la de las cuatro tangentes en otro punto-base cualquiera.* (*)

115. Steineriana y Cayleyana.—A las anteriores proposiciones añadiremos las siguientes:

Los puntos dobles de las curvas de un haz tienen la misma recta polar respecto á todas las curvas del haz.

El lugar de un punto en el que son tangentes dos curvas de una red es una curva de orden 3 (n − 1), *la Hessiana,* cuya ecuación simbólica es

$$(abc)\, a_x^{n-1}\, b_x^{n-1}\, c_x^{n-1} = 0.$$

La Hessiana de una red es el lugar de los puntos dobles de las curvas de la red.

Definición.—El lugar de los puntos de intersección de las rectas polares, respecto á las curvas de la red de todos los puntos de la Hessiana, es la curva llamada *Steineriana*, y la envolvente de las rectas que unen los puntos correspondientes de la Hessiana y la Steineriana es una curva llamada *Cayleyana*.

116. Propiedades. — Se vió que eliminando y entre las ecuaciones

$$a_x^{n-2}\, a_y a_1 = 0, \quad a_x^{n-2}\, a_y a_2 = 0, \quad a_x^{n-2}\, a_y a_3 = 0 \qquad (1)$$

se obtiene la Hessiana y además que la Steineriana es la curva

(*) Véase E. Pascal. *Repertorio di Matematiche superiori*, II, págs. 219 y siguientes.

recorrida por el polo y. La ecuación de la Steineriana se obtiene eliminando x entre las ecuaciones (1).

TEOREMA.—*A cada punto de la Hessiana corresponde una tangente de la Steineriana.*

En efecto, las coordenadas u_i de una de las tangentes se obtienen por medio de las fórmulas

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0, \quad u_1 dy_1 + u_2 dy_2 + u_3 dy_3 = 0. \qquad (2)$$

Si escribimos en las ecuaciones (1) $x_i + dx_i$ en vez de x_i, tendremos

$$\left.\begin{aligned} f_{11} dy_1 + f_{12} dy_2 + f_{13} dy_3 + y_1 df_{11} + y_2 df_{12} + y_3 df_{13} = 0, \\ f_{21} dy_1 + f_{22} dy_2 + f_{23} dy_3 + y_1 df_{21} + y_2 df_{22} + y_3 df_{23} = 0, \\ f_{31} dy_1 + f_{32} dy_2 + f_{33} dy_3 + y_1 df_{31} + y_2 df_{32} + y_3 df_{33} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Multiplicando las ecuaciones (1) respectivamente por x_1, x_2, x_3 y luego por dx_1, dx_2, dx_3 y sumándolas, dan

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0, \quad y_1 df_1 + y_2 df_2 + y_3 df_3 = 0. \qquad (4)$$

Por otra parte, de las ecuaciones (3) multiplicadas respectivamente por x_1, x_2, x_3 y sumadas, resulta:

$$f_1 dy_1 + f_2 dy_2 + f_3 dy_3 = 0,$$

y por comparación con las (4), se obtiene

$$\mu u_1 = f_1, \quad \mu u_2 = f_2, \quad \mu u_3 = f_3,$$

de las que resulta demostrado el teorema.

TEOREMA.—*Las primeras polares de los puntos de una curva envuelta por las polares lineales de otra curva φ son tangentes á esta última.*

En efecto, siendo $\Phi = 0$ una curva envuelta por las polares lineales de los puntos de una curva de orden m^{simo} $\varphi = 0$, respecto á la curva original $f = 0$, de orden n, la clase queda determinada por el número de tangentes que pasan por un punto fijo ξ, y en consecuencia, por el número de puntos de intersección de la curva de orden $n - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \xi_3 = 0, \qquad (5)$$

con $\varphi = 0$, y es por lo tanto igual á $m(n-1)$.

Para determinar el orden, debemos elegir el punto ξ en una recta cualquiera v de tal manera, que dos tangentes trazadas por este punto, y por consiguiente, dos puntos de intersección de las curvas $\varphi = 0$ y (5) estén infinitamente próximos. A cada uno de estos puntos de intersección corresponde una de las tangentes de que se trata, y queda el teorema demostrado.

Vamos ahora á establecer la condición de contacto de las curvas $\varphi = 0$ y (5). Para ello nos propondremos, extendiendo el problema, *determinar en general el grado del tactinvariante (es decir, de la condición de contacto) de dos curvas de órdenes* m *y* μ *con relación á los coeficientos de sus ecuaciones.*

Sean $\varphi = 0$, $\psi = 0$ estas dos curvas que son tangentes en el punto x. Si v designa una recta cualquiera y ξ su punto de intersección con la tangente común de φ y ψ en x, las ecuaciones siguientes quedan necesariamente satisfechas:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\xi_3 = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\xi_3 = 0,$$

$$v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0.$$

Eliminando las ξ_i, resulta

$$V \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

ecuación de grado $m + \mu - 2$ que, en general, representa el lugar de los puntos cuyas polares lineales se cortan en la recta v; esta curva pasa pues, independientemente de las v, por el punto de contacto.

Si por el contrario, suponemos constantes las x y las v variables la fórmula (6) da la ecuación del punto de intersección de las dos polares lineales de x; pero este punto de intersección se confunde con el polo x, si este último es un punto común de $\varphi = 0$ y $\psi = 0$. La eliminación de las x entre $\varphi = 0$, $\psi = 0$ y (6) da, por consiguiente, el producto de los puntos de intersección de φ y ψ. Además este producto está multiplicado por un factor extraño, porque la ecuación sería aquí del grado $m\mu$ con relación á los coeficientes de V, del grado $\mu\,(m+\mu-2)$ con relación á los de φ y del grado $m\,(m+\mu-2)$ con relación á los de ψ; luego en total de los grados $\mu\,(2m+\mu-2)$ y $m\,(2\mu+m-2)$ con relación á los coeficientes de φ y de ψ, mientras que estos números no pueden ser iguales respectivamente á μ y m.

El grado del factor que interviene es pues $\mu\,(2m+\mu-3)$ y $m\,(2\mu+m-3)$ con relación á los coeficientes de φ y ψ, respectivamente. Pero como la expresión (6), y por consiguiente nuestro resultante se anula independientemente de las v, si x es un punto de contacto de φ y de ψ, el factor de que se trata igualado á cero, da precisamente la condición de contacto, y resulta el teorema:

La condición de contacto (tactinvariante) de dos curvas cuyos órdenes son m *y* μ, *es del grado* $\mu\,(\mathrm{m}+\mu-3)$ *y el* m $(2\mu+\mathrm{m}-3)$ *respectivamente con relación á los coeficientes de la primera y la segunda.*

§ 3.º Sistemas de curvas

117. Ya hemos tratado de las redes de curvas ó sistemas lineales al definir la Steineriana y la Cayleyana. Ahora vamos á hacer algunas indicaciones más acerca de las relaciones respectivas de dos curvas, ó sea de los invariantes funcionales *simultáneos* de dos formas algebráicas ternarias.

Se obtendrán covariantes simultáneos imponiendo, por ejemplo, la condición de que las polares de cierto orden de una de las curvas tengan con otra curva una relación invariante determinada tal como una relación de contacto. Demostraremos los siguientes teoremas:

1.º *El lugar de un punto cuya cónica polar tiene una infinidad de triángulos polares circunscritos á una cónica dada, es una curva de orden* n − 2.

2.º *El lugar de un punto cuya cónica polar se halla inscrita en un triángulo polar perteneciente á una cónica dada (y por consiguiente en una infinidad) es una curva de orden* 2 (n − 2).

En efecto, si se toman una curva de n^{simo} orden y otra de primero

$$a_x^n = 0, \quad u_x = 0,$$

la condición de que las polares cónicas, es decir, las $(n-2)^{\text{ésimas}}$ polares de un punto sean tangentes á la recta u, da la ecuación

$$(abu)^2 \, a_x^{n-2} \, b_x^{n-2} = 0.$$

Se obtiene también, si las polares cúbicas deben ser tangentes á u, la ecuación de grado 4 $(n-3)$,

$$(abu)^2 \, (cdu)^2 \, (acu) \, (bdu) \, a_x^{n-3} \, b_x^{n-3} \, c_x^{n-3} \, d_x^{n-3} = 0.$$

Dadas enseguida una curva de n^{simo} orden y una cónica

$$a_x^n = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_x^2 = 0,$$

se puede imponer la condición de que para las dos cónicas

$$a_y^{n-2} \, a_x^2 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_x^2 = 0$$

se anule uno de los invariantes simultáneos A_{112} ó A_{122}; y se obtienen respectivamente, las dos curvas

$$(a\alpha\beta)^2 \, a_y^{n-2} = 0 \quad \text{y} \quad (ab\alpha)^2 \, a_y^{n-2} \, b_y^{n-2} = 0.$$

La generación de curvas por medio de otras curvas de grado inferior, depende de la consideración de los haces.

118. Puntos y curvas de coincidencia.—Sean los sistemas de curvas representados por una ecuación homogénea con relación á las y y á las x, de los órdenes m y n con relación á las x é y respectivamente:

$$f\begin{pmatrix} m & n \\ x, & y \end{pmatrix} = 0.$$

A cada punto x corresponde una curva de orden n, á cada punto y una curva de orden m.

Dados dos sistemas de curvas de la especie citada

$$f\begin{pmatrix} m & n \\ x, & y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \varphi\begin{pmatrix} m' & n' \\ x, & y \end{pmatrix} = 0,$$

á cada punto del plano corresponden $\alpha' = nn'$ puntos y, que son las intersecciones de las dos curvas, relacionadas con este punto por $f=0$ y $\varphi=0$. Análogamente á cada punto y del plano corresponden $\alpha=mm'$ puntos x. Se pide hallar cuales son los puntos x que coinciden con sus correspondientes y. Haciendo $x=y$ en $f=0$ y $\varphi=0$, obtenemos los *puntos de coincidencia* buscados como intersecciones de las dos curvas

$$f\binom{m\ \ n}{x,\ x}=0, \qquad \varphi\binom{m'\ \ n'}{x\ \ \ x}=0;$$

número que es igual á

$$(m+n)(m'+n')=mm'+nn'+mn'+nm'=\alpha+\alpha'+\beta,$$

si se hace $\beta=mn'+nm'$. El número β es el orden de la curva que describe y, si x se mueve en una recta, pues se obtiene la ecuación de esta curva haciendo en $f=0$ y $\varphi=0$, $x_i=z_i+\lambda t_i$ y se elimina λ. El resultante es de orden $mn'+nm'$ en y.

Admitamos que á un punto x corresponden α' puntos y y que á un punto y corresponden α puntos x. Sea β el orden de la curva que recorre los puntos y homólogos de x, cuando x describe una recta. β depende simétricamente de los grupos de puntos x é y; β *es pues al mismo tiempo el orden de la curva que describen los puntos* x *homólogos de* y, *cuando* y *se mueve en una recta.*

La curva de coincidencia es aquélla cuyos puntos son de coincidencia.

119. PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA. — Chasles enunció el siguiente principio: *Si entre los puntos de dos punteadas sobrepuestas se establece una correspondencia tal, que á cada punto de la una corresponden* m *puntos de la otra y que á cada punto de ésta corresponden* n *puntos de aquélla, existirán* m + n *puntos que se corresponderán á sí mismos.*

§ 4.º NOCIONES SOBRE LOS CONEXOS

120. Consideremos la figura representada por una ecuación algebráica que contiene de una manera homogénea las coordenadas de un punto móvil (x) y las de una recta (u), es decir,

$$f(x,u)\equiv a_x^m u_\alpha^n=0, \tag{1}$$

en la que las x_i entran en la dimensión m y las u_i en la dimensión n. La figura se llamará un *conexo* de m^{simo} orden y de n^{sima} clase, ó más brevemente (m, n).

A dicha figura no pertenece una forma geométrica propiamente dicha, y al contrario, para *cada* recta u del plano puede hallarse una infinidad de puntos x, y para cada punto x una infinidad de rectas que satisfacen á la ecuación del conexo.

A cada recta u corresponden, en general, en virtud de (1) un número infinito de puntos x que forman una curva C_m de orden m; á cada punto x una infinidad de rectas que envuelven una curva k_n de n^{sima} clase. Así para $m = 1$, $n = 1$, por ejemplo, á cada punto x corresponde otro punto y, como vértice de un haz de rayos (curva de primera clase) formado por las rectas correspondientes u, y á toda recta u corresponde otra recta v (curva de primer orden). En este caso, en efecto, la ecuación

$$f(x, u) \equiv a_x u_\alpha \equiv \Sigma\Sigma\, \beta_{ik}\, x_i\, u_k = 0$$

da solamente una representación particular de la colineación general, porque se obtiene, para las coordenadas del punto y que corresponde á x,

$$\rho y_k = \beta_{1k}\, x_1 + \beta_{2k}\, x_2 + \beta_{3k}\, x_3,$$

y para las coordenadas de la recta v que corresponde á u,

$$\sigma x_i = \beta_{i1}\, u_1 + \beta_{i2}\, u_2 + \beta_{i3}\, u_3.$$

Como aquí el punto y la recta se presentan siempre juntos, es ventajoso para la concepción más sencilla de estas relaciones, no considerar ni el punto ni la recta como elemento fundamental del plano. Designaremos, por el contrario, como elemento (x, u) *toda combinación de un punto* x *del plano con una recta* u *del mismo*.

Se obtiene pues, el conjunto de los elementos (x, u), combinando cada uno de los puntos, en número doblemente infinito x con cada una de las rectas u en número doblemente infinito.

El conjunto de los elementos forma, según esto, un sistema cuádruplemente infinito (llena una multiplicidad) de cuatro dimensiones, y este sistema descansa en el plano. La ecuación de un conexo se desprende de él, como siendo el sistema *triplemente* infinito de los elementos que satisfacen á esta ecuación. Puede expresarse lo que precede de este modo: *Los puntos que forman con una recta dada los elementos de un conexo* (m, n) *se hallan situados en una curva* C_m *de orden* m; *las rectas que forman con un punto dado los elementos del conexo, envuelven una curva* K_n *de la* n^{sima} *clase*. Todas las curvas K_n que se originan así forman un sistema doblemente infinito cuyos parámetros son las relaciones de las x_i; igualmente las curvas C_m forman un sistema de curvas doblemente infinito, cuyos parámetros son las relaciones de las u_i.

Puede suceder que todo punto del plano forma con una recta determinada, ó que toda recta forme con un punto determinado del plano un elemento del conexo. Así, por ejemplo, en el conexo

$$x_1 \varphi(u) + x_2 \psi(u) = 0,$$

el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, forma con cada una de las rectas u un elemento. Los puntos ó rectas de esta especie se llaman *puntos* ó *rectas fundamentales*.

Cuando, por ejemplo, no existen las u, se tiene la ecuación de una curva en *coordenadas-puntos*.

El estudio de las propiedades de un conexo $a_x^m\ u_\alpha^n = 0$ conduce al estudio de los invariantes funcionales, es decir, á invariantes, covariantes, contravariantes y formas mixtas que pertenecen á la forma fundamental $a_x^m\ u_\alpha^n$. Se puede siempre sustituir á las formas mixtas que intervienen, por lo que se llama formas *normales*, es decir, formas φ que satisfacen á la ecuación diferencial $\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial u_i} = 0$. Todos estos invariantes funcionales podrán representarse simbólicamente, y se tendrá que distinguir factores simbólicos de los tipos siguientes (haciendo $a_x^m\ u_\alpha^n \equiv b_x^m u_\beta^n \equiv c_x^m u_\gamma^n$)

$$a_x, \ (abu), \ (abc), \ a_\alpha, \ u_\alpha, \ (\alpha\beta x), \ (\alpha\beta\gamma).$$

Citaremos ahora un principio análogo al de *translación*, pues la relación establecida por el conexo entre los puntos y las rectas del plano pueden considerarse de otra manera.

Sea un punto cualquiera, que puede considerarse como intersección de las dos rectas v, w, y que representaremos por (v, w); y sea la recta (y, z) que une y con z. Su reunión formará un elemento elegido arbitrariamente que, en general, no pertenece al conexo. *Sin embargo, por medio del conexo* (m, n) *los rayos del haz* (v, w) *están asociados á los puntos de la recta* (y, z); y esta dependencia respectiva es de nm determinaciones, en el sentido de que á todo punto corresponden n rayos (Γ_n) y á todo rayo m puntos (G_m), pues si se representa un punto de la serie por $\varkappa_1 y + \varkappa_2 z$ y un rayo del haz por $\lambda_1 v + \lambda_2 w$, se obtiene que para los puntos y los rayos asociados entre sí por el conexo $a_x^m u_\alpha^n = 0$ se verifica la ecuación

$$(\varkappa_1 a_y + \varkappa_2 a_z)^m (\lambda_1 v_\alpha + \lambda_2 w_\alpha)^n = 0,$$

que es del orden m en $\varkappa_1 : \varkappa_2$ y del orden n en $\lambda_1 : \lambda_2$. Si hacemos ahora simbólicamente

$$a_y = A_1, \quad a_z = A_2, \quad v_\alpha = \mathfrak{A}_1, \quad w_\alpha = \mathfrak{A}_2,$$

tendremos la forma doblemente binaria

$$\varphi = A_\varkappa^m \, A_\lambda^n,$$

estableciendo $\varphi = 0$ la relación enunciada.

Si consideramos un elemento x, u perteneciente al conexo dado, en el que el punto x forma parte de la serie (y, z), el rayo u forma parte del haz (v, w); y si imponemos la condición de que el grupo Γ_n correspondiente á x (y conteniendo á u) posea una propiedad invariante binaria, y que igualmente G_m posea esta misma propiedad ú otra, resulta una condición invariante para el rayo (y, z) y el punto (v, w); *y el elemento* (y, z), (v, w) *formado con los dos, pertenece á un conexo covariante.* La condición impuesta estará representada por la anulación de un invariante de la forma binaria φ, que debe conservar todavía la propiedad invariante, si una de las series de variables $(\varkappa)$ está sometida á una transformación lineal cualquiera, y la otra (λ) á una transformación lineal igualmente cualquiera; porque el grupo Γ_n, que corresponde á todo punto *cualquiera* $x = \varkappa_1 y + \varkappa_2 z$, en virtud de ser $\varphi = A_{\chi}^{m}\mathfrak{A}_{\lambda}^{n}$, debe poseer la propiedad invariante en cuestión, y lo mismo sucede al grupo G_m que corresponde á un rayo *cualquiera* $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$. Los invariantes de la forma φ, que se consideran aquí, son del tipo

$$I = \Sigma c \Pi (AB) \ldots \Pi (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \ldots,$$

expresando las cantidades c coeficientes numéricos, y las cantidades A, B símbolos equivalentes de una de las dos especies y las cantidades $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ símbolos de la otra especie; pero estas dos clases de símbolos no pueden nunca presentarse al mismo tiempo, y por esta razón no puede entrar en I el factor $(A\mathfrak{A})$. Pero se tiene, en virtud de la hipótesis $a_y = A_1, a_z = A_2, v_\alpha = \mathfrak{A}_1, w_\alpha = \mathfrak{A}_2$,

$$(AB) = a_y b_z - b_y a_z = (abu),$$

haciendo $u_i = (yz)_i$, y para $x_i = (vw)_i$,

$$(A\mathfrak{B}) = v_\alpha w_\beta = w_\alpha v_\beta = (\alpha\beta x).$$

La ecuación del conexo covariante buscado, es pues, en virtud de la última hipótesis,

$I \equiv \Sigma c \Pi (abu) \ldots \Pi (\alpha\beta x) \ldots \ldots = 0$ *(Clebsch, obra cit., t. III)*

121. CONEXO CONJUGADO.—Se puede formar con relación á f un conexo covariante notable, que se llama *conexo conjugado.*

Partamos de un elemento cualquiera y, v del plano. A todo punto x de v corresponden, en virtud de $f = 0$, n rayos que pasan por y, y á todo rayo u que pasa por y, m punto de v (pág. 289). Los n rayos son las tangentes de y á la curva K_n que corresponde á x; los m puntos son los de intersección de v con la curva C_m, que corresponde á u. Actualmente, si la curva K_n, que corresponde á x, pasa por y, dos de los n rayos se confunden con la tangente de K_n en el punto y; y esta es la sola manera de que se origine un rayo doble de esta especie, porque K_n no tiene, en general, ni tangentes dobles, ni tangentes de inflexión. Este rayo forma con x un elemento del conexo dado $f = 0$, y puede, en particular, designarse por u. Igualmente, si la curva C_m que corresponde á u, es tangente á la recta v, dos de los m puntos de intersección situados en v se confunden. Este punto contado dos veces, forma con u un elemento de $f=0$, y estará, en particular, representado por x. Todo elemento (y, v) que ofrece esta relación frente á un elemento (x, u) de f, es un elemento de un conexo covariante, que se llama *conjugado* de f. *Un elemento* (y, v) *de este último se halla pues definido por la circunstancia de que, con relación al conexo dado, al punto* y *corresponde una recta* u *que se cuenta doble, y á la recta* v *corresponde igualmente un punto* x *que se cuenta doble.*

También podemos decir que: Si (x, u) es un elemento de $f=0$, es decir, si x está en la curva C_m correspondiente á u, y u es tangente á la curva K_n correspondiente á x; si además y es el punto de contacto de u con esta curva K_n y v la tangente de la primera curva C_m en x, (y, v) es un elemento conjugado, y se obtiene completamente el elemento conjugado, haciendo recorrer al elemento (x, u) todo el conexo dado.

Se obtiene pues, la ecuación $F(y, v)=0$ *del conexo conjugado, eliminando las cantidades* ρ, σ, x_i, u_i *entre las ecuaciones*

$$\rho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f=0.$$

122. COINCIDENCIA PRINCIPAL. — Entre los conexos existe uno de gran importancia, es el conexo lineo-lineal dado por la anulación del covariante idéntico u_x, es decir, por la ecuación

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

que se llama *conexo idéntico*. En este conexo, á cada punto corresponde el conjunto de las rectas que pasan por él, y á toda recta el conjunto de puntos situados en ella, es decir, que el elemento del conexo idéntico es, en general, toda combinación del punto y de la recta en situación reunida. La curva K_1 que corresponde á un punto es pues, el mismo punto considerado como vértice de un haz de rayos. La curva C_1 que corresponde á una recta es esta recta, considerada como base de una serie puntual.

El conjunto de los elementos comunes á un conexo dado arbitrariamente $f=0$ y al conexo idéntico $u_x=0$ da una coincidencia covariante, particularmente importante para el estudio del conexo $f=0$, que se llama *coincidencia principal del cone-*

xo. En esta figura, á cada punto corresponden n rayos que pasan por este punto *(rayos de coincidencia)*, y son las tangentes trazadas por este punto á la curva correspondiente K_n; á cada recta corresponden m puntos situados en ella *(puntos de coincidencia)*, esto es, sus puntos de intersección con la curva correspondiente C_m.

Así, á todo conexo corresponde una coincidencia principal; pero al contrario, existe una infinidad de conexos á los que corresponde una misma coincidencia principal (m, n). Si, en efecto, $f = 0$ es uno de ellos, todos los conexos

$$f + Mu_x = 0, \tag{2}$$

representando $M = 0$ un conexo cualquiera $(m - 1, n - 1)$, comprenden evidentemente la misma coincidencia que f.

La coincidencia principal tiene especial interés por su íntima conexión con las *ecuaciones diferenciales algebráicas de primer orden.*

Si se trazan por cada punto del plano n direcciones de las rectas que le corresponden en la coincidencia principal, y se las considera como elementos de arco de un sistema de curvas, se podrá formar así una familia de curvas de las que n pasan por cada punto, y sus tangentes en este punto son los n rayos que corresponden á éste en la coincidencia principal. Para obtener las curvas que se originan, será preciso integrar una ecuación diferencial, que se obtendrá de la manera siguiente: Haremos nuevamente $f = a_x^m u_\alpha^n$. Sea u una recta que pasa por el punto x que le corresponde en la coincidencia principal, de modo que $f(x, u) = 0$ y $u_x = 0$. Un punto $x + dx$ próximo de x satisface entonces á las ecuaciones (3)

$$u_{dx} \equiv u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 = 0, \; u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

en virtud de las que se obtienen las relaciones de las u_i iguales á las de los determinantes formados con las x_i y las dx_i. Si pues, se introducen estos últimos en f ó en $f + Mu_x$, se obtiene la ecuación diferencial

$$f(x_1, x_2 x_3;\, x_2 dx_3 - x_3 dx_2,\, x_3 dx_1 - x_1 dx_3,\, x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$
$$\equiv a_x^m (\alpha x dx)^n = 0. \tag{4}$$

Se puede partir correlativamente de un rayo u y de sus n puntos de coincidencia. Si se traza por uno de éstos un rayo $u+du$ próximo de u, se obtendrá en este último un punto $x+dx$ correspondiente. Partiendo de este nuevo punto, se puede ir más lejos, obteniéndose un sistema de curvas de las que m son tangentes á una recta dada. Para la determinación de éstas, se emplearán en vez de las ecuaciones (3), las ecuaciones

$$u_x = 0, \quad (du)_x \equiv x_1\, du_1 + x_2\, du_2 + x_3\, du_3 = 0, \tag{5}$$

y se obtiene así, en vez de (4), la ecuación diferencial

$$f\,[(udu), u] \equiv (audu)^m\, u_\alpha^n = 0. \tag{6}$$

Este sistema de curvas tiene la propiedad de que la tangente de una de estas curvas que lo forman en uno de sus puntos, está dado por uno de los rayos de coincidencia de este punto. Pero el sistema de curvas dado por la ecuación diferencial (4) estaba caracterizado por la misma propiedad. *Los dos sistemas son pues idénticos. La ecuación* (6) *es la ecuación diferencial en coordenadas-líneas para el mismo sistema de curvas cuya ecuación en coordenadas-puntos se halla obtenida por la integración de la ecuación diferencial* (4). Llamaremos á las curvas así representadas, *curvas de coincidencia principal ó curvas integrales del conexo* f = 0.

Citaremos, en fin las proposiciones siguientes:

El lugar de los puntos x *que completados por sus rectas de unión con un punto fijo* y, *forman elementos de una coincidencia principal, es una curva de orden* m + n

$$X_y = 0,$$

y esta curva tiene, en y, *un punto múltiplo de orden* n.

La envolvente de los rayos u *que, completados por sus puntos de intersección con un rayo fijo* v, *forman elementos de una coincidencia principal, es una curva de la clase* m + n

$$U_v = 0,$$

y esta curva tiene á v *por tangente múltiple de orden* m.

Entre los puntos del plano son especialmente notables aquéllos para los que se confunden dos de las n direcciones que parten de ellos; y como esta exigencia equivale á una condición, habrá un número infinito de puntos de esta especie, es decir, que los puntos de que se trata formarán una curva. Se obtiene igualmente otra curva como envolvente de las rectas para las que dos puntos de coincidencia que les corresponden están infinitamente próximos uno de otro. Si dos de las n tangentes trazadas por un punto x á la curva correspondiente K_n deben coincidir, es necesario que el punto x se halle en K_n. Si pues se representa en coordenadas-puntos X, bajo la forma $F(x, X)=0$, á la ecuación $f(x, u)=0$ de esta última, $F(x, x)=0$ será la ecuación del lugar buscado.

Se obtiene el lugar de los puntos x *situados en su curva correspondiente* K_n, *para los que dos de las direcciones homólogas de avance de la coincidencia principal se confunden, representando* K_n *en coordenadas-puntos. Se obtiene correlativamente la envolvente de las rectas tangentes á su curva correspondiente* C_m, *representando esta última en coordenadas-líneas* u.

La primera curva no existe más que cuando $m>1$, y la segunda cuando $n>1$. Para el conexo $a_x u_\alpha^2=0$ se obtiene, por ejemplo,

$$F(x, X) \equiv a_x b_x (\alpha\beta X)^2;$$

y el lugar de los puntos en cuestión, está dado por la curva de *cuarto* orden

$$F(x, x) \equiv a_x b_x (\alpha\beta X)^2=0.$$

Para el conexo de $a_x^2 u_\alpha^2$, se obtiene

$$F(x, X)=a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta X)^2,$$

y por tanto la curva de sexto orden

$$F(x, x) \equiv a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta x)^2=0.$$

Las curvas citadas se refieren, por relaciones especiales y muy importantes, á las curvas integrales del conexo $f=0$. Consideremos los puntos situados á uno y otro lado de la curva $f(x, x)=0$. Para un punto de ésta se confunden dos de las ramas correspondientes de las curvas integrales; luego, según las leyes comunes de la continuidad, estas ramas son necesariamente reales para los puntos colocados á uno de los lados de la curva $F(x, x) = 0$, imaginarias para los puntos situados al otro lado. Luego, en todo punto de F, tienen la misma tangente, *sin prolongarse más allá de este punto,* dos ramas reales de las curvas integrales, es decir, que se forma un punto cuspidal ó de retroceso de la curva integral (fig. 119). Si pues, se hace el razonamiento correlativo, podremos enunciar las dos proposiciones siguientes:

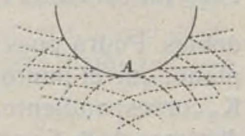


Fig. 119

El lugar ($F=0$) *de los puntos que se hallan en las curvas* K_n *que les corresponden en el conexo, es al mismo tiempo el lugar de los puntos de retroceso de las curvas integrales del conexo.*

La envolvente ($F'=0$) *de las rectas tangentes á las curvas* C_m *que les corresponden en el conexo, es al mismo tiempo el lugar de las tangentes de inflexión de las curvas integrales del conexo.*

Las tangentes de retroceso de las curvas integrales, que pertenecen á los puntos de $F = 0$, envolverán, en general, otra curva $\Phi = 0$, é igualmente los puntos de inflexión de estas curvas describirán una nueva curva $\Phi' = 0$, y solamente en puntos particulares de F sucederá que la tangente de retroceso correspondiente, sea al mismo tiempo tangente de F en este punto, como se verifica para el punto A en la fig. 119. En el caso, tan solo, de que existan condiciones particulares entre los coeficientes de la ecuación $f = 0$, podrá conseguirse que la tangente de *todo* punto de F sea también tangente á la curva correspondiente K_n. Entonces la curva integral es tangente á F en cada uno de sus puntos. La curva $F = 0$ da en este caso una integral singular de la ecuación diferencial $f = 0$.

Siendo una curva de clase n, en general, del orden $n(n-1)$ y su ecuación en coordenadas-puntos del grado $2(n-1)$ con relación á los coeficientes de la ecuación en coordenadas-líneas, se obtiene que el orden de F y la clase de F' son respectivamente $(n-1)(2m+n)$ y $(m-1)(2n+m)$.

$F = 0$ representa el lugar de los puntos de retroceso de las curvas integrales, $\Phi = 0$ representa la envolvente de las tangentes de retroceso de estas mismas curvas.

Las dos curvas se corresponden *unideterminativamente* entre sí. A un punto x de F corresponde, como tangente de Φ, precisamente la tangente en x de la curva K_n que corresponde á x. Pero tal curva K_n tiene en general, $\frac{1}{2} n(n-1)(n^2-9)$ puntos dobles. Podrá pues suceder, en un número finito de puntos del plano, que el punto x coincida con un punto doble de la curva K_n correspondiente, y entonces le corresponden dos tangentes distintas de Φ. Según las leyes de la transformación unideterminativa, este hecho se verifica *si el punto en cuestión es un punto doble* de F. El número de puntos dobles podrá determinarse según el principio de correspondencia de Salmon y Zeuthen. (*)

Citaremos para terminar las siguientes proposiciones:

En un conexo (1, n) *existen* n^2+n+1 *rectas que forman, cada una con todos sus puntos, elementos de coincidencia fundamental ó rayos fundamentales.*

Los n^2+n+1 *rayos fundamentales de un conexo* (1, n) *forman parte del sistema de curvas integrales de la coincidencia principal y son las tangentes dobles de la curva correspondiente* $\Phi = 0$, que en general, *no tiene otras tangentes singulares.* Además, *forman juntamente con los* n *rayos de coincidencia que corresponden á un punto cualquiera de la coincidencia principal, un sistema de* $(n+1)^2$ *rectas á las que son tangentes infinidad de curvas de la* $(n+1)^{\text{sima}}$ *clase* ($U_r = 0$).

123. TRANSFORMACIONES DE CONTACTO. — Se ha observado que la teoría de los conexos da origen á nuevos puntos de vista respecto á las ecuaciones diferenciales, y facilita medios de integración de las mismas.

Para establecer la *transformación de contacto,* Lie define el *elemento lineal de un plano* como el conjunto de un punto y de una recta que pasa por éste. Siendo x, y las coordenadas cartesianas de un punto é y' el coeficiente angular de la recta, toda transformación en x, y, y' puede considerarse como una

---

(*) Véase *Leçons sur la Géométrie,* por A. Clebsch, t. I, págs 108-9 y t. III, pág. 393 y siguientes.

transformación de elementos lineales del plano. Para llegar á tales transformaciones, consideremos la transformación puntual

$$x_1 = \mathrm{X}(x, y), \qquad y_1 = \mathrm{Y}(x, y) \tag{1}$$

que origina una transformación de elementos lineales. Todas las curvas que tienen en un punto (x, y) una tangente cuyo coeficiente angular es y', se transforman en curvas que tienen en el punto (x_1, y_1) la misma tangente, de manera que el coeficiente angular y'_1 de esta nueva tangente esté dado por una relación de la forma

$$y'_1 = \mathrm{P}(x, y, y'). \tag{2}$$

El conjunto de las ecuaciones (1) y (2) define pues una transformación de elementos lineales del plano que, según la denominación de Lie, es la *transformación prolongada (erweiterte)* correspondiente á la transformación puntual (1). Esta transformación tiene la propiedad de cambiar toda familia de elementos (x, y, y'), que satisfacen á la ecuación

$$dy - y'\,dx = 0 \tag{3}$$

en otra familia de elementos (x_1, y_1, y'_1) que satisfacen á la relación análoga $dy_1 - y'_1\,dx_1 = 0$.

Pero las transformaciones puntuales prolongadas no son las únicas que tienen esta propiedad, y Lie consideró lo que llama *transformación del contacto del plano*, á toda transformación de los elementos lineales del plano que deja invariante la ecuación de Pfaff

$$dy - y'\,dx = 0.$$

Dicha transformación debe verificar una identidad de la forma

$$dy - y'\,dx = \rho\,(x, y, y')\,(dy_1 - y'_1\,dx_1),$$

hallándose las variables x, y, x_1, y_1 ligadas por una ó dos relaciones. Si están ligadas por dos relaciones, la transformación es una transformación puntual prolongada; si están ligadas por una sola relación

$$\Omega\,(x, y, x_1, y_1) = 0, \tag{4}$$

es una transformación de contacto propiamente dicha, definida por la ecuación (4) y las ecuaciones

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}+y'\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}+y'_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}=0 \tag{5}$$

La definición de las transformaciones de contacto adquiere una forma geométrica por la introducción de las multiplicidades ó variedades de elementos M_1. Lie llama así al conjunto de elementos definidos por un sistema de dos ecuaciones en x, y, y' que satisface á la ecuación de Pfaff (3). Es ó bien el conjunto de todos los elementos lineales de una curva (puntos y tangentes), ó bien el conjunto de todos los elementos lineales que tienen un punto común.

Esto sentado, las transformaciones de contacto son las transformaciones de los elementos lineales que cambian toda multiplicidad M_1 en una multiplicidad M_1. Entre ellas, las transformaciones puntuales prolongadas son las únicas que cambian todo punto en un punto.

En cuanto á la transformación de contacto propiamente dicha, definida por las ecuaciones (4) y (5), cambia todo punto cuyas coordenadas son $x=a$, $y=b$ en una curva cuya ecuación es

$$\Omega(a_1, b_1, x_1, y_1)=0.$$

Por consiguiente transforma toda curva lugar de puntos (a, b) en la envolvente de las curvas

$$\Omega(a, b, x_1, y_1)=0$$

correspondientes, é inversamente toda curva envolvente de una familia de curvas $\Omega(x, y, a_1, b_1)=0$ en el lugar de los puntos correspondientes (a_1, b_1). Como sucede, por ejemplo, en la transformación por polares recíprocas, que tienen por cónica directriz la parábola $2y-x^2=0$, y que es la transformación de contacto definida por la ecuación $y+y_1-xx_1=0$.

Lie da otra interpretación de la ecuación (3) de Pfaff. Expresa que los dos elementos infinitamente próximos (x, y, y') y $(x+dx, y+dy, y'+dy')$ son dobles, es decir, que la distancia del punto del uno á la recta del otro, es de segundo orden con relación á la distancia de los dos puntos. Se puede definir pues una transformación de contacto como una transformación de elementos que cambia siempre elementos dobles en elementos dobles. (*)

Para terminar citaremos la definición de Lie de curva integral: *Una serie simplemente infinita de elementos principales* x, y, p *se llamará curva integral, ó mejor, una variedad integral de una dimensión* (M_1) *cuando para dos elementos principales consecutivos* x, y, p *y* x + dx, y + dy, p + dp, *situados á distancia finita, queda satisfecha la ecuación* (3). (**)

El problema de la integración de una ecuación $\varphi(x, y, p) = 0$ puede formularse diciendo que *los elementos en número doblemente infinito de la ecuación* $\varphi = 0$ *deben reunirse en las integrales* M_1 *en número simplemente infinito.*

Pero estas elevadas consideraciones están fuera del cuadro de este tratado.

§ 5.º Geometría sobre una curva plana

124. Definiciones.—En la llamada *Geometría sobre una curva algebráica* se estudian los grupos de puntos obtenidos en una curva fundamental de orden n por sistemas de otras curvas de orden cualquiera, y especialmente cuando tales sistemas son *lineales*, es decir, que sus ecuaciones contienen *linealmente* parámetros variables. Si la curva fundamental es una recta, estos grupos de puntos constituyen *involuciones de orden superior*.

Sea una curva de orden n^{simo} $f(x) = 0$, cortada por otra de orden m^{simo} $\varphi = 0$ en mn puntos, que supondremos no coinciden con los puntos dobles ó de retroceso de $f = 0$. Si $m < n$, hay $\frac{m(m+3)}{2}$ puntos de intersección dados. Estos puntos determinan completamente la curva $\varphi = 0$, y por consiguiente sus otros puntos de intersección con $f = 0$. Si, por el contrario, $m \geqq n$, se puede si no se trata más que de las intersecciones de las dos curvas y no de la curva secante φ, sustituir la ecuación $\varphi = 0$ por la ecuación

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0,$$

(*) Sophus Lie. *Theorie des Transformationsgruppen Zweiter Asbchnitt.* Kap. 1.

(**) Sophus Lie. *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen Ordnung erster.*

siendo μ una expresión de orden $(m - n)$. Los

$$\frac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)$$

coeficientes completamente arbitrarios de μ pueden elegirse de manera que anulen un número igual de coeficientes de φ'. Se puede pues, sin modificar el sistema de los puntos de intersección, sustituir á una curva general $\varphi = 0$ una curva especial

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0.$$

que sólo dependa de

$$\frac{m(m+3)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

constantes. Esta curva reducida, está ahora determinada por $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ puntos; si pues se da igual número de puntos de intersección de $f = 0$ y $\varphi' = 0$, los otros $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ quedan por esto fijados, y lo mismo sucede respecto á puntos de intersección de $f = 0$ y $\varphi = 0$, porque son los mismos puntos.

Los dos números

$$\frac{mn - m(m+3)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

que indican respectivamente, para el caso de ser $m < n$ y el de ser $m \geqslant n$, cuántos puntos de intersección del sistema se hallan dados por los otros, coinciden cuando $m = n - 1$ y $m = n - 2$. Para $m > n - 3$ se puede pues admitir el número $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ el cual es por completo independiente de m; pero para valores más pequeños de m, el número de los puntos que están dados por los otros es menor.

Estas consideraciones exigen una ligera modificación, cuando φ pasa por algunos puntos dobles ó de retroceso de f. En efecto, estos puntos deben contarse una sola vez como elementos determinadores de φ, y al contrario dos veces como puntos de intersección de φ con f. El número de los puntos de intersección determinados por los otros, quedará disminuído en el número (δ) de los puntos que coinciden con los puntos excepcionales de que tratamos, y que por consiguiente son conocidos de antemano. Tenemos pues el siguiente

TEOREMA.—*Entre los puntos de intersección de una curva de* m^simo *orden* $f=0$ *con una curva de* m^simo *orden sujeta á pasar por* δ *puntos excepcionales de* $f=0$, *sin que tenga puntos múltiples, el número de puntos determinados por los otros, será*

1.° $$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\delta \quad \text{si} \quad m \geqslant n-2,$$

2.° $$mn-\frac{m(m+3)}{2}-\delta \quad \text{si} \quad m<n-2,$$

Este teorema puede enunciarse de otro modo más exacto diciendo que: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta$ ó $mn-\frac{1}{2}m(m+3)-\delta$ *puntos de intersección*, á lo más, *quedan determinados por los otros, cuando no se establecen otras condiciones.* Para $m=n=3$ diremos que:

Todas las curvas de tercer orden que tienen ocho puntos comunes, pasan todavía por un noveno.

Ejemplo.—Sean los seis puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 situados en una cónica y unidos por pares

$$\overline{12},\ \overline{45},\ \mathrm{I};\ \overline{23},\ \overline{56},\ \mathrm{II};\ \overline{34},\ \overline{61},\ \mathrm{III},$$

siendo cada dos rectas lados opuestos de un exágono y I, II, III sus puntos de intersección repetidos.

La figura se considera como formada por tres curvas de tercer orden con ocho puntos comunes que se descomponen, y son:

1.° La cónica y la recta $\overline{\mathrm{I\,II}}$, 2.° las tres rectas $\overline{12}$, $\overline{56}$, $\overline{34}$, 3.° las tres rectas $\overline{45}$, $\overline{23}$, $\overline{61}$. (*)

125. CURVA ADJUNTA.—Se dice que una *curva es adjunta, cuando pasa una vez por todos los puntos dobles y los puntos de retroceso de la curva fija*, ó más generalmente, cuando pasa $i-1$ veces por cada punto de orden i de ésta sin que, en gene-

(*) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. I, pág. 131.

ral, las ramas particulares de las dos curvas sean tangentes. Si pues f no tiene más puntos múltiplos que puntos dobles y cuspidales (de retroceso), una *curva adjunta* es una curva sometida tan solo á las condiciones de pasar *simplemente* por todo punto doble ó cuspidal de f.

Si suponemos que la curva C_n de orden n tenga en cada punto tangentes separadas, podemos considerar á todo punto múltiplo de orden i sustituído por $\frac{1}{2} i\ (i-1)$ puntos dobles, y escribir

$$p = \frac{(n-1)\ (n-2)}{2} - \sum_i \alpha_i \frac{i\,(i-1)}{2},$$

si la curva C_n tiene α_2 puntos dobles, α_3 puntos triplos . . . Para el sistema de los puntos de intersección de una curva adjunta, tendremos que hacer en las fórmulas del teorema fundamental $\delta = \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i (i-1)$; y podremos entonces enunciarlo de la manera siguiente, así como se ve fácilmente, ya que en un punto múltiplo de orden i se hallan siempre reunidos $i\,(i-1)$ puntos de la curva adjunta:

Entre los puntos de intersección de una curva adjunta de orden m *con la curva dada* C_n, *no situados en los puntos singulares.*

1.º *Para* $m > n-3$, p *á lo más se hallan determinados por los* $nm - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) - p = n\alpha + p - 2\ [\alpha = m - (n-3)]$ *restantes;*

2.º *Para* $m = n - 2 - r$, $p - 1 - \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$ *á lo más están determinados por los* $\frac{1}{2}\, m\,(m+3) - \frac{1}{2}\, \Sigma\, \alpha_i\, i\,(i-1)$ *restantes.*

En el examen de las curvas adjuntas hay que considerar los elementos siguientes:

1.º El número (Q) de los puntos que se encuentran en cada grupo del sistema, es decir, el número de los puntos de intersección *móviles* de una curva adjunta del sistema considerado. Esta puede tener, además de los puntos singulares de f, cierto número de puntos de intersección *fijos*, comunes con C_n;

2.º *La multiplicidad del sistema,* es decir, el número q de los parámetros arbitrarios de que dependen los coeficientes de una curva del sistema.

3.º *El grado del sistema,* es decir, la dimensión ó la forma según la que estos q parámetros entran en la ecuación de la curva, los que se supone entran siempre racionalmente.

Ejemplos.—Supongamos que C_n sea una curva de tercer orden sin puntos singulares. Entonces todas las rectas del plano forman un sistema doblemente infinito ∞^2 $(q=2)$ de curvas adjuntas que dependen de dos parámetros; los grupos de puntos determinados por ellas en C_3 forman por consiguiente un sistema *lineal doblemente infinito de tres puntos* $(Q=3)$. Por otra parte, todas las rectas que pasan por un punto fijo de C_3 y que, por consiguiente, cortan todavía á esta curva en dos puntos móviles, determinan *un sistema lineal simplemente infinito de dos puntos* $(Q=2,\ q=1)$. Además, siendo representables las tangentes de una cónica fije $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ bajo la forma

$$x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda^2 x_3 = 0,$$

constituyen un *sistema cuadrático simplemente infinito de tres puntos.*

Si C_3 tiene un punto doble, y consideramos el haz de rayos trazado por este punto, cortando todavía cada rayo á C_3 en un punto móvil, el haz de que se trata determina un *sistema simplemente infinito de un solo punto* $(Q=1)$. En fin, por lo general, todas las curvas adjuntas de orden m (siendo $m > n-3$) que pasan por s puntos fijos cualesquiera, determinan en C_n un sistema lineal de grupos de puntos para los que

$$Q = nm - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1), \quad q = nm - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) - p - s;$$

porque entre los Q puntos de intersección hay p que, según el teorema fundamental sobre los sistemas de intersecciones, se hallan determinados por otros, y por consiguiente solo $Q-q$ permanecen arbitrarios. Se tiene pues $q = Q - s - p$. Si, al contrario, entre los s puntos fijos hay R situados en C_n, tendremos

$$Q = mn - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) - R, \quad q = mn - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) - s - p.$$

Mientras que los grupos de puntos situados en C_n aparecen, según lo expuesto, como dependientes de las curvas adjuntas que les pertenecen, se llega por medio del *teorema del resto,* á definir estos grupos, en cierto modo independientemente de las curvas que los atraviesan, de modo que son además figuras subsistentes por sí mismas conforme á las exigencias de la Geometría sobre una sola curva. Ante todo diremos que *residuo* de un grupo G_Q de Q puntos es un grupo de puntos (G_R) que reunido al primero, forma el sistema completo de las intersecciones de la curva en cuestión C_n con una curva adjunta, siendo indiferente aquí el orden de ésta. En el sistema de puntos de intersección no comprendemos las intersecciones situadas en los puntos singulares de C_n. Puede, por otra parte suceder que, entre los puntos de G_Q (por ejemplo, en virtud de un contacto de la curva secante con las ramas de la curva primitiva en los puntos singulares), se halle en estos puntos un número de intersecciones superior al número normal. Las que exceden á este número deben contarse entre los $Q + R$ puntos. El grupo de puntos G_R se dice *residual* de G_Q, y recíprocamente.

Llamaremos *corresiduales con relación á* G_Q á dos grupos de puntos G_R y $G_{R'}$ que son residuales de un mismo grupo G_Q, y por consiguiente, pueden ser cortados por dos curvas adjuntas cuyos otros puntos de intersección con C_n se hallan todos en los puntos de Q. Estas curvas pueden ser del mismo orden ó de orden diferente. La importancia de la noción de *corresidualidad* tienen su origen en que, por medio del teorema del resto, se hace precisamente independiente de un residuo especial G_Q.

Ejemplo.—Sea una curva de quinto orden ($n = 5$) con dos puntos dobles ($p = 4$). Todas las cónicas adjuntas que pasan por dos puntos fijos de C_5 (y por dos puntos dobles) cortan á C_5 todavía en otros cuatro puntos. Cada uno de estos grupos G_4 es residual de los dos primeros puntos fijos, y son en número simplemente infinitos, corresiduales respecto al grupo fijo G_2.

126. TEOREMA DEL RESTO.—*Si en una curva algebráica los grupos de puntos* G_R, $G_{R'}$, *son corresiduales entre sí, respecto á un grupo de puntos* G_Q, *son también corresiduales relativamente á cualquier otro grupo de puntos* G_Q, *que es residual de uno de ellos* (por ejemplo de G_R).

Si por ejemplo, tenemos la curva G_5 con dos puntos dobles

($p = 4$) y el haz de curvas adjuntas C_2 que pasa por dos puntos fijos G_2 (y además por los puntos dobles); este haz determina un sistema lineal simplemente infinito de grupos G_4 que son corresiduales respecto á G_2. Pero para el grupo G_4 solo se puede hacer pasar una cónica adjunta; luego, para llegar á un grupo $G_{Q'}$ que sea corresidual del grupo G_2 relativamente á G_4, debemos hacer pasar por G_4 una curva adjunta de orden más elevado, por ejemplo de tercer orden. Esta corta entonces á la curva C_5 en siete puntos que forman un grupo C_7 corresidual de G_2 relativamente á G_4. Ahora, el teorema del resto expresa que por estos puntos G_7 se puede hacer pasar un haz de curvas adjuntas C_3 que determinan sobre C_5 el *mismo* sistema de grupos de puntos G_4 que el determinado antes por medio de un haz de cónicas adjuntas. La curva adjunta C_3 trazada al principio arbitrariamente por uno de los grupos G_4 habría podido elegirse de modo que fuese tangente de G_5 en uno de los cuatro puntos, de manera que un punto del grupo G_7, cortado por ella, habría coincidido con un punto de G_4. Observemos, en general, que *los grupos* G_R, $G_{R'}$, . . . *y los grupos* G_Q, $G_{Q'}$, . . . *pueden contener indiferentemente puntos distintos todos ó parcialmente los mismos.*

Para demostrar el teorema, admitamos que la curva dada C_n sea $f = 0$, y que los grupos de los puntos G_Q y G_R, G_Q y $G_{R'}$, $G_{Q'}$, y G_R estén determinados por $A = 0$, $B = 0$, $\alpha = 0$, respectivamente, siendo estas tres ecuaciones las de las curvas adjuntas á $f = 0$. Tenemos que demostrar que los grupos $G_{Q'}$, y $G_{R'}$ están situados también en la curva adjunta. Se puede, en efecto, hallar siempre las curvas adjuntas

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \text{tales que} \quad \alpha . B = \beta . A + \gamma . f$$

se verifique idénticamente. Porque además de los puntos singulares de f, la curva (reducible)

$\alpha . B = 0$	contiene el grupo de puntos	G_Q, $G_{Q'}$, G_R, $G_{R'}$,
$\gamma . f = 0$	»	G_Q, $G_{Q'}$, $G_{R'}$,
$A = 0$	»	G_Q, G_R.

Por consiguiente, para que $\beta . A$ sea nulo, para todos los puntos raíces comunes de $\alpha . B$ y $\gamma . f$, debe $\beta = 0$ contener necesariamente los grupos $G_{Q'}$ y $G_{R'}$, lo que debía demostrarse.

En el caso de entrar los parámetros linealmente, podemos decir que:

El número de las curvas linealmente independientes entre sí, de un sistema lineal de curvas adjuntas, es igual al número correspondiente relativo á todo sistema equivalente.

Indicaremos además las siguientes proposiciones cuyo estudio detallado puede hacerse en las *Leçons de Géométrie* de Clebsch:

Entre los números q, Q *de un sistema* $g_Q^{(q)}$ *determinado por las intersecciones de las curvas de orden* m *sobre una curva del género* p, *existe la relación:*

Para $m > n - 3 \ldots\ldots\ldots q \geqslant Q - p$,

» $m = n - 2 - r \ldots\ldots q \geqslant Q - p + 1 + \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$,

Entre los 2p − 2 *puntos de intersección de una curva adjunta de orden* n − 3, *si* p > 1, p − 1 *á lo más están determinados por los* p − 1 *restantes, y entre los mismos* q, Q *de un sistema cortado por curvas de esta naturaleza, existe la relación* $q \geqslant Q - p + 1$, y recíprocamente.

Todo sistema lineal q *veces infinito de* g_Q^q *de grupos que comprenden cada uno* Q *puntos, puede ser cortado siempre sobre la curva fundamental* f *por un sistema de curvas adjuntas de orden* n − 3, *con tal que sea*

$$q \geqslant Q - p + 1,$$

condición que excluye el ser Q > 2p − 2.

En particular: *Si un haz* (q = 1) *de curvas adjuntas tiene* p *intersecciones móviles con la curva* f, *todo grupo de tales puntos* p *está situado en una curva adjunta de orden* n − 3.

Un grupo de Q puntos por los que pasa por lo menos una curva adjunta de orden $n - 3$ se llama *grupo especial*. El sistema á que pertenece se llama *especial*.

El sistema g_{2p-2}^{p-1} se llama *canónico. Este no tiene puntos fijos y es único.*

127. Extensión del principio de correspondencia. — *El principio de correspondencia generalizado* fué expuesto por

Cayley y demostrado por Brill. En lo concerniente á las curvas de género cero, no difiere esencialmente del de Chasles. Se agrega al número dado anteriormente un número dependiente del género de la curva C_n. Sea

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

la ecuación de la curva considerada C_n, que supondremos de orden n y género p, y admitamos, por de pronto, que no tengan ningún punto doble ni de retroceso. Sea ahora una ecuación

$$\varphi\begin{pmatrix} r, & s \\ x, & y \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

en virtud de la que á cada punto x del plano corresponde una de curva de orden s, á cada punto y otra orden r. En la curva f tenemos entonces, cuando se verifica simultáneamente que

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(y) = 0,$$

una *correspondencia,* en virtud de la que, á cada punto y de la curva corresponden $a = rn$ puntos x, y á cada punto x de la misma curva, $b = sn$ puntos y. Debe pues suponerse desde luego que *todas las curvas móviles correspondientes á* y *ó á* x *no tienen los mismos puntos fijos comunes,* y que por consiguiente, los puntos a ó b son todos móviles con y ó x. Ahora, la curva de orden $r + s$

$$\varphi\begin{pmatrix} r & s \\ x, & x \end{pmatrix} = 0$$

representa el lugar de un punto tal, que la curva que le corresponde pasa por este mismo punto. Determina pues, en f,

$$(r + s)\, n = a + b$$

puntos, para los que uno de los puntos x que corresponden á y coincide con y, ó recíprocamente. Llamaremos á éstos $a + b$ puntos los *puntos de coincidencia de la correspondencia* φ, expresándose por medio de (a, b) la correspondencia relativamente á φ.

Las consideraciones expuestas dejan de ser exactas cuando la ecuación (3), á consecuencia de $f(x) = 0$ y $f(y) = 0$, queda satisfecha para *todo* punto x ó y de f, es decir, si entre los puntos de intersección de las curvas correspondientes á x, uno ó varios, γ por ejemplo, coinciden con el mismo x, y si entre los puntos de intersección de las curvas, correspondientes á y, δ puntos se hallan en y. Entonces debe ocurrir que $\gamma = \delta$.

Estas consideraciones conducen á obtener *cuántas veces en la correspondencia* $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$ *un punto* y *coincide con uno de los puntos correspondientes* x.

Considerando para $\gamma = 0$ dos correspondencias (a, b) y (a', b')

$$\varphi\begin{pmatrix} r & s \\ x, & y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \varphi'\begin{pmatrix} r' & s' \\ x, & y \end{pmatrix} = 0,$$

hallar el número de pares de puntos x, y situados en f, que satisfagan simultáneamente á las dos correspondencias.

Basta con las nociones expuestas, para dar á conocer los conceptos fundamentales de la Geometría sobre una curva algebráica, pudiéndose acudir para más detalles y para el estudio de sus numerosas aplicaciones, á la obra varias veces citada de Clebsch. Entre éstas citaremos únicamente el enlace de esta rama geométrica con la teoría de las integrales abelianas, expuesta en el tomo III de dicha obra: *Leçons sur la Géométrie*.

§ 6.º NOCIONES DE GEOMETRÍA NUMERATIVA

128. DEFINICIONES.—El problema que se propone la Geometría puede enunciarse como sigue:

Determinar entre los ∞^r *objetos cuya definición se da, el número de los que satisfacen á un número de condiciones equivalentes á* r *condiciones simples.*

Puede considerarse á Chasles como el primer investigador en este orden de ideas; sus varias memorias, así como otras debidas á Jonquières comienzan el primer período de existencia de esta nueva rama geométrica que hoy ha llegado á un estado de gran desarrollo, cuya síntesis se encuentra hecha por el Dr. Hermann Schubert en su *Kalkül der abzählenden Geometrie* (*).

(*) El profesor G. Loria hace un resumen de los descubrimientos de la Geometria numerativa en su obra *Il passato ed il presente delle principali Teorie geometriche.*

No siendo objeto principal de la presente obra el tratar de esta teoría geométrica, nos limitaremos á exponer un resumen de la teoría de las características que Clebsch utiliza, con la elegancia de exposición propia de este notable matemático, en la teoría de las curvas.

129. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.--Este método se halla incluído en la rama geométrica hoy de gran extensión llamada *Geometría numerativa*, cuyo objeto ya se ha indicado.

Un sistema de curvas en número simplemente infinito puede representarse como sigue: Los coeficientes de la curva móvil del conjunto ($f=0$) son funciones algebráicas, no necesariamente racionales, de un parámetro λ. Si esta dependencia es irracional, se pueden siempre expresar los coeficientes *racionalmente* por medio de *dos* parámetros, entre los cuales existe una ecuación algebráica, ó si introducimos un factor de homogeneidad, como funciones homogéneas enteras de λ_1, λ_2, λ_3, ligadas por una ecuación homogénea. Respecto al sistema de curvas, existen dos números de importancia especial, llamados características del sistema, á saber:

μ, el número de las curvas del sistema que pasan por un punto fijo cualquiera.

ν, el número de curvas del sistema que son tangentes á una recta fija dada.

El número μ, cuando los coeficientes de la curva móvil son funciones racionales de un parámetro, se confunde con la dimensión según la que entra este último en la ecuación puntual $f=0$ del sistema. El número ν dará entonces, en general, la dimensión según la que entra este parámetro en la ecuación $\varphi=0$ del sistema en coordenadas-líneas; luego en las curvas de orden n será igual á $2\mu(n-1)$, porque φ es del grado $2(n-1)$ con relación á los coeficientes de f.

Pero ocurren algunas eventualidades, tal es, por ejemplo la de descomponerse una curva de orden n en otra de orden $n-2$ y una recta doble. Entonces las curvas de esta especie, que satisfacen á la ecuación $\varphi=0$, quedan comprendidas en el número $2\mu(n-1)$, mientras que en ν sólo queremos incluir las curvas que tienen un *contacto propiamente dicho*.

Estas eventualidades hacen necesario el tener siempre simultáneamente á la vista las ecuaciones $f=0$, $\varphi=0$. Las *curvas* *singulares*, con ramas que se cuentan varias veces, aparecen en las investigaciones geométricas, cuando se hacen degenerar sucesivamente una curva general.

Por ejemplo, rectas que se cuentan eventualmente varias veces, pueden separarse de una curva, mientras que en la concepción lineal pueden pasar desapercibidas, las cuales se llaman *ramas rectas*.

Estas descomposiciones manifiestan que, para la determinación de los números μ y ν de un sistema, es necesario ante todo conocer completamente las curvas singulares del mismo; y en la determinación de éstas y especialmente en la del orden de multiplicidad de las ramas rectas y de los vértices, se encuentra la principal dificultad del problema.

Explicaremos estas circunstancias con respecto á los *sistemas de cónicas*. En tales sistemas son posibles las curvas siguientes:

1.º En la concepción puntual:

El *par de rectas*, cuyo punto doble es entonces un vértice. La *recta doble*, que es una rama recta y en la que se hallan separados los vértices.

2.º En la concepción lineal:

El *par de puntos*, cuya recta de unión es una rama recta. El *punto doble*, que es un vértice por el que pasan dos ramas rectas separadas.

3.º En los dos puntos de vista, simultáneamente:

La *recta* con un solo punto en ésta.

Determinaremos desde luego el número λ de rectas y π de puntos dobles.

Por todo punto de una recta cualquiera pasan μ curvas del sistema, de las que cada una corta todavía á la recta en un punto y. Igualmente, á todo punto y corresponden μ puntos x en la recta; tenemos por tanto 2μ coincidencias. Estas se producen, bien por el contacto de la recta con una cónica propiamente dicha, bien por la intersección de una recta doble; pero hay ν cónicas propiamente dichas, tangentes á una recta cualquiera, y tenemos por consiguiente

$$\lambda = 2\mu - \nu, \quad \pi = 2\nu - \mu. \tag{1}$$

Por medio de estas ecuaciones se puede determinar las características μ, ν de un sistema por los números λ, π, cuando se conocen éstos. Los números en cuestión se obtendrán por los sistemas dados que se llaman *condiciones elementales,* es decir, si se pide que las cónicas pasen por cuatro puntos dados, ó pasen por tres y sean tangentes á una recta, etc., que designaremos por los símbolos

$$\left(\begin{smallmatrix}**\\**\end{smallmatrix}\right),\ ({}_*{}^*{}_*\,|),\ ({}_{**}\,||),\ ({}_*\,|||),\ (||||)$$

Los valores de μ, ν, λ, π están reunidos en el siguiente cuadro:

	μ	ν	λ	π
$\begin{smallmatrix}**\\**\end{smallmatrix}$	1	2	0	3
${}_*{}^*{}_*\,|$	2	4	0	6
${}_{**}\,||$	4	4	4	4
${}_*\,|||$	4	2	6	0
$||||$	2	1	3	0

Sin entrar en detalles, nos limitaremos á considerar el caso $({}_*{}^*{}_*\,|)$. Tenemos tres puntos fijos A, B, C y la tangente fija u. La hipérbola φ se aproxima á uno de los pares de vértice D.

Vamos á ver cómo en un sistema lineal de curvas, una cónica degenera insensiblemente en un par de rectas ó en un par de puntos.

En un haz debemos considerar un par de rectas como proviniendo de que, en uno de los espacios angulares del par de que se trata, las ramas de una hipérbola se aproximan cada vez más á la forma de un sistema de dos rectas, para en seguida, continuando el movimiento, y después de haber llegado á esta posición límite, alejarse de nuevo en el otro espacio angular.

El par de rectas no se recorre más que una vez en esta circunstancia. Lo mismo sucede para el par de puntos en un sistema de cónicas con cuatro tangentes comunes, por ejemplo, un sistema confocal. Una elipse se estrecha cada vez más alrededor de los puntos del par, hasta que al fin se cubre dos veces en la parte interior de su línea de unión. Entonces, como figura-línea, está representada por dos puntos (vértices).

Si pasamos á la curva inmediatamente próxima, será una hipérbola estrechamente aplicada en las dos partes de la recta que, á partir de los dos puntos tienden hacia el infinito y recubren así doblemente esta parte. En el tránsito sucesivo á otras curvas, las ramas de las hipérbolas forman un ángulo cada vez mayor con la recta doble de que se acaba de tratar. El par de puntos debe evidentemente contarse una sola vez; forma un simple tránsito de las curvas del sistema.

No sucede lo mismo si se trata del sistema $({}_*{}^*{}_*|)$, representado abreviadamente en la figura 120. Aquí A, B, C son tres puntos fijos y u la tangente fija. La hipérbola φ, una de cuyas ramas es tangente á la recta u, se aproxima á uno de los pares citados (cuyo vértice es D), mientras que la otra rama llega á estar infinitamente próxima del otro lado.

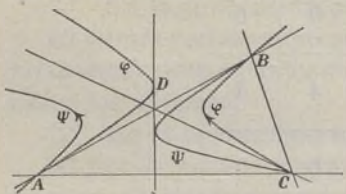


Fig. 120

Cuando ha alcanzado al par de rectas, no pasa la hipérbola con sus ramas á los espacios angulares próximos, sino que vuelve atrás, adquiriendo en la figura la posición de la curva ψ, y aparece en el sistema como un punto de retroceso de una curva algebráica, siendo visible que debe contarse dos veces como curva del sistema.

Para la representación dualística del sistema $({}_{**}||)$, tomemos el punto de intersección de las dos rectas como vértice $u_1 = 0$ del triángulo de las coordenadas y la recta de unión de los dos puntos como lado $x_1 = 0$. Determinemos los demás elementos del triángulo, de modo que los dos puntos dados sean conjugados armónicos de los $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, y al mismo tiempo las rectas dadas sean armónicas con los $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. La ecuación de la cónica es entonces de la forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

siendo $a_{22} : a_{33} = c$ una constante. Igualmente debe ser constante en la ecuación en coordenadas-líneas, la cantidad

$$\frac{a_{11}a_{12} - a^2_{12}}{a_{11}a_{33} - a^2_{13}} = c'$$

y faltar el término $u_2 u_3$, lo que da la ecuación

$$a_{12}a_{13} = 0,$$

y tenemos el teorema: *El sistema de cónicas con dos puntos fijos y dos tangentes fijas es reducible, es decir, se descompone en dos sistemas separados.*

Haciendo $a_{12} = 0$ y

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22} = ca_{33}, \quad \lambda_3 = a_{13},$$

la ecuación de uno de los sistemas se reduce á

$$\lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{c}\lambda_2(cx_2^2 + x_3^2) + 2\lambda_3 x_1 x_3 = 0,$$

con la condición

$$\lambda_1\lambda_2(c - c') + cc'\lambda_3^2 = 0.$$

Luego por todo punto pasan dos cónicas. Lo mismo sucede en el sistema $a_{13} = 0$. Por consiguiente, en este caso $\mu = 4$, y en virtud del principio de dualidad, también $\nu = 4$. Luego, en virtud de (1), $\lambda = \pi = 4$. En efecto, para cónicas desvanecentes, el discriminante

$$\lambda_1\lambda_2^2 - c\lambda_3^2\lambda_2 = 0,$$

es necesariamente nulo, y se tiene

$$\text{ó bien} \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{ó bien} \quad \lambda_1\lambda_2 - c\lambda_3^2 = 0.$$

En el primer caso, por la ecuación de condición (6), se tiene también $\lambda_3 = 0$. En el segundo, (6) se transforma en $\lambda_1\lambda_2 = 0$, de manera que se tiene, bien $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$, lo que constituye el caso precedente, ó bien $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 = 0$. Estas últimas condiciones dan el par de rectas $cx_2^2 + x_3^2 = 0$, que está formado por las rectas que unen los dos puntos fijos á la intersección de las dos tangentes fijas. Las ecuaciones $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, por el contrario, conducen á la *recta doble* $x_1^2 = 0$, que es la recta de unión de los dos puntos fijos. Esta se cuenta dos veces en cada uno de los dos sistemas, y por consiguiente, cuatro en todo; porque para $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, no sólo se anula el discriminante $\lambda_1 \lambda_2^2 - c\lambda_3^2 \lambda_2$, sino que también sus derivadas parciales con relación á λ_1, λ_2 y λ_3 son individualmente nulas. Existe además un vértice que se cuenta cuatro veces (de donde $\pi = 4$), á saber, la intersección de las dos rectas dadas.

Podemos formarnos una idea de la multiplicidad de las curvas singulares por consideraciones geométricas semejantes á las hechas con ocasión del sistema $(_{*}{}^{*}{}_{*}|)$. En las fig. 121, dos cónicas pertenecientes á cada uno de los sistemas, en los que se descompone el $(_{**}||)$, se han representado un poco antes y un poco después de las posición límite indicada por la recta doble AB. Los dos sistemas se distinguen, como se ve, en que en una de las curvas se cortan siempre en cuatro puntos reales, mientras que en el otro no ocurre siempre así. La circunstancia de que la elipse aplanada infinitamente no se extiende como se verificó arriba, de modo que se transforme en una hipérbola, sino que se transforma en elipse infinitamente próxima, sin que las ramas infinitas de la línea doble queden recubiertas por una hipérbola infinitamente aplanada, indica ahora que la recta doble debe contarse dos veces. Se presenta precisamente como un punto de retroceso de una curva algebráica. De una manera completamente análoga se efectúa bajo el punto de vista de la dualidad que existe, en los dos sistemas, la aproximación sucesiva hacia el punto de intersección C de las dos

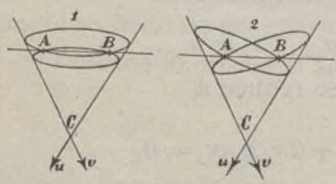


Fig. 121

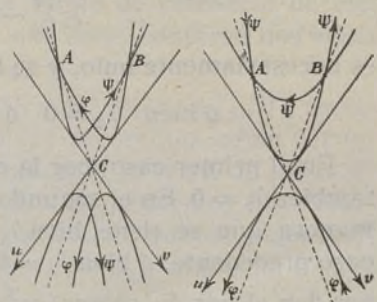


Fig. 122

rectas dadas u y v, lo que se hace visible en la figura 122. Las tangentes de las hipérbolas en los puntos A y B se aproximan siempre cada vez más á las rectas AC y BC, correlativamente á la circunstancia de que en la figura anterior, los puntos de contacto de las elipses tienden cada vez más hacia los puntos de intersección de la recta doble con u y con v.

APENDICE

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CURVAS DE TERCER ORDEN

La ecuación general de una curva de tercer orden contiene homogéneamente dieciseis coeficientes; por consiguiente, dados arbitrariamente nueve puntos en un plano, queda, en general, determinada una cúbica que pase por ellos.

Todas las cúbicas que pasan por ocho puntos del plano, pasan también por un noveno punto, determinado por los primeros.

La cúbica es en general de 6.ª clase y de género 1; tiene nueve puntos de inflexión.

Si la cúbica tiene un punto doble, su género es cero y su clase es la 4.ª Tiene tres puntos de inflexión en línea recta.

Si la cúbica tiene un punto de retroceso, su género es cero, su clase 3.ª y el número de sus inflexiones 1, su ecuación depende de siete constantes.

La recta que une dos de los puntos de inflexión pasa por un tercero.

Los nueve puntos de inflexión se hallan situados tres á tres en 12 rectas, y por cada punto de inflexión pasan cuatro de dichas rectas.

De los nueve puntos de inflexión á lo más tres son reales.

Por los nueve puntos de inflexión de una cúbica pasan infinitas cúbicas con los mismos puntos de infiexión. El haz de estas curvas se llama *sizigético*.

Si una cónica pasa por cuatro puntos fijos de una curva de *tercer grado, la recta que une los otros dos puntos de intersección, pasa por un punto fijo, situado en la curva,* pues hallando la intersección de las dos curvas

$$\alpha\beta - k\alpha'\beta' = 0 \quad \text{y} \quad \alpha\beta\gamma - k'\alpha'\beta'\gamma' = 0,$$

obtendremos que la ecuación $k'\gamma - k'\gamma' = 0$ es la de la recta que une los dos puntos 5.º y 6.º de intersección; y esta ecuación queda satisfecha por las coordenadas de un punto fijo (intersección con la recta que pasa por los puntos 5.º y 6.º) situado en la curva.

Si en los puntos en que una recta cualquiera corta á una curva de tercer grado se trazan tangentes, los tres puntos de intersección de estas tangentes con la curva, se hallan en línea recta, y recíprocamente:

Si desde tres puntos de la curva situados en línea recta, se trazan tangentes á la curva, los puntos de contacto de estas tangentes se hallan situados tres á tres en línea recta.

En efecto, la ecuación $\alpha\beta\gamma - k\alpha'^2\gamma' = 0$ tiene once constantes; una de las cinco rectas es arbitraria. Las tres rectas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ son tangentes y sus puntos de contacto están en $\alpha' = 0$.

El lugar del conjugado armónico de un punto p′ *de la curva es la polar cónica de ésta,* pues siendo la polar cónica el lugar de los puntos dados por

$$\sum \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) + \ldots = 0$$

$$\frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}} + \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}} + \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}} = 0$$

$$\frac{r\,r_3}{r_3 - r} + \frac{r r_2}{r_2 - r} + \frac{r r_1}{r_1 - r} = 0$$

obtendremos $\dfrac{r_1 - r}{r_1} - \dfrac{r_2 - r}{r_2} = 0$ ó $\dfrac{2}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$.

Si p es punto de inflexión, la polar cónica se reduce á dos rectas, una de ellas tangente á la curva. El lugar es la segunda recta. Así: *El lugar de un punto conjugado armónico de un punto de inflexión es una recta,* pues siendo la ecuación de la polar cónica

$$(x_0 D_x + y_0 D_y + z_0 D_z) f(x, y, z) = 0$$

ó $$(\alpha_0 D_\alpha + \beta_0 D_\beta + \gamma_0 D_\gamma) f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

escribiéndola bajo la forma $\alpha\beta\gamma - k\delta^3 = 0$, la ecuación de la polar cónica será

$$\alpha_0 \beta\gamma + \beta_0 \gamma\alpha + \gamma_0 \alpha\beta - 3k\delta_0 \delta = 0;$$

y cuando el polo coincide con un punto de inflexión ($\alpha_0 = 0$, $\delta_0 = 0$), esta ecuación se reduce á $\alpha(\beta_0 \gamma + \gamma_0 \beta) = 0$, que representa dos rectas.

La consideración de la polar armónica conduce á los siguientes

TEOREMAS: 1.º *Las rectas que unen los extremos de dos rayos trazados por el polo, se cortan en la polar.*

2.º *Las tangentes trazadas por los extremos de un rayo que pasa por el polo se cortan en la polar.*

3.º *La polar armónica pasa por los puntos de contacto de las tres tangentes trazadas por un punto de inflexión.*

FIN DEL TOMO TERCERO

ÍNDICE DEL TOMO TERCERO

PÁGINA

ERRATAS DEL TOMO TERCERO

Página	Linea	Dice	Debe decir
XXIV	8	$\lambda,$	γ_1
44	5	y	Y
45	3 y 4	suprímase	cuaciones . . . las
47	11	tangente MT	normal MN
47	12	normal MN	tangente MT
60	13	$\frac{x}{1}$	$\frac{1}{x}$
61	4	Y =	Y —
66	9	tiene MM′ I	tiene
67	23	L′	P
68	18	2.ª	9.ª
69	8	L	A
69	14	M	M′
92	2	tendremos $\frac{dy}{dx}$	tendremos
92	3	y^2	y^3