SERRET

TRIGONOMETRIE

TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA

POR

J. A. SERRET

MIEMBRO DEL INSTITUTO,
PROFESOR DEL COLEGIO DE FRANCIA Y DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE PARÍS

TRADUCIDA DE LA QUINTA EDICION FRANCESA

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE M. M. DE LOS RIOS
calle de Sombrerería, núm. 6
1879

ADVERTENCIA.

El primer capítulo contiene los primeros elementos de la teoría de las funciones circulares; el segundo se refiere á la construccion y uso de las Tablas trigonométricas; los dos capítulos siguientes contienen la Trigonometría propiamente dicha, es decir, la reunion de principios sobre los cuales está fundada la resolucion de los triángulos rectilíneos ó esféricos. Estos cuatro capítulos contienen la parte elemental de esta obra. En el capítulo quinto se da un complemento bastante extenso de la Teoría de las funciones circulares, tan útil en las partes superiores de las Matemáticas. Por último, el sexto capítulo, con el que termina la obra, está dedicado al desarrollo de soluciones trigonométricas fundadas en el empleo de las séries; estas soluciones se refieren á diferentes casos que se presentan frecuentemente en la Astronomía y en la Geodesia, y para los cuales los métodos generales son insuficientes.

TRATADO

DE

TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO PRIMERO.

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.

Definicion de la palabra funcion.

1. Cuando dos magnitudes *variables* son tales, que á cada valor de la una corresponde un valor determinado de la otra, se dice que estas magnitudes son *funcion* una de otra. Por ejemplo, en un círculo, la circunferencia y la superficie son funciones del rádio; y recíprocamente, el rádio es funcion de la circunferencia ó de la superficie.

La *Trigonometría* está fundada en la teoría de ciertas funciones que nacen de la consideracion del círculo, y que por esta razon se llaman *funciones circulares*. Empezaremos por exponer los elementos de esta teoría.

De la medida de las longitudes.

2. Sea O (fig. 1.ª) un punto fijo de una línea $x'x$ recta ó curva, y supongamos que á partir del punto O se toman sobre $x'x$ diversas longitudes OA, OA', OA''.....; comparadas estas longitudes con una misma unidad, y representadas por números, daremos á estos números el signo $+$ ó el signo $-$, segun que las longitudes que expresen se lleven en un sentido ó en otro. En otros términos, las longitudes conta-

das en un sentido (siendo arbitrario este sentido), serán cantidades *positivas* y las otras *negativas*.

Si, por ejemplo, se conviene en que el sentido de las longitu-

(Fig. 1.ª)

des positivas sea el de Ox indicado por la flecha, y que los puntos A, A', A'', estén situados respectivamente á 7, 9, 6 metros del punto O, tomando el metro por unidad lineal, las longitudes OA, OA', OA'' estarán representadas por $+7$, $+9$, -6. Sea a una cantidad positiva ó negativa que exprese una longitud cualquiera tomada sobre $x'x$ á partir del punto O; el número de unidades contenidas en esta longitud será $+a$ ó $-a$, segun que a sea positiva ó negativa.

Segun esto, supongamos un punto móvil que, partiendo del punto O, se mueva, ya en un sentido ya en otro; las diversas partes de $x'x$ descritas por el móvil, se considerarán como positivas ó negativas, segun que el móvil marche en la direccion Ox, ó en la opuesta Ox'; designemos por a, b, c, d..... las cantidades positivas ó negativas que expresan las longitudes recorridas por el móvil, por x la cantidad que indica la distancia del punto O al en que se detiene el móvil, tendremos, por consiguiente, para todos los casos, $x = a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots$

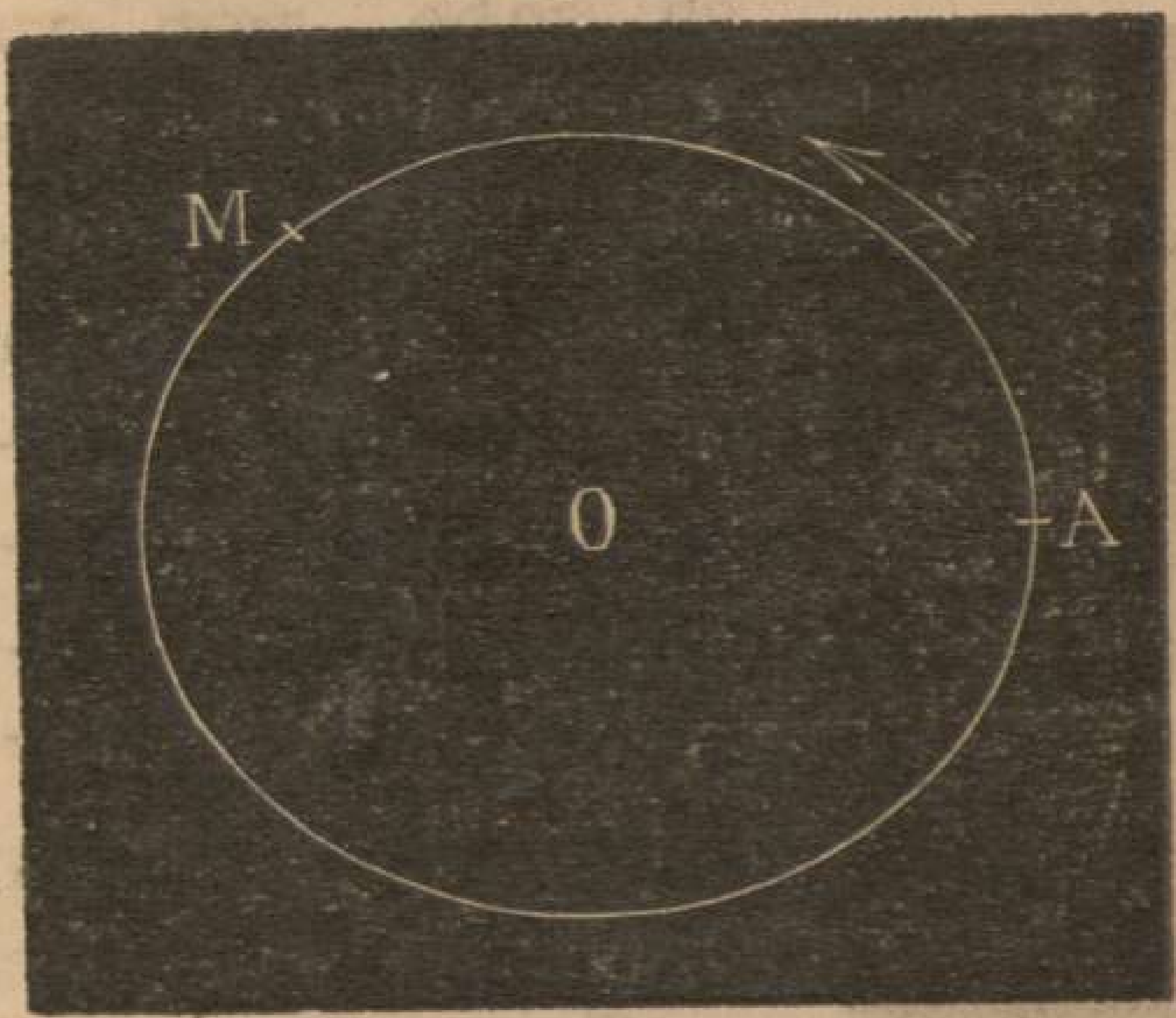
De los arcos de círculo.

3. Al estudiar las funciones que nacen de la consideracion del círculo, el rádio se considera siempre igual á la unidad lineal.

Sea O (fig. 2.ª) un círculo en el cual representaremos su circunferencia por 2π, y el cuadrante por $\frac{\pi}{2}$. Sea A un punto fijo de la circunferencia, M un punto móvil que sale del punto

A y se mueve en el sentido (AM) (indicado por la flecha) y que adoptaremos para los *arcos positivos:* el arco AM es nulo al empezar el movimiento; aumenta sucesivamente, y su valor será 2π cuando el móvil vuelva al punto de partida. Podemos suponer que el móvil continúe marchando indefinidamente, de modo que el arco descrito en su movimiento se compondrá de un número indefinido de circunferencias. Si el punto M se mueve en sentido contrario al anterior, el arco descrito será negativo, pero su *valor absoluto* pasa por todos los estados de magnitud á partir de cero. Así, pues, el arco de círculo es una cantidad susceptible de pasar por todos los valores comprendidos entre $+\infty$ y $-\infty$.

(Fig. 2.ª)



Se llama *orígen del arco* AM el punto fijo A.

Representemos por φ un arco terminado en M, todos los arcos x que terminen en el mismo punto se expresarán por la fórmula $x = 2K\pi + \varphi$ siendo K un número entero indeterminado, positivo, nulo ó negativo; porque es evidente que dos arcos que, teniendo el mismo orígen y terminando en un mismo punto, no pueden diferir más que en un número exacto de circunferencias.

4. *Arcos complementarios y suplementarios.*

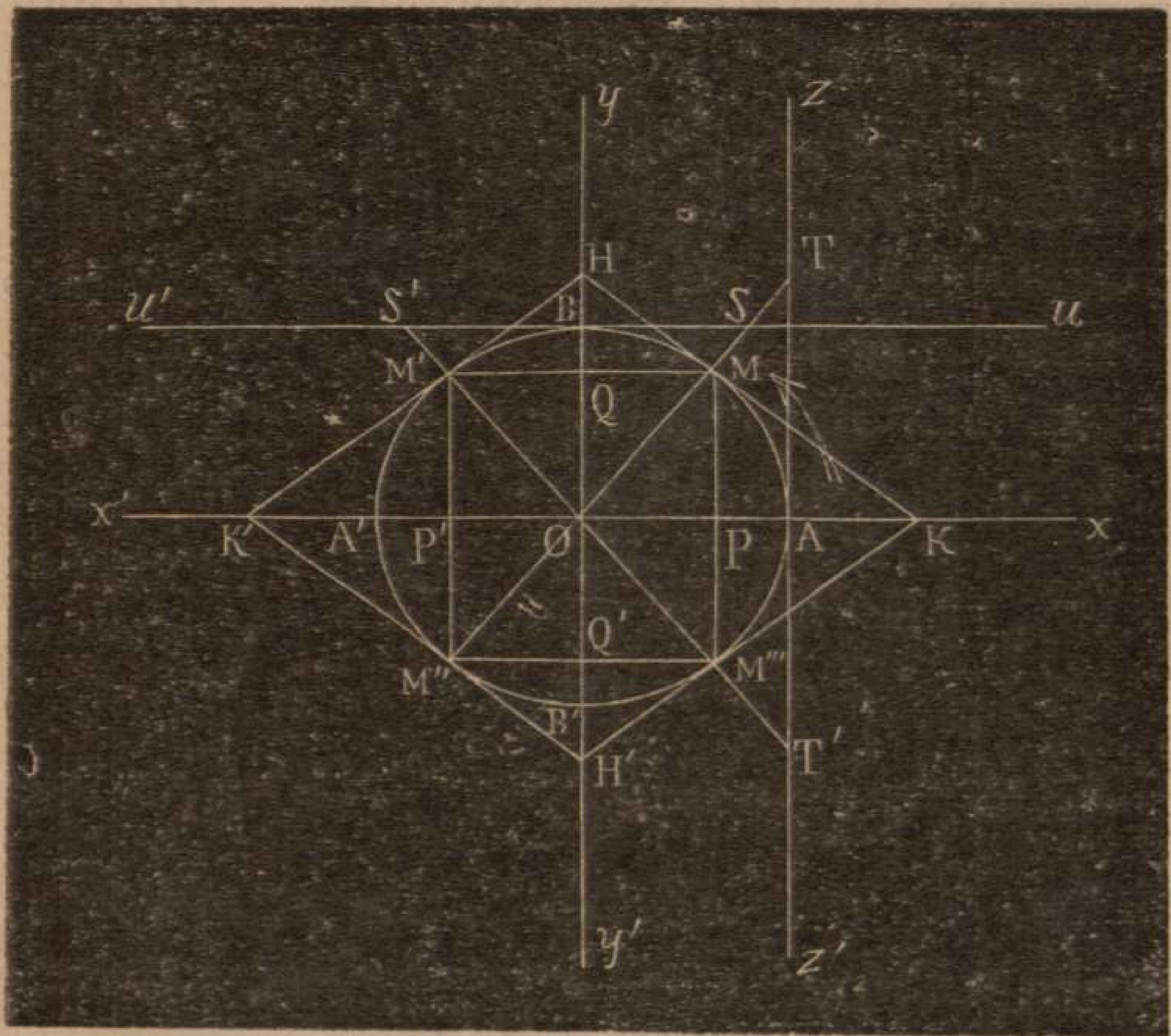
Dos arcos, ambos positivos, ó uno positivo y otro negativo, se llaman *complementarios* cuando su suma es igual á un cuadrante; y *suplementarios* cuando su suma es igual á una semicircunferencia.

Definicion de las líneas trigonométricas.

5. Trazando por el centro del círculo O (fig. 3.ª) dos rectas perpendiculares entre sí, Ox y Oy, que cortan á la circunferencia la primera en el punto A y la segunda en el punto B;

trazando despues por los puntos A y B las rectas Az y Bu respectivamente paralelas á Oy y Ox, y dirigidas en el mismo sentido que estas; se sabe, por un teorema de Geometría, que las rectas Az y Bu son tangentes á la circunferencia. Prolonguemos las rectas Ox, Oy, Az y Bu, segun Ox', Oy', Az' y Bu'.

(Fig. 3.ª)



Tomemos el punto A por orígen de los arcos; los positivos se contarán en el sentido AB. Además, segun lo establecido en el núm. 2, las longitudes tomadas á partir del punto O sobre $x'x$ ó sobre $y'y$ serán positivas si se consideran en el sentido de Ox ó de Oy; al contrario, serán negativas si se llevan en el sentido Ox' ú Oy'. Igualmente, las longitudes tomadas sobre $z'z$ á partir del punto A, ó sobre $u'u$ á partir del punto B, serán positivas si se cuentan en el sentido de Az ó de Bu; al contrario, serán negativas si se toman en el sentido de Az' ó de Bu'.

Esto supuesto, designemos por x la cantidad positiva ó negativa que representa el arco variable terminado en M; bajemos la MP perpendicular á $x'x$, y MQ perpendicular á $y'y$; prolonguemos el rádio OM que corta en S á $u'u$ y en T á $z'z$; por último, tracemos por el punto M la HK que corta á $y'y$ en H y á $x'x$ en K: la recta OQ ó su igual MP, tomada con el signo que la corresponde, es el *seno* del arco x; las rectas AT y OK tomadas igualmente con los signos correspondientes, son la *tangente* y la *secante* del arco x.

Podemos, pues, establecer las siguientes definiciones:

El seno de un arco es la cantidad positiva ó negativa que mide la perpendicular bajada desde el extremo del arco al rádio ó diámetro que pasa por el orígen.

La tangente es la cantidad positiva ó negativa que mide la parte de tangente geométrica comprendida entre el orígen del arco y el rádio ó diámetro prolongado que pasa por el extremo.

La secante es la cantidad positiva ó negativa que mide la parte de diámetro que pasa por el orígen, comprendida entre el centro y la tangente trazada por la extremidad del arco. (*)

El coseno, la cotangente y la cosecante de un arco, son respectivamente el seno, la tangente y la secante del arco complementario.

Designemos por x un arco cuyo orígen es A y su extremo M; el punto B se toma por orígen de los complementos, y los arcos positivos de esta especie se cuentan positivamente en el sentido BA (contrario al indicado por la flecha). El arco x y su complemento tienen el punto M por extremidad; en efecto, $x = AM$, complemento igual á $\frac{\pi}{2} - x$, es decir, á $AB - AM$ igual á BM.

De donde se deduce que el coseno del arco x es MQ ó su igual OP, y la cotangente y cosecante son respectivamente la BS y OH, tomadas cada una de estas líneas con el signo que la corresponde.

El seno, la tangente, la secante, el coseno, la cotangente y la cosecante de un arco x se representan por las notaciones

$$\text{sen } x,\ \text{tang } x,\ \text{sec } x,\ \cos x,\ \cot x,\ \text{cosec } x,$$

y se las denomina *líneas trigonométricas* ó *funciones circulares*.

(*) Otros autores definen la secante, diciendo que: secante es la parte de diámetro que, pasando por el extremo del arco, está comprendida entre el centro y la tangente, trazado por el orígen.

Variacion de las líneas trigonométricas.

6. Vamos á examinar de qué modo varían las líneas trigonométricas de un arco x, cuando este arco varía entre o y $+\infty$ y entre o y $-\infty$.

Creciendo x desde o hasta $+\frac{\pi}{2}$, sus líneas trigonométricas permanecen positivas; sen x crece de o á $+1$ pasando por todos los valores intermedios; tang x crece de o á $+\infty$, y secante de x crece de 1 á $+\infty$.

Las líneas del complemento van, al contrario, decreciendo; cos x de 1 á o, cot x de $+\infty$ á o y cosec $+\infty$ á $+1$. Así, pues, designando por Σ un arco susceptible de decrecer hasta o, tendremos, sen $o = o$, tang $o = o$, sec $o = +1$, cos $o = +1$, cot lim. $\Sigma = +\infty$, cos lim. $\Sigma = +\infty$: y sen $\frac{\pi}{2} = +1$, tang lim. $\left(\frac{\pi}{2} - \Sigma\right) = +\infty$, sec lim. $\left(\frac{\pi}{2} - \Sigma\right) = +\infty$, cos $\frac{\pi}{2} = o$, cot $\frac{\pi}{2} = o$, cosec $\frac{\pi}{2} = +1$.

Si x aumenta de $+\frac{\pi}{2}$ á $+\pi$, el seno y la cosecante permanecen positivos; pero las otras cuatro líneas son negativas, el seno disminuye de $+1$ á o, la tangente crece de $-\infty$ á o, la secante de $-\infty$ á -1, el coseno decrece de o á -1, la cotangente de o á $-\infty$ y la cosecante crece de $+1$ á $+\infty$. Tendremos, pues,

$$\text{tang lim.} \left(\frac{\pi}{2} + \Sigma\right) = -\infty,$$

$$\text{sec lim.} \left(\frac{\pi}{2} + \Sigma\right) = -\infty$$

$$\text{sen } \pi = o, \text{ tang } \pi = o, \text{ sec } \pi = -1,$$

$$\cos \pi = -1, \text{ cot lim. } (\pi - \Sigma) = -\infty, \text{ cosec lim. } (\pi - \Sigma) = +\infty.$$

Si x crece de $+\pi$ á $+\frac{3\pi}{2}$, tang x y cot x son positivas, pero las demás líneas trigonométricas negativas; sen x decrece de o á -1; tang x crece de o á $+\infty$; sec x disminuye de -1 á $-\infty$; cos x crece de -1 á o; cot decrece de $+\infty$ á o, y cosec x crece de $-\infty$ á -1. Tendremos, pues,

$$\cot \lim. (\pi + \Sigma) = +\infty,$$
$$\cos \lim. (\pi + \Sigma) = -\infty$$

y

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1, \text{ tang lim. } \left(\frac{3\pi}{2} - \Sigma\right) = +\infty,$$

$$\sec \lim. \left(\frac{3\pi}{2} - \Sigma\right) = -\infty,$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = o, \cot \frac{3\pi}{2} = o, \text{ cosec } \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Si x crece desde $\frac{3\pi}{2}$ á 2π, cos x y sec x son positivas, pero las otras cuatro líneas trigonométricas negativas; sen x crece de -1 á o; tang x crece de $-\infty$ á o; sec x disminuye de $+\infty$ á $+1$; cos x crece de o á $+1$; cot x decrece de o á $-\infty$, y cosec x disminuye de -1 á $-\infty$. De modo, que

$$\text{tang lim. } \left(\frac{3\pi}{2} + \Sigma\right) = -\infty,$$

$$\sec \lim. \left(\frac{3\pi}{2} + \Sigma\right) = +\infty$$

y $$\operatorname{sen} 2\pi = o, \text{ tang } 2\pi = o, \sec 2\pi = +1,$$

$$\cos 2\pi = +1, \cot \lim. (2\pi - \Sigma) = -\infty, \text{ cosec lim. } (2\pi - \Sigma) = -\infty.$$

Si hacemos crecer á x de 2π á 4π, ó de 4π á 6π, y así sucesivamente, las seis líneas trigonométricas vuelven á tomar periódicamente los mismos valores y en el mismo órden.

Si x disminuye desde o á $-\infty$, cos x y sec x pasan por los mismos valores que cuando x crece de o á $+\infty$; las otras cuatro líneas trigonométricas pasan tambien por los mismos valores absolutos que cuando x crecia de o á $+\infty$, pero los signos son contrarios. Esto se ve inmediatamente, observando que las extremidades de dos arcos x y $-x$ iguales y de signos contrarios están situados á un mismo lado de yy' y á distancias iguales de xx'. De modo, que cualquiera que sea el valor de x, tendremos:

$$\text{sen}\ (-x) = -\text{sen}\ x,\ \text{tang}\ (-x) = -\text{tang}\ x,\ \text{sec}\ (-x) = \text{sec}\ x,$$

$$\cos\ (-x) = \cos\ x,\ \cot\ (-x) = -\cot\ x,\ \text{cosec}\ (-x) = -\text{cosec}\ x;$$

y, puesto que las líneas trigonométricas no varían cuando se añade al arco un número cualquiera de circunferencias, tendremos cualquiera que sea x, y designando por K un número entero positivo ó negativo,

$$\text{sen}\ (2K\pi + x) = \text{sen}\ x,\ \text{tang}\ (2K\pi + x) = \text{tang}\ x,\ \text{sec}\ (2K\pi + x) = \text{sec}\ x,$$

$$\cos\ (2K\pi + x) = \cos\ x,\ \cot\ (2K\pi + x) = \cot\ x,\ \text{cosec}\ (2K\pi + x) = \text{cosec}\ x.$$

7. Sea x un arco cualquiera positivo ó negativo. Los dos arcos x y $x + \pi$ terminan evidentemente en los extremos de un mismo diámetro; por consiguiente, sus senos, sus cosenos, sus secantes y sus cosecantes son iguales y de signos contrarios, mientras que sus tangentes y sus cotangentes son iguales y del mismo signo. Tendremos, pues,

$$\text{sen}\ (\pi + x) = -\text{sen}\ x,\ \text{tang}\ (\pi + x) = \text{tang}\ x,\ \text{sec}\ (\pi + x) = -\text{sec}\ x,$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x,\ \cot(\pi + x) = \cot x,\ \operatorname{cosec}(\pi + x) = -\operatorname{cosec} x.$$

Las funciones tang. x y cot. x no cambian cuando x aumenta en media circunferencia; entonces las funciones se llaman periódicas, siendo π la *amplitud del periodo* ó simplemente el período. Las otras cuatro líneas trigonométricas son tambien funciones periódicas de x, pero en este caso el período es 2π; sabemos efectivamente que las líneas trigonométricas no cambian cuando x aumenta en un múltiplo de la circunferencia. Las ecuaciones anteriores nos dicen que sen x, cos x, sec x y cosec x no hacen más que cambiar de signo, cuando x aumenta el semi-período π.

Si en las ecuaciones precedentes se cambia x en $-x$, se deduce, comparándolas con las del número anterior,

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x,\ \operatorname{tang}(\pi - x) = -\operatorname{tang} x,\ \sec(\pi - x) = -\sec x,$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x,\ \cot(\pi - x) = -\cot x,\ \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x.$$

De aquí deducimos que, si dos arcos son suplementarios, sus senos y sus cosecantes son iguales y del mismo signo, mientras que sus cosenos, sus tangentes, sus cotangentes y sus secantes son iguales y de signos contrarios.

De los dos grupos precedentes de ecuaciones se deduce inmediatamente, designando por K un entero positivo ó negativo,

$$\operatorname{sen}[(2K+1)\pi \pm x] = \mp \operatorname{sen} x,\ \operatorname{tang}(K\pi \pm x) = \pm \operatorname{tang} x,\ \sec[(2K+1)\pi \pm x] = -\sec x,$$

$$\cos[(2K+1)\pi \pm x] = -\cos x,\ \cot(K\pi \pm x) = \pm \cot x,\ \operatorname{cosec}[(2K+1)\pi \pm x] = \mp \operatorname{cosec} x.$$

8. De la discusion del núm. 6 resulta que el seno y el coseno están comprendidos entre los límites $+1$ y -1; la secante y la cosecante pasan por todos los estados de magnitud comprendidos entre $+1$ y $+\infty$, ó entre -1 y $-\infty$; por último, la tangente y la cotangente toman todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$.

Es muy importante observar que cada una de las líneas trigonométricas de un arco x toma todos los valores de que es susceptible, cuando x varía solo en el intervalo de dos cuadrantes. De modo que, cuando x varía de $-\frac{\pi}{2}$ á $+\frac{\pi}{2}$, el seno, la tangente, la cotangente y la cosecante toman todos los valores de que estas líneas trigonométricas son susceptibles; y si x varía de o á π, el coseno, la tangente, la cotangente y la secante toman todos los valores de que estas líneas son susceptibles. Por último, si no consideramos más que los valores absolutos, las seis líneas trigonométricas pasan por todos sus valores cuando el arco x varía de o á $\frac{\pi}{2}$ ó de $\frac{\pi}{2}$ á π, y así sucesivamente.

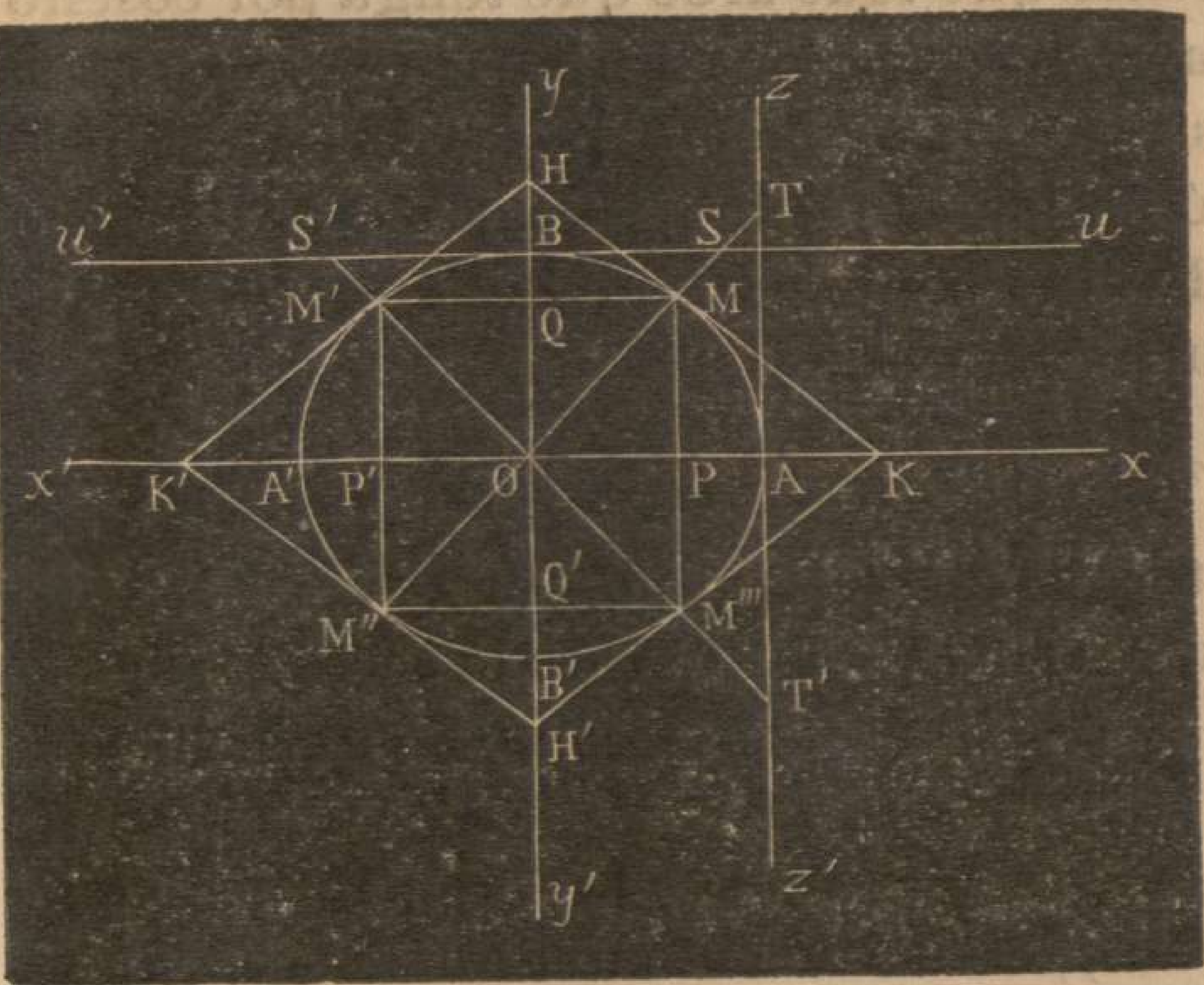
Tenemos frecuentemente necesidad de, siendo dado un arco x, encontrar el arco comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$ que, haciendo abstraccion de los signos, tiene las mismas líneas trigonométricas que x. Es suficiente para esto quitar de x el mayor múltiplo positivo ó negativo de la semi-circunferencia que pueda contener, de manera que el resto positivo ó negativo $\pm\varphi$ sea en valor absoluto menor que $\frac{\pi}{2}$; el arco φ tendrá, haciendo abstraccion de los signos, las mismas líneas trigonométricas que x.

De los arcos que corresponden á una línea trigonométrica dada.

9. De lo que precede resulta que á cada valor del arco comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$ corresponde un valor único y determinado para cada una de sus líneas trigonométricas, mientras que á cada valor determinado de una de las líneas trigonométricas corresponde una infinidad de valores del arco. Siendo muy importante saber determinar el valor de cada uno de los arcos que corresponden á una línea trigonométrica dada, cuando se conoce uno de los arcos vamos á dar la solucion de este problema. Sea, como anteriormente, A el orígen de los arcos; $y'y$ la línea sobre la cual se toman los senos y las cosecantes; $x'x$ sobre la que se cuentan los cosenos y las secantes; $z'z$ y $u'u$ las en que se toman respectivamente las tangentes y las cotangentes.

Senos y cosecantes.—Sea $+OQ$ ó $-OQ'$ un seno dado (figura 4.ª); trazemos por el punto Q ó Q' una paralela á OA; esta paralela cortará á la circunferencia en dos puntos M y M' ó M'' y M''', y es evidente que todo arco cuyo seno sea igual al dado tiene uno de estos cuatro puntos por extremidad; designemos por φ uno cualquiera de estos arcos; digo que los arcos φ y $\pi - \varphi$ tendrán por extremidad M y M', ó M'' y M'''; en efecto, supongamos que φ termine en M: para describir el arco $\pi - \varphi$, hay que tomarle en el sentido ABA'; solo falta describir el arco $-\varphi$, para lo cual no hay más que describir el arco $+\varphi$ y por su extremo M trazar una paralela á $x'x$, siendo de este modo el extremo de $-\varphi$ el punto M'. Esto supuesto, todo arco x que corresponda al seno dado, tiene la misma extremidad que uno de los arcos φ ó $\pi - \varphi$; se tiene, pues (núm. 3), designando por K un entero positivo, nulo ó negativo,

(Fig. 4.ª)



$$x = 2K\pi + \varphi, \text{ ó } x = 2K\pi + \pi - \varphi = (2K+1)\pi - \varphi.$$

Sea, en segundo lugar, $+OH$ ó $-OH'$ una cosecante dada; si por el punto H ó H' se trazan dos tangentes á la circunferencia, los puntos de contacto M y M' ó M'' y M''' serán las extremidades de los arcos que corresponden á la cosecante dada. Si pues designamos por x y φ dos cualesquiera de estos arcos, se tendrá como anteriormente

$$x = 2K\pi + \varphi, \text{ ó } x = (2K + 1)\pi - \varphi.$$

Cosenos y secantes.—Sea $+ OP$ ó $- OP'$ un coseno dado; trazando por el punto P ó P' una perpendicular á OA, esta perpendicular cortará á la circunferencia en dos puntos M y M''' ó M' y M'', siendo evidente que todo arco que tenga por coseno al dado, terminará en uno de estos dos puntos: llamemos φ á uno cualquiera de estos arcos. Los arcos $+ \varphi$ y $- \varphi$ terminan en los puntos M y M''' ó en los M' y M''; y todo arco x cuyo coseno sea el dado, tendrá la misma extremidad que uno de los arcos $+ \varphi$ ó $- \varphi$; por tanto, tendremos

$$x = 2K\pi + \varphi, \text{ ó } x = 2K\pi - \varphi,$$

siendo K un número entero positivo, nulo ó negativo.

Supongamos ahora que $+ OK$ ó $- OK'$ es la secante que se nos da; si por los puntos K ó K' se trazan dos tangentes á la circunferencia, los puntos de contacto M y M''' ó M' y M'' serán los extremos de los arcos cuya secante sea la dada. Designando por x y φ dos de estos arcos, tendremos como antes,

$$x = 2K\pi + \varphi, \text{ ó } x = 2K\pi - \varphi.$$

Tangentes y cotangentes.—Sea una tangente dada la $+ AT$ ó la $- AT'$, ó una cotangente cuyo valor conocemos la $+ BS$ ó $- BS'$; trazemos por el centro del círculo y por la extremidad de la tangente ó de la cotangente dada una recta, que cortará á la circunferencia en dos puntos M y M'' ó M' y M''', siendo evidente que todo arco que tenga por tangente ó cotangente la dada, terminará en uno de estos puntos; designemos por φ dicho cualquier arco. Los arcos $+ \varphi$ y $\pi + \varphi$ evidentemente terminan en los puntos M y M'' ó M' y M''', y todo arco x cuya tangente ó cotangente sea la dada, tiene la misma extremidad de uno de los arcos φ y $\pi + \varphi$; tendremos, por consiguiente,

$$x = 2K\pi + \varphi, \text{ ó } x = 2K\pi + \pi + \varphi = (2K + 1)\pi + \varphi$$

ó simplemente

$$x = K\pi + \varphi$$

designado por K un número entero positivo, nulo ó negativo.

* Tenemos, pues, que los arcos que corresponden á una línea trigonométrica dada tienen por expresion, cuando se nos da el seno ó la cosecante (1) $x = 2K\pi + \varphi$ ó $x = (2K + 1)\pi - \varphi$ (2); si la línea conocida es el coseno ó la secante, se expresan por $x = 2K\pi + \varphi$ (3), ó $x = 2K\pi - \varphi$ (4); y si conocemos la tangente ó la cotangente, el valor del arco estará expresado por $x = K\pi + \varphi$ (5).

Consideremos las fórmulas (1) y (2); si damos á K los valores K' y K'' y los sustituimos, primero ambos en (1), y restamos los valores de x que así nos resulten, obtendremos la fórmula (*a*).

Sustituyéndolos despues en (2) y hallando, como antes, la diferencia entre los valores así obtenidos, nos resulta el valor (*b*).

Reemplazando á K por K' en (1) y por K'' en (2), ó vice-versa, y sumando los valores así abtenidos, deduciremos la fórmula (*c*).

Operando de una manera idéntica con las fórmulas (3) y (4), obtendremos las (*d*), (*e*) y (*f*).

Y por último, sustituyendo en (5) en vez de K sus valores K' y K'' y restando los valores resultantes, obtendremos (*g*).

Lo que acabamos de exponer, puede verse en el cuadro siguiente:

Senos y cosecantes.. ....

$$\left.\begin{array}{l} x = 2K\pi + \varphi \ (1) \\ x = (2K + 1)\pi - \varphi \ (2) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2K'\pi + \varphi \\ 2K''\pi + \varphi \end{array}\right\} 2K'\pi - 2K''\pi = 2(K' - K'')\pi = 2K'''\pi, \ (a)$$

$$\left.\begin{array}{l} (2K' + 1)\pi - \varphi \\ (2K'' + 1)\pi - \varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2K' + 1)\pi - (2K'' + 1)\pi = \\ 2K'\pi + \pi - 2K''\pi - \pi = \\ 2(K' - K'')\pi = 2K'''\pi, \ (b). \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2K'\pi + \varphi \\ (2K'' + 1)\pi - \varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2K'\pi + (2K'' + 1)\pi = 2K'\pi \\ + 2K''\pi + \pi = 2K'''\pi + \pi \\ = (2K''' + 1)\pi, \ (c). \end{array}$$

$$\text{Cosenos y secantes.......}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x = 2\,K\pi + \varphi\ (3)\\ x = 2\,K\pi - \varphi\ (4)\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}2K'\pi + \varphi\\ 2K''\pi + \varphi\end{array}\right\}\begin{array}{l}2\,K'\pi - 2\,K''\pi = 2\,(K' - K'')\,\pi =\\ \quad 2K'''\pi,\ (d).\end{array}\\ \left.\begin{array}{l}2K'\pi - \varphi\\ 2K''\pi - \varphi\end{array}\right\}2\,K'\pi - 2K''\pi = 2K'''\pi,\ (e).\\ \left.\begin{array}{l}2K'\pi + \varphi\\ 2K''\pi - \varphi\end{array}\right\}\begin{array}{l}2\,K'\pi + 2\,K''\pi = 2\,(K' + K'')\,\pi =\\ \quad 2\,K'''\pi,\ (f).\end{array}\end{array}\right.$$

$$\text{Tangentes y cotangentes....}\left\{\begin{array}{l}x = K\pi + \varphi\ (5).\\ \left.\begin{array}{l}K\pi + \varphi\\ K''\pi + \varphi\end{array}\right\}K'\pi - K''\pi = (K' - K'')\,\pi = K'''\pi.\ (g).\end{array}\right.$$

Estudiando detenidamente las fórmulas (a), (b), (c), (d), (e), (f) y (g), se deduce que: *para que dos arcos tengan el mismo seno ó la misma cosecante, es necesario y suficiente, ó que su suma sea un múltiplo impar de la semi-circunferencia, ó que su diferencia sea un múltiplo par de la semi-circunferencia.*

Para que dos arcos tengan el mismo coseno ó la misma secante, es necesario y suficiente que su suma ó su diferencia sea un múltiplo de la circunferencia.

Para que dos arcos tengan la misma tangente ó la misma cotangente, se necesita y basta que su diferencia sea un múltiplo de la semi-circunferencia.

10. Cuando se establece $y =$ sen x, $y =$ tang x, $y =$ sec. x, ...; se escribe $x =$ arco sen y, $x =$ arco tang y, $x =$ arco sec y .....; lo cual quiere decir $x =$ *al arco cuyo seno es* y, $x =$ *al arco cuya tangente es* y .....; pero segun lo que antes hemos dicho, se ve que las expresiones *arco sen* y, etc., son indeterminadas, por admitir una infinidad de valores para cada valor de y. Las cuatro expresiones arc sen y, arc tang y, arc cot y, arc cosec y, están completamente determinadas, si se especifica que sus valores están constantemente comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$; de idéntica manera las expresiones arc cos y, y arc sec y, estarán bien determinadas, cuando se nos diga que sus valores están constantemente comprendidos entre o y π. Con esta restriccion, las seis expresiones

$$\text{arc sen } y,\ \text{arc tang } y,\ \text{arc sec } y,\ \text{arc cos } y,\ \text{arc cot } y,\ \text{arc cosec } y,$$

pueden considerarse como funciones de y; en este concepto se emplean en las partes superiores de las Matemáticas, y se les da el nombre de *funciones circulares inversas*. Por oposicion, á las líneas trigonométricas se les da comunmente el nombre de *funciones circulares directas*.

Relaciones entre las líneas trigonométricas de un mismo arco.

11. Estableceremos, ante todo, las cinco relaciones distintas que existen entre las seis líneas trigonométricas de un arco.

Sea x (fig. 5.ª) un arco positivo ó negativo que termina en un punto M del primer cuadrante AB, tendremos:

$$OM = 1$$

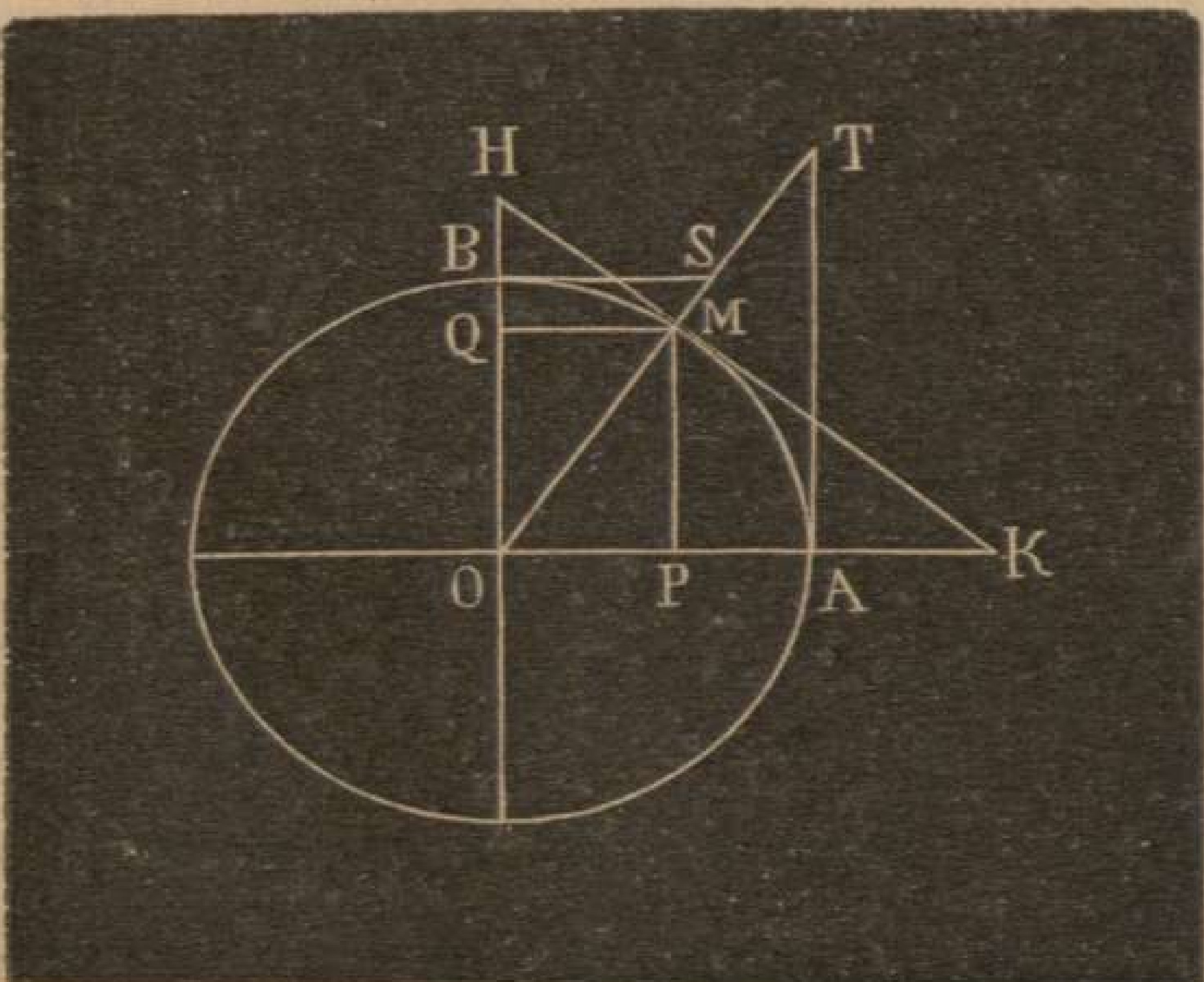
$$\text{sen } x = MP,\ \text{tang } x = AT,\ \text{sec } x = OH,$$

$$\cos x = OP,\ \cot x = BS,\ \text{cosec } x = OK.$$

Esto supuesto, el triángulo OMP da $\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2$; los triángulos rectángulos MOK y MOH nos dan tambien $OK \times OP = \overline{OM}^2$, $OH \times OQ = \overline{OM}^2$; por último, los triángulos semejantes TOA y MOP, BOS y MOQ dan

$$\frac{TA}{OA} = \frac{MP}{OP},\ \frac{SB}{OB} = \frac{MQ}{OQ}.$$

(Fig. 5.ª)



Estas cinco igualdades pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

$$\text{sec } x \cos x = 1 \tag{2}$$

$$\text{cosec } x \text{ sen } x = 1 \tag{3}$$

$$\text{tang } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \tag{4}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}. \tag{5}$$

Estas son las relaciones que deseábamos obtener: tambien pueden deducirse otras muchas bastante importantes. Por ejemplo, de las ecuaciones (4) y (5), por medio de una simple division, se deduce

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}; \tag{6}$$

de las ecuaciones (2) y (3) podemos tambien deducir

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \tag{7}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \tag{8}$$

lo que nos dice que cot x, sec y cosec x son respectivamente las inversas de tang x, cos x y sen x.

De las ecuaciones (4) y (5) se deduce

$$1 + \operatorname{tang}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

ó á causa de las relaciones (7) y (8)

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tang}^2 x, \tag{9}$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x. \tag{10}$$

Las dos últimas ecuaciones podian demostrarse directamente, porque los triángulos rectángulos OTA y OSB nos dicen que

$$\overline{OT}^2 = \overline{OK}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2,\ \overline{OS}^2 = \overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BS}^2,$$

relaciones que son las mismas ecuaciones (9) y (10).

12. Para establecer las fórmulas (1), (2), (3), (4) y (5), hemos supuesto que el extremo del arco x estaba situado en el primer cuadrante; pero es necesario hacer ver que son generales. En efecto, cualquiera que sea la posicion del punto M sobre la circunferencia, existe (núm. 8) un arco comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$ que, haciendo abstraccion de los signos, tiene las mismas líneas trigonométricas que x; de donde deducimos, que si no atendemos más que á los valores absolutos de las líneas trigonométricas, las relaciones (1), (2), (3), (4) y (5) se verifican siempre. La relacion (1), que no contiene más que los cuadrados de sen x y de cos x, será verdad en todos los casos: ahora es necesario hacer ver que los dos miembros de cada una de las otras relaciones tienen siempre el mismo signo. Para demostrar esto, sabemos:

1.° Que cos x y sec x son positivos si el extremo del arco está situado en el primero ó cuarto cuadrante, y negativos en los otros dos casos.

2.° Que sen x y cosec x son positivos si el extremo del arco x está situado en el primero ó segundo cuadrante, y negativos en los otros dos casos.

3.° Que la tangente y la cotangente de x son positivas si el extremo de este arco está en el primero ó en el tercer cuadrante, en cuyo caso sen x y cos x son los dos positivos ó negativos; mientras que las mismas líneas trigonomótricas son negativas si el extremo del arco x está en el segundo ó cuarto cuadrante, en cuyo caso sen x y cos x son de signos contrarios.

De esto, y de las reglas de la multiplicacion de las cantidades positivas y negativas, se deduce que los dos miembros de cada una de las relaciones (2), (3), (4) y (5) son siempre del mismo signo. Por consiguiente, las fórmulas subsisten para todos los valores de x.

13. De las relaciones (1), (2), (3), (4) y (5) se pueden deducir los valores de cinco cualquiera de las seis líneas trigonométricas en funcion de la sexta, por ejemplo:

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x},\quad \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}},$$

$$\cot x = \frac{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x},\quad \sec x = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Observemos, sin embargo, que cuando se conoce una línea trigonométrica de un arco x, las demás líneas no pueden determinarse completamente; así cuando se nos da sen x, el valor de cosec x queda completamente determinado, pero no se conocen más que los valores absolutos de las otras cuatro líneas. La razon de esto es que entre los arcos cuyo seno es conocido, hay unos para los cuales el coseno, la tangente, cotangente y secante son positivas, y otros para los cuales las mismas líneas son negativas.

Hay frecuentemente necesidad de conocer sen x y cos x cuando se conoce tang x; supongamos que el valor dado de tang x tenga la forma fraccionaria $\frac{m}{n}$; tendremos

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,\quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{m}{n},$$

de donde se deduce

$$\operatorname{sen.} x = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad \cos.\, x = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

en estas dos fórmulas, el radical $\sqrt{m^2+n^2}$ debe ser tomado con el mismo signo; pero este signo es indeterminado.

El arco $\frac{\pi}{4}$ es igual á su complemento; luego cos. $\frac{\pi}{4} =$ sen $\frac{\pi}{4}$; tenemos, pues tang $\frac{\pi}{4} = 1$; de aquí se deduce

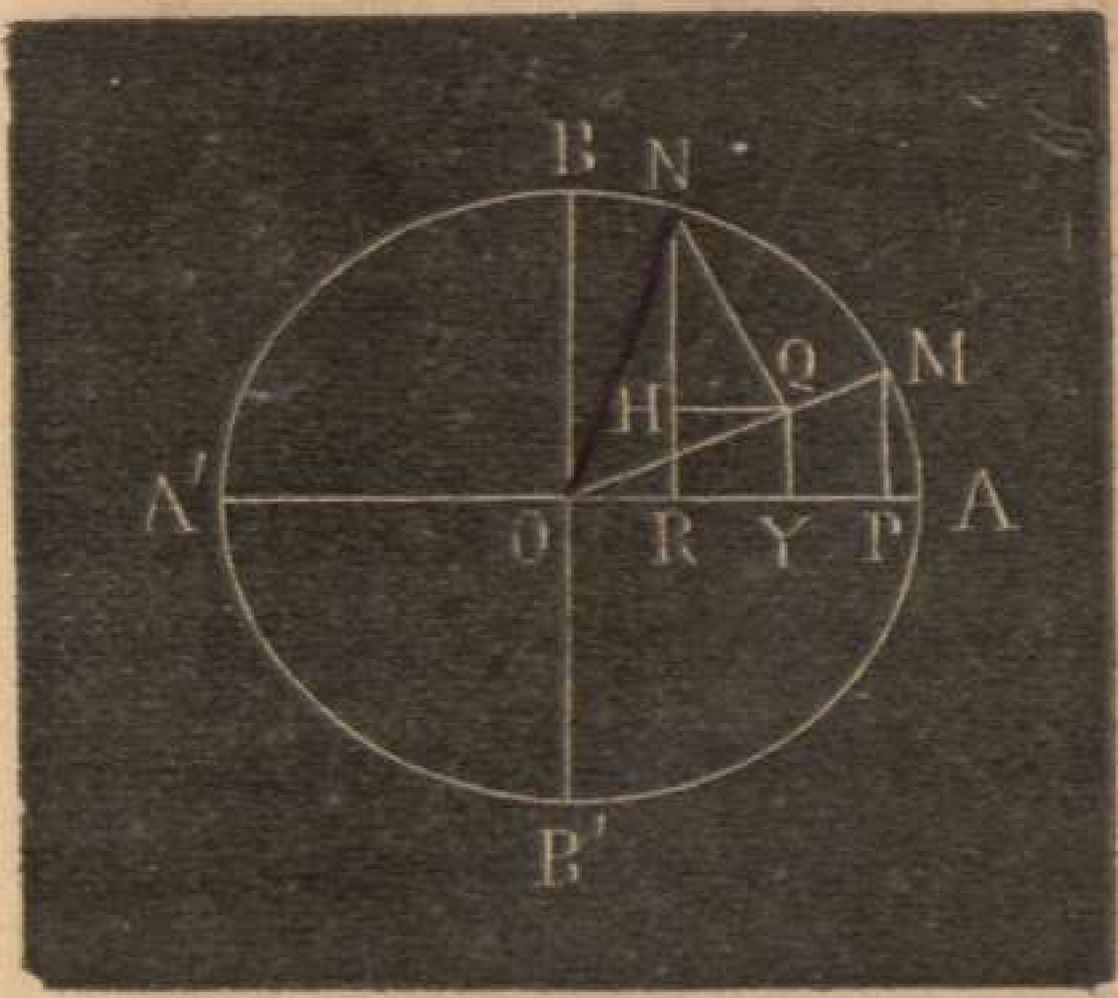
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Fórmulas relativas à la suma de los arcos.

14. *Senos y cosenos.*—Vamos á tratar de determinar el seno y el coseno de la suma de dos arcos, conociendo los senos y cosenos de estos arcos.

Designemos por a y b dos arcos positivos cuya suma no exce-

(Fig. 6.ª)



de de $\frac{\pi}{2}$. Sea (fig. 6.ª) A el orígen de los arcos; tomemos $AM = a$ y $MN = b$; se puede considerar el arco b teniendo M por orígen y N por extremidad, y entonces

$$a + b = AN;$$

tracemos NQ perpendicular al rádio OM; NR, QY, MP, perpendiculares á OA, y QH paralela á OA, tendremos

$$\text{sen } a = MP, \ \cos a = OP, \ \text{sen } b = NQ, \ \cos b = OQ,$$

$$\text{sen } (a + b) = NR = QY + NH, \ \cos (a + b)$$
$$= OR = OY - QH.$$

Esto supuesto, los triángulos semejantes MPO y QYO nos dicen que

$$\frac{QY}{MP} = \frac{OY}{OP} = \frac{OQ}{OM},$$

de donde se deduce

$$QY = \frac{MP \times OQ}{OM} = \text{sen } a \cos b, \ OY = \frac{OP \times OQ}{OM} =$$
$$\cos a \cos b.$$

Los triángulos MPO y NQH son tambien semejantes, porque tienen sus lados respectivamente perpendiculares; tenemos, pues,

$$\frac{NH}{OP} = \frac{QH}{MP} = \frac{NQ}{OM},$$

de donde se deduce

$$NH = \frac{OP \times NQ}{OM} = \cos a \text{ sen } b, \ QH \frac{MP \times NQ}{OM}$$
$$= \text{sen } a \text{ sen } b.$$

De aquí resultan las fórmulas siguientes:

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cos b + \cos a\,\text{sen}\,b, \qquad (1)$$
$$\cos\,(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b. \qquad (2)$$

15. Estas fórmulas (1) y (2) han sido demostradas para la hipótesis de que a y b son dos arcos positivos, cuya suma no excede á $\frac{\pi}{2}$; pero vamos á demostrar que se aplican á dos arcos cualquiera a y b.

1.° *Las fórmulas* (1) *y* (2) *subsisten para todos los valores de* a *y* b *comprendidos entre* o *y* $\frac{\pi}{2}$.

Habiendo sido establecido para el caso de $a + b < \frac{\pi}{2}$ ó $= \frac{\pi}{2}$; supongamos $a + b > \frac{\pi}{2}$; sean a' y b' los complementos de a y b, se tendrá $a' + b' < \frac{\pi}{2}$; por lo tanto,

$$\text{sen}\,(a' + b') = \text{sen}\,a' \cos b' + \cos a'\,\text{sen}\,b',$$
$$\cos\,(a' + b') = \cos a' \cos b' - \text{sen}\,a'\,\text{sen}\,b'.$$

Como los senos de dos arcos suplementarios son iguales, mientras que los cosenos son iguales y de signos contrarios, si se reemplaza a', b' y $a' + b'$ por sus valores $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$, y $\pi - (a + b)$, se obtendrán precisamente las fórmulas (1) y (2).

2.° *Si las fórmulas* (1) *y* (2) *se aplican á dos arcos* a *y* b, *subsisten todavía, cuando se añade* $\frac{\pi}{2}$ *á uno de los arcos.*

Los arcos a y b, por hipótesis, satisfacen á las fórmulas (1) y (2); hagamos $a' = a + \frac{\pi}{2}$, y sustituyendo $a' - \frac{\pi}{2}$ por a, tendremos

$$\text{sen}\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\cos b$$
$$+ \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\,b,$$

$$\cos\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = \cos.\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\cos b$$
$$- \operatorname{sen}\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} b;$$

pero tenemos, cualquiera que sea x,

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x,$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x;$$

podemos, pues, escribir las fórmulas precedentes como sigue:

$$\cos(a' + b) = \cos a' \cos b - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b,$$
$$\operatorname{sen}(a' + b) = \operatorname{sen} a' \cos b + \cos a' \operatorname{sen} b,$$

y se ve que son las fórmulas (1) y (2), poniendo en ellas $a' = a + \frac{\pi}{2}$ en lugar de a.

3.° *Las fórmulas* (1) *y* (2) *subsisten para todos los valores positivos de* a *y* b.

Supongamos, en efecto, que los arcos positivos a y b contienen respectivamente, el primero m y el segundo n cuadrantes, y hagamos

$$a = m\frac{\pi}{2} + a', \quad b = n\frac{\pi}{2} + b',$$

siendo a' y b' cada uno de ellos menores que un cuadrante, se tendrá

$$\operatorname{sen}(a' + b') = \operatorname{sen} a' \cos b' + \cos a' \operatorname{sen} b',$$
$$\cos(a' + b') = \cos b' \cos a' - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b'.$$

Segun lo que precede, estas fórmulas subsistirán si se añade sucesivamente m veces $\frac{\pi}{2}$ á a', y n veces $\frac{\pi}{2}$ á b'; luego las fórmulas (1) y (2) se aplican á dos arcos positivos cualquiera a y b.

4.° *Las fórmulas* (1) y (2) *subsisten para dos arcos cualesquiera* a *y* b.

Habiéndose demostrado esta proposicion en el caso de que a y b sean ambos positivos, supongamos que uno de ellos sea negativo, y designemos por K un entero bastante grande para que las sumas $2K\pi + a = a'$, $2K\pi + b = b'$ sean positivas, tendremos

$$\operatorname{sen}(a' + b') = \operatorname{sen} a' \cos b' + \cos a' \operatorname{sen} b',$$
$$\cos(a' + b') = \cos a' \cos b' - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b';$$

sustituyendo a' por $2K\pi + a$, b' por $2K\pi + b$, y recordando que, cualquiera que sea x, se tiene

$$\operatorname{sen}(2K\pi + x) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(2K\pi + x) = \cos x,$$

se encuentran las fórmulas (1) y (2).

Queda, pues, completamente demostrada la generalidad de las fórmulas (1) y (2); conviene notar que cada una de estas fórmulas puede obtenerse de la otra, sustituyendo en ésta a por $a + \frac{\pi}{2}$, ó b por $b + \frac{\pi}{2}$.

Si en las fórmulas (1) y (2) se cambia b en $-b$, resulta

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b, \tag{3}$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{4}$$

16. Por medio de lo que precede, se puede encontrar fácilmente el seno y el coseno de la suma de un número cualquiera de arcos cuando se conocen los senos y cosenos de estos arcos. Sean, por ejemplo, a, b y c tres arcos cualesquiera; se tiene

$$\operatorname{sen}(a + b + c) = \operatorname{sen}(a + b)\cos c + \cos(a + b)\operatorname{sen} c,$$
$$\cos(a + b + c) = \cos(a + b)\cos c - \operatorname{sen}(a + b)\operatorname{sen} c;$$

desarrollando despues $\operatorname{sen}(a+b)$ y $\cos(a+b)$, nos resulta

$$\operatorname{sen}(a+b+c) = \operatorname{sen} a \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \cos a \cos c + \operatorname{sen} c \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c,$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c - \cos c \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Conociendo las fórmulas que nos dan el seno y coseno de la suma de tres arcos en funcion del seno y coseno de estos arcos, conoceremos fácilmente el seno y coseno de la suma de cuatro arcos, y así sucesivamente. 15

17. *Tangentes y cotangentes.*—Vamos ahora á hallar la tangente ó la cotangente de la suma de dos arcos, conociendo las tangentes ó cotangentes de estos arcos.

Siendo a y b dos arcos cualquiera, positivos ó negativos, tendremos

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

y dividiendo los dos términos de este valor de $\operatorname{tang}(a+b)$ por $\cos a \cos b$,

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}. \tag{5}$$

Cambiando b en $-b$ en esta fórmula, nos resulta

$$\operatorname{tang}(a-b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}. \tag{6}$$

Para tener $\cot(a+b)$, en funcion de $\cot a$ y $\cot b$, basta recordar que la cotangente de un arco es la inversa de la tangente de este arco. Valiéndonos de esta relacion entre la tangente y la cotangente de un arco, podemos escribir las fórmulas (5) y (6) como sigue:

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}, \quad \cot(a\ b) - = \frac{1 + \cot a \cot b}{\cot b - \cot a}.$$

Segun lo que antecede, podemos obtener la tangente de la suma de un cierto número de arcos, en funcion de las tangentes de estos arcos. Sean, por ejemplo, a, b, c, tres arcos cualesquiera, y tendremos

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang}(a+b)+\operatorname{tang} c}{1-\operatorname{tang}(a+b)\operatorname{tang} c},$$

y reemplazando tangente de $(a+b)$ por su valor (6), tendremos

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b+\operatorname{tang} c-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b\operatorname{tang} c}{1-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} c-\operatorname{tang} b\operatorname{tang} c}.$$

Conociendo de este modo la fórmula que nos da la tangente de la suma de tres arcos, podremos obtener la que nos dé la de la suma de cuatro, y así sucesivamente.

Fórmulas importantes deducidas de las fórmulas relativas á la suma de los arcos.

18. De las fórmulas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b)&=\operatorname{sen} a\cos b+\cos a\operatorname{sen} b,\\
\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b,\\
\operatorname{sen}(a-b)&=\operatorname{sen} a\cos b-\cos a\operatorname{sen} b,\\
\cos(a-b)&=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b,
\end{aligned}$$

se deduce

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)&=2\operatorname{sen} a\cos b,\\
\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)&=2\cos a\operatorname{sen} b,\\
\cos(a+b)+\cos(a-b)&=2\cos a\cos b,\\
\cos(a-b)-\cos(a+b)&=2\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b.
\end{aligned}\right.$$

Supongamos ahora que

$$a+b=p,\ a-b=q;$$

tendremos

$$a = \frac{1}{2}(p+q),\ b = \frac{1}{2}(p-q),$$

y las fórmulas anteriores se convertirán en

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q), \\ \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q), \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q), \\ \cos q - \cos p = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q). \end{cases}$$

Estas últimas fórmulas se emplean frecuentemente en el cálculo; sirven para expresar la suma ó la diferencia de dos senos ó de dos cosenos por un producto de senos ó de cosenos.

Se puede del mismo modo cambiar por un producto la suma ó la diferencia de un seno y de un coseno; en efecto, tenemos

$$\cos p \pm \operatorname{sen} q = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - p\right) \pm \operatorname{sen} q,$$

y haciendo uso de las fórmulas (2),

$$(3)\quad \begin{cases} \cos p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right), \\ \cos p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right). \end{cases}$$

Dividiendo dos á dos las fórmulas (2), se obtienen las siguientes, bastante importantes en el cálculo:

$$(4)\quad \left\{ \frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q)} = \right.$$

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)},$$

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\text{sen}\,p+\text{sen}\,q}{\cos p+\cos q}=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)}=\text{tang}\,\frac{1}{2}(p+q),\\
&\frac{\text{sen}\,p+\text{sen}\,q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(p-q)}=\cot\,\frac{1}{2}(p-q),\\
&\frac{\text{sen}\,p-\text{sen}\,q}{\cos p+\cos q}=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p-q)}=\text{tang}\,\frac{1}{2}(p-q),\\
&\frac{\text{sen}\,p-\text{sen}\,q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(p+q)}=\cot\,\frac{1}{2}(p+q),\\
&\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(p+q)\,\text{sen}.\frac{1}{2}(p-q)}\\
&\qquad=\cot\frac{1}{2}(p+q)\cot\frac{1}{2}(p-q).
\end{aligned}\right.$$

19. Se puede tambien trasformar la suma ó diferencia de dos tangentes en un producto de líneas trigonométricas. En efecto, tenemos

$$\text{tang}\,a\pm\text{tang}\,b=\frac{\text{sen}\,a}{\cos a}\pm\frac{\text{sen}\,b}{\cos b}=\frac{\text{sen}\,a\cos b\pm\cos a\,\text{sen}\,b}{\cos a\cos b};$$

ó
$$\text{tang}\,a\pm\text{tang}\,b=\frac{\text{sen}\,(a\pm b)}{\cos a\cos b};\tag{5}$$

del mismo modo tendremos

$$\cot a\pm\cot b=\frac{\text{sen}\,(b\pm a)}{\text{sen}\,a,\ \text{sen}\,b}\ (6)\quad \cot a\pm\text{tang}\,b=\frac{\cos\,(a\mp b)}{\text{sen}\,a\cos b}.$$

Conviene tambien analizar una fórmula que se obtiene multiplicando

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \cos a\,\text{sen}\,b,$$

por

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a\cos b - \cos a\,\text{sen}\,b,$$

efectuando esta multiplicacion

$$\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\,\text{sen}^2 b = (1-\text{sen}^2 b)\,\text{sen}^2 a - (1-\text{sen}^2 a)\,\text{sen}^2 b = (1-\cos^2 a)\cos^2 b - (1-\cos^2 b)\cos^2 a,$$

y tambien

$$\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a. \quad (8)$$

20. *Suma de los senos ó de los cosenos de una série de arcos en progresion por diferencia.*—Sean los n arcos

$$a,\ a+h,\ a+2h\ \ldots\ldots\ a+(n-1)\,h.$$

Designemos por i un número entero cualquiera, y tendremos (núm. 18)

$$2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}\cos(a+ih) = \text{sen}\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right) - \text{sen}\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right).$$

Dando á i sucesivamente los valores $0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$, deduciremos

$$2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}\cos a = \text{sen}\left(a+\frac{h}{2}\right) - \text{sen}\left(a-\frac{h}{2}\right),$$

$$2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}\cos(a+h) = \text{sen}\left(a+\frac{3h}{2}\right) - \text{sen}\left(a+\frac{h}{2}\right),$$

$$2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}\cos(a+2h) = \text{sen}\left(a+\frac{5h}{2}\right) - \text{sen}\left(a+\frac{3h}{2}\right),$$

. . . .

$$2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos [a + (n-1) h] = \operatorname{sen}\left(a + \frac{2n-1}{2} h\right) - \operatorname{sen}\left(a + \frac{2n-3}{2} h\right).$$

Sumando estas igualdades miembro á miembro y haciendo las reducciones, se deduce

$$2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} (\cos a + \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + \ldots + \cos [a + (n-1) h]) = \operatorname{sen}\left(a + \frac{2n-1}{2} h\right) - \operatorname{sen}\left(a - \frac{h}{2}\right).$$

de donde

$$\cos a + \cos (a + h) + \ldots.. + \cos [a + (n-1) h] = \frac{\operatorname{sen}\left(a + \frac{2n-1}{2} h\right) - \operatorname{sen}\left(a - \frac{h}{2}\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}};$$

por último, trasformando el numerador del segundo miembro en producto de senos y cosenos, por las fórmulas del núm. 18, se tiene

$$\cos a + \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + \ldots + \cos [a + (n-1) h] = \frac{\operatorname{sen} \frac{nh}{2} \cos\left(a + \frac{n-1}{2} h\right)}{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}.$$

Si en esta fórmula se cambia a por $\frac{\pi}{2} - a$, y h por $-h$, se deduce

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} (a + h) + \operatorname{sen} (a + 2h) + \ldots + \operatorname{sen} [a + (n-1) h] = \frac{\operatorname{sen} \frac{nh}{2} \operatorname{sen}\left(a + \frac{n-1}{2} h\right)}{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}.$$

Las dos fórmulas precedentes nos dan expresiones muy sencillas para la suma de los cosenos de n arcos en progresion por diferencia, lo mismo que para la suma de los senos de estos mismos arcos.

Multiplicacion de los arcos.

21. *De la manera de expresar sen 2 a y cos 2 a en funcion de sen a ó de cos a.*—Si en las fórmulas

$$(1) \quad \begin{cases} \text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cos b + \cos a \,\text{sen}\, b, \\ \cos\,(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b, \end{cases}$$

hacemos $b = a$, deducimos

$$(2) \quad \begin{cases} \text{sen}\,2\,a = 2\,\text{sen}\,a \cos a, \\ \cos 2\,a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a. \end{cases}$$

Estas fórmulas (2) nos dan á conocer los valores de sen $2\,a$ y de cos $2\,a$ en funcion de sen a y de cos a. Si se quiere expresarlas en funcion de sen a ó de cos a solamente, se deberá reemplazar cos a por $\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$, ó si no a por $\sqrt{1 - \cos^2 a}$; así obtenemos

$$(3) \quad \begin{cases} \text{sen}\,2\,a = \pm\, 2\,\text{sen}\,a \sqrt{1 - \text{sen}^2 a} = \pm\, 2 \cos a \sqrt{1 - \cos^2 a}, \\ \cos 2\,a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1. \end{cases}$$

Importa observar que cos $2\,a$ se expresa racionalmente en funcion de cos a ó de sen a, mientras que sen $2\,a$ es una funcion irracional de sen a ó de cos a. De esto resulta que, si se conoce el valor de sen a ó de cos a, cos $2\,a$ queda completamente determinado, mientras que de sen $2\,a$ solo podemos determinar el valor absoluto. Vamos á dar ahora la razon de esto.

Supongamos que el valor de sen a sea conocido, y supongamos que sen $a = b$; el arco a es indeterminado, y sus valores, en número infinito, nos los dan (núm. 9) las fórmulas

$$a = 2K\pi + \varphi,\ a = (2K + 1)\pi - \varphi,$$

donde φ designa un arco determinado cuyo seno es b. Segun esto, los valores de sen $2a$ los conocemos por medio de las fórmulas

$$\text{sen } 2a = \text{sen }(4K\pi + 2\varphi) = \text{sen } 2\varphi,$$
$$\text{sen } 2a = \text{sen }(4K\pi + 2\pi - 2\varphi) = -\text{ sen } 2\varphi;$$

y las de cos $2a$ son

$$\cos 2a = \cos(4K\pi + 2\varphi) = \cos 2\varphi,$$
$$\cos 2a = \cos(4K\pi + 2\pi - 2\varphi) = \cos 2\varphi.$$

De aquí deducimos que sen $2a$ es susceptible del doble valor $\pm$ sen 2φ, mientras que cos $2a$ tiene un solo valor, que es cos 2φ.

Lo mismo se verifica cuando el valor conocido es el de cos a. Sea $\cos a = b$ y designando por φ un arco determinado cuyo coseno sea b, los valores de a los conocemos por la fórmula $a = 2K\pi \pm \varphi$; por consiguiente, las de sen $2a$ y cos $2a$ lo son por las siguientes:

$$\text{sen } 2a = \text{sen }(4K\pi \pm 2\varphi) = \pm \text{ sen } 2\varphi,$$
$$\cos 2a = \cos(4K\pi \pm 2\varphi) = \cos 2\varphi;$$

sen $2a$ tiene, por consiguiente, dos valores iguales y de signos contrarios, mientras que cos $2a$ no tiene más que uno solo.

22. *Expresiones de sen $3a$ y de cos $3a$ en funcion de sen a ó de cos a.*—Si en las fórmulas (1) hacemos $b = 2a$, resulta,

$$\text{sen } 3a = \text{sen } a \cos 2a + \cos a \text{ sen } 2a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \text{sen } a \text{ sen } 2a;$$

y reemplazando sen $2a$ y cos $2a$ por sus valores deducidos de las ecuaciones (2), se deduce

$$(4)\quad \begin{cases} \text{sen } 3a = 3 \text{ sen } a \cos^2 a - \text{sen}^3 a, \\ \cos 3a = \cos^3 a - 3 \text{ sen}^2 a \cos a, \end{cases}$$

fórmulas que nos dan á conocer sen $3a$ y cos $3a$ en funcion de sen a y de cos a.

Sustituyendo, en la primera, $\cos^2 a$ por $1 - \operatorname{sen}^2 a$, y en la segunda $\operatorname{sen}^2 a$ por $1 - \cos^2 a$, resulta

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a, \\ \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a. \end{array} \right.$$

Vemos que sen $3a$ y cos $3a$ se pueden expresar racionalmente, el primero en funcion de sen a y el segundo en funcion de cos a; al contrario, sen $3a$ es una funcion irracional de cos a, y cos $3a$ una funcion irracional de sen a. De aquí resulta que, cuando conocemos sen a, sen $3a$ queda completamente determinada, mientras que de cos $3a$ únicamente queda determinado su valor absoluto; al contrario, si se conoce cos a, cos $3a$ queda determinado, pero no sen $3a$. Se puede demostrar que debe ser así, haciendo las mismas consideraciones que para el núm. 21.

23. Si conocemos los valores de sen $(m-1)a$ y de cos $(m-1)a$ en funcion de sen a y de cos a, conoceremos los de sen ma y de cos ma, haciendo á $b = (m-1)a$ en las ecuaciones (1) que se convertirán en las siguientes:

$$\operatorname{sen} ma = \operatorname{sen} a \cos (m-1)a + \cos a \operatorname{sen} (m-1)a,$$
$$\cos ma = \cos a \cos (m-1)a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} (m-1)a,$$

y reemplazando sen $(m-1)a$ y cos $(m-1)a$ por sus valores conocidos. Se comprende fácilmente cómo podemos calcular aproximadamente, por este método, los valores de sen $4a$ y de cos $4a$, de sen $5a$ y de cos $5a$,.... en funcion de sen a y de cos a. Pero no llevaremos los cálculos más adelante; pues daremos, á continuacion, un método general para formar directamente los valores de sen ma y de cos ma, cualquiera que sea el entero m.

24. *Expresiones de tang* 2 a *y de tang* 3 a *en funcion de tang* a.—Si en la fórmula

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \times \operatorname{tang} b},$$

hacemos $b = a$, resulta

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a},$$

fórmula que nos da á conocer tang $2a$ en funcion de tang a.

Si en la fórmula (6) hacemos $b = 2a$, resultará

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} 2a}{1 - \operatorname{tang} a \times \operatorname{tang} 2a},$$

y reemplazando por tang $2a$ su valor deducido de la fórmula (7),

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 a}.$$

Generalmente, si el valor de tang $(m-1)a$ en funcion de tang a es conocido, se saca el valor de ma de la fórmula

$$\operatorname{tang} ma = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang}(m-1)a}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang}(m-1)a}.$$

Podremos, pues, calcular sucesivamente los valores de tangente $4a$, tang $5a$, ..., expresados todos en funcion racional de tang a. Daremos, pues, la expresion general de tang ma en funcion de tang a.

La expresion de cot ma en funcion de cot a, se deduce inmediatamente de la expresion de tang ma en funcion de tang a; por ejemplo, si sustituimos en la fórmula (7) tang a y tang $2a$ por $\frac{1}{\cot a}$ y $\frac{1}{\cot 2a}$, nos resulta

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}.$$

Division de los arcos.

25. *Expresiones de sen* $\frac{1}{2}$ a *y de cos* $\frac{1}{2}$ a *en funcion de cos* a.

Tenemos (núm. 21)

$$\cos^2 \frac{1}{2} a - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = \cos a,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a + \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = 1,$$

de donde se deduce

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 + \cos a}{2}, \quad \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{2};$$

luego

$$(1) \quad \cos \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}, \quad \text{sen} \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

Vemos que estas fórmulas nos determinan el valor absoluto del sen $\frac{1}{2} a$ y cos $\frac{1}{2} a$, dejando indeterminados sus signos.

Podemos explicar este resultado por consideraciones análogas á las empleadas en el número 21. Sea b el valor dado de cos a, y φ un arco determinado cuyo coseno es b; la fórmula

$$a = 2 K \pi \pm \varphi$$

nos da todos los valores de a, para los cuales hayamos de tener cos $a = b$; por consiguiente, los valores de cos $\frac{1}{2} a$, y de sen $\frac{1}{2} a$, estarán dados por las fórmulas

$$\cos \frac{1}{2} a = \cos \left(K \pi \pm \frac{1}{2} \varphi\right), \quad \text{sen} \frac{1}{2} a = \text{sen} \left(K \pi \pm \frac{1}{2} \varphi\right).$$

Si tomamos para valor de K un número par, estas fórmulas se convierten en

$$\cos\frac{1}{2}a = \cos\frac{1}{2}\varphi,\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}a = \pm\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi;$$

y si se toma para valor de K un número impar, tendremos

$$\cos\frac{1}{2}a = -\cos\frac{1}{2}\varphi,\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}a = \pm\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi;$$

lo cual demuestra que, $\cos\frac{1}{2}a$ es susceptible del doble valor $\pm\frac{1}{2}\cos\varphi$, y $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$ del doble valor $\pm\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi$.

Si se nos da el arco a, los signos de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$, y $\cos\frac{1}{2}a$ son conocidos, y se pueden calcular estas cantidades por medio de las fórmulas (1). Supongamos, por ejemplo, que tenemos el seno y el coseno del arco $\frac{\pi}{8}$, sabiendo que el coseno de $\frac{\pi}{4}$ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (núm. 13); las fórmulas (1) nos darán

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

26. *Expresion de sen $\frac{1}{2}$ a y cos $\frac{1}{2}$ a en funcion de sen a.*

Si en las fórmulas (1) se sustituye á $\cos a$ por $\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$ resultan las fórmulas

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}{2}}$$

que pueden simplificarse. En efecto, de las dos fórmulas

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a = \operatorname{sen} a, \quad \cos^2 \frac{1}{2} a + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a = 1,$$

se deduce, combinándolas por adicion y sustraccion,

$$\left(\cos \frac{1}{2} a + \operatorname{sen} \frac{1}{2} a\right)^2 = 1 + \operatorname{sen} a,$$

$$\left(\cos \frac{1}{2} a - \operatorname{sen} \frac{1}{2} a\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} a,$$

de donde

$$\cos \frac{1}{2} a + \operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a}$$

$$\cos \frac{1}{2} a - \operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a},$$

y por consiguiente,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} a &= \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a}\right) \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2} a &= \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen} a}\right) \end{aligned} \right.$$

En estas dos fórmulas, los signos superiores ó inferiores, de fuera del paréntesis ó de dentro del paréntesis, se corresponden; pero en cada una de ellas el signo exterior es independiente del interior del paréntesis. De este modo, hallamos cuatro valores para $\cos \frac{1}{2} a$ y otros cuatro para $\operatorname{sen} \frac{1}{2} a$; y es notable que los valores de $\cos \frac{1}{2} a$, son los mismos que los de $\operatorname{sen} \frac{1}{2} a$. Vamos á explicar este resultado; para ello es b el valor dado de $\operatorname{sen} a$, y φ un arco determinado cuyo seno es b; los valores de a estarán dados por las fórmulas

$$a = 2 K \pi + \varphi, a = (2 K + 1) \pi - \varphi,$$

los valores de $\cos\frac{1}{2}a$ y de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$, son:

$$\cos\frac{1}{2}a=\cos\left(K\pi+\frac{1}{2}\varphi\right),\ \cos\frac{1}{2}a=\cos\left(K\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varphi\right),$$
$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\operatorname{sen}\left(K\pi+\frac{1}{2}\varphi\right),\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\operatorname{sen}\left(K\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Si tomamos para valor de K, estas fórmulas se convierten en

$$\cos\frac{1}{2}a=\cos\frac{1}{2}\varphi,\ \cos\frac{1}{2}a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varphi\right)=\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi,$$
$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi,\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varphi\right)=\cos\frac{1}{2}\varphi;$$

y si tomamos para valor de K un número impar, dichas fórmulas se trasformarán en

$$\cos\frac{1}{2}a=-\cos\frac{1}{2}\varphi,\ \cos\frac{1}{2}a=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varphi\right)$$
$$=-\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=-\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi,\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}a=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varphi\right)$$
$$=-\cos\frac{1}{2}\varphi;$$

de donde se deduce, que $\cos\frac{1}{2}a$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$, tienen cada uno de ellos los cuatro valores $\pm\cos\frac{1}{2}\varphi$, $\pm\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi$.

Si el arco a es conocido, sabemos cuáles son los signos de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$ y de $\cos\frac{1}{2}a$; y además sabemos tambien cuál de estas dos cantidades tienen mayor valor absoluto. Esta consideracion permite determinar en cada caso los signos que es necesario tomar en la fórmula (2) para tener los valores de $\cos \frac{1}{2} a$ y de $\operatorname{sen} \frac{1}{2} a$.

27. *Expresion de tang* $\frac{1}{2}$ a, *en funcion de tang* a.

Si en la fórmula

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a},$$

se sustituye a por $\frac{1}{2} a$, resulta

$$\operatorname{tang} a = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a};$$

de donde, haciendo

$$\operatorname{tang} a = b,\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} a = x,$$

$$(3) \qquad x^2 + \frac{2}{b} x - 1 = o,$$

de donde

$$(4) \qquad x = -\frac{1}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1}.$$

Vamos á ver lo que representan las dos raíces de la ecuacion (3): sea, para ello, φ un arco determinado, cuya tangente es b; los valores de a estarán dados por la fórmula

$$a = K\pi + \varphi,$$

y los de x por

$$x = \operatorname{tang}\left(K \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \varphi\right).$$

Si para valor de K tomamos un número par $2n$, esta fórmula nos da

$$x = \text{tang}\left(n\pi + \frac{1}{2}\varphi\right) = \text{tang}\ \frac{1}{2}\varphi,$$

y si K es número impar $= 2n + 1$, nos dará

$$x = \text{tang}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi\right) = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi\right) = -\cot\frac{1}{2}\varphi;$$

de donde se deduce que x tiene los dos valores tang $\frac{1}{2}\varphi$ y $-\cot\frac{1}{2}\varphi$, cuyo producto es igual á -1.

Si el arco a es conocido, es fácil determinar cuál de las dos raíces de la ecuacion (3) es igual á tang $\frac{1}{2}a$, puesto que sabemos el signo de esta tangente.

Supongamos, por ejemplo, que se nos pida tang $\frac{\pi}{8}$, sabiendo que tang $\frac{\pi}{4} = 1$; haremos $b = 1$ en la fórmula (4), lo cual nos dará, puesto que tang $\frac{\pi}{4}$ es positivo,

$$\text{tang}\ \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}.$$

28. Podemos obtener tang $\frac{1}{2}a$ en funcion de ~~sen~~ cos a, por medio de una fórmula de un uso muy frecuente. Se tiene

$$\text{tang}\ \frac{1}{2}a = \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}a}{\cos\ \frac{1}{2}a} = \frac{2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{2\cos^2\frac{1}{2}a}$$

$$= \frac{2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{2\ \text{sen}^2\frac{1}{2}a},$$

y sirviéndose de las fórmulas halladas anteriormente, encontraremos

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen} a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

Y si sustituimos sen a por su valor $\sqrt{1 - \cos^2 a}$, tendremos

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

29. *Ecuacion de la cual depende cos* $\frac{a}{3}$ *cuando cos* a *es conocido.*

Si en la fórmula

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

se reemplaza a por $\frac{a}{3}$, resulta

$$\cos a = 4 \cos^3 \frac{a}{3} - 3 \cos \frac{a}{3},$$

y haciendo

$$\cos a = b, \ \cos \frac{a}{3} = x,$$

tendremos

$$x^3 - \frac{3}{4} x - \frac{b}{4} = o.$$

En el Álgebra se demuestra que esta ecuacion de tercer grado tiene tres raices y que las tres son reales.

Podemos demostrar esta propiedad del modo siguiente: sea φ un arco conocido, cuyo coseno es b, los valores de a estarán dados por la fórmula

$$a = 2 K \pi \pm \varphi,$$

y los de x por la fórmula

$$x = \cos \left(\frac{2 K \pi}{3} \mp \frac{\varphi}{3} \right),$$

y aquí se deben dar á K todos los valores enteros, positivos, nulos ó negativos. Pero sea el que quiera el valor dado á K, podremos establecer

$$K = 3n + i,$$

siendo i uno de estos números o, 1 ó 2; tenemos, pues,

$$x = \cos\left(2n\pi + \frac{2i\pi}{3} \pm \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2i\pi}{3} \pm \frac{\varphi}{3}\right);$$

pero los arcos

$$-\frac{\varphi}{3},\ \frac{4\pi}{3} - \frac{\varphi}{3},\ \frac{2\pi}{3} - \frac{\varphi}{3},$$

tienen los cosenos que son, respectivamente, (9) iguales á los de los arcos

$$\frac{\varphi}{3},\ \frac{2\pi}{3} + \frac{\varphi}{3},\ \frac{4\pi}{3} + \frac{\varphi}{3};$$

luego x admite los tres valores distintos

$$\cos\frac{\varphi}{3},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),$$

y no puede admitir otros.

30. *Ecuacion de la cual depende sen* $\frac{\mathrm{a}}{3}$ *cuando conocemos á sen* a.

Si en la fórmula

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a,$$

se pone $\frac{a}{3}$ en lugar de a, tendremos

$$\operatorname{sen} a = 3 \operatorname{sen}\frac{a}{3} - 4 \operatorname{sen}^3\frac{a}{3},$$

y haciendo

$$\operatorname{sen} a = b,\ \operatorname{sen}\frac{a}{3} = x,$$

obtendremos la ecuacion

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = o$$

que se deduce de la del número 29, cambiando b en $-b$.

Para saber lo que representan las tres raíces de esta ecuacion, sea φ un arco conocido cuyo seno es b; los valores de a estarán dados por las fórmulas

$$a = 2K\pi + \varphi,\ a = (2K+1)\pi - \varphi,$$

y los de x por las siguientes:

$$x = \text{sen}\left(\frac{2K\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),\ x = \text{sen}\left(\frac{2K+1}{3}\pi - \frac{\varphi}{3}\right).$$

Sea $K = 3n + i$, siendo i uno de los números o, 1, 2; estas fórmulas se convierten en

$$x = \text{sen}\left(2n\pi + \frac{2i\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{2i\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x = \text{sen}\left(2n\pi + \frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\varphi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\varphi}{3}\right);$$

pero los arcos

$$\frac{3\pi}{3} - \frac{\varphi}{3},\ \frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3},\ \frac{5\pi}{3} - \frac{\varphi}{3},$$

tienen respectivamente los mismos senos que los arcos (número 9)

$$\frac{\varphi}{3},\ \frac{2\pi}{3} + \frac{\varphi}{3},\ \frac{4\pi}{3} + \frac{\varphi}{3};$$

pues x tiene los tres valores distintos

$$\text{sen}\,\frac{\varphi}{3},\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),\ \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),$$

y no puede haber un número mayor.

31. *Ecuacion de la cual depende el valor de tang* $\frac{a}{3}$ *cuando el valor tang* a *es conocido.*

Si en la fórmula

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 a}$$

se sustituye a por $\frac{a}{3}$, se obtiene

$$\operatorname{tang} a = \frac{3 \operatorname{tang} \frac{a}{3} - \operatorname{tang}^3 \frac{a}{3}}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 \frac{a}{3}},$$

y haciendo á $\operatorname{tang} a = b$, $\operatorname{tang} \frac{a}{3} = x$, se deduce

$$b = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \text{ ó } x^3 - 3bx^2 - 3x + b = o.$$

Vemos que el problema depende de la resolucion de una ecuacion de tercer grado. Vamos ahora á buscar lo que representan las raíces de esta ecuacion; para esto sea φ un arco determinado cuya tangente es b; los valores de a los conoceremos por la fórmula $a = K\pi + \varphi$, y las de x por la fórmula

$$x = \operatorname{tang} \left(\frac{K\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Supongamos $K = 3n + i$, siendo i uno de los números o, 1, 2; la última fórmula se convierte en la siguiente:

$$x = \operatorname{tang} \left(n\pi + \frac{i\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = \operatorname{tang} \left(\frac{i\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),$$

de donde se sigue que x tiene los tres valores

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{3}, \ \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right), \ \operatorname{tang} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),$$

y no admite otros.

Si el valor dado de b es infinito, la ecuacion en x se reduce á la ecuacion de segundo grado $3x^2 - 1 = o$, que no tiene más que dos raíces, á saber:

$$+\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ y} -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por otra parte, como $\varphi = \frac{\pi}{2}$, las expresiones de las raíces de la ecuacion en x son

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{6}, \ \operatorname{tang} \frac{\pi}{2}, \ \operatorname{tang} \frac{5\pi}{6};$$

de donde se sigue que para $b = \infty$, una de las raíces de esta ecuacion se convierte en ∞, y que las otras dos se reducen á $\operatorname{tang} \frac{\pi}{6}$ y á $\operatorname{tang} \frac{5\pi}{6}$. Por consiguiente, tendremos

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \operatorname{tang} \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

32. En general, si se quiere obtener sen $\frac{a}{m}$, cos $\frac{a}{m}$ ó tang $\frac{a}{m}$, conociendo sen a, cos a, tang a, se empezará por formar la ecuacion que da sen ma, cos ma ó tang ma en funcion de sen a, cos a, tang a; despues, poniendo $\frac{a}{m}$ en lugar de a, tendremos la ecuacion de la cual depende el valor de la incógnita que se busca. Esta ecuacion puede ser del grado m ó del grado $2m$. En el capítulo V están todos los desarrollos que lleva consigo esta cuestion; pero conviene observar aquí, que la determinacion de sen $\frac{a}{m}$, de cos $\frac{a}{m}$ ó de tang $\frac{a}{m}$ no depende más que de ecuaciones de segundo grado, si m es una potencia de dos: porque, despues de haber encontrado sen $\frac{1}{2}a$, cos $\frac{1}{2}a$ y tang $\frac{1}{2}a$ en funcion de sen a, de cos a ó de tang a, se podrá, de la manera con que lo hemos hecho anteriormente, encontrar sen $\frac{a}{4}$, cos $\frac{a}{4}$ y tang $\frac{a}{4}$, sen $\frac{a}{8}$, cos $\frac{a}{8}$ y tang $\frac{a}{8}$, ...

Determinacion de las líneas trigonométricas de ciertos arcos.

33. Se pueden calcular las líneas trigonométricas de una infinidad de arcos comprendidos entre o y $\frac{\pi}{2}$, por simples extracciones de raíces cuadradas.

De los arcos comprendidos en la fórmula $\frac{n\pi}{2^m}$.—Si partimos del arco $\frac{\pi}{2}$, tendremos, por el método de los números 25 y 26, los senos y los cosenos de los arcos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{16}$, ... , y en seguida podremos obtener los senos y cosenos de sus múltiplos.

Empleando este método, se pueden obtener los valores siguientes:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

..... fórmulas cuya ley es muy sencilla de conocer. De modo que, cualquiera que sean los valores de los enteros m y n, se podrá calcular por simples extracciones de raíces cuadradas los senos y los cosenos del arco $\frac{n\pi}{2^m}$ y, por consiguiente, todas las demás líneas trigonométricas de este arco.

34. *De los arcos comprendidos en la fórmula* $\frac{n\pi}{3\times 2^m}$.—Los arcos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$ tienen el mismo seno, puesto que son suplementarios; tenemos, pues, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\operatorname{sen}2\frac{\pi}{3}=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$, y, por consiguiente, $1=2\cos\frac{\pi}{3}$; de la fórmula $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ó, como $\frac{\pi}{3}$ es el complemento de $\frac{\pi}{6}$, tendremos

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Partiendo del arco $\frac{\pi}{6}$, se obtendrá, por el método de los números 25 y 26, el seno y coseno de los arcos $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{24}$, ...; se encontrará, por ejemplo, por las fórmulas del núm. 25,

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

y por las fórmulas del núm. 26,

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Se ve, pues, que podremos calcular por extracciones de raíces cuadradas las líneas trigonométricas del arco $\frac{n\pi}{3\times 2^m}$, siendo n y m dos enteros cualquiera.

35. *De los arcos comprendidos en la fórmula* $\frac{n\pi}{5\times 2^m}$.—Se tiene

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5},$$

$$2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{5},$$

y multiplicando estas fórmulas, resulta

$$4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=1;$$

pero el primer miembro de esta ecuacion, es el doble de

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5} \text{ ó de } \cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5};$$

se tiene, pues,

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2};$$

elevando esta ecuacion al cuadrado y sumándola con la precedente, resulta

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2=\frac{5}{4},$$

de donde

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Conociendo así la suma y la diferencia de los cosenos de los arcos $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{2\pi}{5}$, se tienen inmediatamente los valores de los cosenos, á saber:

$$\cos\frac{\pi}{5} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

De los valores de $\cos\frac{\pi}{5}$ y de $\cos\frac{2\pi}{5}$ se pasa á los de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$ y de $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$; de esta manera se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Partiendo del arco $\frac{\pi}{10}$, se obtiene por los métodos de los números 25 y 26, los senos y los cosenos de los arcos $\frac{\pi}{20}$, $\frac{\pi}{40}$, ... de modo que podemos obtener por raíces cuadradas las líneas trigonométricas del arco $\frac{n\pi}{5\times 2^m}$ cualquiera que sean los enteros m y n.

36. *De los arcos comprendidos en la fórmula* $\frac{n\pi}{3\times 5\times 2^m}$.— Tenemos

$$\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10};$$

por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{15} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{15}=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10},$$

y reemplazando los senos y los cosenos de los arcos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{10}$ por sus valores encontrados anteriormente, se deduce

$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}}{8}(-1+\sqrt{5}),$$
$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$

de donde podemos tambien deducir que las líneas trigonométricas del arco $\frac{n\pi}{3\times5\times2^m}$, se pueden hallar por medio de extracciones de raíces cuadradas, cualquiera que sean los enteros m y n.

37. Para completar lo que precede, vamos á construir una Tabla con los senos y cosenos de los múltiplos del arco $\frac{\pi}{20}$. Partiremos de las fórmulas

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{20}=\cos\frac{8\pi}{20}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$
$$\operatorname{sen}\frac{8\pi}{20}=\cos\frac{2\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$
$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{20}=\cos\frac{6\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\operatorname{sen}\frac{6\pi}{20}=\cos\frac{4\pi}{20}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

deducidas en el número anterior. Para obtener sen $\frac{\pi}{20}$ y cos $\frac{\pi}{20}$, sen $\frac{3\pi}{20}$ y cos $\frac{3\pi}{20}$, basta hacer sucesivamente á $a=\frac{2\pi}{20}$ y $a=\frac{6\pi}{20}$ en las fórmulas

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a}.$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}a};$$

y de esta manera encontramos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{20}=\cos\frac{9\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{9\pi}{20}=\cos\frac{\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

y tambien

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{20}=\cos\frac{7\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{20}=\cos\frac{3\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}};$$

por último, se tiene tambien

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{20}=\cos\frac{5\pi}{20}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tenemos, pues, en resúmen

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{20}=\cos\frac{9\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{20}=\cos\frac{8\pi}{20}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{20}=\cos\frac{7\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{20}=\cos\frac{6\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{20}=\cos\frac{5\pi}{20}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{6\pi}{20}=\cos\frac{4\pi}{20}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$$

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{20}=\cos\frac{3\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,\frac{8\pi}{20} = \cos\frac{2\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,\frac{9\pi}{20} = \cos\frac{\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Por medio de estas fórmulas, se pueden calcular los senos y cosenos de los múltiplos del arco $\frac{\pi}{20}$ con una aproximacion tan grande como se quiera.

38. Es tambien bastante fácil formar la Tabla de los senos y cosenos de los múltiplos del arco $\frac{\pi}{60}$. Nueve de estos arcos son los múltiplos de $\frac{\pi}{20}$ y, por consiguiente, sus senos y sus cosenos constituyen la Tabla que acabamos de escribir; se encuentran tambien entre los múltiplos de $\frac{\pi}{60}$ los arcos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{12}$, así como sus complementos; ya hemos obtenido en el núm. 34 los senos y cosenos de estos arcos. Los otros diez y seis múltiplos de $\frac{\pi}{60}$ comprenden ocho múltiplos de $\frac{\pi}{30}$ á saber: $\frac{\pi}{30}$, $\frac{2\pi}{30}$, $\frac{4\pi}{30}$, $\frac{7\pi}{30}$, y sus complementos; tambien los arcos $\frac{\pi}{60}$, $\frac{7\pi}{60}$, $\frac{11\pi}{60}$, $\frac{13\pi}{60}$, y sus complementos. Se pueden obtener inmediatamente los senos y cosenos de todos estos arcos por medio de la Tabla construida anteriormente, aplicando el procedimiento que hemos empleado ya al considerar el arco $\frac{\pi}{15}$; es suficiente para esto hacer uso de las fórmulas idénticas siguientes:

$$\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{20}, \quad \frac{\pi}{60} = \frac{7\pi}{20} - \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{2\pi}{30} = \frac{8\pi}{20} - \frac{\pi}{3}, \quad \frac{7\pi}{60} = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{4\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{20}, \quad \frac{11\pi}{60} = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{20},$$

$$\frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{20}, \quad \frac{13\pi}{60} = \frac{11\pi}{20} - \frac{\pi}{3};$$

se encuentra de este modo

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{30} = \cos\frac{14\pi}{30} = \frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \frac{1}{8}(1+\sqrt{5}),$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{30} = \cos\frac{13\pi}{30} = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{30} = \cos\frac{11\pi}{30} = \frac{1}{8}\sqrt{3}(1+\sqrt{5}) - \frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{30} = \cos\frac{8\pi}{30} = \frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\operatorname{sen}\frac{8\pi}{30} = \cos\frac{7\pi}{30} = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\operatorname{sen}\frac{11\pi}{30} = \cos\frac{4\pi}{30} = \frac{1}{8}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{13\pi}{30} = \cos\frac{2\pi}{30} = \frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\operatorname{sen}\frac{14\pi}{30} = \cos\frac{\pi}{30} = \frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{3}(1+\sqrt{5}),$$

y tambien

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{60} = \cos\frac{29\pi}{60} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{60} = \cos\frac{23\pi}{60} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}} - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{11\pi}{60} = \cos\frac{19\pi}{60} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{13\pi}{60} = \cos\frac{17\pi}{60} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{17\pi}{60} = \cos\frac{13\pi}{60} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{19\pi}{60} = \cos\frac{11\pi}{60} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{23\pi}{60}=\cos\frac{7\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{29\pi}{60}=\cos\frac{\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

39. Segun la definicion del número 5, el seno de un arco comprendido entre o y π es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo. En particular el seno del arco $\frac{\pi}{n}$, es la mitad del lado del polígono regular de n lados inscrito en el círculo cuyo rádio es la unidad lineal. Se sigue (núms. 33 y siguientes) que los lados del cuadrado del exágono regular, del triángulo equilátero, del decágono regular y del pentágono regular inscritos, tienen respectivamente por valores

$$\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{3},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

igualmente los valores de los polígonos regulares inscritos de 15 y de 30 lados, tienen respectivamente

$$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{5}),$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

De este modo hemos encontrado las proposiciones de Geometría relativas al cuadrado y al exágono regular. Si el rádio del círculo está representado por R y designamos por D y P los lados del decágono y del pentágono regulares inscritos, las fórmulas

$$\frac{D}{R}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{P}{R}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

darán

$$D^2+R^2=P^2,\ \left(D+\frac{R}{2}\right)^2=R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

La primera de estas fórmulas nos dice que, *el cuadrado del* *lado de un pentágono regular inscrito en un círculo es igual al cuadrado del lado del decágono regular inscrito aumentado en el cuadrado del rádio.*

La segunda nos muestra que, *para obtener el lado del decágono regular inscrito en un círculo, basta construir un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales, uno al rádio del círculo, el otro á la mitad de este rádio, y tomar el exceso de la hipotenusa de este triángulo rectángulo sobre el menor de sus catetos.*

La misma fórmula puede escribirse $\frac{R}{D} = \frac{D}{R-D}$, y ella expresa entonces que D es la media proporcional entre R y $R-D$, es decir que, *el lado del decágono regular inscrito en un círculo es igual á la parte mayor del rádio dividido en media y extrema razon.*

Las fórmulas establecidas en los números 33 y siguientes, conducen así naturalmente á las construcciones que se emplean en Geometría para inscribir en un círculo un exágono regular; y un decágono regular; la inscripcion de un triángulo equilátero y de un pentágono regular, es evidente despues de lo dicho. En cuanto á la de los polígonos regulares de 15 y de 30 lados, puede deducirse fácilmente; el arco subtendido por el lado de un polígono regular inscrito de 15 lados, es evidentemente igual á la diferencia de los arcos subtendidos por los lados del exágono regular y del decágono regular, como ya lo hemos hecho notar.

Observacion acerca de las relaciones que existen entre las diferentes líneas trigonométricas.

40. Las fórmulas relativas á la suma de dos arcos y todas las demás que hemos deducido tienen lugar cualquiera que sean los arcos que se consideren; son, pues, verdaderas identidades. Además, con estas fórmulas pueden darse diversas trasformaciones á las expresiones de que dependen varias líneas trigonométricas, y de aquí resulta la posibilidad de formar tantas relaciones idénticas como se quiera.

Por ejemplo, hemos encontrado en el número 35

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$1 + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = 2 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{10},$$

y multiplicando por cos a, resulta

$$\cos a + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos a = 2 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}\cos a,$$

fórmula idéntica y que se puede escribir como sigue:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} - a\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} + a\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10} - a\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10} + a\right). \end{aligned}\right.$$

Consideremos ahora la expresion

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

en la cual a, b, c designan arcos cualesquiera. El último término es igual á

$$-2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{b+c}{2}\right),$$

ó

$$-\cos\frac{a+b-c}{2} - \cos\frac{a-b+c}{2}$$

$$-\cos\frac{-a+b+c}{2} - \cos\frac{a+b+c}{2};$$

podemos, pues, escribir del modo siguiente la expresion propuesta:

$$\left(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}\frac{b+c-a-\pi}{2}\right) + \left(\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}\frac{a+c-b-\pi}{2}\right)$$
$$+ \left(\operatorname{sen} c + \operatorname{sen}\frac{a+b-c-\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{2};$$

trasformando ahora en productos las sumas contenidas en cada uno de los paréntesis, y reemplazando el último término por

$$2 \operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4},$$

tendremos la fórmula

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ &= 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4} + \cos\frac{3b-c-a+\pi}{4}\right. \\ &\left.\quad + \cos\frac{3c-a-b+\pi}{4} + \cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right), \end{aligned}\right.$$

que tiene lugar idénticamente, cualquiera que sean los arcos a, b, c.

Vemos que si estos arcos satisfacen á la relacion

$$a+b+c = (4n+1)\pi,$$

en la cual n representa un número entero positivo, nulo ó negativo, se tiene

$$(3)\quad \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} = o.$$

41. Para reconocer si una ecuacion algebráica dada entre diversas líneas trigonométricas es idéntica, el medio más general consiste en hacer de manera que uno de los arcos indeterminados que contiene no figure más que en las potencias de una misma línea trigonométrica. Si se ordena en seguida con relacion á la línea trigonométrica de que se trata, los coeficientes de las diferentes potencias de esta línea deben ser nulos, é igualándolos á cero, se obtendrá una série de relaciones idénticas, y que contendrán una indeterminada ménos que la propuesta. Podemos operar de la misma manera con estas relaciones, y continuando así, se llegará á unas relaciones cuya identidad será evidente, si la propuesta era por sí misma idéntica; pero en la mayor parte de los casos se llega á poner en evidencia la identidad de las fórmulas que se consideren, de una manera conveniente, haciendo uso de las fórmulas fundamentales que hemos establecido. Así se verifica inmediatamente la identidad de la fórmula (2), trasformando en sumas los productos contenidos en cada uno de sus dos miembros. En cuanto á la fórmula (1), se la verifica inmediatamente desarrollando cada uno de los senos que contiene.

42. Si una ecuacion entre diversas líneas trigonométricas no es idéntica, pero se verifica estableciendo un cierto número de relaciones entre los arcos que entran en ella, se podrá eliminar un mismo número de arcos, y obtendremos una ecuacion resultante que deberá ser idéntica. Por ejemplo, la relacion (3) no es idéntica, pero se satisface si los arcos a, b, c, cumplen con la condicion (4) $a + b + c = (4n + 1)\pi$, donde n designa un número entero. Para verificar esto, bastará reemplazar c por $(4n + 1)\pi - a - b$ y establecer la identidad de la relacion resultante

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(a + b) - 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} = o;$$

la identidad se manifiesta escribiendo esta relacion como sigue:

$$2 \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \left(\cos \frac{a - b}{2} + \cos \frac{a + b}{2} - 2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}\right) = o.$$

Se ve que la relacion (3) es una consecuencia de la (4), pero mucho más general que esta; pues, segun la fórmula (2), se verifica no sólo por los valores de a, b, c que satisfacen á la (4), sino tambien por los que satisfacen á la relacion

$$\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4}+\cos\frac{3b-c-a+\pi}{4}$$
$$+\cos\frac{3c-a-b+\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}=o.$$

Esto no tiene lugar más que en el caso bastante raro de que una ecuacion algebráica entre dos líneas trigonométricas de varios arcos pueda ser sustituida por una ó varias relaciones algebráicas entre los mismos arcos. Antes de terminar este capítulo, pondremos un ejemplo, en que se verifica esta propiedad.

Consideremos la relacion

$$\cos a+\cos b+\cos c=1+4\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2};$$

si se sustituye $\cos a+\cos b$ por $2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ ó $2\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}$ y $\cos c$ por $1-2\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}$,

la relacion propuesta se trasforma en

$$\left(\operatorname{sen}\frac{c}{2}+\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\right)^2-\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}=o,$$

ó $$\left(\operatorname{sen}\frac{c}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)=o,$$

ó por fin

$$\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{-a+b+c+\pi}{4}$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{a-b+c-\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{a+b-c+\pi}{4}=o,$$

y para que esta relacion tenga lugar, es necesario y suficiente que uno de los arcos

$$\frac{a+b+c-\pi}{4}, \frac{-a+b+c-\pi}{4},$$
$$\frac{a-b+c+\pi}{4}, \frac{a+b-c+\pi}{4}$$

sea igual á un múltiplo $n\pi$ de la semi-circunferencia. La relacion propuesta equivale al sistema de cuatro relaciones

$$a+b+c=(4n+1)\pi, -a+b+c=(4n-1)\pi,$$
$$a-b+c=(4n-1)\pi, a+b-c=(4n-1)\pi.$$

Problemas.

1. Si se representa por S_1 la suma de las tangentes de m arcos $a, b, c, d, \ldots\ldots K$, por S_2 la suma de los productos dos á dos de estas mismas tangentes, por S_3 la suma de sus productos tres á tres, etc.; en fin, por S_m el producto de todas las tangentes, se tiene la fórmula general

$$\operatorname{tang}(a+b+c+\ldots\ldots+K)=\frac{S_1-S_3+S_5\ldots\ldots}{1-S_2+S_4\ldots\ldots};$$

establecer esta fórmula y hallar la expresion de tang ma en funcion de tang a.

2. Supuesto lo mismo que en el caso anterior, tenemos

$$\operatorname{sen}(a+b+c+\ldots+K)=(S_1-S_2+S_5\ldots)\cos a\cos b\ldots\cos K$$
$$\cos(a+b+c+\ldots+K)=(1-S_2+S_4\ldots)\cos a\cos b\ldots\cos K;$$

establecer estas fórmulas y deducir de ellas las expresiones de sen ma y cos ma en funcion de sen a y de cos a.

3. Formar la ecuacion de la cual depende cos $\frac{a}{5}$ cuando

$\cos a$ es conocido, y sen $\frac{a}{5}$ cuando sen a es conocido. Resolver estas dos ecuaciones en el caso de que a tenga uno de los valores o, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12}$, y encontrar en cada uno de estos casos la significacion de las raíces.

4. Si dividimos una circunferencia en n partes iguales y desde los puntos de division se bajan perpendiculares sobre un diámetro cualquiera, la suma de las perpendiculares situadas á un lado de este diámetro es igual á la suma de las perpendiculares situadas al otro.

5. Calcular los lados de los polígonos regulares de 3, 6, 5, 10, 15, 20 y 30 lados circunscritos á un círculo cuyo rádio es igual á la unidad.

6. Encontrar la relacion algebráica entre los arcos a, b, c susceptibles de satisfacer á una de las dos relaciones siguientes:

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c$$
$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

CAPÍTULO II.

DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

Preliminares.

43. Para hacer uso de las funciones circulares, es necesario poder calcular los valores de las líneas trigonométricas de un arco dado, y recíprocamente encontrar el valor de un arco cuando se conoce una de sus líneas trigonométricas. Para llegar á esto, es indispensable tener una Tabla que haga conocer los valores de las líneas trigonométricas que corresponden á valores sucesivos del arco comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$ y cuya diferencia sea suficientemente pequeña. Vamos á indicar qué procedimientos se pueden emplear para construir esta Tabla; veremos en seguida cómo, por medio de esta Tabla, se pueden encontrar las líneas trigonométricas de un arco dado, y recíprocamente el arco positivo más pequeño que corresponde á una línea trigonométrica dada. Pero antes de formar dicha Tabla es necesario establecer algunas proposiciones preliminares.

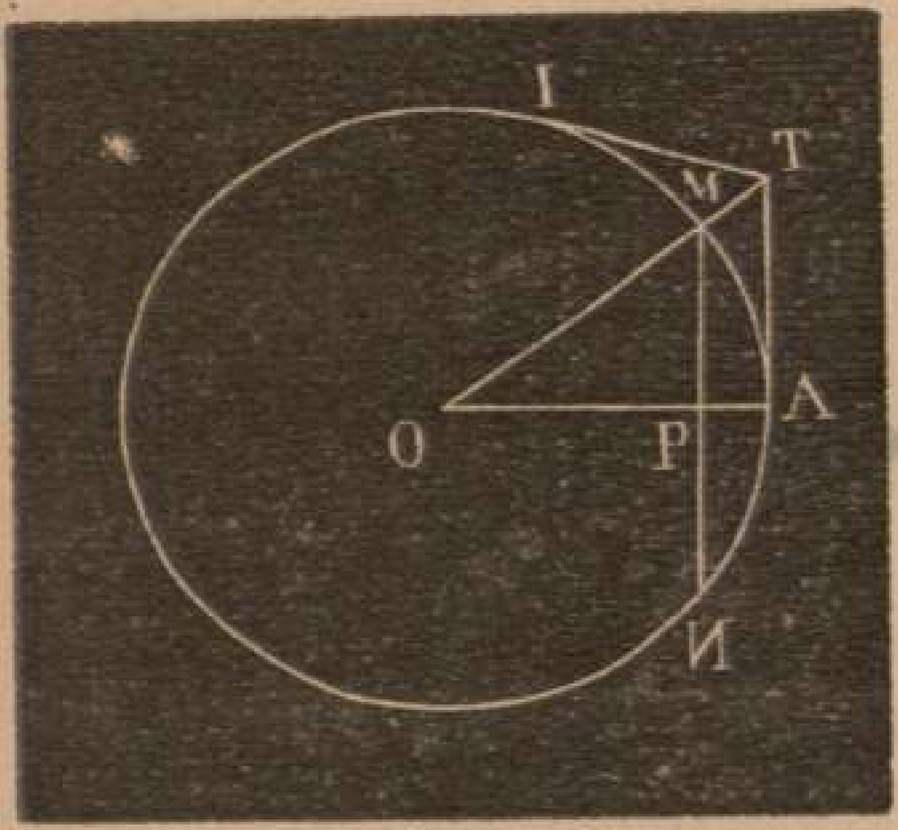
44. Teorema I.—*Todo arco comprendido entre* o *y* $\frac{\pi}{2}$ *es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Sean (fig. 7.ª) $AM = x$ un arco comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$, MP el seno y AT la tangente de este arco. Prolonguemos MP hasta que encuentre en N á la circunferencia y tracemos la tangente TI; tendremos

$$\text{arc } MAN > MN \text{ y arc } AMI < AT + TI.$$

Pero el arco x es la mitad de MAN ó de AMI, sen x es la mitad de MN, y tang x es igual á cada una de las líneas AT y TI; por consiguiente, tenemos $x >$ sen x y $x <$ tang x.

(Fig. 7.ª)



Corolario.—*Si el arco* x *decrece de* $\frac{\pi}{2}$ *á* o, *la relacion* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *se aproxima indefinidamente á la unidad.*

En efecto, siendo tang $x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, podemos escribir

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

ó dividiendo por sen x,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Se sigue de aquí que la relacion $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ está comprendida entre la unidad y la fraccion $\frac{1}{\cos x}$, pues su límite es la unidad para $x = o$; tenemos, pues

$$\lim \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \text{ ó } \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

45. Teorema II.—*El exceso de un arco comprendido entre* o *y* $\frac{\pi}{2}$ *sobre su seno es menor que la cuarta y sexta parte del cubo de dicho arco.*

Para demostrar que la diferencia de que se trata es inferior á la cuarta parte del cubo del arco, basta considerar la desigualdad tang $\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ establecida en el núm. 44, multiplicándola por

$$2\cos^2\frac{x}{2} = 2\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right),$$

se obtiene

$$\operatorname{sen} x > x - x \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \text{ ó } x - \operatorname{sen} x < x \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2};$$

pero sen $\frac{x}{2}$ es inferior á $\frac{x}{2}$ y, por consiguiente, $\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ es inferior á $\frac{x^2}{4}$; tendremos, pues, con mayor razon, $x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{4}$.

46. Para demostrar que la diferencia $x - \operatorname{sen} x$ es inferior á $\frac{x^3}{6}$, pueden emplearse varios procedimientos; el más sencillo consiste en tomar por punto de partida la fórmula

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x,$$

establecida en el núm. 22; y sustituyendo x sucesivamente por

$$\frac{x}{3}, \frac{x}{3^2} \ldots\ldots \frac{x}{3^n},$$

se obtiene

$$3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} - \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3},$$

$$3 \operatorname{sen} \frac{x}{3^2} - \operatorname{sen} \frac{x}{3} = 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3 \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} - \operatorname{sen} \frac{x}{3^{n-1}} = 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^n};$$

sumando estas igualdades, despues de haberlas multiplicado respectivamente por $1, 3, 3^2, \ldots.. 3^{n-1}$, resulta

$$3^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} - \operatorname{sen} x = 4 \left(\operatorname{sen}^3 \frac{x}{3} + 3 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^2} + \ldots.. \right.$$
$$\left. + 3^{n-1} \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^n} \right),$$

ó tambien

$$x\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{3^n}}{\left(\dfrac{x}{3^n}\right)}-\operatorname{sen}x=4\left(\operatorname{sen}^3\frac{x}{3}+3\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^2}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\,3^{n-1}\operatorname{sen}^3\frac{x}{3^n}\right).$$

Si el número entero n aumenta indefinidamente, el arco $\dfrac{x}{3^n}$ tiende hácia cero, y la relacion $\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{3^n}}{\left(\dfrac{x}{3^n}\right)}$ tiende hácia la unidad: el primer miembro de la igualdad anterior tiene, pues, por límite la diferencia $x-\operatorname{sen}x$, y por consiguiente, el segundo miembro tiende tambien hácia este límite. Pero como el seno es inferior al arco, el límite del segundo miembro de nuestra igualdad es inferior al de la progresion geométrica

$$4\left(\frac{x^3}{3^3}+\frac{x^3}{3^5}+\frac{x^3}{3^7}+\cdots\cdots+\frac{x^3}{3^{2n+1}}\right);$$

este último límite es igual á $\dfrac{x^3}{6}$; tenemos, por consiguiente,

$$x-\operatorname{sen}x<\frac{x^3}{6}.$$

47. Los teoremas que preceden establecen de este modo dos límites, x y $x-\dfrac{x^3}{6}$, entre los cuales está comprendido sen x. Se pueden tambien deducir fácilmente dos límites, entre los cuales se encuentre comprendido cos x; tenemos, en efecto,

$$\cos x=1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2},$$

y, como sen $\frac{x}{2}$ está comprendido entre $\frac{x}{2}$ y $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$, se tiene

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2};$$

luego

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2 \text{ ó } < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2\left(\frac{x^3}{48}\right)^2,$$

y con más razon,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Así, $\cos x$ está comprendido entre $1 - \frac{x^2}{2}$ y $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Division de la circunferencia.

48. Hasta aquí hemos obtenido los arcos por sus relaciones con el rádio; pero al aplicar la teoría de las funciones circulares, es mucho más cómodo referirlos á la circunferencia. A este efecto, se ha dividido la circunferencia de círculo en 360 partes iguales, á cuyas partes se ha dado la denominacion de *grados*; de suerte, que la semi-circunferencia contiene 180 *grados*, y el cuadrante 90. Cada grado se divide en 60 *minutos* y cada minuto en 60 *segundos*. Los grados, minutos y segundos se representan por °, ′, ″; los arcos menores que 1″ se expresan en fraccion de segundo. Así, un arco de 23 grados, 27 minutos, 31 segundos y 8 décimas de segundo, se expresará por 23° 27′ 31″,8.

Si se designa por x la longitud de un arco, por N su número de grados, se tendrá la proporcion $\frac{x}{\pi} = \frac{N}{180^\circ}$, que nos dará el valor de x ó el de N cuando conozcamos una de estas cantidades. Si tomamos el segundo por unidad y se nos pide el número x' de segundos contenidos en el arco x, nos serviremos de la fórmula

$$\frac{x}{\pi} = \frac{x'}{648000} \quad (1).$$

Si, por ejemplo, queremos tener el número de segundos contenidos en el arco igual á 1, tendremos

$$x' = \frac{648000}{\pi};$$

el valor de π es

$$\pi = 3{,}14159265358979323846 \ldots\ldots;$$

y llevando el cálculo hasta las milésimas de segundo, se encuentra

$$x' = 206264'',806 = 57^\circ\, 17'\, 44'',806.$$

Construccion de una tabla de senos y cosenos.

49. Para tener las líneas trigonométricas de un arco cualquiera, es suficiente conocer las de los arcos comprendidos entre 0° y 90°.

Podemos limitarnos á los arcos comprendidos entre 0° y 45°, pues dos arcos complementarios, tales como $45^\circ + x$ y $45^\circ - x$, tienen las mismas líneas trigonométricas. Además, si conocemos los senos y cosenos de todos los arcos comprendidos entre 0° y 45°, las otras cuatro líneas trigonométricas se determinan fácilmente por medio de las fórmulas establecidas en el número 11.

Esto supuesto, vamos á ver cómo puede formarse una Tabla de senos y cosenos de todos los arcos de 10 en 10 segundos comprendidos entre 0° y 45°.

Seno y coseno del arco de 10 *segundos*.—Designemos por ε

la longitud del arco de 10 segundos; se tendrá (núm. 48)

$$\varepsilon = \frac{10\,\pi}{648000} = \frac{\pi}{64800},$$

y haciendo la division, tendremos

$$\varepsilon = 0{,}000048481368110\ \ldots..$$

Tambien sabemos

$$\text{sen}\,\varepsilon < \varepsilon \ \text{ y } \ \text{sen}\,\varepsilon > \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6};$$

de donde

$$\frac{\varepsilon^3}{6} < 0{,}00000\ 00000\ 00021;$$

Se tiene, pues,

$$\text{sen}\ 10'' < 0{,}000048481368110,$$
$$\text{sen}\ 10'' > 0{,}000048481368089.$$

Vemos que estos dos límites de sen 10″ tienen comunes las doce primeras cifras decimales, y que podemos establecer, con un error menor que media unidad del décimo tercio órden decimal,

$$\text{sen}\ 10'' = 0{,}0000484813681.$$

Vamos ahora á calcular cos 10″; se tiene (47)

$$\cos\varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \ \text{ y } \ \cos\varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24};$$

pero como

$$\varepsilon < 0{,}00005 \ \text{ ó } < \frac{1}{2 \times 10^4};$$

se tiene

$$\frac{\varepsilon^4}{24} < \frac{1}{384 \times 10^{16}} < \frac{1}{3 \times 10^{18}},$$

de donde se deduce que $1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ es un valor aproximado de $\cos 10''$ en ménos de media unidad del décimo octavo órden decimal. Tendremos, tomando las trece primeras cifras decimales

$$\cos 10'' = 0{,}99999\ 99988\ 248.$$

50. *Senos y cosenos de los arcos de* 10 *en* 10 *segundos, comprendidos entre cero y* 45°.—Si en las fórmulas

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\cos b \operatorname{sen} a,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos b \cos a,$$

se hace $a = (m-1)\,b$, resulta

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} mb = 2\cos b \operatorname{sen}(m-1)\,b - \operatorname{sen}(m-2)\,b, \\ \cos mb = 2\cos b \cos(m-1)\,b - \cos(m-2)\,b. \end{cases}$$

Tomando $b = 10''$ y haciendo $m = 2$, estas fórmulas nos darán los valores de $\operatorname{sen} 20''$ y $\cos 20''$. Y en general, cuando se conozcan el seno y coseno de dos múltiplos consecutivos del arco $b = 10''$, las fórmulas (1) nos dan el seno y coseno del múltiplo siguiente. Pero abreviaremos los cálculos operando de la manera siguiente: el multiplicador constante $2\cos 10''$ difiere poco de dos unidades; haciendo

$$2\cos 10'' = 2 - k$$

se tiene

$$k = 0{,}00000\ 00023504,$$

y las fórmulas (1) se trasforman en

$$(2)\quad \begin{cases} [\operatorname{sen} mb - \operatorname{sen}(m-1)\,b] = [\operatorname{sen}(m-1)\,b - \operatorname{sen}(m-2)\,b] \\ \qquad\qquad - k \operatorname{sen}(m-1)\,b, \\ [\cos mb - \cos(m-1)\,b] = [\cos(m-1)\,b - \cos(m-2)\,b] \\ \qquad\qquad - k \cos(m-1)\,b. \end{cases}$$

Estas fórmulas (2) sirven para calcular las diferencias

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{sen } mb - \text{sen } (m-1)\, b, \\ \cos mb - \cos (m-1)\, b, \end{cases}$$

por medio de las diferencias precedentes

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{sen } (m-1)\, b - \text{sen } (m-2)\, b, \\ \cos (m-1)\, b - \cos (m-2)\, b, \end{cases}$$

que probablemente habrán sido calculadas, así como

$$\text{sen } (m-1)\, b \text{ y } \cos (m-1)\, b.$$

Añadiendo respectivamente á las diferencias (3) los valores conocidos de sen $(m-1)\, b$ y cos $(m-1)\, b$, tendremos sen mb y cos mb.

Las diferencias (3) se deducen fácilmente de las diferencias (4) que ya habrán sido calculadas; basta para ello suprimir en dichas fórmulas de los productos k sen $(m-1)\, b$, y k cos $(m-1)\, b$ en los cuales uno de los factores k, y estos productos se calcularán prontamente si se ha tenido cuidado de formar una Tabla con los productos de k por los nueve primeros números.

51. Por laboriosos que parezcan los cálculos cuya marcha acabamos de indicar, se concibe, sin embargo, la posibilidad de formar una Tabla de senos y cosenos de todos los arcos de 10 en 10 segundos desde o hasta 45°. Siendo indudable que en el curso de las operaciones indicadas se van acumulando errores, vamos á ver de qué modo podemos saber en un momento dado la aproximacion con que tenemos el seno y coseno de un cierto arco. Hemos partido de los valores de sen 10″ y cos de 10″ calculados con un error menor que media unidad del décimo tercio órden decimal; supongamos que en todos los cálculos siguientes hemos conservado un número μ de decimales; vamos á ver qué valor es necesario dar al número μ para tener la aproximacion que se desea. Designemos en general por φ_m el valor

aproximado de sen m 10″ ó de cos m 10″ calculado como se va á explicar con μ decimales, y por $\varphi_m + \varepsilon_m$ el valor exacto; por medio de esta notacion se puede escribir, como sigue, una cualquiera de las fórmulas (1),

$$\varphi_m + \varepsilon_m = (2 - K)(\varphi_{m-1} + \varepsilon_{m-1}) - (\varphi_{m-2} + \varepsilon_{m-2}).$$

Habiendo sido calculados φ_{m-1} y φ_{m-2} con μ decimales, se calculará el producto $(2 - K)\,\varphi_{m-1}$ tambien con μ decimales, y el producto aproximado de φ_{m-2} se disminuirá: la diferencia será φ_m. Tenemos, pues,

$$\varphi_m = (2 - K)\,\varphi_{m-1} - \varphi_{m-2} - \zeta_{m1},$$

designando por ζ_m el error positivo ó negativo que se comete, sustituyendo por $(2 - K)\,\varphi_{m-1}$ el valor aproximado de este producto con $\frac{1}{10^\mu}$ de error. De las dos ecuaciones anteriores se deduce

$$\varepsilon_m = (2 - K)\,\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-3} + \zeta_m;$$

pero la cantidad $K\varepsilon_{m-1}$ es muy pequeña con relacion á $2\varepsilon_{m-1}$ y se puede reducirla á ζ_m sin que el límite superior de esta última cantidad se altere de una manera sensible; de este modo podemos escribir sencillamente

$$\varepsilon_m = 2\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \zeta_m;$$

ó

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \zeta_m.$$

Haciendo sucesivamente $m = 2, 3, \ldots\ldots, m$, y observando que ε_0 es nulo, puesto que ningun error se comete en sen o y cos o, se deduce

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \zeta_2, \quad (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \zeta_3,$$
$$(\varepsilon_4 - \varepsilon_3) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \zeta_4, \ldots\ldots$$
$$(\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}) = (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2}) + \zeta_m.$$

Sumando todas estas igualdades, se deduce

$$(\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}) = \varepsilon_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots\ldots + \zeta_m;$$

cada una de las cantidades ζ_2, ζ_3, ... es menor en valor absoluto que $\frac{1}{10^{\mu}}$, y tambien menor que su medio aritmético, designando por θ_m este medio aritmético, la ecuacion precedente se convierte en

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_1 + (m-1)\,\theta_m;$$

si damos á m los valores sucesivos 2, 3 ....., m, se deducen las igualdades siguientes:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \theta_2,\quad \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\theta_3,$$
$$\varepsilon_4 - \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 3\,\theta_4 \ \ldots\ldots\ \varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_1 + (m-1)\,\theta_m,$$

y sumándolas,

$$\varepsilon_m = m\varepsilon_1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 3\theta_4 + \ldots\ldots + (m-1)\,\theta_m.$$

El valor absoluto de ε_1 es $< \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^{13}}$, y el valor absoluto de cada una de las cantidades θ_2, θ_3, es menor que $\frac{1}{10^{\mu}}$; por otra parte, la suma $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (m-1)$, es igual á $\frac{m\,(m-1)}{2}$; tenemos, pues, haciendo abstraccion del signo de ε_m,

$$\varepsilon_m < \frac{m}{2 \times 10^{13}} + \frac{m\,(m-1)}{2 \times 10^{\mu}}.$$

Busquemos, segun esto, cuál es el error cometido en el seno y coseno del arco de 45 grados cuyo cálculo termina la série de operaciones. El arco de 45 grados contiene 16200 veces al arco de 10 segundos; hagamos, pues, á $m = 16200$; la desigualdad anterior queda reducida á la siguiente:

$$\varepsilon_{16200} < \frac{16200}{2 \times 10^{13}} + \frac{16200 \times 16199}{2 \times 10^{\mu}},$$

y con mayor razon, tendremos:

$$\varepsilon_{16200} < \frac{1}{10^9} + \frac{1,5}{10^{\mu-8}}.$$

Si hacemos á $\mu = 17$, la segunda fraccion queda igual á $\frac{1,5}{10^9}$ y tendremos $\varepsilon_{16200} < \frac{2,5}{10^9}$ ó $< \frac{1}{4} \times \frac{1}{10^8}$; así el error cometido en sen 45 ó cos 45 grados será menor que la cuarta parte de una unidad del octavo órden decimal.—Resulta de estos desarrollos que, partiendo de los valores de sen 10″ y de cos 10″ obtenidos con un error de media unidad del 13 órden decimal, y calculando con 17 cifras decimales los senos y los cosenos de los arcos siguientes, se podrá contar con 8 cifras decimales exactas hasta la terminacion de la Tabla.

52. Pero cuando se trata de efectuar estos cálculos, es conveniente y aun indispensable someter los resultados que vamos obteniendo á frecuentes verificaciones. Así, antes de empezar las operaciones, se deben calcular directamente los senos y cosenos de un cierto número de arcos, á fin de tener, cuando sea necesario, un número suficiente de términos de comparacion; por ejemplo, hemos dado (núms. 37 y 38) las expresiones de los senos y cosenos de los múltiplos de $\frac{\pi}{60}$, es decir, de arcos que varían de tres en tres grados, siendo conveniente calcular estos senos y cosenos con un número suficiente de decimales; si el intervalo de tres grados pareciese demasiado grande, se le puede reducir á la mitad ó la cuarta parte por medio de las fórmulas

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \quad \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

y de las relativas á la adicion y multiplicacion de los arcos; así, pues, se puede construir muy fácilmente una Tabla preliminar, muy exacta, que contenga los senos y cosenos de los múltiplos de 45′ ó de 2700″. Esta Tabla preliminar, no solo ofrece la ventaja de proporcionar medios de verificacion, sino que tambien nos ofrece el medio de obtener con más exactitud los cálculos relativos á la construccion de la Tabla definitiva, porque de 2700″ en 2700″ los senos y cosenos pueden conocerse con toda la precision que se quiera.

Por último, cuando la Tabla se halle ya construida, se puede verificar de otros varios modos por medio de la fórmula idéntica

$$\text{sen}\,(90^\circ - x) + \text{sen}\,(18^\circ - x) + \text{sen}\,(18^\circ + x) = \text{sen}\,(54^\circ - x) + \text{sen}\,(54^\circ + x),$$

establecida en el número 40, y por medio de otras fórmulas análogas.

Si se quiere construir la Tabla por el procedimiento del número 50, se deben suspender los cálculos al llegar al arco de 30°. En efecto, habiéndose calculado los senos y cosenos de los arcos de 10 en 10 segundos, comprendidos entre 0° y 30°, se obtendrán los senos y cosenos de los arcos comprendidos entre 30 y 45 grados, por una simple sustraccion.

En efecto, recordando que sen $30^\circ = \frac{1}{2}$, se tiene (núm. 18)

$$\text{sen}\,(30^\circ + x) + \text{sen}\,(30^\circ - x) = \cos x,$$
$$\cos\,(30^\circ - x) - \cos\,(30^\circ + x) = \text{sen}\,x,$$

de donde se deduce

$$\text{sen}\,(30^\circ + x) = \cos x - \text{sen}\,(30^\circ - x),$$
$$\cos\,(30^\circ + x) = \cos\,(30^\circ - x) - \text{sen}\,x;$$

y por medio de estas fórmulas, se obtienen fácilmente los senos y cosenos de los arcos mayores que 30°, cuando se conocen los de los arcos menores que 30°, simplificándose mucho de este modo la construccion de la Tabla.

El procedimiento que acabamos de exponer es el empleado por los sábios que construyeron las primeras Tablas de senos y cosenos. El análisis ha proporcionado medios más expeditos para llenar este objeto; consistiendo estos métodos en el empleo de las *diferencias*, y fundándose estas en las fórmulas que expresan el seno y coseno de un arco en funcion de dicho arco. Estas fórmulas las estableceremos en el Capítulo V.

Tablas de logaritmos de las funciones circulares.

53. En las aplicaciones numéricas se opera siempre por logaritmos; así se tiene con más frecuencia necesidad de conocer los logaritmos de los senos y cosenos que los senos y cosenos mismos. Pero habiendo sido calculados los senos y cosenos de los arcos de 10″ en 10″, se podrá formar la Tabla de sus logaritmos. Una vez formada esta Tabla, se construirá la de los logaritmos de las tangentes y de las cotangentes por medio de las fórmulas

$$\log \operatorname{tang} x = \log \operatorname{sen} x - \log \cos x,$$
$$\log \operatorname{cotang} x = \log \cos x - \log \operatorname{sen} x.$$

En cuanto á las secantes y cosecantes, no se emplean; siendo además sus logaritmos iguales y de signo contrario á los del coseno y seno. (*)

Las Tablas de senos, cosenos, etc., que más se usan, son las de Callet; pero antes de dar una idea de su disposicion y uso, haremos una observacion importante.

Los senos y cosenos de los arcos comprendidos entre *o*° y 90°,

---

(*) En el Capítulo V se encontrarán las fórmulas por medio de las cuales se puede calcular directamente, y con toda la aproximacion que se desee, los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los arcos.

las tangentes de los arcos de 0° á 45°, y las cotangentes de los arcos de 45° á 90° son menores que 1; de suerte que sus logaritmos son negativos. Se ha querido evitar, en las Tablas de Callet, el empleo de características negativas, que es, no obstante, preferible, y se han añadido 10 unidades á todos los logaritmos negativos; es, pues, necesario tener cuidado de suprimir estas 10 unidades.

Disposicion de las Tablas de Callet.

54. La primera de estas Tablas contiene los logaritmos de los senos y tangentes, de segundo en segundo para los cinco primeros grados, con siete decimales; pero siendo el seno y la tangente de un arco el coseno y cotangente de su complemento, esta Tabla da tambien los logaritmos de los cosenos y cotangentes de los arcos mayores que 85°. Los grados están marcados fuera del cuadro en la parte superior é inferior de cada página; los minutos ocupan la primera y última línea; los segundos la primera y última columna. Los senos y cosenos están á la izquierda de cada página, y las tangentes y cotangentes á la derecha, como se ve en los títulos de estas páginas.

Las Tablas siguientes contienen los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de 10 en 10 segundos, para todos los grados de un cuadrante. Aquí los grados están escritos fuera del cuadro, y en la parte superior é inferior de cada página. Los minutos y segundos que están en la primera y segunda columnas se refieren á los grados de la parte superior; los minutos y segundos de la última y penúltima columna corresponden á los grados de la parte inferior.

La tercer columna contiene los logaritmos de los senos de los arcos, cuyo número de grados, minutos y segundos están respectivamente en la parte superior, y en la primera y segunda columnas. La tercer columna se titula *senos*, pero es necesario leer *logaritmos de los senos*. La misma observacion hay que hacer respecto á las demás columnas. La cuarta columna contiene las diferencias de los logaritmos de los senos, como lo dice su título; cada número de esta columna no está en línea con el de la columna precedente, sino que está comprendido entre dos de la columna anterior, y cada uno de ellos expresa la diferencia que se obtendria restando los dos logaritmos entre los cuales se halla comprendido. Las columnas quinta y sexta contienen los logaritmos de los cosenos de los mismos arcos y sus diferencias; la sétima y la octava los de las tangentes y sus diferencias; y, por último, en la novena columna están los logaritmos de las cotangentes de estos arcos; sus diferencias son las mismas que las de los logaritmos de las tangentes (*): por esto la columna que contiene estas últimas diferencias se llama de las *diferencias comunes*.

Si no se consideran más que los grados expresados en la parte superior de cada página, puede creerse que las Tablas no pasan de 45°; pero si se observa que cada columna tiene dos títulos; que la columna que en la parte superior dice *seno*, en la inferior dice *coseno;* que la que en su parte superior tiene escrito *coseno*, en la inferior dice *seno;* que lo mismo sucede para las tangentes y cotangentes, se verá que, consultando los grados y los títulos de la parte inferior de cada página, y sus dos últimas columnas de la derecha, se tendrán los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los grados, minutos y segundos desde 45 hasta 90 grados.

Uso de las Tablas.

55. PROBLEMA I.—*Conociendo el número de grados, minutos y segundos de un arco menor que* 90°, *hallar el logaritmo de su seno, coseno, tangente ó cotangente.*

(*) Tenemos $\dfrac{\operatorname{tang}(x+h)}{\operatorname{tang} x} = \dfrac{\cot x}{\operatorname{cotg}(x+h)}$,

y tomando logaritmos resulta

$$\log \operatorname{tang}(x+h) - \log \operatorname{tang} x = \log \cot x - \log \cot (x+h).$$

Primer caso.—Si el número dado consta de grados minutos y un múltiplo de 10 segundos, se buscará el número de grados entre los escritos en la parte superior ó inferior de cada página; en la parte superior si es menor que 45°, en la inferior si es mayor. Se seguirá la primer columna que va creciendo de arriba á abajo, si el número de grados está en la parte superior de la página, ó la última que crece de abajo á arriba, si el número de grados estuviese en la parte inferior; se seguirá una de estas columnas en el sentido de su crecimiento, hasta llegar al número de minutos dado; se pasa á la columna de los segundos siguiendo la línea de los minutos que hemos hallado; siguiendo, en el mismo sentido que la anterior, en esta columna se encontrará el múltiplo de diez que expresa el número de segundos que se nos dió, y en la misma línea de estos segundos se encuentra el logaritmo del seno, coseno, tangente ó cotangente que se busca.

Se quiere, por ejemplo, el logaritmo de la tangente de 79° 51′ 40″; encontrándose 79° en la parte inferior de la página, se subirá á lo largo de la última columna que crece de abajo á arriba; se halla en esta columna 51 minutos; se pasa á la columna precedente, que es donde se hallan las decenas de segundos; se sube á lo largo de esta columna, y se encuentra 40 segundos; en la misma línea y en la columna que dice en su parte inferior *tangente*, se halla 0,7475657, que es el logaritmo pedido. Tenemos, pues, log tang (79° 51′ 40″) = 0,7475657.

Supongamos ahora que el número de grados está en la parte superior de la página, y que el arco que se nos da sea, por ejemplo, 2° 24′ 50″; hallándose 2° en la parte superior de la página, se desciende por la primer columna que crece de arriba á abajo, se halla 24 minutos en esta columna; se pasa á la siguiente, que es la de los segundos; descendiendo por esta columna se hallará 50 segundos; en la misma línea y en la columna, cuya parte superior dice *seno*, se halla 8,6244662, que es el logaritmo buscado, pero aumentado en 10 unidades. Así, pues, tendremos log sen (2° 24′ 50″) = $\overline{2}$,6244662.

Segundo caso.—Si el número dado contiene decenas y unidades de segundos y fracciones de segundo, se empezará por convertir las fracciones de segundo en fraccion decimal; despues se buscará, como acabamos de explicar, el logaritmo del seno ó de la tangente del arco dado, haciendo abstraccion de las unidades y fracciones decimales de segundo, las cuales designaremos ahora por h. Se toma en seguida la diferencia Δ que existe entre el logaritmo encontrado y el que le sigue inmediatamente; por último, se añadirá al logaritmo encontrado el número Δ', determinado por la ecuacion

$$\frac{h}{10} = \frac{\Delta'}{\Delta}, \text{ de donde } \Delta' = \frac{h\Delta}{10},$$

y se tendrá el logaritmo buscado. Δ' y Δ expresan aquí unidades del sétimo órden decimal: se tomará para Δ' la parte entera del producto $\frac{\Delta}{10} \times h$; pero será conveniente aumentar en una unidad esta parte entera si la despreciada es mayor que 0,5.

Si se quiere el logaritmo del coseno ó de la cotangente del arco dado, se aumentará una decena al número de segundos del arco, y despues de haber suprimido las unidades y las fracciones de segundo, se tendrá un arco que excederá al dado en una cierta fraccion decimal h de segundo; se buscará el logaritmo de su coseno ó de su cotangente, y se le añadirá $\frac{h\Delta}{10}$ al resultado, siendo aquí Δ la diferencia que existe entre el logaritmo hallado y el que le precede inmediatamente, yendo de arriba á abajo ó al contrario, segun la marcha que se siga.

La regla que acabamos de dar se funda en el principio siguiente:

Si se dan sucesivamente á un arco cualquiera dos incrementos muy pequeños, los incrementos correspondientes de log sen ó de log cos, etc., son sensiblemente proporcionales á los incrementos del arco.

Este principio no es rigorosamente exacto, pero aplicándole se obtiene una aproximacion suficiente, excepto en los casos que estudiaremos más adelante. Se puede comprobar este principio por medio de las mismas Tablas; se reconoce efectivamente que en una extension bastante grande, salvo al principio de las Tablas, las diferencias de log sen, log cos, etc., son sensiblemente constantes; y tambien que para incrementos iguales dados á un arco, el logaritmo del seno, del coseno, etc., tomarán incrementos sensiblemente iguales.

Daremos por medio de algunos ejemplos el modelo del cálculo que es preciso seguir para estos casos.

1.° *Hallar el logaritmo de* sen (49° 53′ 24″, 3).

Log sen (49° 53′ 20″)		$=\bar{1},8835459$	$\Delta = 177$
para	4″, 3	76	$17,7 \times 4,3 = 76,11$
Log sen (49° 53′ 24″, 3)		$=\bar{1},8835535$	

2.° *Hallar el logaritmo de* cos (36° 35′ 36″, 3).

Log cos (36° 35′ 40″)		$=\bar{1},9046481$	$\Delta = 156$
para	3″, 7	58	$121,5 \times 7,2 = 57,72$
Log cos (36° 35′ 86″, 3)		$=\bar{1},9046539$	

3.° *Hallar el logaritmo de* tang (79° 51′ 47″, 2).

Log tang (79° 51′ 40″)		$= 0,7475657$	$\Delta = 1215$
para	7″, 2	875	$121,5 \times 7,2 = 874,80$
Log tang (79° 51′ 47″, 2)		$= 0,7476532$	

4.° *Hallar el logaritmo de* cot (23° 17′ 22″, 3).

Log cot (23° 17′ 30″)		$= 0,3660313$	$\Delta = 580$
para	7″,7	447	$58 \times 7,7 = 446,60$
Log cot (23° 17′ 22″, 3)		$= 0,3660760$	

Tercer caso.—Si las diferencias que se hallan en las Tablas difieren demasiado, lo cual sucede cuando el arco es muy pequeño, no obtenemos entonces una aproximacion suficiente: vamos á ver cómo operaremos en este caso. Estando expresado el arco dado en segundos y en fraccion decimal de segundo, sea a la parte entera y h la fraccion decimal; para tener log sen $(a + h)$ y log tang $(a + h)$, se puede admitir que la relacion entre estos arcos, muy pequeños, a y $a + h$ es igual á la relacion de los senos ó de las tangentes de estos arcos; si establecemos, pues,

$$\frac{\text{sen}\,(a+h)}{\text{sen}\,a} = \frac{a+h}{a}, \quad \frac{\text{tang}\,(a+h)}{\text{tang}\,a} = \frac{a+h}{a},$$

se tendrá

$$\log \text{sen}\,(a+h) = \log \text{sen}\,a + \log\,(a+h) - \log a,$$
$$\log \text{tang}\,(a+h) = \log \text{tang}\,a + \log\,(a+h) - \log a.$$

Se tomará log sen a ó log tang a en la primera parte de la Tabla y log $(a + h)$ y log a en las Tablas de los logaritmos de los números, y así tendremos fácilmente log sen $(a + h)$ y log tang $(a + h)$ por las fórmulas precedentes.

Se quiere, por ejemplo, el logaritmo del seno de $0°3'27''$, 355; reducido este arco á segundos es igual á $207''$, 355; se tiene, pues, $a = 207$, $h = o, 355$. El logaritmo de sen $(3'\ 27'')$ es $\bar{3},0015451$, el logaritmo de 207,355 es 2,3167145; el de 207 tomado con el signo — es $\bar{3},6840297$; sumando estos tres logaritmos resulta

$$\log \text{sen}\,(0°\ 3'\ 27'',\ 355) = \bar{3},0022893.$$

Si se pide el logaritmo de la cotangente de un arco muy pequeño, se hallará el de la tangente, como hemos indicado, y cambiando luego el signo á este logaritmo, tendremos el pedido.

Si se trata de log cos de un arco muy pequeño $a + h$, se tiene

$$\log \cos (a + h) = \log \operatorname{sen} (a + h) - \log \operatorname{tang} (a + h),$$

fórmula por medio de la cual tendremos log cos $(a + h)$, después de haber determinado log sen $(a + h)$ y log tang $(a + h)$ como acabamos de decir. Pero esta fórmula resulta en virtud de las ecuaciones escritas más arriba,

$$\log \cos (a + h) = \log \operatorname{sen} a - \log \operatorname{tang} a = \log \cos a;$$

de donde se deduce que los arcos $a + h$ y a, tienen sus log cos sensiblemente iguales; siendo esto lo mismo que nos demuestran las Tablas. Supongamos que se nos pide hallar el log cos de $0^{\circ}\ 3'\ 27'', 355$; este arco cae entre $3'\ 20''$ y $3'\ 30''$, arcos cuyos cosenos tienen el mismo logaritmo $\overline{1},9999998$: se tendrá entonces

$$\log \cos (0^{\circ}\ 3'\ 27'', 355) = \overline{1},9999998.$$

56. PROBLEMA II.—*Conociendo el logaritmo de un seno, de un coseno, de una tangente ó de una cotangente, se quiere hallar el número de grados, minutos y segundos del arco á que pertenezca la línea cuyo logaritmo se conoce.*

Primer caso.—Se busca el logaritmo dado en una cualquiera de las dos columnas que tienen por título la línea trigonométrica cuyo logaritmo conocemos. Si el logaritmo dado se encuentra entre los de la columna que hemos consultado, se observara en qué extremidad está el nombre de la línea dada; si está en la parte superior, se mira la columna de la izquierda, y en la línea del logaritmo se encontrará el número de decenas que expresa el de segundos del arco buscado. Se pasará después á la primer columna; si en la misma línea hay un número, este será el de los minutos buscados; si nó, se sube á lo largo de esta columna y el primer número que se encuentre será el de los minutos; y por último, en la parte superior de la página y fuera del cuadro, se verá el número de grados pedido. Pero si el nombre de la línea estuviese en la parte inferior, es necesario recorrer la antepenúltima columna hácia la derecha, y así tendremos los segundos; en seguida se pasa á la última columna, y en ella se hallarán los minutos, sea en la misma línea, sea descendiendo por esta columna. Hallándose, por último, el número de grados pedido en la parte inferior de la página y fuera del cuadro.

Se quiere, por ejemplo, el número de grados, minutos y segundos del arco cuyo log sen es $\overline{1},3541803$; se buscará este logaritmo en una de las dos columnas que tienen escrito *seno*, sin cuidarse para nada de que esta palabra esté arriba ó abajo en la columna; una vez hallado se observa si esta palabra está en la parte superior ó inferior de dicha columna; se consulta la segunda columna de la izquierda, y se encuentra 50 en la línea de 9,3541803; se pasa á la primer columna, en la que nada se encuentra; pero subiendo por esta columna se encuentra 3: por último, en la parte superior de la página y fuera del cuadro se encuentra 13°. El arco pedido es, pues, $13^{\circ}\ 3'\ 50''$.

Segundo caso.—Si el logaritmo dado no se encuentra en las Tablas, cuyo caso es el más ordinario, se buscarán dos logaritmos entre los cuales se halle comprendido; se tomará de estos dos logaritmos el más próximo al nombre de la columna que consultamos; dicho logaritmo se resta del dado, ó al contrario, segun el que sea mayor; se tendrá así una diferencia Δ', y llamando Δ la diferencia *tabular* de los logaritmos que comprenden al dado, se determinará el número h por la ecuacion $\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{h}{10}$, de donde $h = \frac{10\,\Delta'}{\Delta}$. El número h menor que 10 expresa las unidades de segundos y fracciones de segundo del arco buscado. En cuanto al número de grados, minutos y decenas de segundos, se obtendrán sustituyendo al logaritmo dado el de la Tabla, cuya diferencia es Δ', y siguiendo despues la marcha indicada en el caso precedente.

Indicaremos por medio de varios ejemplos la marcha que es preciso seguir en estos casos.

1.° *Hallar el arco cuyo* log sen *es* $\overline{1},8835535$.

Log sen $x = \overline{1},8835535$			
para	1,8835459	49° 53′ 20″	$\Delta = 177$
$\Delta' \times 10$	760	4″, 29	

$$x = 49^\circ\ 53'\ 24'',\ 29$$

2.° *Hallar el arco cuyo* log cos *es* $\overline{1},9046539$.

Log cos $x = \overline{1},9046539$			
para	$\overline{1},9046637$	36° 35′ 30″	$\Delta = 156$
$\Delta' \times 10$	980	6″, 3	

$$x = 36^\circ\ 35'\ 36'',\ 3$$

3.° *Hallar el arco cuyo* log tang *es* 0,7476532.

Log tang $x = 0,7476532$			
para	0,7475657	79° 51′ 40″	$\Delta = 1215$
$\Delta' \times 10$	8750	7″, 2	

$$x = 79^\circ\ 51'\ 47'',\ 2$$

4.° *Hallar el arco cuyo* log cot *es* 0,3660760.

Log cot $x = 0,3660760$			
para	0,3660892	23° 17′ 20″	$\Delta = 580$
$\Delta' \times 10$	1320	2″, 28	

$$x = 23^\circ\ 17'\ 22'',\ 28$$

Tercer caso.—El procedimiento que acabamos de indicar no es aplicable cuando las diferencias de las Tablas varían demasiado. Este caso se presenta cuando hay que determinar un arco muy pequeño por su log sen ó log tang; veamos el procedimiento que es preciso seguir en este caso. Buscaremos en la primera parte de la Tabla el logaritmo que se aproxima más al dado, y se reducirán á segundos los grados y minutos del arco correspondiente; designemos por a el número de segundos obtenido de este modo y por $a + h$ el número exacto de segundos contenidos en el arco desconocido; determinaremos $a + h$ por una de las dos ecuaciones

$$\log (a + h) = \log \operatorname{sen} (a + h) - \log \operatorname{sen} a + \log a,$$
$$\log (a + h) = \log \operatorname{tang} (a + h) - \log \operatorname{tang} a + \log a,$$

fórmulas que hemos ya mencionado tratando del problema inverso al que nos ocupa.

Si queremos, por ejemplo, el número de grados, minutos, etcétera, del arco cuyo log sen es $\bar{3},0022893$, encontramos que el logaritmo tabular que se aproxima más á este logaritmo es $\bar{3},0015451$ ó $-2,9984549$, y este logaritmo corresponde al arco de $0^{\circ}\,3'\,27''$ ó de 207 segundos; el logaritmo de 207 es 2,3159703; sumando los tres números $\bar{3},0022893$; 2,9984449; 2,3159703, se obtiene la suma 2,3167145. Este logaritmo corresponde al número 207,355; el arco buscado es, pues, $207''$, 355 ó $0^{\circ}\,3'\,27''$, 355. Se opera del mismo modo para determinar un arco muy pequeño cuando se conoce el logaritmo de su cotangente, puesto que es igual y de signo contrario al de su tangente. Pero cuando se trata de determinar un arco muy pequeño por medio del logaritmo de su coseno, es imposible hacerlo con precision. Se quiere, por ejemplo, conocer el arco cuyo coseno tiene por logaritmo $\bar{1},9999991$, la Tabla nos dice que este logaritmo corresponde á todo arco comprendido entre $6'\,45''$ y $7'\,25''$; no podemos obtener de este modo el arco pedido, sino con cuarenta segundos de error.

57. La solucion de los problemas que acabamos de tratar se fundan en la igualdad aproximada $\frac{h}{10} = \frac{\Delta'}{\Delta}$ (1); si tenemos (2) $\Delta' = \frac{h\Delta}{10} \pm e$, $h = \frac{10\,\Delta'}{\Delta} \pm \varepsilon$, e y ε medirán los errores cometidos aplicando la fórmula (1) en el cálculo de Δ' (primer problema) y en el cálculo de h (segundo problema). Tambien se demuestra, por consideraciones que no pueden indicarse aquí, que e es siempre menor que una unidad del sétimo órden decimal si el arco cuyo log sen ó log tang es mayor que un cierto límite inferior á 5 grados, y que lo mismo se verifica, por consiguiente, si el arco cuyo log cos ó log cot se busca es superior á 85 grados. El empleo de la fórmula (1) es, pues, legítimo, entre estos límites, en la solucion del segundo caso del primer problema. Se demuestra tambien que el error ε relativo al segundo problema es más pequeño que una centésima de segundo, si el arco que se calcula difiere de cero ó de 90 grados en una cantidad mayor que un cierto límite inferior á $1\frac{1}{2}$ grados, y que este error ε es absolutamente insensible si el arco que se calcula se separa algunos grados de los límites cero y 90 grados, de donde se sigue que el empleo de la fórmula $h = \frac{10\,\Delta'}{\Delta}$ es legítimo en la solucion del segundo caso del segundo problema entre los límites que acabamos de indicar. (*)

(*) Si se designa por M el módulo de los logaritmos vulgares, y por θ un número comprendido entre o y 1, se tiene, segun la fórmula de Tailor, tomando el segundo por unidad,

$$\log \operatorname{sen}(x+h) - \log \operatorname{sen} x = M\,h \operatorname{sen} 1'' \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - M \frac{\theta\,h^2 \operatorname{sen}^2 1''}{2 \operatorname{sen}^2 x}.$$

Designemos por Δ el valor del primer miembro para $h = 10$ y por Δ' el valor de este primer miembro para $h < 10$; llamemos δ el valor que toma θ para $h = 10$, y hagamos

$$\Delta' = \frac{h\,\Delta}{10} \pm e, \quad h = \frac{10\,\Delta'}{\Delta} \pm \varepsilon;$$

se deduce de la fórmula anterior

$$\pm e = \frac{M \operatorname{sen}^2 1''}{2 \operatorname{sen}^2 x}(10\,\delta\,h - \theta\,h^2), \quad \pm \varepsilon = \frac{(10\,\delta - \theta\,h)\,h \operatorname{sen} 1''}{\operatorname{sen}^2 x - \theta\,h \operatorname{sen} 1''};$$

Pero el error cometido en el cálculo del número h no proviene solamente de haber despreciado la cantidad ε; los logaritmos cuyas diferencias son Δ y Δ' están afectados de un cierto error, y si este error es menor que media unidad del sétimo órden decimal para los logaritmos contenidos en las Tablas, puede ser mucho más considerable para el logaritmo dado, que frecuentemente es el resultado de operaciones efectuadas con números aproximados. Admitiendo, por ejemplo, que el error de Δ' sea de una unidad del órden de la última cifra, el error de h, no despreciando el de Δ, será $\frac{1}{\Delta}\,10''$; de donde se deduce que la precision obtenida en el cálculo de un arco será tanto mayor cuanto las diferencias tabulares sean mayores. Ahora bien; la diferencia de dos log tang es la suma de las diferencias de log sen y log cos correspondientes (*); pues un arco está mejor determinado por su tangente que por su seno ó su coseno. A 45 grados, punto del primer cuadrante en que la tangente se aproxima ménos, la diferencia tabular de sus logaritmos es de 421 unidades del sétimo órden decimal para una variacion de 10″ en el arco; de donde se deduce que un error de una unidad

---

siendo h inferior á 10, el valor absoluto de $10\,\delta - \theta\,h$ es tambien inferior á 10; tenemos, pues,

$$e < \frac{50\,M\,\text{sen}^2\,1''}{\text{sen}^2\,x}, \qquad \varepsilon < \frac{100\,\text{sen}\,1''}{\text{sen}^2\,x - 10\,\text{sen}\,1''}.$$

Por medio de estos resultados se puede comprobar la verdad de lo que hemos dicho, en lo que concierne á log sen y á log cos; inmediatamente se deduce del mismo modo que nuestras aserciones son tambien verdaderas para log tang.

(*) La diferencia

$$\log\text{tang}\,(x+h) - \log\text{tang}\,x$$

es evidentemente la suma de las dos diferencias

$$\log\text{sen}\,(x+h) - \log\text{sen}\,x,$$
$$\log\cos x - \log\cos\,(x+h).$$

del sétimo órden decimal en el logaritmo de la tangente corresponde un error de $0'',024$ en el arco. El mismo error en el logaritmo del seno ó coseno corresponderia un error doble en el arco, es decir $0'',048$. Para arcos muy pequeños, las diferencias de log cos son muy pequeñas, y por consiguiente, las diferencias de log sen son casi iguales á las diferencias de log tang; resulta, pues, que un arco muy pequeño no sería dado con precision por su coseno, como ya hemos dicho anteriormente, siendo al contrario bien determinado por su seno ó por su tangente. De aquí deducimos que en las soluciones trigonométricas emplearemos, siempre que sea posible, las tangentes con preferencia á los cosenos, para determinar arcos muy pequeños.

Métodos para hacer una fórmula calculable por logaritmos.

58. Para que se pueda aplicar inmediatamente el cálculo de los logaritmos á la determinacion del valor de una expresion numérica, es necesario que esta expresion no contenga más que factores monomios; si no cumple con esta condicion, se dice que no es *calculable por logaritmos*. Si una expresion no contiene otros factores polinomios que sumas ó diferencias de dos senos, de dos cosenos, ó de dos tangentes de dos arcos dados, se la hará calculable por logaritmos por medio de las fórmulas del núm 18: siendo por este motivo de suma importancia dichas fórmulas. Pero indicaremos otros procedimientos generales para hacer calculable por logaritmos una expresion que no lo es; de dichos procedimientos es de lo que ahora vamos á tratar.

Consideremos primeramente una expresion binomia

$$x = a \pm b,$$

y supongamos que queremos hallar log x, siendo a y b números positivos, cuyos logaritmos son solamente conocidos. Podemos escribir

$$x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

Esto supuesto, determinemos un arco auxiliar φ tal, que se tenga

$$\text{tang} = \varphi\frac{b}{a}:$$

estando φ comprendido entre cero y 90 grados, se calculará por la fórmula

$$\log \text{tang}\ \varphi = \log b - \log a.$$

Entonces el valor de x será

$$x = a\,(1 \pm \text{tang}\ \varphi) = a\,\frac{\cos\varphi \pm \text{sen}\ \varphi}{\cos\varphi};$$

pero tenemos

$$\cos\varphi \pm \text{sen}\ \varphi = \cos\varphi \pm \cos\,(90^\circ - \varphi) = 2\cos 45^\circ \cos\,(\varphi \mp 45^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\cos\,(\varphi \mp 45^\circ);$$

de donde

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos\,(\varphi \mp 45^\circ)}{\cos\varphi}.$$

Siendo esta fórmula calculable por logaritmos, se deduce

$$\log x = \log a + \frac{1}{2}\log 2 + \log\cos\,(\varphi \mp 45^\circ) - \log\cos\varphi \ (*).$$

El mismo método se aplica á una expresion polinomia cual-

(*) Se deben preparar los logaritmos que están afectados del signo — en una fórmula, de modo que su parte decimal sea negativa; por ejemplo, si el logaritmo $\overline{3},1554207$ se ha de restar de la suma de otros logaritmos, es necesario escribir — 2,6445793, y de este modo no hay más que añadir 2,6445793: este modo de operar resulta de tomar el complemento del logaritmo á diez, y restar 10 de la característica.

quiera $a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots\ldots$; en efecto, se podrá, empleando un arco auxiliar, disminuir en una unidad el número de términos de la expresion polinomia: con un segundo arco auxiliar se disminuirá este número en otra unidad, y así se continuará hasta haber trasformado la expresion polinomia en un monomio.

Vamos á indicar otra trasformacion que, además de la precedente, es muy usada.

Se hará calculable por logaritmos la expresion $a + b$, en la cual a y b son números positivos, haciendo $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}^2 \varphi$; pues se tiene

$$a + b = a(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi) = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

Si $a > b$ se hará la fórmula $a - b$ calculable por logaritmos, haciendo $b = a \operatorname{sen}^2 \varphi$; pues se tiene

$$a - b = a(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) = a \cos^2 \varphi.$$

Resolucion de la ecuacion de segundo grado por medio de las Tablas trigonométricas.

59. Las dos raíces de la ecuacion de segundo grado

$$x^2 + px + q = o \tag{1}$$

están dadas por la fórmula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

supondremos que los coeficientes p y q son cantidades reales dadas directamente por sus logaritmos.

1.° Sea $\frac{p^2}{4} - q > o$, en cuyo caso las dos raíces de la ecuacion son reales y desiguales. Si al mismo tiempo se tiene $q > o$, se hará (2) $\frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{q}}{\text{sen}\,\varphi}$; estando el arco auxiliar φ comprendido entre -90 y $+90$ grados, se calculará por la fórmula

$$\log(-\text{sen}\,\varphi) = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log p$$

si p es positivo, y por la fórmula

$$\log \text{sen}\,\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log(-p)$$

si p es negativo. La fórmula (2) se trasforma entonces en

$$x = \sqrt{q}\left(\frac{1 \pm \cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi}\right),$$

de suerte que, llamando x_1 y x_2 á las dos raíces, se tendrá

$$x_1 = \sqrt{q}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi, \quad x_2 = \sqrt{q}\cot\frac{1}{2}\varphi,$$

que son dos expresiones calculables por logaritmos.

Si $q < o$, se hará $\frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{-q}}{\text{tang}\,\varphi}$; estando el arco φ comprendido entre -90 y $+90$ grados, se calculará por la fórmula

$$\log(-\text{tang}\,\varphi) = \log 2 + \frac{1}{2}\log(-q) - \log p$$

si p es positivo, y por la fórmula

$$\log \text{tang}\,\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log(-q) - \log(-p)$$

si p es negativo. La fórmula (2) se trasforma entonces en

$$x = \sqrt{-q}\left(\frac{\cos\varphi \pm 1}{\operatorname{sen}\varphi}\right),$$

de manera que, llamando x_1 y x_2 las dos raíces, se tendrá

$$x_1 = -\sqrt{-q}\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi,\quad x_2 = +\sqrt{-q}\ \cot\frac{1}{2}\varphi.$$

2.° Sea $\frac{p^2}{4} - q < o$, se podrá establecer $q = \frac{p^2}{4}\ \frac{1}{\cos^2\varphi}$, y el arco φ se determinará por la fórmula

$$\log\cos\varphi = \log(\pm p) - \frac{1}{2}\log q - \log 2;$$

la fórmula (2) se trasforma en

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1};$$

la parte real de las dos raíces imaginarias es $-\frac{p}{2}$, y el logaritmo del coeficiente de $\sqrt{-1}$ es igual á

$$\log(\pm p) + \log\operatorname{tang}\varphi - \log 2.$$

60. Se puede reducir la resolucion de una ecuacion de segundo grado al problema de hallar todos los arcos que satisfacen á una ecuacion de la forma

$$a\cos x + b\operatorname{sen} x = c,$$

siendo a, b, c números positivos ó negativos. Es suficiente para esto, expresar sen x y cos x en funcion de una misma línea trigonométrica; pero la cuestion de que se trata puede resolverse de un modo mucho más sencillo del modo siguiente. Determinemos un arco auxiliar φ comprendido entre -90 y $+90$ grados, y tal que tang $\varphi = \frac{b}{a}$; reemplazando b por a tang φ, la ecuacion propuesta se trasforma en

$$a\,(\cos x + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{sen} x) = c,$$

de donde

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a}.$$

Para que sea posible el problema propuesto, es necesario que $\frac{c\cos\varphi}{a}$ se halle comprendido entre -1 y $+1$, es decir que se tenga $\frac{c^2\cos^2\varphi}{a^2} < 1$, de donde $c^2 < a^2 + b^2$. Si se cumple esta condicion, las Tablas harán conocer un arco f comprendido entre cero y 180 grados, y cuyo coseno es $\frac{c\cos\varphi}{a}$; las raíces de la ecuacion propuesta serán dadas por la fórmula

$$x = k \times 360° + f \pm \varphi,$$

designando k un entero cualquiera positivo, nulo ó negativo. Se pueden expresar todas las raíces x en funcion de una cualquiera de ellas; designemos, en efecto, por x_0 una cualquiera de estas raíces; se tendrá

$$f = \pm\,(k' \times 360° + \varphi - x_0),$$

siendo k' un entero, y la expresion general de las raíces de x será

$$x = k \times 360° + \varphi \pm (\varphi - x_0;$$

esta fórmula equivale á las dos siguientes:

$$x = k \times 360° + x_0,$$
$$x = k \times 360° + 2\varphi - x_0.$$

Resolucion de la ecuacion de tercer grado por medio de las Tablas trigonométricas.

61. La ecuacion general de tercer grado

$$(1) \qquad X^3 + PX^2 + QX + R = o$$

se reduce á la forma (2) $x^3 + p\,x + q = o$ haciendo $X = -\dfrac{P}{3} + x$; se puede, pues, considerar solamente la ecuacion (2), cuyos coeficientes supondremos reales. Hemos visto (núm. 29) que la ecuacion

$$(3) \qquad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos\varphi}{4} = o$$

tiene por raíces

$$\cos\frac{\varphi}{3},\ \cos\left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right),\ \cos\left(240^\circ + \frac{\varphi}{3}\right);$$

si, pues, se reduce la ecuacion (2) á la forma (3), habremos resuelto el proplema propuesto. Hagamos $x = \lambda\,z$; la ecuacion (2) se trasforma en

$$(4) \qquad z^3 + \frac{p}{\lambda^2}z + \frac{q}{\lambda^3} = o,$$

y esta ecuacion (4) coincidirá con (3) si se determinan la cantidad λ y el arco φ, de modo que se tenga

$$\frac{p}{\lambda^2} = -\frac{3}{4},\ \frac{q}{\lambda^3} = -\frac{\cos\varphi}{4},$$

de cuyas ecuaciones se deduce

$$\lambda = 2\sqrt{-\frac{p}{3}},\ \cos\varphi = \frac{-\dfrac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right)^3};$$

estos valores de λ y de $\cos\varphi$ solo serán reales en el caso de que P sea negativo; pero para que sean admisibles, es necesario todavía que el valor de $\cos^2\varphi$ sea menor que 1, lo que exige que se tenga

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<o, \text{ ó } 4p^3+27q^2<o.$$

En esta condicion está incluida la de $p<o$; si se verifica, la identificacion de las ecuaciones (3) y (4) es posible; entonces, el arco φ, habiendo sido calculado por la fórmula

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3},$$

las raíces x_1, x_2, x_3, de la ecuacion propuesta (2), serán

$$x_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\quad x_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(120^\circ+\frac{\varphi}{3}\right),$$
$$x_3=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(240^\circ+\frac{\varphi}{3}\right).$$

El caso que acabamos de considerar es aquel en que las tres raíces de la ecuacion (1) son reales y desiguales; dos de estas raíces serán iguales si se tiene $4p^3+27q^2=o$; subsistiendo en este caso la solucion precedente.

62. Consideremos ahora el caso en que $4p^3+27q^2>o$, en donde la ecuacion (2) no puede reducirse á la forma (3), por medio de la trasformacion de que hemos hecho uso.

Supongamos ante todo $p=o$ y $q=-1$; la ecuacion (2) queda reducida á $x^3-1=o$; los valores de x son en este caso las raíces cúbicas de la unidad; para hallar estos valores, observaremos que x^3-1 es el producto de los factores $x-1$ y x^2+x+1; de modo que la unidad tiene tres raíces cúbicas, de las cuales una es igual á 1, y las otras dos α y ξ son las raíces de la ecuacion de segundo grado $x^2 + x + 1 = o$; de donde

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \xi = \frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};$$

pero como

$$\alpha\,\xi = 1, \alpha^3 = 1, \xi^3 = 1,$$

se deduce que

$$\alpha = \xi^2, \text{ y } \xi = \alpha^2;$$

de modo que cada una de las dos raíces cúbicas imaginarias de la unidad es el cuadrado de la otra.

Volvamos al caso general, y hagamos en él las dos hipótesis de $p < o$ y $p > o$.

1.° Sea $p < o$; hagamos $x = \lambda\,(a \operatorname{tang} \varphi + b \cot \varphi)$, siendo a y b dos cantidades respectivamente iguales á las dos raíces imaginarias α y ξ de la unidad ó iguales las dos á la unidad; elevando al cubo los dos miembros de la igualdad anterior, nos resulta

$$x^3 = \lambda^3\,[\operatorname{tang}^3 \varphi + \cot^3 \varphi + 3\,(a \operatorname{tang} \varphi + b \cot \varphi],$$

deduciéndose de las dos ecuaciones precedentes

$$(5) \qquad x^3 - 3\,\lambda^2\,x - \lambda^3\,(\operatorname{tang}^3 \varphi + \cot^3 \varphi) = o.$$

De la formacion de la ecuacion (5) se deduce evidentemente que sus tres raíces son

$$(6)\ \lambda\,(\operatorname{tang} \varphi + \cot \varphi), \lambda\,(\alpha \operatorname{tang} \varphi + \xi \cot \varphi), \lambda\,(\xi \operatorname{tang} \varphi + \alpha \cot \varphi),$$

y por consiguiente, habremos resuelto la ecuacion (2) si podemos identificarla con la (5). Basta para esto determinar λ y φ de manera que

$$-3\,\lambda^2 = p, \quad -\lambda^3\,(\operatorname{tang}^3 \varphi + \cot^3 \varphi) = q:$$

de la primera de estas ecuaciones se deduce $\lambda = \sqrt{\frac{-p}{3}}$, y resulta en seguida

$$\tang^3 \varphi + \cot^3 \varphi = \frac{-q}{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3}.$$

Para determinar φ nos valdremos de un segundo arco auxiliar ψ tal, que $\tang \psi = \tang^3 \varphi$; y entonces resulta

$$\tang \psi + \cot \psi = \frac{-q}{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3},$$

de donde se deduce

$$\operatorname{sen} 2\psi = -\frac{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3}{\frac{1}{2} q};$$

se podrá obtener por medio de esta ecuacion un valor de ψ comprendido entre —45 y +45 grados; pues siendo $4p^3 + 27q^2 > o$ por hipótesis, el valor precedente de $\operatorname{sen} 2\psi$ está comprendido entre -1 y $+1$; se hallará en seguida un valor del arco φ que esté igualmente comprendido entre -45 y $+45$ grados, por medio de la fórmula

$$\tang \varphi = \sqrt[3]{\tang \psi}.$$

Habiendo sido calculados los arcos φ y ψ, se tendrá, para las raíces de la ecuacion (2), las expresiones (6), que se trasforman, reemplazando φ y ξ por sus valores hallados antes en

$$\sqrt{\frac{-p}{3}}\,(\tang \varphi + \cot \varphi),$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-p}{3}}\,(\tang \varphi + \cot \varphi) \pm \frac{1}{2}\sqrt{-p}\,(\tang \varphi - \cot \varphi)\sqrt{-1},$$

ó bien

$$\frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\text{sen } 2\varphi}, \text{ y } \frac{-\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\text{sen } 2\varphi} \pm \sqrt{-p} \cot 2\varphi \sqrt{-1}.$$

Se podrá calcular por las Tablas, valiéndose de estas fórmulas, la raíz real, así como el coeficiente de $\sqrt{-1}$ en las raíces imaginarias.

2.° Sea $p > o$; hagamos $x = \lambda\,(a \text{ tang } \varphi - b \cot \varphi)$, designando a y b como anteriormente las dos raíces cúbicas imaginarias de la unidad, ó siendo las dos iguales á la unidad; elevando al cubo, resulta

$$x^3 = \lambda^3\,[\text{tang}^3\,\varphi - \cot^3\varphi - 3\,(a \text{ tang } \varphi - b \cot \varphi)],$$

de donde

(7) $$x^3 + 3\lambda^2 x - \lambda^3\,(\text{tang}^3\,\varphi - \cot^3\varphi) = o;$$

siendo las raíces de estas ecuaciones

(8) $$\lambda\,(\text{tang } \varphi - \cot \varphi),\ \lambda\,(\alpha \text{ tang } \varphi - \xi \cot \varphi),\ \lambda\,(\xi \text{ tang } \varphi - \alpha \cot \varphi).$$

Para que la ecuacion (2) pueda identificarse con la (7), es necesario y suficiente que

$$3\lambda^2 = p,\ -\lambda^3\,(\text{tang}^3\,\varphi - \cot^2\varphi) = q;$$

de la primera de estas dos ecuaciones, se deduce $\lambda = \sqrt{\frac{p}{3}}$, y de aquí resulta

$$\text{tang}^3\,\varphi - \cot^3\varphi = -\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}.$$

Para hallar el valor del arco φ emplearemos otro auxiliar ψ, tal que $\tang \psi = \tang^3 \varphi$; de donde

$$\tang \psi - \cot \psi = -2 \cot 2\psi = -\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3},$$

de donde

$$\cot 2\psi = \frac{q}{2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3};$$

una vez conocido el arco ψ, se calculará φ por la fórmula

$$\tang \varphi = \sqrt[3]{\tang \psi};$$

las raíces de la ecuacion (2) serán entonces

$$\sqrt{\frac{p}{3}}(\tang \varphi - \cot \varphi), \ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}(\tang \varphi - \cot \varphi)$$
$$\pm \frac{\sqrt{p}}{2}(\tang \varphi + \cot \varphi)\sqrt{-1},$$

ó bien

$$-2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\varphi \ \text{ y } \ \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\varphi \pm \frac{\sqrt{p}}{\operatorname{sen} 2\varphi}\sqrt{-1}.$$

Se ve que, en el caso de $4p^3 + 27q^2 > o$, la ecuacion propuesta (2) tiene siempre dos raíces imaginarias.

63. Ejemplo I.—Resolver la ecuacion $x^3 - 7x + 7 = o$.

Se tiene aquí $p = -7$, $q = 7$; la ecuacion propuesta tiene dos raíces positivas x_1 y x_2, y una raíz negativa x_3. Se tiene

$$x_1 = \sqrt{\frac{28}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \ x^2 = \sqrt{\frac{28}{3}} \cos\left(240^\circ + \frac{\varphi}{3}\right),$$
$$x_3 = \sqrt{\frac{28}{3}} \cos\left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right),$$

y $$\cos\varphi = -\sqrt{\frac{27}{28}},\quad \operatorname{tang}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{27}}.$$

MANERA DE CALCULAR.

Cálculo de φ.

$\log(-\operatorname{tang}\varphi)$ .... $\bar{1},2843181$

$180^\circ - \varphi$ .... $10^\circ\ 53'\ 36'',2$

$\frac{\varphi}{3} =$ $56^\circ\ 22'\ 7'',9$

$$240^\circ + \frac{\varphi}{3} = 360^\circ - (63^\circ\ 37'\ 52'',1)$$

$$120^\circ + \frac{\varphi}{3} = 180^\circ - (3^\circ\ 37'\ 52'',3)$$

Cálculo de x_1.

$\log\sqrt{\frac{28}{3}}$ .... $0,4850184$

$\log\cos\frac{\varphi}{3}$ .... $\bar{1},7433876$

$\log x_1$ .... $0,2284060$

$$x_1 = 1,69202$$

Cálculo de x_2.

$\log\sqrt{\frac{28}{3}}$ .... $0,4850184$

$\log\cos\left(240^\circ + \frac{\varphi}{3}\right)$ .... $\bar{1},6475280$

$\log x_2$ .... $0,1325464$

$$x_2 = 1,35689$$

Cálculo de x_3.

$$\log \sqrt{\frac{28}{3}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0{,}4850184$$

$$\log \left[-\cos\left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \quad \overline{1}{,}9991270$$

$$\log(-x_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0{,}4841454$$

$$x_3 = -3{,}04892$$

64. Ejemplo II.—Resolver la ecuacion $x^3 - 6x + 6 = 0$.

Tenemos $p = -6$, $q = 6$; la ecuacion propuesta tiene una raíz real negativa x_1 y dos raíces imaginarias $-\frac{x_1}{2} \pm u\sqrt{-1}$.

Se tiene

$$x_1 = \frac{-\sqrt{8}}{\text{sen } 2\varphi}, \quad u = \sqrt{6} \cot 2\varphi.$$

$$\text{tang } \varphi = \sqrt[3]{\text{tang } \psi}, \quad \text{sen } 2\psi = \frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \text{tang } 2\psi = \sqrt{8}.$$

MANERA DE CALCULAR.

Cálculo de ψ.

$$\log \text{tang } 2\psi \ldots\ldots \quad 0{,}4515450$$

$$2\psi = 70^\circ\, 31'\, 53'', 6$$

$$\psi = 35^\circ\, 15'\, 51'', 8$$

Cálculo de x_1.

$$\frac{1}{2}\log 8 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0{,}4515450$$

$$-\log \text{sen } 2\varphi \ldots\ldots \quad 0{,}0028916$$

$$\log(-x_1) \ldots\ldots\ldots \quad 0{,}4544366$$

$$x_1 = -2{,}84732$$

Cálculo de φ.

$$\log \text{tang } \varphi \ldots\ldots\ldots \quad \overline{1}{,}9498283$$

$$\varphi = 41^\circ\, 41'\, 52'', 0$$

$$2\varphi = 83^\circ\, 23'\, 44'', 0$$

Cálculo de u.

$$\frac{1}{2}\log 6 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0{,}3890756$$

$$\log(-\cot 2\varphi) \ldots\ldots \quad \overline{1}{,}0636431$$

$$\log u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \overline{1}{,}4527187$$

$$u = 0{,}283608$$

Por consiguiente, las raíces son $-2,84732$ y $1,42366 \pm 0,283608\sqrt{-1}$.

Problemas.

I. Dividiendo el arco $2x$ en n partes iguales, se nos pide: 1.° Determinar la distancia del centro de las distancias medias de los puntos de division á un diámetro cualquiera; 2.° Probar que en el límite, para $n = \infty$, la distancia del centro del círculo al centro de las distancias medias es igual á $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

II. Demostrar que la diferencia $x - \operatorname{sen} x$ es tanto más pequeña cuanto menor es x.

III. Demostrar que si x está comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$, la relacion $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es el límite hácia el cual converge el producto $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\ldots\cos\frac{x}{2^n}$, cuando el entero n aumenta indefinidamente. Deducir de esta propiedad las desigualdades $\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}$ y $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

IV. Demostrar que si x está comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$, se tiene

$$\operatorname{tang} x > x + \frac{3}{x^3} \text{ y } x < \frac{1}{3}\operatorname{tang} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x.$$

V. Demostrar que las relaciones $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ decrecen cuando el arco x crece de cero á $\frac{\pi}{2}$. Despues de haber establecido la desigualdad $\frac{\operatorname{sen} x}{x} > \frac{\operatorname{sen}(x+h)}{x+h}$ en la hipótesis de que x y h sean positivos y $x + h$ inferior á $\frac{\pi}{2}$, se puede demostrar la desigualdad $\frac{x - \text{sen}\, x}{x^3} > \frac{x + h - \text{sen}\,(x + h)}{(x + h)^3}$ haciendo uso de las fórmulas, de las que se ha deducido la desigualdad $x - \text{sen}\, x < \frac{x^3}{6}$, del número 46.

VI. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x - \text{sen}\, x}{x^3} > \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)^3$$

ó

$$x - \text{sen}\, x > \frac{x^3}{6{,}79\ \ldots..},$$

para todos los valores de x comprendidos entre cero y $\frac{\pi}{2}$.

CAPÍTULO III.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

Objeto de la Trigonometria rectilinea.

65. En todo triángulo hay que considerar seis elementos, tres ángulos y tres lados. *Resolver* un triángulo, es calcular los valores numéricos de sus elementos cuando se nos da un número suficiente de estos.

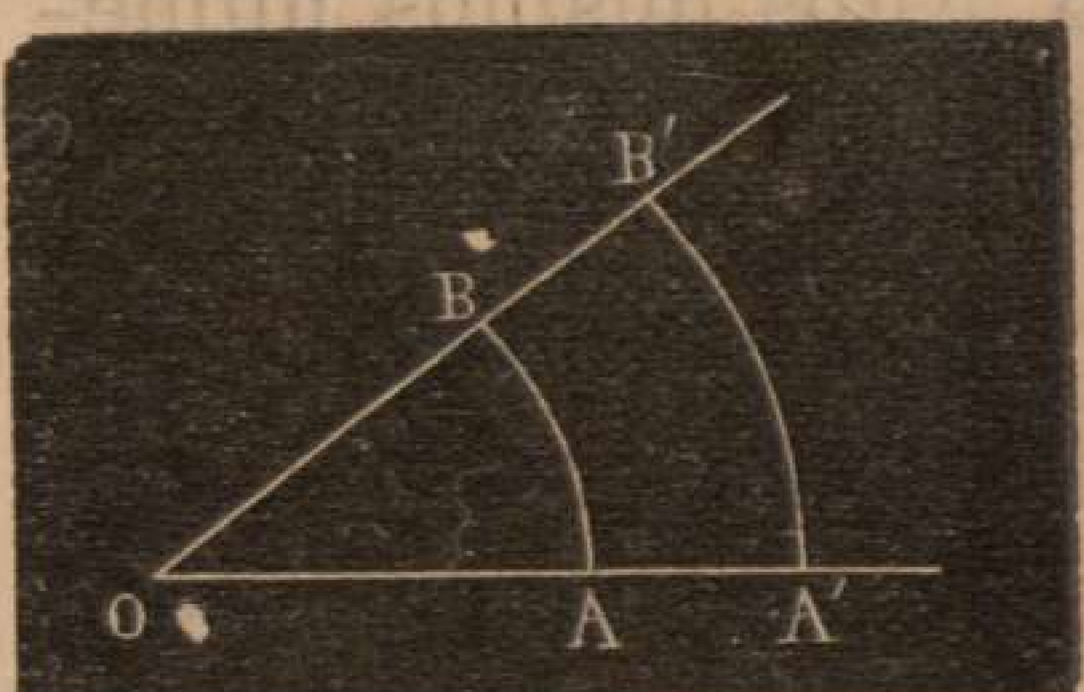
La *Trigonometria rectilinea* tiene por objeto la resolucion de los triángulos rectilíneos.

Los valores numéricos de las longitudes se obtienen comparando estas longitudes con una misma unidad; para esto es necesario tratar antes de la medida de los ángulos.

Medida de los ángulos.

66. Sea un ángulo AOB (fig. 8); describamos desde su vértice como centro, con un rádio cualquiera, una circunferencia, y designemos por R y S el número de unidades contenidas en el rádio OA y en el arco AB interceptado por los lados del ángulo dado. La relacion $\frac{S}{R}$ es independiente del tamaño del rádio OA, porque si se describe, desde el punto O como centro, otra circunferencia $A'B'$, en la que designamos por R' y S' los nú-

(Fig. 8.ª)



meros que miden el rádio OA', y el arco interceptado $A'B'$, se tendrá por un conocido teorema $\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'}$. De aquí se deduce que, si hacemos $\omega = \frac{S}{R}$, la relacion ω no dependerá más que de la magnitud del ángulo AOB; como además, el ángulo AOB varía proporcionalmente al número ω, se puede tomar el número ω por su *medida*. Para $S = R$, ω se reduce á 1; por consiguiente, ω representa la relacion del ángulo AOB á un cierto ángulo que se toma por unidad, y tal, que si desde su vértice como centro se describe una circunferencia, con un rádio cualquiera, el arco interceptado entre sus lados es igual al rádio de la circunferencia

La fórmula $S = R\,\omega$ se emplea frecuentemente en las aplicaciones geométricas, permitiendo comparar arcos que pertenecen á distintas circunferencias.

Si tomamos el rádio OA por unidad lineal, se tendrá

$$R = 1 \text{ y } \omega = S;$$

luego *un ángulo tiene por medida el mismo número que expresa el arco interceptado entre sus lados en la circunferencia descrita desde su vértice como centro y con un rádio igual á la unidad lineal.* Por ejemplo, el mismo número $\frac{\pi}{2}$ expresa indistintamente el ángulo recto que el cuadrante. Por esta razon se emplean como sinónimas las palabras *ángulo* y *arco.*

Y como hemos convenido, en las aplicaciones de las funciones circulares, representar los arcos por los números de grados, minutos y segundos, etc., que contienen, estos mismos números de grados, etc., expresarán igualmente los ángulos correspondientes.

Llamaremos *seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo*, al seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante del arco interceptado por sus lados en la circunferencia descrita desde su vértice como centro, y con la unidad por rádio.

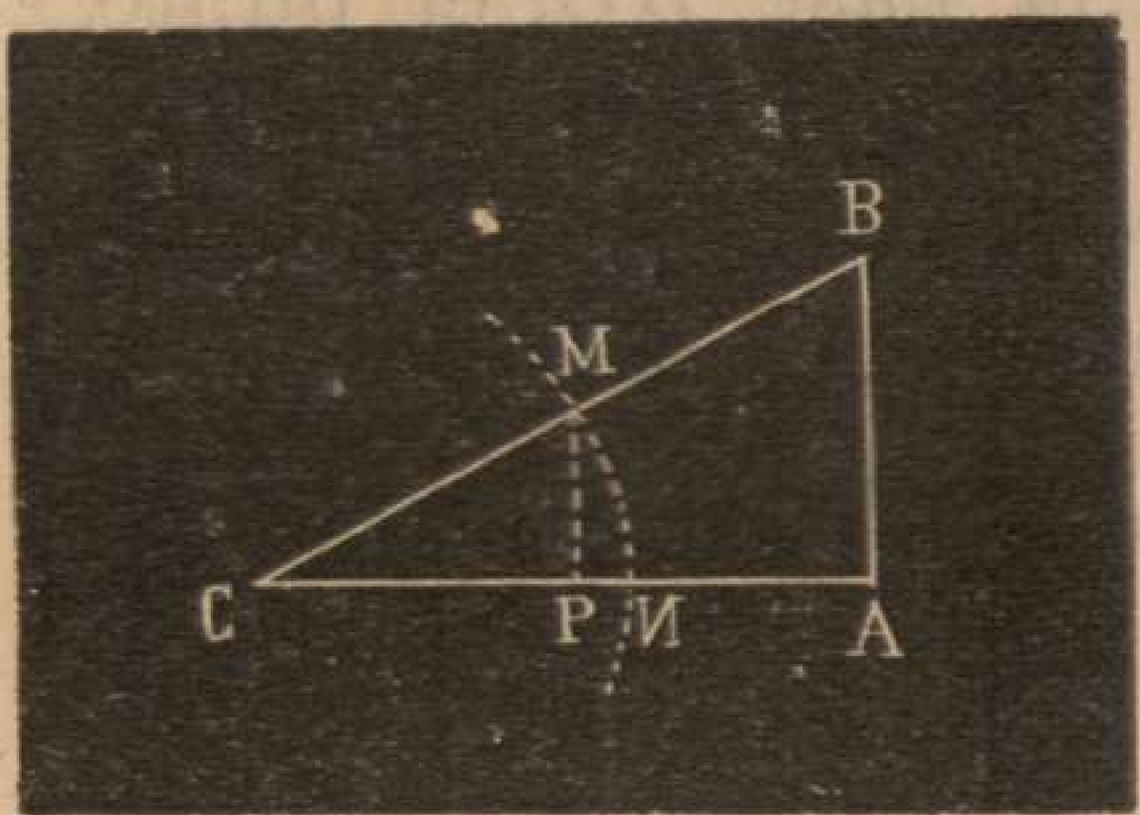
Representaremos siempre por A, B, C, los tres ángulos de un triángulo, y por a, b, c, los lados respectivamente opuestos; los ángulos agudos ú obtusos se llaman *oblícuos*, y los triángulos que no tienen ningun ángulo recto se llaman *oblicuángulos*.

Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.

67. TEOREMA.—*En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto ó por el coseno del ángulo adyacente.*

Sea ABC (fig. 9.ª) un triángulo rectángulo en A; desde C como centro, y con la unidad por rádio, tracemos el arco de círculo MN, y bajando MP perpendicular sobre AC: los triángulos semejantes ABC y PMC nos dan

(Fig. 9.ª)



$$\frac{c}{a}=\frac{MP}{CM},\ \frac{b}{a}=\frac{CP}{CM}.$$

Se tiene, además, $CM = 1$, $MP = \text{sen}\ C$, $CP = \cos C$; luego será $c = a\ \text{sen}\ C$, $b = a \cos C$.

COROLARIO.—*En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto ó por la cotangente del ángulo adyacente.*

En efecto, sea A el ángulo recto; se tiene, por el teorema precedente, $c = a\ \text{sen}\ C$, $b = a \cos C$, de donde, dividiendo miembro á miembro, $\frac{c}{b} = \text{tang}\ C$ y $c = b\ \text{tang}\ C$, ó $c = b \cot B$.

ESCOLIO.—No puede existir, entre los tres lados y los tres ángulos de un triángulo, otra relacion distinta de las siguientes:

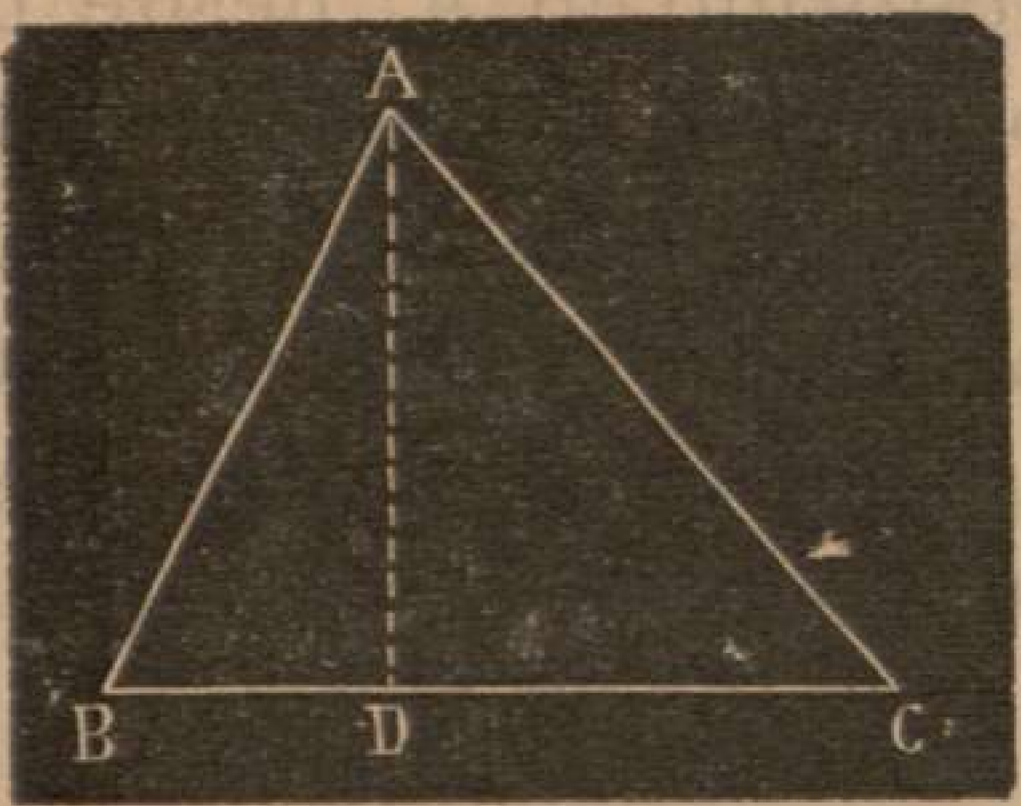
$$B + C = 90^\circ,\ c = a\ \text{sen}\ C,\ b = a \cos C;$$

pues si hubiese una, reemplazando c, b y B por sus valores a sen C, a cos C y $90^\circ - C$, se verificaria el absurdo de tener una ecuacion no idéntica entre a y C. Si sumamos las dos últimas relaciones precedentes, despues de haberlas elevado al cuadrado, obtendremos la relacion ya conocida $c^2 + b^2 = a^2$.

Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo.

68. Teorema I.—*En todo triángulo rectilíneo, los lados son proporcionales á los ángulos opuestos.*

(Fig. 10.)



Sea ABC (fig. 10) un triángulo que tiene agudos los ángulos B y C; bajemos desde el vértice A la perpendicular AD á la base BC: el punto D caerá entre los puntos B y C, y los triángulos rectángulos ABD y ACD nos dan (núm. 67)

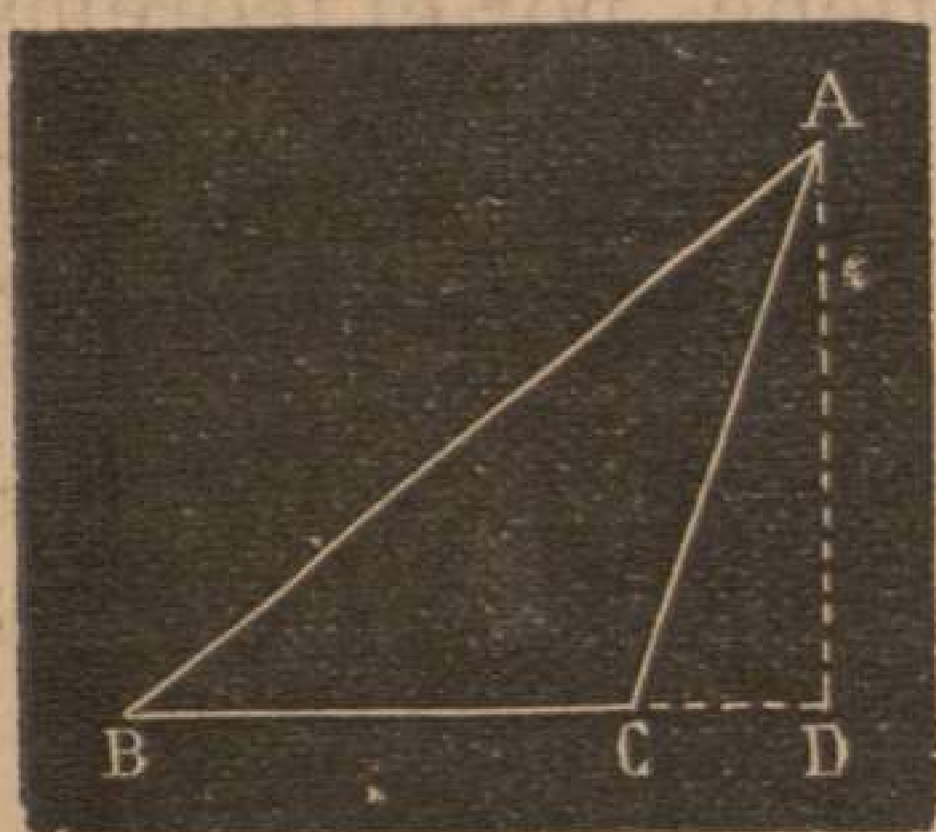
$$AD = c \text{ sen } B,\ AD = b \text{ sen } C,$$

de donde se deduce

$$c \text{ sen } B = b \text{ sen } C \text{ ó } \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

Si uno de los ángulos B ó C es obtuso (fig. 11), C por ejemplo, el pié de la perpendicular AD caerá en la prolongacion de BC, y como dos ángulos suplementarios tienen el mismo seno, los triángulos rectángulos ABC y ACD nos darán

(Fig. 11.)



$$AD = c \text{ sen } B = b \text{ sen } C,$$

de donde se deduce que la fórmula precedente es general.

69. Se tienen, segun lo que precede, las tres relaciones siguientes entre los lados y los ángulos de un triángulo

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A + B + C = 180^\circ, \\ & \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}; \end{aligned} \right.$$

y vamos á demostrar que no puede existir otra relacion distinta de estas. En efecto, de las ecuaciones (1), se deduce

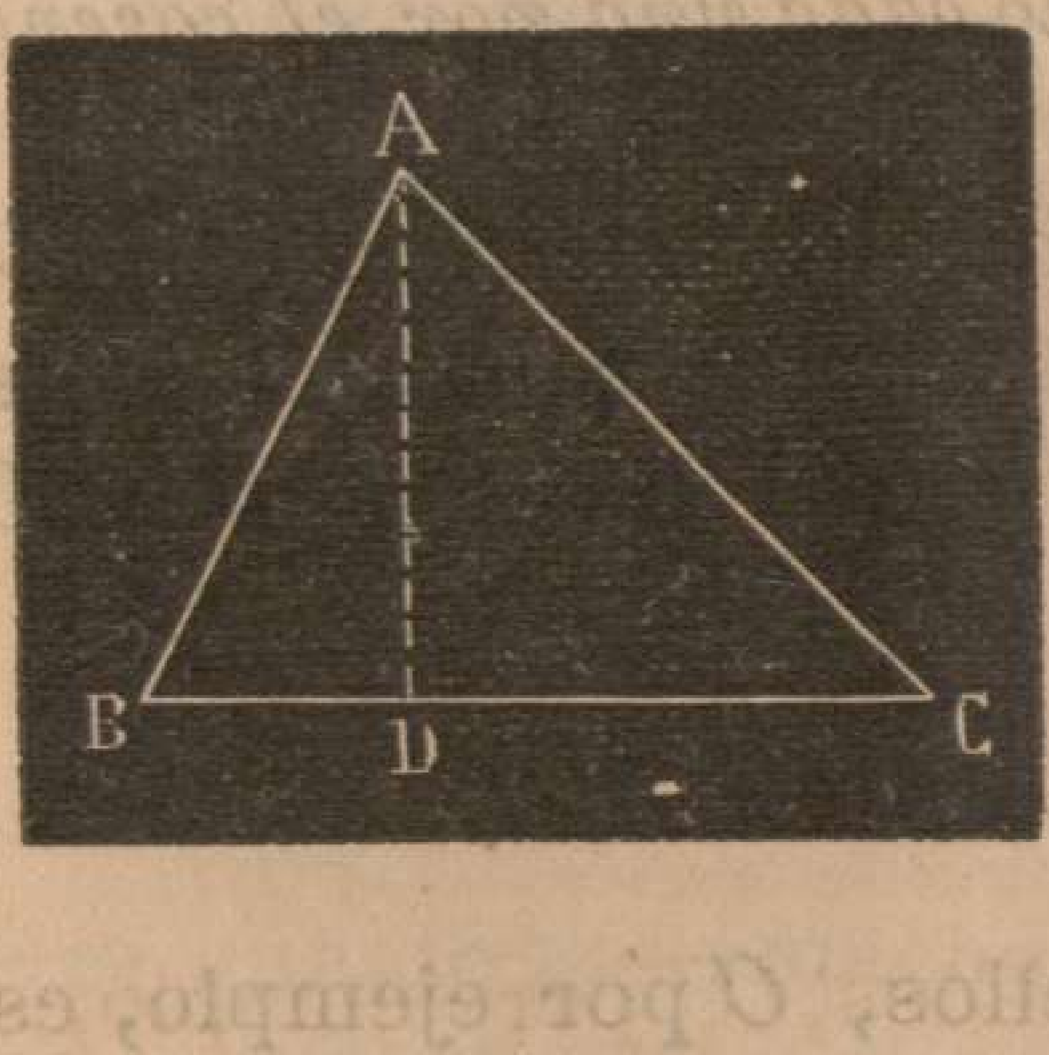
$$A = 180^\circ - B - C, \quad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B + C)}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B + C)};$$

esto supuesto, si hubiese una relacion distinta de las anteriores (1), poniendo en ella, en vez de A, b, c, los valores que acabamos de indicar, se tendria el absurdo de una ecuacion no idéntica entre el lado a y los ángulos adyacentes B y C.

Pero se puede deducir de las ecuaciones (1), otras relaciones importantes que constituyen otros tantos teoremas; empezaremos por demostrar estos teoremas directamente; haremos ver en seguida, cómo pueden deducirse unas de otras todas las relaciones que obtengamos.

70. TEOREMA II.—*En todo triángulo rectilíneo, el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos el doble producto de estos otros dos lados, multiplicado por el coseno del ángulo que comprenden.*

(Fig. 12.)



Sea ABC (fig. 12) un triángulo cuyo ángulo C es agudo; bajando desde el vértice A la perpendicular AD sobre BC, se tendrá

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CD;$$

pero el triángulo rectángulo ACD nos da (núm. 67)

$$CD = b \cos C;$$

de donde

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Si el ángulo C es obtuso (fig. 13), se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2aCD;$$

el triángulo ACD nos da

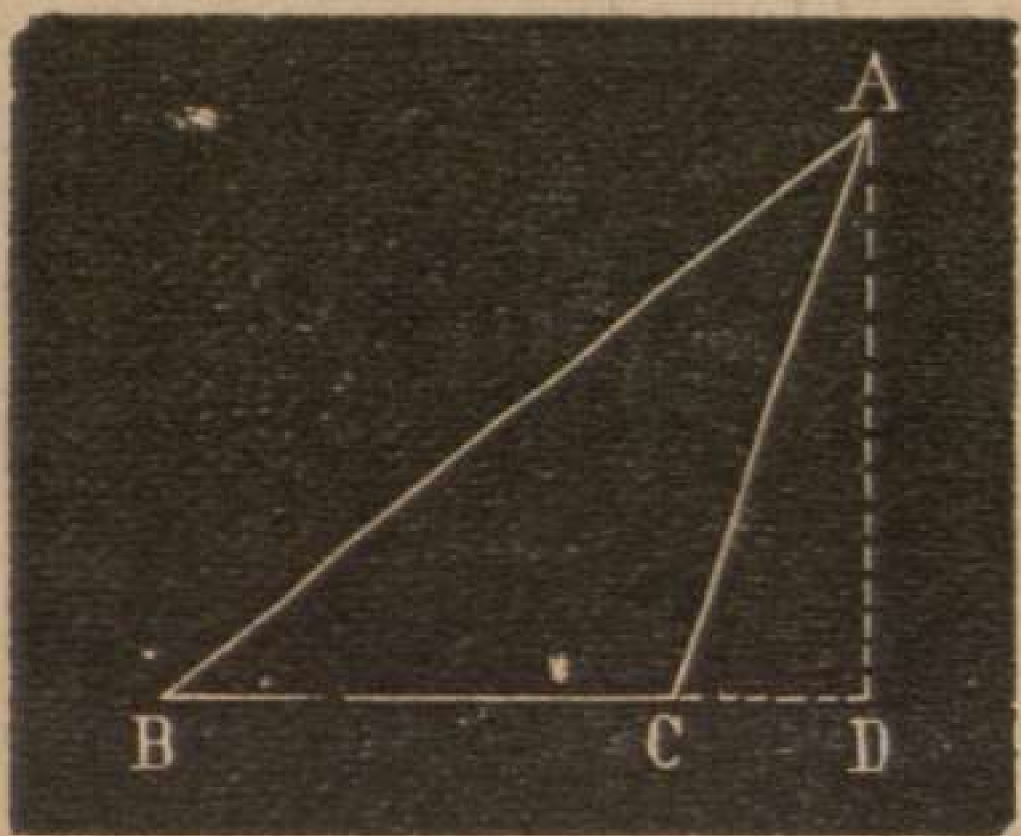
$$CD = b \cos ABC = b \cos (180^\circ - C) = - b \cos C;$$

de donde

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

como en el primer caso. Por último, esta fórmula se verifica aun cuando C sea un ángulo recto; pues, en este caso, $\cos C$ es nulo, y dicha fórmula se reduce á $c^2 = a^2 + b^2$.

(Fig. 13.)



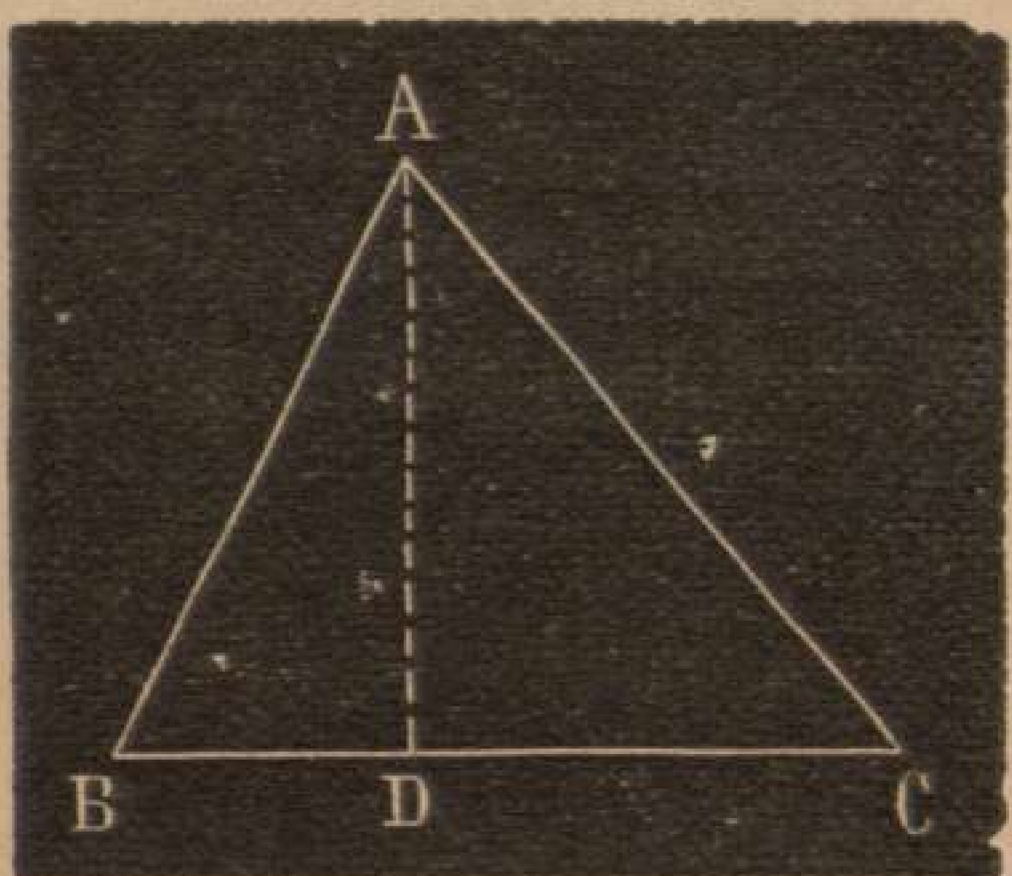
El teorema que acabamos de demostrar nos da las tres relaciones siguientes:

$$(2) \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \end{cases}$$

que contienen cada una los tres lados y un ángulo.

71. Teorema III.—*En todo triángulo rectilíneo, un lado es igual á la suma de los otros, multiplicado cada uno por el coseno del ángulo que forma con el primer lado.*

(Fig. 14.)



Sea un triángulo ABC (fig. 14); bajemos desde el vértice A la AD sobre BC; tenemos, si los ángulos B y C son agudos,

$$a = BD + DC,$$

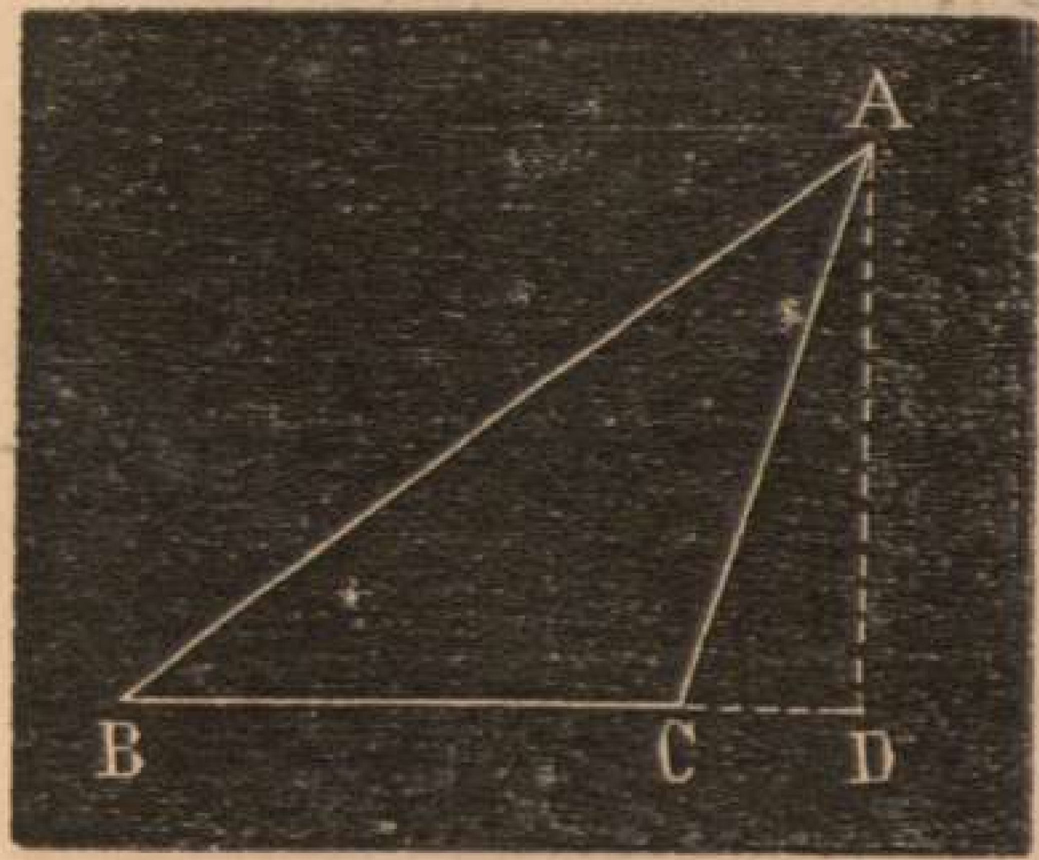
y si uno de ellos, C por ejemplo, es obtuso (fig. 15),

$$a = BD - DC.$$

Pero en el primer caso

$$DC = b \cos C,$$

(Fig. 15.)



y en el segundo

$$DC = b \cos (180^\circ - C) = - b \cos C;$$

en los dos casos,

$$BD = c \cos B:$$

luego

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

En este teorema se fundan las tres relaciones siguientes:

$$(3) \quad \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B, \\ b = c \cos A + a \cos C, \\ c = a \cos B + b \cos A. \end{cases}$$

72. Para deducir de las ecuaciones (2) las ecuaciones (3), sumemos las dos primeras ecuaciones (2); tendremos, despues de hacer todas las redpcciones,

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Esta es una de las ecuaciones (3); las otras se obtienen de la misma manera.

Recíprocamente, para deducir las ecuaciones (2) de las (3), sumando las ecuaciones (3) despues de haberlas multiplicado respectivamente por a, b, $-c$, resultará

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C,$$

que es una de las ecuaciones (2); las otras se obtendrian de una manera idéntica.

De esto se deduce que los sistemas (2) y (3) son equivalentes: vamos á indicar cómo se puede deducir uno de estos sistemas, (3) por ejemplo, de las ecuaciones fundamentales (1).

La primera ecuacion (1) da

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

de donde

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A;$$

si se reemplaza sen A, sen B, sen C, por las cantidades proporcionales a, b, c, resulta

$$c = a \cos B + b \cos A,$$

que es una de las ecuaciones (3); las otras pueden obtenerse de idéntico modo.

Por último, las ecuaciones (1) pueden deducirse de las (2) ó (3), si se hace la restriccion de que la suma $A + B + C$ no excede de 180°. En efecto, se deduce de la primera de las ecuaciones (2)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2};$$

por consiguiente,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{a^2} = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Se hallaria evidentemente el mismo valor para $\dfrac{\operatorname{sen}^2 B}{b^2}$ y para $\dfrac{\operatorname{sen}^2 C}{c^2}$; puesto que la expresion obtenida para $\dfrac{\operatorname{sen}^2 A}{a^2}$ no cambia cuando se cambian los lados a, b, c, unos por otros; sabiendo, pues, que A, B, C, son menores que 180°, sus senos son positivos y podremos establecer

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

En segundo lugar, se pueden eliminar a, b, c, en las ecuaciones (2) ó (3), pues estas ecuaciones son homogéneas; si se eliminan dos de los tres lados, el tercero desaparecerá tambien, y resulta

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 = o,$$

ó bien

$$(\cos A + \cos B \cos C)^2 = 1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C$$
$$= \operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C,$$

ó extrayendo la raíz cuadrada

$$\cos A = -\cos B \cos C \pm \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = -\cos (B \pm C);$$

de donde

$$A \pm B \pm C = 180^\circ \times (2k + 1),$$

siendo k un entero, y si la suma $A + B + C$ no excede de 180 grados, se tiene necesariamente

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Otras fórmulas relativas á los triángulos oblicuángulos.

73. Trasformando las relaciones precedentes, se obtienen nuevas fórmulas que es útil conocer y que ahora estableceremos.

De la relacion fundamental

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c},$$

se deduce

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C},$$

ó á causa de $\quad \frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C,$

(1) $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C};$$

y dividiendo estas ecuaciones (1), miembro á miembro, resulta

(2) $$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} C.$$

Las fórmulas (1) contienen los seis elementos, pero la (2) no contiene más que dos lados y los tres ángulos.

74. La relacion

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

da

$$\cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

pero se tiene

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}};$$

y sustituyendo en vez de cos A su valor, resulta

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}},$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 + (b-c)^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Por simples permutaciones de letras, se obtendrán fórmulas semejantes para expresar los senos y cosenos de los ángulos $\frac{1}{2} B$ y $\frac{1}{2} C$. Si, pues, hacemos, para abreviar,

$$a + b + c = 2p,$$

de donde

$$\begin{aligned} -a + b + c &= 2(p-a) \\ a - b + c &= 2(p-b) \\ a + b - c &= 2(p-c), \end{aligned}$$

se tendrán estos dos sistemas de fórmulas:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \\ \cos \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \\ \cos \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}}, \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}; \end{aligned} \right.$$

por último, dividiendo cada fórmula del grupo (4) por la correspondiente del grupo (3), se obtiene este nuevo sistema de fórmulas:

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tang} \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \\
\operatorname{tang} \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\
\operatorname{tang} \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.
\end{aligned}
\right.
$$

En todas estas fórmulas es necesario tomar el radical con el signo $+$; pues los semi-ángulos de un triángulo son menores que 90 grados, y, por consiguiente, sus líneas trigonométricas son positivas.

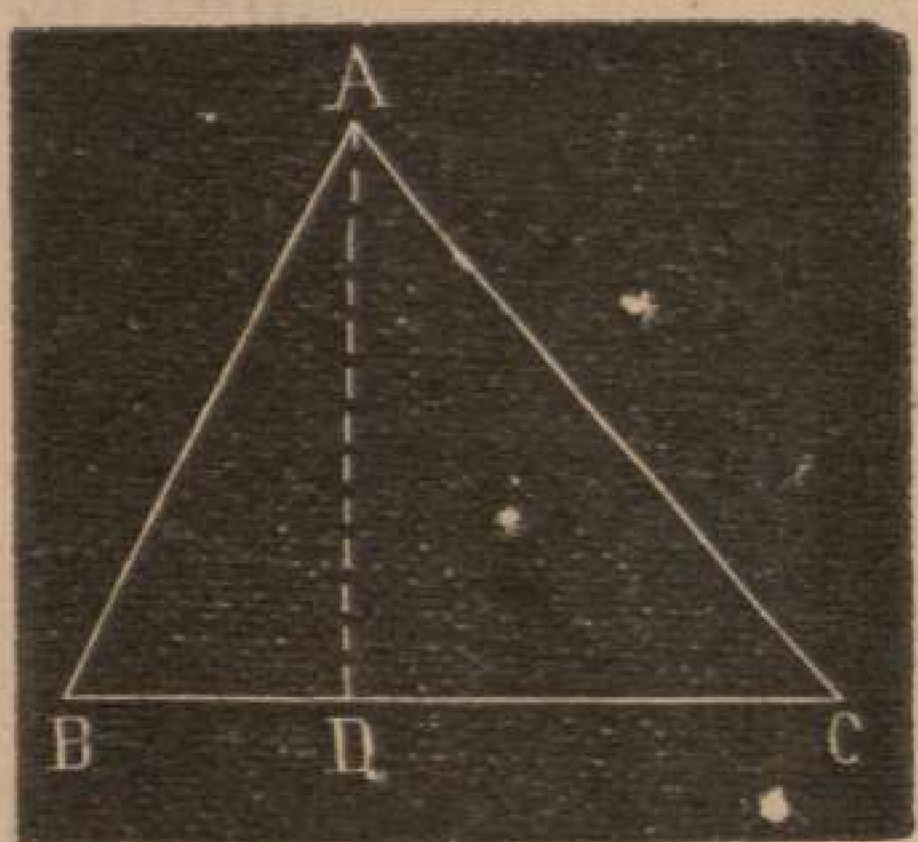
Expresiones del área de un triángulo y de los rádios de los círculos inscrito y circunscrito.

75. *Area del triángulo.*—Sea un triángulo ABC (figs. 16 y 17); tracemos desde A la altura AD; se tiene, designando por s el área del triángulo, $s = \frac{1}{2} a \times AD$.

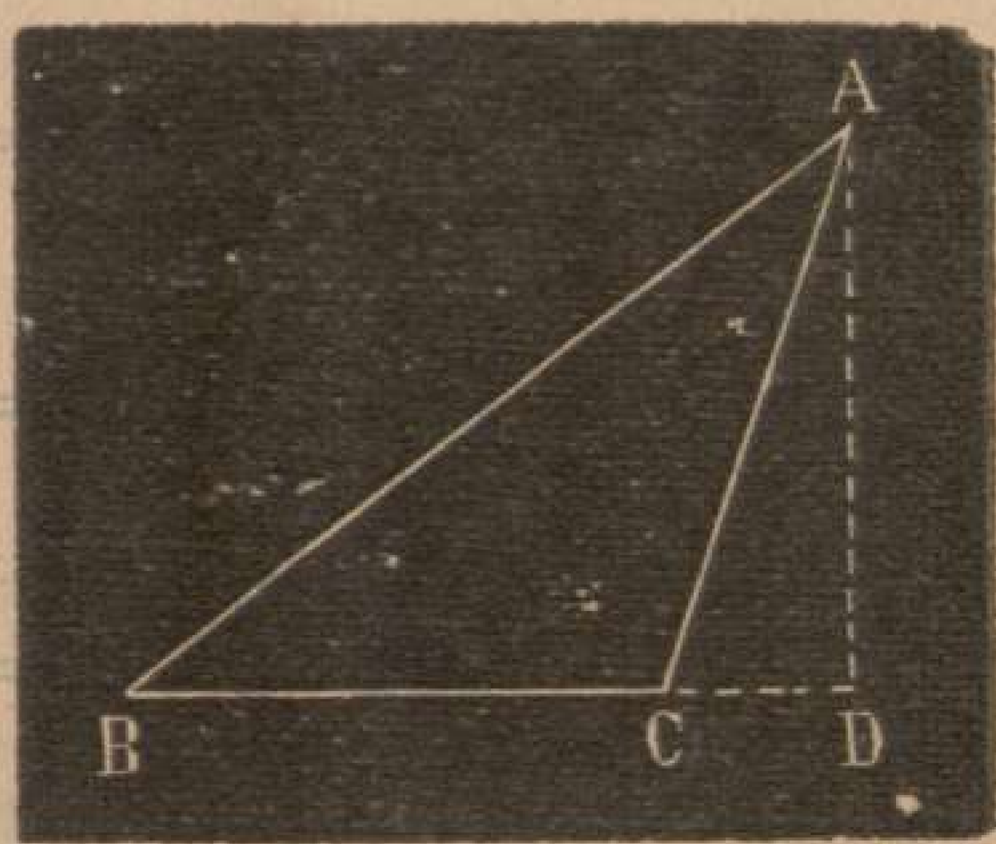
Pero en el triángulo rectángulo ADC tenemos $AD = b$ sen C, luego

$$(1) \qquad s = \frac{1}{2} ab \text{ sen } C.$$

(Fig. 16.)



(Fig. 17.)



De donde se deduce que el *área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos de sus lados multiplicado por el seno del ángulo que comprenden.*

Aplicando esta proposicion á los cuatro triángulos en que un cuadrilátero se descompone por medio de sus diagonales, se obtiene el resultado siguiente:

El área de un cuadrilátero cualquiera es igual á la mitad del producto de sus diagonales multiplicado por el seno del ángulo que dichas diagonales forman entre sí.

Si en la fórmula (1) se sustituye b por su valor deducido de la ecuacion

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B+C)},$$

resulta

$$(2) \qquad s = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B+C)}.$$

Por último, de las ecuaciones

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \quad \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

establecidas en el número precedente, se deduce

$$\operatorname{sen} C = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C = 2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{ab}};$$

y si se reemplaza sen C por este valor, en la fórmula (1), resulta

$$(3) \qquad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

fórmula en la cual p designa el semi-perímetro $\dfrac{a+b+c}{2}$.

De esta fórmula, y de las que se han establecido en el número 74, se deducen los resultados siguientes, que merecen tenerse en cuenta:

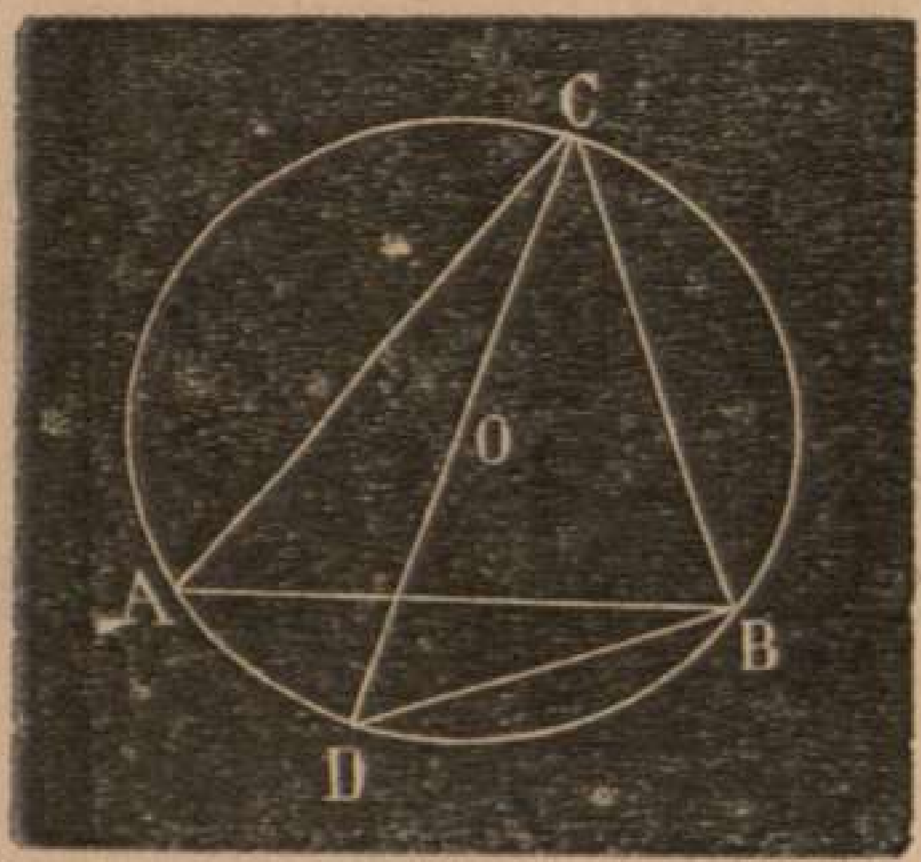
$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A \operatorname{sen}\frac{1}{2}B \operatorname{sen}\frac{1}{2}C = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{s^2}{pabc},$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a\,b\,c}=\frac{p\,s}{a\,b\,c},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=\frac{s}{p^2}.$$

76. *Rádio del círculo circunscrito.*—Habiendo circunscrito un círculo al triángulo $A\,B\,C$ (fig. 18), tracemos, por el vértice C, el diámetro $CD = 2\,R$, y unamos D con B; el ángulo en D del triángulo rectángulo $B\,CD$ es igual al A ó á su suplemento: tenemos, pues,

(Fig. 18.)



$$a = 2\,R \operatorname{sen} A \quad \text{ó} \quad R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} A}.$$

Multiplicando el numerador y denominador por $b\,c$, se deduce

$$R=\frac{a\,b\,c}{2\,b\,c \operatorname{sen} A}=\frac{a\,b\,c}{4\,s}=\frac{a\,b\,c}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}.$$

77. *Rádio de los círculos inscrito y circunscrito.*—Sea r el rádio del círculo inscrito; uniendo el centro de este círculo con los tres vértices del triángulo dado, se descompone este en otros tres, cuya altura comun es r, y cuyas bases son los tres lados $a\,b\,c$ respectivamente; por consiguiente, tenemos

$$s=r\,\frac{a+b+c}{2}, \text{ ó } s=p\,r, \text{ y } r=\frac{s}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Si designamos por φ β γ los rádios de los círculos ex-inscritos al triángulo, es decir, de los círculos que tocan respectivamente á los lados $a\,b\,c$ y á las prolongaciones de los otros dos, es fácil deducir la fórmula siguiente:

$$s=(p-a)\,\varphi=(p-b)\,\beta=(p-c)\,\gamma,$$

de donde se deduce

$$\varphi = \frac{s}{p-a} = \sqrt{\frac{p\,(p-b)\,(p-c)}{p-a}},$$

$$\beta = \frac{s}{p-b} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-c)}{p-b}},$$

$$\gamma = \frac{s}{p-c} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)}{p-c}}.$$

Tambien podemos decir, fundándonos en el núm. 74,

$$\varphi = p \text{ tang } \frac{1}{2} A, \quad \beta = p \text{ tang } \frac{1}{2} B, \quad \gamma = p \text{ tang } \frac{1}{2} C.$$

De estas fórmulas se pueden deducir otras muchas, entre las cuales merecen fijar la atencion las siguientes:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \quad s = \sqrt{r\varphi\beta\gamma}, \quad 4R = \varphi + \beta + \gamma - r.$$

Resolucion de los triángulos rectángulos.

78. PRIMER CASO.—*Conocida la hipotenusa* a *y un ángulo agudo* B, *calcular el ángulo* C *y los dos catetos* b *y* c.

Los elementos desconocidos se determinan por medio de las fórmulas

$$C = 90^\circ - B, \quad b = a \text{ sen } B, \quad c = a \cos B.$$

La primera nos da á conocer C inmediatamente, y las otras dos, por medio del cálculo logarítmico, nos dicen que

$$\log b = \log a + \log \text{sen } B, \quad \log c = \log a + \log \cos B.$$

79. SEGUNDO CASO.—*Conociendo la hipotenusa* a *y un cateto* b *del ángulo recto, calcular el tercer lado* c *y los dos ángulos* B *y* C.

Los elementos desconocidos se calculan por medio de las fórmulas

$$\text{sen } B = \cos C = \frac{b}{a}, \quad c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b).$$

La determinacion directa del ángulo C se obtiene, como se ha visto, por un coseno, y así no es susceptible de exactitud, si la hipotenusa difiere poco de su lado, como sucede frecuentemente. En este caso, se puede empezar por calcular c, y en seguida obtendremos C por la fórmula tang $C = \frac{c}{b}$; y de esta manera, tendremos para el cálculo logarítmico

$$\log c = \frac{1}{2} [\log (a + b) + \log (a - b)],$$
$$\log \text{tang } C = \log c - \log b.$$

Se puede tambien calcular C directamente, del siguiente modo: Sustituyendo cos C por su valor $\frac{b}{a}$ en las fórmulas

$$\text{sen } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{2}}, \text{ tang } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}},$$

resulta

$$\text{sen } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{a - b}{2a}}, \text{ tang } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}};$$

la primera de estas fórmulas nos da el ángulo C con precision; pero es preferible la segunda, porque su empleo no exige más logaritmos que los empleados para calcular c.

80. TERCER CASO.—*Conociendo un cateto* b *y un ángulo agudo, calcular el otro ángulo agudo, el otro cateto y la hipotenusa.*

Los elementos desconocidos se determinarán por las fórmulas

$$B + C = 90^\circ, a = \frac{b}{\text{sen } B}, c = b \cot B;$$

de las dos últimas, empleando el cálculo logarítmico, se deduce

$$\log a = \log b - \log \text{sen } B,$$
$$\log c = \log b + \log \cot B.$$

81. Cuarto caso.—*Conociendo los dos catetos* b *y* c, *calcular la hipotenusa* a, *y los ángulos agudos* B *y* C.

Se tiene, para determinar los elementos desconocidos,

$$\cot C = \operatorname{tang} B = \frac{b}{c},\ a^2 = b^2 + c^2.$$

Esta última fórmula no es calculable por logaritmos: se la hará calculable por logaritmos, valiéndonos de un ángulo auxiliar; pero esta manera de operar se evita, calculando B por la fórmula

$$\log \operatorname{tang} B = \log b - \log c,$$

y determinando en seguida a por la fórmula

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B},\ \text{ó}\ \log a = \log b - \log \operatorname{sen} B.$$

82. Ejemplo.—*Se da*

$$a = 5892^m{,}51\ b = 5439^m{,}24$$

y se pide calcular c, B *y* C.

MANERA DE CALCULAR.

$$a + b = 11331{,}75\ a - b = 453{,}27.$$

Cálculo de c.

$$c = \sqrt{(a+b)\,(a-b)}$$

$\log\,(a+b)$	4,0542970
$\log\,(a-b)$	2,6563570
....	6,7106540
$\log c$	3,3553270

$$c = 2266^m{,}35.$$

Cálculo de C.

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

$-\log\,(a+b)$	$\overline{5},9457030$
$\log\,(a-b)$	2,6563570
....	$\overline{2},6020600$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} C$	$\overline{1},3010300$

$$\frac{1}{2} C = 11^\circ\ 18'\ 35'',76,$$

$$C = 22^\circ\ 37'\ 11'',52.$$

Se tiene en seguida

$$B = 90^\circ - C = 67^\circ\, 22'\, 48'',48.$$

Resolucion de un triángulo rectilíneo del cual se conoce un lado y dos ángulos.

83. El ángulo desconocido se obtendrá inmediatamente por la fórmula

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Si a es el lado dado, se calcularán los otros dos b y c por las fórmulas

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A},\ c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}.$$

84. EJEMPLO.—*Se dan*

$$A = 81^\circ\, 47'\, 12'',5\ B = 38^\circ\, 12'\, 47'',5\ C = 60^\circ\ a = 7012^m,24$$

calcular los lados b *y* c, *así como la superficie* s *del triángulo.*

MANERA DE CALCULAR.

Cálculo de b.		*Cálculo de* c.	
$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$		$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$	
log a.............	3,8458568	log a.............	3,8458568
— log sen A......	0,0044774	— log sen A......	0,0044774
log sen B........	$\bar{1}$,7914024	log sen C.........	$\bar{1}$,9375306
log b.............	3,6417366	log c.............	3,7878648
$b = 4382^m,65.$		$c = 6135^m,71.$	

Cálculo de la superficie s.

$$s = \frac{1}{2}\frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

$2 \log a$	$7,6917136$
$\log \operatorname{sen} B$	$\bar{1},7914024$
$\log \operatorname{sen} C$	$\bar{1},9375306$
$-\log \operatorname{sen} A$	$0,0044774$
$-\log 2$	$\bar{1},6989700$
$\log s$	$7,1240940$

$$s = 13307420^{mc}.$$

Resolucion de un triángulo rectilíneo, en el cual se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

85. Si a, b y A son los elementos dados, se determinarán los desconocidos por las fórmulas

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a},\ A + B + C = 180^\circ,\ c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

Cuando B difiere poco de 90°, no puede determinarse con exactitud por medio de su seno; en este caso se empieza por calcular el producto $b \operatorname{sen} A$, y se obtiene el ángulo B por la fórmula

$$\operatorname{tang} B = \pm \frac{b \operatorname{sen} A}{\sqrt{(a + b \operatorname{sen} A)(a - b \operatorname{sen} A)}};$$

tambien puede emplearse la fórmula

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} B\right) = \pm \sqrt{\frac{a + b \operatorname{sen} A}{a - b \operatorname{sen} A}};$$

que se obtiene sustituyendo sen B por su valor en la ecuacion

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}B\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} B}{1 - \operatorname{sen} B}}.$$

Sin embargo, estas últimas fórmulas no pueden hacer conocer B con precision, cuando este ángulo difiere muy poco de 90° y que los datos, como sucede frecuentemente, no son rigurosamente exactos. En este caso, en efecto, un ligero error en los elementos dados puede ocasionar un error considerable en el ángulo B. (*Véase*, Capítulo VI, *las fórmulas diferenciales*.

Escolio I.—Si se tiene $a > b$ sen A, y solamente en este caso, las Tablas harán conocer un valor para B, que representamos por M, y tal que $M < 90°$; pero se podrá tomar tambien $B = 180° - M$; se tendrán dos valores correspondientes de C,

$$C = 180° - A - M \qquad C = M - A,$$

y, por consiguiente, tambien dos valores correspondientes de c.

Para que el ángulo M satisfaga la cuestion, es necesario y suficiente que $A + M$ sea $< 180°$; igualmente, para admitir el valor $180° - M$, es necesario y suficiente que M sea $> A$. Examinemos en qué casos se cumplen estas condiciones.

1.° Si se tiene $A \overline{\overline{>}}\, 90°$, el valor de $B = 180° - M$ no puede convenir, y la condicion para que el valor M dé una solucion del problema es

$$M < 180° - A,$$

ó como los dos miembros son menores que 90 grados,

$$\operatorname{sen} M < \operatorname{sen}(180° - A) \text{ ó } < \operatorname{sen} A;$$

es decir,

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} < \operatorname{sen} A \text{ ó } b < a.$$

Se ve que el problema no puede admitir más que una solucion, y la condicion para que la admita es, que de los dos lados dados, el mayor sea el opuesto al ángulo dado.

2.° Si se tiene $A < 90°$, el valor M de B siempre es admisible; pero, para admitir tambien $B = 180° - M$, es necesario que se tenga $M > A$, ó por ser los dos miembros inferiores á 90 grados,

$$\operatorname{sen} M > \operatorname{sen} A;$$

es decir,

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} > \operatorname{sen} A \text{ ó } b > a.$$

Se ve que en este caso la condicion de posibilidad es $a > b \operatorname{sen} A$. Si se cumple esta condicion, el problema admite una ó dos soluciones, segun que el lado conocido y opuesto al ángulo dado sea mayor que el otro lado, de los conocidos.

Los resultados obtenidos están conformes con los que se obtienen por medio de consideraciones geométricas, que creemos inútil recordar aquí.

Escolio II.—En la solucion precedente, no se calcula el lado c hasta despues de haber obtenido los ángulos B y C; pero no teniendo necesidad de dichos ángulos, puede calcularse directamente el lado c. Para esto se emplea la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A,$$

de donde se deduce

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A};$$

pero para hacer esta fórmula calculable por logaritmos, es necesario emplear un ángulo auxiliar, conforme al método del núm. 58, y entonces los cálculos que hay que ejecutar son tan largos como los empleados en el primer método. Además, el método que se ofrece naturalmente para hacer la expresion de c calculable por logaritmos, consiste en hacer (núm. 58)

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \operatorname{sen} \varphi,$$

de donde

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} A};$$

pues el valor de c se convierte entonces en

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \varphi \cos A}{\operatorname{sen} A} \pm a \cos \varphi = \frac{a \operatorname{sen} (\varphi \pm A)}{\operatorname{sen} A},$$

y se ve que el ángulo auxiliar φ, del cual nos hemos servido, es precisamente al ángulo B, del triángulo. No ha lugar, pues, á modificar la solucion que hemos dado.

86. Ejemplo.—*Se da*

$$A = 27^\circ\, 47'\, 44'',77 \qquad a = 2199^m,12 \qquad b = 2513^m,28$$

calcular B, C *y* c.

MANERA DE CALCULAR.

Cálculo del ángulo B.

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}.$$

log b	3,4002409
— log a	$\bar{4}$,6577511
log sen A	$\bar{1}$,6686853
log sen B	$\bar{1}$,7266773

Hay dos soluciones

$$B = 32^\circ\, 12'\, 15'',23 \text{ y } B = 147^\circ\, 47'\, 44'',77.$$

Primera solucion.

$$B = 32^\circ\, 12'\, 25'',23$$

Cálculo del ángulo C.

$$C = 180^\circ - \overline{A - B}.$$

$$A = 27^\circ\, 47'\, 44'',77$$
$$B = 32^\circ\, 12'\, 15'',23$$
$$C = 120^\circ\, 0'\, 0''$$

Cálculo del lado c.

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

log a	3,3422489
— log sen A	0,3313147
log sen C	$\bar{1}$,9375306
log c	3,6110942

$$c = 4084^m,08.$$

Segunda solucion.

$$B = 147^\circ\, 47'\, 44'',77$$

Cálculo del ángulo C.

$$C = 180^\circ - \overline{A - B}.$$

$$A = 27^\circ\, 47'\, 44'',77$$
$$B = 147^\circ\, 47'\, 44'',77$$
$$C = 4^\circ\, 24'\, 30'',46$$

Cálculo del lado c.

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

log a	3,3422489
— log sen A	0,3313147
log sen C	$\bar{2}$,8857358
log c	2,5592994

$$c = 362^m,493.$$

Resolucion de un triángulo rectilíneo, del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

87. Primer método.—Sean a, b, C los elementos dados. Para hallar los ángulos A y B se puede emplear la fórmula (2) del núm. 73;

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} C ;$$

esta fórmula nos da á conocer la semi-diferencia

$$\frac{1}{2}(A-B)=M .$$

Tenemos, por otra parte,

$$\frac{1}{2}(A+B)=90^{\circ}-\frac{1}{2} C ;$$

de aquí se deduce, por la adicion ó sustraccion,

$$A=90^{\circ}-\frac{1}{2} C+M, \quad B=90^{\circ}-\frac{1}{2} C-M .$$

Conociendo de este modo los ángulos A y B, podemos calcular c por la fórmula

$$c=\frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} ;$$

pero es mejor emplear una de las fórmulas (1) del núm. 73, á saber:

$$c=\frac{(a+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}, \quad c=\frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} C}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)},$$

que exigen solamente el buscar dos nuevos logaritmos.

Si los lados a y b se nos dan por sus logaritmos, se puede abreviar el cálculo de la fraccion $\frac{a-b}{a+b}$ que figura en el valor de tang $\frac{1}{2}(A-B)$. Es suficiente determinar un ángulo auxiliar φ, tal que tang $\varphi = \frac{a}{b}$, porque se deduce en seguida

$$\frac{a-b}{a+b} = \text{tang}\,(\varphi - 45^\circ),$$

y, por consiguiente,

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B) = \text{tang}\,(\varphi - 45^\circ)\cot\frac{1}{2}C$$

Se concluirá, como anteriormente, el cálculo de los ángulos A y B; pero, para determinar c, es necesario emplear la fórmula $c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$.

Segundo método.—Se puede resolver el mismo problema por medio de las fórmulas

$$c \text{ sen } A = a \text{ sen } C, \quad c \cos A = b - a \cos C:$$

se obtiene de este modo la solucion más sencilla, y así es como se resuelve frecuentemente en la Astronomía, siendo a conocido por su logaritmo, mientras que b se nos da directamente. De las dos ecuaciones precedentes se deduce por el cálculo logarítmico

$$\log(\pm \text{tang } A) = \log a + \log \text{sen } C - \log[\pm(b - a\cos C)],$$
$$\log c = \log a + \log \text{sen } C - \log \text{sen } A.$$

Para tener $\log[\pm(b - a\cos C)]$, se calcurá el logaritmo del valor absoluto de $a \cos C$; de aquí se deducirá $a \cos C$, y se tendrá en seguida, por adicion ó sustraccion, $b - a \cos C$. Conociendo de este modo el ángulo A, se obtendrá B por la relacion

$$A + B + C = 180^\circ.$$

88. Ejemplo.—*Se nos da*

$$\log a = 0{,}4287591 \quad \log b = 0{,}0008764 \quad C = 78^\circ\,28'\,7'',62$$

calcular los ángulos A *y* B *el lado* c *y la superficie* s.

MANERA DE CALCULAR (primer método).

Cálculo de φ

$$\left(\tang \varphi = \frac{a}{b}\right)$$

log a...... 0,4287591
log b....... 0,0008764

log tang φ.. 0,4278827 $\varphi = 69^\circ 31' 36'',59$ $\varphi - 45^\circ = 24^\circ 31' 36'',59$.

Cálculo de los ángulos A *y* B.

$$\tang \frac{1}{2}(A - B) = \tang(\varphi - 45^\circ) \cot \frac{1}{2} C.$$

log tang $(\varphi - 45^\circ)$..................	$\bar{1}{,}6592428$
log cot $\frac{1}{2}$ c..........................	0,0880012
log tang $\frac{1}{2}(A - B)$.............	$\bar{1}{,}7472440$
$\frac{1}{2}(A - B)$..........................	$29^\circ\ 11'\ 44'',\ 75$
$\frac{1}{2}(A + B)$..........................	$50^\circ\ 45'\ 56'',\ 19$
	$A = 79^\circ\ 57'\ 40'',\ 94$
	$B = 21^\circ\ 34'\ 11'',\ 44$

Cálculo del lado c.		*Cálculo de la superficie* s.	
$c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$		$s = \dfrac{1}{2}\, ab \text{ sen } C$	
log a............	0,4287591	log a............	0,4287591
log sen C........	$\bar{1}$,9911445	log b............	0,0008764
— log sen A.....	0,0067003	log sen c.........	$\bar{1}$,9911445
		— log 2..........	$\bar{1}$,6989700
log c............	0,4266039	log s............	0,1197500
$c = 2,67057$		$s = 1,3175$	

MANERA DE CALCULAR (SEGUNDO MÉTODO).

Se empieza por calcular b, cuyo logaritmo es conocido; de este modo se encuentra $b = 1,002020$.

Cálculo de A.

$$\text{tang } A = \frac{a \text{ sen } C}{b - a \cos C}$$

log a............	0,4287591	log a............	0,4287591
log cos C.........	$\bar{1}$,3008167	log sen C.........	$\bar{1}$,9911445
		— log $(b - a \cos C)$	0,3320687
log a cos C.......	$\bar{1}$,7295758		
a cos C..........	0,5365075	log tang A.......	0,7519723
$b - a \cos C$......	0,4655125	$A = 79^\circ\, 57'\, 40'', 95$	

Para calcular c se opera como en el primer método, con la sola diferencia de que aquí hay necesidad de calcular un logaritmo más, que es el de sen A.

Resolucion de un triángulo rectilíneo del que conocemos los tres lados.

89. Las fórmulas del núm. 70, que dan á conocer los ángulos A, B, C por los lados, no son calculables por logaritmos; pero las del núm. 74, se pueden emplear para el cálculo de los ángulos. Se deben preferir las fórmulas del tercer sistema, á saber:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

que determinan los ángulos $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{2} B$, $\frac{1}{2} C$, por sus tangentes.

Escolio.—Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que cada lado sea menor que la suma de los otros dos; si esta condicion no se cumple, una de las diferencias $p-a$, $p-b$, $p-c$, es negativa, mientras que las otras dos son positivas: los valores de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A, \ldots..$ son, pues, entonces imaginarios.

90. Ejemplo.—*Se da*

$$a = 701^{m},224, \quad b = 438^{m},265, \quad c = 613^{m},571,$$

calcular los ángulos A, B, C, *y la superficie* s.

MANERA DE CALCULAR.

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$..	876,530	log p............	2,9427668
$p-a$..............	175,306	log $(p-a)$......	2,2437968
$p-b$..............	438,265	log $(p-b)$......	2,6417368
$p-c$..............	262,959	log $(p-c)$......	2,4198881

Cálculo del ángulo A.

$$\tang \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$\log(p-b)$	2,6417368
$\log(p-c)$	2,4198881
$-\log(p-a)$ ...	$\bar{3}$,7562032
$-\log p$	$\bar{3}$,0572332
....	$\bar{1}$,8750613
$\log \tang \frac{1}{2} A$	$\bar{1}$,9375306

$$\frac{1}{2} A = 40^\circ\, 53'\, 36'',22$$

$$A = 81^\circ\, 47'\, 12'',44.$$

Cálculo del ángulo B.

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

$\log(p-a)$	2,2437968
$\log(p-c)$	2,4198881
$-\log(p-b)$ ...	$\bar{3}$,3582632
$-\log p$	$\bar{3}$,0572332
....	$\bar{1}$,0791813
$\log \tang \frac{1}{2} B$	1,5395906

$$\frac{1}{2} B = 19^\circ\, 6'\, 23'',77$$

$$B = 38^\circ\, 12'\, 47'',54.$$

Cálculo del ángulo C.

$$\tang \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

$\log(p-a)$	2,2437968
$\log(p-b)$	2,6417368
$-\log(p-c)$	$\bar{3}$,5801119
$-\log p$	$\bar{3}$,0572332
....	$\bar{1}$,5228787
$\log \tang \frac{1}{2} C$	$\bar{1}$,7614393

$$\frac{1}{2} C = 30^\circ$$

$$C = 60^\circ$$

Cálculo de la superficie s.

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$\log p$	2,9427668
$\log(p-a)$	2,2437968
$\log(p-b)$	2,6417368
$\log(p-c)$	2,4198881
....	10,2481885

$$s = 133074^{mc},23.$$

Verificacion. — $A + B + C = 180^\circ - 0'',02.$

Diversos casos de resolucion de triángulos, en los cuales no se conocen todos los lados ó todos los ángulos.

91. Siendo indefinido el número de casos que pueden presentarse en la resolucion de triángulos, daremos aquí á conocer algunos ejemplos.

PROBLEMA I.—*Resolver un triángulo, conociendo un ángulo* C, *el lado opuesto* c, *y la suma ó la diferencia de los otros dos lados* a *y* b.

Una de las fórmulas (1) del núm. 73, á saber:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C},$$

hace conocer inmediatamente la semi-diferencia $\frac{1}{2}(A-B)$; siendo conocida la semi-suma $\frac{1}{2}(A+B)$, se conocerán tambien A y B; quedando resuelto el problema por medio de una de las fórmulas precedentes y que hará conocer $a-b$, si $a+b$ dado, ó $a+b$, si $a-b$ se conoce; teniendo cuidado si al determinar $\frac{1}{2}(A-B)$, hemos empleado la primera de dichas fórmulas; para determinar $a-b$, emplear la segunda.

92. PROBLEMA II.—*Resolver un triángulo, conociendo el ángulo* B, *el lado adyacente, y la suma ó la diferencia de los otros dos lados.*

Designando por $2p$ el perímetro $a+b+c$, se tiene (74)

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\ \operatorname{tang}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

de donde

$$\tang \frac{C}{2} \tang \frac{B}{2} = \frac{p-a}{p} \text{ y } \tang \frac{C}{2} \cot \frac{B}{2} = \frac{p-b}{p-c}.$$

Si la suma $b + c$ es conocida, se conocen tambien p y $p - a$; si la diferencia $b - c$ es la dada, se conoce $p - b$, $p - c$, por medio de las fórmulas precedentes.

Se concluirá el problema por el medio del núm. 83, ó más bien por una cualquiera de las fórmulas que se deducen de las precedentes, permutando las letras A y B, a y b.

93. Problema III.—*Resolver un triángulo, conociendo su superficie* s *y los ángulos*.

Tenemos (núm. 75)

$$s = \frac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } A},$$

de donde

$$a = \sqrt{\frac{2s \text{ sen } A}{\text{sen } B \text{ sen } C}};$$

los lados b y c se calculan por fórmulas análogas.

94. Problema IV.—*Resolver un triángulo, conociendo su perímetro y sus ángulos*.

De las fórmulas (3) y (4) del núm. 74, se deduce

$$\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C = \frac{p}{a} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \frac{p}{a} \text{ sen } \frac{1}{2} A,$$

de donde

$$a = \frac{p \text{ sen } \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C},$$

fórmula que sirve para calcular a.

95. PROBLEMA V.—*Resolver un triángulo, conociendo el rádio* r *del círculo inscrito y los ángulos.*

De fórmulas que se han dado anteriormente, se deduce

$$p-a=r\cot\frac{1}{2}A,\ p-b=r\cot\frac{1}{2}B,\ p-c=r\cot\frac{1}{2}C;$$

calculando $p-a$, $p-b$, $p-c$ por estas fórmulas, se deducen inmediatamente los valores de los lados a, b, c.

96. PROBLEMA VI.—*Resolver un triángulo, conociendo el ángulo* C *y las sumas* c + a, c + b *obtenidas, añadiendo el lado opuesto* c *á cada uno de los otros dos lados.*

Supongamos que $c+a>c+b$. Las fórmulas (1) del número 73, nos dicen que

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{(c+a)+(c+b)}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}, \\[2ex] \dfrac{(c+a)-(c+b)}{c}=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}, \end{cases}$$

de donde

$$(2)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{(c+a)-(c+b)}{(c+a)+(c+b)}\cot\frac{1}{2}C.$$

Esta fórmula (2) no contiene más incógnita que la $\frac{1}{2}(A-B)$, y se la podrá determinar por el método del núm. 60, calculando un ángulo auxiliar φ comprendido entre cero y 90 grados, por medio de la fórmula

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{(c+a)-(c+b)}{(c+a)+(c+b)}\cot\frac{1}{2}C.$$

Pero si se considera el triángulo formado por los lados $c + a$, $c + b$, y el ángulo comprendido C, designando por A' el ángulo opuesto al lado $c + a$, en este triángulo, y por B' el ángulo que se opone al lado $c + b$, la semi-diferencia $\frac{1}{2}(A' - B')$ será precisamente igual al ángulo auxiliar φ, segun la fórmula (2) del núm 73; se tendrá, pues,

$$\frac{A' - B'}{2} = \varphi, \quad \frac{A' + B'}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} C,$$

de donde

$$(4) \qquad A' = 90^\circ - \frac{1}{2} C + \varphi, \quad B' = \left(90^\circ - \frac{1}{2} C\right) - \varphi.$$

Esto supuesto, la ecuacion (2) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A - B) + 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A' - B')}{\cos \frac{1}{2}(A' - B')};$$

si se quitan los denominadores, se hallará

$$(5) \qquad \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A' - B'),$$

y haciendo, para abreviar,

$$\frac{A - B}{2} - \frac{A' - B'}{2} = x;$$

se tiene, además,

$$\frac{A + B}{2} - \frac{A' + B'}{2} = o;$$

se deduce de las dos ecuaciones precedentes

$$(6)\qquad A = A' + x,\ B = B' - x.$$

Se calculará el ángulo x por la fórmula (5), y las fórmulas (6) nos darán A y B, puesto que A' y B' son conocidas.

Para calcular c, haremos uso de la segunda ecuacion (1), que nos dará

$$(7)\qquad c = \frac{[(c+a) - (c+b)]\cos\frac{1}{2}c}{\text{sen}\,(\varphi + x)};$$

y por último, obtendremos a y b por las fórmulas

$$(8)\qquad a = (c+a) - c,\ b = (c+b) - c.$$

El triángulo auxiliar del que hemos hecho uso es siempre posible, cualquiera que sean los datos $c+a$, $c+b$, C; de aquí resulta que la ecuacion (5) dará siempre valores reales de x, porque se puede poner bajo la forma

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\,A' - \text{sen}\,B',$$

si se quiere que su segundo miembro esté comprendido entre cero y la unidad. La ecuacion última tiene una raíz comprendida entre cero y 90 grados; esta es la única que puede convenir á nuestro problema, porque siendo el ángulo B' agudo, á causa de ser $A' > B'$, el valor de B que nos da la segunda ecuacion (6) no puede ser positivo más que cuando x sea inferior á 90 grados. Pero vemos además que el problema propuesto no es posible más que cuando el valor de x, comprendido entre cero y 90 grados, es inferior á B', condicion que podemos expresar por la desigualdad sen $x <$ sen B', ó por medio de la ecuacion (8), por sen $A' < 2$ sen B'; esta última desigualdad equivale á la siguiente: $c + a < 2\,(c+b)$.

Esta es la condicion necesaria para que el problema sea posible; hay que demostrar que es suficiente. En efecto, si se verifica, los valores de A y B son positivos; además su suma es inferior á 180 grados; el valor de c deducido de la ecuacion (7) será tambien positivo, y es evidente que estos valores hacen las ecuaciones (1) idénticas. Si ahora se nos pide resolver un triángulo con los elementos A, B, c que acabamos de calcular, el problema es siempre posible, y para resolverle, podemos hacer uso de las ecuaciones (1), de las que deduciremos necesariamente los valores dados $c + a$, $c + b$.

Escolio.—Si tenemos $c + a = c + b$, los ángulos φ y x se reducen á cero; y entonces $A = B = A' = B'$. En este caso la fórmula (7) no puede servir para calcular el lado c; es necesario recurrir á la primera de las ecuaciones (1), que nos dice

$$c = (c + a)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2} + \operatorname{sen}\frac{1}{2}c},$$

de donde

$$\frac{c - a}{c + a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}c - 15^\circ\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}c + 15^\circ\right)}.$$

Tendremos, pues,

$$c - a = (c + a)\,\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}c - 15^\circ\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}c + 15^\circ\right)};$$

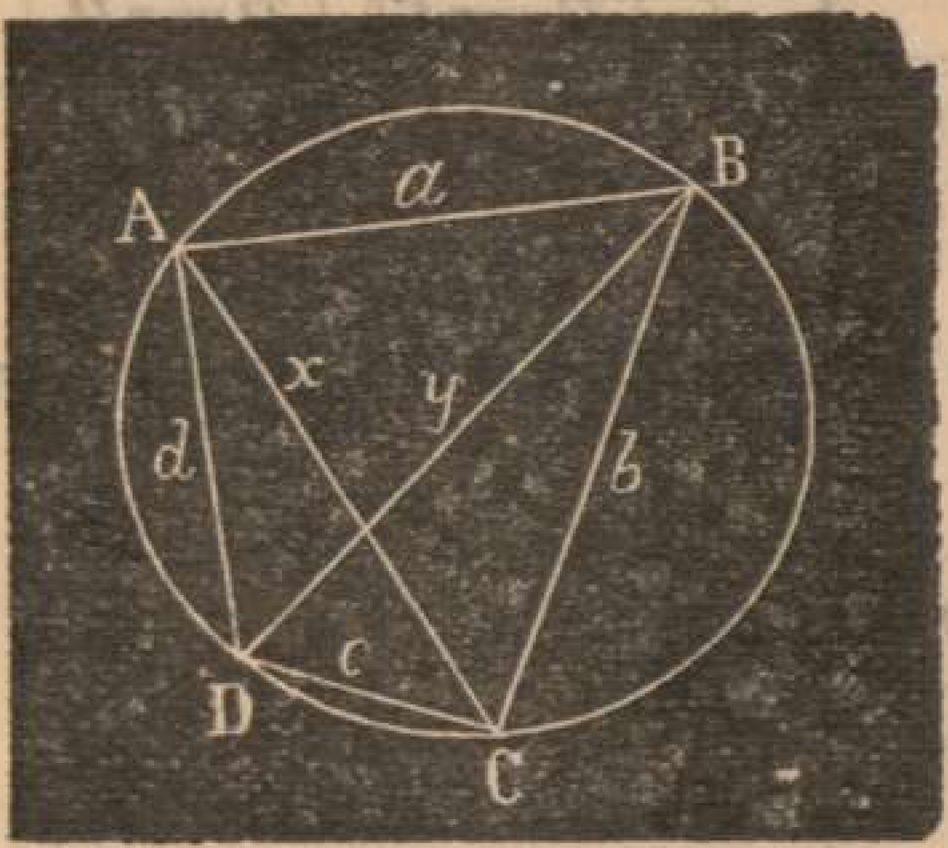
por medio de esta fórmula conocemos $c - a$; y de este valor se deducirán inmediatamente los de a y c.

Del cuadrilátero inscriptible.

97. Es necesario indicar aquí el modo de calcular los ángulos, el área y las diagonales de un cuadrilátero inscriptible, cuando se conocen los cuatro lados.

Sea $ABCD$ (fig. 19) un cuadrilátero inscrito, en el que representaremos los lados AB, BC, CD, DA, por a, b, c, d; las diagonales AC y BD, por x é y; el área, por s; el rádio del círculo circunscrito, por R, y los ángulos, por las letras que indican sus vértices.

(Fig. 19.)



Siendo los ángulos B y D suplementarios, sus cosenos son iguales y de signos contrarios; de modo que de los triángulos ABC y ACD, se deduce

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos B, \\ x^2 = c^2 + d^2 + 2\,cd \cos B; \end{cases}$$

de estas ecuaciones, eliminando x, se deduce

$$(2) \qquad \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)}.$$

Esta fórmula no es posible calcularla por logaritmos, pero podemos deducir de ella otra que lo sea. En efecto,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \cos B}{2}, \quad \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 + \cos B}{2},$$

y reemplazando $\cos B$ por su valor, se deduce

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} B = \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{4\,(ab+cd)} = \frac{(-a+b+c+d)\,(a-b+c+d)}{4\,(ab+cd)},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{(c+b)^2 - (c-d)^2}{4\,(ab+cd)} = \frac{(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)}{4\,(ab+cd)}.$$

Si expresamos por $2p$ el perímetro $a + b + c + d$, tendremos

$$a + b + c - d = 2\,(p - d), \ldots .$$

y, por consiguiente,

$$(3)\quad \operatorname{sen}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}},\ \cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}.$$

Dividiendo una por otra estas dos fórmulas, se obtiene la siguiente:

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

que se puede calcular por logaritmos. Del mismo modo tendremos, para calcular el ángulo A,

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Conociendo de este modo los ángulos del cuadrilátero, tendremos las diagonales por uno de los métodos del núm. 87. En cuanto á la superficie s, como es la suma de las superficies de los triángulos ABC y ADC, se deducirá (núm. 75),

$$s=\frac{1}{2}(ab+cd)\operatorname{sen}B;$$

si multiplicamos entre sí las ecuaciones (3), nos resulta

$$\operatorname{sen}B=2\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd};$$

y sustituyendo en la fórmula anterior

$$(6)\qquad s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Si suponemos que el lado d se reduce á cero, esta fórmula nos da el valor del área de un triángulo en funcion de sus tres lados.

Si queremos calcular directamente las diagonales x é y, se sustituirá en una de las ecuaciones (1) el valor de cos B deducido de la ecuacion (2): se saca inmediatamente

$$x^2 = \frac{cd\,(a^2+b^2)+ab\,(c^2+d^2)}{ab+cd},$$

ó

$$(7) \qquad x^2 = \frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd};$$

tendremos tambien

$$(8) \qquad y^2 = \frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc};$$

pero estas fórmulas (7) y (8), no se pueden calcular por logaritmos.

Multiplicando y dividiendo entre sí las ecuaciones (7) y (8), resulta

$$(9) \qquad xy = ac+bd; \quad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

fórmulas que demuestran dos teoremas conocidos de Geometría.

Por último, tambien podemos expresar el rádio R del círculo circunscrito en funcion de los cuatro lados. Tenemos, en efecto,

$$R = \frac{x}{2 \operatorname{sen} B},$$

de donde

$$(10) \qquad R = \frac{\sqrt{(ac+bd)\,(ab+cd)\,(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}}.$$

Operaciones sobre el terreno.

98. *Triangulacion.*—Cuando se quiere hacer con alguna precision el plano de un terreno, de una ciudad, etc., es indispensable apoyar el *levantamiento* sobre una *triangulacion* bien

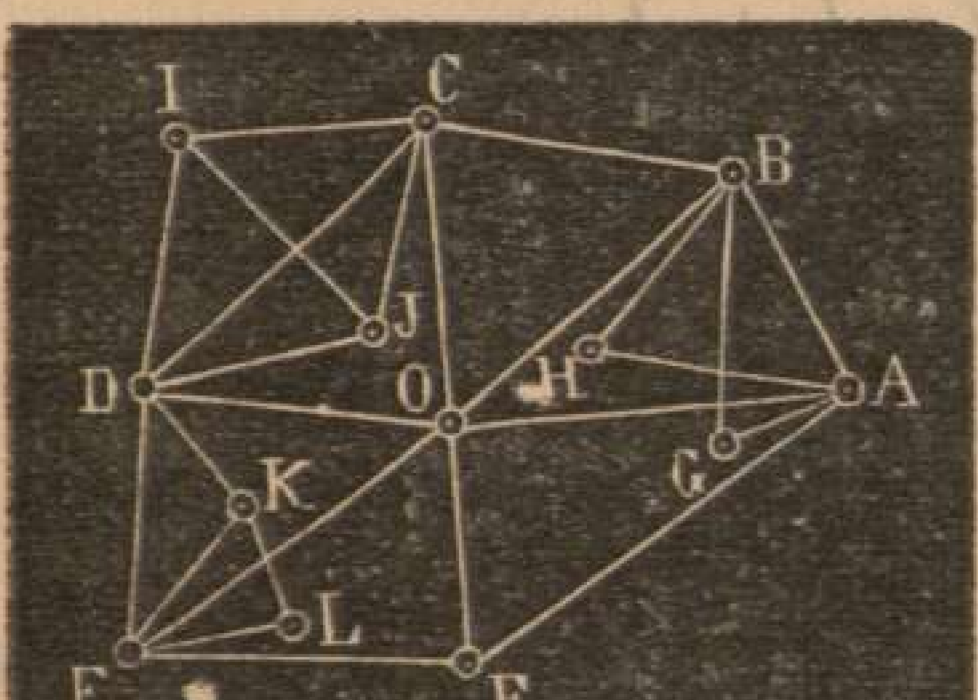
calculada. Se llama así la operacion por la que se determinan los valores de todos los elementos de una série ó de una reunion de triángulos justapuestos y ligados los unos á los otros por puntos escogidos á voluntad sobre el terreno. Muchas veces, cuando el terreno no es exactamente horizontal, que es el caso más ordinario, es necesario imaginar que la série de triángulos está proyectada en un plano horizontal situado bajo ella; estos son los elementos de la proyeccion, ó como generalmente se dice, de la red de triángulos *reducida al horizonte*, que es importante conocer y que se puede determinar.

Todos los ángulos de los triángulos se miden por medio de un instrumento, el *grafómetro*, ó mejor dicho, el teodolito, que nos da el valor de los ángulos reducidos al horizonte. Pero una sola línea se mide directamente por medio de la *cadena de agrimensor* ó de un *aparato de reglas*, que se llama la base. Los otros lados del triángulo se determinan por el cálculo.

Es muy importante escoger con discernimiento los puntos que deben formar la red trigonométrica, con el objeto de no tener más que triángulos *ventajosos*, es decir, triángulos que no tengan ningun ángulo demasiado agudo. Es fácil ver, en efecto, que un punto está mal determinado cuando se nos da por la interseccion de dos rectas que formen entre sí un ángulo muy pequeño, porque el más ligero error cometido en el valor del ángulo puede producir un error considerable relativamente á la situacion del punto. Vamos á indicar la marcha general adoptada para triangular.

Despues de haber estudiado el terreno sobre el que uno se propone operar, se escoge un punto central O (fig. 20) que pueda apercibirse de lejos, como el extremo de un campanario, ó una señal colocada en un punto elevado, ó de un simple jalon con una señal, si el terreno es descubierto. Se eligen en seguida alrededor de los límites cinco ó seis puntos ó más, A, B, C, D, E, F, desde los cuales se puede ver el punto O, y tales,

(Fig. 20.)



que los triángulos ABO, BCO....., sean ventajosos. Importa tambien que uno de los lados del polígono $ABCDEF$, AB, por ejemplo, pueda ser medido directamente y tomado por base.

Conociendo el lado AB del polígono, y habiendo señalado los vértices por medio de una percha ó de otro signo cualquiera, el operador se estaciona sucesivamente en cada uno de estos vértices. Desde el punto A, se miden los ángulos OAF y OAB; desde el punto B, los ángulos OBA y OBC.....; por último, desde el último vértice F, los ángulos OFE y OFA. De estas medidas se deducen fácilmente cada uno de los ángulos en O, que es inútil medir directamente, con tal que los ángulos citados los hayamos determinado con una exactitud suficiente. Nos aseguraremos de esta exactitud sumando todos los ángulos observados y comparando esta suma con la de los ángulos del polígono, que la conocemos desde antes. (Si el polígono tiene seis lados, como el de la figura, la suma de los ángulos es $180^\circ \times 4$ ó 720°.) La diferencia entre las dos sumas, dividida por el doble del número de lados del polígono, será el error medio de las observaciones. Cuando este error medio es mayor que el que debe esperarse del instrumento empleado, es necesario volver á empezar la operacion; en el caso contrario, se pueden considerar las operaciones como exactas y dispensarse de la medida directa de los ángulos en O; pero se pueden corregir los ángulos observados, aumentando ó disminuyendo cada uno de ellos en el error medio de que acabamos de hablar.

Una vez tomadas y corregidas las medidas como acabamos de decir, falta hacer el cálculo de los triángulos. El primer triángulo ABO, en el que se conoce el lado AB y los ángulos, nos dará á conocer los lados AO y BO (primer caso de los triángulos oblicuángulos); el segundo triángulo BCO, en el que conocemos ahora el lado OB y los ángulos, nos dará á conocer BC y CO; el tercero CD y DO.....; en fin, el último FA y AO. Aquí podemos observar otra nueva comprobacion de las operaciones; porque el valor del lado AO, que nos da el último triángulo, debe ser el mismo que el que nos da el primero.

Esta primera red de triángulos constituye lo que se llama *cánevas principal*. Todos estos lados pueden servir á su turno de bases para volver á levantar otros puntos, y como van en direcciones diversas, podremos arreglarnos de modo que siempre resulten triángulos ventajosos. De este modo, teniendo los puntos G y H con el lado AB, y midiendo solamente los ángulos en A y B de los triángulos ABG y ABH, calcularemos en seguida los lados de estos triángulos. Uniremos igualmente los puntos Y y J con el lado CD del polígono principal, y el punto K con el lado ED. Por último, conociendo los lados de estos triángulos secundarios, se pueden tomar tambien por bases; por ejemplo, se puede conocer el punto L uniéndole al lado EK.

Si la naturaleza del terreno no permitiese tomar por base uno de los lados del polígono principal, se mediria en cualquier parte una base, que pudiese ser unida á uno de estos lados, AB por ejemplo, por uno ó dos triángulos ó más, si fuera necesario. El cálculo de estos triángulos nos daria á conocer AB, y se continuaria la operacion como si el lado AB hubiese sido calculado directamente.

Frecuentemente se toma por polígono principal un simple triángulo, y por base uno de los lados de este triángulo. En este caso, se miden los tres ángulos directamente; si la suma de estos tres ángulos difiere de 180°, se toma el tercio de la diferencia entre esta suma y 180°; este es el error medio de las tres observaciones. Si este error medio es admisible, se corrigen los ángulos observados como se ha dicho anteriormente, y queda resuelto el triángulo. Una vez conocidos los tres lados, se determinan todos los puntos que se quieren conocer, uniéndolos con uno de los lados de este triángulo.

Para concluir, vamos á tratar de algunos problemas que se presentan frecuentemente en la agrimensura y en el levantamiento de planos. En todos estos problemas, los datos son una base que se puede medir con la cadena, y dos ángulos, para cuya medida se puede emplear un simple grafómetro.

Problemas de Trigonometría práctica.

99. PROBLEMA I.—*Encontrar la altura de una torre cuyo pié es accesible y cuya base está sobre un terreno casi horizontal.*

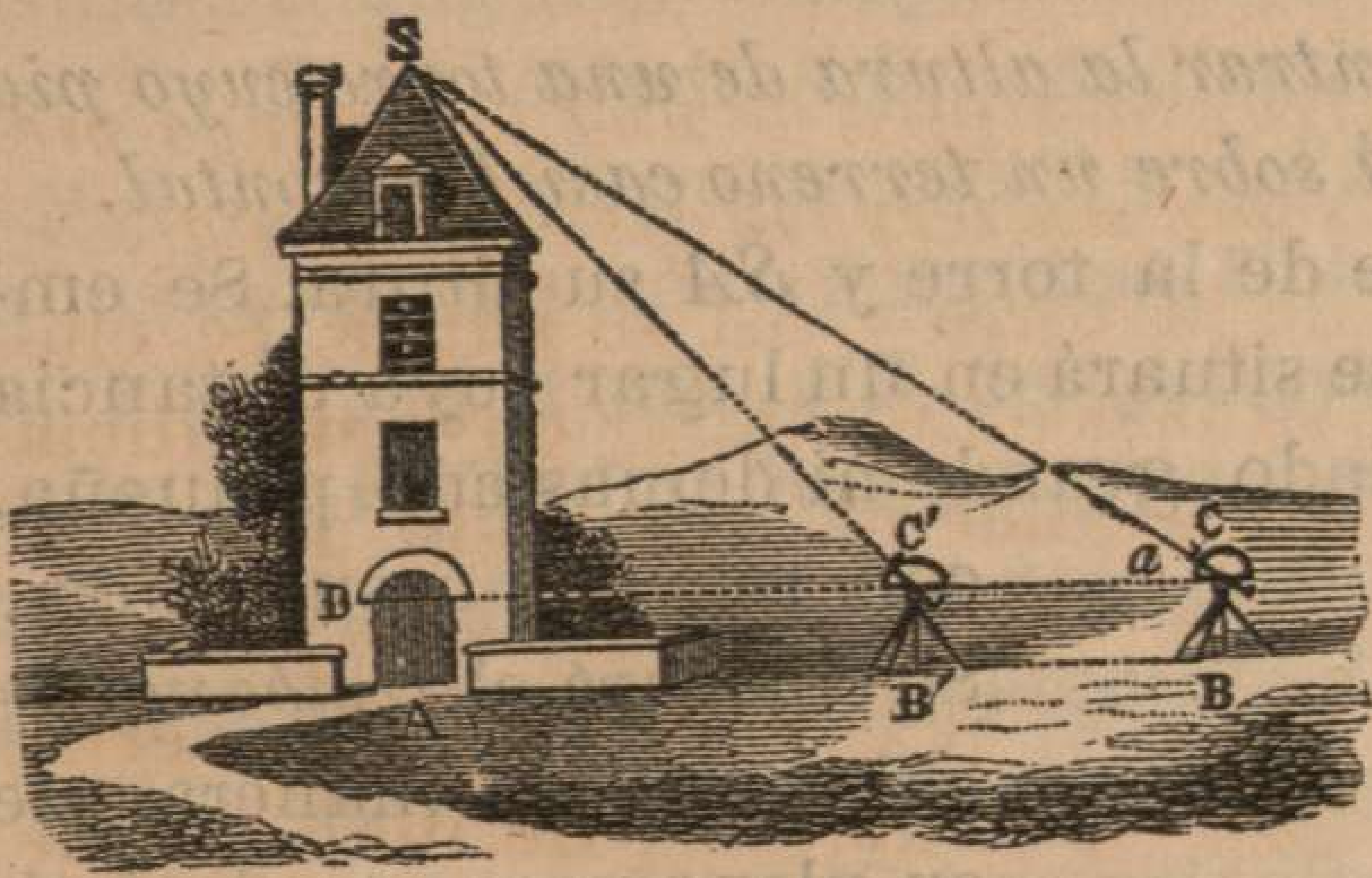
Sea (fig. 21) S el vértice de la torre y SA su altura. Se empleará un grafómetro que se situará en un lugar cuya distancia á la torre no sea ni demasiado grande ni demasiado pequeña, con relacion á su altura. Se colocará el *limbo* verticalmente, de manera que su plano pase por el vértice de la torre y que su diámetro sea horizontal. Se hará girar la *alidada* hasta que se aperciba, en el medio del hilo de sus *pinulas*, el vértice S de la torre, y se evaluará el arco ab del limbo comprendido entre el diámetro horizontal y la alidada; este será el ángulo C del triángulo rectángulo SCD. Se tomará en seguida sobre el terreno, por medio de una plomada, la proyeccion B del centro del instrumento; á partir de este punto B se trazará una *delineacion* en la direccion del Ca, y se medirá con la cadena la distancia horizontal BA contada en esta direccion, desde el punto B hasta la torre. Como $CD = BA$, se conocerá en el triángulo rectángulo SCD el lado CD y el ángulo agudo SCD; podremos, pues, calcular SD, y añadiéndole AD ó BC, que es la altura del grafómetro, se tendrá la altura buscada.

(Fig. 21.)

100. PROBLEMA II.—*Encontrar la altura de una torre cuyo pié es inaccesible, pero cuya base está sobre un terreno casi horizontal.*

Sea (fig. 22) AS la altura de la torre á cuyo pié no podemos aproximarnos. Se colocará el grafómetro en un cierto sitio B, y, como en el problema anterior, se dispondrá el limbo verticalmente, de manera que su diámetro sea horizontal y que su plano pase por el vértice S. Se dirigirá la alidada del instrumento hácia el vértice S, y se calculará el valor del ángulo SCD. Se trazará en seguida una alineacion BB' en la direccion del diámetro horizontal Ca, y se trasportará el grafómetro paralelamente á sí mismo, de manera que su centro se encuentre proyectado en B'; se dirigirá de nuevo la alidada del instrumento hácia el punto S, y se evaluará el ángulo $SC'D$. Por último, se medirá con la cadena la línea $BB' = CC'$.

(Fig. 22.)



Una vez tomadas estas medidas, el triángulo SCC' nos da

$$\frac{SC}{BB'} = \frac{\text{sen } SC'D}{\text{sen } (SC'D - SCD)},$$

de donde

$$SC = \frac{BB' \text{ sen } SC'D}{\text{sen } (SC'D - SCD)};$$

el triángulo rectángulo SCD nos da tambien

$$SD = SC \text{ sen } SCD;$$

y, por consiguiente,

$$SD = \frac{BB' \text{ sen } SCD \text{ sen } SC'D}{\text{sen } (SC'D - SCD)}.$$

Calcularemos SD por la fórmula

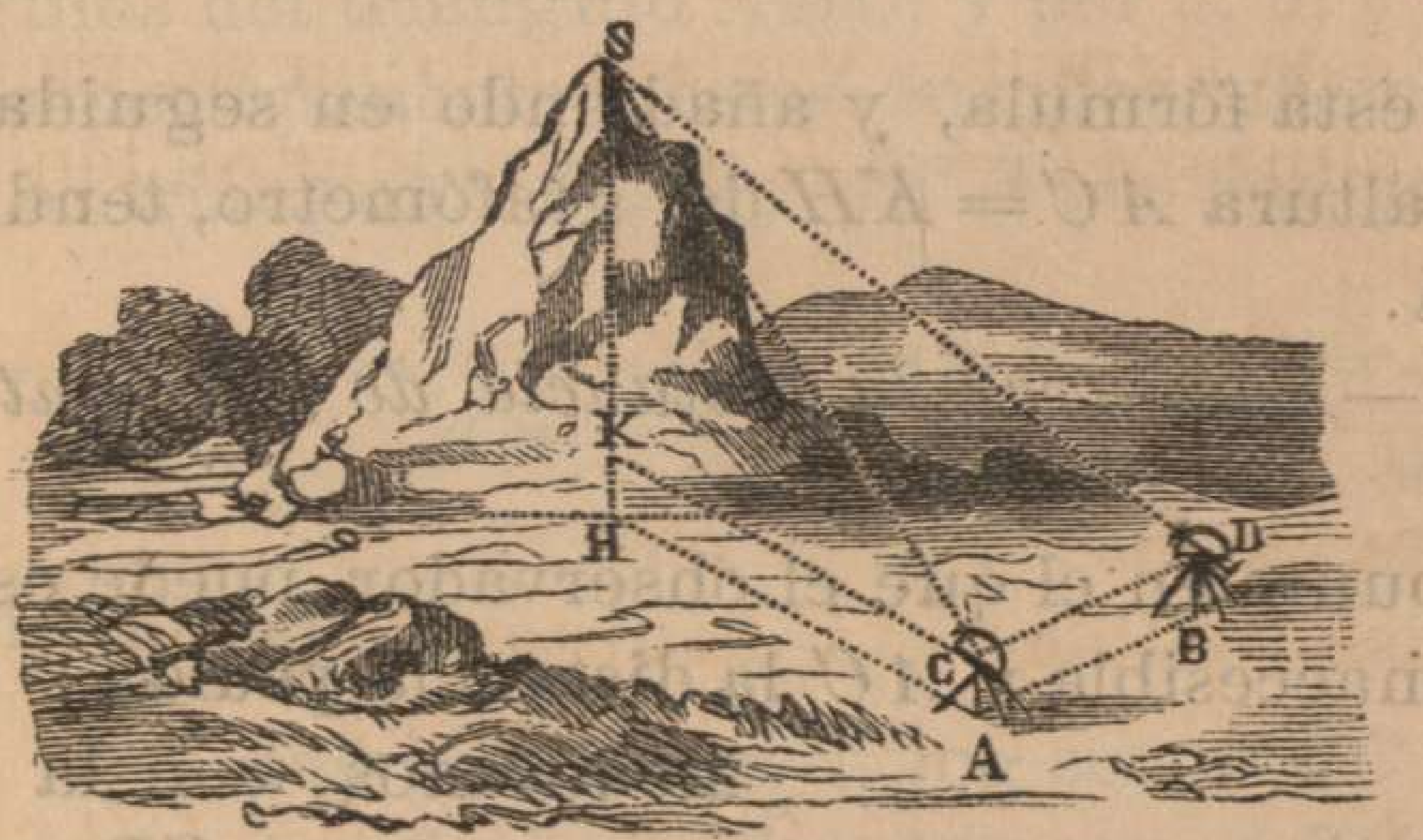
$$\log SD = \log BB' + \log SCD + \log SC'D \\ - \log \text{sen}\,(SC'D - SCD),$$

y, añadiendo en seguida al resultado la altura del grafómetro, tendremos la altura pedida.

101. Problema III.—*Encontrar la altura de una montaña.*

Sea SH (fig. 23) la altura que es necesario medir. Se tomarán dos puntos A y B, tales, que uno de ellos, A por ejemplo, esté casi situado en el plano horizontal del pié de la altura SH, y tales que se pueda medir fácilmente con la cadena la distancia comprendida entre los puntos A y B. Se colocará el grafómetro en el primer punto, de manera que el centro del limbo esté en un punto C de la vertical del punto A, y se colocará en B un jalon con una señal D; se moverá el plano del limbo hasta hacerle pasar por el punto S y por la señal D; mediremos en seguida el ángulo SCD, dirigiendo sucesivamente la alidada hácia el punto S y hácia la señal D; despues, sin mover el pié del instrumento, se colocará el limbo verticalmente, de manera que su diámetro esté horizontal y que su plano pase siempre por el punto S; se dirigirá la alidada hácia el punto S, y se evaluará el ángulo SCK que forma con el diámetro del limbo. Por último, se trasladará el instrumento al segundo punto, de manera que su centro ocupe el punto D proyectado en B, y se colocará en el punto A el jalon que estaba en B; despues, operando como anteriormente, se medirá el ángulo SDC.

(Fig. 23.)



Habiendo medido la base $AB = CD$ con la cadena, como hemos dicho antes, se conocerá el lado CD y los ángulos del triángulo SCD: este triángulo nos dice que

$$sc = \frac{AB \text{ sen } SDC}{\text{sen } CSD};$$

además, el triángulo rectángulo CSK nos da $SK = SC \text{ sen } SCK$, pues

$$SK = \frac{AB \text{ sen } SDC \text{ sen } SCK}{\text{sen } CSD}$$

y

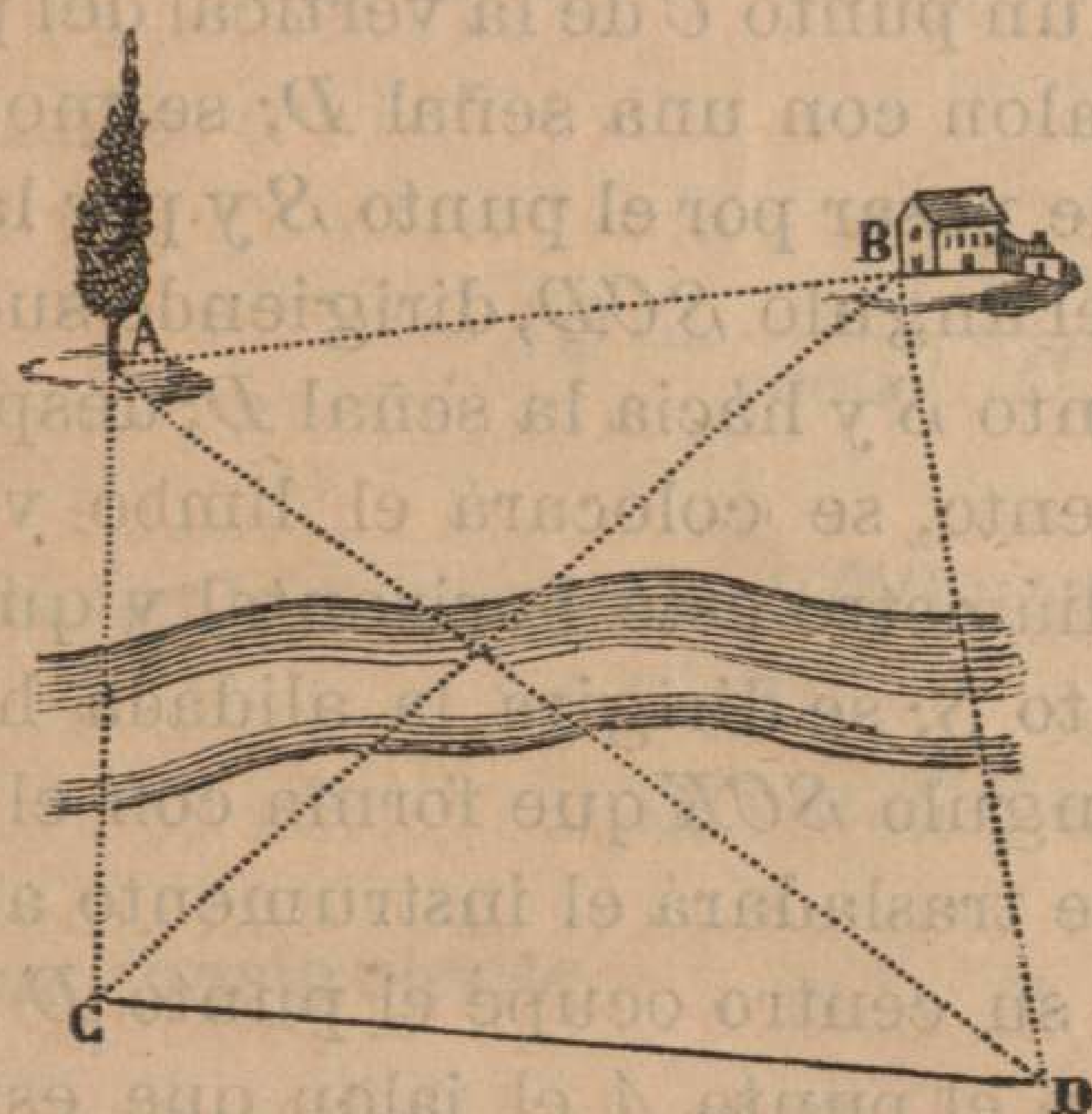
$$\log SK = \log AB + \log \text{ sen } SDC + \log \text{ sen } SCK - \log \text{ sen } CSD.$$

Calcularemos SK por esta fórmula, y añadiendo en seguida al resultado obtenido la altura $AC = KH$ del grafómetro, tendremos la altura buscada.

102. Problema IV.—*Encontrar la distancia de un punto á otro inaccesible.*

Sea C (fig. 24) el punto en el que el observador puede estacionarse, A el punto inaccesible y AC la distancia pedida.

(Fig. 24.)



Mediremos, con la cadena, una base CD cualquiera, á partir del punto C; se medirá en seguida con el grafómetro los ángulos ACD y ADC, de los cuales se deducirá el valor del ángulo CAD; por último, se calculará el lado AC por la fórmula

$$AC = \frac{CD \text{ sen } ADC}{\text{sen } CAD}.$$

103. Problema V.—*Encontrar la distancia entre dos puntos inaccesibles.*

Sean A y B (fig. 24) los dos puntos inaccesibles cuya distancia queremos determinar.

Se medirá, con la cadena, una base CD sobre la porcion de terreno en que el observador pueda estacionarse; se medirán en seguida con el grafómetro los cinco ángulos BDC, ADC, ACD, BCD y ACB. En los triángulos ACD y BCD en los que conocemos un lado CD y los ángulos, podremos calcular los lados AC y BC. Una vez hecho esto, conoceremos, en el triángulo ACB, el ángulo C y los dos lados que le comprenden; podremos, pues, calcular el lado AB, y el problema estará resuelto.

Vamos ahora á exponer el método más sencillo de dirigir el cálculo. Designaremos, como de ordinario, por A, B, C, los ángulos del triángulo ABC, y por a, b, c los lados que se oponen respectivamente á estos ángulos; además, haremos á $CD = d$. Los triángulos BCD y ACD nos dan respectivamente

$$a = \frac{d \text{ sen } BDC}{\text{sen } CBD}, \quad b = \frac{d \text{ sen } ADC}{\text{sen } CAD},$$

de donde

$$\log a = \log d + \log \text{sen } BDC - \log \text{sen } CBD,$$
$$\log b = \log d + \log \text{sen } ADC - \log \text{sen } CAD.$$

Si ahora designamos por φ un ángulo auxiliar, tal que $\text{tang } \varphi = \frac{a}{b}$, el triángulo ABC nos dará, segun el (núm. 87),

$$\text{tang } \frac{1}{2}(A - B) = \text{tang } (\varphi - 45^\circ) \cot \frac{1}{2} C.$$

El ángulo φ le podremos calcular por la fórmula

$$\log \text{tang } \varphi = \log a - \log b,$$

ó

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \text{tang } \varphi = \log \text{sen } BDC + \log \text{sen } CAD, \\ - \log \text{sen } CBD - \log \text{sen } ADC; \end{array} \right.$$

tendremos en seguida el valor del ángulo $\frac{1}{2}(A-B)$ por la fórmula

(2) $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) = \log \operatorname{tang} (\varphi - 45°) + \log \cot \frac{1}{2} C.$

Conociendo $A-B$ y $A+B$, podremos calcular el ángulo A, y por último, tendremos la distancia buscada por medio de la fórmula

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},$$

de donde se deduce

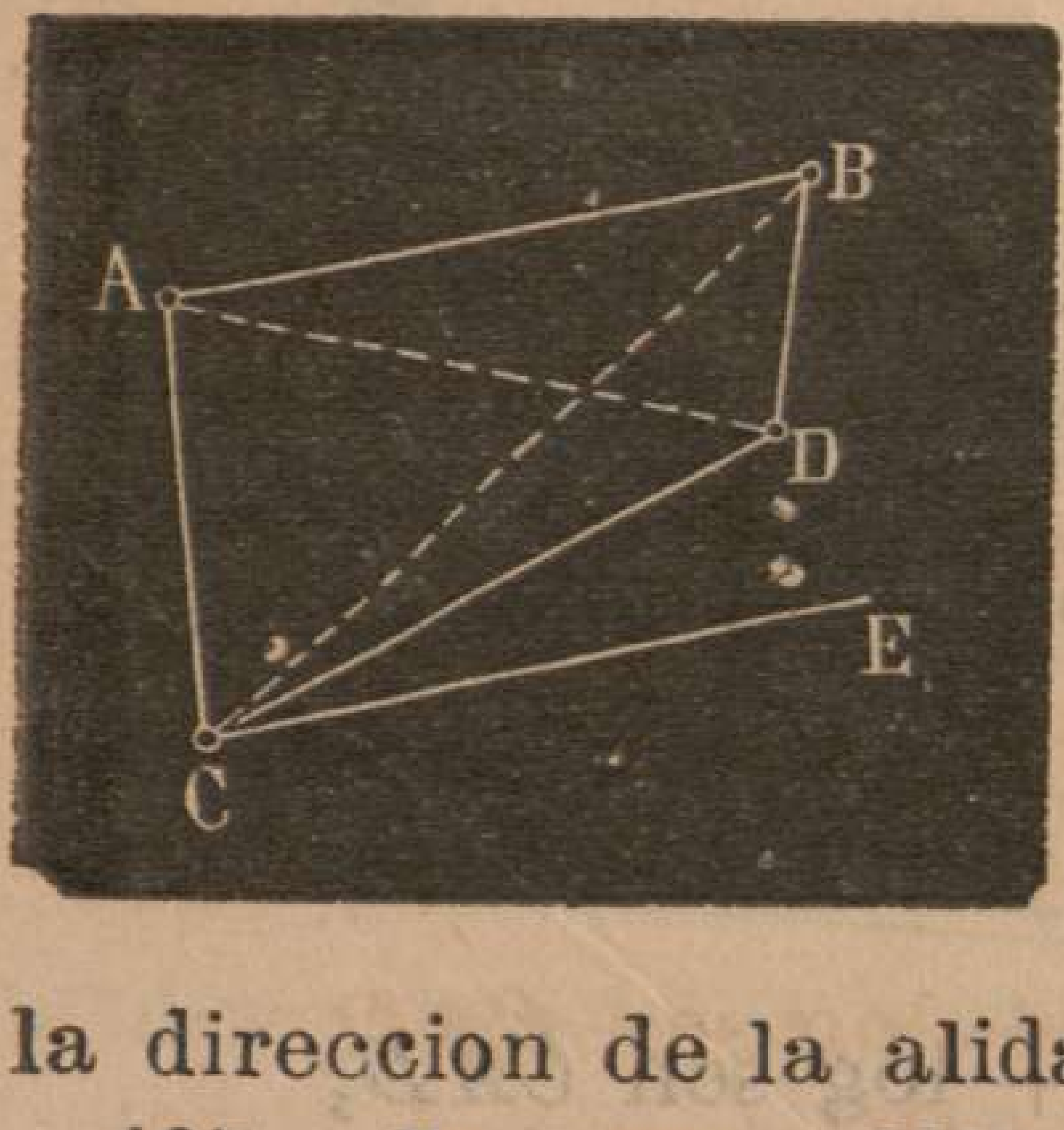
(3) $\left\{ \begin{array}{l} \log c = \log d + \log \operatorname{sen} BDC - \log \operatorname{sen} CBD \\ \quad + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A. \end{array} \right.$

ESCOLIO.—Es necesario, como ya hemos indicado, medir directamente el ángulo ACB, porque este ángulo no es igual á la diferencia de los ángulos ACD y BCD más que en el caso muy particular de que los cuatro puntos A, B, C, D estén en un mismo plano.

104. PROBLEMA VI.—*Sobre un punto accesible de un terreno llano, trazar una paralela á una recta inaccesible.*

Sea C (fig. 25) el punto accesible y AB la recta inacesible; operaremos como en el problema anterior, para calcular el ángulo CAB. Conociendo este ángulo, colocaremos un grafómetro en C, de manera que el diámetro del limbo se dirija hácia CA, y se hará mover la alidada hasta que el arco del limbo, contado á partir del diámetro, sea igual al suplemento del ángulo CAB; por último, se trazará una alineacion con jalones, en la direccion de la alidada, y tendremos la línea pedida CE.

(Fig. 25.)

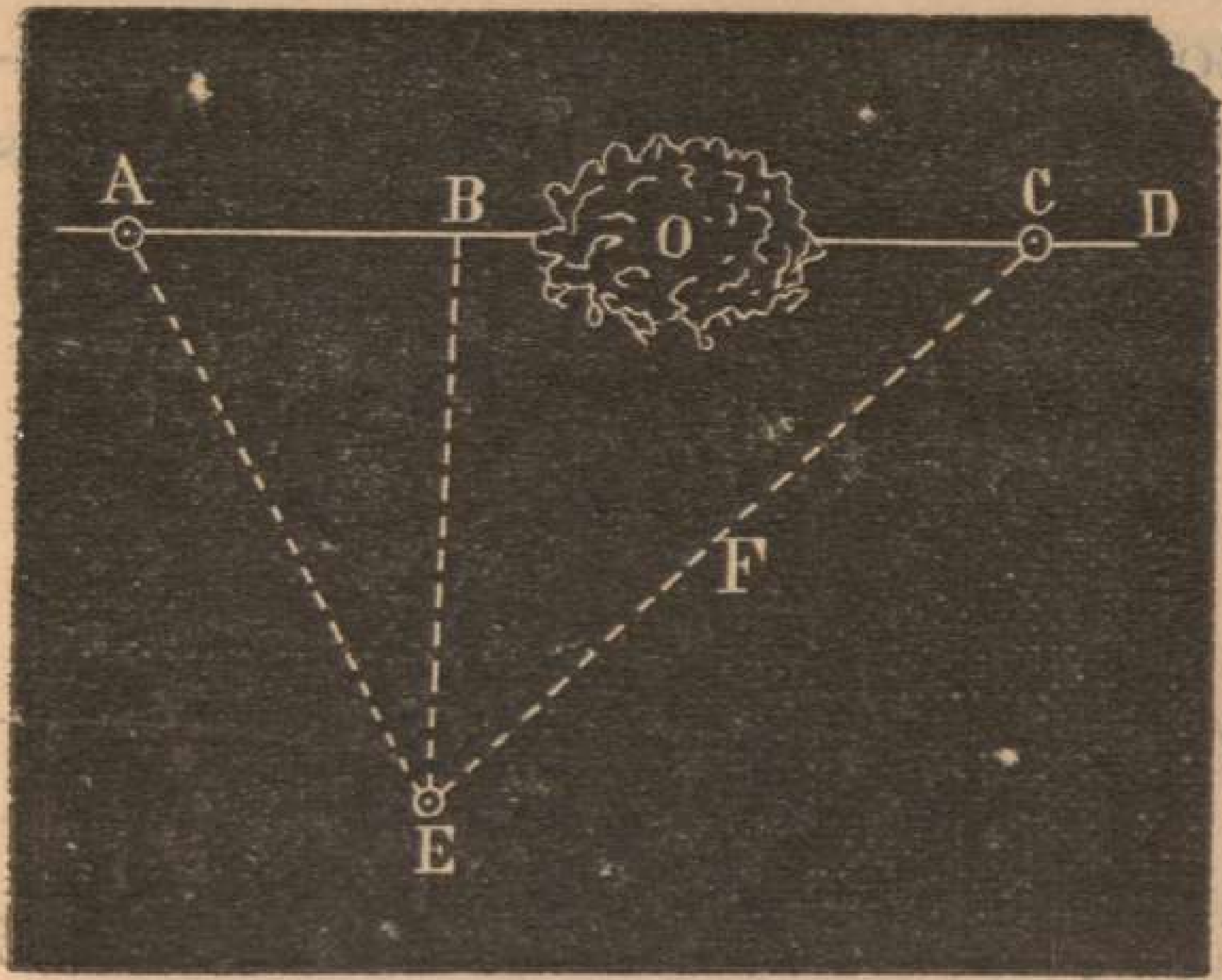


105. PROBLEMA VII.—*Prolongar una línea sobre el terreno*

más allá de un obstáculo que no deja ver la direccion de esta línea.

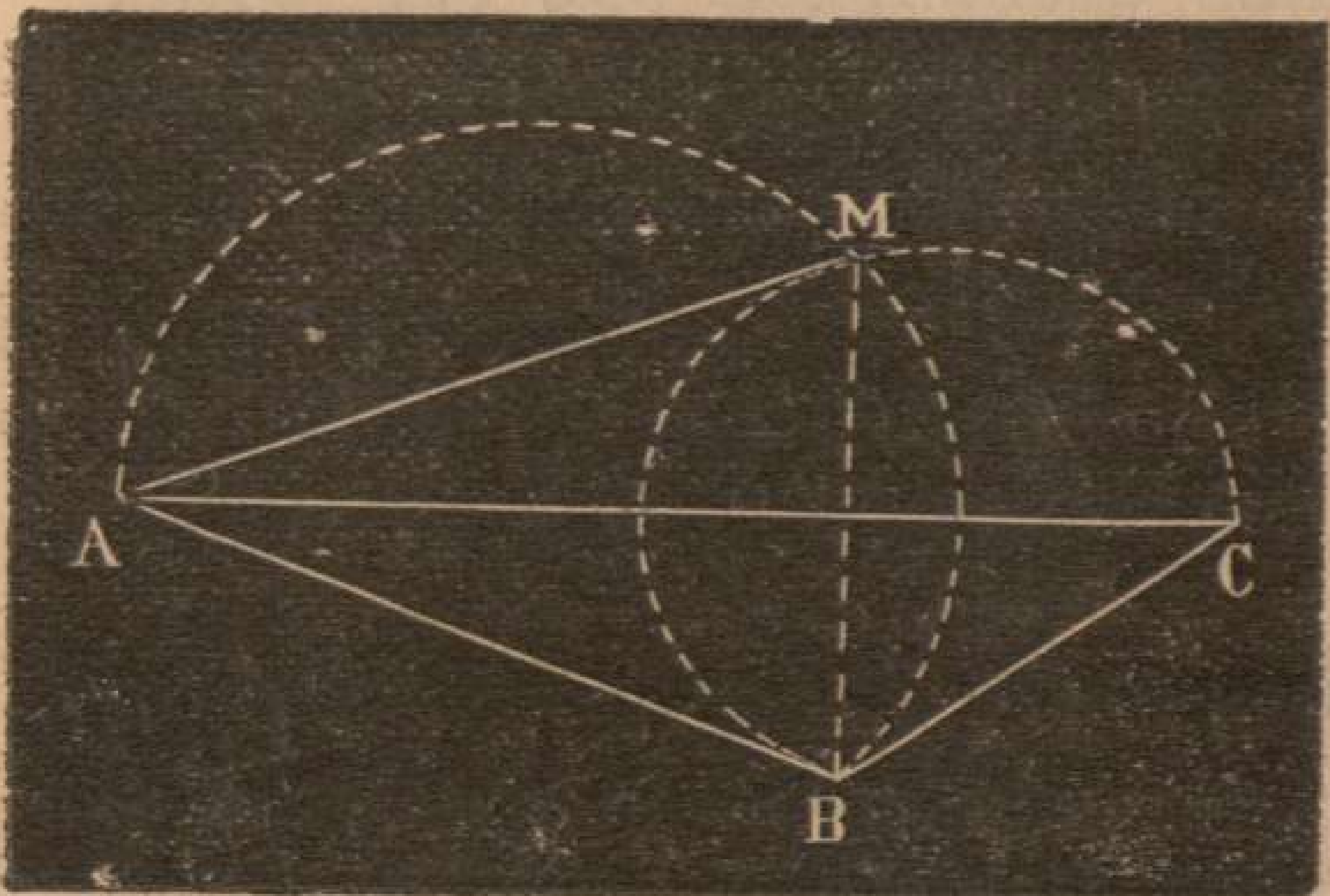
Sea AB (fig. 26) la recta cuya prolongacion queremos trazar por detrás del obstáculo O. Mediremos, con la cadena, la longitud AB; tomaremos en seguida un punto E, que pueda apercibirse desde los A y B, y desde el cual puede verse el terreno en donde debe encontrarse la prolongacion de AB. Desde los puntos A y B mediremos los ángulos A y B del triángulo ABE, y calcularemos el lado AE; á partir del punto E, trazaremos una alineacion EF dirigida hácia la parte de terreno que está al otro lado del obstáculo O. Mediremos el ángulo AEF, y si C designa el punto de encuentro de la alineacion EF con AB prolongada, conoceremos, en el triángulo ACE, el lado AE y los ángulos; podremos, pues, calcular EC, y tendremos en seguida, por medio de la cadena, el punto C sobre el terreno; despues, trazando una alineacion CD que forme con EC un ángulo igual al suplemento de ACE, tendremos la prolongacion buscada.

(Fig. 26.)



Si la recta AB fuese inaccesible, nos serviríamos de una base auxiliar trazada por el punto E, y mediaríamos los elementos del triángulo ABE, como en el problema V.

(Fig 27.)



106. Problema VIII.— *Tres puntos* ABC (fig. 27) *están situados en un terreno llano, y trasladados al papel, se nos pide determinar en él, el punto* M, *habiéndose visto las* *distancias* AB *y* BC *bajo los ángulos* α *y* β *que han sido medidos.*

El punto M es la interseccion de los segmentos capaces de los ángulos α y β, construidos sobre AB y BC respectivamente; pero es necesario unir este punto por elementos calculados á los puntos dados ABC.

Sea $AB = a$, $BC = b$, y tomemos por incógnitas los ángulos $MAB = x$ y $MCB = y$. Los triángulos AMB y CMB nos dicen que

$$BM = \frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad BM = \frac{b \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta},$$

de donde

$$\frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta} \text{ y } \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}.$$

Si φ es un ángulo auxiliar, tal que

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta},$$

tendremos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \operatorname{tang} \varphi,$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tang} \varphi - 1}{\operatorname{tang} \varphi + 1},$$

ó (18)

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x + y)} = \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} 45^\circ}{1 + \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} 45^\circ} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ).$$

O de otro modo, designando por ω el ángulo ABC,

$$\frac{1}{2}(x + y) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \omega}{2},$$

pues

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)=\operatorname{tang}(\varphi-45^{\circ}) \operatorname{tang}\left(180^{\circ}-\frac{\alpha+6+\omega}{2}\right).$$

Por medio de esta fórmula, calcularemos el ángulo $\frac{1}{2}(x-y)$ y como $\frac{1}{2}(x+y)$ es conocido, conoceremos tambien los ángulos x é y, que determinan la posicion del punto M.

Escolio.—Si uno de los factores de la expresion de tang $\frac{1}{2}(x-y)$ es nulo, sin que el otro sea infinito, los ángulos x é y son iguales entre sí. Pero si el segundo factor es infinito, el primero es nulo y el valor de tang $\frac{1}{2}(x-y)$ se presenta bajo la forma de $\frac{o}{o}$. Se puede hacer ver, que en este caso, el problema es indeterminado. En efecto, para que el factor

$$\operatorname{tang}\left(180^{\circ}-\frac{\alpha+6+\omega}{2}\right)$$

sea infinito, es necesario que tengamos $\alpha+6+\omega=180^{\circ}$, que es la condicion para que el cuadrilátero $ABCM$ sea inscriptible; por consiguiente, en el caso que nosotros consideramos, los dos segmentos capaces de los ángulos α y 6, cuya interseccion determina el punto M, coinciden. Entonces el factor tang $(\varphi-45^{\circ})$ es nulo; en efecto, tenemos

$$\operatorname{tang} \varphi=\frac{b}{\operatorname{sen} 6}:\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}; \text{ pero } \frac{b}{\operatorname{sen} 6} \text{ y } \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha},$$

son los diámetros de los círculos circunscritos á los triángulos ABM y BCM (76); y puesto que estos dos círculos coinciden, tenemos tang $\varphi=1$; por consiguiente,

$$\varphi=45^{\circ} \text{ y } \operatorname{tang}(\varphi-45^{\circ})=o.$$

Problemas.

I. Cuál debe ser el rádio de un círculo, para que la diferencia entre un arco de 10 metros y su cuerda sea menor de un milímetro.

II. Resolver un triángulo, conociendo la base, la altura y la diferencia entre los ángulos de la base.

III. Resolver un triángulo, conociendo las tres alturas.

IV. Resolver un triángulo, conociendo los rádios de los círculos ex-inscritos.

V. Calcular el área de un trapecio, del que se conocen los cuatro lados.

VI. Resolver un triángulo equilátero cuyos vértices están sobre tres circunferencias concéntricas, ó sobre tres rectas paralelas situadas ó no en un mismo plano.

VII. Si por un punto O, tomado sobre la prolongacion del diámetro AB de un círculo cuyo centro es C, se traza una secante OMM', demostrar que el producto tang $\frac{1}{2}$ MCO, tang $\frac{1}{2}$ $M'CO$ es constante, cualquiera que sea la secante trazada por O.

VIII. Cuatro rectas OP, OA, OQ, OB, parten del mismo punto, y se cortan por una secante $PAQB$: demostrar que la relacion $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$ tiene un valor constante.

IX. Cuatro planos OP, OA, OQ, OB, que pasan por una misma recta O, se cortan por una secante $PAQB$: demostrar que la relacion $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$ tiene un valor constante.

X. Encontrar la superficie de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos al círculo de rádio r en funcion de n y r. Deducir de esto las relaciones conocidas entre las superficies de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de n y de $2n$ lados.

XI. Siendo el triángulo ABC rectángulo en A (Véase la figura del núm. 68), si bajamos la perpendicular AD sobre el lado BC, sabemos que se verifica $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}$. Se nos pregunta si podrá subsistir esta relacion cuando el ángulo A no sea recto.

XII. Demostrar que, si las bisectrices de dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, estos dos ángulos son tambien iguales entre sí.

CAPÍTULO IV.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Objeto de la Trigonometría esférica.

107. La Trigonometría esférica tiene por objeto la resolucion de los triángulos esféricos.

Los lados de los triángulos esféricos están generalmente expresados, lo mismo que los ángulos, en grados, minutos y segundos; pero cuando se conoce el número de grados contenido en uno de los lados, se halla fácilmente, si se tiene necesidad (48), la relacion de este lado al rádio de la esfera.

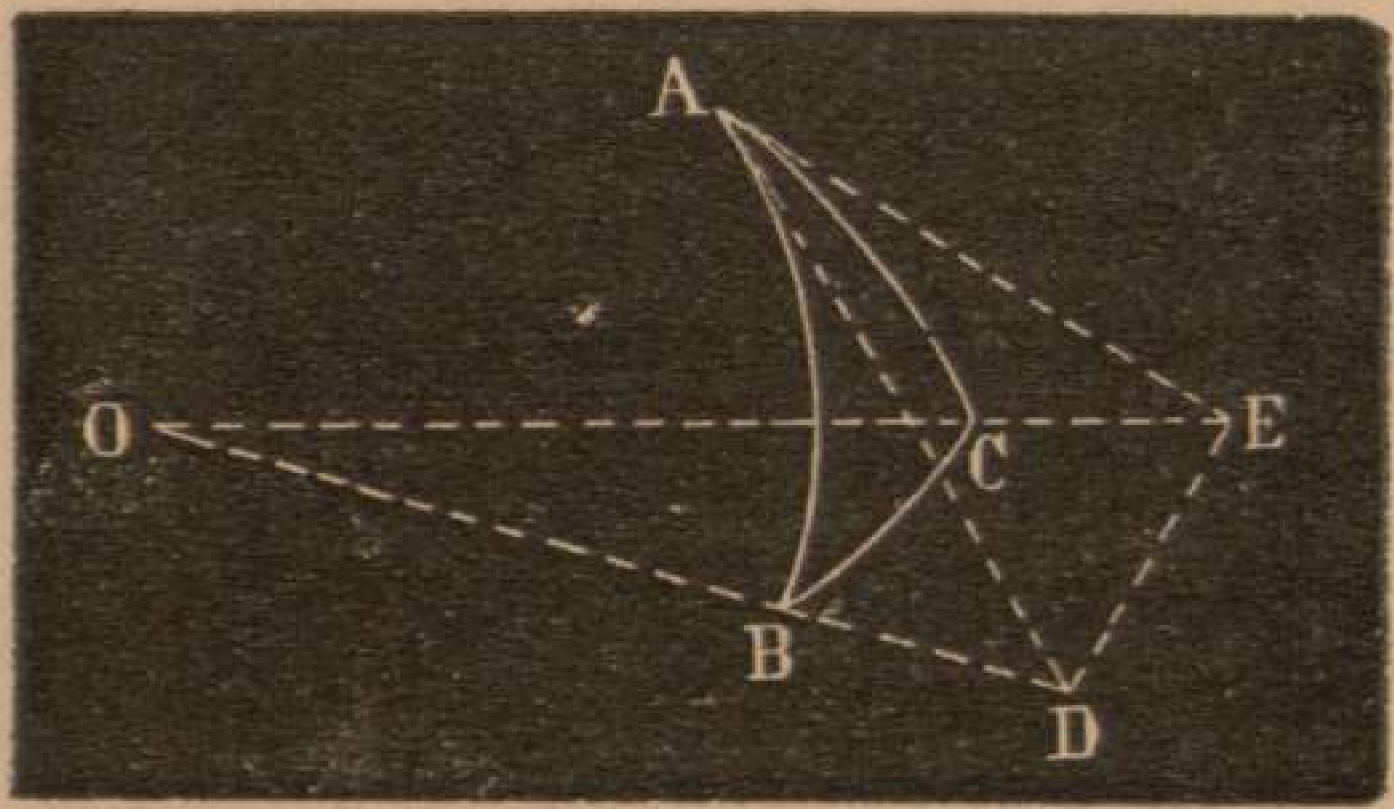
No consideraremos más que los triángulos esféricos cuyos lados son menores que 180 grados; de suerte que, si ABC es un triángulo esférico trazado sobre la superficie de una esfera cuyo centro es O, uniendo el punto O con los tres vértices, se formará un ángulo triedro, cuyos ángulos, planos y diedros serán respectivamente iguales á los lados y ángulos del triángulo esférico.

Designaremos siempre por A, B, C, los ángulos de un triángulo, y por a, b, c, los lados respectivamente opuestos.

Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico.

108. *Relaciones entre los tres lados y un ángulo.*—Sea ABC (fig. 28) un triángulo esférico trazado sobre una esfera cualquiera, cuyo centro esté en O, y cuyo rádio tomaremos por unidad; supondremos que los lados b y c son cada uno menor que 90 grados. Unamos el centro O y los tres vértices, y tracemos á los arcos AB y AC las tangentes AD y AE, que cortan respectivamente en D y E á los rádios OB y OC prolongados.

(Fig. 28.)



Tenemos

$$AD = \text{tang}\, c,\ OD = \sec c,\ AE = \text{tang}\, b,\ OE = \sec b,$$

y

$$DAE = A,\ DOE = a.$$

Esto supuesto, los triángulos rectilíneos DAE y DOE nos dan

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \times AD \times AE \times \cos DAE,$$
$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \times OD \times OE \times \cos DOE;$$

igualando estos dos valores de $\overline{DE}^2$, nos resulta

$$2 \times OD \times OE \times \cos DOE = (\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2) + (\overline{OE}^2 - \overline{AE}^2) + 2AD \times AE \times \cos DAE,$$

ó bien

$$\sec b \times \sec c \times \cos a = 1 + \text{tang}\, b \times \text{tang}\, c \times \cos A,$$

ó por último, multiplicando por $\cos b \cos c$, los dos miembros de esta igualdad

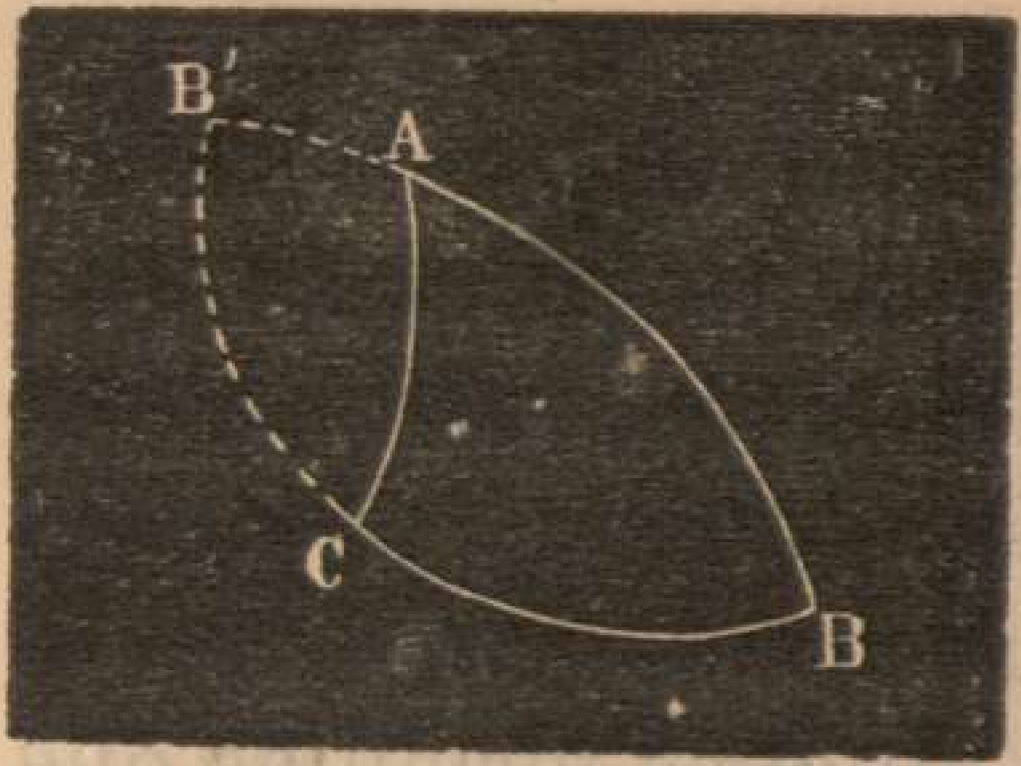
$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\ \text{sen}\, c \cos A.$$

Tal es la relacion que existe entre un ángulo A y los tres lados.

109. Habiendo supuesto que los lados b y c eran cada uno menores de 90°, y habiendo demostrado la fórmula anterior en esta hipótesis, vamos ahora á ver que es general dicha fórmula.

En efecto, supongamos primeramente que sean $c > 90^o$ y $b < 90^o$; prolonguemos los arcos de círculo máximo AB y BC (fig. 29) hasta que se encuentren en B'; si hacemos $AB' = c'$, $CB' = a'$, el triángulo $AB'C$ dará

(Fig. 29.)



$$\cos a' = \cos b \cos c' + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c' \cos B'AC,$$

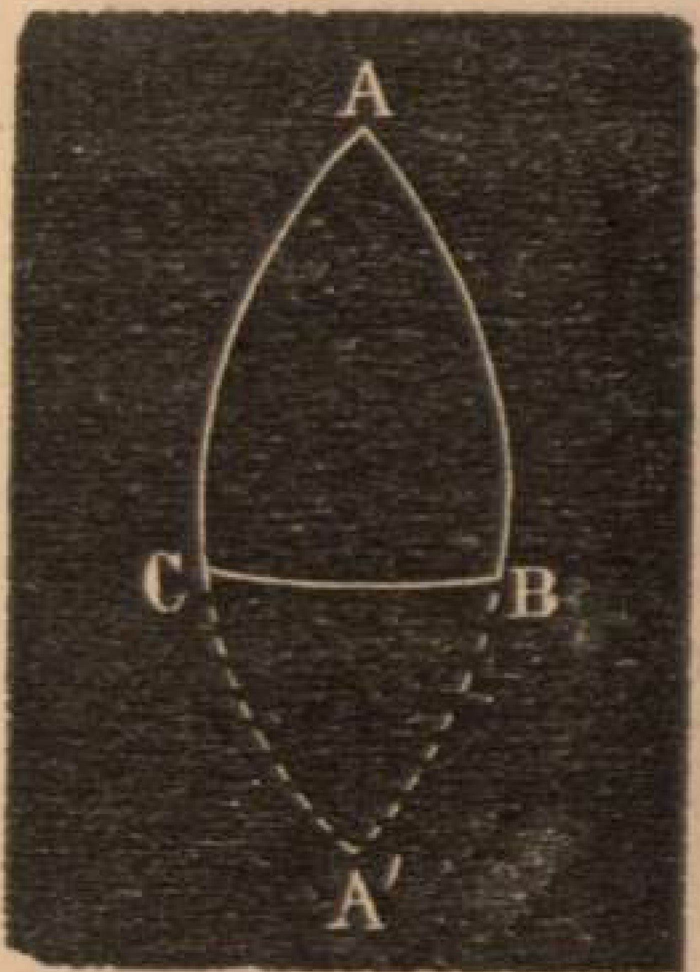
pues los lados c' y b son cada uno menor que 90 grados. Reemplazando a' c', y $B'AC$ por sus valores $180^o - a$, $180^o - c$, $180^o - A$, y cambiando los signos de los dos miembros, se tiene

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

que es la fórmula obtenida en el núm. 108.

Supongamos ahora que sean $b > 90^o$ y $c > 90^o$, y prolonguemos los lados AB y AC (fig. 30) hasta que se corten en A'; si hacemos $A'C = b'$, $A'B = c'$, el triángulo $A'BC$ dará

(Fig. 30.)



$$\cos a = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A',$$

y poniendo en vez de b' c' y A' sus valores $180^o - b$, $180^o - c$, se hallará la fórmula

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Por último, como esto se verifica, por pequeños que sean los complementos de b y de c, á 90 grados, puede asegurarse que esta propiedad subsiste todavía en el límite, cuando uno de los lados b y c, ó los dos, sean iguales á 90 grados.

De la fórmula que acabamos de demostrar se deducen otras dos fórmulas parecidas, por simples cambios de letras. Se tiene así las tres ecuaciones

$$(1)\quad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A, \\ \cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C, \end{cases}$$

que deben considerarse como las fórmulas fundamentales de la Trigonometría esférica. En efecto, no puede existir entre los lados y ángulos de un triángulo esférico una relacion distinta de las anteriores; pues de otro modo, eliminando los ángulos A, B, C, por medio de las fórmulas (1), se obtendria una relacion no idéntica entre los tres lados, lo cual es absurdo. Pero se puede deducir de las relaciones (1), otras muchas fórmulas que es preciso conocer y que ahora estableceremos.

110. *Relaciones entre dos lados y los ángulos opuestos.*—Para tener una relacion entre los lados a y b y los ángulos A y B, basta eliminar c entre las dos primeras de las ecuaciones (1); esta eliminacion se hace de una manera muy sencilla, introduciendo en las ecuaciones (1), los senos de los ángulos A, B, C, en lugar de los cosenos.

De la primera de las ecuaciones (1) se deduce

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

de donde

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c},$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}.$$

Este valor de $\dfrac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a}$ no varía cuando se permuten las letras a, b, c; de donde se deduce que las ecuaciones (1), darán el mismo valor para $\dfrac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b}$ y para $\dfrac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c}$; por consiguiente, la eliminacion que queríamos hacer, se deduce de ella misma. Por último, como los lados y los ángulos de un triángulo son menores que 180°, sus senos son positivos, y se tiene

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c},$$

cuya fórmula nos dice que, *en todo triángulo esférico, los senos de los ángulos son proporcionales á los senos de los lados opuestos.*

111. *Relaciones entre cinco elementos.*—Se obtienen relaciones muy útiles entre cinco elementos, tomando el valor del coseno, con relacion al cual se ha resuelto una cualquiera de las ecuaciones (1), y sustituyéndole en las otras dos ecuaciones. Por ejemplo, si se sustituye en la primera de las fórmulas (1) el valor de $\cos c$, deducido de la tercera, resulta

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

pasando al primer miembro el primero y segundo términos del segundo miembro; sustituyendo $1 - \cos^2 b$ por $\operatorname{sen}^2 b$, y dividiendo en seguida por $\operatorname{sen} b$, resulta

$$\cos a \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \cos b \cos C = \operatorname{sen} c \cos A,$$

obteniéndose, por medio de permutaciones de las letras, otras cinco fórmulas semejantes, de modo que se tiene el sistema siguiente:

$$(3) \quad \begin{cases} \cos a \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \cos b \cos C = \operatorname{sen} c \cos A, \\ \cos b \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b \cos a \cos C = \operatorname{sen} c \cos B, \\ \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A = \operatorname{sen} a \cos B, \\ \cos c \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c \cos b \cos A = \operatorname{sen} a \cos C, \\ \cos c \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c \cos a \cos B = \operatorname{sen} b \cos C, \\ \cos a \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a \cos c \cos B = \operatorname{sen} b \cos A. \end{cases}$$

Estas seis relaciones son homogéneas con relacion á $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} b$, $\operatorname{sen} c$; se puede, pues, reemplazar estos senos por los senos proporcionales $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$, $\operatorname{sen} C$, y se obtienen así las seis nuevas fórmulas siguientes:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos a \operatorname{sen} B - \cos b \cos C \operatorname{sen} A = \cos A \operatorname{sen} C,\\ &\cos b \operatorname{sen} A - \cos a \cos C \operatorname{sen} B = \cos B \operatorname{sen} C,\\ &\cos b \operatorname{sen} C - \cos c \cos A \operatorname{sen} B = \cos B \operatorname{sen} A,\\ &\cos c \operatorname{sen} B - \cos b \cos A \operatorname{sen} C = \cos C \operatorname{sen} A,\\ &\cos c \operatorname{sen} A - \cos a \cos B \operatorname{sen} C = \cos C \operatorname{sen} B,\\ &\cos a \operatorname{sen} C - \cos c \cos B \operatorname{sen} A = \cos A \operatorname{sen} B.\end{aligned}\right.$$

112. *Relaciones entre dos lados, el ángulo comprendido por estos dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.*—Se obtendrá una de las relaciones de que se trata tomando dos de las ecuaciones (1) y eliminando entre ellas el lado opuesto á uno de los ángulos que en ellas figuran; pero, como estas ecuaciones contienen á la vez el seno y coseno del lado de que se trata, se simplifica el cálculo, haciendo uso de las fórmulas (2), en las que se pueden eliminar el seno y el coseno.

En el núm. 111 se ha efectuado la 1.ª parte de esta eliminacion, y para obtener las relaciones buscadas, no hay más que eliminar el seno que figura en el 2.º miembro de cada una de las ecuaciones (3), por medio de las fórmulas (2), que no contienen otros elementos que estos. Por ejemplo, si se divide la primera de las ecuaciones (3) por

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C},$$

resulta

$$\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C = \cot A \operatorname{sen} C,$$

que es una de las ecuaciones buscadas, y se la puede deducir de las otras cinco por simples permutaciones de letras. Se tiene, pues, el sistema

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C,\\ &\cot b \operatorname{sen} a - \cot B \operatorname{sen} C = \cos a \cos C,\\ &\cot b \operatorname{sen} c - \cot B \operatorname{sen} A = \cos c \cos A,\\ &\cot c \operatorname{sen} b - \cot C \operatorname{sen} A = \cos b \cos A,\\ &\cot c \operatorname{sen} a - \cot C \operatorname{sen} B = \cos a \cos B,\\ &\cot a \operatorname{sen} c - \cot A \operatorname{sen} B = \cos c \cos B.\end{aligned}\right.$$

113. *Relaciones entre un lado y los tres ángulos.*—Se obtendrá una relacion entre a, A, B, C, eliminando b y c entre las fórmulas fundamentales (1); pero se llega mucho más fácilmente al mismo resultado, haciendo uso de las fórmulas (4). De este modo, eliminando $\cos b$ entre las dos primeras de las ecuaciones (4), se halla la fórmula

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a;$$

por medio de la permutacion de las letras se obtienen otras dos semejantes fórmulas; se tiene, pues, este último sistema:

$$(6) \qquad \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a, \\ \cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c. \end{cases}$$

Escolio.—Las ecuaciones (1), (2), (5), (6) no contienen cada una de ellas más que cuatro elementos; dichas relaciones son en número de quince, que es el número de las combinaciones que pueden formarse con seis letras, tomadas cuatro á cuatro.

Del triángulo suplementario.

114. Se sabe que á cada triángulo esférico le corresponde un segundo triángulo que se llama triángulo *polar* ó *suplementario*. Los vértices del uno de estos triángulos son respectivamente los polos de los lados del otro; los ángulos de cada uno de ellos son el suplemento de los lados del otro.

La consideracion del triángulo suplementario es frecuentemente de utilidad en la Trigonometría esférica. Por ejemplo, las fórmulas fundamentales (1) del núm. 109 que ya han sido demostradas, si se las aplica al triángulo suplementario del triángulo propuesto, se obtendrán inmediatamente las fórmulas (6) del núm. 113. Bastará efectivamente para esto sustituir, en las primeras fórmulas, á a, b, c, A, B, C, respectivamente por $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$, $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$.

De igual modo se obtienen las fórmulas (4) del núm. 111, aplicando las fórmulas (3) al triángulo suplementario. En cuanto á los otros sistemas que hemos obtenido, no conducen á ninguna fórmula nueva.

Daremos un ejemplo de las ventajas que produce la consideracion del triángulo suplementario.

Designemos por k la relacion constante que existe entre el seno de un ángulo de un triángulo esférico y el seno del lado opuesto. Se ha hallado (núm. 110)

$$k^2 = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c},$$

relacion que podemos escribir del modo siguiente:

$$2 \cos a \cos b \cos c = (k^2 - 1) \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c$$
$$+ \cos^2 a (1 - \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c) + \cos^2 b \cos^2 c:$$

todos los términos del segundo miembro son positivos si se tiene $k > 1$, y de aquí se deduce la siguiente proposicion:

TEOREMA I.—*Si, en un triángulo esférico, el valor conocido de las relaciones* $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$, $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}$, $\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$, *es superior ó igual á la unidad, los tres lados son inferiores á* 90°, *ó un solo lado es menor que* 90 *grados.*

Aplicando este teorema al triángulo suplementario, se obtiene el siguiente:

TEOREMA II.—*Si, en un triángulo esférico, el valor conocido de las relaciones* $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$, $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}$, $\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$, *es menor ó igual á* 1, *los tres ángulos son mayores que* 90 *grados, ó un solo ángulo es superior á* 90 *grados.*

Fórmulas relativas á los triángulos rectángulos.

115. Cuando un triángulo esférico no tiene más que un ángulo recto, al lado opuesto se le llama *hipotenusa*.

Haciendo la hipótesis de $A = 90^\circ$ en las fórmulas de los números 109, 110, 112 y 113, que contienen el ángulo A, se obtienen las siguientes, propias de los triángulos rectángulos:

$$(1)\quad \cos a = \cos b \cos c; \qquad (2)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B, \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C; \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C, \\ \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B, \\ \operatorname{tang} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B, \\ \operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C; \end{array}\right. \qquad (4)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos a = \cot B \cot C, \\ \cos B = \cos b \operatorname{sen} C, \\ \cos C = \cos c \operatorname{sen} B. \end{array}\right.$$

Cada una de estas diez fórmulas no contiene más que tres elementos; su número es precisamente el de las combinaciones de cinco letras, tres á tres.

De la ecuacion (1) se deduce que:

En un triángulo esférico rectángulo, el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados.

De aquí se deduce que los cosenos de los tres lados son positivos, ó que dos de ellos son negativos; por consiguiente,

En todo triángulo esférico rectángulo, los tres lados son menores que 90 *grados, ó bien uno solo de los lados es menor que* 90 *grados.*

De las ecuaciones (2) resulta que:

En todo triángulo esférico rectángulo, el seno de uno de los lados del ángulo recto es igual al seno de la hipotenusa multiplicado por el seno del ángulo opuesto.

Se deduce de las dos primeras, de las ecuaciones (3) que:

En todo triángulo esférico rectángulo, la tangente de uno de los lados del ángulo recto es igual á la tangente de la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo adyacente.

Las dos últimas ecuaciones (3) expresan que:

En todo triángulo esférico rectángulo, la tangente de uno de los lados del ángulo recto es igual al seno del otro lado multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primer lado.

De aquí se deduce que la tangente de un ángulo oblícuo tiene siempre el mismo signo que la tangente del lado opuesto; por consiguiente, este lado y este ángulo son, ó ambos mayores que 90 grados, ó ambos menores que 90 grados.

La primera de las ecuaciones (4) nos dice que:

En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los dos ángulos oblícuos.

Por último, las dos últimas de las ecuaciones (4) expresan que:

En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de un ángulo oblícuo es igual al coseno del lado opuesto multiplicado por el seno del segundo ángulo oblícuo.

116. Las fórmulas precedentes pueden trasformarse en otras, útiles para el cálculo, y que vamos á establecer.

De la fórmula (1) se deduce $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$; además, tenemos

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = +\sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}};$$

luego

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = +\sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}}$$

$$= +\sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}:$$

podemos, pues, sustituir la fórmula (1) por una de las siguientes:

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = +\sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} b = +\sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-c) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+c)}. \end{cases}$$

La primera de las fórmulas (2) da $\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$; por otra parte, tenemos

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} a\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} a}{1 - \operatorname{sen} a}};$$

luego podemos establecer

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} a\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} b}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (B + b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (B - b)}};$$

se puede, pues, á las fórmulas (2) sustituir la doble fórmula

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} a\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (B + b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (B - b)}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (C + c)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (C - c)}}.$$

Y como las fórmulas (2) no se alteran, la una cuando se permutan las letras a y B, y la otra cuando permutamos a y C, tendremos tambien

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} B\right) &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - b)}}, \\ \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} C\right) &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + c)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - c)}}. \end{aligned}\right.$$

Se deduce de la primera de las fórmulas (3) $\cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$; se tiene además

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = + \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}};$$

luego

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = + \sqrt{\frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}} = + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a - b)}{\operatorname{sen}(a + b)}};$$

se puede, pues, sustituir á las dos primeras fórmulas (3) las dos siguientes:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C &= + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a - b)}{\operatorname{sen}(a + b)}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} B &= + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a - c)}{\operatorname{sen}(a + c)}}. \end{aligned} \right.$$

La tercera de las fórmulas (3) da $\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}$; se tiene además

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} c\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} c}{1 - \operatorname{sen} c}};$$

luego

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} c\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B - \operatorname{tang} b}} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B + b)}{\operatorname{sen}(B - b)}};$$

se puede, pues, sustituir á las dos últimas fórmulas (3) las dos siguientes:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} c\right) &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B + b)}{\operatorname{sen}(B - b)}}, \\ \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} b\right) &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(C + b)}{\operatorname{sen}(C - b)}}. \end{aligned} \right.$$

La primera fórmula (4) se trasforma en la siguiente:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = +\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = +\sqrt{\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \cos B \cos C}},$$

ó

$$(10) \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2} a = +\sqrt{\frac{\cos(180^\circ - B - C)}{\cos(B - C)}}.$$

Por ultimo, las dos últimas fórmulas (4) dan

$$\cos b = \frac{\cos B}{\cos(90^\circ - C)}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\cos(90^\circ - B)},$$

de donde

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} b &= +\sqrt{\operatorname{tang}\left(-45^\circ + \frac{B+c}{2}\right) \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{B-c}{2}\right)}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} c &= +\sqrt{\operatorname{tang}\left(-45^\circ + \frac{B+c}{2}\right) \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{B-c}{2}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Y como las dos últimas fórmulas (4) no cambian cuando se reemplazan cada uno de los elementos b y C ó c y B por el complemento del otro, se tiene tambien

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} C\right) &= \pm\sqrt{\cot \frac{1}{2}(B+b) \cot \frac{1}{2}(B-b)}, \\ \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} B\right) &= \pm\sqrt{\cot \frac{1}{2}(C+c) \cot \frac{1}{2}(C-c)}. \end{aligned} \right.$$

Fórmulas relativas á los triángulos rectiláteros.

117. Un triángulo esférico se llama *rectilátero*, cuando uno de sus lados es igual á 90 grados. El triángulo suplementario de un rectilátero es evidentemente rectángulo, y por consiguiente, las fórmulas relativas á los triángulos rectiláteros pueden deducirse de las que se refieren á los rectángulos; pero dichas fórmulas se obtienen tambien muy fácilmente haciendo $a = 90°$ en las fórmulas generales que contienen el lado a. Por medio de cualquiera de estos dos métodos se hallan las diez fórmulas siguientes:

$$(1)\quad \cos A = -\cos B \cos C, \qquad (2)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b, \\ \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} B = -\operatorname{tang} A \cos c, \\ \operatorname{tang} C = -\operatorname{tang} A \cos b, \\ \operatorname{tang} B = \operatorname{sen} C \operatorname{tang} b, \\ \operatorname{tang} C = \operatorname{sen} B \operatorname{tang} c; \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} \cos A = -\cot b \cot c, \\ \cos b = \cos B \operatorname{sen} c, \\ \cos c = \cos C \operatorname{sen} b. \end{cases}$$

Se pueden hacer con estas fórmulas trasformaciones análogas á las ejecutadas en el núm. 116, al tratar de los triángulos rectángulos; consideraremos dichas trasformaciones al tratar de los triángulos rectiláteros.

Uso de los ángulos auxiliares en la Trigonometría esférica.

118. Las fórmulas generales de los números 110, 112 y 113, no son calculables por logaritmos; pero se las trasforma en tales haciendo uso de un ángulo auxiliar. Efectivamente, cada una de estas fórmulas es de la forma

$$(1)\qquad P = M \cos \alpha + N \operatorname{sen} \alpha,$$

siendo α uno de los seis elementos, y designando M, N y P funciones *monomias* de las líneas trigonométricas de tres elementos distintos de α. Si se designa por φ un ángulo auxiliar, tal que

$$(2)\qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{N}{M},$$

y si se reemplaza N por M tang φ en la fórmula (1), nos resultará

$$(3) \qquad P \cos \varphi = M \cos (\alpha - \varphi).$$

De aquí se deduce que, introduciendo el nuevo elemento φ, la fórmula (1) puede ser reemplazada por el sistema de fórmulas (2) y (3), que son tanto una como otra calculables por logaritmos.

Se verá más adelante que la introduccion de este ángulo auxiliar φ equivale á la descomposicion del triángulo propuesto en dos triángulos rectángulos ó en dos triángulos rectiláteros, por medio de un arco de círculo máximo trazado desde un vértice al lado opuesto.

Fórmulas generales calculables por logaritmos.

119. Trasformando y combinando entre sí las fórmulas generales de los números 109 y siguientes, se obtienen fórmulas nuevas calculables por logaritmos, y que se usan mucho en la resolucion de los problemas de la Trigonometría esférica. Vamos ahora á indicar esta trasformacion.

De la fórmula fundamental

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

se deduce

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c};$$

poniendo este valor de $\cos A$ en las fórmulas

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$$

resulta

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c+\cos b\cos c-\cos a}{2\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\cos a-\cos b\cos c+\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}{2\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{-a+b+c}{2}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}.$$

Por simples cambios de letras se obtendrian expresiones análogas para los senos y cosenos de los ángulos $\frac{1}{2}B$ y $\frac{1}{2}C$. De modo que, si para abreviar, se designa por $2p$ el perímetro $a+b+c$, se tendrá

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},\\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}},\\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}};\end{aligned}\right.$$

y

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},\\ \cos\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}},\\ \cos\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}.\end{aligned}\right.$$

Por último, dividiendo respectivamente las fórmulas (1) por las fórmulas (2), resulta

$$(3)\quad \begin{cases} \tang \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}}, \\ \tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}}, \\ \tang \frac{1}{2} C = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}}. \end{cases}$$

En todas estas fórmulas, debe tomarse positivamente el radical, puesto que las líneas trigonométricas de los ángulos agudos $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{2} B$, $\frac{1}{2} C$ son positivas.

120. Designemos por ε el *exceso esférico* del triángulo ABC, es decir, el ángulo $A + B + C - 180°$; los ángulos del triángulo suplementario del ABC serán $180° - a$, $180° - b$, $180° - c$, mientras que los lados del mismo triángulo serán $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$; la sensimusa de estos tres lados será $180° - \frac{1}{2}\varepsilon$.

De esto se deduce que, si se quiere aplicar las fórmulas (1,) (2) y (3) al triángulo suplementario del ABC, bastará reemplazar A, B, C, a, b, c, y p, por los suplementos de a, b, c, A, B, C y $\frac{1}{2}\varepsilon$. De este modo obtendremos las nueve fórmulas siguientes:

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(A - \frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}, \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2} b = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(B - \frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}}, \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2} c = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}; \end{cases}$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(B-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\operatorname{sen}\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}, \\ \cos\frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(A-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\operatorname{sen}\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}}, \\ \cos\frac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(A-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\operatorname{sen}\left(B-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}; \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(A-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen}\left(B-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\operatorname{sen}\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(B-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen}\left(A-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\operatorname{sen}\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen}\left(A-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\operatorname{sen}\left(B-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}}. \end{aligned}\right.$$

121. *Fórmulas de Delambre.*—De las fórmulas (1) y (2) se deduce

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B &= \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} c}\cos\frac{1}{2}C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B &= \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} c}\cos\frac{1}{2}C, \end{aligned}$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$
$$=\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\frac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B=\frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$
$$=\frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\frac{1}{2}C;$$

de aquí se deduce

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\pm\cos\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}$$
$$=\frac{(\operatorname{sen}p-b)\pm\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\mp\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sen}p\mp\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c};$$

se tiene además, recordando que $2p=a+b+c$,

$$\operatorname{sen}(p-b)+\operatorname{sen}(p-a)=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b),$$
$$\operatorname{sen}(p-b)-\operatorname{sen}(p-a)=2\cos\frac{1}{2}c\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b),$$
$$\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}(p-c)=2\cos\frac{1}{2}c\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b),$$
$$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}(p-c)=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b),$$
$$\operatorname{sen}c=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c,$$

y, por consiguiente,

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}.
\end{aligned}
\right.
$$

Estas fórmulas contienen los seis elementos del triángulo; han sido descubiertas por Delambre, que las ha hecho conocer en 1807, en la *Connaissance des Temps* para 1809 (p. 443). Gauss, á quien se le atribuyen algunas veces, no las publicó hasta más tarde, en la obra titulada *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*.

122. *Fórmulas de Néper.*—Si se divide la primera de las ecuaciones (7) por la tercera, la segunda por la cuarta, la cuarta por la tercera, y la segunda por la primera, se obtienen las cuatro siguientes:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) &= \cot\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},\\
\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) &= \cot\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(8) \quad \begin{cases} \text{tang}\, \frac{1}{2}(a+b) = \text{tang}\, \frac{1}{2} c \dfrac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}, \\ \text{tang}\, \frac{1}{2}(a-b) = \text{tang}\, \frac{1}{2} c \dfrac{\text{sen}\, \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\, \frac{1}{2}(A+B)}. \end{cases}$$

Estas ecuaciones (8) se conocen con el nombre de *fórmulas de Néper;* cada una de ellas expresa una relacion entre cinco elementos de un triángulo esférico.

123. De las fórmulas (7) se deduce,

$$\frac{\cos \frac{1}{2} c - \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c + \cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) - \text{sen}\, \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(a-b) + \text{sen}\, \frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\frac{\text{sen}\, \frac{1}{2} C - \text{sen}\, \frac{1}{2} c}{\text{sen}\, \frac{1}{2} C + \text{sen}\, \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B) - \text{sen}\, \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(A-B) + \text{sen}\, \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} C - \text{sen}\, \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} C + \text{sen}\, \frac{1}{2} c} = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2}(A-B) - \text{sen}\, \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\, \frac{1}{2}(A-B) + \text{sen}\, \frac{1}{2}(a-b)},$$

$$\frac{-\text{sen}\, \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2} c}{\text{sen}\, \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2} c} = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B) + \cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(A+B) + \cos \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Si para abreviar hacemos,

$$A + B = S + 180^\circ,\ A - B = D,$$
$$a + b = s + 180^\circ,\ a - b = d,$$

y trasformamos las fórmulas precedentes por el procedimiento del núm. 18, resulta

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \dfrac{C-c}{4} \operatorname{tang} \dfrac{C+c}{4} = \operatorname{tang} \dfrac{S+d}{4} \operatorname{tang} \dfrac{S-d}{4}, \\ \operatorname{tang} \dfrac{C-c}{4} \cot \dfrac{C+c}{4} = \operatorname{tang} \dfrac{s+D}{4} \operatorname{tang} \dfrac{s-D}{4}, \end{cases}$$

y

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \left(45^\circ + \dfrac{C-c}{4}\right) \cot \left(45^\circ + \dfrac{C+c}{4}\right) \\ \qquad = \operatorname{tang} \dfrac{D-d}{4} \cot \dfrac{D+d}{4}, \\ \operatorname{tang} \left(45^\circ + \dfrac{C-c}{4}\right) \operatorname{tang} \left(45^\circ + \dfrac{C+c}{4}\right) \\ \qquad = -\cot \dfrac{S-s}{4} \operatorname{tang} \dfrac{S+s}{4}; \end{cases}$$

de las fórmulas (9) y (10), que acabamos de obtener, se deduce

$$(11)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \dfrac{C-c}{4} \\ = \pm \sqrt{\operatorname{tang} \dfrac{S+d}{4} \operatorname{tang} \dfrac{S-d}{4} \operatorname{tang} \dfrac{s+D}{4} \operatorname{tang} \dfrac{s-D}{4}}, \\ \operatorname{tang} \dfrac{C+c}{4} \\ = + \sqrt{\operatorname{tang} \dfrac{S+d}{4} \operatorname{tang} \dfrac{S-d}{4} \cot \dfrac{s+D}{4} \cot \dfrac{s-D}{4}}, \end{cases}$$

y

$$(12)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \left(45^\circ + \dfrac{C-c}{4}\right) \\ = + \sqrt{-\operatorname{tang} \dfrac{D-d}{4} \cot \dfrac{D+d}{4} \cot \dfrac{S-s}{4} \operatorname{tang} \dfrac{S+s}{4}}, \\ \operatorname{tang} \left(45^\circ + \dfrac{C+c}{4}\right) \\ = \pm \sqrt{-\cot \dfrac{D-d}{4} \operatorname{tang} \dfrac{D+d}{4} \cot \dfrac{S-s}{4} \operatorname{tang} \dfrac{S+s}{4}}. \end{cases}$$

En la segunda fórmula (11) y en la primera (12), el radical debe tomarse con el signo $+$, puesto que los arcos $\frac{C+c}{4}$, y $45^\circ + \frac{C-c}{4}$ se hallan comprendidos entre cero y 90 grados, por cuyo motivo sus tangentes son positivas. En las otras dos fórmulas, el signo del radical se determina fácilmente; en efecto, $\operatorname{tang} \frac{C-c}{4}$ tiene el mismo signo que los segundos miembros de las fórmulas (9); igualmente, $\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{C+c}{4}\right)$ tiene el mismo signo que los segundos miembros de las fórmulas (10).

Diferentes expresiones del exceso esférico.

NUEVAS FÓRMULAS.

124. El exceso esférico que mide, segun se ha dicho, la superficie del triángulo, es un elemento muy importante en las aplicaciones de la Trigonometría á la Geodesia. Vamos ahora á dar á conocer algunas fórmulas nuevas en que entra este elemento, y que pueden servir para calcularle en los diferentes casos en que haya que considerarle.

Si se multiplican entre sí las dos primeras ecuaciones del sistema (4) del núm. 120, así como las dos primeras del sistema (5), y despues se dividen las ecuaciones que así nos resulten por la tercera de las del sistema (5), resulta

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon}{\operatorname{sen} C}, \\ \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c} &= \frac{\operatorname{sen} \left(C - \frac{1}{2} \varepsilon\right)}{\operatorname{sen} C}; \end{aligned} \right.$$

sumando estas ecuaciones despues de haberlas multiplicado respectivamente primero por cos C y 1, y despues por 1 y cos C, resulta

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}=\cos\frac{1}{2}\varepsilon,\\&\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}=\cos\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right);\end{aligned}\right.$$

y si se dividen respectivamente la primera y la segunda fórmulas (1) por la primera y la segunda fórmulas (2), se tendrá

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}C}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cos C},\\&\operatorname{tang}\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right)=\frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\operatorname{sen}C}{1+\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C}.\end{aligned}\right.$$

La primera de las fórmulas (3) da el exceso esférico en funcion de dos lados y el ángulo comprendido; la primera fórmula de cualquiera de los sistemas (1) y (2) da una expresion del exceso esférico; pero esta expresion depende de cuatro elementos. Es necesario observar que las dos fórmulas (3) no son otra cosa que trasformaciones de la primera de las fórmulas de Néper, que es

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\cot\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)};$$

en efecto, si se reemplaza $\frac{1}{2}(A+B)$ por $90^\circ - \frac{1}{2}(C-\varepsilon)$, resulta

$$(4) \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2}(C-\varepsilon) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)},$$

fórmula de la cual se deducen fácilmente las dos fórmulas (3).

Se puede eliminar el ángulo C entre las ecuaciones (1) y (2) por medio de las fórmulas

$$\operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$$

$$= \frac{2\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b};$$

y así se obtiene

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\varepsilon &= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \\ \operatorname{sen}\left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right) &= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \end{aligned} \right.$$

y

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \cos \frac{1}{2}\varepsilon &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \\ \cos\left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right) &= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}. \end{aligned} \right.$$

Las fórmulas (5) y (6) dan las expresiones de $\frac{1}{2}\varepsilon$ y de $C-\frac{1}{2}\varepsilon$ en funcion de tres lados, pero pueden obtenerse otras mucho más sencillas.

Por medio de las fórmulas (6) y de las relaciones

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\frac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

se pueden calcular los senos y cosenos de los ángulos $\frac{1}{4}\varepsilon$ y $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$; de este modo obtenemos, para el ángulo $\frac{1}{4}\varepsilon$,

$$\operatorname{sen}\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b-\left(\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\right)^2}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\cos\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{\left(\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\right)^2-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}.$$

Descomponiendo en factores los numeradores de las fracciones que se hallan bajo los radicales, en las fórmulas precedentes, se obtienen los valores siguientes:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{p}{2}\operatorname{sen}\frac{p-a}{2}\operatorname{sen}\frac{p-b}{2}\operatorname{sen}\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\cos\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}.$$

Se obtiene la primera fórmula (5) multiplicando una por otra las ecuaciones (7); y dividiendo la primera por la segunda, resulta

$$(8)\quad \operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}},$$

fórmula muy notable, y que se debe á Simon l'Huilier, de Ginebra.

La segunda fórmula (6) se deduce de la primera, reemplazando en ella a y b por sus suplementos $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, y ε por $2\,C - \varepsilon$; si se efectúan estos mismos cambios en las ecuaciones (7) y (8), obtendremos el seno, coseno y la tangente del ángulo $\frac{1}{2}C - \frac{1}{4}\varepsilon$. Además, por el cambio de a y b en $180^\circ - a$ y $180^\circ - b$, las cantidades $\frac{p-a}{2}$ y $\frac{p-b}{2}$ se cambian una en otra, mientras que cada una de las cantidades $\frac{p}{2}$ y $\frac{p-c}{2}$ se trasforman en el complemento de la otra; se puede, pues, escribir inmediatamente las líneas trigonométricas del ángulo $\frac{1}{2}C - \frac{1}{4}\varepsilon$, é igualmente se tendrán por una simple permutacion de letras las líneas trigonométricas de los ángulos $\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}\varepsilon$, $\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}\varepsilon$.

Efectuando con la fórmula (8), por ejemplo, los cambios que acabamos de indicar, se halla

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}}};$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}}},$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}}}.$$

Pueden resolverse las ecuaciones (8) y (9) con relacion á las cantidades $\operatorname{tang}\frac{p}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}$, y entonces se obtiene

$$(10)\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{p}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\varepsilon\right)}}\\
\operatorname{tang}\frac{p-a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)}},\\
\operatorname{tang}\frac{p-b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)}},\\
\operatorname{tang}\frac{p-c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)}}.
\end{aligned}\right.$$

Expresiones del rádio del círculo circunscrito y de los rádios de los círculos inscrito y ex-inscrito.

125. Si se unen los tres vértices de un triángulo esférico con el polo del círculo circunscrito, se determinan tres triángulos isósceles, cuyas bases respectivas son los lados a, b y c. Designemos por x cada uno de los ángulos iguales del triángulo que tiene a por base; por y y z cada uno de los ángulos iguales de los triángulos isósceles, cuyas bases respectivas son b y c. Se tendrá, si el polo cae en el interior del triángulo,

$$y + z = A,\ z + x = B,\ x + y = C,$$

de donde

$$x + y + z = \frac{1}{2}(A + B + C) = 90^{\circ} + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

y, por consiguiente,

$$x = 90^{\circ} - \left(A - \frac{1}{2}\varepsilon\right),\ y = 90^{\circ} - \left(B - \frac{1}{2}\varepsilon\right),$$

$$z = 90^{\circ} - \left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right).$$

Puede afirmarse que las mismas fórmulas convienen al caso en que el polo no se halla situado en el interior del triángulo, puesto que entonces se considera como negativa aquella cantidad de x, y, z, que se refiere al triángulo isósceles que se halla todo él fuera del triángulo dado. Esto supuesto, designemos por R el rádio esférico del círculo circunscrito al triángulo; unamos el polo de este círculo con el vértice A, y tracemos desde el mismo polo un arco de círculo máximo perpendicular al lado c; de este modo formaremos un triángulo rectángulo, en el cual se tendrá

$$\text{tang}\ R \cos z = \text{tang}\ \frac{1}{2}c,$$

de donde, sustituyendo z por su valor $90^\circ - \left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right)$,

$$(1) \qquad \operatorname{tang} R = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{\operatorname{sen}\left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right)},$$

fórmula que da R en funcion de un lado, del ángulo opuesto y del exceso esférico.

Si se sustituye $\operatorname{sen}\left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right)$ por su valor deducido de la segunda de las fórmulas (5) del núm. 124, resulta

$$(2) \quad \operatorname{tang} R = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}}.$$

Por último, si se sustituye á $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c$, en la fórmula (1), el valor deducido de las ecuaciones (6) del núm. 120, se obtendrá la fórmula

$$(3) \operatorname{tang} R = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\varepsilon}}{\sqrt{\operatorname{sen}\left(A - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \operatorname{sen}\left(B - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \operatorname{sen}\left(C - \frac{1}{2}\varepsilon\right)}},$$

que da el valor de R en funcion de los ángulos.

La fórmula (1) contiene la demostracion del siguiente teorema, debido á Lexell:

El lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos esféricos de la misma base y de la misma superficie, es una circunferencia que pasa por los dos puntos diametralmente opuestos á las extremidades de la base.

Sean $A'B'$ y $A'B'C$ la base dada y uno de los triángulos para los cuales el exceso esférico tiene un valor dado ε'. Sean A y B los dos puntos diametralmente opuestos á A' y B', y ε el exceso esférico del triángulo ABC. Por un teorema conocido en Geometría, la suma de las superficies de los dos triángulos ABC y $A'B'C$ es igual á la superficie del huso cuyo ángulo es C; se tiene, pues, $\varepsilon + \varepsilon' = 2\,C$, de donde $\frac{1}{2}\varepsilon' = C - \frac{1}{2}\varepsilon$.

No obstante, si R designa el rádio del círculo circunscrito al triángulo ABC, se tiene, por la fórmula (1),

$$\operatorname{tang} R = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varepsilon'};$$

y como c y ε' son constantes, R será tambien constante, lo cual demuestra el teorema enunciado.

126. Designaremos por r el rádio del círculo inscrito en un triángulo esférico. Si se une el polo de este círculo con el vértice A, y se baja una perpendicular al lado b, se formará un triángulo esférico rectángulo, en el cual uno de los lados del ángulo recto será r, el otro será $\frac{b+c-a}{2}$ ó $p-a$, y el ángulo adyacente será $\frac{1}{2}A$; se tendrá, pues,

$$\operatorname{tang} r = \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{tang} \frac{1}{2} A,$$

ó sustituyendo á $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ su valor en funcion de los lados,

$$(4) \qquad \operatorname{tang} r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}}.$$

Si se designan por α, β, γ los rádios de los círculos ex-inscritos, que son tangentes respectivamente á los lados a, b, c, y á las prolongaciones de los otros dos, se hallará de la misma manera

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(p-a)}}, \\ \operatorname{tang} \beta = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(p-b)}}, \\ \operatorname{tang} \gamma = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}(p-c)}}. \end{cases}$$

Resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.

127. Un triángulo esférico puede ser birectángulo ó trirectángulo. En el primer caso, dos lados son iguales á 90°, y el tercero es igual al ángulo opuesto. En el segundo caso, los tres lados son iguales á 90°. Los triángulos de esta especie no dan lugar á ningun problema. La resolucion de los triángulos que tienen solo un ángulo recto, presenta seis casos diferentes, de que ahora nos ocuparemos; pero antes debemos recordar una advertencia que hicimos en el Capítulo precedente, al tratar de los triángulos rectilíneos.

Cuando un lado ó un ángulo de un triángulo esférico está dado por su coseno, tangente ó cotangente, su valor está determinado, pues este lado ó este ángulo se halla comprendido entre cero y 180°; pero si está dado por su seno, no se halla entonces completamente determinado; pues á un seno dado corresponden dos lados ó dos ángulos suplementarios.

Recordemos aún que, si el lado ó el ángulo que se quiere calcular está dado por su coseno ó por su tangente, siendo el valor del coseno ó de la tangente negativo, es necesario calcular en su lugar el ángulo suplementario, que tiene, prescindiendo del signo, el mismo coseno y la misma tangente.

128. PRIMER CASO.—*Conociendo la hipotenusa* a *y un lado* b *del ángulo recto, calcular el tercer lado* c *y los dos ángulos oblícuos* B *y* C.

Se pueden calcular los elementos desconocidos por las fórmulas siguientes del núm. 115:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},\ \operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a},\ \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Peró es preferible valerse de las fórmulas siguientes del número 116:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = + \sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} B\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}}.$$

Estas últimas fórmulas solo exigen, como las precedentes, buscar cuatro logaritmos para determinar los tres elementos desconocidos; pero estas tienen sobre aquellas la ventaja de dar las incógnitas por las tangentes.

Escolio.—Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que se tenga $\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} a$; pues si esto se verifica, el valor de $\operatorname{sen} B$ será menor que 1; y los valores de $\cos c$ y de $\cos C$ se hallarán comprendidos entre -1 y $+1$.

La desigualdad de que se trata, exige que sea $b < a$ ó $b > 180^\circ - a$, si $a < 90^\circ$; y $b > a$ ó $b < 180^\circ - a$, si $a > 90^\circ$; si $a = 90^\circ$, la desigualdad $\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} a$ se verifica necesariamente. Cuando se satisface la condicion de posibilidad, el problema admite una y única solucion, suponiendo que el ángulo B está dado por su seno; pues este ángulo debe ser mayor ó menor que 90 grados, segun que el lado dado b sea mayor ó menor que 90°. La misma consideracion permite fijar el signo con que se ha de tomar el radical que expresa el valor de $\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} B\right)$.

129. SEGUNDO CASO.—*Conociendo los dos lados* b *y* c *del ángulo recto, calcular la hipotenusa y los dos ángulos oblícuos* B *y* C.

Se emplearán las fórmulas

$$\cos a = \cos b \cos c,\ \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{sen} c},\ \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} b}.$$

Si el lado a está mal determinado por su coseno, será preciso empezar por calcular B ó C, y en seguida se obtiene a por una de las fórmulas

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} c}{\cos B},\ \operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C}.$$

ESCOLIO.—El problema siempre admite una solucion única.

130. TERCER CASO.—*Conociendo la hipotenusa* a *y el ángulo oblícuo* B, *calcular el segundo ángulo* C *y los dos lados* b *y* c *del ángulo recto.*

Se hará uso de las fórmulas

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,\ \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B,\ \operatorname{tang} C = \frac{\cot B}{\cos a}.$$

Si el lado b no está bien determinado por su seno, es necesario empezar calculando c ó C, y al momento se tiene b, por una de las fórmulas

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B,\ \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C.$$

ESCOLIO.—El problema es siempre posible, y no admite más que una solucion, pues la incógnita b y el ángulo dado B son al mismo tiempo menores ó mayores que 90 grados.

131. CUARTO CASO.—*Conociendo un lado* b *del ángulo recto y el ángulo opuesto* B, *calcular los lados* a *y* c, *y el ángulo* C.

Se pueden emplear las fórmulas del núm. 115

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B},\ \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B},\ \operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Pero vale más servirse de las fórmulas siguientes del número 116:

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\, a\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-b)}},$$

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\, c\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B+b)}{\operatorname{sen}(B-b)}},$$

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\, C\right) = \pm \sqrt{\cot \frac{1}{2}(B+b) \cot \frac{1}{2}(B-b)},$$

que nos dan las tres incógnitas por sus tangentes.

ESCOLIO.—Cada uno de los dos precedentes sistemas de fórmulas puede dar para cada incógnita dos valores suplementarios. Importa, pues, saber cuáles son los valores que se han de tomar cada vez como solucion del problema.

Desde luego, si $b = B$, se tiene

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} C = 1,\ a = c = C = 90^\circ,$$

y el triángulo es birectángulo. Supongamos que b y B no son iguales.

1.° Si $b < 90^\circ$, es necesario para la posibilidad del problema que B sea tambien $< 90^\circ$, y que además se tenga $b < B$. Supongamos que está cumplida esta condicion; siendo cos b positivo, la ecuacion $\cos a = \cos b \cos c$ hace ver que a y c son al mismo tiempo menores ó mayores que 90 grados; lo mismo se verifica respecto de c y C. Si, pues, se designan por a', c' y C'' los valores inferiores á 90° que las Tablas hacen conocer para a, c, y C, se tendrán las dos soluciones

$$a = a',\ c = c',\ C = C',$$
$$a = 180^\circ - a',\ c = 180^\circ - c',\ C = 180^\circ - C'.$$

2.° Si $b > 90^\circ$, las condiciones de posibilidad del problema son $B > 90°$ y $b > B$. Supongamos que se cumplen; siendo negativo cos b, la ecuacion $\cos a = \cos b \cos c$ dice que a y c son uno superior y otro inferior á 90 grados; y como c y C son los dos superiores á 90°, si se designa siempre por a', c' y C' los valores de a, c y C que las Tablas hacen conocer, se tendrán las dos soluciones siguientes:

$$a = a',\ c = 180° - c',\ C = 180° - C',$$
$$a = 180° - a',\ c = c',\ C = C'.$$

Es fácil ver, *á priori*, que exceptuando el caso de $b = B$, el problema, cuando es posible, admite dos soluciones.

Supongamos, en efecto, que el triángulo ABC, rectángulo en A, satisface á la cuestion (*ver* la figura del núm. 109, p. 161), y prolonguemos los lados AB y BC, hasta que se corten en B'; se formará un segundo triángulo rectángulo $AB'C$ que tambien responde á la cuestion.

132. Quinto caso.—*Conociendo el lado* b *y el ángulo adyacente* C, *calcular el ángulo* B *y los lados* a *y* c.

Se emplearán las fórmulas

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C,\ \operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C},\ \operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C.$$

Si el ángulo B no está bien determinado por su coseno, se empezará por calcular a ó c, y se tendrá B por una de las fórmulas

$$\cot B = \cos a \operatorname{tang} C,\ \cot B = \operatorname{sen} c \cot b.$$

Escolio.—El problema siempre es posible, y no admite más que una solucion.

133. Sexto caso.—*Conociendo los dos ángulos oblícuos* B *y* C, *calcular los tres lados* a, b *y* c.

Se usarán las fórmulas

$$\cos a = \cot B \cot C,\ \cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C},\ \cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$$

del núm. 115, ó mejor las siguientes del núm. 116:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = +\sqrt{\frac{\cos(180^\circ - B - C)}{\cos(B - C)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} b = +\sqrt{\operatorname{tang}\left(\frac{B + C}{2} - 45^\circ\right) \operatorname{tang}\left(\frac{B - C}{2} + 45^\circ\right)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = +\sqrt{\operatorname{tang}\left(\frac{B + C}{2} - 45^\circ\right) \operatorname{tang}\left(\frac{C - B}{2} + 45^\circ\right)},$$

que dan las incógnitas por sus tangentes.

Escolio.—Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente: 1.°, que la suma $B + C$ esté comprendida entre 90 y 270 grados; 2.°, que la diferencia $B - C$ se halle entre -90° y $+90^\circ$. Cuando se cumplen estas condiciones, los segundos miembros de las fórmulas precedentes son reales, y el problema admite una solucion única.

Resolucion de los triángulos esféricos rectiláteros.

134. Aunque la resolucion de un triángulo rectilátero puede reducirse á la de un triángulo rectángulo, por la consideracion del triángulo suplementario, no es inútil presentar el cuadro de fórmulas que conviene á cada uno de los seis casos que pueden ocurrir. Nos limitaremos á esta simple indicacion; los escolios y las discusiones á que dan lugar estas fórmulas, son exactamente las mismas que las desenvueltas al tratar de los triángulos rectángulos. El ángulo opuesto al lado igual á 90 grados, se designará siempre por A.

135. Primer caso.—*Conociendo los ángulos* A *y* B, *calcular el ángulo* C *y los lados* b *y* c.

Las fórmulas que se han de emplear son (117):

$$\cos C = -\frac{\cos A}{\cos B}, \ \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}, \ \cos c = -\frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A};$$

pero se las puede poner bajo la forma siguiente, que es más conveniente:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = + \sqrt{\cot \frac{1}{2}(A - B) \cot \frac{1}{2}(A + B)},$$

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} b\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\operatorname{sen}(A - B)}};$$

el signo indeterminado $\pm$ de la segunda fórmula, se determinará por la consideracion de que b y B son á la vez los dos menores, ó los dos mayores que 90 grados.

136. SEGUNDO CASO.—*Conociendo los dos ángulos* B *y* C, *calcular el ángulo* A *y los lados* b *y* c.

Las fórmulas que se han de emplear son:

$$\cos A = -\cos B \cos C, \quad \operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{sen} C}, \quad \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} C}{\operatorname{sen} B}.$$

Si el ángulo A no estuviese bien determinado por su coseno, se empieza por calcular b ó c; y despues se obtiene A por una de las fórmulas

$$\operatorname{tang} A = -\frac{\operatorname{tang} C}{\cos b}, \quad \operatorname{tang} A = -\frac{\operatorname{tang} B}{\cos c}.$$

137. TERCER CASO.—*Conociendo el ángulo* A *y el lado* b, *calcular el lado* c *y los dos ángulos* B *y* C.

Se hará uso de las fórmulas

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b, \quad \operatorname{tang} C = -\operatorname{tang} A \cos b,$$

$$\operatorname{tang} c = -\frac{\cot b}{\cos A}.$$

Si se quiere determinar B por su tangente, es necesario calcular antes c ó C, y despues se calculará B por una de las fórmulas

$$\operatorname{tang} B = \operatorname{sen} C \operatorname{tang} b,\ \operatorname{tang} B = -\operatorname{tang} A \cos c.$$

138. CUARTO CASO.—*Conociendo el lado* b *y el ángulo opuesto* B, *calcular el lado* c *y los ángulos* A *y* C.

Las fórmulas que se han de emplear son:

$$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b},\ \operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} b},\ \operatorname{sen} C = \frac{\cos b}{\cos B};$$

estas fórmulas se pueden trasformar en las siguientes:

$$\operatorname{tang} 45^\circ + \left(\frac{1}{2} A\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b-B)}},$$

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} C\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(b+B)}{\operatorname{sen}(b-B)}},$$

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} c\right) = \pm \sqrt{\cot \frac{1}{2}(b+B) \cot \frac{1}{2}(b-B)};$$

las dos soluciones se determinan por medio de análogas consideraciones á las que hemos hecho en el núm. 131.

139. QUINTO CASO.—*Conociendo el ángulo* B *y el lado* C, *calcular el lado* b *y los ángulos* A *y* C.

Usaremos las fórmulas

$$\cos b = \cos B \operatorname{sen} c,\ \operatorname{tang} A = -\frac{\operatorname{tang} B}{\cos c},$$

$$\operatorname{tang} C = \operatorname{sen} B \operatorname{tang} c.$$

Si se quiere determinar b, por su tangente, se empezará calculando A ó C, y b se obtiene por una de las fórmulas

$$\cot b = -\cos A \operatorname{tang} c, \quad \cot b = \operatorname{sen} C \cot B.$$

140. SEXTO CASO.—*Conociendo los dos lados* b *y* c, *calcular los tres ángulos* A, B, C.

Las fórmulas relativas á este caso son:

$$\cos A = -\cot b \cot c, \quad \cos B = \frac{\cos b}{\operatorname{sen} c}, \quad \cos C = \frac{\cos c}{\operatorname{sen} b},$$

que conviene convertir en las siguientes:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = +\sqrt{\frac{\cos (b-c)}{\cos (180^\circ - b - c)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = +\sqrt{\operatorname{tang}\left(-45^\circ + \frac{b+c}{2}\right) \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{b-c}{2}\right)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = +\sqrt{\operatorname{tang}\left(-45^\circ + \frac{b+c}{2}\right) \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{b-c}{2}\right)}.$$

Advertencia acerca de la resolucion de los triángulos esféricos en general.

141. Los triángulos rectiláteros no son los solos cuya resolucion puede reducirse á la de los triángulos rectángulos; lo mismo se verifica en los dos casos siguientes:

1.° Si entre los elementos conocidos se hallan dos lados iguales a y b, ó dos ángulos iguales A y B, la perpendicular bajada desde el vértice C sobre el lado AB dividirá al triángulo ABC en dos triángulos rectángulos iguales en todas sus partes. Se resolverá uno de estos triángulos rectángulos en el cual se conocen dos elementos además del ángulo recto, y se tendrán inmediatamente los elementos desconocidos del triángulo propuesto.

2.° Si entre los elementos dados hay dos lados a y b ó dos ángulos A y B, cuya suma sea igual á 180 grados, prolongando los lados a y c hasta que se corten en B', se formará un triángulo $AB'C$, en el cual dos lados ó dos ángulos serán iguales. La resolucion del triángulo $AB'C$ se reduce, como acabamos de ver, á la de un triángulo rectángulo, estando contenida en ella la del propuesto.

La resolucion de los triángulos esféricos en general presenta seis casos; pero tres de estos casos pueden reducirse á los otros tres, por la consideracion del triángulo suplementario, y las soluciones de dos casos correspondientes se obtienen por fórmulas análogas. No hay, pues, en realidad más que tres problemas distintos.

Resolucion de un triángulo esférico, del cual se conocen los tres lados ó los tres ángulos.

142. PRIMER MÉTODO.—Si se dan los tres lados, se pueden calcular los tres ángulos por las fórmulas (1), (2) y (3) del número 119; deben preferirse las fórmulas (3), que son:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}},$$

recordando que p designa el semi-perimetro $\frac{a+b+c}{2}$.

Si fuesen los ángulos los conocidos, se calcularian los lados por las fórmulas (4), (5) ó (6) del núm. 120; deben preferirse las fórmulas (6), que son:

$$\tang \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sen} \left(A - \frac{1}{2} \varepsilon\right)}{\operatorname{sen} \left(B - \frac{1}{2} \varepsilon\right) \operatorname{sen} \left(C - \frac{1}{2} \varepsilon\right)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sen} \left(B - \frac{1}{2} \varepsilon\right)}{\operatorname{sen} \left(A - \frac{1}{2} \varepsilon\right) \operatorname{sen} \left(C - \frac{1}{2} \varepsilon\right)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sen} \left(C - \frac{1}{2} \varepsilon\right)}{\operatorname{sen} \left(A - \frac{1}{2} \varepsilon\right) \operatorname{sen} \left(B - \frac{1}{2} \varepsilon\right)}},$$

en las cuales ε designa el exceso esférico $A + B + C - 180°$.

Escolio.—Para que un triángulo sea posible con tres lados dados, es necesario y suficiente: 1.°, que la suma de los tres lados sea menor que 360 grados; 2.°, que cada uno de los lados sea menor que la suma de los otros dos. Para que un triángulo sea posible con tres ángulos dados, es necesario y suficiente: 1.°, que el exceso esférico que resulta de los ángulos dados esté comprendido entre cero y 360 grados; 2.°, que cada uno de los ángulos dados sea mayor que la mitad del exceso esférico. Estos resultados de Geometría esférica se deducen inmediatamente de nuestras fórmulas.

Cuando estas condiciones no se cumplen, los valores de las tangentes de los semi-ángulos ó semi-lados desconocidos son imaginarios.

143. Segundo método.—Cuando se tiene necesidad de calcular los tres elementos desconocidos, se pueden sustituir las fórmulas precedentes por las (8), (9) y (10) del núm. 124.

El empleo de estas nuevas fórmulas no exige, como en la solucion precedente, más que buscar cuatro logaritmos; y se tiene así la ventaja de que, habiendo calculado separadamente las cuatro cantidades

$$A - \frac{1}{2}\varepsilon,\ B - \frac{1}{2}\varepsilon,\ C - \frac{1}{2}\varepsilon,\ \text{y}\ \frac{1}{2}\varepsilon,\ \text{ó}\ p,\ p-a,\ p-b,\ p-c,$$

se tiene un medio de verificar la exactitud de los resultados obtenidos.

144. Ejemplo.—*Se dan los tres lados*

$$a = 113^\circ\, 2'\, 56'',64 \quad b = 82^\circ\, 39'\, 28'',40 \quad c = 74^\circ\, 54'\, 31'',06$$

calcular los ángulos A, B, C.

MANERA DE CALCULAR (PRIMER MÉTODO).

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. $135^\circ 18' 28'',05$

$p - a$.......... $22^\circ 15' 31'',41$

$p - b$.......... $52^\circ 38' 59'',65$

$p - c$.......... $60^\circ 23' 56'',99$

log sen p.......... $\bar{1},8471394$

log sen $(p-a)$.. $\bar{1},5783980$

log sen $(p-b)$... $\bar{1},9003361$

log sen $(p-c)$... $\bar{1},9392635$

Cálculo del ángulo A.

$$\text{tang}\ \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen}\ (p-b)\ \text{sen}\ (p-c)}{\text{sen}\ p\ \text{sen}\ (p-a)}}.$$

log sen $(p-b)$.. $\bar{1},9003361$
log sen $(p-c)$... $\bar{1},9392635$
— log sen $(p-a)$. $0,4216020$
— log sen p...... $0,1528606$

$0,4140622$

log tang $\frac{1}{2}A$.... $0,2070311$

$\frac{1}{2}A$.......... $58^\circ 10' 1'',10$

A.............. $116^\circ 20' 2'',20$

Cálculo del ángulo B.	*Cálculo del ángulo* C.
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}}.$	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}},$

log sen $(p-a)$...	$\bar{1}$,5783980	log sen $(p-a)$...	$\bar{1}$,5783980
log sen $(p-c)$....	$\bar{1}$,9392635	log sen $(p-b)$..	$\bar{1}$,9003361
— log sen $(p-b)$.	0,0996639	— log sen $(p-c)$.	0,0607365
— log sen p......	0,1528606	— log sen p.......	0,1528606
	$\bar{1}$,7701860		$\bar{1}$,6923312
log tang $\frac{1}{2}B$....	$\bar{1}$,8850930	log tang $\frac{1}{2}C$....	$\bar{1}$,8461656
$\frac{1}{2}B$.........	37° 30′ 25″,80	$\frac{1}{2}C$..........	35° 3′ 29″,58
B...........	75° 0′ 51″,60	C.............	70° 6′ 59″,16

MANERA DE CALCULAR (SEGUNDO MÉTODO).

Empleo de las fórmulas (8) y (9) del núm. 124.

$\frac{1}{2}p$.........	67° 39′ 14″,025	log tang $\frac{1}{2}p$.....	0,3860840
$\frac{1}{2}(p-a)$...	11° 7′ 45″,705	log tang $\frac{1}{2}(p-a)$.	$\bar{1}$,2938583
$\frac{1}{2}(p-b)$...	26° 19′ 29″,825	log tang $\frac{1}{2}(p-b)$.	$\bar{1}$,6944058
$\frac{1}{2}(p-c)$...	30° 11′ 58″,495	log tang $\frac{1}{2}(p-c)$.	$\bar{1}$,7649261

Cálculo del exceso esférico ε.

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} p \ldots\ldots$ $0,3860840$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-a).$ $\bar{1},2938583$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-b).$ $\bar{1},6944058$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-c).$ $\bar{1},7649261$

$\bar{1},1392742$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varepsilon \ldots\ldots$ $\bar{1},5696371$

$\frac{1}{4} \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots$ $20^\circ\, 21'\, 58'',25$

$\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots$ $81^\circ\, 27'\, 53'',00$

Cálculo del ángulo B.

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-a).$ $\bar{1},2938583$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-c).$ $\bar{1},7649261$

$\log \cot \frac{1}{2} (p-b) \ldots$ $0,3055942$

$\log \cot \frac{1}{2} p \ldots\ldots$ $\bar{1},6139160$

$\bar{2},9782946$

$\log \operatorname{tang} \left(\frac{1}{2} B - \frac{1}{4} \varepsilon\right)$ $\bar{1},4891473$

$\frac{1}{2} B - \frac{1}{4} \varepsilon \ldots$ $17^\circ\, 8'\, 27'',55$

$\frac{1}{2} B \ldots\ldots\ldots$ $37^\circ\, 30'\, 25'',80$

$B \ldots\ldots\ldots\ldots$ $75^\circ\, 0'\, 51'',60$

Cálculo del ángulo A.

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-b).$ $\bar{1},6944058$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-c).$ $\bar{1},7649261$

$\log \cot \frac{1}{2} (p-a) \ldots$ $0,7061417$

$\log \cot \frac{1}{2} p \ldots\ldots$ $\bar{1},6139160$

$\bar{1},7793896$

$\log \operatorname{tang} \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} \varepsilon\right)$ $\bar{1},8896948$

$\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} \varepsilon \ldots$ $37^\circ\, 48'\, 2'',87$

$\frac{1}{2} A \ldots\ldots\ldots$ $58^\circ\, 10'\, 1'',12$

$A \ldots\ldots\ldots\ldots$ $116^\circ\, 20'\, 2'',24$

Cálculo del ángulo C.

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-a).$ $\bar{1},2938583$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-b).$ $\bar{1},6944058$

$\log \cot \frac{1}{2} (p-c) \ldots$ $0,2350739$

$\log \cot \frac{1}{2} p \ldots\ldots$ $\bar{1},6139160$

$\bar{2},8372540$

$\log \operatorname{tang} \left(\frac{1}{2} C - \frac{1}{4} \varepsilon\right).$ $\bar{1},4186270$

$\frac{1}{2} C - \frac{1}{4} \varepsilon \ldots$ $14^\circ\, 41'\, 31'',34$

$\frac{1}{2} C \ldots\ldots\ldots$ $35^\circ\, 3'\, 29'',59$

$C \ldots\ldots\ldots\ldots$ $70^\circ\, 6'\, 59'',18$

Verificacion. $\frac{1}{4}\varepsilon + \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}\varepsilon\right) + \left(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}\varepsilon\right)$

$$+\left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{4}\varepsilon\right) = 90^\circ\, 0'\, 0'',01.$$

Error en el resultado: $0'',01$.

Resolucion de un triángulo esférico, en el cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido, ó dos ángulos y el lado comprendido.

145. PRIMER MÉTODO.—Cuando se tiene necesidad de calcular los tres elementos desconocidos, se obtiene la solucion más sencilla del problema por medio de las siguientes fórmulas de Néper:

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \cot\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = \cot\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Si los elementos dados son a, b y C, se calcularán, ante todo, A y B por medio de las fórmulas (1) y (2); y despues, por medio de cualquiera de las (3) y (4), se calcula c.

Si al contrario, los elementos dados fuesen A, B y c, se calcularán a y b por las fórmulas (3) y (4); y despues C por cualquiera de las (1) y (2).

Escolio I.—El cálculo de los elementos A y B ó a y b, exige buscar cinco logaritmos; y despues es necesario buscar otros dos para tener C ó c.

Escolio II.—Suponiendo los datos comprendidos entre cero y 180 grados, el problema admite siempre una solucion única.

146. Segundo método.—Se puede tambien resolver el problema propuesto, haciendo uso de las fórmulas establecidas en el núm. 109 y siguientes, que permiten calcular cada incógnita independientemente de las otras dos.

Si los elementos dados son a, b, C, las fórmulas para determinar las incógnitas son

$$(1) \quad \begin{cases} \cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C, \\ \cot b \operatorname{sen} a - \cot B \operatorname{sen} C = \cos a \cos C, \\ \cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C. \end{cases}$$

Se calcularán, como hemos dicho en el núm. 118, dos ángulos auxiliares φ y ψ comprendidos entre cero y 180 grados, y tales que

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} a \cos C, \quad \operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} b \cos C;$$

las dos primeras fórmulas (1) se trasforman entonces en

$$(3) \qquad \operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tang} C}{\operatorname{sen} (b - \varphi)}, \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{sen} \psi \operatorname{tang} C}{\operatorname{sen} (a - \psi)}.$$

Cualquiera de los dos ángulos auxiliares φ y ψ puede servir para el cálculo de c; pues de la ecuacion (1) resulta, sirviéndonos de las fórmulas (2),

$$(4) \qquad \cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}, \quad \cos c = \frac{\cos b \cos (a - \psi)}{\cos \psi}.$$

Puede suceder que el lado c no esté bien determinado por su coseno; en este caso, se calculan, ante todo, A y B, y se obtiene c por su tangente; efectivamente, si se divide respectivamente por las ecuaciones (4) las dos fórmulas

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \text{ y } \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B},$$

resultará, habiendo observado las fórmulas (2) y (3),

$$(5) \qquad \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang}(b - \varphi)}{\cos A}, \ \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang}(a - \psi)}{\cos B}.$$

Si los elementos dados son A, B, c, las fórmulas que determinan las incógnitas son:

$$(1\ bis) \begin{cases} \cot a \operatorname{sen} c - \cot A \operatorname{sen} B = \cos c \cos B, \\ \cot b \operatorname{sen} c - \cot B \operatorname{sen} A = \cos c \cos A, \\ \cos C = - \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos C; \end{cases}$$

se calcularán dos ángulos auxiliares φ y ψ comprendidos entre cero y 180°, y tales que

$$(2\ bis) \quad \operatorname{tang} \varphi = - \operatorname{tang} A \cos c, \ \operatorname{tang} \psi = - \operatorname{tang} B \cos c,$$

y las dos primeras ecuaciones (1 *bis*) darán

$$(3\ bis) \quad \operatorname{tang} a = - \frac{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tang} c}{\operatorname{sen}(B - \varphi)}, \ \operatorname{tang} b = - \frac{\operatorname{sen} \psi \operatorname{tang} c}{\operatorname{sen}(A - \psi)}.$$

La tercera ecuacion (1 *bis*) da tambien

$$(4\ bis) \qquad \cos C = - \frac{\cos A \cos (B - \varphi)}{\cos \varphi},$$

$$\cos C = - \frac{\cos B \cos (A - \psi)}{\cos \psi};$$

y combinando estas ecuaciones con las fórmulas

$$\operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}, \operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b},$$

resulta, por último,

$$(5\ bis)\quad \operatorname{tang} C = -\frac{\operatorname{tang}(B-\varphi)}{\cos a}, \operatorname{tang} C = -\frac{\operatorname{tang}(A-\psi)}{\cos b}.$$

Es necesario observar que las fórmulas (1 *bis*), (2 *bis*), (3 *bis*), (4 *bis*), (5 *bis*), se deducen de las fórmulas (1), (2), (3), (4), (5), sustituyendo en estas á A, B, C, a, b, c, por los suplementos de a, b, c, A, B, C, y á φ, y ψ por sus suplementos. Los dos triángulos que acabamos de considerar son efectivamente suplementarios.

Escolio.—Cuando los elementos dados son a, b, C, el cálculo de un solo ángulo A ó B exige buscar cinco logaritmos, como al emplear el primer método. Exige tambien cinco logaritmos, el calcular el lado c, por una de las fórmulas (4); pero cuando solo se tiene necesidad de este solo lado, debe preferirse el segundo método al primero. No sucede lo mismo cuando los elementos dados son A, B, c; el empleo del método precedente no ofrece más ventajas que, respecto al ángulo C, en el caso de no querer calcular más que este elemento.

147. Tercer método.—El método de que vamos á tratar, únicamente se refiere al caso en que no hay que calcular más que c ó C. En la solucion precedente nos hemos servido, para este objeto, de una de las fórmulas (4) ó (4 *bis*), que determinan el elemento desconocido por su coseno. Puede suceder que dicho elemento no pueda obtenerse con precision por este método, siendo entonces conveniente operar como sigue:

Si la incógnita es c, podemos escribir del modo siguiente la ecuacion que la determina:

$$\cos c = \cos(a-b) - 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C,$$

ó bien

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (a - b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C;$$

si, pues, se calcula un ángulo auxiliar ω tal que

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a - b)} \sqrt{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

obteniéndose c por la fórmula

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \omega}.$$

Si la incógnita es C, se tiene

$$\cos C = -\cos (A + B) - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c,$$

ó

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C = \cos^2 \frac{1}{2} (A + B) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c;$$

se calculará, pues, el ángulo auxiliar ω por la fórmula

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \sqrt{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B},$$

y se tendrá en seguida C por la fórmula

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \omega}.$$

Escolio.—Este método solo exige, como el precedente, cinco logaritmos para el cálculo de c ó de C.

148. Ejemplo.—*Dados los lados* a, b, *y el ángulo comprendido* C,

$$a = 113^\circ\ 2'\ 56'',64 \quad b = 82^\circ\ 39'\ 28'',40$$
$$c = 138^\circ\ 50'\ 13'',69,$$

calcular los ángulos A *y* B, *y el lado* c.

MANERA DE CALCULAR.

$\frac{1}{2}(a-b)\ldots$ $15^\circ 11' 44'',12$

$\frac{1}{2}(a+b)\ldots$ $97^\circ 51' 12'',52$

$\frac{1}{2}C\ldots\ldots\ldots$ $69^\circ 25'\ 6'',845$

$\log \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\ldots$ $\bar{1},4184917$

$\log \cos\frac{1}{2}(a-b)\ldots$ $\bar{1},9845439$

$\log \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\ldots$ $\bar{1},9959074$

$\log -\cos\frac{1}{2}(a+b).$ $\bar{1},1355787$

$\log \cot\frac{1}{2}C\ldots\ldots$ $\bar{1},5746163$

Cálculo de $\frac{1}{2}$ (A + B).

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \cot\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

$\log \cot\frac{1}{2}C\ldots\ldots\ldots$ $\bar{1},5746163$

$\log \cos\frac{1}{2}(a-b)\ldots$ $\bar{1},9845439$

$-\log -\cos\frac{1}{2}(a+b).$ $0,8644213$

$\log -\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$ $0,4235815$

$\frac{1}{2}(A+B)\ldots$ $110^\circ 39' 35'',29$

Cálculo de $\frac{1}{2}$ (A — B).

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = \cot\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}.$$

$\log \cot\frac{1}{2}C\ldots\ldots\ldots$ $\bar{1},5746163$

$\log \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\ldots$ $\bar{1},4184917$

$-\log \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)$ $0,0040926$

$\log \operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B).$ $\bar{2},9972006$

$\frac{1}{2}(A-B)\ldots$ $5^\circ 40' 26'',91$

Cálculo de los ángulos A *y* B.

$\frac{1}{2}(A+B)\ldots$ 110° 39′ 35″,29

$\frac{1}{2}(A-B)\ldots$ 5° 40′ 26″,91

$A\ldots\ldots\ldots\ldots$ 116° 20′ 2″,20

$B\ldots\ldots\ldots\ldots$ 104° 59′ 8″,38

$\log - \cos\frac{1}{2}(A+B)$ $\bar{1}$,5475513

$\log\cos\frac{1}{2}(A-B)$. $\bar{1}$,9978668

Cálculo del lado c.

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

$\log \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\ldots$ $\bar{1}$,9959074

$-\log - \cos\frac{1}{2}(a+b)$. 0,8644213

$\log - \cos\frac{1}{2}(A+B)$ $\bar{1}$,5475513

$-\log\cos\frac{1}{2}(A-B)$. 0,0021332

$\log \operatorname{tang}\frac{1}{2}c\ldots\ldots$ 0,4100132

$\frac{1}{2}c\ldots\ldots\ldots$ 68° 44′ 32″,30

$c\ldots\ldots\ldots\ldots$ 137° 29′ 4″,60

Resolucion de un triángulo esférico, en el cual se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, ó dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.

149. Primer método.—Sean a, b y A, ó A, B, a los elementos dados. Calculando la incógnita B, ó b por la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a},$$

se podrá obtener el valor de C ó c por una de las fórmulas de Néper:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=\frac{\cot\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$=\frac{\cot\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{sen}\frac{1}{4}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Para que el problema sea posible, es necesario, en primer lugar, que el seno del elemento desconocido B ó b esté comprendido entre cero y 1; cuando se cumple esta condicion, existen para B ó b dos valores suplementarios uno de otro; pero, para que uno de estos valores corresponda al problema, es necesario que los valores correspondientes de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$ y de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$ sean positivos, lo cual exige que las diferencias $A-B$ y $a-b$ sean del mismo signo. Si ninguno de los valores de B ó b cumple esta condicion, el problema no tiene solucion; pero si cualquiera de estos valores la cumple, el problema admite necesariamente una solucion correspondiente. En efecto, siendo del mismo signo $A-B$ y $a-b$, se obtendrán para C y para c dos valores comprendidos entre cero y 180 grados, por medio de dos de las fórmulas de Néper; estos valores de C y de c serán los mismos que los dados por las otras dos fórmulas de Néper, pues estas se deducen inmediatamente de las dos primeras, haciendo uso de la relacion

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \text{ ó } \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

De aquí se deduce que los valores hallados para B ó b, y para C y c, satisfacen á las cuatro fórmulas de Néper. Si, pues, se propone resolver un triángulo conociendo a, b, C, problema que siempre es posible, se hallarán necesariamente para los elementos buscados los valores A, B, c.

Los dos casos de que se trata se llaman *casos dudosos de los triángulos esféricos*, por haber incertidumbre respecto qué valor de B ó b corresponde al triángulo que se debe considerar. Pero, en las aplicaciones, esta incertidumbre desaparece por un exámen obtenido de las circunstancias del problema que hay que resolver.

150. Segundo método.—El método precedente no debe emplearse más que en el caso de que se quiera determinar solamente el elemento B ó b con uno de los C ó c. Son necesarios tres logaritmos para el cálculo de B ó b, y suponiendo conocida la especie de este elemento, son necesarios tres nuevos logaritmos para el cálculo de C ó c.

Cuando se tiene necesidad de determinar las tres incógnitas, se determinará el elemento B ó b como anteriormente, y si conocemos la especie de este elemento, se determinarán C y c por las fórmulas (11) y (12) del núm. 123, que solo exigen buscar cuatro logaritmos.

Haciendo, pues,

$$A+B=S+180^\circ,\quad A-B=D,$$
$$a+b=s+180^\circ,\quad a-b=d;$$

y despues

$$M=\operatorname{tang}\frac{S+d}{4}\operatorname{tang}\frac{S-d}{4},$$

$$N = \operatorname{tang} \frac{s+D}{4} \operatorname{tang} \frac{s-D}{4},$$

se tendrá, por las fórmulas (11) del núm. 123,

$$\operatorname{tang} \frac{C-c}{4} = \pm\sqrt{MN}, \operatorname{tang} \frac{C+c}{4} = +\sqrt{\frac{M}{N}},$$

debiendo tomarse el radical en la primera fórmula con el signo de las cantidades M y N.

En vez de emplear las fórmulas (11) del núm. 123, podemos usar las (12) del mismo número, pues no hay ninguna razon para preferir unas á otras. Cuando el problema propuesto admite dos soluciones, si se han empleado las fórmulas (11), como acabamos de hacer, para calcular uno de los triángulos, las fórmulas (12) permitirán calcular el segundo triángulo, sin que haya necesidad, para esta operacion, de buscar ningun nuevo logaritmo.

Efectivamente, designemos por C' y c' los valores de C y c que se refieren al segundo triángulo; será necesario sustituir en las fórmulas (12) del núm. 123, B por $180^\circ - B$, ó b por $180^\circ - b$, que es lo que resulta de permutar entre sí las letras S y D ó s y d, segun que los datos del problema sean a, b, A, ó A, B, a. Entonces, si hacemos, para abreviar,

$$M' = \operatorname{tang} \frac{s+D}{4} \cot \frac{s-D}{4},$$

$$N' = \cot \frac{S+d}{4} \operatorname{tang} \frac{S-d}{4},$$

se tendrá

$$\operatorname{tang}\left(\frac{C'-c'}{4} \pm 45^\circ\right) = \pm\sqrt{M'N'},$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{C'+c'}{4} + 45^\circ\right) = \pm\sqrt{\frac{M'}{N'}}.$$

Cuando los datos son a, b, A, es necesario tomar los signos superiores en los dos miembros de la primera fórmula, y el signo del radical en la segunda es el de M' y N'. Si al contrario, los datos son A, B, a, es necesario tomar el signo inferior en los dos miembros de la primera fórmula, y el radical de la segunda debe tomarse con signo contrario al de las cantidades M' y N'.

Escolio.—Hemos visto que la solucion del problema, aun en el caso de que resulten dos triángulos y queriendo calcular ambos, solo exige el empleo de siete logaritmos.

151. Tercer método.—La solucion más sencilla del problema que nos ocupa se obtiene por medio de tres fórmulas, que contienen los datos y una de las incógnitas. Este método, que exige el cálculo de dos ángulos auxiliares, es el que conviene emplear en la mayor parte de los casos.

Supongamos que los datos sean a, b, A; las fórmulas que determinan las incógnitas son:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}, \\ \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A, \\ \cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C. \end{array}\right.$$

Cada una de ellas permite calcular directamente una de las incógnitas, y establece al mismo tiempo un criterio para reconocer si un triángulo es posible con los datos. En efecto, segun hemos visto en el núm. 149, si se puede deducir de la primer fórmula un valor tal, que $A - B$ sea del mismo signo que $a - b$, en este caso habrá una solucion del problema para dicho valor de B. Igualmente, si la segunda fórmula establece un valor para c comprendido entre cero y 180 grados, es evidente que se tendrá una solucion para este valor de c, pues el triángulo formado con los lados b y c y el ángulo A, satisfará á las condiciones del enunciado. Y finalmente, si se puede deducir de la tercer fórmula un valor de C comprendido entre cero y 180 grados, se tendrá necesariamente una solucion del problema correspondiente á este valor, pues siempre se podrá construir un triángulo con los elementos a, b, C.

La primera fórmula del sistema (1) es calculable por logaritmos; para obtener c y C, se determinarán dos ángulos auxiliares φ y ψ, y tales que se tenga

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} b \cos A, \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{\cot A}{\cos b};$$

las dos últimas fórmulas (1) nos dan entonces

$$(3) \quad \cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}, \quad \cos (C - \psi) = \cot a \operatorname{tang} b \cos \psi.$$

Para que el problema propuesto sea posible, es necesario que el valor de sen B sea menor que 1, y que los valores de $\cos (c - \varphi)$, $\cos (C - \psi)$, estén comprendidos entre -1 y $+1$; es fácil convencerse de que estas condiciones están expresadas por la desigualdad $\dfrac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} < 1$.

Si esta desigualdad se verifica, se podrá calcular, por la primer fórmula (1), un valor M de B comprendido entre cero y 90°, y por las fórmulas (3), los valores N y P de $c - \varphi$ y $C - \psi$, comprendidos entre cero y 180 grados.

Pero se verificarán tambien las ecuaciones tomando

$$B = 180^\circ - M, \quad c - \varphi = -N, \quad C - \psi = -P;$$

es fácil determinar, en este caso, los valores de B, C, c, que es necesario asociar para tener un triángulo que satisfaga á la cuestion. Efectivamente, si se introducen los ángulos auxiliares φ y ψ en las fórmulas

$$\cot b \operatorname{sen} c - \cot B \operatorname{sen} A = \cos c \cos A,$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b,$$

estas se trasforman en

$$(4)\quad \operatorname{sen}(c-\varphi)=\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B},\ \operatorname{sen}(c-\psi)=\operatorname{sen}\psi\,\frac{\cos B}{\cos A},$$

lo cual demuestra que las diferencias $c-\varphi$ y $C-\psi$ son del mismo signo. Tambien se ve, por las fórmulas (4), que si estas diferencias son positivas, los ángulos A y B son, ó los dos mayores ó los dos menores que 90 grados, mientras que, si $c-\varphi$ y $C-\psi$ son negativas, los ángulos A y B son uno mayor y otro menor que 90 grados. Segun esto, los valores de B, C, c, que deben combinarse, son:

$$\left.\begin{array}{lll} B=M, & c=\varphi+N, & C=\psi+P, \\ B=180^\circ-M, & c=\varphi-N, & C=\psi-P, \end{array}\right\}\ \text{si } A<90^\circ,$$
$$\left.\begin{array}{lll} B=180^\circ-M, & c=\varphi+N, & C=\psi+P, \\ B=M, & c=\varphi-N, & C=\psi-P, \end{array}\right\}\ \text{si } A>90^\circ,$$

y cada una de estas combinaciones es evidente corresponderá á un triángulo, excepto en el caso de que el valor de C ó c, que en ellas figura, no se halle comprendido entre cero y 180°. Se hallará dividiendo, respectivamente, la primera y segunda ecuacion (4) por la primera y segunda ecuacion (3), y observando las ecuaciones (2) y la primera (1),

$$(5)\quad \operatorname{tang}(c-\varphi)=\operatorname{tang} a\cos B,\ \operatorname{tang}(C-\psi)=\frac{\cot B}{\cos a},$$

de donde

$$(6)\quad \operatorname{tang}(c-\varphi)=\operatorname{sen} b\operatorname{sen} A\operatorname{tang}(C-\psi).$$

Cuando se tiene necesidad de conocer los tres elementos desconocidos, habiendo obtenido B por la primera fórmula (1), se pueden emplear con ventaja las fórmulas (5) y (6) para obtener la solucion del triángulo; estas exigen efectivamente un logaritmo ménos que las (3), y determinan $c-\varphi$ y $C-\psi$, por sus tangentes. Para el cálculo, pueden considerarse estas diferencias como positivas; es decir, iguales respectivamente á $+N$ y á $+P$; pero entonces, si se toma para B el valor M, es necesario tener cuidado de cambiar los signos á los segundos miembros de las ecuaciones (5), cuando el ángulo A sea mayor que 90 grados.

152. Se procederá exactamente de la misma manera si los datos son A, B, a. Las fórmulas para determinar las incógnitas son, en este caso,

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} b = \dfrac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} \\ \cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a, \\ \cot a \operatorname{sen} c - \cot A \operatorname{sen} B = \cos c \cos B. \end{cases}$$

La primer fórmula es calculable por logaritmos; para obtener C y c, se calcularán dos ángulos auxiliares φ y ψ, comprendidos entre cero y 180°, y tales que

$$(2)\qquad \operatorname{tang} \psi = -\operatorname{tang} B \cos a, \ \operatorname{tang} \varphi = -\frac{\cot a}{\cos B};$$

las dos primeras fórmulas (1) se trasforman entonces en

$$(3)\ \cos(C-\psi) = -\frac{\cos A \cos \psi}{\cos B}, \cos(c-\varphi) = -\cot A \operatorname{tang} B \cos \varphi.$$

Si la condicion $\dfrac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} > 1$ se cumple, el valor precedente de sen b será menor que 1; igualmente, los valores de $\cos(C-\psi)$, $\cos(c-\varphi)$ estarán comprendidos entre -1 y $+1$; las Tablas harán, pues, conocer un valor M de b comprendido entre cero y 90 grados, así como los valores N y P de $C-\psi$ y de $c-\varphi$, comprendidos entre cero y 180 grados; pero tambien se satisfarán las ecuaciones tomando

$$b = 180° - M, \ C - \psi = -P, \ c - \varphi = -N.$$

La introduccion de los ángulos φ y ψ en las fórmulas

$$\cot b \operatorname{sen} a - \cot B \operatorname{sen} C = \cos a \cos C,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B,$$

nos da

$$(4) \quad \operatorname{sen}(C-\psi) = -\operatorname{sen}\psi \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}, \quad \operatorname{sen}(c-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi \frac{\cos b}{\cos a};$$

de esto se deduce que las diferencias $C - \psi$ y $c - \varphi$ son del mismo signo; tambien se ve que si estas diferencias son negativas, a y b son, ó los dos mayores ó los dos menores que 90 grados; mientras que $c - \varphi$ y $C - \psi$ son positivas, a y b son uno menor y otro mayor que 90 grados. Segun esto, los valores de b, C, c, que se han de combinar, son:

$$\left.\begin{array}{lll} b = M, & C = \psi + P, & c = \varphi + N, \\ b = 180° - M, & C = \psi - P, & c = \varphi - N, \end{array}\right\} \text{ si } a > 90°,$$

y

$$\left.\begin{array}{lll} b = 180° - M, & C = \psi + P, & c = \varphi + N, \\ b = M, & C = \psi - P, & c = \varphi - N, \end{array}\right\} \text{ si } a < 90°.$$

Cada una de estas soluciones cesa de existir si el valor correspondiente de C ó c no está comprendido entre cero y 180 grados.

De las fórmulas (3) y (4) se deduce

$$(5) \quad \operatorname{tang}(C-\psi) = -\operatorname{tang} A \cos b, \quad \operatorname{tang}(c-\varphi) = -\frac{\cot b}{\cos A},$$

y

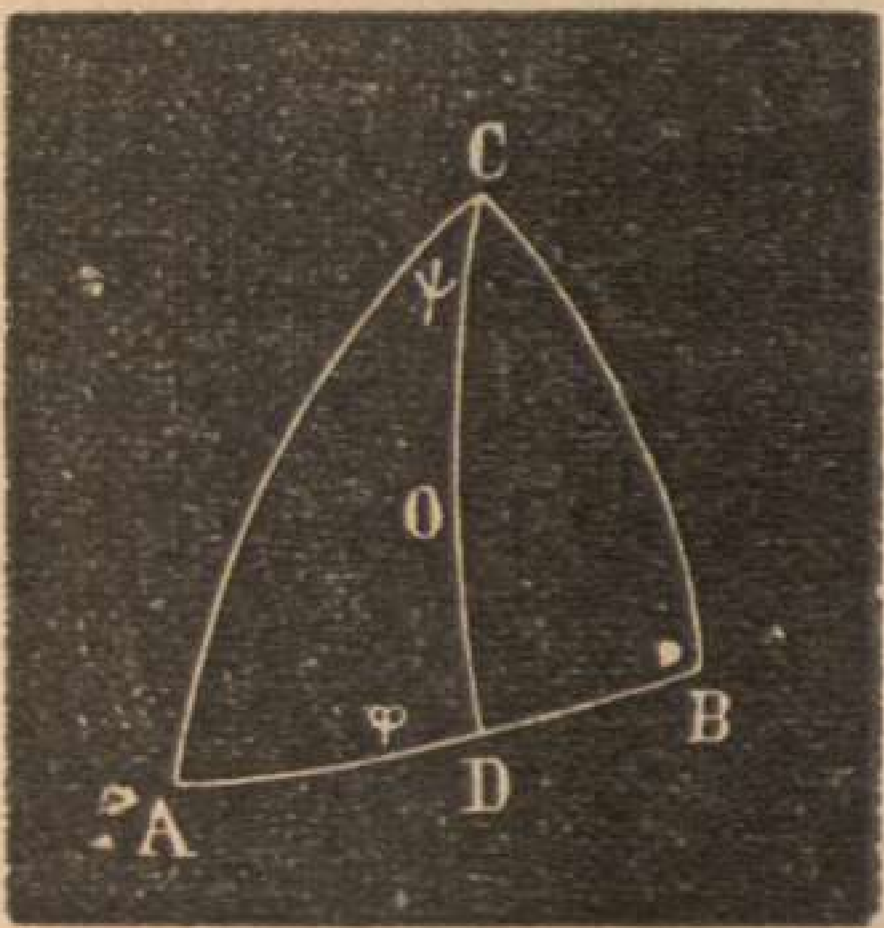
$$(6) \qquad \operatorname{tang}(C-\psi) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \operatorname{tang}(c-\varphi),$$

fórmulas que facilitarán la resolucion del triángulo cuando el lado b haya sido determinado.

Todas estas fórmulas son análogas á las obtenidas en el número precedente. Se pasa de unas á otras sustituyendo a, b, c, A, B, C, φ, ψ por los suplementos de A, B, C, a, b, c, ψ, φ; en efecto, no hemos hecho aquí otra cosa que resolver el triángulo suplementario, del que hemos tratado en el número 151.

153. Cuarto método.—La introduccion de los ángulos auxiliares φ y ψ, de los cuales hemos hecho uso en el método anterior, equivale á la descomposicion del triángulo ABC en dos triángulos rectángulos ó en dos triángulos rectiláteros, por medio de un arco de círculo máximo CD (fig. 31) trazado desde el vértice C al lado AB. En efecto, si el arco CD forma un ángulo recto con el lado AB, del triángulo rectángulo ACD se deduce

(Fig. 31.)



$$\operatorname{tang} AD = \operatorname{tang} b \cos A,$$
$$\cot ACD = \cos b \operatorname{tang} A;$$

si al contrario, el arco CD se traza de manera que su longitud sea igual á un cuadrante; el triángulo BCD será rectilíneo, y dará

$$\operatorname{tang} BD = -\frac{\cot a}{\cos B}, \quad \operatorname{tang} BCD = -\operatorname{tang} B \cos a,$$

de donde se deduce que los ángulos designados por φ y ψ en el núm. 151 son respectivamente iguales á AD y ACD, mientras que los ángulos designados por las mismas letras φ y ψ en el núm. 152 son respectivamente BD y BCD.

El método fundado en la descomposicion del triángulo propuesto en otros dos rectángulos ó rectiláteros, y del cual queremos tratar aquí, no difiere en el fondo del que acabamos de desarrollar; pero es conveniente advertir que se puede evitar el empleo de los senos y cosenos en el cálculo de las incógnitas.

Supongamos, en efecto, el caso en que los elementos dados son a, b, A. Designemos por θ la perpendicular CD bajada desde C á AB; se resolverá el triángulo rectángulo ACD por medio de las fórmulas

$$(1)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,b\cos A, & \cot\psi = \cos b\,\text{tang}\,A, \\ \text{tang}\,\theta = \text{sen}\,\varphi\,\text{tang}\,A, & \text{tang}\,\theta = \cos\psi\,\text{tang}\,b, \end{cases}$$

despues que el triángulo rectángulo BCD, en el cual se conoce la hipotenusa a y el lado θ, nos dé á conocer los tres elementos

$$CBD = B \text{ ó } 180^\circ - B, BD = \pm(c-\varphi), BCD = \pm(C-\psi),$$

se puede aplicar á la resolucion del triángulo BCD el segundo sistema de fórmulas que corresponden al primer caso de los triángulos rectángulos, y se tendrá, de este modo, á causa de la indeterminacion del signo de $c-\varphi$ y de $C-\psi$,

$$(2)\quad \begin{cases} \text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}B\right) = \pm\sqrt{\dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+\theta)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-\theta)}}, \\ \text{tang}\,\frac{1}{2}(c-\varphi) = \pm\sqrt{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-\theta)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+\theta)}, \\ \text{tang}\,\frac{1}{2}(C-\psi) = \pm\sqrt{\dfrac{\text{sen}\,(a-\theta)}{\text{sen}\,(a+\theta)}}. \end{cases}$$

Para obtener las fórmulas análogas del caso en que los datos son A, B, a, basta reemplazar, en las fórmulas (1) y (2), á A, B, C, a, b, c, φ, ψ, θ, por los suplementos de a, b, c, A, B, C, ψ, φ, θ, respectivamente.

La solucion dada por este método es evidentemente ménos sencilla que la precedente.

154. Ejemplo.—*Se dan los lados* a, b *y el ángulo* A, *opuesto al primer lado:*

$$a = 113^\circ\,2'\,56'',64 \quad b = 82^\circ\,39'\,28'',40 \quad A = 116^\circ\,20'\,2''\,20.$$

calcular los ángulos B, C *y el lado* c.

MANERA DE CALCULAR.

Cálculo del ángulo B.

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}.$$

log sen b........................ $\bar{1},9964245$
— log sen a...................... $0,0361320$
log sen A........................ $\bar{1},9524164$

log sen B........................ $\bar{1},9849729$

$$B \ldots\ldots \begin{cases} 75^\circ\ 0'\ 51'',60 = M, \\ 104^\circ\ 59'\ 8'',40 = 180^\circ - M, \end{cases}$$

Cálculo del ángulo C.

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\cot A}{\cos b},$$

$$\operatorname{tang} P = -\frac{\cot M}{\cos a},$$

$$C = \psi \pm P.$$

log — cot A...... $\bar{1},6945773$
— log cos b....... $0,8934910$

log — tang ψ..... $0,5880683$
ψ............. $104^\circ\ 28'\ 36'',44$

log cot M........ $\bar{1},4276177$
— log — cos a.... $0,4072468$

log tang P....... $\bar{1},8348645$
P............ $34^\circ\ 21'\ 37'',25$

$$C = \psi \pm P \ldots \begin{cases} 70^\circ\ 6'\ 59'',19 \\ 138^\circ\ 50'\ 13'',69 \end{cases}$$

Cálculo del lado c.

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} b \cos A$$
$$= \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A \operatorname{tang} \psi,$$
$$\operatorname{tang} N = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A \operatorname{tang} P.$$
$$c = \varphi \pm N.$$

log sen b......... $\bar{1},9964245$
log sen A........ $\bar{1},9524164$
log — tang ψ..... $0,5880683$

log — tang φ..... $0,5369092$
φ............ $106^\circ\ 11'\ 47'',85$

log sen b......... $\bar{1},9964245$
log sen A........ $\bar{1},9524164$
log tang P........ $\bar{1},8348645$

log tang N....... $\bar{1},7837054$
N............ $31^\circ\ 17'\ 16'',79$

$$c = \varphi \pm N \ldots \begin{cases} 74^\circ\ 54'\ 31'',06 \\ 137^\circ\ 29'\ 4'',64 \end{cases}$$

Primera solucion.

$B = 75^\circ\ 0'\,51'',60 \quad C = 70^\circ\ 6'\,59'',19 \quad c = 74^\circ\,54'\,31'',06.$

Segunda solucion.

$B = 104^\circ\,59'\ 8'',40 \quad C = 138^\circ\,50'\,13'',69 \quad c = 137^\circ\,29'\ 4'',64.$

Discusion de los casos que pueden admitir dos soluciones.

155. Los dos últimos casos de los triángulos esféricos son los únicos que pueden admitir dos soluciones, y aun estos no las admiten siempre. Las fórmulas que se refieren á estos dos casos hacen conocer el número de soluciones y determinan sin ambigüedad los elementos de cada una de ellas; no está sin embargo excluido de interés el estudio de estos dos problemas; pero, puesto que se refieren uno á otro, segun ya hemos dicho, vamos á presentar aquí la discusion del caso en que se nos dan dos lados a, b, y el ángulo opuesto á uno de ellos.

Si $a = b$, se tiene tambien $A = B$, y las fórmulas de Néper dan

$$\cot \frac{1}{2} C = \operatorname{tang} A \cos a, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \operatorname{tang} a \cos A.$$

Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que tang A y cos a, y cos A y tang a, tengan el mismo signo, es decir, que A y a sean los dos menores ó los dos mayores que 90 grados.

En este caso solo hay una solucion.

Pasemos al caso general. Es necesario, para que el problema sea posible, que $\dfrac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$ sea menor que 1; si se cumple esta condicion, hay dos valores de B que satisfacen á la ecuacion $\operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$; una de ellas, M, es menor que 90 grados, y la otra, M', es igual á $180^\circ - M$.

Para que uno de los valores de B responda á la cuestion, se necesita y basta (núm 149) que $A - B$ y $a - b$ tengan el mismo signo. Así, la condicion para que M responda á la cuestion es que $A - M$ sea del mismo signo que $a - b$; lo mismo, para que M' sea un valor que verifique la cuestion es que $A - M'$ sea del mismo signo que $a - b$.

1.° Supongamos $A < 90°$ y $b < 90.°$

Si a es $< b$, la fórmula $\operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$, da $M > A$, y con mayor razon, $M' > A$; hay, pues, dos soluciones.

Si a es $> b$, se puede tener

$$a + b < 180° = 180° > 180°.$$

En el primer caso, se tiene $b < 180° - a$, $\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} a$; entonces M es $< A$. Pero siendo $M' > A$, no hay más que una solucion. En el caso de $a + b = 180°$, se tiene $b = 180° - a$, $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a$; entonces $M = A$ y $M' > A$; no hay ninguna solucion. En el caso de ser $a + b > 180°$, se tiene $b > 180° - a$, $\operatorname{sen} b > \operatorname{sen} a$; entonces M es $> A$, y con más razon $M' > A$; no hay ninguna solucion, pues, en este caso.

2.° Supongamos $A < 90°$, y $b = 90°$.

La fórmula $B = \dfrac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$, nos da aún $M > A$, y por consiguiente, $M' > A$, á no ser que se tenga $a = 90°$, en cuyo caso se tiene $M = A$. Hay, pues, dos soluciones si es $a < 90°$, y no hay ninguna solucion si es $a = 90°$ ó $> 90°$.

3.° Supongamos $A < 90°$ y $b > 90°$.

Si a es $< b$, puede suceder que sea

$$a + b < 180° = 180° > 180°.$$

En el primer caso, se tiene $b < 180° - a$, $\operatorname{sen} b > \operatorname{sen} a$; entonces es $M > A$, y con mayor razon $M' > A$; hay, pues, dos soluciones.

En el caso de $a + b = 180°$, se tiene $b = 180° - a$, $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a$; entonces $M = A$, $M' > A$; no hay más que una solucion.

En el caso de $a + b > 180°$, se tiene $b > 180° - a$, $\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} a$; entonces es $M < A$, pero como $M' > A$; hay todavía una solucion.

Si es $a > b$, se tiene sen $a <$ sen b, puesto que a y b son obtusos; entonces se tiene $M > A$, y con más razon $M' > A$; no hay ninguna solucion.

Las hipótesis $A = 90^\circ$, $A > 90^\circ$, se discuten de la misma manera; se pueden comprender todos los resultados en el cuadro siguiente:

$A < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a < b$	dos soluciones,
		$a = b$	una solucion,
		$a < b$ y $a + b < 180^\circ$....	una solucion,
		$a > b$ y $a + b =$ ó $> 180^\circ$	ninguna solucion;
	$b = 90^\circ$	$a < b$	dos soluciones,
		$a =$ ó $> b$	ninguna solucion;
	$b > 90^\circ$	$a < b$ y $a + b < 180^\circ$....	dos soluciones,
		$a < b$ y $a + b =$ ó $> 180^\circ$	una solucion,
		$a =$ ó $> b$	ninguna solucion;
$A = 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a = b$ ó $< b$	ninguna solucion,
		$a > b$ y $a + b < 180^\circ$....	una solucion,
		$a > b$ y $a + b =$ ó $> 180^\circ$	ninguna solucion;
	$b = 90^\circ$	$a = b$	una infinidad de soluciones,
		$a \gtrless b$	ninguna solucion;
	$b > 90^\circ$	$a < b$ y $a + b =$ ó $< 180^\circ$	ninguna solucion,
		$a < b$ y $a + b > 180^\circ$. ..	una solucion,
		$a =$ ó $> b$.	ninguna solucion;
$A > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a =$ ó $< b$	ninguna solucion,
		$a > b$ y $a + b =$ ó $< 180^\circ$	una solucion,
		$a > b$ y $a + b > 180^\circ$....	dos soluciones;
	$b = 90^\circ$	$a =$ ó $< b$	ninguna solucion,
		$a > b$	dos soluciones;
	$b > 90^\circ$	$a < b$ y $a + b =$ ó $< 180^\circ$	ninguna solucion,
		$a < b$ y $a + b > 180^\circ$...	una solucion,
		$a = b$	una solucion,
		$a > b$	dos soluciones.

Problemas de Trigonometría esférica.

156. Problema I.—*Calcular el volúmen de un paralelepípedo oblícuo, conociendo las longitudes de sus aristas, y los ángulos que estas aristas forman entre sí.*

Sean α, β, γ las tres aristas que concurren á uno de los vértices del paralelepípedo. Desde este vértice como centro, con un rádio igual á la unidad, describamos una esfera, que cortará las caras determinadas por los aristas β y γ, γ y α, α y β segun un triángulo esférico. Los lados a, b, c de este triángulo, serán precisamente los ángulos planos dados del ángulo triedro, que tiene por vértice el centro de la esfera, y los ángulos A, B, C, serán iguales á los diedros de dicho triedro.

La base del paralelepípedo tiene por medida $\alpha\,\beta$ sen c; si, pues, H designa su altura, el volúmen pedido V será

$$V = \alpha\,\beta \operatorname{sen} c \times H.$$

Pero si, por el vértice desde el cual hemos bajado la altura H se traza una perpendicular H' sobre la arista α, y unimos el pié de H' con el de H, esta última recta forma con H' un ángulo igual á A, y se tendrá por medio de los triángulos rectángulos

$$H' = \gamma \operatorname{sen} b,\; H = H' \operatorname{sen} A = \gamma \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A;$$

y, por consiguiente,

$$V = \alpha\,\beta\,\gamma \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A.$$

Además, si se hace $a + b + c = 2p$, se tiene (119)

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}},$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}},$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} A = \frac{2}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)};$$

luego

$$V = 2\alpha\beta\gamma \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)},$$

que se puede escribir (110)

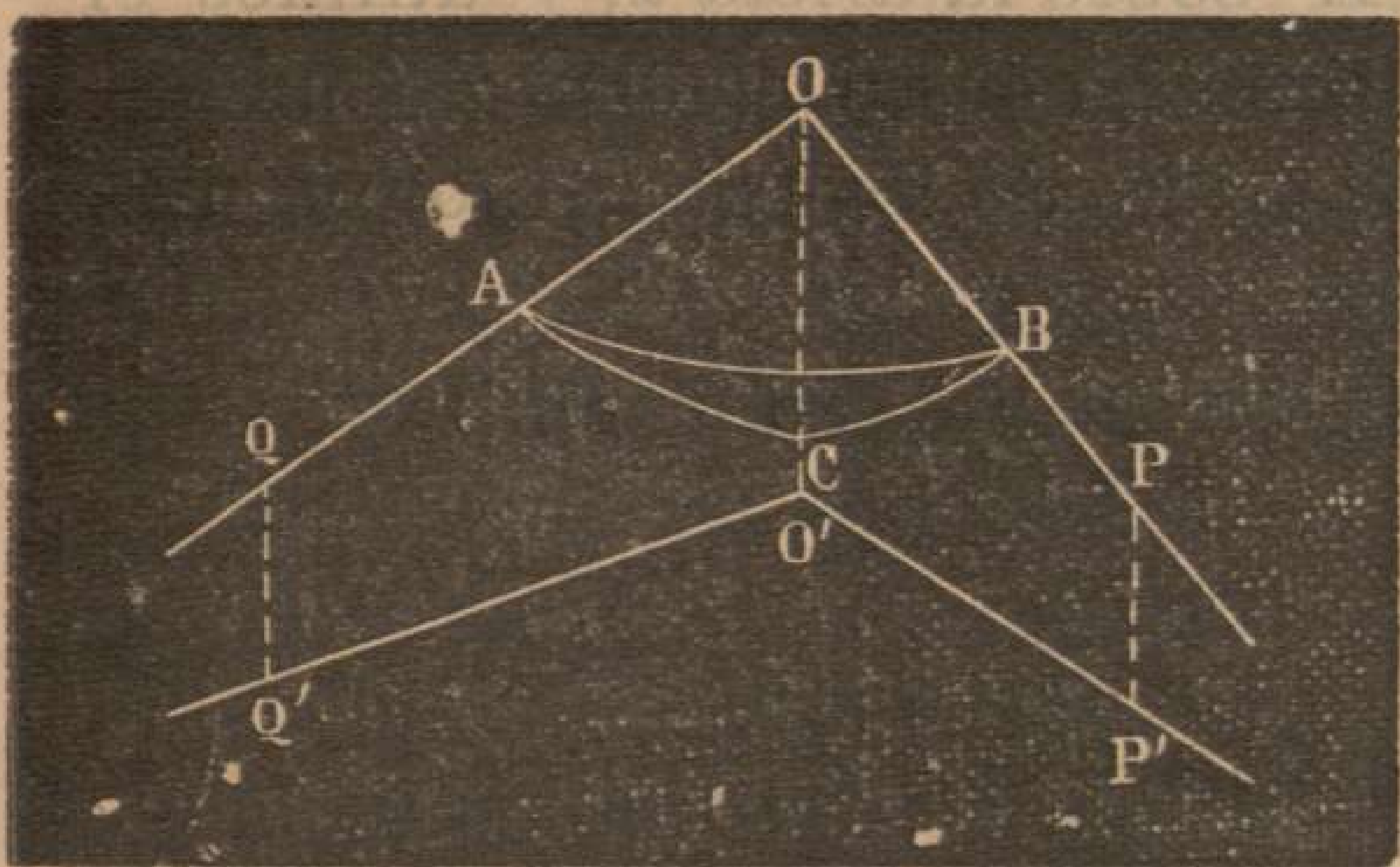
$$V = \alpha\beta\gamma \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}.$$

Escolio.—Si se toma la sexta parte de esta expresion, se tendrá el volúmen de un tetraedro en funcion de tres aristas contíguas α, β, γ, y de los ángulos a, b, c que estas aristas forman entre sí. De esto se deduce fácilmente el volúmen de un tetraedro en funcion de sus seis aristas.

157. Problema II.—*Reducir un ángulo al horizonte.*

Supongamos que un observador colocado en el punto O (fig. 32) haya medido los ángulos formados con la vertical OO' por los rayos visuales OP y OQ dirigidos á dos puntos fijos P y Q, y que tambien haya medido el ángulo POQ formado por los rayos visuales entre sí; se pide hallar el ángulo $P'O'Q'$, que es la proyeccion del POQ sobre el plano horizontal.

(Fig. 32.)



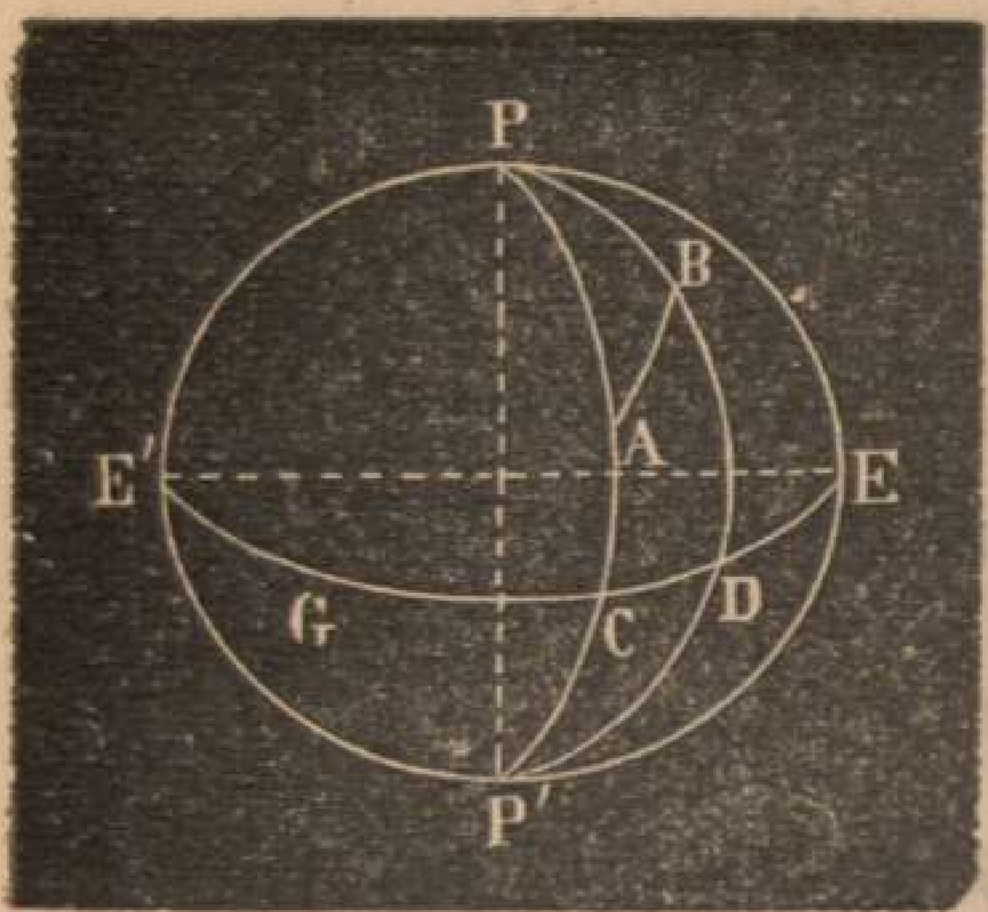
Si se imagina una esfera descrita desde O como centro y con la unidad por rádio, dicha esfera será cortada por las tres caras del ángulo triedro en O, segun un triángulo esférico ABC, cuyos lados serán precisamente los ángulos observados; mientras que el ángulo que queremos hallar $P'O'Q'$ es igual al ángulo C de este triángulo esférico.

De este modo, el problema propuesto queda reducido á uno de los casos de resolucion de triángulos esféricos, resuelto ya en el núm. 142.

158. Problema III.—*Conociendo las latitudes y las longitudes de dos puntos de la superficie de la Tierra, hallar la distancia entre estos dos puntos.*

Sean (fig. 33) P el polo boreal, P' el polo austral, EGE' el ecuador, y G el punto de este círculo, á partir del cual se cuentan las longitudes.

(Fig. 33.)



Supongamos que GE es el sentido de las longitudes orientales, y GE' el de las longitudes occidentales. Sean $PACP'$ y $PBDP'$ los meridianos que pasan por los dos puntos dados, de los cuales se conocen las latitudes AC, BD, y las longitudes GC, GD; sea, por último, AB el arco de círculo máximo que une los puntos A y B. En el triángulo esférico PAB, se conoce el ángulo P y los lados que le comprenden. En efecto, el ángulo P es igual á la diferencia de las longitudes dadas, cuando ambas son ú orientales ú occidentales; y el mismo ángulo P es igual á la suma de las longitudes dadas ó al complemento de esta suma á 360°, cuando una de estas longitudes es oriental y la otra occidental. Además, el lado PA es igual á 90° — ó + la latitud del punto A, segun que esta última es boreal ó austral, y lo mismo el lado PB es igual á 90° — ó + la latitud del punto B.

Convengamos en que las longitudes orientales son positivas y las occidentales negativas, y del mismo modo que las latitudes son positivas ó negativas, segun que sean boreales ó australes. Si se designan por L y L' las longitudes de los puntos A y B, y por λ y λ' sus latitudes, se podrá (146 y 147) calcular el lado $AB = X$, por cualquiera de las fórmulas

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} (\lambda' + \varphi)}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \pm \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\lambda - \lambda')}{\cos \omega}.$$

Cuando se hace uso de fórmula primera, hay que calcular antes el ángulo φ por la fórmula

$$\tan \varphi = \cot \lambda \cos (L' - L);$$

si se quiere, al contrario, emplear el ángulo ω, se le calculará por la fórmula

$$\tan \omega = \pm \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (L - L')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\lambda - \lambda')} \sqrt{\cos \lambda \cos \lambda'}.$$

Supongamos el ángulo X expresado en grados, siendo igual la semi-circunferencia de un meridiano terrestre á 20.000 km.; se tendrá para la longitud de AB en kilómetros, $AB = \frac{X}{9} \times 1000.$

Ejemplo.—*Cuál es la distancia de San Petersburgo á Valparaiso sabiendo que:*

Para San Petersburgo (Observatorio)............	lat sept $= \lambda = \ldots\ldots$	$59^\circ\, 56'\, 30''$,
	long orient $= L = \ldots$	$27^\circ\, 58'\, 13''$;
Para Valparaiso (S. Ant)...	lat aust $= \lambda' = - \ldots$	$33^\circ\, 1'\, 55''$,
	long occid $= L' = -$	$73^\circ\, 57'\, 22''$.

Cálculo del ángulo auxiliar φ.

$$\tan \varphi = \cot \lambda \cos (L' - L).$$

log cot λ.........	$\bar{1}$,7624599
log —cos $(L'-L)$.	$\bar{1}$,3152455
log — tang φ.....	$\bar{1}$,0777054
$180^\circ - \varphi$..........	$6^\circ\, 49'\, 11''$

Cálculo de la distancia x.

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} (\lambda' + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

log sen λ.........	$\bar{1}$,9372751
log sen $(\lambda' + \varphi)$....	$\bar{1}$,8067240
— log — cos φ.....	0,0030837
log — cos x.......	$\bar{1}$,7470828
x......	$123^\circ\, 57'\, 27''$
	13773 kilóm.

Problemas.

1.° Demostrar que, si se unen los vértices de un triángulo esférico con los puntos medios de los lados opuestos, por medio de arcos de círculo máximo, estos arcos se cortarán en un mismo punto O. Si α designa el arco que une el vértice A con el medio del lado a, y que α' y α'' son las partes de α comprendidas, la primera entre el vértice A y el punto O, la segunda entre el punto O y el lado a, se tiene

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}, \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha''} = 2\cos\frac{1}{2}a.$$

2.° Demostrar que los círculos máximos trazados por los vértices de un triángulo esférico perpendicularmente á los lados opuestos, se cortan en dos mismos puntos. Hallar las longitudes de los arcos comprendidos entre uno de los puntos de intersección y los vértices, ó entre los vértices y los lados opuestos.

3.° Resolver un triángulo esférico rectángulo, conociendo la hipotenusa y el rádio del círculo inscrito.

4.° Resolver un triángulo esférico, conociendo un ángulo, el lado opuesto y la suma ó diferencia de los otros dos lados.

5.° Resolver un triángulo esférico, conociendo un ángulo, uno de los lados que le comprenden, y la suma ó diferencia de los otros dos lados.

6.° Si en un triángulo esférico se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}a} = \frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}b} = \frac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}c} = 1;$$

dos de los tres lados son respectivamente iguales á los lados opuestos, mientras que el tercer lado es el suplemento del ángulo opuesto; además, la tangente de uno de los arcos $45^\circ + \frac{1}{2} a$, $45^\circ + \frac{1}{2} b$, $45^\circ + \frac{1}{2} c$, es igual al producto de las tangentes de los otros arcos. Se propone demostrar estos resultados, y además resolver el triángulo cuando se conocen dos lados, ó un lado y la suma de los otros dos, ó un lado y la diferencia de los otros dos.

7.° Resolver un triángulo esférico, conociendo las sumas obtenidas de sumar cada ángulo con el lado que le es opuesto.

Si se hace, para abreviar,

$$A + a = 180 + 2\alpha,\ B + b = 180^\circ + 2\beta,\ C + c = 180^\circ + 2\gamma,\ \text{y}\ \alpha + \beta + \gamma = 2\omega,$$

despues que se determine un ángulo auxiliar φ, comprendido entre 0 y 180° por la fórmula

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{+2\sqrt{\cos\omega \cos(\omega - \alpha)\cos(\omega - \beta)\cos(\omega - \gamma)}}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma},$$

se podrán calcular las diferencias $A - a$, $B - b$, $C - c$, por las fórmulas

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - a) = \cot\alpha \cos\varphi,$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B - b) = \cot\beta \cos\varphi,$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C - c) = \cot\gamma \cos\varphi.$$

CAPÍTULO V.

COMPLEMENTO DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.

De las expresiones imaginarias.

160. Conforme al uso adoptado, representaremos por i la imaginaria $\sqrt{-1}$, y llamaremos *expresion imaginaria* toda expresion de la forma $A + B\,i$, en la que A y B son cantidades reales, positivas, nulas ó negativas.

Cuando sepamos que dos cantidades reales A' y B' son respectivamente iguales á otras dos A y B, diremos que las expre- $A + B\,i$ y $A' + B'\,i$ son iguales.

Es evidente que si tenemos muchas igualdades de la forma

$$A + B\,i = A' + B'\,i,$$

y las multiplicamos miembro á miembro, operando como si i fuese una cantidad real, obtendremos una igualdad, en la que los coeficientes de las mismas potencias de i serán iguales; la igualdad subsistirá, pues, cuando rebajemos los exponentes de i á ménos de 2, haciendo uso de la ecuacion $i^2 = -1$.

Cualquiera que sea la expresion imaginaria $A + B\,i$, podemos siempre encontrar una cantidad *positiva* ρ y un arco a, tales, que tengamos

$$A = \rho \cos a, \qquad B = \rho \operatorname{sen} a.$$

En efecto, es suficiente tomar á

$$\rho = +\sqrt{A^2 + B^2},$$

y además,

$$\cos a = \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2}}, \ \text{sen}\, a = \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2}};$$

por consiguiente, podemos escribir

$$A + Bi = \rho \cos a + i \rho \,\text{sen}\, a,$$

ó, si se quiere,

$$A + Bi = \rho\, (\cos a + i \,\text{sen}\, a).$$

Cuando una expresion imaginaria la ponemos de este modo bajo la forma

$$\rho\, (\cos a + i \,\text{sen}\, a),$$

la cantidad positiva ρ se llama su *módulo*; el arco a es su *argumento*.

El módulo de una expresion imaginaria dada es determinado, pero el argumento no lo es completamente, porque una expresion imaginaria no cambia cuando se añade ó quita á su argumento un número cualquiera de circunferencias.

Las cantidades positivas ó negativas pueden ser consideradas como expresiones imaginarias, cuyo módulo es igual á su valor absoluto, y el argumento un número par ó impar de semicircunferencias; porque, siendo A un número positivo, tenemos, cualquiera que sea el entero K,

$$+A = A\,(\cos 2K\pi + i \,\text{sen}\, 2K\pi),$$
$$-A = A\,[\cos (2K+1)\pi + i \,\text{sen}\, (2K+1)\pi].$$

Para que dos expresiones imaginarias sean iguales, es necesario y suficiente que sus módulos sean iguales y que sus argumentos difieran en un múltiplo de la circunferencia. Supongamos, en efecto, que las expresiones

$$\rho\, (\cos a + i \,\text{sen}\, a) \text{ y } \rho'\, (\cos a' + i \,\text{sen}\, a')$$

sean iguales; tenemos

$$\rho \cos a = \rho' \cos a', \ \rho \operatorname{sen} a = \rho' \operatorname{sen} a',$$

y si sumamos estas ecuaciones despues de haberlas elevado al cuadrado, nos resulta $\rho^2 = \rho'^2$, de donde $\rho = \rho'$; siendo iguales los módulos, los arcos a y a' tienen el mismo seno y el mismo coseno; por consiguiente, no pueden diferir, si son desiguales, más que en un múltiplo de la circunferencia.

Los argumentos de dos expresiones imaginarias *conjugadas*, como $A + B\,i$ y $A - B\,i$, tienen el mismo coseno, mientras que sus senos son iguales y de signos contrarios; la suma de estos argumentos es, por consiguiente, igual á un múltiplo de la circunferencia.

Operaciones con las expresiones imaginarias.—Fórmula de Moivre para un exponente entero y positivo.

161. Teorema.—*El producto de dos expresiones imaginarias es una expresion imaginaria, cuyo módulo y argumento son respectivamente el producto de los módulos y la suma de los argumentos de los factores.*

Consideremos desde luego dos expresiones imaginarias $\cos a + i \operatorname{sen} a$ y $\cos b + i \operatorname{sen} b$, cuyo módulo es la unidad. Si efectuamos su producto, resulta

$$(\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) = \cos a \cos b \\ + i(\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b) + i^2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

ó á causa de ser $b^2 = -1$, sustituyendo este valor, resulta

$$(\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) = (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) \\ + i(\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b).$$

Pero como sabemos que

$$\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos (a + b),$$
$$\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} (a + b),$$

podemos escribir

$$(\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) = \cos (a + b) + i \operatorname{sen} (a + b).$$

Sean ahora

$$\rho (\cos a + i \operatorname{sen} a),\ \rho' (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

dos expresiones imaginarias, cuyos módulos respectivos son ρ y ρ'; tenemos

$$\rho (\cos a + i \operatorname{sen} a) \times \rho' (\cos b + i \operatorname{sen} b) = \rho\rho'$$
$$\times (\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b),$$

y, por consiguiente,

$$\rho (\cos a + i \operatorname{sen} a) \times \rho' (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$
$$= \rho\rho' [\cos (a + b) + i \operatorname{sen} (a + b)].$$

COROLARIO I.—*El cociente de dos expresiones imaginarias es una expresion imaginaria cuyo módulo y argumento son respectivamente el cociente de los módulos y la diferencia de los argumentos del dividendo y divisor.*

En efecto, sean las dos expresiones imaginarias

$$\rho (\cos a + i \operatorname{sen} a) \text{ y } \rho' (\cos b + i \operatorname{sen} b);$$

tenemos

$$\frac{\rho}{\rho'} [\cos (a - b) + i \operatorname{sen} (a - b)] \times \rho' (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$
$$= \rho (\cos a + i \operatorname{sen} a),$$

de donde

$$\frac{\rho\,(\cos a + i \operatorname{sen} a)}{\rho'\,(\cos b + i \operatorname{sen} b)} = \frac{\rho}{\rho'}\,[\cos\,(a-b) + i \operatorname{sen}\,(a-b)].$$

Colorario II.—*El módulo y el argumento del producto de un número cualquiera de expresiones imaginarias es igual al producto y á la suma de los argumentos de estos factores.*

En efecto, para multiplicar los dos primeros factores, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos. Para multiplicar este producto por el tercer factor, es necesario multiplicar su módulo por el de el tercer factor, y añadir á su argumento el de este tercer factor, y así sucesivamente.

Corolario III.—*Para elevar una expresion imaginaria á una potencia entera y positiva del grado* m, *es necesario elevar su módulo á la potencia* m, *y multiplicar el argumento por* m.

Esto resulta inmediatamente del corolario II, suponiendo iguales entre sí todas las expresiones imaginarias que se han considerado.

Sea, en particular, $\cos a + i \operatorname{sen} a$ una expresion imaginaria, cuyo módulo es la unidad; tenemos

$$(\cos a + i \operatorname{sen} a)^m = \cos ma + i \operatorname{sen} ma;$$

en esta igualdad consiste la fórmula de Moivre.

162. Teorema.—*El módulo de la suma de dos expresiones imaginarias está comprendido entre la suma y la diferencia de los módulos de las partes.*

En efecto, sean las dos expresiones imaginarias

$$\rho\,(\cos a + i \operatorname{sen} a),\ \rho'\,(\cos a' + i \operatorname{sen} a'),$$

y supongamos

$$R\,(\cos A + i \operatorname{sen} A) = \rho\,(\cos a + i \operatorname{sen} a) + \rho'\,(\cos a' + i \operatorname{sen} a');$$

tendremos

$$R \cos A = \rho \cos a + \rho' \cos a',\ R \text{ sen } A = \rho \text{ sen } a + \rho' \text{ sen } a'.$$

Si sumamos estas igualdades despues de haberlas elevado al cuadrado, y extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de la igualdad resultante, obtendremos

$$R = \sqrt{\rho^2 + 2\rho\rho' \cos(a - a') + \rho'^2};$$

tenemos, pues,

$$R \overset{=}{<} \sqrt{(\rho + \rho')^2} \text{ ó } \overset{=}{<} \rho + \rho' \ R \geqq \sqrt{(\rho - \rho)^2} \text{ ó } \geqq \pm (\rho - \rho').$$

De aquí se deduce la proposicion siguiente, más general que la anterior:

Corolario.—*El módulo de la suma de un número cualquiera de expresiones imaginarias no puede ser mayor que la suma de los módulos de estas expresiones.*

Multiplicacion de los arcos.

163. La fórmula de Moivre nos da inmediatamente los valores de cos ma y de sen ma, en funcion de cos a y de sen a. En efecto, desarrollando el segundo miembro de la igualdad

$$\cos ma + i \text{ sen } ma = (\cos a + i \text{ sen } a)^m;$$

teniendo cuidado de hacer los exponentes de i menores que 2, por medio de la ecuacion $i^2 = -1$, tendremos

$$\cos ma + i \text{ sen } ma = \left[\cos^m a - \frac{m(m-1)}{1 \times 2} \cos^{m-2} a \text{ sen}^2 a \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \cos^{m-4} a \text{ sen}^4 a - \ldots\ldots \right]$$

$$+ i \left[\frac{m}{1} \cos^{m-1} a \operatorname{sen} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} \cos^{m-3} a \operatorname{sen}^3 a \right.$$
$$\left. + \frac{m \ldots\ldots (m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cos^{m-5} a \operatorname{sen}^5 a - \ldots\ldots \right];$$

por consiguiente, tenemos

$$(1) \left\{ \begin{aligned} &\cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1 \times 2} \cos^{m-2} a \operatorname{sen}^2 a \\ &\qquad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \cos^{m-4} a \operatorname{sen}^4 a \\ &- \ldots\ldots \\ &\qquad\qquad \operatorname{sen} ma = m \cos^{m-1} a \operatorname{sen} a \\ &\qquad\qquad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} \cos^{m-3} a \operatorname{sen}^3 a \\ &\quad + \frac{m(m-1) \ldots\ldots (m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cos^{m-5} a \operatorname{sen}^5 a - \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Estas fórmulas nos dan los valores de $\cos ma$ y de $\operatorname{sen} ma$ en funcion de $\cos a$ ó de $\operatorname{sen} a$. Remplazando sucesivamente $\operatorname{sen} a$ por $\sqrt{1 - \cos^2 a}$ y $\cos a$ por $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$, obtendremos las expresiones de $\cos ma$ y de $\operatorname{sen} ma$ en funcion de $\cos a$ ó de $\operatorname{sen} a$ solamente: más adelante daremos á conocer estas expresiones, pero aquí nos limitaremos á hacer una advertencia importante.

Los términos de los segundos miembros de las ecuaciones (1) son todos del grado m con relacion á $\operatorname{sen} a$ y á $\cos a$; la primera de estas ecuaciones no contiene más que potencias de $\operatorname{sen} a$, y potencias pares ó impares de $\cos a$, segun que m sea par ó impar. La segunda ecuacion, al contrario, no contiene más que potencias impares de $\operatorname{sen} a$, y potencias impares ó pares de $\cos a$, segun que m sea par ó impar. De esto podemos deducir:

1.° Que $\cos ma$ y $\dfrac{\operatorname{sen} ma}{\operatorname{sen} a}$ se pueden expresar, en funcion de $\cos a$, por polinomios enteros y racionales, el primero del grado m, el segundo del grado $m - 1$, y en los que todos sus términos tienen grados equivalentes.

2.° Que $\cos ma$ y $\dfrac{\operatorname{sen} ma}{\cos a}$, si m es par, ó $\operatorname{sen} ma$ y $\dfrac{\cos ma}{\cos a}$, si m es impar, se pueden expresar, en funcion de $\operatorname{sen} a$, por polinomios enteros y racionales, el primero del grado m, el segundo del grado $m - 1$, y en los que todos sus términos tienen grados equivalentes.

Si en la fórmula

$$\cos ma + i \operatorname{sen} ma = (\cos a + i \operatorname{sen} a)^m,$$

cambiamos a en $-a$, resulta

$$\cos ma - i \operatorname{sen} ma = (\cos a - i \operatorname{sen} a)^m;$$

y se saca de las dos ecuaciones precedentes

$$(2) \quad \begin{cases} \cos ma = \dfrac{(\cos a + i \operatorname{sen} a)^m + (\cos a - i \operatorname{sen} a)^m}{2} \\ \operatorname{sen} ma = \dfrac{(\cos a + i \operatorname{sen} a)^m - (\cos a - i \operatorname{sen} a)^m}{2i}; \end{cases}$$

y es útil frecuentemente tomar bajo esta forma los valores de $\cos ma$ y de $\operatorname{sen} ma$.

Dividiendo la segunda de las ecuaciones (1) por la primera, resulta

$$\frac{\operatorname{sen} ma}{\cos ma}$$

$$= \frac{m \cos^{m-1} a \operatorname{sen} a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} \cos^{m-3} \operatorname{sen}^3 a + \dots\dots}{\cos^m a - \dfrac{m(m-1)}{1 \times 2} \cos^{m-2} a \operatorname{sen}^2 a + \dots\dots}$$

$$= \frac{m \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} \dfrac{\operatorname{sen}^3 a}{\cos^3 a} + \dots\dots}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1 \times 2} \dfrac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} + \dots\dots},$$

ó (3)

$$\operatorname{tang} ma = \frac{m \operatorname{tang} a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} \operatorname{tang}^3 a + \ldots\ldots}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1 \times 2} \operatorname{tang}^2 a + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \operatorname{tang}^4 a - \ldots\ldots}$$

fórmula que nos da á conocer tang ma en funcion racional de tang a.

Division de los arcos.

164. Supongamos que se nos pida encontrar $\cos \frac{a}{m} = x$, conociendo $\cos a = A$.

Si en la primera de las ecuaciones (1) del núm. 163 cambiamos a en $\frac{a}{m}$, y reemplazamos en seguida $\cos \frac{a}{m}$, sen $\frac{a}{m}$, y $\cos a$ por x, $\sqrt{1 - x^2}$ y A, obtendremos una ecuacion de la forma (1) $f(x) - A = o$, en la que $f(x)$ representa un polinomio del grado m, y cuyos términos tienen grados equivalentes.

El problema depende de este modo de una ecuacion del grado m. Sea α uno cualquiera de los arcos que tienen A por coseno; los valores de a estarán comprendidos en la fórmula $2K\pi \pm \alpha$, y satisfaremos la ecuacion (1) tomando para x el coseno de uno cualquiera de los arcos $\frac{2K\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}$, $\frac{2K\pi}{m} - \frac{\alpha}{m}$, en donde K indica siempre un entero indeterminado. Si damos á K, en una de estas fórmulas, dos valores que se diferencien en un múltiplo de m, obtendremos dos arcos que se diferenciarán en un múltiplo de la circunferencia, y que tendrán, por consiguiente, el mismo coseno; basta, pues, dar á K, m valores consecutivos, cualquiera, por ejemplo, 0, 1, 2, ..., $m - 1$. Es inútil considerar las dos fórmulas, porque si damos á K un cierto valor K' en la primera, y el valor $m - K'$ en la segunda, se obtienen dos arcos cuya suma es igual á 2π, y que tienen, por consiguiente, el mismo coseno. Segun esto, la incógnita x no es susceptible más que de m valores que son generalmente distintos; estos valores son los de los cosenos de los m arcos

$$\frac{\alpha}{m},\ \frac{2\pi}{m}+\frac{\alpha}{m},\ \frac{4\pi}{m}+\frac{\alpha}{m},\ \ldots\ldots,\ \frac{2(m-1)\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}.$$

Conviene observar que, si m es un número compuesto np, la resolucion de la ecuacion (1), que es del grado m, se descompone inmediatamente en la resolucion de dos ecuaciones, una del grado n y otra del grado p. En efecto, si suponemos $\cos\frac{a}{n}=y$, tendremos, para determinar x, una ecuacion del grado p, tal, que $\psi(x)-y=o$, dado y por una ecuacion del grado n, $\omega(y)-A=o$.

La ecuacion (1) resultará, pues, de la eliminacion de y entre estas dos últimas. Del mismo modo, si n es un número compuesto $q\,r$, la resolucion de la ecuacion $\omega(y)-A=o$, se reducirá á la de dos ecuaciones de los grados q y r; y así sucesivamente.

165. Supongamos, en segundo lugar, que se nos pida encontrar $\operatorname{sen}\frac{a}{m}=x$, conociendo $\operatorname{sen} a=A$.

Si en la segunda de las ecuaciones (1) del núm. 163 cambiamos a en $\frac{a}{m}$, y sustituimos en seguida $\operatorname{sen}\frac{a}{m}$, $\cos\frac{a}{m}$ y $\operatorname{sen} a$ por x, $\sqrt{1-x^2}$ y A, obtendremos, si m es impar, una ecuacion de la forma $f(x)-A=o$, designando $f(x)$ un polinomio entero y racional del grado m; cuyos términos son todos de grado impar; vemos, pues, que el problema depende de la resolucion de una ecuacion del grado m. Pero si m es par, obtenemos una ecuacion de la forma $\sqrt{1-x^2}\,f(x)=A$, en la que $f(x)$ designa un polinomio del grado $m-1$, cuyos términos son todos de grado impar. Elevando al cuadrado los dos miembros, resulta

$$(1-x^2)f(x)^2-A^2=o;$$

vemos que el problema depende de la resolucion de una ecuacion del grado $2m$. Pero esta ecuacion puede reducirse á una del grado m, suponiendo $x^2 = \varepsilon$, porque no contiene más que potencias pares de x.

Se llega al mismo resultado por consideraciones de que hemos hecho ya uso. Si representamos por α el arco positivo más pequeño cuyo seno sea A, y por K un entero indeterminado, los valores de x serán los senos de los arcos

$$\frac{2K\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{(2K+1)\pi}{m} - \frac{\alpha}{m}.$$

Es suficiente dar á K, m valores consecutivos, por ejemplo, $0, 1, 2, \ldots\ldots m-1$; porque á dos valores de K que difieran en un múltiplo de m, corresponden, en cada fórmula, dos arcos que tienen el mismo seno. Dos arcos de una misma fórmula no pueden tener el mismo seno mientras que α sea indeterminado, porque la diferencia de estos arcos es inferior á 2π, y su suma, que depende de a, no puede reducirse en general á un número impar de semi-circunferencias. Vamos á ver ahora si dos arcos, tales como

$$\frac{2K\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{(2K'+1)\pi}{m} - \frac{\alpha}{m},$$

pueden tener el mismo seno. La diferencia de estos arcos depende de α, y no puede ser en general un múltiplo de la circunferencia; su suma es igual á $\frac{2K+2K'+1}{m}\pi$, y no puede ser un múltiplo de la semi-circunferencia si m es par; en este caso, x es susceptible de $2m$ valores distintos. Pero, si m es impar, podemos siempre, cualquiera que sea el número K comprendido entre cero y m, encontrar un entero K' comprendido entre los mismos límites, y tal que se tenga

$$2K + 2K' + 1 = m \text{ ó } 3m,$$

es decir,

$$K' = \frac{m-1}{2} - K \text{ ó } = \frac{3m-1}{2} - K;$$

pues si m es impar, x no es susceptible más que de m valores. Se reconoce fácilmente que los m arcos de cada fórmula tienen, en el caso de ser m par, sus senos iguales dos á dos y de signos contrarios.

El problema de que nos acabamos de ocupar tiene las mismas advertencias que el anterior.

166. Veríamos del mismo modo que, si se nos diese cos a, la determinacion de sen $\frac{a}{m}$ dependeria de una ecuacion del grado $2m$, y que si se nos diera sen a, la de cos $\frac{a}{m}$ dependeria de una ecuacion del grado m ó del grado $2\,m$, segun que m fuese impar ó par.

Por último, cuando se nos da tang a, la determinacion de tang $\frac{a}{m}$ depende en todos los casos de la resolucion de una ecuacion del grado m.

Resolucion de la ecuacion binomia $z^m = 1$.

167. Nos vamos á proponer encontrar las raíces de la ecuacion binomia (1) $z^m = 1$. Si la ecuacion propuesta admite una raíz imaginaria, esta raíz tendrá por módulo la unidad (161, Corolario III), y será, por consiguiente, de la forma $\cos\varphi + i \operatorname{sen} \varphi$. Para que esta expresion sea efectivamente raíz, es necesario y suficiente que tengamos

$$\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi = 1,$$

es decir,

$$\cos m\varphi = 1,\ \operatorname{sen} m\varphi = o,$$

de donde

$$m\varphi = 2K\pi \text{ y } \varphi = \frac{2K\pi}{m},$$

representando K un entero arbitrario. La ecuacion (1) queda, pues, satisfecha por todos los valores de z comprendidos en la fórmula

$$(2) \qquad z = \cos \frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{m}.$$

Para que dos valores K' y K'' de K correspondan á dos valores iguales de z, es necesario y suficiente (160) que la diferencia de los argumentos $\frac{2K'\pi}{m}$, $\frac{2K''\pi}{m}$ sea un múltiplo de 2π, ó en otros términos, que $K' - K''$ sea un múltiplo de m. La fórmula (2) nos da, pues, m valores distintos de z, y no nos da más que m; obtendremos estos valores dando á K, m valores consecutivos cualquiera comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$, por ejemplo, $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots m - 1$.

La ecuacion (1) tiene una ó dos raíces reales, segun que m sea impar ó par; las raíces imaginarias son conjugadas dos á dos. En todos los casos, obtenemos dos raíces conjugadas que dan para K dos valores complementarios de m en la fórmula (2); porque cambiando K en $m - K$, esta fórmula se convierte en la siguiente:

$$z = \cos \frac{2K\pi}{m} - i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{m}.$$

De esto resulta que las m raíces de la ecuacion (1) están todas comprendidas en la fórmula

$$z = \cos \frac{2K\pi}{m} \pm i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{m},$$

en la que es suficiente dar á K los valores $0, 1, 2\ldots\ldots \frac{m}{2}$ si m es par, y los valores $0, 1, 2\ldots\ldots \frac{m-1}{2}$ si m es impar.

En el primer caso, las dos raíces reales corresponden á $K = o$ y á $K = \frac{m}{2}$; en el segundo caso, la raíz real corresponde á $K = o$.

168. Supongamos que m sea un número impar $2n+1$; la ecuacion $z^m - 1 = o$ puede reducirse á una del grado n. En efecto, si dividimos esta ecuacion por $z^n\,(z-1)$, resultará

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) + \ldots + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = o;$$

y si suponemos

$$z + \frac{1}{z} = x \text{ y } z^n + \frac{1}{z^n} = v_n,$$

encontraremos fácilmente

$$v_n = x\,v_{n-1} - v_{n-2}.$$

Como tenemos $v_0 = 2$ y $v_1 = x$, podremos, haciendo uso de la fórmula precedente, expresar v_2, v_3 ..... en funcion de x. Encontraremos de este modo

$$v_2 = x^2 - 2,\ v_3 = x^3 - 3x,\ v_4 = x^4 - 4x^2 + 2 \ldots..,$$

y la ecuacion propuesta se trasformará en una ecuacion $\varphi(x) = o$, del grado n. La expresion de las raíces de la propuesta es

$$z = \cos\frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m},$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{z} = \cos\frac{2K\pi}{m} - i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m},$$

las raíces de la ecuacion en φ están, pues, representadas por la fórmula $\varphi = 2\cos\frac{2K\pi}{m}$ en la que debemos dar á K todos los valores $1, 2, \ldots..., \frac{m-1}{2}$.

169. *Propiedades de las raices de la ecuacion* $z^m = 1$.

1.° Si hacemos

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m},$$

tenemos, por la fórmula de Moivre,

$$\alpha^K = \cos\frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m};$$

por consiguiente, *las* m *raíces de la ecuacion* $z^m = 1$ *pueden representarse por* $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2 \ldots.. \alpha^{m-1}$, *es decir, por las potencias de una de ellas.*

2.° Si tenemos $m = n\,p$, siendo n y p dos números primos entre sí, obtendremos todas las raíces de $z^m = 1$, multiplicando las n raíces de $z^n = 1$ por las p raíces de $z^p = 1$.

En efecto, sea $\alpha = \cos\dfrac{2K\pi}{np} + i\,\dfrac{\operatorname{sen} 2K\pi}{np}$ una raíz de $z^{np} = 1$; siendo n y p primos entre sí, se pueden encontrar dos enteros ε y η, tales que

$$p\,\varepsilon + n\,\eta = K \text{ ó } \frac{2\varepsilon\pi}{n} + \frac{2\eta\pi}{p} = \frac{2K\pi}{np},$$

y ahora tenemos

$$\alpha = \left(\cos\frac{2\varepsilon\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\varepsilon\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\eta\pi}{p} + i \operatorname{sen}\frac{2\eta\pi}{p}\right);$$

de donde se deduce que toda raíz de $z^{np} = 1$ es el producto de una raíz de $z^n = 1$ por una raíz de $z^p = 1$; por consiguiente, *las* np *raíces de la ecuacion* $z^{np} = 1$ *son los productos que se obtienen multiplicando las* n *raíces de* $z^n = 1$ *por las* p *raíces de* $z^p = 1$.

3.° *La resolucion algebráica de la ecuacion* $z^m = 1$, *cuando* m *es un número compuesto, se descompone en la resolucion de ecuaciones de la misma forma, y cuyo grado son los números primos ó potencias de números primos que dividen á* m.

En efecto, sea $m = npq \ldots..$; siendo $n, p, q, \ldots..$ números primos ó potencias de números primos desiguales, tendremos las raíces de la ecuacion $z^{np} = 1$ multiplicando las de

$z^n = 1$ por las de $z^p = 1$. Igualmente, tendremos las raíces de $z^{npq} = 1$ multiplicando las de $z^{np} = 1$ por las de $z^q = 1$, y así sucesivamente. De donde se puede deducir que las diversas raíces de $z^m = 1$ se obtendrán todas multiplicando una raíz de $z^n = 1$ por una raíz de $z^p = 1$, despues por una raíz de $z^q = 1, \ldots\ldots$

De los polígonos regulares.

170. Si suponemos una circunferencia dividida en m partes iguales, y unimos los puntos consecutivos de division, formaremos el polígono regular inscrito de m lados. Si n es un número inferior y primo con m, uniendo los puntos de division de n en n, ó lo que es lo mismo, de $m - n$ en $m - n$, no volveremos al punto de partida hasta haber pasado por todos los vértices, y la figura que de este modo habremos formado, es lo que se llama un *polígono estrellado regular*. Pero si m y n tienen un divisor comun θ, no pasaremos más que por un número $\frac{m}{\theta}$ de vértices, y la figura obtenida será un polígono regular de $\frac{m}{\theta}$ lados solamente. Vemos, segun esto, que hay tantos polígonos regulares de m lados como números primos con m é inferiores á la mitad de m.

El problema de la division de la circunferencia en m partes iguales se reduce á la resolucion algebráica de la ecuacion binomia $z^m = 1$; porque hemos visto que las raíces de esta ecuacion las conocemos por la fórmula

$$z = \cos\frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}.$$

Pero $\frac{2K\pi}{m}$ es el arco subtendido por el lado del polígono obtenido uniendo los puntos de division de K en K, y por consiguiente, podremos conocer las líneas trigonométricas de este arco, sabiendo resolver la ecuacion $z^m = 1$.

Por último, hemos visto que si m es un número compuesto, la resolucion de la ecuacion $z^m = 1$ se descompone en la de ecuaciones de la misma forma, pero cuyos grados son números primos ó potencias de números primos que dividen á m; por consiguiente, el problema de la division de la circunferencia en m partes iguales es susceptible de la misma simplificacion.

Vamos á considerar el caso de la division de la circunferencia en tres, en cinco, en quince y en diez y siete partes iguales.

171. *Division de la circunferencia en tres partes iguales.*— Depende de la resolucion de la ecuacion $z^3 - 1 = o$; quitando la raíz 1, resulta $z^2 + z + 1 = o$, y, haciendo $z + \frac{1}{z} = x$, $x + 1 = o$. La raíz -1 de esta ecuacion es $2\cos\frac{2\pi}{3}$ (168), ó $-2\cos\frac{\pi}{3}$, ó $-2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$; tenemos, pues, $2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = 1$. Este es el valor del lado del exágono regular inscrito; de él se deduce fácilmente el lado del triángulo equilátero.

172. *Division de la circunferencia en cinco partes iguales.*— Su resolucion depende de la ecuacion $z^5 - 1 = o$; quitando la raíz 1 y haciendo $z + \frac{1}{z} = x$, resulta $x^2 + x - 1 = o$, que tiene por raíces (168)

$$2\cos\frac{2\pi}{5},\ 2\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5},\ \text{ó}\ 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{10},\ 2\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{10}.$$

Encontramos de este modo, resolviendo la ecuacion,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},\ 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ 2\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Estos son los valores de los lados de los decágonos regulares ordinario y estrellado; de aquí deduciremos fácilmente los lados de los pentágonos regulares ordinario y estrellado.

173. *Division de la circunferencia en quince partes iguales.*— Depende de la resolucion de la ecuacion (1) $z^{15} - 1 = o$, de la que es necesario quitar las raíces de $z^3 - 1 = o$ y las de $z^5 - 1 = o$; dividiendo esta ecuacion por $\dfrac{(z^3 - 1)(z^5 - 1)}{z - 1}$, resulta

$$z^8 - z^7 + z^5 - z^4 + z^3 - z + 1 = o. \tag{2}$$

Por último, si dividimos el primer miembro por z^4 y suponemos $z + \dfrac{1}{z} = x$, resulta

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = o; \tag{3}$$

esta ecuacion tiene por raíces (168)

$$2\cos\frac{2\pi}{15},\ 2\cos\frac{4\pi}{15},\ 2\cos\frac{8\pi}{15},\ 2\cos\frac{14\pi}{15},$$

ó

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{30},\ 2\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{30},\ -2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{30},\ -2\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{30}.$$

Estos son, en valor absoluto, los lados de los polígonos regulares ordinario y estrellado de treinta lados.

Las quince raíces de la ecuacion (1) se obtienen multiplicando las raíces de $z^3 - 1 = o$ por las de $z^5 - 1 = o$ (169); se deduce fácilmente que las ocho raíces de la ecuacion (2) se obtienen multiplicando las dos raíces de $z^2 + z + 1 = o$ por las cuatro raíces de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = o$; conocemos de este modo las ocho raíces de la ecuacion (2), y por consiguiente, las de la ecuacion (3). Por consideraciones muy sencillas se puede conocer que la ecuacion (3) resulta de la eliminacion de y entre las dos ecuaciones

$$x^2 - yx + (y - 2) = o,\quad y^2 - y - 1 = o,$$

de modo que su resolucion se reduce á la de dos ecuaciones de segundo grado.

174. *Division de la circunferencia en diez y siete partes iguales.*—Su resolucion depende de la ecuacion $z^{17} - 1 = o$. Si dividimos el primer miembro por $z - 1$, y hacemos en seguida $z + \frac{1}{z} = x$, resultará la fórmula

$$(1) \quad x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 = o,$$

y haciendo, para abreviar, $a = \frac{2\pi}{17}$, las raíces de la ecuacion (1) serán ahora

$$2\cos a,\ 2\cos 3a,\ 2\cos 8a,\ 2\cos 7a,\ 2\cos 4a,\ 2\cos 5a,\\ 2\cos 2a,\ 2\cos 6a.$$

Supongamos ahora que

$$y_1 = 2\cos a + 2\cos 8a + 2\cos 4a + 2\cos 2a,\\ y_2 = 2\cos 3a + 2\cos 7a + 2\cos 5a + 2\cos 6a;$$

decimos que y_1 é y_2, son las raíces de una ecuacion de segundo grado con coeficientes enteros. En efecto, por la inspeccion de la ecuacion (1) vemos que $y_1 + y_2 = -1$; en seguida, multiplicando y_1 por y_2, y trasformando los productos de cosenos en sumas por fórmulas conocidas y observando que la ecuacion idéntica

$$\cos(17 - m)a = \cos ma,$$

encontramos

$$y_1 y_2 = 4\,(2\cos a + 2\cos 8a + 2\cos 4a + 2\cos 2a,\\ + 2\cos 3a + 2\cos 7a + 2\cos 5a + 2\cos 6a)$$

y por la ecuacion (1), $y_1 y_2 = -4$; y_1 é y_2, son, pues, raíces de la ecuacion (2) $y^2 + y - 4 = o$. Supongamos ahora que

$$u_1 = 2\cos a + 2\cos 4a,\ \ u_2 = 2\cos 3a + 2\cos 5a,$$
$$u_3 = 2\cos 8a + 2\cos 2a,\ \ u_4 = 2\cos 7a + 2\cos 6a;$$

por consiguiente, tendremos,

$$u_1 + u_3 = y_1,\ \ u_2 + u_4 = y_2;$$

despues, multiplicando u_1 por u_3, u_2 por u_4 y trasformando los productos de cosenos en sumas, encontraremos

$$u_1 u_3 = u_2 u_4 = 2\cos a + 2\cos 8a + 2\cos 4a + 2\cos 2a$$
$$+ 2\cos 3a + 2\cos 7a + 2\cos 5a + 2\cos 6a,$$

y, por consiguiente,

$$u_1 u_3 = -1,\ \ u_2 u_4 = -1.$$

De aquí resulta que las cantidades u_1 y u_3, u_2 y u_4 son respectivamente las raíces de las ecuaciones

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u^2 - y_1 u - 1 = o, \\ u^2 - y_2 u - 1 = o. \end{array}\right.$$

Supongamos, por último,

$$x_1 = 2\cos a,\ x_2 = 2\cos 3a,\ x_3 = 2\cos 8a,\ x_4 = 2\cos 7a,$$
$$x_5 = 2\cos 4a,\ x_6 = 2\cos 5a,\ x_7 = 2\cos 2a,\ x_8 = 2\cos 6a;$$

tendremos inmediatamente

$$x_1 + x_5 = u_1,\ x_2 + x_6 = u_2,\ x_3 + x_7 = u_3,\ x_4 + x_8 = u_4,$$

y si trasformamos los productos

$$x_1 x_5,\ x_2 x_6,\ x_3 x_7,\ x_4 x_8$$

en sumas de cosenos, encontraremos

$$x_1 x_5 = u_2,\quad x_2 x_6 = u_3,\quad x_3 x_7 = u_4,\quad x_4 x_8 = u_1;$$

por consiguiente, las cantidades

$$x_1 \text{ y } x_5,\quad x_2 \text{ y } x_6,\quad x_3 \text{ y } x_7,\quad x_4 \text{ y } x_8$$

son respectivamente las raíces de las ecuaciones

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2 - u_1 x + u_2 = o,\ x^2 - u_2 x + u_3 = o, \\ x^2 - u_3 x + u_4 = o,\ x^2 - u_4 x + u_1 = o. \end{cases}$$

Dos cualquiera de las cantidades u_1, u_2, u_3, u_4, pueden expresarse racionalmente la una por la otra; en efecto, hemos encontrado las dos relaciones $u_1 u_8 = -1$, $u_2 u_4 = -1$, y si formamos los productos $u_2 u_3$, $u_1 u_4$, y trasformando despues en sumas los productos de cosenos, encontraremos

$$u_2 u_3 = u_2 - u_3 - 1,\ u_1 u_4 = u_4 - u_1 - 1;$$

de estas fórmulas, combinadas con las precedentes, se deduce

$$u_2 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1},\ u_3 = \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1},\ u_4 = \frac{u_3 - 1}{u_3 + 1},\ u_1 = \frac{u_4 - 1}{u_4 + 1},$$

lo que nos permite escribir las ecuaciones (4) de la manera siguiente:

$$(5)\qquad \begin{cases} x^2 - u_1 x + \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 1} = o,\ x^2 - u_2 x + \dfrac{u_2 - 1}{u_2 + 1} = o, \\ x^2 - u_3 x + \dfrac{u_3 - 1}{u_3 + 1} = o,\ x^2 - u_4 x + \dfrac{u_4 - 1}{u_4 + 1} = o. \end{cases}$$

Las ecuaciones (3) se deducen una de otra por la trasposicion de las cantidades y_1 é y_2; igualmente, las ecuaciones (5) no difieren entre sí más que por la raíz u que figura en ellas; de aquí se sigue que la resolucion de la ecuacion (1) se descompone en la de tres ecuaciones de segundo grado

$$(6)\qquad y^2+y-4=o,\ y^2-yu-1=o,\ x^2-ux+\frac{u-1}{u+1}=o;$$

y se reproduce efectivamente la ecuacion (1) eliminando y y u entre las ecuaciones (6), de lo que es fácil asegurarse fácilmente. Dependiendo la resolucion del problema de la division de la circunferencia en diez y siete partes iguales, de la resolucion de ecuaciones de segundo grado, podemos efectuar esta division con la regla y el compás. No es posible indicar aquí los principios que nos han guiado en el análisis precedente; nos limitaremos á decir que estos principios conducen á la siguiente consecuencia: *que la circunferencia puede dividirse en* n *partes iguales con la regla y el compás, mientras* n *sea un número primo y* n — 1 *una potencia de* 2. Los números más pequeños que satisfacen á estas dos condiciones, son: 3, 5, 17, 257, 65537.

Resolucion de las ecuaciones binomias generales.

175. Propongámonos ahora resolver la ecuacion binomia general $z^m = A + Bi$, en la que A y B son cantidades conocidas, positivas, nulas ó negativas. Designando por ρ y a el módulo y argumento de $A + Bi$, la ecuacion propuesta se convierte en la siguiente:

$$(1)\qquad z^m = \rho\,(\cos a + i \operatorname{sen} a).$$

Supongamos

$$(2)\qquad z = r\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

tendremos

$$z^m = r^m\,(\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi);$$

y para que el valor (2) de z satisfaga á la ecuacion (1), es necesario y suficiente (160) que tengamos

$$r^m = \rho, \quad m\varphi = 2K\pi + a,$$

de donde

$$r = \sqrt[m]{\rho}, \quad \varphi = \frac{2K\pi + a}{m}.$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuacion propuesta las conocemos por la fórmula

$$(3) \qquad z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2K\pi + a}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi + a}{m}\right),$$

en la que K designa un entero indeterminado.

Para que dos valores de K correspondan á dos valores iguales de z, es necesario y suficiente que su diferencia sea un múltiplo de m; la ecuacion (3) comprende, pues, como debia de ser, m raíces distintas que se obtienen dando á K m valores consecutivos cualquiera comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$, por ejemplo,

$$o, 1, 2, \ldots. m - 1.$$

La fórmula (3) puede ponerse tambien bajo la forma siguiente:

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i \operatorname{sen}\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}\right).$$

$$\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i \operatorname{sen}\frac{a}{m}\right),$$

es una de las raíces de la ecuacion (1);

$$\cos\frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}$$

es la expresion de las raíces enesimas de la unidad; de donde se deduce que se obtienen las m raíces de la ecuacion (1), multiplicando cada una de ellas por las m raíces emesimas de la unidad. Analizando lo que hemos dicho en el núm. 167, podemos representar las raíces de la ecuacion (1) por la fórmula

$$(4)\quad z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i \operatorname{sen}\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2K\pi}{m} \pm i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}\right),$$

en la que es suficiente dar á K los valores o, 1, 2,..... $\frac{m}{2}$, si m es par, y los valores o, 1, 2,..... $\frac{m-1}{2}$, si m es impar.

En el caso particular de que B sea nulo, tenemos $\rho = A$ ó $\rho = -A$, segun que A sea positivo ó negativo; podemos tomar $a = o$ en el primer caso, y $a = \pi$ en el segundo. Segun esto, las raíces de la ecuacion $z^m = + A$ las conoceremos, ó por la fórmula

$$(5)\qquad z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}\right),$$

en la que es necesario dar á K los m valores o, 1, 2,..... $m - 1$, ó por la fórmula

$$(6)\qquad z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2K\pi}{m} \pm i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}\right),$$

en la que es suficiente dar á K los valores o, 1, 2,..... $\frac{m}{2}$, si m es par, y los valores o, 1, 2,..... $\frac{m-1}{2}$, si m es impar.

Las raíces de la ecuacion $z^m = - A$ las conoceremos por la fórmula

$$(7)\qquad z = \sqrt[m]{A}\left[\cos\frac{(2K+1)\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{(2K+1)\pi}{m}\right],$$

en la que es necesario dar á K los valores $o, 1, 2, \ldots\ldots m-1$, ó por la fórmula

$$z = \sqrt[m]{A}\left[\cos\frac{(2K+1)\pi}{m} \pm i \operatorname{sen}\frac{(2K+1)\pi}{m}\right],$$

en la que es suficiente dar á K los valores $o, 1, 2, \ldots\ldots \frac{m}{2}-1$, si m es par, y los valores $o, 1, 2, \ldots\ldots \frac{m-1}{2}$, si m es impar.

Resolucion de las ecuaciones trinomias.

176. Sea la ecuacion trinomia

$$(1) \qquad z^{2m} + pz^m + q = o,$$

en la que p y q indican cantidades conocidas; de esta se deduce

$$(2) \qquad z^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

y la cuestión queda reducida á resolver dos ecuaciones binomias.

Consideremos en particular el caso en que p y q son números reales; tenemos

$$\frac{p^2}{4} - q < o,$$

y sea

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \rho\,(\cos a + i \operatorname{sen} a);$$

la ecuacion (1) tomará la forma $z^{2m} - 2\rho\, z^m \cos a + \rho^2 = o$, y la ecuacion (2) se convertirá en $z^m = \rho\,(\cos a \pm i \operatorname{sen} a)$.

Las raices de la ecuacion $z^m = \rho\,(\cos a + i \operatorname{sen} a)$ están comprendidas en la fórmula

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2K\pi + a}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi + a}{m}\right);$$

las raices de esta ecuacion son conjugadas de las de la $z^m = \rho\,(\cos a - i \operatorname{sen} a)$: las $2m$ raices de la ecuacion propuesta están todas comprendidas en la fórmula

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2K\pi + a}{m} \pm i \operatorname{sen}\frac{2K\pi + a}{m}\right),$$

en la que basta tomar, para K, m números enteros consecutivos.

Fórmula de Moivre para un exponente cualquiera.

177. La igualdad

$$\cos a + i \operatorname{sen} a = \left(\cos\frac{a}{n} + i \operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n$$

nos dice que $\cos\frac{a}{n} + i \operatorname{sen}\frac{a}{n}$ es una de las raices *enesimas* de $\cos a + i \operatorname{sen} a$; igualmente, $\cos\frac{ma}{n} + i \operatorname{sen}\frac{ma}{n}$ es una de las raices *enesimas* de

$$\cos ma + i \operatorname{sen} ma, \text{ ó de } (\cos a + i \operatorname{sen} a)^m;$$

por consiguiente, podemos decir que

$$\sqrt[n]{(\cos a + i \operatorname{sen} a)^m} = \cos\frac{m}{n}a + i \operatorname{sen}\frac{m}{n}a,$$

ó $$(\cos a + i \operatorname{sen} a)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n} a + i \operatorname{sen} \frac{m}{n} a.$$

Esta es la fórmula de Moivre para el caso de un exponente fraccionario $\frac{m}{n}$; pero es necesario observar que el segundo miembro no representa más que uno solo de los n valores de que el segundo es susceptible. Obtendremos todos estos valores (175) multiplicando el segundo miembro de la fórmula precedente por

$$\cos \frac{2K\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{n}.$$

La fórmula de Moivre se verifica tambien para un exponente negativo cualquiera $-m$; en efecto, la ecuacion

$$(\cos a + i \operatorname{sen} a)^m = \cos ma + i \operatorname{sen} ma,$$

nos dice que

$$\frac{1}{(\cos a + i \operatorname{sen} a)^m} = \frac{1}{\cos ma + i \operatorname{sen} ma} = \cos ma - i \operatorname{sen} ma$$

ó

$$(\cos a + i \operatorname{sen} a)^{-m} = \cos(-ma) + i \operatorname{sen}(-ma).$$

La fórmula de Moivre demuestra que se pueden resolver algebráicamente las ecuaciones que conducen á la resolucion del problema de la division de arcos. En efecto, tenemos

$$\cos \frac{a + 2K\pi}{m} + i \operatorname{sen} \frac{a + 2K\pi}{m} = \sqrt[m]{\cos a + i \operatorname{sen} a};$$

esta fórmula nos dice que los m valores del segundo miembro son respectivamente iguales á los m valores que toma el primero, cuando damos á K los valores o, 1, 2, ..., $(m-1)$. Cambiando i en $-i$, tendremos

$$\cos\frac{a+2K\pi}{m}-i\operatorname{sen}\frac{a+2K\pi}{m}=\sqrt[m]{\cos a-i\operatorname{sen} a},$$

y, por consiguiente,

$$\cos\frac{a+2K\pi}{m}=\frac{\sqrt[m]{\cos a+i\operatorname{sen} a}+\sqrt[m]{\cos a-i\operatorname{sen} a}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\frac{a+2K\pi}{m}=\frac{\sqrt[m]{\cos a+i\operatorname{sen} a}-\sqrt[m]{\cos a-i\operatorname{sen} a}}{2i}.$$

Estas fórmulas nos dan la expresion algebráica de las raíces de las ecuaciones, de las que dependen $\cos\frac{a}{m}$ y $\operatorname{sen}\frac{a}{m}$, cuando $\cos a$ ó $\operatorname{sen} a$ son conocidos.

Teoremas de Moivre y de Cotes.

178. Los teoremas de Moivre y de Cotes tienen por objeto la representacion geométrica de los divisores reales del trinomio $z^{2m}\pm 2z^m\cos a+1$, en el que a designa un ángulo conocido.

Los dos factores lineales, que corresponden á dos raíces conjugadas de la ecuacion $z^{2m}-2z^m\cos a+1=o$, se representan por

$$z-\left(\cos\frac{2K\pi+a}{m}+i\operatorname{sen}\frac{2K\pi+a}{m}\right)$$

y

$$z-\left(\cos\frac{2K\pi+a}{m}-i\operatorname{sen}\frac{2K\pi+a}{m}\right);$$

el producto y_K^2 de estos factores es

$$y_K^2=z^2-2z\cos\frac{2K\pi+a}{m}+1,$$

y tenemos idénticamente

(1) $$z^{2m} - 2z^m \cos a + 1 = (y_0 \, y_1 \, \ldots\ldots \, y_{m-1})^2.$$

Cambiando a en $\pi + a$, y haciendo

$$y_K'^2 = z^2 - 2z \cos \frac{(2K+1)\pi + a}{m} + 1,$$

tendremos

(2) $$z^{2m} + 2z^m \cos a + 1 = (y'_0 \, y'_1 \, y'_2 \, \ldots\ldots \, y'_{m-1})^2.$$

Esto supuesto, consideremos una circunferencia cuyo rádio sea 1; dividámosla en $2m$ partes iguales en los puntos

$$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2m-1};$$

unamos el centro O con todos estos puntos, y tracemos una línea OP que forme con el primer rádio OA_0 un ángulo igual á $\frac{a}{m}$; por último, tomemos sobre esta línea una longitud cualquiera $OP = z$, y unamos el punto P con todos los de division. Los triángulos

$$OPA_{2m-2K} \text{ y } OPA_{2m-2K-1}$$

nos dan

$$\overline{PA}^2_{2m-2K} = z^2 - 2z \cos \frac{2K\pi + a}{m} + 1, \ \overline{PA}^2_{2m-2K-1}$$
$$= z^2 - 2z \cos \frac{(2K+1)\pi + a}{m} + 1,$$

y, por consiguiente,

$$PA_{2m-2K} = y_K, \ PA_{2m-2K-1} = y'_K.$$

De aquí resulta que el trinomio $z^{2m} - 2z^m \cos a + 1$ es igual al cuadrado del producto de las distancias del punto P á los puntos $A_0, A_2, A_4, \ldots\ldots$, y que el trinomio $z^{2m} + 2z^m \cos a + 1$ es igual al cuadrado del producto de las distancias del mismo punto P á los puntos $A_1, A_3, A_5, \ldots\ldots$; en estas igualdades consiste el teorema de Moivre.

Si el ángulo a es nulo, el punto P está situado sobre el rádio OA_0, y las ecuaciones (1) y (2) nos dan, extrayendo las raíces cuadradas de los dos miembros,

$$z^m - 1 = \pm y_0 y_1 \ldots\ldots y_{m-1},$$
$$z^m + 1 = y'_0 y'_1 \ldots\ldots y'_{m-1}.$$

En estas igualdades consiste el teorema de Cotes; en el segundo miembro de la primera fórmula se debe tomar el signo $+$ ó el signo $-$, segun que el punto P sea exterior ó interior al círculo.

Expresiones de las potencias de los senos y cosenos de un arco en funcion lineal de los senos ó cosenos de los múltiplos de este arco.

179. Sean

$$\cos a + i \operatorname{sen} a = u, \cos a - i \operatorname{sen} a = v,$$

tenemos

$$2 \cos a = u + v, 2i \operatorname{sen} a = u - v,$$

y por consiguiente,

$$2^n \cos^n a = (u + v)^n, (2i)^n \operatorname{sen}^n a = (u - v)^n,$$

ó desarrollándolas,

$$(1)\quad 2^n \cos^n a = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} u^{n-2} v^2 + \ldots\ldots$$

$$(2)\quad (2i)^n \operatorname{sen}^n a = u^n - \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} u^{n-2} v^2 - \ldots\ldots$$

Consideremos primeramente la ecuacion (1). Si n es par, el segundo miembro tiene un número impar de términos, y reuniendo los equidistantes de los extremos, se obtiene

$$2^n \cos^n a = (u^n + v^n) + \frac{n}{1} uv (u^{n-2} + v^{n-2}) + \dots\dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots\dots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1\times 2\dots\dots\left(\frac{n}{2}-1\right)} u^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} (u^2+v^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots\dots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\times 2\dots\dots\frac{n}{2}} u^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}}.$$

Si n es impar, el segundo miembro de la ecuacion (1) tiene un número par de términos, y, si agrupamos como anteriormente los equidistantes de los extremos, resultará

$$2^n \cos^n a = (u^n + v^n) + \frac{n}{1} uv (u^{n-2} + v^{n-2})$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\times 2} u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \dots\dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots\dots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\times 2\dots\dots\left(\frac{n-1}{2}\right)} u^{\frac{n-1}{2}} v^{\frac{n-1}{2}} (u+v).$$

Pero $uv = 1$ y $u^m + v^m = 2\cos ma$; tenemos, pues, si n es par,

$$(3) \qquad 2^{n-1}\cos^n a = \cos na + \frac{n}{1}\cos(n-2)a + \dots\dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots\dots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1\times 2\dots\dots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2a + \frac{n(n-1)\dots\dots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\times 2\dots\dots\frac{n}{2}} \times \frac{1}{2},$$

y si n es impar,

$$(4) \qquad 2^{n-1}\cos^n a = \cos na + \frac{n}{1}\cos(n-2)a$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\cos(n-4)a + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\times 2\ldots\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cos a.$$

Ocupémonos ahora de la ecuacion (2). Si n es par, el segundo miembro contiene un número impar de términos: los términos equidistantes de los extremos tienen el mismo signo, y agrupándolos entre sí, resulta

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}}\operatorname{sen}^n a = (u^n + v^n) - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} + v^{n-2})$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\times 2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4})\ldots$$

$$\pm\frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1\times 2\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}u^{\frac{n}{2}-1}v^{\frac{n}{2}-1}(u^2+v^2)$$

$$\mp\frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\times 2\ldots\ldots\frac{n}{2}}u^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}};$$

ó

$$(5) \qquad 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\operatorname{sen}^n a = \cos na - \frac{n}{1}\cos(n-2)a$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\cos(n-4)a - \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1\times 2\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2a$$

$$\mp\frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\times 2\ldots\ldots\frac{n}{2}}\times\frac{1}{2}.$$

Si n es impar, el segundo miembro de la ecuacion (2) tiene un número par de términos, y los que están igualmente distantes de los extremos son de signos contrarios, y reuniéndolos entre sí, resulta

$$2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} i \operatorname{sen}^n a = (u^n - v^n) - \frac{n}{1} uv (u^{n-2} - v^{n-2})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \times 2} u^2 v^2 (u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{n(n-1) \ldots\ldots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \times 2 \ldots\ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)} u^{\frac{n-1}{2}} v^{\frac{n-1}{2}} (u - v);$$

tenemos, por otra parte, que

$$u^m - v^m = 2 i \operatorname{sen} ma;$$

por consiguiente,

$$(6) \quad 2^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen}^n a = \operatorname{sen} na - \frac{n}{1} \operatorname{sen} (n-2) a$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \times 2} \operatorname{sen} (n-4) a - \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1) \ldots\ldots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \times 2 \ldots\ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sen} a.$$

Vemos que $\cos^n a$ está expresado, en todos los casos, por una funcion lineal de los cosenos de los múltiplos de a, y que $\operatorname{sen}^n a$ está expresado igualmente en funcion de los cosenos, ó en funcion de los senos de los múltiplos del arco a, segun que n sea par ó impar.

Expresion de sen ma y de cos ma en funcion de sen a ó de cos a.

180. Nos proponemos aquí trasformar sen ma y cos ma en un polinomio ordenado segun las potencias enteras de sen a ó de cos a, ó al ménos en un producto formado por la multiplicacion de un polinomio de esta forma y de cos a ó sen a.

El método muy sencillo de que haremos uso, es debido á Cauchy; está fundado en la igualdad

$$(1)\quad \frac{(x+y)(x+y-1)\ldots\ldots(x+y-n+1)}{1\times2\times3\ldots\ldots n}=\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-n+1)}{1\times2\times3\ldots\ldots n}$$
$$+\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-n+2)}{1\times2\times3\ldots\ldots(n-1)}\times\frac{y}{1}+\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-n+3)}{1\times2\times3\ldots\ldots(n-2)}$$
$$\times\frac{y(y-1)}{1\times2}+\ldots\ldots+\frac{x}{1}\times\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-n+2)}{1\times2\ldots\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-n+1)}{1\times2\times3\ldots\ldots n},$$

que se verifica cualquiera que sean las cantidades x é y y el número entero positivo n. Para establecer esta igualdad, en el caso de que x é y sean enteros positivos, é iguales ó superiores á n, se puede partir de la identidad

$$(1+z)^{x+y}=(1+z)^x\,(1+z)^y,$$

ó

$$1+\frac{x+y}{1}z+\ldots\ldots=\left(1+\frac{x}{1}z+\ldots\ldots\right)\left(1+\frac{y}{1}z+\ldots\ldots\right).$$

Si despues de haber efectuado el producto indicado en el segundo miembro, escribimos que los coeficientes de z^n son los mismos, obtendremos la igualdad que se acaba de demostrar. Habiendo establecido esta igualdad para todos los valores enteros de x é y superiores á n, subsiste necesariamente, cualquiera que sean x é y. En efecto, designemos, para abreviar, por $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ los dos miembros de la igualdad, y por x_0 un valor entero de x superior á n; los polinomios $\varphi(x_0, y)$ y $\psi(x_0, y)$, que no contienen más que la variable y, son iguales entre sí para todos los valores enteros de y superiores á n. Pues tenemos necesariamente $\varphi(x_0, y) = \psi(x_0, y)$, cualquiera que sea y; en otros términos, los polinomios $\varphi(x, y)$ $\psi(x, y)$ son iguales, cualquiera que sea y, para todos los valores enteros de x superiores á n, y se deduce evidentemente de aquí que la igualdad $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$ se verifica para todos los valores de x y de y.

Reemplazando, en la fórmula (1), x por $\frac{x}{2}$ é y por $\frac{y}{2}$, se obtiene

$$
(2)\quad \frac{(x+y)(x+y-2)\ldots\ldots(x+y-2n+2)}{2\times 4\times 6\ldots\ldots(2n)}
$$
$$
= \frac{x(x-2)\ldots\ldots(x-2n+2)}{2\times 4\times 6\ldots\ldots(2n)} + \frac{x(x-2)\ldots\ldots(x-2n+4)}{2\times 4\times 6\ldots\ldots(2n-2)}
\times \frac{y}{2} + \ldots\ldots + \frac{x}{2} \times \frac{y(y-2)\ldots\ldots(y-2n+4)}{2\times 4\times 6\ldots\ldots(2n-2)}
+ \frac{y(y-2)\ldots\ldots(y-2n+2)}{2\times 4\times 6\ldots\ldots(2n)}.
$$

181. Si, en las ecuaciones (1) del núm. 163, se reemplazan las potencias pares de $\cos a$ por potencias enteras de $1 - \operatorname{sen}^2 a$, resultará, para valores pares de m,

$$
\cos ma = (1-\operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{1\times 2}(1-\operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-2}{2}} \operatorname{sen}^2 a
+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}(1-\operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-4}{2}} \operatorname{sen}^4 a - \ldots ,
$$

$$
\operatorname{sen} ma = \cos a \left[\frac{m}{1}(1-\operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-2}{2}} \operatorname{sen} a
- \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}(1-\operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-4}{2}} \operatorname{sen}^3 a + \ldots\ldots\right],
$$

y para valores impares de m,

$$\cos ma = \cos a \Big[(1 - \operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$- \frac{m(m-1)}{1 \times 2} (1 - \operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-3}{2}} \operatorname{sen}^2 a$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} (1 - \operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-5}{2}} \operatorname{sen}^4 a - \ldots.. \Big],$$

$$\operatorname{sen} ma = \frac{m}{1} (1 - \operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sen} a$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} (1 - \operatorname{sen}^2 a)^{\frac{m-3}{2}} \operatorname{sen}^3 a + \ldots..$$

Si desarrollamos, con relacion á las potencias crecientes de sen a los segundos miembros de estas fórmulas, haciendo abstraccion del factor cos a, encontraremos, para valores pares de m,

$$\cos ma = 1 - \frac{m}{1} \left(\frac{m-1}{2} + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 a$$

$$+ \frac{m(m-2)}{1 \times 3} \left[\frac{(m-1)(m-3)}{2 \times 4} + \frac{m-1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3 \times 1}{2 \times 4} \right] \operatorname{sen}^4 a - \ldots..,$$

$$\operatorname{sen} ma = \cos a \left\{ \frac{m}{1} \operatorname{sen} a - \frac{m(m-2)}{1 \times 3} \left(\frac{m-1}{2} + \frac{3}{2} \right) \operatorname{sen}^3 a \right.$$

$$+ \frac{m(m-2)(m-4)}{1 \times 3 \times 5} \left[\frac{(m-1)(m-3)}{2 \times 4} + \frac{m-1}{2} \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{5}{2} + \frac{5 \times 3}{2 \times 4} \right] \operatorname{sen}^5 a - \ldots.. \right\},$$

y para valores impares de m,

$$\cos ma = \cos a \left\{ 1 - \frac{m-1}{2} \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 a \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-3)}{1 \times 3} \left[\frac{m(m-2)}{2 \times 4} + \frac{m}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3 \times 1}{2 \times 4} \right] \operatorname{sen}^4 a - \ldots. \right\},$$

$$\operatorname{sen} ma = \frac{m}{1} \operatorname{sen} a - \frac{m(m-1)}{1 \times 3} \left(\frac{m-2}{2} + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen}^3 a$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-3)}{1 \times 3 \times 5} \left[\frac{(m-2)(m-4)}{2 \times 4}\right.$$
$$\left. + \frac{m-2}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{5 \times 3}{2 \times 4}\right] \operatorname{sen}^5 a - \ldots..$$

Haciendo ahora uso de la fórmula (2) del número anterior, se obtiene, para valores pares de m,

$$(1)\ \cos ma = 1 - \frac{m \times m}{1 \times 2} \operatorname{sen}^2 a + \frac{(m+2)\, m \times m\, (m-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \operatorname{sen}^4 a$$
$$- \frac{(m+4)(m+2)\, m \times m\, (m-2)(m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \operatorname{sen}^6 a + \ldots..,$$

$$\operatorname{sen} ma = \cos a \left[\frac{m}{1} \operatorname{sen} a - \frac{(m+2)\, m\, (m-2)}{1 \times 2 \times 3} \operatorname{sen}^3 a\right.$$
$$\left. + \frac{(m+4)(m+2)\, m\, (m-2)(m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \operatorname{sen}^5 a - \ldots..\right],$$

y para valores impares de m,

$$(2)\qquad \cos ma = \cos a \left[1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1 \times 2} \operatorname{sen}^2 a\right.$$
$$\left. + \frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \operatorname{sen}^4 a \ldots..\right],$$

$$\operatorname{sen} ma = \frac{m}{1} \operatorname{sen} a - \frac{(m+1)\, m\, (m-1)}{1 \times 2 \times 3} \operatorname{sen}^3 a$$
$$+ \frac{(m+3)(m+1)\, m\, (m-1)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \operatorname{sen}^5 a - \ldots..$$

Si en las fórmulas (1) y (2) cambiamos a en $\frac{\pi}{2} - a$, se encontrará, para los valores pares de m,

$$(3) \qquad (-1)^{\frac{m}{2}} \cos ma = 1 - \frac{m \times m}{2} \cos^2 a$$

$$+ \frac{(m+2)\, m \times m\, (m-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \cos^4 a$$

$$- \frac{(m+4)\,(m+2)\, m \times m\, (m-2)\,(m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \cos^6 a + \ldots ,$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}+1} \operatorname{sen} ma = \operatorname{sen} a \left[\frac{m}{1} \cos a \right.$$

$$- \frac{(m+2)\, m\, (m-2)}{1 \times 2 \times 3} \cos^3 a$$

$$\left. + \frac{(m+4)\,(m+2)\, m\, (m-2)\,(m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cos^5 a - \ldots \right],$$

y para los valores impares de m,

$$(4) \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sen} ma = \operatorname{sen} a \left[1 - \frac{(m+1)\,(m-1)}{1 \times 2} \cos^2 a \right.$$

$$\left. + \frac{(m+3)\,(m+1)\,(m-1)\,(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \cos^4 a - \ldots \right],$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos ma = \frac{m}{1} \cos a - \frac{(m-1)\, m\, (m-1)}{1 \times 2 \times 3} \cos^3 a$$

$$+ \frac{(m+3)\,(m+1)\, m\, (m-1)\,(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cos^5 a - \ldots$$

De este modo tendremos, en particular,

$$\cos 2a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a, \quad \cos 4a = 1 - 8 \operatorname{sen}^2 a + 8 \operatorname{sen}^4 a,$$
$$\cos 6a = 1 - 18 \operatorname{sen}^2 a + 48 \operatorname{sen} 4a - 32 \operatorname{sen}^6 a, \ldots,$$
$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a, \quad \operatorname{sen} 5a = 5 \operatorname{sen} a$$
$$- 20 \operatorname{sen}^3 a + 16 \operatorname{sen}^5 a, \ldots, \quad -\cos 2a = 1 - 2\cos^2 a,$$
$$-\cos 3a = 3\cos a - 4\cos^3 a, \quad \cos 4a = 1 - 8\cos^2 a + 8\cos^4 a,$$
$$\cos 5a = 5\cos a - 20\cos^3 a + 16\cos^5 a,$$
$$-\cos 6a = 1 - 18\cos^2 a + 48\cos^4 a - 32\cos^6 a, \ldots$$

182. Las fórmulas anteriores están ordenadas con relacion á las potencias ascendentes de cos a ó de sen a; tambien podémos ordenarlas con relacion á las potencias descendentes de las mismas cantidades, y tomarán una nueva forma que conviene á la vez al caso de ser m par ó impar.

Supongamos, para abreviar,

$$\cos ma = \Sigma u_n \cos^{m-2n} a, \quad \frac{\operatorname{sen} ma}{\operatorname{sen} a} = \Sigma v_n \cos^{m-2n-1} a,$$

indica el signo Σ la suma de los valores que toma la expresion á que afecta, cuando damos á n todos los valores enteros desde cero hasta el mayor que hace positivo ó nulo el exponente de cos a: las ecuaciones (3) y (4) nos dan

$$u_n = (-1)^n m \frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots\ldots(n+1)}{1\times 2\times 3\ldots\ldots(m-2n)} 2^{m-2n-1},$$

$$v_n = (-1)^n \frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots\ldots(n+1)}{1\times 2\times 3\ldots\ldots(m-2n-1)} 2^{m-2n-1}.$$

Pero es necesario suponer en estas fórmulas $n < \frac{m-1}{2}$; para $n = \frac{m}{2}$, en el caso de ser m par, el valor de u_n debe reducirse á $(-1)^{\frac{m}{2}}$, segun la primera de las ecuaciones (3); para $n = \frac{m-1}{2}$, en el caso de ser m impar, los valores de u_n y de v_n se reducen respectivamente, segun las ecuaciones (4), á $(-1)^{\frac{m-1}{2}} m$, y $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$. Si multiplicamos y dividimos por el producto $1\times 2\ldots\ldots n$ las expresiones anteriores de u_n y v_n, resultará

$$u_n = (-1)^n \frac{m\times 2^{m-2n-1}}{1\times 2\ldots\ldots n} \times \frac{1\times 2\ldots\ldots(m-n-1)}{1\times 2\ldots\ldots(m-2n)},$$

$$v_n = (-1)^n \frac{2^{m-2n-1}}{1 \times 2 \ldots\ldots n} \frac{1 \times 2 \ldots\ldots (m-n-1)}{1 \times 2 \ldots\ldots (m-2n-1)},$$

ó

$$u_n = (-1)^n \frac{m\,(m-n-1)\,(m-n-2) \ldots\ldots (m-2n+1)}{1 \times \ldots\ldots n} 2^{m-2n-1},$$

$$v_n = (-1)^n \frac{(m-n-1)\,(m-n-2) \ldots\ldots (m-2\,n)}{1 \times 2 \ldots\ldots n} 2^{m-2n-1},$$

hay que observar, que el caso de $n = 1$, se reduce á la unidad el producto $(m-n-1)\;(m-n-2)\ldots\ldots(m-2\,n+1)$ en el valor de u_n. Adoptando esta nueva forma, la restriccion $n < \frac{m-1}{2}$ no es necesaria; los segundos miembros de las fórmulas precedentes se reducen respectivamente á $(-1)^{\frac{m-1}{2}} m$ y $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ para $n = \frac{m-1}{2}$, en el caso de ser m impar; igualmente, el valor de u_n se reduce á $(-1)^{\frac{m}{2}}$ para $n = \frac{m}{2}$, en el caso de ser m par. Los segundos miembros de las fórmulas desaparecen para $n = o$; pero segun las primeras expresiones de u_n y v_n, deben reducirse uno y otro á 2^{m-1}. Tendremos, segun esto,

$$\cos ma = \Sigma\,(-1)^n \frac{m\,(m-n-1)\,(m-n-2) \ldots\ldots (m-2\,n+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots n} 2^{m-2n-1} \cos^{m-2n} a, \quad \frac{\operatorname{sen} ma}{\operatorname{sen} a}$$

$$= \Sigma\,(-1)^n \frac{(m-n-1)\,(m-n-2) \ldots\ldots (m-2\,n)}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots n} 2^{m-2n-1} \cos^{m-2n-1} a,$$

ó tambien

$$(5) \qquad \cos ma = 2^{m-1} \cos^m a - \frac{m}{1} 2^{m-3} \cos^{m-2} a$$

$$+ \frac{m\,(m-3)}{1 \times 2} 2^{m-5} \cos^{m-4} a - \frac{m\,(m-4)\,(m-5)}{1 \times 2 \times 3} 2^{m-7} \cos^{m-6} a$$

$$+\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1\times2\times3\times4}2^{m-9}\cos^{m-8}a-\ldots..,$$

$$\frac{\operatorname{sen} ma}{\operatorname{sen} a}=2^{m-1}\cos^{m-1}a-\frac{m-2}{1}2^{m-3}\cos^{m-3}a$$
$$+\frac{(m-3)(m-4)}{1\times2}2^{m-5}\cos^{m-5}a$$
$$-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\times2\times3}2^{m-7}\cos^{m-7}a$$
$$+\frac{(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)}{1\times2\times3\times4}2^{m-9}\cos^{m-9}a-\ldots..,$$

y estas fórmulas se verifican, cualquiera que sea el entero m, par ó impar.

Si cambiamos a en $\frac{\pi}{2}-a$, en las fórmulas (5), resultará, para valores pares de m,

$$(6)\qquad (-1)^{\frac{m}{2}}\cos ma=2^{m-1}\operatorname{sen}^{m}a-\frac{m}{1}2^{m-3}\operatorname{sen}^{m-2}a$$
$$+\frac{m(m-3)}{1\times2}2^{m-5}\operatorname{sen}^{m-4}a$$
$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1\times2\times3}2^{m-7}\operatorname{sen}^{m-6}a+\ldots..,$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\operatorname{sen} ma}{\cos a}=2^{m-1}\operatorname{sen}^{m-1}a$$
$$-\frac{m-2}{1}2^{m-3}\operatorname{sen}^{m-3}a+\frac{(m-3)(m-4)}{1\times2}2^{m-5}\operatorname{sen}^{m-5}a$$
$$-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\times2\times3}2^{m-7}\operatorname{sen}^{m-7}a+\ldots..,$$

y para valores impares de m,

$$(7)\qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\operatorname{sen} ma=2^{m-1}\operatorname{sen}^{m}a-\frac{m}{1}2^{m-3}\operatorname{sen}^{m-2}a$$

$$+\frac{m(m-3)}{1\times 2}2^{m-5}\operatorname{sen}^{m-4}a$$

$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1\times 2\times 3}2^{m-7}\operatorname{sen}^{m-6}a+\ldots..,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\cos ma}{\cos a}=2^{m-1}\operatorname{sen}^{m-1}a-\frac{m-2}{1}2^{m-3}\operatorname{sen}^{m-3}a$$

$$+\frac{(m-3)(m-4)}{1\times 2}2^{m-5}\operatorname{sen}^{m-5}a$$

$$-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\times 2\times 3}2^{m-7}\operatorname{sen}^{m-7}a+\ldots..$$

La primera de las fórmulas (5) nos da inmediatamente la expresion de la cantidad que hemos designado por v_m en el número 168; en efecto, si hacemos $z=\cos a+i\operatorname{sen}a$, tendremos

$$z+\frac{1}{z}=2\cos a,\quad z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos ma,$$

y reemplazando $2\cos a$ por x, en la primera de las fórmulas (5) encontraremos

$$z^m+\frac{1}{z^m}=x^m-\frac{m}{1}x^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1\times 2}x^{m-4}$$

$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1\times 2\times 3}x^{m-6}+\ldots..,$$

fórmula que se reducirá á una identidad, si se reemplaza x por $z+\frac{1}{z}$.

Desarrollo de las funciones sen x y cos x en séries ordenadas segun las potencias crecientes de x.

183. Las fórmulas (1) del núm. 163 pueden escribirse de la manera siguiente:

$$
(1) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\cos ma}{\cos^m a} = 1 - \frac{m(m-1)}{1 \times 2} \operatorname{tang}^2 a + \ldots\ldots \\
&\qquad \pm \frac{m \ldots\ldots (m-2n+1)}{1 \times 2 \ldots\ldots 2n} \operatorname{tang}^{2n} a \mp R_{2n}, \\
&\frac{\operatorname{sen} ma}{\cos^m a} = \frac{m}{1} \operatorname{tang} a - \frac{m \ldots\ldots (m-2)}{1 \times 2 \times 3} \operatorname{tang}^3 a + \ldots\ldots \\
&\qquad \pm \frac{m \ldots\ldots (m-2n)}{1 \times 2 \ldots\ldots (2n+1)} \operatorname{tang}^{2n+1} a \mp R_{2n+1},
\end{aligned}
\right.
$$

y suponiendo

$$
\begin{aligned}
R_p = {} & \frac{m \ldots\ldots (m-p-1)}{1 \times 2 \ldots\ldots (p+2)} \operatorname{tang}^{p+2} a \\
& - \frac{m \ldots\ldots (m-p-3)}{1 \times 2 \ldots\ldots (p+4)} \operatorname{tang}^{p+4} a + \ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

las cantidades R_{2n} y R_{2n+1} miden los errores que se cometen cuando se desprecian las potencias de a, superiores á la $(2n+1)$ esima en los valores de $\frac{\cos ma}{\cos^m a}$ y de $\frac{\operatorname{sen} ma}{\cos^m a}$; vamos á tratar de asignar límites á estos errores, suponiendo el arco a comprendido entre $-\frac{\pi}{4}$ y $+\frac{\pi}{4}$, y porconsiguiente, $\operatorname{tang}^2 a < 1$. La suma R_p está compuesta de un número limitado de términos, que son alternativamente positivos y negativos, cualquiera que sea el signo de a, y es claro que los valores absolutos de estos términos irán decreciendo constantemente, si tenemos

$$
\frac{(m-p-2)(m-p-3)}{(p+3)(p+4)} \operatorname{tang}^2 a < 1;
$$

por consiguiente, el valor de R_p estará comprendido entre cero y el valor del primero de los términos que entran en su expresion; de suerte, que tendremos

$$R_p = \zeta \frac{m(m-1) \ldots\ldots (m-p-1)}{1 \times 2 \ldots\ldots (p+2)} \operatorname{tang}^{p+2} a,$$

designando por ζ una cantidad comprendida entre cero y la unidad. Podemos, pues, reemplazar, en las ecuaciones (1), R_{2n} y R_{2n+1}, por los valores que toma la expresion precedente de R_p, cuando se hace $p = 2n$ y $p = 2n+1$, cuidando, sin embargo, de que la desigualdad de condicion de que hemos hablado anteriormente, se verifique para $p = 2n$, en cuyo caso podemos satisfacerla tambien por $p = 2n+1$. Segun esto, si suponemos $ma = x$, y reemplazamos a por $\frac{x}{m}$ en los primeros miembros de las fórmulas (1), y m por $\frac{x}{a}$ en los segundos miembros, y por último, representamos por θ y λ las cantidades comprendidas entre cero y 1 á las que se reduce ζ para $p = 2n$ y $p = 2n+1$, tendremos

$$(2)\left\{\begin{aligned}
\frac{\cos x}{\cos^m \frac{x}{m}} &= 1 - \frac{x(x-a)}{1 \times 2}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)^2 + \ldots\ldots \\
&\pm \frac{x(x-a) \ldots\ldots (x-2na+a)}{1 \times 2 \ldots\ldots 2n}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)^{2n} \\
&\mp \theta \frac{x(x-a) \ldots\ldots (x-2na-a)}{1 \times 2 \ldots\ldots (2n+2)}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)^{2n+2}, \\
\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^m \frac{x}{m}} &= \frac{x}{1}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right) - \frac{x(x-a)(x-2a)}{1 \times 2 \times 3}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)^3 + \ldots \\
&\pm \frac{x(x-a) \ldots\ldots (x-2na)}{1 \times 2 \ldots\ldots (2n+1)}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)^{2n+1} \\
&\mp \lambda \frac{x(x-a) \ldots\ldots (x-2na-2a)}{1 \times 2 \ldots\ldots (2n+3)}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)^{2n+3};
\end{aligned}\right.$$

y la igualdad de condicion se convertirá en

$$\frac{(x-2\,na-2\,a)\,(x-2\,na-3\,a)}{(2\,n+3)\,(2\,n+4)}\left(\frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)^2<1.$$

Supongamos ahora que, siendo n un número tan grande como queramos, pero invariable, hagamos aumentar indefinidamente el entero m, de manera que el producto $ma=x$ sea constante; tendremos en el límite, no solamente $a=o$, $\frac{\operatorname{tang} a}{a}=1$, sino que tambien $\cos^m\frac{x}{m}=1$. En efecto, tenemos

$$1-\cos\frac{x}{m}<\frac{x^2}{2\,m^2},$$

y con mayor razon,

$$\cos\frac{x}{m}-\cos^2\frac{x}{m}<\frac{x^2}{2\,m^2},\ \ldots\ldots,\ \cos^{m-1}\frac{x}{m}-\cos^m\frac{x}{m}<\frac{x^2}{2m^2};$$

y sumando todas estas desigualdades, resulta

$$1-\cos^m\frac{x}{m}<m\,\frac{x^2}{2\,m^2}\ \text{ó}<\frac{x^2}{2\,m}.$$

Resulta de aquí que $\cos^m\frac{x}{m}$ está comprendido entre 1 y $1-\frac{x^2}{2\,m}$, y por consiguiente, esta cantidad se reduce á la unidad cuando m es infinito. Segun esto, las ecuaciones (2) se convierten en el límite en

$$\text{(3)}\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{1\times 2}+\ldots\ldots\pm\frac{x^{2\,n}}{1\times 2\ldots\ldots 2\,n}$$

$$\mp\,\theta\,\frac{x^{2\,n+2}}{1\times 2\ldots\ldots(2\,n+2)},\ \operatorname{sen} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\times 2\times 3}+\ldots\ldots$$

$$\pm\,\frac{x^{2\,n+1}}{1\times 2\ldots\ldots(2\,n+1)}\mp\lambda\,\frac{x^{2\,n+3}}{1\times 2\ldots\ldots(2\,n+3)},$$

y la desigualdad de condicion se reduce á

$$(4)\qquad \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} < 1.$$

Las ecuaciones (3), en las que θ y λ representan siempre fracciones comprendidas entre cero y 1, se verifican para todos los valores de n que satisfagan á la condicion (4). Vemos, en particular, que si x está comprendido entre cero y $\frac{\pi}{2}$, se tiene

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6},\ \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Supongamos ahora que el entero n aumente indefinidamente; las fracciones

$$\frac{x^{2n+2}}{1\times 2 \ldots\ldots (2n+2)} = \frac{x}{1}\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{3}\ldots\ldots\frac{x}{2n+2},$$

$$\frac{x^{2n+3}}{1\times 2 \ldots\ldots (2n+3)} = \frac{x}{1}\times\frac{x}{2}\ldots\ldots\frac{x}{2n+3},$$

tendrán cero por límite, porque son productos cuyos factores, mayores que 1, son en número limitado, mientras que el número de los que son inferiores á 1, ó á la fraccion que se quiera, puede ser mayor que cualquier número dado, podemos, pues, decir que

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \frac{x^6}{1\times 2\times 3 \ldots\ldots 6} + \ldots\ldots \\ &\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} \\ &\qquad - \frac{x^7}{1\times 2\times 3 \ldots\ldots 7} + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Los segundos miembros de estas fórmulas (5) son séries ilimitadas que permanecen *convergentes*, como se ve, para todos los valores de x comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$; las fórmulas (3) nos dan á conocer los *restos* de estas séries, es decir, los errores que cometemos cuando nos detenemos en un término cualquiera.

184. Las fórmulas (5) nos dan el medio más sencillo de calcular el seno y el coseno de un arco dado. Si hacemos $x = \frac{m}{n} \times \frac{\pi}{2}$ y calculamos los coeficientes con veintidos decimales, obtendremos las fórmulas siguientes:

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{m}{n} \times 90^\circ\right) = \; & 1{,}0000000000000000000000 \\
& - 1{,}\,2337005501361698273543 \frac{m^2}{n^2} \\
& + 0{,}\,2536695079010480136366 \frac{m^4}{n^4} \\
& - 0{,}0\,208634807633529608731 \frac{m^6}{n^6} \\
& + 0{,}000\,9192602748394265802 \frac{m^8}{n^8} \\
& - 0{,}0000\,252020423730606055 \frac{m^{10}}{n^{10}} \\
& + 0{,}000000\,4710874778818172 \frac{m^{12}}{n^{12}} \\
& - 0{,}00000000\,63866030837919 \frac{m^{14}}{n^{14}} \\
& + 0{,}0000000000\,656596311498 \frac{m^{16}}{n^{16}} \\
& - 0{,}000000000000\,5294400201 \frac{m^{18}}{n^{18}} \\
& + 0{,}00000000000000\,34377292 \frac{m^{20}}{n^{20}} \\
& - 0{,}0000000000000000\,183599 \frac{m^{22}}{n^{22}} \\
& + 0{,}0000000000000000000\,821 \frac{m^{24}}{n^{24}} \\
& - 0{,}000000000000000000000\,3 \frac{m^{26}}{n^{26}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{m}{n} \times 90^\circ\right) = \; & 1{,}\,5707963267948966192313 \frac{m}{n} \\
& - 0{,}\,6459640975062462536558 \frac{m^3}{n^3} \\
& + 0{,}0\,796926262461670451205 \frac{m^5}{n^5} \\
& - 0{,}00\,46817541353186881007 \frac{m^7}{n^7} \\
& + 0{,}000\,1604411847873598219 \frac{m^9}{n^9} \\
& - 0{,}00000\,35988432352120853 \frac{m^{11}}{n^{11}} \\
& + 0{,}0000000\,569217292196793 \frac{m^{13}}{n^{13}} \\
& - 0{,}000000000\,6688035109811 \frac{m^{15}}{n^{15}} \\
& + 0{,}00000000000\,60669357311 \frac{m^{17}}{n^{17}} \\
& - 0{,}0000000000000\,437706547 \frac{m^{19}}{n^{19}} \\
& + 0{,}000000000000000\,2571423 \frac{m^{21}}{n^{21}} \\
& - 0{,}00000000000000000\,12539 \frac{m^{23}}{n^{23}} \\
& + 0{,}00000000000000000000\,52 \frac{m^{25}}{n^{25}}
\end{aligned}
$$

Los senos y cosenos de los arcos desde cero hasta 45° grados, comprenden los senos y cosenos de los arcos desde 45° hasta 90; por consiguiente, podemos suponer siempre que $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ en las fórmulas que preceden, de modo que las séries serán de tal suerte convergentes, que no será necesario calcular más que un número muy pequeño de términos, sobre todo si no se tiene necesidad de un gran número de decimales.

Si hacemos sucesivamente á $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$, se obtendrán los resultados siguientes:

$$
\begin{aligned}
\text{sen } 9^\circ &= \cos 81^\circ = 0{,}156434465040231,\\
\text{sen } 18^\circ &= \cos 72^\circ = 0{,}309016994374947,\\
\text{sen } 27^\circ &= \cos 63^\circ = 0{,}453990499739547,\\
\text{sen } 36^\circ &= \cos 54^\circ = 0{,}587785252292473,\\
\text{sen } 45^\circ &= \cos 45^\circ = 0{,}707106781186548,\\
\text{sen } 54^\circ &= \cos 36^\circ = 0{,}809016994374947,\\
\text{sen } 63^\circ &= \cos 27^\circ = 0{,}891006524188368,\\
\text{sen } 72^\circ &= \cos 18^\circ = 0{,}951056516295154,\\
\text{sen } 81^\circ &= \cos 9^\circ = 0{,}987688340595138,
\end{aligned}
$$

fórmulas que convienen con las del núm. 37.

Descomposicion de las funciones cos x y sen x en un número arbitrario, pero limitado de factores.

185. De las fórmulas del núm. 163 ó de las del núm. 181, resulta que, si m es par, cos ma y $\frac{\text{sen } ma}{m \text{ sen } a \cos a}$ son funciones enteras de sen a, que se reducen una y otra á la unidad, cuando hacemos sen $a = o$. Por otra parte, la primera de estas funciones, que es del grado m con relacion á sen a, se anula, lo mismo que cos ma, para los valores de a comprendidos en la série

$$-\frac{(m-1)\pi}{2m}, \ldots.., -\frac{3\pi}{2m}, -\frac{\pi}{2m}, +\frac{\pi}{2m},$$
$$+\frac{3\pi}{2m}, \ldots.., +\frac{(m-1)\pi}{2m},$$

es, por consiguiente, divisible por cada uno de los factores binomios

$$1-\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2m}}, \; 1-\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{2m}}, \ldots.., \; 1-\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}},$$

y como se reduce á 1 para sen $a=o$, tiene que ser precisamente igual al producto de todos estos binomios.

La segunda funcion es del grado $m-2$ con relacion á sen a, y se anula para los valores de a comprendidos en la série

$$-\frac{(m-2)\pi}{2m}, \ldots.., -\frac{4\pi}{2m}, -\frac{2\pi}{2m}, +\frac{2\pi}{2m},$$
$$+\frac{4\pi}{2m}, \ldots.., +\frac{(m-2)\pi}{2m};$$

por consiguiente, es divisible por cada uno de los factores

$$1-\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{2m}}, \; 1-\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \frac{4\pi}{2m}}, \ldots.., \; 1-\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}},$$

y además es igual al producto de todos estos factores.

Poniendo $\frac{x}{m}$ en lugar de a, tendremos para los valores pares de m

$$(1) \quad \cos x = \left(1-\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{2m}}\right) \ldots..$$
$$\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right),$$

$$(1)\qquad \operatorname{sen} x = m \operatorname{sen}\frac{x}{m}\cos\frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\cdots\cdots$$
$$\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

Por un razonamiento semejante, obtendremos para valores impares de m,

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\cos x = \cos\frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\cdots\\ &\qquad\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right),\\ &\operatorname{sen} x = m\operatorname{sen}\frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\\ &\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).\end{aligned}\right.$$

Si trasformamos las fórmulas (1) y (2) haciendo uso de la relacion idéntica

$$1-\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 v} = \cos^2 u\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2 u}{\operatorname{tang}^2 v}\right),$$

tendremos para los valores pares de m,

$$(3)\begin{cases} \cos x = \cos^m \dfrac{x}{m}\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{2m}}\right) \\ \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{3\pi}{2m}}\right) \cdots\cdots \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right), \\ \operatorname{sen} x = \cos^m \dfrac{x}{m} \times m \operatorname{tang} \dfrac{x}{m} \\ \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{2\pi}{2m}}\right) \cdots\cdots \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}\right), \end{cases}$$

y para los valores impares de m,

$$(4)\begin{cases} \cos x = \cos^m \dfrac{x}{m}\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{2m}}\right) \\ \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{3\pi}{2m}}\right) \cdots\cdots \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}\right), \\ \operatorname{sen} x = \cos^m \dfrac{x}{m} \times m \operatorname{tang} \dfrac{x}{m} \\ \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{2\pi}{2m}}\right) \cdots\cdots \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right). \end{cases}$$

Descomposicion de las funciones cos x y sen x en un número infinito de factores.

186. LEMA.—*Si el arco* x *crece desde cero á* $\frac{\pi}{2}$, *la relacion* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *disminuye, y la relacion* $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$ *aumenta; en otros términos, tenemos*

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)}{x+h} < \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

y

$$\frac{\operatorname{tang}(x+h)}{x+h} > \frac{\operatorname{tang} x}{x},$$

siendo x *y* h *positivos, y* x + h *inferior á* $\frac{\pi}{2}$.

En efecto, si multiplicamos la primera desigualdad por $\frac{x+h}{h \cos x}$, desarrollamos sen $(x+h)$ y hacemos pasar todos los términos al segundo miembro, resulta

$$\operatorname{tang} x \frac{1-\cos h}{h} + \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x} - \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) > o,$$

y bajo esta forma se reconoce inmediatamente su exactitud, porque $1-\cos h$ es positivo y $\frac{\operatorname{tang} x}{x} - \frac{\operatorname{sen} h}{h}$ lo es igualmente, puesto que $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$ es > 1, mientras que $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ es < 1.

Es necesario observar que la relacion $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ continúa decreciendo cuando x crece desde $\frac{\pi}{2}$ á π; porque, en este caso, el numerador disminuye, mientras que el denominador aumenta.

En cuanto á la segunda de las dos desigualdades propuestas, si en ella reemplazamos las tangentes por sus valores en senos y cosenos, se deduce fácilmente la siguiente fórmula:

$$\frac{\operatorname{sen}(h+2x)}{h+2x} < \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Corolario.—Si x y $x+h$ están comprendidos entre cero y $\frac{\pi}{2}$, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)}{\operatorname{sen} x} < \frac{x+h}{x} < \frac{\operatorname{tang}(x+h)}{\operatorname{tang} x}.$$

De aquí resulta que, si representamos por u y v dos arcos cualquiera comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, tendremos

$$\pm\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 v}\right) < \pm\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right) < \pm\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2 u}{\operatorname{tang}^2 v}\right),$$

el doble signo $\pm$ indica que es necesario tomar el valor absoluto de la cantidad á que afecta.

187. El corolario que precede nos va á dar el medio de encontrar en qué se convierten las expresiones de $\cos x$ y de $\operatorname{sen} x$ obtenidas en el núm. 185, cuando el entero m se hace infinito; consideremos, por ejemplo, las fórmulas (1) y (3), en las que m representa un número par, y multipliquemos cada una de ellas por el factor ± 1; conviene emplear siempre el signo que hace los dos miembros positivos. Habiendo supuesto el número m bastante grande para que el valor absoluto de $\frac{x}{m}$ sea inferior á $\frac{\pi}{2}$, si hacemos uso de las desigualdades

$$\pm\operatorname{sen}\frac{x}{m} < \pm\frac{x}{m} < \pm\operatorname{tang}\frac{x}{m},\ \cos\frac{x}{m} < 1,$$

y las que se han empleado para el corolario del número precedente, las fórmulas (1) y (3) del número 185 nos darán

$$\pm \cos x < \pm \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right),$$

$$\pm \cos x > \pm \cos^m \frac{x}{m}$$

$$\times\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right),$$

y

$$\pm \operatorname{sen} x < \pm x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{(m-2)^2\pi^2}\right),$$

$$\pm \operatorname{sen} x > \pm \cos^m \frac{x}{m}$$

$$\times x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{(m-2)^2\pi^2}\right).$$

Pero hemos visto ya (183) que $\cos^m \frac{x}{m} = 1 - \theta_m$, siendo θ_m una cantidad que se anula para $m = \infty$; por consiguiente, si representamos por ε_m y η_m cantidades inferiores á θ_m, tendremos

$$(1)\quad \cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right)(1-\varepsilon_m),$$

$$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{(m-2)^2\pi^2}\right)(1-\eta_m).$$

Si ahora suponemos que el entero m tienda hácia el infinito, las cantidades ε_m y η_m tienden hácia cero, y tendremos en el límite

$$(2)\qquad \cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots\cdots,$$

$$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

Estas fórmulas nos dan los valores de cos x y de sen x descompuestos en un número infinito de factores lineales; la periodicidad de estas funciones es evidente.

188. Fórmula de Wallis.—La primera de las fórmulas precedentes puede ponerse bajo la forma

$$\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}=\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right).$$

Haciendo $x=\frac{\pi}{2}$, resulta,

$$\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\ldots\ldots,$$

ó

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\ldots\ldots,$$

fórmula importante debida al geómetra Wallis, y que nos da el valor de $\frac{\pi}{2}$ como límite del producto de un número infinito de fracciones, alternativamente mayores y menores que la unidad.

Descomposicion de las funciones tang x y cot x en un número arbitrario, pero limitado de fracciones.

189. Si $f'(z)$ representa la derivada de un polinomio $f(z)$ del grado m, y a_1, a_2 ..... a_m, las m raíces de este polinomio se sabe que

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{z-a_m};$$

por otra parte, si a_1 y a_2 son cantidades imaginarias conjugadas, y hacemos

$$a_1 = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha),\; a_2 = r(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha),$$

la suma de las dos fracciones

$$\frac{1}{z-a_1},\; \frac{1}{z-a_2} \text{ será } \frac{2z - 2r\cos\alpha}{z^2 - 2rz\cos\alpha + r^2}.$$

Aplicando este resultado á los dos polimonios $z^m + r^m$ y $z^m - r^m$, que uno y otro tienen por derivada mz^{m-1}, tendremos (175), para valores pares de m,

$$\frac{mz^{m-1}}{z^m + r^m} = \frac{2z - 2r\cos\frac{\pi}{m}}{z^2 - 2rz\cos\frac{\pi}{m} + r^2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{2z - 2r\cos\frac{(m-1)\pi}{m}}{z^2 - 2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m} + r^2},\; \frac{mz^{m-1}}{z^m - r^m} = \frac{1}{z+r} + \frac{1}{z-r}$$

$$+ \frac{2z - 2r\cos\frac{2\pi}{m}}{z^2 - 2rz\cos\frac{2\pi}{m} + r^2} + \ldots\ldots + \frac{2z - 2r\cos\frac{(m-2)\pi}{m}}{z^2 - 2rz\cos\frac{(m-2)\pi}{m} + r^2},$$

y para valores impares de m,

$$\frac{mz^{m-1}}{z^m + r^m} = \frac{1}{z+r} + \frac{2z - 2r\cos\frac{m}{\pi}}{z^2 - 2rz\cos\frac{m}{\pi} + r^2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{2z - 2r\cos\frac{(m-2)\pi}{m}}{z^2 - 2rz\cos\frac{(m-2)\pi}{m} + r^2},\; \frac{mz^{m-1}}{z^m - r^m} = \frac{1}{z-r}$$

$$+\frac{2z-2r\cos\frac{2\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{2\pi}{m}+r^2}+\ldots\ldots+\frac{2z-2r\cos\frac{(m-1)\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2}.$$

Multipliquemos estas cuatro ecuaciones por z, y quitemos de cada una de las ecuaciones resultantes la que se deduce permutando las letras z y r; resultará, para los valores pares de m,

$$(1)\left\{\begin{aligned} m\frac{z^m-r^m}{z^m+r^m} &= 2\frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{\pi}{m}+r^2}+\ldots\ldots \\ &\quad +2\frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2}, \\ m\frac{z^m+r^m}{z^m-r^m} &= 2\frac{z^2+r^2}{z^2-r^2}+2\frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{2\pi}{m}+r^2}+\ldots\ldots \\ &\quad +2\frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-2)\pi}{m}+r^2}, \end{aligned}\right.$$

y para los valores impares de m,

$$(2)\left\{\begin{aligned} m\frac{z^m-r^m}{z^m+r^m} &= \frac{z-1}{z+1}+2\frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{\pi}{m}+r^2}+\ldots\ldots \\ &\quad \frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-2)\pi}{m}+r^2}, \\ m\frac{z^m+r^m}{z^m-r^m} &= \frac{z+r}{z-r}+2\frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{2\pi}{m}+r^2}+\ldots\ldots \\ &\quad +2\frac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2}. \end{aligned}\right.$$

Supongamos

$$z = \cos\frac{x}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{m},\quad r = \cos\frac{x}{m} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{m};$$

resultará, para valores pares de m,

$$(3)\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{tang}\,x = \frac{2}{m}\cot\frac{x}{m}\\
&\times\left[\frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}\right],\\
&\cot x = \frac{2}{m}\cot\frac{2x}{m} - \frac{2}{m}\cot\frac{x}{m}\\
&\times\left[\frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{2\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}\right],
\end{aligned}\right.$$

y para valores impares de m,

$$(4)\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{tang}\,x = \frac{1}{m}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{m} + \frac{2}{m}\cot\frac{x}{m}\\
&\times\left[\frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}\right],\\
&\cot x = \frac{1}{m}\cot\frac{x}{m} - \frac{2}{m}\cot\frac{x}{m}\\
&\times\left[\frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{2\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{\mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}{\mathrm{sen}^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \mathrm{sen}^2\frac{x}{m}}\right],
\end{aligned}\right.$$

si introducimos tangentes en lugar de los senos que figuran en los paréntesis, tendremos, para los valores pares de m,

$$(5)\left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} x &= \operatorname{tang}\frac{x}{m} + \frac{2}{m}\left(\cot\frac{x}{m} + \operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) \\ &\times\left[\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}} + \dots + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}\right], \\ \cot x &= \left(\frac{2}{m}\cot\frac{2x}{m} - \operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) - \frac{2}{m}\left(\cot\frac{x}{m} + \operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) \\ &\times\left[\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{2\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}} + \dots + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}\right], \end{aligned}\right.$$

y para los valores impares de m,

$$(6)\left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} x &= \operatorname{tang}\frac{x}{m} + \frac{2}{m}\left(\cot\frac{x}{m} + \operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) \\ &\times\left[\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}} + \dots + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}\right], \\ \cot x &= \frac{1}{m}\left(\cot\frac{x}{m} + \operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) - \operatorname{tang}\frac{x}{m} \\ &\quad - \frac{2}{m}\left(\cot\frac{x}{m} + \operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) \\ &\times\left[\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{2\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}} + \dots + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Descomposicion de las funciones tang x y cot x en un número infinito de fracciones simples.

190. Es fácil de encontrar en lo que se convierten las fórmulas (3) y (4) ó (5) y (6) del número precedente, cuando se supone infinito el entero m que contienen. Para mayor sencillez, vamos á suponer que x esté comprendida entre cero y $\frac{\pi}{2}$, y entonces todas las fracciones que figuran en los paréntesis de las fórmulas (3), (4), (5), (6), serán positivas. Consideraremos solamente las fórmulas (3) y (5), en las que m es un número par, y haremos uso del lema demostrado en el núm. 186; tenemos, segun el corolario de este lema, que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 v}{\operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v} > \frac{v^2}{u^2 - v^2} > \frac{\operatorname{tang}^2 v}{\operatorname{tang}^2 u - \operatorname{tang}^2 v},$$

suponiendo u superior á v y estando u y v comprendidas entre o y $\frac{\pi}{2}$.

Por medio de estas desigualdades se deducen de las fórmulas (3) y (5) del núm. 189, las siguientes:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\operatorname{tang}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\operatorname{tang} x > \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \dots + \frac{2x}{\left[\frac{(m-1)\pi}{2}\right]^2 - x^2}, \\ &\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\cos\frac{x}{m}\left(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) \\ &\quad < \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \dots + \frac{2x}{\left[\frac{(m-1)\pi}{2}\right]^2 - x^2}, \end{aligned}\right.$$

y

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}} \cos\frac{x}{m}\left[\cot x + \left(1+\frac{2}{m}\right)\operatorname{tang}\frac{x}{m}\right]$$

$$> \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \cdots - \frac{2x}{\left[\frac{(m-2)\pi}{2}\right]^2 - x^2},$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\left(\cot x + \frac{1}{m}\operatorname{tang}\frac{x}{m}\right) < \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \cdots$$

$$- \frac{2x}{\left[\frac{(m-2)\pi}{2}\right]^2 - x^2}.$$

Si hacemos ahora tender el entero par m hácia el infinito, los primeros miembros de las desigualdades (1) tienden uno y otro hácia el límite tang x; la suma que constituye los segundos miembros, se reduce, por consiguiente, á una série convergente que tiene tambien por límite tang x. Igualmente los primeros miembros de las desigualdades (2) tienen ambos por límite cot x, de donde se sigue que la suma contenida en los segundos miembros se convierte en una série convergente que tiene el mismo límite cot x. Tenemos, pues,

$$(3)\quad \operatorname{tang} x = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \cdots,$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2 - x^2} - \frac{2x}{(3\pi)^2 - x^2} + \cdots,$$

fórmulas que tambien pueden ponerse bajo la forma siguiente:

$$(4)\qquad \operatorname{tang} x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+x}\right) + \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+x}\right) + \ldots\ldots,$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) - \ldots\ldots$$

Para establecer las fórmulas (3) y (4) hemos supuesto que x estaba comprendido entre cero y $\frac{\pi}{2}$; pero como los segundos miembros no hacen más que cambiar de signo, lo mismo que los primeros, cuando cambiamos x en $-x$, vemos que las fórmulas se verifican para los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$; por último, se reconoce inmediatamente que los segundos miembros de las fórmulas (4) no cambian cuando se cambia x en $x+\pi$; estos son, en otros términos, funciones periódicas de x comprendidas entre $-\infty$ y $+\infty$; vemos, pues, que las funciones tang x y cot x se pueden descomponer en una infinidad de fracciones simples, cuyos numeradores son iguales á la unidad, y cuyos denominadores son los binomios de primer grado, que, igualados á cero, nos dan las raíces de las ecuaciones tang $x = \infty$, cot $x = \infty$. Para concluir, diremos que cada una de las dos fórmulas (3) y (4) pueden deducirse de la otra, cambiando en esta x en $\frac{\pi}{2} - x$.

Si, despues de haber dividido por x la primera de las ecuaciones (3) hacemos $x = o$, se obtiene la fórmula

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\ldots;$$

igualmente, si quitamos $\frac{1}{x}$ de los dos miembros de la segunda ecuacion (3), dividimos en seguida por x y hacemos $x = o$, obtendremos, haciendo uso de las fórmulas (5) del núm. 183,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots..,$$

y dividiendo por 4,

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots..;$$

la convergencia de estas séries resulta evidentemente del análisis mismo á que nos ha conducido.

Descomposicion de las funciones cosec x y sec x en un número infinito de fracciones simples.

191. Tenemos

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x;$$

por consiguiente, si reemplazamos x por $\frac{1}{2} x$ en las ecuaciones (4) del número precedente, y formamos la semi-suma de los resultados, tendremos

$$(1) \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \left(\frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x}\right) - \ldots..;$$

de donde se deduce, cambiando x en $\frac{\pi}{2} - x$,

$$(2) \quad \sec x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x}\right) + \left(\frac{1}{\frac{5\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2} + x}\right) - \dots\dots$$

Estas fórmulas pueden ponerse bajo la forma siguiente:

$$(3) \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2 - x^2} + \frac{2x}{(3\pi)^2 - x^2} - \dots\dots,$$

$$\sec x = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \dots\dots;$$

haciendo $x = o$ en la segunda de las ecuaciones (3), resulta

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots$$

Desarrollo de las funciones tang x y cot x en séries ordenadas segun las potencias crecientes de x.

192. Si suponemos que

$$(1) \quad \operatorname{tang} x - R_n = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \dots\dots + \frac{2x}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2 - x^2},$$

$$\cot x - R'_n = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \dots\dots - \frac{2x}{[(n-1)\pi]^2 - x^2},$$

las cantidades R_n y R'_n tienden hácia cero (núm. 190), cuando n tiende hácia el infinito. Ahora tenemos por la division

$$\frac{1}{a-z}=\frac{1}{a}+\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}+\ldots..,$$

y la série del segundo miembro de esta fórmula es convergente para todos los valores de z comprendidos entre $-a$ y $+a$: pues las fracciones limitadas en número de que está compuesto el valor de $\operatorname{tang} x - R_n$, se podrán desarrollar en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x, para todos los valores de x, comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$; igualmente las fracciones que figuran en el valor de $\cot x - R'_n$ se podrán desarrollar, á partir de la segunda, en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x, para todos los valores de x comprendidos entre $-\pi$ y $+\pi$; tendremos, formando estos desarrollos,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tang} x - R_n = \frac{2^3}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots..+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\\
&\qquad x+\frac{2^5}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots..+\frac{1}{(2n-1)^4}\right]x^3+\ldots..,\\
&\cot x - R'_n = \frac{1}{x}-\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots..+\frac{1}{(n-1)^2}\right]x\\
&\qquad -\frac{2}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\ldots..+\frac{1}{(n-1)^4}\right]x^3-\ldots..
\end{aligned}\right.$$

Hemos establecido en el núm. 190 que las séries

$$\frac{1}{1^{2\mu}}+\frac{1}{3^{2\mu}}+\frac{1}{5^{2\mu}}+\ldots,\quad \frac{1}{1^{2\mu}}+\frac{1}{2^{2\mu}}+\frac{1}{3^{2\mu}}+\ldots..$$

son convergentes cuando $\mu=1$; serán con mayor razon convergentes cuando $\mu > 1$. Por consiguiente, si representamos por $S_{2\mu}$ y $S'_{2\mu}$ los límites de estas dos séries, y hacemos

$$S_{2\mu} = \frac{1}{1^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n-1)^{2\mu}} + \alpha_{2\mu},$$

$$S'_{2\mu} = \frac{1}{1^{2\mu}} + \frac{1}{2^{2\mu}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)^{2\mu}} + \alpha'_{2\mu},$$

$\alpha_{2\mu}$ y $\alpha'_{2\mu}$, se anularán para $n = \infty$.

Esto supuesto, podemos poner las ecuaciones (2) como sigue:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang} x - R_n = \left(\frac{2^3 S_2}{\pi^2} x + \frac{2^5 S_4}{\pi^4} x^3 + \frac{2^7 S_6}{\pi^6} x^5 \right.\\ &\qquad \left. + \ldots\ldots\right) - \frac{\pi}{4}\left[\alpha_2 \frac{2x}{\pi} + \alpha_4 \left(\frac{2x}{\pi}\right)^3 + \ldots\ldots\right],\\ &\qquad \cot x - R'_n = \left(\frac{1}{x} - \frac{2S'_2}{\pi^2} x - \frac{2S'_4}{\pi^4} x^3\right.\\ &\left. - \frac{2S'_6}{\pi^6} x^5 - \ldots\ldots\right) + \frac{2}{\pi}\left[\alpha'_2 \frac{x}{\pi} + \alpha'_4 \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + \ldots\ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Si representamos por α la mayor de las cantidades α_2, $\alpha_4, \ldots\ldots, \alpha'_2, \alpha'_4, \ldots\ldots$, los valores absolutos de las dos sumas

$$(4)\qquad \alpha_2 \frac{2x}{\pi} + \alpha_4 \left(\frac{2x}{\pi}\right)^3 + \ldots\ldots,\quad \alpha'_2 \frac{x}{\pi} + \alpha'_4 \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + \ldots\ldots,$$

serán menores respectivamente que los productos de α por los valores absolutos de las dos nuevas sumas

$$(5)\qquad \frac{2x}{\pi} + \left(\frac{2x}{\pi}\right)^3 + \ldots\ldots,\quad \frac{x}{\pi} + \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + \ldots\ldots$$

Las cantidades (5) son progresiones geométricas, que son convergentes, la primera para los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, la segunda para los valores de x comprendidos entre $-\pi$ y $+\pi$; la cantidad α desaparece lo mismo que R_n y R'_n para $n=\infty$; tenemos, pues, en el límite

$$(6)\quad \begin{cases} \tan x = \dfrac{2^3 S_2}{\pi^2}x + \dfrac{2^5 S_4}{\pi^4}x^3 + \dfrac{2^7 S_6}{\pi^6}x^5 + \ldots.. \\ \cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2 S'_2}{\pi^2}x - \dfrac{2 S'_4}{\pi^4}x^3 - \dfrac{2 S'_6}{\pi^6}x^5 - \ldots..; \end{cases}$$

la primera de estas fórmulas subsiste para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, la segunda para los valores de x comprendidos entre $-\pi$ y $+\pi$.

Tenemos idénticamente,

$$S_{2\mu} = S'_{2\mu} - \frac{S'_{2\mu}}{2^{2\mu}} = \frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu}} S'_{2\mu},$$

y si hacemos

$$(7)\quad \frac{B_\mu}{1\times 2\ldots..2\mu} = \frac{1}{2^{2\mu-1}\pi^{2\mu}}\left(1 + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \ldots..\right),$$

tendremos

$$(8)\quad S_{2\mu} = \frac{1}{2}\,\frac{(2^{2\mu}-1)\pi^{2\mu} B_\mu}{1\times 2\ldots..2\mu},\quad S'_{2\mu} = \frac{2^{2\mu-1}\pi^{2\mu} B_\mu}{1\times 2\ldots..2\mu}.$$

Reemplazando en las ecuaciones (6), $S_{2\mu}$ y $S'_{2\mu}$ por estos valores, resulta

$$(9)\quad \tan x = 2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{1\times 2} + \ldots..$$
$$+ 2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\frac{x^{2n-1}}{1\times 2\ldots..2n} + \ldots..$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2^2 B_1 \frac{x}{1 \times 2} \ldots\ldots - 2^{2n} B_n \frac{x^{2n-1}}{1 \times 2 \ldots\ldots 2n} - \ldots\ldots$$

Esta segunda ecuacion toma una forma más elegante, cuando se pone $\frac{x}{2}$ en lugar de x; se obtiene de este modo,

$$(10)\quad 1 - \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = B_1 \frac{x^2}{1 \times 2} + B_2 \frac{x^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \ldots\ldots + B_n \frac{x^{2n}}{1 \times 2 \ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots,$$

fórmula que subsiste para todos los valores de x comprendidos entre -2π y $+2\pi$.

193. Los coeficientes B_1, B_2, B_3, ..., que figuran en las fórmulas (9) y (10), se encuentran en muchos problemas del Análisis: son conocidos bajo el nombre de *números de Bernoulli*. La ecuacion (7) nos da la expresion general de estos números; pero esta expresion contiene por una parte la trascendente π y por otra la suma de una série indefinida. Es fácil, como vamos á ver, determinar sucesivamente los números B_1, B_2, B_3, ..., que son todos racionales.

Sabemos que, si dos séries ordenadas con relacion á las potencias crecientes de una variable x siguen convergentes cuando se reducen todos sus términos á sus valores absolutos, y que si ordenamos con relacion á x el producto de estas dos séries, el resultado obtenido es tambien una série convergente; además, la suma de esta nueva série es el producto de las sumas de las dos primeras. Esto supuesto, podemos determinar el número B_n por medio de la fórmula (10), multiplicándola por $1 - \cos x$, ó por sen x; en efecto, tenemos idénticamente

$$\left(1 - \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}\right)(1 - \cos x) = 1 - \cos x - \frac{x}{2} \operatorname{sen} x,$$

$$\left(1 - \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}\right) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - \frac{x}{2}(1 + \cos x),$$

y si reemplazamos en estas igualdades $1-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$, sen x y cos x, por sus desarrollos en séries, encontraremos

$$\left(B_1\frac{x^2}{1\times 2}+B_2\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\right)$$
$$\left(\frac{x^2}{1\times 2}-\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\right)=\left(\frac{x^2}{1\times 2}-\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\right)$$
$$-\frac{x}{2}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\times 2\times 3}+\ldots\right),$$

$$\left(B_1\frac{x^2}{1\times 2}+B_2\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\right)$$
$$\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\times 2\times 3}+\ldots\right)=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\times 2\times 3}+\ldots\right)$$
$$-\frac{x}{2}\left(2-\frac{x^2}{1\times 2}+\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}-\ldots\right).$$

Efectuando los productos indicados en los primeros miembros, é igualando en seguida los coeficientes de x^{2n+2} en la primera fórmula, y los de x^{2n+1} en la segunda, se obtiene

$$(11)\quad o=\frac{1}{1\times 2\ldots(2n+2)}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1\times 2\ldots(2n+1)}$$
$$+\frac{1}{1\times 2\ldots 2n}\times\frac{B_1}{1\times 2}-\frac{1}{1\times 2\ldots(2n-2)}$$
$$\times\frac{B_2}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots+(-1)^{\mu-1}\frac{1}{1\times 2\ldots(2n-2\mu+2)}$$
$$\times\frac{B_\mu}{1\times 2\ldots 2\mu}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{1\times 2}\times\frac{B_n}{1\times 2\ldots 2n},$$

y tambien

$$(12)\quad o=\frac{1}{1\times 2\ldots(2n+1)}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1\times 2\ldots 2n}$$

$$+\frac{1}{1\times 2\,.....\,(2n-1)}\,\frac{B_1}{1\times 2}-\frac{1}{1\times 2\,.....\,(2n-3)}$$
$$\times\frac{B_2}{1\times 2\times 3\times 4}+\,.....\,+(-1)^{\mu-1}\frac{1}{1\times 2\,.....\,(2n-2\mu+1)}$$
$$\times\frac{B_\mu}{1\times 2\,.....\,2\mu}+\,.....\,+(-1)^{n-1}\frac{1}{1}\times\frac{B_n}{1\times 2\,.....\,2n},$$

una cualquiera de estas fórmulas (11) y (12) nos dará el valor de B_n conociendo B_1, B_2, ..., B_{n-1}; por ejemplo, la fórmula (12) nos dará, haciendo

$$n=1,2,3,\,.....,\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+B_1=o,$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}B_1-B_2=o,\ \frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{6}{2}B_1$$
$$-\frac{6\times 5\times 4}{2\times 3\times 4}B_2+B_3=o,\ \frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}B_1-\frac{8\times 7\times 6}{2\times 3\times 4}B_2$$
$$+\frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}B_3-B_4=o,\,.....,$$

ecuaciones de las que se deduce sucesivamente

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},$$

$$B_6=\frac{691}{2730},\ B_7=\frac{7}{6},\,.....$$

La série de números de Bernoulli es al principio decreciente, pero á partir de B_3 se convierte en creciente indefinidamente. Las relaciones (11) y (12) no son las únicas que unen entre sí los n primeros de estos números, cualquiera que sea n; por ejemplo, se obtienen por medio de las ecuaciones (9), otras relaciones, sobre las que conviene fijar la atencion. Tenemos, efectivamente, que $\cot x\times\operatorname{sen} x=\cos x$, $\operatorname{tang} x\times\cos x=\operatorname{sen} x$;

y reemplazando las líneas trigonométricas por sus desarrollos en séries, resulta:

$$\left(\frac{1}{x} - 2^2 B_1 \frac{x}{1\times 2} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1\times 2} + \ldots \left[2^2(2^2-1) B_1 \frac{x}{1\times 2} + \ldots\right]$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{1\times 2} + \ldots\right) = x - \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \ldots.$$

Si efectuamos los productos é igualamos los coeficientes de x^{2n} en la primera fórmula y los de x^{2n-1} en la segunda, encontraremos

$$(13) \qquad o = \frac{1}{1\times 2\ldots 2n} - \frac{1}{1\times 2\ldots(2n+1)}$$

$$-\frac{1}{1\times 2\ldots(2n-1)} 2^2 \frac{B_1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\ldots(2n-3)} 2^4 \frac{B_2}{1\times 2\times 3\times 4}$$

$$+ \ldots + (-1)^{\mu} \frac{1}{1\times 2\ldots(2n-2\mu+1)} 2^{2\mu} \frac{B_{\mu}}{1\times 2\ldots 2\mu}$$

$$+ \ldots + (-1)^n \frac{1}{1} 2^{2n} \frac{B_n}{1\times 2\ldots 2n},$$

$$(14) \qquad o = \frac{1}{1\times 2\ldots(2n-1)} - \frac{2^2(2^2-1)}{1\times 2\ldots(2n-2)} \frac{B_1}{1\times 2}$$

$$+ \ldots + (-1)^{\mu} \frac{2^{2\mu}(2^{2\mu}-1)}{1\times 2\ldots(2n-2\mu)} \frac{B_{\mu}}{1\times 2\ldots 2\mu} + \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1} \frac{B_n}{1\times 2\ldots 2n}.$$

Si colocamos los valores de B_1, B_2, B_3, ..., encontrados anteriormente en las fórmulas (8), obtendremos los resultados siguientes:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots=\frac{\pi^4}{90},\ 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots\ldots$$
$$=\frac{\pi^6}{945},\ 1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots\ldots=\frac{\pi^8}{9450},$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\ldots\ldots=\frac{\pi^{10}}{93555},\ \ldots\ldots$$

y

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{8},\ 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots\ldots=\frac{\pi^4}{96},$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots\ldots=\frac{\pi^6}{960},\ 1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\ldots$$
$$=\frac{17\,\pi^8}{161280},\ 1+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\ldots\ldots=\frac{31\,\pi^{10}}{2903040},\ \ldots\ldots,$$

y vemos que, en general, la suma de las séries

$$1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots\ldots$$

y

$$1+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\ldots\ldots,$$

no contiene en su expresion más que la sola trascendente π, si m es entero.

Por último, llevando estos valores del coeficiente B á las fórmulas (9), se tiene:

$$\text{(15)}\qquad \operatorname{tang} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2\,x^5}{15}+\frac{17\,x^7}{315}+\ldots\ldots,$$
$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2\,x^5}{945}-\ldots\ldots$$

194. Las fórmulas (6) pueden emplearse para la construccion de tablas de tangentes y cotangentes. Si en ellas hacemos $x=\frac{m}{n}\,\frac{\pi}{2}$, se convierten en

$$\operatorname{tang}\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)=\frac{4}{\pi}\left(S_2\frac{m}{n}+S_4\frac{m^3}{n^3}+S_6\frac{m^5}{n^5}+\ldots..\right),$$

$$\cot\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)=\frac{2}{\pi}\,\frac{n}{m}-\frac{1}{\pi}\left(S'_2\frac{m}{n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^2}S'_4\frac{m^3}{n^3}+\frac{1}{2^4}S'_6\frac{m^5}{n^5}+\ldots..\right)$$

Estas fórmulas no se pueden aplicar más que cuando la fraccion $\frac{m}{n}$ es muy pequeña, porque las sumas S_2, $S_4, \ldots..$, S'_2, S'_4, ... decrecen con demasiada lentitud. Hubiéramos obtenido séries mucho más cómodas para el cálculo, si hubiésemos conservado en las fórmulas (1), del núm. 192, sin desarrollarlas en séries, las fracciones

$$\frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}\ \text{y}\ -\frac{2x}{\pi^2-x^2},$$

que para $x=\frac{m}{n}\,\frac{\pi}{2}$ se reducen respectivamente á

$$\frac{4}{\pi}\,\frac{m\,n}{n^2-m^2}\ \text{y}\ \frac{-1}{\pi}\,\frac{4\,m\,n}{4\,n^2-m^2}.$$

Los desarrollos de estas funciones son los siguientes:

$$\frac{4}{\pi}\,\frac{mn}{n^2-m^2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{n}+\frac{m^3}{n^3}+\frac{m^5}{n^5}+\ldots..\right),$$

$$-\frac{1}{\pi}\,\frac{4\,mn}{4\,n^2-m^2}=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{m}{n}+\frac{m^3}{2^2\,n^3}+\frac{m^5}{2^4\,n^5}+\ldots..\right),$$

y, si restamos estas dos ecuaciones de las dos precedentes, tendremos

$$\operatorname{tang}\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)=\frac{4}{\pi}\,\frac{mn}{n^2-m^2}+\frac{4}{\pi}\ldots$$

$$\left[(S_2 - 1)\frac{n}{m} + (S_4 - 1)\frac{m^3}{n^3} + \ldots\ldots\right],$$

$$\cot\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{n}{m} - \frac{1}{\pi}\,\frac{4\,m\,n}{4\,n^2 - m^2} - \frac{1}{\pi}$$

$$\left[(S'_2 - 1)\frac{m}{n} + \frac{1}{4}(S'_4 - 1)\frac{m^3}{n^3} + \ldots\ldots\right],$$

séries cuyos términos decrecen muy rápidamente. Haciendo el cálculo de los coeficientes con veinte decimales, encontramos

$$\operatorname{tang}\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = \frac{2\,m\,n}{n^2 - m^2} \times 0{,}63661977236758134307\,55$$

$$+ 0{,}\ 29755678205973393308\ \frac{m}{n}$$

$$+ 0{,}\ 01868865027732982117\ \frac{m^3}{n^3}$$

$$+ 0{,}00\ 18424752035100357\,8\ \frac{m^5}{n^5}$$

$$+ 0{,}000\ 19758007152047731\ \frac{m^7}{n^7}$$

$$+ 0{,}0000\ 2169773732486026\ \frac{m^9}{n^9}$$

$$+ 0{,}00000\ 240113699141062\ \frac{m^{11}}{n^{11}}$$

$$+ 0{,}000000\ 26641330342100\ \frac{m^{13}}{n^{13}}$$

$$+ 0{,}0000000\ 2958646768238\ \frac{m^{15}}{n^{15}}$$

$$+ 0{,}00000000\ 328678837940\ \frac{m^{17}}{n^{17}}$$

$$+ 0{,}000000000\ 36517490274\ \frac{m^{19}}{n^{19}}$$

$$+ 0{,}0000000000\ 4075403828\ \frac{m^{21}}{n^{21}}$$

$$+ 0{,}00000000000\ 450828887\ \frac{m^{23}}{n^{23}}$$

$$+ 0{,}000000000000\ 50090831\ \frac{m^{25}}{n^{25}}$$

$$+ 0{,}0000000000000\ 5565642\ \frac{m^{27}}{n^{27}}$$

$$+ 0{,}00000000000000\ 618404\ \frac{m^{29}}{n^{29}}$$

$$+ 0{,}000000000000000\ 68712\ \frac{m^{31}}{n^{31}}$$

$$+ 0{,}0000000000000000\ 7634\ \frac{m^{33}}{n^{33}}$$

$$+ 0{,}00000000000000000\ 848\ \frac{m^{35}}{n^{35}}$$

$$+ 0{,}000000000000000000\ 94\ \frac{m^{37}}{n^{37}}$$

$$+ 0{,}0000000000000000000\ 10\ \frac{m^{39}}{n^{39}}$$

$$+ 0{,}00000000000000000000\ 1\ \frac{m^{41}}{n^{41}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cot\left(\frac{m}{n}\,90^{\circ}\right)=\frac{n}{m}$$

$$\times\, 0{,}6366197723675813430755358534900574480126-\frac{4mn}{4n^2-m^2}$$

$$\times\, 0{,}31830988618379067153 8$$

$$-\,0{,}\ 20528888941450820154\ \frac{m}{n}$$

$$-\,0{,}00\ 655107478821849925\ \frac{m^3}{n^3}$$

$$-\,0{,}000\ 34502925539677702\ \frac{m^5}{n^5}$$

$$-\,0{,}0000\ 2027910605155806\ \frac{m^7}{n^7}$$

$$-\,0{,}00000\ 123665271772267\ \frac{m^9}{n^9}$$

$$-\,0{,}0000000\ 7649588161606\ \frac{m^{11}}{n^{11}}$$

$$-\,0{,}00000000\ 475973801257\ \frac{m^{13}}{n^{13}}$$

$$-\,0{,}000000000\ 29690516679\ \frac{m^{15}}{n^{15}}$$

$$-\,0{,}0000000000\ 1854068275\ \frac{m^{17}}{n^{17}}$$

$$-\,0{,}00000000000\ 115835398\ \frac{m^{19}}{n^{19}}$$

$$-\,0{,}0000000000000\ 7238498\ \frac{m^{21}}{n^{21}}$$

$$-\,0{,}00000000000000\ 452372\ \frac{m^{23}}{n^{23}}$$

$$-\,0{,}000000000000000\ 28272\ \frac{m^{25}}{n^{25}}$$

$$-\,0{,}0000000000000000\ 1767\ \frac{m^{27}}{n^{27}}$$

$$-\,0{,}00000000000000000\ 110\ \frac{m^{29}}{n^{29}}$$

$$-\,0{,}0000000000000000000\ 7\ \frac{m^{31}}{n^{31}}$$

$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Desarrollo de las funciones cosec x y sec x en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x.

195. Si en la ecuacion $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$, reemplazamos $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ y $\cot\frac{1}{2}x$ por sus desarrollos en séries, resultará

$$\text{(1)}\qquad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{x}+(2^2-2)\,B_1\,\frac{x}{1\times 2}+\ldots..$$

$$+ (2^{2n} - 2) B_n \frac{x^{2n-1}}{1 \times 2 \ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots,$$

fórmula que subsiste para todos los valores de x comprendidos entre $-\pi$ y $+\pi$.

La funcion secante de x se puede tambien desarrollar en série convergente ordenada segun las potencias crecientes de x, pero solamente para los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$. En efecto, pudiendo desarrollarse las dos funciones tang x y cosec x en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x, para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, tambien lo es el producto tang x cosec x ó sec x, segun un teorema conocido, del que hemos hecho uso en el núm. 193. Como la funcion sec x no cambia cuando cambiamos x en $-x$, y esta funcion se reduce á 1 para $x = o$, su desarrollo será necesariamente de la forma

$$\text{(2)} \qquad \sec x = 1 + C_1 \frac{x^2}{1 \times 2} + C_2 \frac{x^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \ldots\ldots$$

$$+ C_n \frac{x^{2n}}{1 \times 2 \ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots$$

Para determinar los coeficientes $C_1, C_2, \ldots\ldots$, multipliquemos la fórmula anterior por

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{x^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{1 \times 2 \ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots;$$

siendo el producto de los primeros miembros igual á 1, las diversas potencias de x deberán desaparecer en el producto de los segundos miembros. Igualando, por consiguiente, á cero los coeficientes de x^{2n}, resultará

$$o = 1 - \frac{2n(2n-1)}{1 \times 2} C_1 + \ldots..$$

$$+ (-1)^{\mu} \frac{2n(2n-1)\ldots..(2n-2\mu+1)}{1 \times 2 \ldots.. 2\mu} C_{\mu} + \ldots.. + (-1)^n C_n,$$

fórmula que nos dará el valor de C_n cuando conozcamos los de $C_1, C_2, \ldots.., C_{n-1}$. Haciendo sucesivamente á $n = 1, 2, 3, \ldots..$, resultará

$$1 - C_1 = o,\ 1 - \frac{4 \times 3}{1 \times 2} C_1 + C_2 = o,\ 1 - \frac{6 \times 5}{1 \times 2} C_1$$
$$+ \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} C_2 - C_3 = o, \ldots.,$$

de donde

$$C_1 = 1,\ C_2 = 5,\ C_3 = 61, \ldots..;$$

vemos, por las fórmulas precedentes, que los coeficientes C, C_1, C_2, ..., son todos números enteros.

Reemplazando los coeficientes B y C por sus valores, las fórmulas (1) y (2) se convierten en

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \ldots..$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \ldots..$$

Aquí es la ocasion de hacer notar que se pueden obtener por medio de la fórmula (1) relaciones lineales nuevas entre los coeficientes B, B_1 ..... Por ejemplo, tenemos

$$\cot x \cos x = \operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x;$$

si reemplazamos las líneas trigonométricas por sus valores en séries, efectuamos la multiplicacion indicada en el primer miembro é igualamos entre sí los coeficientes de x^{2n-2}, encontraremos

$$\frac{1}{1\times2\ldots..2n}-\frac{1}{1\times2\ldots..(2n-1)}+\frac{1}{1\times2\ldots..(2n-2)}2^2\frac{B_1}{1\times2}$$

$$-(-1)^{\mu}\frac{1}{1\times2\ldots..(2n-2\mu)}2^{2\mu}\frac{B_\mu}{1\times2\ldots..2\mu}-\ldots..$$

$$-(-1)^{n-1}\frac{1}{1\times2}2^{2n-2}\frac{B_{n-1}}{1\times2\ldots..(2n-2)}$$

$$=(-1)^n 2(2^{2n}-1)\frac{B_n}{1\times2\ldots..2n}.$$

Hemos establecido en el núm. 191, que cualquiera que sea x, tenemos,

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{x}+\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}+\frac{2x}{(3\pi)^2-x^2}-\ldots..,$$

$$\sec x=\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}-\frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-x^2}+\frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-x^2}-\ldots..$$

Si desarrollamos, por la division, en séries ordenadas segun las potencias crecientes de x las fracciones contenidas en los segundos miembros de estas fórmulas, é identificamos los resultados con las fórmulas (1) y (2), obtendremos

$$(3)\quad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots..=\frac{2-1}{1\times2}B_1\pi^2=\frac{\pi^2}{12},$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots..=\frac{2^3-1}{1\times2\times3\times4}B_2\pi^4=\frac{7\pi^4}{720},$$

$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\ldots..=\frac{2^5-1}{1\ldots..6}B_3\pi^6=\frac{31\pi^6}{30240},\ldots..,$$

$$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\ldots\ldots=\frac{2^{2n-1}-1}{1\times 2\ldots\ldots 2n}B_n\pi^{2n},$$

y

$$(4)\qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots=\frac{\pi}{4},$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots\ldots=\frac{C_1}{1\times 2}\frac{\pi^3}{2^4}=\frac{\pi^3}{32},$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\ldots\ldots=\frac{C_2}{1\times 2\times 3\times 4}\frac{\pi^5}{2^6}=\frac{5\pi^5}{1536},\ldots\ldots,$$

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\ldots=\frac{C_n}{1\times 2\ldots .2n}\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}}.$$

Es necesario observar que las fórmulas (3) pueden deducirse de las del núm. 193, y que la primera de las fórmulas (4) es ya conocida (191).

De las funciones circulares de variables imaginarias.

196. Los desarrollos que hemos presentado en los párrafos precedentes, permiten considerar las funciones circulares bajo un punto de vista más general que hasta aquí. Vemos, efectivamente que, si definimos las funciones sen z y cos z por medio de las ecuaciones

$$(1)\qquad \text{sen}\, z=\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1\times 2\times 3}+\frac{z^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}-\ldots\ldots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{1\times 2}+\frac{z^4}{1\times 2\times 3\times 4}-\ldots\ldots,$$

podremos atribuir á la variable z valores imaginarios; porque las séries contenidas en las fórmulas precedentes no dejan de ser convergentes, cuando z representa una expresion imaginaria. Efectivamente, una série cuyos términos son imaginarios, se llama *convergente* cuando las partes reales de sus términos forman una série convergente, lo mismo que los coeficientes de i. Suponiendo que $z = \rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$, las fórmulas (1) se convertirán en

$$\operatorname{sen} z = \left(\frac{\rho\cos\omega}{1} - \frac{\rho^3\cos 3\omega}{1\times2\times3} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ i\left(\frac{\rho\operatorname{sen}\omega}{1} - \frac{\rho^3\operatorname{sen} 3\omega}{1\times2\times3} + \ldots\ldots\right),$$

$$\cos z = \left(1 - \frac{\rho^2\cos 2\omega}{1\times2} + \frac{\rho^4\cos 4\omega}{1\times2\times3\times4} - \ldots\ldots\right)$$
$$+ i\left(- \frac{\rho^2\operatorname{sen} 2\omega}{1\times2} + \frac{\rho^4\operatorname{sen} 4\omega}{1\times2\times3\times4} - \ldots\ldots\right);$$

pero las séries

$$\frac{\rho}{1} + \frac{\rho^3}{1\times2\times3} + \ldots\ldots,\ 1 + \frac{\rho^2}{1\times2} + \frac{\rho^4}{1\times2\times3\times4} + \ldots\ldots$$

son convergentes, cualquiera que sea la cantidad positiva ρ; luego sucede lo mismo, con mayor razon, á las séries que figuran en las expresiones precedentes de $\operatorname{sen} z$ y de $\cos z$.

Las funciones $\operatorname{tang} z$, $\cot z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ no se pueden desarrollar en séries convergentes ordenadas segun las potencias crecientes de z más que en una extension muy limitada, cuando z es real; de modo que estas séries no servirian para expresar la definicion general de las funciones con las que se compara; pero es natural definir estas por medio de las ecuaciones

$$\operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z},\quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},\quad \sec z = \frac{1}{\cos z},\quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Vemos claramente que las relaciones $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ y $\frac{\operatorname{tang} z}{z}$ tienden hácia la unidad cuando la variable imaginaria z tiende hácia cero.

197. Bajo este nuevo punto de vista, las funciones circulares directas están en relacion con las funciones que se llaman *exponenciales;* ahora vamos á tratar de su desarrollo.

Representemos por z una variable real ó imaginaria, y supongamos que

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \times 2} + \frac{z^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{z^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \ldots ;$$

la série del segundo miembro será evidentemente convergente, cualquiera que sea el valor real ó imaginario de z; cambiando z en z_1, tendremos del mismo modo

$$\varphi(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1} + \frac{z_1^2}{1 \times 2} + \frac{z_1^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{z_1^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \ldots$$

Las séries expresadas por $\varphi(z)$ y $\varphi(z_1)$, permanecen convergentes cuando se reducen z y z_1 á sus módulos; si se les multiplica uno por otro y se reunen en uno solo todos los términos del mismo grado en z y z_1, obtendremos, segun un teorema conocido, una nueva série convergente cuya suma será igual á $\varphi(z)\,\varphi(z_1)$. Ahora, efectuando el producto de que se trata, encontramos que el término del grado n en z y z_1, es

$$\frac{1}{1 \times 2 \ldots n}\left[z^n + \frac{n}{1} z^{n-1} z_1 + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} z^{n-2} z_1^2 + \ldots + z_1^n\right],$$

ó

$$\frac{(z + z_1)^n}{1 \times 2 \times 3 \ldots n};$$

tenemos, pues,

$$\varphi(z)\,\varphi(z_1) = \varphi(z + z_1),$$

y, por consiguiente,

$$\varphi(z)\,\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\,.....\,\varphi(z_{\mu-1})=\varphi(z+z_1+z_2+.....+z_{\mu-1}),$$

cualquiera que sean las μ cantidades z, z_1, ... Si estas cantides son iguales entre sí, la fórmula anterior se reduce á la siguiente:

$$[\varphi(z)]^{\mu}=\varphi(\mu z);$$

pero, si μ y ν son dos enteros positivos, se tiene

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^{\nu}=[\varphi(\pm 1)]^{\mu},$$

y á causa de ser

$$\varphi(1)\,\varphi(-1)=\varphi(o)=1,\ \left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^{\nu}=[\varphi(\pm 1)]^{\mu}.$$

Se representa generalmente por e el valor de $\varphi(1)$, de suerte que tenemos

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+.....;$$

la série por la cual queda el número e determinado es muy convergente, y si suponemos que

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+.....+\frac{1}{1\times 2\,.....\,n}+R_n;\ R_n$$

será el error que se cometerá deteniéndose en el término

$$\frac{1}{1\times 2\,.....\,n}.$$

Tenemos evidentemente

$$R_n = \frac{1}{1 \times 2 \ldots\ldots n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right),$$

y, por consiguiente,

$$R_n < \frac{1}{1 \times 2 \ldots\ldots n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots\right),$$

ó

$$R_n < \frac{1}{1 \times 2 \ldots\ldots n} \times \frac{1}{n};$$

de modo que, si para calcular e se desprecian todos los términos que siguen al $(n+1)^{esimo}$, el error cometido será menor que la enesima parte de este término; encontramos de este modo $e = 2,718281828459045 \ldots\ldots$

Segun lo que antecede, podemos decir que

$$\left[\varphi\left(\pm \frac{\mu}{\nu}\right)\right]^\nu = e^{\pm \mu}; \varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$$

es evidentemente positivo, $\varphi\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)$ lo es tambien á causa de ser $\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\left(-\frac{\mu}{\nu}\right) = \varphi(o) = 1$; pues si z es real, la cantidad $\varphi(z)$ es igual á la de los valores de la expresion e^z, que es real y positiva.

Este resultado nos conduce naturalmente á designar por e^z, cualquiera que sea z, el límite de la série convergente

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \times 2} + \ldots\ldots;$$

de manera que efectuar la suma de esta série, es elevar el número e á la potencia z; y segun la proposicion que acabamos de establecer, la propiedad fundamental de la funcion e^z estará expresada por la fórmula (2) $e^z \times e^{z_1} = e^{z+z_1}$, que se verifica, cualquiera que sean las cantidades z y z_1.

Si designamos aún por i la imaginaria $\sqrt{-1}$, y en la ecuacion

$$(3) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\times 2} + \frac{z^3}{1\times 2\times 3} + \dots..$$

reemplazamos z sucesivamente por $+iz$ y por $-iz$, resultará

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{1\times 2} + \frac{z^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \dots..\right)$$
$$+ i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1\times 2\times 3} + \frac{z^5}{1\dots..5} - \dots..\right),$$

$$e^{-iz} = \left(1 - \frac{z^2}{1\times 2} + \frac{z^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \dots..\right)$$
$$- i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1\times 2\times 3} + \frac{z^5}{1\dots..5} - \dots..\right),$$

es decir, á causa de las ecuaciones (1)

$$(4) \qquad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z;$$

se deduce de aquí

$$(5) \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si en la fórmula fundamental (2) reemplazamos z y z_1, primero por iz é iz_1, despues por $-iz$ y $-iz_1$, tendremos

$$e^{iz} \times e^{iz_1} = e^{i(z+z_1)}, \quad e^{-iz} \times e^{-iz_1} = e^{-i(z+z_1)},$$

ó á causa de las fórmulas (4),

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)(\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1) = \cos(z + z_1) + i \operatorname{sen}(z + z_1),$$

$$(\cos z - i \operatorname{sen} z)(\cos z_1 - i \operatorname{sen} z_1) = \cos(z + z_1) - i \operatorname{sen}(z + z_1);$$

sumando y restando una por la otra estas dos ecuaciones, encontramos, despues de haber efectuado los productos indicados

$$\cos(z + z_1) = \cos z \cos z_1 - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z_1, \tag{6}$$

$$\operatorname{sen}(z + z_1) = \operatorname{sen} z \cos z_1 + \cos z \operatorname{sen} z_1,$$

fórmulas que se verifican, cualquiera que sean las cantidades reales ó imaginarias representadas por z y z_1. De aquí resulta, que todas las fórmulas de la Trigonometría general que hemos deducido de las que se refieren á la adicion de los arcos, subsisten sin modificacion alguna cuando sustituimos á los arcos expresiones imaginarias.

Si en las fórmulas (2) y (6) sustituimos z por x y z_1 por iy, resultará

$$e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}, \quad \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy,$$

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy;$$

pero las fórmulas (4) y (5) nos dan

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y, \quad \cos iy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \tag{7}$$

$$\operatorname{sen} iy = i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2};$$

tenemos, pues,

$$(8)\qquad e^{x+iy} = e^{x}\cos y + i e^{x}\operatorname{sen} y,$$

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x - i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\operatorname{sen} x,$$

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\operatorname{sen} x + i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.$$

Estas fórmulas (8) se verifican, cualquiera que sean las cantidades x é y reales ó imaginarias; pero son útiles, sobre todo, para traer á la forma ordinaria de expresiones imaginarias las funciones e^{z}, $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$, en las que z designa una expresion imaginaria $x+iy$.

Tenemos aún, cualquiera que sean x é y,

$$\operatorname{tang}(x+iy) = \frac{\operatorname{sen}(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{2\operatorname{sen}(x+iy)\cos(x-iy)}{2\cos(x+iy)\cos(x-iy)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2iy}{\cos 2x + \cos 2iy},$$

y á causa de las fórmulas (7),

$$(9)\qquad \operatorname{tang}(x+iy) = \frac{2\operatorname{sen} 2x + i\,(e^{2y}-e^{-2y})}{2\cos 2x + (e^{2y}+e^{-2y})}.$$

En el caso de $x=o$, esta última fórmula se reduce á

$$(10)\qquad \operatorname{tang} iy = i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}.$$

198. La funcion exponencial e^{z} posee una propiedad notable, que podria ser tomada por definicion, y que está expresada por el teorema siguiente:

TEOREMA.—*Si designamos por* z *una cantidad dada, real ó imaginaria, y por* m *un número entero positivo, tendremos*

$$e^{z} = \lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m},$$

para m $= \infty$.

Para demostrar este teorema, desarrollemos por la fórmula del binomio, relativa al exponente entero y positivo, la expresion $\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}$; tendremos, designando por n un número entero inferior á m, pero que pueda suponerse tan grande como se quiera,

$$(1)\qquad \left(1+\frac{z}{m}\right) = 1+\frac{z}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{z^{2}}{1\times 2}+\ldots\ldots$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^{n}}{1\times 2\ldots\ldots n}+R_{n};$$

representando R_n la suma de los términos, en número limitado, que siguen al $(n+1)^{esimo}$, tenemos, pues,

$$R_n = \left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^{n}}{1\times 2\ldots\ldots n}$$
$$\times\left[\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}\,z+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)\,(n+2)}\,z^{2}+\ldots\ldots\right].$$

Sabemos que el módulo de un producto es igual al producto de los módulos de sus factores, y que el módulo de una suma no puede ser mayor que la suma de los de sus partes (162); por consiguiente, el módulo de R_n no puede ser superior al valor que toma el segundo miembro de la fórmula precedente, cuando se reemplaza z por su módulo ρ. Pero este valor, que es una suma de un número limitado de términos, es evidentemente inferior al módulo del producto de

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1\times 2\cdots\cdots n}$$

por la suma de la progresion geométrica ilimitada

$$\frac{\rho}{n+1}+\left(\frac{\rho}{n+1}\right)^2+\cdots\cdots,$$

suma que es igual á $\frac{\rho}{n+1-\rho}$, si suponemos $n+1>\rho$. Siendo el módulo de R_n inferior al módulo de la expresion

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1\times 2\cdots\cdots n}\left(\frac{\rho}{n+1-\rho}\right),$$

si designamos por θ una cierta expresion imaginaria cuyo módulo es inferior á la unidad, tendremos

$$(2)\quad R_n=\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1\times 2\cdots\cdots n}\left(\frac{\theta\rho}{n+1-\rho}\right).$$

Supongamos ahora que, siendo invariable el número n, se haga crecer indefinidamente el entero m. Las fórmulas (1) y (2) nos darán, haciendo $m=\infty$,

$$(3)\qquad \lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\times 2}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{z^n}{1\times 2\cdots\cdots n}+R_n,$$

$$(4)\qquad R_n=\frac{z^n}{1\times 2\cdots\cdots n}\,\frac{\theta\rho}{n+1-\rho}.$$

La ecuacion (3) se verifica, siendo n tan grande como se quiera; si hacemos tender este número hácia el infinito, vemos por la fórmula (4) que R_n tenderá hácia cero, y la fórmula (3) dará

$$\lim \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\times 2}+\frac{z^3}{1\times 2\times 3}+\ldots,$$

es decir,

$$\lim \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^z.$$

Escolio.—El teorema que acabamos de establecer es susceptible de un enunciado más general, que es el siguiente:

Si m *designa un número entero positivo, y* z *una variable imaginaria funcion de* m, *que tiende hácia el límite* z_0 *cuando* m *tiende hácia el infinito, tendremos* $\lim \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^{z_0}$ para $m=\infty$.

En efecto, las ecuaciones (1) y (2) no dejarán de verificarse si z depende de m. Si hacemos $m=\infty$, y designamos por ρ_0 el módulo de z_0, es decir, el límite de ρ, tendremos

$$\lim \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1+\frac{z_0}{1}+\frac{z_0^2}{1\times 2}+\ldots+\frac{z_0^n}{1\times 2\ldots\ldots n}+R_n,$$

$$R_n = \frac{z_0^n}{1\times 2\ldots\ldots n}\,\frac{\theta\rho_0}{n+1-\rho_0},$$

representando θ una expresion real ó imaginaria cuyo módulo es inferior á 1, y haciendo tender á n hácia el infinito, tendremos $\lim \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^{z_0}$.

199. La analogía que existe entre las funciones circulares directas y las exponenciales, subsiste entre las funciones circulares inversas y los logaritmos.

Se llama *logaritmo neperiano* de una expresion imaginaria $z=\rho\,(\cos\omega+i\operatorname{sen}\omega)$ el exponente de la potencia á que hay que elevar el número e para reproducir ρ (cos ω + i sen ω). Para encontrar este logaritmo, es necesario buscar los valores reales de x y de y, susceptibles de satisfacer á la ecuacion

$$e^{x+iy} = \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega),$$

ó

$$e^{x} (\cos y + i \operatorname{sen} y) = \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega).$$

Esta ecuacion se deduce de las dos siguientes:

$$e^{x} \cos y = \rho \cos \omega, \; e^{x} \operatorname{sen} y = \rho \operatorname{sen} \omega,$$

de donde se deduce

$$e^{x} = \rho, \; \cos y = \cos \omega, \; \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} \omega,$$

y, por consiguiente,

$$x = l\, \rho, y = \omega + 2 K \pi,$$

siendo K un entero indeterminado. De modo que la expresion ρ (cos ω + i sen ω) tiene una infinidad de logaritmos neperianos, que son todos conocidos por la fórmula

$$l\, [\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)] = l\, \rho + (\omega + 2 K \pi)\, i;$$

en particular, para $\omega = o$ y para $\omega = \pi$, tenemos

$$l\, (\rho) = l\, \rho + 2 K \pi i, \; l\, (-\rho) = l\, \rho + (2 K + 1) \pi i;$$

el signo l (ρ) se emplea para representar todos los logaritmos de ρ, mientras que $l\, \rho$ designa solamente el logaritmo real.

Cuando z designa una expresion imaginaria, las notaciones arc sen z, arc tang z, arc cos z, arc cot z, ... representan cualquier expresion imaginaria cuyo sen, cos, tang, etc. es igual á z; estas expresiones son susceptibles de una infinidad de valores en el caso de ser z imaginario, cómo en el de z real; así, para poder admitirlas como funciones de z, es necesario añadir algo á su definicion. No podremos entrar en los detalles que exige esta cuestion sin salirnos de los límites que nos hemos fijado; nos referiremos para los desarrollos á las obras en las que Cauchy ha tratado esta materia. Nos limitaremos aquí á indicar cómo se pueden determinar los valores de las expresiones arc sen z, arc cos z, ..., cuando z tiene un valor imaginario $\alpha + i\beta$. Consideremos, por ejemplo, la expresion arc cos $(\alpha + i\beta)$; si suponemos

$$x + iy = \text{arc cos}\,(\alpha + i\beta),$$

resultará

$$\alpha + i\beta = \cos(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\,\text{sen}\,x;$$

tenemos, pues,

$$(1) \qquad \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x = \alpha,\ \frac{e^y - e^{-y}}{2}\,\text{sen}\,x = -\beta,$$

de donde resulta

$$(2) \qquad e^y = \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\text{sen}\,x},\ e^{-y} = \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\text{sen}\,x},$$

y multiplicándolas,

$$\frac{\alpha^2}{\cos^2 x} - \frac{\beta^2}{\text{sen}^2\,x} = 1,$$

ó

$$\text{sen}^4\,x - (1 - \alpha^2 - \beta^2)\,\text{sen}^2\,x - \beta^2 = o.$$

De aquí se deduce, observando que $\text{sen}^2\,x$ debe ser positivo,

$$\text{sen}^2\,x = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 + \beta^2};$$

además,

$$\cos^2 x = \frac{1+\alpha^2+6^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\frac{1+\alpha^2+6^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}};$$

extrayendo las raíces cuadradas de los dos miembros, y observando que $\cos x$ debe tener el signo de α, resulta que

$$(3) \qquad \cos x = \frac{\alpha}{\left[\frac{1+\alpha^2+6^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Si hacemos, para abreviar,

$$x_o = \text{arc cos} \frac{\alpha}{\left[\frac{1+\alpha^2+6^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$y_o = 1\left(\frac{\alpha}{\cos x_o} - \frac{6}{\text{sen } x_o}\right),$$

las ecuaciones (2) y (3) nos darán $x = 2K\pi \pm x_o$, $y = \pm y_o$; los signos superiores ó inferiores deben ser tomados á la par, designando K un entero indeterminado; se sigue de aquí que

$$\text{arc cos}\,(\alpha + i\,6) = 2K\pi \pm (x_o + i\,y_o).$$

En el caso particular de ser $6 = o$, las ecuaciones (1) nos dan inmediatamente $\text{sen } x = o$ ó $y = o$. Tomando $y = o$, tenemos $\cos x = \alpha$, y esta solucion no conviene más que al caso de que α esté comprendido entre -1 y $+1$. Tomando $\text{sen } x = o$, tenemos $\cos x = \pm 1$; el signo del segundo miembro es igual al de α; la primera de las ecuaciones (1) nos da ahora

$$e^y + e^{-y} = \pm 2\alpha,$$

de donde

$$e^y = \pm \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1},\ \text{é}\ y = l(\pm \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

Tenemos, pues, si α está comprendido entre $-\infty$ y -1,

$$\text{arc} \cos \alpha = (2K + 1)\pi + i\,l(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}),$$

y si α está comprendido entre $+1$ y $+\infty$,

$$\text{arc} \cos \alpha = 2K\pi + i\,l(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}),$$

designando K un número entero positivo, cero ó negativo.

De los cosenos y senos hiperbólicos.

200. Las Tablas trigonométricas nos ofrecen el medio de calcular $\cos x$ y $\text{sen}\, x$, cualquiera que sea el arco real x; y si tuviéramos otras Tablas que nos diesen los valores de $\cos ix$, y de $\text{sen}\, ix$, para todos los valores reales de x, obtendríamos fácilmente, por las fórmulas relativas á la adicion de los arcos, los cosenos y los senos de una expresion imaginaria cualquiera $x + iy$. Han sido construidas Tablas de la especie de que acabamos de hablar; pero, queriendo evitar el empleo de las imaginarias, sus autores han creido deber introducir una notacion nueva, de la que vamos á hablar.

Cuando la variable x es real, las funciones $\cos ix$ y $\frac{\text{sen}\, ix}{i}$ son tambien reales; la primera se llama el *coseno hiperbólico*, la segunda el seno hiperbólico de x. Se pueden representar los cosenos y senos hiperbólicos por las características cos hip, sen hip, colocadas delante de la variable; entonces se tendrá

$$\cos \text{hip}\, x = \cos i\, x,\ \text{sen hip}\, x = \frac{\text{sen}\, i\, x}{i},$$

ó

$$\cos \text{hip}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

y

$$\text{sen hip}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

El coseno y el seno hiperbólicos de una variable x están ligados por la relacion

$$\cos \text{hip}^2 x - \text{sen hip}^2 x = 1.$$

Las cocientes

$$\frac{\text{sen hip}\, x}{\cos \text{hip}\, x} \text{ y } \frac{\cos \text{hip}\, x}{\text{sen hip}\, x}$$

se llaman la *tangente hiperbólica* y la *cotangente hiperbólica* de x, y se tiene

$$\text{tang hip}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \cot \text{hip}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Por último, cuando se hace

$$\cos \text{hip}\, x = y,\ \text{sen hip}\, x = y \ \ldots\ldots \text{etc.},$$

se escribe

$$x = \text{arc cos hip}\, y,\ x = \text{arc sen hip}\, y \ \ldots\ldots \text{etc.},$$

se tiene, segun esto,

$$\text{arc cos hip}\, x = l\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

$$\text{arc sen hip } x = l\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\text{arc tang hip } x = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}.$$

Es indispensable recurrir al cálculo diferencial (*) para justificar las denominaciones de que hemos hecho uso.

Las primeras Tablas de cosenos y senos hiperbólicos son debidas á Lambert; se publicaron en Berlin en 1770; en estos últimos años, Gudermann ha publicado otras más extensas y que son preferibles á las de Lambert.

(*) Si se relaciona un círculo cuyo rádio se toma por unidad á dos ejes rectangulares coordenados, de los cuales el de las abcisas pasa por el orígen de los arcos, la abcisa y la ordenada de un punto M de la circunferencia serán el coseno y seno del arco comprendido entre el eje de las abcisas y el punto M, ó si se quiere, el coseno y el seno del doble del área del sector correspondiente al arco de que se trata. Igualmente, si se refiere á sus ejes una hipérbola equilátera cuyo semi-eje se toma por unidad, la abcisa y la ordenada de un punto M de esta curva serán el coseno hiperbólico y el seno hiperbólico del doble del arco del sector comprendido entre el eje de las abcisas y el rádio que une el punto M con el centro de la curva.

En efecto, tomando por unidad el semi-eje de la hipérbola equilátera, la abcisa ξ, supuesta positiva, y la ordenada η satisfacen á la ecuacion $\xi^2 - \eta^2 = 1$; de modo que ξ y η son necesariamente el coseno hiperbólico y el seno hiperbólico de una cierta variable x. Se puede, pues, establecer

$$\xi = \cos \text{hip } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \eta = \text{sen hip } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

se deduce de aquí, por las reglas del cálculo diferencial,

$$d\xi = \eta\, dx, \quad d\eta = \xi\, dx,$$

de donde

$$\xi\, d\eta - \eta\, d\xi = (\xi^2 - \eta^2)\, dx,$$

ó

$$dx = \xi\, d\eta - \eta\, d\xi.$$

Aquí se ve efectivamente que x es el doble del arco del sector comprendido entre el eje de las abcisas positivas y el rádio que une el centro de la curva con el que tiene por coordenadas $\xi\ \eta$.

Desarrollo de las funciones log $(1+z)$ y arc tang z en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de z.

201. El método que vamos á emplear para obtener los desarrollos en série de las funciones log $(1+z)$ y arc tang z, supone demostrada la fórmula del binomio en el caso de exponente fraccionario. A fin de no dejar nada que desear respecto de la teoría que presentamos en este Capítulo, empezaremos por establecer aquí dicha fórmula.

FÓRMULA DEL BINOMIO.—Designemos por n una cantidad real cualquiera, y por z una cantidad real ó imaginaria cuyo módulo sea menor que 1; la série

$$1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1\times 2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}z^3+\ldots..,$$

se reducirá á la suma de un número finito de términos si n es un entero positivo; en cualquier otro caso, contendrá un número ilimitado de términos, pero siempre será convergente; pues siendo por hipótesis, el módulo de z menor que 1, el módulo de la relacion $\frac{n-\mu+1}{\mu}z$ del $(\mu+1)^{esimo}$ término de la série al μ^{esimo} permanecerá inferior á una fraccion menor que 1 para todos los valores de μ superiores á un cierto límite.

Esto supuesto, considerando á z como constante, y á n como variable, designaremos por $\varphi(n)$ la suma de la série, y se tendrá

$$\varphi(n)=1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1\times 2}z^2+\ldots..,$$

y cambiando n en n_1,

$$\varphi(n_1)=1+\frac{n_1}{1}z+\frac{n_1(n_1-1)}{1\times 2}z^2+\ldots..$$

Si se multiplica $\varphi(n)$ por $\varphi(n_1)$, y se ordena el producto con relacion á z, se hallará, haciendo uso de la fórmula (1) del núm. 180, que el coeficiente de z^μ es

$$\frac{(n+n_1)(n+n_1-1)\ldots\ldots(n+n_1-\mu+1)}{1\times 2\ldots\ldots\mu};$$

de donde se deduce

$$\varphi(n)\,\varphi(n_1)=\varphi(n+n_1),$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}&\varphi(n)\,\varphi(n_1)\,\varphi(n_2)\ldots\ldots\varphi(n_{\mu-1})\\&=\varphi(n+n_1+n_2+\ldots\ldots+n_{\mu-1}),\end{aligned}$$

siendo n, n_1, n_2, ... $n_{\mu-1}$, números cualesquiera. Suponiendo estos números iguales entre sí, se obtiene

$$[\varphi(n)]^\mu=\varphi(\mu n).$$

De esto se deduce que si μ y ν son dos enteros positivos, se tiene

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^\nu=[\varphi(\pm 1)]^\mu;$$

pues cada miembro de esta fórmula es igual, segun lo que precede, á $\varphi(\pm\mu)$. Ahora bien; se tiene

$$\begin{aligned}\varphi(+1)=1+z,\quad \varphi(-1)&=1-z+z^2-z^3+\ldots.\\&=\frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1};\end{aligned}$$

luego

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^\nu=(1+z)^{\pm\mu};$$

por consiguiente, $\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)$ es uno de los valores de la expresion $(1+z)^{\pm\frac{\mu}{\nu}}$, y en este sentido se puede escribir

$$\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)=(1+z)^{\pm\frac{\mu}{\nu}}.$$

202. *Desarrollo de la funcion log* $(1+z)$.—Designemos por z una variable real ó imaginaria cuyo módulo sea menor que 1; segun lo que precede, si m representa un entero positivo, la série

$$1+\frac{1}{m}z+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{z^2}{1\times 2}$$
$$+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\frac{z^3}{1\times 2\times 3}+\ldots..$$

es convergente, y su potencia m^{esima} es igual á $(1+z)$. Si, pues, se designa por $1+\frac{u}{m}$ la suma de esta série, se tendrá

$$(1)\qquad \left(1+\frac{u}{m}\right)^m=1+z,$$

y

$$u=\frac{z}{1}-\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{z^2}{2}+\ldots..+(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$
$$\left(1-\frac{1}{2m}\right)\ldots..\left(1-\frac{1}{(n-1)m}\right)\frac{z^n}{n}+R_n;$$

R_n es el resto de la série, y se tiene

$$R_n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots..\left(1-\frac{1}{nm}\right)\frac{z^{n+1}}{n+1}$$
$$\times\left[1-\frac{n+1-\frac{1}{m}}{n+2}z+\frac{\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(n+2-\frac{1}{m}\right)}{(n+2)(n+3)}z^2+\ldots..\right].$$

Los coeficientes numéricos de la suma entre paréntesis son todos menores que 1; por consiguiente, si se representa por ρ el módulo de z, el módulo de la suma de que hablamos será menor que $1 + \rho + \rho^2 + \ldots$, es decir, inferior á $\frac{1}{1-\rho}$; la suma misma podrá representarse por $\frac{\theta}{1-\rho}$, designando por θ una expresion imaginaria cuyo módulo es menor que 1. Segun esto, la expresion de u será

$$(2)\quad \begin{cases} u = \frac{z}{1} - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ \left(1 - \frac{1}{2m}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n-1)m}\right)\frac{z^n}{n} + (-1)^n\left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ \qquad \left(1 - \frac{1}{2m}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{nm}\right)\frac{z^{n+1}}{n+1}\,\frac{\theta}{1-\rho}, \end{cases}$$

haciendo tender al entero m hácia el infinito y designando por u_0 el límite de u. La ecuacion (1) dará desde luego, segun el teorema demostrado en el número 198,

$$(3)\qquad e^{u_0} = 1 + z,$$

y se tendrá en seguida por la ecuacion (2),

$$(4)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots - (-1)^n\frac{z^n}{n} \\ \qquad + (-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\,\frac{\theta}{1-\rho}, \end{cases}$$

designando siempre por θ una expresion imaginaria cuyo módulo es menor que la unidad. Por último, como $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ tiende hácia cero, cuando n tiende hácia el infinito, se tendrá en el límite, para $n = \infty$,

$$(5) \qquad u_0 = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots\dots$$

Segun la fórmula (3), la cantidad u_0 expresa uno de los logaritmos neperianos de $1 + z$, y en este sentido puede escribirse

$$(6) \qquad l\,(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots\dots$$

Una cantidad positiva, solo tiene un logaritmo real; si, pues, z se reduce á una cantidad real $\pm\, x$, comprendida entre -1 y $+1$, se tendrá para los logaritmos reales de $(1 + x)$ y de $(1 - x)$,

$$(7) \qquad \begin{cases} l\,(1 + x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots\dots, \\ l\,(1 - x) = -\dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dots\dots \end{cases}$$

203. Volvamos á la fórmula (6), y hagamos

$$(8) \qquad \begin{cases} z = \rho e^{i\omega} = \rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega), \\ 1 + z = re^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta). \end{cases}$$

Se deduce de estas dos ecuaciones,

$$r\cos\theta = 1 + \rho\cos\omega, \quad r\operatorname{sen}\theta = \rho\operatorname{sen}\omega;$$

despues

$$(9) \qquad r = +\sqrt{1 + 2\rho\cos\omega + \rho^2},$$

y

$$(10) \quad \cos\theta = \frac{1 + \rho\cos\omega}{r}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\rho\operatorname{sen}\omega}{r}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\rho\operatorname{sen}\omega}{1 + \rho\cos\omega}.$$

Dadas las cantidades ρ y ω, la ecuacion (9) determinará sin ambigüedad el módulo r; en cuanto al ángulo θ, se determinará completamente por las ecuaciones (10), si se le limita á estar comprendido entre $-\pi$ y $+\pi$. Pero puesto que el módulo ρ de z es menor que 1, se ve por las ecuaciones (10) que $\cos\theta$ es siempre positivo, y por tanto, el ángulo θ permanecerá comprendido entre los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$; este ángulo se determinará sin ambigüedad por la tercera fórmula (10) que hace conocer su tangente.

Esto supuesto, la expresion general de los logaritmos neperianos de $1+z$, es $l\,(1+z) = l\,(re^{i\theta}) = lr + i\,(\theta + 2k\pi)$, siendo k un número entero; por consiguiente, la fórmula (6) nos dará, para un valor conveniente de k,

$$lr + i\,(\theta + 2k\pi) = \frac{\rho e^{i\omega}}{1} - \frac{\rho^2 e^{2i\omega}}{2} + \frac{\rho^3 e^{3i\omega}}{3} - \ldots\ldots$$

El segundo miembro de esta ecuacion se anula para $\rho = o$; lo mismo sucede á las cantidades lr y θ; estas son, además, funciones contínuas de ρ; luego el número entero k es necesáriamente nulo, y se tiene

$$(11)\qquad lr + i\,\theta = \frac{\rho e^{i\omega}}{1} - \frac{\rho^2 e^{2i\omega}}{2} + \frac{\rho^3 e^{3i\omega}}{3} - \ldots\ldots$$

Si se igualan separadamente las partes reales y los coeficientes de i, y se reemplazan r y θ por sus valores deducidos de las ecuaciones (9) y (10), se tendrá

$$(12)\qquad l\sqrt{1 + 2\rho\cos\omega + \rho^2} = \frac{\rho\cos\omega}{1} - \frac{\rho^2\cos 2\omega}{2} + \frac{\rho^3\cos 3\omega}{3} - \ldots\ldots,$$

$$(13)\qquad \text{arc tang}\,\frac{\rho\,\text{sen}\,\omega}{1 + \rho\cos\omega} = \frac{\rho\,\text{sen}\,\omega}{1} - \frac{\rho^2\,\text{sen}\,2\omega}{2} + \frac{\rho^3\,\text{sen}\,3\omega}{3} - \ldots\ldots,$$

y es necesario recordar que el primer miembro de la ecuacion (13) está comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$.

Si en las fórmulas (12) y (13) se cambia ω en $\pi - \omega$, resulta

$$(14) \qquad l\sqrt{1 - 2\rho\cos\omega + \rho^2} = -\frac{\rho\cos\omega}{1} - \frac{\rho^2\cos 2\omega}{2} - \frac{\rho^3\cos 3\omega}{3} - \ldots,$$

$$(15) \qquad \text{arc tang}\,\frac{\rho\,\text{sen}\,\omega}{1 - \rho\cos\omega} = \frac{\rho\,\text{sen}\,\omega}{1} + \frac{\rho^2\cos 2\omega}{2} + \frac{\rho^3\cos 3\omega}{3} + \ldots$$

Las fórmulas (12), (13), (14), (15), se emplean frecuentemente en la Astronomía y en la Geodesia.

Escolio.—Es muy importante observar que la fórmula (4) da la expresion del resto de la série en que se desarrolla $l\,(1 + z)$. Por ejemplo, si se hace $n = o$ en esta fórmula, resulta

$$l\,(1 + z) = \frac{\theta z}{1 - \rho},$$

ó bien

$$(16) \qquad l\,(1 + z) = \theta\,\frac{\rho}{1 - \rho},$$

designando siempre θ una expresion imaginaria cuyo módulo es menor que 1.

204. *Desarrollo del arco en série ordenada segun las potencias de la tangente.*—Las séries contenidas en las fórmulas (13) y (15) son convergentes, cualquiera que sea ω, para todos los valores de ρ menores que 1; si se hace en la fórmula (13),

$$\omega = \pm\frac{\pi}{2},\ \rho\,\text{sen}\,\omega = z,$$

resulta

$$(17) \qquad \text{arc tang}\, z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \cdots\cdots,$$

fórmula que tiene lugar para todos los valores reales de z, comprendidos entre -1 y $+1$. El primer miembro debe tomarse, como hemos visto, entre los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, y entonces estará necesariamente comprendido entre $-\frac{\pi}{4}$ y $+\frac{\pi}{4}$. Si se hace $z = \text{tang}\, x$, la fórmula (17) se trasforma en la siguiente:

$$(18) \qquad x = \frac{\text{tang}\, x}{1} - \frac{\text{tang}^3 x}{3} + \frac{\text{tang}^5 x}{5} - \cdots\cdots,$$

que subsiste para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{4}$ y $+\frac{\pi}{4}$.

Se tiene, idénticamente,

$$\text{arc tang}\, z + \text{arc tang}\, \frac{1}{z} = \pm \frac{\pi}{2},$$

tomando los arcos entre los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$ y dando al segundo miembro el signo de z; segun esto, si se cambia z en $\frac{1}{z}$ en la fórmula (17), se tendrá

$$(19) \qquad \text{arc tang}\, z = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3\,z^3} - \frac{1}{5\,z^5} + \cdots\cdots$$

Esta nueva fórmula subsiste para todos los valores de z comprendidos entre $-\infty$ y -1, ó $+1$ y $+\infty$; el primer miembro debe siempre tomarse entre los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$. Haciendo $z = \operatorname{tang} x$, se tendrá

$$(20) \qquad x = \pm\frac{\pi}{2} - \cot x + \frac{\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5} + \ldots..,$$

fórmula que subsiste para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{4}$, ó entre $+\frac{\pi}{4}$ y $+\frac{\pi}{2}$.

Escolio.—El análisis á que nos ha conducido la fórmula (17) supone esencialmente que el valor absoluto de z es menor que 1; pero como la série del segundo miembro es convergente para los valores límites ± 1, la fórmula subsiste para dichos valores. En efecto, supongamos que $\pm z$ tiende hácia la unidad por una série de valores sucesivos inferiores á 1, los dos miembros de la fórmula (17) serán iguales para todos estos valores; además, cada uno de los dos tiende hácia un límite determinado; luego estos dos límites son necesariamente iguales.

Cálculo de la relacion de la circunferencia al diámetro.

205. Haciendo $x = \frac{\pi}{4}$ en la fórmula (18) del número precedente, se obtiene

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots..$$

esta série que ya hemos hallado converge muy lentamente, y no puede servir para el cálculo de π; se pueden obtener, para este objeto, séries muy convergentes.

Hagamos, por ejemplo, como Euler,

$$\frac{\pi}{4} = a + b \quad \text{y} \quad \operatorname{tang} a = \frac{1}{2},$$

se tendrá

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\operatorname{tang} a} = \frac{1}{3};$$

y si se reemplazan a y b por sus valores en série deducidos de la fórmula (17) del núm. 204, resultará

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{5 \times 2^5} - \ldots..\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} - \ldots..\right).$$

Se obtienen séries más convergentes partiendo del arco $\mathring{a}$, cuya tangente es $\frac{1}{5}$, y operando como sigue. Sea tang $a = \frac{1}{5}$, se tendrá

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tang} 4a = \frac{2 \operatorname{tang} 2a}{1 - \operatorname{tang}^2 2a} = \frac{120}{119}.$$

Se ve que $4a$ difiere poco de $\frac{\pi}{4}$; si se hace $\frac{\pi}{4} = 4a - b$, resultará

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} 4a - 1}{1 + \operatorname{tang} 4a} = \frac{1}{239};$$

se tiene, pues, reemplazando a y b por sus valores en séries,

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} - \ldots\ldots\right).$$

Por medio de esta fórmula se halla, con veinte y cinco decimales exactos, el siguiente valor de π:

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626 4338\ldots\ldots$$

Euler ha dado en las *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint Pétersbourg* un gran número de séries del mismo género que la precedente; pero lo que hemos dicho es suficiente, y remitimos á los lectores que deseen conocer los desarrollos que hemos dicho, á las obras antes citadas.

Fórmulas relativas al cálculo de los logaritmos.

MÓDULO DE LOS LOGARITMOS VULGARES.

206. Las fórmulas (7) del número 202, que son

$$l\,(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots,$$
$$l\,(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots,$$

subsisten para todos los valores de x menores que 1, y si las restamos una de otra, tendremos

$$l\,\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\right).$$

Si en vez de x ponemos $\frac{h}{N}$ en la primer fórmula, y $\frac{h}{2N+h}$ en la tercera, resultará

$$(1)\quad \begin{cases} l(N+h) = l\,N + \left(\frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{3N^3} \ldots\right), \\ l(N+h) = l\,N + 2\left(\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \ldots\right), \end{cases}$$

y haciendo $h = 1$,

$$(2)\quad \begin{cases} l(N+1) = l\,N + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \ldots\right) \\ l(N+1) = l\,N + 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right). \end{cases}$$

Estas fórmulas se emplean para calcular los logaritmos neperianos; las séries que contienen son muy convergentes cuando las cantidades $\frac{h}{N}$ y $\frac{1}{N}$ son fracciones muy pequeñas. Si se multiplican las fórmulas (1) por el módulo M de los logaritmos vulgares, se tendrá

$$(3)\quad \begin{cases} \log(N+h) = \log N + M\left(\frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{3N^3} - \ldots\right), \\ \log(N+h) = \log N + 2\,M\left(\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \ldots\right). \end{cases}$$

Para usar las fórmulas (3) es preciso conocer el módulo M, cuya expresion es $M = \dfrac{1}{l\,10}$, determinando fácilmente su valor por las fórmulas (1) y (2).

Efectivamente, haciendo $N = 1$, se deduce de la segunda de las fórmulas (2),

$$(4) \qquad l\,2 = z\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \ldots\ldots\right);$$

si hacemos $N = 8 = 2^3$, y $h = 2$, se deducirá de la segunda de las fórmulas (1),

$$(5) \qquad l\,10 = 3\,l\,2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \times 9^3} + \frac{1}{5 \times 9^5} + \ldots\ldots\right),$$

y, por consiguiente, tendremos,

$$(6) \qquad \frac{1}{M} = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \times 9^3} + \frac{1}{5 \times 9^5} + \ldots\ldots\right).$$

Las séries que figuran en esta fórmula son bastante convergentes, pero se puede obtener una infinidad de otras que decrecen más rápidamente. Por ejemplo, si se hace en la segunda fórmula (1), $N = 4096 = 2^{12}$, $h = 4$, $N + h = 4100$, y en la segunda fórmula (2), $N = 40 = 2^2 \times 10$, resultará

$$l\,41 + 2\,l\,10 = 12\,l\,2 + 2\left(\frac{1}{2049} + \frac{1}{3 \times 2049^3} + \ldots\ldots\right),$$

$$l\,41 = l\,10 + 2\,l\,2 + 2\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{1 \times 81^3} + \frac{1}{5 \times 81^5} + \ldots\ldots\right);$$

y eliminando $l\,2$ y $l\,41$ entre estas dos ecuaciones y la (5), se halla

$$(7)\quad \frac{1}{M}=20\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\times 9^3}+\frac{1}{5\times 9^5}+\dots\right)+6\left(\frac{1}{81}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3\times 81^3}+\frac{1}{5\times 81^5}+\dots\right)-6\left(\frac{1}{2049}+\frac{1}{3\times 2049^3}+\dots\right).$$

Si se calcula cada término de la fórmula (6) ó (7) con veintiocho decimales, para poder conservar 25 en el valor de $\frac{1}{M}$ y de M, se hallará

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{M}=2,3025850929940456840179914\ \dots \\ M=0,4342944819032518276511289\ \dots \end{cases}$$

Estando determinado el módulo, pueden emplearse las fórmulas (3) para determinar los logaritmos vulgares; para más detalles, puede verse la instruccion colocada al principio de las Tablas de Callet.

Desarrollos de las funciones cos $m\,x$ y sen $m\,x$ en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de sen x.

207. Las fórmulas (1) y (2) del núm. 181, en las cuales m designa un número entero, dan los valores de cos $m\,a$ y sen $m\,a$, expresados por un polinomio ordenado, segun las potencias enteras y crecientes de sen a, ó por el producto de dicho polinomio por cos a; las fórmulas (1) se refieren al caso de m par, y las (2) al caso de m impar. Los segundos miembros de las fórmulas (1) se trasforman en séries ilimitadas si m deja de ser un número par; lo mismo tiene lugar en los segundos miembros de las fórmulas (2) si m no expresa en ellas un número impar; pero es fácil convencerse de que dichas séries son siempre convergentes. Además, los cálculos que hemos efectuado para establecer las fórmulas de que se trata, en la hipótesis de m par, ó de m impar, se aplican igualmente á la hipótesis contraria, con tal de que cos a sea positivo, condicion que se cumplirá si el arco a está comprendido entre los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$; la sola diferencia consiste efectivamente en que en el caso que hemos supuesto en el núm. 181, no teníamos que desarrollar más que potencias enteras del binomio $1 - \text{sen}^2 a$, mientras que aquí, los exponentes de estas potencias tendrán el denominador 2. Pero cada una de estas potencias, es como se ha visto desarrollable en una série, cuyos términos se suceden segun la misma ley que los del desarrollo de las potencias enteras; además, el número de séries de esta especie que se deben sumar, es esencialmente limitado, y la fórmula de reduccion del número 180 es general; se llegará, pues, á los mismos resultados operando de la misma manera, en el caso de m par y en el de m impar. Por consiguiente, los dos sistemas de fórmulas (1) y (2) del núm. 181, pueden emplearse indiferentemente, cualquiera que sea el entero m, con tal que el arco a esté comprendido entre los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$. Se tiene, pues, reuniendo la primera fórmula (1) y la segunda (2), y poniendo en vez de a, x,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos m x = 1 - \frac{m \times m}{1 \times 2} \,\text{sen}^2 x \\
&\quad + \frac{(m+2)\, m \times m\, (m-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \,\text{sen}^4 x + \ldots, \\
&\text{sen}\, m x = \frac{m}{1} \,\text{sen}\, x - \frac{(m+1)\, m\, (m-1)}{1 \times 2 \times 3} \,\text{sen}^3 x \\
&\quad + \frac{(m+3)(m+1)\, m\, (m-1)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \,\text{sen}^5 x - \ldots..
\end{aligned}
\right.
$$

con tal que, repetimos, m sea un número entero, y x se halle comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$.

Esto supuesto, las fórmulas (1) subsisten para todos los valores reales de m, si el arco x está comprendido entre los límites $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$.

En efecto, designemos por $\varphi(m)$ la suma de los segundos miembros de las fórmulas (1) multiplicadas respectivamente por 1 y por $\sqrt{-1}$ ó i; representemos tambien por $\varphi(m_1)$ y $\varphi(m+m_1)$ los resultados que se obtienen, reemplazando en $\varphi(m)$, m por m_1 y por $m+m_1$. Estando las cantidades $\varphi(m)$, $\varphi(m_1)$, $\varphi(m+m_1)$ ordenadas con relacion á las potencias crecientes de sen x, siempre serán séries convergentes, y esta convergencia no se alterará, si se reemplaza cada término por su módulo; se deduce que, si se multiplican entre sí las séries representadas por $\varphi(m)$ y $\varphi(m_1)$, y el producto se ordena segun las potencias crecientes de sen x, se obtendrá una nueva série convergente, cuya suma será $\varphi(m)\,\varphi(m_1)$. Pero cuando m y m_1 se reducen á enteros, se tiene

$$\varphi(m)\,\varphi(m_1)=\varphi(m+m_1), \tag{2}$$

pues en este caso se verifican las ecuaciones (1), y se tiene

$$\varphi(m)=e^{imx},\ \varphi(m_1)=e^{im_1x};$$

pues los coeficientes de las mismas potencias de sen x son idénticamente iguales de una parte y otra. Estos coeficientes son funciones enteras de m y m_1, y de que su igualdad existe para todos los valores enteros de m y m_1, puede concluirse que la misma igualdad subsiste cualesquiera que sean m y m_1; basta repetir aquí las consideraciones que hemos hecho en el número 180, al tratar de un caso semejante. Teniendo lugar idénticamente la igualdad (2), se deduce

$$\varphi(m)\,\varphi(m_1)\ldots\ldots\varphi(m_{\nu-1})=\varphi(m+m_1+\ldots\ldots+m_{\nu-1}),$$

cualesquiera que sean las ν cantidades $m, m_1, \ldots\ldots m_{\nu-1}$, y en el caso de ser iguales estas cantidades entre sí, se tiene

$$[\varphi(m)]^\nu = \varphi(m\nu).$$

Si se hace $m = \frac{\mu}{\nu}$, siendo μ un nuevo entero, esta igualdad se convierte en

$$\left[\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^\nu = \varphi(\mu) = e^{i\mu x};$$

luego

$$\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = e^{\frac{i(\mu x + 2K\pi)}{\nu}} = \cos\left(\frac{\mu}{\nu}x + \frac{2K\pi}{\nu}\right)$$
$$+ i \operatorname{sen}\left(\frac{\mu}{\nu}x + \frac{2K\pi}{\nu}\right),$$

designando k un cierto número entero, que se puede suponer menor que ν. Ahora bien, $\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ se reduce á 1 para $x = o$: luego entonces el entero k es nulo; se sigue de aquí que se tiene constantemente $k = o$, pues los segundos miembros de las fórmulas (1) varían de una manera contínua cuando x crece de $-\frac{\pi}{2}$ á $+\frac{\pi}{2}$. Así se tiene

$$\varphi(m) = \cos m x + i \operatorname{sen} m x,$$

cuando m es igual á una fraccion racional $\frac{\mu}{\nu}$, y tambien se deduce evidentemente que la misma fórmula tiene lugar todavía si m es un número incomensurable.

Se ve, segun esto, que las fórmulas (1) subsisten, cualquiera que sea m, para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$.

Desarrollo de la funcion arc sen z en série ordenada, segun las potencias enteras de z.

208. Las fórmulas (1) del número precedente pueden escribirse del modo siguiente:

$$2\,\frac{1-\cos mx}{m^2} = \operatorname{sen}^2 x + \frac{2}{3}\left(1-\frac{m^2}{4}\right)\frac{\operatorname{sen}^4 x}{2}$$
$$+\frac{2\times 4}{3\times 5}\left(1-\frac{m^2}{4}\right)\left(1-\frac{m^2}{16}\right)\frac{\operatorname{sen}^6 x}{3}+\ldots..$$
$$+\frac{2\times4\ldots..(2n-2)}{3\times5\ldots..(2n-1)}\left(1-\frac{m^2}{4}\right)\ldots..\left(1-\frac{m^2}{(2n-2)^2}\right)\frac{\operatorname{sen}^{2n}x}{n}+\ldots..,$$

$$x\,\frac{\operatorname{sen} mx}{mx} = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(1-m^2)\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}$$
$$+\frac{1\times 3}{2\times 4}(1-m^2)\left(1-\frac{m^2}{9}\right)\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+\ldots..$$
$$+\frac{1\times3\ldots..(2n-1)}{2\times4\ldots..2n}(1-m^2)\ldots..\left(1-\frac{m^2}{(2n-1)^2}\right)\frac{\operatorname{sen}^{2n+1}x}{2n+1}+\ldots.$$

Cualquiera que sea m, son séries convergentes los segundos miembros de estas fórmulas; además, en cada uno de los términos de estas séries, el producto de los factores que dependen de m se reduce á 1 para $m=o$; lo mismo sucede si el número de factores se hace infinito, como se conoce inmediatamente observando las fórmulas (1) del núm. 187. Se tiene, pues, para $m=o$

$$(1)\quad \begin{cases} x^2 = \operatorname{sen}^2 x + \dfrac{2}{3}\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{2} + \ldots.. + \dfrac{2\times4\ldots..(2n-2)}{3\times5\ldots..(2n-1)} \\ \qquad\qquad \times\dfrac{\operatorname{sen}^{2n}x}{n}+\ldots.., \\ x = \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \ldots.. + \dfrac{1\times3\ldots..(2n-1)}{2\times4\ldots..2n} \\ \qquad\qquad \times\dfrac{\operatorname{sen}^{2n+1}x}{2n+1}+\ldots..; \end{cases}$$

estas fórmulas, que subsisten para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, hacen conocer los desarrollos del arco x y de su cuadrado en séries ordenadas, segun las potencias enteras de sen x.

Llegamos á los mismos resultados por las consideraciones siguientes. Los primeros miembros de las fórmulas (1) del núm. 207, pueden ser desarrolladas en séries ordenadas, segun las potencias enteras de m; luego los segundos miembros tambien podrán serlo de la misma manera. Estando así preparadas las fórmulas de que se trata, si se igualan de una parte y otra los coeficientes de m y los de m^2, se hallarán las ecuaciones (1) que acabamos de obtener.

Si se reemplaza x por $\frac{\pi}{2} - x$ en la segunda fórmula (1), resulta

$$(2) \qquad x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{2}\frac{\cos^3 x}{3} - \ldots\ldots - \frac{1 \times 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \times 4 \ldots\ldots 2n} \times \frac{\cos^{2n+1} x}{2n+1} + \ldots\ldots;$$

esta fórmula (2), que da el desarrollo de un arco en série ordenada con relacion á las potencias de su coseno, exige que x esté comprendido entre cero y π.

Por último, si se reemplaza x por arc sen z en la segunda fórmula (1), y por arc cos z en la (2), resultará

$$(3) \begin{cases} \text{arc sen } z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{1 \times 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \times 4 \ldots\ldots 2n}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \\ \text{arc cos } z = \frac{\pi}{2} - z - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} - \ldots - \frac{1 \times 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \times 4 \ldots\ldots 2n}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} - \ldots \end{cases}$$

Se obtienen resultados numéricos, que ofrecen algun interés haciendo $x = \frac{\pi}{4}, = \frac{\pi}{3}, = \frac{\pi}{6}$ en las fórmulas (1).

Desarrollo de las funciones log sen x y log cos x en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x.

209. Segun las fórmulas (1) del núm. 187, si se designan los logaritmos neperianos por la característica l, como hemos hecho hasta aquí, y se hace

$$(1)\quad \begin{cases} l\cos x - R_n = l\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)+\ldots\ldots+l\left[1-\dfrac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right], \\[2ex] l\,\text{sen}\,x - R'_n = l\,x + l\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + l\left[1-\dfrac{x^2}{(n-1)^2\pi^2}\right], \end{cases}$$

las cantidades R_n y R'_n tenderán hácia cero cuando n tienda hácia el infinito. Ahora bien, para todos los valores de z comprendidos entre -1 y $+1$, se tiene

$$l(1-z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\ldots;$$

luego los logaritmos, en número limitado, que figuran en la primera ecuacion (1), serán desarrollables en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x, para todos los valores de esta variable comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$; igualmente, los logaritmos que figuran en el segundo miembro de la segunda fórmula, serán desarrollables de la misma manera para todos los valores de x comprendidos entre $-\pi$ y $+\pi$.

Si se forman estos desarrollos y en seguida se hace á n tender hácia el infinito, se tendrán los valores de log cos x y log sen x en séries infinitas. Además, es fácil ver que el cálculo que será necesario ejecutar es en todo semejante al desarrollado en el núm. 192, para obtener las séries que representan los valores de las funciones tang x y cot x. El cálculo relativo á $-$ log cos x ó á log sen x $-$ log x, difiere tan solo al relativo á tang x ó cot $x - \frac{1}{x}$ en que los exponentes de x están aumentados en una unidad, y que los coeficientes están divididos por los exponentes de x, circunstancia cuya razon se da en el cálculo diferencial. Segun esto, se pueden escribir las dos fórmulas

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} l\cos x &= -2\,(2^2-1)\,\frac{B_1}{1}\,\frac{x^2}{1\times 2} - \ldots\ldots \\ &\quad - 2^{2n-1}\,(2^{2n}-1)\,\frac{B_n}{n}\,\frac{x^{2n}}{1\times 2\ldots\ldots 2n} - \ldots\ldots, \\ l\,\mathrm{sen}\, x &= l\,x - 2\,\frac{B_1}{1}\,\frac{x^2}{1\times 2} - \ldots\ldots \\ &\quad - 2^{2n-1}\,\frac{B_n}{n}\,\frac{x^{2n}}{1\times 2\ldots\ldots 2n} - \ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

designando aquí B_1, B_2, ... B_n, como en el núm. 192, los números de Bernoulli. Restando la primer fórmula de la segunda, se obtiene

$$(3)\quad \begin{aligned} l\,\mathrm{tang}\, x &= l\,x + 2^2\,(2-1)\,\frac{B_1}{1}\,\frac{x^2}{1\times 2} + \ldots\ldots \\ &\quad + 2^{2n}\,(2^{2n-1}-1)\,\frac{B_n}{n}\,\frac{x^{2n}}{1\times 2\ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

La primera fórmula (2) y la (3) subsisten para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$; la segunda fórmula (2) puede extenderse á los valores de x comprendidos entre $-\pi$ y $+\pi$. El caso de x negativo no introduce imaginarias, pues nuestras fórmulas no contienen, en realidad, más que los solos logaritmos $l \cos x$, $l \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $l \dfrac{\operatorname{tang} x}{x}$, que permanecen reales cuando x es negativo.

Si se reemplazan los números B_1, B_2, ... por los valore obtenidos en el núm. 193, resulta

$$l \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots..,$$

$$l \operatorname{sen} x = l\,x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \ldots..,$$

$$l \operatorname{tang} x = l\,x + \frac{x^2}{3} + \frac{7\,x^4}{30} + \frac{62\,x^6}{2835} + \ldots..$$

210. Las fórmulas (2) pueden emplearse en la construccion de las Tablas de logaritmos de los senos y cosenos.

Si se hace en ellas $x = \dfrac{m}{n}\dfrac{\pi}{2}$, se las multiplica por el módulo M de los logaritmos vulgares, y se introducen en ellas en lugar de los números de Bernoulli, las sumas S ó S' ligadas á estos números por las fórmulas (8) del núm. 192, resultará

$$\log \cos\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = -M\left(S_2\,\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2}\,S_4\,\frac{m^4}{n^4}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\,S_6\,\frac{m^6}{n^6} + \ldots..\right),$$

$$\log \operatorname{sen}\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = \log\frac{\pi}{2} + \log m - \log n - M\left(\frac{1}{2^2}\,S'_2\,\frac{m^2}{n^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2 \times 2^4}\,S'_4\,\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3 \times 2^6}\,S'_6\,\frac{m^6}{n^6} + \ldots..\right),$$

expresando la característica log los logaritmos vulgares. Se hubieran obtenido séries más convergentes si se hubiesen conservado en las fórmulas (1), sin reducirlas á séries, los logaritmos de

$1 - \frac{4\,x^2}{\pi^2}$ y de $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, cantidades que aquí se reducen á $1 - \frac{m^2}{n^2}$ y á $1 - \frac{m^2}{4\,n^2}$; los desarrollos de estos logaritmos son

$$\log\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) = -M\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2}\,\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3}\,\frac{m^6}{n^6} + \ldots\right),$$

$$\log\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) = -M\left(\frac{m^2}{2^2 n^2} + \frac{1}{2}\,\frac{m^4}{2^4 n^4} + \frac{1}{3}\,\frac{m^6}{2^6 n^6} + \ldots\right),$$

y restando estas ecuaciones respectivamente, se tendrá

$$\log\cos\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = \log(n+m) + \log(n-m) - 2\log n$$
$$- M\left((S_2 - 1)\,\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2}\,(S_4 - 1)\,\frac{m^4}{n^4} + \ldots\right),$$

$$\log\operatorname{sen}\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = \log\frac{\pi}{8} + \log m + \log(2n+m)$$
$$+ \log(2n+m) - 3\log n - M\left(\frac{1}{2^2}\,(S'_2 - 1)\,\frac{m^2}{n^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\times 2^4}\,(S'_4 - 1)\,\frac{m^4}{n^4} + \ldots\right).$$

Estas dos fórmulas son muy cómodas para el objeto que nos proponemos; restándolas una de otra, se tendrá el valor de

$$\log\operatorname{tang}\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right).$$

Si se calculan los coeficientes numéricos de las fórmulas precedentes con 20 decimales, se obtendrán los resultados siguientes:

$$\log\cos\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n.$$

$-0{,}\ 1014948593418928 0353\ \frac{m^2}{n^2}$	$-0{,}00000000000\ 125814224\ \frac{m^{22}}{n^{22}}$
$-0{,}00\ 318729106545107231\ \frac{m^4}{n^4}$	$-0{,}000000000000\ 12814304\ \frac{m^{24}}{n^{24}}$
$-0{,}000\ 20948580001741893\ \frac{m^6}{n^6}$	$-0{,}0000000000000\ 1314283\ \frac{m^{26}}{n^{26}}$
$-0{,}0000\ 16848348598 30473\ \frac{m^8}{n^8}$	$-0{,}00000000000000\ 135726\ \frac{m^{28}}{n^{28}}$
$-0{,}00000\ 148019398689554\ \frac{m^{10}}{n^{10}}$	$-0{,}000000000000000\ 14062\ \frac{m^{30}}{n^{30}}$
$-0{,}000000\ 13650227222565\ \frac{m^{12}}{n^{12}}$	$-0{,}0000000000000000\ 1465\ \frac{m^{32}}{n^{32}}$
$-0{,}0000000\ 1298171473773\ \frac{m^{14}}{n^{14}}$	$-0{,}00000000000000000\ 153\ \frac{m^{34}}{n^{34}}$
$-0{,}00000000\ 126147115311\ \frac{m^{16}}{n^{16}}$	$-0{,}000000000000000000\ 16\ \frac{m^{36}}{n^{36}}$
$-0{,}000000000\ 12456712069\ \frac{m^{18}}{n^{18}}$	$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$-0{,}0000000000\ 1245590006\ \frac{m^{20}}{n^{20}}$	

$$\log\operatorname{sen}\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right) = \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m)$$
$$-\,3\log n + \overline{1}{,}59405988570219026861$$

$-0{,}0\ 7002282660590192014\ \frac{m^2}{n^2}$	$-0{,}00000000\ 434871550180\ \frac{m^{12}}{n^{12}}$
$-0{,}00\ 111726644166184613\ \frac{m^4}{n^4}$	$-0{,}000000000\ 23193121410\ \frac{m^{14}}{n^{14}}$
$-0{,}0000\ 3922914645391834\ \frac{m^6}{n^6}$	$-0{,}0000000000\ 1265907465\ \frac{m^{16}}{n^{16}}$
$-0{,}00000\ 172927079836059\ \frac{m^8}{n^8}$	$-0{,}000000000000\ 70267960\ \frac{m^{18}}{n^{18}}$
$-0{,}0000000\ 8436298629875\ \frac{m^{10}}{n^{10}}$	$-0{,}0000000000000\ 3951077\ \frac{m^{20}}{n^{20}}$

$- 0{,}000000000000000\ 224455\ \dfrac{m^{22}}{n^{22}}$	$- 0{,}0000000000000000000\ 43\ \dfrac{m^{28}}{n^{28}}$
$- 0{,}0000000000000000\ 12858\ \dfrac{m^{24}}{n^{24}}$	$- 0{,}00000000000000000000\ 2\ \dfrac{m^{30}}{n^{30}}$
$- 0{,}000000000000000000\ 738\ \dfrac{m^{26}}{n^{26}}$	$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Desarrollos en séries ó en productos infinitos de las funciones circulares de variables imaginarias.

211. Las fórmulas que expresan las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en productos infinitos de factores lineales no se limitan solo al caso de que x sea real; estas fórmulas subsisten cualquiera que sea x. Las fórmulas que expresan los valores de las funciones $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, pueden descomponerse del mismo modo en un número infinito de fracciones simples. Por último, las séries ordenadas con relacion á las potencias enteras y crecientes de x, que representan las funciones $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, en el caso de que x sea un valor real comprendido entre dos límites; estas cantidades representan las mismas funciones en el caso de que x sea imaginaria, con tal que el módulo de esta variable quede inferior al límite, al que no debe exceder tampoco en el caso de que sea una cantidad real y positiva.

Vamos á establecer estas fórmulas por medio de demostraciones nuevas, que se aplican indiferentemente al caso de que la variable sea real ó al de que sea imaginaria; estas demostraciones se fundan en el lema siguiente:

LEMA.—*Si representamos por* α *un arco real comprendido entre cero y* $\frac{\pi}{2}$, *y por* z *una variable real ó imaginaria cuyo módulo sea inferior á* α, *el módulo de la relacion* $\dfrac{\operatorname{tang} z}{\operatorname{tang} \alpha}$ *será inferior al módulo de* $\dfrac{z}{\alpha}$.

En efecto, si suponemos que $z = x + y$, tendremos

$$\text{mód}\,\frac{\text{tang}^2 z}{\text{tang}^2 \alpha} = \frac{\text{tang}\,(x+iy)\,\text{tang}\,(x-iy)}{\text{tang}^2 \alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\text{tang}^2 \alpha}\left(\dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2 + \dfrac{\text{tang}^2 x}{\text{tang}^2 \alpha}}{1 + \left(\dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2 \text{tang}^2 x}.$$

Ahora bien; siendo el módulo de z, por hipótesis, inferior á α, tenemos $x^2 < \alpha^2$, y segun el lema del núm 186,

$$\frac{\text{tang}^2 x}{\text{tang}^2 \alpha} < \frac{x^2}{\alpha^2},$$

tenemos, por otra parte,

$$\frac{1}{\text{tang}^2 \alpha} < \frac{1}{\alpha^2} \text{ y } \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2$$

$$= y^2 \cdot \left(\frac{1 + \dfrac{y^2}{1 \times 2 \times 3} + \ldots\ldots}{1 + \dfrac{y^2}{1 \times 2} + \ldots\ldots}\right)^2 < y^2;$$

por consiguiente,

$$\text{mód}\,\frac{\text{tang}^2 z}{\text{tang}^2 \alpha} < \frac{x^2 + y}{\alpha^2},$$

y tambien

$$\text{mód}\,\frac{\text{tang}\, z}{\text{tang}\, \alpha} < \text{mód}\,\frac{z}{\alpha}.$$

Corolario.—*Bajo las mismas hipótesis, si el módulo* ρ *de* z *es inferior á* $\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$, *podremos escribir*

$$1 - \frac{\tan g^2 z}{\tan g^2 \alpha} = e^{2\theta \frac{\rho^2}{\alpha^2}}, \quad \frac{\tan g^2 z}{\tan g^2 z - \tan g^2 \alpha} = e^{2\delta \frac{\rho^2}{\alpha^2}},$$

representando por e *la base de los logaritmos neperianos, por* θ *y* δ *expresiones imaginarias cuyos módulos son inferiores á la unidad.*

En efecto, segun la fórmula (16) del núm 203, tenemos

$$\text{mód}\; l\left(1 - \frac{\tan g^2 z}{\tan g^2 \alpha}\right) < \frac{\text{mód}\; \dfrac{\tan g^2 z}{\tan g^2 \alpha}}{1 - \text{mód}\; \dfrac{\tan g^2 z}{\tan g^2 \alpha}}$$

teniendo cuidado de que el logaritmo neperiano que figura en el primer miembro esté tomado de manera que el valor absoluto del coeficiente de i sea inferior á $\frac{\pi}{2}$. Además, segun nuestro lema, el segundo miembro de la desigualdad anterior es inferior á la fraccion $\dfrac{\frac{\rho^2}{\alpha^2}}{1 - \frac{\rho^2}{\alpha^2}}$; y como suponemos que $\frac{\rho^2}{\alpha^2} < \frac{1}{2}$, esta fraccion es menor que la unidad, y aumentará si la añadimos $\frac{\rho^2}{\alpha^2}$ á cada uno de sus términos; es, por consiguiente, inferior á $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$.

Si el módulo del logaritmo neperiano de $1 - \frac{\tan g^2 z}{\tan g^2 \alpha}$ es inferior á $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$, este logaritmo es igual al producto de $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$ por una expresion imaginaria θ cuyo módulo es inferior á la unidad; tenemos, por consiguiente,

$$1 - \frac{\tan g^2 z}{\tan g^2 \alpha} = e^{2\theta \frac{\rho^2}{\alpha^2}}.$$

En segundo lugar, como el módulo de una suma de dos sumandos es por lo ménos igual á la diferencia de los módulos de estos sumandos (162), tenemos

$$\text{mód}\,\frac{\tang^2 z}{\tang^2 \alpha - \tang^2 z} < \frac{\text{mód}\,\frac{\tang^2 z}{\tang^2 \alpha}}{1 - \text{mód}\,\frac{\tang^2 z}{\tang^2 \alpha}},$$

y segun nuestro lema, el primer miembro de esta desigualdad

será, con mayor razon, menor que $\frac{\frac{\rho^2}{\alpha^2}}{1 - \frac{\rho^2}{\alpha^2}}$ y que $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$.

Si, por consiguiente, representamos por δ una expresion imaginaria cuyo módulo es inferior á 1, tendremos

$$\frac{\tang^2 z}{\tang^2 \alpha - \tang^2 z} = 2\,\delta\,\frac{\rho^2}{\alpha^2}.$$

212. Las fórmulas relativas á la adicion de los arcos se aplican lo mismo á los imaginarios que á los reales; todas las fórmulas que se deducen de ellas adquieren la misma generalidad, como hemos indicado anteriormente. De aquí se deduce que las fórmulas (1), (2), (3), (4) del núm 185 subsistirán si reemplazamos el arco real x por la expresion imaginaria z de un módulo cualquiera ρ.

Esto supuesto, consideremos las fórmulas (3), en las que m designa un número par; representemos por n un número par cualquiera, lo suficientemente grande, sin embargo, para que $\frac{n\pi}{2}$ sea superior á $\rho\sqrt{2}$, y tomemos $m > n$; podremos decir que

$$(1) \qquad \cos z = \cos^m \frac{z}{m}\left(1 - \frac{\tang^2 \frac{z}{m}}{\tang^2 \frac{\pi}{2m}}\right)\times$$

$$\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\ldots\ldots\times\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{(n-1)\pi}{2m}}\right)(1-\varepsilon_{m,n}),$$

$$\operatorname{sen} z=\cos^m\frac{z}{m}\times m\tang\frac{z}{m}\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{(n-2)\pi}{2m}}\right)(1-\eta_{m,n}),$$

y suponiendo que

$$1-\varepsilon_{m,n}=\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{(n+1)\pi}{2m}}\right)\ldots\ldots$$

$$\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right),$$

$$1-\eta_{m,n}=\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{n\pi}{2m}}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\tang^2\frac{z}{m}}{\tang^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

Segun el corolario del lema establecido anteriormente, los logaritmos neperianos de las expresiones $1-\varepsilon_{m,n}$ y $1-\eta_{m,n}$ tienen por valores

$$l(1-\varepsilon_{m,n})=\frac{8\rho^2}{\pi^2}\left[\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\theta_{n+3}}{(n+3)^2}+\ldots\ldots+\frac{\theta_{m-1}}{(m-1)^2}\right],$$

$$l(1-\eta_{m,n}) = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\left[\frac{\theta_n}{n^2}+\frac{\theta_{n+2}}{(n+2)^2}+\ldots..+\frac{\theta_{m-2}}{(m-2)^2}\right],$$

representando por θ_n, θ_{n+1}...., expresiones imaginarias cuyos módulos son inferiores á la unidad. Por otra parte, los módulos de las sumas comprendidas entre paréntesis son inferiores á las sumas de los módulos de sus sumandos; por consiguiente, serán respectivamente inferiores á las sumas S_{n+1} y S_n de las séries infinitas

$$S_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots.., \quad S_n = \frac{1}{n^2}$$
$$+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots..,$$

cuya convergencia hemos demostrado ya. Tendremos, por consiguente, representando por λ_n y λ_{n+1} expresiones imaginarias cuyos módulos son inferiores á la unidad,

$$(2) \quad 1-\varepsilon_{m,n} = e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_{n+1}S_{n+1}}, \quad 1-\eta_{m,n} = e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_n S_n}.$$

Supongamos ahora que, siendo el entero n constante, hagamos tender á m hácia el infinito; el producto m tang $\frac{z}{m}$

ó $z\dfrac{\operatorname{tang}\frac{z}{m}}{\frac{z}{m}}$ se reducirá á z para $m=\infty$; igualmente, las relaciones de las dos tangentes que figuran en las fórmulas (1) tendrán los mismos límites que las relaciones de los arcos correspondientes; por último, el factor

$$\cos^m \frac{z}{m} = \left(1-\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{z}{2m}}{m}\right)^m$$

se reducirá á la unidad, como en el caso de ser z real, segun la proposicion demostrada en el núm. 198 (*Escolio*).

Por consiguiente, si representamos por ε_n y η_n los límites de $\varepsilon_{m,n}$ y de $\eta_{m,n}$, las fórmulas (1) se convertirán en las siguientes, para $m = \infty$,

$$(3) \quad \cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right) \cdots\cdots \left[1 - \frac{4z^2}{(n-1)^2\pi^2}\right](1 - \varepsilon_n), \ \operatorname{sen} z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \cdots\cdots \left[1 - \frac{z^2}{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \pi^2}\right](1 - \eta_n),$$

y tendremos en seguida, por las fórmulas (2),

$$(4) \quad 1 - \varepsilon_n = e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_{n+1} S_{n+1}}, \ 1 - \eta_n = e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_n S_n},$$

representando siempre λ_{n+1} y λ_n expresiones imaginarias cuyos módulos son inferiores á la unidad.

Pero las sumas S_n y S_{n+1} no son otra cosa que los restos de las séries convergentes

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\cdots, \ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\cdots;$$

estos restos tienden hácia cero cuando n aumenta indefinidamente; tenemos, pues, $\varepsilon_n = o$, $\eta_n = o$, para $n = \infty$. Por consiguiente, si n tiende hácia el infinito, las fórmulas (3) se convertirán en el límite, en

$$(5) \quad \begin{cases} \cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right) \cdots\cdots, \\ \operatorname{sen} z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \cdots\cdots; \end{cases}$$

y, reemplazando z por iz, en estas fórmulas tendremos

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \left(1+\dfrac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots\cdots \\ \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} = z\left(1+\dfrac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots \end{cases}$$

Si suponemos que $z = x + iy$, los primeros miembros de las fórmulas (6) se reducirán á

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cos y + i\,\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\operatorname{sen} y,$$

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cos y + i\,\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\operatorname{sen} y,$$

de donde se sigue que estas expresiones se pueden descomponer en un producto de un número infinito de factores lineales, y lo mismo se verifica, por consiguiente, para los cuadrados de sus módulos, cuadrados que tienen por valores

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\cos 2y\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-\cos 2y\right).$$

Las fórmulas (6) toman una forma más sencilla cuando ponemos $\dfrac{\pi z}{2}$ en lugar de z; encontramos de este modo

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{\pi z}{2}}+e^{-\frac{\pi z}{2}}}{2} = (1+z^2)\left(1+\dfrac{z^2}{9}\right)\left(1+\dfrac{z^2}{25}\right)\cdots\cdots, \\ \dfrac{e^{\frac{\pi z}{2}}-e^{-\frac{\pi z}{2}}}{\pi z} = \left(1+\dfrac{z^2}{4}\right)\left(1+\dfrac{z^2}{16}\right)\left(1+\dfrac{z^2}{36}\right)\cdots\cdots \end{cases}$$

213. Las fórmulas (3), (4), (5) y (6) del núm. 189 subsisten cuando se reemplaza el arco real x por una variable imaginaria z de un módulo cualquiera ρ. Si escogemos, pues, como anteriormente, un número par n, tal que $\frac{n\pi}{2}$ sea superior á $\rho\sqrt{2}$, y tomamos en seguida para valor de m un número par superior á n, las fórmulas (5) del número citado nos darán

$$(1)\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tang} z &= \operatorname{tang}\frac{z}{m} + \frac{2}{m}\left(\cot\frac{z}{m} + \operatorname{tang}\frac{z}{m}\right)\\
&\quad\times\left[\frac{\operatorname{tang}^2\frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{z}{m}} + \ldots\ldots\right.\\
&\quad\left.+\frac{\operatorname{tang}^2\frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(n-1)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{z}{m}} + \varepsilon_{m,n}\right],\\
\cot z &= \frac{2}{m}\left(\cot\frac{2z}{m} - \operatorname{tang}\frac{z}{m}\right) - \frac{2}{m}\left(\cot\frac{z}{m} + \operatorname{tang}\frac{z}{m}\right)\\
&\quad\times\left[\frac{\operatorname{tang}^2\frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{2\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{z}{m}} + \ldots\ldots\right.\\
&\quad\left.+\frac{\operatorname{tang}^2\frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(n-2)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{z}{m}} + \eta_{m,n}\right],
\end{aligned}\right.$$

y suponiendo que

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(n+1)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{z}{m}} + \ldots\ldots + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2\frac{z}{m}},$$

$$\eta_{m,n} = \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{n\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2 \frac{z}{m}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{z}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{(m-2)\pi}{2m} - \operatorname{tang}^2 \frac{z}{m}}.$$

Segun el corolario del núm. 211, podemos decir que

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\left(\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\theta_{n+3}}{(n+3)^2} + \ldots\ldots + \frac{\theta_{m-1}}{(m-1)^2}\right),$$

$$\eta_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\left(\frac{\theta_n}{n^2} + \frac{\theta_{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots\ldots + \frac{\theta_{m-2}}{(m-2)^2}\right),$$

siendo θ_n y θ_{n+1} expresiones imaginarias cuyos módulos son inferiores á la unidad. Reproduciendo aquí, sin modificacion alguna, el razonamiento de que hemos hecho uso en el número 212, podremos poner estos valores de $\varepsilon_{m,n}$ y de $\eta_{m,n}$ bajo la forma siguiente:

$$(2) \qquad \varepsilon_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_{n+1} S_{n+1}, \quad \eta_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_n S_n,$$

teniendo S_n y S_{n+1} la misma significacion que en el número precedente, y representando λ_n, λ_{n+1} expresiones imaginarias cuyos módulos son inferiores á la unidad.

Siendo constante el número n, si hacemos tender á m hácia el infinito, las fórmulas (1) nos darán, representando por ε_n y η_n los límites de $\varepsilon_{m,n}$ y $\eta_{m,n}$,

$$(3) \quad \operatorname{tang} z = \frac{2z}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \ldots\ldots + \frac{2z}{\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]^2 - z^2} + \frac{2}{z}\varepsilon_n,$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2 - z^2} - \ldots\ldots - \frac{2z}{\left[\frac{(n-2)\pi}{2}\right]^2 - z^2} - \frac{2}{z}\eta_n,$$

y tendremos siempre, por las fórmulas (2),

$$(4) \qquad \varepsilon_n = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_{n+1} S_{n+1}, \quad \eta_n = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_n S_n.$$

Si ahora hacemos tender el número n hácia el infinito, las cantidades ε_n y η_n tenderán hácia cero, y en el límite, tendremos

$$(5) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} z = \dfrac{2z}{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \dfrac{2z}{\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \ldots\ldots, \\ \cot z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{\pi^2 - z^2} - \dfrac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} + \ldots\ldots \end{cases}$$

De estas fórmulas podemos deducir, como hemos hecho en el núm. 191, en el caso de ser z real, las otras dos fórmulas

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2z}{\pi^2 - z^2} - \dfrac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} + \dfrac{2z}{(3\pi)^2 - z^2} - \ldots\ldots, \\ \sec z = \dfrac{\pi}{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} - \dfrac{3\pi}{\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \dfrac{5\pi}{\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)^2 - z^2} - \ldots\ldots, \end{cases}$$

que se verifican, por consiguiente, lo mismo que las fórmulas (5), para todos los valores reales ó imaginarios de z.

Si reemplazamos z por iz, las fórmulas (5) y (6) toman la forma siguiente:

$$(7) \quad \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{2z}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2} + \frac{2z}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + z^2} + \ldots\ldots$$

$$(7)\begin{cases} \dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{2z}{\pi^2+z^2}+\dfrac{2z}{(2\pi)^2+z^2}+\ldots.., \\ \dfrac{2}{e^z-e^{-z}}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{2z}{\pi^2+z^2}+\dfrac{2z}{(2\pi)^2+z^2}-\dfrac{2z}{(3\pi)^2+z^2}+\ldots.., \\ \dfrac{2}{e^z+e^{-z}}=\dfrac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+z^2}-\dfrac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2+z^2}+\dfrac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2+z^2}-\ldots.. \end{cases}$$

214. El método de que hemos hecho uso en el núm. 192 para obtener los desarrollos de las funciones tang x y cot x en séries ordenadas, segun las potencias enteras y crecientes de x, consiste en una sencilla trasformacion de las fórmulas (5); habiéndose verificado en estas, cualquiera que sea la variable x, los razonamientos del núm. 192 se aplican sin modificacion alguna al caso de una variable imaginaria. De este modo tenemos las dos fórmulas

$$(8)\begin{cases} \operatorname{tang} z=2^2(2^2-1)B_1\dfrac{z}{1\times 2}+2^4(2^4-1)B_2\dfrac{z^3}{1\times 2\times 3\times 4} \\ +\ldots..+2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\dfrac{z^{2n-1}}{1\times 2\ldots..(2n-1)2n}+\ldots.. \\ \cot z=\dfrac{1}{z}-2^2B_1\dfrac{z}{1\times 2}-\ldots.. \\ -2^{2n}B_n\dfrac{z^{2n-1}}{1\times 2\ldots..(2n-1)2n}+\ldots.., \end{cases}$$

que subsisten para todos los valores de z cuyo módulo es inferior á $\frac{\pi}{2}$, y la segunda para los valores de z cuyo módulo sea inferior á π. Cambiando z en $\frac{z}{2}$ en la segunda fórmula, se obtiene, como en el número 192,

$$(9)\qquad 1-\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2}=B_1\frac{z^2}{1\times 2}+B_2\frac{z^4}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\ldots$$
$$+B_n\frac{z^{2n}}{1\times 2\ldots\ldots 2n}+\ldots\ldots$$

En estas últimas fórmulas, B_1, B_2 ..... representan, como anteriormente, los números de Bernoulli.

Por el cambio de z en iz, las fórmulas (8) se convierten en las siguientes:

$$(10)\begin{cases}\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=2^2(2^2-1)B_1\dfrac{z}{1\times 2}\\ \quad-2^4(2^4-1)B_2\dfrac{z^3}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\ldots\\ \quad+(-1)^n\times 2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\dfrac{z^{2n-1}}{1\times 2\ldots\ldots 2n}+\ldots\ldots\\ \dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}=\dfrac{1}{z}+2^2B_1\dfrac{z}{1\times 2}-2^4B_2\dfrac{z^3}{1\times2\times3\times4}+\ldots\ldots\\ \quad+(-1)^{n-1}2^{2n}B_n\dfrac{z^{2n-1}}{1\times 2\ldots\ldots 2n}+\ldots\ldots;\end{cases}$$

la fórmula (9) se convierte por el mismo cambio en

$$(11)\qquad \frac{z}{2}\,\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}=1+B_1\frac{z^2}{1\times 2}-B_2\frac{z^4}{1\times2\times3\times4}+\ldots\ldots;$$

pero el primer miembro de la fórmula (11) es igual á $\dfrac{z}{e^z-1}+\dfrac{z}{2}$; podemos, por consiguiente, decir que

$$(12)\qquad \frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}=\frac{B_1 z}{1\times 2}-\frac{B_2 z^3}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{B_n z^{2n-1}}{1\times 2\ldots\ldots 2n}+\ldots\ldots,$$

fórmula de la que se hace uso frecuentemente en el Análisis y que subsiste para todos los valores de z cuyo módulo es inferior á 2π.

Por último, el análisis del desarrollo del núm. 195 se aplica tambien, sin modificacion, al caso de un arco imaginario; tenemos, en efecto,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cosec} z &= \frac{1}{z} + (2^2-2) B_1 \frac{z}{1\times 2} + \ldots\ldots \\ &\quad + (2^{2n}-2) B_n \frac{z^{2n-1}}{1\times 2\ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots, \\ \sec z &= 1 + C_1 \frac{z^2}{1\times 2} + C_2 \frac{z^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \ldots\ldots \\ &\quad + C_n \frac{z^{2n}}{1\times 2\ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

representando C_1, C_2 ..... los mismos números que en el número 195. La primera de las fórmulas (13) exige que el módulo de z sea inferior á π, y la segunda que este módulo sea inferior á $\frac{\pi}{2}$. Cambiando z en iz, estas fórmulas se convierten en las siguientes:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2}{e^z - e^{-z}} &= \frac{1}{z} - (2^2-2) B_1 \frac{z}{1\times 2} + \ldots\ldots \\ &\quad + (-1)^n (2^{2n}-2) B_n \frac{z^{2n-1}}{1\times 2\ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots, \\ \frac{2}{e^z + e^{-z}} &= 1 - C_1 \frac{z^2}{1\times 2} + C_2 \frac{z^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \ldots\ldots \\ &\quad + (-1)^n C_n \frac{z^{2n}}{1\times 2\ldots\ldots 2n} + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En estas últimas fórmulas B_1, B_2, ... repr[illegible] anteriormente, los números de Bernoulli.

Por el cambio de z en [illegible], las fórmulas (8) se convierten en las siguientes:

(10) [illegible]

(11) [illegible]

(12) [illegible]

CAPÍTULO VI.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS POR EL MÉTODO DE LAS SÉRIES Y DE LAS FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS DIFERENCIALES.

De la manera de expresar los ángulos en el cálculo.

215. Los métodos que hemos expuesto en los Capítulos III y IV para la solucion de los diversos problemas de la Trigonometría rectilínea ó esférica, no dejan nada que desear en cuanto al rigor; pero hay casos en que es más sencillo y ventajoso sustituir procedimientos particulares á los métodos generales, bien para abreviar los cálculos, bien para obtener resultados más precisos y más independientes del error de las Tablas. Nos proponemos en este Capítulo examinar los casos más importantes; las soluciones que daremos, todas están fundadas en el empleo de las séries.

216. Los ángulos se expresan en el cálculo, ya por los grados, minutos y segundos que contienen, ya por las longitudes absolutas de los arcos que los miden, siendo tomados estos arcos en el círculo cuyo rádio es 1. Frecuentemente se tiene necesidad, en las aplicaciones de la Trigonometría, de pasar de una expresion á otra; vamos á indicar aquí la manera más frecuente de hacer esta trasformacion.

Sea x la longitud de un arco que mide un cierto ángulo, y x' el número entero ó fraccionario de segundos contenidos en este ángulo; es claro que x es igual á x' veces el arco de $1''$, y se tiene

$$x = x' \times \text{arc } 1'';$$

pero como el arco de $1''$ se diferencia de su seno en una cantidad más pequeña que una unidad del décimocuarto órden decimal, es permitido en las aplicaciones sustituir el seno por el arco, tenemos, pues,

$$x = x' \operatorname{sen} 1'' \text{ ó } x' = \frac{x}{\operatorname{sen} 1''}.$$

Supongamos ahora que en una fórmula figura un ángulo x expresado en partes del rádio; si se quiere hacer que este ángulo esté expresado en segundos, será necesario reemplazar á x por $x' \operatorname{sen} 1''$, ó simplemente por $x \operatorname{sen} 1''$ suprimiendo el acento. Al contrario, si el ángulo x se halla expresado en segundos y se quiere que sea valuado en partes del rádio, será preciso reemplazar x por $\dfrac{x}{\operatorname{sen} 1''}$.

Cuadro de las fórmulas que expresan los desarrollos de las funciones circulares en séries.

217. Reuniremos aquí aquellas de las fórmulas establecidas en el Capítulo precedente, cuyo uso es el más frecuente en las soluciones trigonométricas. Se tienen, en primer lugar, las seis fórmulas siguientes:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\ldots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots\ldots, \\ \operatorname{tang} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots\ldots, \\ \cot x &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \ldots\ldots, \\ \sec x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \ldots\ldots, \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

que dan las líneas trigonométricas de x en funcion de este arco, y en segundo lugar, las dos fórmulas

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{6} + \dfrac{3 \operatorname{sen}^5 x}{40} + \ldots.., \\ x = \operatorname{tang} x - \dfrac{\operatorname{tang}^3 x}{3} + \dfrac{\operatorname{tang}^5 x}{5} - \ldots.., \end{cases}$$

que hacen conocer el arco x en funcion de su seno ó su tangente.

En las fórmulas (1) y (2), el arco x está valuado en partes del rádio; si se quiere expresarle en segundos, es necesario escribir x sen $1''$ en lugar de x.

218. Hemos visto en el núm. 203 que, si las cantidades θ y r son definidas por dos ecuaciones de la forma

$$(3)\qquad \operatorname{tang} \theta = \frac{\rho \operatorname{sen} \omega}{1 + \rho \cos \omega}, \quad r = \sqrt{1 + 2\rho \cos \omega + \rho^2},$$

se puede calcular el ángulo θ y el logaritmo neperiano de r por las fórmulas

$$\theta = \frac{\rho \operatorname{sen} \omega}{1} - \frac{\rho^2 \operatorname{sen} 2\omega}{2} + \frac{\rho^3 \operatorname{sen} 3\omega}{3} - \ldots..,$$

$$l\, r = \frac{\rho \cos \omega}{1} - \frac{\rho^2 \cos 2\omega}{2} + \frac{\rho^3 \cos 3\omega}{3} - \ldots..,$$

que serán tanto más convergentes cuanto menor sea ρ, y que subsisten mientras que ρ es < 1. Para el cálculo es necesario multiplicar la segunda fórmula por el módulo M de los logaritmos vulgares; es necesario reemplazar θ por θ sen $1''$, en la primer fórmula, lo cual resulta de dividir el segundo miembro por sen $1''$; entonces, mientras se limite á un pequeño número de términos, se puede escribir sen $2''$, sen $3''$, ... en lugar de 2 sen $1''$, 3 sen $1''$, ... y así se tiene

$$(4)\quad \begin{cases} \theta = \dfrac{\rho \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} 1''} - \dfrac{\rho^2 \operatorname{sen} 2\omega}{\operatorname{sen} 2''} + \dfrac{\rho^3 \operatorname{sen} 3\omega}{\operatorname{sen} 3''} - \dots\dots, \\ \log \rho = M\left(\dfrac{\rho \cos \omega}{1} - \dfrac{\rho^2 \cos 2\omega}{2} + \dfrac{\rho^3 \cos 3\omega}{3} - \dots\dots\right). \end{cases}$$

Si se cambia ω en $180^\circ - \omega$, las fórmulas (3) se convierten en

$$(5)\qquad \operatorname{tang} \theta = \frac{\rho \operatorname{sen} \omega}{1 - \rho \cos \omega},\ r = \sqrt{1 - 2\rho \cos \omega + \rho^2},$$

y haciendo el mismo cambio en las fórmulas (4), se tendrá, para calcular los valores de θ y de $\log r$,

$$(6)\quad \begin{cases} \theta = \dfrac{\rho \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} 1''} + \dfrac{\rho^2 \operatorname{sen} 2\omega}{\operatorname{sen} 2''} + \dfrac{\rho^3 \operatorname{sen} 3\omega}{\operatorname{sen} 3''} + \dots\dots, \\ \log r = -M\left(\dfrac{\rho \cos \omega}{1} + \dfrac{\rho^2 \cos 2\omega}{2} + \dfrac{\rho^3 \cos 3\omega}{3} + \dots\dots\right). \end{cases}$$

Por último, se ofrece frecuentemente la ocasion de calcular un ángulo x determinado por una ecuacion de la forma

$$(7)\qquad \operatorname{tang} x = \frac{1 + m}{1 - m} \operatorname{tang} \alpha,$$

donde la cantidad dada m se supone comprendida entre -1 y $+1$. Se tiene

$$\operatorname{tang}(x - \alpha) = \frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \alpha},$$

y reemplazando $\operatorname{tang} x$ por su valor deducido de la ecuacion propuesta, resulta

$$\operatorname{tang}(x - \alpha) = \frac{m \operatorname{sen} 2\alpha}{1 - m \cos \alpha},$$

ecuacion semejante á la primera (5); se tendrá, pues, aplicando la primera fórmula (6),

$$(8) \qquad x = \alpha + m \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 1''} + m^2 \frac{\operatorname{sen} 4\alpha}{\operatorname{sen} 2''} + m^3 \frac{\operatorname{sen} 6\alpha}{\operatorname{sen} 3''} + \ldots..$$

Esta última fórmula se estableció directamente por Lagrange en las *Mémoires de l'Académie de Berlin* para 1776.

De los triángulos rectilíneos que tienen dos ángulos muy pequeños.

219. Problema I.—*Resolver un triángulo rectilíneo, conociendo el lado* c, *y los ángulos* A *y* B *que se suponen muy agudos.*

Siendo muy agudos los ángulos A y B, se puede tomar

$$\operatorname{sen} A = A - \frac{1}{6} A^3, \ \operatorname{sen} B = B - \frac{1}{6} B^3,$$

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(A+B) = A + B - \frac{1}{6}(A+B)^3;$$

las fórmulas

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}, \ b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C},$$

se convierten entonces

$$a = \frac{cA}{A+B} \frac{1 - \frac{1}{6} A^2}{1 - \frac{1}{6}(A+B)^2} = \frac{cA}{A+B}\left(1 - \frac{1}{6} A^2\right)$$

$$\left[1 + \frac{1}{6}(A+B)^2 + \ldots..\right],$$

$$b = \frac{c\,B}{A+B}\,\frac{1-\frac{1}{6}A^2}{1-\frac{1}{6}(A+B)^2} = \frac{c\,A}{A+B}\left(1-\frac{1}{6}B^2\right)$$

$$\left[1+\frac{1}{6}(A+B)^2+\ldots\ldots\right];$$

efectuando los cálculos indicados, y despreciando los términos de cuarto grado en A y en B, resulta

$$a = \frac{c\,A}{A+B}\left(1+\frac{2\,A\,B+B^2}{6}\right),\ b = \frac{c\,B}{A+B}\left(1+\frac{A^2+2\,A\,B}{6}\right),$$

de donde

$$a+b-c = \frac{1}{2}\,c \times A\,B;$$

estos valores son exactos hasta los términos de cuarto órden en A y B. Dándose en segundos los ángulos A y B, es necesario escribir para el cálculo

$$a = \frac{c\,A}{A+B}\left(1+\frac{2\,A\,B+B^2}{6}\,\text{sen}^2\,1''\right),$$

$$b = \frac{c\,B}{A+B}\left(1+\frac{A^2+2\,A\,B}{6}\,\text{sen}^2\,1''\right);$$

cada una de las partes de a y b deberá calcularse por logaritmos separadamente.

220. Problema II.—*Resolver un triángulo rectilíneo, conociendo dos lados* a *y* b *con el ángulo comprendido* C *que se supone que es muy obtuso*.

Hagamos $C = 180° - \theta$, siendo el ángulo θ muy pequeño. Se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos\theta;$$

poniendo $1 - \frac{\theta^2}{2}$ en lugar de $\cos\theta$, resulta

$$c^2 = (a+b)^2 - a\,b\,\theta^2,$$

y

$$c = (a+b)\left[1 - \frac{a\,b}{(a+b)^2}\,\theta^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

desarrollando por la fórmula del binomio, y despreciando los términos en θ de un órden superior al tercero, resulta

$$(1) \qquad c = a + b - \frac{1}{2}\,\frac{a\,b}{a+b}\,\theta^2.$$

Calculemos ahora A: tenemos

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}\operatorname{sen} C = \frac{a}{c}\operatorname{sen}\theta;$$

reemplazando c por el valor (1) y $\operatorname{sen}\theta$, por $\theta - \frac{\theta^3}{6}$, resulta

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{a+b}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\;\frac{a\,b}{(a+b)^2}\,\theta^2\right]^{-1};$$

desarrollando por la fórmula del binomio y despreciando los términos de cuarto grado en θ, resulta

$$\operatorname{sen} A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1 - \frac{a^2 + b^2 - a\,b}{(a+b)^2}\,\frac{\theta^2}{6}\right];$$

pero siendo muy obtuso el ángulo C, A es muy pequeño, y se puede tomar

$$A = \operatorname{sen} A + \frac{\operatorname{sen}^3 A}{6}.$$

Sustituyendo, en esta fórmula, el valor precedente de sen A, resulta

(2) $$A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1+\frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2}{6}\right],$$

valor exacto hasta los términos próximos al cuarto órden en θ; se hallaria tambien

(3) $$B = \frac{b\theta}{a+b}\left[1-\frac{a(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2}{6}\right].$$

Para el cálculo, es necesario en las fórmulas (1), (2), (3) poner θ sen 1″, A sen 1″, B sen 1″ en lugar de θ, A, B; entonces resulta

$$c = a+b-\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}\theta^2 \operatorname{sen}^2 1'',$$
$$A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1+\frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{6}\right],$$
$$B = \frac{b\theta}{a+b}\left[1-\frac{a(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 1''}{6}\right].$$

Resolucion de un triángulo rectilíneo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido.

221. Sean a y b los lados dados, C el ángulo comprendido, y supongamos que $a < b$. La solucion que vamos á dar se refiere al caso en que $\frac{a}{b}$ es muy pequeño, caso que se presenta frecuentemente en la Astronomía.

Para determinar c y A, se tienen las dos fórmulas

$$c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C, \quad c \cos A = b - a \cos C,$$

de donde se deduce

$$\operatorname{tang} A = \frac{\frac{a}{b} \operatorname{sen} C}{1 - \frac{a}{b} \cos C}, \quad \frac{c}{b} = \sqrt{1 - 2\frac{a}{b} \cos C + \frac{a^2}{b^2}};$$

aplicando aquí las fórmulas (6) del núm. 218, se obtiene

$$A = \frac{a}{b} \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{a^2}{b^2} \frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} 2''} + \frac{a^3}{b^3} \frac{\operatorname{sen} 3C}{\operatorname{sen} 3''} + \ldots..$$

$$\log c = \log b - M\left(\frac{a}{b} \cos C + \frac{a^2}{b^2} \frac{\cos 2C}{2} + \frac{a^3}{b^3} \frac{\cos 3C}{3} + \ldots..\right);$$

en cuanto al ángulo B, se le calculará por la fórmula

$$B = 180^\circ - A - C.$$

Caso de un triángulo esférico rectángulo, en el cual uno de los ángulos oblícuos es muy agudo.

222. *Se da la hipotenusa* a *de un triángulo esférico rectángulo con el ángulo oblícuo* B *que se supone muy agudo, y se pide calcular el lado* c.

Se tiene

(1) $$\operatorname{tang} c = \cos B \operatorname{tang} a,$$

de donde

$$\operatorname{tang} c = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B} \operatorname{tang} a;$$

aplicando la fórmula (8) del núm. 218, se obtiene

(2) $$c = a - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B \frac{\operatorname{sen} 2a}{\operatorname{sen} 1''} + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} B \frac{\operatorname{sen} 4a}{\operatorname{sen} 2''} - \ldots..$$

La ecuacion (1) no se altera al cambiar a en $90^\circ - c$ y c en $90^\circ - a$; por consiguiente, la fórmula (2) no dejará de ser exacta aunque se haga el mismo cambio; se convierte entonces en

$$a = c + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B \frac{\operatorname{sen} 2c}{\operatorname{sen} 1''} + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} B \frac{\operatorname{sen} 4c}{\operatorname{sen} 2''} + \ldots..,$$

esta nueva fórmula da la hipotenusa a, cuando se conocen el lado c y el ángulo B.

Caso de un triángulo esférico, en el cual dos lados difieren poco de un cuadrante.

223. *Conociendo los tres lados de un triángulo esférico, calcular uno de sus ángulos, cuando la hipotenusa ó los lados que comprenden este ángulo difieren poco de un cuadrante.*

Sean b y c los lados que difieren poco de un cuadrante; el ángulo A, que es el que se quiere calcular, difiere poco de a; si, pues, se hace

$$b + c = 180^\circ + 2p,\ b - c = 2q,\ A = a + x,$$

las cantidades p, q y x serán muy pequeñas. La fórmula

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

da

$$\cos(a + x) = \frac{2\cos a + \cos 2p - \cos 2q}{\cos 2p + \cos 2q}$$

y

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & \cos a - \cos(a + x) \\ & = \frac{(1 - \cos a)(1 - \cos 2p) - (1 + \cos a)(1 - \cos 2q)}{\cos 2p + \cos 2q}. \end{aligned} \right.$$

Se ve que, considerando p y q como dos cantidades de primer órden, x será de segundo; y si se quieren despreciar las cantidades de cuarto órden, es necesario reemplazar $\cos 2p$ por $1-2p^2$, $\cos 2q$ por $1-2q^2$, en el numerador del segundo miembro de la fórmula (1), y reducir los cosenos á la unidad en el denominador de dicho segundo miembro; además, el primer miembro será x sen a, con el mismo grado de aproximacion. La fórmula (1) se trasforma, segun esto, en

$$(2) \qquad x = p^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a - q^2 \cot \frac{1}{2} a;$$

pero para el cálculo es necesario escribir

$$(3) \qquad x = p^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} 1'' - q^2 \cot \frac{1}{2} a \operatorname{sen} 1''.$$

Esta fórmula (3) puede emplearse con ventaja en los cálculos geodésicos para efectuar la reduccion de los ángulos al horizonte; es más expedita y exige de las Tablas ménos extension que la fórmula del primer caso de los triángulos esféricos: sin embargo, cuando los ángulos p y q son mayores que 1 ó 2 grados, es más seguro emplear el método general. Es fácil apreciar el error que se comete haciendo uso de la fórmula (3). Volvamos, al efecto, á la fórmula (1) que es rigurosa; y llevemos la aproximacion hasta los términos de sexto órden exclusive; el primer miembro deberá reducirse á $x \operatorname{sen} a + \frac{x^2}{2} \cos a$; con respecto al segundo miembro, se reemplazarán $\cos 2p$ y $\cos 2q$ por $1 - 2p^2 + \frac{2p^4}{3}$, y $1 - 2q^2 + \frac{2q^4}{3}$ en el numerador, pero se reducirán estos cosenos á $1-2p^2$ y $1-2q^2$ en el denominador. Se tendrá, pues,

$$x = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \left(p^2 - \frac{p^4}{3}\right) - \cot \frac{1}{2} a \left(q^2 - \frac{q^4}{3}\right)}{1-(p^2+q^2)} - \frac{x^2}{2} \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

Reemplazando $\frac{1}{1-(p^2+q^2)}$ por $1 + p^2 + q^2$, lo cual puede hacerse, y x^2 por el valor deducido de la fórmula (2), resultará

$$x = p^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a - q^2 \cot \frac{1}{2} a + p^4 \left(\frac{5}{12} \operatorname{tang} \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a \right) - q^4 \left(\frac{5}{12} \cot \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \cot^3 \frac{1}{2} a \right) - \frac{1}{2} p^2 q^2 \left(\cot \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \right).$$

El error que se comete al tomar la fórmula (3) es, pues, igual á

$$p^4 \operatorname{sen}^3 1'' \left(\frac{5}{12} \operatorname{tang} \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a \right) - q^4 \operatorname{sen}^3 1'' \left(\frac{5}{12} \cot \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \cot^3 \frac{1}{2} a \right) - \frac{1}{2} p^2 q^2 \operatorname{sen}^3 1'' \left(\cot \frac{1}{2} a - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \right),$$

y es fácil apreciarle por la consideracion de un número mayor de términos contenidos en la expresion precedente.

Resolucion de un triángulo esférico del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

224. PRIMERA SOLUCION.—Sean a, b, C los elementos dados. Se tiene, por las fórmulas de Néper,

$$\operatorname{tang}\left(90^\circ + \frac{A-B}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C,$$

$$\operatorname{tang}\left(90^\circ - \frac{A+B}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C,$$

y aplicando la fórmula (8) del núm. 218, resulta

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{A-B}{2} &= -90^{\circ}+\frac{1}{2}C+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} 1''} \\ &\quad +\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}\frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} 2''}+\ldots.., \\ \frac{A+B}{2} &= 90^{\circ}-\frac{1}{2}C+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} 1''} \\ &\quad -\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b\frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} 2''}+\ldots..; \end{aligned}\right.$$

la primera série es convergente si $a < b$; pero, para serlo la segunda, es necesario que se tenga $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b < 1$ ó $a+b < 180^{\circ}$.

Para calcular c se tiene $\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$, de donde se deduce

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c &= \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b \\ &\quad -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\times\cos\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{1}{2}c &= \cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b \\ &\quad +2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\times\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C. \end{aligned}$$

Se ve por estas ecuaciones que $\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$ es el tercer lado de un triángulo rectilíneo, cuyos otros lados serian

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b,\ \cos\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b,$$

y el ángulo comprendido C. Igualmente, $\cos\frac{1}{2}c$ es el tercer lado de un triángulo rectilíneo, cuyos otros dos lados son

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b,\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b,$$

y el ángulo comprendido $180° - C$. Aplicando aquí el resultado obtenido en el núm. 221, se tendrá

$$(2)\ \left\{\begin{array}{l}\log\operatorname{sen}\frac{1}{2}c = \log\left(\cos\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\right) - M\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\right.\\ \left.\cot\frac{1}{2}b\cos C + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\cot^2\frac{1}{2}b\cos 2C + \ldots\ldots\right)\\ \\ \log\cos\frac{1}{2}c = \log\left(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\right) + M\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\right.\\ \left.\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cos C - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b\cos 2C + \ldots\ldots\right)\end{array}\right.$$

y restando estas fórmulas una de otra, se tendrá el valor de $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$.

225. Segundo método.—Esta solucion que acabamos de dar, es debida á Lagrange; las fórmulas á que conduce no son de una forma que permita valuar fácilmente los elementos desconocidos, cuando uno de los lados dados es muy pequeño con relacion al otro. Es necesario obtener otras que procedan segun las potencias de este lado, y que se obtienen muy fácilmente del modo siguiente.

Ante todo, sumando primero y restando despues las ecuaciones (1), resulta

$$A = \frac{2 \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang} \frac{1}{2} a + \frac{2 \operatorname{sen} 2 C \cot b}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a$$
$$+ \frac{2 \operatorname{sen} 3 C (1 + 4 \cot^2 b)}{3 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a + \ldots..$$

$$B = 180^\circ - C - \frac{2 \operatorname{sen} C \cot b}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang} \frac{1}{2} a$$
$$- \frac{\operatorname{sen} 2 C (1 + 2 \cot^2 b)}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a$$
$$- \frac{2 \operatorname{sen} 3 C \cot b (3 + 4 \cot^2 b)}{3 \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} a + \ldots..$$

Si se supone que el lado a es muy pequeño, y que se pueden despreciar las potencias de a superiores á la tercera, se tendrá

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a \operatorname{sen} 1'' + \frac{1}{24} a^3 \operatorname{sen}^3 1'';$$

y llevando este valor de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a$ en las ecuaciones precedentes, y despreciando desde la cuarta potencia de a, se halla

$$(3) \left\{ \begin{aligned} A &= a \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} b} a^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} C \cos C \frac{\cot b}{\operatorname{sen} b} + a^3 \operatorname{sen}^2 1'' \\ &\quad \left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} C \cos^2 C \frac{1 + 4 \cot^2 b}{\operatorname{sen} b} - \frac{1}{3} \operatorname{sen} C \frac{\cot^2 b}{\operatorname{sen} b} \right), \\ B &= 180^\circ - C - a \operatorname{sen} C \cot b - \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} C \cos C \\ &\times (1 + 2 \cot^2 b) - a^3 \operatorname{sen}^2 1'' \left[\frac{1}{3} \operatorname{sen} C \cos^2 C \cot b \, (3 \right. \\ &\quad \left. + 4 \cot^2 b) - \frac{1}{6} \operatorname{sen} C \cot b \, (1 + 2 \cot^2 b) \right]. \end{aligned} \right.$$

Para calcular c, emplearemos una de las fórmulas de Delambre, á saber:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c-b)=\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C-B)}{\cos\frac{1}{2}A}$$

ó

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c-b)=\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\sec\frac{1}{2}A$$

$$\left(\operatorname{sen}C\operatorname{sen}\frac{180^\circ-B-C}{2}-\cos C\cos\frac{180^\circ-B-C}{2}\right).$$

Vemos que, para calcular el segundo miembro con el mismo grado de aproximacion que A y B, es suficiente conservar los términos en a^2 de los dos últimos factores. Tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a\operatorname{sen}1''-\frac{1}{48}a^3\operatorname{sen}^3 1'',$$

y las ecuaciones (3) nos dan en seguida, despreciando a^3,

$$\sec\frac{1}{2}A=1+\frac{1}{8}A^2\operatorname{sen}^2 1''=1+\frac{1}{8}a^2\operatorname{sen}^2 1''\,\frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 b},$$

$$\frac{180^\circ-B-C}{2}=\frac{1}{2}a\operatorname{sen}C\cot b$$

$$+\frac{1}{4}a^2\operatorname{sen}1''\operatorname{sen}C\cos C(1+2\cot^2 b),$$

$$\operatorname{sen}\frac{180^\circ-B-C}{2}=\frac{1}{2}a\operatorname{sen}1''\operatorname{sen}C\cot b$$

$$+\frac{1}{4}a^2\operatorname{sen}^2 1''\operatorname{sen}C\cos C(1+2\cot^2 b),$$

$$\cos\frac{180^\circ-B-C}{2}=1-\frac{1}{8}a^2\operatorname{sen}^2 1''\operatorname{sen}^2 C\cot^2 b.$$

Por medio de estas fórmulas, el valor precedente de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c-b)$ se convierte en

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c-b) = -\frac{1}{2} a \operatorname{sen} 1'' \cos C$$
$$+\frac{1}{4} a^2 \operatorname{sen}^2 1'' \operatorname{sen}^2 C \cot b + \frac{1}{16} a^3 \operatorname{sen}^3 1''$$
$$\left(\cos C \operatorname{sen}^2 C (1+4\cot^2 b) + \frac{1}{3}\cos C\right);$$

por último, hallamos que

$$\frac{1}{2}(c-b)\operatorname{sen} 1'' = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(c-b) + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2}(c-b),$$

y encontramos de este modo, despreciando siempre la cuarta potencia de a,

$$(4) \qquad c = b - a\cos C + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen}^2 C \cot b$$
$$+ a^3 \operatorname{sen}^2 1'' \cos C \operatorname{sen}^2 C\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cot^2 b\right).$$

Las fórmulas (3) y (4) son ventajosas, sobre todo en el caso de que pueda despreciarse la tercera potencia de a.

Resolucion de un triángulo esférico cuyos lados son muy pequeños.

226. Legendre ha dado á conocer un bello teorema, por el cual se trasforma la resolucion de un triángulo rectilíneo en la de un triángulo esférico, cuyos lados son muy pequeños con relacion al rádio de la esfera. Este teorema, interesante en sí mismo y muy útil en las operaciones geodésicas, puede enunciarse de la manera siguiente:

Conociendo un triángulo esférico cuyos lados son muy pequeños con relacion al rádio R *de la esfera, si construimos un triángulo rectilíneo que tenga los mismos lados que los del triángulo esférico, las superficies de los dos triángulos son iguales á los términos desde el de segundo órden con relacion á* $\frac{1}{\mathrm{R}}$, *y los ángulos del triángulo esférico son iguales á los del rectilíneo, aumentados en el tercio del exceso esférico, despreciando los términos desde el de cuarto órden.*

Para demostrar este teorema, representemos por R el rádio de la esfera, y por a, b, c los lados del triángulo esférico, comparados con una unidad de longitud arbitraria; por A, B, C, como siempre, los ángulos opuestos. El triángulo esférico, semejante al propuesto, y que construiremos sobre la esfera de rádio 1, tiene por lados $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$, y tenemos, por consiguiente, suponiendo que

$$a+b+c=2\,p,\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{p-b}{R}\operatorname{sen}\frac{p-c}{R}}{\operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{p}{R}\operatorname{sen}\frac{p-a}{R}}{\operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}}};$$

y además,

$$\operatorname{sen}\frac{p}{R}=\frac{p}{R}-\frac{p^3}{6\,R^3}+\ldots\ldots,\ \operatorname{sen}\frac{p-a}{R}=\frac{p-a}{R}$$

$$-\frac{(p-a)^3}{6\,R^3}+\ldots\ldots,\ \operatorname{sen}\frac{p-b}{R}=\frac{p-b}{R}-\frac{(p-b)^3}{6\,R^3}+\ldots\ldots;$$

$$\operatorname{sen}\frac{p-c}{R}=\frac{p-c}{R}-\frac{(p-c)^3}{6\,R^3}+\ldots\ldots,\ \operatorname{sen}\frac{b}{R}$$

$$= \frac{b}{R} - \frac{b^3}{6\,R^3} + \ldots, \quad \operatorname{sen} \frac{c}{R} = \frac{c}{R} - \frac{c^3}{6\,R^3} + \ldots$$

Si sustituimos estos valores en las expresiones de sen $\frac{1}{2}\,A$ y de cos $\frac{1}{2}\,A$, y despreciamos los términos desde el de cuarto órden con relacion á $\frac{1}{R}$, y llegando, por último, hasta este grado de aproximacion, resulta

$$\frac{1}{1 - \dfrac{b^2 + c^2}{6\,R^2}} = 1 + \frac{b^2 + c^2}{6\,R^2},$$

y de aquí resulta

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}\sqrt{1 + \frac{p\,(p-a)}{3\,R^2}},$$

$$\cos \frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}\sqrt{1 - \frac{(p-b)\,(p-c)}{3\,R^2}},$$

ó, extrayendo la raíz cuadrada del segundo factor por la fórmula del binomio,

$$(1)\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,A &= \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}\left[1 + \frac{p\,(p-a)}{6\,R^2}\right], \\ \cos \frac{1}{2}\,A &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}\left[1 - \frac{(p-b)\,(p-c)}{6\,R^2}\right]. \end{aligned}\right. \text{ (*)}$$

(*) El método que hemos seguido hasta aquí nos da el medio de pasar inmediatamente de las fórmulas de la Trigonometría esférica á las de la rectilínea. Por ejemplo, las fórmulas (1) que no son exactas más que hasta los términos de cuarto órden en $\frac{1}{R}$, serán rigurosas en el límite $R = \infty$; se reducirán de este modo á las fórmulas correspondientes de la Trigonometría rectilínea.

Consideremos ahora el triángulo rectilíneo que tiene por lados a, b, c; A', B', C' serán los ángulos opuestos respectivamente á estos lados, y S' la superficie del triángulo. Tendremos

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2} A' &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \\ \cos \frac{1}{2} A' &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \end{aligned} \right.$$

y si formamos los productos

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A \times \cos \frac{1}{2} A', \ \cos \frac{1}{2} A \ \operatorname{sen} \frac{1}{2} A',$$

restando uno de otro, resultará, hechas las reducciones,

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - A') = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{6R^3} = \frac{1}{6} \frac{S'}{R^2};$$

por último, tenemos, con el mismo grado de aproximacion,

$$\frac{1}{2}(A - A') = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{6} \frac{S'}{R^2},$$

ó

$$A = A' + \frac{1}{3} \frac{S'}{R^2}.$$

Tenemos, por consiguiente, las tres fórmulas

$$(3)\quad A = A' + \frac{S'}{3R^2}, \ B = B' + \frac{S'}{3R^2}, \ C = C' + \frac{S'}{3R^2},$$

en donde los ángulos $A, B, \ldots.$ se expresan por las longitudes de los arcos que los miden en la circunferencia de rádio 1. Sumando estas ecuaciones y observando que $A' + B' + C' = \pi$, se obtiene

$$A + B + C = \pi + \frac{S'}{R^2}.$$

Ahora bien; si representamos por S la superficie del triángulo esférico, por ε el exceso esférico valuado del mismo modo que los ángulos A, B, C, se obtiene

$$A + B + C - \pi = \varepsilon = \frac{S}{R^2},$$

por consiguiente,

$$S = S', \tag{4}$$

despreciando los términos desde el de segundo órden en $\frac{1}{R}$, y las ecuaciones (3) se convierten ahora en

$$A = A' + \frac{\varepsilon}{3},\ B = B' + \frac{\varepsilon}{3},\ C = C' + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5}$$

con lo que concluye la demostracion del teorema.

227. Podemos, siguiendo la misma marcha, detenernos en una aproximacion tan lejana como queramos; por ejemplo, si queremos tener en cuenta los términos de cuarto órden con relacion á $\frac{1}{R}$, pero despreciando los términos desde el de sexto órden, se obtiene sin dificultad

$$A = A' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \frac{\operatorname{sen}^2 B' + \operatorname{sen}^2 C' - 2 \operatorname{sen}^2 A'}{10 \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} B' \operatorname{sen} C'},$$

$$B = B' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \frac{\operatorname{sen}^2 C' + \operatorname{sen}^2 A' - 2 \operatorname{sen}^2 B'}{10 \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} B' \operatorname{sen} C'},$$

$$C = C' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \frac{\operatorname{sen}^2 A' + \operatorname{sen}^2 B' - 2 \operatorname{sen}^2 C'}{10 \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} B' \operatorname{sen} C'};$$

tambien obtendremos, despreciando los términos desde el de cuarto órden,

$$S = S'\left(1 + \frac{S'}{R^2}\,\frac{\text{sen}^2 A' + \text{sen}^2 B' + \text{sen}^2 C'}{12\,\text{sen}\, A'\,\text{sen}\, B'\,\text{sen}\, C'}\right).$$

223. Vamos á ver ahora el modo de hacer uso del teorema de Legendre.

1.° *Se nos dan los tres lados* a, b, c *de un triángulo esférico.*

Calcularemos los ángulos A', B', C' y la superficie S' del triángulo rectilíneo que tiene por lados a, b, c; de aquí deduciremos $\varepsilon = \frac{S'}{R^2 \,\text{sen}\, 1''}$, y las fórmulas (5) nos darán en seguida los valores de A, B, C.

2.° *Se nos dan los dos lados* a, b *y el ángulo comprendido* C.

Tenemos $S' = \frac{1}{2}\,ab\,\text{sen}\, C'$; pero, á causa de ser $C' = C - \frac{S}{3R^2}$, sen C' no difiere de sen C más que en términos del órden de $\frac{1}{R^2}$, y por consiguiente, podemos tomar

$$S' = \frac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen}\, C \text{ y } \varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{a\,b}{R^2}\,\frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, 1''}.$$

Calcularemos ε por esta fórmula, y la tercera ecuacion (5) nos dará á conocer C'; resolveremos el triángulo rectilíneo del que conocemos los elementos a, b y C'; tendremos así c, A' y B'; las ecuaciones (5) nos darán á conocer en seguida A y B.

3.° *Se nos dan los dos ángulos* A, B *y el lado comprendido* c.

Tenemos

$$S' = \frac{c^2}{2}\,\frac{\text{sen}\, A'\,\text{sen}\, B'}{\text{sen}\,(A' + B')};$$

pero podemos tomar

$$S' = \frac{c^2}{2} \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(A+B)} \text{ y } \varepsilon = \frac{c^2}{2\,R^2} \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(A+B) \operatorname{sen} 1''};$$

conociendo ε de este modo, tendremos A' y B' por las fórmulas (5); el problema se reducirá de este modo á resolver un triángulo rectilíneo con los datos A', B' y c.

4.° *Se nos dan los lados* a, b *y el ángulo* A.

Tenemos $S' = \frac{1}{2}\, a\, b \operatorname{sen}(A' + B')$; pero podemos tomar

$$S' = \frac{1}{2}\, a\, b \operatorname{sen}(A+B),$$

de donde

$$\varepsilon = \frac{a\, b}{2\,R^2} \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} 1''};$$

el ángulo B no es conocido, pero como conocemos la determinacion de ε, podemos calcularle por la fórmula aproximada $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \operatorname{sen} A$. Conocido ε, tendremos A' por la primera de las fórmulas (5), y el problema se reduce á resolver un triángulo rectilíneo con los datos a, b y A'; las fórmulas (5) nos darán en seguida B y C.

5.° *Se nos dan los ángulos* A *y* B *y el lado* a.

Podemos calcular ε por la fórmula

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\,R^2} \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} 1''};$$

tendremos en seguida A' y B' por las fórmulas (5), y el problema se reduce á resolver un triángulo rectilíneo con los datos A', B' y a.

229. El teorema de Legendre puede tambien aplicarse á la resolucion de un triángulo esférico, en el que dos lados difieren poco de 180°, porque prolongándolos hasta su nuevo encuentro, se forma un segundo triángulo esférico cuyos lados son muy pequeños. Resolveremos este segundo triángulo, en el que conoceremos siempre tres elementos, y obtendremos fácilmente los elementos del primer triángulo.

Por último, el mismo teorema puede emplearse para la resolucion de un triángulo esférico, en el que dos ángulos son muy agudos; porque, en este caso, el triángulo suplementario tiene dos lados que difieren poco de 180 grados.

Fórmulas trigonométricas diferenciales.

230. Habiendo resuelto un triángulo rectilíneo ó esférico, se tiene necesidad frecuentemente de conocer las variaciones que sufren los elementos calculados, cuando los datos experimentan tambien ciertas variaciones. Supongamos que estas variaciones dadas sean tan pequeñas que podamos tratarlas como diferenciales infinitamente pequeñas, es decir, que podamos despreciarlas en el cálculo de sus productos y sus potencias; podemos de este modo, haciendo uso de las reglas del cálculo diferencial, calcular las variaciones correspondientes de los demás elementos, por fórmulas muy sencillas, y dispensarnos de este modo de resolver un triángulo con nuevos datos.

Triángulos rectilíneos.—Las fórmulas fundamentales de la Trigonometría rectilínea son

$$\log a - \log \operatorname{sen} A = \log b - \log \operatorname{sen} B = \log c - \log \operatorname{sen} C,$$
$$A + B + C = 180^\circ.$$

Supongamos que tres de los elementos, entre los que se encuentran á lo ménos un lado, reciban incrementos muy pequeños; los demás elementos recibirán sus incrementos correspondientes; representaremos todos estos incrementos por la característica δ, y entonces las ecuaciones precedentes nos darán

$$\frac{\delta a}{a} - \cot A \times \delta A = \frac{\delta b}{b} - \cot B \times \delta B = \frac{\delta c}{c} - \cot C \times \delta C,$$

$$\delta A + \delta B + \delta C = o.$$

Por medio de estas ecuaciones podremos calcular tres de las variaciones δa, ..., suponiendo las otras tres conocidas, advirtiendo, sin embargo, que entre ellas se ha de encontrar la variacion de un lado; hay que observar que, para el cálculo, es necesario escribir δA sen $1''$, δR sen $1''$, δC sen $1''$, en lugar de δA, δB, δC.

Si se nos dan δa y las variaciones de los ángulos, tendremos, para calcular δb y δc,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta b = \dfrac{b}{a}\, \delta a + b \text{ sen } 1'' \, (\cot B \, \delta B - \cot A \, \delta A), \\[2ex] \delta c = \dfrac{c}{a}\, \delta a + c \text{ sen } 1'' \, (\cot C \delta C - \cot A \, \delta A). \end{array} \right.$$

Si se nos dan δa, δb y δA, tendremos

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta B = - \dfrac{\text{tang } B}{a \text{ sen } 1''}\, \delta a + \dfrac{\text{tang } B}{b \text{ sen } 1''}\, \delta b + \dfrac{\text{tang } B}{\text{tang } A}\, \delta A, \\[2ex] \delta C = - \delta A - \delta B, \; \delta c = \dfrac{1}{\cos B}\, \delta a - \dfrac{\cos C}{\cos B}\, \delta b \\[2ex] \qquad - c \text{ tang } B \text{ sen } 1'' \, \delta A. \end{array} \right.$$

Si se nos dan δa, δb, δC, tendremos

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta c = \cos B \, \delta a + \cos A \, \delta b + a \text{ sen } B \text{ sen } 1'' \, \delta C, \\[2ex] \delta A = \dfrac{\text{sen } B}{c \text{ sen } 1''}\, \delta a - \dfrac{\text{sen } A}{c \text{ sen } 1''}\, \delta b - \dfrac{a \cos B}{c}\, \delta C, \\[2ex] \delta B = - \delta A - \delta C. \end{array} \right.$$

Por último, si se nos da δa, δb y δc, tendremos, para calcular δA,

$$(4) \qquad \delta A = \frac{1}{c \operatorname{sen} B \operatorname{sen} 1''} \delta a - \frac{\cos C}{c \operatorname{sen} B \operatorname{sen} 1''} \delta b - \frac{\cos B}{c \operatorname{sen} B \operatorname{sen} 1''} \delta c,$$

y obtendremos, por cambios de letras, otras fórmulas semejantes para calcular δB y δC.

231. *Triángulos esféricos.*—Emplearemos, como anteriormente, la característica δ para representar las variaciones de los elementos. La fórmula

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

nos da

$$\operatorname{sen} a\, \delta a = (\cos c \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c \cos b \cos A)\, \delta b + (\cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A)\, \delta c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A\, \delta A,$$

ó haciendo uso de las fórmulas, del núm. 111 (3),

$$(5) \qquad \delta a = \cos C\, \delta b + \cos B\, \delta c + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B\, \delta A.$$

Por medio de esta fórmula, se obtiene, considerando el triángulo suplementario,

$$(6) \qquad \delta A = -\cos c\, \delta B - \cos b\, \delta C + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B\, \delta a.$$

La fórmula

$$\log \operatorname{sen} A - \log \operatorname{sen} a = \log \operatorname{sen} B - \log \operatorname{sen} b$$

nos da en seguida

$$(7) \qquad \cot A\, \delta A - \cot a\, \delta a = \cot B\, \delta B - \cot b\, \delta b.$$

Por último, la fórmula

$$\cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C$$

nos da

$$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}^2 A}\,\delta A - (\cot A \cos C - \cos b \operatorname{sen} C)\,\delta C$$

$$-\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a}\,\delta a + (\cot a \cos b + \operatorname{sen} b \cos C)\,\delta b = o,$$

y multiplicándola por sen A,

$$(8)\quad \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}\,\delta A + \cos B\,\delta C - \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} a}\,\delta a + \cot c \operatorname{sen} C\,\delta b = o.$$

Por medio de las fórmulas (5), (6), (7), (8) y de las que se han deducido por las permutaciones de las letras, podremos expresar la variacion de uno cualquiera de los seis elementos de un triángulo esférico en funcion de las variaciones de tres cualquiera de los otros cinco.

Consideremos, por ejemplo, el caso en que se nos den los lados a, b y el ángulo comprendido C, caso que se presenta con más frecuencia en la Astronomía. Tendremos los valores siguientes de las variaciones δc, δA, δB de los elementos desconocidos:

$$\delta c = \cos B\,\delta a + \cos A\,\delta b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A\,\delta C,$$

$$\delta A = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} c}\,\delta a - \cot c \operatorname{sen} A\,\delta b - \frac{\cos B \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}\,\delta C,$$

$$\delta B = -\cot c \operatorname{sen} B\,\delta a + \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} c}\,\delta b - \frac{\cos A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}\,\delta C.$$

Es muy útil, en el caso que consideramos, que las variaciones δc y δA estén expresadas en funcion de los elementos b, c y A; podemos, sin embargo, dejar sen a como factor de los coeficientes de δa; es necesario emplear con frecuencia las fórmulas siguientes, que se deducen fácilmente de las que acabamos de escribir:

$$\delta c = \frac{1}{\operatorname{sen} a}(\cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A)$$

$$\delta a + \cos A\,\delta b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A\,\delta C,$$

$$\delta A = \frac{1}{\operatorname{sen} a} \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} c} \delta a - \operatorname{sen} A \cot C \delta b$$
$$- (\cos b - \operatorname{sen} b \cot c \cos A) \delta C.$$

232. Si suponemos que las variaciones dadas sean precisamente los errores de que estén afectados los datos, las fórmulas anteriores nos darán á conocer los errores correspondientes de los elementos calculados; así, estas fórmulas pueden emplearse para apreciar el grado de precision que podemos esperar en los resultados de los cálculos trigonométricos ejecutados con datos inexactos.

Los cálculos de una triangulacion consisten, como hemos visto (Capítulo III), en la resolucion de una série de triángulos de los que conocemos un lado y los ángulos; apliquemos las fórmulas (1) á uno de estos triángulos suponiendo sean rectilíneos. El error relativo $\frac{\delta a}{a}$ del lado dado se traslada á cada uno de los lados calculados b y c, los que, por otra parte, están afectados de el error de los ángulos. Vemos, por las fórmulas (1), que un error dado cometido en uno de los ángulos será tanto menor cuanto más se aproxime á 90 grados. Pero como los ángulos de un triángulo rectilíneo no pueden ser los tres iguales á 90°, vemos que el caso más favorable será el que los tres ángulos sean iguales á 60 grados; por eso, en la práctica del levantamiento de planos, consideramos los triángulos equiláteros como más ventajosos, y no se emplean nunca triángulos cuyos ángulos sean menores de 30 grados.

Las fórmulas diferenciales relativas á los triángulos esféricos se emplean frecuentemente en la Astronomía. Son útiles, sobre todo, en los problemas que se refieren á los efectos de la precision, de la nutacion y de la aberracion en las posiciones aparentes de los astros.

FIN.

ÍNDICE

CAPÍTULO PRIMERO.

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.

Páginas.

Definicion de la palabra funcion........ 5
De la medida de las longitudes........ 5
De los arcos de círculo........ 6
Definicion de las líneas trigonométricas........ 7
Variacion de las líneas trigonométricas........ 10
De los arcos que corresponden á una línea trigonométrica dada........ 14
Relaciones entre las líneas trigonométricas de un mismo arco........ 19
Fórmulas relativas á la suma de los arcos........ 22
Fórmulas importantes deducidas de las fórmulas relativas á la suma de los arcos........ 28
Multiplicacion de los arcos........ 33
Division de los arcos........ 37
Determinacion de las líneas trigonométricas de ciertos arcos........ 48
Observacion acerca de las relaciones que existen entre las diferentes líneas trigonométricas........ 57
Problemas........ 62

CAPÍTULO II.

DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

Preliminares........ 65
Division de la circunferencia........ 69
Construccion de una Tabla de senos y cosenos........ 70
Tablas de logaritmos de las funciones circulares........ 78
Disposicion de las Tablas de Callet........ 79
Uso de las Tablas........ 80
Métodos para hacer una fórmula calculable por logaritmos........ 91
Resolucion de la ecuacion de segundo grado por medio de las Tablas trigonométricas........ 93
Resolucion de la ecuacion de tercer grado por medio de las Tablas trigonométricas........ 97
Problemas........ 105

CAPÍTULO III.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

Objetos de la Trigonometría rectilínea........ 107
Medida de los ángulos........ 107
Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo........ 109

Páginas.

Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo.................. 110
Otras fórmulas relativas á los triángulos oblicuángulos.......................... 115
Expresiones del área de un triángulo y de los rádios de los círculos inscrito y circunscrito.. 118
Resolucion de los triángulos rectángulos.. 121
Resolucion de un triángulo rectilíneo, en el que se conocen un lado y dos ángulos..... 124
Resolucion de un triángulo rectilíneo, en el que se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.. 125
Resolucion de un triángulo rectilíneo, del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido.. 129
Resolucion de un triángulo rectilíneo, en el que se conocen los tres lados............. 132
Diversos casos de resolucion de triángulos, en los cuales no se conocen todos los lados ó todos los ángulos.. 135
Del cuadrilátero inscriptible.. 140
Operaciones sobre el terreno.. 143
Problemas de Trigonometría práctica.. 147
Problemas.. 156

CAPÍTULO IV.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Objeto de la Trigonometría esférica.. 159
Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico.................. 159
Del triángulo suplementario.. 165
Fórmulas relativas á los triángulos rectángulos.. 167
Fórmulas relativas á los triángulos rectiláteros.. 171
Uso de los ángulos auxiliares en la Trigonometría esférica.............................. 172
Fórmulas generales calculables por logaritmos.. 173
Diferentes expresiones del exceso esférico.. 181
Expresiones del rádio del círculo circunscrito y de los rádios de los círculos inscrito y ex-inscrito.. 187
Resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.. 190
Resolucion de los triángulos esféricos rectiláteros.. 195
Advertencia acerca de la resolucion de los triángulos esféricos en general............. 198
Resolucion de un triángulo esférico, del cual se conocen los tres lados ó los tres ángulos. 199
Resolucion de un triángulo esférico, del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido, ó dos ángulos y el lado comprendido.. 204
Resolucion de un triángulo esférico, en el cual se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, ó dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.................. 210
Discusion de los casos que pueden admitir dos soluciones.............................. 222
Problemas de Trigonometría esférica.. 225
Problemas.. 229

CAPÍTULO V.

COMPLEMENTO DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.

De las expresiones imaginarias.. 231
Operaciones con las expresiones imaginarias.—Fórmula de Moivre para un exponente entero y positivo.. 233
Multiplicacion de los arcos.. 236
Division de los arcos.. 239

Páginas.

Resolucion de la ecuacion binomia $z^m = 1$........ 242
De los polígonos regulares........ 246
Resolucion de las ecuaciones binomias generales........ 252
Resolucion de las ecuaciones trinomias........ 255
Fórmulas de Moivre para un exponente cualquiera........ 256
Teoremas de Moivre y de Cotes........ 258
Expresiones de las potencias de los senos y cosenos de un arco en funcion lineal de los senos ó cosenos de los múltiplos de este arco........ 260
Expresion de sen $m\,a$ y de cos $m\,a$, en funcion de sen a ó de cos a........ 264
Desarrollo de las funciones sen x y cos x en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x........ 273
Descomposicion de las funciones cos x y sen x en un número arbitrario, pero limitado de factores........ 278
Descomposicion de las funciones cos x y sen x en un número infinito de factores........ 282
Descomposicion de las funciones tang x y cot x en un número arbitrario, pero limitado de fracciones........ 285
Descomposicion de las funciones tang x y cot x en un número infinito de fracciones simples........ 290
Descomposicion de las funciones cosec x y sec x en un número infinito de fracciones simples........ 293
Desarrollo de las funciones tang x y cot x en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x........ 294
Desarrollo de las funciones circulares cosec x y sec x en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x........ 305
De las funciones circulares de variables imaginarias........ 309
De los cosenos y senos hiperbólicos........ 323
Desarrollo de las funciones log $(1+z)$ y arc tang z en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de z........ 326
Cálculo de la relacion de la circunferencia al diámetro........ 334
Fórmulas relativas al cálculo de los logaritmos........ 336
Desarrollos de las funciones cos $m\,x$ y sen $m\,x$ en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de sen x........ 339
Desarrollo de las funciones log sen x y log cos x en séries ordenadas, segun las potencias crecientes de x........ 345
Desarrollos en séries ó en productos infinitos de las funciones circulares de variables imaginarias........ 350

CAPÍTULO VI.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS POR EL MÉTODO DE LAS SÉRIES Y DE LAS FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS DIFERENCIALES.

De la manera de expresar los ángulos en el cálculo........ 365
Cuadro de las fórmulas que expresan los desarrollos de las funciones circulares en séries. 366
De los triángulos rectilíneos que tienen dos ángulos muy pequeños........ 369
Resolucion de un triángulo rectilíneo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido... 372
Caso de un triángulo esférico rectángulo, en el cual uno de los ángulos oblícuos es muy agudo........ 373
Caso de un triángulo esférico, en el cual dos lados difieren poco de un cuadrante........ 374
Resolucion de un triángulo esférico del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido........ 376
Resolucion de un triángulo esférico cuyos lados son muy pequeños........ 381
Fórmulas trigonométricas diferenciales........ 388

Páginas

Resolución de la ecuación binomia $x^m = 1$ .... [illegible]
De los polígonos regulares .... [illegible]
Resolución de las ecuaciones binomias generales .... [illegible]
Resolución de las ecuaciones trinomias .... [illegible]
Fórmula de Moivre para un exponente cualquiera .... [illegible]
Teorema de Moivre y de Cotes .... [illegible]
Expresiones de las potencias de los senos y cosenos de un arco en función lineal de los senos ó cosenos de los múltiplos de este arco .... [illegible]
Expresión de sen $m\,x$ y de cos $m\,x$ en función de sen x ó de cos x .... [illegible]
Desarrollo de las funciones sen x y cos x en series ordenadas, según las potencias crecientes de x .... [illegible]
Descomposición de las funciones cos x y sen x en un número infinito de factores .... [illegible]
Descomposición de las funciones cos x y sen x en un número infinito de factores .... [illegible]
Descomposición de las funciones tang x y cot x en un número infinito de fracciones .... [illegible]
Descomposición de las funciones tang x y cot x en un número infinito de fracciones simples .... [illegible]
Descomposición de las funciones cosec x y sec x en un número infinito de fracciones simples .... [illegible]
Desarrollo de las funciones tang x y cot x en series ordenadas, según las potencias crecientes de x .... [illegible]
Desarrollo de las funciones circulares cosec x y sec x en series ordenadas, según las potencias crecientes de x .... [illegible]
De las funciones circulares de variables imaginarias .... [illegible]
De los cosenos y senos hiperbólicos .... [illegible]
Desarrollo de las funciones log $(1 + x)$, arc tang x en series ordenadas, según las potencias crecientes de x .... [illegible]
Cálculo de la relación de la circunferencia al diámetro .... [illegible]
Fórmulas relativas al cálculo de los logaritmos .... [illegible]
Desarrollos de las funciones cos $m\,x$ y sen $m\,x$ en series ordenadas, según las potencias crecientes de sen x .... [illegible]
Desarrollo de las funciones log sen x y log cos x en series ordenadas, según las potencias crecientes de x .... [illegible]
Desarrollos en series ó en productos infinitos, de las funciones circulares de variables imaginarias .... [illegible]

CAPÍTULO VII

DE LA RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS, POR EL MÉTODO DE LA APROXIMACIÓN, Y DE LAS FÓRMULAS QUE SE EMPLEAN EN GEODESIA

De la manera de expresar los ángulos en el cálculo .... [illegible]
Cuadro de las fórmulas que expresan los desarrollos de las funciones circulares en series, y los triángulos rectilíneos que tienen dos ángulos muy pequeños .... [illegible]
Resolución de un triángulo rectilíneo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido .... [illegible]
Caso de un triángulo esférico rectángulo, en el cual uno de los ángulos oblicuos es muy agudo .... [illegible]
Caso de un triángulo esférico, en el cual un ángulo difiere poco de dos ángulos rectos .... [illegible]
Resolución de un triángulo esférico del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido .... [illegible]
Resolución de un triángulo esférico cuyos lados son muy pequeños .... [illegible]
Diferencias trigonométricas. Diferenciales .... [illegible]

ERRATAS.

PÁGINAS.	LÍNEAS.	DICE.	DEBE DECIR.
38	7	$\pm \frac{1}{2} \cos \varphi$	$\pm \cos \frac{1}{2} \varphi$
40	4	para valor de K	para valor de K un número par
40		$- \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)$	$- \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \varphi \right)$
41	última	$-$	$+$
42	15	en funcion de sen a	en funcion de sen a y de cos a
42	última	$\dfrac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}$	$\dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}$
46	4	$3 \operatorname{tang} a \operatorname{tang}^3 a$	$3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a$
46	15	$3 \pi + i$	$3 n + i$
66	última	$2 \cos^2 \frac{\pi}{2}$	$2 \cos^2 \frac{x}{2}$
73	15	uno de los factores K	uno de los factores es constante
83	15	$121,5 \times 7,2$	$15,6 \times 3,7$
92	2	$\operatorname{tang} = \varphi \frac{b}{a}$	$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a}$
96	15	$+ f \pm \varphi$	$+ \varphi \pm f$
100	18	φ y β	α y β
102	18	x^2	x_2
110	7	á los ángulos opuestos	á los senos de los ángulos opuestos
127	9	mayor	mayor ó menor
129	18	$\operatorname{sen} \frac{1}{2} c$	$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C$
130, 131, 132	7, 16, 15	c	C

PÁGINAS.	LÍNEAS.	DICE.	DEBE DECIR.
139	7	$\cos\frac{1}{2}c$	$\cos\frac{1}{2}C$
140	12	$\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$	$\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$
140	14	$\operatorname{sen}\frac{1}{2}c,\ \frac{1}{4}c$	$\operatorname{sen}\frac{1}{2}C,\ \frac{1}{4}C,$
140	16	$\frac{1}{4}c$	$\frac{1}{4}C$
149	2	$\log SCD$	$\log \operatorname{sen} SCD$
150	4	sc	SC
171	8 y 9	$\frac{B+c}{2}$ y $\frac{B-c}{2}$	$\frac{B+C}{2}$ y $\frac{B-C}{2}$
184	8	$\operatorname{sen}\frac{1}{2}b$	$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b$
186	6	$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$	$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$
189	9	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon'$	$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon'$
197	15	C	c
211	2	$\operatorname{sen}\frac{1}{4}(a-b)$	$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)$
216	2	$\operatorname{sen}(c-\psi)$	$\operatorname{sen}(C-\psi)$
217	17	primeras	segundas
217	19	$>$	$<$
219	18	rectilíneo	rectilátero
229	24	á los lados opuestos	á los ángulos opuestos
233	24	$b^2=-1$	$i^2=-1$
244	19 y 20	φ	x
266	12	$\operatorname{sen}_4 a$	$\operatorname{sen}^4 a$
268	10	$(m-1)\,m\,(m-1)$	$(m+1)\,m\,(m-1)$