MANUAL COMPLETO

DE

INSTRUCCION PRIMARIA

ELEMENTAL Y SUPERIOR.

MANUAL COMPLETO

DE

INSTRUCCION PRIMARIA

ELEMENTAL Y SUPERIOR.

para uso de los aspirantes á MAESTROS, *y especialmente de los alumnos de las* ESCUELAS NORMALES DE PROVINCIA,

REDACTADO

con el mismo método del que con igual objeto escribió en francés

M. EM. LEFRANC,

POR

D. JOAQUIN AVENDAÑO,

ex-maestro de la Escuela normal central del Reino y director de la de ZARAGOZA.

SEGUNDA EDICION.

TOMO II.

MADRID:

Imprenta de D. DIONISIO HIDALGO, *calle de la Flor baja, núm.* 24.

1844.

MATERIAS QUE COMPRENDE:

PRIMER TOMO.

Psicologia.
Moral.
Religion.
Lectura.
Escritura.
Gramática castellana.
Retórica.
Poética.
Literatura española.
Aritmética.

SEGUNDO TOMO.

Geometria.
Dibujo lineal.
Agrimensura.
Física.
Química.
Historia natural.
Geografía universal.
Id. de España.
Historia universal.
Id. de España.
Educacion.
Métodos de enseñanza.
Disposiciones legislativas acerca de la instruccion primaria.

CAPITULO I.

GEOMETRIA.

PRIMERA PARTE.=GEOMETRIA PLANA.

1.ª SECCION.=DE LAS LINEAS.

§. I. *Nociones preliminares.*

1. Qué es geometría? Qué significa esta palabra?–2. Qué es extension?–3. Qué se entiende por cuerpo?–4. Qué es superficie?–5. Qué es linea?–6. Qué es punto?–7 De cuántas maneras se puede considerar el cuerpo, la superficie y la línea?–8. Cómo se designan las diferentes partes de una figura?–9. Qué son figuras equivalentes, semejantes, iguales?–10. Cómo se designa el punto?–11. Principales proposiciones y cuestiones que se consideran en la geometria.-12. Qué es axióma?-13. Teorema, razonamiento, demostracion, partes que se distinguen generalmente en la enunciacion de un teorema.–14. Qué se entiende por recíproca?–15. Qué es corolario?–16. Problema; qué es resolver un problema y como se llama el resultado que se obtiene?–17. Principales métodos de resolucion: qué se entiende por sobreposicion de figuras? Qué es lo que se llama reduccion ad absurdum?-18. Signos principales y abreviaciones que se usan en la geometria?

1. La *geometria* es una ciencia, que tiene por objeto la medida de la extension.

Si atendemos á su etimología, esta palabra significa literalmente *medicion de la tierra*, habiendo merecido este nombre por la aplicacion que desde muy temprano se hizo de esta ciencia á la medicion de los terrenos.

2. Llamamos *extension* á todo lo que se compone de las tres dimensiones que comunmente se conocen con los nombres de *longitud*, *latitud* y *profundidad*.

3. Llámase *cuerpo* considerado geométricamente, todo aquello que ocupa un lugar en el espacio. El cuerpo reune siempre las tres dimensiones. En efecto, por pequeño, tenue y sútil que sea un cuerpo, siempre tendrá algo de largo, de ancho y de profundo ó grueso.

4. Pero nuestro entendimiento puede prescindir de una de estas dimensiones de la profundidad p. ej.; en cuyo caso queda el cuerpo solamente con su longitud y latitud, ó lo que es lo mismo, con la parte exterior que lo limita y encierra en un lugar determinado. Á esto llamamos *superficie*. De suerte que *superficie* es el límite de un cuerpo, ó lo que resultaria en el cuerpo, desentendiéndonos de una de sus dimensiones. Si nosotros nos figuramos una barra de hierro, en la cual vaya su grueso disminuyendo mas y mas hasta que llegue á O, nos formaremos idea de la superficie.

5. Si en la superficie concebimos que una de sus dimensiones p. ej. la latitud va decreciendo incesantemente, hasta que se haya reducido á O, ó lo que es lo mismo, hasta que hayamos llegado á los bordes que limitan la superficie, conoceremos de algun modo lo que se llama *línea*. Entendemos pues por *línea* el límite de la superficie, ó lo que quedaria de esta, prescindiéndo de su latitud.

6. Figurémonos tambien que en la línea desaparece la longitud, ó que solamente fijamos nuestra atencion en los extremos que limitan la línea, y habremos concebido lo que se llama *punto geométrico*. Asi pues, *punto geométrico* es el límite de la línea, ó lo que nos quedaria de la línea, si no tuviésemos en cuenta su longitud. No debemos confundir el punto geométrico, con lo que ordinariamente se llama punto. En las artes se da varias veces el nombre de punto á las porciones de superficie muy pequeñas. Tales son los puntos de la escritura, los de las líneas puntuadas en el dibujo geométrico; etc. Tal es tambien el punto de costura de los sastres etc. Estos puntos por pequeños que se hagan, siempre tienen las tres dimensiones enumeradas.

La misma consideracion podemos hacer respecto de las líneas. Llamamos ordinariamente líneas á las rayas que trazamos con el yeso, lapicero etc., tambien llamamos líneas á los renglones de la escritura; sin embargo, tanto estas como aquellas tienen las tres dimensiones.

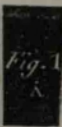
7. Bajo dos puntos de vista podemos considerar el espacio, la superficie y la línea: 1.° segun sus diferentes formas, llamadas comunmente figuras; 2.° segun la relacion de su magnitud, es decir, segun su extension.

La extension recibe el nombre particular de *volúmen*, *area* ó *longitud*, segun que esta extension es la magnitud de un espacio, de una superficie ó de una línea.

8. Para distinguir las diferencias de una figura geométrica, hacemos uso de las letras del alfabeto.

9. Llámanse *equivalentes* aquellas figuras que tienen la misma magnitud, sin tener la misma forma; *semejantes*, las que tienen la misma forma, pero diferente magnitud; é *iguales*, las que tienen á la vez la misma magnitud y figura.

10. El punto, como que carece de figura y de extension, no puede ser medido ni comparado, asi como medimos y comparamos los volúmenes, las superficies y las líneas. Para señalar el punto haremos uso de una sola letra (fig. 1.)



Cuando entre varios puntos existe una analogía cualquiera, generalmente son designados por unas mismas letras que podemos distinguir entre sí ó por el carácter diferente de escritura ó por medio de un acento colocado sobre la letra á su derecha en la forma siguiente: A′, A″, A‴...; y se leen de este modo: A *prima*, A *segunda*, A *tercera* etc.

11. Las proposiciones principales y cuestiones que se consideran en la geometría, son las siguientes: el *axioma*, el *teorema*, la *recíproca*, el *corolario* y el *problema*.

12. Entiéndese por axioma una proposicion tan clara y evidente, que basta su enunciacion para reconocer inmediatamente su verdad.

13. De este género son las siguientes proposiciones:

1.ª Dos cantidades respectivamente iguales ó una tercera son iguales entre sí.

2.ª El todo es mayor que una de sus partes.

3.ª El todo es igual á la suma de todas sus partes.

13. El *teorema* es una proposicion, que no siendo evidente por sí misma, recibe su claridad y evidencia por medio de un *razonamiento* llamado *demostracion*.

Dos partes se distinguen en la enunciacion de un teorema:

La *hipótesis* ó suposicion que se hace; y la *conclusion*, consecuencia de la hipótesis.

14. Entendemos por recíproca de una proposicion, otra proposicion formada en sentido inverso de la primera.

El axioma, *el todo es mayor que cada una de sus partes*, *tiene por recíproca este* otro axióma *cada parte es menor que el todo*.

15. El *corolario* es una consecuencia inmediata de una proposicion precedente.

16. El *problema* tiene por objeto determinar una cantidad desconocida por medio de otras conocidas que tienen con aquella una relacion expresada en el enunciado de la cuestion.

Resolver un problema es determinar la cantidad desconocida: y el resultado obtenido se llama *resolucion* del problema.

17. Los métodos principales de resolucion, son la *sobreposicion de las figuras* y la *reduccion ad absurdum*.

Consiste el primer método en manifestar que las figuras *coinciden* entre sí; es decir, que una de ellas se puede aplicar exactamente sobre la otra quedando de este modo confundidas.

La *reduccion ad absurdum*, se verifica cuando suponemos que la proposicion no es verdadera; y despues por medio de ciertas deducciones sacadas de los principios ya reconocidos, resulta una contradiccion, ó con uno de estos principios ó con la suposicion misma que nosotros hemos hecho.

18. Los principales signos y abreviaciones de que haremos uso en la geometría, son:

$=$ que significa *igual*
$>$ *mayor*
$<$ *menor*
$+$ *mas ó aumentado en*
$-$ *menos, ó restado de*
$\times$ *multiplicado por*
$\div$ *partido por*
fig. *figura*
L. Q. Q. D. *lo que queria demostrar.*

§. II. *De las diferentes especies de líneas.—Aplicaciones de la linea recta.—De la superficie plana ó del plano.*

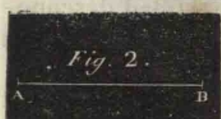
1. Cuántas especies hay de líneas?–2. Qué es línea recta? Consecuencia de esta definicion: cómo se señala la línea recta? qué se entiende por *punto* de *concurso*, de *encuentro* ó de *interseccion*?–3. Qué es línea poligonal?–4. Qué es línea curva?–5. Aplicaciones de la recta á las artes industriales.–6. Qué se entiende por plana ó superficie plana; y qué por curva?

1. Distinguimos tres especies de líneas: *recta, poligonal* y *curva.*

2. Entiéndese por línea recta, el camino mas corto de un punto á otro.

Infiérese de esta definicion que:
por dos puntos dados solamente se puede tirar una recta, y que dos puntos determinan completamente su posicion.

Por esta razon una recta se señala generalmente con dos letras A, B. (fig. 2) colocadas en sus extremidades.



Asimismo resulta de lo dicho que *dos rectas solamente pueden tener un punto comun.*

Llámase punto de *concurso*, de *encuentro* ó de *interseccion,* el punto en que dos líneas se cortan.

3. Llámase línea poligonal la línea compuesta de otras rectas que tienen dos á dos una extremidad comun, por ejemplo, la línea A B C D E F (fig. 3).

4. Llámase *curva* la línea que ni es recta, ni se compone de rectas, por ejemplo la línea A B C (fig. 4).

5. Son infinitas las aplicaciones de la línea recta. Para trazarla nos valemos de la regla, instrumento muy conocido para que nos detengamos en su descripcion; pero si la regla está mal hecha tambien lo estará la línea que con ella se quiera trazar. Será pues muy conveniente el saber comprobar una regla; y por lo mismo presentaremos el siguiente medio tan exacto como sencillo:

Trácese la línea á lo largo de una arista; vuélvase la regla invirtiendo sus extremos y colóquese sobre la línea trazada la arista primitiva, por donde ha corrido el lapicero. Si esta línea queda cubierta en toda su longitud, es un indicio cierto de su rectitud y de que la regla es exacta.

Hay ocasiones en que las rectas exigen tal longitud que su trazado no se puede verificar por medio de la regla. Los jardineros, y los albañiles hacen uso de una cuerda atada á dos estacas.

Los carpinteros, y los ebanistas usan de un cordel que frotado con almazarron ó con negro de humo disuelto en aceite, aplican sobre dos puntos de la recta que quieren trazar, y estirándole fuertemente y levantándole por su mitad, le dejan caer sobre el cuerpo donde queda marcada la recta pedida.

6. Entendemos por *superficie plana ó por plano* aquella superficie sobre la cual puede aplicarse exactamente una línea recta en todos sentidos. Tal es la superficie de un tablero pulimentado etc. Llamáse *superficie curva* la que ni es plana ni se compone de superficies planas: tal es la superficie del cristal de un reloj, llamándose *convexidad* la curvatura exterior, y *concavidad* la interior.

§. III. *De la circunferencia y del circulo.—De las aplicaciones del circulo.—Teoremas relativos á la circunferencia y al circulo.*

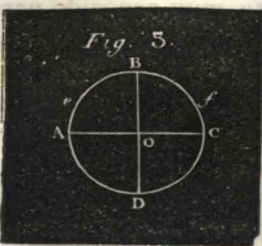
1. Qué es circunferencia?—2. Qué se entiende por círculo?—3. Radio y diámetro.—4. Qué es arco, y como se señala? Idea de la cuerda, del segmento, de la secante y de la tangente.—5. Division antigua y moderna de la circunferencia.—6. Qué es cuadrante?—7. Aplicaciones del círculo á las artes industriales y á los usos de la vida. Cómo se traza el circulo?

Teoremas relativos á los círculos. Demostrar que:

8. Los rádios de un círculo son todos iguales. Cuales son las aplicaciones de este principio?—9. Dos circunferencias trazadas con un mismo radio, son iguales.—10. Los diámetros de un mismo círculo son todos iguales.—11. El diámetro divide la circunferencia y el círculo en dos partes iguales.—12. En un mismo circulo, ó en círculos formados con un mismo rádio, á iguales arcos corresponden cuerdas iguales; y recíprocamente, á cuerdas iguales arcos iguales.—13. Consecuencias de este teorema.

1. La *circunferencia* es una línea curva trazada sobre un plano,

cuyos puntos distan todos igualmente de otro que se llame centro. Tal es la curba A B C D (fig. 5.)

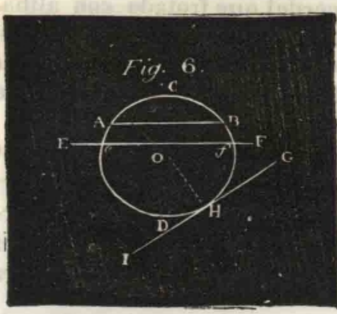


2. El *círculo* es la porcion de plano limitado por la circunferencia. Asi pues, la circunferencia es una línea; y el círculo una superficie; á pesar de esta diferencia se suelen confundir ordinariamente, llamando círculo á la circunferencia.

3. Llamase *rádio* la línea tirada del centro á la circunferencia. Tales son las rectas OA, OB, OC, OD. (fig. 5.)

Entendemos por *diámetro* la recta que pasando por el centro del círculo, termina por sus dos extremos en la circunferencia: p. ej. AC, BD (fig. 5.)

4. Por *arco* se entiende una parte cualquiera de la circunferencia, como ACB, ó ADB (fig. 6.)



Para la anotacion de un arco, necesitamos poner tres letras. En efecto si solamente lo designáramos con las letras AB, no se podria saber si hablabamos de la porcion ADB de la circunferencia, ó de la mas pequeña ACB.

Llamase *cuerda* la línea que une las extremidades de un arco, como AB. *Segmento* es la parte de círculo comprendido entre el arco y la cuerda.

Entiéndese por *secante* una cuerda prolongada por sus dos extremos la cual por esta razon cortará en dos puntos á la circunferencia, como la línea EF. Si concebimos en la secante confundidos en uno solo los dos puntos en que corta á la circunferencia, nos habremos formado idea de la *tangente:* por esta razon se dice que la *tangente* es una recta que toca en un solo punto á la circunferencia; tal es la GHI (fig. 6.) Este punto comun H, se llama punto de tangencia ó de contacto.

5. La circunferencia se suele dividir comunmente en 360 partes iguales que se llaman *grados*; cada uno de estos en 60 partes tambien iguales, llamadas *minutos*; cada minuto en 60 *segundos*. Para la indicacion de los grados nos valemos de este signo °, colocado á la derecha del número un poco mas alto; para los minutos de un acento ′; para los segundos de dos ″. Queremos p. ej: expresar un arco de 35 grados, 8 minutos, 25 segundos; lo haremos en la forma siguiente: 35° 8″ 25″.

La circunferencia, en el sistema decimal, se divide en 400 grados; cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

Cuando un autor hace uso de esta division, ordinariamente lo suele advertir en el prólogo; y á falta de esta advertencia la anotacion diferente de esta division nos servirá para distinguirla de la otra; pues en la centrimal los grados se señalan con la inicial *g*. Apesar de las ventajas que por su armonia con el sistema decimal ofrece, esta division ha conservado la supremacia la division antigua de la circunferencia en 360 grados.

Es muy sencillo pasar de una á otra division. Si queremos p. ej. convertir los grados centecimales en los de la division antigua, multiplicaremos los grados que se nos den, por 0,9: y si al contrario, por $\frac{10}{9}$. El fundamento de esta pràctica es el siguiente: Se quiere p. ej. saber á cuantos grados de la division antigua corresponden 25 centecimales; formariamos esta proporcion:

$100:90::25:x$; y simplificando la primera razon, resulta: $10:9::25:x$; de donde x; número de grados que corresponden á la otra division, $=\frac{25\times 9}{10}=25\times 0{,}9$.

Para resolver el problema inverso invertiriamos los términos de la razon primera.

6. Llámase *cuadrante* la cuarta parte de la circunferencia, AEB, BfC (fig. 5). Asi un cuadrante vale 90 ó 100 grados, segun la division á que estos correspondan.

7. El círculo es en las artes de un uso casi tan comun como la línea recta. Las ruedas de las máquinas, las muelas de los molinos, los cuadrantes de los péndulos etc. son verdaderos círculos. Las cazuelas, los barreños, los cántaros, los toneles etc. tienen sus aberturas circulares. Es pues de la mayor importancia saber cómo se describe el círculo.

El instrumento de que ordinariamente se hace uso para trazar el círculo, es el *compas*, instrumento que todos conocen. Se compone de dos b razos terminados en punta por una de sus extremidades, y unidos en la otra por medio de una articulacion, la cual permite se separe mas ó menos, segun el radio que al círculo queremos.

Para describir un círculo sobre el papel, se apoya ligeramente una de las puntas del compas abierto, haciendo que la otra gire al rededor de la primera, de modo que vaya dejando en pos de sí cierta señal: este rastro que la punta ha dejado en su revolucion, será el círculo que se pedia.

Si queremos trazarle sobre el terreno, haremos uso de una vara larga ahugereada por una de sus extremidades. Introduciendo despues en el ahugero una estaquita, harémos que esta gire al rededor de la otra extremidad fijo siempre en un mismo punto. La línea que de este modo hayamos formado, será la circunferencia deseada.

Si el círculo es tan grande que la pértiga no alcance, podemos sustituirla con una cuerda, teniendo cuidado de que conserve siempre la misma tirantez durante la vuelta que para nuestro objeto ha de dar uno de sus extremos.

8. **Teoremas**. *Los radios de un mismo círculo son todos iguales.*

La verdad de este teorema se infiere inmediatamente de la definicion del círculo y del radio. En efecto, los radios midan las distancias del centro á cada uno de los puntos de la circunferencia; es así que estas distancias son todas iguales, segun resulta de la definicion de la circunferencia: luego los radios de un mismo círculo todos son iguales.

Por este principio, las ruedas de un carruaje deben ser círculos descritos con radios iguales; sino fuera asi, el carruaje se ladearia por uno ú otro lado.

9. *Dos circunferencias trazadas con un mismo radio son iguales*.

Para hacer ver la verdad de este teorema, tomaremos uno de los círculos y lo colocaremos sobre el segundo, de modo que sus centros coincidan; en este caso las dos circunferencias, como que han sido trazadas con un mismo radio, deben confundirse en toda su extension.

10. *Los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

El diámetro no es otra cosa que la reunion de dos rádios opuestos; estos son iguales, segun acabamos de demostrar; luego tambien lo serán aquellos.

11. *El diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales* (fig. 5.)

Para demostrar este teorema, doblaremos el círculo de manera que la parte A B C caiga sobre la A D C. Es induvitable que el primer segmento A B C se confundirá exactamente con el otro A D C: porque si uno de ellos saliese fuera del otro, no distarian igualmente del centro todos los puntos de la circunferencia; resultado incompatible con la definicion del círculo.

Asi pues, *el diámetro divide al círculo en dos semicírculos, y á la circunferencia en dos semicircunferencias.*

12. En *un mismo círculo, ó en círculos trazados con el mismo rádio, á iguales arcos corresponden iguales cuerdas.*

La sobreposicion de los arcos nos manifiesta claramente esta verdad. Siendo los arcos iguales, los podemos sobreponer de modo que sus extremos se confundan, en cuyo caso se confundirán tambien los extremos de las cuerdas que terminan en los de los arcos; luego las cuerdas se habrán confundido en toda su extension; luego serán iguales.

Recíprocamente, si las cuerdas son iguales, lo serán los arcos subtendidos.

Supongamos la cuerda AB=á la CD (fig. 7), el arco A M B será tambien igual al C N D.

Sobreponiendo las cuerdas, por ser iguales, se confundirán exactamente, y por esta razon se habrán confundido los extremos de los arcos: luego estos arcos quedarán ajustados en toda su extension.

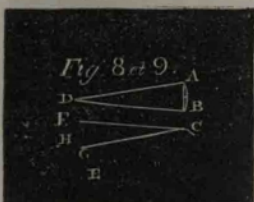
13. De lo dicho resulta que:

En un mismo círculo á mayor arco, corresponde mayor cuerda y *recíprocamente.*

Suponemos que los arcos no son mayores que la semicircunferencia. Asi la cuerda AI del arco AMI $>$ que la AB del arco AMB; y recíprocamente el arco AMI $>$ AMB.

El teorema precedente nos suministra un medio muy sencillo de *construir un arco igual á otro dado.*

Se nos da el arco AB (fig. 8 y 9): en el punto C con un rádio igual á DA, se trazará un arco indefinido EF; tomaremos la distancia AB, cuerda del arco AB, y la colocarémos desde F hasta G: el punto G determinará el arco FHG que debe ser igual al arco AB, supuesto que ambos tienen una misma cuerda.



§. IV. *Del ángulo y de sus diferentes especies.—De la perpendicular y de la oblicua.—Teoremas relativos á las perpendiculares, á las oblicuas y á los ángulos.*

1 Qué se entiende por ángulo? Su vértice y sus lados.—2. De dónde depende la magnitud de un ángulo?–3 Cómo se designa un ángulo?–4. Cuáles son los ángulos opuestos los adyacentes? A qué llamamos la bisectriz de un ángulo?–5. Qué es línea perpendicular? oblicua? A qué punto se llama pie de la perpendicular y de la oblicua? Cuándo se dice que levantamos ó bajamos á una recta una perpendicular?–6. Cuántas especies hay de ángulos? Qué es ángulo recto, agudo y obtuso? Qué nombres reciben los ángulos segun que tienen ó no su vértice en el centro del círculo?–7 Cómo se comparan los ángulos y cuál es su indicacion?–8. Cómo se miden los áugulos?

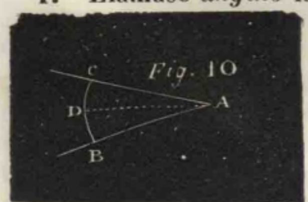
Teoremas relativos á las perpendiculares y á las oblicuas. Demostrar que:

9 1 ° Desde un punto tomado en una recta, solamente se puede levantar una perpendicular. 2.° De un punto tomado fuera de una recta no se puede bajar mas que una perpendicular.–10. La perpendicular es la linea mas corta que podemos tirar de un punto á una recta.–11. 1.° Dos oblicuas equidistantes del pie de la perpendicular son iguales. 2.° Entre dos oblicuas es mayor aquella que mas se aparte del pie de la perpendicular.–12. 1.° Cualquier punto de la perpendicular levantada sobre el medio de una recta dista igualmente de los extremos de esta recta. 2.° Todo punto que se halle fuera de esta perpendicular, no puede estar á igual distancia de los dos extremos.–13. 1.° Sobre un punto tomado en una recta, levantar una perpendicular á esta recta. 2.° De un pnnto tomado fuera de una recta, bajar una perpendicular á la recta.

Teoremas relativos á los ángulos. Demostrar que:

14. Si se prolonga uno de los lados del ángulo recto, el otro formará con la prolongacion otro ángulo recto.–15. Todos los ángulos rectos son iguales.–16. Toda línea que cae sobre otra oblicuamente, forma con ella dos ángulos adyacentes, cuya suma es igual á dos rectos.–17. 1.° Cuánto vale la suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar en un punto y á un lado de una recta? 2.° Cuánto vale la suma de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se cortan? Cuánto vale la suma de todos los ángulos consecutivos formados en un plano al rededor de un punto? 18.–Si dos rectas se cortan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.–19. Aplicaciones de los ángulos.

1. Llámase *ángulo* la porcion de plano comprendido entre dos rectas que se encuentran; tal es la parte de plano que comprenden las dos rectas AB, AC, (fig. 10).



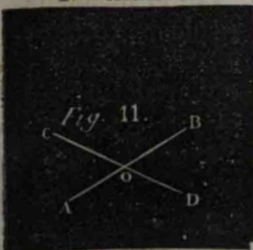
Vértice del ángulo es el punto A, en el que se encuentran ó se cortan las dos rectas, y *lados* del ángulo son las líneas AB, AC, que forman el ángulo.

2. La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de su mayor ó menor separacion. Efectivamente, los lados

del ángulo, asi como otra cualquier línea, los debemos considerar indefinidos; esta prolongacion indefinida de los lados nada altera su abertura que es la que constituye el ángulo.

3. La anotacion del ángulo se hace ordinariamente con tres letras, debiendo interponer la del vértice, siempre que lo queramos nombrar. Asi decimos indiferentemente **CAB** ó **BAC**. Algunas veces basta para la designacion de un ángulo la letra de su vértice, teniendo lugar esta abreviacion cuando el vértice no sea comun á muchos ángulos.

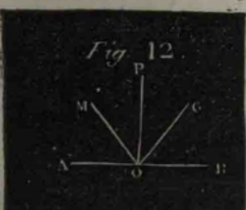
4. Llámanse *ángulos opuestos verticalmente* dos ángulos, cada uno de los cuales está comprendido entre las prolongaciones de los lados del otro, como **AOC** y **BOD**, **AOD** y **BOC** (fig. **11**).



Llamamos *ángulos adyacentes* á dos ángulos consecutivos que tienen un lado comun, siendo los otros dos prolongacion el uno del otro; en este caso se encuentran los ángulos **AOC** y **COB**, **COB** y **BOD**, **BOD** y **DOA**, **DOA** y **AOC**, tomados dos á dos.

Llámase *bisectriz* de un ángulo la recta que lo divide en dos ángulos iguales, como **AD** (fig. **10**).

5. Entendemos por *perpendicular* aquella recta que encuentra á otra línea, formando con ella dos ángulos adyacentes iguales, como la línea **PO** (fig. **12**). Recíprocamente la linea **AB** es perpendicular á la **PO**.



No debemos confundir la perpendicular con la vertical. La *vertical* está muy bien representada por la direccion de la plomada libremente suspendida; de manera que si nosotros concebimos una recta tirada de un punto cualquiera al centro de la tierra, nos formaremos idea de la vertical. Si nos figuramos una recta perpendicular á la vertical, conoceremos la linea *horizontal*, llamada tambien línea de nivel.

Dícese *oblicua* aquella línea que cae sobre otra formando con ella dos ángulos adyacentes desiguales: tales con las líneas **GO**. **MO**.

Llámase *pié de la perpendicular* ó *de la oblicua* el punto en que estas líneas se encuentran con otra, p. ej. el punto **O**.

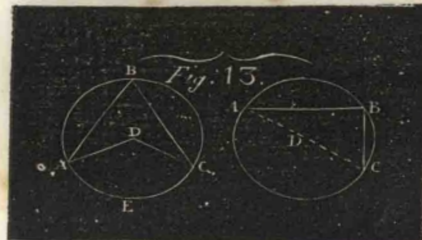
Cuando se construye la perpendicular sobre un punto **O**, tomado sobre una recta **AB**, se dice que *levantamos* una perpendicular sobre la recta; y cuando se traza desde un punto **C**, tomado fuera de la recta **AB**, la perpendicular se dice *bajada* á la recta.

6. Distinguimos tres clases de ángulos, *ángulo recto, agudo y obtu-*

6. Dícese *ángulo recto*, todo ángulo formado por dos líneas perpendiculares entre sí: como los ángulos **AOP**, **POB** (fig. 12).

Entiéndese por *ángulo agudo* todo ángulo menor que el recto, como **GOB**; y por *obtuso* el que es mayor que el recto, como **MOB**. A primera vista se conoce que los ángulos *agudo* y *obtuso* son formados por líneas oblicuas entre si.

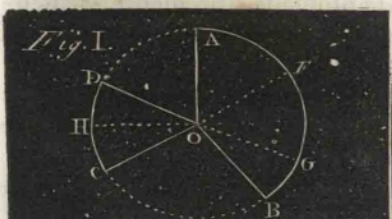
El ángulo cuyo vértice está en el centro, y cuyos lados son rádios del círculo se llama ángulo del centro, como ADC, (fig. 13:) el ángulo que formado por dos cuerdas tiene su vértice en la circunferencia, se llama ángulo inscrito como ABC.



7. Supongamos que al lado **AB** del ángulo **ABC**, (fig. 10 y 13), se coloca sobre el lado **BC**, y que en seguida se separa de esta recta, girando al rededor del punto **B**, hasta que forme el ángulo **ABC**. En este movimiento semejante en un todo al de la pértiga que en otra ocasion presentamos para la construccion del círculo, es induvitable que la extremidad **A** de **AB** no ha podido pasar de **C** al punto **A**, sin describir al mismo tiempo un arco de círculo **CA** cuyo centro se halla en **B**. Asimismo es incuestionable que al paso que aumenta ó disminuye el ángulo **ABC**, es decir, segun que **AB** se aproxima ó aparta de **BC**, aumenta ó disminuye el arco en la misma proporcion.

Para presentar esta verdad con todo el rigor y claridad de que es susceptible, nos valdremos de la siguiente construccion.

Supongamos (fig. I.) dos ángulos AOB, COD, cuyos arcos correspondientes hayan sido trazados con un mismo rádio. Si sobreponemos el ángulo COD al AOB, de modo que el lado OD del primero coincida con el OA del segundo el lado OC estará representado por el OF; de este modo el arco correspondiente CD se confundirá con el AF; el ángulo pues COD ha sido una vez sobrepuesto al ángulo AOB, asi como su arco correspondiente CD al AFB del segundo ángulo. Supongamos que el ángulo COD, despues de haber sido sobrepuesto dos veces al ángulo AOB, deje un residuo GOB, menor que COD, el arco CD tambien quedará sobrepuesto otras dos veces al arco AB, dejando un residuo GB menor que CD; de donde resultará:



$$AOB = 2\ CODD + GOB, \qquad AB = 2\ CD + GB.$$

Colocaremos ahora el ángulo GOB sobre el COD, y supongamos que cabe exactamente dos veces, el arco GB, cabrá tambien dos veces sobre el CD; de donde tendremos:

COD=2 GOB,   CD=2 GB.

Las dos ecuaciones anteriores se habrán convertido en estas:

AOB=5 GOB,   AB=5 GB.

Asi pues, el ángulo GOB está contenido cinco veces en el AOB, y dos veces en el COD; del mismo modo el arco GB cabe cinco veces en el AB, y dos veces en el CD. La relacion, pues, entre los ángulos AOB, COD, y entre los arcos correspondientes AB, CD está expresada por la fraccion impropia $^5/_2$, y por consiguiente será una verdad que:

ángulo AOB: *ángulo* COD:: *arco* AB: *arco* CD.

Luego los ángulos son proporcionales á los arcos descritos con un mismo rádio. L. Q. Q. D. Esto mismo se puede decir de los sectores circulares.

De donde resulta que un ángulo será la mitad, la tercera parte, el duplo de otro, si su arco de indicacion es la mitad, el tercio, el duplo del arco de dinicacion delotro, construidos ambos arcos con un mismo rádio.

Esta dependencia constante y recíproca que entre los arcos y los ángulos acabamos de manifestar, nos autoriza para tomar la *indicacion* de un ángulo en su arco correspondiente; pero es preciso que no olvidemos que para que es ta sustitucion sea legítima, el ángulo ha de tener su vértice en el centro de círculo.

Si queremos, pues medir un ángulo, compararemos su arco con el arco del ángulo que tenemos por unidad.

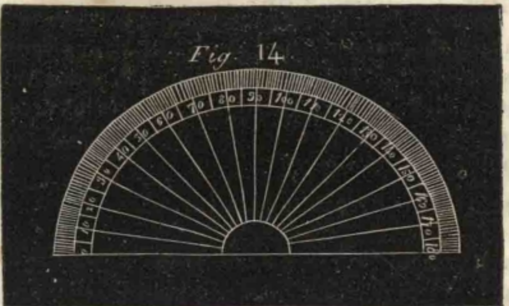
8. Si reflexionamos que los ángulos presentan una superficie indefinida, desde luego conocerémos que no se pueden medir con la unidad superficial de que nos servimos para medir otras superficies limitadas; la medida pues del ángulo debe ser otro ángulo. El que se ha adoptado como unidad, tiene por arco de indicacion la 360.ª parte de una circunferencia cualquiera, construida sobre el vértice como centro. Este ángulo se llama ordinariamente *ángulo de un grado*.

Asi, cuando se dice un ángulo de 10 grados, de 90 grados etc., se dice, no solamente, que el arco de indicacion contiene 10 veces, 90 veces etc. la 360.ª parte de la circunferencia; se expresa ademas, que el ángulo es 10 veces, 90 veces etc. mayor que el ángulo de un grado. La indicacion, pues, de un ángulo en grados, nos hace conocer á un mismo tiempo el nombre y la magnitud de este ángulo.

Segun esto, el ángulo recto será igual á 90 ángulos de un grado; y de consiguiente tendrá por medida la cuarta parte de la circunferencia.

Si queremos referir los ángulos al ángulo recto como unidad, dividiremos la medida de aquellos por la del último; asi un ángulo de 30°, diremos que vale $\frac{30}{90}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ de ángulo recto.

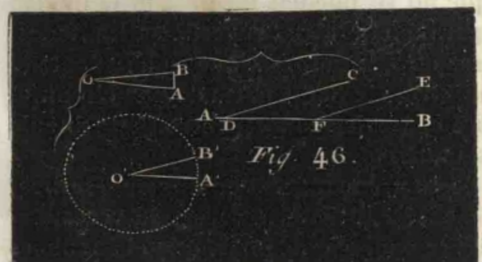
En la práctica para medir un arco y por consecuencia el ángulo, hacemos uso de un instrumento llamado *trasportador* (fig. 14). Consiste en un semicírculo que tiene un *limbo* ó su borde dividido en 180 grados. Para verificar esta medicion se coloca el centro del semicírculo en el vértice del ángulo; el arco comprendido entre sus lados nos indicará la magnitud del ángulo.



Tambien podemos aplicar este instrumento á la construccion de un ángulo, cuya medida se nos dé. Se nos pide, p. ej., construir un ángulo de 25.° Trazaremos una recta; en uno de sus extremos fijarémos el centro del semicírculo, sobreponiendo el diámetro á la recta; en esta disposicion marcaremos en el papel el punto correspondiente al número 25.° y uniendo este punto con el extremo de la recta donde estaba el centro del semicirculo habrémos obtenido el ángulo pedido.

Podemos sin necesidad de este instrumento construir un ángulo igual á otro dado.

Sea el ángulo AOB (fig. 46), al cual se nos pide formar otro igual. Tirarémos ante todo una recta A'O'; sobre uno de los extremos de esta recta hemos de construir el ángulo pedido de la manera siguiente. Sobre el punto O como centro y con un rádio arbitrario OA trazarémos el arco AB; sobre el pnuto O' como centro y con el mismo rádio describirémos un arco indefinido A'B'; tomarémos la distancia AB, y con esta distancia como radio, formarémos desde el punto A' como centrc, un arco de círculo que corte al precedente en B', y finalmente tirarémos la recta O'B'.



El ángulo A'O'B' será igúal al propuesto, porque sus arcos correspondientes trazados con un mismo radio, tienen iguales sus cuerdas; de consiguiente tambien lo serán sus arcos.

Teoremas relativos á las perpendiculares y á las oblicuas.

9. 1.° *Sobre un punto O (fig. 15) tomado en una recta AB, no se puede levantar mas que una perpendicular.*

En efecto si sobre la AB se pudiesen levantar las dos perpendiculares OP, OG, resultaria que cada una de estas dos rectas OP, OG, formaria con la línea AB, dos ángulos adyacentes iguales, y asi tendriamos:

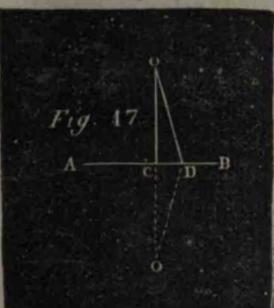
AOP=AOG, BOG=BOP.

absurdo incompatible con un axioma.

2.° *De un punto O (fig. 16.) tomado fuera de una recta AB, solamente se puede bajar una perpendicular.*

De la suposicion contraria nos resulta tambien un absurdo, como vamos á ver. Si OG fuese perpendicular á la AB, GO' formaria con GO una misma línea recta, por ser estas dos rectas perpendiculares á la AB. Pero al mismo tiempo las PO y PO' componen tambien una misma recta. Ya se vé pues, desde luego un *contraprincipio*, á saber, que desde el punto O al O' se podrian dirigir dos rectas diferentes, OGO', OPO'.

10. *La perpendicular OC (fig. 17) bajada desde el punto O á la recta AB, es la distancia mas corta de dicho punto á la recta.*



Este teorema se reduce á demostrar que la perpendicular OC es mas corta que cualquiera oblicua OD. Para presentar claramente esta verdad, haremos girar la parte de figura OCD al rededor de la AB como eje, de modo que venga á caer sobre O'CD; en cuyo caso tendremos:

O'C=OC, O'D=OD;

Ademas, siendo OCO' una linea recta, resultará:

OC+CO'<OD+DO', y por la igualdad de O'C y OC, de O'D y OD, tendremos:

2 OC<2 OD.

Tomando la mitad en los dos miembros de esta desigualdad, concluirémos que:

OC<OD: L. Q. Q. D.

11. 1.° *Dos oblicuas* OD,O'D *equidistantes del pié de la perpendicular* OC, *son iguales* (fig. 18).

Segun la suposicion que hacemos en el teorema CD=CD'; si doblamos pues la figura á lo largo de la perpendicular OC' los puntos D y D' se confundirán y tambien las oblicuas OD, O'D; luego OD=O'D.

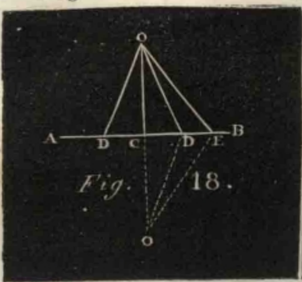


Fig. 18.

2.° *De dos oblicuas* OD, OE *que no están á igual distancia de la perpendicular, es mayor la que mas se aparta de su pié.*

Para hacer palpable esta verdad, doblarémos la figura á lo largo de la recta AB: de este modo, habremos obtenido que:

O'D=OD, O'E=OE;

pero OD+O'D<OE+O'E, ó lo que es lo mismo; 2 OD< 2 OE, y dividiendo; por 2 la última desigualdad, se verá que:

OD<OE. L. Q. Q. D.

12. 1.° *Cualquier punto* E (fig. 19) *de la perpendicular* CD *levantada sobre el medio de la recta* AB, *dista igualmente de los dos extremos.*

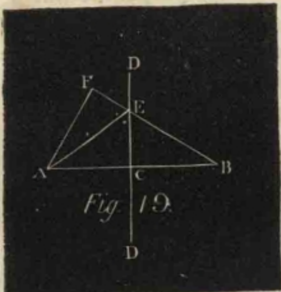


Fig. 19.

En efecto, tirando las rectas AE, BE, tendrémos que:

AE=BE, supuesto que AC=BC.

2.° *Todo punto* F, *que esté fuera de la perpendicular anterior, no puede estar á igual distancia de los dos extremos.*

Para demostrar este teorema, harémos la siguiente construccion. Tirarémos las rectas AF, BF; y por el punto E en que BF corta á CD, dirijirémos la AE. Esta construccion nos dará:

AF<AE+EF, ó lo que es lo mismo: AF<BE+EF; y por fin; AF<BF.

13. 1.° *Levantar sobre el punto* O (fig. 20) *de la recta* MN, *una perpendicular á esta recta.*

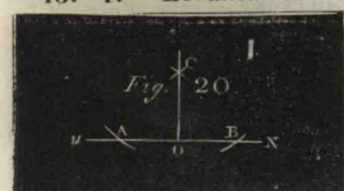
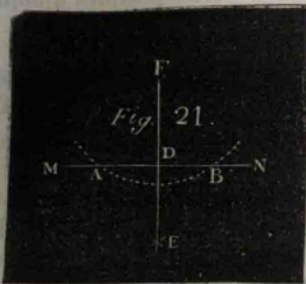


Fig. 20

Para resolver este problema, sobre la recta MN tomarémos OA=OB. Desde los puntos A y B como centros, y con un mismo radio arbitrario, pero siempre mayor que OA, describirémos dos arcos que se cortarán en un punto C; tirando ahora la recta OC, esta será la perpendicular pedida, puesto que el punto C equidista de los puntos A y B.

2.° *Desde un punto* C (fig. 21) *tomado fuera de una recta, bajar una perpendicular á esta recta.*

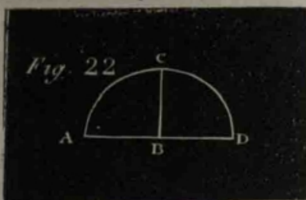


Una construccion análoga á la anterior, nos conducirá á la resolucion de este problema.

Del punto C como centro y con un radio cualquiera, pero siempre mayor que la perpendicular CD, trazarémos un arco de círculo que cortará la recta M, N. en dos puntos A, B. Ademas, desde los puntos A y B como centros y con un mismo radio, arbitrario mayor que la mitad de la AB, describirémos dos arcos que se cortarán en un punto tal como E; tirando la recta CE, esta será la perpendicular deseada; supuesto que los puntos C, D, E, etc. están á igual distancia de los puntos A y B.

Teoremas relativos á los ángulos.

14. *Si prolongamos uno de los lados* AB *de un ángulo recto* ABC (fig. 22), *el otro lado* BC *formará con la prolongacion* BD, *otro ángulo recto* CBD.

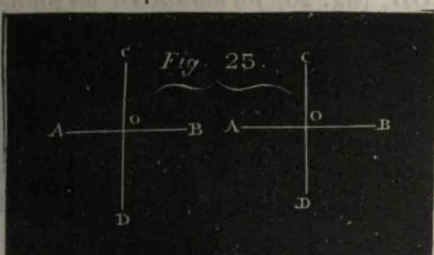


En efecto, si sobre el punto B describimos una semicircunferencia que termine en el diámetro AD, el arco AC será la medida del ángulo ABC, y como este ángulo es recto, A C será la cuarta parte de la circunferencia ó la mitad de la semicircunferencia ACD. Asi pues, el arco CD será la otra mitad ó la cuarta parte de la circunferencia, y como el arco CD es la medida del ángulo CBD, este ángulo será recto.

De aqui se infiere que una recta no puede formar con otra un ángulo recto, sin formar otro segundo ángulo recto con su prolongacion.

15. *Los ángulos rectos son todos iguales.*

Para comprender la verdad de este teorema, debemos considerar, (fig. 23) que la recta AB divide el plano de las dos rectas AB, CD, en dos mitades que por la sobreposicion quedarán confundidas: ademas, los ángulos AOC BOC son iguales, segun resulta de las definiciones del ángulo recto y de la perpendicular. Considerémos al mismo tiempo, que la recta CD divide igualmente el plano en otras dos mitades susceptibles de una exacta sobreposicion; de aqui la igualdad de los ángulos AOD, BOC; y por consecuencia la igualdad de los cuatro ángulos rectos que tienen comun el vértice O.



Esta proposicion tiene lugar en todos los ángulos rectos posibles aunque no tengan el vértice comun.

16. *Toda línea recta* **CO** (fig. 24) *que cae sobre otra* **AB** *oblicuamente, forma con ella dos ángulos adyacentes* **AOC, COB**, *cuya suma vale dos rectos.*

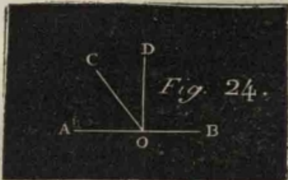


Fig. 24.

La verdad de este teorema se presentará con toda claridad, si en el punto O, se levanta sobre AB, la perpendicular OD, que formará dos ángulos rectos, cuya suma es idéntica con la suma de los dos ángulos AOC, COB.

Llámanse ángulos *suplementarios*, aquellos ángulos que juntos valen dos rectos; asi el ángulo AOC es el *suplemento* del COB, y recíprocamente, porque cualquiera de ellos es puntualmente lo que falta al otro para valer dos rectos ó 180 grados.

Se dicen ángulos *complementarios*, aquellos cuya suma es igual á un recto.

17. Corolario 1.º La suma de todos los ángulos consecutivos AOC, COD, DOE, EOB (fig 25) que se pueden formar en un punto y á un mismo lado de la recta AB, es siempre igual á dos ángulos rectos.

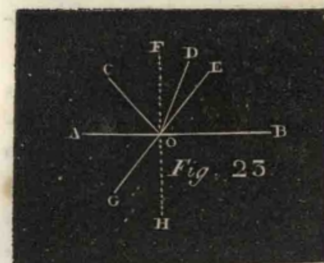


Fig. 25

Para demostrarlo, bastará levantar sobre AB la perpendicular OF.

Corolario 2.º *La suma de los 4 ángulos formados por dos rectas* **AB, EG** *que se cortan entre sí, es equivalente á 4 rectos.*

Si se quiere ver esta verdad, bajese la perpendicular F H (fig. 25).

Corolario 3.º *La suma de todos los angulos consecutivos* **AOB, BOC, COD**, (fig. 26) *formados en un plano al rededor de un mismo punto* **O**, *es siempre igual á cuatro ángulos rectos.*

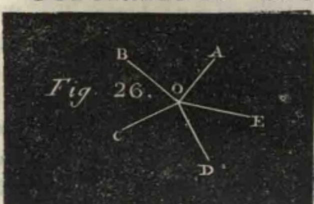


Fig. 26.

Este corolario es una consecuencia de los dos precedentes.

18. *Si dos rectas* **AB, CD** (fig. 11) *se cortan entre si, los ángulos opuestos verticalmente* **AOC** y **BOD**, **AOD** y **BOC** *son iguales dos á dos.*

Efectivamente, los ángulos adyacentes AOC y BOC, BOC y BOD valen espectivamente dos ángulos rectos; pero dos cantidades iguales á una tercera, son iguales entre sí; luego:

AOC+BOC=BOC+BOD.

Ahora, si de los dos miembros de esta igualdad quitamos el ángulo comun BOC, nos quedará AOC=BOD.

Del mismo modo podriamos demostrar la igualdad de los ángulos BOC y AOD.

19. Son muy comunes los ángulos en las artes y en los usos de la vida, pues tienen lugar en la arquitectura, en la jardineria y en todas las artes industriales que se trabajan en la madera y en la piedra.

Los canteros trasportan sobre la piedra, el ángulo que forman los cimientos de dos paredes.

§. V, *De las paralelas y de las secantes.*

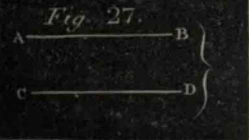
1. Qué son líneas paralelas, y cómo se puede manifestar su posibilidad? Qué se entiende por zona de las paralelas?–2. Qué es línea secante?–3. Nombres que reciben los diferentes ángulos formados por una secante que corta á dos rectas paralelas ó no paralelas.

Teoremas relativos á las paralelas. Demostrar que:

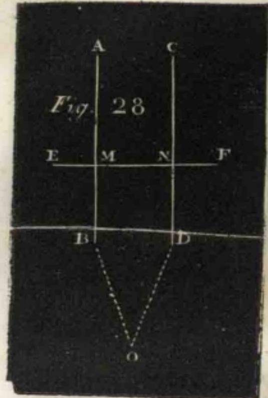
4. Por un punto dado solamente se puede tirar una paralela á una recta.–5. Dos rectas, paralelas á una tercera, son paralelas entre si.–6. Dos rectas son paralelas, cuando forman con una secante: 1.° los ángulos alternos, internos iguales; 2.° los alternos externos; 3,° los correspondientes.–7 Si dos paralelas son cortadas por una secante los angulos alternos internos, los alternos externos y los correspondientes, son respectivamente iguales.–8. Dos rectas paralelas tienen comunes sus perpendiculares.–9. Dos paralelas equidistan por todas partes y reciprocamente si dos rectas tienen por todas partes igual distancia son paralelas.–10. Partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.–11. 1.° Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirijidos en un mismo sentido, son iguales; 2.° Dos ángulos son iguale cuando tienen sus lados respectivamente paralelos y en direccion contraria; 3.° son suplementarios cuando tienen un lado en la misma direccion, y el otro en direccion contraria.–12. Si los tienen respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.–13. Por un punto dado fuera de una recta, tirar una paralela á esta recta.–14. Aplicaciones de las paralelas.

1. Llámanse *paralelas* las rectas que situadas en un plano, jamás pueden encontrarse, aunque se prolonguen indefinidamente, como AB, CD (fig. 27.)

Fig. 27.



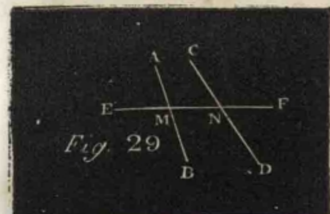
Para hacer ver la posibilidad de estas líneas, supongamos en un plano dos líneas distintas AB, CD, (fig. 28.) perpendiculares á una tercera E F en los puntos respectivos M y N. Es claro, que por mas que se prolonguen estas líneas, jamás podrán encontrarse; porque si esto sucediera en un punto tal como O, resultarian dos perpendiculares AB, CD, bajadas de un punto sobre una misma recta EF, lo cual es un absurdo. Asi pues, estas dos líneas, por ser perpendiculares á una tercera, son paralelas entre sí.

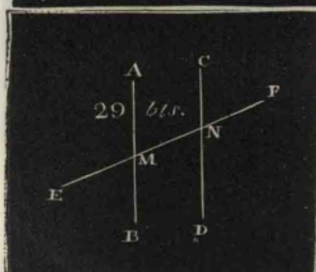


Entendemos por *zona* la porcion de plano comprendido entre dos paralelas. La *zona* es menor que un ángulo cualquiera, porque aquella cabe en un plano un número ilimitado de veces, al paso que el ángulo, si se sobrepone al plano, cabrá solamente un número limitado de veces.

2. Llámase *secante* toda recta que corta ó atraviesa de cualquier modo un sistema de otras rectas, paralelas ó no paralelas.

3. Cuando dos rectas cualesquiera AB, CD (fig. 29) son cortadas por una secante EF, resultarán formados al rededor de los dos puntos de interseccion M, N, ocho ángulos, que considerados separadamente, ó combinados dos á dos, reciben las denominaciones siguientes:





Considerados separadamente. 1.º Los cuatro ángulos AMF, BMF, CNE, DNE, cuya abertura está dentro de las rectas AB, CD se llaman *ángulos internos*;

2.º Los otros cuatro AME, BME, CNF, DNF, colocados fuera de las rectas, se llaman *ángulos internos*.

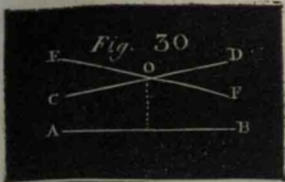
Comparados dos á dos: 1.º Los ángulos internos AMF y DNE, CNE y BMF se llaman *alternos-internos*; alternos, por estar situados á diferente lado de la secante: internos, porque su abertura está dentro de las dos rectas;

2.º Los ángulos externos AME y DNF BME y CNF, se llaman *alternos-externos*; alternos, por estar formados á diferente lado de la secante; y externos, porque se hallan fuera de las dos rectas;

3.º Los ángulos AME y CNE, AMF y CNF, BME y DNE, BMF y DNF, se llaman *ángulos correspondientes*, por estar colocados dos á dos á un mismo lado de la secante.

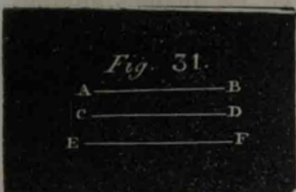
Teoremas relativos á las paralelas. Demostrar que:

4. *Por un punto dado, O, solamente se puede tirar una paralela á la recta AB (fig. 30).*



En efecto, para trazar en el punto O, dos paralelas CD, EF á la recta AB, es necesario que el ángulo DOF pueda ser contenido dentro de la zona ABCD, ó el ángulo COE en la zona ABEF; esto es imposible, porque, como hemos dicho, cualquier ángulo es mayor que la zona de las paralelas; luego tambien es imposible la suposicion que hemos hecho, á saber, que por el punto O se puedan tirar dos paralelas á la recta AB.

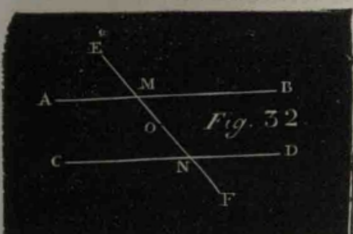
5. *Dos rectas AB, CD respectivamente paralelas á una tercera EF, son paralelas entre sí (fig. 31).*



Porque si estas rectas pudiesen encontrarse en algun punto, tendriamos en este punto trazadas dos paralelas AB, CD á una misma recta EF, lo cual es un absurdo.—De aqui se infiere que:

Dos rectas respectivamente paralelas, tienen comunes sus paralelas.

6. *Dos rectas AB, CD son paralelas, cuando cortadas por una secante EF, forman con esta los ángulos alternos-internos iguales (fig. 32).*



Antes de entrar en la demostracion debemos observar que no pueden ser iguales entre sí dos ángulos alternos-internos, sin que los otros dos ángulos alternos-internos, BMN, MNC, suplementos respectivos de los primeros, sean tambien iguales entre sí.

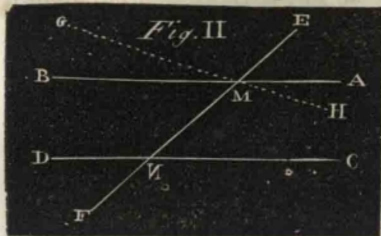
Supongamos ahora que llegaran á encontrarse las porciones indefinidas de recta MA, NC; en esta suposicion, hágase girar la porcion de plano AMNC al rededor del punto O, mitad de MN, de modo que OM venga á ocupar el lugar de ON; en cuyo caso MA tomará la posicion ND, y NC la MB.

Pero encontrándose todavia en esta nueva posicion las MA y NC, resulta que tambien se encontrarán las MB y ND, que en la sobreposicion se han confundido con las anteriores; siguiéndose de aqui que las rectas AB, CD tendrian dos puntos comunes, lo cual es imposible.

7. *Dos paralelas AB, CD cortadas por una secante MN, forman con esta iguales respectivamente los ángulos alternos-internos, los alternos-externos y los correspondientes.*

Demostrada la igualdad de los alternos-internos, la inspeccion de la figura bastará para conocer la igualdad respectiva de los alternos-externos y de los correspondientes; por esta razon nos concretaremos á los primeros.

Supongamos (fig. II) qne en el caso propuesto no fuesen iguales los ángulos alternos-internos CNE, BMF, podriamos tirar por el punto M otra recta tal como GH que formase con la secante un ángulo igual al CNE; en cuyo caso esta nueva recta seria paralela á la CD, segun el teorema anterior, teniendo en consecuencia dirigidas por el punto M dos paralelas á la recta CD, lo cual es imposible.



Hemos dicho que mirando detenidamente la figura, conoceriamos desde luego la igualdad de los alternos-externos y de los correspondientes.

En efecto, si queremos demostrar la igualdad de los ángulos alternos externos, tales como FND, AME, procederiamos del modo siguiente: FND=ENC, porque son opuestos verticalmente; pero ENC=FMB, por ser alternos-internos; luego FND=FMB; pero FMB=AME, por opuestos verticalmente; luego:

FND=AME.

La igualdad de los ángulos correspondientes, tales como CNE, AME, se hace ostensible del modo siguiente: segun hemos visto, AME=FND por ser alternos-externos; pero FND=CNE por opuestos verticalmente; luego:

AME=CNE. L.Q.Q.D.

8. *Dos paralelas* AB, CD. (fig. 28). *tienen comunes sus perpendiculares.*

Supongamos dos paralelas AB, CD y otra recta EF, perpendicular á una de ellas, p. ej., á la CD, tambien lo será á la otra AB.

Infiérese esta verdad de lo dicho acerca de la igualdad de los ángulos alternos-internos, alternos-externos y correspondientes. Tomando en el caso presente los ángulos correspondientes CNF, AMF, la igualdad de estos ángulos nos dará por resultado que el ángulo AMF es recto, por serlo su correspondiente CNF; luego la línea EF, que forma con la AD un ángulo recto, será perpendicular á esta línea.

9. *Dos paralelas* AB, CD (fig. 33), *equidistan por todos sus puntos.*

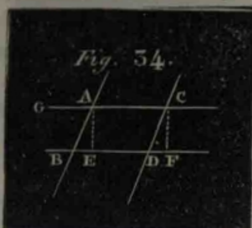
Por de contado, la perpendicular EF ó GI, comun á las dos rectas AB, CD, es la línea mas corta que desde el punto E ó G podemos tirar á la CD: esta perpendicular, pues, medirá para los puntos E ó G, la distancia de las dos paralelas. Asi pues, la cuestion queda reducida á demostrar la igualdad de las perpendiculares EF, GI.

Para hacer palpable esta demostracion, levantarémos sobre el punto M punto medio de EG, la perpendicular MN, la cual lo será tambien en el punto N á la paralela CD. Doblando el plano por la linea MN, sobrepondrémos la porcion B M N D á la A M N C; siendo rectos todos los ángulos de la figura, la línea MG tomará la direccion ME; y como MG=ME, el punto G vendrá á caer sobre el punto E. Entretanto GI tomará la direccion EF, y NI la direccion NF; luego el punto I debe estar á la vez en la línea EF y en la NF; luego se confundirá con la interseccion de estas dos líneas, á saber, con el punto F, asi, pues, GI y EF se han confundido exactamente; luego GI=EF.-L. Q. Q. D.

Recíprocamente *si dos rectas están por todos sus puntos á igual distancia, dichas rectas serán paralelas.*

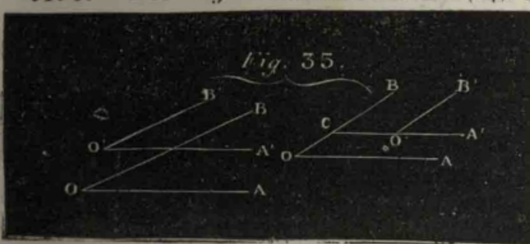
Porque las rectas que se hallen en este caso, jamás podrán encontrarse; luego serán paralelas.

10. *Partes de paralelas* AB, CD, *comprendidas entre paralelas* AC, BD, *son iguales.* (fig. 34).



Segun acabamos de ver, este teorema no ofrece dificultad alguna respecto de las perpendiculares AE, CF. Nos concretaremos, pues, á las oblicuas AB, CD. Para esto tendrémos en consideracion que los ángulos GAE, GCF son ángulos rectos; y que los GAB, GCD son iguales por correspondientes. Si quitamos, pues, de los dos ángulos rectos GAE, GCF los correspondientes iguales entre sí GAB, GCD, BAE=DCF; y si colocamos CF sobre su igual AE, CD caerá sobre AB, FD sobre EB, y el punto B quedará confundido con el D. Asi pues, AB y CD, partes de paralelas oblicuas, son iguales, asi como las AE y CF.

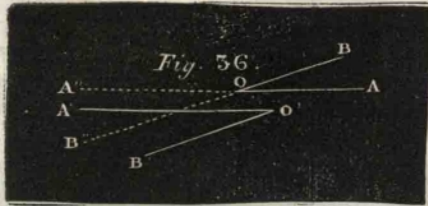
11. 1.° *Dos ángulos* AOB, A′O′B′ (fig. 35) *que tienen sus lados respectivamente paralelos, y dirigidos en un mismo sentido, son iguales.*



Esta verdad se hace palpable prolongando, si es necesario, el lado A′O′, hasta que se encuentra con el lado OB en un punto tal como C, en cuyo caso nos resultará por la propiedad de los ángulos correspondientes.

AOB=A′CB; pero A′CB=A′O′B′; luego AOB=A′O′B′.

2.° *Dos ángulos* AOB, A′O′B′ (fig. 36) *que tienen sus lados respectivamente paralelos y en direccion contraria son iguales.*

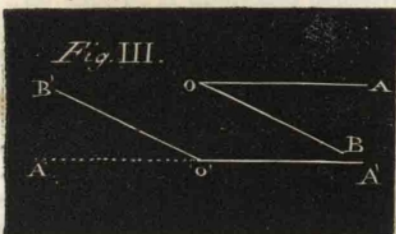


En efecto, supongamos que OA′′ sea la prolongacion del lado OA; y OB′′ la prolongacion de OB, tendrémos en este caso que:

AOB=A′′OB′′ y A′′OB′′=A′O′B′, luego AOB=A′O′B′.

3.° *Dos ángulos son suplementarios, cuando los lados del uno son respectivamente paralelos à los del otro, pero no dirigidos á la vez en el mismo sentido, ni en sentido contrario.*

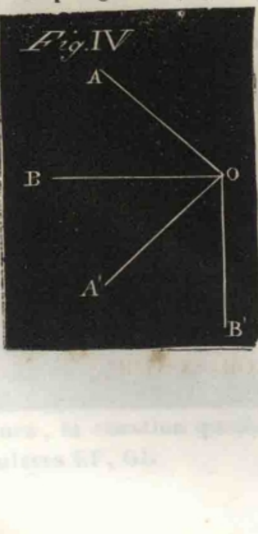
Supongamos fig. III) el lado OA en la misma direccion que O A′; y OB en direccion contraria á O′B′. Prolongaremos uno de los cuatro lados: sea p. ej. O′A′′ la prolongacion de O′A′; los ángulos A′O′B′, A′′O′B′ serán suplementarios; pero este último A′′O′B′ es igual al AOB por tener sus lados en direccion contraria; luego etc.



De lo dicho podemos inferir que *los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó son iguales ó suplementarios.*

12. 1.° *Los ángulos de una misma especie que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales.*

Supongamos (fig. IV) que los dos sean agudos, tales como los AOB, A′O′B′ y que tengan un vértice comun.



Esta suposicion nos dará:
AOB=1 recto−A′OB, y A′OB′=1 recto−A′OB; asi pues, AOB=A′OB′.

2.° *Los ángulos de diferente especie que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios entre sí.*

Sean los ángulos (fig. V) BCD, GCH, el primero obtuso, y agudo el segundo.

Los ángulos BCH, DCG valen dos rectos; luego los dos restantes BCD, GCH valdrán igualmente dos rectos, porque todos los ángulos formados en un plano al rededor de un punto, valen cuatro rectos. Asi pues, los ángulos BCD, GCH que valen dos rectos, serán suplementarios entre sí.

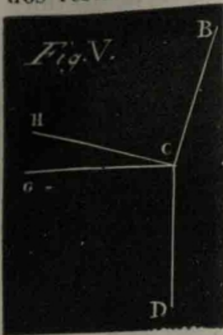


Fig. V.

De donde se infiere *que los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, ó son iguales ó suplementarios.*

13. *Por un punto* C *dado fuera de una recta* AB, *tirar una paralela á esta recta* (fig. 37).

Para verificar esta construccion, desde el punto C tiraremos una recta á un punto cualquiera E de la AB; desde el punto E como centro y con un radio igual á EC, describirémos un arco CF, que corte en F á la AB; igualmente desde el punto C como centro, y con el mismo radio EC, trazarémos el arco ED; desde el punto C como centro, y con un radio igual á la cuerda del arco CF, formaremos un arco pequeño de círculo que corte al arco ED en un punto D; finalmente tirarémos la recta CD.

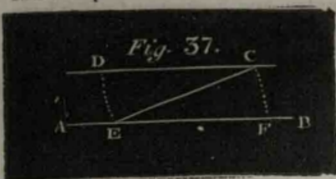


Fig. 37.

La recta CD será la paralela pedida; supuesto que la secante EC forma con las dos rectas EF, CD, los ángulos alternos-internos iguales.

14 Son inumerables las aplicaciones de las paralelas en las artes industriales.

Los carpinteros hacen uso todos los dias en la construccion de puertas, ventanas y persianas; los pizarrreros, en la disposicion de las tejas ó de las pizarras; los impresores en las líneas; el labrador forma los surcos en líneas paralelas; el grabador, cuando quiere representar superficies planas en que una parte se aleja del espectador, tambien emplea plumadas rectas paralelas; la música hace uso igualmente de las paralelas para poner las notas de que se vale, etc.

§. VI. *Del circulo y de las perpendiculares, de las secantes, de las tangentes, de los ángulos y de las paralelas consideradas con relacion al circulo.*

Teoremas relativos al círculo, á las perpendiculares, etc. Demostrar que : 1. Una recta no puede cortar á la circunferencia en mas de dos puntos–2. La perpendicular á una cuerda en su punto medio, pasa por el centro del circulo y por el medio del arco subtendido por la cuerda.–3. Dividir un arco en dos partes iguales.–4. Determinar el centro de una circunferencia ó de un arco de círculo.–5. Hacer pasar una circunferencia por tres puntos que no estén en línea recta.–6. La tangente no puede encontrar á la circunferencia mas que en un punto. El radio es la línea mas corta que podemos tirar del centro á la tangente.–7. La perpendicular levantada sobre el extremo del radio es tangente en este punto á la circunferencia, y recíprocamente.–8. Por un punto tomado en la circunferencia, tirar una tangente al circulo.–9. 1.° El ángulo inscrito es igual á la mitad del ángulo del centro que corresponde al mismo arco. 2.° Cuál es en consecuencia la medida del ángulo inscrito?–10. El ángulo inscrito en el semicírculo, es recto.–11. Por un punto dado en una recta ó fuera de ella, tirar otra recta que forme con la primera un ángulo igual á otro dado.–12. Levantar una perpendicular sobre el extremo de una recta.–13. Describir sobre una linea un segmento capaz de un ángulo dado.–14. Dos paralelas interceptan sobre la circunferencia arcos iguales.

1. *Una recta y una circunferencia no se pueden cortar en mas de dos puntos.*

Supongamos por un momento que la recta cortase á la circunferencia en tres puntos, tirando tres radios á los puntos de interseccion, tendriamos tres rectas iguales bajadas desde un mismo punto á una recta; lo cual no puede verificarse, sin que se atraviese uno de estos inconvenientes, á saber, ó que tengamos dos oblicuas iguales á un mismo lado de la perpendicular, ó que una oblicua sea igual á la perpendicular; ambas consecuencias son incompatibles con los teoremas demostrados.

2. *Toda perpendicular* CN *á una cuerda* AB *en su mitad pasa por el centro del circulo y por la mitad del arco subtendido por esta cuerda* (fig. 38).

Fig. 38.

Efectivamente, toda vez que CN es perpendicular á AB en su mitad, el punto C equidistará de los puntos A y B; pero AC y CB son iguales, por ser radios del mismo círculo; luego esta perpendicular pasará por el centro, punto equidistante de A y de B.

Por otra parte, perteneciendo el punto N á la perpendicular CN, se hallará á igual distancia de los A y B, resultando AN=NB: de donde AN y NB serán dos cuerdas iguales; luego tambien serán iguales los arcos subtendidos AON,NPB. Asi pues, la perpendicular pasa por el medio del arco subtendido por la cuerda AB, dividiéndole por consiguiente en dos partes iguales.

3. *El radio perpendicular á la cuerda* AB, *divide á esta y al arco subtendido en dos partes respectivamente iguales* (fig. 38).

La demostracion de esta verdad se funda en una propiedad característica de las perpendiculares. Por esta propiedad, si la línea CN tiene un punto equidistante, de los puntos A y B de la linea AB, los tendrá todos á igual distancia de A y de B; pero el punto C de la línea CN equidista de A, y de B; luego tambien M que pertenece á la misma recta, equidistará de A y de B; luego AM=BM.

Por la misma razon el punto N equidistará de A y B; luego las cuerdas AN, BN serán iguales; luego tambien lo serán los arcos subtendidos AON-BPN.

Recíprocamente *el radio* CN, *que divide la cuerda* AB *en dos partes iguales* AM, BM, *será perpendicular á la cuerda* AB (fig. 38).

Porque tendrá dos puntos C, M equidistantes de A y de B.

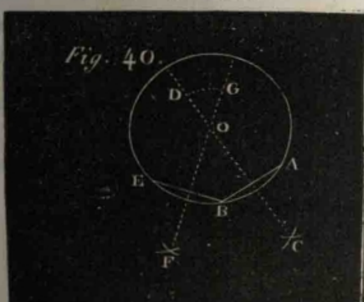
4. *Dividir un ángulo* AOB *y un arco* ACB *en dos partes iguales* (fig. 39.)

Desde el vértice O como centro y con un rádio arbitrario OA, trazarémos el arco ACB, que corte á los dos lados del ángulo en A y en B; marcarémos un punto cualquiera K á igual distancia de los puntos A y B; finalmente tirarémos la recta OK.

Está recta será la bisectriz deseada.

En efecto, si tiramos la cuerda AB, la recta OK será perpendicular sobre su mitad. Por consiguiente, esta recta divide el arco ACB y el ángulo correspondiente en dos partes iguales.

5. *Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco de círculo.* (fig. 40)



Tomarémos sobre la circunferencia tres puntos A, B, E que unirémos por medio de las cuerdas AB, EB; levantarémos sobre sus mitades dos perpendiculares respectivamente, tales como CD, FG; el punto O de interseccion será el centro del círculo, supuesto que por este punto deben pasar ambas perpendiculares.

6. *Hacer pasar una circunferencia por tres puntos dados, que no se hallen en una misma recta.*

Supongamos los tres puntos A, B, E (fig. 40). Harémos con estos tres puntos lo mismo que hemos hecho en la construccion anterior. Unirémos estos puntos por medio de dos rectas, y sobre sus mitades levantaremos dos perpendiculares respectivamente; el punto O de interseccion será el centro de la circunferencia. Para trazarla, tómese como rádio la distancia AO, ó BO, ó EO. Estas tres distancias son iguales efectivamente; porque el punto O, como perteneciente á la perpendicular levantada sobre la mitad de la cuerda AB, se halla á igual distancia de A y de B; pero correspondiendo tambien el mismo punto á la perpendicular levantada sobre la mitad de la cuerda BE, equidistará de B y de E. Luego AO=BO=EO.

7. *La tangente* IG *no puede encontrar á la circunferencia en mas de un punto* (fig. 6).

Esta verdad se infiere de la misma definicion de la tangente, la cual es una línea que toca á la circunferencia en un punto solo.— Dedúcese de aqui:

El rádio OH *es la recta mas corta que desde el centro podemos tirar á la tangente.*

8. *La perpendicular* IG *levantada sobre la extremidad de un rádio OH, es tangente á la circunferencia de este punto.*

Facilmente nos convencerémos de esta verdad, si consideramos que cualquier otro punto de la perpendicular está mas distante del centro que el punto H; de consiguiente, esta perpendicular no tiene mas que un punto comun con la circunferencia; luego será tangente.

Reciprocamente la tangente es perpendicular al rádio que termina en el punto de tangencia.

En efecto, otro punto cualquiera de la tangente está mas distante del centro que el punto de tangencia; luego este rádio es la distancia mas corta del centro á la tangente; esta propiedad pertenece exclusivamente á la perpendicular; luego etc.

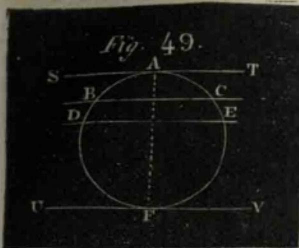
9. *Tirar una tangente por un punto dado en la circunferencia.*

Para resolver este problema, tirarémos un rádio que termine en el punto dado, levantarémos sobre este punto una perpendicular al rádio; esta línea está, segun lo que acabamos de demostrar, la tangente pedida.

10. *Dos paralelas interceptan sobre la circunferencia arcos iguales.*

Tres casos nos puede presentar este teorema.

Primer caso. Si las paralelas son dos secantes BC, DE, (fig. 49), el diámetro que sea perpendicular á estas rectas, cortará la circunferencia en dos puntos A, F, equidistantes de los puntos B y C por una parte, y por otra, de los D, y E. De donde résultará: *arco* AD=*arco* AE , y *arco* AB=*arco* AC; restando estas igualdades, tendremos: *arco* AD—*arco* AB=*arco* AE—*arco* AC; y finalmente *arco* BD=*arco* CE.

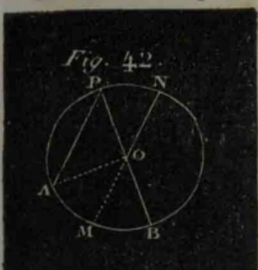


Segundo caso. Si entre las paralelas, la una es tangente como ST, ó UV, y la otra secante, como BC, el diámetro AF pasará por el punto de tangencia A ó F y cortará el arco BAC ó BFC en dos partes iguales. De donde se infiere que:

AB=AC, ó FB=FC.

Tercer caso. Si las paralelas son dos tangentes, ST, UV, la recta AF, que pasa por los puntos de tangencia será un diámetro; de consiguiente los arcos ABDF, ACEF, iguales á la semicircunferencia, son iguales entre sí.

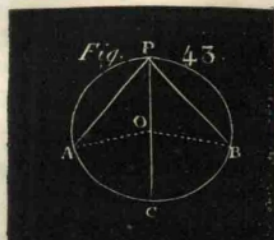
11. *Todo ángulo inscrito APB es igual á la mitad del ángulo del centro que corresponde al mismo arco de círculo* (fig. 42.)



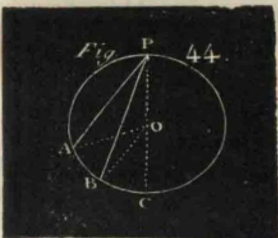
Supongamos para esto que uno de los lados PB pasa por el centro; tirando un diámetro MON paralelo á la cuerda AP, nos resultará el MOB, igual al ángulo propuesto APB, por ser su correspondiente; pero el ángulo MOB es puntualmente la mitad del AOD, como vamos á manifestar.

El ángulo MOB=PON, por ser verticalmente opuesto; PON=AOM, por ser iguales sus arcos correspondientes PN, AM, como interceptados por paralelas; luego MOB=AOM; luego MOB será igual á la mitad de AOB; pero MOB es igual al ángulo inscrito; luego el ángulo inscrito es igual á la mitad del ángulo en el centro, que comprende entre sus lados el mismo arco. L. Q. Q. D.

Si ninguno de los lados pasa por el centro tiraremos un diámetro auxiliar PC (fig. 43 y 44), cuya construccion nos dice que el ángulo inscrito es igual á la suma ó la diferencia de los ángulos APC, BPC, de donde sacaremos el mismo resultado, como muy sencillamente vamos á exponer.



El ángulo APC (fig. 43)$=\frac{AOC}{2}$; el ángulo BPC $=\frac{BOC}{2}$; sumando estas dos ecuaciones, tendremos la suma siguiente:



$$APC+BPC=\frac{AOC+BOC}{2} \text{ ó } APB=\frac{AOB}{2}$$

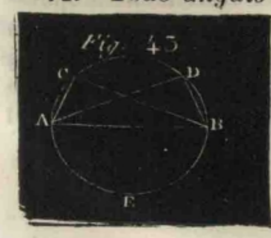
Lo mismo tendrá lugar con el ángulo APB (fig. 44), porque el ángulo APC$=\frac{AOC}{2}$; el BPC$=\frac{BOC}{2}$: y restando estas igualdades nos resultará.

$$APC-BPC=\frac{AOC-BOC}{2}, \text{ ó lo que es lo mismo: } APB=\frac{AOB}{2}.$$

2.° Supuesto que el ángulo del centro tiene por medida el arco interceptado por sus lados;

El ángulo inscrito tendrá por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

12. *Todo ángulo* **ACB, ADB** *inscrito en un semicírculo es recto,* (fig. 45).



Este teorema se infiere inmediatamente del anterior. El angulo que tomamos en consideracion, tiene por medida la mitad del arco interceptado por sus lados; pero este arco es la semicircunferencia, que vale 180°, luego el valor de este ángulo será de 90°, es decir, será recto.

Podemos considerar como *límite* de los ángulos inscritos el ángulo CBA, formado por la tangente CC' y la cuerda AB, que se cortan en el punto B de tangencia; el teorema precedente es igualmente aplicable á este ángulo, como vamos á manifestar.

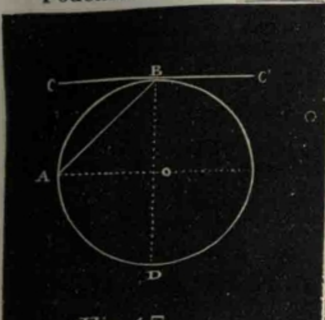


Fig. 45.

Si la cuerda propuesta fuese un diámetro, la propiedad enunciada seria evidente. Supondremos pues el caso contrario; y tiraremos el diámetro BOD y el rádio OA; el ángulo recto CBD valdrá la semisuma de los ángulos suplementarios BOA, DOA; pero segun hemos dicho, $ABD=\frac{AOD}{2}$; luego $CBA=\frac{BOA}{2}$.

Lo que decimos del ángulo agudo CBA, se puede aplicar al obtuso C'BA: Así pues, *el ángulo inscrito, formado por una cuerda y una tangente, tiene tambien por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

13. *Todo ángulo* ACB, *formado por dos cuerdas* AG, BD, *que se cortan en el circulo, tiene por medida la semisuma de los arcos AB, GD, comprendidos entre sus lados.*

Fig. VI.

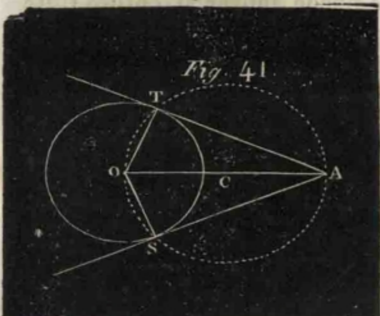
Para convencernos de esta verdad, tiraremos (fig. VI) la cuerda DH, paralela á la GA, cuya construccion nos dará el ángulo inscrito BDH, que tiene por medida la semisuma de los arcos BA, AH; pero AH=GD; luego este ángulo y por consiguiente el ACB, tiene por medida la semisuma de los arcos AB, GD.

14. *El ángulo* ABC, *formado por dos secantes como* BA, BC, *tiene por medida la mitad*

de la diferencia de los arcos **HD, AC**, *intercep-tados por sus arcos.*

Tirando la cuerda DG (fig. VII) paralela á la secante BA, nos resultará el ángulo inscrito GDC, que tiene por medida el arco $\frac{CG}{2}$; pero CG=AC—AG; luego su medida será la mitad de la diferencia de los arcos AC, AG, ó lo que es lo mismo, la mitad de la diferencia de los arcos interceptados AC, HD.

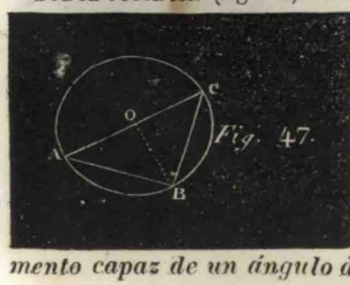
15. *Por un punto* **A** *dado fuera del círculo, tirar una tangente al círculo* (fig. **41**).



La resolucion de este problema exige la siguiente construccion. Uniremos el punto dado y el centro del círculo por medio de la recta AO; sobre esta recta como diámetro construiremos una circunferencia que cortará al círculo dado en dos puntos, tales como S, T; en el círculo trazaremos dos radios que terminen respectivamente en los puntos de interseccion S, T; uniremos estos puntos con el dado por medio de las rectas SA, TA; estas dos rectas satisfarán á las condiciones del problema.

En efecto, los ángulos OSA, OTA son rectos, como inscritos en la semicircunferencia del círculo AO; luego estas rectas son respectivamente perpendiculares á los radios OT, ON; serán, pues, tangentes al círculo dado.

16. *Levantar una perpendicular sobre el extremo de una recta.*
Sea la recta AB (fig. 47). Tómese fuera de esta recta un punto arbitrario O, y con el radio OB se trazará un círculo que corte á la recta AB en un punto A. Tírese ahora el diámetro AOC y la cuerda BC.



La recta BC será la perpendicular pedida; porque el ángulo ABC, como inscrito en la semicircunferencia, será recto; y la BC por consiguiente perpendicular á AB.

17. *Describir sobre una linea un segmento capaz de un ángulo dado* **C′B′D′** (fig. **48**).

(Llámase *segmento capaz de un ángulo dado*, un segmento tal, que todos los ángulos que puedan ser inscritos, sean iguales al ángulo dado).

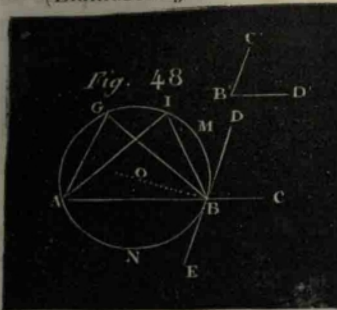


Fig. 48

Sea AB la línea sobre la que nos proponemos describir el segmento. La prolongaremos hácia C, y formaremos el ángulo CBD=al ángulo C'B'D'. Trazaremos la BO perpendicular á la BD, y la HO perpendicular á AB en su mitad. Del punto O de interseccion de las dos perpendiculares, como centro, y con un radio OB describiremos un círculo: ANB será el segmento pedido.

En efecto, el ángulo C'B'D'=CBD=ABE; este último, como formado por una cuerda y una tangente, tiene por medida la mitad del arco ANB. Pero esta es exactamente la medida de todos los ángulos AGB, AIB etc., inscritos en el segmento. Luego etc.

2.ª SECCION.=DE LAS FIGURAS PLANAS FORMADAS POR MAS DE DOS LÍNEAS.

§. I. *De los polígonos en general.*

1. Qué es polígono? Lados, vértices, ángulos, diagonales y perímetro de un polígono.–2. Cuántas rectas se necesitan para limitar un plano?–3. Qué es triángulo?–4. Qué es cuadrilátero, pentágono, exágono, heptágono, octágono etc?–5. Qué es polígono equilátero, equiangular, regular, irregular?–6. Cuándo se dice un polígono inscrito y circunscrito?

1. Llámase *polígono*, la porcion de plano limitado por mas de dos rectas, que se cortan dos á dos.

Las rectas que forman el polígono, se llaman *lados* del polígono; sus puntos de interseccion *vértices*; y sus ángulos, *ángulos* del *polígono*.

Entendemos por *diagonales* las rectas AC, AD, BD, BE, CE (fig. 53,) que unen dos á dos los vértices de los ángulos no adyacentes á un mismo lado.

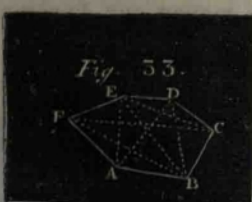


Fig. 53.

El conjunto de los lados se llama *pirímetro* ó *contorno* del polígono.

2. Para limitar un plano, son necesarias; por lo menos tres rectas; asi es que un polígono no puede tener menos de tres lados.

3. El *triángulo* es el polígono mas sencillo de todos; se compone de tres lados y de tres ángulos, tal es la figura ABC (fig. 54).

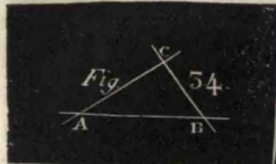


Fig. 54.

4. El polígono de cuatro lados se llama *cuadrilátero*; *péntágono* el de 5 lados; *hexágono* el de 6; *heptágono* el de 7, *octágono* el de 8, *decágono* el de 10; en fin polígono de 11, 12, 13 etc. lados.

5. Se dice un polígono *equilateral*, cuando tiene iguales todos sus lados; *equiangular*, el que tiene iguales sus ángulos; *regular*, el que tiene iguales todos sus ángulos y lados; *irregular*, cuando le falta uno de estos dos requísitos.

6. Un polígono ABCD (fig. 55) se dice *inscrito* á un círculo, cuando todos sus lados son cuerdas del círculo, y recíprocamente el círculo se dice en este caso circunscrito al polígono.

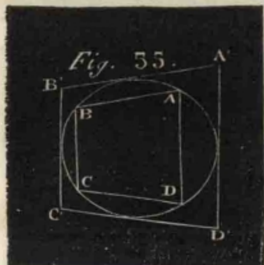


Fig. 55.

Un polígono A′B′C′D′ se dice *circunscrito* á un círculo, cuando todos sus lados son tangentes al círculo, y recíprocamente el círculo se dice inscrito al polígono.

§. II. *Del triángulo y de sus diferentes especies.*

1. Condicion fundamental del triángulo.-2. De cuántos modos se puede considerar un triángulo?-3. Qué es triángulo acutángulo, obtusángulo, rectángulo?-4. Qué es triángulo escaleno, isóceles, equilateral?.5. Qué se entiende por altura y base del triángulo?

Teoremas relativos al triángulo.—Demostrar que:

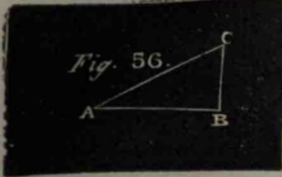
6. La suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual á dos rectos, ó á 180 grados.
7. A qué es igual el ángulo externo de un triángulo? Cuál es el valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo? Triángulos simétricos; aplicaciones en las artes.

1 Siendo la recta la línea mas corta que de un punto á otro podemos tirar, *cualquiera de los lados de un triángulo será menor que la suma de los otros dos.*

2. De dos modos podemos considerar el triángulo: 1.º segun la relacion del valor de sus ángulos; 2.º segun la magnitud relativa de sus lados.

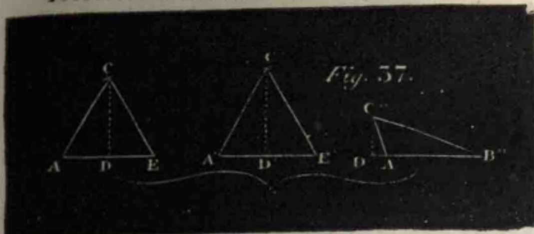
3. Un triángulo se dice *acutángulo*, *obtusángulo*, *rectángulo*, segun que el mayor de sus ángulos sea agudo, obtuso, ó recto.

En un triángulo rectángulo ABC (fig. 56) el lado AC opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*, y los lados que forman el ángulo recto, reciben el nombre de *catetos*.



4. Llámase *escaleno* el triángulo en el que los tres lados, comparados dos á dos, son desiguales; p. ej. A''B'' C'' (fig. 57).

Isósceles ó simétrico, es aquel que tiene dos lados iguales, como el A'E'C' (fig. 57).



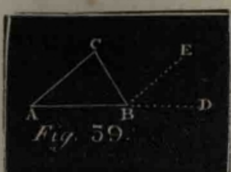
Dícese *equilateral*, el triángulo que tiene iguales sus tres lados, tales el AEC, (fig. 57).

5. Entendemos por *altura* de un triángulo la perpendicular bajada desde uno de sus vértices al lado opuesto que se prolongará si es necesario; tales son CD, C'D', C''D'' (fig 57).

Se llama *base* del triángulo el lado opuesto al vértice, de donde se baja la perpendicular. En el triángulo isósceles se llama *base* el lado desigual, y *lados* de este triángulo los dos lados iguales.

Teoremas relativos á los triángulos. Demostrar que:

6. *La suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera* ABC (fig. 59.) *es igual á dos ángulos rectos.*



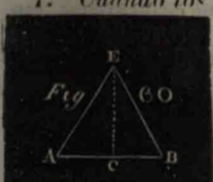
Para demostrar este teorema, prolongaremos uno de los lados AB, p. ej., formando el ángulo exterior CBD; en este ángulo tiraremos la recta BE paralela á AC cuya construccion nos dará:

CBE=BCA por alternos internos, y DBE=CAD por correspondientes; de donde ABC+BCA+CAB=ABC+CBE+EBD=2 rectos.

Corolario 1.° El ángulo exterior CBD de un triángulo ABC es igual á la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes DAC y ACB.

Corolario 2.o Los dos ángulos agudos A, C, de un triángulo rectángulo ABC (fig. 56) valen 90 grados ó un ángulo recto.

7. *Cuando los dos lados* AE,BE *de un triángulo* ABE (fig. 60) *son iguales, los ángulos opuestos son tambien iguales; ó en otros términos, en un triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales.*



Demostracion. Sobre el punto medio C del tercer lado AB, levantaremos una perpendicular. Como los dos lados AE, BE, son iguales, la perpendicular pasará por el vértice E, formando dos triángulos CEB, CEA, los cuales se confundirán exactamente, si doblamos la figura por la perpendicular CE, ajustándose en esta sobreposicion el lado BC con el AC, y el EB con el EA, y en consecuencia el ángulo B con el ángulo A: de donde resulta la igualdad de los dos ángulos A y B, opuestos á los lados iguales EB, EA.

Por la misma razon en un *triángulo, á iguales ángulos se oponen lados iguales.*

En esta sopreposicion los ángulos BEC, AEC se han confundido tambien, de donde se infiere legítimamente que:

En un triángulo isósceles la línea bajada desde su vertice á la base sobre su mitad, es una perpendicular; que esta perpendicular divide á la base en dos partes iguales, asi como divide tambien el ángulo del vértice en dos angulos iguales; y finalmente que divide el triángulo primitivo en dos triángulos rectángulos que se confunden exactamente, sobreponiéndolos inversamente ó al reves.

Las figuras que de este modo se confunden, se llaman *simétricas;* y he aqui la razon, porque el triángulo isósceles se llama tambien simétrico.

En las artes se nos ofrecen ejemplos muy notables de las figuras simétricas. El grabado, la imprenta, la litografía etc., tienen por objeto formar en una lámina de madera, metal, piedra etc., figuras, cuya impresion ha de trasladarse sobre otras superficies. Es necesario observar que la figura impresa está al reves respecto de la que hay en la lámina; porque la derecha se imprime á la izquierda, y la izquierda á la derecha, Sobre la lámina pues, se debe escribir al reves, si se quiere que lo escrito se reproduzca en su sentido natural. Esta es la razon, porque los caractéres de imprenta están grabados al reves, y colocados unos despues de otros de derecha á izquierda, á fin de que en el papel estén en su forma natural, y se sigan de izquierda á derecha.

§ III. *Comparacion de los triángulos.*

1. Cuántos casos presenta la comparacion de los triángulos?–2. Dos triángulos son iguales: 1.º cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; 2.º cuando tienen igual un ángulo y los lados de este ángulo; 3.º cuando tienen un lado igual, adyacente á dos ángulos respectivamente iguales: corolario respecto del triángulo rectángulo.–3. Dos triángulos rectángulos que tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, son iguales.–4. Construir el triángulo, conociendo sus tres lados.–5. Formar el triángulo: 1.º conociendo dos lados y el ángulo de estos lados; 2.º dos ángulos y el lado adyacente. –6. Construir un triángulo isósceles, cuando se conocen: 1.º la base y la altura; 2.º la altura y la longitud de los lados iguales; 3.º la base y la longitud de los lados.

1. La comparacion de los triángulos puede presentar tres casos di-

ferentes; de igualdad, de semejanza y de equivalencia. Nos concretaremos por ahora á la igualdad.

Teoremas relativos á la igualdad de los triángulos.

2. 1.° *Dos triángulos* ABC, A′B′C′ *son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales, á saber*: $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$ (fig. 68).

Fig. 68.

Demostracion. Aplicando el lado A′B′ sobre su igual AB, y el triángulo A′B′C′ sobre el plano ABC, de modo que sus lados iguales se correspondan; los dos triángulos coincidirán exactamente en esta sobreposicion.

Supongamos por un momento que esto no tuviera lugar; el punto C′. p. ej., ó caería dentro del triángulo ABC en el punto D, ó sobre el lado BC, en E, ó por fin fuera del triángulo en el punto F.

En el primer caso resultaria un absurdo, á saber que:

$AD+BD<AC+CB$, ó $A'C'+C'B'<AC+CB$; como vamos á manifestar del modo siguiente:

$AD+DE<AC+CE$, por ser la primera suma el lado AE, menor que la suma de los otros dos;

por la misma razon, $BD<EB+DE$;

sumando entre sí ordenadamente estas dos desigualdades, tendremos:

$$AD+DE+BD<AC+CE+EB+DE:$$

y quitada la parte DE de los dos miembros:

$$AD+BD<AC+CE+EB;$$

ó finalmente $AD+BD<AC+CB$; resultado contrario á la suposicion que hemos hecho.

En el segundo resultará el mismo inconveniente:

$$BE<BC, \text{ ó } B'C'<BC.$$

En el tercer caso tendremos que:

$$AC<CE+AE;$$
$$BF<BE+FE;$$

y sumando $AC+BF<CE+AE+BE+FE$,

ó $AC+BF<AF+BC$

ó lo que es lo mismo, $AC+B'C'<A'C'+BC$;

Resultado igualmente absurdo. Asi pues, el punto C′ caerá sobre el punto C, y por consiguiente los triángulos se confundirán. L. Q. Q. D.

2.° *Dos triángulos son iguales, cuando tienen igual un ángulo* $A=A'$, *comprendido entre dos lados respectivamente iguales* (fig. 68)

La sobreposicion nos dará la igualdad de estos triángulos.

Colocaremos el lado A′B′ sobre su igual AB y el triángulo A′B′C′ sobre el plano ABC, de modo que se correspondan los lados y los ángulos iguales; siendo el ángulo A′ igual al ángulo A, el lado A′C′ tomará la direccion AC; y como A′C′=AC, el punto C′ caerá sobre el punto C: luego los dos triángulos coincidirán perfectamente.

3.° *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual,* AB=A′B′ *adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* (fig. 68.)

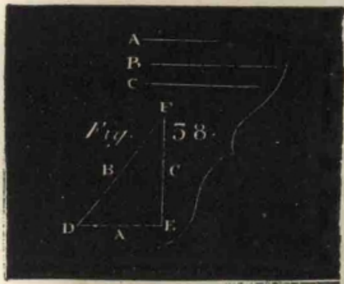
Sobrepondremos el lado A′B′ á su igual AB, y el triángulo A′B′C′ al plano ABC, de suerte que se correspondan los ángulos iguales: como A′=A, el lado A′C′ tomará la direccion AC; y como B′=B, el B′C′ tomará la direccion BC. Hallándose pues á la vez el punto C′ sobre AC y sobre BC coincidirá con el punto C, y los dos triángulos se confundirán exactamente.

Corolario. *Dos triángulos rectángulos serán iguales, si tienen iguales las hipotenusas y un angulo agudo.*

3. *Dos triángulos rectángulos que tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, son tambien iguales.*

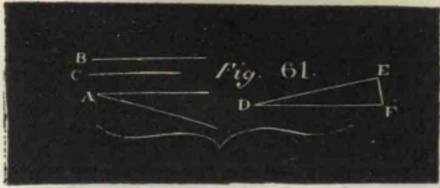
Por medio de la sobreposicion puede cualquiera convencerse de la igualdad de estos triángulos.

4. *Construir el triàngulo, dados sus tres lados* **A,B,C,** (fig. 58.)



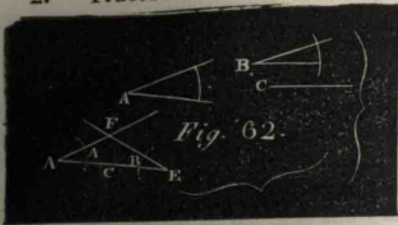
Trazaremos una recta DE igual al lado A, desde el punto D con un radio B describiremos un arco, y desde el punto E con el radio C trazaremos un segundo arco que corte al primero en F; finalmente desde F tiraremos las rectas FD, FE y tendremos un triángulo DEF, cuyos lados serán las rectas dadas.

5. *Construir un triàngulo conociendo:* 1.° *dos lados* **B,C,** *y el ángulo* **A** que forman estos lados (fig 61); 2.° los dos ángulos **A, B,** y el lado **C** *adyacente á estos ángulos* (fig. 62).

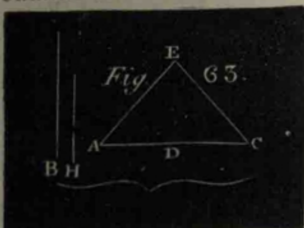


1.° Formaremos un ángulo D igual al ángulo A, dando á sus lados las longitudes B,C; tírese la recta EF; el triángulo DEF será el triángulo pedido.

2.° Trácese una recta igual á la recta dada C; sobre A E se formará en el punto E un ángulo igual á B, igualmente sobre el extremo A otro ángulo igual á A. Los otros dos lados, cortándose en el punto F, completarán el triángulo AEF, que satisface á las condiciones pedidas.

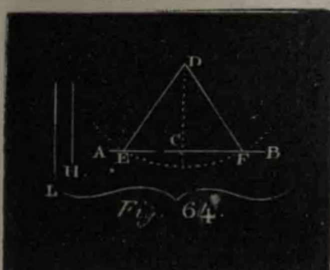


6. *Trazar un triángulo isósceles, cuando se conocen:* 1.° *la base* B *y la altura* H (fig. 63); 2.° *la altura* H *y la longitud* L *de los lados iguales* (fig. 64); 3.° *la base* B *y la longitud* L *de los lados iguales.*



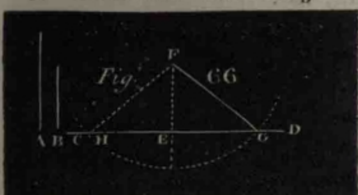
1.° Trácese una recta, igual á la base B; sobre la AC se levantará en su mitad una perpendicular igual á la altura H; finalmente uniremos el punto E con los puntos A y C; de este modo habremos formado el triángulo isósceles AEC.

2.° Sobre el medio de una recta AB levantaremos una perpendicular CD, igual á la altura H; desde el punto D con la longitud L, describiremos un arco que corte á la recta AB en dos puntos E, F; uniremos por fin el punto D con los puntos E, F, y resultará el triángulo isósceles E D F.



3.° Este caso nos presenta los tres lados conocidos; su resolucion pues, será la misma que la del núm. 4.

7. *Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* A *y un cateto* B (fig. 66).



Sobre una recta cualquiera CD levantaremos una perpendicular EF, igual en longitud al cateto dado: desde el punto F con un radio igual á la hipotenusa A, trazaremos un arco que cortará á la recta CD en dos puntos G, H; uniendo estos puntos con el F, habremos formado los dos triángulos FEG, FEH.

§. IV. *De los cuadriláteros.*

1. Qué es cuadrilatero, trapezoide y trapecio?—2. Qué es paralelógramo? Qué es romboide, rombo, rectangulo y cuadrado?—3. Valor de los ángulos de un cuadilatero.—4. La diagonal divide el paralelogramo en dos triángulos iguales.—5. Construir un trapecio simétrico, conocida la base mayor, la altura y la longitud de los lados no paralelos.—6. Construir un romboide, conocida la base, la altura y uno de los lados que cortan á la base.—7. Trazar un rombo, conociendo un lado y una diagonal.—8. Formar un rectángulo, dada la base y la altura.—9. Construir un cuadrilátero igual á otro dado.

1. Se llama *cuadrilátero* un poligono de cuatro lados. Entre los cuadriláteros hay unos que son *paralelógramos*, y otros que no lo son. Entre estos últimos se cuentan el *trapezoide* y el *trapecio*.

El *trapezoide* que es el mas irregular de todos, no tiene lados paralelos entre sí.

El *trapecio* es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos; tal es el ABCD (fig. 75), en el que DC y AB son paralelos. Los dos lados paralelos se llaman *bases* del trapecio; y la perpendicular EF, comun á las dos bases, es la *altura* del trapecio.

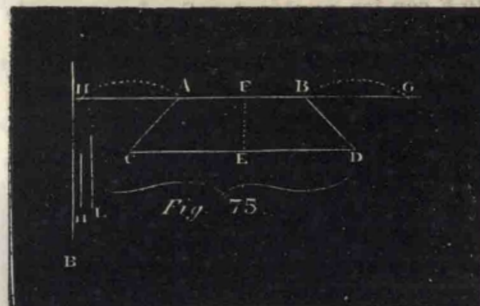


Fig. 75

Llámase *simétrico* aquel trapecio que tiene iguales los dos lados no paralelos, AC, BD.

2. Llámanse *paralelógramos* los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos dos á dos; como el ABCD (fig. 76).

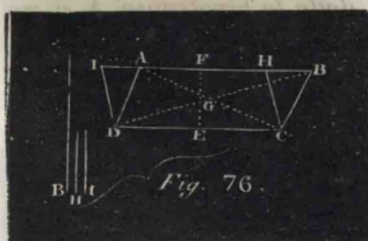
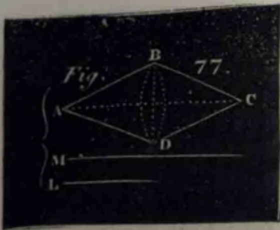


Fig. 76.

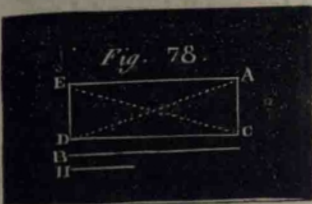
Dos lados opuestos cualesquiera del paralelógramo ABCD, se dicen *bases*, y su perpendicular comun, EF, es la *altura* del paralelógramo.

Entre los paralelógramos se cuentan el *romboide*, el *rombo*, el *rectángulo* y el *cuadrado*.

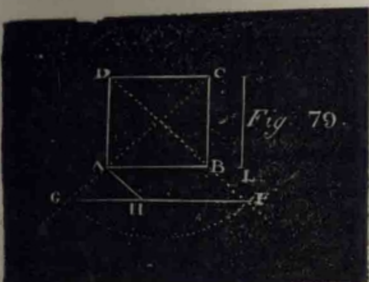
El *romboide* es un paralelógramo que tiene desiguales los lados consecutivos, y los ángulos adyacentes á un lado; tal es ABCD (fig. 76).



El *rombo* se diferencia del anterior, en que tiene iguales todos sus lados ; como ABCD (fig. 77).



El *rectángulo* tiene los lados consecutivos desiguales, pero iguales todos sus ángulos; tal el ACDE (fig. 78).



El *cuadrado* tiene iguales sus ángulos y sus lados; como ABCD (fig. 79).

3. *La suma de los ángulos de un cuadrilatero, es igual á 4 rectos.*

Para convencernos de esta verdad tirarémos en el cuadrilátero una diagonal; y de este modo quedará dividido en dos triángulos; pero la suma de los ángulos de estos triángulos, identica á la suma de los ángulos del cuadrilátero, es igual á 4 rectos: luego, etc.

4. *La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos iguales.*

Esta igualdad se conocerá tan pronto como reparemos en que los triángulos tienen iguales respectivamente sus ángulos y sus lados.

5. *Construir un trapecio simétrico , conocidas la base mayor B la altura H, y la longitud L de los lados no paralelos*, (fig. 76).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; levantarémos sobre esta recta una perpendicular EF , igual á la altura H; por el punto F tirarémos una paralela á CD; desde los puntos C, y D, con un rádio igual á L, describiremos dos arcos , cada uno de los cuales cortará en dos puntos á esta paralela; uniendo ahora á los extremos de la base CD las intersecciones A, H, mas próximas al punto F, tendrémos formado el trapecio simétrico AHCD.

6. *Construir un romboide conociendo la base B, la altura H y la longitud* L *de los lados que encuentran á la base* (fig. 76).

Trazarémos una recta CD, igual á la base B; en un punto cualquiera E levantarémos una perpendicular EF igual á la H. Por el punto F tiraremos una paralela á CD; trazaremos despues desde los puntos C, D, con un rádio L, dos arcos, cada uno de los cuales cortará á la paralela en dos puntos; finalmente uniendo á los C, D, las intersecciones A,B, ó H, I, tendrémos los dos paralelogramos ABCD, CDIH que satisfarán á las condiciones del problema.

7. *Trazar un rombo conociendo un lado L y una diagonal M,* (fig. 77).

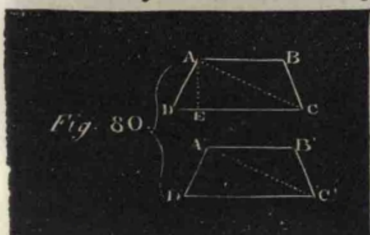
Tiraremos una recta AC igual á M; desde los puntos A, C, con un rádio L, trazarémos dos arcos que se cortarán en dos puntos B, D; dirigiendo ahora los cuatro rádios, determinados por las intersecciones, nos resultará el rombo ABCD.

Esta figura tiene muchas aplicaciones en las artes, los dibujos de las telas, la ebanisteria etc. nos ofrece este ejemplo á cada paso.

8. *Formar un rectángulo dada la base B y la altura H,* (fig. 78).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; en el punto C ó en el D, levantaremos una perpendicular DE igual á H; por el punto E tirarémos una paralela á CD. y por C otra paralela á DE, la interseccion A de las paralelas determinará el rectángulo ACDE.

Son muy numerosas las aplicaciones del rectángulo: el sítio de un edificio es ordinariamente rectangular; en la agrimensura ocurre con frecuencia medir ó construir rectángulos.



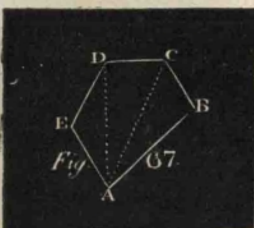
9. *Construir un cuadilátero igual á otro dado* ABCD (fig. 80).

Para esta construccion no hay mas que tirar la diagonal AC, y formar sobre una recta A′ C′=AC, dos triángulos A′B′C′, A′C′D′. respectivamente iguales á los triángulos ABC, ACD.

§. V. *De los polígonos de cualquier número de lados,—De los polígonos regulares inscritos y circunscritos.*

1. La suma de los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos; determinar el valor de cada uno de los ángulos en el polígono regular.—2. La suma de los ángulos exteriores de un polígono, vale 4 rectos.-3. Que entendemos por centro del polígono regular? Qué es rádio, apotema y ángulo del centro?—4. Cómo se determina el ángulo del centro?-5. Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.-6. Inscribir un polígono regular de cualquier número de lados. -7. Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados.-8. Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro de igual número de lados.-9. El lado del hexágono regular es igual á su rádio.-10 Inscribir el hexágono regular; la circunferencia vale mas de tres diámetros; inscribir el triángulo equilátero.-11. Inscribir un cuadrado.-12. Dado un cuadrado inscrito circunscribir otro: la circunferencia vale menos de cuatro diámetros.-13. Determinar la relacion de la circunferencia con el diámetro: relacion hallada por Arquimedes: relacion de Mecio.

1. *La suma de los angulos de un poligono cualquiera* **ABCDE** (fig. 67). *vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el poligono menos dos.*



Para convencernos de esta verdad, desde un mismo vértice A, dirigirémos diagonales á los demas vértices; estas diagonales dividirán el polígono en tantos triángulos, como lados tiene menos dos; luego la suma de los ángulos de estos triángulos será tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos; pero esta suma es idéntica á la de los ángulos del poligono; luego etc.

Si se nos pide, p. ej., el valor de los ángulos de un polígono de 20 lados, quedará determinado de este modo: valor:$=(20-2)\times 2$ rectos$=20\times 2$ rectos-2×2 rectos $=40$ rectos $-$ 4 rectos. Cuyo resultado nos dice que para determinar el valor de los ángulos de un polígono, duplicarémos el número de sus lados, de este producto restarémos 4 rectos; y la diferencia que resulte, expresará el número de ángulos rectos, que valen los del polígono.

Corolario. El teorema precedente nos conduce á la determinacion de cada uno de los ángulos en el polígono regular. Este polígono, como ya sabemos, tiene todos sus ángulos iguales; de consiguiente dividiendo el valor de todos sus ángulos por su número, obtendrémos el valor de cada uno; pero el número de ángulos es igual al de los lados; podemos pues dividir por el número de lados. Si queremos, p. ej., hallar el ángulo del decágono regular dirémos: ángulo$=\dfrac{20R-4R}{10}=\dfrac{16R}{10}=1{,}6$ de R,$=144.°$

2. *Si prolongamos los lados del polígono* **ABCDE**, *la suma de los ángulos exteriores que resultan, es igual á 4 rectos.* (fig. X).

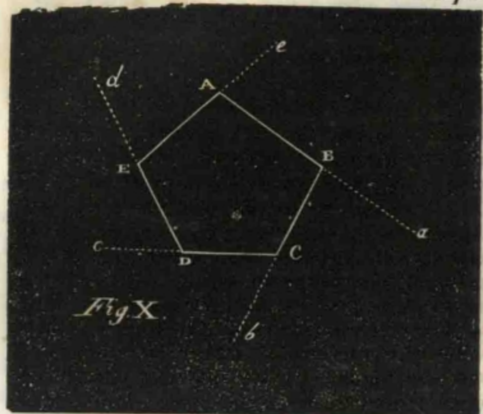


Fig. X.

En efecto, $eAB+BAE=2R$
$aBC+CBA=2R$
$bCD+DCB=2R$
. . . . ;

Donde vemos claramènte que la suma de los ángulos interiores y exteriores del polígono vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono. Asi pues, la suma total excede á la de los ángulos interiores en 4 rectos; luego la suma de los exteriores será igual á 4 rectos.

3. Llámase *centro* de un polígono regular inscrito **ABCDE** (fig. 84), el centro mismo O del círculo.

Fig. 84.

Entendemos por *rádio* del polígono regular el rádio del círculo circunscrito; y se dice *apotema* la distancia del centro á cualquiera de los lados, ó sea el rádio del círculo inscrito. De donde se infiere que en el polígono regular son iguales sus rádios y sus apotemas.

Se llama *ángulo del centro* el ángulo **AOB**, formado por dos rádios **AO**, **OB**, dirigidos á dos vertices contiguos.

4. Si consideramos que todos los triángulos formados por los rádios y lados del polígono, son iguales, como lo manifiesta la igualdad respectiva de los lados de este triángulo, conocerémos que todos los ángulos del centro son iguales entre sí. Luego para determinar el ángulo del centro, dividirémos por el número de lados del polígono los 4 rectos ó 360.°, valor de todos los angulos que al rededor de un punto se pueden formar.

Si queremos p. ej. hallar el ángulo del centro en el pentágono regular procederémos del modo siguiente: ángulo del centro$=\dfrac{360.^\circ}{5}=72.^\circ$: este ángulo pues, tendrá por medida el arco **AGB**, que será la quinta parte de la circunferencia.

5. *Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.*

1.º Porque en el polígono regular son iguales los rádios; luego si con el radio del polígono trazamos una circunferencia, esta circunferencia pasará por todos los vértices del polígono.

2.º Los apotemas son iguales; luego si con el apotema describimos una circunferencia, esta será tangente á todos los lados del polígono regular.

6. *Inscribir un polígono regular de cualquier número de lados.*

Fórmese el ángulo del centro; descríbase la cuerda de su arco; esta cuerda será el lado del polígono que nos proponemos inscribir.

7. *Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados* (fig. 88).

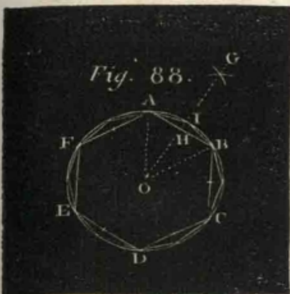


Fig. 88.

Divídase el arco correspondiente tal como el AIB, en dos arcos iguales AI, IB; desde el punto I tírense las cuerdas IA, IB; cada una de estas cuerdas será el lado del polígono pedido.

8. *Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro de igual número de lados.*

Por todos los vértices del polígono inscrito tirarémos tangentes á la circunferencia; estas tangentes determinarán el polígono que queremos circunscribir.

9. *El lado del hexágono regular es igual á su rádio* (fig. 88).

Formarémos el triángulo AOB, el cual no puede menos de ser equiangular, como resulta de las consideraciones siguientes. El ángulo del centro $AOB=\frac{4}{6}$ de recto$=\frac{2}{3}=60.^{\circ}$; luego la suma de los otros dos ángulos A y B valdrá 120.º; pero estos dos ángulos son iguales, por ser iguales los lados AO, BO; luego cada uno de estos ángulos valdrá la mitad de 120.º, ó sea 60.º Asi pues, este triángulo es equiangular y por consiguiente equilátero. Luego AB=AO=BO.

10. *Inscribir el hexágono regular* (fig. 88).

Tómese el rádio OA, y desde el punto A lo colocarémos seis veces sobre la circunferencia; uniendo los seis puntos asi determinados, obtendrémos el hexágono regular ABCDEF, cuyo perimetro, por consiguiente, sera igual á seis rádios ó tres diámetros del círculo circunscrito.

1.º **Corolario.** De donde se infiere que, siendo la circunferencia mayor que el polígono inscrito *toda circunferencia será mayor que tres diámetros.*

2.º Para inscribir un triángulo equilateral podemos hacer la construccion siguiente.

Trácese el diámetro AB (fig. 85), y desde el punto B, con una abertura de compas igual al rádio, describase un arco que corte la circunferencia en los puntos C, D; la línea DC será el lado del triángulo equilátero que nos proponemos inscribir.

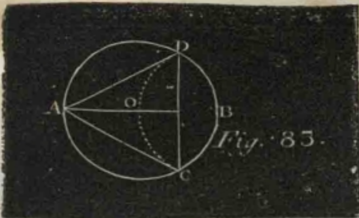


Fig. 85.

11. *Inscribir un cuadrado.*

Tirénse los diámetros AB, CD perpendiculares entre sí; despues, por medio de las rectas DB, DA, CB, CA, unanse los cuatro puntos A, C, B, D; quedará de este modo inscrito el cuadrado pedido.

12. *Dado un cuadrado inscrito circunscribir otro cuadrado.*

Sea el cuadrado ACBD (fi. 86): desde los puntos B y D, con un rádio cualquiera, mayor que la mitad de BD, trazarémos dos arcos que se corten en F; uniendo este punto con el centro O, la línea FO determinará el punto G; hágase lo mismo con los demas puntos tomados dos á dos; tirando ahora cuatro tangentes á la circunfencia por los puntos determinados de este modo, tendrémos el cuadrado circunscrito PERS.

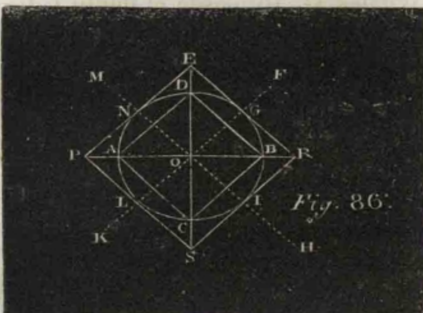


Fig. 86.

A primera vísta se percibe que el perímetro de este cuadrado es igual á cuatro diámetros.

De aqui resulta que, siendo el polígono circunscrito mayor que la circunferencia inscrita, *el valor de esta no llegará á cuatro diámetros.*

13. *La determinacion del perimetro del circulo consiste en hallar una línea recta, igual en longitud á la circunferencia, para compararla con el rádio ó con el diámetro.*

Para resolver este problema no tenemos otros medios que los de aproximacion; aproximacion que podemos llevar hasta tal punto que equivalga á la exactitud.

Supongamos, inscrito uno, y circunscrito otro, dos polígonos regulares de un número indefinido de lados, p. ej. de 32768 lados, no cometerémos un error muy grande, si tomamos uno de estos polígonos por el círculo. En este caso el perímetro se habrá convertido en la circunferencia, y el apotegma en el rádio.

El polígono de 32768 lados inscrito á un circulo cuyo rádio es un pié, tiene un perímetro representado por 6,2831852. La relacion de este número con el diámetro que vale dos rádios, será 3,1415926. Asi pues, la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro está expresada por el número

3,1415926, número que no difiere del verdadero en una diezmillonésima; es decir que la circunferencia contiene la diezmillonésima parte del diámetro, mas de 31415926, veces y menos de 31415927 veces.

Esta relacion se designa generalmente en los tratados de Geometría con la letra π del alfabeto griego.

Como la relacion de la circunferencia con el diámetro es de un uso tan frecuente, en lugar del número 3,1415926, poco accesible á la memoria, se suele tomar la razon menos exacta, pero mas sencilla, 22: 7. Este número, convertido en decimales, produce la fraccion 3,142 etc. y conviene con el anterior 3,1415 etc. hasta centésimas inclusive. Bastarà, pues, en los casos ordinarios tomar para circunferencia de una figura circular 3 veces el diámetro mas un $\frac{1}{7}$. El descubrimiento de esta relacion se debe á Arquímedes.

La relacion encontrada por Mecio es mas aproximada que la de Arquímedes, y al mismo tiempo muy facil de conservar en la memoria. Esta razon está expresada por el número $\frac{355}{113}$ que muy pronto reproduciremos, si retenemos en la memoria el número 113355, que resulta del conjunto de las cifras del denominador y del numerador.

§. VI. *De las líneas proporcionales y de los polígonos semejantes.*

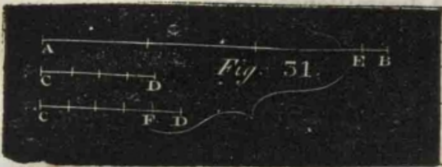
1. Razon de dos lineas.—2. Medida comun de dos lineas, y como se determina su relacion.—3. Qué son lineas comensurables é incomensurables.—4. Cuándo se dicen proporcionales cuatro lineas?—5. Qué son triángulos semejantes? Qué son polígonos semejantes?—Qué son lineas homólogas?—6. Si dos rectas son cortadas por paralelas, y los segmentos de la una son iguales entre si, tambien lo son los de la otra.—7. Si dos rectas concurrentes en un punto son cortadas por dos paralelas, los segmentos de la una so proporcionales á los de la otra.—8. Si en un triángulo tiramos una recta paralela á uno de sus lados, resulta un otro triángulo semejante al primero.—9. Dos triángulos semejantes son equiangulares, y recíprocamente.—10. Dos triángulos que tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, son semejantes.—11. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos, son semejantes.—12. Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales: dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.—13. Propiedades del triángulo rectángulo.—14. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.—15. Dividir una recta en partes iguales.—16. Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas—17. Construir un triángulo semejante á otro dado, y por consecuencia un polígono semejante á otro.

1. Cuando comparamos entre si dos líneas ó dos números el resultado de esta comparacion se llama *razon.*

2. Entendemos por *medida comun* de dos líneas, una tercera línea contenida exactamente en las dos primeras.

:

Para hallar la razon de dos lineas **AB**, **CD** (fig. 51) se coloca la mas



pequeña **CD** sobre la mayor **AB**, tantas veces como puede ser contenida; si cabe un número exacto de veces, la razon entre las dos líneas tendrá por expresion un número entero, y la operacion quedará terminada.

Pero supongamos que la línea **AB** contiene tres veces á la **CD**, quedando el residuo **EB**; sobrepondrémos este resíduo **EB** à la **CD**, y si cabe p. ej. exactamente 4 veces, la línea **AB** igual á tres veces la línea **CD**, mas el resíduo **EB**, contendrá 13 veces la **EB**; de donde resulta que la razon de **CD** á **AB** será $\frac{4}{13}$, pudiendo formar la siguiente proporcion: **AB**:**CD** :: 13 : 4.

La línea **EB**, que cabe 4 veces en la **CD**, y 13 en la **AB**, es la *comun medida* de estas dos líneas.

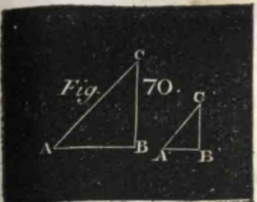
3. Llámanse *líneas comensurables entre si* aquellas cuya razon se puede expresar numéricamente, como las líneas **AB**, **CD** del ejemplo precedente.

Por el contrario, se llaman *incomensurables* aquellas cuya razon no se puede expresar numéricamente, ó en otros términos, aquellas que no tienen una medida comun. Sin embargo, podemos valuar la relacion de estas lineas hasta tal grado de aproximacion, que equivalga á la exactitud.

En efecto, supongamos la línea AB (fig. 51) dividida en un número cualquiera de partes iguales, y que una de estas partes se coloca sobre la CD tantas veces como sea susceptible: en esta division claro es que nos quedará un resíduo, por ser las líneas incomensurables; pero este resíduo, menor que una de las divisiones de AB, será tanto mas pequeño é inapreciable, cuanto mayor sea el número de partes en que la línea AB haya sido dividida. Si se divide la línea AB en un millon de partes iguales p. ej. y si CD contiene 456546 de estas divisiones, la razon de CD á AB será 0,456546, aproximada hasta menos de una millonésima, es decir que CD contendrá la millonésima parte de AB mas de 456546 veces, y menos de 456547 veces.

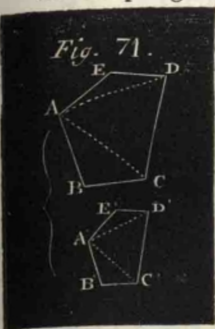
4. Cuando la razon de dos líneas **A** y **B** es igual á la razon de otras dos líneas **C** y **D**, de modo que podamos formar la proporcion **A**:**B**::**C**:**D**, se dice que las cuatro líneas **A**,**B**,**C**,**D**, son *proporcionales*.

5. Entendemos por triángulos *semejantes*, aquellos que tienen sus lados proporcionales, de modo que podamos decir (fig. 70) AB : A′B′::BC:B′C′::CA:C′A′.

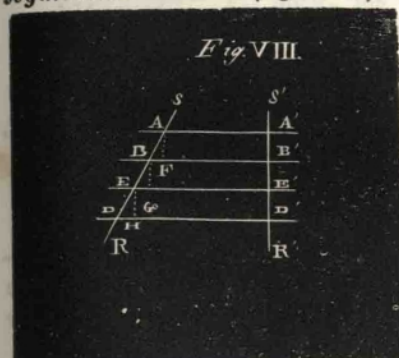


Dos polígonos se dicen *semejantes* siempre que se puedan descomponer en igual número de triángulos respectivamente semejantes y colocados en el mismo órden; como los de la fig. 71.

En los polígonos semejantes se llaman *líneas homólogas* las líneas que unen los *puntos correspondientes* de estos polígonos. Para conocer en los triángulos semejantes cuales son los lados homólogos, tomarémos en consideracion sus ángulos respectivamente iguales, y los lados opuestos á estos ángulos, serán los homólogos.

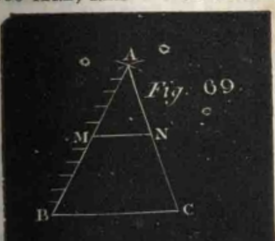


6. *Si tenemos dos rectas cualesquiera* SR, S′R′, *cortadas por un número cualquiera de paralelas* AA′, BB′, CC′, DD′, *siendo iguales entre sí los segmentos de la una, lo serán tambien entre sí los segmentos de la otra* (fig. VIII).



Para manifestar esta verdad, tirarémos las rectas AF, BG. EH... paralelas á la S′R′. Los triángulos ABF. BEG... serán iguales, porque tienen un lado igual, AB=BE..., adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, BAF=EBG..., y ABF=BEG...: de donde AF=BG..., por consiguiente A′B′=B′E′.

7. *Si se nos dan dos rectas* AB,AC, *concurrentes en un punto* A, *cortadas por dos paralelas* MN, BC *los segmentos* AM, MB *de la una son proporcionales á los segmentos* AN, NC *de la otra* (fig. 69.)



Supongamos para esto que la razon entre AM y MB sea $\frac{5}{6}$, es decir que MB se haya dividido en 6 partes iguales, y que AM contenga 5 de estas partes: si por los puntos de division de la AB dirigimos paralelas á la BC, dividirán la AC en partes iguales, segun acabamos de demostrar. AN contendrá 5 de estas partes y NC 6; la razon pues entre estas dos rectas, será tambien $\frac{5}{6}$, resultando por consiguiente la proporcion:

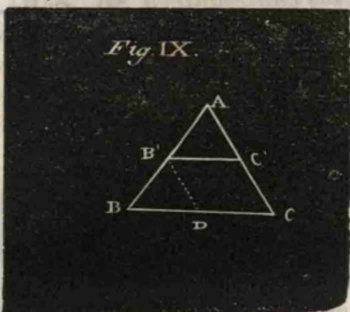
AM:MB:.AN:NC. L. Q. Q. D.

Asi mismo, conteniendo la AM 5 de las 11 partes iguales en que AB está dividida, y AN otras 5 de las 11 partes iguales de AC, podemos formar la proporcion:

AM:AB::AN:AC, y por la misma razon
MB:AB::NC:AC, y dividiendo la primera por la segunda.
AM:MB::AN:NC.

Cualquiera puede conocer que tambien es verdadera la recíproca, es decir *que si la linea* MN *divide á las rectas* AB, AC *en partes proporcionales*, la MN *será paralela á la* BC.

8, *Toda recta* B′C′ *tirada en el plano de un triángulo* ABC *paralelamente à uno de los lados* BC, *forma un segundo triángulo* AB′C′ *semejante al primero*, de suerte que resultará (fig. IX.)



AB:AB′::AC:AC′::BC:B′C′.

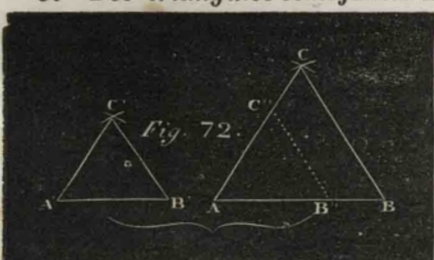
En efecto resulta de lo dicho

AB:AB′::AC:AC′.

Si ahora dirigimos la B′D paralela á la AC, tendrémos.

AB:AB′::BC:CD, pero CD=B′C′;
asi AB:AB′::BC:B′C′; luego etc.

9. *Dos triángulos semejantes* ABC, A′B′C′ (fig. 72) *son equiangulares entre sí, y recíprocamente dos triángulos equiangulares entre sí, son semejantes.*



1.º Supongámos AB>A′B′. Tómese sobre AB una longitud AB″,=A′B′, y por el punto B″, diríjase la B″C″ paralela á BC; habrémos formado de este modo un triángulo AB″C″ semejante al ABC; pero segun nuestra suposicion el ABC es semejante al A′B′C′: luego los dos triángulos AB″C″ y A′B′C′ son semejantes entre sí, é iguales al mismo tiempo, porque teniendo el lado AB″=A′B′, los otros lados tendrán entre sí la misma relacion de igualdad; asi pues, los triángulos AB″C″ y A′B′C′, ademas de ser semejantes, son tambien iguales. Los triángulos ABC, AB″C″ son equiangulares entre sí; tambien lo serán pues ABC y A′B′C′, y por consiguiente A=A′, B=B′, C=C′.

2.° Siendo ABC y A′B′C′ equiangulares entre sí, AB″C″ y A′B′C′ lo serán tambien. Pero AB′′=A′B′; luego AB′′C′′ y A′B′C′ que tienen gual un lado y todos sus ángulos, serán iguales; asi pues, ABC y A′B′C′ son semejantes.

Corolario 1.° *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.*

2.° *Dos triángulos isósceles son semejantes, cuando tienen iguales los ángulos de la base ó los del vertice.*

3.° *Dos triángulos rectángulos que tienen igual un ángulo agudo, son semejantes.*

10. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo igual, A=A′, comprendido entre lados proporcionales, AB: A′B′ :: AC: A′C′ (fig, 72.)*

Para demostrar este teorema, harémos la misma construccion que en el caso anterior. Los triángulos semejantes ABC, AB″C″ nos dan la siguiente proporcion AB: AB″: AC: AC″. Combinando esta proporcion con la supuesta en el teorema, resulta A′B′: AB″ :: A′C′: AC″, y como A′B′=AB″, tambien A′C′=AC′′. Asi pues, los triángulos A′B′C′, AB′′C′′ son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido: luego ABC y A′B′C′ serán semejantes.

11. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos son semejantes.*

Los triángulos que se hallan en este caso, no pueden menos de tener sus ángulos respectivamente iguales, como vamos á manifestar.

Los ángulos de estos triángulos ó son iguales ó suplementarios, segun demostramos en otra parte; veamos si los 6 ángulos de los dos triángulos, tomados dos á dos, pueden ser suplementarios. Si asi fuese, los ángulos de estos triángulos valdrian 6 rectos; lo cual es imposible. Tampoco pueden ser suplementarios 4 de estos ángulos tomados dos á dos, porque la suma de los 6 pasaria de 4 rectos.

Asi pues, dos ángulos por lo menos de un triángulo son respectivamente iguales á dos del otro. Luego etc.

12. *Dos poligonos son semejantes, cuando tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales*, de suerte que A=A′, B=B′, etc.; y al mismo tiempo A′B: AB′ :: BC: B′C... (fig. 71).

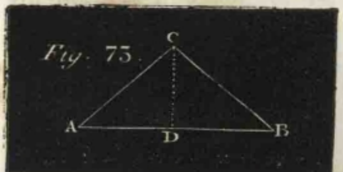
La demostracion de este teorema se reduce á descomponer de un modo cualquiera los dos polígonos en igual número de triángulos, manifestando al mismo tiempo la semejanza de estos triángulos, tomados dos á dos, del modo siguiente.

Los dos triángulos ABC, A'B'C' p. ej. que tienen un ángulo B=B', y proporcionales los lados que lo forman, serán semejantes. De donde resulta que las diagonales AC, A'C, tienen entre sí la misma relacion que los lados homólogos de los polígonos; y que los ángulos ACD, A'C'D son iguales, como diferencias de los ángulos iguales ACB, A'C'B. Luego los triángulos ACD, A'C'D' son tambien semejantes, por tener el ángulo C=C', formado por lados proporcionales.

Lo mismo podemos decir de todos los triángulos formados al rededor del punto A. Luego etc.

Corolario. *Dos polígo os regulares del mismo número de lados son semejantes*; y considerando el círculo como un polígono regular de infinitos lados, estamos autorizados para decir que *todos los círculos son semejantes entre sí.*

13. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC (figura 73), *bajamos una perpendicular CD sobre la hipotenusa AB:* 1.° *los dos triángulos ADC, CDB son semejantes al triángulo* ABC; 2.° *los otros triángulos* ADC, CDB *son semejantes entre sí;* 3.° *la perpendicular CD es media proporcional entre los dos segmentos AD, BD de la hipotenusa.*



4.° *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.*

1.° El ángulo A es comun á los dos triángulos ADC, ABC; ademas, cada uno de ellos tienen un ángulo recto; luego son semejantes: luego el ángulo ACD=CBD.

Lo mismo sucede con los triángulos CDB, y ACB.

2.° Los dos triángulos ADC, CBD tienen cada uno un ángulo recto, y ademas, el ACD del uno igual al CBD del otro; luego son semejantes.

3.° Si comparamos los lados homólogos de los triángulos semejantes ACD, CDB, nos resultará la proporcion AD: CD:: CD: DB; á la línea CD que está contenida en la AD, tantas veces como ella contiene á la DB, la llamamos medio proporcional entre AD y DB; luego etc.

4.° La comparacion de los triángulos semejantes ACB, ADC, nos da la proporcion AD: CA:: CA:: AB.—Del mismo modo la comparacion de los triángulos semejantes CDB y ACB nos darán la proporcion DB: CB:: CB: AB; luego cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.

Llámanse *cuestiones numéricas* todas las cuestiones de geometría que se pueden resolver por medio de las reglas de aritmética.

14. *En un triángulo rectángulo* ABC (73), *el cuadrado del valor numérico de la hipotenusa* AB *es igual á la suma de los cuadrados de los valores numéricos de los catetos.*

En efecto, si con las dos últimas proporciones:

AD: CA:: CA: AB, y DB: CB:: CB: AB, formamos el producto de medios igual al de los extremos, resultará:

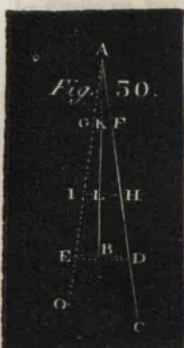
$CA \times CA$ ó $CA^2 = AD \times AB$, y $CB \times CB$ ó $CB^2 = DB \times AB$.

Sumando estas dos igualdades, tendrémos:

$CA^2 + CB^2 = (AD + DB) \times AB$; pero $AD + DB = AB$; luego $CA^2 + CB^2 = AB \times AB = AB^2$ L. Q. Q. D.

Sea la hipotenusa AB=10 pies, AC=6 pies, y CB=8 pies, resultará 10×10 ó $10^2 = 6^2 + 8^2$, es decir, $100 = 36 + 64$.

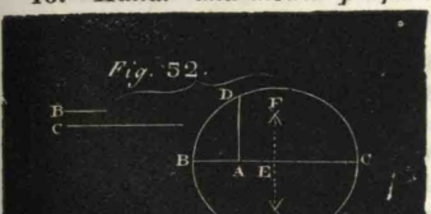
15. *Dividir una recta A B en un número cualquiera de partes iguales. (fig. 50).*



Supongamos que se quiere dividir en tres partes.

Tirarémos por una de sus extremidades una recta cualquiera AC, tomando en ella una longitud, tal que la suma AD de tres partes iguales á esta longitud, sea sensiblemente mayor que AB; unirémos el punto D al B; desde el punto A, con un radio AD, trazarémos un arco que corte á la prolongacion de DB en el punto E, y uniendo el punto A con el punto E, tendríamos A E=A D; por consiguiente podrémos colocar exáctamente sobre AC las tres partes de AD. Uniendo ahora los puntos de division F y G, H é I por medio de rectas, estas rectas, que dividen las líneas AD, AE en partes iguales serán paralelas entre sí, y las divisiones AK, KL, LB, formadas por las paralelas, serán iguales.

16. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas b, c.* (fig. 52).



Sobre una recta BC colocarémos las dos dadas, b, c, la primera desde B hasta A, y la segunda desde A hasta C; sobre la recta BC, como diámetro, describirémos una semi-circunferencia; levantando sobre el punto A una perperdicular que corte en D á la semi-circunferencia, esta perpendicular será medio proporcional entre las rectas b y c.

17. *Construir un triángulo semejante á otro triángulo dado ABC, sobre una recta A' B', dada como homóloga al lado AB.*

Podemos resolver este problema de muchos modos, haciendo aplicacion de los casos de semejanza entre los triángulos. Una de las construcciones podrá ser la siguiente. Trácense sobre los estremos de la recta A'B' dos ángulos A' y B', respectivamente iguales á los ángulos A y B del triángulo dado; la interseccion de las nuevas rectas que forman los ángulos, determinará un triángulo semejante al dado.

Corolario. Para construir un polígono semejante á otro dado, bastará descomponerlo en triángulos, y trazar sucesivamente un número igual de triángulos semejantes y colocados en el mismo órden.

§. 7. *De las superficies de las figuras planas.*

1. Qué se entiende por área? 2. Qué es medir una superficie, y qué unidad se elije generalmente?—3. Un rectángulo se mide por el producto de su base por su altura.—4. Todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura.— 5 Todo triángulo es igual á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura: de donde el área del triángulo tiene por espresion la mitad del producto de su base por su altura.— 6. El área del trapecio es igual á la semi-suma de sus bases, multiplicada por su altura.—7. Un polígono cualquiera se puede medir descomponiéndolo en triángulos.— 8. El área del polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad del apotema.— 9. La superficie del círculo es igual al cuadrado del radio multiplicado por 3,14159.— 10. Problema de la cuadratura del círculo.

1. Llámase *área* la superficie de una figura.

2. Medir una superficie es indagar cuantas veces cabe en ella otra que se toma por unidad.

Generalmente se elige por unidad el cuadrado construido sobre la unidad lineal que podrá ser la pulgada, el pie, la vara, etc.

3. Cualquiera que sea la unidad de superficie que elijamos, un rectángulo la contendrá tantas veces como nos indica el producto de su base por su altura, midiendo esta base y altura con la base y altura de la unidad elegida.

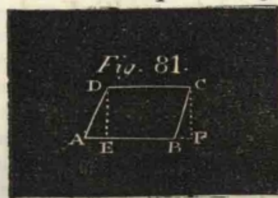
En efecto, supongamos que la unidad sea un pie cuadrado, y que con ella queremos medir el rectángulo A B C D (fig. 83); si el lado del cuadrado cabe 6 veces en la base C D, obtendrémos 6 fajas rectangulares, tirando las paralelas á CD por los puntos de division; y si el mismo lado está contenido 8 veces en la altura AD, quedará dividida cada una de estas fajas en 8 cuadros iguales, por medio de las paralelas á AB dirigidas por las divisiones de AD. Pero es indispensable que para obtener el número total 48 de cuadrados que hay en el rectángulo, basta multiplicar 8, longitud de la altura AD, por 6, longitud de la base CD.

Si se quiere, pues, medir en pies cuadrados la superficie de un rectángulo, ABCD, bastará medir su base y su altura con el pie lineal, y formar el producto de los números que resulten de esta medicion.

Lo mismo sucederá si tomamos por unidad la pulgada, la vara, etc.; de donde podemos deducir la espresion general.

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

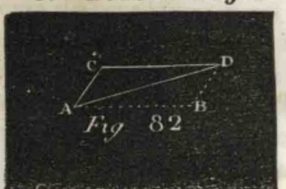
4. *Todo paralelógramo* ABCD *es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura* (fig. 81).



Esta verdad se hará muy perceptible, si bajamos sobre la base AB y sobre su prolongacion las perpendiculares DE, CF; de cuya construccion nos han resultado los dos triángulos iguales DAE, CBF, por tener sus ángulos y sus lados respectivamente iguales. Si á cada uno de los dos triángulos añadimos el trapecio DEBC, tendrémos; el triángulo DAE mas el trapecio DEBC=al triángulo CBF mas el mismo trapecio DEBC; pero el primer triángulo y el trapecio componen el paralelógramo ABCD; el segundo triángulo y el mismo trapecio forman el rectángulo DEFC de la misma base y altura que el paralelógramo; luego etc.

Como en el cuadrado la base y la altura son iguales, estamos autorizados para decir que el área del cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.

5. *Todo triángulo* ADC (fig. 82) *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura.*



Por los puntos A y D dirigirémos las líneas AB, DB respectivamente paralelas á CD, AC; habrémos formado de este modo el paralelógramo ABCD, dividido por la diagonal AD en dos triángulos iguales ADC, ADB; luego el triángulo ADC es la mitad del paralelógramo ABCD que tiene la misma base y altura.

De donde se infiere *que el área del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

6. *El área del trapecio es igual á la semi-suma de sus bases, multiplicada por su altura* (fig. 80).

Descompondrémos para esto el trapecio en dos triángulos, cada uno de los cuales tiene por base uno de los lados paralelos, y por altura, la misma del trapecio. De aqui resultará:

$$ACB = AB \times \frac{1}{2} EA, \text{ y } ACD = DC \times \frac{1}{2} EA, \text{ y sumando:}$$

$$ACB+ACD=(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA$$, ó lo que es lo mismo trapeció ABDC=

$$(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA.$$

7. Para medir un polígono cualquiera, podemos descomponerlo en triángulos y hallar la superficie de cada uno de estos triángulos; la suma total será igual á la superficie del polígono.

8. *El área del polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad del apotema.*

Para demostrar este teorema, descompondrémos el polígono regular en triángulos que tengan un vértice comun en el centro. Todos estos triángulos tienen por altura el apotema del polígono, y por base uno de los lados. El producto, pues, de la suma de los lados por la mitad del apotema, ó lo que es lo mismo, el perímetro multiplicado por la mitad del apotema, nos dará el área del polígono regular.

9. Considerado el círculo como un polígono regular de infinitos lados, cuyo apotema se ha convertido en el rádio, y el perímetro en la circunferencia, podemos decir que:

La superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio.

Luego si llamamos r al rádio, C á la circunferencia, y S á la superficie del círculo, se podrá expresar esta del modo siguiente:

$$S=C+\frac{1}{2}r.$$

Y si en lugar de C sustituimos su valor con respecto al rádio, resultará la expresion:

$$S=2r\times3,14159\times\frac{1}{2}r=\frac{2r^2\times3,14159}{2}=r^2\times3,14159.$$

Luego la superficie del círculo es igual al cuadrado del rádio multiplicado por el número 3,14159.

10. El *problema de la cuadratura del círculo* tiene por objeto hallar un cuadrado que tenga la misma superficie que el círculo. Han sido inútiles hasta el presente todos los esfuerzos que se han hecho para resolver este problema.

SEGUNDA PARTE,—DE LOS PLANOS Y DE LAS LINEAS RECTAS EN EL ESPACIO.

§ I. *De los planos en ge: eral.*

1. Por dos puntos, pueden pasar muchos planos; por tres puntos que no están en línea recta, solamente puede pasar un plano: dos líneas que se cortan, determinan la posicion de un plano: dos paralelas están siempre en un mismo plano.–2. Cuándo se dice que una recta y un plano son paralelos? ¿Cuándo dos planos son paralelos entre sí?–3. Cuándo una línea es perpendicular á un plano? ¿Y cuándo oblícua?–4. Qué entendemos por ángulo diedro? ¿Cómo se designa?–5. Qué es ángulo poliedro? ¿Qué entendemos por vértice del ángulo poliedro?–6. Qué es ángulo triedro, tetraedro, pentaedro, etc?–7. Si una recta es perpendicular en el plano á otras dos dirigidas por su pié, lo será á todas las rectas que por el mismo punto se puedan describir en el plano; de donde se infiere que si una recta es perpendicular á otras dos tiradas por su pié, en un plano, lo será tambien á este plano.–8. La perpendicular es la línea mas corta que desde un punto podemos bajar al plano.–9. Si desde un punto bajamos al plano una perpendicular y diferentes oblícuas, resultará: 1.° que las oblícuas equidistantes del pie de la perpendicular serán iguales; 2.° que de dos oblícuas que no disten igualmente del pié de la perpendicular, será mayor la que mas se aparte; de donde se infiere que, si tomamos un punto cualquiera de la perpendicular al plano, puede servir este punto para trazar en el plano una circunferencia cuyo centro será el pié de la perpendicular.

1. Asi como un punto no determina la posicion de una recta, del mismo modo dos puntos tampoco son suficientes para determinar la posicion de un plano; y asi como por un punto pueden pasar infinitas rectas, del mismo modo por una recta pueden atravesar infinitos planos. En efecto, si suponemos que un plano gira al rededor de una línea como eje, las infinitas posiciones que el plano tenga en esta vuelta, serán otros tantos planos que pasarán por aquella recta.

Pero asi como dos puntos determinan la posicion de una recta, del mismo modo tres puntos, que no esten en línea recta, determinan la posicion de un plano; de manera *que por tres puntos no situados en línea recta solamente puede pasar un plano.*

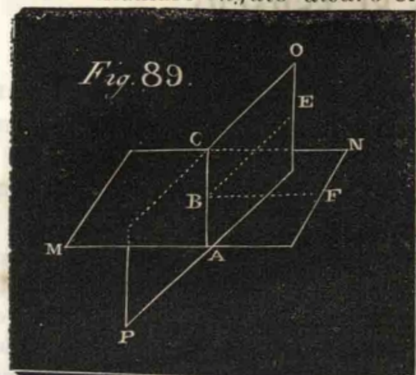
De donde se infiere: 1.° *que dos líneas, que se cortan, determinan exactamente la posicion de un plano*; 2.° *que dos paralelas estan siempre en un mismo plano*, como resulta de su misma definicion.

2. Una recta y un plano se dice que son *paralelos entre sí* cuando, prolongados indefinidamente, no se pueden encontrar; del mismo modo, dos planos son *paralelos* cuando en su prolongacion indefinida no se encuentran.

3. Llámase *perpendicular* á un plano aquella recta que lo sea á todas las que en el plano pasan por su pie; por el contrario, dícese *oblí-*

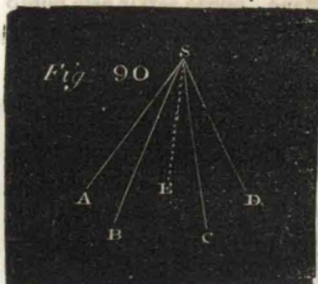
cua aquella que no sea perpendicular á todas las que situadas en el plano pasen por su pié.

4. Llámase *ángulo diedro* el espacio ilimitado, comprendido entre dos planos MNOP (fig. 89) que se cortan. La interseccion de los dos planos se llama *arista*: y los planos, *caras* del ángulo diedro.



Asi como el angulo plano lo designábamos con la letra del vértice cuando este no era comun á otros ángulos, del mismo modo anotaremos en igual caso el ángulo diedro con dos letras correspondientes á la arista; pero cuando esta arista sea comun á otros diedros, añadirémos dos letras que designarán respectivamente las dos caras del ángulo, interponiendo siempre, cuando queramos expresarlo verbalmente, las letras de la arista.

5. Entendemos por ángulo *poliedro* ó ángulo *sólido*, la porcion indefinida de espacio comprendido entre tres ó mas planos que se cortan en un mismo punto S (fig. 90).



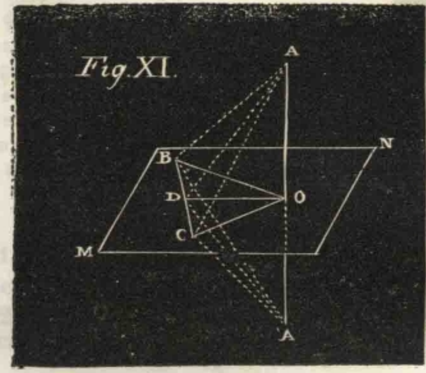
Llámase *vértice* del ángulo poliedro, el punto comun S de interseccion; *cara*, cada uno de los ángulos planos ASB, BSD, ASD, etc., que forman el ángulo poliedro.

El ángulo poliedro se designa por medio de la letra de su vértice.

6. Si querémos indicar el número de caras del ángulo poliedro, sustituirémos á esta denominacion general, la de ángulo *triedro*, *tetaedro*, *pentaedro*, etc., segun que el número de sus caras sea *tres*, *cuatro* ó *cinco* etc.

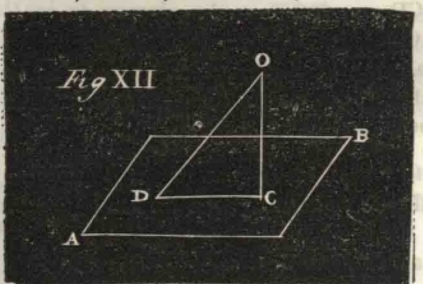
El *ángulo triedro* es el mas sencillo de los ángulos poliedros.

7. *Si una recta OA es perpendicular á otras dos OB, OC tiradas por el punto O, pie de esta perpendicular, lo será á todas las rectas que por el mismo punto se pueden trazar en el plano M N de las dos primeras.* (fig. XI).



Supongamos que OD sea una de estas rectas; el teorema quedará demostrado, si manifestamos que OA es perpendicular á OD. Para esto prolongarémos la OA por la otra parte del plano en una cantidad OA′=OA; sobre las dos rectas OB OC, tomarémos dos puntos cualesquiera, B, C; tirarémos la BC, y sea D el punto de interseccion de BC con OD; finalmente tirarémos las rectas AB, AC, AD, A′B, A′C, A′D. Esta construccion nos manifiesta la igualdad de los triángulos ABC y A′BC, segun vamos á ver. El lado BC es comun á los dos triángulos; el AB=A′B por ser oblicuas equivalentes del pie O de la perpendicular; por la misma razon AC=A′C. Luego estos dos triángulos son iguales entre sí, de manera que en la sobreposicion las rectas AD y A′D coincidirán exactamente; por consiguiente OD será perpendicular á OA y recíprocamente.

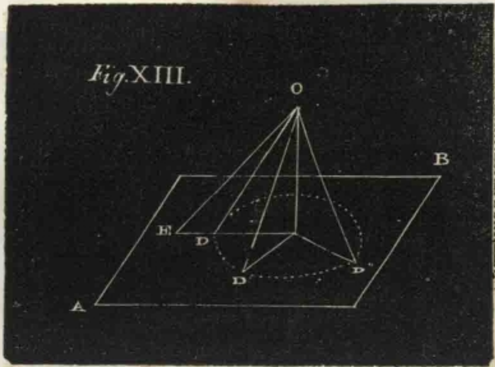
Corolario. *Si una recta es perpendicular á otras dos rectas tiradas por su pie en un plano, lo será tambien á este plano.*



8. *La perpendicular OC (figura XII) al plano AB desde un punto exterior O, es el camino mas corto de este punto al plano.*

Supongamos una oblícua cualquiera OD bajada desde el punto O al plano AB. Tirando la recta CD, formarémos un triángulo rectángulo OCD, cuya hipotenusa será la oblicua OD; de donde se infiere que OC $<$ OD.

Corolario. *La perpendicular bajada de un punto á un plano mide la verdadera distancia del punto al plano.*



9. Si desde el punto O, (figura XIII) que suponemos fuera del plano AB, bajamos la perpendicular OC, y diferentes oblícuas, OD, OD′, OD″... ..... OE.

1.° *Las oblicuas OD, OD′ equivalentes del pie de la perpendicular, son iguales.*

2.° *De dos oblicuas OD, OE que no distan igualmente del pie de la perpendicular, la que mas se apartará, á saber, la OE, es mayor que la segunda.*

1.° Resulta de la suposicion que hemos hecho, que $CD = CD' = CD''$; y de aqui la igualdad de los triángulos OCD, OCD′, OCD″; cuya igualdad nos dice que

$$OD = OD' = OD'';$$

y *generalmente*: Si desde el punto C, como centro y con un radio igual á CD, trazamos una circunferencia en el plano AB, todas las oblícuas que unen el punto O con los diferentes puntos de la circunferencia, serán iguales.

2.° Si suponemos en línea recta los tres puntos C, D, E, resultará

$$CE > CD,$$

y por consecuencia $\quad OE > OD.$

Si los tres puntos C, D, E, no se hallasen en línea recta, obtendríamos el mismo resultado, reemplazando la oblícua OD con otra OD′ que tenga la misma distancia del pie de la perpendicular.

Corolario. *Desde un mismo punto podemos tirar á un plano una infinidad de rectas iguales*, (con tal que sean mayores que la perpendicular).

Ademas, equidistando estas rectas del pie de la perpendicular, se infiere que

Un punto cualquiera O de la perpendicular OC al plano, puede servir para trazar en este plano una circunferencia, cuyo centro será el pie de la perpendicular.

§. 2.º De la interseccion de los planos, del ángulo diedro y del triedro.

1. Qué entendemos por interseccion de dos planos?—2 La interseccion de dos planos es una recta— 3 Qué entendemos por ángulo correspondiente á un ángulo diedro?— 4 El ángulo diedro se mide por su ángulo correspondiente.—5 En todo ángulo triedro una de sus caras es menor que la suma de las otras dos.—6 En todo ángulo triedro la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos: de donde se infiere: 1.º con los ángulos del triángulo equilátero solamente se pueden formar ángulos sólido de 3, 4, y 5 caras; 2.º que con los del cuadrado uno de tres caras, 3.º y con los del pentágono otro.

1. Entendemos por *interseccion de dos planos* la série de puntos que están situados á la vez sobre dos planos.

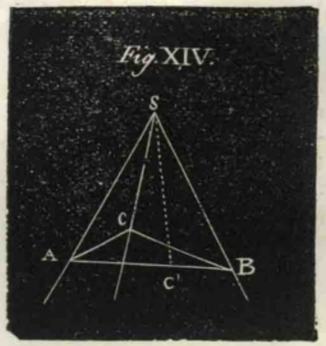
2. *La interseccion de dos planos MN, OP (fig. 89) es una linea recta.*

Los puntos A, B, C, etc. comunes á los dos planos MN, OP, pertenecen necesariamente á una misma recta; porque si el punto C no estuviese situado en la recta que une el punto A con el B, resultaria que los dos planos MN, OP, que tienen comunes tres puntos no situados en la línea recta, formarian un solo plano.

3. Si sobre la arista AC del ángulo diedro (fig. 89) tomamos un punto B, y sobre él levantamos una perpendicular en cada una de sus caras, resultará el *angulo plano* EBF: este ángulo se llama *ángulo correspondiente* al diedro PACN: así pues entendemos por *ángulo correspondiente á un ángulo diedro el formado por dos perpendiculares á la arista, levantadas respectivamente en cada una de sus caras desde uno de sus puntos.*

4. Para medir el ángulo diedro, nos valemos de su ángulo correspondiente, autorizándonos para esta sustitucion la proporcion que siempre existe entre los ángulos driedros y sus ángulos correspondientes.

5. *En todo ángulo triedro, S, una de sus caras es menor que la suma de las otras dos.* (fig. XIV).



Para manifestar la verdad de este teorema supondrémos que la cara ASB > ASC, y que la misma cara ASB > BSC; en una palabra, que ASB sea mayor que cualquiera de las otras dos, tomadas separadamente. Nos proponemos demostrar que ASB < ASC + BSC. Para esto tirarémos una recta AB desde un punto cualquiera A de la arista SA á otro punto B de la arista SB: Despues, desde el punto S, y en el plano ASB, trazarémos la recta SC′ que forme un ángulo BSC′ ± BSC, y que corte á la AB en un punto C′: sobre la arista SC tomarémos una lonjitud SC=SC′. Finalmente tirarémos las rectas AC y BC.

Segun esta construccion, los triángulos BSC y BSC′ serán iguales por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido; luego BC=BC′. Pero en el triángulo ABC tenemos que

$$AB < AC + CB, \text{ ó } AC' + C'B < AC + CB;$$

luego

$$AC' < AC;$$

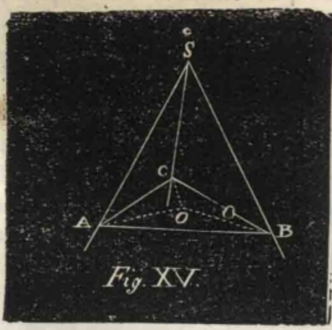
y por consiguiente

$$ASC' < ASC.$$

Añadiendo á los dos miembros de esta inecuacion, al uno la cantidad BSC, y al otro la BSC′, tendrémos:

$$ASC' + BSC' < ASC + BSC, \text{ ó } ASB < ASC + BSC. \text{ L. Q. Q. D.}$$

6. *En todo ángulo triedro, S, la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos.* (fig. XV).



Para demostrar este teorema tirarémos un plano que corte las caras segun las líneas AB, AC, BC; despues desde un punto cualquiera O, tomado en el triángulo ABC, dirijirémos las rectas OA, OB, OC. Habrémos formado tres triángulos que tendrán respectivamente por bases las rectas AB, AC, BC, y el punto S por vértice comun. Con la construccion precedente habrán resultado otros tres triángulos, que tendrán respectivamente las mismas bases, y su vértice en el punto O. El ángulo CAB, compuesto de la suma de los ángulos OAC y OAB, es menor que la suma de los ángulos SAC y SAB, segun el teorema precedente; por la misma razon ABC < SBA + SBC, y BCA < SCB + SCA: así pues, la suma de los ángulos de la base, en los triángulos que tienen su vértice en O, es menor que la suma de los ángulos de la base en los triángulos que tienen su vértice en S. Pero la suma de los ángulos de los tres triángulos es la misma en los dos casos; luego la suma de los ángulos en S es menor que la de los ángulos en O; y como esta vale cuatro rectos, se infiere que la primera es menor que cuatro ángulos rectos L. Q. Q. D.

Esta proporcion es igualmente aplicable á cualquier ángulo poliedro.

Corolario. 1.° *No se pueden formar con los ángulos de un triángulo equilátero sino ángulos sólidos de tres, cuatro y cinco caras.*

Segun el teorema precedente, si queremos formar ángulos poliedros de ángulos planos iguales, debemos atender al número de estos y al valor de cada uno de ellos. Cada ángulo del triángulo equilátero vale $^2/_3$ R; (designando con la letra R el ángulo recto); y el ángulo sólido de 3, 4, 5 caras que haya de tener cada ángulo del vértice igual al del triángulo equilátero, ha de satisfacer al principio anterior que se acaba de establecer; lo cual solamente se verifica en las tres primeras inecuaciones que siguen; $3 \times {}^2/_3 \text{ R} < 4 \text{ R}$; $4 \times {}^2/_3 \text{ R} < 4 \text{ R}$; $5 \times {}^2/_3 \text{ R} < 4 \text{ R}$; $6 \times {}^2/_3 \text{ R} = 4 \text{ R}$; $7 \times {}^2/_3 \text{ R} > 4 \text{ R}$; por consiguiente pasa de 4 R la suma de mayor número de ángulos planos, iguales al del triángulo equilátero.

2.° *Con los ángulos del cuadrado solo se puede formar el ángulo sólido de tres caras.*

Porque el valor del ángulo del cuadrado es R; y $3 \times \text{R} < 4 \text{ R}$; $4 \times \text{R} = 4 \text{ R}$; $5 \times \text{R} > 4 \text{ R}$; excediendo de 4 R las sumas de un número mayor de ángulos del cuadrado.

3.° *Con los ángulos del pentágono regular solamente se puede formar el ángulo poliedro de tres caras.*

El ángulo del pentágono regular vale $^6/_5$ R; por consiguiente $3 \times {}^6/_5 \text{ R} < 4 \text{ R}$; $4 \times {}^6/_5 \text{ R} > 4 \text{ R}$.

4.° *Con los ángulos del exágono regular no puede formarse ángulo sólido, y lo mismo sucede con los ángulos de los polígonos que tengan mas lados.*

En efecto, el ángulo del exágono es $^4/_3$ R; y resulta que $3 \times {}^4/_3 \text{ R} = 4 \text{ R}$; $4 \times {}^4/_3 \text{ R} > 4 \text{ R}$; de suerte que ni aun se puede formar el triedro, que es el ángulo sólido mas sencillo. El ángulo del heptágono es mayor; de consiguiente tampoco con él podemos formar ningun ángulo sólido: y con mas razon se puede asegurar lo mismo de los ángulos de polígonos regulares, que tengan mayor número de lados.

§. 3.° *De los poliedros en general.*

1. Qué se entiende por poliedro?– 2. Qué es prisma?– Cuándo se dice triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.? Cuándo será recto y cuando oblícuo? Que se entiende por tronco de prisma? 3. Qué se entiende por paralelepípedo? Cuándo se llama recto y cuándo rectangular? Qué es cubo ó exaedro regular?– 4. Qué es pirámide?– 5. Cuándo se dice triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.? – 6. A qué se llama tronco de la pirámide?– Qué se entiende por poliedro regular, y cuántos son? Qué entendemos por tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo, y dodecaedro?

1. Entiéndese por *poliedro* un espacio enteramente circunscrito, ó en otros términos, un sólido terminado por muchos planos que se cortan dos á dos (fig. 91).

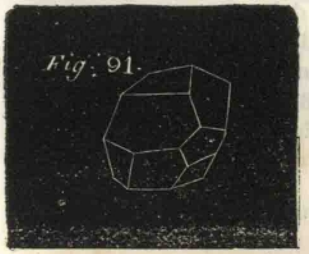


Fig. 91.

El poliedro, pues, está limitado por una serie de polígonos que reciben el nombre de *caras*, y cuyo conjunto constituye la superficie del poliedro; los lados de estas caras son las *aristas* del poliedro; y los puntos de interseccion de las aristas se llaman *vértices*.

2. Entre los poliedros merecen particular atencion el *prisma* y la *pirámide*.

Entendemos por *prisma* un poliedro que tiene por caras dos polígonos iguales y paralelos, y una serie de paralelógramos igual en número á los lados de cada polígono (fig. 92); los paralelógramos AB′, CD′, DE′, EA′, constituyen las *caras laterales* del prisma, y todas ellas la superficie lateral.

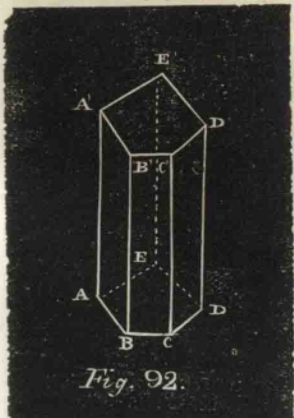


Fig. 92.

Llámanse *bases* del prisma los dos polígonos ABCDE, A′B′C′D′E′; y *altura* la distancia de las bases ó la perpendicular comun á sus planos.

Un prisma será *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base sea un triángulo, un *cuadrilátero*, un *pentágono*, etc. Si estas bases son polígonos regulares, el prisma se dice *regular*.

Un prisma se llama *recto*, cuando sus aristas laterales son perpendiculares al plano de las bases; en cuyo caso cada arista será igual á la altura del prisma, y las caras serán rectángulos: en el caso contrario el prisma se dice *oblícuo*.

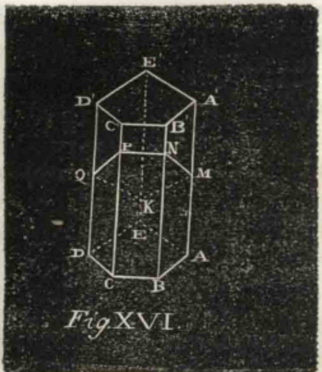


Fig. XVI.

Llámase *tronco de prisma* ó *prisma truncado* cada uno de los trozos que resultan por medio de un plano MNPQR, que no sea paralelo á las bases (fig. XVI).

3. Entendemos por *paralelepipedo* un prisma que tiene por bases dos paralelógramos.

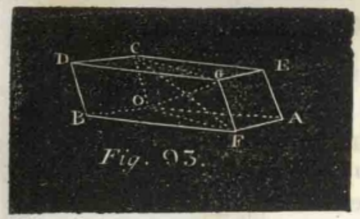


Fig. 93.

Resulta de esta definicion que el paralelepípedo tiene por caras 6 paralelógramos (fig. 93.)

Llámase *recto* el paralelepipedo cuyas caras son perpendiculares á la base, y *rectangular*, el que tiene todas sus caras rectangulares.

Entendemos por *cubo ó exaedro regular* un prisma cuyas caras todas son cuadrados; el cubo, pues, será un sólido terminado por seis cuadrados iguales; tales son los dados de jugar.

4. La *pirámide* es un poliedro que tiene por caras un polígono de cualquier número de lados, y una série de triángulos, cuyo vértice es comun á todos (fig. 95).

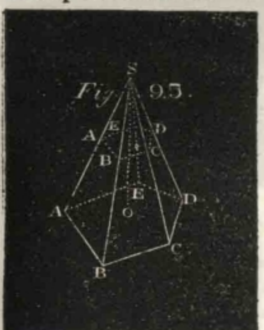


Fig. 95.

Si queremos obtener la pirámide, unirémos por medio de rectas los vértices de un polígono ABCDE á un punto cualquiera S, colocado fuera de su plano.

Los triángulos formados de este modo constituyen las *caras laterales* de la pirámide; el polígono será su *base*; el vértice comun de los triángulos se llama *cúspide* de la pirámide; y *altura*, la perpendicular SO bajada al plano de la base (figura 95).

Una pirámide se dice *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base es un *triángulo*, *cuadrilátero*, *pentágono*, etc.: se llama *regular* cuando su base es un polígono regular.

6. Si por medio de un plano entre el vértice y la base cortamos todas las aristas laterales de una pirámide SABCDE (fig. 95). la figura quedará dividida en dos trozos; uno, S'A'B'C'D'E', es una segunda pirámide, y el otro, ABCDE, A'B'C'D'E', se llama *tronco de pirámide* ó *pirámide truncada*.

7. Llámase *poliedro regular* aquel cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales entre sí.

Es muy reducido el número de poliedros regulares, porque, segun hemos visto, con el ángulo del triángulo equilátero solamente se pueden formar ángulos poliedros de tres, de cuatro, y de cinco caras; con el del cuadrado, únicamente un ángulo de tres caras; é igualmente con el ángulo del pentágono.

Por esta razon solamente se pueden concebir cinco cuerpos regulares, que son: el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*, cuyas caras en todos son triángulares; el *exaedro* ó *cubo*, limitado por seis cuadrados; y el *dodecaedro*, cuyas caras son pentagonales.

Fig. 94.

El *tetraedro regular* es un poliedro que tiene cuatro caras triangulares SAB, SAC, SBC, ABC, regulares é iguales entre sí. (fig. 94).

FigXVI.

Entiéndese por *octaedro* un sólido terminado por 8 triángulos regulares é iguales (fig. XVI).

Fig. XVII.

Llámase *icosaedro* el poliedro terminado por veinte triángulos iguales y equiláteros (fig. XVII).

Fig. XVIII.

Entendemos por *cubo ó exaedro regular* un sólido limitado por seis cuadrados iguales. (figura XVIII).

Fig. XIX.

Entiéndese por *dodecaedro* un poliedro formado por doce pentágonos regulares é iguales entre sí. (fig. XIX).

§. 4.º *De los cuerpos redondos.*

1. Qué son cuerpos redondos? Cuerpos redondos que considera la geometria elemental.— 2. Qué es cilindro?— 3. Qué es tronco de cilindro?— 4. Qué es un cono— 5. Qué se entiende por tronco de cono?— 6. Qué es la esfera?— 7. Qué son emisferios, círculos máximos y círculos menores?— 8. Aplicaciones de la esfera á las artes.

1. Llámanse generalmente *cuerpos redondos* los sólidos terminados por superficies curvas.

En la geometría elemental solo tres figuras redondas se toman en consideracion: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

2. Entendemos por *cilindro* un sólido producido por la revolucion de un rectángulo CO, CO′ (fig. 96) al rededor de uno de sus lados OO′.


Fig. 96.

Supongamos inmovil el lado OO′, y hagamos girar el lado CC′; este lado CC′ describirá en su revolucion una superficie curva que se llama cilíndrica; y el espacio cerrado por dicha superficie y los planos en que se mueven las líneas OC, O′C′, recibe el nombre de *volúmen cilindrico.*

Los planos circulares trazados por los lados CO, C′O′ se llaman *bases* del cilindro; finalmente el lado inmovil OO′ es la *altura* ó el *eje* del cilindro. Si la recta OO′ pasa por los centros de los círculos, el cilindro será *recto*; en otro caso será *oblicuo.*

3. Llámase *tronco de cilindro,* ó *cilindro truncado,* el espacio limitado por una superficie cilíndrica y por los dos planos no paralelos.

4. Entendemos por *cono*, un sólido engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo COS al rededor uno de sus catetos SO (figura 97).

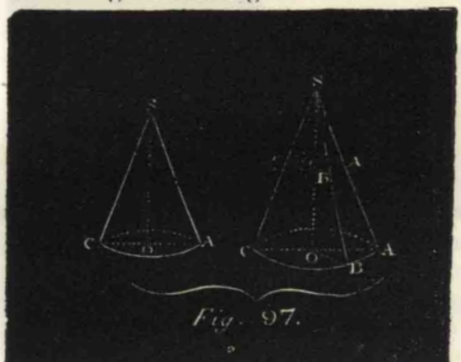


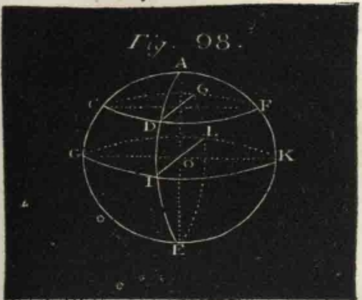
Fig. 97.

El lado inmovil SO es el *eje* ó la *altura* del cono; el plano circular, producido en la revolucion por el otro lado CO se llama *base* del cono; la superficie engendrada por la hipotenusa SC, se denomina *superficie cónica*; y el espacio cerrado por esta superficie y por la base se llama *volúmen cónico.*

5. Entiéndese por *tronco de cono,* ó *cono truncado,* el espacio comprendido entre la superficie cónica, la base y otro plano que corte á todo el cono. Llámanse *bases* del tronco los planos que lo limitan. Si estos planos son paralelos, el tronco se llama de *bases paralelas.*

Un tronco de cono de bases paralelas CA′ (fig, 97) lo podemos considerar como engendrado por la revolucion de un trapecio OA′ rectángulo en O y en O′, que gira al rededor del lado OO′, como eje.

6. La *esfera* es un sólido formado por la revolucion de una semicircunferencia GAK (fig. 98) al rededor del diámetro GK. Cada punto de la semicircunferencia describirá en esta vuelta un círculo, cuyo radio será la distancia del punto al diámetro inmovil GK. Este diámetro se llama *eje* de la esfera, y sus dos extremos G, K, reciben el nombre de *polos*.



La esfera es en el espacio, relativamente á las superficies curvas, lo que el círculo con respecto á las curvas planas.

Así, se llama *centro* el punto interior O, del cual equidistan todos los puntos de la superficie esférica; *radio*, la distancia constante del centro á la superficie; y *diámetro*, toda recta que, pasando por el centro, termina por sus extremos en la superficie. Las dos porciones en que un plano divide la superficie esférica se llaman *casquetes esféricos*: los dos tozos de la esfera, *segmentos esféricos*; y la parte de su superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos, *zona esférica*.

7. Todo plano que pasa por el centro de la esfera, la divide en dos partes iguales, que se llaman *emisferios*. Esta interseccion produce un *círculo máximo* que tendrá el mismo centro y el mismo rádio de la esfera; los círculos GIKL, AIEL, serán, segun esto, dos círculos máximos.

Si el plano no pasa por el centro, la seccion será un *círculo menor*, que tendrá un radio mas pequeño que el de la esfera: tal es el círculo CDFG (fig. 98).

8. Son muy numerosas las aplicaciones de la esfera en las artes del tornero, del ebanista, etc. Las bolas del villar son unas esferas de marfil; la luz de los quinqués se hace inofensiva á nuestra vista por medio de esferas de cristal deslustrado, etc.

§. V. *De las superficies de los poliedros.*

1. Cómo se puede determinar el área de un poliedro?–2 La superficie lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de su base por una de sus aristas: de donde se infiere: 1.° la superficie total de un prisma regular; 2.° la superficie lateral de un cilindro recto; 3.° la superficie total de un cilindro circular recto.–3. La superficie lateral de un prisma oblicuo es equivalente á la de un prisma recto que tenga por base una seccion perpendicular á las aristas del prisma oblicuo, y las aristas iguales á las del primero; de donde se deduce que el área de la superficie lateral del prisma oblicuo tiene por medida el producto del perímetro de una seccion perpendicular á las aristas multiplicado por su longitud.–4. La superficie lateral de una pirámide, cuya base sea un polígono regular, tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema de los triángulos laterales. ¿Cuál es el área total de una pirámide cuya base sea un polígono regular? ¿Cuál la del cono circular? ¿Cuál la superficie total? ¿Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide de bases paralelas? ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de cono circular de bases paralelas?–5. Cómo se determina la superficie de la esfera?

1. Siendo el *área* de un poliedro igual á la suma de las áreas de las diferentes caras que lo terminan, bastará para determinar aquella hallar sucesivamente la superficie de cada una de las caras. Por esta razon nos contentarémos con demostrar algunos teoremas necesarios para la ilustracion de esta materia.

2. *La superficie lateral de un prisma recto tiene por medida el producto del perímetro de su base por una de sus aristas.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de rectángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun una de las aristas y cuyas bases componen el perímetro de la base del prisma.

Corolarios. 1.° *La superficie total de un prisma regular tiene por medida el producto del perímetro de su base por la suma de una arista y de la apotema de esta base.*

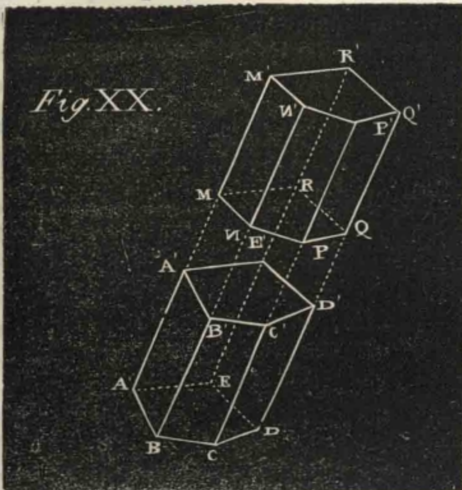
2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, estamos facultados para decir que:

La superficie lateral de un cilindro recto es equivalente á la de un rectángulo que tenga por base la circunferencia de la base del cilindro, y su arista por altura.

Por consiguiente.—*La superficie lateral del cilindro recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por una arista.*

3.° *La superficie total de un cilindro circular recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por la suma de su arista y el rádio de esta base.*

3. *La superficie lateral de un prisma oblícuo* $ABCDE\ A'B'C'D'E'$ *es equivalente á la de un prisma recto que tenga por base una seccion* **MNPQR**, *perpendicular á las aristas del prisma oblícuo, y las aristas iguales á las del perímetro* (fig. **XX**).



Para manifestar esta verdad, prolongarémos indefinidamente en un mismo sentido las aristas laterales AA', BB', CC', DD'; cortarémos estas prolongaciones con un plano perpendicular MNPQR; despues tomarémos en la misma direccion las líneas MM', NN', PP', QQ', RR' iguales entre sí y á las aristas del prisma oblícuo: la figura MNPQRM'N', P'Q'R' determinada de este modo será un prisma recto de las mismas aristas laterales que el prisma propuesto, y que tendrá por base la seccion perpendicular á las aristas.

Pero los paralelógramos AB', BC', CD'.... tienen respectívamente las mismas bases y alturas que los rectángulos MN', NP', PQ',....: luego aquellos paralelógramos, tomados uno á uno, son equivalentes á los rectángulos: *luego* etc.

Corolario. *El área de la superficie lateral del prisma oblícuo tiene por medida el producto del perímetro de una seccion perpendicular á las aristas, multiplicado por la longitud de una de estas.*

4. *La superficie lateral de una pirámide regular tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema de los triángulos laterales.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de triángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun el *apotema* de la pirámide, ó sea la distancia de la cúspide á los lados de la base, componiendo la suma de sus bases el perímetro de la base de la pirámide.

Colorarios. 1.° *El área total de una pirámide regular tiene por medida la mitad del perímetro de su base por la suma de las apotemas respectivas de la pirámide y de la base.*

2.° Considerando el cono circular como una pirámide regular de infinitas caras, podemos decir que:

La superficie lateral del cono circular tiene por medida la mitad del *producto de su arista por la circunferencia de su base; ó el producto de su arista por una seccion equidistante de la base y de la cúspide.*

3.° *La superficie total de un cono circular recto tiene por medida la mitad del producto de la circunferencia de su base por la suma de una arista y del radio de la base.*

4.° *El área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas tiene por medida el producto de la semi-suma de los perímetros de sus bases por su apotema;* ó lo que es lo mismo, *el producto del perímetro de una seccion hecha á igual distancia de las bases, multiplicado por la apotema.*

5.° *El área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto de bases paralelas tiene por medida el producto de su arista por la semi-suma de las circunferencias de las bases; ó el producto de su arista por la circunferencia dada perpendicularmente al eje á igual distancia de las bases.*

5. *La superficie de la esfera es igual al producto de la circunferencia del circulo maximo por su diámetro y cuadruple de la de su circulo máximo.* (fig. XXI).

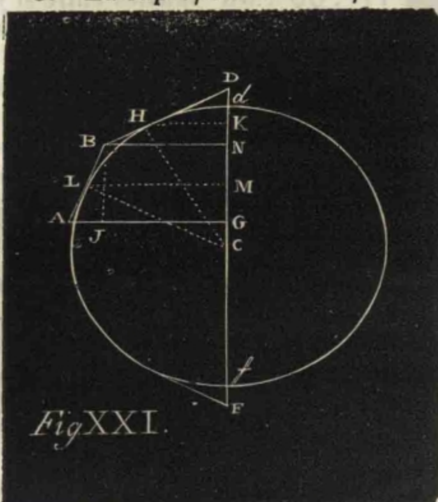


Fig XXI.

Si suponemos que el semipolígono regular DBA...F′, circunscrito al semicírculo dHL....f, gira al rededor del diámetro d f, no hay duda que en esta revolucion engendrará tantas figuras cónicas como lados tiene, y la superficie total será la suma de estas figuras. El lado BD producirá un cono cuya superficie, suponiendo HK una perpendicular bajada al diámetro desde H, punto medio de BD, será; s= BD×*circ.* HK. Dirigiendo ahora el rádio HC, perpendicular necesariamente al lado tangente BD, resultarán los triángulos HCK y BND, semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares; cuya semejanza nos dará la siguiente proporcion:

HC:HK::BD:DN.

Por otra parte, las circunferencias trazadas con los rádios HC y HK son proporcionales á estos rádios; y sustituyendo, la proporcion anterior se convertirá en la siguiente:

Circ. HC: *Circ.* HK :: BD : DN; de donde

Circ. HC$\times$DN=*Circ.* HK$\times$BD ; y colocando la primera cantidad en lugar de la segunda en la expresion de la superficie cónica engendrada por BD será s=*Circ.* HC$\times$DN.

La superficie del tronco cónico engendrado por BA será tambien s'=*circ.* LM$\times$AB, suponiendo la LM perpendicular bajada al diámetro desde L, punto medio de AB. Tirando el rádio LC, por la misma razon anterior, los triángulos semejantes LCM y ABJ dan esta proporcion :

circ. LC : *circ.* LM :: AB : BJ ; de donde

circ. LC$\times$BJ=*circ.* LM$\times$AB. Sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta la expresion de la superficie producida por AB, que será

s'=*Circ.* LC$\times$BJ ; ó lo que es lo mismo :

s'=*Circ.* LC$\times$NG.

Del mismo modo se demuestra, que cada figura redonda, engendrada por la revolucion de cada lado, tiene por medida el producto de la circunferencia trazada con el rádio de la esfera, por la parte de diámetro igual á la altura del cuerpo engendrado. La suma de todas estas superficies parciales compone la superficie total de la figura engendrada por la revolucion del semipolígono circunscrito, y como este semipolígono se puede aproximar cuanto se quiera al semicírculo, podrémos tomar el cuerpo engendrado por aquel, como si fuera producido por la revolucion de una semicircunferencia: es decir, podemos considerar como una esfera, sin peligro de grande equivocacion, el cuerpo originado por el semipolígono.

Si reunimos, pues, las superficies parciales de los diferentes conos producidos en la revolucion, la suma total representará la superficie de la esfera: y asi, sumando ordenadamente las ecuaciones anteriores

s=*Circ.* HC$\times$DN
s'=*Circ.* LC$\times$NG
. . . .

tendrémos s+s'=*Circ.* HC$\times$DN+*Circ.* LC$\times$NG

ó lo que es lo mismo s+s'=*Circ.* HC (DN+NG).

Y llamando S á la suma de las superficies parciales s+s'...., C á la circunferencia del círculo máximo, 2r al diámetro de la esfera, ó á la suma DN+NG...., nos resultará :

$$S=C\times 2r$$

y sustituyendo en esta ecuacion el valor de $C=2r\pi$, se habrá convertido en esta expresion

$$S=4r^2\pi$$

Esta fórmula nos dice que, para determinar la superficie de la esfera, debemos cuadruplicar el producto del cuadro de su rádio por π y al mismo tiempo nos manifiesta, que el área de la esfera es cuadrupla de la del círculo máximo, supuesto que esta es igual á $r^2\pi$.

§. VI. *De los volúmenes.*

1. ¿Cuál es la unidad de medida para los volúmenes?—2. ¿Cómo se determina el volumen de un paralelepípedo rectangular? ¿Cuál es el volumen del cubo?—3. ¿Cuál es la expresion del volumen de cualquier paralelepípedo?—4. ¿Cuál es el volumen de un prisma cualquiera? ¿Cuál es el volumen del cilindro?—5. ¿Cómo se determina el volumen de una pirámide? ¿Cuál es el volumen del cono?—6. ¿Cuál es la expresion del volumen de la esfera?

1. Asi como para medir las superficies planas tomamos el cuadrado por unidad, del mismo modo para medir los volúmenes nos servirá de unidad el cubo construido sobre una arista, igual á la unidad lineal.

2. *El volumen de su paralelepípedo rectangular es igual al producto de la superficie de su base multiplicada por la altura* (fig. **XXII.**)

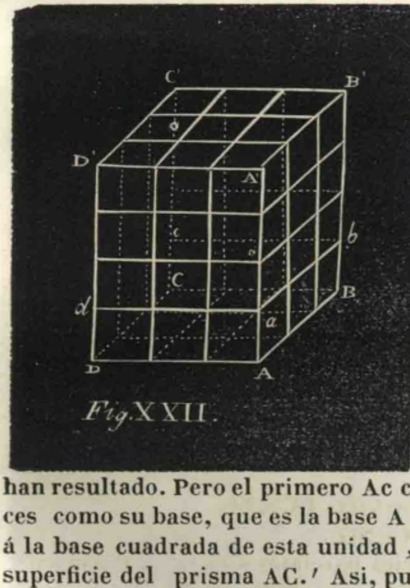


Fig. XXII.

En efecto, supongamos que la altura AA' contiene cuatro veces á la altura de la unidad de medida. Si cortamos el paralelepípedo por todos los puntos de division y paralelamente á la base, quedará dividido en cuatro primas de la misma base y altura; por consiguiente del mismo volumen. Todos estos primas, pues, contendrán la unidad de medida el mismo número de veces, y para determinar la medida del prisma total, será suficiente multiplicar este número por el número 4 de los prismas pequeños que han resultado. Pero el primero Ac contiene á la unidad de medida tantas veces como su base, que es la base A B C D del prisma grande, puede contener á la base cuadrada de esta unidad, es decir, tantas veces como designa la superficie del prisma AC.' Asi, pues, el volumen de un paralelepípedo rectangular se obtiene multiplicando la superficie de la base por la altura. En el caso presente es 9; y el volumen será por consiguiente $9 \times 4 = 36$ pies cúbicos.

Corolarios. 1.° *El volumen de un paralelepípedo rectangugular es igual al producto de tres aristas adyacentes, ó que forman un ángulo triedro.*

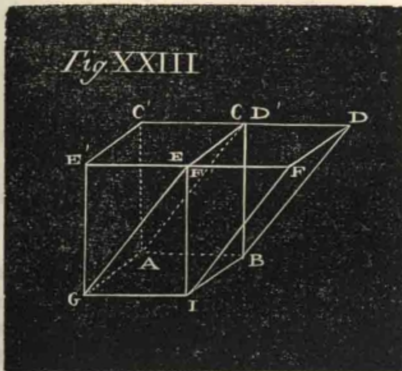
2.° Siendo iguales en el cubo todas las aristas,

El volúmen del cubo es igual á la tercera potencia de una de sus aristas.

Por esta razon se llama *cubo* la tercera potencia de cualquier cantidad.

3. *Todo paralelepípedo AF, recto ú oblicuc, tiene el mismo volúmen que un paralelepípedo rectangular de base equivalente y de la misma altura.*

Sean AD y GF las caras opuestas que tomamos por bases, y las aristas AG, BI, CE, DF, perpendiculares á las bases, en el paralelepípedo recto AF



(fig. XXIII). Tirarémos por las rectas AG, BI, dos planos perpendiculares á los planos paralelos AI, CH. Los planos tirados de este modo cortarán respectivamente las caras laterales AD, GF segun las rectas AC' y BD', GE' é IF', y suponiendo estas rectas terminadas en el plano de la cara opuesta CF, resultará un nuevo paralelepípedo AF'. Pero este paralelepípedo es rectangular, porque AC' y sus paralelas son perpendiculares á los planos AI, CF, y por consiguiente á las rectas AB, CD'; de donde resulta que las caras AD', GF', que podemos tomar por bases, serán rectángulos; y ademas las aristas laterales AG, BI,son perpendiculares á los planos de estas bases.

Ahora bien, los dos paralelepípedos AF, AF' que tienen sus bases equivalentes AD, AD' y una misma altura AG, serán iguales en volúmen.

En efecto, los dos prismas determinados, el uno por las aristas laterales AG, CE, C'E', y el otro por la BI, DF, D'F', son iguales luego, restándolos separadamente de la figura total AGBI DFC'E', obtendrémos dos diferencias iguales.

Pero una de estas rectas es el paralelepípedo AF, y la otra el paralelepípedo AF'. Luego etc.

Corolario. *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

4. *El volúmen de un prisma cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

Acabamos de demostrar este teorema general relativamente á los paralelepípedos, y las reflexiones siguientes nos harán conocer que es igualmente aplicable á todos los prismas.

En efecto, si en un paralelepípedo cualquiera tiramos un plano diagonal que pase por dos aristas laterales, nos resultarán dos prismas triángulares, que, por tener una misma base y altura, serán iguales en volúmen. Así pues, cada uno de ellos será la mitad del primitivo; pero el primitivo tiene por expresion de su volùmen el producto de su base por la altura: luego el volúmen de cada uno de ellos será igual al producto de la mitad de la base del paralelepípedo por la misma altura; pero la mitad de la base del paralelepípedo primitivo es puntualmente la base de cada uno de los dos que han resultado: luego el volúmen del prisma triangular será equivalente al producto de su base por la altura.

Como todos los prismas se pueden dividir en triangulares por medio de planos diagonales, se infiere que el volúmen total del prisma tomado en consideracion será igual á la suma de los volúmenes parciales de los prismas triangulares. Teniendo cada uno de estos por expresion de su volúmen el producto de su base por la altura comun, resulta que la suma de estas bases, ó sea la base total del prisma multiplicada por su altura, expresará su volúmen total.

Corolarios. 1°. *Dos prismas que tienen bases equivalentes y alturas iguales son equivalentes en volúmen.*

2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, podemos decir que:

El volúmen del cilindro tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.

5. *Toda pirámide es equivalente á la tercera parte de un prisma de la misma base y altura* (fig. XXIV).

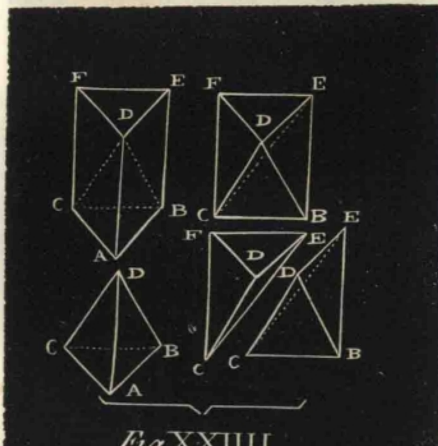


Fig XXIIII

Supongamos que la pirámide en cuestion sea un tetraedro ABCD ; y el prisma de la misma base y altura el triangular ABCDEF. Tirarémos las rectas DB, DC, y por ellas harémos pasar un plano CDEB, cuya seccion nos dará dos pirámides, una triangular ABCD, y otra cuadrangular CBEFD. En la cuadrangular CBEFD tirarémos un plano CDE, determinado por las aristas CD, DE, de cuya seccion resultarán otras dos pirámides triangulares que tendrán una altura comun y las bases iguales. Quedará, pues, descompuesto el prisma triangular en tres tretraedros equivalentes, á saber; el ABCD=DEFC, por tener iguales la base y la altura, que son puntualmente las del prisma. Si en la pirámide DEFC, consideramos como base el triángulo EFC, y como cúspide el punto D, esta pirámide será equivalente á la CBED, por tener iguales la base y altura: así, pues, la pirámide DEFC=ABCD=CBED. Luego cada una de ellas es la tercera parte del prisma primitivo.

Ademas, pudiendo dividir toda pirámide en tetraedros de la misma altura que este, y que tengan respectivamente por bases los triángulos parciales en que su base queda descompuesta, la proposicion es igualmente aplicable á cualquier pirámide.

Corolario. 1.° *La pirámide tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

2.° Si consideramos el cono como una pirámide de infinitas caras, esta consideracion nos conducirá á decir que:

El volúmen del cono se mide por la tercera parte del producto de su base por la altura.

6. *El volúmen de una esfera tiene por medida el tercio del producto de su superficie multiplicada por el radio.*

Podemos considerar la superficie esférica como compuesta de una infinidad de poliedros planos infinitamente pequeños; de donde resulta que la esfera se puede concebir como compuesta de pirámides, que tengan por bases cada uno de los planos del polígono, y por altura el radio de la esfera. Pero cada una de estas pirámides tiene por medida la tercera parte del polígono de su base por el radio de la esfera; luego el conjunto de todas ellas, ó sea la esfera, tendrá por medida el tercio del rádio por la suma de todos los polígonos que componen la superficie esférica.

Corolario. Si designamos con la letra V el volúmen de la esfera, con S la superficie, y con R el radio, resultará la expresion:

$$V = S \times \frac{r}{3};$$

pero $$S = 4\, r^2\, \pi$$

luego $$V = \frac{4}{3} \pi\, r^3$$

Además, pudiendo dividirse toda pirámide en tetraedros de la misma altura que esta, y que tengan respectivamente por bases los triángulos parciales en que su base queda descompuesta, la proposicion es igualmente aplicable á cualquier pirámide.

Corolario. 1.° *La pirámide tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

2.° Si consideramos el cono como una pirámide de infinitas caras, esta consideracion nos conduciria á inferir que:

El volúmen del cono se mide por la tercera parte del producto de su base por la altura.

6. *El volúmen de una esfera tiene por medida el tercio del producto de su superficie multiplicando por el radio.*

Podemos considerar la superficie esférica como compuesta de una infinidad de polígonos planos infinitamente pequeños; de donde resulta que la esfera se puede concebir como compuesta de pirámides, que tengan por bases cada uno de los planos del polígono, y por altura el radio de la esfera. Pero cada una de estas pirámides tiene por medida la tercera parte del polígono de su base por el radio de la esfera; luego el conjunto de todas ellas ó sea la esfera, tendrá por medida el tercio del radio por la suma de todos los polígonos que componen la superficie esférica.

Corolario. Si designamos con la letra V el volúmen de la esfera, con S la superficie, y con R el radio, resultará la espresion:

$$V=S\times\frac{1}{3}R$$

pero $S=4\pi R^2$

luego $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

CAPITULO II.

DIBUJO LINEAL.

1.ª SECCION.=DEL DIBUJO LINEAL.

§ 1.º *Definicion, utilidad y aplicaciones del dibujo lineal.*

1. Qué se entiende por dibujo lineal?– 2. Orígen del dibujo lineal.– 3. En qué se diferencia del trazado geométrico y del dibujo académico?– 4 Utilidad del dibujo para las clases industriales.– 5. Division del dibujo lineal.– 6. En qué consiste el dibujo lineal á ojo?– 7. En qué consiste el dibujo lineal gráfico?– 8. Por qué debe el principiante ejercitarse antes en el dibujo sin instrumentos?

1. *El dibujo lineal*, tomado en un sentido general, es el arte de imitar los contornos de los cuerpos y de sus diferentes partes, por medio de simples delineamientos y sin el auxilio de sombras ni de colores.

2. Si retrocedemos al orígen del dibujo lineal, le encontrarémos en el nacimiento de las artes industriales. En todos los tiempos el gefe de un taller, para hacerse entender de sus oficiales, y los oficiales igualmente para entenderse entre sí, se han valido de diseños mas ó menos exáctos, con el objeto de prepararse para el trabajo, ó de practicar lo que habian concebido.

3. No debemos confundir el dibujo lineal con el *trazado geométrico* que se ejecuta con el compas y con la regla, ni con el *dibujo académico*, que rara vez suele conciliar la exactitud con la elegancia. El dibujo lineal es la reunion del uno y del otro.

4. El dibujo lineal, útil á casi todas las profesiones, lo es principalmente para aquellas cuyos trabajos consisten en la imitacion de las figuras. Los carpinteros, los albañiles, los ebanistas, los aserradores, los torneros, los grabadores sobre metales y madera, con particularidad los

oficiales que se dedican á la construccion de máquinas é instrumentos, si no conocen á fondo este arte, con dificultad darán un paso en su profesion, porque no podrán comprender ni transmitir sus ideas á los obreros. Si cualquier hombre, en la posicion social mas elevada, tiene en muchas ocasiones necesidad de transmitir claramente su pensamiento por medio de una figura al artesano de que se sirve, el artesano á la vez debe entender el arte del dibujo para comprender los objetos que se le piden, y al mismo tiempo dibujarlos para comunicar sus ideas á los obreros subalternos. Así, el albañil, el carpintero de ribera, el de taller, el ebanista, el aserrador, etc., en una palabra, un artesano cualquiera no puede hacer con perfeccion una pieza de su arte, si antes no se ha dado cuenta por medio de un diseño de las dimensiones de todas las partes. El dibujo lineal, pues, es de primera necesidad para las clases inferiores de la sociedad.

5. Hay dos especies de dibujo lineal: *dibujo lineal á pulso ó sin instrumentos, y dibujo lineal gráfico ó con instrumentos.*

A esto podemos añadir las nociones sobre el *método general* del dibujo, sobre las *proyecciones*, sobre la *arquitectura* y sobre la *perspectiva.*

6. El *dibujo lineal* que se hace á *pulso* consiste en representar los objetos que hay á nuestra vista con una precision, no matemática, sino aproximativa, que en muchos casos es suficiente.

El dibujo á pulso, practicado por algun tiempo, dá al ojo aquel tino de que tanto necesita, soltura á los dedos y gracia á los contornos.

7. *El dibujo lineal gráfico* consiste en representar los objetos con una exactitud rigorosa, como se requiere en la aplicacion. Pero esto no se puede conseguir sin el auxilio de ciertos instrumentos geométricos, como la regla, el compas, la escuadra, el semicírculo, etc.

8. Antes de entrar en el dibujo gráfico, debe el discípulo ejercitarse en el dibujo sin instrumentos. Este dibujo parece á primera vista mas dificil que el dibujo con instrumentos; pero la experiencia no tarda mucho tiempo en manifestar lo contrario. Los discípulos se ven en los primeros dias muy embarazados en el dibujo sin instrumentos; pero muy pronto quedarán sorprendidos de la facilidad con que en breve tiempo trazan las figuras mas complicadas. Adiestrados en este dibujo, habrán conseguido aquel desembarazo en los dedos, tan necesario para hacer el uso conveniente del compas, la regla, y demas instrumentos matemáticos.

Si se quiere conciliar los dos métodos, el discípulo deberá trazar el dibujo, primero á ojo, y despues con instrumentos. De este modo podrá rectificar las inexactitudes que en el primero haya cometido.

Cualquiera que sea el dibujo de que hagamos uso, su aplicacion será siempre á las figuras que en último análisis se reducen á dos elementos, la *línea recta* y la *línea curva*, aisladas ó combinadas entre sí.

§ 2.º *Aplicaciones de la línea recta en el dibujo lineal á pulso.*

1. Qué es línea vertical y horizontal? Qué es plomada?– 2. Construccion de la línea horizontal y vertical en la pizarra. Cómo se comprueban la vertical y la horizontal?– 3. Que se entiende por escala de proporcion?– 4. Cuáles son los elementos geométricos del dibujo lineal relativos á la línea recta?– 5. Concluidos estos elementos ¿qué deben dibujar los discípulos?– 6. Dibujar una ensambladura de carpintería.– 7. Escuadras.– 8. Alineacion de un camino.– 9. Pilastra.– 10. Jamba.– 11. Persianas.– 12. Estrado.– 13. Escalera.– 14. Chimenea.– 15. Reja.– 16. Ventana de seis tableros.– 17. Puerta de dos tableros. 18. Puerta de tableros desiguales.– 19. Embaldosados.– 20. Enrejado.– 21. Tresbolillo. 22.– Pared formada de piedra de sillería.

1. Llámase *linea vertical* la recta que en su descenso describe un cuerpo, obedeciendo á la fuerza de gravedad. Esta línea está muy bien representada por el hilo de la plomada: entiéndese por *plomada* un hilo sostenido por uno de sus extremos, y que por el otro tiene un pesito ordinariamente de plomo.

Llámase *horizontal* á la recta perpendicular á la vertical.

2. La construccion de la línea horizontal no ofrece dificultad alguna: no sucede lo mismo con la vertical, á causa del hábito que tenemos de dar á la escritura alguna inclicacion de derecha á izquierda.

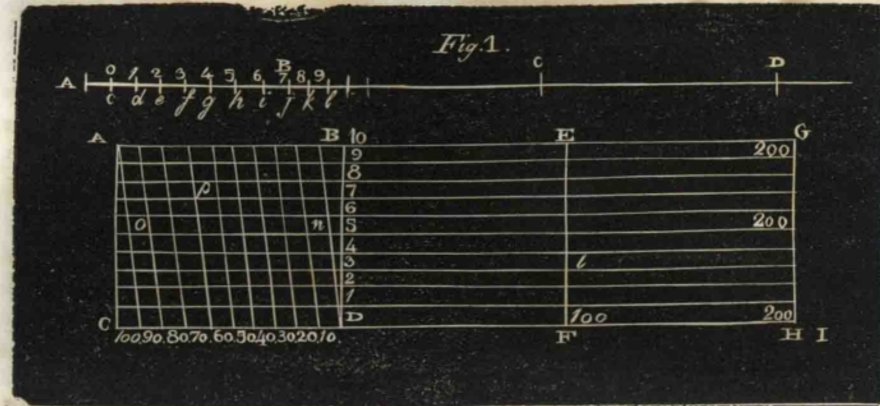
Si dibujamos sobre la pizarra ó sobre un tablero, la horizontal debe ser paralela al borde superior ó al inferior; y la vertical, á uno de los bordes laterales.

Si queremos formar estas líneas con la regla, tomarémos dos puntos equidistantes, ó del borde horizontal ó del lateral, tirando una recta por estos puntos.

Para comprobar la línea horizontal, medirémos las distancias desde sus extremos al borde superior ó inferior; si esta distancia es igual por ambos extremos, la horizontal estará bien construida.

Si queremos conseguir una verificacion mas precisa, harémos uso de la plomada, que deberá confundirse con la línea en toda su longitud, si la vertical está trazada.

3. Llámase *escala de proporcion* una línea AD (fig. 1), dividida en

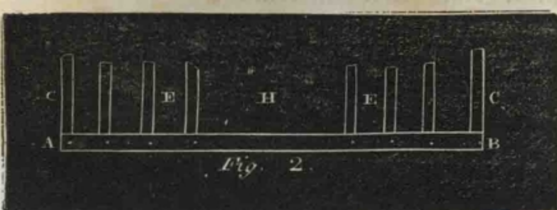


partes iguales, cada una de las cuales representa la longitud que se le quiera atribuir; de modo que la figura que representa el objeto tenga con esta escala la misma proporcion que el objeto mismo tiene con su medida real.

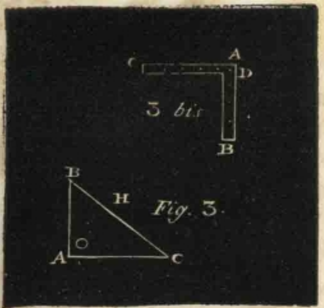
4. La construccion de la horizontal y de la vertical pertenece á los elementos geométricos del dibujo lineal, relativos á la línea recta.

Estos elementos comprenden todo lo que dice relacion con el trazado de la línea recta en sus diferentes posiciones, la division de esta línea en muchas partes, la construccion de los ángulos y su division, la formacion de los polígonos, es decir, de los triángulos, del trapecio, del rombo, del rectángulo, del cuadrado, la representacion de la pirámide, del prisma, del paralelepípedo, del cubo, etc.; construcciones que en su mayor parte se hallan ya indicadas en las nociones de geometría que preceden á este tratado.

5. Terminados los elementos geométricos, los discípulos entran á dibujar las figuras que se componen de varias rectas combinadas de diferentes modos.

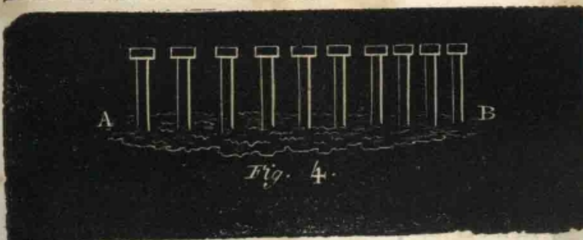


6. **Ensambladura de carpintería.** Divídese en partes iguales la solera AB (fig. 2), y levántanse perpendiculares segun el grueso y la distancia de los maderos.

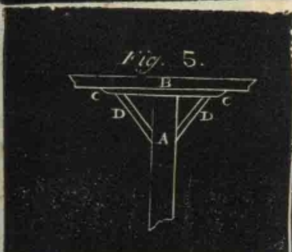


7. **Escuadras.** Para dibujar la *escuadra ordinaria*, trazarémos el lado AC, sobre este levantarémos la perpendicular AB, y finalmente tirarémos la hipotenusa BC (fig. 3).

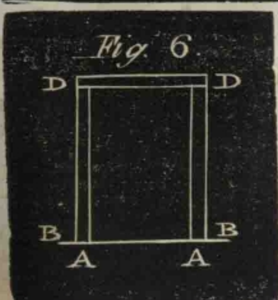
La escuadra representada en la fig. 3, se dibuja tirando paralelas á AB y AC, segun la anchura D que se quiere dar al hierro ó á la madera, de que se compone el instrumento.



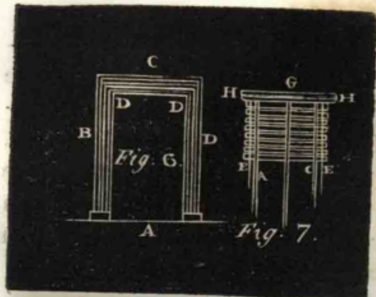
8. **Alineacion de un camino.** Levántese sobre una base AB varias verticales igualmente separadas. Estas líneas figuran unas estacas que se llaman *jalones* (fig. 4).



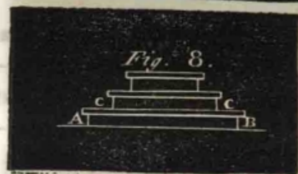
9. **Pilastra.** Se tirarán líneas verticales, horizontales y oblicuas, segun el grueso de la pilastra A, de la viga B, del capitel C, y de los puntales D. (fig. 5).



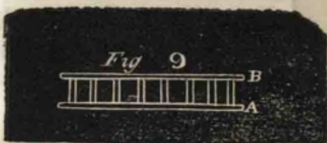
10. **Jamba.** Tómese una base A de la anchura de la puerta; levántense las perpendiculares BD, de una altura que con poca diferencia sea doble de la anchura, y únanse por medio del dintel D. (fig. 6).



11. **Persianas.** Consisten en paralelas equidistantes, dispuestas de dos en dos, para representar de este modo la anchura de las varillas. (fig. 7).



12. **Estrado.** Se tirarán paralelas á la base AB, haciéndolas sucesivamente mas cortas, segun se vayan apartando de la misma. (figura 8).



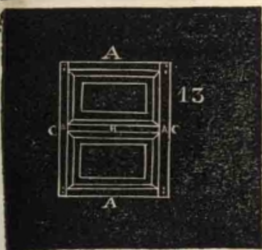
14. **Escalera.** Los largueros A, B, deben ser un poco convergentes, y los escalones equidistantes. (fig. 9).

14. **Chimenea.** Trácense verticalmente los lados ó jambas A; el travesero B, y la cornisa C que se representan con líneas horizontales: las partes D, D se llaman *zócalos*. (fig. 10).

15. **Reja.** Trácense las guarniciones A, B, C, D, y unánse por medio de rectas los ángulos opuestos de la guarnicion interior, así como tambien los puntos medios de cada travesero. En la interseccion de los barrotes se ponen unos botoncitos que podrán ser de cobre dorado. El antepecho A debe estar adornado con una pequeña moldura. (fig. 11).

Fig. 12.

16. Ventana de seis tableros, etc. Se tirará una línea, dos ó tres veces mayor que A; se levantará una perpendicular que tenga con la primera la misma relacion que D con A; fórmese el bastidor A BCD y la armazon E; finalmente, háganse las tres divisiones de la altura y las dos de la base, y quedará representado lo restante de la ventana. (fig. 12).



13

17. Puerta de dos tableros. La altura de una puerta podrá ser con poca diferencia doble de la anchura; las líneas C representan las aristas exteriores de la armazon; los tableros son iguales y ensamblados por medio de ranuras con la armazon A, así como el traverso B; y ademas están adornados con una pequeña moldura, (figu-

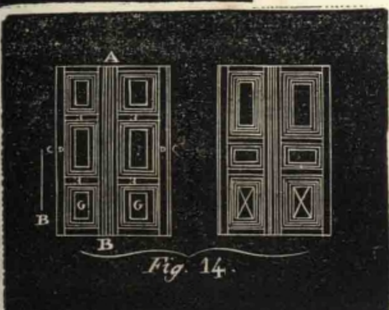


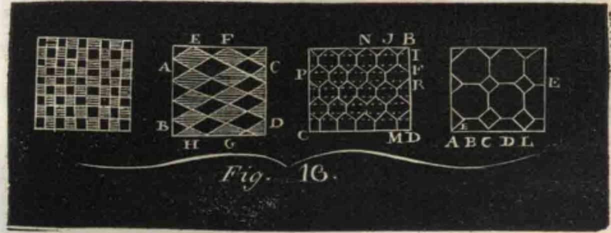
Fig. 14.

18. Puerta de tableros pequeños y grandes. Las aristas esteriores de la guarnicion están representadas por medio de las líneas C; y por AB la union de las hojas de la puerta. (fig. 14.)

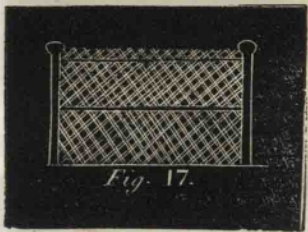
19. Embaldosados. No hay mas que tres especies de polígonos regulares que se puedan ajustar exactamente, sin dejar entre sí ningun vacío; el triángulo, el cuadrángulo y el exágono. Si queremos, pues, embaldosar una pieza con ladrillos iguales que se ajusten exactamente, emplearémos uno de los polígonos mencionados. (fig. 15).

Fig. 15

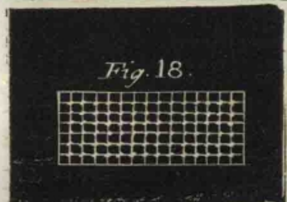
Si se hace uso del octágono, se llenan los vacíos con cuadrados, que



tengan su lado igual al del octágono. Cuando el embaldosado se hace con el cuadrado ó con el rombo, ordinaríamente se elijen de diferentes colores. (figura 16).

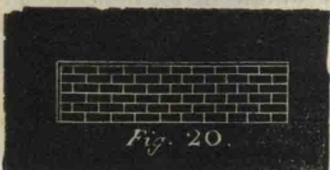


20. **Enrejados.** En los enrejados, que tienen sus agujeros cuadrados y oblícuos, todas las barras son paralelas, igualmente apartadas unas de otras, é inclinadas 45°, sobre el horizonte. (fig. 17).



21. **Resbolillo.** Esta figura, muy comun en la jardinería, consiste en disponer los árboles de tal manera que presenten calles en todas direcciones. (fig. 18).

22. **Pared formada de piedra de sillería.** Las junturas de las piedras son, unas verticales, y otras horizontales: por consiguiente, para trazar esta figura, tirarémos líneas horizontales y verticales, de modo que se encuentren alternativamente, como se ve en la figura 20.



§ 3.º *Aplicaciones de la línea curva en el dibujo lineal á pulso.*

1. Cómo se traza á ojo un círculo? Modo de comprobarlo.— 2. Cuáles son las principales figuras curvilíneas?— 3. Qué es elipse? Cómo se traza á ojo?— 4. Elipse del jardinero: asa de cesta: óvalo espiral.— 5. Objeto de los elementos geométricos del dibujo lineal.— 6. Cómo se traza una media luna?— 7. Dibujar un mapa-mundi — Construccion del trasportador.— 9. Cómo se traza una estrella de seis rayos?

1. Si se nos pide trazar á pulso un círculo sobre la pizarra ó sobre el tablero negro, podrá ser un círculo arbitrario, ó de un radio determinado, ó que tenga su centro en un punto dado.

Por medio de un ejercicio muy sostenido, consiguen los discípulos describir los círculos y marcar su centro con una exactitud que difiere muy poco de la del compás.

Si en la construccion se nos dan ciertos datos, p. ej., el centro ó el radio del círculo, será ya mas difícil que la formacion de un círculo arbitrario.

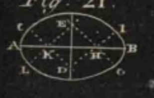
Para comprobar un círculo harémos uso del compás.

2. Las principales figuras curvilíneas son: la *elipse ordinaria*, la *elipse de jardinero, el asa de cesta, el óvalo y la espiral.*

3. Entiéndese por *elipse una curva cerrada, tal que la suma de las distancias de uno de sus puntos á otros dos que se llaman focos, es siempre igual á la línea que pasa por dichos focos y que termina por sus extremos en la curva.*

Para trazar una elipse, tirarémos dos rectas perpendiculares; se tomarán dos partes iguales por arriba y por abajo, otras dos partes iguales, diferentes de las primeras, á derecha é izquierda del punto de interseccion. Estas líneas, que en el artículo son todas iguales, no lo son en la elipse sino dos á dos; llámase la una *eje mayor*, y la otra *eje menor* de la elipse. (fig. 21). Hecha esta construccion, se traza la curva, cuidando mucho de que no resulten corcobos, ni se pierda la continuidad. Los cuatro segmentos formados por los dos ejes deben ser exactamente iguales, de modo que, si se dobla la figura por uno de los ejes, los trazos de las curvas coincidan perfectamente cayendo el uno sobre el otro.

Fig. 21.



De este modo podemos construir á pulso la elipse; bien es verdad que no será con aquella exactitud reservada al trazado geométrico, de que se hablará mas adelante; contentándonos con imitar por el primer medio el contorno gracioso de esta curva.

Cuanto mas disminuya el eje menor con relacion al mayor, la elipse será mas prolongada; y cuanto mas aumente, tanto mas se aproximará al círculo. Así pues, podemos concebir una infinidad de elipses segun la mayor ó menor desigualdad de los ejes.

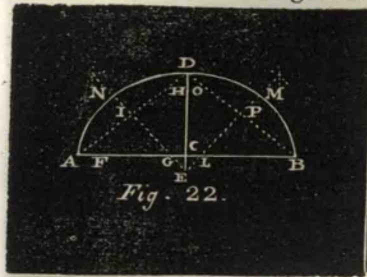


Fig. 22.

4. La *elipse del jardinero* es semejante á la elipse ordinaria; pero se construye de otra manera, como verémos mas adelante.

El *asa de cesta* es una curva formada por otras cuatro, de los cuales AN, BM son iguales. (fig. 22.)

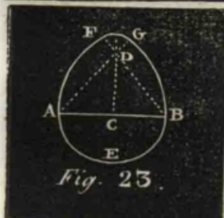


Fig. 23.

El *óvalo* es una figura circular formada por cuatro curvas, de las cuales solamente las dos, BG y AF son iguales (fig. 23).

Fig. 24.

La *espiral* es una línea, que al paso que da vueltas se aparta mas de su centro. (figura 24).

5. Los elementos geométricos del dibujo lineal relativos á la línea curva, comprenden todo lo que tiene conexion con el trazado del círculo, segun los diferentes datos que para este objeto se nos den, la construccion de los arcos, de las tangentes, de los polígonos inscritos ó circunscritos, de los cilindros rectos ú oblícuos, de los conos rectos ú oblícuos, de la esfera, etc.; construcciones que en su mayor parte se han manifestado ya en las nociones de geometría.

Fig. 25.

6. **Media-luna.** Esta figura se compone de dos arcos, que pasan por dos puntos comunes A y B, y están trazados desde dos centros tomados sobre una línea perpendicular á la recta, que une los puntos A y B (fig. 25).

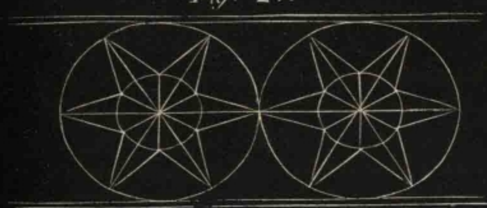
Fig. 26.

7. **Mapa-mundi.** Para hacer esta construccion trazarémos dos esferas con sus meridianos y círculos menores, que dividan la esfera en zonas. (fig. 26).

8. **Trasportador.** Consiste este instrumento, como ya en otra ocasion manifestamos, en un semicírculo, cuyo borde está dividido en 180°. Para dibujar un trasportador sobre el papel, se traza desde luego un semicírculo con su diámetro, procediendo á la division de su limbo del modo siguiente: sobre la circunferencia colocarémos tres veces su radio; y de este modo quedará dividida en tres arcos iguales, cada uno de 60°: despues dividirémos por su mitad cada uno de los anteriores, cuyo valor será de 30°; harémos con los últimos la misma operacion, de donde resultarán arcos de 15°; dividirémos cada uno de estos en tres partes iguales, y el semicírculo quedará dividido de 5 en 5 grados; finalmente cada uno de estos se dividirá en 5 partes iguales, y la operacion quedará terminada.

9. **Estrella de seis rayos.** Trácense desde luego dos círculos concéntricos, es decir, que tengan su centro comun; sus radios serán el uno la mitad del otro; tírense dos diámetros, uno vertical y el otro horizontal; colóquese seis veces desde uno á otro extremo el radio mayor sobre una circunferencia, y de este modo quedará dividida en seis arcos iguales. Hágase lo mismo con el radio menor sobre un círculo; pero teniendo cuidado de que las divisiones del uno principien desde las estremidades del diámetro vertical, y las del otro, desde el horizontal. Solo falta ya tirar los diámetros correspondientes á los puntos de division, y las oblícuas que unen alternativamente á estos puntos dos á dos. (fig. 27).

Fig. 27.



§. 4. *Aplicacion de las lineas rectas y curbas combinadas en el dibujo lineal á ojo.*

1. De qué clase de lineas se componen los dibujos usados en las artes?– 2, Qué proporciones debe guardar un dibujo?–3. Cuáles son las superficies mas agradables á la vista?– 4. Qué son molduras?– Cuántas clases hay?– 5. Cuáles son las principales molduras rectas?– 6. Cuáles son las principales molduras circulares?–7. Regla general para la ejecucion de la mayor parte de estos dibujos.–8. Dibujar un arco.–9. Construccion de las poleas y aparejos.– 10. Dibujo de rejas.— 11. Rejas de balcon; rejas de articulos tangentes, etc.— 12. Ruedas hidráulicas.– 13. Engranaje.– 14. Astrágalo.– 15. Cornisa. –16. Florero.– 17. Jarron.

1. Los dibujos usados en las artes se componen en su mayor parte de la línea recta y de la curva, combinadas entre sí.

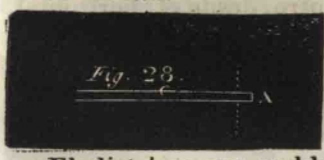
2. Para que los modelos sean graciosos y elegantes, es preciso que sus diferentes partes sean fracciones sencillas, que desde luego se puedan apreciar. La mitad, la tercera, la cuarta parte, son casi las únicas, á que nuestra vista se puede acostumbrar; saliendo de estas fracciones, entra ya la confusion, porque no podemos juzgar de las proporciones. Esta es la razon, porque el hueco de una puerta ó de una ventana debe ser con corta diferencia dos veces mas alto que ancho.

3. Las superficies llamadas de *revolucion,* como el cilindro, el cono y la esfera, son las mas agradables á la vista; cada seccion perpendicular al eje produce un círculo, curva que inmediatamente reconocerémos donde quiera que se encuentre.

4. Las molduras son las partes salientes que sirven de adorno en la arquitectura.

Hay tres clases de molduras: las rectas, las circulares y las compuestas.

5. Las principales molduras rectas son: el *filete,* el *larmica,* y la *faja de la corona.*



El *filete* es una moldura cuadrada y estrecha, tal como nos la presenta la figura 28.

El *listel* es una moldura cuadrada unida inmediatamente en una curba.

Fig. 29.

El *larmiea* es una moldura ancha y saliente ahuecada por abajo, y que se coloca en las cornisas para defender el edificio de las lluvias. (fig. 29).

Fig. 30

La *faja de la corona* es una moldura ancha y un poco saliente. (fig. 30).

6. Las principales molduras circulares son: *el cuarto-bocel, el junquillo, el toro, la gorguera, el cabeto, la escocia, el talon, y la gola.*

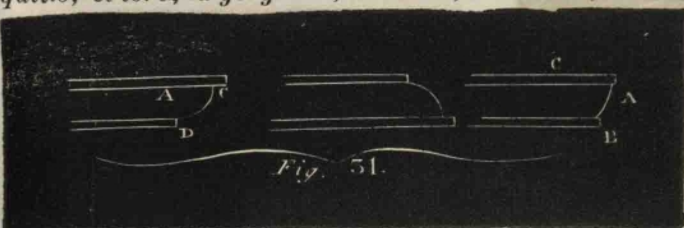


Fig. 31.

El *cuarto-bocel* es una moldura formada por un cuadrante de círculo y un filete. (fig. 31).

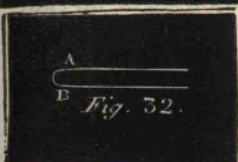


Fig. 32.

El *junquillo* es una moldura saliente semicircular, y muy estrecha. (fig. 32).

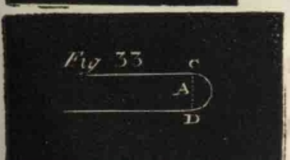


Fig 33

El *toro* es una moldura semicircular que ordinariamente se usa en las bases de las columnas. (fig. 33).

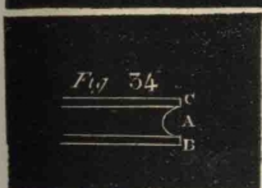
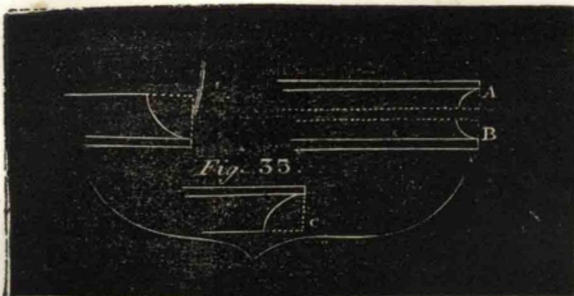
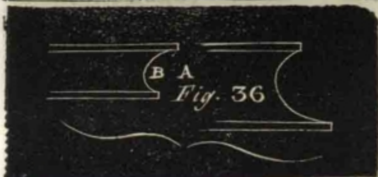


Fig 34

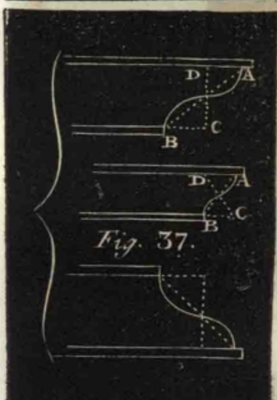
La *gorguera* es una moldura ahuecada semicircular. (fig 34).



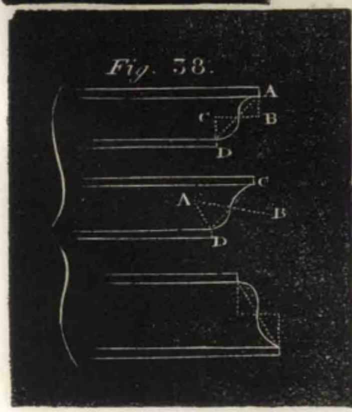
El *cabeto* es un cuarto-bocel ahuecado por debajo. (fig. 35).



La *escocia* es una moldura ahuecada compuesta de muchos cabetos, cuyos centros se toman arbitrariamente. (fig. 36).



El *talon* es una moldura compuesta de un caurto-bocel y de un cabeto. (fig. 37).



La *gola* es un talon vuelto al revés. (figura 38).

Todas estas molduras se combinan de diferentes maneras formando otras molduras compuestas.

7. En la mayor parte de estas figuras hay una vertical que divide simétricamente el dibujo. Para hacer correctamente estos dibujos, es preciso trazar desde luego este eje, y ajustar los contornos de los dos lados del eje, de modo que resulte en el dibujo una exacta simetría; podemos conseguir este objeto observando la regla siguiente: